

**Titre:** Développement de modèles numériques de roues aubagées  
Title: désaccordées dans un contexte non-linéaire

**Auteur:** Jeanne Joachim  
Author:

**Date:** 2020

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Joachim, J. (2020). Développement de modèles numériques de roues aubagées  
Citation: désaccordées dans un contexte non-linéaire [Ph.D. thesis, Polytechnique  
Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/5290/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/5290/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** Alain Batailly, & Florence Nyssen  
Advisors:

**Programme:** Génie mécanique  
Program:

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**

affiliée à l'Université de Montréal

**Développement de modèles numériques de roues aubagées désaccordées dans un  
contexte non-linéaire**

**JEANNE JOACHIM**

Département de génie mécanique

Thèse présentée en vue de l'obtention du diplôme de *Philosophiæ Doctor*  
Génie mécanique

Juillet 2020

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**

affiliée à l'Université de Montréal

Cette thèse intitulée :

**Développement de modèles numériques de roues aubagées désaccordées dans un  
contexte non-linéaire**

présentée par **Jeanne JOACHIM**

en vue de l'obtention du diplôme de *Philosophiæ Doctor*  
a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

**Annie ROSS**, présidente

**Alain BATAILLY**, membre et directeur de recherche

**Florence NYSSSEN**, membre et codirectrice de recherche

**Vsevolod KHARYTON**, membre

**Azzedine DADOUCHE**, membre externe

## DÉDICACE

*À mes parents,  
merci de m'avoir toujours encouragée à aller aussi loin qu'il m'était possible.*



## REMERCIEMENTS

Je remercie tout d’abord mes encadrants, Alain Batailly et Florence Nyssen, d’avoir mis à ma disposition leurs expertises ainsi que tous les moyens techniques nécessaires à ma recherche. Leur disponibilité et la pertinence de leurs remarques ont grandement contribué à la réussite de ce projet et à l’amélioration du présent mémoire.

Je remercie également chaleureusement les membres du jury, qui ont accepté de d’évaluer la présente recherche dans des délais serrés, et en dépit d’une situation mondiale particulière. Je tiens en particulier à exprimer toute ma gratitude à Annie Ross, qui me fait l’honneur de présider ce jury, pour avoir su se rendre disponible à certains moments clefs.

J’ai eu la chance d’être très entourée tout au long de mon doctorat. Je remercie ma famille, de m’avoir toujours soutenue en dépit de la distance. Merci en particulier à mes parents de m’avoir exprimé leur fierté, et à mon petit frère pour m’avoir fait découvrir des musiques qui ont rendu la rédaction de certaines parties de ce mémoire bien plus douces !

Je remercie également mes amis qui ont su se montrer présents dans ce chemin mouvementé. Sans vouloir être exhaustive, j’aimerais mentionner les personnes qui ont fait une profonde différence dans mon parcours. Elsa, pour toutes ces marches prises ensemble qui ont été bien souvent d’un profond soulagement. Kévin, pour son soutien sans faille lors de la rédaction de ce mémoire. Solène, pour sa bienveillance et sa vigilance envers ses amis et collègues. Juliette, pour sa bonne humeur et sa capacité à dédramatiser toute situation. Et enfin, merci à mes amis du Choeur du Brouhaha, dont Marilyne, Mathilde et Matthieu, qui ont su me donner l’impulsion dont j’avais besoin.

## RÉSUMÉ

Les turbomoteurs sont constitués de successions de roues aubagées tournant à grande vitesse et isolées de l'environnement extérieur par le carter. Le jeu entre les aubes et le carter favorise l'apparition de tourbillons, qui induisent d'importantes pertes aérodynamiques. Les constructeurs cherchent donc à diminuer ce jeu afin d'améliorer le rendement global des moteurs. Cependant, la diminution des jeux favorise l'apparition de contacts entre les aubes et le carter. Les *vibrations non-linéaires* qui en résultent sont particulièrement préjudiciables au bon fonctionnement du moteur, du fait des vitesses relatives élevées entre les composants. Ainsi, la compréhension de ces phénomènes non-linéaires constituent un enjeu industriel majeur.

Par ailleurs, bien que les aubes d'une même roue aubagée sont conçues pour être identiques, des variations infimes de propriétés mécaniques sont inévitablement engendrées lors de leur réalisation ou du fait de l'usure en service. Cette rupture de symétrie, nommée *désaccordage*, induit des modifications du comportement vibratoire de la roue aubagée par rapport à celui attendu pour une roue accordée, présentant une symétrie cyclique parfaite. Notamment, les amplitudes de vibrations sont grandement amplifiées, diminuant ainsi la durée de vie du moteur. La caractérisation des vibrations des roues aubagées désaccordées fait appel à des approches stochastiques, rendues possibles par l'essor des simulations numériques.

Peu de recherches ont été menées à ce jour sur l'étude conjointe des vibrations non-linéaires, dues aux frottements ou au contact, et du désaccordage. Or, ces deux aspects modifient grandement le comportement dynamique des roues aubagées, si bien que leur prise en compte améliore grandement la prédictivité des simulations. Les recherches les plus récentes proposent des études déterministes de l'influence du désaccordage sur les non-linéarités de frottement entre composants d'une même roue aubagée, pour des vitesses relatives faibles. L'influence du désaccordage sur les vibrations non-linéaires n'avait pas encore été étudiée stochastiquement, et les non-linéarités de contact entre les aubes et le carter, qui impliquent des vitesses relatives élevées, n'avaient pas encore été considérées.

La présente recherche propose ainsi la première étude conjointe du désaccordage et des non-linéarités aubes-carter. Les modélisations numériques sont réalisées en utilisant la méthode des éléments finis. Les équations du mouvement sont résolues par intégration temporelle et la gestion du contact est réalisée par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Une première étude stochastique est réalisée sur un modèle phénoménologique, permettant de valider la méthodologie proposée. Il apparaît notamment que les amplifications des vibrations dues au

désaccordage dans le cadre non-linéaire sont bien supérieures à celles obtenues dans le cadre linéaire. En outre, les interactions non-linéaires prédites sur base du modèle accordé sont robustes vis-à-vis d'un faible désaccordage.

Une méthode de réduction est ensuite développée pour générer des modèles réduits désaccordés avec interface de contact, pour un coût de calcul négligeable. Ce développement rend ainsi possible des calculs stochastiques sur un modèle industriel. Les simulations réalisées en configuration nominale permettent de mettre en évidence des modifications du comportement vibratoire des aubes à mesure que le niveau de désaccordage augmente, conduisant à de hauts niveaux d'amplification des vibrations. L'analyse des champs de contraintes indiquent que les niveaux de contraintes dans la roue aubagée augmentent sensiblement pour les plus hauts niveaux de désaccordage considérés.

Enfin, la méthodologie de gestion du contact utilisée, couplée à la méthode de génération de modèles désaccordés réduits développée, permet de générer des données d'instrumentation de Blade Tip-Timing. Les résultats obtenus permettent d'entrevoir que la méthodologie peut être utilisée dans le cadre de l'étude stochastique de la robustesse des algorithmes de détection du désaccordage, ou encore pour la mise en place de nouveaux algorithmes d'analyse des phénomènes non-linéaires.

**mots clefs :** désaccordage, non-linéarités aubes-carter, simulations stochastiques, méthode des éléments finis, méthode de réduction, génération de données de BTT.

## ABSTRACT

Aircraft engines are composed of bladed disks rotating at high speed and isolated from the external environment by the casing. The clearance between the blades and the casing favors the formation of vortices, resulting in aerodynamic losses. In order to improve overall engine efficiency, manufacturers are therefore seeking to reduce this clearance. However, the reduction of clearances favors the occurrence of contacts between the blades and the casing. The resulting *non-linear vibrations* are particularly detrimental to the proper operation of the engine due to the high relative speeds between the components. Thus, understanding these non-linear phenomena is a major industrial issue.

Although blades are designed to be identical, small variations in mechanical properties are inevitably generated during manufacturing or due to in-service wear. This symmetry break, known as *mistuning*, induces changes in the vibratory behavior of the bladed disk, compared to that expected for a tuned bladed disk. In particular, the vibration amplitudes are greatly amplified, thus reducing the engine operating life. Stochastic approaches, made possible by the development of numerical simulations, are used in order to characterize the vibrations of mistuned bladed disks.

To date, little research has been conducted on the study of non-linear vibrations — due to friction or contact — and mistuning. However, these two aspects greatly modify the dynamic behavior of bladed disks, so that taking them into account greatly improves the predictability of the simulations. The most recent researches rely on deterministic approaches to study the influence of mistuning on the non-linearities occurring inside the bladed disk, with low relative speeds. The influence of mistuning on non-linear vibrations has not been studied with a stochastic approach so far, nor by considering the contact nonlinearities between the blades and the casing, which imply high relative speeds.

The present research thus represents the first combined analysis of mistuning and blade/casing contact non-linearities. Numerical modeling are performed using the finite element method. The equations of motion are solved by a time integration algorithm and the contact management is performed by the Lagrange multiplier method. Firstly, a stochastic study is carried out on a phenomenological model to validate the proposed methodology. Vibration amplifications due to mistuning in the non-linear framework are much higher than those obtained in the linear framework. Moreover, the non-linear interactions predicted on the tuned model are robust to small mistuning.

A reduced order technique is then developed to generate mistuned models with a contact

interface, at a negligible calculation cost. This development makes stochastic calculations possible on an industrial model, studied in a nominal configuration. Changes in the vibratory behavior of the blades are highlighted as the mistuning level increases, leading to high levels of vibration amplifications. Stress fields are also analyzed, indicating that the stress levels in the bladed disk increase significantly for the highest mistuning levels considered.

Finally, the contact management methodology used, coupled with the reduced detuned model generation method developed, allows to generate Blade Tip-Timing data. The results obtained show that the methodology can be used to study stochastically the robustness of the mistuning identification algorithms, and to develop new algorithms for the analysis of non-linear phenomena.

**key words :** mistuning, blade/casing contact non-linearities, stochastic simulations, finite element method, reduced order technique, BTT data generation.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	ix
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xii
LISTE DES FIGURES . . . . .	xiii
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . .	xx
CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 Considérations générales . . . . .	1
1.2 Problématique . . . . .	3
1.3 Objectifs de recherche . . . . .	4
1.4 Organisation du mémoire . . . . .	4
CHAPITRE 2 ÉTAT DE L'ART SUR LA MODÉLISATION DES VIBRATIONS DES ROUES AUBAGÉES . . . . .	7
2.1 Analyse modale . . . . .	8
2.1.1 Roues accordées . . . . .	8
2.1.2 Roues désaccordées . . . . .	13
2.2 Vibrations forcées en contexte linéaire . . . . .	16
2.2.1 Roues accordées . . . . .	17
2.2.2 Roues désaccordées . . . . .	20
2.3 Réduction des systèmes à grand nombre de degrés de liberté . . . . .	26
2.3.1 Symétrie cyclique . . . . .	26
2.3.2 Synthèse modale . . . . .	27
2.3.3 Spécificité des roues désaccordées . . . . .	29
2.4 Vibrations forcées des roues accordées dans un contexte non-linéaire . . . . .	31
2.4.1 Frottements et contacts dans les turbomachines . . . . .	32

2.4.2	Traitement numérique en éléments finis . . . . .	39
2.5	Vibrations forcées des roues désaccordées en contexte non-linéaire . . . . .	42
2.5.1	Interfaces entre composants du rotor . . . . .	43
2.6	Interfaces entre le rotor et le stator - Intérêt de recherche . . . . .	44
CHAPITRE 3	MODÈLE PHÉNOMÉNOLOGIQUE . . . . .	46
3.1	Modélisation . . . . .	46
3.1.1	Réduction modale . . . . .	47
3.1.2	Amortissement . . . . .	50
3.1.3	Traitement du contact . . . . .	50
3.1.4	Prise en compte du désaccordage . . . . .	52
3.2	Analyse pour une roue aubagée désaccordée . . . . .	57
3.2.1	Simulations de contact . . . . .	57
3.2.2	Cartes d'interaction . . . . .	58
3.2.3	Fonctions de réponse en fréquence non-linéaire . . . . .	60
3.2.4	Convergence temporelle et spatiale . . . . .	61
3.3	Analyse de calculs stochastiques . . . . .	63
3.3.1	Convergence . . . . .	64
3.3.2	Amplification des vibrations . . . . .	67
3.3.3	Analyse croisée pour $n_d = 4$ . . . . .	72
3.3.4	Influence de l'amortissement . . . . .	74
3.4	Co-existence de solutions stables . . . . .	75
CHAPITRE 4	MODÈLES RÉDUITS DÉSAACCORDÉS AVEC INTERFACE DE CONTACT . . . . .	78
4.1	Méthodologie . . . . .	79
4.1.1	Méthode CMM initiale . . . . .	79
4.1.2	Méthode CMM avec interface de contact . . . . .	80
4.2	Modèle académique . . . . .	83
4.2.1	Analyse statique . . . . .	84
4.2.2	Analyse modale . . . . .	84
4.3	Modèle industriel . . . . .	87
4.3.1	Description . . . . .	87
4.3.2	Simulations de contact . . . . .	90
4.3.3	Sensibilité aux paramètres . . . . .	91
CHAPITRE 5	CARACTÉRISATION DU COMPORTEMENT VIBRATOIRE D'UNE	


































ROUE AUBAGÉE INDUSTRIELLE DÉSACCORDÉE . . . . .	100
5.1 Configuration linéaire . . . . .	100
5.2 Configuration non-linéaire . . . . .	101
5.2.1 Scénario de contact . . . . .	101
5.2.2 Amplification des vibrations . . . . .	105
5.2.3 Comportement vibratoire . . . . .	116
5.2.4 Efforts de contact et usure . . . . .	119
5.2.5 Contraintes . . . . .	121
5.3 Bilan . . . . .	129
CHAPITRE 6 GÉNÉRATION DE DONNÉES DE BLADE TIP-TIMING . . . . .	134
6.1 Concept et application dans la littérature . . . . .	135
6.1.1 Chaîne d'acquisition . . . . .	136
6.1.2 Traitement des signaux . . . . .	137
6.1.3 Prise en compte du désaccordage . . . . .	138
6.1.4 Génération numérique de signaux . . . . .	138
6.2 Extension à un cadre de non-linéarités de contact . . . . .	139
6.2.1 Méthode et validation . . . . .	140
6.2.2 Application à un modèle phénoménologique . . . . .	141
6.2.3 Application à un modèle industriel . . . . .	146
6.3 Bilan . . . . .	153
CHAPITRE 7 CONCLUSION . . . . .	155
RÉFÉRENCES . . . . .	157
ANNEXES . . . . .	173



## LISTE DES TABLEAUX

3.1	Propriétés du modèle éléments finis. . . . .	48
3.2	Motif de désaccordage sélectionné. . . . .	53
3.3	Plage de vitesse angulaire d'intérêt, déterminée stochastiquement sur les roues aubagées désaccordées . . . . .	59
3.4	Paramètres pour les simulations de contact. . . . .	63
4.1	Motif de désaccordage sélectionné pour la validation sur le modèle académique, distribution aléatoire uniforme avec $\sigma = 0,58\%$ ( $\max(\delta E) = 1\%$ ). . . . .	84
4.2	Propriétés du modèle éléments finis de la roue aubagée industrielle. . . . .	90
4.3	Paramètres matériau du revêtement abrasable. . . . .	90
4.4	Paramètres pour les simulations de contact. . . . .	91
4.5	Motif de désaccordage sélectionné pour la validation sur le modèle industriel, avec $\sigma = 2,31\%$ ( $\max(\delta E) = 4\%$ ). . . . .	95
4.6	Temps de calcul par échantillon pour différents $\eta$ . . . . .	98
5.1	Temps de calcul moyen par échantillon pour différents $\sigma$ , sur une machine donnée. . . . .	100
5.2	Critères de convergence temporelle pour différents niveaux de désaccordage, au bout de 50 tours de simulation. . . . .	107
5.3	Caractéristiques des motifs sélectionnés. . . . .	123
5.4	Motif de désaccordage $m_{bf}$ . . . . .	124
5.5	Motif de désaccordage $m_{amp}$ . . . . .	124
5.6	Motif de désaccordage à $m_{loc}$ . . . . .	124
6.1	Motif de désaccordage sélectionné. . . . .	140

## LISTE DES FIGURES

















1.1	Principe de vol stationnaire d'un avion : portance des ailes (  ), poids (  ), poussée du moteur (  ) et traînée (  ). Adapté de [1]. . . . .	1
1.2	Représentation en coupe d'un turbomoteur : flux primaire (  ), flux secondaire (  ) et aubes (  ) du compresseur basse pression. . . . .	2
2.1	Roue aubagée, dont chaque aube (  ) est liée mécaniquement au disque (  ). Adapté de [2]. . . . .	7
2.2	Modes propres de vibration d'une aube encastrée-libre, avec les déformations tracées sous forme de gradient (  ). . . . .	9
2.3	Modes de vibration d'un disque, selon des cercles (  ) et des diamètres (  ) nodaux. Sources : [3] et [4]. . . . .	9
2.4	Représentation en 2D d'un mode de roue aubagée : mode 1F des aubes (  ) et allure modifiée des cercles nodaux (  ) du disque. . . . .	10
2.5	Représentation schématique des modes d'une roue aubagée accordée : les déformations positives (  ) et négatives (  ) par rapport à la géométrie initiale (  ) sont alternées et dessinent $n_d$ diamètres nodaux (  ). Adapté de [5]. . . . .	10
2.6	Diagramme fréquences propres/diamètres nodaux pour 28 aubes, où sont identifiables les modes du disque (  ), les modes d'aubes (  ) et les modes mixtes (zones de pincement) (  ). Adapté de [6]. . . . .	11
2.7	Représentation schématique des modes d'une roue aubagée désaccordée : l'énergie est localisée, seules certaines aubes sont déformées suivant de grandes amplitudes. Adapté de [5]. . . . .	14
2.8	Illustration de la densité de probabilité sur un intervalle pour la loi uniforme continue (  ) entre les bornes définies (  ) et la loi de Laplace-Gauss centrée (  ). . . . .	16
2.9	Rotor et stator : aubes du stator (  ) liées au carter (  ) à une extrémité et à une bague commune (  ) à l'autre, et aubes du rotor (  ). Adapté de [7]. . . . .	17
2.10	Diagramme de Campbell. Régimes moteur (  ), fréquences propres de la roue aubagée (  ) et quelques possibles résonances (  ). . . . .	18
2.11	FRF pour une roue aubagée accordée (  ), permettant de mettre en évidence la résonance (  ). . . . .	18

2.12	FRF pour un modèle de roue aubagée désaccordée, avec les réponses des aubes ( — ), la courbe enveloppe ( — ) et l'amplitude maximale désaccordée ( • ), comparée à la FRF pour le modèle accordé correspondant ( — ). . . . .	22
2.13	Types de montage d'aube ( ■ ) sur le disque ( ■ ). . . . .	23
2.14	Graphique de Monte Carlo, avec les 95 <sup>ième</sup> ( — ), 50 <sup>ième</sup> ( --- ) et 5 <sup>ième</sup> ( -.-.- ) centiles. Adapté de : [6]. . . . .	25
2.15	Interfaces utilisées dans une sous-structuration. Adapté de [8]. . . . .	28
2.16	Vocabulaire associé aux excroissances géométriques des aubes. . . . .	33
2.17	Zones de contact entre l'aube ( ■ ) et le disque ( ■ ) : pied d'aube ( ■ ) et plateforme ( ■ ). Adapté de [9]. . . . .	34
2.18	Solutions d'apport d'amortissement pour les DAM, où les aubes ( ■ ) et le disque ( ■ ) forment une seule structure : amortisseur frottant ( ■ ) monté sous la jante du disque. Adapté de [10]. . . . .	35
2.19	Allure des tourbillons ( ■ ) induits par le jeu entre l'aube ( ■ ) et le carter ( ■ ), en tête d'aube et en aval. Adapté de [11]. . . . .	36
2.20	Interaction modale à 3 diamètres nodaux. Déplacements rapprochant ( ■ ) ou éloignant ( ■ ) du centre de rotation. Adapté de [12]. . . . .	37
2.21	Analogie entre l'usure de l'abradable par l'aube et le fraisage. Adapté de [13]. . . . .	38
2.22	Principe de la méthode de pénalité : une pénétration du solide tournant ( ■ ) dans le carter ( ■ ) est permise. Adapté de [14]. . . . .	41
2.23	Modification de la structure entre un disque classique et un anneau avec renfort composite ( ■ ). Adapté de [15]. . . . .	44
3.1	Modèle phénoménologique de roue aubagée, en 2D. . . . .	47
3.2	Diagramme fréquences/diamètres nodaux pour le modèle réduit avec $\eta = 60$ ( ○ ) et le modèle éléments finis complet ( —●— ). . . . .	49
3.3	Lobe de déformation du carter. . . . .	52
3.4	Incidence du désaccordage sur les modes propres, séparation des fréquences, rupture de symétrie et localisation. . . . .	54
3.5	FRF linéaire pour $n_d = 4$ des modèles accordé ( — ) et désaccordé ( — ), enveloppe des amplitudes obtenues pour chaque aube ( — ). . . . .	55
3.6	Amplifications prédites pour un forçage dans la plage de fréquences de la première famille modale (1F) : centile 1 ( —○— ), centile 50 ( —■— ) et centile 99 ( —▲— ). . . . .	56
3.7	Réponse temporelle obtenue pour $\Omega = 34,45$ Hz et $n_d = 4$ . . . . .	58

3.8	Cartes d'interaction pour $n_d = 4$ , régimes moteur (---) et fréquences d'interaction dans le cas d'un forçage linéaire (.....) et de non-linéarité de contact (—). . . . .	59
3.9	FRF dans un cas de contact pour $n_d = 4$ des modèles accordée (—) et désaccordée (—), enveloppe des amplitudes obtenues pour chaque aube (—). . . . .	60
3.10	FRF pour différents paramètres de simulation. . . . .	61
3.11	Convergence temporelle pour $n_d = 4$ : $h = 5 \cdot 10^{-5}$ s (—), $h = 5 \cdot 10^{-6}$ s (—), $h = 1 \cdot 10^{-6}$ s (—) and $h = 5 \cdot 10^{-7}$ s (✕). . . . .	62
3.12	Convergence spatiale pour $n_d = 4$ : $\eta = 12$ (—), $\eta = 36$ (—), $\eta = 60$ (—), $\eta = 96$ (✕). . . . .	63
3.13	Convergence qualitative sur les centiles 1 (○), 50 (□) et 99 (△) pour $\sigma = 0,6\%$ (---), $1,2\%$ (—), $1,7\%$ (---) et $2,3\%$ (—). . . .	65
3.14	Convergence quantitative sur les centiles 1 (○), 50 (□) et 99 (△) pour $\sigma = 0,6\%$ (---), $1,2\%$ (—), $1,7\%$ (---) et $2,3\%$ (—). . . .	66
3.15	Amplifications non-linéaires (■) et linéaires (■) pour différents $n_d$ , avec les centiles 1 (○), 50 (□) et 99 (△). . . . .	68
3.16	Amplitudes maximales des vibrations pour des roues aubagées accordée (●) et désaccordées (99 <sup>ième</sup> centile) pour $\sigma = 0,6\%$ (●), $\sigma = 1,2\%$ (●), $\sigma = 1,7\%$ (●) et $\sigma = 2,3\%$ (●) dans le cadre de simulations de contact. . . . .	71
3.17	Amplifications calculées pour 100 échantillons, en configurations $n_d = 4$ (■) et $n_d = 6$ (■). . . . .	71
3.18	Analyse croisée de l'amplification due au désaccordage, pour $n_d = 4$ , sur le 99 <sup>ième</sup> centile pour des simulations non-linéaires (---) et linéaires (---). . . . .	73
3.19	Amplifications à $n_d = 4$ pour un abaissement de l'amortissement modal de $5 \cdot 10^{-3}$ à $4 \cdot 10^{-3}$ et variations induites (■)/(→) sur les centiles 1 (○), 50 (□) et 99 (△). . . . .	74
3.20	Facteur de localisation pour chaque point de la FRF. . . . .	76
4.1	Algorithme de création du système désaccordé avec interface de contact, par la méthode CM3 (Component Mode Mistuning with Mixed dof). . . . .	82
4.2	Maillage du modèle EF académique. . . . .	83
4.3	Comparaison de la déformation sous chargement statique entre le modèle désaccordé EF, calculé avec Samcef, et le modèle désaccordé construit par la CM3. . . . .	85
4.4	Validation de la réduction CB sur le modèle accordé. . . . .	86

4.5	Déplacement tangentiel du bord d'attaque sur toutes les aubes, calculé sur le modèle réduit ( $\circ$ ) et sur le modèle EF complet ( $\bullet$ ), pour différents vecteurs propres. . . . .	87
4.6	Fréquences propres, Samcef/CM3/erreurs associées, sur la première famille modale pour les modèles accordés ( $\circ$ )/ ( $\bullet$ )/ ( $\circ$ ) et désaccordés ( $\Delta$ )/ ( $\blacktriangle$ )/ ( $\triangle$ ). . . . .	88
4.7	Comparaison du mode propre à plus basse fréquence entre le modèle désaccordé EF, calculé avec Samcef, et le modèle désaccordé construit par la CM3. . . . .	88
4.8	Maillage du modèle EF d'un secteur du modèle industriel. . . . .	89
4.9	Évolution des centiles 1 ( $\circ$ ), 50 ( $\square$ ) et 99 ( $\Delta$ ) de l'amplification linéaire $A_{lin}$ en fonction du paramètre de réduction $\eta = 2$ ( $\text{---}$ ), 4 ( $\text{---}$ ), 6 ( $\text{---}$ ), 8 ( $\text{---}$ ), 10 ( $\text{---}$ ), 20 ( $\text{---}$ ), 30 ( $\text{---}$ ) et 50 (marqueurs), le paramètre de restriction $R$ étant pris maximum pour chaque $\eta$ . Les courbes se superposent à partir de $\eta = 8$ . . . . .	93
4.10	Évolution de l'erreur maximale ( $\text{---}$ ) et des erreurs moyennes sur les centiles 1 ( $\circ$ ), 50 ( $\square$ ) et 99 ( $\Delta$ ) de l'amplification linéaire $A_{lin}$ pour différents $\eta$ , par rapport au cas de référence $\eta = 50$ . . . . .	93
4.11	Évolution des centiles 1 ( $\circ$ ), 50 ( $\square$ ) et 99 ( $\Delta$ ) de l'amplification linéaire $A_{lin}$ pour différents paramètres de restriction $R$ , par rapport au cas de référence $R = 19$ . . . . .	95
4.12	Convergence des déplacements calculés en configuration de contact sur le nœud présentant les déplacements maximaux sur l'ensemble de la simulation (bord de fuite de l'aube 12), en fonction du paramètre de réduction CB : $\eta = 6$ ( $\text{---}$ ), $\eta = 8$ ( $\text{---}$ ), $\eta = 10$ ( $\text{---}$ ), $\eta = 50$ ( $\text{---}$ ).	96
4.13	Convergence des efforts de contact calculés sur le nœud présentant les déplacements maximaux sur l'ensemble de la simulation (bord de fuite de l'aube 12), en fonction du paramètre de réduction CB : $\eta = 6$ ( $\text{---}$ ), $\eta = 8$ ( $\text{---}$ ), $\eta = 10$ ( $\text{---}$ ), $\eta = 50$ ( $\text{---}$ ). . . . .	98
5.1	Amplifications $A_{lin}$ en fonction du niveau de désaccordage $\sigma$ et du nombre de lobes sur le carter $n_d$ : centile 1 ( $\circ$ ), centile 50 ( $\square$ ) et centile 99 ( $\Delta$ ). . . . .	102
5.2	FRF sur le modèle accordé ( $\text{---}$ ) et désaccordé ( $\text{---}$ ), avec les amplitudes de déplacement respectives ( $\bullet$ ) et ( $\bullet$ ) obtenues à la vitesse nominale $\Omega = 1$ . . . . .	103

5.3	Cartes d'interaction pour $n_d = 2$ tracées pour un pas en vitesse de $6,7 \cdot 10^{-3}$ , régimes moteur (---) et fréquences d'interaction dans le cas d'un forçage linéaire (.....) et de non-linéarité de contact (—). . . . .	104
5.4	Amplitudes des déplacements sur les 50 tours simulés. Enveloppe pour tous les nœuds frontière (■) et signal pour le nœud présentant l'amplitude maximale (—), calculée sur les 3 derniers tours (■). . . . .	105
5.5	Convergence qualitative sur les centiles 10 (○), 50 (□) et 90 (△) pour $\sigma = 0,3\%$ (---), $0,6\%$ (—), $1,2\%$ (---), $1,7\%$ (—), $2,3\%$ (---) et $2,9\%$ (—). . . . .	106
5.6	Stabilisation des signaux temporels sur 50 tours de simulation, centiles 10, 50 et 90. . . . .	108
5.7	Amplifications non-linéaires (■) au bout de 50 tours en configuration nominale industrielle, calculée avec le maximum sur les 3 derniers tours (—) et la moyenne des maximums sur les 10 derniers tours (---), avec les centiles 10 (○), 50 (□) et 90 (△). . . . .	110
5.8	Amplifications non-linéaires (■), calculées avec le maximum sur les 10 premiers tours (20% de la simulation), comparées aux amplifications au bout de 50 tours (□), avec les centiles 10 (○), 50 (□) et 90 (△). . . . .	112
5.9	Diagramme de Campbell pour la roue aubagée, avec les fréquences propres accordées pour les premiers modes de flexion (—) et de torsion (---) et la plage de variation des fréquences propres désaccordées pour tous les échantillons simulés, en fonction du désaccordage : $\sigma = 0,3\%$ (■) à $\sigma = 2,9\%$ (■). Les possibles interactions avec $e_o = 14$ sont indiquées (●). . . . .	114
5.10	Diagramme de Campbell pour l'aube encastrée, avec les fréquences propres pour $E = E_0$ (—), $E = E_0(1 - 5\%)$ (—) et $E = E_0(1 + 5\%)$ (—). . . . .	115
5.11	Contenu fréquentiel du déplacement sur les 3 derniers tours pour des échantillons à $\sigma = 2,9\%$ , obtenu par FFT. Fréquences des modes 1F, 2F (—) et 1T (---). . . . .	115
5.12	Évolution de $\mathcal{A}_{50}$ par rapport au facteur de localisation FL pour les différents $\sigma$ , tracée à travers les densités cumulées à 60% et 100%, et FL correspondant à 4, 3 et 2 aubes vibrant seules (---). . . . .	117
5.13	Visualisation des déplacements maximaux des échantillons à différents FL et $\mathcal{A}_{50}$ . . . . .	118

5.14	Position de l'amplitude maximale des déplacements sur les ddl physiques en bout d'aube, l'indice 1 désignant le bord de fuite (BF) et l'indice 5 le bord d'attaque (BA), pour tous les échantillons de $\sigma = 0,3\%$ (  ) à $\sigma = 2,9\%$ (  ). . . . .	119
5.15	Contenu fréquentiel des déplacements de l'aube connaissant la plus grande amplitude de déplacement, de $\sigma = 0,3\%$ (  ) à $\sigma = 2,9\%$ (  ), focalisées autour des fréquences des familles 2F (  ) et 1T (  ) de la roue accordée. Les fréquences correspondant aux pics prépondérants sont indiquées (  ) . . . . .	120
5.16	Amplification des efforts en fin de simulation (  ), avec les centiles 10 (  ), 50 (  ) et 90 (  ). . . . .	122
5.17	Position de la norme maximale des effort de contact sur les ddl physiques en bout d'aube, l'indice 1 désignant le BF et l'indice 5 le BA, pour tous les échantillons de $\sigma = 0,3\%$ (  ) à $\sigma = 2,9\%$ (  ). . . . .	122
5.18	Déplacements pour l'itération de plus grande amplitude des déplacements, avec une échelle du gradient de couleurs (  ) dont la valeur maximale dépend du motif. Les aubes en contact sont indiquées par un triangle (  ). . . . .	126
5.19	Contraintes pour l'itération de plus grand amplitude des déplacements, avec une échelle du gradient de couleur (  ) dont la valeur maximale est de 0,08 pour tous les motifs. Les aubes en contact sont indiquées par un triangle (  ). . . . .	127
5.20	Évolution des contraintes sur l'aube 6 de $m_{acc}$ . . . . .	130
5.21	Évolution des contraintes sur l'aube 9 de $m_{amp}$ . . . . .	131
5.22	Évolution des contraintes sur l'aube 2 de $m_{loc}$ . . . . .	132
6.1	Principe de l'étude des vibrations d'une roue aubagée (  ) par BTT, grâce à des capteurs situés sur la circonférence du carter (  ) et sur l'arbre (  ). Adapté de : [16]. . . . .	135
6.2	Signaux en entrée et en sortie de l'algorithme de BTT, sur un cas accordé linéaire. . . . .	142
6.3	Signaux en entrée et en sortie de l'algorithme de BTT, sur un cas désaccordé linéaire. . . . .	143
6.4	Génération de données de BTT dans un cadre non-linéaire, pour toutes les aubes de modèles accordé et désaccordé. . . . .	145

6.5	Évolution de $\Delta t_a$ sur le dernier tour pour le modèle accordé, en fonction de la position angulaire du capteur, avec les positions des extremums d'excitation indiquées ( --- ). . . . .	146
6.6	Évolution de $\Delta t_a$ sur le dernier tour pour le modèle désaccordé, en fonction de la position angulaire du capteur, avec les positions des extremums d'excitation indiquées ( --- ). . . . .	147
6.7	Évolution de $\Delta t_a$ sur l'ensemble de la simulation, pour le modèle industriel. . . . .	148
6.8	Déplacement selon $\theta$ pour l'aube dont la courbe $\Delta t_a$ est en rouge ( — ) sur la figure 6.7c. Passage de tour aux instants indiqués ( • ). . . .	148
6.9	Évolution de $\Delta t_a$ sur le 50 <sup>ième</sup> tour pour une position de capteur variable, pour le modèle industriel. La position des bosses sont renseignées ( --- ).	150
6.10	Centiles 10, 50 et 90 de $\max( \Delta t_a )$ pour des positions de capteur variables. . . . .	151
6.11	Évolution de $\max( \Delta t_a )$ en fonction de FL pour un capteur orienté vers le BA, et droite de régression linéaire associée pour $FL < 50$ ( — ).	152
6.12	Évolution de $\max( \Delta t_a )$ en fonction de l'amplification maximale $\mathcal{A}_{nl}$ pour un capteur orienté vers le BA, et droite de régression linéaire associée pour $\mathcal{A}_{nl} < 7$ ( — ). . . . .	153
F.1	Concept de repliement de spectre : le signal souhaité ( — ) est capté à un nombre d'instant limité ( --- ), faussant son approximation ( — ).	193



## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

BA	Bord d'attaque
BF	Bord de fuite
DAM	Disque Aubagé Monobloc
1F	Première flexion
2F	Deuxième flexion
1T	Première torsion
SAFE	Singh's Advanced Frequency Evaluation diagram
ddl	Degrés de liberté
FRF	Fonction de Réponse en Fréquence
FFT	Fast Fourier Transform
FL	Facteur de Localisation
EF	Éléments Finis
ROM	Reduced Order Models
CMS	Component Mode Synthesis
CMM	Component Mode Mistuning
CM3	Component Mode Mistuning with Mixed dof
CB	Craig-Bampton
BTT	Blade Tip-Timing
TOA	Time Of Arrival

## LISTE DES ANNEXES

Annexe A	Équation du mouvement en éléments finis . . . . .	173
Annexe B	Matrices de masse et de raideur dans la base modale . . . . .	184
Annexe C	Écart-type d'une distribution de probabilité uniforme . . . . .	186
Annexe D	Inversibilité de $2\mathbf{M} + h\mathbf{D}$ . . . . .	188
Annexe E	Matrice de réduction de Craig-Bampton . . . . .	189
Annexe F	Sous-échantillonnage des signaux de BTT . . . . .	193

## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

### 1.1 Considérations générales

Pour pouvoir s'élever et se maintenir dans les airs, un avion doit contrer son poids ainsi que la traînée engendrée par sa pénétration dans l'air, tel qu'illustré sur la figure 1.1, en générant une force de portance grâce à ses ailes et une force de poussée par l'intermédiaire de ses turbomoteurs.

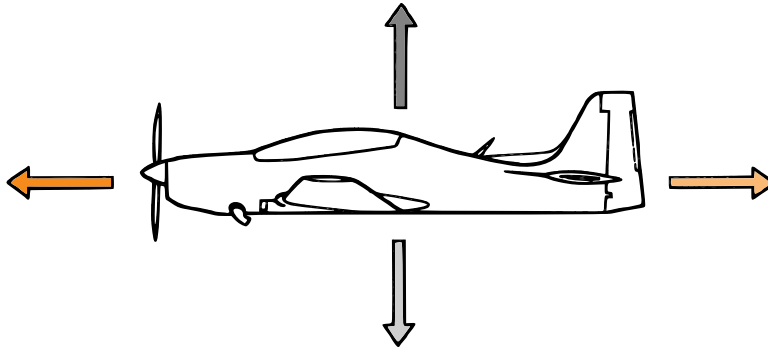


Figure 1.1 Principe de vol stationnaire d'un avion : portance des ailes (■), poids (■), poussée du moteur (■) et traînée (■). Adapté de [1].

Les turbomoteurs modernes, dont une représentation en coupe est donnée sur la figure 1.2, sont composés d'étages successifs. La première partie du moteur permet de comprimer l'air jusqu'à la chambre de combustion : la soufflante (zone ① sur la figure 1.2), puis le compresseur basse pression (zone ②) et haute pression (zone ③). L'air est ensuite chauffé dans la chambre de combustion (zone ④) avant d'être éjecté à haute vitesse par l'intermédiaire des turbines haute puis basse pression (zone ⑤). Le flux qui parcourt le moteur, du compresseur basse pression à la turbine basse pression, est appelé flux primaire (ou flux chaud). Un flux secondaire (ou flux froid) est redirigé par la soufflante directement vers le fluide extérieur. La masse de fluide éjectée à la fois par le flux primaire et le flux secondaire permet de générer la poussée qui propulse l'avion.

Les principaux éléments constitutifs des étages de compresseurs et de turbines des turbomoteurs sont les *roues aubagées*, composées d'aubes disposées autour d'un disque. Une aube de compresseur basse pression est représentée sur l'encart de la figure 1.2. Le disque est entraîné en rotation par l'intermédiaire de l'arbre moteur, afin que les aubes, inclinées par rapport au flux, communiquent au fluide une vitesse d'avance. La partie du profil de l'aube la plus en

amont du flux est appelée le *bord d'attaque*, et la partie la plus en aval du flux est appelée le *bord de fuite*. L'ensemble des éléments tournants du moteur est nommé *rotor*.

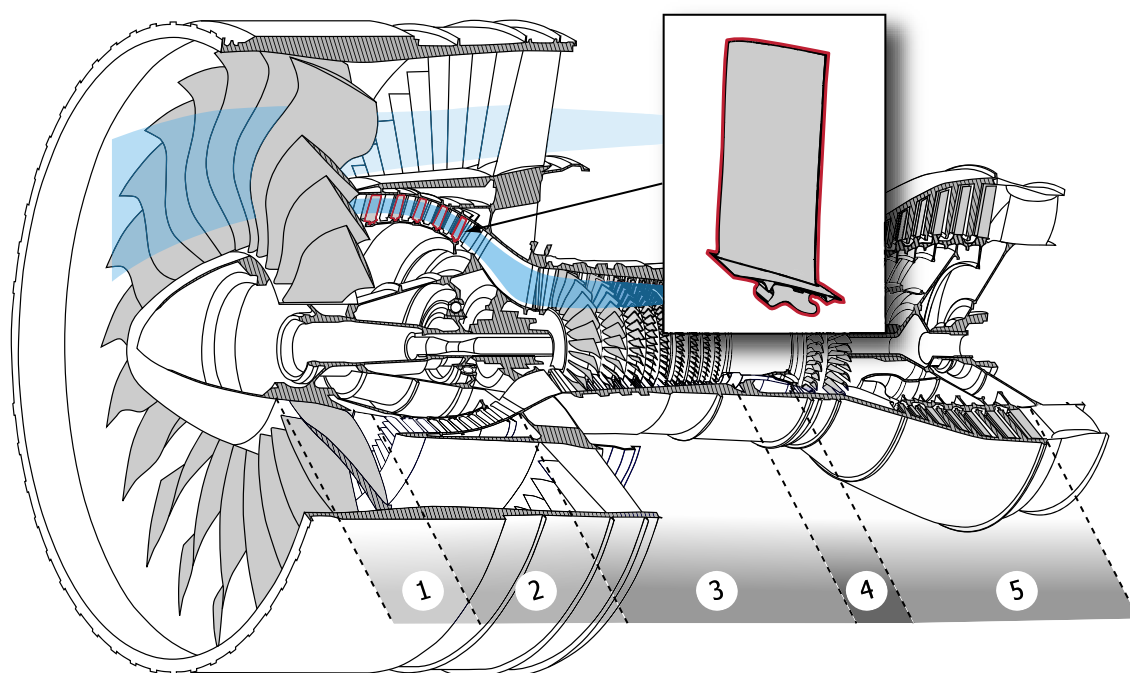


Figure 1.2 Représentation en coupe d'un turbomoteur : flux primaire (■), flux secondaire (■) et aubes (■) du compresseur basse pression.

En plus de la vitesse d'avance, les aubes communiquent également au fluide une vitesse tangentielle qui n'est pas contributive pour le fonctionnement du moteur. D'autres aubes, appelées *redresseurs* et faisant partie du *stator*, sont fixées sur le carter en aval des aubes du rotor afin de convertir une partie de la vitesse tangentielle en vitesse d'avance. Cependant, leur présence perturbe le flux, induisant ainsi des dépressions locales dans leur sillage et donc une force fluctuante sur les aubes du rotor en aval. Du fait de la vitesse de rotation élevée, les aubes sont ainsi excitées à haute fréquence et entrent en vibration, ce qui peut induire un rapprochement entre l'extrémité des aubes et le carter, par déploiement de celles-ci.

Les contacts entre les aubes et le carter peuvent provoquer des ruptures d'aubes en fatigue [17, 18], diminuant grandement la durée de vie des moteurs. Afin de garantir la sécurité en vol, un jeu est introduit entre le rotor et le stator, mais celui-ci réduit les performances aérodynamiques de l'ensemble [19]. Pour améliorer le rendement des moteurs tout en garantissant l'intégrité du moteur, la compréhension, l'analyse et la possibilité de prédire ces contacts sont devenues des enjeux stratégiques majeurs pour les constructeurs.

Enfin, les vibrations des roues aubagées peuvent en pratique grandement différer de celles

prédites en considérant que chaque aube est identique. En effet, l'imperfection des procédés de fabrication et d'inévitables inhomogénéités dans les matériaux induisent une variabilité de propriétés mécaniques entre chaque aube d'une roue aubagée, qui est alors dite *désaccordée*. La rupture de symétrie cyclique du fait du *désaccordage* peut notamment générer des phénomènes de localisation d'énergie [20, 21]. L'énergie de vibration est localisée sur un petit nombre d'aubes, qui présentent alors des déformations très supérieures à celles prédites par un modèle parfaitement symétrique, pouvant conduire à des ruptures d'aubes en service [22, 23].

## 1.2 Problématique

Pour pouvoir s'affranchir des coûts et des temps de développement inhérents aux études expérimentales, de nombreuses méthodes numériques ont été développées pour simuler le comportement des roues aubagées désaccordées. Les méthodes de réduction modale, qui permettent de réduire la taille du modèle numérique dans le but de diminuer les temps de calculs, ont été développées à la fin des années 1960 [24] et ont commencé à être utilisées pour l'étude des roues aubagées à partir des années 1980 [25]. Ce n'est toutefois que depuis le début des années 2000 qu'elles ont été adaptées aux structures aubagées désaccordées [26]. Le nombre de méthodes disponibles adaptées aux structures désaccordées a rapidement progressé [23, 27, 28]. Les méthodes ont été développées selon le cas d'application recherché : désaccordage fort [29, 30] ou faible [26, 29], roue aubagée seule ou multiples étages [27, 31]. Le désaccordage faible étant par nature aléatoire, son influence sur les vibrations de la roue aubagée doit être étudiée de façon stochastique, sur un grand nombre de simulations [6, 23, 32].

En parallèle, les vibrations non-linéaires dues aux contacts ou aux frottements entre composants du rotor ou entre le rotor et le stator ont également fait l'objet de plusieurs travaux de recherche [17]. En particulier, plusieurs méthodes permettent de modéliser les cas de contact (méthode de la pénalité [33, 34] et multiplicateurs de Lagrange [12, 35]) et de frottement (méthode directe [36], temporelle [37] et fréquentielle [38, 39], aussi appelée d'équilibrage harmonique).

L'influence du désaccordage a donc été analysée dans un contexte linéaire, et les vibrations non-linéaires ont été étudiées pour des roues aubagées accordées. Les premières études couplées de l'influence du désaccordage et celle des non-linéarités de frottement ont été réalisées à partir de 1985 [40], mais le désaccordage était alors considéré de façon déterministe. Seules les études de Joannin *et al.* [41, 42] en 2016 et 2017 proposent une étude de l'influence du désaccordage sur les vibrations non-linéaires. Dans ce but, les méthodes de réduction utilisées dans le cadre des roues aubagées ont été adaptées à un cas de contact entre le pied d'aube et

le disque.

Les travaux de recherche cités précédemment ne considèrent que les non-linéarités entre solides du rotor, au niveau du pied d'aube (interface aube-disque) ou au niveau des nageoires (interface aube-aube). Or les vibrations non-linéaires entre le rotor et le stator, notamment à l'interface aubes-carter, peuvent être particulièrement destructrices pour le mécanisme du fait de la vitesse relative importante entre les composants.

### 1.3 Objectifs de recherche

L'objectif principal de ce travail de recherche est d'étudier l'influence du désaccordage sur les vibrations non-linéaires des roues aubagées, induites au niveau de l'interface aubes-carter. Afin de permettre des simulations stochastiques sur des modèles désaccordés industriels, le modèle est réduit grâce à une méthode de réduction développée dans le cadre de la présente recherche et qui constitue une extension d'une méthode pré-existante.

### 1.4 Organisation du mémoire

Le présent mémoire est composé de cinq chapitres. Un état de l'art sur la modélisation des vibrations des roues aubagées est présenté dans le chapitre 2. Les différences entre roues aubagées accordées et désaccordées y sont explicitées, aussi bien du point de vue des considérations physiques que des techniques de modélisation. Un état de l'art des travaux réalisés sur la caractérisation des différents types de vibrations forcées en contexte linéaire et non-linéaire y sont présentés, afin d'explicitier le positionnement de la présente recherche et de justifier les méthodes choisies. La stratégie de calcul utilisée dans cette recherche est définie dans le cadre de la formulation des éléments finis, avec une gestion du contact par multiplicateurs de Lagrange et une résolution par intégration temporelle.

La méthodologie définie est appliquée sur un modèle phénoménologique de soufflante dans le chapitre 3. Ce modèle avait précédemment été utilisé pour la modélisation de non-linéarités de contact aubes-carter dans le cadre de la résolution par multiplicateurs de Lagrange et intégration temporelle [12]. Tout d'abord, la représentativité du modèle pour l'étude stochastique des vibrations linéaires de modèles désaccordés est établie. Ensuite, le choix de la configuration de contact et des paramètres numériques est appuyé par l'étude des convergences temporelle et spatiale. La détection d'un régime permanent est assurée par une procédure d'auto-corrélation couplée à un calcul de l'erreur de convergence. Les calculs stochastiques sur des modèles désaccordés en configuration de contact aubes-carter sont alors présentés et analysés. La convergence stochastique des résultats est soigneusement évaluée, à

la fois qualitativement et quantitativement, à travers des critères issus d'autres disciplines. L'amplification des vibrations par rapport au modèle accordé est présentée, comparée à l'amplification obtenue dans un cadre linéaire, et analysée en termes de déplacements et d'énergie de déformation. Les différences de comportement vibratoire sont soulignées en utilisant un facteur de localisation, extension aux vibrations forcées d'un critère précédemment proposé pour les vibrations libres.

Afin de permettre l'application de la méthodologie de résolution du contact à l'étude de l'influence du désaccordage sur un modèle industriel, une méthode de réduction permettant d'appliquer le désaccordage dans un espace mixte modal/physique est proposée dans le chapitre 4. Après avoir été validée sur un modèle académique, la méthode est validée sur un modèle industriel au regard de ses différents paramètres, dans un cadre linéaire et non-linéaire.

Le comportement vibratoire d'une roue aubagée industrielle est caractérisé vis-à-vis du désaccordage dans le chapitre 5, dans une configuration linéaire et de non-linéarité de contact aubes-carter. Tout d'abord, la représentativité du modèle pour l'étude de l'influence du désaccordage en configuration linéaire est présentée. La configuration de contact est choisie afin de correspondre à la configuration nominale de fonctionnement de la roue aubagée modélisée. L'amplification des vibrations non-linéaires due au désaccordage est ensuite présentée sur base de résultats stochastiques, dont la convergence est étudiée selon la même méthodologie que celle suivie sur le cas phénoménologique au chapitre 3. Le contenu fréquentiel des déplacements, les facteurs de localisation obtenus, les efforts de contact et l'usure du matériau abradable sont analysés stochastiquement pour obtenir une analyse supplémentaire du comportement vibratoire du modèle complet. Enfin, la méthode de réduction développée dans le chapitre 4 permet de redéployer les champs de déplacement et de contraintes à l'intérieur du modèle. La précision des champs obtenues rend possible une analyse approfondie de certains motifs désaccordés.

La méthodologie de gestion du contact utilisée, couplée à la méthode de génération de modèles désaccordés réduits développée, permet d'accéder à la position des nœuds frontière en bout d'aube à chaque instant, dans le cadre de calculs stochastiques sur des modèles désaccordés. La technique de Blade Tip-Timing (BTT), utilisée dans la caractérisation expérimentale des vibrations des roues aubagées, repose sur le calcul des temps d'arrivée des sommets d'aubes pour permettre, entre autres, de calculer le motif de désaccordage et l'amplitude maximale sur l'ensemble de la roue aubagée. La technique de BTT est actuellement appliquée pour l'analyse des vibrations linéaires, et les algorithmes sont validés sur des cas de désaccordage déterministe. Le chapitre 6 présente une preuve de concept de l'applicabilité de la méthodologie de simulation développée à la génération de données de Blade Tip-Timing (BTT). L'application dans la

littérature de la technique de BTT est tout d'abord présentée. L'intérêt que représente la génération numérique de signaux de BTT pour la validation des algorithmes de traitement y est en particulier explicité. Une procédure de génération simplifiée des données est proposée avant d'être validée sur le cas phénoménologique sur des vibrations linéaires et non-linéaires. La génération stochastique de données est ensuite appliquée pour le modèle industriel.

Les contributions originales majeures de ce travail de recherche sont résumées dans l'encart suivant.

#### Contributions originales du travail présenté

- (1) première étude stochastique sur un modèle phénoménologique de l'influence du niveau de désaccordage sur les non-linéarités aubes-carter, sur une plage de vitesses
- (2) développement d'une méthode de réduction permettant de générer à moindre coût des modèles réduits désaccordés avec interfaces de contact
- (3) analyse stochastique d'une configuration nominale industrielle
- (4) outil pour la génération de données de BTT en configuration non-linéaire

La contribution (1) a fait l'objet d'un article présenté lors de la conférence *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition* (ASME-IMECE) en novembre 2019 à Salt Lake City<sup>1</sup>. Une version étendue de cet article a été acceptée en Juin 2020 dans le *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* (JEGTP)<sup>2</sup>.

1. [doi.org/10.1115/IMECE2019-10300](https://doi.org/10.1115/IMECE2019-10300)

2. numéro : GTP-20-1080



## CHAPITRE 2 ÉTAT DE L'ART SUR LA MODÉLISATION DES VIBRATIONS DES ROUES AUBAGÉES

Les moteurs d'avion comportent des successions de roues aubagées, constituées d'un disque continu autour duquel plusieurs aubes sont disposées, comme représenté sur la figure 2.1. Le mouvement des roues aubagées au sein du moteur en fonctionnement peut être décomposé en deux contributions : d'une part, le mouvement induit par la rotation d'ensemble du moteur et, d'autre part, la vibration de la roue aubagée.

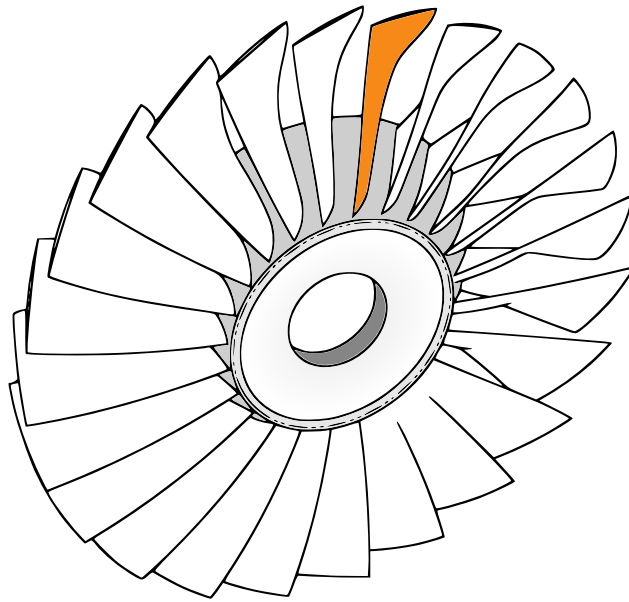


Figure 2.1 Roue aubagée, dont chaque aube ( ■ ) est liée mécaniquement au disque (  ). Adapté de [2].

En conditions normales de fonctionnement, les vibrations d'une roue aubagée sont linéaires et principalement dues à la variation de charge aérodynamique sur les aubes, du fait de la présence d'aubes statiques (redresseur) en amont de l'écoulement. La fréquence d'excitation associée est ainsi dépendante du nombre d'aubes du redresseur et de la vitesse de rotation de la roue aubagée. Le dimensionnement des turbomoteurs fait ainsi appel à des outils d'analyse modale afin de définir des plages de fonctionnement adéquates. Par ailleurs, les vibrations des roues aubagées peuvent également être non-linéaires, du fait de frottements, glissements et contacts là où un mouvement relatif est permis entre les composants.

Une hypothèse simplificatrice courante consiste à considérer que toutes les aubes d'une roue aubagée sont identiques, si bien que le système présente une symétrie cyclique par rapport à

l'axe de rotation de la roue, qui est alors dite *accordée*. Or, en réalité, des inhomogénéités inévitables sont constatées du fait notamment de l'incertitude des procédés de fabrication, bien que limitée par des tolérances restrictives, ou de l'usure en service. Ces différences de propriétés d'une aube à l'autre induisent une rupture de la symétrie cyclique. La roue aubagée est alors dite *désaccordée*. Ce désaccordage modifie grandement le comportement vibratoire de la roue aubagée.

Le présent chapitre expose un état de l'art sur la modélisation des vibrations libres et forcées des roues aubagées dans un contexte linéaire et non-linéaire. Les spécificités des vibrations des roues aubagées accordées sont présentées avant de développer les différences induites par le désaccordage. Les méthodes numériques utilisées sont détaillées, comprenant les méthodes de réduction nécessaires à l'étude des systèmes industriels. Il est ainsi mis en exergue que si les recherches sur les vibrations linéaires ont été menées sur les roues aubagées accordées et désaccordées, l'influence du désaccordage sur les vibrations non-linéaires a encore été peu étudiée. Le besoin pour une telle étude est clairement explicité en fin de chapitre, ainsi que les apports du présent travail de recherche.

## 2.1 Analyse modale

La caractérisation des modes de vibration propres des roues aubagées permet aux ingénieurs de déterminer des conditions de fonctionnement adéquates, en particulier pour les roues aubagées accordées, comme présenté en première partie de cette section. Une telle analyse, appelée *analyse modale*, permet également de mettre en évidence des modifications du comportement vibratoire dues au désaccordage qui seront présentées en seconde partie.

### 2.1.1 Roues accordées

#### Considérations physiques

Les premiers modes propres d'une aube encastree en son pied, à savoir les modes de première et deuxième flexion (1F, 2F) et de première torsion (1T), sont représentés sur la figure 2.2. Les points qui restent fixes lors de la vibration sont appelés « nœuds » de vibration. Les modes propres du disque peuvent présenter des lignes de points fixes passant par son centre, appelées « diamètres nodaux » et représentées par des lignes rouges ( — ) sur la figure 2.3, ou des cercles concentriques de points fixes, appelés « cercles nodaux » et représentés par des cercles oranges ( — ) sur la figure 2.3. Certains modes de vibrations présentent à la fois des diamètres et cercles nodaux [43], comme par exemple le mode représenté en bas et au centre la figure 2.3.

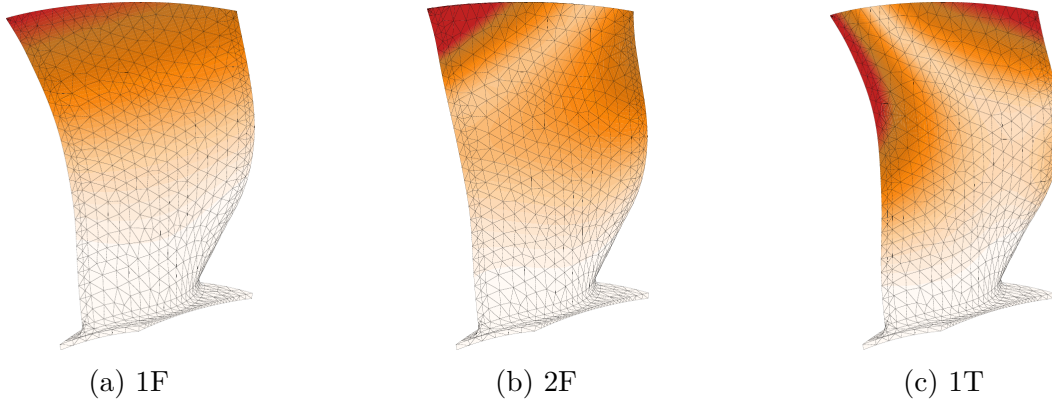


Figure 2.2 Modes propres de vibration d'une aube encastrée-libre, avec les déformations tracées sous forme de gradient ( ).

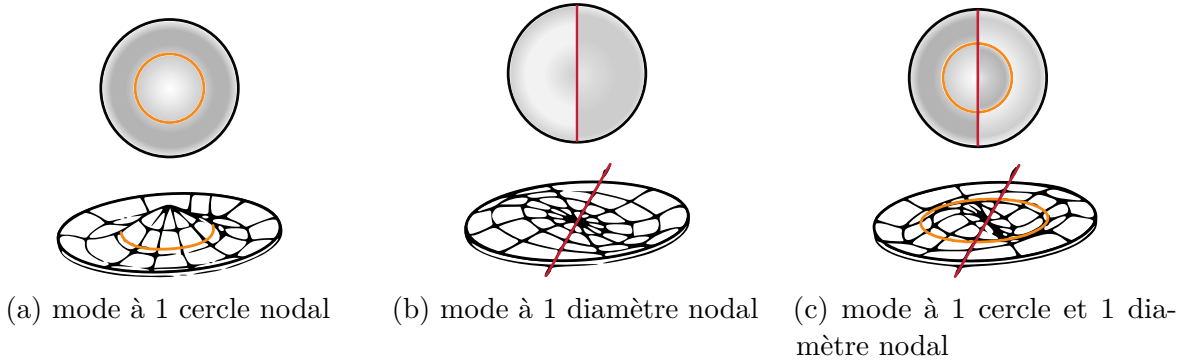


Figure 2.3 Modes de vibration d'un disque, selon des cercles ( ) et des diamètres ( ) nodaux. Sources : [3] et [4].

Dans le cas d'une roue aubagée, les vibrations du disque et des aubes sont couplées, et la présence des aubes rigidifie localement le disque, si bien que les cercles nodaux ne sont plus circulaires, comme représenté à la figure 2.4. Les modes de vibrations des roues aubagées accordées sont ainsi définis suivant leur nombre de diamètres nodaux, noté  $n_d$ , qui peuvent être calculés à partir du nombre de changements de phases entre les aubes, comme illustré sur la figure 2.5. Pour une roue aubagée à  $N$  aubes, le nombre maximal de diamètre nodaux est de  $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ .

De nombreuses études se sont focalisées sur l'évolution des fréquences propres en fonction des diamètres nodaux, à commencer par Ewins et Han en 1984 [44] et jusqu'à l'apport de Bladh *et al.* en 2002 [6], dont le diagramme « fréquences propres/diamètres nodaux » (nommé en 1988 « diagramme SAFE » [45], de l'anglais *Singh's Advanced Frequency Evaluation diagram*) est tracé sur la figure 2.6. Ce diagramme permet de mettre en évidence les modes

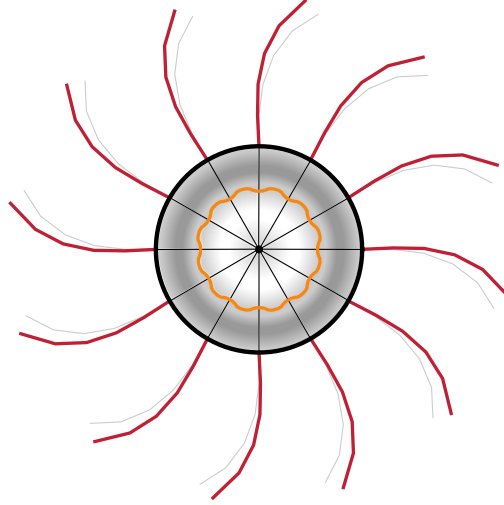


Figure 2.4 Représentation en 2D d'un mode de roue aubagée : mode 1F des aubes ( — ) et allure modifiée des cercles nodaux ( — ) du disque.

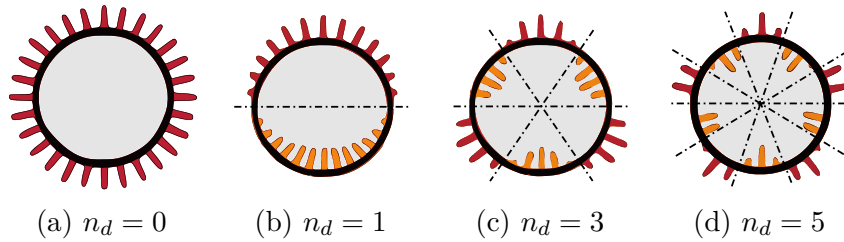


Figure 2.5 Représentation schématique des modes d'une roue aubagée accordée : les déformations positives ( ■ ) et négatives ( ■ ) par rapport à la géométrie initiale ( — ) sont alternées et dessinent  $n_d$  diamètres nodaux ( - - - ). Adapté de [5].

de vibration pour lesquels l'énergie de vibration de la roue aubagée est majoritairement concentrée dans les aubes, ou « modes d'aubes », qui se traduisent par des lignes horizontales sur la figure 2.6 (→). La ligne horizontale à plus basse fréquence, ou « première famille de modes », correspond pour la roue aubagée considérée aux vibrations des aubes selon leur premier mode de flexion (1F). Les modes de vibration pour lesquels l'énergie de vibration est majoritairement concentrée dans le disque, ou « modes de disque », se traduisent par des lignes obliques sur la figure 2.6 (→). Pour certains diamètres nodaux, la proximité de modes issus de familles modales distinctes se traduit par l'apparition d'une « zone de pincement » (en anglais : *veering*). La réponse vibratoire des aubes y est importante, du fait du possible échange d'énergie à travers le disque [6, 46]. En raison de la proximité de plusieurs familles de modes de vibrations dans les zones de pincement, les amplitudes de vibration des aubes peuvent changer drastiquement pour une petite variation de propriétés matériaux du

système [6]. L'identification des zones de pincement est de fait primordiale pour les motoristes, afin de les éviter lors des conditions normales de fonctionnement des moteurs. Bien que le nombre d'aubes et de diamètres nodaux est intrinsèquement discret, des zones de pincement supplémentaires peuvent être identifiées en définissant un angle de phase inter-aubes qui peut prendre des valeurs continues [6], comme visible sur la figure 2.6.

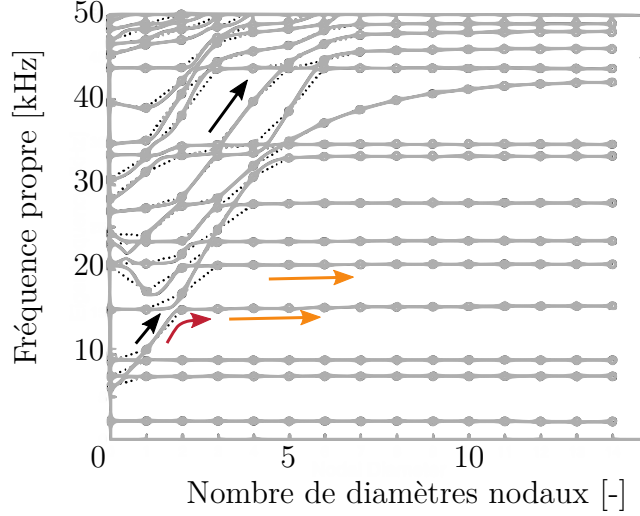


Figure 2.6 Diagramme fréquences propres/diamètres nodaux pour 28 aubes, où sont identifiables les modes du disque ( $\rightarrow$ ), les modes d'aubes ( $\rightarrow$ ) et les modes mixtes (zones de pincement) ( $\rightarrow$ ). Adapté de [6].

## Modélisation

**Méthode des éléments finis.** Dans l'industrie, une roue aubagée est discrétisée spatialement par la méthode des éléments finis. Cette méthode, reposant mathématiquement sur la recherche d'une solution à un problème variationnel par la minimisation d'une fonctionnelle [47], permet des calculs sur des structures complexes à partir d'éléments simples. Les matrices symétriques de masse  $\mathbf{M}$  et de raideur  $\mathbf{K}$  de la roue aubagée sont construites par assemblage des matrices associées à chaque élément dont les expressions respectives sont bien connues dans la littérature [48, 49]. Les matrices élémentaires  $\mathbf{M}_e$  et  $\mathbf{K}_e$  sont exprimées en fonction de la géométrie et des propriétés matériaux, par exemple pour un élément poutre :

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{M}_e(\rho, l_e, b, h) \quad ; \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e(E, l_e, b, h) \quad (2.1)$$

avec  $\rho$  la masse volumique et  $E$  le module d'Young du matériau qui constitue l'élément poutre,  $l_e$  la longueur de l'élément,  $b$  et  $h$  respectivement la largeur et la longueur de la section

de l'élément. L'expression complète des matrices élémentaires pour des éléments linéaires, déterminée sous les hypothèses explicitées dans l'encart ci-dessous, peut être trouvée dans [48].

#### Hypothèses, énoncées dans [48]

1. hypothèse de Bernoulli : au cours de la déformation, les sections droites restent perpendiculaires à la courbe moyenne (le cisaillement est négligé) ;
2. petits déplacements et petites déformations ;
3. matériau homogène élastique ;
4. moment dynamique de rotation des sections négligeable.

La déformation de la structure globale est calculée selon le déplacement de chaque nœud des éléments qui la composent. Les déplacements (de translation ou de rotation) autorisés en chaque nœud sont appelés *degrés de liberté*.

**Calcul des modes et fréquences propres.** Les modes propres et fréquences propres sont calculés par résolution du problème aux valeurs propres généralisé suivant (7.6 de [50]) :

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (2.2)$$

Les modes de déformation recherchés sont ainsi les vecteurs propres  $\boldsymbol{\Phi}_i$  ( $i \in [1, \dots, d]$ , avec  $d$  le nombre de degrés de liberté du système complet) du couple de matrices  $(\mathbf{K}, \mathbf{M})$ . Les valeurs propres correspondant à ces vecteurs propres sont ainsi le carré des pulsations  $\omega$  [ $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ], directement liées aux fréquences propres ( $f = \frac{\omega}{2\pi}$  [Hz]).

Dans le cadre des systèmes à symétrie cyclique, telle une roue aubagée à  $N$  aubes, le mode à 0 diamètre ( $n_d$ ) est dit « simple ». Toutes les aubes vibrent alors en phase. Dans le cas où  $N$  est pair, le mode à  $\frac{N}{2}$  diamètres nodaux est également simple et toutes les aubes vibrent alors en opposition de phase. Pour  $0 < n_d < \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ , la résolution du problème aux valeurs propres renvoie des valeurs propres doubles. Le mode de vibration peut alors être exprimé comme une combinaison linéaire des deux vecteurs propres  $\mathbf{M}$ -orthogonaux obtenus [51]. Le théorème de dégénérescence (2.3.2 de [52]) permet alors de définir une base  $\mathbf{M}$ -orthonormée à partir des vecteurs propres, appelée *base modale* et représentée par la matrice  $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\Phi}_1, \dots, \boldsymbol{\Phi}_d]$ . Les

matrices masse et raideur y sont exprimées (démonstration en annexe. B) :

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \quad (2.3)$$

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \omega^2 \quad (2.4)$$

avec :  $\mathbf{I} = \text{diag}(1)$  la matrice identité dans  $\mathbb{R}^d$

$$\omega = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_d)$$

### 2.1.2 Roues désaccordées

Comme mentionné précédemment, une roue aubagée réelle est inévitablement désaccordée, du fait notamment de l'imperfection des matériaux ou des procédés de fabrication. Il est alors critique pour les concepteurs de moteurs d'avion de pouvoir quantifier l'impact de ce désaccordage sur la réponse vibratoire de la roue aubagée étudiée.

### Considérations physiques

La variation structurelle microscopique inévitable d'une aube à l'autre est appelée *désaccordage faible*, et a été évaluée expérimentalement de l'ordre de 2,5 % sur la variation de masse [53]. La variation macroscopique de la géométrie des aubes est appelée *désaccordage fort* et peut être due à la réparation d'aubes par ajout de matière [54] ou des choix de conception, telle une aube avec une géométrie différente [55]. Le désaccordage, qu'il soit faible ou fort, modifie grandement les vibrations propres de la roue aubagée du fait de : (1) la séparation des fréquences propres correspondant à des modes doubles de la roue accordée ; et (2) de l'apparition de phénomènes de localisation [21, 56]. Ces deux phénomènes sont détaillés dans ce qui suit.

Là où le modèle accordé présente des fréquences propres doubles du fait de sa symétrie cyclique, les fréquences des roues aubagées désaccordées ne sont plus égales, bien que restant proches [57]. Cette dispersion des fréquences est de l'ordre de 1 % dans le cadre d'un désaccordage faible [53] et augmente avec le niveau de désaccordage. Or, une roue aubagée sollicitée à une de ses fréquences propres va entrer en résonance. Les plages de résonance sont de fait à éviter lors du fonctionnement du moteur. La séparation des modes doubles va ainsi avoir pour conséquence que les roues aubagées présentent plus de pics de résonance [53, 57].

L'allure des modes de vibration est également grandement impactée par le désaccordage. Comme chaque secteur présente des propriétés matériaux différentes, l'énergie de vibration se localise alors dans certaines aubes à travers le disque [20], comme illustré sur la figure 2.7. Ce phénomène va être accru pour les modes des zones de pincement, qui tendent à être des modes mixtes de vibration de aubes et du disque [23]. Un facteur de localisation peut alors

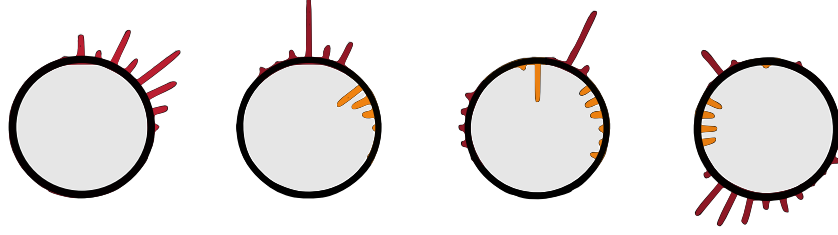


Figure 2.7 Représentation schématique des modes d'une roue aubagée désaccordée : l'énergie est localisée, seules certaines aubes sont déformées suivant de grandes amplitudes. Adapté de [5].

être utilisé pour quantifier le niveau de localisation, le niveau le plus bas correspondant à une roue aubagée accordée et le niveau le plus haut correspondant à des vibrations sur une seule aube [58]. Sur les vibrations libres, cette localisation induit la disparition des diamètres nodaux sur les modes propres. L'allure d'un mode désaccordé comporte de nombreuses harmoniques spatiales, qui sont des compositions de modes à diamètres nodaux, rendant le phénomène de localisation difficile à éviter dans des conditions de fonctionnement [23]. Différents paramètres influencent la sensibilité au désaccordage, notamment la flexibilité du disque sur lequel les aubes sont fixées et le couplage inter-aubes [32].

### Implémentation numérique

Afin de construire un modèle désaccordé, le paramètre de désaccordage et le lieu d'application doivent être définis de telle sorte que le modèle désaccordé soit aussi représentatif que possible d'un système réel, notamment en terme de séparation des fréquences propres, lesquelles sont déterminées expérimentalement [53]. Dans les premières études sur le désaccordage, les valeurs des paramètres étaient fixées sur des aubes choisies, si bien que les approches étaient intrinsèquement déterministes [44, 59, 60]. Les travaux d'Óttarsson et Pierre [5, 32] dans les années 1990 ont cependant mis en évidence la nécessité de considérer le désaccordage comme une variable aléatoire, puisqu'il est issu de facteurs incontrôlables. Les études récentes se focalisent ainsi sur des approches stochastiques [23, 28]. L'expression du niveau de désaccordage dépend alors du type de distribution de probabilité utilisé.

**Paramètre de désaccordage.** La séparation des fréquences due au désaccordage peut être utilisée pour quantifier le niveau de désaccordage associé [53], comme fait dans les premiers modèles analytiques masse-ressort pour l'étude du désaccordage [22, 57]. Avec un modèle éléments finis, un faible niveau de désaccordage peut être appliqué en considérant une perturbation des fréquences propres de la roue aubagée : dans l'espace modal, les coefficients



de la matrice diagonale des pulsations modales  $\omega_i$ , voir l'équation (2.4), sont légèrement perturbés en fonction des modes impactés par le désaccordage. Cette façon d'appliquer un désaccordage de la structure est particulièrement pertinente lorsqu'une comparaison entre des prédictions numériques et des données expérimentales est recherchée [30, 61].

Il existe plusieurs autres façons de modéliser un certain niveau de désaccordage, notamment par une variation sur les propriétés matériaux, faisant ainsi écho à la formulation des tolérances des procédés de fabrication industriels. Les propriétés matériaux couramment utilisées dans la littérature pour la prise en compte du désaccordage sont le module d'Young ou la masse volumique [23, 28], ce qui impacte directement les matrices structurelles élémentaires comme définies à l'équation (2.1). Il a également été proposé d'introduire le désaccordage en considérant une variation de l'amortissement [60, 62, 63].

**Lieu d'application.** Les propriétés matériaux peuvent être modifiées pour chaque secteur élémentaire (aube et portion de disque associée [64]). Toutefois, plusieurs études ont montré que la variation des propriétés mécaniques dans le disque a un impact faible comparativement à celle dans les aubes [23, 58]. La variabilité des propriétés matériaux est ainsi usuellement implémentée uniquement au niveau des aubes.

**Distribution.** Le désaccordage peut être considéré de façon déterministe, auquel cas les propriétés matériaux sont fixées, ou stochastique, les propriétés matériaux sont alors considérées comme des variables aléatoires, tirées dans une plage de variation donnée suivant une fonction de répartition. Cette fonction de répartition peut être une loi uniforme continue, représentée en rouge sur la figure 2.8, ou encore une loi de Laplace-Gauss centrée, représentée en orange sur la figure 2.8. Dans la littérature, la loi utilisée implicitement est généralement la loi de Laplace-Gauss, car elle retranscrit bien la répartition de propriétés matériaux attendue du fait des procédés de fabrication [5, 23]. L'ensemble des variations sur les aubes d'une roue aubagée donnée est appelé *motif* de désaccordage.

**Niveau de désaccordage.** Dans les premières études déterministes qui ont été publiées, la valeur effective du désaccordage est calculée *a posteriori* par la séparation des fréquences propres induite [44, 59, 60]. En considérant des tolérances de fabrication sur une soufflante industrielle réalisée avec des moyens de production actuels, une dispersion de l'ordre de 1,5 % à 3,5 % peut être attendue sur la matrice de masse [65], ou encore de l'ordre de 3 % sur les fréquences propres des premiers modes de vibration [30]. En termes statistiques, le niveau désaccordage peut également être défini comme l'écart-type de la distribution considérée [6], noté  $\sigma$ , et qui correspond à la racine carrée de la variance, laquelle est une mesure de la

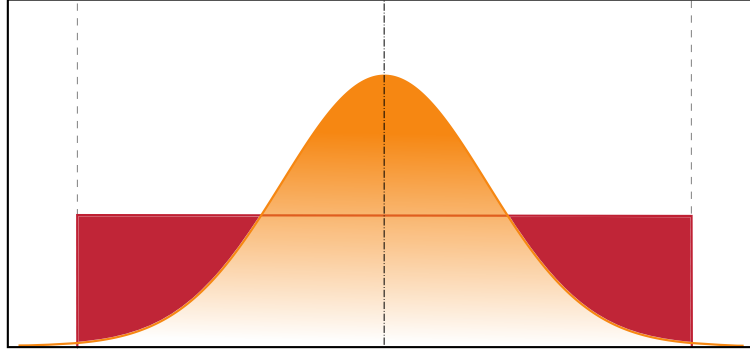


Figure 2.8 Illustration de la densité de probabilité sur un intervalle pour la loi uniforme continue (■) entre les bornes définies (---) et la loi de Laplace-Gauss centrée (■).

dispersion de la fonction de répartition autour de la moyenne (2.1.4.2 de [66]). Pour  $\sigma < 5\%$ , le désaccordage est généralement considéré faible [23]. Dans le cas d'une fonction de répartition uniforme continue sur un intervalle de largeur  $(b - a)$ ,  $b > a$ , l'écart-type vaut (démonstration en annexe C) :  $\sigma = (b - a) / \sqrt{12}$ . Dans le cas d'une fonction de répartition de Laplace-Gauss, 90% des valeurs tirées sont comprises dans un intervalle de  $\pm 1,64\sigma$  autour de la moyenne, et 99,8% dans un intervalle de  $\pm 3,09\sigma$  (2.3.5 de [66]).

