

Titre: Calcul et analyse de sensibilité des écoulements à surface libre
Title:

Auteur: Lise Charlot
Author:

Date: 2011

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Charlot, L. (2011). Calcul et analyse de sensibilité des écoulements à surface libre [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.
Citation: <https://publications.polymtl.ca/514/>

Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/514/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Dominique Pelletier
Advisors:

Programme: Génie mécanique
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CALCUL ET ANALYSE DE SENSIBILITÉ DES ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE

LISE CHARLOT
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR
(GÉNIE MÉCANIQUE)
FÉVRIER 2011

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

CALCUL ET ANALYSE DE SENSIBILITÉ DES ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE

présentée par : CHARLOT Lise

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury constitué de :

M. GARON André, Ph.D., président

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. ETIENNE Stéphane, Ph.D., membre

M. BOURGAULT Yves, Ph.D., membre

À Jean MARIE et Maurice CHARLOT.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier Dominique Pelletier, mon directeur de recherche, pour sa confiance et son encadrement.

Un grand merci à Stéphane Etienne pour tous ses conseils, sa disponibilité et les discussions toujours très enrichissantes qu'on a pu avoir. Sans son aide, il m'aurait été beaucoup plus difficile de mener à bien ce projet.

Je remercie aussi chaleureusement André Garon, pour avoir accepté de présider mon jury, pour sa disponibilité et pour m'avoir permis de pouvoir finir ce projet dans de bonnes conditions. Ses conseils m'ont toujours permis de progresser efficacement. Merci aussi de m'avoir proposé la charge de TD qui m'a beaucoup apporté.

Merci à Alexander Hay pour l'aide qu'il a pu m'apporter tout au long de ce projet.

Je remercie aussi tous les étudiants que j'ai pu croiser au labo pour la bonne ambiance de travail ainsi que pour toute l'entraide sur nos projets respectifs. Merci donc à Jean-François, Sina, Fernando, Raymond, Simon et aussi Simon, Jérôme, Mounir, Dima, Espérancia, Marianne, Jonathan, Aurélien, Shahin, Nicolas et tous les autres. Merci également à Jérôme Vétel et à Philippe pour leur bonne humeur.

Une pensée pour les agents d'entretien que l'on croise tous les jours dans les couloirs de poly. Merci à Gerry, Mario et Alain pour leur gentillesse et leurs boutades qui donnent le sourire même après une journée difficile.

Je remercie aussi mes parents et toute ma famille pour leur soutien depuis la France.

Enfin, merci à Nicolas, qui m'a toujours encouragée dans les moments difficiles et qui m'a soutenue au quotidien pour que je puisse finir dans les temps.

RÉSUMÉ

Dans ce projet, nous développons une méthode de calcul précise et rapide pour les écoulements à surface libre et une méthode des sensibilités lagrangiennes adaptées à ce type d'écoulements. Les écoulements à surface libre sont très courants dans la nature et dans les applications industrielles. Leur compréhension est indispensable pour le design de structures offshore par exemple. Cependant, leur simulation numérique reste difficile car la géométrie du domaine fluide est une inconnue du problème. De nombreuses techniques ont été développées mais les calculs prenant en compte toutes les caractéristiques de l'écoulement, comme la viscosité, la répartition horizontale des vitesses et de la pression deviennent souvent trop coûteux pour atteindre une précision suffisante. Dans ces conditions, la méthode des sensibilités est un outil très intéressant car elle permet de calculer les dérivées de l'écoulement par rapport aux paramètres de design. Les sensibilités peuvent donc être utilisées pour calculer rapidement le gradient de fonctions objectifs requis par la plupart des algorithmes d'optimisation, pour identifier les paramètres clé d'un système ou encore pour faire une analyse d'incertitude.

L'écoulement est calculé grâce à une formulation arbitrairement lagrangienne-eulérienne des équations de Navier-Stokes. Le domaine de calcul suit donc la forme de la surface libre, ce qui permet de connaître sa géométrie avec précision. Le maillage est déformé grâce à une approche pseudo-solide. Des schémas temporels de Runge-Kutta d'ordre élevé permettent d'améliorer la précision des calculs. Pour la discrétisation spatiale, on utilise la méthode des éléments finis avec des éléments de Taylor-Hood ou des éléments P1-P1 avec une stabilisation de type SUPG/PSPG pour pouvoir faire des calculs à haut Reynolds sans oscillations numériques. Afin de satisfaire la loi de conservation géométrique et donc conserver l'ordre de précision temporel sur maillage déformable, la formulation variationnelle du problème doit être conservative et le calcul des vitesses de maille doit être consistant avec le schéma temporel choisi. Les sensibilités sont calculées grâce à un point de vue lagrangien. On calcule donc les dérivées totales des variables par rapport au paramètre, c'est à dire que l'on tient compte de la dépendance du domaine fluide par rapport au paramètre. Les conditions limites sont alors simples, même si la frontière subit des déformations. Les équations des sensibilités sont obtenues en dérivant la formulation faible de l'écoulement. Pour la résolution, les méthodes numériques sont les mêmes que pour l'écoulement.

La méthode est ensuite vérifiée grâce à la méthode des solutions manufaturées. On vérifie alors, pour chaque schéma temporel et pour chaque type d'éléments, que l'ordre de convergence observé est bien conforme avec l'ordre théorique de la méthode. On montre ainsi que les termes de stabilisation n'empêchent pas la satisfaction de la loi de conservation

géométrique et que les sensibilités présentent le même taux de convergence que l'écoulement. Les schémas de Runge-Kutta d'ordre 3 ou 5 permettent d'atteindre une meilleure précision temporelle avec 100 fois moins de pas de temps que le schéma d'Euler implicite, ce qui permet de réduire significativement le coût des calculs.

On présente ensuite plusieurs applications en vue de valider la méthode et d'explorer son champ d'application. On obtient tout d'abord des résultats en accord avec 7 autres études pour un calcul de ballotement dans un réservoir. On étudie ensuite la propagation d'une onde solitaire dans un canal. La couche limite au fond provoque un amortissement de l'amplitude de l'onde en accord avec des modèles analytiques. Notre méthode permet aussi de simuler la séparation de l'onde lorsque la hauteur de fond varie. Nous testons ensuite la génération de houle dans un bassin grâce à un batteur à piston. On montre alors que la méthode supporte des déformations importantes de la surface libre, même si on ne peut pas simuler de déferlement. De plus, les caractéristiques de la houle générée sont en accord avec la théorie et des mesures expérimentales. Enfin, on présente un cas d'interaction entre la houle et un cylindre immergé. Les efforts obtenus sur le cylindre sont proches des mesures expérimentales. On montre en plus que le calcul complet de la surface libre est indispensable pour obtenir toutes les harmoniques des efforts. Les sensibilités par rapport à la position et au rayon du cylindre sont utilisées pour extrapoler les efforts et l'écoulement sur des configurations voisines. Les principales caractéristiques de l'écoulement perturbé sont alors bien reproduites. La méthode choisie pour les sensibilités est donc validée et bien adaptée à ce type d'écoulement.

ABSTRACT

In this project, we develop a methodology for rapid and accurate free-surface flow simulation and a Lagrangian sensitivity equation method suited to this type of flow. Free-surface flows are very common in nature and in industrial applications. Their understanding is essential for example, for the design of offshore structures. However, their numerical simulation is difficult because the geometry of the fluid domain is part of the problem. Many techniques have been developed but the simulations taking into account all the characteristics of the flow, such as viscosity, the horizontal distribution of velocity and pressure are costly to achieve sufficient accuracy. Thus, the sensitivity equation method is a very interesting tool because it computes the derivatives of the flow with respect to design parameters. Sensitivities provide quick evaluation of gradients of objective functions required by most optimization algorithms and a better understanding of the flow by answering “what if?” questions.

The flow is calculated using an arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation of the Navier-Stokes equations. The computational domain follows the shape of the free surface. Hence, its geometry is exactly known. The mesh is deformed with a pseudo-solid approach. We use high order Runge-Kutta schemes for time integration and the finite element method with Taylor-Hood or P1-P1 elements for the spatial discretization. Special attention must be paid to the variational formulation of the Navier-Stokes equations and to the computation of the mesh velocity to satisfy the Geometric Conservation Law (GCL). The GCL ensures that the fixed mesh order of accuracy of the time integrator is preserved on moving meshes. We use SUPG/PSPG stabilization with P1-P1 elements to compute high Reynolds numbers simulation and to ensure that no numerical oscillations occur. Sensitivities are calculated using a Lagrangian point of view. Total derivatives of the variables with respect to the parameter are computed, *ie* we take into account the dependence of the fluid domain with respect to the parameter. This method leads to simple and exact boundary conditions on moving domain. The sensitivity equations are obtained by differentiating the weak formulation of the flow. Similar numerical methods are used for the flow and for the sensitivities.

The method is then verified with the method of manufactured solutions. We check that for each temporal scheme and for each type of element, the observed convergence rate is consistent with the theoretical one. It is shown that the stabilization terms do not prevent the satisfaction of the geometric conservation law. Moreover the sensitivities have the same convergence rate as the flow. The 3rd and 5th order accurate Runge-Kutta schemes achieve better temporal accuracy with 100 times larger time steps than the implicit Euler scheme, which significantly reduces the computation cost.

Several applications are presented to validate the method and explore its scope. First, our results are in agreement with 7 other studies for sloshing waves. Then we study the propagation of a solitary wave in a channel. The bottom boundary layer causes a damping of the wave amplitude in agreement with analytical models. Our method can also simulate the separation of the wave over uneven bottom. We test wave generation in a pool using a piston-type wave maker. We show that the method can suffer significant deformation of the free surface, even if it cannot simulate breaking waves. Furthermore, the characteristics of generated waves are consistent with theoretical results and experimental measurements. Finally, we study interactions between incident waves and a submerged cylinder. The prediction of the forces on the cylinder is close to experimental measurements. We show that the complete calculation of the free surface is necessary to calculate all the harmonics of the effort. We compute the sensitivities with respect to the position and the radius of the cylinder. Extrapolation of the forces and flow on nearby configurations reproduces accurately the characteristics of the perturbed flow. The computation of the sensitivity is therefore validated and is well suited to this type of flow.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	ix
LISTE DES TABLEAUX	xii
LISTE DES FIGURES	xiii
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIAYIONS	xvi
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 REVUE DE LITTÉRATURE	3
1.1 Surface libre : définition	3
1.1.1 Quelques propriétés des interfaces	3
1.1.2 Modélisation des écoulements à surface libre	6
1.1.3 Quelques exemples d'écoulements à surface libre	9
1.2 Méthodes numériques	11
1.2.1 Méthodes avec maillage fixe	11
1.2.2 Méthodes sans maillage	15
1.2.3 Méthodes à maillage mobile	17
1.2.4 Conclusion	18
1.3 Formulation Lagrangienne-Eulérienne (ALE)	19
1.3.1 Équations de Navier Stokes	19
1.3.2 Déformation du domaine de calcul	19
1.3.3 Méthode des éléments finis	21
1.3.4 Enjeux numériques	22
1.4 Analyse de sensibilité des écoulements à surface libre	23
1.4.1 Exemple de l'optimisation	23

1.4.2	Enjeux des sensibilités de l'interface	26
1.5	Bilan	29
1.6	But et objectifs	31
CHAPITRE 2 CALCUL DE LA SURFACE LIBRE		32
2.1	Modélisation des écoulements à surface libre	32
2.1.1	Équations de Navier-Stokes	32
2.1.2	Conditions limites pour la surface libre	32
2.2	Formulation lagrangienne-eulérienne pour les problèmes à surface libre	33
2.2.1	Description eulérienne-lagrangienne	34
2.2.2	Équations de l'écoulement et conditions limites en formulation ALE .	35
2.2.3	Approche pseudo-solide	35
2.3	Méthodes numériques	36
2.3.1	Formulation variationnelle	37
2.3.2	Méthode des éléments finis	37
2.3.3	Stabilisation des équations de Navier-Stokes	38
2.3.4	Intégration temporelle et vitesse de maille	42
2.3.5	Méthode de résolution	44
2.4	Implémentation de la méthode	45
2.4.1	Implémentation des conditions de surface libre	45
2.4.2	Implémentation des schémas d'intégration de Runge-Kutta	46
CHAPITRE 3 MÉTHODE DES SENSIBILITÉS LAGRANGIENNES		49
3.1	Méthode de l'équation des sensibilités lagrangiennes	49
3.1.1	Établissement de la forme faible des équations des sensibilités lagrangiennes	49
3.1.2	Conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann	53
3.2	Sensibilités lagrangiennes instationnaires sur maillage mobile	54
3.3	Sensibilité des conditions de surface libre	56
CHAPITRE 4 VÉRIFICATION		58
4.1	Solution manufacturée	58
4.1.1	Régime stationnaire	58
4.1.2	Solution manufacturée instationnaire	63
4.2	Vérification des sensibilités lagrangiennes sur maillage mobile	69
4.3	Ballotement de grande amplitude	71
4.3.1	Convergence temporelle pour l'écoulement	71

4.3.2	Comparaison des résultats	72
4.3.3	Étude de sensibilité	77
4.4	Conclusion	78
CHAPITRE 5 RÉSULTATS NUMÉRIQUES		80
5.1	Étude comparative pour un cas de ballotement	80
5.2	Propagation d'une onde solitaire	81
5.2.1	Propagation de l'onde	82
5.2.2	Impact de la couche limite au fond	84
5.2.3	Séparation de l'onde solitaire	85
5.3	Batteur à houle	93
5.3.1	Canal court	93
5.3.2	Canal long	98
5.4	Interaction entre un cylindre et des vagues	102
5.4.1	Impact du cylindre sur la déformée de surface libre	103
5.4.2	Efforts sur le cylindre	106
5.4.3	Analyse de sensibilité par rapport à la distance entre le cylindre et la surface libre	108
5.4.4	Analyse de sensibilité par rapport au rayon du cylindre	114
5.4.5	Conclusion	115
CHAPITRE 6 CONCLUSION		117
RÉFÉRENCES		120

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1	Erreurs de volume après 10 périodes d'oscillation.	74
Tableau 5.1	Ballotement : vitesse et position de la surface libre en $x = 60m$ et à $t = 9,2s$	81
Tableau 5.2	Batteur à houle : coefficients de Fourier de la déformée de surface libre.	99
Tableau 5.3	Coefficients d'inertie et de traînée.	106
Tableau 5.4	Comparaison des efforts expérimentaux et numériques.	107
Tableau 5.5	Coefficients de Fourier des efforts sur le cylindre.	108
Tableau 5.6	Coefficients de Fourier de la sensibilité des efforts par rapport à la position du cylindre.	109
Tableau 5.7	Efforts recalculés et extrapolés à partir de la géométrie $d = 1.5D$	111
Tableau 5.8	Coefficients de Fourier de la sensibilité des efforts par rapport au rayon du cylindre.	114

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Domaine avec deux milieux	3
Figure 1.2	Domaine fluide comportant une surface libre.	6
Figure 1.3	Distinction entre paramètre de valeur et paramètre de forme.	26
Figure 1.4	Influence d'un paramètre de design sur un domaine déformable.	27
Figure 2.1	Domaine fluide.	33
Figure 2.2	Domaines et transformations pour la description eulérienne-lagrangienne arbitraire.	34
Figure 2.3	Déformation des segments situés sur la surface libre.	36
Figure 2.4	Élément de Taylor-Hood.	39
Figure 2.5	Élément P1-P1.	39
Figure 2.6	Segment de surface libre.	46
Figure 3.1	Déformation du domaine.	50
Figure 4.1	Domaine initial et déformé et champ de vitesse pour la solution manufacturée stationnaire.	61
Figure 4.2	Solution manufacturée stationnaire, éléments Taylor-Hood : convergence des erreurs exactes et estimées avec le maillage.	62
Figure 4.3	Solution manufacturée stationnaire, éléments P1-P1 : convergence des erreurs exactes et estimées avec le maillage.	63
Figure 4.4	Solution manufacturée instationnaire : domaine et sa déformation. . . .	65
Figure 4.5	Solution manufacturée instationnaire - élément de Taylor-Hood : convergence de l'erreur avec le raffinement du maillage.	67
Figure 4.6	Solution manufacturée instationnaire - élément de Taylor-Hood : convergence de l'erreur avec le raffinement du pas de temps.	67
Figure 4.7	Solution manufacturée instationnaire - élément P1-P1 stabilisés : convergence de l'erreur avec le raffinement du pas de temps.	68
Figure 4.8	Erreur temporelle pour l'écoulement et les sensibilités.	71
Figure 4.9	Ballotement : domaine	72
Figure 4.10	Ballotement : vecteurs vitesse à $t = T/10$	73
Figure 4.11	Ballotement - éléments de Taylor-Hood : Convergence de l'erreur avec le raffinement du pas de temps.	74
Figure 4.12	Ballotement - éléments P1-P1 : Convergence de l'erreur avec le raffinement du pas de temps.	75

Figure 4.13	Évolution de l'élévation du point extrême droit de la surface libre en fonction du temps.	75
Figure 4.14	Zoom sur un maximum d'élévation du point droit de la surface libre avec le schéma IRK32.	76
Figure 4.15	Évolution du volume de fluide avec le temps.	76
Figure 4.16	Évolution de l'erreur temporelle avec le raffinement du pas de temps pour l'écoulement et les sensibilités.	77
Figure 4.17	Sensibilité du déplacement vertical à $t = 8.8T$ par rapport à la viscosité.	78
Figure 5.1	Évolution de la surface libre.	81
Figure 5.2	Onde solitaire : surface libre toutes les 10 secondes.	82
Figure 5.3	Oscillations derrière l'onde à $t = 60s$	83
Figure 5.4	Vitesse de propagation de l'onde.	83
Figure 5.5	Onde solitaires-non glissement : surface libre toutes les 10 secondes.	85
Figure 5.6	Élévation maximale de la surface libre.	86
Figure 5.7	Vitesse horizontale dans la couche limite et maillage.	87
Figure 5.8	Évolution de la surface libre, $h_1 = 0.35m$, glissement.	88
Figure 5.9	Évolution de la surface libre, $h_1 = 0.25m$, glissement.	89
Figure 5.10	Évolution de la surface libre, $h_1 = 0.35m$, non glissement.	91
Figure 5.11	Évolution de la surface libre, $h_1 = 0.25m$, non glissement.	92
Figure 5.12	Maillage et vitesse horizontale à $t = 1.5s$	94
Figure 5.13	Maillage et vitesse horizontale à $t = 2.3s$	95
Figure 5.14	Maillage et vitesse horizontale à $t = 2.86s$	96
Figure 5.15	Zoom sur la crête de la vague à $t = 2.86s$	97
Figure 5.16	Batteur à houle : évolution de la surface libre entre 47 et 50 secondes.	99
Figure 5.17	Batteur à houle : évolution de la surface libre entre 49 et 50 secondes.	100
Figure 5.18	Évolution de la surface libre à $x_s = 8.25m$	100
Figure 5.19	Propagation des vagues générées par un batteur à piston.	101
Figure 5.20	Interaction entre un cylindre et des vagues.	103
Figure 5.21	Déformée de surface libre à $t = 188s$	104
Figure 5.22	Forme de la surface libre pour $d = 1D$	105
Figure 5.23	Agrandissement d'une crête après le cylindre.	105
Figure 5.24	Efforts sur le cylindre pour $d = 1.5D$	106
Figure 5.25	Sensibilité du déplacement vertical par rapport à la position du cylindre.	109
Figure 5.26	Efforts recalculés et extrapolés pour $d = 1D$	110
Figure 5.27	Efforts recalculés et extrapolés pour $d = 2D$	110
Figure 5.28	Extrapolation de $d = 1.5D$ à $d = 1D$ pour le champ de vitesse à $t = 9.5T$	112

Figure 5.29	Extrapolation de $d = 1.5D$ à $d = 2D$ pour le champ de vitesse à $t = 9.5T$. 113
Figure 5.30	Sensibilité du déplacement vertical par rapport au rayon du cylindre. 114
Figure 5.31	Extrapolation de $dR = 0.5D$ à $R = 0.7D$ pour le champ de vitesse. . 115

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

ALE	Arbitrary Lagrangian Eulerian
	Arbitrairement Lagrangien Eulérien
CFD	Computational Fluid Dynamics
DSD/ST	Deforming Spacial Domain/Space Time
GCL	Geométric Conservative Law
IRK	Implcit Runge-Kutta
MAC	Marker And Cell
MEF	Méthode des Eléments Finis
MES	Méthode de l'Equation des Sensibilités
MMS	Method of Manufactured Solution
PSPG	Pressure-stabilizing/Petrov-Galerkin
RK	Runge-Kutta
SL	Surface libre
SPH	Smoothed Particules Hydrodynamics
SUPG	Streamline Upwind/Petrov-Galerkin
VOF	Volume Of Fluid

Caractères usuels

A	ampliude du batteur
a	amplitude de la houle
a_{ij}	coefficients du tableau de Butcher
b_j	coefficients du tableau de Butcher
c_j	coefficients du tableau de Butcher
c	vitesse de propagation d'une onde
C	courbure d'une surface
C_D	coefficient de traînée
C_M	coefficient d'inertie
D	diamètre du cylindre
e	erreur
f	champ scalaire
$\mathbf{f} = (f_x, f_y)$	vecteur des forces volumiques
\mathbf{f}	champ vectoriel

F	fonction coût
F	tenseur des taux de déformation
G	vecteurs des contraintes, équations d'état
g	champ gravitationnel
h	taille d'un élément du maillage
	hauteur de fluide
I	matrice ou tenseur identité
J	jacobien du tenseur des taux de déformation F
L	lagrangien du problème d'optimisation, longueur
$\mathbf{n} = (n_x, n_y)$	vecteur unitaire normal
N_e	nombre d'éléments dans le maillage
N_u	nombre de noeuds de calcul par élément pour la variables u
n_p	nombre de paramètres de design
p	pression
R	variables secondaires
\mathbf{R}	résidu des équations éléments finis
Re	nombre de Reynolds
S_x	sensibilité lagrangienne de la variable x
T	période
tr	trace d'un tenseur
$\mathbf{t} = (t_x, t_y)$	vecteur unitaire tangent
\mathbf{t}_f	tractions sur les frontières
$\mathbf{u} = (u, v)$	vecteur vitesse
\mathbf{U}	vecteur des variables d'état (inconnues)
$\mathbf{v}_m = (v_{mx}, v_{my})$	vitesse de maille
$\mathbf{V}^\alpha = (V_x^\alpha, V_y^\alpha)$	vitesse de déformation pour les sensibilités
$\mathbf{x} = (x, y)$	coordonnées cartésiennes
$\mathbf{x}^\alpha = (x^\alpha, y^\alpha)$	coordonnées sur le domaine déformé

Lettres calligraphiques

\mathcal{L}	système d'équations différentielles
\mathcal{F}	fonction coût
\mathcal{C}^1	ensemble des fonctions continûment différentiables

Lettres grecques

α	paramètre de forme
$\boldsymbol{\alpha}$	vecteur des paramètres de design
γ	tension superficielle
Γ	frontière du domaine
Γ^0	frontière du domaine de référence
Γ^α	frontière du domaine déformé
Γ_i	frontière du domaine où sont imposées les conditions de surface libre
Γ_t	frontière du domaine où sont imposées des conditions de Neumann en vitesse
Γ_u	frontière du domaine où sont imposées des conditions de Dirichlet en vitesse
δp	fonction test pour la pression
$\delta \mathbf{u}$	fonction test pour la vitesse
λ	longueur d'onde
λ_{ps}	coefficient de Lamé du pseudo-solide
μ	viscosité dynamique du fluide
μ_{ps}	coefficient de Lamé du pseudo-solide
ν	viscosité cinématique du fluide
ϕ	potentiel de vitesse
$\boldsymbol{\xi}$	vecteur de variables adjointes
ρ	masse volumique
$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur des contraintes fluides
$\boldsymbol{\tau}$	tenseur des contraintes visqueuses
τ	coefficient pour les termes de stabilisation
$\hat{\phi}$	transformation entre le domaine de référence et le domaine déformé
Ω	domaine de calcul
Ω_0	domaine de référence
Ω_α	domaine déformé
$\partial\Omega$	frontière du domaine de calcul
$d\Omega$	partie infinitésimale du domaine
ω	pulsation

Indices et exposants

${}_0$ ou 0	qui se rapporte au domaine de référence
${}_\alpha$ ou ${}^\alpha$	qui se rapporte au domaine déformé
*	solution exacte ou enrichie
-	valeur imposée par les conditions aux frontières,
=	tenseur d'ordre 2
-1	inverse
<i>exa</i>	solution exacte
<i>h</i>	solution éléments finis
<i>i</i>	composante d'un vecteur, valeur nodale
<i>ij</i>	composante d'un tenseur d'ordre 2
<i>T</i>	transposée
$-T$	inverse de la transposée
<i>th</i>	valeur théorique

Symboles

∇	opérateur gradient
$\nabla \cdot$	opérateur divergence
$\frac{\partial}{\partial} \cdot$	dérivée partielle (ou eulérienne)
$\frac{D}{D} \cdot$	dérivée totale (ou lagrangienne)
$\ \cdot\ $	norme

INTRODUCTION

Une surface libre est une interface entre un liquide et un gaz. Le mouvement du gaz a alors peu ou pas d'influence sur le mouvement du fluide. Les surfaces libres sont de taille et de nature très variées. Il peut s'agir de la surface d'océans, de lacs ou de canaux, de la surface d'un liquide dans un contenant, ou encore de gouttelettes. Elles sont donc nombreuses et interviennent dans beaucoup de cas pratiques notamment dans le domaine du transport maritime, pour la conception des coques de bateaux, pour les constructions offshore ou flottantes ou pour l'extraction d'énergie de la houle. Elles peuvent mettre en jeu des phénomènes physiques complexes. De multiples études expérimentales ont été réalisées à leur sujet mais elles restent coûteuses. Les modèles numériques permettent d'obtenir des résultats de plus en plus réalistes, mais impliquent souvent de faire des hypothèses simplificatrices (fluide parfait, écoulement irrotationnel, écoulement moyen sur la hauteur d'eau) ou alors ils deviennent coûteux. Ceci rend les études paramétriques compliquées lors du design d'objets en interaction avec des surfaces libres. C'est pourquoi dans ce contexte, les sensibilités deviennent très intéressantes. Les sensibilités sont les dérivées de l'écoulement par rapport aux paramètres de définition du problème. Ce paramètre peut définir la forme de l'objet ou sa position, il peut aussi s'agir d'une propriété du fluide ou de l'écoulement comme la viscosité, le nombre de Reynolds, l'amplitude d'une vague incidente, etc.. Les sensibilités permettent ainsi de calculer rapidement le gradient des fonctions de sorties qui peut ensuite être utilisé par un algorithme d'optimisation. Elles facilitent aussi la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu en quantifiant l'influence des paramètres de définition du problème. Ainsi, en un seul calcul, elles remplacent de nombreuses simulations sur des configurations perturbées. Cependant, peu de méthodes efficaces ont été développées pour le calcul des sensibilités des écoulements à surface libre car les paramètres affectent la forme du domaine. La forme de la surface libre étant une inconnue de l'écoulement, la méthode de calcul des sensibilités doit être adaptée à celle du calcul de l'écoulement.

Dans ce projet, nous nous proposons de combiner une méthode de calcul performante pour l'analyse de l'écoulement avec surface libre avec une analyse de sensibilité. Nous ferons donc tout d'abord une revue de littérature pour balayer les méthodes utilisées et les modèles correspondant pour le calcul de surface libre. Nous verrons ensuite quels sont les enjeux apportés par la présence de la surface libre pour le calcul des sensibilités et les différentes méthodes possibles. Grâce à cette étude, nous pourrons justifier notre choix d'une description arbitrairement lagrangienne-eulérienne pour l'écoulement couplée avec la méthode des sensibilités lagrangiennes. Dans le chapitre suivant, nous décrirons de manière détaillée la méthode

employée pour le calcul de la surface et ses enjeux numériques. Puis nous détaillerons les équations correspondantes pour les sensibilités. L'implémentation des équations sera alors vérifiée grâce à une étude de convergence spatiale et temporelle. Le dernier chapitre portera sur différentes applications en vue d'évaluer les performances de la méthode sur des cas pratiques comme le ballotement, la génération de houle ou le calcul d'efforts générés par la houle sur un cylindre.

CHAPITRE 1

REVUE DE LITTÉRATURE

1.1 Surface libre : définition

Une surface libre est une interface entre deux milieux. On considère un système constitué des 2 milieux différents (1) et (2) occupant chacun les parties Ω_1 et Ω_2 de l'espace Ω et séparés par une interface Γ_i . Ce domaine est illustré sur la figure 1.1. L'interface Γ_i sera une

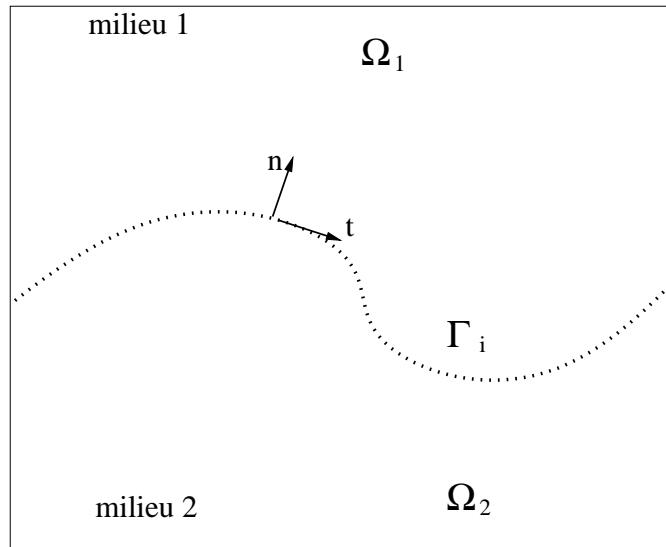


Figure 1.1 Domaine avec deux milieux

surface libre si le milieu (2) n'a pas d'influence sur le milieu (1), c'est-à-dire, si du point de vue du milieu (1), le milieu (2) peut être considéré comme du vide. La densité et la viscosité du milieu (2) doivent donc être négligeables par rapport à celle du milieu (1) donc $\rho_2 \ll \rho_1$ et $\mu_2 \ll \mu_1$.

1.1.1 Quelques propriétés des interfaces

La tension superficielle

Toute interface porte une énergie proportionnelle à sa surface. Le coefficient de proportionnalité positif s'appelle la tension superficielle et s'exprime en N/m ou en J/m^2 . Ainsi toute interface aura tendance à minimiser sa surface afin d'abaisser son énergie, c'est pourquoi

les bulles de savon sont sphériques. Pour une interface entre de l'air et de l'eau, la tension superficielle vaut $72mN/m$. Elle est à prendre en considération pour l'étude des gouttelettes, notamment pour l'éclatement de bulle, une étude numérique est par exemple présentée par Duchemin (2001). Il montre notamment comment les échelles de temps peuvent être variées dans l'étude de tels phénomènes. La capillarité est aussi responsable de la formation de ménisques et de nombreuses instabilités comme l'instabilité de Plateau-Rayleigh. Au passage d'une interface au repos, on observe un saut de pression, proportionnel à la tension superficielle qui peut s'exprimer par la loi de Laplace :

$$\Delta p = \gamma C \quad (1.1)$$

Le saut de pression observé dans une gouttelette sphérique de rayon R est donc $\Delta p = 2\gamma/R$. Par exemple, la surpression dans une bulle de champagne de rayon de l'ordre de 100 microns vaut une centaine de pascals.

Conditions limites de surface libre

- Conditions cinématiques : L'interface est une surface matérielle, c'est à dire que si elle est définie par une équation du type $F(x,z,t) = 0$, la dérivée matérielle de F doit être nulle donc

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F = 0 \quad (1.2)$$

En régime stationnaire, cette condition se réduit à $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$

- Condition dynamique : Condition sur les contraintes normales

Il s'agit d'une généralisation de la loi de Laplace citée précédemment. Au passage de l'interface, on observe un saut des contraintes normales proportionnel à la tension superficielle.

$$\sigma_1 \cdot \mathbf{n} - p_2 \mathbf{n} = \gamma C \mathbf{n} \quad (1.3)$$

Quelques nombres adimensionnels

Selon les cas étudiés plusieurs nombres sans dimension seront pertinents pour caractériser les systèmes. Ils permettront de comparer les effets des différents phénomènes mis en jeu.

Le nombre de Bond permet de comparer les effets de la gravité par rapport aux effets de la tension superficielle. Il s'exprime de la manière suivante :

$$Bo = \frac{\rho g L^2}{\gamma} = \frac{L^2}{l_c^2} \quad (1.4)$$

où L est une longueur caractéristique du problème. On voit alors apparaître la longueur capillaire $l_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$ qui fixe l'échelle en dessous de laquelle les effets de tension superficielle dominent les effets de la gravité (Quéré, 2004).

Le nombre capillaire permet de comparer les efforts visqueux par rapport à la tension superficielle :

$$Ca = \frac{\mu U}{\gamma} \quad (1.5)$$

Le nombre de Ohnesorge est parfois utilisé

$$Oh = \frac{\mu}{\sqrt{\rho \gamma L}} = \sqrt{\frac{Ca}{Re}} \quad (1.6)$$

où Re est le nombre de Reynolds, $Re = \rho U L / \mu$

Le nombre de Weber permet de comparer les effets d'inertie par rapport aux effets de la tension superficielle. Il s'exprime de la manière suivante :

$$We = \frac{\rho U^2 L}{\gamma} \quad (1.7)$$

Le nombre de Froude permet de comparer les effets d'inertie par rapport à la gravité, il a pour expression :

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}} \quad (1.8)$$

Le nombre de Cauchy permet de mesurer les déformations d'un solide dans l'écoulement sous l'effet de la pression dynamique.

$$Cy = \frac{\rho U^2}{E} \quad (1.9)$$

où E est le module de Young de la structure en question. De nombreux autres nombres peuvent être utilisés, on trouvera des exemples complémentaires dans le livre de Langre (2001).

Pour la modélisation de la houle, on utilisera le nombre d'Ursell :

$$Ur = \frac{H \lambda^2}{h^3} \quad (1.10)$$

où H est la différence de hauteur de la vague (crête à creux), λ est la longueur d'onde et h la profondeur d'eau au repos. Ce nombre permet de classer les différents types d'onde et de distinguer les théories valables.

1.1.2 Modélisation des écoulements à surface libre

Selon les cas étudiés, on peut utiliser différentes équations pour décrire le mouvement du fluide. On ne s'intéressera qu'aux écoulements laminaires, incompressibles et isothermes de fluides newtoniens. On considère un domaine Ω , sa frontière est notée Γ . La frontière se décompose en trois parties disjointes comme illustré sur la figure 1.2. La surface libre est notée Γ_i , la partie de la frontière sur laquelle sont imposées des conditions de Dirichlet est notée Γ_u et les conditions de Neumann sont imposées sur la portion de frontière Γ_t .

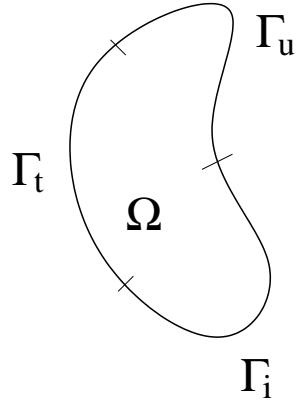


Figure 1.2 Domaine fluide comportant une surface libre.

Équations de Navier-Stokes

Les équations les plus générales sont les équations de Navier-Stokes. Elles expriment la conservation de la masse et la conservation de la quantité de mouvement dans le domaine Ω de la façon suivante.

$$\text{Continuité :} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.11)$$

$$\text{Mouvement :} \quad \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) - \rho g \mathbf{e}_z + \mathbf{f} \quad (1.12)$$

Avec les conditions aux frontières classiques :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (1.13)$$

$$-p \mathbf{n}^\alpha + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}^\alpha = \bar{\mathbf{t}}_f \quad \text{sur } \Gamma_t \quad (1.14)$$

où $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})$ est le tenseur des contraintes visqueuses défini de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) = \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$$

À ces conditions aux limites classiques s'ajoutent les conditions à l'interface énoncées au paragraphe 1.1.1

Ces équations sont complexes à résoudre, c'est pourquoi, selon les cas étudiés, on peut faire quelques simplifications.

Hypothèse hydrostatique

Une simplification peut être faite si l'étude porte sur des écoulements quasi-horizontaux, c'est-à-dire pour lesquels les vitesses horizontales sont beaucoup plus grandes que la vitesse verticale. Dans ces conditions, l'accélération et la diffusion dans la direction verticale peuvent être négligées. Ainsi la projection de l'équation du mouvement sur l'axe vertical devient

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \quad (1.15)$$

La pression se réduit donc à la pression hydrostatique.

Équations de Saint-Venant

Dans le cas des eaux peu profondes, en pratique, il n'est pas intéressant de connaître les vitesses verticales ni la répartition des vitesses dans le plan vertical mais seulement leur moyenne (Viollet, 1998). Dans ces cas, ce sont les équations de Saint-Venant qui sont utilisées. Sous l'hypothèse hydrostatique en supposant que l'écoulement est quasi horizontal et que les vitesses verticales sont négligeables, les équations de Navier-Stokes sont moyennées sur la verticale. Elles s'expriment de la façon suivante :

$$\text{Continuité :} \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) = 0 \quad (1.16)$$

$$\text{Mouvement :} \quad \frac{\partial h\mathbf{u}}{\partial t} + (h\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -gh\nabla z_s + \nabla \cdot (h\nu\Delta\mathbf{u}) + h\mathbf{f} \quad (1.17)$$

où h est la hauteur de fluide et z_s la cote de la surface libre. Elles servent très souvent pour décrire les écoulements dans les rivières et les canaux ou des mers le long de côtes. Elles admettent des solutions discontinues, qui permettent de calculer les ressauts lors de la transition entre les régimes torrentiel et fluvial dans les rivières et dans les canaux.

Équations de Stokes

Lorsque les forces visqueuses dominent la convection, le nombre de Reynolds est très petit et on peut négliger le terme convectif dans les équations de Navier-Stokes (Barthès-Biezel,

2005).

$$\text{Continuité :} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.18)$$

$$\text{Mouvement :} \quad \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) - \rho g \mathbf{e}_z + \mathbf{f} \quad (1.19)$$

Ces équations, dites des écoulements rampants, sont utilisées dans les problèmes de lubrification, de graissage.

Théorie potentielle

Dans de nombreuses applications, le fluide est supposé non visqueux. De plus, si l'écoulement est irrotationnel, la théorie potentielle s'applique. Il existe donc un potentiel ϕ tel que $\mathbf{u} = \nabla \phi$. L'équation de la continuité devient alors $\Delta \phi = 0$. On suppose aussi que les forces sont conservatives et dérivent d'un potentiel ψ . Alors d'après le deuxième théorème de Bernoulli, l'écoulement est décrit par l'équation suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} + \psi = C(t) \quad (1.20)$$

Dans le cas où le fluide n'est soumis qu'à la gravité, $\psi = gz$. En deux dimensions, la surface libre est représentée par l'équation $z = \eta(x, t)$. Les conditions de surface libre deviennent alors

– Condition cinématique :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1.21)$$

– Condition dynamique :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + gz = 0 \quad (1.22)$$

Les conditions de surface libre compliquent la résolution car elles sont non linéaires. Le problème peut être linéarisé en développant le potentiel en série de Taylor par rapport à un petit paramètre.

Modélisation de la houle et des ondes

Les surfaces libres sont très souvent sujettes à la propagation d'ondes comme la houle ou les tsunamis pour l'océan. Dans beaucoup de modélisations, on utilise la théorie potentielle. Les équations sont alors simplifiées selon les cas étudiés. Le nombre d'Ursell permet de discriminer plusieurs cas.

Si le nombre d'Ursell est très petit, les effets non linéaires de la surface libre sont

négligeables devant les phénomènes de dispersion. On peut appliquer la procédure dite de Stokes qui consiste à développer les variables (donc le potentiel ϕ) par rapport à la cambrure des vagues donnée par $\varepsilon = A/\lambda$ où A est l'amplitude de la vague et λ sa longueur d'onde. Une étude détaillée est donnée par Molin (2002).

Si le nombre d'Ursell est de l'ordre de 1, il s'agit d'ondes cnoïdales ou d'ondes solitaires. On suppose alors que la hauteur d'eau est petite devant la longueur d'onde et que l'amplitude des vagues est petite devant la hauteur d'eau. On a donc

$$\frac{h}{\lambda} \ll 1 \text{ et } \frac{A}{h} = O\left(\frac{h^2}{\lambda^2}\right) \quad (1.23)$$

En combinant la théorie potentielle et ces hypothèses, on obtient les équations de Boussinesq (1872) décrites en détail par Svendsen (2006) :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(h + \eta)u_0}{\partial x} = \frac{1}{6}h^3 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_0^2}{\partial x} = \frac{1}{2}h^2 \frac{\partial^3 u_0}{\partial^2 x \partial t} \quad (1.25)$$

où u_0 est la vitesse au fond. Ces équations peuvent encore se simplifier selon le cas. Elles permettent par exemple une bonne description des ondes solitaires.

Toutes ces modélisations mènent à des équations n'ayant pas de solution analytique. De nombreuses méthodes numériques ont été développées pour les résoudre et calculer notamment de manière précise la localisation de l'interface. Ces méthodes sont décrites dans la section 1.2.

1.1.3 Quelques exemples d'écoulements à surface libre

Cette section décrit rapidement quelques écoulements qui ont été largement étudiés aussi bien analytiquement, qu'expérimentalement ou numériquement. Ils pourront donc être fort utiles pour valider nos développements.

Écoulements pouvant servir de validation

Jets Les jets peuvent être de nombreuses natures, stable ou instable, impactant ou libre. En particulier, les jets stationnaires s'avèrent utiles pour la vérification de code. Dans d'autres situations, le jet peut se briser sous l'effet de la tension superficielle. Tous ces cas sont détaillés dans le livre de Middleman (1995).

Bris de barrage Le cas du bris de barrage est largement utilisé pour valider une méthode de calcul. Le cas classique est le suivant. Le fluide est retenu par un barrage et à $t=0$, la paroi du barrage est enlevée, le fluide peut donc s'écouler en s'affaissant sous l'effet de son propre poids. On étudie alors la position du point d'avancement maximum avec le temps (Huerta et Liu, 1988). Ce cas a fait l'objet de nombreuses études expérimentales (Jeyapalan, 1980) pouvant servir de base de comparaison.

Modes oscillatoires de bulles Sous l'effet de la tension superficielle, éloignée de sa position d'équilibre et en négligeant les frottements, une bulle oscillera autour de sa position d'équilibre. Elle peut osciller selon plusieurs modes bien connus et décrits par des formules analytiques. Ceci constitue une bonne base pour valider la modélisation de la tension superficielle (Dettmer et Peric, 2006b).

Ballottement de petite et grande amplitude L'étude porte sur les oscillations de la surface libre d'un fluide dans un réservoir. On peut étudier les oscillations de faibles amplitudes : la surface libre ou l'interface est perturbée et on étudie son retour à l'équilibre. Lorsque le contenant est en mouvement, les déformations de la surface libre sont plus importantes. Ceci s'applique au transport sur bateau de containers de gaz naturel liquéfié. Sous l'effet de la houle, les réservoirs ont un mouvement oscillatoire qui peut provoquer des mouvements de forte amplitude du liquide. Le fluide peut alors exercer des efforts importants sur les parois du container, notamment lorsque les vagues déferlent. Ibrahim (2005) développe la théorie et les applications de tels problèmes.

Écoulements plus complexes

Vagues et points d'impact Un peu dans la même optique que le ballottement, on peut étudier l'évolution d'une vague sur un plan incliné puis l'impact de cette vague, ayant éventuellement déferlé sur une paroi élastique. Kimmoun *et al.* (2009) ont fait de nombreuses expériences à ce sujet.

Profil d'aile ou cylindre sous une surface libre Il s'agit d'étudier le comportement d'un profil d'aile sous la surface libre pour mieux comprendre le comportement des hydrofoils. Par exemple, Zhu *et al.* (2006) proposent une étude numérique des oscillations observées sur la surface libre au dessus d'un profil oscillant. Dans la même gamme de problème, on peut citer Mironova (2008) qui étudie un cylindre oscillant sous une surface libre ou Lu *et al.* (2008) qui a simulé un écoulement turbulent avec surface libre au dessus d'un obstacle cylindrique.

1.2 Méthodes numériques

Pour simuler les écoulement à surface libre, il faut calculer les différentes inconnues du problèmes sur un domaine fluide dont la géométrie dépend de la solution. Les différentes approches peuvent se classer en trois catégories selon le type de maillage adopté.

- Les calculs peuvent être effectués sur un maillage fixe. La position de l'interface est reconstruite par le calcul sur le maillage de fond, ce sont des méthodes dites eulériennes.
- Le domaine peut être déformé en même temps que l'interface, on parle alors de méthodes lagrangiennes ou lagrangiennes-eulériennes.
- Enfin, d'autres méthodes n'utilisent pas de maillage.

Nous allons donc dans cette partie décrire les techniques les plus utilisées pour chaque catégorie en essayant d'en dégager les principaux avantages et inconvénients.

1.2.1 Méthodes avec maillage fixe

Une formulation eulérienne est utilisée pour décrire le mouvement du fluide. Le maillage est donc fixe et l'interface est capturée par différentes techniques. Ces méthodes peuvent se diviser en 2 catégories (voir Gopala et van Wachem, 2008). Soit chaque milieu est marqué de façon à le distinguer des autres (marqueurs, VOF), soit l'interface elle-même est repérée (level set method, *front tracking method*).

Volume de fluide (Volume of fluid VOF)

Cette méthode est très utilisée et à été développée au début des années 80 par Hirt et Nichols (1981) et largement développée au fil des années pour améliorer la précision de la capture d'interface.

