

Titre: Développement d'une formulation pour l'étude du comportement dynamique non linéaire des coques cylindriques isotropes
Title: Development of a formulation for the study of the dynamic behavior of isotropic cylindrical shells

Auteurs: Yacine Ben Youssef, Aouni A. Lakis, & Youcef Kerboua
Authors: Yacine Ben Youssef, Aouni A. Lakis, & Youcef Kerboua

Date: 2020

Type: Rapport / Report

Référence: Ben Youssef, Y., Lakis, A. A., & Kerboua, Y. (2020). Développement d'une formulation pour l'étude du comportement dynamique non linéaire des coques cylindriques isotropes. (Rapport technique n° EPM-RT-2020-01).
Citation: Ben Youssef, Y., Lakis, A. A., & Kerboua, Y. (2020). Développement d'une formulation pour l'étude du comportement dynamique non linéaire des coques cylindriques isotropes. (Rapport technique n° EPM-RT-2020-01).
<https://publications.polymtl.ca/5321/>

Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/5321/>
PolyPublie URL: https://publications.polymtl.ca/5321/

Version: Version officielle de l'éditeur / Published version

Conditions d'utilisation: Tous droits réservés / All rights reserved
Terms of Use: Terms of Use

Document publié chez l'éditeur officiel

Document issued by the official publisher

Institution: Polytechnique Montréal

Numéro de rapport: EPM-RT-2020-01
Report number: EPM-RT-2020-01

URL officiel:
Official URL:

Mention légale:
Legal notice:

EPM-RT-2020-01

**Développement d'une formulation pour l'étude du
comportement dynamique non linéaire des coques
cylindriques isotropes**

Yacine Ben Youssef, Aouni A. Lakis, Youcef Kerboua.

Juillet 2020

Poly



EPM-RT-2020-01

Développement d'une formulation pour l'étude du comportement dynamique non linéaire des coques cylindriques isotropes

Yacine Ben Youssef, Aouni A. Lakis, Youcef Kerboua

Département de génie mécanique
École Polytechnique de Montréal

Juillet 2020

©2020
Yacine Ben Youssef, Aouni A. Lakis, Youcef Kerboua
Tous droits réservés

Dépôt légal :
Bibliothèque nationale du Québec, 2020
Bibliothèque nationale du Canada, 2020

EPM-RT-2020-01

Développement d'une formulation pour l'étude du comportement dynamique non linéaire des coques cylindriques isotropes

par : Yacine Ben Youssef, Aouni A. Lakis, Youcef Kerboua

Département de génie mécanique

École Polytechnique de Montréal

Toute reproduction de ce document à des fins d'étude personnelle ou de recherche est autorisée à la condition que la citation ci-dessus y soit mentionnée.

Tout autre usage doit faire l'objet d'une autorisation écrite des auteurs. Les demandes peuvent être adressées directement aux auteurs (consulter le bottin sur le site <http://www.polymtl.ca/>) ou par l'entremise de la Bibliothèque :

École Polytechnique de Montréal
Bibliothèque – Service du Prêt entre bibliothèques
Case postale 6079, Succursale «Centre-Ville»
Montréal (Québec)
Canada H3C 3A7

Téléphone : (514) 340-4846
Télécopie : (514) 340-4026
Courrier électronique : biblio.sfd@courriel.polymtl.ca

Ce rapport technique peut-être repéré par auteur et par titre dans le catalogue de la Bibliothèque :
<https://polymtl.on.worldcat.org/>

*"Toute parole tend à fixer quelque chose qui semble désirer d'être fixé, et périr de l'être.
On ne peut donc ni se taire, ni parler, sans se corriger perpétuellement."*

Philippe Jacottet, L'obscurité, 1961.

Résumé

Les structures minces auxquelles l'industrie fait de nos jours appel, sont sujettes à des sollicitations conduisant aux grands déplacements. Ces grandes amplitudes se manifestent par des non linéarités de type géométriques. Le développement des méthodes analytiques et numériques optant pour le contrôle et l'atténuation des vibrations de telles structures a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche et a suscité l'intérêt de la communauté scientifique dans la dernière décennie au niveau international.

S'inscrivant dans le même contexte, le présent travail exhibe une nouvelle formulation combinant la théorie non linéaire de Novozhilov avec la méthode des éléments finis classique et visant l'évaluation des caractéristiques vibratoires des structures cylindriques minces, fermées et isotropes. La théorie, développée dans ce manuscrit, tient en compte de l'effet de courbure au niveau du champ de déplacement circonférentiel et considère l'impact des imperfections géométriques initiales sur la réponse dynamique du système. La formulation prend d'abord une forme générale en considérant le champ de déplacement comme une alliance entre une fonction temporelle et une autre spatiale. Les relations cinématiques non linéaires sont induites de la théorie de Novozhilov. L'équation de mouvement ainsi que les matrices de masse et de rigidité linéaire et non linéaire qui en découlent, sont déterminées en employant les équations de Lagrange et en tenant compte de la phénomologie de couplage entre les différents modes. Une application de ce modèle a été illustrée dans un second temps en adoptant le champ de déplacement représentant la solution exacte des équations d'équilibres de Sanders issues de l'analyse linéaire. La résolution de l'équation de mouvement se base principalement sur le principe de linéarisation en procédant d'abord à une transformation du système dans sa base modale. Les résultats ressortis de cette théorie montrent une excellente concordance avec ceux trouvés dans la littérature. L'effet des ratios (longueur/rayon) et (épaisseur/rayon) ainsi que la fluctuation des conditions aux limites sont explorés dans cette analyse.

Table des matières

Résumé	3
Table des matières	4
Liste des figures	6
Liste des tableaux	8
Introduction	1
1. Revue littéraire	3
2. Généralité sur la non linéarité en mécanique des solides	8
2.1. Non linéarité géométrique (Cinématique)	9
2.2. Non linéarité matérielle (Rhéologique)	9
2.2.1. Élasticité non linéaire	9
2.2.2. Plasticité	9
2.3. Non linéarité de contact	10
3. Tenseur de déformation Green-Lagrange	10
4. Différentes théories modélisant la non linéarité géométrique	13
5. Fondement théorique	16
5.1. Relations cinématiques non linéaires de Novozhilov	17
5.2. Formulation	18
5.2.1. Évaluation de l'énergie cinétique T	28
5.2.2. Évaluation de l'énergie de déformation élastique V	29
6. Étude de cas	37
6.1. Matrice de masse	37
6.2. Matrice de rigidité	38
6.2.1. Matrice de rigidité non linéaire d'ordre 2 $\left[\mathbf{K}^{(NL2)} \right]$	42
6.2.2. Matrice de rigidité non linéaire d'ordre 3 $\left[\mathbf{K}^{(NL3)} \right]$	51
7. Résultats et discussion	56
7.1. Test de convergence	56
7.2. Validation du Modèle linéaire	57
7.3. Validation du Modèle non linéaire	58
7.4. Effet du couplage non linéaire	63
7.5. Effet du nombre d'ondes axiales M	64
7.6. Effet du nombre d'ondes circonférentielles N	65
7.7. Effet des caractéristiques géométriques	66
7.7.1. Effet du ratio l/R	67
7.7.2. Effet du ratio h/R	68
7.8. Effet des conditions aux limites	69

Conclusion Générale	71
Bibliographie	72
Appendices	76
Appendice A	76
Appendice B	77

Liste des figures

Figure 1 Topologie de déformation d'un élément matériel dans les configurations initiales (X, P, Q) et déformées (x, p, q)	11
Figure 2 Champ de déplacement axial, circonférentiel et radial d'un point quelconque d'une coque cylindrique situé à une distance z du plan moyen	12
Figure 3 Variation de l'erreur relative des fréquences propres en fonction du nombre d'éléments finis. Pour (3.a) $n = 2$, (3.b) $n = 3$ tel que Erreur (%) = $(\omega_{NFE} - \omega_{30FE}) / \omega_{NFE} \times 100$	57
Figure 4 Évolution de la fréquence non linéaire en fonction de l'amplitude de vibration en comparant le présent modèle à ceux de Nowenski [5], Raju & al [23] et à celui de Selmane [27] avec $m = 1$ et $n = 4$	60
Figure 5 Tendance non linéaire pour le cas d'une coque cylindrique simplement-librement supportée ($v = w = 0$) tel que $\psi = \left(\frac{n^2 h}{R} \right)^2 = 1.0$, $\nu = 0.3$ (5.a) $\xi = \frac{\pi R / n}{l/m} = 2.0$, (5.b) $\xi = \frac{\pi R / n}{l/m} = 0.5$	62
Figure 6 Comportement non linéaire raidissant d'une coque cylindrique simplement supportée pour les cas sans couplage et avec couplage	64
Figure 7 Variation du rapport de fréquences ω_{NL} / ω_L en fonction du ratio A/h pour différentes valeurs du mode axiale m en considérant que $n = 10$	65
Figure 8 Variation du rapport de fréquences ω_{NL} / ω_L (8.a) et de la fréquence non linéaire (8.b) en fonction du ratio A/h pour différentes valeurs du nombre d'ondes circonférentielles n	66
Figure 9 Variation du rapport de fréquences ω_{NL} / ω_L (9.a) et de la fréquence non linéaire (9.b) en fonction du ratio l/R pour différentes valeurs de l'amplitude adimensionnelle A/h	67
Figure 10 Variation du rapport de fréquences ω_{NL} / ω_L en fonction du ratio h/R pour différentes valeurs de l'amplitude adimensionnelle A/h	68
Figure 11 Variation du rapport de fréquences ω_{NL} / ω_L (11.a) et de la fréquence non linéaire (11.b) en fonction du ratio h/R pour différentes valeurs de l'amplitude adimensionnelle A/h	70
Figure.A. 1 Variation du rapport de fréquences ω_{NL} / ω_L en fonction du ratio A/h pour différentes valeurs du mode axiale m en considérant $n = 4$	76

Figure.B. 1 Variation du rapport de fréquences ω_{NL}/ω_L (B.1.a) et de la fréquence non linéaire (B.1.b) en fonction du ratio A/h pour différentes conditions aux limites de type simplement supportée (convention de Tong [54])	77
Figure.B. 2 Variation du rapport de fréquences ω_{NL}/ω_L (B.2.a) et de la fréquence non linéaire (B.2.b) en fonction du ratio A/h pour différentes conditions aux limites de type encastrée (convention de Tong [54])	78

Liste des tableaux

<i>Tableau 1 Fréquences Naturelles (Hz) d'une coque cylindrique encastrée des deux côtés</i>	58
<i>Tableau 2 Différents types des conditions aux rives d'après la convention de Tong [54]</i>	69

Introduction

Pour des raisons d'économie et de sécurité de plus en plus sévères, les ingénieurs se sont focalisés sur les problèmes de vibration et de la dynamique des structures afin de les maîtriser. Une des difficultés principales auxquelles ils se sont confrontés est le caractère non linéaire des vibrations. Plusieurs recherches en la matière ont été révélées afin de pouvoir fournir des prédictions correctes, tant qualitativement que quantitativement.

Les moyens de calcul de l'époque limitaient les applications à des approches analytiques et à des modèles à faible nombre de degrés de liberté.

Au cours des dernières décennies, les techniques dédiées pour la résolution des problèmes liés aux structures ont connu un essor considérable, suscité par les besoins industriels et appuyé par les progrès effectués dans le domaine informatique. En effet, de nos jours la méthode des éléments finis est couramment utilisée pour l'analyse du comportement des structures se trouvant dans plusieurs secteurs de l'industrie tel que le nucléaire, l'aérospatial, la construction navale, le génie civil, la mécanique, etc.

Le caractère non linéaire lié aux grands déplacements donne naissance à des effets géométriques qui se manifestent par une non linéarité au niveau des relations cinématiques (Déformation-Déplacement). La prise en compte de ce type de non linéarité lors de l'étude des vibrations des structures minces, est actuellement un domaine de recherche très actif et la connaissance de ce type de comportement fait appel à la théorie de la mécanique des milieux continus qui permet de décrire le comportement du système physique à l'aide des équations aux dérivées partielles. Celles-ci requièrent en cas de grands déplacements une description de mouvement qui soit eulérienne, convient surtout aux problèmes de mécanique de fluide, soit lagrangienne qui s'adapte à l'analyse des solides.

C'est dans cette perspective que se situe ce manuscrit optant pour la mise en place d'une théorie permettant de modéliser et prédire le comportement dynamique d'une structure cylindrique mince isotrope et géométriquement non linéaire. L'idée de base de ce travail s'inspire de l'approche hybride fondée par Lakis [46], elle repose sur la combinaison entre la théorie non linéaire des coques de Novozhilov avec la méthode des éléments finis classique.

La présente formulation est structurée dans un premier temps sous une forme générale pour laquelle le champ de déplacement est exprimé sous une forme ralliant des fonctions temporelles avec celles spatiales tout en tenant compte de l'effet de courbure dans la direction circonférentielle et des imperfections géométriques initiales présentées sous la forme d'un déplacement radiale. Le champ de déformation prend à son tour une forme générale déduite à partir de la projection du champ de déplacement dans les relations cinématiques de Novozhilov. L'équation de mouvement ainsi que les matrices de masse et de rigidité linéaire et non linéaire sont déduites à partir des équations de Lagrange reposant sur une approche énergétique.

Une deuxième partie de ce manuscrit consiste à attribuer au champ de déplacement, l'expression de la solution exacte des équations de Sanders [46] issue de l'analyse linéaire. L'équation de mouvement est transformée dans la base modale puis résolue par le biais de

la méthode de linéarisation. Le couplage non linéaire entre les différents modes est pris en considération dans cette étude. Les résultats validés par rapport à celles se trouvant dans la littérature, ont montré une excellente concordance. L'effet des nombres d'ondes circonférentiels et axiales, l'influence de quelques paramètres géométriques tel que les ratios longueur-rayon et rayon-épaisseur ainsi que l'impact de la fluctuation des différents conditions aux limites sont examinés dans cette analyse.

1. Revue littéraire

Les coques cylindriques minces sont des structures de grande envergure. Elles sont très répondues dans les domaines stratégiques et économiquement importants tel que les industries aérospatiale et sous-marine, dans le domaine énergétique et en génie civil. Ces structures sont souvent sujettes à des sollicitations créant de grands déplacements, de l'ordre de leurs épaisseurs, ce qui donne naissance à des non linéarités de type géométriques. Ceci se traduit analytiquement par un changement dans la nature des relations cinématiques (déformation-déplacement) qui devient non linéaire malgré que le matériau demeure élastique linéaire. Ce phénomène est considéré comme un sujet d'actualité qui a suscité les chercheurs dans les dernières décennies et qui a fait d'ailleurs l'objet de nombreuses recherches dans le domaine afin de dégoter des modèles traduisant le plus le comportement réel et combinant à la fois la simplicité et l'économie en termes de coût et de temps de calcul.

Le pionnier qui a étudié le comportement dynamique non linéaire des coques cylindriques circulaires fût *Reissner* [1]. Il a dressé son étude sur un lobe en lui considérant comme un panneau circulaire simplement supportée, et il a recours à la théorie non linéaire des coques surbaissées de Donnell afin de développer son modèle. Reissner a trouvé que la non-linéarité peut être de type assouplissante ou raidissante dépendamment de la géométrie de la structure.

Grigolyuk [2] a étudié les vibrations libres non linéaires d'un panneau cylindrique circulaire simplement supporté des quatre côtés en utilisant la même théorie de coque employée par *Reissner* [1]. Ses résultats ont révélés un comportement non linéaire raidissant.

Chu [3] a poursuivi le travail de Reissner en examinant cette fois ici l'influence des grandes amplitudes sur la vibration flexionnelle d'une coque cylindrique circulaire mince et fermée. Il a constaté que la non-linéarité dans ce cas conduit à des caractéristiques raidissantes pouvant devenir dans certains cas assez fortes.

Cummings [4] a confirmé l'analyse de *Reissner* portant sur les panneaux cylindriques circulaires simplement supportées des quatre côtés ; il a également examiné le flambement dynamique ainsi que la réponse transitoire aux charges impulsives et échelonnées.

Nowenski [5] a confirmé les résultats obtenus par Chu et ce à travers l'analyse des vibrations non linéaires transverses des coques cylindriques orthotropes. Il a signalé qu'une forte diminution de la période de vibrations est associée à une croissance de l'amplitude de déplacement

Evensen [6] a signalé dans une étude expérimentale qu'il a réalisée sur des coques cylindriques fermées vibrant à des amplitudes atteignant 3 fois voire 4 fois l'épaisseur des coques, que les non linéarités trouvées ont un caractère assouplissant. Afin de réconcilier entre les études théoriques développées et son étude expérimentale, *Evensen* [7] a introduit une nouvelle expression du champ de déplacement radial induit de la théorie non linéaire

des coques surbaissées de *Donnell* [7]. Il a fortifié l'expression de la fonction du déplacement en lui ajoutant une expression du mode compagnon associée à un terme de contraction axisymétrique. La continuité de la fonction de déplacement circonférentielle est assurée dans cette analyse. *Evensen* [8] a examiné dans un autre article l'influence de la pression et de la charge axiale sur les vibrations non linéaires en assumant la même approche citée dans son article précédent et en négligeant cette fois ci le mode compagnon.

Matzusaki et Kobayashi [10] ont étudié théoriquement les vibrations non linéaires des coques cylindriques circulaires simplement supportés en se basant sur la théorie non linéaire des coques surbaissées de Donnell. Les auteurs ont inspirés leurs travaux de l'analyse proposée par *Evensen* [7] tout en accordant un signe opposé au terme axisymétrique. L'effet de l'amortissement structural a été également évoqué dans leur analyse. Dans une seconde étude, *Matzusaki et Kobayashi* [10] ont examiné théoriquement et expérimentalement les vibrations non linéaires des coques cylindriques encastrées. Les solutions homogènes et particulières de la fonction des contraintes sont prises en considération dans cette analyse. Le comportement non linéaire trouvé dans cette étude est de type assouplissant.

Dowell et Ventres [11] ont étudié les vibrations flexionnelles non linéaires des coques cylindriques minces en proposant une nouvelle approche optant pour la satisfaction exacte des conditions aux limites hors du plan. *Atluri* [12] a utilisé la même approche développée par ces auteurs et a signalé qu'il manquait quelques termes dans l'une de leurs équations. *Dowell et Ventres* [13] ont récemment corrigé cette omission, et ont trouvé avec Atluri que la non linéarité est caractérisée par une tendance raidissante.

Varadan et al [14] ont souligné que le caractère raidissant des vibrations non linéaires révélé par Dowell et Ventres et Atluri est dû au choix du terme axisymétrique présenté dans leurs études. *Prathap* [15] a souligné l'existence de quelques incohérences trouvées dans l'analyse mathématique effectuée par *Evensen*.

El-Zaouk et Dym [16] ont analysé l'effet de courbure, de l'orthotropie et de la pression interne sur les vibrations non linéaires des coques circulaires possédant une courbure des génératrices et ce par l'application de la théorie non linéaire des coques surbaissées de Donnell. Les résultats numériques issus de cette analyse ont montré un comportement assouplissant qui devient raidissant relativement aux grandes amplitudes de déplacement pouvant atteindre jusqu'à 30 fois l'épaisseur de la coque.

Ginsberg [17,18] a employé plusieurs approches pour résoudre le problème des vibrations asymétriques et axisymétriques des coques cylindriques circulaires. Les équations cinématiques sont décelées à partir de la théorie non linéaire de Flügge-Lur'e-Byrne [17] et l'équation de mouvement est révélée en adoptant une approche énergétique conduisant ainsi à la détermination des équations de Lagrange. Cette dernière a été par la suite résolue en se basant sur la méthode de balance harmonique. Le comportement non linéaire soulevé dans cette étude peut être raidissant ou assouplissant dépendamment de quelques paramètres du système.

Radwan et Genin [19] ont développé des équations non linéaires modales pour des coques élastiques minces de géométrie arbitraire et d'épaisseur variable (restant toujours dans la limite de la théorie des coques minces) tout en tenant compte des imperfections géométriques initiales et en se basant sur les relations cinématiques induites de la théorie non linéaire de *Sanders-Koiter* [20,21]. Leur équation de mouvement découle des équations de mouvement de Lagrange. Les auteurs ont adopté par la suite leur théorie au cas d'un cylindre fermé et simplement supporté en négligeant le couplage non linéaire entre les différents modes.

Radwan et Genin [22] ont ultérieurement étendu leur étude pour intégrer le couplage non linéaire avec des modes axisymétriques.

Raju et Rao [23] ont analysé les vibrations non linéaires asymétriques des coques de révolution en utilisant la méthode des éléments finis et en se basant sur les relations cinématiques de Sander-Koiter pour déceler les matrices de masse et de rigidité. L'effet de l'inertie membranaire est pris en considération dans cette étude et le comportement non linéaire trouvé est de type raidissant.

Chiba [24] a dressé une étude expérimentale portant sur deux coques cylindriques en porte à faux fabriquées en feuilles de polyester. L'auteur a signalé que toutes les réponses trouvées ont montré un comportement assouplissant du système. De plus il a constaté que le caractère assouplissant des vibrations non linéaires s'avère plus accentué au fur et à mesure que les structures soient moins élancées.

Ganapathi et Varadan [25] ont étudié les vibrations non linéaires libres des coques cylindriques circulaires en utilisant les équations cinématiques de Novozhilov associées à la méthode des éléments finis. L'élément utilisé est un quad-4 (4 nœuds) de type coque à double courbures, possédant 5degrés de liberté pour chaque nœud, et avec épaisseur modérée. La formulation tient en compte de l'effet de l'anisotropie, de la déformation de cisaillement transverse et des effets d'inerties membranaires et rotatifs. L'équation de mouvement est décelée à partir des équations de Lagrange et résolue en utilisant la méthode d'intégration numérique Wilson-θ avec $\theta=1.4$

Selmane et Lakis [26] ont présenté une nouvelle approche pour prédire l'influence des non linéarité géométriques sur les vibrations libres des coques cylindriques minces, ouvertes, orthotropes et simplement supportées. La méthode hybride utilisée est une alliance entre la méthode des éléments finis classique avec la théorie des coques minces. La solution globale du problème est divisée en deux parties, la première étape consiste à déterminer les matrices de masse et de rigidité linéaire à partir de la théorie linéaire des coques minces de Sanders. La deuxième partie repose sur la détermination des matrices de rigidité non linéaires d'ordre 2 et d'ordre 3 et ce en se référant à la théorie non linéaire des coques minces de Sanders-Koiter intégrant les fonctions de déplacements linéaires issus de la première partie . Les matrices globales de masse et de rigidité sont ensuite décelées en appliquant la procédure des éléments finis. L'équation de mouvement est résolue en employant la méthode numérique Runge-Kutta d'ordre 4. *Lakis et al* [27] ont présenté entre

autres une analyse similaire dédiée pour l'analyse des coques cylindriques orthotropes fermées. Le comportement non linéaire trouvé est de type raidissant.

Amabili et al [28] ont examiné les vibrations non linéaires, libres et forcées des coques cylindriques vides et remplies de fluide. Leur formulation emploie trois degrés de liberté : deux modes asymétriques et un terme axisymétrique incluant le premier et le troisième mode. Les résultats obtenus dans cette analyse ont montré un comportement non linéaire de type assouplissant ce qui est en concordance avec les résultats trouvés par *Olson* [29].

Kubenko et Koval'chuk [30] ont utilisé la théorie non linéaire des coques surbaissées de Donnell avec la méthode de Galerkin pour étudier les vibrations non linéaires des coques cylindriques simplement supportées. Les auteurs ont négligé le terme axisymétrique de leur fonction de déplacement et ont considéré l'interaction entre deux modes pour différents valeurs du nombre d'ondes circonférentielles.

L'étude du comportement non linéaire des coques cylindriques minces simplement supportées a été examinée par *Mao et Williams* [31,32] en se penchant à une théorie des coques similaire à celle de Sanders tout en négligeant l'effet de l'inertie axial et sans prendre en considération les termes de contraction axisymétriques.

Amabili [33] a examiné l'effet de la non linéarité géométrique sur le comportement dynamique des coques cylindriques simplement supportées et soumises à des excitations harmoniques s'exerçant au voisinage de la fréquence fondamentale. Cette analyse a employé cinq théories non linéaires des coques qui sont : *i)* la théorie des coques surbaissées de Donnell, *ii)* la théorie de Donnell en considérant l'effet des inerties membranaires, *iii)* la théorie de Sanders-Koiter, *iv)* la théorie de Flügge Lur'e-Byrne *v)* et celle de Novozhilov. Les équations de mouvements issus de toutes ces théories excepté la première, sont décelées à partir des équations de Lagrange en tenant compte de l'amortissement visqueux. La formulation est aussi validée pour le cas des plaques stratifiées pourvues de la symétrie miroir, ainsi que pour le cas des coques soumises à un écoulement potentiel. Elle a aussi pris en considération l'effet de la pression radiale aussi bien que de la charge axiale. Quant aux coques remplies d'eau, il a été constaté que l'existence des forces de compression axiale et de la pression radiale externe a fait accentuer le caractère assouplissant du comportement non linéaire.

Rougui et al [34] ont développé une approche semi analytique pour étudier les vibrations libres et forcées des coques cylindriques simplement supportées et ce à travers l'application des équations de Lagrange. Le problème variationnel, non linéaire est résolu par la suite grâce à la méthode de balance harmonique.

Avramov [35] a étudié les vibrations libres non linéaires des coques cylindriques en se basant sur la théorie de Donnell. L'auteur s'est servie de la méthode de Galerkin pour discrétiser le système des équations différentielles et a employé la méthode de balance harmonique pour trouver les modes de vibration non linéaires. L'analyse de stabilité a aussi été prise en considération.

Liu et Chiu [36] ont examiné les vibrations non linéaires des coques cylindriques minces en tirant profit de la théorie des coques minces de Love. Les équations de mouvement rotatif des coques cylindriques encastrées-libres sont décelées à partir du principe variationnel d'Hamilton. Le système est discrétisé en utilisant la méthode de Galerkin.

Les auteurs ont scruté l'effet des paramètres géométriques, de la température, des nombres d'ondes circonférentiel et axial et de la vitesse de rotation des coques, sur les fréquences naturelles. La réponse du système est analysée dans le domaine temporel et fréquentiel. L'effet de la non linéarité, de l'amortissement ainsi que la variation de l'excitation sur la réponse du système sont pris en considération dans cette étude.

Awrejcewicz et al [37] ont développé une formulation optant pour l'analyse des vibrations libres non linéaires des coques surbaissées et orthotropes de forme complexe et ayant des épaisseurs variables. Cette approche fondée sur la théorie non linéaire des coques surbaissées de Donnell, tient aussi en considération la variation des conditions aux limites.

Ramzi et Lakis [38] ont analysé les vibrations libres non linéaires des coques cylindriques minces et isotropes en employant une approche hybride basée sur une combinaison entre la théorie non linéaire de Sanders-Koiter avec la méthode des éléments finis classique. La fonction de déplacement est issue de la solution exacte des équations linéaires de Sanders. L'équation de mouvement est décelée à partir des équations de Lagrange et résolue en utilisant la méthode numérique Runge-Kutta.

Sofiyev [39] a examiné les vibrations libres non linéaires des coques cylindriques orthotropes (FG) en tenant en compte des contraintes de cisaillement transverses. Sa formulation est fondée sur la théorie de cisaillement transverse (SDT) et sur les relations cinématiques de Von-karman. Les propriétés matérielles de la coque varient exponentiellement à travers l'épaisseur de la coque. Les équations de mouvement sont décelées à partir de la théorie non linéaire de Donnell puis discrétisées à travers la méthode de Galerkin. Les équations de mouvement sont résolues à l'aide de la méthode de perturbation d'homotopie (HPM).

Sofiyev et al [40] ont évalué les vibrations non linéaires des coques cylindriques orthotropes fabriquées en composite. L'effet des grandes déformations est pris en compte par le biais des relations cinématiques de Von-Kármán. Les équations de mouvement sont développées en se référant à la théorie de cisaillement transverse de premier ordre. La discrétisation du système est établie en adoptant la méthode de Galerkin. La relation entre les fréquences et l'amplitude de vibration est avérée sous la forme de la fonction elliptique de Jacobi.

Dey et al [41] ont investigué le comportement dynamique non linéaire des coques cylindriques simplement supportées soumises à une charge ponctuelle radiale et à une charge axiale partiellement répartie. Cette dernière appliquée à bord est représentée sous la forme d'une série de Fourier. Les relations cinématiques non linéaires sont induites à partir de celles de Donnell en prenant en considération l'effet de cisaillement transverse et des imperfections géométriques initiales. Les inerties membranaire et rotative sont également prises en considération dans cette analyse et les équations de mouvement sont développées

à partir du principe variationnel d'Hamilton. Les auteurs ont recours à la méthode de Galerkin pour discréteriser le système et à la méthode de balance harmonique afin de résoudre les équations de mouvement.

Sheng et Wang [42] ont étudié les vibrations non linéaires des coques cylindriques en rotation en tenant compte de l'effet de la variation linéaire de la température étant propagée dans le sens de l'épaisseur. Les équations de mouvement sont fondées sur le principe variationnel d'Hamilton, sur la théorie non linéaire de Von-Kármán et sur la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre. L'effet des forces centrifuges et de Coriolis dus à la rotation des coques ainsi que l'effet des inerties membranaires et rotatifs sont pris en considération dans cette formulation. Les auteurs ont trouvé qu'en augmentant la vitesse de rotation de la coque cylindrique, leur mouvement passe de chaotique à quasi-périodique et périodique et finalement à périodique.

Hasrati et al [43] ont adopté la technique de variation quadratique différentielle (VDQ) pour analyser numériquement les vibrations à grande amplitudes des structures. La formulation présentée est un modèle à six paramètres développé pour un cas général puis appliqué pour des coques de type cylindriques et coniques. L'équation de mouvement est révélée en se basant sur le principe variationnel d'Hamilton puis discréterisée en utilisant la méthode (VDQ). L'effet des ratios (longueur sur rayon) et (épaisseur sur rayon) est discuté dans cette analyse.

Yadav et al [44] ont analysé la réponse vibratoire non linéaire des coques cylindriques simplement supportées et soumises à des charges thermo-mécaniques non uniformément répartie le long des bords et à une force harmonique radiale. Les relations cinématiques sont décelées en se rapportant à la théorie non linéaire de Von-Kármán et celle de déformation de cisaillement de premier ordre. Les équations de mouvement couplées sont déterminées à partir du principe variationnel d'Hamilton puis résolues pour les cas libre et forcé en se basant sur la méthode de balance harmonique ralliée à la méthode de continuation en pseudo longueur d'arc.

Li et al [45] ont dressé une étude expérimentale approfondie portant sur la vibration non linéaire d'une coque cylindrique mince supportée par des points. La coque cylindrique sujet de l'analyse est maintenue par des boulons. L'effet du nombre de points de support sur la réponse non linéaire de la coque est évoqué dans ce manuscrit. Les auteurs ont noté que l'augmentation du nombre de support engendre une diminution de l'amplitude de vibration.

2. Généralité sur la non linéarité en mécanique des solides

L'avènement technologique dans les dernières décennies, a conduit à l'utilisation des structures souples, flexibles et de forme de plus en plus complexe. Ce qui a incité les chercheurs et les ingénieurs à farfouiller de nouvelles solutions capables de modéliser convenablement tous les problèmes pratiques, quelle que soit leur complexité réelle. Il semble alors nécessaire de contourner toutes les simplifications draconiennes fondées sur les hypothèses très étroites de l'élasticité linéaire puisqu'ils conduisent à des résultats erronés dans ce cas de figure et d'introduire en conséquence un comportement qui se

rapproche le plus de la réalité. Pour y parvenir, les scientifiques ont recours à une analyse non linéaire afin de traduire fidèlement le comportement géométrique ou matériel des structures citées ci-dessus et d'assurer en conséquence, la sécurité et le bon fonctionnement des constructions.

On procède ainsi à une classification succincte de la non linéarité à travers une répartition en trois grandes familles baptisées : non linéarité géométrique, non linéarité matérielle et non linéarité de contact.

2.1. Non linéarité géométrique (Cinématique)

Elle provient lorsqu'une structure mécanique mince est sujette à des sollicitations créant de grands déplacements, de l'ordre de son épaisseur et éventuellement de grandes rotations pouvant être à l'origine des phénomènes d'instabilité par flambement surtout lorsque les pièces sont élancées. Dans ce cas-ci les relations cinématiques (déformation-déplacement) deviennent non linéaires, bien que le matériau reste élastique linéaire et l'hypothèse des petites perturbations considérée lors des problèmes mécaniques linéaires n'est plus valable. Celle-ci stipule tout de même, que géométrie déformée et initiale doivent rester relativement proches. L'équilibre du système dans ce cas de figure ne peut plus être traité dans la configuration initiale mais doit être exprimé dans la configuration déformée.

2.2. Non linéarité matérielle (Rhéologique)

Ce type de non linéarité est lié à la nature de comportement intrinsèque du matériau. Celui-ci ne peut plus être considéré comme élastique linéaire et il s'exprime le plus souvent sous la forme d'équations différentielles non-linéaires du premier ordre. D'une manière générale, la non-linéarité matérielle peut être décomposée en deux catégories principales :

2.2.1. Élasticité non linéaire

Elle se manifeste par une non proportionnalité d'accroissement entre les contraintes et les déformations qui en découlent, tout en assurant la réversibilité du processus une fois la structure est déchargée. Ce type de non linéarité touche souvent les matériaux élastiques "Green" ou hyperélastique pour lesquels l'énergie de déformation élastique n'est plus une fonction quadratique des composantes du tenseur de déformation infinitésimal. Il s'exprime en fonction des invariants des tenseurs de déformations tel que ceux de Green-Lagrange, de Cauchy-Green droit, de Cauchy-Green gauche,...

2.2.2. Plasticité

Elle est caractérisée par une décroissance irréversible de l'énergie au cours de la déformation. L'énergie mécanique est transformée en énergie thermique et la structure ne peut plus restituer sa position d'équilibre stable une fois déchargée. Ce mécanisme place des restrictions sur la direction du processus ainsi que sur les lois constitutives de l'élément étant donné qu'il dépend étroitement du trajet de chargement et donc des effets d'histoire. La plasticité traduit également la ductilité du matériau qui permet aux métaux de subir des allongements significatifs avant de rompre.

2.3. Non linéarité de contact

Ce type de non linéarité est lié à l'évolution des conditions aux limites et apparaît en particulier à la jonction entre solides. Il se manifeste dans les problèmes de contact, de frottement et de jeu au niveau de liaison entre solides. Ces phénomènes sont décrits généralement, par des inéquations.

