



Titre: Modulation de la consommation électrique des chauffe-espace résidentiels via un agrégateur probabiliste
Title:

Auteur: Tanguy Julien
Author:

Date: 2023

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Julien, T. (2023). Modulation de la consommation électrique des chauffe-espace résidentiels via un agrégateur probabiliste [Mémoire de maîtrise, Polytechnique Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/53337/>
Citation:

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/53337/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Roland P. Malhamé
Advisors:

Programme: Génie énergétique
Program:

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

**Modulation de la consommation électrique des chauffe-espace résidentiels via
un agrégateur probabiliste**

TANGUY JULIEN

Département de génie électrique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
Génie énergétique

Avril 2023

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

**Modulation de la consommation électrique des chauffe-espace résidentiels via
un agrégateur probabiliste**

présenté par **Tanguy JULIEN**

en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

Guchuan ZHU, président

Roland MALHAMÉ, membre et directeur de recherche

Hanane DAGDOUGUI, membre

DÉDICACE

A ma famille et mes partenaires de recherche...

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie mon directeur de recherche Roland Malhamé pour son aide à tous les niveaux depuis la conception du sujet à l'encadrement et la relecture sur les publications. Les cours initiaux et les discussions lors des réunions sur le sujet m'ont permis d'en découvrir plus sur les problématiques réelles de la gestion de la charge et les diverses considérations à avoir sur le sujet.

Je remercie mes amis, ceux d'avant et ceux découverts à Montréal, pour avoir permis de rendre cette expérience au Canada plus qu'une maîtrise. Merci pour les après-midis de recherche et les cafés pour avancer ensemble. Mention spéciale à mes colocataires sans qui cette expérience n'aurait clairement pas été la même.

Finalement, je tiens à remercier les membres du jury pour avoir accepté de donner de leur temps pour lire et évaluer ce mémoire.

RÉSUMÉ

La pénétration importante des énergies renouvelables intermittentes sur le réseau électrique engendre le besoin de création de flexibilité afin d'assurer l'équilibre offre-demande. Le développement de méthodes permettant de moduler la consommation, en plus de la production, appelée gestion de la demande, apparaît comme une nécessité.

Les charges contrôlées par thermostat telles que les chauffe-espaces, les chauffe-eau ou la climatisation présentent un potentiel important, car elles représentent une part majeure de la consommation résidentielle. De plus, elles sont contrôlables et peuvent stocker l'énergie sous forme de chaleur. Néanmoins, elles présentent de nombreuses contraintes liées au fait qu'elles impactent le confort des clients et sont des charges individuelles plutôt que globales.

Dans ce mémoire, nous proposons un nouveau type de contrat entre agrégateur de charges et clients. Celui-ci met en jeu la possibilité de transitions aléatoires entre différentes températures de consigne. La probabilité de ces transitions est affectée à la fois par un niveau de sensibilité déclaré du client et un signal de pression unique émis par l'agrégateur à l'ensemble des charges sous sa responsabilité. L'objectif de l'agrégateur est de suivre une trajectoire de consommation globale désirée tout en respectant des contraintes minimales de confort des clients. Les transitions sont générées localement et obéissent à une chaîne de Markov.

Nous concevons des chaînes de Markov à temps continu sensibles au signal de pression que nous intégrons dans les équations de Fokker-Planck qui décrivent la dynamique des charges agrégées. Cela nous permet d'obtenir les équations régissant la dynamique de notre système.

Ensuite, à travers des approximations numériques et principalement la mise en place d'une méthode des différences finies de Crank-Nicolson, nous développons un algorithme de simulation du système. Cette simulation s'accompagne d'une de Monte Carlo qui permet de confirmer la cohérence de nos équations et de notre simulation.

Cela nous permet de théoriser un signal de pression idéal pour atteindre le signal de puissance objectif. Nous créons l'algorithme de commande correspondant, et étudions ses caractéristiques.

Finalement, nous illustrons les capacités du système et l'influence des paramètres sur celles-ci en nous servant de nos résultats et d'exemples concrets, ceci, avant de nous pencher sur les problèmes liés à l'implémentation réelle du système : l'extension à plus de températures de consigne et l'hétérogénéité des paramètres. Ces derniers, bien que devant être pris en compte, ne semblent pas poser un obstacle définitif au fonctionnement du système en situation réelle.

ABSTRACT

The significant increase of intermittent renewable energies in the electrical grid creates the need to build flexibility in order to ensure the supply-demand balance. The development of methods to modulate consumption, in addition to production, called demand side management or demand response, appears to be a necessity.

Thermostatically controlled loads such as space heaters, water heaters or air-conditioning have a great potential, as they represent a major part of residential consumption. Moreover, they are controllable and can store energy in the form of heat or cold. Nevertheless, they present many constraints related to the fact that they impact the comfort of the customers and are individual loads rather than aggregated.

In this study, we propose a new type of contract between load aggregator and customers. It involves the possibility of random transitions between different setpoint temperatures. The probability of these transitions is affected by both a declared sensitivity level of the customer and a unique pressure signal emitted by the aggregator to all loads under its control. The objective of the aggregator is to follow a desired global consumption trajectory while respecting customer comfort constraints. The transitions are generated locally and follow a Markov chain.

We design continuous time Markov chains sensitive to the pressure signal that we integrate into the Fokker-Planck equations describing aggregate load dynamics. This allows us to obtain the equations governing the dynamics of our system.

Then, through numerical approximations and the implementation of a Crank-Nicolson finite difference method, we develop a simulation algorithm of the system. This simulation is accompanied by a Monte Carlo which allows us to confirm the consistency of our equations and our simulation.

This enables us to theorize an ideal pressure signal to reach the objective power signal. We create the corresponding control algorithm, and study its characteristics.

Finally, we illustrate the capabilities of the system and the influence of the parameters on it using our results and concrete examples. Then, we turn to the problems related to the implementation of the system: the addition of setpoints and the heterogeneity of the parameters. The latter, although they must be taken into account, do not seem to pose a definitive obstacle to the system in real life.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vi
TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES TABLEAUX	x
LISTE DES FIGURES	xi
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xii
LISTE DES ANNEXES	xiii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Définitions et concepts de base	1
1.1.1 Le principe de la gestion de la demande	1
1.1.2 L'agrégateur : intermédiaire entre particuliers et opérateur	2
1.2 Éléments de la problématique	3
1.2.1 Potentiel de flexibilité des TCLs	3
1.2.2 Spécificités des TCLs	3
1.3 Objectifs de recherche	4
1.4 Plan du mémoire	4
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE	6
2.1 Études des méthodes de commande	6
2.1.1 Présentation des différents types de commande	6
2.1.2 Enjeux et problèmes	6
2.2 Dynamique d'évolution de la température	7
2.2.1 Modélisation thermique des bâtiments	7
2.2.2 Fonctionnement du thermostat	8
2.2.3 Modèle standard du comportement agrégé : équations de Fokker-Planck	9

CHAPITRE 3	STRUCTURE DU CONTRAT ET DU SYSTÈME DE COMMANDE	12
3.1	Principe du mécanisme de commande de consigne de thermostat par chaînes de Markov différenciées	12
3.2	Description des thermostats et hypothèses	13
3.3	Chaîne de Markov pour la sensibilité au signal de pression	14
3.3.1	Définition d'une chaîne de Markov	14
3.3.2	Conception de la chaîne	15
3.3.3	Choix des valeurs de β et γ , et critères quantitatifs guidant le choix des clients	16
3.4	Caractérisation mathématique de l'évolution de l'agrégat des thermostats avec consigne de température modulée par chaîne de Markov	20
3.4.1	Calcul du flux de densité de probabilité h_i dans le cas standard	21
3.4.2	Prise en compte de la chaîne de Markov	22
3.4.3	Transitions d'état ON/OFF du thermostat forcées par la chaîne de Markov	26
3.4.4	Ajustement des conditions aux limites	29
CHAPITRE 4	SIMULATION DE L'ÉVOLUTION	30
4.1	Simulation de Monte-Carlo	30
4.1.1	Discrétisation de la chaîne de Markov	30
4.1.2	Algorithme de Monte Carlo	34
4.2	Simulation des densités de probabilité via Fokker-Planck	36
4.2.1	Approximation numérique de l'évolution de Fokker-Planck via méthode indirecte	36
4.2.2	Gestion des transitions	41
4.3	Conditions d'existence du signal $p(t)$	42
4.4	Fonctionnement de l'algorithme	44
4.5	Comparaison du modèle et du Monte Carlo	46
CHAPITRE 5	COMMANDE DE LA PUISSANCE	48
5.1	Équation d'évolution de la puissance et commande	48
5.1.1	Bilan de puissance	48
5.1.2	Analyse des coefficients $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$	52
5.1.3	Résolution de l'équation	53
5.2	Algorithme de commande simple	55
5.3	Système de récompense	57
5.4	Problème de fin de commande et solution	58

5.4.1	Illustration du problème	58
5.4.2	Solution pour la reprise du fonctionnement normal	60
5.5	Limites concernant le suivi du signal objectif	62
5.5.1	"Ramping" limite	62
5.5.2	Effort irréalisable demandé au système	64
CHAPITRE 6 RESULTATS ET DISCUSSION		65
6.1	Influence de la répartition des clients sur les capacités du système	65
6.2	Influence du type de clients choisi sur la trajectoire des foyers	68
6.3	Exemples de commandes	70
6.3.1	Commande de réduction et d'élimination des pics	71
6.3.2	Commande de réduction et d'élimination des pics avec stockage thermique	73
6.4	Extension au cas à n températures de consigne	75
6.5	Influence de l'hétérogénéité	77
6.5.1	Création de la population hétérogène	77
6.5.2	Choix des valeurs des coefficients représentatifs dans le modèle homogène	78
6.5.3	Exemple dans le cas d'une commande spécifique	79
6.5.4	Répartition par classe	81
CHAPITRE 7 CONCLUSION		83
7.1	Synthèse des travaux	83
7.2	Limitations de la solution proposée	84
7.3	Améliorations futures	85
RÉFÉRENCES		86
ANNEXES		89

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1 : Paramètres servant à la modélisation de l'évolution en température des foyers	8
Tableau 3.1 : Valeurs des paramètres β et γ en fonction des types de clients	19
Tableau 3.2 : Pourcentage de client relativement à leur type à chacune des températures de consigne possibles	19
Tableau 6.1 : Répartition des clients par type selon le cas considéré	66
Tableau 6.2 : Caractéristiques de la commande en fonction de la répartition de clients considérée	68
Tableau 6.3 : Répartition de la récompense lors de la commande de réduction et d'élimination des pics	73
Tableau 6.4 : Répartition de la récompense lors de la commande de réduction et d'élimination des pics avec stockage thermique	75
Tableau A.1 : Valeurs numériques des paramètres	89

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 : Illustration des fonctions densités de probabilité dans les équations de Fokker-Planck dans le cas d'un thermostat	10
Figure 3.1 : Exemple de chaîne de Markov à deux états	14
Figure 3.2 : Chaîne de Markov dépendante de la pression p appliquée	15
Figure 3.3 : Évolution des densités de probabilité	25
Figure 3.4 : Transitions d'état engendrées par la chaîne de Markov	27
Figure 4.1 : Comparaison des résultats donnés par une simulation de Monte Carlo contre celle de Fokker-Planck	46
Figure 5.1 : Illustration des intégrales impliquées dans le calcul de $a(t)$ et $c(t)$. . .	52
Figure 5.2 : Illustration de l'impact de l'arrêt brutal de la commande sur la puissance consommée	59
Figure 5.3 : Illustration du retour progressif à la normale à $t = 2000$	61
Figure 6.1 : Illustration de différentes trajectoires de contrôle en fonction de la composition en clients	66
Figure 6.2 : Trajectoires de puissance des différents types de clients lors des commandes extrêmes	69
Figure 6.3 : Trajectoires de température des différents types de clients lors des commandes extrêmes	70
Figure 6.4 : Exemple de commande de réduction et d'élimination des pics	71
Figure 6.5 : Température moyenne lors de la commande de réduction et d'élimination des pics	72
Figure 6.6 : Exemple de commande de réduction et d'élimination des pics avec stockage thermique	74
Figure 6.7 : Température moyenne lors de la commande de réduction et d'élimination des pics avec stockage thermique	74
Figure 6.8 : Histogramme des valeurs des différents paramètres dans l'échantillon avec une déviation de 1	78
Figure 6.9 : Histogramme des valeurs des différents paramètres représentatifs dans l'échantillon avec une déviation de 1	79
Figure 6.10 : Comparaison Monte Carlo hétérogène, homogène et Fokker-Planck dans le cadre d'une commande de réduction de 5%	80

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

TCL	Thermostatically controlled load
DR	Demand response
DSM	Demand-Side Management

LISTE DES ANNEXES

Annexe A	Valeurs numériques	89
----------	------------------------------	----

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

La volonté de décarbonation de la production énergétique provoque l’augmentation importante de la part d’énergie renouvelable dans le mix électrique du réseau [1–3]. Cependant, cette production, principalement de sources solaires et éoliennes, est intermittente, c’est-à-dire qu’elle est instable à cause de sa dépendance à des paramètres extérieurs non fiables. Cela crée donc un besoin de mitiger les fluctuations, les manques et les surplus d’électricité [2]. Or historiquement, les centrales thermiques à énergie fossile ont joué ce rôle de par leur rapidité de déclenchement et facilité de gestion, ce qui n’est plus possible ou souhaitable dans le contexte actuel. C’est pourquoi, ces dernières décennies, l’idée de contrôler non plus seulement la production, mais aussi la demande (Demand Side Management ou DSM) est vue comme une possible source de flexibilité. Elle est même souvent présentée comme nécessaire dans le but d’atteindre l’objectif zéro émission d’ici 2050 [3]. De nombreux programmes Demand Response (DR) ont été théoriquement développés allant du contrôle de la recharge des véhicules électriques à celui de la consommation résidentielle [3–5].

Le chauffage et la climatisation représentent une part majeure de la consommation résidentielle. En effet, les charges contrôlées par thermostat (TCLs) telles que les chauffe-espaces, chauffe-eau, climatisation... sont des sources de consommation dominantes pour les foyers. Agrégées, elle représentent une part non-négligeable de la consommation électrique totale [3]. La commande de celles-ci serait une source de flexibilité importante pour le réseau électrique, donnant la capacité d’atténuer les pics de consommation ou de les déplacer à différents moments de la journée en fonction de la disponibilité d’énergie renouvelable [5–8].

1.1 Définitions et concepts de base

Dans cette section, nous allons présenter les concepts de *gestion de la demande* (ou *gestion de la charge*), et le lien avec celui d’*agrégateur*, ainsi que leur place dans la gestion du réseau électrique.

1.1.1 Le principe de la gestion de la demande

La gestion de la demande consiste à déplacer ou à réduire la demande d’électricité afin d’apporter de la flexibilité sur les marchés de gros et les marchés auxiliaires de l’électricité dans le but d’assurer l’équilibre du réseau [3]. Il y a plusieurs méthodes pour mettre en place la gestion de charge, mais de manière réductrice, on distingue en général deux mécanismes

principaux. Le premier est basé directement sur les prix (réponse implicite à la demande), et utilise des signaux de prix et des tarifs pour inciter les consommateurs à modifier leur consommation. Dans cette catégorie, un des mécanismes les plus utilisés dans les pays est le Time Of Use (TOU) : le prix change en fonction de l'heure de la journée afin de modifier le comportement des usagers. Le deuxième est basé sur des incitations (ou réponse explicite à la demande), qui monétisent la flexibilité par des paiements directs aux consommateurs qui modifient leur demande dans le cadre d'un programme établi. Dans ce cas, le contrôle est en général effectué par une entité tierce : *l'agrégateur*, que l'on définira plus en détails dans la sous-section suivante. Ce dernier aura établi un accord avec le consommateur (particulier ou industrie) l'autorisant à contrôler en partie sa consommation en échange d'une compensation généralement financière.

De nombreux programmes de gestion de la demande existent déjà, principalement au niveau des industries. Toutefois, pour correspondre à un scénario zéro émission nette d'ici 2050, de nombreux pays visent une accentuation du déploiement de flexibilité liées à la gestion de la demande [3, 9]. Par exemple, le gestionnaire du réseau de transport français prévoit une certaine capacité de flexibilité nécessaire à l'opération sécuritaire du réseau d'ici 2050 qui serait basée sur le rechargement des véhicules électriques, les procédés d'électrolyse, les industries, les bâtiments...

1.1.2 L'agrégateur : intermédiaire entre particuliers et opérateur

Afin d'assurer la mise en place de ces programmes de gestion de la demande, un intermédiaire spécifique est nécessaire. Les agrégateurs sont de nouvelles entités sur le marché de l'électricité qui agissent en tant que médiateurs entre les consommateurs d'électricité et l'opérateur du réseau [10, 11]. Ce sont eux qui possèdent la technologie et les contrats définissant et réalisant le programme de gestion de la charge. Ils vont donc être chargés de la récolte des données et de l'installation du matériel nécessaire. L'intérêt est qu'en rassemblant les particuliers, l'agrégateur représente une part plus importante de la consommation et donc possède un potentiel de flexibilité intéressant pour l'opérateur du réseau, lui conférant ainsi un pouvoir de négociation supérieur. En échange d'une certaine capacité de commande de la consommation des utilisateurs, l'agrégateur leur versera une compensation financière selon différents schémas de récompense. Il peut s'agir d'une redevance mensuelle, soit ponctuelle correspondant aux périodes de commande de la charge. La méthode de commande servant à la gestion de la demande peut aussi différer en fonction du système mis en place. Il peut s'agir d'une interruption totale des équipements visés, d'une diminution temporaire ou d'une augmentation de leur consommation.

1.2 Éléments de la problématique

1.2.1 Potentiel de flexibilité des TCLs

Les TCLs sont une part importante de la consommation résidentielle ; de plus elles sont gérées par un thermostat qui est par définition modulable. Il s'agit donc de charges pouvant être contrôlées afin de modifier la demande en électricité finale. Cela engendre donc la possibilité de création de nombreux programmes de gestion de la demande, et donc d'agrégateurs spécifiques aux TCLs, où à une partie d'entre elles telle que les chauffe-espaces, les chauffe-eau, la climatisation... Elles ont l'avantage d'être installées dans toutes les habitations, et nécessitent uniquement le rajout d'un système de commande assurant la communication entre l'agrégateur et le consommateur. De plus, elles représentent une méthode de stockage d'électricité sous forme thermique. Contrairement à des sources de consommation ponctuelles (lampes, four, machine à laver...), il est possible de stocker l'électricité sous forme de chaleur et ainsi de potentiellement décaler les périodes de consommation dans une certaine mesure.

1.2.2 Spécificités des TCLs

La commande des TCLs présente des défis importants. En effet, la consommation que l'on veut pouvoir influencer est globale, mais résulte en réalité de la somme de multiples consommations individuelles. Cela veut dire que, pour atteindre une puissance désirée, chacune doit théoriquement être surveillée et contrôlée [6–8]. De ce fait, les TCLs peuvent être traitées comme une seule consommation agrégée ou de nombreuses consommations particulières. De plus, le contrôle en soi peut être effectué de différentes façons grâce aux thermostats. Une possibilité est de jouer directement sur le changement d'état ON/OFF de ces derniers, alors qu'une autre est de modifier les températures de consigne... Ceci résulte en des impacts différents sur la consommation d'énergie.

Les TCLs font partie de la consommation résidentielle. En conséquence, contrairement à la production, ce ne sont pas de charges que le réseau peut arbitrairement contrôler, car elles impactent directement le confort des consommateurs qui recherchent une température idéale particulière. Quelle que soit la forme de commande étudiée, celle-ci ne peut pas passer outre le fait que la température doit rester dans des limites raisonnables ; ce qui impose des contraintes supplémentaires [6, 7]. En outre, pour qu'un client accepte de sacrifier son confort personnel pour la stabilité du réseau, il faut une motivation (généralement économique). Un système de commande doit donc être avantageux à la fois pour l'opérateur et le client pour être viable [12, 13].

Finalement, pour mettre en place la majorité de ces méthodes de contrôle, la collecte de

données est nécessaire, notamment au niveau des caractéristiques des espaces chauffés ou refroidis. L'inquiétude au niveau de l'utilisation des données et du respect de la vie privée est réelle. Ceci est d'autant plus important pour le contrôle se situant au niveau de la demande, car pour un fonctionnement optimal et un gain réel en flexibilité, un grand nombre de clients doit être impliqué et donc souscrire au programme.

1.3 Objectifs de recherche

L'idée explorée dans ce mémoire est le développement d'une nouvelle commande stochastique de la consommation résidentielle de chauffage agrégée. D'un point de vue pratique, cela passerait par le développement d'un nouveau type de contrat entre agrégateur et client. Le client accepterait que lors des périodes de contrôle, la température de consigne soit soumise à des modifications probabilistes à l'intérieur de contraintes précises. Un agrégateur observant la charge globale enverrait un unique signal de "pression" à tous les utilisateurs influençant les probabilités de transition pendant les périodes de contrôle ; le but étant de suivre autant que possible une trajectoire de consommation globale désirée. Le client choisirait un niveau de sensibilité au signal de pression et serait compensé dans la mesure de sa contribution. Le caractère stochastique des transitions aiderait à limiter les phénomènes de synchronisation des thermostats observés lors des mécanismes DR par contrôle de prix [13], [14–16], et permettrait d'approcher une flexibilité réelle en étant capable de suivre une trajectoire établie. La problématique de respect de la vie privée serait moindre dans la mesure où l'agrégateur a seulement besoin des données agrégées de la zone de contrôle, sans la spécificité des détails individuels.

L'objectif de cette maîtrise est donc de formuler et de déterminer le fonctionnement d'un point de vue technique d'un tel schéma de commande par agrégateur, de créer les algorithmes de contrôle et d'étudier les capacités et limites d'un tel schéma. Bien que, dans un but illustratif, on se concentre dans ce mémoire sur le cas des chauffe-espaces électriques, les méthodes utilisées restent applicables dans le cadre plus général des TCLs.

1.4 Plan du mémoire

Après une revue de littérature générale sur la gestion des charges au chapitre 2, et une présentation de résultats sur la modélisation agrégée des TCLs par équation de Fokker-Planck, fondamentaux pour notre étude, nous abordons au chapitre 3 le concept de commande de consignes de température par chaîne de Markov. Le modèle de Fokker-Planck est alors enrichi de transitions probabilistes induites par le signal de pression de l'agrégateur. Au

chapitre 4, la simulation de ce modèle théorique via une méthode de différences finies et les approximations numériques associées sont présentées alors qu’au chapitre 5, les algorithmes de commande de puissance sont développés et un schéma de distribution de récompense est proposé. Enfin, au chapitre 6, les influences des paramètres sur les possibilités de commande et les capacités du système sont discutées au travers d’exemples de simulation. En particulier, alors que l’analyse était basée sur une hypothèse non réaliste d’homogénéité au niveau de la dynamique des espaces chauffés, nous explorons numériquement la relaxation d’une telle hypothèse. Nous concluons sur une liste de voies de recherche futures possible, en relation avec le nouveau type de contrat agrégateur-client proposé dans ce mémoire.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux principales méthodes de commande des TCLs. En premier lieu afin d'étudier les différentes solutions proposées ainsi que leurs limites et les enjeux que cela soulève. Ensuite, nous explorons les différentes modélisations standards liées à l'évolution de température des foyers ainsi qu'au comportement agrégé des thermostats. Ce qui nous servira de base afin d'établir notre propre modèle dans ce mémoire.

2.1 Études des méthodes de commande

2.1.1 Présentation des différents types de commande

De nombreuses méthodes potentielles de commande des TCLs existent. Elles ont été théorisées et développées, chacune possédant des éléments uniques [12, 13, 17–20]. De manière générale, elles peuvent être classées entre celles exerçant un contrôle au niveau du particulier et celles s'intéressant à l'agrégat. Le premier type contrôle chaque consommation individuelle mais avec un objectif d'atteinte de comportement désiré au niveau de l'ensemble [5] ; le second modélise le comportement agrégé de l'ensemble via des modèles tel les équations de Fokker-Planck couplées, [21, 22], et contrôle le modèle agrégé en utilisant un seul mécanisme.

Le but peut lui aussi être différent, certains visant à atteindre une certaine température (stockage ou extraction d'énergie) et d'autres une puissance moyenne désirée (effacement ou augmentation de puissance). Ces contrôles peuvent être basés sur le prix (Temps d'utilisation, Pricing en temps réel...) [12, 13], l'ajustement des températures de consigne [20], ou même utiliser des théories de jeux à champ moyen [23]. Établir une liste exhaustive est compliqué, car il y a autant de méthodes que d'agrégateurs. Bien que certaines méthodes probabilistes existent, par exemple le changement d'état ON/OFF aléatoire, [19, 24], la majorité des approches actuelles sont déterministes.

2.1.2 Enjeux et problèmes

Bien que les méthodes proposées dans la littérature aient un potentiel d'amélioration de la flexibilité du réseau, elles peuvent apporter leur lot de difficultés [14–16, 25]. Un problème bien connu est celui de la synchronisation en température qui peut se produire suite à la mise en place de stratégies de commande. Ainsi, il arrivera souvent qu'une partie non-négligeable de la population des TCLs se retrouve située à une température similaire, synchronisant de ce fait les états des thermostats. Cela génère des oscillations de la puissance résidentielle

consommée, ce qui engendre la création de nouveaux pics et creux qui sont problématiques pour le réseau [13–16] et que ce dernier cherche justement à éviter en général. Le contrôle basé sur le prix a aussi une tendance à déplacer dans le temps les pics de consommation plutôt que de les éliminer, ce qui peut déstabiliser le système au lieu d’augmenter sa résilience [25]. Ceci s’ajoute à la question sociale où l’électricité peut être vue comme un bien de première nécessité pour les citoyens, en particulier lorsqu’il s’agit du chauffage. Des contraintes de température minimale, de temps, de sécurité doivent donc s’imposer pour la mise en place de ce type de commande. De plus, pour mettre en place la majorité de ces méthodes, la collecte de données notamment au niveau de la température et des thermostats est nécessaire. L’inquiétude au niveau de l’utilisation des données et du respect de la vie privée est réelle. Ceci est d’autant plus important pour le contrôle se situant du côté résidentiel de la demande, car pour un fonctionnement optimal, il faut intéresser un grand nombre de clients afin d’obtenir une flexibilité assez grande. La question de l’acceptabilité est donc clé pour la réussite d’un tel système de commande.

2.2 Dynamique d’évolution de la température

2.2.1 Modélisation thermique des bâtiments

Il est nécessaire afin d’établir un modèle de s’intéresser à la manière dont est modélisée dans la littérature l’évolution de la température dans un foyer, notamment l’équation d’évolution et les paramètres physiques considérés. Lors du fonctionnement du thermostat, l’évolution de la température est en général écrite sous une forme semblable [6, 17–22] :

$$dx = \frac{U_a A}{C_a} (x_a - x(t)) dt + \frac{Q m(t)}{C_a} dt + de(t) \quad (2.1)$$

Où $m(t)$ est une variable binaire représentant le fonctionnement du thermostat à l’instant t et $e(t)$ un bruit correspondant à l’erreur et la variabilité des sources thermiques. Celui-ci est en général modélisé en temps discret par un bruit blanc [19, 20], où sous la forme de la différentielle d’un mouvement Brownien unidimensionnel : un processus de Wiener dans le but de s’intéresser aux populations agrégées en temps continu [21].

L’équation (2.1) devient alors :

$$dx = \frac{U_a A}{C_a} (x_a - x(t)) dt + \frac{Q m(t)}{C_a} dt + \sigma d\omega_t \quad (2.2)$$

Le sens physique des différents termes est le suivant :

- $\frac{UA}{C_a}(x_a - x(t))$ correspond aux pertes thermiques liées à l'écart entre la température extérieure et celle du foyer.
- $\frac{Qm(t)}{C_a}$ correspond au gain lié à l'élément chauffant suivant l'état d'activation $m(t)$ du thermostat.
- $\sigma d\omega_t$ correspond à un bruit suivant un mouvement Brownien de volatilité σ pour traduire les effets de pertes et gains thermiques aléatoires qui peuvent exister.

La signification physique de chaque paramètre pouvant être trouvée dans la table suivante :

Tableau 2.1 Paramètres servant à la modélisation de l'évolution en température des foyers

Symbole	Signification
x	Température
t	Temps
x_a	Température extérieure
U_a	Conductance thermique surfacique
C_a	Capacité thermique
A	Surface
Q	Puissance du chauffage
σ	Paramètre de volatilité
$m(t)$	État binaire du thermostat
ω_t	Processus de Wiener

2.2.2 Fonctionnement du thermostat

Les thermostats considérés fonctionnent tous de la manière suivante [6,17–22] : ils sont réglés à une température de consigne x_C , et possèdent une "zone morte" comprise entre $x_C^- = x_C - \Delta T$ et $x_C^+ = x_C + \Delta T$. Un thermostat s'allume (état 1) et le chauffage s'enclenche lorsque la température descend en dessous de x_C^- et qu'il était à l'état 0. De même, ce dernier s'éteint (état 0) lorsqu'elle dépasse x_C^+ alors qu'il était à l'état 1. Autrement, l'état du thermostat reste invariant.

D'un point de vue mathématique sur la fonction binaire $m(t)$ cela se traduit de la manière suivante :

$$m(t + dt) = m(t) + \pi(x(t), x_C)$$

$$\text{Avec } \pi(x(t), x_C) = \begin{cases} 0 & x_C^- < x(t) < x_C^+ \\ -m(t) & x(t) \geq x_C^+ \\ 1 - m(t) & x(t) \leq x_C^- \end{cases} \quad (2.3)$$

2.2.3 Modèle standard du comportement agrégé : équations de Fokker-Planck

Nous nous intéressons d'abord aux équations impliquées dans le cas standard avec contrôle purement thermostatique. La dynamique des températures des chauffe-espaces est modélisée par (2.4) et peut être écrite comme suit :

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma dW, \text{ avec } \mu(x, t) = \frac{U_a A}{C_a}(x_a - x(t)) + \frac{Qm(t)}{C_a} \quad (2.4)$$

Pour simplifier les cas d'évolution ON et OFF, il est possible de séparer la fonction $\mu(x, t)$ dans l'état 0 et l'état 1 :

$$\begin{cases} \mu_0(x, t) = \frac{U_a A}{C_a}(x_a - x(t)) \\ \mu_1(x, t) = \frac{U_a A}{C_a}(x_a - x(t)) + \frac{Q}{C_a} \end{cases} \quad (2.5)$$

Le but de l'équation de Fokker-Planck est de regarder non pas l'évolution en température d'un seul thermostat, mais de s'intéresser à la dynamique agrégée de l'ensemble. L'évolution d'intérêt n'est donc plus la température, mais la répartition des états binaires des thermostats, elle-même dépendante de l'évolution des fonctions densités de probabilité.