## 2.2 Vibrations forcées en contexte linéaire

Dans un turbomoteur, les aubes d'une roue aubagée du *rotor* sont inclinées et vrillées afin de conférer à l'air une vitesse d'avance et de le pousser vers la chambre de combustion (partie compresseur) puis vers l'extérieur du moteur (partie turbine). Cependant, du fait de la rotation des roues aubagées, la résultante de la vitesse de l'air comprend également une rotation, non contributive pour le fonctionnement du moteur. Pour récupérer une partie de l'énergie perdue par cette rotation de l'air et ainsi améliorer l'efficacité aérodynamique des turbomoteurs, des redresseurs statiques (*stator*), également composés d'aubes, sont placés dans l'écoulement en amont et en aval des roues aubagées, comme représenté sur la figure 2.9. Cependant, la présence de ces redresseurs perturbe localement l'écoulement, ce qui induit une variation de charge sur les aubes en aval, lesquelles vont vibrer. Dans le référentiel des aubes du rotor, l'excitation est tournante et dépend du nombre d'aubes du redresseur amont :  $N_r$  aubes de redresseurs induisent une excitation sur le rotor à un *régime moteur* (en anglais *engine order*)  $e_o = N_r$ .

La connaissance des vibrations propres du système est centrale, puisqu'une sollicitation à une fréquence propre de la roue aubagée induirait une résonance, caractérisée par le fait que de petites sollicitations conduisent à de grandes déformations. Le calcul de la réponse forcée

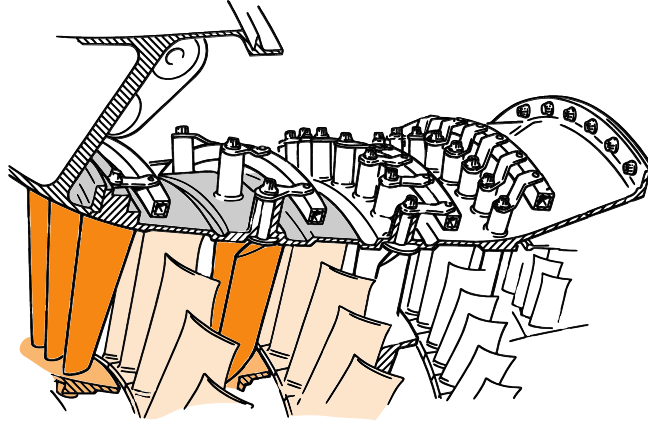


Figure 2.9 Rotor et stator : aubes du stator (■) liées au carter (■) à une extrémité et à une bague commune (■) à l'autre, et aubes du rotor (■). Adapté de [7].

linéaire d'une roue aubagée accordée est bien connu et a permis le développement d'outils de conception industrielle, tel le diagramme de Campbell et les fonctions de réponse en fréquence (FRF). L'étude de l'influence du désaccordage sur la réponse forcée linéaire de la roue aubagée va dépendre du niveau de désaccordage considéré, telle qu'explicitée en seconde partie de cette section.

### 2.2.1 Roues accordées

#### Considérations physiques

Pour éviter des amplitudes de vibration préjudiciables au bon fonctionnement du moteur, les vitesses de rotation des roues aubagées doivent être choisies en dehors des plages correspondant à de possibles résonances. Le diagramme de Campbell, sur lequel les fréquences propres et les multiples des régimes moteurs sont tracés, est un outil largement utilisé dans l'industrie afin d'identifier les zones critiques où les régimes moteur et les fréquences propres correspondent. En l'absence d'effets inertiels (gyroscopiques ou centrifuges), les fréquences propres ne dépendent pas de la vitesse de rotation et sont donc des droites horizontales dans le diagramme de Campbell, comme illustré sur la figure 2.10.

Le mode de vibration excité par la variation de charge sur les aubes est lié au nombre de redresseurs en amont de l'écoulement, si bien que la notion de diamètre nodal est généralisée aux vibrations forcées linéaires : un mode propre à  $n_d$  diamètres sera excité par un forçage à  $n_d$  redresseurs. La résonance se produira ainsi à une vitesse de rotation  $\Omega_r = \frac{f}{n_d}$ , avec  $f$

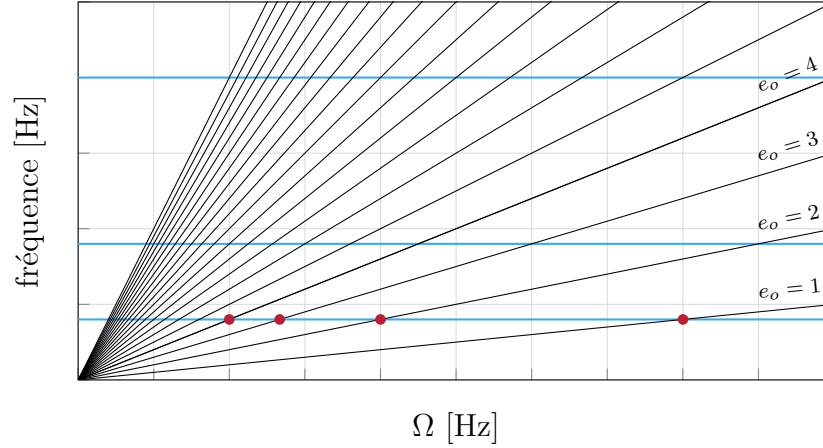


Figure 2.10 Diagramme de Campbell. Régimes moteur ( — ), fréquences propres de la roue aubagée ( — ) et quelques possibles résonances ( • ).

la fréquence propre du mode excité. Pour chaque vitesse de rotation, l'amplitude maximale des oscillations forcées de chaque aube peut être calculée, permettant de tracer la fonction de réponse en fréquence (FRF) dont un exemple est donné sur la figure 2.11. Dans le cas d'une roue aubagée accordée, les amplitudes maximales de toutes les aubes se superposent parfaitement et le pic correspond à la fréquence propre du mode excité par la sollicitation considérée.

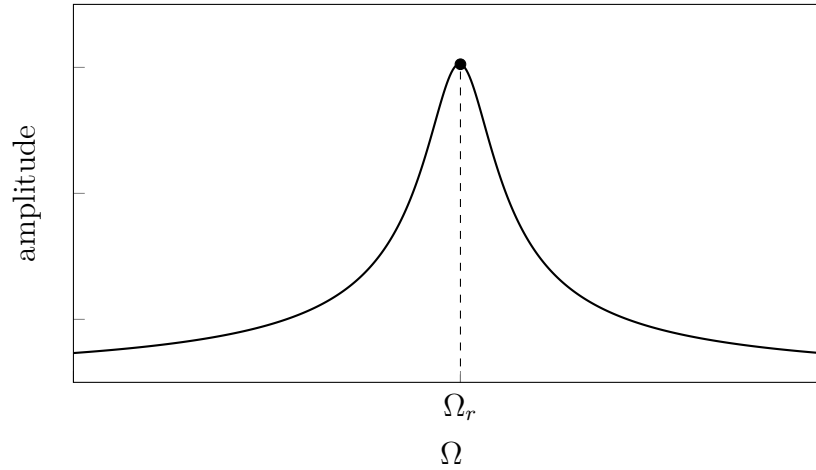


Figure 2.11 FRF pour une roue aubagée accordée ( — ), permettant de mettre en évidence la résonance ( • ).

## Modélisation en éléments finis

L'équation du mouvement en notation matricielle (cf. annexe A) permet d'obtenir les vecteurs de déplacement  $\mathbf{u}$ , de vitesse  $\dot{\mathbf{u}}$  et d'accélération  $\ddot{\mathbf{u}}$  de l'ensemble des ddl en fonction des matrices structurelles du système et des sollicitations extérieures. Dans le cadre de l'étude des vibrations forcées linéaires, l'équation du mouvement en notation matricielle permet d'exprimer les vecteurs de déplacement  $\mathbf{u}$ , de vitesse  $\dot{\mathbf{u}}$  et d'accélération  $\ddot{\mathbf{u}}$  de l'ensemble des ddl en fonction des matrices de masse  $\mathbf{M}$ , de raideur  $\mathbf{K}$  et d'amortissement  $\mathbf{C}$  du système, ainsi que du vecteur de forçage linéaire  $\mathbf{F}(t)$ , dépendant du temps  $t$ , comme suit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}(t) \quad (2.5)$$

Une discussion sur les hypothèses liées à cette formulation de l'équation du mouvement peut être trouvée en annexe A.

**Matrice d'amortissement.** L'amortissement est fréquemment défini comme étant proportionnel (amortissement de Rayleigh) ou modal. Lorsque l'amortissement est posé comme proportionnel aux matrices de masse et de raideur (amortissement de Rayleigh (3.1.2 de [49])), son expression dans l'espace modal est :

$$\Phi^T \mathbf{C} \Phi = \alpha \mathbf{I} + \beta \omega^2 \quad , \quad \alpha \text{ et } \beta \text{ des constantes} \quad (2.6)$$

Les hautes fréquences, qui correspondent à des valeurs de  $\omega_i$  élevées, sont alors davantage amorties que les basses fréquences. L'amortissement modal est défini comme une matrice diagonale dans l'espace modal (4.4.3 de [67]) :

$$\Phi^T \mathbf{C} \Phi = 2 [\xi_i \omega_i] \quad (2.7)$$

avec :  $\xi_i$  facteur ou taux d'amortissement

$\omega_i$  le  $i^{\text{ème}}$  élément diagonal de  $\omega$

Les fréquences effectives de résonance du système amorti sont légèrement différentes des valeurs calculées à partir des valeurs propres  $\omega$  issues de la résolution du problème aux valeurs propres généralisé donné à l'équation (2.2). Le calcul des fréquences de résonance du système amorti revient à résoudre un problème polynomial aux valeurs propres, qui peut être traité par linéarisation, par exemple selon la méthode de Tisseur et Meerbergen [68]. Cependant, cette opération pouvant être coûteuse en temps de calcul, il est généralement considéré que, si l'amortissement est assez faible, les fréquences de résonance du système amorti sont égales

à celles du système non amorti libre (3.1.2 de [49]). La matrice d'amortissement ainsi définie respecte la condition de symétrie (hypothèse 3 de la démonstration en annexe A) attachée à l'équation du mouvement.

**Résolution par superposition modale.** La diagonalisation des matrices par le passage dans la base modale  $\Phi$  permet de découpler le système d'équations (2.5) (5.7 de [69]). Le vecteur des déplacements  $\mathbf{u}$  ainsi que le vecteur des efforts linéaires appliqués  $\mathbf{F}$  peuvent être exprimés dans cette base, ce qui permet d'obtenir les amplitudes modales  $\mathbf{p}$  avec (4.4.3 de [67]) :

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{p} \quad (2.8)$$

## 2.2.2 Roues désaccordées

### Considérations physiques

Des ruptures d'aubes, pourtant bien dimensionnées dans le cadre d'une structure accordée, figurent parmi les premières observations expérimentales associées au désaccordage des roues aubagées. Les analyses métallurgiques effectuées à la suite des incidents ont mis en évidence que les aubes défaillantes avaient été soumises à des contraintes anormalement élevées [22]. Deux phénomènes permettent de l'expliquer : d'une part la variation des fréquences propres d'une aube à l'autre [59] ; et d'autre part la flexibilité du disque qui permet la transmission de l'énergie vibratoire.

D'une part, comme vu lors de l'étude des propriétés modales à la section 2.1.2, la séparation des fréquences propres dans le cas désaccordé va étendre la plage de fonctionnement critique, si bien que des vitesses de rotation admissibles sous l'hypothèse d'une roue aubagée accordée peuvent en réalité inclure des fréquences de résonance de la roue aubagée désaccordée.

D'autre part, le couplage structurel des aubes joue également un rôle déterminant dans l'impact du désaccordage sur les vibrations forcées. De grandes amplitudes de vibration peuvent être détectées loin de la zone d'excitation, alors que les aubes ne sont connectées que par le disque flexible [57]. La différenciation des aubes due au désaccordage induit un confinement de l'onde vibratoire dans certaines aubes [70]. Le couplage à travers le disque est alors synonyme d'une plus grande facilité de transmission de l'énergie vers l'aube qui vibre avec la plus grande amplitude [32] : les vibrations en diamètres nodaux dans le cas accordé laissent place à des vibrations localisées [21, 56]. Cependant les effets du désaccordage sont amoindris si le couplage est trop faible ou trop fort, à un même niveau de désaccordage. Pour un couplage inter-aubes trop faible, chaque aube se comporte comme un oscillateur

désaccordé isolé et il n'y a pas de transmission de l'énergie d'une aube à l'autre, ce qui limite la localisation. A l'inverse, si le couplage est trop fort, l'énergie de vibration est échangée jusqu'à se répartir sur l'ensemble de la roue aubagée et le confinement s'annule : la réponse redevient semblable à celle du système accordé [32].

L'énergie de vibration n'est pas dissipée par la localisation mais uniquement confinée [23], et est redirigée vers les aubes qui répondent le plus à l'excitation. Il peut s'agir des aubes sur lesquelles l'effort est appliqué, ou les plus désaccordées [44]. Dépendant du niveau de couplage entre les aubes et le disque, une aube peut répondre le plus à l'excitation non pas du fait de ses paramètres intrinsèques, mais du fait de sa position dans le motif, à savoir proche d'aubes susceptibles de transmettre leur énergie vibratoire facilement [5].

Du fait du transfert de l'énergie vibratoire, certaines aubes d'une roue aubagée désaccordée peuvent présenter une amplitude moyenne inférieure aux aubes de la roue aubagée accordée. La réponse des autres aubes peut alors largement s'écarter de cette moyenne. Par exemple, sur un modèle à 33 aubes, Ewins et Han ont montré que l'amplitude maximale des oscillations en résonance par rapport au cas accordé augmente de 24% à 63%, et ce même si certaines aubes présentent des amplitudes inférieures de 1,3% à 6,3% par rapport au système accordé [44].

L'augmentation de l'amplitude à cause du désaccordage peut alors être quantifiée par le *facteur de dispersion* et le *facteur d'amplification*. Le facteur de dispersion correspond à la plage d'amplitude du système désaccordé (différence entre l'amplitude maximum et minimum, toutes aubes confondues) normée par l'amplitude du système accordé [71]. Le facteur d'amplification, plus simplement appelé « amplification », est le plus utilisé dans la littérature sur les roues aubagées désaccordées [23]. Dans les premières études sur le désaccordage, il était défini comme le ratio entre les amplitudes de vibration maximale de la roue désaccordée sur celles de la roue désaccordée, pour une excitation à la fréquence de résonance de la roue accordée [53, 59]. Cependant, l'essor des recherches stochastiques sur le désaccordage a poussé la considération de l'amplification selon des principes de statistique des extrêmes [32]. Ainsi, depuis les années 1990, l'amplification est définie sur une plage de fréquences et sur la réponse globale de la structure [72, 73]. Le maximum d'amplitude de la roue désaccordée n'est donc *a priori* pas rencontré à la même fréquence que celui de la roue accordée, et l'aube qui connaît ce maximum n'est pas la même selon le motif de désaccordage considéré. Cette définition de l'amplification est illustrée sur la figure 2.12, où la FRF d'un modèle de roue aubagée désaccordée est comparée à la FRF du modèle accordé correspondant. La séparation des pics de résonance est bien visible sur la réponse du modèle désaccordé, où chaque aube présente une courbe de réponse (—), résultant en une dispersion des fréquences de  $\delta f$  sur la courbe enveloppe (—).

La localisation de l'énergie dans le cas désaccordé combinée à la possible augmentation des

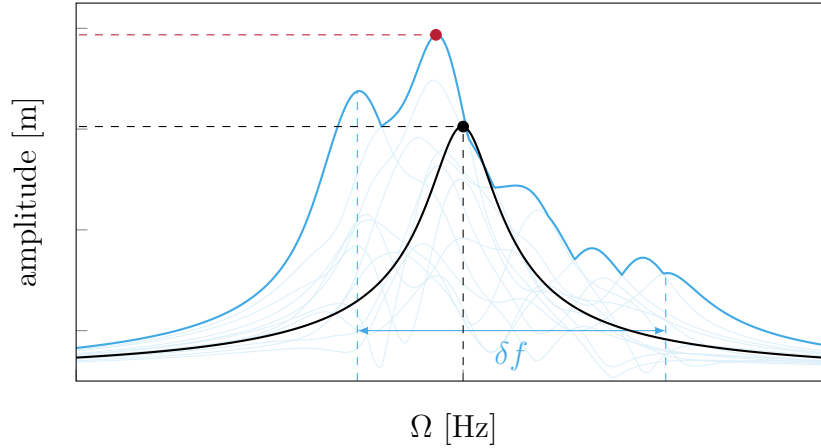


Figure 2.12 FRF pour un modèle de roue aubagée désaccordée, avec les réponses des aubes ( — ), la courbe enveloppe ( — ) et l'amplitude maximale désaccordée ( • ), comparée à la FRF pour le modèle accordé correspondant ( — ).

amplitudes de vibration induit sur certaines aubes une forte augmentation des contraintes maximales [74,75] qui explique les cas de rupture rapportés. Pour une fréquence d'excitation proche de la fréquence de résonance, les premières études sur le désaccordage rapportent que le niveau maximum de contraintes sur les aubes peut être augmenté de l'ordre de 20 % à 35 % par rapport celui du système accordé [22,53]. Les résultats diffèrent cependant avec le niveau de désaccordage considéré : pour un désaccordage faible, le maximum d'amplitude sur l'ensemble des aubes est supérieur dans le cas désaccordé, mais devient presque égal pour un désaccordage fort [76]. À partir des années 1980, les recherches pour comprendre et quantifier les conséquences du désaccordage s'articulent alors suivant deux axes majeurs [44] :

- (1) la détermination des propriétés modales par l'analyse des fréquences et des déformées du système libre [5,77] ;
- (2) l'analyse de l'amplification de la réponse forcée pour une application pratique sur les turbomoteurs [22,44,76,78].

### Étude déterministe du désaccordage fort

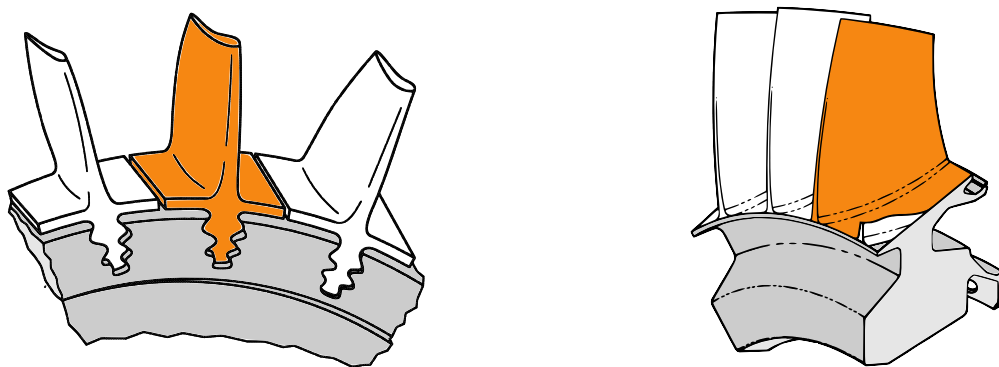
Une meilleure compréhension de l'impact du désaccordage sur le comportement vibratoire d'une roue aubagée a conduit aux recherches des années 2000, dans lesquelles l'utilisation d'un désaccordage intentionnel est considéré. En effet, le motif de désaccordage peut être retravaillé en répartissant les aubes judicieusement [30,79,80]. La localisation peut ainsi être limitée en arrangeant les aubes en fonction de leur variation de paramètres désaccordés, par exemple la masse, autour du disque selon un motif à une période angulaire donnée [53]. L'arrangement



particulier des aubes, pour un même niveau de désaccordage des aubes, peut être critique pour déterminer l'amplitude de la réponse forcée proche de la résonance, avec des amplitudes de vibrations forcées pouvant varier du simple au double [44].

Lorsque les effets aérodynamiques sont pris en compte, le désaccordage peut même avoir un effet stabilisant par rapport à l'instabilité aéroélastique [81]. Il s'agit alors d'éviter la formation d'ondes tournantes pour limiter les instabilités consécutives des phénomènes auto-entretenus, comme le flottement [82, 83]. Cependant, le bénéfice est très limité pour un niveau de désaccordage de plus de 5% [60], rendant ces solutions difficiles à implémenter sur des systèmes réels présentant intrinsèquement un désaccordage non contrôlé de l'ordre de quelques pourcents [30, 65].

En considérant uniquement des vibrations structurelles, l'ajout d'un désaccordage volontaire lors de la conception des roues aubagées peut être utilisé en vue d'améliorer leurs réponses vibratoires [79]. En considérant un désaccordage sur la raideur variant jusqu'à 10% par rapport au cas nominal, le phénomène de localisation et la séparation des fréquences propres peut être grandement diminué, alors même que la raideur moyenne n'a pas été modifiée, comme étudié par Castanier et Pierre sur une roue académique de 12 aubes avec deux ou quatre type d'aubes différentes [79]. Petrov et Ewins ont proposé d'appliquer un désaccordage volontaire non plus sur les aubes, mais sur les amortisseurs en pied d'aube, pour améliorer la dispersion de l'énergie dans le cadre des vibrations forcées [84]. Pour dissymétriser l'excitation aérodynamique, un désaccordage volontaire est également considéré au niveau des redresseurs [85].



(a) disque avec aubes rapportées, adapté de [86]      (b) disque aubagé monobloc, adapté de [87]

Figure 2.13 Types de montage d'aube (■) sur le disque (■).

L'optimisation du désaccordage intentionnel est un sujet de recherche actif, en témoignent les plus récentes études de Pohle *et al.* [88] et Beirow *et al.* [30]. Cependant les techniques proposées sont contraignantes en terme de réalisation. Si elles sont envisageables pour les

disques avec aubes rapportées, pour lesquels les aubes sont liées au disque par des arrêts géométriques (queue d'aronde ou sapin), comme représenté sur la figure 2.13a, elles sont inadaptées aux disques aubagés monobloc (DAM, en anglais : *blisk*), comme représenté sur la figure 2.13b, qui tendent à se développer pour le gain substantiel de masse qu'ils permettent.

### Étude stochastique du désaccordage faible

Le désaccordage *naturel*, inhérent à tout système réel, induit une variation de l'ordre de quelque pourcents sur les propriétés mécaniques et les fréquences propres des aubes de la roue aubagée [30, 65]. La quantification expérimentale précise du désaccordage est cependant particulièrement ardue. Le niveau de couplage entre les aubes via le disque, donnée essentielle pour expliquer le désaccordage, est souvent associé dans les études analytiques à la raideur d'un ressort reliant les aubes [32], mais il ne peut pas directement être mesuré expérimentalement. En outre, pour les DAM, la caractérisation vibratoire des aubes seules est impossible, puisque les aubes et le disque sont fabriquées en un seul bloc. Par ailleurs, l'étude stochastique de l'influence du désaccordage faible, qui demande de pouvoir tester plusieurs milliers de structures, n'est possible que numériquement.

En l'absence d'expression exacte, la distribution statistique de la réponse vibratoire du système désaccordé est approchée de façon empirique, classiquement par des simulations aléatoire dites de « Monte-Carlo » [23], ou encore par la méthode du chaos polynomial [89]. Les méthodes de Monte-Carlo consistent à reproduire numériquement de nombreux échantillons afin d'en extraire des quantités stochastiques d'intérêt (2.1.4.2 de [66]). Dans le cadre des roues aubagées désaccordées, la quantité d'intérêt stochastique la plus usuellement regardée est l'amplification des vibrations du système global en fonction du niveau de désaccordage, défini comme l'écart-type de sa fonction de répartition [23, 32, 90].

Les simulations de Monte Carlo peuvent être utilisées sur une roue aubagée désaccordée libre, pour s'assurer que le paramètre choisi pour le désaccordage est valide [5], mais elles sont plus généralement appliquées sur des systèmes forcés [78]. Après avoir généré la structure nominale (accordée), les étapes suivantes sont réalisées à chaque itération [23] :

- (1) génération du désaccordage aléatoire selon une fonction de répartition et calcul de son écart-type effectif ;
- (2) calcul de l'amplitude maximale des oscillations forcées pour une fréquence (usuellement la fréquence du mode à diamètre accordé excité par le régime moteur considéré [53, 78]) ou une plage de fréquence (réponse dans le cas le plus défavorable [5]), toutes aubes confondues ;
- (3) association de l'amplitude (ou de l'amplification) trouvée avec l'écart-type du désaccordage.

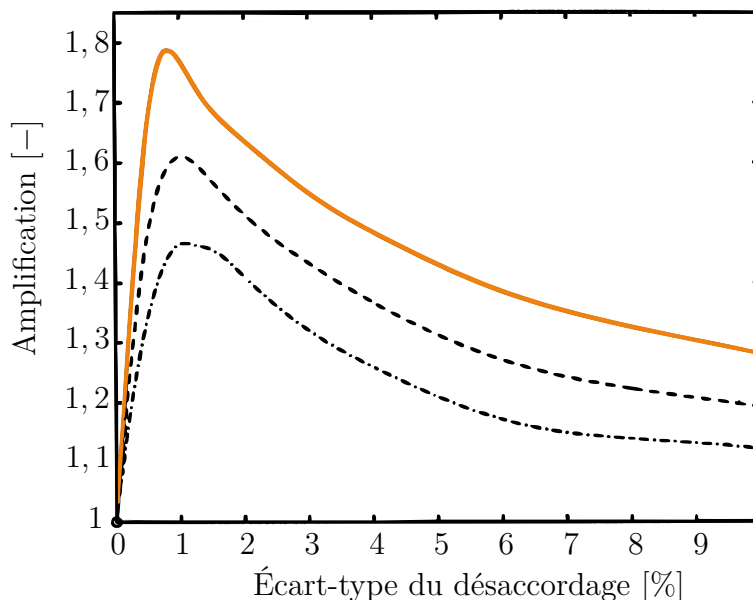


Figure 2.14 Graphique de Monte Carlo, avec les 95<sup>ème</sup> ( — ), 50<sup>ème</sup> ( --- ) et 5<sup>ème</sup> ( -.-.- ) centiles. Adapté de : [6].

Ces étapes doivent être répétées un grand nombre de fois pour pouvoir caractériser la sensibilité au désaccordage de la roue aubagée. En pratique, plusieurs milliers voire dizaines de milliers de simulations sont nécessaires pour calculer les distributions les plus critiques. Les résultats stochastiques obtenus sont alors résumés par la valeur de différents centiles sur les graphiques de Monte Carlo, dont un exemple est donné sur la figure 2.14. Ainsi,  $n\%$  des systèmes simulés présentent une amplification inférieure ou égale aux valeurs délimitées par la courbe du  $n^{\text{ème}}$  centile : le 50<sup>ème</sup> centile est plus communément nommé *la médiane*. Plus le centile recherché est éloigné de la médiane, plus le nombre d'échantillons nécessaires pour calculer sa valeur augmente : pour atteindre le 9<sup>ème</sup> décile du 99<sup>ème</sup> centile (parfois nommé « le 99,9<sup>ème</sup> centile »), de l'ordre de 50 000 simulations devraient être effectuées [6]. Les centiles présentés dans la littérature sont généralement les centiles 1, 50, 99 ou 10, 50, 90 dépendamment du nombre d'échantillons disponibles. La convergence des centiles est assurée qualitativement par stabilisation des courbes à mesure que le nombre d'échantillons augmente [23].

Le graphique de Monte Carlo, tel que tracé sur la figure 2.14, permet ainsi de mettre en évidence l'amplification maximale de la réponse forcée : sur la figure 2.14, adaptée de [6], l'amplification maximale est de près de 1,8, soit une augmentation de 80% par rapport aux amplitudes des vibrations dans la cas accordé, pour un écart-type du désaccordage de 0,8%. La contrainte dans les aubes s'en trouve quasiment doublée, passant de 527 MPa dans le cas

accordé à 978 MPa pour l'amplification maximale désaccordée [6].

Si la méthode de Monte Carlo reste très utilisée pour caractériser la réponse forcée d'un système désaccordé, le coût important en temps de calcul qu'elle représente a incité les chercheurs à développer de nouvelles méthodes, dont la « méthode de Monte Carlo accélérée » de Bladh *et al.* [6]. Celle-ci utilise la statistique des extrêmes, qui permet de déterminer que l'amplification maximale de l'amplitude des vibrations d'une roue aubagée désaccordée se rapproche dans le cadre d'une excitation linéaire d'une distribution de Weibull. Les paramètres de la fonction de densité de probabilité de la distribution de Weibull sont déterminés grâce à un nombre restreint de simulations de Monte Carlo (de l'ordre de 50) ainsi qu'à des approximations issues de la littérature. Les centiles sont ensuite tracés grâce à la fonction ainsi définie.

## 2.3 Réduction des systèmes à grand nombre de degrés de liberté

Les calculs des modes de vibration d'un système faisant intervenir des matrices de la taille du nombre de degrés de liberté (ddl) dans le système complet, leur coût peut devenir prohibitif dans le cas des roues aubagées industrielles. Le système doit être préalablement réduit par des méthodes détaillées dans la section qui suit.

### 2.3.1 Symétrie cyclique

L'utilisation de la symétrie cyclique inhérente aux roues aubagées accordée permet de découpler la dynamique de la roue aubagée entre chacune de ses harmoniques spatiales. Un gain considérable de temps de calcul est ainsi possible, avec des dimensions de matrices typiquement divisées par un facteur égal à la moitié du nombre d'aubes, pour les analyses linéaires de type réponse forcée ou analyse modale pour l'obtention de diagrammes de Campbell. Les matrices du modèle sont réécrites par harmonique pour obtenir des matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  diagonales par blocs [91] :

$$\mathbf{F}^T \mathbf{Y} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Y}}^{(0)} & & & \\ & \hat{\mathbf{Y}}^{(1)} & & \mathbf{0} \\ & & \hat{\mathbf{Y}}^{(2)} & \\ & \mathbf{0} & & \ddots \\ & & & & \hat{\mathbf{Y}}^{(\lfloor N/2 \rfloor)} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

avec  $\mathbf{F}$  la matrice de Fourier,  $\mathbf{Y} = \mathbf{K}$  ou  $\mathbf{M}$  et chaque bloc  $\hat{\mathbf{Y}}^{(n_d)}$ , avec  $n_d = 0, \dots, \lfloor N/2 \rfloor$ , correspond à une harmonique spatiale de la structure.

### 2.3.2 Synthèse modale

**Principe.** Afin d’obtenir des modélisations prédictives, la discrétisation spatiale des modèles industriels requiert un grand nombre d’éléments. L’accroissement consécutif du nombre de ddl du système conduit à des matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  trop grandes pour être calculées directement sur le modèle complet de roue aubagée. Afin de réduire la taille des modèles, des méthodes dites de réduction ont été développées depuis les années 1960, permettant d’obtenir des *modèles réduits*, ou dans la littérature ROM de l’anglais *Reduced Order Models*.

Aussi appelées méthodes de condensation, de synthèse modale ou CMS pour l’anglais *Component Mode Synthesis*, les méthodes basées sur les modes de vibration composants constituent la première génération de méthodes de réduction. Les méthodes CMS partent de la division du système en sous-structures dont le comportement dynamique est décrit par leur réponse harmonique en considérant un chargement aux frontières. Le comportement peut être décomposé dans une base de modes statiques et vibratoires (2.9.3 de [49]). Les modes statiques comprennent les déformées statiques du système lorsqu’un déplacement unitaire est imposé sur un ddl frontière, tous les autres ddl étant imposés nuls. Les modes vibratoires correspondent aux vibrations du système avec conditions imposées aux ddl frontière. Les méthodes CMS sont alors classées en fonction de leur traitement de l’interface entre les sous-structures. La notion d’interface est illustrée sur la figure 2.15. Bien qu’elles existent depuis les années 1960, avec l’article fondateur de Craig-Bampton [24], basé sur des interfaces fixes, les méthodes CMS n’ont été appliquées à l’étude des vibrations des roues aubagées qu’en 1983 par Irretier, à partir de la méthode à interfaces libres de Craig et Chang [25]. En règle générale, les modes composants sont des vecteurs de Ritz, ou modes supposés [92].

**Formalisme.** Lors d’une discrétisation en éléments finis, les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  sont composées de sous-matrices pour chaque secteur. Dans un cas à symétrie cyclique, une aube et sa portion de disque associée sont généralement choisies pour constituer un secteur (figure 2.15a). La sous-structuration revient à réorganiser les ddl en ddl intérieurs  $i$  et frontières  $f$  par permutation des lignes et colonnes, soit pour les matrices de masse  $\mathbf{M}$  et de raideur  $\mathbf{K}$  :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fi} \\ \mathbf{K}_{if} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ff} & \mathbf{M}_{fi} \\ \mathbf{M}_{if} & \mathbf{M}_{ii} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Les déplacements  $\mathbf{u}$  dans la base physique et les déplacements  $\mathbf{q}$  dans la base des modes composants sont reliés par la matrice de passage  $\Psi$  (17.1 de [93]) :

$$\mathbf{u} = \Psi \mathbf{q} \quad (2.11)$$

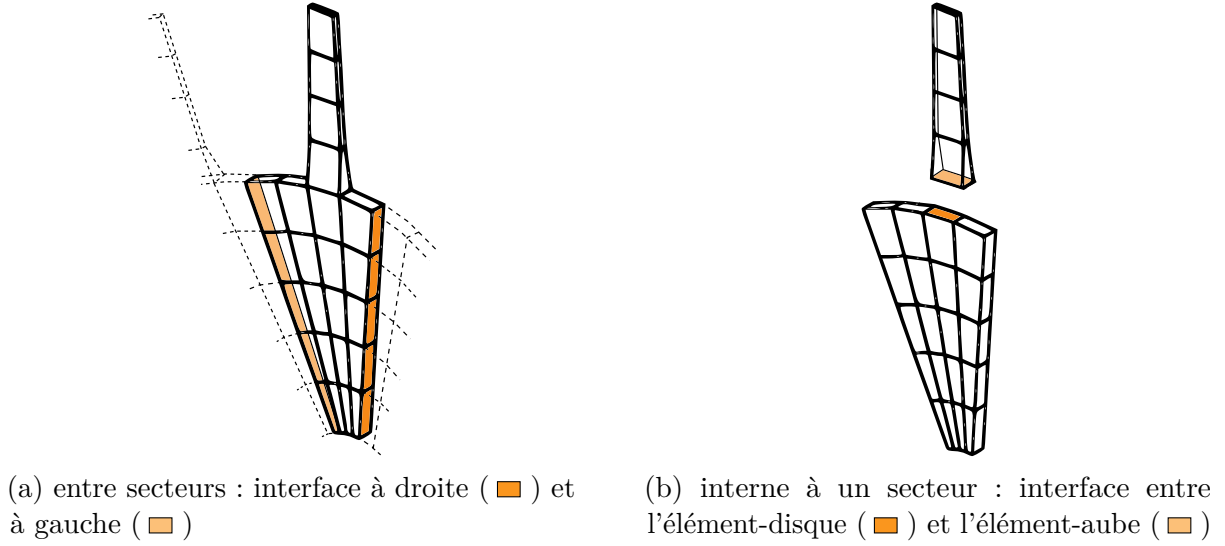


Figure 2.15 Interfaces utilisées dans une sous-structuration. Adapté de [8].

La matrice  $\Psi$  contient alors des modes supposés, qui peuvent être des modes [92] :

- (1) propres ou « normaux » (*component normal modes* [93]) : réponse libre du système élastique, permettant de définir la masse et la raideur généralisées, exprimées en matrices diagonales.
- (2) de corps rigide : réponse du système rigide (sans déformation interne) à un déplacement unitaire. Ils correspondent aux modes à valeur propre nulle ( $\omega^2 = 0$ ) et apparaissent lorsque la réponse du système n'est pas entièrement déterminée par les conditions aux limites. L'énergie de déformation étant nulle, les modes de corps rigide peuvent être déterminés en résolvant (2.7 de [94]) :

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = 0 \quad (2.12)$$

avec :  $\mathbf{u} = \mathbf{1}$ , vecteur de déplacement unitaire

- (3) statiques [24, 28] : définis par des déplacements unitaires imposés sur chacun des ddl d'un sous-ensemble de ddl du système, le déplacement étant nul aux autres ddl de ce même sous-ensemble. Ces déplacements peuvent être exprimés par une matrice identité.

Les modes statiques sont donc les colonnes de  $\Phi^c$ , définie par :

$$\mathbf{K}\Phi^c = \mathbf{F}^c \implies \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bv} \\ \mathbf{K}_{vb} & \mathbf{K}_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_b \\ \Phi_v^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_b \\ \mathbf{0}_v \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

avec :  $b$  le nombre de ddl du sous-ensemble contraint

$b + v$  le nombre total de ddl du système

- (4) d'attache : définis par une force unitaire imposée sur chacun des ddl d'un sous-ensemble, la force étant nulle aux autres ddl de ce même sous-ensemble. Les modes d'attache sont donc les colonnes de  $\Phi^s$ , définie par :

$$\mathbf{K}\Phi^s = \mathbf{F}^s \implies \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ll} & \mathbf{K}_{lw} \\ \mathbf{K}_{wl} & \mathbf{K}_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_l^s \\ \Phi_w^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_l \\ \mathbf{0}_w \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

avec :  $l$  le nombre de ddl du sous-ensemble statique

$l + w$  le nombre total de ddl du système

Afin de réduire la base de modes composants, un certain nombre de modes sont retirés, généralement par troncature au-delà d'une certaine fréquence propre. La base réduite doit cependant retranscrire fidèlement la déformée de la structure, ce qui peut être particulièrement critique au niveau des interfaces entre les sous-structures. Des modes d'interface peuvent également être ajoutés à la base réduite [92], permettant ainsi une troncature maximale.

Les modes d'interface peuvent être calculés à partir de :

- (1) modes propres avec une condition d'encastrement à l'interface, dits d'*interface fixe* [24] ;
- (2) modes d'attache, calculés en appliquant successivement une force unitaire à chaque ddl de l'interface, dits d'*interface libre* ([93], 17.1) ;
- (3) modes statiques [92] ;
- (4) modes mixtes [95].

Dans le cadre de l'étude des roue aubagées accordées, la symétrie cyclique inhérente au système est utilisée afin de réduire les modélisations à un secteur [96], ensuite réduit davantage par synthèse modale. Des méthodes numériques particulières pour étudier les roues aubagées désaccordées, qui présentent une rupture de symétrie, ont ainsi dues être développées.

### 2.3.3 Spécificité des roues désaccordées

Les systèmes désaccordés présentent par définition une rupture de symétrie qui nécessite donc *a priori* de générer le système complet, soit la roue aubagée à 360°, afin de calculer ses modes

propres et de réduire le système par synthèse modale en vue de calculs de la réponse forcée linéaire. Dans le cas de systèmes industriels à grands nombres de degrés de liberté, le calcul de systèmes à 360° est prohibitif en terme d'espace mémoire mais aussi de temps de calcul. La méthode de Monte Carlo accélérée n'étant pas applicable pour de grands modèles construits selon le formalisme des éléments finis [23], les efforts de recherche ont été concentrés sur la réduction de la taille du système étudié.

Afin de réduire la taille des modèles, des méthodes de réduction particulières aux systèmes désaccordés sont utilisées. La SNM (de l'anglais *Subset of Nominal Modes*), proposée par Yang et Griffin, est la méthode fondatrice des méthodes de réduction basées sur les modes du système et construite pour l'application à une structure désaccordée [26]. Yang et Griffin partent de l'observation que pour un désaccordage modéré, des modes accordés sélectionnés peuvent constituer une bonne base pour représenter les vibrations du système désaccordé. Le modèle réduit est alors construit avec des fréquences qui incluent une famille de modes d'aubes, avec un ou deux modes par diamètre nodal. Les coordonnées des nœuds sont définies grâce à une base de Fourier et le désaccordage est directement appliqué sur les matrices de masse et raideur du système. Le désaccordage, implémenté comme une composante physique, peut avantageusement être directement comparé aux mesures expérimentales de variation de masse ou de raideur. En outre, la SNM présente deux avantages majeurs :

- (1) en augmentant le nombre de fréquences incluses dans la base, le comportement du modèle réduit tend vers celui du modèle non-réduit en éléments finis ;
- (2) les zones de pincement des fréquences sont correctement retrouvées avec le modèle réduit.

Feiner et Griffin ont proposé en 2002 une forme simplifiée de la SNM, dans le cas d'une famille isolée de modes d'aubes, nommée FMM pour l'anglais *Fundamental Model of Mistuning* [97]. Les résultats sont cohérents avec le modèle éléments finis pour les modes d'aubes isolés, pour une simulation plus rapide qu'avec la SNM. Cependant les régions de pincement, pour lesquelles les modes de disque sont plus importants, ne sont plus correctement obtenues.

Une approche alternative d'implémentation du désaccordage, également basée sur les modes du système, a été développée par Petrov *et al.* [98]. La matrice de modification à ajouter au vecteur de la réponse forcée du système accordé pour inclure le désaccordage est construite avec : (1) la FRF du système accordé et, (2) la matrice de désaccordage définie comme une matrice de raideur perturbée  $\mathbf{K}^\delta$ . Seuls quelques ddl actifs par aube peuvent être inclus en introduisant des éléments de désaccordage : masses, ressorts et amortisseurs sont attachés aux ddl de l'aube pour représenter le désaccordage. La fidélité du modèle réduit ne peut donc pas être supérieure à celle de la représentation modale du système accordé, mais la méthode



développée est compatible avec une prise en compte des amortisseurs frottants en pied d'aube.

Par ailleurs, le désaccordage peut être implémenté directement sur les modes composants du modèle accordé réduit par CMS. Castanier *et al.* [99] proposent de projeter le désaccordage sur la matrice de raideur dans l'espace modal du système réduit accordé. Bladh *et al.* [95] étendent cette méthode, en projetant le désaccordage sur les modes propres de l'aube encastrée au niveau de l'interface avec le disque, permettant de réduire encore la taille des matrices impliquées par rapport à celles d'un secteur complet. Les deux méthodes permettent ainsi une génération peu coûteuse en temps de calcul du modèle réduit désaccordé.

Lim *et al.* ont proposé une méthode hybride qui combine l'approche des méthodes CMS, basées sur les modes composants, et la SNM basée sur les modes du système [29]. Cette méthode est nommée CMM de l'anglais *Component Mode Mistuning*. Le système y est divisé en sous-structures, dont une correspond au disque aubagé nominal (accordé) et les autres aux aubes où est concentré le désaccordage, en même nombre que le nombre d'aubes. La structure accordée est réduite selon une base de Fourier, comme pour la SNM. Les structures qui correspondent au désaccordage sont ensuite assemblées suivant l'approche des méthodes CMS. Le mouvement de l'aube est représenté par des modes d'aube encastrée, avec la possibilité d'ajouter des modes d'interface comme des modes statiques de Craig-Bampton pour les degrés de liberté fixes [27]. Lim *et al.* étendent alors à un disque aubagé caréné désaccordé la technique de projection du désaccordage développée par Bladh *et al.* [95], en utilisant des facteurs de participation modale pour projeter les matrices de désaccordage dans la base réduite. Le principal avantage de cette méthode est qu'elle permet de prendre en charge de nombreux types de désaccordage sur la masse et la raideur dans l'espace modal, dont des variations non uniformes des aubes individuelles qui impliquent des modèles de désaccordage de modes d'aube isolée [23] ; ou encore des variations non proportionnelles (différentes pour chaque mode), importantes pour l'application à hautes fréquences [27].

De nombreuses autres méthodes ont été développées, comme en attestent les articles de revue publiés récemment [23, 28], et un comparatif de leurs possibilités et limites peut être trouvé dans la thèse de Nyssen [27]. Le choix de la méthode de réduction va en particulier dépendre des phénomènes physiques étudiés.

## 2.4 Vibrations forcées des roues accordées dans un contexte non-linéaire

Les vibrations non-linéaires, dues notamment aux frottements, glissements, contacts ou chocs, peuvent survenir à tous les endroits où un mouvement relatif est permis entre les composants d'un turbomoteur. Ce mouvement relatif peut être intrinsèque à la solution technologique

choisie pour la réalisation des roues aubagées, comme en pied d'aube dans le cas d'aubes rapportées sur le disque ou entre les talons ou nageoires inter-aubes, comme représentés sur la figure 2.16, pour des vitesses relatives faibles. Les vibrations non-linéaires peuvent également survenir en configuration accidentelle lorsque le jeu prévu dans la conception n'est pas suffisant pour éviter l'interaction entre les parties fixes (stator) et tournantes (rotor) : les redresseurs peuvent entrer en contact avec l'arbre moteur, ou les aubes avec le carter fixe, avec des vitesses relatives très élevées.

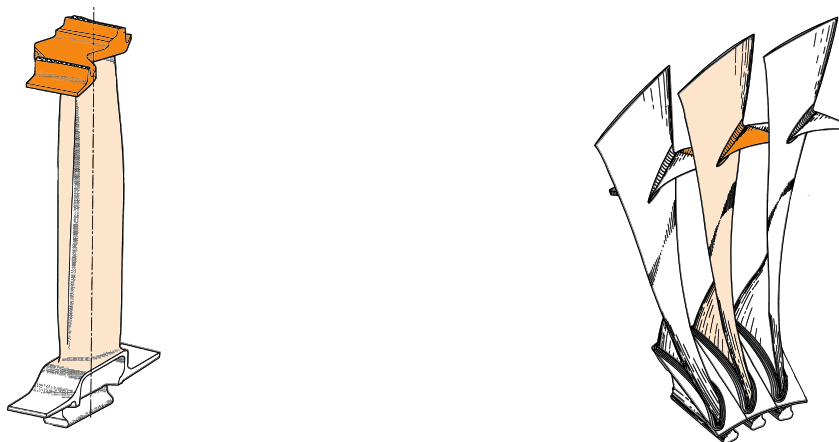
### 2.4.1 Frottements et contacts dans les turbomachines

#### Interfaces entre composants du rotor

Entre les composants du rotor, mécaniquement liés, les vitesses relatives sont faibles si bien que les vibrations non-linéaires associées surviennent à hautes fréquences et les amplitudes de déplacement restent faibles. Les interfaces de contact peuvent être classées par rapport aux composants qui interagissent : aube-aube, ou aube-disque.

**Aube/aube.** Les non-linéarités aube-aube sont en particulier rencontrées au niveau des nageoires des aubes de turbines élancées, qui permettent d'augmenter la rigidité de la roue aubagée pour réduire l'amplitude de leurs vibrations. En opération, les nageoires peuvent rester en contact et agir comme une bague continue, ou au contraire se désolidariser. Lorsqu'un mouvement relatif est créé, les forces de frottement et de glissement permettent de dissiper une partie de l'énergie vibratoire et ainsi d'amortir le mouvement [100]. En pratique, les conditions d'utilisation peuvent amener à un cas entre frottement et glissement.

Le couplage aérodynamique et mécanique des aubes va permettre la transmission de l'énergie de vibration. D'une part, le chargement aérodynamique appliqué sur une aube est modifié par la présence d'un corps en amont ou en aval de celle-ci. L'étude du couplage aérodynamique est particulièrement critique dans le cas des structures multi-étages [27, 31]. D'autre part, la transmission de l'énergie de vibration d'une aube à l'autre d'une même roue peut s'effectuer mécaniquement à travers les talons (figure 2.16a), les nageoires (figure 2.16b) ou le disque. Pour les aubes sans nageoire, le couplage entre les aubes augmente à mesure que la rigidité du disque diminue [53]. Les premières études vibratoires couplées débutent dans les années 1950, puis sont raffinées pour prendre en compte un grand nombre d'aubes parfaitement identiques [77], en utilisant des matrices de transfert pour coupler le mouvement du disque et des aubes. De même, les modèles multi-étages sont couplés par l'arbre de transmission : moins ce dernier est rigide, plus le couplage inter-étages est important [27].



(a) talon (■) en tête d'aube (□) (en anglais : *tip shroud*), adapté de [101]

(b) talons intermédiaires ou nageoires (■) sur le corps de l'aube (□) (en anglais : *mid-span shroud*), adapté de [102]

Figure 2.16 Vocabulaire associé aux excroissances géométriques des aubes.

**Aube/disque.** Les interfaces aube-disque sont spécifiques au cas d'aubes rapportées sur le disque (figure 2.13a). Le léger jeu au niveau des liaisons mécaniques en sapin ou en queue d'aronde induit un mouvement relatif des aubes par rapport au disque, et donc des phénomènes non-linéaires de frottement, glissement et chocs. En particulier, le jeu nécessaire au montage dans le cas d'une liaison mécanique aube-disque en sapin peut induire plusieurs positions stables de l'aube en fonctionnement et donc des problèmes de stabilité [103].

Les vibrations induisent des modifications géométriques par rapport à la structure conçue, diminuant le rendement global. Les motoristes cherchent donc à les amortir. Pour ce, des joints de friction (aussi appelés frotteurs ou amortisseurs frottants) peuvent être ajoutés au niveau des zones de contact entre l'aube et le disque, en pied d'aube ou sous la plateforme [104], comme représenté sur la figure 2.17. Les dispositifs de dissipation non-linéaire permettent en effet des systèmes plus légers et efficaces comparés aux premiers essais effectués dans les années 1960, utilisant des revêtements absorbants visco-élastiques linéaires [85]. L'effort de transition entre adhérence et glissement et la rigidité de l'amortisseur jouent un rôle déterminant sur la dynamique de l'aube [105]. En particulier, la réduction des vibrations est d'autant plus importante que l'amortisseur est rigide, jusqu'à atteindre une asymptote. Comme il a été montré dans des études expérimentales qu'un amortisseur est autant dans une configuration d'adhérence que de glissement à chaque cycle, un amortisseur optimal doit présenter un compromis entre une raideur importante et une bonne adaptabilité aussi bien au frottement qu'au glissement [105].

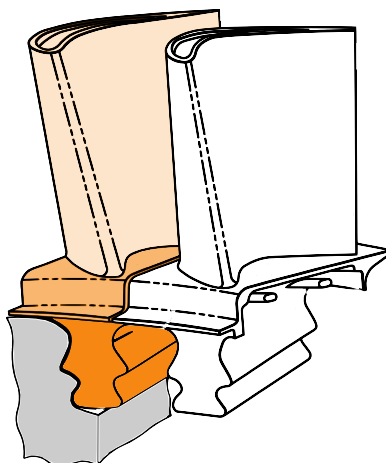


Figure 2.17 Zones de contact entre l'aube ( ■ ) et le disque ( ■ ) : pied d'aube ( ■ ) et plateforme ( ■ ). Adapté de [9].

La modélisation des amortisseurs en pied d'aube reste un domaine de recherche actif [106], orienté sur le type de modélisation à adopter, entre une approche harmonique [107] ou modale [108]. Les techniques d'implémentation du frottement sont traitées dans la section 2.4.2. Outre l'approche numérique, les études expérimentales constituent toujours un défi, notamment à cause de la difficulté de mesurer les forces de frottement [109, 110]. Les efforts de recherche fournis permettent à ce jour une meilleure compréhension du phénomène physique [111, 112], mais aussi de proposer de nouvelles optimisations tant d'un point de vue matériau que géométrique des joints [104, 113].

Cependant, ces dispositifs propres aux disques avec aubes rapportées (figure 2.13a) tendent à disparaître du fait de l'ajout de masse trop important qu'ils imposent [85], au profit des DAM (figure 2.13b). Un dispositif amortissant pourrait alors être intégré sous la jante du disque, comme illustré sur la figure 2.18.

### Interfaces entre le rotor et le stator

Les vitesses relatives entre les composants du rotor et du stator sont élevées, si bien que les vibrations non-linéaires associées surviennent à basses fréquences et sont caractérisées par de grandes amplitudes de déplacement. Les interactions rotor-stator (figure 2.9) peuvent survenir en deux endroits : entre les redresseurs et l'arbre moteur ou entre le carter et les aubes de la roue aubagée. Ces deux cas ont fait l'objet de recherches actives depuis les années 2000 [17].

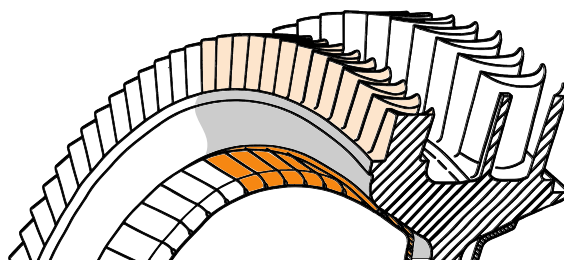


Figure 2.18 Solutions d'apport d'amortissement pour les DAM, où les aubes (  ) et le disque (  ) forment une seule structure : amortisseur frottant (  ) monté sous la jante du disque. Adapté de [10].

**Arbre/redresseur.** Les études sur le contact entre les redresseurs et l'arbre du moteur sont usuellement menées dans les hypothèses de la dynamique des rotors, dans lesquelles les composants sont considérés rigides. Comme les redresseurs sont liés par une bague commune (figure 2.9), l'interface arbre-redresseur est continue, et ce sont les déplacements de l'axe de rotation de l'arbre, appelés *mouvements de précession* [114], qui engendrent des cas de contact. Ce déplacement de l'axe de rotation est dû à un balourd sur l'arbre, du fait d'un équilibrage ou alignement imparfait, ou d'une rupture d'équilibre accidentelle, comme la perte d'une aube sur une roue aubagée [17].

Le contact arbre-redresseur peut être étudié analytiquement par des modèles de type Jeffcott (aussi appelés DeLaval) [115,116]. Les études expérimentales ont permis de mettre en évidence deux régimes d'interaction : l'un se caractérise par un roulement sans glissement du rotor sur le stator (en anglais : *dry-friction whirl*), si bien que le rotor tourne dans le stator, l'autre à l'inverse survient lorsque le rotor glisse continûment sur le stator (en anglais : *dry-friction whip*). Ces configurations peuvent être particulièrement dangereuses et ont été identifiées comme la cause probable d'accidents en service et sur les bancs de test [117,118].

**Aube/carter.** Afin d'améliorer les performances aérodynamiques, les motoristes cherchent à diminuer les jeux entre le rotor et le stator, puisque le fluide qui s'infiltre dans ce jeu ne participe pas à la propulsion, et même perturbe l'aérodynamisme de l'ensemble [19]. Au niveau de la tête d'aube, le flux turbulent induit des vibrations supplémentaires, en plus d'altérer la force aérodynamique incidente sur l'étage suivant (figure 2.19). Si le jeu est trop important, un phénomène de pompage, avec une inversion locale de l'avance du flux, peut même se produire [104]. La surconsommation des moteurs est alors conséquente. Des simulations aérodynamiques ont permis de montrer qu'un jeu de 2,5% de la hauteur de l'aube induit un flux plus détaché de l'aube et plus étendu en aval de celle-ci par rapport au cas où le jeu serait limité à 1% du diamètre de l'aube : dans le second cas, le coefficient de pertes

aérodynamiques en sortie d'aube est diminué de près de 25% [19]. Il apparaît en outre que les pertes totales qui incombent aux fuites en tête d'aube sont loin d'être négligeables : 30,3% dans le cas d'un jeu de 2,5% contre 14,3% si le jeu est limité à 1% [19]. Réduire les jeux permet aussi d'augmenter l'efficacité de la combustion [104].

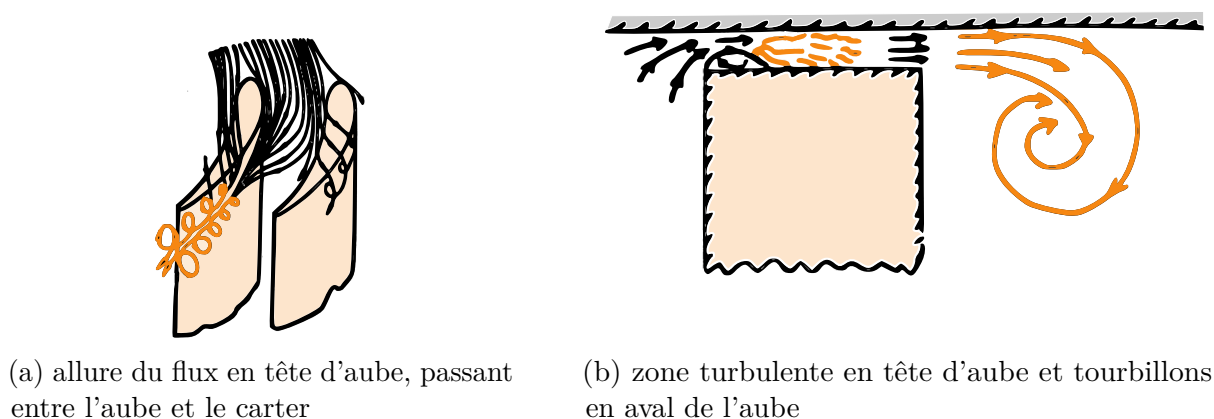


Figure 2.19 Allure des tourbillons (■) induits par le jeu entre l'aube (■) et le carter (■), en tête d'aube et en aval. Adapté de [11].

Sur les turbomoteurs en fonctionnement, le carter se déforme par rapport au profil circulaire souhaité, du fait notamment de sa dilatation thermique [119]. Son profil de déformation présente usuellement des bosses ou lobes, dont le nombre et la position vont dépendre des points d'ancrage qui augmentent localement sa rigidité, ou des zones de passage des circuits de refroidissement [104]. Outre la déformation de la roue aubagée et du carter, les aubes peuvent venir en contact avec le carter lorsque l'arbre décrit des mouvements de précession, comme étudié par Salvat *et al.* [120].

Ainsi, diminuer le jeu en tête d'aube permet d'augmenter le rendement global du moteur et donc d'optimiser sa consommation, mais favorise l'apparition de contact entre le carter et les aubes. Deux problématiques principales concentrent les efforts de recherche actuels : l'interaction modale et l'usure. Dans les deux cas, les aubes sont considérées comme flexibles. Le disque peut être considéré comme rigide à des fins de simplification, mais il est plus généralement supposé flexible. Le carter peut être considéré rigide ou flexible, selon le phénomène étudié.

L'interaction modale est étudiée en considérant un carter flexible. Comme la roue aubagée se déforme selon des diamètres nodaux du fait notamment de l'excitation aérodynamique (voir la section 2.2), les aubes peuvent entrer en contact périodiquement avec le carter et le déformer. Le contact peut aussi être consécutif à l'élongation de l'aube sous les effets

centrifuges [121]. La déformation du carter rend les contacts d'autant plus fréquents, si bien que le carter est excité suivant des modes de même nombre diamètres nodaux que ceux de la roue aubagée [12], comme montré sur la figure 2.20. Cette interaction des modes de déformations des aubes avec ceux du carter est appelée *interaction modale*. En pratique, seul le premier mode de flexion des aubes peut conduire à une interaction modale [12, 122]. L'interaction modale ne se produit que pour des vitesses de rotation coïncidant avec les pulsations naturelles de la roue aubagée d'une part et du carter d'autre part [12, 17]. Tout comme les modes de vibrations des roues aubagées, les modes de déformation du carter sont tournants et peuvent être exprimés avec une combinaison linéaire de deux modes orthogonaux. Les modes de vibration du carter peuvent tourner dans le sens de rotation de la roue ou dans le sens contraire, alors que les modes de la roue excités par le contact tournent uniquement en sens contraire à la rotation [12]. L'interaction modale la plus critique se produit lorsque les modes du carter et de la roue tournent en sens contraire [12]. L'interaction modale est hautement destructive pour le système car l'échange d'énergie est intensifié : elle a notamment été avancée comme cause probable de désintégration de moteur en vol [18].

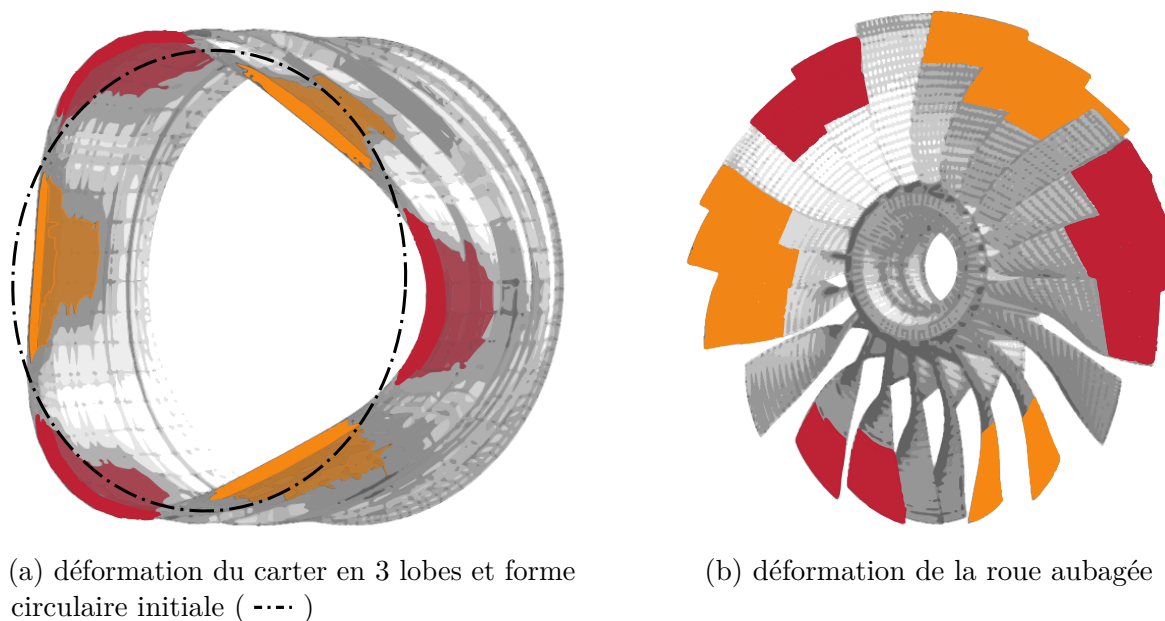


Figure 2.20 Interaction modale à 3 diamètres nodaux. Déplacements rapprochant (■) ou éloignant (■) du centre de rotation. Adapté de [12].

Dans l'hypothèse d'un carter rigide, le contact entre les aubes et le carter peut conduire à un arrachement de la matière de façon analogue un outil d'usinage, comme représenté sur la figure 2.21. Une solution technologique retenue par les industriels pour diminuer le jeu aubes-carter tout en évitant la dégradation du système en cas de contact consiste à

déposer à l'intérieur du carter un revêtement pouvant être détérioré par le contact sans abîmer les aubes, appelé *abradable* [104]. Le niveau de consommation de jeu, défini par l'épaisseur d'abradable consommé, et la prédiction des profils d'usure de l'abradable font l'objet de recherches importantes depuis 2010. Par exemple, des campagnes expérimentales ont permis de montrer que sous certaines conditions le profil du revêtement abradable présente une usure non uniforme circonférentiellement et axialement, avec un plus grand nombre de lobes en circonférence face au bord de fuite que face au bord d'attaque [122]. Le comportement vibratoire de l'aube lors d'un contact avec le carter est complexe, et de multiples paramètres comme le mécanisme d'échauffement [119] et d'usure [13,91] doivent être pris en compte pour affiner la compréhension du phénomène. Dans les études numériques, le carter peut être pris comme parfaitement circulaire à des fins de simplification [123], ou pré-déformé de façon à créer des zones de contact privilégiées [121,124]. Les vibrations des aubes en considérant un carter rigide permettent bien d'expliquer les motifs d'usures observés expérimentalement [121].

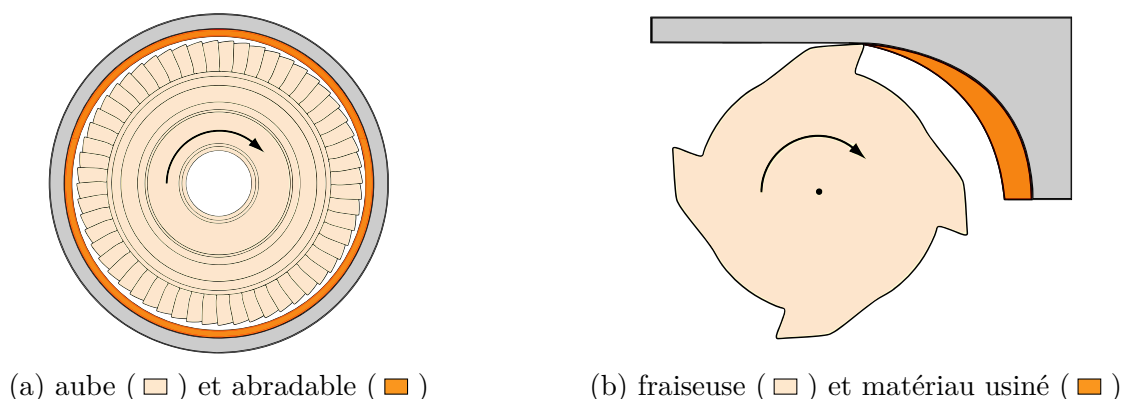


Figure 2.21 Analogie entre l'usure de l'abradable par l'aube et le fraisage. Adapté de [13].

Enfin, d'autres éléments peuvent être étudiés pour améliorer le caractère prédictif des simulations : l'influence du contact aube-carter sur la liaison en sapin pour les aubes rapportées [125] ; l'influence de l'arbre rotor [126] ; et l'influence de la courbure de l'aube sur son comportement vibratoire au contact [12], avec un cas toujours divergent quand l'aube a une courbure positive (orientée suivant son sens de rotation). Outre les études sur le phénomène d'interaction, un travail important est mené sur l'optimisation des profils d'aube pour limiter les cas de contact avec le carter tout en conservant les propriétés mécaniques et aérodynamiques des aubes [17].



## 2.4.2 Traitement numérique en éléments finis

### Frottement

Le frottement peut être rencontré dans toutes les interfaces sus-mentionnées. Il est fortement non-linéaire du fait de la transition adhérence-glissement, de l'influence de la force normale générée par le contact et de la variation de la surface de contact. Les effets de ces non-linéarités peuvent endommager le mécanisme et nécessitent alors d'être contrôlés et amoindris, notamment entre les nageoires de turbines ou entre les aubes et le carter. A l'inverse, les non-linéarités peuvent être volontairement ajoutées au système pour leur action stabilisante [36], comme dans les amortisseurs en pied d'aubes voire dans certaines nageoires spécialement conçues à cet effet. Les recherches portent notamment sur deux aspects de l'amortissement par frottement : sa modélisation d'une part et l'analyse du comportement non-linéaire d'autre part [71]. Le lecteur intéressé trouvera des informations complémentaires dans la revue de Fenny *et al.* [127].

L'implémentation numérique du frottement peut être réalisée en utilisant la méthode directe, l'intégration temporelle ou l'équilibrage harmonique (HBM, de l'anglais : *Harmonic Balance Method*) [36]. La première a été utilisée dès les années 1930 pour les études analytiques et repose sur les approximations de Coulomb. L'intégration temporelle a connu un essor important entre 1980-1990 grâce aux puissances de calcul grandissantes. Cependant le temps de calcul rapidement prohibitif et l'impossibilité de correctement appréhender les cas de discontinuités comme l'adhérence [36] explique le grand nombre de recherches utilisant la HBM. Dans cette dernière, la réponse forcée du système est considérée comme harmonique par une approximation en série de Fourier tronquée. Elle est compatible avec des méthodes à hystérésis qui prennent en compte la déformation de la surface de contact [38, 39]. La HBM a été raffinée par des techniques incrémentales (IHBM) [128], reprises par Petrov et Ewins [129] pour l'application aux turbomachines.

Le frottement entre les nageoires de deux aubes distinctes a été étudié par la procédure de HBM simple (ou mono-harmonique) expérimentalement [100] et analytiquement [130] avant d'être étendue grâce à la technique multi-harmoniques sur un cas académique [131]. Plus récemment, les amortisseurs en pied d'aube ont été étudiés avec une approche hybride fréquentielle-temporelle, qui repose sur la méthode d'alternance entre les deux domaines [132–134], issue de la méthode de Galerkin accélérée (en anglais : *fast Galerkin method*) [135]. Les cas de frottement entre les aubes et le disque, au niveau des liaisons mécaniques en sapin (figure 2.13a), constituent les développements les plus récents. Ils ont été menés entre autres par Petrov et Ewins [129], qui couplent la HBM multi-harmoniques avec les éléments finis et une

réduction du modèle par analyse modale, Nacivet [134], qui propose une nouvelle formulation des Lagrangiens (dite de Lagrangiens dynamiques ou méthode DLFT de l'anglais : *Dynamic Lagrangian mixed Frequency-Time method*) pour résoudre les équations du mouvement non-linéaires dans le domaine fréquentiel avec une vérification des lois de frottement dans le domaine temporel, et Charleux *et al.* [103] qui ont étendu la méthode de Nacivet à un cas en trois dimensions forcé réduit par synthèse modale.

## Contact

Les problèmes de contact et d'impacts sont intrinsèquement non-linéaires, puisque la vitesse des corps qui entrent en contact est discontinue, en norme et en direction, et le contact induit des forces élevées dans un intervalle de temps très faible. Du fait de la discontinuité de la vitesse, le mouvement est dit non-régulier. Le terme forçant de l'équation (2.5) est alors dépendant du déplacement. L'équation du mouvement devient alors, en négligeant l'amortissement :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}(t, \mathbf{u}(t)) \quad (2.15)$$

De plus, les efforts générés au moment du contact dépendent de la vitesse relative des corps et leur comportement (vitesse et trajectoire) est complètement modifié après que le contact ait eu lieu. Le but d'un algorithme de gestion du contact est d'une part de le détecter et d'autre part de calculer les forces résultantes. Pour ce second point, une loi de contact est généralement utilisée [17], même si certaines études proposent de s'en passer [123]. La loi de contact permet de traduire l'ajout de contraintes relatives au cas de contact, si bien qu'elle peut avoir un grand impact sur les résultats [12]. Comme vu dans la section 2.4.1, les phénomènes de contact peuvent être d'autant plus destructeurs lorsque les deux solides considérés ont une grande vitesse relative et que l'interface est discontinue. Ainsi, la suite de cette partie est centrée sur le traitement numérique de l'interaction aubes-carter.

Pour résoudre les équations du mouvement associées, une double discrétisation, en temps et en espace, est nécessaire. La discrétisation en temps peut être réalisée par une approche temporelle, telle qu'avec l'algorithme de Carpenter [37]. Une approche fréquentielle peut également être utilisée, en particulier pour les systèmes oscillants. La discrétisation spatiale est toujours réalisée par éléments finis : même si des méthodes multi-corps commencent à faire leur apparition, telle la méthode SPH (pour l'anglais : *Smoothed Particle Hydrodynamics*) développée initialement pour les fluides, le coût numérique qu'elles induisent ne permettent pas, pour le moment, une application aux roues aubagées, même en considérant une configuration académique.

**Méthode de la pénalité.** La méthode de la pénalité (en anglais : *penalty method*, aussi appelée *contact force approach* [34]), revient à considérer que la surface des éléments qui entrent en contact est constituée de systèmes ressorts-amortisseurs (figure 2.22). Les forces de contact, exprimées comme une fonction de la pénétration, sont ajoutées aux équations du mouvement lorsqu'il y a contact. Plusieurs modèles peuvent être utilisés pour exprimer la force de contact en fonction de la pénétration [34] : un système masse-ressort en parallèle, le modèle de contact de Hertz (qui considère, au contact, des corps purement élastiques) ou encore le modèle de Lankarani-Nikravesh, qui proposent de séparer la force de contact normale en composantes élastique et dissipative, basé sur le travail de Hunt et Crossley. La difficulté est alors de définir des paramètres qui traduisent correctement la physique du problème, comme la raideur équivalente et le degré de pénétration permis. Une augmentation de la raideur permet une diminution de la pénétration, mais nuit à la stabilité numérique [34]. Beaucoup de modifications ont été proposées à la méthode de pénalité vers les années 2000 pour la rendre plus réaliste, particulièrement à l'égard de la pénétration et de la phase de restitution de la force [33].

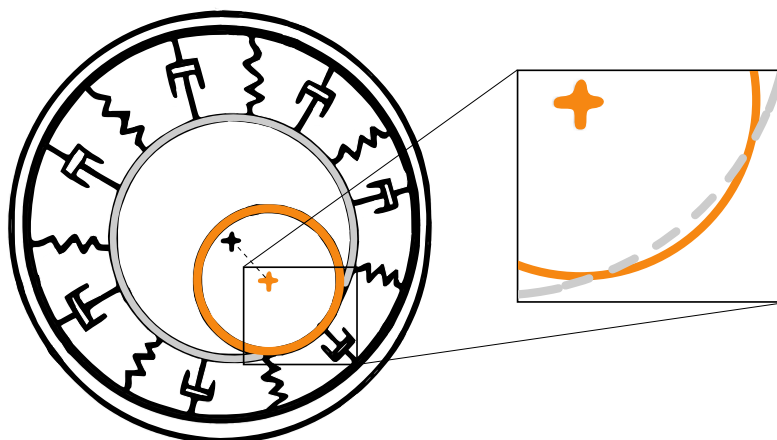


Figure 2.22 Principe de la méthode de pénalité : une pénétration du solide tournant ( ■ ) dans le carter ( ■ ) est permise. Adapté de [14].

La méthode de la pénalité présente l'avantage d'éviter une discontinuité de la force lors du contact. En revanche, elle nécessite une calibration numérique minutieuse des coefficients de pénalité à utiliser.

**Méthode des multiplicateurs de Lagrange.** La théorie des multiplicateurs de Lagrange fait intervenir des développements avancés d'analyse et de théorie d'optimisation sous contraintes [35]. Appliquée dans un cas de contact mécanique, elle repose sur un algorithme de prévision/correction des déplacements à chaque itération temporelle [12]. Si le

déplacement prédit induit une pénétration, la force équivalente de contact qui l'annulerait est calculée et propagée à l'ensemble de la structure via le vecteur des multiplicateurs de Lagrange [47, 136]. La force de contact comprend à la fois la force normale de contact et la force tangentielle de glissement.

Le mouvement est ici calculé par intégration temporelle. Classiquement, l'algorithme de Carpenter, construit suivant un schéma numérique explicite centré, est utilisé car il a été développé spécifiquement pour les cas de contact [37] :

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_{i-1}}{2h} \quad (2.16)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}_{i+1} - 2\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i-1}}{h^2} \quad (2.17)$$

avec :  $\mathbf{u}$  le vecteur des coordonnées physiques généralisées

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i \text{ le vecteur des coordonnées au pas de temps courant } (i) \\ \mathbf{u}_{i-1} \text{ le vecteur des coordonnées au pas de temps précédent } (i-1) \\ \mathbf{u}_{i+1} \text{ le vecteur des coordonnées au pas de temps suivant } (i+1) \end{cases}$$

$\dot{\mathbf{u}}$  le vecteur des vitesses généralisées

$\ddot{\mathbf{u}}$  le vecteur des accélérations généralisées

$h = t_{i+1} - t_i$  le pas de temps numérique

L'équation du mouvement résultant dans le cas linéaire devient alors [124] (la démonstration de l'inversibilité de  $[2\mathbf{M} + h\mathbf{D}]$  est disponible en annexe D) :

$$\mathbf{u}_{i+1} = [2\mathbf{M} + h\mathbf{D}]^{-1} \left( 2h^2\mathbf{F} + [4\mathbf{M} - 2h^2\mathbf{K}] \mathbf{u}_n + [h\mathbf{D} - 2\mathbf{M}] \mathbf{u}_{n-1} \right) \quad (2.18)$$

Si le pas en espace, noté  $dx$ , est défini par la discrétisation en éléments finis, le pas en temps  $h$  doit être posé pour assurer la convergence du calcul en respectant à la fois la condition CFL (pour Courant-Friedrichs-Lewy) [137] et la condition de Nyquist-Shannon [138].

## 2.5 Vibrations forcées des roues désaccordées en contexte non-linéaire

Les recherches présentées précédemment portaient soit sur l'étude des roues aubagées désaccordées dans un contexte linéaire (section 2.2.2), soit sur l'étude des vibrations non-linéaires des roues aubagées accordées (section 2.4). Peu de recherches ont été menées à ce jour sur

l'étude des vibrations non-linéaires des roues aubagées désaccordées. Or, la prise en compte de ces deux aspects induit des modifications majeures sur le comportement vibratoire des roues aubagées, améliorant grandement la prédictivité des simulations.

### 2.5.1 Interfaces entre composants du rotor

Dès 1985, Griffin et Sinha [40] ont réalisé une étude couplée entre l'influence du désaccordage et celle du frottement sur la réponse forcée d'une aube, calculée par équilibrage mono-harmonique. Les surfaces de friction étudiées sont situées au niveau des interfaces entre composants du rotor : dans les amortisseurs entre le disque et les aubes au niveau des arrêts géométriques en sapin et entre les aubes au niveau des nageoires. En 2007, Poudou [71] a développé une méthode utilisant un domaine hybride fréquentiel-temporel (en anglais : *Hybrid Frequency-Time domain method*), appliquée notamment à un modèle à trois dimensions avec un désaccordage sur la raideur de 7%. La méthode hybride fréquentielle-temporelle [133] y a été modifiée par Poudou pour pouvoir être appliquée à des systèmes industriels à grand nombre de degrés de liberté. D'autres études ont également traité de l'étude de l'influence du désaccordage sur le frottement, notamment Chen et Sinha [139] avec une approche probabiliste du frottement en pied d'aube, et Lin et Mignolet [62] avec l'étude du désaccordage sur l'amortissement structurelle d'une roue aubagée.