3. Tenseur de déformation Green-Lagrange

Les non linéarités cités dessus sont souvent intrinsèquement liées entre elles et agissent généralement simultanément. La théorie non linéaire s'avère ainsi nécessaire pour en tenir compte et nécessite du fait des grands déplacements, d'employer une description de mouvement qui peut être soit :

- ❖ Lagrangienne (matérielle ou référentielle) si les variables indépendantes régissant le mouvement du corps sont les positions x d'une particule X dans une configuration de référence arbitraire et le temps t . cette description peut être appelée relative si les variables indépendantes sont les positions x d'une particule X dans une configuration de référence qui varie avec le temps t ($t = 0$). cette description est un cas particulier de la description lagrangienne et elle est appelée « description actualisée » [\[47\]](#)
- ❖ Eulérienne (spatiale) si les variables indépendantes régissant le mouvement du corps sont la position courante x d'une particule X et le temps t . Ainsi, la référence dans ce cas est la région de l'espace où passe le corps. Cette description est généralement utilisée pour l'étude des fluides. [\[47\]](#)

Des deux descriptions présentées, la description lagrangienne est celle qui semble la mieux adaptée aux problèmes non linéaires des structures. En effet, elle étudie le passage du corps comme étant une certaine quantité de matière se déplaçant dans l'espace, à partir d'une certaine référence connue.

Jusqu'ici nous avons supposé que la fluctuation de l'intensité de la cause (contraintes internes) produit une variation de l'effet (déformation qui en découle) dans les mêmes proportions. Par surcroît, on supposera dans tout ce qui suit que le comportement non linéaire est incité seulement par des effets géométriques. Quant à l'aspect cinématique de l'étude, on présume dresser une analyse qui tient compte des grands déplacements tout en considérant que les déformations demeurent petites. Par ailleurs, nous pouvons admettre que le matériau reste élastique, linéaire et isotrope. La notion de déformation en elle-même se profile comme une notion qui n'est pas immuable. Pourquoi ? En admettant l'hypothèse des petites perturbations (hpp), les tenseurs Lagrangiens et Eulériens s'avèrent pratiquement assimilables, toutefois lorsqu'on entame le domaine non linéaire, Ces grandeurs se diffèrent et d'autres déformations se révèlent tel que celles de Green et d'Almansi (également appelée déformation Lagrangienne et eulérienne).

La déformation de Green fournira, dans les directions cartésiennes, une perspicacité dans l'expression de grande déformation. La figure (1) montre un élément matériel dX de longueur dL_0 dans la configuration initiale se transforme en un élément dx de longueur dL dans la configuration déformée. u étant le vecteur de déplacement d'un point P de l'état

initial vers son homologue p dans l'état final. On définit ainsi le tenseur Green-Lagrange sous cette forme :

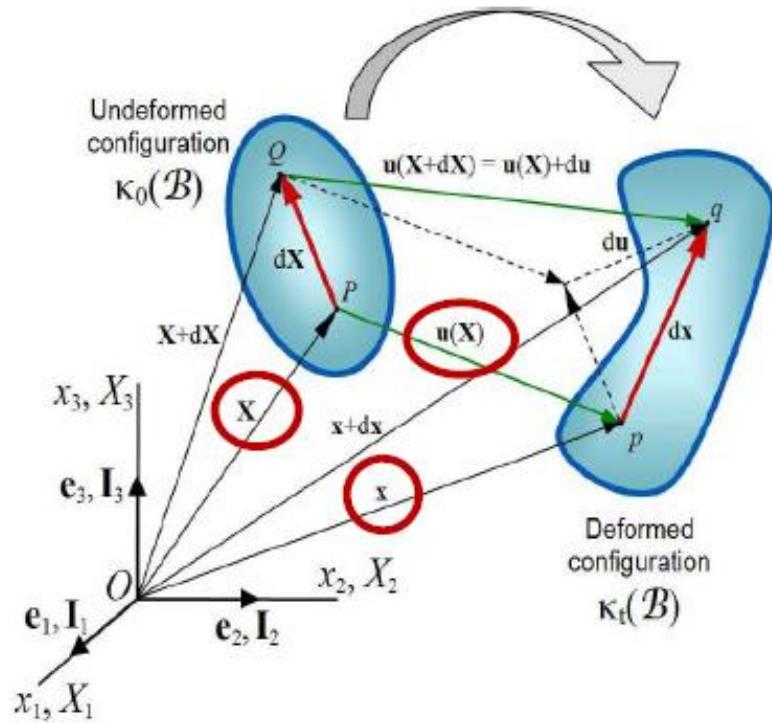


Figure 1 Topologie de déformation d'un élément matériel dans les configurations initiales (X, P, Q) et déformées (x, p, q)

$$e = \frac{1}{2} (C - I) = \frac{1}{2} [H + H^T + H^T H] \quad (1.a)$$

Soit en écriture indicelle :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (C_{ij} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2} [H_{ij} + H_{ji} + H_{mi}H_{mj}] \quad (1.b)$$

Avec

e : Tenseur Green-Lagrange

C : Tenseur Cauchy-Green droit, tel que $C = F^T F$ soit $C_{ij} = F_{mi}F_{mj}$

F : Tenseur du gradient Lagrangien de déformation tel que $F = I + H$

Soit $F_{ij} = \delta_{ij} + H_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$

H : Tenseur du gradient Lagrangien de déplacement soit $H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$

I : Tenseur d'Identité soit δ_{ij} le symbole de Kronecker

Soit un point matériel P d'une coque cylindrique fermée de coordonnées (x, θ, ρ) situé à une distance z du plan moyen tel que $\rho = R + z$ et pourvu des fonctions (u_1, u_2, u_3) définies respectivement comme le déplacement axial, circonférentiel et radial (Voir figure 2). Les fonctions (u, v, w) désignent les déplacements des points situés dans le plan moyen ($z = 0$) où z est la coordonnée dans la direction radiale. Comme le montre la figure (2), les déplacements u_3 et w sont considérés positives vers l'extérieur en tenant compte de la convention de la surface moyenne.

Les coordonnées du tenseur Green Lagrange sont définies dans le système de coordonnées cylindriques comme suit :

$$e_{11} = \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.a)$$

$$e_{22} = \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + u_3 \right) + \frac{1}{2\rho^2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial \theta} - u_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + u_3 \right)^2 \right] \quad (2.b)$$

$$2e_{12} = \gamma_{x\theta} = \left(\frac{\partial u_1}{\rho \partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial u_2}{\partial x} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + u_3 \right) + \frac{\partial u_3}{\partial x} \left(\frac{\partial u_3}{\partial \theta} - u_2 \right) \right] \quad (2.c)$$

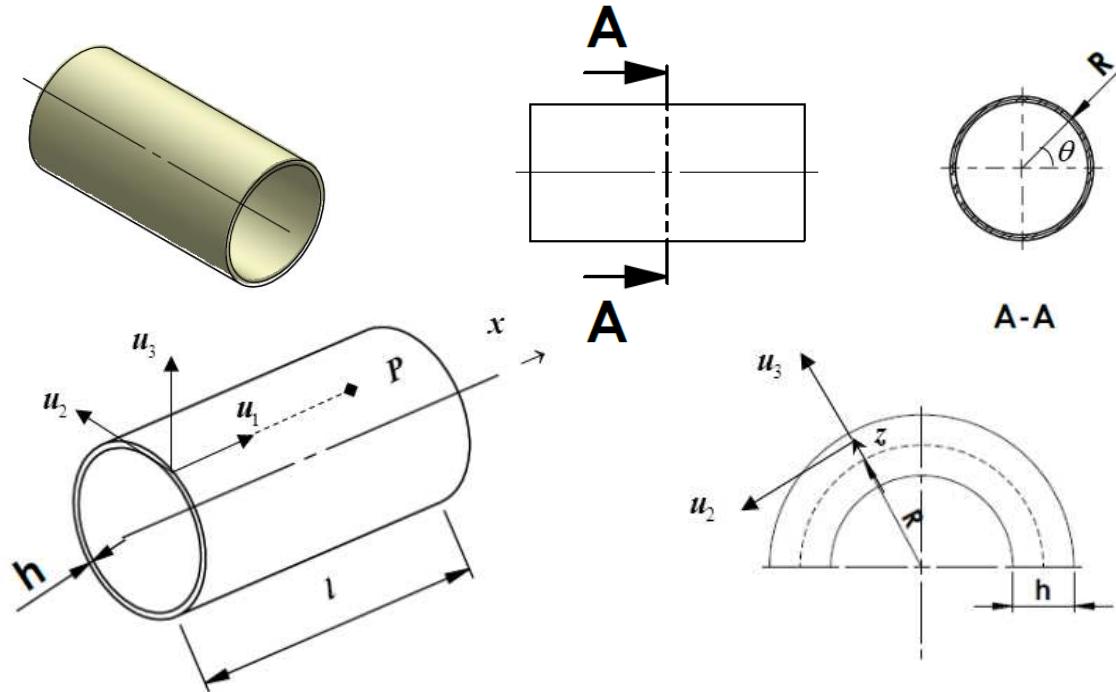


Figure 2 Champ de déplacement axial, circonférentiel et radial d'un point quelconque d'une coque cylindrique situé à une distance z du plan moyen

4. Différentes théories modélisant la non linéarité géométrique

Les coques sont en réalité des corps tridimensionnels et l'étude des contraintes et des déformations dans une coque mince se situe aussi donc dans le problème général de l'élasticité tridimensionnelle. Mais vu la complexité de l'analyse, Plusieurs chercheurs se sont penchés vers la simplification de ces problèmes en considérant l'épaisseur (h) faible par rapport au rayon de courbure (R) en un point ($R/h \geq 10$). L'approximation révélée dans cette approche consiste à confondre alors la coque avec sa surface de référence. Cette stratégie est très utilisée en analyse linéaire, non linéaire, et en dynamique, vu son efficacité d'une part, et sa simplicité de mise en œuvre, d'autre part. Toutefois, Cette simplification apportée doit trouver un cadre de justification et ne devant pas se faire au détriment de deux propriétés fondamentales, l'une est reliée au principe fondamental de la dynamique mettant en relief la conservation des efforts d'équilibre et l'autre concerne la conservation des énergies par unité de matière mises en jeu. Sur le plan analytique, l'analyse du comportement non linéaire des coques dites minces (d'après l'approximation citée dessus), a fait appel aux lois de la mécanique continue qui permet la description du phénomène physique par le biais des équations aux dérivées partielles. Divers modèles ont été cités dans la littérature parmi lesquelles on peut citer celles de Donnell [7], Flügge-Lur'e Byrne [17], Sander- Koiter [50,51] ou encore celle de Novozhilov [49]. Toutes ces théories sont fondées sur des hypothèses variées et ont misé sur la diversification du degré de complexité au niveau de leurs relations cinématiques.

Toutes ces théories cherchent essentiellement à exprimer le champ de déplacement d'un point quelconque de la coque situé à une distance z de la surface moyenne, en fonction du déplacement de son homologue situé sur la surface de référence tout en retenant comme hypothèse de base les rotations modérées de Kirchhoff-Love gouvernant le déplacement des normales.

Pour illustrer la différence entre ces diverses théories non linéaires, Considérons une coque cylindrique mince de longueur l , de rayon R , et d'épaisseur h . Les modèles cités dessus, sont établis sous les hypothèses suivantes :

- (H1) la coque est mince $h/R \ll 1$ (en pratique on admet que $h/R \leq 1/20$).
- (H2) Le déplacement transverse w est de l'ordre de l'épaisseur h .
- (H3) Les rotations sont faibles.
- (H4) Toutes les déformations sont petites de tel sorte que le comportement du matériau reste élastique linéaire.
- (H5) Les hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love sont respectées : tout segment normal et droit avant déformation reste normal et droit après déformation. Les contraintes

normales transverses ainsi que le cisaillement transverse sont négligés et les déformations varient linéairement tout au long de l'épaisseur de la coque.

(H6) La théorie de *Donnell* suppose que les déplacements tangentiels u et v sont considérés comme infinitésimales et néglige en conséquence les non linéarités membranaires. Les relations cinématiques (Déformation-Déplacement) tiennent ainsi compte des non linéarités liées au déplacement radial. Les inerties membranaires sont à leur tour ignorées.

(H7) les termes de l'inertie de rotation sont négligés

Rappelez-vous que notre étude porte sur les vibrations libres, des coques cylindriques minces géométriquement non linéaires et que les théories citées préalablement, se fondent tous sur les hypothèses mentionnées ci-dessus sauf pour la (H6) qui constitue une controverse entre les différents modèles.

Examinant de près l'aspect mathématique de chaque approche à travers la mise en équation du champ de déplacement découlant de chaque théorie. On se contente par l'application de ces modèles sur les coques cylindriques axisymétriques.

Considérons la coque cylindrique de la figure (2), et commençons par la théorie de *Donnell* [48] quant au développement de ses relations cinématiques. Cette dernière repose sur la théorie des plaques minces. Elle néglige l'effet de courbure au niveau du champ de déplacement circonférentiel et simplifie la courbe en l'idéalisant à une ligne droite. Le champ de déplacement axial, circonférentiel et radial (u_1, u_2, u_3) , d'un point générique situé à une distance z du plan moyen tel que $(-h/2 \leq z \leq h/2)$ est exprimé en fonction des déplacements de son homologue du plan de référence (u, v, w) sous cette forme [47] :

$$u_1 = u(x, \theta) - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.a)$$

$$u_2 = v(x, \theta) - z \frac{\partial w}{R \partial \theta} \quad (3.b)$$

$$u_3 = w(x, \theta) \quad (3.c)$$

En assumant que z est négligé ce qui donne cette relation $R + z \equiv R$.

Les relations cinématiques de *Donnell* (déformation-déplacement) sont décelées en injectant les relations (3.a – 3.c) dans les composantes du tenseur Green-Lagrange (2.a - 2.c). Les déformations auront la forme de :

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{x,0} + z k_x \quad (4.a)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta,0} + z k_\theta \quad (4.b)$$

$$\gamma_{x\theta} = \gamma_{x\theta,0} + z k_{x\theta} \quad (4.c)$$

Tels que $(\varepsilon_{x,0}, \varepsilon_{\theta,0}, \gamma_{x\theta,0})$ et $(k_x, k_\theta, k_{x\theta})$ représentent respectivement les déformations membranaires ainsi que celles flexionnelles et celles en torsion du plan moyen.

L'hypothèse (H6) est révoquée pour les théories de Novozhilov, Sanders-Koiter, et celle de Flügge-Lur'e-Byrne, ce qui prend particulièrement du sens lorsque l'on estime que les déplacements tangentiels sont pris en considération ou que la courbure des coques devient trop grande ou encore que l'épaisseur ne soit plus entièrement négligeable. L'inertie de membrane peut ainsi être préservée dans les équations du mouvement. Les simplifications opérées dans la formulation de *Donnell* ont été rectifiés par ces auteurs en introduisant des cinématiques plus complexes dans leurs modèles.

La cinématique dans la théorie de Flügge-Lur'e-Byrne [17] est complexifiée par la prise en compte d'une corrélation linéaire en fonction de la coordonnée transverse z contribuée par le déplacement circonférentiel des points situés dans le plan moyen et qui se manifeste par le terme $(v \times z / R)$.

Il convient également, pour mieux approximer le champ de déplacement de Flügge-Lur'e-Byrne, de prendre en considération l'effet des imperfections géométriques initiales induites sans contraintes initiales et qui se manifestent sous la forme d'un déplacement radial w_0 :

Ainsi le champ de déplacement de Flügge-Lur'e-Byrne [17] se traduit par les relations suivantes :

$$u_1 = u(x, \theta) - z \frac{\partial(w + w_0)}{\partial x} \quad (5.a)$$

$$u_2 = v(x, \theta) - \frac{z}{R} \left(\frac{\partial(w + w_0)}{\partial \theta} - v \right) \quad (5.b)$$

$$u_3 = w + w_0 \quad (5.c)$$

La théorie non linéaire de Sanders-koiter est exprimée dans une forme tensorielle. Elle a été développée par Sanders [50], subséquemment, les mêmes résultats ont été trouvés par Koiter [51]. Cette théorie, convenant avec des petites déformations et des rotations modérées, consiste à développer une formulation mathématique qui respecte les exigences mécaniques.

Le modèle de Novozhilov [49], utilise les mêmes hypothèses que celles de Flügge-Lur'e-Byrne avec l'emploi d'une expression plus complexe du champ de déplacement. Cette théorie stipule qu'une fibre droite et normale à la surface moyenne avant déformation demeure droite et normale après déformation sans qu'elle soit élongée. Cette hypothèse remplace la dernière partie de l'hypothèse (H5) dans la théorie de *Donnell* (les déformations varient linéairement tout au long de l'épaisseur de la coque). Ainsi le champ de déplacement de Novozhilov s'écrit de sous la forme suivante :

$$u_1 = u + z \cdot \beta \quad (6.a)$$

$$u_2 = v + z \cdot \psi \quad (6.b)$$

$$u_3 = w + w_0 + z \cdot \chi \quad (6.c)$$

Tel que

$$\beta = -\frac{\partial(w + w_0)}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R} \right) + \left(\frac{\partial(w + w_0)}{R \partial \theta} - \frac{v}{R} \right) \frac{\partial u}{R \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{w_0}{R} \quad (6.d)$$

$$\psi = -\left(\frac{\partial(w + w_0)}{R \partial \theta} - \frac{v}{R} \right) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial(w + w_0)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6.e)$$

$$\chi \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w + w_0}{R} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w + w_0}{R} \right) - \frac{\partial u}{R \partial \theta} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6.f)$$

Dans une étude qui a été menée par Amabili, abordant une comparaison entre les cinq principales théories traitant les problèmes géométriquement non linéaire des coques minces et employant trois composantes dans leurs champ de déplacement [33] (voir description du l'article dans la section *Revue littéraire*), L'auteur a révélé que les théories de Flügge-Lur'e-Byrne et celle de Novozhilov s'avèrent les plus précises parmi les cinq théories. C'est dans cette vision, que la théorie de Novozhilov, adoptant un champ de déplacement plus complexe, a été choisie dans ce manuscrit et ce dans le but de développer une formulation capable de prédire avec précision le comportement dynamique des coques cylindriques minces, isotropes et géométriquement non linéaire et d'effectuer en conséquence un dimensionnement plus rigoureux des structures.

5. Fondement théorique

Une bonne analyse exige une approche raisonnable du problème et mène à une approximation fiable du comportement non linéaire afin d'acquérir une évaluation réaliste de la structure.

La formulation développée dans ce rapport se base principalement sur la description Lagrangienne. Elle concerne l'étude des vibrations non linéaires géométriques (grande amplitude) des milieux continues minces, en particulier les coques cylindriques. Elle est basée sur une approche hybride s'inspirant de celle développée par Lakis *et al* [46] et présume entre autres une alliance entre la théorie non linéaire de Novozhilov et la méthode des éléments finis classique.

L'idée consiste à injecter le champ de déplacement de Novozhilov (6.a - 6.f) dans le champ de déformation de Green-Lagrange qui prend la forme des équations (2.a – 2.c) et de déceler en conséquence l'expression des relations cinématiques.

Le champ de déplacement introduit dans cette formulation prend une forme générale au début comme étant une combinaison d'une fonction temporelle et d'une autre spatiale. Ce champ de déplacement est inséré par la suite dans les équations déformation-déplacement

de Novozhilov pour acquérir des relations cinématiques de forme générale relatives aux structures cylindriques.

La détermination des expressions de l'énergie cinétique et celle de déformation élastique présente la prochaine étape à affranchir. Ceci conduit à la détermination de l'équation de mouvement par le biais des équations de Lagrange et d'en déduire en conséquence les matrices de masse et de rigidité linéaire et non linéaire qui en découlent.

On procède dans un second temps, de substituer l'expression générale du champ de déplacement figurant dans les formules des matrices de masse et de rigidité par l'expression du champ de déplacement issue de l'analyse linéaire et présentant la solution exacte des équations de *Sanders*.

L'équation de mouvement est, par la suite, résolue en se basant sur la méthode de linéarisation incitée par l'utilisation des modes non linéaires ce qui permet de pronostiquer la tendance vibratoire de système et de caractériser en conséquence la nature du comportement de la coque qui peut être soit de type raidissant, soit assouplissant.

5.1. Relations cinématiques non linéaires de Novozhilov

Rappelons que les relations cinématiques de *Novozhilov* sont décelées à partir de l'insertion du champ de déplacement dans les composantes du tenseur Green-Lagrange tout en tenant compte des imperfections géométriques initiales (on néglige ici tous les termes dépendant seulement de w_0 une fois que l'équation (6.c) est projetée dans les équations (2.a – 2.c) et on ignore également les imperfections membranaires) et en tirant profit des approximations suivantes (avec $\rho = R + z$) :

$$\frac{1}{R+z} = \frac{1}{R} \left[1 - \frac{z}{R} + o\left(\frac{z}{R}\right)^2 \right] \quad (7.a)$$

$$\frac{1}{(R+z)^2} = \frac{1}{R^2} \left[1 - \frac{2z}{R} + o\left(\frac{z}{R}\right)^2 \right] \quad (7.b)$$

Les relations cinématiques de Novozhilov sont ainsi définies comme suit :

$$\varepsilon_{x,0} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (8.a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta,0} &= \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2R^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial w_0}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) + w_0 \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned} \quad (8.b)$$

$$\gamma_{x\theta,0} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{R \partial \theta} + \frac{1}{R} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} w_0 \right] \quad (8.c)$$

$$\begin{aligned}
k_x = & -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{R \partial x} \left(-\frac{\partial u}{R \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial \theta} \right) + \frac{\partial (w + w_0)}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{R \partial x \partial \theta} \left(-\frac{v}{R} + \frac{\partial (w + w_0)}{R \partial \theta} \right) \\
& + \frac{\partial^2 (w + w_0)}{R \partial x \partial \theta} \frac{\partial u}{R \partial \theta} - \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} \left(\frac{w}{R} + \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{w_0}{R}
\end{aligned} \tag{8.d}$$

$$\begin{aligned}
k_\theta = & -\frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial u}{R \partial x} + \frac{\partial v}{R^2 \partial \theta} - \frac{(w + w_0)}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial v}{R^2 \partial \theta} - 2 \frac{\partial u}{R \partial x} \right) - \frac{w}{R} \left(\frac{\partial^2 w_0}{R^2 \partial \theta^2} \right) \\
& - \frac{\partial u}{R^2 \partial \theta} \left(\frac{\partial u}{R \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial \theta} \right) + \frac{\partial v}{R^2 \partial \theta} \left(\frac{\partial v}{R \partial \theta} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 (w + w_0)}{R \partial \theta^2} \right) \\
& + \frac{\partial^2 v}{R^3 \partial \theta^2} \left(\frac{\partial (w + w_0)}{\partial \theta} - v \right) + \frac{\partial (w + w_0)}{R^2 \partial \theta} \left(-\frac{v}{R} + \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right) - \frac{\partial^2 (w + w_0)}{R^2 \partial \theta^2} \frac{\partial u}{\partial x} \\
& + \frac{\partial w}{R^2 \partial \theta} \frac{\partial w_0}{R \partial \theta} + \frac{\partial (w + w_0)}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{R \partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{R \partial x \partial \theta}
\end{aligned} \tag{8.e}$$

$$\begin{aligned}
k_{x\theta} = & -2 \frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial \theta} - \frac{\partial u}{R^2 \partial \theta} + \frac{\partial v}{R \partial x} + \frac{\partial u}{R^2 \partial \theta} \left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 (w + w_0)}{R \partial \theta^2} - \frac{\partial v}{R \partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} \\
& - \frac{v}{R^2} \left(\frac{\partial^2 u}{R \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial (w + w_0)}{\partial x} \right) + \frac{\partial (w + w_0)}{R^2 \partial \theta} \left(\frac{\partial^2 u}{R \partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} \right) + \frac{\partial w}{R^2 \partial \theta} \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
& + \frac{\partial v}{R \partial x} \left(\frac{w + w_0}{R} + 2 \frac{\partial v}{R \partial \theta} - \frac{\partial^2 (w + w_0)}{R \partial \theta^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial (w + w_0)}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{R \partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\
& - 2 \frac{\partial^2 (w + w_0)}{R \partial x \partial \theta} \left(\frac{w}{R} + \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial x \partial \theta} w_0
\end{aligned} \tag{8.f}$$

Les relations (8.a – 8.f) sont déterminées en négligeant les termes d'ordre supérieurs de z et ce afin de s'aligner aux relations (4.a – 4.c). On spécule de même que les déformations membranaires de la théorie de Flügge-Lur'e-Byrne et celles de Novozhilov s'avèrent les mêmes en revanche les déformations flexionnelles et celles de torsion se diffèrent.

5.2. Formulation

Avant d'embarquer dans le cheminement mathématique, on compte révéler le caractère archétype de cette formulation. La théorie développée dans ce manuscrit est fondée sur une approche qui consiste à décomposer le mouvement d'un point matériel en un mouvement relatif induisant les déformations modérées et en un mouvement de corps rigide de grande amplitude. Ceci nous laisse considérer les grands déplacements (les rotations ici sont supposées modérées), alors que la loi de comportement repose sur l'hypothèse des petites

perturbations (loi de Hooke). La formulation s'appuie d'une part sur la théorie de Novozhilov qui a présenté une cinématique plus complexe et plus générale et emploi d'autre part, le champ de déplacement qui découle de la solution exacte de l'analyse linéaire au lieu d'utiliser des approximations polynomiales. L'effet de courbure du champ de déplacement dans la direction circonférentielle et l'effet des imperfections géométriques initiales sont aussi examiné dans ce manuscrit, finalement les phénomènes de couplage entre modes sont en outre pris à l'égard.

Soit une coque cylindrique mince de longueur l , de rayon R et d'épaisseur h (voir figure2). x et θ étant les coordonnées de la coque relativement à sa surface moyenne et qui coïncident avec les lignes de courbures principales. u, v , et w étant les composantes du vecteur déplacement d'un point arbitraire P de la surface moyenne de coordonnées (x, θ) . La coque est considérée comme élastique, homogène et isotrope.

On néglige les contraintes et les déformations normales transverses ainsi que celles de cisaillement transverses.

Le champ de déplacement s'écrit ainsi sous sa forme générale [19]

$$u = \sum_i q_i(t) \cdot f_i(x, \theta) \quad (9.a)$$

$$v = \sum_i q_i(t) \cdot g_i(x, \theta) \quad (9.b)$$

$$w = \sum_i q_i(t) \cdot h_i(x, \theta) \quad (9.c)$$

f_i, g_i et h_i étant les composantes spatiales du champ de déplacement de la surface moyenne qui doivent satisfaire les conditions aux limites de la coque, $q_i(t)$ représente les fonctions temporelles.

En introduisant le champ de déplacement (9.a – 9.c) dans les équations (8.a - 8.f), et en attribuant aux imperfections géométriques cette forme $w_0 = \sum_i \delta_i h_i(x, \theta)$ (δ étant une fonction temporelle), les relations cinématiques sont alors décrites par les équations :

$$\varepsilon_{x,0} = \sum_i q_i f_{i,1} + \frac{1}{2} \left[\left(\sum_i q_i f_{i,1} \right)^2 + \left(\sum_i q_i g_{i,1} \right)^2 + \left(\sum_i q_i h_{i,1} \right)^2 \right] + \sum_i q_i h_{i,1} \sum_i \delta_j h_{j,1} \quad (10.a)$$

Développant d'avantage l'expression (10.a)

$$\varepsilon_{x,0} = \sum_i q_i f_{i,1} + \frac{1}{2} \left[\sum_i \sum_j f_{i,1} f_{j,1} q_i q_j + \sum_i \sum_j g_{i,1} g_{j,1} q_i q_j + \sum_i \sum_j h_{i,1} h_{j,1} q_i q_j \right] + \sum_i h_{i,1} \left(\sum_j \delta_j h_{j,1} \right) q_i \quad (10.b)$$

Simplifiant plus l'expression (10.b) on aura

$$\varepsilon_{x,0} = \sum_i \left[f_{i,1} + h_{i,1} \left(\sum_j \delta_j h_{j,1} \right) \right] q_i + \sum_i \sum_j \frac{1}{2} \left[f_{i,1} f_{j,1} + g_{i,1} g_{j,1} + h_{i,1} h_{j,1} \right] q_i q_j \quad (10.c)$$

L'expression (10.c) prend alors la forme de

$$\varepsilon_{x,0} = \sum_i a_i q_i + \sum_i \sum_j A_{ij} q_i q_j \quad (10.d)$$

Avec

$$a_i = f_{i,1} + h_{i,1} \left(\sum_j \delta_j h_{j,1} \right) \quad (10.e)$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \left[f_{i,1} f_{j,1} + g_{i,1} g_{j,1} + h_{i,1} h_{j,1} \right] \quad (10.f)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta,0} &= \frac{1}{R} \sum_i q_i g_{i,2} + \frac{1}{R} \sum_i q_i h_i + \frac{1}{2R^2} \left[\left(\sum_i q_i f_{i,2} \right)^2 + \left(\sum_i q_i g_{i,2} + \sum_i q_i h_i \right)^2 + \left(\sum_i q_i h_{i,2} - \sum_i q_i g_i \right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{R^2} \left[\sum_i \delta_i h_{i,2} \left(\sum_i q_i h_{i,2} - \sum_i q_i g_i \right) + \sum_j \delta_j h_j \left(\sum_i q_i h_i - \sum_i q_i g_{i,2} \right) \right] \end{aligned} \quad (11.a)$$

Le développement de l'équation (11.a) se traduit par

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta,0} &= \frac{1}{R} \sum_i q_i g_{i,2} + \frac{1}{R} \sum_i q_i h_i + \\ &\quad \frac{1}{2R^2} \left[\sum_i \sum_j f_{i,2} f_{j,2} q_i q_j + \sum_i \sum_j (h_i + g_{i,2})(h_j + g_{j,2}) q_i q_j + \sum_i \sum_j (h_{i,2} - g_i)(h_{j,2} - g_j) q_i q_j \right] \\ &\quad + \frac{1}{R^2} \left[\sum_i h_{i,2} \left(\sum_j \delta_j h_{j,2} \right) q_i - \sum_i g_i \left(\sum_j \delta_j h_{j,2} \right) q_i + \sum_i h_i \left(\sum_j \delta_j h_j \right) q_i + \sum_i g_{i,2} \left(\sum_j \delta_j h_j \right) q_i \right] \end{aligned} \quad (11.b)$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta,0} &= \sum_i \left[\frac{1}{R} (g_{i,2} + h_i) + \frac{1}{R^2} \left((h_{i,2} - g_i) \left(\sum_j \delta_j h_{j,2} \right) + (h_i + g_{i,2}) \left(\sum_j \delta_j h_j \right) \right) \right] q_i \\ &\quad + \sum_i \sum_j \frac{1}{2R^2} \left[f_{i,2} f_{j,2} + (h_i + g_{i,2})(h_j + g_{j,2}) + (h_{i,2} - g_i)(h_{j,2} - g_j) \right] q_i q_j \end{aligned} \quad (11.c)$$

L'expression (11.c) s'écrit alors sous la forme

$$\varepsilon_{\theta,0} = \sum_i b_i q_i + \sum_i \sum_j B_{ij} q_i q_j \quad (11.d)$$

Tel que

$$b_i = \frac{1}{R} (g_{i,2} + h_i) + \frac{1}{R^2} \left((h_{i,2} - g_i) \left(\sum_j \delta_j h_{j,2} \right) + (h_i + g_{i,2}) \left(\sum_j \delta_j h_j \right) \right) \quad (11.e)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2R^2} \left[f_{i,2} f_{j,2} + (h_i + g_{i,2})(h_j + g_{j,2}) + (h_{i,2} - g_i)(h_{j,2} - g_j) \right] \quad (11.f)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x\theta,0} = & \frac{1}{2} \left\{ \sum_i q_i g_{i,1} + \frac{1}{R} \sum_i q_i f_{i,2} + \frac{1}{R} \left[\sum_i q_i f_{i,1} \sum_i q_i f_{i,2} + \sum_i q_i g_{i,1} \left(\sum_i q_i g_{i,2} + \sum_i q_i h_i \right) \right. \right. \\ & + \sum_i q_i h_{i,1} \left(\sum_i q_i h_{i,2} - \sum_i q_i g_i \right) + \sum_i \delta_i h_{i,1} \left(\sum_i q_i h_{i,2} - \sum_i q_i g_i \right) + \sum_i q_i h_{i,1} \sum_i \delta_i h_{i,2} \\ & \left. \left. + \sum_i q_i g_{i,1} \sum_i \delta_i h_i \right] \right\} \end{aligned} \quad (12.a)$$

Ou encore

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x\theta,0} = & \frac{1}{2} \left\{ \sum_i q_i g_{i,1} + \frac{1}{R} \sum_i q_i f_{i,2} + \frac{1}{R} \left[\sum_i \sum_j f_{i,1} f_{j,2} q_i q_j + \sum_i \sum_j g_{i,1} g_{j,2} q_i q_j + \sum_i \sum_j g_{i,1} h_j q_i q_j \right. \right. \\ & + \sum_i \sum_j h_{i,1} h_{j,2} q_i q_j - \sum_i \sum_j h_{i,1} g_j q_i q_j + \sum_i h_{i,2} \left(\sum_j \delta_j h_{j,1} \right) q_i - \sum_i g_i \left(\sum_j \delta_j h_{j,1} \right) q_i + \sum_i h_{i,1} \left(\sum_j \delta_j h_{j,2} \right) q_i \\ & \left. \left. + \sum_i g_{i,1} \left(\sum_j \delta_j h_j \right) q_i \right] \right\} \end{aligned} \quad (12.b)$$

Arrangeant encore l'équation (12.b)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x\theta,0} = & \frac{1}{2} \left\{ \sum_i \left[g_{i,1} + \frac{1}{R} f_{i,2} + \frac{1}{R} (h_{i,2} - g_i) \left(\sum_j \delta_j h_{j,1} \right) + \frac{1}{R} g_{i,1} \left(\sum_j \delta_j h_j \right) + \frac{1}{R} h_{i,1} \left(\sum_j \delta_j h_{j,2} \right) \right] q_i \right. \\ & \left. + \sum_i \sum_j \frac{1}{R} \left[f_{i,1} f_{j,2} + g_{i,1} g_{j,2} + g_{i,1} h_j + h_{i,1} h_{j,2} - h_{i,1} g_j \right] q_i q_j \right\} \end{aligned} \quad (12.c)$$

un changement de variable nous donne

$$\varepsilon_{x\theta,0} = \sum_i c_i q_i + \sum_i \sum_j C_{ij} q_i q_j \quad (12.d)$$