Dans le modèle initial développé dans [21], le processus de Markov $\begin{bmatrix} x(t) \\ m(t) \end{bmatrix}$ hybride continu/discret est étudié, donnant lieu à la définition de deux densités de probabilités :

$$\begin{aligned} f_0(\lambda, t)d\lambda &= Pr(\lambda < x(t) \leq \lambda + d\lambda, m(t) = 0) \\ f_1(\lambda, t)d\lambda &= Pr(\lambda < x(t) \leq \lambda + d\lambda, m(t) = 1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dans la situation considérée et la dynamique (2.4), cela aboutit à l'équation de Fokker-Planck suivante, $\forall i \in \{0, 1\}$:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t}(x, t) = -\frac{\partial \mu_i f_i}{\partial x}(x, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}(x, t) \quad (2.7)$$

Conditions aux limites

Les équations d'évolution étant établies, il faut maintenant s'intéresser aux conditions aux limites qui doivent être respectées à tout instant t , on nomme x_C la température de consigne du thermostat et ses bornes x_C^-, x_C^+ :

Parois Absorbantes aux températures limites x_C^- , x_C^+ :

$$f_0(x_C^-, t) = f_1(x_C^+, t) = 0$$

Conditions à l'infini :

$$f_1(-\infty, t) = f_0(+\infty, t) = 0$$

Conditions de continuité aux parois absorbantes :

$$f_1 \text{ est continue en } x_C^-$$

$$f_0 \text{ est continue en } x_C^+$$

Conditions de conservation des probabilités :

$\forall i \in \{0, 1\}$, h_i correspond au flux de densité de probabilité de gauche à droite pour la densité f_i . Les transferts liés aux transitions d'états du thermostat doivent être conservés au niveau des parois absorbantes, ce qui se traduit par :

$$\lim_{\lambda \rightarrow x_C^-} h_1(\lambda, t) - \lim_{\lambda \rightarrow x_C^-} h_1(\lambda, t) - h_0(x_C^-, t) = 0$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow x_C^+} h_0(\lambda, t) - \lim_{\lambda \rightarrow x_C^+} h_0(\lambda, t) + h_1(x_C^+, t) = 0,$$

$$\text{Avec } h_i(\lambda, t) = \mu_i(\lambda, t)f_i(\lambda, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_i}{\partial x}(\lambda, t)$$

Ces équations permettent d'obtenir des résultats sur les fonctions densités de probabilité concernant la répartition en température selon l'état des thermostats comme illustré sur la figure 2.1.

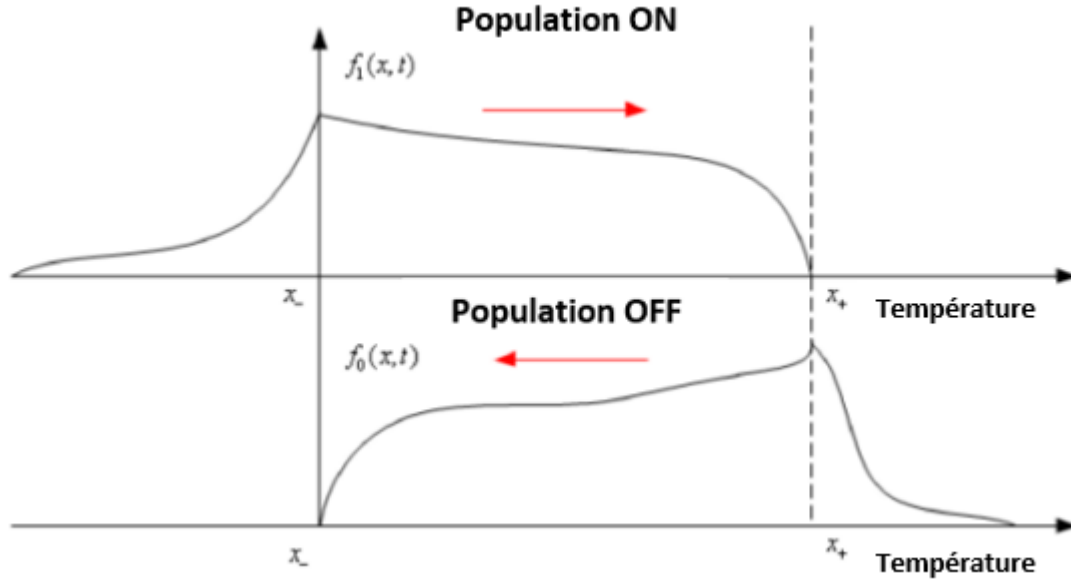


Figure 2.1 Illustration des fonctions densités de probabilité dans les équations de Fokker-Planck dans le cas d'un thermostat

En plus d'exprimer cette répartition, ces densités permettent de calculer des grandeurs importantes dans le cadre de la commande, notamment la puissance moyenne consommée par habitation et la proportion de thermostats ON au temps t :

$$\overline{P} = Q \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x, t) dx \quad (2.8)$$

$$\%_{ON} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x, t) dx \quad (2.9)$$

Les équations de Fokker-Planck sont les équations principales caractérisant le comportement agrégé des thermostats. Elles serviront de base dans ce mémoire afin de développer nos propres équations prenant en compte l'incorporation des chaînes de Markov sensibles au signal de pression.

CHAPITRE 3 STRUCTURE DU CONTRAT ET DU SYSTÈME DE COMMANDE

Dans ce chapitre, nous présentons les principes de fonctionnement ainsi que les caractéristiques d'un système de commande de consigne de thermostat via un mécanisme de chaînes de Markov sensibles à un signal de pression. La structure des chaînes de Markov ainsi que la relation de leurs paramètres de transition avec la catégorie de sensibilité du client sont détaillées. Finalement, nous incluons ces chaînes de Markov dans l'équation de Fokker-Planck afin d'arriver à l'expression d'équations d'évolution de l'agrégat propres au système de commande proposé.

3.1 Principe du mécanisme de commande de consigne de thermostat par chaînes de Markov différenciées

Le système de commande proposé dans ce mémoire est basé sur la structure suivante : chaque client choisit une température de confort standard parmi un ensemble de valeurs déterminées (3 dans l'exemple considéré) ainsi qu'un niveau de sensibilité à un signal pression émis par l'agrégateur entre faible, modéré et élevé. Cela résulte en 9 types de clients différents. En temps normal, c'est-à-dire hors des périodes de commande, le fonctionnement des chauffespaces reste inchangé, chaque client étant sur la température de son choix.

Lorsque le réseau électrique entre dans une période nécessitant l'utilisation de sources de flexibilité afin d'assurer l'équilibre offre-demande électrique, l'opérateur peut activer le contrôle en définissant un objectif de puissance à atteindre. Quand le contrôle est activé, chaque client transitionne de manière aléatoire entre différentes températures de consigne, en suivant une chaîne de Markov caractérisée par le niveau de sensibilité choisi et de matrice d'intensité dépendante de la pression à l'instant t . Le signal de pression $p(t)$ est envoyé par l'agrégateur à tous les consommateurs dans le but de réguler la puissance consommée à la quantité désirée. Plus la sensibilité est forte et plus la chaîne de Markov évolue rapidement dans la direction souhaitée par l'agrégateur, chaque type de clients effectuant donc une contribution différente à l'atteinte de l'objectif de commande en fonction des caractéristiques choisies. La rémunération sera proportionnelle à la contribution du consommateur, ce qui permettra de récompenser davantage ceux ayant choisi une sensibilité élevée.

Le but de cette partie est de décrire l'évolution de la distribution statistique des températures et états thermostatiques des chauffe-espaces soumis à un tel mécanisme probabiliste de commande. Cela nous permettra de simuler cette évolution et de déterminer le signal $p(t)$ devant être envoyé par l'agrégateur afin d'atteindre un certain niveau de consommation.

3.2 Description des thermostats et hypothèses

Dans notre système, un chauffe-espace est défini pour chaque type de clients par différents paramètres :

- La température $x(t)$ à l'instant t
- 2 états de fonctionnement du thermostat ON et OFF (respectivement 1 et 0)
- 3 températures de consigne :
 - Basse température (x_{C_0})
 - Moyenne température (x_{C_1})
 - Haute température (x_{C_2})

Dans notre cas d'étude, il existe trois températures de consigne mentionnées précédemment : $x_{C_0}, x_{C_1}, x_{C_2}$. A ces dernières correspondent trois zones mortes : $[x_{C_0}^-, x_{C_0}^+], [x_{C_1}^-, x_{C_1}^+], [x_{C_2}^-, x_{C_2}^+]$. Dans la réalité, il est bien évidemment possible d'avoir plus de températures de consignes, mais nous nous limitons à 3 dans ce mémoire afin de simplifier les expressions et temps de calcul. Le cas de l'extension à plus de températures de consigne sera traité en dernière partie.

Pour chaque type de clients, (un client étant défini par une certaine classe de sensibilité à la pression et une certaine température de confort), il existe donc 6 états de fonctionnement du thermostat (3 états de consigne et 2 états d'opération). Le comportement agrégé est donc défini par 6 densités distinctes $f_{ij}(x, t)$ $i \in \{0, 1\}, j \in \{0, 1, 2\}$ qui seront explicités plus tard dans ce chapitre.

Dans toute l'étude qui suit, on suppose que les paramètres physiques des habitations ainsi que des thermostats (taille de la zone morte, températures de consigne) sont identiques pour la population. Il s'agit donc d'une population de maisons et de thermostats homogènes. L'influence inévitable de l'hétérogénéité sera étudiée dans la dernière partie de ce mémoire.

3.3 Chaîne de Markov pour la sensibilité au signal de pression

3.3.1 Définition d'une chaîne de Markov

Une chaîne de Markov est un processus avec mémoire limitée, c'est-à-dire que les probabilités des événements futurs ne dépendent pas des événements antérieurs, mais seulement de l'état courant du système. Pour une suite d'états aléatoires (X_n) à valeur dans un espace E , cela se traduit par la propriété suivante :

$$\forall n \geq 0, \forall (j, i_0, \dots, i_n) \in E^{n+2} :$$

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i_n)$$

Pour donner un exemple simple, voici un cas de chaîne de Markov non dépendante du temps à deux états *en temps discret* :

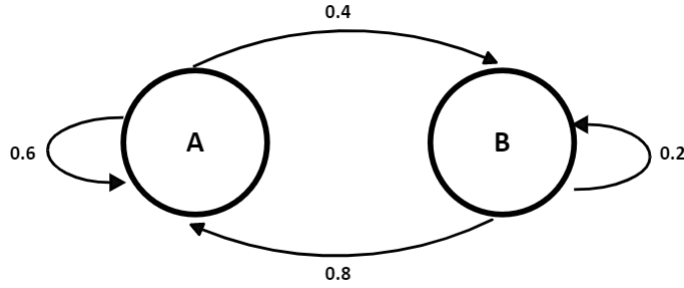


Figure 3.1 Exemple de chaîne de Markov à deux états

Dans le cas de notre étude, afin de pouvoir incorporer les chaînes de Markov dans l'évolution temporelle des thermostats, il faut considérer les chaînes de Markov non pas en temps discret, mais *en temps continu* afin de déterminer leur influence dans les équations de Fokker-Planck. Le changement que cela implique est assez minime ; le principe reste le même mais la définition des probabilités de transition pour un accroissement de temps infinitésimal est donnée par :

$$\begin{cases} P(X(t + dt) = j | X(t) = i) = q_{ij} * dt & \forall i \neq j \\ P(X(t + dt) = i | X(t) = i) = 1 - \sum_j q_{ij} * dt & \forall (i, j), q_{ij} \in [0, +\infty[\end{cases} \quad (3.1)$$

Les probabilités de transition sont donc ainsi définies pour tout instant t et peuvent être prises en compte lors de l'établissement d'équations d'évolution. Néanmoins, dans la simulation présentée dans le chapitre 4 le dt n'étant pas infinitésimal, mais sous la forme d'un Δt fixé, le fonctionnement s'apparentera plus à une chaîne en temps discret. On peut maintenant

établir plus en détail notre chaîne qui servira à la modulation de la consommation.

3.3.2 Conception de la chaîne

Dans le cadre de cette étude, chaque type de clients possède une sensibilité au besoin du réseau différente (cette dernière dépendra d'un compromis spécifique à chaque client entre désir de confort et impératif d'économie) qui est représentée par une chaîne de Markov dépendante d'un signal de pression $p(t)$ appliqué par l'agrégateur, responsable de la transition entre les différents niveaux de consigne numérotés de 0 à 2 conformément à l'explication donnée dans la partie 3.2 :

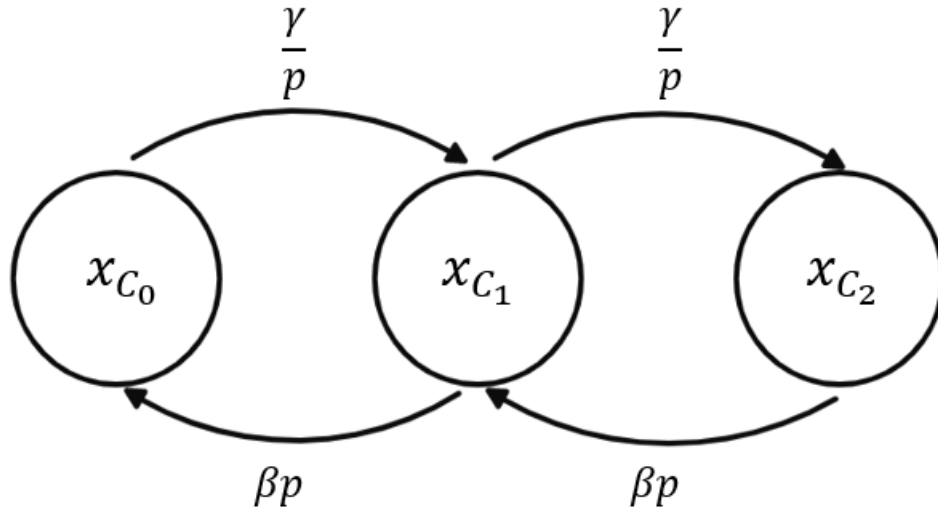


Figure 3.2 Chaîne de Markov dépendante de la pression p appliquée

Chaque type de clients est caractérisé par un couple (β, γ) , qui est propre à la classe de sensibilité à laquelle il choisit d'adhérer et donc possède une chaîne de Markov spécifique en termes de paramètres, mais le fonctionnement sous-jacent reste le même. C'est cela qui va définir la sensibilité d'un type de clients au signal de pression $p(t)$ envoyé par la commande.

Les transitions vers des températures de consigne plus élevées sont caractérisées par le paramètre γ , avec une transition de probabilité $\frac{\gamma}{p(t)}$ qui va donc avoir tendance à diminuer plus la pression appliquée par l'agrégateur augmente.

A l'inverse, celles vers des températures de consigne plus basses sont caractérisées par le paramètre β , avec une transition de probabilité $\beta p(t)$ qui va donc avoir tendance à augmenter plus la pression appliquée par l'agrégateur augmente.

On peut expliciter la chaîne de Markov de la figure 3.2 de la manière suivante en notant $X_c(t)$ la température de consigne à l'instant t :

$$\begin{cases} P(X_c(t+dt) = i+1 | X_c(t) = i) = \frac{\gamma}{p(t)} * dt & \forall i \in \{0, 1\} \\ P(X_c(t+dt) = i-1 | X_c(t) = i) = \beta p(t) * dt & \forall i \in \{1, 2\} \\ P(X_c(t+dt) = 0 | X_c(t) = 0) = 1 - \frac{\gamma}{p(t)} * dt \\ P(X_c(t+dt) = 1 | X_c(t) = 1) = 1 - (\beta p(t) + \frac{\gamma}{p(t)}) * dt \\ P(X_c(t+dt) = 2 | X_c(t) = 2) = 1 - \beta p(t) * dt \end{cases} \quad (3.2)$$

Cette chaîne de Markov aboutit à la matrice de transition M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{p(t)} & \beta p(t) & 0 \\ \frac{\gamma}{p(t)} & -(\frac{\gamma}{p(t)} + \beta p(t)) & \beta p(t) \\ 0 & \frac{\gamma}{p(t)} & -\beta p(t) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Le signal de pression $p(t)$ affecte donc simultanément les probabilités de transitions vers les états de température de consignes élevées et faibles. Ce qui permet, une fois le contrôle activé, de modifier la répartition des températures de consigne des thermostats. En effet, l'augmentation du signal $p(t)$ va les déplacer vers les faibles températures de consigne et donc réduire la consommation électrique, tandis que sa diminution les dirige vers les hautes températures augmentant donc la consommation. C'est ce principe qui va permettre l'atteinte de l'objectif de puissance désiré lors des périodes de contrôle. Les valeurs de β et γ définissant la sensibilité du type de clients, et le signal de pression $p(t)$ envoyé étant unique, l'impact ne sera donc pas le même sur tous les clients. Il faut donc choisir judicieusement ces valeurs les unes par rapport aux autres en fonction du type de clients désiré, et de son impact possible sur le système.

3.3.3 Choix des valeurs de β et γ , et critères quantitatifs guidant le choix des clients

Pour mieux comprendre l'impact des paramètres β et γ , il est aussi possible de s'intéresser tout d'abord à l'état stationnaire atteint par la chaîne, et donc la répartition finale des différentes températures de consigne pour un couple (β, γ) c'est-à-dire un type de clients donné. Pour cela, on peut simplement résoudre le système suivant, en considérant N le vecteur colonne de la répartition de la population dans les différents états :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \quad \text{car il s'agit de probabilités dont la somme doit être égale à 1} \quad (3.4)$$

Avec $N = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, vecteur colonne de la répartition de la population dans les différents états.

Ce qui revient à :

$$\begin{cases} MN = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

En simplifiant car M est une matrice de rang 2, le système devient :

$$\begin{cases} -\frac{\gamma}{p}a + \beta pb = 0 \\ \frac{\gamma}{p}b - \beta pc = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

La résolution analytique donne le résultat suivant :

$$N = \begin{pmatrix} \frac{\frac{\beta p}{\gamma}}{1 + \frac{\beta p}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta p}} \\ \frac{1}{1 + \frac{\beta p}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta p}} \\ \frac{\frac{\gamma}{\beta p}}{1 + \frac{\beta p}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta p}} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Comme on peut le voir dans l'équation (3.7), pour une pression p donnée le rapport $\frac{\beta}{\gamma}$ détermine entièrement l'état stationnaire de la chaîne de Markov atteint sous contrôle. Par exemple, $\beta = \gamma = 0.1$ et $\beta = \gamma = 0.01$ atteignent donc le même état final. Plus ce rapport est fort, plus les états de températures faibles seront favorisés tandis que plus il est faible plus les états de hautes températures le seront. Les valeurs de β et γ vont cependant individuellement influencer la dynamique de l'évolution de la chaîne de Markov qui sera donc plus ou moins rapide, et cela indépendamment de la valeur du rapport. La réactivité du système contrôlé sera également influencée par la dynamique thermique d'évolution de la température.

Pour étudier une manière de quantifier cette caractéristique, il est potentiellement intéressant de regarder les valeurs propres de la matrice de transition M de la chaîne de Markov correspondante. En effet, en temps continu, l'équation d'évolution est de la forme :

$$\frac{dN}{dt} = MN \quad (3.8)$$

N étant le vecteur colonne de la répartition de la population dans les différents états.

D'où N est de la forme :

$$N = \sum_i \alpha_i e^{\lambda_i t} V_i \quad (3.9)$$

où λ_i sont les valeurs propres, et V_i , les vecteurs propres associés.

La matrice M étant singulière, une des valeurs propres sera toujours égale à 0, c'est la partie réelle de la valeur propre la plus proche de 0 qui dictera la vitesse de convergence. Dans ce cas, on a les valeurs propres suivantes : 0, $\sqrt{\gamma\beta} - \beta p - \frac{\gamma}{p}$ et $-\sqrt{\gamma\beta} - \beta p - \frac{\gamma}{p}$.

La matrice étant diagonalement dominante en valeur absolue avec les termes négatifs sur la diagonale, les valeurs propres seront négatives. Les termes β , γ et p étant positifs, le temps de convergence approximatif sera $\frac{4}{-\sqrt{\gamma\beta} - \beta p - \frac{\gamma}{p}}$ pour ce qui concerne les probabilités associées à la chaîne de Markov.

En conclusion, si on essaye de résumer les points importants permettant de déterminer les valeurs à choisir pour nos différents types de clients :

- Le rapport $\frac{\beta}{\gamma}$ détermine l'état stationnaire. β favorise les basses températures et γ les hautes.
- Les valeurs de β et γ influent sur la sensibilité de la chaîne de Markov. Plus elles sont grandes plus cette dernière est élevée, l'état stationnaire de cette dernière sera donc atteint plus rapidement.
- Il faut essayer de mettre des valeurs du même ordre pour un même seuil de sensibilité, afin qu'une classe de sensibilité réagisse similairement malgré des températures de confort différentes.

En essayant de respecter ces idées, et après différents tests, les paramètres choisis pour chaque type de clients sont les suivants :

Tableau 3.1 Valeurs des paramètres β et γ en fonction des types de clients

Index	Température de confort	Sensibilité	Beta	Gamma	Rapport
0	Faible	Faible	0.05	0.00025	200
1	Faible	Moyenne	0.05	0.000625	80
2	Faible	Forte	0.05	0.0025	20
3	Moyenne	Faible	0.00025	0.00025	1
4	Moyenne	Moyenne	0.000625	0.000625	1
5	Moyenne	Forte	0.01	0.01	1
6	Forte	Faible	0.00025	0.05	0.005
7	Forte	Moyenne	0.000625	0.05	0.0125
8	Forte	Forte	0.0025	0.05	0.05

Afin d'orienter les clients dans leur choix, il est possible d'illustrer l'impact de leur sensibilité sur le pourcentage de temps passé dans chaque température de consigne lorsque les coefficients β et γ sont fixés dans chacune des classes. En utilisant deux commandes moyennes, une vise à augmenter la consommation ($2p_{min}$) et l'autre à la baisser ($\frac{p_{max}}{2}$), on obtient le tableau suivant :

Tableau 3.2 Pourcentage de client relativement à leur type à chacune des températures de consigne possibles

Type	Répartition lors du contrôle $\frac{p_{max}}{2}$ à $t = 100$ minutes (%)			Répartition lors du contrôle $2p_{min}$ à $t = 100$ minutes (%)		
	x_{C_0}	x_{C_1}	x_{C_2}	x_{C_0}	x_{C_1}	x_{C_2}
0	100	0	0	82.07	15.99	1.94
1	100	0	0	60.93	29.29	9.78
2	99.94	0.05	0	13.62	26.95	59.43
3	22.09	77.71	0.20	0.20	77.71	22.09
4	46.34	53.32	0.34	0.34	53.32	46.34
5	99	1	0	0	1	99
6	1.94	15.99	82.07	0	0	100
7	9.78	29.29	60.93	0	0	100
8	59.43	26.95	13.62	0	0.05	99.95

La table 3.2 montre bien que β et γ influent sur la répartition obtenue à un instant donné, et peut servir de guide aux clients en vue de choisir leur type. Il est bien évidemment possible d'ajuster les paramètres du système afin de répondre à des critères spécifiques dans le cas d'une étude plus poussée. Par exemple, augmenter légèrement la valeur de β chez tous les types de clients sans modifier celle de γ permettrait de diminuer plus rapidement et de manière plus marquée la consommation en favorisant les états de basse température. Cependant,

cela se ferait au coût d'une vitesse de réaction plus faible du système pour augmenter la température. L'ajustement précis demande donc une étude plus poussée à faire au cas par cas selon les besoins de flexibilité réels de l'opérateur du réseau.

De plus, rajouter des types de clients est envisageable afin de proposer plus de possibilités aux clients ainsi que d'affiner les types de commande possibles. Cependant, il faut aussi considérer que chaque type de clients augmente de manière arithmétique le nombre des fonctions de densité à calculer, en effet :

$$\#Densités = \#Types\ de\ clients * \#Températures\ de\ consigne * \#États\ du\ thermostat \quad (3.10)$$

Dans le cas étudié en particulier ici :

$$\#Densités = 9 * 3 * 2 = 54$$

Pour ce cas simple, il y a déjà 54 densités différentes et chaque nouveau type en rajoute 6 tandis que chaque nouvelle température de consigne augmente cette quantité de 18. Tout étant multiplicatif dans (3.10), il est très simple d'arriver à des nombres importants de densités à devoir calculer, ce qui va alourdir le modèle en terme de temps de calcul bien que n'augmentant pas significativement sa complexité.

3.4 Caractérisation mathématique de l'évolution de l'agrégat des thermostats avec consigne de température modulée par chaîne de Markov

Le stockage énergétique associé aux charges thermostatiques a depuis longue date été considéré comme présentant un potentiel intéressant d'aide à la réduction des pics de demande d'électricité durant les heures de pointe. Une question fondamentale a alors été celle de modéliser le comportement agrégé de telles charges lorsqu'elles sont soumises par exemple à des contrôles de type séquences d'interruptions/reconnexions collectives. Malhamé et Chong [8] ont eu recours à des idées de mécanique statistique pour construire des modèles approchés du comportement collectif de ces charges lorsque le nombre de charges commandées est grand. L'idée de base est de partir d'un modèle stochastique de la dynamique de charges élémentaires (commandées ou non), d'utiliser leur indépendance statistique conditionnellement à la connaissance de la température ambiante (en général commune par exemple pour des charges de chauffage) et enfin de s'appuyer sur la loi des grands nombres pour synthétiser un comportement moyen global. Ce dernier, dans le cas d'un contrôle purement thermostatique,

s'avère être décrit par un système d'équations aux dérivées partielles couplées (équations de Fokker-Planck [8]). Nous avons rapidement passé en revue ce modèle dans la section 2.2.3, que nous appellerons modèle standard. Dans ce qui suit, nous apporterons des modifications au modèle standard pour déboucher sur un modèle tenant cette fois-ci compte de la possibilité de moduler de façon probabiliste les températures de consigne des thermostats. De la sorte, l'agrégateur pourra engendrer un continuum de comportements agrégés potentiellement désirables pour le réseau, tout en maintenant les limites de confort des clients selon leurs choix contractuels. Également, les phénomènes de synchronisation des thermostats pourront être évités autant que possible.

3.4.1 Calcul du flux de densité de probabilité h_i dans le cas standard

Le flux de densité est une fonction importante de l'étude du système. Elle traduit partiellement la dynamique de ce dernier, en plus de servir aux conditions limites. La déterminer permet de clarifier le fonctionnement standard du modèle et sera utile afin d'incorporer les chaînes de Markov dans celui-ci.

A partir de l'équation (2.7) on peut calculer le flux de densité de probabilité (de gauche à droite), h_i pour la densité de probabilité $f_i \forall i \in \{0,1\}$:

$$\begin{aligned} h_i(\lambda, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\lambda} f_i(x, t) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\lambda} -\frac{\partial}{\partial t} f_i(x, t) dx \end{aligned}$$

En utilisant (2.7) :

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\lambda} -\left(-\frac{\partial}{\partial x} [\mu_i(x, t) f_i(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2 f_i(x, t)] \right) \\ &= \left[\mu_i(x, t) f_i(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [\sigma^2 f_i(x, t)] \right]_{-\infty}^{\lambda} \end{aligned}$$

En prenant en compte que f_i est une densité de probabilité nulle en $-\infty$, on obtient l'équation suivante :

$$h_i(\lambda, t) = \mu_i(\lambda, t) f_i(\lambda, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_i}{\partial x}(\lambda, t) \quad (3.11)$$

Le modèle présenté en section 2.2.3 et ci-dessus est donc l'évolution standard des densités des thermostats en l'absence de commande. Il faut maintenant essayer d'y incorporer le contrôle mis en place par les chaînes de Markov de la section 3.3 afin d'obtenir la dynamique contrôlée du système.

3.4.2 Prise en compte de la chaîne de Markov

Maintenant que le fonctionnement en comportement standard est établi, il est possible d'ajouter les mouvements liés à la chaîne de Markov entre les différentes températures de consigne. La dynamique du thermostat reste théoriquement la même que celle décrite en (2.4), mais le

processus de Markov est maintenant décrit par le triplet $\begin{bmatrix} x(t) \\ m(t) \\ x_C(t) \end{bmatrix}$

$x_C(t)$ est la température de consigne à l'instant t avec ses bornes de fonctionnement $x_C^-(t)$ et $x_C^+(t)$. Il s'agit d'une variable discrète prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{x_{C_0}, x_{C_1}, x_{C_2}\}$, et évoluant selon la chaîne de Markov décrite en 3.3 dont les paramètres dépendent du type de clients considéré.

De ce fait la définition de $m(t)$ change légèrement pour prendre en compte la variation possible de température de consigne :

$$m(t + dt) = m(t) + \pi(x(t), x_C(t))$$

$$\text{Avec } \pi(x(t), x_C(t)) = \begin{cases} 0 & x_C^-(t) < x(t) < x_C^+(t) \\ -m(t) & x(t) \geq x_C^+(t) \\ 1 - m(t) & x(t) \leq x_C^-(t) \end{cases} \quad (3.12)$$

Pour décrire un tel système pour un type de clients, il faut donc de nouvelles fonctions densités de probabilité dépendant d'une variable continue x , et des deux variables discrètes $i \in \{0, 1\}$, $j \in \{0, 1, 2\}$ correspondant respectivement à l'état du thermostat et à la température de consigne, nous les nommons f_{ij} :

$$f_{ij}(\lambda, t)d\lambda = Pr(\lambda < x(t) \leq \lambda + d\lambda, m(t) = i, x_C(t) = x_{C_j}) \quad (3.13)$$

Le modèle standard, qui ne prend pas compte les chaînes de Markov, donnerait le résultat suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} f_{i0} \\ f_{i1} \\ f_{i2} \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\begin{pmatrix} \mu_i & 0 & 0 \\ 0 & \mu_i & 0 \\ 0 & 0 & \mu_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{i0} \\ f_{i1} \\ f_{i2} \end{pmatrix} \right] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} f_{i0} \\ f_{i1} \\ f_{i2} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$h_{ij}(\lambda, t) = \mu_i(\lambda, t) f_{ij}(\lambda, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{ij}}{\partial x}(\lambda, t) \quad (3.15)$$

Afin d'établir les équations prenant en compte la chaîne de Markov, nous nous intéressons au flux de densité de probabilité de gauche à droite à travers une paroi, en prenant en compte les chaînes de Markov pendant un intervalle de temps dt . Ce qui nous permettra de réaliser un bilan à l'ordre le plus bas en dt , montrant que dans cette approximation ces flux gardent la même expression, et permettant d'établir les équations d'évolution avec chaîne de Markov.