Dans les cas sus-mentionnés, le désaccordage n'était qu'un paramètre du système physique et l'évolution de son influence au regard de son niveau (écart par rapport au cas accordé) ou de sa distribution sur l'ensemble de la roue aubagée n'était pas étudiée. Les récentes études de Joannin *et al.* propose de palier à ce manque [41, 42] en étudiant l'influence du désaccordage sur les vibrations non-linéaires au niveau des amortisseurs en pied d'aube. Le contact est géré avec la méthode de pénalité, le frottement est implémenté grâce à une approche fréquentielle harmonique, et la synthèse modale est réalisée avec l'approche des méthodes CMS. La méthode ainsi développée est nommée CNCMS, de l'anglais *Component Nonlinear Complex Mode Synthesis*. Il en ressort que le désaccordage influe grandement sur les vibrations non-linéaires, par rapport aux cas critiques prédits dans les modélisations de roues aubagées accordées, sur les cas de désaccordage déterministe étudiés. Aucune étude stochastique pour évaluer l'influence du petit désaccordage, telles celles menées sur les cas de vibrations linéaires (section 2.2.2), n'a encore été menée.

## 2.6 Interfaces entre le rotor et le stator - Intérêt de recherche

Toutes les recherches abordées, de Griffin et Sinha [40] en 1985 à Joannin *et al.* [41,42] en 2016 et 2017, considèrent les non-linéarités entre solides d'un même ensemble. De fait, aucune étude n'a encore été menée concernant l'influence du désaccordage sur les non-linéarités de contact entre l'aube et le carter. Pourtant, les motoristes s'intéressent de plus en plus aux roues aubagées de type monobloc (figure 2.13b), désormais réalisables grâce aux progrès des procédés de fabrication. En effet, les DAM permettent une réduction de masse, une augmentation des performances aérodynamiques et une plus grande durée de vie par rapport aux assemblages d'aubes rapportées sur le disque [140]. Les développements les plus récents sur les matériaux permettent même d'envisager d'affiner le disque pour créer des ANneaux Aubagés Monoblocs (ANAM) [85] (figure 2.23), qui permettraient un gain de masse de 50% pour une même résistance mécanique. Dans ce type de système, les aubes et le disque ne constituent qu'une seule structure, et les arrêts géométriques en sapins ainsi que les amortisseurs en pied d'aubes disparaissent, si bien que l'amortissement global de l'ensemble est plus faible [141]. Comme en outre le couplage structurel est plus important, le système est beaucoup plus sensible à la localisation de l'énergie de vibration [32]. En somme, les DAM et ANAM sont beaucoup plus sensibles au désaccordage [58]. D'autre part, du fait de l'absence de jeu et d'amortissement entre le disque et les aubes, l'énergie communiquée aux têtes d'aubes lors d'un impact avec le carter se propagera d'autant plus facilement dans l'ensemble de la roue aubagée.

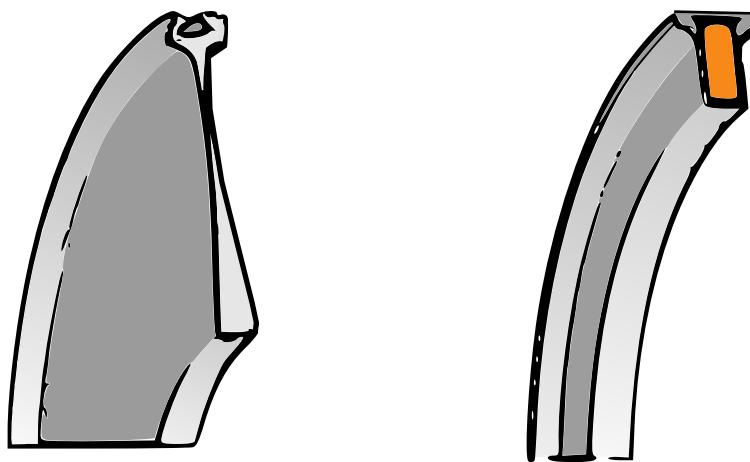


Figure 2.23 Modification de la structure entre un disque classique et un anneau avec renfort composite (■). Adapté de [15].

L'étude conjointe du désaccordage et des non-linéarités de contact aube-carter pourrait de fait être déterminante pour la compréhension des phénomènes vibratoires des DAM et des ANAM, qui constituent la prochaine génération de roues aubagées. Or les études se sont

exclusivement concentrées sur les non-linéarités entre composants du rotor, soit en pied d'aube (aube rapportée sur le disque) ou entre les nageoires des aubes, et l'influence du désaccordage sur les non-linéarités aubes-carter n'ont pas à ce jour pas été étudiées.

La présente recherche propose de palier à ce manque, à travers quatre apports :

- (1) analyse phénoménologique sur un modèle à deux dimensions, permettant des calculs stochastiques proches de ce qui est usuellement présentés, dans le cadre de l'étude de l'influence du désaccordage sur les vibrations forcées linéaires ;
- (2) développement et validation d'une méthodologie permettant la prise en compte du désaccordage sur des modèles réduits industriels avec interface de contact ;
- (3) analyse stochastique d'une configuration industrielle, en condition nominale de fonctionnement ;
- (4) utilisation de la méthodologie pour permettre le développement d'algorithmes d'identification expérimentale de phénomènes non-linéaires, en prenant en compte le désaccordage.

## CHAPITRE 3 MODÈLE PHÉNOMÉNOLOGIQUE

Ce chapitre constitue une première contribution à l'étude des non-linéarités de contact sur des roues aubagées désaccordées. Cette étude permet tout d'abord d'évaluer la robustesse de la prédiction des fréquences d'interaction dans un cas de contact lorsque le désaccordage est introduit. Ensuite, le principal critère utilisé pour quantifier stochastiquement l'influence du faible désaccordage est l'amplification des déplacements en bout d'aube, par rapport à ceux calculés pour une roue aubagée accordée. L'amplification, avérée dans un cadre linéaire, est ainsi étudiée dans un cadre non-linéaire.

Le modèle utilisé, construit par éléments finis, est choisi pour sa représentativité déjà avérée des phénomènes de contact aubes/carter dans le cadre de la résolution par multiplicateurs de Lagrange et intégration temporelle, dont les équations principales sont rappelées en début de chapitre. Il est alors montré que ce modèle, une fois désaccordé, est également représentatif des vibrations de roues aubagées désaccordées dans le cadre d'un forçage linéaire. Une première étude en configuration de contact aubes/carter pour un motif désaccordé donné permet ensuite de poser les configurations et variables d'intérêt étudiées, tout en démontrant la robustesse des résultats au regard des paramètres numériques et de simulation. Avant de présenter les résultats stochastiques montrant l'influence du désaccordage sur les vibrations de contact, la convergence stochastique des résultats est avérée aussi bien qualitativement que quantitativement. Les résultats stochastiques pour une configuration de contact sont alors comparés aux résultats stochastiques pour un forçage linéaire et analysés. Afin de représenter le passage d'une roue aubagée classique à un disque aubagé monobloc (DAM), des résultats supplémentaires sont donnés dans le cadre d'un amortissement amoindri. Enfin, des études complémentaires sur les non-linéarités et les énergies de déformation permettent de donner davantage de renseignements sur le comportement vibratoire du modèle étudié.

### 3.1 Modélisation

Le modèle utilisé est similaire à celui défini par Legrand *et al.* [12]. Le disque est constitué de poutres radiales droites à 3 ddl par nœud, lesquelles sont liées par des poutres courbes à 4 ddl par nœud. Le détail des matrices élémentaires utilisées pour modéliser les poutres courbes peut être trouvé à la référence [142] (partie 2 II.2 et V.2). Les aubes sont représentées par des poutres droites à 3 ddl par nœud. Le modèle éléments finis complet contient ainsi au total 120 nœuds et 420 ddl. Pour une aube donnée, l'angle entre chaque poutre  $i$  qui la compose et le rayon du disque passant par le nœud en son pied dépend du nombre de poutres de l'aube



et d'un coefficient de courbure, tel que :

$$\text{angle}(i) = \left( -\frac{i}{\text{nb poutres par aube} - 1} \right)^{\text{coeff de courbure}} \quad (3.1)$$

Le coefficient de courbure est le même pour toutes les aubes.

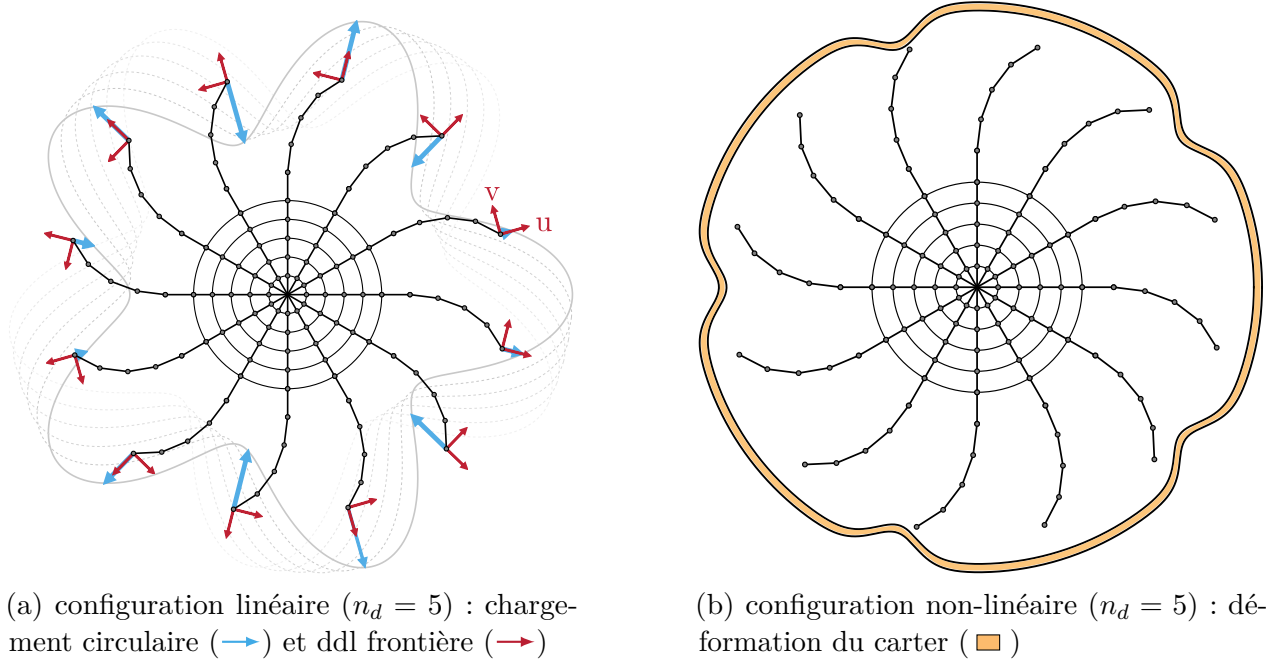


Figure 3.1 Modèle phénoménologique de roue aubagée, en 2D.

Les dimensions et propriétés du modèle sont résumées dans le tableau 3.1. Elles ont été choisies afin que la première famille modale, qui correspond à un premier mode d'aube en flexion (1F), se trouve à une fréquence proche de 90 Hz, soit du même ordre de grandeur que pour les soufflantes de moteurs d'avion. Un modèle similaire avait été utilisé dans le cas de simulations linéaires de contact dans [12] et [120], où la représentativité du modèle par rapport à une soufflante réelle avait été établie, particulièrement en configuration de contact.

### 3.1.1 Réduction modale

#### Construction

La méthode de réduction de Craig-Bampton [24] est utilisée afin de réduire les dimensions du modèle et limiter les coûts de calcul. Cette méthode permet de conserver des ddl mixtes

Tableau 3.1 Propriétés du modèle éléments finis.

paramètres géométriques		propriétés matériau	
nombre d'aubes	$N = 12$	module d'Young nominal	$E_0 = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
longueur des aubes	50 cm	masse volumique	$7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
rayon du disque	20 cm	taux d'amortissement	$5 \cdot 10^{-3}$
nombre de poutres par aube	5	coefficient de Poisson	0,3
coefficient de courbure	3/2		

modaux et physiques, appelés respectivement « internes » et « frontière ». En les définissant comme des ddl frontière lors de la réduction, les ddl  $(u, v)$  en bout d'aube, tels que représentés sur la figure 3.1a, sont conservés dans le modèle réduit afin d'être utilisés dans les simulations de contact. Ces  $2N = 24$  ddl frontière sont complétés par  $\eta$  ddl modaux afin de garantir la représentativité du système global vis-à-vis du modèle éléments finis initial complet. La matrice de réduction de Craig-Bampton (CB) est définie par (un rappel de sa construction dans l'annexe E) :

$$\Psi_{\text{CB}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_f} & \mathbf{0}_{n_f, \eta} \\ \Phi_s & \Phi_{e, \eta} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

avec :  $n_f$  le nombre de ddl frontière

$\mathbf{I}_{n_f} = \text{diag}_{n_f}(1)$  la matrice identité de dimension  $n_f$

$\Phi_s$  la matrice des modes statiques, de dimension  $(n_i, n_f)$

$n_i$  le nombre de ddl internes

$\Phi_{e, \eta}$  la matrice des modes encastrés réduits à  $\eta$  modes

Le changement de la base physique à la base réduite permet ainsi d'obtenir :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_f \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} = \Psi_{\text{CB}} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_f \\ \mathbf{p}_\eta \end{bmatrix} = \Psi_{\text{CB}} \mathbf{q}_r \quad (3.3)$$

avec :  $\mathbf{u}_i$  et  $\mathbf{u}_f$  les déplacements respectivement des ddl internes et frontière

$\mathbf{p}_\eta$  les amplitudes modales des ddl internes (3.4)

$\mathbf{q}_r$  le vecteur réduit des déplacements dans la base CB

Les matrices du système réduit, notées  $(\mathbf{K}_r, \mathbf{M}_r)$ , sont calculées à partir des matrices du système dans la base physique  $(\mathbf{K}, \mathbf{M})$  réorganisées en ddl frontière et internes :

$$\mathbf{K}_r = \Psi_{\text{CB}}^\top \mathbf{K} \Psi_{\text{CB}} \quad , \quad \mathbf{M}_r = \Psi_{\text{CB}}^\top \mathbf{M} \Psi_{\text{CB}} \quad (3.5)$$

## Validation sur le calcul des modes propres

Les valeurs propres et vecteurs propres du système réduit sont calculés par la résolution du problème aux valeurs propres généralisé du couple de matrices du système réduit ( $\mathbf{K}_r, \mathbf{M}_r$ ). Le diagramme fréquences/diamètres nodaux obtenu pour le système est présenté sur la figure 3.2a. Les résultats obtenus pour le modèle réduit, présentés pour  $\eta = 60$ , sont superposés aux résultats obtenus pour le modèle éléments finis complet. Le modèle réduit retranscrit donc fidèlement les vibrations libres du système. Les modes propres de la première famille correspondent à des modes d'aube en flexion simple (1F). Le calcul de la différence entre chaque mode (figure 3.2b) permet de montrer que cette famille modale se situe dans une plage de fréquence restreinte.

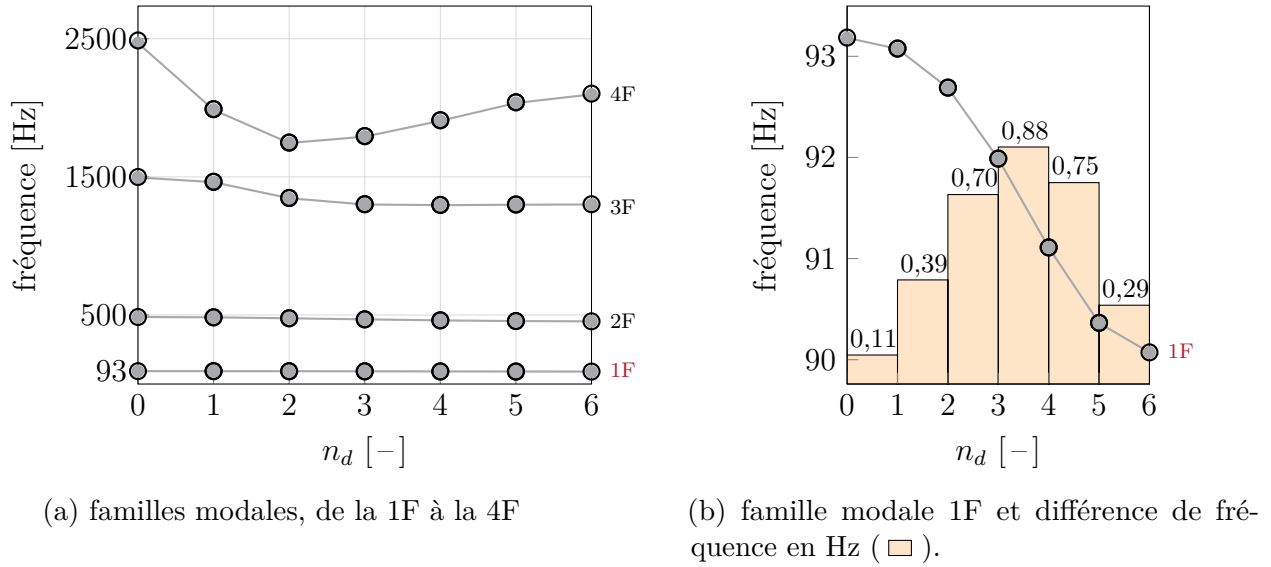


Figure 3.2 Diagramme fréquences/diamètres nodaux pour le modèle réduit avec  $\eta = 60$  (  $\circ$  ) et le modèle éléments finis complet (  $\bullet$  ).

### 3.1.2 Amortissement

L'amortissement est défini dans l'espace modal (4.4.3 de [67]) :

$$\Phi_r^T \mathbf{C} \Phi_r = 2\xi (\Lambda_r)^{\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

avec :  $\Phi_r$  les vecteurs propres du système réduit

$\Lambda_r$  la matrice diagonale des valeurs propres du système réduit

$\mathbf{C}$  la matrice d'amortissement

$\xi$  le taux d'amortissement, identique pour tous les modes

La matrice d'amortissement  $\mathbf{C}$  ainsi définie respecte la condition de symétrie (hypothèse 3 attachée à l'équation du mouvement, voir l'annexe A).

#### Hypothèse de faible amortissement

La fréquence naturelle du système est considérée égale à la fréquence des vibrations libres du système non amorti (3.1.2 de [49]).

Afin de se placer dans le cadre de l'hypothèse de faible amortissement définie dans l'encart ci-dessus, le taux d'amortissement est posé à  $5 \cdot 10^{-3}$ , comme donné dans le tableau 3.1.

### 3.1.3 Traitement du contact

#### Résolution numérique

Dans le cadre des petites perturbations, l'équation du mouvement a été établie dans le domaine temporel :

$$\mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}_r \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_r \mathbf{u} = \mathbf{F}(t) + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{u}, t) \quad (3.7)$$

avec :  $\mathbf{M}_r$ ,  $\mathbf{K}_r$  et  $\mathbf{D}_r$  les matrices de masse, amortissement et raideur du système réduit

$\mathbf{u}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$  et  $\ddot{\mathbf{u}}$  les vecteurs des déplacements généralisés, vitesses et accélérations

$\mathbf{F}$  et  $\mathbf{F}_{nl}$  les vecteurs de forçage linéaire et non-linéaire

L'intégration temporelle est réalisée grâce au schéma numérique explicite aux différences finies centrées, proposé par Carpenter *et al.* [37] et présenté dans la section 2.4.2. L'algorithme de prédiction/correction des déplacements est similaire à celui décrit dans [12]. Les déplacements prédits pour l'itération temporelle  $(i + 1)$ , notés  $\mathbf{u}_{i+1,p}$ , sont calculés avec l'équation (2.18). La rotation de la roue aubagée et ses vibrations sont prises en compte dans les déplacements

prédits. Le calcul du vecteur des distances aubes/carter  $\mathbf{d}$  permet alors de considérer le possible contact avec le carter. Les distances aubes/carter prédites négatives  $\mathbf{d}^-$  correspondent à une pénétration de l'aube dans le carter qui doit donc être contrée par l'ajout des forces de contact, calculées via le vecteur des multiplicateurs de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$  :

$$\boldsymbol{\lambda} = \left( \mathbf{C}_N^T \left[ \frac{\mathbf{M}_r}{h^2} + \frac{\mathbf{D}_r}{2h} \right]^{-1} (\mathbf{C}_N + \mathbf{C}_T) \right)^{-1} \mathbf{d}_{i+1}^- \quad (3.8)$$

avec :  $\mathbf{C}_N$  la matrice de contact normal, qui vaut  $\pm 1$  pour les ddl en contact et 0 sinon

$\mathbf{C}_T$  la matrice de contact tangentiel, qui vaut  $\pm \mu$  pour les ddl en contact et 0 sinon

où  $\mu$  est le coefficient de frottement entre les aubes et le carter

Le vecteur  $\boldsymbol{\lambda}$  ainsi défini est de dimension  $N$ . Le carter étant considéré rigide, la force de contact est entièrement restituée à l'aube. Le signe des éléments de  $\mathbf{C}_N$  et  $\mathbf{C}_T$  dépend du sens choisi pour l'orientation des ddl, le terme correctif  $\mathbf{u}_{i+1,c}$  sur les déplacement devant ramener la structure à une configuration où la pénétration est nulle. Ce terme correctif est calculé par :

$$\mathbf{u}_{i+1,c} = \left[ \frac{\mathbf{M}_r}{h^2} + \frac{\mathbf{D}_r}{2h} \right]^{-1} (\mathbf{C}_N + \mathbf{C}_T) \boldsymbol{\lambda} \quad (3.9)$$

Le déplacement effectif de la structure pour l'itération temporelle  $(i + 1)$  est alors :

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_{i+1,p} + \mathbf{u}_{i+1,c} \quad (3.10)$$

### Scénario de contact

Le contact est initié par la déformation d'un carter rigide entourant la roue aubagée et présentant des lobes de déformation. Le nombre de zones de contact privilégiées sur le carter est noté  $n_d$ . Ces  $n_d$  lobes sont répartis uniformément sur toute la circonférence du carter, comme représenté pour  $n_d = 5$  sur la figure 3.1b. Le carter, initialement circulaire, est déformé progressivement sur 0,01 s vers la configuration finale à  $n_d$  lobes. Il est à noter que ce temps de déformation ne correspond pas à un temps de déformation du fait de contraintes thermiques sur un carter réel, qui serait beaucoup plus long [119], mais est un paramètre numérique qui permet d'éviter toute pénétration initiale des aubes dans le carter. Un des lobes est représenté sur la figure 3.3. La variation maximale du rayon du carter du fait de ces lobes est appelée *amplitude maximale des déformations du carter* et est notée  $c_{rd}$ . La fonction utilisée pour

obtenir la forme des lobes est :

$$f(\theta) = -c_{rd} \exp \left( - \left( \frac{\theta}{0.1 \frac{2\pi}{n_d}} \right)^2 \right) \quad (3.11)$$

Comme montré sur la figure 3.3, le contact peut se produire lorsque  $c_{rd}$  est plus grand que le jeu aubes/carter initial, défini comme la différence entre le rayon du carter  $r_c$  et le rayon de la roue aubagée  $r_a$ . Le jeu initial est posé à 0,25 mm. La déformation maximale du carter est de  $c_{rd} = 1,25$  mm.

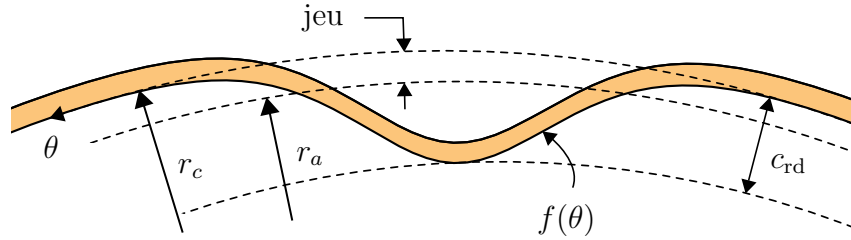


Figure 3.3 Lobe de déformation du carter.

### 3.1.4 Prise en compte du désaccordage

#### Implémentation

Étant donné l'absence de données expérimentales, le faible désaccordage étudié est considéré comme une variation au niveau du module d'Young [58] des aubes. Le module d'Young de chaque aube  $n$  est ainsi calculé par :

$$E_n = E_0 (1 + (\delta E)_n) \quad , \quad n \in [1, N] \quad (3.12)$$

avec :  $E_0$  le module d'Young nominal du système accordé

$E_n$  le module d'Young de l'aube  $n$

$(\delta E)_n$  la variation de module d'Young due au désaccordage, pour l'aube  $n$

Les variations  $(\delta E)_n$  pour chaque aube sont déterminées par un tirage aléatoire, définissant ainsi le motif de désaccordage sur l'ensemble de la roue aubagée. Comme vu dans la section 2.1.2,  $(\delta E)$  est usuellement tiré selon une fonction de répartition de Laplace-Gauss. D'un point de vue statistique cependant, une telle distribution conduit généralement à obtenir un grand

nombre de motifs proches du nominal accordé, puisque la densité de probabilité  $y$  est la plus grande (comme illustré sur la figure 2.8), et *a contrario* si aucune troncature n'est effectuée sur les bornes extérieures de la distribution certaines valeurs de  $(\delta E)_i$  peuvent sortir du niveau de désaccordage souhaité. Une distribution uniforme est, elle, intrinsèquement bornée, définie entre  $[-\delta E, +\delta E]$ , ce qui permet un contrôle accru de la déviation de paramètres effectivement appliquée sur la roue aubagée. De fait, une distribution uniforme entre  $[-\delta E, +\delta E]$  est préférée dans la présente recherche. L'écart-type adimensionné  $\sigma(\delta E)$  d'une telle distribution, utilisé pour le tracé des résultats de simulations de Monte Carlo [70, 90], est alors donné par (démonstration en Annexe C) :

$$\sigma(\delta E) = \frac{2\delta E}{\sqrt{12}} \quad (3.13)$$

La variation  $\delta E$  est posée entre 1 % et 4 % dans ce chapitre, si bien que  $\sigma(\delta E)$  varie entre 0,58 % to 2,31 %, ce qui correspond à des variations effectives identifiées pour des procédés de fabrication modernes [65]. Dans ce qui suit,  $\sigma(\delta E)$  est appelé *degré de désaccordage* et est noté simplement  $\sigma$ .

Afin d'illustrer chaque aspect de la méthodologie utilisée dans cette étude, un motif de désaccordage aléatoire est choisi tel que donné tableau 3.2. Son niveau de désaccordage est  $\sigma = 1,7\%$ .

Tableau 3.2 Motif de désaccordage sélectionné.

<b>module d'Young par aube (<math>\times 10^{11}</math> Pa)</b>											
$E_1$	2,0701	$E_2$	2,0627	$E_3$	2,0695	$E_4$	2,1683	$E_5$	2,0809	$E_6$	2,1421
$E_7$	2,1164	$E_8$	2,0166	$E_9$	2,1256	$E_{10}$	2,0328	$E_{11}$	2,0391	$E_{12}$	2,1193

## Modes propres

Les fréquences propres de la première famille (1F) du système désaccordé avec le motif renseigné dans le tableau 3.2 sont comparées aux fréquences propres du système accordé sur la figure 3.4a. Là où les fréquences sont doubles sur le système accordé comme attendu (voir le calcul des fréquences propres à la section 2.1.1), par exemple sur les modes numéro 2 et 3 qui correspondent au mode à 5 diamètres sur la figure 3.2b, le désaccordage induit une séparation des fréquences notable. L'allure du mode 11 donnée sur la figure 3.4b, qui correspond pour le cas accordé au mode à 0 diamètre, présente une rupture de symétrie et une localisation à certaines aubes des déformations sur le cas désaccordé. Ces observations sont en accord avec la littérature sur les vibrations libres des systèmes désaccordés [5, 23, 143].

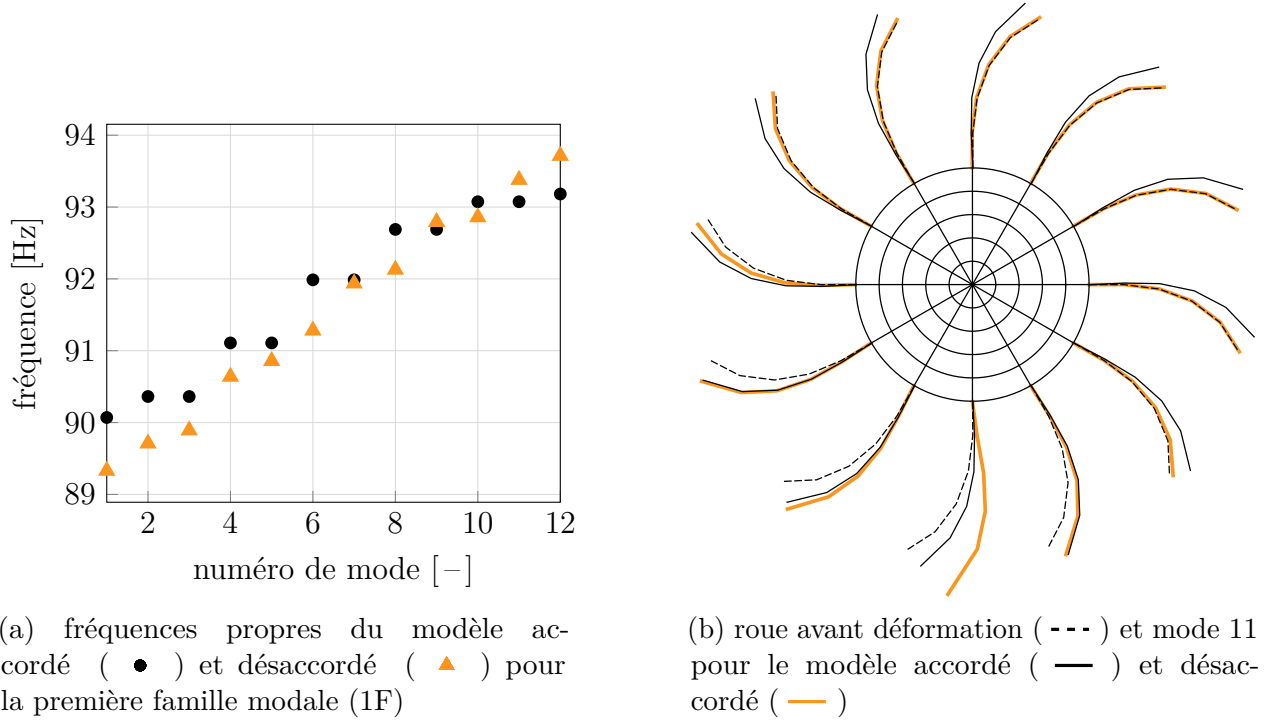


Figure 3.4 Incidence du désaccordage sur les modes propres, séparation des fréquences, rupture de symétrie et localisation.

### Analyse linéaire

Le forçage linéaire  $F_{\text{lin}}(\theta_n, t)$  considéré est une représentation simplifiée du forçage aérodynamique, dû dans les turbomoteurs réels à la variation de charge en amont de l'écoulement du fait de la présence de redresseurs. Il est défini sinusoïdal et tournant, et est appliqué uniquement aux degrés de liberté frontière conservés dans le modèle réduit, comme représenté sur la figure 3.1a, afin d'éviter toute erreur due à la procédure réduction modale. Sa norme est définie en fonction du temps par :

$$F(\theta_n, t) = F_{\text{max}} \cos((\theta_n - \Omega t) \times n_d) \quad (3.14)$$

avec :  $\theta_n$  la position angulaire de la  $n^{\text{ième}}$  aube

$\Omega$  la vitesse angulaire de rotation de la roue aubagée

$F_{\text{max}}$  l'amplitude du forçage

$n_d$  le nombre de redresseurs



Dans cette étude,  $F_{\max} = 150 \text{ N}$  afin que les déformations des aubes soient visibles mais toujours sous la condition de petites perturbations imposée par l'hypothèse 4 (explicitée dans l'annexe A) de l'équation du mouvement en notation matricielle (2.5). Par analogie avec les systèmes accordés, le paramètre  $n_d$  correspond ainsi au nombre de diamètres nodaux excités par le forçage. Sa notation a été choisie identique à celle utilisée dans l'expression de la forme des lobes sur le carter, donnée à l'équation (3.11), afin de faciliter les comparaisons ultérieures.

En considérant  $n_d = 4$ , les fonctions de réponse en fréquence (FRF) des modèles accordé et désaccordé selon le motif donné dans le tableau 3.2 sont tracées sur la figure 3.5. La plage de vitesses considérée correspond à la première résonance du modèle. La dispersion des fréquences  $\delta f$  due au désaccordage [53] est mise en évidence par la multiplicité des pics sur la réponse de la roue aubagée désaccordée. Les amplitudes de vibrations maximales sont également indiquées sur la figure 3.5. L'amplification due au désaccordage est définie comme le ratio entre l'amplitude maximale dans le cas accordé et celle dans le cas désaccordé. Pour toutes les roues aubagées désaccordées, l'amplitude retenue pour calculer l'amplification correspond au maximum à la fois sur toute la plage de fréquence d'intérêt, et sur toutes les aubes, en accord avec les considérations statistiques usuelles pour les systèmes désaccordés [32, 72]. Dans le cas présenté sur la figure 3.5, l'amplification due au désaccordage sur le système considéré est alors de 1,36. Dans le reste de ce travail de recherche, elle sera appelée *l'amplification linéaire* et notée  $A_{\text{lin}}$ .

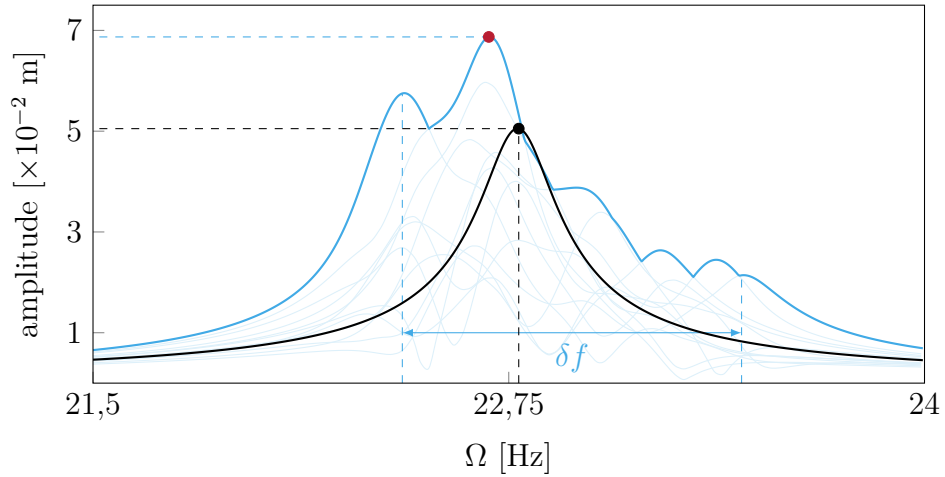


Figure 3.5 FRF linéaire pour  $n_d = 4$  des modèles accordé ( — ) et désaccordé ( — ), enveloppe des amplitudes obtenues pour chaque aube ( — ).

## Analyse stochastique

La sensibilité au désaccordage d'une roue aubagée est déterminée par analyse stochastique sur un grand nombre de modèles désaccordés, ou *échantillons* dans un vocabulaire statistique. La convergence stochastique des résultats, définie par la stabilisation des valeurs calculées pour les centiles à mesure que le nombre d'échantillons simulés augmente, est typiquement atteinte à partir de plusieurs milliers d'échantillons par niveau de désaccordage  $\sigma$  [23]. Pour le modèle phénoménologique utilisé, les résultats des simulations de Monte Carlo pour un forçage dans la plage de fréquences de la première famille modale (1F) sont présentés sur la figure 3.6 pour  $n_d = 1$  à 6 et  $\sigma \in [0, 2,3]$  %. La convergence stochastique a été obtenue pour 10 000 échantillons par point  $(n_d, \sigma)$ , si bien que l'ensemble de la nappe a été obtenue avec 240 000 échantillons. Les trois courbes représentées pour chaque valeur de  $n_d$  (voir pour  $n_d = 4$  sur la figure 3.6b) sont les centiles à 1 %, 50 % et 99 % calculés sur l'amplification  $A_{lin}$ . Elles permettent de résumer le comportement statistique de l'ensemble des résultats stochastiques collectés.

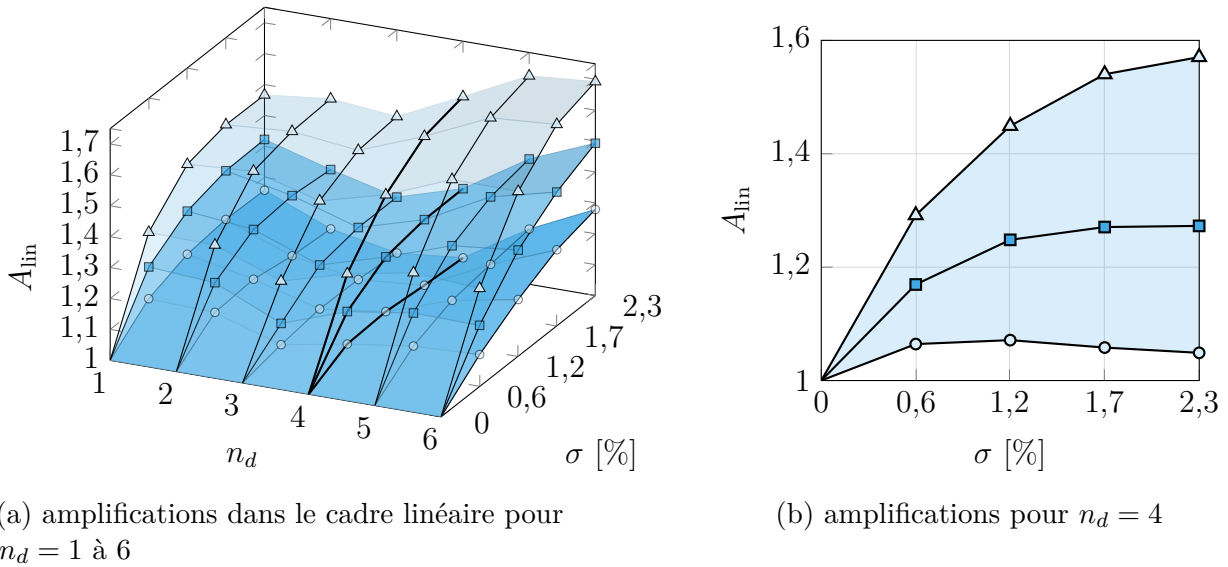


Figure 3.6 Amplifications prédites pour un forçage dans la plage de fréquences de la première famille modale (1F) : centile 1 (—○—), centile 50 (—■—) et centile 99 (—△—).

Les simulations de Monte Carlo pour différentes valeurs de  $n_d$ , dont les résultats sont présentés sur la figure 3.6a, permettent de caractériser la sensibilité de  $A_{lin}$  selon  $n_d$ . Il apparaît que  $A_{lin}$  est maximale pour  $n_d = 6$  et minimale pour  $n_d = 3$ , et ne varie pas de façon monotone selon  $n_d$ , en accord avec la littérature [63]. De plus, l'allure générale de la nappe suivie par  $A_{lin}$  lorsque  $n_d$  varie présente un bon accord avec de précédents travaux sur des modèles à 12

aubes [144]. Enfin, l'ordre de grandeur des amplifications en contexte linéaire  $A_{\text{lin}}$  est similaire aux valeurs trouvées dans la littérature [32, 90].

Ces résultats permettent de valider la représentativité du modèle par rapport au désaccordage en configuration linéaire. Ce modèle phénoménologique est de fait utilisé dans le cadre des simulations de contact sur des systèmes désaccordés, présentées dans ce qui suit.

## 3.2 Analyse pour une roue aubagée désaccordée

Dans cette section, la méthodologie proposée pour les simulations avec non-linéarités de contact est appliquée sur le système dont le motif de désaccordage est donné dans le tableau 3.2. Les paramètres clefs et les quantités d'intérêt pour l'analyse stochastique sont présentés. Comme les procédures numériques ayant trait aux phénomènes de contact ont déjà été validées dans la littérature sur un modèle similaire [121, 124, 145], l'emphasis est ici mise sur : (1) la convergence des simulations par rapport au paramètre de réduction  $\eta$  et au pas de temps  $h$  ; (2) la robustesse des résultats obtenus par rapport aux différents paramètres du modèle.

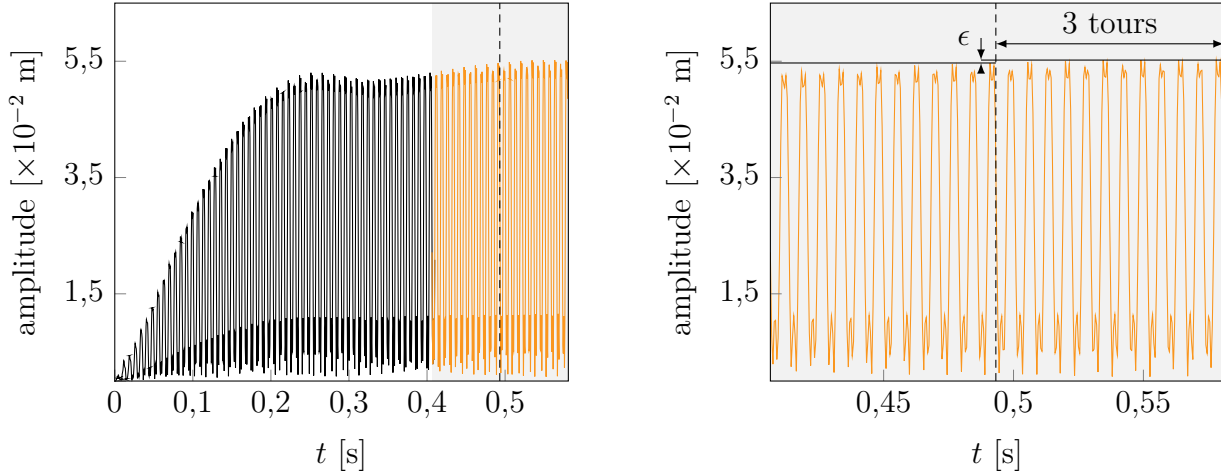
### 3.2.1 Simulations de contact

Les simulations de contact sont réalisées à vitesse angulaire constante sur l'ensemble de la simulation, avec un carter déformé comme indiqué sur la figure 3.1b. Afin de garantir les résultats en réponse forcée, il convient de s'assurer que le système atteint un régime permanent. Les réponses temporelles sont ainsi analysées par autocorrélation sur le déplacement tangentiel de l'aube ayant la plus grande amplitude de vibration, selon les étapes suivantes :

- (1) lancement des simulations sur 0,5 s
- (2) analyse de convergence entre les 3 derniers tours et les 3 tours précédents (figure 3.7), à travers :
  - le coefficient de corrélation  $c_{\text{cor}}$  sur le déplacement tangentiel de l'aube ayant la plus grande amplitude de vibration, et
  - l'erreur relative  $\epsilon$  entre le maximum d'amplitude calculé sur les deux parties du signal
- (3) **si**  $c_{\text{cor}} < 95 \%$  et  $\epsilon < 1 \%$  : arrêt des simulations

**sinon** les simulations sont relancées sur 10 tours, retour au point (2)

Le choix de valeurs adéquates pour  $(c_{\text{cor}}, \epsilon)$  a été validé pour tous les diamètres nodaux, sur le système accordé et des systèmes désaccordés, afin de garantir le meilleur compromis entre la précision des résultats et le temps de simulations. En moyenne, le régime permanent est considéré atteint pour  $t \geq 0,96$  s.



(a) réponse sur l'ensemble de la simulation ( — ) et plage d'intérêt pour la détection du régime permanent ( — )

(b) 6 derniers tours de la simulation

Figure 3.7 Réponse temporelle obtenue pour  $\Omega = 34,45$  Hz et  $n_d = 4$ .

### 3.2.2 Cartes d'interaction

Les simulations de contact sont tout d'abord lancées sur une large plage de vitesses de rotation (de 10 Hz à 80 Hz) sur les modèles accordé et désaccordé, pour  $n_d = 4$ , afin d'appréhender au mieux leur comportement vibratoire. Pour chaque simulation, une transformée de Fourier est effectuée sur le signal périodique, une fois le régime permanent atteint. Les spectres ainsi obtenus constituent les cartes d'interaction des systèmes considérés, tracées sur la figure 3.8.

La carte d'interaction pour le modèle accordé tracée sur la figure 3.8a permet de montrer que l'amplitude maximale de vibration est obtenue autour des vitesses de rotation  $\Omega = 34,45$  Hz et  $\Omega = 69$  Hz. Ces interactions correspondent respectivement à l'excitation de la première famille modale (1F) de la roue aubagée par les quatrième ( $e_o = 4$ ) et second ( $e_o = 2$ ) régimes moteur ( $e_o$  pour l'anglais *engine order*). Elles apparaissent cependant à des fréquences supérieures à celles de la première famille modale, comme indiqué par l'écart en fréquence noté  $\Delta_{1F}$  sur la figure 3.8a, du fait du phénomène de raidissement au contact, ce qui est en accord avec la littérature [17]. Les fréquences de résonance non-linéaires sont ainsi supérieures de 51,2 % aux fréquences linéaires correspondantes. Pour comparaison, sur les modèles éléments finis 3D à haute fidélité, le raidissement au contact augmente usuellement de 10 à 15 % les fréquences de résonance. Des observations similaires peuvent être effectuées sur la carte d'interaction de la roue aubagée désaccordée sur la figure 3.8b. L'influence du désaccordage y est notable : chaque zone d'interaction y est significativement élargie, comme indiqué par la dispersion des

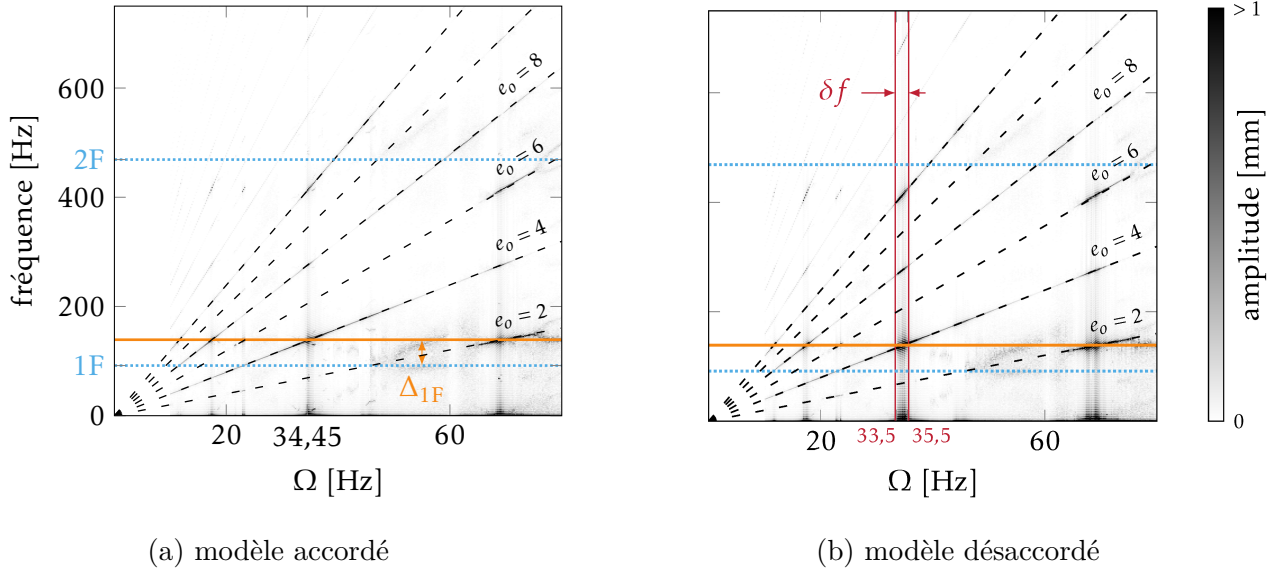


Figure 3.8 Cartes d'interaction pour  $n_d = 4$ , régimes moteur (---) et fréquences d'interaction dans le cas d'un forçage linéaire (.....) et de non-linéarité de contact (—).

fréquences notée  $\delta f$  sur la figure 3.8b, du fait de phénomène de séparation des fréquences [53].

Ces cartes permettent de définir les plages de vitesses angulaires d'intérêt pour l'étude d'interactions entre les familles modales et les régimes moteur. Dans cette recherche, l'emphasis a été mise sur l'interaction entre la famille modale 1F et le quatrième régime moteur  $e_o = 4$ . Les motifs désaccordés étant tous différents, la dispersion des fréquences  $\delta f$  s'en trouve modifiée d'un motif à l'autre. La plage de vitesse d'intérêt, permettant de capter l'amplitude maximale de vibration, a ainsi été déterminée stochastiquement. Pour  $n_d = 4$  par exemple, une plage  $\Omega \in [33,5; 35,5]$  Hz permet de capter le pic de réponse forcée souhaité pour tous les motifs simulés.

Les vitesses angulaires permettant de traverser l'interaction choisie dépendent également du nombre de lobes  $n_d$  sur le carter. Les plages de vitesses d'intérêt, résumées dans le tableau 3.3, ont été choisies afin de toujours correspondre à l'interaction entre la première famille modale 1F et le quatrième régime moteur, et d'être assez larges pour permettre de détecter le pic souhaité même pour les plus grandes valeurs de désaccordage.

Tableau 3.3 Plage de vitesse angulaire d'intérêt, déterminée stochastiquement sur les roues aubagées désaccordées

$n_d$	3	4	5	6
<b>plage de vitesse angulaire [Hz]</b>	[44,5 ; 47,5]	[33,5 ; 35,5]	[26,7 ; 28,2]	[22 ; 23]

### 3.2.3 Fonctions de réponse en fréquence non-linéaire

#### Définition et quantités d'intérêt

Sur base des plages de vitesses angulaires identifiées précédemment, les simulations de contact sont lancées avec un pas en vitesse  $\delta\Omega = 0,05$  Hz. Pour chaque vitesse de rotation, l'amplitude du régime permanent est extraite. Le tracé de ces amplitudes vis-à-vis de la vitesse de rotation permet de définir la FRF non-linéaire. Les FRF pour le modèle de roue aubagée accordée et pour le modèle de roue aubagée désaccordée dont le motif est donné dans le tableau 3.2 sont tracées sur la figure 3.9. La dispersion des fréquences  $\delta f$  due au désaccordage y est clairement indiquée, augmentant la plage de vitesse sur laquelle de hautes amplitudes de vibration sont susceptibles d'être rencontrées.

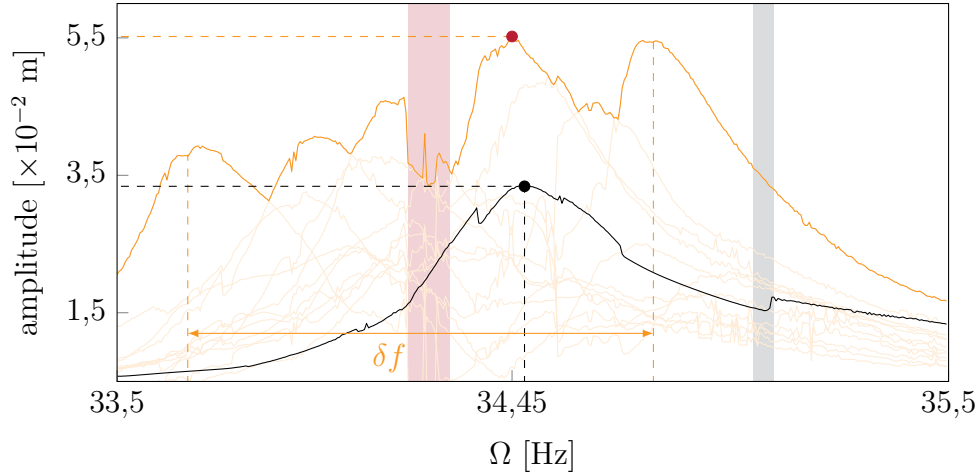


Figure 3.9 FRF dans un cas de contact pour  $n_d = 4$  des modèles accordée ( — ) et désaccordée ( — ), enveloppe des amplitudes obtenues pour chaque aube ( — ).

Pour chaque motif de désaccordage, la quantité d'intérêt pour les études stochastiques est l'amplitude maximale sur l'ensemble de la plage de fréquences, comme défini dans le cadre des vibrations linéaires [32]. Le ratio entre l'amplitude maximale dans le cas accordé, rencontrée à  $\Omega = 34.45$  Hz, et l'amplitude maximale désaccordée permet de définir *l'amplification non-linéaire*, notée par la suite  $A_{nl}$ .

#### Commentaires sur la robustesse de la procédure

La nature intrinsèquement non-linéaire des systèmes mécaniques étudiés impose de prêter une attention particulière aux FRF obtenues. En effet, il est possible que les contraintes imposées par le contact unilatéral induisent un comportement dynamique complexe, présentant

plusieurs branches stables et bifurcations [146]. La FRF montrée sur la figure 3.9 suggère en effet de tels comportements, comme indiqué par les changements soudains d'amplitudes de vibration pour le modèle désaccordé (aire rouge) et le modèle accordé (aire grise). Une analyse approfondie de ces sauts pour différents motifs de désaccordage révèle qu'ils ne sont jamais situés au niveau du maximum d'amplitude sur la plage considérée, et n'impactent donc pas la détection du maximum d'amplitude sur la FRF.

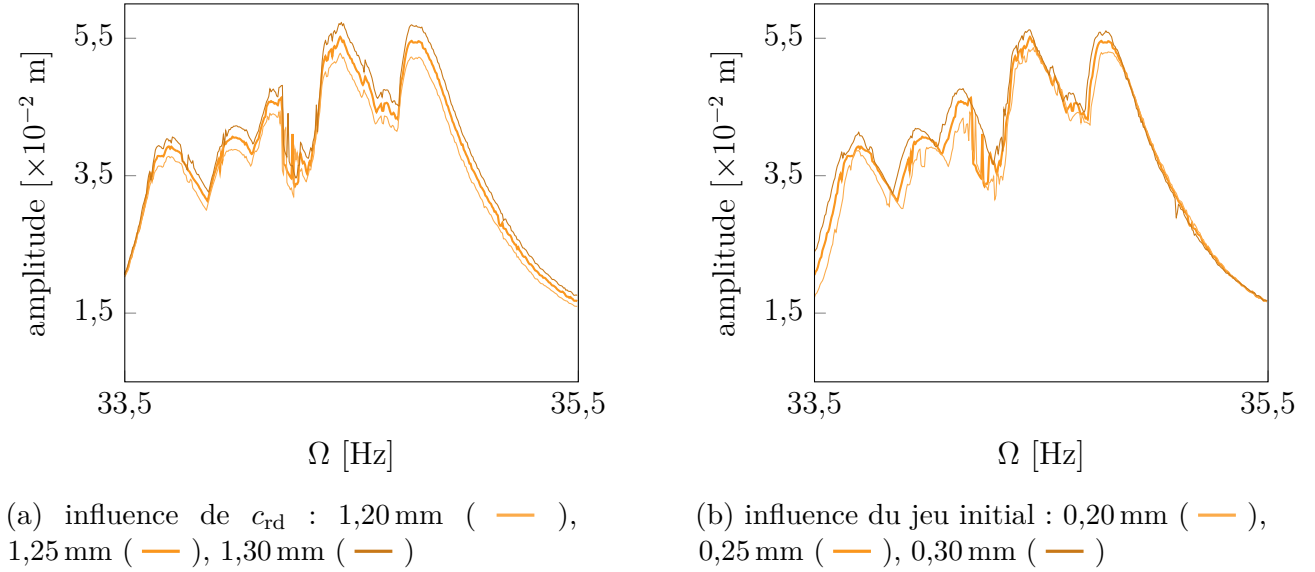


Figure 3.10 FRF pour différents paramètres de simulation.

Finalement, la robustesse des FRF obtenues vis-à-vis de paramètres clefs de la simulation, comme l'amplitude maximale de la déformation du carter ou le jeu initial, a été étudiée. Les FRF obtenues pour des valeurs proches de ces paramètres sont superposées sur la figure 3.10. Le fait que les FRF sont simplement légèrement décalées pour de faibles variations de ces paramètres démontre la robustesse des résultats obtenus.

### 3.2.4 Convergence temporelle et spatiale

Afin de souligner la convergence des résultats vis-à-vis du pas de temps  $h$  de la procédure d'intégration temporelle, les FRF non-linéaires obtenues pour différents pas de temps ( $h = 5 \cdot 10^{-7}$  s à  $h = 5 \cdot 10^{-5}$  s) sont tracées sur la figure 3.11a. Une portion des réponses temporelles calculées pour  $\Omega = 34,45$  Hz est montrée sur la figure 3.11b. Les FRF obtenues pour toutes les valeurs de  $h < 5 \cdot 10^{-5}$  s sont quasiment parfaitement superposées. Cependant, il y a une plage de vitesses sur laquelle des différences sont notables, à savoir pour  $\Omega \in [34,2 ; 34,3]$  Hz. Sur cette plage restreinte, précédemment identifiée sur la figure 3.9 comme une plage de variation

soudaine des amplitudes de vibration, la procédure d'intégration temporelle présente deux types de solutions suivant la valeur de  $h$ . Cette observation suggère la co-existence de deux branches stables de solution. Il est alors probable qu'une petite variation dans la détection du premier contact aube/carter, due à la variation de  $h$ , soit responsable de ce comportement. De fait, des branches de solutions stables co-existantes ont déjà été observées pour des modèles 3D construits par éléments finis dans des configurations de contact similaires [147]. Plus de détails sur ce point seront donnés dans les analyses complémentaires en fin de chapitre. Pour la suite, le pas de temps considéré pour les simulations est  $h = 10^{-6}$  s.

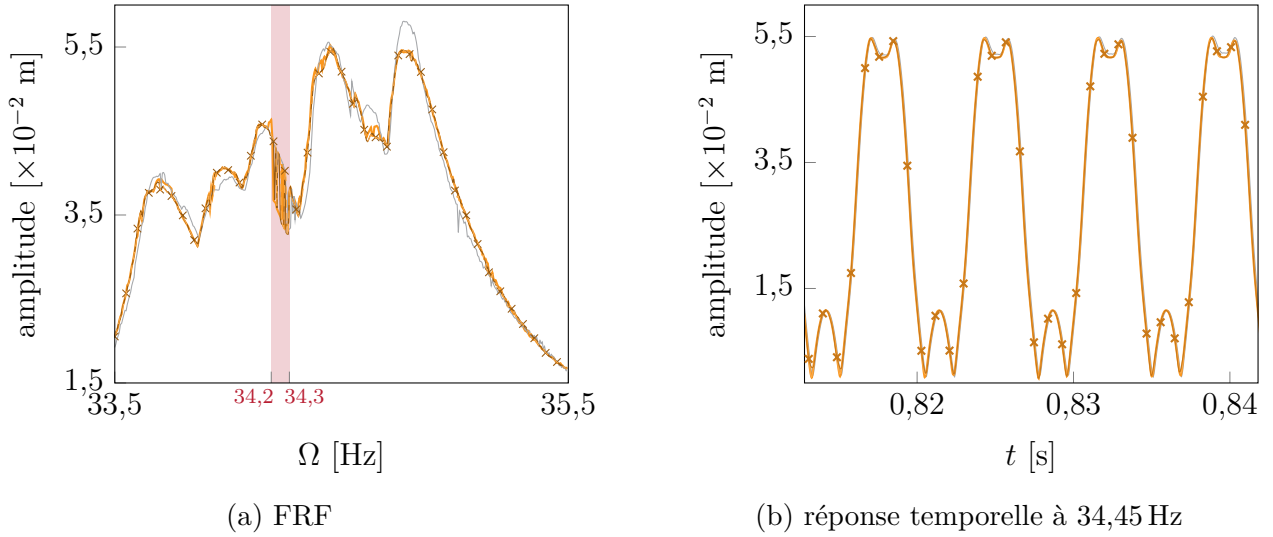


Figure 3.11 Convergence temporelle pour  $n_d = 4$  :  $h = 5 \cdot 10^{-5}$  s ( — ),  $h = 5 \cdot 10^{-6}$  s ( — ),  $h = 1 \cdot 10^{-6}$  s ( — ) and  $h = 5 \cdot 10^{-7}$  s ( — ).

Le paramètre de réduction  $\eta$  du modèle réduit est un autre paramètre numérique clef par rapport auquel la convergence des résultats doit être établie. La FRF obtenue pour les différentes valeurs de  $\eta$  sont tracées sur la figure 3.12a. Ces FRF sont quasiment parfaitement superposées pour  $\eta \geq 36$ . La réponse temporelle, tracée sur la figure 3.12b, montre que les résultats correspondent parfaitement pour ces valeurs de  $\eta$ . Par la suite, la valeur  $\eta = 60$  a été considérée si bien que le modèle réduit contient un total de 84 ddl : 24 ddl de frontière physique pour la prise en compte du contact et 60 ddl modaux afin de garantir une description dynamique fidèle de la roue aubagée. Cette valeur de  $\eta$  est cohérente avec des valeurs précédemment considérées pour des modèles phénoménologiques équivalents [148].



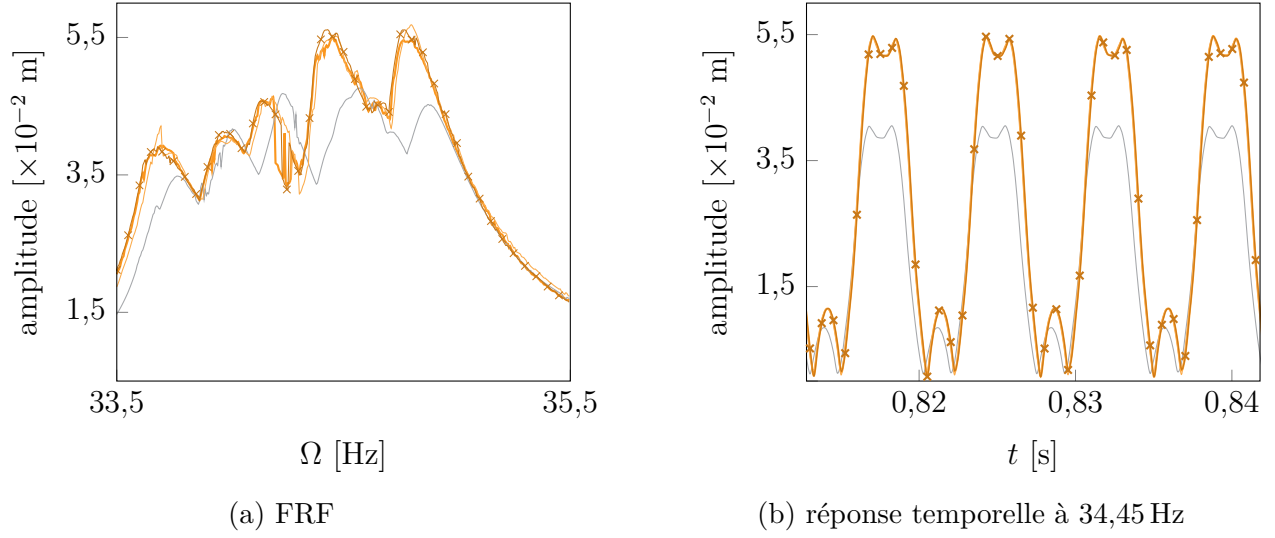


Figure 3.12 Convergence spatiale pour  $n_d = 4$  :  $\eta = 12$  ( — ),  $\eta = 36$  ( — ),  $\eta = 60$  ( — ),  $\eta = 96$  ( —x— ).

### 3.3 Analyse de calculs stochastiques

Les résultats stochastiques d'amplifications des vibrations dues au désaccordage dans le cadre de simulations de contact sont présentés et discutés dans cette section. Les paramètres pour les simulations de contact sont rappelés dans le tableau 3.4. Tout d'abord, la convergence stochastique des résultats est soigneusement évaluée aussi bien qualitativement que quantitativement. Ensuite, les amplifications linéaires et non-linéaires prédites sont comparées pour différentes valeurs de  $n_d$  et pour différents niveaux de désaccordage  $\sigma$ . En particulier, une sous-section est dédiée à des résultats approfondis pour la configuration  $n_d = 4$ , avec une analyse croisée basée sur tous les motifs de désaccordage utilisés dans les simulations de contact. Finalement, l'influence de l'amortissement structural sur les amplifications prédites est étudiée.

Tableau 3.4 Paramètres pour les simulations de contact.

paramètres numériques		paramètres du carter	
pas temporel	$h = 10^{-6}$ sec	jeu initial	0,25 mm
paramètre de réduction	$\eta = 60$	amplitude maximale des déformations	1,25 mm
		coefficient de frottement	0,15

### 3.3.1 Convergence

Du fait de la nature non-linéaire de chaque simulation de contact, il n'existe pas de données empiriques sur le nombre d'échantillons requis afin d'atteindre la convergence stochastique des simulations de Monte Carlo. D'une part, la convergence stochastique est un pré-requis afin que les résultats présentés soient considérés pertinents. D'autre part, le calcul d'une FRF non-linéaire requise pour chaque échantillon prend de l'ordre d'une heure de calcul sur un ordinateur standard équipé d'un processeur i7. Ce coût en temps de calcul important rend le nombre d'échantillons habituellement considérés dans le cadre linéaire [23] — pour des calculs donc bien moins coûteux — difficilement atteignable. De fait, la convergence des résultats est ici soigneusement évaluée à la fois qualitativement et quantitativement.

#### Évaluation qualitative

La convergence qualitative des simulations stochastiques est évaluée à travers la stabilisation de la moyenne de l'amplification obtenue par rapport au nombre d'échantillons, calculée pour chaque centile et chaque niveau de désaccordage  $\sigma$ , comme tracé sur la figure 3.13. Une échelle semi-logarithmique est utilisée afin que toute variation soit clairement mise en évidence, ce qui évite de sur-estimer la convergence des résultats. Qualitativement, les courbes se stabilisent rapidement, si bien que la convergence est considérée atteinte à partir de 2000 échantillons par niveau de désaccordage pour  $n_d = 6$ , 3000 échantillons pour  $n_d = 3$  et 5, et 4000 échantillons pour  $n_d = 4$ .

#### Évaluation quantitative

La convergence quantitative est évaluée en appliquant la loi des grands nombres [149] et le théorème central limite [149] sur le calcul de l'erreur type sur la moyenne des amplifications. L'erreur type sur la moyenne est définie par :

$$\sqrt{\frac{V(c_s)}{s}} \quad (3.15)$$

avec :  $c_s$  les valeurs des centiles pour les  $s$  échantillons

$V$  la variance

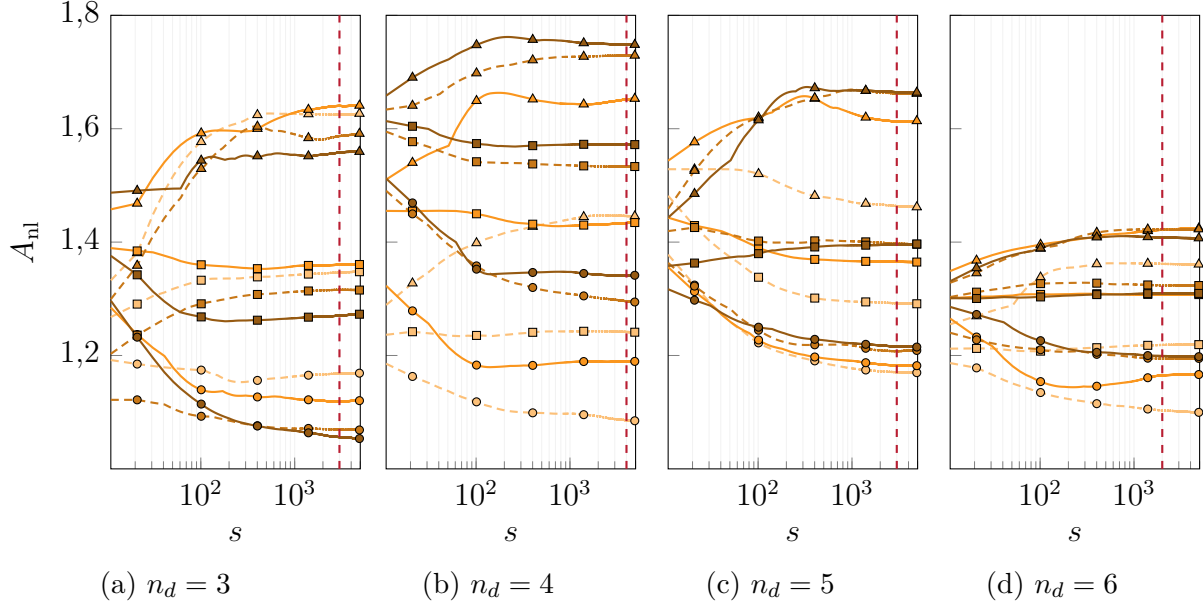


Figure 3.13 Convergence qualitative sur les centiles 1 (  $\circ$  ), 50 (  $\square$  ) et 99 (  $\Delta$  ) pour  $\sigma = 0,6\%$  (  $---$  ),  $1,2\%$  (  $—$  ),  $1,7\%$  (  $---$  ) et  $2,3\%$  (  $—$  ).

L'erreur sur la convergence est alors définie comme suit :

$$e(c_s) = Z \sqrt{\frac{V(c_s)}{s}} \quad (3.16)$$

avec :  $Z$  le coefficient de confiance

Le coefficient de confiance est déterminé selon la probabilité que l'ensemble des échantillons se situent à l'intérieur d'une loi normale. Plusieurs tables existent, en fonction de la troncature effectuée sur les bords de la loi normale. Afin d'éviter de tels effets de bord, la table considérée dans ce qui suit correspond à la surface à droite de la loi normale (*right-hand side standard normal Z-table*), soit la probabilité que les échantillons se situent entre la moyenne de la loi normale et le niveau de confiance voulu. Usuellement, les valeurs de niveaux de confiance utilisés sont 95 %, 99 % et 99,5 % [149], sur l'ensemble de la loi normale. Dans ce qui suit, un niveau de confiance de 99,5 % est pris pour assurer une haute précision de résultats. Le coefficient de confiance est alors :  $Z = 2,81$ <sup>1</sup>. La variance est estimée à travers son estimateur

1. un niveau de confiance de 0,995 sur l'ensemble de la loi normale correspond à un niveau de confiance de 0,4975 sur la surface à droite (en anglais, *right hand side*). La table correspondante peut être trouvée sur [http://college.cengage.com/mathematics/brase/understanding\\_basic/3e/students/appendix/app\\_andm.pdf](http://college.cengage.com/mathematics/brase/understanding_basic/3e/students/appendix/app_andm.pdf)

statistique non biaisé (*unbiased estimator*) [149] :

$$V(c_s) = \frac{1}{s-1} \sum_{i=1}^s |c_i - \bar{c}_s|^2 \quad (3.17)$$

avec :  $c_i$  la valeur du centile considéré pour  $i$  échantillons

$\bar{c}_s$  la moyenne de  $c_s$

L'erreur de convergence ainsi définie ne dépend avantageusement pas de la moyenne des valeurs des échantillons. Les erreurs de convergence en fonction du nombre d'échantillons pour différents nombres de lobes  $n_d$  sur le carter sont tracées sur la figure 3.14, avec un pas de 10 échantillons pour le calcul des centiles. Les résultats sont considérés convergés pour une  $e(c_s) < 0,5\%$ <sup>2</sup>. Les simulations de Monte Carlo pour  $n_d = 6$  sont les plus rapides à atteindre ce critère de convergence, soit pour un minimum de 500 échantillons par niveau de désaccordage. Les simulations à  $n_d = 3$  sont les plus lentes à atteindre cette convergence et requièrent un minimum de 2000 échantillons. La convergence est notablement plus rapide sur le centile 50, ce qui est cohérent avec la littérature [23].

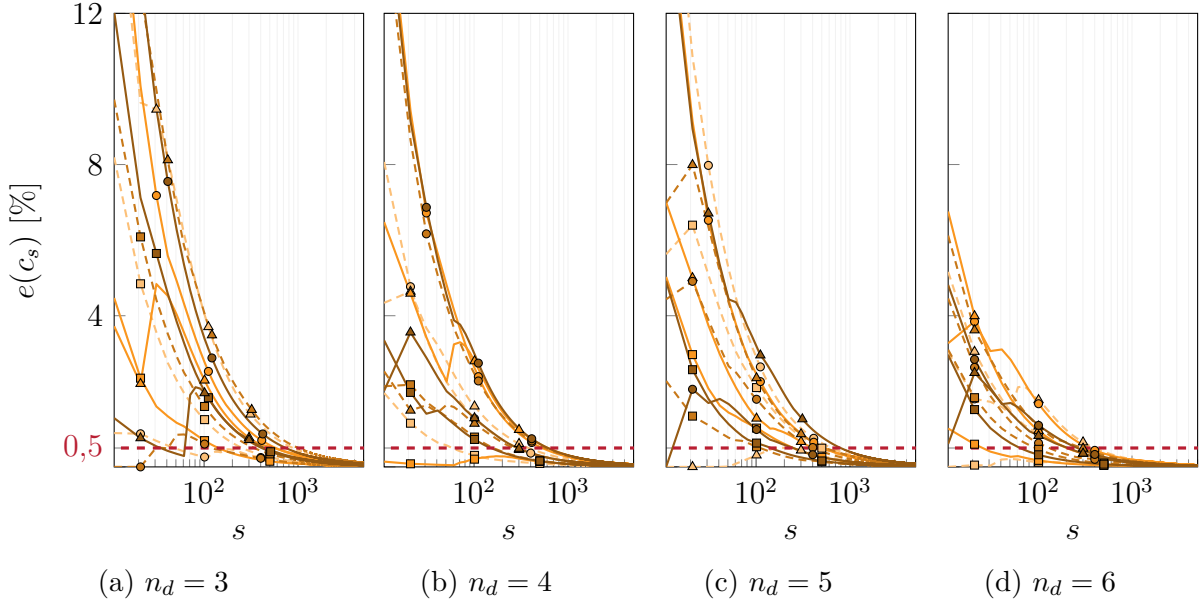


Figure 3.14 Convergence quantitative sur les centiles 1 (  $\circ$  ), 50 (  $\square$  ) et 99 (  $\Delta$  ) pour  $\sigma = 0,6\%$  (  $---$  ),  $1,2\%$  (  $—$  ),  $1,7\%$  (  $---$  ) et  $2,3\%$  (  $—$  ).

2. la valeur de l'erreur est indépendante de celui du niveau de confiance choisi : une erreur  $< 0,5\%$  aurait également pu être considérée pour un niveau de confiance de  $95\%$ .

## Bilan

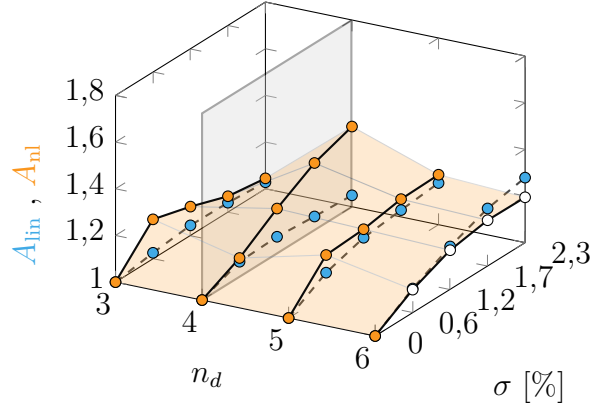
Les analyses de convergence quantitative et qualitative menées sur les simulations stochastiques montrent que, en considérant toutes les configurations  $(n_d, \sigma)$ , 4000 échantillons par niveau de désaccordage sont nécessaires pour atteindre la convergence des résultats. Or, la littérature sur l'étude stochastique du désaccordage en configuration linéaire préconise 10 000 échantillons afin de garantir la convergence des résultats [23], ce qui avait été confirmé sur le modèle phénoménologique étudié et dont les résultats ont été présentés dans la section 3.1.4. Les contraintes de contact imposées sur le système pourraient être à l'origine de cette convergence stochastique plus rapide des résultats pour les simulations de contact par rapport aux simulations linéaires. En effet, la vibration de l'aube est restreinte par la présence du carter rigide, notamment le déroulement de l'aube est fortement limité, alors que dans le cas linéaire l'aube peut vibrer sans restriction externe sur ses déplacements en bout d'aube. Afin de garantir la convergence des résultats pour toutes les configurations  $(n_d, \sigma)$ , 5000 échantillons ont été considérés par configuration.

### 3.3.2 Amplification des vibrations

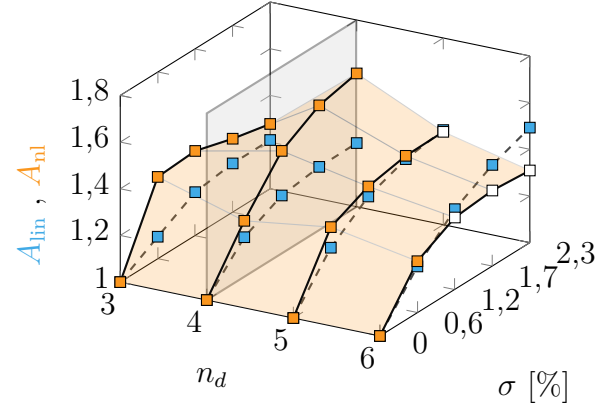
#### Comparaison avec les résultats dans le cadre linéaire

Les amplifications dues au désaccordage en configurations linéaire et non-linéaire (notées respectivement  $A_{lin}$  et  $A_{nl}$ ) pour différents  $n_d$  et  $\sigma$  sont tracées sur la figure 3.15. Les paramètres de simulation  $n_d$  et  $\sigma$  ont une influence majeure sur l'amplification, quelle que soit la configuration considérée. En effet, les amplifications  $A_{nl}$  sont dans la majorité des cas ( $n_d = 3, 4$  et  $5$ ) largement supérieures à  $A_{lin}$ , cependant le constat est inverse pour  $n_d = 6$ . Par rapport au niveau de désaccordage  $\sigma$ , l'écart entre  $A_{lin}$  et  $A_{nl}$  est maximal pour les plus petites valeurs de  $\sigma$  pour  $n_d = 3$  et  $5$ , alors qu'il croît de façon monotone avec  $\sigma$  pour  $n_d = 4$  and  $6$ . Ces tendances sont identiques pour tous les centiles considérés.

