POLYPUBLIE

Régulation dynamique hybride d'une grande population de systèmes thermostatiques au sein des micro-réseaux intelligents

Amine Berrada

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

Date	2020
Type	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis Mémoire de maîtrise/Master's thesis
URL de PolyPublie PolyPublie URL	https://publications.polymtl.ca/5350/
Conditions d'utilisation Terms of use	© Tous droits réservés / All rights reserved
Référence Citation	Berrada, A. (2020). Régulation dynamique hybride d'une grande population de systèmes thermostatiques au sein des micro-réseaux intelligents [Mémoire de maîtrise, Polytechnique Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/5350/

Détails de la thèse
Thesis details

Directeurs de recherche Advisors	Guchuan Zhu, & Houshang Karimi
Programme Program	génie électrique

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal
https://publications.polymtl.ca

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
affiliée à l'Université de Montréal

Régulation dynamique hybride d'une grande population de systèmes thermostatiques au sein des micro-réseaux intelligents

AMINE BERRADA
Département de génie électrique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
Génie électrique

Août 2020

© Amine Berrada, 2020.

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

Régulation dynamique hybride d'une grande population de systèmes thermostatiques au sein des micro-réseaux intelligents

présenté par **Amine BERRADA**
en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

Richard GOURDEAU, président
Guchuan ZHU, membre et directeur de recherche
Houshang KARIMI, membre et codirecteur de recherche
Keyhan SHESHYEKANI, membre

DÉDICACE

À toute ma famille,
pour leur soutien et leurs encouragements...

À mes amis de Montréal,
vous me manquerez...

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier M. Guchuan Zhu qui, en tant que directeur de recherche, a su me guider tout au long de mon parcours. Je le remercie également pour le temps qu'il m'a consacré, ses conseils avisés et l'aide qu'il m'a apportée pour l'avancement de mon projet.

Je voudrais aussi adresser ma gratitude à M. Houshang Karimi, co-directeur de recherche, pour sa supervision, ses conseils et les connaissances qu'il a su me transmettre.

Mes remerciements vont également aux membres du jury M. Richard Gourdeau et M. Keyhan Sheshyekani, à l'ensemble des professeurs rencontrés tout au long de mon parcours ainsi qu'à toutes les personnes ayant contribué à la réussite de mon travail.

Je souhaite remercier mes amis avec qui j'ai partagé cette expérience pour leur soutien et leur présence quotidienne.

Enfin, un grand merci à mes parents, mon frère et ma soeur pour leur aide, leur confiance et leurs encouragements, qui ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

RÉSUMÉ

Dans le contexte actuel des réseaux intelligents et des micro-réseaux, les sources d'énergie renouvelables ont un rôle grandissant dans la production d'une électricité plus respectueuse de l'environnement. Cependant, comme l'utilisation de ces sources dépend fortement des conditions climatiques, la puissance produite peut présenter des fluctuations imprévisibles et difficiles à compenser. Ceci encourage le développement et l'application de la régulation dynamique de la charge (RDC) à des systèmes consommateurs d'électricité pour réduire les écarts de puissance entre l'offre et la demande. Dans le cadre de ce projet de recherche, l'accent est mis sur le contrôle de systèmes thermostatiques (TCLs) comme les chauffages ou les climatiseurs. Ceux-ci sont largement présents dans les réseaux et représentent une part importante de la consommation électrique. Ainsi, les TCLs ont le potentiel d'apporter de la flexibilité dans le réseau et font l'objet de nombreuses recherches. Ils peuvent être utilisés par exemple comme solution pour réduire les pics de consommation, réguler la fréquence du réseau ou encore minimiser le coût de l'électricité, grâce à un contrôle de leur consommation. Pour cela, on modélise une grande population hétérogène de TCLs grâce à un couple d'équations de Fokker-Planck à laquelle on applique une stratégie de contrôle hybride et sans prévision. D'une part, le contrôle mis en place permet de modifier la consigne de température de la population en réponse aux variations globales de puissance dans le réseau et ce grâce à un modèle d'équations aux dérivées partielles (EDP). D'autre part, des changements d'état forcés basés sur un processus stochastique sont appliqués à une portion de TCLs pour compenser les variations rapides et imprévisibles liées à l'utilisation de sources d'énergie renouvelables. Le contrôle hybride développé permet ainsi une régulation à deux niveaux pour minimiser les écarts de puissance entre la production et la consommation. Ce mémoire vise également à clarifier et justifier l'utilisation d'un tel contrôle à travers la simulation de divers scénarios. Les résultats obtenus montrent que la stratégie de contrôle permet à la population de TCLs de suivre à la fois les fluctuations lentes et rapides dans le réseau et réduit ainsi les écarts de puissance. Enfin, cette approche est validée par la simulation d'un micro-réseau réaliste où la production électrique est assurée par un ensemble de systèmes photovoltaïques (PV). Le contrôle hybride développé peut donc permettre aux systèmes thermostatiques de participer à la régulation dynamique de la charge et faire partie des solutions envisageables pour une meilleure gestion de la consommation électrique dans les micro-réseaux intelligents.

ABSTRACT

In the context of today's smart grids and microgrids, renewable energy sources (RES) play an important role in producing environmentally friendly and low cost energy. However, as these sources rely significantly on weather conditions, the power produced may be subject to some unpredictable fluctuations that are hard to compensate. This motivates the development and application of dynamic demand control (DDC) to energy-consuming systems to reduce the power gap between supply and demand. The focus of this research project is put on the control of thermostatically controlled loads (TCLs) such as heaters or air conditioners. These systems are widely spread all over the electrical grids and represent a large portion of power consumption. Thus, TCLs have the potential to provide flexibility in the grid and are the subject of numerous studies. They can be used for example as a solution for peak power reduction, frequency regulation or electricity cost minimization through the control of their power consumption. To this end, a large heterogeneous population of TCLs is modeled with two Fokker-Planck equations and a non-predictive hybrid control strategy is applied. The designed control is based on a partial differential equations (PDE) model and is used to change the temperature set-point of the population in response to global power variations in the grid. Moreover, forced state switches based on a stochastic process are applied to a portion of TCLs to counter the sudden and unpredictable variations related to the use of renewables. Consequently, the hybrid control developed in this work provides a two-level regulation to minimize the power gap between production and consumption. This thesis aims also at clarifying and justifying the use of such control strategies through various simulation scenarios. The results obtained show that the control allows the TCLs to follow both slow and fast fluctuations and hence, it reduces the power discrepancies. Finally, the simulation of a realistic microgrid where the power is produced by photovoltaic (PV) cells confirms the validity of the proposed approach. The hybrid control developed in this work allows TCLs to participate in dynamic demand control and hence to be part of a viable solution for a better power consumption management in smart microgrids.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE iii

REMERCIEMENTS iv

RÉSUMÉ v

ABSTRACT vi

TABLE DES MATIÈRES vii

LISTE DES TABLEAUX ix

LISTE DES FIGURES x

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS xiii

LISTE DES ANNEXES xiv

CHAPITRE 1 INTRODUCTION 1

CHAPITRE 2 CONTRÔLE DE SYSTÈMES THERMOSTATIQUES DANS UN MICRO-RÉSEAU 3

2.1 Revue de littérature 3

2.1.1 Utilisation des TCLs dans le cadre de la régulation dynamique de la charge 3

2.1.2 Exemples de méthodes sans prévision pour le contrôle des TCLs . . . 9

2.1.3 Modélisation et contrôle de TCLs par équations aux dérivées partielles 15

2.2 Objectifs, méthodologie et contributions 17

2.2.1 Modéliser une population de TCLs 18

2.2.2 Mettre en place une stratégie de contrôle sans prévision 18

2.2.3 Proposer des scénarios réalistes nécessitant l'utilisation d'un tel contrôle 19

CHAPITRE 3 MODÉLISATION PAR ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES D'UNE GRANDE POPULATION DE CHARGES THERMOSTATIQUES 21

3.1 Modèle thermique d'un seul TCL 21

3.2 Modèle d'une population de TCLs 23

CHAPITRE 4 STRATÉGIE DE CONTRÔLE À DEUX NIVEAUX POUR RÉGULER LA PUISSANCE CONSOMMÉE PAR UNE POPULATION DE TCLs 30
4.1 Contrôle de niveau inférieur par changement d'état forcé 30
4.2 Contrôle de niveau supérieur par équations aux dérivées partielles 37
4.3 Régulation à deux niveaux par combinaison des deux types de contrôle . . . 48

CHAPITRE 5 ÉTUDE EN SIMULATION ET PRÉSENTATION DES RÉSULTATS 53
5.1 Étude en simulation des différents contrôleurs 53
5.1.1 Contrôle par changement d'état forcé 54
5.1.2 Contrôle par équations aux dérivées partielles 60
5.1.3 Contrôle hybride à deux niveaux 70
5.2 Simulation d'un micro-réseau 79
5.2.1 Présentation de la plateforme de simulation 79
5.2.2 Résultats obtenus 82

CHAPITRE 6 CONCLUSION 88
6.1 Conclusions générales 88
6.2 Futurs travaux 89

RÉFÉRENCES 90

ANNEXES 95

LISTE DES TABLEAUX

2.1 Avantages et inconvénients des différents types de contrôle. 9
4.1 Paramètres pour simuler le comportement du système. 46
5.1 Paramètres du système pour l'étude en simulation. 53
5.2 Paramètres du système pour la simulation du micro-réseau. 82

LISTE DES FIGURES

2.1	Contrôle par thermostat d'un système de refroidissement classique. .	7
2.2	Contrôle par thermostat d'un réfrigérateur (a) classique et (b) participant à la régulation fréquentielle.	10
2.3	Processus de déplacement au sein des maillons d'une chaîne.	14
3.1	Dynamique d'un système de refroidissement.	23
3.2	Processus de déplacement au sein des distributions de systèmes à l'état *ON* ou *OFF*.	25
3.3	Flux entrant et sortant pour un segment infinitésimal de température.	26
4.1	Dynamique d'un TCL avec changement d'état forcé.	31
4.2	Processus décisionnel pour un changement d'état forcé.	33
4.3	Illustration de la Loi des Grands Nombres.	35
4.4	Dynamique d'un TCL avec changement de consigne.	38
4.5	Comportement dynamique de la consigne de température.	46
4.6	Comportement dynamique de la proportion de systèmes à l'état *ON*. La figure (b) correspond à un zoom de la figure (a).	47
4.7	Exemple de production photovoltaïque en une journée.	48
4.8	Dynamique d'un TCL avec changement de consigne et changement d'état forcé.	49
4.9	Schéma bloc simplifié du contrôle hybride.	51
5.1	Proportion désirée de TCLs à l'état *ON* (cas du contrôle par CEF). .	54
5.2	Proportion de TCLs à l'état *ON* pour une population de 10 000 TCLs.	55
5.3	Écart entre la proportion désirée et la proportion réelle (cas du contrôle par CEF).	56
5.4	(a) Proportion de TCLs à l'état *ON* pour une population non contrôlée et (b) écart avec la proportion désirée.	57
5.5	Proportion de TCLs à l'état *ON* pour une population de (a) 10 TCLs (b) 100 TCLs et (c) 1 000 TCLs.	58
5.6	Variations de température de (a) 100 TCLs au sein de la population et (b) 1 TCL avec un zoom sur l'échelle de temps.	59
5.7	Distribution de la population de TCLs sur la plage de température (cas du contrôle par CEF).	60
5.8	Proportion désirée de TCLs à l'état *ON* (cas du contrôle par EDP). .	61

5.9 (a) Consigne de température pour la population de TCLs et (b) écart entre la consigne désirée et la consigne réelle obtenue avec le contrôleur à EDP (cas du contrôle par EDP avec température ambiante constante). . . 62
5.10 (a) Variations de température de 100 TCLs et (b) distribution de la population sur la plage de température (cas du contrôle par EDP avec température ambiante constante). 63
5.11 Proportion de TCLs à l'état *ON* (cas du contrôle par EDP avec température ambiante constante). 64
5.12 Écart entre la proportion désirée et la proportion réelle (cas du contrôle par EDP avec température ambiante constante). . . 65
5.13 Température ambiante extérieure (cas du contrôle par EDP). 65
5.14 (a) Consigne de température pour la population de TCLs et (b) écart entre la consigne désirée et la consigne réelle obtenue avec le contrôleur à EDP (cas du contrôle par EDP avec température ambiante variable). . . . 67
5.15 (a) Variations de température de 100 TCLs et (b) distribution de la population sur la plage de température (cas du contrôle par EDP avec température ambiante variable). 68
5.16 Proportion de TCLs à l'état *ON* (cas du contrôle par EDP avec température ambiante variable). 69
5.17 Écart entre la proportion désirée et la proportion réelle (cas du contrôle par EDP avec température ambiante variable). . . . 69
5.18 Proportion désirée de TCLs à l'état *ON* (cas du contrôle hybride). . . 70
5.19 (a) Consigne de température pour la population de TCLs et (b) écart entre la consigne désirée et la consigne réelle obtenue avec le contrôleur à EDP (cas du contrôle hybride avec température ambiante constante). . . . 72
5.20 (a) Variations de température de 100 TCLs et (b) distribution de la population sur la plage de température (cas du contrôle hybride avec température ambiante constante). 73
5.21 Proportion de TCLs à l'état *ON* (cas du contrôle hybride avec température ambiante constante). 74
5.22 Écart entre la proportion désirée et la proportion réelle (cas du contrôle hybride avec température ambiante constante). . . . 74
5.23 Température ambiante extérieure (cas du contrôle hybride). 75

5.24 (a) Consigne de température pour la population de TCLs et (b) écart entre la consigne désirée et la consigne réelle obtenue avec le contrôleur à EDP (cas du contrôle hybride avec température ambiante variable). 76
5.25 (a) Variations de température de 100 TCLs et (b) distribution de la population sur la plage de température (cas du contrôle hybride avec température ambiante variable). 77
5.26 Proportion de TCLs à l'état *ON* (cas du contrôle hybride avec température ambiante variable). 78
5.27 Écart entre la proportion désirée et la proportion réelle (cas du contrôle hybride avec température ambiante variable). 79
5.28 Structure du réseau incluant le micro-réseau considéré. 80
5.29 Structure globale du micro-réseau. 81
5.30 Écart de puissance au sein du micro-réseau. 83
5.31 Proportion désirée de TCLs à l'état *ON* (cas du micro-réseau). 83
5.32 (a) Consigne de température pour la population de TCLs et (b) écart entre la consigne désirée et la consigne réelle obtenue avec le contrôleur à EDP (cas du micro-réseau). 85
5.33 Proportion de TCLs à l'état *ON* (cas du micro-réseau). 86
5.34 Écart entre la proportion désirée et la proportion réelle (cas du micro-réseau). 86
5.35 Écart de puissance obtenu en modifiant la proportion de TCLs à l'état *ON*. 87
5.36 Écart de puissance au sein du micro-réseau après modification de la proportion de TCLs à l'état *ON*. 87

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

RDC	Régulation Dynamique de la Charge
CVC	Chauffage, Ventilation et Climatisation
TCL	*Thermostatically Controlled Load*
PV	Photovoltaïque
CEF	Changement d'État Forcé
EDP	Équations aux Dérivées Partielles
REQM	Racine de l'Erreur Quadratique Moyenne

LISTE DES ANNEXES

Annexe A Loi des Grands Nombres (LGN) 95

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Les réseaux électriques forment l'un des piliers majeurs de nos sociétés actuelles. Ils permettent la production, la distribution et l'utilisation de l'énergie électrique, ressource qui se veut prédominante voire indispensable dans la vie quotidienne de chacun.

Depuis quelques décennies, l'apogée des mouvements environnementaux et de développement durable encourage l'utilisation de l'énergie électrique qui gagne en importance et qui est de plus en plus associée aux sources d'énergie renouvelables. Ces sources ont un rôle grandissant dans les réseaux actuels et ont comme particularité de produire de l'énergie électrique à partir de ressources naturelles comme l'hydro-électricité, l'éolien ou encore le solaire. L'utilisation de ces ressources dites "propres" favorise également l'émergence de nouvelles formes de réseaux plus locaux, décentralisés et quasi-autonomes : on parle alors de micro-réseaux ou de réseaux intelligents.

Les sources d'énergie renouvelables diffèrent d'autant plus des sources plus traditionnelles comme les énergies fossiles ou le nucléaire par leur caractère stochastique. Celui-ci est dû à leur forte dépendance aux conditions climatiques qui sont relativement imprévisibles, ce qui peut avoir un effet négatif sur les réseaux électriques. L'utilisation de sources d'énergie renouvelables peut en effet engendrer des fluctuations imprévisibles au niveau de la production d'électricité. Ces fluctuations fragilisent les réseaux dont la stabilité dépend en partie de l'équilibre entre l'offre et la demande, c'est-à-dire l'équilibre entre la production et la consommation d'énergie électrique.

Au sein d'un réseau électrique, la fréquence est un indicateur de la stabilité et dépend de la vitesse de rotation des machines tournantes qui produisent l'électricité. De façon traditionnelle, ce sont ces machines appelées "générateurs" qui assurent la stabilité du réseau en réagissant aux écarts entre la production et la consommation électrique. En effet, lorsque la consommation du réseau est plus importante que la production, les générateurs ralentissent ce qui a pour effet de diminuer la fréquence du réseau. Inversement, lorsque la production excède la quantité d'énergie consommée, les générateurs accélèrent et la fréquence augmente. Avec l'utilisation grandissante des sources d'énergie renouvelables, ces fluctuations imprévisibles sont de plus en plus difficiles à suivre mécaniquement pour les générateurs. De plus, les variations de fréquence peuvent aller jusqu'à endommager les générateurs, ce qui montre la nécessité de trouver une alternative à ce mode de gestion des réseaux qui deviennent plus décentralisés et dynamiques.

C'est dans ce contexte que s'inscrit le travail présenté dans ce mémoire.

Afin d'assurer une gestion des réseaux électriques en adéquation avec l'utilisation des sources d'énergie renouvelables, plusieurs solutions sont envisageables. L'une des plus répandues consiste à réaliser un contrôle de la demande et donc à agir sur la consommation des appareils du réseau (ou "charges") au lieu de réguler la production d'énergie électrique. On peut alors parler de régulation dynamique de la charge (RDC), ou *dynamic demand control* (DDC) en anglais. Ce type de contrôle peut permettre d'alléger les efforts des générateurs tout en assurant la stabilité du réseau. Au-delà de la régulation fréquentielle, contrôler les charges connectées peut permettre de réduire les pics et combler les creux de consommation ou encore de minimiser le coût des factures d'électricité.

Dans le cadre de ce travail, l'accent est mis sur l'utilisation de la RDC avec le contrôle de systèmes thermostatiques pour réduire les écarts de puissance entre la production et la consommation électrique au sein d'un micro-réseau avec une forte présence de sources d'énergie renouvelables. Les systèmes thermostatiques fonctionnent dans une certaine plage de température selon deux états que l'on peut contrôler, "marche" (ON) ou "arrêt" (OFF), et regroupent par exemple les technologies de chauffage, ventilation et climatisation (CVC). En comparaison à d'autres systèmes comme les véhicules électriques, les systèmes de CVC ont l'avantage d'être largement présents sur le réseau, que ce soit dans un cadre domestique ou industriel. De plus, ils représentent une part importante de la consommation électrique, ce qui est d'autant plus intéressant pour la gestion de la puissance consommée dans un réseau.

Pour ce projet, l'objectif est de modéliser une grande population de systèmes thermostatiques puis de mettre en place une stratégie de contrôle permettant de gérer la consommation globale de cette agrégation de systèmes. Enfin, il s'agit également de proposer des scénarios réalistes pour lesquels ce type de contrôle pourrait être appliqué. Pour la simplicité de la présentation, le travail réalisé ici ne considère que des systèmes de refroidissement mais peut être adapté à n'importe quel système thermostatique.

La suite de ce mémoire s'organise de la façon suivante. Le chapitre 2 fait un état de l'art des utilisations de la RDC et des méthodes de contrôle des systèmes thermostatiques. On y présente également un récapitulatif des objectifs et des éléments de méthodologie associés. Le chapitre 3 est consacré au modèle thermique des systèmes thermostatiques de refroidissement. Le chapitre 4 détaille la stratégie de contrôle par changement d'état forcé associée à une commande de changement de température qui découle du modèle par équations aux dérivées partielles. Le chapitre 5 présente les scénarios étudiés dans le cadre de ce projet et les résultats obtenus dans l'étude en simulation. Enfin, le chapitre 6 apporte quelques éléments de conclusion et aborde les points pouvant faire l'objet de futurs travaux.

CHAPITRE 2 CONTRÔLE DE SYSTÈMES THERMOSTATIQUES DANS UN MICRO-RÉSEAU

Pour répondre aux problématiques énoncées dans ce mémoire, il convient de regrouper des connaissances suffisantes dans les domaines clés du sujet, à savoir la régulation dynamique de la charge, les systèmes thermostatiques ainsi que les méthodes de contrôle associées. Ce chapitre permet ainsi de dresser un état de l'art en mettant l'accent sur trois axes : l'utilisation des systèmes thermostatiques dans le cadre de la RDC, les méthodes de contrôle permettant de réaliser une régulation sans prévision et enfin la modélisation et le contrôle par équations aux dérivées partielles.

À la suite de cette revue de littérature, les objectifs de recherche, la méthodologie associée ainsi que les contributions de ce projet sont explicités pour compléter ce chapitre.

2.1 Revue de littérature

Dans un réseau électrique, la régulation dynamique de la charge permet de contrôler des systèmes situés du côté de la demande, en opposition au contrôle traditionnel à la source, du côté de la production. Cette idée de réguler les charges se retrouve dans la littérature à travers de nombreuses études et articles, parmi lesquels on retrouve [1–6] pour n'en citer que quelques-uns. Dans ces travaux, divers systèmes peuvent être considérés pour mettre en place une RDC, comme les véhicules électriques [7, 8] ou les systèmes thermostatiques [9, 10] par exemple. Dans le cadre de ce projet, on s'intéresse plus particulièrement à ces derniers que l'on retrouve abondamment dans les réseaux électriques actuels, à domicile ou en industrie. Ces systèmes thermostatiques sont plus communément désignés en anglais par *thermostatically controlled loads* (TCLs) et leur utilisation est largement documentée dans la littérature. La première partie de cet état de l'art permet de préciser et de caractériser ce que l'on appelle "régulation dynamique de la charge" avec l'utilisation des TCLs. La deuxième partie donne des exemples de stratégies de contrôle permettant de réaliser une RDC sans aucune prévision. Enfin dans la troisième partie, on s'intéresse au contrôle des TCLs par équations aux dérivées partielles.

2.1.1 Utilisation des TCLs dans le cadre de la régulation dynamique de la charge

De façon traditionnelle, l'équilibre entre la production et la consommation de puissance dans un réseau électrique est géré du côté des générateurs d'électricité [2, 11]. Ceux-ci permettent

de convertir une énergie provenant d'une source quelconque (fossile ou renouvelable par exemple) en énergie électrique. Ils sont généralement constitués d'une partie fixe appelée "stator" et d'une partie tournante appelée "rotor". L'énergie mécanique fournie au rotor est alors convertie en énergie électrique dont le flux (c'est-à-dire la puissance) dépend de la vitesse de rotation [11, 12]. Cette vitesse de rotation ω doit suivre la fréquence nominale du réseau qui est de 50 Hz en Europe et de 60 Hz en Amérique du Nord.

De manière générale, la fréquence d'un réseau est un indicateur de l'équilibre entre l'offre et la demande. En effet, l'écart entre la puissance produite par les générateurs et la puissance consommée par les charges influe directement sur cette fréquence. On peut se rendre compte de cela en appliquant le principe fondamental de la dynamique (ou deuxième loi de Newton) au générateur [4] :

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{2HP_G}\left(P_m - P_e\right), \tag{2.1}$$

avec H la constante d'inertie du rotor, P_G la puissance nominale du générateur, P_m la puissance mécanique fournie au rotor et P_e la puissance électrique sortante (ou consommée). Ainsi, lorsque la puissance produite est plus importante que la puissance consommée, la fréquence augmente et passe au-dessus de sa valeur nominale. Inversement, lorsque la demande en puissance par les charges excède la production, la fréquence diminue et passe en-dessous de sa valeur nominale [3, 9, 13]. On associe alors au générateur un régulateur de vitesse qui permet de ramener la fréquence à sa valeur nominale [1, 2, 4, 5].

Cependant, les écarts de puissance entre l'offre et la demande qui peuvent apparaître dans les réseaux entraînent parfois des fluctuations de fréquence difficiles à suivre pour les générateurs [4]. Ceci apparaît notamment dans les réseaux ou micro-réseaux avec une forte proportion de sources d'énergie renouvelables [4, 5]. C'est ainsi que se développent depuis quelques décennies des réseaux électriques qui favorisent une gestion plus efficace et réfléchie des écarts de puissance. On parle alors de réseaux intelligents ou *smart grids* en anglais. Ceux-ci utilisent les sources d'énergie renouvelables ainsi que les nouvelles technologies de l'information, de la mesure et du contrôle pour assurer une meilleure gestion et amener plus de flexibilité à tous les niveaux du réseau électrique, de la production à la consommation en passant par la distribution. En effet, comme présenté dans [14], les producteurs d'électricité ne sont pas les seuls à participer à la gestion de l'électricité dans un réseau intelligent : les consommateurs (industriels ou particuliers) sont également sollicités et deviennent eux aussi acteurs de la gestion du réseau. Ils réagissent aux fluctuations en agissant sur leur consommation électrique, participant ainsi à ce que l'on appelle la "régulation de la charge" ou *demand*

response (DR) en anglais.

Cette régulation peut être réalisée directement et individuellement par les utilisateurs en décalant par exemple le fonctionnement de certains appareils électriques pour éviter les périodes de saturation du réseau et ainsi diminuer leur facture d'électricité [1]. Cependant, les actions menées du côté de la demande sont de plus en plus regroupées et gérées par des "agrégateurs" qui jouent le rôle d'intermédiaire entre les producteurs et les utilisateurs. Ces agrégateurs communiquent avec les différents acteurs et mettent en place des stratégies automatisées permettant de réagir de façon dynamique et en temps réel aux écarts de puissance entre la production et la consommation [15]. Ainsi, un nouveau terme qui fait son apparition pour désigner ce type de gestion automatisée est la "régulation dynamique de la charge" (RDC) ou *dynamic demand control* (DDC) en anglais. Le but est alors de contrôler des systèmes consommateurs d'électricité et de les utiliser pour fournir divers services auxiliaires utiles à une meilleure gestion du réseau. Parmi ceux-ci, on peut citer notamment la mise en place de réserves permettant de maintenir le fonctionnement du réseau en cas de panne, la minimisation du coût de l'électricité pour les utilisateurs [16–18], la réduction des pics de consommation en période de pointe [17,18], etc. La RDC participe également à la régulation de la fréquence du réseau ainsi qu'à une meilleure gestion de la puissance consommée qui sont deux enjeux majeurs des réseaux intelligents auxquels on s'intéresse dans ce qui suit.

La régulation fréquentielle est en effet une des applications les plus répandues de la RDC [3,5,19,20]. On cherche alors à minimiser les déviations de la fréquence afin de l'amener à sa valeur nominale. Pour cela, on peut agir sur la puissance fournie par les générateurs ou sur la puissance demandée par les charges du réseau. Dans le cadre de la RDC, on s'intéresse donc au deuxième cas. La régulation fréquentielle se divise en trois niveaux principaux agissant à des échelles de temps différentes [2,19] :

- La régulation primaire permet de limiter la déviation de fréquence en agissant en l'espace de quelques secondes sur la puissance active consommée (dans le cas de la RDC) ;
- La régulation secondaire amène la fréquence à sa valeur nominale avec un temps de réponse allant de 30 secondes à quelques minutes ;
- La régulation tertiaire permet de restaurer les réserves des régulations primaire et secondaire et permet également de gérer les saturations dans le réseau électrique. Son temps de réponse est supérieur à 15 minutes.

Ces trois types de régulation permettent ainsi d'agir plus ou moins rapidement sur la fréquence du réseau afin de l'amener et la maintenir à la fréquence nominale.

D'autres études comme [21–24] mettent davantage l'accent sur la gestion de la consommation,

sans forcément agir sur la fréquence. Ceci est généralement le cas pour les micro-réseaux qui n'utilisent pas forcément des machines tournantes pour la production d'électricité et qui font partie d'un réseau principal plus grand. Ceux-ci s'appuient davantage sur les sources d'énergie renouvelables et cherchent à se rapprocher d'une auto-suffisance énergétique. Dans ce cas, l'objectif est d'équilibrer au mieux la puissance produite et la puissance consommée dans le micro-réseau afin de minimiser l'achat d'électricité chez des fournisseurs extérieurs. Par exemple, un immeuble muni de panneaux photovoltaïques pourrait être considéré comme un micro-réseau. Un contrôle des appareils domestiques dans le cadre d'une RDC permettrait dans ce cas de réguler la puissance consommée dans l'immeuble et ainsi suivre au mieux les variations de puissance produite par énergie solaire. En minimisant les écarts de puissance, on minimise également l'électricité achetée chez les fournisseurs d'électricité [21].

Que ce soit pour réguler la fréquence ou pour minimiser les écarts de puissance, divers appareils électriques connectés au réseau peuvent être utilisés. Toutefois, les systèmes thermostatiques sont particulièrement adaptés à cet objectif, et ce pour plusieurs raisons [2, 19, 20]. En effet, outre leur large présence dans les réseaux électriques, ces charges sont utilisées constamment et sur des périodes relativement longues, que ce soit dans les milieux industriels ou domestiques. Par exemple, les réfrigérateurs peuvent être connectés au réseau pendant plusieurs années alors que les chauffages et les climatiseurs sont utilisés pendant plusieurs mois en hiver et en été. Un autre avantage à l'utilisation de ces systèmes est une faible influence sur leur fonction première ou sur le confort de l'usager lors de leur participation à la RDC. Ceci est dû aux propriétés thermiques de ces systèmes qui ont une dynamique lente associées à un besoin souvent flexible en ce qui concerne la température souhaitée. Si on prend l'exemple d'un système de climatisation dont la consigne de température est fixée à 20 °C, une participation à la RDC pourrait éventuellement amener lentement la température à 20.5 °C ou à 19.5 °C. Ainsi, le confort de l'usager ou l'utilisation première de ce système de climatisation ne s'en verraient que très faiblement impactés.

Pour mieux comprendre cela, il faut s'intéresser au fonctionnement de ces charges thermostatiques [2, 3, 20]. De manière classique ces systèmes ont deux états de fonctionnement, "marche" (ON) ou "arrêt" (OFF), qui dépendent de deux températures limites. Si on prend l'exemple d'un système de refroidissement, celui-ci est à l'état ON lorsque la température intérieure atteint la limite haute et inversement, le système est à l'état OFF lorsque la température arrive à la limite basse. Ce contrôle par thermostat est utilisé sur la majorité des TCLs pour garder la température autour d'une certaine consigne. Un exemple est donné Figure 2.1 où la consigne est fixée à 20 °C avec une plage de température de 1 °C autour de cette consigne. Ces systèmes sont particulièrement intéressants car on peut les utiliser à plusieurs niveaux de la régulation dynamique de la charge. En effet, pour une régulation

primaire, on peut par exemple forcer le changement d'état des TCLs pour passer de l'état *ON* à l'état *OFF* ou de l'état *OFF* à l'état *ON* et ainsi modifier de façon instantanée la consommation de ces charges [3, 19]. Celles-ci peuvent également être utilisées à des niveaux plus lents en faisant varier la consigne de température [25–27].

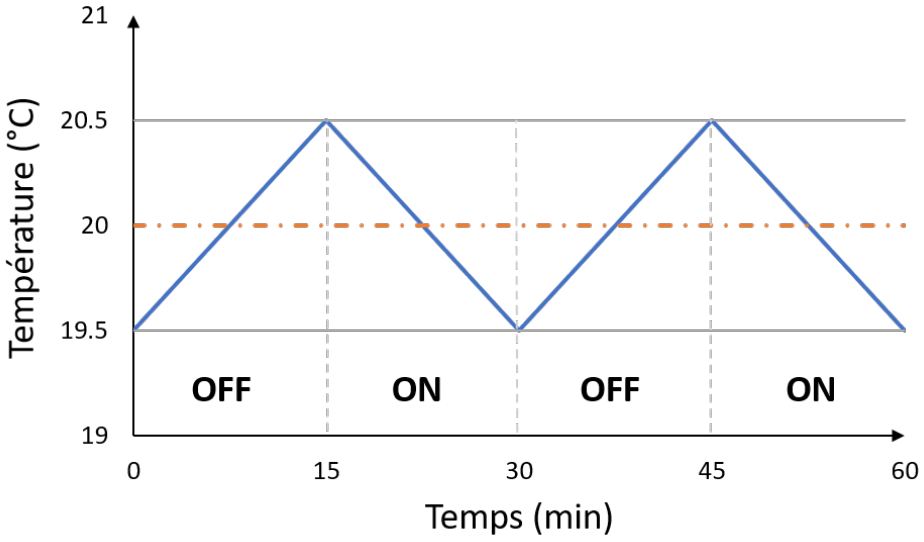


Figure 2.1 Contrôle par thermostat d'un système de refroidissement classique.

Cependant, en choisissant quand éteindre ou allumer les TCLs pour réguler leur consommation, il y a un risque que ceux-ci se synchronisent, comme expliqué dans [2, 4]. La synchronisation des appareils contrôlés représente un des risques majeurs liés à l'utilisation de la RDC. En effet, une telle synchronisation pourrait avoir des conséquences négatives sur le réseau électrique, comme des pics de consommation et donc des variations importantes de fréquence. Pour éviter cela, plusieurs méthodes de désynchronisation des appareils ont été étudiées et proposées dans divers travaux :

- Les appareils sont mis en marche ou à l'arrêt aléatoirement, suivant certaines conditions [4, 9, 26]. On a alors une randomisation de l'action des appareils qui ne fonctionnent plus de façon synchrone.
- On applique des délais d'action différents à chaque appareil pour éviter de les allumer ou les éteindre en même temps [13, 19, 27, 28].
- Les paramètres de modélisation des appareils sont randomisées dans une certaine plage autour de la valeur désirée afin de rendre la population de TCLs hétérogène [3, 10, 25, 27]. Ces paramètres peuvent être la résistance thermique, la capacité thermique, etc.

Toutes ces méthodes assurent une désynchronisation des appareils, ce qui est essentiel lors d'un contrôle d'une grande population de TCLs.

Afin d'assurer une RDC dans un réseau ou un micro-réseau, diverses stratégies de contrôle peuvent être réalisées. Celles-ci se concentrent sur des niveaux de régulation plus ou moins lents et se divisent en trois catégories principales :

- Le contrôle centralisé [6, 29] a recours à un centre de contrôle qui mesure la fréquence du réseau ou l'écart de puissance au cours du temps et qui envoie le signal de contrôle (consigne, paramètres...) à des contrôleurs secondaires situés au niveau des charges ;
- Le contrôle décentralisé [3, 9, 13] n'a recours à aucun centre de contrôle puisqu'au niveau des charges, chaque contrôleur génère la consigne (traditionnellement *ON* ou *OFF*) et met à jour les paramètres de contrôle ;
- Le contrôle dit "hybride" [19, 21] regroupe les caractéristiques des deux catégories précédentes. Dans ce cas, chaque contrôleur secondaire mesure la fréquence ou l'écart de puissance et génère la consigne appropriée indépendamment des autres contrôleurs. Cependant, un centre de contrôle intervient tout de même pour la mise à jour des paramètres de régulation.

Les avantages et les inconvénients de chaque type de contrôle sont brièvement présentés dans le Tableau 2.1. Le fait de s'appuyer sur des canaux de communication représente un réel inconvénient pour la RDC. En effet, ceux-ci créent inévitablement un délai entre le moment où le centre de contrôle envoie la commande et le moment où les contrôleurs secondaires reçoivent l'information. Ce délai peut avoir des conséquences importantes sur l'efficacité du contrôle puisque les variations de fréquence ou de puissance se font sur une échelle de temps très courte. Il y a donc un besoin d'agir rapidement au niveau des contrôleurs secondaires, ce qui peut être remis en cause par les délais de communication. Cependant, sans moyens de communication, la régulation peut ne pas être suffisante car sous-évaluée ou au contraire peut être excessive car sur-évaluée. Il faut donc arriver à un compromis.

