

Titre: Étude de la forme des impulsions par la méthode des moments :
Title: application à la propagation dispersive non-linéaire et aux
équations maîtresses des lasers tout-fibre

Auteur: Bryan Burgoyne
Author:

Date: 2010

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Burgoyne, B. (2010). Étude de la forme des impulsions par la méthode des
Citation: moments : application à la propagation dispersive non-linéaire et aux équations
maîtresses des lasers tout-fibre [Thèse de doctorat, École Polytechnique de
Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/439/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie:
PolyPublie URL: <https://publications.polymtl.ca/439/>

Directeurs de
recherche: Suzanne Lacroix, & Nicolas Godbout
Advisors:

Programme: Génie physique
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉTUDE DE LA FORME DES IMPULSIONS PAR LA MÉTHODE DES
MOMENTS : APPLICATION À LA PROPAGATION DISPERSIVE
NON-LINÉAIRE ET AUX ÉQUATIONS MAÎTRESSES DES LASERS
TOUT-FIBRE

BRYAN BURGOYNE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE PHYSIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE
PHILOSOPHIÆ DOCTOR
(GÉNIE PHYSIQUE)
DÉCEMBRE 2010

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

ÉTUDE DE LA FORME DES IMPULSIONS PAR LA MÉTHODE DES
MOMENTS : APPLICATION À LA PROPAGATION DISPERSIVE
NON-LINÉAIRE ET AUX ÉQUATIONS MAÎTRESSES DES LASERS
TOUT-FIBRE

présenté par : BURGOYNE Bryan

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. SKOROBOGATIY Maksim, A., Ph.D., président.

Mme. LACROIX Suzanne, D. Sc., membre et directrice de recherche.

M. GODBOUT Nicolas, Ph.D., membre et codirecteur de recherche.

M. PICHÉ Michel, Ph.D., membre.

M. BÉLANGER Pierre-André, Ph.D., membre.

Remerciements

Une thèse est une aventure qui s'accomplit difficilement seul. J'aimerais tout d'abord remercier mes directeurs de thèse, Suzanne Lacroix et Nicolas Godbout, pour m'avoir fait confiance dans le choix de mon sujet, leur patience devant mes incessantes questions et toutes les discussions intéressantes sur les autres sujets. Je voudrais aussi remercier mes collègues de Polytechnique, en particulier Alexandre Dupuis, pour avoir inlassablement écouté l'exposition de mes problèmes du moment. Je remercie également mes collègues de Génia pour leur compréhension, en particulier Alain Villeneuve, pour tous ses conseils et ses incessants encouragements.

Je voudrais aussi remercier mes parents, Ray et Jean-Pierre, pour avoir toujours cru en moi et pour m'avoir appris à persévérer malgré les difficultés. J'aimerais remercier Martine pour son soutien. Je voudrais surtout remercier Anne-Julie qui m'a jamais douté de moi dans les moments plus difficiles et qui m'a donné la force de terminer cette thèse.

Résumé

Le travail de cette thèse traite de la propagation d'impulsions optiques dans les guides d'onde, dont la fibre optique, ainsi que des impulsions optiques stationnaires générées par les lasers tout-fibre. La propagation d'impulsions lumineuses dans un milieu dispersif et non-linéaire est étudiée par la méthode des moments. Une représentation claire des moments est élaborée, ce qui apporte une meilleure compréhension de la physique de la propagation. En supposant que la phase temporelle de l'impulsion est quadratique, trois invariants sont trouvés et une solution analytique basée sur les moments d'ordre 2 est obtenue. Cette solution décrit à la fois le comportement asymptotique de l'impulsion dans le régime de dispersion normale et son comportement périodique dans le régime de dispersion anormale. Dans ces deux cas, la solution analytique est comparée à diverses simulations numériques et montre une excellente précision dans le régime de dispersion normale. Dans le régime de dispersion anormale, la solution analytique décrit bien qualitativement le comportement de la solution. De plus, des expressions linéaires approximatives décrivant l'évolution non-linéaire de la propagation sur de petites et grandes distances sont déduites de la solution analytique.

La solution analytique suppose cependant que la forme de l'impulsion est invariante lors de la propagation. Deux approches sont alors envisagées pour étudier l'évolution de la forme de l'impulsion. La première de ces approches examine la propagation d'une impulsion gaussienne dans le régime de dispersion normale. Au moyen des expressions linéaires approximatives et des solutions analytiques de la propagation dans des cas purement dispersif et purement non-linéaire, l'évolution de la forme de l'impulsion est décrite de manière purement analytique. La comparaison avec les simulations numériques montre un très bon accord. Pour pousser l'analyse au-delà de la propagation d'une impulsion gaussienne dans le régime de dispersion normale, il faut cependant une autre approche.

La seconde approche consiste à utiliser les moments d'ordre supérieur à 2 ; les moments d'ordre 4 et les moments d'ordre 2 non-linéaires, les moments d'ordre 3 étant nuls puisque l'impulsion est supposée symétrique. Afin de résoudre les équations des moments, il faut une modélisation plus précise de la phase qu'une dépendance

quadratique. Trois différentes formes approximatives de la phase sont étudiées, ainsi qu’une forme approximative sur la norme du champ basée sur la distribution de Pearson, qui permet de représenter différentes formes d’impulsions. Ces différentes approximations sont comparées, d’une part, aux simulations numériques à travers différents moments et, d’autre part, en intégrant directement le système d’équations sur les moments décrivant la propagation de l’impulsion. Une analyse de points fixes est également faite sur les équations régissant l’évolution de l’impulsion. Il ressort de ces études que la modélisation de la phase doit contenir un terme dispersif et un terme non-linéaire pour décrire adéquatement l’évolution de la forme des impulsions.

Les modèles développés sont ensuite appliqués à un problème plus complexe que la propagation dispersive et non-linéaire : les équations maîtresses des lasers tout-fibre. Dans ces équations, les différents effets des éléments optiques de la cavité sont linéarisés et représentés sous forme différentielle. Selon les éléments optiques présents, des solutions particulières sur l’enveloppe complexe doivent être déterminées, lorsqu’elles existent. En appliquant la méthode des moments, une approche générale, qui permet de transformer l’équation maîtresse différentielle en un système d’équations algébriques, est obtenue et les solutions étudiées. Les impulsions stationnaires des lasers obtenues par cette approche sont comparées aux solutions analytiques sur l’enveloppe complexe des équations maîtresses dans trois cas de lasers : le laser à verrouillage actif des modes, le laser à verrouillage passif des modes et le laser solitonique. La comparaison montre que l’approche générale développée fournit les mêmes relations entre les paramètres de l’impulsion et ceux de la cavité laser. La forme de l’impulsion est décrite avec une erreur inférieure à 5% pour trois différents types de laser. Cette approche approximative est ensuite utilisée avec succès dans la résolution de trois équations maîtresses pour lesquelles aucune solution analytique n’existe. La méthode que nous avons développée permet donc de décrire la propagation d’impulsions optiques dans un milieu dispersif et non-linéaire et ce, dans les deux régimes de dispersion. Elle permet également d’étudier l’évolution de la forme des impulsions lors de la propagation. Finalement, elle permet de s’attaquer à des équations maîtresses afin d’obtenir des solutions approximatives lorsque les solutions analytiques ne sont pas connues.

Abstract

This thesis is about the propagation of optical pulses in waveguides, such as optical fibers, as the study of the steady-state optical pulses of all-fiber lasers. Pulse propagation in a nonlinear dispersive medium is analyzed in this thesis by the moment method. A clear representation of the moments is developed which enables a better understanding of the underlying physics of the propagation. Assuming that the pulse has a quadratic time-dependent phase, three invariants were found which lead to an analytical solution based on the second order moments. This solution describes both the asymptotic behavior in the normal dispersion regime as well as the periodic behavior in the anomalous dispersion regime. In both cases, the analytical solution is compared to numerous numerical simulations and shows an excellent agreement in the normal dispersion regime. In the anomalous dispersion regime, the analytical solution describes well the qualitative features of the propagation. Linear expressions are then derived from the analytical solution to approximate the nonlinear propagation over short and long distances.

The analytical solution assumes that the pulse shape remains invariant along propagation. Two different approaches are then considered to study the evolution of the pulse shape. The first approach looks at the propagation of a gaussian pulse in the normal dispersion regime. Using the linear expressions derived from the analytical solution and the analytical solution of the purely dispersive and nonlinear propagation, the evolution of the pulse envelope is described analytically. Comparison to numerical simulations shows a very good agreement. To go beyond the propagation of a gaussian pulse in the normal dispersion regime, an other approach is needed.

The other approach makes use of higher order moments; either the fourth order moments or the nonlinear second order moments (the third order moments being all zero since the pulse is assumed symmetric). In order to solve the moments equations, a model of the phase that goes beyond the quadratic phase approximation is required. Three such different approximate models are studied as well as an approximate representation of the field amplitude based on the Pearson distribution, which can represent several pulse shapes. These different models are compared, on the one hand, to numerical simulations through different moments and, on the other hand, by direct

integration of the approximated system of equations describing the evolution of the moments. A fixed point analysis is also carried out on the equations describing the evolution of the pulse shape. It arises from these analyses that a proper modeling of the phase must consider a dispersive term and a nonlinear term in order to describe the pulse shape evolution.

These models are then applied to the more complex problem of the master equations in all-fiber lasers. In these equations, the effects of the different optical elements in the laser cavity are linearized and represented in their differential form. Then, depending on which optical element is present, particular analytical solutions on the complex envelope must be found, if they exist. By using the moments method, a general approach that transforms the master equation into a set of algebraic equations is obtained and studied. The properties of the steady-state pulses obtained from this method are then compared to the analytical solutions on the complex envelope of the master equation in three cases: the actively mode-locked laser, the passively mode-locked laser and the solitonic laser. The comparison shows that the general approach based on the moments yield the same relations between the pulse parameters and cavity parameters and describes the pulse shape within 5%. This approach is then successfully applied to three other master equations where no analytical solution exists.

The analytical method developed in this thesis thus enables us to describe the propagation of pulses in a nonlinear dispersive medium in both dispersion regime. It also allows us to study the evolution of the pulse shape along propagation. Finally, this method can be used to find approximate analytical solutions to master equations where none are known.

Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	iv
Abstract	vi
Table des matières	viii
Liste des tableaux	xiii
Liste des figures	xiv
Liste des annexes	xxiv
Liste des sigles et abréviations	xxv
Chapitre 1 Introduction	1
Chapitre 2 Revue de littérature	7
2.1 La propagation et l'équation de Schrödinger non-linéaire	7
2.2 Les lasers et l'équation de Ginzburg-Landau	12
Chapitre 3 Les moments	16
3.1 Moments d'une distribution réelle	16
3.1.1 Moments pairs	17
3.1.2 Moments impairs	19
3.2 Moments d'une distribution complexe	19
3.2.1 Moments purs	21
3.2.2 Moments mixtes	21
3.3 Moments non-linéaires	23
3.4 Facteurs de forme	24
3.4.1 Distribution de Pearson	24
3.4.2 Limites des moments	26

Chapitre 4	Propagation non-linéaire et les moments d'ordre 2	30
4.1	L'équation de Schrödinger non-linéaire	30
4.1.1	Solution dispersive	31
4.1.2	Solution non-linéaire	32
4.1.3	Solution périodique	32
4.1.4	Solution asymptotique	33
4.2	Équations de propagation des moments	33
4.2.1	Invariants	37
4.2.2	Propriétés	38
4.3	Propagation des moments	39
4.3.1	Cas purement dispersif et purement non-linéaire	41
4.3.2	Cas $\beta_2 I_0 > 0$	42
4.3.3	Cas $\beta_2 I_0 < 0$	47
4.4	Approximation des solutions implicites	53
4.4.1	Cas $\beta_2 I_0 > 0$	54
4.4.2	Cas $\beta_2 I_0 < 0$	56
4.5	Conclusion	58
Chapitre 5	Propagation d'une impulsion gaussienne	60
5.1	Propagations dispersive et non-linéaire	60
5.1.1	Propagation dispersive	61
5.1.2	Propagation non-linéaire	61
5.1.3	Perturbation des solutions analytiques	62
5.1.4	Perturbation de la propagation dispersive	62
5.1.5	Perturbation de la propagation non-linéaire	64
5.2	Comparaison et validation	66
5.3	Conclusion	77
Chapitre 6	Propagation non-linéaire et les moments d'ordre supérieur	82
6.1	Équations de propagation	83
6.1.1	Moments linéaires d'ordre 4	83
6.1.2	Moments non-linéaires d'ordre 2	84
6.2	Modélisation des moments d'ordre supérieur	84
6.2.1	Modéliser l'amplitude ou la norme ?	86
6.2.2	Modélisation de la puissance	87

6.2.3	Modélisation de la phase	92
6.3	Représentation des paramètres par les moments	96
6.3.1	Paramètres de norme	96
6.3.2	Paramètres de phase	106
6.4	Intégration numérique	117
6.4.1	Dispersion normale	119
6.4.2	Dispersion anormale	125
6.5	Approximation de l'ÉSNL	132
6.5.1	Phase quadratique avec contribution non-linéaire	132
6.5.2	Phase logarithmique	135
6.5.3	Rupture du front d'onde	135
6.6	Conclusion	138
Chapitre 7	Les moments et les lasers	141
7.1	Éléments optiques	141
7.1.1	Élément dispersif	142
7.1.2	Filtre spectral	142
7.1.3	Déphasage non-linéaire	142
7.1.4	Absorbant saturable	143
7.1.5	Déphasage quadratique	143
7.1.6	Filtre temporel	143
7.1.7	Gain uniforme	144
7.1.8	Gain saturable en énergie	144
7.1.9	Gain saturable en puissance	144
7.1.10	Fibre optique	144
7.1.11	Fibre de gain	145
7.2	Modèle moyen	145
7.2.1	Définition des équations sur les moments	147
7.2.2	Approximation des moments d'ordre supérieur	151
7.2.3	Validation du modèle	154
7.2.4	Étude de cas sans solution analytique	164
7.3	Conclusion	171
Chapitre 8	Conclusion	173

Références	178
Annexes	187

Liste des tableaux

TABLEAU 4.1	Invariants I_1 et I_2 pour des formes typiques d'impulsions . . .	38
TABLEAU 4.2	Signe de $\beta_2 I_0$	40
TABLEAU 6.1	Liste des différentes approximations avec lesquelles les systèmes d'équations à l'ordre 4 et à l'ordre 2 non-linéaire sont intégrés dans chaque configuration.	118
TABLEAU 7.1	Comparaison des facteurs de forme de la solution exacte et approximative du laser à verrouillage passif des modes.	160
TABLEAU 7.2	Comparaison des facteurs de forme de la solution exacte et approximative du laser à verrouillage actif des modes accordable en dispersion.	166
TABLEAU 7.3	Moments et facteurs de forme de la solution approximative du laser à verrouillage passif en présence de dispersion.	168

Liste des figures

FIGURE 3.1	Pondération de la distribution par la fonction de poids T^j . La distribution $P(T)$ est une gaussienne. Il apparaît que les ailes de la distribution prennent une importance d'autant plus grande par rapport au centre que j est grand.	18
FIGURE 3.2	Différentes distributions pouvant être représentées par la distribution de Pearson. La gaussienne ($a = 0$), la parabole ($a = -1$), la lorentzienne ($a = 1$) et le créneau ($a \rightarrow -\infty$) sont représentés exactement. Notons que $b = -a$ pour avoir un créneau défini $-1 \leq T \leq 1$. La sécante hyperbolique est représentée approximativement de deux manières différentes selon une expansion de Padé ($a = 1/3$) ou la conservation de l'énergie ($a \approx 0.29$). .	27
FIGURE 3.3	Différents facteurs de forme décrivant la forme de la distribution de Pearson réelle en fonction du paramètre de forme a . Certains facteurs de forme divergent ou s'annulent indiquant que l'intégrale du calcul d'au moins un des moments rattaché au calcul de ce facteur de forme diverge.	28
FIGURE 4.1	Propagation des moments d'ordre 2 d'une impulsion super gaussienne dans le régime de dispersion normale ($\beta_2 > 0$). Les différentes courbes représentent différentes puissances crêtes initiales ; du haut vers le bas $N^2 = 10, 5, 2, 1, 0.5, 0.1, 0.01$ (sauf pour I_2). Les lignes pleines correspondent à la résolution numérique de l'ÉSNL éq. (4.2) alors que les lignes pointillées avec les losanges proviennent de la résolution numérique de l'équation implicite (éq. (4.36)). Les deux invariants approximatifs I_1 et I_2 , sont également tracés. Notons que l'ordre des courbes est inversé pour I_2	45

- FIGURE 4.2 Erreur relative entre les moments calculés numériquement et analytiquement. Les différentes courbes représentent différents puissances crêtes initiales ; du gris pâle vers le noir, $N^2=10, 5, 2, 1, 0.5, 0.1, 0.01$. L'erreur relative sur les moments $\langle T^2 \rangle$ et $\langle T\Omega \rangle_r$ est inférieure à 2%. 46
- FIGURE 4.3 Propagation des moments d'ordre 2 pour une impulsion gaussienne dans le régime de dispersion normale. Les différentes courbes représentent des phases initiales par le biais de $\langle T\Omega \rangle_{r0} = -10, -5, -2, -1, 0, 1, 2, 5, 10$. Les lignes pleines correspondent à la propagation numérique du champ alors que les lignes pointillées avec les carrés proviennent de la résolution numérique de l'équation implicite. Les losanges vides sont associés à un «chirp» positif et les losanges pleins à un «chirp» négatif. Le cas «Fourier limité» est identifié par des cercles. Les moments sont normalisés par leur valeur «Fourier limitée», dénotée par l'indice FL. Tous les impulsions ont $N = 1$ lorsqu'elles sont «Fourier limitées». 48
- FIGURE 4.4 Propagation des moments d'ordre 2 d'une impulsion super gaussienne dans le régime de dispersion anormale ($\beta_2 < 0$). Les différentes courbes représentent différents puissances crêtes initiales ; du haut vers le bas $N^2 = 9, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 5$. Les lignes pleines correspondent à la propagation numérique du champ alors que les lignes pointillées avec les losanges proviennent de la résolution numérique de l'équation implicite. Les deux invariants approximatifs I_1 et I_2 , sont également tracés. Les courbes sont décalées de deux unités (100 en échelle logarithmique) les unes par rapport aux autres pour plus de clarté. 51

- FIGURE 4.5 Comparaison des modèles explicites et des simulations pour moment $\langle T\Omega \rangle_r$ d'une impulsion super gaussienne dans le régime de dispersion normale ($\beta_2 > 0$). Les différentes courbes montrent différentes puissances crêtes initiales ; du haut vers le bas $N^2 = 10, 5, 2, 1, 0.5, 0.1, 0.01$. Les lignes pleines représentent les simulations numériques alors que les lignes pointillées avec les losanges représentent le modèle linéarisé lorsque $z < z_G$ et le modèle pour de grandes distances lorsque $z > z_G$. Le point de transition vaut $z_G/L_D = 0.13, 0.18, 0.26, 0.34, 0.41, 0.53, 0.58$ selon N^2 . La figure de droite est un agrandissement de celle de gauche. 56
- FIGURE 4.6 Comparaison entre des moments $\langle T\Omega \rangle_r$ et $\langle T^2 \rangle$ obtenus par les modèles implicites et explicites dans le régime de dispersion anormale ($\beta_2 < 0$). Le modèle explicite donné par les éqs. (4.54) et (4.55) est tracé en ligne pointillée avec les losanges et la solution implicite de l'éq. (4.45) est tracée en lignes pleines pour $N = 2, 3, 4$. Les courbes sont décalées de trois graduations pour $\langle T\Omega \rangle$ et de deux graduations pour $\langle T^2 \rangle$ à des fins de clarté. . . 57
- FIGURE 5.1 Représentation schématique de la solution implicite à la propagation non-linéaire et dispersive d'une impulsion gaussienne. La variable à la queue de la flèche doit être connue afin de déterminer la variable à la tête de la flèche. 64
- FIGURE 5.2 Comparaison des puissances obtenues par les simulations numériques et par le modèle basé sur une solution dispersive (haut) et le modèle basé sur la solution non-linéaire (bas) pour un rapport $N = 1$ entre les effets non-linéaires et dispersifs. Les simulations numériques sont en traits pleins noirs et les modèles analytiques en cercles rouges. Les courbes sont tracées pour des distances $z/L_D = \{0, 1/4, 1/2, 1, 2, 4\}$. Le temps est normalisé par $\langle T^2 \rangle_0^{1/2}$. 68

- FIGURE 5.3 Comparaison des «chirps» obtenus par les simulations numériques et par le modèle basé sur une solution dispersive (haut) et le modèle basé sur la solution non-linéaire (bas) pour un rapport $N = 1$ entre les effets non-linéaires et dispersifs. Les simulations numériques sont en traits pleins noirs et les modèles analytiques en cercles rouges. Les courbes sont tracées pour des distances $z/L_D = \{0, 1/4, 1/2, 1, 2, 4\}$. Le temps est normalisé par $\langle T^2 \rangle_0^{1/2}$. 69
- FIGURE 5.4 Comparaison des spectres obtenus par les simulations numériques et par le modèle basé sur une solution dispersive (haut) et le modèle basé sur la solution non-linéaire (bas) pour un rapport $N = 1$ entre les effets non-linéaires et dispersifs. Les simulations numériques sont en traits pleins noirs et les modèles analytiques en cercles rouges. Les courbes sont tracées pour des distances $z/L_D = \{0, 1/4, 1/2, 1, 2, 4\}$. Les fréquences sont normalisées par $\langle \Omega^2 \rangle_0^{1/2}$ 70
- FIGURE 5.5 Comparaison des puissances obtenues par les simulations numériques et par le modèle basé sur une solution dispersive (haut) et le modèle basé sur la solution non-linéaire (bas) pour un rapport $N = 5$ entre les effets non-linéaires et dispersifs. Les simulations numériques sont en traits pleins noirs et les modèles analytiques en cercles rouges. Les courbes sont tracées pour des distances $z/L_D = \{0, 1/4, 1/2, 1, 2, 4\}$. Le temps est normalisé par $\langle T^2 \rangle_0^{1/2}$. 71
- FIGURE 5.6 Comparaison des «chirps» obtenus par les simulations numériques et par le modèle basé sur une solution dispersive (haut) et le modèle basé sur la solution non-linéaire (bas) pour un rapport $N = 5$ entre les effets non-linéaires et dispersifs. Les simulations numériques sont en traits pleins noirs et les modèles analytiques en cercles rouges. Les courbes sont tracées pour des distances $z/L_D = \{0, 1/4, 1/2, 1, 2, 4\}$. Le temps est normalisé par $\langle T^2 \rangle_0^{1/2}$. 72

- FIGURE 5.7 Comparaison des spectres obtenus par les simulations numériques et par le modèle basé sur une solution dispersive (haut) et le modèle basé sur la solution non-linéaire (bas) pour un rapport $N = 5$ entre les effets non-linéaires et dispersifs. Les simulations numériques sont en traits pleins noirs et les modèles analytiques en cercles rouges. Les courbes sont tracées pour des distances $z/L_D = \{0, 1/4, 1/2, 1, 2, 4\}$. Les fréquences sont normalisées par $\langle \Omega^2 \rangle_0^{1/2}$ 73
- FIGURE 5.8 Comparaison des puissances obtenues par les simulations numériques et par le modèle basé sur une solution dispersive (haut) et le modèle basé sur la solution non-linéaire (bas) pour un rapport $N = 10$ entre les effets non-linéaires et dispersifs. Les simulations numériques sont en traits pleins noirs et les modèles analytiques en cercles rouges. Les courbes sont tracées pour des distances $z/L_D = \{0, 1/4, 1/2, 1, 2, 4\}$. Le temps est normalisé par $\langle T^2 \rangle_0^{1/2}$ 74
- FIGURE 5.9 Comparaison des «chirps» obtenus par les simulations numériques et par le modèle basé sur une solution dispersive (haut) et le modèle basé sur la solution non-linéaire (bas) pour un rapport $N = 10$ entre les effets non-linéaires et dispersifs. Les simulations numériques sont en traits pleins noirs et les modèles analytiques en cercles rouges. Les courbes sont tracées pour des distances $z/L_D = \{0, 1/4, 1/2, 1, 2, 4\}$. Le temps est normalisé par $\langle T^2 \rangle_0^{1/2}$ 75
- FIGURE 5.10 Comparaison des spectres obtenus par les simulations numériques et par le modèle basé sur une solution dispersive (haut) et le modèle basé sur la solution non-linéaire (bas) pour un rapport $N = 10$ entre les effets non-linéaires et dispersifs. Les simulations numériques sont en traits pleins noirs et les modèles analytiques en cercles rouges. Les courbes sont tracées pour des distances $z/L_D = \{0, 1/4, 1/2, 1, 2, 4\}$. Les fréquences sont normalisées par $\langle \Omega^2 \rangle_0^{1/2}$ 76

- FIGURE 5.11 Comparaison entre les simulations numériques (lignes pleines) et le modèle (cercles) basé sur une solution dispersive (haut) et le modèle basée sur la solution non-linéaire (bas) pour un rapport $N = 1$ entre les effets non-linéaires et dispersifs. Le trait noir montre le facteur de forme κ_T , le trait bleu κ_{PT} et le trait rouge κ_P 78
- FIGURE 5.12 Comparaison entre les simulations numériques (lignes pleines) et le modèle (cercles) basé sur une solution dispersive (haut) et le modèle basée sur la solution non-linéaire (bas) pour un rapport $N = 5$ entre les effets non-linéaires et dispersifs. Le trait noir montre le facteur de forme κ_T , le trait bleu κ_{PT} et le trait rouge κ_P 79
- FIGURE 5.13 Comparaison entre les simulations numériques (lignes pleines) et le modèle (cercles) basé sur une solution dispersive (haut) et le modèle basée sur la solution non-linéaire (bas) pour un rapport $N = 10$ entre les effets non-linéaires et dispersifs. Le trait noir montre le facteur de forme κ_T , le trait bleu κ_{PT} et le trait rouge κ_P 80
- FIGURE 6.1 En haut : Comparaison entre la valeur théorique de l'énergie de la distribution de Pearson et la valeur approximative. En bas : Comparaison du moment $\langle P^p \rangle$ de la distribution de Pearson et la valeur approximative. Les quatre courbes représentent du haut vers le bas $p = 1, 2, 3$ et 4. Les valeurs théoriques sont en lignes pleines alors que les valeurs approximatives sont représentées par des cercles. 90
- FIGURE 6.2 Comparaison numérique entre les différentes représentations du moment $\langle P^2 T^2 \rangle$ normalisé d'une impulsion gaussienne se propageant dans le régime de dispersion anormale avec $N = 2$. Le moment calculé directement à partir de la propagation numérique est en trait plein noir. La figure du haut en trait foncé présente le cas où a_T est utilisé alors que a_{PT} a été utilisé dans la figure du bas en trait clair. Le paramètre b_T apparaît en trait plein et b_E en trait pointillé. Le paramètre P_{cP} est représenté en cercle plein et P_{cE} en cercle vide. 99

- FIGURE 6.3 Comparaison numérique entre les différentes représentations du moment $\langle PT^4 \rangle$ normalisé d'une impulsion gaussienne se propageant dans le régime de dispersion anormale avec $N = 2$. Le moment calculé directement à partir de la propagation numérique est en trait plein noir. La figure du haut en trait foncé présente le cas où a_T est utilisé alors que a_{PT} a été utilisé dans la figure du bas en trait clair. Le paramètre b_T apparaît en trait plein et b_E en trait pointillé. Le paramètre P_{cP} est représenté en cercle plein et P_{cE} en cercle vide. 100
- FIGURE 6.4 Comparaison numérique entre les différentes représentations du moment $\langle P^2 T^2 \rangle$ normalisé d'une impulsion gaussienne se propageant dans le régime de dispersion normale avec $N = 2$. Le moment calculé directement à partir de la propagation numérique est en trait plein noir. La figure du haut en trait foncé présente le cas où a_T est utilisé alors que a_{PT} a été utilisé dans la figure du bas en trait clair. Le paramètre b_T apparaît en trait plein et b_E en trait pointillé. Le paramètre P_{cP} est représenté en cercle plein et P_{cE} en cercle vide. 101
- FIGURE 6.5 Comparaison numérique entre les différentes représentations du moment $\langle PT^4 \rangle$ normalisé d'une impulsion gaussienne se propageant dans le régime de dispersion normale avec $N = 2$. Le moment calculé directement à partir de la propagation numérique est en trait plein noir. La figure du haut en trait foncé présente le cas où a_T est utilisé alors que a_{PT} a été utilisé dans la figure du bas en trait clair. Le paramètre b_T apparaît en trait plein et b_E en trait pointillé. Le paramètre P_{cP} est représenté en cercle plein et P_{cE} en cercle vide. 102
- FIGURE 6.6 Comparaison numérique entre la représentation utilisant les paramètres a_T (trait foncé) et a_{PT} (trait clair) de l'énergie E normalisée d'une impulsion gaussienne se propageant dans le régime de dispersion normale (figure du bas) et anormale (figure du haut) où $N = 2$ 103

FIGURE 6.7	Comparaison numérique entre la représentation utilisant les paramètres a_T (trait foncé) et a_{PT} (trait clair) du moment $\langle P \rangle$ normalisé d'une impulsion gaussienne se propageant dans le régime de dispersion normale (figure du bas) et anormale (figure du haut) où $N = 2$	104
FIGURE 6.8	Comparaison numérique entre la représentation utilisant les paramètres a_T (trait foncé) et a_{PT} (trait clair) du moment $\langle T^2 \rangle$ normalisé d'une impulsion gaussienne se propageant dans le régime de dispersion normale (figure du bas) et anormale (figure du haut) où $N = 2$	105
FIGURE 6.9	Comparaison numérique entre la représentation utilisant les paramètres h , $f_{PT\Omega}$ (carré) et $f_{T3\Omega}$ (cercle) du moment $\langle P\Omega^2 \rangle_i$ d'une gaussienne se propageant dans le régime de dispersion normale (figure du bas) et anormale (figure du haut) où $N = 2$ (ligne grasse noire). Les cercles vides indiquent que κ_T entrant dans les définitions est obtenu numériquement à partir de $\langle T^4 \rangle$ et non à partir de a_{PT}	108
FIGURE 6.10	Comparaison numérique entre la représentation utilisant les paramètres h , $f_{PT\Omega}$ (carré) et $f_{T3\Omega}$ (cercle) du moment $\langle PT^2\Omega^2 \rangle_i$ d'une impulsion gaussienne se propageant dans le régime de dispersion normale (figure du bas) et anormale (figure du haut) où $N = 2$ (ligne grasse noire). Les cercles vides indiquent que κ_T entrant dans les définitions est obtenu numériquement à partir de $\langle T^4 \rangle$ et non à partir de a_{PT}	109
FIGURE 6.11	Comparaison numérique entre la représentation utilisant les paramètres h , $f_{PT\Omega}$ (carré) et $f_{T3\Omega}$ (cercle) du moment $\langle \Omega^2 \rangle$ d'une impulsion gaussienne se propageant dans le régime de dispersion normale (figure du bas) et anormale (figure du haut) où $N = 2$ (ligne grasse noire). Les cercles vides indiquent que κ_T entrant dans les définitions est obtenu numériquement à partir de $\langle T^4 \rangle$ et non à partir de a_{PT}	110

- FIGURE 6.12 Comparaison numérique entre la représentation utilisant les paramètres $c_{T\Omega}$ (cercles vides), $c_{PT\Omega}$ (carrés) et $c_{T3\Omega}$ (cercles pleins) du moment $\langle P\Omega^2 \rangle_i$ d'une impulsion gaussienne se propageant dans le régime de dispersion normale (figure du bas) et anormale (figure du haut) où $N = 2$ (ligne grasse noire). . . . 113
- FIGURE 6.13 Comparaison numérique entre la représentation utilisant les paramètres $c_{T\Omega}$ (cercles vides), $c_{PT\Omega}$ (carrés) et $c_{T3\Omega}$ (cercles pleins) du moment $\langle PT^2\Omega^2 \rangle_i$ d'une impulsion gaussienne se propageant dans le régime de dispersion normale (figure du bas) et anormale (figure du haut) où $N = 2$ (ligne grasse noire). La ligne pâle avec les croix représente l'approximation de l'éq. (6.46). 114
- FIGURE 6.14 Comparaison numérique entre la représentation utilisant les paramètres $c_{T\Omega}$ (cercles vides), $c_{PT\Omega}$ (carrés) et $c_{T3\Omega}$ (cercles pleins) du moment $\langle \Omega^2 \rangle$ d'une impulsion gaussienne se propageant dans le régime de dispersion normale (figure du bas) et anormale (figure du haut) où $N = 2$ (ligne grasse noire). . . . 115
- FIGURE 6.15 Paramètre a obtenu de l'intégration des systèmes à l'ordre 4 (haut) et à l'ordre 2 non-linéaire (bas) pour $N = 1$ dans le régime de dispersion normale. Les courbes rouges avec cercles représentent la phase logarithmique, les courbes bleues avec carreaux la phase quadratique et les courbes grises foncées la phase quadratique et non-linéaire. Les traits indiquent les termes inclus dans les systèmes (voir texte). La courbe noire pleine représente le paramètre a obtenu par la propagation numérique. 120
- FIGURE 6.16 Paramètre a obtenu de l'intégration des systèmes à l'ordre 4 (haut) et à l'ordre 2 non-linéaire (bas) pour $N = 2$ dans le régime de dispersion normale. Les courbes rouges avec cercles représentent la phase logarithmique, les courbes bleues avec carreaux la phase quadratique et les courbes grises foncées la phase quadratique et non-linéaire. Les traits indiquent les termes inclus dans les systèmes (voir texte). La courbe noire pleine représente le paramètre a obtenu par la propagation numérique. 121

- FIGURE 6.17 Paramètre a obtenu de l'intégration des systèmes à l'ordre 4 (haut) et à l'ordre 2 non-linéaire (bas) pour $N = 3$ dans le régime de dispersion normal. Les courbes rouges avec cercles représentent la phase logarithmique, les courbes bleues avec carreaux la phase quadratique et les courbes grises foncées la phase quadratique et non-linéaire. Les traits indiquent les termes inclus dans les systèmes (voir texte). La courbe noire pleine représente le paramètre a obtenu par la propagation numérique. 122
- FIGURE 6.18 Paramètre a obtenu de l'intégration des systèmes à l'ordre 4 (haut) et à l'ordre 2 non-linéaire (bas) pour $N = 1$ dans le régime de dispersion anormale. Les courbes rouges avec cercles représentent la phase logarithmiques, les courbes bleues avec carreaux la phase quadratique et les courbes grises foncées la phase quadratique et non-linéaire. Les traits indiquent les termes inclus dans les systèmes (voir texte). La courbe noire pleine représente le paramètre a obtenu par la propagation numérique. 126
- FIGURE 6.19 Paramètre a obtenu de l'intégration des systèmes à l'ordre 4 (haut) et à l'ordre 2 non-linéaire (bas) pour $N = 2$ dans le régime de dispersion anormale. Les courbes rouges avec cercles représentent la phase logarithmique, les courbes bleues avec carreaux la phase quadratique et les courbes grises foncées la phase quadratique et non-linéaire. Les traits indiquent les termes inclus dans les systèmes (voir texte). La courbe noire pleine représente le paramètre a obtenu par la propagation numérique. 127
- FIGURE 6.20 Paramètre a obtenu de l'intégration des systèmes à l'ordre 4 (haut) et à l'ordre 2 non-linéaire (bas) pour $N = 3$ dans le régime de dispersion anormale. Les courbes rouges avec cercles représentent la phase logarithmique, les courbes bleues avec carreaux la phase quadratique et les courbes grises foncées la phase quadratique et non-linéaire. Les traits indiquent les termes inclus dans les systèmes (voir texte). La courbe noire pleine représente le paramètre a obtenu par la propagation numérique. 128

Liste des annexes

ANNEXE A	Définitions et propriétés des moments	187
ANNEXE B	Détails de calculs	195
ANNEXE C	Fonctions utiles	197
ANNEXE D	Définition des moments de la distribution de Pearson	200

Liste des sigles et abréviations

Variables

a	Paramètre de forme de la distribution de Pearson
b	Largeur de la distribution de Pearson (s^2)
c	Phase logarithmique de la distribution de Pearson
d	Asymétrie de la distribution de Pearson (s)
h	Phase quadratique de la distribution de Pearson (s^{-2})
f	Phase non-linéaire de la distribution de Pearson (W^{-1})
g	Gain d'un milieu de gain (m^{-1})
g_0	Gain petit signal d'un milieu de gain (m^{-1})
j	Ordre temporel d'un moment
k	Ordre spectral d'un moment
m	Mode de la distribution de Pearson (s)
n	Ordre d'un moment
p	Ordre en puissance d'un moment
q	Linéarité de la solution analytique obtenue en posant une phase quadratique
r	Norme de l'amplitude complexe du champ en ($W^{1/2}$)
s	Paramètre de forme mesurant l'asymétrie de l'impulsion
t	Temps (s)
z	Distance de propagation (m)
A	Amplitude complexe du champ électrique ($W^{1/2}$)
\tilde{A}	Amplitude complexe de la densité spectrale du champ électrique ($W^{1/2}s$)
E	Énergie (J)
E_{sat}	Énergie de saturation d'un milieu de gain (J)
I	Invariant de la solution analytique obtenue en posant une phase quadratique
L_D	Longueur de dispersion (m)
L_{NL}	Longueur non-linéaire (m)
N	Rapport entre la longueur de dispersion et la longueur non-linéaire
T	Temps dans le référentiel de l'impulsion (s)
P	Puissance instantanée de l'impulsion (W)
P_c	Puissance crête de l'impulsion (W)

P_{sat}	Puissance de saturation d'un milieu de gain (W)
β_0	Nombre d'onde centré sur la porteuse (m^{-1})
β_1	Inverse de la vitesse de groupe, centré sur la porteuse (s/m)
β_2	Dispersion chromatique autour de la porteuse (s^2/m)
γ	Auto-modulation de phase ($\text{W}^{-1}\text{m}^{-1}$)
δ	Absorption saturable ($\text{W}^{-1}\text{m}^{-1}$)
ϵ	Inverse carré de la largeur d'un filtre temporel (s^{-2}/m)
ζ	Temps d'un cycle dans la cavité (s)
η	Élargissement complexe de l'impulsion dû à la dispersion
κ	Facteur de forme
σ	Inverse carré de la largeur d'un filtre spectral (s^2/m)
ρ	Déphasage temporel quadratique (s^{-2})
ϕ	Phase temporelle de l'amplitude complexe du champ (rad)
ψ	Phase de l'impulsion stationnaire dans la cavité laser (rad)
ω	Pulsation (rad Hz)
ΔT	Écart-type de la puissance instantanée (s)
$\Delta \Omega$	Écart-type de la densité spectrale (rad Hz)
Φ	Phase spectrale de l'amplitude complexe du champ (rad)
Ω	Pulsation centrée autour de la porteuse (rad Hz)
$\langle P \rangle$	Puissance effective de l'impulsion (W)
$\langle T^2 \rangle$	Variance temporelle de l'impulsion (s^2)
$\langle T\Omega \rangle_r$	Covariance temps-fréquence de l'impulsion, proportionnelle au chirp
$\langle \Omega^2 \rangle$	Variance spectrale de l'impulsion (Hz^2)

Sigles

ESNL	Équation de Schrödinger non-linéaire
EGLE	Équation de Ginzburg-Landau étendue

Définitions

Approximer : Verbe transitif. Faire une approximation. *Faire une approximation sur un terme à l'aide d'une expansion de Taylor. Approximer un terme à l'aide une expansion de Taylor.*

Chapitre 1

Introduction

Les problèmes de design sont sûrement parmi les plus intéressants du domaine de l'ingénierie. Ces problèmes consistent à trouver les paramètres d'un composant, d'un appareil, d'un instrument, afin d'obtenir un résultat prédéterminé. Il existe bien des outils pour faciliter le design tels que des règles de design déterminées empiriquement, des modèles théoriques et des programmes de simulation. Les méthodes empiriques sont généralement longues et coûteuses; elles sont toutefois très rapides dans les domaines où les technologies sont bien établies. Les modèles théoriques permettent d'exprimer clairement les relations entre les paramètres de design et son résultat dans la mesure où les équations puissent être résolues analytiquement. Autrement, il faut résoudre numériquement.

La puissance sans cesse grandissante des ordinateurs a fait des simulations numériques un outils formidable pour tester les designs de toute sorte. Toutefois, tester des designs est différent de créer un design. Les simulations nous permettent de connaître le comportement de l'appareil en fonction de ses paramètres alors que le design est le *problème inverse* : déterminer les paramètres pour un comportement donné. En général, ce dernier est beaucoup plus difficile. La raison est qu'alors que le comportement se décrit par quelques variables, voire, une seule, il y a généralement plusieurs paramètres de design. Quand le nombre de paramètres de design est faible, et que les simulations associées au problème se font rapidement, il est possible d'utiliser les simulations numériques pour faire le design. Il suffit de cartographier l'espace des paramètres afin de déterminer les comportements de chaque combinaison de paramètres. Ce processus devient toutefois excessivement long quand le nombre de paramètres est grand ou que les simulations numériques sont longues à faire. Dans ce cas, il faut avoir recours à d'autres méthodes.

Une de ces méthodes est de retourner aux modèles théoriques et tenter de les simplifier judicieusement de telle sorte qu'ils puissent être résolus analytiquement tout en décrivant adéquatement le comportement du système. Le travail de cette thèse

consiste exactement en cela : mettre en place des modèles théoriques approximatifs permettant de décrire suffisamment adéquatement le problème considéré afin de faciliter le design de l'appareil correspondant. Le problème de design auquel on s'intéresse dans cette thèse est celui du design des lasers à impulsions, en particulier les lasers à fibres. Plus précisément, nous cherchons à savoir quels doivent être les paramètres de la cavité de laser afin d'obtenir une impulsion donnée. Pour ce faire, nous devons résoudre les équations décrivant la propagation des impulsions dans la cavité laser. Les lasers à impulsions sont des systèmes complexes qui prennent un temps considérable à simuler. En effet, afin de déterminer l'impulsion stationnaire d'un laser, il faut faire la propagation de cette dernière à travers la cavité laser à plusieurs reprises jusqu'à ce qu'on obtienne une impulsion propre de la propagation, c'est-à-dire que l'on retrouve la même impulsion après un cycle dans la cavité. Lorsque la propagation est dispersive et non-linéaire, le calcul de la propagation est long, d'autant plus que les impulsions se propageant ne sont pas «Fourier-limitées», c'est à dire qu'elles ont une phase qui dépend du temps (ou des fréquences). Il faut donc trouver une façon approximative de décrire cette propagation.

Le problème de la propagation dans une cavité laser étant relativement complexe, nous commençons l'analyse par la propagation dans un milieu dispersif et non-linéaire avant de passer aux lasers proprement dits. Ces milieux décrivent bien plusieurs composantes technologiques dont, entre autres, les fibres optiques en font partie. Ainsi, la propagation dans les systèmes de communication, la compensation de dispersion et la compression d'impulsions sont toutes décrites par des milieux dispersifs et non-linéaires. Nous utilisons l'équation de Schrödinger non-linéaire (ESNL) pour décrire la propagation d'une impulsion dans ces milieux. Cette équation est également utilisée pour décrire le mouvement d'onde dans les fluides ainsi que les fonctions d'onde en mécanique quantique. Notons toutefois que selon le problème considéré, la dispersion et la non-linéarité décrites peuvent être spatiales ou temporelles. Dans les pages qui suivent, nous considérons la propagation d'impulsions dans une fibre optique ; nous nous attardons donc au cas temporel, sachant que les résultats trouvés peuvent facilement être transposés dans le cas spatial. Cette équation décrit bien la propagation dans les fibres optiques standard tant que l'impulsion n'est pas trop brève (une durée supérieure à quelques picosecondes).

Différentes solutions analytiques à l'ESNL existent, selon que la dispersion et la non-linéarité du milieu s'additionnent ou s'opposent. Quand elles s'opposent, les so-

lutions de l'ESNL sont les solitons : des impulsions qui se propagent de manière invariante ou qui se déforment de manière périodique. Ces solutions ne surviennent cependant que dans des cas particuliers où il y a compensation parfaite entre l'ampleur de la non-linéarité et celle de la dispersion est entier. Quand ces deux effets s'additionnent, une solution asymptotique de l'ESNL a été trouvée sous la forme d'impulsions paraboliques. Ces impulsions ne surviennent que dans le cas limite où la non-linéarité est beaucoup plus grande que la dispersion ou pour des distances de propagation infiniment longues. Notons aussi qu'il existe des solutions analytiques de l'ESNL dans les cas purement non-linéaire et purement dispersif. Dans ce dernier cas, la solution est gaussienne. Toutes ces solutions analytiques nous permettent d'avoir une vue d'ensemble des comportements possibles des impulsions lors de la propagation dans les milieux dispersifs et non-linéaires. Elles ne permettent toutefois pas de décrire de manière générale la propagation d'une impulsion ; la plupart des cas ne sont pas traités par ces solutions. Par exemple, lorsque les effets s'additionnent, il n'existe pas de solutions générales pour la propagation d'impulsions de forme quelconque. Il n'existe pas non plus de solutions générales dans les deux régimes lorsque la non-linéarité et la dispersion n'ont pas la même ampleur. Si nous voulons résoudre le problème inverse, il nous faut trouver un moyen de s'attaquer à ces difficultés.

Considérant la difficulté de ce problème, il faut simplifier le problème ou la solution. Les solutions que nous venons de voir ont été trouvées en simplifiant le problème, c'est-à-dire en ne considérant que certains cas particuliers des paramètres de l'équation. La grande difficulté dans la résolution de l'ESNL vient du fait que l'équation est une équation aux dérivées partielles ; il faut la résoudre dans l'espace et le temps ou puisque c'est une équation d'onde, dans l'espace et les fréquences. Nous pouvons donc tenter l'analyse dans le domaine temporel ou spectral. Il se trouve que la dispersion se résout très facilement dans le domaine spectral ; par contre, la non-linéarité se décrit bien dans le domaine temporel. Il nous serait donc plus facile de travailler dans un espace hybride temps-fréquence où les deux domaines seraient représentés simultanément. L'impulsion serait représentée dans ce cas comme une fonction du temps, des fréquences et de la distance de propagation. Ce genre de représentation est cependant généralement lourd. Une autre façon est de simplifier l'analyse est de faire en sorte qu'elle ne dépende ni du temps ni des fréquences. Une façon d'y arriver est d'utiliser la méthode des moments qui consiste à réécrire l'ESNL en termes des différents moments de l'enveloppe de l'impulsion.

Les moments, par définition, sont des quantités moyennes qui proviennent de l'intégration d'un opérateur s'appliquant sur une distribution. Ils décrivent certaines propriétés de la distribution (ici l'enveloppe de l'impulsion) de manière générale puisque les détails spécifiques sont perdus lors de l'intégration (ici dans le domaine temporel ou spectral). Il existe une infinité d'opérateurs définissant autant de moments ; il est important de bien les choisir en fonction de la physique du problème à résoudre. Par exemple, pour une impulsion, les opérateurs décrivant l'énergie, la largeur temporelle et la largeur spectrale de l'impulsion sont très pertinents. En combinant les moments sur l'ESNL, nous nous retrouvons avec un système d'équations différentielles ordinaires décrivant l'évolution de chacun des moments de l'enveloppe de l'impulsion au lieu d'une équation aux dérivées partielles décrivant la propagation de l'enveloppe de l'impulsion. Représenter l'impulsion sous forme de moments a l'avantage d'enlever la dépendance temporelle (ou spectrale) de la solution et de la reporter dans un ensemble de variables à trouver, les différents moments. Le prix à payer est que nous avons un système de plusieurs équations à résoudre au lieu d'une seule.

Une grande partie du travail de cette thèse consiste, d'une part, à définir une notation claire des moments afin de simplifier l'analyse et, d'autre part, à approximer ces moments afin de résoudre le système d'équations différentielles. En effet, le principal problème de la méthode des moments est la fuite vers l'avant des moments : l'équation différentielle d'un moment donné dépend de plusieurs autres moments ne faisant pas partie du système d'équations à résoudre. Autrement dit, le système d'équations est ouvert. Il faut donc approximer judicieusement les moments pour avoir un système fermé et ainsi résoudre analytiquement le problème en conservant suffisamment de précision pour décrire adéquatement la propagation. Les approximations utilisées reposent soit sur des approximations sur la phase de l'enveloppe de l'impulsion, soit sur la forme de l'enveloppe de l'impulsion. De plus, nous devons choisir des approximations suffisamment simples pour qu'elles facilitent la résolution, sans alourdir inutilement les calculs. Pour ce faire, nous utilisons la distribution de Pearson qui permet de représenter diverses formes de distributions en ne changeant qu'un seul paramètre dans la distribution (nous nous limitons aux distributions symétriques). Nous étudions également différentes représentations de la phase de l'impulsion (afin de représenter les moments).

En utilisant les méthodes des moments et grâce à la distribution de Pearson, nous

pouvons étudier le problème inverse des lasers. Les lasers diffèrent de la propagation simple car ils comportent différents composants ne pouvant être représentés par l'ESNL. L'équation la plus souvent utilisée pour représenter les lasers est l'équation de Ginzburg-Landau étendue (EGLE) qui contient, en plus des termes dispersifs et non-linéaires, des termes de saturation, de gain, de déphasage et de filtrage temporel et spectral. À l'instar de l'ESNL, des solutions ont été trouvées pour l'EGLE selon les paramètres présents dans l'équation. Nous retrouvons parmi ces solutions des impulsions gaussiennes et solitoniques. Toutefois ces solutions n'existent que dans des cas particuliers. Tout comme dans le cas de la propagation, il nous faut une méthode pour déterminer des solutions, même si elles sont approximatives, dans le cas plus général où les paramètres de la cavité peuvent être quelconques.

Il existe toutefois une différence importante entre le problème de propagation et le problème des lasers. Contrairement à la propagation où la forme initiale de l'impulsion est connue, le problème en général avec les lasers est que la forme de l'impulsion est inconnue avant de résoudre le système. Il nous faut donc que la forme de l'impulsion fasse partie des variables à trouver ; il faut donc la représenter à l'aide des moments. Nous y arrivons, d'une part, en calculant des rapports entre certains moments et, d'autre part, en utilisant la distribution de Pearson. La méthode que nous décrivons dans les pages qui suivent permet pour la première fois, à notre connaissance, que la forme de l'impulsion soit considérée comme un paramètre indéterminé de la solution. Puisque notre approche est analytique, en résolvant le problème direct, nous trouvons par le fait même la solution inverse.

En résumé, pour déterminer les paramètres d'une cavité laser afin d'obtenir une impulsion donnée, nous utilisons la représentation par les moments. Dans le chapitre 3 nous examinons différentes définitions des moments et expliquons la signification physique de chacun. Nous définissons également une notation claire afin de bien concevoir le problème et d'interpréter facilement les relations entre les moments ainsi que leur signification. Nous définissons également différentes autres quantités permettant de décrire les distributions en utilisant les moments. Nous utilisons ces définitions des moments dans le chapitre 4 afin de décrire la propagation d'une impulsion dans un milieu dispersif et non-linéaire. Nous utilisons des quantités invariantes dans la propagation qui nous permettent de simplifier le système d'équations. Toutefois pour résoudre, il nous faut approximer un des moments du système, ce que nous faisons en supposant une phase quadratique. La solution obtenue consiste en l'évolution des

moments du second ordre lors de la propagation. Nous comparons l'évolution de ces moments avec les simulations numériques correspondantes. Dans le chapitre 5, nous tentons de retrouver la forme de l'enveloppe de l'impulsion à partir de l'évolution des moments calculée au chapitre précédent.

Nous nous attardons ensuite au chapitre 6 à l'évolution des moments d'ordre supérieur lors de la propagation dans un milieu dispersif et non-linéaire. Ces moments permettent de décrire l'évolution de la forme de l'enveloppe de l'impulsion lors de la propagation. Pour obtenir une forme intégrable du système d'équations définissant la propagation, nous devons approximer plusieurs moments. Nous étudions dans ce chapitre différentes approximations possibles de la phase ainsi que différents niveaux d'approximations sur le système d'équations différentielles. Cette étude nous permet de définir la limite d'applicabilité de la méthode des moments pour la résolution des problèmes de propagation. Les approximations développées et utilisées dans ce chapitre sont reprises au dernier chapitre, le chapitre 7 afin de déterminer le régime stationnaire des lasers à fibres. Plusieurs cavités laser sont étudiées dans ce chapitre. Dans un premier temps, nous utilisons les moments pour vérifier si nous pouvons obtenir les résultats théoriques obtenus précédemment par d'autres méthodes. Finalement, nous utilisons les moments sur des cavités pour lesquelles il n'existe aucune solution analytique connue.

Ces chapitres sont suivis de plusieurs annexes dans lesquelles on retrouve des définitions, des propriétés, des fonctions utiles, et des exemples de calculs permettant de mieux comprendre et de compléter le travail de cette thèse.

Chapitre 2

Revue de littérature

2.1 La propagation et l'équation de Schrödinger non-linéaire

La première partie du travail de cette thèse utilise l'équation de Schrödinger non-linéaire (ESNL). La littérature couvrant cette équation est considérable et nous n'en donnons ici qu'un aperçu, complété plus en détails dans chacun des chapitres. Pour une introduction détaillée sur l'ESNL, nous recommandons le livre *Nonlinear fiber optics* (Agrawal, 2001). Ce livre explique en détail la formulation de l'ESNL à partir des équations de Maxwell. De plus, le cas purement dispersif de la propagation d'impulsions gaussiennes et le cas purement non-linéaire y sont traités. L'ESNL a été étudiée abondamment et résolue analytiquement dans le cas bien connu où la dispersion et la non-linéarité se compensent parfaitement ou harmoniquement : le soliton (Zakharov et Shabat, 1972). Lorsque la compensation des effets dispersifs et non-linéaires est parfaite, l'impulsion solitonique se propage de manière invariante ; c'est le soliton d'ordre 1. Les solitons d'ordre supérieur montre une compensation périodique de ces effets. Il s'ensuit que l'impulsion se déforme périodiquement le long de la propagation. Des solutions ont également été trouvées lorsque différents effets sont ajoutés à l'équation, comme un terme de gain par exemple (Bélanger *et al.*, 1989).