Avec

$$c_i = \frac{1}{2} \left[g_{i,1} + \frac{1}{R} f_{i,2} + \frac{1}{R} (h_{i,2} - g_i) \left(\sum_j \delta_j h_{j,1} \right) + \frac{1}{R} g_{i,1} \left(\sum_j \delta_j h_j \right) + \frac{1}{R} h_{i,1} \left(\sum_j \delta_j h_{j,2} \right) \right] \quad (12.e)$$

$$C_{ij} = \frac{1}{2R} [f_{i,1} f_{j,2} + g_{i,1} g_{j,2} + g_{i,1} h_j + h_{i,1} h_{j,2} - h_{i,1} g_j] \quad (12.f)$$

$$\begin{aligned} k_x = & -\sum_i q_i h_{i,11} + \frac{1}{R} \sum_i q_i g_{i,1} \left(-\frac{1}{R} \sum_i q_i f_{i,2} + \sum_i q_i g_{i,1} - \sum_i q_i h_{i,12} - \sum_i \delta_i h_{i,12} \right) + \\ & \left(\sum_i q_i h_{i,1} + \sum_i \delta_i h_{i,1} \right) \sum_i q_i f_{i,11} + \frac{1}{R} \sum_i q_i f_{i,12} \left(-\frac{1}{R} \sum_i q_i g_i + \frac{1}{R} \sum_i q_i h_{i,2} + \frac{1}{R} \sum_i \delta_i h_{i,2} \right) \\ & + \frac{1}{R^2} \left(\sum_i q_i h_{i,12} + \sum_i \delta_i h_{i,12} \right) \sum_i q_i f_{i,2} - \left(\sum_i q_i h_{i,11} + \sum_i \delta_i h_{i,11} \right) \left(\frac{1}{R} \sum_i q_i h_i + \frac{1}{R} \sum_i q_i g_{i,2} + \sum_i q_i f_{i,1} \right) \\ & - \frac{1}{R} \sum_i q_i h_{i,11} \sum_i \delta_i h_i \end{aligned} \quad (13.a)$$

En développant l'équation (13.a) on obtient

$$\begin{aligned} k_x = & -\sum_i q_i h_{i,11} - \frac{1}{R^2} \sum_i \sum_j g_{i,1} f_{j,2} q_i q_j + \frac{1}{R} \sum_i \sum_j g_{i,1} g_{j,1} q_i q_j - \frac{1}{R} \sum_i \sum_j g_{i,1} h_{j,12} q_i q_j \\ & - \frac{1}{R} \sum_i g_{i,1} \left(\sum_j \delta_j h_{j,12} \right) q_i + \sum_i \sum_j h_{i,1} f_{j,11} q_i q_j + \sum_i f_{i,11} \left(\sum_j \delta_j h_{j,1} \right) q_i - \frac{1}{R^2} \sum_i \sum_j f_{i,12} g_j q_i q_j \\ & + \frac{1}{R^2} \sum_i \sum_j f_{i,12} h_{j,2} q_i q_j + \frac{1}{R^2} \sum_i f_{i,12} \left(\sum_i \delta_j h_{j,2} \right) q_i + \frac{1}{R^2} \sum_i \sum_j h_{i,12} f_{j,2} q_i q_j + \frac{1}{R^2} \sum_i f_{i,2} \left(\sum_i \delta_j h_{j,12} \right) q_i \\ & - \frac{1}{R} \sum_i \sum_j h_{i,11} h_j q_i q_j - \frac{1}{R} \sum_i \sum_j h_{i,11} g_{j,2} q_i q_j - \frac{1}{R} \sum_i h_i \left(\sum_i \delta_j h_{j,11} \right) q_i - \sum_i \sum_j h_{i,11} f_{j,1} q_i q_j \\ & - \frac{1}{R} \sum_i g_{i,2} \left(\sum_j \delta_j h_{j,11} \right) q_i - \sum_i f_{i,1} \left(\sum_j \delta_j h_{j,11} \right) q_i - \frac{1}{R} \sum_i h_{i,11} \left(\sum_j \delta_j h_j \right) q_i \end{aligned} \quad (13.b)$$

En arrangeant la dernière équation, on trouve

$$\begin{aligned} k_x = & \sum_i \left[-h_{i,11} + \left(-\frac{1}{R} g_{i,1} + \frac{1}{R^2} f_{i,2} \right) \left(\sum_j \delta_j h_{j,12} \right) + f_{i,11} \left(\sum_j \delta_j h_{j,1} \right) + \frac{1}{R^2} f_{i,12} \left(\sum_j \delta_j h_{j,2} \right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{R} h_i + \frac{1}{R} g_{i,2} + f_{i,1} \right) \left(\sum_j \delta_j h_{j,11} \right) - \frac{1}{R} h_{i,11} \left(\sum_j \delta_j h_j \right) \right] q_i + \sum_i \sum_j \left[\frac{1}{R} g_{i,1} \left(-\frac{1}{R} f_{j,2} + g_{j,1} - h_{j,12} \right) \right. \\ & \left. + h_{i,1} f_{j,11} - \frac{1}{R^2} f_{i,12} g_j + \frac{1}{R^2} f_{i,12} h_{j,2} + \frac{1}{R^2} h_{i,12} f_{j,2} - h_{i,11} \left(\frac{1}{R} h_j + \frac{1}{R} g_{j,2} + f_{j,1} \right) \right] q_i q_j \end{aligned} \quad (13.c)$$

L'équation (13.c) aura en conséquence la forme

$$k_x = \sum_i p_i q_i + \sum_i \sum_j P_{ij} q_i q_j \quad (13.d)$$

En notant que

$$\begin{aligned} p_i = & -h_{i,11} + \left(-\frac{1}{R} g_{i,1} + \frac{1}{R^2} f_{i,2} \right) \left(\sum_j \delta_j h_{j,12} \right) + f_{i,11} \left(\sum_j \delta_j h_{j,1} \right) + \frac{1}{R^2} f_{i,12} \left(\sum_j \delta_j h_{j,2} \right) \\ & - \left(\frac{1}{R} h_i + \frac{1}{R} g_{i,2} + f_{i,1} \right) \left(\sum_j \delta_j h_{j,11} \right) - \frac{1}{R} h_{i,11} \left(\sum_j \delta_j h_j \right) \end{aligned} \quad (13.e)$$

$$\begin{aligned} P_{ij} = & \frac{1}{R} g_{i,1} \left(-\frac{1}{R} f_{j,2} + g_{j,1} - h_{j,12} \right) + h_{i,1} f_{j,11} - \frac{1}{R^2} f_{i,12} g_j + \frac{1}{R^2} f_{i,12} h_{j,2} + \frac{1}{R^2} h_{i,12} f_{j,2} \\ & - h_{i,11} \left(\frac{1}{R} h_j + \frac{1}{R} g_{j,2} + f_{j,1} \right) \end{aligned} \quad (13.f)$$

$$\begin{aligned} k_\theta = & -\frac{1}{R^2} \sum_i q_i h_{i,22} + \frac{1}{R} \sum_i q_i f_{i,1} + \frac{1}{R^2} \sum_i q_i g_{i,2} - \frac{1}{R} \left(\sum_i q_i h_i + \sum_i \delta_i h_i \right) \left(\frac{1}{R^2} \sum_i q_i h_{i,22} - \frac{1}{R^2} \sum_i q_i g_{i,2} - \frac{2}{R} \sum_i q_i f_{i,1} \right) \\ & - \frac{1}{R^3} \sum_i q_i h_i \sum_i \delta_i h_{i,22} - \frac{1}{R^2} \sum_i q_i f_{i,2} \left(\frac{1}{R} \sum_i q_i f_{i,2} + \sum_i q_i g_{i,1} + \sum_i q_i h_{i,12} + \sum_i \delta_i h_{i,12} \right) \\ & + \frac{1}{R^2} \sum_i q_i g_{i,2} \left(\frac{1}{R} \sum_i q_i g_{i,2} + 3 \sum_i q_i f_{i,1} - \frac{1}{R} \left(\sum_i q_i h_{i,22} + \sum_i \delta_i h_{i,22} \right) \right) + \frac{1}{R^3} \sum_i q_i g_{i,22} \left(\sum_i q_i h_{i,2} + \sum_i \delta_i h_{i,2} - \sum_i q_i g_i \right) \\ & + \frac{1}{R^2} \left(\sum_i q_i h_{i,2} + \sum_i \delta_i h_{i,2} \right) \left(-\frac{1}{R} \sum_i q_i g_i + \frac{1}{R} \sum_i q_i h_{i,2} \right) - \frac{1}{R^2} \left(\sum_i q_i h_{i,22} + \sum_i \delta_i h_{i,22} \right) \sum_i q_i f_{i,1} + \frac{1}{R^3} \sum_i q_i h_{i,2} \sum_i \delta_i h_{i,2} \\ & + \left(\sum_i q_i h_{i,1} + \sum_i \delta_i h_{i,1} \right) \frac{1}{R} \sum_i q_i g_{i,12} + \frac{1}{R} \sum_i q_i g_{i,1} \left(\sum_i q_i h_{i,12} + \sum_i \delta_i h_{i,12} \right) \end{aligned} \quad (14.a)$$

Le développement de l'équation (14.a) aboutit à

$$\begin{aligned}
k_\theta = & -\frac{1}{R^2} \sum_i q_i h_{i,22} + \frac{1}{R} \sum_i q_i f_{i,1} + \frac{1}{R^2} \sum_i q_i g_{i,2} - \frac{1}{R^3} \sum_i \sum_j h_i h_{j,22} q_i q_j + \frac{1}{R^3} \sum_i \sum_j h_i g_{j,2} q_i q_j + \\
& \frac{2}{R^2} \sum_i \sum_j h_i f_{j,1} q_i q_j - \frac{1}{R^3} \sum_i h_{i,22} \left(\sum_j \delta_j h_j \right) q_i + \frac{1}{R^3} \sum_i g_{i,2} \left(\sum_j \delta_j h_j \right) q_i + \frac{2}{R^2} \sum_i f_{i,1} \left(\sum_j \delta_j h_j \right) q_i \\
& - \frac{1}{R^3} \sum_i h_i \left(\sum_j \delta_j h_{j,22} \right) q_i - \frac{1}{R^3} \sum_i \sum_j f_{i,2} f_{j,2} q_i q_j - \frac{1}{R^2} \sum_i \sum_j f_{i,2} g_{j,1} q_i q_j - \frac{1}{R^2} \sum_i \sum_j f_{i,2} h_{j,12} q_i q_j \\
& - \frac{1}{R^2} \sum_i f_{i,2} \left(\sum_j \delta_j h_{j,12} \right) q_i + \frac{1}{R^3} \sum_i \sum_j g_{i,2} g_{j,2} q_i q_j + \frac{3}{R^2} \sum_i \sum_j g_{i,2} f_{j,1} q_i q_j - \frac{1}{R^3} \sum_i \sum_j g_{i,2} h_{j,22} q_i q_j \\
& - \frac{1}{R^3} \sum_i g_{i,2} \left(\sum_j \delta_j h_{j,22} \right) q_i + \frac{1}{R^3} \sum_i \sum_j g_{i,22} h_{j,2} q_i q_j + \frac{1}{R^3} \sum_i g_{i,22} \left(\sum_j \delta_j h_{j,2} \right) q_i - \frac{1}{R^3} \sum_i \sum_j g_{i,22} g_j q_i q_j \\
& - \frac{1}{R^3} \sum_i \sum_j h_{i,2} g_j q_i q_j + \frac{1}{R^3} \sum_i \sum_j h_{i,2} h_{j,2} q_i q_j - \frac{1}{R^3} \sum_i g_i \left(\sum_j \delta_j h_{j,2} \right) q_i + \frac{1}{R^3} \sum_i h_{i,2} \left(\sum_j \delta_j h_{j,2} \right) q_i - \\
& \frac{1}{R^2} \sum_i \sum_j h_{i,22} f_{j,1} q_i q_j - \frac{1}{R^2} \sum_i f_{i,1} \left(\sum_j \delta_j h_{j,22} \right) q_i + \frac{1}{R^3} \sum_i h_{i,2} \left(\sum_j \delta_j h_{j,2} \right) q_i + \frac{1}{R} \sum_i \sum_j h_{i,1} g_{j,12} q_i q_j \\
& + \frac{1}{R} \sum_i g_{i,12} \left(\sum_j \delta_j h_{j,1} \right) q_i + \frac{1}{R} \sum_i \sum_j g_{i,1} h_{j,12} q_i q_j + \frac{1}{R} \sum_i g_{i,1} \left(\sum_j \delta_j h_{j,12} \right) q_i \tag{14.b}
\end{aligned}$$

Améliorant d'avantage l'équation (14.b)

$$\begin{aligned}
k_\theta = & \sum_i \left[-\frac{1}{R^2} h_{i,22} + \frac{1}{R} f_{i,1} + \frac{1}{R^2} g_{i,2} + \left(\sum_j \delta_j h_j \right) \left(-\frac{1}{R^3} h_{i,22} + \frac{1}{R^3} g_{i,2} + \frac{2}{R^2} f_{i,1} \right) \right. \\
& + \left(\sum_j \delta_j h_{j,22} \right) \left(-\frac{1}{R^3} h_i - \frac{1}{R^3} g_{i,2} - \frac{1}{R^2} f_{i,1} \right) + \left(\sum_j \delta_j h_{j,12} \right) \left(-\frac{1}{R^2} f_{i,2} + \frac{1}{R} g_{i,1} \right) \\
& + \left(\sum_j \delta_j h_{j,2} \right) \left(\frac{1}{R^3} g_{i,22} - \frac{1}{R^3} g_i + \frac{2}{R^3} h_{i,2} \right) + \left(\sum_j \delta_j h_{j,1} \right) \frac{1}{R} g_{i,12} \Big] q_i \\
& + \sum_i \sum_j \left[-\frac{1}{R^3} h_i h_{j,22} + \frac{1}{R^3} h_i g_{j,2} + \frac{2}{R^2} h_i f_{j,1} - \frac{1}{R^3} f_{i,2} f_{j,2} - \frac{1}{R^2} f_{i,2} g_{j,1} - \frac{1}{R^2} f_{i,2} h_{j,12} + \frac{1}{R^3} g_{i,2} g_{j,2} \right. \\
& + \frac{3}{R^2} g_{i,2} f_{j,1} - \frac{1}{R^3} g_{i,2} h_{j,22} + \frac{1}{R^3} g_{i,22} h_{j,2} - \frac{1}{R^3} g_{i,22} g_j - \frac{1}{R^3} h_{i,2} g_j + \frac{1}{R^3} h_{i,2} h_{j,2} - \frac{1}{R^2} h_{i,22} f_{j,1} + \frac{1}{R} h_{i,1} g_{j,12} \\
& \left. + \frac{1}{R} g_{i,1} h_{j,12} \right] q_i q_j \tag{14.c}
\end{aligned}$$

L'équation (14.c) s'écrit alors sous la forme

$$k_\theta = \sum_i s_i q_i + \sum_i \sum_j S_{ij} q_i q_j \tag{14.d}$$

Tel que

$$\begin{aligned}
s_i = & -\frac{1}{R^2} h_{i,22} + \frac{1}{R} f_{i,1} + \frac{1}{R^2} g_{i,2} + \left(\sum_j \delta_j h_j \right) \left(-\frac{1}{R^3} h_{i,22} + \frac{1}{R^3} g_{i,2} + \frac{2}{R^2} f_{i,1} \right) \\
& + \left(\sum_j \delta_j h_{j,22} \right) \left(-\frac{1}{R^3} h_i - \frac{1}{R^3} g_{i,2} - \frac{1}{R^2} f_{i,1} \right) + \left(\sum_j \delta_j h_{j,12} \right) \left(-\frac{1}{R^2} f_{i,2} + \frac{1}{R} g_{i,1} \right) \\
& + \left(\sum_j \delta_j h_{j,2} \right) \left(\frac{1}{R^3} g_{i,22} - \frac{1}{R^3} g_i + \frac{2}{R^3} h_{i,2} \right) + \left(\sum_j \delta_j h_{j,1} \right) \frac{1}{R} g_{i,12}
\end{aligned} \tag{14.e}$$

$$\begin{aligned}
S_{ij} = & h_i \left[-\frac{1}{R^3} h_{j,22} + \frac{1}{R^3} g_{j,2} + \frac{2}{R^2} f_{j,1} \right] - f_{i,2} \left[\frac{1}{R^3} f_{j,2} + \frac{1}{R^2} g_{j,1} + \frac{1}{R^2} h_{j,12} \right] \\
& + g_{i,2} \left[\frac{1}{R^3} g_{j,2} + \frac{3}{R^2} f_{j,1} - \frac{1}{R^3} h_{j,22} \right] + g_{i,22} \left[\frac{1}{R^3} h_{j,2} - \frac{1}{R^3} g_j \right] + h_{i,2} \left[-\frac{1}{R^3} g_j + \frac{1}{R^3} h_{j,2} \right] \\
& - \frac{1}{R^2} h_{i,22} f_{j,1} + \frac{1}{R} h_{i,1} g_{j,12} + \frac{1}{R} g_{i,1} h_{j,12}
\end{aligned} \tag{14.f}$$

$$\begin{aligned}
k_{x\theta} = & \frac{-2}{R} \sum_i q_i h_{i,12} - \frac{1}{R^2} \sum_i q_i f_{i,2} + \frac{1}{R} \sum_i q_i g_{i,1} + \frac{1}{R^2} \sum_i q_i f_{i,2} \left(-\sum_i q_i f_{i,1} + \frac{1}{R} \sum_i q_i h_{i,22} + \frac{1}{R} \sum_i \delta_i h_{i,22} - \frac{1}{R} \sum_i q_i g_{i,2} \right) \\
& + \left(\sum_i q_i h_{i,11} + \sum_i \delta_i h_{i,11} \right) \sum_i q_i g_{i,1} - \frac{1}{R^2} \sum_i q_i g_i \left(\frac{1}{R} \sum_i q_i f_{i,22} + \sum_i q_i g_{i,12} + \sum_i q_i h_{i,1} + \sum_i \delta_i h_{i,1} \right) + \\
& \frac{1}{R^2} \left(\sum_i q_i h_{i,2} + \sum_i \delta_i h_{i,2} \right) \left(\frac{1}{R} \sum_i q_i f_{i,22} + \sum_i q_i h_{i,1} + \sum_i q_i g_{i,12} \right) + \frac{1}{R^2} \sum_i q_i h_{i,2} \sum_i \delta_i h_{i,1} \\
& + \frac{1}{R} \sum_i q_i g_{i,1} \left(\frac{1}{R} \sum_i q_i h_i + \frac{1}{R} \sum_i \delta_i h_i + \frac{2}{R} \sum_i q_i g_{i,2} - \frac{1}{R} \sum_i q_i h_{i,22} - \frac{1}{R} \sum_i \delta_i h_{i,22} + 2 \sum_i q_i f_{i,1} \right) \\
& + \left(\sum_i q_i h_{i,1} + \sum_i \delta_i h_{i,1} \right) \left(\frac{1}{R} \sum_i q_i f_{i,12} + \sum_i q_i g_{i,11} \right) + \left(-\frac{2}{R} \sum_i q_i h_{i,12} - \frac{2}{R} \sum_i \delta_i h_{i,12} \right) \left(\frac{1}{R} \sum_i q_i h_i + \frac{1}{R} \sum_i q_i g_{i,2} + \sum_i q_i f_{i,1} \right) \\
& - \frac{2}{R} \sum_i q_i h_{i,12} \sum_i \delta_i h_i
\end{aligned} \tag{15.a}$$

Après quelques manipulations sur l'équation (15.a) on aura la possibilité de l'exprimer sous la forme

$$\begin{aligned}
k_{x\theta} = & \frac{-2}{R} \sum_i q_i h_{i,12} - \frac{1}{R^2} \sum_i q_i f_{i,2} + \frac{1}{R} \sum_i q_i g_{i,1} - \frac{1}{R^2} \sum_i \sum_j f_{i,2} f_{j,1} q_i q_j + \frac{1}{R^3} \sum_i \sum_j f_{i,2} h_{j,22} q_i q_j \\
& + \frac{1}{R^3} \sum_i f_{i,2} \left(\sum_j \delta_j h_{j,22} \right) q_i - \frac{1}{R^3} \sum_i \sum_j f_{i,2} g_{j,2} q_i q_j + \sum_i \sum_j h_{i,11} g_{j,1} q_i q_j + \sum_i g_{i,1} \left(\sum_j \delta_j h_{j,11} \right) q_i \\
& - \frac{1}{R^3} \sum_i \sum_j g_i f_{j,22} q_i q_j - \frac{1}{R^2} \sum_i \sum_j g_i g_{j,12} q_i q_j - \frac{1}{R^2} \sum_i \sum_j g_i h_{j,1} q_i q_j - \frac{1}{R^2} \sum_i g_i \left(\sum_j \delta_j h_{j,1} \right) q_i \\
& + \frac{1}{R^3} \sum_i \sum_j h_{i,2} f_{j,22} q_i q_j + \frac{1}{R^2} \sum_i \sum_j h_{i,2} h_{j,1} q_i q_j + \frac{1}{R^2} \sum_i \sum_j h_{i,2} g_{j,12} q_i q_j + \frac{1}{R^3} \sum_i f_{i,22} \left(\sum_j \delta_j h_{j,2} \right) q_i \\
& + \frac{1}{R^2} \sum_i h_{i,1} \left(\sum_j \delta_j h_{j,2} \right) q_i + \frac{1}{R^2} \sum_i g_{i,12} \left(\sum_j \delta_j h_{j,2} \right) q_i + \frac{1}{R^2} \sum_i h_{i,2} \left(\sum_j \delta_j h_{j,1} \right) q_i + \frac{1}{R^2} \sum_i \sum_j g_{i,1} h_j q_i q_j \\
& + \frac{1}{R^2} \sum_i g_{i,1} \left(\sum_j \delta_j h_j \right) q_i + \frac{2}{R^2} \sum_i \sum_j g_{i,1} g_{j,2} q_i q_j - \frac{1}{R^2} \sum_i \sum_j g_{i,1} h_{j,22} q_i q_j - \frac{1}{R^2} \sum_i g_{i,1} \left(\sum_j \delta_j h_{j,22} \right) q_i \\
& + \frac{2}{R} \sum_i \sum_j g_{i,1} f_{j,1} q_i q_j + \frac{1}{R} \sum_i \sum_j h_{i,1} f_{j,12} q_i q_j + \sum_i \sum_j h_{i,1} g_{j,11} q_i q_j + \frac{1}{R} \sum_i f_{i,12} \left(\sum_j \delta_j h_{j,1} \right) q_i \\
& + \sum_i g_{i,11} \left(\sum_j \delta_j h_{j,1} \right) q_i - \frac{2}{R^2} \sum_i \sum_j h_{i,12} h_j q_i q_j - \frac{2}{R^2} \sum_i \sum_j h_{i,12} g_{j,2} q_i q_j - \frac{2}{R} \sum_i \sum_j h_{i,12} f_{j,1} q_i q_j \\
& - \frac{2}{R^2} \sum_i h_i \left(\sum_j \delta_j h_{j,12} \right) q_i - \frac{2}{R^2} \sum_i g_{i,2} \left(\sum_j \delta_j h_{j,12} \right) q_i - \frac{2}{R} \sum_i f_{i,1} \left(\sum_j \delta_j h_{j,12} \right) q_i \\
& - \frac{2}{R^2} \sum_i h_{i,12} \left(\sum_j \delta_j h_j \right) q_i \tag{15.b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{x\theta} = & \sum_i \left[\frac{-2}{R} h_{i,12} - \frac{1}{R^2} f_{i,2} + \frac{1}{R} g_{i,1} + \frac{1}{R^3} f_{i,2} \left(\sum_j \delta_j h_{j,22} \right) + g_{i,1} \left(\sum_j \delta_j h_{j,11} \right) - \frac{1}{R^2} g_i \left(\sum_j \delta_j h_{j,1} \right) + \right. \\
& \frac{1}{R^3} f_{i,22} \left(\sum_j \delta_j h_{j,2} \right) + \frac{1}{R^2} h_{i,1} \left(\sum_j \delta_j h_{j,2} \right) + \frac{1}{R^2} g_{i,12} \left(\sum_j \delta_j h_{j,2} \right) + \frac{1}{R^2} h_{i,2} \left(\sum_j \delta_j h_{j,1} \right) + \frac{1}{R^2} g_{i,1} \left(\sum_j \delta_j h_j \right) \\
& - \frac{1}{R^2} g_{i,1} \left(\sum_j \delta_j h_{j,22} \right) + \frac{1}{R} f_{i,12} \left(\sum_j \delta_j h_{j,1} \right) + g_{i,11} \left(\sum_j \delta_j h_{j,1} \right) - \frac{2}{R^2} h_i \left(\sum_j \delta_j h_{j,12} \right) - \frac{2}{R^2} g_{i,2} \left(\sum_j \delta_j h_{j,12} \right) \\
& \left. - \frac{2}{R} f_{i,1} \left(\sum_j \delta_j h_{j,12} \right) - \frac{2}{R^2} h_{i,12} \left(\sum_j \delta_j h_j \right) \right] q_i + \sum_i \sum_j \left[-\frac{1}{R^2} f_{i,2} f_{j,1} + \frac{1}{R^3} f_{i,2} h_{j,22} - \frac{1}{R^3} f_{i,2} g_{j,2} + h_{i,11} g_{j,1} \right. \\
& - \frac{1}{R^3} g_i f_{j,22} - \frac{1}{R^2} g_i g_{j,12} - \frac{1}{R^2} g_i h_{j,1} + \frac{1}{R^3} h_{i,2} f_{j,22} + \frac{1}{R^2} h_{i,2} h_{j,1} + \frac{1}{R^2} h_{i,2} g_{j,12} + \frac{1}{R^2} g_{i,1} h_j + \frac{2}{R} g_{i,1} g_{j,2} \\
& \left. - \frac{1}{R^2} g_{i,1} h_{j,22} + \frac{2}{R} g_{i,1} f_{j,1} + \frac{1}{R} h_{i,1} f_{j,12} + h_{i,1} g_{j,11} - \frac{2}{R^2} h_{i,12} h_j - \frac{2}{R^2} h_{i,12} g_{j,2} - \frac{2}{R} h_{i,12} f_{j,1} \right] q_i q_j \tag{15.c}
\end{aligned}$$

Comme forme finale on aura

$$k_{x\theta} = \sum_i t_i q_i + \sum_i \sum_j T_{ij} q_i q_j \quad (15.d)$$

Avec

$$\begin{aligned} t_i &= \frac{-2}{R} h_{i,12} - \frac{1}{R^2} f_{i,2} + \frac{1}{R} g_{i,1} + \left(\sum_j \delta_j h_{j,22} \right) \left(\frac{1}{R^3} f_{i,2} - \frac{1}{R^2} g_{i,1} \right) + g_{i,1} \left(\sum_j \delta_j h_{j,11} \right) \\ &+ \left(\sum_j \delta_j h_{j,1} \right) \left(-\frac{1}{R^2} g_i + \frac{1}{R^2} h_{i,2} + \frac{1}{R} f_{i,12} + g_{i,11} \right) + \left(\sum_j \delta_j h_{j,2} \right) \left(\frac{1}{R^3} f_{i,22} + \frac{1}{R^2} h_{i,1} + \frac{1}{R^2} g_{i,12} \right) \\ &+ \left(\sum_j \delta_j h_j \right) \left(\frac{1}{R^2} g_{i,1} - \frac{2}{R^2} h_{i,12} \right) + \left(\sum_j \delta_j h_{j,12} \right) \left(-\frac{2}{R^2} h_i - \frac{2}{R^2} g_{i,2} - \frac{2}{R} f_{i,1} \right) \end{aligned} \quad (15.e)$$

$$\begin{aligned} T_{ij} &= f_{i,2} \left(-\frac{1}{R^2} f_{j,1} + \frac{1}{R^3} h_{j,22} - \frac{1}{R^3} g_{j,2} \right) + h_{i,11} g_{j,1} - g_i \left(\frac{1}{R^3} f_{j,22} + \frac{1}{R^2} g_{j,12} + \frac{1}{R^2} h_{j,1} \right) \\ &+ h_{i,2} \left(\frac{1}{R^3} f_{j,22} + \frac{1}{R^2} h_{j,1} + \frac{1}{R^2} g_{j,12} \right) + g_{i,1} \left(\frac{1}{R^2} h_j + \frac{2}{R^2} g_{j,2} - \frac{1}{R^2} h_{j,22} + \frac{2}{R} f_{j,1} \right) + h_{i,1} \left(\frac{1}{R} f_{j,12} + g_{j,11} \right) \\ &- h_{i,12} \left(\frac{2}{R^2} h_j + \frac{2}{R^2} g_{j,2} + \frac{2}{R} f_{j,1} \right) \end{aligned} \quad (15.f)$$

Généralement le champ de déformation de Novozhilov d'un point arbitraire appartenant à la surface moyenne, peut être défini sous cette forme :

$$\varepsilon_{x,0} = \varepsilon_{11} = \sum_j a_j q_j + \sum_j \sum_k A_{jk} q_j q_k \quad (16.a)$$

$$\varepsilon_{\theta,0} = \varepsilon_{22} = \sum_j b_j q_j + \sum_j \sum_k B_{jk} q_j q_k \quad (16.b)$$

$$\varepsilon_{x\theta,0} = \varepsilon_{12} = \sum_j c_j q_j + \sum_j \sum_k C_{jk} q_j q_k \quad (16.c)$$

$$k_{x,0} = k_{11} = \sum_j p_j q_j + \sum_j \sum_k P_{jk} q_j q_k \quad (16.d)$$

$$k_{\theta,0} = k_{22} = \sum_j s_j q_j + \sum_j \sum_k S_{jk} q_j q_k \quad (16.e)$$

$$k_{x\theta,0} = k_{12} = \sum_j t_j q_j + \sum_j \sum_k T_{jk} q_j q_k \quad (16.f)$$

Moyennant les hypothèses évoquées préalablement, et afin de décrire le comportement dynamique non linéaire associé aux modèles de coques cylindriques minces, l'équation de mouvement est régie par les équations de Lagrange qui découlent du principe variationnel d'Hamilton. Ces équations prennent ainsi la forme de :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q} = 0 \quad (17)$$

Tel que

T : Énergie cinétique Totale

V : Énergie élastique de déformation

q : Vecteur de déplacement

La dynamique est donc décrite par :

$$\sum_j m_{ij} \ddot{q}_j + \sum_j k_{ij} q_j + \sum_j \sum_k k_{ijk} q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s k_{ijks} q_j q_k q_s = 0 \quad (18.a)$$

Soit en écriture matricielle

$$M \ddot{q} + [K + K^{NL2}(q) + K^{NL3}(q, q)] q = 0 \quad (18.b)$$

On désigne par M la matrice de masse, K étant la matrice de rigidité linéaire, K^{NL2} représente la matrice de rigidité quadratique non linéaire et K^{NL3} exprime la matrice de rigidité cubique non linéaire.

5.2.1. Évaluation de l'énergie cinétique T

D'une façon générale l'énergie cinétique d'une coque à double courbures s'écrit sous cette forme :

$$T = \frac{\bar{m}}{2} \iint_0^{l_1 l_2} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) A_1 A_2 dx_1 dx_2 \quad (19)$$

Tel que

\bar{m} : Densité surfacique de masse

A_1 et A_2 représentent les coefficients de Lamé. Ils sont déterminés à partir de la première loi fondamentale de la théorie de surface, définie par la relation [22] :

$$ds^2 = A_1^2 dx_1^2 + A_2^2 dx_2^2 \quad (20)$$

dx_1 et dx_2 désignent les lignes de courbures tel que $x_1 = 0, l_1; x_2 = 0, l_2$

Pour le cas des coques cylindriques axisymétriques, les coefficients de Lamé ainsi que les coordonnées généralisées prennent la forme de

$$A_1 = 1, A_2 = R, dx_1 = dx, dx_2 = d\theta, l_1 = l \text{ et } l_2 = 2\pi.$$

Évaluant le deuxième terme des équations de Lagrange :

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = 0 \quad (21)$$

Pour évaluer l'expression du premier terme des équations de Lagrange, il suffit d'écrire

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} \iint_0^{l_1 l_2} 2 \bar{m} \left(\dot{u} \frac{\partial \dot{u}}{\partial \dot{q}_i} + \dot{v} \frac{\partial \dot{v}}{\partial \dot{q}_i} + \dot{w} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \dot{q}_i} \right) A_1 A_2 dx_1 dx_2 \quad (22)$$

Introduisant les équations (9.a – 9.c) dans l'équation (22) on obtient

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \iint_0^{l_1 l_2} \bar{m} \left(f_i \sum_i f_i \dot{q}_i + g_i \sum_i g_i \dot{q}_i + h_i \sum_i h_i \dot{q}_i \right) A_1 A_2 dx_1 dx_2 \quad (23)$$

Après une petite transformation de l'équation (23), on obtient

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j m_{ij} \ddot{q}_j \quad (24)$$

On en déduit que

$$m_{ij} = \iint_0^{l_1 l_2} \bar{m} (f_i f_j + g_i g_j + h_i h_j) A_1 A_2 dx_1 dx_2 \quad (25)$$

Ce qui implique

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_j m_{ij} \ddot{q}_j, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (26)$$

r étant le nombre de degré de liberté

On note que lorsque les fonctions spatiales f_i , g_i et h_i se reportent aux modes propres du système linéaire et en se basant sur l'hypothèse de l'orthogonalité de ces modes on peut déduire que $m_{ij} = 0$ lorsque $i \neq j$.

5.2.2. Évaluation de l'énergie de déformation élastique V

En élasticité linéaire, l'énergie de déformation élastique est considérée comme étant une fonction quadratique des composantes du tenseur de déformation. Cette énergie surgie sous cette la forme suivante pour un matériau isotrope :

$$V = \frac{1}{2} \iint_0^{l_1 l_2} C [\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\nu \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + 2(1-\nu) \varepsilon_{12}^2] A_1 A_2 dx_1 dx_2 \\ + \frac{1}{2} \iint_0^{l_1 l_2} D [k_{11}^2 + k_{22}^2 + 2\nu k_{11} k_{22} + 2(1-\nu) k_{12}^2] A_1 A_2 dx_1 dx_2 \quad (27)$$

Avec

$$C = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad E \text{ étant le module d'Young de la structure et } \nu \text{ son coefficient de Poisson.}$$

A partir de l'expression de l'énergie élastique de déformation (27), on procède à évaluer le troisième terme des équations de Lagrange (17).