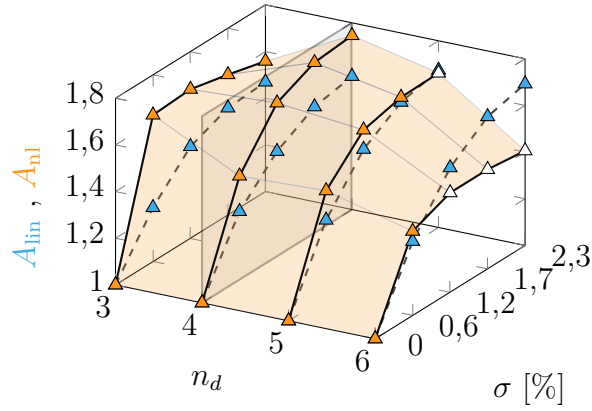
Les amplifications  $A_{nl}$  en configuration non-linéaires sont maximales pour  $n_d = 4$ . Les amplifications  $A_{nl}$  et  $A_{lin}$  sont tracées dans cette configuration pour tous les centiles sur la figure 3.15c. Le centile 50 de  $A_{nl}$  est quasiment superposé au centile 99 de  $A_{lin}$ , allant même jusqu'à le dépasser pour  $\sigma = 2,3\%$ . En d'autres termes, quel que soit le motif de désaccordage considéré, il y a stochastiquement environ un risque sur deux que l'amplification en forçage non-linéaire soit supérieure à l'amplification en forçage linéaire. Ces résultats suggèrent une bien plus grande sensibilité du modèle au désaccordage lorsque des contacts aubes/carter se produisent. Le maximum d'amplification, à  $57\%$  pour le centile 99 dans le cadre linéaire ( $A_{lin} = 1,57$ ), est en effet augmenté significativement dans le cas de contacts structurels pour



(a) centile 1



(b) centile 50



(c) centile 99

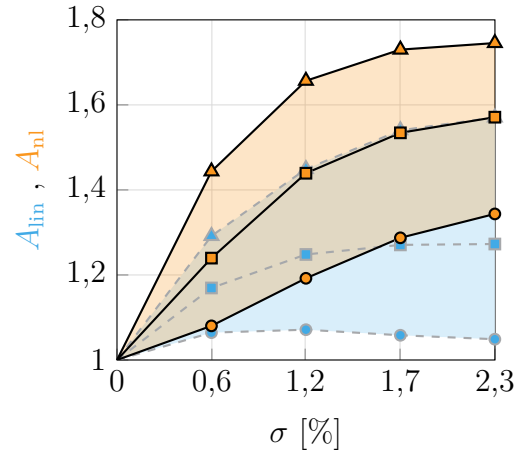
(d) tous les centiles for  $n_d = 4$ 

Figure 3.15 Amplifications non-linéaires (  $\square$  ) et linéaires (  $\square$  ) pour différents  $n_d$ , avec les centiles 1 (  $\circ$  ), 50 (  $\square$  ) et 99 (  $\triangle$  ).

atteindre 75 % pour le centile 99 ( $A_{nl} = 1,75$ ).

Ces résultats montrent également que les prédictions numériques effectuées sur le comportement vibratoire d'une roue aubagée accordée soumise à des contacts structurels sont robustes lorsqu'un désaccordage faible est pris en compte. Ainsi, les interactions identifiées pour une roue accordée restent valables pour des roues désaccordées, avec des amplitudes de vibration potentiellement bien plus élevées.

### Analyse en déplacements

Les variations obtenues sur l'amplification linéaire  $A_{lin}$  par rapport à  $n_d$  avaient déjà été validées par rapport à la littérature dans la section 3.1.4. Deux explications sont principalement proposées afin de les expliquer : (1) la fréquence de forçage pourrait correspondre à une zone de pincement des modes propres accordés correspondants [63, 150] ou ; (2) la fréquence de forçage pourrait exciter des modes d'aubes proches en fréquences, identifiés sur le système accordé [144]. Comme mis en évidence sur le diagramme fréquences/diamètres nodaux sur la figure 3.2, le modèle proposé ne présente pas de zone de pincement autour des fréquences de la famille modale 1F, excité par la fréquence de sollicitation. Cependant, cette famille est bien composée de modes d'aubes dont les fréquences sont dans une plage resserrée, si bien que la seconde explication est privilégiée pour expliquer l'allure de  $A_{lin}$  par rapport à  $n_d$ .

L'influence de  $n_d$  sur les amplifications en contexte non-linéaire  $A_{nl}$  n'a pas encore été discutée dans la littérature. Afin d'apporter des explications aux observations de la section précédente sur les amplifications, les amplitudes de vibration sont tracées sur la figure 3.16. Les amplitudes données pour les roues aubagées désaccordées à différents niveaux de désaccordage  $\sigma$  correspondent à celles du 99<sup>ième</sup> centile, obtenu sur les résultats stochastiques. Pour tous les niveaux de désaccordage  $\sigma$ , les amplitudes de vibration sont visiblement largement augmentées par rapport au cas accordé. Cependant, pour les cas  $n_d = 3$  et  $n_d = 6$ , qui connaissent l'amplitude maximale accordée la plus grande, les amplitudes de vibration en prenant en compte le désaccordage sont resserrées dans une plage très restreinte autour de 65 mm. Inversement, les valeurs de  $n_d$  pour lesquelles le système accordé connaît les amplitudes de vibration les plus faibles ( $n_d = 4$  et  $n_d = 5$ ) présentent des évolutions similaires, à savoir que l'augmentation du niveau de désaccordage  $\sigma$  conduit à de plus grandes amplitudes de vibration.

Contrairement à la configuration linéaire où aucune limite n'est appliquée sur la vibration du système, le carter qui entoure la roue en configuration non-linéaire contraint sa vibration. Ainsi, les résultats prédits sur une plage restreinte pour  $n_d = 3$  et  $n_d = 6$  sont essentiellement dus à la sur-contrainte sur le domaine de vibrations : l'amplification due au désaccordage  $A_{nl}$

est atténuée par le carter rigide.

Comme les amplifications ne sont calculées que sur les déplacements en bout d'aube, lesquels sont limités par la présence physique du carter rigide, celles-ci peuvent constituer une représentation optimiste de ce qui se produit réellement pour  $n_d = 3$  et  $n_d = 6$ .

Afin d'analyser davantage les niveaux d'amplification rencontrés pour ces deux configurations, un facteur d'amplification non-linéaire basé sur les énergies de déformation des aubes, utilisant ainsi les déplacements de tous les ddl des aubes, est proposé dans la section suivante.

### Analyse en énergie de déformation

L'énergie de déformation  $\mathcal{E}$  d'un système éléments finis peut être exprimée à partir du vecteur des déplacements et de la matrice de masse. Pour le modèle réduit utilisé dans cette étude, l'énergie de déformation de chaque aube est obtenue en projetant les déplacements calculés pour le modèle réduit sur la base physique. De la même façon que pour les amplitudes maximales des déplacements, les énergies de déformation à une vitesse angulaire sont évaluées sur les trois derniers tours, pour chaque aube. La quantité stochastique d'intérêt est appelée *amplification de l'énergie non-linéaire*  $A_{nl}(\mathcal{E})$ , calculée comme le ratio entre le maximum de l'énergie de déformation du modèle désaccordé et le maximum de l'énergie de déformation du modèle accordé.

Deux ensembles d'échantillons issus de la section 3.3 sont considérés : (1) les 100 échantillons avec l'amplification des déplacements ( $A_{nl}$ ) maximale pour les simulations de contact à  $n_d = 4$  et (2) les 100 échantillons avec l'amplification des déplacements maximale à  $n_d = 6$ . Les niveaux de désaccordage pour ces ensembles sont entre 1,2 % et 2,3 %. L'amplification de l'énergie  $A_{nl}(\mathcal{E})$  est calculée pour ces échantillons dans leur configuration de contact respectives,  $n_d = 4$  et  $n_d = 6$ . Les résultats sont présentés sur la figure 3.17, où les courbes noires délimitent les résultats obtenus pour tous les échantillons.

Sur la figure 3.17a, les échantillons à  $n_d = 4$  présentent une amplification des déplacements plus élevée que les échantillons à  $n_d = 6$ , en accord avec les résultats obtenus pour le centile 99 présenté sur la figure 3.15. Les résultats pour  $A_{nl}(\mathcal{E})$ , tracés sur la figure 3.17b, montre un écart encore plus important entre les échantillons à  $n_d = 4$  et  $n_d = 6$ , les échantillons à  $n_d = 4$  présentant toujours l'amplification la plus élevée. Selon ces résultats, la configuration de contact pour  $n_d = 6$  n'induit pas un  $A_{nl}(\mathcal{E})$  plus important. Cependant, le faible nombre d'échantillons disponibles pour cette analyse ne permet pas d'assurer des résultats stochastiquement significatifs, et les échantillons utilisés peuvent présenter un biais de sélection puisqu'ils ont été sélectionnés selon leur valeur de  $A_{nl}$ . Par ailleurs, les résultats



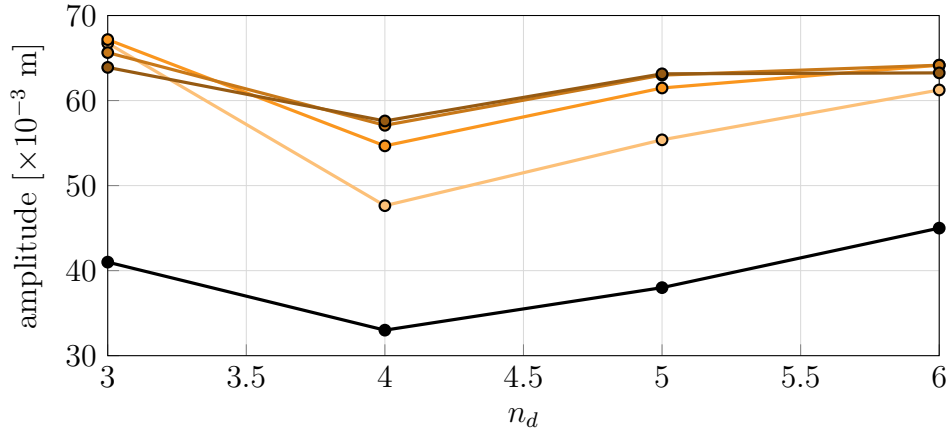


Figure 3.16 Amplitudes maximales des vibrations pour des roues aubagées accordée (●) et désaccordées (99<sup>ième</sup> centile) pour  $\sigma = 0,6\%$  (○),  $\sigma = 1,2\%$  (○),  $\sigma = 1,7\%$  (○) et  $\sigma = 2,3\%$  (○) dans le cadre de simulations de contact.

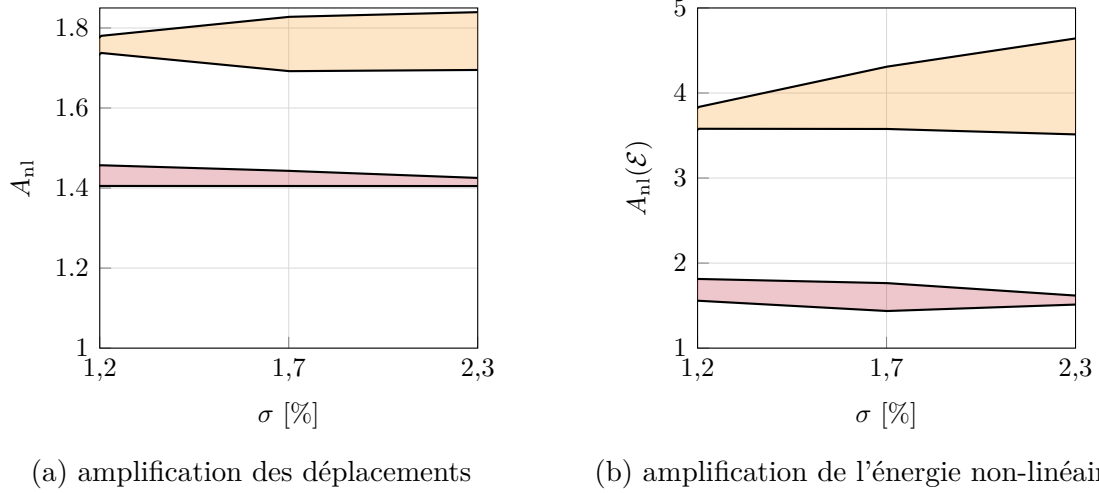


Figure 3.17 Amplifications calculées pour 100 échantillons, en configurations  $n_d = 4$  (■) et  $n_d = 6$  (■).

pour  $n_d = 4$  présentent une dispersion plus importante que ceux pour  $n_d = 6$  pour les amplifications des déplacements, et sont d'autant plus dispersés sur les amplifications en énergie. Ceci peut être dû au fait qu'un plus grand nombre de zones de contact augmente la fréquence de sollicitation sur les aubes et limite l'espace dans lequel elles peuvent vibrer. Enfin, il est notable que l'ordre de grandeur des amplifications en déplacements et en énergie sont très différents.

Finalement, les résultats obtenus sur  $A_{nl}(\mathcal{E})$  confirment ceux sur  $A_{nl}$ , où la configuration de contact à  $n_d = 4$  présente les résultats les plus représentatifs de l'effet du désaccordage sur l'amplification des vibrations dans le contexte non-linéaire. Comme les amplitudes de vibration sur le système accordé y sont les plus faibles, leur augmentation sur des systèmes désaccordés peut être plus pleinement captée. Ainsi, les analyses suivantes se concentrent sur la configuration  $n_d = 4$ .

### 3.3.3 Analyse croisée pour $n_d = 4$

Les 5000 échantillons testés dans le cadre des simulations de contact avec  $n_d = 4$  et pour chaque niveau de désaccordage  $\sigma$  sont soumis au forçage linéaire défini par l'équation (3.14). Leurs amplifications dues au désaccordage sont ainsi obtenues à la fois dans le contexte linéaire et dans le contexte non-linéaire. Ces valeurs sont tracées dans le plan  $(A_{nl}, A_{lin})$  sur la figure 3.18. Les densités cumulées, calculées par ordre décroissant de densité dans chaque région d'aire  $0,01 \times 0,01$ , sont utilisées pour obtenir une vision plus claire de la répartition des données qu'un graphique en nuage de points ne le permettrait.

Globalement, la majorité des points de données sont localisés au-dessus de la ligne  $A_{nl} = A_{lin}$ , si bien que pour la majorité des motifs de désaccordage  $A_{nl} > A_{lin}$ . Cette tendance est de plus en plus marquée à mesure que le niveau de désaccordage  $\sigma$  augmente. Plus précisément, pour  $\sigma = 0,6\%$ ,  $A_{nl} > A_{lin}$  pour 82 % des échantillons. Ce nombre croît à 96 % pour  $\sigma = 2,3\%$ .

Par ailleurs, les motifs de désaccordage qui présentent les valeurs de  $A_{nl}$  les plus importantes ont un étalement marqué des valeurs de  $A_{lin}$ . Par exemple, pour  $\sigma = 1,7\%$ , les motifs de désaccordage au-dessus du 99<sup>ième</sup> centile de  $A_{nl}$  (représenté par un trait pointillé orange sur la figure 3.18) connaissent des valeurs de  $A_{lin} \in [1, 1,7]$ . Ces résultats soulignent clairement qu'il n'y a pas de corrélation entre les motifs de désaccordage qui présentent de hautes amplifications dans le contexte linéaire et les motifs de désaccordage ayant de hautes amplifications dans le contexte non-linéaire. Ainsi, la réduction de l'influence du désaccordage dans un contexte non-linéaire nécessiterait des stratégies de conception différentes de celles proposées dans la littérature sur seule base de l'amplification dans un contexte linéaire [30, 79, 80].

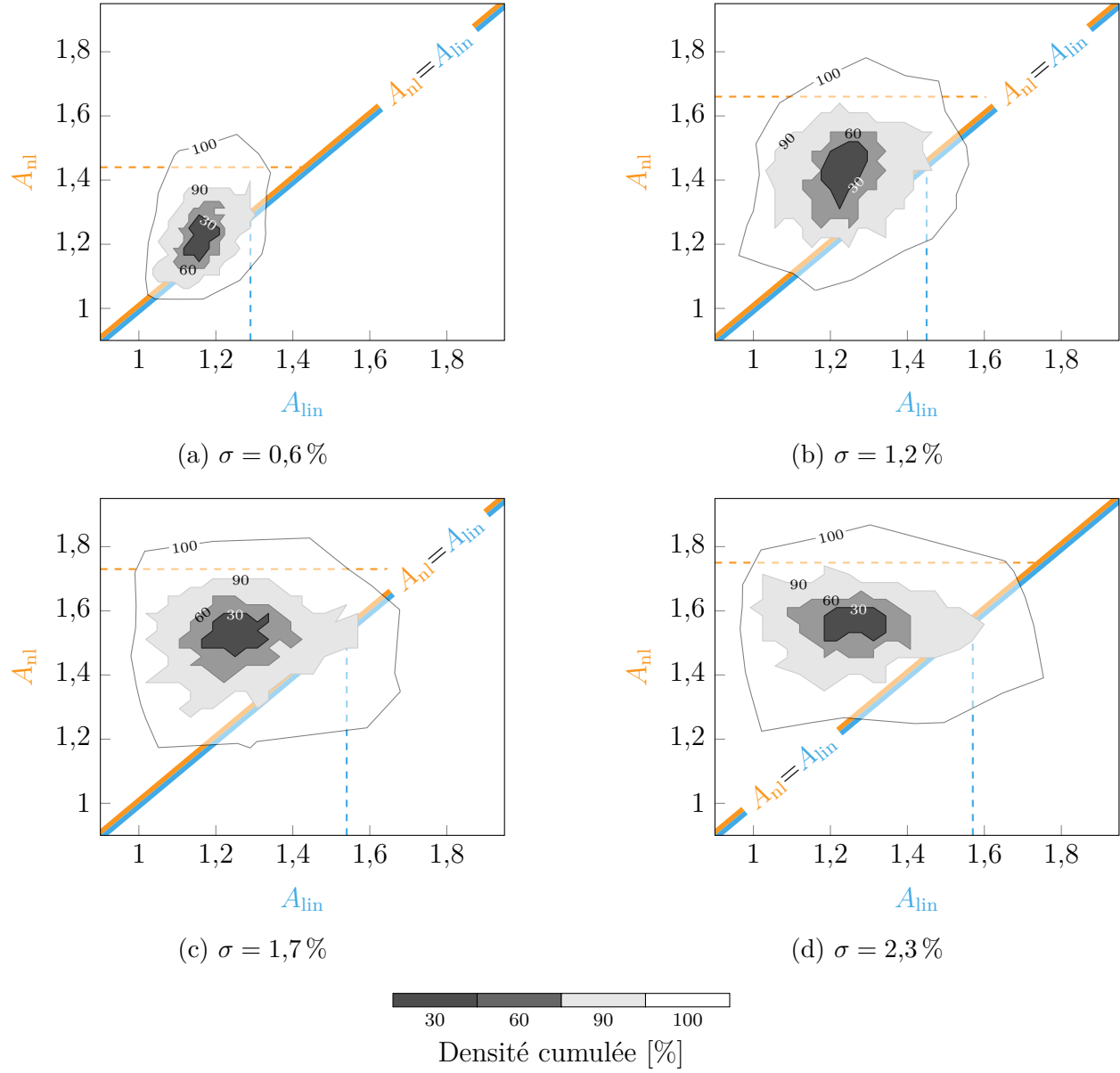


Figure 3.18 Analyse croisée de l'amplification due au désaccordage, pour  $n_d = 4$ , sur le 99<sup>ième</sup> centile pour des simulations non-linéaires ( - - - ) et linéaires ( - - - ).

### 3.3.4 Influence de l'amortissement

Les prochaines générations de roues aubagées incluent typiquement des conceptions de type DAM, pour le gain de masse conséquent qu'elles pourraient permettre. Cependant elles peuvent également être plus sujettes à de fortes amplitudes de vibration du fait de leur amortissement structural amoindri. Les DAM ont récemment été étudiés numériquement [58] et expérimentalement [141,151] pour un forçage linéaire ainsi que pour un flottement aérodynamique. Dans cette section, l'influence de la baisse de l'amortissement sur les amplifications dues au désaccordage est étudiée, dans le cadre de simulations de contact.

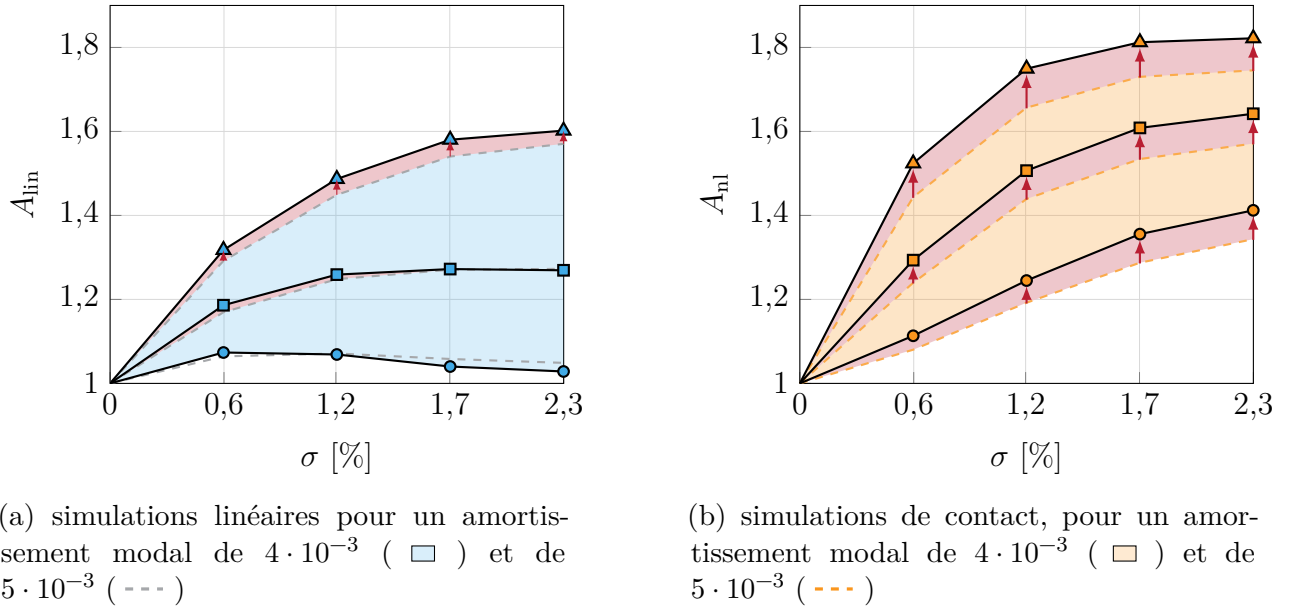


Figure 3.19 Amplifications à  $n_d = 4$  pour un abaissement de l'amortissement modal de  $5 \cdot 10^{-3}$  à  $4 \cdot 10^{-3}$  et variations induites (■)/(→) sur les centiles 1 (○), 50 (□) et 99 (△).

Des simulations stochastiques ont été effectuées en suivant la même méthodologie que pour les résultats précédents, pour un amortissement modal de  $4 \cdot 10^{-3}$ , ce qui correspond à une réduction de l'amortissement structural de 20 %. Les diagrammes d'amplification pour les simulations linéaires et de contact sont tracés sur la figure 3.19. L'amplification linéaire (figure 3.19a) n'est que peu impactée par l'abaissement de l'amortissement structural. Ce résultat, présenté ici pour  $n_d = 4$  uniquement à des fins de concision, est similaire pour tous les  $n_d$ . Tous les centiles dans le cadre de l'amplification dans un contexte non-linéaire  $A_{nl}$  sont significativement augmentés : pour un niveau de désaccordage  $\sigma = 2,3$  %, le 99<sup>ième</sup> centile passe de  $A_{nl} = 1,75$  à plus de 1,84.

Ces premiers résultats indiquent ainsi que les événements de contact pourraient alors induire

des amplifications de vibration dues au désaccordage encore plus élevées si la roue aubagée présente un amortissement structurel plus faible.

### 3.4 Co-existence de solutions stables

Dans cette section, des détails supplémentaires sont donnés sur la co-existence de solutions pour l'amplitude des vibrations, identifiée sur la figure 3.11 lors des variations du pas d'intégration temporelle. L'étude suivante est réalisée sur le même motif de désaccordage donné dans le tableau 3.2. Pour ce, une résolution plus fine sur la vitesse de rotation est adoptée, avec  $\delta\Omega = 5 \cdot 10^{-3}$  Hz. Les résultats obtenus sont tracés sur la figure 3.20. En plus des amplitudes de vibration en régime permanent, un dégradé de gris est utilisé pour représenter un critère global proposé pour caractériser le comportement vibratoire de la roue aubagée. Dans le cas de l'analyse des roues aubagées désaccordées, le critère utilisé est basé sur le facteur de localisation défini par Klauke *et al.* dans le cadre des vibrations libres [58]. Il est proposé ici de s'en inspirer pour définir un facteur équivalent dans le cadre des vibrations forcées.

La moyenne quadratique  $\sqrt{\langle \mathbf{U}_{\max}^2 \rangle}$  du maximum d'amplitude en bout d'aube  $\mathbf{U}_{\max}$  est calculée avec :




$$\sqrt{\langle \mathbf{U}_{\max}^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (U_{\max}(i))^2} \quad , \quad i \in [1, N] \quad (3.18)$$

où  $N$  est le nombre d'aubes. Le maximum par aube est calculé sur le régime permanent, soit ici sur les 3 derniers tours. Pour des vibrations forcées non localisées, soit dans un cas accordé, toutes les aubes connaissent la même amplitude maximale de vibration, d'où  $\sqrt{\langle \mathbf{U}_{\max}^2 \rangle} = \mathbf{U}_{\max}$ . Réciproquement, pour un cas extrêmement localisé où une seule aube vibrerait :  $\sqrt{\langle \mathbf{U}_{\max}^2 \rangle} = \frac{\mathbf{U}_{\max}}{\sqrt{N}}$ . Le ratio suivant :

$$\zeta = \frac{\max(\mathbf{U}_{\max})}{\sqrt{\langle \mathbf{U}_{\max}^2 \rangle}} \quad (3.19)$$

varie ainsi de 1 à  $\sqrt{N}$ . Le facteur de localisation FL en pourcentage, variant de 0 à 100, est ainsi défini par :

$$\text{FL} = \frac{\zeta - 1}{\sqrt{N} - 1} \times 100 \quad (3.20)$$

Le facteur de localisation est calculé pour chaque point de la FRF non-linéaire, tel que représenté sur la figure 3.20) par les niveaux de gris (  ), où le blanc (  ) correspond à une localisation des vibrations tendant vers 0 % et le noir (  ) à une localisation tendant vers 100 %. Les solutions trouvées pour  $\Omega \in [33,5 ; 35,5]$  Hz sur la figure 3.20a présentent un

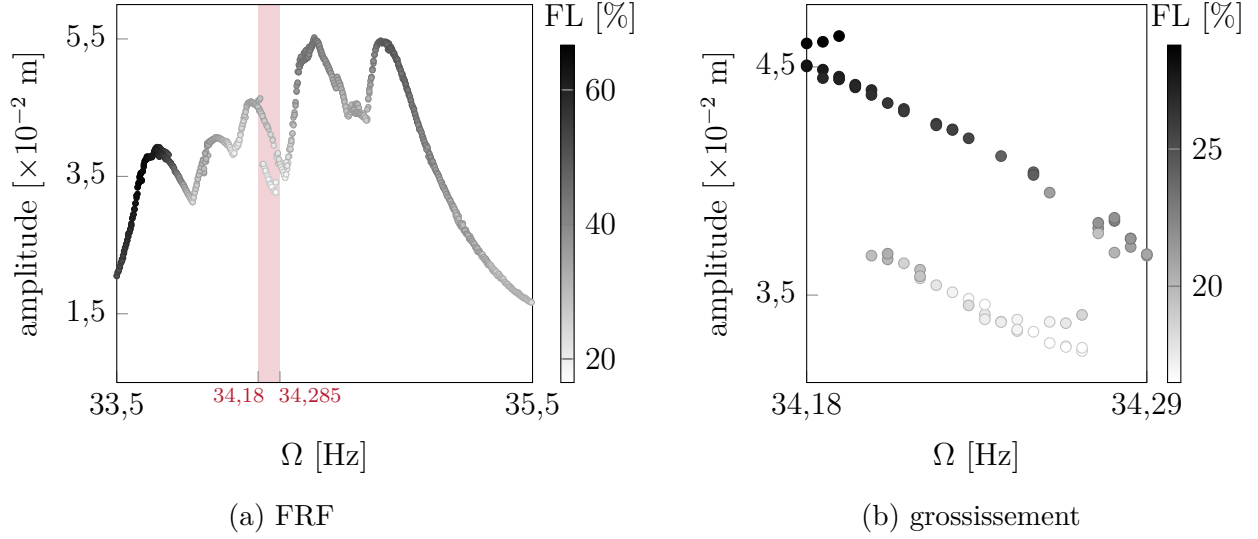


Figure 3.20 Facteur de localisation pour chaque point de la FRF.

facteur de localisation de 17 % à 65 %. La localisation évolue progressivement avec la vitesse angulaire, excepté dans la région  $[34,15 ; 34,30]$  Hz. Comme montré sur l'agrandissement sur la figure 3.20b, dans cette région chaque branche de solutions présente des valeurs distinctes du facteur de localisation, soulignant ainsi un comportement vibratoire différent. Une analyse plus approfondie requerrait une compréhension plus poussée des liens entre les résonances et la localisation ou les bifurcations potentielles, mais ces résultats confirment les différences intrinsèques entre les solutions de chaque branche.

### 3.5 Bilan

La méthodologie de simulation de contact aubes-carter sur un modèle désaccordé, basée sur l'intégration temporelle et les multiplicateur de Lagrange, a pu être appliquée et validée sur un modèle phénoménologique. Il a été montré en particulier que les plages de vitesses dans lesquelles une interaction est prédite sur le cas accordé sont les mêmes que pour le cas désaccordé. Les résultats stochastiques, pour lesquels la convergence a été validée qualitativement et quantitativement, ont permis de montrer que :

- (1) le désaccordage augmente sensiblement les amplifications des vibrations post-contact aubes-carter ;
- (2) les motifs à plus grande amplification ne sont stochastiquement pas les mêmes dans des cadres linéaire et non-linéaire équivalents ;
- (3) l'amplification dans le cadre non-linéaire peuvent être d'autant plus critiques pour le cas des systèmes faiblement amortis, comme les DAM.

La caractérisation de l'influence du désaccordage dans un contexte de non-linéarités de contact présente ainsi un intérêt industriel certain pour l'obtention de stratégies de conception adaptées aux conditions réelles dans les turbomoteurs. Le chapitre suivant présente une nouvelle méthode de réduction afin de permettre d'appliquer la méthodologie de simulations de contact à des modèles industriels de roues aubagées désaccordées.

## CHAPITRE 4 MODÈLES RÉDUITS DÉSACCORDÉS AVEC INTERFACE DE CONTACT

Les modèles éléments finis industriels de roues aubagées doivent permettre de représenter le comportement vibratoire de ces dernières avec la meilleure résolution possible. En particulier, pouvoir capter précisément les mouvements de flexion des aubes implique l’usage d’au moins deux éléments sur leur épaisseur pourtant très fine. Ainsi, il est courant d’avoir plusieurs millions de degrés de liberté dans ce type de modèle numérique.

Lorsque la roue aubagée étudiée peut être supposée parfaitement accordée, l’utilisation de la propriété de symétrie cyclique, présentée à la section 2.3.1, permet de réduire significativement les temps de calculs associés à l’utilisation de tels modèles. Pour pouvoir mener à bien des analyses non-linéaires (gestion d’interfaces de frottement ou de contact par exemple) la dimension des modèles numériques accordés peut être davantage réduite par l’utilisation de méthodes de sous-structuration [24, 152, 153] ou de réduction modale [24, 148]. Cette pratique est aujourd’hui un standard dans l’industrie.

En revanche, la rupture de symétrie cyclique inhérente à la prise en compte d’un certain degré de désaccordage empêche tout découplage de la dynamique du système et augmente donc le coût des analyses. La nécessité de pouvoir générer de façon stochastique un grand nombre de modèles désaccordés — requis pour caractériser la réponse d’une roue aubagée désaccordée — a conduit au développement de techniques de réduction spécifiques. En particulier, la méthode CMM [29], de l’anglais *Component Mode Mistuning*, permet d’introduire le désaccordage directement au niveau des fréquences propres du système accordé. Cette méthode rend donc possible l’implémentation du désaccordage directement sur un modèle déjà réduit. Cependant, la méthode CMM ne permet pas de conserver des degrés de liberté physiques requis pour la gestion du contact, puisque le modèle désaccordé est défini dans l’espace modal.

Dans ce chapitre, une modification de la méthode CMM est proposée pour pouvoir générer efficacement des modèles réduits désaccordés industriels avec interface de contact. La méthode de réduction proposée est d’abord validée sur un modèle académique vis-à-vis des modes propres, des modes statiques, puis d’un forçage linéaire harmonique. Par ailleurs, la faible dimension du modèle permet de comparer les réponses en contact d’un modèle éléments finis désaccordé avec celle d’un modèle réduit désaccordé par la méthode proposée. Enfin, la convergence numérique des résultats en fonction des paramètres de réduction est vérifiée sur un modèle industriel.



## 4.1 Méthodologie

### 4.1.1 Méthode CMM initiale

Dans l'espace physique, les matrices éléments finis masse et raideur du système sont notées respectivement  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$ . Le calcul des vecteurs propres  $\Phi$  et valeurs propres  $\Lambda$  permet de passer dans l'espace modal et ainsi d'obtenir un couple de matrices diagonales. La méthode CMM de Lim *et al.* [29] permet d'exprimer les matrices du système désaccordé à partir des matrices modales accordées, en considérant le désaccordage comme une perturbation dans l'espace modal. Elle repose sur deux méthodes précédemment développées : la SNM de Yang et Griffin [26] et la projection du désaccordage sur les modes de l'aube accordée encastrée de Bladh *et al.* [95]. Les hypothèses utilisées et les équations permettant d'obtenir le système désaccordé sont détaillées dans ce qui suit.

Sous l'hypothèse d'un faible désaccordage, les modes propres désaccordés peuvent être exprimés comme une combinaison de modes propres accordés [26]. Ainsi, les modes propres du système accordé  $\Phi$  peuvent être tronqués pour ne conserver que  $N \times R$  modes, avec  $N$  le nombre d'aubes et  $R$  le *paramètre de restriction*, associés aux valeurs propres choisies  $\Lambda|_{NR}$ . En considérant un désaccordage sur la matrice de raideur uniquement et en travaillant dans l'espace modal, la matrice de raideur désaccordée  $\kappa$  peut être exprimée en fonction des valeurs propres accordées restreintes à  $R$  modes et de la déviation due au désaccordage  $\Lambda^\delta$  :

$$\kappa = \Lambda|_{NR} + \Lambda^\delta \quad (4.1)$$

et la matrice de masse modale désaccordée  $\mu$  est égale à la matrice de masse modale accordée :  $\mu = \mathbf{I}$ .

Dans le cadre d'un désaccordage proportionnel, le module d'Young de l'aube  $n$  est :  $E_n = E_0(1 + \delta)$ , avec  $E_0$  le module d'Young nominal et  $\delta$  la déviation due au désaccordage. Comme le désaccordage est considéré uniquement sur la matrice de raideur, la déviation sur  $E$  est égale à la déviation sur les valeurs propres  $\lambda$  :  $\delta = (\delta E) = (\delta \lambda)$ . En considérant un désaccordage uniquement au niveau des aubes, il vient que le désaccordage dans l'espace modal  $\kappa^\delta$  est une matrice diagonale exprimée comme une déviation sur  $R$  valeurs propres d'une aube du modèle accordé encastrée à son pied  $\Lambda_a$ , soit sur l'aube  $n$  :

$$\kappa_n^\delta = \delta_n \Lambda_a|_R \quad (4.2)$$

La déviation  $\Lambda^\delta$  peut alors être calculée par la projection de  $\kappa^\delta$  sur les vecteurs propres du

système accordé, par l'intermédiaire des vecteurs de participation  $\mathbf{Q}$  :

$$\mathbf{\Lambda}^\delta = \sum_{n=1}^N \mathbf{Q}_n^\top \boldsymbol{\kappa}_n^\delta \mathbf{Q}_n \quad (4.3)$$

Comme le désaccordage est faible, les facteurs  $\mathbf{Q}$  représentent directement la participation des modes d'aube sur les modes du système accordé et sont exprimés pour l'aube  $n$  :

$$\mathbf{Q}_n = (\mathbf{\Lambda}_a|_R)^{-1} (\mathbf{\Phi}_a|_R)^\top \mathbf{K}_a [\mathbf{\Phi}|_{NR}]_n \quad (4.4)$$

avec  $\mathbf{K}_a$  la matrice de raideur de l'aube,  $\mathbf{\Lambda}_a|_R$  et  $\mathbf{\Phi}_a|_R$  ses valeurs propres et vecteurs propres restreints aux  $R$  premiers modes, et  $[\mathbf{\Phi}|_{NR}]_n$  les vecteurs propres du système accordé restreints à  $NR$  modes et pour les ddl de l'aube  $n$ .

En partant de l'analyse modale du modèle accordé  $(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Phi})$  et de l'analyse modale d'une aube encastrée en son pied  $(\mathbf{\Lambda}_a, \mathbf{\Phi}_a)$ , la méthode CMM permet ainsi de calculer à moindre coût les matrices du modèle désaccordé dans l'espace modal  $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\kappa})$ . L'ensemble des hypothèses utilisées est résumé dans l'encart suivant.

#### Hypothèses utilisées

1. faible désaccordage
2. désaccordage sur la matrice de raideur uniquement
3. désaccordage proportionnel
4. désaccordage sur les aubes uniquement et constant sur le corps de l'aube

#### 4.1.2 Méthode CMM avec interface de contact

La prise en compte de l'interface de contact sur des modèles éléments finis industriels de grande dimension implique usuellement la création de modèles réduits qui conservent quelques ddl physiques au niveau de l'interface de contact [37, 154], en plus des ddl modaux usuels. L'espace réduit est alors dit *mixte*. Il existe plusieurs méthodes de réduction modale permettant d'obtenir un espace réduit mixte, notamment la méthode de Craig-Bampton [24] qui est couramment utilisée dans l'industrie [17]. Les développements présentés dans la suite de ce chapitre sont applicables à toute méthode de réduction permettant l'obtention d'un espace réduit mixte. À des fins de généralité, la matrice de passage utilisée pour projeter le modèle éléments finis dans l'espace réduit est notée  $\boldsymbol{\Psi}_r$  dans la suite de ce chapitre. Les matrices masse et raideur réduites du modèle accordé sont respectivement notées  $\mathbf{M}_r$  et  $\mathbf{K}_r$  ; leurs modes propres sont notés  $\boldsymbol{\Phi}_r$ .

Le calcul des vecteurs de participation de l'équation (4.1) est modifié pour utiliser les vecteurs propres du modèle réduit considéré :

$$\mathbf{Q}_n = (\mathbf{\Lambda}_a|_R)^{-1} (\mathbf{\Phi}_a|_R)^\top \mathbf{K}_a [\mathbf{\Psi}_r \mathbf{\Phi}_r|_{NR}]_n \quad (4.5)$$

où  $\mathbf{\Phi}_r|_{NR}$  représente les vecteurs propres du système réduit accordé restreints aux  $N \times R$  premiers modes. Le terme  $\mathbf{\Psi}_r \mathbf{\Phi}_r|_{NR}$  représente donc le redéploiement des modes propres dans l'espace éléments finis (EF). La restriction de ce terme aux degrés de liberté de l'aube  $n$  permet la multiplication à gauche par la matrice de raideur d'une aube  $\mathbf{K}_a$ . Les matrices  $\mathbf{\Lambda}_a$  et  $\mathbf{\Phi}_a$  sont respectivement la matrice diagonale des valeurs propres et les vecteurs propres de l'aube  $n$ .

Le système accordé réduit contient  $\eta$  ddl modaux par harmonique et  $n_f$  ddl physiques. Ces ddl sont ordonnés de façon à ce que la matrice de raideur modale du système désaccordé s'écrive :

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{\Lambda}_r + \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}^\delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

avec  $\mathbf{\Lambda}_r$  la matrice diagonale contenant les valeurs propres du système réduit, et  $\mathbf{\Lambda}^\delta$  la perturbation de ces valeurs propres du fait du désaccordage. Afin d'assurer la cohérence des dimensions, le paramètre de réduction  $\eta$ , le nombre de nœuds frontière  $n_f$  et le paramètre de restriction  $R$  de la méthode CMM doivent vérifier :

$$R \leq \frac{n_f + \eta}{N} \quad (4.7)$$

La matrice de raideur désaccordée peut ainsi être exprimée dans l'espace réduit :

$$\mathbf{K}_r^\delta = (\mathbf{\Phi}_r^\top)^{-1} \boldsymbol{\kappa} \mathbf{\Phi}_r^{-1} \quad (4.8)$$

La méthode proposée permet ainsi de construire les matrices réduites désaccordées à partir des matrices réduites accordées et du modèle d'une aube encastrée accordée, à l'instar de la méthode CMM, tout en conservant les ddl physiques présents dans la réduction initiale : elle est désignée par l'acronyme CM3, de l'anglais *Component Mode Mistuning with Mixed dof*. Le modèle conserve ainsi une interface physique pour les calculs de contact par multiplicateurs de Lagrange. L'ensemble des étapes permettant de générer le système désaccordé réduit est reporté sur l'algorithme donné sur la figure 4.1. Dans la suite du document, la méthode CM3 est utilisée en combinaison avec la méthode de réduction de Craig-Bampton.

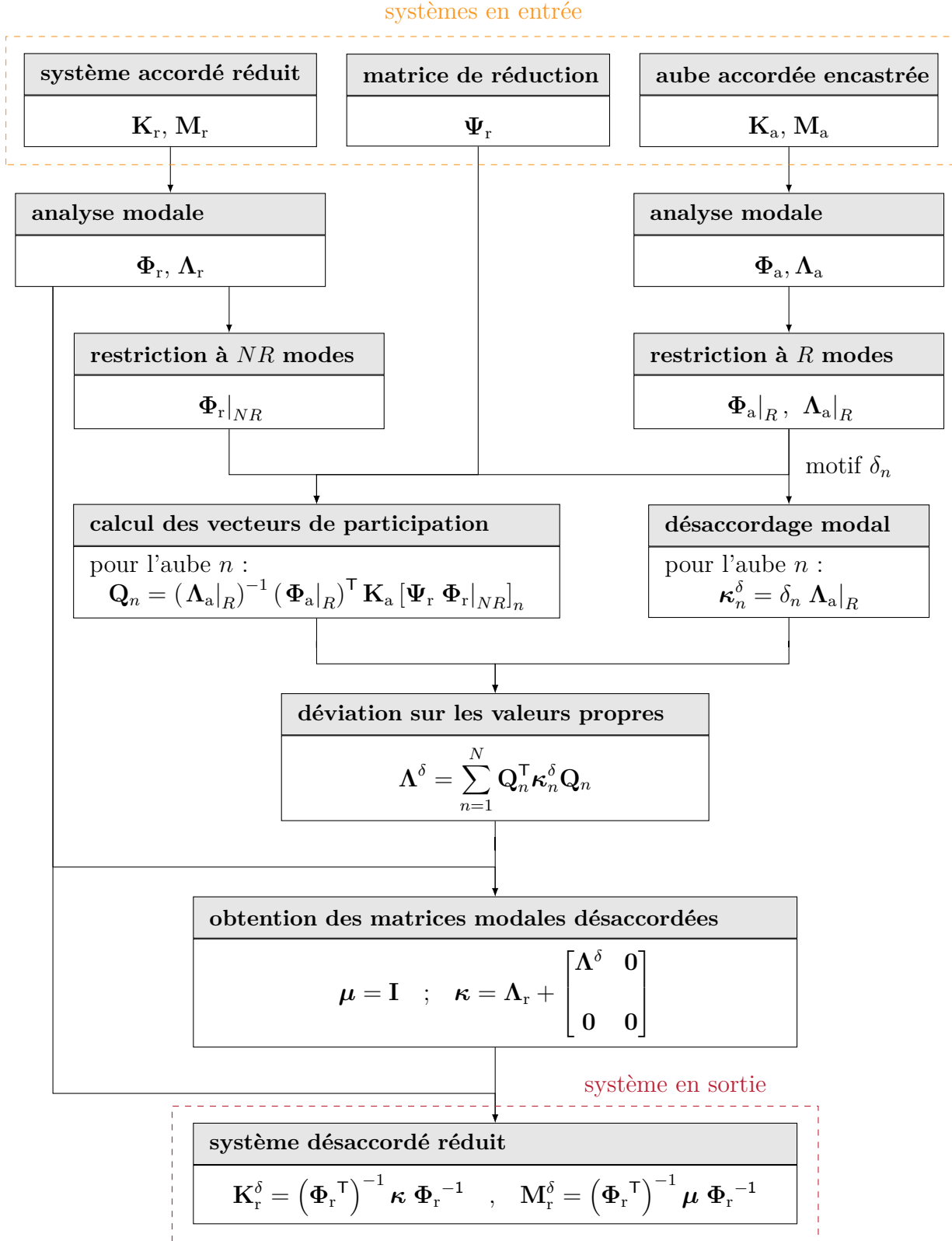


Figure 4.1 Algorithme de création du système désaccordé avec interface de contact, par la méthode CM3 (Component Mode Mistuning with Mixed dof).

## 4.2 Modèle académique

La validation de la méthode CM3 est effectuée sur le modèle académique représenté sur la figure 4.2. Ce modèle de taille réduite permet de comparer les résultats de la méthode CM3 à ceux calculés sur le modèle éléments finis complet (EF 360), ce qui ne serait pas possible sur un modèle industriel à grand nombre de ddl par secteur. Les résultats présentés sur le modèle complet EF sont issus du logiciel commercial Samcef [155].

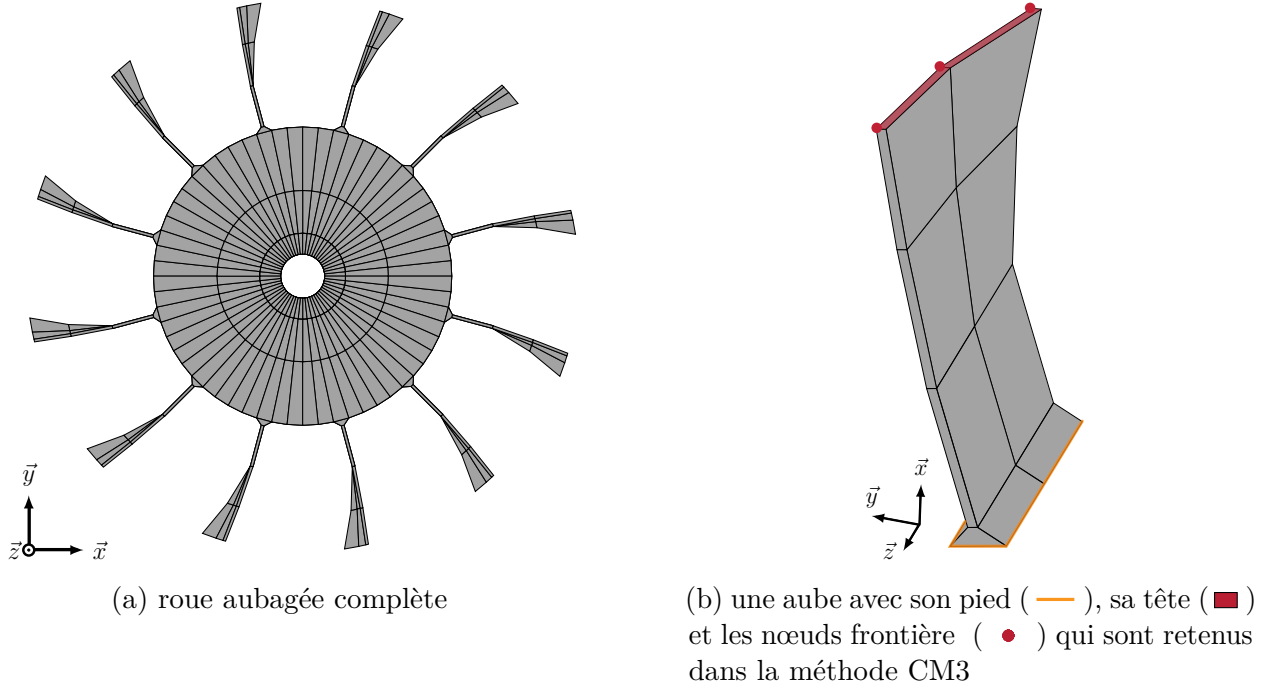


Figure 4.2 Maillage du modèle EF académique.

Le modèle académique est constitué de  $N = 12$  aubes, au total, il comporte 648 nœuds et 1944 ddl. Chaque aube, telle que représentée sur la figure 4.2b, contient 24 nœuds et 72 ddl. L'utilisation de la propriété de symétrie cyclique permet de calculer efficacement la base de réduction de Craig-Bampton (CB) [91] et donc d'obtenir le modèle réduit requis pour l'application de la méthode CM3. Le paramètre de réduction  $\eta$  correspond au nombre de modes conservés pour la réduction de chaque harmonique spatiale. Le modèle réduit accordé contient ainsi 178 ddl : 3 nœuds frontière ou 9 ddl par aube, soit 108 ddl pour l'ensemble de la roue auxquels s'ajoutent  $\eta = 10$  ddl modaux par harmonique, soit 70 ddl modaux au total. Dans ce contexte, en tenant compte de la relation (4.7), la valeur maximale admissible pour le paramètre de restriction de la méthode CMM est donc  $R = 14$ .


Le modèle EF d'une aube, requis pour la méthode CM3, est obtenu en encastrant le pied de

la première aube seule telle que représenté sur la figure 4.2b. Enfin, le motif de désaccordage considéré pour la validation est défini par un tirage aléatoire des modules d'Young de chaque aube selon une distribution uniforme, avec un degré de désaccordage  $\sigma = 0,58 \%$ . La variation sur le module d'Young  $\delta E$  pour chaque aube, par rapport à la valeur nominale de  $1,196 \cdot 10^{11}$  Pa, est donnée dans le tableau 4.1.

Tableau 4.1 Motif de désaccordage sélectionné pour la validation sur le modèle académique, distribution aléatoire uniforme avec  $\sigma = 0,58 \%$  ( $\max(\delta E) = 1 \%$ ).

Variation du module d'Young par aube (%)											
$(\delta E)_1$	0,092	$(\delta E)_2$	0,301	$(\delta E)_3$	0,577	$(\delta E)_4$	0,117	$(\delta E)_5$	-0,878		
$(\delta E)_6$	-0,100	$(\delta E)_7$	0,828	$(\delta E)_8$	-0,627	$(\delta E)_9$	0,953	$(\delta E)_{10}$	-0,351		
$(\delta E)_{11}$	-0,602	$(\delta E)_{12}$	-0,468								

#### 4.2.1 Analyse statique

Un forçage statique de norme 10 N est appliqué dans la direction axiale ( $\vec{z}$ ) sur les 3 nœuds frontière en tête d'aube, sur les aubes numéro 1, 5 et 11. Les résultats présentés pour le modèle EF 360 sont issus du logiciel Samcef. Les résultats présentés pour le modèle CM3 sont issus d'un redéploiement dans l'espace physique des déplacements calculés dans la base réduite. Les champs de déplacements sur l'ensemble du modèle sont tracés sur la figure 4.3a. Les champs de déplacements obtenus par la CM3 sont représentés par un gradient de couleur sans bordure (  ), tandis que la déformée obtenue avec Samcef est représentée par des filigranes noirs ( — ). La parfaite superposition des champs calculés et de la déformée met en évidence que les amplitudes sont correctement calculées dans la base réduite. Les amplitudes de déplacement sont tracées pour tous les nœuds d'une aube chargée sur le ddl  $z$  sur la figure 4.3b. Aucune différence n'est visible entre les amplitudes calculées sur les modèles CM3 et EF 360, malgré la très faible amplitude de déplacement induite (de l'ordre de  $10^{-6}$  m).

La validation sur les modes propres et la réponse à un forçage statique du modèle calculé par la CM3 vis-à-vis du modèle EF 360 montre ainsi que le désaccordage est correctement pris en compte dans la méthode proposée, tout en conservant bien un accès aux nœuds frontière.

#### 4.2.2 Analyse modale

##### Roue accordée

Les modes propres sont tout d'abord calculés sur les modèles accordés, d'une part par Samcef sur le modèle EF 360 et d'autre part par la méthode CM3 avec un motif de désaccordage

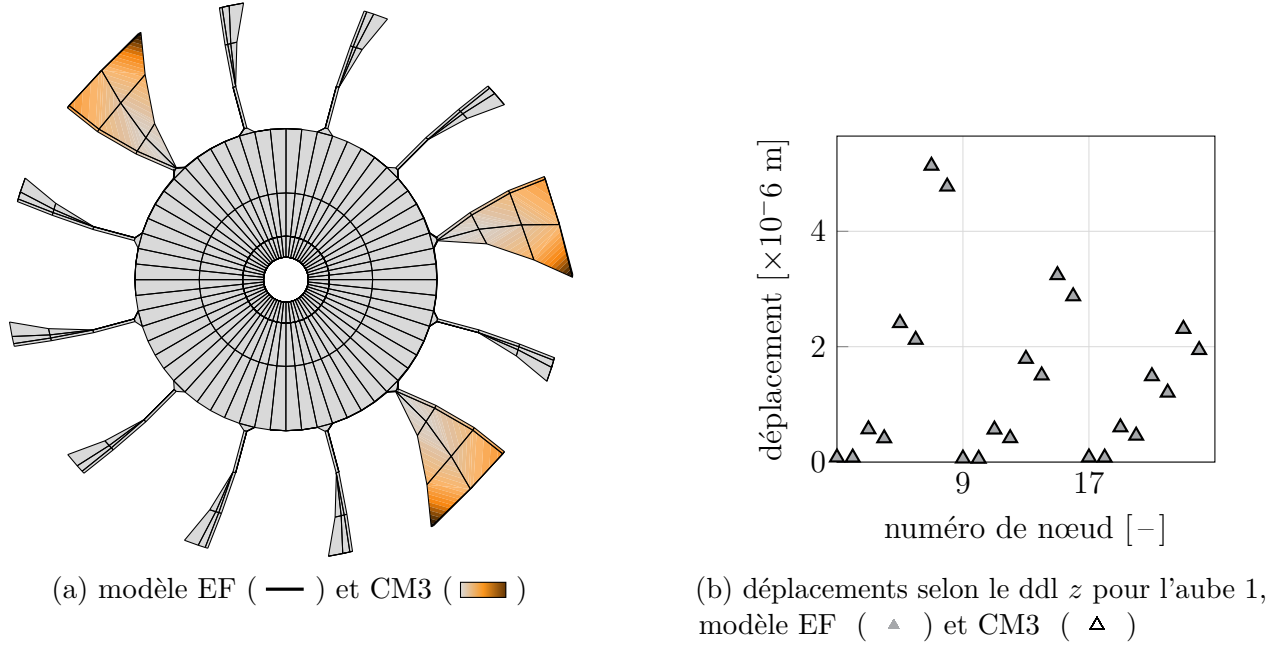


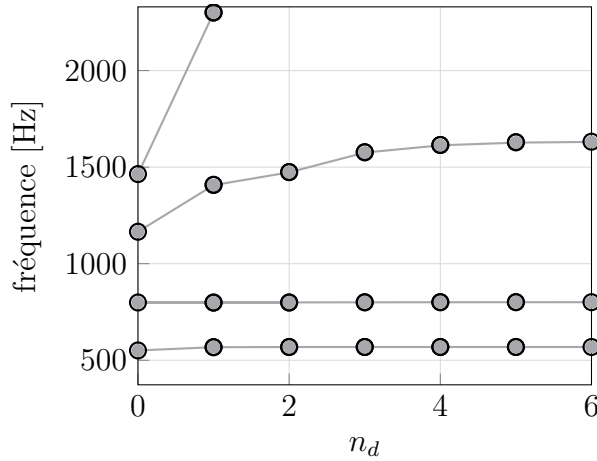
Figure 4.3 Comparaison de la déformation sous chargement statique entre le modèle désaccordé EF, calculé avec Samcef, et le modèle désaccordé construit par la CM3.

nul :  $\delta = 0$ , afin de caractériser l'erreur introduite dans le modèle du fait de la réduction CB seule. L'erreur relative sur les fréquences propres de chaque mode  $e_r$  est définie par :

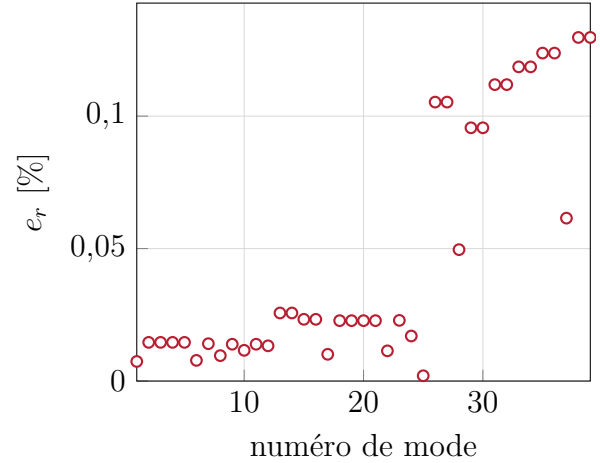
$$e_r[\%] = \frac{f_{\text{CM3}} - f_{\text{Samcef}}}{f_{\text{Samcef}}} \times 100 \quad (4.9)$$

avec  $f_{\text{CM3}}$  la fréquence obtenue sur le système réduit calculé par la CM3 et  $f_{\text{Samcef}}$  la fréquence calculée par Samcef sur le cas EF 360. Le diagramme SAFE tracé sur la figure 4.4a permet de constater que les résultats se superposent bien pour les premières familles modales. Plus précisément, les erreurs obtenues pour les 39 premiers modes sont tracées sur la figure 4.4b : pour la première famille, les erreurs ainsi calculées restent inférieures à 0,02 %, et globalement inférieures à 0,2 %. Le paramètre de réduction  $\eta = 10$  est donc suffisant représenter fidèlement les premières fréquences propres.

Le déplacement tangentiel du bord d'attaque sur toutes les aubes est présenté pour quelques modes sur la figure 4.5. Pour le mode double présenté ( $n_d = 1$ ), un déphasage angulaire d'environ  $\frac{10\pi}{12}$  rad est visible entre la solution calculée par résolution du problème aux valeurs propres généralisé sur les matrices réduites ( $\mathbf{K}_r, \mathbf{M}_r$ ) et la solution calculée par Samcef sur le modèle EF. L'allure des modes et en particulier leur orthogonalité est cependant bien conservée après réduction. Pour les modes simples  $n_d = 0$  et  $n_d = 6$ , les déplacements sont bien égaux



(a) diagramme SAFE pour le modèle réduit ( O ) et EF complet calculé par Samcef ( — )




(b) erreur sur les 39 modes propres représentés sur la figure 4.4a

Figure 4.4 Validation de la réduction CB sur le modèle accordé.

comme montré par la superposition de courbes entre les deux modèles. Les déplacements obtenus sur les autres ddl frontière ont également été vérifiés, pour différentes familles modales, afin de valider la procédure de réduction CB sur le modèle accordé.

### Roue désaccordée

Avec le motif de désaccordage donné dans le tableau 4.1, fréquences propres et erreurs associées sont tracées sur la figure 4.6. Le cas accordé y est reporté pour mettre en évidence le décalage des fréquences dû au désaccordage. Les fréquences calculées par la CM3 et par Samcef se superposent bien sur la figure 4.6a. Les erreurs tracées sur la figure 4.6b sont plus élevées que dans le cas accordé, mais elles sont cependant du même ordre de grandeur, et elles restent inférieures à 0,05 %.

Les déplacements associés au mode à plus basse fréquence sont calculés sur le modèle EF 360 et le modèle CM3 et sont comparés sur la figure 4.7. Dans le cas du modèle CM3, le champ de déplacements sur la roue complète — obtenu par redéploiement des déplacements obtenus dans la base réduite vers la base éléments finis — est représenté par un gradient de couleur (  ) sur la figure 4.7a. Le champ de déplacements calculé par Samcef est uniquement représenté par les filigranes noirs ( — ). L'allure générale des déplacements sur l'ensemble de la roue est bien la même pour les deux méthodes, comme indiqué par la superposition des déformations sur la figure 4.7a. En particulier, les aubes pour lesquelles le déplacement est le plus important du fait de la localisation due au désaccordage sont bien les mêmes pour les deux modèles.



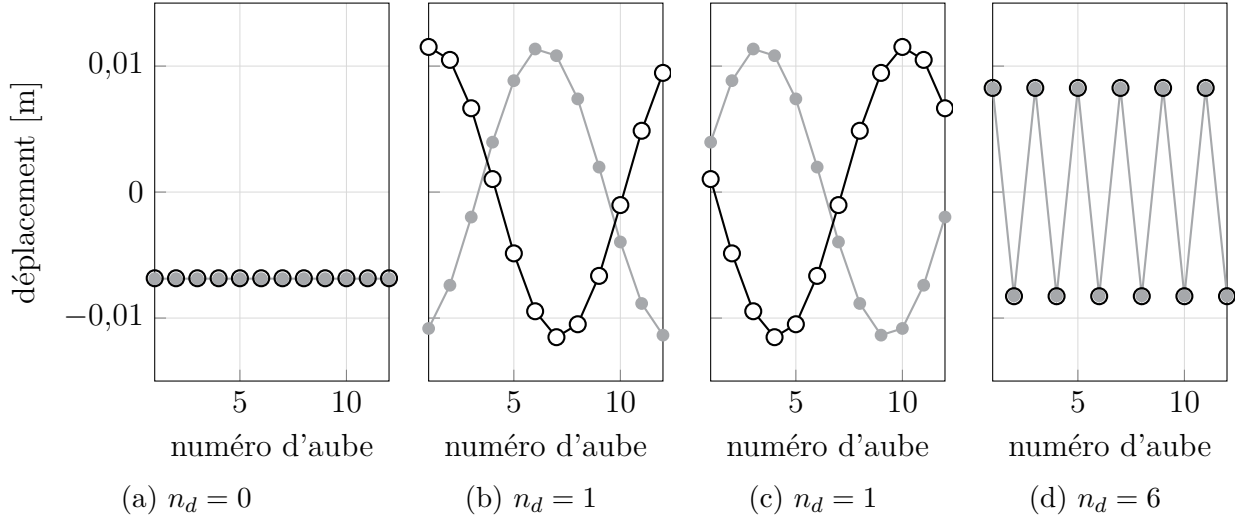


Figure 4.5 Déplacement tangentiel du bord d'attaque sur toutes les aubes, calculé sur le modèle réduit (  $\circ$  ) et sur le modèle EF complet (  $\bullet$  ), pour différents vecteurs propres.

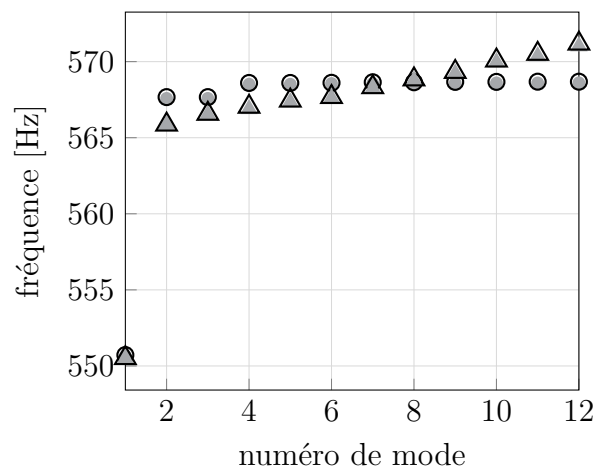
La figure 4.7b permet de montrer plus finement la superposition des déplacements pour tous les nœuds de l'aube 1 sur le ddl selon la direction tangentielle. La parfaite superposition des quantités issues de Samcef et de la CM3 souligne que les fréquences et les modes propres sont correctement calculés par la méthode CM3.

### 4.3 Modèle industriel

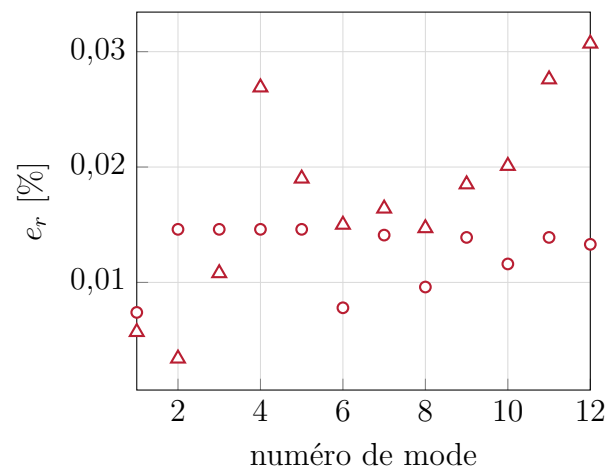
Cette section présente une première application de la méthode CM3 à une roue aubagée industrielle, premier étage d'un compresseur basse pression de moteur d'avion. Afin de déterminer le couple de paramètres de réduction optimaux  $(\eta, R)$ , une étude de sensibilité est conduite dans le cas de calculs linéaires stochastiques, faisant intervenir la superposition modale, et dans le cas de calculs non-linéaires de contact par intégration temporelle sur un motif à fort désaccordage. Dans la suite du document, les déplacements, vitesses et fréquences sont normalisés et adimensionnés.

#### 4.3.1 Description

La roue aubagée étudiée constitue le premier étage d'un compresseur basse pression et comporte  $N = 21$  aubes. Le maillage éléments finis d'un secteur, présenté sur la figure 4.8, est composé d'éléments finis tétraédriques quadratiques à 3 ddl par nœuds. Ce maillage est constitué de 17 487 nœuds incluant 9199 nœuds dans l'aube.

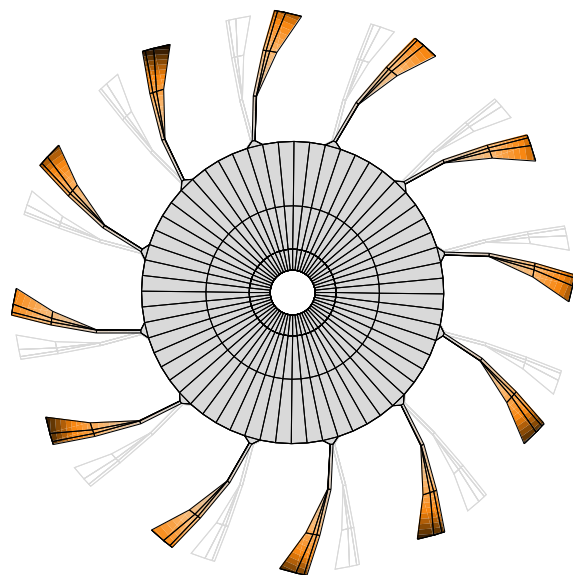


(a) fréquences propres de la première famille



(b) erreur sur les fréquences propres de la première famille

Figure 4.6 Fréquences propres, Samcef/CM3/erreurs associées, sur la première famille modale pour les modèles accordés (  $\circ$  ) / (  $\bullet$  ) / (  $\circ$  ) et désaccordés (  $\Delta$  ) / (  $\blacktriangle$  ) / (  $\triangle$  ).



(a) roue avant déformation ( — ), modèle EF ( — ) et CM3 ( — )

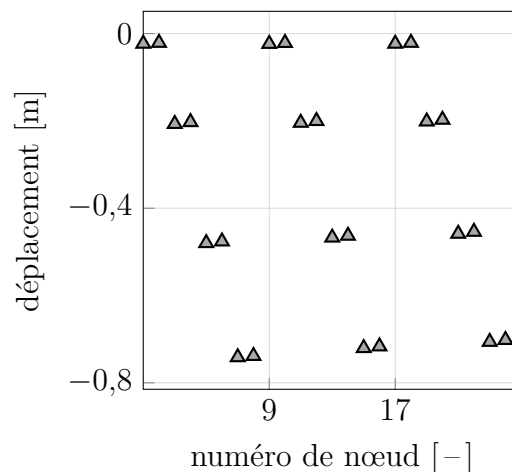
(b) déplacements selon le ddl  $y$  pour l'aube 1, modèle EF (  $\blacktriangle$  ) et CM3 (  $\triangle$  )

Figure 4.7 Comparaison du mode propre à plus basse fréquence entre le modèle désaccordé EF, calculé avec Samcef, et le modèle désaccordé construit par la CM3.

La frontière de contact est constituée de cinq nœuds frontière en sommet d'aube répartis entre le bord d'attaque et le bord de fuite et identifiés par des points rouges (  $\bullet$  ) sur la figure 4.8. Il y a ainsi  $21 \times 15 = 315$  ddl frontière sur l'ensemble de la roue aubagée. De même que

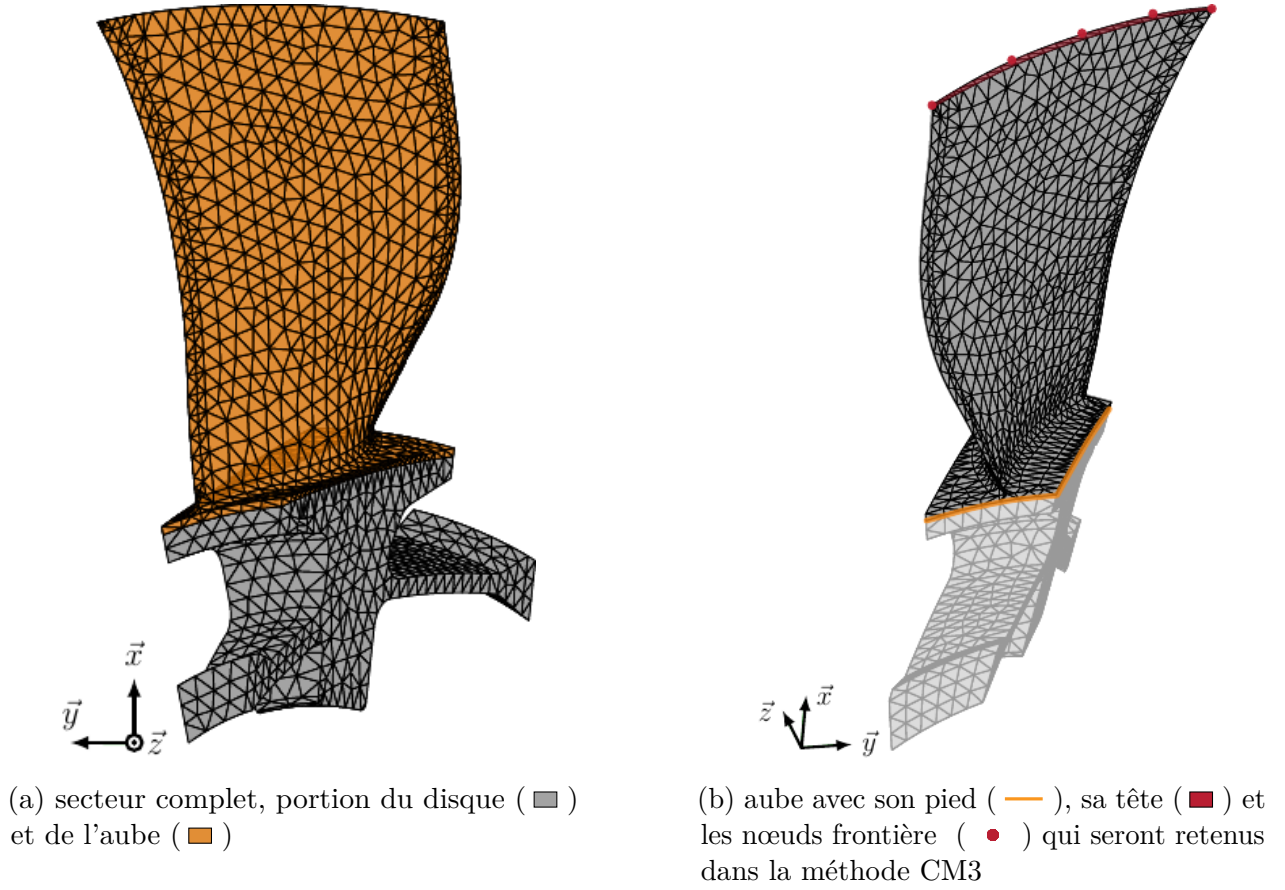


Figure 4.8 Maillage du modèle EF d'un secteur du modèle industriel.

pour le modèle académique,  $\eta$  modes sont retenus pour chacune des 11 harmoniques spatiales pour la construction du modèle réduit accordé. La portion du maillage correspondant à la restriction du secteur à l'aube, requise pour la mise en place de la méthode CM3, est mise en évidence sur la figure 4.8.

Le modèle réduit utilisé pour les simulations de contact est construit identiquement au système accordé réduit précédemment défini lors de la mise en place de la méthode CM3 dans la section 4.1.2. La quantité d'intérêt pour étudier l'influence du désaccordage reste l'amplification des déplacements, définie dans la section 3.1.4, calculée sur l'ensemble des vitesses de la FRF et sur l'ensemble des nœuds physiques de frontière.

Tableau 4.2 Propriétés du modèle éléments finis de la roue aubagée industrielle.

paramètres géométriques		propriétés matériau	
nombre d'aubes	$N = 21$	masse volumique	$7850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
longueur des aubes au bord d'attaque	9,4 cm	amortissement	$5 \cdot 10^{-4}$
rayon du disque	7,9 cm	module d'Young nominal	$E_0 = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
épaisseur maximale en tête d'aube	4 cm		
nombre d'éléments par aube	9199	coefficient de Poisson	0,3
nombre d'éléments par secteur	17 487		

### 4.3.2 Simulations de contact

Les simulations de contact aube/carter sont effectuées par le biais d'une stratégie numérique multi-physique dédiée développée au Laboratoire d'Analyse Vibratoire et Acoustique de Polytechnique Montréal, qui consiste en une extension à des modèles tri-dimensionnels de la stratégie numérique présentée dans la section 3.1.3. Cette stratégie repose sur une procédure d'intégration temporelle explicite permettant de prendre en compte les effets inertiels du rotor [156], les effets thermo-mécaniques [119, 157] ainsi que l'usure du revêtement abrasable [158] déposé sur le carter.

Pour cette première application de la méthode CM3 pour l'analyse du comportement vibratoire d'une roue aubagée désaccordée subissant des contacts avec le carter, un cadre d'étude simplifié — restant toutefois cohérent avec les observations expérimentales dans un compresseur basse pression [159] — est considéré. Le carter est supposé déformé mais infiniment rigide, ce qui signifie qu'il ne vibre pas du fait des impacts avec l'aube. Enfin, le contact aube/carter est initié par la déformation du carter et les effets inertiels et thermo-mécaniques sont négligés. Les paramètres matériau du revêtement abrasable sont donnés dans le tableau 4.3.

Tableau 4.3 Paramètres matériau du revêtement abrasable.

propriétés matériau	paramètres numériques
module d'Young	$2 \cdot 10^9 \text{ Pa}$
module plastique	$5 \cdot 10^8 \text{ Pa}$
limite élastique	1,5 Pa
coefficient de frottement	0,1
angle du biseau d'usinage	$60^\circ$

#### Hypothèses utilisées pour les simulations de contact

1. carter rigide
2. effets centrifuges, gyroscopiques et thermiques négligés

La déformation du carter est progressive et définie par un nombre de lobes notés  $n_d$  dans ce qui suit, de telle sorte que le carter est ovalisé pour  $n_d = 2$ . La pénétration équivalente de 0,5 mm est atteinte au bout de 10 % de la simulation. Les paramètres de simulation utilisés dans ce qui suit sont explicités dans le tableau 4.4.

Tableau 4.4 Paramètres pour les simulations de contact.

paramètres numériques		paramètres du carter	
pas temporel	$h = 10^{-7}$ s	jeu initial	1 mm
paramètre de réduction (par harmonique)	$\eta$	pénétration équivalente	0,5 mm
		coefficient de frottement aube/carter	0,15
		coefficient de frottement aube/abradable	0,1

La convergence des résultats obtenus en fonction des différents paramètres de simulation, tels que le pas de temps ou la discrétisation spatiale du revêtement abradable, est détaillée dans plusieurs publications [160] et n'est donc pas présentée dans ce chapitre. Avec les modèles réduits CM3, le meilleur compromis entre précision des résultats et rapidité des calculs est obtenu pour une valeur du pas de temps de l'intégration temporelle  $h = 10^{-7}$  s. Seule l'influence des paramètres relatifs à la construction du modèle réduit CM3, contribution de ce travail de recherche à la stratégie numérique développée au laboratoire, doit être étudiée en détails.

### 4.3.3 Sensibilité aux paramètres

Telle que présentée sur la figure 4.1, la construction d'un modèle réduit CM3 fait appel à un seul paramètre : le nombre de restriction  $R$ . Cependant, la qualité du modèle réduit obtenu par la CM3 est aussi directement liée à la qualité du modèle réduit accordé, contrôlée par le paramètre de réduction  $\eta$ . L'influence combinée de ces deux paramètres sur le coût en temps de calcul pour l'obtention des modèles réduits ainsi que leur impact sur la précision des résultats obtenus sont l'objet de cette section.