On peut réaliser un bilan à l'ordre 1 pour obtenir les équations en présence de la chaîne de Markov décrite précédemment. Chaque cas suit le même raisonnement pour les différentes densités mais ayant des spécificités différentes, on l'illustre ici sur la densité f_{00} en détaillant l'origine des variations de la densité.

Ainsi, pour f_{00} qui est la densité des thermostats éteints à la température de consigne x_{C_0} (la température de consigne la plus basse), et en ignorant pour le moment les transitions d'états de thermostat forcées par la chaîne de Markov (ce qui revient à se placer dans l'intervalle $[x_{C_0}^-, x_{C_0}^+]$), la liste des variations dans une tranche de largeur dx pendant un laps de temps dt est la suivante :

- Transitions depuis x_{C_0} en direction de l'état de température de consigne x_{C_1} :

$$\begin{aligned} & \text{Perte de probabilité de } x_{C_0} \text{ vers } x_{C_1} \\ & - \overbrace{\frac{\gamma}{p(t)} dt * f_{00}(x, t) dx}^{\text{Population de } f_{00} \text{ dans la tranche } dx \text{ à l'instant initial}} \end{aligned}$$

- Transitions depuis x_{C_1} en direction de l'état de température de consigne x_{C_0} :

$$\begin{aligned} & \text{Gain de probabilité de } x_{C_1} \text{ vers } x_{C_0} \\ & \overbrace{\beta p(t) dt * f_{01}(x, t) dx}^{\text{Population de } f_{01} \text{ dans la tranche } dx \text{ à l'instant initial}} \end{aligned}$$

- Le flux sortant pendant dt en $x + dx$ lié à la dynamique standard d'évolution de la densité (3.15) avec la chaîne de Markov :

$$\overbrace{- \left(\mu_{00}(x + dx, t) f_{00}(x + dx, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{00}}{\partial x}(x + dx, t) \right) dt * \left(1 - \frac{\gamma}{p(t)} dt \right)}^{\text{Flux sortant pendant } dt \text{ dans le cas standard}} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Probabilité de rester en } x_{C_0} \text{ pendant } dt}$$

- Le flux entrant pendant dt en x lié à la dynamique standard d'évolution de la densité (3.15) avec la chaîne de Markov :

$$\overbrace{\left(\mu_{00}(x, t) f_{00}(x, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{00}}{\partial x}(x, t) \right) dt * \left(1 - \frac{\gamma}{p(t)} dt \right)}^{\text{Flux entrant pendant } dt \text{ dans le cas standard}} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Probabilité de rester en } x_{C_0} \text{ pendant } dt}$$

- Le flux sortant pendant dt en $x + dx$ lié à la dynamique standard d'évolution de la densité f_{01} et passant en f_{00} avec la chaîne de Markov :

$$\overbrace{- \left(\mu_0(x + dx, t) f_{01}(x + dx, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{01}}{\partial x}(x + dx, t) \right) dt * (\beta p(t) dt)}^{\text{Flux sortant pendant } dt \text{ dans le cas standard}} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Probabilité de passer en } x_{C_0} \text{ depuis } x_{C_1} \text{ pendant } dt}$$

- Le flux entrant pendant dt en x lié à la dynamique standard d'évolution de la densité f_{01} et passant en f_{00} avec la chaîne de Markov :

$$\overbrace{\left(\mu_0(x, t) f_{01}(x, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{01}}{\partial x}(x, t) \right) dt * (\beta p(t) dt)}^{\text{Flux entrant pendant } dt \text{ dans le cas standard}} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Probabilité de passer en } x_{C_0} \text{ depuis } x_{C_1} \text{ pendant } dt}$$

Nous constatons que les termes de flux avec transition provoquée par une chaîne de Markov, sont en dt^2 , et vont disparaître par rapport aux termes d'ordre dt au cours des calculs, ce qui nous permet de dire que les flux de densité à travers une paroi ont la même expression que (3.15) et de résumer le bilan réalisé au schéma suivant :

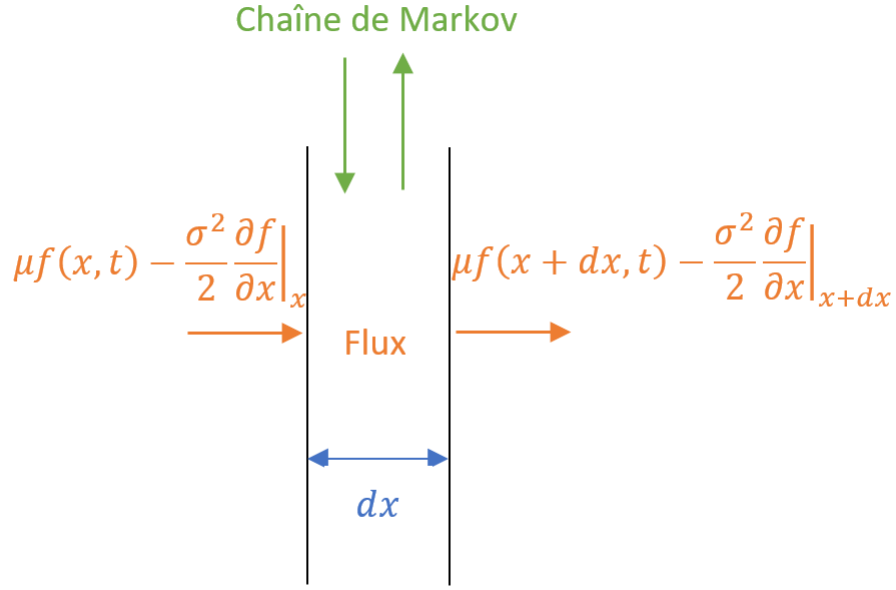


Figure 3.3 Évolution des densités de probabilité

En considérant toutes ces sources de variations (les termes uniquement en dt^2 sont enlevés), on obtient l'équation suivante pour l'évolution de la densité $f_{00}(x, t)$:

$$f_{00}(x, t+dt)dx = f_{00}(x, t)dx * (1 - \frac{\gamma}{p(t)}dt) + \left(\mu_{00}(x, t)f_{00}(x, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{00}}{\partial x}(x, t) \right) dt * (1 - \frac{\gamma}{p(t)}dt) - \left(\mu_{00}(x + dx, t)f_{00}(x + dx, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{00}}{\partial x}(x + dx, t) \right) dt * (1 - \frac{\gamma}{p}dt) + \beta p(t)dt f_{01}(x, t)dx$$

Ce qui donne en considérant les dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{00}}{\partial t}(x, t)dxdt = & - \left(\frac{\partial \mu_{00} f_{00}}{\partial x}(x, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f_{00}}{\partial x^2}(x, t) \right) dt dx * (1 - \frac{\gamma}{p(t)}dt) \\ & + \beta p(t)dt f_{01}(x, t)dx - \frac{\gamma}{p(t)} f_{00}(x, t)dxdt \end{aligned}$$

Soit en divisant par $dxdt$, et faisant tendre les dx et dt restants vers 0 afin de rester au premier ordre en dx et en dt :

$$\frac{\partial f_{00}}{\partial t}(x, t) = - \frac{\partial \mu_{00} f_{00}}{\partial x}(x, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f_{00}}{\partial x^2}(x, t) + \beta p(t) f_{01}(x, t) - \frac{\gamma}{p(t)} f_{00}(x, t) \quad (3.16)$$

On retrouve notre équation de Fokker-Planck initiale à laquelle s'ajoutent les termes liés aux transitions de la chaîne de Markov. En réalisant ces calculs sur les différentes densités de probabilité, on peut généraliser sous la forme d'une équation matricielle, on obtient donc $\forall i \in \{0, 1\}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} f_{i0} \\ f_{i1} \\ f_{i2} \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\begin{pmatrix} \mu_i & 0 & 0 \\ 0 & \mu_i & 0 \\ 0 & 0 & \mu_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{i0} \\ f_{i1} \\ f_{i2} \end{pmatrix} \right] + M \begin{pmatrix} f_{i0} \\ f_{i1} \\ f_{i2} \end{pmatrix} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} f_{i0} \\ f_{i1} \\ f_{i2} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Ce qui constitue notre équation de Fokker-Planck avec transitions de températures de consigne liées à une chaîne de Markov. Celle-ci va nous servir à développer notre simulateur. Il faut néanmoins remarquer que cette dernière prend en compte uniquement l'évolution naturelle et non les transitions ON/OFF liées au dépassement des limites des zones mortes des thermostats. Cela ne prend pas compte non plus les changements forcés ON/OFF liés aux transitions de Markov qui mènerait à un couple température-état de thermostat invalide dans le nouvel état de température de consigne. Ces transitions seront gérées directement dans l'algorithme après l'utilisation de l'équation d'évolution (3.17). On peut néanmoins les clarifier d'un point de vue théorique.

Il est aussi intéressant de constater que dans le cas où les transitions sont non-existantes, c'est à dire $\beta = \gamma = 0$, l'équation (3.17) retrouve la forme de (3.14). Ce qui est logique, car l'évolution standard est un cas particulier de celle en présence de chaînes de Markov. Ceci constitue un test de validité nécessaire mais non suffisant pour les équations d'évolution obtenues.

3.4.3 Transitions d'état ON/OFF du thermostat forcées par la chaîne de Markov

Remarques préliminaires sur la commutation des états thermostatiques

Les équations réelles dépendent en réalité pour chaque densité de l'intervalle de température considéré. Pour les clarifier, commençons par expliquer l'influence des transitions de la chaîne de Markov sur les densités. En effet dans l'équation (3.17), il a été considéré que les thermostats allumés et éteints restaient dans leur état respectif après cette transition. Or, ce n'est pas toujours le cas dans la réalité. En effet, supposons qu'un chauffe-espace soit dans un état OFF à une température de 21°C. Suite à une transition due à la chaîne de Markov sa température de consigne devient 25°C. Le couple OFF-21°C étant non valide dans le nouvel état de consigne à 25°C, l'état du thermostat devrait être passé à ON. Ce genre de transition forcée a été ignoré dans notre analyse initiale. Le même phénomène de changement forcé

d'état thermostatique peut également se manifester lors de transitions vers des températures de consigne plus basses et avec un thermostat ON.

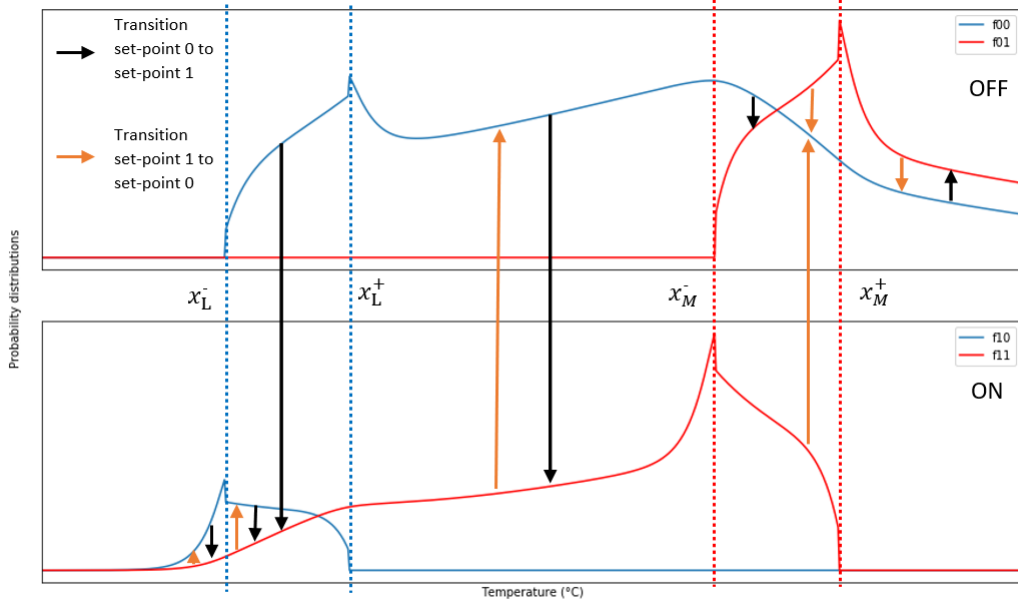


Figure 3.4 Transitions d'état engendrées par la chaîne de Markov

Afin d'illustrer ce principe, on peut récapituler les transitions existantes sur deux températures de consignes possibles (pour plus de clarté), dans le graphe 3.4.

Le cas à 3 niveaux qui est étudié dans ce mémoire ne présente pas de complexité supplémentaire. L'équation (3.17) est suffisante pour l'algorithme, les transitions étant facilement gérées dans le script informatique de simulation numérique. Néanmoins, pour l'étude théorique et la compréhension, on peut, pour l'évolution de chaque densité de probabilité, aboutir à un résultat de la forme suivante :

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial t}(x, t) = -\frac{\partial \mu_i f_{ij}}{\partial x}(x, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial x^2}(x, t) + t_{ij}(x, t) \quad (3.18)$$

Où $t_{ij}(x, t)$ est le terme liés aux transitions de Markov incluant les changements d'états des thermostats.

En détaillant explicitement les valeurs prises par ce terme dans le cas de la chaîne de Markov

à 3 états utilisée :

$$t_{00}(x, t) = \begin{cases} -\frac{\gamma}{p(t)} f_{00}(x, t) & \forall x \in]-\infty, x_{C_0}^-] \\ -\frac{\gamma}{p(t)} f_{00}(x, t) + \beta p(t) f_{01}(x, t) & \forall x \in]x_{C_0}^-, x_{C_0}^+[\\ -\frac{\gamma}{p(t)} f_{00}(x, t) + \beta p(t) (f_{01}(x, t) + f_{11}(x, t)) & \forall x \in [x_{C_0}^+, +\infty[\end{cases} \quad (3.19)$$

$$t_{10}(x, t) = \begin{cases} -\frac{\gamma}{p(t)} f_{10}(x, t) + \beta p(t) (f_{01}(x, t) + f_{11}(x, t)) & \forall x \in]-\infty, x_{C_0}^-] \\ -\frac{\gamma}{p(t)} f_{10}(x, t) + \beta p(t) f_{11}(x, t) & \forall x \in]x_{C_0}^-, x_{C_0}^+[\\ -\frac{\gamma}{p(t)} f_{10}(x, t) & \forall x \in [x_{C_0}^+, +\infty[\end{cases} \quad (3.20)$$

$$t_{01}(x, t) = \begin{cases} -(\beta p(t) + \frac{\gamma}{p(t)}) f_{01} & \forall x \in]-\infty, x_{C_1}^-] \\ -(\beta p(t) + \frac{\gamma}{p(t)}) f_{01} + \beta p(t) f_{02} + \frac{\gamma}{p(t)} f_{00} & \forall x \in]x_{C_1}^-, x_{C_1}^+[\\ -(\beta p(t) + \frac{\gamma}{p(t)}) f_{01} + \frac{\gamma}{p(t)} (f_{00} + f_{10}) + \beta p(t) (f_{02} + f_{12}) & \forall x \in [x_{C_1}^+, +\infty[\end{cases} \quad (3.21)$$

$$t_{11}(x, t) = \begin{cases} -(\beta p(t) + \frac{\gamma}{p(t)}) f_{11} + \frac{\gamma}{p(t)} (f_{00} + f_{10}) + \beta p(t) (f_{02} + f_{12}) & \forall x \in]-\infty, x_{C_1}^-] \\ -(\beta p(t) + \frac{\gamma}{p(t)}) f_{11} + \beta p(t) f_{12} + \frac{\gamma}{p(t)} f_{10} & \forall x \in]x_{C_1}^-, x_{C_1}^+[\\ -(\beta p(t) + \frac{\gamma}{p(t)}) f_{11} & \forall x \in [x_{C_1}^+, +\infty[\end{cases} \quad (3.22)$$

$$t_{02}(x, t) = \begin{cases} -\beta p(t) f_{02}(x, t) & \forall x \in]-\infty, x_{C_2}^-] \\ -\beta p(t) f_{02}(x, t) + \frac{\gamma}{p(t)} f_{01}(x, t) & \forall x \in]x_{C_2}^-, x_{C_2}^+[\\ -\beta p(t) f_{02}(x, t) + \frac{\gamma}{p(t)} (f_{01}(x, t) + f_{11}(x, t)) & \forall x \in [x_{C_2}^+, +\infty[\end{cases} \quad (3.23)$$

$$t_{12}(x, t) = \begin{cases} -\beta p(t) f_{12}(x, t) + \frac{\gamma}{p(t)} (f_{01}(x, t) + f_{11}(x, t)) & \forall x \in]-\infty, x_{C_2}^-] \\ -\beta p(t) f_{12}(x, t) + \frac{\gamma}{p(t)} f_{11}(x, t) & \forall x \in]x_{C_2}^-, x_{C_2}^+[\\ -\beta p(t) f_{12}(x, t) & \forall x \in [x_{C_2}^+, +\infty[\end{cases} \quad (3.24)$$

L'exemple de chaîne de Markov à trois états ci-dessus indique que l'évolution dynamique du système passerait par la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles vectorielles d'ordre 4 avec la forme mathématique du système qui diffère selon la zone de température considérée. On dénombre ici 18 zones distinctes ! Cependant, il se trouve que numériquement, l'effet des échanges markoviens entre densités peut être comptabilisé séparément

après un calcul sur un pas de temps où ils seraient d'abord ignorés via l'équation (3.17). Cela simplifie grandement le calcul numérique, et sera expliqué en plus de détails au chapitre 4.

3.4.4 Ajustement des conditions aux limites

La dernière question qui se pose sur ce modèle de Fokker-Planck prenant en compte la chaîne de Markov est celle des conditions limites. En effet, il faut déterminer si elles restent les mêmes que celles du cas standard.

La condition sur l'existence de parois absorbantes aux températures limites du thermostat reste à priori identique et la tendance vers 0 est confirmée par les simulations de Monte Carlo qui seront détaillées plus tard dans le mémoire (cette tendance est due au terme de diffusion toujours présent dans la dynamique).

Parois Absorbantes aux températures limites x_{Cj}^- , x_{Cj}^+ pour chaque température de consigne :

$$f_{0j}(x_{Cj}^-, t) = f_{1j}(x_{Cj}^+, t) = 0, \forall j \in \{0, 1, 2\}$$

De même, il s'agit toujours de densité de probabilité qui sont donc intégrables (la somme des intégrales de toutes les densités doit être égale à 1), et dont le flux doit être conservé dans les parois absorbantes :

Conditions à l'infini :

$$f_{1j}(-\infty, t) = f_{0j}(+\infty, t) = 0, \forall j \in \{0, 1, 2\}$$

Conditions de conservation des probabilités :

$$\lim_{\lambda \rightarrow x_{Cj}^-} h_{1j}(\lambda, t) - \lim_{\lambda \rightarrow x_{Cj}^-} h_{1j}(\lambda, t) - h_{0j}(x_{Cj}^-, t) = 0, \forall j \in \{0, 1, 2\}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow x_{Cj}^+} h_{0j}(\lambda, t) - \lim_{\lambda \rightarrow x_{Cj}^+} h_{0j}(\lambda, t) + h_{1j}(x_{Cj}^+, t) = 0, \forall j \in \{0, 1, 2\}$$

La condition de continuité aux températures limites inférieure et supérieure du thermostat est plus compliquée. En effet, le terme de transfert des chaînes de Markov t_{ij} est de manière assez évidente discontinu, (3.18)-(3.24), au niveau des parois absorbantes, ce qui introduit des discontinuités dans les équations. Il est donc difficile de dire si les densités seront elles mêmes discontinues ou non. Il n'est donc à priori pas possible de transférer cette condition lorsque les chaînes de Markov sont ajoutées. Une fois les premières simulations effectuées, il sera intéressant de se pencher sur cette continuité afin d'essayer de voir si elle est présente ou non aux parois absorbantes.

CHAPITRE 4 SIMULATION DE L'ÉVOLUTION

Notre modèle théorique d'évolution des densités de probabilité de température dans la population d'habitations avec consignes de thermostats modulées par chaîne de Markov a été développé au chapitre 3. Dans ce chapitre, nous nous attelons à une tâche de validation d'un schéma de simulation numérique de ce modèle. Plus précisément, nous développons un schéma numérique de simulation de notre modèle théorique d'équations aux dérivées partielles couplées, et validons les résultats de ce schéma numérique à partir d'une comparaison avec une simulation compagne cette fois-ci de type Monte-Carlo. La validation étant faite, le cas échéant, nous explorons au chapitre 5 le potentiel applicatif de notre schéma de contrôle.

4.1 Simulation de Monte-Carlo

Pour commencer, l'idée est d'établir une simulation simple de Monte-Carlo de l'évolution de la consommation globale. On modélise N maisons de paramètres homogènes (la question de l'hétérogénéité des paramètres dans la réalité sera abordée ultérieurement), chacune appartenant à un type de clients et possédant les paramètres β et γ correspondants. Pour chaque maison, l'évolution de la température se fait via l'équation de thermodynamique (2.2) décrite au chapitre 3, et la chaîne de Markov sur les températures de consigne évolue par des tests aléatoires à chaque pas de temps ; il s'agit donc d'une chaîne en temps discret dont les paramètres d'évolution sont compatibles avec la chaîne continue. L'équation étant calculée en temps discret, l'évolution se fait à un pas de temps discret Δt qui reste constant dans toute la simulation.

4.1.1 Discrétisation de la chaîne de Markov

Afin de pouvoir simuler l'évolution de la chaîne de Markov continue en temps discret, il est nécessaire de trouver une méthode permettant d'établir une discrétisation de la chaîne continue sur un pas de temps Δt . Nous cherchons donc à établir une méthode de calcul des coefficients de transitions d'une chaîne discrète à partir des coefficients de celle continue.

Principe général

Soit $N(t)$ le vecteur colonne correspondant à la répartition de la population des états de la chaîne de Markov en *temps continu* et Q la matrice des probabilités de transition. Elle possède donc la caractéristique suivante :

$$\frac{dN}{dt} = QN(t) \quad (4.1)$$

Qui a pour solution :

$$N(t) = e^{tQ} N(0) \quad (4.2)$$

Or, nous cherchons ici à passer à une chaîne de Markov *en temps discret*, avec un pas de temps Δt fixé. Il faut donc discrétiser la chaîne continue en arrivant à une condition de la forme :

$$N(t + \Delta t) = M_{Dis} N(t) \quad (4.3)$$

Or d'après (4.2) :

$$\begin{aligned} N(t + \Delta t) &= e^{(t+\Delta t)Q} N(0) \\ &= e^{\Delta t Q} e^{tQ} N(0) \\ &= e^{\Delta t Q} N(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

On arrive donc à :

$$\begin{cases} M_{Dis} = e^{\Delta t Q} \\ N(t + \Delta t) = M_{Dis} N(t) \end{cases} \quad (4.5)$$

Cela correspond à une forme de discrétisation de la chaîne de Markov en temps continu.

Cas à deux états

Dans un premier temps, pour illustrer les calculs nous nous intéressons à une chaîne de Markov en temps continu à 2 états suivant la matrice de transition suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix}$$

Que ce soit par le calcul de l'exponentielle de (4.5) ou la résolution de l'équation directe (4.1)

qui est possible simplement dans ce cas, on prouve :

$$N(t) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha e^{-(\alpha+\beta)t} + \beta}{\alpha + \beta} & -\frac{\beta(e^{-(\alpha+\beta)t} - 1)}{\alpha + \beta} \\ -\frac{\alpha(e^{-(\alpha+\beta)t} - 1)}{\alpha + \beta} & \frac{\beta e^{-(\alpha+\beta)t} + \alpha}{\alpha + \beta} \end{pmatrix} N(0)$$

Ce qui nous donne :

$$M_{Dis} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha e^{-(\alpha+\beta)\Delta t} + \beta}{\alpha + \beta} & -\frac{\beta(e^{-(\alpha+\beta)\Delta t} - 1)}{\alpha + \beta} \\ -\frac{\alpha(e^{-(\alpha+\beta)\Delta t} - 1)}{\alpha + \beta} & \frac{\beta e^{-(\alpha+\beta)\Delta t} + \alpha}{\alpha + \beta} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

L'expression (4.6) est légèrement complexe même si elle reste compréhensible, cependant en passant au cas à 3 états de la chaîne de Markov, la complexité de cette matrice risque d'être bien supérieure. Nous nous intéressons donc à de possibles simplifications, notamment à l'aide du développement limité de la fonction exponentielle en 0. En effet, la supposition $(\alpha + \beta)\Delta t \ll 1$ est cohérente avec les valeurs de coefficients abordées dans ce mémoire. Dans ce cas, la matrice M_{Dis} se rapporte à :

$$M_{Dis} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha\Delta t & \beta\Delta t \\ \alpha\Delta t & 1 - \beta\Delta t \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

C'est une forme beaucoup plus simple et facilement abordable de la matrice caractérisant la chaîne de Markov en temps discret. Il s'agit simplement d'une forme d'intégration de la matrice de transition initiale au niveau des coefficients de transitions qui font changer d'état. La question est maintenant de voir si la même chose est possible à trois états.

Cas à 3 états

Les expressions mathématiques étant très lourdes et complexes, on notera ici $x = \frac{\gamma}{p}$ et $y = \beta p$ afin d'essayer de les alléger. Notre matrice de transition dans le cas continu est :

$$Q = \begin{pmatrix} -x & y & 0 \\ x & -(x+y) & y \\ 0 & x & -y \end{pmatrix}$$

En résolvant (4.5) à l'aide d'un solveur on obtient :

$$M_{Dis} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{10} & m_{20} \\ m_{01} & m_{11} & m_{21} \\ m_{02} & m_{12} & m_{22} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Avec

$$\begin{aligned} m_{00} &= \frac{x \left((x+y) \sqrt{xy} + xy \right) e^{-(x+y-\sqrt{xy})\Delta t} - x \left((-x-y) \sqrt{xy} + xy \right) e^{-(x+y+\sqrt{xy})\Delta t} + 2\sqrt{xy} y^2}{2\sqrt{xy} (x+y+\sqrt{xy}) (x+y-\sqrt{xy})} \\ m_{10} &= \frac{\left((x^2 - \sqrt{xy} y) e^{-(x+y-\sqrt{xy})\Delta t} + (-x^2 - \sqrt{xy} y) e^{-(x+y+\sqrt{xy})\Delta t} + 2\sqrt{xy} y \right) y}{2\sqrt{xy} (x+y+\sqrt{xy}) (x+y-\sqrt{xy})} \\ m_{20} &= -\frac{y^2 \left((x+y+\sqrt{xy}) e^{-(x+y-\sqrt{xy})\Delta t} + (-x-y+\sqrt{xy}) e^{-(x+y+\sqrt{xy})\Delta t} - 2\sqrt{xy} \right)}{2\sqrt{xy} (x+y+\sqrt{xy}) (x+y-\sqrt{xy})} \\ m_{01} &= \frac{x \left((x^2 - \sqrt{xy} y) e^{-(x+y-\sqrt{xy})\Delta t} + (-x^2 - \sqrt{xy} y) e^{-(x+y+\sqrt{xy})\Delta t} + 2\sqrt{xy} y \right)}{2\sqrt{xy} (x+y+\sqrt{xy}) (x+y-\sqrt{xy})} \\ m_{11} &= -\frac{\left((-x^2 - y^2) \sqrt{xy} + x(x+y)y \right) e^{-(x+y-\sqrt{xy})\Delta t} + \left((-x^2 - y^2) \sqrt{xy} - x(x+y)y \right) e^{-(x+y+\sqrt{xy})\Delta t}}{2\sqrt{xy} (x+y+\sqrt{xy}) (x+y-\sqrt{xy})} \\ &\quad - \frac{2\sqrt{xy} xy}{2\sqrt{xy} (x+y+\sqrt{xy}) (x+y-\sqrt{xy})} \\ m_{21} &= -\frac{y \left((\sqrt{xy} x - y^2) e^{-(x+y-\sqrt{xy})\Delta t} + (\sqrt{xy} x + y^2) e^{-(x+y+\sqrt{xy})\Delta t} - 2\sqrt{xy} x \right)}{2\sqrt{xy} (x+y+\sqrt{xy}) (x+y-\sqrt{xy})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{02} &= - \frac{x^2 \left((x + y + \sqrt{xy}) e^{-(x+y-\sqrt{xy})\Delta t} + (-x - y + \sqrt{xy}) e^{-(x+y+\sqrt{xy})\Delta t} - 2\sqrt{xy} \right)}{2\sqrt{xy} (x + y + \sqrt{xy}) (x + y - \sqrt{xy})} \\
m_{12} &= - \frac{x \left((\sqrt{xy} x - y^2) e^{-(x+y-\sqrt{xy})\Delta t} + (\sqrt{xy} x + y^2) e^{-(x+y+\sqrt{xy})\Delta t} - 2\sqrt{xy} x \right)}{2\sqrt{xy} (x + y + \sqrt{xy}) (x + y - \sqrt{xy})} \\
m_{22} &= \frac{y \left((x + y) \sqrt{xy} + xy \right) e^{-(x+y-\sqrt{xy})\Delta t} - y \left((-x - y) \sqrt{xy} + xy \right) e^{-(x+y+\sqrt{xy})\Delta t} + 2x^2 \sqrt{xy}}{2\sqrt{xy} (x + y + \sqrt{xy}) (x + y - \sqrt{xy})}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Les termes de (4.9) sont extrêmement compliqués mais nous retrouvons néanmoins les valeurs propres décrites dans la section 3.3.3, ce qui est attendu car il s'agit d'une équation différentielle du premier degré. En s'inspirant du cas à 2 niveaux, nous effectuons à nouveau le développement limité de l'exponentielle en 0, avec la condition $(x + y + \sqrt{xy})\Delta t \ll 1$, c'est à dire $\frac{\gamma}{p} + (\beta p + \sqrt{\gamma\beta})\Delta t \ll 1$. Les calculs ne sont pas détaillés ici mais la forme de (4.7) est à nouveau retrouvée :

$$M_{Dis} = \begin{pmatrix} 1 - x\Delta t & y\Delta t & 0 \\ x\Delta t & 1 - (x + y)\Delta t & y\Delta t \\ 0 & x\Delta t & -y\Delta t \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

Cela permet d'avoir une expression simple de la chaîne de Markov discrétisée, en remplaçant x par $\frac{\gamma}{p(t)}$ et y par $\beta p(t)$ qui nous permettra de l'utiliser dans les simulations qui ont un pas de temps fixé, notamment pour développer l'algorithme de Monte Carlo dans la sous-section suivante.