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q_i} &= \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} C \left[\varepsilon_{11} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial q_i} + \varepsilon_{22} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial q_i} + \nu \varepsilon_{11} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial q_i} + \nu \varepsilon_{22} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial q_i} + 2(1-\nu) \varepsilon_{12} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial q_i} \right] A_1 A_2 dx_1 dx_2 \\ &+ \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} D \left[k_{11} \frac{\partial k_{11}}{\partial q_i} + k_{22} \frac{\partial k_{22}}{\partial q_i} + \nu k_{11} \frac{\partial k_{22}}{\partial q_i} + \nu k_{22} \frac{\partial k_{11}}{\partial q_i} + 2(1-\nu) k_{12} \frac{\partial k_{12}}{\partial q_i} \right] A_1 A_2 dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (28)$$

En dérivant les équations (16.a – 16.f) par rapport à q_i on obtient

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial q_i} = a_i + 2 \sum_j A_{ij} q_j \quad (29.a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial q_i} = b_i + 2 \sum_j B_{ij} q_j \quad (29.b)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial q_i} = c_i + 2 \sum_j C_{ij} q_j \quad (29.c)$$

$$\frac{\partial k_{11}}{\partial q_i} = p_i + 2 \sum_j P_{ij} q_j \quad (29.d)$$

$$\frac{\partial k_{22}}{\partial q_i} = s_i + 2 \sum_j S_{ij} q_j \quad (29.e)$$

$$\frac{\partial k_{12}}{\partial q_i} = t_i + 2 \sum_j T_{ij} q_j \quad (29.f)$$

Décortiquant l'expression (28) en évaluant chaque terme de l'équation à part

$$\varepsilon_{11} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial q_i} = \left[\sum_j a_j q_j + \sum_j \sum_k A_{jk} q_j q_k \right] \left[a_i + 2 \sum_k A_{ik} q_k \right] \quad (30.a)$$

Développant l'équation (30.a)

$$\varepsilon_{11} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial q_i} = \sum_j a_i a_j q_j + \sum_j \sum_k 2 a_j A_{ik} q_j q_k + \sum_j \sum_k a_i A_{jk} q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s 2 A_{jk} A_{is} q_j q_k q_s \quad (30.b)$$

On arrange maintenant l'équation (30.b) et on obtient

$$\varepsilon_{11} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial q_i} = \sum_j a_i a_j q_j + \sum_j \sum_k [a_i A_{jk} + a_j A_{ki} + a_k A_{ij}] q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s 2 A_{jk} A_{is} q_j q_k q_s \quad (30.c)$$

Ce qui conduit à exprimer l'équation (30.c) par

$$\varepsilon_{11} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial q_i} = \sum_j a_{ij} q_j + \sum_i \sum_j A_{ijk} q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s A_{ijks} q_j q_k q_s \quad (30.d)$$

En prenant

$$a_{ij} = a_i a_j \quad (30.e)$$

$$A_{ijk} = a_i A_{jk} + a_j A_{ki} + a_k A_{ij} \quad (30.f)$$

$$A_{ijks} = 2 A_{jk} A_{is} \quad (30.g)$$

$$\varepsilon_{22} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial q_i} = \left[\sum_j b_j q_j + \sum_j \sum_k B_{jk} q_j q_k \right] \left[b_i + 2 \sum_k B_{ik} q_k \right] \quad (31.a)$$

On procède au développement de l'équation (31.a)

$$\varepsilon_{22} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial q_i} = \sum_j b_i b_j q_j + \sum_j \sum_k 2 b_j B_{ik} q_j q_k + \sum_j \sum_k b_i B_{jk} q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s 2 B_{is} B_{jk} q_j q_k q_s \quad (31.b)$$

On arrange maintenant l'équation (31.b) et on obtient

$$\varepsilon_{22} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial q_i} = \sum_j b_i b_j q_j + \sum_j \sum_k [b_i B_{jk} + b_j B_{ki} + b_k B_{ij}] q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s 2 B_{is} B_{jk} q_j q_k q_s \quad (31.c)$$

Ou encore

$$\varepsilon_{22} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial q_i} = \sum_j b_{ij} q_j + \sum_i \sum_j B_{ijk} q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s B_{ijks} q_j q_k q_s \quad (31.d)$$

Tel que

$$b_{ij} = b_i b_j \quad (31.e)$$

$$B_{ijk} = b_i B_{jk} + b_j B_{ki} + b_k B_{ij} \quad (31.f)$$

$$B_{ijks} = 2 B_{jk} B_{is} \quad (31.g)$$

$$\varepsilon_{12} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial q_i} = \left[\sum_j c_j q_j + \sum_j \sum_k C_{jk} q_j q_k \right] \left[c_i + 2 \sum_k C_{ik} q_k \right] \quad (32.a)$$

Le développement de l'équation (32.a) conduit à

$$\varepsilon_{12} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial q_i} = \sum_j c_i c_j q_j + \sum_j \sum_k 2 c_j C_{ik} q_j q_k + \sum_j \sum_k c_i C_{jk} q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s 2 C_{is} C_{jk} q_j q_k q_s \quad (32.b)$$

L'équation (32.b) serait maintenant exprimée comme

$$\varepsilon_{12} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial q_i} = \sum_j c_i c_j q_j + \sum_j \sum_k [c_i C_{jk} + c_j C_{ik} + c_k C_{ji}] q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s 2 C_{is} C_{jk} q_j q_k q_s \quad (32.c)$$

Ainsi l'équation (32.c) devient

$$\varepsilon_{12} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial q_i} = \sum_j \mathbb{C}_{ij} q_j + \sum_i \sum_j C_{ijk} q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s C_{ijks} q_j q_k q_s \quad (32.d)$$

Avec

$$\mathbb{C}_{ij} = c_i c_j \quad (32.e)$$

$$C_{ijk} = c_i C_{jk} + c_j C_{ik} + c_k C_{ji} \quad (32.f)$$

$$C_{ijks} = 2 C_{jk} C_{is} \quad (32.g)$$

$$k_{11} \frac{\partial k_{11}}{\partial q_i} = \left[\sum_j p_j q_j + \sum_j \sum_k P_{jk} q_j q_k \right] \left[p_i + 2 \sum_k P_{ik} q_k \right] \quad (33.a)$$

En développant l'Équation (33.a) on obtient

$$k_{11} \frac{\partial k_{11}}{\partial q_i} = \sum_j p_i p_j q_j + \sum_j \sum_k 2 p_j P_{ik} q_j q_k + \sum_j \sum_k p_i P_{jk} q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s 2 P_{jk} P_{is} q_j q_k q_s \quad (33.b)$$

La simplification de l'équation (33.b) conduit à

$$k_{11} \frac{\partial k_{11}}{\partial q_i} = \sum_j p_i p_j q_j + \sum_j \sum_k [p_i P_{jk} + p_j P_{ik} + p_k P_{ji}] q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s 2 P_{jk} P_{is} q_j q_k q_s \quad (33.c)$$

Ou encore

$$k_{11} \frac{\partial k_{11}}{\partial q_i} = \sum_j p_{ij} q_j + \sum_i \sum_j P_{ijk} q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s P_{ijks} q_j q_k q_s \quad (33.d)$$

Tel que

$$p_{ij} = p_i p_j \quad (33.e)$$

$$P_{ijk} = p_i P_{jk} + p_j P_{ik} + p_k P_{ji} \quad (33.f)$$

$$P_{ijks} = 2 P_{jk} P_{is} \quad (33.g)$$

$$k_{22} \frac{\partial k_{22}}{\partial q_i} = \left[\sum_j S_j q_j + \sum_j \sum_k S_{jk} q_j q_k \right] \left[s_i + 2 \sum_k S_{ik} q_k \right] \quad (34.a)$$

Après avoir développé l'équation (34.a), on aura

$$k_{22} \frac{\partial k_{22}}{\partial q_i} = \sum_j s_i s_j q_j + \sum_j \sum_k 2 s_j S_{ik} q_j q_k + \sum_j \sum_k s_i S_{jk} q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s 2 S_{is} S_{jk} q_j q_k q_s \quad (34.b)$$

En regroupant les termes de même ordre de sommation on obtient

$$k_{22} \frac{\partial k_{22}}{\partial q_i} = \sum_j s_i s_j q_j + \sum_j \sum_k [s_i S_{jk} + s_j S_{ik} + s_k S_{ji}] q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s 2 S_{is} S_{jk} q_j q_k q_s \quad (34.c)$$

Ainsi l'équation (34.c) est réduite à

$$k_{22} \frac{\partial k_{22}}{\partial q_i} = \sum_j s_{ij} q_j + \sum_i \sum_j S_{ijk} q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s S_{ijks} q_j q_k q_s \quad (34.d)$$

En considérant que

$$s_{ij} = s_i s_j \quad (34.e)$$

$$S_{ijk} = s_i S_{jk} + s_j S_{ik} + s_k S_{ji} \quad (34.f)$$

$$S_{ijks} = 2 S_{jk} S_{is} \quad (34.g)$$

$$k_{12} \frac{\partial k_{12}}{\partial q_i} = \left[\sum_j t_j q_j + \sum_j \sum_k T_{jk} q_j q_k \right] \left[t_i + 2 \sum_k T_{ik} q_k \right] \quad (35.a)$$

Une fois développée l'équation (35.a) mène à

$$k_{12} \frac{\partial k_{12}}{\partial q_i} = \sum_j t_i t_j q_j + \sum_j \sum_k 2 t_j T_{ik} q_j q_k + \sum_j \sum_k t_i T_{jk} q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s 2 T_{is} T_{jk} q_j q_k q_s \quad (35.b)$$

Simplifiant plus l'équation (35.b) on aura

$$k_{12} \frac{\partial k_{12}}{\partial q_i} = \sum_j t_i t_j q_j + \sum_j \sum_k [t_i T_{jk} + t_j T_{ik} + t_k T_{ji}] q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s 2 T_{is} T_{jk} q_j q_k q_s \quad (35.c)$$

Ainsi l'équation (35.c) est réduite à

$$\frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial q_i} = \sum_j t_{ij} q_j + \sum_i \sum_j T_{ijk} q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s T_{ijks} q_j q_k q_s \quad (35.d)$$

Notant que

$$t_{ij} = t_i t_j \quad (35.e)$$

$$T_{ijk} = t_i T_{jk} + t_j T_{ik} + t_k T_{ji} \quad (35.f)$$

$$T_{ijks} = 2 T_{is} T_{jk} \quad (35.g)$$

$$\epsilon_{11} \frac{\partial \epsilon_{22}}{\partial q_i} = \left[\sum_j a_j q_j + \sum_j \sum_k A_{jk} q_j q_k \right] \left[b_i + 2 \sum_k B_{ik} q_k \right] \quad (36.a)$$

Partant du même principe, on développe l'équation (36.a)

$$\epsilon_{11} \frac{\partial \epsilon_{22}}{\partial q_i} = \sum_j a_j b_i q_j + \sum_j \sum_k 2 a_j B_{ik} q_j q_k + \sum_j \sum_k b_i A_{jk} q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s 2 A_{jk} B_{is} q_j q_k q_s \quad (36.b)$$

Nous pouvons simplifier l'équation (36.b) d'avantage

$$\varepsilon_{11} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial q_i} = \sum_j b_i a_j q_j + \sum_j \sum_k [b_i A_{jk} + a_j B_{ki} + a_k B_{ij}] q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s 2 A_{jk} B_{is} q_j q_k q_s \quad (36.c)$$

Soit encore

$$\varepsilon_{11} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial q_i} = \sum_j d_{ij} q_j + \sum_i \sum_j D_{ijk} q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s D_{ijks} q_j q_k q_s \quad (36.d)$$

Notant que

$$d_{ij} = b_i a_j \quad (36.e)$$

$$D_{ijk} = b_i A_{jk} + a_j B_{ki} + a_k B_{ij} \quad (36.f)$$

$$D_{ijks} = 2 A_{jk} B_{is} \quad (36.g)$$

$$\varepsilon_{22} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial q_i} = \left[\sum_j b_j q_j + \sum_j \sum_k B_{jk} q_j q_k \right] \left[a_i + 2 \sum_k A_{ik} q_k \right] \quad (37.a)$$

En développant l'équation (37.a) on aura

$$\varepsilon_{22} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial q_i} = \sum_j a_i b_j q_j + \sum_j \sum_k 2 b_j A_{ik} q_j q_k + \sum_j \sum_k a_i B_{jk} q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s 2 A_{is} B_{jk} q_j q_k q_s \quad (37.b)$$

Manipulant plus l'équation (37.b), on obtient

$$\varepsilon_{22} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial q_i} = \sum_j a_i b_j q_j + \sum_j \sum_k [a_i B_{jk} + b_j A_{ki} + b_k A_{ij}] q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s 2 A_{is} B_{jk} q_j q_k q_s \quad (37.c)$$

Cette dernière équation peut être présentée sous cette forme

$$\varepsilon_{22} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial q_i} = \sum_j e_{ij} q_j + \sum_i \sum_j E_{ijk} q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s E_{ijks} q_j q_k q_s \quad (37.d)$$

Tel que

$$e_{ij} = a_i b_j \quad (37.e)$$

$$E_{ijk} = a_i B_{jk} + b_j A_{ki} + b_k A_{ij} \quad (37.f)$$

$$E_{ijks} = 2 A_{is} B_{jk} \quad (37.g)$$

$$k_{11} \frac{\partial k_{22}}{\partial q_i} = \left[\sum_j p_j q_j + \sum_j \sum_k P_{jk} q_j q_k \right] \left[s_i + 2 \sum_k S_{ik} q_k \right] \quad (38.a)$$

Le développement de l'équation (38.a) amène à

$$k_{11} \frac{\partial k_{22}}{\partial q_i} = \sum_j p_j s_i q_j + \sum_j \sum_k 2 p_j S_{ik} q_j q_k + \sum_j \sum_k s_i P_{jk} q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s 2 P_{jk} S_{is} q_j q_k q_s \quad (38.b)$$

D'où

$$k_{11} \frac{\partial k_{22}}{\partial q_i} = \sum_j p_j s_i q_j + \sum_j \sum_k [s_i P_{jk} + p_j S_{ik} + p_k S_{ji}] q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s 2 P_{jk} S_{is} q_j q_k q_s \quad (38.c)$$

L'équation (38.c) aboutit à

$$k_{11} \frac{\partial k_{22}}{\partial q_i} = \sum_j u_{ij} q_j + \sum_j \sum_k U_{ijk} q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s U_{ijks} q_j q_k q_s \quad (38.d)$$

Avec

$$u_{ij} = p_j s_i \quad (38.e)$$

$$U_{ijk} = s_i P_{jk} + p_j S_{ik} + p_k S_{ji} \quad (38.f)$$

$$U_{ijks} = 2 P_{jk} S_{is} \quad (38.g)$$

$$k_{22} \frac{\partial k_{11}}{\partial q_i} = \left[\sum_j s_j q_j + \sum_j \sum_k S_{jk} q_j q_k \right] \left[p_i + 2 \sum_k P_{ik} q_k \right] \quad (39.a)$$

Le développement de l'équation (39.a) aboutira à

$$k_{22} \frac{\partial k_{11}}{\partial q_i} = \sum_j p_i s_j q_j + \sum_j \sum_k 2 s_j P_{ik} q_j q_k + \sum_j \sum_k p_i S_{jk} q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s 2 P_{is} S_{jk} q_j q_k q_s \quad (39.b)$$

L'équation (39.b) peut prendre aussi la forme de

$$k_{22} \frac{\partial k_{11}}{\partial q_i} = \sum_j p_i s_j q_j + \sum_j \sum_k [p_i S_{jk} + s_j P_{ik} + s_k P_{ji}] q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s 2 P_{is} S_{jk} q_j q_k q_s \quad (39.c)$$

Ce qui peut également être exprimé par

$$k_{22} \frac{\partial k_{11}}{\partial q_i} = \sum_j v_{ij} q_j + \sum_j \sum_k V_{ijk} q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s V_{ijks} q_j q_k q_s \quad (39.d)$$

En considérant que

$$v_{ij} = p_i s_j \quad (39.e)$$

$$V_{ijk} = s_j P_{ik} + s_k P_{ji} + p_i S_{jk} \quad (39.f)$$

$$V_{ijks} = 2 P_{is} S_{jk} \quad (39.g)$$

Revenons à l'équation (28) et substituons tous ces composants par leurs expressions préalablement trouvées (30.a – 39.g)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial q_i} = & \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} c \left[\sum_j a_{ij} q_j + \sum_j \sum_k A_{ijk} q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s A_{ijks} q_j q_k q_s + \sum_j b_{ij} q_j + \sum_j \sum_k B_{ijk} q_j q_k \right. \\
& + \sum_j \sum_k \sum_s B_{ijks} q_j q_k q_s + \nu \sum_j d_{ij} q_j + \nu \sum_j \sum_k D_{ijk} q_j q_k + \nu \sum_j \sum_k \sum_s D_{ijks} q_j q_k q_s + \nu \sum_j e_{ij} q_j \\
& + \nu \sum_j \sum_k E_{ijk} q_j q_k + \nu \sum_j \sum_k \sum_s E_{ijks} q_j q_k q_s + 2(1-\nu) \sum_j \mathbb{C}_{ij} q_j + 2(1-\nu) \sum_j \sum_k C_{ijk} q_j q_k \\
& + 2(1-\nu) \sum_j \sum_k \sum_s C_{ijks} q_j q_k q_s \left. \right] A_1 A_2 dx_1 dx_2 + \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} D \left[\sum_j p_{ij} q_j + \sum_j \sum_k P_{ijk} q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s P_{ijks} q_j q_k q_s \right. \\
& + \sum_j s_{ij} q_j + \sum_j \sum_k S_{ijk} q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s S_{ijks} q_j q_k q_s + \nu \sum_j u_{ij} q_j + \nu \sum_j \sum_k U_{ijk} q_j q_k + \nu \sum_j \sum_k \sum_s U_{ijks} q_j q_k q_s \\
& + \nu \sum_j v_{ij} q_j + \nu \sum_j \sum_k V_{ijk} q_j q_k + \nu \sum_j \sum_k \sum_s V_{ijks} q_j q_k q_s + 2(1-\nu) \sum_j t_{ij} q_j + 2(1-\nu) \sum_j \sum_k T_{ijk} q_j q_k \\
& \left. + 2(1-\nu) \sum_j \sum_k \sum_s T_{ijks} q_j q_k q_s \right] A_1 A_2 dx_1 dx_2 \quad (40)
\end{aligned}$$

Une expression plus simplifiée de l'équation (40) nous donne

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial q_i} = & \sum_j \left[\int_0^{l_2} \int_0^{l_1} \left\{ C \left[a_{ij} + b_{ij} + \nu(d_{ij} + e_{ij}) + 2(1-\nu)\mathbb{C}_{ij} \right] + \right. \right. \\
& D \left[p_{ij} + s_{ij} + \nu(u_{ij} + v_{ij}) + 2(1-\nu)t_{ij} \right] \} A_1 A_2 dx_1 dx_2 \right] q_j \\
& + \sum_j \sum_k \left[\int_0^{l_2} \int_0^{l_1} \left\{ C \left[A_{ijk} + B_{ijk} + \nu(D_{ijk} + E_{ijk}) + 2(1-\nu)C_{ijk} \right] \right. \right. \\
& \left. \left. + D \left[P_{ijk} + S_{ijk} + \nu(U_{ijk} + V_{ijk}) + 2(1-\nu)T_{ijk} \right] \right\} A_1 A_2 dx_1 dx_2 \right] q_j q_k \\
& + \sum_j \sum_k \sum_s \left[\int_0^{l_2} \int_0^{l_1} \left\{ C \left[A_{ijks} + B_{ijks} + \nu(D_{ijks} + E_{ijks}) + 2(1-\nu)C_{ijks} \right] \right. \right. \\
& \left. \left. + D \left[P_{ijks} + S_{ijks} + \nu(U_{ijks} + V_{ijks}) + 2(1-\nu)T_{ijks} \right] \right\} A_1 A_2 dx_1 dx_2 \right] q_j q_k q_s \quad (41)
\end{aligned}$$

L'équation (41) se réduit à

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \sum_j K_{ij} q_j + \sum_j \sum_k K_{ijk} q_j q_k + \sum_j \sum_k \sum_s K_{ijks} q_j q_k q_s \quad (42)$$

En considérant que

$$K_{ij} = \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} \left\{ C \left[a_{ij} + b_{ij} + \nu (d_{ij} + e_{ij}) + 2(1-\nu) \mathbb{C}_{ij} \right] + D \left[P_{ij} + S_{ij} + \nu (u_{ij} + v_{ij}) + 2(1-\nu) t_{ij} \right] \right\} A_1 A_2 dx_1 dx_2 \quad (42.a)$$

$$K_{ijk} = \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} \left\{ C \left[A_{ijk} + B_{ijk} + \nu (D_{ijk} + E_{ijk}) + 2(1-\nu) C_{ijk} \right] + D \left[P_{ijk} + S_{ijk} + \nu (U_{ijk} + V_{ijk}) + 2(1-\nu) T_{ijk} \right] \right\} A_1 A_2 dx_1 dx_2 \quad (42.b)$$

$$K_{ijks} = \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} \left\{ C \left[A_{ijks} + B_{ijks} + \nu (D_{ijks} + E_{ijks}) + 2(1-\nu) C_{ijks} \right] + D \left[P_{ijks} + S_{ijks} + \nu (U_{ijks} + V_{ijks}) + 2(1-\nu) T_{ijks} \right] \right\} A_1 A_2 dx_1 dx_2 \quad (42.c)$$

Avec i, j, k et $s=1,..,r$ (r étant le nombre de *ddl*)

En tenant compte de tous les termes de couplage non linéaire entre modes propres, l'équation de mouvement se révèle sous la forme indicielle soit en équation (18.a) ou encore sous la forme matricielle présentée dans l'équation (18.b).

6. Étude de cas

Nous exhibons dans cette section une étude de cas mettant en exergue l'emploi du champ de déplacement issu de l'analyse linéaire et représentant la solution exacte des équations de *Sanders* tel qu'il a été développé par *Lakis* dans son article. [\[46\]](#)

Les fonctions spatiales sont ainsi définies comme suit :

$$f_i = \hat{u}_i = A_i e^{\lambda_i x/R} \cos(n\theta) \quad (43.a)$$

$$g_i = \hat{v}_i = B_i e^{\lambda_i x/R} \sin(n\theta) \quad (43.b)$$

$$h_i = \hat{w}_i = C_i e^{\lambda_i x/R} \cos(n\theta) \quad (43.c)$$

Les vecteurs A_i, B_i et C_i sont linéairement dépendants tel que $A_i = \alpha_i C_i$ et $B_i = \beta_i C_i$

Les constantes λ_i, α_i et β_i ($i=1,..,8$) sont déterminées à partir des équations d'équilibre de *Sanders* issues de l'analyse linéaire. [\[46\]](#)

6.1. Matrice de masse

On procède ici à chercher la matrice de masse m_{ij} . Pour se faire on substitut les fonctions spatiales de l'équation (25) par les expressions (43.a – 43.c), ce qui donne

$$m_{ij} = \int_0^l \int_0^{2\pi} \bar{m} \left[A_i A_j e^{(\lambda_i + \lambda_j)x/R} \cos^2(n\theta) + B_i B_j e^{(\lambda_i + \lambda_j)x/R} \sin^2(n\theta) + C_i C_j e^{(\lambda_i + \lambda_j)x/R} \cos^2(n\theta) \right] R dx d\theta \quad (44)$$

En développant l'équation (44) on obtient

$$m_{ij} = \int_0^l \int_0^{2\pi} \bar{m} \left[A_i A_j e^{(\lambda_i + \lambda_j)x/R} \left(\frac{1 + \cos(2n\theta)}{2} \right) + B_i B_j e^{(\lambda_i + \lambda_j)x/R} \left(\frac{1 - \cos(2n\theta)}{2} \right) + C_i C_j e^{(\lambda_i + \lambda_j)x/R} \left(\frac{1 + \cos(2n\theta)}{2} \right) \right] R dx d\theta \quad (45)$$

Ou encore

$$m_{ij} = \bar{m} \int_0^l e^{(\lambda_i + \lambda_j)x/R} dx \int_0^{2\pi} \left[(A_i A_j + C_i C_j) \left(\frac{1 + \cos(2n\theta)}{2} \right) + B_i B_j \left(\frac{1 - \cos(2n\theta)}{2} \right) \right] R d\theta \quad (46)$$

En développant les intégrales, l'équation (46) donne

$$m_{ij} = \bar{m} \left\{ \pi R^2 \left(\frac{e^{(\lambda_i + \lambda_j)l/R} - 1}{\lambda_i + \lambda_j} \right) (A_i A_j + B_i B_j + C_i C_j) \right\} \quad (47)$$

L'arrangement de l'équation (47) entraîne

$$m_{ij} = \frac{\bar{m} R^2 \pi}{\lambda_i + \lambda_j} \left(e^{(\lambda_i + \lambda_j)l/R} - 1 \right) (A_i A_j + B_i B_j + C_i C_j) \quad (48)$$

Finalement on a

$$m_{ij} = \bar{m} R^2 \pi C_i C_j \left(\frac{e^{(\lambda_i + \lambda_j)l/R} - 1}{\lambda_i + \lambda_j} \right) (1 + \alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j) \quad (49)$$

6.2. Matrice de rigidité

Avant d'accoster le calcul des matrices de rigidité, on procède à développer les termes constituant le champ de déformation de Novozhilov tout en considérant que la coque est parfaitement cylindrique pour négliger l'effet des imperfections géométriques initiales.

Ainsi les équations (10.e), (11.e), (12.e), (13.e), (14.e) et (15.e) donnent respectivement

$$a_i = f_{i,1} = \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x} \quad (50)$$

$$b_i = \frac{1}{R} (g_{i,2} + h_i) = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial \theta} + \hat{w}_i \right) \quad (51)$$

$$c_i = \frac{1}{2} \left(g_{i,1} + \frac{1}{R} f_{i,2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \theta} \right) \quad (52)$$

$$p_i = -h_{i,11} = -\frac{\partial^2 \hat{w}_i}{\partial x^2} \quad (53)$$

$$s_i = -\frac{1}{R^2} h_{i,22} + \frac{1}{R} f_{i,1} + \frac{1}{R^2} g_{i,2} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \hat{w}_i}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial \theta} \quad (54)$$

$$t_i = -\frac{2}{R} h_{i,12} - \frac{1}{R^2} f_{i,2} + \frac{1}{R} g_{i,1} = -\frac{2}{R} \frac{\partial^2 \hat{w}_i}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x} \quad (55)$$

En se basant sur la même approche et en se référant respectivement aux équations (10.f), (11.f), (12.f), (13.f), (14.f) et (15.f) on trouve

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x} + \frac{\partial \hat{w}_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}_j}{\partial x} \right] \quad (56)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2R^2} \left[\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \theta} \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \theta} + \left(\hat{w}_i + \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial \theta} \right) \left(\hat{w}_j + \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial \hat{w}_i}{\partial \theta} - \hat{v}_i \right) \left(\frac{\partial \hat{w}_j}{\partial \theta} - \hat{v}_j \right) \right] \quad (57)$$

$$C_{ij} = \frac{1}{2R} \left[\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \theta} + \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial \theta} + \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x} \hat{w}_j + \frac{\partial \hat{w}_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{w}_j}{\partial \theta} - \frac{\partial \hat{w}_i}{\partial x} \hat{v}_j \right] \quad (58)$$

$$\begin{aligned} P_{ij} = & \frac{1}{R} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x} \left[-\frac{1}{R} \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \theta} + \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x} - \frac{\partial^2 \hat{w}_j}{\partial x \partial \theta} \right] + \frac{\partial \hat{w}_i}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{u}_j}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x \partial \theta} \hat{v}_j + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x \partial \theta} \frac{\partial \hat{w}_j}{\partial \theta} \\ & + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \hat{w}_i}{\partial x \partial \theta} \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \hat{w}_i}{\partial x^2} \left[\frac{1}{R} \hat{w}_j + \frac{1}{R} \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial \theta} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} S_{ij} = & \hat{w}_i \left[-\frac{1}{R^3} \frac{\partial^2 \hat{w}_j}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial \theta} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x} \right] - \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \theta} \left[\frac{1}{R^3} \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \hat{w}_j}{\partial x \partial \theta} \right] \\ & + \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial \theta} \left[\frac{1}{R^3} \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial \theta} + \frac{3}{R^2} \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x} - \frac{1}{R^3} \frac{\partial^2 \hat{w}_j}{\partial \theta^2} \right] + \frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial \theta^2} \left[\frac{1}{R^3} \frac{\partial \hat{w}_j}{\partial \theta} - \frac{1}{R^3} \hat{v}_j \right] + \frac{\partial \hat{w}_i}{\partial \theta} \left[-\frac{1}{R^3} \hat{v}_j + \frac{1}{R^3} \frac{\partial \hat{w}_j}{\partial \theta} \right] \\ & - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \hat{w}_i}{\partial \theta^2} \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \hat{w}_i}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{v}_j}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \hat{w}_i}{\partial x \partial \theta} \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x} \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} T_{ij} = & \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \theta} \left(-\frac{1}{R^2} \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^2 \hat{w}_j}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R^3} \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \hat{w}_i}{\partial x^2} \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x} - v_i \left(\frac{1}{R^3} \frac{\partial^2 \hat{u}_j}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \hat{v}_j}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial \hat{w}_j}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial \hat{w}_i}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R^3} \frac{\partial^2 \hat{u}_j}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial \hat{w}_j}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \hat{v}_j}{\partial x \partial \theta} \right) + \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x} \left(\frac{1}{R^2} \hat{w}_j + \frac{2}{R^2} \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial \theta} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \hat{w}_j}{\partial \theta^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial \hat{w}_i}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \hat{u}_j}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 \hat{v}_j}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2 \hat{w}_i}{\partial x \partial \theta} \left(\frac{2}{R^2} \hat{w}_j + \frac{2}{R^2} \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial \theta} + \frac{2}{R} \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (61)$$

On substitut maintenant les fonctions de déplacement par leurs expressions préalablement définies (équations (43.a – 43.c))

$$a_i = A_i e^{\lambda_i x/R} \frac{\lambda_i}{R} \cos(n\theta) = \alpha_i C_i e^{\lambda_i x/R} \frac{\lambda_i}{R} \cos(n\theta) \quad (62)$$

$$b_i = \frac{1}{R} [B_i e^{\lambda_i x/R} n \cos(n\theta) + C_i e^{\lambda_i x/R} \cos(n\theta)] = \frac{1}{R} C_i e^{\lambda_i x/R} \cos(n\theta) [1 + \beta_i n] \quad (63)$$

$$c_i = \frac{1}{2} \left[B_i \frac{\lambda_i}{R} e^{\lambda_i x/R} \sin(n\theta) - \frac{1}{R} A_i e^{\lambda_i x/R} n \sin(n\theta) \right] = \frac{1}{2R} C_i e^{\lambda_i x/R} \sin(n\theta) [\beta_i \lambda_i - \alpha_i n] \quad (64)$$

En suivant le même développement on détermine

$$p_i = -C_i \left(\frac{\lambda_i}{R} \right)^2 e^{\lambda_i x/R} \cos(n\theta) \quad (65)$$

$$s_i = \frac{1}{R^2} C_i e^{\lambda_i x/R} \cos(n\theta) [n^2 + \alpha_i \lambda_i + \beta_i n] \quad (66)$$

$$t_i = \frac{1}{R^2} C_i e^{\lambda_i x/R} \sin(n\theta) [2 \lambda_i n + \alpha_i n + \beta_i \lambda_i] \quad (67)$$

Après avoir introduire les équations (43.a – 43.c) dans les équations (56-61) et procéder à quelques manipulations de dérivation, on obtient

$$A_{ij} = C_i a'_{ij} e^{(\lambda_i + \lambda_j)x/R} C_j \quad (68.a)$$

Tel que

$$a'_{ij} = \frac{1}{2R^2} [a_{ij}^{(1)} \cos^2(n\theta) + a_{ij}^{(2)} \sin^2(n\theta)] \quad (68.b)$$

$$a_{ij}^{(1)} = (1 + \alpha_i \alpha_j) \lambda_i \lambda_j \quad (68.c)$$

$$a_{ij}^{(2)} = \beta_i \beta_j \lambda_i \lambda_j \quad (68.d)$$

De plus

$$B_{ij} = C_i b'_{ij} e^{(\lambda_i + \lambda_j)x/R} C_j \quad (69.a)$$

Avec

$$b'_{ij} = \frac{1}{2R^2} [b_{ij}^{(1)} \cos^2(n\theta) + b_{ij}^{(2)} \sin^2(n\theta)] \quad (69.b)$$

$$b_{ij}^{(1)} = 1 + (\beta_i + \beta_j)n + \beta_i \beta_j n^2 \quad (69.c)$$

$$b_{ij}^{(2)} = (1 + \alpha_i \alpha_j)n^2 + (\beta_i + \beta_j)n + \beta_i \beta_j \quad (69.d)$$

Pareillement

$$C_{ij} = C_i c'_{ij} e^{(\lambda_i + \lambda_j)x/R} C_j \quad (70.a)$$

Là où

$$c'_{ij} = -\frac{1}{2R^2} \left[c_{ij}^{(1)} + c_{ij}^{(2)} \right] \cos(n\theta) \sin(n\theta) \quad (70.b)$$

$$c_{ij}^{(1)} = (\alpha_i \alpha_j - \beta_i \beta_j) \lambda_i n \quad (70.c)$$

$$c_{ij}^{(2)} = (\beta_j - \beta_i) \lambda_i \quad (70.d)$$

De même

$$P_{ij} = C_i p'_{ij} e^{(\lambda_i + \lambda_j)x/R} C_j \quad (71.a)$$

Avec

$$p'_{ij} = \frac{1}{R^3} \left[p_{ij}^{(1)} \cos^2(n\theta) + p_{ij}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \quad (71.b)$$

$$p_{ij}^{(1)} = \alpha_j \lambda_i \lambda_j^2 - \lambda_i^2 - \beta_j \lambda_i^2 n - \alpha_j \lambda_i^2 \lambda_j \quad (71.c)$$

$$p_{ij}^{(2)} = (\alpha_i + \alpha_j) \lambda_i n^2 + (\beta_i \alpha_j + \beta_i \lambda_j + \alpha_i \beta_j) \lambda_i n + \beta_i \beta_j \lambda_i \lambda_j \quad (71.d)$$

Également

$$S_{ij} = C_i s'_{ij} e^{(\lambda_i + \lambda_j)x/R} C_j \quad (72.a)$$

En supposant que

$$s'_{ij} = \frac{1}{R^3} \left[s_{ij}^{(1)} \cos^2(n\theta) + s_{ij}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \quad (72.b)$$

$$s_{ij}^{(1)} = \beta_i n^3 + (\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i) n^2 + (\beta_j + 3\beta_i \alpha_j \lambda_j + \beta_j \lambda_i \lambda_j) n + 2\alpha_j \lambda_j \quad (72.c)$$

$$s_{ij}^{(2)} = \beta_i n^3 + (\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i) n^2 + (\alpha_i \beta_j \lambda_j + \beta_j - \beta_i \lambda_i \lambda_j) n \quad (72.d)$$

Et finalement

$$T_{ij} = C_i t'_{ij} e^{(\lambda_i + \lambda_j)x/R} C_j \quad (73.a)$$

Notons que

$$t'_{ij} = \frac{1}{R^3} t_{ij}^{(1)} \cos(n\theta) \sin(n\theta) \quad (73.b)$$

$$\begin{aligned} t_{ij}^{(1)} = & (\alpha_i + \alpha_j) n^3 + (\alpha_i \beta_j + \beta_i \alpha_j - \beta_j \lambda_j + \beta_i \lambda_i + 2\beta_j \lambda_i) n^2 \\ & + (\alpha_i \alpha_j \lambda_j - \beta_i \beta_j \lambda_j - \lambda_j + 2\beta_i \beta_j \lambda_i - \alpha_j \lambda_i \lambda_j + 2\lambda_i + 2\alpha_j \lambda_j \lambda_i) n + \beta_j \lambda_i^2 \lambda_j \\ & - \beta_i \lambda_j + \beta_i \lambda_i + 2\beta_i \alpha_j \lambda_i \lambda_j + \beta_j \lambda_i \lambda_j^2 \end{aligned} \quad (73.c)$$

6.2.1. Matrice de rigidité non linéaire d'ordre 2 $[K^{(NL2)}]$

Afin de déterminer l'expression de la matrice de rigidité non linéaire d'ordre 2, il est impératif de déceler tous les éléments qui la composent tel que : $A_{ijk}, B_{ijk}, C_{ijk}$,

$D_{ijk}, E_{ijk}, P_{ijk}, S_{ijk}, T_{ijk}, U_{ijk}$ et V_{ijk} .