Certains articles comme [24, 26, 30] considèrent un contrôle de la consommation des TCLs en faisant varier la température de consigne. Bien qu'une telle méthode soit possible, elle ne pourrait participer à une régulation primaire qui se fait en l'espace de quelques secondes. En effet, comme énoncé précédemment, les variations de température sont par nature lentes et seraient plus adéquates à une régulation secondaire, voire tertiaire. Afin de remédier à ce problème, plusieurs études se sont penchées sur des méthodes de contrôle permettant de prévoir les variations fréquentielles ou les écarts de puissance dans un réseau [25, 27]. Cependant, dans le cas d'une production d'électricité qui se fait majoritairement par l'utilisation de sources d'énergie renouvelables, prévoir les écarts de puissance peut s'avérer très compliqué, voire impossible. Ainsi, on s'intéresse dans la deuxième partie de cette revue de littérature à

Tableau 2.1 Avantages et inconvénients des différents types de contrôle.

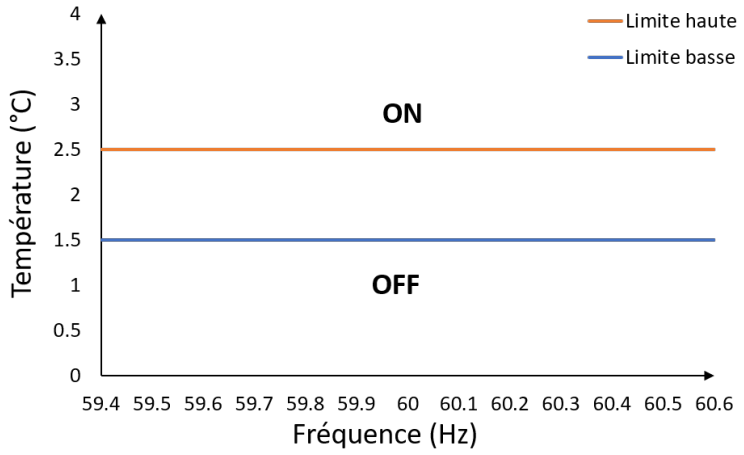
Type de contrôle	Avantages	Inconvénients
Centralisé	Régulation précise	Dépend de canaux de communication
Décentralisé	Nécessite peu de moyens de communication	La régulation peut être imprécise, excessive ou insuffisante
Hybride	Régulation précise Nécessite moins de sources de communication	Dépend de la capacité de communication pour la transmission des paramètres de contrôle

des méthodes permettant de contrôler les TCLs sans avoir recours à des prévisions.

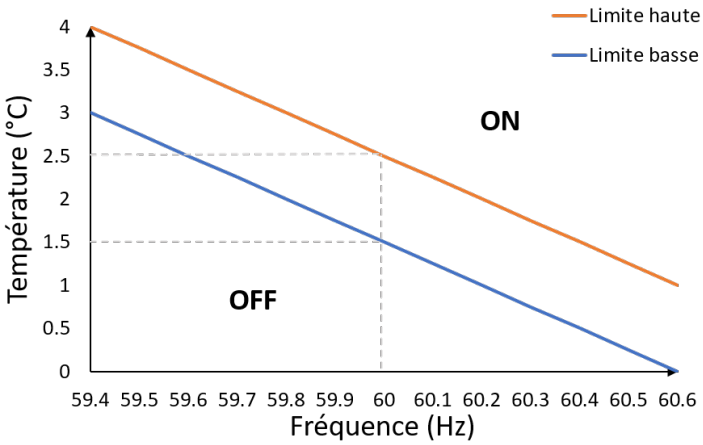
2.1.2 Exemples de méthodes sans prévision pour le contrôle des TCLs

Dans le contexte des micro-réseaux avec une forte présence de sources d'énergie renouvelables, la mise en place de méthodes de contrôle sans prédiction est d'une grande importance. En effet, ces sources productrices d'électricité introduisent un aspect stochastique difficile à anticiper. Ainsi, on présente dans ce qui suit quelques exemples de méthodes de contrôle se basant uniquement sur des grandeurs mesurables ou disponibles par calcul.

Une des premières allusions à ce que l'on appelle *dynamic demand control* apparaît dans [3] où une grande population de réfrigérateurs est contrôlée pour réguler la fréquence du réseau. D'autres articles comme [9, 21, 31–33] s'intéressent également à ces systèmes en particulier. Le choix des réfrigérateurs s'explique par le fait que ces systèmes sont largement présents dans un cadre domestique et sont branchés au réseau de jour comme de nuit, été et hiver. Ils sont donc disponibles à tout moment pour participer à la régulation fréquentielle. Dans un réfrigérateur classique, un thermostat permet de garder la température autour d'une certaine consigne. Par exemple, si la consigne est fixée à 2 °C comme on le voit Figure 2.2(a), la température à l'intérieur du réfrigérateur pourra varier dans la plage de température comprise entre la limite basse et la limite haute (respectivement 1.5 °C et 2.5 °C dans cet exemple). Ce fonctionnement reste valable quelle que soit la fréquence du réseau. Si on souhaite maintenant contrôler un réfrigérateur pour qu'il participe à la RDC, il faut que son fonctionnement soit sensible aux variations fréquentielles. C'est ce que suggère cet article en proposant un contrôle par thermostat dont les limites basse et haute varient de façon linéaire en fonction de la fréquence du réseau. Un exemple est montré Figure 2.2(b) où l'on voit que les limites de la plage de température sont modifiées en fonction de la valeur de la fréquence.



(a)



(b)

Figure 2.2 Contrôle par thermostat d'un réfrigérateur (a) classique et (b) participant à la régulation fréquentielle.

(adapté de [3])

Toutefois, la température des réfrigérateurs doit rester dans une certaine plage de température (typiquement entre 0 °C et 4 °C) afin de respecter les consignes des administrations et agences sanitaires [34–36] en matière de conservation des aliments. Par ailleurs, cette étude prend également en compte le problème de synchronisation. En effet, lorsque la fréquence diminue, la stratégie mise en place fait en sorte que les réfrigérateurs s'éteignent progressivement en commençant par celui qui est à la température la plus basse. De la même façon lorsque la fréquence augmente, les réfrigérateurs s'allument en commençant par celui à la température la plus haute. Ainsi, les réfrigérateurs contrôlés sont désynchronisés et ne risquent pas de causer des pics de fréquence.

Dans [37], on présente trois méthodes de contrôle d'un système chauffant utilisé dans un

cadre domestique pour la régulation fréquentielle :

- La première méthode correspond à une modification du contrôle traditionnel ON/OFF par thermostat puisque dans ce cas la fréquence du réseau est prise en compte dans le processus décisionnel. En effet, lorsque la fréquence passe en-dessous d'un certain seuil, le chauffage s'éteint, et inversement si la fréquence est trop importante. Cependant, la température de la pièce est prioritaire dans le processus décisionnel et doit absolument rester dans la zone de confort préalablement définie. Ainsi, avant de pouvoir répondre à une déviation fréquentielle, il faut que la température de la pièce soit dans la plage acceptable. Si c'est le cas le chauffage peut participer à la régulation, sinon il faut attendre que la température entre dans la zone de confort.
- La deuxième méthode de contrôle permet de modifier la puissance consommée par le système chauffant en fonction de la fréquence du réseau et ce de façon linéaire. On parle alors de commande d'anti-abaissement (*droop control* en anglais). Cette méthode se rapproche de celle développée dans [3] et se base sur le même principe.
- La dernière méthode présentée ici correspond à une solution hybride qui combine les deux premières stratégies de contrôle. Si la fréquence dépasse les seuils acceptés, le contrôle ON/OFF modifié est utilisé. Une fois le système à l'état ON, la commande d'anti-abaissement intervient en contrôlant la température (et donc la puissance) en réponse aux variations fréquentielles.

L'intérêt de ce travail réside notamment dans la mise en place d'une stratégie de contrôle qui combine le fonctionnement de plusieurs méthodes distinctes et agissant à des niveaux de régulation différents.

Dans [19], une stratégie de contrôle hybride est mise en place pour participer aux régulations primaire et secondaire de la fréquence. On étudie ici le cas où la puissance demandée devient supérieure à la puissance produite ce qui résulte en une diminution de la fréquence par rapport à la fréquence nominale. La stratégie de contrôle proposée alors pour y remédier agit de la façon suivante. Tout d'abord, lorsque la fréquence passe en-dessous du seuil minimal (59.95 Hz pour une fréquence nominale de 60 Hz), le contrôleur prévoit la valeur minimale qu'atteindra la fréquence par la méthode des moindres carrés (à partir des dernières mesures disponibles). S'ensuivent alors deux cas possibles en fonction de la valeur prévue $\hat{f}$:

- Le premier cas correspond à une petite déviation de fréquence, c'est-à-dire que la valeur prévue est tout de même supérieure à un seuil intermédiaire ($59.75 \leq \hat{f} < 59.95$ Hz). Dans ce cas, seule une régulation secondaire est nécessaire pour amener la fréquence à sa valeur nominale.
- Le deuxième cas correspond à une déviation plus importante ($\hat{f} < 59.75$ Hz) qui nécessite une régulation primaire pour arrêter la déviation fréquentielle puis une régulation

secondaire.

Enfin, que ce soit pour la régulation primaire ou secondaire, un processus décisionnel stochastique est mis en place pour savoir si une charge s'éteint ou non, en réponse à l'écart entre la puissance produite et la puissance consommée dans le réseau.

Pour rappel, on souhaite se baser uniquement sur des données disponibles ou mesurables et ne réaliser aucune prévision, pour les raisons explicitées précédemment. Ainsi, seul le processus décisionnel stochastique peut servir à la suite de ce projet. Celui-ci agit de la façon suivante :

— À la suite d'une déviation fréquentielle, on détermine le pourcentage x de charges à éteindre ;

— Pour chacune des charges, la probabilité de s'éteindre est égale à ce pourcentage x.

Ainsi, chaque contrôleur prend la décision de s'allumer ou de s'éteindre indépendamment des autres mais les paramètres de contrôle sont envoyés depuis un centre de contrôle, d'où le caractère hybride de cette stratégie. Il est important de noter toutefois que cette méthode ne peut fonctionner qu'avec un nombre de charges suffisamment grand.

Parfois, la RDC ne suffit pas à réguler la fréquence d'un réseau. Ceci peut arriver par exemple lorsque les charges contrôlées ne sont pas en nombre suffisant pour compenser les grandes variations de puissance. Ainsi, dans [5], la RDC intervient comme soutien au contrôle traditionnel des générateurs. En effet, on propose ici d'agir à deux échelles. Pour les petites variations de fréquence, la régulation se fait au niveau de la charge en contrôlant la puissance consommée des appareils concernés. Cependant si la déviation est trop importante, ce sont les générateurs qui prennent le relais et amènent la fréquence à sa valeur nominale. Pour cela, on utilise un contrôleur proportionnel-intégral (PI) du côté des générateurs et du côté des charges. Cette idée d'utiliser la RDC comme soutien à la régulation fréquentielle se retrouve dans de nombreuses études comme [37]. C'est également le cas pour les micro-réseaux où l'électricité est majoritairement produite par des sources d'énergie renouvelables et où la RDC est davantage utilisée pour réduire les écarts de puissance. La régulation fréquentielle est dans ce cas gérée hors du périmètre d'action du micro-réseau.

C'est le cas de la situation présentée dans [21] où des TCLs sont utilisés dans un environnement de nano-réseau (maison ou petit immeuble par exemple) avec une forte présence de sources d'énergie photovoltaïque (PV). Les systèmes solaires qui permettent de produire cette énergie dépendent fortement de l'ensoleillement (rayonnement lumineux solaire) au cours de la journée, qui peut varier de façon imprévisible. Pour un environnement donné, c'est-à-dire pour une certaine température ambiante et un certain rayonnement solaire, on considère dans cette étude que la puissance maximale disponible est unique, quelle que soit la puissance demandée au niveau de la charge. On appelle cette valeur le point de puissance maximale. Les

caractéristiques thermiques des TCLs sont utilisées ici pour décaler ou modifier la consommation électrique de certains appareils afin de réaliser un suivi du point de puissance maximale. On parle alors de *maximum power point tracking* (MPPT). Si la puissance demandée est inférieure à la puissance PV disponible, le nano-réseau est auto-suffisant en matière d'électricité et le contrôle des TCLs permet de faire correspondre la puissance consommée avec la puissance produite. Le contrôle utilisé ici est de type hybride : un contrôleur central récupère les informations concernant le MPPT et communique avec les autres contrôleurs qui sont eux décentralisés et placés au niveau des TCLs afin de les coordonner. Cependant, si à un certain temps la puissance demandée est supérieure à la puissance PV maximale disponible, le réseau électrique principal doit fournir la différence. Ainsi, bien que cette stratégie de contrôle ne permette pas de rendre le nano-réseau complètement auto-suffisant en tout temps, il permet aux utilisateurs de réduire la puissance électrique achetée.

De façon similaire à [21], l'étude conduite dans [22] se place dans le contexte d'une communauté d'immeubles qui forme un micro-réseau et dont la production d'électricité se fait par des sources photovoltaïques. Les TCLs sont utilisés pour réguler les variations de la puissance demandée par la charge, c'est-à-dire l'ensemble des appareils électriques faisant partie de la communauté d'immeubles considérée. Le contrôle des TCLs se fait ici grâce à une commande linéaire quadratique, *linear quadratic regulator* (LQR) en anglais. Cette méthode permet d'obtenir des gains optimaux dans le cas d'une commande par retour d'état comme c'est le cas ici. De plus, l'étude propose une méthode permettant de mettre à jour les conditions initiales de régulation en fonction des variations de puissance, que ce soit au niveau des charges ou des sources PV. Enfin, une stratégie de communication intra-immeuble (entre un groupe de TCLs dans un même immeuble) et inter-immeuble (entre les différents immeubles) permet de définir les conditions nécessaires à un consensus pour répartir équitablement la puissance consommée et le niveau de confort des résidents. Ce niveau de confort s'évalue en terme de déviation de la température d'une pièce par rapport à la température désirée.

Les deux études précédentes, en plus de présenter des stratégies de contrôle sans prévision pour la régulation dynamique de la charge, montrent des exemples d'application réelle d'une telle régulation dans un cadre domestique. C'est également le cas de [38, 39] qui présentent d'autres méthodes de contrôle des systèmes thermostatiques participant à la RDC et pouvant être appliqués à des scénarios réalistes dans un cadre domestique ou encore [27, 40] qui montrent des applications plus industrielles.

Enfin, plusieurs travaux comme ceux présentés dans [25–27, 41] décrivent des stratégies de contrôle des systèmes thermostatiques basées sur des équations aux dérivées partielles (EDP). Ces méthodes permettent à la fois de modéliser et de contrôler une agrégation de TCLs

dans son ensemble. Ceci est utile dans le cadre de ce projet où l'on cherche à contrôler la consommation d'une grande population de systèmes de refroidissement pour participer à la RDC. Un autre type de modélisation largement répandu pour contrôler une population de TCLs est basé sur les processus de Markov à temps discret (chaînes de Markov) [9,10,38,42]. Cette méthode permet de décrire la dynamique de la population par un système linéaire discret de dimension finie de la forme suivante [43] :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) &= Cx(k). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Les TCLs sont alors répartis dans la plage de température considérée qui est découpée en N_θ intervalles et pour chacun d'entre eux, les TCLs peuvent être soit à l'état *ON*, soit à l'état *OFF*. La dynamique de la population telle que présentée Figure 2.3 pour un système de refroidissement, peut ainsi être décrite par une chaîne de $N_m = 2N_\theta$ maillons.

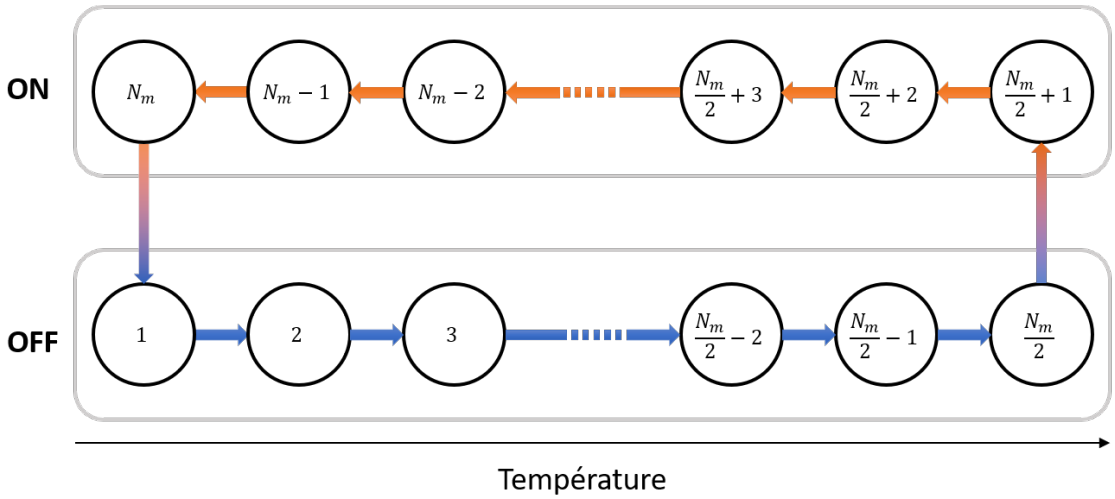


Figure 2.3 Processus de déplacement au sein des maillons d'une chaîne.

(adapté de [43])

Le vecteur d'état x représente alors le nombre de TCLs dans chaque maillon de la chaîne et A est une matrice décrivant les probabilités de passage d'un maillon à un autre. Les matrices B et C sont déterminées respectivement selon la commande et la sortie considérées, tel que détaillé dans [43].

Ce modèle peut également être vu comme une discrétisation de la modélisation par EDP sur une plage de température, comme expliqué dans [44]. Ainsi, dans la troisième et dernière

partie de la revue de littérature, on préfère mettre l'accent sur la méthode des EDP qui est un modèle plus générique.

2.1.3 Modélisation et contrôle de TCLs par équations aux dérivées partielles

Afin de décrire le comportement dynamique d'une agrégation de systèmes thermostatiques dans son ensemble, plusieurs travaux se sont penchés sur une modélisation de la population par des équations aux dérivées partielles. L'une des premières occurrences d'un tel modèle se trouve dans [45] de Malhamé et Chong (1985) où l'on modélise simplement une charge thermostatique par une résistance thermique R en série avec une capacité thermique C, le tout contrôlé par un thermostat. Une grande population homogène de ces systèmes est ensuite considérée et un modèle agrégé est alors proposé. Celui-ci est formé de deux équations de Fokker-Planck qui permettent de caractériser la distribution de charges à l'état *ON* w_{ON} ou à l'état *OFF* w_{OFF} en fonction de la température θ. Le modèle est ensuite repris et précisé dans [23] par Callaway (2009) et s'écrit :

$$\frac{\partial w_{\mathrm{ON}}(\theta,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\left(\frac{1}{RC}\left(\theta-\theta_a\right)+\frac{P}{C}\right)w_{\mathrm{ON}}\right]+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}w_{\mathrm{ON}}, \tag{2.3a}$$

$$\frac{\partial w_{\mathrm{OFF}}(\theta,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\left(\frac{1}{RC}\left(\theta-\theta_a\right)\right)w_{\mathrm{OFF}}\right]+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}w_{\mathrm{OFF}}, \tag{2.3b}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}w_{\mathrm{ON},c}(\theta_{\max},t)-\frac{\partial}{\partial \theta}w_{\mathrm{OFF},b}(\theta_{\max},t)-\frac{\partial}{\partial \theta}w_{\mathrm{ON},b}(\theta_{\max},t)=0, \tag{2.3c}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}w_{\mathrm{OFF},a}(\theta_{\min},t)-\frac{\partial}{\partial \theta}w_{\mathrm{OFF},b}(\theta_{\min},t)-\frac{\partial}{\partial \theta}w_{\mathrm{ON},b}(\theta_{\min},t)=0, \tag{2.3d}$$

où (2.3a) et (2.3b) sont les équations aux dérivées partielles décrivant la dynamique des distributions, (2.3c) et (2.3d) sont les conditions aux limites, θ_a est la température ambiante extérieure, $\theta_{\max}$ et $\theta_{\min}$ sont respectivement les températures maximale et minimale de la plage considérée et σ l'écart-type du bruit représentant les échanges de chaleur non modélisés explicitement. Enfin, P est la puissance thermique du système avec $P>0$ pour les systèmes de refroidissement et $P<0$ pour les systèmes de chauffage. Dans les équations (2.3c) et (2.3d), l'indice a correspond à la région où la température est inférieure à la limite basse (c'est-à-dire $\theta<\theta_{\min}$), l'indice b correspond à la région de la plage de température ($\theta_{\min}\leq\theta\leq\theta_{\max}$) et l'indice c correspond à la région où la température est supérieure à la limite haute ($\theta>\theta_{\max}$).

Par la suite, de nombreux travaux ont utilisé ce modèle d'EDP pour développer des stratégies

de contrôle des populations de TCLs [23, 31, 44].

Toutefois, ce modèle agrégé ne peut s'appliquer qu'à des populations homogènes, c'est-à-dire un ensemble d'appareils dont les propriétés thermiques, les dynamiques de changement d'état et les paramètres de contrôle sont identiques. Cependant, si l'on se place dans un contexte de contrôle réaliste, il est peu probable que la population de TCLs soit parfaitement homogène. De plus et comme expliqué précédemment, ceci pourrait amener les charges à se synchroniser et donc à provoquer de grandes variations de puissance consommée, ce qui est fortement indésirable dans le cadre de ce projet.

Pour étudier une population hétérogène de systèmes avec un modèle d'EDP, plusieurs études comme [30] proposent de diviser la population en plusieurs sous-ensembles regroupant des systèmes aux propriétés similaires. Chacun de ces groupes peut alors être considéré en première approximation comme une population homogène, ou du moins une population où l'hétérogénéité est faible. Cependant, cette approche peut ne pas être suffisante pour désynchroniser complètement les systèmes thermostatiques.

On s'intéresse alors au travail réalisé dans [41] par Moura, Ruiz et Bendsten (2013) où on propose un modèle basé sur les EDP pour des populations hétérogènes de TCLs. La solution est développée en partant d'un modèle agrégé d'une population homogène similaire à celui énoncé dans [23] et présenté dans les équations (2.3). Ce modèle est ensuite modifié pour être adapté à une population hétérogène en ajoutant un terme diffusif au système d'équations régissant les distributions de TCLs à l'état *ON* et à l'état *OFF* en fonction de la température. Le modèle ainsi développé s'écrit alors :

$$\frac{\partial w_{\mathrm{ON}}(\theta,t)}{\partial t} = -\frac{1}{RC}(\theta_a - \theta - RP)\frac{\partial w_{\mathrm{ON}}(\theta,t)}{\partial \theta} + \frac{1}{RC}w_{\mathrm{ON}}(\theta,t) + \beta\frac{\partial^2 w_{\mathrm{ON}}(\theta,t)}{\partial \theta^2}, \tag{2.4a}$$

$$\frac{\partial w_{\mathrm{OFF}}(\theta,t)}{\partial t} = -\frac{1}{RC}(\theta_a - \theta)\frac{\partial w_{\mathrm{OFF}}(\theta,t)}{\partial \theta} + \frac{1}{RC}w_{\mathrm{OFF}}(\theta,t) + \beta\frac{\partial^2 w_{\mathrm{OFF}}(\theta,t)}{\partial \theta^2}, \tag{2.4b}$$

$$w_{\mathrm{ON}}(\theta_{\max},t) = -\frac{\theta_a - \theta_{\max}}{\theta_a - \theta_{\max} - RP}w_{\mathrm{OFF}}(\theta_{\max},t), \tag{2.4c}$$

$$w_{\mathrm{OFF}}(\theta_{\min},t) = -\frac{\theta_a - \theta_{\min} - RP}{\theta_a - \theta_{\min}}w_{\mathrm{ON}}(\theta_{\min},t), \tag{2.4d}$$

avec β le coefficient de diffusion.

De plus, afin d'assurer la conservation du nombre de TCLs dans la population au cours du temps, deux autres équations (2.5) sont nécessaires et s'ajoutent aux équations (2.4).

$$\frac{\partial w_{\mathrm{ON}}(\theta_{\min}, t)}{\partial \theta} = -\frac{\partial w_{\mathrm{OFF}}(\theta_{\min}, t)}{\partial \theta}, \tag{2.5a}$$

$$\frac{\partial w_{\mathrm{OFF}}(\theta_{\max}, t)}{\partial \theta} = -\frac{\partial w_{\mathrm{ON}}(\theta_{\max}, t)}{\partial \theta}. \tag{2.5b}$$

On a ainsi le modèle complet décrivant la dynamique des distributions de systèmes à l'état *ON* ou *OFF* dans une population hétérogène.

D'autres travaux plus récents ont adapté ce modèle pour réaliser un contrôle de la température de populations hétérogènes de TCLs [24–27,30]. En effet, la consigne de température est alors modifiée pour l'ensemble de la population et doit suivre une référence visant à réguler la consommation globale des TCLs. Ce contrôle de la température se fait suivant une dynamique relativement lente qui ne permet pas de compenser les variations rapides de puissance dans le contexte d'un micro-réseau avec forte présence de sources d'énergie renouvelables. Ainsi, le contrôle résultant du modèle par EDP utilisé dans ce projet est associé à une stratégie de commande plus rapide développée dans la suite de ce mémoire.

L'état de l'art réalisé et tel que présenté dans cette partie permet de mieux appréhender les enjeux liés à l'utilisation des TCLs pour une RDC réalisée dans un contexte de micro-réseau où la production électrique se fait majoritairement grâce à des sources d'énergie renouvelables. La revue de littérature permet également de recenser les différentes méthodes existantes, d'encadrer de façon plus précise le travail présenté et de mieux définir les objectifs et les contributions de ce projet. Ceux-ci sont développés dans la section suivante.

2.2 Objectifs, méthodologie et contributions

L'état de l'art sert de fondation au travail réalisé dans le cadre de ce projet. Il facilite la compréhension des domaines et des enjeux clés du sujet et favorise une définition plus claire et élaborée des objectifs de recherche. Le premier consiste à modéliser une population de TCLs pouvant servir à la régulation dynamique de la charge. Le second objectif est la mise en place d'une stratégie de contrôle de la consommation des TCLs. Enfin pour le troisième objectif, il s'agit de proposer des scénarios réalistes d'application d'une telle régulation. Ceux-ci sont détaillés dans la suite de cette partie.

De plus, les éléments de contribution de ce mémoire ainsi que la méthodologie mise en place pour atteindre ces objectifs sont explicités pour chacun d'entre eux.

2.2.1 Modéliser une population de TCLs

Afin de réaliser un contrôle des systèmes thermostatiques dans le cadre d'une RDC, il convient tout d'abord de les modéliser. De nombreuses études se sont penchées sur cette problématique en proposant divers modèles thermiques. Toutefois, l'étude réalisée ici ne nécessite pas de modélisation avancée de tels appareils puisque l'on s'intéresse notamment aux variations de température de la pièce où se situe le système thermostatique et aux changements d'état (ON/OFF) associés. Toutefois, la population de TCLs modélisée se doit d'être hétérogène pour éviter une quelconque synchronisation des appareils. Enfin, la modélisation doit pouvoir s'appliquer à une grande population de systèmes thermostatiques, de l'ordre de plusieurs milliers.

Ainsi, on se concentre sur les travaux réalisés dans [41] où l'on propose un modèle simple décrivant les variations dynamiques de température pour des populations hétérogènes de systèmes de refroidissement. Ce modèle a par la suite été repris dans de nombreux travaux et peut être adapté à des systèmes chauffants.

C'est donc à partir de cette modélisation des populations de TCLs que l'on construit la stratégie de contrôle permettant de gérer la consommation.

2.2.2 Mettre en place une stratégie de contrôle sans prévision

Comme mentionné précédemment, cette étude se place dans le cadre d'un environnement de micro-réseau où la production électrique se fait majoritairement par des sources d'énergie renouvelables. Celles-ci engendrent des écarts imprévisibles entre la puissance produite et la puissance consommée par les charges. L'objectif est donc ici de proposer une méthode de contrôle qui ne nécessite aucune prévision et qui se base uniquement sur des grandeurs disponibles ou que l'on peut mesurer. De plus, cette stratégie doit permettre au système de réagir de façon suffisamment rapide et précise pour réguler au mieux les variations de puissance.

Ainsi, chaque contrôleur au niveau des charges doit prendre la décision d'allumer ou d'éteindre l'appareil correspondant indépendamment des autres contrôleurs. Pour cela, on s'intéresse à un contrôle de type hybride où les contrôleurs sont décentralisés avec tout de même la présence d'un centre de contrôle qui envoie les paramètres de régulation à l'ensemble de la population de TCLs. La communication est donc limitée pour éviter des délais de traitement importants dans le processus de contrôle et ainsi avoir un compromis entre précision et rapidité.

Pour savoir si un appareil doit être en marche ou à l'arrêt, on se base sur le processus décisionnel stochastique présenté dans [19] en l'adaptant au contrôle de la consommation

des charges thermostatiques. Ce processus attribue une probabilité de changement d'état à chaque appareil en réponse à la régulation souhaitée et indépendamment de l'état des autres contrôleurs. La précision de ce processus est assurée par le grand nombre de charges considérées.

Toutefois, ce contrôle peut s'avérer insuffisant dans le cas de grandes variations de puissance. On choisit alors de réaliser un contrôle supplémentaire basé sur le modèle par équations aux dérivées partielles présenté dans [41] et qui va s'appliquer à un niveau supérieur. Ce contrôle par EDP permet de réguler la consommation globale de l'ensemble de la population en modifiant la consigne de température.

Ainsi, la contribution principale pour cette partie correspond à l'association d'un contrôle par EDP agissant avec une dynamique lente pour réguler les variations globales de puissance et d'un contrôle stochastique de l'état des TCLs dont la dynamique permet de réagir aux variations plus rapides.

2.2.3 Proposer des scénarios réalistes nécessitant l'utilisation d'un tel contrôle

De nombreux articles s'intéressent aux TCLs dans le cadre de la RDC et proposent des méthodes permettant de modifier la consigne de température ou la distribution de charges en marche ou à l'arrêt en réponse aux variations de puissance ou de fréquence dans un réseau. Cependant, peu d'études précisent dans quelles circonstances ces changements d'état ou de consigne de température peuvent survenir. Certains travaux apportent tout de même quelques éléments de réponse, notamment ceux réalisés dans un cadre bien précis comme [21, 22].

L'objectif est donc ici d'expliciter quelques scénarios réalistes où le contrôle proposé peut être appliqué sans toutefois se limiter à un cadre très précis. Pour cela, on choisit de réaliser diverses simulations permettant de tester la stratégie de contrôle développée à travers divers scénarios que l'on peut retrouver dans des environnements différents. Ceux-ci s'inscrivent toutefois dans un contexte de micro-réseau avec une présence de sources d'énergie renouvelables.

Ainsi, les travaux présentés ici permettent de clarifier et de justifier l'utilisation d'un tel contrôle et apportent des précisions quant aux circonstances nécessitant une modification du comportement des TCLs. Cet aspect représente donc une contribution non négligeable de ce mémoire.

Dans ce qui suit, la méthodologie mise en place est appliquée afin d'atteindre les objectifs précédemment cités. La suite du mémoire permet donc d'expliciter le travail réalisé dans le cadre de ce projet et s'organise de la façon suivante. Le chapitre 3 explicite la modélisation

de populations de charges thermostatiques, le chapitre 4 détaille la stratégie de contrôle développée et le chapitre 5 présente les résultats obtenus en simulation après l'étude de plusieurs scénarios. Enfin, le chapitre 6 permet de clore ce mémoire en apportant quelques éléments de conclusion.

CHAPITRE 3 MODÉLISATION PAR ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES D'UNE GRANDE POPULATION DE CHARGES THERMOSTATIQUES

Les charges thermostatiques comme les climatiseurs ou les chauffages, que l'on retrouve abondamment dans un cadre domestique, sont des systèmes intéressants pouvant participer activement à la régulation de la puissance électrique consommée dans un micro-réseau. Dans ce chapitre, on propose de modéliser simplement des systèmes de refroidissement qui permettront par la suite un contrôle de la consommation. Ainsi, on s'intéresse tout d'abord à la modélisation d'un unique TCL puis d'une grande population de ces systèmes.

3.1 Modèle thermique d'un seul TCL

Le modèle décrivant la dynamique d'un système thermostatique peut être d'une grande complexité. Toutefois, dans le cadre de ce projet, on s'intéresse en particulier aux variations de la température et à l'état de fonctionnement, en marche (ON) ou à l'arrêt (OFF). On suppose que pour les systèmes considérés, cet état de fonctionnement dépend d'un thermostat qui maintient la température dans une certaine plage autour d'une température souhaitée (consigne). Lorsque la température atteint la limite haute, le système de refroidissement est mis en marche pour faire baisser la température et inversement, lorsque la température est à la limite basse, le système est mis à l'arrêt (voir Figure 3.1).

Ainsi, on peut considérer une modélisation simple du fonctionnement de ces systèmes que l'on retrouve dans plusieurs travaux [45–47]. Le modèle simplifié d'un TCL est alors équivalent à une résistance thermique en série avec une capacité thermique qui dépendent de l'environnement du système (épaisseur des murs, volume considéré, etc). Le couple résistance-capacité décrit les échanges thermiques dans la pièce où se situe le système et forme la partie continue du modèle. Les changements d'état (ON/OFF) de l'appareil forment eux la partie discrète de l'équation dynamique (3.1) des variations de température dans la pièce.

$$\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{RC}\left(\theta_a(t) - \theta(t)\right) - \frac{P}{C}s(t), \tag{3.1}$$

avec

- θ : la température intérieure ;
- θ_a : la température ambiante extérieure ;
- R : la résistance thermique de la pièce ;

— C : la capacité thermique de la pièce ;
— P : la puissance thermique échangée ;
— s : le signal de commutation de l'état du TCL défini par :

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \theta \geq \theta_{\max} \ ; \\ 0, & \text{si } \theta \leq \theta_{\min} \ ; \\ s(t^-), & \text{autrement,} \end{cases} \tag{3.2}$$

avec $\theta_{\min}$ et $\theta_{\max}$ respectivement les températures minimale et maximale possibles et $s(t^-)$ l'état précédent dans lequel se trouvait le système.

On comprend alors que ce modèle est formé de deux sous-systèmes interconnectés décrits par (3.1) et (3.2). Le premier est continu et correspond à la variable d'état $\theta(t)$ dont la dynamique est fonction de $s(t)$. Or $s(t)$ est la variable d'état discrète du second sous-système et sa valeur dépend elle-même de $\theta(t)$. Ainsi le signal de commutation permet de maintenir la température dans la plage considérée et autour d'une consigne θ_{cons} fixée. Les températures extrêmes sont déterminées à partir de cette consigne et en fonction de l'écart de température $\Delta\theta$ accepté. On a ainsi :

$$\theta_{\max} = \theta_{\text{cons}} + \frac{\Delta\theta}{2}, \tag{3.3a}$$

$$\theta_{\min} = \theta_{\text{cons}} - \frac{\Delta\theta}{2}. \tag{3.3b}$$

D'autre part, lorsque le TCL est à l'état ON (c'est-à-dire $s(t) = 1$), il consomme une puissance active P_{TCL} que l'on considère constante et qui dépend de la puissance thermique ainsi que de son coefficient de performance μ :

$$P_{\text{TCL}} = \frac{P}{\mu}. \tag{3.4}$$

Quand celui-ci est à l'état OFF ($s(t) = 0$), la puissance consommée est nulle comme on peut le voir Figure 3.1. On retrouve bien la partie continue du modèle avec les variations thermiques et la partie discrète portée par les commutations ON/OFF responsables des variations instantanées de la puissance consommée.

Le modèle élémentaire d'un TCL étant désormais établi, on s'intéresse dans la partie suivante au modèle agrégé d'un ensemble de TCLs.