4.1.2 Algorithme de Monte Carlo

Nous constituons maintenant l'algorithme qui consiste simplement à calculer pour chaque maison l'évolution de la température et à simuler le déroulement de la chaîne de Markov discrétisée à chaque pas de temps pour mettre à jour la température de consigne et l'état du thermostat.

Algorithme 1 : Simulation d'évolution sous contrôle via un Monte Carlo

Données : Taille de l'échantillon e , paramètres des maisons (U_a, C_a, A, Q, σ), paramètres des types de clients (liste des β b_s , liste des γ g_s), paramètres des thermostats (liste des températures de consigne xCs , écart de la zone morte ΔT), liste températures extérieures x_a , pas de temps N_t , liste de pourcentage de répartition de la population dans les différentes classes rep , signal de pression $p(t)$

Initialisation de l'échantillon selon la répartition rep , avec des tableaux de température X , d'état du thermostat m , de température de consigne X_{Cons} de taille $e \times temps$, une liste de type de clients, $type$, de taille e ;

pour chaque foyer i dans e **faire**

$\beta \leftarrow b_s[type[i]]$;

$\gamma \leftarrow g_s[type[i]]$;

pour chaque pas de temps j **faire**

 Évolution de la température X grâce à (2.4) ;

 Évolution de la température de consigne X_{cons} selon le schéma suivant ;

$test \leftarrow$ valeur aléatoire selon une loi uniforme dans $[0,1]$;

$X_{Cons}[i][j+1] \leftarrow X_{Cons}[i][j]$;

si $X_{Cons}[i][j] == xCs[0]$ **alors**

si $test \leq \frac{\gamma}{p[j]}$ **alors**

$X_{Cons}[i][j+1] \leftarrow xCs[1]$;

fin

fin

si $X_{Cons}[i][j] == xCs[1]$ **alors**

si $test \leq \frac{\gamma}{p[j]}$ **alors**

$X_{Cons}[i][j+1] \leftarrow xCs[2]$;

fin

si $test \geq 1 - \beta p[j]$ **alors**

$X_{Cons}[i][j+1] \leftarrow xCs[0]$;

fin

fin

si $X_{Cons}[i][j] == xCs[2]$ **alors**

si $test \leq \beta p[j]$ **alors**

$X_{Cons}[i][j+1] \leftarrow xCs[1]$;

fin

fin

 Évolution de l'état de fonctionnement m du thermostat ;

$m[i][j+1] \leftarrow m[i][j]$;

si $X[i][j+1] \geq X_{Cons}[i][j+1] + \Delta T$ **alors**

$m[i][j+1] \leftarrow 0$;

fin

si $X[i][j+1] \leq X_{Cons}[i][j+1] - \Delta T$ **alors**

$m[i][j+1] \leftarrow 1$;

fin

fin

fin

Résultat : $X, X_{Cons}, m, type$

C'est une simulation très simple à mettre en place, mais qui possède des faiblesses : afin de parvenir à des résultats proches de la réalité, il est nécessaire de simuler un grand nombre de résidences. Cependant, les algorithmes ont de longs temps de calcul et prennent beaucoup d'espace mémoire. En outre, *la non-formulation d'équation des densités de probabilité ne permet pas d'établir une forme de commande via le signal de pression*. Il est nécessaire pour cela d'établir d'autres formes de modélisation telle que celle explicitée au chapitre 3. Par contre, pour vérifier que le contrôle fonctionne vraiment, il pourra être facilement appliqué à la simulation de Monte-Carlo en passant en entrée un signal de pression correspondant $p(t)$.

Tel que mentionné, l'idée de cette simulation est de servir de comparaison à la méthode de simulation à la section 4.2 et permettre à la fois de valider la précision de cette dernière ainsi que la plausibilité générale des résultats. Néanmoins, il ne faudra pas perdre de vue que les simulations de Monte-Carlo ont elles-mêmes leur part d'aléatoire liée à la taille de l'échantillon utilisé.

4.2 Simulation des densités de probabilité via Fokker-Planck

Cette simulation a pour but d'utiliser l'équation des densités de probabilité avec chaîne de Markov (3.17), afin de simuler efficacement directement ces dernières sans avoir à passer par un Monte-Carlo qui est long en terme de calcul. De plus, cette simulation sera nécessaire dans un deuxième temps dans le but d'établir et de calculer le signal de pression $p(t)$ qui servira à la commande de la consommation résidentielle. Afin de l'établir, il faut s'intéresser au maillage temporel et de température nécessaire, ainsi qu'aux diverses approximations numériques nous permettant de simuler les équations (3.17).

4.2.1 Approximation numérique de l'évolution de Fokker-Planck via méthode indirecte

Il n'est pas possible de résoudre analytiquement l'équation de Fokker-Planck que ce soit la version standard (3.14) ou celle avec chaîne de Markov (3.17). Il faut donc passer par des approximations numériques afin de simuler cette évolution à chaque pas de temps. Ceci nécessite la création d'un maillage à la fois temporel et sur les températures.

On divise les températures en N_x points d'évaluation séparés de Δx , avec les 3 températures de consigne, pour chaque type de clients. Cela correspond à 6 fonctions de densités évaluées en N_x points par instant t considéré. On divise aussi les temps en N_t points d'évaluation séparés chacun par Δt . Il y a donc au total $N_x N_t$ points calculés sur une simulation par fonction de densité.

Intervalle de températures à considérer pour le maillage

Si l'intervalle du maillage temporel est évident, ce n'est pas le cas pour celui des températures. En effet, le terme de mouvement Brownien de l'équation (2.4) a pour conséquence que la température peut sortir des bornes maximales et minimales des températures de consigne $x_{C_0}^-$ et $x_{C_2}^+$. Il faut donc trouver un moyen simple de donner des valeurs approximatives T_{min} et T_{max} du maillage suffisamment larges pour prendre en compte tous les débordements de température tout en restant assez restreint pour se concentrer sur l'intervalle d'intérêt.

Une méthode simple pour parvenir à cela est de s'intéresser à l'équation (2.4) en considérant le terme $\mu(x, t)$ constant selon la situation considérée. En effet, dans ce cas l'équation (2.4) devient :

$$dx = adt + \sigma dW \quad (4.11)$$

En appliquant l'espérance, sachant que $E(dW) = 0$ par construction, on en déduit :

$$d(E(x)) = adt \quad (4.12)$$

En intégrant simplement :

$$E(x(t)) = E(x(0)) + at \quad (4.13)$$

De plus, en effectuant (4.11)-(4.12) :

$$d(x - E(x)) = \sigma dW$$

D'où :

$$x(t) - E(x(t)) = x(0) - E(x(0)) + \sigma(W(t) - W(0)) \quad (4.14)$$

Par définition du mouvement Brownien : $(W(t) - W(0)) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$. En outre, on peut choisir $x(0) = E(x(0))$, par conséquent :

$$x(t) \sim \mathcal{N}(E(x(t)), \sigma^2 t)$$

D'où avec (4.13)

$$x(t) \sim \mathcal{N}(x(0) + at, \sigma^2 t)$$

Or pour une loi normale 99.7% des valeurs sont comprises à trois écart-types de part et d'autres de la moyenne. D'où :

$$x_{min} = \min_t (x(0) + at - 3\sigma\sqrt{t}) \quad (4.15)$$

$$x_{max} = \max_t (x(0) + at + 3\sigma\sqrt{t}) \quad (4.16)$$

Une dérivation simple de ces équations montre que dans les deux cas l'extremum est atteint en

$$t = \left(\frac{3\sigma}{2a}\right)^2 \quad (4.17)$$

.

On peut maintenant l'appliquer à la détermination de T_{min} et T_{max} . Dans le cas du minimum, on se place à la frontière inférieure du système, $x_{C_0}^-$ et le thermostat est ON, la valeur de a est donc positive. Tandis que pour le maximum, on est à la frontière supérieure $x_{C_2}^+$, et le thermostat est OFF avec une valeur de a négative, donc :

$$\begin{cases} a_{T_{min}} = \frac{U_a A}{C_a}(x_a - x_{C_0}^-) + \frac{Q}{C_a} & x(0) = x_{C_0}^- \\ a_{T_{max}} = \frac{U_a A}{C_a}(x_a - x_{C_2}^+) & x(0) = x_{C_2}^+ \end{cases} \quad (4.18)$$

En combinant ces définitions à (4.15), (4.16) et (4.17) :

$$\begin{aligned} T_{min} &= x_{C_0}^- + a_{T_{min}} \left(\frac{3\sigma}{2a_{T_{min}}}\right)^2 - 3\sigma \left|\frac{3\sigma}{2a_{T_{min}}}\right| \\ T_{max} &= x_{C_2}^+ + a_{T_{max}} \left(\frac{3\sigma}{2a_{T_{max}}}\right)^2 + 3\sigma \left|\frac{3\sigma}{2a_{T_{max}}}\right| \end{aligned} \quad (4.19)$$

Notre maillage de température se fera donc sur l'intervalle $[T_{min}, T_{max}]$, qui devrait être assez conservateur pour prendre en compte la quasi-totalité des valeurs d'intérêt. Il est aussi possible d'ajouter une paroi réfléchissante en T_{min} et T_{max} pour éviter les fuites de probabilités. Maintenant que le maillage est proprement défini, nous pouvons nous tourner vers les approximations nécessaires au calcul.

Méthode de différences finies

Avec une telle décomposition en $N_x * Nt$ points, il est possible d'utiliser une méthode de différences finies pour évaluer les valeurs des dérivées. On peut réaliser les approximations suivantes pour une fonction quelconque $g(t, x)$ selon la méthode implicite de Crank–Nicolson [26] :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}g(t, x) = \frac{g_n^{m+1} - g_n^m}{\Delta t} \\ \frac{\partial}{\partial x}g(t, x) = \frac{g_{n+1}^{m+1} - g_{n-1}^{m+1}}{2\Delta x} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}g(t, x) = \frac{g_{n+1}^{m+1} - 2g_n^{m+1} + g_{n-1}^{m+1}}{(\Delta x)^2} \end{cases} \quad (4.20)$$

En notant g_n^m la valeur de la fonction $g(x, t)$ au point temporel m et au point de température n .

Le choix en (4.20) a été d'utiliser des différences "arrières", c'est-à-dire d'évaluer l'instant m en fonction de l'instant $m + 1$. Le but étant d'arriver à une méthode de calcul implicite pour notre simulation. Des différences "avant", évaluant m en fonction de $m - 1$, auraient pu être utilisées, mais cela aurait mené à une méthode explicite. Or, une méthode implicite est toujours numériquement plus stable et plus convergente lorsque comparée à une méthode explicite, en particulier pour les problèmes de diffusion thermique [26, 27]. La méthode implicite qui sera utilisée est donc plus robuste même si elle possède l'inconvénient de demander plus de temps de calcul. Il est possible dans le futur d'étudier la convergence et stabilité de la méthode explicite afin de comparer ses performances à l'implicite, en prenant le temps de calcul comme un facteur ainsi que l'erreur effectuée.

Essayons maintenant de mettre en place cette méthode implicite : à l'instant m , les densités correspondant à l'état de fonctionnement i du thermostat peuvent être représentées par une matrice F_i^m de taille $N_x * 3$. La division en deux matrices, une pour chaque état de fonctionnement, est liée au fait que les coefficients de la fonction de Fokker-Planck dépendent de la fonction μ , elle-même dépendant de l'état du thermostat. Les deux matrices ont donc une équation d'évolution distincte :

$$F_i^m = \begin{pmatrix} f_{i,0,1}^m & f_{i,1,1}^m & f_{i,2,1}^m \\ . & . & . \\ f_{i,0,N_x}^m & f_{i,1,N_x}^m & f_{i,2,N_x}^m \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Avec $f_{i,j,n}^m$ la valeur de la fonction densité f_{ij} au point temporel m et au point de température n .

Dans ce contexte, l'équation de Fokker-Planck avec chaîne de Markov (3.17) trouvée au chapitre 3, peut se réécrire en utilisant les approximations de différences finies de (4.20). Pour chaque instant m , température n , mode de fonctionnement du thermostat i , et température de consigne j :

$$\frac{f_{i,j,n}^{m+1} - f_{i,j,n}^m}{\Delta t} = -\frac{\mu_{i,n+1}^{m+1} f_{i,j,n+1}^{m+1} - \mu_{i,n-1}^{m+1} f_{i,j,n-1}^{m+1}}{2\Delta x} + \frac{\sigma^2 (f_{i,j,n+1}^{m+1} - 2f_{i,j,n}^{m+1} + f_{i,j,n-1}^{m+1})}{2(\Delta x)^2} + M \begin{pmatrix} f_{i,0,n}^m \\ f_{i,1,n}^m \\ f_{i,2,n}^m \end{pmatrix}_j$$

Où $M \begin{pmatrix} f_{i,0,n}^m \\ f_{i,1,n}^m \\ f_{i,2,n}^m \end{pmatrix}_j$ est la j-ème composante du vecteur $M \begin{pmatrix} f_{i,0,n}^m \\ f_{i,1,n}^m \\ f_{i,2,n}^m \end{pmatrix}$ (qui correspond aux échanges liés aux chaînes de Markov).

En rassemblant les termes de même point d'évaluation, l'équation se ramène à :

$$\begin{aligned} f_{i,j,n}^m = & f_{i,j,n+1}^{m+1} \left(\frac{\Delta t \mu_{i,n+1}^{m+1}}{2\Delta x} - \frac{\Delta t \sigma^2}{2(\Delta x)^2} \right) + f_{i,j,n}^{m+1} \left(1 + \frac{\Delta t \sigma^2}{(\Delta x)^2} \right) \\ & + f_{i,j,n-1}^{m+1} \left(-\frac{\Delta t \mu_{i,n-1}^{m+1}}{2\Delta x} - \frac{\Delta t \sigma^2}{2(\Delta x)^2} \right) - \Delta t M \begin{pmatrix} f_{i,0,n}^m \\ f_{i,1,n}^m \\ f_{i,2,n}^m \end{pmatrix}_j \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ce qui donne sous forme matricielle :

$$S_i^{m+1} F_i^{m+1} = F_i^m + \Delta t F_i^m M^t = F_i^m M_{Dis}^t \quad (4.23)$$

Avec la matrice tri-diagonale $S_i^m =$

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{\Delta t \sigma^2}{(\Delta x)^2} & \frac{\Delta t \mu_{i,2}^m}{2\Delta x} - \frac{\Delta t \sigma^2}{2(\Delta x)^2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta t \mu_{i,1}^m}{2\Delta x} - \frac{\Delta t \sigma^2}{2(\Delta x)^2} & 1 + \frac{\Delta t \sigma^2}{(\Delta x)^2} & \frac{\Delta t \mu_{i,3}^m}{2\Delta x} - \frac{\Delta t \sigma^2}{2(\Delta x)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\Delta t \mu_{i,N_x-2}^m}{2\Delta x} - \frac{\Delta t \sigma^2}{2(\Delta x)^2} & 1 + \frac{\Delta t \sigma^2}{(\Delta x)^2} & \frac{\Delta t \mu_{i,N_x}^m}{2\Delta x} - \frac{\Delta t \sigma^2}{2(\Delta x)^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\Delta t \mu_{i,N_x-1}^m}{2\Delta x} - \frac{\Delta t \sigma^2}{2(\Delta x)^2} & 1 + \frac{\Delta t \sigma^2}{(\Delta x)^2} \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

L'équation (4.23) est bien signe d'une méthode implicite comme attendu précédemment. On a abouti à l'expression de F_i^m en fonction de F_i^{m+1} . Le calcul ne peut donc pas se faire immédiatement ; il faut procéder à l'inversion de la matrice S_i^{m+1} pour obtenir l'évolution temporelle. Donc, sous la forme qui nous intéresse afin de procéder à la simulation, l'équation (4.23) devient la suivante :

$$F_i^{m+1} = (S_i^{m+1})^{-1}(F_i^m + \Delta t F_i^m M^t) = (S_i^{m+1})^{-1} F_i^m M_{Dis}^t \quad (4.25)$$

Il est important de noter que les coefficients de la matrice S_i^m sont totalement indépendants de l'état des thermostats et des diverses fonctions de densité. En fait, les seuls paramètres non constants de la matrice sont ceux liés à l'évaluation de la fonction $\mu_i(x, t)$ aux divers points du maillage. Or, cette dernière ne dépend que des paramètres du système et de la température extérieure $x_a(t)$ qui est relativement prévisible via la météo. Il est donc facilement possible de connaître la valeur de S sur tous les pas de temps d'intérêts. En outre, son caractère tridiagonal permet de l'inverser assez simplement avec des algorithmes ciblés, ce qui a l'avantage non-négligeable de faire gagner du temps à la simulation.

Il est donc possible en inversant cette dernière de calculer implicitement la valeur de F_i^{m+1} , à partir de celle de F_i^m la seule donnée nécessaire étant les valeurs de la fonction μ_i et la matrice de transition M . Cela nous permet maintenant de détailler un algorithme servant de simulateur.

4.2.2 Gestion des transitions

L'équation (4.25) va nous permettre de simuler l'évolution thermique des densités, mais il va aussi falloir ajouter à cela les transitions entre états ON et OFF des thermostats qui ne sont pas comprises dans cette équation. Elles proviennent de deux sources distinctes :

- Les transitions venant du fonctionnement normal du thermostat lorsqu'on dépasse la température limite x_C^+ le thermostat s'éteint, et de la même manière le thermostat s'allume lorsque la température diminue sous x_C^- .
- Les transitions dues au changement des températures de consignes de la chaîne de Markov qui sont expliquées dans la sous-section 3.4.3. La transition de température de consigne pouvant sortir le thermostat de sa zone de fonctionnement.

Bien que ces deux sources paraissent distinctes, une fois que l'équation (4.25) a été réalisée sur un pas de temps, elles correspondent dans la simulation à la même problématique. En effet, au pas temporel m les densités ON sont parfaitement contenues entre $]-\infty, x_C^+]$, tandis que les densités OFF sont dans $[x_C^-, +\infty[$. Dans le processus de calcul pour passer au temps $m + 1$, on effectue le calcul lié à (4.25), et naturellement le flux crée par cette dynamique va dépasser les bornes x_C^- et x_C^+ , sortant partiellement les densités de ces zones. De plus, les chaînes de Markov vont faire apparaître des densités en dehors de ces zones. Les deux sources créent donc des valeurs non nulles de densités dans des intervalles où les densités sont censées être nulles par principe du fonctionnement du thermostat. Il suffit donc de gérer cet unique

problème pour comptabiliser correctement l'effet des différentes sources de transitions d'un seul coup.

De manière logique, toute densité en dehors de la zone du fonctionnement du thermostat ($] - \infty, x_C^+]$ pour ON, $]x_C^-, +\infty]$ pour OFF) devrait changer d'état de fonctionnement puisque le thermostat en question s'allume ou s'éteint. Il suffit donc de transférer la densité ON de l'intervalle $]x_C^+, +\infty[$ vers la densité OFF, de la même façon la densité OFF de $] - \infty, x_C^-[$ sera transférée sur la densité ON correspondante. Après le transfert, cela permet de retrouver des densités contenues dans leur espace de fonctionnement. Il est beaucoup plus simple de procéder ainsi d'un point de vue simulation, une équation d'évolution puis un transfert, plutôt que d'utiliser les équations spécifiques par intervalles, décrites en (3.18) à (3.24). Une fois l'équation (4.25) et le transfert effectué, les densités sont dans l'état de l'instant $m + 1$. Ce qui permet de poursuivre notre algorithme de simulation.

4.3 Conditions d'existence du signal $p(t)$

Le dernier aspect à regarder avant de pouvoir développer l'algorithme de simulation est celui des conditions d'existence du signal de pression. En théorie, comme développé dans le chapitre 3, la seule condition d'existence du signal de pression $p(t)$ est son caractère positif $p(t) > 0$. Cependant, dans les approximations établies et explicitées dans cette partie, la simulation ne se déroule pas en temps continu mais en N_t pas de temps discrets séparés par un intervalle constant Δt . De ce fait, la chaîne de Markov n'est plus réellement en temps continu, mais en temps discret suivant les conditions suivantes tirées de l'équation (3.2) appliquée en temps discret, comme montré dans la sous-section 4.1.1 sur la discrétisation :

$$\begin{cases} P(X_c(t + \Delta t) = i + 1 | X_c(t) = i) = \frac{\gamma}{p(t)} * \Delta t & \forall i \in \{0, 1\} \\ P(X_c(t + \Delta t) = i - 1 | X_c(t) = i) = \beta p(t) * \Delta t & \forall i \in \{1, 2\} \\ P(X_c(t + \Delta t) = 0 | X_c(t) = 0) = 1 - \frac{\gamma}{p(t)} * \Delta t \\ P(X_c(t + \Delta t) = 1 | X_c(t) = 1) = 1 - (\beta p(t) + \frac{\gamma}{p(t)}) * \Delta t \\ P(X_c(t + \Delta t) = 2 | X_c(t) = 2) = 1 - \beta p(t) * \Delta t \end{cases} \quad (4.26)$$

Contrairement à (3.2) où dt est infinitésimal, Δt dans (4.26) a une valeur finie. Cela a pour conséquence que $p(t)$ ne peut plus prendre toutes les valeurs positives. En effet, pour que les valeurs de (4.26) restent des probabilités de transition cela implique :

$$0 \leq P(X_c(t + \Delta t) = i | X_c(t) = j) \leq 1 \quad \forall (i, j) \in \{0, 1, 2\}^2$$

En appliquant ces conditions à (4.26), on obtient le système d'inégalités suivant :

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{\gamma}{p(t)} * \Delta t \leq 1 \\ 0 \leq \beta p(t) * \Delta t \leq 1 \\ 0 \leq 1 - \frac{\gamma}{p(t)} * \Delta t \leq 1 \\ 0 \leq 1 - (\beta p(t) + \frac{\gamma}{p(t)}) * \Delta t \leq 1 \\ 0 \leq 1 - \beta p(t) * \Delta t \leq 1 \end{cases} \quad (4.27)$$

Ce qui, après résolution de chaque ligne, donne le système suivant :

$$\begin{cases} \gamma \Delta t \leq p(t) \\ 0 \leq p(t) \leq \frac{1}{\beta \Delta t} \\ \gamma \Delta t \leq p(t) \\ 0 \leq -\beta p(t)^2 \Delta t + p(t) - \gamma \Delta t \leq p(t) \\ 0 \leq p(t) \leq \frac{1}{\beta \Delta t} \end{cases} \quad (4.28)$$

La majorité de ces équations sont redondantes. De plus, la partie droite de la quatrième inégalité est assurée par positivité des termes. On peut donc simplifier ces conditions et résoudre l'inégalité de second degré pour obtenir une condition claire.

$$\begin{cases} \gamma \Delta t \leq p(t) \\ 0 \leq p(t) \leq \frac{1}{\beta \Delta t} \\ \frac{1 - \sqrt{1 - 4\beta\gamma\Delta t^2}}{2\beta\Delta t} \leq p(t) \leq \frac{1 + \sqrt{1 - 4\beta\gamma\Delta t^2}}{2\beta\Delta t} \end{cases} \quad (4.29)$$

La première chose à remarquer est que le signal $p(t)$ ne peut exister que si la condition $4\beta\gamma\Delta t^2 < 1$ est remplie pour le couple (β, γ) . Ce n'est absolument pas un problème en considérant les valeurs d'intérêt pour γ et β dans la partie précédente. Une fois cette condition respectée, on peut facilement prouver de manière mathématique que : $\gamma \Delta t \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 4\beta\gamma\Delta t^2}}{2\beta\Delta t}$ et $\frac{1 + \sqrt{1 - 4\beta\gamma\Delta t^2}}{2\beta\Delta t} \leq \frac{1}{\beta \Delta t}$.

On peut donc simplement résumer les conditions d'existence de $p(t)$ à des conditions simples pour un type de clients donné :

$$\begin{cases} 4\beta\gamma\Delta t^2 < 1 \\ \frac{1 - \sqrt{1 - 4\beta\gamma\Delta t^2}}{2\beta\Delta t} \leq p(t) \leq \frac{1 + \sqrt{1 - 4\beta\gamma\Delta t^2}}{2\beta\Delta t} \end{cases} \quad (4.30)$$

Si ces conditions ne sont pas respectées, cela engendre des erreurs de calculs dans la simulation ainsi que l'existence de cas impossibles et incohérents. Par exemple, on pourrait avoir plus de 100% d'une densité transférée vers une autre via une chaîne de Markov, et donc certaines densités devenant négatives ce qui, bien évidemment, n'est pas réalisable. De plus, il ne faut pas oublier que le signal de pression $p(t)$ est unique pour tous les types de clients. Il doit donc satisfaire les conditions de (4.30) pour tous les couples (β, γ) existants simultanément, ce qui se résume en :

$$\begin{cases} 4\beta\gamma\Delta t^2 < 1 \\ \max_{(\beta,\gamma)} \left(\frac{1-\sqrt{1-4\beta\gamma\Delta t^2}}{2\beta\Delta t} \right) \leq p(t) \leq \min_{(\beta,\gamma)} \left(\frac{1+\sqrt{1-4\beta\gamma\Delta t^2}}{2\beta\Delta t} \right) \end{cases} \quad \forall(\beta, \gamma) \quad (4.31)$$

En supposant les couples de coefficients choisis judicieusement, le signal de pression est simplement borné par des valeurs limites qui seront appelées pour plus de simplicité p_{min} et p_{max} dans la suite de cette étude. Il s'agit des commandes extrêmes pouvant être passées en tant que contrôle. Le dépassement de ces bornes engendre des erreurs de calcul dans la simulation correspondant à des situations physiquement impossibles, comme expliqué précédemment. Il est donc nécessaire de respecter ce domaine d'existence pour le signal de pression afin de rester dans une situation réelle.

4.4 Fonctionnement de l'algorithme

Maintenant que les approximations numériques et le principe des transferts sont explicités, l'algorithme de simulation peut être créé.

Cet algorithme permet de simuler l'évolution pas de temps par pas de temps des densités de répartition des thermostats au sein de la population, et de manière plus fine au sein de chaque groupe de clients d'un type donné lorsqu'un signal de pression $p(t)$ est envoyé. Des calculs tels que la puissance appelée à chaque instant peuvent être effectués pendant le déroulement de l'algorithme et demandés en sortie afin d'étudier les paramètres généraux plutôt que l'évolution des densités qui n'est pas l'objectif final.

Algorithme 2 : Simulation d'évolution sous contrôle via les équations de Fokker-Planck avec chaîne de Markov

Données : Matrices des fonctions densité de probabilité initiales pour chaque type de clients $F_0^0[k]$ et $F_1^0[k]$, paramètres des maisons (U_a, C_a, A, Q, σ), paramètres des types de clients (liste des β b_s , liste des γ g_s), paramètres des thermostats (liste des températures de consigne xCs , écart de la zone morte ΔT), liste températures extérieures x_a , pas de temps N_t , pas de température N_x , signal de pression $p(t)$

On nomme X le vecteur des points d'évaluation de la température ;

Vérification de la validité du signal $p(t)$;

pour *chaque pas de temps* m **faire**

 Calcul S_0^{m+1} and S_1^{m+1} en utilisant (4.24) ;

 Inversion de S_0^{m+1} , S_1^{m+1} en utilisant leur caractère tri-diagonal ;

pour *chaque type de clients* k **faire**

$\beta \leftarrow b_s[k]$;

$\gamma \leftarrow g_s[k]$;

 Calcul de la matrice de transition M à l'instant m en utilisant (3.3) et les paramètres β et γ et la valeur du signal de pression $p(m)$;

 Évolution des densités de probabilité via la méthode implicite (4.25) ;

$F_0^{m+1}[k] \leftarrow (S_0^{m+1})^{-1}(F_0^m[k] + \Delta t F_0^m[k] M^t)$;

$F_1^{m+1}[k] \leftarrow (S_1^{m+1})^{-1}(F_1^m[k] + \Delta t F_1^m[k] M^t)$;

pour *chaque température de consigne* j **faire**

$x_C \leftarrow xCs[j]$;

 Transferts des densités hors des zones de fonctionnement dans l'état correspondant ;

$F_0^{m+1}[k][:, j] \leftarrow F_0^{m+1}[k][:, j] + F_1^{m+1}[k][:, j] * (X > (x_C + \Delta T))$;

$F_1^{m+1}[k][:, j] \leftarrow F_1^{m+1}[k][:, j] + F_0^{m+1}[k][:, j] * (X < (x_C - \Delta T))$;

 Remise à zéro des états hors zones de fonctionnement ;

$F_0^{m+1}[k][:, j] \leftarrow F_0^{m+1}[k][:, j] * (X \geq (x_C - \Delta T))$;

$F_1^{m+1}[k][:, j] \leftarrow F_1^{m+1}[k][:, j] * (X \leq (x_C + \Delta T))$;

fin

 D'autres calculs tels que la puissance, température moyenne... peuvent être effectués à cette étape ;

fin

fin

Les densités et valeurs globales peuvent ensuite être reconstituées à partir de celles tirées de chaque type de clients.

Note concernant S et son inverse : Si S est indépendante du temps, son inverse peut-être calculée uniquement une fois au début avant de faire tourner l'algorithme afin de gagner du temps. En effet, S est indépendante du temps si la température extérieure est constante, ce qui peut être le cas si l'intervalle de temps étudié est assez faible (quelques heures au maximum). Si l'intervalle étudié est plus grand, il est tout de même possible de gagner du

temps de calcul en échantillonnant la température extérieure à intervalle de temps plus faible que celui de la densité. Par exemple, l'heure au lieu de la minute ce qui est souvent fait pour les données météo. Il suffit alors de calculer S à cet intervalle plus large pour gagner en efficacité. C'est ce qui sera fait lorsque l'on commencera à s'intéresser à des problèmes où la température extérieure dépendra du temps.