Chaque domaine est identifié à l'aide d'une fonction indicatrice, valant 1 dans un domaine, 0 dans un autre. Pour les éléments du maillage qui contiennent une portion de l'interface, cette fonction θ représente la fraction de volume occupé par chaque fluide. L'écoulement peut alors être calculé sur tout le domaine en utilisant une combinaison des propriétés de chaque milieu. Par exemple, pour la densité et la viscosité, on prendra $\rho = \theta\rho_1 + (1 - \theta)\rho_2$ et $\mu = \theta\mu_1 + (1 - \theta)\mu_2$ où θ vaut 0 dans le milieu 1 et vaut 1 dans le milieu 2. La fraction de fluide θ est calculée grâce à une équation de convection :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = 0 \quad (1.26)$$

L'enjeu principal des méthodes VOF est alors de résoudre correctement cette équation. La plupart des schémas classiques sont trop diffusifs ou créent des oscillations purement

numériques. Il en résulte une mauvaise conservation de la masse ou une mauvaise géométrie de l'interface, ce qui affecte le calcul de la tension superficielle. De nombreuses corrections ont donc été proposées. Pour assurer la conservation du volume, McDavid et Dantzig (1998) proposent la méthode suivante : la fraction de volume est intégrée sur chaque élément pour obtenir une fraction de remplissage de l'élément et est actualisée en calculant les flux passant par la partie "mouillée" de chaque arête de l'élément. D'autres approches sont comparées par Gopala et van Wachem (2008). La plupart reposent sur une approximation de flux donneur-accepteur proposée initialement par Hirt et Nichols (1981) pour les méthodes VOF. Elle a été développée et améliorée par Ubbink et Issa (1999) pour donner le schéma CICSAM qui permet une reconstruction précise de l'interface et une bonne conservation de la masse. Aulisa *et al.* (2003) ont développé un schéma permettant de conserver la masse exactement.

Les autres enjeux des méthodes VOF sont la localisation de l'interface et l'application de la tension superficielle sur l'interface. En effet, la géométrie de la surface libre étant reconstruite *a posteriori*, le traitement des conditions limites est délicat. Il existe plusieurs techniques de reconstruction. Par exemple, l'interface peut être délimitée dans une cellule par un segment parallèle à un des axes de coordonnées, il s'agit de la méthode SLIC (*simple line interface calculation*), ou alors la reconstruction peut être linéaire, c'est la méthode PLIC (*piecewise linear interface calculation*). La seconde est plus précise que la première. Pour plus de détails, on consultera Scardovelli et Zaleski (1999). Une autre approche consiste à considérer θ comme une pseudo-concentration. L'interface correspond alors aux points pour lesquels $\theta = 1/2$ (Thompson, 1986; Dufour et Malidi, 2004).

Pour la tension superficielle, Brackbill *et al.* (1992) propose une technique CSF (*Continuum Surface Force*) qui permet de transformer la force surfacique de la tension superficielle en une force volumique équivalente. Cette technique repose sur un lissage de la discontinuité à l'interface.

Ces méthodes sont largement utilisées pour le calcul des écoulements avec des interfaces multiples pouvant se briser ou pour la prédiction de la coalescence de bulles. On notera les travaux de Löhner *et al.* (2007) sur le ballottement avec déferlement de vagues ou de Mironova (2008) sur l'étude de l'effet d'une surface libre sur l'allée de vortex dans le sillage d'un cylindre oscillant.

Méthodes d'ensemble de niveaux (*Level Set Method*)

Cette méthode a été développée par Dervieux et Thomasset (1981) et Osher et Sethian (1988) pour calculer la position d'interfaces de toutes sortes ou pour tracer des contours de même intensité dans les images. La méthode est décrite dans un cadre général dans le livre de Sethian (1996) et a été adaptée aux problèmes de mécanique des fluides par Sussman

et al. (1994) et Chang *et al.* (1996). Le principe de cette méthode est d'ajouter aux inconnues du fluide une fonction représentant la distance à l'interface Φ . L'interface se trouve sur le contour de valeur nulle de cette fonction. Son signe permet de distinguer les deux milieux de façon consistante. La valeur de cette fonction est ensuite déplacée par convection avec le fluide, de sorte que son équation d'évolution est la suivante :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi = 0 \quad (1.27)$$

Cette formulation est très intéressante car la fonction Φ apporte de nombreuses informations sur l'interface. Par exemple, la normale et la courbure s'obtiennent en évaluant les gradients de Φ . Ainsi, $\mathbf{n} = \nabla \Phi / \|\nabla \Phi\|$. La tension superficielle est alors imposée comme un terme source non local (voir Chang *et al.*, 1996), d'une manière similaire à la méthode de force continue (Brackbill *et al.*, 1992). Les propriétés du fluides sont évaluées de la façon suivante : si Φ est négative dans le milieu (1) et positive dans le milieu (2), alors la masse volumique et la viscosité s'expriment par :

$$\rho(x) = \rho_1 + H(\Phi(x))(\rho_2 - \rho_1) \quad (1.28)$$

$$\mu(x) = \mu_1 + H(\Phi(x))(\mu_2 - \mu_1) \quad (1.29)$$

où H est la fonction de Heaviside (nulle si $x < 0$, unitaire ailleurs). Ces équations doivent être régularisées pour permettre la résolution numérique, le plus souvent en remplaçant la fonction de Heaviside sur un petit intervalle entourant 0 par une portion de sinusoïde (Peskin, 1977). Un des défis de cette méthode est la discrétisation des termes convectifs de l'équation d'évolution de Φ (1.27). En effet, la résolution de cette équation peut mener à des oscillations ou alors à des schémas numériques trop diffusifs. Le schéma le plus utilisé est le schéma ENO (*essentially non-oscillatory advection scheme*). Ce schéma est précis au deuxième ordre (Shu et Osher, 1989). Il a été fortement amélioré pour obtenir des schémas WENO (*weighted essentially non-oscillatory advection scheme*) précis jusqu'aux 11ème ordre (Kurioka et Dowling, 2009) qui permettent aussi de réduire la taille du maillage nécessaire pour avoir une précision suffisante. La formulation ne permettant pas non plus de conserver la masse, la fonction Φ doit être réinitialisée pour préserver ses propriétés de distance à l'interface au cours du temps. Plusieurs possibilités ont été proposées dans les travaux de Sussman *et al.* (1994) et Chang *et al.* (1996) et reposent sur le constat que le mouvement normal de l'interface dû à la diffusion numérique dépend de sa courbure. Malgré ces quelques difficultés, cette formulation est très largement employée car Φ est une fonction dont la topologie des contours $\Phi = 0$ peut changer. Ainsi, cette méthode permet de simuler facilement des gouttelettes qui fusionnent, qui impactent sur une surface d'eau ou qui éclatent, des vagues déferlantes, des interfaces

qui subissent de grandes déformations ou l'atomisation d'un jet laminaire. On pourra noter les travaux de Sussman *et al.* (1994) et de Chang *et al.* (1996) sur la coalescence de bulles avec tension superficielle, ceux de Yue *et al.* (2005) sur l'étude d'écoulements turbulents dans des canaux ouverts et l'interaction entre le fond et la surface, de Ilinca et Hétu (2008) sur le remplissage de moule avec des suspensions denses ou de Chen et Yu (2009) sur des jets ou l'écoulement autour de coques de bateaux.

Les Marqueurs

Les marqueurs sont des particules intégrées au fluide qui permettent d'identifier la nature du milieu. McKee *et al.* (2008) en donnent un bref historique. Les premières méthodes appelées *Particule in cell (PIC)* ont été développées à la fin des années 50 par Ervin et Harlow (1957). Des particules matérielles transportaient la masse et la nature du fluide. Cependant le schéma était trop diffusif. La méthode MAC (*Marker and Cell*) fut ensuite développée par Welch *et al.* (1965). Des particules virtuelles sans masse permettent d'identifier le milieu. Elles se déplacent de cellule en cellule sur un maillage fixe cartésien. Au départ, des particules sont réparties uniformément dans les cellules, identifiant un certain fluide, ou s'il n'y a aucune particule une cellule vide. Les particules se déplacent en fonction de la vitesse calculée au centre de la cellule. Pour avoir une grande précision, il faut donc beaucoup de marqueurs. De plus, à cause du schéma temporel explicite, la condition CFL doit être respectée. Les marqueurs ne peuvent donc pas se déplacer de plus d'une cellule par pas de temps. On peut donc se limiter aux cellules décrivant la surface et à leur voisine pour la mise à jour de la position des marqueurs. L'interface peut aussi être sujette à des ondulations. Ceci peut être corrigé en introduisant des sous-cellules (de Sousa *et al.*, 2004). La forme de l'interface est ensuite interpolée entre les positions des marqueurs dans une cellule et ses voisines, par exemple une interpolation quadratique est suffisante pour calculer la normale et la courbure (de Sousa *et al.*, 2004).

Les marqueurs sont utilisés également pour identifier l'interface elle même (Shyy, 1996). Cette méthode est numériquement moins coûteuse que la précédente puisque le nombre de marqueurs nécessaires pour estimer la position de l'interface est moins important. Les particules sont placées sur l'interface et déplacées avec la vitesse du fluide de façon purement lagrangienne. La géométrie de l'interface est ensuite interpolée. Shyy (1996) propose une interpolation à l'aide d'arc de cercles, ce qui permet de calculer la courbure en même temps. Popinet et Zaleski (1999) utilisent des splines cubiques, ce qui est plus précis. La position de l'interface étant connue dans un maillage fixe, il est alors facile de calculer des fractions de volumes et ainsi les propriétés du fluide à utiliser. Popinet et Zaleski (1999) ont comparé leur méthode de marqueurs avec une méthode VOF classique pour étudier l'instabilité de Taylor-

Rayleigh. Les résultats montrent que l'utilisation des marqueurs permet de localiser l'interface de manière très précise. Ils peuvent donc être utilisés pour capter des phénomènes de petite échelle. Par exemple, Duchemin (2001) utilise cette méthode pour simuler l'éclatement d'une bulle d'air à la surface de l'eau.

Ces méthodes se montrent assez performantes mais demandent une attention particulière si la topologie de l'interface change. Par exemple, si deux interfaces fusionnent ou si une interface se divise. On trouvera des exemples de procédures pour traiter ce problème dans Shyy (1996) et McKee *et al.* (2008).

Avantages et inconvénients

Ces méthodes offrent de multiples avantages. Comme l'interface est reconstruite sur un maillage fixe, les changements topologiques de l'interface ou des déformations importantes sont faciles à gérer. De plus, comme le maillage est fixe, l'adaptation de maillage est aisée et peut améliorer grandement la précision du calcul. La présence de la surface libre demande de résoudre en général une équation supplémentaire de transport, ce qui n'est pas numériquement très coûteux. Cependant, ce calcul doit être très précis. Ceci est en effet le principal inconvénient des méthodes à maillage fixe. La reconstruction approximative de la position de l'interface fausse la conservation de la masse. Les choses se compliquent encore si l'on envisage des situations avec plus de deux fluides. L'imposition des conditions aux limites sur l'interface, notamment la tension superficielle est, elle aussi, plus délicate. De nombreux algorithmes ont donc été développés pour accroître la précision de ces méthodes qui sont très largement utilisées.

1.2.2 Méthodes sans maillage

Méthodes intégrales

Ces méthodes permettent d'écrire les équations du fluide par des intégrales sur la frontière seulement, ce qui permet de réduire d'une dimension le problème. Cependant, ces méthodes mènent à de bons résultats seulement si les équations sont linéaires (Shyy, 1996). Elles sont donc utilisées principalement pour les écoulements potentiels ou régis par les équations de Stokes. Plus de détails sont donnés sur la formulation par Dijkstra et Mattheij (2008). Par exemple, Bergmann *et al.* (2009) utilisent une telle méthode pour simuler les cavités formées par la chute d'un disque dans de l'eau. Leurs résultats sont alors en accord avec les résultats expérimentaux. Sun et Faltinsen (2006) simulent grâce à cette approche l'impact d'un écoulement d'eau sur un cylindre élastique.

Méthode à particules lagrangiennes : SPH

La méthode dite *Smoothed Particules Hydrodynamics* (SPH) a été élaborée à l'origine en astrophysique et adaptée à la simulation des écoulements avec interface par Monaghan (1994). Cette méthode utilise des particules lagrangiennes qui possèdent les propriétés matérielles du milieu décrit, une masse et une vitesse propre. Ces méthodes s'appliquent aux fluides compressibles et ont tendance à devenir instables quand la vitesse du son devient trop grande. Pour des fluides incompressibles, cette dernière est fixée arbitrairement de sorte que les variations de densité dans le fluide sont inférieures à 1%. Les équations de Navier Stokes sont alors formulées d'un point de vue lagrangien. Les quantités nécessaires (vitesses, pression, densité, leur dérivée lagrangienne par rapport au temps et leurs gradients) sont calculées par la discréétisation suivante. Une fonction f en un point \mathbf{r} est approchée par

$$f(\mathbf{r}) \approx \int_D f(\mathbf{x}) W(\mathbf{r} - \mathbf{x}, h) d\mathbf{x} \quad (1.30)$$

où D est un domaine circulaire de rayon proportionnel à h centré en \mathbf{r} et W est un noyau qui tend vers une distribution de Dirac quand h tend vers 0. Grâce à une intégration par parties, on définit facilement l'expression du gradient de f de la façon suivante :

$$\nabla f(\mathbf{r}) \approx \int_D f(\mathbf{x}) \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{x}, h) d\mathbf{x} \quad (1.31)$$

Ces expressions sont ensuite approchées par une quadrature de sorte que

$$f(\mathbf{r}_i) \approx \sum_j f(\mathbf{r}_j) W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h) \omega_j \quad (1.32)$$

où les points \mathbf{r}_j sont les points d'interpolation dans le domaine D . Des algorithmes performants doivent être développés pour trouver les voisins d'une particule, on trouvera un exemple dans l'article de Viccione *et al.* (2008).

Les conditions de surface libre n'ont pas à être imposées car elles sont satisfaites naturellement par la formulation. La tension superficielle peut être imposée par une méthode CSF comme pour les formulations VOF. Cependant, les conditions aux limites sont délicates à imposer pour une paroi solide. Il faut par exemple créer des particules fantômes de l'autre côté de la frontière (Oger *et al.* (2006) et Fang *et al.* (2006)).

Les méthodes SPH permettent de simuler une large variété d'écoulement. La topologie de l'interface peut changer. Le traitement de détachements de gouttelettes ou de vagues déferlantes ne pose donc aucun problème. Elles peuvent aussi être couplées avec des modèles de turbulence, Shao et Ji (2006) ont ainsi obtenu de très bon résultats pour des vagues

déferlantes. De plus, ces méthodes sont faciles à implémenter et ne demandent pas de maillage. Cependant, elles peuvent se montrer instables et peu précises (Oger *et al.*, 2006). Des formulations ont été développées pour pallier ces problèmes (Grenier *et al.*, 2009; Fang *et al.*, 2009). Grenier *et al.* (2009) comparent leurs résultats sur une instabilité de Taylor Rayleigh avec la méthode des ensembles de niveaux classique. Leur formulation SPH donne des résultats similaires mais converge beaucoup plus vite quand le nombre de particules augmente.

1.2.3 Méthodes à maillage mobile

D'autres méthodes sont dites "à maillage mobile". Une des frontières du domaine est l'interface elle-même, le domaine de calcul se déforme alors en même temps que le domaine matériel. Ce cas peut être traité de manière purement lagrangienne ou en choisissant un point de vue lagrangien-eulérien.

Méthodes complètement lagrangiennes

Ces méthodes reposent sur une écriture complètement lagrangienne des équations Navier-Stokes, c'est à dire que l'équation du mouvement (1.12) devient

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) - \rho g \mathbf{e}_z + \mathbf{f} \quad (1.33)$$

Le maillage suit alors les particules fluides. Feng et Peric (2000) donnent un exemple de cette méthode avec une formulation espace-temps. L'avantage de cette méthode est que la position de l'interface est parfaitement connue puisqu'il s'agit d'une frontière du domaine. Cependant, comme le maillage suit l'écoulement, des distorsions apparaissent rapidement, comme le montre l'exemple de l'écrasement d'une colonne de fluide. Il faut alors remailler le domaine. Powell et Savage (2001) utilisent un critère de qualité du maillage pour remailler quand les éléments sont trop étirés ou lorsque la courbure de l'interface devient grande afin de conserver une bonne précision. Il faut donc jumeler cette formulation à une technique automatique de remaillage, ce qui rend le processus coûteux.

Méthodes mixtes : Formulation Lagrangienne-Eulérienne (ALE)

La formulation lagrangienne-eulérienne ALE (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*) a été proposée au début des années 70 par Hirt *et al.* (1997) pour utiliser une description lagrangienne du fluide tout en gardant une grande flexibilité du maillage. Elle a été adaptée à la formulation éléments finis par Hughes *et al.* (1981). L'interface constitue une des frontières du domaine, ce qui permet de connaître précisément sa position et de faciliter l'imposition des conditions

aux limites. Le maillage a alors sa déformation propre. Si \mathbf{v}_m est la vitesse de déformation du maillage, alors elle doit être telle que $(\mathbf{u} - \mathbf{v}_m) \cdot \mathbf{n} = 0$ à la surface libre. Ainsi, pour un canal, les noeuds à la surface libre ne sont pas forcés de se déplacer à la vitesse du fluide, ce qui évite les distorsions. Cependant, le domaine doit être remaillé lorsque la déformation de l'interface devient trop grande ou quand l'interface change de topologie. Dettmer et Peric (2006b) montrent comment on peut intégrer la force de la tension superficielle dans une formulation éléments finis et obtiennent de bons résultats en simulant la chute de gouttelettes ou un bris de jet. Cette formulation est aussi largement utilisée en interaction fluide-structure (Etienne *et al.*, 2006; Dettmer et Peric, 2006a).

Procédure DSD/ST(*deforming spacial domain/space time*)

Cette approche consiste à écrire la formulation variationnelle éléments finis du problème sur un domaine espace temps $Q_n = \Omega \times [t_n, t_{n+1}]$. L'interface constitue ici aussi une frontière du domaine, donc sa géométrie est connue explicitement. Ainsi aucune vitesse de déformation n'apparaît dans la formulation. Celle-ci doit cependant être calculée pour mettre à jour le domaine d'un pas de temps à l'autre. Cette formulation a été développée et testée par Tezduyar *et al.* (Tezduyar *et al.*, 1992a,b)

1.2.4 Conclusion

Les écoulements à surface libre sont complexes à simuler car la position de l'interface n'est pas connue *a priori*. Différentes approches ont été développées pour résoudre ces problèmes. Il faut donc choisir la méthode appropriée en fonction de l'application. Les critères seront notamment la précision souhaitée sur la position de l'interface et la prise en compte la tension superficielle. Dans ce dernier cas, les méthodes à maillage mobile semblent plus adaptées. Si l'on s'attend à des déformations très importantes de l'interface ou à des changement topologiques, les méthodes à maillage fixe telles que les méthodes à lignes de niveaux ou VOF seront plus appropriées.

1.3 Formulation Lagrangienne-Eulérienne (ALE)

Des méthodes décrites précédemment, les méthodes à maillage mobile sont celles qui permettent d'obtenir le plus de précision sur la position de la surface libre. Ainsi, dans l'optique de calculer l'influence de divers paramètres sur l'interface, ces techniques semblent plus appropriées. La méthode lagrangienne-eulérienne permet d'avoir une grande flexibilité pour la déformation du domaine.

1.3.1 Équations de Navier Stokes

La cinématique eulérienne-lagrangienne permet d'introduire une déformation du domaine indépendante de l'écoulement. On introduit alors la vitesse de déformation du domaine \mathbf{v}_m , appelée également vitesse de maille. Sur le domaine ainsi déformé, les équations de Navier Stokes prennent la forme suivante :

$$\text{Continuité :} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.34)$$

$$\text{Mouvement :} \quad \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho((\mathbf{u} - \mathbf{v}_m) \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) - \rho g \mathbf{e}_z + \mathbf{f} \quad (1.35)$$

Conditions aux limites On souhaite que le domaine suive la déformation de l'interface. Les conditions aux limites du problème deviennent alors :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (1.36)$$

$$-p \mathbf{n}^\alpha + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}_f \quad \text{sur } \Gamma_t \quad (1.37)$$

$$(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_i \quad (1.38)$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \quad \text{sur } \Gamma_i \quad (1.39)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{n} = \gamma C \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_i \quad (1.40)$$

Ces conditions ont le même sens physique que précédemment. La condition (1.38) traduit le fait que l'interface est une surface matérielle.

1.3.2 Déformation du domaine de calcul

Comme on peut le constater dans l'équation (1.35), la vitesse de déformation du domaine intervient dans les équations du mouvement. Il faut donc la calculer dans tout le domaine. Elle doit être régulière et respecter les conditions aux limites

Déformation du domaine Elle est arbitraire puisqu'elle n'a pas de signification physique. Il s'agit d'un artifice de calcul. La qualité du maillage dépendra de la déformation choisie. On recense plusieurs techniques. Hughes *et al.* (1981) proposent de calculer la vitesse de convection $\mathbf{u} - \mathbf{v}_m$ comme une fonction linéaire de la vitesse matérielle des particules fluides. Cette fonction doit être précisée pour chaque point du domaine à chaque pas de temps, il est donc difficile de maintenir une bonne qualité du maillage. Huerta et Liu (1988) ne calculent que la déformation de l'interface, la déformation à l'intérieur du domaine est définie comme un certain pourcentage de la déformation de l'interface. Cependant, les phénomènes de déferlement ne peuvent pas être calculés de cette manière. Dans l'article de Soulaimani et Saad (1998), la déformation est calculée avec l'opérateur de Laplace, ainsi la vitesse de déformation du maillage est solution de $\Delta \mathbf{v}_m = 0$. La technique du pseudo-solide est largement utilisée : le maillage se déforme comme un solide linéaire (Sackinger *et al.*, 1996). Cette technique est très souple, car le choix des coefficients de Lamé est libre. Stein *et al.* (2003) profitent de cette flexibilité pour éviter les trop grandes distorsions de maillage en choisissant une structure plus rigide pour les éléments de petite taille ou de petit volume. On peut aussi optimiser la qualité du maillage en fonction d'un critère donné. Par exemple, Dettmer et Peric (2006b) choisissent de rendre minimal pour chaque élément le rapport entre le rayon du cercle inscrit au triangle et le rayon du cercle circonscrit.

Déplacement des frontières Les noeuds sur les frontières fixes doivent respecter $\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{n} = 0$. Sur l'interface, la condition cinématique de non pénétration impose que $(\mathbf{u} - \mathbf{v}_m) \cdot \mathbf{n} = 0$. Pour que le problème soit bien posé, il faut ajouter une condition supplémentaire. Dans le cas d'une interface fluide-solide, le déplacement des noeuds de la frontière peut être fixé par le déplacement du solide car il ne sera pas trop important. Ainsi, $\mathbf{u} = \mathbf{v}_m$ sur Γ_i de sorte que la description de l'interface devient totalement lagrangienne. Cette solution n'est pas très efficace pour les autres types d'interface. En effet, pour une interface fluide-structure, les vitesses à l'interface sont relativement faibles, donc la distorsion du maillage reste acceptable dans la plupart des cas. Cependant, pour une surface libre, la description lagrangienne entraînera souvent de trop grandes distorsions, ce sera le cas pour le calcul de l'écoulement dans un canal ouvert. Il faut donc envisager d'autres solutions. Dans le cadre de l'approche pseudo-solide, Sackinger *et al.* (1996) proposent la démarche suivante. Sur l'interface, les résidus du déplacement du pseudo-solide sont projetés sur la normale et la tangente à la courbe. Le résidu normal est remplacé par la condition de non pénétration (ou de tangence) et le pseudo-solide est libre de contraintes dans la direction tangentielle. Une autre possibilité consiste à optimiser la qualité du maillage à l'interface. On peut alors intégrer ces noeuds dans le processus global, mais cette démarche est délicate car

il faut intégrer la condition (1.38), ce qui demande des efforts particuliers d'implémentation (Dettmer et Peric, 2006b). Un critère *ad hoc* a été proposé par Braess et Wriggers (2000). Il consiste à répartir les noeuds le long de l'interface de sorte que les éléments linéaires créés par ces points soient tous de même longueur. Cruchaga *et al.* (2006) proposent de répartir les noeuds en les concentrant dans les zones où la courbure de l'interface est importante afin d'avoir une description plus précise de celle-ci.

1.3.3 Méthode des éléments finis

Pour résoudre, le système d'équations modélisant l'écoulement (1.34-1.35) est mis sous forme faible. Soit $\delta\mathbf{u}$ une fonction test ayant la même régularité que \mathbf{u} et s'annulant sur Γ_U et δp une fonction test associée à la pression. En multipliant les équations (1.34-1.35) par les fonctions test et en intégrant les termes appropriés par partie, on obtient le système faible suivant :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \delta p \, d\Omega = 0 \quad (1.41)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho ((\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \nabla \delta \mathbf{u} \, d\Omega \\ = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\tau} - p \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (1.42)$$

Le terme de bord dans (1.42) se décompose de la manière suivante (en supposant que l'on se situe dans le milieu (1)) :

$$\int_{\Gamma} (\boldsymbol{\tau} - p \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \overline{\mathbf{t}_f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_i} (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n} + \gamma C \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma \quad (1.43)$$

Le terme correspondant à la partie $\Gamma_{\mathbf{u}}$ de la frontière s'annule car il s'agit de conditions de Dirichlet sur cette portion. Le terme correspondant à la tension superficielle peut être transformé. On peut remplacer la courbure C par deux fois la courbure moyenne H , avec $H = -\nabla_s \cdot \mathbf{n}/2$ où l'opérateur de gradient surfacique est $\nabla_s = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \nabla$. Le calcul de la courbure moyenne peut être numériquement compliqué. On peut donc intégrer ce terme par partie en utilisant le théorème de la divergence surfacique. Les détails sont donnés dans l'annexe de l'article de Cairncross *et al.* (2000) et mènent au résultat suivant :

$$\int_{\Gamma_i} \gamma C \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma = \int_{C_i} \gamma \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{m} \, dC - \int_{\Gamma_i} \gamma \nabla_s \cdot (\delta \mathbf{u}) \, d\Gamma \quad (1.44)$$

Dans cette équation, C_i est la frontière de Γ_i et \mathbf{m} est un vecteur extérieur normal à cette courbe et tangent à l'interface.

Braess et Wriggers (2000) proposent une autre approche en introduisant une interprétation énergétique de ce terme et parviennent à une formulation faisant intervenir une paramétrisation de l'interface.

À ces équations s'ajoutent, le cas échéant, la forme faible des équations permettant de calculer la vitesse de déformation du domaine. Dans le cas du pseudo-solide, on utilisera la forme faible des équations d'élasticité linéaire.

1.3.4 Enjeux numériques

Remaillage et déformation du domaine Lorsque la déformation de l'interface devient trop importante par rapport à la configuration de départ, la qualité du maillage résultant peut être dégradée. Il est donc parfois nécessaire de remailler. Cette opération doit être évitée dans la mesure du possible car elle est numériquement coûteuse et les valeurs des variables aux noeuds doivent être interpolées d'un maillage à l'autre, ce qui introduit des imprécisions. Il faut donc reprendre les critères et démarches développés pour la formulation purement lagrangienne. Tanaka et Kashiyama (2006) proposent de conserver un maillage de fond fixe. À chaque pas de temps, le domaine est déformé mais l'interface est ensuite replacée sur le maillage fixe, de sorte que seulement les éléments proches de l'interface sont déformés. Cependant cette opération ne permet pas la conservation de la masse, il faut donc ajouter une étape supplémentaire de correction. On peut cependant tirer parti de ce remaillage en utilisant une stratégie adaptative. Par exemple, Saksono *et al.* (2007) utilisent un critère sur la qualité du maillage (rapport entre les rayons des cercle inscrit et circonscrit) puis la taille des éléments du nouveau maillage est déterminée en fonction de la valeur du gradient de la vitesse. Une autre méthode utilisée par Pelletier (1999) consiste à raffiner les zones où l'erreur est la plus grande. L'erreur est alors calculée avec un estimateur d'erreur reposant sur une projection de la solution pour reconstruire une solution enrichie (Zienkiewicz et Zhu, 1992). Cette méthode a donné des résultats prometteurs en régime instationnaire turbulent (Gammacurta *et al.*, 2009).

Loi de conservation géométrique (GCL) Il faut s'assurer lors de l'utilisation de mailages déformables, que la loi de conservation géométrique est vérifiée. Cette loi a de nombreuses définitions qui sont résumées par Etienne *et al.* (2009b). Ainsi, il faut s'assurer que la déformation du maillage est telle que :

- la solution est exacte sur un maillage mobile dans le cas où il n'y a pas d'écoulement,
- la solution est exacte sur un maillage mobile dans le cas où l'écoulement est uniforme,

- le schéma d'intégration en temps a le même taux de convergence sur le maillage mobile que sur le maillage fixe.

Ceci peut être vérifié en choisissant de manière adéquate la vitesse de déformation. Si la GCL est satisfaite, des schémas d'ordre élevé peuvent être utilisés pour réduire les coûts de calcul.

1.4 Analyse de sensibilité des écoulements à surface libre

Les écoulements à surface libre sont complexes à analyser. Optimiser des systèmes faisant intervenir des interfaces ou prévoir son comportement lorsque les paramètres de définition du système sont modifiés seront de longues et complexes entreprises puisque les algorithmes d'optimisation demandent souvent beaucoup d'itérations et donc de calculs de ces écoulements. Nous allons étudier les différentes techniques actuellement utilisées en mettant en relief leurs avantages et inconvénients dans le contexte des systèmes faisant intervenir des interfaces.

1.4.1 Exemple de l'optimisation

Soit $F(\mathbf{U}, \boldsymbol{\alpha})$ la fonction coût à optimiser sous les contraintes $\mathbf{G}(\mathbf{U}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$, avec \mathbf{U} les états et $\boldsymbol{\alpha}$ le vecteur de variables de design. La fonction coût dépend à la fois explicitement du vecteur de design mais aussi implicitement par l'intermédiaire des états. Nous pouvons en effet définir la fonction $\mathcal{F}(\boldsymbol{\alpha}) = F(\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha})$. Le problème peut s'énoncer de la façon suivante :

Trouver le vecteur de design $\boldsymbol{\alpha}^*$ tel que

$$\begin{aligned} F(\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha}^*), \boldsymbol{\alpha}^*) &= \min_{\boldsymbol{\alpha}} F(\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}) \\ \text{sujet à } \mathbf{G}(\mathbf{U}, \boldsymbol{\alpha}) &= 0 \end{aligned}$$

Pour résoudre ce problème, avec la plupart des algorithmes, il faut calculer le gradient de la fonction objectif par rapport aux paramètres de design. Pour cela, il existe principalement deux méthodes que nous allons détailler : la méthode adjointe et la méthode des sensibilités.

Méthodes adjointes

La méthode adjointe consiste à introduire la variable adjointe $\boldsymbol{\xi}$ et le lagrangien :

$$L(\mathbf{U}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) = F(\mathbf{U}, \boldsymbol{\alpha}) - \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{G}(\mathbf{U}, \boldsymbol{\alpha}) \rangle$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire. Dans le cas discret, il s'agit du produit de 2 vecteurs et dans le cas continu d'une intégrale. Afin d'exposer généralement le fonctionnement de cette

méthode, nous garderons la notation symbolique suivante :

$$L = F - \xi \mathbf{G}$$

Le problème d'optimisation est maintenant équivalent à extrémiser L en fonction de $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\alpha}, \xi)$. La première variation du lagrangien par rapport à chacune de ces variables doit être nulle :

- La variation par rapport à \mathbf{U} conduit aux équations adjointes :

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{U}} = \xi \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \quad (1.45)$$

- La variation par rapport à $\boldsymbol{\alpha}$ produit la condition d'optimalité :

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}} - \xi \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = 0 \quad (1.46)$$

- La variation par rapport à ξ mène aux équations d'état :

$$\mathbf{G} = 0 \quad (1.47)$$

Pour un vecteur de design $\boldsymbol{\alpha}$ donné, les états \mathbf{U} sont obtenus par les équations d'états (1.47) et les variables adjointes par les équations adjointes (1.45). Le gradient de la fonction objectif s'exprime alors de la manière suivante :

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\boldsymbol{\alpha}} = \frac{DF}{D\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{U}} \frac{D\mathbf{U}}{D\boldsymbol{\alpha}} \quad (1.48)$$

En utilisant les équations adjointes, nous avons :

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \xi \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \frac{D\mathbf{U}}{D\boldsymbol{\alpha}}$$

Or les équations d'états doivent être respectées quelque soit le vecteur de design $\boldsymbol{\alpha}$, donc

$$\frac{D\mathbf{G}}{D\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \frac{D\mathbf{U}}{D\boldsymbol{\alpha}} = 0 \quad (1.49)$$

Ceci mène à l'expression finale du gradient :

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}} - \xi \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \quad (1.50)$$

Quelque soit le nombre de paramètres, il n'y a qu'un seul problème adjoint à résoudre par fonctionnelle.

Méthode de l'équation des sensibilités

Pour le même problème que précédemment et en reprenant les mêmes notations, nous cherchons à calculer le gradient d'une fonction coût :

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\boldsymbol{\alpha}} = \frac{DF}{D\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{U}} \frac{D\boldsymbol{U}}{D\boldsymbol{\alpha}} \quad (1.51)$$

Dans cette expression, $D\boldsymbol{U}/D\boldsymbol{\alpha}$ est inconnu car la dépendance des états par rapport au design est implicite. La méthode des sensibilités (appelée aussi *direct differentiation method*) consiste à différentier les équations d'états par rapport au paramètre de design afin d'obtenir les équations de sensibilité. Il y a pour cela deux façons de procéder. On peut discréteriser les équations d'états puis différentier, il s'agit de la méthode des sensibilités discrètes. Les sensibilités ainsi obtenues correspondent aux dérivées exactes de la solution discrète du premier problème. L'autre voie consiste à différentier les équations d'états pour obtenir un nouveau système d'équations différentielles qu'il nous reste à discréteriser. Il s'agit alors des sensibilités continues discréétisées. Nous obtenons ainsi une approximation de la sensibilité de la solution exacte du premier problème. Généralement, les deux méthodes tendent vers le gradient exact (Borggaard et Burns, 1997b; Borggaard, 1994; Borggaard et Burns, 1997a). Ces différentes voies à explorer sont détaillées pour l'élasticité linéaire par van Keulen *et al.* (2005). La méthode des sensibilités conduit à un système à résoudre par paramètre de sensibilité, peu importe l'application qui en suivra.

Atouts de la méthode de l'équation des sensibilités

Comme on vient de le voir, les sensibilités sont très utiles en design optimal. Cependant, leur domaine d'application s'étend bien au delà. En effet, les sensibilités donnent une information quantitative sur l'influence des paramètres définissant le système sur n'importe quelle fonction de sortie (Turgeon, 2001). Ceci permet de classer les paramètres par ordre d'influence. Les sensibilités permettent aussi de calculer très rapidement des solutions voisines (par l'intermédiaire d'une série de Taylor au premier ordre). Elles permettent donc de prévoir comment le système réagira à de légers changements des paramètres, ces informations permettent de mieux comprendre le fonctionnement global du système. Une autre application de taille est l'analyse d'incertitude. Les sensibilités permettent d'évaluer l'incertitude sur une variable de sortie à partir de l'incertitude des paramètres d'entrée. Ces données permettront par exemple d'évaluer la robustesse d'un design ou alors d'établir des tolérances de fabrication.

1.4.2 Enjeux des sensibilités de l'interface

Les paramètres de design peuvent être de deux natures. Les paramètres dits “de valeur” n’ont pas d’influence sur la forme du domaine, il peut s’agir d’une propriété physique du fluide, d’une condition limite. La figure 1.3(a) illustre le cas où le paramètre est la vitesse d’entrée pour l’écoulement à travers un canal. Les paramètres “de forme” définissent la forme du domaine, ce qui est assez courant en design optimal. Par exemple sur la figure 1.3(b), le paramètre est l’amplitude de la bosse sur la paroi inférieure du domaine. La géométrie du domaine dépend alors de ce paramètre. La méthode générale de résolution du problème de sensibilité est la même pour chaque cas mais le traitement du paramètre de forme demande une attention toute particulière.

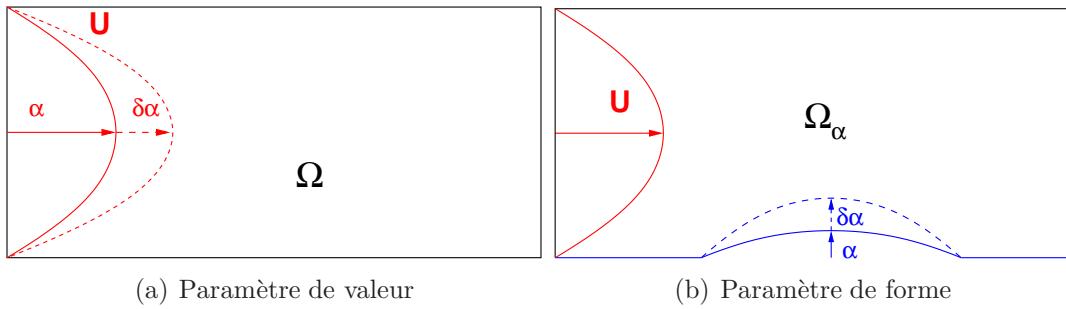


Figure 1.3 Distinction entre paramètre de valeur et paramètre de forme.

Lorsqu’une interface est en jeu, la distinction entre les paramètres de valeur et paramètre de forme est moins évidente. En effet, des paramètres peuvent ne pas affecter directement les frontières fixes du domaine et néanmoins avoir une influence sur la forme de l’interface. Ces paramètres se comporteront alors comme des paramètres de forme. Ceci est illustré sur la figure 1.4. Le paramètre est la vitesse d’entrée dans un canal dont une des parois est déformable. La forme de cette paroi est couplée avec l’écoulement dans son voisinage. Ainsi, si la vitesse d’entrée change, la forme de cette paroi sera modifiée. La vitesse d’entrée devient donc un paramètre de forme.

Méthode adjointe sur domaine variable

Lorsque le domaine dépend du paramètre, la difficulté est de calculer les différents termes de la formule (1.50). En effet, la fonction coût est souvent de la forme :

$$F(\mathbf{U}, \boldsymbol{\alpha}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{U}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \, d\Omega \quad (1.52)$$

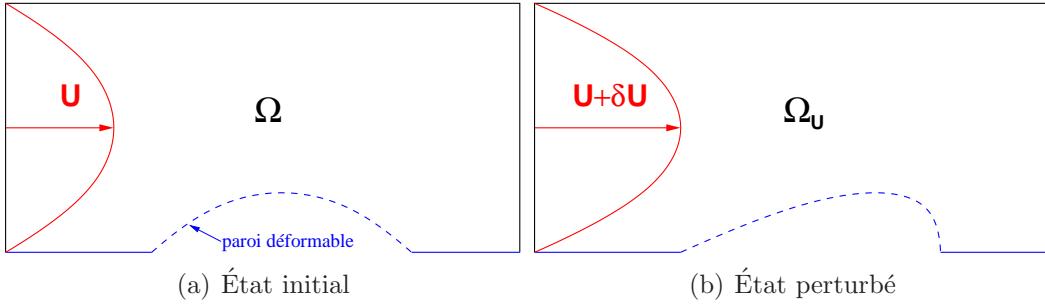


Figure 1.4 Influence d'un paramètre de design sur un domaine déformable.

Or le domaine dépend du paramètre. Nous ne pouvons donc pas dériver simplement cette intégrale. De même,

$$\langle \xi, G \rangle = \int_{\Omega} \xi G(U, x, \alpha) d\Omega \quad (1.53)$$

Il faut alors utiliser la méthode des dérivées matérielles qui est exposée par Delfour et Zolésio (2001) de manière générale et aussi par Haug *et al.* (1986), Cardoso et Arora (1989) ou Navarrina *et al.* (2000) dans le contexte de la mécanique des structures. Giannakoglou et Papadimitriou (2008) montrent comment ces difficultés se manifestent dans le cadre de problèmes inverses pour les équations d'Euler et pour les équations de Navier-Stokes. On ne recense cependant pas beaucoup d'études de design optimal pour les systèmes avec interfaces et la méthode adjointe. Les travaux de Gejadze et Copeland (2005) en sont un exemple, cependant le calcul de l'interface se fait simplement par l'intermédiaire d'une fonction représentant la hauteur du fluide ce qui limite le champ d'application de la méthode.

Méthode des sensibilités sur domaine variable

Pour la méthode des sensibilités, il s'agit de dériver les équations d'états. Tout comme dans le cadre de la mécanique des milieux continus, nous pouvons prendre soit un point de vue eulérien, c'est-à-dire calculer les dérivées par rapport au vecteur de design en un point fixe du domaine, soit un point de vue lagrangien, c'est-à-dire calculer la dérivée totale des états, donc prendre un compte le changement de forme du domaine dans la dérivation.

Formulation eulérienne D'un point de vue eulérien, il suffit de dériver formellement les équations d'états pour obtenir les dérivées partielles des états par rapport au paramètre. Par exemple pour la vitesse d'un fluide $u(x, \alpha)$, nous calculons $\partial u / \partial \alpha$. Cependant, les conditions aux limites en sensibilités sont données par les dérivées matérielles des états. Il faut donc introduire les termes provenant de la transformation de la frontière due à la variation du

paramètre de forme. Ces termes dépendent des gradients en espace des états, qui, calculés numériquement, ne sont pas toujours précis. Le défi pour cette méthode est donc de calculer avec précision les gradients des états à la frontière pour obtenir de bonnes conditions aux limites pour les sensibilités. Malgré cela, le point de vue eulérien reste intéressant par sa simplicité de mise en oeuvre numérique. En effet, contrairement à la méthode adjointe ou au point de vue lagrangien, il n'est pas nécessaire de dériver des intégrales dont le domaine dépend du paramètre. De nombreuses applications en mécanique des fluides ont été faites avec cette méthode (Turgeon, 2001), en régime turbulent (DiCaro, 2007) ou en régime instationnaire (Hristova *et al.*, 2005). Cette méthode a été utilisée par Pestieau (2006) pour les écoulements multi-fluides. La méthode pour le calcul de l'interface est une méthode de pseudo-concentration. Ainsi l'équation de la pseudo-concentration est dérivée pour trouver la sensibilité de l'interface, ce qui permet de ne pas avoir à traiter un domaine variable. Cependant, le problème classique des paramètres de forme persiste et pour avoir une résolution précise de l'interface, il a fallu utiliser des maillages très fins dans son voisinage. Les sensibilités eulériennes ont été aussi utilisées en interaction fluide-structure en régime non stationnaire par Etienne *et al.* (2007) avec une méthode ALE pour le calcul des interfaces. La formulation des conditions d'interface pour les sensibilités prend alors une forme assez compliquée et nécessite l'évaluation des dérivées spatiales d'ordre 2 de la vitesse à l'interface qui sont difficiles à calculer précisément.

Formulation lagrangienne En prenant un point de vue lagrangien, nous nous intéresserons au calcul des dérivées totales des états par rapport au paramètre, elles se composent d'un terme lié à la variation pure du paramètre et un autre dû à la modification du domaine. En effet, nous avons $u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) = u(\mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha})$ donc

$$\frac{Du}{D\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \nabla u \cdot \frac{D\mathbf{x}}{D\boldsymbol{\alpha}} \quad (1.54)$$

Pour ce faire, il faut dériver les équations d'état, sous leur forme forte ou sous leur forme intégrale, en tenant compte des variations de géométrie du domaine. Dans ces conditions, les opérateurs de dérivation par rapport au paramètre et le gradient d'espace ou l'intégration sur le domaine ne commutent pas puisque les coordonnées d'espaces dépendent du paramètre. Il apparaît alors une vitesse de déformation, connue uniquement sur les frontières, mais qui doit être calculée dans tout le domaine. Il existe différentes techniques pour évaluer cette vitesse. La méthode de la dérivée matérielle est beaucoup utilisée. Des formulations générales ont été établies par Delfour et Zolésio (2001), Navarrina *et al.* (2000) et Tortorelli et Wang (1993). Le point de vue lagrangien a été plutôt développé dans le cadre de la mécanique des structures.

Les problèmes de transfert thermique font l'objet des travaux de Dems (1987) et Kleiber et Sluzalec (1996). Dans les travaux de Arora (1993), nous trouverons une formulation pour les équations d'élasticité linéaire. Bobaru et Mukherjee (2001) ont effectué quelques simulations numériques avec une méthode de résolution sans maillage (*element-free Galerkin method*). Les sensibilités lagrangiennes ont été aussi développées dans le cadre de la mécanique de la rupture par Taroco (2000) qui a abordé les sensibilités d'ordre 2 et pour l'optimisation d'arcs plans par Choi (2002). Dans les travaux de Lee (1997), des équations intégro-différentielles de bord (*boundary integral equation formulation*) sont utilisées pour traiter des problèmes de solides élastiques axisymétriques. En mécanique des fluides, nous noterons le travail de Smith (1996) qui traite de l'écoulement de polymères gouverné par les équations de Stokes. Dans les travaux de Wang *et al.* (1996), les équations de Navier Stokes sont traitées, avec une technique de paramétrisation de domaine (Tortorelli *et al.*, 1994) pour le calcul de la vitesse de déformation. D'autres approches mathématiquement compliquées ont été abordées par Gao *et al.* (2007) en utilisant les dérivées de Piola (Boisgerault, 2000). Pour les écoulements avec interfaces, on notera les travaux de Lund *et al.* (2003) qui utilisent une formulation discrète et obtiennent de bons résultats. McDavid et Dantzig (1998) utilisent des sensibilités lagrangiennes discrètes pour résoudre un problème de moulage avec une méthode VOF pour le calcul de l'interface. Cependant, la dérivation de la fraction de fluide par rapport au paramètre est délicate. Une formulation continue de l'équation des sensibilités lagrangiennes a été développée pour les équations de Navier-Stokes par Charlot *et al.* (2009b). Au lieu d'avoir recours à une paramétrisation explicite du domaine, un pseudo-solide est introduit pour calculer les vitesses de déformation du domaine présentes dans la formulation faible du problème. De cette manière, la formulation se montre très simple à utiliser puisque les conditions aux limites, contrairement à la formulation eulérienne, sont simples et exactes. Elle donne aussi accès directement aux dérivées totales de l'écoulement par rapport au paramètre d'intérêt. Cette approche permet d'obtenir la même précision sur les sensibilités que sur l'écoulement. La formulation a également fait ses preuves dans le contexte du design optimal. Combinée à une paramétrisation NURBS (Charlot *et al.*, 2009a), elle a mené aux mêmes résultats qu'une formulation eulérienne, mais avec des maillages beaucoup plus grossiers (10 fois moins de noeuds). À notre connaissance, une telle formulation n'a pas été utilisée pour le calcul des sensibilités des écoulements avec interfaces.