Une autre solution analytique découverte plus récemment (Anderson *et al.*, 1993a) est l'impulsion parabolique qui est une solution asymptotique de l'ESNL lorsque les effets de la dispersion et la non-linéarité s'additionnent au lieu de se compenser. Ce cas limite survient lorsque la non-linéarité est beaucoup plus grande que la dispersion ou encore quand un terme de gain est ajouté à l'ESNL. L'impulsion parabolique a l'importante caractéristique qu'elle ne subit pas de rupture du front d'onde (*wave-breaking*) lors de la propagation. Lorsque les impulsions se propagent dans les milieux dispersifs et/ou non-linéaires, différentes fréquences se décalent dans le temps et/ou sont créées. S'il advient que les fréquences se décalent plus rapidement que d'autres,

l'enveloppe de l'impulsion se brise et présente des oscillations (Tomlinson *et al.*, 1985). Ce phénomène se produit lorsque la dérivée de la phase de l'impulsion n'est plus une fonction monotone (Anderson *et al.*, 1992). Puisque la phase induite par les effets non-linéaires est proportionnelle à l'enveloppe, une enveloppe parabolique, la dérivée de la phase est linéaire, donc monotone.

L'impulsion parabolique est un cas particulier de solutions auto-similaires de l'ESNL. Les solutions auto-similaires sont des solutions qui conservent toujours la même forme lors de la propagation bien que leur phase, leur amplitude et leur durée puissent changer. Le soliton d'ordre 1 est une solution auto-similaire puisque sa forme ne change pas lors de la propagation. L'impulsion parabolique est une solution auto-similaire asymptotique ; elle ne survient que pour de grandes distances de propagation, lorsque la dispersion est présente mais négligeable par rapport à la non-linéarité ou en présence de gain (Fermann, 2000), (Kruglov *et al.*, 2000). Pour en savoir plus sur la convergence d'impulsions paraboliques vers une solution auto-similaire, veuillez voir (Hirooka et Nakazawa, 2004), (Wabnitz, 2007) et (Wabnitz et Finot, 2008). Les impulsions auto-similaires forment une classe de solutions de l'ESNL ; la décomposition auto-similaire s'applique à d'autres formes d'impulsions lors de la propagation, Un traitement en détail dans le régime de dispersion normale est disponible pour des impulsions super-gaussiennes (Forest *et al.*, 1999), des impulsions Hermite-gaussienne (Chen, 2005b) et des impulsions sécantes hyperboliques (Chen, 2005a). Notons aussi que des solutions paraboliques ont été trouvées dans le cas où la dispersion ou la non-linéarité changent de manière arbitraire le long de la propagation (Kruglov *et al.*, 2004), (Kruglov et Harvey, 2006) ; dans ce cas les paramètres de l'impulsion dépendent directement de ceux du milieu de propagation. Un traitement général des solutions auto-similaires peut être trouvé dans (Kruglov, 2003) et (Kruglov, 2005). Finalement, les solutions auto-similaires se retrouvent également dans le cas spatial où le profil des faisceaux est parabolique (Chang, 2005), (Ponomarenko, 2006), (Ponomarenko, 2010). Un résumé de la propagation des impulsions auto-similaires est disponible dans (Dudley *et al.*, 2007).

Toutes ces solutions forment un ensemble de solutions exactes de l'ESNL dans des conditions très particulières. Elles ne décrivent cependant pas la propagation d'une impulsion donnée dans des conditions générales de propagation ou même la propagation d'une impulsion de forme quelconque dans un milieu spécifique. Pour y arriver, il faut avoir recours à des méthodes approximatives où la forme de l'impulsion

n'intervient qu'indirectement. Une de ses approches est d'utiliser la méthode variationnelle Rayleigh-Ritz (Anderson *et al.*, 2001). Elle consiste dans un premier temps à choisir l'ESNL comme étant une équation d'Euler-Lagrange et d'en déterminer le lagrangien. Ensuite, une forme de solutions, ou «ansatz», est posée pour modéliser le type de solutions recherchées, par exemple une impulsion gaussienne avec une phase quadratique ou solitonique (Anderson *et al.*, 1988). Puis, un calcul variationnel est effectué sur le lagrangien par rapport aux paramètres de l'ansatz afin de déterminer les équations décrivant leur évolution (Anderson, 1983). Finalement, il reste à résoudre ces équations pour obtenir l'évolution des paramètres. La méthode a ses avantages et ses inconvénients. Lorsqu'il est possible de déterminer le lagrangien, elle permet d'ajouter différents termes à l'ESNL (par exemple un terme de gain/perte) et de trouver une solution (Anderson, 1988). La méthode peut même être utilisée pour résoudre l'ESNL incluant la diffraction du champ transverse (Desaix *et al.*, 1991). Elle permet aussi de considérer des paramètres dépendants de la distance de propagation (Andalib *et al.*, 2008) ainsi que de permettre une approche par perturbation (Malomed, 1997). Toutefois, il faut toutefois être en mesure de déterminer un lagrangien dont l'équation d'Euler-Lagrange soit l'équation de propagation, ce qui est relativement facile dans le cas de l'ESNL, mais pas nécessairement le cas dans le cas des lasers. De plus, il faut supposer une forme d'impulsion de l'ansatz pour résoudre, ce qui, dans le cas des lasers, présuppose de connaître la solution avant de résoudre. De plus, même si des équations décrivant la propagation des paramètres de l'ansatz sont trouvées, il faut encore être capable de les résoudre, ou se résoudre à trouver des solutions sous des formes de séries (Brandt-Pearce *et al.*, 1999). Notons finalement, que cette méthode est algébriquement compliquée, ce qui rend son application de manière universelle difficile.

La méthode variationnelle fait une approximation sur la forme de la solution à travers l'ansatz, ce qui permet de trouver une solution approximative. Une autre façon de procéder est de faire une moyenne pondérée de la forme de la solution ; c'est la méthode des moments. Au lieu de faire propager une impulsion donnée, les équations décrivant l'évolution des moments de cette impulsion sont dérivées à partir de l'ESNL et ensuite résolues. Par exemple, en ne tenant compte que de la portion dispersive de l'ESNL, il est possible d'obtenir l'évolution des moments d'impulsions de forme arbitraire, c'est-à-dire en ne supposant rien sur la forme de l'impulsion (Anderson et Lisak, 1986). Comme nous l'avons vu plus haut, la solution analytique

dans le cas purement dispersif n'existe que pour l'impulsion gaussienne. Ainsi, le fait de faire une moyenne par les moments est une approximation suffisante pour résoudre le cas purement dispersif. La propagation est décrite dans ce cas seulement en termes des moments d'ordre 1 et d'ordre 2. Les moments d'ordre 1 représentent les valeurs moyennes temporelles (le délai par rapport au temps d'origine) et spectrales (la fréquence de la porteuse). Les moments d'ordre 2 représentent les variances de l'impulsion ; la variance temporelle, la variance spectrale et la variance mixte temps-fréquence qui est la covariance de l'impulsion (Cohen, 1994) et est proportionnelle à la phase. Il faut cependant connaître les moments initiaux pour résoudre dans un cas pratique, ces derniers pouvant être calculés à partir de l'impulsion initiale. Une application similaire des moments a été faite sur les systèmes diffractants plutôt que dispersifs, ce qui donne des résultats analogues (Bélanger, 1991). Dans ce cas, la relation temps-fréquence est remplacée par la relation position-nombre d'onde. Cette technique peut être généralisée aux ordres supérieures de dispersion (Anderson, 1987) ou de diffraction (Weber, 1992), (Martínez-Herrero *et al.*, 1992). Dans ce cas, il faut inclure les moments d'ordre supérieur représentant indirectement la forme de l'impulsion (Martínez-Herrero *et al.*, 1995), (Martínez *et al.*, 1997), ce qui permet de décrire les aberrations par les moments (Ji et Lü, 2003).

Lorsque la non-linéarité est ajoutée, il est plus difficile d'obtenir des solutions générales ne dépendant pas de la forme de l'impulsion ; des suppositions doivent être faites. Par exemple, en supposant seulement que l'impulsion est un créneau, il est possible de dériver une expression relativement précise à basse puissance (Marcuse, 1992). La généralité peut toutefois être conservée au prix d'obtenir un système d'équations n'ayant pas de solutions analytiques. Dans ce cas, il est possible d'obtenir une solution approximative sous forme d'une série de Taylor qui est très précise sur de courtes distances (Bélanger et Bélanger, 1995), (Bélanger, 1996). D'autres stratégies peuvent être utilisées comme de procéder en alternant des propagations linéaire et non-linéaire pour lesquelles la propagation analytique est calculable (Potasek *et al.*, 1986), (Marcuse *et al.*, 1999) ce qui ne donne de bons résultats que pour de très courtes distances. Une autre stratégie consiste à utiliser les quantités invariantes du système, telle que l'énergie. Ces quantités étant invariantes, elles peuvent être utilisées pour réduire le nombre d'équations à résoudre afin de déterminer la propagation des impulsions, ce qui est particulièrement utile dans les systèmes à plusieurs dimensions (Freeman et Saleh, 1988), (Martínez-Herrero et Mejías, 1997), (Dodonov et Man'ko, 2000).

En utilisant les invariants et en choisissant un ansatz pour la solution, il est possible de déduire des équations de propagation pour les paramètres de l'ansatz (Tsoy et de Sterke, 2006). Ce faisant, l'évolution du système est décrit à travers les paramètres de l'ansatz au lieu des moments ; les deux sont reliés directement en calculant les moments de l'ansatz. Il est possible de considérer une variété de perturbations à l'ESNL (Maïmistov, 1993) ou encore des termes asymétriques (Beech-Brandt et Smyth, 2001). Notons finalement qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser les invariants pour résoudre. Le seul fait d'utiliser un ansatz permet d'éliminer tous les moments et de les remplacer par les paramètres. Dans ce cas, il faut bien choisir les moments utilisés pour décrire les paramètres de l'ansatz. Le choix des moments change évidemment la forme des équations décrivant l'évolution des paramètres (Santhanam et Agrawal, 2003). Il est généralement préférable d'utiliser les moments d'ordre le plus bas possible. Il est ainsi possible d'inclure des termes non-linéaires d'ordre supérieur dans l'ESNL (Chen *et al.*, 2010). Ce faisant toutefois, il est rare de pouvoir trouver des solutions analytiques autres que sous forme de séries de Taylor.

Notons finalement que les moments ont été utilisés avec succès dans d'autres cas, tels que la gestion de la dispersion lors de la propagation solitonique (Bélanger et Paré, 1999), la mesure de gigue non-linéaire (McKinstrie *et al.*, 2002), ainsi que la mesure de la cohérence des faisceaux (Du *et al.*, 1992), (Yang et Fan, 1999). Les moments d'ordre supérieur ont également été utilisés pour déterminer la rupture du front d'onde lors de la propagation (Rosenberg *et al.*, 2007). En résumé, la méthode des moments a l'avantage de pouvoir décrire la propagation sans rien supposer sur la forme de la solution dans le cas purement dispersif. En ajoutant les termes non-linéaires, il faut toutefois poser un ansatz pour obtenir des équations de propagation sur les moments ou les paramètres de l'ansatz, qui peuvent ou non être résolues analytiquement. Dans ce dernier cas, les solutions peuvent être obtenues pour de courtes distances de propagation ou de faibles non-linéarités sous forme de séries de Taylor. En ce sens, la méthode variationnelle et la méthode des moments se ressemblent. Les deux méthodes permettent également d'inclure des perturbations à l'ESNL pour résoudre. Toutefois, la méthode des moments permet d'utiliser les quantités invariantes du système pour en réduire la complexité. De plus, les calculs de la méthode des moments sont beaucoup moins lourds que ceux de la méthode variationnelle. Finalement, la possibilité de s'affranchir d'un ansatz s'avère intéressant pour l'étude des lasers où la forme de l'impulsion n'est pas connue a priori.

2.2 Les lasers et l'équation de Ginzburg-Landau

Dans cette thèse, nous explorons seulement une facette de la modélisation des lasers à impulsions, soient les équations maîtresses. La façon la plus précise de modéliser la propagation du champ de l'impulsion est de décrire sa modification séquentiellement à travers chaque composant optique présent dans le laser. Cette méthode implique généralement de lourds calculs qui ne donnent généralement pas de solutions analytiques. Une façon de procéder est de linéariser la propagation du champ à travers chaque composant sous l'hypothèse que le champ se déforme peu lors de sa propagation en régime stationnaire (Haus, 1975a), (Martinez *et al.*, 1984). L'équation ainsi obtenue décrit un milieu unique de propagation possédant toutes les caractéristiques des composants présents dans le laser ; c'est l'équation maîtresse. Cette équation différentielle décrit le changement que l'impulsion subit à chaque cycle dans la cavité ; lorsque la variation est nulle (à une phase près), nous trouvons le régime stationnaire. On distingue différents types d'équations maîtresses selon le type de laser. Par exemple, l'équation maîtresse pour les lasers solitoniques à synchronisation passive des modes (Haus *et al.*, 1975), (Haus, 1975b) est différente de l'équation maîtresse avec une synchronisation active des modes. Une revue des types d'équations maîtresses peut être trouvée dans (Nelson *et al.*, 1997) et (Haus, 2000).

D'une façon générale, les composants les plus souvent retrouvés dans les lasers sont : un milieu de gain, des pertes, un élément dispersif, un élément filtrant dans le domaine des fréquences, un élément non-linéaire, un absorbant saturable avec la puissance, une modulation de phase et un filtre temporel (un modulateur par exemple). Notons que dans cette thèse nous n'étudions que les composants ayant des effets symétriques sur les impulsions, ce qui exclut, entre autres, la modulation en fréquence de la porteuse (Siegman et Kuizenga, 1970), les dispersions d'ordre supérieur ainsi que le gain Raman (Spence et Mildren, 2007). Une équation maîtresse particulière a été étudiée abondamment, celle où les deux derniers termes sont absents (aucune phase temporelle ni filtrage temporel) ; c'est l'équation de Ginzburg-Landau (Hakim et Rappel, 1992). Le laser qu'elle représente est le laser solitonique (Haus *et al.*, 1994) où la dispersion de la fibre est compensée par sa non-linéarité, et le filtrage spectral du milieu de gain par un absorbant saturable (Haus *et al.*, 1991). Les impulsions/solutions dans ce cas sont des solitons montrant différents niveau de «chirp» selon les paramètres de la cavité. Le fait d'avoir une solution analytique nous permet,

entre autres, de faire des études de stabilité des impulsions (Chen *et al.*, 1994).

L'intérêt suscité vient de la brièveté des impulsions pouvant être générées pouvant atteindre de quelques centaines de femtosecondes à quelques dizaines de femtosecondes quand la dispersion est gérée dans la cavité (Haus *et al.*, 1995). Dans ce dernier cas, la dispersion dans la cavité n'est pas uniforme ; des sections sont normales et d'autres anormales. Par conséquent, l'impulsion s'étire et se recomprime dans la cavité d'où l'appellation «stretched pulse». L'avantage de cette configuration est d'éliminer la condition de résonance de l'énergie dissipée par l'impulsion lors de sa propagation dans la cavité (Elgin et Kelly, 1993). Il faut, dans ce cas, avoir recours à une équation maîtresse quelque peu modifiée pour tenir compte de la grande fluctuation de l'impulsion lors de son cycle dans la cavité, fluctuation qui est difficilement considérée par l'effet moyen de la linéarisation.

L'équation de Ginzburg-Landau néglige cependant plusieurs effets se retrouvant dans les lasers : entre autres, les dispersions d'ordre supérieur, le décalage Raman auto-induit, ainsi que des termes de non-linéarité d'ordre supérieur (Bélanger, 2005). Des solutions analytiques sont difficilement trouvées dans le cas où tous ces effets sont présents et il faut recourir aux solutions numériques (Kalashnikov *et al.*, 2005). Toutefois, des solutions analytiques intéressantes peuvent être trouvées en ne considérant que certains termes (Moores, 1993). Par exemple, en ne considérant qu'un ordre de développement supplémentaire sur l'absorbant saturable et la non-linéarité (une dépendance avec le carré de la puissance), nous obtenons l'équation de Ginzburg-Landau quintique. Les solutions numériques de cette équation peuvent être plutôt excentriques, donnant des comportements pouvant être chaotiques, explosifs, palpitants ou rampants (Akhmediev *et al.*, 2001). Cette équation admet cependant différentes solutions analytiques sous la forme de solitons qualifiés de «dissipatifs» (Akhmediev *et al.*, 1996). Certaines solutions s'avèrent avoir un intérêt pratique, par exemple un soliton dissipatif en dispersion normale ayant une amplitude fixe et s'élargissant avec la puissance de pompage (Soto-Crespo *et al.*, 1997). Ce type d'impulsion permet d'atteindre expérimentalement de hautes énergies par impulsions sans atteindre le seuil de dommage des matériaux (par exemple, la silice) ni présenter une rupture du front d'onde (Liu, 2010).

Parfois, ce sont les simulations numériques qui précèdent l'expérience (Ilday *et al.*, 2003b). Ce fût le cas des lasers à impulsions auto-similaires ou lasers à similaritons (Ilday *et al.*, 2003a). Ces lasers ont la propriété de générer des impulsions pouvant

atteindre plusieurs nanojoules (Chong *et al.*, 2007). À l’instar des impulsions auto-similaires, les similaritons sont résistants à la rupture du front d’onde (Ilday, 2004). Il est même possible de démontrer l’existence de ce type d’impulsions à partir de l’équation de Ginzburg-Landau (Bale *et al.*, 2008) (Bale, 2009). Ces lasers ont la particularité d’émettre des impulsions «chirpées», c’est-à-dire dont le contenu spectral est étalé dans le temps. En remettant ce contenu spectral en phase, des impulsions de quelques femtosecondes peuvent être obtenues (Ruehl *et al.*, 2005). Une autre caractéristique de ce type de laser est que la forme et la largeur de l’impulsion changent lors de sa propagation (Ruehl *et al.*, 2006). Différentes équations maîtresses peuvent être utilisées pour modéliser ce type de laser. L’équation de Ginzburg-Landau étendue en incluant l’auto-raïdissement et le décalage Raman donne de très bons résultats en ce qui concerne la largeur des impulsions (Bélanger, 2006). Une autre approche est d’ajouter des termes d’absorption saturable. Dans ce cas, la solution obtenue diffère de la sécante hyperbolique et se rapproche des formes d’impulsion et de spectre observées expérimentalement (Renninger *et al.*, 2008).

Il est également possible d’avoir recours aux moments pour résoudre l’équation de Ginzburg-Landau. Une façon de procéder est de considérer les équations décrivant l’évolution des moments à travers l’équation de Ginzburg-Landau. Ces équations font appel à des moments d’ordre plus ou moins élevé qui sont éliminés en posant un *ansatz*, le plus souvent une sécante hyperbolique ou une gaussienne. Les équations sont ensuite réécrites en terme des paramètres de l’*ansatz* (Tsoy et Akhmediev, 2005). Les équations ainsi écrites ne peuvent généralement pas être résolues analytiquement mais elles peuvent être résolues numériquement (Mahdi *et al.*, 2010) et ce, beaucoup plus rapidement qu’en propageant numériquement le champ électrique (Usechak et Agrawal, 2005b). Des solutions stationnaires peuvent toutefois être obtenues, puisque, dans ce cas, le système d’équations différentielles devient un simple système d’équations algébriques (non-linéaires!). Il est alors possible de faire une analyse de points fixes sur ce nouveau système (Zhuravlev et Ostrovskaya, 2004) afin de déterminer les zones de stabilité de l’équation. L’avantage de cette technique est qu’elle permet de considérer des effets qui ne donnent pas de solutions analytiques comme la modulation en fréquence (Usechak et Agrawal, 2005a) et d’obtenir des résultats. Toutefois, la solution obtenue est d’autant plus précise que l’*ansatz* utilisé s’approche de la solution exacte, qui est, bien sûr, inconnue.

Notons finalement que la grande majorité des lasers étudiés par les équations

maîtresses s'articulent autour des lasers solitoniques, ou plus récemment auto-similaires qui utilisent tous deux une synchronisation passive des modes. Ils sont plus faciles à étudier car les solutions en sécantes hyperboliques de l'équation de Ginzburg-Landau proviennent d'un équilibre entre, d'une part la dispersion et la non-linéarité (dans le laser solitonique) mais aussi, d'autre part, entre l'absorption saturable et l'étendue finie du gain. Quand la synchronisation est active, le cas est différent. Pour obtenir une solution analytique, il faut soit négliger la non-linéarité et la dispersion (Siegman et Kuizenga, 1974) soit au moins la non-linéarité (Tamura et Nakazawa, 1996). Une autre approche consiste à supposer que la dispersion est normale et que le laser opère dans un régime solitonique stabilisé par la modulation active (Marti-Panameno *et al.*, 1994), (Kärtner *et al.*, 1995).

Notons finalement que les principales lacunes de ces méthodes sont d'une part qu'elles ne peuvent traiter que des cas très particuliers où les effets considérés permettent de trouver une solution analytique. Quand elles utilisent des méthodes d'approximations, comme la méthode des moments, il faut spécifier une forme d'impulsion représentant suffisamment bien le résultat final pour que la méthode soit suffisamment précise. Ce résultat n'est évidemment pas connu avant d'entreprendre le calcul, à moins de le vérifier numériquement (ce qui réduit la pertinence d'avoir une solution analytique en premier lieu). Finalement, n'oublions pas que l'approximation à la base des équations maîtresses est que l'impulsion se déforme peu lors de son parcours dans la cavité, ce qui n'est pas vrai dans bien des cas dont, entre autres, le laser à dispersion gérée et le laser auto-similaire.

Chapitre 3

Les moments

La méthode des moments permet de déterminer certaines propriétés d'une distribution telles que sa position, sa largeur, son asymétrie. L'ensemble du travail de cette thèse repose sur les moments ; au lieu de faire les calculs sur le champ électrique d'une impulsion, nous les faisons sur les moments de cette impulsion. Il est donc essentiel de bien définir les moments, de bien comprendre ce qu'ils représentent et de bien en connaître les limites. Dans ce chapitre, nous définissons d'abord trois catégories de moments et en expliquons la signification mathématique et la signification physique. Certaines propriétés intéressantes sont également présentées dans chacune de ces catégories. Le chapitre se termine par une évaluation des limites de la modélisation d'une distribution par ses moments.

3.1 Moments d'une distribution réelle

Les moments d'une distribution réelle sont principalement utilisés dans la théorie des probabilités pour caractériser les densités de probabilité. Supposons que nous ayons une distribution réelle $P(t)$ positive, fonction de la variable réelle t . Les *moments bruts* d'ordre j de la distribution sont définis par

$$\langle t^j \rangle = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t^j P(t) dt \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) dt \quad (3.1)$$

si l'intégrale converge. Les moments sont normalisés par rapport à l'aire sous la courbe de $P(t)$ (pour les densités de probabilité $E = 1$). Le moment $\langle t^j \rangle$ représente donc une moyenne pondérée de la distribution $P(t)$ par la fonction de poids t^j . Le moment $\langle t \rangle$ donne la position du «centre de masse» de la distribution $P(t)$. Si la distribution est symétrique, $\langle t \rangle$ donne simplement la position du centre de la distribution. Pour mieux comprendre ce que représentent les moments d'ordre supérieur, il est éclairant d'exprimer la distribution comme la somme d'une distribution symétrique $P_S(t)$ et

antisymétrique $P_A(t)$ (supposées centrées en $t = 0$).

$$\langle t^j \rangle = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t^j [P_S(t) + P_A(t)] dt \quad (3.2)$$

Il apparaît alors que les moments pairs (pour lesquels j est pair) ne dépendent que de la partie symétrique de la distribution. Les moments impairs (pour lesquels j est impair) ne dépendent que de sa partie antisymétrique. Puisque nous supposons que la distribution $P(t)$ est réelle et positive, il s'ensuit que $|P_A(t)| < |P_S(t)|$. Considérons alors séparément les moments pairs et impairs.

3.1.1 Moments pairs

Considérons le cas plus général où la distribution P_S n'est pas centrée en $t = 0$. Il est plus simple alors d'analyser les moments s'ils sont centrés par rapport au centre de la distribution $\langle t \rangle$; les *moments centrés* sont ainsi obtenus.

$$\langle T^j \rangle = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} T^j P(t) dt \quad T = t - \langle t \rangle \quad (3.3)$$

Les moments $\langle T^j \rangle$ sont les moments de la distribution centrée $P(T)$. Les moments $\langle T^j \rangle$ pairs représentent la moyenne de $P_S(t)$ pondérée par T^j lorsque j est pair comme le montre la figure 3.1. Chacun de ces moments est une mesure indirecte de la largeur de la distribution $P_S(t)$; par exemple $\langle T^2 \rangle$ est la variance de la distribution. Ces largeurs peuvent être comparées entre elles en extrayant la racine j ième (les moments pairs étant tous positifs),

$$\Delta T_j = \sqrt[j]{\langle T^j \rangle} \quad (3.4)$$

où ΔT_j est une mesure de la demi-largeur de la distribution $P_S(T)$, s'apparentant à l'écart type (nous retrouvons l'écart type lorsque $j = 2$). Ces largeurs diffèrent entre elles par un facteur qui dépend de la forme de la distribution. En effet, en regardant attentivement la figure 3.1, nous voyons que l'importance accordée aux ailes de la distribution augmente avec j . Inversement, le centre de la distribution pèse plus lourd dans le calcul de la largeur lorsque j est faible. Notons toutefois que la valeur du centre de la distribution ($T = 0$) ne compte pas dans le calcul de la largeur puisque la fonction de poids T^j vaut zéro. La largeur de la distribution $P(T)$ est la

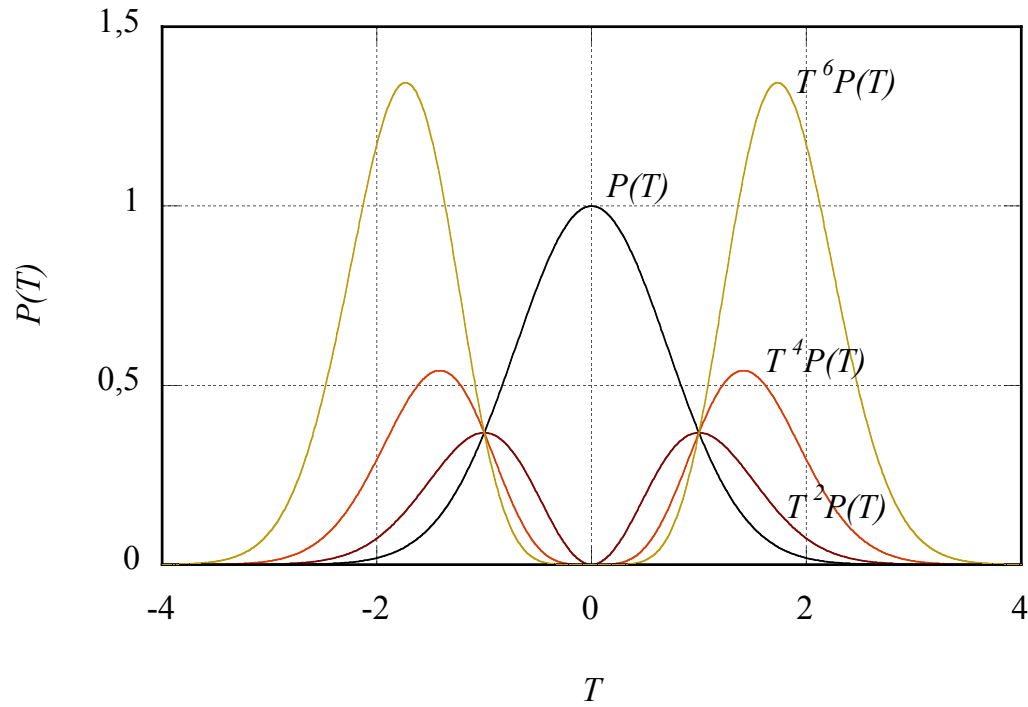


FIGURE 3.1 Pondération de la distribution par la fonction de poids T^j . La distribution $P(T)$ est une gaussienne. Il apparaît que les ailes de la distribution prennent une importance d'autant plus grande par rapport au centre que j est grand.

même que celle de $P_S(T)$, puisque les moments pairs sont nuls pour $P_A(T)$.

Les moments $\langle T^j \rangle$ nous renseignent donc sur la forme de la distribution ; cette information est toutefois indirecte dû à l'effet moyennant de l'intégrale. Toutefois, en comparant les différents moments entre eux, il est possible d'extraire une certaine information sur la forme de la distribution. Par exemple, l'aplatissement de la distribution ou *kurtosis* est défini en comparant les deux premiers moments pairs.

$$\kappa_t = \frac{\langle T^4 \rangle}{\langle T^2 \rangle^2} \quad (3.5)$$

Une façon générale d'extraire la forme de la distribution est d'utiliser les *moments standardisés*, qui sont obtenus en normalisant le temps T par rapport à l'écart type

$$\Delta T_2 = \sqrt{\langle T^2 \rangle}.$$

$$\langle \theta^j \rangle = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} \theta^j P(t) dt \quad \theta = \frac{t - \langle t \rangle}{\sqrt{\langle T^2 \rangle}} = \frac{T}{\Delta T_2} \quad (3.6)$$

Les moments standardisés sont donc sans dimension ; l'information qu'ils représentent se rapporte d'autant plus aux ailes de la distribution que j est grand. Il s'ensuit de la définition que $\langle \theta^2 \rangle = 1$ et $\langle \theta^4 \rangle = \kappa_t$. Notons que de reconstruire la distribution à partir des moments est un problème complexe que nous n'envisageons pas dans cette thèse.

3.1.2 Moments impairs

Les moments impairs représentent la moyenne de $P_A(t)$ pondérée par t^j lorsque j est impair. Puisque $P_S(t)$ n'intervient pas dans le calcul des moments impairs, ces derniers ne représentent donc que la largeur de la partie asymétrique de la distribution $P(t)$; en d'autres termes ils caractérisent l'asymétrie de la distribution. Contrairement aux moments pairs, les moments impairs ne sont pas nécessairement positifs ; le signe du moment indique le sens de l'asymétrie. Le moment d'ordre 1 représentant le centre de masse, son signe indique le sens du décalage de la distribution. Le signe des moments d'ordre supérieur indique lequel des côtés de la distribution $P_A(t)$ est le plus raide. Un signe positif indique que le côté gauche (vers $t < 0$) est plus raide que le côté droit (vers $t > 0$) ; un signe négatif indique le contraire. Les moments standardisés décrivent la partie asymétrique de la forme de l'impulsion.

3.2 Moments d'une distribution complexe

Les moments d'une distribution réelle ne sont cependant pas suffisants pour l'analyse qui suit puisque nous nous étudions principalement l'évolution de champs complexes. Il nous faut donc un ensemble de moments pouvant décrire les distributions complexes. Dans cette section, nous présentons un formalisme des moments d'une distribution complexe qui forme la base de l'analyse qui suit dans cette thèse. Le formalisme que nous utilisons est emprunter à la mécanique quantique. Supposons que nous ayons une distribution complexe $A(t)$ qui est une fonction du temps t dont

nous pouvons calculer la transformée de Fourier $\tilde{A}(\omega)$ tel que

$$\tilde{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \exp(i\omega t) dt \quad (3.7)$$

Les moments de cette distribution peuvent être alors décrits à l'aide d'opérateur de temps t et de pulsation $\omega = i \frac{d}{dt}$. Les *moments bruts complexes* d'ordre $n = j + k$ sont définis par

$$\langle t^j \omega^k \rangle = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} A^*(t) t^j \left(i \frac{d}{dt} \right)^k A(t) dt \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} |A(t)|^2 dt \quad (3.8)$$

et sont normalisés par E (pour une fonction d'onde, $E = 1$). Cette définition est analogue aux opérateurs de mécanique quantique ; t est analogue à l'opérateur de position, ω à la quantité de mouvement et le champ A à la fonction d'onde. Notons que nous avons utilisé le temps et les fréquences pour décrire la distribution afin d'être cohérents avec les chapitres suivants. Ces moments ne décrivent toutefois pas la distribution de manière utile puisque leur valeur dépend de la position de la distribution. Pour interpréter les moments plus facilement, nous pouvons les centrer autour de la valeur moyenne. En centrant les moments autour de $\langle t \rangle$ et de $\langle \omega \rangle$, les *moments complexes centrés* sont ainsi obtenus.

$$\langle T^j \Omega^k \rangle = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} A^*(t) (t - \langle t \rangle)^j \left(i \frac{d}{dt} - \langle \omega \rangle \right)^k A(t) dt \quad (3.9)$$

Bien que ces moments soient complexes, il est possible de démontrer que leur partie réelle est suffisante pour décrire la distribution ; leur partie imaginaire pouvant être exprimée au moyen de la partie réelle de moments d'ordre inférieur (voir annexe A). Nous ne considérons donc que la partie réelle de ces moments dans ce qui suit. Les moments obtenus avec l'éq. (3.9) peuvent être séparés en deux catégories : les moments purs, pouvant être uniquement par l'opérateur temps ($k = 0$) ou l'opérateur pulsation ($j = 0$), et les moments mixtes, devant être décrits à l'aide des deux opérateurs. Considérons séparément chacun de ces cas.

3.2.1 Moments purs

Les moments purs sont toujours réels ; c'est évident lorsque $k = 0$ car nous nous retrouvons avec les moments $\langle t^j \rangle$ de la section 3.1.1 avec $P(t) = |A(t)|^2$. Dans le cas où $j = 0$, l'éq. (3.9) définit dans le temps les moments $\langle \omega^k \rangle$ qui décrivent la distribution dans le domaine spectral et il n'est pas évident que ces moments soient toujours réels. Pour s'en convaincre, il suffit de réécrire la définition des moments dans le domaine spectral au lieu du domaine temporel.

$$\langle t^j \omega^k \rangle = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(\omega) \omega^k \left(i \frac{d}{d\omega} \right)^j \tilde{A}^*(\omega) d\omega \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{A}(\omega)|^2 d\omega \quad (3.10)$$

Il devient alors clair que, lorsque $j = 0$, les moments $\langle \omega^k \rangle$ sont réels. La signification de ces moments est la même que dans la section précédente, sauf qu'il y a maintenant deux groupes de moments, $\langle t^j \rangle$ et $\langle \omega^k \rangle$, décrivant la norme de la distribution respectivement dans le domaine temporel et dans le domaine spectral.

3.2.2 Moments mixtes

Les moments mixtes contiennent de l'information appartenant à la fois au domaine temporel et spectral. Ils décrivent donc des covariances. Alors que les moments purs décrivent la norme de la distribution, temporelle et spectrale, les moments mixtes décrivent sa phase temporelle et spectrale (qui ne sont évidemment pas indépendantes). Pour s'en convaincre, il suffit d'exprimer la distribution en termes de sa norme et de sa phase $A(t) = |A(t)| \exp[i\phi(t)]$ et de considérer le cas où $k = 1$.

$$\langle t^j \omega \rangle_r = -\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} |A(t)|^2 t^j \frac{d}{dt} \phi(t) dt \quad (3.11)$$

L'indice r indique que seulement la partie réelle du moment est considérée. Le moment $\langle t^j \omega \rangle_r$ dépend directement de la fréquence instantanée, définie par

$$\omega_{\text{inst}}(t) = -\frac{d}{dt} \phi(t), \quad (3.12)$$

et représente donc dans quelle proportion la fréquence instantanée varie selon t^j . Nous définissons également le *chirp* d'une impulsion comme la fréquence instantanée à laquelle la porteuse $\langle \omega \rangle$ (qui est également $\omega_{\text{inst}}(\langle t \rangle)$ pour les distributions symétriques)

a été soustraite. En procédant de manière similaire dans le domaine spectral, le moment $\langle t\omega^k \rangle_r$ est défini par

$$\langle t\omega^k \rangle_r = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{A}(\omega)|^2 \omega^k \frac{d}{d\omega} \Phi(\omega) d\omega \quad (3.13)$$

où $\Phi(\omega)$ est la phase de $\tilde{A}(\omega)$. Ce moment caractérise le *délai fréquentiel* t_{freq} tel que

$$t_{\text{freq}}(\omega) = \frac{d}{d\omega} \Phi(\omega). \quad (3.14)$$

Alors que la fréquence instantanée indique la fréquence de la distribution à un temps donné, le délai fréquentiel donne le délai auquel une fréquence donnée se retrouve. Le moment $\langle t\omega^k \rangle_r$ indique alors à quel point t_{freq} varie selon ω^k . Il est à noter que les moments donnent des corrélations moyennes, c'est-à-dire qu'il ne faut pas interpréter, par exemple, le moment $\langle t^j \omega \rangle_r$ comme étant proportionnel au «*j*ième» coefficient de la série de Taylor de ω_{inst} . Il faut plutôt le voir comme étant proportionnel à la courbe de tendance t^j décrivant le mieux ω_{inst} .

Dans le cas général où $j \neq 1$ et $k \neq 1$, les moments mixtes décrivent comment la fréquence instantanée varie avec $t^{j/k}$ ou encore comment le délai fréquentiel varie en $\omega^{k/j}$. Toutefois, lorsque $n = j + k$ est pair et supérieur à 2, le moment $\langle t^j \omega^k \rangle_r$ décrit en plus indirectement la norme de la distribution. Par exemple, le moment $\langle t^2 \omega^2 \rangle_r$ décrit non seulement la phase de manière similaire à $\langle t\omega \rangle_r$ mais contient également les opérateurs t^2 et ω^2 qui décrivent la norme de la distribution.

La symétrie des moments mixtes est légèrement différente des moments purs. Les moments purs d'ordre pair caractérisent la partie symétrique de la norme et les moments impairs la partie asymétrique. Les moments mixtes d'ordre pair sont non-nuls pour une distribution symétrique avec une phase symétrique ou une distribution asymétrique avec une phase asymétrique. Les moments mixtes d'ordre impair ont des contributions provenant de la partie symétrique de la norme pondérée par la partie asymétrique de la phase ainsi que de la partie asymétrique de la norme pondérée par la partie symétrique de la phase.

Notons finalement que bien que les moments purs décrivent la norme de la distribution, ils décrivent également indirectement la phase ; la norme de la distribution dans le domaine temporel dépend de la phase dans le domaine spectral et vice-versa.

3.3 Moments non-linéaires

Les moments présentés depuis le début du chapitre pondèrent la distribution avec le monôme t^j et/ou la dérivée $(i \frac{d}{dt})^k$. Bien qu'il existe une infinité de fonctions avec lesquelles la distribution puisse être pondérée, il est intéressant de considérer la distribution elle-même par le biais de l'opérateur $P = |A(t)|^2$. Il est alors possible de définir les *moments bruts non-linéaires* qui sont également complexes.

$$\langle P^p t^j \omega^k \rangle = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} A^*(t) |A(t)|^{2p} t^j i^k \frac{d^k}{dt^k} A(t) dt \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} |A(t)|^2 dt \quad (3.15)$$

Les moments non-linéaires sont différents des moment complexes à plusieurs niveaux. Premièrement, leur partie imaginaire ne peut pas être exprimée de manière générale au moyen de moments d'ordre inférieur. Deuxièmement, ils ne présentent pas de symétrie temps-fréquence, puisque l'opérateur P est défini dans le temps. La symétrie temps-fréquence vient du fait que les opérateurs t et ω sont conjugués. Finalement, ils n'obéissent pas aux relations de commutation décrites dans l'annexe A.

Il est difficile d'expliquer de façon générale ce que représentent ces moments puisque l'effet de l'opérateur P dépend explicitement de la forme de la distribution. Toutefois pour les distributions en forme de cloches, l'effet de l'opérateur P^p est de mettre plus de poids sur le centre de la distribution que sur les ailes et ce, d'autant plus que p est élevé. Ils ont donc l'effet contraire de l'opérateur t^j qui met un poids plus important sur les ailes. De plus, l'effet de l'opérateur est d'autant moins prononcé que la distribution se rapproche d'un créneau, pour lequel l'opérateur n'a aucun effet.

La partie imaginaire du moment non-linéaire doit être interprétée différemment de sa partie réelle. La partie réelle du moment conserve à peu près le même sens que le moment complexe équivalent. Par exemple, $\langle P\Omega^2 \rangle_r$ est proportionnel à la largeur de la norme de la distribution dans le domaine spectral, tout comme $\langle \Omega^2 \rangle$, mais elle est également proportionnelle à son amplitude. Toutefois, $\langle P\Omega^2 \rangle_i$ décrit la phase de la distribution. De façon générale, la partie imaginaire décrit la phase lorsque la partie réelle décrit la norme et vice-versa. Ceci est également vrai pour les moments complexes. Notons que les moments non-linéaires pour lesquels $k < 2$ ont une partie réelle pouvant être exprimée en terme de moments non-linéaire d'ordre inférieur.

3.4 Facteurs de forme

Nous avons vu que les moments, quel que soit leur ordre, dépendent indirectement de la forme de la distribution. En les comparant entre eux, il est possible d'extraire certaines informations sur la forme de l'impulsion. Le coefficient d'aplatissement a déjà été défini par l'Éq. (3.5) et peut être étendu aux moments complexes et non-linéaires.

$$\kappa_T = \frac{\langle T^4 \rangle}{\langle T^2 \rangle^2} \quad \kappa_\Omega = \frac{\langle \Omega^4 \rangle}{\langle \Omega^2 \rangle^2} \quad \kappa_P = \frac{\langle P^2 \rangle}{\langle P \rangle^2} \quad (3.16)$$

Plus κ_t est faible, plus la norme de la distribution temporelle est pointue ; κ_ω décrit de manière similaire la distribution dans le domaine spectral. Le facteur de forme κ_P décrit également l'aplatissement dans le domaine temporel de manière similaire à κ_t lorsque la distribution est en forme de cloche. Il est également possible de d'obtenir des facteurs de formes en utilisant des moments de natures différentes.

$$\kappa_{T\Omega} = \frac{\langle T^2 \Omega^2 \rangle_r}{\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle} \quad \kappa_{PT} = \frac{\langle PT^2 \rangle}{\langle P \rangle \langle T^2 \rangle} \quad \kappa_{P\Omega} = \frac{\langle P \Omega^2 \rangle_r}{\langle P \rangle \langle \Omega^2 \rangle} \quad (3.17)$$

Les facteurs de forme $\kappa_{t\omega}$ et $\kappa_{P\omega}$ sont définis à la fois dans le domaine temporel et le domaine spectral. L'asymétrie de la distribution peut être définie à l'aide des moments d'ordre impair.

$$s_T = \frac{\langle T^3 \rangle}{\langle T^2 \rangle^{\frac{3}{2}}} \quad s_\Omega = \frac{\langle \Omega^3 \rangle}{\langle \Omega^2 \rangle^{\frac{3}{2}}} \quad s_{PT} = \frac{\langle Pt \rangle}{\langle P \rangle \langle t \rangle} \quad s_{P\Omega} = \frac{\langle P\omega \rangle_r}{\langle P \rangle \langle \omega \rangle} \quad (3.18)$$

Il existe une infinité de paramètres de forme en utilisant les moments d'ordre supérieur. Nous n'avons présenté ici que quelques exemples faisant intervenir les moments complexes d'ordre $n \leq 4$ et les moments non-linéaire d'ordre $n \leq 2$. Pour mieux comprendre comment ces facteurs caractérisent la distribution, nous utilisons la *distribution de Pearson*.

3.4.1 Distribution de Pearson

Pour avoir une idée de ce que représentent les facteurs de forme, nous pourrions les calculer pour différentes distributions, ce qui serait relativement long. Ou si nous avons une distribution pouvant prendre différentes formes, il nous suffirait de

calculer les facteurs de forme de cette dernière. La distribution de Pearson (Pearson, 1916), (Craig, 1936) est une telle distribution réelle qui permet de décrire différentes formes de distributions. Alors que la distribution gaussienne est la meilleure approximation qu'on puisse faire d'une distribution connaissant seulement ses deux premiers moments (la moyenne et la variance), la distribution de Pearson est l'approximation utilisant les quatre premiers moments réels (l'asymétrie et l'aplatissement). Nous pouvons donc étudier facilement les facteurs de forme. Puisque la distribution de Pearson peut prendre différentes formes, elle nous sera utile pour approximer les moments afin de résoudre les équations de propagation et celles des lasers.

$$A_{\text{Prsn}}(t) = K \left(at^2 + d\sqrt{b}t + b \right)^{-\frac{1}{2a}} \exp \left[\frac{d + 2am}{\sqrt{4a - d^2}} \arctan \left(\frac{d + 2at/\sqrt{b}}{\sqrt{4a - d^2}} \right) \right] \quad (3.19)$$

Elle est alternativement décrite sous forme différentielle.

$$\frac{1}{A_{\text{Prsn}}(t)} \frac{d}{dt} A_{\text{Prsn}}(t) = \frac{m\sqrt{b} - t}{at^2 + d\sqrt{b}t + b} \quad (3.20)$$

La distribution de Pearson peut donc être vue comme le développement de Padé d'ordre (1,2) sur une échelle logarithmique de la dérivée de la distribution. Les paramètres a , d et m sont des paramètres réels sans dimension. Les paramètres K et b sont des paramètres réels et positifs ; K est une constante de normalisation alors que \sqrt{b} représente la largeur de la distribution et a les dimensions de t . Les paramètres a et d dictent la forme de la distribution ; l'aplatissement et l'asymétrie respectivement. Le paramètre m est le *mode*, ou valeur maximale, de la distribution où la dérivée est nulle. Pour s'en convaincre, il suffit de calculer les moments réels de la distribution $P(t) = A_{\text{Pearson}}^2(t)$, en supposant $\langle t \rangle = 0$ pour fin de simplicité.

$$\begin{aligned} \langle t \rangle &= \frac{d + 2m}{2(1 - a)} \sqrt{b} = 0 & \Rightarrow & & d &= -2m \\ \langle T^2 \rangle &= \frac{b}{2 - 3a} & s_t &= \frac{2m\sqrt{b}}{2a - 1} & \kappa_t &= \frac{3(2 - 3a)(1 - 2a) + 12m^2b}{(2 - 5a)(1 - 2a)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

La largeur de la distribution, $\langle T^2 \rangle$ est proportionnelle à b . L'asymétrie est proportionnelle à d (puisque $d = -2m$ quand $\langle t \rangle = 0$). Finalement κ_t est donnée par a . Pour que la distribution demeure intégrable, lorsque $a < 0$, il faut limiter la distribution à l'intervalle $r_1 \leq t \leq r_2$, où r_1 et r_2 sont les racines de $at^2 + d\sqrt{b}t + b$. La distribution

est nulle à l'extérieur de cet intervalle.

La distribution de Pearson permet de représenter plusieurs distributions de probabilité dont la distribution normale (gaussienne) ($a = 0$), beta, gamma et Student Leon-Garcia (1994). Elle peut également représenter entre autres les fonctions symétriques ($d = m = 0$) parabolique ($a = -1$), lorentzienne ($a = 1$) et créneau ($a = -b = -\infty$). Différentes distributions symétriques sont tracées à la figure 3.2 sur une échelle logarithmique. La sécante hyperbolique est représentée approximativement soit par $a = 1/3$, soit par $a \approx 0.29$ selon que la valeur soit obtenue par le développement en série de Padé de la sécante hyperbolique, ou par la conservation de l'énergie (c'est-à-dire en faisant en sorte que la distribution de Pearson et la sécante hyperbolique aient la même constante de normalisation). Cette dernière donne une meilleure approximation sur les ailes puisque la forme est pondérée sur tout le temps dans le calcul de l'énergie alors que le développement de Padé se fait autour de $T = 0$.

La figure 3.3 montre les facteurs de forme κ_T , κ_{PT} , κ_P , κ_Ω , $\kappa_{T\Omega}$ et $\kappa_{P\Omega}$ en fonction de a pour une distribution symétrique (leur définition exacte est donnée à l'annexe D). Les différents facteurs de forme permettent de caractériser la forme de l'impulsion de différentes façons en mettant l'accent sur le centre ou les ailes ; ainsi certains facteurs de forme diminuent ou augmentent avec a . Cependant, pour certaines valeurs de a , le facteur de forme diverge.

3.4.2 Limites des moments

La divergence possible de certains moments nous amène aux limites d'utilisation des moments. Pour mieux comprendre ces limites, considérons la largeur temporelle et spectrale de la distribution de Pearson symétrique.

$$\langle T^2 \rangle = \frac{b}{2-3a} \quad \langle \Omega^2 \rangle = \frac{1}{4b} \left(\frac{2-a}{1+a} \right) \quad (3.22)$$

Le moment $\langle T^2 \rangle$ est la variance de la distribution de Pearson, une quantité positive par définition. Que ce passe-t-il alors lorsque $a > 2/3$? Est-ce que la distribution devient infiniment large lorsque $a = 2/3$? La réponse est non. Le problème vient du fait que les moments sont définis au moyen d'une intégrale définie (de $-\infty$ à ∞) et cette intégrale doit converger. Il n'est pas suffisant que la distribution soit intégrable ; il faut aussi que l'opérateur du moment appliqué sur la distribution soit intégrable.

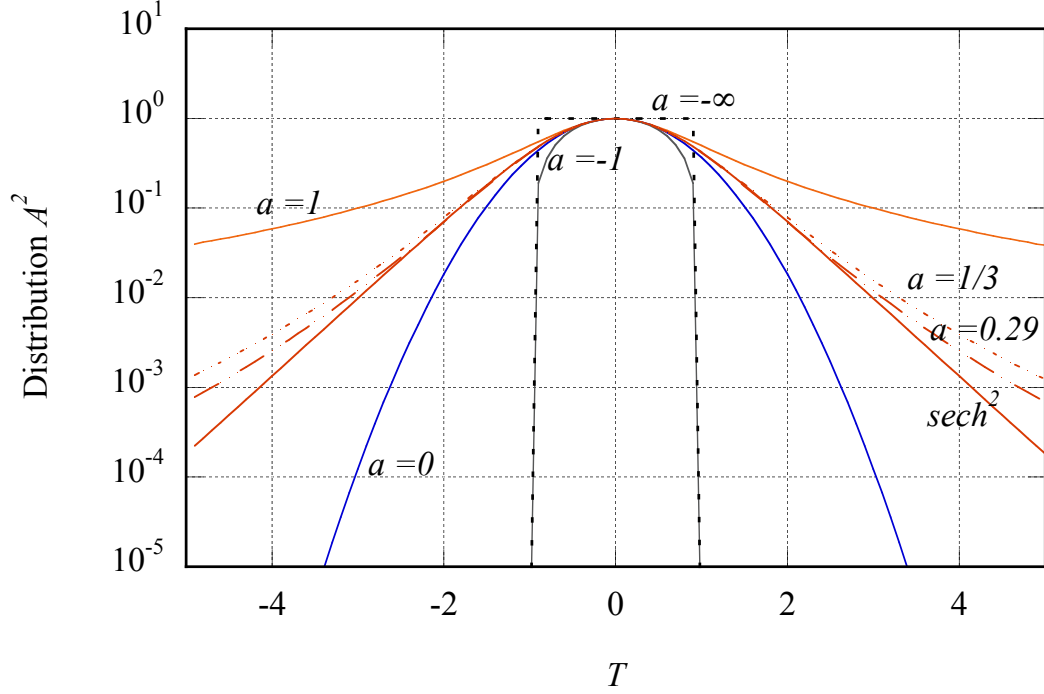


FIGURE 3.2 Différentes distributions pouvant être représentées par la distribution de Pearson. La gaussienne ($a = 0$), la parabole ($a = -1$), la lorentzienne ($a = 1$) et le créneau ($a \rightarrow -\infty$) sont représentés exactement. Notons que $b = -a$ pour avoir un créneau défini $-1 \leq T \leq 1$. La sécante hyperbolique est représentée approximativement de deux manières différentes selon une expansion de Padé ($a = 1/3$) ou la conservation de l'énergie ($a \approx 0.29$).

Dans le cas de $\langle T^2 \rangle$ pour la distribution de Pearson, l'intégrale converge si $a < 2/3$; au-delà de cette valeur, l'intégrale diverge et la valeur de la variance n'a plus de sens. Il en va de même pour $\langle \Omega^2 \rangle$ qui devient infini lorsque la distribution est parabolique ($a = 1$). La distribution parabolique a un spectre très large et oscillant puisqu'elle est finie dans le domaine temporel. Il s'ensuit que l'intégrale définissant $\langle \Omega^2 \rangle$, qu'elle soit dans le domaine temporel ou spectral, diverge pour $a \leq 1$. Un autre fait notable est que $\langle \Omega^2 \rangle$ est nul lorsque $a = 2$. La largeur spectrale ne peut évidemment pas être nulle sans violer le principe d'incertitude. Le moment $\langle \Omega^2 \rangle$ devient nul parce que la constante de normalisation E diverge lorsque $a = 2$. La largeur spectrale n'est donc définie qu'à l'intérieur de l'intervalle $-1 < a < 2$.

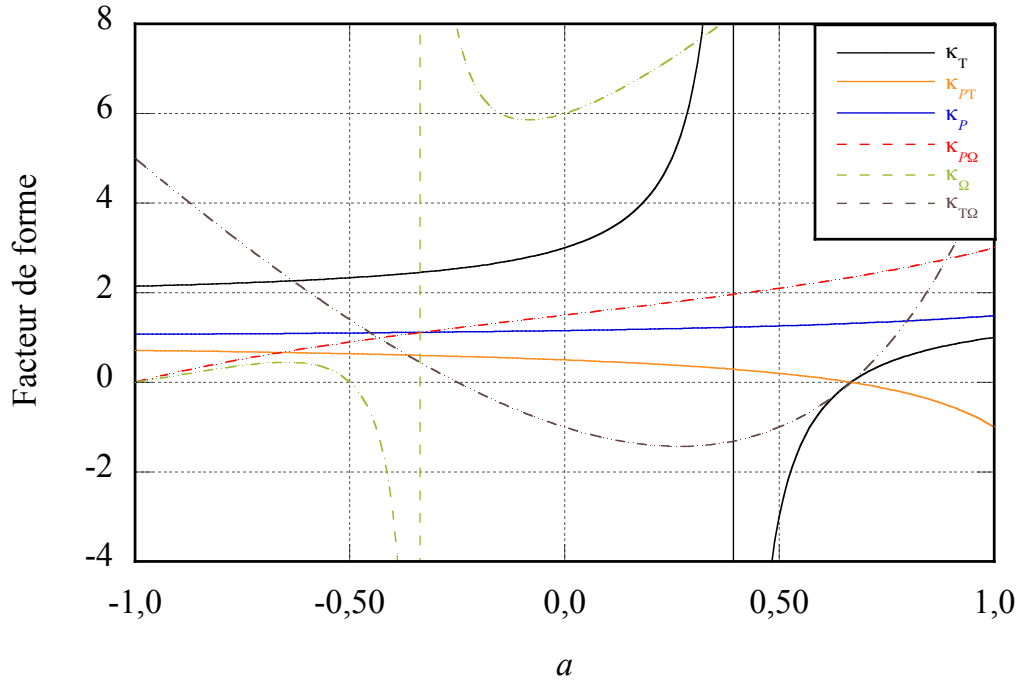


FIGURE 3.3 Différents facteurs de forme décrivant la forme de la distribution de Pearson réelle en fonction du paramètre de forme a . Certains facteurs de forme divergent ou s'annulent indiquant que l'intégrale du calcul d'au moins un des moments rattaché au calcul de ce facteur de forme diverge.