Pour y parvenir, on commence par le développement de l'élément A_{ijk} dont l'expression (équation (30.f)) dépend étroitement des éléments a_i et A_{jk} (équations (62) et (68.a)). La combinaison des équations (62) et (68.a) nous donne :

$$a_i A_{jk} = C_i C_j C_k \frac{\lambda_i}{R} \alpha_i a'_{jk} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \quad (74.a)$$

Une permutation des indices de l'équation (74.a) nous permet d'écrire

$$a_j A_{ki} = C_i C_j C_k \frac{\lambda_j}{R} \alpha_j a'_{ki} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \quad (74.b)$$

$$a_k A_{ij} = C_i C_j C_k \frac{\lambda_k}{R} \alpha_k a'_{ij} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \quad (74.c)$$

Finalement l'équation (30.f) se réduit à

$$A_{ijk} = \frac{1}{R} C_i C_j C_k e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) [\lambda_i \alpha_i a'_{jk} + \lambda_j \alpha_j a'_{ki} + \lambda_k \alpha_k a'_{ij}] \quad (74.d)$$

En utilisant la même démarche illustrée précédemment on procède à déterminer B_{ijk} . La combinaison des équations (63) et (69.a) nous donne

$$b_i B_{jk} = \frac{1}{R} C_i C_j C_k (1 + \beta_i n) b'_{jk} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \quad (75.a)$$

De même on établit

$$b_j B_{ki} = \frac{1}{R} C_i C_j C_k (1 + \beta_j n) b'_{ki} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \quad (75.b)$$

$$b_k B_{ij} = \frac{1}{R} C_i C_j C_k (1 + \beta_k n) b'_{ij} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \quad (75.c)$$

Donc au final l'équation (31.f) devient

$$B_{ijk} = \frac{1}{R} C_i C_j C_k e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) [(1 + \beta_i n) b'_{jk} + (1 + \beta_j n) b'_{ki} + (1 + \beta_k n) b'_{ij}] \quad (75.d)$$

La combinaison des équations (64) et (70.a) conduit aux équations suivantes

$$c_i C_{jk} = \frac{1}{2R} C_i C_j C_k c'_{jk} (\beta_i \lambda_i - \alpha_i n) e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \sin(n\theta) \quad (76.a)$$

De même on trouve

$$c_j C_{ik} = \frac{1}{2R} C_i C_j C_k c'_{ik} (\beta_j \lambda_j - \alpha_j n) e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \sin(n\theta) \quad (76.b)$$

$$c_k C_{ji} = \frac{1}{2R} C_i C_j C_k c'_{ji} (\beta_k \lambda_k - \alpha_k n) e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \sin(n\theta) \quad (76.c)$$

En se référant à l'équation (32.f) on obtient

$$\begin{aligned} C_{ijk} = & \frac{1}{2R} C_i C_j C_k e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \sin(n\theta) [c'_{jk} (\beta_i \lambda_i - \alpha_i n) + c'_{ik} (\beta_j \lambda_j - \alpha_j n) \\ & + c'_{ji} (\beta_k \lambda_k - \alpha_k n)] \end{aligned} \quad (76.d)$$

En ralliant les équations (65) et (71.a), il vient

$$p_i P_{jk} = -C_i C_j C_k \left(\frac{\lambda_i}{R} \right)^2 p'_{jk} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \quad (77.a)$$

En permutant les indices on obtient

$$p_j P_{ik} = -C_i C_j C_k \left(\frac{\lambda_j}{R} \right)^2 p'_{ik} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \quad (77.b)$$

$$p_k P_{ji} = -C_i C_j C_k \left(\frac{\lambda_k}{R} \right)^2 p'_{ji} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \quad (77.c)$$

Ce faisant, l'équation (33.f) se manifeste comme

$$P_{ijk} = -\frac{1}{R^2} C_i C_j C_k e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) [\lambda_i^2 p'_{jk} + \lambda_j^2 p'_{ik} + \lambda_k^2 p'_{ji}] \quad (77.d)$$

En multipliant l'équation (66) par celle (72.a) on obtient

$$s_i S_{jk} = \frac{1}{R^2} C_i C_j C_k s'_{jk} (n^2 + \alpha_i \lambda_i + \beta_i n) e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \quad (78.a)$$

De même on trouve

$$s_j S_{ik} = \frac{1}{R^2} C_i C_j C_k s'_{ik} (n^2 + \alpha_j \lambda_j + \beta_j n) e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \quad (78.b)$$

$$s_k S_{ji} = \frac{1}{R^2} C_i C_j C_k s'_{ji} (n^2 + \alpha_k \lambda_k + \beta_k n) e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \quad (78.c)$$

On en déduit que l'équation (34.f) prend la forme de

$$S_{ijk} = \frac{1}{R^2} C_i C_j C_k e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \left[s'_{jk} (n^2 + \alpha_i \lambda_i + \beta_i n) + s'_{ik} (n^2 + \alpha_j \lambda_j + \beta_j n) + s'_{ji} (n^2 + \alpha_k \lambda_k + \beta_k n) \right] \quad (78.d)$$

Les équations (67) et (73.a) révèlent

$$t_i T_{jk} = \frac{1}{R^2} C_i C_j C_k t'_{jk} [2\lambda_i n + \alpha_i n + \beta_i \lambda_i] e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \sin(n\theta) \quad (79.a)$$

De la même manière on trouve que

$$t_j T_{ik} = \frac{1}{R^2} C_i C_j C_k t'_{ik} [2\lambda_j n + \alpha_j n + \beta_j \lambda_j] e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \sin(n\theta) \quad (79.b)$$

$$t_k T_{ji} = \frac{1}{R^2} C_i C_j C_k t'_{ji} [2\lambda_k n + \alpha_k n + \beta_k \lambda_k] e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \sin(n\theta) \quad (79.c)$$

En amassant tous les termes qui découlent des équations (79.a – 79.c), on présente l'équation (35.f) qui surgit sous cette forme

$$T_{ijk} = \frac{1}{R^2} C_i C_j C_k e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \sin(n\theta) \left[t'_{jk} (2\lambda_i n + \alpha_i n + \beta_i \lambda_i) + t'_{ik} (2\lambda_j n + \alpha_j n + \beta_j \lambda_j) + t'_{ji} (2\lambda_k n + \alpha_k n + \beta_k \lambda_k) \right] \quad (79.d)$$

La multiplication de l'équation (62) avec (69.a) et celle (63) avec (68.a) induit les relations suivantes

$$b_i A_{jk} = \frac{1}{R} C_i C_j C_k a'_{jk} (1 + \beta_i n) e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \quad (80.a)$$

$$a_j B_{ki} = \frac{1}{R} C_i C_j C_k \alpha_j \lambda_j b'_{ki} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \quad (80.b)$$

$$a_k B_{ij} = \frac{1}{R} C_i C_j C_k \alpha_k \lambda_k b'_{ij} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \quad (80.c)$$

Une fois que les relations (80.a – 80.c) sont associées, l'expression de l'équation (36.f) émerge de la forme suivante

$$D_{ijk} = \frac{1}{R} C_i C_j C_k e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \left[\alpha_j \lambda_j b'_{ki} + \alpha_k \lambda_k b'_{ij} + a'_{jk} (1 + \beta_i n) \right] \quad (80.d)$$

Afin d'examiner l'expression de l'équation (37.f), on procède, comme cité au cas précédent, à multiplier l'équation (62) avec (69.a) et celle (63) avec (68.a)

$$a_i B_{jk} = \frac{1}{R} C_i C_j C_k b'_{jk} \alpha_i \lambda_i e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \quad (81.a)$$

$$b_j A_{ki} = \frac{1}{R} C_i C_j C_k a'_{ki} (1 + \beta_j n) e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \quad (81.b)$$

$$b_k A_{ij} = \frac{1}{R} C_i C_j C_k a'_{ij} (1 + \beta_k n) e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \quad (81.c)$$

Une fois regroupées, les équations (81.a – 81.c) sont introduites par la suite dans l'équation (37.f) qui se s'expose sous cette forme

$$E_{ijk} = \frac{1}{R} C_i C_j C_k e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) [a'_{ki} (1 + \beta_j n) + a'_{ij} (1 + \beta_k n) + b'_{jk} \alpha_i \lambda_i] \quad (81.d)$$

En reprenant la même démarche, on développe d'avantage l'expression de l'équation (38.f) en se basant sur l'équation (65) ralliée à (72.a) et celle (66) ralliée à l'équation (71.a)

$$s_i P_{jk} = \frac{1}{R^2} C_i C_j C_k p'_{jk} (n^2 + \beta_i n + \alpha_i \lambda_i) e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \quad (82.a)$$

$$p_j S_{ik} = -C_i C_j C_k \left(\frac{\lambda_j}{R} \right)^2 s'_{ik} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \quad (82.b)$$

$$p_k S_{ji} = -C_i C_j C_k \left(\frac{\lambda_k}{R} \right)^2 s'_{ji} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \quad (82.c)$$

L'équation (38.f) est ainsi déduite

$$U_{ijk} = \frac{1}{R^2} C_i C_j C_k e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) [p'_{jk} (n^2 + \beta_i n + \alpha_i \lambda_i) - s'_{ik} \lambda_j^2 - s'_{ji} \lambda_k^2] \quad (82.d)$$

Développons maintenant l'expression de l'équation (39.a) en suivant le même cheminement menant à l'équation (82.d)

$$p_i S_{jk} = -\frac{1}{R^2} C_i C_j C_k s'_{jk} \lambda_i^2 e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \quad (83.a)$$

$$s_j P_{ik} = \frac{1}{R^2} C_i C_j C_k p'_{ik} (n^2 + \beta_j n + \alpha_j \lambda_j) e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \quad (83.b)$$

$$s_k P_{ji} = \frac{1}{R^2} C_i C_j C_k p'_{ji} (n^2 + \beta_k n + \alpha_k \lambda_k) e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) \quad (83.c)$$

On en déduit

$$V_{ijk} = \frac{1}{R^2} C_i C_j C_k e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) [p'_{ik} (n^2 + \beta_j n + \alpha_j \lambda_j) + p'_{ji} (n^2 + \beta_k n + \alpha_k \lambda_k) - s'_{jk} \lambda_i^2] \quad (83.d)$$

Après avoir décelé tous les éléments constituants l'expression de l'énergie de déformation élastique d'ordre 2, on penche vers la reformulation de l'expression de l'équation (42.b). Ce faisant, cette équation se réduit à

$$\begin{aligned}
K_{ijk} = & \int_0^l \int_0^{2\pi} \left[C \left\{ \frac{1}{R} C_i C_j C_k e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) (\lambda_i \alpha_i a'_{jk} + \lambda_j \alpha_j a'_{ki} + \lambda_k \alpha_k a'_{ij}) \right. \right. \\
& + \frac{1}{R} C_i C_j C_k e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) ((1 + \beta_i n) b'_{jk} + (1 + \beta_j n) b'_{ki} + (1 + \beta_k n) b'_{ij}) \\
& + \nu \left[\frac{1}{R} C_i C_j C_k e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) (\alpha_j \lambda_j b'_{ki} + \alpha_k \lambda_k b'_{ij} + a'_{jk} (1 + \beta_i n)) \right. \\
& + \frac{1}{R} C_i C_j C_k e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) (a'_{ki} (1 + \beta_j n) + a'_{ij} (1 + \beta_k n) + b'_{jk} \alpha_i \lambda_i) \left. \right] \\
& + 2(1 - \nu) \frac{1}{2R} C_i C_j C_k e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \sin(n\theta) [c'_{jk} (\beta_i \lambda_i - \alpha_i n) + c'_{ik} (\beta_j \lambda_j - \alpha_j n) \\
& \left. \left. + c'_{ji} (\beta_k \lambda_k - \alpha_k n) \right] \right\} + D \left\{ -\frac{1}{R^2} C_i C_j C_k e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) (\lambda_i^2 p'_{jk} + \lambda_j^2 p'_{ik} + \lambda_k^2 p'_{ji}) \right. \\
& + \frac{1}{R^2} C_i C_j C_k e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) (s'_{jk} (n^2 + \alpha_i \lambda_i + \beta_i n) + s'_{ik} (n^2 + \alpha_j \lambda_j + \beta_j n) + s'_{ji} (n^2 + \alpha_k \lambda_k + \beta_k n)) \\
& + \nu \left[\frac{1}{R^2} C_i C_j C_k e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) (p'_{jk} (n^2 + \beta_i n + \alpha_i \lambda_i) - s'_{ik} \lambda_j^2 - s'_{ji} \lambda_k^2) \right. \\
& + \frac{1}{R^2} C_i C_j C_k e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \cos(n\theta) (p'_{ik} (n^2 + \beta_j n + \alpha_j \lambda_j) + p'_{ji} (n^2 + \beta_k n + \alpha_k \lambda_k) - s'_{jk} \lambda_i^2) \left. \right] \\
& + 2(1 - \nu) \frac{1}{R^2} C_i C_j C_k e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R} \sin(n\theta) [t'_{jk} (2 \lambda_i n + \alpha_i n + \beta_i \lambda_i) + t'_{ik} (2 \lambda_j n + \alpha_j n + \beta_j \lambda_j) \\
& \left. \left. + t'_{ji} (2 \lambda_k n + \alpha_k n + \beta_k \lambda_k) \right] \right\} \right] R dx d\theta \quad (84)
\end{aligned}$$

En développant davantage l'équation (84) on obtient

$$\begin{aligned}
K_{ijk} = & \int_0^l \int_0^{2\pi} \left[C C_i C_j C_k \frac{e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R}}{R} \right] \left\{ \cos(n\theta) \left[\lambda_i \alpha_i a'_{jk} + \lambda_j \alpha_j a'_{ki} + \lambda_k \alpha_k a'_{ij} + (1 + \beta_i n) b'_{jk} \right. \right. \\
& + (1 + \beta_j n) b'_{ki} + (1 + \beta_k n) b'_{ij} + \nu \left(\alpha_j \lambda_j b'_{ki} + \alpha_k \lambda_k b'_{ij} + a'_{jk} (1 + \beta_i n) + a'_{ki} (1 + \beta_j n) \right. \\
& \left. \left. + a'_{ij} (1 + \beta_k n) + b'_{jk} \alpha_i \lambda_i \right) \right] + \sin(n\theta) \left[c'_{jk} (\beta_i \lambda_i - \alpha_i n) + c'_{ik} (\beta_j \lambda_j - \alpha_j n) \right. \\
& \left. + c'_{ji} (\beta_k \lambda_k - \alpha_k n) \right] \right\} + D C_i C_j C_k \frac{e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R}}{R^2} \left\{ \cos(n\theta) \left[-(\lambda_i^2 p'_{jk} + \lambda_j^2 p'_{ik} + \lambda_k^2 p'_{ji}) \right. \right. \\
& + s'_{jk} (n^2 + \alpha_i \lambda_i + \beta_i n) + s'_{ik} (n^2 + \alpha_j \lambda_j + \beta_j n) + s'_{ji} (n^2 + \alpha_k \lambda_k + \beta_k n) \\
& + \nu \left(p'_{jk} (n^2 + \beta_i n + \alpha_i \lambda_i) - s'_{ik} \lambda_j^2 - s'_{ji} \lambda_k^2 + p'_{ik} (n^2 + \beta_j n + \alpha_j \lambda_j) \right. \\
& \left. + p'_{ji} (n^2 + \beta_k n + \alpha_k \lambda_k) - s'_{jk} \lambda_i^2 \right] \left. \right] + 2(1 - \nu) \sin(n\theta) \left[t'_{jk} (2\lambda_i n + \alpha_i n + \beta_i \lambda_i) \right. \\
& \left. + t'_{ik} (2\lambda_j n + \alpha_j n + \beta_j \lambda_j) + t'_{ji} (2\lambda_k n + \alpha_k n + \beta_k \lambda_k) \right] \right\} R dx d\theta
\end{aligned} \tag{85}$$

Simplifiant de plus la dernière équation

$$\begin{aligned}
K_{ijk} = & \int_0^l \int_0^{2\pi} C_i C_j C_k \frac{e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R}}{R} \left[\cos(n\theta) \left\{ C \left[\lambda_i \alpha_i a'_{jk} + \lambda_j \alpha_j a'_{ki} + \lambda_k \alpha_k a'_{ij} + (1 + \beta_i n) b'_{jk} \right. \right. \right. \\
& + (1 + \beta_j n) b'_{ki} + (1 + \beta_k n) b'_{ij} + \nu \left(\alpha_j \lambda_j b'_{ki} + \alpha_k \lambda_k b'_{ij} + a'_{jk} (1 + \beta_i n) + a'_{ki} (1 + \beta_j n) \right. \\
& \left. \left. + a'_{ij} (1 + \beta_k n) + b'_{jk} \alpha_i \lambda_i \right) \right] + \frac{D}{R} \left[-(\lambda_i^2 p'_{jk} + \lambda_j^2 p'_{ik} + \lambda_k^2 p'_{ji}) + s'_{jk} (n^2 + \alpha_i \lambda_i + \beta_i n) \right. \\
& + s'_{ik} (n^2 + \alpha_j \lambda_j + \beta_j n) + s'_{ji} (n^2 + \alpha_k \lambda_k + \beta_k n) + \nu \left(p'_{jk} (n^2 + \beta_i n + \alpha_i \lambda_i) - s'_{ik} \lambda_j^2 - s'_{ji} \lambda_k^2 \right. \\
& \left. + p'_{ik} (n^2 + \beta_j n + \alpha_j \lambda_j) + p'_{ji} (n^2 + \beta_k n + \alpha_k \lambda_k) - s'_{jk} \lambda_i^2 \right] \left. \right\} \\
& + \sin(n\theta) \left\{ C(1 - \nu) \left[c'_{jk} (\beta_i \lambda_i - \alpha_i n) + c'_{ik} (\beta_j \lambda_j - \alpha_j n) + c'_{ji} (\beta_k \lambda_k - \alpha_k n) \right] \right. \\
& \left. + \frac{2D(1 - \nu)}{R} \left[t'_{jk} (2\lambda_i n + \alpha_i n + \beta_i \lambda_i) + t'_{ik} (2\lambda_j n + \alpha_j n + \beta_j \lambda_j) \right. \right. \\
& \left. \left. + t'_{ji} (2\lambda_k n + \alpha_k n + \beta_k \lambda_k) \right] \right\} R dx d\theta
\end{aligned} \tag{86}$$

En introduisant les équations (68.b), (69.b), (70.b), (71.b), (72.b) et (73.b) dans l'équation (86) on obtient

$$\begin{aligned}
K_{ijk} = & \int_0^l \int_0^{2\pi} C_i C_j C_k \frac{e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R}}{R} \left\{ \cos(n\theta) \left[C \left[\lambda_i \alpha_i \frac{1}{2R^2} \left[a_{jk}^{(1)} \cos^2(n\theta) + a_{jk}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \right. \right. \right. \\
& + \lambda_j \alpha_j \frac{1}{2R^2} \left[a_{ki}^{(1)} \cos^2(n\theta) + a_{ki}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] + \lambda_k \alpha_k \frac{1}{2R^2} \left[a_{ij}^{(1)} \cos^2(n\theta) + a_{ij}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \\
& + (1 + \beta_i n) \frac{1}{2R^2} \left[b_{jk}^{(1)} \cos^2(n\theta) + b_{jk}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] + (1 + \beta_j n) \frac{1}{2R^2} \left[b_{ki}^{(1)} \cos^2(n\theta) + b_{ki}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \\
& + (1 + \beta_k n) \frac{1}{2R^2} \left[b_{ij}^{(1)} \cos^2(n\theta) + b_{ij}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] + \nu \left(\lambda_j \alpha_j \frac{1}{2R^2} \left[b_{ki}^{(1)} \cos^2(n\theta) + b_{ki}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \right. \\
& + \lambda_k \alpha_k \frac{1}{2R^2} \left[b_{ij}^{(1)} \cos^2(n\theta) + b_{ij}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] + \lambda_i \alpha_i \frac{1}{2R^2} \left[b_{jk}^{(1)} \cos^2(n\theta) + b_{jk}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \\
& + (1 + \beta_i n) \frac{1}{2R^2} \left[a_{jk}^{(1)} \cos^2(n\theta) + a_{jk}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] + (1 + \beta_j n) \frac{1}{2R^2} \left[a_{ki}^{(1)} \cos^2(n\theta) + a_{ki}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \\
& + (1 + \beta_k n) \frac{1}{2R^2} \left[a_{ij}^{(1)} \cos^2(n\theta) + a_{ij}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \left. \right] \left. \right] + \frac{D}{R} \left[-\lambda_i^2 \frac{1}{R^3} \left[p_{jk}^{(1)} \cos^2(n\theta) + p_{jk}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \right. \\
& - \lambda_j^2 \frac{1}{R^3} \left[p_{ik}^{(1)} \cos^2(n\theta) + p_{ik}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] - \lambda_k^2 \frac{1}{R^3} \left[p_{ji}^{(1)} \cos^2(n\theta) + p_{ji}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \\
& + \frac{1}{R^3} (n^2 + \alpha_i \lambda_i + \beta_i n) \left[s_{jk}^{(1)} \cos^2(n\theta) + s_{jk}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] + \frac{1}{R^3} (n^2 + \alpha_j \lambda_j + \beta_j n) \left[s_{ik}^{(1)} \cos^2(n\theta) + s_{ik}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \\
& + \frac{1}{R^3} (n^2 + \alpha_k \lambda_k + \beta_k n) \left[s_{ji}^{(1)} \cos^2(n\theta) + s_{ji}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \\
& + \nu \left(\frac{1}{R^3} (n^2 + \alpha_i \lambda_i + \beta_i n) \left[p_{jk}^{(1)} \cos^2(n\theta) + p_{jk}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \right. \\
& + \frac{1}{R^3} (n^2 + \alpha_j \lambda_j + \beta_j n) \left[p_{ik}^{(1)} \cos^2(n\theta) + p_{ik}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \\
& + \frac{1}{R^3} (n^2 + \alpha_k \lambda_k + \beta_k n) \left[p_{ji}^{(1)} \cos^2(n\theta) + p_{ji}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \\
& - \lambda_j^2 \frac{1}{R^3} \left[s_{ik}^{(1)} \cos^2(n\theta) + s_{ik}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] - \lambda_k^2 \frac{1}{R^3} \left[s_{ji}^{(1)} \cos^2(n\theta) + s_{ji}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \\
& - \lambda_i^2 \frac{1}{R^3} \left[s_{jk}^{(1)} \cos^2(n\theta) + s_{jk}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \left. \right] \left. \right] + \sin(n\theta) \left[C(1-\nu) \left[\frac{1}{2R^2} (\alpha_i n - \beta_i \lambda_i) (c_{jk}^{(1)} + c_{jk}^{(2)}) \cos(n\theta) \sin(n\theta) \right. \right. \\
& + \frac{1}{2R^2} (\alpha_j n - \beta_j \lambda_j) (c_{ik}^{(1)} + c_{ik}^{(2)}) \cos(n\theta) \sin(n\theta) + \frac{1}{2R^2} (\alpha_k n - \beta_k \lambda_k) (c_{ji}^{(1)} + c_{ji}^{(2)}) \cos(n\theta) \sin(n\theta) \left. \right] \\
& + \frac{2D(1-\nu)}{R} \left[\frac{1}{R^3} t_{jk}^{(1)} (2\lambda_i n + \alpha_i n + \beta_i \lambda_i) \cos(n\theta) \sin(n\theta) + \frac{1}{R^3} t_{ik}^{(1)} (2\lambda_j n + \alpha_j n + \beta_j \lambda_j) \cos(n\theta) \sin(n\theta) \right. \\
& \left. \left. \left. \left. + \frac{1}{R^3} t_{ji}^{(1)} (2\lambda_k n + \alpha_k n + \beta_k \lambda_k) \cos(n\theta) \sin(n\theta) \right] \right] \right\} R dx d\theta \quad (87)
\end{aligned}$$

En arrangeant davantage l'équation (87) on obtient

$$\begin{aligned}
K_{ijk} = & \int_0^l \int_0^{2\pi} C_i C_j C_k \frac{e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)x/R}}{R} \left\{ C \left[\alpha_i \lambda_i \frac{1}{2R^2} \left[a_{jk}^{(1)} \cos^3(n\theta) + a_{jk}^{(2)} \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] \right. \right. \\
& + \alpha_j \lambda_j \frac{1}{2R^2} \left[a_{ki}^{(1)} \cos^3(n\theta) + a_{ki}^{(2)} \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] + \alpha_k \lambda_k \frac{1}{2R^2} \left[a_{ij}^{(1)} \cos^3(n\theta) + a_{ij}^{(2)} \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] \\
& + (1 + \beta_i n) \frac{1}{2R^2} \left[b_{jk}^{(1)} \cos^3(n\theta) + b_{jk}^{(2)} \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] + (1 + \beta_j n) \frac{1}{2R^2} \left[b_{ki}^{(1)} \cos^3(n\theta) + b_{ki}^{(2)} \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] \\
& + (1 + \beta_k n) \frac{1}{2R^2} \left[b_{ij}^{(1)} \cos^3(n\theta) + b_{ij}^{(2)} \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] + \nu \left(\lambda_j \alpha_j \frac{1}{2R^2} \left[b_{ki}^{(1)} \cos^3(n\theta) + b_{ki}^{(2)} \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] \right. \\
& + \lambda_k \alpha_k \frac{1}{2R^2} \left[b_{ij}^{(1)} \cos^3(n\theta) + b_{ij}^{(2)} \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] + \lambda_i \alpha_i \frac{1}{2R^2} \left[b_{jk}^{(1)} \cos^3(n\theta) + b_{jk}^{(2)} \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] \\
& + (1 + \beta_i n) \frac{1}{2R^2} \left[a_{jk}^{(1)} \cos^3(n\theta) + a_{jk}^{(2)} \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] + (1 + \beta_j n) \frac{1}{2R^2} \left[a_{ki}^{(1)} \cos^3(n\theta) + a_{ki}^{(2)} \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] \\
& + (1 + \beta_k n) \frac{1}{2R^2} \left[a_{ij}^{(1)} \cos^3(n\theta) + a_{ij}^{(2)} \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] \left. \right] \left. \right] + \frac{D}{R} \left[-\lambda_i^2 \frac{1}{R^3} \left[p_{jk}^{(1)} \cos^3(n\theta) + p_{jk}^{(2)} \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] \right. \\
& - \lambda_j^2 \frac{1}{R^3} \left[p_{ik}^{(1)} \cos^3(n\theta) + p_{ik}^{(2)} \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] - \lambda_k^2 \frac{1}{R^3} \left[p_{ji}^{(1)} \cos^3(n\theta) + p_{ji}^{(2)} \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] \\
& + \frac{1}{R^3} (n^2 + \alpha_i \lambda_i + \beta_i n) \left[s_{jk}^{(1)} \cos^3(n\theta) + s_{jk}^{(2)} \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] \\
& + \frac{1}{R^3} (n^2 + \alpha_j \lambda_j + \beta_j n) \left[s_{ik}^{(1)} \cos^3(n\theta) + s_{ik}^{(2)} \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] \\
& + \frac{1}{R^3} (n^2 + \alpha_k \lambda_k + \beta_k n) \left[s_{ji}^{(1)} \cos^3(n\theta) + s_{ji}^{(2)} \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] \\
& + \nu \left(\frac{1}{R^3} (n^2 + \alpha_i \lambda_i + \beta_i n) \left[p_{jk}^{(1)} \cos^3(n\theta) + p_{jk}^{(2)} \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] \right. \\
& + \frac{1}{R^3} (n^2 + \alpha_j \lambda_j + \beta_j n) \left[p_{ik}^{(1)} \cos^3(n\theta) + p_{ik}^{(2)} \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] \\
& + \frac{1}{R^3} (n^2 + \alpha_k \lambda_k + \beta_k n) \left[p_{ji}^{(1)} \cos^3(n\theta) + p_{ji}^{(2)} \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] \\
& - \lambda_j^2 \frac{1}{R^3} \left[s_{ik}^{(1)} \cos^3(n\theta) + s_{ik}^{(2)} \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] - \lambda_k^2 \frac{1}{R^3} \left[s_{ji}^{(1)} \cos^3(n\theta) + s_{ji}^{(2)} \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] \\
& - \lambda_i^2 \frac{1}{R^3} \left[s_{jk}^{(1)} \cos^3(n\theta) + s_{jk}^{(2)} \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] \left. \right] \left. \right] + C(1-\nu) \left[\frac{1}{2R^2} (\alpha_i n - \beta_i \lambda_i) (c_{jk}^{(1)} + c_{jk}^{(2)}) \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right. \\
& + \frac{1}{2R^2} (\alpha_j n - \beta_j \lambda_j) (c_{ik}^{(1)} + c_{ik}^{(2)}) \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) + \frac{1}{2R^2} (\alpha_k n - \beta_k \lambda_k) (c_{ji}^{(1)} + c_{ji}^{(2)}) \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \left. \right] \\
& + \frac{2D(1-\nu)}{R} \left[\frac{1}{R^3} t_{jk}^{(1)} (2\lambda_i n + \alpha_i n + \beta_i \lambda_i) \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) + \frac{1}{R^3} t_{ik}^{(1)} (2\lambda_j n + \alpha_j n + \beta_j \lambda_j) \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{R^3} t_{ji}^{(1)} (2\lambda_k n + \alpha_k n + \beta_k \lambda_k) \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] \right\} R dx d\theta \quad (88)
\end{aligned}$$

Or étant donné que

$$\mathbb{I}_1 = \int_0^{2\pi} \cos^3(n\theta) d\theta = \frac{\sin(2\pi n)(2 + \cos^2(2\pi n))}{3n} = 0 \quad (89.a)$$

$$\mathbb{I}_2 = \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \sin^2(n\theta) d\theta = \frac{\sin(2\pi n)}{3n} = 0 \quad (89.b)$$

Le comment de cette dernière équation sera résolu en y projetant les équations (89.a) et (89.b). Ceci dit l'équation (88) prend alors la forme de

$$\begin{aligned}
K_{ijk} = & C_i C_j C_k \left[\frac{e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)t/R} - 1}{\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k} \right] \left\{ C \left[\alpha_i \lambda_i \frac{1}{2R} [a_{jk}^{(1)} \mathbb{I}_1 + a_{jk}^{(2)} \mathbb{I}_2] + \alpha_j \lambda_j \frac{1}{2R} [a_{ki}^{(1)} \mathbb{I}_1 + a_{ki}^{(2)} \mathbb{I}_2] \right. \right. \\
& + \alpha_k \lambda_k \frac{1}{2R} [a_{ij}^{(1)} \mathbb{I}_1 + a_{ij}^{(2)} \mathbb{I}_2] + (1 + \beta_i n) \frac{1}{2R} [b_{jk}^{(1)} \mathbb{I}_1 + b_{jk}^{(2)} \mathbb{I}_2] + (1 + \beta_j n) \frac{1}{2R} [b_{ki}^{(1)} \mathbb{I}_1 + b_{ki}^{(2)} \mathbb{I}_2] \\
& + (1 + \beta_k n) \frac{1}{2R} [b_{ij}^{(1)} \mathbb{I}_1 + b_{ij}^{(2)} \mathbb{I}_2] + \nu \left(\alpha_i \lambda_i \frac{1}{2R} [b_{jk}^{(1)} \mathbb{I}_1 + b_{jk}^{(2)} \mathbb{I}_2] + \alpha_j \lambda_j \frac{1}{2R} [b_{ki}^{(1)} \mathbb{I}_1 + b_{ki}^{(2)} \mathbb{I}_2] \right. \\
& + \alpha_k \lambda_k \frac{1}{2R} [b_{ij}^{(1)} \mathbb{I}_1 + b_{ij}^{(2)} \mathbb{I}_2] + (1 + \beta_i n) \frac{1}{2R} [a_{jk}^{(1)} \mathbb{I}_1 + a_{jk}^{(2)} \mathbb{I}_2] + (1 + \beta_j n) \frac{1}{2R} [a_{ki}^{(1)} \mathbb{I}_1 + a_{ki}^{(2)} \mathbb{I}_2] \\
& + (1 + \beta_k n) \frac{1}{2R} [a_{ij}^{(1)} \mathbb{I}_1 + a_{ij}^{(2)} \mathbb{I}_2] \left. \right] \left. \right\} + D \left[-\lambda_i^2 \frac{1}{R^3} [p_{jk}^{(1)} \mathbb{I}_1 + p_{jk}^{(2)} \mathbb{I}_2] - \lambda_j^2 \frac{1}{R^3} [p_{ik}^{(1)} \mathbb{I}_1 + p_{ik}^{(2)} \mathbb{I}_2] \right. \\
& - \lambda_k^2 \frac{1}{R^3} [p_{ji}^{(1)} \mathbb{I}_1 + p_{ji}^{(2)} \mathbb{I}_2] + (n^2 + \alpha_i \lambda_i + \beta_i n) \frac{1}{R^3} [s_{jk}^{(1)} \mathbb{I}_1 + s_{jk}^{(2)} \mathbb{I}_2] + (n^2 + \alpha_j \lambda_j + \beta_j n) \frac{1}{R^3} [s_{ik}^{(1)} \mathbb{I}_1 + s_{ik}^{(2)} \mathbb{I}_2] \\
& + (n^2 + \alpha_k \lambda_k + \beta_k n) \frac{1}{R^3} [s_{ji}^{(1)} \mathbb{I}_1 + s_{ji}^{(2)} \mathbb{I}_2] + \nu \left((n^2 + \alpha_i \lambda_i + \beta_i n) \frac{1}{R^3} [p_{jk}^{(1)} \mathbb{I}_1 + p_{jk}^{(2)} \mathbb{I}_2] \right. \\
& + (n^2 + \alpha_j \lambda_j + \beta_j n) \frac{1}{R^3} [p_{ik}^{(1)} \mathbb{I}_1 + p_{ik}^{(2)} \mathbb{I}_2] + (n^2 + \alpha_k \lambda_k + \beta_k n) \frac{1}{R^3} [p_{ji}^{(1)} \mathbb{I}_1 + p_{ji}^{(2)} \mathbb{I}_2] \\
& - \lambda_i^2 \frac{1}{R^3} [s_{jk}^{(1)} \mathbb{I}_1 + s_{jk}^{(2)} \mathbb{I}_2] - \lambda_j^2 \frac{1}{R^3} [s_{ik}^{(1)} \mathbb{I}_1 + s_{ik}^{(2)} \mathbb{I}_2] - \lambda_k^2 \frac{1}{R^3} [s_{ji}^{(1)} \mathbb{I}_1 + s_{ji}^{(2)} \mathbb{I}_2] \left. \right] \left. \right\} \\
& + C(1 - \nu) \left[\frac{1}{2R} (\alpha_i n - \beta_i \lambda_i) (c_{jk}^{(1)} + c_{jk}^{(2)}) \mathbb{I}_2 + \frac{1}{2R} (\alpha_j n - \beta_j \lambda_j) (c_{ik}^{(1)} + c_{ik}^{(2)}) \mathbb{I}_2 \right. \\
& + \frac{1}{2R} (\alpha_k n - \beta_k \lambda_k) (c_{ji}^{(1)} + c_{ji}^{(2)}) \mathbb{I}_2 \left. \right] + 2D(1 - \nu) \left[(2\lambda_i n + \alpha_i n + \beta_i \lambda_i) \frac{1}{R^3} t_{jk}^{(1)} \mathbb{I}_2 \right. \\
& + (2\lambda_j n + \alpha_j n + \beta_j \lambda_j) \frac{1}{R^3} t_{ik}^{(1)} \mathbb{I}_2 + (2\lambda_k n + \alpha_k n + \beta_k \lambda_k) \frac{1}{R^3} t_{ji}^{(1)} \mathbb{I}_2 \left. \right] \} = 0 \quad (90)
\end{aligned}$$

La nullité de l'équation (90) nous incite à éliminer les termes quadratiques de l'équation de mouvement (18.a).