4.5 Comparaison du modèle et du Monte Carlo

Afin d'évaluer les performances de notre méthode de simulation et d'essayer de valider ses résultats, nous réalisons des comparaisons avec la simple simulation de Monte-Carlo décrite en partie 4.1. Ces simulations sont limitées à des échantillons de 100 000 habitations pour maintenir un temps de calcul raisonnable, l'erreur et les variations dues à la taille de l'échantillon étant relativement faibles pour l'étude plutôt qualitative mise en place ici. Les paramètres des deux simulations sont bien évidemment identiques, de même que les états initiaux. Les états ci-dessous sont ceux représentés après une évolution sur un intervalle de 2000 minutes, à partir de la même situation initiale avec un signal de pression constant. Pour simplifier la représentation, le test a été effectué sur toutes les densités correspondant à chaque température de consigne (17°C, 21°C et 25°C), mais pour un seul type de clients.

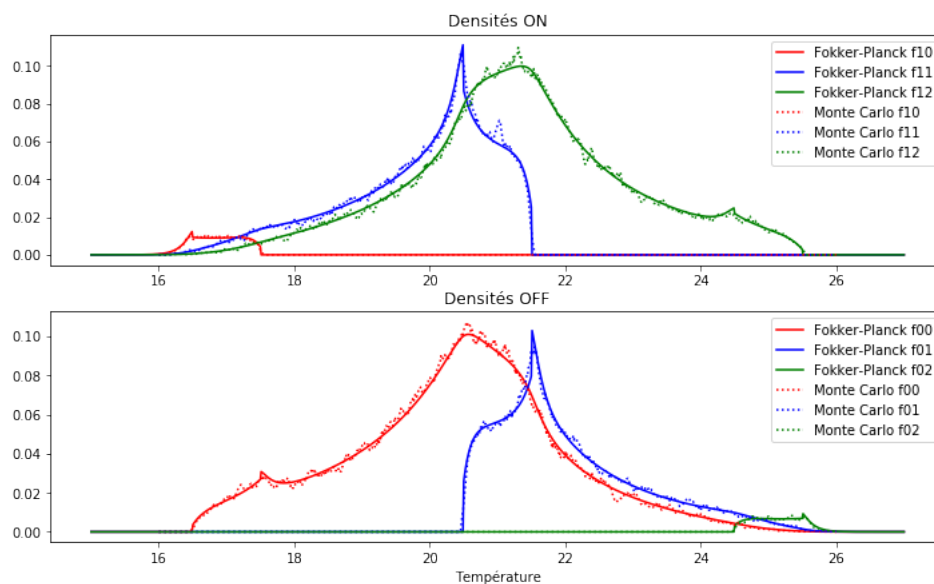


Figure 4.1 Comparaison des résultats donnés par une simulation de Monte Carlo contre celle de Fokker-Planck

Pour chaque densité, les fonctions observées sont très similaires entre elles, et ce pour toutes les différentes simulations testées. Il faut néanmoins remarquer qu'au vu du nombre de pa-

ramètres utilisés dans les modèles, réaliser une comparaison exhaustive est compliqué, mais différentes situations ont été simulées avec des paramètres et répartitions différents. Pour le moment, aucune différence majeure n'a été constatée entre les deux, les variations pouvant généralement être attribués au caractère aléatoire des simulations de Monte Carlo.

Il faut aussi remarquer qu'aucune différence n'est observée dans l'évolution globale sur le temps étudié, et non pas uniquement sur le même pas de temps final. En effet, si seul le temps final était bon, cela pourrait correspondre à l'état stationnaire final. Des vidéos comparant les deux évolutions ont été réalisées et les mêmes constats réalisés sur la proximité des densités obtenues. En outre, même en incluant un signal de pression $p(t)$ dépendant du temps, les résultats restent les mêmes sur les deux simulations, ce qui semble indiquer que les équations restent valables comme théorisé dans la partie 3. Cela est logique, la pression appliquée déterminant uniquement le pourcentage de transition à un instant donné pour chaque fonction de densité.

Nous pouvons aussi revenir sur l'interrogation soulevée en partie 3 concernant la continuité ou non aux parois absorbantes. On observe bien la présence de points anguleux aux endroits attendus, et concernant la discontinuité potentielle, elle semble peu marquée et dépend de la méthode de calcul mise en place pour la densité à partir de la simulation de Monte Carlo. Il s'agit soit d'une discontinuité, soit d'une variation forte mais les résultats sont très similaires et n'auront pas d'impact sur le calcul de puissance qui est une intégrale.

Le simulateur est donc maintenant en place et semble présenter une évolution correspondant à la réalité, il est donc possible de représenter comment se comportent de manière agrégée les thermostats lorsque le système de commande est allumé, et ainsi de calculer la puissance consommée à chaque instant en fonction du signal de pression $p(t)$ suivi. L'objectif maintenant est de déterminer, pour un objectif de puissance donné, comment l'atteindre sous un tel système, c'est-à-dire quel signal $p(t)$ devra être envoyé par l'agrégateur afin d'atteindre le niveau souhaité. Ce sera l'objet de la partie suivante qui s'intéressera à la théorie de la commande en puissance et à sa mise en place dans la simulation.

CHAPITRE 5 COMMANDE DE LA PUISSANCE

Le but du système de commande est d'atteindre un objectif de puissance en appliquant un signal de pression $p(t)$ unique envoyé aux thermostats par l'agrégateur. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la création et mise en place de ce contrôle. Pour cela, il faut tout d'abord s'intéresser à l'influence du signal de pression $p(t)$ sur la consommation globale au travers des équations d'évolution (3.17). Afin de pouvoir ensuite déterminer et calculer, s'il existe, le signal idéal à envoyer pour atteindre la consommation donnée si cela est possible. Une fois ce dernier établi, nous étudions les capacités et limites potentielles de ce système ainsi que leur caractérisation.

5.1 Équation d'évolution de la puissance et commande

La définition de la puissance totale dans notre système est assez simple, il s'agit de la proportion de thermostats allumés multipliée par la puissance de l'élément chauffant Q et le nombre total de thermostat N , pour tous les types de clients :

$$P = NQ \sum_{k=0}^8 \sum_{j=0}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_{1j}^k dx \quad (5.1)$$

En notant f_{ij}^k la densité de probabilité des thermostats dans l'état i , à la température de consigne j , pour le type de clients k . Elles sont normalisées au pourcentage du type de clients de telle sorte que $\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_{1j}^k dx = \%_{\text{Type de clients } k}$. La somme globale vaut donc 1.

5.1.1 Bilan de puissance

Pour s'intéresser à l'évolution de la puissance, l'équation (5.1) indique qu'il faut s'intéresser aux transitions globales dans les densités allumées f_{1j}^k pour chaque température de consigne $j \in \{1, 2\}$ et chaque type de clients $k \in \{0, \dots, 8\}$. Pour simplifier et expliciter le raisonnement, commençons par nous intéresser à un seul type de clients, et au sein de celui-ci à une température de consigne particulière.

On considère donc pour le moment les sources de changement dans le terme $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{1j}^k dx$, et la puissance consommée liée uniquement aux thermostats à cette température de consigne x_{C_j} que l'on notera $P_{x_{C_j}}$ par la suite. Pour considérer l'impact final global sur la puissance, il faudra donc additionner les différentes puissances $P_{x_{C_j}}^k$ pour chaque température de consigne et ensuite tous les types de clients. On peut réécrire la puissance totale comme :

$$P = \sum_{k=0}^8 \sum_{j=0}^2 P_{x_{C_j}}^k \text{ avec } P_{x_{C_j}}^k = NQ \int_{-\infty}^{+\infty} f_{1j}^k dx \quad (5.2)$$

Pour une puissance $P_{x_{C_j}}^k$ donnée plusieurs sources de modification de la puissance doivent être considérées :

- Les transitions d'état du thermostat "naturelles", c'est à dire liées à la dynamique d'évolution standard lorsque les bornes de la "zone morte" sont atteintes :
 - Le flux ON $\rightarrow$ OFF au niveau de la température limite supérieure $x_{C_j}^+$. Ce flux passe d'un état allumé vers un état éteint et contribue donc à la diminution de la puissance $P_{x_{C_j}}^k$.
 - Le flux OFF $\rightarrow$ ON au niveau de la température limite inférieure $x_{C_j}^-$. Ce flux passe d'un état éteint vers un état allumé et contribue donc à l'augmentation de la puissance $P_{x_{C_j}}^k$.
- Les échanges liés à la chaîne de Markov partant vers et arrivant depuis d'autres densités de probabilité :
 - Les transitions provenant de thermostats ON restant ON, c'est-à-dire arrivant à des températures inférieures à la limite de désactivation du thermostat $x_{C_j}^+$, elles n'augmentent pas la puissance globale P mais augmentent la puissance particulière $P_{x_{C_j}}^k$ car elles arrivent depuis une autre densité.
 - Les transitions provenant de thermostats OFF devenant ON, c'est-à-dire arrivant à des températures inférieures à la limite d'activation du thermostat $x_{C_j}^-$, elles augmentent à la fois la puissance globale P ainsi que la puissance particulière $P_{x_{C_j}}^k$.
 - Les transitions partant de la température de consigne actuelle, ce qui diminue la puissance particulière $P_{x_{C_j}}^k$ avec un effet variable sur P en fonction de la densité d'arrivée.

Il n'est pas possible de donner une expression générale pour la variation de $P_{x_{C_j}}^k$, à cause de la différence de positionnement des températures de consigne dans la chaîne de Markov. On utilisera le cas de x_{C_0} détaillé pour illustrer l'exemple en détaillant les origines, avant de donner directement les résultats pour les autres températures de consigne. Les résultats ne sont pas identiques, mais le raisonnement est le même, provenant de la prise en compte des différentes sources explicitées ci-dessus.

Pour x_{C_0} , la source d'échange liée à la chaîne de Markov provient uniquement de la densité correspondant à la température de consigne supérieure :

$$\begin{aligned}
\frac{dP_{x_{C_0}}^k}{dt} = NQ * & \left(\overbrace{\left(-(\mu_1 f_{10}^k(x_{C_0}^+, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{10}^k}{\partial x} |_{x_{C_0}^+}) \right)}^{\text{Terme sortant } ON \rightarrow OFF} + \overbrace{\left(-\mu_0 f_{00}^k(x_{C_0}^-, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{00}^k}{\partial x} |_{x_{C_0}^-} \right)}^{\text{Terme entrant } OFF \rightarrow ON} \right. \\
& + \underbrace{\beta_k p(t) \int_{-\infty}^{x_{C_0}^-} f_{01}^k(x, t) dx}_{\text{Terme de Markov } x_{C_1} \rightarrow x_{C_0} \text{ et } OFF \rightarrow ON} + \underbrace{\beta_k p(t) \int_{-\infty}^{x_{C_0}^+} f_{11}^k(x, t) dx}_{\text{Terme de Markov } x_{C_1} \rightarrow x_{C_0} \text{ et restant } ON} \\
& \left. - \underbrace{\frac{\gamma_k}{p(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{10}^k(x, t) dx}_{\text{Terme de Markov } x_{C_0} \rightarrow x_{C_1}} \right)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Pour x_{C_1} , la source d'échange liée à la chaîne de Markov provient à la fois de la densité correspondant à la température de consigne supérieure et de celle correspondant à la température de consigne inférieure :

$$\begin{aligned}
\frac{dP_{x_{C_1}}^k}{dt} = NQ * & \left(-(\mu_1 f_{11}^k(x_{C_1}^+, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{11}^k}{\partial x} |_{x_{C_1}^+}) + (-\mu_0 f_{01}^k(x_{C_1}^-, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{01}^k}{\partial x} |_{x_{C_1}^-}) \right. \\
& + \beta_k p(t) \int_{-\infty}^{x_{C_1}^-} f_{02}^k(x, t) dx + \beta_k p(t) \int_{-\infty}^{x_{C_1}^+} f_{12}^k(x, t) dx \\
& \left. + \frac{\gamma_k}{p(t)} \int_{-\infty}^{x_{C_1}^-} f_{00}^k(x, t) dx + \frac{\gamma_k}{p(t)} \int_{-\infty}^{x_{C_1}^+} f_{10}^k(x, t) dx - \left(\frac{\gamma_k}{p(t)} + \beta_k p(t) \right) \int_{-\infty}^{+\infty} f_{11}^k(x, t) dx \right)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Pour x_{C_2} , la source d'échange liée à la chaîne de Markov provient uniquement de la densité correspondant à la température de consigne inférieure :

$$\begin{aligned}
\frac{dP_{x_{C_2}}^k}{dt} = NQ * & \left(-(\mu_1 f_{12}^k(x_{C_2}^+, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{12}^k}{\partial x} |_{x_{C_2}^+}) + (-\mu_0 f_{02}^k(x_{C_2}^-, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{02}^k}{\partial x} |_{x_{C_2}^-}) \right. \\
& \left. + \frac{\gamma_k}{p(t)} \int_{-\infty}^{x_{C_2}^-} f_{01}^k(x, t) dx + \frac{\gamma_k}{p(t)} \int_{-\infty}^{x_{C_2}^+} f_{11}^k(x, t) dx - \beta_k p(t) \int_{-\infty}^{+\infty} f_{12}^k(x, t) dx \right)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

En sommant les équations (5.3), (5.4) et (5.5) sur chaque type de clients, on peut obtenir l'évolution de la puissance globale (les simplifications sur les différentes étapes de calcul ne sont pas détaillées ici pour des raisons de clarté) :

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} = NQ * \sum_{k=0}^8 & \left(-(\mu_1 f_{12}^k(x_{C_2}^+, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{12}^k}{\partial x} |_{x_{C_2}^+}) + (-\mu_0 f_{02}^k(x_{C_2}^-, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{02}^k}{\partial x} |_{x_{C_2}^-}) \right. \\
& -(\mu_1 f_{11}^k(x_{C_1}^+, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{11}^k}{\partial x} |_{x_{C_1}^+}) + (-\mu_0 f_{01}^k(x_{C_1}^-, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{01}^k}{\partial x} |_{x_{C_1}^-}) \\
& -(\mu_1 f_{10}^k(x_{C_0}^+, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{10}^k}{\partial x} |_{x_{C_0}^+}) + (-\mu_0 f_{00}^k(x_{C_0}^-, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{00}^k}{\partial x} |_{x_{C_0}^-}) \\
& + \frac{\gamma_k}{p(t)} \int_{-\infty}^{x_{C_2}^-} f_{01}^k(x, t) dx - \frac{\gamma_k}{p(t)} \int_{x_{C_2}^+}^{+\infty} f_{11}^k(x, t) dx - \beta_k p(t) \int_{x_{C_1}^+}^{+\infty} f_{12}^k(x, t) dx \\
& + \beta_k p(t) \int_{-\infty}^{x_{C_1}^-} f_{02}^k(x, t) dx + \frac{\gamma_k}{p(t)} \int_{-\infty}^{x_{C_1}^-} f_{00}^k(x, t) dx - \beta_k p(t) \int_{x_{C_0}^+}^{+\infty} f_{11}^k(x, t) dx \\
& \left. + \beta_k p(t) \int_{-\infty}^{x_{C_0}^-} f_{01}^k(x, t) dx - \frac{\gamma_k}{p(t)} \int_{x_{C_1}^+}^{+\infty} f_{10}^k(x, t) dx \right) \quad (5.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = a(t)p(t) + b(t) + \frac{c(t)}{p(t)} \\
& \left\{ \begin{aligned} a(t) &= NQ \sum_{k=0}^8 \beta_k \left(- \int_{x_{C_1}^+}^{+\infty} f_{12}^k(x, t) dx + \int_{-\infty}^{x_{C_1}^-} f_{02}^k(x, t) dx - \int_{x_{C_0}^+}^{+\infty} f_{11}^k(x, t) dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{-\infty}^{x_{C_0}^-} f_{01}^k(x, t) dx \right) \\ b(t) &= NQ \sum_{k=0}^8 \left(-(\mu_1 f_{12}^k(x_{C_2}^+, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{12}^k}{\partial x} |_{x_{C_2}^+}) + (-\mu_0 f_{02}^k(x_{C_2}^-, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{02}^k}{\partial x} |_{x_{C_2}^-}) \right. \\ & \quad -(\mu_1 f_{11}^k(x_{C_1}^+, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{11}^k}{\partial x} |_{x_{C_1}^+}) + (-\mu_0 f_{01}^k(x_{C_1}^-, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{01}^k}{\partial x} |_{x_{C_1}^-}) \\ & \quad \left. -(\mu_1 f_{10}^k(x_{C_0}^+, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{10}^k}{\partial x} |_{x_{C_0}^+}) + (-\mu_0 f_{00}^k(x_{C_0}^-, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{00}^k}{\partial x} |_{x_{C_0}^-}) \right) \\ c(t) &= NQ \sum_{k=0}^8 \gamma_k \left(\int_{-\infty}^{x_{C_2}^-} f_{01}^k(x, t) dx - \int_{x_{C_2}^+}^{+\infty} f_{11}^k(x, t) dx + \int_{-\infty}^{x_{C_1}^-} f_{00}^k(x, t) dx \right. \\ & \quad \left. - \int_{x_{C_1}^+}^{+\infty} f_{10}^k(x, t) dx \right) \end{aligned} \right. \quad (5.7)
\end{aligned}$$

En multipliant par $p(t)$, on remarque qu'on obtient une équation de la forme :

$$a(t)p(t)^2 + (b(t) - \frac{dP}{dt})p(t) + c(t) = 0 \quad (5.8)$$

L'équation (5.8) est une équation du second degré, ce qui pourrait permettre, si les coefficients sont adaptés, de trouver à un instant donné le signal de pression, s'il existe, assurant une évolution de ΔP pendant Δt , du moment que les valeurs des termes $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ sont connues à l'instant t . Cependant pour arriver à cela, il est nécessaire d'étudier un peu plus en détail les coefficients de l'équation (5.8).

5.1.2 Analyse des coefficients $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$

Pour résoudre l'équation du second degré (5.8), il faut travailler sur les valeurs des coefficients afin de vérifier la validité des solutions potentielles. On peut commencer par simplifier certains termes, en s'intéressant aux intervalles d'existence des densités de probabilité dans notre système. On illustre ces intervalles et leur rapport avec les coefficients de l'équation (5.8) dans la figure ci-dessous avec un cas simplifié à deux températures de consigne (afin que la figure soit claire). On cherche ensuite à étudier les différents termes présents dans les coefficients de cette équation dans le but des trouver des simplifications et interprétations.

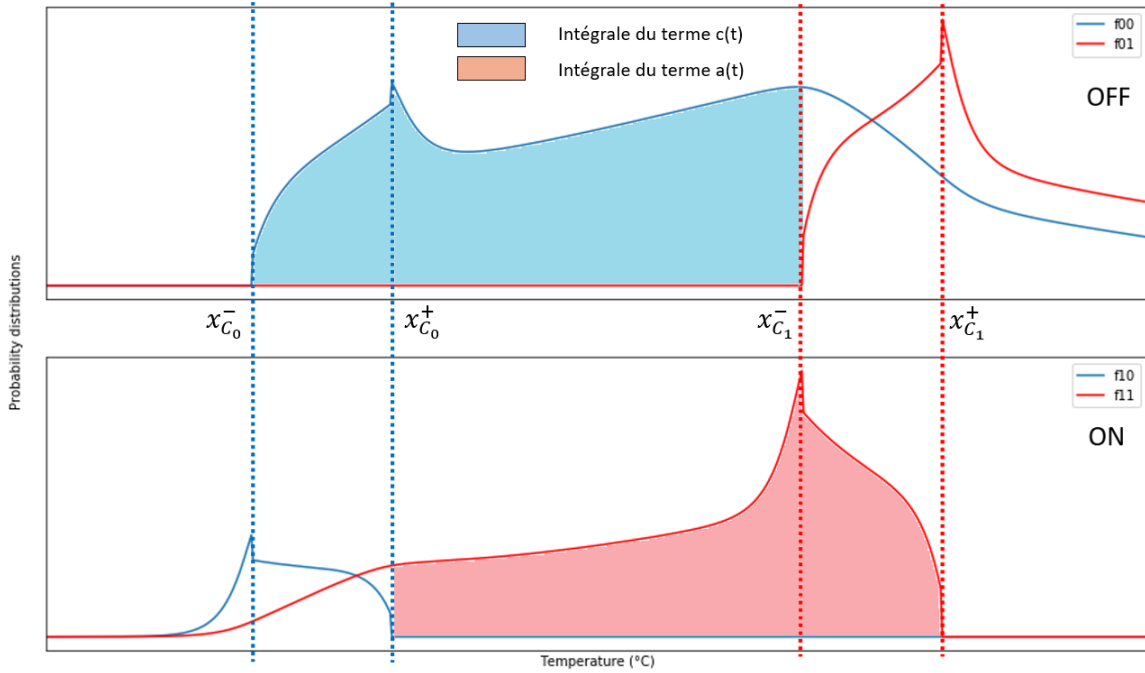


Figure 5.1 Illustration des intégrales impliquées dans le calcul de $a(t)$ et $c(t)$

En effet, $\forall k$ f_{01}^k est nulle sur $] -\infty, x_{C_1}^-]$ par définition. Or, par définition des températures de consigne des thermostats $x_{C_0}^- < x_{C_1}^-$. Par conséquent $\int_{-\infty}^{x_{C_0}^-} f_{01}^k(x, t) dx = 0 \forall k$. De même $\forall k$ f_{02}^k est nulle sur $] -\infty, x_{C_2}^-]$ par définition. Or, par définition des températures de consigne des thermostats $x_{C_1}^- < x_{C_2}^-$. Par conséquent $\int_{-\infty}^{x_{C_1}^-} f_{02}^k(x, t) dx = 0 \forall k$. L'expression de $a(t)$ peut donc être simplifiée dans l'équation (5.7) :

$$a(t) = -NQ \sum_{k=0}^8 \beta_k \left(\int_{x_{C_1}^+}^{+\infty} f_{12}^k(x, t) dx + \int_{x_{C_0}^+}^{+\infty} f_{11}^k(x, t) dx \right) \quad (5.9)$$

La plus importante remarque à faire à propos de (5.9) est qu'à cause de la positivité des fonctions densités et des $\beta_k : a(t) < 0$ (Les fonctions densités n'étant à priori jamais totalement vides à cause des chaînes de Markov). Le terme $a(t)p(t)dt$ représente donc la diminution de puissance provoquée sur dt par les transitions vers des températures de consigne plus basses à cause de la chaîne de Markov à l'instant t .

En outre, $\forall k$ f_{11}^k est nulle sur $[x_{C_1}^+, +\infty]$ par définition. Or, par définition des températures de consigne des thermostats $x_{C_1}^+ < x_{C_2}^+$. Par conséquent $\int_{x_{C_2}^+}^{+\infty} f_{11}^k(x, t)dx = 0 \forall k$. De même $\forall k$ f_{10}^k est nulle sur $[x_{C_0}^+, +\infty[$ par définition. Or, par définition des températures de consigne des thermostats $x_{C_0}^+ < x_{C_1}^+$. Par conséquent $\int_{x_{C_1}^+}^{+\infty} f_{10}^k(x, t)dx = 0 \forall k$. L'expression de $c(t)$ peut donc être simplifiée dans l'équation (5.7) :

$$c(t) = NQ \sum_{k=0}^8 \gamma_k \left(\int_{-\infty}^{x_{C_2}^-} f_{01}^k(x, t)dx + \int_{-\infty}^{x_{C_1}^-} f_{00}^k(x, t)dx \right) \quad (5.10)$$

De la même manière, la plus importante remarque à faire à propos de (5.10) est qu'à cause de la positivité des fonctions densités et des $\gamma_k : c(t) \geq 0$. Le terme $\frac{c(t)}{p(t)}dt$ représente donc l'augmentation de puissance provoquée sur dt par les transitions vers des températures de consigne plus élevées à cause de la chaîne de Markov à l'instant t .

Il n'est pas possible de faire une analyse similaire au niveau de $b(t)$, son signe pouvant varier car il représente la variation de puissance liée à la dynamique naturelle des thermostats à l'instant t . La variation globale de puissance dP sur l'intervalle dt est donc donnée par la combinaison des termes $a(t)p(t)dt$, $b(t)dt$ et $\frac{c(t)}{p(t)}dt$ comme explicité dans l'équation (5.6). Mais on peut néanmoins s'intéresser à la résolution de l'équation quadratique (5.8) grâce à l'analyse effectuée.

5.1.3 Résolution de l'équation

Supposons que l'objectif de puissance $P(t)$ soit connu sur l'intervalle de temps donné pour le contrôle. Sa dérivée $\frac{dP}{dt}$ l'est donc aussi, il est possible d'essayer de résoudre l'équation quadratique (5.8) pour obtenir un signal de pression idéal $p^*(t)$. Son déterminant est :

$$\Delta = \left(\frac{dP}{dt} - b(t) \right)^2 - 4a(t)c(t)$$

Or comme vu dans la partie précédente $a(t) < 0$ et $c(t) \geq 0$ d'où $\Delta \geq 0$

De ce fait, l'équation (5.8) admet deux racines réelles :

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \frac{\frac{dP}{dt} - b(t) - \sqrt{(\frac{dP}{dt} - b(t))^2 - 4a(t)c(t)}}{2a(t)} \\ p_2(t) &= \frac{\frac{dP}{dt} - b(t) + \sqrt{(\frac{dP}{dt} - b(t))^2 - 4a(t)c(t)}}{2a(t)} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Or $-4a(t)c(t) \geq 0$ d'où $\sqrt{(\frac{dP}{dt} - b(t))^2 - 4a(t)c(t)} \geq |\frac{dP}{dt} - b(t)|$

Sachant que $a(t) < 0$, il en découle de manière immédiate :

$$\begin{aligned} p_1(t) &\geq 0 \\ p_2(t) &\leq 0 \end{aligned}$$

Or par définition du système de commande, $p(t)$ fait partie des probabilités de transitions de la chaîne de Markov, par conséquent, il est nécessaire d'avoir $p(t) > 0$ sans quoi les équations perdent tout sens physique. Par conséquent, il existe une unique solution afin d'atteindre l'objectif de puissance fixé $P(t)$:

$$p^*(t) = \frac{\frac{dP}{dt} - b(t) - \sqrt{(\frac{dP}{dt} - b(t))^2 - 4a(t)c(t)}}{2a(t)} \quad (5.12)$$

Cependant, le fait que l'équation (5.12) donne un résultat ne signifie pas que tous les objectifs de puissance sont atteignables. En effet, il existe des conditions d'existence sur $p(t)$ détaillées dans (4.31), notamment le fait que le signal est en réalité borné. Ces limites, ajoutées au fait que les températures permises des habitations sont elles aussi encadrées, diminuent les trajectoires de puissance réalisables. Ce qui est aussi logique d'un point de vue physique, il est impossible de chauffer indéfiniment afin d'obtenir une puissance élevée ou encore de couper tout chauffage de manière permanente en gardant une température acceptable. D'un point de vue mathématique, cela va se traduire par le fait que $p^*(t)$ va prendre des valeurs inférieures à p_{min} ou supérieures à p_{max} , ce qui ne pourra pas être suivi dans l'algorithme par le signal de pression car cela engendrerait des erreurs.

Néanmoins, cela veut aussi dire que si l'objectif de puissance est atteignable, alors la formule de $p^*(t)$ à elle seule permettra de suivre cet objectif, et ce dernier sera parfaitement suivi. Il s'agit donc d'être capable d'évaluer correctement les capacités du système afin de viser des objectifs raisonnables en entrée. Cela permet de développer une version de l'algorithme de commande simple dans la partie suivante.

5.2 Algorithme de commande simple

La formule de $p^*(t)$, (5.12), nécessite néanmoins la connaissance des coefficients $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ et par conséquent celle des densités de probabilité. Or, l'état de celles-ci est influencé par la valeur prise par le signal de pression, *le contrôle est donc intimement lié à la simulation de l'évolution*. En effet, il est donc nécessaire de mettre en place l'évolution et de calculer à chaque étape le signal de pression idéal, et continuer ainsi la simulation étape par étape. Si l'objectif de puissance n'est pas réalisable et qu'en conséquence (5.12) donne une valeur en dehors des bornes admissibles pour $p(t)$ alors la valeur limite p_{max} ou p_{min} est attribuée à $p(t)$ pour le pas de temps donné. Afin d'exécuter cet algorithme, il suffit de connaître la situation initiale de notre système, c'est-à-dire la répartition en température des thermostats dans les différents types de clients, les paramètres de la dynamique thermique, ceux des thermostats et du système de commande ainsi que la température extérieure.

Si l'objectif de puissance est raisonnable et réalisable dans les limites imposées par notre système, à la fois d'un point de vue physique et d'un point de vue contrôle. Dans ce cas, le signal de pression sorti par l'algorithme vaut exactement le signal optimal, et l'algorithme fonctionne parfaitement. Si l'objectif n'est pas réalisable, l'approximation donnée permet de s'en approcher en priorisant les instants proches plutôt que ceux lointains, c'est-à-dire que l'algorithme essaiera de se maintenir au niveau de $P(t)$ jusqu'à ce que les capacités du système ne soient plus suffisantes. D'autres approches peuvent être envisagées telle que la minimisation de l'erreur globale entre l'objectif et celle réelle, mais leur mise en place nécessite plus d'études et de considérations. Celles-ci pourraient être l'objet de travaux futurs qui ajouteraient un bloc venant se greffer à l'algorithme de commande par objectif de puissance.