À titre indicatif, sur un ordinateur standard muni d'un processeur i7, la génération du système accordé réduit ( $\mathbf{K}_r$ ,  $\mathbf{M}_r$ ) pour  $\eta = 10$  nécessite près de 2 h de calcul. En comparaison, le temps requis pour le calcul du modèle réduit désaccordé, quelle que soit la valeur de  $R$ , est négligeable puisque le calcul des vecteurs de participation  $\mathbf{Q}_n$ , voir l'équation (4.5), est un produit matriciel de quantités pouvant être pré-calculées. À partir d'un modèle réduit, l'introduction d'un motif de désaccordage par la méthode CM3 demande quelques secondes de temps de calcul.

La méthodologie proposée permet donc, à partir d'un modèle réduit existant, et pour un

coût de calcul négligeable, d'introduire un quelconque motif de désaccordage. Toutefois, les simulations de contact sont, elles, coûteuses en temps de calcul. Pour cette raison, il est important de réduire au minimum la dimension des modèles réduits calculés. Dans un contexte stochastique où plusieurs milliers de simulations doivent être effectuées, il devient primordial de déterminer le meilleur compromis entre précision des résultats et temps de calculs.

L'influence des paramètres  $\eta$  et  $R$  est analysée successivement dans un cadre linéaire puis non-linéaire : (1) pour les simulations linéaires, l'emphasis est mise sur la représentation des centiles de l'amplification due au désaccordage sur un ensemble de tirages alors que (2) pour les simulations non-linéaires les quantités d'intérêt sont les déplacements et efforts de contact pour un motif désaccordé donné.

### Cadre linéaire

L'excitation appliquée sur la roue aubagée est un chargement tournant, représentant de façon simplifiée un chargement aérodynamique de la roue aubagée en fonctionnement nominal. La norme de l'excitation est définie selon l'équation (3.14). La plage de vitesses de rotation considérée pour le calcul de la FRF correspond à une largeur de 10 Hz, centrée la première famille de modes propres du modèle (1F), avec un pas de  $0,01 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Le forçage est appliqué sur le ddl  $r$  de chaque nœud frontière, avec une amplitude de  $F_{\max} = 100 \text{ N}$ . Le coefficient d'amortissement modal est  $\xi = 5 \cdot 10^{-4}$ . La réponse forcée est calculée par superposition modale.

Sept niveaux de désaccordage  $\sigma$  sont considérés, entre 0,14 % et 2,31 % ( $\delta E$  varie entre 0,25 % et 4 %). Pour chaque valeur de  $\sigma$ , 1000 motifs désaccordés sont calculés, puis sont utilisés pour tous les jeux de paramètres  $(\eta, R)$ .

Afin d'assurer que les modes doubles sont correctement pris en compte dans la réduction, les paramètres de réduction  $\eta$  considérés sont tous pairs. Les modèles réduits accordés sont ainsi construits pour :  $\eta = 2, 4, 6, 8, 10, 20, 30, 50$ . Les paramètres de restriction  $R$  maximaux correspondants, selon la relation (4.7), avec  $n_f = 15$  ddl frontière par aube, sont :  $R_{\max} = 16, 17, 18, 19, 20, 15, 30, 41$ .

Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 4.9, pour deux fréquences spatiales distinctes  $n_d = 2$  et  $n_d = 10$ . Le paramètre  $R$  a été pris à sa valeur maximale admissible pour chaque  $\eta$  considéré. Les courbes de centiles tracées (centiles 1, 50 et 99) se superposent à mesure que  $\eta$  augmente. En particulier, les résultats sont quasiment superposés pour  $\eta \geq 8$  pour les deux valeurs de  $n_d$ .

Les erreurs maximales pour chaque valeur de  $\eta$  ainsi que les erreurs moyennes par centiles

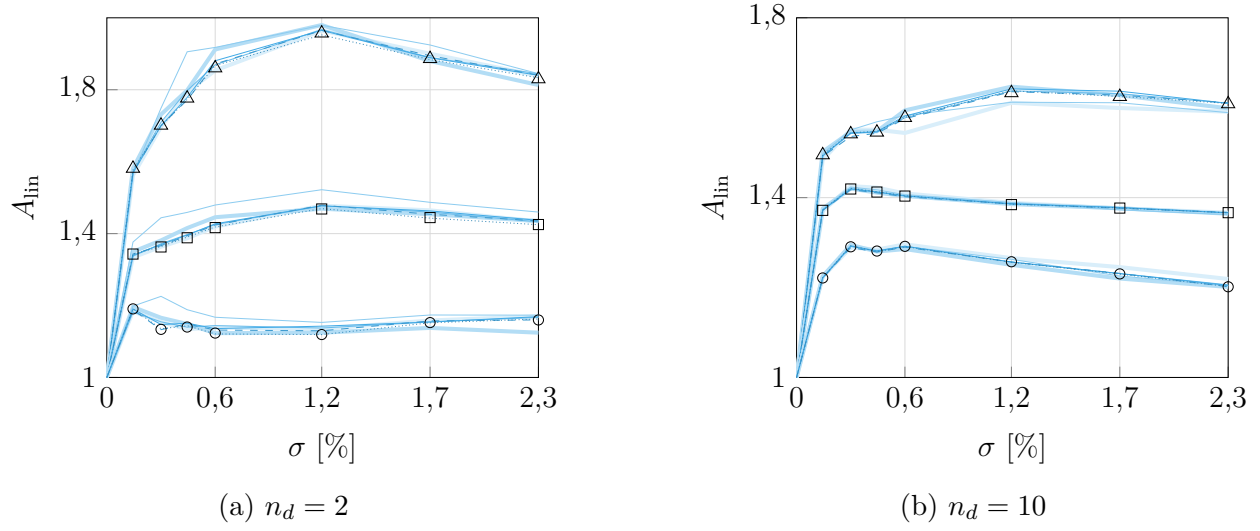


Figure 4.9 Évolution des centiles 1 (  $\circ$  ), 50 (  $\square$  ) et 99 (  $\triangle$  ) de l'amplification linéaire  $A_{\text{lin}}$  en fonction du paramètre de réduction  $\eta = 2$  ( — ), 4 ( — ), 6 ( — ), 8 ( — ), 10 ( — ), 20 ( - - - ), 30 ( . . . ) et 50 (marqueurs), le paramètre de restriction  $R$  étant pris maximum pour chaque  $\eta$ . Les courbes se superposent à partir de  $\eta = 8$ .

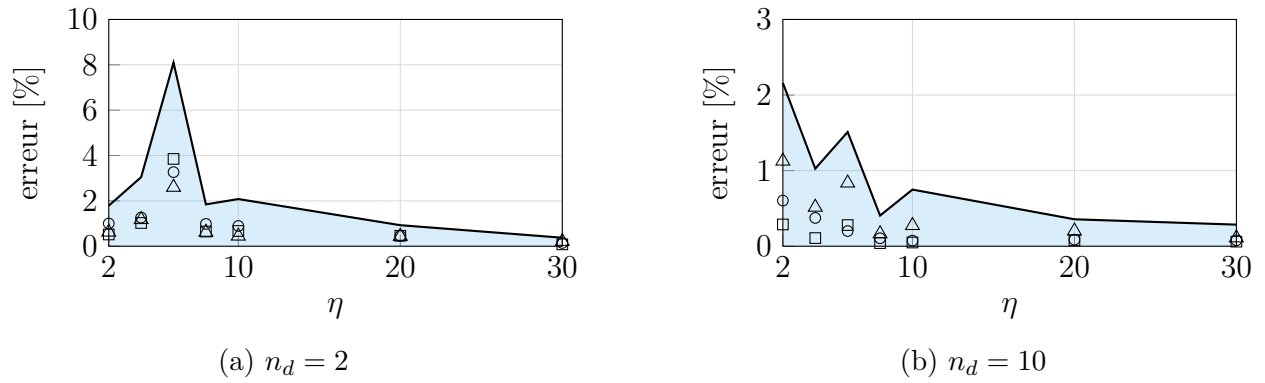


Figure 4.10 Évolution de l'erreur maximale ( — ) et des erreurs moyennes sur les centiles 1 (  $\circ$  ), 50 (  $\square$  ) et 99 (  $\triangle$  ) de l'amplification linéaire  $A_{\text{lin}}$  pour différents  $\eta$ , par rapport au cas de référence  $\eta = 50$ .

sont tracées sur la figure 4.10. Pour  $n_d = 2$ , l'erreur par rapport au cas  $\eta = 50$  est tracée sur la figure 4.10a. Elle est inférieure à 2 % pour  $\eta \geq 10$ , ce qui est plus restrictif que l'observation qualitative de la superposition des centiles sur la figure 4.9a. Les erreurs moyennes également indiquées par centiles sur la figure 4.10 sont inférieures à 2 % et présentent une diminution monotone à partir de  $\eta \geq 10$ . Les mêmes informations sont tracées pour  $n_d = 10$  sur la figure 4.10b.

Les temps de calcul par échantillon sont environ de 3 s pour  $\eta = 8$ , 5 s pour  $\eta = 10$  et 10 s pour  $\eta = 20$ . Une augmentation de  $\eta$  conduit donc à une augmentation substantielle des temps de calculs. Afin d'obtenir une précision satisfaisante sur le calcul des centiles pour tous les  $n_d$  qui pourront être étudiés, afin que d'assurer le temps de calcul le plus faible,  $\eta = 8$  apparaît comme le meilleur compromis dans le cadre linéaire et sera la valeur utilisée pour étudier la sensibilité des simulations au paramètre de restriction  $R$ .

Pour  $\eta = 8$ , les différents centiles ont été calculés pour différents paramètres de restriction de la méthode CMM :  $R = 2, 5, 10, 15, 25$ , ils sont tracés sur la figure 4.11. Les courbes de centiles sur la figure 4.11a sont proches dès  $R = 2$ , et l'évolution des erreurs tracées sur la figure 4.11b confirme la convergence rapide des résultats, même pour de faibles valeurs de  $R$ . Ceci est en accord avec la préconisation de Lim *et al.* [29] : seuls un ou deux modes encastres sont suffisants pour permettre de projeter le désaccordage, si ces modes correspondent aux modes excités par le forçage linéaire. Le forçage défini sollicite essentiellement la famille des modes 1F ce qui explique que conserver les deux premiers modes d'aubes ( $R = 2$ ) suffit à obtenir des résultats satisfaisants.

Comme mentionné précédemment, les temps de calcul ne sont pas impactés par la variation du paramètre  $R$  puisque celui-ci ne modifie pas la dimension du modèle réduit. Par ailleurs, comme il n'est pas possible de déterminer *a priori* le contenu fréquentiel d'une excitation de l'aube par contact, la valeur de  $R$  considérée est la valeur maximale autorisée par la relation (4.7), soit :

$$R = \left\lfloor \frac{n_f + \eta}{N} \right\rfloor \quad (4.10)$$

### Cadre non-linéaire

Le scénario de contact considéré est le suivant : le carter est ovalisé pour présenter 2 zones de contact privilégiées diamétralement opposées, et la vitesse de rotation  $\Omega$  est la vitesse nominale de la roue aubagée considérée, normalisée telle que  $\Omega = 1$ . La convergence des résultats est étudiée en fonction du paramètre de réduction  $\eta$  auquel est associée la valeur maximale du paramètre  $R$ , voir l'équation (4.11).



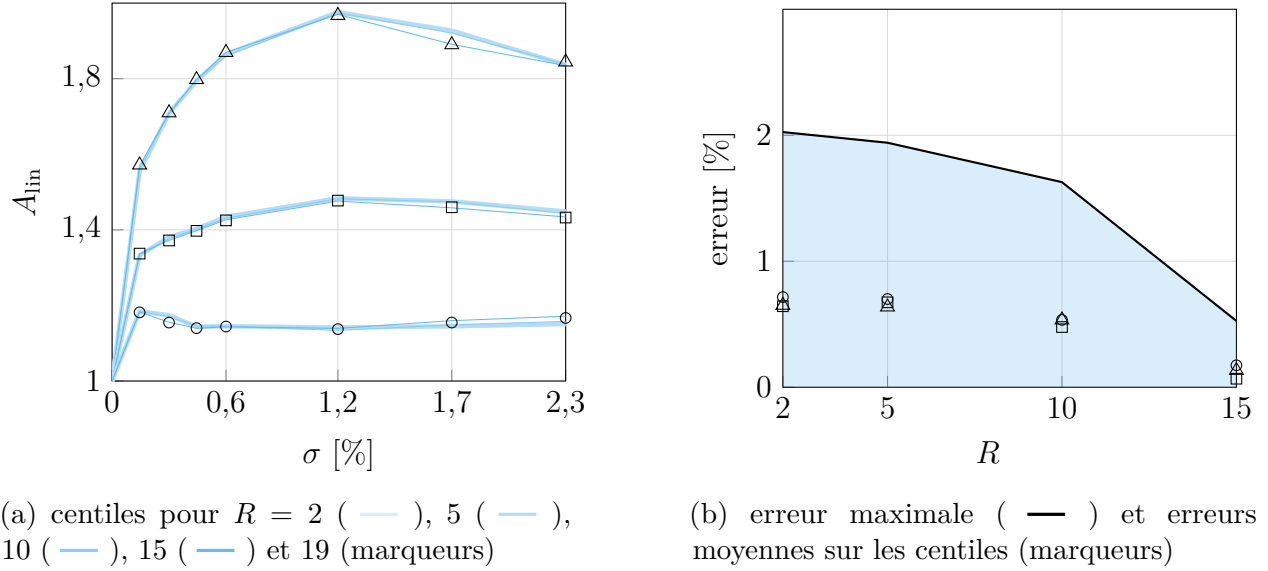


Figure 4.11 Évolution des centiles 1 (  $\circ$  ), 50 (  $\square$  ) et 99 (  $\Delta$  ) de l'amplification linéaire  $A_{lin}$  pour différents paramètres de restriction  $R$ , par rapport au cas de référence  $R = 19$ .

L'influence de  $\eta$  est évaluée sur les déplacements et les efforts de contact sur 10 tours de simulation. Le motif accordé ainsi que des motifs désaccordés à différents niveaux de désaccordage ( $\sigma = 0,29\%$  à  $\sigma = 2,31\%$ ) sont considérés. Par soucis de concision, seuls les résultats sur le motif qui converge le plus difficilement avec l'augmentation de  $\eta$  sont présentés dans ce qui suit. Les variations de module d'Young par aube du-dit motif sont données dans le tableau 4.5.

Tableau 4.5 Motif de désaccordage sélectionné pour la validation sur le modèle industriel, avec  $\sigma = 2,31\%$  ( $\max(\delta E) = 4\%$ ).

Variation du module d'Young par aube (%)					
$(\delta E)_1$	-3,32	$(\delta E)_2$	2,93	$(\delta E)_3$	3,18
$(\delta E)_4$	-2,05	$(\delta E)_5$	2,17	$(\delta E)_6$	-0,96
$(\delta E)_7$	3,22	$(\delta E)_8$	2,08	$(\delta E)_9$	-1,67
$(\delta E)_{10}$	-2,62	$(\delta E)_{11}$	3,97	$(\delta E)_{12}$	2,69
$(\delta E)_{13}$	-2,35	$(\delta E)_{14}$	-0,47	$(\delta E)_{15}$	-1,33
$(\delta E)_{16}$	3,98	$(\delta E)_{17}$	-1,10	$(\delta E)_{18}$	0,44
$(\delta E)_{19}$	2,18	$(\delta E)_{20}$	1,85	$(\delta E)_{21}$	2,49

Les amplitudes de déplacement du bord de fuite (nœud présentant le plus grand déplacement sur l'ensemble de la simulation) calculées pour  $\eta = 6, 8, 10, 50$  sont tracées sur la figure 4.12. Le signal complet selon les trois directions ( $\vec{r}, \vec{t}, \vec{z}$ ) tracé sur les figures 4.12a, 4.12b et 4.12c permet de mettre en évidence une bonne superposition des courbes dès  $\eta = 6$ .

Le déplacement selon la direction radiale  $\vec{r}$ , tracé sur la figure 4.12a présente notamment des

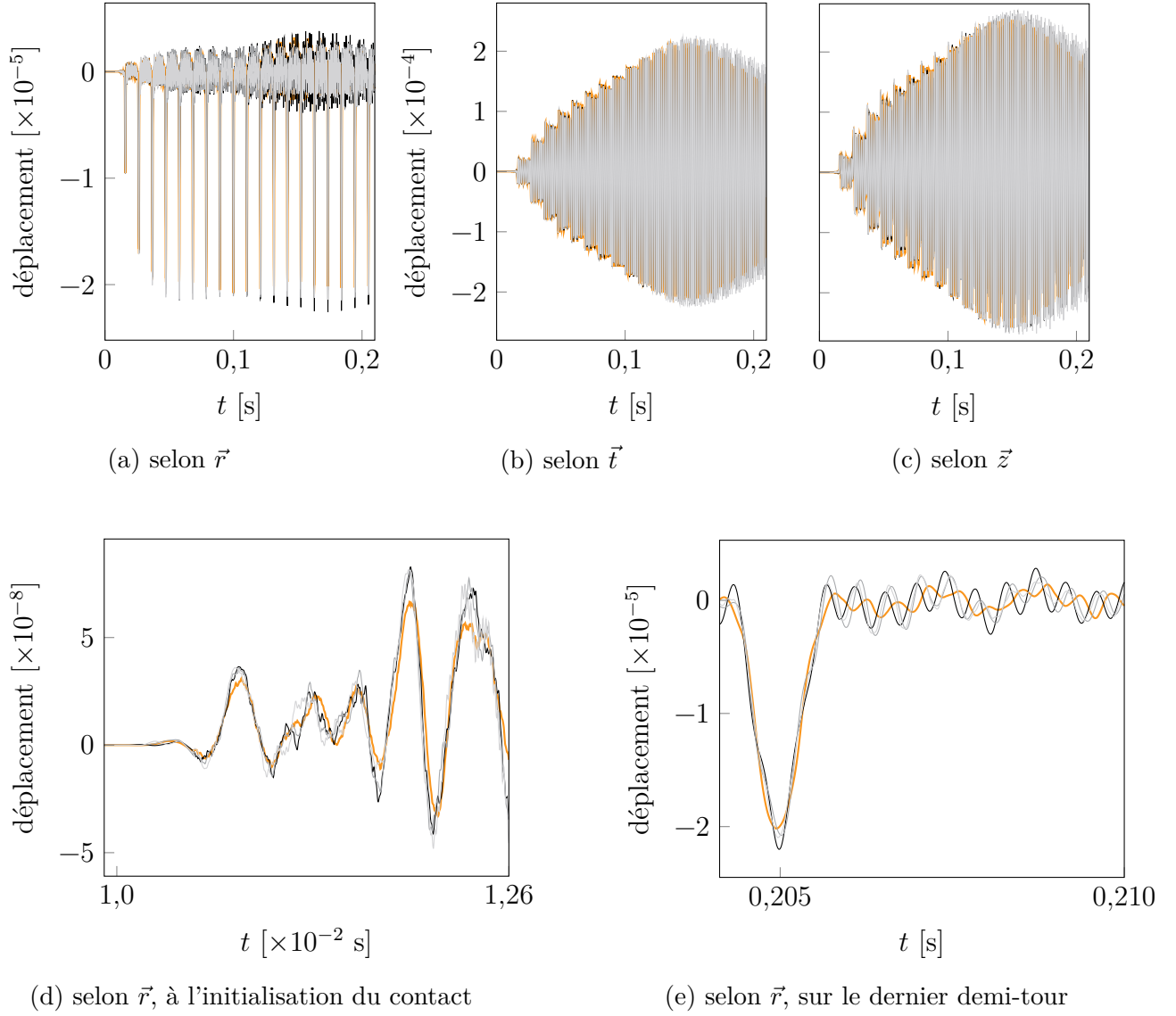


Figure 4.12 Convergence des déplacements calculés en configuration de contact sur le nœud présentant les déplacements maximaux sur l'ensemble de la simulation (bord de fuite de l'aube 12), en fonction du paramètre de réduction CB :  $\eta = 6$  ( — ),  $\eta = 8$  ( — ),  $\eta = 10$  ( — ),  $\eta = 50$  ( — ).

pics nets, qui coïncident avec le passage de l'aube sur les bosses. En particulier, l'augmentation de l'amplitude de ces pics en début de signal correspond bien à la déformation progressive du carter. Le déplacement selon  $\vec{r}$  à l'initialisation du contact, tracé sur la figure 4.12d, suit bien des variations similaires pour toutes les valeurs de  $\eta$ , démontrant la bonne convergence des résultats même pour des amplitudes très faibles (de l'ordre de  $10^{-7}$  après adimensionnement). Après 10 tours, tel que présenté sur la figure 4.12e, les déplacements calculés restent cohérents, en dépit de leur très faible ordre de grandeur, avec le dernier passage de bosse bien visible à  $t = 0,205$  s.

La convergence des résultats est également analysée relativement aux efforts de contact calculés au bord de fuite, tracés sur la figure 4.13. Les efforts selon les trois directions ( $\vec{r}, \vec{t}, \vec{z}$ ) tracés sur les figures 4.13a, 4.13b et 4.13c présentent des allures similaires dès  $\eta = 6$ . Les pics correspondant au passage d'une bosse, en particulier lors de la déformation progressive du carter en début de signal, sont bien visibles et correspondent à ceux identifiés sur les déplacements radiaux sur la figure 4.12a. Les ordres de grandeur relatifs entre les efforts sont bien conservés, avec des efforts selon  $\vec{r}$  prépondérants, de l'ordre de 10 fois plus importants que les efforts selon  $\vec{t}$  et 100 fois plus importants que les efforts selon  $\vec{z}$ . Les écarts absolus entre les efforts aux différents niveaux de réduction et le cas de référence à  $\eta = 50$  sont tracés sur les figures 4.13d, 4.13e et 4.13f afin de mettre en évidence un bon accord sur les normes des efforts selon les différentes directions, et ce malgré la différence de leurs ordres de grandeur. Les écarts selon les différentes directions suivent les mêmes ordres de grandeur relatifs que les efforts et sont équivalents pour les différentes valeurs de  $\eta$  considérées, avec des erreurs correspondantes lors des contact de l'ordre de 4 % selon  $\vec{r}$  et  $\vec{t}$  et de l'ordre de 5 % selon  $\vec{z}$ .

Les temps de calcul des simulations de contact sont grandement impactés par la valeur de  $\eta$ , passant d'environ 5 s pour  $\eta = 6$  à 17 s pour  $\eta = 50$ , pour un motif de désaccordage.

## Conclusion

L'étude de la convergence de l'amplification des déplacements en bout d'aube due au désaccordage dans un cadre linéaire, en fonction de  $\eta$  et  $R$  et pour différents nombres de lobes  $n_d$  sur le carter, révèle une bonne convergence des résultats à partir de  $\eta = 8$ , avec une erreur sur les centiles 1, 50 et 99 de moins de 2 %. Conformément à la littérature, il est mis en évidence que le coefficient de restriction  $R$  a peu d'incidence sur la convergence dans le cas d'une excitation sur les premiers modes d'aubes. Comme il a également peu d'incidence sur les temps de calcul, celui-ci est pris le plus grand possible.

Les temps de calculs obtenus pour chaque type de simulation et pour un motif donné en fonction de  $\eta$  sont reportés dans le tableau 4.6. Il apparaît que les temps de calcul par

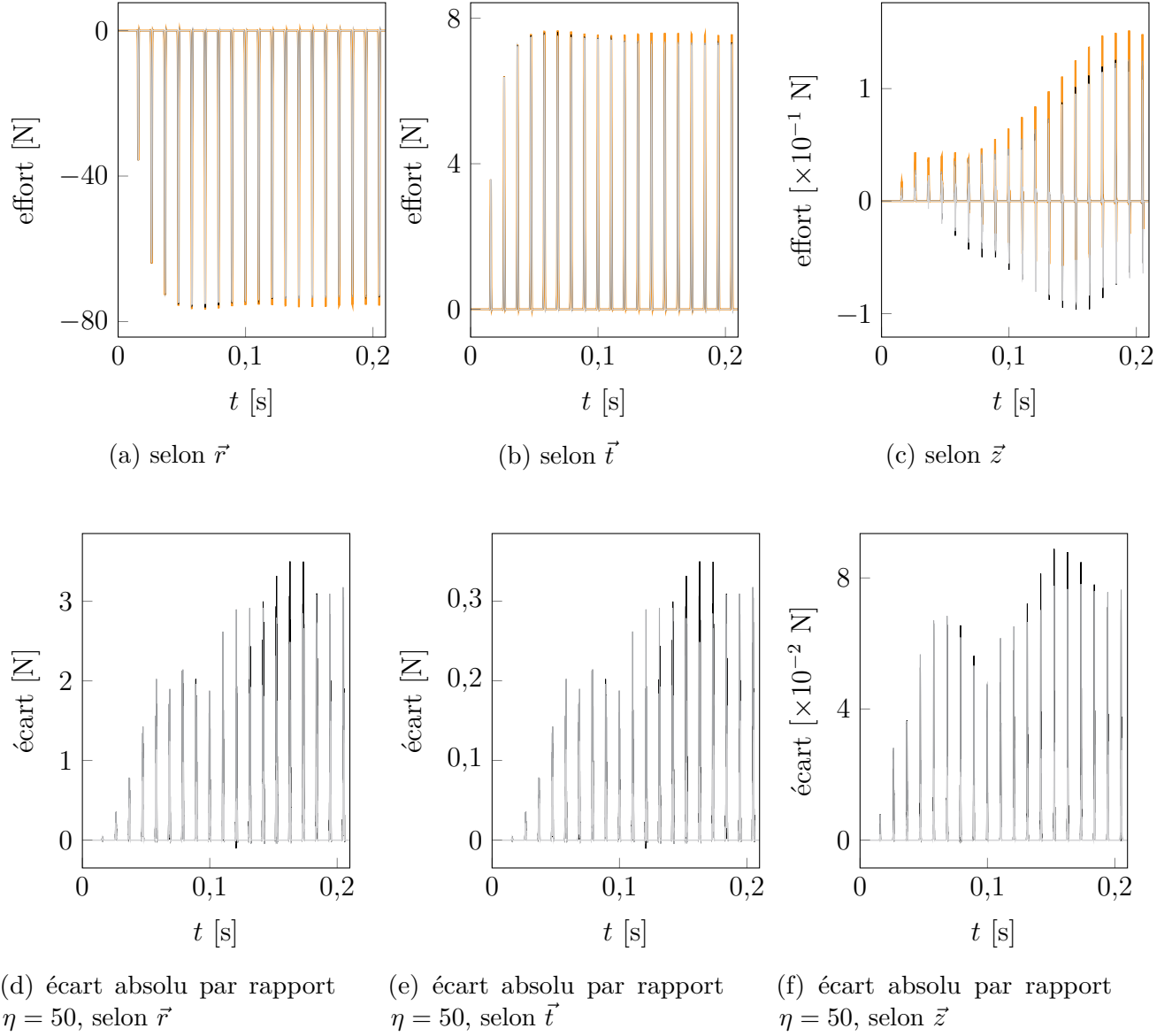


Figure 4.13 Convergence des efforts de contact calculés sur le nœud présentant les déplacements maximaux sur l'ensemble de la simulation (bord de fuite de l'aube 12), en fonction du paramètre de réduction CB :  $\eta = 6$  ( — ),  $\eta = 8$  ( — ),  $\eta = 10$  ( — ),  $\eta = 50$  ( — ).

Tableau 4.6 Temps de calcul par échantillon pour différents  $\eta$ .

$\eta$	simulation linéaire	simulation de contact
6	5,3 s	50 min
8	5,8 s	55 min
10	6,9 s	65 min
50	16,9 s	150 min

échantillon, aussi bien pour les simulations linéaires que de contact, sont majorés de 10 % pour  $\eta = 8$  par rapport à  $\eta = 6$ , et de plus de 18 % pour  $\eta = 8$  par rapport à  $\eta = 10$ . Comme l'analyse de convergence des centiles dans le cadre linéaire excluait  $\eta = 6$  des valeurs d'intérêt, il apparaît alors que  $\eta = 8$  est le meilleur compromis dans les deux cadres de simulations. Le couple de valeurs  $\eta = 8$  et  $R = 19$  est donc considéré par la suite. Le temps nécessaire au calcul du modèle réduit désaccordé par la CM3 est ainsi de l'ordre de 0,1 s par échantillon.

#### 4.4 Bilan

Une nouvelle méthode de réduction, nommée CM3, a été développée afin de permettre de générer des modèles réduits désaccordés dans un espace mixte modal/physique. Dans la présente recherche, les ddl physiques conservés sont ceux de l'interface aubes-carter, afin de permettre l'application de la stratégie définie pour les simulations de contact au chapitre 3. La méthode de réduction a été appliquée sur un cas académique à trois dimensions, puis sur un maillage industriel, afin de valider les calculs des modes propres, de vibrations linéaires et de contact.

Le coût final de création des modèles désaccordés ainsi obtenus est négligeable, permettant d'envisager des calculs stochastiques pour quantifier l'influence du désaccordage sur les non-linéarités de type contact sur un modèle industriel.

## CHAPITRE 5 CARACTÉRISATION DU COMPORTEMENT VIBRATOIRE D'UNE ROUE AUBAGÉE INDUSTRIELLE DÉSACCORDÉE

Dans ce chapitre, les résultats de simulations stochastiques linéaires et de contact sur le modèle de roue aubagée présenté dans la section 4.3 sont détaillés et analysés. L'ensemble des vitesses présentées sont normées par rapport à la vitesse de rotation nominale de la roue aubagée étudiée, qui correspond donc à  $\Omega = 1$ . Le modèle est réduit par la méthode CM3 présentée et validée au chapitre 4. Le scénario de contact est défini selon la configuration de fonctionnement nominale du modèle de roue aubagée présenté dans la section 4.3. Des analyses supplémentaires sur le comportement vibratoire du modèle en configuration non-linéaire sont alors proposées en seconde moitié du chapitre. L'ensemble des résultats et analyses sont finalement résumés et permettent d'aboutir à une proposition de plage de variation admissible du module d'Young.

### 5.1 Configuration linéaire

Les paramètres du modèle utilisé sont ceux donnés à la section 4.3.3. Les simulations linéaires sont effectuées telles que définies à la section 4.3.3, avec le nombre de lobes  $n_d$  qui varie de 1 à 10. Les paramètres de réduction CM3 sont repris tels qu'établis lors de l'étude de convergence (voir la section 4.3.3) :  $\eta = 8$  et  $R = 19$ . La quantité d'intérêt stochastique étudiée est l'amplification des déplacements due au désaccordage, notée  $A_{\text{lin}}$  comme dans la section 3.1.4, et calculée sur l'ensemble des nœuds frontière et sur la plage de vitesses correspondant aux fréquences propres de la famille de modes 1F des aubes. La séparation des fréquences propres due au désaccordage étant globalement accentuée à mesure que le niveau de désaccordage  $\sigma$  augmente, la plage utilisée pour déterminer l'amplitude maximale des vibrations est élargie pour les grandes valeurs de  $\sigma$ . Les temps de calcul moyens par échantillon en fonction de  $\eta$  sont indiqués dans le tableau 5.1.

Les résultats sont obtenus sur 10 000 itérations par niveau de désaccordage afin d'assurer la convergence stochastique, conformément à la littérature sur l'étude du désaccordage en

Tableau 5.1 Temps de calcul moyen par échantillon pour différents  $\sigma$ , sur une machine donnée.

$\delta E$ (%)	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4
$\sigma$ (%)	0,14	0,29	0,43	0,58	1,15	1,73	2,31
temps de calcul (s)	2,09	2,21	2,35	2,52	3,34	4,32	5,36

contexte linéaire [23]. L'information relative aux amplifications  $A_{\text{lin}}$  est résumée par les valeurs des centiles 1, 50 et 99 sur la figure 5.1. En accord avec la littérature [63], l'amplification  $A_{\text{lin}}$  ne varie pas de façon monotone selon  $n_d$  : pour  $\sigma = 0,14\%$ , le centile 99 est maximal pour  $n_d = 4$  et 6, tandis que pour  $\sigma = 1,7\%$ , il est maximal à faible  $n_d$  puis diminue avant d'augmenter à nouveau à partir de  $n_d = 8$ . Les deux types d'allure des centiles, comme tracé pour  $n_d = 2$  sur la figure 5.1b et  $n_d = 4$  sur la figure 5.1c, sont cohérents avec des évolutions et les niveaux d'amplification trouvées sur des modèles industriels de turbines [6, 23]. En particulier, pour  $n_d = 4$ , le pic net à faible  $\sigma$  se rapproche des distributions de Weibull étudiées pour la technique de Monte Carlo accélérée [6], et l'augmentation des valeurs du centile 1 aux plus forts niveaux de  $\sigma$  est également en accord avec la littérature [23].

La méthode de réduction CM3 proposée permet ainsi de bien rendre compte de la sensibilité au désaccordage telle qu'attendue sur un modèle industriel, avec des coûts de création du modèle largement réduits tout en conservant les degrés de liberté physiques à la frontière nécessaire à la gestion du contact.

## 5.2 Configuration non-linéaire

### 5.2.1 Scénario de contact

Contrairement au modèle phénoménologique introduit dans le chapitre 3, il n'est pas envisageable de calculer la réponse vibratoire du modèle industriel en contact sur toute une plage de vitesses, car ceci conduirait à des temps de calculs prohibitifs. Le cadre d'étude est donc ici volontairement restreint à un point de fonctionnement unique à la vitesse nominale de la roue aubagée  $\Omega = 1$ . En revanche, le niveau de désaccordage  $\sigma$  est variable.

Le scénario de contact considéré repose sur un carter ovalisé ( $n_d = 2$ ), configuration habituellement utilisée dans la littérature pour représenter la déformation d'un carter subissant un chargement thermique en fonctionnement [119]. Sauf mention contraire, les paramètres de simulation sont identiques à ceux considérés sur l'étude de convergence en fonction du paramètre de réduction à la section 4.3, résumés pour la roue aubagée dans le tableau 4.2, pour la couche abradable dans le tableau 4.3 et pour le carter dans le tableau 4.4. Cette section a pour objectif de justifier le choix de  $\Omega$  et  $n_d$ .

### Étude préliminaire sur une plage de vitesse

Dans cette section, une étude préliminaire sur l'interaction de contact pour le modèle accordé et un modèle désaccordé à  $\sigma = 2,3\%$ , dont le motif est donné dans le tableau 4.5, est présentée

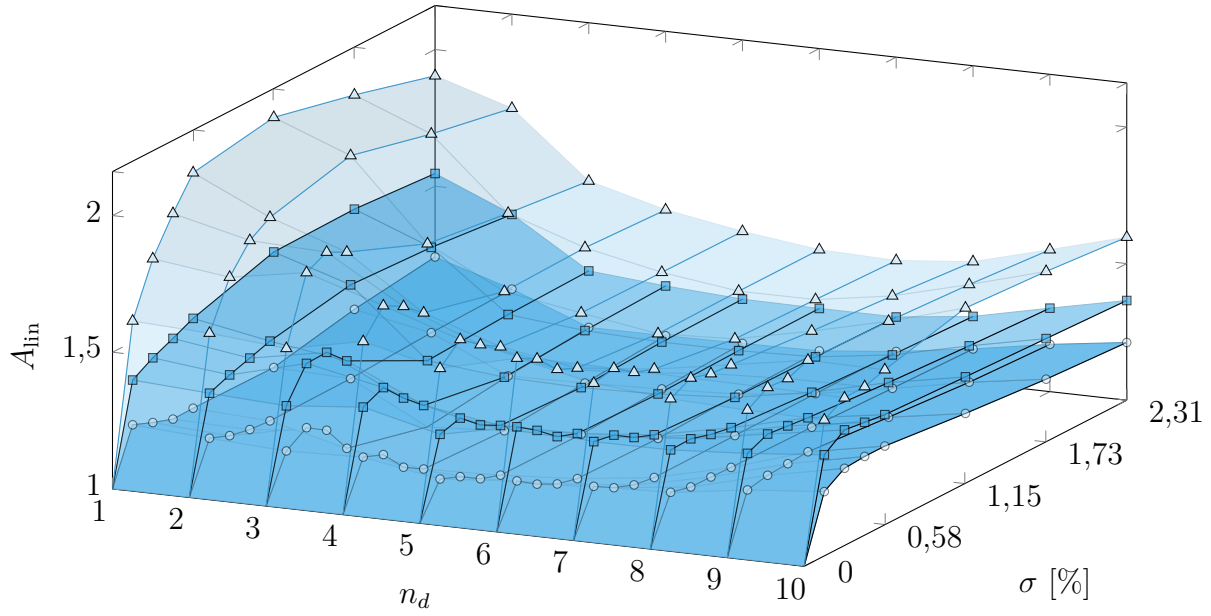
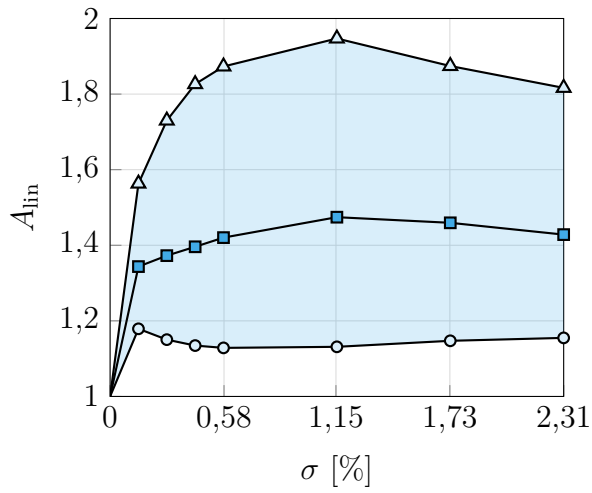
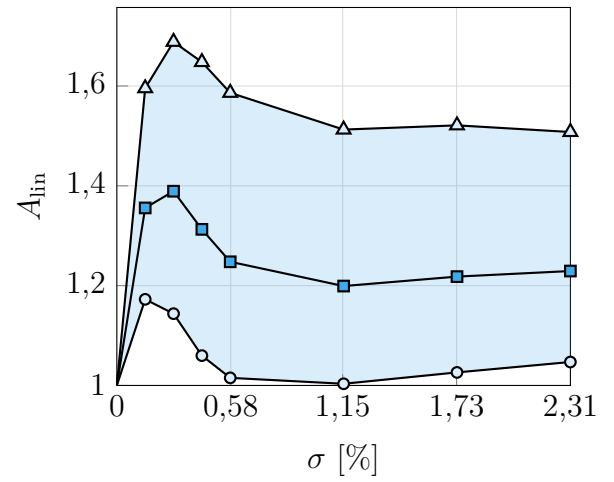
(a) pour  $n_d = 1$  à 10(b) pour  $n_d = 2$ (c) pour  $n_d = 4$ 

Figure 5.1 Amplifications  $A_{\text{lin}}$  en fonction du niveau de désaccordage  $\sigma$  et du nombre de lobes sur le carter  $n_d$  : centile 1 (—○—), centile 50 (—■—) et centile 99 (—△—).



sur une plage de vitesse allant de  $\Omega = 0,5$  à  $\Omega = 1,17$ .

Les réponses forcées des modèles accordé et désaccordé obtenues sont tracées sur la figure 5.2. L'amplitude calculée est la norme des déplacements selon les directions radiale  $r$  (orientée vers le carter), tangentielle  $t$  et axiale  $z$ . La dispersion des fréquences est clairement visible pour le modèle désaccordé. Les amplitudes à  $\Omega = 1$  sont indiquées : le motif désaccordé présente à cette vitesse fixe une amplification des vibrations de 3,35.

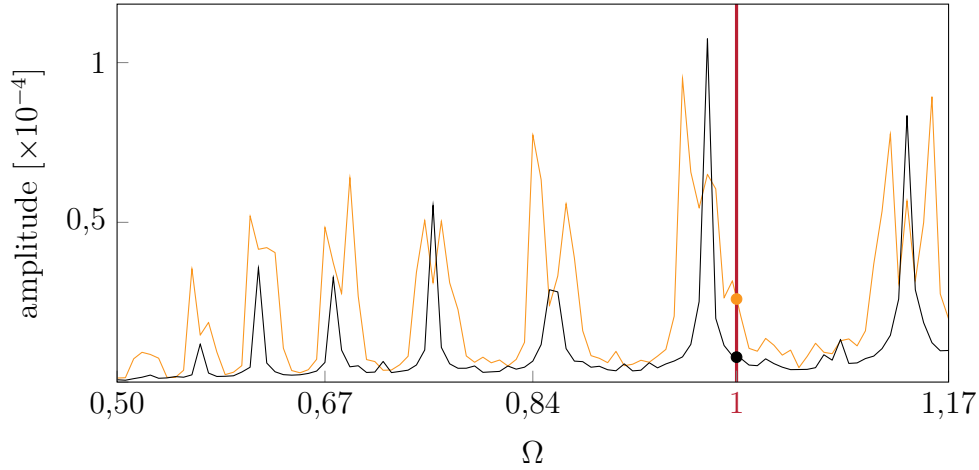


Figure 5.2 FRF sur le modèle accordé ( — ) et désaccordé ( — ), avec les amplitudes de déplacement respectives ( • ) et ( • ) obtenues à la vitesse nominale  $\Omega = 1$ .

Les cartes d'interaction obtenues par traitement de ces déplacements sont tracées sur la figure 5.3a pour le modèle accordé et sur la figure 5.3b pour le modèle désaccordé. La carte d'interaction sur la figure 5.3a pour le cas accordé permet de mettre en évidence le décalage en fréquence propre du fait de la rigidification due au contact. Par ailleurs, la vitesse de rotation nominale est très éloignée de l'intersection entre la première famille modale (1F) et le régime moteur 2, qui se trouverait environ à  $\Omega = 34$ , mais est proche de l'intersection entre la première famille modale (1F) et le régime moteur  $e_o = 14$ , à  $\Omega = 0,98$ . La carte pour le modèle désaccordé sur la figure 5.3b permet de mettre en évidence le décalage des fréquences dû au désaccordage.

### Configuration nominale

Dans les moteurs en fonctionnement, la dilatation thermique du carter couplée à la localisation de ses points d'attache induit une ovalisation du carter [119]. La configuration de contact à  $n_d = 2$  est donc définie dans le cadre de cette recherche. Les paramètres du carter et de l'abradable sont tels que définis dans la section 4.3.2. Les paramètres de la CM3 sont tels que

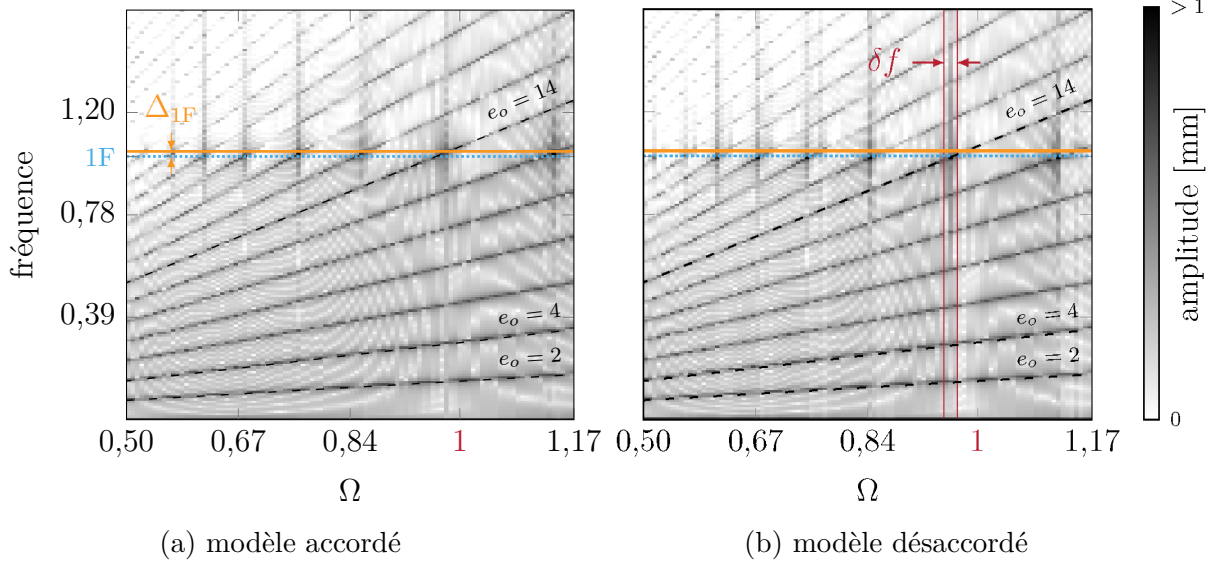


Figure 5.3 Cartes d'interaction pour  $n_d = 2$  tracées pour un pas en vitesse de  $6,7 \cdot 10^{-3}$ , régimes moteur (---) et fréquences d'interaction dans le cas d'un forçage linéaire (.....) et de non-linéarité de contact (—).

déterminés dans la section 4.3.3, soit :  $\eta = 8$  et  $R = 19$ .

Le nombre de tours de simulation est le résultat d'un compromis entre stabilisation des signaux temporels et temps de calcul. Contrairement au cas phénoménologique présenté dans le chapitre 3, l'implémentation d'une procédure de vérification de la convergence au sein de la boucle d'intégration temporelle serait trop coûteuse en temps de calcul. Un nombre de tours identique est donc fixé pour toutes les simulations. Les signaux temporels obtenus au bout de 50 tours de simulation pour le modèle accordé et pour un modèle désaccordé dont le motif est donné dans le tableau 4.5, sont tracés respectivement sur les figures 5.4a et 5.4b. L'augmentation rapide des amplitudes de déplacements correspond à l'initialisation du contact du fait de la déformation du carter progressive, qui atteint son amplitude maximale au bout de 10 tours, soit au temps indiqué  $t_{10}$ . Les oscillations régulières visibles sur les crêtes de la courbe enveloppe du signal obtenu sur le modèle accordé sur la figure 5.4a correspondent aux passages de lobes. L'ajout du désaccordage provoque une perte de régularité dans le signal, comme visible sur la figure 5.4b. Le maximum des amplitudes de vibrations atteint cependant un plateau si bien que le maximum calculé sur un tel signal permettra bien d'obtenir une tendance sur l'amplification des vibrations due au désaccordage. Afin de s'assurer qu'elle est bien stochastiquement viable, deux méthodes de calcul de l'amplitude maximale des vibrations au bout de 50 tours seront comparées : (1) une moyenne des maximums par tour sur les 10 derniers tours (donc à partir du 40<sup>ième</sup> tour, au temps  $t_{40}$  indiqué sur la figure 5.4) et (2) un

maximum sur les 3 derniers tours, soit la partie du signal en rouge clair (  $\square$  ) sur la figure 5.4.

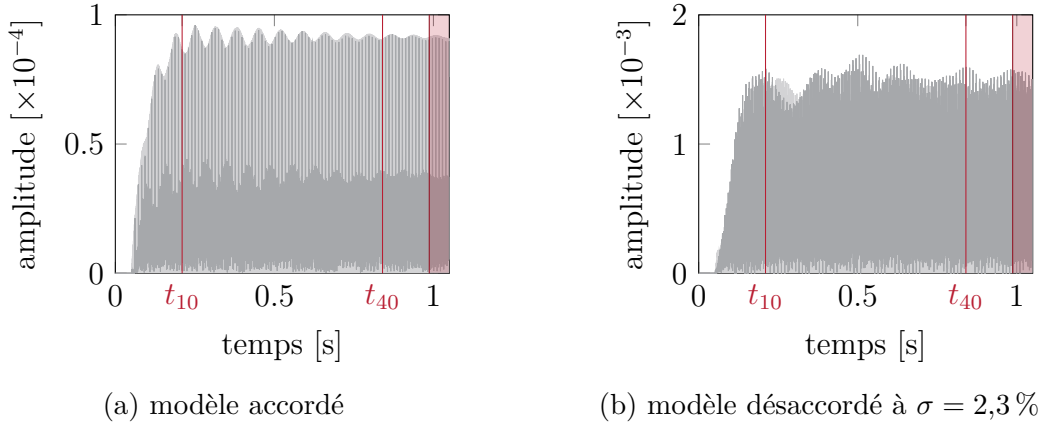


Figure 5.4 Amplitudes des déplacements sur les 50 tours simulés. Enveloppe pour tous les nœuds frontière (  $\square$  ) et signal pour le nœud présentant l'amplitude maximale ( — ), calculée sur les 3 derniers tours (  $\square$  ).

### 5.2.2 Amplification des vibrations

L'amplification des vibrations est définie comme le ratio entre l'amplitude des déplacements maximale sur l'ensemble des nœuds frontière (indiqués sur la figure 4.8b) pour le modèle désaccordé sur l'amplitude maximale des déplacements pour le modèle accordé. Six niveaux de désaccordage sont considérés :  $\sigma = 0,3\%$ ,  $0,6\%$ ,  $1,2\%$ ,  $1,7\%$ ,  $2,3\%$  et  $2,9\%$ , afin de correspondre aux variations classiquement définies par les tolérances de fabrication des roues aubagées [65].

Les quantités stochastiques d'intérêt sont étudiées à travers la valeur des centiles 10, 50 et 90. Les convergences stochastiques qualitative et quantitative sont présentées dans ce qui suit sur l'amplification des déplacements en fin de simulation, notée  $\mathcal{A}_{50}$  et calculée sur les 3 derniers tours de simulation de façon analogue à ce qui avait été fait sur le modèle phénoménologique dans la chapitre 3. Les résultats obtenus pour des calculs de l'amplification à différents temps de simulation sont ensuite présentés et analysés.

### Convergence

La stabilisation et la convergence des résultats obtenus est étudiée dans cette section, à travers les convergences qualitative et quantitative puis l'étude *a posteriori* de la stabilisation des signaux temporels.

**Stochastique.** La convergence stochastique des résultats est étudiée à la fois qualitativement et quantitativement, avec les mêmes méthodes que celles proposées dans la section 3.3.1. La convergence quantitative est calculée pour un niveau de confiance de 95 %, donc  $Z = 1,96$ . Les courbes obtenues pour les centiles 10, 50 et 90 sur tous les niveaux de désaccordage sont tracées sur la figure 5.5. La convergence qualitative est étudiée à travers la stabilisation des centiles tracés sur la figure 5.5a. Les centiles étudiés sont stabilisés assez rapidement, la convergence la plus lente est observée pour  $\sigma = 2,9\%$ . Pour l'ensemble des  $\sigma$  considérés, la convergence qualitative peut être considérée atteinte à partir de  $s = 800$  échantillons par niveau de désaccordage. Les valeurs obtenues pour la convergence quantitative sont tracées sur la figure 5.5b. L'erreur de convergence (notée  $e(c_s)$ ) décroît rapidement avec l'augmentation du nombre d'échantillons  $s$  avant de se stabiliser. Le centile 90 de  $\sigma = 2,9\%$  est également celui qui présente la convergence la plus lente. Pour l'ensemble des centiles et des  $\sigma$  considérés,  $e(c_s) < 5\%$  à partir de  $s = 700$  échantillons. Pour les 1000 échantillons considérés, l'erreur finale de convergence quantitative sur le centile 90 de  $\sigma = 2,9\%$  est de  $3,0\%$ , et pour l'ensemble des autres centiles  $e(c_s) < 0,64\%$ . En raison de la stabilisation de  $e(c_s)$  avec l'augmentation de  $s$ , un abaissement de l'erreur de convergence qualitative requerrait une augmentation significative de  $s$ .

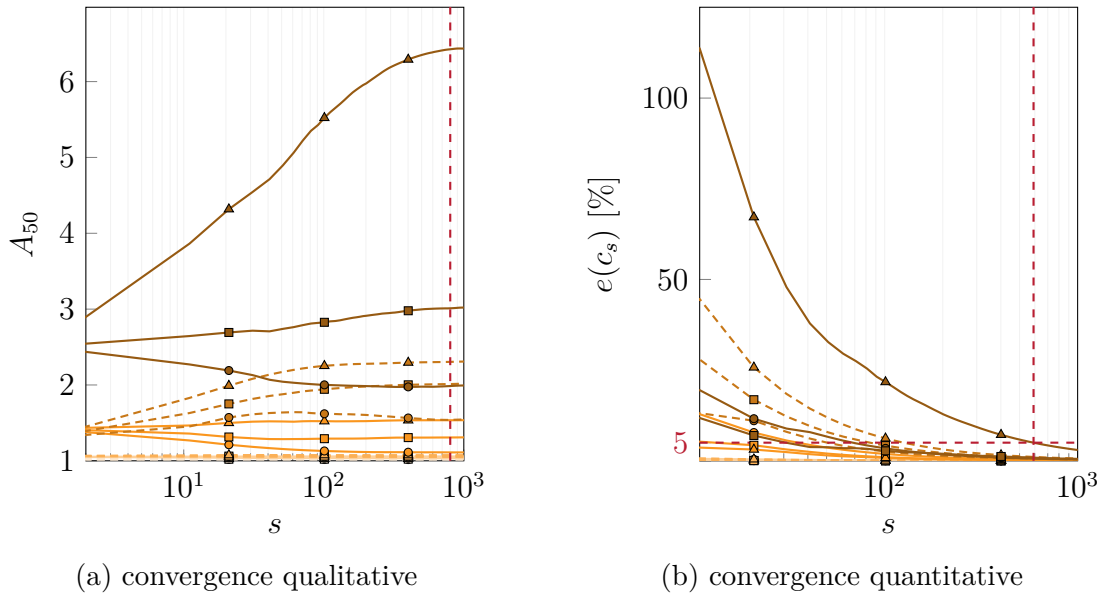


Figure 5.5 Convergence qualitative sur les centiles 10 (  $\circ$  ), 50 (  $\square$  ) et 90 (  $\Delta$  ) pour  $\sigma = 0,3\%$  (  $---$  ),  $0,6\%$  (  $-$  ),  $1,2\%$  (  $---$  ),  $1,7\%$  (  $-$  ),  $2,3\%$  (  $---$  ) et  $2,9\%$  (  $-$  ).

Les études de convergence stochastique qualitative et quantitative indiquent qu'une convergence avec un niveau de confiance de 95 % et une erreur de convergence de  $3,0\%$  est atteinte

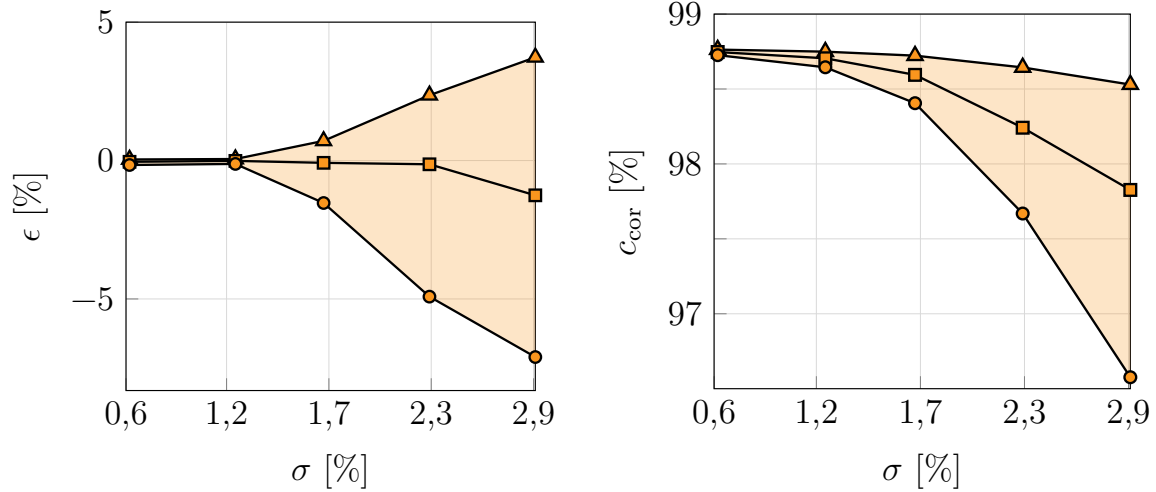
pour 1000 échantillons par niveau de désaccordage, tous niveaux confondus. Le temps de calcul moyen étant de 7h15 par échantillon, pour  $\Omega = 1$ , le temps de calcul nécessaire pour l'ensemble de la campagne est ainsi de 43 200 h. La puissance de calcul disponible au laboratoire a permis de répartir les calculs sur 40 processeurs de calcul, pour un temps brut de calcul équivalent de 45 jours par processeur pour l'ensemble de la campagne.

**Temporelle.** Le nombre de tours étant fixé en début de simulations, la stabilisation des signaux temporels est étudiée *a posteriori*, en utilisant les critères d'erreur sur le maximum des amplitudes de déplacements sur les 3 derniers tours,  $\epsilon$ , et de coefficient d'auto-corrélation des déplacements sur les 6 derniers tours,  $c_{\text{corr}}$ , tels que définis dans la section 3.2.1. Les centiles 10, 50 et 90 pour ces deux critères de convergence sont tracés sur la figure 5.6, et les valeurs numériques des extremums sont reportées dans le tableau 5.2. Il apparaît que  $c_{\text{corr}}$  tend à diminuer et  $\epsilon$  à augmenter, donc la stabilisation des signaux au bout de 50 tours tend à se détériorer à mesure que le niveau de désaccordage  $\sigma$  augmente. Il est à noter que la stabilisation se détériore rapidement à mesure que  $\sigma$  augmente, avec  $\max(\|\epsilon\|) \leq 6\%$  pour  $\sigma \leq 1,7\%$ , et des valeurs beaucoup plus importantes pour les plus grandes valeurs de désaccordage considérées, avec  $\max(\|\epsilon\|) = 33,62\%$  pour  $\sigma = 2,9\%$ . Cependant, le tracé des centiles de  $\epsilon$  sur la figure 5.6a permet de déterminer que pour 80 % des cas simulés,  $\epsilon \leq 7\%$ . Par ailleurs, les coefficients de corrélation sont toujours  $c_{\text{corr}} \geq 90\%$ , si bien que l'allure des signaux est relativement stable au bout de 50 tours. À titre de comparaison, les valeurs sur ces critères de convergence obtenus sur les signaux temporels présentés sur la figure 5.4 sont de  $\epsilon = -0,18\%$  et  $c_{\text{corr}} = 98,8\%$  sur le cas accordé, et de  $\epsilon = -1,5\%$  et  $c_{\text{corr}} = 97,9\%$  sur l'échantillon désaccordé avec  $\sigma = 2,3\%$ .

Les informations calculées sur la stabilisation des signaux temporels appuient donc le fait que les résultats obtenus stochastiquement sur 50 tours de simulation permettent de dégager des tendances qualitativement proches de ce que donneraient des résultats sur l'amplification en régime permanent, avec un coût de calcul raisonnable.

Tableau 5.2 Critères de convergence temporelle pour différents niveaux de désaccordage, au bout de 50 tours de simulation.

$\sigma$ [%]	0,29	0,58	1,2	1,7	2,3	2,9
$\min(c_{\text{corr}})$ [%]	98,73	98,67	98,51	97,72	96,66	92,91
$\max(c_{\text{corr}})$ [%]	98,78	98,78	98,79	98,88	99,18	99,52
$\min(\epsilon)$ [%]	-0,52	-0,34	-1,18	-5,68	-10,62	-33,62
$\max(\epsilon)$ [%]	0,22	0,22	0,28	2,53	9,44	15,76



(a) erreur sur le maximum entre les 3 derniers tours et les 3 tours précédents

(b) coefficient de corrélation

Figure 5.6 Stabilisation des signaux temporels sur 50 tours de simulation, centiles 10, 50 et 90.

**Bilan.** D'une part, l'étude de la convergence qualitative et quantitative met en évidence la fiabilité stochastique des résultats dès 1000 échantillons par  $\sigma$ , par compromis entre niveau de confiance et temps de calcul par niveau de désaccordage. D'autre part, l'étude de la stabilisation des signaux temporels indique que les résultats stochastiques obtenus sur 50 tours de simulation présentent qualitativement la même tendance sur l'amplification des vibrations que des résultats qui seraient obtenus avec identification du régime permanent.

## Résultats

La section suivante présente les résultats stochastiques obtenus sur les simulations en configuration nominale industrielle ( $\Omega = 1$  et  $n_d = 2$ ), pour tous les niveaux de désaccordage considérés ( $\sigma = 0,3\%$  à  $2,9\%$ ). L'amplification des vibrations due au désaccordage  $y$  est présentée, calculée au bout de 50 tours et au bout de 10 tours de simulation.

### Au bout de 50 tours.

**Méthode de calcul.** L'amplification des vibrations due au désaccordage, calculée au bout de 50 tours de simulation, est notée  $\mathcal{A}_{50}$ . Afin de s'assurer de la robustesse des résultats obtenus, deux types de calculs sont comparés :

- (1) la moyenne des maximums par tour sur les 10 derniers tours (20 % en fin de simulation)

(2) le maximum sur les 3 derniers tours.

Le premier calcul permet de lisser les résultats obtenus, alors que le second calcul est cohérent avec le critère proposé dans l'étude phénoménologique dans le chapitre 3. Les résultats obtenus pour ces deux critères sont présentés pour les centiles 10, 50 et 90 sur la figure 5.7. Les deux calculs d'amplification renvoient des valeurs de centiles très proches, comme le montre la superposition des courbes pleines et en pointillés : si la convergence temporelle n'est pas atteinte pour certains motifs, comme les critères  $\epsilon$  et  $c_{\text{cor}}$  l'indiquent (section 5.2.2), le nombre d'échantillons considérés permet d'assurer la robustesse du calcul des centiles, avec un calcul de l'amplification similaire au cas phénoménologique. Pour ce qui suit,  $\mathcal{A}_{50}$  désigne les résultats obtenus par le calcul du maximum sur les 3 derniers tours.

**Évolution en fonction de  $\sigma$ .** Pour tous les niveaux de désaccordage considérés,  $\mathcal{A}_{50} > 1$  et croît de façon monotone : les vibrations post-contact sont amplifiées par le désaccordage, ce qui tend à empirer avec l'augmentation de  $\sigma$ . Les centiles 10, 50 et 90 de  $\mathcal{A}_{50}$  évoluent à mesure que  $\sigma$  augmente suivant trois phases :

- (1)  $\sigma \leq 1,2\%$  (figure 5.7b),  $\mathcal{A}_{50}$  progresse moins rapidement que  $\sigma$ , les centiles présentent une allure logarithmique ;
- (2)  $1,2\% \leq \sigma \leq 2,3\%$  (figure 5.7c),  $\mathcal{A}_{50}$  progresse plus rapidement que  $\sigma$ , avec une inflexion nette à  $\sigma = 1,2\%$  ;
- (3)  $2,3\% \leq \sigma$  (figure 5.7a), le centile 90 progresse exponentiellement avec le niveau de désaccordage, passant de 2,33 pour  $\sigma = 2,3\%$  à 6,44 pour  $\sigma = 2,9\%$ , et l'écart entre les centiles 10 et 90 passe de 0,76 à 4,43.

Le calcul de l'amplification sur une vitesse fixée a déjà été utilisé dans un contexte linéaire, notamment par Ewins [53] et Whitehead [78]. Dans ces deux études, la vitesse d'intérêt pour le calcul de l'amplification correspond à la résonance de la roue aubagée accordée. L'amplification maximale obtenue est typiquement de l'ordre de 20 %, pour une variation de l'ordre de 3 % sur le module d'Young des aubes, soit  $\sigma = 1,7$  pour une distribution uniforme. Dans le cadre non-linéaire défini, le centile 50 indique une amplification de 32 %, qui est dans les mêmes ordres de grandeur. En revanche, de plus hauts niveaux de désaccordage conduisent à des amplifications très élevées. Une explication sera proposée dans la section d'analyse. Enfin, il est tout de même à noter que les amplitudes sont très faibles dans le cas accordé pour le cas de contact choisi (voir la figure 5.4a), si bien que même pour l'échantillon présentant l'amplification maximale (soit  $\mathcal{A}_{50} = 11,7$ ), les amplitudes maximales de déplacement sont de 1,1 mm et restent dans le cadre de l'hypothèse des petites déformations de l'équation du mouvement utilisée.

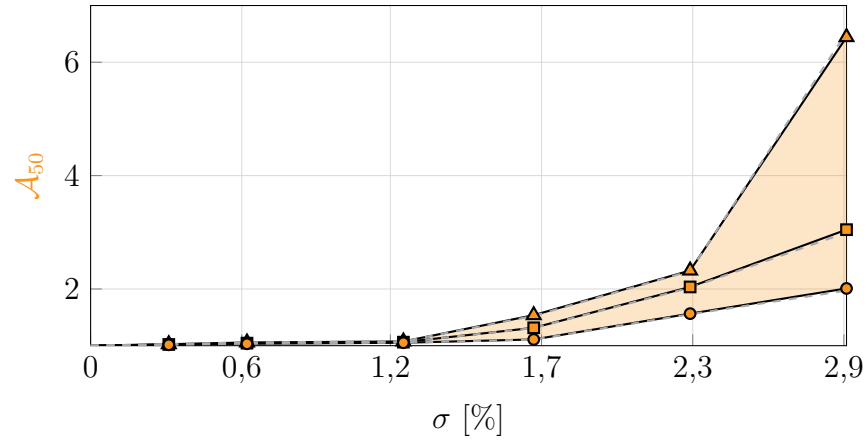
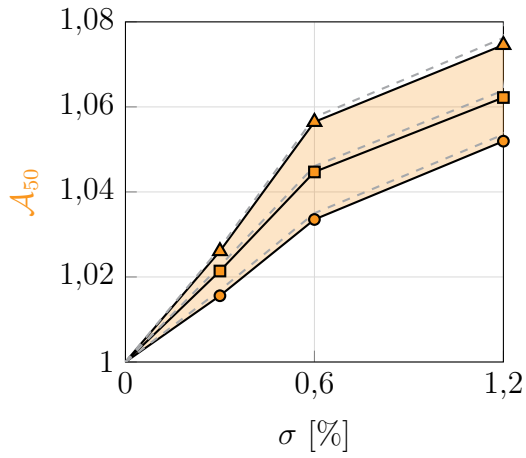
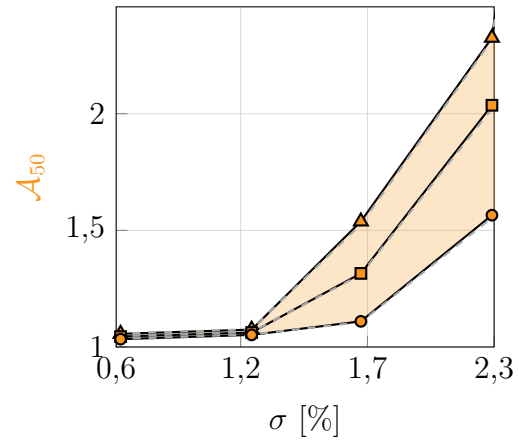
(a) sur tous les  $\sigma$ (b) pour  $\sigma \leq 1,2\%$ (c) pour  $0,6\% \leq \sigma \leq 2,3\%$ 

Figure 5.7 Amplifications non-linéaires (  $\square$  ) au bout de 50 tours en configuration nominale industrielle, calculée avec le maximum sur les 3 derniers tours ( — ) et la moyenne des maximums sur les 10 derniers tours ( - - ), avec les centiles 10 (  $\circ$  ), 50 (  $\square$  ) et 90 (  $\triangle$  ).



**Au bout de 10 tours.** L'étude de l'amplification des déplacements du fait du désaccordage lors du régime transitoire de vibration est une problématique de recherche récente, en réponse à l'intérêt industriel qu'elle présente [161,162]. Il a été montré que dans le cadre des vibrations linéaires, l'amplification transitoire des déplacements, avec une vitesse variant progressivement, peut être du même ordre de grandeur — voire 20 % supérieure — que l'amplification en régime permanent [161]. Dans ce qui suit, l'amplification des déplacements sur les 10 premiers tours de simulation, notée  $\mathcal{A}_{10}$ , est étudiée pour le scénario de contact défini.

Les résultats stochastiques obtenus sur les centiles 10, 50 et 90 sont tracés sur la figure 5.8. Les centiles obtenus sur  $\mathcal{A}_{50}$  y sont également rappelés. Pour tous les  $\sigma$  considérés,  $\mathcal{A}_{10} > 1$  et croît de façon monotone. Peu après l'initialisation du contact, le désaccordage induit donc une amplification des vibrations. Les centiles de  $\mathcal{A}_{10}$  évoluent à mesure que  $\sigma$  augmente suivant deux phases :

- (1)  $\sigma \leq 0,6\%$  (figure 5.8b),  $\mathcal{A}_{10}$  progresse moins rapidement que  $\sigma$  ;
- (2)  $0,6\% \leq \sigma$  (figure 5.8a),  $\mathcal{A}_{10}$  progresse plus rapidement que  $\sigma$ , sur tous les centiles.

Contrairement à ce qui avait été constaté pour  $\mathcal{A}_{50}$ , il n'y a donc pas de phase où le centile 90 présente une évolution plus forte que les autres centiles, si bien que l'élargissement de la zone entre les centiles reste progressive. Les autres phases sont assez similaires, avec cependant un décalage des bornes de  $\sigma$  vers les plus petit désaccordage. Pour  $\sigma \leq 0,6\%$  (figure 5.8b), le centile 90 de  $\mathcal{A}_{10}$  suit quasiment le centile 10 de  $\mathcal{A}_{50}$  : stochastiquement, pour 90 % des cas, l'amplification des vibrations pourrait être amoindrie si le temps de contact était plus court. À noter cependant que les amplifications considérées sont très faibles dans les deux cas, passant d'environ 4,6 % sur le centile 50 de  $\mathcal{A}_{50}$  à moins de 1,7 %. Pour  $\sigma = 1,2\%$ , les courbes de centile de  $\mathcal{A}_{10}$  présentent une inflexion, si bien que 50 % des résultats transitoires sont désormais au-dessus de 90 % des résultats à 50 tours. De plus les résultats présentent une grande dispersion, si bien qu'une faible variation des paramètres sur un motif choisi peut conduire à des amplifications bien plus importantes que souhaitées. Enfin, pour  $1,2\% < \sigma$  (figure 5.8a et 5.8c), le centile 10 de  $\mathcal{A}_{10}$  passe du centile 10 au centile 50 de  $\mathcal{A}_{50}$ , puis continue de le suivre : les amplifications les plus faibles  $\mathcal{A}_{10}$  sont au niveau de la médiane de  $\mathcal{A}_{50}$ , ce qui suggère stochastiquement des déplacements importants peu après le contact qui se stabilisent vers des amplitudes plus faibles.

Enfin, les niveaux d'amplification sont globalement du même ordre de grandeur : des amplifications très élevées sont constatées même peu après l'initialisation du contact.

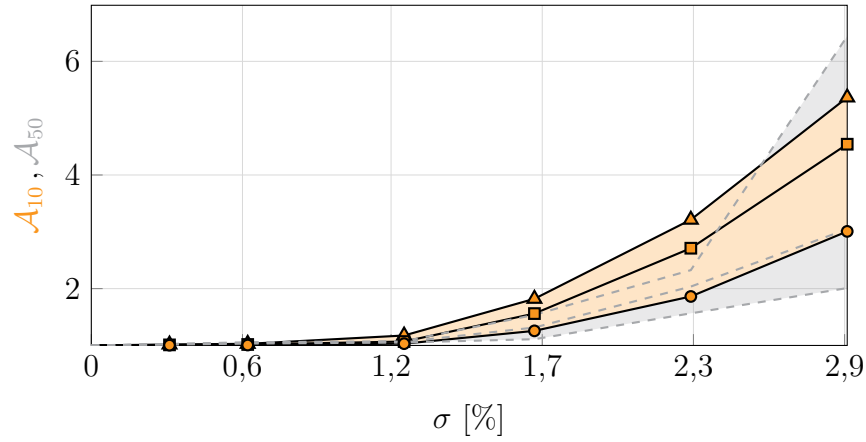
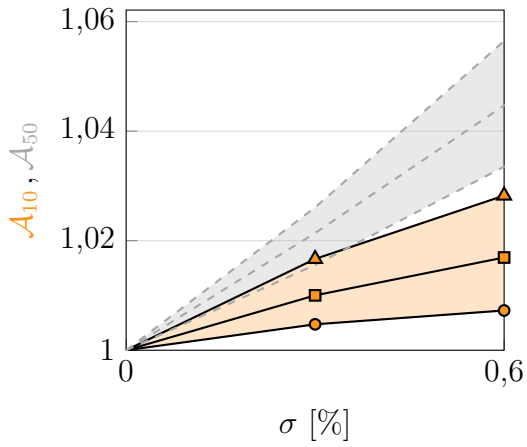
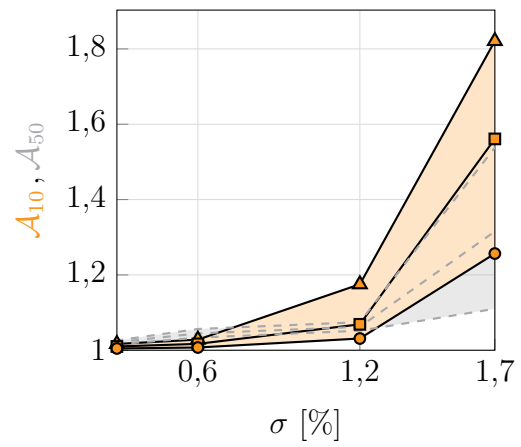
(a) sur tous les  $\sigma$ (b) pour  $\sigma \leq 0,6\%$ (c) pour  $0,3\% \leq \sigma \leq 1,7\%$ 

Figure 5.8 Amplifications non-linéaires (  $\square$  ), calculées avec le maximum sur les 10 premiers tours (20 % de la simulation), comparées aux amplifications au bout de 50 tours (  $\square$  ), avec les centiles 10 (  $\circ$  ), 50 (  $\square$  ) et 90 (  $\triangle$  ).

## Analyse

Les niveaux d'amplification constatés sont très élevés, aussi bien au bout de 50 tours que de 10 tours de simulation. Ceci peut être dû au calcul à une vitesse de rotation fixe, si la vitesse de rotation se est peu éloignée d'une vitesse critique. En effet, sur les FRF désaccordées, la multiplication des pics de résonance et l'élargissement de la plage critique (voir les cartes d'interaction à la figure 5.3) peut amener à ce qu'un pic soit constaté à une vitesse non critique pour le cas accordé.

Les diagrammes de Campbell de la roue aubagée et de l'aube encastrée, établis sur les fréquences propres, sont tracés afin d'identifier les possibles fréquences critiques d'interaction. Utilisés conjointement, ces deux diagrammes permettent d'estimer le comportement du système non-linéaire. En effet, les fréquences propres de la roue aubagée sont inférieures aux fréquences propres du système non-linéaire, du fait de la rigidification due au contact, tandis que les fréquences propres de l'aube encastrée sont supérieures aux fréquences propres du système non-linéaire, puisque la condition d'encastrement sur la base de l'aube est plus contraignante que la liaison avec le disque.

Le diagramme de Campbell de la roue aubagée est présenté sur la figure 5.9a. Les fréquences  $y$  sont normalisées par rapport à la première fréquence propre de la roue aubagée accordée. Les trois premières familles de modes de la roue accordée sont tracées, correspondant aux modes d'aubes suivants : première flexion (1F), pour des fréquences entre 1 et 1,01, seconde flexion (2F) entre 2,67 et 3,05 et première torsion (1T) entre 3,25 et 3,51. Pour la famille de modes 1F, les extremums de fréquences propres désaccordées sont indiqués pour les échantillons simulés, par niveau de désaccordage, sur la figure 5.9b. Les fréquences propres s'éloignent du cas accordé à mesure que  $\sigma$  augmente. Il apparaît qu'une possible interaction entre le régime moteur  $e_o = 14$  et la vitesse nominale  $\Omega = 1$  pourrait se produire à une fréquence propre de 1,04 dans le cas linéaire, ce qui est 2,6 % au-dessus de la fréquence propre maximale de la roue accordée. À mesure que le désaccordage augmente, les fréquences maximales se rapprochent de cette possible interaction mais ne l'atteignent pas.

Par ailleurs, le diagramme de Campbell de l'aube encastrée est présenté sur la figure 5.10a. Les premiers modes sont également classés dans l'ordre : 1F, 2F et 1T. Les fréquences propres sont tracées pour une aube de la roue aubagée accordée, au module d'Young  $E_0$ , ainsi que pour un module d'Young de +5 % et de -5 % de  $E_0$ . La fréquence correspondant au mode 1F pour l'aube à  $E = E_0$  est de 1,03, bien supérieure à la plage de fréquences correspondante pour la roue aubagée, mais toujours inférieure à la fréquence d'interaction possible entre la vitesse nominale et le régime moteur  $e_o = 14$ . La fréquence propre du mode 1F pour une aube à  $E = E_0(1 - 5\%)$  est davantage éloignée de la fréquence de possible interaction. En

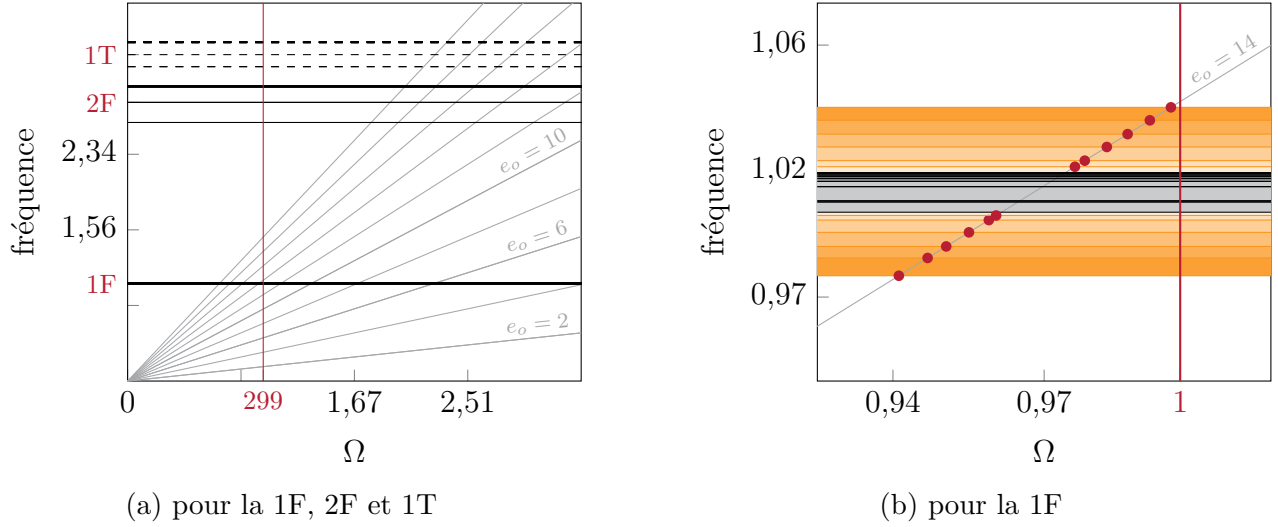


Figure 5.9 Diagramme de Campbell pour la roue aubagée, avec les fréquences propres accordées pour les premiers modes de flexion ( — ) et de torsion ( --- ) et la plage de variation des fréquences propres désaccordées pour tous les échantillons simulés, en fonction du désaccordage :  $\sigma = 0,3\%$  (  ) à  $\sigma = 2,9\%$  (  ). Les possibles interactions avec  $e_o = 14$  sont indiquées ( • ).

revanche, la fréquence propre du mode 1F pour une aube à  $E = E_0(1 + 5\%)$  est à 1,05, soit au-dessus de la fréquence de possible interaction. En somme, le désaccordage combiné à la rigidification au contact peut amener la plage de fréquences critiques au niveau de la vitesse de rotation nominale, et donc à un régime critique.