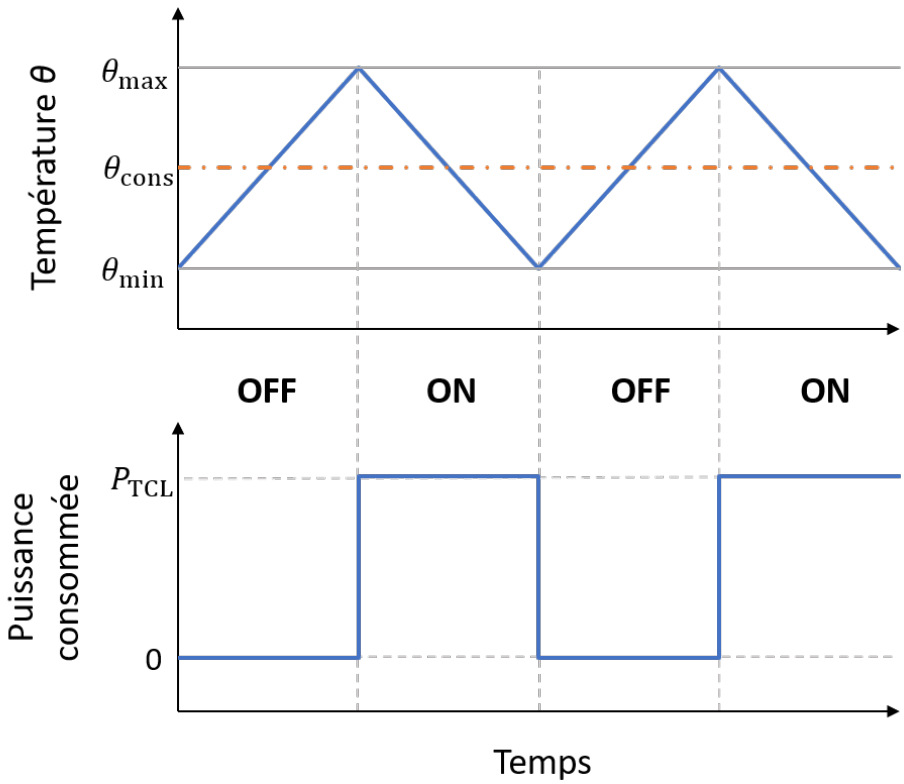


Figure 3.1 Dynamique d'un système de refroidissement.

3.2 Modèle d'une population de TCLs

Dans ce projet, on cherche à réguler la puissance consommée dans un micro-réseau avec une forte présence de sources d'énergie renouvelables. Un unique système thermostatique n'apporte pas suffisamment de flexibilité en matière de consommation de puissance pour atteindre cet objectif. Ainsi, on s'intéresse désormais à une grande population de TCLs que l'on modélise à partir du système élémentaire présenté précédemment.

On considère ainsi une population hétérogène de taille N pour laquelle la dynamique du i-ème TCL est décrite par les équations (3.5) et (3.6).

$$\dot{\theta}_i = \frac{1}{R_i C_i} \left(\theta_{a,i} - \theta_i - R_i P_i s_i \right), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3.5}$$

$$s_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \theta_i \geq \theta_{\max,i} \ ; \\ 0, & \text{si } \theta_i \leq \theta_{\min,i} \ ; \\ s_i(t^-), & \text{autrement.} \end{cases} \tag{3.6}$$

L'hétérogénéité de la population modélisée est assurée par une randomisation d'un ou plusieurs paramètres, permettant ainsi de désynchroniser les appareils. Toutefois, on considère dans le cadre de cette étude que les TCLs sont situés dans une zone géographique suffisamment restreinte pour que les variations de température ambiante soient similaires pour l'ensemble de la population. De plus, la consigne ainsi que la déviation autorisée de la température sont identiques pour tous les TCLs. La dynamique d'un TCL appartenant à cette population est donc finalement telle que présentée par (3.7) et (3.8).

$$\dot{\theta}_i = \frac{1}{R_i C_i} \left(\theta_a - \theta_i - R_i P_i s_i \right), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3.7}$$

$$s_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \theta_i \geq \theta_{\max} \ ; \\ 0, & \text{si } \theta_i \leq \theta_{\min} \ ; \\ s_i(t^-), & \text{autrement.} \end{cases} \tag{3.8}$$

La puissance totale consommée par une telle population est donc simplement la somme des puissances consommées par les TCLs en marche et s'écrit :

$$P_{\text{TCLs}}(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{P_i s_i(t)}{\eta_i}, \tag{3.9}$$

avec η_i le coefficient de performance du i-ème TCL.

Afin d'étudier maintenant le comportement global de la population et pas seulement d'un seul TCL, on s'intéresse au modèle par équations aux dérivées partielles qui sépare la population en deux sous-ensembles : les TCLs à l'état *ON* et les TCLs à l'état *OFF*. À un certain temps t et pour une température θ, on considère alors la distribution de charges à l'état *ON* et à l'état *OFF* que l'on note respectivement $w_{\text{ON}}(\theta, t)$ et $w_{\text{OFF}}(\theta, t)$.

Dans le cas de systèmes de refroidissement, les TCLs à l'état *ON* voient leur température baisser, il y a donc un "déplacement" au sein de la distribution w_{ON} vers des températures plus basses. Au sein de la distribution w_{OFF} des TCLs à l'état *OFF*, le déplacement a lieu dans le sens opposé, vers des températures plus hautes. Ceci est illustré Figure 3.2 où les transitions *ON*/*OFF* sont également représentées pour les systèmes atteignant les températures limites.

Dans un premier temps et afin de simplifier le raisonnement, on considère que la population étudiée est homogène. Les flux des charges à l'état *ON* ou *OFF* traversant une température θ

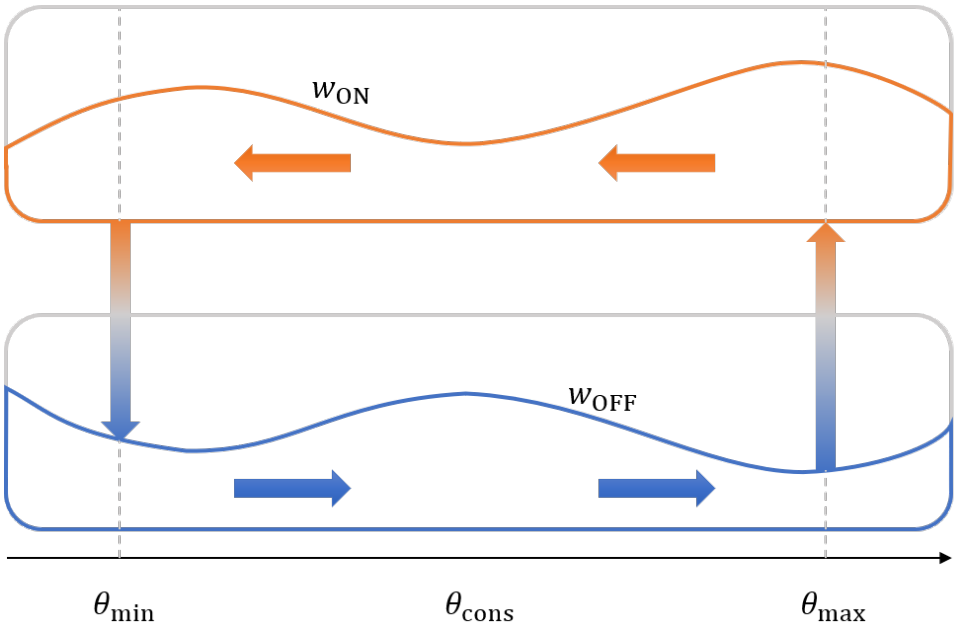


Figure 3.2 Processus de déplacement au sein des distributions de systèmes à l'état *ON* ou *OFF*.

à un temps t peuvent alors s'écrire :

$$\Phi_{\mathrm{ON}}(\theta,t) = w_{\mathrm{ON}}(\theta,t)\left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{s(t)=1}, \tag{3.10a}$$

$$\Phi_{\mathrm{OFF}}(\theta,t) = w_{\mathrm{OFF}}(\theta,t)\left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{s(t)=0}. \tag{3.10b}$$

En appliquant l'équation (3.7), on obtient :

$$\Phi_{\mathrm{ON}}(\theta,t) = \alpha_{\mathrm{ON}}(\theta,\theta_a)w_{\mathrm{ON}}(\theta,t), \tag{3.11a}$$

$$\Phi_{\mathrm{OFF}}(\theta,t) = \alpha_{\mathrm{OFF}}(\theta,\theta_a)w_{\mathrm{OFF}}(\theta,t), \tag{3.11b}$$

où

$$\alpha_{\mathrm{ON}}(\theta,\theta_a) = \frac{1}{R_0C_0}\left(\theta_a - \theta - R_0P_0\right), \tag{3.12a}$$

$$\alpha_{\mathrm{OFF}}(\theta,\theta_a) = \frac{1}{R_0C_0}\left(\theta_a - \theta\right), \tag{3.12b}$$

avec R_0, C_0 et P_0 représentant respectivement la résistance, la capacité ainsi que la puissance thermique de la population de TCLs.

Afin d'aboutir au modèle permettant de décrire la dynamique des distributions, on s'intéresse aux flux traversant un segment infinitésimal de température de taille $\delta\theta$. Si le flux entrant est supérieur au flux sortant, cela entraîne alors une augmentation de la distribution des charges concernées et inversement dans le cas où le flux sortant est supérieur au flux entrant. Les variations des distributions dépendent alors de la différence entre ces deux flux, mais pas seulement.

En effet, dans le cadre de ce projet, des commutations ON/OFF forcées peuvent subvenir, entraînant des flux supplémentaires, comme illustré Figure 3.3. Ainsi, on note $\varphi_{\mathrm{OFF,ON}}(\theta, t)$ le flux décrivant les commutations de l'état OFF à ON à la température θ et au temps t et $\varphi_{\mathrm{ON,OFF}}(\theta, t)$ le flux décrivant les commutations de l'état ON à OFF.

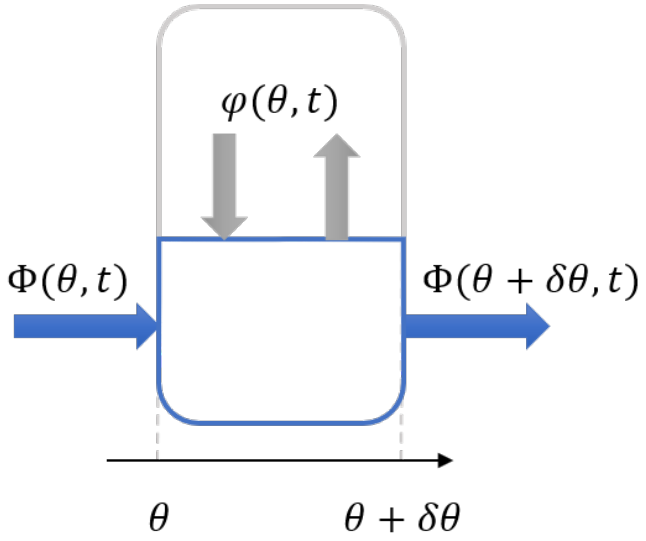


Figure 3.3 Flux entrant et sortant pour un segment infinitésimal de température.

Ainsi, les variations élémentaires des deux distributions au cours du temps et pour une température θ sont données par :

$$\frac{\partial w_{\mathrm{ON}}(\theta, t)}{\partial t} = \lim_{\delta\theta \to 0} \frac{\Phi_{\mathrm{ON}}(\theta, t) - \Phi_{\mathrm{ON}}(\theta + \delta\theta, t)}{\delta\theta} + \varphi_{\mathrm{OFF,ON}}(\theta, t) - \varphi_{\mathrm{ON,OFF}}(\theta, t), \tag{3.13a}$$

$$\frac{\partial w_{\mathrm{OFF}}(\theta, t)}{\partial t} = \lim_{\delta\theta \to 0} \frac{\Phi_{\mathrm{OFF}}(\theta, t) - \Phi_{\mathrm{OFF}}(\theta + \delta\theta, t)}{\delta\theta} + \varphi_{\mathrm{ON,OFF}}(\theta, t) - \varphi_{\mathrm{OFF,ON}}(\theta, t). \tag{3.13b}$$

On note $\varphi(\theta, t) = \varphi_{\mathrm{OFF,ON}}(\theta, t) - \varphi_{\mathrm{ON,OFF}}(\theta, t)$ la différence entre les deux flux de commuta-

tion. On obtient alors :

$$\frac{\partial w_{\mathrm{ON}}(\theta,t)}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi_{\mathrm{ON}}(\theta,t)}{\partial \theta} + \varphi(\theta,t), \tag{3.14a}$$

$$\frac{\partial w_{\mathrm{OFF}}(\theta,t)}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi_{\mathrm{OFF}}(\theta,t)}{\partial \theta} - \varphi(\theta,t). \tag{3.14b}$$

Dans la suite, on utilise les notations $\partial_\theta(\cdot)$ et $\partial_t(\cdot)$ pour désigner respectivement les dérivées partielles par rapport à la température et au temps.

Ainsi, en appliquant les équations (3.11a) et (3.11b) à (3.14a) et (3.14b), on obtient :

$$\partial_t w_{\mathrm{ON}}(\theta,t) = -\partial_\theta\Big(\alpha_{\mathrm{ON}}(\theta,\theta_a) w_{\mathrm{ON}}(\theta,t)\Big) + \varphi(\theta,t), \tag{3.15a}$$

$$\partial_t w_{\mathrm{OFF}}(\theta,t) = -\partial_\theta\Big(\alpha_{\mathrm{OFF}}(\theta,\theta_a) w_{\mathrm{OFF}}(\theta,t)\Big) - \varphi(\theta,t). \tag{3.15b}$$

On a donc finalement deux équations de transport qui décrivent la dynamique des distributions de charges à l'état *ON* et à l'état *OFF* dans la population homogène.

Ces équations décrivent un processus similaire à la convection et qui correspond au mouvement de la population dans son ensemble. Toutefois, afin de modéliser une population hétérogène, on propose dans [41] d'ajouter un terme diffusif aux équations (3.15a) et (3.15b) pour prendre en considération le caractère non homogène des TCLs au sein des distributions. On obtient alors un couple d'équations de Fokker-Planck qui s'écrivent de la façon suivante :

$$\partial_t w_{\mathrm{ON}}(\theta,t) = \beta\partial_\theta^2 w_{\mathrm{ON}}(\theta,t) - \partial_\theta\Big(\alpha_{\mathrm{ON}}(\theta,\theta_a) w_{\mathrm{ON}}(\theta,t)\Big) + \varphi(\theta,t), \tag{3.16a}$$

$$\partial_t w_{\mathrm{OFF}}(\theta,t) = \beta\partial_\theta^2 w_{\mathrm{OFF}}(\theta,t) - \partial_\theta\Big(\alpha_{\mathrm{OFF}}(\theta,\theta_a) w_{\mathrm{OFF}}(\theta,t)\Big) - \varphi(\theta,t), \tag{3.16b}$$

où $\partial_\theta^2(\cdot)$ désigne la dérivée partielle de second ordre par rapport à la température et β le coefficient de diffusion. Comme expliqué dans [41], ce paramètre permet de modéliser le phénomène de diffusion que l'on observe au niveau de la distribution des températures des TCLs dans le cas d'une population hétérogène.

Ces deux équations décrivent ainsi l'évolution de la proportion de TCLs à l'état *ON* et à l'état *OFF* au cours du temps. Toutefois, la taille de la population agrégée doit être conservée en

tout temps et celle-ci peut s'exprimer en fonction des deux distributions de la façon suivante :

$$N_{ag}(t) = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \Big(w_{\mathrm{ON}}(\theta,t) + w_{\mathrm{OFF}}(\theta,t)\Big)\mathrm{d}\theta = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \Big(w_{\mathrm{ON}}(\theta,0) + w_{\mathrm{OFF}}(\theta,0)\Big)\mathrm{d}\theta. \tag{3.17}$$

Pour que cela soit respecté et avoir une conservation de la masse de la population, il faut donc :

$$\dot{N}_{ag}(t) = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \Big(\partial_t w_{\mathrm{ON}}(\theta,t) + \partial_t w_{\mathrm{OFF}}(\theta,t)\Big)\mathrm{d}\theta = 0. \tag{3.18}$$

En appliquant les équations (3.16a) et (3.16b), il vient :

$$\begin{aligned}\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \Big[&\beta\partial_\theta^2 w_{\mathrm{ON}}(\theta,t) - \partial_\theta\Big(\alpha_{\mathrm{ON}}(\theta,\theta_a)w_{\mathrm{ON}}(\theta,t)\Big) \\ &+\beta\partial_\theta^2 w_{\mathrm{OFF}}(\theta,t) - \partial_\theta\Big(\alpha_{\mathrm{OFF}}(\theta,\theta_a)w_{\mathrm{OFF}}(\theta,t)\Big)\Big]\mathrm{d}\theta = 0.\end{aligned} \tag{3.19}$$

D'où la relation suivante :

$$\begin{aligned}&\beta\partial_\theta w_{\mathrm{ON}}(\theta_{\max},t) - \alpha_{\mathrm{ON}}(\theta_{\max},\theta_a)w_{\mathrm{ON}}(\theta_{\max},t) \\ &\qquad + \beta\partial_\theta w_{\mathrm{OFF}}(\theta_{\max},t) - \alpha_{\mathrm{OFF}}(\theta_{\max},\theta_a)w_{\mathrm{OFF}}(\theta_{\max},t) \\ &= \beta\partial_\theta w_{\mathrm{ON}}(\theta_{\min},t) - \alpha_{\mathrm{ON}}(\theta_{\min},\theta_a)w_{\mathrm{ON}}(\theta_{\min},t) \\ &\qquad + \beta\partial_\theta w_{\mathrm{OFF}}(\theta_{\min},t) - \alpha_{\mathrm{OFF}}(\theta_{\min},\theta_a)w_{\mathrm{OFF}}(\theta_{\min},t).\end{aligned} \tag{3.20}$$

On choisit alors les conditions aux limites telles que :

$$\beta\partial_\theta w_{\mathrm{ON}}(\theta_{\max},t) - \alpha_{\mathrm{ON}}(\theta_{\max},\theta_a)w_{\mathrm{ON}}(\theta_{\max},t) = \varphi(\theta_{\max},t), \tag{3.21a}$$

$$\beta\partial_\theta w_{\mathrm{OFF}}(\theta_{\max},t) - \alpha_{\mathrm{OFF}}(\theta_{\max},\theta_a)w_{\mathrm{OFF}}(\theta_{\max},t) = -\varphi(\theta_{\max},t), \tag{3.21b}$$

$$\beta\partial_\theta w_{\mathrm{ON}}(\theta_{\min},t) - \alpha_{\mathrm{ON}}(\theta_{\min},\theta_a)w_{\mathrm{ON}}(\theta_{\min},t) = -\varphi(\theta_{\min},t), \tag{3.21c}$$

$$\beta\partial_\theta w_{\mathrm{OFF}}(\theta_{\min},t) - \alpha_{\mathrm{OFF}}(\theta_{\min},\theta_a)w_{\mathrm{OFF}}(\theta_{\min},t) = \varphi(\theta_{\min},t). \tag{3.21d}$$

Ces conditions assurent la conservation du nombre de TCLs au cours du temps et complètent les équations de Fokker-Planck précédemment établies pour former le modèle par équations aux dérivées partielles d'une population hétérogène de TCLs.

La puissance totale consommée par la population agrégée de TCLs peut être obtenue à partir de la distribution de charges à l'état *ON* telle que :

$$P_{\mathrm{TCLs},ag} = \frac{P_0}{\eta_0} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} w_{\mathrm{ON}}(\theta, t)\mathrm{d}\theta, \tag{3.22}$$

avec P_0 et η_0 représentant respectivement la puissance thermique et le coefficient de performance de la population.

Le modèle d'une population hétérogène de systèmes thermostatiques est donc finalement établi, que ce soit pour un contrôle individuel des TCLs ou pour un contrôle agrégé de l'ensemble de la population. Le chapitre suivant détaille la stratégie de contrôle permettant de réguler la puissance totale consommée par un grand nombre de TCLs.

CHAPITRE 4 STRATÉGIE DE CONTRÔLE À DEUX NIVEAUX POUR RÉGULER LA PUISSANCE CONSOMMÉE PAR UNE POPULATION DE TCLs

Afin d'utiliser les charges thermostatiques comme systèmes de régulation dans un micro-réseau, il convient de contrôler leur consommation en temps réel et en réponse aux différentes fluctuations de puissance. Dans ce chapitre, on présente une stratégie de contrôle agissant à deux niveaux. On s'intéresse ainsi en premier lieu à un contrôle permettant de réguler des écarts de puissance rapides et de faible amplitude. En second lieu, un contrôle de niveau supérieur est proposé pour gérer des variations plus importantes et plus lentes. Enfin, les deux types de contrôle sont combinés pour assurer une régulation à deux niveaux.

4.1 Contrôle de niveau inférieur par changement d'état forcé

Un TCL traditionnellement contrôlé par un thermostat change d'état (marche/arrêt) lorsque la température atteint les limites basse et haute fixées, tel que présenté Figure 3.1 pour un système de refroidissement. Lorsque celui-ci est à l'état *ON*, on considère qu'il consomme une puissance active P_{TCL} constante. Inversement quand le TCL est à l'état *OFF*, la puissance consommée est supposée nulle. Ainsi, contrôler le fonctionnement d'une population de TCLs en forçant le passage d'un état à un autre permet d'agir instantanément sur la puissance consommée par celle-ci. En effet, forcer une proportion de TCLs à l'arrêt permet de diminuer la consommation et inversement, mettre en marche une partie de la population engendre une augmentation de la puissance consommée. Comme illustré Figure 4.1, ces changements d'état forcés interviennent de façon instantanée en complément des changements "naturels" imposés par le thermostat et servent ainsi à une régulation de la puissance.

Dans le cadre de ce projet, cette régulation doit se faire en minimisant les communications entre les différents systèmes. Ainsi, chaque TCL doit prendre la décision de changer d'état ou de rester dans son état actuel indépendamment des autres et sans connaître leur état de fonctionnement. Ceci permet d'éviter les communications entre les différents systèmes thermostatiques qui peuvent introduire des délais de traitement pour le contrôle. Toutefois, on suppose la présence d'un centre de contrôle auquel on attribue deux fonctions principales :

- Première fonction : établir, à partir des écarts de puissance dans le réseau, la proportion supplémentaire de TCLs que l'on désire éteindre ou allumer ;
- Seconde fonction : communiquer cette proportion désirée à l'ensemble des TCLs.

On suppose donc qu'il est possible de réaliser des mesures de puissance dans le micro-réseau

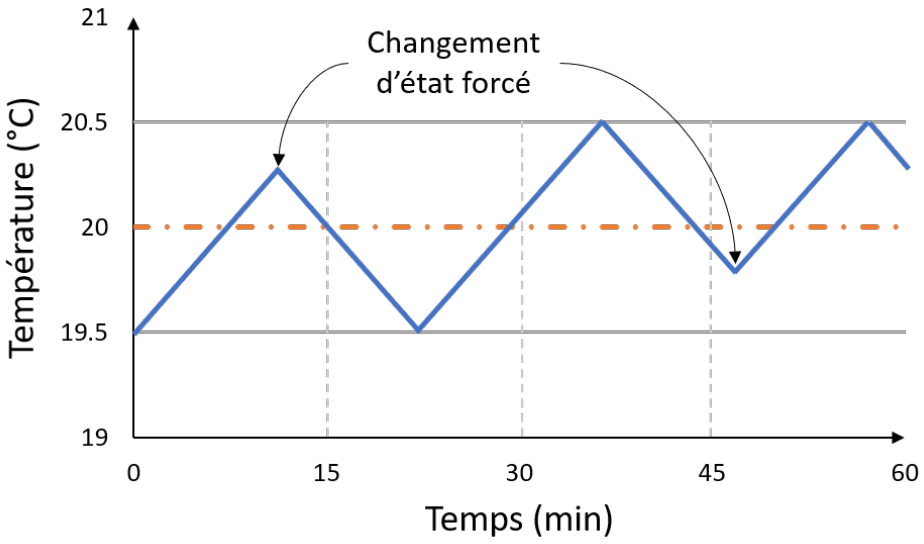


Figure 4.1 Dynamique d'un TCL avec changement d'état forcé.

considéré et que les systèmes impliqués dans les variations de puissance se répartissent en trois catégories :

- Les générateurs, avec une certaine proportion de sources d'énergie renouvelables, produisent une puissance $P_{\text{prod}}(t)$;
- Les charges non contrôlées (CNC) de nature quelconque consomment une puissance active $P_{\text{CNC}}(t)$;
- Les TCLs, qui sont des charges contrôlées, consomment une puissance $P_{\text{TCLs}}(t)$ qui dépend de la proportion de la population à l'état *ON*.

Dans le cadre de cette étude, les TCLs sont utilisés pour équilibrer la puissance produite par les générateurs et celle consommée par les charges non contrôlées. La variation de puissance des TCLs, que l'on note $\Delta P_{\text{TCLs}}(t)$ doit donc être équivalente à la différence de puissance $\Delta P(t) = P_{\text{prod}}(t) - P_{\text{CNC}}(t)$ en tout temps. En considérant qu'une proportion $(x_{\text{ON}})_{\text{nom}}$ de TCLs est en marche lorsque $\Delta P(t) = 0$, la puissance désirée $(P_{\text{TCLs}})_{\text{ref}}(t)$ pour la consommation des TCLs doit respecter la relation suivante :

$$(P_{\text{TCLs}})_{\text{ref}}(t) = P_{\text{nom}} + \Delta P_{\text{TCLs}}(t) = P_{\text{nom}} + \Delta P(t), \tag{4.1}$$

avec P_{nom} la puissance consommée par la portion $(x_{\text{ON}})_{\text{nom}}$ de TCLs à l'état *ON*.

La puissance de référence définie en (4.1) est ensuite normalisée en fonction de la puissance totale $(P_{\text{TCLs}})_{\text{tot}}$ pouvant être consommée par la population afin d'avoir la proportion désirée

$(x_{\mathrm{ON}})_{\mathrm{ref}}(t)$ de charges à l'état *ON*. Pour une population de taille N, on a donc :

$$(x_{\mathrm{ON}})_{\mathrm{ref}}(t) = \frac{(P_{\mathrm{TCLs}})_{\mathrm{ref}}(t)}{(P_{\mathrm{TCLs}})_{\mathrm{tot}}}, \tag{4.2}$$

où

$$(P_{\mathrm{TCLs}})_{\mathrm{tot}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{P_i}{\eta_i}. \tag{4.3}$$

De la même façon, avec la mesure de la puissance $P_{\mathrm{TCLs}}(t)$ réellement consommée, on peut avoir la proportion $x_{\mathrm{ON}}(t)$ de TCLs à l'état *ON* :

$$x_{\mathrm{ON}}(t) = \frac{P_{\mathrm{TCLs}}(t)}{(P_{\mathrm{TCLs}})_{\mathrm{tot}}}. \tag{4.4}$$

On définit alors $\Delta x_{\mathrm{ON}}(t)$ comme étant la proportion supplémentaire de TCLs qu'il faut éteindre ou allumer pour atteindre la référence, telle que :

$$\Delta x_{\mathrm{ON}}(t) = (x_{\mathrm{ON}})_{\mathrm{ref}}(t) - x_{\mathrm{ON}}(t). \tag{4.5}$$

Cette proportion Δx_{ON} est ensuite envoyée à chaque TCL qui prend la décision de forcer un changement d'état ou de rester dans son état actuel, indépendamment des autres.

Pour chaque intervalle de temps, un processus décisionnel est ainsi mis en place au niveau de chaque TCL. Les étapes de ce processus sont décrites par le logigramme Figure 4.2 et peuvent être résumées de la façon suivante :

1. Si Δx_{ON} est positif, il faut augmenter le nombre de TCLs à l'état *ON* et donc agir uniquement sur les TCLs actuellement à l'état *OFF* (cas 1). Inversement, si Δx_{ON} est négatif, on agit uniquement sur les TCLs à l'état *ON* pour en éteindre (cas 2) ;
2. Au niveau des TCLs concernés (cas 1 ou 2), un nombre compris entre 0 et 1 est généré aléatoirement ;
3. Si ce nombre est supérieur à $|\Delta x_{\mathrm{ON}}|$, le TCL reste dans son état actuel. Si au contraire le nombre généré est inférieur ou égal à $|\Delta x_{\mathrm{ON}}|$ alors un changement d'état forcé se produit.

Ce processus, appliqué à un grand nombre de systèmes, permet d'obtenir une variation $(\Delta x_{\mathrm{ON}})_{\mathrm{reel}}$ de la proportion de TCLs à l'état *ON* proche de celle désirée (c'est-à-dire Δx_{ON}). En effet, le nombre généré aléatoirement entre 0 et 1 par chaque TCL est défini par une

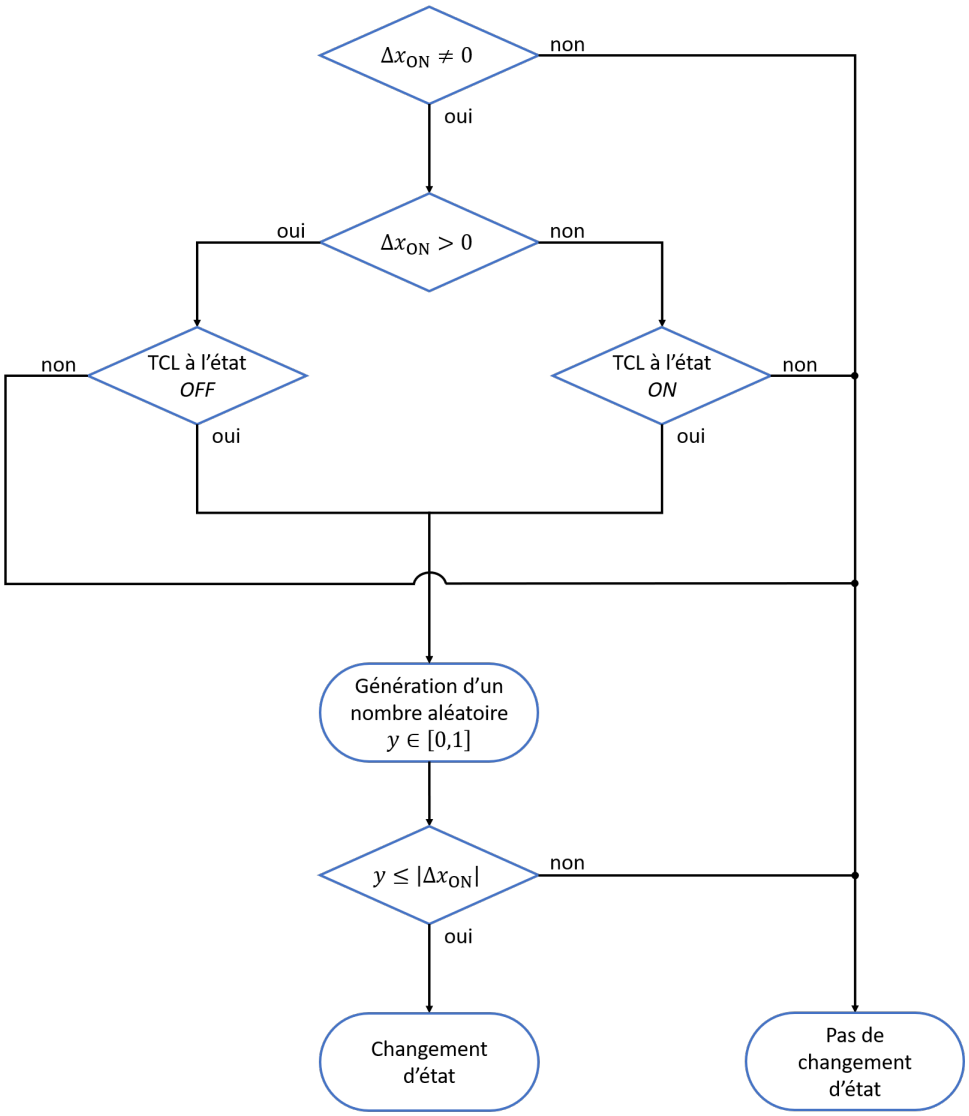


Figure 4.2 Processus décisionnel pour un changement d'état forcé.

variable aléatoire que l'on nomme Y et qui suit une loi uniforme standard telle que :

$$Y \rightarrow \mathcal{U}(0,1). \tag{4.6}$$

Le changement d'état d'un TCL est également représenté par une variable aléatoire X. Cette variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ est définie comme le nombre de TCLs ayant changé d'état, que l'on applique à un seul TCL. C'est-à-dire que $X = 1$ si le TCL considéré change d'état et $X = 0$ si le TCL reste dans le même état de fonctionnement. Or, d'après le processus décisionnel, un système change d'état lorsque Y est inférieur ou égal à la variation

désirée $|\Delta x_{\mathrm{ON}}|$. En notant $\mathcal{P}(A)$ la probabilité d'occurrence d'un évènement A, on a donc :

$$\mathcal{P}(X = 1) = \mathcal{P}(Y \leq |\Delta x_{\mathrm{ON}}|). \tag{4.7}$$

Or comme Y suit une loi uniforme standard et par définition de sa fonction de répartition, on a :

$$\mathcal{P}(Y \leq |\Delta x_{\mathrm{ON}}|) = |\Delta x_{\mathrm{ON}}|. \tag{4.8}$$

Ce qui implique :

$$\mathcal{P}(X = 1) = |\Delta x_{\mathrm{ON}}|, \tag{4.9a}$$

$$\mathcal{P}(X = 0) = 1 - |\Delta x_{\mathrm{ON}}|. \tag{4.9b}$$

En notant $E(X)$ l'espérance de la variable aléatoire X, on a donc :

$$E(X) = \mu = |\Delta x_{\mathrm{ON}}|. \tag{4.10}$$

On considère désormais l'ensemble de la population de TCLs. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_N$ des variables aléatoires représentant, de la même façon que X, le changement d'état des TCLs au sein d'une population de taille N avec $X_i|_{i=1,\ldots,N} = 1$ si le i-ème TCL change d'état et $X_i|_{i=1,\ldots,N} = 0$ s'il reste dans le même état. Comme le changement d'état d'un TCL ne dépend pas du changement d'état des autres et comme le processus de décision est le même pour l'ensemble de la population, alors les variables aléatoires $X_i|_{i=1,\ldots,N}$ sont indépendantes et identiquement distribuées comme X, avec une espérance $|\Delta x_{\mathrm{ON}}|$ et un écart-type σ.

De plus, on définit $\overline{X}_N$ comme étant la moyenne des variables aléatoires $X_i|_{i=1,\ldots,N}$. Comme ces variables ne peuvent être égales qu'à 0 (pas de changement d'état) ou 1 (changement d'état) alors cette moyenne représente la proportion (en pourcentage) de systèmes ayant changé d'état et s'écrit :

$$\overline{X}_N = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N} = |(\Delta x_{\mathrm{ON}})_{\mathrm{reel}}|. \tag{4.11}$$

Ainsi, et d'après la forme faible de la Loi des Grands Nombres présentée en Annexe A, on a :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{N \to \infty} \mathcal{P}\left(\left| |(\Delta x_{\mathrm{ON}})_{\mathrm{reel}}| - |\Delta x_{\mathrm{ON}}| \right| \geq \epsilon \right) = 0. \tag{4.12}$$

Ceci signifie qu'en appliquant le processus décisionnel stochastique précédemment décrit à une

très grande population de TCLs, la proportion réelle de systèmes qui subissent un changement d'état forcé à un certain temps converge (avec une erreur ϵ) vers la proportion désirée $|\Delta x_{\mathrm{ON}}|$. Plus le nombre de systèmes considérés sera grand, plus ce processus sera précis, comme cela est illustré Figure 4.3 où le processus précédemment décrit est répété 10 fois pour un nombre croissant de systèmes. L'écart entre la valeur désirée et les valeurs moyennes réelles est d'autant plus faible que le nombre total de systèmes augmente, assurant ainsi une précision croissante.

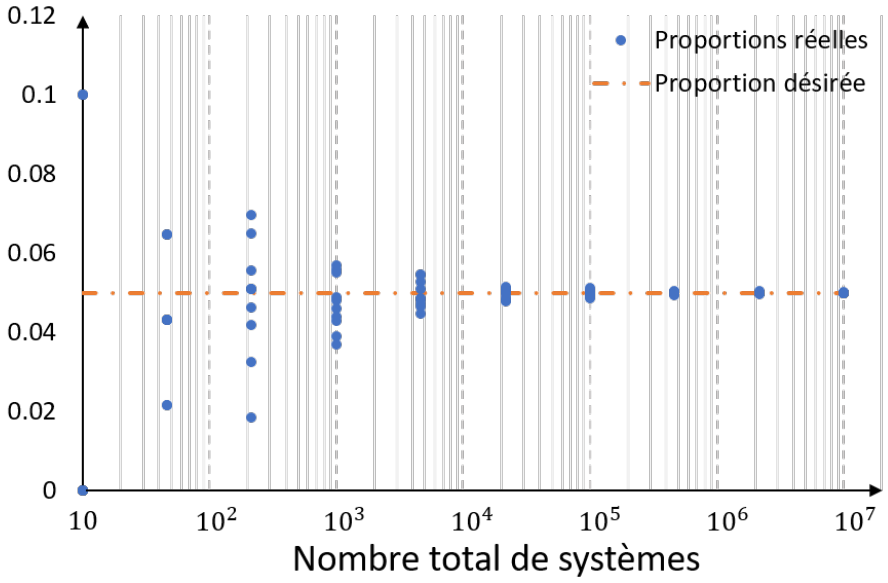


Figure 4.3 Illustration de la Loi des Grands Nombres.