Algorithme 3 : Calcul du signal de pression idéal réalisable pour atteindre l'objectif de puissance donné $P(t)$

Données : Matrices des fonctions densité de probabilité initiales pour chaque type de clients k $F_0^0[k]$ et $F_1^0[k]$, paramètres des maisons (U_a, C_a, A, Q, σ) , paramètres des types de clients (liste des β b_s , liste des γ g_s), paramètres des thermostats (liste des températures de consigne x_C s, écart de la zone morte ΔT), liste températures extérieures x_a , pas de temps N_t , pas de température N_x , objectif de puissance à atteindre $P(t)$

On nomme X le vecteur des points d'évaluation de la température ;

Calcul de p_{min} et p_{max} avec (4.31) ;

pour chaque pas de temps m **faire**

 Calcul de la puissance réelle à l'instant m grâce aux densités ;

 Calcul de l'écart de puissance entre celle à l'instant m et celle objectif à l'instant $m + 1$ (On obtient donc $\frac{\Delta P}{\Delta t}$) ;

 Calcul des coefficients $a(m)$, $b(m)$ et $c(m)$ à l'aide de (5.7) ;

 Calcul de $p^*(m)$ grâce à (5.12), les coefficients et l'écart de puissance ;

 Calcul de la valeur du signal $p(m)$: $p(m) \leftarrow \min(p_{max}, \max(p_{min}, p^*(m)))$;

 Calcul S_0^{m+1} and S_1^{m+1} en utilisant (4.24) ;

 Inversion de S_0^{m+1} , S_1^{m+1} en utilisant leur caractère tri-diagonal ;

pour chaque type de clients k **faire**

$\beta \leftarrow b_s[k]$;

$\gamma \leftarrow g_s[k]$;

 Calcul de la matrice de transition M à l'instant m en utilisant (3.3) et les paramètres β et γ et la valeur du signal de pression $p(m)$;

 Évolution des densités de probabilité via la méthode implicite (4.25) ;

$F_0^{m+1}[k] \leftarrow (S_0^{m+1})^{-1}(F_0^m[k] + \Delta t F_0^m[k] M^t)$;

$F_1^{m+1}[k] \leftarrow (S_1^{m+1})^{-1}(F_1^m[k] + \Delta t F_1^m[k] M^t)$;

pour chaque température de consigne j **faire**

$x_C \leftarrow x_Cs[j]$;

 Transferts des densités hors des zones de fonctionnement dans l'état correspondant ;

$F_0^{m+1}[k][:, j] \leftarrow F_0^{m+1}[k][:, j] + F_1^{m+1}[k][:, j] * (X > (x_C + \Delta T))$;

$F_1^{m+1}[k][:, j] \leftarrow F_1^{m+1}[k][:, j] + F_0^{m+1}[k][:, j] * (X < (x_C - \Delta T))$;

 Remise à zéro des états hors zones de fonctionnement ;

$F_0^{m+1}[k][:, j] \leftarrow F_0^{m+1}[k][:, j] * (X \geq (x_C - \Delta T))$;

$F_1^{m+1}[k][:, j] \leftarrow F_1^{m+1}[k][:, j] * (X \leq (x_C + \Delta T))$;

fin

fin

fin

Résultat : Signal de pression $p(t)$ réalisable afin de suivre l'objectif de puissance donné $P(t)$

5.3 Système de récompense

L'application du système de commande proposé repose sur le fait que l'équation (3.17) est une bonne approximation de la dynamique des agrégats. Or, comme le modèle est basé sur la loi des grands nombres, il est important que le nombre de clients participants soit élevé, pour que les comportements réels se rapprochent des densités modélisées. Cela signifie qu'il est nécessaire d'avoir une incitation pour maximiser le nombre de participants au programme, car le client sacrifie son confort pour répondre aux besoins du réseau. En d'autres termes, il est nécessaire de mettre en place un système de récompense pour inciter les clients à participer. La manière la plus standard est d'influer sur le coût total payé par le client, et donc de proposer une compensation monétaire sous une forme ou une autre. Pour éviter une complexité trop importante, le système proposé fonctionne par récompense plutôt qu'une action directe sur les prix de l'électricité. En effet, cela permet au client de se rendre compte du bonus perçu en participant au programme, ainsi qu'à l'agrégateur de calculer en amont les économies réalisées grâce à la commande et les montants à distribuer.

Le principe initial du système de récompense proposé est assez simple : l'agrégateur dispose d'une somme d'argent engagée par le gestionnaire de réseau à répartir équitablement entre les clients. La détermination de cette somme doit être effectuée par le gestionnaire en fonction des économies que cette commande lui permet de réaliser. Les sources d'économies sont nombreuses et complexes, sans cas particulier et données d'un gestionnaire il est difficile d'évaluer celles-ci. Elles peuvent provenir du nombre de centrales ou réacteurs à démarrer, d'un dimensionnement du système plus faible en termes de seuil, de probabilités d'incidents potentiellement réduites. En théorie, ce montant peut-être négatif ou positif, indiquant si le contrôle vaut l'occasion d'être mis en place ou non d'un point de vue purement économique pour le gestionnaire. Bien évidemment, d'autres facteurs sont à prendre en compte notamment lors de moments où le réseau est en tension, la flexibilité due au contrôle peut permettre d'éviter des interventions non-souhaitables telles que des délestages ou l'importation coûteuse de puissance.

Si le montant perçu par l'agrégateur est positif, cela signifie que la commande est théoriquement bénéfique pour l'opérateur. Cependant, pour que le système soit viable, il ne doit pas seulement être bénéfique pour l'entreprise mais aussi pour les clients comme expliqué précédemment. Dans certains cas spécifiques, certains d'entre eux pourraient finir par consommer plus avec le contrôle qu'ils ne l'auraient fait dans la situation standard. Par conséquent, la première étape consiste à rembourser aux clients concernés l'argent dépensé pour l'électricité supplémentaire due aux besoins du contrôle.

La distribution des économies est donc effectuée en deux étapes : le remboursement de l'"excès de consommation", s'il y en a un, dépensé par les clients individuels. Si après cette étape le montant reste positif, alors le contrôle est réellement viable pour toutes les parties concernées. En effet, la commande n'est rentable que si le montant économisé est supérieur au montant à rembourser. Ensuite, la répartition du montant restant entre les différents clients est effectuée proportionnellement à "l'effort" exercé par le client. Il faut donc définir une manière de quantifier la contribution effectuée par le client. Une méthode simple est de définir l'effort comme la somme des écarts en valeur absolue à chaque instant t sur la durée du contrôle entre la puissance qui aurait été consommée sans régulation et celle consommée avec. Il suffit alors de distribuer le montant restant proportionnellement par rapport à l'effort total. Avec cette méthode, la rémunération dépend du type de commande effectué, mais les clients les plus rémunérés sont ceux ayant le plus participé ce qui devrait correspondre à ceux étant les plus sensibles par rapport au signal de pression.

L'algorithme de simulation permet d'avoir une estimation de la répartition entre les différents types de clients en calculant l'effort effectué en moyenne. Cependant, avec le caractère stochastique du système, chaque client va en réalité avoir un effort différent, la distribution des récompenses pourrait donc être plus spécifique au client particulier plutôt qu'à son type même si en moyenne sur une période de temps importante (c'est-à-dire avec un grand nombre de contrôles effectués) les deux devraient converger vers des valeurs similaires.

5.4 Problème de fin de commande et solution

Un point crucial de tout système de commande est la phase de retour au fonctionnement normal. En effet, le contrôle déplace les clients dans des états qui ne correspondent pas à leur état préféré en l'absence de régulation. Par conséquent, lorsque le système est interrompu, si rien n'est mis en place, tous les foyers retournent immédiatement à leur état initial. Cela peut être problématique car un mouvement de population aussi soudain et massif risque de causer des pics ou des creux ponctuels qui, à leur tour, créeront des problèmes sur le réseau. Or, le but initial du système de commande est d'éviter ce genre de situations complexes. Si le système cause ce genre de problèmes, il est nécessaire de développer des méthodes pour une reprise normale du fonctionnement.

5.4.1 Illustration du problème

Commençons par examiner ce qui peut se produire en cas d'interruption soudaine du système de commande, entraînant ainsi un retour immédiat à la situation normale après une longue

période de contrôle visant à imposer une consommation fixe au cours de l'intervalle de temps, et à réduire la consommation moyenne de 5% par rapport à la situation sans commande. Après avoir contrôlé la consommation pendant une période de 2000 minutes, le système est brutalement interrompu, et l'évolution qui en découle est donc naturelle. Elle correspond au retour des clients dans leur état de confort. Nous représentons ensuite la puissance moyenne par habitation globale, ainsi que détaillée par type de clients.

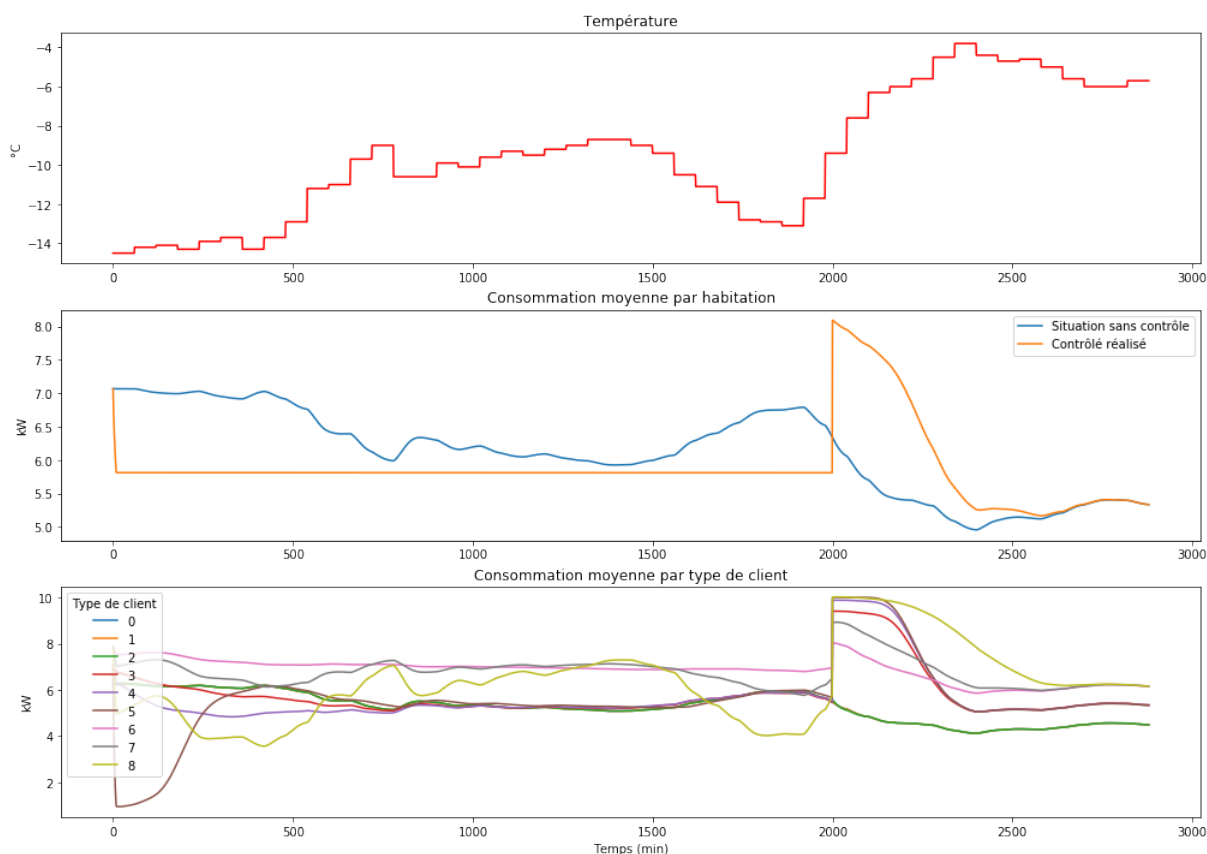


Figure 5.2 Illustration de l'impact de l'arrêt brutal de la commande sur la puissance consommée

Comme illustré par la figure 5.2, l'arrêt brutal du contrôle entraîne la création instantanée d'un pic de consommation bien plus important que la situation standard, qui sera donc probablement à l'origine de problèmes sur le réseau que ce soit en termes de puissance appelée ou de capacité des installations. C'est en effet logique, la commande incitait à la réduction de consommation, donc de nombreux clients se trouvent à des températures de consigne plus faibles que leur préférence. Une fois le contrôle arrêté, ces derniers remontent à leur température de consigne initiale, ce qui provoque ce pic de consommation qui est constaté. C'est principalement le cas pour les types de clients ayant des températures de consigne

initialement plus élevées (c'est-à-dire les types 3 à 8). Il faut donc voir s'il est possible de mettre en place une méthode simple afin de faciliter cette transition.

5.4.2 Solution pour la reprise du fonctionnement normal

Plutôt que d'arrêter brutalement le contrôle à un instant donné, il est possible de mettre en place un système de retour à la normale progressif qui permettrait de diminuer ce pic en l'étalant dans le temps. De ce fait, la restauration de la situation initiale prendrait plus de temps, mais ne serait alors plus problématique pour le réseau.

Une idée possible serait d'ajuster facilement le modèle de fonctionnement de la commande pour assurer une fin fluide sans pic réel de consommation. L'objectif est donc de remettre progressivement les clients dans leur température de consigne initiale et de faire en sorte qu'ils restent dedans une fois celle-ci atteinte. Une possibilité pour atteindre ce point est de garder le fonctionnement en chaîne de Markov en empêchant les sorties de l'état correspondant à la température de consigne souhaitée. Cela signifie que les clients vont petit à petit retourner dans leur état préférentiel à mesure que la chaîne de Markov les y amène.

Dans ce cas, il suffit de garder le même fonctionnement d'évolution décrit dans l'équation (3.17) mais en changeant les matrices de transition de la manière suivante pour chaque type de clients en fonction de la température de consigne correspondant à leur fonctionnement :

La matrice de transition devient, pour les clients de basse température :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \beta p & 0 \\ 0 & -(\frac{\gamma}{p(t)} + \beta p(t)) & \beta p(t) \\ 0 & \frac{\gamma}{p(t)} & -\beta p(t) \end{pmatrix}$$

Pour les clients de moyenne température :

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{p(t)} & 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{p(t)} & 0 & \beta p(t) \\ 0 & 0 & -\beta p(t) \end{pmatrix}$$

Pour les clients de haute température :

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{p(t)} & \beta p & 0 \\ \frac{\gamma}{p(t)} & -(\frac{\gamma}{p(t)} + \beta p(t)) & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{p(t)} & 0 \end{pmatrix}$$

La colonne correspondant à l'état idéal valant 0, cela garantit que toute densité se retrouvant dans l'état y reste, et donc qu'au bout d'un certain temps, tous les clients de ce type se retrouvent à cette température de consigne. La question restante est la valeur du signal de pression $p(t)$ à appliquer entre la fin du contrôle standard et son arrêt complet. En effet, jusqu'à maintenant, il suivait la valeur idéale afin d'imposer l'objectif de puissance. Or, en sortant de la zone où le contrôle était nécessaire, l'objectif est maintenant d'assurer un retour à la normale progressif. Une idée simple est d'imposer un signal de pression $p(t)$ correspondant à un niveau de consommation normal si toutes les résidences étaient contrôlées. De cette manière, les clients encore contrôlés se rapprochent néanmoins de leur température de confort en attendant que la chaîne de Markov les amène dans leur état de confort et que la commande s'arrête pour eux aussi. En appliquant ce principe, on obtient le résultat suivant :

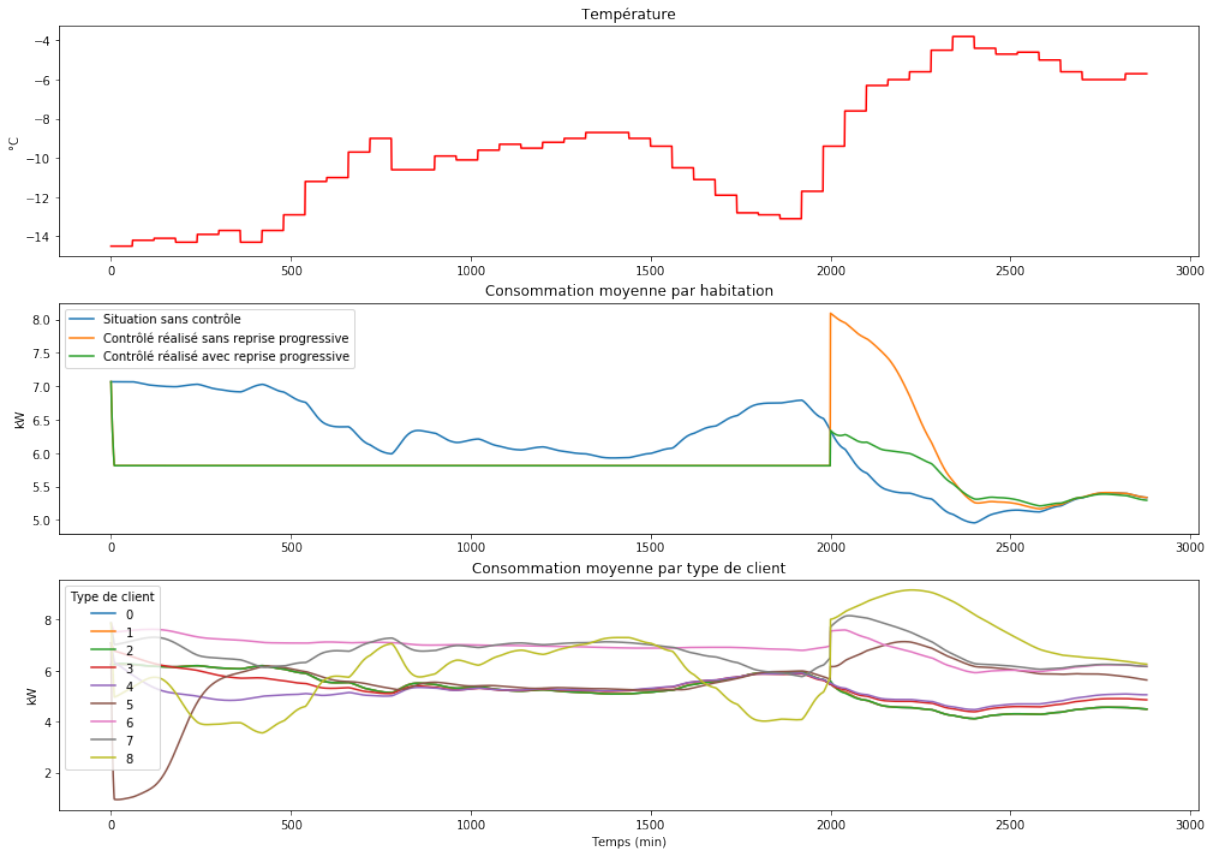


Figure 5.3 Illustration du retour progressif à la normale à $t = 2000$

On observe bien une diminution notable du pic engendré par l'arrêt de la commande même si cela a pour conséquence un retour à la normale plus long, ce qui est forcément logique. Même si la consommation est presque revenue à son niveau normal, les clients ne sont pas encore tous revenus à leur état de confort. Une fois un niveau de consommation suffisant atteint, il

est possible soit d'attendre que tous les clients soient de retour dans leur état idéal via les chaînes de Markov, soit de mettre une fin brutale au contrôle si le pic est tolérable.

5.5 Limites concernant le suivi du signal objectif

Dans certains cas où le signal objectif de puissance est mal défini, ou trop ambitieux, il peut être impossible pour le système de le suivre parfaitement. Dans ce cas, il faut alors accepter une réponse sous-optimale ou alors redéfinir l'objectif souhaité. Le but de cette partie est de présenter les raisons principales d'échec ainsi que d'estimer les capacités du système à l'aide d'approximations pour se rendre compte de ses capacités et d'essayer de les quantifier. Notons néanmoins que ces dernières dépendent énormément des paramètres des clients ainsi que de leur répartition dans la population, ce qui rend difficile une analyse exhaustive.

5.5.1 "Ramping" limite

Une des raisons principales qui peut empêcher le système de réagir conformément à l'objectif est le simple fait que sa vitesse de réaction est limitée. Le "ramping", c'est-à-dire la quantité de puissance que le système peut ajouter ou enlever par pas de temps est fini, borné par des valeurs dépendantes de l'état des densités. De ce fait, si l'agrégateur demande une variation trop brutale, le système peut ne pas être capable de réagir suffisamment d'un coup. Le "ramping up" (R_u) et le "ramping down" (R_D) sont donc des limitations caractéristiques importantes du système qu'il est important de pouvoir estimer. Cela est notamment important pour le début du contrôle où la vitesse de réaction peut être clé. En utilisant l'équation de la puissance (5.8), ses deux extrêmes correspondent respectivement, à l'application de la pression maximale p_{max} et minimale p_{min} :

$$\begin{aligned} R_U(t) &= b(t) + \frac{c(t)}{p_{min}} + a(t)p_{min} \\ R_D(t) &= b(t) + \frac{c(t)}{p_{max}} + a(t)p_{max} \end{aligned} \tag{5.13}$$

Si on s'intéresse à l'instant initial du contrôle $t = 0$, en supposant que l'état stationnaire est atteint pour la dynamique des thermostats, il est raisonnable de supposer $b(0) = 0$. De plus, en supposant les coefficient β et γ bien choisis afin de respecter (4.31), l'approximation $4\beta\gamma\Delta t^2 \ll 1$ est aussi possible, or dans ce cas :

$$\begin{aligned}
p_{min} &= \max_{(\beta, \gamma)} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4\beta\gamma\Delta t^2}}{2\beta\Delta t} \right) \approx \max(\gamma)\Delta t \\
p_{max} &= \min_{(\beta, \gamma)} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4\beta\gamma\Delta t^2}}{2\beta\Delta t} \right) \approx \frac{1}{\max(\beta)\Delta t}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Dans ce cas, si β et γ sont semblables, les termes divisés par p_{max} et multipliés par p_{min} sont négligeables. En utilisant (5.9) et (5.10), la forme finale obtenue est :

$$\begin{aligned}
R_U(0) &\approx \frac{c(0)}{\max(\gamma)\Delta t} = NQ \sum_k \frac{\gamma_k}{\max(\gamma)\Delta t} \left(\int_{-\infty}^{x_{C_2}^-} f_{01}^k(x, 0) dx + \int_{-\infty}^{x_{C_1}^-} f_{00}^k(x, 0) dx \right) \\
R_D(0) &\approx \frac{a(0)}{\max(\beta)\Delta t} = -NQ \sum_k \frac{\beta_k}{\max(\beta)\Delta t} \left(\int_{x_{C_1}^+}^{+\infty} f_{12}^k(x, 0) dx + \int_{x_{C_0}^+}^{+\infty} f_{11}^k(x, 0) dx \right)
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Cette formule montre que les conditions initiales sont très importantes afin de définir les valeurs maximales du ramping, les densités initiales jouant un rôle très important dans les capacités du système. En effet, par exemple si tous les thermostats sont réglés à des températures élevées, il devient très difficile d'augmenter la puissance, la valeur de R_U est faible, tandis qu'à l'inverse, la diminuer devient bien plus simple avec une valeur de R_D élevée. Il faut aussi noter qu'il s'agit des rampings initiaux, une fois le contrôle lancé celui-ci va progressivement diminuer à mesure que les densités évoluent dans la position souhaitée.

La présence des ratios $\frac{\gamma_k}{\max(\gamma)}$ et $\frac{\beta_k}{\max(\beta)}$ montre aussi que ce qui est important pour le ramping initial n'est pas simplement la valeur des coefficients, mais à quel point ils sont proches ou éloignés du plus élevé. En effet, le plus sensible à la pression imposant la limite sur la pression applicable (p_{max} et p_{min} correspondent à un transfert de 100% du type de clients le plus sensible), les autres types sont eux aussi limités à un niveau de transfert plus faible car étant déclarés moins sensibles, ce qui va contribuer à la limitation du ramping. Si l'augmentation ou la diminution demandée est plus importante que la capacité de ramping du système, ce dernier va réagir plus lentement que prévu par rapport à l'objectif souhaité qui ne sera donc pas totalement atteint.

Il est assez simple de déterminer la vitesse de réponse maximale du système contrôlé via simulation. En effet, l'application permanente de la pression p_{min} va donner une réponse provoquant l'augmentation la plus forte de la consommation en un minimum de temps. A l'inverse, si le signal envoyé est p_{max} , cela engendrera la diminution de la consommation la plus vive. Cela donne une bonne méthode pour quantifier ces rampings extrêmes du

système. Néanmoins, ce n'est pas suffisant, car si l'effort demandé aux consommateurs est trop important il n'est pas possible de le maintenir sur le long terme, ce qui veut dire que la variation de la consommation va s'inverser au bout d'un certain temps avant d'atteindre une valeur stable.

5.5.2 Effort irréalisable demandé au système

L'autre cas où le système ne peut pas répondre correctement à l'objectif demandé par l'opérateur est lorsque que l'effort demandé par la fonction objectif de puissance est trop important, et par conséquent n'est pas réalisable physiquement. Un exemple concret simple est le fait d'imposer une consommation nulle indéfiniment, inévitablement au bout d'un certain temps les températures seront trop basses et les thermostats se rallumeront entraînant une hausse de la consommation. Il est difficile de quantifier précisément cette limite, car elle dépend de la trajectoire globale de puissance empruntée. En effet, il est possible de stocker de la chaleur pour permettre ensuite une diminution plus importante et plus longue de la puissance globale consommée. Lorsque le signal n'est pas physiquement réalisable de la sorte, le système le suit tant que possible avant de décrocher du suivi de ce dernier car il n'a plus les capacités de réaliser la commande demandée. Dans ce cas, il faut penser à une redéfinition de l'objectif, potentiellement en faisant appel à du stockage ou en réduisant les attentes afin de pouvoir l'atteindre.

CHAPITRE 6 RESULTATS ET DISCUSSION

Le système étant maintenant défini et mis en place dans la simulation, il est possible de s'intéresser à ses capacités ainsi qu'à ses limites. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'influence des paramètres sur le système. Néanmoins, il faut préciser que l'évaluation complète du système de commande proposé est complexe, car les résultats dépendent fortement de la composition du groupe de clients, du type de contrôle requis et de sa durée. Cependant, des exemples significatifs peuvent être fournis afin d'illustrer les forces et faiblesses potentielles. Nous nous posons ensuite la question de son implémentation réelle en discutant de l'hétérogénéité et de son influence sur les résultats de notre modèle homogène.

6.1 Influence de la répartition des clients sur les capacités du système

Tout d'abord, pour illustrer les possibilités de commandes ainsi que l'influence de la répartition des types de clients, nous simulons deux types de commandes extrêmes : la consommation électrique maximale immédiate et la consommation électrique minimale immédiate, dans 3 cas différents : une distribution égale des types de clients, une distribution égale mais seulement parmi les catégories les moins sensibles, et un cas où les clients préfèrent les températures élevées. Les pourcentages exacts selon le type de clients considérés sont indiqués dans la table 6.1. Dans toutes les simulations considérées, le système est initialement en régime permanent, avec chaque type de clients dans sa température de consigne de confort. Cela va nous permettre de montrer les différents types de contrôle possibles, ainsi que l'impact de paramètres clés tels que la répartition des clients, ou encore la sensibilité de ces derniers, sur les capacités et trajectoires de puissance possibles.

Comme on peut le voir à la figure 6.1, le système permet une large gamme de contrôles. Il existe un état stationnaire et un état transitoire qui peuvent être exploités. Les états transitoires sont utiles pour atteindre des pics et des creux temporaires, mais ils ne peuvent pas être maintenus indéfiniment, alors que les états stationnaires le peuvent. La durée pendant laquelle un état transitoire peut être maintenu dépend naturellement de l'effort demandé au système. Ici, l'exemple donné est celui des commandes extrêmes ne pouvant pas être maintenues longtemps.

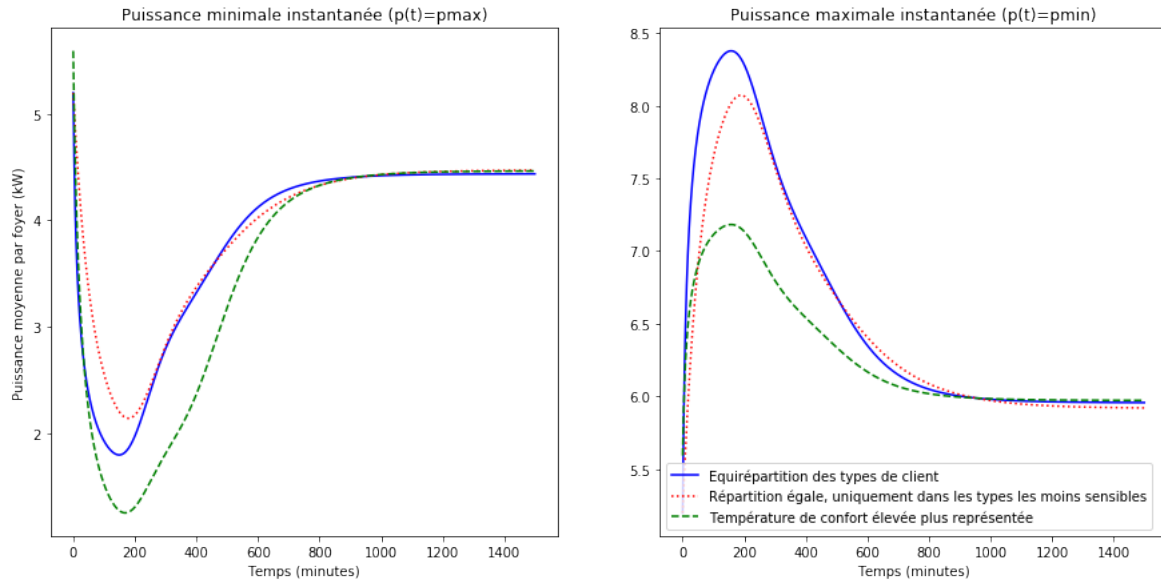


Figure 6.1 Illustration de différentes trajectoires de contrôle en fonction de la composition en clients

Tableau 6.1 Répartition des clients par type selon le cas considéré

Répartition des clients par type	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Equirépartition globale	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9
Equirépartition, uniquement dans les types les moins sensibles	1/3	0	0	1/3	0	0	1/3	0	0
Les températures hautes sont plus représentées	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18	2/9	2/9	2/9

La distribution des types de clients affecte énormément les capacités du système. Comme expliqué dans la section 3.3.3, par conception, les paramètres de sensibilité γ et β n'affectent que la vitesse du système mais pas l'état stable tant que leur rapport est constant. Or, les différents types de clients ont des valeurs différentes au niveau de la sensibilité ainsi que de la température de confort, la répartition des clients dans les types va donc avoir un impact au niveau de deux points clés : le "ramping" (décrit en 5.5.1) possible ainsi que la valeur d'augmentation ou de diminution maximale de la consommation à partir de l'état initial.