L'analyse du contenu fréquentiel des déplacements tangentiels du nœud au bord de fuite sur les 3 derniers tours, réalisé par transformée de Fourier rapide (FFT, de l'anglais *Fast Fourier Transform*), permet de valider ce cas d'interaction. Les résultats sont présentés sur la figure 5.11, pour les échantillons à  $\sigma = 2,9\%$ , où un échantillon sur 20 est représenté par soucis de lisibilité. L'allure du signal est similaire pour tous les  $\sigma$ . Des pics sont régulièrement espacés pour les plus basses fréquences, qui correspondent aux différents régimes moteurs. Le pic le plus important pour tous les échantillons se situe à une fréquence de 1,04, qui est bien la fréquence d'interaction possible entre la famille de modes 1F et  $e_o = 14$  identifiée sur le diagramme de Campbell. Enfin, du contenu fréquentiel est également visible à plus haute fréquence, autour de 3,12, ce qui suggère une contribution des modes de déformation 2F et 1T qui sera détaillée lors de l'analyse du comportement vibratoire.

Le désaccordage, du fait du décalage en fréquences qu'il induit, décale donc le régime critique, qui est alors capté à la vitesse de rotation nominale, d'où les amplifications  $\mathcal{A}_{50}$  très importantes constatées aux plus hauts désaccordages.

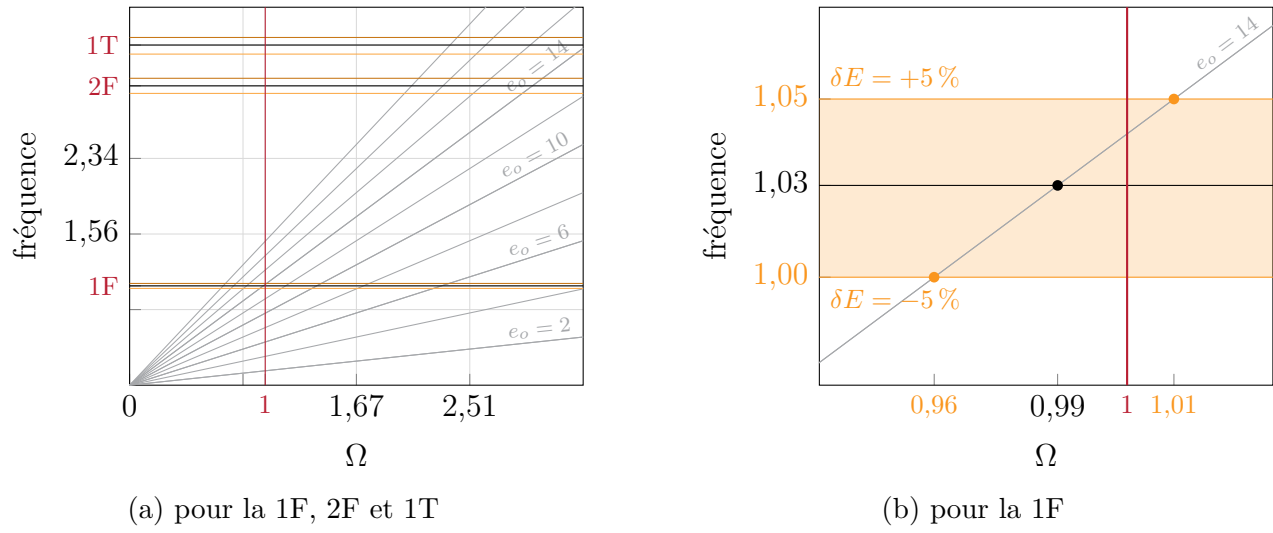


Figure 5.10 Diagramme de Campbell pour l'aube encastree, avec les fréquences propres pour  $E = E_0$  (—),  $E = E_0(1 - 5\%)$  (—) et  $E = E_0(1 + 5\%)$  (—).

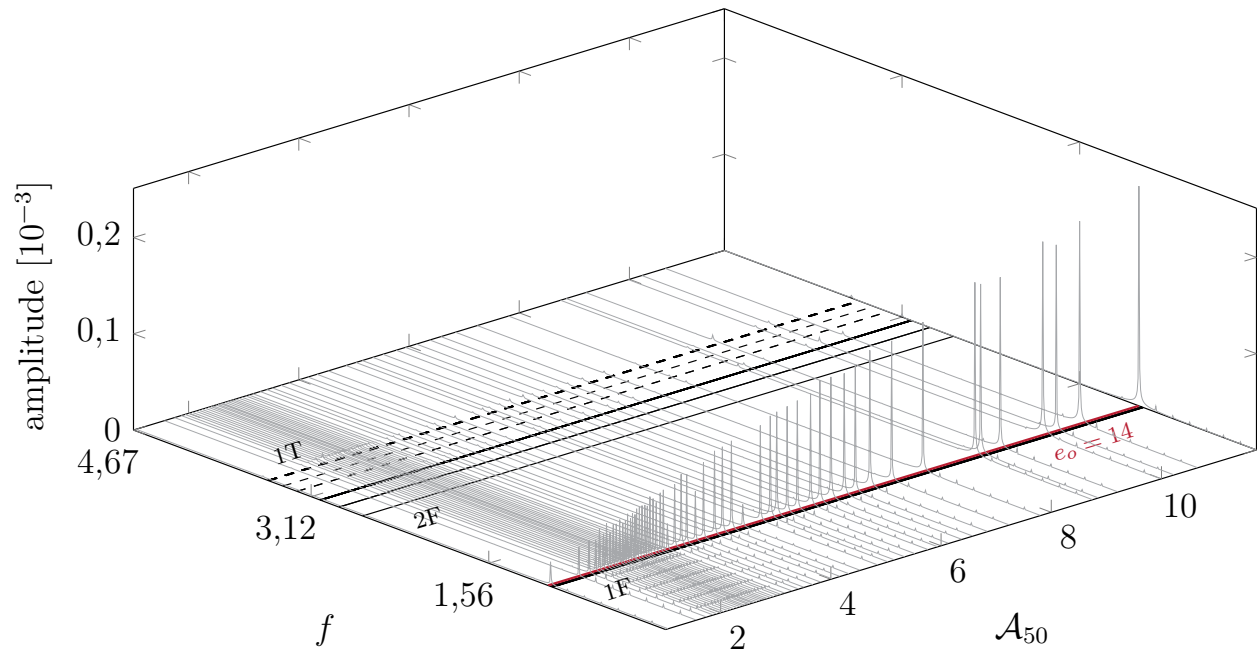


Figure 5.11 Contenu fréquentiel du déplacement sur les 3 derniers tours pour des échantillons à  $\sigma = 2,9\%$ , obtenu par FFT. Fréquences des modes 1F, 2F (—) et 1T (---).

### 5.2.3 Comportement vibratoire

L'amplification permet de quantifier stochastiquement l'influence du désaccordage sur les amplitudes de vibrations post-contact. Cependant, elle ne permet pas d'obtenir quelque information sur la modification du comportement dynamique que le désaccordage pourrait engendrer. Or, le fait de passer d'un mode de vibration à un autre peut être néfaste au regard des contraintes engendrées sur les aubes [23, 26], ce pourquoi en dimensionnement linéaire, les zones de pincement doivent être évitées par exemple. La section suivante propose des indicateurs pour permettre d'analyser davantage le comportement dynamique de la roue aubagée et de l'aube pour laquelle la réponse vibratoire est maximale.

#### Roue aubagée

Le facteur de localisation FL, défini dans le cadre de l'analyse du cas phénoménologique à la section 3.4, est calculé pour tous les échantillons simulés sur les déplacements de 3 derniers tours simulés. L'amplification  $\mathcal{A}_{50}$  est tracée par rapport à FL sur la figure 5.12 pour les différents  $\sigma$ , en densités cumulées avec un calcul similaire à celui réalisé dans la section 3.3.3. Pour  $\sigma \leq 2,3\%$ , FL augmente quasi linéairement avec  $\mathcal{A}_{50}$ . La dispersion des résultats devient plus importante pour  $\sigma = 2,9\%$  pour atteindre des valeurs très élevées. Pour un cas où  $k$  aubes vibrent à la même amplitude, correspondant à l'amplitude maximale des déplacements sur l'ensemble des aubes, les autres aubes ne vibrent pas, l'expression du facteur de localisation est :

$$FL = \frac{\sqrt{N} - \sqrt{k}}{\sqrt{k} (\sqrt{N} - 1)} \times 100 \quad (5.1)$$

Pour  $N = 21$  aubes,  $FL = 36,0\%$  dans le cas de  $k = 4$  aubes vibrant seules,  $FL = 45,9\%$  pour  $k = 3$  et  $FL = 62,5\%$  pour  $k = 2$ . Ces valeurs sont reportées par des droites (---) sur la figure 5.12, là où l'échelle le permet. Il apparaît que  $FL \geq 36,0\%$  uniquement pour  $\sigma = 2,9\%$ . La valeur maximale est  $FL = 89,7\%$ , qui se rapproche fortement du cas où une seule aube vibre. À partir de  $FL = 77\%$ , les échantillons pour  $\sigma = 2,9\%$  montrent une augmentation d'autant plus forte de  $\mathcal{A}_{50}$ , ce qui pourrait indiquer que la roue aubagée présente des modes de vibration d'aube.

Cependant, FL tel que défini peut prendre une même valeur pour des roues aubagées aux comportements très différents. Les déplacements sont représentés pour quelques échantillons sur la figure 5.13, où chaque segment correspond à une aube et la longueur du segment dépend du déplacement maximum de l'aube pour les nœuds physiques conservés, sur les 3 derniers tours. Les différences sur  $\mathcal{A}_{50}$  sont clairement visibles, avec les plus grandes amplifications sur les échantillons présentés aux figure 5.13b et 5.13d. L'échantillon au plus grand FL, représenté

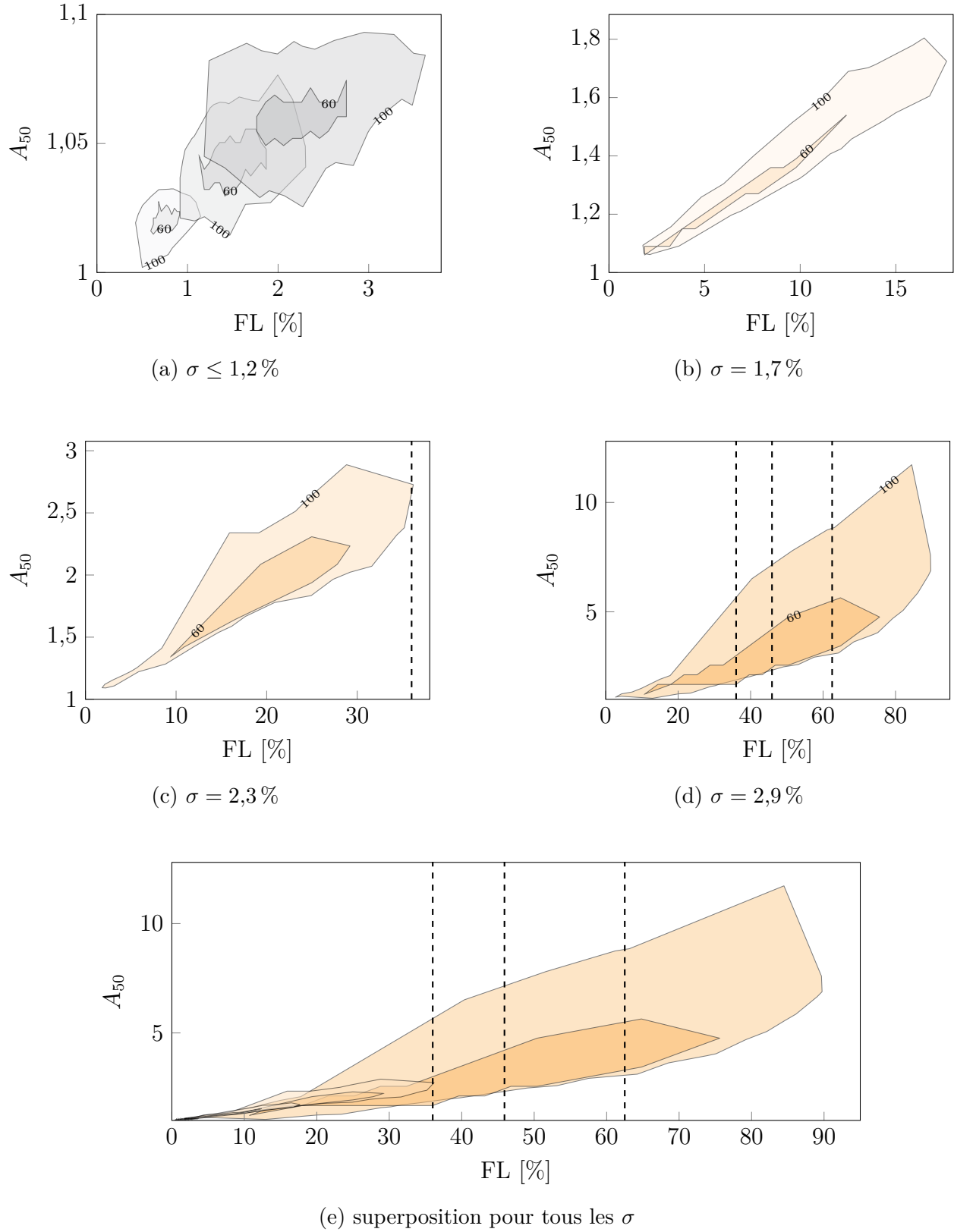


Figure 5.12 Évolution de  $\mathcal{A}_{50}$  par rapport au facteur de localisation FL pour les différents  $\sigma$ , tracée à travers les densités cumulées à 60 % et 100 %, et FL correspondant à 4, 3 et 2 aubes vibrant seules ( - - - ).

sur la figure 5.13e, présente bien visuellement une seule aube qui vibre. En revanche, sur les échantillons représentés aux figure 5.13a et 5.13c, seule une aube vibre à l'amplitude maximale pour l'ensemble de la roue, les autres aubes vibrant peu. En effet, si l'amplitude sur l'aube qui vibre le plus est assez faible, de petites amplitudes sur les autres aubes vont plus fortement abaisser la valeur de FL, ce qui explique les valeurs trouvées.

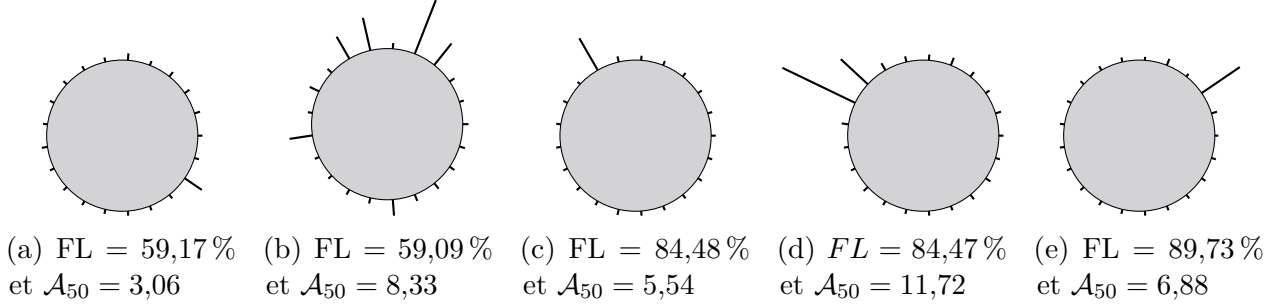


Figure 5.13 Visualisation des déplacements maximaux des échantillons à différents FL et  $A_{50}$ .

En somme, des comportements vibratoires très différents peuvent présenter le même FL, si bien qu'il convient d'être prudents sur les conclusions tirées du fait de ce facteur. Il apparaît cependant que de fortes amplifications sur l'ensemble de la roue aubagée sont corrélées à de hauts facteurs de localisation.

### Aube à amplitude maximale

Pour chaque échantillon, les déplacements sur les nœuds frontière sont étudiées dans ce qui suit, pour l'aube qui présente l'amplitude des oscillations maximale.

La position de la déformation maximale parmi les 5 nœuds frontière conservés en tête d'aube (tel qu'indiqués sur la figure 4.8b) est donnée pour tous les  $\sigma$  sur la figure 5.14, où l'indice 1 correspond au bord de fuite (BF) et l'indice 5 au bord d'attaque (BA). Il apparaît nettement que les amplitudes maximales sont rencontrées sur le BA ou le BF, mais jamais sur les nœuds centraux. La position de l'amplitude maximale change à mesure que  $\sigma$  augmente :

- sur le BF pour  $\sigma \leq 0,6\%$  ;
- répartis à 46,6 % sur le BF et 53,4 % sur le BA pour  $\sigma = 1,2\%$ .
- sur le BA pour  $1,7\% \leq \sigma$  ;

Ces résultats suggèrent une modification nette du comportement vibratoire de l'aube aux plus fortes amplitudes à mesure que  $\sigma$  augmente.



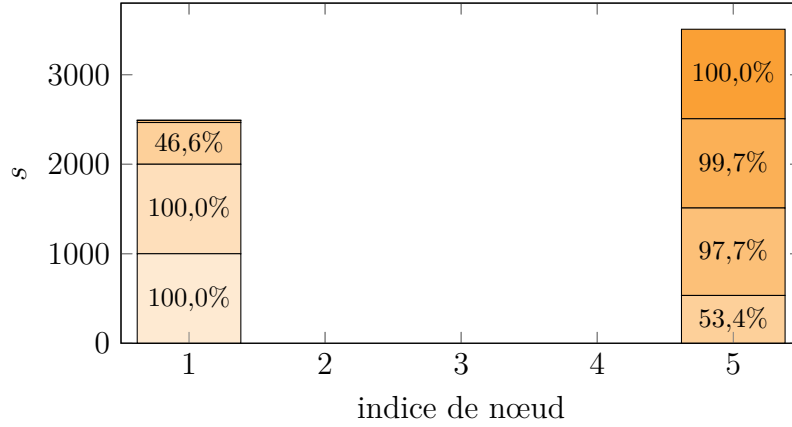


Figure 5.14 Position de l'amplitude maximale des déplacements sur les ddl physiques en bout d'aube, l'indice 1 désignant le bord de fuite (BF) et l'indice 5 le bord d'attaque (BA), pour tous les échantillons de  $\sigma = 0,3\%$  (□) à  $\sigma = 2,9\%$  (■).

L'analyse du contenu fréquentiel des déplacements tangentiels du nœud au BF à chaque  $\sigma$  montre une contribution nette au niveau des fréquences correspondant à l'interaction entre  $e_o = 14$  et la famille 1F, comme vu pour  $\sigma = 2,9\%$  sur la figure 5.11. Le contenu fréquentiel obtenu plus spécifiquement proche de fréquences correspondant aux familles 2F et 1T de la roue aubagée accordée, précédemment indiquées sur la figure 5.9a, est tracé pour tous les  $\sigma$  sur la figure 5.15. Seul un motif sur 20 est tracé par soucis de lisibilité. Tous les graphiques sont tracés avec la même échelle en amplitude. Les amplitudes pour  $\sigma \leq 0,6\%$  sont très faibles, si bien que la contribution des familles 2F et 1T est négligeable, mais elles augmentent avec  $\sigma$ . Pour  $\sigma = 1,7\%$ , l'augmentation de amplification  $\mathcal{A}_{50}$  est corrélée avec l'augmentation des amplitudes aux fréquences proches de la famille 1T, avec des amplitudes non significatives au niveau des fréquences proches de la famille 2F. La contribution de la famille 1T est ensuite maximale pour  $\sigma = 2,3\%$ , alors que la contribution de la famille 2F est maximale pour  $\sigma = 2,9\%$ . Comme les échantillons pour lesquels  $2,3\% \leq \sigma$  présentent des amplifications  $\mathcal{A}_{50}$  en forte augmentation par rapport aux  $\sigma$  plus faibles (figure 5.7a), ces résultats semblent indiquer que la forte augmentation des amplitudes proviendrait de la composition des différents modes de vibration (1F, 2F et 1T).

#### 5.2.4 Efforts de contact et usure

La norme maximale des efforts de contact sur les nœuds frontière est calculée pour l'ensemble des échantillons sur les 3 derniers tours, de façon analogue à l'amplitude des déplacements pour obtenir  $\mathcal{A}_{50}$ . L'amplification des efforts, notée  $\mathcal{A}_F$ , est le ratio entre la norme maximale de l'échantillon désaccordé et celle du système accordé. Les centiles 10, 50 et 90 obtenus sont

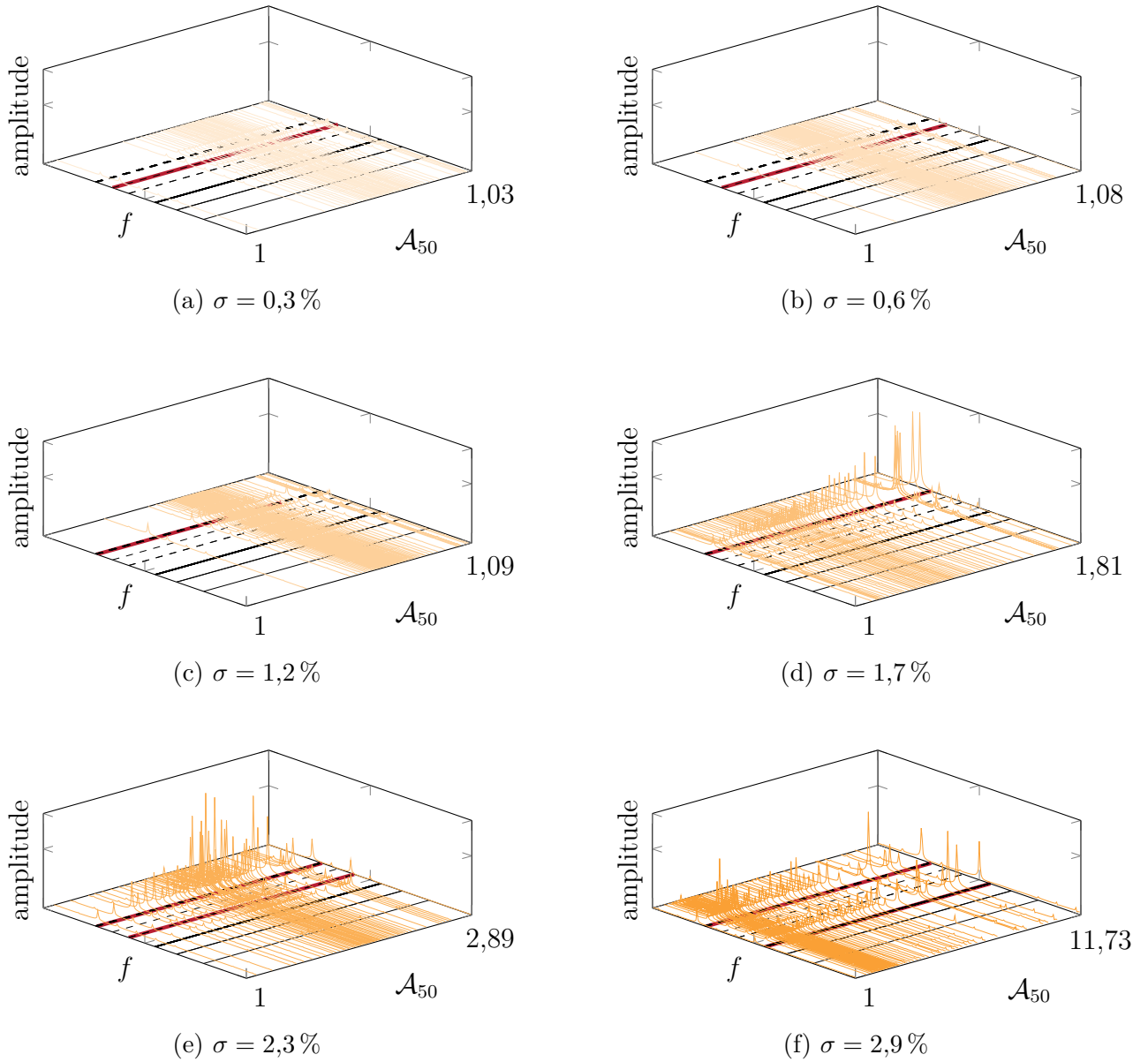


Figure 5.15 Contenu fréquentiel des déplacements de l'aube connaissant la plus grande amplitude de déplacement, de  $\sigma = 0,3\%$  ( — ) à  $\sigma = 2,9\%$  ( — ), focalisées autour des fréquences des familles 2F ( — ) et 1T ( - - ) de la roue accordée. Les fréquences correspondant aux pics prépondérants sont indiquées ( — )

tracés sur la figure 5.16. Les centiles de  $\mathcal{A}_F$  évoluent en deux phases :

- (1)  $\sigma \leq 0,6\%$  (figure 5.16b),  $\mathcal{A}_F$  progresse moins rapidement que  $\sigma$  ;
- (2)  $0,6\% \leq \sigma$  (figure 5.16a),  $\mathcal{A}_{10}$  progresse plus rapidement que  $\sigma$ , sur tous les centiles.

L'allure des centiles de  $\mathcal{A}_F$  est donc similaire à celle des centiles sur l'amplification de l'amplitude  $\mathcal{A}_{50}$  (figure 5.7). Les niveaux d'amplification sont cependant bien plus faibles sur les efforts de contact, avec un centile 90 pour  $\sigma = 2,9\%$  à 1,16.

Le fait que des efforts de contact faibles mènent à une augmentation substantielle des déplacements est cohérent avec une possible résonance captée à plus hauts  $\sigma$ , identifiée dans l'analyse des déplacements à la section 5.2.2. Du fait de la présence physique du carter qui contraint la vibration de l'aube, celle-ci tend à se replier. Par ailleurs, Le profil d'usure présente 2 lobes pour tous les échantillons, correspondant aux lobes sur le carter. La plage angulaire de l'usure évolue peu : elle augmente seulement de 6,5 % entre le cas accordé et sa valeur maximale sur l'ensemble des échantillons désaccordés. La pénétration n'augmente que de 15 %, pour atteindre une valeur maximale de 0,45 mm, soit légèrement inférieure à la déformation imposée sur le carter de 0,5 mm et moins de 10 % de l'épaisseur totale de l'abradable (tableau 4.3 et 4.4). L'analyse de l'usure de l'abradable corrobore ainsi une déformation de l'aube en repliement.

Enfin, la position de l'effort de contact maximal parmi les 5 nœuds frontière conservés en tête d'aube est donnée pour tous les  $\sigma$  sur la figure 5.17. Les efforts maximaux sont rencontrés sur les nœuds centraux, mais jamais sur le BA ou le BF. Le nœud qui présente les efforts maximaux change à mesure que  $\sigma$  augmente :

- sur le nœud 4, plus proche du BA, pour  $\sigma \leq 1,2\%$  ;
- répartis à 54,1 % sur le nœud 4 et 39,7 % sur le nœud 3, en milieu de corde,  $\sigma = 1,7\%$ .
- majoritairement sur le nœud 2, plus proche du BF, pour  $2,3\% \leq \sigma$  ;

Ces résultats corroborent la modification du comportement vibratoire à mesure que  $\sigma$  augmente, avancée lors de l'analyse de la position de l'amplitude maximale à la section 5.2.3. Enfin, les nœuds sur lesquels l'effort de contact est maximal ne sont pas ceux sur lesquels les déplacements sont maximaux (figure 5.14), ce qui confirme également que l'aube se déforme davantage en repliement.

### 5.2.5 Contraintes

Dans les sections précédentes, les résultats stochastiques sont calculés sur les déplacements et efforts obtenus en bout d'aube, soit aux nœuds frontière conservés dans le modèle CM3. Afin d'obtenir une vision plus globale, une expansion des ddl de la base mixte vers la base physique

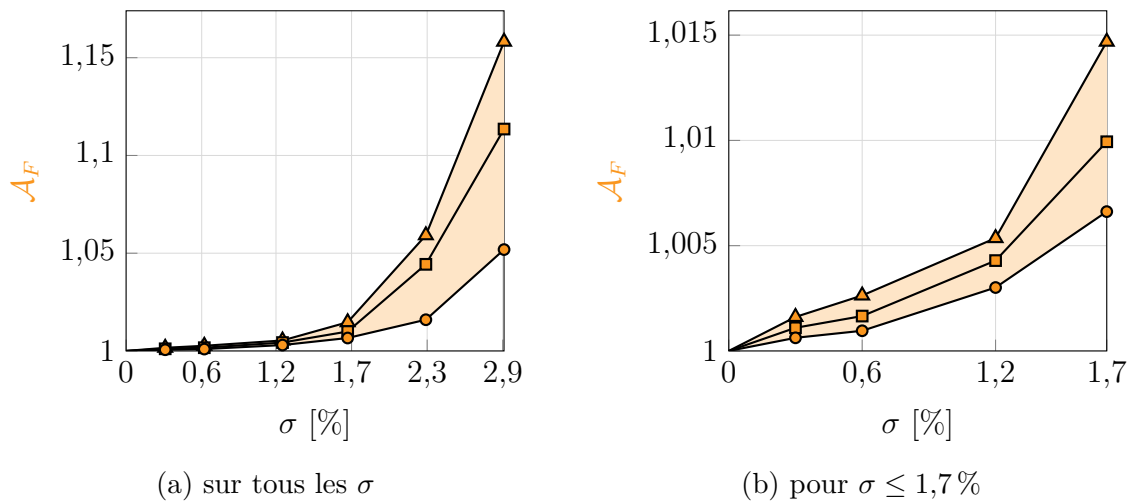


Figure 5.16 Amplification des efforts en fin de simulation (  $\square$  ), avec les centiles 10 (  $\circ$  ), 50 (  $\square$  ) et 90 (  $\triangle$  ).

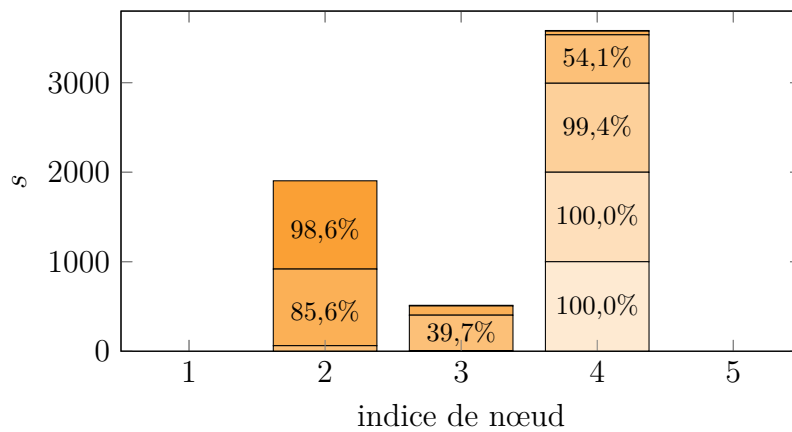




Figure 5.17 Position de la norme maximale des effort de contact sur les ddl physiques en bout d'aube, l'indice 1 désignant le BF et l'indice 5 le BA, pour tous les échantillons de  $\sigma = 0,3\%$  (  $\square$  ) à  $\sigma = 2,9\%$  (  $\square$  ).

est effectuée. Les déplacements et les contraintes à l'intérieur de l'ensemble de la roue aubagée puis d'aubes sélectionnées peuvent ainsi être étudiés pour différents pas de temps.

La présente section s'appuie sur l'étude du modèle accordé (référé dans la suite par  $m_{acc}$ ) et de trois motifs désaccordés issus des simulations stochastiques : le motif qui présente l'amplification  $\mathcal{A}_{nl}$  maximale ( $m_{amp}$ ), le motif qui présente le facteur de localisation FL maximal ( $m_{loc}$ ) et un motif faiblement désaccordé pour lequel l'effort maximal est localisé sur le bord de fuite ( $m_{bf}$ ), contrairement aux autres motifs désaccordés sélectionnés pour lesquels l'effort maximal est sur le bord d'attaque. Certains résultats issus de l'analyse des simulations stochastiques sont donnés pour les quatre motifs considérés dans le tableau 5.3. Les motifs désaccordés sont renseignés dans les tableaux 5.4, 5.5 et 5.6. Les valeurs de contraintes présentées sont normées par rapport à la limite d'élasticité  $\sigma_Y$  du matériau, qui correspond donc à  $\sigma = 1$ . Les déformations sont normées par rapport à la déformation maximale sur la roue accordée.

### Pour l'instant d'amplitude maximale

Les champs de déplacements et de contraintes sont reconstitués sur l'ensemble de la roue aubagée, pour l'itération temporelle correspondant au maximum de l'amplitude des déplacements sur les 3 derniers tours de chaque motif, et sont représentés sur la figure 5.18 pour les quatre motifs sélectionnés. Afin de mieux visualiser les différences sur chaque aube d'un même motif, les échelles de déplacement, représentées par un gradient de couleurs (  ), dépendent du motif considéré. Les mailles dont les déplacements sont supérieurs ou égaux à la valeur maximale imposée par le gradient sont ainsi en noir (  ). Ce maximum est de 1 pour  $m_{acc}$  et  $m_{bf}$ , de 1,6 pour  $m_{loc}$ , et de 2 pour  $m_{amp}$ .


Pour les motifs  $m_{acc}$  et  $m_{bf}$ , les déplacements maximaux sont visibles sur des groupes d'aubes correspondant aux aubes en contact à l'instant considéré, indiquées sur les figures 5.18a et 5.18b par des triangles (  ). Des déplacements importants en tête d'aube sont visibles sur les aubes en contact et sur les deux aubes les plus proches de la zone de contact entre deux aubes. Les déplacements sont répartis sur l'ensemble de la roue, ce qui est en accord avec les

Tableau 5.3 Caractéristiques des motifs sélectionnés.

type de motif	$\sigma$ (%)	$\mathcal{A}_{nl}$	FL	nœud d'amplitude maximale
$m_{acc}$	0	1	0	BF de l'aube 6
$m_{bf}$	0,6	1,02	1,05	BF de l'aube 8
$m_{amp}$	2,9	11,7	84,5	BA de l'aube 9
$m_{loc}$	2,9	6,88	89,73	BA de l'aube 2

Tableau 5.4 Motif de désaccordage  $m_{bf}$ .**Variation du module d'Young par aube (%)**

$(\delta E)_1$	0,66	$(\delta E)_2$	-0,29	$(\delta E)_3$	0,58	$(\delta E)_4$	0,80	$(\delta E)_5$	0,46
$(\delta E)_6$	-0,03	$(\delta E)_7$	-0,17	$(\delta E)_8$	0,65	$(\delta E)_9$	-0,03	$(\delta E)_{10}$	-0,58
$(\delta E)_{11}$	0,37	$(\delta E)_{12}$	0,02	$(\delta E)_{13}$	0,19	$(\delta E)_{14}$	-0,21	$(\delta E)_{15}$	-0,52
$(\delta E)_{16}$	-0,22	$(\delta E)_{17}$	-0,09	$(\delta E)_{18}$	-0,11	$(\delta E)_{19}$	-0,04	$(\delta E)_{20}$	-0,25
$(\delta E)_{21}$	-0,07								

Tableau 5.5 Motif de désaccordage  $m_{amp}$ .**Variation du module d'Young par aube (%)**

$(\delta E)_1$	1,87	$(\delta E)_2$	-0,89	$(\delta E)_3$	1,57	$(\delta E)_4$	-1,49	$(\delta E)_5$	-1,42
$(\delta E)_6$	-1,21	$(\delta E)_7$	0,55	$(\delta E)_8$	-3,86	$(\delta E)_9$	-0,98	$(\delta E)_{10}$	-2,95
$(\delta E)_{11}$	-3,78	$(\delta E)_{12}$	-0,02	$(\delta E)_{13}$	-2,32	$(\delta E)_{14}$	4,98	$(\delta E)_{15}$	3,73
$(\delta E)_{16}$	2,45	$(\delta E)_{17}$	1,15	$(\delta E)_{18}$	1,78	$(\delta E)_{19}$	2,94	$(\delta E)_{20}$	-2,24
$(\delta E)_{21}$	-3,28								



Tableau 5.6 Motif de désaccordage à  $m_{loc}$ .**Variation du module d'Young par aube (%)**

$(\delta E)_1$	-0,58	$(\delta E)_2$	2,07	$(\delta E)_3$	-0,59	$(\delta E)_4$	3,08	$(\delta E)_5$	0,30
$(\delta E)_6$	0,99	$(\delta E)_7$	-1,14	$(\delta E)_8$	0,70	$(\delta E)_9$	0,96	$(\delta E)_{10}$	0,20
$(\delta E)_{11}$	-0,24	$(\delta E)_{12}$	-4,32	$(\delta E)_{13}$	1,39	$(\delta E)_{14}$	0,75	$(\delta E)_{15}$	-1,95
$(\delta E)_{16}$	-2,92	$(\delta E)_{17}$	-1,96	$(\delta E)_{18}$	-4,56	$(\delta E)_{19}$	3,09	$(\delta E)_{20}$	0,46
$(\delta E)_{21}$	4,99								

faibles valeurs de FL calculées avec les déplacements en bout d'aube, telles que données dans le tableau 5.3.

Les champs de déplacements des motifs  $m_{\text{amp}}$  et  $m_{\text{loc}}$  sont tracés aux figures 5.18c et 5.18d, à l'instant pour lequel le déplacement calculé sur les 3 derniers tours est maximal. Les aubes en contact ne sont plus celles qui présentent les plus grands déplacements. La localisation dans des aubes éloignées de l'excitation peut être due, comme dans un cadre linéaire (voir la section 2.2.2), à une transmission de l'énergie de vibration du fait des conséquences conjointes du désaccordage et du couplage des aubes à travers le disque. Par ailleurs, le nombre restreint d'aubes à forts déplacements est en accord avec les valeurs de FL élevées, calculées sur base des déplacements en bout d'aube.

Pour tous les motifs, la reconstitution des déplacements sur l'ensemble du modèle permet de montrer que les déplacements maximaux au niveau de la tête d'aube, ce qui confirme d'une part la prépondérance de la composante de flexion et d'autre part que le calcul de l'amplification sur les déplacements en tête d'aube effectué dans l'étude stochastique retranscrit bien un maximum global des déplacements.

Les contraintes sur l'ensemble du modèle de roue aubagée sont tracées pour les différents motifs sur la figure 5.19. L'échelle du gradient de couleurs (  ) est la même pour tous les motifs, avec un maximum du gradient de 0,08, au-dessus duquel les mailles aux contraintes supérieures ou égales sont en rouge (  ). Les contraintes calculées pour  $m_{\text{acc}}$  et  $m_{\text{bf}}$  sont similaires, avec les valeurs les plus importantes sur l'aube au niveau du plus grand déplacement du carter, et une zone secondaire de contraintes sur les aubes diamétralement opposées, identifiées comme un groupe d'aubes en contact sur les déplacements tracés aux figures 5.18a et 5.18b. Sur les motifs à plus fort désaccordage, les contraintes sur les aubes en contact sont également plus importantes en tête d'aube, alors que les contraintes sur les aubes à plus forts déplacements sont localisées dans la partie inférieure de l'aube, ce qui suggère une modification du comportement vibratoire.

Enfin, comme il apparaît sur les motifs considérés que les contraintes les plus importantes sont situées dans les aubes aux plus grands déplacements, il est probable que  $m_{\text{amp}}$  présente les niveaux de contraintes les plus importants de l'ensemble des motifs simulés dans la campagne stochastique. Le niveau maximal de contrainte pour  $m_{\text{amp}}$  étant de 0,12, les ordres de grandeur obtenus restent bien dans le cadre de l'hypothèse des petites déformations définie dans cette étude.

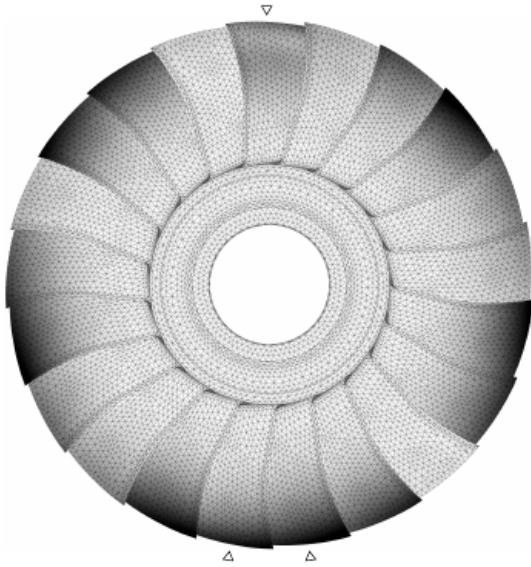
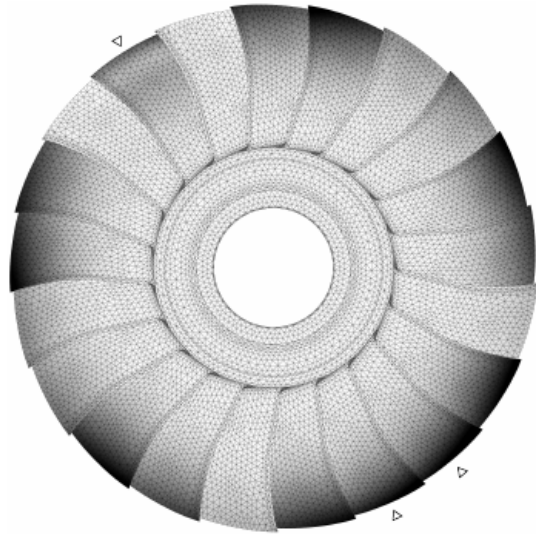
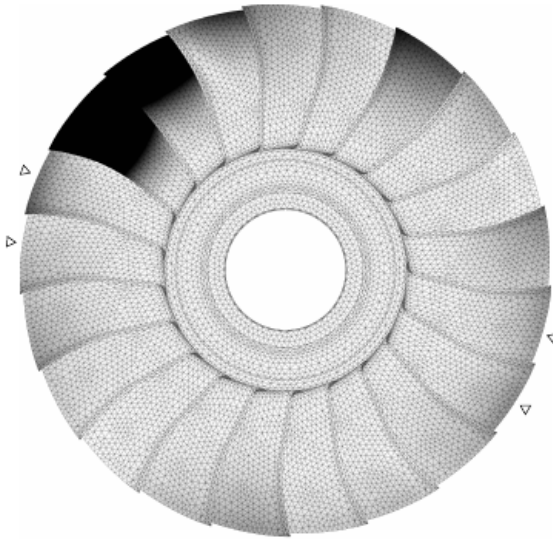
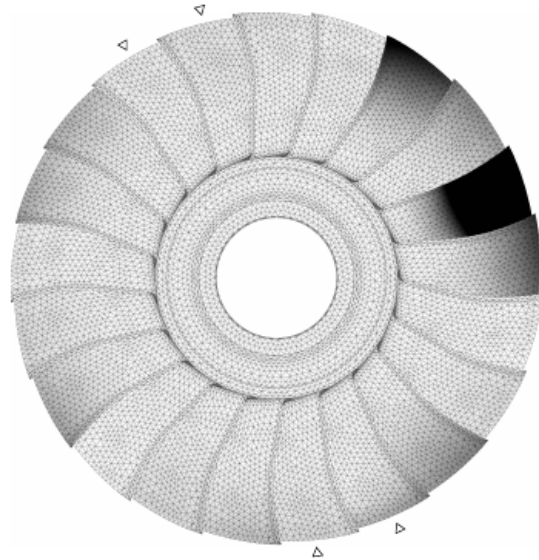

(a)  $m_{acc}$ , maximum du gradient à 1(b)  $m_{bf}$ , maximum du gradient à 1(c)  $m_{amp}$ , maximum du gradient à 2(d)  $m_{loc}$ , maximum du gradient à 1,6

Figure 5.18 Déplacements pour l'itération de plus grande amplitude des déplacements, avec une échelle du gradient de couleurs (  ) dont la valeur maximale dépend du motif. Les aubes en contact sont indiquées par un triangle (  $\nabla$  ).



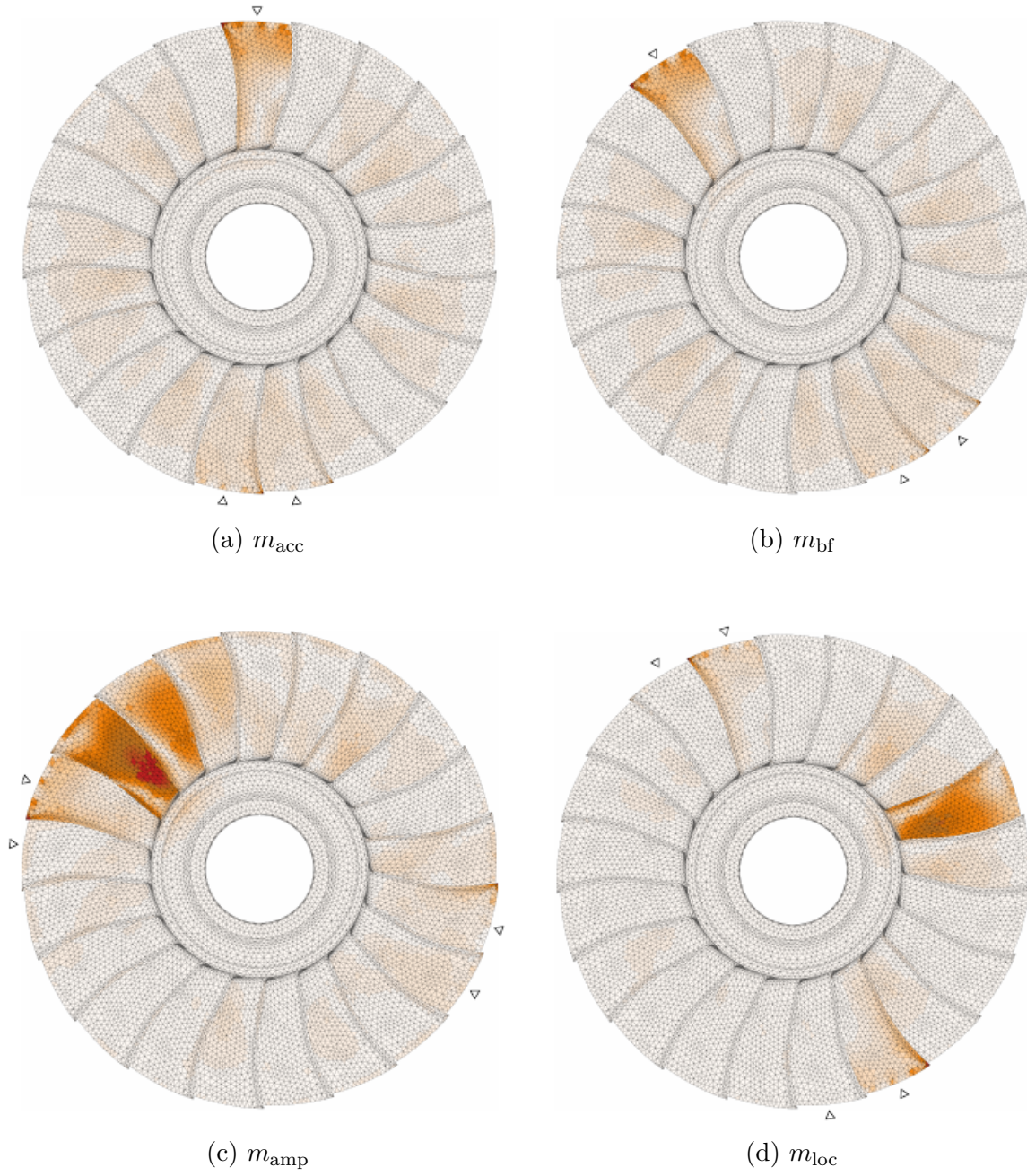




Figure 5.19 Contraintes pour l'itération de plus grand amplitude des déplacements, avec une échelle du gradient de couleur ( ) dont la valeur maximale est de 0,08 pour tous les motifs. Les aubes en contact sont indiquées par un triangle ( ▽ ).

## Sur une oscillation

L'évolution des contraintes pour  $m_{acc}$ ,  $m_{amp}$  et  $m_{loc}$  est regardée sur 8 itérations uniformément réparties sur la dernière oscillation. Pour chaque motif considéré, les contraintes sont tracées sur l'aube qui présente l'amplitude de déplacement maximale sur le dernier tour. L'échelle du gradient de couleur (  ) est commune à tous les motifs, avec un maximum (  ) de 0,08 comme sur les visualisations à un instant donné sur les roues aubagées, à la figure 5.19. Le pas de temps entre les itérations présentées est de  $3,15 \cdot 10^{-4}$  s pour tous les motifs.

L'évolution des contraintes pour  $m_{acc}$  est tracée à la figure 5.20. L'évolution des déplacements selon  $\vec{t}$  est tracée pour le dernier demi-tour à la figure 5.20a et pour la dernière oscillation, sur le nœud au déplacement maximal, à la figure 5.20b. Sur cette dernière, l'évolution de la norme des efforts de contact est également tracée et les itérations temporelles considérées, de  $t_1$  à  $t_8$ , sont indiquées. La position de l'aube est telle qu'elle entre en contact avec la bosse au temps  $t_6$ , si bien que la norme des efforts de contact n'est plus nulle et augmente progressivement au passage de la bosse. En dehors des instants où l'aube est en contact, les niveaux de contraintes sont faibles et plutôt localisés dans la partie inférieure de l'aube. Lors du contact, les contraintes sont localisées sur le tiers supérieur de l'aube. L'alternance de couleurs en tête d'aube, avec une concentration de contraintes importante aux nœuds frontière, est une concentration numérique due à la gestion du contact. L'évolution des contraintes pour  $m_{amp}$  est tracée à la figure 5.21. La position de l'aube est telle qu'elle n'est pas en contact sur la dernière oscillation considérée, comme visible sur le tracé de la norme des efforts de contact à la figure 5.21b. Les contraintes sont localisées dans le corps de l'aube lorsque le déplacement tangentiel n'est pas nul, avec des niveaux plus importants dans le tiers inférieur de l'aube, vers le centre de l'aube. Les contraintes sont les plus importantes au niveau des extremums de déplacement tangentiel. L'évolution des contraintes pour  $m_{loc}$  est tracée à la figure 5.22. Comme pour le motif à  $m_{amp}$ , l'aube étudiée n'est pas en contact sur la dernière oscillation considérée, comme visible sur le tracé de la norme des efforts de contact à la figure 5.22b, et les contraintes dans l'aube sont minimales lorsque son déplacement tangentiel est nul. Les valeurs maximales des contraintes sont également situées dans le tiers inférieur de l'aube et plutôt centrées par rapport à la corde de son profil. Les contraintes sont les plus importantes dans l'aube au déplacement maximal pour  $m_{amp}$ .

Comme le désaccordage est appliqué uniformément sur toute l'aube, il est cohérent que l'allure des champs de contraintes soit similaire d'un motif à l'autre, en-dehors des itérations de contact. Si pour  $m_{acc}$  l'évolution des contraintes doit être sensiblement la même d'une aube à l'autre, elle diffère pour les motifs à plus haut désaccordage. En effet, les aubes présentant le plus grand déplacement, ce qui se traduit ici par la contrainte la plus importante, ne sont pas

en contact. Ceci peut être expliqué par l'action conjointe du désaccordage et du couplage des aubes à travers le disque, ce qui induit une localisation des contraintes.

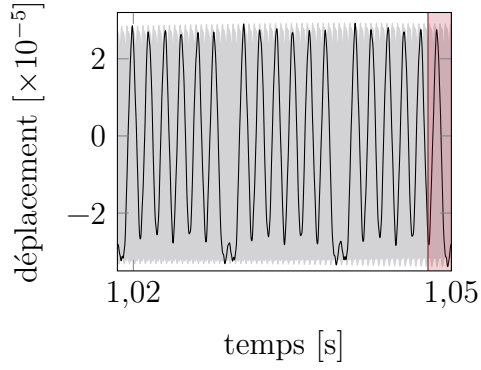
### 5.3 Bilan

Des simulations stochastiques de contact aubes-carter sur des modèles désaccordés ont été menées sur un modèle industriel en configuration nominale. Les analyses réalisées sur les amplifications, efforts de contact et contraintes permettent de dégager des tendances qui pourraient aider à la conception des turbomoteurs. L'amortissement du modèle étant posé à la valeur de l'amortissement structural, les résultats présentés sont proches de ce qui pourrait être obtenu pour un DAM.

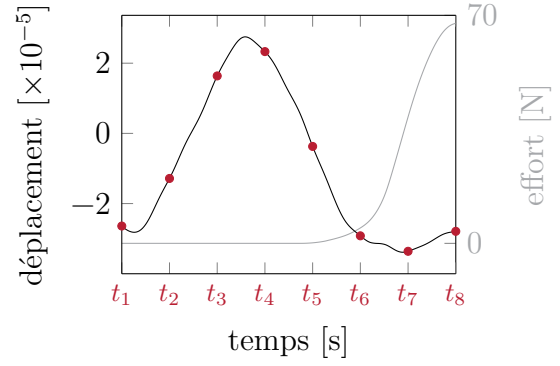
Tout d'abord, il a été montré que le désaccordage induit de très hautes amplifications des vibrations post-contact, avec une modification du comportement vibratoire à mesure que le désaccordage augmente. L'analyse fréquentielle des déplacements a permis de mettre en évidence la participation de différents modes de vibration (1F, 2F et 1T), qui explique ces modifications. Le cas de contact considéré induit une pénétration faible par rapport à l'épaisseur de l'abradable, si bien que ce dernier présente peu d'usure. Enfin, les amplifications trouvées sont également dues à une interaction avec le régime moteur 14, identifiée pour la vitesse étudiée à mesure que le désaccordage augmente.

Par ailleurs, l'évolution de l'amplification due au désaccordage reste modérée pour  $\sigma \leq 1,7\%$ . Un tel niveau de désaccordage, associé aux tolérances de fabrication, serait ainsi acceptable en termes de conception. Il est cependant à noter que les facteurs de localisation pour les niveaux de désaccordage plus élevés se rapprochent de ceux qui sont obtenus si une seule aube de la roue aubagée vibre. Ainsi, il est possible que des valeurs plus importantes de désaccordage conduisent à une réduction des amplifications, comme reporté dans la littérature dans le cadre de l'étude des vibrations linéaires [23]. Des stratégies de conception utilisant un grand désaccordage pourraient ainsi être envisagées. Comme l'analyse des motifs a montré une absence de corrélation entre le désaccordage de l'aube qui connaît la plus grande amplitude des vibrations et l'amplification sur l'ensemble de la roue aubagée, ces stratégies de conception devraient être pensées en considérant la dynamique de la roue désaccordée complète.

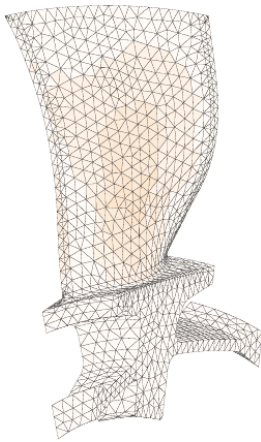
Enfin, une analyse des champs de déplacement et de contraintes a été menée sur des motifs d'intérêt sélectionnés sur base de la campagne stochastique. D'une part, la performance de la méthode de CM3 a pu être avérée pour le redéploiement et le calcul de champs de bonne qualité sur les nœuds internes de la roue aubagée. D'autre part, les niveaux de contraintes sont plus élevés pour les motifs à plus grande amplification. Pour les plus hauts niveaux de



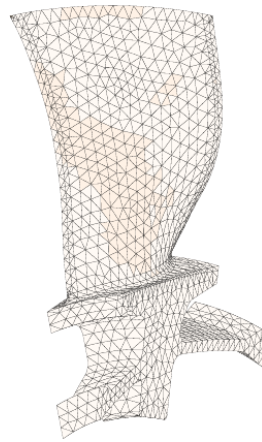
(a) déplacement selon  $\vec{t}$  sur le dernier demi-tour, maximum ( — ), enveloppe (  $\square$  ) et dernière oscillation (  $\square$  )



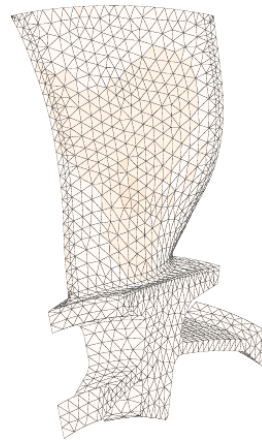
(b) déplacement maximum selon  $\vec{t}$  ( — ), efforts ( — ) et itérations sélectionnées (  $\bullet$  ) sur la dernière oscillation



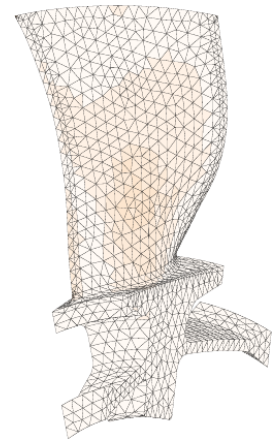
(c) à  $t_1$



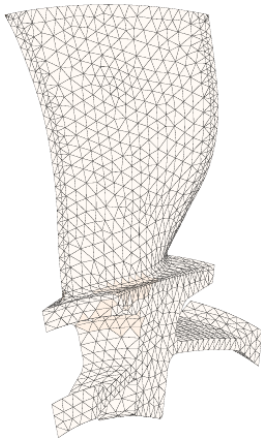
(d) à  $t_2$



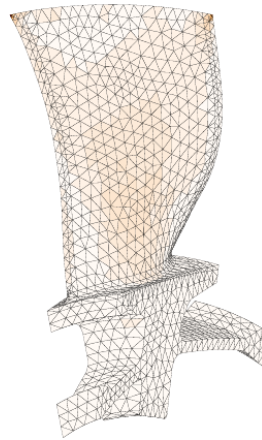
(e) à  $t_3$



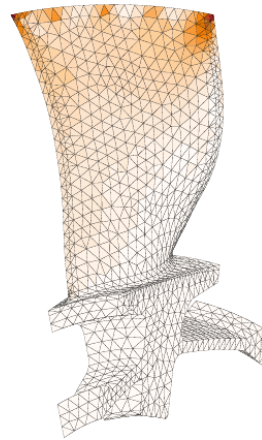
(f) à  $t_4$



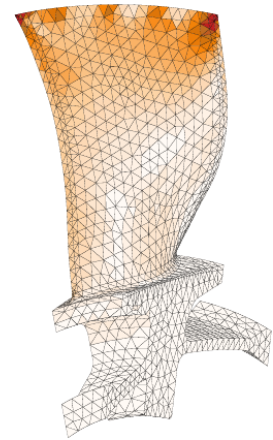
(g) à  $t_5$



(h) à  $t_6$



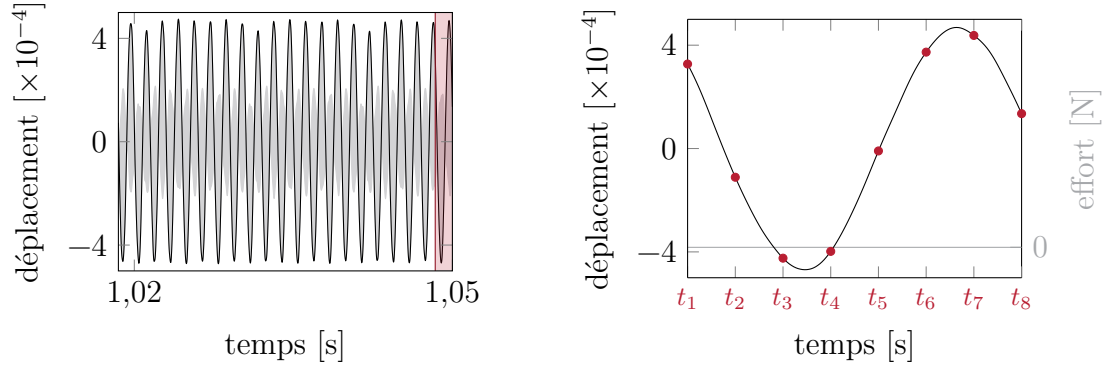
(i) à  $t_7$



(j) à  $t_8$

Figure 5.20 Évolution des contraintes sur l'aube 6 de  $m_{acc}$ .





(a) déplacement selon  $\vec{t}$  sur le dernier demi tour, maximum ( — ), enveloppe (  $\square$  ) et dernière oscillation (  $\square$  )

(b) déplacement maximum selon  $\vec{t}$  ( — ), efforts ( — ) et itérations sélectionnées (  $\bullet$  ) sur dernière oscillation

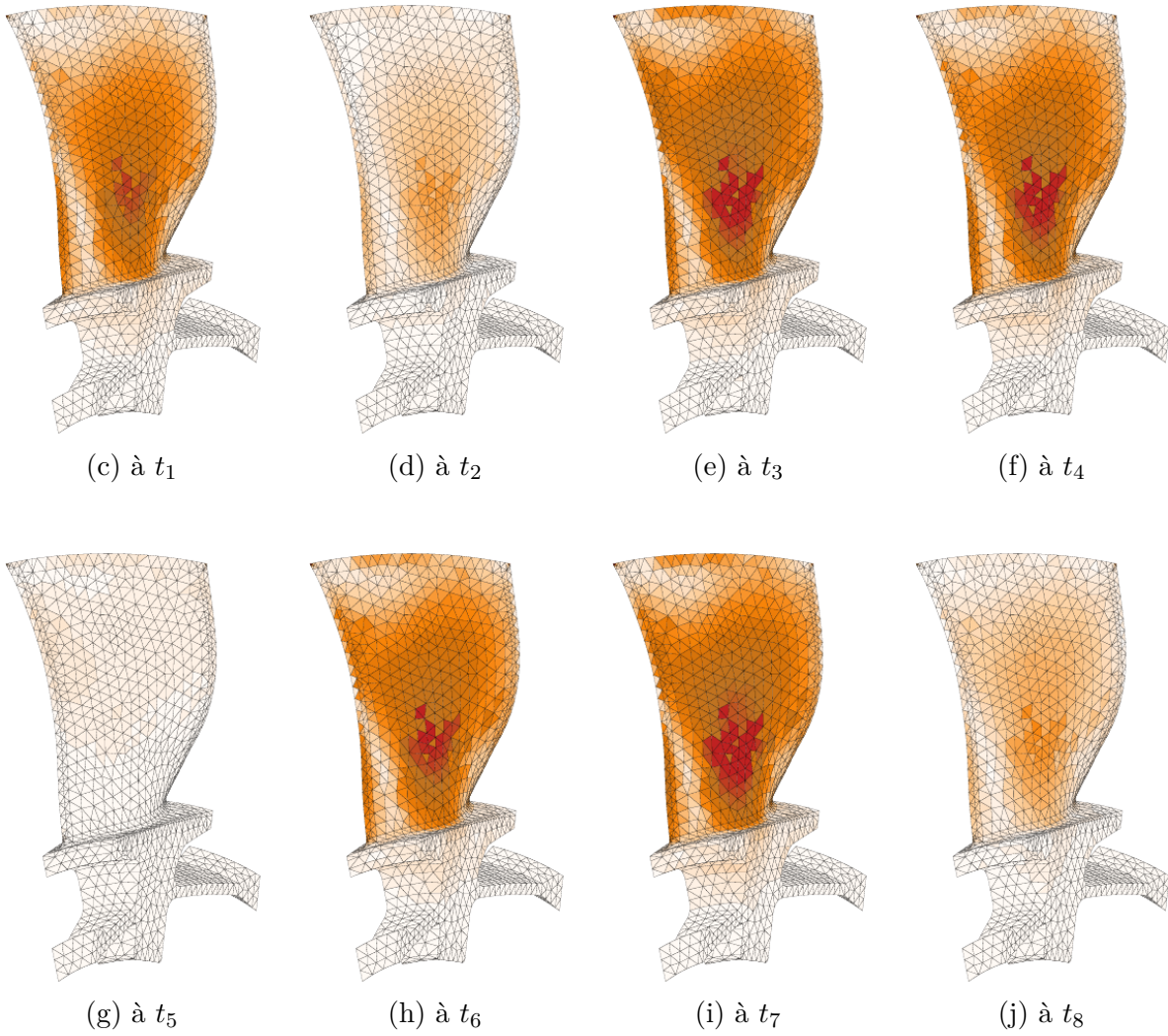
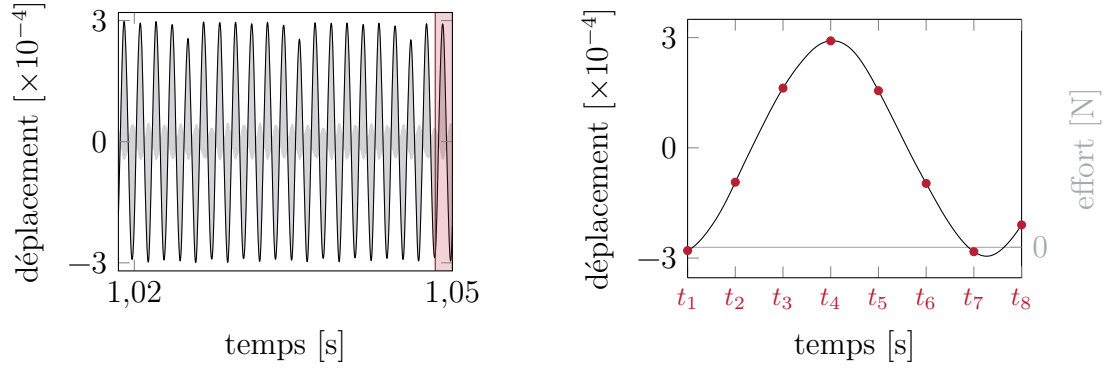


Figure 5.21 Évolution des contraintes sur l'aube 9 de  $m_{amp}$ .



(a) déplacement selon  $\vec{t}$  sur le dernier demi tour, maximum ( — ), enveloppe (  $\square$  ) et dernière oscillation (  $\square$  )

(b) déplacement maximum selon  $\vec{t}$  ( — ), efforts ( — ) et itérations sélectionnées (  $\bullet$  ) sur la dernière oscillation

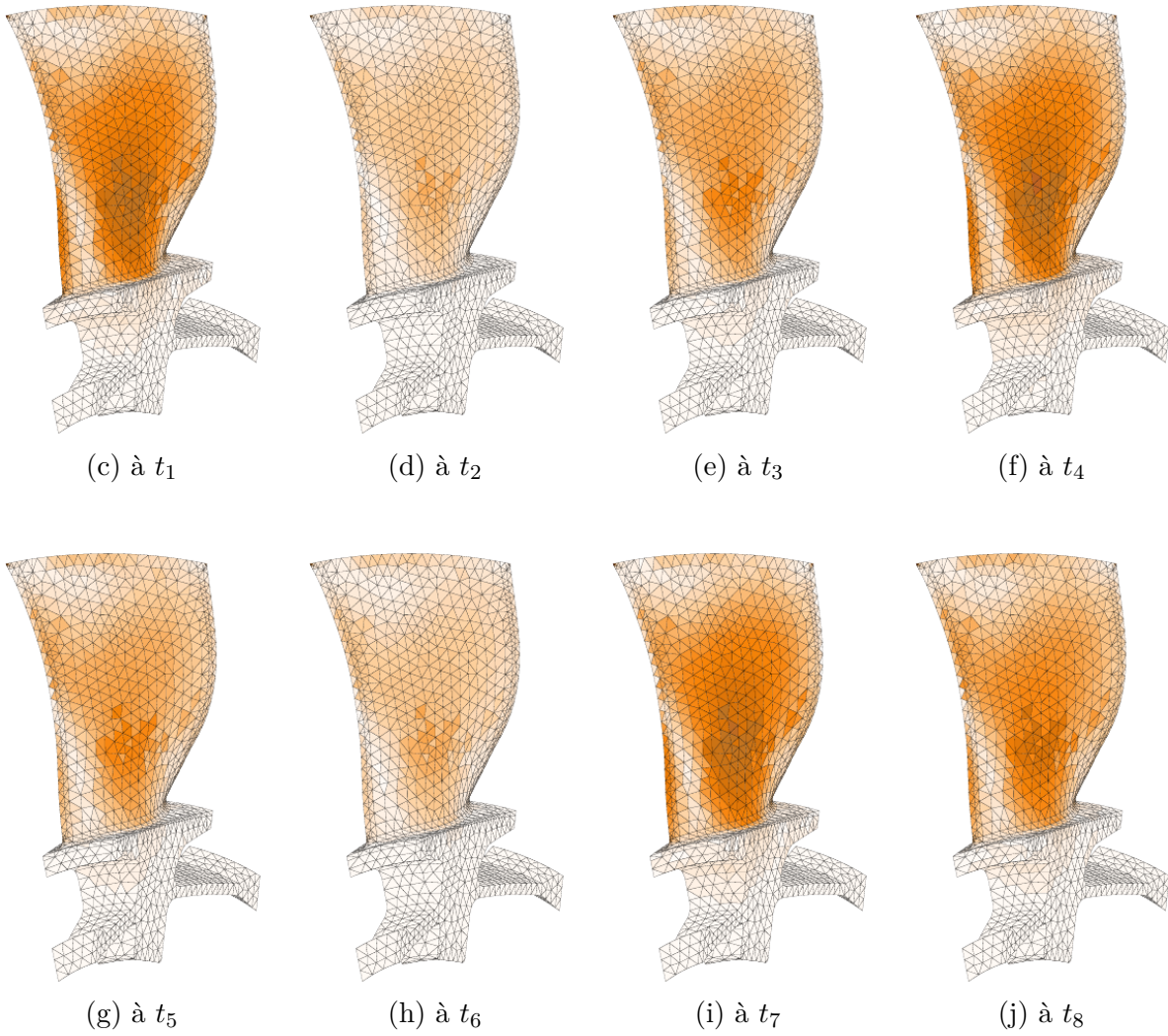


Figure 5.22 Évolution des contraintes sur l'aube 2 de  $m_{loc}$ .

désaccordage, l'aube qui présente les contraintes les plus importantes est aussi l'aube dont l'amplitude des vibrations est la plus importante, et ce sans qu'elle soit en contact à l'instant où elle connaît ce maximum.

## CHAPITRE 6 GÉNÉRATION DE DONNÉES DE BLADE TIP-TIMING

Les vibrations des roues aubagées sont classiquement caractérisées expérimentalement en utilisant des jauges de contraintes directement apposées sur des aubes choisies. Ces jauges présentent cependant l'inconvénient d'être intrusives d'un point de vue dynamique. En particulier, l'ajout de masse qu'elles représentent peut devenir prépondérant devant le désaccordage, si bien que l'influence de ce dernier ne peut pas être étudiée. De plus, les mesures par jauges de contraintes sont assez complexes en termes d'instrumentation, les rendant peu envisageables dans le cadre du contrôle rapide des moteurs, ou encore de l'instrumentation en vol pour la création de doubles numériques (*digital twins*).

Des techniques non intrusives ont ainsi été développées, dont la mesure du temps de passage des sommets d'aubes, appelée la technique de BTT de l'anglais *Blade Tip-Timing* [163]. Le comportement vibratoire de la structure est alors obtenu à partir du temps de passage des aubes, noté TOA de l'anglais *Time Of Arrival*, mesuré par des capteurs situés sur la circonférence du carter, comme représenté sur la figure 6.1. Différentes configurations de chaînes d'acquisition et de nombreux algorithmes de traitement des données ont été développés selon le type de vibrations étudié (synchrones, asynchrones) [164]. Les principaux défis que pose le traitement des données de BTT sont le sous-échantillonnage (*undersampling*) et le repliement de spectre (*aliasing*) qui en résulte [165], ainsi que des difficultés inhérentes à toute approche expérimentale, telles le bruit de mesures et des défauts de positionnement des capteurs [166]. Afin de tester les algorithmes définis et leur robustesse, des recherches récentes proposent de générer numériquement des signaux de BTT, ce qui permet de découpler les différents effets physiques présents [166]. Actuellement, la génération de signaux de BTT est proposée uniquement en configuration linéaire.

La méthodologie de gestion du contact présentée au chapitre 3 et la méthode de réduction CM3 développée dans le chapitre 4 permettent de simuler le comportement dynamique de modèles de roues aubagées désaccordées dans un contexte de non-linéarité de contact aubes-carter en conservant les ddl physiques en tête d'aube. Comme la méthodologie repose sur une technique d'intégration temporelle, les déplacements en sommet d'aubes ainsi obtenus peuvent être utilisés pour le calcul du TOA et donc la génération numérique de signaux de BTT.

Le présent chapitre constitue ainsi une première étude de la génération de signaux de BTT dans un contexte non-linéaire. Les concepts et les différentes recherches sur la technique de BTT sont exposés, afin de définir un cadre d'étude simplifié. La génération de signaux est ensuite présentée et validée dans un cadre linéaire sur le modèle phénoménologique étudié dans



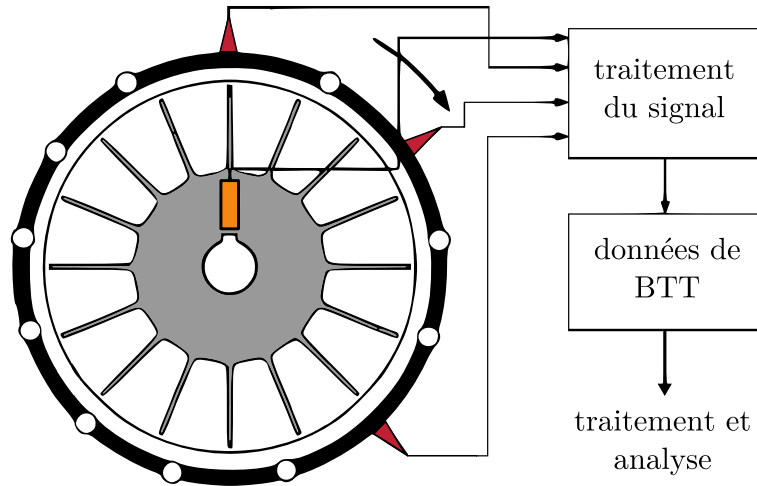


Figure 6.1 Principe de l'étude des vibrations d'une roue aubagée (■) par BTT, grâce à des capteurs situés sur la circonférence du carter (■) et sur l'arbre (■). Adapté de : [16].

le chapitre 3. La méthode proposée est ensuite étendue à une configuration de non-linéarités de contact, sur le modèle phénoménologique puis sur le modèle industriel présenté dans le chapitre 4. Enfin, les résultats stochastiques de simulations non-linéaires présentés au chapitre 5 sont utilisés pour étudier l'influence du désaccordage sur les signaux générés. Des pistes pour l'identification de phénomènes de contacts à partir de signaux de BTT sont ainsi proposées.

## 6.1 Concept et application dans la littérature

La technique de BTT permet de caractériser expérimentalement le comportement vibratoire des roues aubagées de façon non intrusive. Des capteurs sont disposés sur la circonférence du carter, comme illustré sur la figure 6.1. Chaque capteur délivre un signal à chaque passage d'aube, qui dépend du type de capteur utilisé comme il sera détaillé plus tard dans cette section. Le signal du capteur est ensuite traité afin d'obtenir le temps d'arrivée (TOA) mesuré de chaque aube. Un autre capteur, installé sur l'arbre de rotation, délivre un signal à chaque révolution qui est traité pour obtenir la vitesse de rotation de la roue aubagée. Par ailleurs, le TOA qui serait obtenu pour les aubes d'une roue rigide est calculé théoriquement. La différence entre le TOA mesuré et le TOA rigide permet d'obtenir le déplacement de l'aube pour le point de mesure considéré. Enfin, ces données sont traitées par des algorithmes avancés pour obtenir les fréquences et amplitudes de vibrations de la roue aubagée [167].

Les efforts de recherche se sont en particulier concentrés sur les étapes d’acquisition du TOA et de traitement des signaux, comme détaillé dans ce qui suit. Des études plus récentes proposent la prise en compte du désaccordage et la génération numérique de signaux pour enrichir les informations obtenues sur la roue aubagée et améliorer la robustesse des algorithmes de traitement développés [55, 166].

### 6.1.1 Chaîne d’acquisition

Dans le cadre d’un système d’acquisition par BTT classique, le carter et l’arbre sont tous deux instrumentés. Le capteur lié à l’arbre, de type OPR pour *Once Per Revolution*, permet de connaître la vitesse de rotation réelle du rotor, puisque celle-ci présente expérimentalement une certaine variabilité par rapport à la vitesse voulue [168]. Les capteurs, liés au carter, délivrent un signal brut généralement analogique qui est ensuite traduit en une impulsion correspondant au passage d’une aube [169]. Les capteurs optiques, de type laser, sont les plus couramment utilisés dans la littérature [163, 167, 169, 170]. Ils présentent notamment l’avantage d’être très précis mais sont difficiles à utiliser hors des conditions de laboratoire, comme par exemple dans le cadre du contrôle des moteurs, du fait de leur sensibilité aux débris et contaminants [171]. Afin de s’affranchir de ces limitations, l’acquisition par des capteurs à courant de Foucault (*eddy current sensors*) [171, 172], capacitifs ou inductifs [173, 174] a fait l’objet de développements récents [175]. Par ailleurs, l’usage du capteur OPR classique peut être également limitant pour une installation sur un moteur en fonctionnement, si bien que certaines recherches proposent de s’en passer en évaluant la vitesse de rotation à partir du TOA des aubes [176].