De plus, en notant Δt la période d'échantillonnage, on a :

$$x_{\mathrm{ON}}(t + \Delta t) = x_{\mathrm{ON}}(t) + (\Delta x_{\mathrm{ON}})_{\mathrm{reel}}(t), \tag{4.13}$$

et en reprenant l'équation (4.5), cela donne :

$$x_{\mathrm{ON}}(t + \Delta t) = (x_{\mathrm{ON}})_{\mathrm{ref}}(t) - \Delta x_{\mathrm{ON}}(t) + (\Delta x_{\mathrm{ON}})_{\mathrm{reel}}\,. \tag{4.14}$$

Or la variation $(\Delta x_{\mathrm{ON}})_{\mathrm{reel}}$ se rapproche de la variation désirée Δx_{ON} pour une grande population de TCLs (équation (4.12)). Dans ce cas, la proportion de TCLs à l'état *ON* se rapproche donc de la proportion de référence. De plus, le caractère stochastique de ce processus permet d'hétérogénéiser davantage la population et ainsi éviter toute forme de synchronisation.

Toutefois, pour appliquer ce processus décisionnel stochastique, des conditions supplémentaires doivent être respectées au préalable. En effet, pour pouvoir forcer le changement d'état

d'un TCL il faut tout d'abord vérifier que la température ne dépasse pas les limites $\theta_{\min}$ et $\theta_{\max}$ fixées par le thermostat. De plus, afin d'éviter des changements d'état trop fréquents, l'état de chaque TCL est bloqué pendant un temps t_{bcg} après chaque changement d'état. Ainsi, il faut que celui-ci soit "disponible" pour un éventuel changement d'état forcé. Si ces deux conditions ne sont pas respectées le processus n'est pas appliqué au TCL considéré. Cependant, un TCL considéré comme "bloqué" peut toujours changer d'état si la température atteint les limites $\theta_{\max}$ ou $\theta_{\min}$. Les changements d'état "naturels" ont donc un statut prioritaire.

En reprenant le modèle des TCLs décrit par l'équation (3.7), on peut appliquer une loi de commande u_i au i-ème TCL afin de contrôler les changements d'état. La dynamique du i-ème TCL dans une population de taille N peut alors être décrite par :

$$\dot{\theta}_i = \frac{1}{R_i C_i} \left(\theta_a - \theta_i - R_i P_i u_i\right), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{4.15}$$

avec

$$u_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \theta_i \geq \theta_{\max} \ ; \\ 0, & \text{si } \theta_i \leq \theta_{\min} \ ; \\ \Big(u_i(t^-) \wedge \Big(s_{f,i}(t) r_i(t)\Big)\Big) + \Big(u_i(t^-) \vee \Big(s_{f,i}(t) r_i(t)\Big)\Big), & \text{autrement,} \end{cases} \tag{4.16}$$

où "$\wedge$" et "$\vee$" représentent respectivement les opérations booléennes "ET" et "OU" et "+" correspond à l'addition binaire sur un bit avec débordement (*overflow*).

$s_{f,i}(t)$ permet de décrire le processus décisionnel stochastique précédemment explicité et s'écrit :

$$s_{f,i}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \Big(C_{\mathrm{ON},i} \vee C_{\mathrm{OFF},i}\Big) \wedge C_{y,i} = 1 \ ; \\ 0, & \text{autrement,} \end{cases} \tag{4.17}$$

avec

$$C_{\mathrm{ON},i} = \Big(\Delta x_{\mathrm{ON}}(t) > 0\Big) \wedge \Big(u_i(t^-) = 0\Big), \tag{4.18a}$$

$$C_{\mathrm{OFF},i} = \Big(\Delta x_{\mathrm{ON}}(t) < 0\Big) \wedge \Big(u_i(t^-) = 1\Big), \tag{4.18b}$$

$$C_{y,i} = y_i \leq |\Delta x_{\mathrm{ON}}(t)|. \tag{4.18c}$$

$r_i(t)$ décrit la disponibilité d'un TCL et prend comme valeur 0 si le TCL considéré est bloqué (suite à un changement d'état forcé et pour une durée t_{bcg}) ou 1 si celui-ci est disponible.

La commande ainsi réalisée permet donc de prendre en considération les changements d'état liés au contrôle par thermostat ainsi que les changements d'état forcés prévus par le processus stochastique. Ce contrôle de la proportion de TCLs en état de marche permet une régulation rapide de la puissance consommée par ces systèmes. Ceci peut être utile dans le cas d'une production d'électricité par des sources d'énergie renouvelables où les variations se font rapidement et de façon imprévisible. Cependant, cette régulation ne peut se faire que pour des variations de faible amplitude afin de maintenir la température autour de sa consigne.

Dans la partie suivante, on s'intéresse donc à un deuxième contrôle qui agit à un niveau supérieur pour prendre en compte des variations de puissance de plus grande amplitude.

4.2 Contrôle de niveau supérieur par équations aux dérivées partielles

Une population de charges thermostatiques fonctionnant autour d'une consigne de température voit sa proportion de systèmes en état de marche se stabiliser globalement autour d'une certaine valeur. Cette proportion moyenne dépend des caractéristiques des TCLs considérés (résistance et puissance thermique par exemple), mais également de leur environnement. En effet, la température ambiante extérieure ainsi que la température choisie comme consigne ont une influence sur la proportion moyenne de TCLs en état de marche. Ainsi, en modifiant la consigne de température, il est possible de contrôler la proportion de systèmes à l'état *ON* et donc la consommation globale au sein d'une population.

Toutefois, les processus thermiques, que ce soit pour un refroidissement ou un chauffage, présentent de par leur nature des dynamiques lentes. Un changement de consigne de température brutal nécessiterait donc un certain temps, plus ou moins important, pour que la population de TCLs se stabilise autour de la nouvelle consigne. Pour éviter cela, il est possible de modifier la consigne de température de façon continue, tel que présenté Figure 4.4. Ces variations de consigne permettent donc de suivre des variations de puissance continues et relativement lentes.

Pour cela, on s'intéresse à un contrôle basé sur le modèle par équations aux dérivées partielles d'une population de TCLs tel que décrit par les équations (3.16) et (3.21). En prenant comme signal de commande $u_{\mathrm{EDP}}(t) = \dot{\theta}_{\mathrm{cons}}(t)$ la variation de la consigne de température, on obtient

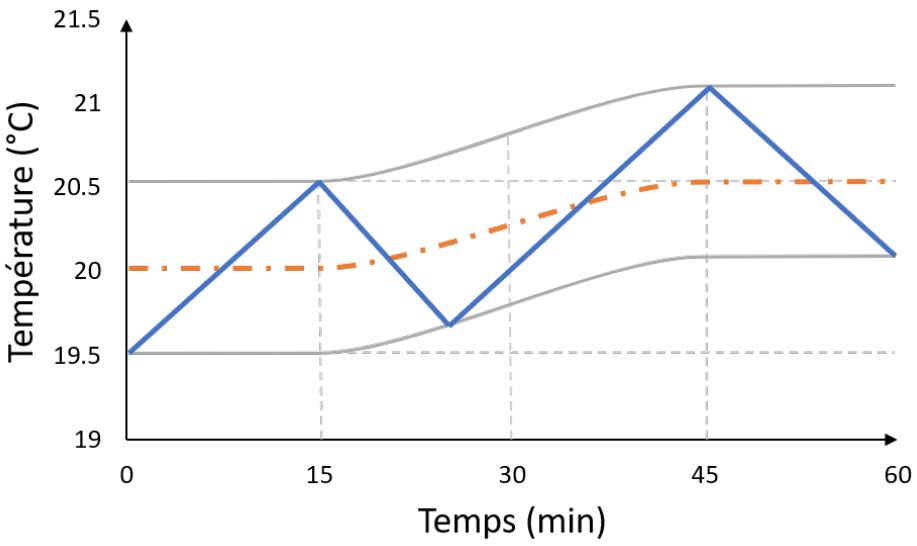


Figure 4.4 Dynamique d'un TCL avec changement de consigne.

les équations forcées de Fokker-Planck suivantes [23, 24] :

$$\partial_t w_{\mathrm{ON}}(\theta,t) = \beta\partial_\theta^2 w_{\mathrm{ON}}(\theta,t) - \partial_\theta\Big(\alpha_{\mathrm{ON}}(\theta,\theta_a)w_{\mathrm{ON}}(\theta,t) - u_{\mathrm{EDP}}w_{\mathrm{ON}}(\theta,t)\Big) + \varphi(\theta,t), \quad (4.19a)$$

$$\partial_t w_{\mathrm{OFF}}(\theta,t) = \beta\partial_\theta^2 w_{\mathrm{OFF}}(\theta,t) - \partial_\theta\Big(\alpha_{\mathrm{OFF}}(\theta,\theta_a)w_{\mathrm{OFF}}(\theta,t) - u_{\mathrm{EDP}}w_{\mathrm{OFF}}(\theta,t)\Big) - \varphi(\theta,t). \quad (4.19b)$$

De même, les conditions aux limites permettant d'assurer une conservation de la masse de la population de TCLs s'écrivent désormais :

$$\beta\partial_\theta w_{\mathrm{ON}}(\theta_{\max},t) - \alpha_{\mathrm{ON}}(\theta_{\max},\theta_a)w_{\mathrm{ON}}(\theta_{\max},t) + u_{\mathrm{EDP}}w_{\mathrm{ON}}(\theta_{\max},t) = \varphi(\theta_{\max},t), \quad (4.20a)$$

$$\beta\partial_\theta w_{\mathrm{OFF}}(\theta_{\max},t) - \alpha_{\mathrm{OFF}}(\theta_{\max},\theta_a)w_{\mathrm{OFF}}(\theta_{\max},t) + u_{\mathrm{EDP}}w_{\mathrm{OFF}}(\theta_{\max},t) = -\varphi(\theta_{\max},t), \quad (4.20b)$$

$$\beta\partial_\theta w_{\mathrm{ON}}(\theta_{\min},t) - \alpha_{\mathrm{ON}}(\theta_{\min},\theta_a)w_{\mathrm{ON}}(\theta_{\min},t) + u_{\mathrm{EDP}}w_{\mathrm{ON}}(\theta_{\min},t) = -\varphi(\theta_{\min},t), \quad (4.20c)$$

$$\beta\partial_\theta w_{\mathrm{OFF}}(\theta_{\min},t) - \alpha_{\mathrm{OFF}}(\theta_{\min},\theta_a)w_{\mathrm{OFF}}(\theta_{\min},t) + u_{\mathrm{EDP}}w_{\mathrm{OFF}}(\theta_{\min},t) = \varphi(\theta_{\min},t). \quad (4.20d)$$

Pour réaliser ce contrôle, on choisit comme sortie du système la puissance pondérée consom-

mée par l'ensemble de la population de TCLs, c'est-à-dire :

$$y(t) = \frac{P_0}{\eta_0} \int_{\theta_{\min}(t)}^{\theta_{\max}(t)} f_p(\theta) w_{\mathrm{ON}}(\theta, t) \mathrm{d}\theta, \tag{4.21}$$

où $f_p(\theta)$ est une fonction de pondération. Le fait d'introduire une pondération sur la sortie permet d'assurer que la dynamique d'entrée-sortie soit bien définie en termes de degré relatif du système. Dans le cadre de ce travail, celle-ci est choisie de la forme suivante :

$$f_p(\theta) = a_p \theta + b_p, \tag{4.22}$$

avec $a_p \neq 0$ une constante et b_p une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dont la dérivée de premier ordre est bornée. Les paramètres de cette fonction peuvent être réglés pour optimiser le contrôle.

Cependant, une variation de la consigne θ_{cons} entraîne forcément une variation des limites $\theta_{\min}$ et $\theta_{\max}$ avec $\dot{\theta}_{\mathrm{cons}} = \dot{\theta}_{\min} = \dot{\theta}_{\max}$. Ainsi, le système étudié est un problème à bornes variables dans le temps, ce qui complique la conception de la loi de commande. Pour remédier à cela, on transforme le système pour avoir un problème équivalent avec des bornes fixes [26]. Ainsi, en posant $\Delta\theta = \theta_{\max} - \theta_{\min}$ ($\Delta\theta$ est une constante), on définit :

$$z = \frac{\theta - \theta_{\min}}{\Delta\theta}, \tag{4.23a}$$

$$z_a = \frac{\theta_a - \theta_{\min}}{\Delta\theta}, \tag{4.23b}$$

$$\tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z, t) \triangleq w_{\mathrm{ON}}(\Delta\theta z + \theta_{\min}, t) = w_{\mathrm{ON}}(\theta, t), \tag{4.23c}$$

$$\tilde{\alpha}_{\mathrm{ON}}(z, z_a) \triangleq \alpha_{\mathrm{ON}}(\Delta\theta z + \theta_{\min}, \Delta\theta z_a + \theta_{\min}) = \alpha_{\mathrm{ON}}(\theta, \theta_a), \tag{4.23d}$$

$$\tilde{\varphi}(z, t) \triangleq \varphi(\Delta\theta z + \theta_{\min}, t) = \varphi(\theta, t). \tag{4.23e}$$

De plus, on a :

$$\partial_z \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z, t) \triangleq \Delta\theta \partial_\theta w_{\mathrm{ON}}(\theta, t), \tag{4.24a}$$

$$\partial_z^2 \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z, t) \triangleq (\Delta\theta)^2 \partial_\theta^2 w_{\mathrm{ON}}(\theta, t), \tag{4.24b}$$

$$\partial_t \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z, t) \triangleq \partial_t w_{\mathrm{ON}}(\theta, t) + \frac{\dot{\theta}_{\min}}{\Delta\theta} \partial_z \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z, t). \tag{4.24c}$$

Ainsi, les équations (4.19a), (4.20a) et (4.20c) peuvent être réécrites dans les coordonnées du système équivalent telles que :

$$\partial_t \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z,t) = \frac{\beta}{(\Delta\theta)^2}\partial_z^2 \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z,t) - \frac{1}{\Delta\theta}\partial_z\Big(\Big(\tilde{\alpha}_{\mathrm{ON}}(z,z_a) - u_{\mathrm{EDP}} - \dot{\theta}_{\min}\Big)\tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z,t)\Big) + \tilde{\varphi}(z,t), \tag{4.25}$$

et

$$\frac{\beta}{\Delta\theta}\partial_z \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z_{\max},t) - \Big(\tilde{\alpha}_{\mathrm{ON}}(z_{\max},z_a) - u_{\mathrm{EDP}} - \dot{\theta}_{\min}\Big)\tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z_{\max},t) = \tilde{\varphi}(z_{\max},t), \tag{4.26a}$$

$$\frac{\beta}{\Delta\theta}\partial_z \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z_{\min},t) - \Big(\tilde{\alpha}_{\mathrm{ON}}(z_{\min},z_a) - u_{\mathrm{EDP}} - \dot{\theta}_{\min}\Big)\tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z_{\min},t) = -\tilde{\varphi}(z_{\min},t), \tag{4.26b}$$

avec $z_{\max} = 1$ et $z_{\min} = 0$. De plus, en posant $\beta' = \dfrac{\beta}{(\Delta\theta)^2}$, $\tilde{\alpha}'_{\mathrm{ON}} = \dfrac{1}{\Delta\theta}\tilde{\alpha}_{\mathrm{ON}}$, $u'_{\mathrm{EDP}} = \dfrac{1}{\Delta\theta}u_{\mathrm{EDP}}$ et en remarquant que $\dot{\theta}_{\min} = u_{\mathrm{EDP}}$, on obtient :

$$\partial_t \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z,t) = \beta'\partial_z^2 \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z,t) - \partial_z\Big(\Big(\tilde{\alpha}'_{\mathrm{ON}}(z,z_a) - 2u'_{\mathrm{EDP}}\Big)\tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z,t)\Big) + \tilde{\varphi}(z,t), \tag{4.27}$$

et

$$\beta'\partial_z \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(1,t) - \Big(\tilde{\alpha}'_{\mathrm{ON}}(1,z_a) - 2u'_{\mathrm{EDP}}\Big)\tilde{w}_{\mathrm{ON}}(1,t) = \tilde{\varphi}(1,t), \tag{4.28a}$$

$$\beta'\partial_z \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(0,t) - \Big(\tilde{\alpha}'_{\mathrm{ON}}(0,z_a) - 2u'_{\mathrm{EDP}}\Big)\tilde{w}_{\mathrm{ON}}(0,t) = -\tilde{\varphi}(0,t). \tag{4.28b}$$

Enfin, en notant $a'_p = (\Delta\theta)^2 a_p$ et $b'_p = \Delta\theta\,(b_p + a_p\theta_{\min})$, on obtient $a'_p z + b'_p = \Delta\theta\,(a_p\theta + b_p)$ et on peut donc réécrire la sortie y dans les nouvelles coordonnées :

$$y(t) = \frac{P_0}{\eta_0}\int_0^1 \left(a'_p z + b'_p\right)\tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z,t)\mathrm{d}z. \tag{4.29}$$

Il est important de noter ici que b'_p est variable dans le temps puisque dépendant de $\theta_{\min}$ et de b_p. On remarque aussi que le problème est désormais à bornes fixes et que l'on peut donc étudier le système pour concevoir la loi de commande. Pour cela, la sortie $y(t)$ doit être amenée à un certain niveau désiré y_d que l'on considère constant. L'erreur de suivi $e(t)$ s'écrit donc :

$$e(t) = y(t) - y_d, \tag{4.30}$$

et la dynamique de l'erreur peut être exprimée par :

$$\dot{e}(t) = \dot{y}(t) = \frac{P_0}{\eta_0} \int_0^1 \Big(\dot{b}'_p \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z,t) + \big(a'_p z + b'_p \big)\, \partial_t \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z,t) \Big) \mathrm{d}z. \tag{4.31}$$

De plus on a $\dot{b}'_p = a_p \dot{\theta}_{\min} \Delta\theta + \dot{b}_p \Delta\theta = a'_p u'_{\mathrm{EDP}} + \dot{b}_p \Delta\theta$. Ainsi, en appliquant (4.27), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = \frac{P_0}{\eta_0} \int_0^1 a'_p u'_{\mathrm{EDP}} \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z,t) \mathrm{d}z + \frac{P_0}{\eta_0} \int_0^1 \Big(\big(a'_p z + b'_p \big)\, \tilde{\varphi}(z,t) + \dot{b}_p \Delta\theta \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z,t) \Big) \mathrm{d}z \\ + \frac{P_0}{\eta_0} \int_0^1 \big(a'_p z + b'_p \big) \Big(\beta' \partial_z^2 \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z,t) - \partial_z \Big(\big(\tilde{\alpha}'_{\mathrm{ON}}(z,z_a) - 2u'_{\mathrm{EDP}} \big) \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z,t) \Big) \Big) \mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{4.32}$$

En réalisant une intégration par partie sur le dernier terme et en appliquant les conditions aux limites (4.28a) et (4.28b), il vient :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = -\frac{P_0}{\eta_0} \int_0^1 a'_p \Big(\beta' \partial_z \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z,t) - \big(\tilde{\alpha}'_{\mathrm{ON}}(z,z_a) - u'_{\mathrm{EDP}} \big) \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z,t) \Big) \mathrm{d}z \\ + \frac{P_0}{\eta_0} \Big[\tilde{\varphi}(1,t) + \tilde{\varphi}(0,t) + \int_0^1 \Big(\big(a'_p z + b'_p \big)\, \tilde{\varphi}(z,t) + \dot{b}_p \Delta\theta \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z,t) \Big) \mathrm{d}z \Big]. \end{aligned} \tag{4.33}$$

On choisit alors u'_{EDP} tel que :

$$\begin{aligned} u'_{\mathrm{EDP}}(t) &= \frac{\displaystyle\int_0^1 \big(\tilde{\alpha}'_{\mathrm{ON}}(z,z_a) \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z,t) - \beta' \partial_z \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z,t) \big) \mathrm{d}z - \frac{\eta_0}{a'_p P_0} \Gamma(t)}{\displaystyle\int_0^1 \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z,t) \mathrm{d}z}, \\ \Rightarrow u'_{\mathrm{EDP}}(t) &= \frac{\displaystyle\int_0^1 \tilde{\alpha}'_{\mathrm{ON}}(z,z_a) \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z,t) \mathrm{d}z - \beta' \big(\tilde{w}_{\mathrm{ON}}(1,t) - \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(0,t) \big) - \frac{\eta_0}{a'_p P_0} \Gamma(t)}{\displaystyle\int_0^1 \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z,t) \mathrm{d}z}, \end{aligned} \tag{4.34}$$

où $\Gamma(t)$ est une commande auxiliaire.

La dynamique de l'erreur devient alors :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \Gamma(t) + \Phi(t), \\ e(0) &= e_0, \end{aligned} \tag{4.35}$$

où e_0 est l'erreur de suivi initiale et $\Phi(t)$ la fonction définie par :

$$\Phi(t) = \frac{P_0}{\eta_0}\left[\tilde{\varphi}(1,t) + \tilde{\varphi}(0,t) + \int_0^1 \Big(\left(a'_p z + b'_p\right) \tilde{\varphi}(z,t) + \dot{b}_p \Delta\theta \tilde{w}_{\mathrm{ON}}(z,t)\Big)\mathrm{d}z\right]. \tag{4.36}$$

Pour stabiliser la dynamique de l'erreur de suivi, on choisit la commande auxiliaire suivante :

$$\Gamma(t) = -ke(t), \tag{4.37}$$

où k est le gain du contrôleur avec $k > 0$.

En effet, la dynamique de l'erreur s'écrit alors :

$$\dot{e}(t) = -ke(t) + \Phi(t), \tag{4.38}$$

et représente donc un système linéaire de dimension finie de premier ordre. Ainsi, en résolvant l'équation différentielle (4.38), l'erreur de suivi peut s'écrire :

$$e(t) = e_0 e^{-kt} + \int_0^t \Phi(t) e^{-k(t-\tau)}\mathrm{d}\tau. \tag{4.39}$$

De plus, comme à chaque instant seulement une portion de TCLs change d'état, on peut considérer que $\Phi(t)$ est uniformément borné, c'est-à-dire $|\Phi(t)| \leq \Phi_M$ avec Φ_M une constante positive. On a donc :

$$|e(t)| \leq |e_0| e^{-kt} + \frac{\Phi_M}{k}\left(1 - e^{-kt}\right), \quad \forall t > 0. \tag{4.40}$$

La dynamique de l'erreur est alors globalement uniformément bornée.

Enfin, on peut réécrire la commande en utilisant les coordonnées du système original pour obtenir :

$$u_{\mathrm{EDP}}(t) = \frac{\displaystyle\int_{\theta_{\min}(t)}^{\theta_{\max}(t)} \alpha_{\mathrm{ON}}(\theta,\theta_a) w_{\mathrm{ON}}(\theta,t)\mathrm{d}\theta - \beta\Big(w_{\mathrm{ON}}(\theta_{\max},t) - w_{\mathrm{ON}}(\theta_{\min},t)\Big) - \frac{\eta_0}{a_p P_0}\Gamma(t)}{\Delta\theta \displaystyle\int_{\theta_{\min}(t)}^{\theta_{\max}(t)} w_{\mathrm{ON}}(\theta,t)\mathrm{d}\theta}. \tag{4.41}$$

On remarque que cette commande est bien définie seulement si $\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} w_{\mathrm{ON}}(\theta,t)\mathrm{d}\theta \neq 0$ (l'intervalle $\Delta\theta$ étant forcément une constante non nulle), c'est-à-dire seulement si la distribution des TCLs à l'état *ON* sur l'ensemble de la plage de température est non nulle. Cette condition peut être assurée en ayant au moins un TCL à l'état *ON* parmi l'ensemble de la population

et ce en tout temps.

Pour assurer la stabilité du système en boucle fermée, il faut que la dynamique interne du système composé des équations (4.19), (4.20), (4.21) et (4.41) soit stable. Ceci est assuré en partie par les propriétés de conservation de la masse du système qui sont valables pour tout $t \in [0, T]$ avec $T > 0$ et qui s'écrivent :

$$\int_{\theta_{\min}(t)}^{\theta_{\max}(t)} w_{\mathrm{ON}}(\theta, t)\mathrm{d}\theta = \int_{\theta_{\min}(0)}^{\theta_{\max}(0)} w_{\mathrm{ON}}(\theta, 0)\mathrm{d}\theta + \int_0^t \int_{\theta_{\min}(\tau)}^{\theta_{\max}(\tau)} \varphi(\theta, \tau)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\tau, \tag{4.42a}$$

$$\int_{\theta_{\min}(t)}^{\theta_{\max}(t)} w_{\mathrm{OFF}}(\theta, t)\mathrm{d}\theta = \int_{\theta_{\min}(0)}^{\theta_{\max}(0)} w_{\mathrm{OFF}}(\theta, 0)\mathrm{d}\theta - \int_0^t \int_{\theta_{\min}(\tau)}^{\theta_{\max}(\tau)} \varphi(\theta, \tau)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\tau, \tag{4.42b}$$

et

$$N_{ag}(t) = \int_{\theta_{\min}(t)}^{\theta_{\max}(t)} \Big(w_{\mathrm{ON}}(\theta, t) + w_{\mathrm{OFF}}(\theta, t)\Big)\mathrm{d}\theta = \int_{\theta_{\min}(0)}^{\theta_{\max}(0)} \Big(w_{\mathrm{ON}}(\theta, 0) + w_{\mathrm{OFF}}(\theta, 0)\Big)\mathrm{d}\theta. \tag{4.43}$$

De plus, pour assurer cette stabilité, on a également les propriétés suivantes pour tout $t \in [0, T]$:

$$\Big\|w_{\mathrm{ON}}(\cdot, t)\Big\|_1 \leq \Big\|w_{\mathrm{ON}}(\cdot, 0)\Big\|_1 + \int_0^t \int_{\theta_{\min}(\tau)}^{\theta_{\max}(\tau)} \varphi(\theta, \tau)\mathrm{sgn}\left(w_{\mathrm{ON}}\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\tau, \tag{4.44a}$$

$$\Big\|w_{\mathrm{OFF}}(\cdot, t)\Big\|_1 \leq \Big\|w_{\mathrm{OFF}}(\cdot, 0)\Big\|_1 - \int_0^t \int_{\theta_{\min}(\tau)}^{\theta_{\max}(\tau)} \varphi(\theta, \tau)\mathrm{sgn}\left(w_{\mathrm{OFF}}\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\tau, \tag{4.44b}$$

où

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \ ; \\ 0, & \text{si } x = 0 \ ; \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases} \tag{4.45}$$

Par ailleurs, comme le système en boucle fermée est conservatif, on considère qu'il existe une constante positive M telle que $|\iint_\Omega \varphi(\theta, t)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t| < M$ pour tout ensemble Lebesgue-mesurable $\Omega \subset \Omega^\infty$. Ainsi, on a :

$$\Big\|w_{\mathrm{ON}}(\cdot, t)\Big\|_1 \leq \Big\|w_{\mathrm{ON}}(\cdot, 0)\Big\|_1 + 2M < +\infty, \tag{4.46a}$$

$$\Big\|w_{\mathrm{OFF}}(\cdot, t)\Big\|_1 \leq \Big\|w_{\mathrm{OFF}}(\cdot, 0)\Big\|_1 + 2M < +\infty. \tag{4.46b}$$

La preuve des propriétés avancées dans cette analyse n'est pas explicitée dans ce travail mais celle-ci est davantage développée dans [25, 26]. Ceci conclut donc l'analyse de la stabilité du système en boucle fermée.

En reprenant maintenant l'équation (4.22), la fonction de pondération peut être réécrite de la façon suivante :

$$f_p(\theta) = a_p \left(\theta - \frac{-b_p}{a_p} \right) = a_p(\theta - \gamma_p). \tag{4.47}$$

On peut ensuite interpréter γ_p comme étant la consigne de température désirée que l'on note θ_{ref}. La fonction de pondération devient alors $f_p = a_p(\theta - \theta_{\text{ref}})$ et dépend ainsi de l'écart entre la température actuelle θ et la température désirée θ_{ref}. Pour cette raison, il est possible de fixer la sortie y_d et considérer uniquement les variations de θ_{ref}.

Cette consigne désirée pour l'ensemble de la population peut être n'importe quelle fonction continue entre deux températures. Toutefois, dans le cadre de ce projet, les changements de consigne se font en réponse à des variations de puissance. La consigne désirée θ_{ref} doit donc dépendre de la proportion désirée $(x_{\text{ON}})_{\text{ref}}$ de charges à l'état *ON* elle-même déterminée à partir des variations de puissance au sein du réseau, comme expliqué dans la section précédente. Il convient alors de trouver une approximation de la consigne de température désirée qui dépend de la proportion désirée de TCLs à l'état *ON*.

Pour cela, on considère un cas idéal où on suppose que la résistance, la capacité ainsi que la puissance thermique de chaque TCL sont respectivement égales à la valeur moyenne de chacun de ces paramètres sur l'ensemble de la population. Pour le i-ème TCL d'une population de taille N, on a donc :

$$R_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} R_j = \overline{R}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{4.48a}$$

$$C_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} C_j = \overline{C}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{4.48b}$$

$$P_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} P_j = \overline{P}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{4.48c}$$

En reprenant l'équation (3.7), la dynamique de chaque TCL devient alors :

$$\dot{\theta}_i = \frac{1}{\overline{R}\,\overline{C}} \left(\theta_a - \theta_i - \overline{R}\,\overline{P} s_{e,i} \right), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{4.49}$$

avec $s_{e,i}$ le signal décrivant l'état dans lequel se trouve le TCL considéré : $s_{e,i} = 1$ quand celui-ci est en marche et $s_{e,i} = 0$ quand il est à l'arrêt.

Dans un cas idéal et pour une consigne désirée θ_{ref}, on veut que la moyenne des températures de la population soit en tout temps égale à cette consigne et de même, que la moyenne des variations soit nulle. Cela se traduit par :

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\dot{\theta}_i = 0, \tag{4.50a}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\theta_i = \theta_{\text{ref}}. \tag{4.50b}$$

Cela signifie qu'en moyenne la population suit parfaitement la consigne de référence et que les variations de température autour de cette consigne sont compensées au sein même de cette population.

De plus dans cette situation idéale, la moyenne des valeurs du signal $s_{e,i}$ qui correspond à la proportion de TCLs en état de marche est exactement égale à la proportion désirée $(x_{\text{ON}})_{\text{ref}}$, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}s_{e,i} = (x_{\text{ON}})_{\text{ref}}\,. \tag{4.51}$$

En reprenant l'équation (4.49), la moyenne des variations de température au sein de la population s'écrit alors :

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\dot{\theta}_i = \frac{1}{\overline{R}\,\overline{C}}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\theta_a - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\theta_i - \frac{\overline{R}\,\overline{P}}{N}\sum_{i=1}^{N}s_{e,i}\right). \tag{4.52}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \theta_a - \theta_{\text{ref}} - \overline{R}\,\overline{P}\,(x_{\text{ON}})_{\text{ref}} &= 0, \\ \Rightarrow \theta_{\text{ref}} &= \theta_a - \overline{R}\,\overline{P}\,(x_{\text{ON}})_{\text{ref}}\,. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Cette valeur idéale est ensuite utilisée dans la fonction de pondération qui apparaît dans l'expression de la sortie y du contrôle par EDP.

Pour illustrer le comportement du système, on réalise la simulation d'une population de 10 000 TCLs pour laquelle la proportion désirée $(x_{\text{ON}})_{\text{ref}}$ passe de 0.4 à 0.45. Les paramètres utilisés pour modéliser les TCLs et les contrôleurs sont présentés dans le Tableau 4.1. Les

valeurs des paramètres thermiques ainsi que du coefficient de diffusion sont tirés de plusieurs travaux tels que [23–27, 41].

Tableau 4.1 Paramètres pour simuler le comportement du système.

Paramètres	Description (Unité)	Valeur
N	Nombre de TCLs	10 000
R	Résistance thermique (°C/kW)	2
C	Capacité thermique (kWh/°C)	$Log\text{-}\mathcal{N}(10, 3)$
P	Puissance thermique (kW)	14
θ_a	Température ambiante (°C)	32
η	Coefficient de performance	2.5
β	Coefficient de diffusion (°C^2/h)	0.1
$\Delta\theta$	Largeur de la plage de température (°C)	0.5
Δt	Période d'échantillonnage (h)	0.01
a	Paramètre de la fonction de pondération	1
k	Gain du contrôleur à EDP	10

La consigne de température désirée est ensuite déterminée comme expliqué précédemment. On voit alors Figure 4.5 que la consigne de température θ_{cons} pour la population est modifiée grâce au contrôle par EDP pour suivre la consigne désirée θ_{ref} qui passe de 20.8 °C à 19.4 °C.

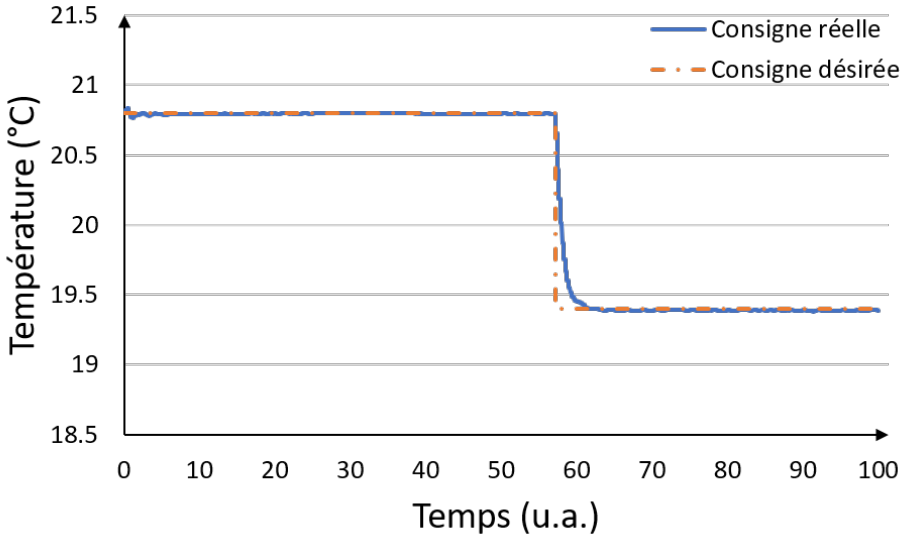
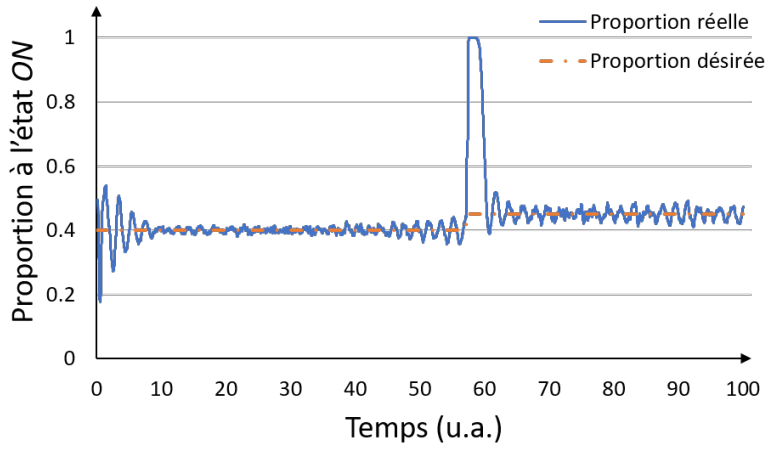
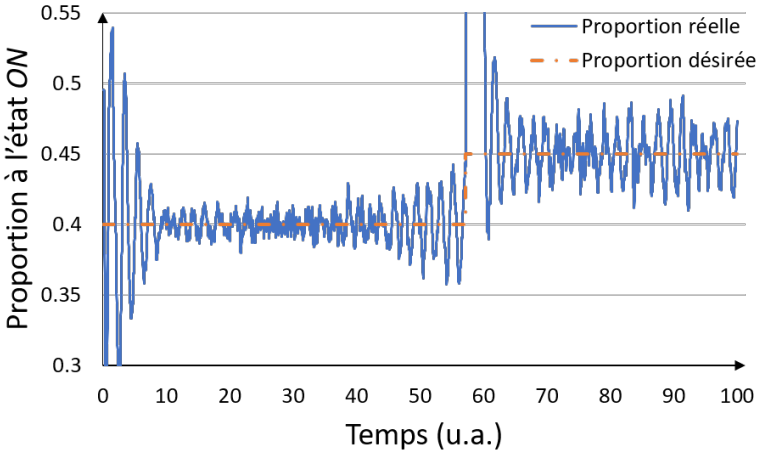


Figure 4.5 Comportement dynamique de la consigne de température.