1.5 Bilan

Les écoulements avec interface ont suscité un grand intérêt et de nombreuses méthodes numériques ont été développées pour calculer avec le plus de précision possible la géométrie

de l'interface. Cependant, peu de problèmes d'optimisation ont été traités dans ce domaine car les gradients de la solution par rapport aux divers paramètres de design sont difficiles à évaluer.

Les méthodes de calcul des écoulements sont très variées. Les deux grandes catégories sont les méthodes à maillage fixe et les méthodes à maillage mobile. Les méthodes à maillage fixe sont relativement simples à implémenter et demandent simplement d'ajouter au système une équation de transport pour la fonction identifiant chaque zone de l'écoulement et de reconstruire ensuite la position de l'interface. Cependant, ces méthodes demandent de nombreux traitements particuliers pour résoudre cette équation avec le plus de précision possible pour assurer la conservation de la masse. Il peut s'agir de maillage adaptatif pour raffiner la zone proche de l'interface ou d'algorithmes d'ordre plus élevés. De plus, comme la position de l'interface n'est pas explicitement connue, l'imposition de conditions limites à l'interface est compliquée.

Les méthodes à maillage mobile ne rencontrent pas ce genre de problème puisque l'interface constitue une des frontières du domaine. Le maillage doit donc être déformé pour suivre l'évolution de l'interface. Il s'agit là d'un des principaux enjeux de ces méthodes, de trop grandes déformations entraînent des distorsions des éléments du maillage, voire des retournements. Il faut donc remailler le domaine, ce qui est coûteux mais en faisant appel à un remaillage adaptatif, ces coûts peuvent être en partie compensés par une amélioration de la précision de la solution. Ces méthodes ne permettent cependant pas de traiter les changements topologiques de l'interface (détachement de gouttelettes, etc...).

Les méthodes d'analyse des écoulements avec interface sont numériquement coûteuses. Dans ce contexte, l'analyse de sensibilité devient un outil très utile. Les sensibilités permettent d'obtenir une information quantitative sur l'influence des paramètres sur n'importe quelle variable de sortie et donc de caractériser le système en fonction des paramètres d'entrée. Elles facilitent ainsi la compréhension des phénomènes régissant ces systèmes complexes. Leur calcul dépend de la méthode choisie pour l'écoulement.

Pour les méthodes à maillage fixe, une formulation eulérienne est la plus adaptée mais ne permet pas de traiter avec exactitude les paramètres de forme (Pestieau, 2006). La formulation lagrangienne semble plus à même de résoudre les problèmes à surface libre mais la dérivation de la fonction "indicatrice" sera complexe (McDavid et Dantzig, 1998). Si l'écoulement est résolu grâce à une méthode ALE, la formulation eulérienne mène à des conditions aux limites complexes et qui ne peuvent pas être calculée exactement. En effet, elles font intervenir les gradients des variables issus de la solution numérique (Etienne *et al.*, 2007). Celles-ci seraient par contre exactes et directes avec une formulation lagrangienne, ce qui serait numériquement beaucoup moins coûteux. Le point de vue lagrangien pour les

sensibilités semble donc être le plus approprié pour traiter les problèmes avec interface.

1.6 But et objectifs

Le but de ce projet est de développer une méthodologie robuste, rapide et efficace pour la simulation d'écoulements à surface libre et pour la quantification précise de l'influence des paramètres contrôlant la réponse de l'interface par le calcul des sensibilités. Nous allons donc coupler la formulation ALE pour l'écoulement avec une formulation lagrangienne pour l'analyse de sensibilités. Pour atteindre ce but nous avons fixé les objectifs suivants :

1. Généraliser la formulation et l'algorithme d'éléments finis pour traiter les écoulements avec surface libre,
2. Étendre la méthode de l'équation des sensibilités lagrangiennes (développée pour les écoulements stationnaires) aux écoulements instationnaires avec surface libre,
3. Vérifier la formulation et la méthodologie avec des solutions analytiques obtenues par la méthode des solutions manufaturées,
4. Valider l'approche en comparant nos résultats numériques à des résultats expérimentaux,
5. Appliquer la méthodologie sur quelques exemples d'intérêt pratique.

CHAPITRE 2

CALCUL DE LA SURFACE LIBRE

Dans ce chapitre, nous allons détailler la modélisation adoptée pour l'écoulement et la surface libre. Ensuite, nous décrirons les méthodes utilisées pour résoudre les équations. Nous utiliserons la cinématique eulérienne-lagrangienne généralisée (ALE) pour résoudre les équations de Navier-Stokes sur un domaine déformable. Dans ce contexte, la forme faible des équations de Navier-Stokes est écrite sous forme conservative pour satisfaire la loi de conservation géométrique. Ainsi, l'ordre du schéma d'intégration temporel sera le même sur maillage mobile que sur maillage fixe. Nous décrirons ensuite les discrétisations spatiales et temporelles utilisées ainsi que quelques détails d'implémentation de la méthode.

2.1 Modélisation des écoulements à surface libre

2.1.1 Équations de Navier-Stokes

On considère l'écoulement laminaire d'un fluide incompressible et newtonien dans un domaine Ω . Le mouvement du fluide est alors décrit par les équations de Navier-Stokes :

$$\text{Continuité :} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{Mouvement :} \quad \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} \quad (2.2)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes défini par

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$$

avec $\boldsymbol{\tau}$ le tenseur des contraintes visqueuses et \mathbf{I} le tenseur métrique.

2.1.2 Conditions limites pour la surface libre

Comme illustré sur la figure 2.1, la frontière $\partial\Omega$ du domaine fluide Ω est composée de :

- Γ_u où des conditions de Dirichlet sont imposées
- Γ_t où des conditions de Neumann sont imposées
- Γ_i la surface libre

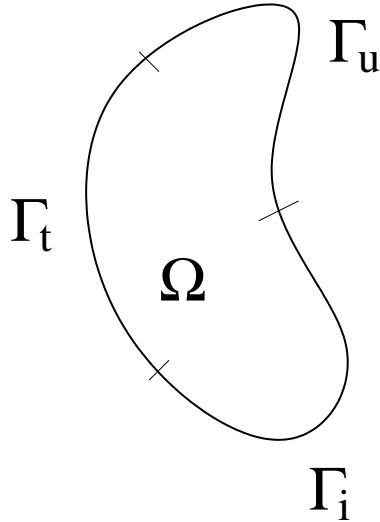


Figure 2.1 Domaine fluide.

Dans le cas de la surface libre, on suppose que le fluide de l'autre côté de l'interface est non visqueux. On supposera de plus que la pression de cet autre fluide est nulle (la pression étant définie à une constante près, cette hypothèse n'est pas restrictive). Dans notre étude nous négligerons les effets de tension superficielle. Dans ces conditions, il n'y a pas de transfert de masse à travers l'interface et les contraintes normales doivent être nulles à la surface libre. On obtient alors, si la surface libre est décrite par une équation du type $F(x, y, t) = 0$:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (2.3)$$

$$-pn^\alpha + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}_f \quad \text{sur } \Gamma_t \quad (2.4)$$

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla F = 0 \quad \text{sur } \Gamma_i \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_i \quad (2.6)$$

où \mathbf{n} est le vecteur normal sortant à la frontière.

2.2 Formulation lagrangienne-eulérienne pour les problèmes à surface libre

Lorsque l'on considère des écoulements à surface libre, le domaine fluide, c'est-à-dire la forme de la surface libre est une inconnue du problème. Pour simuler ces écoulements, nous choisissons une cinématique eulérienne-lagrangienne pour laquelle le domaine de calcul suit les déformations du domaine fluide. Dans cette section nous allons donc présenter la formulation

utilisée et les équations à résoudre dans ce contexte.

2.2.1 Description eulérienne-lagrangienne

Considérons un domaine matériel Ω_z et la transformation ϕ_t qui à tout temps t associe le domaine Ω_z au domaine Ω_y . Ainsi Ω_y est la configuration courante du domaine Ω_z . À un point z de Ω_z est associé le point y de Ω_y tel que $y = \phi_t(z)$. On introduit un domaine de référence Ω_x et la transformation $\hat{\phi}_t$ telle que $y = \hat{\phi}_t(x)$. Alors on a aussi $x = \psi_t(z) = \hat{\phi}_t^{-1}(\phi_t(z))$. Ces transformations sont illustrées sur la figure 2.2.

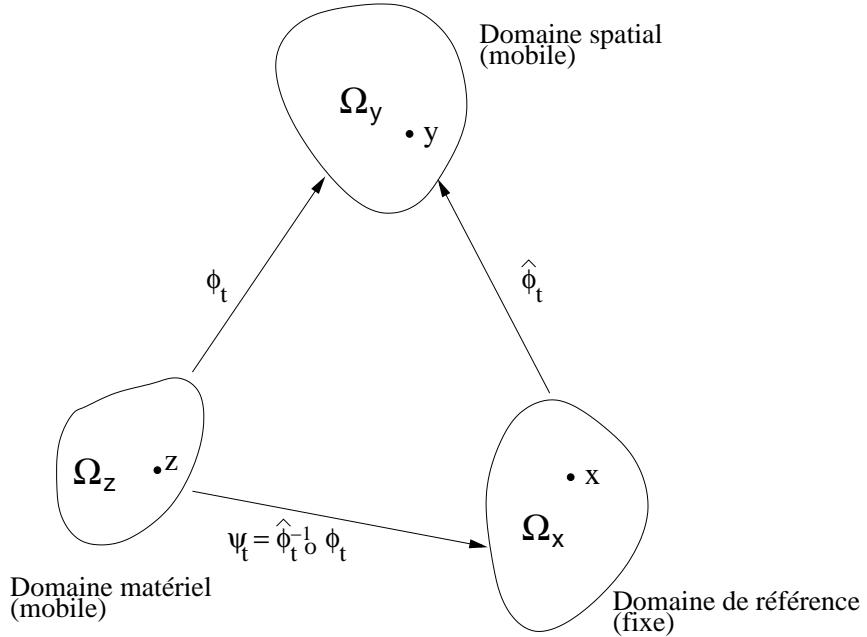


Figure 2.2 Domaines et transformations pour la description eulérienne-lagrangienne arbitraire.

On a alors $\phi_t(z) = \hat{\phi}_t(x) = \hat{\phi}_t(\psi_t(z))$ donc

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial t}(z) = \frac{\partial \hat{\phi}_t}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\phi}_t}{\partial x} \frac{\partial \psi_t}{\partial t} \quad (2.7)$$

On définit $\mathbf{u} = \frac{\partial \phi_t}{\partial t}$ la vitesse courante de la particule matérielle z et $\mathbf{v}_m = \frac{\partial \hat{\phi}_t}{\partial t}$ la vitesse du point de référence x . Grâce à l'équation (2.7) et en appliquant le théorème des fonctions implicites, la dérivée matérielle de la vitesse s'écrit

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + ((\mathbf{u} - \mathbf{v}_m) \nabla) \mathbf{u} \quad (2.8)$$

où $\partial\mathbf{u}/\partial t$ est le changement de la vitesse matérielle pour un observateur situé dans le repère de référence. L'équation (2.8) est l'équation fondamentale de la formulation lagrangienne eulérienne. On remarque que si $\mathbf{v}_m = 0$ on retrouve la formulation eulérienne et si $\mathbf{v}_m = \mathbf{u}$ la formulation devient purement lagrangienne.

2.2.2 Équations de l'écoulement et conditions limites en formulation ALE

D'après le paragraphe précédent, nous pouvons à présent écrire les équations de Navier-Stokes de la façon suivante :

$$\text{Continuité :} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.9)$$

$$\text{Mouvement :} \quad \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho((\mathbf{u} - \mathbf{v}_m) \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) - \rho g \mathbf{e}_z + \mathbf{f} \quad (2.10)$$

L'introduction de la vitesse de maille \mathbf{v}_m permet d'écrire les conditions aux limites avec les conditions de surface libre de la manière suivante :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (2.11)$$

$$-p \mathbf{n}^\alpha + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}_f \quad \text{sur } \Gamma_t \quad (2.12)$$

$$(\mathbf{u} - \mathbf{v}_m) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_i \quad (2.13)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_i \quad (2.14)$$

2.2.3 Approche pseudo-solide

Dans l'approche adoptée, le domaine se déforme avec la forme de la surface libre. La déformation du domaine est calculée avec l'approche pseudo-solide proposée par Sackinger *et al.* (1996). Cette méthode consiste à supposer que le domaine se déforme comme une structure élastique. On choisit arbitrairement les coefficients de Lamé λ_{ps} et μ_{ps} pour le pseudo-solide. Le déplacement $\boldsymbol{\chi} = (\xi, \eta)$ de la pseudo-structure est alors la solution du problème suivant :

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \lambda_{ps} \text{tr}(\nabla \boldsymbol{\chi} + \nabla^T \boldsymbol{\chi}) \mathbf{I} + \mu_{ps} (\nabla \boldsymbol{\chi} + \nabla^T \boldsymbol{\chi}) \right) = 0 \text{ in } \Omega \quad (2.15)$$

Les conditions aux limites sont données par les équations (2.13) et (2.14) sur la surface libre. Il en résulte alors trois équations (la condition (2.14) étant vectorielle) pour quatre inconnues : $\mathbf{u} = (u, v)$ et $\boldsymbol{\chi} = (\xi, \eta)$. Il manque donc une équation pour que le système puisse être résolu. En effet ces trois équations permettent de calculer la vitesse à l'interface ainsi que sa forme, la solution de $F(x, y, t) = 0$. L'information manquante est la façon dont

les points sont répartis sur la frontière. Cette information n'a pas de signification physique, elle fait partie de l'artifice de calcul de la méthode pseudo-solide. Nous choisissons donc une répartition telle qu'en tout temps, l'abscisse curviligne normalisée des points sur la surface libre soit conservée. Ceci mène à une condition sur la longueur des arêtes le long de la surface

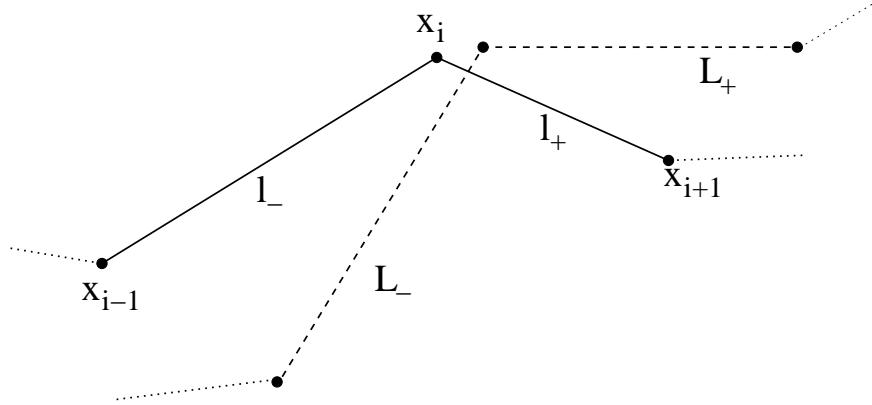


Figure 2.3 Déformation des segments situés sur la surface libre.

libre : le rapport entre la longueur courante et la longueur initiale des arêtes de part et d'autre d'un point de la surface doit être le même. Ainsi, en utilisant les notations de la figure 2.3, pour le point X_i on a :

$$\frac{L_-}{l_-} = \frac{L_+}{l_+} \quad (2.16)$$

où l_- et l_+ sont les longueurs initiales des arêtes et L_- and L_+ sont les longueurs courantes.

On prendra le carré de cette expression, donc pour le noeud i , de coordonnées (x_i, y_i) sur le domaine non déformé et dont le déplacement est (ξ_i, η_i) , on a

$$\begin{aligned} & \frac{(x_i + \xi_i - x_{i-1} - \xi_{i-1})^2 + (y_i + \eta_i - y_{i-1} - \eta_{i-1})^2}{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \\ &= \frac{(x_{i+1} + \xi_{i+1} - x_i - \xi_i)^2 + (y_{i+1} + \eta_{i+1} - y_i - \eta_i)^2}{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ailleurs le déplacement du pseudo-solide doit être tangent aux frontières.

2.3 Méthodes numériques

Nous allons maintenant présenter les méthodes numériques utilisées pour résoudre le problème décrit dans la section précédente. La principale difficulté est la résolution des équations de Navier-Stokes instationnaires sur un domaine dont la forme dépend de

l'écoulement par les conditions (2.13) et (2.14). Nous allons donc ici décrire les outils utilisés. Il faut tout d'abord établir une formulation variationnelle qui permette de satisfaire la loi de conservation géométrique (GCL). Nous décrirons ensuite brièvement la méthode des éléments finis utilisée pour la résolution spatiale. Dans certains cas, des oscillations numériques peuvent apparaître, il faut alors stabiliser les équations. Nous présenterons ensuite les schémas utilisés pour l'intégration temporelle et nous finirons par la méthode de résolution globale des équations.

2.3.1 Formulation variationnelle

Nous devons adopter une formulation qui permette de satisfaire la loi de conservation géométrique (GCL). Rappelons que la GCL a trois significations :

- la solution est exacte sur un maillage mobile dans le cas où il n'y a pas d'écoulement,
- la solution est exacte sur un maillage mobile dans le cas où l'écoulement est uniforme,
- le schéma d'intégration en temps a le même taux de convergence sur le maillage mobile que sur le maillage fixe.

D'après Etienne *et al.* (2009b), la formulation conservative suivante doit être adoptée. Soient $\delta\mathbf{u}$ et δp des fonctions tests admissibles pour la vitesse et la pression, la forme faible du problème associée aux équations (2.9) et (2.10) est

$$\int_{\Omega(t)} \nabla \cdot \mathbf{u} \delta p \, d\Omega = 0 \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Omega(t)} (\nabla \cdot \mathbf{v}_m) \rho \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega(t)} \rho ((\mathbf{u} - \mathbf{v}_m) \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \\ + \int_{\Omega(t)} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Omega(t)} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma(t)} (\boldsymbol{\tau} - p \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (2.19)$$

Pour satisfaire la GCL, la vitesse de maille et sa divergence doivent être évaluées de façon consistante avec le schéma d'intégration temporelle. Leurs expressions seront détaillées à la section 2.3.4.

2.3.2 Méthode des éléments finis

Le domaine est décomposé en N_e éléments comprenant chacun N_u noeuds pour la vitesse et N_p noeuds pour la pression. Sur chaque élément, la solution est approchée de la manière suivante :

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^h = \sum_{i=1}^{N_u} \mathbf{u}_i N_i^u \quad (2.20)$$

où \mathbf{u}_i est la solution numérique au nœud i de l'élément considéré et les fonctions $N_i^{\mathbf{u}}$ sont les fonctions d'interpolation de l'élément pour la vitesse, $N_{\mathbf{u}}$ est le nombre de fonctions d'interpolation. La pression et la vitesse de déformation du domaine sont approximées de manière analogue :

$$p \approx p^h = \sum_{i=1}^{N_p} p_i N_i^p \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_m \approx \mathbf{v}_m^h = \sum_{i=1}^{N_{\mathbf{v}_m}} \mathbf{v}_{mi} N_i^{\mathbf{v}_m} \quad (2.21)$$

La méthode de Galerkin consiste alors à choisir successivement chaque fonction d'interpolation comme fonction test dans la forme faible. Nous utiliserons une formulation mixte. La pression est alors un muplificateur de Lagrange qui permet d'imposer la condition d'incompressibilité. Les inconnues en vitesse et en pression sont donc liées et le choix des fonctions d'interpolation doit alors être fait avec précaution. En effet, pour que le système puisse être résolu correctement, il suffit que les interpolants satisfassent la condition LBB (Ladyshenskaya-Babuška-Brezzi) qui peut s'énoncer de la façon suivante. Soient \mathbf{u} un champ de vitesse continu et différentiable sur un domaine \mathbf{R} et \mathbf{u}_h son approximation discrète, l'élément satisfait la condition de Brezzi si \mathbf{u} et \mathbf{u}_h ont la même projection de la divergence dans l'espace des pressions. De nombreux types d'éléments peuvent être utilisés, nous utiliserons les éléments triangulaires suivants.

Élément de Taylor-Hood d'ordre 2 (P2-P1) Cet élément a 6 nœuds en vitesse et 3 nœuds en pression. La vitesse est donc quadratique par élément et continue, et la pression est linéaire et continue. Les nœuds en vitesse et en pression sont placés comme illustré sur la figure 2.4. La discrétisation du pseudo-déplacement est la même que la vitesse. Cet élément satisfait la condition de Brezzi-Babuška.

Éléments P1-P1 Cet élément a 3 nœuds en vitesse et 3 nœuds en pression. La vitesse et la pression sont donc linéaires par élément et continue. L'emplacement des nœuds est représenté sur la figure 2.5.

Cet élément ne satisfait pas la condition de Brezzi-Babuška. Son utilisation peut mener à une mauvaise résolution de la pression. Ceci peut être corrigé en utilisant un stabilisation adaptée telle que décrite dans la section suivante.

2.3.3 Stabilisation des équations de Navier-Stokes

Dans certains cas, la solution éléments finis peut présenter des oscillations numériques. Il faut alors stabiliser les équations de Navier-Stokes pour palier ce problème. Les oscillations numériques peuvent avoir plusieurs origines : des instabilités convectives qui se produisent

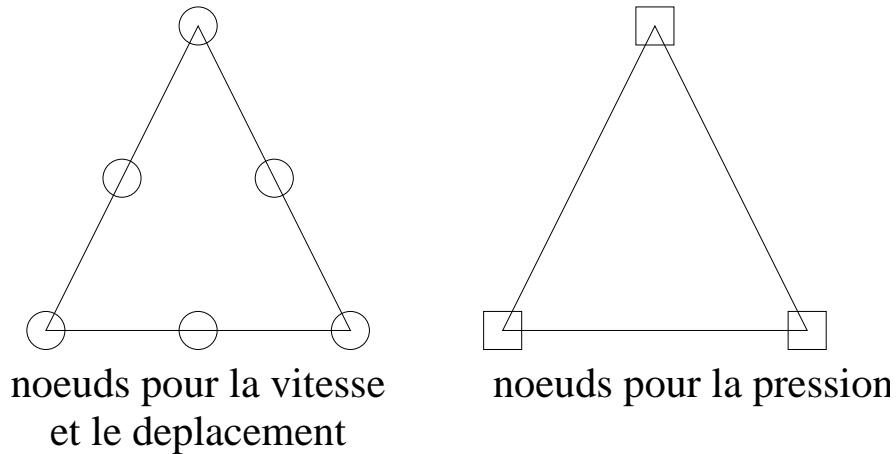


Figure 2.4 Élément de Taylor-Hood.

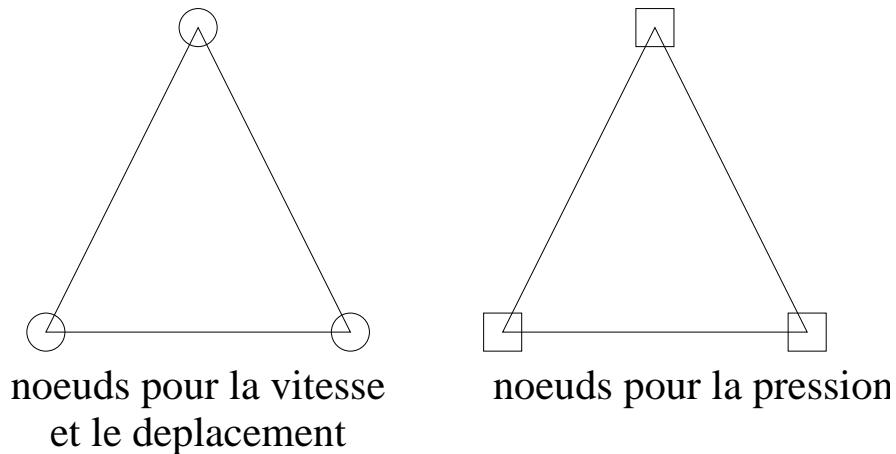


Figure 2.5 Élément P1-P1.

lorsque le nombre de Reynolds est élevé ou des instabilités dues au type d'élément qui ne respecte pas la condition de Brezzi. Les techniques de stabilisation ont été essentiellement développées pour des interpolants linéaires, il existe peu de méthodes éprouvées pour les interpolants quadratiques. Nous n'utiliserons donc pas de stabilisation avec les éléments de Taylor-Hood. Nous utiliserons les trois types de stabilisation suivants : la stabilisation SUPG pour les instabilités convectives, la stabilisation PSPG pour se passer de la condition de Brezzi et la stabilisation de la condition d'incompressibilité.

Stabilisation Streamline Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG)

Le but est d'éviter les oscillations numériques apparaissant lorsque les phénomènes convectifs dominent les phénomènes diffusifs. En modifiant les fonctions test pour l'équation de

la conservation de la quantité de mouvement, de la diffusion artificielle est ajoutée dans la direction de l'écoulement (Brooks et Hughes, 1982). Elle peut être interprétée comme une modification de la fonction test pour la vitesse. La nouvelle fonction test $\delta\tilde{\mathbf{u}}$ a alors pour expression :

$$\delta\tilde{\mathbf{u}} = \delta\mathbf{u} + \tau_{SUPG}(\mathbf{u} \cdot \nabla)\delta\mathbf{u} \quad (2.22)$$

Remarquons que la solution exacte est toujours solution de la forme stabilisée. Cette forme est valable pour des maillages fixes, pour les maillages mobiles en formulation ALE, il faut corriger la vitesse de convection et on obtient :

$$\delta\tilde{\mathbf{u}} = \delta\mathbf{u} + \tau_{SUPG}((\mathbf{u} - \mathbf{v}_m) \cdot \nabla)\delta\mathbf{u} \quad (2.23)$$

Stabilisation Pressure-stabilizing/Petrov-Galerkin (PSPG)

La stabilisation PSPG est utilisée avec les éléments qui ne satisfont pas la condition de Brezzi pour les rendre stables. Comme pour la stabilisation SUPG, des termes supplémentaires sont ajoutés et peuvent s'interpréter comme une modification de la fonction test. La nouvelle fonction test $\delta\tilde{\mathbf{u}}$ a alors pour expression :

$$\delta\tilde{\mathbf{u}} = \delta\mathbf{u} + \frac{\tau_{PSPG}}{\rho} \nabla \delta p \quad (2.24)$$

où δp est la fonction test pour la pression.

Stabilisation de la contrainte d'incompressibilité

Cette dernière forme concerne la contrainte d'incompressibilité. Les termes à ajouter sont basés sur les termes de stabilisation aux moindres carrés pour rendre le calcul plus robuste (Aliabadi et Tezduyar, 2000) et ont l'expression suivante :

$$\int_{\Omega} \tau_{CONT} \nabla \cdot \delta\mathbf{u} \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.25)$$

Choix des paramètres

Il faut maintenant préciser l'expression des coefficients τ_{SUPG} , τ_{PSPG} et τ_{CONT} . Ils sont définis par élément. Souvent, les coefficients τ_{SUPG} et τ_{PSPG} sont les mêmes. Il est montré dans le livre de Thomasset (1981) qu'il existe un coefficient optimal pour des problèmes unidimensionnels. Ce coefficient optimal a alors pour expression :

$$\tau_{OPT} = \frac{h}{2\|\mathbf{u}\|} \left(\coth(Re) - \frac{1}{Re} \right) \quad (2.26)$$

où h représente la taille caractéristique de l'élément, ν est la viscosité cinématique et Re est le nombre de Reynolds local : $Re = \frac{2\rho\|\mathbf{u}\|h}{\nu}$

Plusieurs généralisations existent pour les problèmes 2D. Nous nous appuierons sur les travaux de Tezduyar et Osawa (2000) et de Verdier (2008). Ainsi nous choisissons les coefficients suivants :

$$\tau_{SUPG} = \tau_{PSPG} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{\Delta t^2} + \frac{4\|\mathbf{u}\|^2}{h^2} + 9\frac{16\nu^2}{h^4}}} \quad (2.27)$$

Ici \mathbf{u} représente la vitesse de convection, donc en formulation ALE, on obtient :

$$\tau_{SUPG} = \tau_{PSPG} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{\Delta t^2} + \frac{4\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_m\|^2}{h^2} + 9\frac{16\nu^2}{h^4}}} \quad (2.28)$$

Le terme en Δt provient de la formulation espace-temps utilisée par Tezduyar et Osawa (2000). Il ne s'applique pas pour notre formulation, on a cependant remarqué qu'il contribuait à une meilleure convergence dans certains cas. Cependant, la solution dépend alors du pas de temps.

Pour la stabilisation de la contrainte d'incompressibilité, on choisit le coefficient proposé par Tezduyar et Osawa (2000) en corrigeant la vitesse de convection pour la formulation ALE :

$$\tau_{CONT} = \frac{h}{2}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_m\| \min(1, Re/3) \quad (2.29)$$

La taille de l'élément peut elle aussi être calculée de différentes façons. On peut par exemple choisir pour la taille caractéristique de l'élément h , la longueur du côté du triangle équilatéral qui aurait la même aire que l'élément considéré. On notera cette longueur h_c . Une autre possibilité a été proposée par Tezduyar et Osawa (2000) et reprise par Verdier (2008). Elle consiste à prendre en compte la direction de l'écoulement dans le calcul de la taille. La taille caractéristique d'un élément donné a alors pour expression pour les maillages fixes :

$$h_{UGN} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_u} \left(\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \nabla N_i^{\mathbf{u}} \right)^2}} \quad (2.30)$$

La vitesse considérée étant encore la vitesse de convection, sur un maillage mobile, cette taille

caractéristique aura pour expression :

$$h_{UGN} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_u} \left(\frac{(\mathbf{u} - \mathbf{v}_m)}{\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_m\|} \cdot \nabla N_i^u \right)^2}} \quad (2.31)$$

La longueur h_{UGN} sera utilisée pour le calcul de τ_{SUPG} , pour les autres coefficients, on utilisera la longueur h_c , cette combinaison s'avérant la plus robuste.

Formulation stabilisée des équations de Navier-Stokes

En regroupant ces trois stabilisations, on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \delta p \, d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\tau_{PSPG}}{\rho} \nabla \delta p \cdot \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho((\mathbf{u} - \mathbf{v}_m) \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{f} \right) \, d\Omega = 0 \quad (2.32) \\ & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}_m) \rho \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho ((\mathbf{u} - \mathbf{v}_m) \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\tau} - p \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u} - \mathbf{v}_m) \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} \cdot \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho((\mathbf{u} - \mathbf{v}_m) \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{f} \right) \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \tau_{CONT} \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = 0 \quad (2.33) \end{aligned}$$

Nous utiliserons ces équations avec les éléments P1-P1. Avec les éléments de Taylor-Hood, nous utiliserons les équations (2.10). Il nous faudra vérifier si la forme stabilisée satisfait la GCL.

2.3.4 Intégration temporelle et vitesse de maille

Pour l'intégration temporelle, nous utiliserons des schémas de Runge-Kutta d'ordre élevé puisque si la GCL est satisfaite, les ordres de convergence seront conservés sur maillage mobile. Soit l'équation différentielle ordinaire suivante : $y' = f(y, t)$, la formulation générale de ces schémas est la suivante :

$$y_*^{(n+c_i)} = y^{(n)} + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_*^{(n+c_j)}, t^{(n+c_j)}) \quad \text{pout } i = 1, \dots, s \quad (2.34)$$

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} + \Delta t \sum_{j=1}^s b_j f(y_*^{(n+c_j)}, t^{(n+c_j)}) \quad (2.35)$$

où s est le nombre de sous-niveaux, $t^{(n+c_j)} = t^{(n)} + c_j \Delta t$ et $y_*^{(n+c_i)}$ est la solution évaluée au temps intermédiaire $t^{(n+c_i)}$. Ceci peut se résumer sous forme de tableau de Butcher :

c_1	a_{11}	\cdots	a_{1s}
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
c_s	a_{s1}	\cdots	a_{ss}
	b_1	\cdots	b_s

Nous utiliserons deux schémas implicites de Runge-Kutta.

- le schéma de Radau IIA3, noté IRK32, précis à l'ordre 3 pour la vitesse et à l'ordre 2 pour la pression. Ce schéma compte au total 2 niveaux.
- le schéma de Radau IIA5, noté IRK53, précis à l'ordre 5 pour la vitesse et à l'ordre 3 pour la pression. Ce schéma compte au total 3 niveaux.

L'ordre de convergence pour la pression est plus faible car la pression est traitée comme un multiplicateur de Lagrange (Hairer et Wanner, 2002). Ces schémas ont les tableaux de Butcher suivants :

$1/3$	$5/12$	$-1/12$	
1	$3/4$	$1/4$	
IRK32	$3/4$	$1/4$	

$(4 - \sqrt{6})/10$	$(88 - 7\sqrt{6})/360$	$(296 - 169\sqrt{6})/1800$	$(-2 + 3\sqrt{6})/225$
$(4 + \sqrt{6})/10$	$(296 - 169\sqrt{6})/1800$	$(88 + 7\sqrt{6})/360$	$(-2 - 3\sqrt{6})/225$
1	$(16 - \sqrt{6})/36$	$(16 + \sqrt{6})/36$	$1/9$

IRK53	$(16 - \sqrt{6})/36$	$(16 + \sqrt{6})/36$	$1/9$
-------	----------------------	----------------------	-------

Nous utiliserons aussi le schéma d'Euler implicite ou Radau IIA1, qui est aussi un schéma de Runge-Kutta. Il s'exprime de la façon suivante :

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} + \Delta t f(y^{(n+1)}, t^{(n+1)}) \quad (2.36)$$

ou avec le tableau de Butcher suivant

1	1
IRK11	1

Son taux de convergence est de 1 pour la vitesse et pour la pression, nous le noterons IRK11.

Pour les schémas utilisés, on a $a_{sj} = b_j$ et la matrice des coefficients (a_{ij}) est inversible.

Pour que la GCL soit satisfaite, l'évaluation de la vitesse de maille et de sa divergence doivent être consistantes avec le schéma d'intégration temporelle. La vitesse de maille et sa divergence peuvent être évaluées indépendamment, nous reprenons les expressions développées par Etienne *et al.* (2009b). Pour la divergence de la vitesse de maille, nous utilisons la formule suivante :

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}_m)^{(n+c_j)} = \sum_{k=1}^s a_{jk}^{-1} \frac{J^{(n+c_k)} - J^{(n)}}{\Delta t J^{(n+c_j)}}, \quad j = 1, \dots, s \quad (2.37)$$

où $J^{(t)}$ est le jacobien de la transformation entre le domaine de référence Ω_0 et le domaine déformé $\Omega(t)$. Cette formule est valable seulement si la matrice $A = (a_{ij})$ est inversible.

La vitesse de maille est évaluée de la façon suivante :

$$\mathbf{v}_m^{(n+c_j)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^s a_{jk}^{-1} \frac{\mathbf{x}^{(n+c_k)} - \mathbf{x}^{(n)}}{\Delta t}, \quad j = 1, \dots, s \quad (2.38)$$

L'utilisation de ces deux formules et de la forme conservative pour la forme faible des équations de Navier-Stokes permet de satisfaire la GCL (Etienne *et al.*, 2009b).

2.3.5 Méthode de résolution

Nous utilisons une stratégie monolithique couplant tous les degrés de liberté : la vitesse, la pression et le déplacement du pseudo-solide. La discrétisation éléments finis et la discrétisation temporelle mènent à un système d'équations algébriques non linéaires, noté $\mathbf{R}(\mathbf{U}) = 0$ où \mathbf{U} est le vecteur des inconnues. Ce système est linéarisé avec une méthode de Newton-Raphson. Dans cette méthode itérative, on résout

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{U}^n)}{\partial \mathbf{U}} \delta \mathbf{U} = -\mathbf{R}(\mathbf{U}^n) \quad (2.39)$$

et on actualise la solution : $\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \delta \mathbf{U}$. La matrice jacobienne $\partial \mathbf{R}(\mathbf{U}^n)/\partial \mathbf{U}$ est difficile à calculer, c'est pourquoi nous utilisons un jacobien numérique :

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\mathbf{R}(\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}) - \mathbf{R}(\mathbf{U})}{\Delta \mathbf{U}} \quad (2.40)$$

Le système résultant est résolu avec le solveur direct pour matrices creuses Pardiso (Schenk et Gärtner, 2004, 2006) .

2.4 Implémentation de la méthode

Nous avons intégré notre méthode à un code d'éléments finis fluide-structure. Nous soulignons dans cette section quelques détails d'implémentation des conditions de surface libre et de la stabilisation avec les schémas de Runge-Kutta.

2.4.1 Implémentation des conditions de surface libre

Pour les noeuds situés sur la surface libre, les résidus correspondants aux équations de Navier-Stokes sont inchangés (résidus correspondant à la vitesse), ce qui impose au sens faible des contraintes nulles sur toute la surface. On change les résidus du pseudo-solide pour imposer les conditions de surface libre (2.13) and (2.16), appelées par Sackinger *et al.* (1996) les *distinguish conditions*. Si R_x et R_y sont les résidus du pseudo-solide pour un point de la surface libre, on les remplace de la façon suivante :

$$R_x = \frac{L_-^2}{l_-^2} - \frac{L_+^2}{l_+^2} \quad (2.41)$$

$$R_y = (\mathbf{u} - \mathbf{v}_m) \cdot \mathbf{n} \quad (2.42)$$

où \mathbf{u} est la vitesse nodale et $\mathbf{n} = L_- \mathbf{n}_- + L_+ \mathbf{n}_+$. Il n'est pas nécessaire de normer l'expression de la normale.

Cas de l'élément de Taylor-Hood : Noeud au milieu des segments de frontière
Si le noeud considéré se trouve au milieu d'un segment s_i , comme la déformée de l'arête doit rester un segment, il faut imposer à ce noeud de rester au milieu des deux autres. Cependant les conditions dynamiques et cinématiques de surface libre doivent être respectées (contraintes nulles et flux nul à travers l'interface). Sans changer les résidus correspondants aux équations de Navier-Stokes, on impose :

$$R_x = \xi_m - 0,5(\xi_1 + \xi_2) \quad (2.43)$$

$$R_y = \eta_m - 0,5(\eta_1 + \eta_2) \quad (2.44)$$

où l'indice $_m$ désigne le noeud milieu et les indices $_1$ et $_2$ les extrémités du segment considéré. (voir figure 2.6)

La condition de tangence n'est alors pas satisfaite. On l'impose comme une contrainte en introduisant un multiplicateur de Lagrange par segment λ_{s_i} . La discréétisation du multiplicateur est donc P0, constante par élément. La contrainte à respecter est $G_{s_i} = (\mathbf{u} - \mathbf{v}_m) \cdot \mathbf{n} = 0$.

Si les équations du fluide étaient linéaires, les résoudre correspondrait à minimiser une

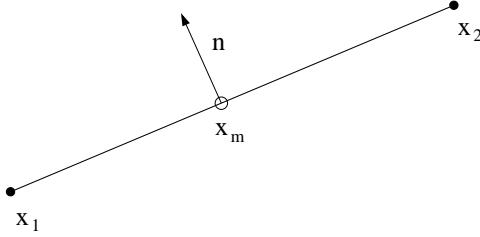


Figure 2.6 Segment de surface libre.

fonctionnelle I par rapport aux variables \mathbf{U} de l'écoulement. En ajoutant la contrainte, on cherche alors à minimiser $I - \lambda G$.

– Minimisation par rapport aux variables de l'écoulement :

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{U}} - \lambda \frac{\partial G}{\partial \mathbf{U}} = 0 \quad (2.45)$$

Le premier terme correspond à la forme faible des équations de Navier-Stokes.

– Minimisation par rapport à λ : $G = 0$

Il suffit donc d'ajouter ces équations aux résidus pour satisfaire à la fois les conditions de surface libre et les contraintes géométriques de l'élément pour le nœud au milieu du segment.

2.4.2 Implémentation des schémas d'intégration de Runge-Kutta

Nous allons à présent donner quelques détails sur l'implémentation des schémas de Runge-Kutta qui demande une attention particulière. Reprenons l'expression générale des schémas de Runge-Kutta (2.35) :

$$y_*^{(n+c_i)} = y^{(n)} + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_*^{(n+c_j)}, t^{(n+c_j)}) \quad \text{pour } i = 1, \dots, s \quad (2.46)$$

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} + \Delta t \sum_{j=1}^s b_j f(y_*^{(n+c_j)}, t^{(n+c_j)}) \quad (2.47)$$

Avec les éléments de Taylor-Hood, c'est à dire sans les termes de stabilisation, on doit discrétiser l'équation (2.10). En combinant le schéma et l'équation, on obtient

$$\left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \right)^{(n+c_i)} = \left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \right)^{(n)} + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} R_j \quad (2.48)$$

$$\text{avec } R_j = \left(\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}_m) \rho \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho ((\mathbf{u} - \mathbf{v}_m) \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \right. \\ \left. - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{u} \, d\Omega \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\tau} - p \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma \right)^{(n+c_j)} \quad (2.49)$$

Dans ce cas, la vitesse de maille doit être évaluée de manière consistante avec le schéma, c'est à dire avec l'équation (2.38).

Avec la forme stabilisée des équations de Navier-Stokes, cette approche n'est plus possible car la dérivée temporelle de la vitesse apparaît dans les termes additionnels par les termes :

$$\int_{\Omega} \tau_{SUPG} ((\mathbf{u} - \mathbf{v}_m) \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} \cdot \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \, d\Omega \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \frac{\tau_{PSPG}}{\rho} \nabla \delta p \cdot \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \, d\Omega \quad (2.50)$$

L'approche précédente ne peut donc pas s'appliquer. Il faut procéder autrement, en reformulant le schéma de Runge-Kutta. Reprenons le cas d'une équation différentielle ordinaire de type $y'(t) = f(y, t)$. L'écriture classique du schéma est alors

$$y^{(n+c_i)} = y^{(n)} + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y^{(n+c_j)}, t^{(n+c_j)}) \quad \text{pour } i = 1, \dots, s \quad (2.51)$$

On considère A la matrice de composantes $A_{ij} = a_{ij}$, Y et Y' les vecteurs tels que $Y_j = y^{(n+c_j)}$ et $Y'_j = y'(t^{(n+c_j)})$ et le vecteur Y^n de coordonnées $Y_j^n = y^{(n)}$.

Avec ces notations, le schéma devient :

$$Y_i = Y_i^n + \Delta t \sum_{j=1}^s A_{ij} f(y^{(n+c_j)}, t^{(n+c_j)}) \quad \text{pour } i = 1, \dots, s \quad (2.52)$$

Or d'après l'équation différentielle originale $f(y^{(n+c_j)}, t^{(n+c_j)}) = y'(t^{(n+c_j)}) = Y'_j$, on obtient donc :

$$Y_i = Y_i^n + \Delta t \sum_{j=1}^s A_{ij} Y'_j \quad \text{pour } i = 1, \dots, s \quad (2.53)$$

qui peut se réécrire sous la forme vectorielle :

$$Y = Y^n + \Delta t A Y' \quad (2.54)$$

Si le tableau de Butcher est inversible, donc si A est inversible, on a

$$Y' = A^{-1} \left(\frac{Y - Y^n}{\Delta t} \right) \quad (2.55)$$

Cette expression permet d'écrire toutes les dérivées temporelles de manière consistante avec le schéma. On remarque que cette expression est bien cohérente avec l'équation (2.38) qui permettait d'évaluer la vitesse de maille, c'est à dire la dérivée temporelle du pseudo-déplacement. On peut donc résoudre les équations stabilisées (2.32) et (2.33) pour chaque niveau en utilisant les expressions suivantes pour les termes instationnaires :

$$\left(\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \right)^{(n+c_i)} = \sum_{j=1}^s \frac{a_{ij}^{-1}}{\Delta t} \left[\left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \right)^{(n+c_j)} - \left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \right)^{(n)} \right] \quad (2.56)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^{(n+c_i)} = \sum_{j=1}^s \frac{a_{ij}^{-1} (\mathbf{u}^{(n+c_j)} - \mathbf{u}^{(n)})}{\Delta t} \quad (2.57)$$

$$\mathbf{v}_m^{(n+c_i)} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} \right)^{(n+c_i)} = \sum_{j=1}^s \frac{a_{ij}^{-1} (\boldsymbol{\chi}^{(n+c_j)} - \boldsymbol{\chi}^{(n)})}{\Delta t} \quad (2.58)$$

Dans ce chapitre, nous avons décrit la modélisation choisie pour la surface libre et les méthodes utilisées pour résoudre les équations de la modélisation sur maillage mobile. La description ALE permet une grande flexibilité quant au choix de la déformation du maillage tout en garantissant la conservation de la masse. La déformation du maillage pouvant provoquer une perte d'ordre de convergence temporel, nous avons choisi une formulation respectant la GCL pour utiliser des schémas de Runge-Kutta d'ordre élevé. Enfin, pour les calculs à haut nombre de Reynolds, nous avons recours aux éléments P1-P1 avec une stabilisation de type SUPG/PSPG adaptée à la formulation ALE.

Nous allons maintenant développer les équations des sensibilités correspondant à la méthode choisie.