Le type, le positionnement et le nombre de capteurs à installer sur le carter dépendent de la nature des vibrations étudiées, synchrones ou asynchrones. L’étude des vibrations asynchrones nécessite typiquement de l’ordre 2 à 4 capteurs sur la circonférence du carter [164]. L’étude des vibrations synchrones nécessite davantage de capteurs, en fonction de l’ordre moteur des vibrations recherchées [169, 177] : par exemple, l’étude des vibrations au régime moteur 10 nécessite l’installation de 8 capteurs [168, 178]. Les capteurs sont généralement placés sur une plage angulaire restreinte, sur la moitié voire le quart de la circonférence du carter. Leur répartition et leur position axiale (en milieu de corde, sur le bord d’attaque ou sur le bord de fuite) sont étudiées dans de nombreuses recherches [173, 179] car elles conditionnent les modes de vibrations qui pourront être étudiés [164]. Plusieurs capteurs peuvent être placés à une même position axiale afin de suivre les déplacements des bords d’attaque et de fuite et de capter des modes de torsion [169].

### 6.1.2 Traitement des signaux

Les vibrations des aubes présentent des fréquences de vibration bien supérieures à la fréquence d'échantillonnage de l'acquisition de BTT, qui dépend du nombre de capteurs utilisé et de la vitesse de rotation. Les signaux obtenus sont donc fortement sous-échantillonnés, ce qui conduit à un repliement de spectre et donc des erreurs importantes dans l'évaluation des signaux réels (plus de détails sont fournis en annexe F). De nombreuses techniques de traitement des signaux de BTT ont ainsi été développées pour obtenir les fréquences de vibration recherchées et les amplitudes associées, basées notamment sur des transformées de Fourier, des estimations de variance ou des techniques interpolations [163, 164].

En outre, les signaux de BTT acquis expérimentalement sont inévitablement bruités, du fait de l'acquisition par des capteurs qui présentent une sensibilité et un seuil de détection donnés, ou encore de l'incertitude dans leur placement [166]. Les algorithmes de traitement des signaux de BTT doivent ainsi être robustes vis-à-vis de ces perturbations. Ils sont généralement distingués selon le type de vibrations qu'ils permettent de traiter, synchrones ou asynchrones, bien que certaines méthodes telles que la transformée de Fourier discrète non uniforme (NUDFT pour *Non-Uniform Discrete Fourier Transform*) et l'estimation de spectre par le minimum de variance (MVE pour *Minimum variance spectrum estimate*) soient applicables dans ces deux cas [164].

L'acquisition par BTT spécifique aux vibrations synchrones permet soit d'étudier les vibrations en condition de résonance, soit de reconstituer la réponse forcée linéaire de la roue aubagée ou de chaque aube indépendamment [16, 177, 180, 181]. Les méthodes d'analyse peuvent alors être classées en deux groupes [180] : indirectes et directes. Les méthodes indirectes reposent sur des mesures lors de phases d'accélération et de décélération de type rampe dans une plage de vitesses dans laquelle au moins une fréquence de résonance sera excitée. La confrontation des signaux obtenus sur seulement deux capteurs pour les accélérations et décélération, via la méthode 2PP (*Two Parameter Plot*), permet alors d'identifier l'ordre moteur excité [182]. Les méthodes directes reposent sur l'utilisation de signaux générés à une vitesse de rotation fixe afin d'extraire l'amplitude de vibration de chaque aube [167], par des méthodes reposant sur des méthodes des moindres carrés (LSFM, pour *Least square Sine Fitting Method*), telles la méthode du déterminant [173] ou la méthode auto-régressive [173, 180]. Des recherches récentes proposent enfin de généraliser les méthodes directes à un cas de vitesse de rotation de l'arbre variable afin d'étudier les vibrations transitoires de la roue aubagée [183].

Les signaux générés par BTT peuvent permettre d'étudier des vibrations asynchrones de type décrochage ou ballottement par l'analyse du signal d'une aube avec un ou deux capteurs [164]. Les efforts de recherche ont cependant été davantage concentrés sur l'identification d'usure et

de fissures sur les aubes, dans le cadre d’une application au contrôle des moteurs [184]. La validation des algorithmes de traitement sur des données expérimentales constitue une part importante des travaux sur le sujet [165, 185]. Des méthodes reposant sur les transformations de Fourier (FFT) et des méthodes des moindres carrés permettent ainsi d’identifier à partir du signal quelles aubes présentent une usure et doivent être changées [186].

### 6.1.3 Prise en compte du désaccordage

Du fait de la disposition des capteurs sur la circonférence du carter, et non directement sur les aubes comme dans le cas des jauges de contrainte, l’acquisition par BTT permet un suivi non intrusif de toutes les aubes à moindre coût. L’analyse des signaux obtenus par BTT est ainsi utilisée pour l’étude des systèmes désaccordés dans le cadre des vibrations synchrones, comme en témoignent les nombreuses études réalisées depuis 2010 [167], en particulier pour les DAM dont les aubes ne peuvent pas être prises indépendamment pour en mesurer les fréquences propres [187, 188].

Les données obtenues par BTT peuvent être traitées d’une part pour obtenir l’amplitude maximale sur l’ensemble de la roue aubagée [189] et identifier l’aube correspondante [188], et d’autre part pour l’identifier le motif de désaccordage [177]. La validation de l’identification de motifs de désaccordage est effectuée sur des cas déterministes. De plus, les valeurs de contraintes dans les aubes peuvent être obtenues par méthode indirecte lors d’acquisitions BTT au passage d’une résonance, en utilisant par exemple le NSMS (*Nonintrusive stress measurement system*) [55, 187].

Enfin, une approche alternative consiste à considérer le faible désaccordage comme une perturbation vis-à-vis de laquelle la robustesse des algorithmes de BTT doit être vérifiée [181], de façon analogue au bruit de mesure dans la chaîne d’acquisition.

### 6.1.4 Génération numérique de signaux

Afin de pouvoir étudier la robustesse des algorithmes de traitement des données de BTT vis-à-vis des perturbations ou de certains comportements vibratoires complexes tels les effets centrifuges, les signaux de BTT peuvent être générés numériquement. En effet, la génération numérique permet avantageusement de perturber progressivement un signal de TOA parfait — en ajoutant la prise en compte de phénomènes dynamiques comme les effets centrifuges ou gyroscopiques, d’incertitudes de mesure venant bruite le signal des capteurs, ou encore du désaccordage — afin de s’assurer de la robustesse des algorithmes à chaque étape [166]. En particulier, il a été montré que si de nombreux algorithmes sont robustes par rapport à chaque

phénomène pris indépendamment, la génération d’algorithmes robustes à tous les phénomènes couplés est un enjeu important [173]. Les développements les plus récents proposent des techniques de génération de données de BTT en prenant en compte de nombreux phénomènes physiques afin que les données générées soient au plus proche de données qui pourraient être obtenues expérimentalement [166].

La validation avancée des algorithmes de traitement des signaux obtenus par BTT requiert des modèles industriels, à grand nombre de ddl, pour générer des signaux qui se rapprochent de ceux qui seraient obtenus sur des roues aubagées testées expérimentalement [168]. Afin de réduire la taille des modèles, des techniques de réduction telles la SNM [26] et la FMM [97] peuvent alors être utilisées pour générer des modèles utilisables dans le cadre de la génération numérique de signaux obtenus par BTT [55, 166]. Les informations issues des données BTT, en particulier le motif de désaccordage, peuvent également être utilisées pour mettre à jour les paramètres éléments finis d’un modèle numérique qui pourra être utilisé pour la validation des algorithmes [188].

Une fois le modèle généré, les équations du mouvement peuvent être résolues par des méthodes harmoniques de type HBM [174, 190] ou par analyse modale couplée à une intégration temporelle locale [166], lorsque l’aube est située dans la plage angulaire correspondant à la position des capteurs, afin de calculer le TOA souhaité.

## 6.2 Extension à un cadre de non-linéarités de contact

Comme vu dans la section 6.1, la génération numérique de données de BTT est un enjeu de recherche important pour améliorer et valider les algorithmes de traitement des données obtenues expérimentalement, rendant accessibles des informations sur le comportement dynamique de la roue aubagée pour une instrumentation modérée. Ces considérations sont d’un intérêt industriel grandissant, notamment dans le cadre du contrôle des moteurs [174]. Actuellement la génération numérique de données de BTT est réalisée dans un cadre linéaire. Or l’accès à des données de BTT dans un cadre non-linéaire rendrait possible la mise au point d’algorithmes de traitement spécifiques, permettant par exemple d’identifier l’occurrence de contacts, ou encore de caractériser les vibrations non-linéaires notamment à travers les phénomènes de frottement.

La présente étude se place dans le cadre de la génération numérique de signaux de BTT, afin de démontrer que des modèles désaccordés générés par la méthode CM3, développée dans le chapitre 4, peuvent être utilisés pour la génération de données de BTT aussi bien dans un cadre linéaire, comme fait dans la littérature, que dans un cadre de non-linéarités

de contact. La méthode de génération des données de BTT est explicitée et validée sur les données obtenues sur le modèle phénoménologique présenté au chapitre 3, en configuration linéaire puis non-linéaire. Les données de BTT sont ensuite générées sur base des signaux de vibrations non-linéaires calculées sur le modèle industriel présenté dans la section 4.3, sur des motifs sélectionnés puis sur les données stochastiques qui avaient été présentées et analysées au chapitre 5.

### 6.2.1 Méthode et validation

**Cadre et hypothèses.** Comme vu dans la section 6.1, différents types de capteurs peuvent être utilisés, qui vont conditionner le traitement à effectuer sur la quantité physique brute pour obtenir le TOA. Afin d'éviter toute perte de généralité quant à la solution technologique choisie pour l'acquisition, et en l'absence de données expérimentales, le traitement du signal du capteur est considéré effectué en amont [174, 190]. Ainsi, les données de BTT d'intérêt générées dans la présente étude sont les TOA de corps rigide, notée  $t_a^r$ , et avec vibrations, notée  $t_a^v$ , afin d'obtenir la différence de TOA, notée  $\Delta t_a = t_a^v - t_a^r$ , qui peut être utilisée pour reconstituer les vibrations de la roue aubagée.

**Algorithme.** Le signal d'entrée de l'algorithme BTT est obtenu comme suit :

- (1) génération du modèle réduit désaccordé par CM3 ;
- (2) application du forçage en bout d'aube : forçage linéaire sinusoïdal ou de non-linéarité de contact ;
- (3) calcul de la réponse à une sollicitation linéaire ou de non-linéarité de contact par intégration temporelle ;

**Validation sur un modèle phénoménologique en configuration linéaire.** Deux modèles accordé et désaccordé sont générés pour permettre le calcul des données de BTT à une vitesse de rotation constante, correspondant à la fréquence de résonance définie du modèle accordé. Le motif désaccordé utilisé pour la validation, à  $\sigma = 1,7\%$ , est donné dans le tableau 6.1.

Tableau 6.1 Motif de désaccordage sélectionné.

Module d'Young par aube ( $\times 10^{11}$ Pa)											
$E_1$	2,1051	$E_2$	2,1495	$E_3$	2,0765	$E_4$	2,0726	$E_5$	2,1318	$E_6$	2,0827
$E_7$	2,0968	$E_8$	2,1126	$E_9$	2,1432	$E_{10}$	2,0603	$E_{11}$	2,0578	$E_{12}$	2,0713

L'intégration temporelle est initiée sur base du régime permanent calculé par résolution modale. Les coordonnées angulaires des nœuds frontière pour les aubes avec vibrations ainsi que du cas théorique rigide sont présentées sur le dernier tour à la figure 6.2a. La position angulaire du capteur est représentée par une ligne horizontale rouge ( — ), à  $\frac{\pi}{3}$  rad. Comme la simulation est réalisée sur le régime permanent, chaque aube est soumise à la même excitation sur une révolution. Le modèle étant en outre accordé, toutes les courbes ont bien la même amplitude à une position angulaire donnée. De plus, il apparaît que les aubes rigides atteignent la position angulaire du capteur avant les aubes avec vibrations. Ceci est bien retranscrit par le signal du capteur simulé, représenté par des impulsions sur la figure 6.2b, où le  $t_a^r$  est inférieur à  $t_a^v$ . La différence entre les deux,  $\Delta t_a$ , tracée à la figure 6.2c, est égale pour toutes les aubes, à  $10^{-6}$  s près, ce qui est conforme à ce qui est attendu. Ce faible écart est dû à l'interpolation linéaire réalisée entre deux pas de temps afin de déterminer les  $t_a^r$  et  $t_a^v$ .

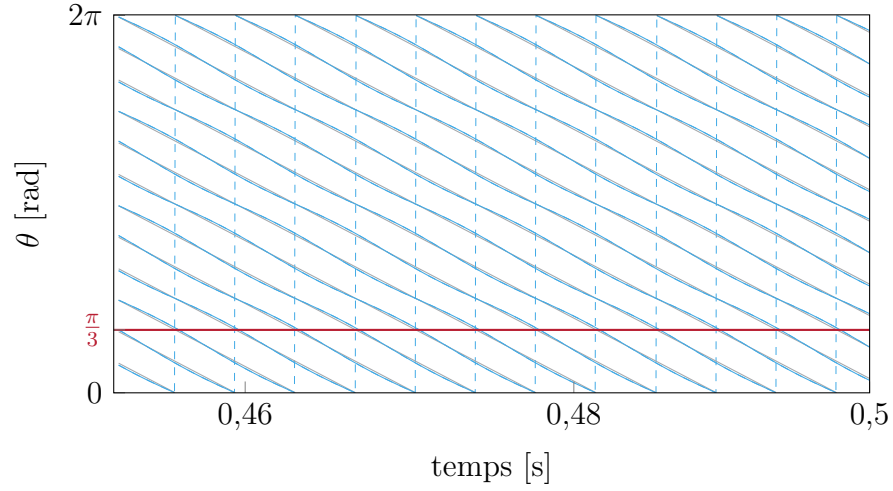
Pour le modèle désaccordé, les amplitudes obtenues en régime permanent diffèrent d'une aube à l'autre du fait de la localisation, ce qui est correctement retranscrit sur la figure 6.3a, où chaque aube présente une position angulaire différente au moment du passage du capteur. Le signal de capteur obtenu, tracé à la figure 6.3b, est bien cohérent avec ces positions angulaires. En particulier, il est nettement visible que certaines aubes avec vibration passent la position du capteur avant l'aube rigide correspondante, et le  $\Delta t_a$  tracé sur la figure 6.3c est bien différent d'une aube à l'autre, du fait du désaccordage. L'écart sur les  $\Delta t_a$ , défini sur l'ensemble des aubes par  $\max(\Delta t_a) - \min(\Delta t_a)$ , est ainsi sur le dernier tour de  $2,1 \cdot 10^{-4}$  s, ce qui est bien supérieur à la différence obtenue dans le cas accordé. Les  $\Delta t_a$  sont cependant constants sur l'ensemble des révolutions considérées, ce qui est en accord avec le fait que les déplacements sont calculés par intégration temporelle sur base des amplitudes obtenues en régime permanent.

L'algorithme défini permet bien de calculer des  $t_a^r$ ,  $t_a^v$  et  $\Delta t_a$  conformes à ce qui est attendu sur le signal d'un seul capteur, pour une configuration linéaire.

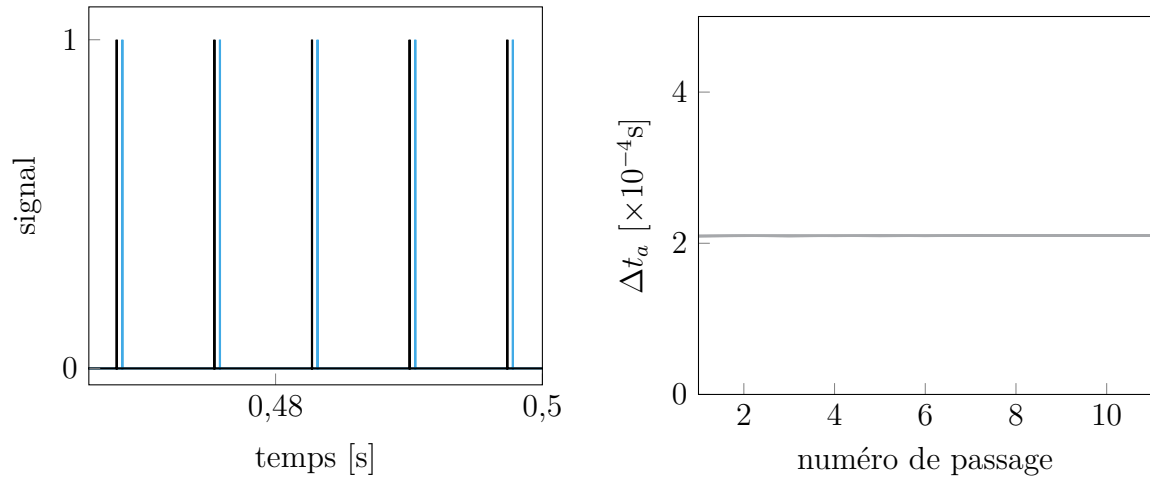
## 6.2.2 Application à un modèle phénoménologique

### Vibrations non-linéaires

L'algorithme utilisé pour obtenir les résultats de  $\Delta t_a$  est appliqué sur des données de simulations non-linéaires, sur base du modèle phénoménologique du chapitre 3. Les paramètres de simulation utilisés sont tels que donnés dans la section 3.3.2. La vitesse de rotation considérée est de 34,45 Hz, qui correspond à la vitesse de résonance du modèle accordé, définie sur la FRF non-linéaire précédemment présentée sur la figure 3.9. La procédure pour obtenir



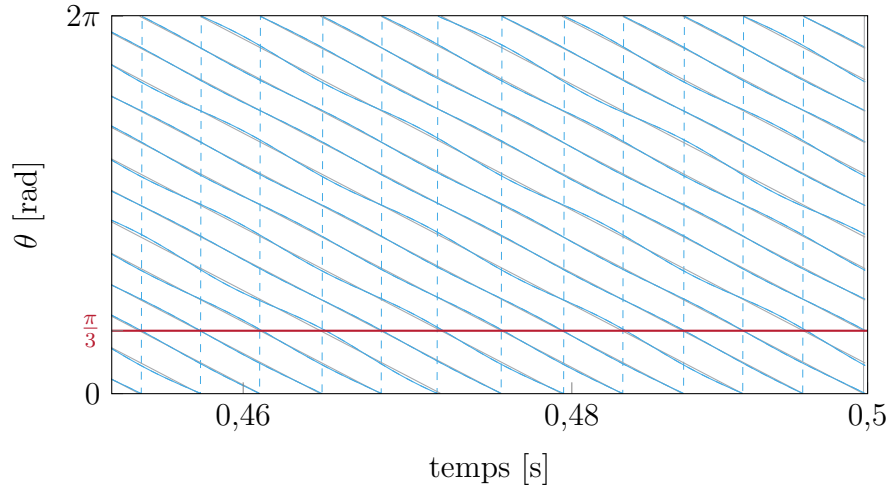
(a) déplacement  $\theta$  des aubes avec vibrations ( — ) et rigide ( — )



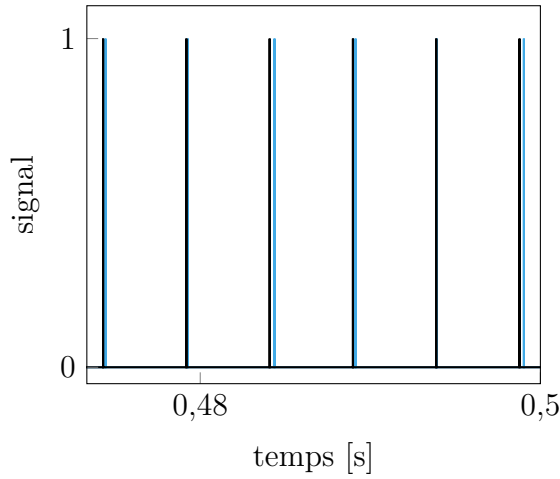
(b) signal du capteur sur le dernier demi-tour, avec vibrations ( — ) et modèle rigide ( — ) (c) différence de TOA entre le cas avec vibrations et le cas rigide, pour chaque aube

Figure 6.2 Signaux en entrée et en sortie de l'algorithme de BTT, sur un cas accordé linéaire.

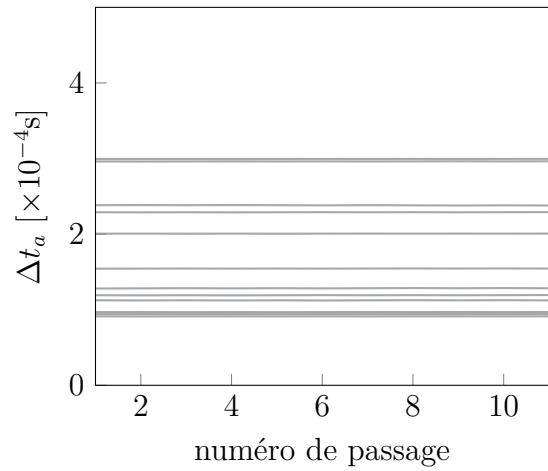




(a) déplacement  $\theta$  des aubes avec vibrations ( — ) et rigide ( — )



(b) signal du capteur sur le dernier demi-tour, avec vibrations ( — ) et modèle rigide ( — )



(c) différence de TOA entre le cas avec vibrations et le cas rigide, pour chaque aube

Figure 6.3 Signaux en entrée et en sortie de l'algorithme de BTT, sur un cas désaccordé linéaire.

$\Delta t_a$  est utilisée sur l'ensemble de la simulation, la convergence étant atteinte en 20 tours, telle qu'évaluée par auto-corrélation sur l'amplitude des déplacements, présentée dans la section 3.2.1. Les lobes du carter atteignent leur amplitude de déformation maximale dès le premier tour de simulation. Les résultats sont présentés sur le modèle accordé et sur le modèle désaccordé dont le motif est donné dans le tableau 6.1.

Les  $\Delta t_a$  calculés pour les modèles accordé et désaccordé sont tracés respectivement sur les figures 6.4a et 6.4b. Pour le cas accordé, la progression de  $\Delta t_a$  en fonction du nombre de tours est similaire pour toutes les aubes, avec un écart sur l'ensemble des aubes de  $10^{-5}$  s sur le dernier tour. Cet écart est plus important que dans le cadre linéaire du fait de la stabilisation imparfaite des signaux non-linéaires. Pour le cas désaccordé, les aubes présentent des valeurs de  $\Delta t_a$  similaires sur les 3 premiers tours avant de se différencier nettement. Ainsi, les inflexions de courbes visibles sur certaines aubes à partir du 3<sup>ième</sup> tour après l'initiation du contact pourraient permettre de détecter l'occurrence d'un contact dans les données issues de mesures expérimentales par BTT. Par ailleurs, en fin de simulation l'ensemble des aubes présentent un écart de  $1,6 \cdot 10^{-4}$  s, du même ordre de grandeur que celui trouvé sur le même motif dans un contexte linéaire. Ce résultat suggère que les algorithmes d'analyse de données de BTT qui sont robustes au désaccordage dans un contexte linéaire pourraient également l'être dans un contexte non-linéaire. De plus, les algorithmes de détermination du niveau de désaccordage à partir de données BTT pourraient potentiellement être adaptés pour être robustes à l'introduction d'une non-linéarité de contact.

### Influence de la position du capteur

Comme vu dans la section 6.1.1, la position angulaire des capteurs pour l'acquisition par BTT doit être soigneusement choisie afin de permettre le traitement des données avec un nombre restreint de capteurs. L'évolution des valeurs de  $\Delta t_a$  par aube sur le dernier tour avec une position du capteur évoluant entre 0 et  $2\pi$  est tracée sur la figure 6.5 pour le modèle accordé, et sur la figure 6.6 pour le modèle désaccordé. Les positions des extremums d'excitation, à savoir les positions équivalentes des redresseurs pour le forçage linéaire ou la position des lobes de déformation du carter dans le cadre non-linéaire (figure 3.1), sont indiquées par des traits verticaux ( --- ).

Pour le modèle accordé, la variation de  $\Delta t_a$  est similaire sur toutes les aubes, comme le montre la superposition des courbes obtenues pour chaque aube sur les figures 6.5a et 6.5b. Les courbes obtenues dans le cadre linéaire sont centrées autour de leur valeur moyenne  $\overline{\Delta t_a} \approx 0$  s, égale pour chaque aube. Ainsi,  $\Delta t_a \approx 0$  s lorsque le capteur est situé à la même position angulaire que les redresseurs. Comme les algorithmes d'analyse des données BTT se basent

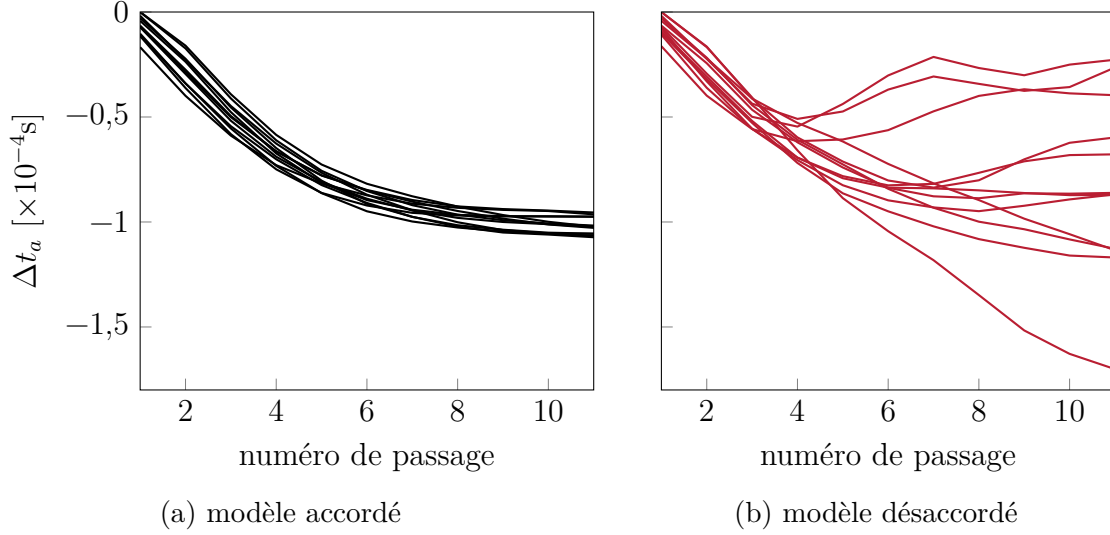


Figure 6.4 Génération de données de BTT dans un cadre non-linéaire, pour toutes les aubes de modèles accordé et désaccordé.

sur  $\Delta t_a$  pour identifier l'amplitude et la fréquence des vibrations, cette position de capteur serait ainsi particulièrement inadaptée, de même qu'un capteur situé à équidistance de deux redresseurs. Dans le cadre non-linéaire, les courbes obtenues sont quasiment centrées autour de  $\overline{\Delta t_a} \approx -4 \cdot 10^{-5}$  s, correspondant à un capteur positionné au niveau d'un lobe du carter. La position du capteur à éviter, correspondant à  $\Delta t_a \approx 0$  s, est ainsi décalée par rapport à la position de la bosse. Ainsi, une position de capteur choisie dans un cadre linéaire pourrait ne plus être adaptée au traitement des données dans le cas de non-linéarités de contact. Par ailleurs, une légère dispersion des  $\Delta t_a$  est visible pour un capteur situé peu après un lobe du fait de la non-linéarité, ce qui perturberait potentiellement davantage les signaux obtenus lors de l'acquisition par BTT. En somme, et même en considérant un cas accordé, l'optimisation de la position du capteur pour obtenir par BTT des données exploitables pourrait être plus complexe dans le cadre de non-linéarités de contact, et un traitement supplémentaire du signal pourrait ainsi être nécessaire par rapport au cadre linéaire.

Pour le modèle désaccordé, une grande variabilité de  $\Delta t_a$  en fonction de la position du capteur est visible d'une aube à l'autre, aussi bien dans le cadre linéaire sur la figure 6.6a que dans le cadre non-linéaire sur la figure 6.6b. Dans un cadre linéaire, les courbes pour chaque aube sont également centrées autour de leur moyenne, à  $\overline{\Delta t_a} \approx 0$  s. Cependant, comme il n'y a plus de position du capteur correspondant à un  $\Delta t_a \approx 0$  s pour toutes les aubes, les signaux obtenus par BTT pourraient potentiellement être utilisés dans des algorithmes d'identification du niveau de désaccordage, pour toutes les positions de capteurs. En outre, un capteur positionné

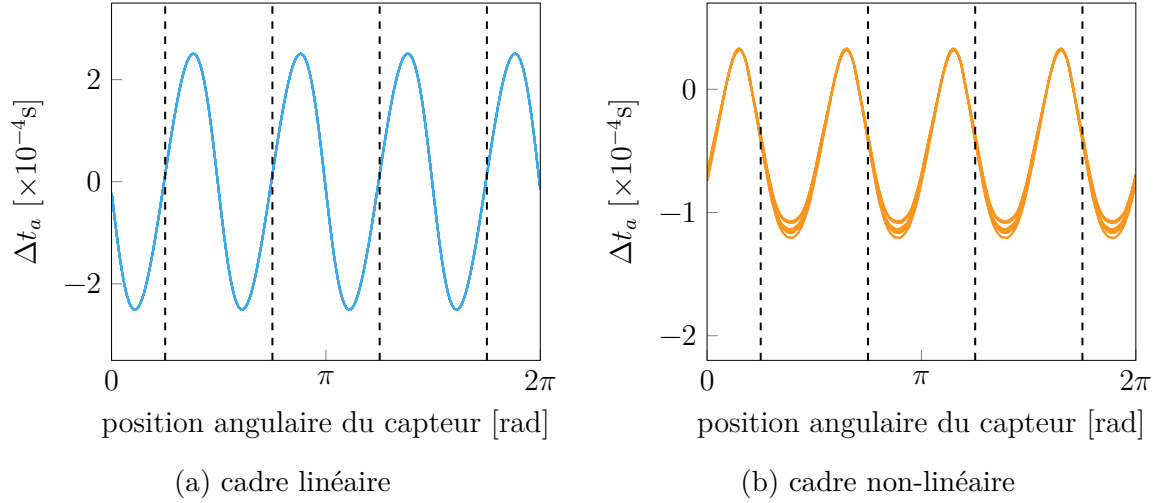


Figure 6.5 Évolution de  $\Delta t_a$  sur le dernier tour pour le modèle accordé, en fonction de la position angulaire du capteur, avec les positions des extremums d'excitation indiquées ( --- ).

juste après ou juste avant les redresseurs permettrait de maximiser les écarts de  $\Delta t_a$  entre les aubes. Dans un cadre de non-linéarité de contact, les écarts en les  $\Delta t_a$  des différentes aubes sont également maximisé pour un capteur placé juste après le lobe, mais minimisés pour un capteur positionné juste avant le lobe. Ce dernier cas pourrait ainsi rendre l'identification du désaccordage sur des signaux générés par BTT plus difficile. Par ailleurs, contrairement au cas linéaire, les valeurs de  $\overline{\Delta t_a}$  sont très différentes d'une aube à l'autre. Ceci pourrait être exploité pour l'identification du désaccordage couplé à des non-linéarités de contact.

### 6.2.3 Application à un modèle industriel

L'algorithme de génération de données de BTT, qui permet d'obtenir le  $\Delta t_a$ , est appliqué sur le modèle industriel, dans la même configuration de contact qu'étudiée dans le chapitre 5, soit au point de fonctionnement nominal de la roue aubagée modélisée. Les lobes sur le carter sont situés en  $a_0 = 0,24 \text{ rad}$  et en  $a_0 + \pi$ . Le calcul et l'évolution de  $\Delta t_a$  sont étudiés sur les motifs d'intérêt déjà sélectionnés pour l'analyse des champs de déplacements et de contraintes de la section 5.2.5. Pour rappel, les modèles désaccordés associés connaissent respectivement l'amplification  $\mathcal{A}_{nl}$  et la localisation FL les plus élevées lors des simulations de contact, sur l'ensemble des échantillons simulés. Ainsi, l'évolution de  $\Delta t_a$  à partir de ces modèles pourraient donner des pistes pour l'identification des motifs potentiellement problématiques d'un point de la durée de vie des moteurs. Une étude stochastique est ensuite réalisée sur l'ensemble des échantillons analysés dans la section 5.2.2.

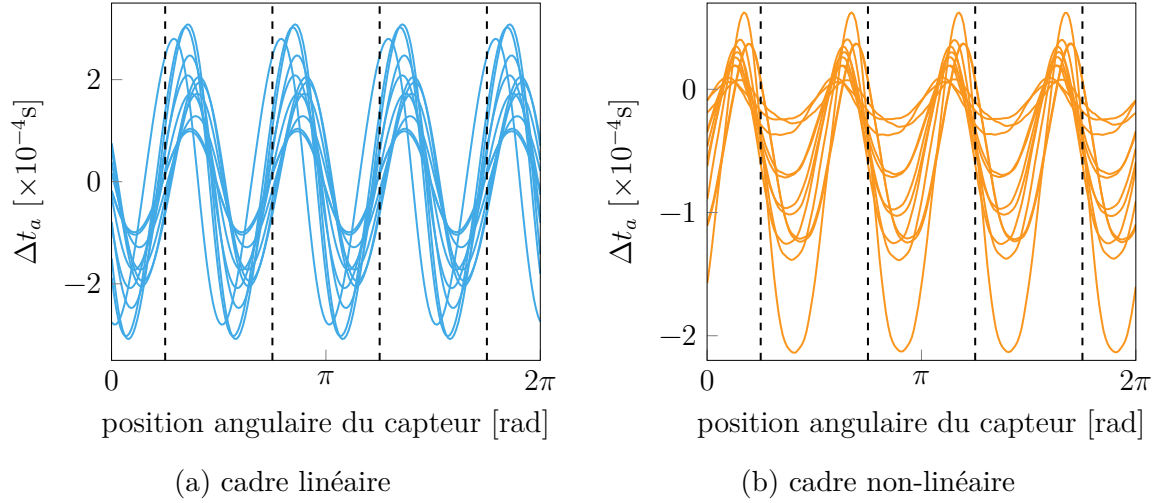


Figure 6.6 Évolution de  $\Delta t_a$  sur le dernier tour pour le modèle désaccordé, en fonction de la position angulaire du capteur, avec les positions des extremums d'excitation indiquées (---).

### Étude déterministe

Les motifs d'intérêt sont sélectionnés sur base des résultats de la campagne de simulation du chapitre 5, à savoir : le cas accordé, le motif désaccordé à l'amplification maximale, donné dans le tableau 5.5, et le motif au facteur de localisation maximal, donné dans le tableau 5.6. Les signaux de BTT sont générés sur les 50 tours simulés.

L'allure des vibrations sur le dernier demi-tour a été précédemment donnée pour chaque motif, respectivement sur les figures 5.20a, 5.21 et 5.22. Les résultats de  $\Delta t_a$  issus de l'algorithme de génération de données BTT sont présentés sur la figure 6.7, pour un capteur positionné en  $\frac{\pi}{3}$  et pointant vers le bord d'attaque (BA) de l'aube. Après le passage du transitoire, le  $\Delta t_a$  calculé sur le modèle accordé, tracé à la figure 6.7a, tend à se stabiliser vers une même valeur pour toutes les aubes, avec un écart sur le 50<sup>ième</sup> tour de :  $\max(\Delta t_a) - \min(\Delta t_a) = 9,8 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ . Pour les deux modèles désaccordés, une des aubes présente un  $\Delta t_a$  à l'évolution distincte de celle obtenue pour les autres aubes, et ce dès les 5 premiers tours de simulation. Cette aube isolée est indiquée en rouge (—) sur les figures 6.7b et 6.7c. Pour les deux motifs désaccordés étudiés, l'aube dont la courbe de  $\Delta t_a$  est nettement isolée est celle à l'amplitude des déplacements maximale. Ces résultats suggèrent une corrélation entre la valeur de  $\Delta t_a$  et l'amplitude des vibrations, qui est étudiée sur base des résultats stochastiques dans la section suivante.

Pour le modèle désaccordé à localisation maximale, la courbe de  $\Delta t_a$  isolée devient décroissante à partir du 18<sup>ième</sup> tour, ce qui suggère des vibrations asynchrones. Le déplacement selon  $\theta$  de

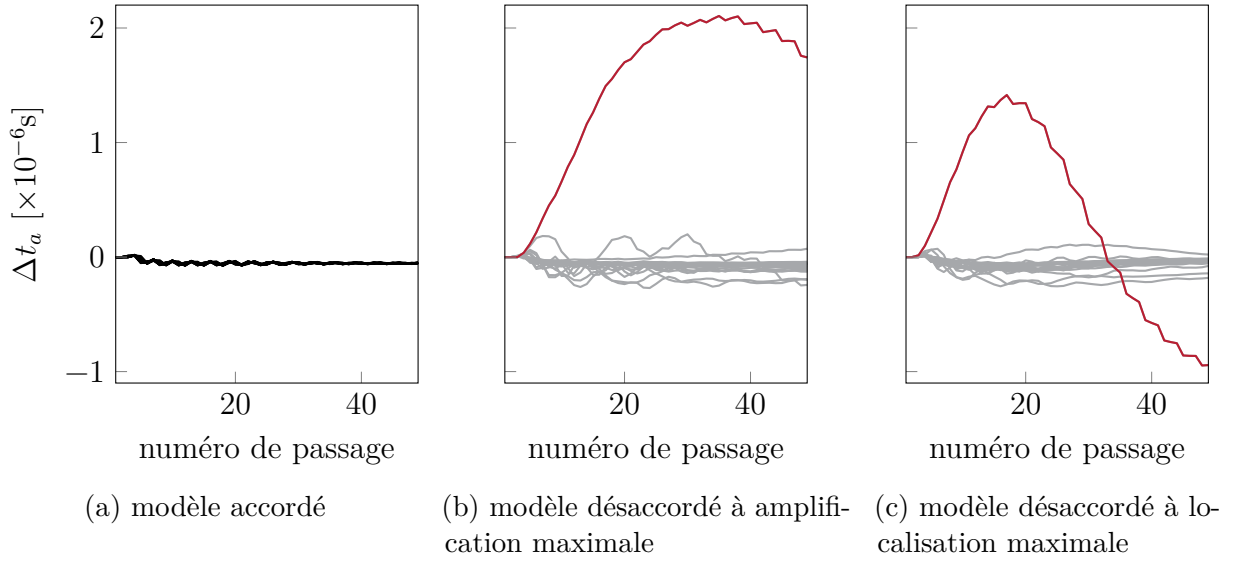


Figure 6.7 Évolution de  $\Delta t_a$  sur l'ensemble de la simulation, pour le modèle industriel.

l'aube considérée est tracée sur les 5 derniers tours sur la figure 6.8. Comme vu grâce au point rouge ( • ) qui indique le temps de passage de tour, les valeurs de déplacements obtenues sont de plus en plus faibles à chaque fin de tour, ce qui confirme que les vibrations de l'aube considérée sont asynchrones.

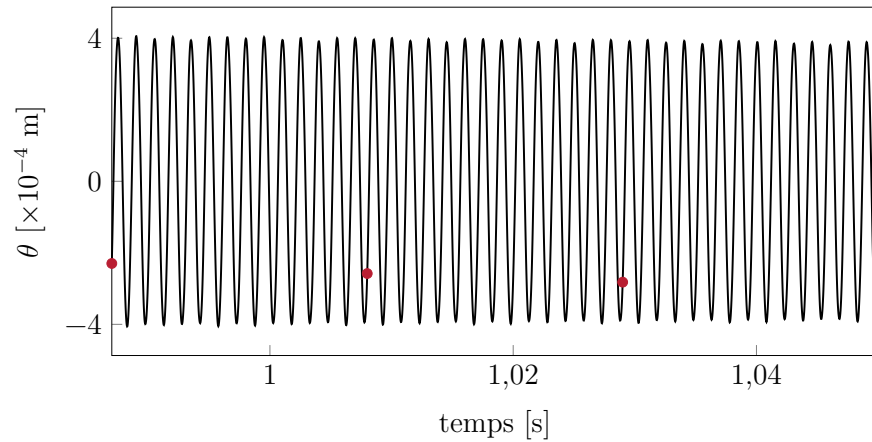


Figure 6.8 Déplacement selon  $\theta$  pour l'aube dont la courbe  $\Delta t_a$  est en rouge ( — ) sur la figure 6.7c. Passage de tour aux instants indiqués ( • ).

L'évolution de  $\Delta t_a$  sur le 50<sup>ième</sup> tour en fonction de la position angulaire du capteur est tracée pour les trois motifs considérés sur la figure 6.9. La position des bosses y est indiquée en pointillés ( --- ). Les valeurs obtenues sur le cas accordée sont bien superposées sur l'ensemble des aubes. De plus, un capteur situé au niveau d'une bosse retourne une valeur minimale de

$\Delta t_a$ . Pour les cas désaccordés, les aubes dont le  $\Delta t_a$  était distinct sur les figures 6.7b et 6.7c sont reportées par un trait rouge ( — ). Ces aubes correspondent également aux valeurs extrêmes de  $\Delta t_a$ , calculées sur l'ensemble des positions du capteur sur le carter. Contrairement au cas accordé, ces extremums ne sont pas rencontrés pour un capteur situé au niveau de la bosse. Ceci est en accord avec le résultat obtenu lors de la visualisation des champs de déformations et de contraintes à la section 5.2.5, à savoir que l'aube qui présente le plus grand déplacement en bout d'aube n'est pas nécessairement celle qui est en contact.

Si pour des signaux obtenus sur l'ensemble de la circonférence du carter, les extremums sont bien identifiés sur les aubes qui présentent les plus grands déplacements en bout d'aube, les résultats obtenus pour une position de capteur donnée peuvent fortement varier. En effet, un capteur mal situé fausse l'identification de l'aube à la plus grande amplification : par exemple, sur la figure 6.9b, un capteur placé à  $2\pi$  rad retournerait un  $\Delta t_a$  faible pour l'aube qui a la plus grande amplitude des vibrations ( — ). Ainsi, en configuration de non-linéarité de contact, les résultats obtenus vont également être fortement dépendants de la position angulaire du capteur.

## Étude stochastique

La quantité stochastique d'intérêt est le maximum sur l'ensemble des aubes de la valeur absolue de  $\Delta t_a$ , calculé sur le dernier tour de simulation, et est notée  $\max(|\Delta t_a|)$ . Les motifs générés pour tous les niveaux de désaccordage  $\sigma$  de la campagne stochastique sont étudiés. En tout, 24 positions de capteur sont considérées, soit à 3 positions sur la corde de l'aube — au bord d'attaque (BA), au milieu de corde et au bord de fuite (BF) — pour chacune des 8 positions angulaires suivantes : au niveau des deux lobes de déformation du carter, des deux creux, et des quatre positions intermédiaires à équidistance des précédentes, si bien les capteurs sont positionnés en  $a_0 + k \times \frac{\pi}{4}$  avec  $k \in [0, 7]$ . L'intervalle angulaire dans lequel les capteurs sont placés est noté  $[a_0, a_0 + 2\pi[$ .

Les résultats stochastiques de l'évolution de  $\max(|\Delta t_a|)$  en fonction du niveau de désaccordage sont tracés à la figure 6.10a, pour un capteur situé à différentes positions angulaires et pointant vers le bord de fuite (BF). La valeur de  $\max(|\Delta t_a|)$  augmente avec le niveau de désaccordage  $\sigma$ , avec une allure similaire à l'amplification  $\mathcal{A}_{nl}$  présentée dans la section 5.2.2. Pour rappel, l'analyse de la campagne stochastique avait montré qu'une résonance pouvait être captée à la vitesse nominale étudiée, du fait du décalage en fréquences induit le désaccordage à  $\sigma = 2,9\%$ . Pour un capteur à la position axiale correspondant au BF de l'aube, la position angulaire correspondant au lobe semble exacerber l'écart de  $\Delta t_a$  lors du passage d'un niveau de désaccordage à un autre. À l'inverse, les variations d'un  $\sigma$  à un autre sont peu visibles si

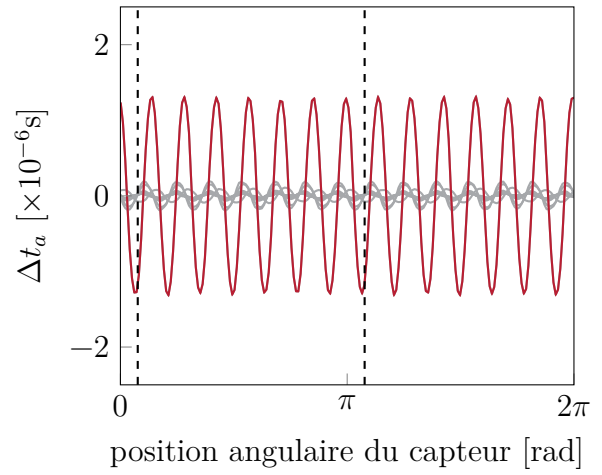
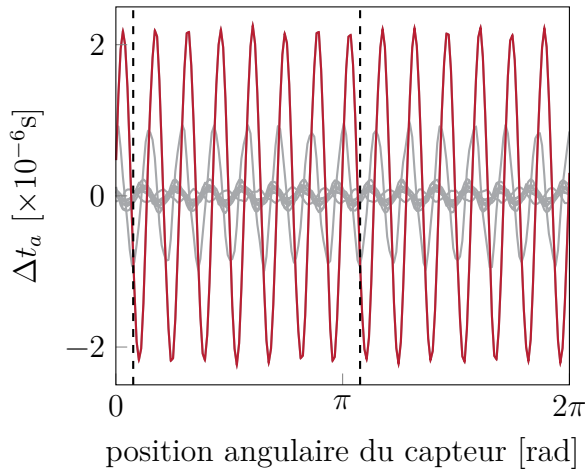
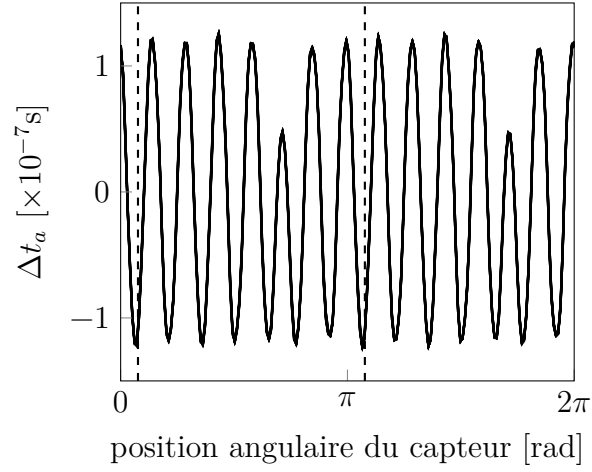


Figure 6.9 Évolution de  $\Delta t_a$  sur le 50<sup>ième</sup> tour pour une position de capteur variable, pour le modèle industriel. La position des bosses sont renseignées ( --- ).



le capteur est situé au niveau des creux, si bien que les différents niveaux de désaccordage ne pourraient pas être distingués les uns des autres. Les résultats sur les quatre capteurs en  $[a_0, a_0 + \pi[$  sont similaires à ceux obtenus sur les quatre capteurs en  $[a_0 + \pi, a_0 + 2\pi[$ , ce qui est cohérent avec la symétrie du chargement induite par la déformation du carter. À l'intérieur de ces intervalles, les valeurs de  $\max(|\Delta t_a|)$  varient fortement. Ces résultats stochastiques viennent ainsi confirmer d'une part ce qui est soulevé dans la littérature dans le cadre d'un forçage linéaire, et d'autre part ce qui avait été constaté lors de l'étude déterministe précédente.

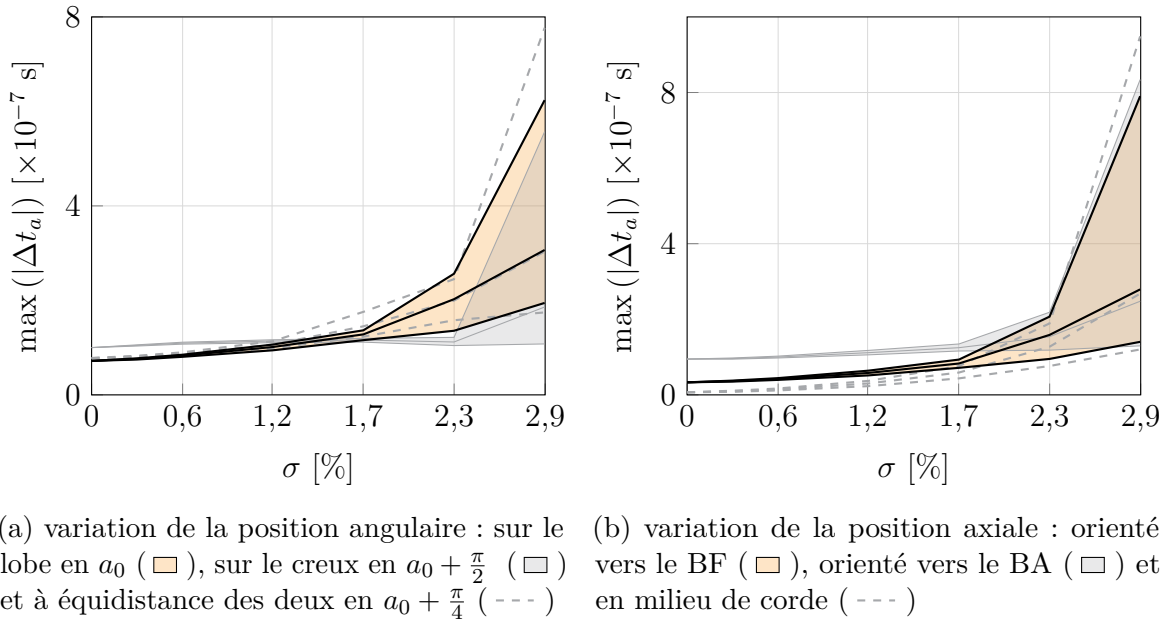


Figure 6.10 Centiles 10, 50 et 90 de  $\max(|\Delta t_a|)$  pour des positions de capteur variables.

Les résultats stochastiques pour un capteur situé à l'angle  $a_0 + \frac{3\pi}{4}$  sont tracés sur la figure 6.10b pour différentes positions axiales. Si l'allure des courbes enveloppes de  $\max(|\Delta t_a|)$  varie peu, les échelles diffèrent entre les positions axiales : les valeurs de  $\max(|\Delta t_a|)$  sont maximales pour un capteur pointant vers le BA. Ce résultat est cohérent avec l'analyse de la campagne stochastique à la section 5.2.3, où le nœud d'amplification maximale avait été identifié comme passant du BA au BF lorsque  $\sigma$  augmente. Il apparaît en outre que les valeurs de  $\max(|\Delta t_a|)$  sont plus importantes pour un capteur placé en amont du lobe, du fait que l'aube est localement ralentie lors de son premier contact avec le lobe. Ceci suggère que l'évolution du  $\max(|\Delta t_a|)$  pourrait être utilisée pour identifier l'occurrence de contacts aubes-carter.

Les valeurs de  $\max(|\Delta t_a|)$  sont tracées sur la figure 6.11 vis-à-vis du facteur de localisation FL, tel que défini dans la section 3.4, pour chaque échantillon simulé. Le capteur est orienté

vers le BA, aux positions angulaires correspondant à la première bosse en  $a_0$  et à la position intermédiaire en  $a_0 + \frac{\pi}{4}$ . Les résultats obtenus pour un capteur au niveau de la bosse en  $a_0$  et du creux en  $a_0 + \frac{\pi}{2}$  sont similaires, de même pour les résultats obtenus pour les deux positions intermédiaires. Les résultats obtenus sur l'ensemble des échantillons sont situés autour d'une droite et présentent une dispersion modérée, en particulier pour  $FL < 50\%$ . La régression linéaire sur ces données, représentée par la droite en rouge ( — ) sur les graphiques, présente un meilleur coefficient de corrélation et une pente plus forte sur la figure 6.11a. En effet, pour un capteur situé sur la bosse en  $a_0$ , le coefficient directeur de la droite de régression est d'environ  $10^{-8}$ , pour un coefficient de corrélation  $R^2 = 0,89$ , contre un coefficient directeur d'environ  $4 \cdot 10^{-9}$  et un coefficient  $R^2 = 0,52$  pour un capteur situé en  $a_0 + \frac{\pi}{4}$  (figure 6.11b). Ces résultats indiquent que pour un capteur situé en  $a_0$ , le  $\Delta t_a$  obtenu par BTT pourrait être relié directement aux valeurs de FL. La localisation de l'ensemble de la roue pourrait ainsi être obtenue avec un nombre restreint de capteurs, et sans avoir besoin de passer par le calcul de l'amplitude de chacune des aubes.

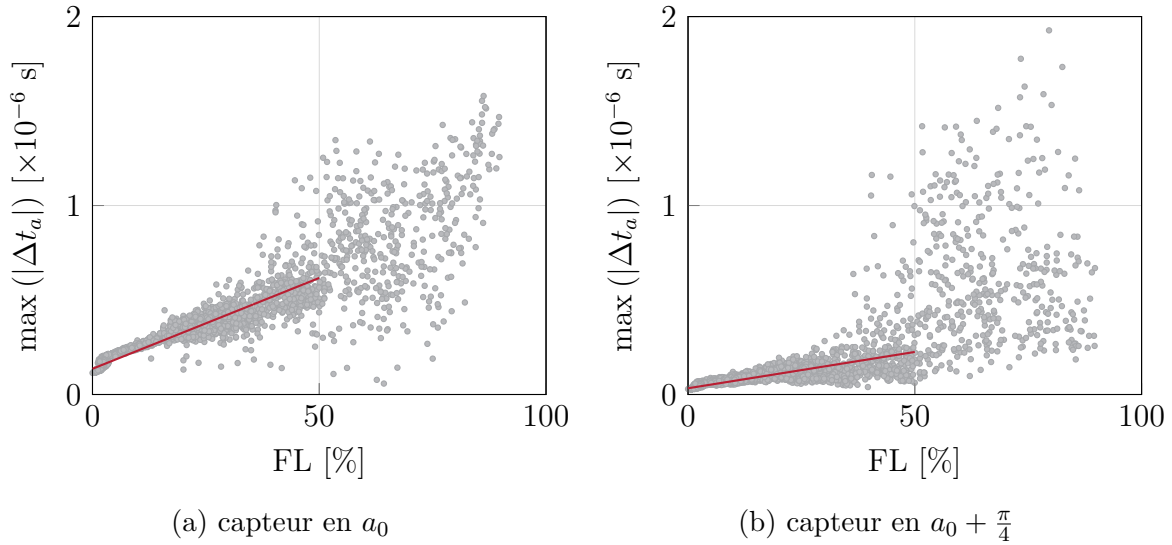


Figure 6.11 Évolution de  $\max(|\Delta t_a|)$  en fonction de FL pour un capteur orienté vers le BA, et droite de régression linéaire associée pour  $FL < 50$  ( — ).

Les valeurs obtenues pour  $\max(|\Delta t_a|)$  sont tracées vis-à-vis de l'amplification  $\mathcal{A}_{nl}$ , pour chaque échantillon simulé, sur la figure 6.11. Le capteur est positionné axialement vers le BA, pour les positions angulaires  $a_0$  et  $a_0 + \frac{\pi}{4}$ . Les résultats obtenus pour un capteur en  $a_0 + \frac{\pi}{2}$  et en  $a_0 + \frac{\pi}{4}$  sont également similaires. Une régression linéaire sur les échantillons pour lesquels  $\mathcal{A}_{nl} \leq 7$  permet d'obtenir des droites avec un coefficient directeur proche quelque soit le placement angulaire du capteur, soit respectivement de  $1,7 \cdot 10^{-7}$  pour la droite tracée à la

figure 6.12a et  $1,2 \cdot 10^{-7}$  pour la droite tracée à la figure 6.12b. Ces résultats sont cohérents avec ce qui peut être attendu sachant que  $\mathcal{A}_{nl}$  est calculé sur les déplacements en sommet d'aube, où le déplacement est le plus important comme vu dans la section 5.2.5. En revanche, il est intéressant de noter que les données sont peu dispersées pour un capteur placé en  $a_0$ , avec une valeur de  $R^2 = 0.92$ , contre  $R^2 = 0.76$  pour un capteur placé en  $a_0 + \frac{\pi}{4}$ . Ces résultats permettent de mettre en évidence qu'un capteur placé en  $a_0$  fournit des  $\max(|\Delta t_a|)$  variant quasiment linéairement avec  $\mathcal{A}_{nl}$ , et de façon assez robuste par rapport au niveau de désaccordage. De telles données pourraient ainsi être exploitées pour le développement et la validation d'algorithmes de traitement du  $\Delta t_a$  en vue d'obtenir directement l'amplification sur l'ensemble de la roue, dans un contexte de contact aubes-carter, sans avoir à calculer l'amplitude de toutes les aubes.

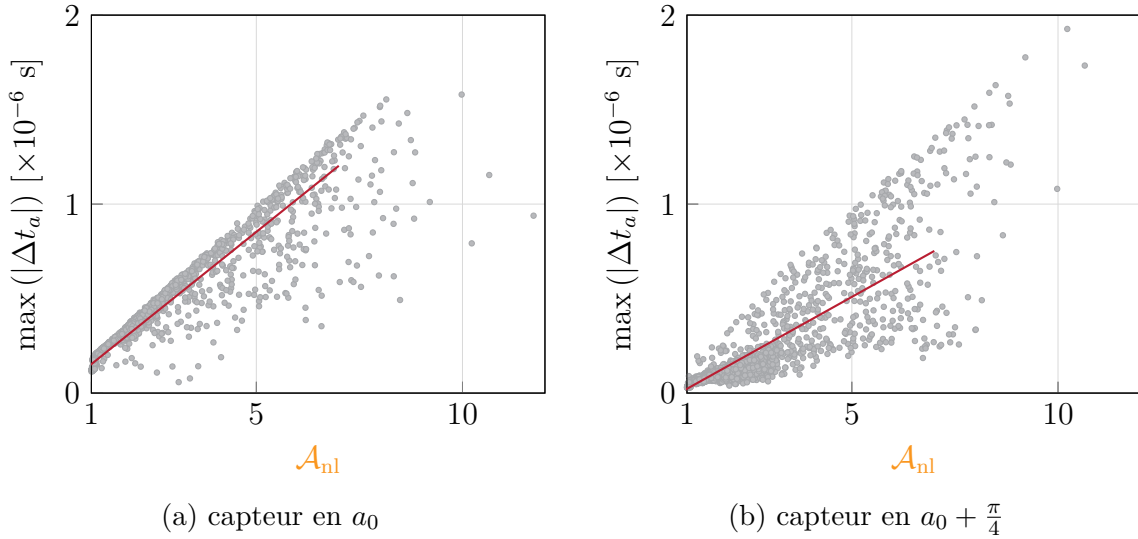


Figure 6.12 Évolution de  $\max(|\Delta t_a|)$  en fonction de l'amplification maximale  $\mathcal{A}_{nl}$  pour un capteur orienté vers le BA, et droite de régression linéaire associée pour  $\mathcal{A}_{nl} < 7$  ( — ).

### 6.3 Bilan

Les modèles réduits par la technique CM3 ont été utilisés pour la génération de données de BTT, avec un algorithme de BTT simplifié. Les signaux obtenus pour un capteur ont été validés dans un cadre linéaire. Des signaux ont ensuite été générés dans une configuration de non-linéarités de contact, sur des motifs sélectionnés puis sur tous les motifs étudiés dans l'analyse stochastique du chapitre 5.

Il apparaît que la position du capteur est critique pour l'obtention de données de BTT

exploitables par les algorithmes de traitement, comme référencé dans le cas linéaire [179]. Les résultats obtenus en faisant varier la position du capteur et la faible dispersion des données obtenues stochastiquement suggère cependant qu'il serait possible avec un nombre restreint de capteurs de définir des algorithmes de traitement des données de BTT pour étudier la dynamique de roues aubagées dans un contexte de non-linéarités de contact, robustes vis-à-vis du niveau de désaccordage. De tels algorithmes pourraient permettre de détecter l'occurrence du contact ou d'étudier des phénomènes plus complexes de frottement. Par ailleurs, la localisation de la roue aubagée pourrait être calculée en configuration non-linéaire directement à partir du TOA, sans avoir traité les données de BTT pour obtenir l'amplitude de chaque aube.

Les modèles réduits par la technique CM3 couplés à des algorithmes de génération de données de BTT permettent également d'envisager une validation stochastique d'algorithmes de traitement de BTT. Ceci pourrait en particulier être appliqué à des algorithmes d'identification du motif de désaccordage, ou de calcul de l'amplitude maximale sur la roue aubagée. Les modèles générés par CM3 pourraient ainsi être directement utilisés dans des algorithmes de génération BTT plus complets, qui pourraient faire l'objet de recherches futures.

## CHAPITRE 7 CONCLUSION

### Synthèse des travaux

La présente recherche constitue la première étude conjointe des non-linéarités de contact aubes-carter et du désaccordage. La méthodologie de gestion du contact, basée sur l'intégration temporelle et le calcul des multiplicateurs de Lagrange, a été couplée à une prise en compte stochastique du désaccordage. L'utilisation d'un modèle phénoménologique a rendu possible une étude comparative des amplifications dans un contexte linéaire et non-linéaire. Tout d'abord, il a été montré que les interactions prédites sur des modèles accordés sont robustes vis-à-vis du désaccordage. Ensuite, les niveaux d'amplification atteints dans le cadre non-linéaire sont sensiblement supérieurs à ceux obtenus dans le cadre linéaire. Les motifs à plus grande amplification n'étant stochastiquement pas les mêmes dans des cadres linéaire et non-linéaire équivalents, la robustesse des stratégies de conception appliquées aux roues aubagées dans un cadre linéaire devrait être analysée dans un cadre non-linéaire.

Le caractère stochastique du faible désaccordage a dirigé les développements vers une méthode réduite permettant la génération de modèles industriels désaccordés avec interface de contact à moindre coût. La technique développée, nommée CM3, s'appuie sur des techniques pré-existantes. Elle a été validée sur un cas académique à trois dimensions, puis sur un maillage industriel. Les temps de création du modèle désaccordé ont été évalués négligeables, avec une bonne précision numérique, comparativement au temps nécessaire pour l'intégration temporelle.

L'étude stochastique d'un modèle industriel à sa configuration nominale a ainsi été rendue possible grâce aux méthodes développées. Les résultats ont permis de montrer que l'introduction du désaccordage induisait des amplifications conséquentes, du fait qu'une résonance est captée à la vitesse de rotation étudiée. L'analyse des résultats stochastiques et l'étude des champs de déplacements et de contraintes ont permis de dégager des tendances de conception, notamment un niveau de désaccordage critique maximal.

Enfin, la méthodologie précédemment développée a pu être appliquée à la génération simplifiée de signaux de BTT. La génération de signaux a pu être validée dans un cadre linéaire, avant d'être étendue à un cadre de non-linéarités de contact. Le positionnement des capteurs et la robustesse des signaux obtenus stochastiquement a ainsi pu être étudiée.

## Limitations et améliorations futures

Les contraintes liées aux temps de calcul ont imposé de définir une vitesse fixe pour l'étude stochastique du désaccordage sur le modèle industriel. Utiliser une méthode statistique nécessitant moins d'échantillons que les calculs de Monte Carlo, par exemple les chaînes de Markov ou le chaos polynomial, permettrait de lever cette limitation.

Par ailleurs, des phénomènes physiques ont été négligés afin d'alléger les calculs, tels les effets centrifuges et gyroscopiques. La prise en compte de ces phénomènes modifierait les fréquences de résonance du système et impacterait ainsi les résultats obtenus, qui seraient plus proches de ceux attendus sur un moteur réel.

La technique CM3 est formulée dans l'hypothèse d'un faible désaccordage. Une méthode alternative devrait être développée afin d'étudier des motifs de désaccordage intentionnel dans un cadre non-linéaire, ce qui permettrait de dégager des tendances de conception.

Enfin, les développements proposés pour la génération de données de BTT sont ceux qui ouvrent la voie au champ de recherche le plus large. Le caractère stochastique des simulations accessibles grâce à la méthodologie développée pourrait également être utilisé pour la validation de la robustesse des algorithmes de détection des motifs de désaccordage, aussi bien dans un cadre linéaire que non-linéaire. Par ailleurs, les modèles réduits par CM3 pourraient être utilisés pour générer des données plus réalistes et ainsi permettre la mise en place d'algorithmes d'étude des non-linéarités de contact. L'occurrence des contacts pourrait être détectée ainsi que des phénomènes de frottement, qui pourraient être utilisés dans le cadre d'une instrumentation en condition de fonctionnement.

## RÉFÉRENCES

- [1] R. H. Barnard et D. R. Philpott, *Aircraft flight : a description of the physical principles of aircraft flight*, 4<sup>e</sup> éd. Pearson Education, 2010.
- [2] Q. Huan, S. Prabhjot et N. A. Magdi, “Laser net shape manufacturing using an adaptive toolpath deposition method,” Brevet US 8 691 329 B2, 2014.
- [3] E. F. F. Chladni, *Entdeckungen über die Theorie des Klanges*. Leipzig : Zentralanti-quariat der DDR, 1787.
- [4] H. F. Olson, *Music, physics and engineering*. Courier Corporation, 1967.
- [5] G. Óttarsson et C. Pierre, “A Transfer Matrix Approach to Vibration Localization in Mistuned Blade Assemblies,” dans *ASME 1993 International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exposition*, 1993.
- [6] R. Bladh, C. Pierre, M. P. Castanier et M. J. Kruse, “Dynamic Response Predictions for a Mistuned Industrial Turbomachinery Rotor Using Reduced-Order Modeling,” *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 124, n<sup>o</sup>. 2, p. 311, 2002.
- [7] A. Selby, “Variable stator vane actuating levers,” Brevet US7 182 571 B2, 2005. [En ligne]. Disponible : <https://www.google.ch/patents/US20050135926>
- [8] R. Bladh, M. P. Castanier et C. Pierre, “Component-Mode-Based Reduced Order Modeling Techniques for Mistuned Bladed Disks— Part II : Application,” *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 123, n<sup>o</sup>. 1, p. 89, 2001.
- [9] P. F. Stec, “Self retaining blade damper,” Brevet US6 171 058 B1, 2001. [En ligne]. Disponible : <http://www.google.com/patents/US6171058>
- [10] M. L. Stangeland, R. E. Berenson, G. A. Davis et E. J. Krieg, “Turbine blisk rim friction finger damper,” Brevet USRE39 630 E1, 2002. [En ligne]. Disponible : <https://www.google.com/patents/US6375428>
- [11] N. W. Harvey et K. Ramsden, “A Computational Study of a Novel Turbine Rotor Partial Shroud,” dans *ASME Turbo Expo*, Munich, Germany, 2000, p. 1–11.
- [12] M. Legrand, C. Pierre, P. Cartraud et J. P. Lombard, “Two-dimensional modeling of an aircraft engine structural bladed disk-casing modal interaction,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 319, n<sup>o</sup>. 1–2, p. 366–391, 2009.
- [13] N. Salvat, A. Batailly et M. Legrand, “Modeling of Abradable Coating Removal in Aircraft Engines through Delay Differential Equations,” dans *Proceedings of ASME*

- Turbo Expo : Turbine Technical Conference and Exposition*, San Antonio, Texas, USA, 2013, p. 1–10.
- [14] H. Tan, Y. Hu et L. Li, “A continuous analysis method of planar rigid-body mechanical systems with two revolute clearance joints,” *Multibody System Dynamics*, 2017.
  - [15] ONERA, “ZéBuLoN, microscope numérique des composites,” 2008. [En ligne]. Disponible : <http://www.onera.fr/fr/imagedumois/zebulon-microscope-numerique-des-composites>
  - [16] J. Lin, Z. Hu, Z.-S. Chen, Y.-M. Yang et H.-L. Xu, “Sparse reconstruction of blade tip-timing signals for multi-mode blade vibration monitoring,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 81, p. 250–258, 2016.
  - [17] G. Jacquet-Richardet, M. Torkhani, P. Cartraud, F. Thouverez, T. Nouri Baranger, M. Herran, C. Gibert, S. Baguet, P. Almeida et L. Peletan, “Rotor to stator contacts in turbomachines. Review and application,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 40, n<sup>o</sup>. 2, p. 401–420, 2013.
  - [18] National Transportation Safety Board, “Aircraft Accident Report : National Airlines, incorporated, DC-10-10, N60NA, near Albuquerque, New Mexico, November 3, 1973,” National Technical Information Service, Washington, USA, Rapport technique, 1975.
  - [19] J. Tallman et B. Lakshminarayana, “Numerical Simulation of Tip Leakage Flows in Axial Flow Turbines, With Emphasis on Flow Physics : Part I—Effect of Tip Clearance Height,” dans *ASME International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exhibition*, vol. 123. Munich, Germany : Journal of Turbomachinery, 2000, p. 314–323.
  - [20] S.-T. Wei et C. Pierre, “Localization Phenomena in Mistuned Assemblies with Cyclic Symmetry Part I : Free Vibrations,” *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, vol. 110, n<sup>o</sup>. 4, p. 429–438, 1988.
  - [21] C. Pierre et P. D. Cha, “Strong Mode Localization in Nearly Periodic Disordered Structures,” *AIAA Journal*, vol. 27, n<sup>o</sup>. 2, p. 227–241, 1989.
  - [22] R. C. F. Dye et T. A. Henry, “Vibration Amplitudes of Compressor Blades Resulting From Scatter in Blade Natural Frequencies,” *Journal of Engineering for Power*, vol. 91, n<sup>o</sup>. 3, p. 182–187, 1969.
  - [23] M. P. Castanier et C. Pierre, “Modeling and Analysis of Mistuned Bladed Disk Vibration : Status and Emerging Directions,” *Journal of Propulsion and Power*, vol. 22, n<sup>o</sup>. 2, p. 384–396, 2006.
  - [24] R.-R. Craig et M. C. C. Bampton, “Coupling of Substructures for Dynamics Analyses,” *AIAA Journal*, vol. 6, n<sup>o</sup>. 7, p. 1313, 1968.



- [25] H. Irretier, “Spectral Analysis of Mistuned Bladed Disk Assemblies by Component Mode Synthesis,” dans *Mechanical Vibration and Noise of the Design and Production Engineering Technical Conferences*, Dearborn, Michigan, 1983, p. 115–125.
- [26] M.-T. Yang et J. H. Griffin, “A Reduced-Order Model of Mistuning Using a Subset of Nominal System Modes,” *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 123, n<sup>o</sup>. 4, p. 893–900, 2001.
- [27] F. Nyssen, “Numerical Modeling and Experimental Identification of Mistuned Multi-Stage Bladed Assemblies,” Thèse de doctorat, University of Liège, 2016.
- [28] J. Yuan, F. Scarpa, G. Allegri, B. Titurus, S. Patsias et R. Rajasekaran, “Efficient computational techniques for mistuning analysis of bladed discs : A review,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 87, n<sup>o</sup>. A, p. 71–90, 2017.
- [29] S.-H. Lim, R. Bladh, M. P. Castanier et C. Pierre, “Compact, Generalized Component Mode Mistuning Representation for Modeling Bladed Disk Vibration,” *AIAA Journal*, vol. 45, n<sup>o</sup>. 9, p. 2285–2298, 2007.
- [30] B. Beirow, F. Figaschewsky, A. Kühhorn et A. Bornhorn, “Vibration analysis of an axial turbine blisk with optimized intentional mistuning pattern,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 442, n<sup>o</sup>. 3, p. 11–27, 2019.
- [31] F. Figaschewsky, A. Kühhorn, B. Beirow, T. Giersch et S. Schrape, “Analysis of mistuned forced response in an axial high-pressure compressor rig with focus on tyler–sofrin modes,” *The Aeronautical Journal*, vol. 123, n<sup>o</sup>. 1261, p. 356–377, 2019.
- [32] G. Óttarsson et C. Pierre, “On the effects of interblade coupling on the statistics of maximum forced response amplitudes in mistuned bladed disks,” *AIAA*, vol. 1494-CP, p. 3070–3078, 1995.
- [33] G. Gilardi et I. Sharf, “Literature survey of contact dynamics modelling,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 37, n<sup>o</sup>. 10, p. 1213–1239, 2002.
- [34] P. Flores et J. A. Ambrósio, “On the contact detection for contact-impact analysis in multibody systems,” *Multibody System Dynamics*, vol. 24, p. 103–122, 2010.
- [35] B. W. Wah et Z. Wu, “The Theory of Discrete Lagrange Multipliers for Nonlinear Discrete Optimization,” dans *International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming (CP 99)*, vol. 1713, Alexandria, Virginia, USA, 1999, p. 28–42. [En ligne]. Disponible : <http://www.springerlink.com/index/1y25w256p46t87fn.pdf>
- [36] A. A. Ferri, “Friction damping and isolation systems,” *Journal of Mechanical Design*, vol. 117, n<sup>o</sup>. 50, p. 196–206, 1995.

- [37] N. J. Carpenter, R. L. Taylor et M. G. Katona, "Lagrange Constraints for Transient Finite Element Surface Contact," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, n<sup>o</sup>. 1, p. 103–128, 1991.
- [38] C. H. Menq, P. Chidamparam et J. H. Griffin, "Friction and Damping of Two-Dimensional Motion and Its Application in Vibration Motion Control," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 144, n<sup>o</sup>. 3, p. 427–447, 1991.
- [39] J. H. Griffin et C.-H. Menq, "Friction Damping of Circular Motion and its Implications to Vibration Control," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 113, p. 225–229, 1991.
- [40] J. H. Griffin et A. Sinha, "The Interaction between Mistuning and Friction in the Forced Response of Bladed Disk Assemblies," *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 107, n<sup>o</sup>. 1, p. 205–211, 1985.
- [41] C. Joannin, B. Chouvion, F. Thouverez, M. Mbaye et J.-P. Ousty, "Nonlinear Modal Analysis of Mistuned Periodic Structures Subjected to Dry Friction," *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 138, n<sup>o</sup>. 7, 2016.
- [42] C. Joannin, B. Chouvion, F. Thouverez, J.-P. Ousty et M. Mbaye, "A nonlinear component mode synthesis method for the computation of steady-state vibrations in non-conservative systems," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 83, n<sup>o</sup>. 15, p. 75–92, 2017.
- [43] W. Campbell, "Protection of Steam Turbine Disk Wheels from Axial Vibration," General electric Company, Rapport technique, 1924.
- [44] D. J. Ewins et Z. S. Han, "Resonant Vibration Levels of a Mistuned Bladed Disk," *Journal of Vibration Acoustics Stress and Reliability in Design*, vol. 106, n<sup>o</sup>. 2, p. 211–217, 1984. [En ligne]. Disponible : <http://vibrationacoustics.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1472840>
- [45] M. P. Singh, J. J. Vargo, D. M. Schiffer et J. D. Dello, "Safe Diagram-A Design And Reliability Tool For Turbine Blading," dans *Proceedings of the 17th Turbomachinery Symposium*. Texas A&M University. Turbomachinery Laboratories, 1988.
- [46] M. Kruse et C. Pierre, "Forced response of mistuned bladed disks using reduced-order modeling," dans *37th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structure, structural dynamics and materials conference*, 1996, p. 1938–1950.
- [47] M. Legrand, "Modèles de prédiction de l'interaction rotor / stator dans un moteur d'avion," Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2005.
- [48] H. Oudin, *Méthode des éléments finis*, E. C. Nantes, édit., 2008.
- [49] M. Géradin et D. J. Rixen, *Mechanical Vibrations : Theory and Application to Structural Dynamics*, 3<sup>e</sup> éd. Chichester : John Wiley & Sons, Ltd, 2015.

- [50] L. Meirovitch, *Fundamentals of Vibrations*. New York : McGraw-Hill International Edition, 2001.
- [51] C. W. de Silva, *Vibration Fundamentals and Practice*, crc press éd., Boca Raton, 2000.
- [52] M. Géradin et D. Rixen, *Théorie des vibrations : application    la dynamique des structures*. Paris : Masson, 1993, vol. 2.
- [53] D. J. Ewins, "The effects of detuning upon the forced vibrations of bladed disks," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 9, n  . 1, p. 65–79, 1969.
- [54] A. Lupini et B. I. Epureanu, "On the use of mesh morphing techniques in reduced order models for the structural dynamics of geometrically mistuned blisks," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 127, p. 262–275, 2019.
- [55] A. A. Kaszynski et J. M. Brown, "Accurate blade tip timing limits through geometry mistuning modeling," dans *ASME Turbo Expo 2015*, vol. GT2015, n  . 43192, 2015.
- [56] C. Pierre, "Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures," *Journal of Sound and Vibration*, 1988.
- [57] J. T. Wagner, "Coupling of Turbomachine Blade Vibrations Through the Rotor," *Journal of Engineering for Power*, vol. 84, n  . 4, p. 502–512, 1967.
- [58] T. Klauke, A. Kühhorn, B. Beirow et M. Golze, "Numerical Investigations of Localized Vibrations of Mistuned Blade Integrated Disks (Blisks)," *Journal of Turbomachinery*, vol. 131, n  . 3, p. 031002, 2009.
- [59] D. S. Whitehead, "Effect of mistuning on the vibration of turbomachine blades induced by wakes," *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 8, n  . 1, p. 15–21, 1966. [En ligne]. Disponible : <http://jms.sagepub.com/content/8/1/15.abstract>
- [60] K. R. V. Kaza et R. E. Kielb, "Flutter and Response of a Mistuned Cascade in Incompressible Flow," *AIAA Journal*, vol. 20, n  . 8, p. 1120–1127, 1982.
- [61] F. Nyssen, B. Epureanu et J.-C. Golinval, "Experimental modal identification of mistuning in an academic two-stage drum," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 88, n  . 1, p. 428–444, 2017.
- [62] C. C. Lin et M. P. Mignolet, "Effects of Damping and Damping Mistuning on the Forced Vibration Response of Bladed Disks," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 193, n  . 2, p. 525–543, 1996.
- [63] A. G. Joshi et B. I. Epureanu, "Reduced Order Models for Blade-To-Blade Damping Variability in Mistuned Blisks," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 134, p. 051015, 2012.