Comme on le voit Figure 4.6, ce changement de consigne entraîne une variation de la proportion x_{ON} de TCLs à l'état *ON* afin de respecter la proportion désirée. Une étude en simulation plus complète et détaillée est menée dans le chapitre suivant.



(a)



(b)

Figure 4.6 Comportement dynamique de la proportion de systèmes à l'état *ON*. La figure (b) correspond à un zoom de la figure (a).

Ainsi, la commande réalisée par équations aux dérivées partielles permet de modifier la consigne de température d'une grande population de TCLs en suivant une consigne de référence. Celle-ci est déterminée à partir de la proportion de charges que l'on désire avoir en état de marche et donc la consigne de température suit indirectement les variations de puissance dans le réseau. Ce contrôle permet une régulation relativement lente (en comparaison au contrôle réalisé dans la section précédente) de la puissance consommée par la population de TCLs. Ceci peut s'avérer utile pour des variations lentes de puissance dans le réseau mais une telle régulation ne peut être efficace si des changements rapides voire instantanés sont nécessaires au niveau de la consommation des TCLs.

La section suivante présente un contrôle hybride qui combine les deux types de contrôle développés dans les parties précédentes.

4.3 Régulation à deux niveaux par combinaison des deux types de contrôle

Au sein d'un réseau, les variations de puissance peuvent apparaître sous des formes différentes. Ceci est d'autant plus vrai pour les micro-réseaux où la production d'électricité est assurée par un ensemble de sources qui peuvent être de nature différente. En effet, les réseaux intelligents qui se développent utilisent généralement des sources d'énergie renouvelables (panneaux photovoltaïques, éoliennes, etc.) mais pas seulement, puisqu'une partie de l'électricité peut provenir d'un distributeur externe au micro-réseau par exemple. La puissance produite par l'ensemble des sources génératrices d'électricité d'un réseau peut donc avoir des composantes à la dynamique lente et d'autres à la dynamique relativement rapide. Ceci est le cas par exemple des micro-réseaux où la production d'électricité se fait essentiellement grâce à des systèmes photovoltaïques. En effet, comme on peut le voir Figure 4.7, la production d'électricité par des panneaux photovoltaïque dépend de l'ensoleillement au cours de la journée.

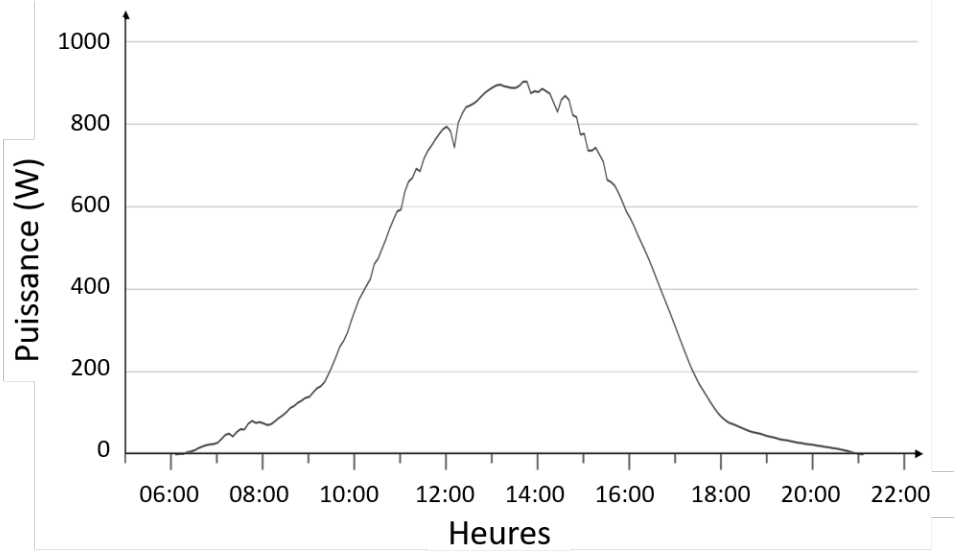


Figure 4.7 Exemple de production photovoltaïque en une journée.

(adapté de [48])

Apparaissent alors deux phénomènes caractérisant l'évolution de la puissance produite :

— Globalement, la production moyenne d'électricité augmente lentement (en plusieurs heures) jusqu'à un point de culmination où l'ensoleillement est maximal, puis diminue

progressivement ;

— Lors de ces variations lentes, des variations plus faibles et plus rapides apparaissent de façon irrégulière et imprévisible en fonction de l'ensoleillement à un moment bien précis.

Cet exemple montre donc la nécessité d'avoir une régulation à deux niveaux qui permet de gérer ces deux types de variations de puissance. Ainsi, on s'intéresse à une combinaison des deux contrôles précédemment établis. La population de TCLs pourra donc subir des changements de consigne de température relativement lents associés à des changements d'état ON/OFF instantanés, comme montré Figure 4.8.

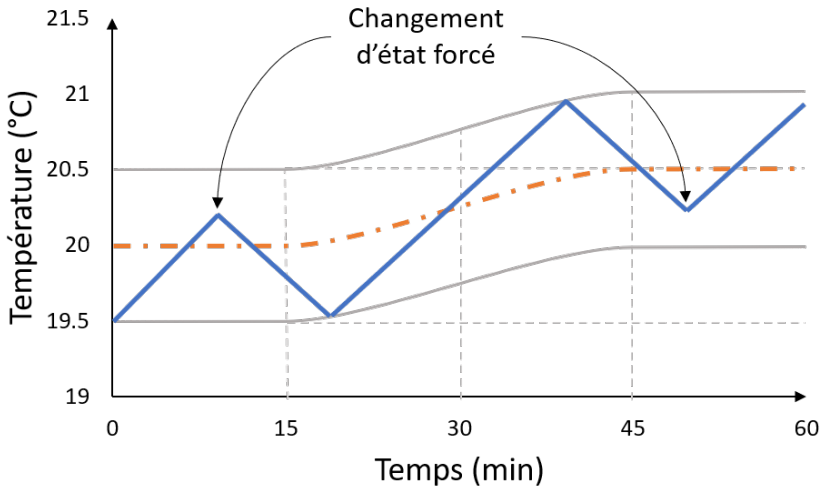


Figure 4.8 Dynamique d'un TCL avec changement de consigne et changement d'état forcé.

Ces changements de consigne ou d'état interviennent en réponse aux fluctuations de puissance dans le réseau considéré. La commande par équations aux dérivées partielles agit tout d'abord pour réguler la puissance d'un point de vue global en modifiant la consigne de température de l'ensemble de la population de TCLs. Pour cela, les variations rapides doivent être filtrées afin de ne considérer que les variations lentes de puissance. Ainsi pour le contrôleur à EDP, on considère uniquement la moyenne sur une certaine période de la référence de puissance à suivre $(P_{\text{TCLs}})_{\text{ref}}$ pour l'ensemble des TCLs. Cette puissance filtrée est notée $\overline{(P_{\text{TCLs}})}_{\text{ref}}$ et est normalisée pour obtenir la proportion désirée de TCLs à l'état ON de la façon suivante :

$$\overline{(x_{\text{ON}})}_{\text{ref}} = \frac{\overline{(P_{\text{TCLs}})}_{\text{ref}}}{(P_{\text{TCLs}})_{\text{tot}}}. \tag{4.54}$$

On peut noter ici que le fait de filtrer la puissance de référence (et donc la proportion désirée de TCLs à l'état ON) introduit un certain retard au niveau du contrôleur. En effet dans le

cadre de ce projet, on s'intéresse à un contrôle sans prévision, la moyenne est donc réalisée uniquement sur les anciennes valeurs mesurées. En pratique, il convient de régler correctement le filtre moyenneur afin de limiter ce retard et ainsi permettre à la valeur moyenne de suivre correctement les variations de puissance.

La consigne de température de référence pour les TCLs est ensuite déterminée grâce à la relation (4.53) qui est appliquée comme tel :

$$\theta_{\text{ref}} = \theta_a - \overline{R}\ \overline{P}\ \overline{(x_{\text{ON}})}_{\text{ref}}. \tag{4.55}$$

Il est intéressant de noter que la température extérieure ambiante θ_a peut varier au cours du temps. Ceci aura pour effet de modifier la température de référence pour la population de TCLs afin de prendre en compte ces variations.

Comme expliqué dans la partie précédente, la température de référence θ_{ref} est ensuite utilisée dans la fonction de pondération de la sortie et permet d'obtenir une commande u_{EDP} définie comme :

$$u_{\text{EDP}}(t) = \frac{\displaystyle\int_{\theta_{\min}(t)}^{\theta_{\max}(t)} \alpha_{\text{ON}}(\theta, \theta_a) w_{\text{ON}}(\theta, t) \mathrm{d}\theta - \beta\Big(w_{\text{ON}}(\theta_{\max}, t) - w_{\text{ON}}(\theta_{\min}, t)\Big) - \frac{\eta_0}{a_p P_0}\Gamma(t)}{\Delta\theta \displaystyle\int_{\theta_{\min}(t)}^{\theta_{\max}(t)} w_{\text{ON}}(\theta, t) \mathrm{d}\theta}, \tag{4.56}$$

avec

$$\Gamma(t) = -ke(t) = -k\left(\frac{P_0}{\eta_0}\int_{\theta_{\min}(t)}^{\theta_{\max}(t)} a_p(\theta - \theta_{\text{ref}}) w_{\text{ON}}(\theta, t)\mathrm{d}\theta - y_d\right). \tag{4.57}$$

La commande ainsi obtenue correspond à la variation de la consigne de température, c'est-à-dire $u_{\text{EDP}}(t) = \dot{\theta}_{\text{cons}}$. Cela permet donc de déterminer en tout temps la nouvelle consigne de température pour la population de TCLs qui suit la température de référence θ_{ref}. Ainsi, la puissance consommée par la population suit, par l'intermédiaire des changements de température, les variations de la puissance de référence filtrée. La consigne de température θ_{cons} ainsi déterminée est envoyée à l'ensemble des TCLs qui peuvent ensuite appliquer la commande issue du contrôleur à changement d'état forcé (CEF).

Pour le i-ème TCL, celle-ci s'écrit :

$$u_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \theta_i \geq \theta_{\max}(t)\ ; \\ 0, & \text{si } \theta_i \leq \theta_{\min}(t)\ ; \\ \Big(u_i(t^-) \wedge \big(s_{f,i}(t) r_i(t)\big)\Big) + \Big(u_i(t^-) \vee \big(s_{f,i}(t) r_i(t)\big)\Big), & \text{autrement,} \end{cases} \tag{4.58}$$

où

$$\theta_{\max}(t) = \theta_{\text{cons}}(t) + \frac{\Delta\theta}{2}, \tag{4.59a}$$

$$\theta_{\min}(t) = \theta_{\text{cons}}(t) - \frac{\Delta\theta}{2}, \tag{4.59b}$$

et

$$s_{f,i}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \left(C_{\text{ON},i} \vee C_{\text{OFF},i}\right) \wedge C_{y,i} \ ; \\ 0, & \text{autrement,} \end{cases} \tag{4.60}$$

avec

$$C_{\text{ON},i} = \Big(\Delta x_{\text{ON}}(t) > 0\Big) \wedge \Big(u_i(t^-) = 0\Big), \tag{4.61a}$$

$$C_{\text{OFF},i} = \Big(\Delta x_{\text{ON}}(t) < 0\Big) \wedge \Big(u_i(t^-) = 1\Big), \tag{4.61b}$$

$$C_{y,i} = y_i \leq |\Delta x_{\text{ON}}(t)|. \tag{4.61c}$$

Comme expliqué dans la première section de ce chapitre, $r_i(t)$ décrit la disponibilité d'un TCL et prend comme valeur 0 si le TCL considéré est bloqué (suite à un changement d'état forcé et pour une durée t_{bcg}) ou 1 si celui-ci est disponible.

Contrairement au contrôleur à EDP et afin d'obtenir une régulation précise, c'est la valeur réelle de la proportion désirée de TCLs à l'état *ON* $(x_{\text{ON}})_{\text{ref}}$ qui est utilisée pour le contrôleur à CEF. Ceci est illustré Figure 4.9 qui représente une version simplifiée de la combinaison des deux contrôleurs.

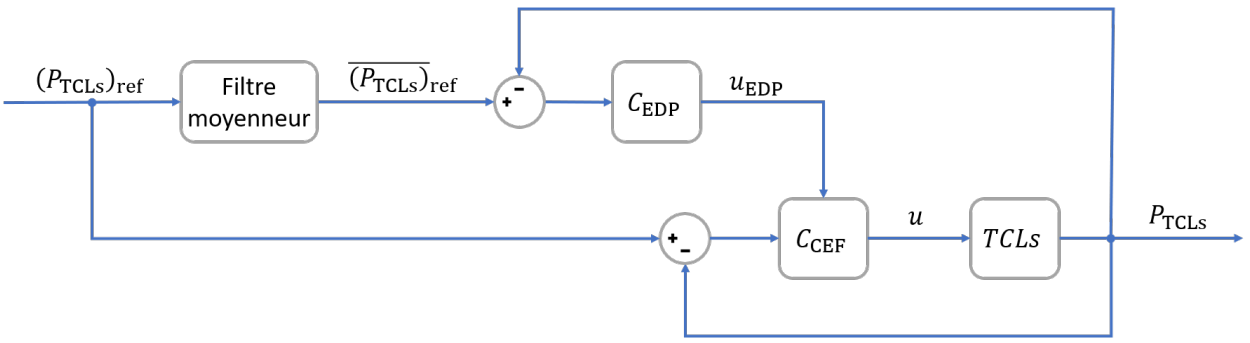


Figure 4.9 Schéma bloc simplifié du contrôle hybride.

Les blocs C_{EDP} et C_{CEF} représentent respectivement les contrôleurs à équations aux dérivées

partielles et à changement d'état forcé. La commande u permet d'établir l'état des TCLs qui sont alors en marche ou à l'arrêt.

Ainsi, à partir d'une référence de puissance à suivre, ce contrôleur hybride permet de suivre des variations de puissance globales pour l'ensemble d'une population de TCLs grâce à des changements de consigne de température. Il permet également de réguler les variations rapides et imprévisibles dues à l'utilisation de sources d'énergie renouvelables dans le réseau considéré.

Dans le chapitre suivant, on présente l'étude en simulation des deux contrôleurs développés ainsi que les résultats obtenus par l'utilisation du contrôleur hybride. Enfin, on s'intéresse à l'application de ce dernier contrôleur dans le contexte d'un micro-réseau.

CHAPITRE 5 ÉTUDE EN SIMULATION ET PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

Dans ce chapitre, on mène une étude en simulation visant à présenter l'aspect pratique de l'utilisation des différents contrôles développés. L'étude se concentre en premier lieu sur les performances des contrôleurs qui agissent sur les TCLs en réponse à des variations de puissance. Enfin, on s'intéresse à un scénario réaliste où les TCLs sont utilisés pour réguler les écarts de puissance au sein d'un micro-réseau.

5.1 Étude en simulation des différents contrôleurs

Afin d'étudier les performances des différents contrôleurs, on modélise une grande population de TCLs dont on cherche à contrôler la proportion en état de marche, c'est-à-dire les charges consommant de la puissance électrique. Les paramètres permettant de modéliser ces systèmes thermostatiques ainsi que les paramètres de simulation sont donnés dans le Tableau 5.1. Les valeurs des différents paramètres présentés ici on été utilisées dans plusieurs travaux [23–27, 41] et restent inchangées tout au long de cette étude.

Tableau 5.1 Paramètres du système pour l'étude en simulation.

Paramètres	Description (Unité)	Valeur
R	Résistance thermique (°C/kW)	2
C	Capacité thermique (kWh/°C)	$Log\text{-}\mathcal{N}(10, 3)$
P	Puissance thermique (kW)	14
η	Coefficient de performance	2.5
β	Coefficient de diffusion (°C^2/h)	0.1
$\Delta\theta$	Largeur de la plage de température (°C)	0.5
Δt	Période d'échantillonnage (h)	0.01
a	Paramètre de la fonction de pondération	1
k	Gain du contrôleur à EDP	10

De manière générale, tous ces paramètres peuvent être choisis de façon hétérogène pour la population de TCLs et le coefficient de diffusion est alors calculé pour modéliser cette hétérogénéité. Toutefois, le calcul du coefficient de diffusion est hors du cadre de ce travail et les valeurs utilisées ici sont tirées de travaux où seule la capacité thermique des TCLs est hétérogène. On peut notamment se référer à [27] où une étude à ce sujet est menée. La capacité thermique est générée aléatoirement selon une loi log-normale de paramètres $\mu_C = 10$ et $\sigma_C^2 = 3$ qui représentent respectivement l'espérance et la variance de la distribution.

Cependant, l'hétérogénéité de la population est également assurée par une randomisation des conditions initiales tel qu'expliqué dans les parties suivantes. De plus dans cette section, l'échelle de temps utilisée est normalisée par rapport à la constante de temps moyenne des TCLs, c'est-à-dire $\tau = R\mu_C = 20$h. Enfin, les simulations ont été produites sur le logiciel MATLAB R2018b fonctionnant sur un ordinateur portable HP EliteBook Folio avec un processeur Intel® Core™ i7-6500U et disposant de 8.00 GB de mémoire RAM.

Dans ce qui suit, on s'intéresse dans un premier temps au fonctionnement individuel des contrôleurs à changement d'état forcé et à équations aux dérivées partielles, puis on étudie l'utilisation conjointe de ces deux méthodes de régulation pour former un contrôleur hybride à deux niveaux.

5.1.1 Contrôle par changement d'état forcé

Comme expliqué dans le chapitre précédent, le contrôle par CEF permet d'assurer une régulation rapide, quasi-instantanée, de la puissance consommée par une population de TCLs. Ceci est réalisé en forçant une proportion de ces systèmes à passer d'un état à un autre, de *ON* vers *OFF* ou de *OFF* vers *ON*, en réponse à des variations rapides et imprévisibles dans la référence. Ces variations stochastiques sont caractéristiques de l'utilisation de sources d'énergie renouvelables. Ainsi, pour évaluer les performances de ce contrôleur, on génère une référence $(x_{\mathrm{ON}})_{\mathrm{ref}}$ pour la proportion désirée de TCLs à l'état *ON*, tel que présenté Figure 5.1. Cette proportion correspond simplement à une normalisation de la puissance consommée souhaitée pour l'ensemble de la population.

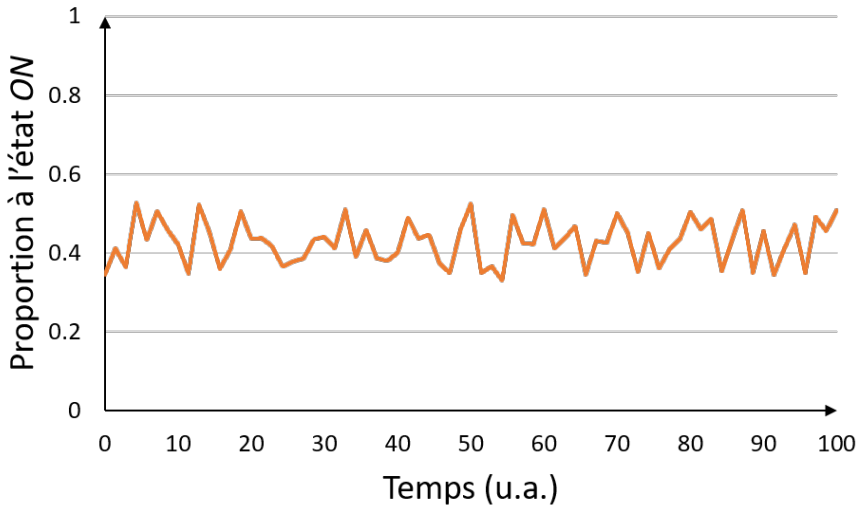


Figure 5.1 Proportion désirée de TCLs à l'état *ON* (cas du contrôle par CEF).

Ce signal de référence est généré aléatoirement suivant une distribution uniforme autour d'une valeur moyenne $\overline{(x_{\mathrm{ON}})}_{\mathrm{ref}} = 0.43$ choisie arbitrairement. Les simulations menées dans le cadre de ce travail ont montré que ce contrôle par CEF est moins efficace lorsque l'amplitude des variations est trop importante, ce qui peut alors entraîner des écarts non négligeables entre la référence et les valeurs réelles obtenues. Pour éviter cela, les variations aléatoires sont limitées à une plage de ± 0.1 autour de la valeur moyenne, c'est-à-dire des valeurs comprises dans l'intervalle [0.33,0.53].

Pour cette simulation, la température ambiante θ_a ainsi que la consigne θ_{cons} sont considérées comme constantes et sont fixées respectivement à 32 °C et 20 °C en tout temps. En effet, l'objectif de ce contrôleur n'est pas de suivre une référence de température puisque l'on s'intéresse uniquement à une régulation instantanée de la puissance consommée. Initialement, la température de chaque TCL est choisie de façon aléatoire suivant une distribution uniforme dans la plage de température définie par θ_{min} et θ_{max}, c'est-à-dire l'intervalle $[20 - \frac{\Delta\theta}{2}, 20 + \frac{\Delta\theta}{2}]$ °C. De plus, l'état initial de chaque TCL est également choisi aléatoirement suivant une distribution uniforme, ce qui signifie que la proportion initiale de TCLs à l'état *ON* avoisine les 50%. Enfin, si un TCL subit un changement d'état forcé, celui-ci est rendu indisponible pour une durée de 20 périodes de temps. À l'état initial, la disponibilité de chaque TCL est choisie aléatoirement, de même que la durée initiale de blocage si un TCL est indisponible au début de la simulation.

Le contrôle par CEF est ensuite appliqué à une grande population de taille $N = 10000$ pour obtenir le résultat présenté Figure 5.2 qui montre la proportion réelle de TCLs à l'état *ON*.

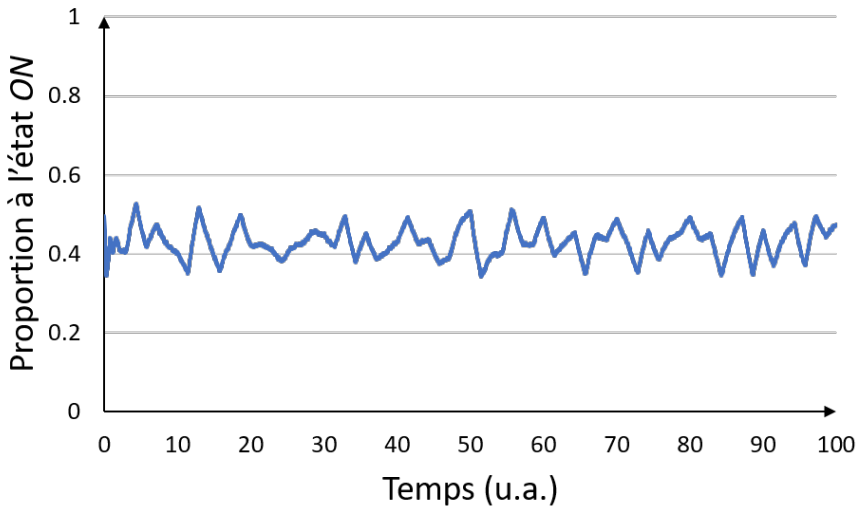


Figure 5.2 Proportion de TCLs à l'état *ON* pour une population de 10 000 TCLs.

Celle-ci reste relativement proche de la proportion désirée puisque l'écart absolu est en tout temps inférieur à 7.4% comme on le voit Figure 5.3. De plus, la racine de l'erreur quadratique moyenne (REQM) obtenue dans ce cas est de 0.020.

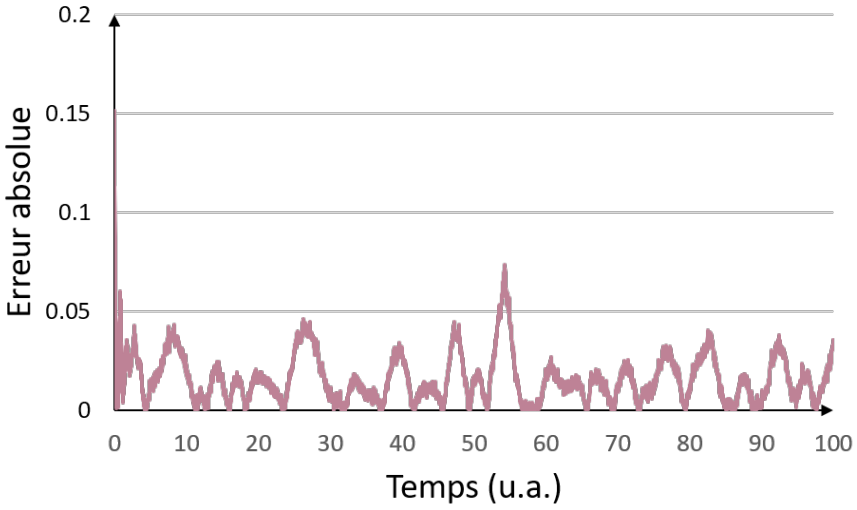
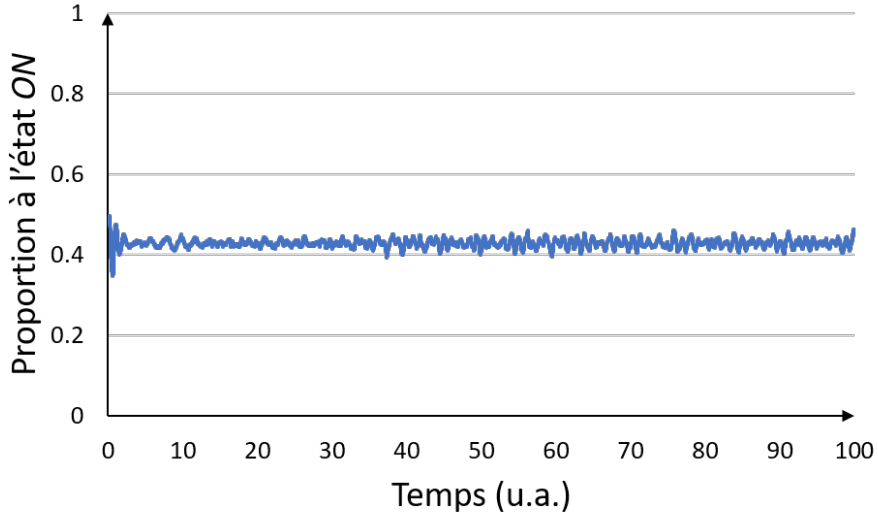


Figure 5.3 Écart entre la proportion désirée et la proportion réelle (cas du contrôle par CEF).

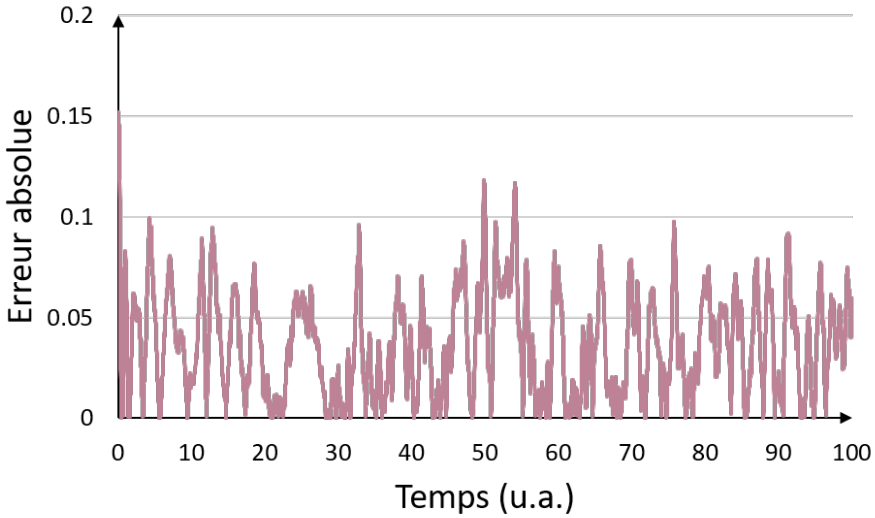
Ces résultats sont comparés à une utilisation classique des TCLs sans le contrôle par CEF, c'est-à-dire que les changements d'état sont gouvernés simplement par thermostat. Toutefois, on considère les mêmes variations pour la proportion désirée de systèmes en état de marche. De plus, la température ambiante, la consigne ainsi que les conditions initiales sont identiques à la simulation précédente. Dans ce cas et comme illustré Figure 5.4, l'écart absolu entre la proportion désirée et la proportion réelle atteint 11.8% avec une REQM de 0.045, soit 2.25 fois plus grande qu'avec le contrôle par CEF. Cette différence de 0.025 peut sembler négligeable, toutefois si l'on convertit cet écart en puissance, cela équivaut tout de même à 1.4 MW puisque l'on considère une population de 10 000 TCLs, chacun pouvant consommer une puissance $P_{\text{TCL}} = \frac{14}{2.5} = 5.6$ kW.

Ainsi, en appliquant le contrôle par CEF à une population suffisamment grande de TCLs, il est possible de réduire considérablement les écarts entre la proportion désirée et la proportion réelle obtenue. Pour se rendre compte de l'importance de réaliser cette régulation sur un grand nombre de systèmes, on réalise la même simulation avec des valeurs plus petites. Comme présenté Figure 5.5 la proportion de TCLs à l'état *ON* se rapproche de la proportion désirée lorsque la taille de la population augmente. Pour $N = 10$ et $N = 100$, l'écart avec la référence est important mais celui-ci est réduit lorsque la population a une taille $N = 1000$ avec une REQM de 0.029, ce qui peut être acceptable. Toutefois dans ce qui suit, on s'intéresse

uniquement à la simulation d'une population de 10 000 TCLs.



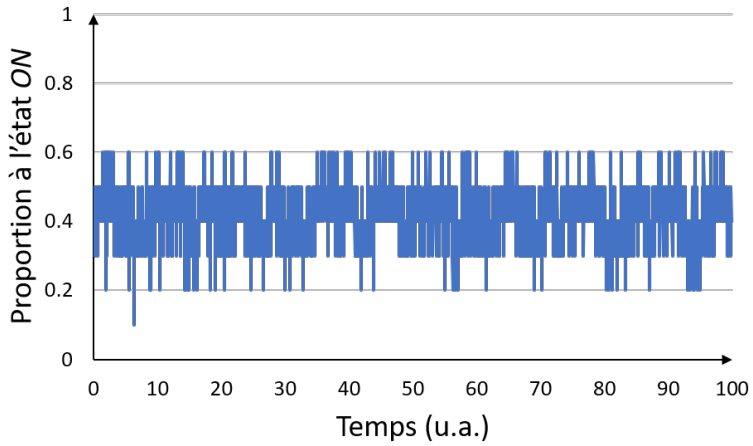
(a)



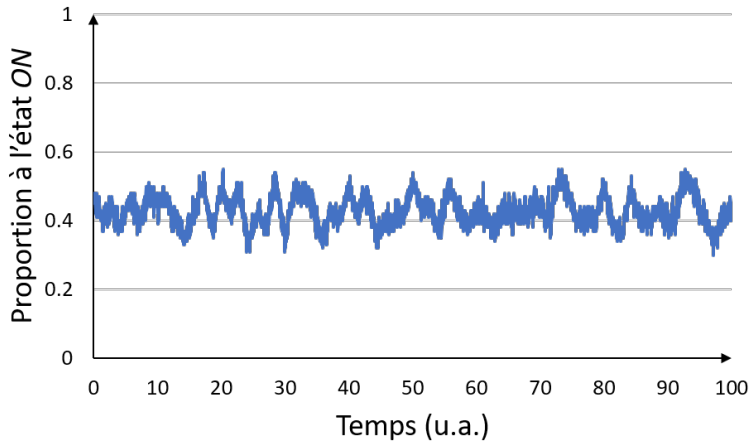
(b)

Figure 5.4 (a) Proportion de TCLs à l'état *ON* pour une population non contrôlée et (b) écart avec la proportion désirée.

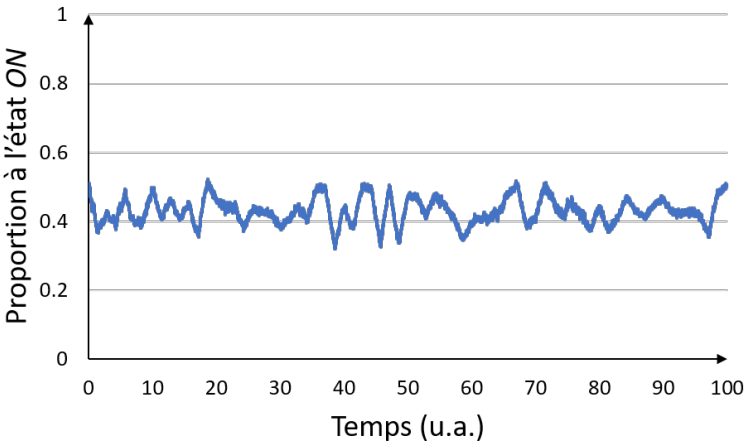
En raison des changements d'état forcés, la température moyenne de la population de TCLs dévie légèrement de la consigne comme on peut le voir Figure 5.6(a) où l'on considère les variations de température d'un échantillon de 100 TCLs choisis de façon aléatoire. Toutefois, cette déviation reste faible et la température des TCLs est dans tous les cas maintenue dans la plage délimitée par $\theta_{\min}$ et $\theta_{\max}$ en tout temps. Les variations d'un TCL sont illustrées de façon plus claire Figure 5.6(b) où un zoom est effectué sur l'échelle de temps.



(a)



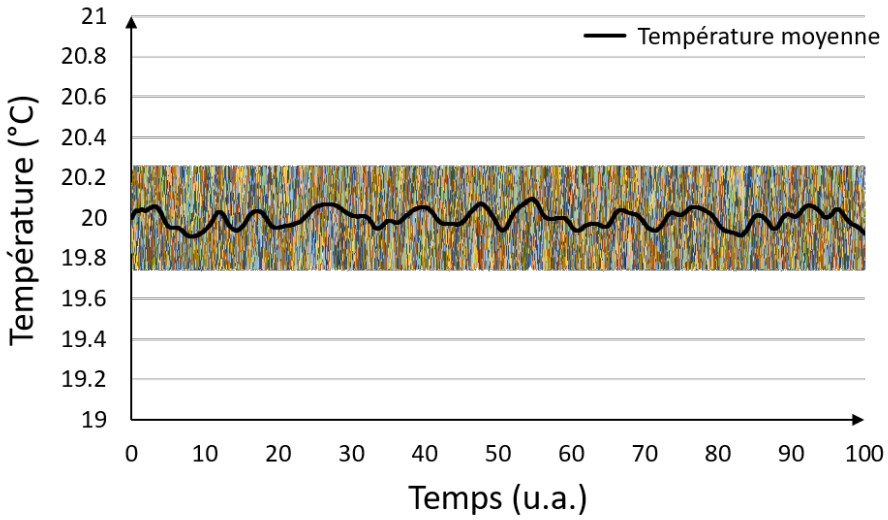
(b)



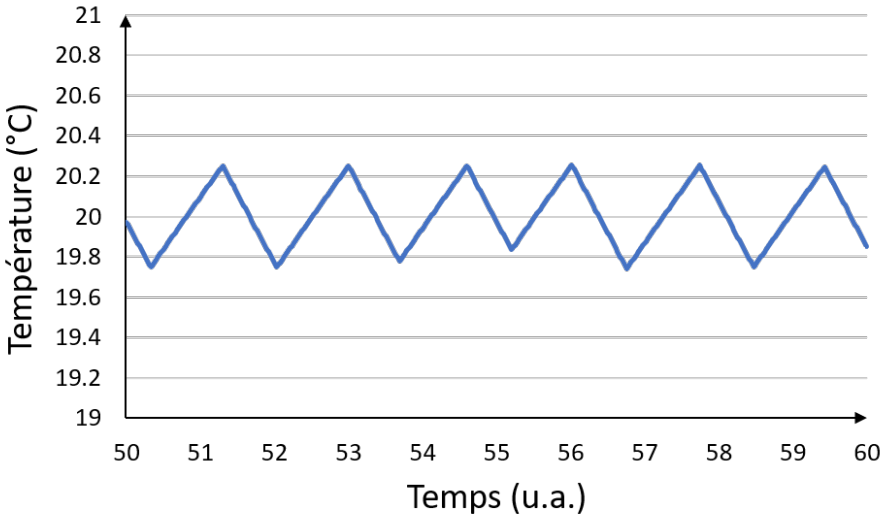
(c)

Figure 5.5 Proportion de TCLs à l'état *ON* pour une population de (a) 10 TCLs (b) 100 TCLs et (c) 1 000 TCLs.