6.2.2. Matrice de rigidité non linéaire d'ordre 3 $[K^{(NL3)}]$

Afin de racoler les termes cubiques émanés de l'équation de mouvement (18.a), on procède à révéler l'expression de la matrice de rigidité non linéaire d'ordre 3. Pour se faire, on développe d'avantage les coefficients $A_{ijks}, B_{ijks}, C_{ijks}, D_{ijks}, E_{ijks}, P_{ijks}, S_{ijks}, T_{ijks}, U_{ijks}$ et V_{ijks}

En introduisant l'équation (68.a) dans l'équation (30.g) on obtient

$$A_{ijks} = 2C_i C_j C_k C_s a'_{is} a'_{jk} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)x/R} \quad (91)$$

En suivant la même procédure, on introduit l'équation (69.a) dans (31.g)

$$B_{ijks} = 2C_i C_j C_k C_s b'_{is} b'_{jk} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)x/R} \quad (92)$$

(70.a) dans (32.g) donne

$$C_{ijks} = 2C_i C_j C_k C_s c'_{is} c'_{jk} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)x/R} \quad (93)$$

(71.a) dans (33.g) induit

$$P_{ijks} = 2C_i C_j C_k C_s p'_{is} p'_{jk} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)x/R} \quad (94)$$

(72.a) dans (34.g) conduit à

$$S_{ijks} = 2C_i C_j C_k C_s s'_{is} s'_{jk} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)x/R} \quad (95)$$

(73.a) dans (35.g) entraîne

$$T_{ijks} = 2C_i C_j C_k C_s t'_{is} t'_{jk} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)x/R} \quad (96)$$

En ralliant les équations (68.a) et (69.a) puis en les introduisant dans (36.g), conduit à

$$D_{ijks} = 2C_i C_j C_k C_s a'_{jk} b'_{is} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)x/R} \quad (97)$$

Le même procédé de l'équation (97) se répète en ce qui concerne les équations (68.a) et (69.a) avec un changement d'indices, mais cette fois ci en les introduisant dans (37.g)

$$E_{ijks} = 2C_i C_j C_k C_s a'_{is} b'_{jk} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)x/R} \quad (98)$$

La combinaison des équations (71.a) et (72.a) puis leur injection dans l'équation (38.g) nous donne

$$U_{ijks} = 2C_i C_j C_k C_s p'_{jk} s'_{is} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)x/R} \quad (99)$$

Les mêmes équations sont par la suite introduites dans (39.g) avec un changement d'indices

$$V_{ijks} = 2C_i C_j C_k C_s p'_{is} s'_{jk} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)x/R} \quad (100)$$

Revenons à l'équation (42.c) et substituons ses éléments par leurs expressions préalablement décelées (91 – 100)

$$\begin{aligned}
K_{ijks} = & \int_0^l \int_0^{2\pi} \left\{ C \left[2C_i C_j C_k C_s a'_{jk} a'_{is} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)x/R} + 2C_i C_j C_k C_s b'_{jk} b'_{is} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)x/R} \right. \right. \\
& + \nu \left(2C_i C_j C_k C_s a'_{jk} b'_{is} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)x/R} + 2C_i C_j C_k C_s a'_{is} b'_{jk} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)x/R} \right) \\
& + 2(1-\nu) 2C_i C_j C_k C_s c'_{is} c'_{jk} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)x/R} \left. \right] + D \left[2C_i C_j C_k C_s p'_{is} p'_{jk} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)x/R} \right. \\
& + 2C_i C_j C_k C_s s'_{is} s'_{jk} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)x/R} + \nu \left(2C_i C_j C_k C_s p'_{jk} s'_{is} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)x/R} \right. \\
& \left. \left. \left. + 2C_i C_j C_k C_s p'_{is} s'_{jk} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)x/R} \right) + 2(1-\nu) 2C_i C_j C_k C_s t'_{is} t'_{jk} e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)x/R} \right] \right\} R dx d\theta (101)
\end{aligned}$$

En arrangeant d'avantage l'équation (101) on obtient

$$\begin{aligned}
K_{ijks} = & 2 \int_0^l \int_0^{2\pi} C_i C_j C_k C_s e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)x/R} \left\{ C \left(a'_{jk} a'_{is} + b'_{jk} b'_{is} + \nu \left(a'_{jk} b'_{is} + a'_{is} b'_{jk} \right) + 2(1-\nu) c'_{is} c'_{jk} \right) \right. \\
& \left. + D \left(p'_{is} p'_{jk} + s'_{is} s'_{jk} + \nu \left(p'_{jk} s'_{is} + p'_{is} s'_{jk} \right) + 2(1-\nu) t'_{is} t'_{jk} \right) \right\} R dx d\theta (102)
\end{aligned}$$

En introduisant les équations (68.b), (69.b), (70.b), (71.b), (72.b) et (73.b) dans l'équation (102) on obtient

$$\begin{aligned}
K_{ijks} = & 2 \int_0^l \int_0^{2\pi} C_i C_j C_k C_s e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)x/R} \left\{ C \left(\left(\frac{1}{2R^2} \right)^2 \left[a_{jk}^{(1)} \cos^2(n\theta) + a_{jk}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \times \right. \right. \\
& \left[a_{is}^{(1)} \cos^2(n\theta) + a_{is}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] + \left(\frac{1}{2R^2} \right)^2 \left[b_{is}^{(1)} \cos^2(n\theta) + b_{is}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \left[b_{jk}^{(1)} \cos^2(n\theta) + b_{jk}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \\
& + \nu \left(\left(\frac{1}{2R^2} \right)^2 \left[a_{js}^{(1)} \cos^2(n\theta) + a_{js}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \left[b_{is}^{(1)} \cos^2(n\theta) + b_{is}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{2R^2} \right)^2 \left[a_{is}^{(1)} \cos^2(n\theta) + a_{is}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \left[b_{jk}^{(1)} \cos^2(n\theta) + b_{jk}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \right) \right. \\
& + 2(1-\nu) \left(\frac{1}{2R^2} \right)^2 \left[c_{is}^{(1)} + c_{is}^{(2)} \right] \left[c_{jk}^{(1)} + c_{jk}^{(2)} \right] \cos^2(n\theta) \sin^2(n\theta) \Bigg) \\
& + D \left(\left(\frac{1}{R^3} \right)^2 \left[p_{is}^{(1)} \cos^2(n\theta) + p_{is}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \left[p_{jk}^{(1)} \cos^2(n\theta) + p_{jk}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{R^3} \right)^2 \left[s_{is}^{(1)} \cos^2(n\theta) + s_{is}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \left[s_{jk}^{(1)} \cos^2(n\theta) + s_{jk}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \right. \\
& \left. + \nu \left(\left(\frac{1}{R^3} \right)^2 \left[p_{jk}^{(1)} \cos^2(n\theta) + p_{jk}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \left[s_{is}^{(1)} \cos^2(n\theta) + s_{is}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{R^3} \right)^2 \left[p_{is}^{(1)} \cos^2(n\theta) + p_{is}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \left[s_{jk}^{(1)} \cos^2(n\theta) + s_{jk}^{(2)} \sin^2(n\theta) \right] \right) \right. \\
& \left. + 2(1-\nu) \left(\frac{1}{R^3} \right)^2 t_{is}^{(1)} t_{jk}^{(1)} \cos^2(n\theta) \sin^2(n\theta) \right\} R dx d\theta \quad (103)
\end{aligned}$$

Le développement de l'équation (103) entraîne

$$\begin{aligned}
K_{ijks} = & 2 \int_0^l \int_0^{2\pi} C_i C_j C_k C_s e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)x/R} \left\{ C \left(\left(\frac{1}{2R^2} \right)^2 \left[a_{jk}^{(1)} a_{is}^{(1)} \cos^4(n\theta) + a_{jk}^{(2)} a_{is}^{(2)} \sin^4(n\theta) \right. \right. \right. \\
& + a_{jk}^{(1)} a_{is}^{(2)} \cos^2(n\theta) \sin^2(n\theta) + a_{jk}^{(2)} a_{is}^{(1)} \cos^2(n\theta) \sin^2(n\theta) \left. \left. \left. \right] + \left(\frac{1}{2R^2} \right)^2 \left[b_{jk}^{(1)} b_{is}^{(1)} \cos^4(n\theta) \right. \right. \right. \\
& + b_{jk}^{(2)} b_{is}^{(2)} \sin^4(n\theta) + b_{jk}^{(1)} b_{is}^{(2)} \cos^2(n\theta) \sin^2(n\theta) + b_{jk}^{(2)} b_{is}^{(1)} \cos^2(n\theta) \sin^2(n\theta) \left. \left. \left. \right] \right. \right. \\
& + \nu \left(\frac{1}{2R^2} \right)^2 \left[a_{jk}^{(1)} b_{is}^{(1)} \cos^4(n\theta) + a_{jk}^{(1)} b_{is}^{(2)} \cos^2(n\theta) \sin^2(n\theta) + a_{jk}^{(2)} b_{is}^{(1)} \cos^2(n\theta) \sin^2(n\theta) \right. \right. \\
& + a_{jk}^{(2)} b_{is}^{(2)} \sin^4(n\theta) + a_{is}^{(1)} b_{jk}^{(1)} \cos^4(n\theta) + a_{is}^{(1)} b_{jk}^{(2)} \cos^2(n\theta) \sin^2(n\theta) + a_{is}^{(2)} b_{jk}^{(1)} \cos^2(n\theta) \sin^2(n\theta) \\
& \left. \left. \left. \right] + 2(1-\nu) \left(\frac{1}{2R^2} \right)^2 \left[c_{is}^{(1)} + c_{is}^{(2)} \right] \left[c_{jk}^{(1)} + c_{jk}^{(2)} \right] \cos^2(n\theta) \sin^2(n\theta) \right) \\
& + D \left(\left(\frac{1}{R^3} \right)^2 \left[p_{is}^{(1)} p_{jk}^{(1)} \cos^4(n\theta) + p_{is}^{(1)} p_{jk}^{(2)} \cos^2(n\theta) \sin^2(n\theta) + p_{is}^{(2)} p_{jk}^{(1)} \cos^2(n\theta) \sin^2(n\theta) \right. \right. \\
& + p_{is}^{(2)} p_{jk}^{(2)} \sin^4(n\theta) + s_{is}^{(1)} s_{jk}^{(1)} \cos^4(n\theta) + s_{is}^{(1)} s_{jk}^{(2)} \cos^2(n\theta) \sin^2(n\theta) + s_{is}^{(2)} s_{jk}^{(1)} \cos^2(n\theta) \sin^2(n\theta) \\
& \left. \left. \left. \right] + \left(\frac{1}{R^3} \right)^2 \nu \left[p_{jk}^{(1)} s_{is}^{(1)} \cos^4(n\theta) + p_{jk}^{(1)} s_{is}^{(2)} \cos^2(n\theta) \sin^2(n\theta) \right. \right. \right. \\
& + p_{jk}^{(2)} s_{is}^{(1)} \cos^2(n\theta) \sin^2(n\theta) + p_{jk}^{(2)} s_{is}^{(2)} \sin^4(n\theta) + p_{is}^{(1)} s_{jk}^{(1)} \cos^4(n\theta) + p_{is}^{(1)} s_{jk}^{(2)} \cos^2(n\theta) \sin^2(n\theta) \\
& \left. \left. \left. \right] + 2(1-\nu) \left(\frac{1}{R^3} \right)^2 t_{is}^{(1)} t_{jk}^{(1)} \cos^2(n\theta) \sin^2(n\theta) \right) \right\} R dx d\theta \quad (104)
\end{aligned}$$

L'arrangement de l'équation (104) révèle

$$\begin{aligned}
K_{ijks} = & 2 \int_0^l \int_0^{2\pi} C_i C_j C_k C_s e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)x/R} \left\{ \left(\frac{1}{2R^2} \right)^2 C \left[\left(a_{jk}^{(1)} a_{is}^{(1)} + b_{is}^{(1)} b_{jk}^{(1)} + \nu \left[a_{jk}^{(1)} b_{is}^{(1)} + a_{is}^{(1)} b_{jk}^{(1)} \right] \right) \cos^4(n\theta) \right. \right. \\
& + \left(a_{jk}^{(2)} a_{is}^{(2)} + b_{is}^{(2)} b_{jk}^{(2)} + \nu \left[a_{jk}^{(2)} b_{is}^{(2)} + a_{is}^{(2)} b_{jk}^{(2)} \right] \right) \sin^4(n\theta) + \left(a_{jk}^{(1)} a_{is}^{(2)} + a_{jk}^{(2)} a_{is}^{(1)} + b_{jk}^{(1)} b_{is}^{(2)} + b_{is}^{(1)} b_{jk}^{(2)} \right. \\
& \left. \left. \left. \right] + \nu \left(a_{jk}^{(1)} b_{is}^{(2)} + a_{jk}^{(2)} b_{is}^{(1)} + a_{is}^{(1)} b_{jk}^{(2)} + a_{is}^{(2)} b_{jk}^{(1)} \right) + 2(1-\nu) \left[c_{is}^{(1)} + c_{is}^{(2)} \right] \left[c_{jk}^{(1)} + c_{jk}^{(2)} \right] \right) \cos^2(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] \\
& + D \left(\frac{1}{R^3} \right)^2 \left[\left(p_{is}^{(1)} p_{jk}^{(1)} + s_{is}^{(1)} s_{jk}^{(1)} + \nu \left(p_{jk}^{(1)} s_{is}^{(1)} + p_{is}^{(1)} s_{jk}^{(1)} \right) \right) \cos^4(n\theta) \right. \\
& + \left(p_{is}^{(2)} p_{jk}^{(2)} + s_{is}^{(2)} s_{jk}^{(2)} + \nu \left(p_{jk}^{(2)} s_{is}^{(2)} + p_{is}^{(2)} s_{jk}^{(2)} \right) \right) \sin^4(n\theta) + \left(p_{is}^{(1)} p_{jk}^{(2)} + p_{is}^{(2)} p_{jk}^{(1)} + s_{is}^{(1)} s_{jk}^{(2)} + s_{is}^{(2)} s_{jk}^{(1)} \right. \\
& \left. \left. \left. \right] + \nu \left(p_{jk}^{(1)} s_{is}^{(2)} + p_{jk}^{(2)} s_{is}^{(1)} + p_{is}^{(1)} s_{jk}^{(2)} + p_{is}^{(2)} s_{jk}^{(1)} \right) + 2(1-\nu) t_{is}^{(1)} t_{jk}^{(1)} \right) \cos^2(n\theta) \sin^2(n\theta) \right] \right\} R dx d\theta \quad (105)
\end{aligned}$$

Or étant donné que

$$\mathbb{I}_1 = \int_0^{2\pi} \cos^4(n\theta) d\theta = \frac{3\pi}{4} \quad (106.a)$$

$$\mathbb{I}_2 = \int_0^{2\pi} \sin^4(n\theta) d\theta = \frac{3\pi}{4} \quad (106.b)$$

$$\mathbb{I}_3 = \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) \sin^2(n\theta) d\theta = \frac{\pi}{4} \quad (106.c)$$

En intégrant l'équation (105) le long de la coque et se servant des équations (106.a – 106.c), on obtient

$$\begin{aligned} K_{ijks} = & 2R^2 C_i C_j C_k C_s \left[\frac{e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)l/R} - 1}{\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s} \right] \left\{ \left(\frac{1}{2R^2} \right)^2 C \left[\left[a_{jk}^{(1)} a_{is}^{(1)} + b_{is}^{(1)} b_{jk}^{(1)} + \nu (a_{jk}^{(1)} b_{is}^{(1)} + a_{is}^{(1)} b_{jk}^{(1)}) \right] \frac{3\pi}{4} \right. \right. \\ & + \left[a_{jk}^{(2)} a_{is}^{(2)} + b_{is}^{(2)} b_{jk}^{(2)} + \nu (a_{jk}^{(2)} b_{is}^{(2)} + a_{is}^{(2)} b_{jk}^{(2)}) \right] \frac{3\pi}{4} + \left[a_{jk}^{(1)} a_{is}^{(2)} + a_{jk}^{(2)} a_{is}^{(1)} + b_{is}^{(2)} b_{jk}^{(1)} + b_{is}^{(1)} b_{jk}^{(2)} \right. \\ & + \nu (a_{jk}^{(1)} b_{is}^{(2)} + a_{jk}^{(2)} b_{is}^{(1)} + a_{is}^{(1)} b_{jk}^{(2)} + a_{is}^{(2)} b_{jk}^{(1)}) + 2(1-\nu) (c_{is}^{(1)} + c_{is}^{(2)}) (c_{jk}^{(1)} + c_{jk}^{(2)}) \left. \left. \right] \frac{\pi}{4} \right] \\ & + D \left(\frac{1}{R^3} \right)^2 \left[\left[p_{is}^{(1)} p_{jk}^{(1)} + s_{is}^{(1)} s_{jk}^{(1)} + \nu (p_{jk}^{(1)} s_{is}^{(1)} + p_{is}^{(1)} s_{jk}^{(1)}) \right] \frac{3\pi}{4} \right. \\ & + \left[p_{is}^{(2)} p_{jk}^{(2)} + s_{is}^{(2)} s_{jk}^{(2)} + \nu (p_{jk}^{(2)} s_{is}^{(2)} + p_{is}^{(2)} s_{jk}^{(2)}) \right] \frac{3\pi}{4} + \left[p_{is}^{(1)} p_{jk}^{(2)} + p_{is}^{(2)} p_{jk}^{(1)} + s_{is}^{(1)} s_{jk}^{(2)} + s_{is}^{(2)} s_{jk}^{(1)} \right. \\ & + \nu (p_{jk}^{(1)} s_{is}^{(2)} + p_{jk}^{(2)} s_{is}^{(1)} + p_{is}^{(1)} s_{jk}^{(2)} + p_{is}^{(2)} s_{jk}^{(1)}) + 2(1-\nu) t_{is}^{(1)} t_{jk}^{(1)} \left. \left. \right] \frac{\pi}{4} \right] \end{aligned} \quad (107)$$

Simplifiant plus l'équation (107)

$$\begin{aligned} K_{ijks} = & C_i C_j C_k C_s \left[\frac{e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)l/R} - 1}{\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s} \right] \left\{ \frac{1}{2R^2} C \left[\left[a_{jk}^{(1)} a_{is}^{(1)} + b_{is}^{(1)} b_{jk}^{(1)} + \nu (a_{jk}^{(1)} b_{is}^{(1)} + a_{is}^{(1)} b_{jk}^{(1)}) \right] \frac{3\pi}{4} \right. \right. \\ & + \left[a_{jk}^{(2)} a_{is}^{(2)} + b_{is}^{(2)} b_{jk}^{(2)} + \nu (a_{jk}^{(2)} b_{is}^{(2)} + a_{is}^{(2)} b_{jk}^{(2)}) \right] \frac{3\pi}{4} + \left[a_{jk}^{(1)} a_{is}^{(2)} + a_{jk}^{(2)} a_{is}^{(1)} + b_{is}^{(2)} b_{jk}^{(1)} + b_{is}^{(1)} b_{jk}^{(2)} \right. \\ & + \nu (a_{jk}^{(1)} b_{is}^{(2)} + a_{jk}^{(2)} b_{is}^{(1)} + a_{is}^{(1)} b_{jk}^{(2)} + a_{is}^{(2)} b_{jk}^{(1)}) + 2(1-\nu) (c_{is}^{(1)} + c_{is}^{(2)}) (c_{jk}^{(1)} + c_{jk}^{(2)}) \left. \left. \right] \frac{\pi}{4} \right] \\ & + \frac{2D}{R^4} \left[\left[p_{is}^{(1)} p_{jk}^{(1)} + s_{is}^{(1)} s_{jk}^{(1)} + \nu (p_{jk}^{(1)} s_{is}^{(1)} + p_{is}^{(1)} s_{jk}^{(1)}) \right] \frac{3\pi}{4} + \left[p_{is}^{(2)} p_{jk}^{(2)} + s_{is}^{(2)} s_{jk}^{(2)} + \nu (p_{jk}^{(2)} s_{is}^{(2)} + p_{is}^{(2)} s_{jk}^{(2)}) \right] \frac{3\pi}{4} \right. \\ & + \left[p_{is}^{(1)} p_{jk}^{(2)} + p_{is}^{(2)} p_{jk}^{(1)} + s_{is}^{(1)} s_{jk}^{(2)} + s_{is}^{(2)} s_{jk}^{(1)} + \nu (p_{jk}^{(1)} s_{is}^{(2)} + p_{jk}^{(2)} s_{is}^{(1)} + p_{is}^{(1)} s_{jk}^{(2)} + p_{is}^{(2)} s_{jk}^{(1)}) \right. \\ & + 2(1-\nu) t_{is}^{(1)} t_{jk}^{(1)} \left. \left. \right] \frac{\pi}{4} \right] \end{aligned} \quad (108)$$

Ainsi l'expression de la matrice de rigidité non linéaire d'ordre 3 s'écrit sous cette forme matricielle

$$[K^{NL3}] = \frac{\pi}{8R^2} [A^{-1}]^T [K_{NL}^*] [A^{-1}] \quad (109)$$

Tel que

$$K_{NL}^*(i,k) = \begin{cases} \sum_{s=1}^8 \sum_{j=1}^8 \frac{\tau_{sj}}{\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s} G(i,k) \left[e^{(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)l/R} - 1 \right] & \text{si } \lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s \neq 0 \\ \sum_{s=1}^8 \sum_{j=1}^8 \tau_{sj} G(i,k) \frac{l}{R} & \text{si } \lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_s = 0 \end{cases} \quad (110)$$

Sachant que τ_{sj} représente le terme de la matrice E définie par, $[E] = [A^{-1}]^T [A^{-1}]$ et à son tour, le terme $G(i,k)$ est défini comme suit

$$\begin{aligned} G(i,k) = & C \left[\left[3 \left[a_{is}^{(1)} a_{jk}^{(1)} + b_{is}^{(1)} b_{jk}^{(1)} + a_{is}^{(2)} a_{jk}^{(2)} + b_{is}^{(2)} b_{jk}^{(2)} + \nu \left(b_{is}^{(1)} a_{jk}^{(1)} + a_{is}^{(1)} b_{jk}^{(1)} + b_{is}^{(2)} a_{jk}^{(2)} + a_{is}^{(2)} b_{jk}^{(2)} \right) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + a_{is}^{(2)} a_{jk}^{(1)} + a_{is}^{(1)} a_{jk}^{(2)} + b_{is}^{(2)} b_{jk}^{(1)} + b_{is}^{(1)} b_{jk}^{(2)} + \nu \left(b_{is}^{(2)} a_{jk}^{(1)} + b_{is}^{(1)} a_{jk}^{(2)} + a_{is}^{(1)} b_{jk}^{(2)} + a_{is}^{(2)} b_{jk}^{(1)} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + 2(1-\nu) \left(c_{is}^{(1)} + c_{is}^{(2)} \right) \left(c_{jk}^{(1)} + c_{jk}^{(2)} \right) \right] \right] + \frac{4D}{R^2} \left[\left[3 \left[p_{is}^{(1)} p_{jk}^{(1)} + s_{is}^{(1)} s_{jk}^{(1)} + p_{is}^{(2)} p_{jk}^{(2)} + s_{is}^{(2)} s_{jk}^{(2)} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \nu \left(s_{is}^{(1)} p_{jk}^{(1)} + p_{is}^{(1)} s_{jk}^{(1)} + s_{is}^{(2)} p_{jk}^{(2)} + p_{is}^{(2)} s_{jk}^{(2)} \right) \right] + p_{is}^{(1)} p_{jk}^{(2)} + p_{is}^{(2)} p_{jk}^{(1)} + s_{is}^{(1)} s_{jk}^{(2)} + s_{is}^{(2)} s_{jk}^{(1)} \right. \\ & \left. \left. + \nu \left(s_{is}^{(2)} p_{jk}^{(1)} + s_{is}^{(1)} p_{jk}^{(2)} + p_{is}^{(1)} s_{jk}^{(2)} + p_{is}^{(2)} s_{jk}^{(1)} \right) + 2(1-\nu) t_{is}^{(1)} t_{jk}^{(1)} \right] \right] \end{aligned} \quad (111)$$

7. Résultats et discussion

Dans ce chapitre, nous présentons une panoplie de résultats fondée sur cette théorie ralliée à la méthode des éléments finis afin d'évaluer les matrices globales de masse et de rigidité linéaires et non linéaires.

7.1. Test de convergence

Avant d'embarquer dans l'analyse des résultats, on procède à un test de convergence et à une étude de validation révélant la précision et la vigueur de cette méthode.

A cet effet, on considère une coque cylindrique encastrée-libre de longueur $l = 0.231\text{m}$, de rayon $R = 7.725\text{ cm}$ et d'épaisseur $h = 1.5\text{ mm}$ et possédant un module d'Young $E = 206\text{ GPa}$, un coefficient de poisson $\nu = 0.3$ et une masse volumique $\rho = 7800\text{ kg/m}^3$

La coque étant vide et les vibrations sont considérées comme libres sans tenir compte de l'effet de l'amortissement. La figure (3) représente la fluctuation de l'erreur relative correspondant à un maillage de (30 éléments) pris comme référence en fonction du nombre d'éléments utilisé et ce pour des modes axiaux $m=1,..,4$ et pour des nombres d'ondes circonférentielles $n=2$ et 3 tel que $(\omega_{NFE} - \omega_{30FE})/\omega_{NFE} \times 100$. Les figures montrent que pour les modes axiaux, un nombre réduit d'éléments finis de type cylindrique s'avère suffisant pour acquérir la convergence en revanche pour les hautes fréquences le nombre nécessaire requis est relativement plus haut. On en conclut que seulement 20 éléments sont jugés suffisants pour que l'erreur encourue soit nulle et d'assurer en conséquence la convergence.

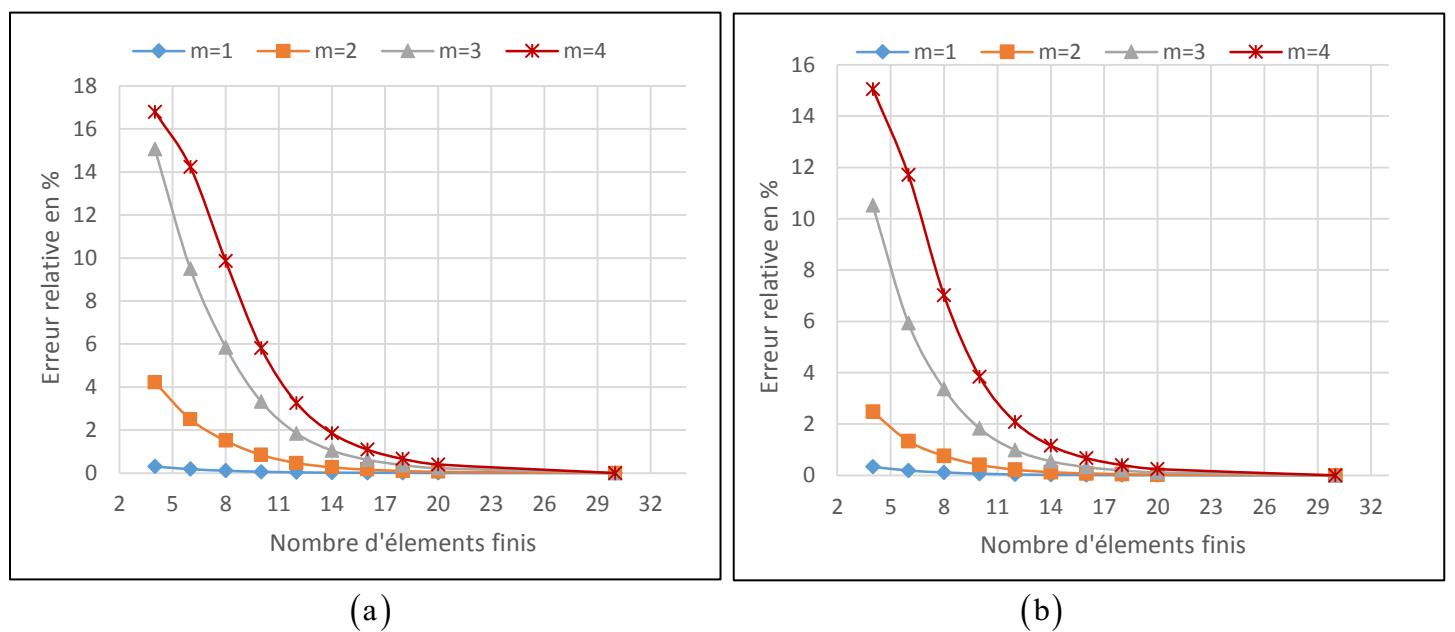


Figure 3 Variation de l'erreur relative des fréquences propres en fonction du nombre d'éléments finis. Pour (3.a) $n = 2$, (3.b) $n = 3$ tel que Erreur (%) = $(\omega_{NFE} - \omega_{30FE})/\omega_{NFE} \times 100$

7.2. Validation du Modèle linéaire

Le deuxième exemple étudié est un cylindre encastré des deux côtés circonférentiels dont les propriétés géométriques et mécaniques sont respectivement les suivantes : Longueur axial $l = 0.664$ m, rayon $R = 0.175$ m épaisseur $h = 1$ mm, module d'Young $E = 206$ GPa coefficient de poisson $\nu = 0.3$ et de masse volumique $\rho = 7680$ kg/m³.

La validation du modèle linéaire est achevée en comparant les fréquences naturelles découlant de la méthode des éléments finis hybride employant uniquement 20 éléments avec celles issues du logiciel ANSYS. Le tableau récapitulatif (Tab.1) montre une excellente concordance entre les deux approches.

Tableau 1 Fréquences Naturelles (Hz) d'une coque cylindrique encastrée des deux côtés

Numéro de la Fréquence	ANSYS (Shell 63) Maillage (30×24)	Lakis et al [46] 20 éléments
1	318	319
2	340	341
3	380	381
4	417	418
5	528	529

7.3. Validation du Modèle non linéaire

La validation du modèle non linéaire nous conduit intuitivement à se pencher vers la résolution de l'équation de mouvement non linéaire permettant d'une part de caractériser les phénomènes non linéaires mis en jeu et d'autre part d'augurer l'évolution vibratoire du système.

Lorsque les structures sont sujettes à des grands déplacements, les fréquences des vibrations libres deviennent dépendantes de l'amplitude d'oscillation ce qui fait surgir des phénomènes typiquement non linéaire tel que le couplage entre les différents modes. L'intégration directe de ce type d'équation est souvent trop compliquée voire impossible et les techniques linéaires classiquement utilisées s'avèrent insuffisantes. De ce fait, diverses méthodes d'intégration numériques et stratégies ont été adoptées en la matière afin de traiter le problème d'une manière simplifiée. Parmi ces méthodes, la méthode de linéarisation qui consiste à transformer le système non linéaire en un système linéaire en allégeant l'expression de l'équation.