CHAPITRE 3

MÉTHODE DES SENSIBILITÉS LAGRANGIENNES

La méthode des sensibilités lagrangiennes a été développée et vérifiée en détail dans Charlot (2008) pour les écoulements stationnaires et laminaires. Nous allons donc ici rappeler comment sont établies les équation des sensibilités lagrangiennes et dériver ensuite les équations des sensibilités correspondant à la méthode exposée au chapitre 2. Il faudra donc étendre les équations présentées dans Charlot (2008) au cas des écoulements instationnaires en formulation ALE, donc sur maillages mobiles. Nous dériverons ensuite les conditions aux limites pour les sensibilités à la surface libre.

3.1 Méthode de l'équation des sensibilités lagrangiennes

La sensibilité lagrangienne d'une variable est sa dérivée totale ou matérielle par rapport au paramètre d'intérêt. En effet, les variables présentent à la fois une dépendance explicite par rapport au paramètre (qui peut s'exprimer par sa dérivée partielle par rapport au paramètre) et une dépendance implicite par les variables spatiales. En effet, si le paramètre affecte la géométrie du domaine, les variables spatiales dépendent du paramètre. Ainsi, si on considère le champ de vitesse \mathbf{u} , on peut écrire $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}(\alpha), \alpha, t)$. La sensibilité lagrangienne de la vitesse, notée $\mathbf{S}_\mathbf{u}$ est alors définie par :

$$\mathbf{S}_\mathbf{u} = \frac{D\mathbf{u}}{D\alpha} = \lim_{\delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}(\alpha + \delta\alpha), \alpha + \delta\alpha) - \mathbf{u}(\mathbf{x}(\alpha), \alpha)}{\delta\alpha} \quad (3.1)$$

3.1.1 Établissement de la forme faible des équations des sensibilités lagrangiennes

Les équations des sensibilités lagrangiennes sont obtenues en dérivant la forme faible des équations de Navier-Stokes (2.18) et (2.19) par rapport au paramètre d'intérêt que nous noterons α . Cette dérivation n'est pas triviale car le domaine Ω dépend du paramètre, ainsi, nous le noterons Ω_α . Il faut donc introduire une transformation entre le domaine de référence Ω_0 et le domaine courant déformé Ω_α dont la forme dépend du paramètre.

Méthode générale

On note $\hat{\Phi}$ la transformation entre le domaine de référence et le domaine courant comme

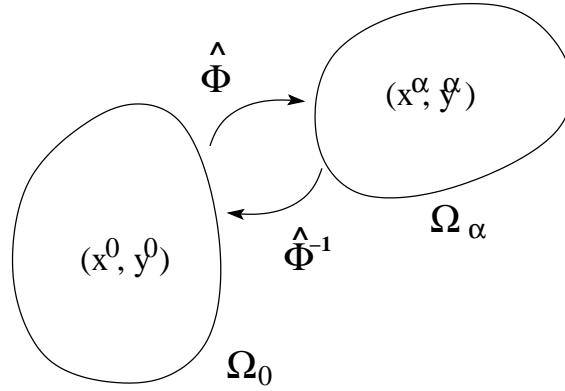


Figure 3.1 Déformation du domaine.

le montre la figure 3.1. Cette transformation dépend du temps et du paramètre, ces deux variables étant indépendantes. Pour obtenir les équations des sensibilités, la forme faible des équations de l'écoulement est exprimée sur la configuration de référence Ω_0 qui ne dépend pas du paramètre α . Ainsi, l'opération de dérivation et d'intégration sur le domaine commutent et on peut dériver directement la fonction à intégrer par rapport à α . On peut ensuite revenir au domaine courant Ω_α , ce qui donne la forme faible des équations des sensibilités. Ces opérations nécessitent la manipulation de la transformation et d'opérateurs différentiels (gradient et divergence) exprimés sur différents domaines. Les développements mathématiques associés ont été décrits par Delfour et Zolésio (2001) et Tortorelli et Wang (1993). On donnera les composantes des tenseurs dans une base orthonormale et on utilisera la double contraction définie pour des tenseurs d'ordre 2 :

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_i \sum_j A_{ij} B_{ji} \quad (3.2)$$

Ainsi, on utilisera pour les transformation d'espace les notations suivantes :

– Le tenseur des déformations :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \alpha, t) = \nabla \hat{\phi}(\mathbf{x}, \alpha, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x} & \frac{\partial x^\alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial y^\alpha}{\partial x} & \frac{\partial y^\alpha}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Le déterminant de \mathbf{F} est le jacobien de la transformation et est défini de la façon suivante :

$$J(\mathbf{x}, \alpha, t) = \det[\mathbf{F}(\mathbf{x}, \alpha, t)] = \det[\nabla \hat{\phi}(\mathbf{x}, \alpha, t)] = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x} \frac{\partial y^\alpha}{\partial y} - \frac{\partial y^\alpha}{\partial x} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y} \quad (3.4)$$

- La vitesse de déformation est la dérivée de la transformation par rapport au paramètre α .

$$\mathbf{V}^\alpha(\mathbf{x}, \alpha, t) = \frac{\partial \hat{\phi}(\mathbf{x}, \alpha, t)}{\partial \alpha}$$

On a alors l'égalité suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha} = \nabla \mathbf{V}^\alpha = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{V}^\alpha_x}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{V}^\alpha_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{V}^\alpha_y}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{V}^\alpha_y}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Nous présentons maintenant quelques formules utiles pour obtenir les équations des sensibilités lagrangiennes :

- Dérivée du jacobien de la transformation :

Son expression diffère selon le domaine considéré :

$$\text{Sur le domaine de référence :} \quad \frac{\partial J}{\partial \alpha} = \nabla \mathbf{V}^\alpha : J \mathbf{F}^{-1} \quad (3.6)$$

$$\text{Sur le domaine déformé :} \quad \frac{D J^\alpha}{D \alpha} = J^\alpha \nabla^\alpha \cdot \mathbf{V}^\alpha \quad (3.7)$$

- Opérateurs gradients et divergence :

Ces opérateurs font intervenir les dérivées spatiales du champ sur lequel ils s'appliquent, leur expression dépend donc du domaine sur lequel ils sont exprimés. Soient $\mathbf{f}^\alpha(\mathbf{x}^\alpha, \alpha)$ la représentation d'un champ vectoriel sur le domaine déformé Ω_α et $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha)$ la représentation de ce même champ sur le domaine de référence Ω_0 . La divergence et le gradient de \mathbf{f}^α s'expriment en fonction de ceux de \mathbf{f} de la façon suivante :

$$\nabla^\alpha \cdot \mathbf{f}^\alpha = \mathbf{F}^{-1} : \nabla \mathbf{f} \quad (3.8)$$

$$\nabla^\alpha \mathbf{f}^\alpha = \nabla \mathbf{f} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (3.9)$$

- Formule de Nanson (Delfour et Zolésio, 2001) :

Cette formule est très utile pour traiter le passage des intégrales de bord d'un domaine à l'autre.

$$\int_{\Gamma_\alpha} \mathbf{f}^\alpha(x^\alpha, y^\alpha) n_\alpha d\Gamma_\alpha = \int_{\Gamma_0} \mathbf{f}(x, y) J \mathbf{F}^{-T} \cdot n_0 d\Gamma_0 \quad (3.10)$$

où \mathbf{f} est un champ vectoriel ou une fonction scalaire

- Autres formules utiles (dérivées des définitions précédentes) :

$$\mathbf{F} \cdot \frac{D\mathbf{F}^{-1}}{D\alpha} = -\nabla^\alpha \mathbf{V}^\alpha \quad (3.11)$$

$$J^{-1} \frac{DJ}{D\alpha} = \nabla^\alpha \cdot \mathbf{V}^\alpha \quad (3.12)$$

Exemple de l'équation de continuité

Pour illustrer le processus décrit précédemment, nous présentons ici la méthode pour l'équation de continuité. Soit δp une fonction test admissible pour la pression. La forme faible de l'équation de continuité est alors :

$$\int_{\Omega_\alpha} \nabla^\alpha \cdot \mathbf{u} \delta p \, d\Omega_\alpha = 0$$

1. On exprime cette intégrale sur le domaine de référence Ω_0 :

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{F}^{-1} : \nabla \mathbf{u} \delta p \, J d\Omega_0 = 0$$

2. On dérive par rapport à α .

$$\frac{D}{D\alpha} \int_{\Omega_0} \mathbf{F}^{-1} : \nabla \mathbf{u} \delta p \, J d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \frac{D}{D\alpha} (\mathbf{F}^{-1} : \nabla \mathbf{u} \delta p \, J) \, d\Omega_0 = 0 \quad (3.13)$$

ce qui s'écrit

$$\int_{\Omega_0} \left[\left(\mathbf{F}^{-1} : \nabla \frac{D\mathbf{u}}{D\alpha} + \frac{D\mathbf{F}^{-1}}{D\alpha} : \nabla \mathbf{u} \right) \delta p \, J + \mathbf{F}^{-1} : \nabla \mathbf{u} \delta p \frac{DJ}{D\alpha} \right] \, d\Omega_0 = 0$$

3. On revient sur le domaine déformé et on obtient l'équation des sensibilités correspondant à la continuité

$$\int_{\Omega_\alpha} (\nabla^\alpha \cdot \mathbf{S}_u - \nabla^\alpha \mathbf{V}^\alpha : \nabla^\alpha \mathbf{u} + \nabla^\alpha \cdot \mathbf{u} \nabla^\alpha \cdot \mathbf{V}^\alpha) \delta p \, d\Omega_\alpha = 0 \quad (3.14)$$

On remarque que l'équation (3.14) fait intervenir la vitesse de déformation \mathbf{V}^α qui est l'équivalent continu des sensibilités de maille rencontrées dans les approches discrètes, où la discrétisation des équations précède la dérivation.

Calcul de la vitesse de déformation

La méthode est appliquée de la même manière pour l'équation du mouvement. La vitesse de déformation apparaît aussi dans cette équation. La vitesse de déformation \mathbf{V}^α est connue

sur les parties de la frontières qui dépendent du paramètre, mais il faut la connaître sur tout le domaine pour pouvoir résoudre les équations. La définition de la vitesse de déformation à l'intérieur du domaine est donc arbitraire et il y a beaucoup de façons de procéder. Dans le contexte de la description ALE pour l'écoulement, il est naturel d'utiliser la sensibilité du pseudo-déplacement. Les équations d'élasticité linéaires étant lagrangiennes, c'est-à-dire exprimées sur le domaine non déformé, leur dérivation par rapport au paramètre α est triviale. Comme les coefficients de Lamé pour le pseudo-solide sont arbitraires, leur sensibilité par rapport au paramètre est nulle. La vitesse de déformation \mathbf{V}^α est alors solution de :

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \lambda_{ps} \text{tr} (\nabla \mathbf{V}^\alpha + \nabla^T \mathbf{V}^\alpha) + \mu_{ps} (\nabla \mathbf{V}^\alpha + \nabla^T \mathbf{V}^\alpha) \right) = 0 \text{ dans } \Omega$$

Les conditions limites correspondantes sont

$$\mathbf{V}^\alpha = \overline{\mathbf{V}^\alpha} \text{ sur } \partial\Omega$$

où $\overline{\mathbf{V}^\alpha}$ est la vitesse de déformation aux frontières du problème. Cette approche a l'avantage de rester très générale et de permettre le traitement de géométries complexes.

3.1.2 Conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann

Le problème associé aux sensibilités doit maintenant être fermé par les conditions aux limites appropriées. Elles sont obtenues par simple dérivation des conditions aux limites de l'écoulement.

$$S_{\mathbf{u}} = \frac{D\mathbf{u}}{D\alpha} = \frac{D\overline{\mathbf{u}}}{D\alpha} \quad \text{sur } \Gamma_{\mathbf{u}}^\alpha \quad (3.15)$$

De même pour les conditions de Neumann, on a :

$$\begin{aligned} \frac{D}{D\alpha} \int_{\Gamma_t^\alpha} (-p\mathbf{n}^\alpha + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}^\alpha) \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Gamma_\alpha \\ = \int_{\Gamma_t^\alpha} \left(\frac{D\overline{\mathbf{t}_f}}{D\alpha} + \nabla \cdot \mathbf{V}^\alpha \overline{\mathbf{t}_f} - \overline{\mathbf{t}_f} (\nabla \mathbf{V}^\alpha \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Gamma_\alpha \end{aligned} \quad (3.16)$$

Contrairement aux sensibilités eulériennes (Pelletier *et al.*, 2008), ces conditions sont très simples et exactes.

Nous avons donc décrit de façon générale comment les équations des sensibilités lagrangiennes sont obtenues. Le détail des équations pour le régime stationnaire a déjà été présenté (Charlot, 2008). Nous allons à présent développer les équations pour le cas des écoulements instationnaires sur maillage mobile.

3.2 Sensibilités lagrangiennes instationnaires sur maillage mobile

Le traitement des termes instationnaires demande une attention particulière lorsque le maillage se déforme. Tout comme l'écoulement, les sensibilités doivent respecter la GCL, c'est-à-dire que l'ordre de convergence du schéma temporel doit être le même sur maillage mobile que sur maillage fixe. Pour cela, comme pour l'écoulement, il faut écrire la forme faible sous forme conservative. Pour cela, il existe plusieurs approches menant au même résultat. Par exemple, on peut prendre comme point de départ la forme faible de l'écoulement écrite sous forme conservative et procéder comme expliqué à la section précédente. Une autre possibilité consiste à partir de la forme non conservative pour l'écoulement, dériver par rapport au paramètre et mettre le résultat obtenu sous forme conservative. Ces deux possibilités mènent au même résultat car la dérivation par rapport au temps et par rapport au paramètre de forme commutent, le temps et le paramètre étant indépendant l'un de l'autre. En partant de la forme conservative, on doit calculer la dérivée suivante :

$$\frac{d}{d\alpha} \left[\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_\alpha(t)} \rho \mathbf{u} \delta \mathbf{u} \, d\Omega \right) - \int_{\Omega_\alpha(t)} \rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v}_m \delta \mathbf{u} \, d\Omega \right] \quad (3.17)$$

En inversant l'ordre de la dérivation par rapport au paramètre et par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_\alpha(t)} \rho \mathbf{u} \delta \mathbf{u} \, d\Omega \right) - \int_{\Omega_\alpha(t)} \rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v}_m \delta \mathbf{u} \, d\Omega \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{d\alpha} \left(\int_{\Omega_\alpha(t)} \rho \mathbf{u} \delta \mathbf{u} \, d\Omega \right) \right] - \frac{d}{d\alpha} \left(\int_{\Omega_\alpha(t)} \rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v}_m \delta \mathbf{u} \, d\Omega \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

La dérivation des intégrales par rapport au paramètre de forme est calculée en utilisant la transformation $\hat{\Phi}$ et son inverse pour passer sur le domaine de référence et revenir sur le domaine courant. On obtient alors pour les deux termes ci-dessus :

$$\frac{d}{d\alpha} \left[\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_\alpha(t)} \rho \mathbf{u} \delta \mathbf{u} \, d\Omega \right) \right] = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_\alpha(t)} [S_\rho \mathbf{u} + \rho \mathbf{S}_u + \rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{V}^\alpha] \delta \mathbf{u} \, d\Omega \right) \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \int_{\Omega_\alpha(t)} \rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v}_m \delta \mathbf{u} \, d\Omega &= \int_{\Omega_\alpha(t)} \rho \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{S}_{v_m} - \nabla \mathbf{V}^\alpha : \nabla \mathbf{v}_m + \nabla \cdot \mathbf{V}^\alpha \nabla \cdot \mathbf{v}_m) \delta \mathbf{u} \\ &+ (S_\rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v}_m + \rho \mathbf{S}_u \nabla \cdot \mathbf{v}_m) \delta \mathbf{u} \, d\Omega \end{aligned} \quad (3.20)$$

Note : si χ est le déplacement du pseudo solide, alors

$$\mathbf{S}_{v_m} = \frac{\partial \mathbf{V}^\alpha}{\partial t} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial \alpha} \quad (3.21)$$

Nous pouvons à présent reprendre la forme faible de l'écoulement (2.19) et identifier chaque terme de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Instationnaire} + \text{Convection} + \text{Pression} + \text{Diffusion} \\ & = \text{Force} + \text{Terme de bord} \end{aligned}$$

Pour obtenir les équations des sensibilités lagrangiennes, nous dérivons terme à terme la forme faible par rapport au paramètre. La forme faible de l'équation des sensibilités aura la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{D \text{ Instationnaire}}{D\alpha} + \frac{D \text{ Convection}}{D\alpha} + \frac{D \text{ Pression}}{D\alpha} + \frac{D \text{ Diffusion}}{D\alpha} \\ & = \frac{D \text{ Force}}{D\alpha} + \frac{D \text{ Terme de bord}}{D\alpha} \end{aligned}$$

Les expressions de chaque terme sont les suivantes :

Dérivation du terme instationnaire

$$\begin{aligned} & \frac{D}{D\alpha} \left[\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \delta \mathbf{u} \, d\Omega \right) - \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v}_m \delta \mathbf{u} \, d\Omega \right] \\ & = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} [S_{\rho} \mathbf{u} + \rho \mathbf{S}_u + \rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{V}^{\alpha}] \delta \mathbf{u} \, d\Omega \right) \\ & \quad - \int_{\Omega} [\rho \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{S}_{v_m} - \nabla \mathbf{V}^{\alpha} : \nabla \mathbf{v}_m + \nabla \cdot \mathbf{V}^{\alpha} \nabla \cdot \mathbf{v}_m) \delta \mathbf{u} \\ & \quad + (S_{\rho} \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v}_m + \rho \mathbf{S}_u \nabla \cdot \mathbf{v}_m) \delta \mathbf{u}] \, d\Omega \end{aligned} \tag{3.22}$$

Dérivation du terme de convection

$$\begin{aligned} & \frac{D}{D\alpha} \int_{\Omega} \rho ((\mathbf{u} - \mathbf{v}_m) \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \\ & = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \alpha} + \rho \nabla^{\alpha} \cdot \mathbf{V}^{\alpha} \right) ((\mathbf{u} - \mathbf{v}_m) \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \\ & \quad + \int_{\Omega} \rho [((\mathbf{S}_u - \mathbf{S}_{v_m}) \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{V}^{\alpha} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_m) + ((\mathbf{u} - \mathbf{v}_m) \cdot \nabla) \mathbf{S}_u] \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \end{aligned} \tag{3.23}$$

Dérivation du terme de pression

$$\begin{aligned} & \frac{D}{D\alpha} \int_{\Omega} -p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \\ & = - \int_{\Omega} [(S_p + p \nabla \cdot \mathbf{V}^{\alpha}) \nabla \cdot \delta \mathbf{u} - p \nabla \mathbf{V}^{\alpha} : \nabla \delta \mathbf{u}] \, d\Omega \end{aligned} \tag{3.24}$$

Dérivation du terme de diffusion

$$\begin{aligned}
\frac{D}{D\alpha} \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \nabla \delta \mathbf{u} \, d\Omega \\
= \int_{\Omega} \left(\frac{D\mu}{D\alpha} + \mu \nabla \cdot \mathbf{V}^{\alpha} \right) (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) : \nabla \delta \mathbf{u} \, d\Omega \\
+ \int_{\Omega} \mu (\nabla \mathbf{S}_u + \nabla^T \mathbf{S}_u) : \nabla \delta \mathbf{u} \, d\Omega \\
- \int_{\Omega} \mu \left(\nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{V}^{\alpha} + (\nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{V}^{\alpha})^T \right) : \nabla \delta \mathbf{S}_u \, d\Omega \\
- \int_{\Omega} \mu (\nabla \mathbf{V}^{\alpha} \cdot (\nabla^{\alpha} \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})) : \nabla \delta \mathbf{u} \, d\Omega
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Dérivation du terme de force volumique

$$\frac{D}{D\alpha} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{D\mathbf{f}}{D\alpha} + \nabla \cdot \mathbf{V}^{\alpha} \mathbf{f} \right) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \tag{3.26}$$

Il suffit de regrouper ces termes pour obtenir la formulation pour l'équation de quantité de mouvement pour les sensibilités lagrangiennes. Pour l'équation de continuité, elle a été présentée en détail à la section précédente et est inchangée si on considère des maillages déformables, on utilisera donc l'équation (3.14).

3.3 Sensibilité des conditions de surface libre

Il ne reste plus qu'à développer les conditions pour la surface libre. Les conditions limites pour les sensibilités s'obtiennent en calculant la dérivée matérielle des conditions limites de l'écoulement. Les conditions de surface libre pour l'écoulement étaient les suivantes :

$$(\mathbf{u} - \mathbf{v}_m) \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{3.27}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_i \tag{3.28}$$

$$\frac{L_-^2}{l_-^2} = \frac{L_+^2}{l_+^2} \quad \text{pour chaque nœud de } \Gamma_i \tag{3.29}$$

Comme les sensibilités sont les dérivées totales des variables par rapport au paramètre, contrairement aux formulations eulériennes des sensibilités (Etienne *et al.*, 2007), les conditions d'interface sont très simples.

$$(\mathbf{S}_u - \mathbf{S}_{v_m}) \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}_m) \cdot \mathbf{S}_n = 0 \tag{3.30}$$

$$\frac{D\boldsymbol{\sigma}}{D\alpha} \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{S}_n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_i \tag{3.31}$$

$$\frac{S_{L_-^2}}{l_-^2} = \frac{S_{L_+^2}}{l_+^2} \quad \text{pour chaque nœud de } \Gamma_i \tag{3.32}$$

où S_n est la sensibilité de la normale, elle s'exprime pour chaque nœud en fonction de la sensibilité du pseudo-déplacement. Pour une viscosité constante, la sensibilité du tenseur des contraintes $D\boldsymbol{\sigma}/D\alpha$ se développe de la façon suivante :

$$\frac{D\boldsymbol{\sigma}}{D\alpha} = -S_p \mathbf{I} + \mu \left((\nabla \mathbf{S}_u - \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{V}^\alpha) + (\nabla \mathbf{S}_u - \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{V}^\alpha)^T \right)$$

En pratique, nous n'utilisons pas cette expression car pour l'écoulement, la condition dynamique est imposée faiblement par la méthode des réactions (Dhatt et Touzot, 1981). Pour les sensibilités, il en va de même, les réactions du problème de sensibilités étant justement égales à

$$\mathbf{R}_{\Gamma_i}^{\text{lgr}} = \frac{D}{D\alpha} \int_{\Gamma_i} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (3.33)$$

Enfin, la sensibilité des longueurs des segments s'exprime en fonction de la sensibilité du pseudo déplacement. La condition (3.32) devient alors :

$$\begin{aligned} & \frac{(x_i + \xi_i - x_{i-1} - \xi_{i-1})(S_{\xi_i} - S_{\xi_{i-1}}) + (y_i + \eta_i - y_{i-1} - \eta_{i-1})(S_{\eta_i} - S_{\eta_{i-1}})}{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \\ &= \frac{(x_{i+1} + \xi_{i+1} - x_i - \xi_i)(S_{\xi_{i+1}} - S_{\xi_i}) + (y_{i+1} + \eta_{i+1} - y_i - \eta_i)(S_{\eta_{i+1}} - S_{\eta_i})}{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \end{aligned} \quad (3.34)$$

La formulation pour les sensibilités est à présent complète. Les méthodes numériques sont les mêmes que celles utilisées pour l'écoulement. La formulation et l'implémentation doivent être vérifiées surtout pour la convergence temporelle afin de s'assurer que la GCL est respectée, ce qui permettra d'avoir la même précision pour l'écoulement et les sensibilités avec des schémas d'intégration d'ordre élevé.

CHAPITRE 4

VÉRIFICATION

4.1 Solution manufacturée

L'implémentation des conditions de surface libre est vérifiée par la méthode des solutions manufacturées. Cette méthode consiste à choisir une solution analytique vérifiant les conditions de surface libre et à calculer le terme source correspondant pour satisfaire les équations de Navier-Stokes. Ensuite, la solution numérique peut être comparée à la solution analytique et permet de vérifier que les ordres de convergence correspondant à la discrétisation spatiale et à l'intégration temporelle sont respectés. Nous allons tout d'abord vérifier l'implémentation en régime stationnaire pour les éléments de Taylor-Hood puis pour les éléments P1-P1. Ensuite, nous vérifierons l'implémentation en régime non stationnaire, avec différents types de schémas pour chacun des éléments.

4.1.1 Régime stationnaire

On doit tout d'abord construire une solution analytique qui servira de référence. Pour cela, on suivra une méthode analogue à celle décrite par Etienne *et al.* (2010), puis nous testerons la convergence de l'erreur avec le raffinement du maillage.

Construction d'une solution analytique

Nous devons choisir une solution analytique qui respecte la conservation de la masse (2.9) et les conditions de surface libre (2.13) et (2.14). On suppose que la surface libre est décrite de façon univoque par l'équation $y_I = f(x)$. Le vecteur normal a pour composantes $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ avec

$$n_x = \frac{-f'(x)}{\sqrt{(f'(x))^2 + 1}} \quad \text{and} \quad n_y = \frac{1}{\sqrt{(f'(x))^2 + 1}} \quad (4.1)$$

On choisit la composante horizontale de la vitesse u de la forme :

$$u(x, y) = (1 + y - f(x))H(y) \quad (4.2)$$

L'équation de continuité sera satisfaite si la vitesse verticale v est telle que :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x)H(y) \quad (4.3)$$

Après intégration, on obtient :

$$v(x, y) = f'(x) \int^y H(z) dz + G(x) \quad (4.4)$$

Il faut maintenant déterminer les fonctions H et G et les expressions de la pression et de la viscosité telles que les conditions de surface libre soient satisfaites. Pour les écoulements stationnaires, la condition (2.13) devient $un_x + vn_y = 0$. En remplaçant le vecteur normal et la vitesse par leurs expressions (4.1), (4.2) et (4.4), la condition cinématique devient :

$$f'(x) \int^y H(z) dz + G(x) = f'(x)H(y) \quad \text{sur } \Gamma_i \quad (4.5)$$

La condition dynamique de surface libre (2.14) se décompose de la façon suivante :

$$\begin{cases} -pn_x + \mu \left[2\frac{\partial u}{\partial x}n_x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y \right] = 0 \\ -pn_y + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + 2\frac{\partial v}{\partial y}n_y \right] = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_i \quad (4.6)$$

Il faut résoudre ce système par rapport à la pression p et la viscosité μ . La solution doit être non nulle donc les deux équations doivent être liées, ce qui se traduit de la façon suivante.

$$\det \begin{bmatrix} -n_x & 2\frac{\partial u}{\partial x}n_x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y \\ -n_y & \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + 2\frac{\partial v}{\partial y}n_y \end{bmatrix} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_i \quad (4.7)$$

En utilisant nos expressions, on obtient alors l'équation suivante :

$$\begin{aligned} (1 - (f'(x))^2) \left[H'(f(x)) + H(f(x)) + f''(x) \int^{f(x)} H(z) dz + G'(x) \right] \\ + 4(f'(x))^2 H(f(x)) = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

On doit ensuite choisir G et H telles que les équations (4.5) and (4.8) soient satisfaites en

tout point de la surface libre. En éliminant G , on obtient la condition suivante pour H :

$$\begin{aligned} & \left[(1 - (f'(x))^2) (1 - (f'(x))^2 + f''(x)) + 4(f'(x))^2 \right] H(f(x)) \\ & + (1 - (f'(x))^2) (1 + (f'(x))^2) H'(f(x)) = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

La fonction f définit la forme de la surface libre. Pour obtenir une solution relativement simple, mais non triviale, on choisit $f(x) = 2x$. On obtient finalement la solution analytique suivante :

$$u(x, y) = (1 + y - 2x) k e^{\frac{5}{3}y} \quad (4.10)$$

$$v(x, y) = k \left(\frac{6}{5} e^{\frac{5}{3}y} + \frac{4}{5} e^{\frac{5}{3}2x} \right) \quad (4.11)$$

La pression correspondant à une viscosité unitaire $\mu = 1$ est

$$p(x, 2x) = -k \frac{20}{3} e^{\frac{5}{3}2x} \quad \text{sur } \Gamma_i \quad (4.12)$$

Cette solution est étendue sur tout le domaine :

$$p(x, y) = -k \frac{5}{3} e^{\frac{5}{3}y} - 3k e^{\frac{5}{3}2x} \quad \text{dans } \Omega \quad (4.13)$$

Le terme source correspondant dans les équations de Navier-Stokes est obtenu de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f_x &= \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ f_y &= \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Étude de convergence avec le maillage

Pour vérifier l'implémentation de la condition de surface libre dans le cas stationnaire, on choisit un domaine initial pour lequel la géométrie de la surface libre est quelconque. Les formes initiale et finale du domaine de calcul sont représentées sur la figure 4.1. La ligne pointillée représente la portion de frontière sur laquelle sont imposées des conditions de surface libre. Sur les frontières voisines, on impose des conditions de Neumann et ailleurs des conditions de Dirichlet. Pour les simulations, la densité volumique ρ est fixée à 1 et le paramètre k vaut 1. Le champ de vitesse attendu est représenté sur la figure 4.1(c).

On peut maintenant procéder à l'étude de convergence. À chaque cycle adaptatif les

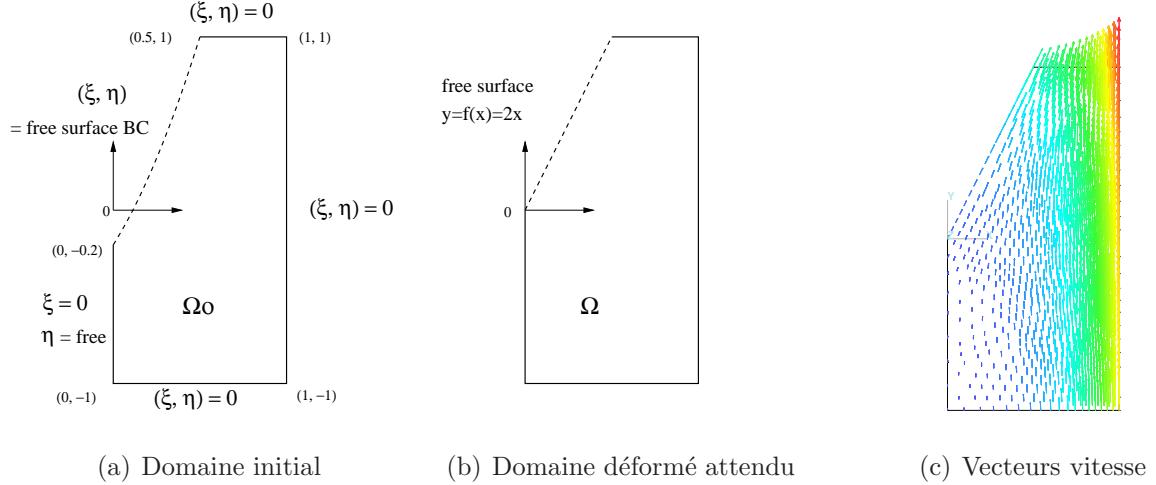


Figure 4.1 Domaine initial et déformé et champ de vitesse pour la solution manufacturée stationnaire.

erreurs sont estimées et le maillage est raffiné là où l'erreur est la plus grande. Les erreurs sont estimées avec la norme énergie pour la vitesse et en norme L^2 pour le champ de pression. Elles sont définies de la façon suivante :

$$\|e_u\|_{energie}^2 = \int_{\Omega} (\nabla e_u + \nabla^T e_u) : (\nabla e_u + \nabla e_u^T) \, d\Omega \quad (4.15)$$

$$\|e_P\|_{L2P}^2 = \int_{\Omega} e_P^2 \, d\Omega \quad (4.16)$$

ou e_u et e_P sont les erreurs locales pour la vitesse et la pression. On calculera deux types d'erreurs pour chaque champ.

- L'erreur exacte e^{exa} : La solution éléments finis, notée avec l'exposant h est comparée à la solution analytique, notée avec l'exposant exa . Par exemple, pour la vitesse $e_u^{exa} = |\mathbf{u}^h - \mathbf{u}^{exa}|$
- L'erreur estimée e_u^{est} : dans le cas général, la solution exacte n'est pas connue. On reconstruit donc une solution enrichie à partir de la solution éléments finis avec une méthode de projection décrite par Zienkiewicz et Zhu (1992). Cette solution est notée avec l'exposant $*$. Ainsi pour le champ de vitesse, on aura $e_u^{est} = |\mathbf{u}^h - \mathbf{u}^*|$

La précision de l'estimateur d'erreur fait entièrement partie du processus de vérification. Dans le cas général, c'est le seul outil dont on dispose pour quantifier la précision de la solution et donc de vérifier la convergence de l'écoulement. Nous utiliserons des éléments de Taylor-Hood et des éléments de type P1-P1 stabilisés.

Pour les éléments de type Taylor-Hood, la discrétisation de la vitesse est quadratique et celle de la pression est linéaire. Donc le taux de convergence théorique pour chaque norme (énergie et L_P^2) est de 2. On trace l'évolution de la norme d'erreur en fonction de la taille caractéristique des éléments du maillage. Avec une échelle logarithmique, on devrait obtenir une droite de pente 2 dans la zone asymptotique.

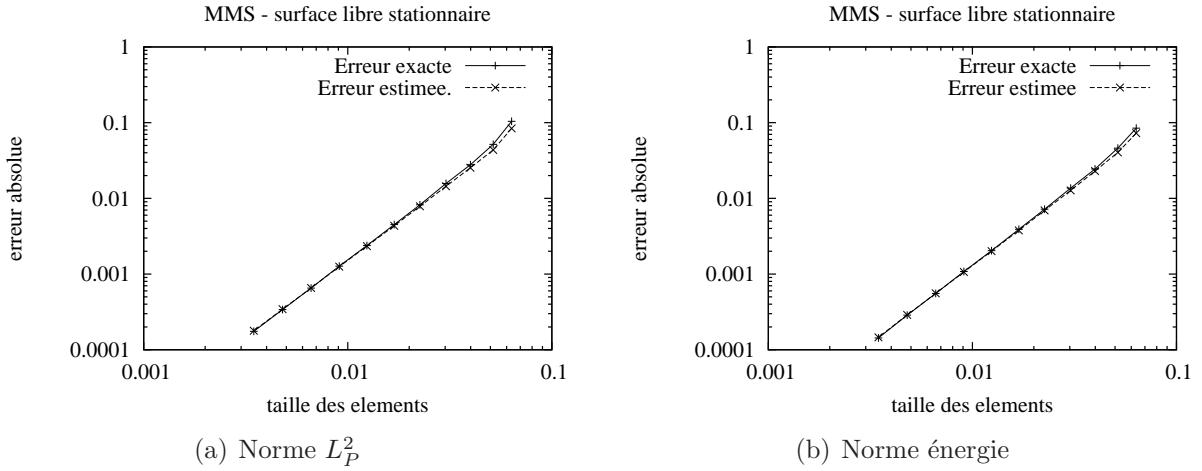


Figure 4.2 Solution manufacturée stationnaire, éléments Taylor-Hood : convergence des erreurs exactes et estimées avec le maillage.

La figure 4.2 montre l'évolution de l'erreur en norme énergie et L_P^2 . Pour chacune des erreurs, l'erreur estimée tend vers l'erreur exacte avec le raffinement du maillage. De plus, après 2000 nœuds, la zone asymptotique est atteinte et la pente de la droite est de 2, ce qui signifie que le taux de convergence théorique est atteint.

Pour les éléments de type P1-P1, les discrétisations spatiales de la vitesse et de la pression sont linéaires. On s'attend donc à observer un taux de convergence de 1 pour la norme énergie, c'est à dire une droite de pente de 1 pour la courbe représentant l'erreur en norme énergie en fonction de la taille des éléments. Pour la norme L_P^2 , comme pour les éléments de Taylor-Hood, on s'attend à un ordre 2, donc une droite de pente 2 pour la courbe représentant l'erreur en norme L_P^2 en fonction de la taille des éléments. Ces courbes sont présentées sur la figure 4.3. Pour la pression, la figure 4.3(a) montre que l'erreur estimée sous-estime l'erreur exacte. Cependant l'ordre de convergence est bon et les deux courbes ont tendance à se resserrer. La zone asymptotique n'est peut-être pas encore atteinte. Pour la norme énergie, l'estimateur d'erreur semble fonctionner correctement et la pente est conforme à nos attentes.

L'implémentation est donc vérifiée et nous avons constaté que la condition de surface libre ne perturbe pas la convergence spatiale de la solution.

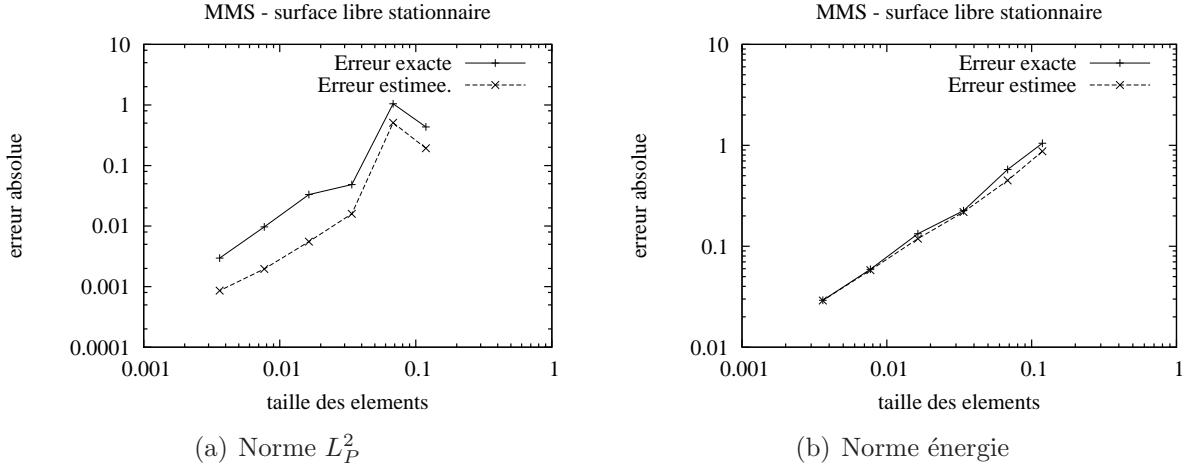


Figure 4.3 Solution manufacturée stationnaire, éléments P1-P1 : convergence des erreurs exactes et estimées avec le maillage.

4.1.2 Solution manufacturée instationnaire

Construction de la solution analytique

On reprend la méthode précédente. Cette fois, la surface libre est en mouvement. L'équation de la surface libre devient $y_I = f(x) * M(t)$. Le vecteur normal a pour expression $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ avec

$$n_x = \frac{-f'(x)M(t)}{\sqrt{(f'(x)M(t))^2 + 1}} \quad \text{and} \quad n_y = \frac{1}{\sqrt{(f'(x)M(t))^2 + 1}} \quad (4.17)$$

La surface libre étant décrite de façon univoque, on impose le déplacement horizontal nul. Ainsi, l'équation (2.13) devient

$$u n_x + \left(v - \frac{\partial \eta}{\partial t}\right) n_y = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_I \quad (4.18)$$

avec $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial y_I}{\partial t} = f(x)M'(t)$. Comme pour le cas stationnaire, on choisit u et v de façon à satisfaire la conservation de la masse, par exemple de la forme :

$$u(x, y, t) = (1 + y - f(x)M(t))H(y) \quad \text{et} \quad v(x, y, t) = f'(x)M(t) \int^y H(z)dz + G(x) \quad (4.19)$$

Ce champ de vitesse doit satisfaire la condition (4.18) sur la surface libre. Donc

$$f'(x)M(t) \int^y H(z)dz + G(x) = f'(x)H(y) \quad \text{sur } \Gamma_i \quad (4.20)$$

En combinant avec la condition sur les contraintes normales (4.8), on obtient la relation suivante entre f et H :

$$\begin{aligned} & \left[(1 - (M(t)f'(x))^2) (1 - (M(t)f'(x))^2 + M(t)f''(x)) + 4(M(t)f'(x))^2 \right] H(f(x)M(t)) \\ & + (1 - (M(t)f'(x))^2) (1 + (M(t)f'(x))^2) H'(f(x)M(t)) \\ & + (1 - (M(t)f'(x))^2) M'(t)f(x) = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

On remarque que si $M(t) = 1$, donc si la surface libre ne bouge pas, on retrouve l'équation du paragraphe 4.1.1.

On choisit $f(x) = 2x$. Pour alléger l'écriture, on note $M(t)$ par M , de même on écrira M' pour $M'(t)$. La solution de l'équation est alors de la forme :

$$H(y) = \lambda \exp \left(\frac{4M^2 + 1}{4M^2 - 1} y \right) + 2M' \frac{(4M^2 + 1)}{(4M^2 - 1)^2} \quad (4.22)$$

Avec λ une constante arbitraire. On en déduit alors les expressions de la vitesse et de la pression :

$$u(x, y, t) = (1 + y - 2Mx) \left[\lambda \exp \left(\frac{4M^2 + 1}{4M^2 - 1} y \right) + 2M' \frac{(4M^2 + 1)}{(4M^2 - 1)^2} \right] \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} v(x, y, t) = & \frac{2M\lambda}{4M^2 + 1} \left[(4M^2 - 1) \exp \left(\frac{4M^2 + 1}{4M^2 - 1} y \right) + 2 \exp \left(\frac{4M^2 + 1}{4M^2 - 1} 2Mx \right) \right] \\ & + 2xM' + 4MM' \frac{(4M^2 + 1)}{(4M^2 - 1)^2} (1 + y - 2Mx) \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} p(x, y, t) = & -M \frac{(4M^2 + 1)}{(4M^2 - 1)} \lambda \left[\exp \left(\frac{4M^2 + 1}{4M^2 - 1} y \right) + 3 \exp \left(\frac{4M^2 + 1}{4M^2 - 1} 2Mx \right) \right] \\ & + \frac{8MM'}{4M^2 + 1} \end{aligned} \quad (4.25)$$

On peut à présent choisir la modulation temporelle M . Dans notre cas, on prendra $M(t) = 1 + A \sin(\omega t)$, avec $A = 0.1$ et $\omega = 2\pi/4$.

Résultats numériques

Nous devons étudier la convergence spatiale (en fonctions de la taille des éléments du maillage) et la convergence temporelle (en fonction du nombre de pas de temps utilisés).

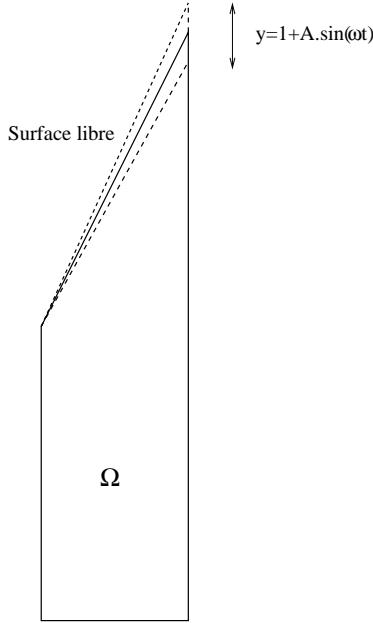


Figure 4.4 Solution manufaturée instationnaire : domaine et sa déformation.

L'erreur exacte peut se décomposer en une erreur spatiale et une erreur temporelle :

$$\|u_{exa} - u(h, \Delta t)\| = \text{erreur spatiale} + \text{erreur temporelle} = O(h^p) + O(\Delta t^n) \quad (4.26)$$

où p est le taux de convergence spatial et n est le taux de convergence temporel. Plusieurs méthodes peuvent être employées pour mener cette étude de convergence, elles sont décrites précisément par Etienne *et al.* (2009a). Une première option consiste à étudier la convergence temporelle et la convergence spatiale de façon couplées. Il faut alors effectuer une série de simulations en ajustant à la fois la taille du maillage et du pas de temps pour réduire l'erreur totale d'un facteur donné. Par exemple, avec des éléments de Taylor-Hood et un schéma d'Euler implicite pour l'intégration temporelle, l'ordre de convergence spatial est de 2 en norme énergie par rapport à la taille de maille et de 1 par rapport au nombre de pas de temps. Si la taille de maille est divisée par 2, l'erreur spatiale sera divisée par 4. Il faut donc diviser le pas de temps par 4 pour que l'erreur temporelle et ainsi l'erreur totale soient divisées par 4. De même, avec un schéma de Runge-Kutta d'ordre 5, lorsque le pas de temps est divisé par 2, l'erreur temporelle est divisée par 32. Avec des éléments de Taylor-Hood, la taille de maille doit être divisée par $2^{5/2}$ pour parvenir au même ordre de réduction, ce qui signifie que le nombre de nœuds doit être 32 fois plus important. Avec des schémas d'intégration d'ordre élevé, cette approche conduit rapidement à des maillages très fins et donc à des simulations coûteuses qui limitent la portée de cette approche. Une autre voie consiste à étudier les deux

types d'erreurs séparément de la façon suivante :

- Erreur spatiale : On choisit un pas de temps suffisamment petit pour que l'erreur temporelle soit négligeable par rapport à la plus petite erreur spatiale attendue. Ainsi, $\|u_{exa} - u(h, \Delta t)\| \approx O(h^p)$ et la même méthode que pour la solution stationnaire peut être appliquée.
- Erreur temporelle : Pour un maillage donné, on étudie l'erreur $\|u(h, \Delta t) - u^*(h)\|$ où $u^*(h)$ est la solution convergée en temps sur le maillage donné, c'est à dire

$$u^*(h) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} u(h, \Delta t) \quad (4.27)$$

Avec cette méthode, on calcule bien l'erreur temporelle seulement. En effet, l'erreur spatiale est la même pour les solutions $u^*(h)$ et $u(h, \Delta t)$ puisqu'elle sont calculées sur le même maillage.