Il faut donc bien comprendre que les moments ne sont qu'*un* moyen de caractériser une distribution ; d'autres moyens existent. Par exemple, comparons l'écart type ΔT_2 de la distribution de Pearson avec sa largeur à mi-hauteur $\delta T_{1/2}$.

$$\Delta T_2 = \left(\frac{b}{2-3a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.23)$$

$$\delta T_{1/2} = 2 \left[\frac{b}{a} (2^a - 1) \right]^{1/2} \quad (3.24)$$

Nous constatons que l'écart type possède un pôle en $a = 2/3$ alors que largeur à mi-hauteur est définie pour toutes les valeurs de a . Alors pourquoi utiliser les moments ? Après tout, la largeur à mi-hauteur est définie de manière cohérente, pour toutes les

valeurs de a contrairement à $\langle T^2 \rangle$! Les moments ont toutefois un avantage important : ils se calculent indépendamment de la distribution. Plus exactement, l'expression de la largeur à mi-hauteur dépend explicitement de la forme de la distribution alors que la définition $\langle T^2 \rangle$ est la même quelle que soit la distribution. Ainsi, si les moments sont utilisés pour modéliser une distribution dans un problème donné, pour simplifier la résolution par exemple, aucune supposition n'a besoin d'être faite a priori sur la forme de la distribution. Une fois le problème résolu, les moments décrivent la distribution recherchée (approximativement, bien entendu). Si nous voulions utiliser la largeur à mi-hauteur pour caractériser la distribution lors de la résolution du problème, il faudrait supposer au départ la forme de cette dernière. Cela reviendrait à connaître la solution du problème avant de l'avoir résolu ! Évidemment, si la distribution recherchée ne peut être représentée par les moments, ces derniers ne sont d'aucun secours pour résoudre le problème. Nous reviendrons plus en détails sur ces considérations au chapitre 6. Il est possible d'imaginer d'autres moyens de caractériser la distribution, en utilisant par exemple d'autres opérateurs de moments. Les moments $\langle t^j \omega^k \rangle$ ont toutefois l'avantage d'être faciles à interpréter, contrairement à des opérateurs plus complexes. Certains opérateurs plus exotiques peuvent cependant simplifier la résolution à l'occasion, surtout quand ils reflètent la nature du problème à résoudre.

Dans ce premier chapitre, les principaux concepts de base des moments ont été exposés. Trois catégories de plus en plus générales de moments ont été définies : les moments réels, complexes et non-linéaires. La signification de ces moments, par rapport à la distribution qu'ils caractérisent, a été donnée dans les différents cas. La définition des moments ne dépend pas directement de la forme de la distribution considérée, ce qui est un grand avantage ; il faut toutefois que l'intégrale définissant le moment considéré converge. La distribution de Pearson a également été présentée. Cette distribution permet de reconstruire approximativement une distribution à partir de ces quatre premiers moments. Elle peut donc représenter différentes distributions. Tous ces concepts sont employés dans les chapitres suivants pour décrire la propagation d'impulsions dans un milieu dispersif et non-linéaire.

Chapitre 4

Propagation non-linéaire et les moments d'ordre 2

Regardons maintenant comment les moments présentés au chapitre précédent nous permettent de résoudre l'équation décrivant la propagation d'une impulsion dans une fibre optique dispersive et non-linéaire. Bien que nous nous intéressons dans le reste de cette thèse à la propagation d'impulsion dans une fibre optique, l'équation de Schrödinger non-linéaire est utilisable pour décrire d'autres phénomènes physiques. En plus de la propagation dans les fibres optiques, elle permet de décrire, entre autres, la propagation d'ondes dans un fluide et la propagation d'ondes diffractantes.

4.1 L'équation de Schrödinger non-linéaire

Considérons une impulsion lumineuse se propageant dans une fibre optique. Nous supposons que le champ électrique de cette impulsion conserve la même polarisation linéaire tout au long de la propagation. Le champ est donné par (Agrawal, 2001)

$$\vec{\mathcal{E}}(t) = \frac{\hat{x}}{2} \{ F(x, y) A(z, t) \exp [i (\beta_0 z - \omega_0 t)] + \text{complexe conjugué} \}. \quad (4.1)$$

Le champ est décomposable en une partie transverse $F(x, y)$, donnée par le mode de la fibre, et une partie longitudinale $A(z, t)$, l'enveloppe de l'impulsion. Cette décomposition se justifie dans le cadre de la théorie des modes scalaires. L'amplitude du champ est normalisé de façon que $|F(x, y)|^2 = 1$ et $|A(t)|^2$ est la puissance du champ. Le champ est centré dans le domaine spectral autour de la porteuse ω_0 et se propage avec un nombre d'onde moyen $\beta(\omega_0) = \beta_0$. Nous supposons également que la durée de l'impulsion est supérieure à 1 picoseconde. Dans ce cas, la propagation de l'amplitude du champ électrique est donnée par l'équation de *Schrödinger non-linéaire*

(ESNL)

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i\gamma |A|^2 A \quad (4.2)$$

où les paramètres β_1 et β_2 proviennent du développement en série de Taylor de la constante de propagation $\beta(\omega)$ autour de ω_0 . Ils représentent respectivement l'inverse de la vitesse de groupe de l'enveloppe de l'impulsion et la dispersion de la vitesse de groupe. Le paramètre γ donne l'ampleur de l'auto-modulation de phase, une phase non-linéaire proportionnelle à l'intensité du champ.

Il n'y a pas de solutions analytiques générales à l'équation de Schrödinger non-linéaire. Elle admet par contre des solutions analytiques dans certains cas particuliers. Il existe une solution analytique dans le cas purement dispersif ($\gamma = 0$) et purement non-linéaire ($\beta_j = 0$). Lorsque $\beta \neq 0$ et $\gamma \neq 0$, il existe une solution périodique, le soliton, et une solution asymptotique.

4.1.1 Solution dispersive

Dans le cas dispersif, l'ESNL se réduit à

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \quad (4.3)$$

où $T = t - \beta_1 z$ représente un référentiel de temps se déplaçant à la même vitesse que le centre de l'impulsion. Cette équation peut être résolue lorsque l'impulsion se propageant est une gaussienne en procédant par transformée de Fourier. Dans ce cas, l'amplitude du champ de l'impulsion est donnée par

$$A(z, T) = \left(\frac{P_0 T_0^2}{T_0^2 - i\beta_2 z} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{T^2}{2(T_0^2 - i\beta_2 z)} \right] \quad (4.4)$$

où P_0 est la puissance crête initiale en $z = 0$ et T_0 la demi-largeur initiale à $1/e$ de l'intensité. L'enveloppe de l'impulsion s'étale dans le temps pendant la propagation. Sa phase devient quadratique ce qui implique que la fréquence instantanée augmente ou diminue linéairement avec le temps. La densité spectrale de l'impulsion ne change pas pendant la propagation, la dispersion chromatique ne changeant que la phase

dans le domaine spectral.

$$A(z, \Omega) = |A(0, \Omega)| \exp(i\beta_2 \Omega^2 z) \quad (4.5)$$

4.1.2 Solution non-linéaire

Le cas purement non-linéaire ($\beta_j = 0$) est résolue analytiquement pour n'importe la forme d'impulsion. La solution est toutefois implicite et s'écrit sous la forme

$$A(z, t) = A(0, t) \exp(i\gamma |A(0, t)|^2 z) \quad (4.6)$$

où $A(0, t)$ est l'amplitude initiale de l'impulsion. La puissance de l'impulsion demeure constante lors de la propagation, seule une phase proportionnelle à la puissance augmente. Dans le domaine spectral, la densité spectrale s'élargit avec la propagation.

4.1.3 Solution périodique

Dans le régime de dispersion anormale ($\beta_2 < 0$), la dispersion chromatique et l'auto-modulation de phase peuvent se compenser pour former une impulsion qui se propage sans se déformer lors de la propagation : c'est le soliton Agrawal (2001). Lorsque la compensation est parfaite, nous avons un soliton d'ordre 1 qui est invariant lors de la propagation. Lorsque la puissance est suffisamment élevée, la compensation est périodique et l'impulsion retrouve périodiquement sa forme initiale. L'enveloppe du champ du soliton d'ordre un est donnée par

$$A(z, T) = \sqrt{\frac{|\beta_2|}{\gamma T_0^2}} \operatorname{sech}\left(\frac{T}{T_0}\right) \exp\left(-\frac{i}{2} \frac{\beta_2}{T_0^2} z\right) \quad (4.7)$$

L'enveloppe du soliton est décrite par une sécante hyperbolique. Les solitons d'ordres supérieurs sont obtenus par la méthode de diffusion inverse (Zakharov et Shabat, 1972). La forme générale de leur amplitude est un rapport de sommes de cosinus hyperboliques et trigonométriques.

4.1.4 Solution asymptotique

Dans le régime de dispersion normale, la dispersion chromatique et l'auto-modulation de phase ne peuvent se compenser. Dans ce régime, une impulsion possédant initialement une très grande puissance crête tend de manière asymptotique en se propageant vers une impulsion très «chirpée» dont l'enveloppe est parabolique (Anderson *et al.*, 1993b).

$$A(z, T) = \sqrt{P_c(z)} \left[1 - \frac{T^2}{T_c^2(z)} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{ib(z)}{2} T^2 \right] \quad (4.8)$$

Les paramètres $P_c(z)$, $T_c(z)$ et $b(z)$ sont définis analytiquement de manière explicite par les relations suivantes dans le cas asymptotique :

$$b(z) \approx \frac{1}{\beta_2 z} \quad (4.9a)$$

$$= 2K_0 K_1 P_c \sqrt{1 - K_1 P_c} \quad (4.9b)$$

$$\frac{1}{K_1} = P_c(0) + \frac{9}{64} \frac{\beta_2}{\gamma} \frac{E^2 b^2(0)}{P_c^2(0)} \quad (4.9c)$$

$$K_0 = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\gamma}{\beta_2}} \frac{K_1^{-\frac{3}{2}}}{E} \quad (4.9d)$$

$$T_c(z) P_c(z) = \frac{3}{4} E \quad (4.9e)$$

$$(4.9f)$$

où E est l'énergie de l'impulsion. Le paramètre $P_c(z)$ est obtenu en résolvant l'équation implicite 4.9b. Le paramètre $T_c(z)$ est obtenu en fixant l'énergie de l'impulsion.

4.2 Équations de propagation des moments

Utilisons maintenant les moments dans le but de déterminer une solution approximative générale de l'ESNL mais dans le cas où il y a dispersion et non-linéarité. Nous limitons l'analyse dans cette section aux moments d'ordre 1 et 2. Les équations de propagation des moments sont obtenues en dérivant les définitions des moments données au chapitre 3 et en y substituant l'éq. (4.2). La constante de normalisation E devient alors l'énergie de l'impulsion selon la définition (4.1). La propagation des moments

d'ordre 1 est ainsi

$$\frac{d}{dz}\langle t \rangle = \beta_1 + \beta_2 \langle \omega \rangle \quad (4.10a)$$

$$\frac{d}{dz}\langle \omega \rangle = 2\gamma \langle P\omega \rangle_i = 0. \quad (4.10b)$$

Il faut faire attention ici à la définition de ω qui n'est pas la fréquence (pulsation) du champ puisque nous avons soustrait cette dernière dans l'expression (4.1) du champ électrique. Le moment ω représente dans ce cas l'écart à la porteuse ω_0 . Notons que pour les distributions symétriques, cet écart est toujours nul. Ces deux équations sont facilement intégrables et donnent

$$\langle t \rangle = \langle t \rangle_0 + \beta_1 z + \beta_2 \langle \omega \rangle_0 z \quad \langle \omega \rangle = \langle \omega \rangle_0 \quad (4.11)$$

où l'indice 0 représente la valeur en $z = 0$. En supposant, sans perte de généralité, que $\langle \omega \rangle_0 = 0$ et $\langle t \rangle_0 = 0$, les équations de propagation des moments d'ordre 2 peuvent être écrites sur les moments centrés. Les équations de propagation pour les moments d'ordre 2 sont alors

$$\frac{d}{dz}\langle T^2 \rangle = 2\beta_2 \langle T\Omega \rangle_r \quad (4.12a)$$

$$\frac{d}{dz}\langle T\Omega \rangle_r = \beta_2 \langle \Omega^2 \rangle + \frac{\gamma}{2} \langle P \rangle \quad (4.12b)$$

$$\frac{d}{dz}\langle \Omega^2 \rangle = 2\gamma \langle P\Omega^2 \rangle_i \quad (4.12c)$$

où $T = t - \langle t \rangle$ et $\Omega = \omega - \langle \omega \rangle$. Il est également utile d'écrire l'équation de propagation du moment non-linéaire d'ordre 0, $\langle P \rangle$ puisqu'il intervient dans le calcul de $\langle T\Omega \rangle_r$.

$$\frac{d}{dz}\langle P \rangle = -2\beta_2 \langle P\Omega^2 \rangle_i \quad (4.13)$$

Ce moment est proportionnel à la puissance crête de l'impulsion et dépend également de la forme de l'impulsion ; il représente une puissance effective. Finalement, il est possible de montrer que l'éq. (4.2) conserve l'énergie puisque $dE/dz = 0$. Les équations de propagation des moments ne sont malheureusement pas fermées puisqu'il n'y pas d'équation différentielle pour le moment $\langle P\Omega^2 \rangle_i$. Si nous écrivions l'équation de propagation de cette dernière des moments d'ordre supérieur surviendraient. Il y a donc

une fuite vers l'avant, c'est-à-dire que les équations de propagation de ces moments d'ordre supérieur font intervenir à leur tour des moments d'ordre encore plus élevé. Il faut donc approximer ces moments d'ordre supérieur pour résoudre.

L'approximation la plus simple à faire est de remplacer le moment $\langle P\Omega^2 \rangle_i$ par une expression ne dépendant que de $\langle T^2 \rangle$, $\langle T\Omega \rangle_r$, $\langle \Omega^2 \rangle$ et $\langle P \rangle$. Une façon d'y arriver est de supposer que la phase du champ est quadratique dans le temps. Ainsi, si nous substituons $A(z, T) = |A(z, T)| \exp(i\phi)$ où $\phi = hT^2$ dans les définitions de $\langle T\Omega \rangle_r$ et $\langle P\Omega^2 \rangle_i$, nous obtenons

$$\langle T\Omega \rangle_r = -\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} |A(T)|^2 T \frac{d\phi}{dT} dT \approx -2h \langle T^2 \rangle \quad (4.14)$$

$$\langle P\Omega^2 \rangle_i = -\frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{+\infty} |A(T)|^4 \frac{d^2\phi}{dT^2} dT \approx h \langle P \rangle = \frac{\langle P \rangle \langle T\Omega \rangle_r}{2 \langle T^2 \rangle}. \quad (4.15)$$

Cette approximation permet de résoudre les équations de propagation des moments puisqu'il n'y a plus de fuite vers l'avant. Il est remarquable que le système d'équations puissent se fermer en faisant seulement une approximation sur la phase de l'impulsion. Autrement dit, nous avons fermé le système en ne faisant *aucune supposition sur la forme de l'impulsion*. La résolution qui suit est donc valide pour des formes arbitraires d'impulsions. Il y a toutefois deux restrictions à faire. Premièrement, le résultat final, l'évolution des moments d'ordre 2, ne nous informe que sur les différentes largeurs de l'impulsion. Ainsi l'information de forme est plus ou moins absente des moments d'ordre 2 (il est possible d'y avoir accès indirectement, comme nous le verrons). Deuxièmement, une des conséquences de supposer que la phase est quadratique est que la forme de l'impulsion ne change pas lors de la propagation. Pour s'en convaincre, il suffit d'écrire l'évolution du coefficient d'aplatissement.

$$\frac{1}{\kappa_t} \frac{d\kappa_t}{dz} = 4\beta_2 \left(\frac{\langle T^3\Omega \rangle_r}{\langle T^4 \rangle} - \frac{\langle T\Omega \rangle_r}{\langle T^2 \rangle} \right) \approx -4\beta_2 (2h - 2h) = 0 \quad (4.16)$$

Le fait que la forme de l'impulsion soit supposée invariante est une limitation importante. Toutefois, notons que la forme de l'impulsion est invariante dans *toutes* les solutions analytiques présentées précédemment dans la littérature (à l'exception des solitons d'ordre supérieur où elle change périodiquement). Pour obtenir l'évolution de la forme de l'impulsion, il faut donc inclure l'évolution des moments d'ordre supérieur à 2. Pour les distributions symétriques, il faut considérer les moments d'ordre 4, ce

que nous faisons au chapitre 6.

À l'ordre 2, l'évolution des moments est ainsi approximativement décrite par le système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{d}{dz}\langle T^2 \rangle \approx 2\beta_2 \langle T\Omega \rangle_r \quad (4.17a)$$

$$\frac{d}{dz}\langle T\Omega \rangle_r \approx \beta_2 \langle \Omega^2 \rangle + \frac{\gamma}{2} \langle P \rangle \quad (4.17b)$$

$$\frac{d}{dz}\langle \Omega^2 \rangle \approx \gamma \frac{\langle P \rangle \langle T\Omega \rangle_r}{\langle T^2 \rangle} \quad (4.17c)$$

$$\frac{d}{dz}\langle P \rangle \approx -\beta_2 \frac{\langle P \rangle \langle T\Omega \rangle_r}{\langle T^2 \rangle} \quad (4.17d)$$

Un des avantages d'utiliser les moments, au lieu du champ, pour exprimer le problème est que la physique de la propagation devient beaucoup plus limpide. Par exemple, nous retrouvons par le biais de l'éq. (4.17a) le résultat bien connu que la durée d'une impulsion ne peut être comprimée que si son «chirp» (proportionnel à $\langle T\Omega \rangle_r$) et la dispersion (β_2) sont de signes opposés. D'une manière similaire, d'après l'éq. (4.17c), la largeur de bande ne peut être réduite que si le chirp est négatif puisque γ est toujours positif dans la silice. Cette compression spectrale est d'autant plus importante que l'impulsion est courte et que sa puissance est grande. À partir de l'éq. (4.17d), il apparaît que plus l'impulsion est courte, plus sa puissance change rapidement, ce qui est cohérent avec la notion de dispersion chromatique : plus l'impulsion est courte, plus sa largeur de bande est grande et plus la dispersion chromatique est importante. Il est évident selon l'éq (4.17b) qu'il y a deux contributions au chirp : une dispersive, proportionnelle à la largeur de bande $\langle \Omega^2 \rangle$, et une non-linéaire, proportionnelle à la puissance $\langle P \rangle$. La condition solitonique (pour un soliton fondamental) peut être retrouvée à partir de l'éq. (4.17b) lorsque la dérivée est nulle, c'est-à-dire que les deux contributions se compensent parfaitement. La condition s'écrit alors

$$\frac{L_D}{L_{NL}} = 1 = \frac{\gamma \langle P \rangle}{2|\beta_2| \langle \Omega^2 \rangle} \quad (4.18)$$

où la longueur de dispersion L_D et la longueur non-linéaire L_{NL} sont définies par

$$L_D = \frac{1}{|\beta_2| \langle \Omega^2 \rangle}, \quad L_{NL} = \frac{2}{\gamma \langle P \rangle}. \quad (4.19)$$

Il est intéressant de remarquer qu'alors que la longueur de dispersion est habituellement définie par rapport à la durée de l'impulsion, elle est définie ici par rapport à la largeur de bande, ce qui correspond mieux à la physique de la dispersion chromatique. La longueur non-linéaire est habituellement définie par rapport à la puissance crête, ce qui représente le maximum du déphasage non-linéaire par auto-modulation de phase. Nous n'avons directement accès à la puissance crête par les moments ; le moment s'y approchant le plus est $\langle P \rangle$ qui donne le déphasage non-linéaire moyen.

4.2.1 Invariants

Une technique pour résoudre un système d'équations différentielles est de trouver des quantités qui sont invariantes le long de la propagation. De plus, ces invariants nous permettent de mieux comprendre la dynamique du système. En combinant les éqs. (4.17), trois invariants peuvent être découverts.

$$I_0 = \beta_2 \langle \Omega^2 \rangle + \gamma \langle P \rangle = \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{L_D} + \frac{2}{L_{NL}} \quad (4.20a)$$

$$I_1 = \langle \Omega^2 \rangle \langle T^2 \rangle - \langle T \Omega \rangle_r^2 \quad (4.20b)$$

$$I_2 = \frac{\langle P \rangle \sqrt{\langle T^2 \rangle}}{E} \quad (4.20c)$$

Le premier de ces invariants I_0 est également un invariant du système non approximé (4.12). Les deux autres invariants découlent de l'approximation (4.14). L'invariant I_0 dit que la somme des effets dispersifs et non-linéaires est conservée. Dans le régime de dispersion normale, cela signifie que la largeur de bande augmente lorsque la puissance crête diminue. La puissance diminue à cause de la dispersion chromatique alors que la largeur de bande augmente par l'auto-modulation de phase. Dans le régime de dispersion anormale, la largeur de bande augmente avec la puissance crête, ce qui est observable dans les solitons d'ordre supérieur.

L'invariant I_1 est une formulation directe du principe d'incertitude d'Heisenberg. Puisque I_1 est invariant, il s'ensuit que la forme de l'impulsion reste inchangée lors de la propagation ou, pour être plus exact, l'information de forme obtenue au travers des moments d'ordre 2 est invariante lors de la propagation. La distinction deviendra claire à la section 4.3.1. Le dernier invariant montre tout d'abord la conservation de l'énergie (le terme au numérateur). En divisant par l'énergie (qui est également invariante), l'invariant I_2 informe également sur la forme de l'impulsion qui est cons-

tante. L'avantage de diviser par l'énergie est que l'invariant I_2 demeure valable même si un terme d'absorption (ou de gain) est ajouté à l'ESNL. Les invariants I_1 et I_2 sont, par définition, des quantités réelles et positives. Pour finir cette section, le tableau 4.1 présente les valeurs des invariants I_1 et I_2 pour certaines formes typiques d'impulsions. Les valeurs pour la parabole et le créneau ne peuvent être calculées car $\langle \Omega^2 \rangle$ diverge.

4.2.2 Propriétés

Certaines propriétés intéressantes peuvent être déduites du système en utilisant les invariants avant de l'intégrer. En combinant les trois invariants et en isolant $\langle T\Omega \rangle_r$, il est possible de trouver

$$|\langle T\Omega \rangle_r| = \left[\frac{I_0}{\beta_2} \langle T^2 \rangle - \frac{\gamma I_2 E}{\beta_2} \sqrt{\langle T^2 \rangle} - I_1 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.21)$$

où le signe de $\langle T\Omega \rangle_r$ demeure inconnu. Lorsque le moment $\langle T\Omega \rangle_r$ est nul, il en va de même pour la phase de l'impulsion ; c'est le cas «Fourier limité» où le produit $\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle$ est minimal. La largeur Fourier limitée de l'impulsion est alors

$$\Delta T_{\text{FL}} = 2\sqrt{\langle T^2 \rangle_{\text{FL}}} = \frac{\gamma I_2 E}{I_0} + \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{I_0} \sqrt{\gamma^2 I_2^2 E^2 + 4\beta_2 I_0 I_1}. \quad (4.22)$$

La largeur de bande Fourier limitée se déduit à partir de l'éq. (4.20b)

$$\Delta \Omega_{\text{FL}} = 2\sqrt{\langle \Omega^2 \rangle_{\text{FL}}} = 4 \frac{\sqrt{I_1}}{\Delta T_{\text{FL}}} \quad (4.23)$$

TABLEAU 4.1 Invariants I_1 et I_2 pour des formes typiques d'impulsions

	I_1	I_2
Gaussienne	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$
Sécante hyperbolique	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$
Super Gaussienne (ordre 1)	0.3427	0.2697
Parabolique	—	$\frac{3}{5\sqrt{5}}$
Créneau	—	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$

et la puissance en utilisant l'éq. (4.20a) ou (4.20c).

$$\langle P \rangle_{\text{FL}} = \frac{2I_2 E}{\Delta T_{\text{FL}}} = \frac{I_0}{\gamma} - \frac{4\beta_2 I_1}{\gamma \Delta T_{\text{FL}}^2} \quad (4.24)$$

L'éq. (4.22) permet d'observer le cas intéressant de la compression solitonique. La compression solitonique permet de changer le produit $\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle$ tout en conservant une impulsion Fourier limitée. Ainsi pour diminuer ΔT_{FL} , il faut que la dispersion soit anormale ($\beta_2 < 0$).

En remplaçant l'éq. (4.21) dans l'éq. (4.17a), nous pouvons écrire l'équation de propagation du moment $\langle T^2 \rangle$ sans faire intervenir les autres moments.

$$\frac{d\langle T^2 \rangle}{dz} = 2\beta_2 \langle T\Omega \rangle_r = 2\beta_2 \text{sgn}(\langle T\Omega \rangle_r) \left[\frac{I_0}{\beta_2} \langle T^2 \rangle - \frac{\gamma I_2 E}{\beta_2} \sqrt{\langle T^2 \rangle} - I_1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.25)$$

Le seul paramètre inconnu est le signe de $\langle T\Omega \rangle_r$, ce qui n'empêche pas le système d'être intégré. Le résultat de l'intégration dépend évidemment de ce signe qui peut être déterminé ultérieurement.

4.3 Propagation des moments

L'équation (4.25) peut être intégrée de façon analytique pour obtenir

$$\begin{aligned} 2\beta_2 \text{sgn}(\langle T\Omega \rangle_r) z + K = & \frac{2\beta_2}{I_0} \left[\frac{I_0}{\beta_2} \langle T^2 \rangle - \frac{\gamma I_2 E}{\beta_2} \sqrt{\langle T^2 \rangle} - I_1 \right]^{\frac{1}{2}} \\ & - \frac{\gamma I_2 E}{I_0} \left(\frac{\beta_2}{I_0} \right)^{\frac{1}{2}} \text{arcsinh} \left[\frac{1}{\Delta^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2I_0}{\beta_2} \sqrt{\langle T^2 \rangle} - \frac{\gamma I_2 E}{\beta_2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.26)$$

où K est la constante d'intégration et Δ vaut

$$\Delta = 4 \frac{I_1 I_0}{\beta_2} - \frac{\gamma^2 I_2^2 E^2}{\beta_2^2} = \frac{I_0}{\beta_2} \left(4I_1 - \frac{\gamma^2 I_2^2 E^2}{\beta_2 I_0} \right). \quad (4.27)$$

Nous trouvons là un résultat très important : la solution obtenue ne dépend pas du régime de dispersion. *Autrement dit, l'éq. (4.26) décrit à la fois des évolutions monotones ET périodiques de $\langle T^2 \rangle$, selon l'argument de arc sinus hyperbolique.* Si l'argument est imaginaire, $\text{arcsinh}(ix) = i \arcsin(x)$ et l'évolution est périodique ; autrement

elle est monotone. La question est maintenant de savoir sous quelle(s) condition(s) la propagation devient périodique. Le moment $\langle T^2 \rangle$ est toujours positif par définition ; il s'ensuit que l'argument de l'arc sinus hyperbolique devient imaginaire que si Δ est négatif. Nous avons déjà mentionné que I_1 , I_2 , γ et E sont toujours positifs. Il en résulte que c'est le signe de $\beta_2 I_0$ qui détermine le signe de Δ . Lorsque $\beta_2 I_0 < 0$, nous avons $\Delta < 0$ et si $\beta_2 I_0 > 0$, $\Delta > 0$ et ce quelle que soit la valeur des autres paramètres. Pour s'en convaincre, il suffit de réécrire Δ en fonction du paramètre non-linéaire standard N défini par

$$N^2 = \frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{\gamma \langle P \rangle}{2|\beta_2| \langle \Omega^2 \rangle} \quad (4.28)$$

et du paramètre q

$$q = \frac{\gamma I_2 E}{\sqrt{|\beta_2 I_0|}} = N^2 \left[\frac{4(I_1 + \langle T\Omega \rangle_{r0}^2)}{|1 + \text{sgn}(\beta_2) 2N^2|} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.29)$$

Le paramètre N indique la force des effets non-linéaires par rapport aux effets dispersifs. Le paramètre q est à peu près proportionnel à N lorsque $\beta_2 > 0$. Cela veut dire qu'en régime très non-linéaire $q \gg 1$ et en régime dispersif $q \ll 1$. Lorsque $\beta_2 < 0$, il y a une discontinuité en $N^2 = 1/2$ où $q \rightarrow \infty$; le régime demeure toutefois linéaire. Il apparaît alors que lorsque $\beta_2 I_0 > 0$, $\beta_2 > 0$ (d'après (4.20a) et donc que $\Delta > 0$ (en posant arbitrairement $\langle T\Omega \rangle_{0r} = 0$). Nous pouvons donc définir deux cas, selon le signe $\beta_2 I_0$, mais à quel régime de dispersion correspondent-ils ? Il semble à première vue que $\beta_2 I_0 > 0$ réfère au régime de dispersion normal et $\beta_2 I_0 < 0$ au régime de dispersion anormale. Il en est ainsi sauf en régime de dispersion anormale à basse puissance ($N^2 < 1/2$ d'après l'éq (4.20a)). Dans ce cas, $I_0 < 0$ et $\beta_2 < 0$ résultant en $\beta_2 I_0 > 0$. Le tableau 4.2 résume la situation. Nous traitons ces deux cas en détails dans les sections qui suivent, mais auparavant il est instructif de considérer les cas purement dispersif et purement non-linéaire.

TABLEAU 4.2 Signe de $\beta_2 I_0$

	$N^2 \leq 1/2$	$N^2 \geq 1/2$
$\beta_2 > 0$	+	+
$\beta_2 < 0$	+	-

4.3.1 Cas purement dispersif et purement non-linéaire

Les cas purement dispersif ($\gamma = 0$) et purement non-linéaire ($\beta_2 = 0$) sont facilement intégrables, puisque les solutions sont polynomiales. Dans le cas purement dispersif, l'intégration des éqs. (4.17) donne

$$\langle \Omega^2 \rangle = \langle \Omega^2 \rangle_0 \quad (4.30a)$$

$$\langle T\Omega \rangle_r = \langle T\Omega \rangle_{r0} + \beta_2 \langle \Omega^2 \rangle_0 z \quad (4.30b)$$

$$\langle T^2 \rangle = \langle T^2 \rangle_0 + 2\beta_2 \langle T\Omega \rangle_{r0} z + \beta_2^2 \langle \Omega^2 \rangle_0 z^2 \quad (4.30c)$$

$$\langle P \rangle \approx \langle P \rangle_0 \sqrt{\frac{\langle T^2 \rangle_0}{\langle T^2 \rangle}}. \quad (4.30d)$$

L'indice 0 des moments indique leur valeur à $z = 0$. Les équations (4.30), à l'exception de (4.30d), sont valides quelle que soit la forme de l'impulsion. Une théorie plus générale s'appliquant aux dispersions d'ordre supérieur a déjà été développée (Anderson, 1987). En combinant ces équations, il est possible de montrer que les invariants (4.20) sont toujours valides. Pourtant, aucune supposition sur la phase supplémentaire à celle de (4.30d) n'est nécessaire pour résoudre (4.30)! Il en ressort que, dans le cas purement dispersif à l'ordre 2, il est implicitement supposé que la phase est quadratique. Pourtant la phase n'est quadratique que dans le cas d'une impulsion gaussienne. Comment expliquer cette contradiction apparente? Une façon de l'interpréter est que la différence entre la phase induite par la dispersion chromatique et une phase quadratique ne peut être décrite par les moments d'ordre 2; les moments d'ordre 2 sont donc les mêmes, peu importe la forme de l'impulsion. Toutefois, à l'ordre 4, la différence apparaît. Nous avons montré que l'approximation de la phase quadratique a pour conséquence que le coefficient d'aplatissement κ_t , et donc la forme de l'impulsion, ne changent pas lors de la propagation. Dans le cas purement dispersif à l'ordre 4, κ_t n'est pas invariant lors de la propagation.

Dans le cas purement non-linéaire, l'intégration des éqs. (4.17) donne

$$\langle P \rangle = \langle P \rangle_0 \quad (4.31a)$$

$$\langle T^2 \rangle = \langle T^2 \rangle_0 \quad (4.31b)$$

$$\langle T\Omega \rangle_r = \langle T\Omega \rangle_{r0} + \frac{\gamma}{2} \langle P \rangle_0 z \quad (4.31c)$$

$$\langle \Omega^2 \rangle = \langle \Omega^2 \rangle_0 + \gamma \frac{\langle P \rangle_0}{\langle T^2 \rangle_0} \langle T\Omega \rangle_{r0} z + \frac{\gamma^2}{4} \frac{\langle P \rangle_0^2}{\langle T^2 \rangle_0} z^2. \quad (4.31d)$$

Il est remarquable que l'évolution dans le cas purement non-linéaire soit également quadratique en z . Il est encore plus remarquable que le système soit en quelque sorte inversé, c'est-à-dire que les moments constants dans un cas changent en z^2 dans l'autre cas et vice-versa. Le moment $\langle T\Omega \rangle_r$ est linéaire en z dans les deux cas.

4.3.2 Cas $\beta_2 I_0 > 0$

Retournons maintenant au cas général où la dispersion et la non-linéarité sont présentes dans la fibre optique. L'éq. (4.26) peut être écrite de manière plus claire en utilisant l'éq. (4.21) et la relation $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ et en supposant que $\beta_2 I_0 > 0$

$$|\langle T\Omega \rangle_r| = K + \operatorname{sgn}(\beta_2 \langle T\Omega \rangle_r) I_0 z - \operatorname{sgn}(\beta_2) \frac{q}{2} \ln \left[2 |\langle T\Omega \rangle_r| + 2 \sqrt{\frac{I_0 \langle T^2 \rangle}{\beta_2}} - \operatorname{sgn}(\beta_2) q \right] \quad (4.32)$$

où la constante d'intégration K est définie par

$$K = |\langle T\Omega \rangle_{r0}| + \operatorname{sgn}(\beta_2) \frac{q}{2} \ln \left[2 |\langle T\Omega \rangle_{r0}| + 2 \sqrt{\frac{I_0 \langle T^2 \rangle_0}{\beta_2}} - \operatorname{sgn}(\beta_2) q \right]. \quad (4.33)$$

Rappelons que β_2 peut être négatif si $N^2 < 1/2$. Pour avoir une solution complète, il faut maintenant connaître le signe de $\langle T\Omega \rangle_r$. Ce signe est lié à la distance de propagation z_{FL} pour laquelle l'impulsion devient «Fourier limitée», c'est-à-dire pour laquelle $\langle T\Omega \rangle_r = 0$. La distance z_{FL} donc correspond également à la distance où le «chirp» change de signe. En isolant z dans l'éq. (4.32) et en posant $\langle T\Omega \rangle_r = 0$,

$\langle T^2 \rangle = \langle T^2 \rangle_0$ et $\text{sgn}(\langle T\Omega \rangle_r) = \text{sgn}(\langle T\Omega \rangle_{r0})$, la distance z_{FL} est définie par

$$z_{\text{FL}} = \text{sgn}(\langle T\Omega \rangle_{r0}) \frac{q}{2I_0} \ln \left[\frac{(q^2 + 4I_1)^{\frac{1}{2}}}{2|\langle T\Omega \rangle_{0r}| + (q^2 + 4I_1 + 4\langle T\Omega \rangle_{r0}^2)^{\frac{1}{2}}} \right] - \frac{\langle T\Omega \rangle_{r0}}{|I_0|}. \quad (4.34)$$

Une valeur négative de z_{FL} indique que la distance «Fourier limitée» se situe avant le début de la propagation ; l'impulsion s'élargit dans ce cas de manière monotone. Si z_{FL} est positif, l'impulsion subit une contraction jusqu'à $z = z_{\text{FL}}$ puis s'élargit de manière monotone. Lorsque l'impulsion initiale n'est pas initialement «chirpée», $\langle T\Omega \rangle_{0r} = 0$ et $z_{\text{FL}} = 0$. Le signe de $\langle T\Omega \rangle_r$ peut être retrouvé connaissant z_{FL} , β_2 et $\langle T\Omega \rangle_{r0}$. Si z_{FL} est négatif, $\langle T\Omega \rangle_r$ a le même signe que $\langle T\Omega \rangle_{r0}$. Si z_{FL} est positif, $\langle T\Omega \rangle_r$ a le même signe que $\langle T\Omega \rangle_{r0}$ jusqu'à z_{FL} et change de signe après. Dans le cas où $\langle T\Omega \rangle_{r0} = 0$, le signe de $\langle T\Omega \rangle_r$ est le même que celui de β_2 . Le tout peut être résumé par

$$s = \text{sgn}(\langle T\Omega \rangle_r) = \text{sgn}(\beta_2) \text{sgn}[1 + \text{sgn}(\beta_2 \langle T\Omega \rangle_{0r}) + \text{sgn}(z - z_{\text{FL}})]. \quad (4.35)$$

En tenant compte de l'éq. (4.35), l'évolution du moment $\langle T\Omega \rangle_r$ donnée par l'éq. (4.32) devient

$$\begin{aligned} \langle T\Omega \rangle_r &= s |\langle T\Omega \rangle_r| \\ &= \langle T\Omega \rangle_{0r} + I_0 z - \text{sgn}(\beta_2) s \frac{q}{2} \ln \left[\frac{\langle T\Omega \rangle_r + \frac{s}{2} (q^2 + 4I_1 + 4\langle T\Omega \rangle_r^2)^{\frac{1}{2}}}{\langle T\Omega \rangle_{0r} + \frac{s}{2} (q^2 + 4I_1 + 4\langle T\Omega \rangle_{0r}^2)^{\frac{1}{2}}} \right]. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Les autres moments sont calculés à partir des invariants. Nous trouvons

$$\sqrt{\langle T^2 \rangle} = \frac{\gamma \langle P \rangle_0 \sqrt{\langle T^2 \rangle_0}}{2I_0} + \left[\frac{\gamma^2 \langle P \rangle_0^2 \langle T^2 \rangle_0}{4I_0^2} + \frac{\beta_2}{I_0} (I_1 + \langle T\Omega \rangle_r^2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.37)$$

$$\langle P \rangle = \langle P \rangle_0 \sqrt{\frac{\langle T^2 \rangle_0}{\langle T^2 \rangle}} \quad (4.38)$$

$$\langle \Omega^2 \rangle = \langle \Omega^2 \rangle_0 + \frac{\gamma}{\beta_2} (\langle P \rangle - \langle P \rangle_0). \quad (4.39)$$

Notons que l'éq. (4.37) est obtenue à partir de l'éq. (4.21) en isolant $\sqrt{\langle T^2 \rangle}$ (en ne conservant que la racine positive). Nous avons ainsi l'évolution de tous les moments d'ordre 2, ainsi que de $\langle P \rangle$, lors de la propagation. L'éq. (4.36) décrivant l'évolution du moment $\langle T\Omega \rangle_r$, d'où tous les autres moments découlent, est implicite ; il faut

donc, a priori, la résoudre numériquement. Nous verrons à la section 4.4 qu'il est possible d'obtenir des expressions analytiques approximatives permettant de contourner ce problème. Pour le moment, vérifions la validité du modèle en comparant les éqs. (4.36)–(4.38) à des simulations numériques décrivant la propagation de l'impulsion, c'est-à-dire la résolution de l'ÉSNL (éq. (4.2)).

Le modèle est validé en comparant les moments obtenus de la résolution numérique de l'équation implicite (4.36) avec les moments calculés à partir du champ propagé numériquement. La propagation numérique du champ est faite à l'aide de la méthode «Split-Step Fourier» qui est standard pour l'ÉSNL. La figure 4.1 montre cette comparaison pour les différents moments ainsi que pour les deux invariants approximatifs I_1 et I_2 pour une impulsion super-gaussienne ($A = \exp\{-T^4\}$) sans «chirp» initial ($\langle T\Omega \rangle_{r0} = 0$). La comparaison est faite pour différentes valeurs de N^2 comprise entre 0,01 et 10 afin de connaître la validité du modèle dans les régimes hautement et faiblement non-linéaires.

Les différents graphiques de la figure 4.1 et 4.2 montrent un excellent accord entre le modèle et les simulations numériques. L'accord est aussi bon sur de courtes que sur de longues distances (plusieurs longueurs de dispersion), que pour le régime faiblement ($N^2 \ll 1$) et hautement ($N^2 \gg 1$) non-linéaire. Il y a toutefois de petits écarts. Ces écarts viennent du fait que I_1 et I_2 ne sont qu'approximativement invariants. L'écart relatif sur les moments $\langle T^2 \rangle$ et $\langle T\Omega \rangle_r$ est moins de 2% ce qui est excellent. L'erreur est cependant plus grande sur les moments $\langle \Omega^2 \rangle$ et $\langle P \rangle$ voisinant 15%. L'erreur est plus grande sur ces moments car ils dépendent indirectement des invariants par le biais des éqs. (4.39) et (4.38). L'erreur relative sur ces moments est d'ailleurs comparable à la fluctuation de I_2 . Nous voyons toutefois que I_1 et I_2 deviennent constants de façon asymptotique pour de longues distances de propagation. La phase de l'impulsion devient asymptotiquement parabolique dans le régime de dispersion normale et ainsi l'approximation de la phase quadratique devient progressivement meilleure lorsque z augmente. Cet effet est d'autant plus prononcé que N est grand, car la phase tend d'autant plus rapidement vers une parabole. Les plus grands écarts se situent autour de $z = L_D/2$ où se trouve la plus forte variation de la forme d'impulsion (comme nous le verrons au chapitre 6). Puisque l'approximation de la phase quadratique suppose que la forme de l'impulsion est constante, il n'est pas surprenant de constater que l'écart est plus grand quand cette dernière change fortement. Le bruit présent sur I_1 lorsque N est grand est d'origine numérique. Le calcul de I_1 consiste en une

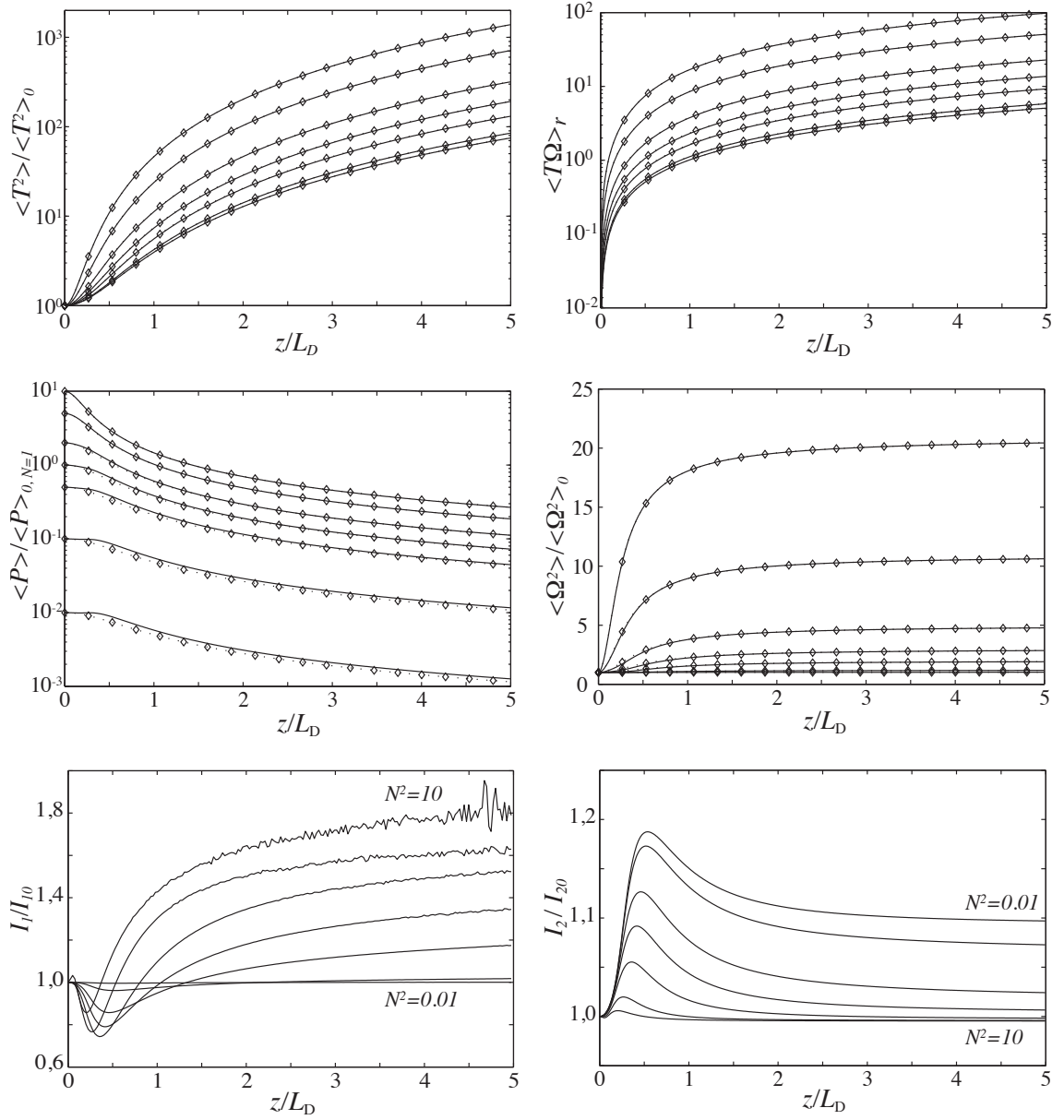


FIGURE 4.1 Propagation des moments d'ordre 2 d'une impulsion super gaussienne dans le régime de dispersion normale ($\beta_2 > 0$). Les différentes courbes représentent différentes puissances crêtes initiales ; du haut vers le bas $N^2 = 10, 5, 2, 1, 0.5, 0.1, 0.01$ (sauf pour I_2). Les lignes pleines correspondent à la résolution numérique de l'ÉSNL éq. (4.2) alors que les lignes pointillées avec les losanges proviennent de la résolution numérique de l'équation implicite (éq. (4.36)). Les deux invariants approximatifs I_1 et I_2 , sont également tracés. Notons que l'ordre des courbes est inversé pour I_2 .

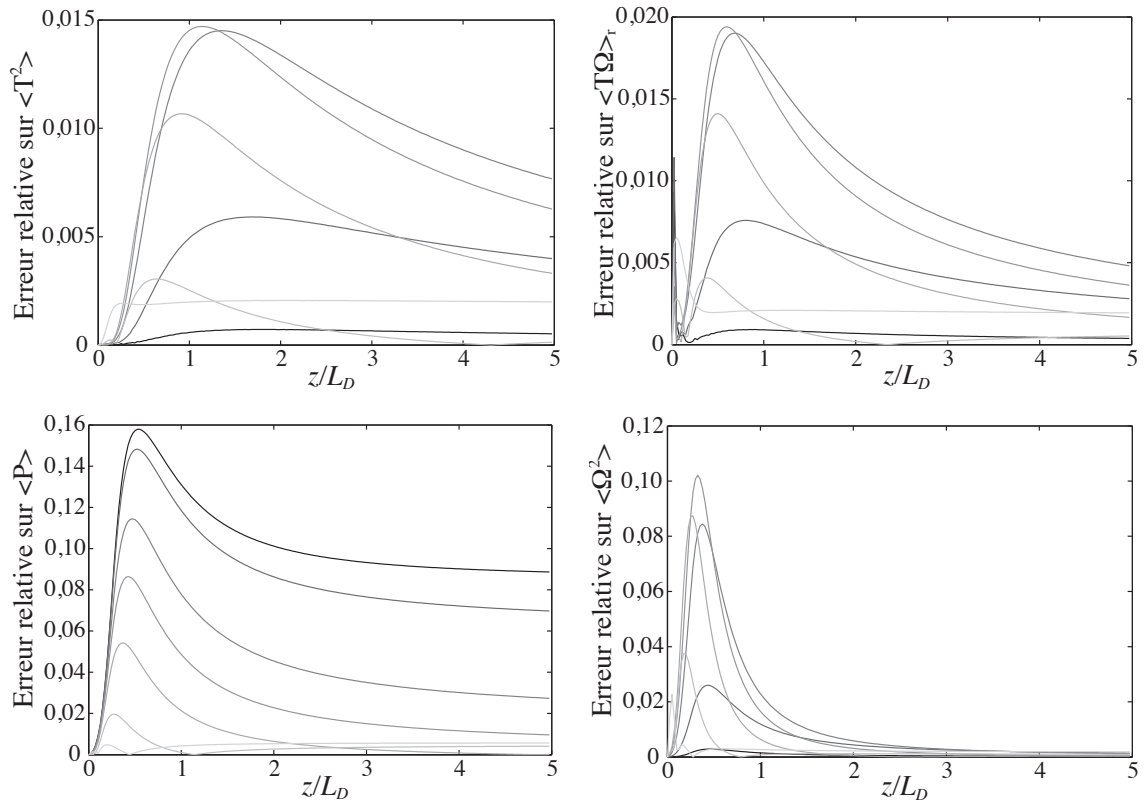


FIGURE 4.2 Erreur relative entre les moments calculés numériquement et analytiquement. Les différentes courbes représentent différentes puissances crêtes initiales ; du gris pâle vers le noir, $N^2=10, 5, 2, 1, 0.5, 0.1, 0.01$. L'erreur relative sur les moments $\langle T^2 \rangle$ et $\langle T\Omega \rangle_r$ est inférieure à 2%.

différence très faible entre deux termes très grands (proportionnels à N), ce qui est numériquement instable.

Le modèle permet également de tenir compte d'une phase initiale sur l'impulsion. La figure 4.3 montre la propagation d'une impulsion gaussienne pour différentes valeurs de phase initiale $\langle T\Omega \rangle_{r0}$. La phase initiale est d'origine dispersive ; c'est la phase obtenue suite à la propagation dans une fibre dispersive sans non-linéarité. Les différents cas ont tous $N = 1$ lorsque l'impulsion est «Fourier limitée». La comparaison est encore une fois excellente. La distance z_{FL} correspond au minimum de $\langle T^2 \rangle$ et au maximum de $\langle P \rangle$. Cette distance augmente avec le «chirp» initial puisqu'il faut une distance de propagation plus grande pour annuler ce «chirp». Il y a un léger écart autour de z_{FL} qui augmente avec $\langle T\Omega \rangle_{r0}$. Cela vient du fait que plus la phase initiale est grande, plus il y a une forte modification de la forme de l'impulsion par auto-modulation de phase. Les points discutés pour le cas Fourier limitée présentés précédemment s'appliquent également lorsque l'impulsion est chirpée.