Enfin, la distribution des TCLs sur la plage de température est présentée Figure 5.7. L'échelle de couleurs représente le nombre de TCLs à une température donnée au cours du temps. On retrouve alors les variations de la température moyenne avec des zones où le nombre de TCLs est plus important (en rouge) et des zones où les systèmes sont moins présents (en bleu).



(a)



(b)

Figure 5.6 Variations de température de (a) 100 TCLs au sein de la population et (b) 1 TCL avec un zoom sur l'échelle de temps.

Ainsi, ces simulations permettent d'illustrer le fonctionnement du contrôleur par CEF et son application pour suivre des variations rapides et aléatoires de la puissance consommée par

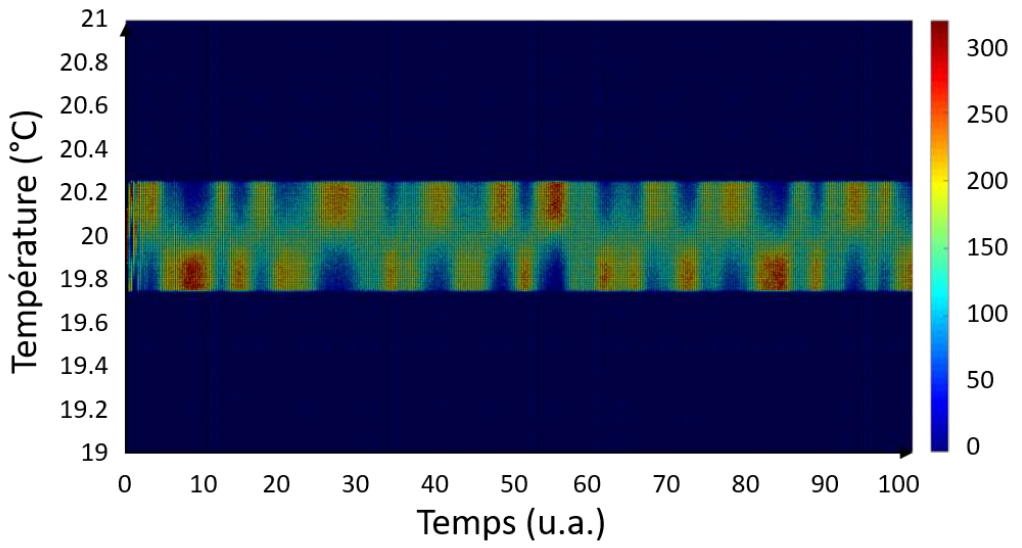


Figure 5.7 Distribution de la population de TCLs sur la plage de température (cas du contrôle par CEF).

une population de TCLs. Ceci est réalisé grâce au contrôle de la proportion de systèmes en état de marche. Dans la partie suivante, on s'intéresse au contrôleur à EDP et aux résultats obtenus dans le cadre de cette étude en simulation.

5.1.2 Contrôle par équations aux dérivées partielles

Le contrôle par EDP agit sur la consigne de température d'une population de TCLs afin de réguler leur consommation globale. En effet, en réponse à des variations de puissance dans le réseau, la consigne de température peut être modifiée ce qui a pour effet d'augmenter ou de diminuer la proportion globale de systèmes en état de marche. Toutefois, cette régulation n'est efficace que pour des variations de puissance relativement lentes en raison de la dynamique thermique de ces systèmes qui est elle-même lente.

Pour évaluer les performances de ce contrôleur à EDP, on génère une référence $(x_{\mathrm{ON}})_{\mathrm{ref}}$ pour la proportion désirée de TCLs à l'état *ON*, tel que présenté Figure 5.8. De la même façon que précédemment, cette proportion correspond à une normalisation de la puissance consommée souhaitée pour l'ensemble de la population.

Ce signal de référence correspond à une fonction sinusoïdale d'amplitude 0.2 et centrée autour d'une valeur moyenne $\overline{(x_{\mathrm{ON}})}_{\mathrm{ref}} = 0.43$ choisie arbitrairement. Les valeurs sont donc comprises dans l'intervalle [0.23,0.63]. Les simulations menées dans le cadre de ce travail ont cependant montré que ce contrôle par EDP est moins efficace lorsque les variations sont trop rapides,

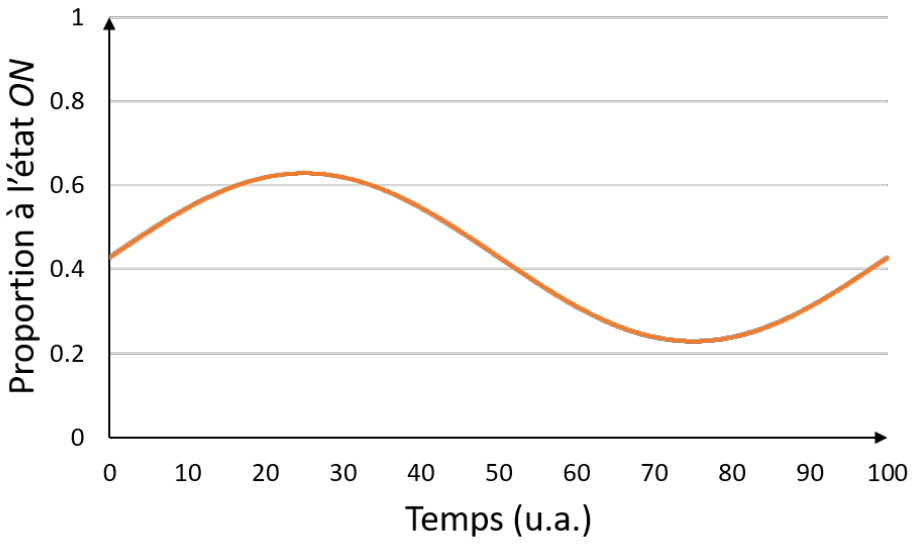


Figure 5.8 Proportion désirée de TCLs à l'état *ON* (cas du contrôle par EDP).

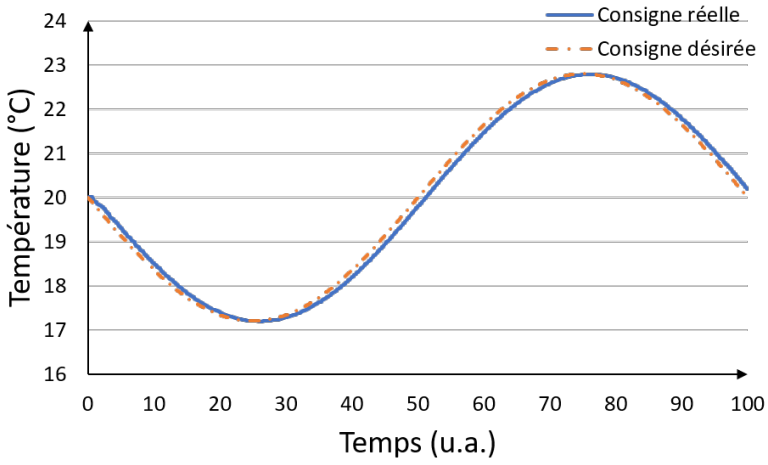
puisque celles-ci peuvent engendrer une instabilité de la commande. Ceci reste tout de même en accord avec l'objectif fixé pour ce contrôleur qui est de réguler des variations lentes de puissance.

Pour cette simulation, la température ambiante θ_a est considérée comme constante et est fixée à 32 °C en tout temps. À l'état initial, la consigne de température est à 20 °C pour l'ensemble de la population et la température de chaque TCL est choisie de façon aléatoire dans l'intervalle $[20 - \frac{\Delta\theta}{2}, 20 + \frac{\Delta\theta}{2}]$. De plus, l'état dans lequel se trouve chaque TCL (*ON* ou *OFF*) est également choisi aléatoirement pour avoir une proportion initiale proche de 50%. Enfin et comme expliqué précédemment, il est important de noter que pour s'assurer que la commande u_{EDP} soit bien définie, au moins 1 TCL doit être à l'état *ON* en tout temps. Dans la simulation, la portion minimale de TCLs à l'état *ON* est fixée à 1%.

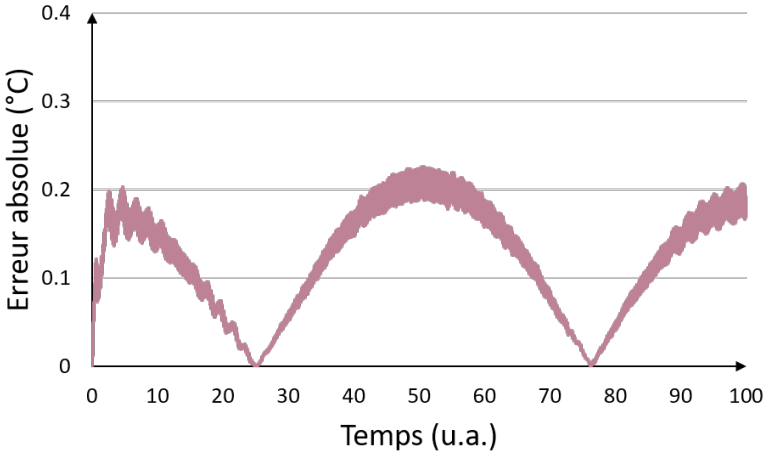
Le contrôle par EDP est ainsi appliqué à une population de $N = 10000$ TCLs. En réponse aux variations de puissance, une référence θ_{ref} pour la consigne de température est générée. La commande du contrôleur permet alors de suivre cette consigne désirée en modifiant la consigne réelle θ_{cons} des TCLs, comme montré Figure 5.9(a). Dans ce cas, les écarts entre la consigne désirée et la consigne réellement obtenue grâce au contrôleur restent faibles tout au long de la simulation comme on peut le voir Figure 5.9(b) et l'erreur absolue est en tout temps inférieure à 0.24 °C avec une REQM de 0.14 °C. Il est important de rappeler ici que le but de cette section est d'illustrer les performances des différents contrôleurs. De tels écarts de température ne pourraient en effet être acceptables pour le confort des clients. La section

suivante montre une utilisation plus réaliste avec la simulation d'un micro-réseau.

La température donnée en consigne aux TCLs permet également de modifier les températures limites $\theta_{\min}$ et $\theta_{\max}$ qui suivent la même dynamique. Les variations de température sont présentées Figure 5.10(a) pour un échantillon de 100 systèmes choisis de façon aléatoire parmi l'ensemble de la population. De même, la distribution des TCLs sur l'ensemble de la plage de température considérée lors de cette simulation est montrée Figure 5.10(b). La population reste ainsi en moyenne proche de la consigne avec peu de zones à forte ou faible affluence. De même les températures restent en tout temps dans la plage de température définie à plus ou moins 0.25 °C de la consigne.

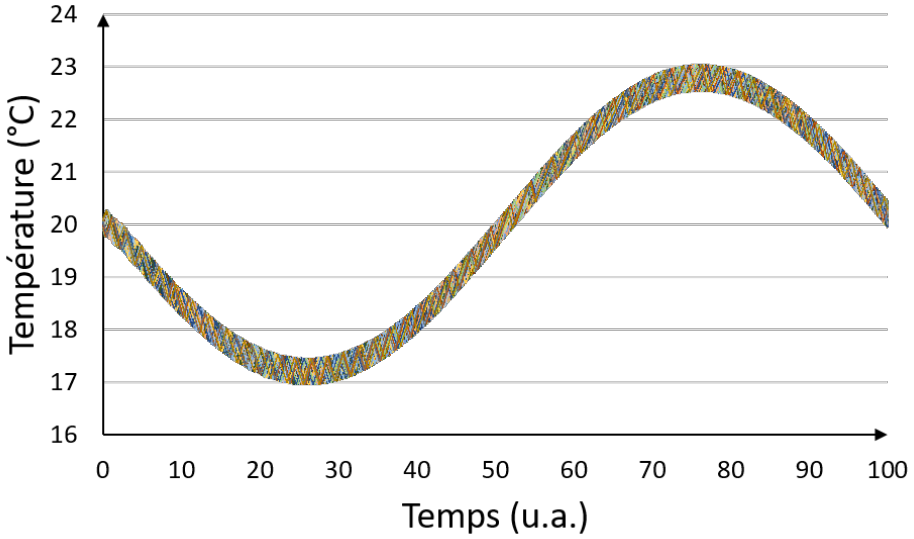


(a)

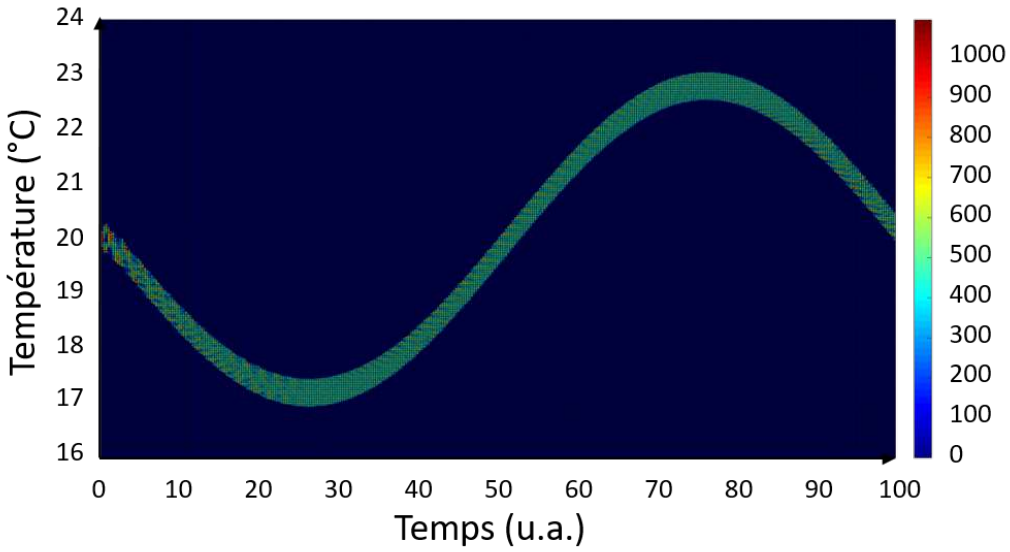


(b)

Figure 5.9 (a) Consigne de température pour la population de TCLs et (b) écart entre la consigne désirée et la consigne réelle obtenue avec le contrôleur à EDP (cas du contrôle par EDP avec température ambiante constante).



(a)



(b)

Figure 5.10 (a) Variations de température de 100 TCLs et (b) distribution de la population sur la plage de température (cas du contrôle par EDP avec température ambiante constante).

Les variations de température telles que présentées entraînent alors des variations de la proportion globale de TCLs à l'état *ON*, comme on peut le voir Figure 5.11.

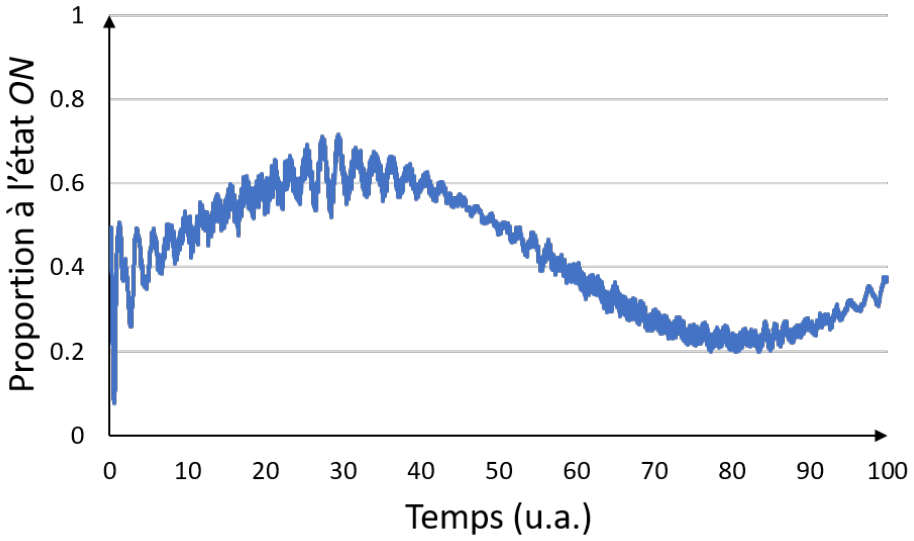


Figure 5.11 Proportion de TCLs à l'état *ON* (cas du contrôle par EDP avec température ambiante constante).

Les variations de la proportion réelle de TCLs à l'état *ON* se rapprochent ainsi de la référence (Figure 5.8) avec un écart absolu en tout temps inférieur à 15% (lorsque la commande est stabilisée) comme on le voit Figure 5.12. Cet écart est légèrement supérieur lors des premiers instants de la simulation en raison du délai nécessaire pour que le contrôleur atteigne un régime stable. Enfin, la REQM obtenue dans ce cas est de 0.059.

Le contrôleur à EDP permet également de suivre les variations de la température ambiante extérieure θ_a, en plus des variations de la consigne. Pour se rendre compte de cela, on réalise la même simulation avec cette fois une température ambiante variable. Le profil de ces variations est présenté Figure 5.13. On considère ainsi qu'il est possible de mesurer cette température au cours du temps pour l'implémentation du contrôle.

Le passage d'une température ambiante à une autre est représenté par une fonction polynomiale continue et dérivable de la forme suivante [26] :

$$\theta_a(t) = \theta_a(t_i) + \Big(\theta_a(t_f) - \theta_a(t_i)\Big)\left(\frac{t-t_i}{t_f-t_i}\right)^5 \sum_{j=0}^{4} a_j \left(\frac{t-t_i}{t_f-t_i}\right)^j, \quad t \in [t_i, t_f]\,, \tag{5.1}$$

avec t_i et t_f les temps de début et de fin correspondant au passage d'une température $\theta_a(t_i)$ à une température $\theta_a(t_f)$.

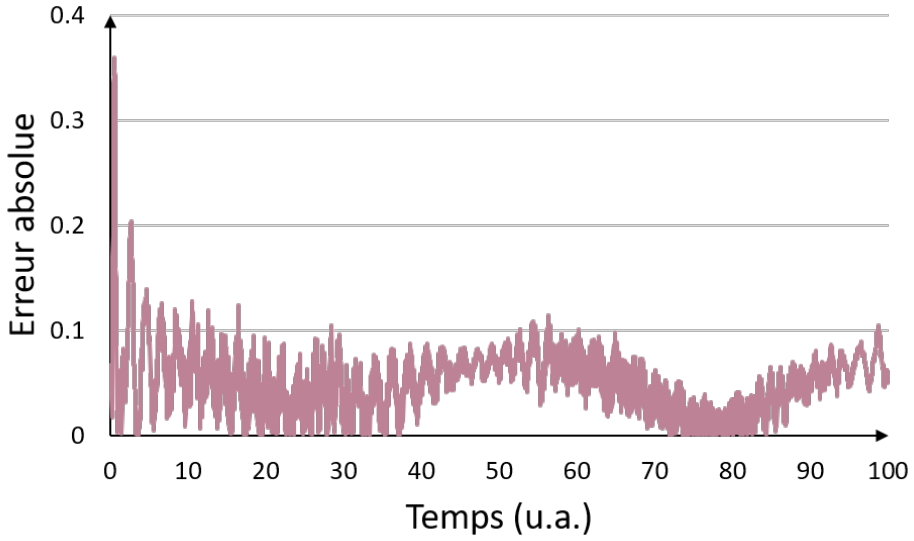


Figure 5.12 Écart entre la proportion désirée et la proportion réelle (cas du contrôle par EDP avec température ambiante constante).

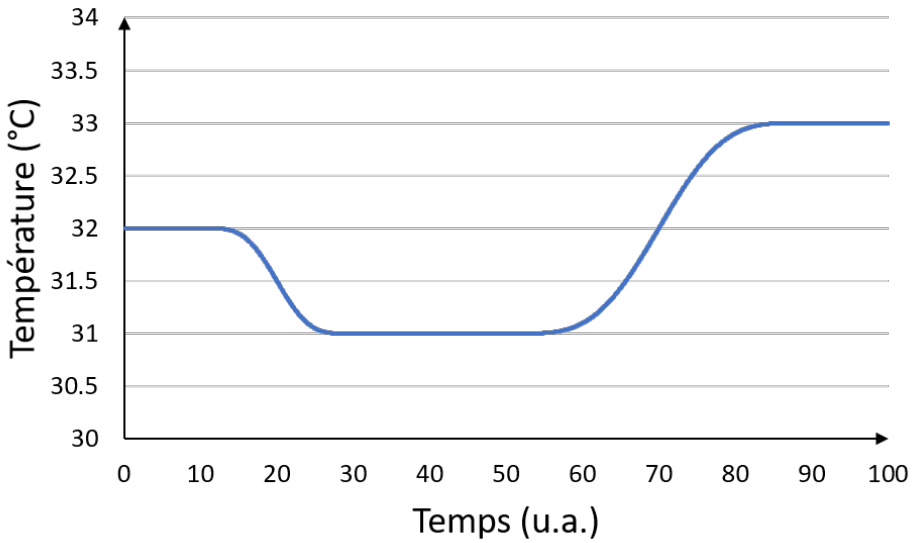


Figure 5.13 Température ambiante extérieure (cas du contrôle par EDP).

Les coefficients $a_j|_{j=0,\dots,4}$ sont déterminés en fixant les conditions finales pour les dérivées successives. Dans le cadre de cette étude, on a :

$$\dot{\theta}_a(t_f) = \ddot{\theta}_a(t_f) = \theta_a^{(3)}(t_f) = \theta_a^{(4)}(t_f) = \theta_a^{(5)}(t_f) = 0, \tag{5.2}$$

où $\theta_a^{(l)}$ représente la l-ème dérivée de $\theta_a(t)$. On obtient donc $a_0 = 126$, $a_1 = -420$, $a_2 = 540$, $a_3 = -315$ et $a_4 = 70$.

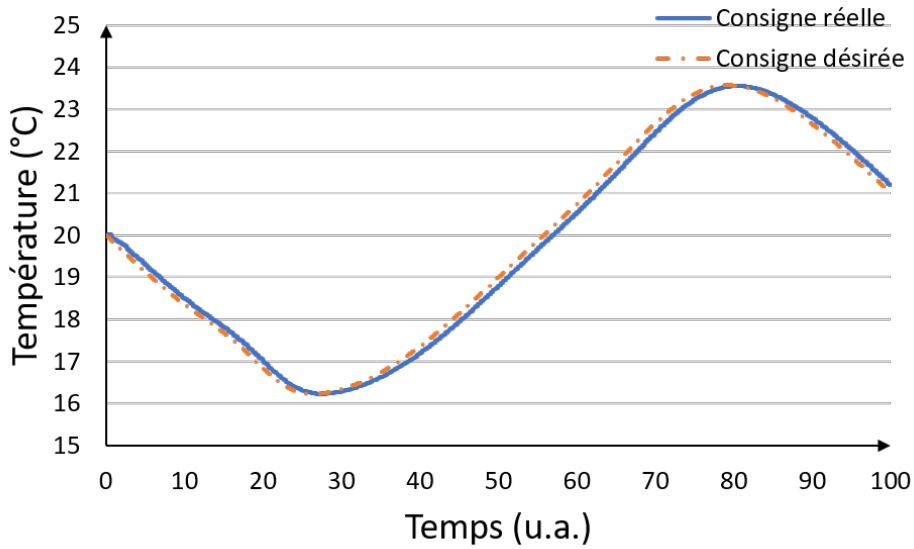
Ainsi, la température ambiante passe de 32 °C à 31 °C en 20 unités de temps puis de 31 °C à 33 °C en 40 unités de temps. Les conditions initiales pour les autres paramètres sont identiques à la simulation précédente.

En appliquant le contrôle par EDP pour suivre la proportion désirée de TCLs à l'état *ON* (Figure 5.8), la consigne de température désirée est générée telle que présentée Figure 5.14(a). Celle-ci permet de compenser les variations de la température ambiante. La consigne réelle alors obtenue reste proche de celle désirée avec des écarts faibles qui ne dépassent pas 0.27 °C, comme on peut le voir Figure 5.14(b). De plus, la REQM est ici de 0.16 °C ce qui est légèrement supérieur au cas précédent.

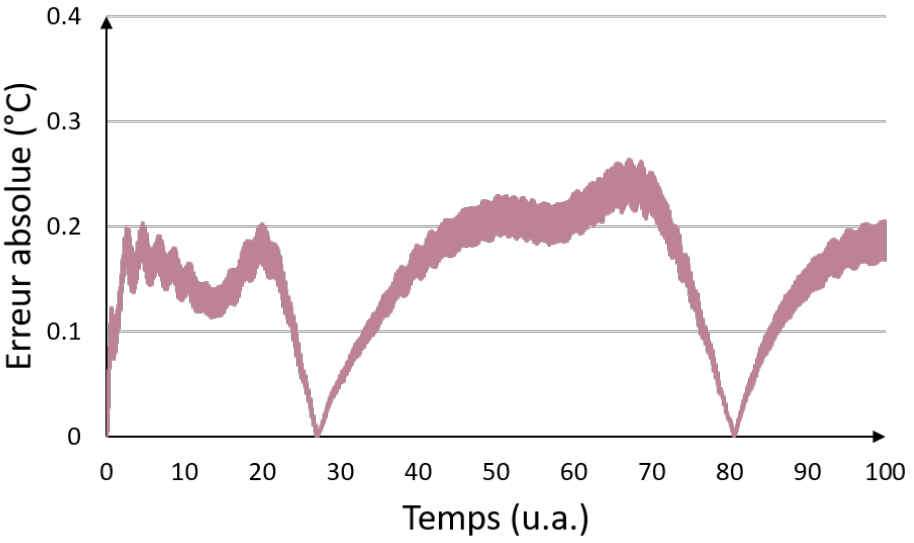
Les variations de température d'un échantillon de 100 TCLs ainsi que la distribution de l'ensemble de la population sur la plage de température sont présentées respectivement Figure 5.15(a) et 5.15(b). La population reste une fois de plus en moyenne proche de la consigne et les variations de température des TCLs restent en tout temps dans la plage définie à plus ou moins 0.25 °C de la consigne.

Enfin, les variations de la proportion globale de TCLs à l'état *ON* sont présentées Figure 5.16. L'écart absolu entre ces variations et les variations désirées, présenté Figure 5.17, est en tout temps inférieur à 15% (lorsque la commande est stabilisée). Ici aussi, cet écart est légèrement supérieur lors des premiers instants de la simulation, jusqu'à ce que le contrôleur se stabilise. Pour ce scénario, la REQM est de 0.070 ce qui est encore une fois légèrement supérieur au scénario précédent où la température ambiante était constante.

Ainsi, la simulation de ces deux scénarios permet d'illustrer le fonctionnement du contrôleur par EDP et son application pour suivre des variations de puissance de plus grande amplitude mais également plus lentes. Ceci est réalisé grâce au suivi des variations désirées de la consigne de température qui permet de réguler la consommation globale d'une population de TCLs. Dans la dernière partie de cette section, on s'intéresse aux résultats obtenus par l'association des deux contrôleurs simulés précédemment.

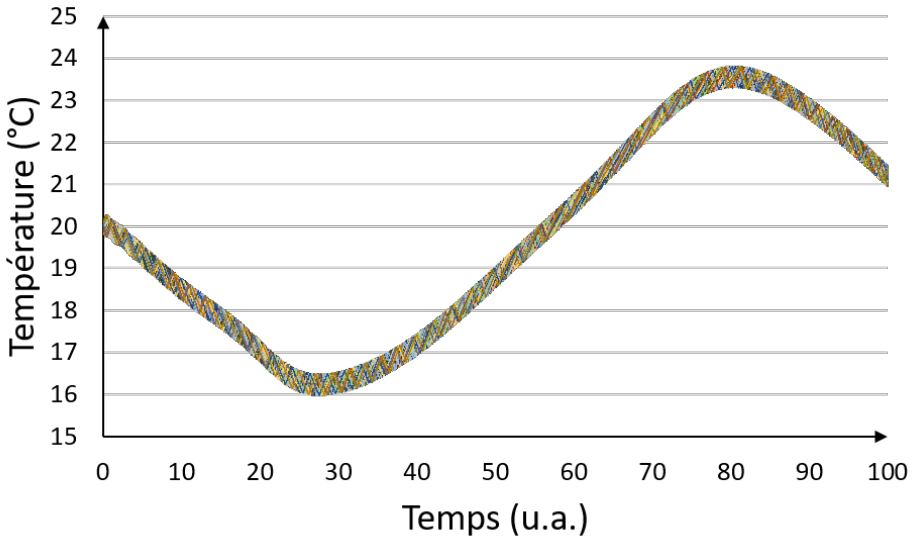


(a)

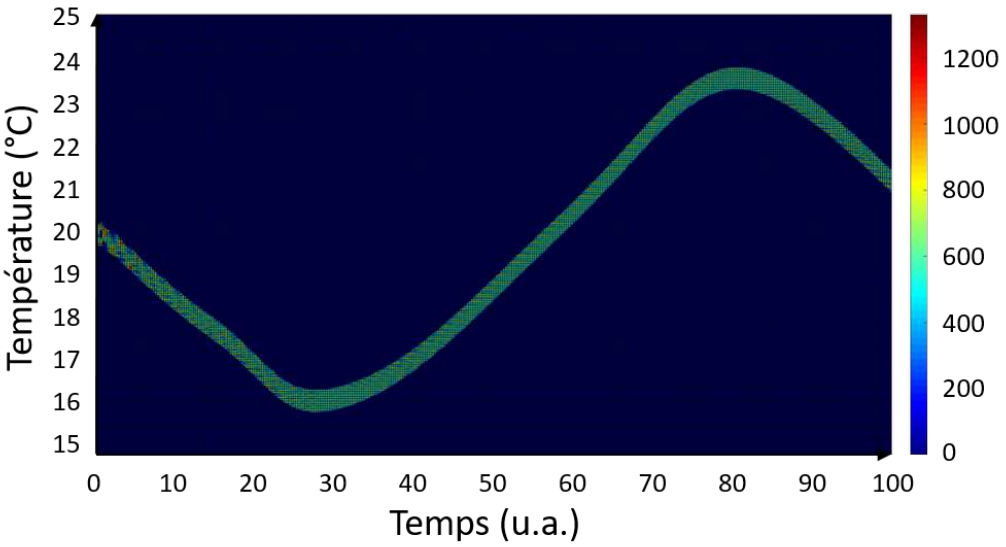


(b)

Figure 5.14 (a) Consigne de température pour la population de TCLs et (b) écart entre la consigne désirée et la consigne réelle obtenue avec le contrôleur à EDP (cas du contrôle par EDP avec température ambiante variable).



(a)



(b)

Figure 5.15 (a) Variations de température de 100 TCLs et (b) distribution de la population sur la plage de température (cas du contrôle par EDP avec température ambiante variable).

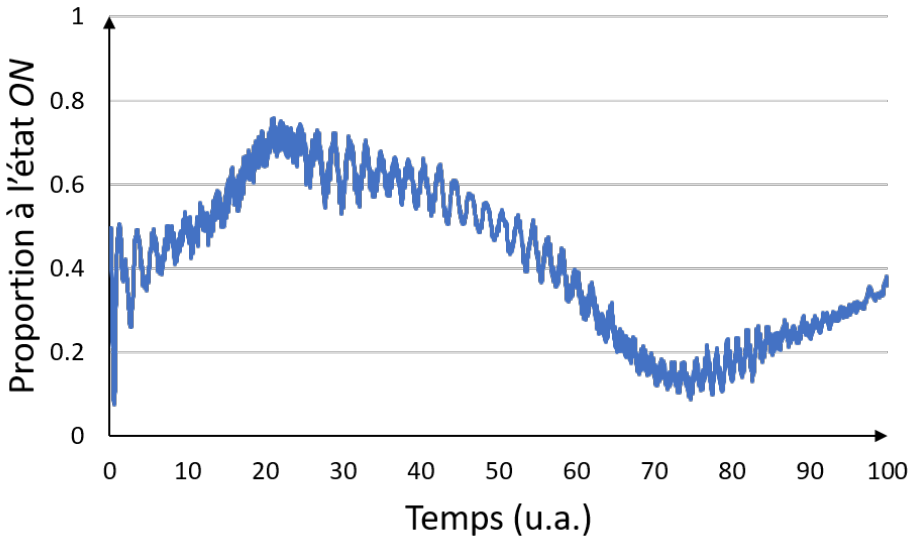


Figure 5.16 Proportion de TCLs à l'état *ON* (cas du contrôle par EDP avec température ambiante variable).

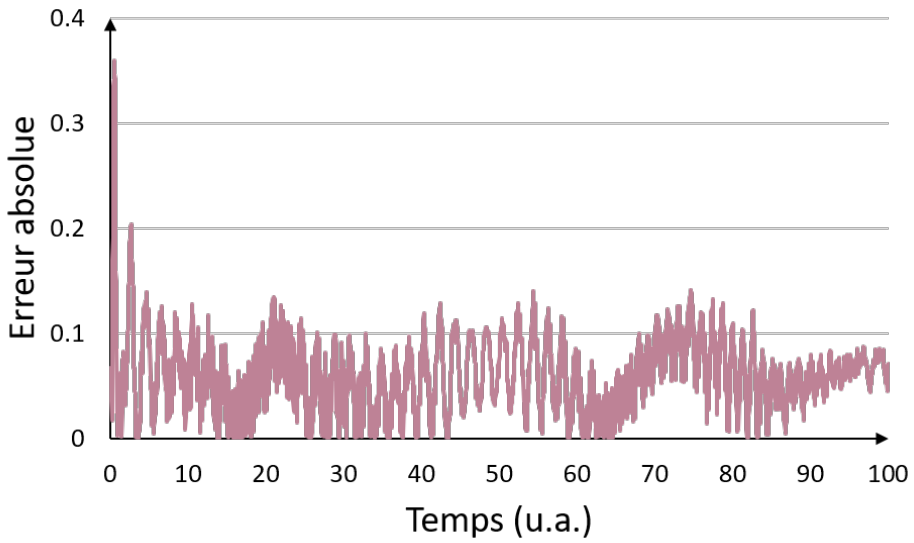


Figure 5.17 Écart entre la proportion désirée et la proportion réelle (cas du contrôle par EDP avec température ambiante variable).

5.1.3 Contrôle hybride à deux niveaux

Pour assurer une régulation rapide des TCLs en réponse à des variations aléatoires tout en contrôlant leur consommation globale, on considère un contrôleur hybride qui combine le contrôle par CEF et le contrôle par EDP. Ainsi, la consigne de température de la population est modifiée en réponse aux variations globales de puissance dans le réseau puis des changements d'état forcés sont appliqués pour un contrôle de la puissance consommée.

Afin d'évaluer un tel contrôleur une référence normalisée de puissance est générée, tel que présenté Figure 5.18. Celle-ci correspond à la proportion désirée de systèmes en état de marche.

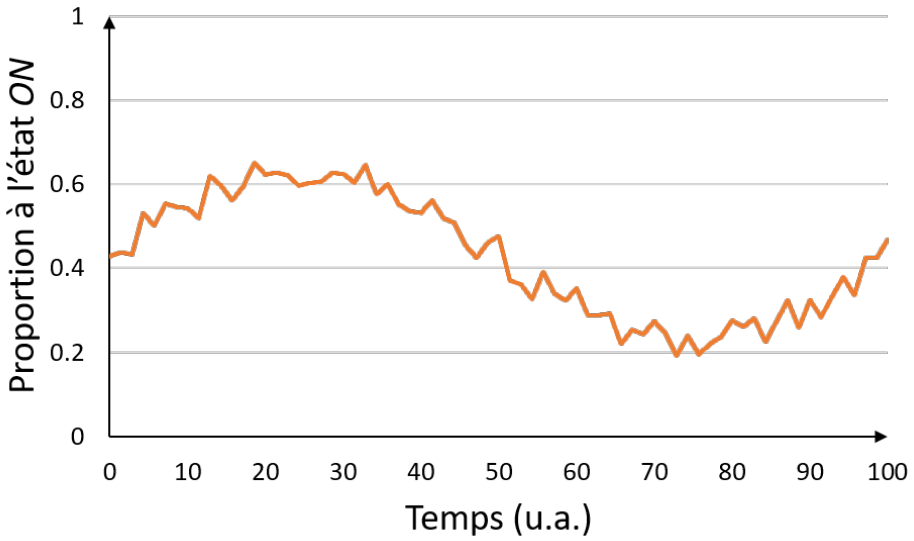


Figure 5.18 Proportion désirée de TCLs à l'état *ON* (cas du contrôle hybride).