Convergence avec le maillage On calcule les erreurs exactes et estimées à l'instant $t = T/2$ où T est la période de la modulation M . Pour étudier l'erreur spatiale, ces erreurs sont calculées sur une série de maillages de plus en plus fins. Ils sont obtenus par adaptation de maillage sur la condition initiale. Le pas de temps est le même pour toutes les simulations, il doit être suffisamment petit pour que l'erreur temporelle soit négligeable. On choisit donc $\Delta t = T/40$ avec un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3. Si le pas de temps est trop grand, l'erreur stagnerait avec le raffinement de maillage. Si le pas de temps est trop petit, les courbes de convergence observées seraient les mêmes mais le temps de calcul serait plus long. La figure 4.5 présente l'évolution des erreurs exactes et estimées en norme L_p^2 et énergie. Pour chacune de ces normes, l'écart entre l'erreur exacte et l'erreur estimée est assez important sur les maillages grossiers, mais il est ensuite comblé rapidement. Lorsque la zone asymptotique est atteinte, la pente de chaque courbe se rapproche de 2, ce qui correspond bien au taux de convergence théorique.

Convergence temporelle Pour les éléments de Taylor-Hood, on choisit un maillage de 487 noeuds et on fait une série de simulations avec des pas de temps de plus en plus petits. La solution exacte sur ce maillage $u^*(h)$ est approchée par la solution numérique obtenue avec un schéma de Runge-Kutta d'ordre 5. Comme précédemment, les erreurs exactes et estimées sont calculées à l'instant $T/2$. On utilise successivement les schémas d'Euler implicite et RK32 et RK53. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 4.6. Pour les schémas de Runge-Kutta, on observe le même ordre de convergence pour la norme énergie et la norme L_P^2 . Ceci est surprenant car l'ordre de convergence de la pression devrait être plus petit. La figure 4.6 illustre bien les caractéristiques de chaque schéma. La pente de chaque courbe représente

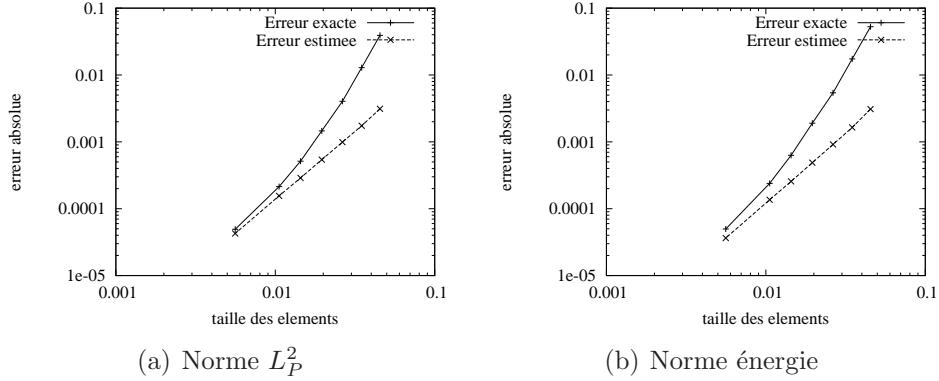


Figure 4.5 Solution manufacturée instationnaire - élément de Taylor-Hood : convergence de l'erreur avec le raffinement du maillage.

l'ordre de convergence temporelle. Pour le schéma d'Euler implicite, la zone asymptotique est atteinte à partir de 320 pas de temps. Par la suite, on observe bien un taux de convergence de 1. Pour le schéma de Runge-Kutta 32, la zone asymptotique est déjà atteinte à 10 pas de temps et le taux de convergence est de 3 pour chacune des normes. Pour le schéma de Runge-Kutta 53, on se trouve déjà en zone asymptotique à 10 pas de temps. L'ordre de convergence sur le premier segment est de 5 pour la vitesse et 4.4 pour la pression. Ensuite, il diminue mais l'erreur est de l'ordre de 10^{-8} .

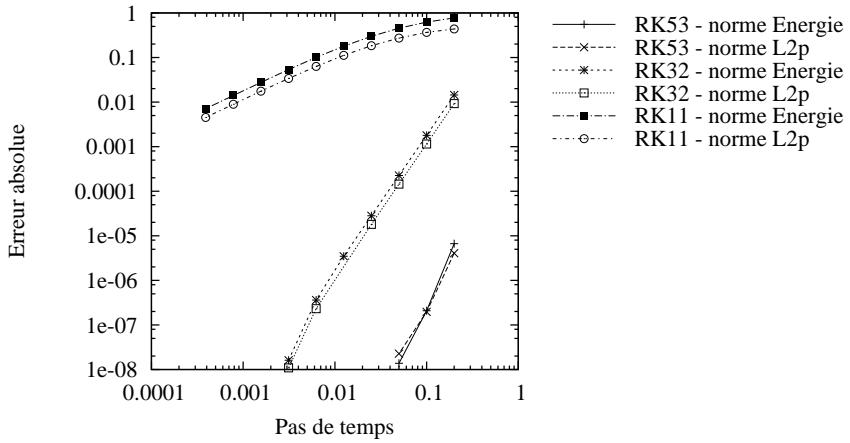


Figure 4.6 Solution manufacturée instationnaire - élément de Taylor-Hood : convergence de l'erreur avec le raffinement du pas de temps.

Pour les éléments P1-P1, on utilise un maillage de 1078 noeuds. On a utilisé une stabili-

sation SUPG/PSPG, le coefficient de stabilisation est

$$\tau_{SUPG} = \tau_{PSPG} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_m\|^2}{h^2} + 9\frac{16\nu^2}{h^4}}} \quad (4.28)$$

On n'utilise pas ici le terme en $4/\Delta t^2$. Nous allons vérifier ici que les termes de stabilisation ne viennent pas réduire l'ordre de convergence temporelle. On utilise la même méthode que pour les éléments de Taylor-Hood. L'évolution des normes d'erreur en fonction du nombre de pas de temps est représentée sur la figure 4.7. Nous avons des résultats similaires à ceux obtenus avec les éléments de Taylor-Hood. C'est à dire que chaque schéma atteint son ordre de convergence temporelle. Ceci indique que la GCL est satisfaite malgré les termes additionnels de stabilisation.

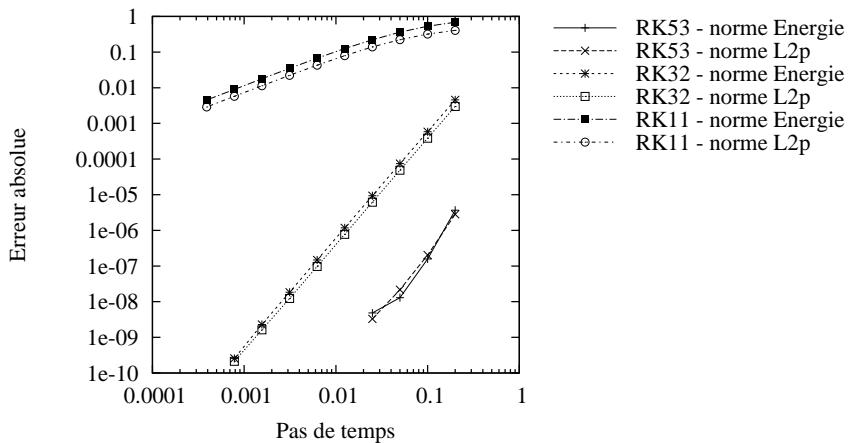


Figure 4.7 Solution manufacturée instationnaire - élément P1-P1 stabilisés : convergence de l'erreur avec le raffinement du pas de temps.

Conclusion Dans les deux paragraphes précédents, nous avons vérifié la convergence de la solution avec les raffinements de maillage et de pas de temps pour un cas de surface libre. Pour chaque type d'éléments utilisés, les ordres de convergence observés tendent vers l'ordre théorique. Les équations sont donc correctement résolues et l'implémentation des schémas de Runge-Kutta avec les conditions de surface libre est donc vérifiée. De plus, l'utilisation de la stabilisation en régime instationnaire sur maillage mobile n'affecte pas le taux de convergence temporelle. Ces résultats montrent l'intérêt de l'utilisation de schémas de Runge-Kutta d'ordre élevé. Par exemple pour obtenir une erreur temporelle de l'ordre de 10^{-4} , 5120 pas de temps ne sont pas suffisant avec le schéma d'Euler implicite, en extrapolant les résultats, il faudrait environ 300 000 pas de temps alors que 80 pas de temps suffisent pour le schéma

de Runge-Kutta 32 et que moins de 10 pas de temps sont nécessaires avec les schéma 53. Le prix à payer pour obtenir cette précision est un plus gros système à résoudre à cause des sous-niveaux. Pour le schéma RK32, la matrice est 2 fois plus large que pour le schéma d'Euler implicite et pour le schéma 53, elle est 3 fois plus large. Cependant le nombre de pas de temps nécessaires étant beaucoup plus petit, l'utilisation de ces schémas permet d'atteindre une meilleure précision avec un temps de calcul plus court. Une étude détaillée des coûts de calcul avec les différents schémas a été réalisée par Cori (2011).

4.2 Vérification des sensibilités lagrangiennes sur maillage mobile

Nous allons maintenant vérifier le calcul des sensibilités. Nous n'allons pas présenter de solution manufacturée avec surface libre. En effet, pour vérifier les sensibilités lagrangiennes, il faut fixer la vitesse de déformation car les sensibilités en dépendent :

$$S_u^\alpha = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + V^\alpha \cdot \nabla u \quad (4.29)$$

Or sur l'interface, la vitesse de déformation est calculée par les conditions de surface libre pour les sensibilités. Si nous fixons arbitrairement la vitesse de déformation dans tout le domaine, les conditions de surface libre pour les sensibilités ne sont pas testées.

Nous allons donc nous assurer que la GCL est satisfaite pour les sensibilités, la convergence spatiale des sensibilités lagrangiennes ayant été déjà vérifiées précédemment (Charlot (2008)). Sur un domaine rectangulaire de longueur 2 et de largeur 1, nous choisissons la solution analytique suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= 4t^2(y - y^2) \\ v(x, y, t) &= 0 \\ p(x, y, t) &= 8(1 - x) \\ \xi(x, y, t) &= t^2(1 - x^2)(y - y^2) \\ \eta(x, y, t) &= t^2(1 - x^2)(y - y^2) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Il s'agit d'un écoulement de type Poiseuille dont la vitesse maximale varie avec le temps. Comme il ne s'agit pas d'une solution exacte des équations de Navier-Stokes, il faut ajouter le terme source adapté :

$$f_x = \rho \frac{\partial u}{\partial t} = 8t(y - y^2) \quad (4.31)$$

$$f_y = 0 \quad (4.32)$$

Pour les sensibilités, nous choisissons arbitrairement

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}(x, y, t) = 4t^2y^2 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial \alpha}(x, y, t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial \alpha}(x, y, t) = 8(x - 1) \quad (4.33)$$

$$V_x^\alpha(x, y, t) = 0 \quad \text{et} \quad V_y^\alpha(x, y, t) = y(1 + t/2) \quad (4.34)$$

Ensuite, les sensibilités lagrangiennes sont obtenues de la façon suivante

$$\begin{aligned} S_u^\alpha &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \nabla u \cdot \mathbf{V}^\alpha \\ S_v^\alpha &= \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \nabla v \cdot \mathbf{V}^\alpha \\ S_p^\alpha &= \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \nabla p \cdot \mathbf{V}^\alpha \\ S_\xi^\alpha &= V_x^\alpha \\ S_\eta^\alpha &= V_y^\alpha \end{aligned} \quad (4.35)$$

Le terme source pour les sensibilités est calculé de la façon suivante : $S_f^\alpha = \partial \mathbf{f} / \partial \alpha + \nabla \mathbf{f} \cdot \mathbf{V}^\alpha$ avec

$$\frac{\partial f_x}{\partial \alpha} = 8ty^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_x}{\partial y} = 8t(1 - 2y) \quad (4.36)$$

Les autres termes sont nuls. On utilise un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 avec des éléments de Taylor-Hood et on fait une étude de convergence avec le raffinement du pas de temps. On procède comme pour l'écoulement. Le temps final des simulations est $t_f = 0.125$. La figure 4.8 montre l'évolution de l'erreur pour l'écoulement et les sensibilités en norme L_P^2 et en norme énergie. Les ordres de grandeur des erreurs pour l'écoulement et pour les sensibilités sont les mêmes. De plus, pour une même norme, les ordres de convergence sont les mêmes puisque dans la zone asymptotique les droites sont parallèles. Ces ordres sont bien conformes à la théorie, c'est-à-dire de 3 pour la norme énergie et de 2 pour la norme L_P^2 .

Nous avons obtenus des résultats similaires en prenant le même écoulement orienté verticalement plutôt qu'horizontalement afin de vérifier les termes qui étaient nuls dans cette solution.

La formulation adoptée pour les sensibilités respecte donc bien la GCL, c'est-à-dire que sur maillage mobile, l'ordre de convergence temporelle est le même que sur maillage fixe.

Nous avons donc à présent vérifié toute la méthode proposée, aussi bien pour le calcul de surface libre que pour le calcul des sensibilités lagrangiennes instationnaires sur maillage mobile.

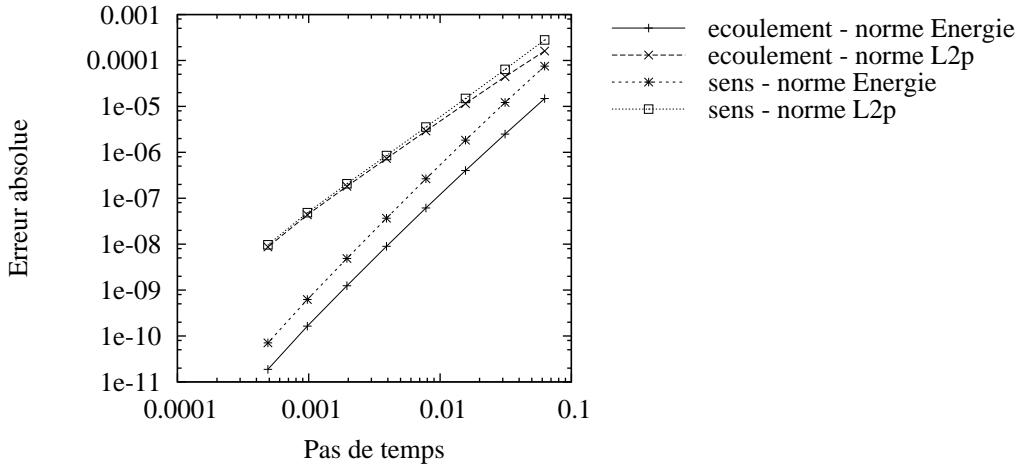


Figure 4.8 Erreur temporelle pour l’écoulement et les sensibilités.

4.3 Ballotement de grande amplitude

Nous présentons ici un cas simple de surface libre. Après une étude de convergence temporelle, nous comparerons nos résultats avec ceux de Dettmer et Peric (2006b). Le domaine est représenté sur la figure 4.9. On considère un fluide contenu dans un réservoir rectangulaire. À l’instant initial, le fluide est en équilibre hydrostatique. La longueur du réservoir est de 1.0 et la hauteur de fluide au repos est de 1.0. La viscosité et la densité du fluide sont fixées respectivement à 0.01 et à 1.0. L’intensité de la gravité est de 1.0. Sur les parois du réservoir, on impose une condition de glissement. Le réservoir est ensuite soumis à un déplacement horizontal donné par $\Delta x = A(1 - \cos(\omega t))$, avec $A = 0.075$. On prend $\omega = 1.5$ car Dettmer et Peric (2006b) ont montré que cette pulsation correspond à la résonance.

4.3.1 Convergence temporelle pour l’écoulement

Pour l’étude de convergence, la méthode utilisée est la même que celle utilisée pour la solution manufacturée. En effet, pour l’erreur temporelle, nous n’avons pas besoin de connaître la solution analytique. À nouveau, nous utiliserons les trois schémas d’intégration (Euler implicite, Runge-Kutta d’ordre 3 et d’ordre 5) et les éléments de Taylor-Hood et P1-P1 stabilisés. Les erreurs sont calculées à l’instant $t = T/10$ où T est la période d’oscillation du réservoir. Les vecteurs vitesses de la solution à $t = T/10$ sont représentés sur la figure 4.10.

Pour les éléments de Taylor-Hood, le maillage est constitué de 487 noeuds et on choisit comme référence la solution obtenue avec 256 pas de temps pour le schéma de Runge Kutta d’ordre 5. L’évolution de l’erreur en norme énergie et L_P^2 avec le raffinement du pas de temps est représentée sur la figure 4.11. Comme précédemment, les différences entre les schémas

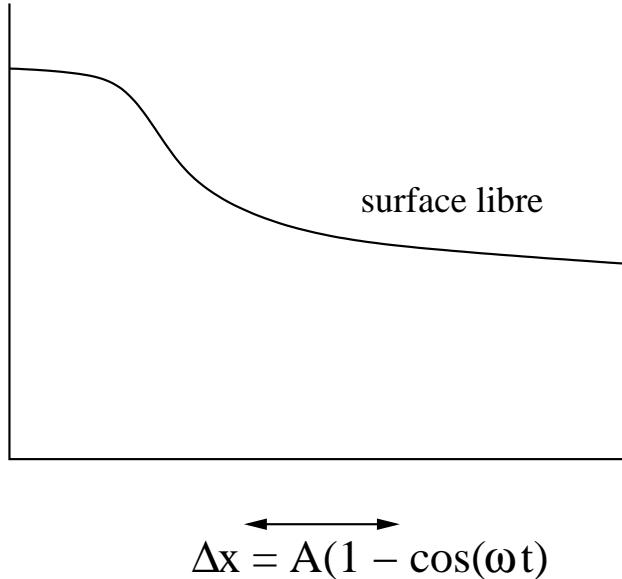


Figure 4.9 Ballotement : domaine

sont nettes. Pour le schéma d'Euler implicite, l'ordre de convergence est de 1. Pour le schéma de Runge-Kutta d'ordre 3, le taux de convergence est de 3 pour la norme énergie et de 2 pour la norme L_P^2 , ce qui est conforme aux ordres théoriques. Pour le schéma de Runge-Kutta d'ordre 5, le taux de convergence est bien de 3 pour la norme L_P^2 . Pour la norme énergie, il commence à 5 puis diminue à 3. L'erreur approche de l'erreur machine, ce qui peut contribuer à cette réduction d'ordre de convergence.

Pour les éléments P1-P1, la méthode est la même, on a utilisé un maillage de 1078 nœuds. On a utilisé une stabilisation de type SUPG/PSPG. Les résultats sont présentés sur la figure 4.7. Les résultats sont similaires à ceux obtenus avec les éléments de Taylor-Hood. La stabilisation n'interfère donc pas avec la convergence temporelle. Cependant, on peut nuancer ces résultats par le fait que le nombre de Reynolds reste faible (de l'ordre de 10) et que les termes additionnels dus à la stabilisation sont faibles eux aussi.

4.3.2 Comparaison des résultats

Nous comparons maintenant nos résultats avec ceux obtenus par Dettmer et Peric (2006b). On utilise un maillage de taille similaire composé de 487 nœuds (vs 528 nœuds). Pour l'intégration temporelle, on compare les résultats obtenus avec le schéma d'Euler implicite et un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3. Les simulations couvrent 10 périodes d'oscillation du réservoir avec 25, 50, 100 et 200 pas de temps par période.

L'élévation du point extrême droit de la surface libre en fonction du temps est représentée

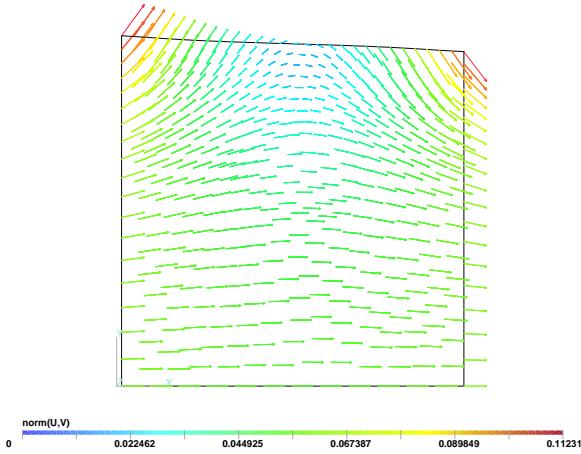


Figure 4.10 Ballotement : vecteurs vitesse à $t = T/10$

sur la figure 4.13. La figure 4.13(a) montre les courbes obtenues avec le schéma d'Euler implicite pour les différents pas de temps. Les résultats pour le schéma de Runge-Kutta sont représentés sur la figure 4.13(b). En comparant ces 2 figures, on peut clairement voir que le schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 est bien plus précis que le schéma d'Euler implicite. Comme on peut le voir sur la figure 4.13(a), même avec le plus fin pas de temps, $\Delta t = T/200$, le schéma d'Euler n'a pas encore convergé, l'amplitude est largement sous-estimée. Il faudrait encore réduire le pas de temps pour obtenir une amplitude similaire à celle obtenue avec le schéma de Runge-Kutta. Pour ce dernier, le pas de temps $\Delta t = T/50$ semble déjà donner une bonne estimation de l'amplitude. La figure 4.14 montre l'agrandissement d'une crête obtenue avec le schéma de Runge-Kutta. Les points calculés avec des pas de temps plus petits que $T/50$ sont confondus. La courbe obtenue avec 25 pas de temps par période reste cependant proche des autres. Ce pas de temps permet d'obtenir à moindre coût l'allure de l'élévation de la surface libre. Nos résultats sont similaires à ceux obtenus par Dettmer et Peric (2006b) avec une élévation maximale de 0.565.

Dettmer et Peric (2006b) observent des erreurs sur le volume de fluide, alors que la formulation ALE, comme le domaine de calcul suit le domaine fluide, la conservation de la masse devrait être respectée. Le tableau 4.1 présente les erreurs sur le volume total de fluide en fonction du pas de temps pour notre étude (avec le schéma RK32) et celle de Dettmer et Peric obtenues au temps $t = 10T$.

Avec notre méthode, nous observons également une erreur sur le volume total mais elle est bien plus petite que celle observée par Dettmer et Peric. De plus, elle semble converger vers 0 avec un taux de convergence de 3, ce qui est consistant avec le schéma d'intégration. Dans les cas stationnaires, aucune erreur n'avait été observée, cette erreur est donc probablement due

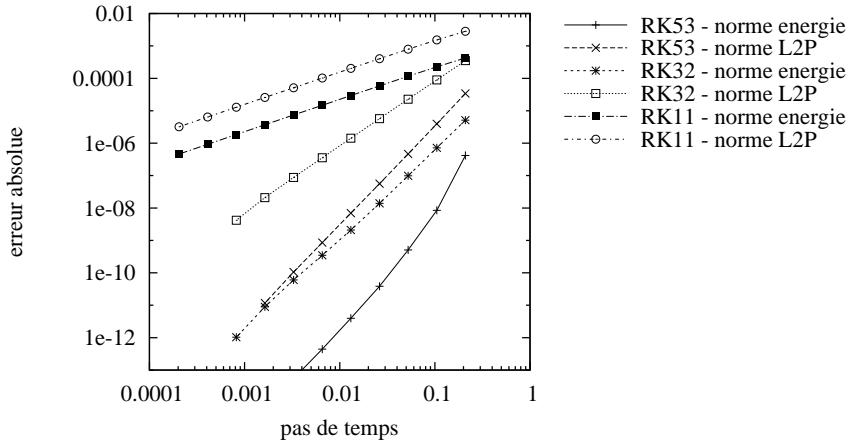


Figure 4.11 Ballotement - éléments de Taylor-Hood : Convergence de l'erreur avec le raffinement du pas de temps.

Δt		T/50	T/100	T/200
$\frac{V - V_0}{V_0} (\%)$	present	7.12×10^{-3}	9.08×10^{-4}	1.14×10^{-4}
$\frac{V - V_0}{V_0} (\%)$	Dettmer-Peric	1.82	1.10	0.72

Tableau 4.1 Erreurs de volume après 10 périodes d'oscillation.

à l'intégration temporelle et à la déformation de la surface. Ceci est illustré sur la figure 4.15. Cette figure représente l'évolution du volume de fluide en fonction du temps avec différents pas de temps pour le schéma d'Euler implicite (figure 4.15(a)) et pour le schéma RK32 (figure 4.15(b)). L'erreur augmente avec des oscillations ayant la même période que le mouvement du réservoir. De plus l'erreur obtenue avec le schéma d'Euler implicite est bien plus importante que celle obtenue avec le schéma de Runge-Kutta d'ordre 3, plus de 100 fois plus grande et semble converger vers 0 à l'ordre 1, ce qui est encore consistant avec l'ordre de convergence du schéma.

Notre outil de calcul de surface libre semble donc être performant et précis, surtout en utilisant des schémas d'intégration temporelle d'ordre élevé. L'erreur sur le volume est consistante avec le schéma et devient rapidement très petite en utilisant un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3, alors qu'elle n'est pas négligeable avec un schéma d'Euler implicite. Ce schéma demande des pas de temps beaucoup plus petits et donc des temps de simulation beaucoup plus longs que les schémas de Runge-Kutta d'ordre 3 ou 5 pour la même précision.

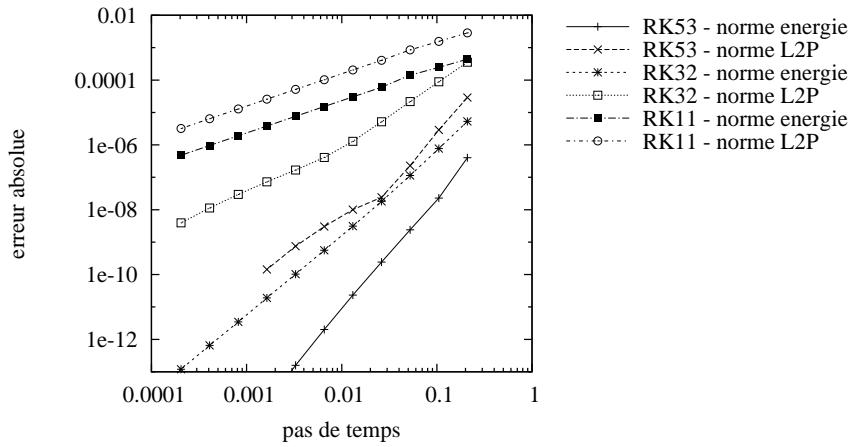


Figure 4.12 Ballotement - éléments P1-P1 : Convergence de l'erreur avec le raffinement du pas de temps.

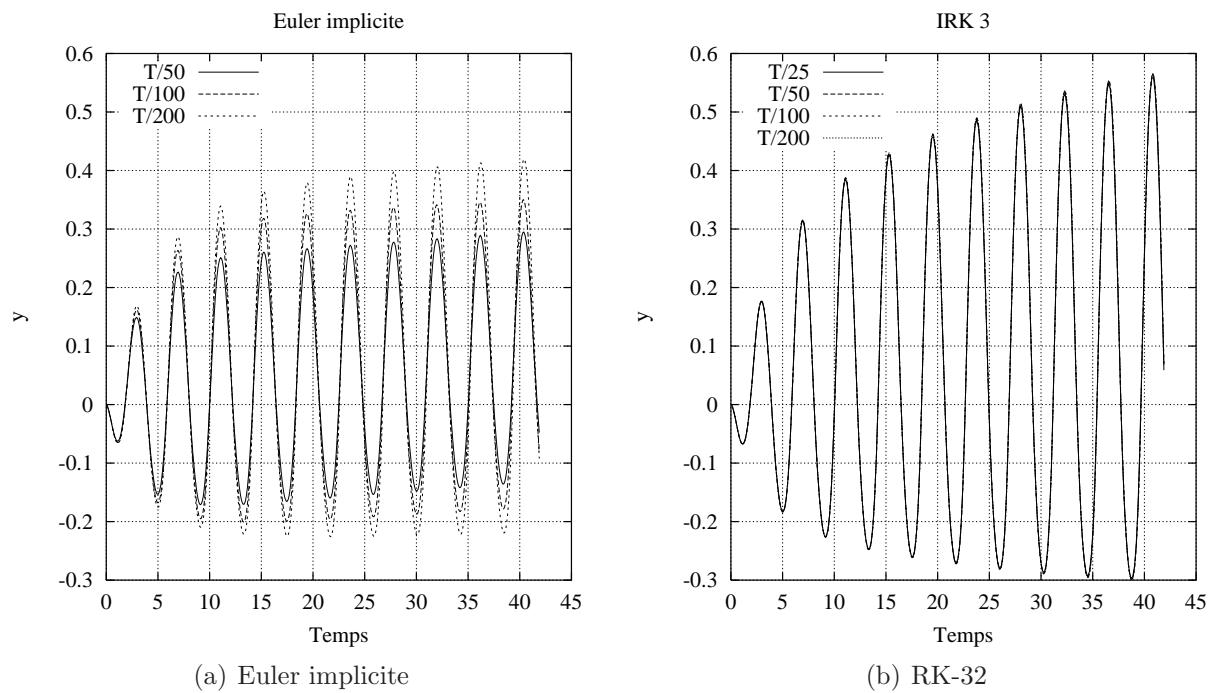


Figure 4.13 Évolution de l'élévation du point extrême droit de la surface libre en fonction du temps.

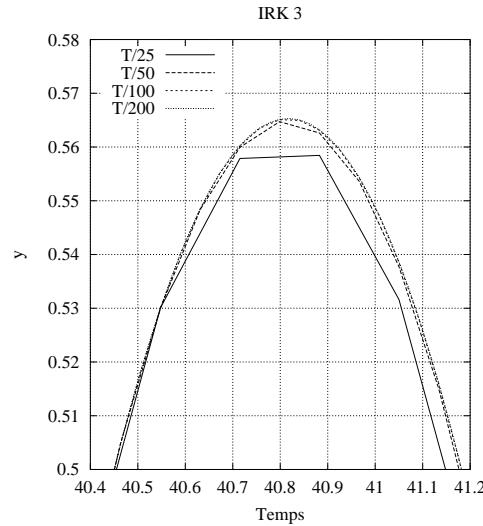


Figure 4.14 Zoom sur un maximum d'élévation du point droit de la surface libre avec le schéma IRK32.

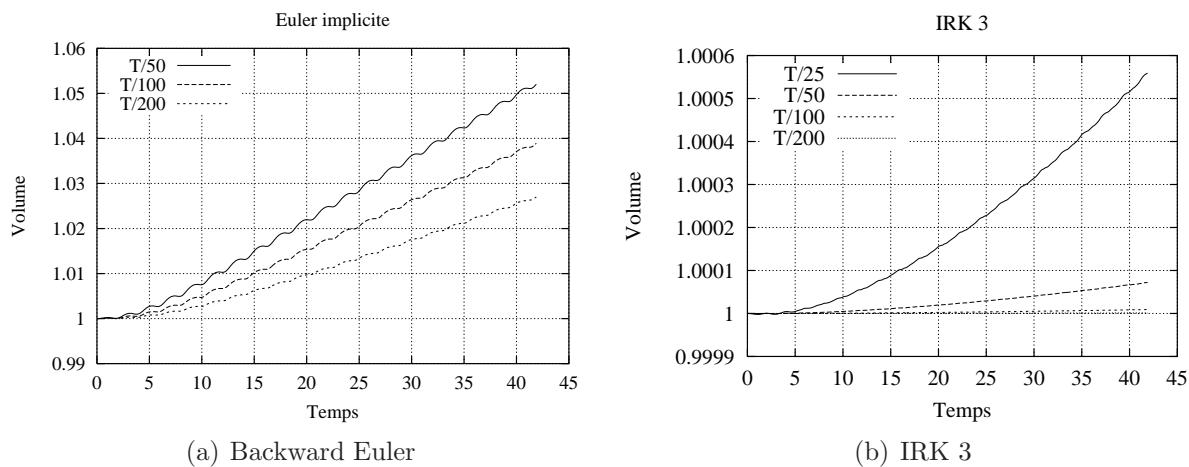


Figure 4.15 Évolution du volume de fluide avec le temps.

4.3.3 Étude de sensibilité

Nous allons maintenant faire la même étude pour les sensibilités. Ceci nous permettra de vérifier la convergence temporelle des sensibilités avec surface libre. On choisit comme paramètre la viscosité. Même si ce paramètre n'est pas un paramètre de forme dans un sens purement géométrique, une modification de la viscosité entraînera une déformation différente de la surface libre, donc un changement de forme du domaine.

Étude de convergence

Nous procédons toujours de la même façon pour obtenir l'erreur temporelle. La figure 4.16 montre la convergence des erreurs pour l'écoulement et les sensibilités en norme énergie et en norme L_P^2 . Les erreurs sont un peu plus élevées pour les sensibilités mais elles ont le même ordre de convergence que pour l'écoulement, en effet les droites sont parallèles. La formulation adoptée pour les sensibilités des écoulements avec surface libre respecte donc la GCL. La précision sur les sensibilités est la même que pour l'écoulement. L'usage des schémas d'ordre élevé pour le calcul de surface libre et de sensibilité est donc justifié pour des applications ultérieures.

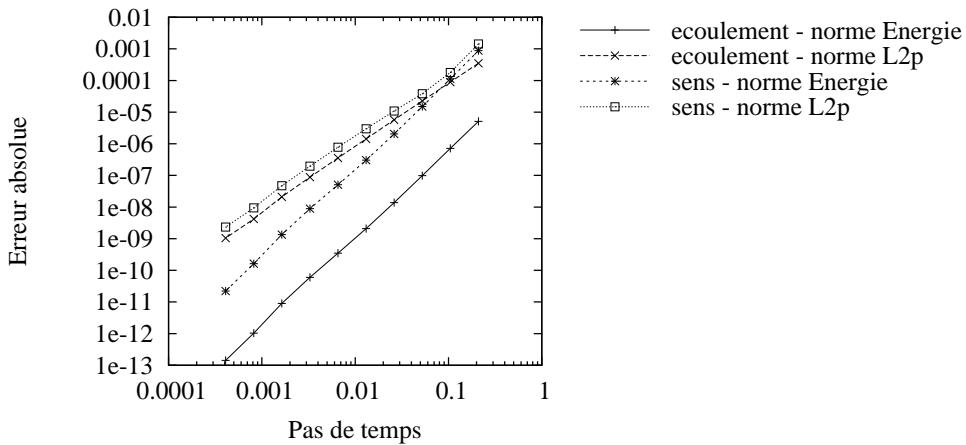


Figure 4.16 Évolution de l'erreur temporelle avec le raffinement du pas de temps pour l'écoulement et les sensibilités.

Interprétation des sensibilités

La figure 4.17 montre la valeur de la sensibilité du déplacement vertical du pseudo-solide. Elle est positive sur la gauche, là où la surface est la plus basse et négative là où la surface est la plus haute. Cela signifie que si la viscosité augmente, la surface libre sera moins déformée,

ceci est en accord avec la physique, si le fluide est plus visqueux, il est plus difficile de le mettre en mouvement et donc de déformer la surface libre.



Figure 4.17 Sensibilité du déplacement vertical à $t = 8.8T$ par rapport à la viscosité.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vérifié :

- l'implémentation des conditions de surface libre en régime stationnaire et instationnaire,
- l'implémentation des schémas de Runge-Kutta avec la stabilisation PSPG/SUPG,
- que la GCL était bien respectée avec les éléments P1-P1 stabilisés,
- l'implémentation des sensibilités instationnaires sur maillage déformable,
- l'implémentation des sensibilités de surface libre,
- que la GCL était bien satisfaite avec l'écoulement et les sensibilités pour les écoulements avec surface libre.

Notre code pourra donc être utilisé pour le calcul d'écoulement avec surface libre avec des nombres de Reynolds élevé sur des éléments P1-P1 stabilisés avec des schémas temporels d'ordre élevé, donc avec un nombre de pas de temps réduit. On pourra aussi calculer les sensibilités de l'écoulement, avec des schémas temporels d'ordre élevé et des éléments de Taylor-Hood, cette fois à bas Reynolds, puisque nous ne disposons pas de stabilisation pour les sensibilités.

CHAPITRE 5

RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Ce chapitre présente plusieurs applications de la méthode décrite aux chapitres précédents. On cherchera à tester ses performances et ses limites. On s'intéressera tout d'abord à un cas de ballotement qui a fait l'objet d'une étude comparative. Nous pourrons alors valider le calcul de la surface libre. Puis, on étudiera la propagation d'une onde solitaire dans un canal et sa séparation lorsque le fond du canal est irrégulier. Cette étude nous permettra de quantifier les effets de la viscosité et de comparer nos résultats avec des modèles théoriques. On simulera ensuite la génération de vagues avec un batteur à houle, pour tester les limites de la déformations du maillage et pour déterminer si les vagues générées numériquement sont fidèles à la réalité. Enfin, nous étudierons les efforts sur un cylindre soumis à une houle incidente et on évaluera grâce à l'analyse de sensibilités l'impact de la distance entre le cylindre et la surface libre et celui du rayon du cylindre. Ce cas nous permettra d'évaluer l'impact de la surface libre et de la viscosité sur les efforts et de montrer l'utilité de l'analyse de sensibilité.

5.1 Étude comparative pour un cas de ballotement

Le but de cette étude est de comparer nos résultats avec d'autres études numériques. On reprend le travail de Westhuis (2001). Ce dernier utilise une méthode potentielles, c'est à dire que le fluide est parfait et que l'écoulement est irrotationnel. Il confronte ses résultats avec 7 méthodes similaires issues de l'étude comparative de Nestegård (1994). Le problème est le suivant : on considère un réservoir de longueur 160m rempli avec de l'eau. La hauteur d'eau au repos est de 70m. Au temps initial, on suppose que la surface libre est déformée, de sorte que son équation est la suivante :

$$y_I(t = 0) = 70 + 12 \left[1 - (x/53)^2 \right] e^{(x/76)^2} \quad (5.1)$$

On laisse ensuite évoluer le fluide sous l'influence de la gravité. On utilise les éléments P1-P1 stabilisés sur un maillage de 8520 noeuds et le schéma temporel IRK32 avec un pas de temps $\Delta t = 0.1$. Comme nous comparerons nos résultats avec des simulations utilisant la théorie potentielles, on impose des conditions de glissement sur toutes les parois du réservoir. Ainsi, il n'y aura pas de couche limite visqueuse le long des parois. La figure 5.1 montre

l'évolution de la surface jusqu'à $t = 10s$. Pour chaque étude, la vitesse et la position de la

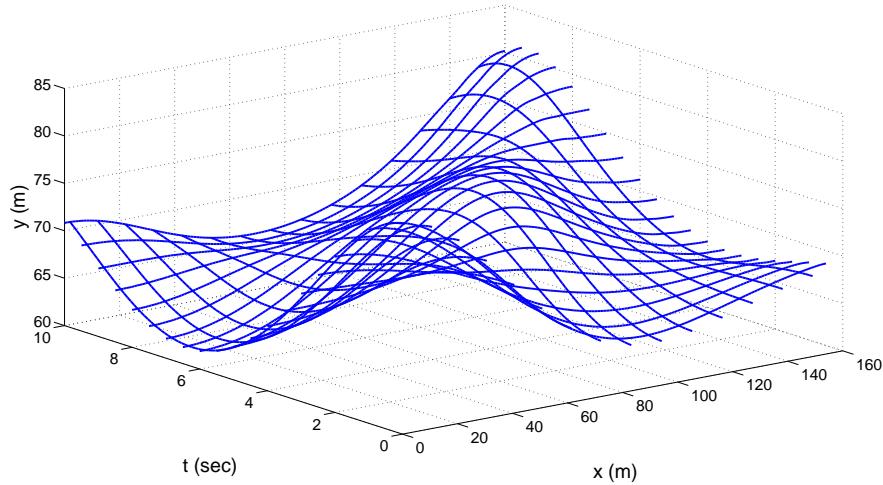


Figure 5.1 Évolution de la surface libre.

surface libre ont été relevées à l'abscisse $x = 60m$ et au temps $t = 9,2s$. Les résultats des différentes études et les nôtres sont résumés dans le tableau 5.1. Les colonnes “min” et “max” représentent respectivement la valeur minimale ou maximale parmi les 8 autres études, la colonne “moyenne” est la moyenne des 8 études.

Nos résultats concordent bien avec les résultats obtenus par les autres études, ce qui permet de valider le calcul de la surface libre.

5.2 Propagation d'une onde solitaire

Nous reprenons un autre cas développé par Westhuis (2001). Il s'agit de simuler la propagation d'une onde solitaire dans un bassin de longueur 300m avec une hauteur de fluide au repos de 0.5m. Au temps initial, le profil de la surface libre est le suivant :

$$y_I(t = 0) = 0.5 + \frac{0.215}{\cosh(1.18x)} \quad (5.2)$$

	min	moyenne	max	present
elevation SL	-3.860	-3.796	-3.720	-3.797
u	-2.480	-2.410	-2.280	-2.415
v	-0.690	-0.547	-0.363	-0.571

Tableau 5.1 Ballotement : vitesse et position de la surface libre en $x = 60m$ et à $t = 9,2s$.

Le fluide évolue ensuite sous l'effet de la gravité en générant une onde solitaire d'amplitude $0.1m$.

5.2.1 Propagation de l'onde

On étudie tout d'abord la propagation de l'onde. On utilise des éléments P1-P1 stabilisés sur un maillage de 9458 noeuds et un schéma de Runge-Kutta 32 avec un pas de temps $\Delta t = 0.1s$. Les propriétés du fluide sont celles de l'eau, donc la densité est $\rho = 1000kg.m^{-3}$, la viscosité est $\mu = 0.001Pa.s$. Comme nous allons comparer nos résultats avec des simulations utilisant la théorie potentielle, des conditions de glissement sont imposées sur toutes les parois du bassin. Le temps final est de $120s$. La figure 5.2 montre la déformée de surface libre obtenue toutes les $10s$. Une fois l'onde correctement formée soit à $t = 20s$, son amplitude est de $0.097m$. Elle diminue ensuite légèrement pour atteindre la valeur de $0.093m$ à $t = 120s$. Cette diminution non observée par Westhuis (2001) est due à la viscosité, et certainement aussi au maillage utilisé qui était assez grossier (moins de 10 000 noeuds avec des éléments P1-P1 stabilisés).

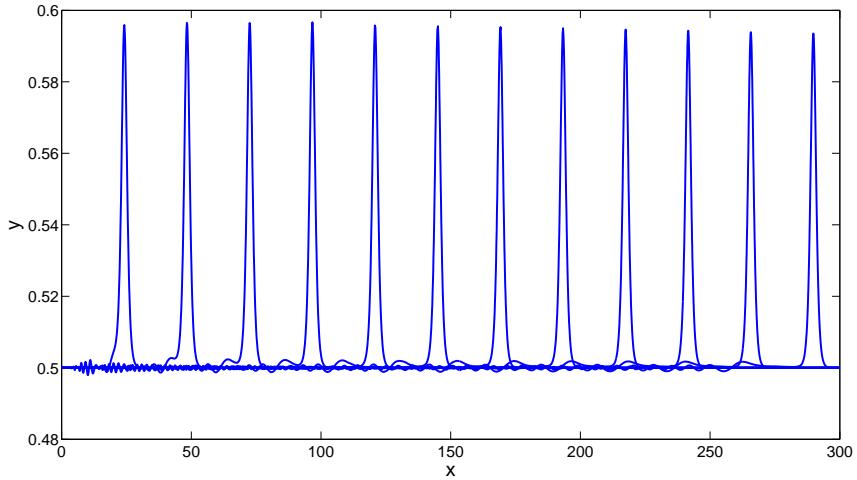


Figure 5.2 Onde solitaire : surface libre toutes les 10 secondes.

La génération de l'onde n'est pas parfaite, en effet le profil utilisé est empirique. C'est pourquoi des oscillations en arrière de l'onde sont observées. Elles ont une forme (amplitude et localisation) tout à fait comparable à celles observées par Westhuis (2001) comme on peut le voir sur la figure 5.3.

La vitesse de propagation observée ici est un peu plus faible que celle mentionnée par Westhuis (2001), et diminue un peu au court du temps comme le montre la figure 5.4.

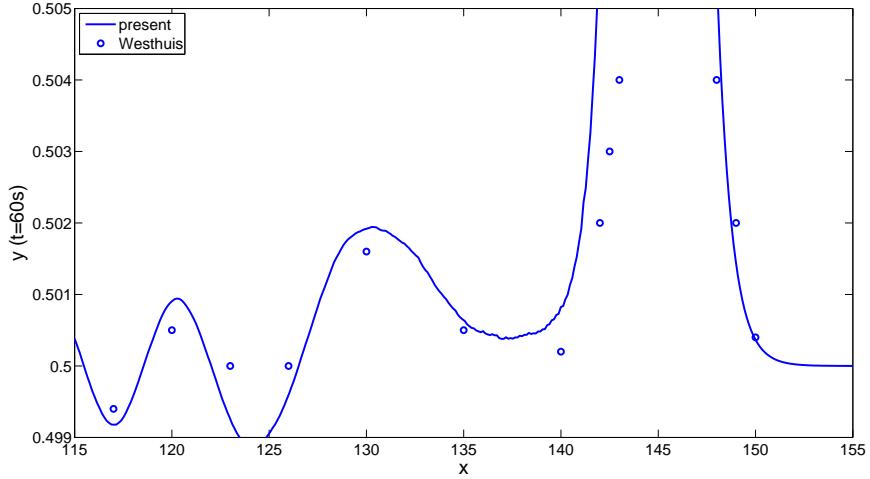


Figure 5.3 Oscillations derrière l'onde à $t = 60s$.