4.3.3 Cas $\beta_2 I_0 < 0$

Considérons maintenant le cas où $\beta_2 I_0 < 0$ qui ne survient qu'en régime de dispersion normale lorsque $N^2 > 1/2$. Dans ce cas, l'évolution des différents moments est périodique lors de la propagation ; c'est le cas, entre autres, des solitons d'ordre supérieur. L'éq. (4.26) montre un arc sinus trigonométrique dans ce cas. Il est toutefois plus aisé de travailler avec la fonction arc tangente car elle est définie pour tous les arguments alors que pour l'arc sinus, il faut toujours s'assurer que l'argument est situé dans l'intervalle $[-1,1]$. En utilisant la relation $\tan(x) = \sin^2(x)/\sqrt{1 - \sin^2(x)}$, l'éq. (4.26) devient

$$|\langle T\Omega \rangle_r| = \text{sgn}(\langle T\Omega \rangle_r) I_0 z + K + \frac{q}{2} \arctan \left[\frac{1}{|\langle T\Omega \rangle_r|} \left(\sqrt{\frac{I_0 \langle T^2 \rangle}{|\beta_2|}} - \frac{q}{2} \right) \right] \quad (4.40)$$

où la constante d'intégration K est définie par

$$K = |\langle T\Omega \rangle_{0r}| - \frac{q}{2} \arctan \left[\frac{1}{|\langle T\Omega \rangle_{0r}|} \left(\sqrt{\frac{I_0 \langle T^2 \rangle_0}{|\beta_2|}} - \frac{q}{2} \right) \right]. \quad (4.41)$$

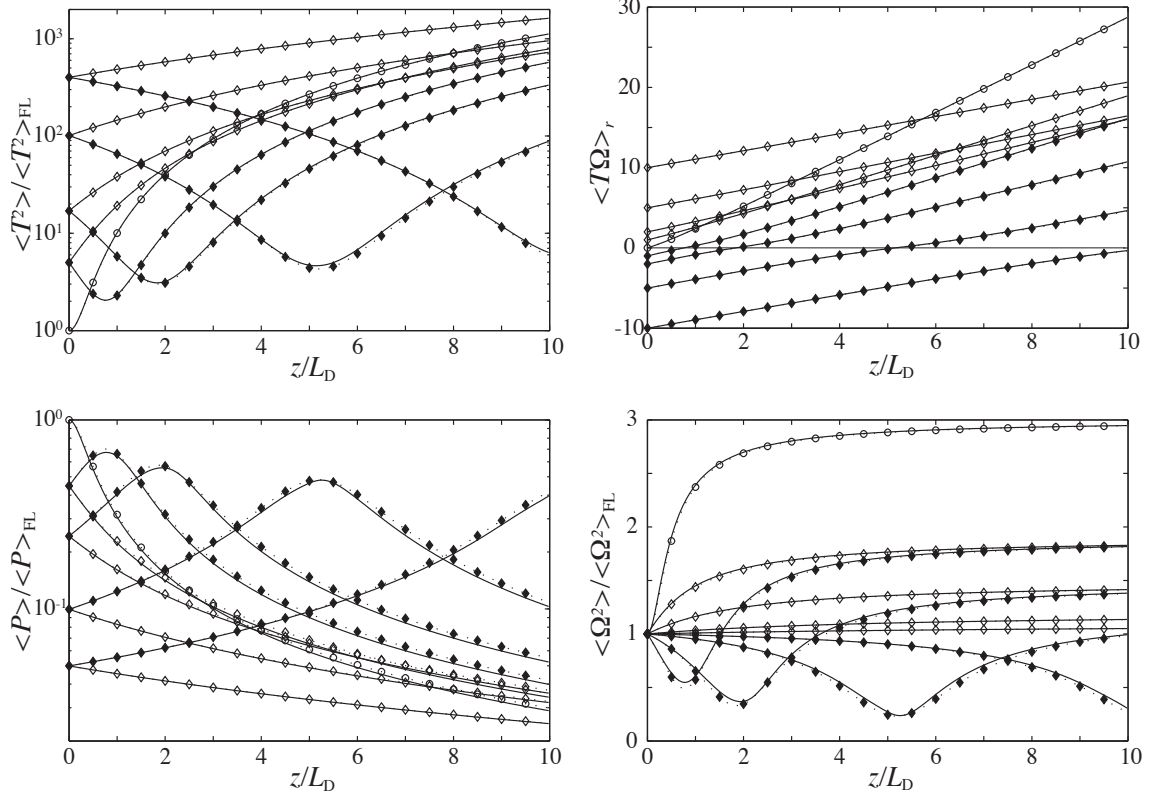


FIGURE 4.3 Propagation des moments d'ordre 2 pour une impulsion gaussienne dans le régime de dispersion normale. Les différentes courbes représentent des phases initiales par le biais de $\langle T\Omega \rangle_{r0} = -10, -5, -2, -1, 0, 1, 2, 5, 10$. Les lignes pleines correspondent à la propagation numérique du champ alors que les lignes pointillées avec les carrés proviennent de la résolution numérique de l'équation implicite. Les losanges vides sont associés à un «chirp» positif et les losanges pleins à un «chirp» négatif. Le cas «Fourier limité» est identifié par des cercles. Les moments sont normalisés par leur valeur «Fourier limitée», dénotée par l'indice FL. Tous les impulsions ont $N = 1$ lorsqu'elles sont «Fourier limitées».

Encore une fois, il faut déterminer le signe de $\langle T\Omega \rangle_r$ afin de résoudre complètement l'éq. (4.40). Pour ce faire, employons la même méthode que pour le cas $\beta_2 I_0 > 0$ et trouvons la distances z_{FL} où la phase est nulle. Contrairement au cas où $\beta_2 I_0 > 0$, il existe plusieurs distances z_{FL} où l'impulsion est «Fourier limitée» puisque l'évolution des moments est périodique. Ces distances sont obtenus en posant $\langle T\Omega \rangle_r = 0$ dans l'éq. (4.40)

$$z_{\text{FL},m} = \frac{\text{sgn}(\langle T\Omega \rangle_{0r})}{I_0} \left| \frac{q\pi}{4} - K \right| + \frac{qm\pi}{2I_0} \quad m \in \mathbb{Z} \quad (4.42)$$

La période d'oscillation \mathcal{T}_{osc} est obtenue à partir de l'éq. (4.42) en considérant que la fonction $\tan(x)$ passe deux fois par zéro par période.

$$\mathcal{T}_{\text{osc}} = \frac{q\pi}{I_0} \propto \frac{1}{N} \quad (4.43)$$

En remplaçant q par l'éq. (4.29) et $I_0 = \beta_2 \langle \Omega^2 \rangle_0 (1 + 2N^2)$ dans l'éq. (4.43), il apparaît que la période \mathcal{T}_{osc} est inversement proportionnelle à N lorsque $N \gg 1$. Ainsi, la période d'oscillation diminue lorsque la puissance crête initiale de l'impulsion augmente, ce qui correspond bien au comportement de solitons d'ordre supérieur. Notons un cas particulier lorsque $N = 1$ puisque l'argument de l'arctangente s'annule. Pour s'en convaincre, il suffit de remplacer q par l'éq. (4.29) et de noter que $\beta_2 \langle \Omega^2 \rangle_0 + \gamma \langle P \rangle / 2 = 0$ lorsque $N = 1$ dans le régime de dispersion anormale. En notant que le «chirp» change de signe à chaque fois que $\langle T\Omega \rangle_r$ passe par zéro, le signe de $\langle T\Omega \rangle_r$ peut être écrit

$$s_m = \text{sgn}(\langle T\Omega \rangle_r) = 1 - 2 \left\lfloor \left\lfloor \frac{2(z - z_{\text{FL},m})}{\mathcal{T}_{\text{osc}}} \right\rfloor \bmod 2 \right\rfloor \quad (4.44)$$

où les symboles \lfloor et \rfloor représentent la fonction plancher et \bmod est la fonction modulo donnant le reste de la division par l'argument du modulo. Connaissant le signe du moment $\langle T\Omega \rangle_r$, l'évolution de ce dernier peut maintenant être écrite en utilisant les

éqs. (4.40) et (4.44).

$$\begin{aligned}
 \langle T\Omega \rangle_r &= s_m |\langle T\Omega \rangle_r| \\
 &= I_0 z + \langle T\Omega \rangle_{0r} - \frac{q\pi}{2} \left[\frac{2(z - z_{FL,m})}{\mathcal{T}_{osc}} \right] + \frac{q}{2} \arctan \left[\frac{1}{\langle T\Omega \rangle_r} \left(\sqrt{\frac{I_0 \langle T^2 \rangle}{|\beta_2|}} - \frac{q}{2} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{q}{2} \arctan \left[\frac{1}{\langle T\Omega \rangle_{0r}} \left(\sqrt{\frac{I_0 \langle T^2 \rangle_0}{|\beta_2|}} - \frac{q}{2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

L'éq. (4.45) dépend à la fois de $\langle T\Omega \rangle_r$ et de $\langle T^2 \rangle$. Elle peut être toutefois exprimée uniquement en fonction de $\langle T^2 \rangle$ en utilisant l'éq. (4.21). L'équation résultante est également implicite et doit être résolue numériquement. Les autres moments sont obtenus à partir des éqs. (4.21), (4.39) et (4.38). Pour vérifier la validité de ce modèle, nous le comparons avec les solutions de l'ÉSNL résolue numériquement par «force brute».

La comparaison s'est faite à l'instar du cas précédent ; la résolution numérique du modèle a été comparée aux moments obtenus du champ propagé numériquement. La comparaison pour une impulsion sécante hyperbolique avec différents niveaux de puissance initiale est présentée à la figure (4.4). Les courbes sont décalées sur les différents graphiques pour plus de clarté. De façon générale, l'accord est excellent à basse puissance et se détériore progressivement lorsque $N > 1$. Contrairement au régime de dispersion normale, la forme de l'impulsion change rapidement dans le régime de dispersion anormale et ce, d'autant plus que N est grand. Le cas où $N^2 = 0,5$ est le cas limite entre les solutions où $\beta_2 I_0 < 0$ et $\beta_2 I_0 > 0$. Le cas $N = 1$ est le soliton d'ordre 1 et sa forme est invariante. Les cas $N = 2$ et $N = 3$ montrent la propagation des solitons d'ordre supérieur. Bien que la comparaison soit loin d'être parfaite, nous voyons que le modèle prédit bien qualitativement le comportement. La période prédite par le modèle s'approche de celle du soliton et diminue avec N . L'amplitude des variations des différents moments du soliton d'ordre 2 est adéquatement décrite par le modèle ; la comparaison est moins bonne pour le soliton d'ordre 3. Le modèle décrit également correctement comment les moments varient avec la propagation, à savoir si la variation est sinusoidale ou en dents de scie.

Lorsque N^2 vaut 2, 3 ou 5, le modèle prédit une évolution périodique alors que les simulations numériques montrent qu'il y a en plus une dérive plus ou moins polynomiale (particulièrement visible sur $N^2 = 2$). Lorsque N n'est pas entier, l'impulsion

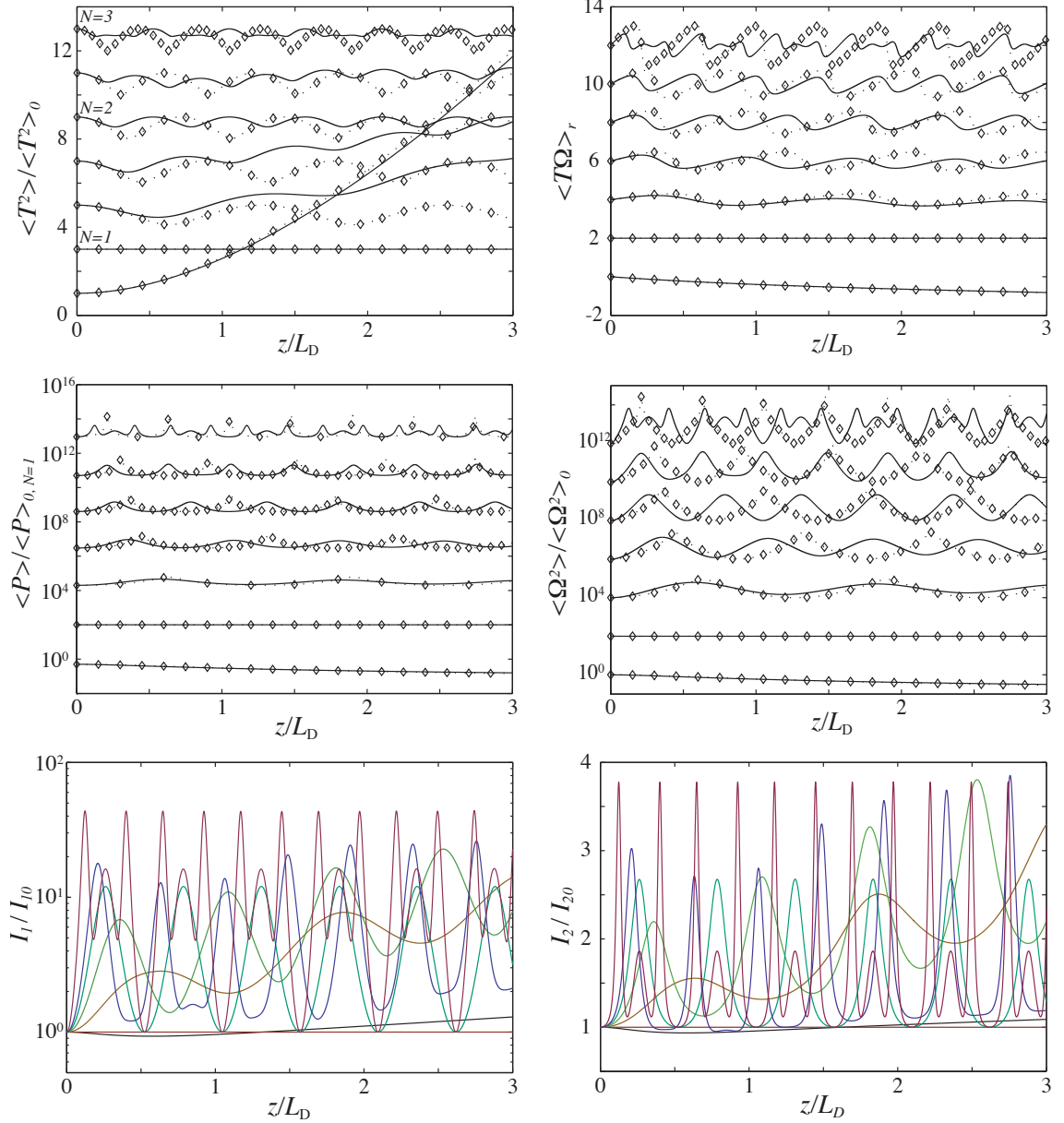


FIGURE 4.4 Propagation des moments d'ordre 2 d'une impulsion super gaussienne dans le régime de dispersion anormale ($\beta_2 < 0$). Les différentes courbes représentent différents puissances crêtes initiales ; du haut vers le bas $N^2 = 9, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 5$. Les lignes pleines correspondent à la propagation numérique du champ alors que les lignes pointillées avec les losanges proviennent de la résolution numérique de l'équation implicite. Les deux invariants approximatifs I_1 et I_2 , sont également tracés. Les courbes sont décalées de deux unités (100 en échelle logarithmique) les unes par rapport aux autres pour plus de clarté.

n'a pas un comportement parfaitement périodique puisque sa puissance est trop petite (ou trop grande) pour compenser la dispersion. Dans ce cas, l'impulsion change de forme, mais ne revient pas périodiquement à sa forme de départ car la propagation est partiellement dispersive. Le modèle dans le régime $\beta_2 I_0 < 0$ prédit toutefois un comportement strictement périodique qui ne reflète pas cette évolution. Cela semble à première vue surprenant ; après tout, ce comportement était modélisé adéquatement dans le cas où $\beta_2 I_0 > 0$! La réponse vient de modification de la forme d'impulsion. Dans le régime de dispersion anormale, lorsque les effets dispersifs et non-linéaire ne se compensent pas parfaitement, il y a formation d'un piédestal dans le profil de puissance quand le centre de l'impulsion ne se déplace pas à la même vitesse que les ailes. Ce piédestal cause un élargissement « artificiel » de $\langle T^2 \rangle$. Le mot « artificiel » est entre guillemets car l'augmentation de $\langle T^2 \rangle$ est due plus au changement de forme de l'impulsion qu'à une augmentation de sa durée (en réalité, l'impulsion centrale est plus courte). Le moment $\langle T\Omega \rangle_r$ demeure faible et $\langle \Omega^2 \rangle$ ne diminue pas, montrant bien que l'augmentation de $\langle T^2 \rangle$ est causé par un changement de forme. Rappelons-nous que l'opérateur t^2 met plus de poids sur les ailes de l'impulsion (et donc sur le piédestal) que sur son centre. Le modèle ne peut prédire ce type de changement car il ne tient compte que de la forme *initiale* de l'impulsion. C'est pour cette raison que le modèle donne des meilleurs résultats pour des valeurs entières de N car, dans ce cas, la forme de l'impulsion revient périodiquement à sa forme initiale. Ce problème ne survient pas dans le régime de dispersion normale puisque que la dispersion et la non-linéarité sont de même signe et qu'aucun piédestal ne se forme.

La variation des quantités I_1 et I_2 , approximativement invariantes dans notre modèle, donne une bonne idée de la variation de la forme d'impulsion et donc de la validité du modèle. Dans le cas $\beta_2 I_0 > 0$, l'invariant I_1 (celui relié au principe d'incertitude) varie d'un facteur 2 lors de la propagation ; dans le cas $\beta_2 I_0 < 0$ c'est de près d'un facteur 50 qu'il varie. Le changement pour I_2 est également plus élevé dans ce cas. La périodicité de la forme de l'impulsion est par ailleurs très visible lorsque N est entier. Il est intéressant de remarquer que les évolutions de ces quantités sont liées entre elles. En écrivant les équations de propagation de I_1 et I_2 à partir du système d'équations de propagation des moments original (4.12), nous obtenons

$$\beta_2 \frac{dI_1}{dz} + \gamma E \sqrt{\langle T^2 \rangle} \frac{dI_2}{dz} = 0. \quad (4.46)$$

Ainsi, l'évolution des deux «invariants» est la même lorsque la durée de l'impulsion est constante. Les quantités I_1 et I_2 deviennent réellement invariantes que lorsque $\beta_2 = 0$ ou $\gamma = 0$. Dans chacun de ces cas, nous avons vu à la section (4.3.1) que la propagation est décrite par des polynômes en z^2 . Le cas intermédiaire est beaucoup plus complexe et doit être décrit à l'aide de fonctions hyperboliques ou trigonométriques implicites, selon le signe de $\beta_2 I_0$. Regardons maintenant s'il est possible de simplifier ces équations afin de les rendre explicites.

4.4 Approximation des solutions implicites

Bien que les éqs. (4.36) et (4.45) décrivent précisément la propagation des moments, il demeure que ces équations doivent être résolues numériquement, ce qui est un inconvénient. Les équations analytiques, implicites ou explicites, permettent de mieux comprendre la physique d'un problème qu'une résolution. Les équations explicites peuvent être plus facilement utilisées et sont généralement plus intuitives que les équations implicites. Tentons donc de rendre explicites les équations de propagation des moments. Lorsque la distance de propagation z est très courte, l'éq. (4.12b) peut être linéarisée, c'est-à-dire intégrée en supposant les autres variables constantes, et donne

$$\langle T\Omega \rangle_{rL} = \langle T\Omega \rangle_{0r} + \left(\beta_2 \langle \Omega^2 \rangle_0 + \frac{\gamma}{2} \langle P \rangle_0 \right) z \quad (4.47)$$

où l'indice L signifie «linéarisé». Afin de déterminer $\langle T^2 \rangle$, il suffit de remplacer l'éq. (4.47) dans l'éq. (4.12a) et d'intégrer.

$$\langle T^2 \rangle_L = \langle T^2 \rangle_0 + 2\beta_2 \langle T\Omega \rangle_{0r} z + \beta_2 \left(\beta_2 \langle \Omega^2 \rangle_0 + \frac{\gamma}{2} \langle P \rangle_0 \right) z^2 \quad (4.48)$$

Les moments $\langle \Omega^2 \rangle$ et $\langle P \rangle$ sont obtenus par le biais des éqs. (4.39) et (4.38) respectivement. Le modèle linéarisé est le même pour $\beta_2 I_0 > 0$ et $\beta_2 I_0 < 0$. Ce modèle ne décrit ni l'évolution asymptotique en régime de dispersion normale ni l'évolution périodique en régime de dispersion anormale. Une équation similaire à l'éq. (4.48) a été obtenue précédemment où la largeur de bande n'a pas été incluse. Le modèle s'applique sur de longues distances lorsque la puissance de l'impulsion est faible ($N^2 \ll 1$). Dans un tel cas, la non-linéarité est faible et la densité spectrale de l'impulsion change peu lors de la propagation ; l'approximation $\langle \Omega^2 \rangle \approx \langle \Omega^2 \rangle_0$ est donc justifiée. À la limite,

lorsque $\gamma = 0$, l'éq. (4.48) décrit exactement la propagation dispersive de l'éq. (4.30c). Lorsque la non-linéarité est importante, il faut de nouveau considérer deux cas selon le signe de $\beta_2 I_0$.

4.4.1 Cas $\beta_2 I_0 > 0$

Dans ce régime, la durée, densité spectrale et phase augmentent de manière monotone avec la propagation. Lorsque la distance de propagation tend vers l'infini ($z \rightarrow \infty$), le logarithme dans l'éq. (4.36) devient négligeable ; nous obtenons ainsi l'expression asymptotique de $\langle T\Omega \rangle_r$.

$$\begin{aligned}\langle T\Omega \rangle_{r\infty} &= \langle T\Omega \rangle_{0r} + I_0 z \\ \langle T^2 \rangle_\infty &= \langle T^2 \rangle_0 + 2\beta_2 \langle T\Omega \rangle_{0r} z + \beta_2 I_0 z^2\end{aligned}\tag{4.49}$$

Le «chirp» est donnée par l'éq. (3.12) et s'exprime par le rapport $\langle T\Omega \rangle_r / \langle T^2 \rangle$ lorsque la phase est quadratique dans le temps.

$$\Omega_{\text{inst},\infty} = \frac{\langle T\Omega \rangle_{r\infty}}{\langle T^2 \rangle_\infty} T \approx \frac{T}{\beta_2 z}\tag{4.50}$$

Ce résultat est similaire au chirp linéaire des impulsions paraboliques où une variation en $1/z$ de la fréquence instantanée a été calculée (Anderson *et al.*, 1993b). Il est remarquable que $\langle T\Omega \rangle_{rL}$ et $\langle T\Omega \rangle_{r\infty}$ soient tous deux linéaires avec z et que leur pente ne diffère que par $\gamma \langle P \rangle_0 / 2$. Le logarithme de l'éq. (4.36) assure donc une transition douce entre ces deux pentes. Une expression explicite peut être trouvée pour cette transition en supposant que l'impulsion s'est très élargie, autrement dit $\langle T^2 \rangle \gg \langle T^2 \rangle_0$, ce qui se produit lorsque l'impulsion est très «chirpée». Sous cette approximation, l'éq. (4.21) devient

$$|\langle T\Omega \rangle_r| = \left[\frac{I_0}{\beta_2} \langle T^2 \rangle - \frac{\gamma I_2 E}{\beta_2} \sqrt{\langle T^2 \rangle} - I_1 \right]^{\frac{1}{2}} \approx \sqrt{\frac{I_0 \langle T^2 \rangle}{\beta_2}} - \text{sgn}(\beta_2) \frac{q}{2}\tag{4.51}$$

ce qui est équivalent à supposer que $\langle T\Omega \rangle_r \gg I_1, q$. En utilisant cette approximation dans l'éq. (4.36), et en remplaçant le moment $\langle T\Omega \rangle_r$ par l'éq. (4.47) nous obtenons

une équation décrivant la transition.

$$\langle T\Omega \rangle_{rG} = \langle T\Omega \rangle_{0r} + I_0 z - \text{sgn}(\beta_2) s \frac{q}{2} \ln \left[\frac{2\langle T\Omega \rangle_{rL}}{\langle T\Omega \rangle_{0r} + s \sqrt{\frac{I_0 \langle T^2 \rangle_0}{\beta_2} - \text{sgn}(\beta_2) s \frac{q}{2}}} \right] \quad (4.52)$$

L'indice G indique une solution sur une grande distance de propagation. Il aurait également été possible de substituer $\langle T\Omega \rangle_r$ par l'éq. (4.49), mais puisque nous avons déjà supposé que $\langle T\Omega \rangle_r$ est très grand, il est plus précis sur de courtes distances d'utiliser l'éq. (4.47). Les autres moments sont obtenus à partir des éqs. (4.37)–(4.38). L'éq. (4.52) se réduit au cas asymptotique lorsque la distance de propagation est très grande mais ne se réduit pas au cas linéarisé lorsque cette dernière est très courte. Il faut donc déterminer la distance pour laquelle il faut passer du modèle linéarisé donné par l'éq. (4.49) à celui de l'éq. (4.52). Cette distance z_G de transition est l'endroit où la différence entre les deux modèles est la plus faible. Autrement dit, z_G est la distance minimisant la différence $\langle T\Omega \rangle_{rL} - \langle T\Omega \rangle_{rG}$.

$$z_G = \sqrt{\frac{\langle T^2 \rangle_0}{\beta_2 I_0}} - \frac{\langle T\Omega \rangle_{r0}}{I_0 - \frac{\gamma \langle P \rangle_0}{2}} \quad (4.53)$$

Si la distance de propagation est inférieure à z_G , il vaut mieux utiliser l'éq. (4.47) ; au-delà de z_G , l'éq. (4.52) est plus précise. Puisque nous avons obtenu $\langle T\Omega \rangle_{rG}$ en supposant que le chirp était grand, il n'est pas surprenant que la distance de transition dépende de $\langle T\Omega \rangle_{r0}$.

Pour vérifier la validité des éqs. (4.47) et (4.52), nous les comparons de nouveau avec les simulations numériques pour différentes valeurs de N^2 en utilisant la même procédure qu'à la section précédente. La comparaison est montrée à la figure 4.5. $\langle T\Omega \rangle_{rL}$ représente bien l'évolution pour de courtes distances et $\langle T\Omega \rangle_{rG}$ pour de longues distances. L'écart est évidemment le plus grand autour du point de transition z_G . Nous voyons qu'autour du point de transition, $\langle T\Omega \rangle_{rL}$ est plus précis que $\langle T\Omega \rangle_{rG}$, ce qui suggère que de minimiser la distance entre les deux modèles pour obtenir z_G n'est pas la méthode optimale. Toutefois pour faire mieux, il faudrait connaître a priori la solution recherchée, ce qui n'est évidemment pas possible. Tentons maintenant de simplifier les équations implicites du cas où $\beta_2 I_0 < 0$.

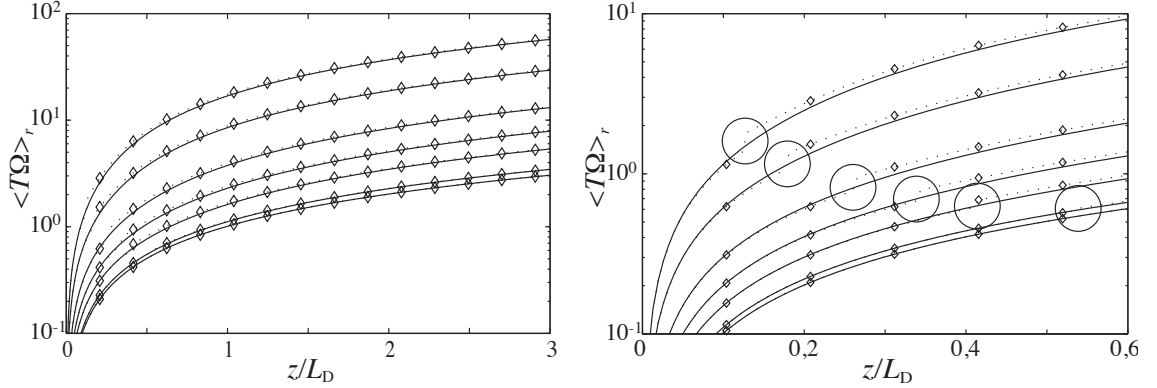


FIGURE 4.5 Comparaison des modèles explicites et des simulations pour moment $\langle T\Omega \rangle_r$ d'une impulsion super gaussienne dans le régime de dispersion normale ($\beta_2 > 0$). Les différentes courbes montrent différentes puissances crêtes initiales; du haut vers le bas $N^2 = 10, 5, 2, 1, 0.5, 0.1, 0.01$. Les lignes pleines représentent les simulations numériques alors que les lignes pointillées avec les losanges représentent le modèle linéarisé lorsque $z < z_G$ et le modèle pour de grandes distances lorsque $z > z_G$. Le point de transition vaut $z_G/L_D = 0.13, 0.18, 0.26, 0.34, 0.41, 0.53, 0.58$ selon N^2 . La figure de droite est un agrandissement de celle de gauche.

4.4.2 Cas $\beta_2 I_0 < 0$

Il est plus difficile de déterminer une équation explicite dans ce cas car il n'est pas possible de supposer que le «chirp» est très grand. De plus, tous les paramètres sont du même ordre de grandeur de sorte qu'aucune simplification n'est possible. Toutefois, si l'impulsion possède un «chirp» initial important, l'éq. (4.52) peut être utilisée puisque l'évolution est monotone dans ce cas. Il n'y a pas de méthodes évident pour simplifier l'éq. (4.45) afin d'obtenir une forme explicite; elle est toutefois raisonnablement décrite par

$$\langle T\Omega \rangle_{rG} = \left(\sqrt{\frac{I_0 \langle T^2 \rangle_0}{|\beta_2|}} - \frac{q}{2} \right) \frac{\sin\left(\frac{2I_0 z}{q}\right)}{1 + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cos\left(\frac{2I_0 z}{q}\right)} \quad (4.54)$$

qui est similaire à un développement de Pade-Fourier Geer (1995). La période en z du moment $\langle T\Omega \rangle_{rG}$ est celle de l'éq. (4.43). Le paramètre N au dénominateur détermine la forme de la fonction périodique. Lorsque $N \approx 1$, l'évolution est approximativement

sinusoïdale. Elle devient en dents de scie lorsque $N \gg 1$. L'évolution suit une tangente lorsque $N \ll 1$. Il est donc évident que le modèle ne s'applique que pour des puissances suffisamment élevées, c'est-à-dire $N > 1$ puisque l'évolution du moment $\langle T\Omega \rangle_r$ n'est pas périodique lorsque $N \leq 1$. Il est toujours possible d'utiliser le modèle linéarisé $\langle T\Omega \rangle_{rL}$ à faible puissance $N < 1$. Puisque l'éq. (4.54) n'est pas une solution valide de l'éq. (4.25), l'éq. (4.37) ne peut être utilisée pour déterminer l'évolution du moment $\langle T^2 \rangle$. Pour y arriver, il est préférable d'intégrer directement l'éq. (4.54).

$$\langle T^2 \rangle_G = \langle T^2 \rangle_0 - \frac{q\beta_2}{I_0(1 - \frac{1}{N})} \ln \left[\frac{1 + (1 - \frac{1}{N}) \cos\left(\frac{2I_0 z}{q}\right)}{2 - \frac{1}{N}} \right] \quad (4.55)$$

Les autres moments sont donnés par les éqs. (4.39) et (4.38). Pour vérifier la justesse des éqs. (4.54) et (4.55), comparons-les au modèle implicite de l'éq. (4.45). Il est plus justifié de les comparer à cette dernière plutôt qu'aux solutions numériques. Comme nous l'avons vu, l'éq. (4.45) ne modélise pas précisément les simulations numériques à haute puissance. Le mieux que nous pouvons espérer des éqs. (4.54) et (4.55) est de bien représenter l'éq. (4.45). La comparaison est présentée à la figure 4.6 pour différentes valeurs de N . La correspondance est satisfaisante entre les modèles expli-

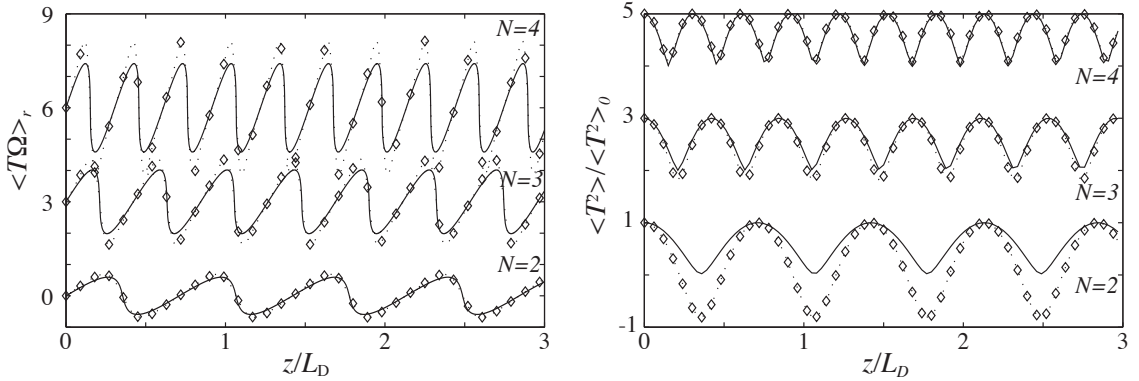


FIGURE 4.6 Comparaison entre des moments $\langle T\Omega \rangle_r$ et $\langle T^2 \rangle$ obtenus par les modèles implicites et explicites dans le régime de dispersion anormale ($\beta_2 < 0$). Le modèle explicite donné par les éqs. (4.54) et (4.55) est tracé en ligne pointillée avec les losanges et la solution implicite de l'éq. (4.45) est tracée en lignes pleines pour $N = 2, 3, 4$. Les courbes sont décalées de trois graduations pour $\langle T\Omega \rangle$ et de deux graduations pour $\langle T^2 \rangle$ à des fins de clarté.

cites et implicites, compte tenu du fait que les éqs. (4.54) et (4.55) sont très approximatives. L'écart entre les modèles diminue lorsque N augmente ; malheureusement l'écart entre le modèle implicite et les simulations numériques augmente lorsque N augmente, comme nous l'avons vu à la figure 4.4.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé les moments pour résoudre l'équation de Schrödinger non-linéaire. Nous avons limité l'analyse aux moments d'ordre 2 qui décrivent la durée de l'impulsion, sa largeur de bande ainsi qu'une covariance donnant la phase. Un autre moment, $\langle P \rangle$, doit être introduit pour décrire la puissance de l'impulsion. Pour fermer le système et calculer l'évolution de ces moments, nous avons supposé que la phase varie quadratiquement avec le temps. Cette approximation a pour conséquence que la forme de l'impulsion est invariante lors de la propagation. Cette approximation a également permis de déterminer trois quantités invariantes décrivant respectivement la conservation des effets dispersifs et non-linéaires, le principe d'incertitude d'Heisenberg et la conservation de l'énergie.

Par le biais de ces trois invariants, une solution des équations de propagation a été trouvée, valide autant dans le régime de dispersion normale qu'anormale. Selon le signe de $\beta_2 I_0$, la solution a un comportement monotone ($\beta_2 I_0 > 0$) ou périodique ($\beta_2 I_0 < 0$). Les solutions ainsi obtenues sont implicites. Dans le régime monotone, la solution ainsi trouvée est très proche de la solution trouvée par résolution numérique directe autant pour de courtes que de longues distances de propagation, à faible et à haute puissance. Dans le régime périodique, l'accord entre la solution implicite et les simulations numériques se détériore avec la puissance crête initiale de l'impulsion. Toutefois la solution décrit qualitativement bien la diminution de la période lorsque N augmente ainsi que la forme du comportement périodique.

Nous avons finalement simplifié les deux solutions implicites afin d'obtenir des expressions explicites. Nous avons d'abord trouvé une expression explicite pour de courtes distances, valide dans les deux régimes de propagation (selon le signe de $\beta_2 I_0$). Dans le régime de propagation monotone, une expression pour de grandes distances de propagation a été obtenue en supposant la durée de l'impulsion beaucoup plus grande que sa durée initiale. Un point de transition entre le modèle à courte et à longue distance a également été défini. Les expressions explicites monotones sont en

bon accord avec les simulations numériques. Dans le régime périodique, une expression explicite décrit bien le modèle implicite pour de grandes valeurs de N . Bien que d'une utilité limitée, elle représente bien qualitativement la propagation, même lorsque la précision diminue avec N .

Chapitre 5

Propagation d'une impulsion gaussienne

Au chapitre précédent, des expressions analytiques implicites et explicites ont été obtenues pour décrire la propagation d'une impulsion dans un milieu dispersif et non-linéaire au moyen des moments d'ordre 2. Bien que ces expressions décrivent les principales caractéristiques de l'impulsion, elles n'en décrivent pas la forme. Peut-on espérer déduire la forme des impulsions à partir des moments d'ordre 2 ? La réponse est non puisque nous avons supposé que la phase de l'impulsion est quadratique lors de la résolution. La phase quadratique n'est en effet valide que pour les impulsions gaussiennes dans un milieu dispersif, pour les impulsions paraboliques dans un milieu non-linéaire et pour les solitons d'ordre 1, des impulsions qui sont toutes invariantes lors de leur propagation.

Bien que l'évolution de la forme de l'impulsion ne puisse être décrite de manière générale par les moments d'ordre 2, il est possible d'utiliser ces expressions afin de perturber les solutions analytiques pour décrire la propagation d'une impulsion gaussienne dans un milieu dispersif et non-linéaire. Dans ce chapitre, des expressions analytiques implicites décrivant la propagation d'une impulsion dans un milieu dispersif et non-linéaire sont déduites à partir des cas purement dispersif et purement non-linéaire ainsi que des moments d'ordre 2.

Dans ce chapitre, nous traitons seulement du cas où $\beta_2 I_0 > 0$, étant donné que le cas où $\beta_2 I_0 < 0$ ne donne pas des résultats suffisamment précis pour permettre l'analyse qui suit.

5.1 Propagations dispersive et non-linéaire

Commençons par rappeler les solutions dispersives et non-linéaires et exprimons-les en fonctions des moments d'ordre 2.

5.1.1 Propagation dispersive

La solution dispersive (4.4) peut se réécrire en terme des moments d'ordre d'ordre 2 comme

$$A(z, T) = \sqrt{\frac{P_0}{|\eta|}} \exp\left(-\frac{\langle\Omega^2\rangle}{\eta} T^2\right) \quad \eta = 1 - 2i\langle T\Omega\rangle_r \quad (5.1)$$

où P_0 est la puissance initiale qui est donnée par

$$P_0 = E \left(\frac{2}{\pi} \langle\Omega^2\rangle \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.2)$$

La propagation dispersive ne dépend donc que des moments E , $\langle\Omega^2\rangle$ et $\langle T\Omega\rangle_r$. Notons que la solution aurait pu s'écrire avec les moments $\langle P\rangle$ et $\langle T^2\rangle$, mais il est plus naturel de l'exprimer avec E et $\langle\Omega^2\rangle$ puisque ces derniers sont invariants lors de la propagation purement dispersive.

5.1.2 Propagation non-linéaire

La solution non-linéaire (4.6) peut se réécrire en terme des moments d'ordre d'ordre 2 comme

$$A(z, T) = \sqrt{P_c} \exp\left(-\frac{T^2}{4\langle T^2\rangle}\right) \exp(i\gamma |A(z, T)|^2 z) \quad (5.3)$$

où P_c est la puissance crête qui est donnée par

$$P_c = \sqrt{2}\langle P\rangle = \frac{E}{\sqrt{2\pi\langle T^2\rangle}} \quad (5.4)$$

et où le facteur $\sqrt{2}$ découle de la forme gaussienne de l'impulsion. Puisque l'intensité de l'impulsion est invariante lors de la propagation non-linéaire, il est préférable d'utiliser les moments E , $\langle P\rangle$ et $\langle T^2\rangle$ qui sont également invariants. Notons que l'équation (5.3) est implicite.

5.1.3 Perturbation des solutions analytiques

Maintenant que nous avons défini la propagation d'une impulsion gaussienne dans un milieu dispersif et dans un milieu non-linéaire, nous pouvons les perturber pour déterminer la propagation d'une impulsion gaussienne dans un milieu dispersif et non-linéaire. L'idée est de remplacer les moments qui sont invariants dans les équations (5.1) et (5.3) par les expressions des moments d'ordre 2 obtenus au chapitre 4. Les équations perturbées doivent ensuite être normalisées afin de conserver l'énergie. Notons finalement que les éqs. (5.1) et (5.3) sont perturbées de manières très différentes dans ce qui suit.

5.1.4 Perturbation de la propagation dispersive

Dans le cas de la propagation dispersive, il est intéressant de remarquer que le seul paramètre changeant lors de la propagation est le paramètre η et donc $\langle T\Omega \rangle$. Rappelons les deux expressions explicites trouvées au chapitre 4, (4.47) et (4.49), décrivant le moment $\langle T\Omega \rangle$.

$$\langle T\Omega \rangle_{rL} = \langle T\Omega \rangle_{0r} + \left(\beta_2 \langle \Omega^2 \rangle_0 + \frac{\gamma}{2} \langle P \rangle_0 \right) z \quad (5.5)$$

$$\langle T\Omega \rangle_{r\infty} = \langle T\Omega \rangle_{0r} + \left(\beta_2 \langle \Omega^2 \rangle_0 + \gamma \langle P \rangle_0 \right) z \quad (5.6)$$

Les deux expressions ne diffèrent que par un facteur 1/2 sur le terme non-linéaire ; nous utilisons donc la valeur moyenne et supposons une phase initiale nulle.

$$\langle T\Omega \rangle_r = \left(\beta_2 \langle \Omega^2 \rangle_0 + \frac{3}{4} \gamma \langle P \rangle_0 \right) z \quad (5.7)$$

L'éq. (5.7) contient un terme proportionnel à $\langle P \rangle$ qui change la valeur du «chirp» pour inclure l'auto-modulation de phase ; ceci ne change cependant pas la forme de l'impulsion, car le moment $\langle P \rangle$ n'est pas une fonction du temps. Pour modifier la forme de l'impulsion, il faut ajouter cette dépendance temporelle. Remplaçons ainsi le moment $\langle P \rangle$ par la puissance $|A(z, T)|^2 / \sqrt{2}$, ce qui revient à s'affranchir de l'effet moyennant de l'intégrale dans la définition de $\langle P \rangle$. L'éq. (5.7) devient alors

$$\{T\Omega\}_r = \beta_2 \{\Omega^2\} z + \frac{3}{4\sqrt{2}} \gamma |A(z, T)|^2 z \quad (5.8)$$

où les accolades indiquent que les moments sont maintenant des quantités qui dépendent du temps. Ce ne sont donc plus des moments proprement dit mais continuent à représenter le même concept. L'indice 0 a été retiré de sorte que les moments ne représentent plus des valeurs initiales. Le moment $\{\Omega^2\}$ est déterminé par l'invariant I_0 donné par l'éq. (4.20a).

$$\begin{aligned}\{\Omega^2\} &= \frac{I_0}{\beta_2} - \frac{\gamma}{\beta_2} \langle P \rangle = \frac{I_0}{\beta_2} - \frac{\gamma}{\sqrt{2}\beta_2} \frac{P_c}{|\eta|} \\ &= \frac{I_0}{\beta_2} - \frac{\gamma}{\beta_2} \frac{E}{|\eta|} \left(\frac{1}{\pi} \{\Omega^2\} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \eta = 1 - 2i \{T\Omega\}_r\end{aligned}\quad (5.9)$$

Le moment $\langle P \rangle$ est substitué par la puissance crête et P_c par l'éq. (5.2). La raison pour laquelle $\langle P \rangle$ est substitué par des expressions différentes dans les éqs. (5.8) et (5.9) est que la phase non-linéaire est proportionnelle à la puissance instantanée alors que l'invariant I_0 lie la largeur spectrale à la puissance crête. La largeur de bande $\{\Omega^2\}$ est donc définie si $\{T\Omega\}$ est défini. La seule inconnue est la puissance $|A(z, T)|^2$ qui est obtenue à travers l'amplitude complexe $A(z, T)$.

$$A(z, T) = \left(\frac{2}{\pi} \frac{E^2}{|\eta|^2} \{\Omega^2\} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left(-\frac{\{\Omega^2\}}{\eta} T^2 \right) \quad (5.10)$$

Puisque la puissance dépend de $\{\Omega^2\}$ et de $\{T\Omega\}$ qui eux-mêmes dépendent de la puissance, l'éq. (5.10) est définie de manière implicite. La solution implicite est représentée schématiquement à la figure 5.1. Bien que cette solution soit parfaitement définie analytiquement, elle doit être résolue numériquement pour obtenir explicitement l'amplitude du champ. Cette résolution numérique est plus rapide que la simulation de la propagation du champ et peut être obtenue pour n'importe quelle valeur individuelle de z .

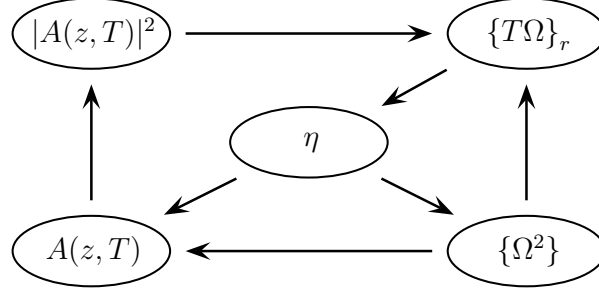


FIGURE 5.1 Représentation schématique de la solution implicite à la propagation non-linéaire et dispersive d'une impulsion gaussienne. La variable à la queue de la flèche doit être connue afin de déterminer la variable à la tête de la flèche.

5.1.5 Perturbation de la propagation non-linéaire

Dans le cas non-linéaire, commençons par linéariser l'équation de Schrödinger non-linéaire (éq. (4.2)) comme point de départ à la propagation

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial z} &= -\frac{i\beta_2}{2A} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + i\gamma |A|^2 \\ \Rightarrow A(z, T) &= A_0 \exp \left[\left(-\frac{i\beta_2}{2A_0} \frac{\partial^2 A_0}{\partial T^2} + i\gamma |A_0|^2 \right) z \right] \end{aligned} \quad (5.11)$$

où $A_0 = A(0, T)$ est le champ initial en $z = 0$. Utilisons maintenant l'éq. (5.3) comme champ initial, bien qu'il soit défini sur tous les z . La dérivée seconde est alors définie par

$$\frac{1}{A_0} \frac{\partial^2 A_0}{\partial T^2} = -\frac{1}{2\langle T^2 \rangle_0} + \frac{T^2}{4\langle T^2 \rangle_0^2} - i\frac{\gamma |A_0|^2 z}{\langle T^2 \rangle_0} + 2i\gamma |A_0|^2 z \frac{T^2}{\langle T^2 \rangle_0^2} - \gamma^2 |A_0|^4 z^2 \frac{T^2}{\langle T^2 \rangle_0^2}. \quad (5.12)$$

Les termes réels dans la dérivée seconde sont des termes de phase ; les termes imaginaires agissent comme un filtre qui modifie la forme de l'impulsion. L'effet filtrant des termes imaginaires contribue à changer la largeur l'impulsion de sorte que $\langle T^2 \rangle_0$ ne représente plus la variance temporelle. De la même manière ce filtre atténue la puissance crête de sorte que P_c n'est plus la puissance crête. Écrivons la puissance de

l'impulsion en changeant $\langle T^2 \rangle_0$ par $\langle T^2 \rangle_{\text{ini}}$ et P_c par P_{ini} pour marquer la différence.

$$|A(z, T)|^2 = P_{\text{ini}} \exp \left(-\frac{T^2}{2\langle T^2 \rangle_{\text{ini}}} \right) \exp \left[-\frac{\beta_2 \gamma |A(z, T)|^2 z^2}{\langle T^2 \rangle_{\text{ini}}} \left(1 - \frac{2T^2}{\langle T^2 \rangle_{\text{ini}}} \right) \right] \quad (5.13)$$

Pour avoir une expression utile de l'amplitude, il faut s'affranchir de P_{ini} et de $\langle T^2 \rangle_{\text{ini}}$. À partir de l'éq. (5.13), il est possible de déterminer la vraie puissance crête, en évaluant la puissance autour de $T = 0$.

$$P_c = P_{\text{ini}} \exp \left(-\frac{\beta_2 \gamma P_c z^2}{\langle T^2 \rangle_{\text{ini}}} \right) \quad (5.14)$$

La puissance s'écrit alors approximativement lorsque $T^2 \ll \langle T^2 \rangle_{\text{ini}}$

$$|A(z, T)|^2 = P_c \exp \left(-\frac{T^2}{2\langle T^2 \rangle_{\text{ini}}} \right) \exp [-F (|A(z, T)|^2 - P_c)] \quad (5.15)$$

où F agit comme un filtre non-linéaire et s'écrit

$$F = \frac{\beta_2 \gamma z^2}{\langle T^2 \rangle_{\text{ini}}} \left(1 - \frac{2T^2}{\langle T^2 \rangle_{\text{ini}}} \right) \quad (5.16)$$

Pour déterminer $\langle T^2 \rangle_{\text{ini}}$, il suffit de calculer la variance de l'éq. (5.15). Il est toutefois plus simple d'évaluer la largeur à $1/e$ et de noter que pour une gaussienne $T_{1/e}^2 = 2\langle T^2 \rangle$; cela induit une légère erreur car l'impulsion n'est pas gaussienne. La variance peut être ainsi reliée à $\langle T^2 \rangle_{\text{ini}}$ au moyen d'une équation quadratique.

$$\langle T^2 \rangle_{\text{ini}} = \langle T^2 \rangle + \beta_2 \gamma P_c z^2 \left(\frac{1}{e} - 1 \right) \left(1 - \frac{4\langle T^2 \rangle}{\langle T^2 \rangle_{\text{ini}}} \right) \quad (5.17)$$

En utilisant les éqs. (5.15)–(5.17), nous obtenons une équation implicite qui décrit la propagation d'une gaussienne dans un milieu dispersif et non-linéaire à condition que l'évolution selon z des quantités $\langle T^2 \rangle$ et P_c soit connue. L'évolution du moment $\langle T^2 \rangle$ est donnée en intégrant l'éq. (4.17a) au moyen de l'éq. (5.7)

$$\langle T^2 \rangle = \langle T^2 \rangle_0 + \beta_2 \left(I_0 - \frac{\gamma P_c}{4\sqrt{2}} \right) z^2 \quad (5.18)$$

où le moment $\langle P \rangle$ est remplacé par $P_c/\sqrt{2}$ et le moment $\langle \Omega^2 \rangle$ est déterminé par l'invariant I_0 . La seule quantité qu'il faut définir est la puissance crête P_c qui peut être exprimée en termes de l'énergie, en supposant que l'impulsion est gaussienne.

$$P_c = \frac{E}{\sqrt{2\pi\langle T^2 \rangle}} \quad (5.19)$$

En résumé, en connaissant le moment $\langle T^2 \rangle$ et l'énergie, il est possible de déterminer P_c , $\langle T^2 \rangle_{\text{ini}}$ et la puissance $|A(z, T)|^2$ au moyen des éqs. (5.19), (5.17) et (5.15) respectivement. Notons que, contrairement au cas précédent, la solution obtenue est explicite et non implicite. Pour obtenir l'amplitude $A(z, T)$ du champ de l'impulsion, il suffit de considérer les termes imaginaires de l'éq. (5.12). L'amplitude s'écrit alors

$$A(z, T) = \sqrt{P_c} \exp\left(-\frac{T^2}{4\langle T^2 \rangle_{\text{ini}}}\right) \exp\left[-\frac{F}{2} (|A(z, T)|^2 - P_c)\right] \exp(i\phi) \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \phi &= \gamma |A(z, T)|^2 z + \beta_2 \langle \Omega^2 \rangle \left(1 - \frac{T^2}{2\langle T^2 \rangle}\right) \\ &= \gamma |A(z, T)|^2 z + \left(I_0 - \frac{\gamma P_c}{\sqrt{2}}\right) \left(1 - \frac{T^2}{2\langle T^2 \rangle}\right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

où le moment $\langle \Omega^2 \rangle$ a été introduit pour remplacer $(4\langle T^2 \rangle)^{-1}$ (le facteur de 4 est pour une impulsion gaussienne). Bien qu'il n'y ait pas de différence entre les deux au début de la propagation (puisque $\langle T\Omega \rangle_0 = 0$), $\langle \Omega^2 \rangle$ est plus approprié car il reflète mieux la physique de la dispersion que $\langle T^2 \rangle$. La phase est obtenue à partir des éqs. (5.11) et (5.12) où le terme quadratique en γ a été négligé.

5.2 Comparaison et validation

Pour valider les éqs. (5.10) et (5.20), nous les comparons avec les champs obtenus par simulation numérique à l'aide d'un propagateur par transformée de Fourier. Les comparaisons sont faites pour différentes longueurs de dispersion et pour différents rapports N entre la longueur de dispersion et la longueur non-linéaire définis à l'éq. (4.28). Spécifiquement, la comparaison est faite pour des valeurs de $N = 1, 5, 10$ correspondant à des effets non-linéaires égaux, cinq fois plus importants et dix fois plus importants respectivement que les effets dispersifs. Les puissances, chirps et spectres sont comparés aux figures 5.2–5.10 pour des distances de propagation allant,

selon le cas, d'une fraction de la longueur de dispersion L_D à $4L_D$.

De manière générale, l'accord entre les deux modèles et les simulations numériques est bon, ce qui est surprenant, considérant la nature très approximative des deux modèles analytiques. Les deux modèles donnent des résultats plus proches des simulations numériques pour de faibles valeurs de N que pour de grandes valeurs de N . Lorsque les effets non-linéaires sont importants, correspondant à une valeur élevée de N , la modification de la forme de l'impulsion est importante. Il s'ensuit que la perturbation doit être plus forte pour modifier la gaussienne, ce qui augmente l'erreur. Les deux modèles donnent des résultats différents. Le modèle dispersif évalue bien la puissance crête de l'impulsion mais sous-estime sa durée. Le modèle non-linéaire estime correctement la durée de l'impulsion mais surestime la puissance crête. Le même résultat se reflète dans le domaine des fréquences où le modèle dispersif sous-estime la densité spectrale crête et surestime la largeur spectrale et le modèle non-linéaire fait le contraire.

Bien que les deux modèles estiment bien la pente du «chirp» autour de $T = 0$, ils ne représentent pas les oscillations rapides associées à la rupture de l'enveloppe («wave-breaking»). Le modèle dispersif décrit bien la courbure générale du «chirp», de sorte que le «chirp» est bien décrit sur les ailes de l'impulsion, ce qui n'est pas surprenant puisque la dispersion domine sur les ailes. Toutefois, le modèle dispersif ne décrit pas le chirp provenant de l'auto-modulation de phase. De plus, des instabilités apparaissent à haute puissance. Ces instabilités proviennent de la résolution numérique de l'équation implicite (5.10). L'effet de ces instabilités est visible sur la puissance de l'impulsion par une légère modulation sur les ailes de l'impulsion. Ces instabilités ne sont pas présentes sur le modèle non-linéaire puisque ce dernier est explicite.

Le modèle non-linéaire représente adéquatement le «chirp» non-linéaire autour de $T = 0$ puisque la phase non-linéaire apparaît explicitement dans l'éq. (5.20). Toutefois le «chirp» sur les ailes de l'impulsions est sous-estimé à haute puissance, puisque le «chirp» sur les ailes est dominé par la dispersion. L'effet de la phase non-linéaire est observée sur le spectre de l'impulsion où des oscillations dues à l'auto-modulation de phase sont visibles lorsque $N = 10$. La forme du spectre est de manière générale un bon indicateur de la qualité de l'approximation de la phase dans le temps.