Le signal de référence utilisé ici correspond à une fonction sinusoïdale d'amplitude 0.2 centrée autour d'une valeur moyenne $\overline{(x_{\mathrm{ON}})}_{\mathrm{ref}} = 0.43$ choisie arbitrairement à laquelle on ajoute un signal aléatoire. Les valeurs de celui-ci sont choisies suivant une distribution uniforme dans l'intervalle [-0.05,0.05]. Ainsi, les valeurs du signal de référence se trouvent dans l'intervalle [0.18,0.68].

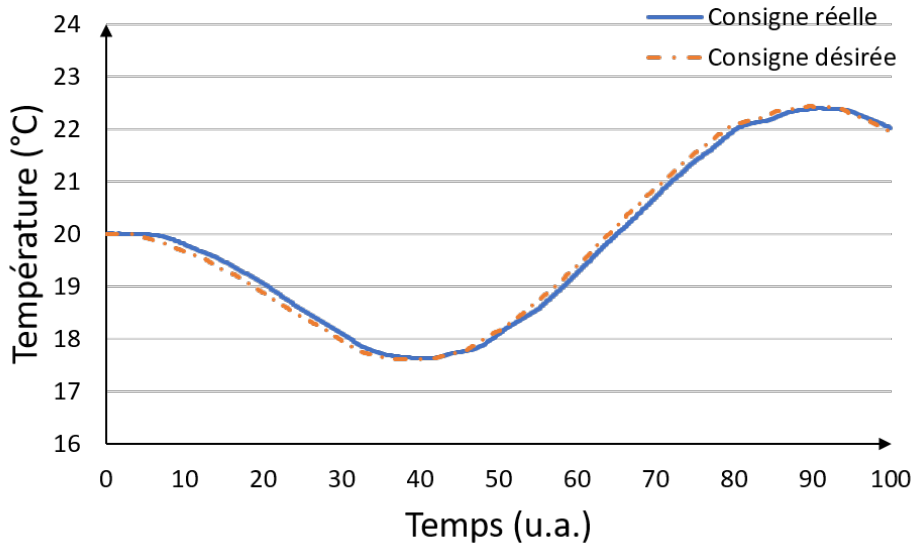
Dans un premier temps, on considère que la température ambiante θ_a est constante et égale à 32 °C en tout temps. Initialement, la consigne de température est à 20 °C pour toute la population et la température de chaque TCL est choisie de façon aléatoire dans l'intervalle $[20 - \frac{\Delta\theta}{2}, 20 + \frac{\Delta\theta}{2}]$. De plus, l'état initial de chaque TCL est aussi choisi aléatoirement de telle façon à avoir une proportion initiale avoisinant les 50%. Au cours de la simulation, si un

TCL subit un changement d'état forcé, celui-ci est bloqué pendant 20 périodes de temps. À l'état initial, la disponibilité des TCLs et la durée initiale de blocage sont choisies de façon aléatoire. Enfin, au moins 1% de la population est à l'état *ON* à chaque instant pour s'assurer que la commande soit bien définie.

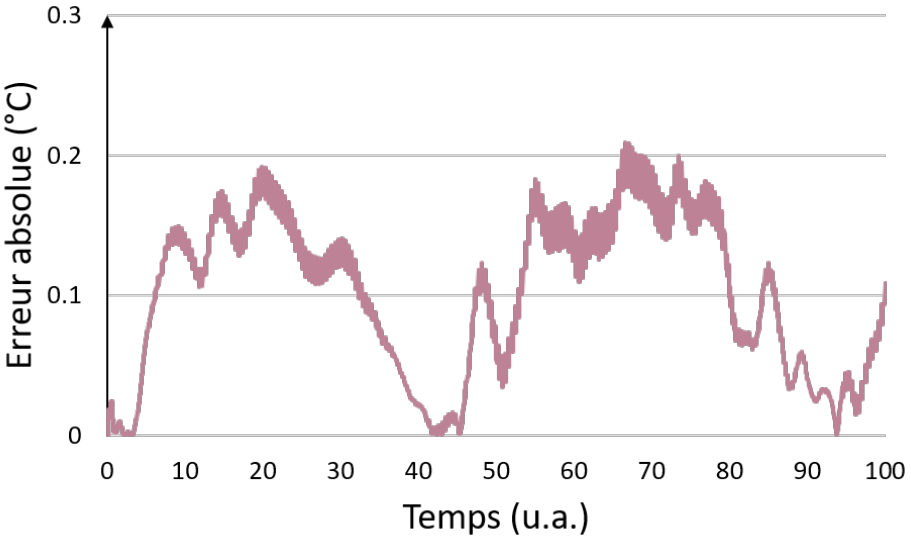
Le contrôle hybride tel que présenté est appliqué à une grande population de $N = 10000$ systèmes thermostatiques. La référence θ_{ref} pour la consigne de température est générée à partir des variations filtrées de la proportion à l'état *ON* qui permettent de considérer uniquement les variations globales de dynamique lente. La commande du contrôleur à EDP permet alors de suivre cette consigne désirée comme on peut le voir Figure 5.19(a). Toutefois comme le signal de référence est filtré en utilisant la moyenne des valeurs précédentes, on observe un léger retard au niveau des variations de la consigne de température, en comparaison aux variations globales de puissance. L'erreur absolue entre les deux signaux, présentée Figure 5.19(b), reste faible pendant la durée de la simulation avec un maximum de 0.21 °C et une REQM de 0.12 °C.

Les variations de température d'un échantillon de 100 systèmes choisis aléatoirement sont présentées Figure 5.20(a). Celles-ci restent dans la plage de température délimitée par $\theta_{\min}$ et $\theta_{\max}$ qui varient de la même façon. En raison des changements d'état forcés qui interviennent, la température moyenne de la population peut présenter de faibles déviation par rapport à la consigne, comme on peut le voir Figure 5.20(b). En effet, la distribution des TCLs sur la plage de température montre quelques zones à forte densité (en rouge).

Ces variations de la consigne de température entraînent des variations de la proportion globale de TCLs à l'état *ON* qui peut alors suivre, grâce à l'action du contrôleur à CEF, les variations rapides de la référence comme illustré Figure 5.21. La proportion réelle de TCLs en état de marche se rapproche alors de la proportion désirée avec un écart absolu en tout temps inférieur à 11% comme on peut le voir Figure 5.22. De plus, la REQM obtenue dans ce cas est de 0.036.

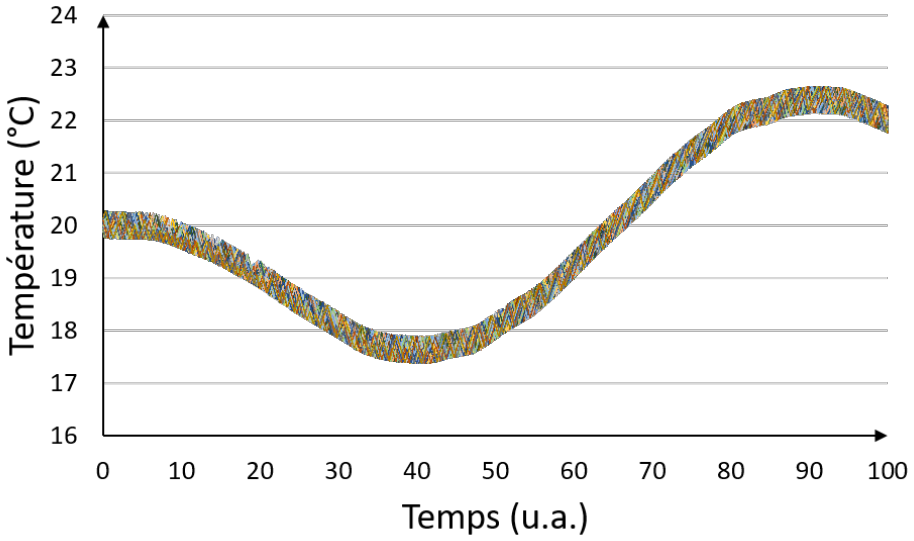


(a)

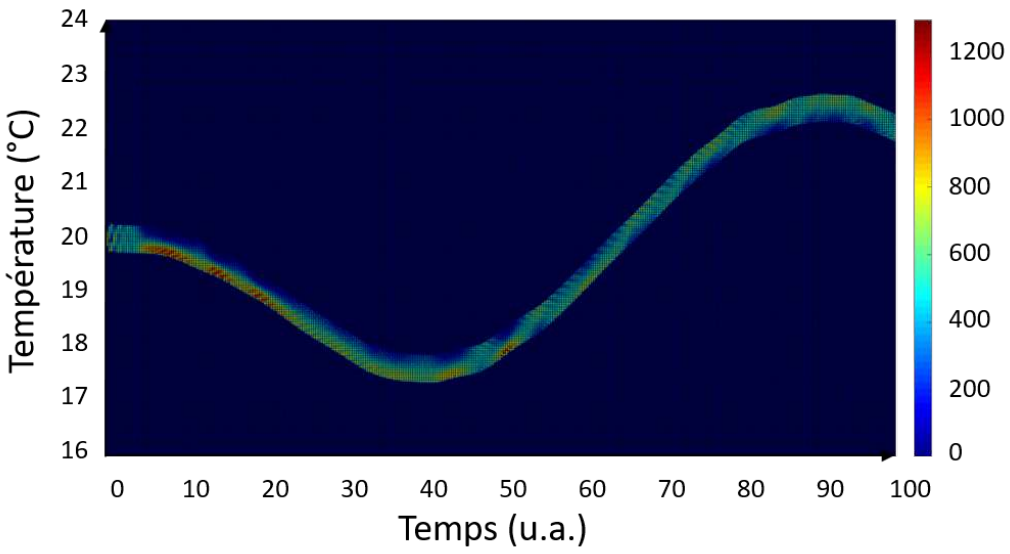


(b)

Figure 5.19 (a) Consigne de température pour la population de TCLs et (b) écart entre la consigne désirée et la consigne réelle obtenue avec le contrôleur à EDP (cas du contrôle hybride avec température ambiante constante).



(a)



(b)

Figure 5.20 (a) Variations de température de 100 TCLs et (b) distribution de la population sur la plage de température (cas du contrôle hybride avec température ambiante constante).

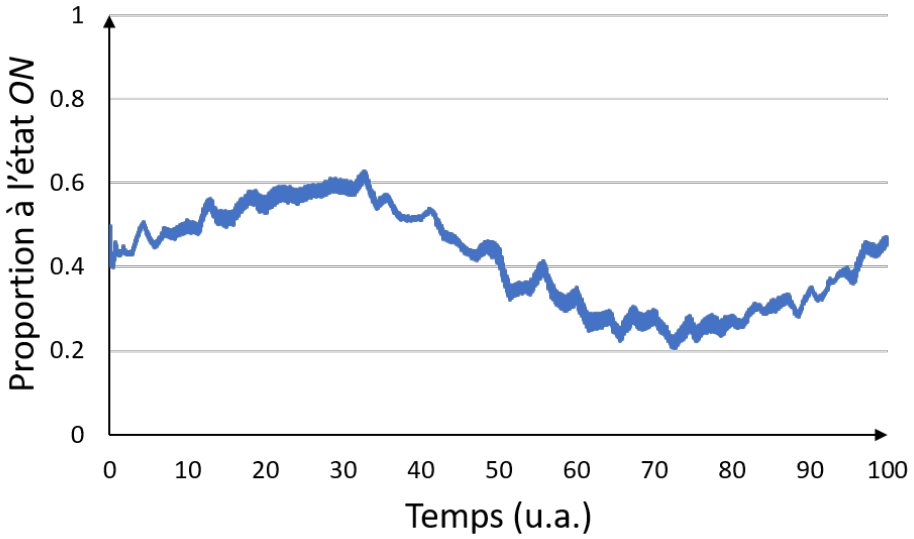


Figure 5.21 Proportion de TCLs à l'état *ON* (cas du contrôle hybride avec température ambiante constante).

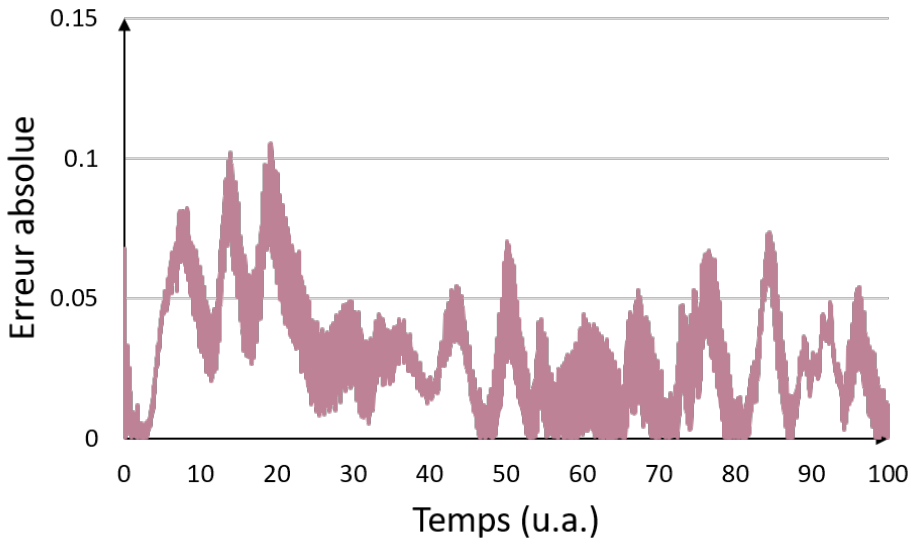


Figure 5.22 Écart entre la proportion désirée et la proportion réelle (cas du contrôle hybride avec température ambiante constante).

Comme on l'a vu précédemment, le contrôleur à EDP peut compenser des variations de la température ambiante extérieure θ_a et les prendre en compte dans le cadre de la régulation. Ainsi, on considère de nouveau un scénario où cette température ambiante varie. Le profil des variations utilisé dans ce cas est différent de celui de la partie précédent et est présenté Figure 5.23.

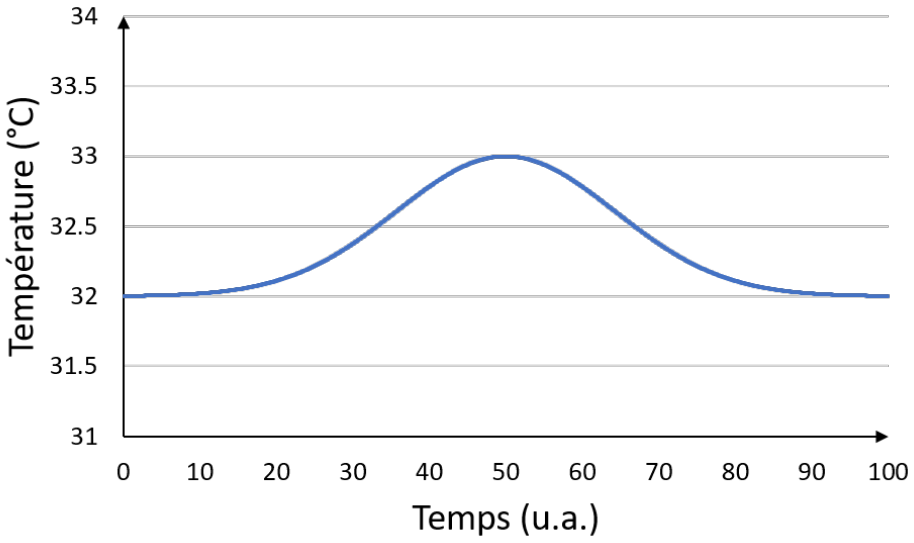


Figure 5.23 Température ambiante extérieure (cas du contrôle hybride).

Les variations de la température ambiante sont alors déterminées par une fonction de type Gaussienne de la forme suivante :

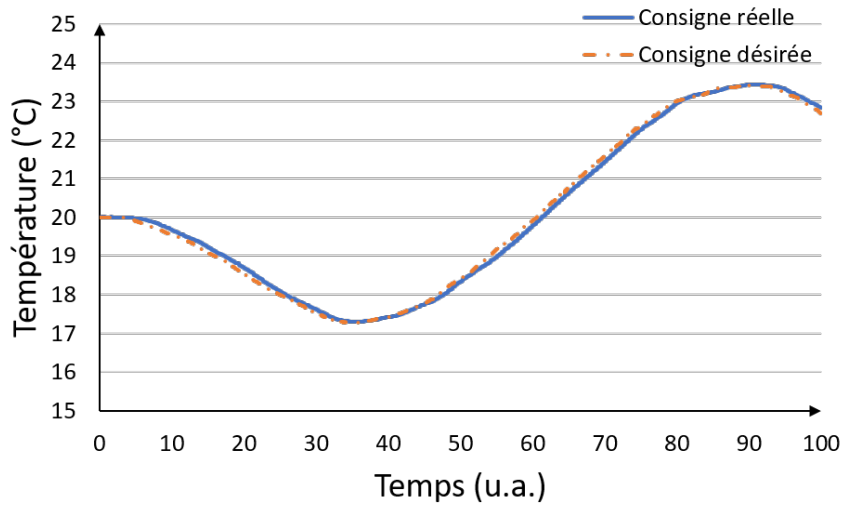
$$\theta_a(t) = a_G \; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t - t_G}{b_G}\right)^2}, \tag{5.3}$$

avec t_G l'instant où la température ambiante atteint son maximum et a_G, b_G des constantes ($b_G \neq 0$).

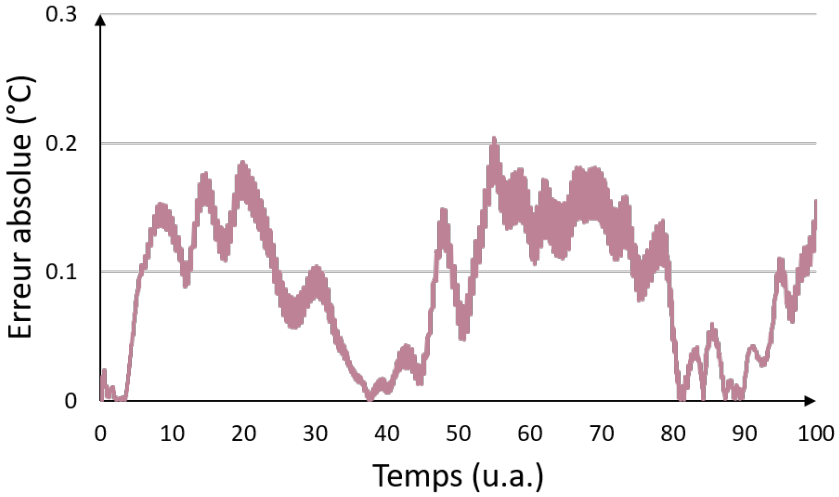
Ainsi, la température ambiante augmente progressivement de 32 °C à 33 °C puis diminue jusqu'à une valeur proche de 32 °C.

Le contrôle hybride est ensuite appliqué pour suivre la proportion désirée de systèmes à l'état *ON* présentée Figure 5.18. À l'exception de la température ambiante qui varie, la simulation est identique à celle réalisée précédemment, avec les mêmes conditions initiales et les mêmes paramètres. La consigne désirée pour la température est alors générée telle que présentée Figure 5.24(a). On voit alors Figure 5.24(b) que la consigne réelle obtenue grâce

à la commande par EDP reste proche de la référence. En effet, l'écart est au maximum de 0.21 °C et la REQM obtenue est de 0.11 °C.



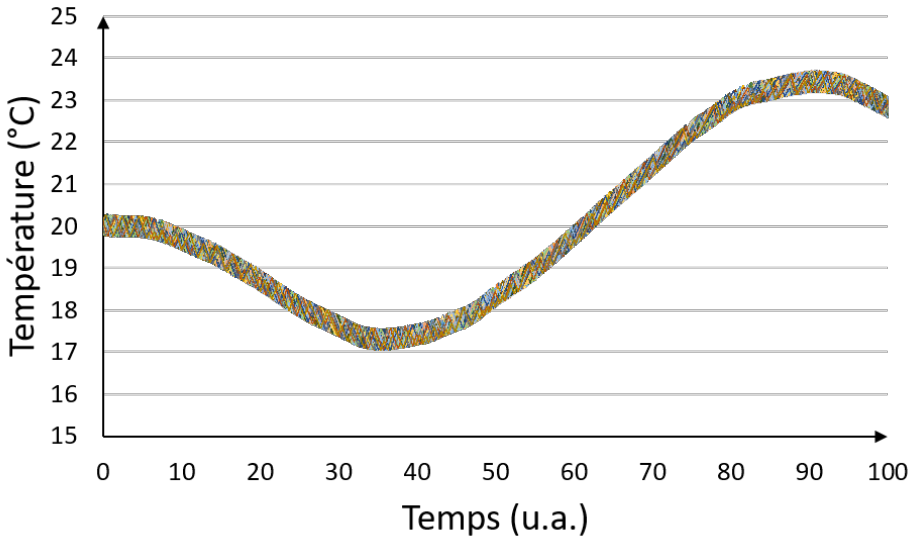
(a)



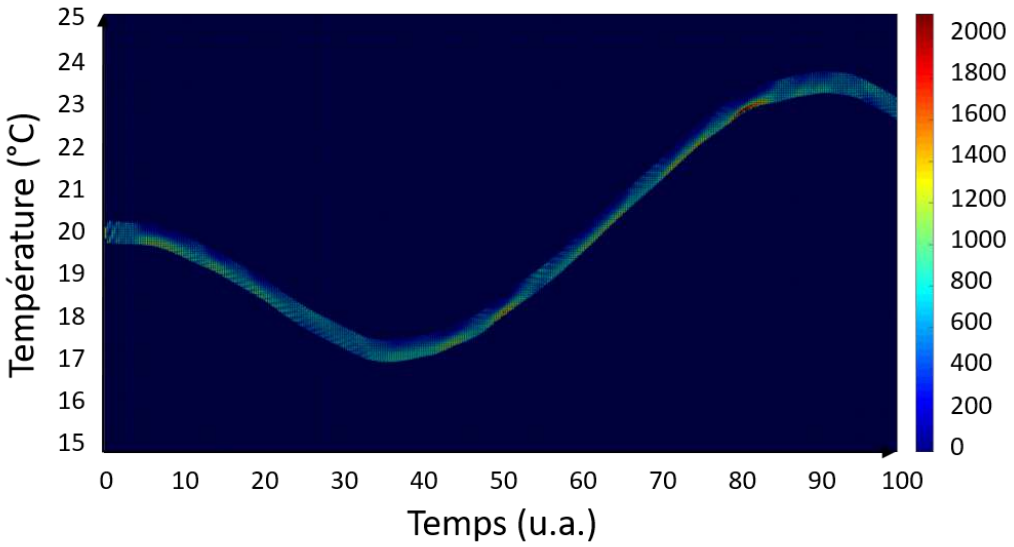
(b)

Figure 5.24 (a) Consigne de température pour la population de TCLs et (b) écart entre la consigne désirée et la consigne réelle obtenue avec le contrôleur à EDP (cas du contrôle hybride avec température ambiante variable).

Les variations de la température de 100 TCLs choisis aléatoirement ainsi que la distribution de l'ensemble de la population sur la plage de température considérée sont présentées respectivement Figure 5.25(a) et 5.25(b).



(a)



(b)

Figure 5.25 (a) Variations de température de 100 TCLs et (b) distribution de la population sur la plage de température (cas du contrôle hybride avec température ambiante variable).

Enfin, les variations de la proportion de TCLs à l'état *ON* sont illustrées Figure 5.26. L'erreur absolue entre cette proportion réelle et la proportion désirée (Figure 5.27) reste alors en tout temps inférieure à 11% et pour ce scénario, on obtient une REQM de 0.025.

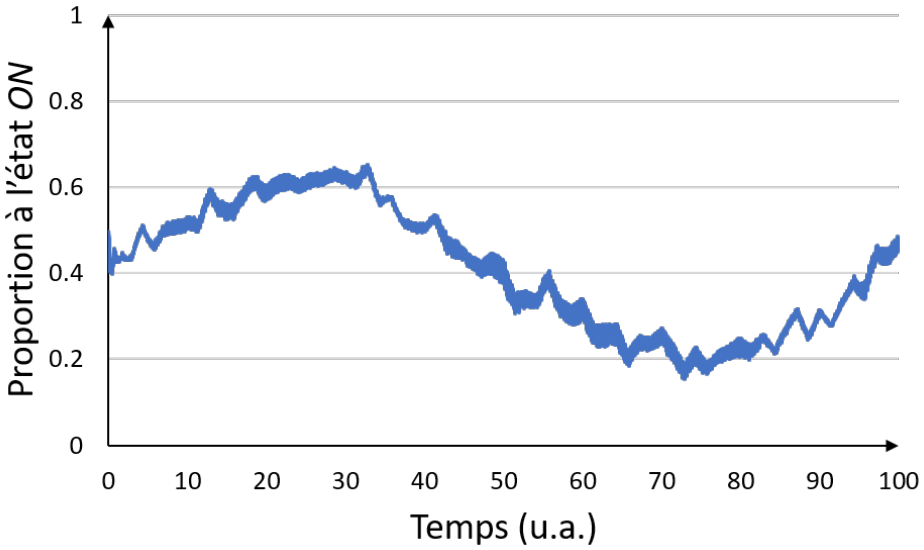


Figure 5.26 Proportion de TCLs à l'état *ON* (cas du contrôle hybride avec température ambiante variable).

Ainsi, ces simulations permettent de tester le fonctionnement du contrôleur hybride qui est utilisé à la fois en modifiant la consigne de température d'une population de TCLs et en forçant le changement d'état d'une portion de ces systèmes.

La régulation réalisée permet de suivre des variations de puissance qui ont une composante à la dynamique lente et une autre composante à la dynamique rapide et imprévisible. Ce type de variation est caractéristique de l'utilisation de sources d'énergie renouvelables telles que les systèmes photovoltaïques. Dans la section suivante, on s'intéresse donc à la simulation d'une population de TCLs à laquelle on applique le contrôle hybride pour réguler les variations de puissance dans un micro-réseau réaliste.

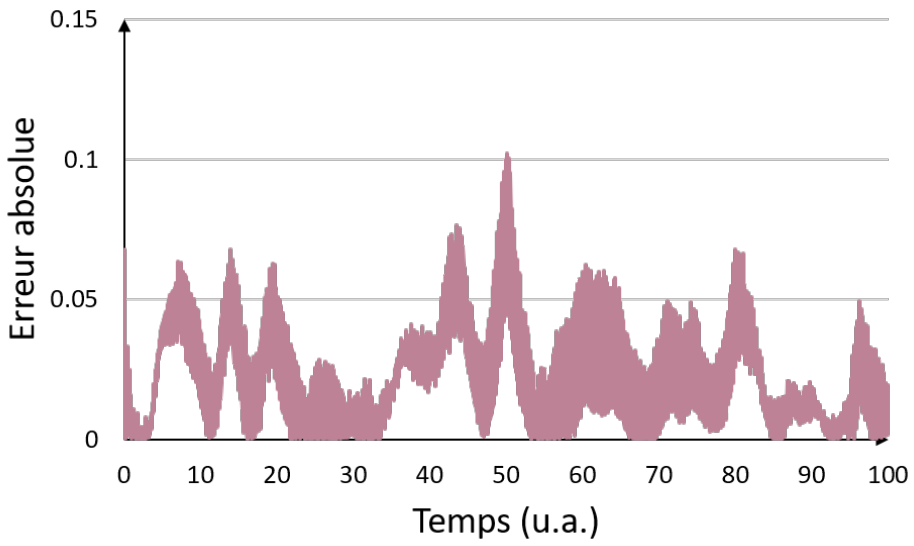


Figure 5.27 Écart entre la proportion désirée et la proportion réelle (cas du contrôle hybride avec température ambiante variable).

5.2 Simulation d'un micro-réseau

Pour valider les performances du contrôleur hybride développé, on s'intéresse à la simulation d'une application réaliste où les TCLs sont utilisés pour réguler les écarts de puissance au sein d'un micro-réseau. La première partie de cette section présente le système ainsi que la plateforme de simulation utilisée et la deuxième partie montre les résultats obtenus pour le scénario étudié.

5.2.1 Présentation de la plateforme de simulation

Dans le cadre de ce projet, on considère un micro-réseau composé de N_{PV} systèmes photovoltaïques et de N_{CNC} charges non contrôlées. Celui-ci fait partie d'un réseau électrique plus grand qui contient N TCLs. Une portion de ces systèmes est alors mise à disposition du micro-réseau pour réguler les variations de puissance, comme illustré Figure 5.28.

Comme expliqué dans le chapitre précédent, la puissance totale consommée par les TCLs s'écrit $P_{\text{TCLs}} = P_{\text{nom}} + \Delta P_{\text{TCLs}}$. De même, on a $\Delta P = P_{\text{prod}} - P_{\text{CNC}}$ l'écart entre la puissance produite et la puissance consommée par les charges non contrôlées. Pour rappel, cet écart de puissance ΔP est envoyé par un centre de contrôle à l'ensemble des TCLs et ce chaque 5 minutes. Ce centre de contrôle a donc ici le rôle d'agrégateur. L'objectif est alors de contrôler la population de TCLs pour que les variations de puissance ΔP_{TCLs} suivent les variations

ΔP au sein du micro-réseau afin de les compenser. On distingue alors trois cas :

- Le micro-réseau est équilibré ($\Delta P = 0$), dans ce cas la population de TCLs consomme une puissance nominale P_{nom} ;
- Le micro-réseau consomme plus de puissance qu'il n'en produit ($\Delta P < 0$), il faut alors réduire la proportion de TCLs à l'état *ON* ;
- Le micro-réseau produit plus qu'il ne consomme ($\Delta P > 0$), il faut alors augmenter la proportion de TCLs à l'état *ON*.

Ainsi, du point de vue du micro-réseau, la proportion de systèmes thermostatiques qui change d'état agit comme une batterie qui absorbe ou injecte de la puissance pour équilibrer le micro-réseau.

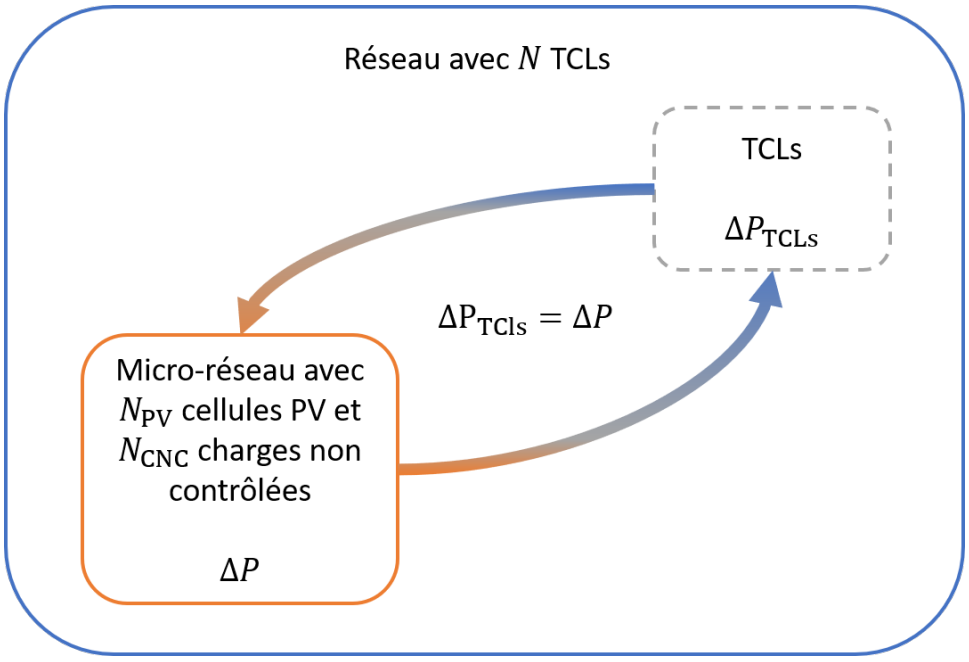


Figure 5.28 Structure du réseau incluant le micro-réseau considéré.

Le micro-réseau est simulé sur le logiciel EMTP et est repris d'un modèle de système d'alimentation à 123 noeuds basé sur les travaux présentés dans [49]. Celui-ci est connecté au réseau principal en un unique point et est constitué notamment de 15 systèmes PV qui produisent une puissance P_{prod} ainsi que de 95 charges non contrôlées réparties sur l'ensemble du micro-réseau et consommant une puissance constante P_{CNC}. La topologie de ce système est illustrée Figure 5.29. De plus, comme ici le micro-réseau est en mode connecté, on suppose que la fréquence est imposée par le réseau principal. Elle est donc égale à 60 Hz en tout temps au sein du micro-réseau. L'impact de ce contrôle sur la fréquence ainsi que sur la tension du micro-réseau ne fait donc pas partie du cadre de ce travail. Enfin, les données photovoltaïques

utilisées ici proviennent de [50] et ont été relevées le 30 décembre 2014 du lever au coucher du soleil sous un ciel dégagé (couverture nuageuse faible).

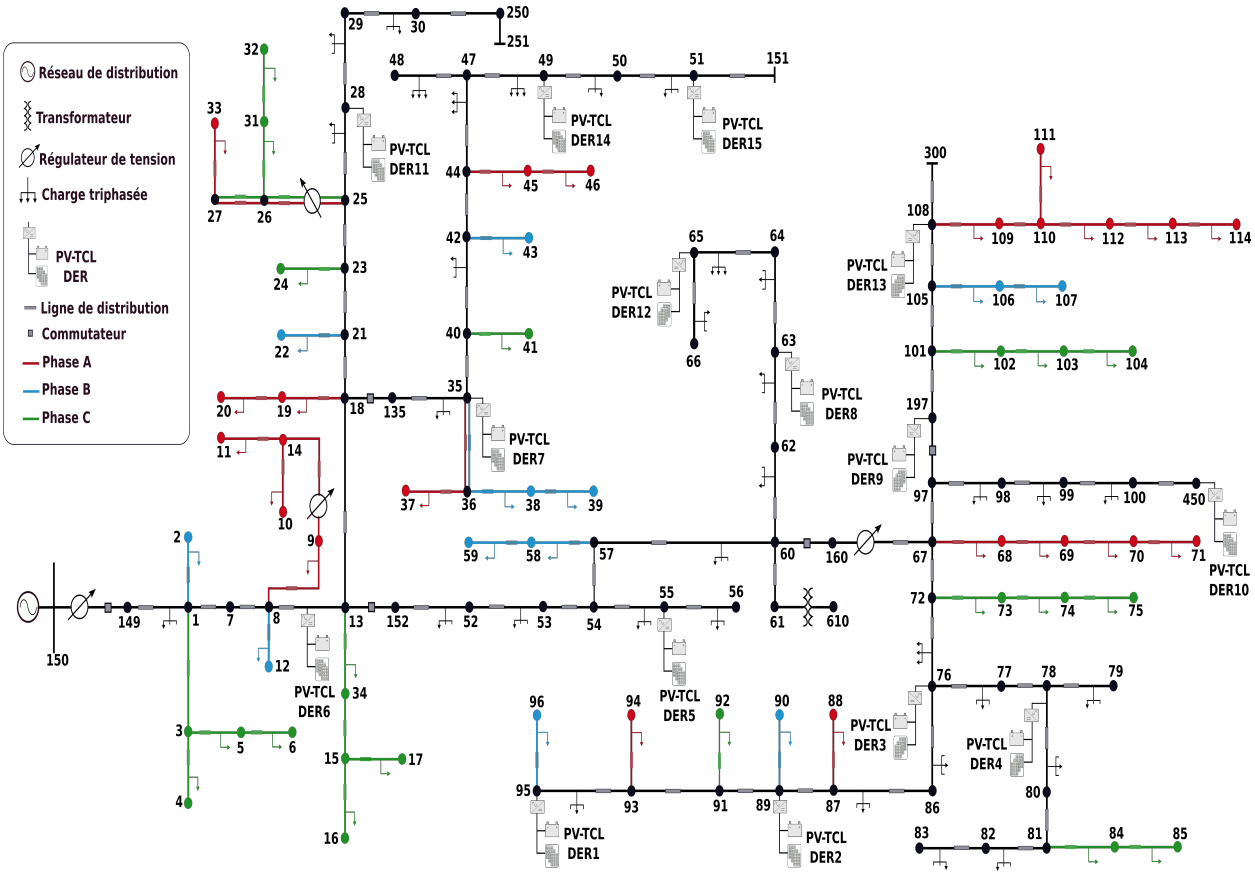


Figure 5.29 Structure globale du micro-réseau.