Les points représentent les valeurs obtenues, celles-ci ne sont pas régulières à cause de la discréétisation spatiale, la courbe est une régression quadratique de ces points. La vitesse au

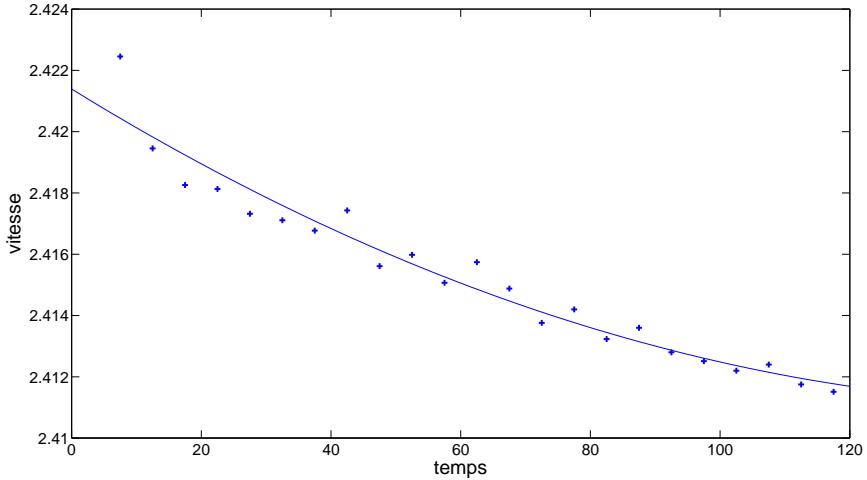


Figure 5.4 Vitesse de propagation de l'onde.

début est de $2.422m/s$ et diminue jusqu'à $2.412m/s$, Westhuis obtient une valeur de $2.427m/s$ qu'il compare avec le modèle théorique de Boussinesq appliqué aux ondes solitaires. La vitesse c d'une onde d'amplitude a dans un bassin de profondeur h est

$$c = \sqrt{gh \left(1 + \frac{a}{h}\right)} \quad (5.3)$$

Ceci mène à une valeur de $2.426m/s$. Dans notre cas, la vitesse est donc plus faible. Le modèle théorique et les simulations de Westhuis reposent sur la théorie potentiel. L'écoulement observé étant irrotationnel, cet amortissement est probablement dû à la viscosité qui est négligée dans la théorie potentiel.

5.2.2 Impact de la couche limite au fond

Nous allons maintenant nous intéresser à l'impact de la couche limite visqueuse sur le fond du bassin. Nous reprenons donc le même calcul que précédemment, mais en imposant une condition de non glissement sur le fond. Ce cas est donc beaucoup plus proche de la réalité que le cas précédent et n'aurait pas pu être simulé avec des modèles potentiels. Un modèle théorique a été développé pour ce cas par Keulegan (1948) et repris par Liu et Orfila (2004). L'écoulement est alors supposé potentiel partout sauf dans la couche limite. L'amortissement visqueux correspond à la réduction suivante de l'amplitude :

$$\left(\frac{a_0}{h}\right)^{-1/4} - \left(\frac{a_i}{h}\right)^{-1/4} = K \frac{d}{h} \quad (5.4)$$

où a_0 est l'amplitude de départ, a_i l'amplitude de l'onde au moment d'observation, d est la distance parcourue par l'onde entre temps, h est la profondeur d'eau au repos et K est une constante. Sa valeur théorique est la suivante :

$$K_{th} = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{\nu}{g^{1/2} h^{3/2}}} \quad (5.5)$$

Nous allons donc calculer la valeur de ce coefficient pour les simulations numériques et les comparer au modèle. On reprend la configuration avec une condition de non glissement au fond. L'amplitude de l'onde passe alors de $0.095m$ à $0.08m$ à $t = 91.5s$. La figure 5.5 représente la déformée de surface libre toutes les dix secondes et la figure 5.6 montre l'évolution de l'élévation maximale de la surface libre au cours du temps. En comparant les figures 5.2 et 5.5, on remarque que la vitesse de propagation de l'onde est réduite.

Pour ce cas, on obtient un coefficient théorique $K_{th} = 7.9197 \times 10^{-5}$. On choisit des points à intervalle régulier de $10s$ pour obtenir le coefficient K pour la simulation entre $10s$ et $80s$. Il n'apparaît pas d'évolution significative de K au cours du temps. On obtient une moyenne de 1.80×10^{-4} . L'ordre de grandeur est le même que le modèle théorique $K_{th} = 7.9197 \times 10^{-5}$ mais la valeur est surestimée. Ceci peut s'expliquer par le fait que le maillage utilisé n'est pas assez fin pour décrire correctement la couche limite. En utilisant l'analyse de Ippen et Kulin (1957) qui cherche à déterminer le nombre de Reynolds et l'épaisseur de la couche limite en se basant sur la théorie développée pour une plaque plane. Notre cas correspond

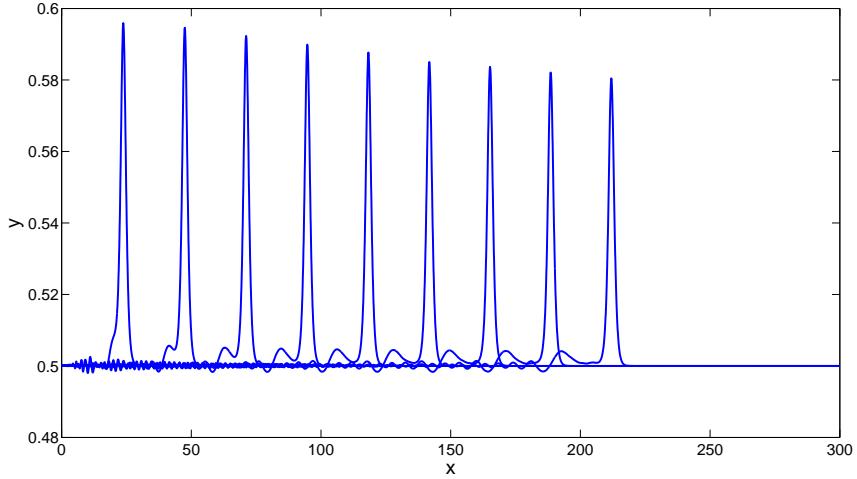


Figure 5.5 Onde solitaires-non glissement : surface libre toutes les 10 secondes.

alors à un nombre de Reynolds d'environ 1.53×10^5 ce qui correspond au domaine laminaire dans la théorie de la plaque plane. L'épaisseur de couche limite est alors de l'ordre de $0.01m$. Or la taille des éléments est de l'ordre de $0,05m$, ce qui n'est pas suffisant. On reprend donc le calcul en raffinant le maillage au fond, de sorte que les éléments ont une taille approximative de $0,003m$ au fond. Pour limiter les coûts de calcul, le temps de simulation est moins long, ce qui permet de rétrécir le domaine. Le profil de vitesse horizontale obtenu est représenté en rouge sur la figure 5.7 avec le maillage utilisé. Le maillage reste encore grossier par rapport aux variations de la vitesse. Le coefficient d'amortissement K a alors pour moyenne $K = 1.04 \times 10^{-4}$ ce qui est plus proche du modèle théorique $K_{th} = 7.9197 \times 10^{-5}$.

On peut nuancer ces résultats en considérant les résultats expérimentaux de Ippen et Kulin (1957). Ces expériences ont mis en évidence une dépendance du coefficient avec l'amplitude de l'onde, donc avec la valeur du nombre de Reynolds dans la couche limite. Les coefficients mesurés sont plus grands que les coefficients théoriques lorsque le rapport entre l'amplitude de l'onde et la profondeur sont petits comme dans notre cas. Ce cas nous a permis de montrer que notre méthode permettait bien de simuler la propagation d'une onde solitaire et que l'amortissement observé correspond à la physique du problème.

5.2.3 Séparation de l'onde solitaire

Le cas est le même que précédemment mais le fond du bassin n'est plus plat. Ainsi entre $x = 30m$ et $x = 40m$ la hauteur d'eau passe linéairement de $0.5m$ à h_1 . Comme le mentionne Westhuis (2001), cette variation de profondeur provoque une séparation de l'onde solitaire en deux, voire trois ondes, selon la profondeur h_1 considérée. Nous allons donc simuler cette

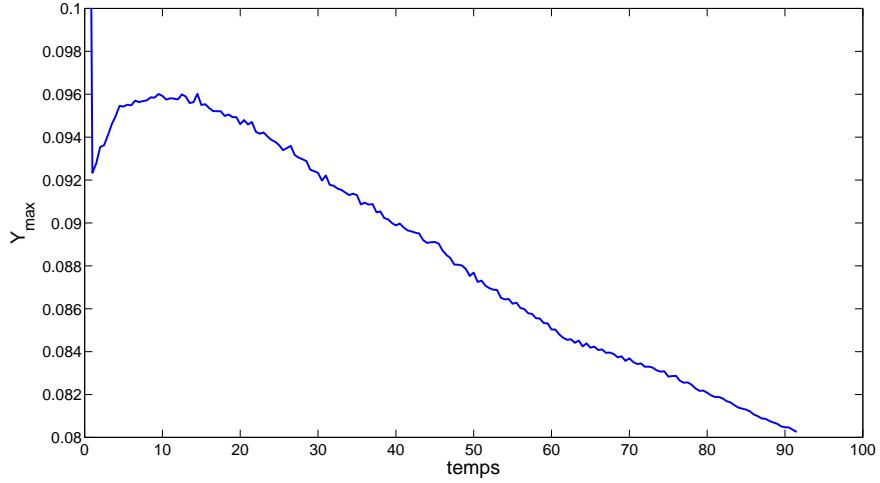


Figure 5.6 Élévation maximale de la surface libre.

séparation pour des hauteurs h_1 de $0.35m$ et $0.25m$ pour lesquelles Westhuis (2001) avait obtenu respectivement des séparations en deux et trois ondes. Nous étudierons aussi l'impact de la couche limite au fond pour chacune de ces hauteurs.

Condition de glissement au fond

La figure 5.8 présente les résultats obtenus pour une hauteur h_1 de $0.35m$ avec une condition de glissement au fond du bassin. La variation de profondeur provoque bien une séparation de l'onde en deux parties. Sur la figure 5.8(b) on peut observer l'évolution de l'onde au cours du temps. Lorsqu'elle atteint la position $x = 30m$, lorsque la hauteur du fond commence à varier, elle se décompose en une onde transmise et une onde réfléchie. Cette dernière a une amplitude très faible. Elle se propage d'abord dans le sens des x décroissants avant d'être réfléchie contre la paroi du bassin en $x = 0m$ à environ $t = 30s$. Elle repart ensuite dans le sens positif. On peut l'observer ensuite en arrière de l'onde transmise. Sur la figure 5.8(a) elle se trouve à l'abscisse $x \approx 170m$. L'onde transmise est bien séparée en deux ondes. Lorsque la profondeur du bassin atteint h_1 , l'amplitude de l'onde est de $0.127m$ puis décroît jusqu'à $0.121m$. On remarque que l'onde principale se propage moins vite que l'onde solitaire avec une profondeur de bassin constante. En effet, à $t = 119s$, la figure 5.8(a) montre que la crête de l'onde principale se situe environ à $x = 260m$ contre $x = 290m$ pour une profondeur constante de $0.5m$. Ceci n'est pas étonnant car la vitesse de propagation des ondes infinitésimales en faible profondeur est \sqrt{gh} . Comme h diminue, il est normal que la vitesse de propagation diminue aussi. La figure 5.8(c) montre que l'onde secondaire se propage moins vite que l'onde principale. Son amplitude est de $0.02m$ à $t = 120s$. Ceci est

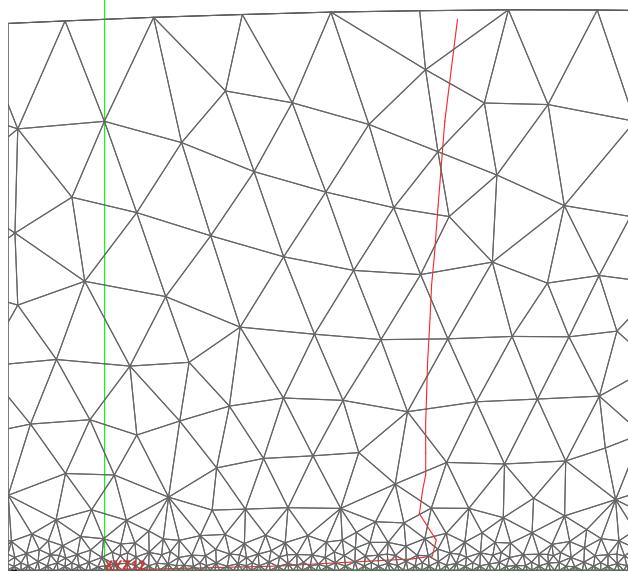
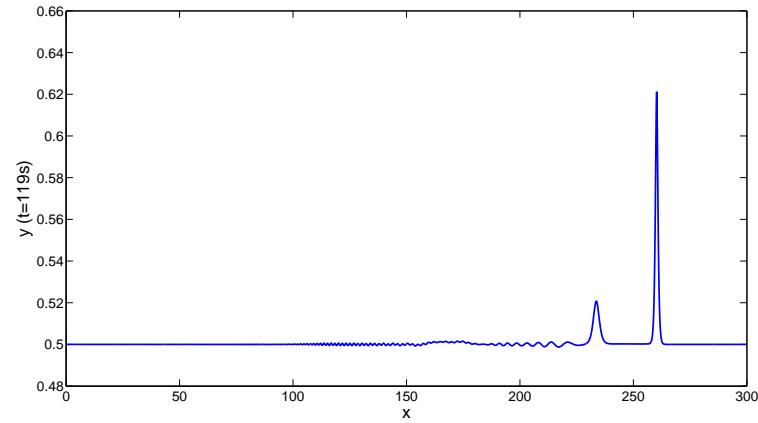
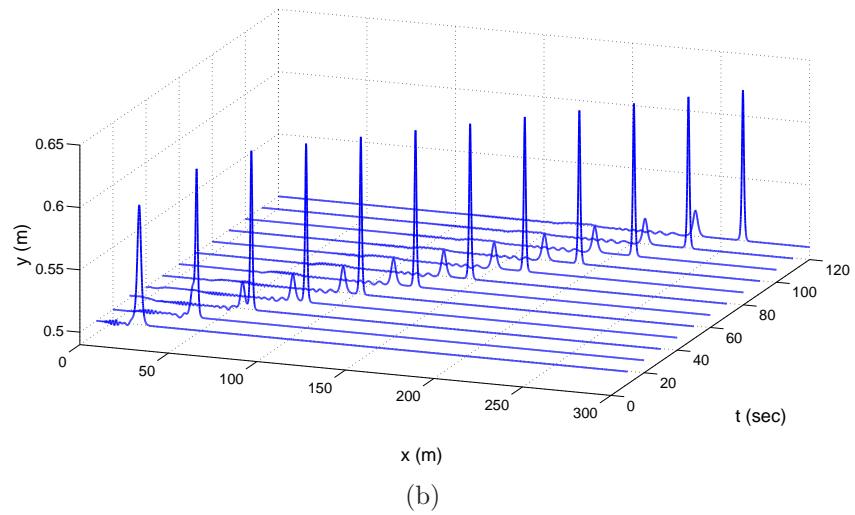


Figure 5.7 Vitesse horizontale dans la couche limite et maillage.

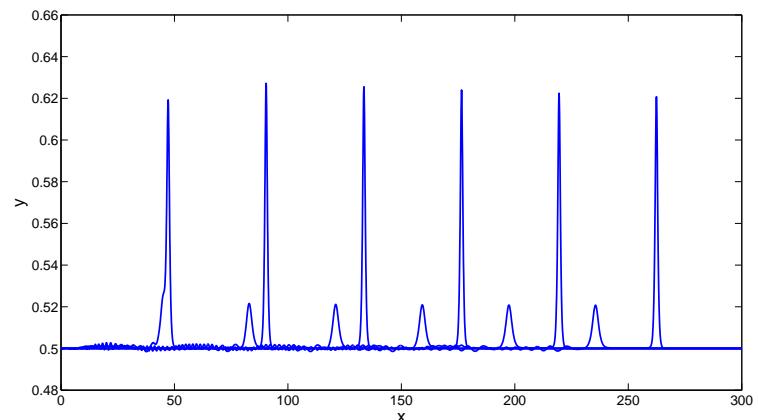
en accord avec l'expression de Boussinesq (5.3) pour la vitesse de propagation. La vitesse est une fonction croissante de l'amplitude.

La figure 5.9 montre les résultats obtenus pour $h_1 = 0.25m$. On observe une division en trois parties de l'onde transmise et la présence, comme précédemment, d'une onde réfléchie.

On constate que l'onde principale se propage plus vite que les ondes secondaires et qu'elle est amortie, son amplitude passe de $0.15m$ à $t = 20s$ à $0.11m$ à $t = 120s$. Cet amortissement est bien plus élevé que celui constaté pour $h_1 = 35m$. L'amortissement ne provient donc pas d'une perte d'énergie dans la couche limite. On remarque que l'amplitude de l'onde varie moins vite vers la fin du canal pour $h_1 = 0.25m$, c'est à dire lorsque l'onde secondaire est plus éloignée. L'onde principale alimente les autres qui, elles, ne semblent pas subir d'amortissement. La profondeur est aussi un paramètre important. L'amplitude de l'onde est plus grande pour $0.25m$, l'interaction entre le fond et l'onde est donc plus importante, ce qui crée de l'amortissement.

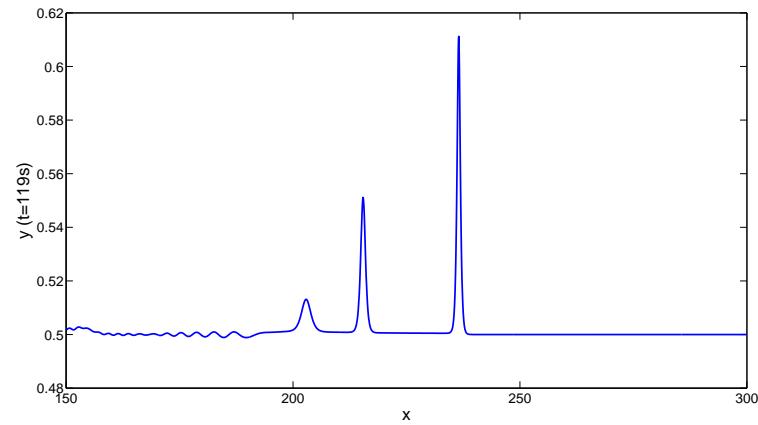
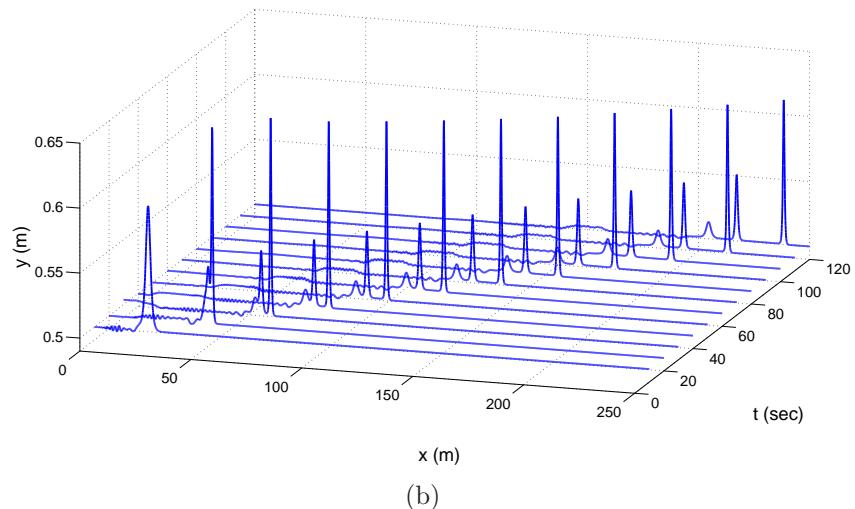
(a) Surface libre à $t=119$ s

(b)

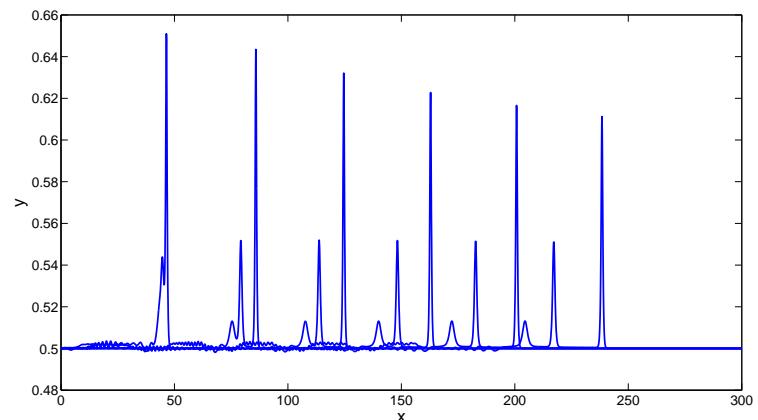


(c) Surface libre toutes les 20s

Figure 5.8 Évolution de la surface libre, $h_1 = 0.35$ m, glissement.

(a) Surface libre à $t=119s$ 

(b)



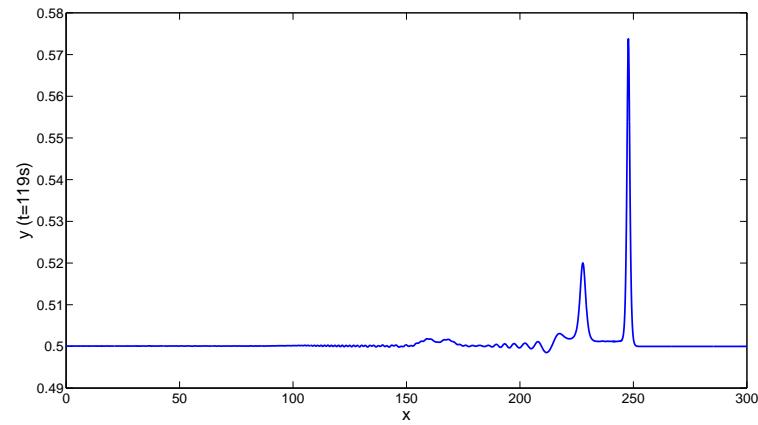
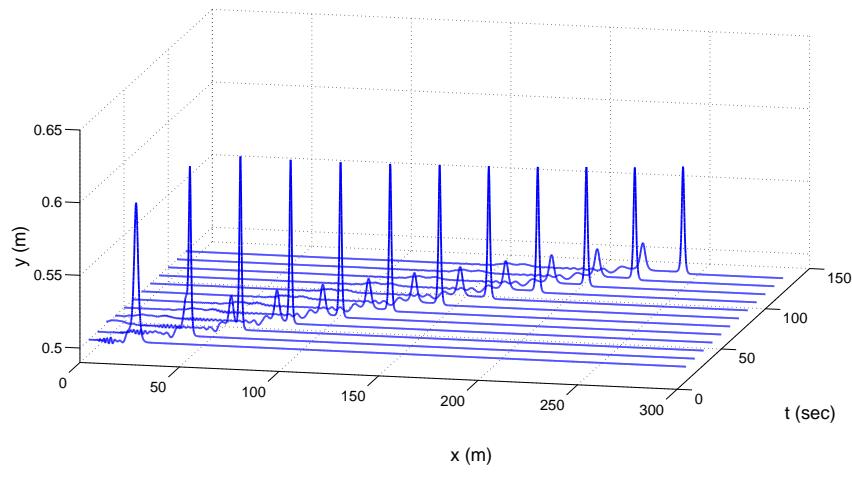
(c) Surface libre toutes les 20s

Figure 5.9 Évolution de la surface libre, $h_1 = 0.25m$, glissement.

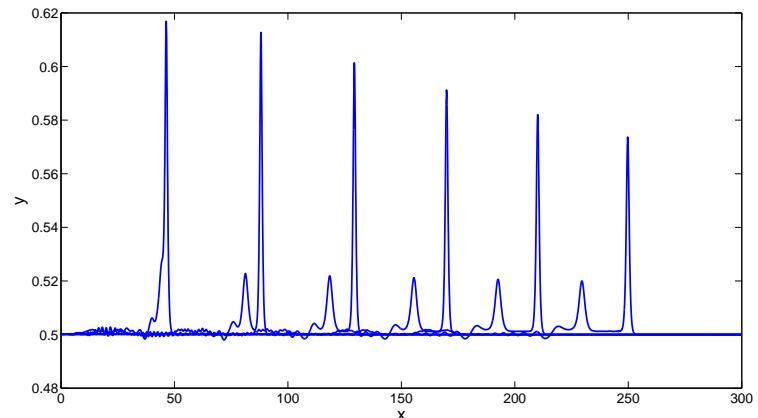
Condition de non glissement au fond

La figure 5.10 montre l'évolution de la surface libre pour $h_1 = 0.35m$ avec une condition de non glissement au fond du bassin. Cette condition de non glissement provoque une diminution de l'amplitude de l'onde ainsi qu'un ralentissement de sa propagation. On retrouve encore, en arrière des deux ondes transmises, l'onde réfléchie. On peut l'observer à l'abscisse $x \approx 170m$ en arrière de l'onde transmise sur la figure 5.10(a). On peut voir que les deux ondes se propagent à des vitesses différentes, celle de plus grande amplitude allant plus vite. Par contre, celle-ci est plus amortie. Son amplitude passe de $0.117m$ à $t = 20s$ à $0.73m$ à $t = 120s$. C'est donc un amortissement plus important que pour l'onde seule avec une profondeur de $h = 0.5m$. La comparaison avec le modèle théorique de Keulegan (1948) ou les résultats expérimentaux de Ippen et Kulin (1957) ne serait pas pertinente ici car ils ne s'appliquent que pour les ondes solitaires et, ici, il y a une interaction entre les deux ondes.

La figure 5.11 montre l'évolution de la surface libre au cours du temps pour $h_1 = 0.25m$ sans glissement au fond du bassin. On observe bien une séparation de l'onde en trois. L'effet de la condition de non glissement provoque une diminution significative de l'amplitude de l'onde, de $0.148m$ à $0.063m$, ainsi qu'un ralentissement de sa propagation. L'onde secondaire la plus proche de l'onde principale est elle aussi amortie, son amplitude passe de $0.055m$ à $t = 40s$ à $0.0535m$ à $t = 120s$.

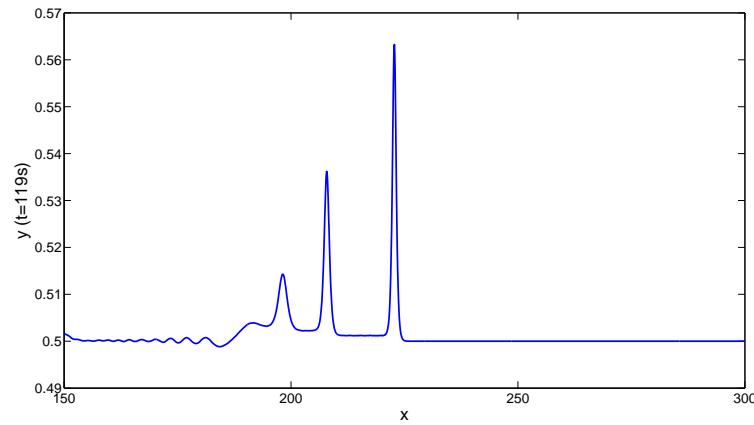
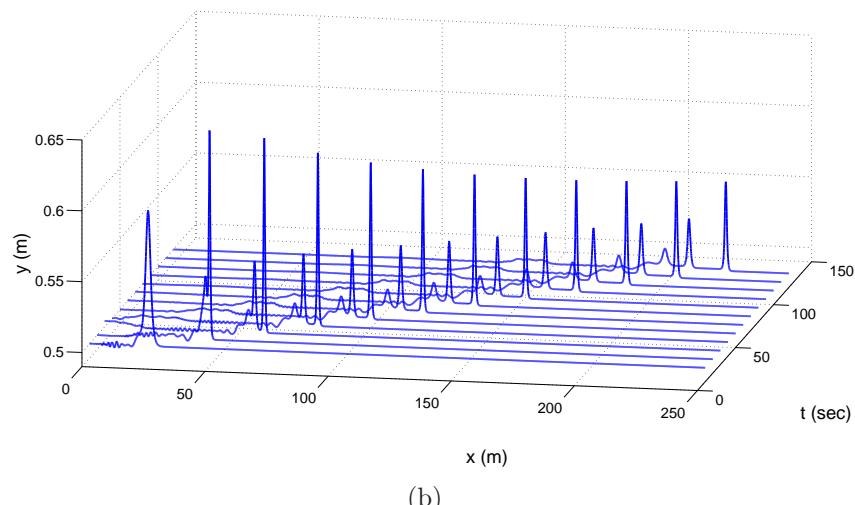
(a) Surface libre à $t=119s$ 

(b)

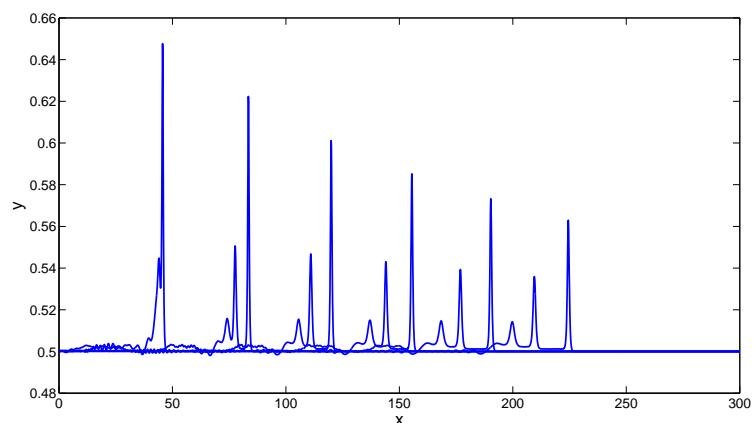


(c) Surface libre toutes les 20s

Figure 5.10 Évolution de la surface libre, $h_1 = 0.35m$, non glissement.

(a) Surface libre à $t=119s$ 

(b)



(c) Surface libre toutes les 20s

Figure 5.11 Évolution de la surface libre, $h_1 = 0.25m$, non glissement.

5.3 Batteur à houle

Dans cette section, nous allons simuler un bassin à vague utilisé pour faire des mesures sur des maquettes. Il existe plusieurs méthodes pour générer la houle. On choisit ici de simuler un batteur à piston, c'est à dire qu'une paroi du bassin oscille selon un mouvement horizontal.

5.3.1 Canal court

On considère un bassin de longueur 4, avec une hauteur d'eau au repos de 0.25. La paroi gauche du canal se déplace selon le mouvement $\Delta x = A \sin(\omega t)$ avec $A = 0.1$ et $\omega = 2\pi$ pour simuler le mouvement d'un batteur à piston. Le nombre de Reynolds est de $Re = 700$ et le nombre de Froude $Fr = \frac{U_0}{\sqrt{gL}} = 0.178$. Ce cas ne correspond pas vraiment à un cas physique, le but étant d'évaluer les capacités du code. Ce calcul a été réalisé avec des éléments P1-P1 stabilisés avec un schéma IRK32 sur un maillage de 15185 noeuds. Les essais réalisés avec les éléments de Taylor-Hood n'ont pas abouti à cause des instabilités numériques, même en utilisant un maillage plus fin. L'utilisation du schéma IRK32 permet d'augmenter significativement le pas de temps par rapport à un schéma d'Euler implicite. Nous avons utilisé ici 100 pas de temps par période. Avec le schéma d'Euler, les amplitudes des vagues étaient beaucoup plus petite. Une réduction du pas de temps menait à des résultats très différents. Il aurait donc fallu utiliser un pas de temps plus beaucoup plus petit, ce qui aurait allonger le temps de calcul. Ceci n'a pas été observé avec le schéma IRK32 pour ce pas de temps.

Les figures 5.12, 5.13 et 5.14 montrent les déformées obtenues à des moments différents. À $t = 1.5s$, une première vague est générée et se propage vers la droite, à $t = 2.3s$, une seconde vague est générée. Ensuite, la première est réfléchie et rencontre la seconde à $t = 2.86s$ comme le montre la figure 5.14. L'amplitude de la vague augmente et commence à déferler. Cependant, le maillage devient alors trop étiré et se replie, la simulation s'arrête. On constate aussi sur ces figures que la vorticité est nulle partout sauf proche de la surface. Dans ce cas, la théorie potentielle est donc insuffisante pour le calcul de la surface libre.

La figure 5.15 montre la crête de la vague au dernier pas de temps calculé. La vitesse croît rapidement entre le bas et la crête de la vague et atteint des valeurs assez importantes (> 3) par rapport à la vitesse du batteur ($V_{max} = 0.63$). La figure 5.15(d) montre les vecteurs vitesse multipliés par le pas de temps. On peut ainsi prévoir la géométrie de la surface libre au pas de temps suivant. On constate que la vague va commencer à déferler, le maillage n'a pas pu suivre la déformation, c'est pourquoi la simulation a dû être interrompue. Utiliser un pas de temps plus faible aurait peut être permis de poursuivre la simulation, mais la méthode de déformation de maillage est intrinsèquement limitée : si la vague déferle vraiment, il faudra

de toute façon remailler.

Notre méthode permet cependant de simuler des déformations importantes de la surface libre, son domaine d'application reste donc large.

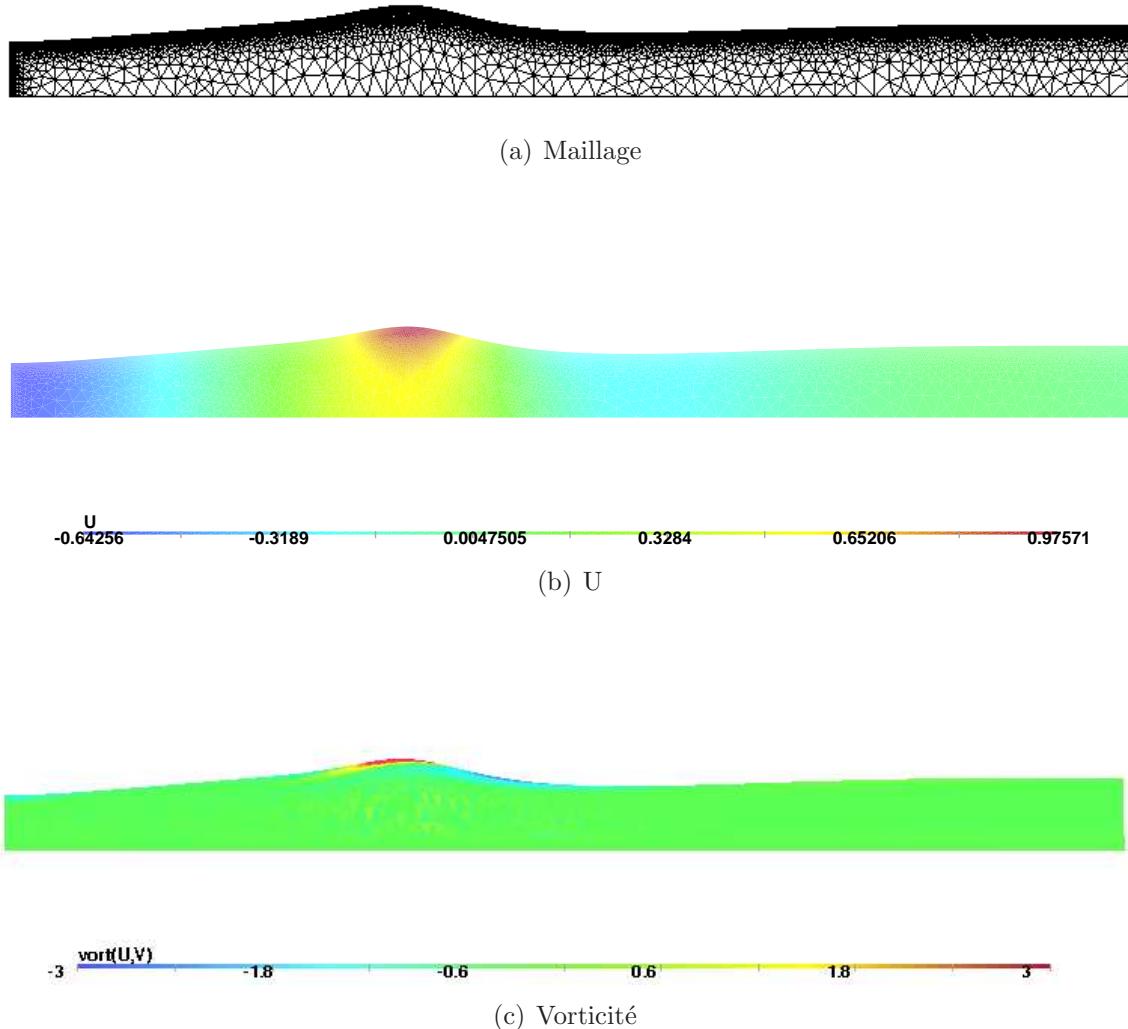


Figure 5.12 Maillage et vitesse horizontale à $t = 1.5s$.

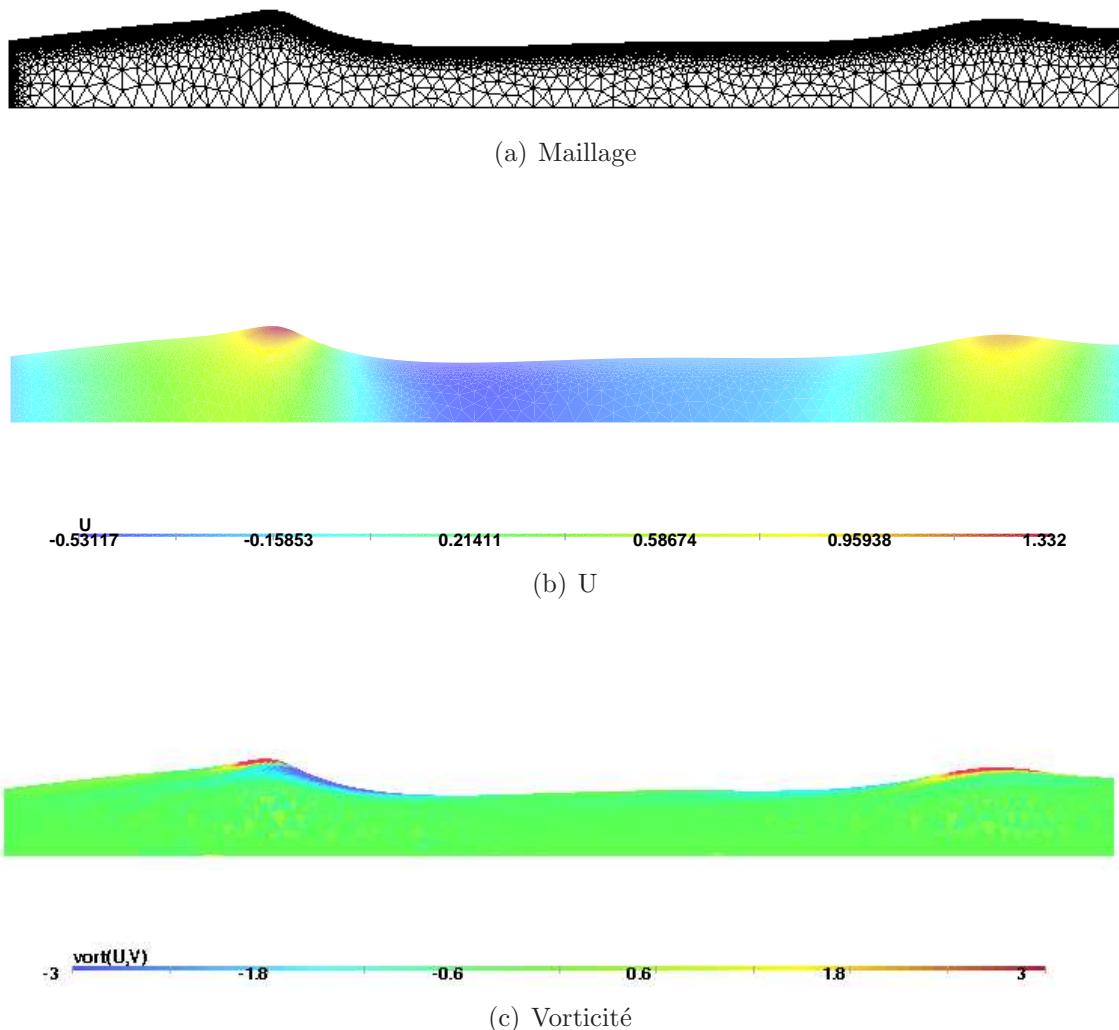


Figure 5.13 Maillage et vitesse horizontale à $t = 2.3s$.

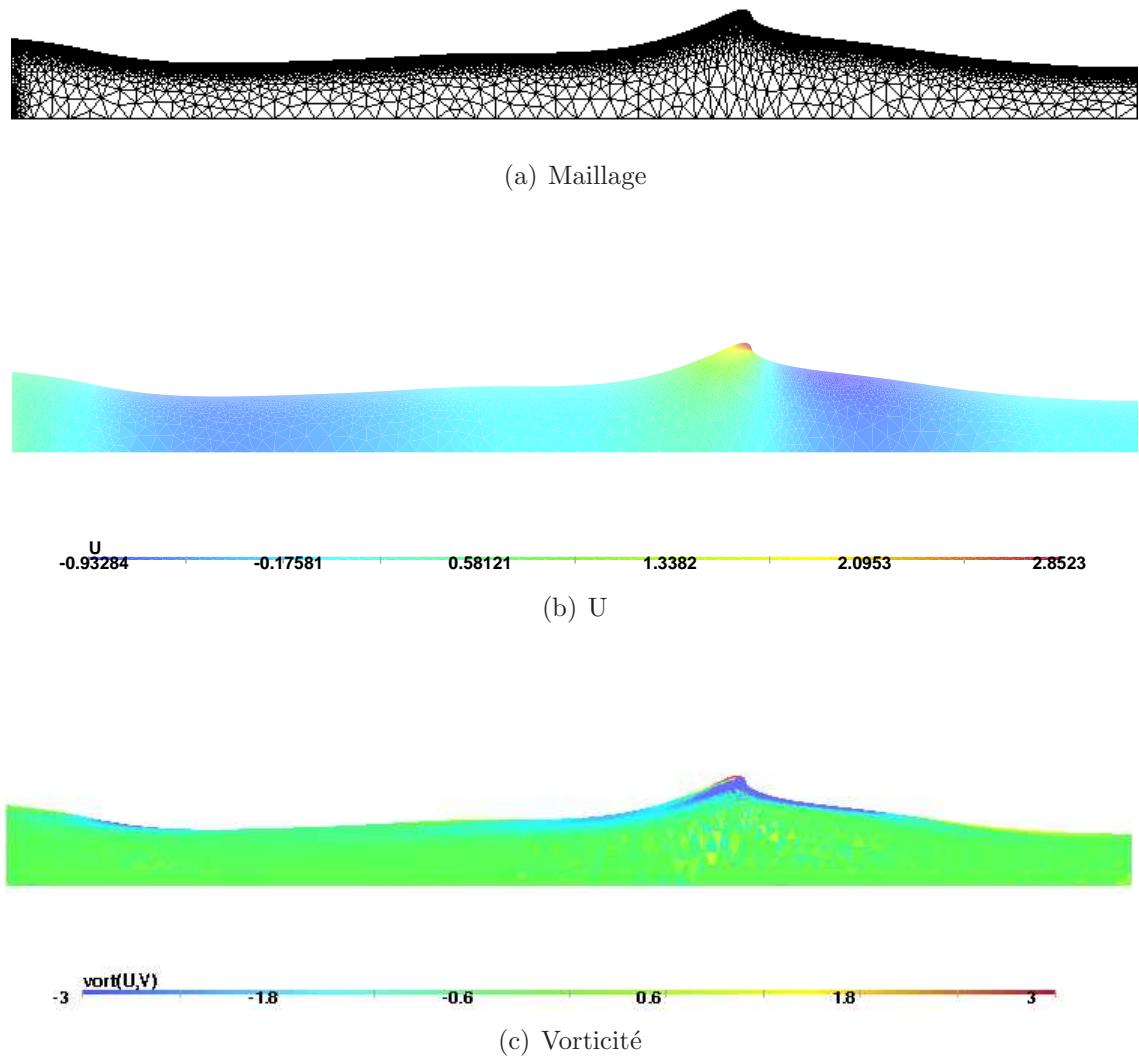


Figure 5.14 Maillage et vitesse horizontale à $t = 2.86s$.

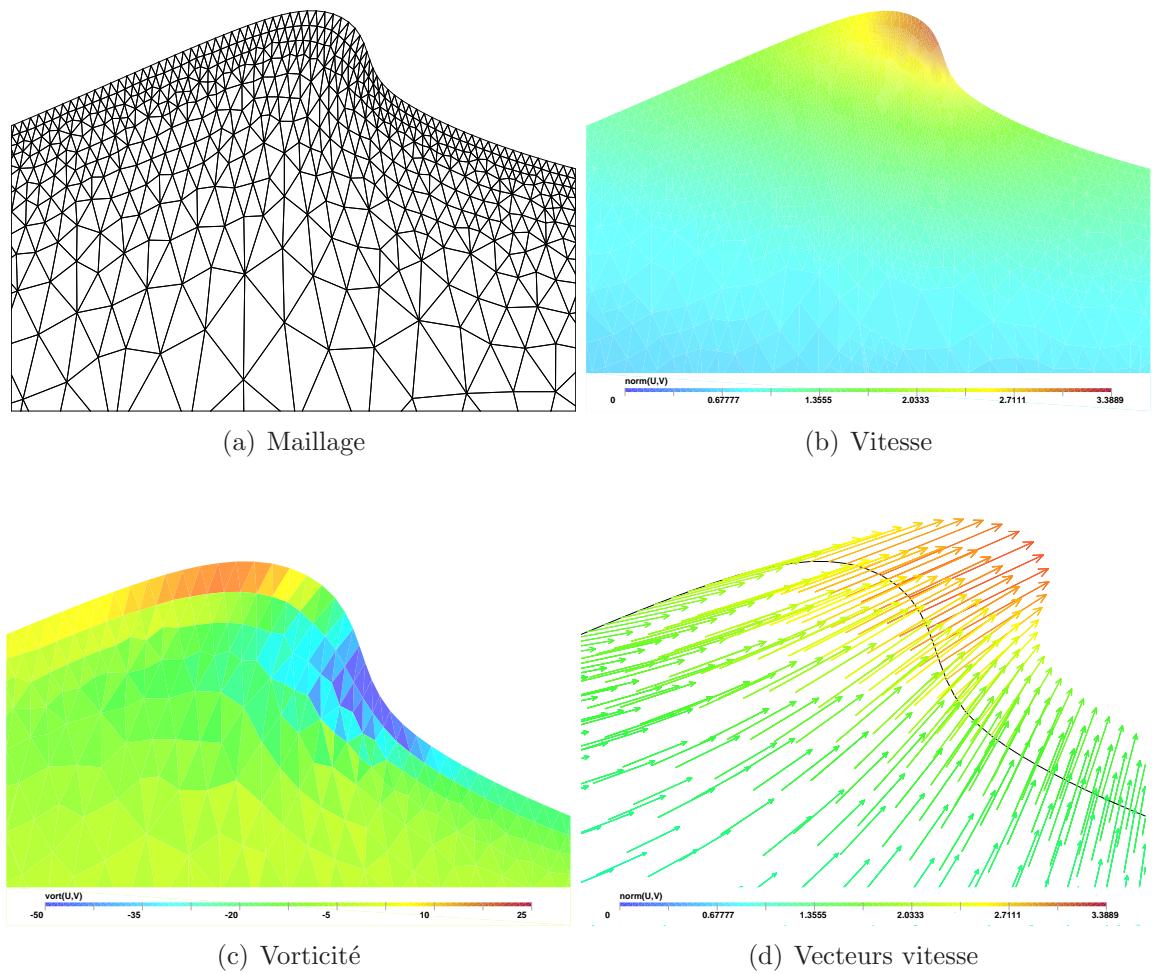


Figure 5.15 Zoom sur la crête de la vague à $t = 2.86s$.