- [64] J. A. Beck, J. M. Brown, A. A. Kaszynski, C. J. Cross et J. C. Slater, “Geometric Mistuning Reduced-Order Models for Integrally Bladed Rotors With Mistuned Disk–Blade Boundaries,” *Journal of Turbomachinery*, vol. 137, n°. 7, p. 071001, 2015.
- [65] E. Capiez-Lernout, C. Soize, J.-P. Lombard, C. Dupont et E. Seinturier, “Blade manufacturing tolerances definition for a mistuned industrial bladed disk,” dans *ASME Turbo Expo*, vol. 6, 2004, p. 307–316.
- [66] G. Saporta, *Probabilités, analyse des données et statistique*. Editions Technip, 2006.
- [67] C. W. D. Silva, *Computer Techniques in Vibration*, CRC press éd., 2007.
- [68] F. Tisseur et K. Meerbergen, “The quadratic eigenvalue problem,” *SIAM review*, vol. 43, n°. 2, p. 235–286, 2001.
- [69] D. C. Lay, S. R. Lay et J. J. McDonald, *Linear Algebra and its Applications*, 5<sup>e</sup> éd. Washington : Pearson, 2016.
- [70] S.-T. Wei et C. Pierre, “Localization Phenomena in Mistuned Assemblies with Cyclic Symmetry Part II : Forced vibrations,” *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, vol. 110, n°. 4, p. 439–449, 1988.
- [71] O. J. Poudou, “Modeling and analysis of the dynamics of dry-friction-damped structural systems,” Thèse de doctorat, University of Michigan, 2007.
- [72] M. Castanier et C. Pierre, “Investigation of the combined effects of intentional and random mistuning on the forced response of bladed disks,” dans *34th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*. AIAA, 1998, p. 3720.
- [73] M. Mbaye, C. Soize, J. Ousty, M. Mbaye, C. Soize et J. O. Conception, “Conception robuste des roues aubagées désaccordées,” dans *Colloque Vibrations, Chocs et Bruits*, 2010, p. 1–14.
- [74] S.-H. Lim, C. Pierre et M. P. Castanier, “Predicting Blade Stress Levels Directly From Reduced-Order Vibration Models of Mistuned Bladed Disks,” *Journal of Turbomachinery*, 2006.
- [75] Y. Kaneko, K. Mori et H. Ooyama, “Resonant Response of Mistuned Bladed Disk Expressed by Vibratory Stress,” dans *ASME Turbo Expo 2016 : Turbomachinery Technical Conference and Exposition*, A. S. of Mechanical Engineers, édité., 2016, p. V07AT32A001–V07AT32A001.
- [76] J. C. MacBain et P. W. Whaley, “Maximum Resonant Response of Mistuned Bladed Disks,” *Journal of Vibration Acoustics Stress and Reliability in Design*, vol. 106, n°. 2, p. 218–223, 1984.

- [77] E. K. Armstrong, P. I. Christie et W. M. Hague, “Natural Frequencies of Bladed Discs,” dans *Institution of Mechanical Engineers*, vol. 180 Pt 31, London, England, 1965, p. 110–123.
- [78] D. S. Whitehead, “The Maximum Factor by which Forced Vibration of Blades can increase due to Mistuning,” dans *International Gas Turbine and Aeroengine Congress & Exhibition*. Birmingham, UK : ASME, 1996.
- [79] M. P. Castanier et C. Pierre, “Using Intentional Mistuning in the Design of Turbomachinery Rotors,” *AIAA Journal*, vol. 40, n°. 10, p. 2077–2086, 2002.
- [80] Y. Han, R. Murthy, M. P. Mignolet et J. Lentz, “Optimization of Intentional Mistuning Patterns for the Mitigation of the Effects of Random Mistuning,” *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 136, n°. 6, p. 1–9, 2014.
- [81] Z. He, B. I. Epureanu et C. Pierre, “Parametric study of the aeroelastic response of mistuned bladed disks,” *Computers and Structures*, vol. 85, n°. 11-14, p. 852–865, 2007.
- [82] F. Figaschewsky, A. Kühhorn, B. Beirow, J. Nipkau, T. Giersch et B. Power, “Design and analysis of an intentional mistuning experiment reducing flutter susceptibility and minimizing forced response of a jet engine fan,” dans *ASME Turbo Expo*, 2017, p. V07BT36A020–V07BT36A020.
- [83] R. Corral, O. Khemiri et C. Martel, “Design of mistuning patterns to control the vibration amplitude of unstable rotor blades,” *Aerospace Science and Technology*, vol. 80, p. 20–28, SEP 2018.
- [84] E. P. Petrov et D. J. Ewins, “Method for analysis of nonlinear multiharmonic vibrations of mistuned bladed disks with scatter of contact interface characteristics,” *ASME*, vol. 127, n°. January, p. 128–136, 2005.
- [85] D. Laxalde, “Etude d’amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages,” PhD Thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2007.
- [86] R. J. Webb, “Seal coating between rotor blade and rotor disk slot in gas turbine engine,” Brevet US8545183 B2, 2013. [En ligne]. Disponible : <http://www.google.com/patents/US8545183>
- [87] M. J. Mielke et J. E. Rhoda, “Reduced-stress compressor blisk flowpath,” Brevet CA2313929 C, 2003. [En ligne]. Disponible : <http://www.google.com/patents/US6511294>
- [88] L. Pohle, S. Tatzko, L. Panning-von Scheidt et J. Wallaschek, “High order sensitivity analysis of a mistuned blisk including intentional mistuning,” *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, n°. 1966, p. 353, 2017. [En ligne]. Disponible : <http://ptmts.org.pl/jtam/index.php/jtam/article/view/4020>

- [89] R. Rajasekharan et E. Petrov, "Analysis of Deformation of Mistuned Bladed Disks With Friction and Random Crystal Anisotropy Orientation Using Gradient-Based Polynomial Chaos Expansion," dans *ASME Turbo Expo*, 2018, p. V07CT35A029.
- [90] J. H. Griffin et T. M. Hoosac, "Model development and statistical investigation of turbine blade mistuning," *Journal of Vibration Acoustics Stress and Reliability in Design*, vol. 106, n°. 2, p. 204–210, 1984.
- [91] A. Batailly, M. Meingast et M. Legrand, "Unilateral contact induced blade/casing vibratory interactions in impellers : Analysis for rigid casings," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 337, p. 244–262, 2015.
- [92] R. M. Hintz, "Analytical Methods in Component Modal Synthesis," *AIAA Journal*, vol. 13, n°. 8, p. 1007–1016, 08 1975.
- [93] R. R. Craig et A. J. Kurdila, *Fundamentals of structural dynamics*, 2<sup>e</sup> éd. Wiley, 2006.
- [94] S. Lepi, *Practical guide to finite elements : a solid mechanics approach*. CRC Press, 1998, vol. 115.
- [95] R. Bladh, M. P. Castanier et C. Pierre, "Reduced Order Modeling and Vibration Analysis of Mistuned Bladed Disk Assemblies With Shrouds," *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 121, n°. 3, p. 515–522, 1999.
- [96] R. Bladh, "Efficient of the Vibratory Response of Mistuned Blade Disk by Reduced Order Modeling," Thèse de doctorat, University of Michigan, 2001.
- [97] D. M. Feiner et J. H. Griffin, "A Fundamental Model of Mistuning for a Single Family of Modes," *Journal of Turbomachinery*, vol. 124, n°. 4, p. 597, 2002.
- [98] E. P. Petrov, K. Y. Sanliturk et D. J. Ewins, "A New Method for Dynamic Analysis of Mistuned Bladed Disks Based on the Exact Relationship Between Tuned and Mistuned Systems," *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 124, n°. 3, p. 586–597, 2002.
- [99] M. P. Castanier, G. Ottarsson et C. Pierre, "A reduced order modeling technique for mistuned bladed disks," *Journal of Vibration and Acoustics-Transactions of the Asme*, vol. 119, n°. 3, p. 439–447, 1997.
- [100] A. V. Srinivasan et D. G. Cutts, "Dry Friction Damping Mechanisms in Engine Blades," *Journal of Engineering for Power*, vol. 105, n°. 2, p. 332–341, 1983.
- [101] C. Giot et J.-L. Soupizon, "Aube de turbine avec léchette d'étanchéité," Brevet EP1 262 633 A1, 2002. [En ligne]. Disponible : <http://www.google.com/patents/EP1262633A1?cl=fr>

- [102] C. Odoul, M. G. F. Paty et J.-P. R. Serey, “Aube mobile de turbomachine à moment de pied compensé,” Brevet EP0 385 833 B1, 1990. [En ligne]. Disponible : <https://google.com/patents/EP0385833A1?cl=fr>
- [103] D. Charleux, F. Thouverez et J. P. Lombard, “Three-dimensional Multiharmonic Analysis of Contact and Friction in Dovetail Joints,” dans *Proc. of the International Modal Analysis Conference XXII*, n°. Paper 348, Dearborn, Michigan, 2004.
- [104] R. E. Chupp, R. C. Hendricks, S. B. Latimme et B. M. Steinetz, “Sealing in turbomachinery,” *Journal of Propulsion and Power*, vol. 22, n°. 2, p. 313–349, 2006.
- [105] J. H. Griffin, “Friction Damping of Resonant Stresses in Gas Turbine Engine Airfoils,” *Journal of Engineering for Power*, vol. 102, p. 329–333, 1980.
- [106] L. Panning-von Scheidt, W. Sextro et K. Popp, “Spatial Dynamics of Tuned and Mistuned Bladed Disks with Cylindrical and Wedge-Shaped Friction Dampers,” *International Journal of Rotating Machinery*, vol. 9, n°. 3, p. 219–228, 2003.
- [107] C. M. Firrone, S. Zucca et M. M. Gola, “The effect of underplatform dampers on the forced response of bladed disks by a coupled static/dynamic harmonic balance method,” *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 46, n°. 2, p. 363–375, 2011.
- [108] B. He, H. Ouyang, X. Ren et S. He, “Dynamic Response of a Simplified Turbine Blade Model with Under-Platform Dry Friction Dampers Considering Normal Load Variation,” *Applied Sciences*, vol. 7, n°. 3, p. 228, 2017. [En ligne]. Disponible : <http://www.mdpi.com/2076-3417/7/3/228>
- [109] M. M. Gola, M. Braga et T. Liu, “Measurement of the Scatter of Underplatform Damper Hysteresis,” dans *ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*, Chicago, IL, USA, 2012, p. 1–11.
- [110] M. Allara, S. Filippi et M. M. Gola, “An Experimental Method for the Measurement of Blade-Root Damping,” dans *ASME Turbo Expo : Power for Land, Sea and Air*, Barcelona, Spain, 2006, p. 1–10.
- [111] D. Charleux, “Etude des effets de la friction en pied d’aube sur la dynamique des roues aubagées,” Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2006.
- [112] M. M. Gola et C. Gastaldi, “Understanding Complexities in Underplatform Damper,” dans *Proceedings of ASME Turbo Expo : Turbine Technical Conference and Exposition*, Düsseldorf, Germany, 2014, p. 1–12.
- [113] M. Allara, S. Zucca et M. Gola, “Effect of crowning of dovetail joints on turbine blade root damping,” *Key Engineering Materials*, vol. 347, p. 317–322, 2007.

- [114] M. Salas, R. Bladh, H. Martensson, P. Petrie-Repar, T. Fransson et D. Vogt, “Forced Response Analysis of a Mistuned Compressor Blisk Comparing Three Different Reduced Order Model Approaches,” *ASME*, p. 1–12, 2016.
- [115] J. Padovan et F. K. Choy, “Nonlinear Dynamics of Rotor/Blade/Casing Rub Interactions,” *Journal of Turbomachinery*, vol. 109, n°. October, p. 527–534, 1987.
- [116] J. Jiang et H. Ulbrich, “Dynamics and Stability of Rotor / Stator Systems with Rubs,” dans *ASME Turbo Expo*, Munich, Germany, 2000, p. 1–7.
- [117] A. Muszynska, “Whirl and whip—rotor/bearing stability problems,” vol. 110, n°. 3, p. 443–462.
- [118] J. C. Wilkes, D. W. Childs, B. J. Dyck et S. G. Phillips, “The Numerical and Experimental Characteristics of Multimode Dry-Friction Whip and Whirl,” *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 132, n°. 5, p. 052503, 2010. [En ligne]. Disponible : <http://gasturbinespower.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1428326>
- [119] Q. Agrapart, F. Nyssen, D. Lavazec, P. Dufrénoy et A. Batailly, “Multi-physics numerical simulation of an experimentally predicted rubbing event in aircraft engines,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 460, p. 114869, 2019.
- [120] N. Salvat, A. Batailly et M. Legrand, “Two-dimensional modeling of unilateral contact-induced shaft precessional motions in bladed-disk/casing systems,” *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 78, p. 90–104, 2016.
- [121] A. Batailly, M. Legrand, A. Millecamps et F. Garcin, “Numerical-Experimental Comparison in the Simulation of Rotor/Stator Interaction Through Blade-Tip/Abradable Coating Contact,” *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 134, n°. 8, p. 082504, 2012.
- [122] A. Millecamps, “Interaction aube-carter : contribution de l’usure de l’abradable et de la thermodynamique sur la dynamique d’aubes,” Thèse de doctorat, 2010.
- [123] R. J. Williams, “Simulation of Blade Casing Interaction Phenomena in Gas Turbines Resulting from Heavy Tip Rubs Using an Implicit Time Marching Method,” dans *ASME Turbo Expo*, vol. 6, 2011, p. 1–10.
- [124] M. Legrand, A. Batailly, B. Magnain, P. Cartraud et C. Pierre, “Full three-dimensional investigation of structural contact interactions in turbomachines,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, n°. 11, p. 2578–2601, 2012.
- [125] H. Ma, D. Wang, X. Tai et B. Wen, “Vibration response analysis of blade-disk dovetail structure under blade tip rubbing condition,” *Journal of Vibration and Control*, n°. May 2014, 2015.



- [126] N. Lesaffre, J. J. Sinou et F. Thouverez, “Contact analysis of a flexible bladed-rotor,” *European Journal of Mechanics, A/Solids*, vol. 26, n°. 3, p. 541–557, 2007.
- [127] B. Feeny, A. Guran, N. Hinrichs et K. Popp, “A Historical Review on Dry Friction and Stick-Slip Phenomena,” *Applied Mechanics Reviews*, vol. 51, n°. 5, p. 321, 1998.
- [128] S. L. Lau, Y. K. Cheung et S. Y. Wu, “Incremental Harmonic Balance Method With Multiple Time Scales for Aperiodic Vibration of Nonlinear Systems,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 50, n°. 4a, p. 871, 1983.
- [129] E. P. Petrov et D. J. Ewins, “Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed disks,” *Journal of Turbomachinery*, vol. 125, n°. April, p. 364–371, 2003.
- [130] B. D. Yang, J. J. Chen et C. H. Menq, “Prediction of Resonant Response of Shrouded Blades with Three-Dimensional Shroud Constraint,” *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 121, p. 523–529, 1999.
- [131] J. Chen, B. Yang et C. Menq, “Periodic Forced Response of Structures Having Three Dimensional Frictional Constraints,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 229, n°. 4, p. 775–792, 2000. [En ligne]. Disponible : <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022460X99923970>
- [132] T. M. Cameron et J. H. Griffin, “An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 56, n°. 1, p. 149, 1989.
- [133] J. Guillen, “Studies of the dynamics of dry-friction-damped blade assemblies,” Thèse de doctorat, University of Michigan, 1999.
- [134] S. Nacivet, C. Pierre, F. Thouverez et L. Jezequel, “A dynamic Lagrangian frequency-time method for the vibration of dry-friction-damped systems,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 265, n°. 1, p. 201–219, 2003.
- [135] F. Ling et X. Wu, “Fast galerkin method and its application to determine periodic solutions of non-linear oscillators,” *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 22, n°. 2, p. 89–98, 1987.
- [136] T. A. Laursen, *Computational Contact and Impact Mechanics*, springer éd. Berlin : Springer, 2002.
- [137] R. Courant, K. Friedrichs et H. Lewy, “On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics,” *Mathematische Annalen*, vol. 100, p. 32–74, 1928.
- [138] C. E. Shannon, “Communication in the Presence of Noise,” dans *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, vol. 37, n°. 1, 1949, p. 10–21.

- [139] S. Chen et A. Sinha, “Probabilistic Method to Compute the Optimal Slip Load for a Mistuned Bladed Disk Assembly With Friction Dampers,” *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 112, n°. October 1988, p. 214, 1990.
- [140] H. Zhan, W. Zhao et G. Wang, “Manufacturing turbine blisks,” *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, vol. 72, n°. 3, p. 247–251, 2000.
- [141] P. Hönisch, A. Kühhorn et B. Beirow, “Experimental and numerical analyses of radial turbine blisks with regard to mistuning,” dans *ASME Turbo Expo*, vol. 6, Vancouver (Canada), 2011, p. 971–980.
- [142] S. Dubigeon, *Mécanique des milieux continus*. Ecole Centrale Nantes, 1980. [En ligne]. Disponible : <http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00530377/en/>
- [143] D. J. Ewins, “Vibration Characteristics of Bladed Disk Assemblies,” *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 15, n°. 3, p. 165–186, 1973.
- [144] J. Judge, C. Pierre et O. Mehmed, “Experimental Investigation of Mode Localization and Forced Response Amplitude Magnification for a Mistuned Bladed Disk,” *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 123, n°. 4, p. 940–950, 2001.
- [145] A. Batailly, Q. Agrapart, A. Millecamps et J. F. Brunel, “Experimental and numerical simulation of a rotor/stator interaction event localized on a single blade within an industrial high-pressure compressor,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 375, p. 308–331, 2016.
- [146] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics And Chaos*. Taylor & Francis Inc, 1994.
- [147] A. Batailly, M. Legrand, A. Millecamps et F. Garcin, “Conjectural Bifurcation Analysis of the Contact-Induced Vibratory Response of an Aircraft Engine Blade,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 348, n°. 21, p. 239–262, 2015.
- [148] A. Batailly, M. Legrand, P. Cartraud, C. Pierre et J.-P. Lombard, “Evaluation of Component Mode Synthesis Methods for the Detection of Modal Interaction Through Rotor/Stator Contacts,” dans *ASME IDETC-CIE*, vol. 1, 2009, p. 863–871.
- [149] C. Graham et D. Talay, *Stochastic Simulation and Monte Carlo Methods*. Springer, 2013.
- [150] P. Wang et L. Li, “Parametric Dynamics of Mistuned Bladed Disk,” dans *ASME Turbo Expo*, Düsseldorf, Germany, June 2014, p. V07BT33A022.
- [151] B. Beirow, A. Kühhorn, F. Figaschewsky et J. Nipkau, “Effect of Mistuning and Damping on the Forced Response of a Compressor Blisk Rotor,” dans *ASME Turbo Expo*, 2015, p. 1–12.

- [152] D. J. Rixen, A. Boogaard, M. V. Van Der Seijs, G. Van Schothorst et T. Van Der Poel, “Vibration source description in substructuring : A theoretical depiction,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 60, 2015.
- [153] F. M. Gruber et D. J. Rixen, “Evaluation of substructure reduction techniques with fixed and free interfaces,” *Strojniski Vestnik/Journal of Mechanical Engineering*, vol. 62, n°. 7-8, p. 452–462, 2016.
- [154] A. Batailly, M. Legrand, A. Millecamps, A. Millecamps, S. Cochon et F. Garcin, “Redesign of a High-Pressure Compressor Blade Accounting for Nonlinear Structural Interactions,” *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 137, n°. 2, p. 022502, 2014.
- [155] Siemens. Simcenter. [En ligne]. Disponible : <https://www.plm.automation.siemens.com/global/fr/products/simcenter/>
- [156] E. Khalifeh, E. Piollet, A. Millecamps et A. Batailly, “Non-linear modeling of centrifugal stiffening effects for accurate bladed component reduced-order models,” dans *ASME Turbo Expo*, 2017.
- [157] F. Nyssen et A. Batailly, “Thermo-Mechanical Modeling of Abradable Coating Wear in Aircraft Engines,” dans *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 141, n°. 2, 2019, p. 021031.
- [158] B. Berthoul, A. Batailly, L. Stainier, M. Legrand et P. Cartraud, “Phenomenological modeling of abradable wear in turbomachines,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 98, p. 770–785, 2018.
- [159] A. Millecamps, J.-F. Brunel, P. Dufrenoy, F. Garcin et M. Nucci, “Influence of Thermal Effects During Blade-Casing Contact Experiments,” dans *ASME IDETC-CIE*, vol. 1, 2009, p. 855–862.
- [160] A. Batailly, M. Legrand et C. Pierre, “Full Three-Dimensional Rotor/Stator Interaction Simulations in Aircraft Engines With Time-Dependent Angular Speed,” *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 139, n°. 3, p. 031202, 2017.
- [161] M. Bonhage, L. Pohle, L. Panning-Von Scheidt et J. Wallaschek, “Transient Amplitude Amplification of Mistuned Blisks,” *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2015.
- [162] M. Bonhage, J. T. Adler, C. Kolhoff, O. Hentschel, K.-D. Schlesier, L. Panning-von Scheidt et J. Wallaschek, “Transient amplitude amplification of mistuned structures : An experimental validation,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 436, p. 236–252, December 2018.

- [163] S. Heath et M. Imregun, “A Survey of Blade Tip-Timing Measurement Techniques for Turbomachinery Vibration,” dans *ASME 1997*, vol. 120. American Society of Mechanical Engineering, 1998.
- [164] V. Kharyton, G. Dimitriadis et C. Defise, “A Discussion on the Advancement of Blade Tip Timing Data Processing,” dans *ASME Turbo Expo 2017*. American Society of Mechanical Engineers, 2017.
- [165] Z. Chen, Y. Yang, Y. Xie, B. Guo et Z. Hu, “Non-contact crack detection of high-speed blades based on principal component analysis and Euclidian angles using optical-fiber sensors,” *Sensors and Actuators A : Physical*, vol. 201, p. 66–72, 2013.
- [166] F. Figaschewsky, B. Hanschke et A. Kühhorn, “Efficient Generation of Engine Representative Tip Timing Data Based on a Reduced Order Model for Bladed Rotors,” *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 141, p. 012 503–1–9, 2019.
- [167] G. Rigosi, G. Battiato et T. M. Berruti, “Synchronous vibration parameters identification by tip timing measurements,” dans *Mechanics Research Communications*, vol. 79, 2017, p. 7–14.
- [168] D. D. Maio et D. Ewins, “Experimental measurements of out-of-plane vibrations of a simple blisk design using Blade Tip Timing and Scanning LDV measurement methods,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 28, p. 517–527, 2012.
- [169] S. Madhavan, R. Jain, C. Sujatha et A. Sekhar, “Experimental investigation on forced response of mistuned bladed disc rotor in an aero-engine,” dans *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G : Journal of Aerospace Engineering*, vol. 229, n°. 14. SAGE Publications Sage UK : London, England, 2015, p. 2572–2588.
- [170] T. Maywald, D. Cottbus, C. R. Heinrich et D. Cottbus, “Vacuum Spin Test Series of a Turbine Impeller With Focus on Mistuning and Damping By Comparing Tip Timing and Strain Gauge,” dans *ASME Turbo Expo 2015 : Turbine Technical Conference and Exposition*, 2015, p. 1–10.
- [171] N. Jamia, M. I. Friswell, S. El-Borgi et P. Rajendran, “Modelling and experimental validation of active and passive eddy current sensors for blade tip timing,” *Sensors and Actuators A : Physical*, vol. 285, p. 98–110, 2019.
- [172] K. S. Chana, V. Sridhar et D. Singh, “The Use of Eddy Current Sensors for the Measurement of Rotor Blade Tip Timing : Development of a New Method Based on Integration,” dans *ASME Turbo Expo 2016*, vol. GT2016, n°. 57368. American Society of Mechanical Engineers, 2016.

- [173] G. Dimitriadis, I. B. Carrington, J. R. Wright et J. E. Cooper, “Blade-tip timing measurement of synchronous vibrations of rotating bladed assemblies,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 16, n°. 4, p. 599–622, 2002.
- [174] V. Kharyton, “Faults detection in blades of an aviation engine in operation,” Thèse de doctorat.
- [175] P. Beuseroy et R. Lengellé, “Nonintrusive turbomachine blade vibration measurement system,” vol. 21, n°. 4, p. 1717–1738, 2007.
- [176] H. Guo, F. Duan et J. Zhang, “Blade resonance parameter identification based on tip-timing method without the once-per revolution sensor,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 66–67, p. 625–639, 2016.
- [177] L. Pohle, L. Panning-von Scheidt, J. Wallaschek, J. Aschenbruck et J. R. Seume, “Dynamic behavior of a mistuned air turbine : comparison between simulations and measurements,” dans *ASME Turbo Expo 2014*, vol. GT2014, n°. 26025. American Society of Mechanical Engineers, 2014.
- [178] M. A. Mayorca, D. M. Vogt, C. Andersson, H. Mårtensson et T. Fransson, “Uncertainty of forced response numerical predictions of an industrial blisk-comparison with experiments,” dans *ASME Turbo Expo 2012*, vol. GT2012, n°. 69534. Copenhagen, Denmark : American Society of Mechanical Engineers, June 2012, p. 1537–1548.
- [179] D. H. Diamond et P. S. Heyns, “A novel method for the design of proximity sensor configuration for rotor blade tip timing,” *Journal of Vibration and Acoustic*, vol. 140, p. 061 003–1–8, 2018.
- [180] I. B. Carrington, J. R. Wright, J. E. Cooper et G. Dimitriadis, “A comparison of blade tip timing data analysis methods,” dans *Institution of Mechanical Engineers, Part G : Journal of Aerospace Engineering*, vol. 215, 2001, p. 301–312.
- [181] G. Battiatto, C. Firrone et T. Berruti, “Forced response of rotating bladed disks : Blade Tip-Timing measurements,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 85, p. 912–926, 2017.
- [182] S. Heath, “A New Technique for Identifying Synchronous Resonances Using Tip-Timing,” *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 122, p. 219–225, 2000.
- [183] D. H. Diamond, P. Heyns et A. Oberholster, “Improved Blade Tip Timing measurements during transient conditions using a State Space Model,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 122, p. 555–579, 2019.
- [184] R. Du Toit, D. Diamond et P. Heyns, “A stochastic hybrid blade tip timing approach for the identification and classification of turbomachine blade damage,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 121, p. 389–411, 2019.

- [185] A. R. Bastami, P. Safarpour, A. Mikaeily et M. Mohammadi, “Identification of Asynchronous Blade Vibration Parameters by Linear Regression of Blade Tip Timing Data,” *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 140, p. 072 506–1–8, 2018.
- [186] C. Krause, T. Giersch, M. Stelldinger, B. Hanschke et A. Kühhorn, “Asynchronous Response Analysis of Non-Contact Vibration Measurements on Compressor Rotor Blades,” dans *ASME Turbo Expo 2017*, vol. GT2017, n°. 63200. American Society of Mechanical Engineers, 2017.
- [187] F. M. Besem, R. E. Kielb et N. L. Key, “Forced Response Sensitivity of a Mistuned Rotor From an Embedded Compressor Stage,” *Journal of Turbomachinery*, vol. 138, p. 031 002–1–10, 2016.
- [188] D. L. Gillaugh, A. A. Kaszynski, J. M. Brown, J. A. Beck et J. C. Slater, “Mistuning Evaluation Comparison Via As-Manufactured Models, Traveling Wave Excitation, and Compressor Rigs,” *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 141, n°. 6, p. 061 006–1–13, 2019.
- [189] D. Hemberger, D. Filsinger et H.-J. Bauer, “Investigations on maximum amplitude amplification factor of real mistuned bladed structures,” dans *ASME Turbo Expo 2012*. American Society of Mechanical Engineers, 2012, p. 1041–1052.
- [190] V. Kharyton, J.-P. Laine, F. Thouverez et O. Kucher, “Simulation of tip-timing measurements of a cracked bladed disk forced response,” dans *ASME Turbo Expo 2010*. American Society of Mechanical Engineers, 2010.
- [191] L. D. Landau et E. M. Lifshitz, *Mechanics, Course on Theoretical Physics*, 3<sup>e</sup> éd. Oxford : Butterworth-Heinenann, 1976, vol. I.
- [192] L. Meirovitch, *Methods of analytical dynamics*, 1<sup>er</sup> éd. McGraw Hill Book Company, 1970.
- [193] ———, *Principles and techniques of vibrations*. New Jersey : Prentice Hall, 1997, vol. 1. [En ligne]. Disponible : <http://tocs.ulb.tu-darmstadt.de/195045661.pdf>
- [194] D. C. Murdoch, *Linear algebra for undergraduates*. New York : Wiley, 1957.

## ANNEXE A ÉQUATION DU MOUVEMENT EN ÉLÉMENTS FINIS

La présente annexe présente des considérations théoriques de mécanique des vibrations. La démonstration de l'équation du mouvement au centre de ce travail de recherche y est explicitée, avec comme point de départ le principe de moindre action, pour en préciser de façon exhaustive les différents termes et hypothèses associés. Pour faciliter leur identification et la compréhension de leur origine, les hypothèses utilisées seront écrites en gras au fur et à mesure du développement. Le principe de base modale obtenue par résolution des vibrations libres non amorties est ensuite explicité.

L'écriture usuelle de l'équation du mouvement démontrée est :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (\text{A.1})$$

où  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{F}$  sont des vecteurs, respectivement des coordonnées généralisées et des forces non conservatives extérieures ; et  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{K}$  sont des matrices, respectivement de masse, d'amortissement et de raideur.

### Résumé des étapes de la démonstration

1. Principe fondamental de la dynamique de Newton reformulé avec le principe de moindre action d'Hamilton : *équation du mouvement de Lagrange sur les dérivées partielles et totales du lagrangien d'un système discret.*
2. Décomposition de l'énergie cinétique en termes  $T_k$  de degré  $\dot{u}_i^k$ ,  $k \in [0, 2]$  et des forces non conservatives internes (dissipation) et extérieures : *équations du mouvement de Lagrange dans le cas général sur les dérivées partielles et totales des énergies et des forces.*
3. Linéarisation autour d'une position d'équilibre et développement de Taylor à l'ordre 2.
4. Dérivation matricielle et distinction suivant les vecteurs d'équilibre et de perturbation : *équations du mouvement de Lagrange dans le cas général sous forme matricielle.*
5. Simplification pour un système naturel dont les forces circulantes sont négligées.

La convention d'Einstein sera utilisée par la suite. Pour rappel, elle rend implicite les sommes sur les indices répétés :  $\sum_i a_i b_{ij} = a_i b_{ij}$ . De plus, pour pouvoir distinguer les tenseurs d'ordres

différents, les scalaires (tenseurs d'ordre 0) seront notés en italique ( $a$  ou  $A$ ), les vecteurs (tenseurs d'ordre 1) seront des lettres minuscules en gras et les matrices (tenseurs d'ordre 2) seront des lettres majuscules en gras. Une exception sera faite pour le vecteur des forces extérieures, noté avec une majuscule  $\mathbf{F}$ , par soucis de cohérence avec la littérature. Les vecteurs et les matrices pourront également être représentés par leurs termes ou leurs vecteurs colonnes entre crochets :  $[a_i] = \mathbf{a}$  et  $[a_{ij}] = \mathbf{A} = [\mathbf{a}_i]$ .

Enfin, le terme « système » désigne l'ensemble physique discrétisé dont le mouvement est étudié. Il peut donc s'agir indifféremment d'un point ou d'un ensemble de points.

## A.1 Des principes de Newton et d'Hamilton à l'équation du mouvement de Lagrange

### A.1.1 Équation du mouvement de Lagrange pour un système discret

Le *principe fondamental de la dynamique*, ou seconde loi de Newton, permet de modéliser (*i.e.* exprimer sous forme d'équations) le mouvement d'un corps par une équivalence entre la variation de quantité de mouvement dans le temps et la somme des forces appliquées sur le système étudié dans un **référentiel supposé galiléen**. En mécanique lagrangienne, ce principe est reformulé pour donner celui de *moindre action*, ou *principe d'Hamilton* : la trajectoire physique obtenue minimise l'action, définie par l'intégrale temporelle du Lagrangien. Autrement dit, Le principe de moindre action, par la recherche de l'extrémum de l'action, peut donc être écrit sous la forme (I.2 de [191]) :

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(u, \dot{u}, t) dt = 0 \iff \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial u} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \delta \dot{u} \right) dt = 0 \quad (\text{A.2})$$

avec :  $\delta$  l'opérateur de variation

$S$  l'action

$[t_1, t_2]$  l'intervalle de temps du mouvement étudié

$L$  le lagrangien, différence entre l'énergie cinétique  $V$  et potentielle  $T$

$L = T - V$  (II.6 de [191])

$u$  les coordonnées généralisées qui définissent la position du système

$\dot{u}$  les vitesses généralisées

$t$  le temps

Une intégration par parties permet alors de retrouver les équations de Lagrange en l'absence de



sollicitation extérieure, pour un système à  $N$  degrés de liberté (ou coordonnées généralisées) :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0 \quad , \quad i \in [1, N] \quad (\text{A.3})$$

Si une sollicitation extérieure est appliquée au système, les forces généralisées  $F_i$  peuvent être séparées en forces conservatives  $F_{ic}$  et non conservatives  $F_{inc}$ . Pour les forces conservatives (comme les forces gravitationnelles ou les forces de rappel élastique), le travail virtuel associé est récupérable car il dépend uniquement de l'état initial et final, et non de l'évolution entre ces deux états. Le *théorème de Stokes* permet d'exprimer l'intégrale entre l'état final et initial des forces conservatives comme dérivées d'un champ potentiel, homogène à une énergie. En d'autres termes, les forces conservatives peuvent être directement dérivées de l'énergie potentielle  $V$  (1.5 de [192]) :

$$F_{ic} = -\frac{\partial V}{\partial u_i} \quad , \quad i \in [1, N] \quad (\text{A.4})$$

Seules restent hors du lagrangien les forces non conservatives, qui dépendent du chemin suivi pour arriver de l'état initial à l'état final (comme les forces de frottement). Les équations du mouvement de Lagrange pour un **système discret** soumis à une sollicitation extérieure dans un repère galiléen s'écrivent donc (2.11 de [193]) :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_i} = F_{inc} \quad , \quad i \in [1, N] \quad (\text{A.5})$$

### A.1.2 Distinction des énergies cinétiques

L'énergie cinétique peut être décomposée en termes  $T_k$  homogènes de degré  $k$  par rapport aux vitesses généralisées  $\dot{u}_i$ , c'est-à-dire que  $T_k$  est une fonction de  $\dot{u}_i^k$  (1.3.1 de [52]) :

$$T(u_i, \dot{u}_i, t) = T_0 + T_1 + T_2 \quad (\text{A.6})$$

avec :  $T_0$  l'énergie cinétique d'entraînement

$T_1$  l'énergie cinétique mutuelle

$T_2$  l'énergie cinétique relative

$T_1$  a la nature des *forces de Coriolis* ou gyroscopiques et  $T_0$  celle des forces centrifuges (2.12 de [193]). Lorsque les liaisons cinématiques sont indépendantes du temps (*liaisons*

*scléronomes*), les composantes  $T_0$  et  $T_1$  sont nulles. L'énergie cinétique se réduit alors au terme homogène quadratique (de degré 2) des vitesses généralisées (1.3.2 de [52]) : le système est dit naturel (2.12 de [193]).

Dans le cas général (aucun terme n'est nul), les opérateurs de l'équation de Lagrange (A.5) appliqués à l'énergie cinétique donnent ( $T_0$  est à l'ordre  $\dot{u}_i^0$ , donc indépendante de  $\dot{u}_i$ ) :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_1}{\partial \dot{u}_i} + \frac{\partial T_2}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial u_i} (T_0 + T_1 + T_2) \quad (\text{A.7})$$

Comme  $T_1$  dépend de  $t$  et des  $q_i$ , sa différentielle totale est la somme de toutes ses différentielles partielles :

$$d \left( \frac{\partial T_1}{\partial \dot{u}_i} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T_1}{\partial \dot{u}_i} \right) dt + \frac{\partial}{\partial u_j} \left( \frac{\partial T_1}{\partial \dot{u}_i} \right) du_j \quad , \quad [i, j] \in [1, N]^2 \quad (\text{A.8})$$

Finalement les opérateurs de l'équation du mouvement de Lagrange appliqués à l'énergie cinétique donnent :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T_1}{\partial \dot{u}_i} \right) + \frac{\partial^2 T_1}{\partial \dot{u}_i \partial u_j} \dot{u}_j + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_2}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial u_i} (T_0 + T_1 + T_2) \quad , \quad [i, j] \in [1, N]^2 \quad (\text{A.9})$$

Les forces d'inertie d'entraînement, associées à  $T_0$ , correspondent aux termes non nuls lorsque  $\dot{u}_i = 0$  ; les forces d'inertie relatives sont obtenues dans l'hypothèse de liaisons scléronomes ( $(T_0, T_1) = (0, 0)$ ) ; et les forces d'inertie complémentaires sont constituées des termes non inclus dans les forces d'inertie précédentes et notées  $F_{i_{\text{gyr}}}$  (1.3.1 de [52]) :

$$F_{i_{\text{gyr}}} = - \frac{\partial^2 T_1}{\partial \dot{u}_i \partial u_j} \dot{u}_j + \frac{\partial T_1}{\partial u_i} \quad , \quad [i, j] \in [1, N]^2 \quad (\text{A.10})$$

### A.1.3 Expression des forces non conservatives et fonctions de dissipation

Les forces non conservatives des équations du mouvement de Lagrange  $Q_{inc}$  comprennent des forces d'amortissement visqueux et des forces circulantes en plus des forces extérieures appliquées sur le système (4.1 de [193]). Les premières, qui dérivent d'une fonction de dissipation, s'expriment :

$$F_{i_{\text{visc}}} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{u}_i} \quad , \quad i \in [1, N] \quad (\text{A.11})$$

avec :  $D = \frac{1}{2}c_{ij}\dot{u}_i\dot{u}_j$  la fonction de dissipation de Rayleigh ( $[i, j] \in [1, N]^2$ )

où les coefficients d'amortissement sont symétriques :  $c_{ij} = c_{ji}$

Les forces circulantes sont consécutives à la transmission d'énergie, comme dans les arbres moteurs, et dérivent d'une fonction qui peut être exprimée par la superposition de coefficients symétriques  $c'$ , facteurs des vitesses généralisées quadratiques, et de coefficients antisymétriques  $h$  ( $h_{ij} = -h_{ji}$ ), facteurs des vitesses et des déplacements généralisés. Les forces d'amortissement visqueux et circulantes peuvent être traitées par une seule fonction  $D^*$ , appelée *fonction de dissipation de Rayleigh modifiée* (4.1 de [193]) :

$$F_{i\text{visc}} + F_{i\text{circ}} = -\frac{\partial D^*}{\partial \dot{u}_i} \quad , \quad i \in [1, N] \quad (\text{A.12})$$

avec :  $D^* = \frac{1}{2}c_{ij}^*\dot{u}_i\dot{u}_j + h_{ij}\dot{u}_iu_j \quad , \quad [i, j] \in [1, N]^2$

où :  $c_{ij}^* = c_{ij} + c'_{ij}$

Les forces non conservatives extérieures restantes sont notées  $F_i$ .

#### A.1.4 Equations de Lagrange : cas général et simplification des systèmes naturels

Pour un système non conservatif à liaisons cinématiques holonomes rhéonomes (donc  $(T_0, T_1) \neq (0, 0)$ ), en développant dans l'équation de Lagrange (A.5) les expressions de l'énergie cinétique (A.9) et des forces non conservatives (A), il reste (1.4 de [52]) :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_2}{\partial \dot{u}_i} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T_1}{\partial \dot{u}_i} \right) + \frac{\partial D^*}{\partial \dot{u}_i} - \frac{\partial T_2}{\partial u_i} + \frac{\partial V^*}{\partial u_i} = F_i(t) + F_{i\text{gyr}} \quad i \in [1, N] \quad (\text{A.13})$$

avec :  $u_i$  les coordonnées généralisées

$T_2$  l'énergie cinétique relative

$T_1$  l'énergie cinétique mutuelle (gyroscopique)

$V^* = V - T_0$  le potentiel dynamique (4.4 de [193])

( $V$  l'énergie potentielle et  $T_0$  l'énergie cinétique d'entraînement ou centrifuge)

$D^*$  la fonction de dissipation de Rayleigh modifiée (amortissement et forces circulantes)

$F_i$  les forces extérieures généralisées non conservatives

$F_{i\text{gyr}}$  les forces d'inertie complémentaires ou forces gyroscopiques généralisées

Cette formulation développée, bien que peu rencontrée, peut être utile pour déterminer rapidement l'équation du mouvement dans le cas de conditions aux limites particulières. Pour les liaisons *scléronomes* (*i.e.* pour un **système naturel**),  $T_0$  et  $T_1$  étant nulles, il reste :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_2}{\partial \dot{u}_i} \right) + \frac{\partial D^*}{\partial \dot{u}_i} + \frac{\partial V}{\partial u_i} = F_i(t) \quad i \in [1, N] \quad (\text{A.14})$$

## A.2 Linéarisation au second ordre autour d'une position d'équilibre

### A.2.1 Energie potentielle pour un système conservatif

Par définition de la *stabilité au sens Lagrange-Dirichlet*, la position d'équilibre d'un système conservatif est solution de :

$$\frac{\partial V}{\partial u_i} = 0 \quad , \quad i \in [1, N] \quad (\text{A.15})$$

$$\text{avec : } V \text{ l'énergie potentielle} \quad (\text{A.16})$$

Soient  $u_i = \mathbf{u}$  les écarts de position par rapport à une configuration d'équilibre. Sous l'hypothèse  $V \in C^2(\mathbb{R})$  (*i.e.*  $V$  est deux fois continument dérivable), le développement en série de Taylor de l'énergie potentielle en  $\mathbf{0}$  (ou série de MacLaurin) est :

$$V(\mathbf{u}) = V(\mathbf{0}) + \frac{\partial V}{\partial u_i} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}} u_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial u_i \partial u_j} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}} u_i u_j + o(\mathbf{u}^2) \quad , \quad [i, j] \in [1, N]^2 \quad (\text{A.17})$$

Avec  $o(\mathbf{u}^2)$  qui représente une fonction négligeable devant  $\mathbf{u}^2$ , suivant la *notation de Landau*. Par convention, la constante  $V_0$  est prise nulle et en injectant la condition de stabilité il reste une approximation du second ordre (2.1.1 de [52]) :

$$V(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} k_{ij} q_i q_j \quad , \quad [i, j] \in [1, N]^2 \quad (\text{A.18})$$

avec :  $V(\mathbf{u}) > 0$  pour  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$

$$k_{ij} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial u_i \partial u_j} \right)_{\mathbf{u}=\mathbf{0}} \quad \text{les coefficients de raideur}$$

$$k_{ij} = k_{ji} \text{ puisque les indices sont muets}$$

### A.2.2 Cas général et dérivations

Le système est considéré non naturel pour éviter toute perte de généralité :  $(T_0, T_1) \neq (0, 0)$ . Soit le vecteur des déplacements généralisés **autour d'une position d'équilibre** :  $\mathbf{u}(t) =$

$\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1(t)$ , avec le vecteur constant  $\mathbf{u}_0$ , qui représente la configuration d'équilibre, et le vecteur des perturbations  $\mathbf{u}_1$  (donc  $\dot{\mathbf{u}}(t) = \dot{\mathbf{u}}_1(t)$ ).

Les énergies cinétiques mutuelle  $T_1$  et relative  $T_2$  ne dépendent respectivement que de  $\dot{u}_i$  et  $\dot{u}_i^2$ . Leur développement en série de Taylor **à l'ordre 2** donne :

$$T_1 = \frac{\partial T_1}{\partial \dot{u}_i} \dot{u}_i + \mathcal{O}(\dot{\mathbf{u}}) \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{u}_i \partial \dot{u}_j} \dot{u}_i \dot{u}_j + \mathcal{O}(\dot{\mathbf{u}}^2) \quad , \quad [i, j] \in [1, N]^2 \quad (\text{A.19})$$

Soit, en négligeant les termes d'ordre supérieur et en introduisant les notations  $f_{\text{cor}_i}$  et  $m_{ij}$  :

$$T_1 = f_{\text{cor}_i} \dot{u}_i \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{u}_i \dot{u}_j \quad , \quad [i, j] \in [1, N]^2 \quad (\text{A.20})$$

avec :  $f_{\text{cor}_i}$  de la même nature que la force de Coriolis (2.12 de [193]),  
 $m_{ij}$  les coefficients d'inertie (2.1.1.b de [52]).

Par rapport au vecteur de perturbations  $\dot{\mathbf{u}}_1$ ,  $T_1$  et  $T_2$  s'expriment donc (4.4 de [193]) :

$$T_1 = \dot{\mathbf{u}}_1^\top \mathbf{f}_{\text{cor}0} + \dot{\mathbf{u}}_1^\top \mathbf{F}_{\text{dcor}} \mathbf{q}_1 \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_1^\top \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}_1 \quad (\text{A.21})$$

avec :  $\mathbf{F}_{\text{dcor}} = [f_{\text{cor}_{i,j}}] = \left[ \frac{\partial f_{\text{cor}_i}}{\partial u_j} \right]_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0}$  et  $\mathbf{M} = [m_{ij}] = \mathbf{M}(\mathbf{u}_0)$

Le potentiel dynamique  $V^* = V - T_0$  peut également être développé en séries de Taylor pour donner, après avoir négligé les termes d'ordre supérieur :

$$V^* = V^*(\mathbf{u}_0) + \mathbf{u}_1^\top \frac{\partial V^*}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_1^\top \mathbf{K}^* \mathbf{u}_1 \quad (\text{A.22})$$

avec :  $\mathbf{K}^* = [k_{ij}^*] = \frac{\partial^2 V^*}{\partial u_i \partial u_j} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0}$

Cette fois-ci, les coefficients de raideur  $k^*$  comprennent les coefficients de raideur élastique issus de  $V$ , et les coefficients de raideur géométrique issus de  $T_0$  (4.4 de [193]). Comme précédemment, la constante  $V^*(\mathbf{u}_0)$  sera négligée par la suite.

Enfin, la fonction de dissipation de Rayleigh modifiée exprimée en fonction du vecteur des déplacements généralisés donne :

$$D^* = \frac{1}{2} c_{ij}^* \dot{u}_i \dot{u}_j + h_{ij} \dot{u}_i u_j \iff D^* = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^\top \mathbf{D}^* \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}^\top \mathbf{H} \mathbf{u} \quad (\text{A.23})$$

Donc, en fonction de la configuration d'équilibre et du vecteur de perturbations :

$$D^* = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_1^\top \mathbf{D}^* \dot{\mathbf{u}}_1 + \dot{\mathbf{u}}_1^\top \mathbf{H} \mathbf{u}_0 + \dot{\mathbf{u}}_1^\top \mathbf{H} \mathbf{u}_1 \quad (\text{A.24})$$

avec :  $\mathbf{D}^* = [c_{ij}^*]$  et  $\mathbf{H} = [h_{ij}]$

Les différents termes doivent alors être dérivés, comme dans l'équation de Lagrange suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{u}}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}_1} + \frac{\partial D^*}{\partial \dot{\mathbf{u}}_1} = \mathbf{F} \quad (\text{A.25})$$

avec :  $L = T_1 + T_2 - V^*$

$$L = \dot{\mathbf{u}}_1^\top \mathbf{f}_{\text{cor}0} + \dot{\mathbf{u}}_1^\top \mathbf{F}_{\text{dcor}} \mathbf{u}_1 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_1^\top \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}_1 - \mathbf{u}_1^\top \left. \frac{\partial V^*}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0} - \frac{1}{2} \mathbf{u}_1^\top \mathbf{K} \mathbf{u}_1$$

#### Propriétés de dérivation matricielle

Soient  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  deux vecteurs à coefficients réels :  $\frac{\partial (\mathbf{v}^\top \mathbf{w})}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial (\mathbf{w}^\top \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{w}$

Soient  $\mathbf{v}$  un vecteur et  $\mathbf{M}$  une matrice carrée, tous deux à coefficients réels :  $\frac{\partial (\mathbf{v}^\top \mathbf{M} \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = (\mathbf{M} + \mathbf{M}^\top) \mathbf{v}$

Cas particulier : si  $\mathbf{M}$  est symétrique :  $\frac{\partial (\mathbf{v}^\top \mathbf{M} \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = 2\mathbf{M} \mathbf{v}$

D'autre part, par propriété de la transposée (2.1 de [69]) :  $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$ . D'où :

$$\frac{\partial \left( (\dot{\mathbf{u}}_1^\top \mathbf{F}_{\text{dcor}}) \mathbf{u}_1 \right)}{\partial \mathbf{u}_1} = \frac{\partial \left( \mathbf{u}_1^\top (\dot{\mathbf{u}}_1^\top \mathbf{F}_{\text{dcor}})^\top \right)}{\partial \mathbf{u}_1} = (\dot{\mathbf{u}}_1^\top \mathbf{F}_{\text{dcor}})^\top = \mathbf{F}_{\text{dcor}}^\top (\dot{\mathbf{u}}_1^\top)^\top = \mathbf{F}_{\text{dcor}}^\top \dot{\mathbf{u}}_1 \quad (\text{A.26})$$

Ce qui permet d'obtenir ( $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  sont carrées symétriques) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{u}}_1} &= \mathbf{f}_{\text{cor}0} + \mathbf{F}_{\text{dcor}} \mathbf{u}_1 + \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}_1 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{u}}_1} \right) &= \mathbf{F}_{\text{dcor}} \dot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}_1} &= \mathbf{F}_{\text{dcor}}^\top \dot{\mathbf{u}}_1 - \left. \frac{\partial V^*}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0} - \mathbf{K}^* \mathbf{u}_1 \\ \frac{\partial D^*}{\partial \dot{\mathbf{u}}_1} &= \mathbf{D}^* \dot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{H} \mathbf{u}_0 + \mathbf{H} \mathbf{u}_1 \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

### A.2.3 Equations de Lagrange

En injectant les résultats (A.27) dans l'équation perturbée (A.25), les termes selon  $\mathbf{q}_0$  donnent l'équation d'équilibre (*i.e.* de stabilité) pour un système non conservatif :

$$\left. \frac{\partial V^*}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0} + \mathbf{H}\mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \quad (\text{A.28})$$

D'autre part, les termes selon le vecteur de perturbation  $\mathbf{u}_1$  permettent d'exprimer l'équation de Lagrange linéarisée (4.4 de [193]) :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + (\mathbf{D}^* + \mathbf{G})\dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K}^* + \mathbf{H})\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (\text{A.29})$$

avec :  $\mathbf{u}$  le vecteur des coordonnées généralisées

$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$  le vecteur des vitesses généralisées

$\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$  le vecteur des accélérations généralisées

$\mathbf{M}$  la matrice de masse, de composantes  $m_{ij} = m_{ji} = \left( \frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{u}_i \partial \dot{u}_j} \right)_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0}$

$\mathbf{D}^*$  la matrice d'amortissement, de composantes  $c_{ij}^* = c_{ji}^*$

$\mathbf{G}$  la matrice gyroscopique,  $\mathbf{G} = \mathbf{F}_{\text{dcor}} - \mathbf{F}_{\text{dcor}}^\top$

avec les composantes  $f_{\text{dcor}_{ij}} = [f_{\text{cor}_{i,j}}]$  et  $f_{\text{cor}_i} = \frac{\partial T_1}{\partial \dot{u}_i}$

$\mathbf{H}$  la matrice circulante, de composantes  $h_{ij} = -h_{ji}$

$\mathbf{K}^*$  la matrice de raideur, de composantes  $k_{ij}^* = k_{ji}^* = \left. \frac{\partial^2 V^*}{\partial u_i \partial u_j} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0}$

où le potentiel dynamique  $V^* = V - T_0$

$\mathbf{F}$  le vecteur des forces non conservatives extérieures

### A.3 Équation du mouvement pour un système naturel discrétisé, sans forces circulantes

Par la suite, les liaisons seront prises *scléronomes* (**système naturel**) :

$$\begin{cases} T = T_2 \implies \mathbf{G} = \mathbf{0} \\ V^* = V \implies \mathbf{K}^* = \mathbf{K} \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

De plus, **les forces circulantes seront négligées** devant les autres forces non conservatives :  $\mathbf{D}^* = \mathbf{D}$  et  $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ . L'équation du mouvement (A.29) obtenue dans le cas général devient donc :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (\text{A.31})$$

avec :  $\mathbf{u}$  le vecteur des coordonnées généralisées

$\mathbf{M}$  la matrice de masse, de composantes  $m_{ij} = m_{ji} = \left( \frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{u}_i \partial \dot{u}_j} \right)_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0}$

$\mathbf{D}$  la matrice d'amortissement, de composantes  $c_{ij} = c_{ji}$

$\mathbf{K}$  la matrice de raideur, de composantes  $k_{ij} = k_{ji} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial u_i \partial u_j} \right)_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0}$

$\mathbf{F}$  le vecteur des forces non conservatives extérieures

A noter que, contrairement à  $\mathbf{D}$ , les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  sont symétriques définies positives par définition de leurs composantes (qui sont des doubles dérivations sur des indices muets), et non par hypothèse.

*cqfd.*

### A.4 Discussion sur les hypothèses dans le cadre de la présente recherche

Les hypothèses utilisées pour obtenir l'équation du mouvement (A.31) sont :

1. référentiel supposé galiléen, *i.e.* inertiel ; autrement dit l'espace est isotrope (donc homogène) et le temps est homogène (mais pas isotrope) (I.3 de [191])
2. système discret



3. matrice d'amortissement  $\mathbf{D}$  symétrique définie positive, *i.e.* inversible et ses valeurs propres sont réelles strictement positives, et à coefficients constants dans le temps
4. petits déplacements et petites perturbations à partir d'une position d'équilibre (linéarisation à l'ordre 2)
5. système naturel (liaisons scléronomes) : l'énergie cinétique se réduit au terme homogène quadratique des vitesses généralisées (1.3.2 de [52])
6. forces circulantes sont négligées devant les autres forces non conservatives

Elles peuvent être classées en trois catégories :

**Toujours valables** par définition du problème physique : hypothèses 1, 2 et 3

**Nécessaires** mais potentiellement limitantes pour une généralisation : hypothèse 4

**Qui pourraient être relaxées** en enrichissant le modèle mais qui sont posées dans un premier temps à des fins de simplification : hypothèses 5, 6

Physiquement, deux hypothèses ont des implications directes sur les simulations de vibrations d'une aube avec les équations du mouvement définies. Elles définissent le contexte de travail et la validité des résultats :

**Plages de vitesses de rotation élevées** : négliger les forces centrifuges (hypothèse 6) revient à travailler avec des géométries d'aubes à chaud, *i.e.* prédéformées par le chargement statique

**Déplacement calculé limité** : le déplacement calculé en bout d'aube ne devra pas excéder 10% du rayon de l'aube pour être admissible (hypothèse 4)

Le but de l'étude étant d'étudier les configurations qui induisent des interactions vibratoires, et non de donner des valeurs d'amplitudes du mouvement, l'hypothèse 4 ne sera donc pas limitante dans ce cadre. En revanche il conviendra de s'assurer que les résultats exposés restent dans le cadre qu'elle définit.

## ANNEXE B    MATRICES DE MASSE ET DE RAIDEUR DANS LA BASE MODALE

Afin d'obtenir l'expression des matrices masses et raideur dans la base modale, le problème aux valeurs propres généralisé peut être reformulé en un problème aux valeurs propres classique, à partir duquel la diagonalisation est effectuée par un changement de base classique.

$\mathbf{M}$  étant symétrique définie positive, elle peut être écrite sous la forme de la factorisation de Cholesky (7.2 de [69] et 4.6 de [193]) :

$$\mathbf{M} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^\top \quad (\text{B.1})$$

avec :  $\mathbf{T}$  une matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont positifs  
 $\mathbf{T}^\top$  sa transposée, triangulaire inférieure

Les matrices triangulaires  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{T}^\top$  sont inversibles (non singulières) puisque  $\mathbf{M}$  l'est (3.18 de [194]).

En posant le vecteur  $\mathbf{v} = \mathbf{T}^\top \mathbf{U} \iff \mathbf{U} = (\mathbf{T}^\top)^{-1} \mathbf{v}$ , le problème aux valeurs propres devient :

$$\mathbf{K}\mathbf{U} - \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{U} = \mathbf{0} \iff \mathbf{K} (\mathbf{T}^\top)^{-1} \mathbf{v} - \omega^2 \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^\top (\mathbf{T}^\top)^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (\text{B.2})$$

$$\iff \mathbf{T}^{-1} \mathbf{K} (\mathbf{T}^\top)^{-1} \mathbf{v} = \omega^2 \mathbf{v} \quad (\text{B.3})$$

Soit la matrice  $\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{K} (\mathbf{T}^\top)^{-1}$ , le problème aux valeurs propres généralisées a bien été reformulé en un problème aux valeurs propres simple par rapport à cette matrice, puisque :

$$\mathbf{K}\mathbf{u} - \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{U} = \mathbf{0} \iff \mathbf{A}\mathbf{v} = \omega^2 \mathbf{v} \quad (\text{B.4})$$

La matrice  $\mathbf{A}$  étant un produit de matrices réelles diagonalisables, elle l'est également (7.42 de [194]). La résolution du problème aux valeurs propres donne sa base de diagonalisation orthonormée formée par ses vecteurs propres  $\mathbf{v}_i$  ainsi que ses valeurs propres  $\omega_i^2$  pour  $i \in [1, N]$ .

Pour retrouver une expression dans cette base des matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$ , les vecteurs  $\mathbf{U}_i$  sont posés tels que :  $\mathbf{U}_i = (\mathbf{T}^\top)^{-1} \mathbf{U}_i$ . Sa transposée s'exprime alors :  $\mathbf{U}_i^\top = \mathbf{v}_i^\top \mathbf{T}^{-1}$  ; par les propriétés de la transposée par rapport à la multiplication matricielle (3.17 de [194]).

En reprenant l'écriture de  $\mathbf{M}$  par la factorisation de Cholesky (B.1), elle peut être exprimée

en fonction des  $\mathbf{U}_i$  :

$$\mathbf{U}_i^\top \mathbf{M} \mathbf{U}_i = \mathbf{v}_i^\top \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{T} \mathbf{T}^\top) (\mathbf{T}^\top)^{-1} \mathbf{v}_i \quad (\text{B.5})$$

$$= \mathbf{v}_i^\top \mathbf{v}_i \quad (\text{B.6})$$

Puisque les  $\mathbf{v}_i$ , en tant que vecteurs propres d'un problème aux valeurs propres classique, forment une base orthonormale (6.2 de [69]) :

$$\mathbf{v}_i^\top \mathbf{v}_j = \delta_{ij} \quad (\text{B.7})$$

D'où finalement :

$$\mathbf{U}_i^\top \mathbf{M} \mathbf{U}_i = \delta_{ij} \quad (\text{B.8})$$

Puis, en utilisant cette expression pour reformuler  $\mathbf{K}$  dans le problème aux valeurs propres, il vient :

$$\mathbf{K} \mathbf{U}_i = \omega_i^2 \mathbf{M} \mathbf{U}_i \iff \mathbf{U}_i^\top \mathbf{K} \mathbf{U}_i = \omega_i^2 \mathbf{U}_i^\top \mathbf{M} \mathbf{U}_i \quad (\text{B.9})$$

$$\iff \mathbf{U}_i^\top \mathbf{K} \mathbf{U}_i = \omega_i^2 \delta_{ij} \quad (\text{B.10})$$

La résolution du problème aux valeurs propres généralisé passe donc par le calcul des vecteurs  $\mathbf{U}_i$ . Ceux-ci ne sont pas orthonormaux, contrairement aux  $\mathbf{v}_i$ . En revanche, comme ils sont définis tels que  $(\mathbf{M} \mathbf{U}_i)^{-1} = \mathbf{U}_i$ , la notion d'orthogonalité peut être généralisée et les vecteurs  $\mathbf{U}_i$  sont dits  *$\mathbf{M}$ -orthonormaux*.

Finalement, en définissant la base modale  $\mathbf{M}$ -orthonormée  $\Phi = [\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_N]$ , les expressions de  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  deviennent :

$$\Phi^\top \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \quad (\text{B.11})$$

$$\Phi^\top \mathbf{K} \Phi = \omega^2 \quad (\text{B.12})$$

avec :  $\mathbf{I} = \text{diag}(1)$  la matrice identité dans  $\mathbb{R}^N$

$$\omega = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_N)$$

*cqfd.*

## ANNEXE C ÉCART-TYPE D'UNE DISTRIBUTION DE PROBABILITÉ UNIFORME

L'expression de l'écart-type pour une distribution uniforme sur un segment  $[a, b]$  peut être trouvée par généralisation de celle obtenue pour une distribution uniforme standard, sur  $[0, a]$  (2.3.1 de [66]).

La densité de probabilité d'une loi continue uniforme sur un segment  $[a, b]$  est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{sur } [a, b], \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

L'écart-type  $\sigma(X)$  est relié à la densité de probabilité par l'espérance  $E(X)$ , selon (2.1.4.2 de [66]) :

$$\sigma^2(X) = V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad (\text{C.2})$$

Pour une loi de probabilité continue, l'espérance peut être calculée avec (2.1.4.1 de [66]) :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dX \quad (\text{C.3})$$

Dans le cas de la loi continue uniforme sur  $[a, b]$ , il vient donc :

$$E(X) = \int_a^b \frac{X}{b-a} dx = \left[ \frac{X^2}{2} \right]_a^b \frac{1}{b-a} = \left( \frac{b^2 - a^2}{2} \right) \frac{1}{b-a} = \frac{(b-a)(b+a)}{2} \frac{1}{b-a} \quad (\text{C.4})$$

$$= \frac{b+a}{2} \quad (\text{C.5})$$

et :

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{X^2}{b-a} dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_a^b \frac{1}{b-a} = \left( \frac{b^3 - a^3}{3} \right) \frac{1}{b-a} = \frac{(b-a)(a^2 + b^2 + ab)}{3} \frac{1}{b-a} \quad (\text{C.6})$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + ab}{3} \quad (\text{C.7})$$

ainsi :

$$V(X) = \frac{a^2 + b^2 + ab}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(a+b)^2 - ab}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} \quad (\text{C.8})$$

$$= \frac{1}{12} \left( (a+b)^2 - 4ab \right) = \frac{1}{12} (a^2 + b^2 - 2ab) \quad (\text{C.9})$$

$$= \frac{(a-b)^2}{12} \quad (\text{C.10})$$

Comme  $a \leq b$  :

$$\sqrt{(a-b)^2} = b - a \quad (\text{C.11})$$

ce qui permet d'obtenir l'expression de l'écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{b-a}{12} \quad (\text{C.12})$$

Dans le cas du désaccordage, le segment pour le tirage aléatoire est défini :

$$[a, b] \rightarrow [E_0(1 - dE), E_0(1 + dE)] \quad (\text{C.13})$$

Il vient ainsi :

$$\sigma(dE) = \frac{2E_0 dE}{\sqrt{12}} \quad (\text{C.14})$$

Soit, adimensionné par la valeur nominale  $E_0$  :

$$\sigma_{\text{adim}}(dE) = \frac{2dE}{\sqrt{12}} \quad (\text{C.15})$$

*cqfd.*

## ANNEXE D    INVERSIBILITÉ DE $2\mathbf{M} + h\mathbf{D}$

La matrice de masse  $\mathbf{M}$  est symétrique définie positive par définition (voir la démonstration en annexe A). En outre, la matrice d'amortissement est symétrique définie positive dans l'espace physique, par définition du problème physique (hypothèse 3). Le pas de temps  $h$  étant un scalaire, il vient que la matrice  $[2\mathbf{M} + h\mathbf{D}]$  est symétrique définie positive. Elle peut donc être écrite sous la forme de la factorisation de Cholesky (7.2 de [69] et 4.6 de [193]) :

$$[2\mathbf{M} + h\mathbf{D}] = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^\top \quad (\text{D.1})$$

avec :  $\mathbf{T}$  une matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont positifs  
 $\mathbf{T}^\top$  sa transposée, triangulaire inférieure

Une matrice est inversible si *et seulement si* son déterminant est non nul (3.2 de [69]). Or :

$$\det(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^\top) = (\det \mathbf{T}) (\det \mathbf{T}^\top) \quad (\text{D.2})$$

(*par propriété de morphisme du déterminant (3.2 de [69])*)

$$= (\det \mathbf{T})^2 \quad (\text{D.3})$$

(*car  $\det \mathbf{T}^\top = \det \mathbf{T}$  (3.2 de [69])*)

$$= \prod_{l=1}^N (T_{ll}^2) \quad (\text{D.4})$$

(*car  $\mathbf{T}$  est triangulaire (3.1 de [69])*)

Comme les éléments diagonaux des matrices de masse et d'amortissement sont strictement positifs (*i.e.* non nuls), ceux de  $\mathbf{T}$  le sont également *a fortiori*. Finalement :

$$\left( \prod_{l=1}^N (T_{ll}^2) \neq 0 \quad \text{et} \quad \det(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^\top) = \det[2\mathbf{M} + h\mathbf{D}] \right) \iff [2\mathbf{M} + h\mathbf{D}] \text{ inversible} \quad (\text{D.5})$$

*cqfd.*

## ANNEXE E    MATRICE DE RÉDUCTION DE CRAIG-BAMPTON

La méthode de Craig-Bampton repose sur l'utilisation de modes propres à interface fixe et de modes statiques afin de construire un modèle réduit représentatif du modèle complet initial. Cette méthode permet de conserver tous les ddl physiques dits « frontières » et d'appliquer une réduction sur les ddl modaux restants. La construction de la matrice de réduction  $\Psi_{CB}$  est détaillée dans ce qui suit.

### E.1    Modes propres à interface fixe

En réorganisant les matrices suivants les ddl internes et frontière, il vient :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_f \\ \mathbf{U}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{ff} & \Psi_{fi} \\ \Psi_{if} & \Psi_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_f \\ \mathbf{p}_i \end{bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

avec  $f$  qui désigne les ddl frontière, et  $i$  les ddl internes. En notation système :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_f = \Psi_{ff}\mathbf{p}_f + \Psi_{fi}\mathbf{p}_i \\ \mathbf{U}_i = \Psi_{if}\mathbf{p}_f + \Psi_{ii}\mathbf{p}_i \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

comme les ddl frontière doivent être conservés par le changement de base, il vient :

$$\mathbf{U}_f = \mathbf{p}_f \iff \Psi_{fi} = \mathbf{0}_{n_f, n_i} \quad \text{et} \quad \Psi_{ff} = \mathbf{I}_{n_f} \quad (\text{E.3})$$

avec :  $\mathbf{0}_{n_f, n_i}$  la matrice nulle de dimension  $(n_f, n_i)$

$\mathbf{I}_{n_f}$  la matrice carrée identité de dimension  $(n_f, n_f)$

Il reste donc à déterminer les expressions de  $\Psi_{ii}$  et  $\Psi_{if}$ . Les ddl frontières restant accessibles dans la base modale, les modes tels que  $\mathbf{p}_f = \mathbf{U}_f = \mathbf{0}_{n_f, 1}$  permettent de déterminer  $\Psi_{ii}$ , ce qui revient à encastrier les ddl frontière. D'où l'appellation de « modes à interface fixe » (17.6.1 de [93]). Le vecteur des amplitudes  $\mathbf{U}_e$  pour les modes à frontière encastree, ou « modes encastres », vérifient alors :

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U}_e = \mathbf{0} \quad (\text{E.4})$$

soit, en distinguant les ddl internes et frontière :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fi} \\ \mathbf{K}_{if} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ff} & \mathbf{M}_{fi} \\ \mathbf{M}_{if} & \mathbf{M}_{ii} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_f,1} \\ \mathbf{U}_{e_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_f,1} \\ \mathbf{0}_{n_i,1} \end{bmatrix} \quad (\text{E.5})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff} - \omega^2 \mathbf{M}_{ff} & \mathbf{K}_{fi} - \omega^2 \mathbf{M}_{fi} \\ \mathbf{K}_{if} - \omega^2 \mathbf{M}_{if} & \mathbf{K}_{ii} - \omega^2 \mathbf{M}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_f,1} \\ \mathbf{U}_{e_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_f,1} \\ \mathbf{0}_{n_i,1} \end{bmatrix} \quad (\text{E.6})$$

La dernière équation du système équivalent est alors :

$$(\mathbf{K}_{ii} - \omega^2 \mathbf{M}_{ii}) \mathbf{U}_{e_i} = \mathbf{0}_{n_i,1} \quad (\text{E.7})$$

qui revient à un problème aux valeurs propres généralisé :

$$\det(\mathbf{K}_{ii} - \omega^2 \mathbf{M}_{ii}) = 0_{n_i,1} \quad (\text{E.8})$$

Une base modale  $\mathbf{M}_{ii}$ -orthonormée des vecteurs propres du couple de matrices  $(\mathbf{K}_{ii}, \mathbf{M}_{ii})$  peut être exprimée :

$$\Phi_e = [\mathbf{U}_{e_i1}, \dots, \mathbf{U}_{e_i n_i}] = \Psi_{ii} \quad (\text{E.9})$$

$$\begin{aligned} \text{avec : } \Phi_e^T \mathbf{M}_{ii} \Phi_e &= \mathbf{I}_{n_i} \\ \Phi_e^T \mathbf{K}_{ii} \Phi_e &= \omega^2 = (\text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_{n_i}))^2 \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

En remplaçant les expressions définies dans l'équation de changement de base (E.1), il reste :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_f \\ \mathbf{U}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_f} & \mathbf{0}_{n_f, n_i} \\ \Psi_{if} & \Phi_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_f \\ \mathbf{p}_i \end{bmatrix} \quad (\text{E.11})$$

Pour obtenir une base modale, il faut ajouter une équation supplémentaire afin de déterminer  $\Psi_{if}$ . Comme  $\mathbf{p}_f = \mathbf{U}_f$  et en utilisant la première équation du système (E.2), il s'agit alors de trouver une relation entre  $\mathbf{U}_i$  et  $\mathbf{U}_f$ .

## E.2 Enrichissement de la base avec les modes statiques

La méthode de Craig-Bampton revient à enrichir la base modale avec les modes statiques du système. Lorsque le système est statique, sa vitesse et son accélération généralisées  $\dot{\mathbf{u}}$  et  $\ddot{\mathbf{u}}$  sont nulles. De plus, comme un mode propre est recherché, le système est considéré non amorti. L'équation du mouvement se simplifie donc pour obtenir le problème statique suivant



sur le vecteur des amplitudes  $\mathbf{U}_s$ , avec les matrices organisées en ddl internes et frontière :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fi} \\ \mathbf{K}_{if} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{sf} \\ \mathbf{U}_{si} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_f \\ \mathbf{0}_{n_i,1} \end{bmatrix} \quad (\text{E.12})$$

avec :  $\mathbf{F}_f$  les forces appliquée par l'extérieur sur les frontières du système ( $\mathbf{F}_i = \mathbf{0}_{n_i,1}$ )

La seconde équation du système équivalent revient à une condensation statique (6.9.2 de [49]) :

$$\mathbf{K}_{ii}\mathbf{U}_{si} + \mathbf{K}_{if}\mathbf{U}_{sf} = \mathbf{0}_{n_i,1} \quad (\text{E.13})$$

$$\mathbf{U}_{si} = -\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{if}\mathbf{U}_{sf} \quad (\text{E.14})$$

( $\mathbf{K}_{ii}$  est carrée inversibles)

Or les coordonnées modales ont été construites afin de conserver les ddl frontière physiques ( $\mathbf{U}_{sf} = \mathbf{p}_f$ ). Finalement :

$$\mathbf{U}_{si} = \Phi_s \mathbf{p}_f \quad (\text{E.15})$$

avec :  $\Phi_s = -\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{if}$

La matrice de passage de Craig-Bampton non réduite permet ainsi de passer de la base physique une base hybride, à la fois physique et modale :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_f \\ \mathbf{U}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_f} & \mathbf{0}_{n_f, n_i} \\ \Phi_s & \Phi_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_f \\ \mathbf{p}_i \end{bmatrix} \quad (\text{E.16})$$

avec :  $\mathbf{U}_i$  et  $\mathbf{U}_f$  les amplitudes physiques respectivement des ddl internes et frontière

$\mathbf{p}_i$  les amplitudes modales des ddl internes

$\dim(\mathbf{U}_i) = \dim(\mathbf{p}_i) = (n_i, 1)$  ;  $\dim(\mathbf{U}_f) = \dim(\mathbf{p}_f) = (n_f, 1)$

$\Phi_e$  base des modes encastres,  $\mathbf{M}_{ii}$ -orthonormée et calculée avec (E.8)

avec  $\dim(\Phi_e) = (n_i, n_i)$

$\Phi_s = -\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{if}$  les modes statiques, avec  $\dim(\Phi_s) = (n_i, n_f)$

$\mathbf{0}_{n_f, n_i}$  la matrice nulle de  $n_f$  lignes et  $n_i$  colonnes

$\mathbf{I}_{n_f} = \text{diag}_{n_f}(1)$  la matrice identité de dimension  $n_f$

### E.3 Réduction sur les modes encastrés

Dans l'équation de changement de base (E.16), il apparaît que la base des modes encastrés  $\Phi_e$  est carrée de dimension  $n_i$  alors que celle des modes statiques  $\Phi_s$  ne contient que  $n_f$  colonnes. Le nombre de ddl aux frontières étant bien inférieurs au nombre de ddl internes ( $n_f < n_i$ ) la matrice de passage des coordonnées physiques aux coordonnées modales pourrait être réduite en ne conservant que certains modes statiques. La matrice  $\Phi_{e,\eta}$  correspond alors aux  $\eta$  modes statiques (ou colonnes) retenus de  $\Phi_e$ . La matrice de réduction  $\Psi_{CB}$  est ainsi définie :

$$\Psi_{CB} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_f} & \mathbf{0}_{n_f,\eta} \\ \Phi_s & \Phi_{e,\eta} \end{bmatrix} \quad (\text{E.17})$$

permettant de passer d'une matrice de passage de dimension  $(n_i + n_f, n_i + n_f) = (n, n)$  dans l'équation (E.16) à une matrice réduite de dimension  $(n_i + n_f, \eta + n_f) = (n, \eta + n_f)$ . Le changement de la base physique à la base réduite (en partie physique et en partie modale) donne ainsi :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_f \\ \mathbf{U}_i \end{bmatrix} = \Psi_{CB} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_f \\ \mathbf{p}_\eta \end{bmatrix} = \Psi_{CB} \mathbf{U}_r \quad (\text{E.18})$$

avec :  $\mathbf{U}_r$  le vecteur réduit

*cqfd.*

**Remarque.**  $\Psi_{CB}$  n'étant pas carrée, elle n'est pas inversible. Elle permet donc de passer de la base réduite à la base physique, mais pas inversement.

## ANNEXE F SOUS-ÉCHANTILLONNAGE DES SIGNAUX DE BTT

Dans le cadre d'une acquisition de BTT, le déplacement d'une aube donnée est relevé  $n_c$  fois pour chaque rotation, avec  $n_c$  le nombre de capteurs sur la circonférence du carter. Comme le théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon stipule que la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure au double de la fréquence maximale présente dans le signal pour permettre une représentation discrète de celui-ci [138], il faudrait que la condition suivante soit respectée :

$$n_c \frac{f_r}{2} > f_{\max}$$

avec  $f_r$  la fréquence de rotation et  $f_{\max}$  la fréquence maximale qui compose le signal de déplacement en sommet d'aube. La fréquence de rotation nominale d'une roue aubagée de compresseur étant de l'ordre de 50 Hz, et les fréquences qui composent le signal  $f_{\max} > 1000$  Hz, 40 capteurs répartis sur toute la circonférence du carter seraient nécessaires afin d'obtenir toute l'information contenue dans le signal. Les signaux obtenus par la technique de BTT, usuellement sur 2 à 4 capteurs, sont donc fortement sous-échantillonnés, ce qui induit un repliement de spectre, comme illustré sur la figure F.1, et vient fausser l'évaluation de la fréquence de vibration des aubes [165].

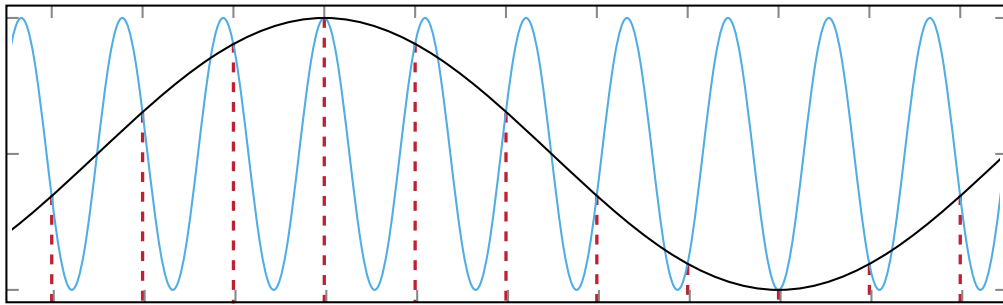


Figure F.1 Concept de repliement de spectre : le signal souhaité ( — ) est capté à un nombre d'instants limité ( - - - ), faussant son approximation ( — ).