Les TCLs ainsi que le contrôleur hybride sont modélisés sur le logiciel MATLAB/SIMULINK R2014b. Ainsi, pour simuler l'ensemble du système constitué du micro-réseau et des TCLs de façon simultanée, il est nécessaire d'établir un lien entre les deux logiciels. Pour cela, on utilise une plateforme de co-simulation développée et présentée dans [51]. Celle-ci permet de lier le modèle du micro-réseau sur EMTP aux TCLs modélisés et contrôlés sur MATLAB/SIMULINK. Ainsi à chaque instant, l'écart de puissance ΔP est mesuré sur EMTP et est récupéré par MATLAB/SIMULINK. Cet écart représente la référence de puissance à suivre pour la population de TCLs. Le contrôle hybride est ensuite appliqué et une portion des TCLs change d'état en réponse aux variations de puissance. La puissance ΔP_{TCLs} résultante est alors envoyée à EMTP pour être intégrée au micro-réseau et compenser les écarts de puissance dans celui-ci.

Ainsi, on applique le contrôle hybride pour réguler la puissance de ce micro-réseau en utilisant

une population de 10 000 TCLs. Les paramètres permettant de modéliser ces systèmes ainsi que les paramètres de simulations sont donnés dans le Tableau 5.2.

Tableau 5.2 Paramètres du système pour la simulation du micro-réseau.

Paramètres	Description (Unité)	Valeur
N	Nombre de TCLs	10 000
R	Résistance thermique (°C/kW)	2
C	Capacité thermique (kWh/°C)	$Log\text{-}\mathcal{N}(10, 3)$
P	Puissance thermique (kW)	14
θ_a	Température ambiante (°C)	32
η	Coefficient de performance	2.5
β	Coefficient de diffusion ($°C^2$/h)	0.1
$\Delta\theta$	Largeur de la plage de température (°C)	0.5
Δt	Période d'échantillonnage (h)	0.001
a	Paramètre de la fonction de pondération	1
k	Gain du contrôleur à EDP	10

De plus pour ce scénario, l'échelle de temps est définie de façon à ce qu'une unité corresponde à une minute. La simulation est ainsi réalisée sur une période totale de 709 minutes, soit 11.8 heures. Enfin, la constante de temps des TCLs est choisie de telle façon à ce qu'une variation de température de ± 1 °C se fasse en approximativement 30 minutes.

La partie suivante présente les résultats qui sont alors obtenus pour la simulation de ce scénario.

5.2.2 Résultats obtenus

Le micro-réseau ainsi que les systèmes thermostatiques auxquels on applique le contrôle hybride sont simulés grâce à la plateforme de co-simulation présentée dans la partie précédente. La consigne de température de la population de TCLs est donc modifiée en réponse aux variations globales de puissance dans le micro-réseau puis des changements d'état forcés sont appliqués pour un contrôle de la puissance consommée.

La puissance de référence à suivre pour les TCLs correspond à leur puissance nominale (lorsque le micro-réseau est à l'équilibre) à laquelle on ajoute l'écart de puissance ΔP entre la production et la consommation au sein du micro-réseau. Dans le scénario étudié, les 15 systèmes photovoltaïques ne produisent pas suffisamment de puissance pour compenser la consommation des 95 charges présentes dans le micro-réseau. Ainsi, comme on peut le voir Figure 5.30, ΔP est en tout temps négatif.

Il faut donc diminuer la puissance consommée par les TCLs et donc la proportion à l'état

ON doit être en tout temps inférieure à la valeur nominale $(x_{\mathrm{ON}})_{\mathrm{nom}}$ qui est choisie égale à 0.47. Du point de vue du réseau principal, la référence à suivre $(x_{\mathrm{ON}})_{\mathrm{ref}}$ pour les variations de la proportion à l'état *ON* correspondant aux variations de puissance dans le micro-réseau est telle que présentée Figure 5.31.

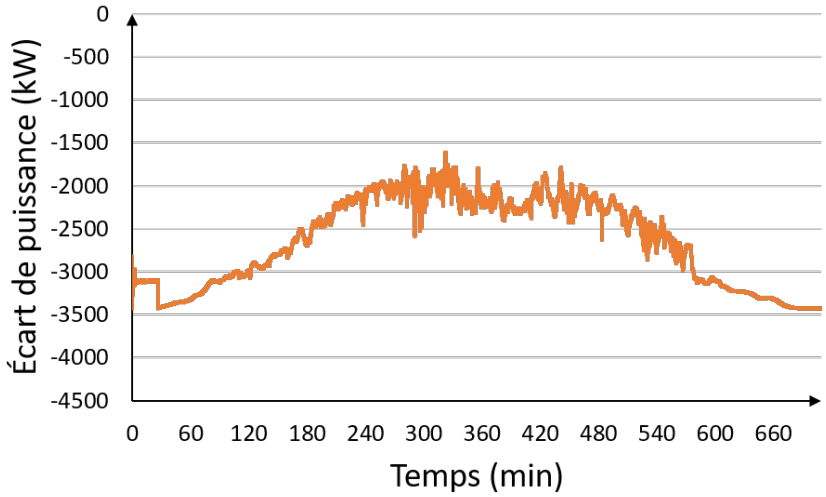


Figure 5.30 Écart de puissance au sein du micro-réseau.

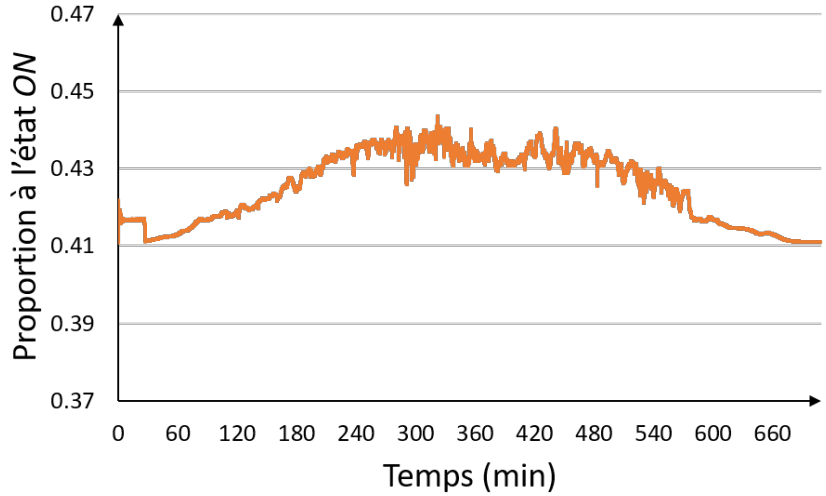


Figure 5.31 Proportion désirée de TCLs à l'état *ON* (cas du micro-réseau).

Pour cette simulation, on considère que la température ambiante θ_a est constante et égale à 32 °C en tout temps. Au cours de la simulation, si un TCL subit un changement d'état forcé, celui-ci est bloqué pour une durée de 5 minutes. Dans un fonctionnement classique, un TCL

a en effet besoin d'un temps de verrouillage minimal pour passer de l'état *OFF* à l'état *ON* afin d'égaliser la pression interne et permettre au compresseur de redémarrer. Toutefois ici, le temps de blocage est également appliqué lors du passage de l'état *ON* à l'état *OFF*. Ceci permet d'éviter le phénomène de "chattering", bien qu'il n'affecte pas de façon significative les performances du contrôle. À l'état initial, la disponibilité des TCLs et la durée initiale de blocage sont choisies de façon aléatoire. Enfin, au moins 1% de la population est à l'état *ON* à chaque instant pour s'assurer que la commande soit bien définie.

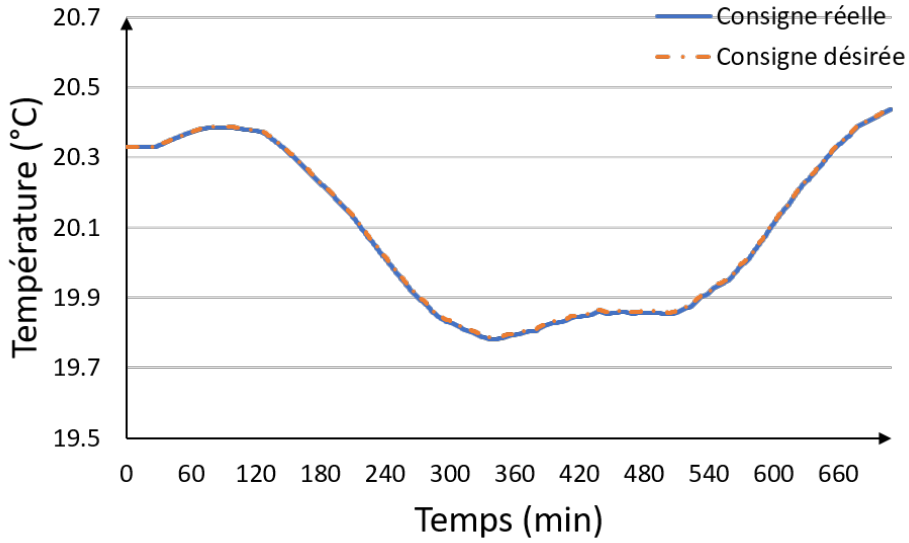
Le contrôle hybride est ainsi appliqué à la population de systèmes thermostatiques. La référence θ_{ref} pour la consigne de température est générée à partir des variations filtrées de la proportion à l'état *ON* qui permettent de considérer uniquement les variations globales de dynamique lente. La commande du contrôleur à EDP permet alors de suivre cette consigne désirée comme on peut le voir Figure 5.32(a). L'erreur absolue entre les deux signaux, présentée Figure 5.32(b), reste très faible pendant toute la durée de la simulation avec une racine de l'erreur quadratique moyenne de 0.004 °C.

Les variations de la consigne de température entraînent alors des variations de la proportion globale de TCLs à l'état *ON* qui peut alors suivre, grâce à l'action du contrôleur à CEF, les variations rapides de la référence comme illustré Figure 5.33. En raison des faibles variations, la proportion réelle de TCLs en état de marche reste proche de la proportion désirée avec un écart absolu en tout temps inférieur à 1.9% comme on peut le voir Figure 5.34. De plus, la REQM obtenue dans ce cas est de 0.002.

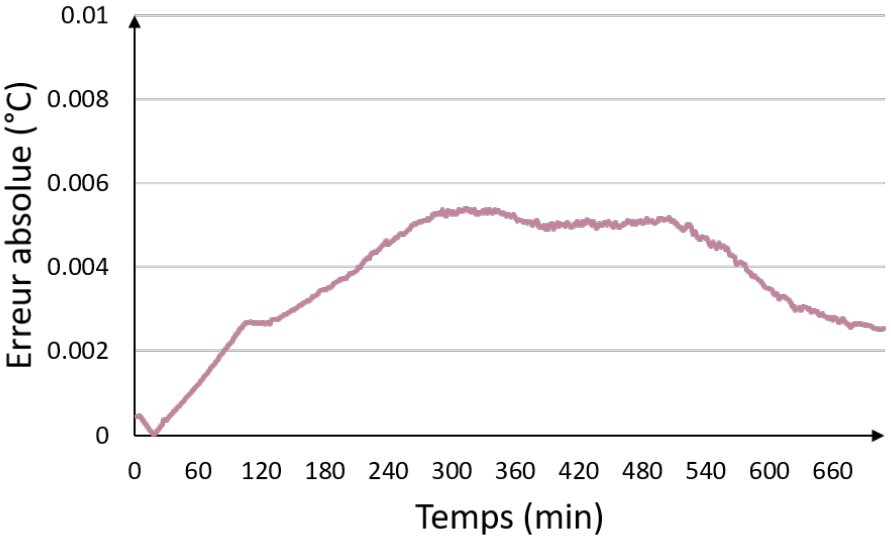
En convertissant en puissance, on obtient le résultat obtenu Figure 5.35 qui représente l'écart de puissance ΔP_{TCLs} (par rapport à la puissance nominale) obtenu en modifiant la proportion de TCLs en état de marche.

Enfin, cette variation de puissance de la population de TCLs est appliquée au micro-réseau pour le stabiliser. Du point de vue du micro-réseau, le nouvel écart de puissance obtenu après action des TCLs est alors $\Delta P' = \Delta P - \Delta P_{\text{TCLs}}$. Celui-ci est présenté Figure 5.36 et la racine de l'écart quadratique moyen est alors de 75.9 kW.

Le contrôle hybride appliqué aux systèmes thermostatiques a donc permis, dans le cadre de ce scénario, de réduire considérablement l'écart de puissance dans le micro-réseau.



(a)



(b)

Figure 5.32 (a) Consigne de température pour la population de TCLs et (b) écart entre la consigne désirée et la consigne réelle obtenue avec le contrôleur à EDP (cas du micro-réseau).

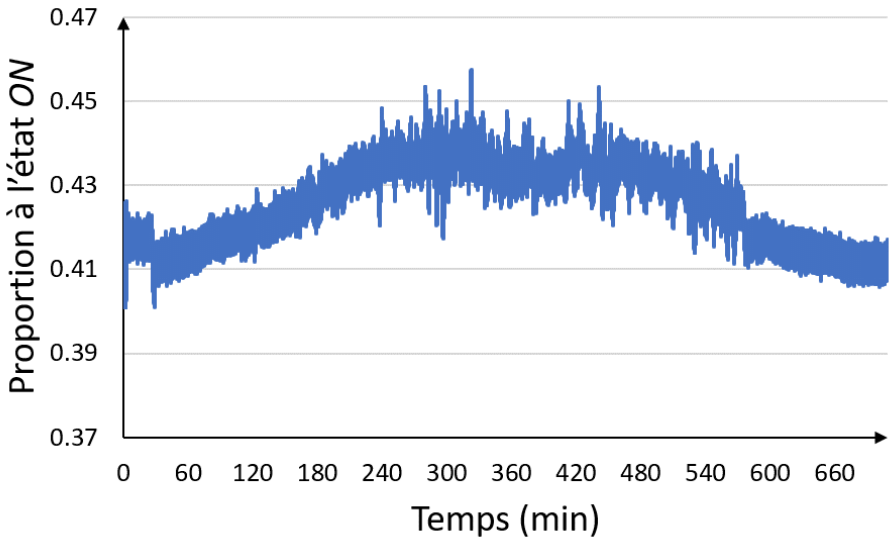


Figure 5.33 Proportion de TCLs à l'état *ON* (cas du micro-réseau).

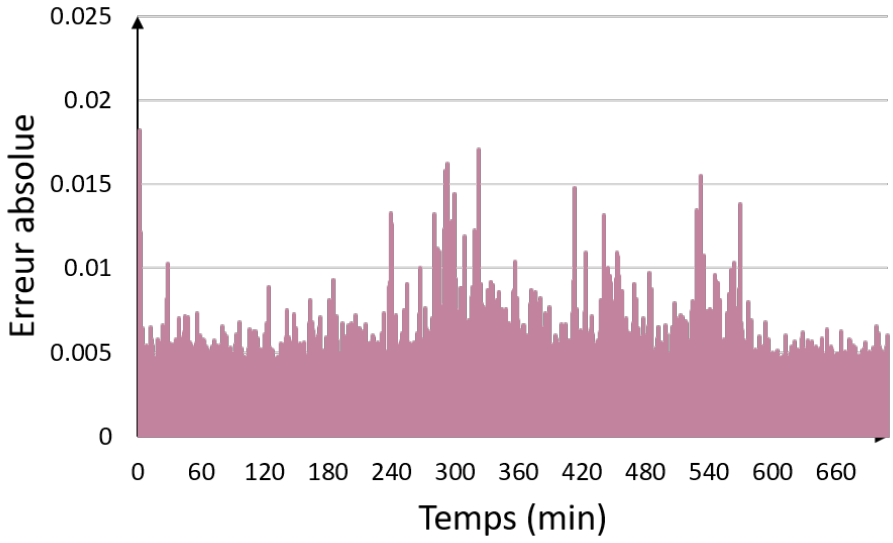


Figure 5.34 Écart entre la proportion désirée et la proportion réelle (cas du micro-réseau).

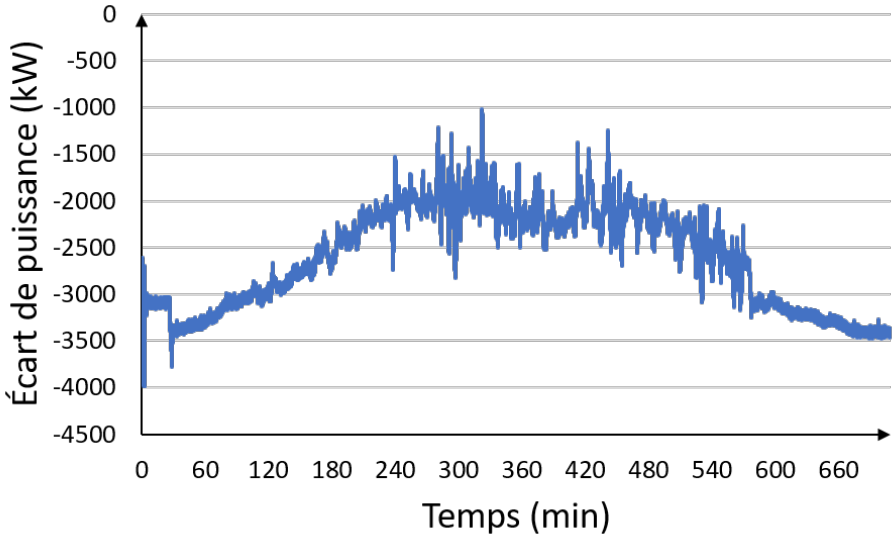


Figure 5.35 Écart de puissance obtenu en modifiant la proportion de TCLs à l'état *ON*.

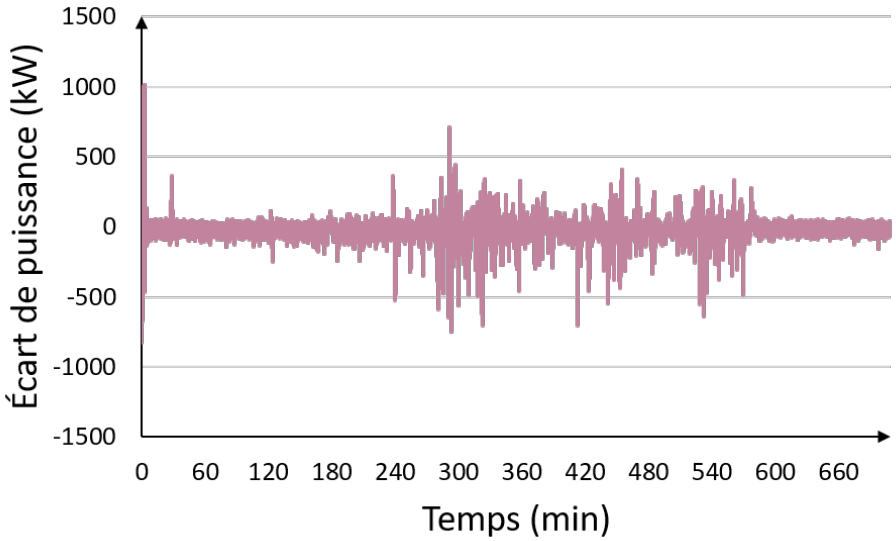


Figure 5.36 Écart de puissance au sein du micro-réseau après modification de la proportion de TCLs à l'état *ON*.

CHAPITRE 6 CONCLUSION

L'objectif principal des travaux présentés dans ce mémoire est l'élaboration d'une stratégie de contrôle sans prévision permettant de réduire les écarts de puissance entre la production et la consommation électrique au sein d'un micro-réseau en agissant sur une grande population de systèmes thermostatiques.

6.1 Conclusions générales

Pour atteindre les objectifs, l'étude a conduit à la conception d'un contrôle hybride combinant deux contrôleurs agissant à des niveaux différents. Le contrôleur à CEF permet d'agir de façon quasi-instantanée sur la puissance consommée par les TCLs en forçant une partie d'entre eux à changer d'état. Le contrôleur à EDP intervient à un plus haut niveau en modifiant la consigne de température de la population, grâce à un modèle d'équations aux dérivées partielles basé sur un couple d'équations de Fokker-Planck. Une étude en simulation avec plusieurs scénarios est également menée, notamment pour montrer l'influence de la taille de la population de TCLs ainsi que des variations de la température ambiante extérieure. Ceci a également permis d'évaluer les performances de ces contrôleurs de façon individuelle puis en les associant. Enfin, le contrôle hybride développé a été appliqué à une grande population de TCLs dans le cadre de la simulation d'un micro-réseau réaliste où la production électrique se fait grâce à des systèmes photovoltaïques. Les systèmes thermostatiques font dans ce cas partie d'un réseau plus large et participent à la régulation des écarts de puissance dans le micro-réseau. Ces simulations ont ainsi permis de mieux comprendre l'utilisation d'un tel contrôle et de clarifier la nécessité de changer l'état des systèmes thermostatiques ou de modifier leur consigne de température. Les résultats obtenus sont satisfaisants pour l'ensemble des scénarios étudiés avec des erreurs absolues qui restent faibles et montrent que le contrôleur hybride est adapté aux variations de puissance résultant de l'utilisation de sources photovoltaïques. Il permet en effet une régulation des variations globales de puissance au cours d'une journée ainsi qu'une régulation rapide des variations imprévisibles qui interviennent en raison des conditions climatiques, ce qui réduit considérablement les écarts de puissance dans le micro-réseau.

Toutefois, ce contrôleur hybride présente quelques inconvénients qui limitent son utilisation. On peut notamment mentionner la nécessité d'utiliser un grand nombre d'appareils pour assurer la précision du contrôle ainsi que la limitation à de très faibles variations de puissance dans le cas où les déviations de la consigne de température doivent rester faibles, comme pour une utilisation domestique des TCLs. De plus, le contrôle n'est pas adapté à des varia-

tions rapides trop importantes comme c'est le cas pour un pic de consommation soudain qui pourrait par exemple entraîner une instabilité de la commande.

6.2 Futurs travaux

Il serait intéressant dans de futurs travaux d'adapter le contrôleur pour fournir d'autres services auxiliaires comme la régulation des pics de consommation ou encore la stabilisation de la fréquence, sans compromettre le confort des utilisateurs au niveau de la température. La stratégie de contrôle hybride développée ne prend en considération que des systèmes de refroidissement et pourrait donc être améliorée pour être appliquée simultanément à divers types d'appareils appartenant au même réseau, que ce soit des systèmes de chauffage ou de refroidissement, industriels ou domestiques. Enfin, la prochaine étape importante de cette étude serait de valider les résultats obtenus avec d'autres scénarios réalistes, en prenant en compte par exemple des variations réelles de température ambiante extérieure ou de simuler la régulation de micro-réseaux où la production se fait par d'autres sources d'énergie renouvelables comme l'éolien, voire par une multitude de sources de différente nature.

Les améliorations futures pourraient ainsi permettre de minimiser les erreurs de régulation, d'agrandir le champ d'application de cette stratégie de contrôle et enfin de permettre une meilleure participation des systèmes thermostatiques à la régulation dynamique de la charge au sein de micro-réseaux intelligents.

RÉFÉRENCES

[1] D. G. Infield, J. Short, C. Horne et L. L. Freris, “Potential for domestic dynamic demand-side management in the UK,” communication présentée à *IEEE Power Engineering Society General Meeting*, Tampa, FL, États-Unis, 24-28 juin 2007.

[2] Q. Shi, F. Li, Q. Hu et Z. Wang, “Dynamic demand control for system frequency regulation : Concept review, algorithm comparison, and future vision,” *IEEE Electric Power Systems Research*, vol. 154, p. 75–87, janv. 2018.

[3] J. A. Short, D. G. Infield et L. L. Freris, “Stabilization of grid frequency through dynamic demand control,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 22, n°. 3, p. 1284–1293, août 2007.

[4] E. B. T. Tchuisseu, D. Gomila, D. Brunner et P. Colet, “Effects of dynamic-demand-control appliances on the power grid frequency,” *IEEE Physical Review E*, vol. 96, n°. 2, mars 2017.

[5] D. Jay et K. S. Swarup, “Frequency restoration using dynamic demand control under smart grid environment,” communication présentée à *Innovative Smart Grid Technologies India*, Kollam, Kerala, Inde, 1-3 décembre 2011.

[6] S. A. Pourmousavi et M. H. Nehrir, “Introducing dynamic demand response in the LFC model,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 29, n°. 4, p. 1562–1572, juill. 2014.

[7] H. N. T. Nguyen, C. Zhang et J. Zhang, “Dynamic demand control of electric vehicles to support power grid with high penetration level of renewable energy,” *IEEE Transactions on Transportation Electrification*, vol. 2, n°. 1, p. 66–75, mars 2016.

[8] C. Le Floch, E. Can Kara et S. Moura, “PDE modeling and control of electric vehicle fleets for ancillary services : A discrete charging case,” *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 9, n°. 2, p. 573–581, mars 2018.

[9] D. Angeli et P.-A. Kountouriotis, “A stochastic approach to "dynamic-demand" refrigerator control,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 20, n°. 3, p. 581–592, mai 2012.

[10] W. Zhang, J. Lian, C.-Y. Chang et K. Kalsi, “Aggregated modeling and control of air conditioning loads for demand response,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 28, n°. 4, p. 4655–4664, nov. 2013.

[11] B. De Metz-Noblat et G. Jeanjean, “Stabilité dynamique des réseaux électriques industriels,” Schneider Electric, Rapport technique 185, 1997.

[12] C. J. Fraser, "Electrical and electronics principles," dans *Mechanical Engineer's Reference Book*, twelfth éd., E. H. Smith, édit. Butterworth-Heinemann, 1994, p. 2–1–2–57.

[13] M. R. V. Moghadam, R. T. B. Ma et R. Zhang, "Distributed frequency control via demand response in smart grids," communication présentée à *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vancouver, BC, Canada, 26-31 mai 2013, p. 5233–5237.

[14] *Energy Atlas 2018 : Figures and Facts about Renewables in Europe*. Heinrich Böll Foundation, Friends of the Earth Europe, European Renewable Energies Federation et Green European Foundation, 2018.

[15] A. Esmat, "Flexibility market for congestion management in smart grids," thèse de doctorat, Universidad Carlos III de Madrid, Madrid, Espagne, 2019.

[16] D. Jay et K. S. Swarup, "Price based demand response of aggregated thermostatically controlled loads for load frequency control," communication présentée à *National Power Systems Conference (NPSC)*, Varanasi, Uttar Pradesh, Inde, 12-14 décembre 2012.

[17] J. H. Yoon, R. Baldick et A. Novoselac, "Dynamic demand response controller based on real-time retail price for residential buildings," *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 5, n°. 1, p. 121–129, janv. 2014.

[18] S. K. Gupta, T. Ghose et K. Chatterjee, "Droop based dynamic demand response controller for HVAC load," communication présentée à *National Power Systems Conference (NPSC)*, Tiruchirappalli, Inde, 14-16 décembre 2018.

[19] Q. Shi, H. Cui, F. Li, Y. Liu, W. Ju et Y. Sun, "A hybrid dynamic demand control strategy for power system frequency regulation," *IEEE CSEE Journal of Power and Energy Systems*, vol. 3, n°. 2, p. 176–185, juin 2017.

[20] Z. A. Obaid, L. M. Cipcigan, L. Abrahim et M. T. Muhssin, "Frequency control of future power systems : reviewing and evaluating challenges and new control methods," *IEEE Journal of Modern Power Systems and Clean Energy*, vol. 7, n°. 1, p. 9–25, janv. 2019.

[21] D. Burmester, R. Rayudu et W. K. G. Seah, "Use of maximum power point tracking signal for instantaneous management of thermostatically controlled loads in a DC nanogrid," *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 9, n°. 6, p. 6140–6148, nov. 2018.

[22] Y. Wang, Y. Tang, Y. Xu et Y. Xu, "A distributed control scheme of thermostatically controlled loads for the building-microgrid community," *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, vol. 11, n°. 1, p. 350–360, janv. 2020.

[23] D. S. Callaway, "Tapping the energy storage potential in electric loads to deliver load following and regulation, with application to wind energy," *Energy Conversion and Management*, vol. 50, n°. 5, p. 1389–1400, mai 2009.

[24] S. Bashash et H. K. Fathy, "Modeling and control of aggregate air conditioning loads for robust renewable power management," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 21, nº. 4, p. 1318–1327, juill. 2013.

[25] J. Zheng, G. Laparra, G. Zhu et M. Li, "Aggregate power control of heterogeneous TCL populations governed by Fokker-Planck equations," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, p. 1–13, 2020.

[26] J. Zheng, G. Zhu et M. Li, "A PDE-based aggregate power tracking control of large populations of heterogeneous TCLs," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2020, soumis pour publication.

[27] G. Laparra, "Commande prédictive désynchronisée pour le contrôle d'une grande population de systèmes thermostatiques," mémoire de maîtrise, Dép. de génie électrique, École Polytechnique de Montréal, Montréal, QC, Canada, 2019.

[28] P. Bajaria, "Phase oscillator model for de-synchronization of thermostatically controlled loads," communication présentée à *Chinese Control Conference (CCC)*, Guangzhou, Chine, 27-30 juillet 2019, p. 7466–7472.

[29] S. A. Pourmousavi et M. H. Nehrir, "Real-time central demand response for primary frequency regulation in microgrids," *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 3, nº. 4, p. 1988–1996, déc. 2012.

[30] A. Ghaffari, S. Moura et M. Krstic, "Modeling, control, and stability analysis of heterogeneous thermostatically controlled load populations using partial differential equations," *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, vol. 137, nº. 10, oct. 2015.

[31] L. C. Totu, R. Wisniewski et J. Leth, "Demand response of a TCL population using switching-rate actuation," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 25, nº. 5, p. 1537–1551, sept. 2017.

[32] M. Cheng, J. Wu, J. Ekanayake, T. Coleman, W. Hung et N. Jenkins, "Primary frequency response in the great britain power system from dynamically controlled refrigerators," communication présentée à *International Conference and Exhibition on Electricity Distribution (CIRED)*, Stockholm, Suède, 10-13 juin 2013.

[33] S. H. Tindemans, V. Trovato et G. Strbac, "Decentralized control of thermostatic loads for flexible demand response," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 23, nº. 5, p. 1685–1700, sept. 2015.

[34] U.S. Food and Drug Administration (FDA). (2018) Are you storing food safely ? Consulté le 22 mai 2020. [En ligne]. Disponible : https://www.fda.gov/consumers/consumer-updates/are-you-storing-food-safely

[35] Gouvernement du Canada. (2015) Conseils sur l'entreposage sécuritaire des aliments. Consulté le 22 mai 2020. [En ligne]. Disponible : https://www.canada.ca/fr/sante-canada/services/conseils-generaux-salubrite/conseils-entreposage-securitaire-aliments.html

[36] Agence Nationale de Sécurité Sanitaire de l'Alimentation, de l'Environnement et du Travail (ANSES). (2016) Réfrigérateur et hygiène des aliments. Consulté le 22 mai 2020. [En ligne]. Disponible : https://www.anses.fr/fr/content/r%C3%A9frig%C3%A9rateur-et-hygi%C3%A8ne-des-aliments

[37] M. Parshin, M. Majidi, F. Ibanez et D. Pozo, "On the use of thermostatically controlled loads for frequency control," communication présentée à *IEEE Milan PowerTech*, Milan, Italie, 23-27 juin 2019.

[38] M. Song, C. Gao, M. Shahidehpour, Z. Li, J. Yang et H. Yan, "State space modeling and control of aggregated TCLs for regulation services in power grids," *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 10, n°. 4, p. 4095–4106, juill. 2019.

[39] S. Acharya, M. S. El Moursi et A. Al-Hinai, "Coordinated frequency control strategy for an islanded microgrid with demand side management capability," *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 33, n°. 2, p. 639–651, juin 2018.

[40] M. A. Fayazbakhsh, F. Bagheri et M. Bahrami, "A resistance–capacitance model for real-time calculation of cooling load in HVAC-R systems," *IEEE Journal of Thermal Science and Engineering Applications*, vol. 7, n°. 4, déc. 2015.

[41] S. Moura, V. Ruiz et J. Bendsten, "Modeling heterogeneous populations of thermostatically controlled loads using diffusion-advection PDEs," communication présentée à *ASME Dynamic Systems and Control Conference*, Palo Alto, CA, États-Unis, 21-23 octobre 2013, p. V002T23A001.

[42] A. Radaideh, U. Vaidya et V. Ajjarapu, "Sequential set-point control for heterogeneous thermostatically controlled loads through an extended Markov chain abstraction," *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 10, n°. 1, p. 116–127, janv. 2019.

[43] S. Koch, J. L. Mathieu et D. S. Callaway, "Modeling and control of aggregated heterogeneous thermostatically controlled loads for ancillary services," communication présentée à *Power Systems Computation Conference*, Stockholm, Suède, août 2011, p. 1–8.

[44] L. Zhao et W. Zhang, "A unified stochastic hybrid system approach to aggregate modeling of responsive loads," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 63, n°. 12, p. 4250–4263, déc. 2018.

[45] R. Malhame et C.-Y. Chong, "Electric load model synthesis by diffusion approximation of a high-order hybrid-state stochastic system," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 30, n°. 9, p. 854–860, sept. 1985.

[46] J. Hu, J. Cao, M. Z. Q. Chen, J. Yu, J. Yao, S. Yang et T. Yong, "Load following of multiple heterogeneous TCL aggregators by centralized control," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 32, n°. 4, p. 3157–3167, juill. 2017.

[47] F. Farmani, "Frequency control via demand response in smart grid," thèse de doctorat, University of Waterloo, Waterloo, ON, Canada, 2018.

[48] Ecorise. Autoconsommation solaire photovoltaïque. Consulté le 11 juin 2020. [En ligne]. Disponible : https://ecorise.ch/autoconsommation-solaire-photovoltaique/

[49] W. H. Kersting, "Radial distribution test feeders," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 6, n°. 3, p. 975–985, août 1991.

[50] Gouvernement du Canada. (2016) Données d'ensoleillement à haute résolution. Consulté le 23 juin 2020.

[51] D. Jafarigiv, K. Sheshyekani, H. Karimi et J. Mahseredjian, "A scalable FMI-compatible co-simulation platform for synchrophasor network studies," *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, févr. 2020.

ANNEXE A LOI DES GRANDS NOMBRES (LGN)

Cette annexe détaille la preuve de la forme dite “faible” de la Loi des Grands Nombres qui est utilisée dans ce mémoire.

Notations utilisées :

- $\mathcal{P}(A)$: probabilité d'occurrence de l'évènement A
- $E(X)$: espérance de la variable aléatoire X
- $V(X)$: variance de la variable aléatoire X

A.1 Énoncé de la loi

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une séquence de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) d'espérance μ et d'écart-type σ. Soit $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ la moyenne de ces variables. Alors, pour tout réel $\epsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}\left(|\overline{X}_n - \mu| \geq \epsilon\right) = 0$$

A.2 Preuve

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

Pour toute variable aléatoire $X \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et pour tout réel $\epsilon > 0$, on a :

$$\mathcal{P}\left(|X - E(X)| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2} V(X)$$

Développement de la preuve :

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. d'espérance $E(X_1) = E(X_2) = \cdots = E(X_n) = \mu$ et d'écart-type $\sigma(X_1) = \sigma(X_2) = \cdots = \sigma(X_n)$.

Soit $\overline{X}$ la valeur moyenne des n variables $X_i|_{i=1,\ldots,n}$:

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Comme ces variables sont i.i.d, on a :

$$E\left(\overline{X}_n\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \mu$$

$$V\left(\overline{X}_n\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V\left(X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $\overline{X}_n$, on obtient :

$$0 \leq \mathcal{P}\left(|\overline{X}_n - E\left(\overline{X}_n\right)| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2} V\left(\overline{X}_n\right)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \mathcal{P}\left(|\overline{X}_n - \mu| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

Comme $\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} = 0$, on a alors :

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}\left(|\overline{X}_n - \mu| \geq \epsilon\right) = 0$$

ce qui prouve la forme faible de la Loi des Grands Nombres.