5.3.2 Canal long

Nous proposons ici une étude plus réaliste. Pour cela, nous nous basons sur la configuration décrite par Duclos *et al.* (2004) (sans digue). Le but est de déterminer si la méthode, utilisant les équations de Navier-Stokes permet de simuler sans dissipation la propagation de vagues dans un bassin. Le bassin mesure 33m de long et la hauteur d'eau au repos est de 0.8m. Le mouvement du batteur est $\Delta x = A \sin(\omega t)$ avec $A = 0.01$ et $\omega = 6.04$, la période de battement étant de 1.04s.

Nous utilisons des éléments P1-P1 avec la stabilisation SUPG/PSPG. Le maillage compte 9350 noeuds dont 979 sont situés sur la surface libre. Les propriétés du fluide sont les suivantes : $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$, $\mu = 0.001 \text{ Pa.s}$, $g = 9.807 \text{ m.s}^{-2}$. La figure 5.19 montre l'évolution de la surface libre toutes les 10 secondes. Les vagues se propagent au fur et à mesure dans le milieu au repos. Le déplacement vertical de la surface libre est compris entre environ -0.020 m et 0.020 m . À 50 secondes, sur la figure 5.19(e), on peut observer leur réflexion sur la paroi opposée, l'amplitude des vagues est modifiée entre 20m et 33m. Ce phénomène se traduit par une amplification ou une diminution de l'amplitude, comme on peut le voir sur les figures 5.16 et 5.17.

On peut comparer nos résultats avec le modèle de la houle d'Airy, décrit en détail par Molin (2002). Ce modèle est basé sur la théorie potentielle et ne prend en compte que les termes de premier ordre par rapport à la cambrure des vagues. La cambrure de la houle est le rapport entre l'amplitude et la longueur d'onde. Le profil de la surface libre est alors :

$$\eta(t) = A \cos(kx - \omega t) \quad (5.6)$$

Si la profondeur du bassin est h , le nombre d'onde k et la pulsation ω sont liés par l'équation suivante :

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \quad (5.7)$$

Ici ω vaut $2\pi/T = 6.0415 \text{ rad.s}^{-1}$ donc on peut s'attendre à un nombre d'onde $k = 3.741 \text{ m}^{-1}$, ce qui correspond à une longueur d'onde de $\lambda = 1.6797 \text{ m}$. Au temps $t = 30 \text{ s}$, on calcule la moyenne de la distance entre deux crêtes successives sur un total de 10 crêtes. On trouve alors une longueur d'onde $\lambda_{num} = 1.6795 \text{ m}$, ce qui est en très bon accord avec la théorie linéaire.

Nous allons maintenant comparer nos résultats avec les expériences et les calculs de Duclos *et al.* (2004). Une sonde est placée dans le bassin à l'abscisse $x_s = 8.25 \text{ m}$. Le relevé de la surface libre pour nos calculs est tracé sur la figure 5.18, la figure est très voisine de celle obtenue par Duclos *et al.* (2004). Pour comparer de manière plus quantitative, on calcule la

série de Fourier du signal lorsque le régime périodique est établi. On a alors

$$A(t) = A_0 + \sum_n A_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad (5.8)$$

Les premières composantes obtenues sont résumées dans le tableau 5.2.

	A_1	A_2	A_3
expérience	$1.75 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-4}$	-
numérique	$1.76 \cdot 10^{-2}$	$5.8 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$

Tableau 5.2 Batteur à houle : coefficients de Fourier de la déformée de surface libre.

Les mesures n'ont pas permis de déterminer le troisième mode. Nos résultats sont très proches des mesures pour le premier et second mode. Duclos *et al.* (2004) ont comparé les mesures avec des codes potentiels et visqueux qui ont mené à des écarts compris entre 5% et 10% pour le premier mode contre moins de 1% dans notre cas.

Notre code est donc capable de générer une houle possédant des caractéristiques semblables à celles générées en bassin.

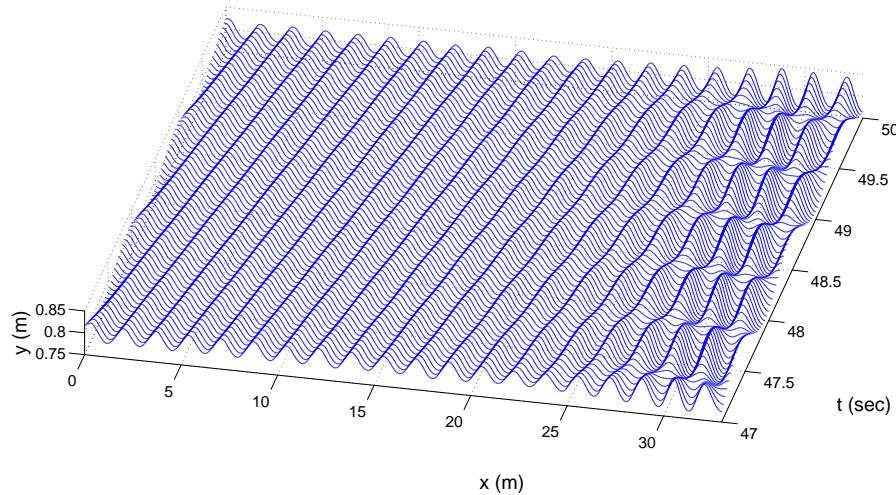


Figure 5.16 Batteur à houle : évolution de la surface libre entre 47 et 50 secondes.

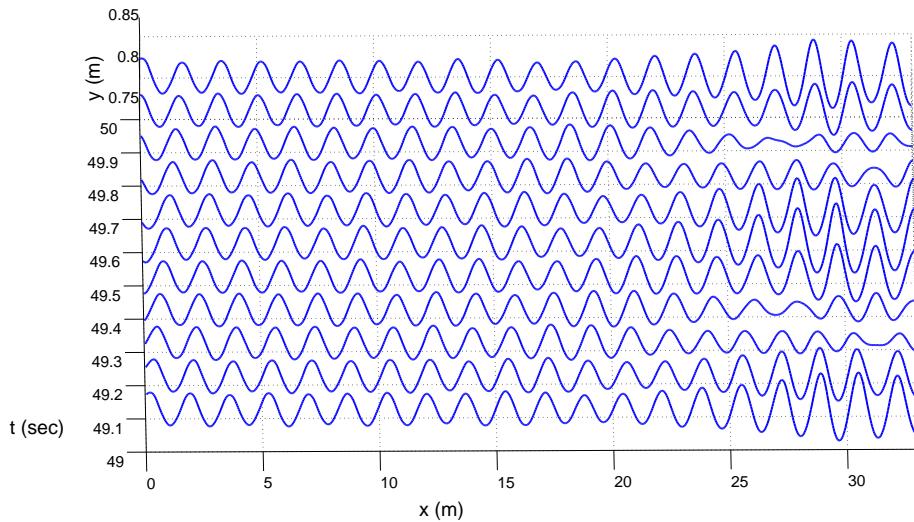


Figure 5.17 Batteur à houle : évolution de la surface libre entre 49 et 50 secondes.

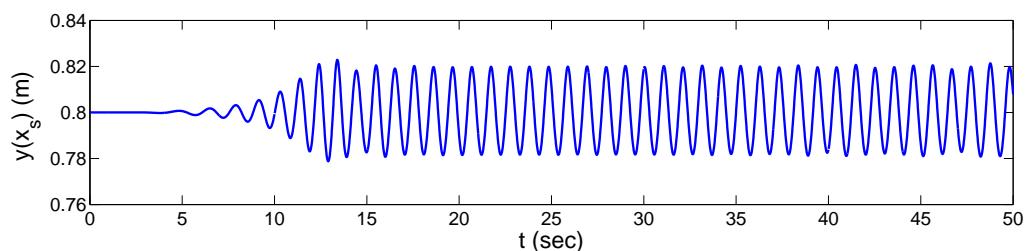


Figure 5.18 Évolution de la surface libre à $x_s = 8.25m$.

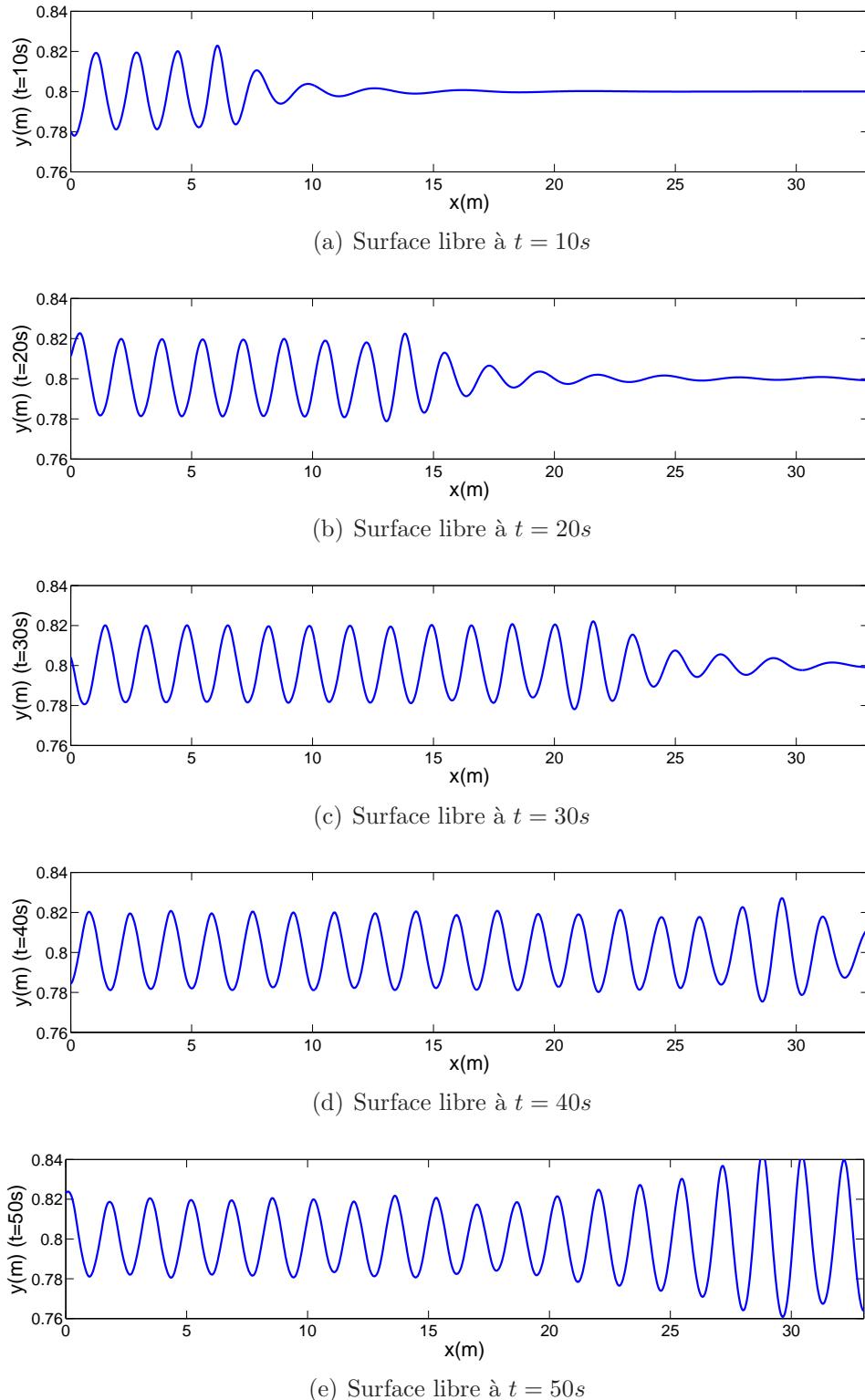


Figure 5.19 Propagation des vagues générées par un batteur à piston.

5.4 Interaction entre un cylindre et des vagues

L'écoulement autour d'un cylindre soumis à une houle incidente a de nombreuses applications pratiques comme les structures offshore ou les pipelines sous-marins. Par exemple, Boccotti (1996) a mené une série d'expériences sur la plage à Reggio Calabria en vue de la construction d'un pont submergé pour relier la Sicile au continent. Une analyse précise des efforts est alors nécessaire pour éviter tout phénomène de résonance sur les structures immergées. Dean (1948) a montré dans le cadre de la théorie potentielle qu'il n'y avait pas d'onde réfléchie par le cylindre et que l'onde transmise avait la même amplitude que l'onde incidente mais était déphasée. Ogilvie (1963) a calculé, toujours dans le cadre de la théorie potentielle, les efforts au premier ordre sur le cylindre. Des expériences ont été menées par Chaplin (1984) pour mesurer les efforts sur le cylindre en fonction du nombre de Keulegan-Carpenter qui compare l'amplitude de la houle incidente avec le diamètre du cylindre. Il a montré que le modèle potentiel utilisé par Ogilvie (1963) n'était pas valable pour le calcul de la première harmonique des efforts, à cause des effets visqueux et non linéaires. En effet, à cause de la viscosité, on peut observer une couche limite oscillante autour du cylindre et l'apparition d'une circulation autour du cylindre. Ce phénomène provoque une chute du coefficient d'inertie avec l'augmentation du nombre de Keulegan-Carpenter. C'est pourquoi, Guerber *et al.* (2010), dont les simulations sont basées sur un modèle potentiel, n'observent pas ce phénomène et retrouvent les résultats théoriques d'Ogilvie (1963). Il convient donc d'utiliser les équations de Navier-Stokes afin de simuler correctement ce cas. Tavassoli et Kim (2001) utilisent les équations de Navier-Stokes et des marqueurs pour le calcul de la surface libre. Ils obtiennent la même tendance que celle observée par Chaplin (1984).

Nous allons donc voir si on retrouve des résultats similaires et nous ferons une analyse de sensibilité par rapport à la position et au rayon du cylindre afin de voir quel est leur impact sur l'écoulement et de valider le calcul de sensibilité. Lors des analyses de sensibilité en régime instationnaire, il faut éviter de choisir des paramètres pouvant affecter la période des phénomènes observés sous peine de voir les sensibilités diverger (semi-sécularité). Ici, le mouvement est forcé par le batteur et il n'y a pas de détachement tourbillonnaire, les sensibilités resteront donc bornées, sauf si on calcule les sensibilités par rapport à la fréquence du batteur.

Nous allons reprendre les dimensions du bassin expérimental utilisé par Chaplin (1984) pour construire un bassin numérique. Les longueurs sont adimensionnées sur le diamètre du cylindre noté D . Le bassin mesure $300D$ de long et la hauteur au repos du fluide est $h = 8.5D$, il est représenté sur la figure 5.20. La houle est générée grâce à un batteur à piston. La paroi gauche du bassin oscille selon le mouvement $x = A \sin(\omega t)$, avec $A = 0.1D$. On obtient une

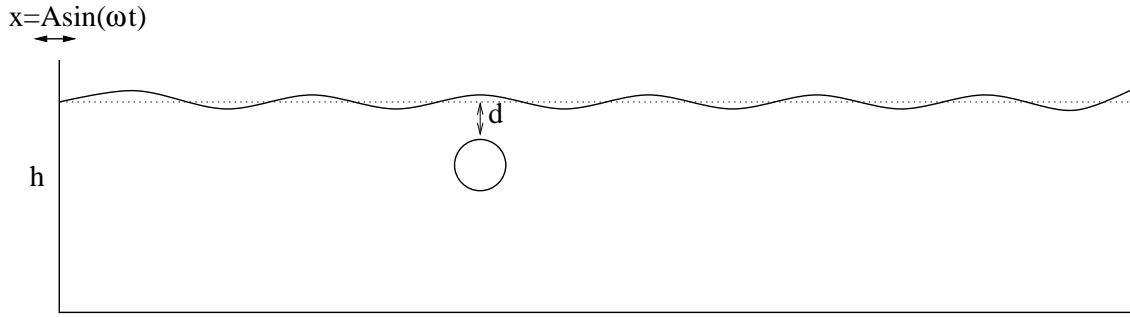


Figure 5.20 Interaction entre un cylindre et des vagues.

houle de longueur d'onde $\lambda = 15.58D$, ce qui correspond à un nombre d'onde $k = 0.4033$. Le cylindre circulaire est situé à $100D$ du piston, on note d la distance entre le haut du cylindre et la surface libre au repos. Le nombre de Keulegan-Carpenter est alors défini de la façon suivante :

$$Kc = \frac{2\pi a}{D} e^{-k(D/2+d)} \quad (5.9)$$

où a est l'amplitude des vagues incidentes. Ici nous avons $a = 0.2D$.

On utilise un maillage d'environ 36800 noeuds avec des éléments de Taylor-Hood, pour pouvoir faire l'analyse de sensibilité. Comme nous ne disposons pas de stabilisation adaptée, le nombre de Reynolds basé sur le diamètre du cylindre et la vitesse maximale de la houle est de 200. Prendre une valeur plus haute pourrait causer des oscillations numériques et une valeur plus basse pourrait causer un amortissement des vagues trop important.

5.4.1 Impact du cylindre sur la déformée de surface libre

Afin d'étudier l'impact du cylindre sur la déformée de surface libre, on prend des valeurs de d de $1D$, $1.5D$ et $2D$. On comparera avec une simulation sans cylindre.

La figure 5.21 représente la déformée de surface libre obtenue après 30 oscillations du batteur avec et sans cylindre pour plusieurs positions du cylindre. En amont du cylindre, donc pour $x < 100D$ les courbes sont confondues. Conformément aux résultats de Dean (1948) il n'y a pas de réflexion de la houle sur le cylindre, l'onde transmise a bien la même amplitude que l'onde non perturbée, elle est environ $2D$ en arrière. On constate cependant que lorsque le cylindre se rapproche de la surface libre, donc pour $d = 1D$, la forme de l'onde est changée, voir l'agrandissement figure 5.22. La figure 5.23 montre que le déphasage augmente légèrement quand le cylindre se rapproche de la surface.

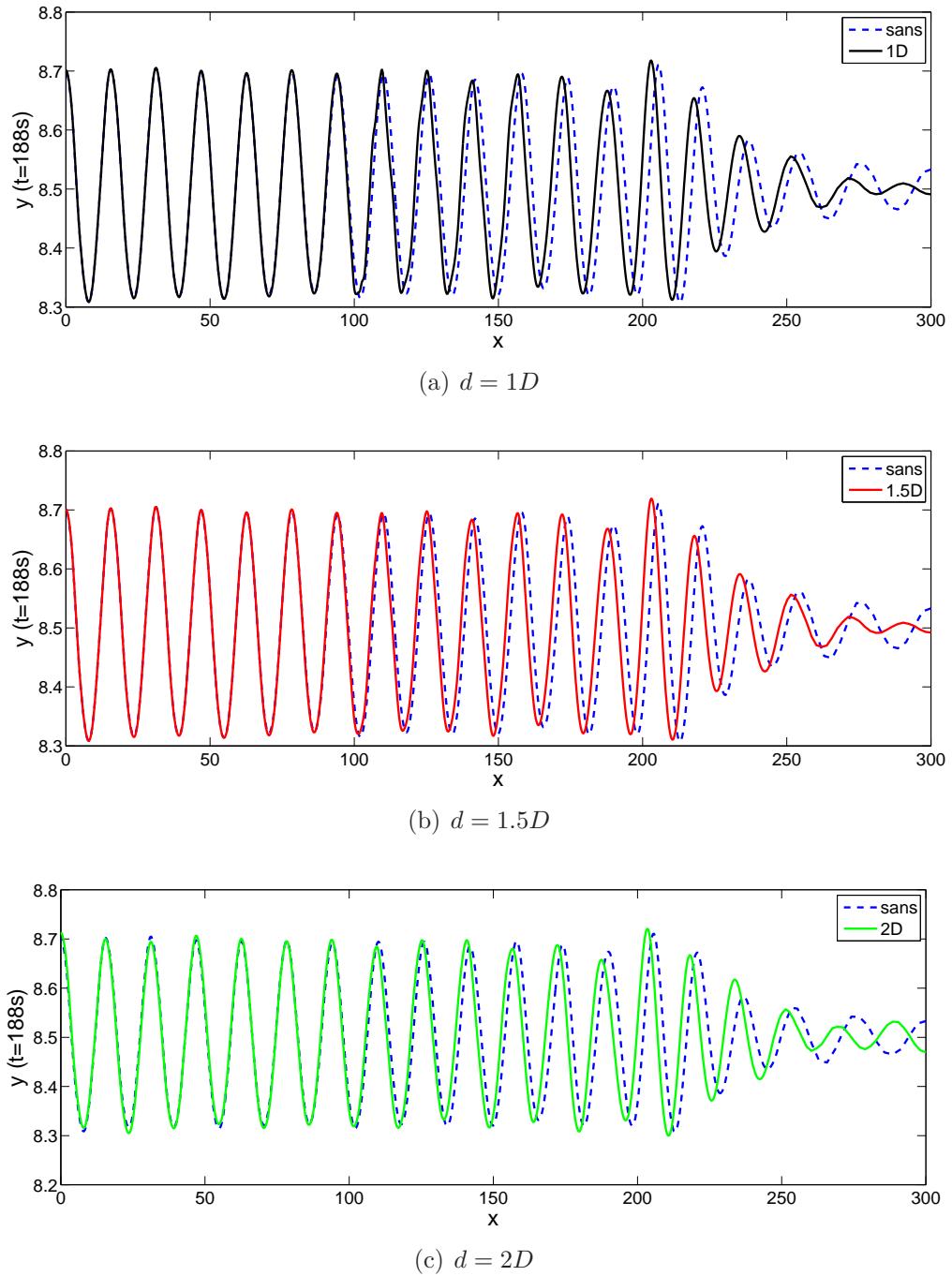


Figure 5.21 Déformée de surface libre à $t = 188s$.

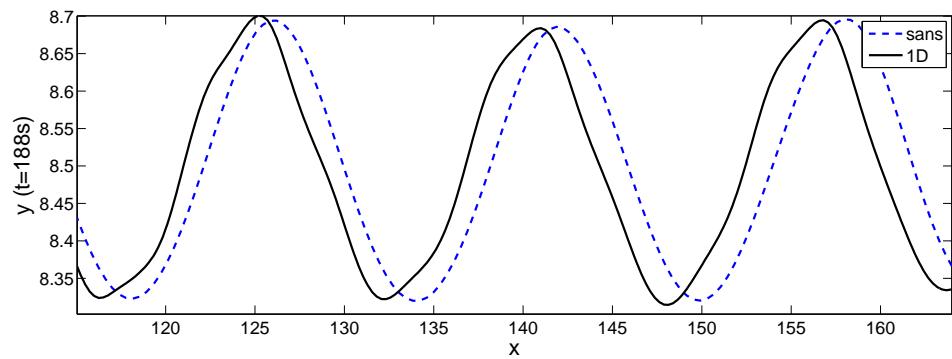


Figure 5.22 Forme de la surface libre pour $d = 1D$.

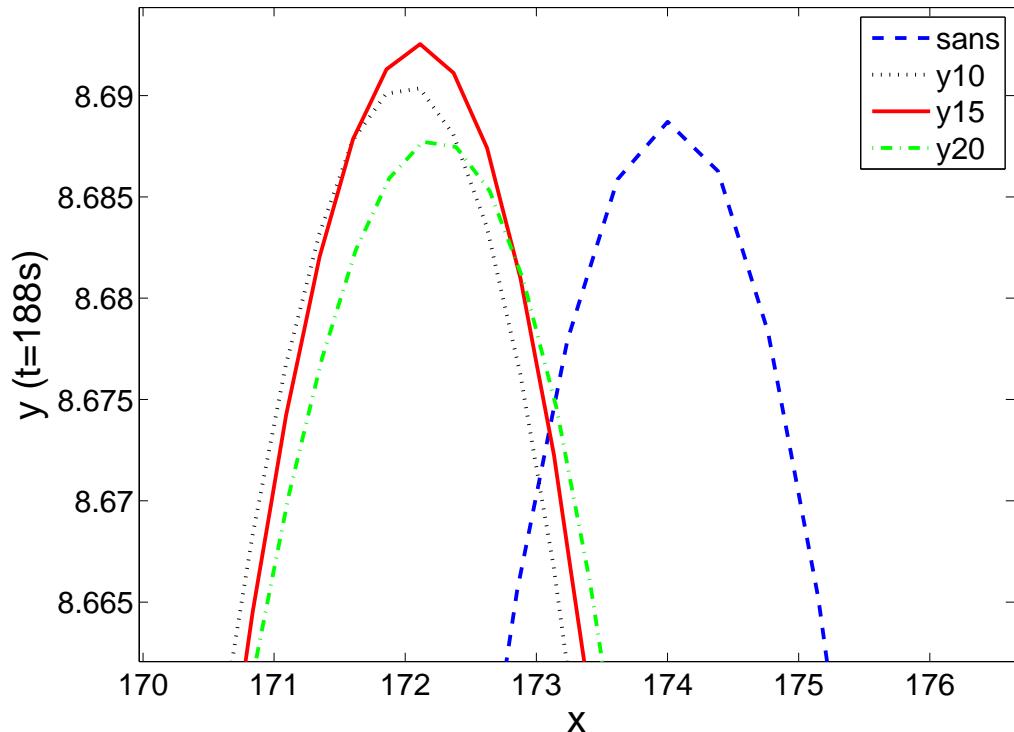


Figure 5.23 Agrandissement d'une crête après le cylindre.

5.4.2 Efforts sur le cylindre

Nous nous intéressons à présent aux efforts sur le cylindre. Pour le cas où $d = 1.5D$, on obtient les efforts présentés sur la figure 5.24. On constate que la force verticale et la force

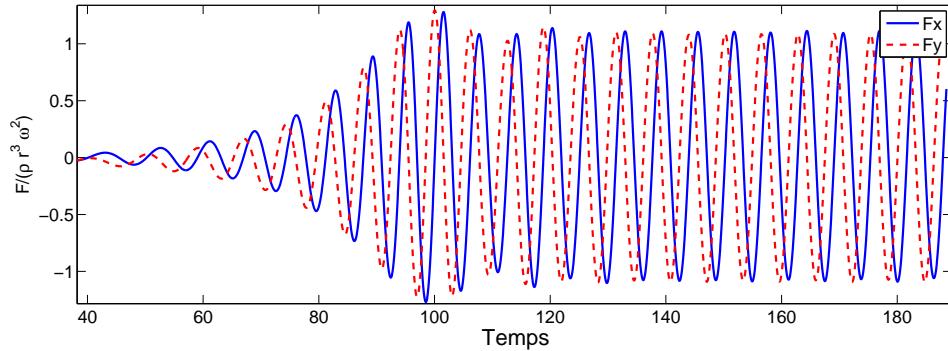


Figure 5.24 Efforts sur le cylindre pour $d = 1.5D$.

horizontale sont déphasées de $\pi/2$. À partir de 110s le régime permanent est établi.

On peut décomposer les efforts en série de Fourier :

$$F_x(t) = F_{x0} + \sum_n F_{xn} \cos(n\omega t + \varphi_{xn}) \quad (5.10)$$

$$F_y(t) = F_{y0} + \sum_n F_{yn} \cos(n\omega t + \varphi_{yn}) \quad (5.11)$$

Selon la formule de Morison (Chaplin, 1984; Molin, 2002), la composante de force horizontale de pulsation ω se décompose en une force inertuelle, en phase avec l'accélération, et une force de traînée, en phase avec la vitesse. On a alors :

$$F_{x1} = \rho C_M \pi \frac{D^2}{4} \dot{U} + \frac{1}{2} \rho C_D D U |U| \quad (5.12)$$

Nous calculons ces coefficients en prenant comme vitesse celle à la surface libre. Les valeurs de C_M et C_D pour différentes immersions sont présentées dans le tableau 5.3. On constate

d	Kc	C_M	C_D
$1D$	0.68	0.923	4.594
$1.5D$	0.56	0.779	3.565
$2D$	0.46	0.651	2.824

Tableau 5.3 Coefficients d'inertie et de traînée.

que plus le cylindre est proche de la surface libre, plus le rapport entre le coefficient de traînée et d'inertie devient important.

Pour chaque pulsation $n\omega$, Chaplin (1984) utilise la décomposition suivante pour les efforts

$$F_{xn} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{8} C_{xnm} \rho D^3 \omega^2 K c^m \quad \text{et} \quad F_{yn} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{8} C_{ymn} \rho D^3 \omega^2 K c^m \quad (5.13)$$

Les valeurs des coefficients mesurés C_{nm} sont les mêmes pour les efforts verticaux que pour les efforts horizontaux. Pour la distance $d = 1D$, les conditions de simulation correspondent au cas C testé par Chaplin (1984). Les coefficients mesurés et les forces résultantes sont résumés dans le tableau 5.4 et comparés à nos résultats pour F_x et F_y ainsi qu'aux résultats obtenus avec le modèle d'Ogilvie (1963). On obtient des écarts relatifs avec les expériences de Chaplin (1984) de 5% pour le premier mode et de 13% pour le second mode. Nos résultats sont donc relativement en accord. Notre méthode capte la circulation autour du cylindre qui mène à des efforts plus faibles pour la première harmonique. Notons que pour notre simulation, $\beta = Re/Kc = 299$, alors que dans les expériences de Chaplin (1984), $\beta = 9120$, donc notre écoulement est beaucoup plus visqueux. Cependant, l'accord entre nos calculs et les expériences peuvent s'expliquer par le fait que la circulation créée autour du cylindre est indépendante de la viscosité selon Longuet-Higgins (1970).

On va à présent comparer les résultats obtenus avec des simulations utilisant une houle d'Airy à la place du batteur. Ce cas est beaucoup plus simple. Le conditions aux limites pour la vitesse correspondent à une houle d'Airy sur toutes les frontières du domaine. L'origine du repère étant au fond, la vitesse dans le domaine de profondeur h est

$$u = A\omega \frac{\cosh(ky)}{\cosh(kh)} \cos(kx - \omega t) \quad (5.14)$$

$$v = A\omega \frac{\sinh(ky)}{\cosh(kh)} \sin(kx - \omega t) \quad (5.15)$$

Il n'y a donc pas de surface libre, le maillage est fixe. Ces simulations sont beaucoup plus

	C_{11}	C_{13}	F_1	C_{22}	F_2
Chaplin	1.99	-0.36	0.156	0.081	0.0048
Ogilvie	2.061	-	0.178	-	-
F_x	-	-	0.1646	-	0.0056
F_y	-	-	0.1647	-	0.0054

Tableau 5.4 Comparaison des efforts expérimentaux et numériques.

rapides car le régime permanent est vite établi (quelques périodes contre 20 battements si on simule le cas complet) et on peut réduire le domaine de calcul puisque les interactions avec les bords sont beaucoup plus petites : il n'y a pas de réflexion des vagues au bout du bassin ni d'interaction avec le batteur. On va donc déterminer à l'aide de l'analyse de Fourier si la simulation du cas complet est vraiment utile ou non. Le tableau 5.5 contient les coefficients de Fourier pour les pulsations ω , 2ω et 3ω .

Conformément aux observations de Ogilvie (1963); Chaplin (1984); Guerber *et al.* (2010), les forces horizontales et verticales ont des coefficients très proches. Lorsque les conditions de Dirichlet correspondent à une houle d'Airy, les efforts de pulsation ω sont surestimés d'environ 9%. Par contre, les modes suivants sont très mal captés notamment lorsque le cylindre est plus proche de la surface libre. Ces modes sont donc principalement liés à la déformation de la surface libre et à l'interaction entre le cylindre et la surface. L'approximation de la surface libre avec une houle d'Airy n'est donc valable que lorsque le cylindre est suffisamment loin de la surface libre.

5.4.3 Analyse de sensibilité par rapport à la distance entre le cylindre et la surface libre

On prend comme paramètre de sensibilité la position verticale du cylindre y_0 et donc la distance entre le cylindre et la surface libre ($h = y_0 + D/2 + d$). La figure 5.25 montre la sensibilité de la déformation par rapport au paramètre pour une valeur de $d = 1D$. On voit alors que rapprocher le cylindre de la surface accentuerait la dissymétrie de la forme des vagues observée sur la figure 5.22.

La sensibilité des efforts évolue en phase avec les efforts. On peut décomposer les sensi-

d		F_{x1}	F_{x2}	F_{x3}	F_{y1}	F_{y2}	F_{y3}
$1D$	SL	0.165	$5.41 \cdot 10^{-3}$	$4.73 \cdot 10^{-04}$	0.165	$5.60 \cdot 10^{-3}$	$5.26 \cdot 10^{-04}$
	Airy	0.178	$1.07 \cdot 10^{-3}$	$1.38 \cdot 10^{-04}$	0.176	$0.68 \cdot 10^{-3}$	$1.16 \cdot 10^{-04}$
$1.5D$	SL	0.137	$1.64 \cdot 10^{-3}$	$1.12 \cdot 10^{-04}$	0.136	$1.80 \cdot 10^{-3}$	$1.61 \cdot 10^{-04}$
	Airy	0.150	$0.43 \cdot 10^{-3}$	$6.25 \cdot 10^{-05}$	0.147	$0.29 \cdot 10^{-3}$	$1.03 \cdot 10^{-04}$

Tableau 5.5 Coefficients de Fourier des efforts sur le cylindre.

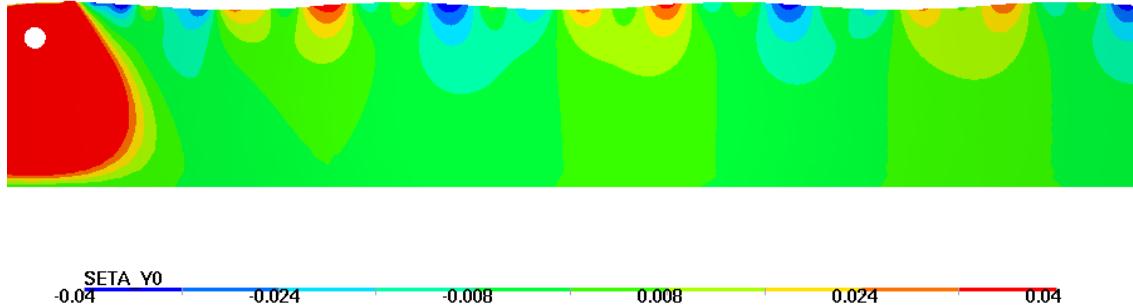


Figure 5.25 Sensibilité du déplacement vertical par rapport à la position du cylindre.

bilités en série de Fourier

$$S_{F_x}(t) = S_{x0} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{xn} \cos(n\omega t + \varphi_{Sxn}) \quad (5.16)$$

$$S_{F_y}(t) = S_{y0} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{yn} \cos(n\omega t + \varphi_{Syn}) \quad (5.17)$$

Il faut noter ici qu'avec cette décomposition, les coefficients S_{xn} et S_{yn} ne sont pas les sensibilités des coefficients F_{xn} et F_{yn} . Ces coefficients sont présentés dans le tableau 5.6 pour le calcul complet et pour le calcul avec la houle d'Airy.

d		S_{x1}	S_{x2}	S_{x3}	S_{y1}	S_{y2}	S_{y3}
1D	SL	$6.31 \cdot 10^{-2}$	$1.42 \cdot 10^{-2}$	$1.87 \cdot 10^{-3}$	$6.54 \cdot 10^{-2}$	$1.45 \cdot 10^{-2}$	$1.85 \cdot 10^{-3}$
	Airy	$5.98 \cdot 10^{-2}$	$2.38 \cdot 10^{-3}$	$3.05 \cdot 10^{-4}$	$6.17 \cdot 10^{-2}$	$1.67 \cdot 10^{-3}$	$3.31 \cdot 10^{-5}$
1.5D	SL	$5.15 \cdot 10^{-2}$	$3.72 \cdot 10^{-3}$	$2.19 \cdot 10^{-4}$	$5.25 \cdot 10^{-2}$	$3.83 \cdot 10^{-3}$	$2.62 \cdot 10^{-4}$
	Airy	$5.07 \cdot 10^{-2}$	$6.46 \cdot 10^{-4}$	$6.70 \cdot 10^{-5}$	$5.11 \cdot 10^{-2}$	$5.20 \cdot 10^{-4}$	$4.46 \cdot 10^{-5}$
2D	SL	$4.25 \cdot 10^{-2}$	$9.53 \cdot 10^{-4}$	$2.86 \cdot 10^{-5}$	$4.35 \cdot 10^{-2}$	$9.69 \cdot 10^{-4}$	$2.34 \cdot 10^{-5}$

Tableau 5.6 Coefficients de Fourier de la sensibilité des efforts par rapport à la position du cylindre.

Ces valeurs montrent que si le cylindre se rapproche de la surface libre, les efforts vont augmenter, c'est la tendance que nous avions observée au paragraphe 5.4.2. On constate aussi que pour $d = 1D$, la sensibilité des modes élevés est assez importante. Les efforts d'ordre supérieur sont donc liés à l'interaction entre le cylindre et la surface libre.

Afin de valider le calcul de sensibilité nous allons faire un calcul de solution voisine. En partant d'une configuration de base pour laquelle le paramètre d'intérêt est α_0 , on peut

calculer une approximation d'une variable de sortie ψ sur la configuration perturbée $\alpha_0 + \Delta\alpha$ avec une série de Taylor du premier ordre

$$\psi(\alpha_0 + \Delta\alpha) \approx \psi(\alpha_0) + \Delta\alpha \frac{D\psi}{D\alpha}(\alpha_0) \quad (5.18)$$

Ainsi, pour les efforts, en partant de la configuration $d = 1.5D$, on peut rapidement obtenir une extrapolation pour les configurations $d = 1D$ et $d = 2D$. Les figures 5.26 et 5.27 permettent de comparer les extrapolations avec les valeurs exactes pour les efforts sur le cylindre.

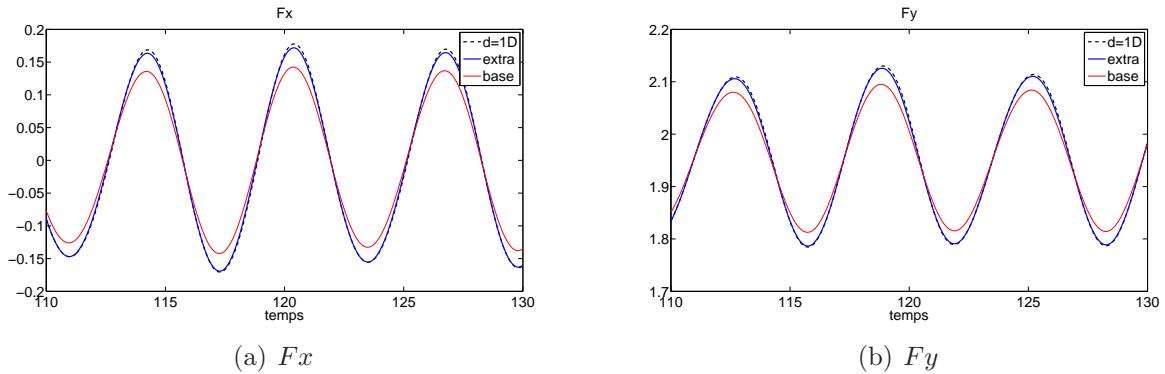


Figure 5.26 Efforts recalculés et extrapolés pour $d = 1D$.

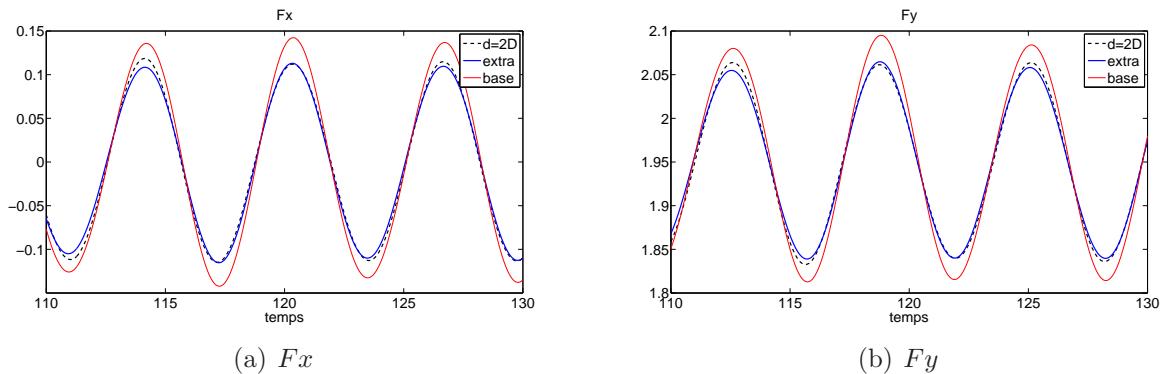


Figure 5.27 Efforts recalculés et extrapolés pour $d = 2D$.

L'extrapolation reconstitue bien les principales caractéristiques des efforts sur la configuration perturbée. Les plus grandes différences se situent au niveau de quelques crêtes car le signal n'est pas toujours très régulier. Nous allons donc quantifier ces erreurs avec l'analyse

de Fourier. Pour cela, on décompose les efforts et leurs sensibilités de la façon suivante :

$$F_x(t) = F_{x0} + \sum_n a_{nx} \cos(n\omega t) + b_{nx} \sin(n\omega t) \quad (5.19)$$

$$S_{F_x}(t) = S_{x0} + \sum_n Sa_{xn} \cos(n\omega t) + Sb_{nx} \sin(n\omega t) \quad (5.20)$$

Avec ces notations, on a bien $Sa_{xn} = Da_{nx}/Dy_0$. Donc en utilisant un développement en série de Taylor,

$$\begin{aligned} F_x(t, y_0 + \Delta y_0) &\approx F_{x0} + \Delta y_0 S_{x0} \\ &\quad + \sum_n (a_{nx} + \Delta y_0 Sa_{xn}) \cos(n\omega t) + (b_{nx} + \Delta y_0 Sb_{nx}) \sin(n\omega t) \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\approx F_{x0}^e + \sum_n F_{xn}^e \cos(n\omega t + \varphi_{xn}^e) \quad (5.22)$$

avec $F_{x0}^e = F_{x0} + \Delta y_0 S_{x0}$ (5.23)

$$F_{xn}^e = \sqrt{(a_{nx} + \Delta y_0 Sa_{xn})^2 + (b_{nx} + \Delta y_0 Sb_{nx})^2} \quad (5.24)$$

$$\tan(\varphi_{xn}^e) = - \frac{b_{nx} + \Delta y_0 Sb_{nx}}{a_{nx} + \Delta y_0 Sa_{xn}} \quad (5.25)$$

On choisit à nouveau $d = 1.5D$ comme référence. Les coefficients extrapolés pour les efforts horizontaux et les coefficients d'inertie et de traînée extrapolés sont présentés dans le tableau 5.7.

d	C_M	C_D	F_{x1}	F_{x2}	F_{x3}
1.5D référence	0.779	3.565	0.137	$1.64 \cdot 10^{-3}$	$1.12 \cdot 10^{-4}$
1D	0.923	4.594	0.165	$5.41 \cdot 10^{-3}$	$4.73 \cdot 10^{-4}$
	0.915	4.412	0.162	$3.46 \cdot 10^{-3}$	$2.13 \cdot 10^{-4}$
	0.8 %	3.9 %	1.5 %	36%	55%
2D	0.651	2.824	0.113	$3.73 \cdot 10^{-4}$	$6.95 \cdot 10^{-5}$
	0.643	2.719	0.111	$5.10 \cdot 10^{-4}$	$6.05 \cdot 10^{-5}$
	1.3%	3.7%	1.8%	36%	13%

Tableau 5.7 Efforts recalculés et extrapolés à partir de la géométrie $d = 1.5D$.

L'erreur d'extrapolation est petite pour les termes du premier ordre (de pulsation ω). Pour les ordres supérieurs, les écarts relatifs entre les différentes configurations sont beaucoup plus importants : F_{x1} est multiplié par 3 entre les positions $d = 1.5D$ et $d = 1D$. Il n'est pas étonnant que les erreurs relatives soient plus importantes pour ces termes. Les effets non linéaires sont donc beaucoup plus importants pour les efforts d'ordre plus élevés, notamment

pour les efforts de pulsation 3ω , ils augmentent fortement lorsque le cylindre se rapproche de la surface. Malgré ces erreurs, les sensibilités permettent d'estimer correctement les termes de premier ordre et prévoient la tendance des termes d'ordre plus élevés.

Nous pouvons aussi à partir des champs de vitesse et de vitesse de déformation sur la configuration $d = 1.5D$ obtenir les champs de vitesse pour les configurations $d = 1D$ et $d = 2D$. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 5.28 pour l'extrapolation sur la géométrie $d = 1D$ et sur la figure 5.29 pour la géométrie $d = 2D$.