Comparons en premier les courbes rouge et bleue de la figure 6.1, les différentes températures de confort sont également représentées dans les deux situations, mais la sensibilité globale est

plus élevée dans l'équipartition (courbe bleue). On constate que dans les deux commandes la dérivée initiale est plus élevée pour la courbe bleue. Le système est plus réactif, car les clients se sont déclarés comme étant plus sensibles au signal de pression, ce qui permet une variation plus rapide. Comme le montre le tableau 6.2, numériquement, cela se traduit par un ramping de 2.2% (par rapport au maximum de puissance théorique correspondant à 100% des foyers en chauffage) contre 0.5% dans le cas le moins sensible. Il est aussi intéressant de constater que ces valeurs obtenues par simulation sont également obtenues en appliquant la formule (5.15) obtenue en 5.5.1. Cela illustre l'influence des paramètres β et γ sur les capacités du système de commande : une répartition de clients plus sensible permet une réponse plus rapide au niveau de la différence de puissance consommée.

Les températures de confort étant équilibrées au sein de la population, il n'y a pas de différences notables entre les rampings en cas de diminution de la puissance comparée au cas d'augmentation. (Pour être plus exact, il y en a une négligeable liée au refroidissement naturel des thermostats qui engendre une asymétrie, mais suffisamment faible pour être ignorée ici). Intéressons-nous maintenant à la courbe verte, dans ce cas, les températures préférentielles ne sont plus équitablement réparties mais les températures élevées sont plus représentées. Le premier constat est une grande asymétrie entre la commande d'augmentation et celle de diminution de la puissance consommée. En effet, les températures étant plus élevées initialement, le système dispose d'une plus grande capacité à couper le chauffage pendant longtemps, de ce fait diminuant nettement et rapidement la puissance lors du contrôle minimal. Cependant, cela a le désavantage d'un contrôle maximal beaucoup plus faible car de nombreux foyers ont déjà atteint la température de consigne la plus élevée dès le début du contrôle. Les valeurs numériques de la table 6.2 montre cette nette distinction en fonction du type de commande exercé.

La répartition initiale en températures de consigne des thermostats est donc un facteur important sur les capacités du système. Elle va notamment contribuer à favoriser un type de commande par rapport à un autre. Ainsi, des températures initialement élevées permettront une diminution importante au prix d'une augmentation plus faible, tandis que des températures faibles permettront le contraire.

Que ce soit la sensibilité ou la température de confort, il est important de préciser que ces paramètres sont totalement déterminés par les choix initiaux des clients et non par l'opérateur ou l'agrégateur. De ce fait, les capacités du système sont intrinsèquement liées à la composition de clients obtenue. Le seul levier possible pour l'opérateur serait au niveau de potentielles compensations supplémentaires afin de convaincre les clients de changer de catégorie. Les capacités réelles du système une fois mis en place dépendent de la répartition

Tableau 6.2 Caractéristiques de la commande en fonction de la répartition de clients considérée

Répartition de clients	Ramping up (% du maximum)	Ramping down (% du maximum)	Puissance maximale instantanée (% du maximum)	Puissance minimale instantanée (% du maximum)
Equirépartition globale	2.2%	-2.4%	83.8%	17.9%
Equirépartition, uniquement dans les types les moins sensibles	0.5%	-0.5%	80.7%	21.4%
Les températures hautes sont plus représentées	1.1%	-2.1%	71.8%	12.5%

finale obtenue selon les catégories choisies par les clients. De même, en fonction du type de commande désiré, certaines configurations sont avantageuses ou le contraire. Il est donc impossible d'être totalement exhaustif sur les possibilités offertes en situation réelle, mais nous avons pu illustrer dans cette partie les influences provoquées par ces caractéristiques.

6.2 Influence du type de clients choisi sur la trajectoire des foyers

En utilisant les mêmes types de commandes extrêmes que dans la partie précédente, on peut s'intéresser cette fois-ci non pas au comportement global, mais plutôt à celui dépendant du type de clients considéré. On se place dans la configuration équirépartie pour l'étude même si cela n'a pas d'impact sur les résultats présentés ci-dessous. Cela permettra de confirmer que le système réagit conformément à la volonté initiale de créer des clients ayant des sensibilités différentes à la pression souhaitant plus ou moins conserver leur confort par rapport aux besoins du réseau.

Nous commençons par nous intéresser aux trajectoires de puissance en fonction du type de clients tel qu'indexé dans la table 3.1 de la section 3.3.3. Cela nous permet d'illustrer que malgré le signal unique de pression $p(t)$, les réactions des clients sont différentes selon leur type et présentent chacune des trajectoires uniques, cohérentes avec les paramètres choisis et leur signification.

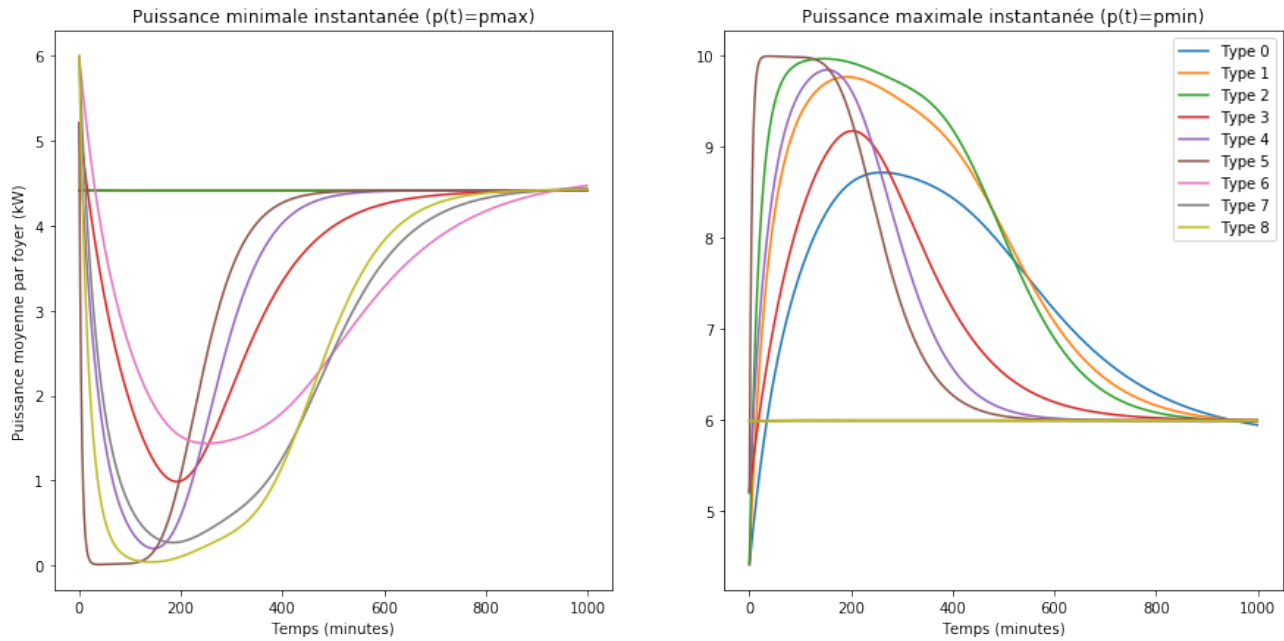


Figure 6.2 Trajectoires de puissance des différents types de clients lors des commandes extrêmes

La première observation est que lors de la commande de puissance minimale (respectivement maximale) les types de faible (forte) température numérotés 0,1,2 (6,7,8) ne réagissent pas. En effet, ils sont de base à la température la plus faible (haute) initialement, et ne peuvent pas aller à un état inférieur (supérieur) par construction du système. De ce fait, leur puissance consommée reste constante lors de ce type de commande. En outre, les sensibilités choisies sont cohérentes avec les variations constatées lors des commandes : les types les plus sensibles (2,5,8) présentent les pentes les plus importantes, surtout lorsque comparés aux mêmes classes de température. Cet ordre est également retrouvé en prenant les sensibilités moyennes et faibles. La logique concernant l'effet des paramètres sur la sensibilité des consommateurs est donc respectée dans la mise en place du système.

Une autre possibilité est de s'intéresser au confort qui peut être représenté ici par la température moyenne par type de clients. On s'attend à ce que plus la sensibilité d'un type de clients soit forte, plus sa température moyenne change rapidement dans le sens du contrôle désiré (diminution pour baisse de puissance, augmentation dans le cas contraire). Son évolution lors des contrôles extrêmes est représentée par les graphes de la figure 6.3 ci-dessous.

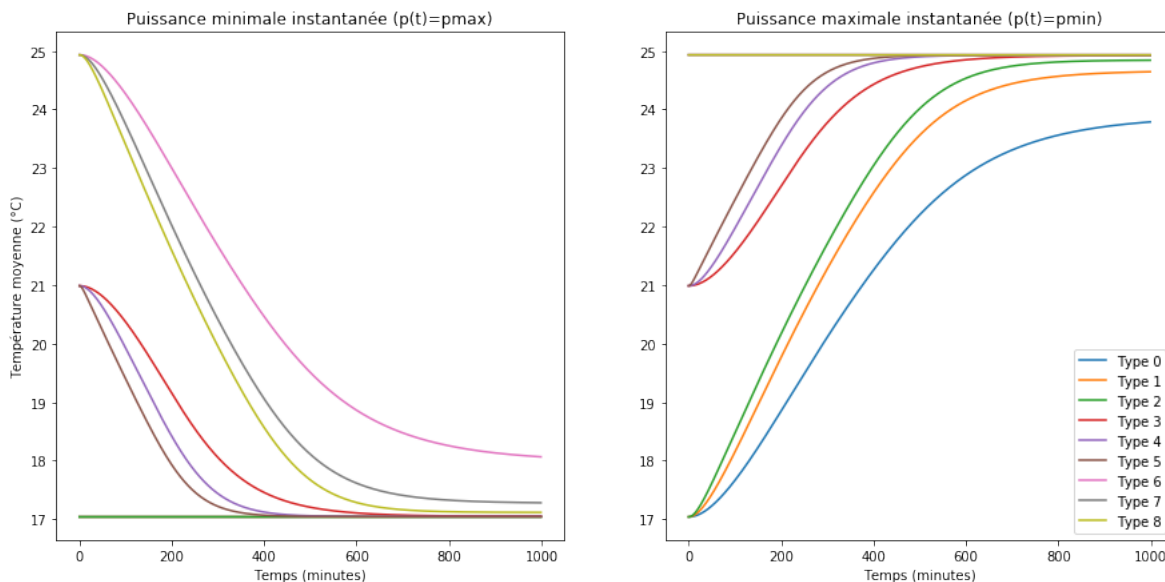


Figure 6.3 Trajectoires de température des différents types de clients lors des commandes extrêmes

Les constats sont à peu près identiques à ceux effectués en figure 6.2 : à température de départ égale, les types de clients les plus sensibles diminuent en température et donc en confort plus rapidement que les moins sensibles. On constate que les états de température stationnaire moyenne respectent aussi cette logique : les plus sensibles vont avoir un état stationnaire plus éloigné de leur température de confort. Par exemple le type 8 termine avec presque 100% de ses clients dans la température de consigne la plus faible (17°C) ce qui n'est pas le cas pour le type 6 qui a donc une température plus élevée est plus proche des 25°C initiaux.

Les différents types de clients se comportent donc de manière logique par rapport aux attentes du système. Les plus sensibles réagissant plus rapidement et diminuant en confort plus vite que les autres. Néanmoins, il existe tout un spectre de possibilités pour les paramètres β et γ qui donne des capacités différentes au système en fonction de ce que l'on définit comme étant la sensibilité la plus basse par rapport à la plus haute. Le choix est à faire en prenant en considération à la fois les attentes des clients sur un tel système mais aussi les capacités souhaitées de ce dernier.

6.3 Exemples de commandes

Donner un aperçu exhaustif du système est compliqué du fait des influences des paramètres et de la composition des clients. Néanmoins, afin d'illustrer les possibilités et limites du système dans un exemple plus concret, prenons deux journées de mars à Montréal présentant notam-

ment une baisse de la température pendant les périodes de nuit. Ce qui devrait engendrer des pics de consommation de chauffage comme on peut le voir sur les deux premiers graphes de la figure 6.4.

6.3.1 Commande de réduction et d'élimination des pics

Dans un premier temps, l'objectif est de réduire la consommation de 5% ainsi que de couper les pics de soirée. Après avoir calculé la consommation prévue sur cette période, on peut donc définir l'objectif de puissance (courbe orange) qui remplit ces conditions. Une fois ce dernier défini, à l'aide de l'algorithme développé au chapitre 5, nous pouvons calculer le signal de pression nécessaire et regarder la trajectoire ainsi obtenue. Le contrôle effectué est volontairement long afin d'essayer de pousser le système proche de ses limites au cours du contrôle.

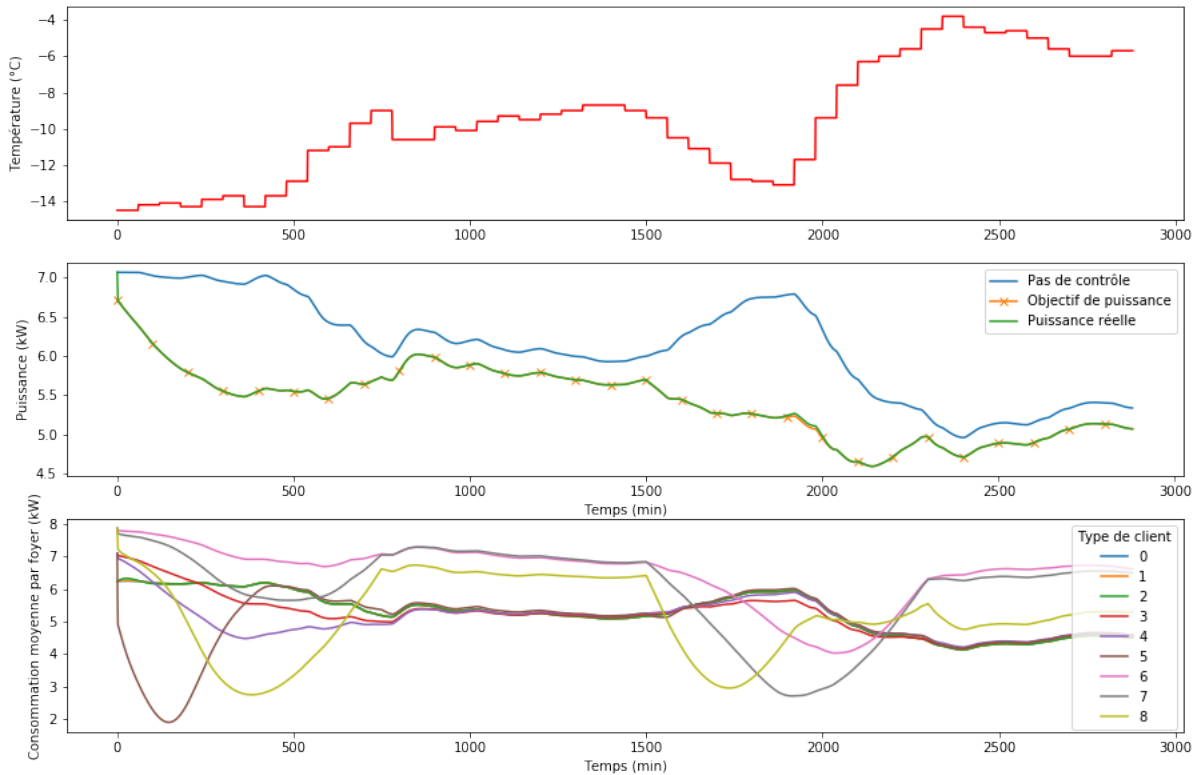


Figure 6.4 Exemple de commande de réduction et d'élimination des pics

Le résultat obtenu (courbe verte) suit quasiment parfaitement l'objectif fixé. En effet, il existe une zone légèrement avant $t = 2000$ où les courbes s'éloignent légèrement car le système est surtaxé : tous les types de clients sont au minimum possible de leur consommation à cet instant. Néanmoins, le résultat est très satisfaisant d'un point de vue réseau et l'on peut encore

constater le comportement différent des divers types de clients, notamment ceux des températures élevées qui profitent des périodes moins froides pour chauffer. Les clients ayant des températures élevées sont les plus exploités dans la commande, car ils possèdent un stockage thermique initial plus important. Tandis que les plus faibles n'évoluent quasiment pas sur la période. En effet, il s'agit d'une commande de réduction, dans le cas d'une augmentation les températures plus faibles auraient un impact plus important.

D'un point de vue confort des clients, on peut s'intéresser aux températures moyennes en fonction du type de clients afin d'en observer l'évolution :

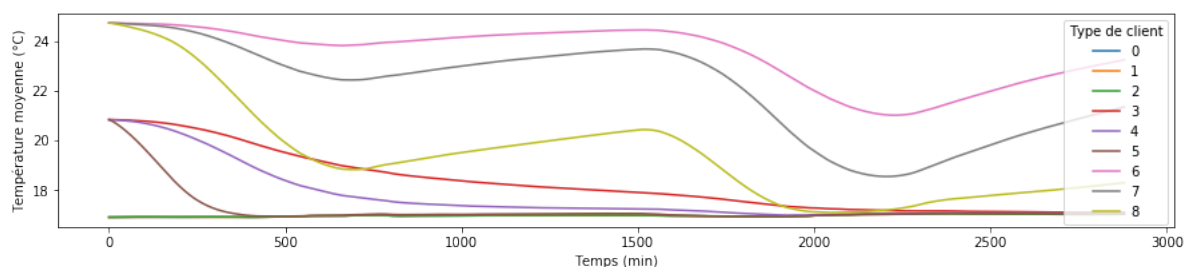


Figure 6.5 Température moyenne lors de la commande de réduction et d'élimination des pics

Plus le contrôle avance, plus la température moyenne diminue pour tous les types de clients, car le stockage réalisé jusque-là s'épuise au cours du temps. Même si certaines périodes sans pic permettent le chauffage partiel pour certains types autorisant le réchauffement momentané de la température. Les caractéristiques de chaque type de clients sont bien respectées.

Finalement, on peut s'intéresser au système de récompense associé. Nous calculons la contribution de chaque type de clients à l'atteinte de l'objectif, afin de voir dans ce cas la répartition théorique de la rémunération associée au contrôle. Nous sommes dans une situation d'équité où tous les types de clients sont équitablement représentés ce qui ne sera pas forcément le cas dans la réalité. Cela nous permet d'illustrer le fait que la compensation est influencée à la fois par le type de clients considéré et le type de commande effectué.

Tableau 6.3 Répartition de la récompense lors de la commande de réduction et d'élimination des pics

type de clients	% Total	% par client
0	0.066	0.0006
1	0.072	0.0007
2	0.107	0.0010
3	13.773	0.1240
4	15.431	0.1389
5	17.002	0.1530
6	10.751	0.0968
7	16.842	0.1516
8	25.953	0.2336

Les basses températures (types 0,1,2) ne contribuent en effet quasiment pas à cette commande de réduction étant déjà au minimum de leur consommation. Tandis que les autres vont pouvoir diminuer leur consommation en réduisant leur température de consigne. Il est intéressant de noter que les contributions sont très inégales du fait du type de commande demandé, ici il s'agit de réduction. En outre, de manière assez logique, plus la sensibilité est élevée plus la contribution augmente, car les clients s'écartent plus de leur trajectoire standard afin d'aider le réseau à accomplir l'objectif. Le système est donc capable de mettre en place de manière satisfaisante cette commande de réduction principalement en utilisant le stockage thermique initial des clients aux températures de confort élevées.

6.3.2 Commande de réduction et d'élimination des pics avec stockage thermique

Il est aussi possible de modifier légèrement la commande en mettant en place un stockage thermique pendant la journée où les températures extérieures sont plus faibles. En effet, si les productions renouvelables solaires et éoliennes sont importantes à ce moment il peut être intéressant d'augmenter artificiellement la consommation afin de baisser plus facilement la consommation lors du pic. Ce qui aurait pour effet de demander un effort en termes de confort moindre au client et potentiellement d'éviter l'écart constaté à $t = 2000$.

Pour cela, l'objectif de puissance est légèrement modifié en créant une augmentation pendant la journée afin d'augmenter le chauffage et les températures comme illustré sur la courbe orange de la figure 6.6 :

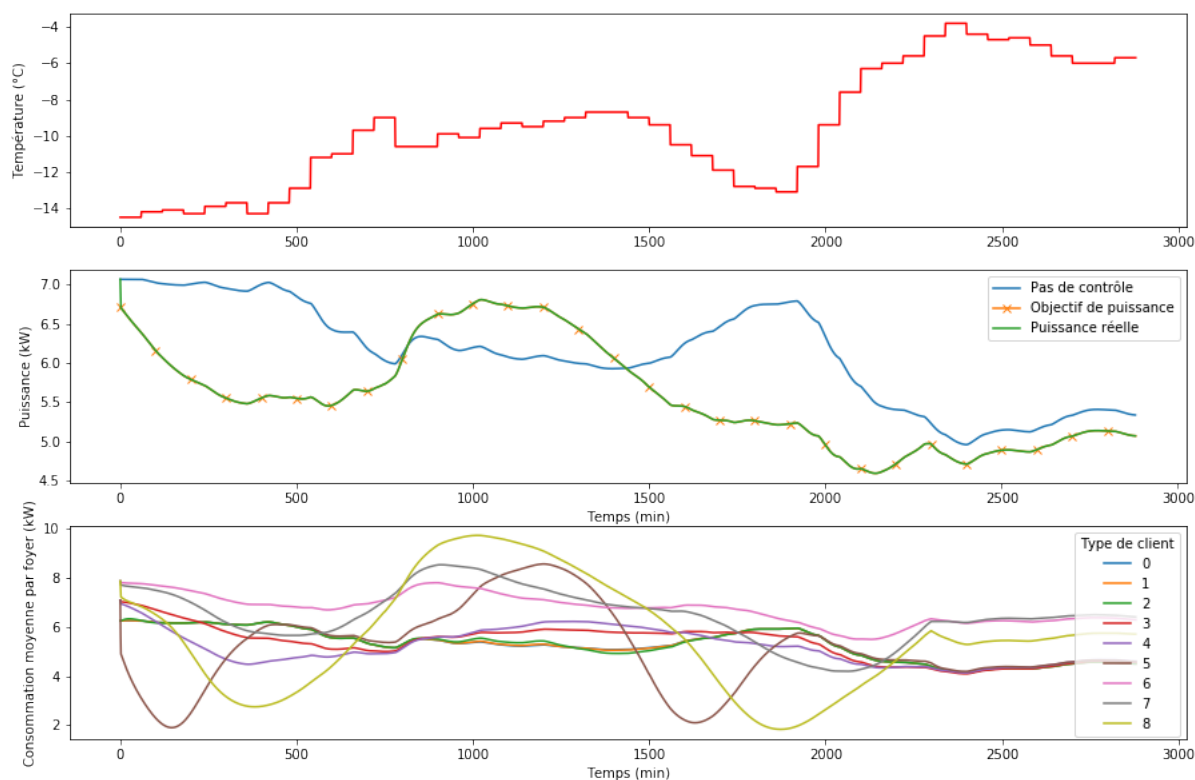


Figure 6.6 Exemple de commande de réduction et d'élimination des pics avec stockage thermique

Cette fois-ci, la commande est parfaitement suivie, le stockage pendant la journée permet d'éviter la période de tension qui existait aux alentours de $t = 2000$ sur la figure 6.4. Les clients augmentant leur consommation pendant cette période, ils peuvent la diminuer plus facilement après. De plus, cela devrait permettre d'obtenir des températures plus élevées potentiellement plus proches des températures de confort pour chacun des types de clients. Si on s'intéresse aux températures moyennes :

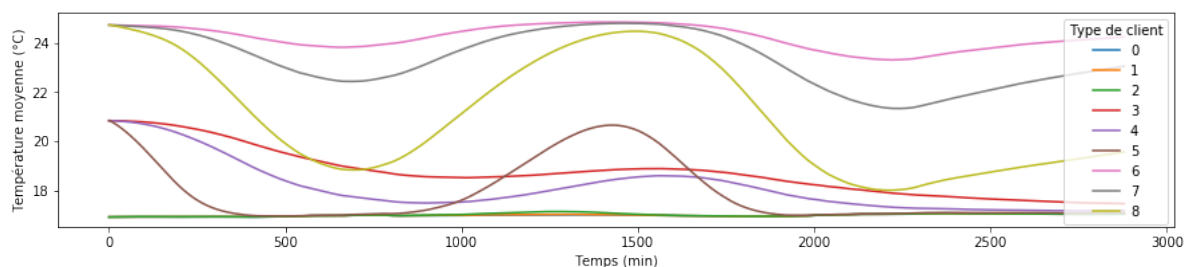


Figure 6.7 Température moyenne lors de la commande de réduction et d'élimination des pics avec stockage thermique

La période de stockage thermique apparaît clairement sur ce graphe, elle permet aux clients dont la température avait diminué de remonter. Notamment pour les types les plus sensibles au signal de pression qui sont capables de réagir vite face au changement de ce dernier. Mais si on compare à la figure 6.5 ; toutes les températures sont plus élevées hormis pour les types 0,1 et 2 qui ne présentent pas de changement notable car déjà proches de leur température de confort.

Finalement d'un point de vue récompense :

Tableau 6.4 Répartition de la récompense lors de la commande de réduction et d'élimination des pics avec stockage thermique

type de clients	% Total	% par client
0	0.076	0.0007
1	0.137	0.0012
2	0.490	0.0044
3	11.388	0.1025
4	13.961	0.1257
5	22.290	0.2006
6	6.485	0.0584
7	14.318	0.1289
8	30.854	0.2777

La comparaison à la table 6.3 montre que les récompenses se concentrent plus dans les types de clients les plus sensibles. En effet, les plus réactifs vont monter et descendre en température pour engranger du stockage thermique et ensuite être capable de baisser leur puissance plus longtemps. A l'inverse, les moins réactifs vont se rapprocher de leur température de confort mais sans diminuer autant leur puissance par la suite et auront donc une contribution moindre.

Le système utilisé permet bien d'accomplir le contrôle souhaité, la définition du signal objectif de puissance est néanmoins clé, car elle influence la réaction du système et des clients. Il faut donc bien le définir en fonction de ce qui est souhaité. Pour cela, il est nécessaire de prendre en compte le reste du réseau. Ce qui sort du cadre de cette étude, mais serait un point essentiel pour une utilisation optimale de notre approche de commande.

6.4 Extension au cas à n températures de consigne

Le cas présenté dans ce mémoire a été relativement simplifié en donnant 3 températures de consigne possibles pour le thermostat. Dans la réalité, un thermostat possède bien plus de

températures de consigne qui pourraient être utilisées dans le système de commande. Dans ce cas, l'extension du système à n températures de consigne peut être réalisée assez simplement :

En effet, la matrice de transition M devient :

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{p(t)} & \beta p(t) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{p(t)} & -(\frac{\gamma}{p(t)} + \beta p(t)) & \beta p(t) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma}{p(t)} & -(\frac{\gamma}{p(t)} + \beta p(t)) & \beta p(t) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma}{p(t)} & -\beta p(t) \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Ce qui permet facilement d'étendre l'équation (3.17) au cas à n températures de consigne dans notre algorithme de simulation en adaptant aussi le nombre de fonctions densités de répartition. Il est aussi nécessaire de définir de nouvelles classes de client pour chaque nouvelle température de confort ce qui veut dire trouver de nouveaux couples (β, γ) correspondants.

Concernant le contrôle de puissance, la forme de l'équation de commande (5.8) reste la même en ajustant les valeurs des coefficients $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ pour prendre en compte les nouvelles températures de consigne.

$$\begin{cases} a(t) = -NQ \sum_{k=0} \sum_{j=1}^n \beta_k \left(\int_{x_{C_{j-1}}^+}^{+\infty} f_{1j}^k(x, t) dx \right) \\ b(t) = NQ \sum_{k=0} \sum_{j=0}^n \left(-(\mu_1 f_{1j}^k(x_{C_j}^+, t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{1j}^k}{\partial x} \Big|_{x_{C_j}^+}) + (-\mu_0 f_{0j}^k(x_{C_j}^-, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial f_{0j}^k}{\partial x} \Big|_{x_{C_j}^-}) \right) \\ c(t) = NQ \sum_{k=0} \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_k \left(\int_{-\infty}^{x_{C_{j+1}}} f_{0j}^k(x, t) dx \right) \end{cases} \quad (6.2)$$

A partir de là, les résultats sont identiques, la complexité du fonctionnement du système n'est donc pas augmentée par l'ajout de nouvelles températures de consigne. Cependant, cela soulève néanmoins plusieurs problèmes potentiels. Tout d'abord, l'équation (3.10) montre que le nombre de densités est proportionnel au nombre de températures de consigne. Donc chaque rajout d'une température de consigne ajoute dans notre cas 6 fonctions densités qu'il faut simuler et calculer ce qui vient ralentir et demander plus de puissance de calcul. Cela reste néanmoins potentiellement atteignable. Cependant, plus de types de clients existent, plus la population dans chaque type sera faible et moins la loi des grands nombres sera précise. Or, le contrôle se base sur le fait que les densités représentent correctement le comportement de chaque population, il faut donc trouver le bon équilibre entre un nombre de densités suffisamment grand pour proposer un choix vaste au client, mais restant assez restreint pour

que la loi des grands nombres s'applique.

6.5 Influence de l'hétérogénéité

Dans l'éventualité d'une application réelle du système, les paramètres des maisons ne seraient pas tous homogènes, ce qui engendre une complexité additionnelle au niveau du système. Les résultats de la simulation ne seraient plus forcément exacts en fonction de la distribution des paramètres du système. Nous générons un échantillon hétérogène d'une population où pour chaque foyer les paramètres sont sélectionnés de manière aléatoire, avant d'effectuer une simulation de Monte Carlo dessus. Le but étant de s'intéresser à la possibilité de simuler un résultat proche avec notre système homogène en sélectionnant de manière appropriée les paramètres d'intérêt.