La validité des deux modèles est bonne pour toutes les distances de propagation simulées. Nous remarquons cependant que l'accord est meilleur sur de longues distances lorsque la puissance est élevée. La raison est, comme nous le verrons dans le

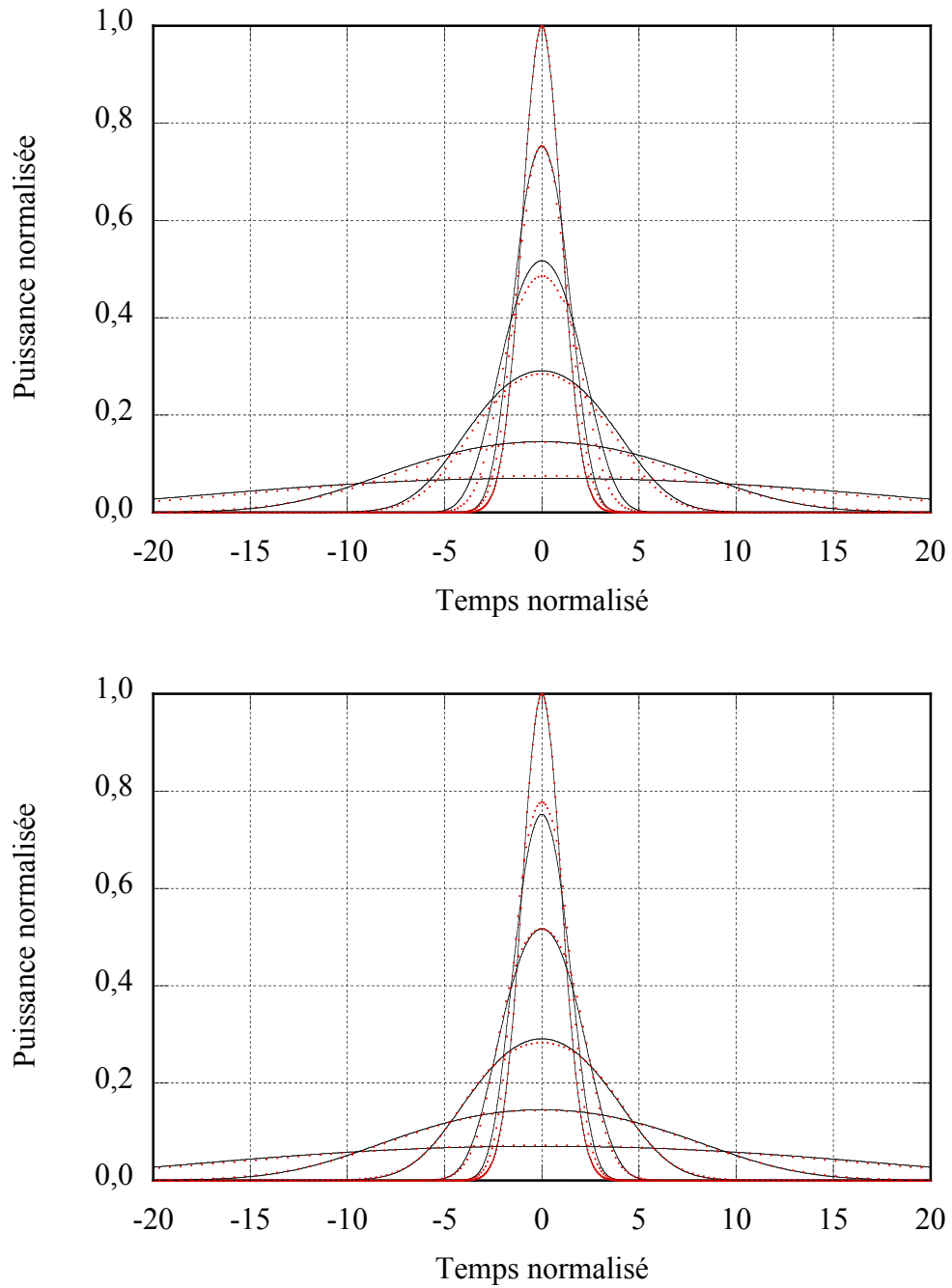


FIGURE 5.2 Comparaison des puissances obtenues par les simulations numériques et par le modèle basé sur une solution dispersive (haut) et le modèle basé sur la solution non-linéaire (bas) pour un rapport $N = 1$ entre les effets non-linéaires et dispersifs. Les simulations numériques sont en traits pleins noirs et les modèles analytiques en cercles rouges. Les courbes sont tracées pour des distances $z/L_D = \{0, 1/4, 1/2, 1, 2, 4\}$. Le temps est normalisé par $\langle T^2 \rangle_0^{1/2}$.

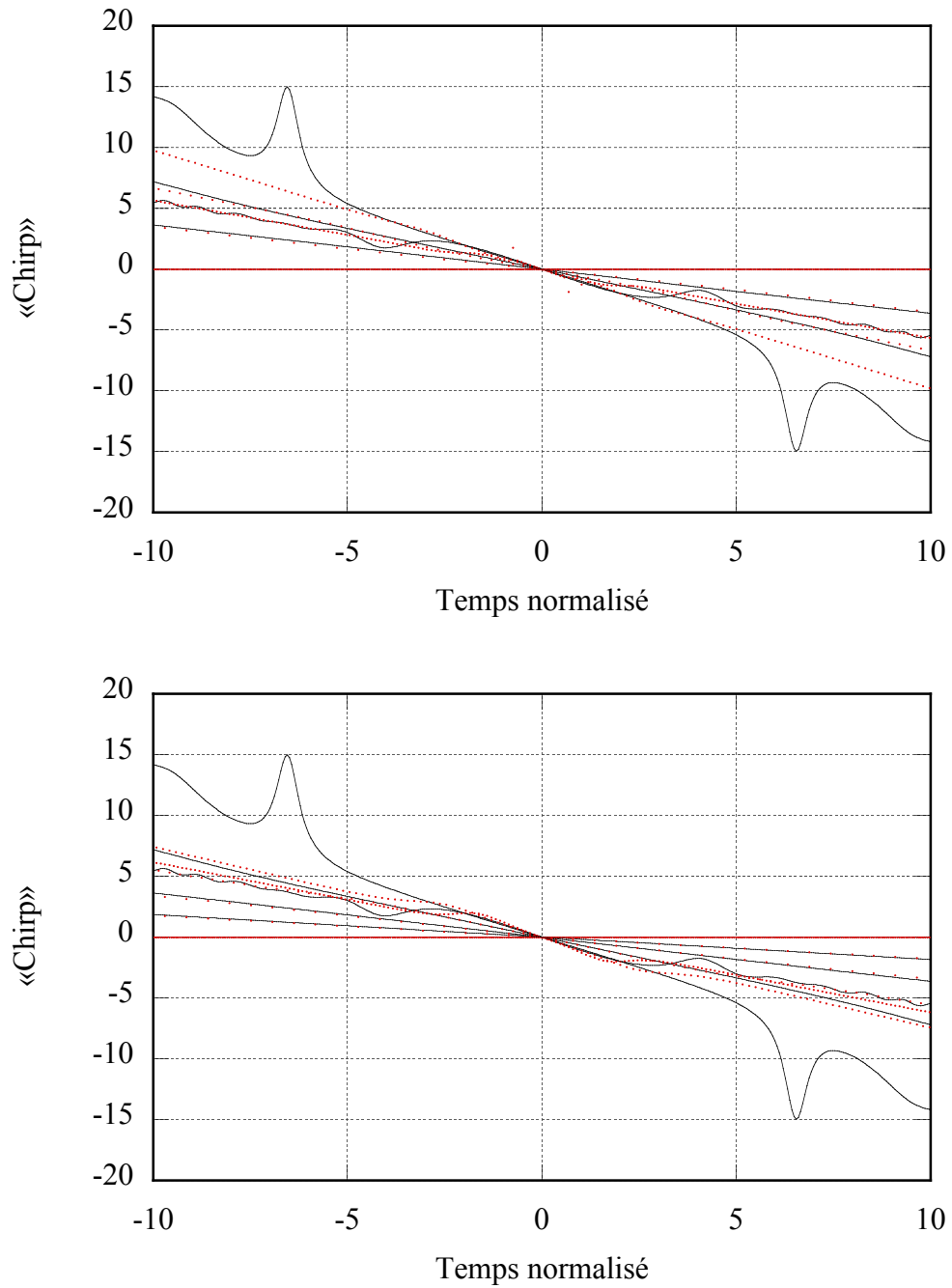


FIGURE 5.3 Comparaison des «chirps» obtenus par les simulations numériques et par le modèle basé sur une solution dispersive (haut) et le modèle basé sur la solution non-linéaire (bas) pour un rapport $N = 1$ entre les effets non-linéaires et dispersifs. Les simulations numériques sont en traits pleins noirs et les modèles analytiques en cercles rouges. Les courbes sont tracées pour des distances $z/L_D = \{0, 1/4, 1/2, 1, 2, 4\}$. Le temps est normalisé par $\langle T^2 \rangle_0^{1/2}$.

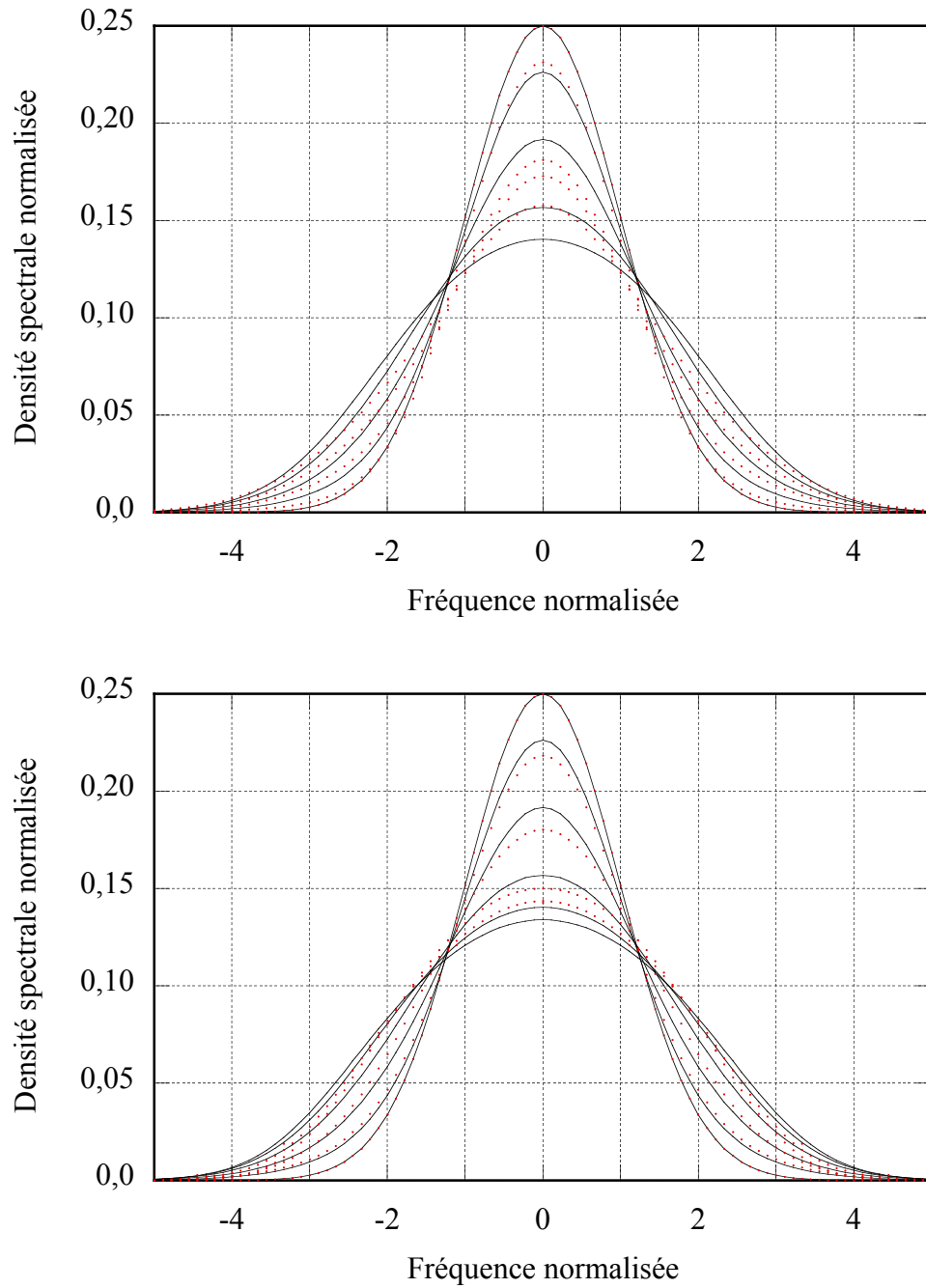


FIGURE 5.4 Comparaison des spectres obtenus par les simulations numériques et par le modèle basé sur une solution dispersive (haut) et le modèle basé sur la solution non-linéaire (bas) pour un rapport $N = 1$ entre les effets non-linéaires et dispersifs. Les simulations numériques sont en traits pleins noirs et les modèles analytiques en cercles rouges. Les courbes sont tracées pour des distances $z/L_D = \{0, 1/4, 1/2, 1, 2, 4\}$. Les fréquences sont normalisées par $\langle \Omega^2 \rangle_0^{1/2}$.

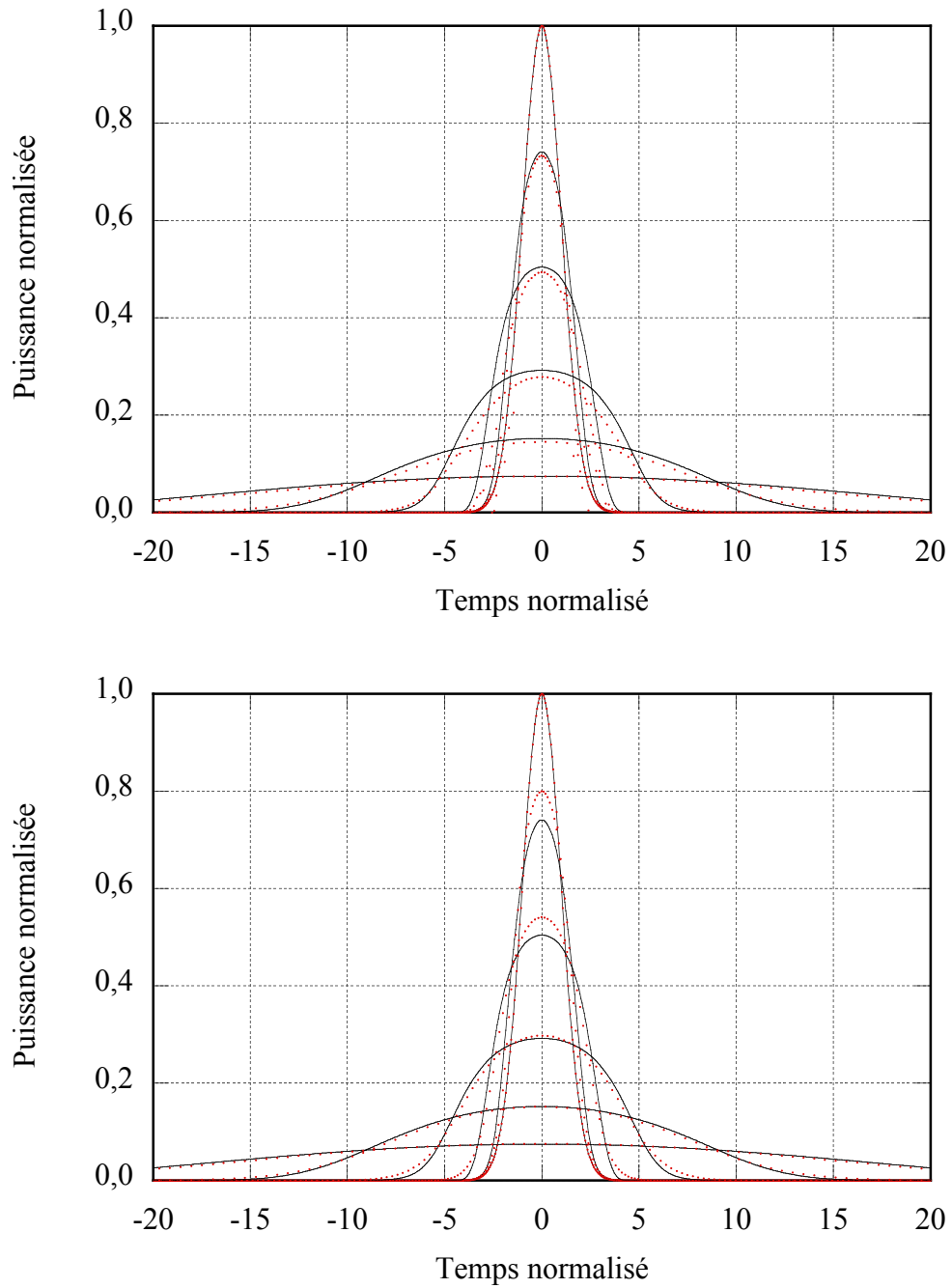


FIGURE 5.5 Comparaison des puissances obtenues par les simulations numériques et par le modèle basé sur une solution dispersive (haut) et le modèle basé sur la solution non-linéaire (bas) pour un rapport $N = 5$ entre les effets non-linéaires et dispersifs. Les simulations numériques sont en traits pleins noirs et les modèles analytiques en cercles rouges. Les courbes sont tracées pour des distances $z/L_D = \{0, 1/4, 1/2, 1, 2, 4\}$. Le temps est normalisé par $\langle T^2 \rangle_0^{1/2}$.

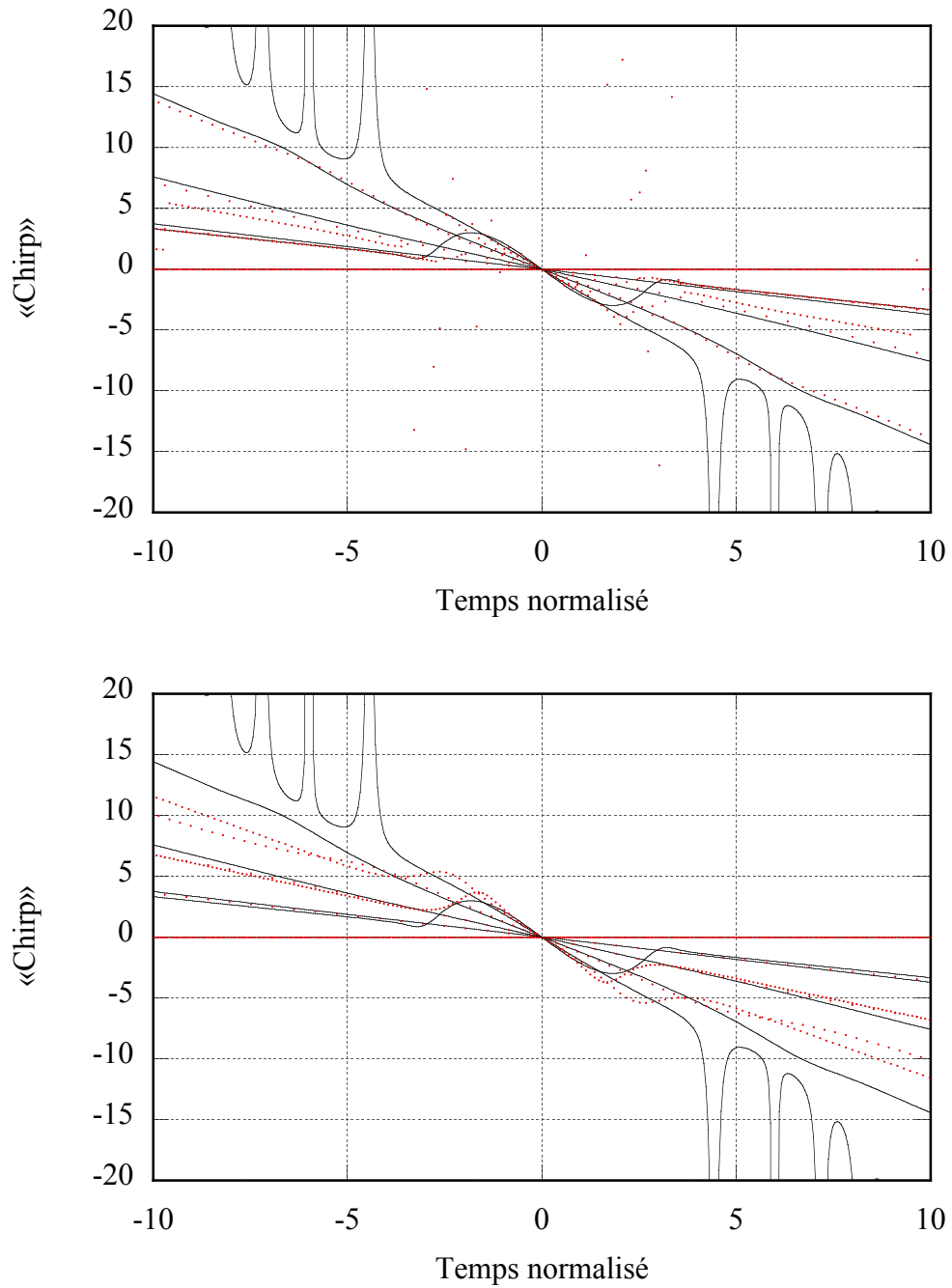


FIGURE 5.6 Comparaison des «chirps» obtenus par les simulations numériques et par le modèle basé sur une solution dispersive (haut) et le modèle basé sur la solution non-linéaire (bas) pour un rapport $N = 5$ entre les effets non-linéaires et dispersifs. Les simulations numériques sont en traits pleins noirs et les modèles analytiques en cercles rouges. Les courbes sont tracées pour des distances $z/L_D = \{0, 1/4, 1/2, 1, 2, 4\}$. Le temps est normalisé par $\langle T^2 \rangle_0^{1/2}$.

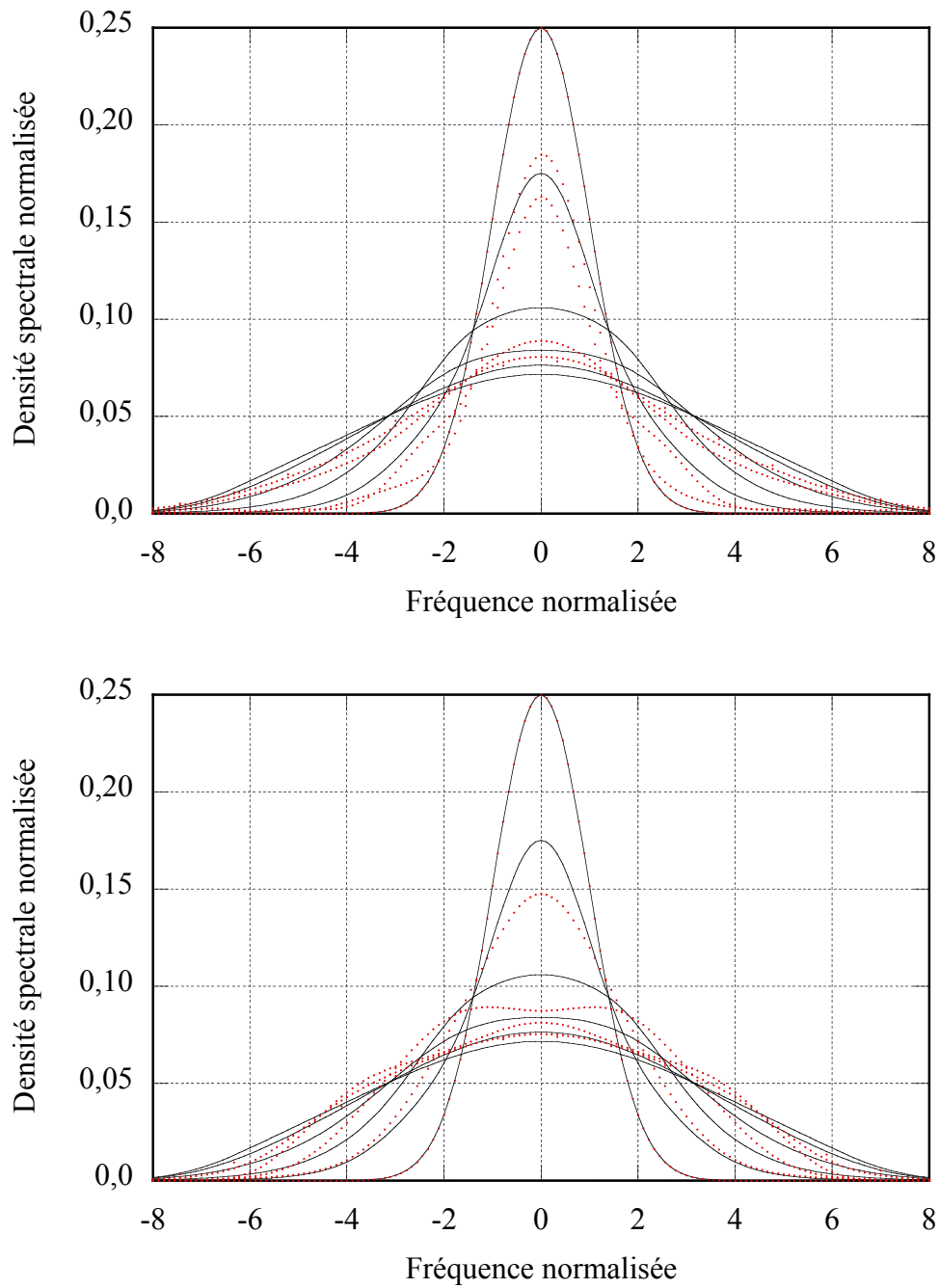


FIGURE 5.7 Comparaison des spectres obtenus par les simulations numériques et par le modèle basé sur une solution dispersive (haut) et le modèle basé sur la solution non-linéaire (bas) pour un rapport $N = 5$ entre les effets non-linéaires et dispersifs. Les simulations numériques sont en traits pleins noirs et les modèles analytiques en cercles rouges. Les courbes sont tracées pour des distances $z/L_D = \{0, 1/4, 1/2, 1, 2, 4\}$. Les fréquences sont normalisées par $\langle \Omega^2 \rangle_0^{1/2}$.

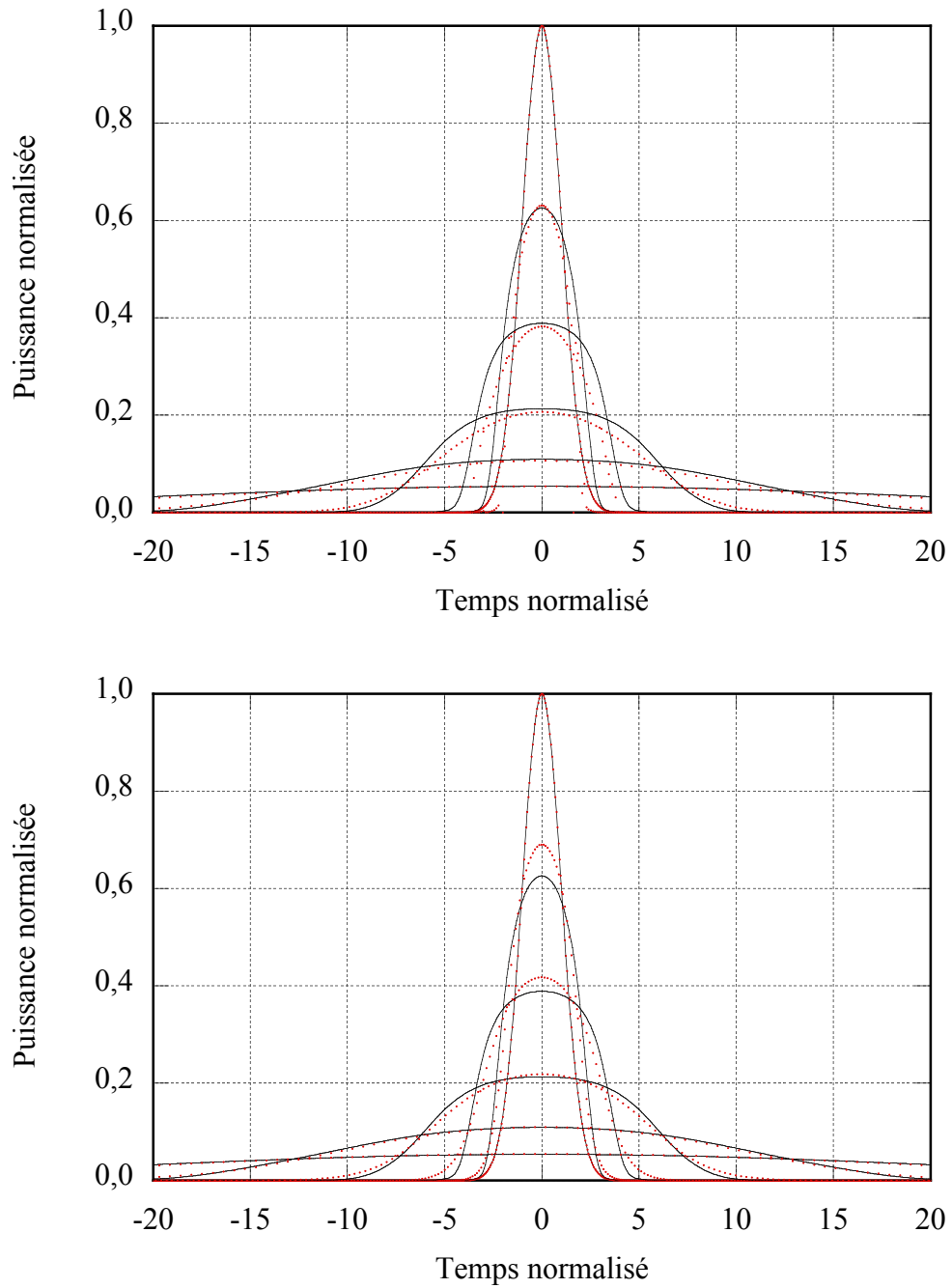


FIGURE 5.8 Comparaison des puissances obtenues par les simulations numériques et par le modèle basé sur une solution dispersive (haut) et le modèle basé sur la solution non-linéaire (bas) pour un rapport $N = 10$ entre les effets non-linéaires et dispersifs. Les simulations numériques sont en traits pleins noirs et les modèles analytiques en cercles rouges. Les courbes sont tracées pour des distances $z/L_D = \{0, 1/4, 1/2, 1, 2, 4\}$. Le temps est normalisé par $\langle T^2 \rangle_0^{1/2}$.

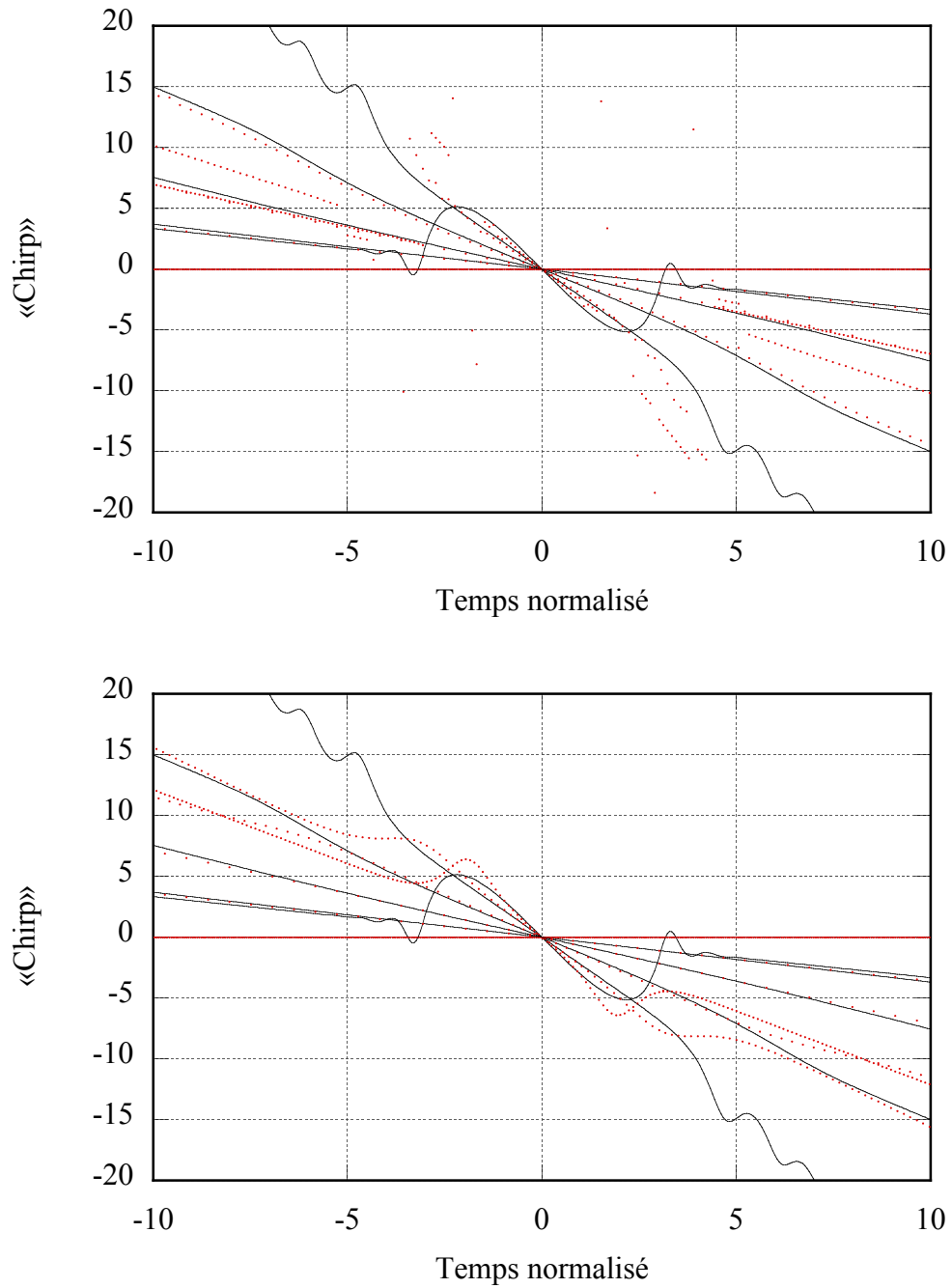


FIGURE 5.9 Comparaison des «chirps» obtenus par les simulations numériques et par le modèle basé sur une solution dispersive (haut) et le modèle basé sur la solution non-linéaire (bas) pour un rapport $N = 10$ entre les effets non-linéaires et dispersifs. Les simulations numériques sont en traits pleins noirs et les modèles analytiques en cercles rouges. Les courbes sont tracées pour des distances $z/L_D = \{0, 1/4, 1/2, 1, 2, 4\}$. Le temps est normalisé par $\langle T^2 \rangle_0^{1/2}$.

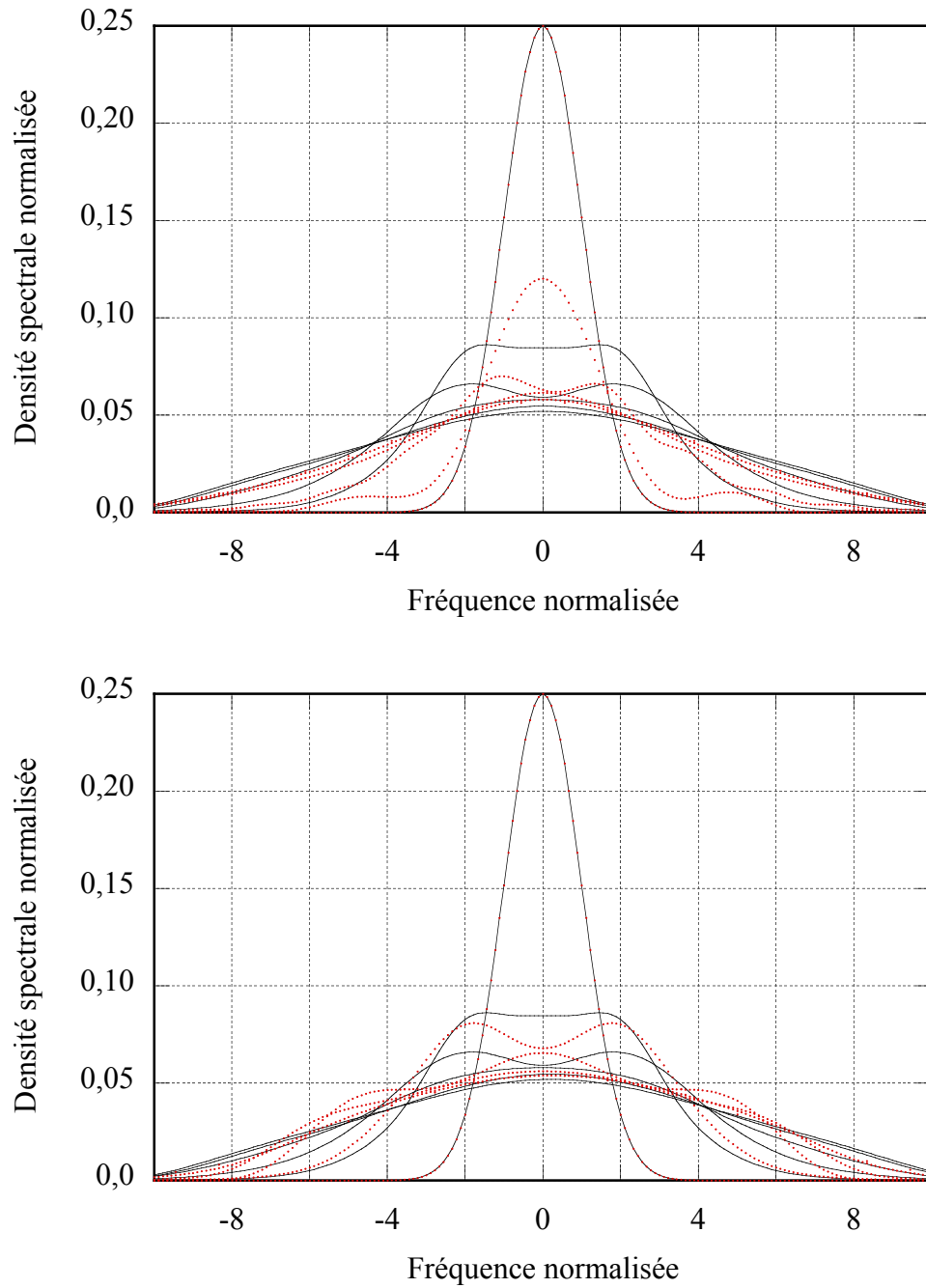


FIGURE 5.10 Comparaison des spectres obtenus par les simulations numériques et par le modèle basé sur une solution dispersive (haut) et le modèle basé sur la solution non-linéaire (bas) pour un rapport $N = 10$ entre les effets non-linéaires et dispersifs. Les simulations numériques sont en traits pleins noirs et les modèles analytiques en cercles rouges. Les courbes sont tracées pour des distances $z/L_D = \{0, 1/4, 1/2, 1, 2, 4\}$. Les fréquences sont normalisées par $\langle \Omega^2 \rangle_0^{1/2}$.

chapitre suivant, que la forme de l'impulsion reprend un peu une forme gaussienne sur de longues distances de propagation. Finalement, le modèle non-linéaire montre de meilleures performances que le modèle dispersif sur les différentes distances de propagation et différentes puissances crêtes simulées. Cela s'explique par le fait qu'une linéarisation de l'équation de Schrödinger non-linéaire a été incluse dans le modèle non-linéaire, alors que le modèle dispersif ne dépend que de l'évolution des moments d'ordre 2.

Il est plus facile d'observer l'évolution de la forme de l'impulsion en utilisant les facteurs de forme. Les figures 5.11–5.13 montrent l'évolution des facteurs de formes κ_T , κ_{PT} et κ_P des champs simulés en trait plein et modélisés en trait pointillé. Rappelons que le facteur de forme κ_T accorde un poids plus important aux ailes de la distribution alors que κ_P place le poids sur le centre. Le facteur κ_{PT} est un compromis entre les deux. En observant ces figures nous voyons d'abord que le modèle découlant de la solution non-linéaire prédit beaucoup plus adéquatement la forme de l'impulsion que celui provenant de la solution dispersive. Les oscillations apparaissant dans la solution dispersive proviennent de la résolution de l'équation implicite (5.10) qui est ardue lorsque les distances de propagation sont courtes. Ce problème ne se pose pas dans le cas non-linéaire car le modèle obtenu est explicite.

Les facteurs de formes montrent que les deux modèles représentent bien la modification de la forme de l'impulsion lors de la propagation. Ils montrent également que la précision est d'autant plus grande que N est faible, ce qui est compréhensible puisque le changement de forme s'accroît avec N . Notons également que la différence entre les différents κ des champs simulés et modélisés n'est pas la même. La différence est beaucoup plus faible pour κ_P est plus faible que pour κ_T , κ_{PT} se situant entre les deux. Nous en déduisons que les deux modèles sont, de façon générale, plus précis au centre de l'impulsion que sur ses ailes. Les deux modèles offrent une précision surprenante sur la forme de l'impulsion, surtout lorsque nous considérons l'ampleur des approximations faites dans leur élaboration.

5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié comment il est possible de déterminer l'évolution de l'enveloppe du champ d'une impulsion gaussienne se propageant dans un milieu dispersif normal et non-linéaire connaissant l'évolution des moments d'ordre 2.

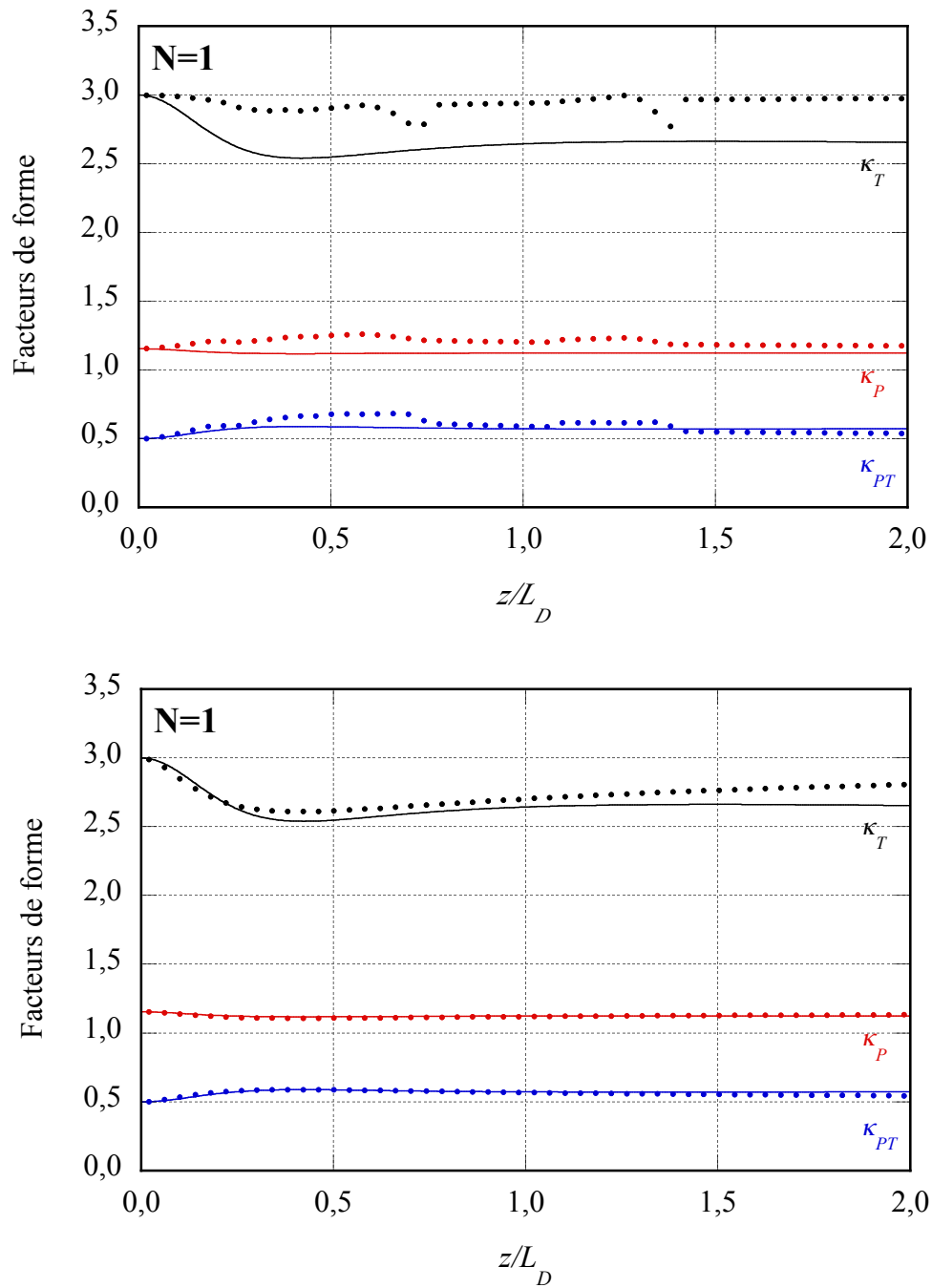


FIGURE 5.11 Comparaison entre les simulations numériques (lignes pleines) et le modèle (cercles) basé sur une solution dispersive (haut) et le modèle basée sur la solution non-linéaire (bas) pour un rapport $N = 1$ entre les effets non-linéaires et dispersifs. Le trait noir montre le facteur de forme κ_T , le trait bleu κ_{PT} et le trait rouge κ_P .

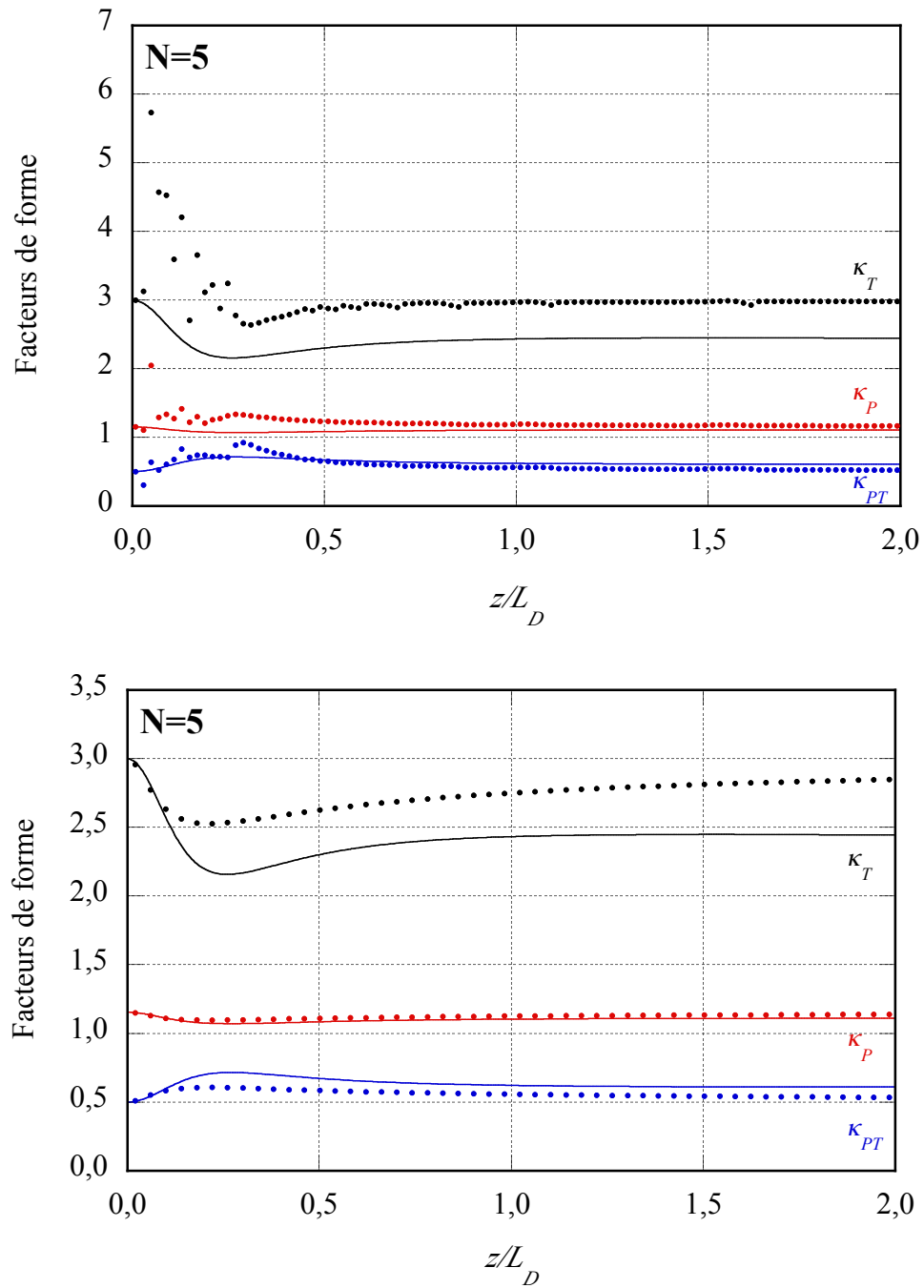


FIGURE 5.12 Comparaison entre les simulations numériques (lignes pleines) et le modèle (cercles) basé sur une solution dispersive (haut) et le modèle basée sur la solution non-linéaire (bas) pour un rapport $N = 5$ entre les effets non-linéaires et dispersifs. Le trait noir montre le facteur de forme κ_T , le trait bleu κ_{PT} et le trait rouge κ_P .

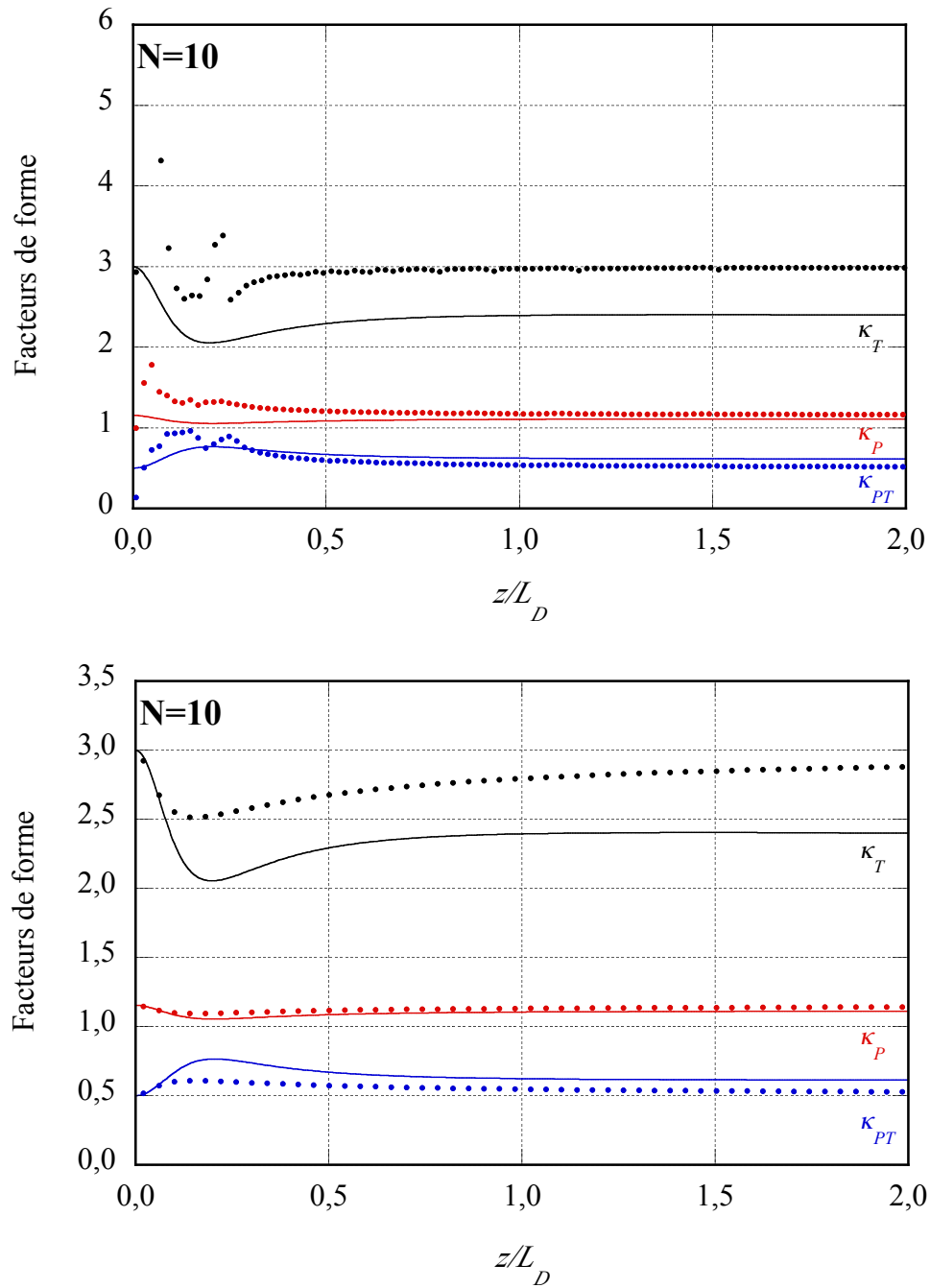


FIGURE 5.13 Comparaison entre les simulations numériques (lignes pleines) et le modèle (cercles) basé sur une solution dispersive (haut) et le modèle basée sur la solution non-linéaire (bas) pour un rapport $N = 10$ entre les effets non-linéaires et dispersifs. Le trait noir montre le facteur de forme κ_T , le trait bleu κ_{PT} et le trait rouge κ_P .

Une expression analytique implicite a été obtenue à partir de la solution analytique de la propagation d'une impulsion gaussienne dans un milieu dispersif. Une expression analytique explicite a été obtenue à partir de la solution analytique de la propagation d'une impulsion gaussienne dans un milieu non-linéaire. Les deux expressions ont été comparées à des simulations numériques afin d'en étudier la validité pour différentes valeurs de N et pour différentes distances de propagation.

Les deux modèles se comparent bien aux simulations numériques, mais l'accord diminue lorsque la non-linéarité croît (N élevé). Le modèle non-linéaire montre une plus grande précision sur l'ensemble de simulations que le modèle dispersif. Bien que les deux modèles développés dans ce chapitre permettent de suivre l'évolution de l'enveloppe du champ, ils sont limités au cas où la dispersion est normale. De plus, ils ne permettent pas de fournir un cadre systématique pour analyser l'évolution de la forme de l'impulsion lors de la propagation dans un milieu dispersif et non-linéaire.