Dans le cas des structures axisymétriques (à mécanique symétrique suivant la direction transverse), le système s'avère démuni des termes quadratiques, et l'équation de mouvement (18.a) se réduit en conséquence à

$$\sum_j m_{ij} \ddot{q}_j + \sum_j k_{ij} q_j + \sum_j \sum_k \sum_s k_{ijks} q_j q_k q_s = 0 \quad (112)$$

En procédant à la linéarisation de l'équation (112), cette dernière prend la forme de

$$\sum_j m_{ij} \ddot{q}_j + \sum_j (k_{ij} + k_{ij}^{NL3}) q_j = 0 \quad (113)$$

L'équation (113) prend ainsi la forme de

$$\sum_j m_{ij} \ddot{q}_j + \sum_j \mathbb{K}_{ij} q_j = 0 \quad (114.a)$$

Tel que

$$\mathbb{K}_{ij} = k_{ij} + k_{ij}^{NL3} \quad (114.b)$$

Avec

$$k_{ij}^{NL3} = \sum_k \sum_s k_{ijks} q_k q_s \quad (114.c)$$

Soit encore sous la forme matricielle

$$M \ddot{\mathbf{q}} + [K + K^{NL3}(\mathbf{q}, \mathbf{q})] \mathbf{q} = 0 \quad (114.d)$$

En effet, ce concept de linéarisation repose sur l'idée de *Poincaré* qui consistait à dire « *qu'un système non linéaire aussi compliqué soit-il, peut en fait cacher une dynamique extrêmement simple si bien que, par un changement de variables non linéaire, on devrait être en mesure d'éliminer tous les termes non linéaires qui obscurcissent la vue que l'on s'en fait* ». [52]

L'emploi des équations (113-114.d) nécessite quelques amendements techniques stipulant un passage au calcul modal imposé par un changement de variable linéaire classique afin de découpler la partie linéaire de l'équation de mouvement.

Le point de départ réside donc dans l'équation (112) en l'écrivant sous la forme matricielle

$$[M]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [K]\{\mathbf{q}\} + [K^{(NL3)}]\{\mathbf{q}\} \otimes \{\mathbf{q}\} \otimes \{\mathbf{q}\} = \{0\} \quad (115)$$

$$\{\mathbf{q}\}_{(1 \times N)} \otimes \{\mathbf{q}\}_{(1 \times N)} = \{q_1 q_1 \ q_1 q_2 \dots q_2 q_1 \ q_2 q_2 \dots q_N q_N\}^T \quad (116)$$

Soit

$$\{\mathbf{q}\} = [\Phi]\{\delta\} \quad (117)$$

$[\Phi]$ étant la matrice modale

$\{\delta\}$ étant le vecteur de coordonnées généralisées

Insérant l'équation (117) dans (115) et multipliant par $[\Phi]^T$, on obtient

$$[\Phi]^T [M][\Phi]\{\ddot{\delta}\} + [\Phi]^T [K][\Phi]\{\delta\} + [\Phi]^T [K^{(NL3)}]([\Phi]\{\delta\})^{\otimes 3} = \{0\} \quad (118)$$

Ainsi la partie linéaire est découpée et la dynamique peut ainsi être décrite par

$$[M]^D \{\ddot{\delta}\} + [K]^D \{\delta\} + [\Phi]^T [K^{(NL3)}]([\Phi]\{\delta\})^{\otimes 3} = \{0\} \quad (119)$$

$[M]^D$ et $[K]^D$ étant les matrices de masse et de rigidité diagonalisées

L'équation (119) peut alors s'écrire sous la forme

$$m_{ii} \ddot{q}_i + k_{ii} q_i + \sum_j \sum_k \sum_s \mathbb{k}_{ijks} q_j q_k q_s = 0 \quad (120)$$

Tel que \mathbb{k}_{ij} représente le (i, j) terme du tenseur $[\Phi]^T [K]^{NL3} [\Phi]^3$

En considérant maintenant que

$$\Lambda_{ij} = \sum_k \sum_s k_{ijks} q_k q_s \quad (121)$$

L'insertion de (121) dans (120) donne

$$m_{ii} \ddot{q}_i + k_{ii} q_i + \sum_j \Lambda_{ij} q_j = 0 \quad (122)$$

Afin d'alléger l'équation on considère seulement les termes diagonaux du tenseur Λ , l'équation (122) revient alors à écrire

$$m_{ii} \ddot{q}_i + (k_{ii} + \Lambda_{ii}) q_i = 0 \quad (123)$$

Finalement, on procède à une procédure itérative du calcul des fréquences et modes non linéaires.

L'analyse des modes non linéaires permet alors de pronostiquer la dépendance des fréquences et déformés modales en terme d'intensité du signal d'entré décrit par l'amplitude du mouvement dans ce cas-ci.

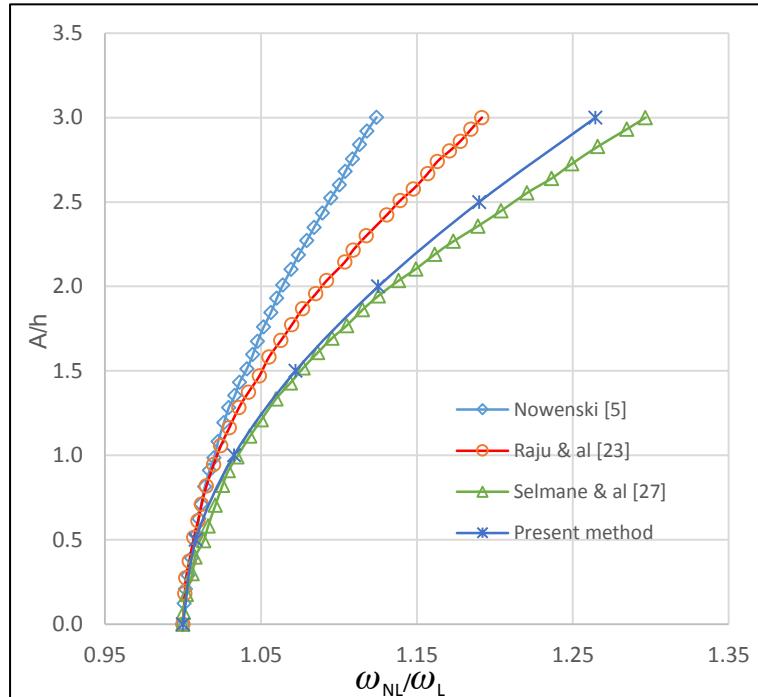


Figure 4 Évolution de la fréquence non linéaire en fonction de l'amplitude de vibration en comparant le présent modèle à ceux de Nowenski [5], Raju & al [23] et à celui de Selmane [27] avec $m = 1$ et $n = 4$

La validation du modèle non linéaire illustré dans ce manuscrit s'est fondée sur une étude comparative mettant en exergue la nature du caractère non linéaire d'une coque cylindrique axisymétrique en vibration libre. L'étude a été remportée par trois différentes théories, celle de Nowenski [5], de Raju & Rao [23] et la théorie de Selmane & al [27]. La coque étant simplement supportée $u = v = w = 0$ et la rotation $\partial w / \partial x$ est considérée comme libre. La

structure cylindrique étudiée possède des dimensions géométriques tels que la longueur $l = 0.0399\text{ m}$, le rayon $R = 2.54E-02\text{ m}$ et d'épaisseur $h = 0.254E-03\text{ m}$ et ayant comme propriétés mécaniques : le module d'Young $E = 204.0848\text{ GPa}$, de coefficient de poisson $\nu = 0.3$ et de masse volumique $\rho = 7833.57\text{ kg/m}^3$. Le nombre d'ondes axiales et circonférentielles dans ce cas-ci sont respectivement $m = 1$ et $n = 4$. La fréquence fondamentale linéaire qui découle de cette présente théorie est équivaut à 8517.0157 Hz versus 8553.5972 Hz , la fréquence trouvée par Raju & Rao [23] ce qui révèle une erreur de 0.42% .

Dès la première vue, de la figure (4) on peut discerner cette dépendance, dont on a déjà parlé, entre les fréquences non linéaires et l'amplitude d'oscillations. Cette dépendance s'est caractérisée par une tendance raidissante du comportement non linéaire traduisant ainsi une augmentation des fréquences en fonction de celle de l'amplitude.

La figure montre que la courbe obtenue par le présent modèle est située entre celles issues du modèle de Raju & al [23] et celui de Selmane & al [27]. Elle épouse la courbe de Selmane [27] jusqu'à un ratio $A/h = 2.0$ puis elle s'éloigne un petit peu tout en restant toujours plus proche à cette dernière si on la compare à la courbe de Nowenski [5] ou à celle de Raju & al [23].

La figure indique aussi que les quatre courbes restent contiguës pour des ratios de A/h inférieurs à 1.0, ce qui attribue à un comportement à tendance linéaire indiquant ainsi que les différents modèles employés dans cette analyse convergent dans le domaine des petites perturbations. En revanche, l'écart entre les différents ratios ω_{NL}/ω_L pour les différentes théories citées s'accentue au fur et à mesure que l'amplitude d'oscillations augmente. Cet écart qui est beaucoup plus prononcé dans le domaine non linéaire, peut s'expliquer par l'emploi de différentes théories et hypothèses sur lesquels ces modèles se sont fondés. En effet, Nowenski [5] a développé son modèle en se basant sur la théorie de Donnell [48], il a négligé les déplacements tangentiels et n'a considéré en conséquence que le déplacement transverse, comme il a ignoré aussi les non linéarités et les inerties membranaires. Quant à Raju et Rao [23], ils ont employé la méthode des éléments finis en considérant un élément à double courbures avec 12 degrés de liberté. Leur formulation est basée sur la théorie de Sanders-Koiter [50,51] tout en tenant compte de l'effet de l'inertie membranaire.

Selmane et Lakis [27] ont fondé leur formulation sur la méthode hybride employant la théorie de Sanders-Koiter [50,51] ralliée à la méthode des éléments finis classique. Elle semble à celle de Raju et al [23] sauf que l'élément fini qu'ils ont considéré est cylindrique à deux noeuds et 8 degré de liberté et le champ de déplacement appliqué, découle de la solution exacte des équations linéaires de Sanders [46].

La formulation développée dans ce manuscrit est similaire à celle révélée par Selmane et al [27] dans son approche en matière d'emploi de la méthode hybride toutefois la présente théorie se singularise par son adoption de la théorie non linéaire de Novozhilov [49] pour établir son modèle. En outre, le modèle de Selmane et al [27] utilise la fonction elliptique

de Jacobi pour résoudre son équation de mouvement tandis que la présente formulation bénéficie de la méthode de linéarisation. C'est pour cette raison qu'on trouve la courbe révélée de cette théorie avoisine celle de Selmane et al [27] en la comparant par rapport aux autres courbes.

Notons que tous les modèles cités préalablement ont négligé le couplage non linéaire entre les différents modes.

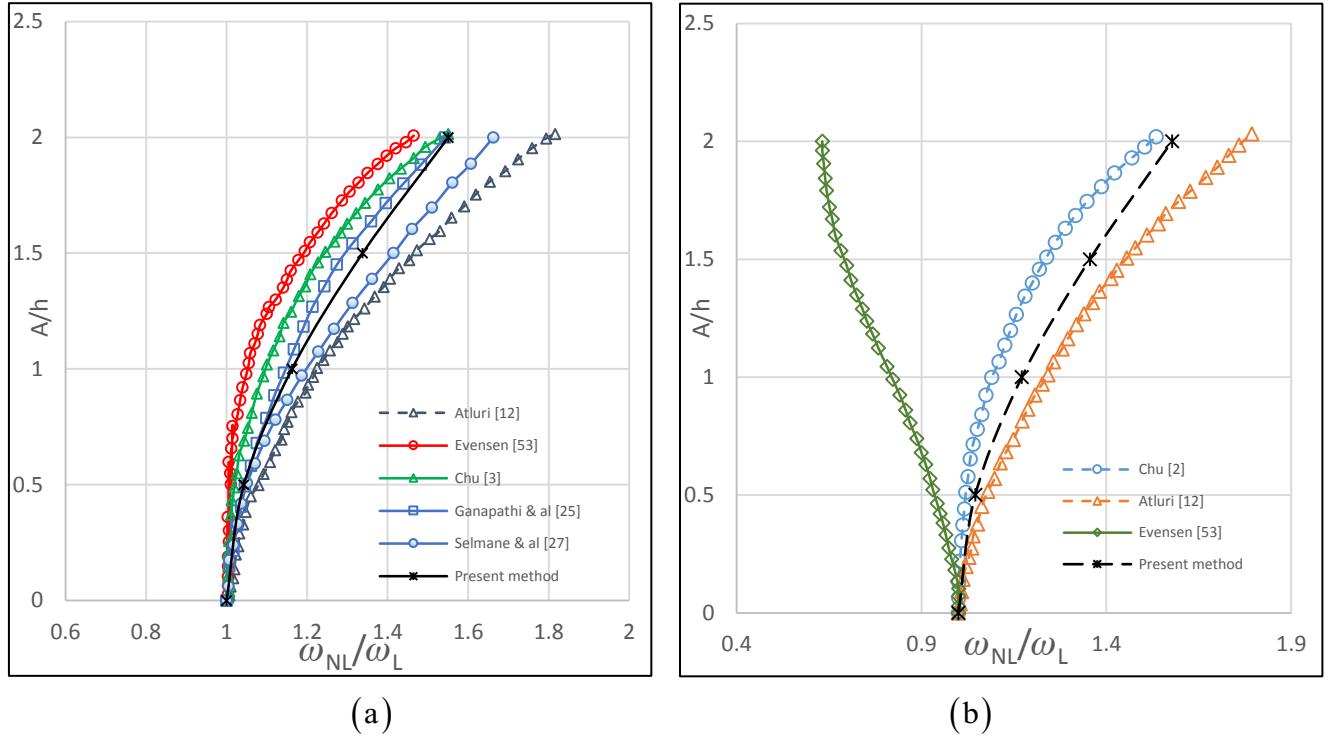


Figure 5 Tendance non linéaire pour le cas d'une coque cylindrique simplement-librement

$$\text{supportée } (\nu = w = 0) \text{ tel que } \psi = \left(\frac{n^2 h}{R} \right)^2 = 1.0, \nu = 0.3 \quad (5.a) \quad \xi = \frac{\pi R / n}{l / m} = 2.0, \quad (5.b)$$

$$\xi = \frac{\pi R / n}{l / m} = 0.5$$

Un autre exemple de validation est pris en considération concernant le cas de deux coques cylindriques simplement-librement supportée ($\nu = w = 0, u \neq 0$ et $\partial w / \partial x \neq 0$) en vibration

libre et tel que $\psi = \left(\frac{n^2 h}{R} \right)^2 = 1.0$ et $\nu = 0.3$. La figure (5.a) employant la coque de

dimensions $\xi = \frac{\pi R / n}{l / m} = 2.0$, met en exergue une tendance de non linéarité à caractère

raidissant et ce pour les différents modèles employés dans ce cas de figure à savoir celui d'Atluri [12], d'Evensen [53], de Chu [3], de Ganapathi et al [25] et celui de Selmane et

al [27]. La figure exhibe une excellente concordance entre la courbe qui découle de cette présente théorie en la comparant avec les autres courbes. Elle est située entre la courbe de Selmane et al et celle de Ganapathi et al. L'écart entre les différents graphiques peut s'expliquer par le fait qu'Atluri a formulé son modèle en se basant sur la théorie de Donnell, il s'est servi de la technique de Galerkin pour réduire le problème à un système d'équations non linéaire couplées. Evensen a dressé une analyse des vibrations flexionnelles non linéaires des coques cylindriques minces fondée sur la théorie des coques surbaissées de Donnell en assumant deux modes de vibration et en employant la procédure de Galerkin pour la discrétisation de son équation de mouvement. Ganapathi et al ont utilisé la méthode des éléments finis employant la théorie de Novozhilov pour examiner les vibrations flexionnelles non linéaires. L'élément fini utilisé est à un élément quad (4 noeuds) à 5ddl pour chaque noeud flexible et à épaisseur modérée. Le modèle tient aussi compte de l'effet de l'inertie membranaire et flexionnel ainsi que des déformations de cisaillement. Chu a analysé les vibrations flexionnelles non-linéaires des coques cylindriques en se basant sur la théorie des coques surbaissées de Donnell, en employant une solution à un seul mode de vibration. Sa théorie n'a pas satisfait la condition de continuité de la fonction de déplacement circonférentielle.

Les figures (5.a) et (5.b) ont montré que la tendance non linéaire révélée dans la formulation d'Atluri, peut être de type raidissant comme le montre la figure (5.a) ou de type assouplissant comme il est exposé dans la figure (5.b) et ceci dépendamment des ratios

$$\xi = \frac{\text{Longueur d'ondes circonférentielles}}{\text{Longueur d'ondes axiales}} \quad \text{ou celui de } \psi. \quad \text{Effet, dans la figure (5.a) où}$$

$\psi = 1.0$ et $\xi = 2.0$, les termes non linéaires de troisième et de cinquième ordre qui découlent de l'équation de mouvement d'Evensen obtenue après application de la procédure de Galerkin, font émerger l'effet raidissant de la non linéarité en revanche, et lorsque $\psi = 1.0$ et $\xi = 0.5$ (figure 5.b), les termes d'inertie non linéaires ralliés aux termes d'élasticité non linéaire d'ordre trois induisent le caractère assouplissant qualifiant le comportement non linéaire de la structure.

7.4. Effet du couplage non linéaire

L'étude du comportement dynamique des structures géométriquement non linéaires met en exergue l'omniprésence des phénomènes typiquement non linéaires à savoir le phénomène de couplage entre modes. L'exemple considéré dans cette section est celui cité dans la figure(4) employant la même coque cylindrique avec les mêmes conditions aux limites. L'étude est dressée en considérant une fois le couplage entre les différents modes et une fois en le négligeant. La figure (6) montre que les deux courbes s'incurvent vers la droite ce qui traduit une tendance raidissante du comportement non linéaire. En outre, on peut constater que la courbe présentant le couplage est plus prononcée que celle dépourvue du couplage ce qui montre que le couplage accentue le caractère raidissant des vibrations non linéaires. Ceci se voit en concordance avec l'étude analytique qui révèle l'ajout des produits des termes croisés au niveau des éléments de la matrice de rigidité non linéaire. Le couplage se manifeste, d'ailleurs, par un transfert d'énergie entre les différents modes.

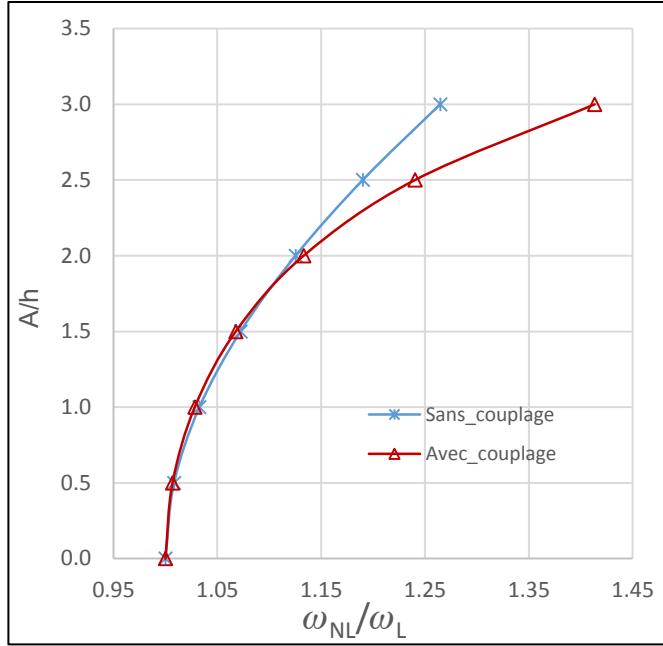


Figure 6 Comportement non linéaire raidissant d'une coque cylindrique simplement supportée pour les cas sans couplage et avec couplage

La figure illustre entre autres que l'effet de couplage surgit à partir du ratio $A/h = 2.0$ et il s'amplifie au fur et à mesure que la fréquence non linéaire dépasse 15% celle linéaire.

7.5. Effet du nombre d'ondes axiales m

On se propose dans cette section d'examiner l'effet du mode axial sur les vibrations non linéaires d'une structure cylindrique de caractéristiques géométriques et mécaniques citées préalablement et correspondant à $\psi = \left(\frac{n^2 h}{R}\right)^2 = 1.0$, $\nu = 0.3$ et $\xi = \frac{\pi R/n}{l/m} = 0.5$. La figure (7) montre que toutes les courbes s'incurvent vers la droite indiquant ainsi que la fréquence non linéaire augmente au fur et à mesure que l'amplitude d'oscillations croît. D'autant plus, la figure indique que les courbes relatives à $m=1$ et $m=2$ sont presque confondues et s'écartent par rapport aux autres courbes. L'écart révélé entre les différentes courbes augmente au fur et à mesure qu'on accoste les hautes fréquences (m ascendant). En outre, les courbes s'avèrent plus prononcées pour les modes axiaux exaltées. On peut souligner également que l'écart entre les différentes courbes augmente entre chaque paire en allant dans le sens croissant du mode axial.

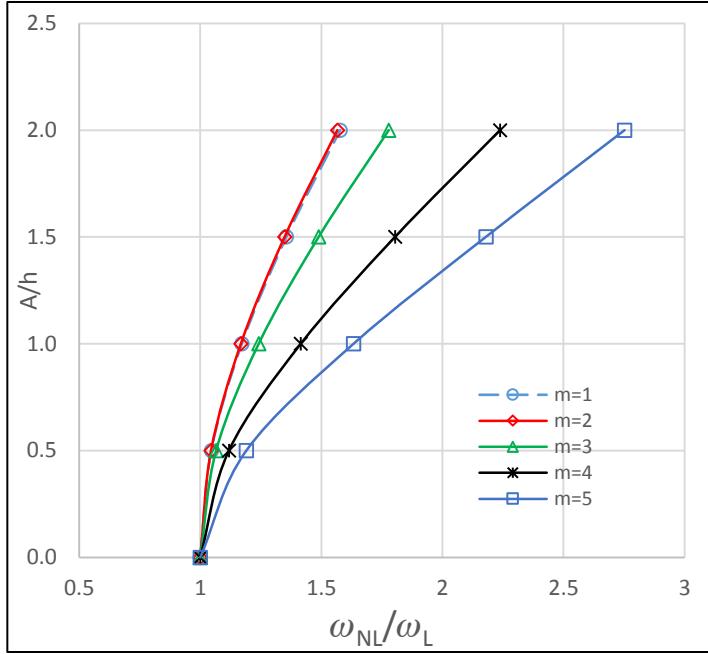


Figure 7 Variation du rapport de fréquences ω_{NL}/ω_L en fonction du ratio A/h pour différentes valeurs du mode axiale m en considérant que $n = 10$

7.6. Effet du nombre d'ondes circonférentielles n

L'étude de la variation des fréquences en fonction du nombre d'ondes circonférentielles est une notion fondamentale dans l'étude dynamique des structures permettant de déceler la fréquence et le mode fondamentaux qui représentent des grandeurs intrinsèques caractérisant la structure et servent subséquemment dans l'étude de sa dynamique forcée afin d'esquiver les phénomènes drastiques tel que la résonnance. Mais la question clé qui se pose demeure toujours comme : "Quelle est l'influence de la non linéarité géométrique sur la valeur minimale de la fréquence et le mode fondamental qui en découle" Cette section permet de dévoiler la répercussion des grands déplacements sur la fréquence minimale et sur le mode correspondant. Pour ce faire, on considère la structure simplement-librement supportée citée dans la section précédente tout en faisant varier les valeurs de n . La figure (8.a) met l'accent sur la variation de la fréquence non linéaire par rapport à celle linéaire ; ce qui montre qu'elle augmente au fur et à mesure que n croît. Cet écart s'amplifie lorsque n est supérieur à 8. Par ailleurs, la courbe correspondant à $n = 9$ s'avère la plus prononcée. La figure (8.b) montre que les fréquences décroissent jusqu'à une certaine valeur puis augmentent d'avantage (on peut voir que pour $A/h = 0$, le mode fondamentale correspond à $n = 8$). En traçant les verticales qui conviennent aux droites à ratios A/h constants, on remarque que les courbes des différentes n se chevauchent en fonction de l'accroissement de l'amplitude, traduisant ainsi un comportement phénoménologique qui stipule que la fréquence fondamentale dépend étroitement de l'amplitude de vibration une fois qu'on quitte le domaine des petites perturbations. On voit bien d'après la figure (8.b)

que la valeur minimale de la fréquence correspond à $n = 8$ et ce pour les toutes les valeurs des ratios d'amplitude $A/h \in [0, 2]$. Lorsque A/h atteint la valeur 2.0, la valeur minimale de la fréquence est attribuée au mode $n = 7$ ($f = 1204.459\text{ Hz}$ pour $n = 7$ vs 1207.016 Hz pour $n = 8$)

On en déduit que l'analyse non linéaire des structures minces s'avère une étape cruciale afin de mieux caractériser le système avec plus de précision.

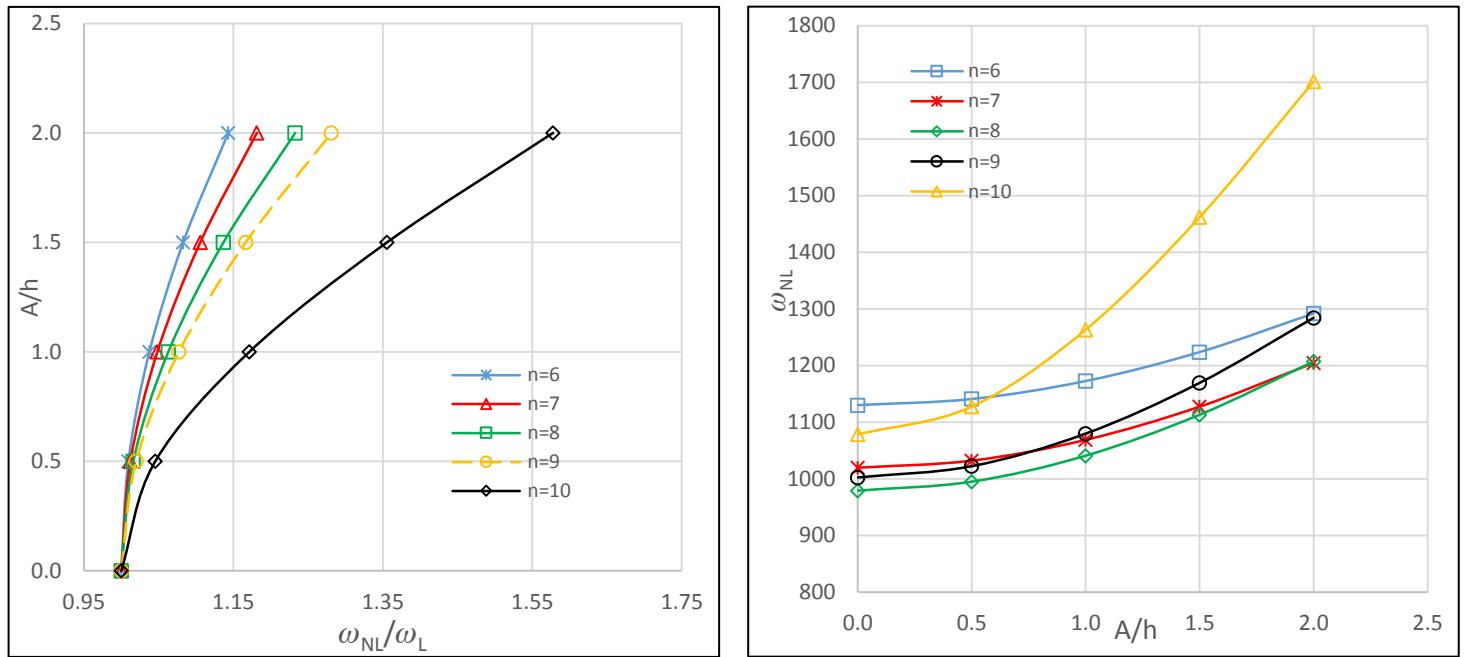


Figure 8 Variation du rapport de fréquences ω_{NL}/ω_L (8.a) et de la fréquence non linéaire (8.b) en fonction du ratio A/h pour différentes valeurs du nombre d'ondes circonférentielles n

7.7. Effet des caractéristiques géométriques

On se propose dans cette section d'examiner l'effet de la variation des caractéristiques géométriques sur le comportement dynamique des coques cylindriques géométriquement non linéaire. L'étude commence dans un premier temps par une scrutation de l'effet de variation du ratio I/R en fonction de la fréquence non linéaire tout en faisant varier l'amplitude d'oscillation. On examine dans un second temps l'évolution de la fréquence non linéaire en fonction de la fluctuation de l'épaisseur de la structure dépendamment de l'amplitude de vibration.

7.7.1. Effet du ratio l/R

On considère la même coque évoquée dans la section précédente, avec les mêmes conditions aux limites.

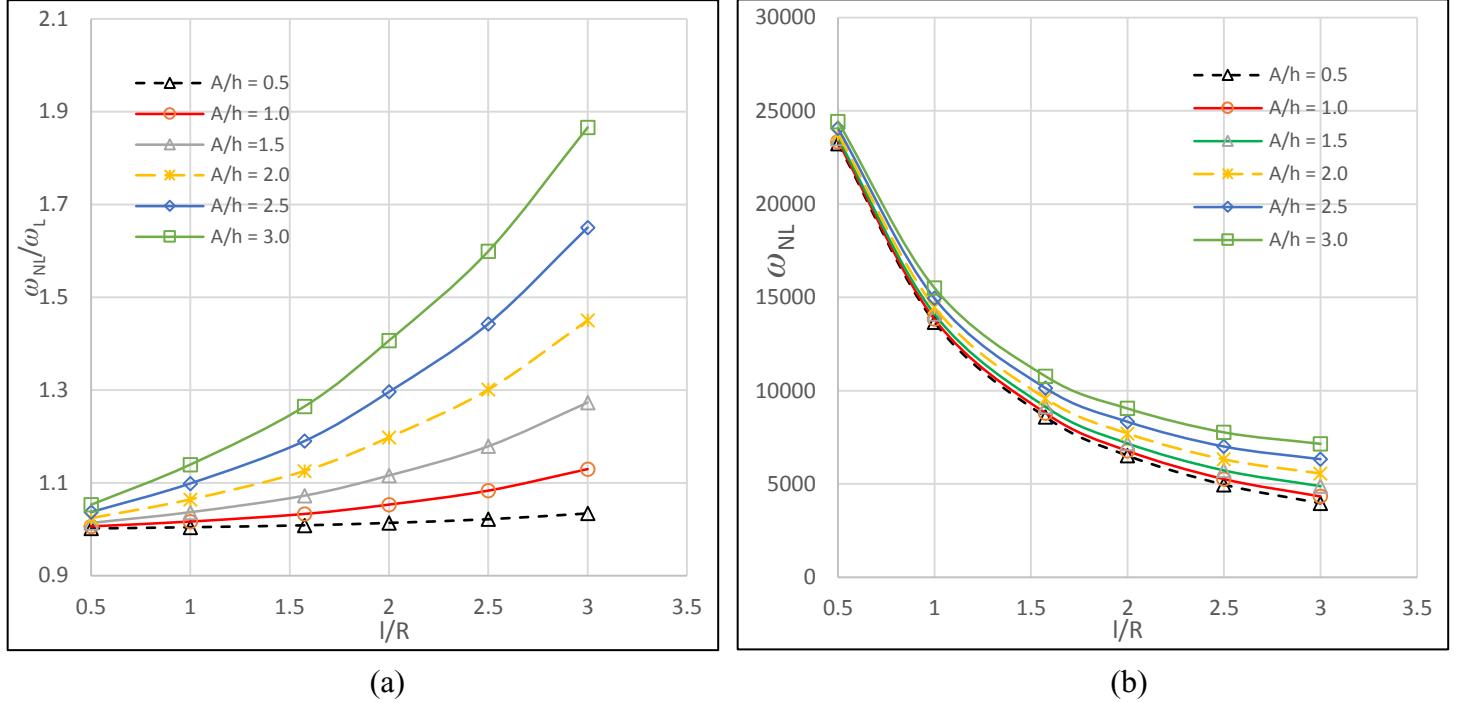


Figure 9 Variation du rapport de fréquences ω_{NL}/ω_L (9.a) et de la fréquence non linéaire (9.b) en fonction du ratio l/R pour différentes valeurs de l'amplitude adimensionnelle A/h

En faisant varier le ratio l/R (l variable et R maintenu fixe) pour les différentes valeurs : 0.5, 1.0, 1.57, 2.0, 2.5 et 3.0, on suit dans un premier temps l'évolution du ratio ω_{NL}/ω_L pour les différentes amplitudes adimensionnelles variant de 0.5 jusqu'au 3.0 par pas de 0.5 (voir figure (9.a)). Dans un second temps, on examine la fluctuation de la fréquence non linéaire pour la même plage de variation du ratio l/R (figure (9.b)). Cette dernière figure exhibe une décroissance en exponentielle de la fréquence non linéaire au fur et à mesure que la structure soit élancée (l/R croissant). La même allure se reproduit pour les autres courbes relatives aux différents valeurs de A/h . La diminution s'avère drastique au début, correspondant aux structures courtes puis elle devient onctueuse (pente de la tangente à la courbe est faible) au fur et à mesure que les structures soient élancées. On peut noter également que pour les faibles valeurs du ratio l/R , les courbes sont serrées tandis que l'effet de l'amplitude prend d'ampleur lorsque les coques sont de plus en plus élancées.

La figure (9.a) met en exergue la variation du rapport de fréquence non linéaire par rapport à celle linéaire en fonction de l'évolution du ratio l/R . La figure montre que toutes les courbes présentent une allure croissante traduisant ainsi une diminution draconienne de la

fréquence linéaire par rapport à celle non linéaire en augmentant progressivement la longueur de la coque. La figure expose également un accroissement progressif de l'écart résidant entre les différentes courbes (l'écart entre les différents courbes correspondants aux rapports ω_{NL}/ω_L pour un même ratio l/R considéré comme fixe) en fonction de l'augmentation du ratio l/R ce qui fortifie l'idée stipulant l'ampleur de l'effet de l'amplitude d'oscillation lorsque les structures sont de plus en plus élancées.