6.5.1 Création de la population hétérogène

La première étape est de créer des populations où chacun des paramètres U_a , C_a , A et Q suit une loi normale centrée sur une moyenne avec une déviation commune étant en pourcentage de cette valeur de la forme $X \sim \mathcal{N}(x_0, (\delta x_0)^2)$. δ représentant la déviation de l'écart en pourcentage de la moyenne. Pour simplifier, σ est calculé comme étant $\sigma = \frac{cste}{C_a}$

Cependant, de nombreuses contraintes sont à respecter pour que chaque foyer ait un sens physique. Par exemple, la capacité de chauffer la maison à la température extérieure considérée, une vitesse de chauffe et de refroidissement cohérente, et être sur le même intervalle d'étude de la température. Il faut donc procéder à une sélection des foyers respectant ces contraintes que l'on peut lister ci-dessous :

$$\text{Positivité : } U_a, C_a, A, Q, \sigma \geq 0$$

$$\text{Capacité de chauffage : } -U_a A (T_{max} - x_a) + Q > 0$$

$$\text{Limite de chauffage : } -U_a A (T_{min} - x_a) + Q \leq C_a \Delta t$$

$$\text{Limite de refroidissement : } -U_a A (T_{max} - x_a) \geq -C_a \Delta t$$

$$\text{Intervalle d'étude commun } [x_{min}, x_{max}] \in [T_{min}, T_{max}]$$

Les limites de chauffage et de refroidissement sont artificielles et potentiellement redondantes, signifiant que les zones mortes des thermostats ne doivent pas être franchies en moins de Δt en mode ON et OFF (Cela pourrait donner des problèmes de simulation, ici elles sont limitées à 1°C par minute ce qui est raisonnable). Une fois ces contraintes prises en compte, les populations obtenues ne sont plus exactement des lois normales, comme le montre la figure 6.8. Les variables deviennent ainsi corrélées, mais cela permet d'obtenir un échantillon hétérogène ayant tout de même un sens physique et pouvant être étudié sans problème.

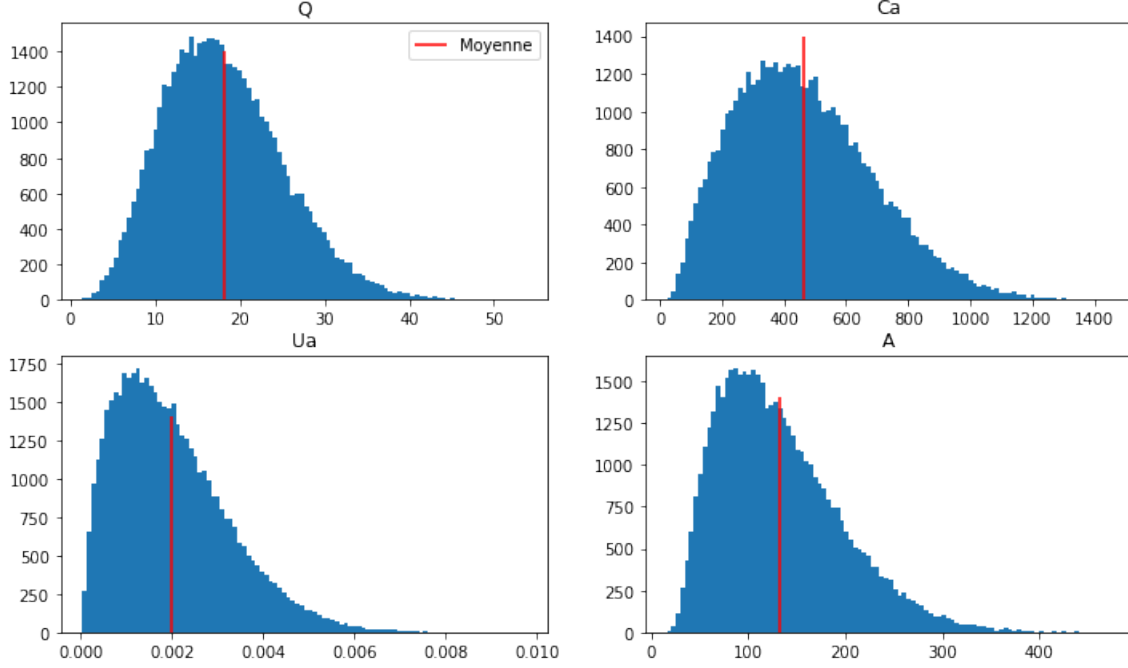


Figure 6.8 Histogramme des valeurs des différents paramètres dans l'échantillon avec une déviation de 1

6.5.2 Choix des valeurs des coefficients représentatifs dans le modèle homogène

Maintenant que l'échantillon hétérogène cohérent existe, il est nécessaire de trouver des valeurs homogènes représentatives de celui-ci dans notre modèle. Une première approche très simple serait de prendre simplement la valeur moyenne de chaque paramètre. Cependant, une telle méthode ne donne pas de très bons résultats, car elle ne prend pas en compte leur influence sur la dynamique et ignore la corrélation existante entre les variables.

Pour cela, on s'intéresse à nouveau à l'équation (2.4) rappelée ci-dessous :

$$dx = \left(\frac{U_a A}{C_a} (x_a - x(t)) + \frac{Q m(t)}{C_a} \right) dt + \sigma dW$$

On peut la réécrire de la manière suivante :

$$dx = c_1 (x_a - x(t)) dt + c_2 m(t) dt + \sigma dW \quad (6.3)$$

Avec :

$$\begin{cases} c_1 = \frac{U_a A}{C_a} \\ c_2 = \frac{Q}{C_a} \end{cases} \quad (6.4)$$

L'équation (6.3) montre bien l'existence de 3 coefficients d'importance dans l'évolution de la température : $\frac{U_a A}{C_a}$, $\frac{Q}{C_a}$ et σ . Ce sont donc ces derniers qui nous intéressent dans la représentation de la dynamique. De plus, Q reste essentiel pour le calcul de la puissance, il est donc aussi nécessaire de le considérer.

Au lieu d'être représenté par l'ensemble $\{U_a, C_a, A, Q, \sigma\}$, nos foyers deviennent modélisés par les paramètres $\{c_1, c_2, Q, \sigma\}$. On peut maintenant prendre la moyenne de ces paramètres afin de réaliser notre modèle homogène, comme indiqué sur la figure 6.9.

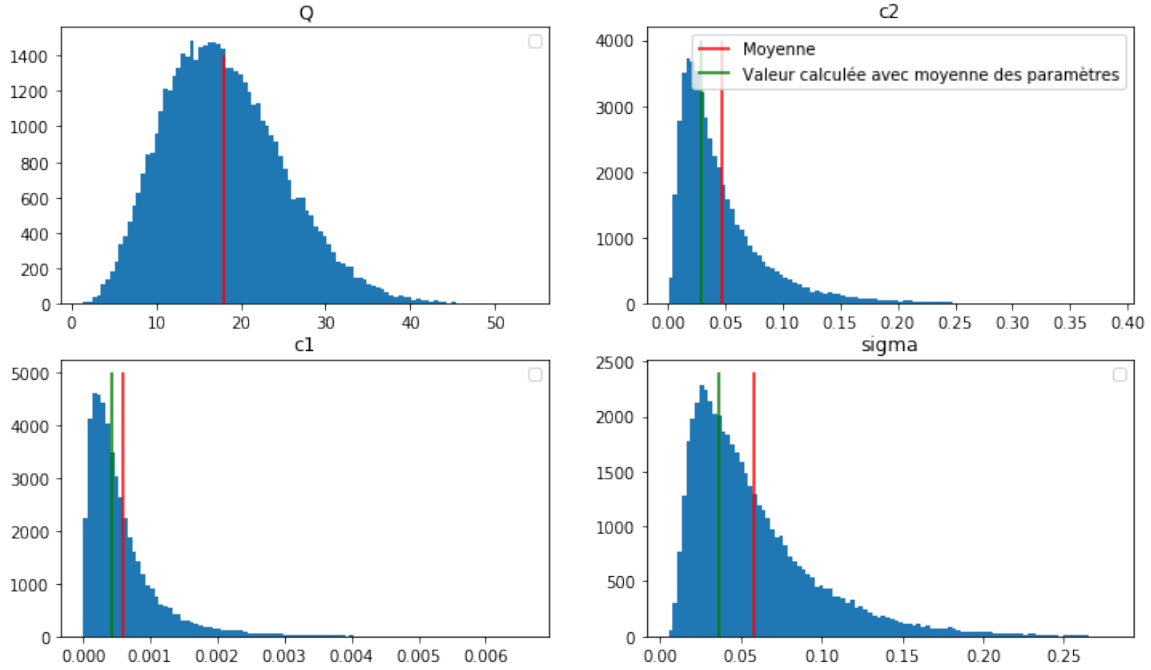


Figure 6.9 Histogramme des valeurs des différents paramètres représentatifs dans l'échantillon avec une déviation de 1

A titre indicatif, la valeur calculée à l'aide des moyennes séparées de U_a , C_a , A et Q est en vert. Les résultats sont donc bien distincts, notamment avec la présence d'une corrélation entre les différents paramètres qui va venir modifier les moyennes à retenir. C'est pourquoi ce système prend mieux en considération les influences de chacun des paramètres hétérogènes dans leur représentation homogène.

6.5.3 Exemple dans le cas d'une commande spécifique

Afin d'étudier l'influence dans cette hétérogénéité face à notre modèle ajusté, nous réalisons une commande simple de réduction de 5% (le but étant de comparer les résultats et non la pertinence de la commande). A l'aide du modèle avec paramètres ajustés selon la méthode

décrite en sous-section 6.5.2, le signal de pression $p(t)$ est établi puis appliqué à un Monte Carlo sur un échantillon de 50 000 foyers homogènes ainsi qu'un échantillon de 50 000 foyers hétérogènes. On compare ensuite les résultats obtenus par les deux Monte Carlo afin d'essayer d'éviter l'erreur due à la taille de l'échantillon.

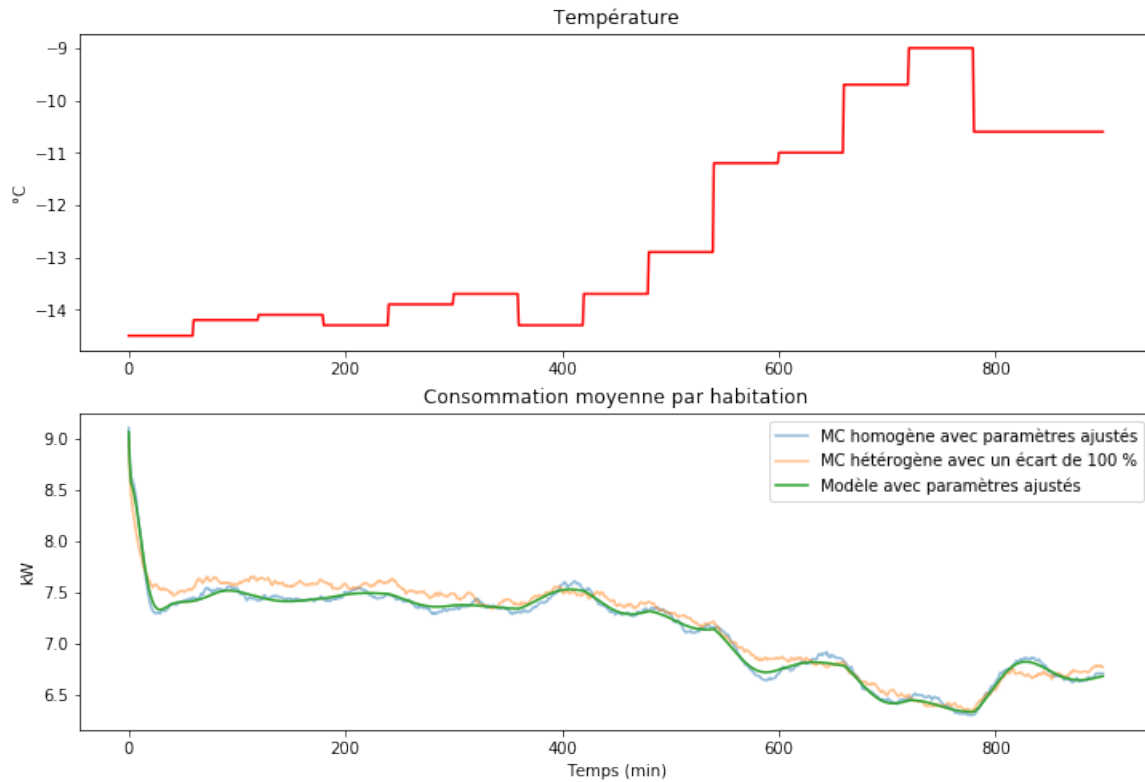


Figure 6.10 Comparaison Monte Carlo hétérogène, homogène et Fokker-Planck dans le cadre d'une commande de réduction de 5%

Comme le montre la figure 6.10, l'écart entre le contrôle réalisé sur une population homogène et celui réalisé sur un échantillon hétérogène est minime, bien que néanmoins existant. Il suffit donc d'établir un taux d'erreur qui dépendra de la taille de la population pour le Monte Carlo et de la déviation des paramètres liée à l'hétérogénéité. Sachant que l'on a pris une population très hétérogène car ayant une déviation 100% par rapport à la valeur moyenne initiale. Le modèle est donc applicable pour contrôler une population hétérogène, bien que cela nécessite une étude préliminaire afin de déterminer la valeur des paramètres représentatifs ainsi que l'erreur finale.

6.5.4 Répartition par classe

La répartition des valeurs peut être plus éparse que l'illustration de la figure 6.8, et correspondre à différentes populations hétérogènes. Il est donc nécessaire de se pencher sur des possibles méthodes de résolution cherchant à limiter ce problème, et à améliorer les résultats. La plus simple d'entre elles étant la création de "classes" d'habitations qui correspondraient à différents ensembles de paramètres $\{U_a^s, C_a^s, A^s, Q^s, \sigma^s\}$. Si on s'intéresse à notre système ajusté pour l'hétérogénéité cela correspond à différents ensembles $\{c_1^s, c_2^s, Q^s, \sigma^s\}$ chacun représentant une sous-partie de l'échantillon global.

Sans détailler de manière excessive le calcul, le système se prête bien à une différenciation par classe dans la mesure où cela ne rajoute qu'une dimension supplémentaire à celle du type de clients déjà présente dans le simulateur. Les équations sont donc relativement peu modifiées si ce n'est par l'ajout d'une somme finale portant sur le nombre de classes existantes. Dans cette situation, notre équation de puissance (5.8) devient :

$$a(t)p(t)^2 + (b(t) - \frac{dP}{dt})p(t) + c(t) = 0 \quad (6.5)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t) = \sum_s NQ^s \sum_{k=0}^8 \beta_k \left(\int_{x_{C_1}^+}^{+\infty} f_{12}^{k,s}(x, t) dx + \int_{x_{C_0}^+}^{+\infty} f_{11}^{k,s}(x, t) dx \right) \\ b(t) = \sum_s NQ^s \sum_{k=0}^8 \left(-(\mu_1 f_{12}^{k,s}(x_{C_2}^+, t) - \frac{(\sigma^s)^2}{2} \frac{\partial f_{12}^{k,s}}{\partial x} \Big|_{x_{C_2}^+}) + (-\mu_0 f_{02}^{k,s}(x_{C_2}^-, t) + \frac{(\sigma^s)^2}{2} \frac{\partial f_{02}^{k,s}}{\partial x} \Big|_{x_{C_2}^-}) \right. \\ \quad \left. - (\mu_1 f_{11}^{k,s}(x_{C_1}^+, t) - \frac{(\sigma^s)^2}{2} \frac{\partial f_{11}^{k,s}}{\partial x} \Big|_{x_{C_1}^+}) + (-\mu_0 f_{01}^{k,s}(x_{C_1}^-, t) + \frac{(\sigma^s)^2}{2} \frac{\partial f_{01}^{k,s}}{\partial x} \Big|_{x_{C_1}^-}) \right. \\ \quad \left. - (\mu_1 f_{10}^{k,s}(x_{C_0}^+, t) - \frac{(\sigma^s)^2}{2} \frac{\partial f_{10}^{k,s}}{\partial x} \Big|_{x_{C_0}^+}) + (-\mu_0 f_{00}^{k,s}(x_{C_0}^-, t) + \frac{(\sigma^s)^2}{2} \frac{\partial f_{00}^{k,s}}{\partial x} \Big|_{x_{C_0}^-}) \right) \\ c(t) = \sum_s NQ^s \sum_{k=0}^8 \gamma_k \left(\int_{-\infty}^{x_{C_2}^-} f_{01}^{k,s}(x, t) dx + \int_{-\infty}^{x_{C_1}^-} f_{00}^{k,s}(x, t) dx \right) \end{array} \right. \quad (6.6)$$

Notre solution de pression optimale $p^*(t)$ reste inchangée autre que la modification de la valeur des coefficients, et donc l'équation (5.12) est toujours valide. Cela permet d'apporter une solution au système dans le cas de la création de classes. Il est intéressant de constater qu'il n'y a pas besoin de définir un nouvel objectif de puissance malgré la différence entre les valeurs de Q possibles dans les classes. En effet, chaque classe suivra en réalité des trajectoires de puissances différentes en fonction de leurs paramètres.

Le problème qu'une telle solution imposerait serait par rapport à la définition du nombre de classes et de leurs paramètres respectifs. En effet, le nombre total de densités à calculer décrit dans (3.10) deviendrait alors :

$$\#Densités = \#Classes * \#Types\ de\ clients * \#Températures\ de\ consigne * \#États\ du\ thermostat \quad (6.7)$$

Il y a donc un effet multiplicatif du nombre de classes sur le nombre de densités à calculer. De ce fait, les temps de calcul sont grandement augmentés par une telle méthode. En outre, la multiplication de la quantité de densités est néfaste pour un système tel que le nôtre, car il repose sur la loi des grands nombres prédisant correctement non le comportement individuel, mais celui agrégé. Dès lors d'une application en situation réelle, la multiplication du nombre de types d'individus possibles représentent la division du nombre d'individus dans une densité donnée, ce qui réduit la précision du système en conditions réelles. Il faut donc choisir un bon nombre de classes permettant de prendre en compte la différence de paramètres du système mais restant limité afin que chaque densité réelle puisse correspondre à la loi des grands nombres. Malheureusement, sans données réelles, il est très dur de fournir des valeurs numériques fiables et valables pour ce genre d'études. Néanmoins, l'hétérogénéité de la population initiale ne paraît pas être un obstacle majeur à la réalisation pratique du système étudié.

CHAPITRE 7 CONCLUSION

Dans ce dernier chapitre, nous présentons une synthèse des apports de ce mémoire. Nous abordons par la suite les limites des solutions proposées, ainsi que les possibilités d'amélioration futures pour le modèle et les algorithmes développés.

7.1 Synthèse des travaux

Dans ce mémoire, nous avons développé une forme de commande agrégée de la consommation de chauffage résidentiel via un agrégateur probabiliste. Celui-ci se base sur une sensibilité déclarée des clients permettant des changements de température de consigne grâce à une chaîne de Markov, influencée par l'agrégateur au travers d'un unique signal de pression $p(t)$. Cela permet de poser les prémices d'un développement de nouveaux contrats électriques où le client accepte que le réseau puisse influencer sa consommation dans une certaine mesure.

Nous avons tout d'abord étudié l'aspect théorique de la dynamique thermique de l'évolution des densités de probabilité des thermostats. Nous sommes partis des équations connues de Fokker-Planck, et avons rajouté l'influence des chaînes de Markov afin d'établir l'équation d'évolution de notre système. Cela a demandé de créer les chaînes de Markov et d'en déterminer les paramètres ainsi que leurs impacts sur le comportement en fonction des types de clients. Ce qui nous a permis de mettre en évidence des tendances générales de consommation et mouvements de température liés au choix du groupe et permettant d'orienter le client dans sa décision.

Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés à la simulation numérique des équations de Fokker-Planck étendues afin de pouvoir nous assurer de leur validité et pouvoir ensuite nous pencher sur la problématique de commande. Nous avons pour cela développé deux simulations distinctes : une simple de Monte Carlo se basant sur la simulation individuelle des foyers mais exigeante d'un point de vue numérique, et une deuxième simulant nos équations. Pour cette dernière, nous avons dû passer par une méthode de différences finies implicite (schéma de Crank-Nicolson), celle explicite étant trop instable. La comparaison des deux méthodes de simulation donnant des résultats similaires, cela nous a permis de valider nos équations et simulations.

Grâce aux équations, nous avons pu développer une méthode de suivi d'un signal de puissance objectif. Celle-ci établit en théorie le signal de pression unique idéal, $p(t)^*$ permettant de suivre l'objectif tant que ce dernier est réalisable. Nous avons ainsi créé l'algorithme de

commande calculant le signal $p(t)$ et la trajectoire de puissance suivie. Avec le contrôle mis en place, nous nous sommes aussi penchés sur la mise en place d'un système de rémunération. Ce dernier se base sur la redistribution des économies réalisées, une fois les surconsommations remboursées, aux clients proportionnellement à leur contribution au contrôle. Cela favorise les clients les plus sensibles qui sacrifient plus leur confort pour les besoins du réseau.

Par la suite, nous avons testé le fonctionnement de nos algorithmes au travers de divers exemples. Nous avons en particulier étudié l'influence de la répartition des types de clients sur les capacités du système. Celle-ci s'avère non négligeable et détermine quels types de commandes sont possibles. Nous avons aussi pu vérifier que le comportement des clients était cohérent avec leur type et paramètres. Comme prévu dans la théorie, les températures maximales et minimales des clients sont inviolables du fait du fonctionnement thermostatique de la commande, et il en va de même pour leur sensibilité au signal de pression. Finalement, nous nous sommes intéressés à l'implémentation réelle au travers de l'extension à de plus grands ensembles de températures de consigne des thermostats, ainsi qu'à l'impact de l'hétérogénéité des paramètres sur le système. A travers l'utilisation de coefficients judicieusement choisis, cette dernière semble avoir des conséquences minimales, bien qu'existantes, sur l'atteinte de l'objectif de puissance, permettant son utilisation réelle.

7.2 Limitations de la solution proposée

L'étude présentée ici se basant sur le développement d'une méthode de commande sans données réelles ni but extrêmement précis, l'analyse complète du système est compliquée. Il est notamment impossible de faire des affirmations définitives quant à ses capacités et ses limites, car elles dépendent à la fois du type de commande souhaitée et des valeurs de paramètres considérés. Des exemples sont proposés, mais pour réaliser une étude plus poussée, il faudrait restreindre le cadre d'utilisation.

La commande est basée sur le suivi d'un signal objectif de puissance, mais la méthode pour déterminer ce dernier n'est pas abordée. En effet, en pratique, de nombreuses considérations sont à prendre en compte telles que le prix de l'électricité, sa disponibilité en fonction des sources (notamment renouvelables), le dimensionnement du réseau dans la zone couverte par l'agrégateur... L'opérateur doit prendre en compte toutes ces variables et sans données, il est impossible de proposer des méthodes satisfaisantes concernant la détermination du signal de puissance objectif.

La modélisation thermique des thermostats et des chauffe-espaces est aussi très hautement simplifiée et uniforme, l'hypothèse de fonctionnement unique est assez forte. Tandis que

dans la réalité des thermostats peuvent posséder des zones mortes différentes, des puissances d'éléments chauffants variables en fonction de l'écart entre la température actuelle et celle de consigne... Ces différences ajoutent une source de variabilité qui n'est pas prise en compte dans la modélisation et pourrait être un facteur d'erreur.

7.3 Améliorations futures

Une première piste d'amélioration serait la récolte de données réelles permettant de se pencher sur des cas plus concrets et d'analyser en profondeur les capacités et limites du système. De même, cela permettrait de s'intéresser à la détermination du signal de puissance objectif en fonction des considérations prises par l'opérateur et l'agrégateur. Cela donnerait aussi la possibilité de se pencher plus sur l'étude économique du système et l'exploration de différents systèmes de récompense.

Une autre option est d'étudier les critères de validité exhaustifs d'un signal de puissance objectif. Surtout dans le cas où ce dernier serait non-réalisable, s'intéresser à la proposition de signaux valides alternatifs en fonction de critères choisis (plus proche en termes de puissance, température similaire...) constituerait un nouveau bloc pouvant venir se rattacher au système de commande. Elle pourrait aussi donner lieu à une méthode de construction de la trajectoire objectif en fonction des paramètres extérieurs au système (énergie disponible, besoin d'augmentation/réduction...), qui viendrait compléter la méthode de commande proposée ici. Des solutions d'optimisation ou d'intelligence artificielle pourraient être intéressantes à explorer, mais nécessitent une étude complexe et poussée du sujet.

RÉFÉRENCES

- [1] “Global energy review 2021,” IEA, 2021. [En ligne]. Disponible : <https://www.iea.org/reports/global-energy-review-2021>
- [2] “Renewable electricity,” IEA, 2022. [En ligne]. Disponible : <https://www.iea.org/reports/renewable-electricity>
- [3] “Demand response,” IEA, 2022. [En ligne]. Disponible : <https://www.iea.org/reports/demand-response>
- [4] Y. H. O.M. Babatunde, J.L. Munda, “Power system flexibility : A review,” *Energy Reports*, vol. 6, n°. Supplement 2, p. 101–106, 2020.
- [5] D. S. Callaway et I. A. Hiskens, “Achieving controllability of electric loads,” *Proceedings of the IEEE*, 2011.
- [6] A. R. Coffman, N. Cammardella, P. Barooah et S. Meyn, “Aggregate flexibility capacity of tcls with cycling constraints,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 38, n°. 1, p. 52–62, 2023.
- [7] D. S. Callaway, “Tapping the energy storage potential in electric loads to deliver load following and regulation, with application to wind energy,” p. 1389–1400, 2009. [En ligne]. Disponible : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0196890408004780>
- [8] D. Docimo et H. K. Fathy, “Demand Response Using Heterogeneous Thermostatically Controlled Loads : Characterization of Aggregate Power Dynamics,” *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 139, n°. 10, 06 2017, 101009. [En ligne]. Disponible : <https://doi.org/10.1115/1.4036557>
- [9] “Futurs énergétiques 2050,” RTE, 2022. [En ligne]. Disponible : <https://rte-futursenergetiques2050.com/documents>
- [10] L. Gkatzikis, I. Koutsopoulos et T. Salonidis, “The role of aggregators in smart grid demand response markets,” *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 31, n°. 7, p. 1247–1257, 2013.
- [11] C. Eid, P. Codani, Y. Chen, Y. Perez et R. Hakvoort, “Aggregation of demand side flexibility in a smart grid : A review for european market design,” dans *2015 12th International Conference on the European Energy Market (EEM)*, 2015, p. 1–5.
- [12] J. C. Fuller, K. P. Schneider et D. Chassin, “Analysis of residential demand response and double-auction markets,” dans *2011 IEEE Power and Energy Society General Meeting*, 2011, p. 1–7.

- [13] M. S. Nazir et I. A. Hiskens, “A dynamical systems approach to modeling and analysis of transactive energy coordination,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 34, p. 4060–4070, 2018.
- [14] M. S. Nazir et I. Hiskens, “Analysis of synchronization in load ensembles,” *Electric Power Systems Research*, vol. 190, p. 106779, 2021. [En ligne]. Disponible : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378779620305824>
- [15] —, “Load synchronization and sustained oscillations induced by transactive control,” 2017.
- [16] A. Thomas et L. Tesfatsion, “Braided cobwebs : Cautionary tales for dynamic pricing in retail electric power markets,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. PP, p. 1–1, 05 2018.
- [17] S. Bashash et H. Fathy, “Modeling and control of aggregate air conditioning loads for robust renewable power management,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 21, n^o. 4, p. 1318–1327, 2013.
- [18] S. N. Backhaus, N. Sinitzyn, S. Kundu et I. Hiskens, “Modeling and control of thermostatically controlled loads,” 1 2011. [En ligne]. Disponible : <https://www.osti.gov/biblio/1045412>
- [19] L. Totu, R. Wisniewski et J. Leth, “Demand response of a tcl population using switching-rate actuation,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. PP, p. 1–15, 10 2016.
- [20] M. Ghanavati et A. Chakravarthy, “Demand-side energy management by use of a design-then-approximate controller for aggregated thermostatic loads,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 26, n^o. 4, p. 1439–1448, 2018.
- [21] R. P. Malhamé et C.-Y. Chong, “Electric load model synthesis by diffusion approximation of a high-order hybrid-state stochastic system,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 30, p. 854–860, 1985.
- [22] A. R. Coffman, A. Bušić et P. Barooah, “Control-oriented modeling of tcls,” dans *2021 American Control Conference (ACC)*, 2021, p. 4148–4154.
- [23] Q. Lénet, M. S. Nazir et R. P. Malhamé, “An inverse nash mean field game-based strategy for the decentralized control of thermostatic loads,” *60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2021.
- [24] S. Meyn, P. Barooah, A. Busic, Y. Chen et J. Ehren, “Ancillary service to the grid using intelligent deferrable loads,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 60, 12 2014.

- [25] A. Bandyopadhyay, B. D. Leibowicz, E. A. Beagle et M. E. Webber, “As one falls, another rises? residential peak load reduction through electricity rate structures,” *Sustainable Cities and Society*, vol. 60, p. 102191, 2020. [En ligne]. Disponible : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2210670720301785>
- [26] J. W. Thomas, *Numerical Partial Differential Equations : Finite Difference Methods*, 1995.
- [27] L. Pichler, A. Masud et L. A. Bergman, *Numerical Solution of the Fokker–Planck Equation by Finite Difference and Finite Element Methods—A Comparative Study*. Dordrecht : Springer Netherlands, 2013, p. 69–85. [En ligne]. Disponible : https://doi.org/10.1007/978-94-007-5134-7_5

ANNEXE A VALEURS NUMÉRIQUES

Cette annexe récapitule les valeurs numériques d'intérêt servant notamment aux simulations (celles des β et γ peuvent être trouvées en section 3.3.3).

Tableau A.1 Valeurs numériques des paramètres

Symbole	Valeur	Unité
U_a	0.002	$kW/({}^{\circ}Cm^2)$
C_a	300	$kWmin/({}^{\circ}C)$
A	100	m^2
Q	10	kW
σ	0.075	${}^{\circ}C/\sqrt{(min)}$
x_a	-5	${}^{\circ}C$
Δt	1	<i>minute</i>
Δx	0.012	${}^{\circ}C$
T_{min}	15	${}^{\circ}C$
T_{max}	27	${}^{\circ}C$
p_{min}	0.05	S.A
p_{max}	19.997	S.A
x_{C_0}	17	${}^{\circ}C$
x_{C_1}	21	${}^{\circ}C$
x_{C_2}	25	${}^{\circ}C$
ΔT	0.5	${}^{\circ}C$

Les paramètres U_a, C_a, A, Q, σ correspondent à la modélisation thermique des foyers, $\Delta t, \Delta x, T_{min}, T_{max}, p_{min}$ et p_{max} sont ceux relatifs aux simulations, tandis que $x_{C_0}, x_{C_1}, x_{C_2}$ et ΔT se réfèrent aux températures de consigne des thermostats et de leur zone morte. La température extérieure x_a peut prendre des valeurs changeantes lorsque des exemples concrets sont utilisés auxquels cas il faut se référer au graphe fourni.