Chapitre 6

Propagation non-linéaire et les moments d'ordre supérieur

Les moments d'ordre 2 donnent une description adéquate des principales caractéristiques d'une impulsion mais omettent une caractéristique essentielle : sa forme. Comme nous l'avons au chapitre 4, en supposant la phase quadratique, la forme de l'impulsion est invariante. Pour décrire correctement la propagation d'une impulsion dans un milieu dispersif et non-linéaire, il faut être en mesure de mieux décrire adéquatement la phase. Lors de l'analyse à l'aide des moments d'ordre 2, nous avons supposé une phase quadratique, ce qui est l'approximation la plus simple que nous pouvions faire. Dans ce chapitre, nous tentons d'obtenir une expression plus précise pour décrire la phase et ainsi obtenir une description plus juste de la propagation d'une impulsion dans un milieu dispersif et non-linéaire. Pour bien décrire la phase, il est également important de bien décrire la puissance puisque la phase y est proportionnelle par le biais de l'auto-modulation de phase.

Pour raffiner la description de l'amplitude de l'impulsion, il faut avoir recours aux moments d'ordre supérieur à 2. Il est nécessaire d'avoir des moments d'ordre supérieur car la forme de l'impulsion est déduite en comparant des moments d'ordres différents entre eux. Nous nous limitons à des impulsions symétriques, de sorte que tous les moments impairs sont nuls. Il est possible, en théorie, de considérer des moments d'ordre arbitrairement élevé, mais l'analyse devient rapidement complexe et ingérable. Nous limiterons donc notre analyse aux moments linéaires d'ordre 4 et aux moments non-linéaires d'ordre 2.

Dans ce chapitre, nous établissons d'abord les équations de propagation des moments linéaires d'ordre 4 et des moments non-linéaires d'ordre 2. Ces équations présentent la même fuite vers l'avant vers les moments d'ordre supérieur. Nous étudions donc ensuite différents modèles pour s'affranchir de cette fuite vers l'avant et approximer les équations de propagation. Ces modèles sont ensuite comparés, dans un

premier temps, à des simulations numériques pour en analyser la validité. Dans un second temps, ces modèles sont utilisés pour intégrer numériquement les équations de propagation approximatives afin d'en tester la validité plus en détails. Ces analyses nous permettront de déterminer quel modèle est plus apte pour représenter le champ.

6.1 Équations de propagation

Les équations de propagation sont déterminées en intégrant l'équation de Schrödinger non-linéaire, (éq. (4.2)), par rapport au temps en considérant l'opérateur approprié (les détails sont présentés à l'annexe B). Nous considérons ici les moments centrés dans le référentiel se déplaçant à la vitesse de groupe de l'impulsion.

6.1.1 Moments linéaires d'ordre 4

La propagation des moments linéaires est décrite par les équations suivantes

$$\frac{d}{dz}\langle T^4 \rangle = 4\beta_2 \langle T^3 \Omega \rangle_r \quad (6.1a)$$

$$\frac{d}{dz}\langle T^3 \Omega \rangle_r = 3\beta_2 \left(\langle T^2 \Omega^2 \rangle_r + \frac{1}{2} \right) + \frac{3\gamma}{2} \langle PT^2 \rangle \quad (6.1b)$$

$$\frac{d}{dz}\langle T^2 \Omega^2 \rangle_r = 2\beta_2 \langle T \Omega^3 \rangle_r + 4\gamma \langle PT \Omega \rangle_r + 2\gamma \langle PT^2 \Omega^2 \rangle_i \quad (6.1c)$$

$$\frac{d}{dz}\langle T \Omega^3 \rangle_r = \beta_2 \langle \Omega^4 \rangle + 3\gamma \langle P \Omega^2 \rangle_r + 2\gamma \langle PT \Omega^3 \rangle_i \quad (6.1d)$$

$$\frac{d}{dz}\langle \Omega^4 \rangle = 2\gamma \langle P \Omega^4 \rangle_i. \quad (6.1e)$$

Le système d'éqs. (6.1) n'est pas fermé ; il contient des moments d'ordre supérieur dont les équations de propagation ne sont pas définies. Ces moments «externes», similaires aux moments $\langle P \Omega^2 \rangle_i$ du système d'éqs. (4.12) à l'ordre 2, sont de nature non-linéaire. En effet, le système purement dispersif ($\gamma = 0$) est intégrable (voir annexe B). Il y a six moments externes au système, trois d'ordre 2 et trois d'ordre 4. Pour résoudre le système d'éqs. (6.1), il faut représenter ces moments externes en fonctions des moments linéaires.

6.1.2 Moments non-linéaires d'ordre 2

La propagation des moments non-linéaires est décrite par les équations suivantes

$$\frac{d}{dz}\langle PT^2 \rangle = -2\beta_2 \langle PT^2 \Omega^2 \rangle_i \quad (6.2a)$$

$$\frac{d}{dz}\langle PT\Omega \rangle_r = -\frac{3}{2}\beta_2 \langle P\Omega^2 \rangle_r - 2\beta_2 \langle PT\Omega^3 \rangle_i - 2\beta_2 \left\langle \frac{\partial P}{\partial T} T\Omega^2 \right\rangle_r + \frac{\gamma}{3} \langle P^2 \rangle \quad (6.2b)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\beta_2}{2} \langle P\Omega^2 \rangle_r - 2\beta_2 \left\langle T \frac{\partial A^*}{\partial T} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \right\rangle_r + \frac{\gamma}{3} \langle P^2 \rangle \\ \frac{d}{dz}\langle P\Omega^2 \rangle_r &= -\beta_2 \langle P\Omega^4 \rangle_i - 2\beta_2 \left\langle \frac{\partial A^*}{\partial T} \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} \right\rangle_i - \beta_2 \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial^2 A^*}{\partial T^2} \Omega \right\rangle_r + \gamma \langle P^2 \Omega^2 \rangle_i \end{aligned} \quad (6.2c)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\langle P\Omega^2 \rangle_i &= \beta_2 \langle P\Omega^4 \rangle_r + 2\beta_2 \left\langle \frac{\partial A^*}{\partial T} \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} \right\rangle_r + \beta_2 \left\langle \frac{\partial A}{\partial T} \frac{\partial^2 A^*}{\partial T^2} \Omega \right\rangle_i \\ &\quad - \gamma \langle P^2 \Omega^2 \rangle_r + \gamma \left\langle P \left| \frac{\partial A}{\partial t} \right|^2 \right\rangle - \gamma \left\langle P \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (6.2d)$$

Il est également utile d'écrire l'équation de propagation de $\langle P^2 \rangle$.

$$\frac{d}{dz}\langle P^2 \rangle = -3\beta_2 \langle P^2 \Omega^2 \rangle_i \quad (6.3)$$

Le système d'éqs. (6.2) n'est également pas fermé. Les opérateurs requis pour décrire les moments externes sont plus compliqués que ceux dont nous calculons l'évolution. Toutefois, le formalisme des opérateurs permet de représenter succinctement ces moments en n'alourdissant pas la notation. Puisque le moment $\langle P^2 \rangle$ est d'ordre 0 (comme E et $\langle P \rangle$), son équation de propagation a été définie à l'éq. (6.3).

6.2 Modélisation des moments d'ordre supérieur

Pour résoudre le système d'éqs. (6.1) et/ou (6.2), il faut pouvoir écrire les moments externes en fonction des moments des deux systèmes. Dans le chapitre 4, le système a pu être fermé en supposant que la phase de l'impulsion était quadratique. Cette approximation n'est toutefois pas suffisante à l'ordre 4, comme nous le verrons plus loin. De plus, certains des moments externes ne dépendent que de la puissance de l'impulsion. Il faut donc pouvoir modéliser la puissance en plus de la phase.

Une distinction importante doit être faite maintenant au sujet de la modélisation. Dans la méthode classique des moments, un ansatz est posé pour l'amplitude du champ ; pour l'ÉSNL, une sécante hyperbolique est typiquement utilisée où la puissance crête, la durée et la phase sont des paramètres. Ces paramètres sont ensuite reliés aux moments de sorte qu'il y a une correspondance directe entre les paramètres et les moments. Il est alors possible d'obtenir des équations de propagation pour les paramètres en ayant celles des moments. Bien que les équations décrivant l'évolution des moments contiennent des moments externes, ces derniers peuvent être exprimés en fonction des moments internes puisque la forme du champ est fixé par l'ansatz. Il s'ensuit que la solution obtenue est confinée par l'ansatz choisi pour l'amplitude. Si un ansatz pouvant décrire la forme de l'impulsion est utilisé, il est alors possible de décrire en partie l'évolution de la forme de l'impulsion. Toutefois, cette évolution est toujours limitée à la forme de l'ansatz.

Pourtant si nous considérons l'ensemble des moments, il est possible de décrire n'importe quelle amplitude. Il faut cependant un nombre infini de moments pour décrire exactement l'amplitude du champ. Cela est dû au fait que les moments sont des quantités moyennes dans le temps ; ainsi des amplitudes différentes peuvent avoir un ou plusieurs moments en commun. Ce n'est qu'en connaissant tous les moments qu'il est possible de déterminer exactement la norme et la phase du champ et ce problème demeure très complexe (Talenti, 1987). Dans la méthode des moments, il n'est pas nécessaire d'avoir plus de moments que de paramètres d'ansatz ; il suffit d'avoir autant de moments que de paramètres pour passer d'un à l'autre. Nous avons cependant accès à bien plus de moments que nécessaire pour la méthode des moments. Ces moments contiennent de l'information qu'il est possible d'exploiter.

L'idée alors est d'utiliser un ansatz pour l'amplitude uniquement pour les moments externes et de considérer tous les moments internes pour décrire l'évolution du champ. Ainsi la description de l'amplitude du champ n'est pas limitée qu'à l'ansatz mais est décrite par l'ensemble des moments considérés. La distinction est importante car les moments décrivent alors une famille d'amplitudes limitée par la modélisation des moments externes, au lieu d'être limitée par l'ansatz de l'amplitude, résultant en une description plus générale. Prenons comme exemple simple la modélisation faite au chapitre 4. En ne modélisant que la phase du champ, et en ne supposant rien sur la forme de l'impulsion, il a été possible de trouver les invariants approximatifs I_1 et I_2 qui dépendent de la forme initiale de l'impulsion. Si la forme de l'amplitude avait été

fixée, I_1 et I_2 n'auraient pu prendre qu'une valeur.

En résumé, dans la méthode que nous utilisons ici et dans la méthode classique des moments, l'amplitude du champ doit être représentée par un ansatz. Dans la méthode des moments, seuls les moments nécessaires pour représenter les paramètres sont considérés. Dans notre méthode, tous les moments sont considérés et l'ansatz ne sert qu'à résoudre le problème des moments externes. Autrement dit, l'ansatz sert à représenter les termes dans la dérivée de l'équation d'évolution du moment au lieu du moment même. De manière plus générale, le niveau de précision de la méthode peut être ajustée en incluant plus ou moins de moments, d'ordre plus ou moins élevé. Regardons maintenant quelles formes l'ansatz représentant l'amplitude peut prendre.

6.2.1 Modéliser l'amplitude ou la norme ?

Pour faire la modélisation, deux chemins peuvent être empruntés ; soit de modéliser directement l'amplitude complexe du champ, soit de modéliser la norme et la phase du champ séparément. L'avantage de modéliser directement l'amplitude, c'est-à-dire d'avoir un ansatz avec des paramètres complexes dont la partie réelle dicte la norme et la partie imaginaire la phase, est que l'ansatz décrivant la norme décrit également la phase. Il est alors possible d'avoir une plus grande précision avec moins de paramètres de modélisation. Le champ s'écrit donc de manière beaucoup plus simple. De plus, la phase est potentiellement décrite par une fonction très complexe, mais qui s'écrit toutefois (relativement) simplement. Un exemple de ce genre de modélisation est la gaussienne dispersive ou encore le modèle implicite basé sur la solution dispersive décrit au chapitre 5.

Le problème toutefois avec cette avenue est que la norme et la phase sont intimement couplées ensemble. Il est inévitable que la modélisation ne représente pas exactement le champ (autrement, ce serait carrément une solution générale de l'ÉSNL) ; il y aura des erreurs d'approximation sur le champ, soit en norme ou en phase. Le couplage entre la norme et la phase dans le modèle amplifie les erreurs d'approximation car les fluctuations de phase se transforment en fluctuations de norme et vice-versa dans l'ÉSNL. Un autre problème survient lors de l'intégration du modèle dans la définition des moments. Il peut être difficile d'intégrer des fonctions avec des paramètres complexes (même si la variable d'intégration est réelle) tout en s'assurant que l'intégrale ne diverge pas ou que l'intégrale simplement existe. C'est pour ces

raisons que nous privilégions une modélisation où la norme et la phase du champ sont décrites par des fonctions distinctes.

6.2.2 Modélisation de la puissance

Différentes avenues sont envisageables pour modéliser la puissance du champ. Nous ne considérons dans l'analyse qui suit que des impulsions symétriques dans le temps ; les effets asymétriques étant ainsi négligés. La modélisation choisie doit respecter trois critères. Elle doit pouvoir représenter facilement les formes de «cloche» couramment rencontrées. Elle doit pouvoir également s'intégrer facilement dans la définition des moments. Finalement, la modélisation devra être relativement simple ; nous nous limitons à un seul paramètre pour représenter la forme. Ce paramètre doit donc pouvoir représenter la majorité des formes d'impulsions typiquement rencontrées.

Ces conditions limitent les modélisations possibles. Par exemple, une expansion de Taylor ne permet pas de représenter facilement des formes de cloche. Une alternative est de prendre une expansion de Padé, qui représentent bien la forme de cloche. Toutefois, elle ne permet pas de bien représenter les principales formes d'impulsions sans avoir recours à plusieurs termes. Une modélisation intéressante est la super-gaussienne

$$P(T) = P_c \exp \left(- \left| \frac{T}{b} \right|^{2\ell} \right) \quad (6.4)$$

où le paramètre b est relié à la durée de la super-gaussienne, P_c est la puissance crête et ℓ est un paramètre de forme. Lorsque ℓ est entier, les valeurs absolues peuvent être négligées. Lorsque $\ell = 1$, nous retrouvons l'impulsion gaussienne. Quand la valeur de ℓ augmente, la super-gaussienne devient de plus en plus carrée ; elle devient un créneau lorsque $\ell \rightarrow \infty$. Les impulsions ont des ailes moins évanescents pour des valeurs de $0 < \ell < 1$. Toutefois, dans ce cas, il y a une discontinuité de la dérivée de la puissance en $T = 0$; de façon générale, lorsque ℓ n'est pas entier, il y a une discontinuité provenant de la dérivée de la fonction valeur absolue. À part le problème de la discontinuité en $T = 0$, la super-gaussienne ne permet pas de représenter une forme parabolique qui est une solution asymptotique de l'ÉSNL et certains moments non-linéaires ne peuvent être calculés. Autrement, la super-gaussienne est un modèle efficace qui a été parfois utilisées dans la description de la propagation non-linéaire

d'impulsions.

La modélisation que nous employons dans le reste de ce chapitre utilise la distribution de Pearson. Cette distribution a été présentée au chapitre 3. Nous ne considérons ici que la forme symétrique qui est beaucoup plus simple,

$$P(T) = P_c \left(1 + \frac{aT^2}{b} \right)^{-\frac{1}{a}} \quad \text{lorsque } a \geq 0 \quad (6.5)$$

où le paramètre b est relié à la durée de l'impulsion, P_c est la puissance crête et le paramètre a est un paramètre de forme. Notons que de les paramètres a , b et P_c sont réels. Pour que l'éq. (6.5) demeure carrée intégrable sur l'intervalle lorsque $a < 0$, la distribution est limitée à ses zéros.

$$P(T) = \begin{cases} P_c \left(1 + \frac{aT^2}{b} \right)^{-\frac{1}{a}} & \text{lorsque } a \geq 0 \\ P_c \left(1 + \frac{aT^2}{b} \right)^{-\frac{1}{a}} & \text{si } T < \sqrt{\frac{b}{|a|}} \text{ et } a < 0 \\ 0 & \text{si } |T| \geq \sqrt{\frac{b}{|a|}} \text{ et } a < 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

Dans le cas où $a < 0$, il y a une discontinuité dans la dérivée autour de $T = \sqrt{b/|a|}$; toutefois la puissance y est nulle, ce qui ne pose donc pas un problème lors de l'intégration. Il semble à première vue contraignant d'avoir deux définitions de la norme selon la forme de l'impulsion. Nous verrons plus loin que les expressions des moments sont les mêmes peu importe le signe de a . Comme nous l'avons vu au chapitre 3, la distribution de Pearson permet de représenter, exactement ou approximativement, la plupart des impulsions ou spectres utiles, soit la gaussienne, la sécante hyperbolique, la lorentzienne, la parabole et le créneau. De plus, elle permet de décrire les formes d'impulsions intermédiaires puisque le paramètre de forme a est continu. La distribution de Pearson est particulièrement bien adaptée aux moments car ces derniers peuvent être définis de manière récursive en intégrant par partie la forme différentielle de la distribution (eq. (3.20)), comme le montre l'annexe D. Il s'ensuit que tous les moments peuvent être définis en fonction des paramètres du modèle ou d'autres moments.

À partir de la définition de la puissance du champ donnée par l'éq. (6.6), tous les moments de la distribution de Pearson n'utilisant que les opérateurs T et P peuvent être calculés, ainsi que l'énergie. Notons que les moments d'ordre impair (selon T)

sont nuls car la puissance donnée par l'éq. (6.6) est symétrique.

$$E = P_c \sqrt{\frac{\pi b}{|a|}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)} \begin{cases} 1 & \text{lorsque } a \geq 0 \\ \cot\left(\frac{\pi}{|a|}\right) & \text{lorsque } a \leq 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

$$\langle T^j \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right) \Gamma\left[\frac{1}{a} - \left(\frac{j+1}{2}\right)\right]}{\Gamma\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\right)} \quad \text{pour } j \text{ pair, 0 autrement} \quad (6.8)$$

$$\langle P^p \rangle = P_c^p \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{a} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{a}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{a}\right) \Gamma\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\right)} \begin{cases} 1 & \text{lorsque } a \geq 0 \\ \tan\left(\frac{\pi}{a}\right) \cot\left[\frac{\pi}{a}(p+1)\right] & \text{lorsque } a \leq 0 \end{cases} \quad (6.9)$$

$$\langle P^p T^j \rangle = \frac{b(j-1)}{2(p+1) - a(j+1)} \langle P^p T^{j-2} \rangle \quad (6.10)$$

Le moment $\langle P^p T^j \rangle$ est défini de manière récursive alors que les autres moments sont définis par la fonction Γ . Des expressions spécifiques pour certaines valeurs particulières de j et de p sont présentées à l'annexe D. Des expressions différentes sont obtenues selon le signe de a . Bien que la fonction Γ soit parfaitement bien définie, il est plus facile de manipuler des expressions polynomiales. Pour ce faire, l'approximation de la fonction Γ donnée par l'éq. (C.8) nous est utile pour simplifier les éqs. (6.7) et (6.9) lorsque a tend vers zéro.

$$E \approx \frac{P_c}{4} \sqrt{\pi b} \left(\frac{8-a}{2-a}\right) \quad (6.11)$$

$$\langle P^p \rangle \approx \frac{P_c^p}{\sqrt{n+1}} \left(\frac{2-a}{8-a}\right) \left[\frac{8(p+1)-a}{2(p+1)-a}\right] \quad (6.12)$$

Ces équations approximatives sont valides peu importe le signe de a , ce qui simplifie grandement l'analyse. Un des problème des équations définies par morceaux est que, lors de calculs analytiques, il faut savoir quel morceau s'applique avant la fin du calcul. Par exemple, si dans un calcul le paramètre a doit être déterminé, son signe doit être connu pour savoir quelle définition utiliser. Il est donc plus simple d'avoir une expression unique. Aucune approximation n'est nécessaire pour obtenir une forme polynomiale pour le moment $\langle T^j \rangle$ car les fonctions Γ se simplifient au moyen de l'éq. (C.2), sauf $\Gamma[(j+1)/2]$ qui ne dépend que de l'ordre du moment.

La validité de ces approximations est montrée à la figure 6.1 où les éqs. (6.11) et (6.12) sont comparées aux éqs. (6.7) et (6.9). La figure 6.1 montre que les équations approximatives donnent un résultat très précis sur l'intervalle de formes d'impulsion

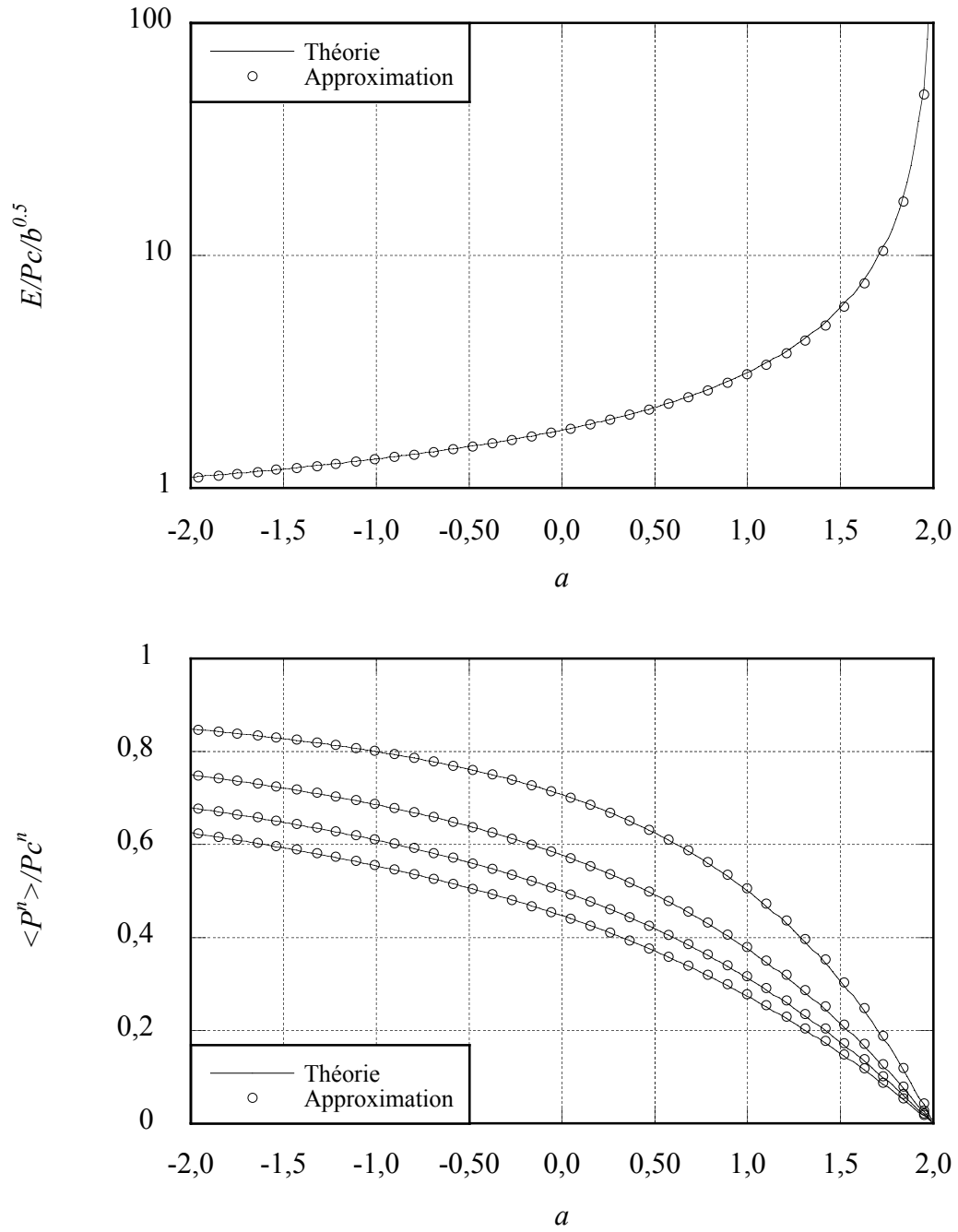


FIGURE 6.1 En haut : Comparaison entre la valeur théorique de l'énergie de la distribution de Pearson et la valeur approximative. En bas : Comparaison du moment $\langle P^p \rangle$ de la distribution de Pearson et la valeur approximative. Les quatre courbes représentent du haut vers le bas $p = 1, 2, 3$ et 4 . Les valeurs théoriques sont en lignes pleines alors que les valeurs approximatives sont représentées par des cercles.

intéressantes $-2 \leq a \leq 2$. Notons que l'échelle de l'énergie est logarithmique, signifiant que l'accord est bon sur plusieurs ordres de grandeur. Il est remarquable que les équations approximatives (6.11) et (6.12) soient si précises. Il est d'autant plus remarquable qu'elles le sont aussi bien lorsque $a \geq 0$ que lorsque $a \leq 0$. La précision des approximations vient du fait que les éqs. (6.11) et (6.12) sont les développements en série de Padé des éqs. (6.7) et (6.9). Puisque ces approximations sont très précises, simples à manipuler et ne diffèrent pas selon le signe de a , nous les préférons aux équations exactes pour le reste de l'analyse, éliminant ainsi les fonctions gamma.

Les moments décrits par les éqs. (6.7)–(6.9) (ou encore les éqs. (6.11) et (6.12)) permettent de décrire les facteurs de formes temporelles κ décrit au chapitre 3. Ces facteurs sont alors décrits seulement par le paramètre a de la distribution de Pearson.

$$\kappa_T = 3 \left(\frac{2 - 3a}{2 - 5a} \right) \quad (6.13)$$

$$\kappa_{PT} = \frac{2 - 3a}{4 - 3a} \quad (6.14)$$

$$\kappa_P = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{8 - a}{2 - a} \right) \left(\frac{24 - a}{6 - a} \right) \left(\frac{4 - a}{16 - a} \right)^2 \approx \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{96 - 49a}{96 - 61a} \right) \quad (6.15)$$

L'approximation de κ_P est obtenue par un développement de Padé. Un autre paramètre de forme intéressant est obtenu en comparant l'énergie avec les moments $\langle P \rangle$ et $\langle T^2 \rangle$.

$$\begin{aligned} \kappa_E &= \frac{E}{\langle P \rangle \sqrt{\langle T^2 \rangle}} = \frac{\sqrt{2\pi(2 - 3a)}}{4} \left(\frac{4 - a}{16 - a} \right) \left(\frac{8 - a}{2 - a} \right)^2 \\ &\approx 4\sqrt{2\pi(2 - 3a)} \left(\frac{12 - a}{48 - 31a} \right) \end{aligned} \quad (6.16)$$

Encore une fois, une valeur spécifique d'un de ses paramètres ne permet pas de connaître avec certitude la forme de l'impulsion ; différentes formes peuvent donner la même valeur de κ . Ainsi, plus il y a de facteurs de forme considérés, plus la forme de l'impulsion peut être déterminée précisément. Toutefois, si nous supposons que la forme de l'impulsion est décrite par la distribution de Pearson, n'importe quel des facteurs de forme κ est suffisant pour déterminer le paramètre a et ce faisant, la forme de l'impulsion.

6.2.3 Modélisation de la phase

La modélisation de la phase temporelle est très importante car elle détermine non seulement la phase spectrale, mais également en partie la forme de la densité spectrale du champ. Autrement dit, les moments contenant l'opérateur Ω dépendent fortement de la phase temporelle. Notons que la modélisation pourrait être faite dans le domaine spectral. La distribution de Pearson peut autant servir à décrire la puissance que la densité spectrale. La raison pour laquelle il est préférable de travailler dans le domaine temporel est que les effets non-linéaires sont décrits plus facilement dans le domaine temporel que dans le domaine spectral. Trois formes de phase sont envisagées dans ce qui suit. La première est une phase quadratique, comme celle utilisée au chapitre 4, la seconde une phase quadratique avec une contribution non-linéaire et enfin une phase logarithmique, couramment utilisée dans la modélisation des lasers.

Phase quadratique

Supposons que la phase du champ est quadratique et s'écrit

$$\phi(T, z) = hT^2 + i\beta_0 z \quad (6.17)$$

où h est une constante réelle et le terme de droite donne l'évolution de la phase spatiale (qui n'apparaît pas dans l'évolution des moments). Les différents moments de l'amplitude $A(T, z) = \sqrt{P(T)} \exp[i\phi(T, z)]$ peuvent être calculés, où $P(T)$ est décrit par l'éq. (6.6). Des expressions générales des moments utilisant les opérateurs P , T et Ω sont toutefois difficiles à calculer à cause de la dérivée dans l'opérateur Ω . Une liste des principaux moments de cette modélisation est cependant présentée à l'annexe D.

Il est maintenant intéressant de revenir brièvement sur l'analyse du chapitre 4 en supposant que le champ est exactement décrit par les éqs. (6.6) et (6.17). Nous procédons donc comme dans la méthode classique des moments. Comme nous l'avons mentionné, l'approximation de la phase quadratique a pour effet que le facteur de forme κ_T est invariant lors de la propagation. En dérivant les deux autres facteurs de forme temporelle, κ_{PT} et κ_P , par rapport à z et en remplaçant les moments par les paramètres du modèle, nous constatons qu'ils sont également invariants. Il est intéressant de noter que les solutions analytiques connues de l'ÉSNL dont la forme est invariante (le soliton d'ordre, l'impulsion parabolique asymptotique et la gaussienne

dispersive) ont toutes une phase quadratique.

Il est également intéressant de réécrire les invariants approximatifs I_1 et I_2 , donnés par les éqs. (4.20b) et (4.20c) en fonction du paramètre a .

$$I_1 = \langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle - \langle T\Omega \rangle^2 = \frac{1}{4(2-3a)} \left(\frac{2-a}{1+a} \right) \approx \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3}{2}a^2 \right) \quad (6.18)$$

$$I_2 = \frac{1}{\kappa_E} \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{3a}{16} \right) \quad (6.19)$$

Les valeurs approximatives sont écrites en série de Taylor puisque le paramètre a est généralement près de 0. Il se trouve que l'invariant I_1 dépend du paramètre de forme a à l'ordre 2, de sorte que l'approximation de la phase quadratique est similaire à une approximation gaussienne de la forme (elle est légèrement plus précise car l'invariant peut prendre différentes valeurs). L'invariant I_2 montre une variation d'environ 20% sur la plage des valeurs de a utiles. Notons toutefois que nous supposons que la forme de l'impulsion peut toujours être décrite par la distribution de Pearson, ce qui est évidemment une approximation.

Phase quadratique et non-linéaire

Puisque de supposer que la phase est quadratique n'est pas suffisant pour décrire l'évolution de la forme de l'impulsion lors de la propagation, il faut modéliser la phase plus précisément. Puisque la phase quadratique représente à peu près bien la partie dispersive de la phase, ajoutons une contribution non-linéaire pour bien refléter la physique du problème.

$$\phi(T, z) = hT^2 + fP(T) + i\beta_0 z \quad (6.20)$$

où f est un paramètre réel et $P(T)$ est donné par l'éq. (6.6). L'évolution du paramètre de forme κ_T s'écrit alors

$$\frac{d\kappa_T}{dz} = -4\beta_2 \frac{f}{b} \langle P \rangle \kappa_{PT} \kappa_T (1+a) \quad (6.21)$$

en supposant que le champ est adéquatement décrit par la distribution de Pearson. Notons que dans l'éq. (6.21) nous retrouvons à la fois des moments ($\langle P \rangle$ et indirectement κ_{PT} et κ_T) et des paramètres (a , b et f). Il serait plus propre de ne travailler

qu'avec les moments ou qu'avec les paramètres ; toutefois les expressions deviennent rapidement très lourde. Ainsi en se permettant d'utiliser à la fois les moments et les paramètres, les équations sont allégées. Il est possible de passer d'un à l'autre en utilisant les éqs. (6.8), (6.12), (6.13) et (6.14).

Il apparaît selon l'éq. (6.21) qu'il faut que la dispersion et f , donc indirectement la non-linéarité, soit non-nuls pour que la forme de l'impulsion se modifie au long de la propagation. Il est intéressant de regarder sous quelles conditions κ_T devient invariant. Il devient invariant lorsque la dispersion est nulle $\beta_2 = 0$ puisque l'auto-modulation de phase ne cause qu'un déphasage dans le temps. Lorsque $f = 0$, nous sommes dans le cas de l'approximation de la phase quadratique. Quand $b \rightarrow \infty$, l'impulsion devient infiniment longue et se rapproche d'un faisceau continu qui ne subit pas l'effet de la dispersion ou de l'auto-modulation de phase (du moins, si les fluctuations dues au bruit sont négligées). Notons que pour traiter proprement le cas d'un faisceau continu, le présent modèle n'est pas adéquat. κ_T devient invariant quand le moment $\langle P \rangle = 0$, et donc que la puissance crête est nulle. La propagation est purement dispersive dans ce cas. Bien que la dispersion change la forme de l'impulsion lors de la propagation de façon générale (voir annexe B), la phase devient quadratique lorsque $\langle P \rangle = 0$, tout comme la phase d'une impulsion gaussienne dispersive dont la forme est invariante. Les paramètres κ_T et κ_{PT} deviennent artificiellement nuls pour $a = 2/3$ puisque l'intégrale définissant $\langle T^2 \rangle$ diverge. Finalement, la forme de l'impulsion devient invariante lorsque $a = -1$, ce qui correspond à une impulsion parabolique, qui est la solution asymptotique à l'ÉSNL. Notons que le soliton ($a \approx 0.29$) est également invariant, mais cette condition n'apparaît pas directement dans l'éq. (6.21), puisque l'invariance provient de l'équilibre entre la dispersion et l'auto-modulation de phase.

Phase logarithmique

Une autre option intéressante est une phase proportionnelle au logarithme de la forme de l'impulsion

$$\begin{aligned}\phi(T, z) &= c \ln \left[\sqrt{P(T)} \right] + i\beta_0 z \\ &= -\frac{c}{2a} \ln \left(1 + \frac{a}{b} T^2 \right) + i\beta_0 z\end{aligned}\tag{6.22}$$

où c est un paramètre réel. Cette phase est en quelque sorte un compromis entre une phase dispersive et non-linéaire. Elle intervient dans la solution de l'équation

de Ginzburg-Landau décrivant le soliton moyen dans les lasers à fibre. Dans ce cas l'évolution de κ_T est donné par

$$\frac{d\kappa_T}{dz} = -4\beta_2 \frac{ac}{b} \kappa_T \quad (6.23)$$

en supposant toujours que le champ est décrit par distribution de Pearson. Une différence est notable si l'éq. (6.23) est comparée à l'éq. (6.21). Le facteur de forme κ_T est invariant lorsque $a = 0$, donc quand l'impulsion est gaussienne, comme dans le cas de la propagation purement dispersive. La forme devient également invariante lorsque la phase c est nulle, donc lorsqu'il n'y a ni dispersion ni non-linéarité. Notons que, contrairement au cas précédent, les phases dispersives et non-linéaires sont condensées dans le même terme. Nous n'observons pas dans le cas ici l'invariance de la forme de l'impulsion ni dans le cas parabolique, ni dans le cas solitonique.

Il existe bien entendu d'autres modélisations possibles de la phase ; toutefois les trois présentées ici sont simples et descriptives. Malgré cela, notons que la représentation des moments contenant l'opérateur Ω^k en fonction des paramètres devient rapidement lourde à cause des nombreux termes lorsque $k > 2$. Ces nombreux termes sont générés par la dérivée temporelle d'ordre k . Un point important qu'il faut considérer au sujet de la modélisation est la différence entre représenter l'amplitude d'une impulsion stationnaire et modéliser l'amplitude durant toute la propagation. Il est beaucoup plus difficile de représenter l'évolution de l'amplitude pendant toute la propagation car la modélisation doit être suffisamment précise pour que les erreurs d'approximation n'affectent pas significativement la propagation. Autrement dit, il faut être en mesure de modéliser raisonnablement toutes les formes de norme et de phase que l'impulsion prend lors de la propagation. Dans le cas d'une solution stationnaire, il faut seulement représenter la forme finale de la norme et de la phase. Par exemple, une phase quadratique est suffisante pour décrire les solutions stationnaire (ou asymptotique) de l'ÉSNL, mais n'est pas suffisante pour décrire la propagation dans des conditions arbitraires.

Un autre point à considérer est le choix des moments pour représenter les paramètres, que ce soit dans la méthode classique des moments ou la méthode générale des moments. Dans la méthode classique des moments, il nous faut choisir autant de moments que de paramètres. Il y a toutefois une infinité de combinaisons possibles. Dans la méthode générale des moments, il faut représenter les moments d'ordre

supérieur en fonction des paramètres et remplacer les paramètres par des moments faisant partie du système ; le choix est également grand. Pour déterminer quels sont les choix les plus efficaces, comparons les moments d'ordre supérieur d'un champ propagé numériquement avec la reconstruction du même moment obtenu à l'aide de différentes combinaison de moments d'ordre inférieurs également calculés à partir de la propagation numérique du champ.

6.3 Représentation des paramètres par les moments

Si nous voulons approximer les moments ne faisant pas partie du système afin de fermer ce dernier, il nous faut exprimer ces moments externes en fonction des moments internes, non des paramètres. Il s'ensuit que nous devons établir une correspondance entre les paramètres et les moments. Les choix possibles de moments pour représenter les paramètres a, b, c, f, h et P_c sont très nombreux et il est impensable de tous les considérer. Pour restreindre les choix, nous prenons comme règle d'utiliser les moments d'ordre le plus bas possible pour représenter les paramètres. Nous favorisons également les moments usant de l'opérateur T plutôt que ceux utilisant l'opérateur Ω lorsque c'est possible puisque la modélisation est fait dans le domaine temporel. Finalement, nous cherchons à représenter les paramètres avec le moins de moments possible. Dans cette section, nous étudions différentes façons d'exprimer les paramètres du modèle en fonction des moments respectant ces conditions. Nous comparons ensuite certains moments d'ordre supérieur clefs obtenus à partir de représentations avec ceux obtenus directement du champ complexe simulé numériquement afin de déterminer la représentation la plus précise.

6.3.1 Paramètres de norme

Pour représenter le paramètre a dictant la forme de l'impulsion, nous avons recours aux facteurs de formes κ . Nous considérons seulement les facteurs sans l'opérateur Ω . De plus, les facteurs κ_P et κ_E sont rejetés car ils ne sont pas facilement inversibles pour obtenir le paramètre a . Ils ne restent alors que κ_T et κ_{PT} . Le paramètre a s'exprime

alors

$$a_T = 2 \left(\frac{3 - \kappa_T}{9 - 5\kappa_T} \right) \quad (6.24)$$

$$a_{PT} = \frac{2}{3} \left(\frac{1 - 2\kappa_{PT}}{1 - \kappa_{PT}} \right) \quad (6.25)$$

où les indices rappellent comment le paramètre est obtenu. Dans le premier cas, le paramètre a est obtenu en comparant $\langle T^4 \rangle$ à $\langle T^2 \rangle$ via κ_T . Dans le second cas, a provient de la comparaison de $\langle PT^2 \rangle$, $\langle T^2 \rangle$ et $\langle P \rangle$. Pour obtenir les paramètres b et P_c les moments les plus naturels à utiliser sont respectivement $\langle T^2 \rangle$ et $\langle P \rangle$.

$$b_T = (2 - 3a)\langle T^2 \rangle \quad (6.26)$$

$$P_{cP} = \sqrt{2}\langle P \rangle \left(\frac{8 - a}{2 - a} \right) \left(\frac{4 - a}{16 - a} \right) \quad (6.27)$$

Les indices P et T réfèrent aux moments utilisés pour obtenir les paramètres. Le paramètre a doit être substitué par l'éq. (6.24) ou (6.25). Il est également intéressant de considérer l'énergie E , le moment d'ordre 0, pour déterminer b ou P_c .

$$b_E = \frac{1}{\pi} \left[\frac{4E}{P_{cP}} \left(\frac{2 - a}{8 - a} \right) \right]^2 \quad (6.28)$$

$$P_{cE} = \frac{4E}{\sqrt{\pi b_T}} \left(\frac{2 - a}{8 - a} \right) \quad (6.29)$$

L'énergie est ainsi utilisée au lieu, ou en plus, du moment $\langle T^2 \rangle$ ou $\langle P \rangle$. Il y a ainsi quatre façons différentes de représenter b et P_c ensemble. Avec les deux façons différentes de représenter a , cela fait huit représentations différentes.

Il faut maintenant une méthode systématique pour déterminer laquelle de ces huit représentations est la plus juste. Pour ce faire, nous calculons numériquement les moments entrant dans les différentes définitions de a , b , et P_c , soit $\langle P \rangle$, $\langle T^2 \rangle$, $\langle PT^2 \rangle$, $\langle T^4 \rangle$ et E pour différentes propagations de l'amplitude du champ. Les paramètres des huit représentations peuvent alors être évalués à partir du champ obtenu numériquement. N'importe quel moment n'entrant pas dans les différentes définitions peut être obtenu à partir de l'une de ces huit représentations ou directement à partir du champ calculé numériquement (ces moments doivent toutefois ne contenir que les opérateurs P et T). En comparant les deux, nous obtenons la validité des différentes représentations.

Nous utilisons donc les deux moments d'ordre le plus bas n'entrant pas dans les définitions et de s'exprimant qu'au moyen de P et T pour valider les représentations, soit $\langle PT^4 \rangle$ et $\langle P^2 T^2 \rangle$. Ces moments se décomposent de la manière suivante en fonction des paramètres

$$\langle PT^4 \rangle = \frac{3\langle P \rangle b^2}{(4 - 5a)(4 - 3a)} \quad \langle P^2 T^2 \rangle = \frac{b}{3} \frac{\langle P^2 \rangle}{(2 - a)} \quad (6.30)$$

où les moments $\langle P \rangle$ et $\langle P^2 \rangle$ doivent être exprimés par l'éq. (6.12). Le résultat des différentes simulations dans le régime de dispersion anormale et normale, pour les huit différentes représentations possibles des moments $\langle PT^4 \rangle$ et $\langle P^2 T^2 \rangle$ est présenté aux figures 6.2–6.5. Nous utilisons également les moments $\langle P \rangle$, $\langle T^2 \rangle$ et E pour valider les représentations quand ces derniers n'entrent pas dans les définitions des paramètres. Les figures 6.6–6.8 montrent le résultat des simulations dans les deux régimes de dispersion dans ce cas.

Plusieurs constatations intéressantes ressortent de ces figures. Si nous comparons les résultats entre a_T et a_{PT} , il apparaît que ce dernier donne en moyenne de bien meilleurs résultats que a_T pour la plupart des moments considérés, en particulier sur les moments d'ordre inférieur E , $\langle P \rangle$ et $\langle T^2 \rangle$ de la propagation en dispersion anormale où la différence est frappante. La différence n'est pas cependant très marquée dans le régime de dispersion normal. Dans ce régime, nous voyons même que a_T est préférable à a_{PT} pour le moment $\langle PT^4 \rangle$. La différence vient de la manière dont les deux facteurs de forme κ caractérisent la forme de l'impulsion. Le facteur κ_T compare les moments $\langle T^2 \rangle$ et $\langle T^4 \rangle$ qui tous deux caractérisent les ailes de l'impulsion ; ils n'accordent que très peu d'importance au sommet de l'impulsion. Le facteur κ_{PT} utilise les moments P , $\langle T^2 \rangle$ et $\langle PT^2 \rangle$. $\langle T^2 \rangle$ caractérise les ailes de l'impulsion, $\langle P \rangle$ caractérise plutôt le centre de l'impulsion (pour des impulsions en forme de cloche). Ainsi, κ_{PT} donne une mesure plus globale de la forme de l'impulsion. Il est à noter toutefois que a_T donne un meilleur résultat de façon générale pour $\langle PT^4 \rangle$ que a_{PT} et l'inverse pour le moment $\langle P^2 T^2 \rangle$. Cela vient du fait que $\langle PT^4 \rangle$ est similaire à $\langle T^4 \rangle$ et $\langle P^2 T^2 \rangle$ à $\langle PT^2 \rangle$.

Dans le régime de dispersion normale, le centre de l'impulsion change peu lors de la propagation, ce qui explique pourquoi les deux paramètres donnent des résultats similaires. Toutefois en régime de dispersion anormale, le centre de l'impulsion se modifie considérablement et le facteur κ_T ne permet pas de le caractériser convenablement. Cela explique d'ailleurs pourquoi l'efficacité de la modélisation dans le

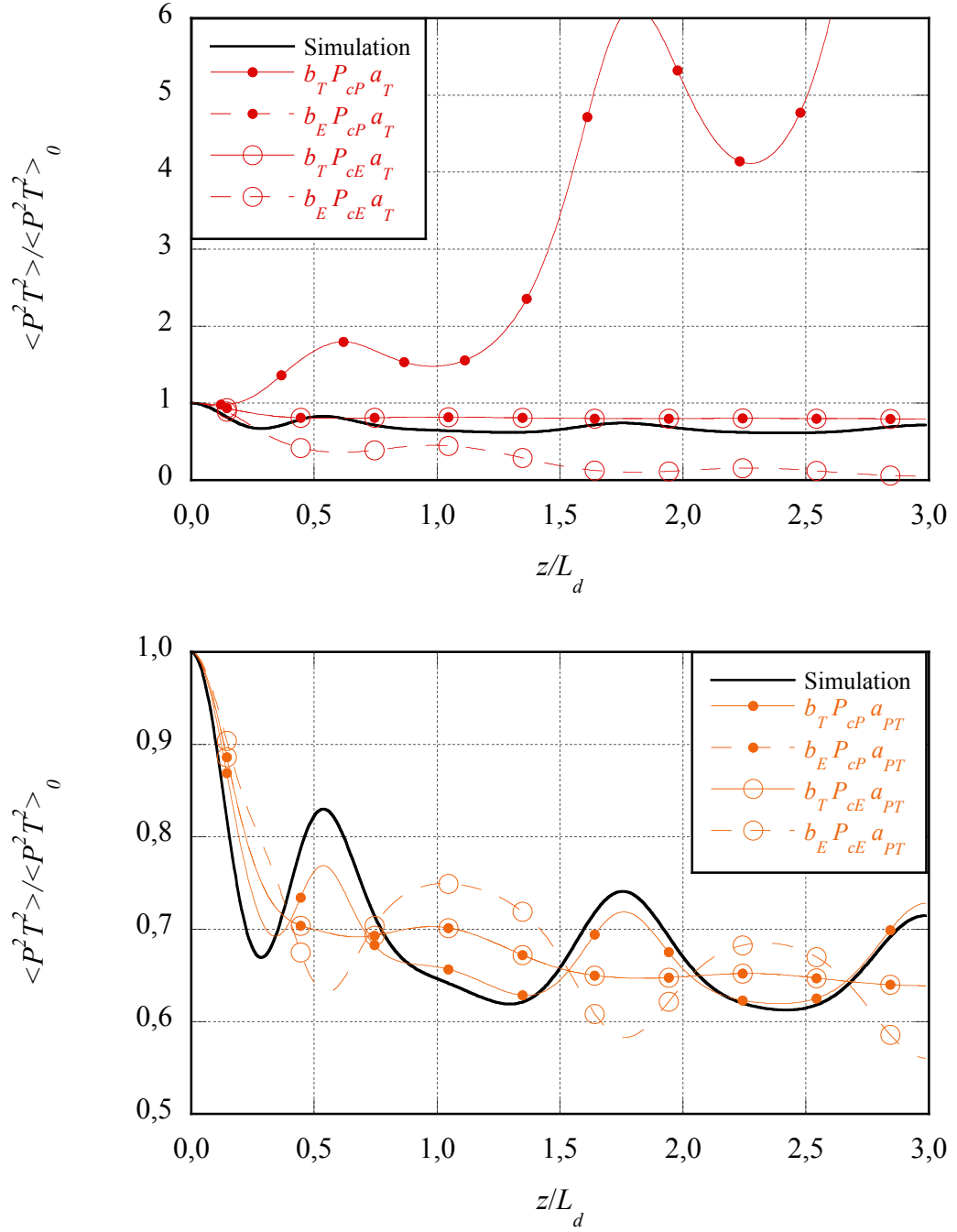


FIGURE 6.2 Comparaison numérique entre les différentes représentations du moment $\langle P^2 T^2 \rangle$ normalisé d'une impulsion gaussienne se propageant dans le régime de dispersion anormale avec $N = 2$. Le moment calculé directement à partir de la propagation numérique est en trait plein noir. La figure du haut en trait foncé présente le cas où a_T est utilisé alors que a_{PT} a été utilisé dans la figure du bas en trait clair. Le paramètre b_T apparaît en trait plein et b_E en trait pointillé. Le paramètre P_{cP} est représenté en cercle plein et P_{cE} en cercle vide.

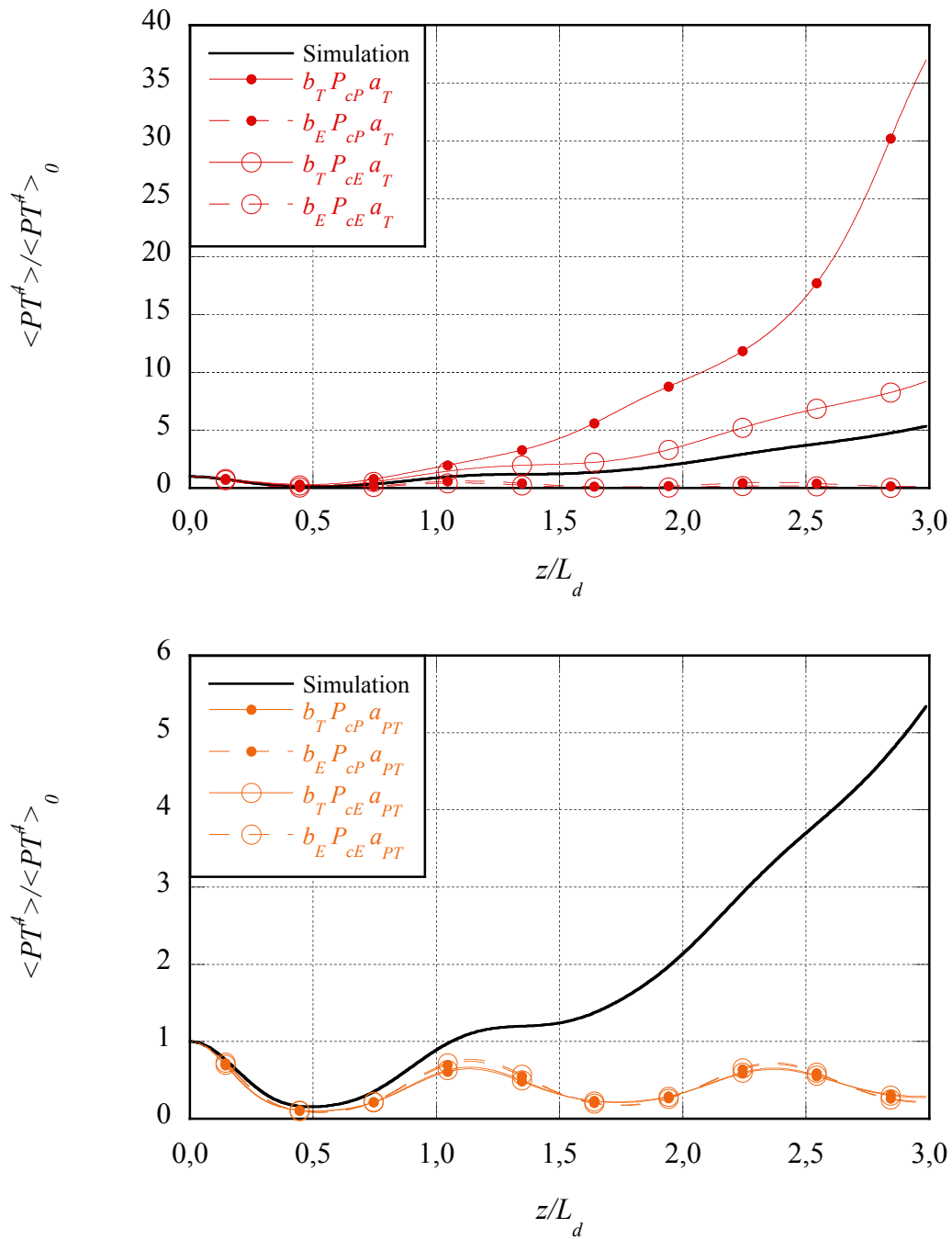


FIGURE 6.3 Comparaison numérique entre les différentes représentations du moment $\langle PT^4 \rangle$ normalisé d'une impulsion gaussienne se propageant dans le régime de dispersion anormale avec $N = 2$. Le moment calculé directement à partir de la propagation numérique est en trait plein noir. La figure du haut en trait foncé présente le cas où a_T est utilisé alors que a_{PT} a été utilisé dans la figure du bas en trait clair. Le paramètre b_T apparaît en trait plein et b_E en trait pointillé. Le paramètre P_{cP} est représenté en cercle plein et P_{cE} en cercle vide.