7.7.2. Effet du ratio h/R

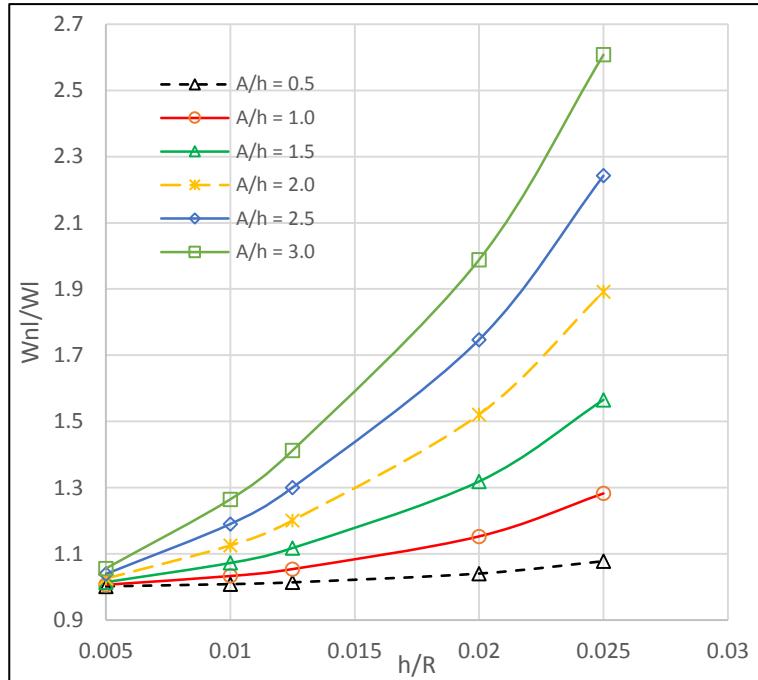


Figure 10 Variation du rapport de fréquences ω_{NL}/ω_L en fonction du ratio h/R pour différentes valeurs de l'amplitude adimensionnelle A/h

On se propose dans cette section, d'investiguer l'effet de l'épaisseur de la coque sur la l'évolution des fréquences non linéaires en tenant compte de la fluctuation de l'amplitude de vibration. On considère toujours la même coque en faisant varier cette fois ci le rapport h/R (l'épaisseur h est variable alors que le rayon R est maintenu constant). La figure(10) est tracée en prenant les points singuliers du ratio R/h , suivants : 200, 100, 80, 50 et 40.

La figure montre que le rapport entre les fréquences non linéaires et celles linéaires croit lorsque l'épaisseur de la coque augmente et ce pour les différentes courbes présentes dans le graphe. D'autant plus, et en suivant l'évolution de l'écart entre les différentes courbes en matière du ratio ω_{NL}/ω_L en considérant le ratio h/R fixe, on remarque qu'il augmente avec l'accroissement de l'épaisseur de la structure révélant ainsi l'effet éminent de l'amplitude de vibration qui s'avère notable pour les coques à grandes épaisseurs. Afin d'illustrer cette notion, on calcul l'écart entre les rapports ω_{NL}/ω_L relatifs aux amplitudes

adimensionnelles $A/h = 1.0$ et $A/h = 3.0$. L'écart entre ces rapports de fréquences s'élève de 18.33% relativement à $h/R = 0.01$ pour atteindre 50.82% conformément au $h/R = 0.025$.

7.8. Effet des conditions aux limites

On se propose, dans cette section de révéler l'effet des conditions aux limites sur le comportement dynamique non linéaire de la même coque cylindrique évoquée dans la figure(4). On examine l'influence des cas simplement supportées et ceux encastrées définis d'après la convention de Tong comme suit [54,55] voir (Tab.2):

Tableau 2 Différents types des conditions aux rives d'après la convention de Tong [54]

Nature de la liaison	u	v	w	$\partial w / \partial x$
F	Libre	Libre	Libre	Libre
SS0	0	Libre	Libre	Libre
SS1	Libre	Libre	0	Libre
SS2	0	Libre	0	Libre
SS3	Libre	0	0	Libre
SS4	0	0	0	Libre
CC1	Libre	Libre	0	0
CC2	0	Libre	0	0
CC3	Libre	0	0	0
CC4	0	0	0	0

La figure (10) montre clairement que ce modèle présente l'avantage de supporter une panoplie de conditions aux limites. La figure (10.a) révèle une tendance raidissante du comportement non linéaire et ce pour toutes les conditions aux rives sujet d'étude. On peut constater également d'après la courbe que plus il y a des contraintes aux rives plus le comportement non linéaire est moins raidissant, ceci est bien visible pour le cas simplement supporté ainsi que pour celui encastré (le rapport des fréquences augmente pour la même amplitude adimensionnelle au fur et à mesure que les rives sont moins contraignantes et ce pour chacune des cas simplement supportée et encastrée). En conséquence, la courbe encastrée (C2-C2) s'avère plus raidissante (d'ailleurs c'est la plus prononcée de toutes les courbes présentes) que celle (C4-C4) et le même aspect se reproduit pour le cas simplement supportée (S1-S1 vs S3-S3). La figure (10.b) met en exergue la fluctuation des fréquences linéaires et non linéaires, en fonction de la variation des conditions aux limites et montre en conséquence, la répercussion de ce fait sur l'évolution du rapport des fréquences en fonction des amplitudes adimensionnelles (figure 10.a).

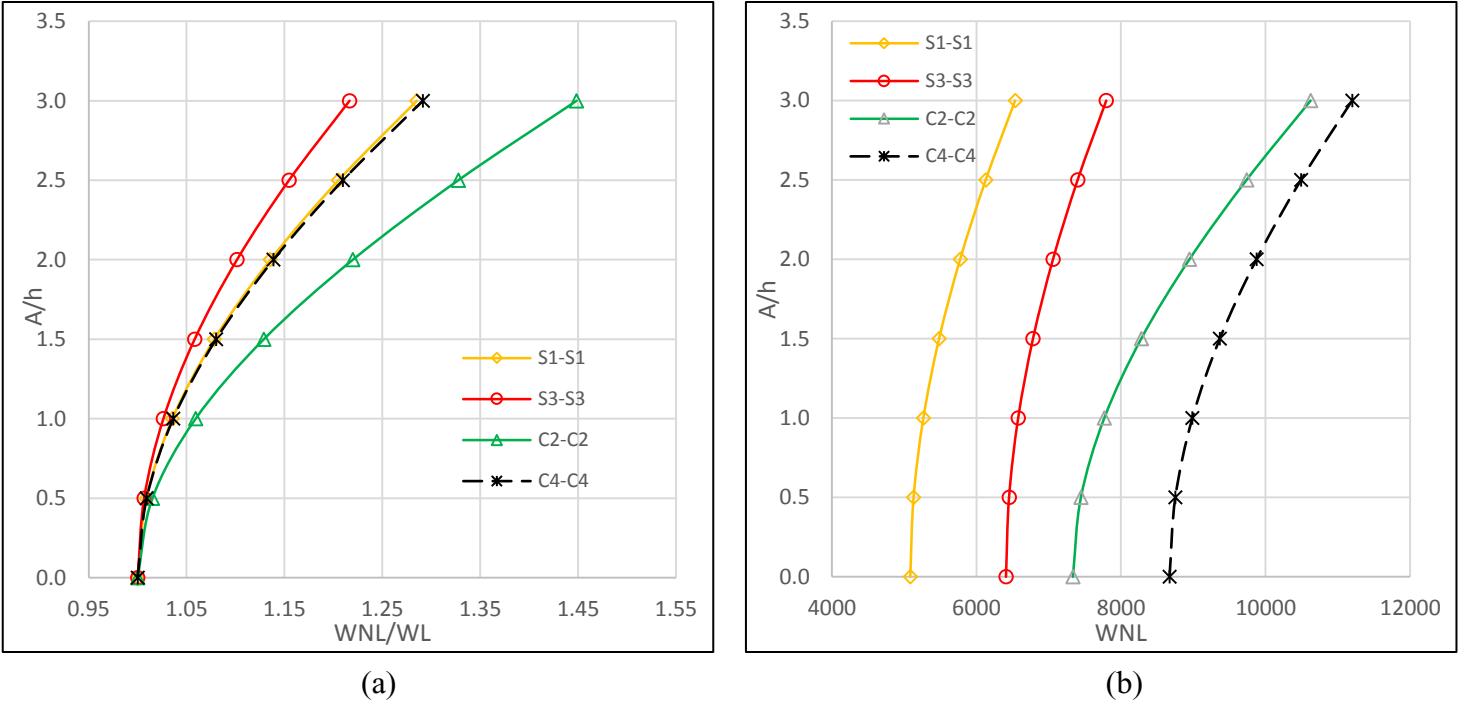


Figure 11 Variation du rapport de fréquences ω_{NL}/ω_L (11.a) et de la fréquence non linéaire (11.b) en fonction du ratio h/R pour différentes valeurs de l'amplitude adimensionnelle A/h

Afin d'illustrer cette finalité, on prend comme exemple les courbes relatives aux conditions d'encastrement (C2-C2 et C4-C4) élucidées dans la figure (11.b). Il est bien clair d'après la courbe que la fréquence linéaire ainsi que celles non linéaires, fonction d'amplitude d'oscillations, augmentent au fur et à mesure que les conditions aux rives sont contraignantes. Cet écart s'avère plus accentué pour la fréquence linéaire ($A/h = 0.0$) et se resserre progressivement en allant vers les valeurs d'amplitudes adimensionnelles les plus grandes (en prenant à chaque fois les écarts entre les fréquences non linéaires relatifs aux ratios A/h constants (les droites horizontales)). On en déduit de ce fait, que l'augmentation des fréquences linéaires et non linéaires n'est pas proportionnelle, ce qui donne un rapport de fréquence inférieur à 1.0 (étant donné que l'augmentation de la fréquence linéaire est plus importante que celle non linéaire) et ce pour chaque amplitude adimensionnelle. On en conclut que les rapports de fréquences correspondants à chaque ratio A/h diminuent entre la courbe C4-C4 et celle C2-C2 ce qui se manifeste d'une façon limpide dans la figure (11.a) montrant ainsi une allure plus prononcée de la courbe C2-C2 par rapport à celle C4-C4. La même approche peut être appliquée pour les autres cas.

Conclusion Générale

Nous avons présenté dans ce manuscrit une nouvelle formulation capable de spéculer avec précision la tendance de non linéarité du comportement dynamique des structures cylindriques minces, et ce dans le but de répondre aux exigences accrues pour leur exploitation. La théorie se base principalement sur les relations cinématiques de Novozhilov qui emploie une cinématique complexe en la comparant aux autres théories. Elle tient en compte de l'effet de courbure du champ de déplacement dans la direction circonférentielle et met en considération l'impact des imperfections géométriques initiales sur la dynamique du système. Le cheminement mathématique employé ici a mis en exergue l'effet du couplage non linéaire entre les différents modes et a démontré que le système est dépourvu des termes quadratiques compte tenu de la symétrie mécanique de la structure. La formulation a débuté par une forme générale marquant ainsi l'une de ces points forts montrant son aptitude à supporter diverses formes du champ de déplacement et une multitude de manière de discréétisation. La deuxième partie de ce manuscrit révèle aussi un autre aspect d'originalité qui réside dans l'emploi du champ de déplacement, découlant de l'analyse linéaire et représentant la solution exacte des équations d'équilibre de Sanders. La coque est supposée parfaitement cylindrique et les matrices de masse et de rigidité globales sont décelées à partir de la méthode des éléments finis classique. Tout le formalisme adopté ici s'inspire de la méthode des éléments finis hybride. La résolution de l'équation de mouvement s'est fondée sur la méthode de linéarisation afin d'aboutir à une expression simplifiée du système dynamique tout en passant par l'analyse modale. Les couplages non linéaires entre modes propres se sont manifestés par des transferts d'énergie. Les résultats obtenus de cette théorie ont été validé en les comparants avec les solutions numériques se trouvant dans la littérature. Une très bonne concordance a été révélée. La formulation développée ici a montré que le couplage a un effet éminent produisant ainsi un caractère non linéaire plus raidissant. Elle a apportée quelques amendements en matière de caractérisation des fréquences et modes fondamentaux. Cette méthode a montré aussi que les rapports des fréquences augmentent aussi bien pour les structures progressivement élancées ainsi que pour celles épaisse. Ce modèle offre aussi l'avantage d'avoir supporté plusieurs conditions aux limites et a démontré que la tendance non linéaire s'avère plus raidissante au fur et à mesure que les rives sont moins contraignantes. Finalement, Ce modèle nous offre l'occasion pour étendre cette approche en employant d'autre forme du champ de déplacement ou encore d'étudier des structures de géométrie plus complexe en appliquant cette théorie à un élément à double courbure employant des coordonnées généralisées.

Bibliographie

- [1] Reissner, E. (1955). Non-linear effects in vibrations of cylindrical shells. Ramo-Wooldridge Corporation Guided Missile Research Division, Aeromechanics Section.
- [2] Grigolyuk, E. I. (1955). Vibrations of circular cylindrical panels subjected to finite deflections. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 19, 376-382.
- [3] Chu, H. N. (1961). Influence of large amplitudes on flexural vibrations of a thin circular cylindrical shell. *Journal of the Aerospace Sciences*, 28(8), 602-609.
- [4] Cummings, B. E. (1964). Large-amplitude vibration and response of curved panels. *AIAA Journal*, 2(4), 709-716.
- [5] Nowinski, J. L. (1963). Nonlinear transverse vibrations of orthotropic cylindrical shells. *AIAA Journal*, 1(3), 617-620.
- [6] Evensen, D. A. (1963). Some observations on the nonlinear vibration of thin cylindrical shells. *AIAA Journal*, 1(12), 2857-2858.
- [7] Donnell, L. H. (1934). A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending.
- [8] Evensen, D. A. (2000). The Influence of Initial Stresses and Boundary Restraints on the Nonlinear Vibrations of Cylindrical Shells. *ASME APPLIED MECHANICS DIVISION-PUBLICATIONS-AMD*, 238, 47-60.
- [9] Matsuzaki, Y. (1969). An analytical study of the nonlinear flexural vibration of thin circular cylindrical shells. *J. Jpn. Soc. Aero. Space Sci.*, 17(187), 308.
- [10] Matsuzaki Y and Kobayashi S (1969), A theoretical and experimental study of the nonlinear flexural vibration of thin circular cylindrical shells with clamped ends, *Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences* 12, 55–62.
- [11] Dowell, E. H., & Ventres, C. S. (1968). Modal equations for the nonlinear flexural vibrations of a cylindrical shell. *International Journal of Solids and Structures*, 4(10), 975-991.
- [12] Atluri, S. (1972). A perturbation analysis of non-linear free flexural vibrations of a circular cylindrical shell. *International Journal of Solids and Structures*, 8(4), 549-569.
- [13] Dowell EH, Ventres CS, and Tang D. (1998), Modal equations for the nonlinear flexural vibrations of a cylindrical shell, Duke Univ Research Report, DT 98-1.
- [14] Varadan, T. K., Prathap, G., & Ramani, H. V. (1989). Nonlinear free flexural vibration of thin circular cylindrical shells. *AIAA journal*, 27(9), 1303-1304.
- [15] Prathap, G. (1978). Comments on the large amplitude asymmetric vibrations of some thin shells of revolution. *Journal of Sound and Vibration*, 56(2), 303-305

- [16] El-Zaouk, B. R., & Dym, C. L. (1973). Non-linear vibrations of orthotropic doubly curved shallow shells. *Journal of Sound and Vibration*, 31(1), 89-103.
- [17] Ginsberg, J. H. (1973). Large amplitude forced vibrations of simply supported thin cylindrical shells. *J. Appl. Mech.*, 40(2): 471-477.
- [18] Ginsberg, J. H. (1974). Nonlinear axisymmetric free vibration in simply supported cylindrical shells. *J. Appl. Mech.*, 41(1): 310-312.
- [19] Radwan, H., & Genin, J. (1975). Non-linear modal equations for thin elastic shells. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 10(1), 15-29.
- [20] Sanders Jr, J. L. (1963). Nonlinear theories for thin shells. *Quarterly of Applied Mathematics*, 21(1), 21-36.
- [21] Koiter, W. T. (1966). On the nonlinear theory of thin elastic shells. *Proc. Koninkl. Ned. Akad. van Wetenschappen, Series B*, 69, 1-54.
- [22] Radwan, H. R., & Genin, J. (1976). Nonlinear vibrations of thin cylinders, *ASME J. Appl. Mech.* 43, 370–372.
- [23] Raju, K. K., & Rao, G. V. (1976). Large amplitude asymmetric vibrations of some thin shells of revolution. *Journal of Sound and Vibration*, 44(3), 327-333.
- [24] Chiba, M. (1993). Non-linear hydroelastic vibration of a cantilever cylindrical tank—I. Experiment (empty case). *International journal of non-linear mechanics*, 28(5), 591-599.
- [25] Ganapathi, M., & Varadan, T. K. (1996). Large amplitude vibrations of circular cylindrical shells. *Journal of Sound and vibration*, 192(1), 1-14.
- [26] Selmane, A., & Lakis, A. A. (1997). Influence Of Geometric Non-Linearities On The Free Vibrations Of Orthotropic Open Cylindrical Shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(6), 1115-1137.
- [27] Lakis, A. A., Selmane, A., & Toledano, A. (1998). Non-linear free vibration analysis of laminated orthotropic cylindrical shells. *International journal of mechanical sciences*, 40(1), 27-49.
- [28] Amabili, M., Pellicano, F., & Paidoussis, M. P. (1998). Nonlinear vibrations of simply supported, circular cylindrical shells, coupled to quiescent fluid. *Journal of Fluids and Structures*, 12(7), 883-918.
- [29] Olson, M. D. (1965). Some experimental observations on the nonlinear vibration of cylindrical shells. *AIAA Journal*, 3(9), 1775-1777.
- [30] Kubenko, V. D., & Kovalchuk, P. S. (2000). Problems of nonlinear multiple-mode vibrations of thin elastic shells of revolution. *ASME APPLIED MECHANICS DIVISION-PUBLICATIONS-AMD*, 238, 147-154.

- [31] Mao, R., & Williams, F. W. (1998). Post-critical behaviour of orthotropic circular cylindrical shells under time dependent axial compression. *Journal of sound and vibration*, 210(3), 307-327.
- [32] Mao, R., & Williams, F. W. (1998). Nonlinear analysis of cross-ply thick cylindrical shells under axial compression. *International journal of solids and structures*, 35(17), 2151-2171.
- [33] Amabili, M. (2003). A comparison of shell theories for large-amplitude vibrations of circular cylindrical shells: Lagrangian approach. *Journal of Sound and Vibration*, 264(5), 1091-1125.
- [34] Rougui, M., Moussaoui, F., & Benamar, R. (2007). Geometrically non-linear free and forced vibrations of simply supported circular cylindrical shells: A semi-analytical approach. *International journal of non-linear mechanics*, 42(9), 1102-1115.
- [35] Avramov, K. V. (2012). Nonlinear modes of vibrations for simply supported cylindrical shell with geometrical nonlinearity. *Acta Mechanica*, 223(2), 279-292.
- [36] Liu, Y., & Chu, F. (2012). Nonlinear vibrations of rotating thin circular cylindrical shell. *Nonlinear Dynamics*, 67(2), 1467-1479.
- [37] Awrejcewicz, J., Kurpa, L., & Shmatko, T. (2013). Large amplitude free vibration of orthotropic shallow shells of complex shapes with variable thickness. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 10(1), 149-162.
- [38] Ramzi, R., & Lakis, A. (2013). Effect of geometric nonlinearities on nonlinear vibrations of closed cylindrical shells. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 13(04), 1250078.
- [39] Sofiyev, A. H. (2016). Nonlinear free vibration of shear deformable orthotropic functionally graded cylindrical shells. *Composite Structures*, 142, 35-44.
- [40] Sofiyev, A. H., Karaca, Z., & Zerin, Z. (2017). Non-linear vibration of composite orthotropic cylindrical shells on the non-linear elastic foundations within the shear deformation theory. *Composite structures*, 159, 53-62.
- [41] Dey, T., & Ramachandra, L. S. (2017). Non-linear vibration analysis of laminated composite circular cylindrical shells. *Composite structures*, 163, 89-100.
- [42] Sheng, G. G., & Wang, X. (2017). The non-linear vibrations of rotating functionally graded cylindrical shells. *Nonlinear Dynamics*, 87(2), 1095-1109.
- [43] Hasrati, E., Ansari, R., & Rouhi, H. (2019). Nonlinear free vibration analysis of shell-type structures by the variational differential quadrature method in the context of six-parameter shell theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, 151, 33-45.

- [44] Yadav, A., Amabili, M., Panda, S. K., & Dey, T. (2019). Non-linear vibration response of functionally graded circular cylindrical shells subjected to thermo-mechanical loading. *Composite Structures*, 229, 111430.
- [45] Li, C., Zhang, Z., Yang, Q., & Li, P. (2020). Experiments on the geometrically nonlinear vibration of a thin-walled cylindrical shell with points supported boundary condition. *Journal of Sound and Vibration*, 473, 115226.
- [46] Lakis, A. A., & Paidoussis, M. P. (1972). Dynamic analysis of axially non-uniform thin cylindrical shells. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 14(1), 49-71.
- [47] Amabili, M. (2008). Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. Cambridge University Press. Doi: 10.1017/CBO9780511619694
- [48] Donnell, L. H. (1933). *Stability of thin-walled tubes under torsion* (pp. 95-116). US Government Printing Office.
- [49] Novozhilov, V. V. (1953). Foundations of the Theory of Nonlinear Elasticity.
- [50] Sanders Jr, J. L. (1963). Nonlinear theories for thin shells. *Quarterly of Applied Mathematics*, 21(1), 21-36.
- [51] Koiter, W. T. (1966). On the nonlinear theory of thin elastic shells. Proc. Koninkl. Ned. Akad. van Wetenschappen, Series B, 69, 1-54.
- [52] Touzé, C. (2009). *Vibrations non linéaires géométriques de structures minces. Modèles d'ordre réduit et transition vers le chaos* (Doctoral dissertation).
- [53] Evensen, D. A. (1967). *Nonlinear flexural vibrations of thin-walled circular cylinders*. National Aeronautics and Space Administration-TN-D4090.
- [54] Tong, L. (1993). Free vibration of orthotropic conical shells. *International Journal of Engineering Science*, 31(5), 719-733.
- [55] Bakhtiari, M., Lakis, A. A., & Kerboua, Y. (2020). Nonlinear Vibration of Truncated Conical Shells: Donnell, Sanders and Nemeth Theories. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 21(1), 83-97.

Appendices

Appendice A

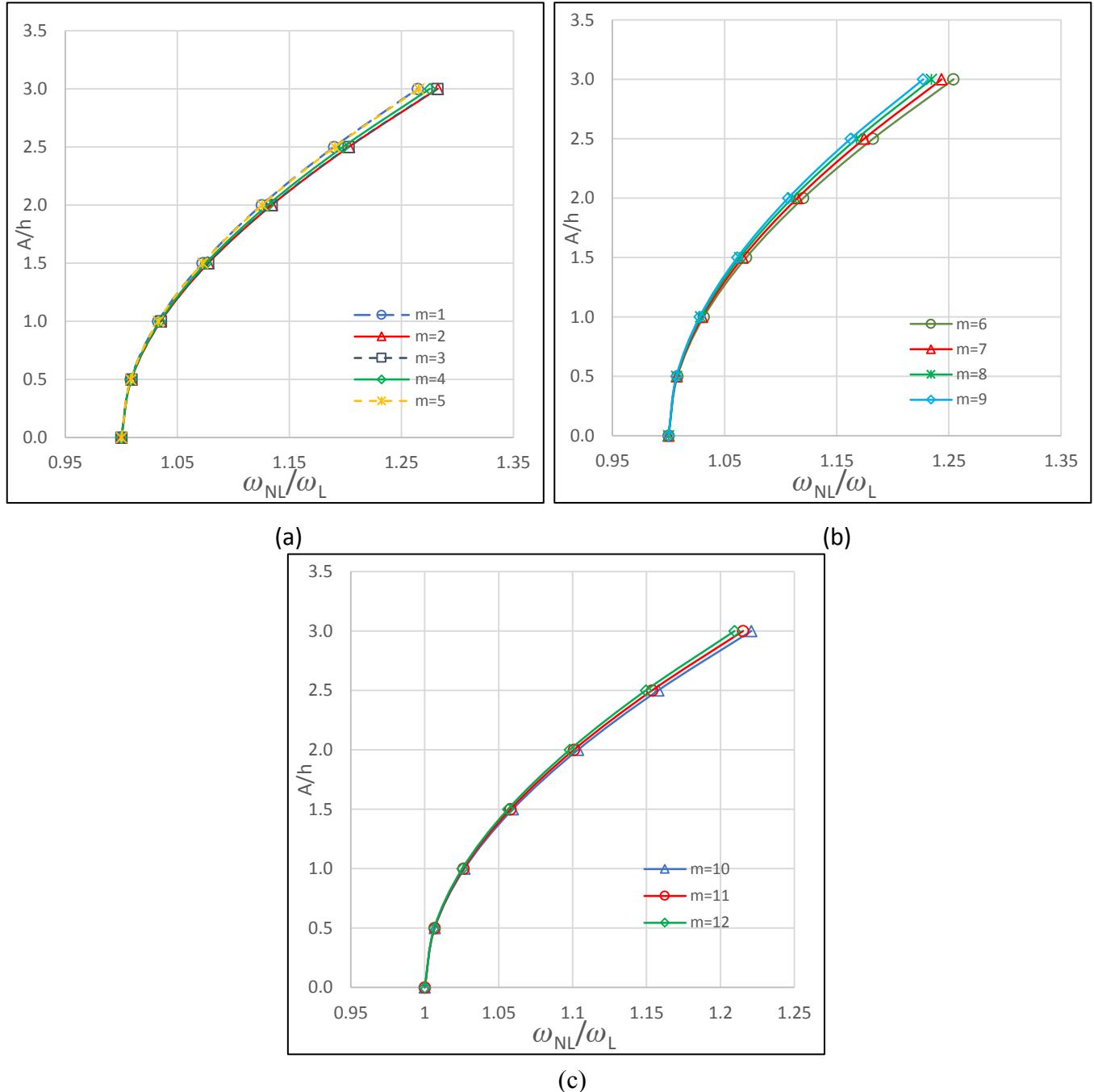


Figure A.1 Variation du rapport de fréquences ω_{NL}/ω_L en fonction du ratio A/h pour différentes valeurs du mode axiale m en considérant $n = 4$

On se propose d'examiner l'effet du mode axiale sur les vibrations non linéaires d'une structure cylindrique de caractéristiques géométriques et mécaniques citées préalablement dans la figure (4), en faisant varier les valeurs de m . La figure montre que toutes les courbes s'incurvent vers la droite indiquant ainsi que la fréquence non linéaire augmente au fur et à mesure que l'amplitude d'oscillations croît. D'autant plus, la figure montre que les courbes relatives à $m=1$ et $m=5$ ainsi que celles correspondants à $m=2$ et $m=3$ sont presque confondues et avoisinant la courbe relative à $m=3$. L'écart révélé entre ces courbes se reproduit presque de la même façon pour les courbes correspondants à $m=6,..,9$ et celles pour $m=10,..,12$. Il est clair d'après la figure (7.a – 7.c) que les courbes s'avèrent moins prononcées au fur et à mesure qu'on atteint les hautes fréquences $m=10,..,12$. La courbe relative à $m=2$ étant la courbe la plus prononcée.

Appendice B

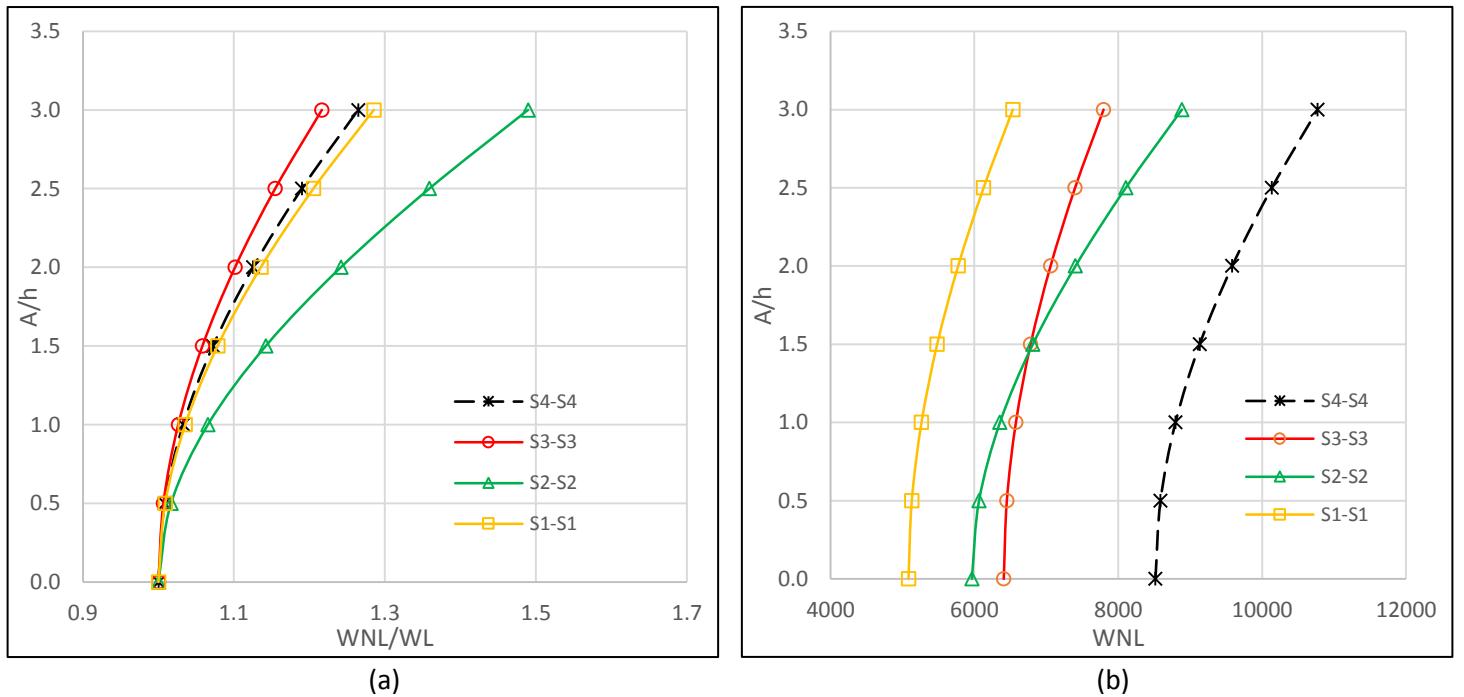
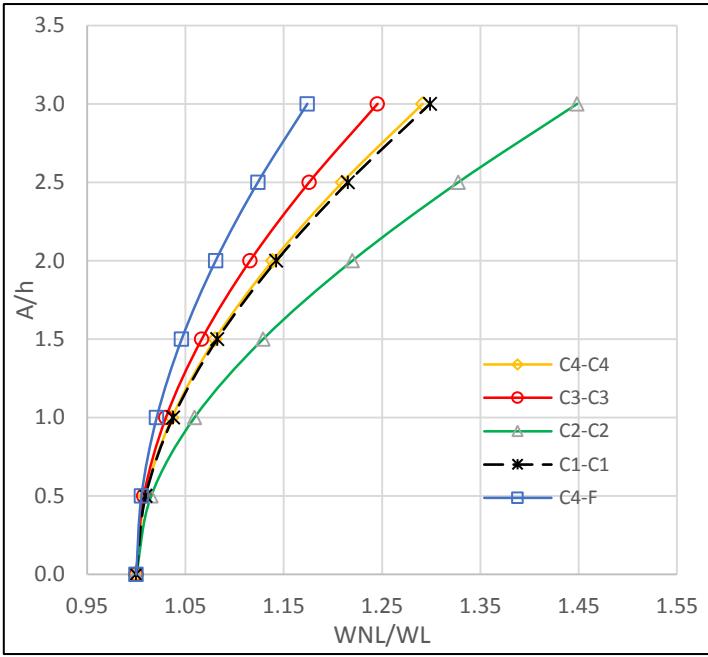
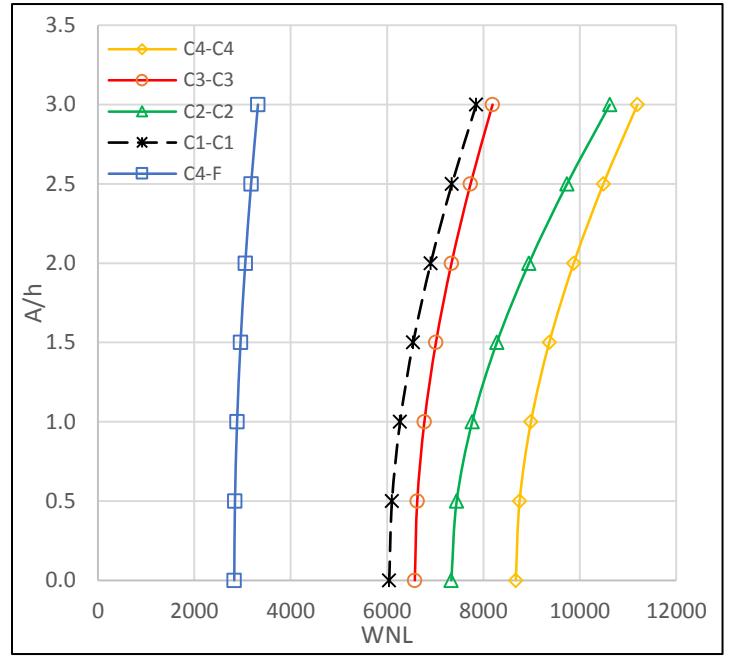


Figure.B. 1 Variation du rapport de fréquences ω_{NL}/ω_L (B.1.a) et de la fréquence non linéaire (B.1.b) en fonction du ratio A/h pour différentes conditions aux limites de type simplement supportée (convention de Tong [54])

Pour le cas des coques simplement supportée, la figure (B.1.a) montre que la courbe relative au cas (S2-S2) s'avère la plus prononcée et elle révèle donc le cas le plus raidissant. En suivant le même raisonnement employé pour la figure (11), l'évolution de la fréquence linéaire et celles non linéaires en fonction de la variation des conditions aux limites (Fig.B.1.b) conduit à la caractérisation du comportement non linéaire révélée dans la (Fig.B.1.a).



(a)



(b)

Figure.B. 2 Variation du rapport de fréquences ω_{NL}/ω_L (B.2.a) et de la fréquence non linéaire (B.2.b) en fonction du ratio A/h pour différentes conditions aux limites de type encastrée (convention de Tong [54])

À propos des conditions aux rives de type encastré, la courbe C2-C2 indique un caractère plus raidissant en la comparant aux autres courbes tandis que la courbe relative au cas encastré-libre s'avère la moins prononcée.