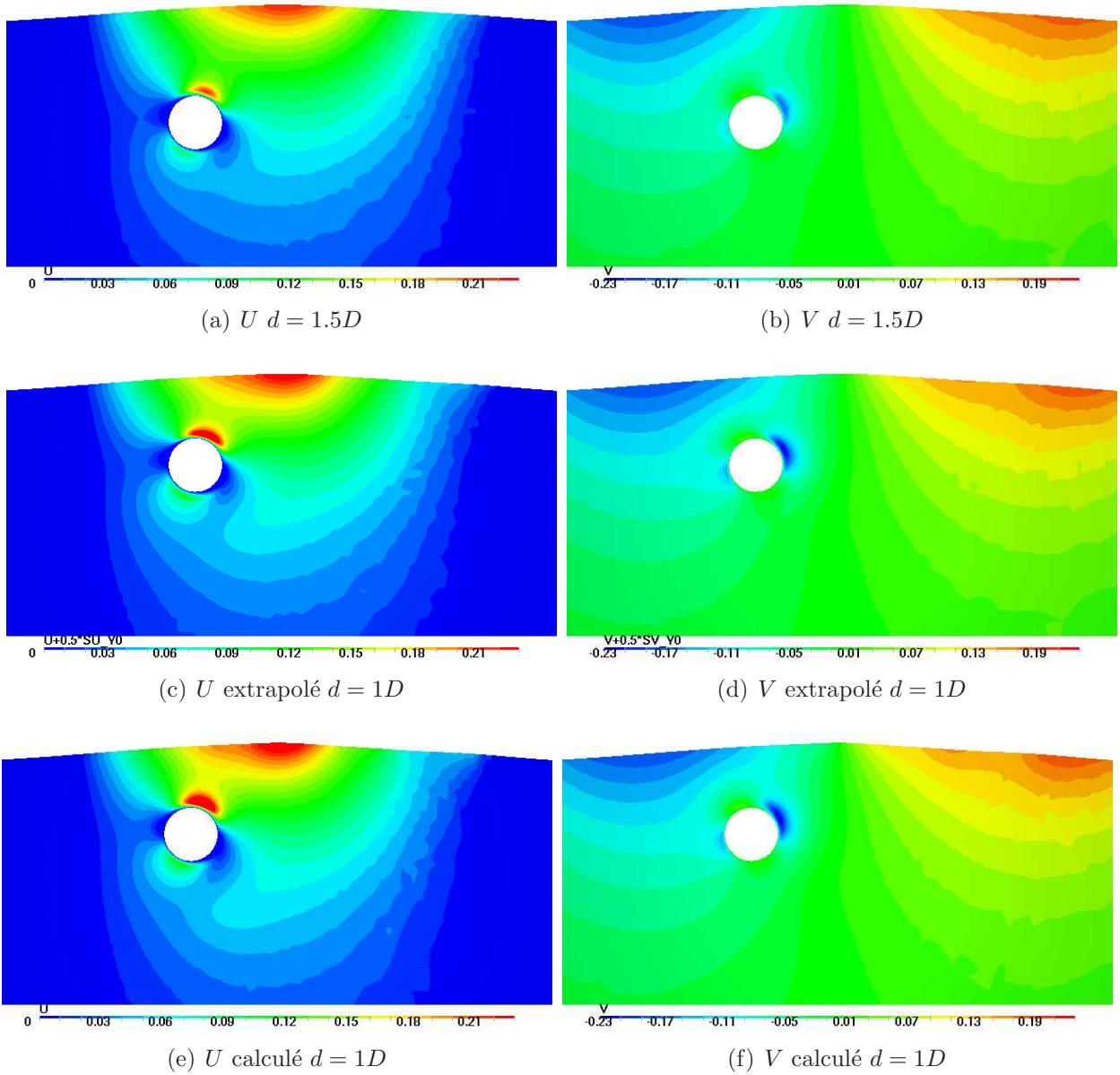


Figure 5.28 Extrapolation de $d = 1.5D$ à $d = 1D$ pour le champ de vitesse à $t = 9.5T$.

Malgré le déplacement important, un rayon vers le haut ou vers le bas, l'extrapolation restitue correctement l'écoulement.

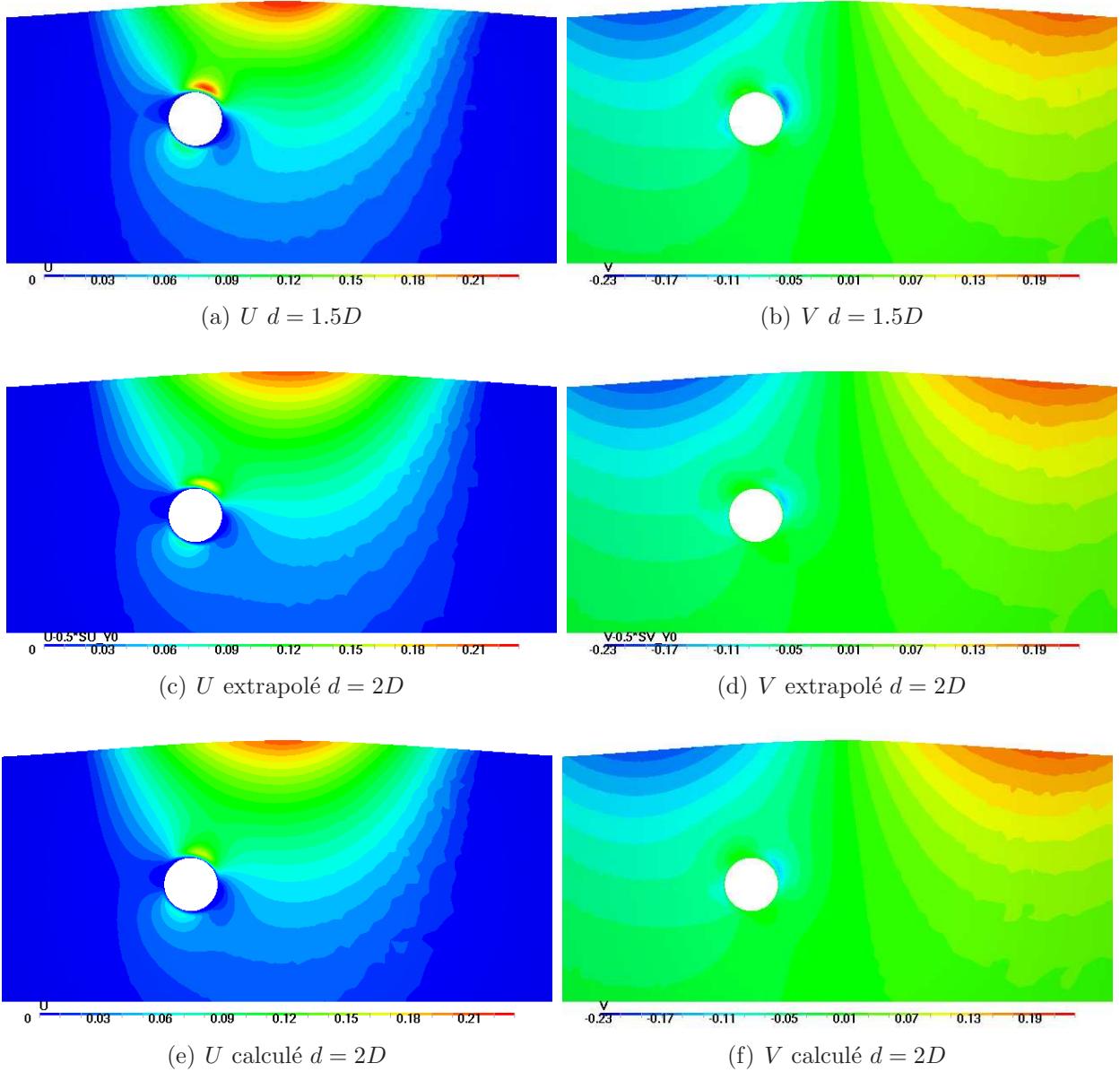


Figure 5.29 Extrapolation de $d = 1.5D$ à $d = 2D$ pour le champ de vitesse à $t = 9.5T$.

5.4.4 Analyse de sensibilité par rapport au rayon du cylindre

Le paramètre d'intérêt est maintenant le rayon du cercle R . Pour $d = 1D$, la sensibilité de la surface libre est représentée sur la figure 5.30.

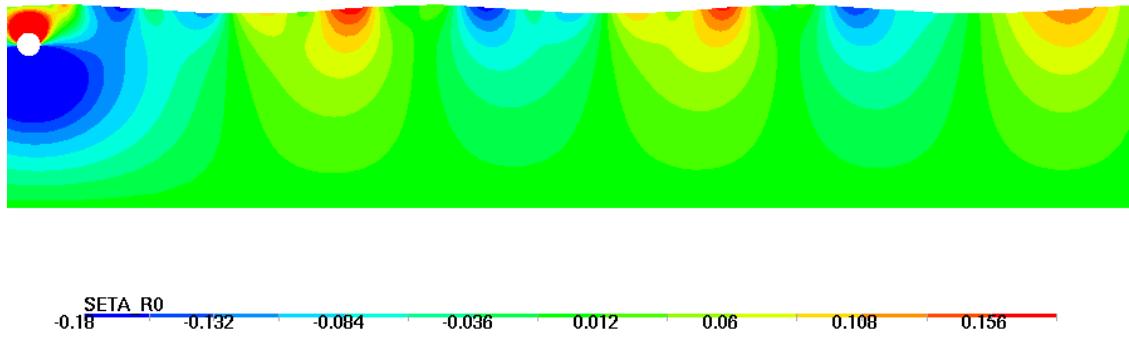


Figure 5.30 Sensibilité du déplacement vertical par rapport au rayon du cylindre.

On constate que le rayon a un impact sur la forme de la surface libre et sur le déphasage.

On peut aussi procéder à l'extrapolation de l'écoulement sur une géométrie voisine. La figure 5.31 montre le champ de vitesse sur la configuration de référence et sur la configuration extrapolée. On constate que la forme de la surface libre est déformée par rapport à l'allure sinusoïdale de la configuration de référence. Le fluide est aussi accéléré au dessus du cylindre.

La décomposition de Fourier des sensibilités pour l'effort horizontal est résumée dans le tableau 5.8

d	S_{C_M}	S_{C_D}	S_{x1}	S_{x2}	S_{x3}
1D	$-2.45 \cdot 10^{-3}$	12.74	0.686	$4.40 \cdot 10^{-2}$	$4.05 \cdot 10^{-3}$
1.5D	$-6.27 \cdot 10^{-2}$	7.90	0.546	$1.29 \cdot 10^{-2}$	$9.65 \cdot 10^{-4}$

Tableau 5.8 Coefficients de Fourier de la sensibilité des efforts par rapport au rayon du cylindre.

Une augmentation du rayon provoque une augmentation des efforts d'autant plus importante que le cylindre est proche de la surface libre. Les efforts d'ordre 2 et 3 semblent prendre plus d'importance avec l'augmentation du rayon. Cependant les coefficients d'inertie et de traînée sont plus parlants. La sensibilité du coefficient d'inertie est assez faible et négative. Par contre la sensibilité du coefficient de traînée est positive et assez importante. L'augmentation du rayon provoquera donc principalement une augmentation des effets de traînée.

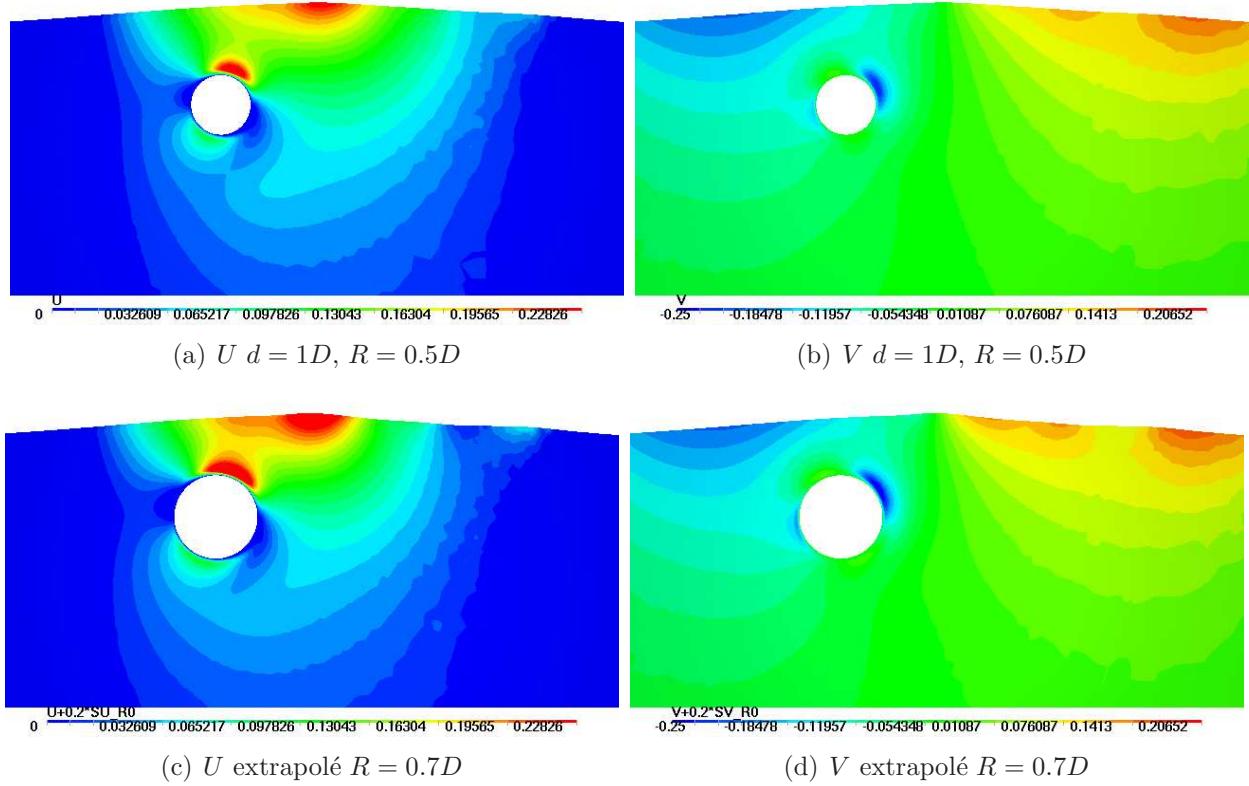


Figure 5.31 Extrapolation de $dR = 0.5D$ à $R = 0.7D$ pour le champ de vitesse.

Les expériences de Chaplin (1984) montrent que le coefficient d'inertie se comporte comme $C_M \approx \alpha - \beta Kc^2$. À l'aide de l'analyse de sensibilité, on peut retrouver ce coefficient β . En effet

$$\frac{dC_M}{dKc} = -2\beta Kc = \frac{dC_M}{dR} \frac{dR}{dKc} = \frac{-R}{Kc} \frac{dC_M}{dR} \quad (5.26)$$

On trouve des valeurs de β de l'ordre de 10^{-2} . Ces valeurs sont plus faibles que celles trouvées par Chaplin (1984). Rappelons que les conditions ne sont pas les mêmes, Chaplin (1984) a obtenu ces tendances en modifiant l'amplitude de la houle incidente pour faire varier le nombre de Keulegan-Carpenter. On pourrait donc faire l'analyse de sensibilité par rapport à l'amplitude du mouvement du batteur.

5.4.5 Conclusion

Pour ce cas, nous avons donc montré que notre méthode permet de simuler correctement l'interaction entre un cylindre fixe et une houle incidente. Les vagues en aval du cylindre sont déphasées. Nous avons aussi étudié les efforts sur le cylindre. Nos résultats sont en bon accord avec les expériences de Chaplin (1984) en prédisant un effort de pulsation ω plus faible que

la théorie potentielle. Nous avons aussi montré que la déformée de surface libre générait des efforts de pulsation 2ω et 3ω , d'autant plus importants que le cylindre est proche de la surface libre. Ces observations ont été confirmées par l'analyse de sensibilité. Nous avons aussi pu valider le calcul des sensibilités avec un calcul de solution voisine. Les efforts de pulsation ω sont alors très bien restitués. Pour les pulsations plus élevées, les phénomènes non linéaires deviennent trop importants pour permettre une extrapolation précise.

Nous avons donc montré que notre code peut être employé dans de nombreuses configurations et que les simulations visqueuses sont indispensables pour le calcul précis des efforts. Nous avons aussi montré que les sensibilités permettent d'extrapoler l'écoulement et les efforts sur des géométries voisines. Elles pourraient donc être utilisées pour le calcul de gradient de fonctions objectifs dans un algorithme d'optimisation.

CHAPITRE 6

CONCLUSION

Dans ce projet, nous avons développé une méthode de calcul pour les écoulements à surface libre. Nous avons utilisé une formulation arbitrairement lagrangienne-eulérienne afin de gérer les déformations du domaine fluide et donc de situer avec précision la surface libre. Pour éliminer les oscillations numériques, nous avons mis en place une stabilisation des équations de Navier-Stokes appropriée à la formulation ALE et tenant compte de la déformation du maillage. Nous avons utilisé des schémas de Runge-Kutta d'ordre élevé pour l'intégration temporelle pour un meilleur rapport entre le coût des calculs et la précision obtenue. Afin de satisfaire la loi de conservation géométrique, nous avons adopté une formulation variationnelle des équations de Navier-Stokes conservative et une évaluation consistante des dérivées temporelles, notamment de la vitesse de maille. Ceci permet de conserver l'ordre de convergence des schémas sur maillage déformable.

Nous avons ensuite développé les équations des sensibilités lagrangiennes sur maillage mobile pour les équations de Navier-Stokes instationnaires. Nous avons donc dérivé d'un point de vue lagrangien la formulation précédente par rapport à un paramètre d'intérêt. Le point de vue lagrangien permet d'obtenir des conditions limites simples pour les conditions de surface libre, contrairement aux méthodes eulériennes.

L'implémentation des équations a été vérifiée à l'aide d'une solution manufacturée vérifiant des conditions de surface libre. Nous avons alors montré que la surface libre ne perturbe pas l'ordre de convergence spatial ou temporelle. Nous avons aussi vérifié l'implémentation de la stabilisation de type PSPG/SUPG en régime instationnaire sur maillage mobile. Les termes supplémentaires n'ont pas provoqué de perte de convergence temporelle avec les schémas de Runge-Kutta d'ordre élevé. Notre formulation stabilisée respecte donc la loi de conservation géométrique. Nous avons ensuite comparé nos résultats pour un cas de sloshing avec une autre étude numérique. Nous avons obtenu des amplitudes de ballotement similaires et des erreurs sur le volume total beaucoup plus faibles. Avec notre formulation, ces erreurs convergent vers zéro avec un taux de convergence consistant avec celui du schéma d'intégration temporelle. Cette étude a aussi permis de montrer les atouts des schémas d'intégration de Runge-Kutta d'ordre élevé. Ils fournissent une meilleure précision que le schéma d'Euler avec cent fois moins de pas de temps. Ce gain de temps de calcul compense largement l'augmentation de la taille de la matrice. Nous avons vérifié l'implémentation des sensibilités instationnaires sur maillage mobile. Notre méthode permet d'avoir la même

précision sur les sensibilités que sur l'écoulement.

Nous avons ensuite comparé les performances de notre méthode avec des méthodes potentielles sur des cas adaptés, c'est à dire lorsque l'écoulement est irrotationnel et que la viscosité a un rôle minime. Nous avons retrouvé des résultats tout à fait comparables. Nous avons ainsi montré que notre approche permet de simuler la propagation d'ondes solitaires et de générer une houle et donc de simuler un bassin expérimental. Notre méthode permet en plus de prendre en compte les effets visqueux, ce qui mène à des résultats plus proches des observations expérimentales, comme on a pu le voir avec la propagation d'une onde solitaire. Nous avons ensuite testé les limites de la méthode en terme de déformation de maillage. De grandes déformations sont supportées mais le domaine d'application de la méthode reste cependant limité à des déformations raisonnables de la surface libre. Nous avons enfin appliqué la méthode pour le calcul des efforts générés par la houle sur un cylindre circulaire. Nous avons montré l'importance des effets visqueux. De plus, la simulation complète de la surface libre est nécessaire pour capter les efforts d'ordre 2 et 3. On pourrait compléter l'analyse en déterminant à partir de quelles valeurs des paramètres de définition (amplitude de la houle, profondeur du cylindre, etc...) la déformée de surface libre n'a plus d'impact sur les efforts, ce qui permettrait de simplifier les simulations en utilisant une houle d'Airy.

Nous avons ensuite validé le calcul des sensibilités. L'extrapolation de l'écoulement sur une géométrie voisine permet de reconstruire assez fidèlement les caractéristiques de l'écoulement perturbé. Les erreurs, entre les efforts extrapolés à l'aide des sensibilités et recalculés, sont faibles malgré des changements importants de la géométrie. Les sensibilités sont donc un outil performant pour étudier la physique des phénomènes mis en jeu. De plus, le calcul précis des sensibilités permet de calculer rapidement les données requises par les algorithmes d'optimisation. Rappelons seulement que cette méthode ne s'applique qu'aux paramètres n'affectant pas la fréquence des phénomènes observés afin que les sensibilités restent bornées.

On pourrait dans de futures applications combiner le calcul de surface libre avec le calcul d'interaction fluide-structure pour calculer, par exemple, les efforts générés par la houle sur une paroi verticale élastique.

De nombreuses améliorations peuvent être apportées à la méthode. D'un point de vue numérique, pour le calcul de la surface libre, on pourrait intégrer à la disposition des points sur la surface une contrainte sur le volume total afin d'assurer la conservation de la masse exactement. Ensuite, il faudrait développer une stabilisation en Reynolds pour les éléments de Taylor-Hood. On pourrait alors les utiliser à plus haut Reynolds et avoir une meilleure précision spatiale qu'avec les éléments P1-P1. Le champ d'application des sensibilités serait élargi si on disposait d'une stabilisation appropriée pour des calculs à plus hauts Reynolds. La méthode pourrait aussi être facilement transposée de 2 dimensions en 3 dimensions.

D'un point de vue plus pratique, des méthodes de déformation de maillage plus performantes permettraient d'élargir le champ d'application de la méthode. On pourrait aussi ajouter des conditions de frottement (par exemple des conditions de Navier) pour une simulation plus réaliste du mouvement de la surface libre sur une paroi solide. Ajoutée à des conditions de tangence du pseudo-solide sur des surfaces courbes, cette amélioration permettrait de simuler l'interaction entre des objets, flottants ou non, de forme complexe avec la surface libre. Ceci permettrait de simuler des digues flottantes. Enfin, dans le cadre de la simulation de la houle, des couches absorbantes au bout du bassin permettraient de limiter la réflexion de la houle contre la paroi et donc de mieux simuler un milieu infini. On disposerait ainsi d'un outil permettant de simuler un plus large spectre d'application.

RÉFÉRENCES

- ALIABADI, S. et TEZDUYAR, T. E. (2000). Stabilized-finite-element/interface-capturing technique for parallel computation of unsteady flows with interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, 243–261.
- ARORA, J. S. (1993). An exposition of the material derivative approach for structural shape sensitivity analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 105, 41–62.
- AULISA, E., MANSERVISI, S., SCARDOVELLI, R. et ZALESKI, S. (2003). A geometrical area-preserving volume-of-fluid advection method. *Journal of Computational Physics*, 192, 355–64.
- BARTHÈS-BIEZEL, D. (2005). *Microhydodynamique*. Département de Mécanique, Ecole Polytechnique, Palaiseau, FR.
- BERGMANN, R., VAN DER MEER, D., GEKLE, S., VAN DER BOS, A. et LOHSE, D. (2009). Controlled impact of a disk on a water surface : Cavity dynamics. *Journal of Fluid Mechanics*, 633, 381–409.
- BOBARU, F. et MUKHERJEE, S. (2001). Shape sensitivity analysis and shape optimization in planar elasticity using element-free galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, 4319–4337.
- BOCCOTTI, P. (1996). Inertial wave loads on horizontal cylinders : a field experiment. *Ocean Engineering*, 23, 629–648.
- BOISGERAULT, S. (2000). *Optimisation de forme : systemes nonlineaires et mecanique des fluides*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris-Informatique Temps reel, Robotique, Automatique.
- BORGGAARD, J. et BURNS, J. (1997a). Asymptotically consistant gradients in optimal design. *Multidisciplinary Design Optimization : State of the Art*. SIAM Publications, Philadelphia, PA, vol. 1, 303–314.
- BORGGAARD, J. et BURNS, J. (1997b). A pde sensitivity equation method for optimal aerodynamic design. *Journal of Computational Physics*, 136(2), 366–384.
- BORGGAARD, J. T. (1994). *The Sensitivity Equation Method for Optimal Design*. Thèse de doctorat, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA.
- BOUSSINESQ, J. (1872). Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des

- vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *Journal de Mathématique Pures et Appliquées*, 17, 55–108.
- BRACKBILL, J. U., KOTHE, D. B. et ZEMACH, C. (1992). A continuum method for modeling surface tension. *Journal of Computational Physics*, 100, 335–354.
- BRAESS, H. et WRIGGERS, P. (2000). Arbitrary lagrangian eulerian finite element analysis of free surface flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, 95–109.
- BROOKS, A. N. et HUGHES, T. J. R. (1982). Streamline upwind/petrov. galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32, 199–259.
- CAIRNCROSS, R. A., SCHUNK, P. R., BAER, T. A., RAO, R. R. et SACKINGER, P. A. (2000). A finite element method for free surface flows of incompressible fluids in three dimensions. part i. boundary fitted mesh motion. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 33, 375–403.
- CARDOSO, J. B. et ARORA, J. S. (1989). Lagrangian interpretation of nonlinear design sensitivity analysis with continuum formulation. *CAD/CAM Robotics and Factories of the Future. 3rd International Conference (CARS and FOF '88) Proceedings*. vol. 2, 90–94.
- CHANG, Y. C., HOU, T. Y., MERRIMAN, B. et OSHER, S. (1996). A level set formulation of eulerian interface capturing methods for incompressible fluid flows. *Journal of Computational Physics*, 124, 449–464.
- CHAPLIN, J. R. (1984). Nonlinear forces on a horizontal cylinder beneath waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 147, 449–464. Compilation and indexing terms, Copyright 2010 Elsevier Inc. 1985010001456.
- CHARLOT, L. (2008). *Une méthode de l'équation des sensibilités lagrangiennes pour les écoulements*. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Montréal, QC.
- CHARLOT, L., CORI, J.-F., ÉTIENNE, S. et PELLETIER, D. (2009a). Continuous eulerian and lagrangian sensitivities for the design of airfoils in laminar flow. *19th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*. San Antonio, TX.
- CHARLOT, L., ÉTIENNE, S. et PELLETIER, D. (2009b). A continuous sensitivity equation method for flows. *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting*. Orlando, FL.
- CHEN, H.-C. et YU, K. (2009). Cfd simulations of wave-current-body interactions including greenwater and wet deck slamming. *Computers and Fluids*, 38, 970–980.
- CHOI, J. H. (2002). Shape design sensitivity analysis and optimization of general plane arch. *Finite Elements in Analysis and Design*, 39, 119–136.

- CORI, J. F. (2011). *Analyse et caractérisation d'interactions fluide-structure instationnaires en grands déplacements*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal.
- CRUCHAGA, M., CELENTANO, D., BREITKOPF, P., VILLON, P. et RASSINEUX, A. (2006). A front remeshing technique for a lagrangian description of moving interfaces in two-fluid flows. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66, 2035–2063.
- DE LANGRE, E. (2001). *Fluides et solides*. Editions de l'Ecole polytechnique, Palaiseau, [France].
- DE SOUSA, F. S., MANGIAVACCHI, N., NONATO, L. G., CASTELO, A., TOME, M. F., FERREIRA, V. G., CUMINATO, J. A. et MCKEE, S. (2004). A front-tracking/front-capturing method for the simulation of 3d multi-fluid flows with free surfaces. *Journal of Computational Physics*, 198, 469–499.
- DEAN, W. R. (1948). On reflexion of surface waves by submerged circular cylinder. *Cambridge Philosophical Society – Proceedings*, 44, 483–491. Compilation and indexing terms, Copyright 2010 Elsevier Inc. 19490023655.
- DELFOUR, M. C. et ZOLÉSIO, J.-P. (2001). *Shapes and Geometries : Analysis, Differential Calculus, and Optimization*. Advances in Design and Control, SIAM, Philadelphia.
- DEMS, K. (1987). Sensitivity analysis in thermal problems–ii : Structure shape variation. *Journal of Thermal Stresses*, 10, 1–16.
- DERVIEUX, A. et THOMASSET, F. (1981). *Sur l'Approximation d'écoulements multifluides incompressibles visqueux par des éléments finis triangulaires de degré un*. INRIA, Le Chesnay.
- DETTMER, W. et PERIC, D. (2006a). A computational framework for fluid-structure interaction : Finite element formulation and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, 5754–5779.
- DETTMER, W. et PERIC, D. (2006b). A computational framework for free surface fluid flows accounting for surface tension. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, 3038–3071.
- DHATT, G. et TOUZOT, G. (1981). *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Les Presses de l'Université Laval, Québec, Canada.
- DICARO, R. (2007). *Analyse de sensibilité de forme pour le modèle de turbulence k- ϵ* . Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Montréal, QC.
- DIJKSTRA, W. et MATTHEIJ, R. M. M. (2008). Condition number of the bem matrix arising from the stokes equations in 2d. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 32, 736–746.

- DUCHEMIN, L. (2001). *Quelques problèmes fortement non-linéaires de surface libre et leur résolution numérique*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille II.
- DUCLOS, G., JOSSET, C., CLEMENT, A. H., GENTAZ, L. et COLMARD, C. (2004). Hydrodynamic efficiency of a new design of half-submerged breakwater compared to a rectangular caisson. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 130, 127–133.
- DUFOUR, S. et MALIDI, A. (2004). A free surface updating methodology for marker function-based eulerian free surface capturing techniques on unstructured meshes. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 20, 857–867.
- ERVIN, E. et HARLOW, F. (1957). The particule-in-cell method for hydrodynamic calculations. Rapport technique, Los Alamos National Laboratory. Technical Report LA-2139.
- ETIENNE, S., GARON, A. et PELLETIER, D. (2009a). Code verification for unsteady flow simulations with high order time-stepping schemes. *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting*. Orlando, FL. AIAA Paper 2009-0169.
- ETIENNE, S., GARON, A. et PELLETIER, D. (2009b). Perspective on the geometric conservation law and finite element methods for ale simulations of incompressible flow. *Journal of Computational Physics*, 228, 2313–33.
- ETIENNE, S., GARON, A. et PELLETIER, D. (2010). Verification of fluid-structure interaction codes by the methods of manufactured solutions. *Journal of Computational Physics*.
- ETIENNE, S., HAY, A., GARON, A. et PELLETIER, D. (2007). Sensitivity analysis of unsteady fluid-structure interaction problems. American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Reno, NV, United states, vol. 6 de *Collection of Technical Papers - 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, 4059–4074.
- ETIENNE, S., PELLETIER, D. et GARON, A. (2006). A monolithic formulation for unsteady fluid-structure interactions. American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Reno, NV, United states, vol. 11 de *Collection of Technical Papers - 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, 8301–8313.
- FANG, J. N., OWENS, R. G., TACHER, L. et PARRIAUX, A. (2006). A numerical study of the sph method for simulating transient viscoelastic free surface flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 139, 68–84.
- FANG, J. N., PARRIAUX, A., RENTSCHLER, M. et ANCEY, C. (2009). Improved sph methods for simulating free surface flows of viscous fluids. *Applied Numerical Mathematics*, 59, 251–271.
- FENG, Y. T. et PERIC, D. (2000). A time-adaptive space-time finite element method for incompressible lagrangian flows with free surfaces : computational issues. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, 499–518.

- GAMMACURTA, É., ETIENNE, S., PELLETIER, D. et ILINCA, F. (2009). Sensitivity analysis of unsteady rans flows. *19th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*. San Antonio, TX.
- GAO, Z., MA, Y. et ZHUANG, H. (2007). Shape optimization for stokes flow. *Applied Numerical Mathematics*, 34, 99–112.
- GEJADZE, I. Y. et COPELAND, G. J. M. (2005). Adjoint sensitivity analysis for fluid flow with free surface. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 47, 1027–1034.
- GIANNAKOGLOU, K. et PAPADIMITRIOU, D. (2008). Adjoint methods for shape optimization. *Optimization and Computational Fluid Dynamics*. Springer.
- GOPALA, V. R. et VAN WACHEM, B. G. M. (2008). Volume of fluid methods for immiscible-fluid and free-surface flows. *Chemical Engineering Journal*, 141, 204–221.
- GRENIER, N., ANTUONO, M., COLAGROSSI, A., LE TOUZE, D. et ALESSANDRINI, B. (2009). An hamiltonian interface sph formulation for multi-fluid and free surface flows. *Journal of Computational Physics*, 228, 8380–8393.
- GUERBER, E., BENOIT, M., GRILLI, S. T. et BUVAT, C. (2010). Modeling of fully non-linear wave interactions with moving submerged structures. *20th International Offshore and Polar Engineering Conference, ISOPE-2010, June 20, 2010 - June 25, 2010*. International Society of Offshore and Polar Engineers, vol. 3 de *Proceedings of the International Offshore and Polar Engineering Conference*, 529–536.
- HAIRER, E. et WANNER, G. (2002). *Stiff and differential-algebraic problems*. Solving ordinary differential equations / E. Hairer, 2. Springer, Berlin [u.a.].
- HAUG, E. J., CHOI, K. K. et KOMKOV, V. (1986). *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. Academic Press, New York.
- HIRT, C. W., AMSDEN, A. A. et COOK, J. L. (1997). An arbitrary lagrangian-eulerian computing method for all flow speeds (reprinted from the journal of computational physics, vol 14, pg 227-253, 1974). *Journal of Computational Physics*, 135, 203–216.
- HIRT, C. W. et NICHOLS, B. D. (1981). Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39, 201–225.
- HRISTOVA, H., ETIENNE, S., PELLETIER, D. et BORGGAARD, J. (2005). A continous sensitivity equation method for time-dependent incompressible laminar flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 50, 817–844.
- HUERTA, A. et LIU, W. K. (1988). Viscous flow with large free surface motion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 69, 277–324.

- HUGHES, T. J. R., LIU, W. K. et ZIMMERMANN, T. K. (1981). Lagrangian-eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 29, 329–349.
- IBRAHIM, R. A. (2005). *Liquid sloshing dynamics : theory and applications*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- ILINCA, F. et HÉTU, J. F. (2008). Three-dimensional free surface flow simulation of segregating dense suspensions. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 58, 451–472. Ilinca, F. Hetu, J. -F.
- IPPEN, A. T. et KULIN, G. (1957). Effect of boundary resistance on solitary waves l'effet produit sur les ondes solitaires par le frottement à la paroi. *Houille Blanche*, 12, 390–400. Compilation and indexing terms, Copyright 2010 Elsevier Inc. 19570024728.
- JEYAPALAN, K. (1980). *Analyses of flow failures of mine tailings impoundments*. Ph.d., University of California, Berkeley.
- KEULEGAN, G. H. (1948). Gradual damping of solitary waves. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 40, 487–498.
- KIMMOUN, O., MALENICA, S. et SCOLAN, Y. (2009). Fluid structure interactions occurring at a flexible vertical wall impacted by a breaking wave. *Proceedings of the 19th International Offshore and Polar Engineering Conference*. Osaka, Japon.
- KLEIBER, M. et SLUZALEC, A. (1996). Material derivative and control volume approaches to shape sensitivity analysis of nonlinear transient thermal problems. *Structural Optimization*, 11, 56–63.
- KURIOKA, S. et DOWLING, D. R. (2009). Numerical simulation of free surface flows with the level set method using an extremely high-order accuracy weno advection scheme. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 23, 233–243.
- LEE, B. Y. (1997). Direct differentiation formulation for boundary element shape sensitivity analysis of axisymmetric elastic solid. *International Journal of Solids Structures*, 34, 99–112.
- LIU, P. L. F. et ORFILA, A. (2004). Viscous effects on transient long-wave propagation. *Journal of Fluid Mechanics*, 520, 83. Cambridge Journals Online.
- LONGUET-HIGGINS, M. S. (1970). Steady currents induced by oscillations round islands. *Journal of Fluid Mechanics*, 42, 701–720, 1 plate.
- LU, L., LI, Y. C., TENG, B. et CHEN, B. (2008). Numerical simulation of turbulent free surface flow over obstruction. *Journal of Hydrodynamics*, 20, 414–423. Lu Lin Li Yu-cheng Teng Bin Chen Bing.

- LUND, E., MØLLER, H. et JAKOBSEN, L. A. (2003). Shape design optimization of stationary fluid-structure interaction problems with large displacements and turbulence. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 25, 383–392.
- LÖHNER, R., YANG, C. et ONATE, E. (2007). Simulation of flows with violent free surface motion and moving objects using unstructured grids. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 53, 1315–1338.
- MCDAVID, R. M. et DANTZIG, J. A. (1998). Design sensitivity and finite element analysis of free surface flows with application to optimal design of casting rigging systems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 28, 419–442.
- MCKEE, S., TOME, M. F., FERREIRA, V. G., CUMINATO, J. A., CASTELO, A., SOUSA, F. S. et MANGIAVACCHI, N. (2008). The mac method. *Computers & Fluids*, 37, 907–930.
- MIDDLEMAN, S. (1995). *Modeling Axisymmetric Flows-Dynamics of Films, Jets, and Drops*. Academic Press.
- MIRONOVA, L. (2008). *Accurate computation of free surface flow with an oscillating circular cylinder based on a viscous incompressible two-fluid model*. Ph.d., Memorial University of Newfoundland (Canada).
- MOLIN, B. (2002). *Hydrodynamique des structures offshore*. Technip, Paris.
- MONAGHAN, J. J. (1994). Simulating free-surface flows with sph. *Journal of Computational Physics*, 110, 399–406.
- NAVARRINA, F., LOPEZ-FONTAN, S., COLOMINAS, I., BENDITO, E. et CASTELEIRO, M. (2000). High order shape design sensitivity : a unified approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188, 681–696.
- OGER, G., DORING, M., ALESSANDRINI, B. et FERRANT, P. (2006). Two-dimensional sph simulations of wedge water entries. *Journal of Computational Physics*, 213, 803–22.
- OGILVIE, T. F. (1963). First and second-order forces on cylinder submerged under free surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 16, 451–472. Compilation and indexing terms, Copyright 2010 Elsevier Inc. 19630039621.
- OSHER, S. et SETHIAN, J. A. (1988). Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79, 12–49.
- PELLETIER, D. (1999). Adaptive finite element computations of complex flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 31, 189–202.

- PELLETIER, D., HAY, A., ETIENNE, S. et BORGGAARD, J. (2008). The sensitivity equation method in fluid mechanics. *REMN-EJCM*, 17, 1–32.
- PESKIN, C. S. (1977). Numerical analysis of blood flow in the heart. *Journal of Computational Physics*, 25, 220–252.
- PESTIEAU, C. (2006). *Analyse de sensibilité d'écoulements multifluides*. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Montréal, QC.
- POPINET, S. et ZALESKI, S. (1999). A front-tracking algorithm for accurate representation of surface tension. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 30, 775–793.
- POWELL, C. A. et SAVAGE, M. D. (2001). Numerical simulation of transient free surface flow with moving contact lines. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 17, 581–588.
- QUÉRÉ, D. (2004). *Surfaces Molles*. Département de Physique, Ecole Polytechnique, Palaiseau, FR.
- SACKINGER, P. A., SCHUNK, P. et RAO, R. R. (1996). A newton-raphson pseudo-solid domain mapping technique for free and moving boundary problems :a finite element implementation. *Journal of Computational Physics*, 125, 83–103.
- SAKSONO, P. H., DETTMER, W. G. et PERIC, D. (2007). An adaptive remeshing strategy for flows with moving boundaries and fluid-structure interaction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 71, 1009–1050.
- SCARDOVELLI, R. et ZALESKI, S. (1999). Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 31, 567.
- SCHENK, O. et GÄRTNER, K. (2004). Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with pardiso. *Future Generation Computer Systems*, 20, 475 – 487. Selected numerical algorithms.
- SCHENK, O. et GÄRTNER, K. (2006). On fast factorization pivoting methods for symmetric indefinite systems. *Elec. Trans. Numer. Anal.*, 23, 158–179.
- SETHIAN, J. A. (1996). *Level set methods : evolving interfaces in geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*. Cambridge monographs on applied and computational mathematics ; 3. Cambridge University Press, Cambridge.
- SHAO, S. D. et JI, C. M. (2006). Sph computation of plunging waves using a 2-d sub-particle scale (sps) turbulence model. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 51, 913–936.
- SHU, C.-W. et OSHER, S. (1989). Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, ii. *Journal of Computational Physics*, 83, 32–78.

- SHYY, W. (1996). *Computational fluid dynamics with moving boundaries*. Series in computational and physical processes in mechanics and thermal sciences. Taylor & Francis, Washington, DC.
- SMITH, D. E. (1996). *Optimal Design and analysis for polymer extrusion and molding*. Thèse de doctorat, University of Illinois, Urbana-Champaign.
- SOULAIMANI, A. et SAAD, Y. (1998). An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for solving three-dimensional free surface flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 162, 79–106.
- STEIN, K., TEZDUYAR, T. et BENNEY, R. (2003). Mesh moving techniques for fluid-structure interactions with large displacements. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme*, 70, 58–63.
- SUN, H. et FALTINSEN, O. M. (2006). Water impact of horizontal circular cylinders and cylindrical shells. *Applied Ocean Research*, 28, 299–311.
- SUSSMAN, M., SMEREKA, P. et OSHER, S. (1994). A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 114, 146–159.
- SVENDSEN, I. A. (2006). *Introduction to nearshore hydrodynamics*. World Scientific, New Jersey.
- TANAKA, S. et KASHIYAMA, K. (2006). A new mesh re-generation method for free surface flow analysis based on interface-tracking method. *Structural Engineering/Earthquake Engineering*, 23, 269s–277s.
- TAROCO, E. (2000). Shape sensitivity analysis in linear elastic fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188, 697–712.
- TAVASSOLI, A. et KIM, M. H. (2001). Interactions of fully nonlinear waves with submerged bodies by a 2d viscous nwt. *11th (2001) International Offshore and Polar Engineering Conference, June 17, 2001 - June 22, 2001*. International Society of Offshore and Polar Engineers, vol. 3 de *Proceedings of the International Offshore and Polar Engineering Conference*, 354–360.
- TEZDUYAR, T. E., BEHR, M. et LIOU, J. (1992a). A new strategy for finite-element computations involving moving boundaries and interfaces - the deforming-spatial-domain/space-time procedure : I. the concept and the preliminary numerical tests. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 94, 339–351.
- TEZDUYAR, T. E., BEHR, M., MITTAL, S. et LIOU, J. (1992b). A new strategy for finite-element computations involving moving boundaries and interfaces - the deforming-spatial-domain space-time procedure : II. computation of free-surface flows, 2-liquid flows,

and flows with drifting cylinders. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 94, 353–371.

TEZDUYAR, T. E. et OSAWA, Y. (2000). Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, 411–430.

THOMASSET, F. (1981). *Implementation of Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, New-York.

THOMPSON, E. (1986). Use of pseudo-concentrations to follow creeping viscous flows during transient analysis. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 6, 749–761.

TORTORELLI, D. A., TOMASKO, J. A., MORTHLAND, T. E. et DANTZIG, J. A. (1994). Optimal design of nonlinear parabolic systems. part ii : Variable spatial domain with applications to casting optimization. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 113, 157–172.

TORTORELLI, D. A. et WANG, Z. X. (1993). A systematic approach to shape sensitivity analysis. *International Journal of Solids Structures*, 30, 1181–1212.

TURGEON, E. (2001). *Méthode d'éléments finis adaptative pour la résolution des sensibilités d'écoulements*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal.

UBBINK, O. et ISSA, R. I. (1999). A method for capturing sharp fluid interfaces on arbitrary meshes. *Journal of Computational Physics*, 153, 26–50.

VAN KEULEN, F., HAFTKA, R. T. et KIM, N. H. (2005). Review of options for structural design sensitivity analysis. part 1 : Linear system. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, 3213–3243.

VERDIER, M. (2008). *Méthodes numériques pour le calcul de l'écoulement dans l'artère carotide*. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal.

VICCIONE, G., BOVOLIN, V. et CARRATELLI, E. P. (2008). Defining and optimizing algorithms for neighbouring particle identification in sph fluid simulations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 58, 625–638.

VIOLLET, P.-L. (1998). *Mécanique des fluides appliquée : écoulements incompressibles dans les circuits, canaux et rivières, autour des structures et dans l'environnement*. Presses de l'école nationale des ponts et chaussées, Paris.

WANG, Z. X., TORTORELLI, D. A. et DANTZIG, J. A. (1996). Sensitivity analysis and optimization of coupled thermal and flow problems with applications to contraction design. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 23, 991–1020.

- WELCH, J., HARLOW, F., SHANNON, J. et DALY, B. (1965). The mac method. Rapport technique, Los Alamos National Laboratory. Technical Report LA-3425.
- WESTHUIS, J.-H. (2001). *The numerical simulation of nonlinear waves in a hydrodynamic model test basin*. Phd, Universiteit Twente (The Netherlands).
- YUE, W. S., LIN, C. L. et PATEL, V. C. (2005). Large eddy simulation of turbulent open-channel flow with free surface simulated by level set method. *Physics of Fluids*, 17.
- ZHU, Q., LIU, Y. M. et YUE, D. K. P. (2006). Dynamics of a three-dimensional oscillating foil near the free surface. *Aiaa Journal*, 44, 2997–3009.
- ZIENKIEWICZ, O. C. et ZHU, J. Z. (1992). The superconvergent patch recovery and *a posteriori* error estimates. Part 2 : Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33, 1365–1382.