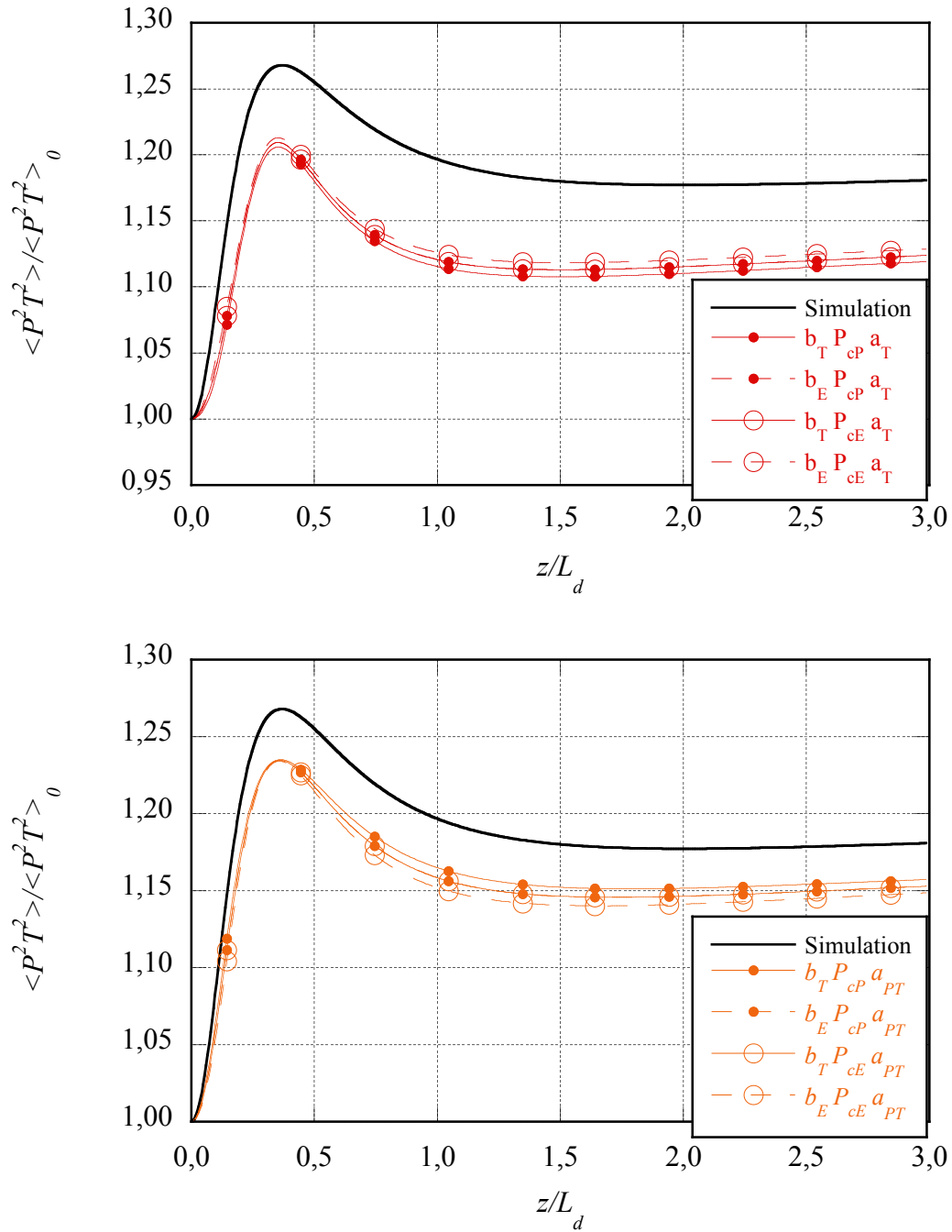


FIGURE 6.4 Comparaison numérique entre les différentes représentations du moment $\langle P^2 T^2 \rangle$ normalisé d'une impulsion gaussienne se propageant dans le régime de dispersion normale avec $N = 2$. Le moment calculé directement à partir de la propagation numérique est en trait plein noir. La figure du haut en trait foncé présente le cas où a_T est utilisé alors que a_{PT} a été utilisé dans la figure du bas en trait clair. Le paramètre b_T apparaît en trait plein et b_E en trait pointillé. Le paramètre P_{cP} est représenté en cercle plein et P_{cE} en cercle vide.

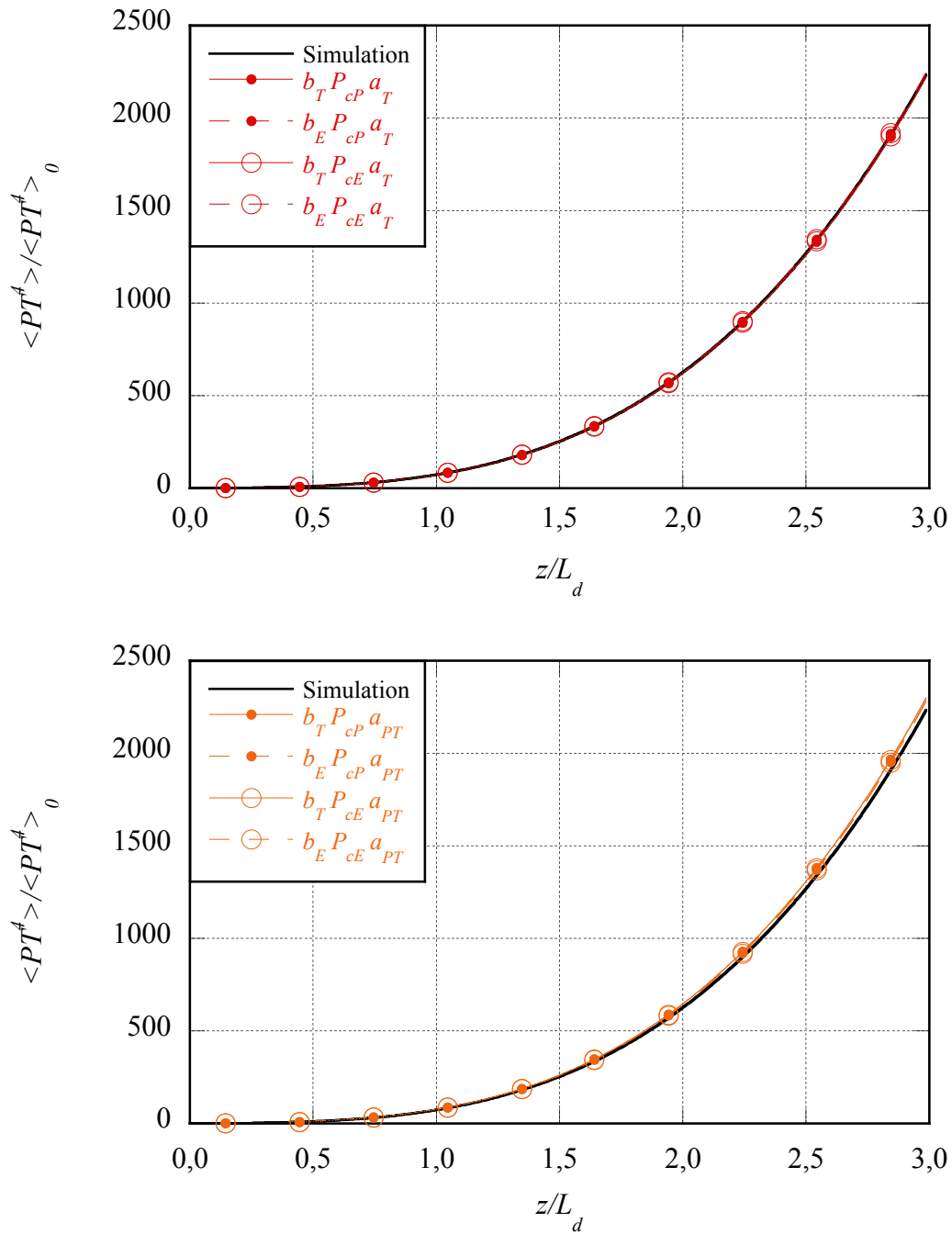


FIGURE 6.5 Comparaison numérique entre les différentes représentations du moment $\langle PT^4 \rangle$ normalisé d'une impulsion gaussienne se propageant dans le régime de dispersion normale avec $N = 2$. Le moment calculé directement à partir de la propagation numérique est en trait plein noir. La figure du haut en trait foncé présente le cas où a_T est utilisé alors que a_{PT} a été utilisé dans la figure du bas en trait clair. Le paramètre b_T apparaît en trait plein et b_E en trait pointillé. Le paramètre P_{cP} est représenté en cercle plein et P_{cE} en cercle vide.

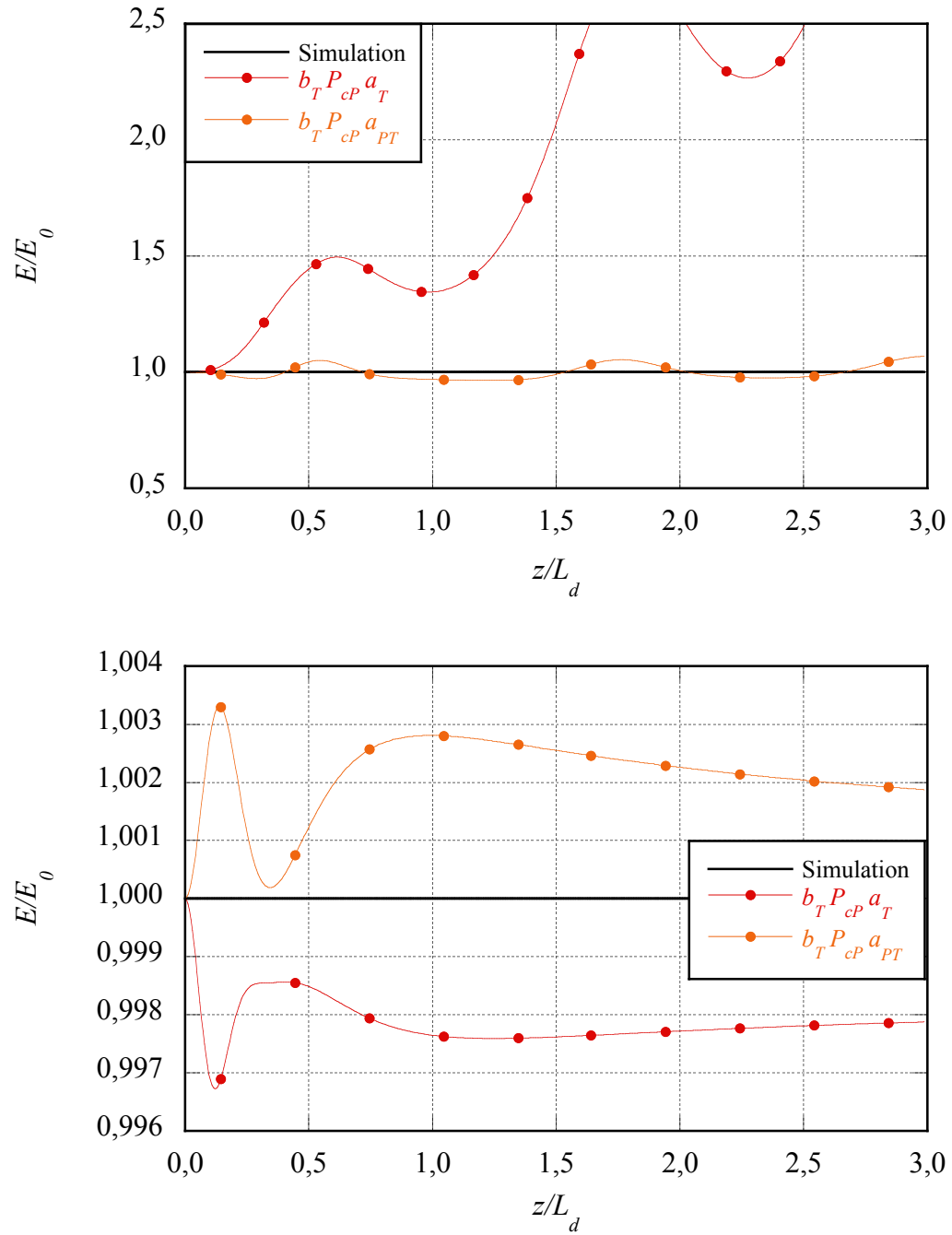


FIGURE 6.6 Comparaison numérique entre la représentation utilisant le paramètres a_T (trait foncé) et a_{PT} (trait clair) de l'énergie E normalisée d'une impulsion gaussienne se propageant dans le régime de dispersion normale (figure du bas) et anormale (figure du haut) où $N = 2$.

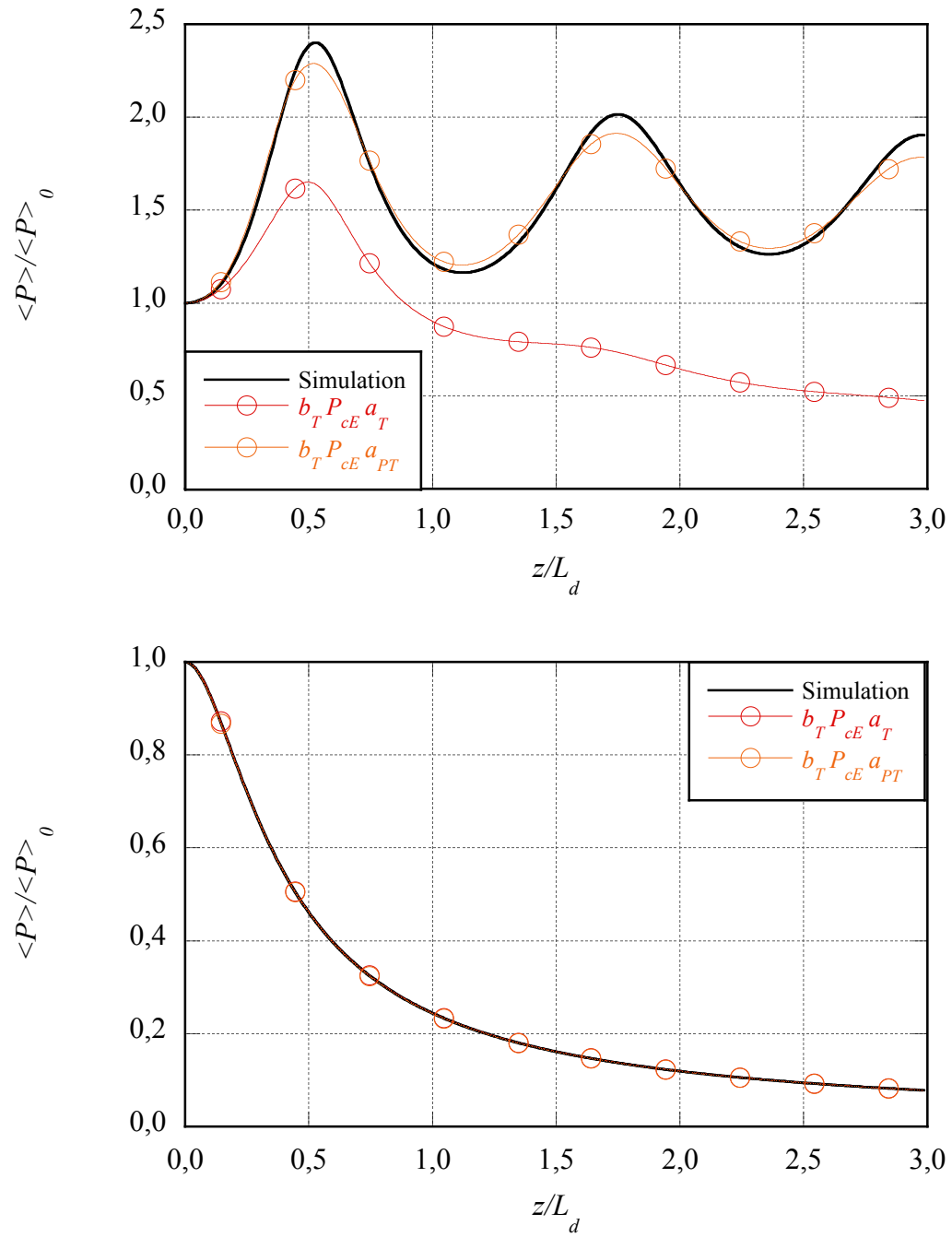


FIGURE 6.7 Comparaison numérique entre la représentation utilisant le paramètres a_T (trait foncé) et a_{PT} (trait clair) du moment $\langle P \rangle$ normalisé d'une impulsion gaussienne se propageant dans le régime de dispersion normale (figure du bas) et anormale (figure du haut) où $N = 2$.

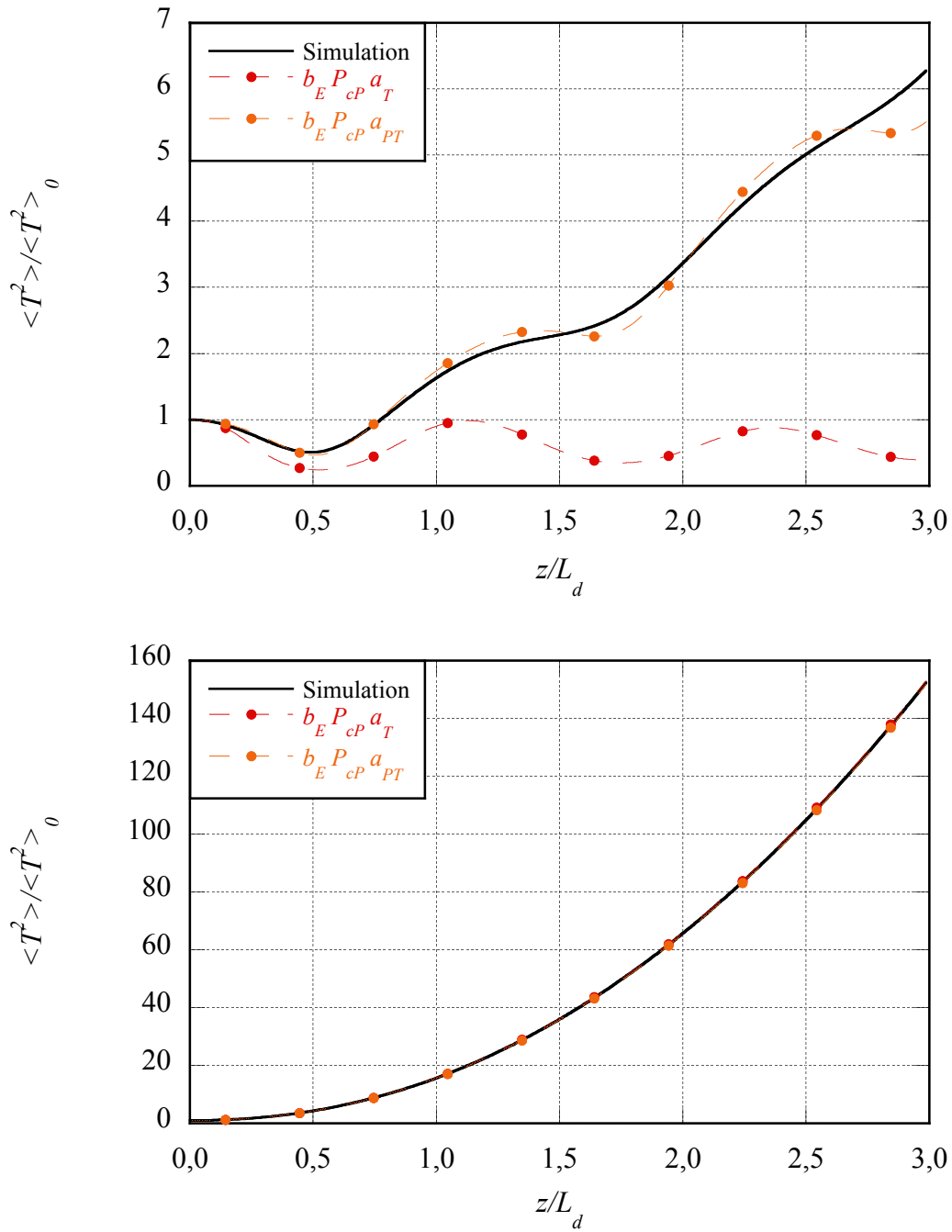


FIGURE 6.8 Comparaison numérique entre la représentation utilisant le paramètres a_T (trait foncé) et a_{PT} (trait clair) du moment $\langle T^2 \rangle$ normalisé d'une impulsion gaussienne se propageant dans le régime de dispersion normale (figure du bas) et anormale (figure du haut) où $N = 2$.

régime de dispersion normale est de loin supérieure à celle dans le régime de dispersion anormale. La distribution de Pearson permet de bien modéliser toutes les formes d'impulsions présentes pendant la propagation en dispersion normale. En dispersion anormale, et en présence de fortes non-linéarités, les impulsions présentent des lobes secondaires ou des piédestaux qui ne peuvent pas être modélisés par la distribution de Pearson. Notons toutefois que même en régime de dispersion anormale, l'accord est très bon en utilisant le facteur de forme κ_{PT} .

La modélisation de la puissance crête P_c semble dépendre surtout du paramètre a utilisé. Lorsque le paramètre de forme est a_{PT} , la modélisation directe par le paramètre P_{cP} (cercles pleins) est plus précise que P_{cE} . C'est toutefois le contraire lorsque le paramètre de forme est a_T . Nous pouvons voir sur les éqs. (6.27) et (6.29) que le paramètre P_{cP} dépend plus fortement de a que P_{cE} . Ainsi, l'accord est meilleur avec P_{cE} qu'avec P_{cP} lorsque a_T est utilisé puisque la représentation de la forme de l'impulsion est moins précise dans ce dernier cas. Lorsque a_{PT} est utilisé, la différence entre P_{cP} et P_{cE} est très faible. La modélisation du paramètre b dépend également de a . Lorsque le paramètre a_{PT} est utilisé, le paramètre b_T (ligne pleine) est plus adéquat que le paramètre b_E (ligne pointillée). L'inverse est vrai lorsque a_T est utilisé. Notons toutefois que b_T est également efficace dans ce cas lorsque la puissance est modélisée par P_{cE} .

En résumé, nous adoptons les paramètres a_{PT} , b_T et P_{cE} pour la modélisation de ce qui suivra. Notons toutefois qu'en régime de dispersion normal, n'importe laquelle des huit représentations est adéquate. Dans ce cas, il est possible d'adopter a_T ou a_{PT} pour analyser l'évolution de la forme de l'impulsion.

6.3.2 Paramètres de phase

Modéliser la phase est plus simple puisqu'il n'y a qu'un ou deux paramètres à représenter. Les moments de plus bas ordre représentant la phase sont $\langle T\Omega \rangle_r$, $\langle PT\Omega \rangle_r$ et $\langle T^3\Omega \rangle_r$. Considérons pour commencer le cas où ces moments sont exprimés en

fonction des paramètres h et f définis à l'éq. (6.20).

$$\langle T\Omega \rangle_r = -2 \frac{h}{(2-3a)} + \frac{f}{2} \langle P \rangle \quad (6.31)$$

$$\langle PT\Omega \rangle_r = -2 \frac{h}{(4-3a)} + \frac{f}{2} \langle P^2 \rangle \quad (6.32)$$

$$\langle T^3\Omega \rangle_r = -6 \frac{h\langle T^2 \rangle}{(2-5a)} + \frac{3f}{2} \langle PT^2 \rangle \quad (6.33)$$

Il y a donc trois différentes façons d'écrire h et f en utilisant deux de ces moments. Nous ne considérons seulement que les deux façons incluant le moment $\langle T\Omega \rangle_r$ puisque c'est le moment de plus bas ordre. Les paramètres h et f s'écrivent alors :

$$f_{PT\Omega} = \frac{6}{\langle P \rangle^2} \left(\frac{\langle PT\Omega \rangle_r - \kappa_{PT} \langle P \rangle \langle T\Omega \rangle_r}{2\kappa_P - 3\kappa_{PT}} \right) \quad (6.34)$$

$$f_{T^3\Omega} = \frac{2}{\langle P \rangle \langle T^2 \rangle} \left(\frac{\langle T^3\Omega \rangle_r - \kappa_T \langle T^2 \rangle \langle T\Omega \rangle_r}{3\kappa_{PT} - \kappa_T} \right) \quad (6.35)$$

$$h = \left(1 - \frac{3a}{2} \right) \left(\frac{f}{2} \langle P \rangle - \langle T\Omega \rangle_r \right) \quad (6.36)$$

Pour valider ces représentations, nous comparons des moments calculés numériquement avec les mêmes moments obtenus en utilisant les éqs. (6.31)–(6.33). Pour faire la comparaison, trois moments sont considérés. Premièrement, il y a $\langle P\Omega^2 \rangle_i$, le seul moment d'ordre supérieur du système d'équations d'évolution des moments d'ordre 2. Deuxièmement, $\langle PT^2\Omega^2 \rangle_i$ puisqu'il intervient dans l'équation d'évolution du moment $\langle PT^2 \rangle$ qui lui-même sert à définir le paramètre a . Finalement, le moment $\langle \Omega^2 \rangle$ est considéré puisqu'il est seul moment d'ordre 2 autre que $\langle T\Omega \rangle_r$ qui contienne de l'information de phase. Ces moments sont définis à partir des paramètres comme suit

$$\langle P\Omega^2 \rangle_i = -\frac{h}{b} \langle P \rangle + \frac{f}{3b} \langle P^2 \rangle \left(\frac{6-a}{3+a} \right) \quad (6.37)$$

$$\langle PT^2\Omega^2 \rangle_i = \frac{h}{2-3a} \langle P \rangle - \frac{f}{3b} \langle P^2 \rangle \left(\frac{3+2a}{3+a} \right) \quad (6.38)$$

$$\langle \Omega^2 \rangle = \frac{1}{4b} \left(\frac{2-a}{1+a} \right) + \frac{4h^2}{b(2-3a)} - \frac{hf}{b} \langle P \rangle + \frac{f^2}{3b} \langle P^2 \rangle \left(\frac{6-a}{3+a} \right) \quad (6.39)$$

où les moments $\langle P \rangle$ et $\langle P^2 \rangle$ sont définis par l'éq. (6.12). La comparaison est montrée aux figures 6.9–6.11 pour des propagations dans les deux régimes de dispersion.

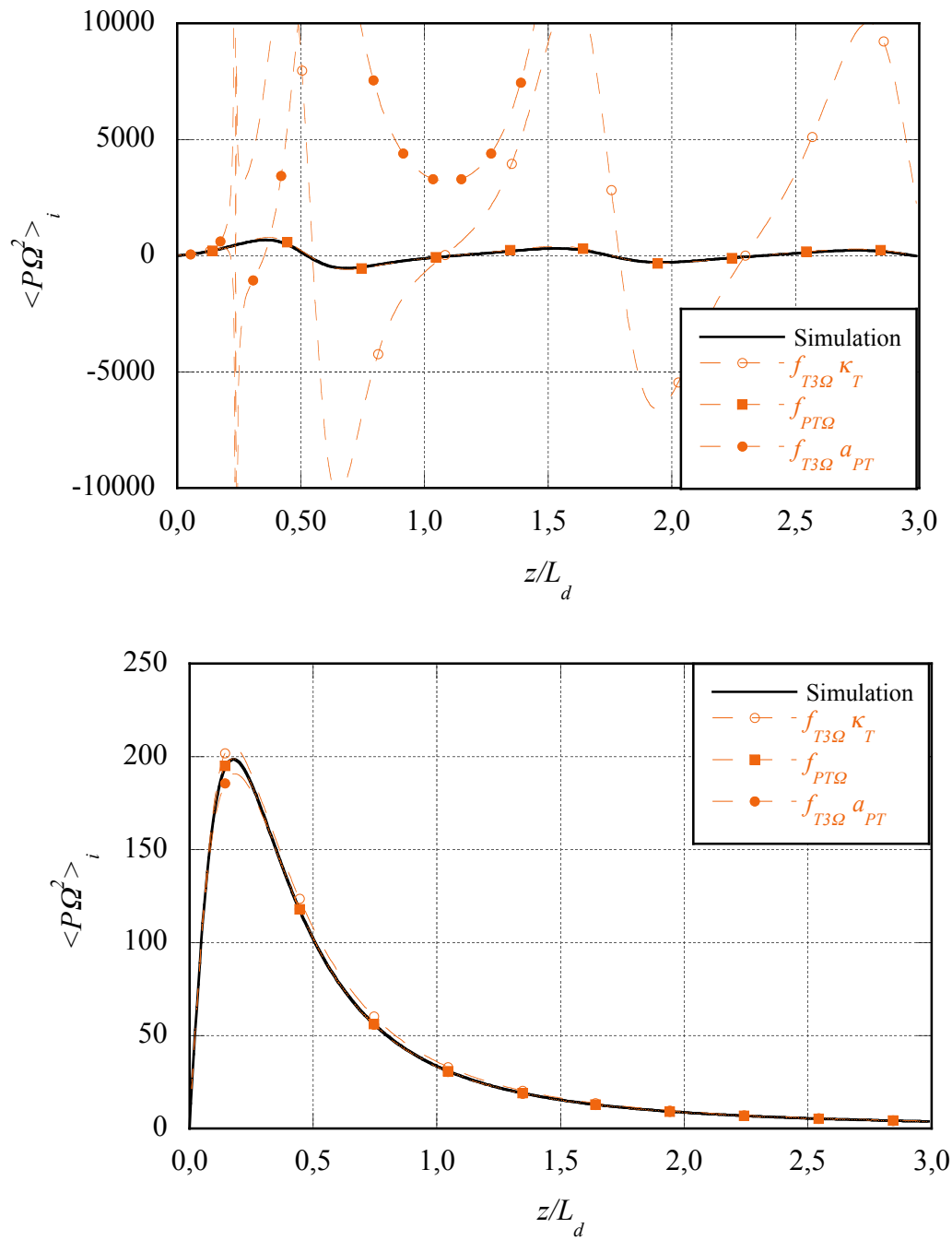


FIGURE 6.9 Comparaison numérique entre la représentation utilisant les paramètres h , $f_{PT\Omega}$ (carré) et $f_{T3\Omega}$ (cercle) du moment $\langle P\Omega^2 \rangle_i$ d'une gaussienne se propageant dans le régime de dispersion normale (figure du bas) et anormale (figure du haut) où $N = 2$ (ligne grasse noire). Les cercles vides indiquent que κ_T entrant dans les définitions est obtenu numériquement à partir de $\langle T^4 \rangle$ et non à partir de a_{PT} .

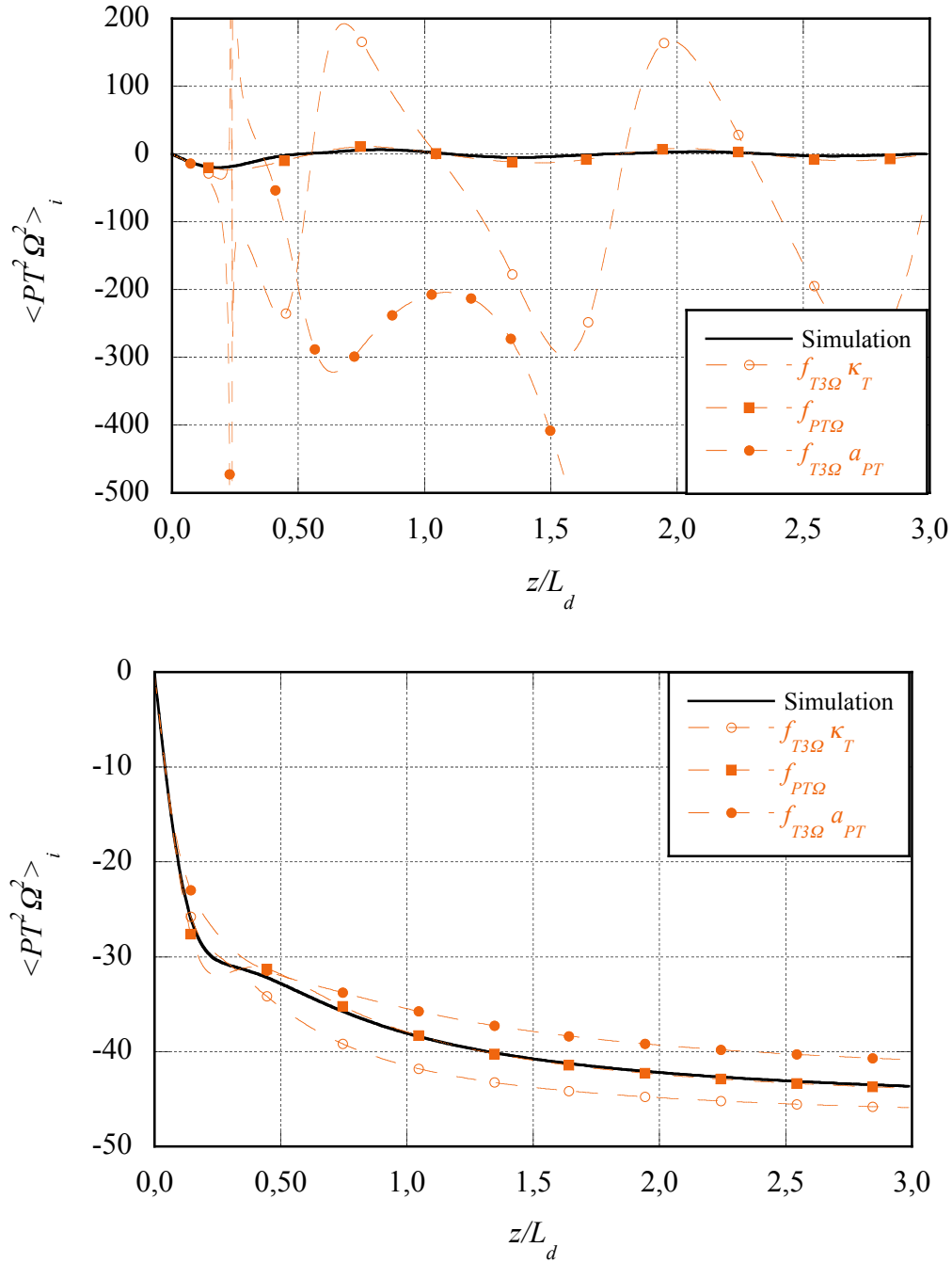


FIGURE 6.10 Comparaison numérique entre la représentation utilisant les paramètres h , $f_{PT\Omega}$ (carré) et $f_{T3\Omega}$ (cercle) du moment $\langle PT^2 \Omega^2 \rangle_i$ d'une impulsion gaussienne se propageant dans le régime de dispersion normale (figure du bas) et anormale (figure du haut) où $N = 2$ (ligne grasse noire). Les cercles vides indiquent que κ_T entrant dans les définitions est obtenu numériquement à partir de $\langle T^4 \rangle$ et non à partir de a_{PT} .

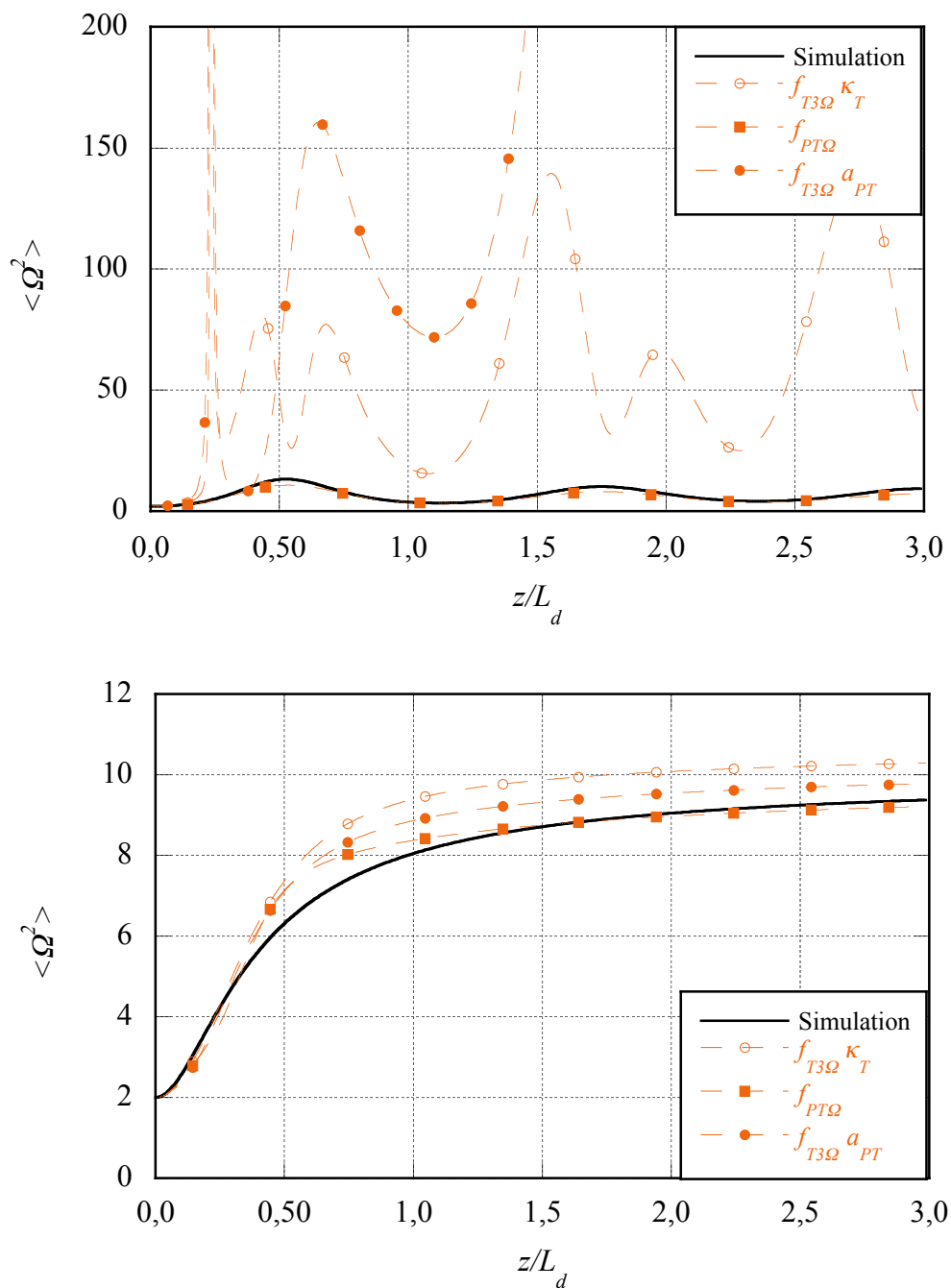


FIGURE 6.11 Comparaison numérique entre la représentation utilisant les paramètres h , $f_{PT\Omega}$ (carré) et $f_{T3\Omega}$ (cercle) du moment $\langle \Omega^2 \rangle$ d'une impulsion gaussienne se propageant dans le régime de dispersion normale (figure du bas) et anormale (figure du haut) où $N = 2$ (ligne grasse noire). Les cercles vides indiquent que κ_T entrant dans les définitions est obtenu numériquement à partir de $\langle T^4 \rangle$ et non à partir de a_{PT} .

Il ressort que le paramètre $f_{PT\Omega}$ est de loin plus efficace que le paramètre $f_{T3\Omega}$, particulièrement dans le régime de dispersion anormale. Dans le régime de dispersion normale, la différence entre les deux modèles est moins marquée, mais $f_{PT\Omega}$ l'emporte tout de même. Dans l'éq. (6.35), le facteur κ_T doit être connu pour déterminer $f_{T3\Omega}$. Deux façons différentes ont été prises pour le calculer ; directement à partir de $\langle T^4 \rangle$ calculé numériquement à partir du champ et à partir de l'éq. (6.13) et a_{PT} . Le calcul direct à partir du champ donne une plus grande précision, ce qui n'est guère surprenant puisqu'il y a moins d'approximations dans ce cas.

Encore une fois l'opérateur P permet de mieux quantifier la forme du champ. Le moment $\langle T^3\Omega \rangle_r$ donne plus de poids à la phase lorsque T est très grand alors que $\langle PT\Omega \rangle_r$ permet de répartir le poids plus uniformément dans le temps, donnant une mesure plus juste de la phase. Dans le régime de dispersion normale, cette différence de pondération apparaît peu car la phase demeure plus ou moins quadratique lors de la propagation, comme nous l'avons vu au chapitre 4. Toutefois la phase présente plusieurs variations temporelles dans le régime de dispersion anormale. Dans ce cas, il est important d'avoir une pondération permettant de bien considérer ces variations.

Un fait intéressant à noter est que la précision des différents modèles est moins bonne pour le moment $\langle \Omega^2 \rangle$ que la précision du modèle quadratique du chapitre 4. Cela est quelque peu surprenant puisque les éqs. (6.34)–(6.36) sont plus générales que l'approximation de la phase quadratique. La raison se trouve dans la différence entre la méthode classique des moments et la méthode générale des moments. Dans la méthode classique, il ne faut modéliser qu'autant de moments que de paramètres. Dans ce cas, il y a un moment redondant entre $\langle T^2 \rangle$, $\langle T\Omega \rangle_r$ et $\langle \Omega^2 \rangle$ (en supposant une forme connue d'impulsion) et seulement les deux premiers seraient considérées dans l'analyse, comme nous l'avons fait aux éqs. (6.34)–(6.36). Toutefois, au chapitre 4, nous avons considéré les trois moments dans l'analyse ce qui offre une plus grande précision. Il est donc avantageux d'inclure le plus de moments possibles dans l'analyse pour caractériser l'amplitude. Toutefois, plus de moments considérés veut aussi dire un système plus lourd à gérer et plus de moments d'ordre supérieur dont l'approximation doit être faite ; il y a donc un équilibre à rechercher.

Regardons maintenant le cas plus simple où il n'y qu'un seul paramètre de phase. Le cas de la phase quadratique a été traité au chapitre 4. Le paramètre c de la phase

logarithmique peut s'écrire à partir des moments $\langle T\Omega \rangle_r$, $\langle PT\Omega \rangle_r$ et $\langle T^3\Omega \rangle_r$.

$$c_{T\Omega} = 2\langle T\Omega \rangle_r \quad (6.40)$$

$$c_{PT\Omega} = 4 \frac{\langle PT\Omega \rangle_r}{\langle P \rangle} \quad (6.41)$$

$$c_{T^3\Omega} = \frac{2}{3} \frac{\langle T^3\Omega \rangle_r}{\langle T^2 \rangle} \quad (6.42)$$

Afin de déterminer laquelle de cette façon est la meilleure, nous procédons de la même manière que précédemment et les comparons avec des moments d'ordre supérieur. Les moments utilisés pour la comparaison s'écrivent alors

$$\langle P\Omega^2 \rangle_i = \frac{c\langle P \rangle}{4b} \left(\frac{4-a}{2+a} \right) \quad (6.43)$$

$$\langle PT^2\Omega^2 \rangle_i = -\frac{c\langle P \rangle}{4} \left(\frac{1+2a}{2+a} \right) \quad (6.44)$$

$$\langle \Omega^2 \rangle = \frac{(1+c^2)}{4b} \left(\frac{2-a}{1+a} \right) \quad (6.45)$$

où le moment $\langle P \rangle$ est donné par l'éq. (6.12). La comparaison entre les moments calculés numériquement et ceux obtenus à partir de c est présentée aux figures 6.12–6.14.

De façon générale, l'accord est moins bon qu'avec la représentation utilisant les paramètres h et f , ce qui est attendu puisqu'il y a un paramètre de moins dans cette représentation. La représentation la plus précise parmi les trois valeur de c est $c_{PT\Omega}$. Encore une fois, le moment $\langle PT\Omega \rangle_r$ se révèle être une excellente mesure de la phase. Notons cependant que dans le régime de dispersion normale, la différence entre les représentations et les moments $\langle \Omega^2 \rangle$ et $\langle T^2\Omega^2 \rangle_i$ est particulièrement importante. Il faut donc trouver une autre façon de représenter ces moments. Il est facile d'inclure $\langle \Omega^2 \rangle$ dans le système d'équations d'évolution puisque c'est un moment d'ordre 2. Il est également possible d'utiliser l'invariant I_0 et le représenter par le moment $\langle P \rangle$. Pour représenter le moment $\langle PT^2\Omega^2 \rangle_i$, considérons l'approximation suivante

$$\langle PT^2\Omega^2 \rangle_i \approx -\frac{\langle PT^2 \rangle \langle P\Omega^2 \rangle_i}{\langle P \rangle} \quad (6.46)$$

qui est tracée à la figure 6.13 en trait pâle avec des croix. Cette approximation donne

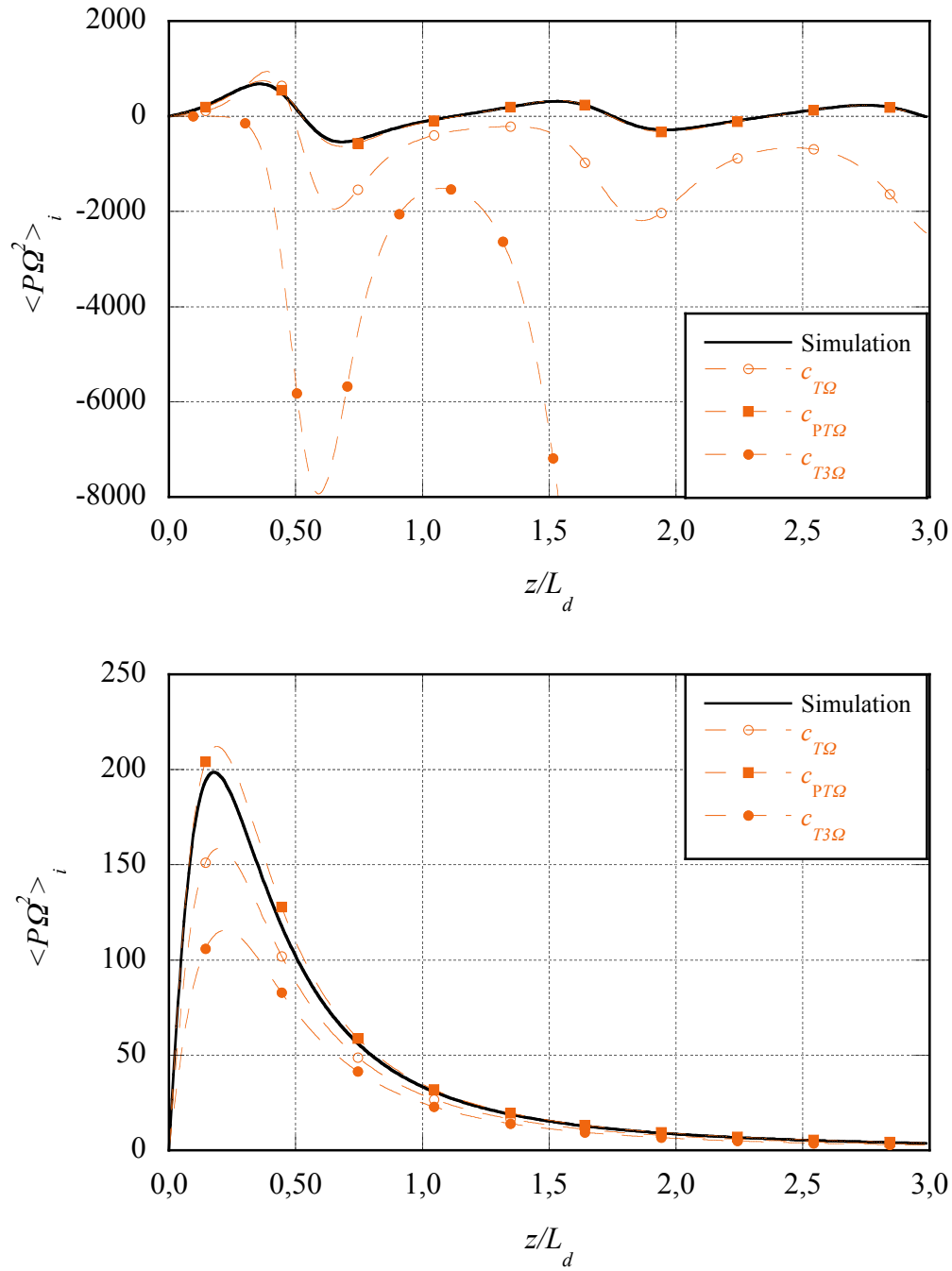


FIGURE 6.12 Comparaison numérique entre la représentation utilisant les paramètres $c_{T\Omega}$ (cercles vides), $c_{PT\Omega}$ (carrés) et $c_{T3\Omega}$ (cercles pleins) du moment $\langle P\Omega^2 \rangle_i$ d'une impulsion gaussienne se propageant dans le régime de dispersion normale (figure du bas) et anormale (figure du haut) où $N = 2$ (ligne grasse noire).

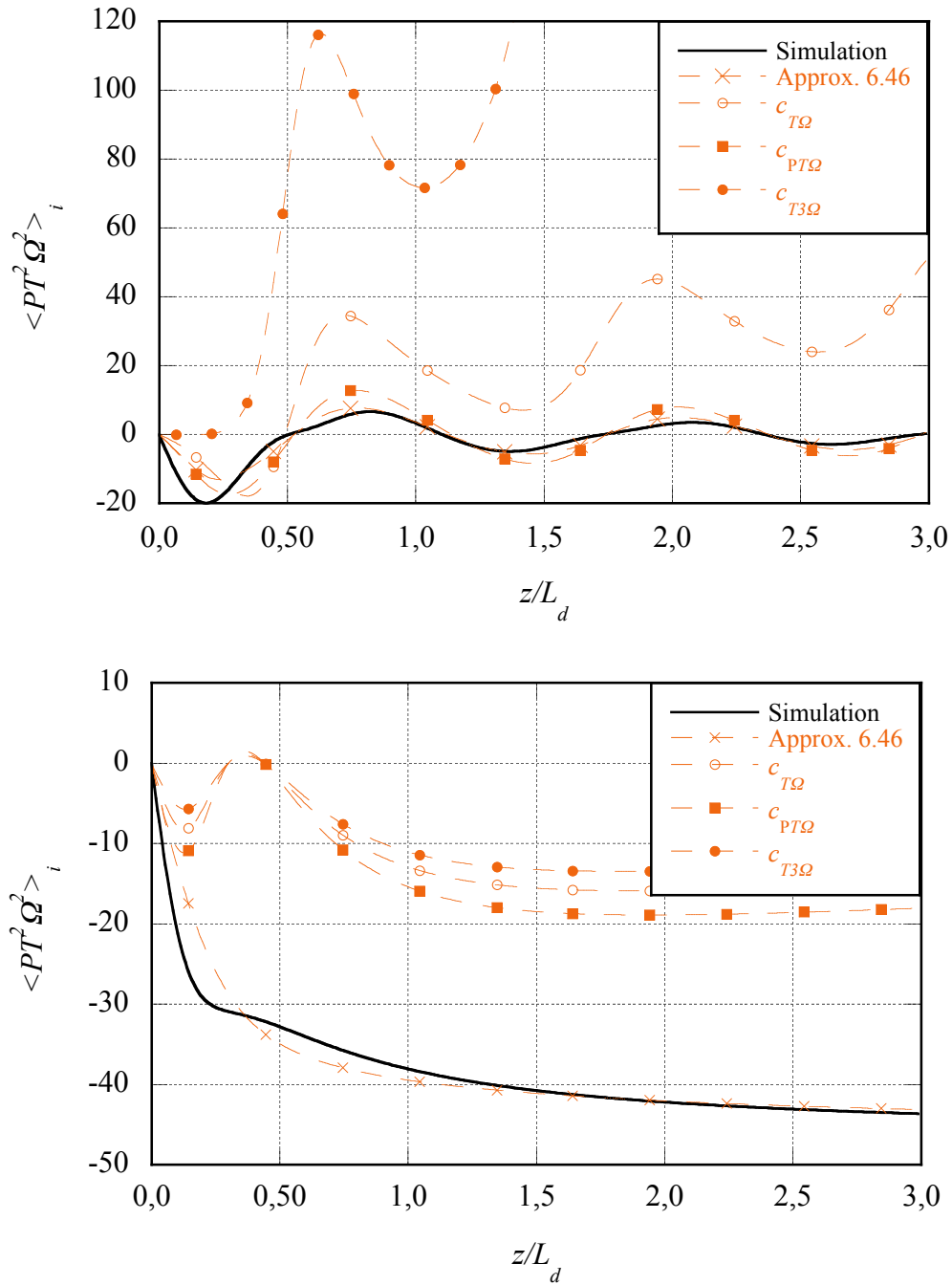


FIGURE 6.13 Comparaison numérique entre la représentation utilisant les paramètres $c_{T\Omega}$ (cercles vides), $c_{PT\Omega}$ (carrés) et $c_{T3\Omega}$ (cercles pleins) du moment $\langle PT^2 \Omega^2 \rangle_i$ d'une impulsion gaussienne se propageant dans le régime de dispersion normale (figure du bas) et anormale (figure du haut) où $N = 2$ (ligne grasse noire). La ligne pâle avec les croix représente l'approximation de l'éq. (6.46).

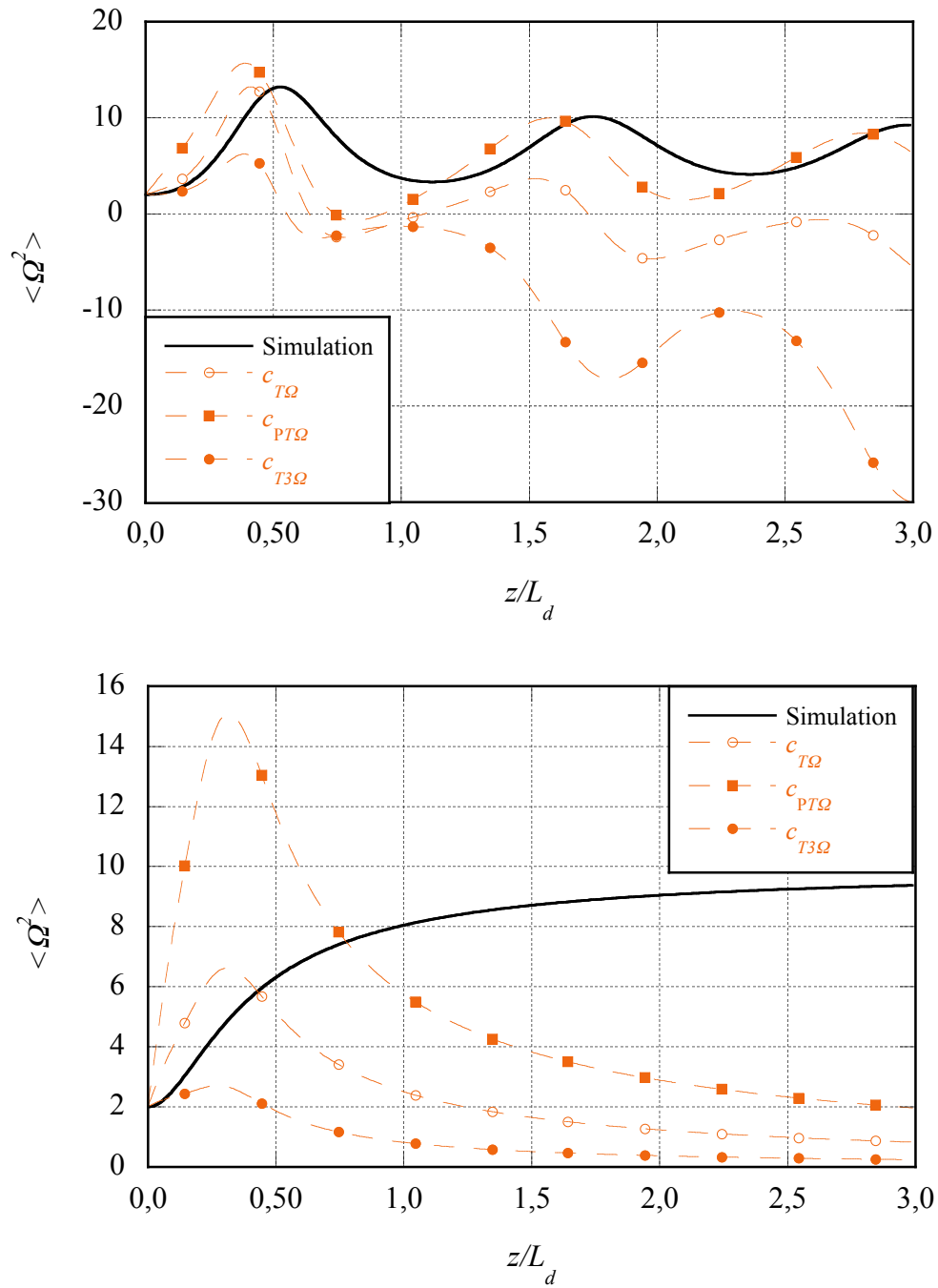


FIGURE 6.14 Comparaison numérique entre la représentation utilisant les paramètres $c_{T\Omega}$ (cercles vides), $c_{PT\Omega}$ (carrés) et $c_{T3\Omega}$ (cercles pleins) du moment $\langle \Omega^2 \rangle$ d'une impulsion gaussienne se propageant dans le régime de dispersion normale (figure du bas) et anormale (figure du haut) où $N = 2$ (ligne grasse noire).

de bons résultat et de plus, peut être intégrée de part et d'autres au moyen des éqs. (4.13) et (6.2a), ce qui mène à un invariant approximatif.

$$I_3 = \frac{\langle P \rangle \langle PT^2 \rangle}{E^2} \quad (6.47)$$

L'invariant I_3 est normalisé en utilisant l'énergie pour ne dépendre que de a .

Il est clair, en regardant les figures 6.12–6.14, que la phase logarithmique est plus appropriée dans le régime de dispersion anormale que dans le régime de dispersion normale. Rappelons que la phase logarithmique est issue du soliton moyen dans les équations maîtresses des lasers opérant dans le régime de dispersion anormale. Il est donc prévisible qu'il y ait un meilleur accord dans ce régime de dispersion.

Certaines observations intéressantes ressortent de l'ensemble des représentations de la phase. Tout d'abord, le moment $\langle PT\Omega \rangle_r$ est clairement le moment clef pour représenter les paramètres de phase. Il permet de représenter la phase plutôt simple de la propagation en régime de dispersion normale ainsi que de bien faire la moyenne des motifs de la phase dans le régime de dispersion anormale. D'ailleurs, la représentation est en générale meilleure dans le régime de dispersion normale, plutôt qu'anormale, puisque la phase est plus facile à modéliser. Ensuite, il est préférable d'utiliser les paramètres h et $f_{PT\Omega}$ pour représenter la phase, qui donne une bonne représentation dans les deux régimes de dispersion. Toutefois, dans le régime de dispersion normale, tous les h et f sont adéquats. Dans la représentation à un paramètre seul $c_{PT\Omega}$ est adéquat, et ce, seulement dans le régime de dispersion anormale.

Nous pouvons maintenant représenter tous les moments d'ordre supérieur présents dans les systèmes d'équations (6.1) et (6.2). Pour ce faire, nous supposons que les moments d'ordre supérieur du système peuvent être remplacés par les moments d'ordre supérieur correspondants de la distribution de Pearson. Ces moments peuvent donc être exprimés en termes des paramètres de la distribution de Pearson a , b et P_c et les paramètres de phase h et f ou c . Ces paramètres peuvent à leur tour être exprimés en terme des moments internes. Le système d'équations se trouve alors fermé et il devient possible de le résoudre.

Bien que l'accord entre les moments calculés numériquement et leur représentation puisse être bon, il est important que l'accord le soit autour de $z = 0$. Si nous voulons intégrer les systèmes d'éqs. (6.1) et (6.2) fermés, il est capital que les erreurs soient faibles autour de $z = 0$ pour éviter les divergences et la propagation d'erreurs. Il

s'ensuit qu'en résolvant les systèmes d'éqs. (6.1) et (6.2) des moments d'ordre 4 et d'ordre 2 non-linéaire et en les comparant aux moments calculés directement à partir du champ propagé numériquement, nous obtenons une mesure de la précision des approximations de l'ensemble des moments d'ordre supérieur. C'est donc ce que le reste de ce chapitre présente.

6.4 Intégration numérique

Dans cette section, les systèmes d'équations sur les moments d'ordre 4 (éq. (6.1)), d'ordre 2 non-linéaires (éq. (6.2)), ainsi que ceux à l'ordre 2 (éq. (4.12)) sont intégrés en utilisant les différentes représentations du champ pour s'affranchir des moments d'ordre supérieur. Puisque ces systèmes comportent plusieurs équations et que ces dernières sont non-linéaires, l'intégration est faite numériquement. Le paramètre a est alors calculé à partir des moments intégrés et comparé avec le paramètre a obtenu à partir des moments «exacts» calculés à partir du champ propagé numériquement par la méthode split-step Fourier. Cette comparaison nous donne une mesure globale de la précision des approximations des moments d'ordre supérieur. De plus, les systèmes sont intégrés en considérant toutes ou seulement quelques-unes des équations différentielles. Autrement dit, la représentation du champ de Pearson est utilisée pour approximer les moments faisant partie du système, réduisant ainsi la taille de ce dernier. Ceci nous permet de déterminer le point à partir duquel ajouter des moments au système introduit plus d'erreurs d'approximation qu'il n'augmente la précision.

Les intégrations des systèmes d'équations différentielles des moments représentent évidemment la propagation d'une impulsion dans un milieu dispersif et non-linéaire. Des intégrations (propagations) ont été effectuées dans les deux régimes de dispersion, normale et anormale, pour trois différentes puissances crêtes différentes donnant $N = 1, 2$ et 3 , afin de vérifier la validité des différentes représentations du champ dans différentes conditions. Notons qu'une gaussienne a été prise comme forme initiale de l'impulsion. Pour chacune de ces six conditions, le système à l'ordre 4 et le système à l'ordre 2 non-linéaire, décrits respectivement par les éqs. (6.1) et (6.2) sont intégrés avec trois différentes représentations de la phase ; la phase logarithmique, quadratique et quadratique avec un terme non-linéaire, donnant 18 configurations pour chaque système.

Pour chacune de ces configurations, les équations du systèmes sont considérés

dans leur intégralité ou certaines sont éliminées. Dans ce cas, le moment décrit par l'équation éliminée est approximé par la représentation du champ utilisé dans la configuration. Spécifiquement, à l'ordre 4, le système est résolu soit en tenant compte des 5 équations à l'ordre 4, soit en approximant le moment $\langle \Omega^4 \rangle$ et en laissant tomber l'éq. (6.1e), soit en approximant le moment $\langle T\Omega^3 \rangle_r$ et en laissant tomber les éqs. (6.1d) et (6.1e) et soit finalement en approximant le moment $\langle T^2\Omega^2 \rangle_r$ tout en laissant tomber les éqs. (6.1c)–(6.1e). Pour le système à l'ordre 2 non-linéaire, le système est intégré avec les quatre éqs. (6.2), puis en approximant le moment $\langle P\Omega^2 \rangle_i$ et en laissant tomber l'éq. (6.2d) et finalement en approximant le moment $\langle P\Omega^2 \rangle_r$ et en laissant tomber les éqs. (6.2c)–(6.2d). Le tableau 6.4 résume les différents cas se retrouvant dans chaque configuration.

Moments approximés dans le système à l'ordre 4	Équations intégrées
$\langle PT^2 \rangle, \langle PT\Omega \rangle_r, \langle PT^2\Omega^2 \rangle_i, \langle P\Omega^2 \rangle_r, \langle PT\Omega^3 \rangle_i, \langle P\Omega^4 \rangle_i, \langle P\Omega^2 \rangle_i$	6.1a–6.1e
$\langle PT^2 \rangle, \langle PT\Omega \rangle_r, \langle PT^2\Omega^2 \rangle_i, \langle P\Omega^2 \rangle_r, \langle PT\Omega^3 \rangle_i, \langle \Omega^4 \rangle, \langle P\Omega^2 \rangle_i$	6.1a–6.1d
$\langle PT^2 \rangle, \langle PT\Omega \rangle_r, \langle PT^2\Omega^2 \rangle_i, \langle T\Omega^3 \rangle_r, \langle P\Omega^2 \rangle_i$	6.1a–6.1c
$\langle PT^2 \rangle, \langle T^2\Omega^2 \rangle_r, \langle P\Omega^2 \rangle_i$	6.1a–6.1b
Moments approximés dans le système à l'ordre 2 non-linéaire	Équations intégrées
$\langle PT^2\Omega^2 \rangle_i, \langle P\Omega^2 \rangle_r, \left\langle T \frac{\partial A^*}{\partial T} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \right\rangle_r, \langle P^2 \rangle, \langle P\Omega^4 \rangle_i, \left\langle \frac{\partial A^*}{\partial T} \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} \right\rangle_i$	6.2a–6.2d
$\left\langle \frac{\partial A^*}{\partial T} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \Omega \right\rangle_r, \langle P^2\Omega^2 \rangle_i, \langle P\Omega^4 \rangle_r, \left\langle \frac{\partial A^*}{\partial T} \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} \right\rangle_r, \left\langle \frac{\partial A^*}{\partial T} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \Omega \right\rangle_i$	
$\langle P^2\Omega^2 \rangle_r, \left\langle P \left \frac{\partial A}{\partial T} \right ^2 \right\rangle_r, \left\langle P \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right\rangle_r$	
$\langle PT^2\Omega^2 \rangle_i, \langle P\Omega^2 \rangle_r, \left\langle T \frac{\partial A^*}{\partial T} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \right\rangle_r, \langle P^2 \rangle, \langle P\Omega^4 \rangle_i, \left\langle \frac{\partial A^*}{\partial T} \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} \right\rangle_i$	6.2a–6.2c
$\left\langle \frac{\partial A^*}{\partial T} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \Omega \right\rangle_r, \langle P^2\Omega^2 \rangle_i, \langle P\Omega^2 \rangle_i$	
$\langle PT^2\Omega^2 \rangle_i, \langle P\Omega^2 \rangle_r, \left\langle T \frac{\partial A^*}{\partial T} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \right\rangle_r, \langle P^2 \rangle, \langle P\Omega^2 \rangle_i$	6.2a–6.2b

TABLEAU 6.1 Liste des différentes approximations avec lesquelles les systèmes d'équations à l'ordre 4 et à l'ordre 2 non-linéaire sont intégrés dans chaque configuration.

Les différents paramètres a obtenus de l'intégration des équations de propagation sont présentées aux figures 6.15–6.20 dans les deux différents régimes de dispersion et pour les différentes valeurs de N . Sur chacune de ces figures, le paramètre a obtenu de la simulation split-step est en trait plein noir. Les courbes avec les cercles pleins représentent la phase logarithmique, celle avec les carreaux la phase quadratique et

le trait sans marqueur représente la phase quadratique avec un terme non-linéaire. Pour les systèmes à l'ordre 4, les courbes en trait plein indiquent que les cinq moments d'ordre 4 sont inclus dans l'intégration et seuls les moments d'ordre supérieur sont approximatés. Les courbes en tirets indiquent que le moment $\langle \Omega^4 \rangle$ est approximaté et qu'il n'y a que quatre équations d'ordre 4. Les courbes tiret-point et pointillées représentent les cas où le moment $\langle T\Omega^3 \rangle_r$ et $\langle T^2\Omega^2 \rangle_r$ sont respectivement remplacés par la représentation de Pearson. Dans le système à l'ordre 2 non-linéaire, les courbes en trait plein indiquent que seuls les moments d'ordre supérieur sont approximatés. Les courbes avec les tirets indique le cas où le moment $\langle P\Omega^2 \rangle_i$ est approximaté par la distribution de Pearson et son équation différentielle est retirée du système. Les courbes pointillées indiquent que les moments $\langle P\Omega^2 \rangle_r$ et $\langle P\Omega^2 \rangle_i$ sont remplacées par la distribution de Pearson et leurs équations respectives sont retirées du système. Regardons maintenant en détails les résultats présentés sur chacune de ces figures.

6.4.1 Dispersion normale

Dans le régime de dispersion normale, le paramètre a diminue au début de la propagation, indiquant que l'impulsion se rapproche d'une forme parabolique (et éventuellement carrée, selon la puissance) jusqu'à atteindre un minimum correspondant au point de rupture du front d'onde. L'impulsion reprend alors une forme de cloche avec la dispersion des lobes générés par la rupture du front. La forme de l'impulsion se stabilise ensuite de manière asymptotique vers une impulsion parabolique. Considérons dans un premier temps l'intégration des systèmes à l'ordre 4.

Système à l'ordre 4

Dans le système à l'ordre 4, le système d'éqs. (6.1) est intégré et le paramètre a est utilisé pour comparer les différents cas avec les simulations numériques. Le paramètre a dans ce cas est obtenu à partir du paramètre de forme κ_T . Les trois différentes phases présentées précédemment, la phase logarithmique, quadratique et non-linéaire, sont étudiées lors de l'intégration.

La phase logarithmique est représentée par les cercles sur les figures du haut 6.15–6.17 pour différents valeurs de N . L'intégration des éq. (6.1) donne en général un résultat proche des simulations, ce qui signifie que les moments $\langle PT\Omega \rangle_r$, $\langle PT^2\Omega^2 \rangle_r$, $\langle PT\Omega^3 \rangle_i$, $\langle P\Omega^2 \rangle_r$ et $\langle P\Omega^4 \rangle_i$ sont bien représentés. Quelques points sont remarquables.

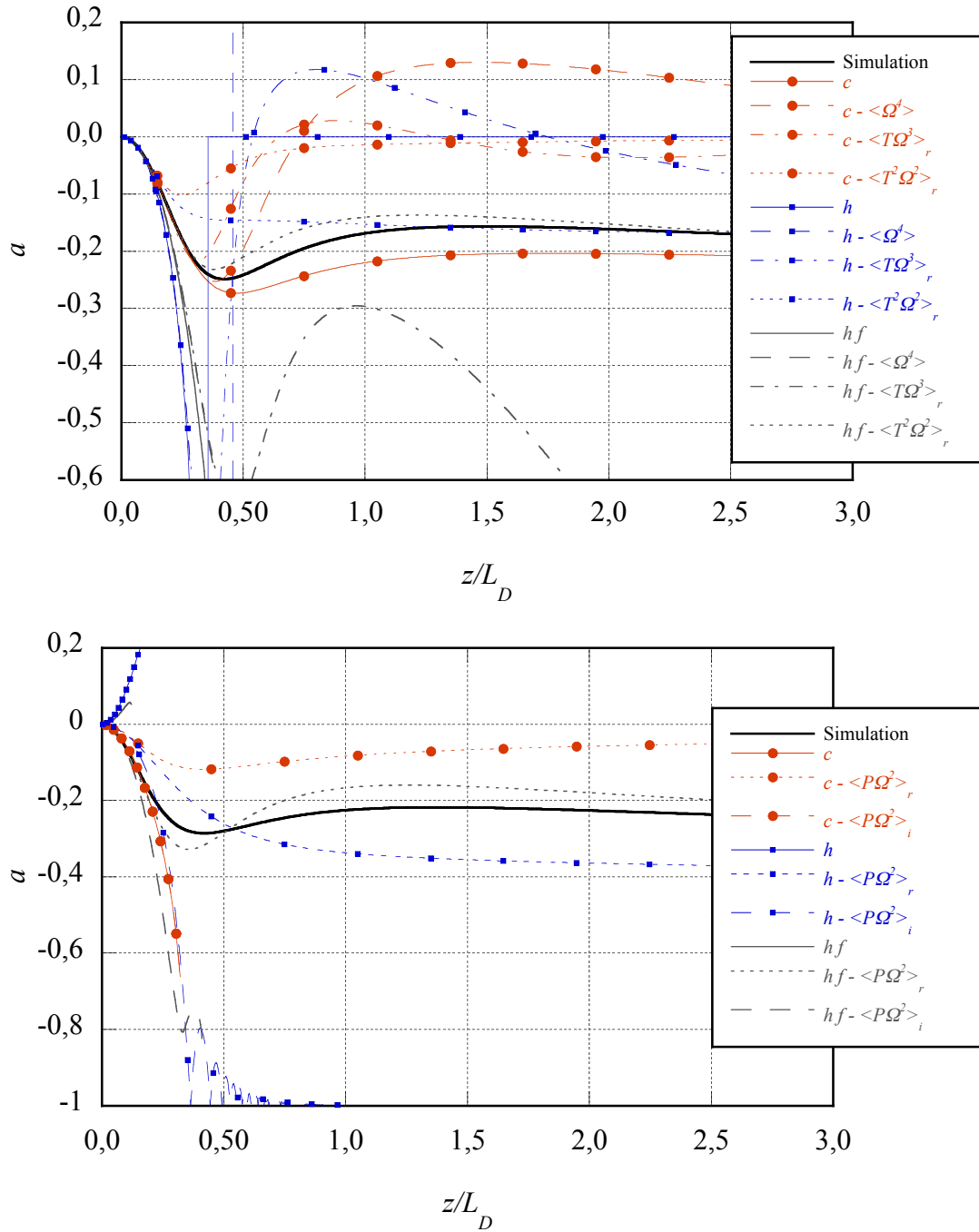


FIGURE 6.15 Paramètre a obtenu de l'intégration des systèmes à l'ordre 4 (haut) et à l'ordre 2 non-linéaire (bas) pour $N = 1$ dans le régime de dispersion normale. Les courbes rouges avec cercles représentent la phase logarithmique, les courbes bleues avec carreaux la phase quadratique et les courbes grises foncées la phase quadratique et non-linéaire. Les traits indiquent les termes inclus dans les systèmes (voir texte). La courbe noire pleine représente le paramètre a obtenu par la propagation numérique.

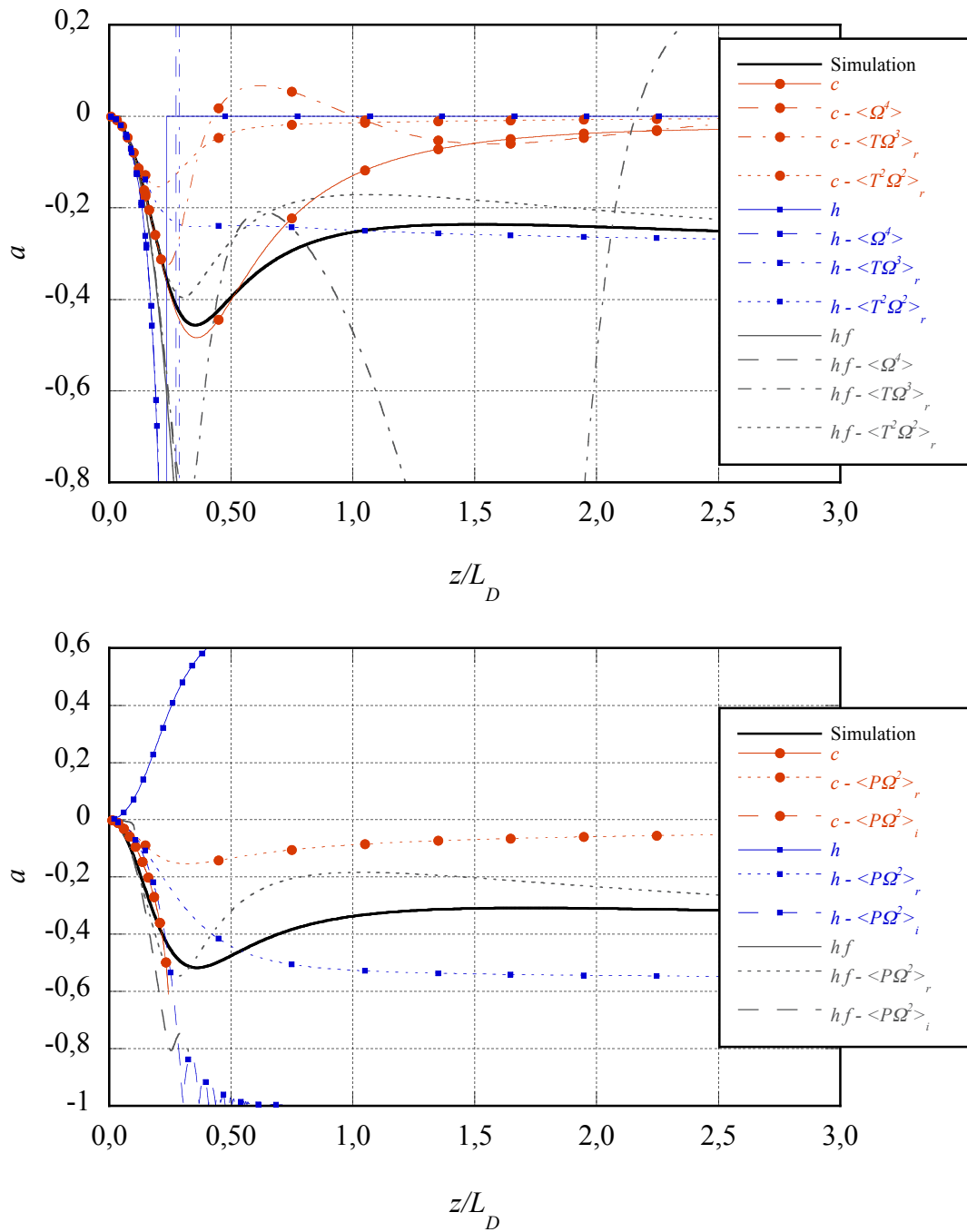


FIGURE 6.16 Paramètre a obtenu de l'intégration des systèmes à l'ordre 4 (haut) et à l'ordre 2 non-linéaire (bas) pour $N = 2$ dans le régime de dispersion normale. Les courbes rouges avec cercles représentent la phase logarithmique, les courbes bleues avec carreaux la phase quadratique et les courbes grises foncées la phase quadratique et non-linéaire. Les traits indiquent les termes inclus dans les systèmes (voir texte). La courbe noire pleine représente le paramètre a obtenu par la propagation numérique.

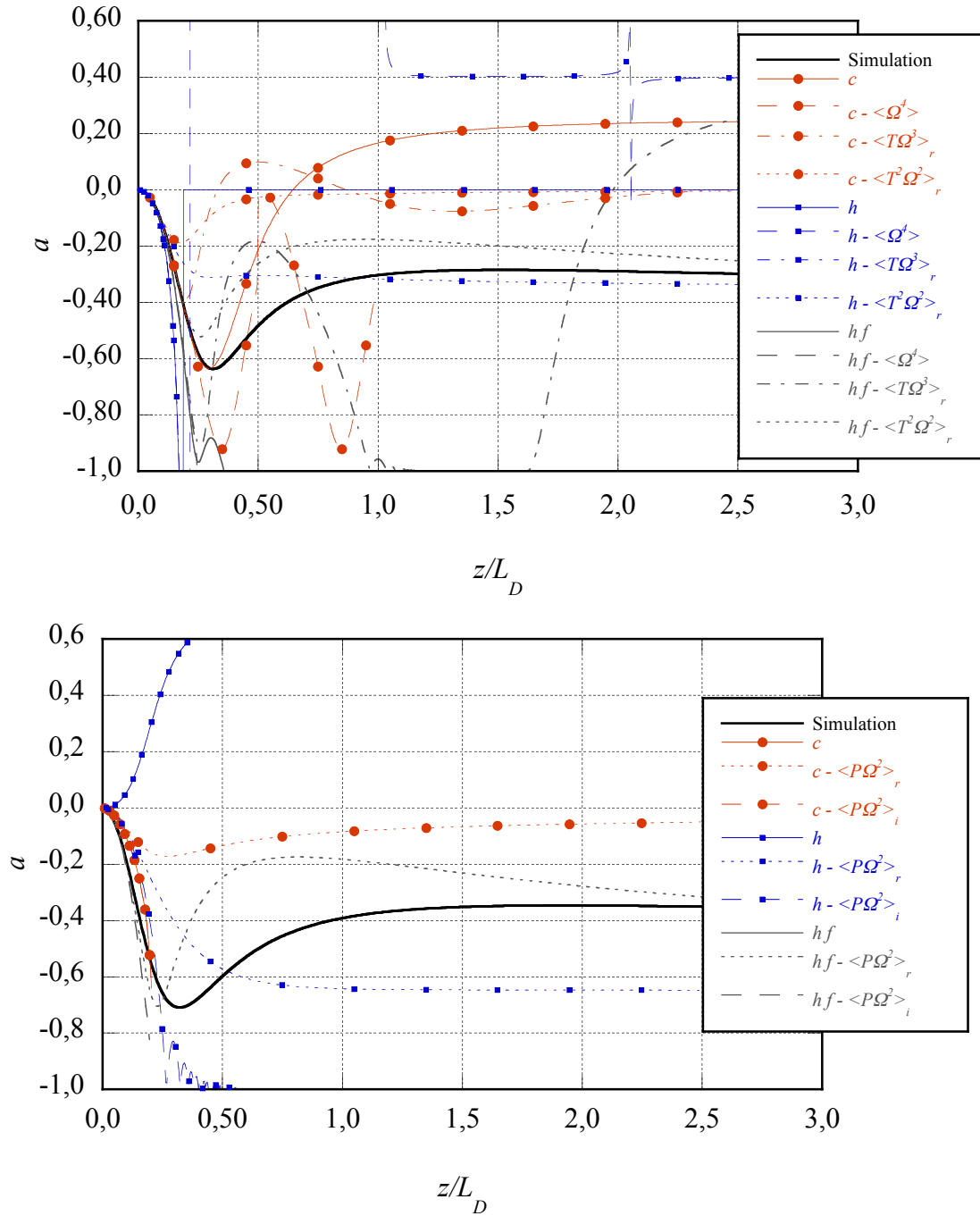


FIGURE 6.17 Paramètre a obtenu de l'intégration des systèmes à l'ordre 4 (haut) et à l'ordre 2 non-linéaire (bas) pour $N = 3$ dans le régime de dispersion normal. Les courbes rouges avec cercles représentent la phase logarithmique, les courbes bleues avec carreaux la phase quadratique et les courbes grises foncées la phase quadratique et non-linéaire. Les traits indiquent les termes inclus dans les systèmes (voir texte). La courbe noire pleine représente le paramètre a obtenu par la propagation numérique.

Premièrement, la précision est plus grande pour de courtes distances de propagation. Les erreurs d'approximation s'accumulent lors de l'intégration. Ainsi, la distance à laquelle les moments intégrés diffèrent substantiellement des simulations est un indicateur de la qualité des approximations. Deuxièmement, la phase logarithmique est une meilleure approximation lorsque le paramètre N est faible puisque la phase est d'autant plus quadratique que la non-linéarité est faible. Finalement, la précision augmente avec le nombre de moments considérés lors de l'intégration. Ce dernier point est important car il signifie que la méthode classique des moments, où le nombre de moments considérés est égal au nombre de paramètres de la représentation, est plus approximative comparé au cas où plus de moments sont inclus dans la représentation. Autrement dit, le champ est représenté plus exactement avec un grand nombre de moments au lieu de ne le représenter qu'avec les paramètres de Pearson.

La phase quadratique, représentée par les carrés, montre des conclusions légèrement différentes. À courte distance, l'intégration est d'autant plus précise que le nombre de moments est grand. Toutefois, à longue distance l'intégration diverge lorsque tous les moments sont inclus ou lorsque $\langle \Omega^4 \rangle$ est retiré (ou lorsque $N > 1$, $\langle T\Omega^3 \rangle_r$ est retiré). La divergence se produit parce que la phase quadratique est trop simple pour représenter adéquatement les moments d'ordre supérieur. En retirant des moments de l'intégration, le nombre de moments à approximer diminue et le système ne diverge plus. Parmi les cas ne divergeant pas lorsque $N = 1$, l'intégration où $\langle T\Omega^3 \rangle_r$ et $\langle \Omega^4 \rangle$ sont retirés, est plus précise que l'intégration où le moment $\langle T^2\Omega^2 \rangle_r$ est également retiré. Cependant, dans ce dernier cas l'intégration se rapproche de la simulation pour de longues distances. La raison est que dans le régime de dispersion normale, la phase tend de manière asymptotique vers une parabole.

La phase quadratique avec contribution non-linéaire est représentée avec des lignes sans marqueurs sur les figures 6.15–6.17. Tous les différents cas divergent pour de longues distances sauf celui où les moments $\langle T\Omega^3 \rangle_r$ et $\langle \Omega^4 \rangle$ sont retirés. Toutefois dans ce cas, l'intégration donne le résultat le plus précis de toutes les représentations pour toutes les différentes valeurs de N . Il est remarquable que dans le cas de la phase quadratique, avec ou sans la contribution non-linéaire, l'intégration diverge lorsque le système d'éqs. (6.1) contient des moments contenant les opérateurs Ω^3 ou Ω^4 . Ces opérateurs font intervenir des dérivées d'ordre élevé du champ, et donc de la phase. Bien que la phase soit représentée suffisamment précisément pour représenter les dérivées de bas ordre, elle ne l'est pas suffisamment pour éviter que le système ne

diverge en présence des dérivées d'ordre élevé.

Système à l'ordre 2 non-linéaire

La partie du bas des figures 6.15–6.17 montre l'intégration du système d'équations (6.2) décrivant l'évolution des moments d'ordre 2 non-linéaires dans le régime de dispersion normal. Dans ce cas, le paramètre a est obtenu à partir du paramètre de forme κ_{PT} . Notons que les paramètres a des simulations numériques provenant des systèmes à l'ordre 4 et 2 non-linéaire sont légèrement différents. La différence vient du fait que le champ calculé numériquement n'est pas exactement représenté par la distribution de Pearson. Ainsi, le paramètre a diffère selon les moments utilisés pour l'obtenir. L'allure générale des deux courbes est toutefois la même, ce qui montre que la distribution est une bonne approximation.

De manière générale, l'accord entre les différentes intégrations, pour les différentes phases est moins bon que dans le cas à l'ordre 4, ce qui est surprenant compte tenu que le facteur de forme κ_{PT} représente mieux le paramètre a dans les différents moments comme nous l'avons vu à la section précédente. La raison principale est que les équations du système à l'ordre 2 non-linéaire contiennent plusieurs moments contenant le produit de dérivées du champ (directement où par le biais de l'opérateur Ω). En intégrant par partie, ces produits de dérivées peuvent être ramenés à des sommes de moments contenant les opérateurs Ω^3 ou Ω^4 . Et à l'instar du système à l'ordre 4, ces moments ne sont pas suffisamment bien représentés pour éviter que l'intégration ne diverge. On remarque toutefois que plus le nombre de moments est élevé, plus l'intégration est précise sur de courtes distances.

Lorsque les moments dont les équations d'évolution contiennent des moments définis par des dérivées d'ordre 3 ou supérieur (ou l'équivalent en produit de dérivées d'ordre 1 ou 2) sont retirés du système, l'intégration converge pour les trois représentations de la phase et pour les différentes valeurs de N . Dans ce cas, les trois représentations de la phase se comportent différemment. L'intégration de la phase logarithmique suit la forme générale de la simulation numérique ; l'erreur est toutefois relativement grande. L'erreur est d'ailleurs d'autant plus grande que N est élevé. L'intégration de la phase quadratique s'approche plus de la simulation numérique que la phase logarithmique au début de la propagation. Toutefois, sa forme générale ne suit pas celle de la simulation numérique car il n'y a pas d'inflexion autour de $z/L_D \approx 0,4$. Cet endroit est le point où le front de l'impulsion se brise. Finalement, c'est encore une fois

la phase quadratique avec contribution non-linéaire qui représente le mieux la phase du champ. Pour les trois valeurs de N , l'intégration suit la simulation numérique avec précision pour de courtes et longues distances. L'accord est cependant d'autant moins juste après le point de rupture du front d'onde que N est élevé. À cet endroit, l'impulsion possède des lobes (qui disparaîtront) et est donc moins bien représentée par la distribution de Pearson. Ces lobes sont d'autant plus important que la puissance, et donc N , est grande.

En résumé, dans le régime de dispersion normale, nous retenons que la phase quadratique avec contribution non-linéaire est la représentation la plus précise du champ parmi les phases considérées, que ce soit avec le système à l'ordre 4 ou à l'ordre 2 non-linéaire. Il faut toutefois ne prendre en compte que les moments dont les équations d'évolution ne contiennent pas de moments définis par des dérivées d'ordre 3 ou 4 ou l'équivalent. Notons également que la phase logarithmique donne des résultats raisonnables pour le système à l'ordre 4 lorsque tous les moments des éqs. (6.1) sont considérés. Les systèmes à l'ordre 4 à l'ordre 2 non-linéaire donnent des résultats de précision semblable dans ce régime de dispersion.

6.4.2 Dispersion anormale

Dans le régime de dispersion anormale, l'impulsion gaussienne se déforme pour tendre vers une impulsion solitonique de forme sécante hyperbolique. Lorsque $N = 1$, la simulation numérique en trait noir montre que l'évolution se fait asymptotiquement. Toutefois à puissance plus élevé, $N = 2$ ou 3 , l'évolution se fait de manière oscillante. La différence entre les simulations numériques est plus marquée que dans le cas où la dispersion est normale. La raison est que dans le régime de dispersion anormale le front d'onde se brise très tôt lors de la propagation pour former un piédestal. Ce piédestal (et éventuellement des lobes) est très important dans le régime de dispersion anormale, et il ne peut être représenté adéquatement par la distribution de Pearson. Toutefois, puisque les moments sont des quantités moyennes, la distribution de Pearson peut être utilisée malgré tout. La conséquence est que le paramètre a dépend des moments utilisées pour le calculer, soit κ_T pour le système à l'ordre 4, soit κ_{PT} pour le système à l'ordre 2 non-linéaire. Considérons chacun de ces systèmes séparément pour déterminer laquelle des trois représentation de la phase est la plus adéquate dans ce régime de dispersion.

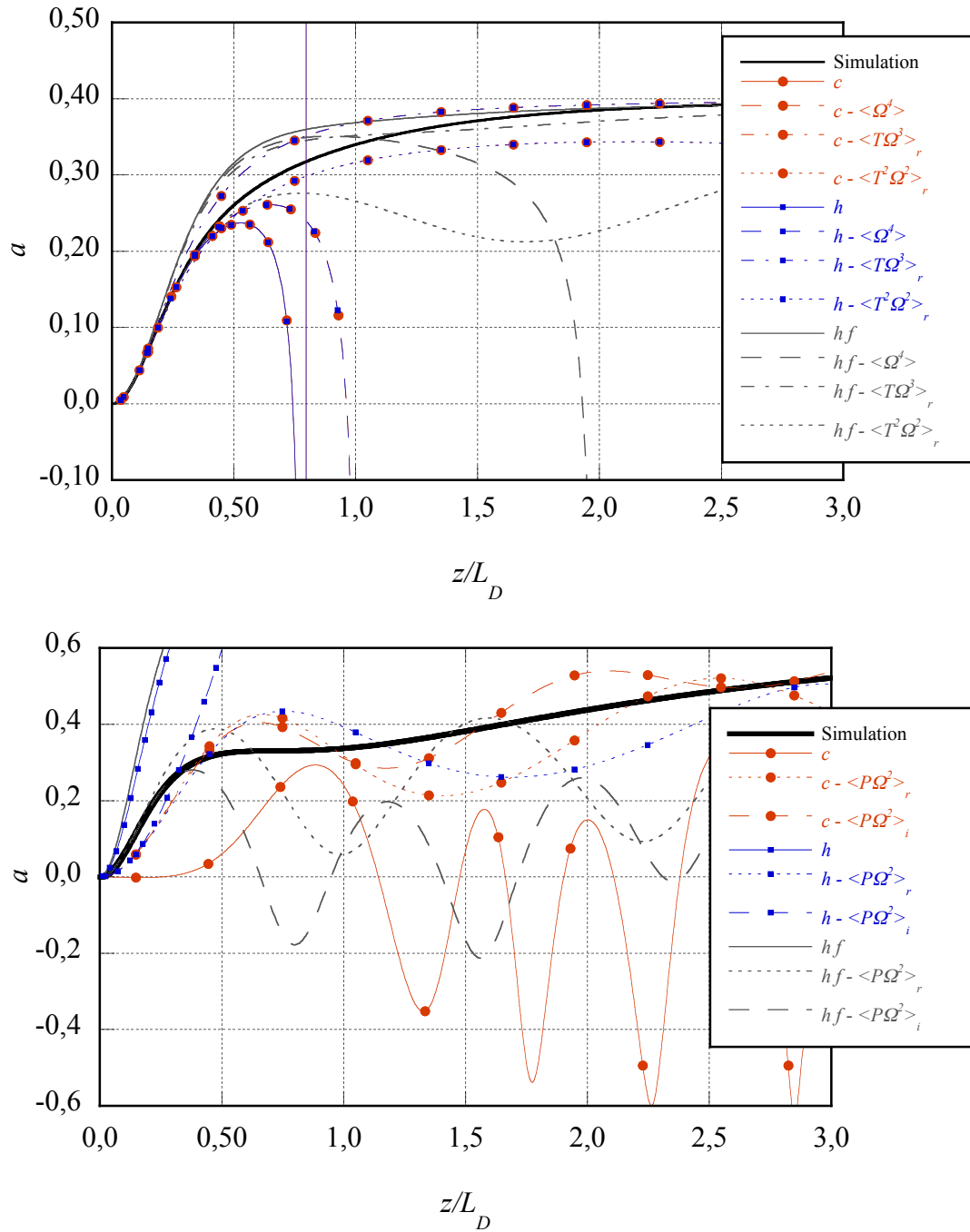


FIGURE 6.18 Paramètre a obtenu de l'intégration des systèmes à l'ordre 4 (haut) et à l'ordre 2 non-linéaire (bas) pour $N = 1$ dans le régime de dispersion anormale. Les courbes rouges avec cercles représentent la phase logarithmiques, les courbes bleues avec carreaux la phase quadratique et les courbes grises foncées la phase quadratique et non-linéaire. Les traits indiquent les termes inclus dans les systèmes (voir texte). La courbe noire pleine représente le paramètre a obtenu par la propagation numérique.

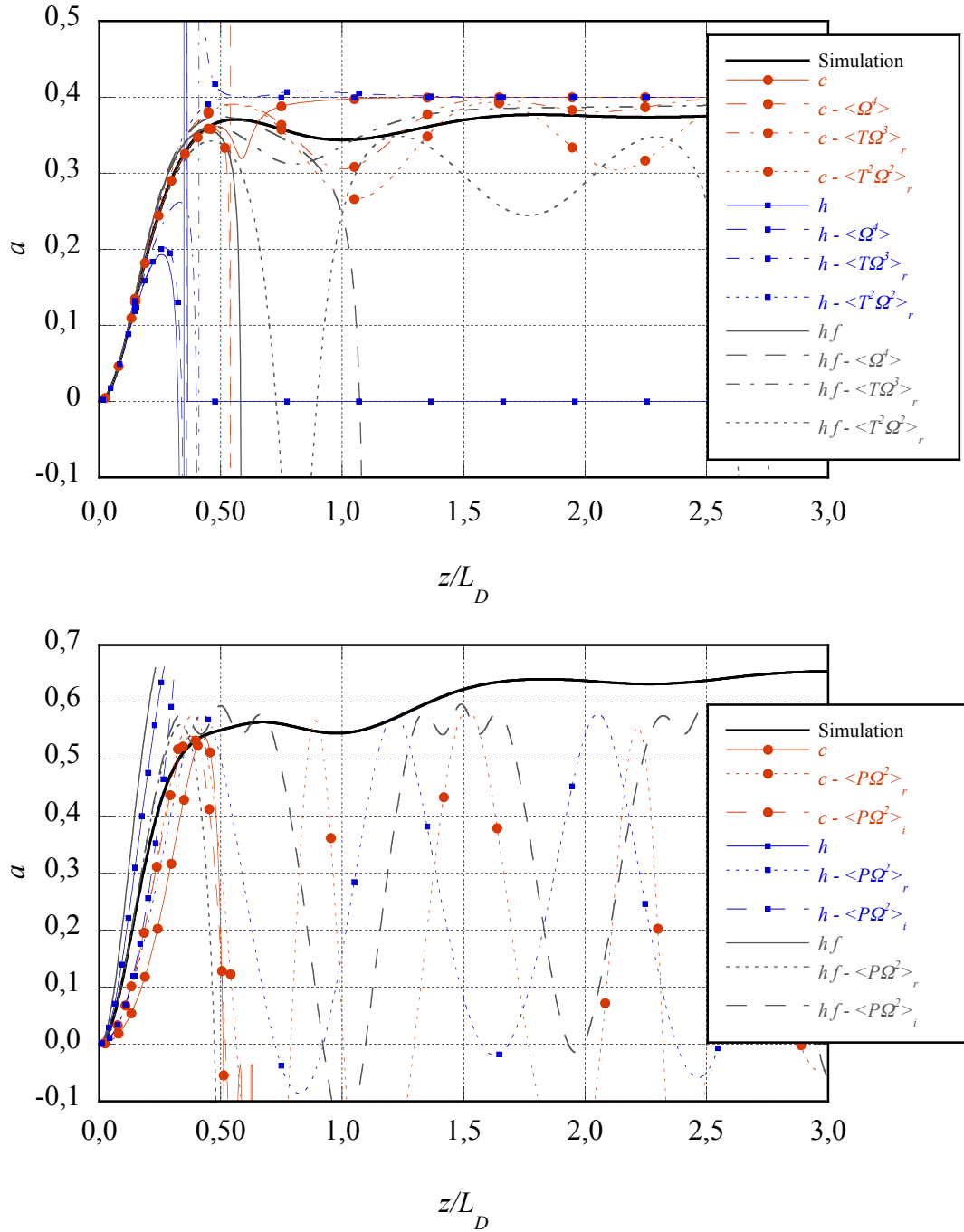


FIGURE 6.19 Paramètre a obtenu de l'intégration des systèmes à l'ordre 4 (haut) et à l'ordre 2 non-linéaire (bas) pour $N = 2$ dans le régime de dispersion anormale. Les courbes rouges avec cercles représentent la phase logarithmique, les courbes bleues avec carreaux la phase quadratique et les courbes grises foncées la phase quadratique et non-linéaire. Les traits indiquent les termes inclus dans les systèmes (voir texte). La courbe noire pleine représente le paramètre a obtenu par la propagation numérique.

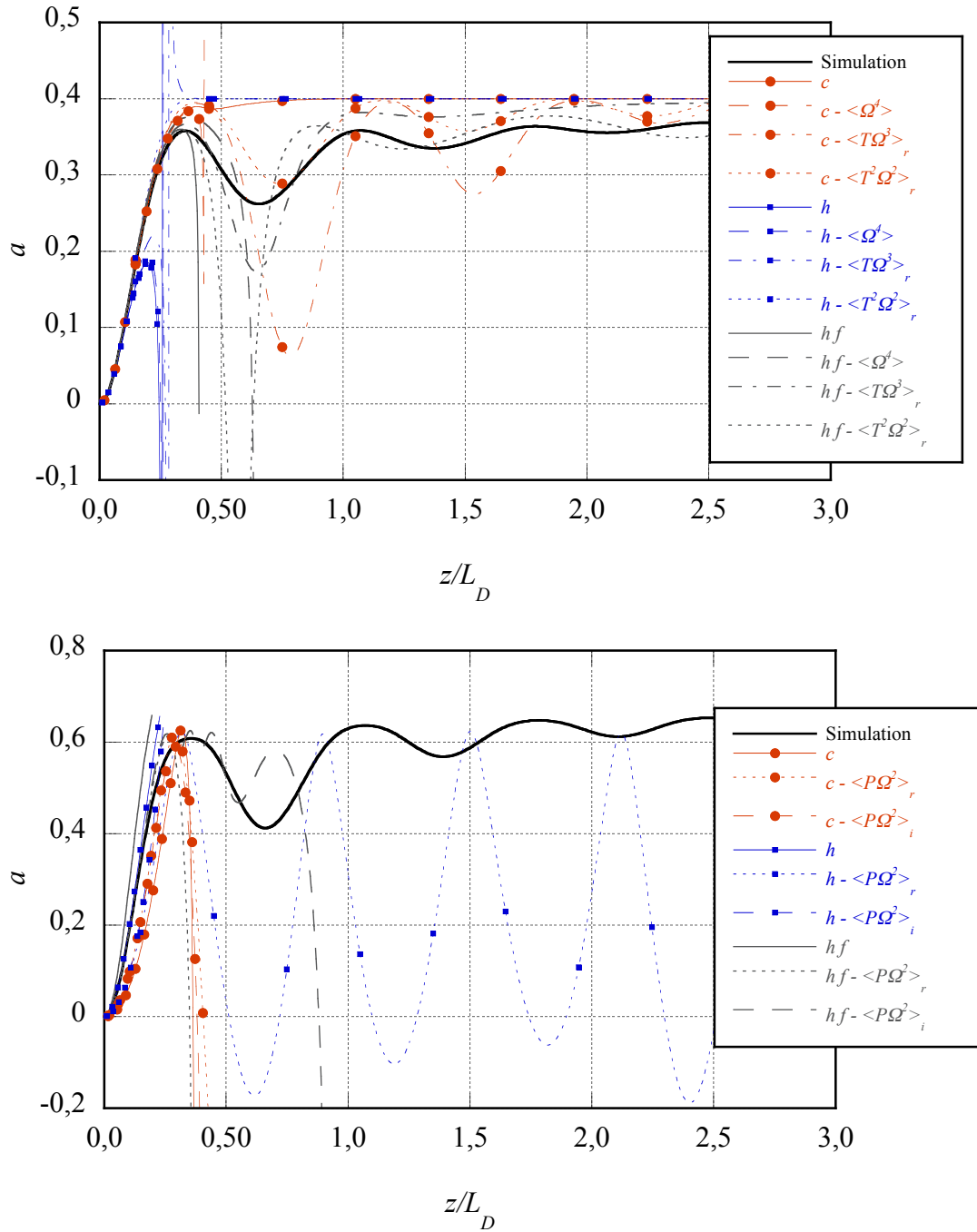


FIGURE 6.20 Paramètre a obtenu de l'intégration des systèmes à l'ordre 4 (haut) et à l'ordre 2 non-linéaire (bas) pour $N = 3$ dans le régime de dispersion anormale. Les courbes rouges avec cercles représentent la phase logarithmique, les courbes bleues avec carreaux la phase quadratique et les courbes grises foncées la phase quadratique et non-linéaire. Les traits indiquent les termes inclus dans les systèmes (voir texte). La courbe noire pleine représente le paramètre a obtenu par la propagation numérique.

Système à l'ordre 4

Les paramètres a obtenus par l'intégration du système d'éqs. (6.1) à l'ordre 4 dans le régime de dispersion anormale sont présentés dans la partie supérieure des figures 6.18–6.20. Les différentes courbes suivent la même convention qu'à la section précédente. La précision des différentes représentations dépend beaucoup de la valeur de N dans ce régime de dispersion. Dans le régime de dispersion anormale, l'impulsion subit des changements de forme d'autant plus importants que la valeur de N est élevée. Nous analysons donc les différents modèles pour les trois valeurs de N .

Lorsque $N = 1$, l'intégration diverge pour les phases quadratiques et logarithmiques lorsque tous les moments sont présents ou lorsque l'éq. (6.1e) est retirée. En retirant en plus l'éq. (6.1d), l'intégration ne diverge plus. Dans ce cas, l'erreur est maximale autour de $z/L_D \approx 0,6$ et diminue avec la distance de propagation. Lorsque l'éq. (6.1c) est également retirée, l'erreur augmente avec la distance de propagation. Pour ce qui est de la phase quadratique et non-linéaire, l'intégration diverge seulement lorsque l'éq. (6.1e) est retirée ; autrement l'intégration converge. L'erreur est minimale lorsque l'éq. (6.1d) est également retirée. Nous voyons ici encore une fois que la précision augmente avec le nombre de moments considérés tant que ces derniers n'induisent pas des erreurs d'approximation importantes.

Dans le cas où $N = 2$, l'intégration est en générale plus instable que pour le cas $N = 1$. La phase quadratique n'est adéquate que sur de courtes distances de propagation ($z/L_D \approx 0.6$). La phase logarithmique donne un résultat optimal lorsque les éqs. (6.1d)–(6.1e) sont retirées ; en simplifiant davantage, la précision diminue. Il en va de même pour la phase quadratique avec une contribution non-linéaire. Notons que dans certains cas, l'intégration diverge abruptement. Ce comportement se produit quand le paramètre a prend une valeur telle que le dénominateur d'un terme définissant un des moments approximés s'annule.

L'intégration redevient plus stable lorsque $N = 3$ que lorsque $N = 2$. La phase quadratique ne donne toutefois pas de meilleurs résultats que dans le cas précédent. La phase logarithmique diverge quand tous les moments sont considérés ou quand les éqs. (6.1d) et (6.1e) sont enlevées. Dans les deux autres cas, l'intégration sur- ou sous-estime la simulation numérique, en réduisant ou exagérant les oscillations du paramètre a lors de la propagation. La phase quadratique avec contribution non-linéaire se rapproche des simulations numériques lorsque les éqs. (6.1d) et (6.1e) sont retirées du système. Lorsque l'éq. (6.1c) est également enlevée, la précision est encore

plus grande, mais il y a une discontinuité autour de $z/L_D \approx 0.6$.

Pour les trois valeurs de N étudiées, des points communs ressortent. Premièrement, tous les modèles sont précis sur de courtes distances de propagation, avant que les erreurs d'approximation ne fassent diverger l'intégration. Deuxièmement, le modèle quadratique n'est pas adéquat pour décrire la déformation de l'impulsion lors de la propagation. La phase de l'impulsion dans le régime de dispersion anormale n'est pas monotone, d'autant plus que la non-linéarité est forte. La phase quadratique n'est donc pas adéquate pour décrire la propagation d'autant plus que N est grand. Ainsi s'explique que la phase quadratique donne une plus grande précision lorsque $N = 1$ que lorsque $N = 2$ ou 3 . Troisièmement, la phase logarithmique est une représentation plus efficace en dispersion anormale qu'en régime de dispersion normale. La phase logarithmique est une solution stationnaire dans le régime de dispersion anormale de l'équation de Ginzburg-Landau qui est un cas plus général de l'ÉSNL car elle contient des termes dissipatifs, comme nous le verrons au prochain chapitre. Il est donc raisonnable qu'elle puisse être une bonne approximation pour représenter les solutions transitoires de l'ÉSNL. Quatrièmement, la phase quadratique et non-linéaire se montre de nouveau comme étant la représentation la plus efficace pour approximer la phase du champ. Finalement, dans la plupart des cas, le système d'équations est optimal quand les moments $\langle \Omega^4 \rangle$ et $\langle T\Omega^3 \rangle_r$ sont remplacés par des moments faisant partie du système. Dans le régime de dispersion normale, le système optimal approximait également le moment $\langle T^2\Omega^2 \rangle_r$. La différence s'explique par le fait que les moments mixtes sont de plus faible amplitude dans le régime de dispersion anormale puisque la dispersion et la non-linéarité s'annulent partiellement. Il s'ensuit que les moments mixtes d'ordre supérieur ayant des dérivées d'ordre 3 ou 4 deviennent négligeables face aux autres moments de l'équation différentielle.

Système à l'ordre 2 non-linéaire

L'intégration du système d'éqs. (6.2) est représentée à travers le paramètre a dans le régime de dispersion anormale dans la partie inférieure des figures 6.18–6.20. Pour le système à l'ordre 2 non-linéaire, l'intégration change également grandement selon la valeur de N . Dans l'ensemble, le système à l'ordre 2 non-linéaire est beaucoup moins précis pour prédire l'évolution de la forme de l'impulsion que le système à l'ordre 4 dans le régime de dispersion anormale.

Dans le cas où $N = 1$, la plupart des intégrations oscillent autour de la simulation

numérique ou divergent. Pour la phase quadratique, seul le cas où les éqs. (6.2c)–(6.2d) sont retirées donne un résultat se rapprochant de la simulation numérique. Les autres cas divergent après une très courte distance de propagation. L’intégration de la phase logarithmique ne diverge pour aucune des simplifications. Quand toutes les équations sont incluses, le paramètre a oscille fortement. Dans les deux autres cas, où les éqs. (6.2d) et/ou (6.2c) sont enlevées, les paramètres a obtenus oscillent autour de la simulation numérique. La phase quadratique avec contribution non-linéaire diverge quand tous les moments sont considérés et oscillent autrement. Le cas où les deux éqs. (6.2c)–(6.2d) sont retirées est plus précis seulement quand l’éq. (6.2d) l’est. Dans ces deux cas, le résultat est moins précis qu’avec la phase logarithmique.

Lorsque $N = 2$, toutes les intégrations divergent ou oscillent avec de grandes amplitudes. Tous les cas où tous les moments sont inclus divergent. Tous les cas où les deux équations sont retirées oscillent. Seul le cas de la phase quadratique avec contribution non-linéaire oscille lorsque l’éq. (6.2d) est enlevée ; les autres représentations de la phase divergent. Notons que les diverses intégrations s’éloignent très rapidement de la simulation numérique.

Toutes les représentations de la phase donnent des intégrations qui divergent autour de $z/L_D \approx 0,3$ lorsque $N = 3$, sauf pour la phase quadratique et uniquement dans le cas où les éqs. (6.2c)–(6.2d) sont retirées du système d’équations. Les différentes intégrations donnent des paramètres a qui s’éloignent aussi très rapidement de la simulation numérique lors de la propagation.

Ces observations sont surprenantes. Nous avons vu à la section précédente que la modélisation utilisant κ_{PT} était plus précise que celle utilisant κ . Alors pourquoi le système d’équations à l’ordre 2 non-linéaire est moins efficace que celui à l’ordre 4 ? La réponse est que dans le régime de dispersion anormale, l’impulsion change beaucoup de forme ; il y a formation de lobes et de piédestal causés par la rupture du front d’onde. Il s’ensuit que l’approximation de Pearson de l’enveloppe du champ devient moins précise. Une conséquence indirecte est que l’erreur sur l’opérateur P augmente, puisque que ce dernier, contrairement aux autres opérateurs, dépend directement de la forme de l’impulsion. Dans le système à l’ordre 4, l’opérateur P intervient dans certains des moments présents définissant les dérivées du système. À l’ordre 2, l’opérateur est présent dans *tous* les moments ; autant ceux du systèmes que ceux définissant leurs dérivées. Il en résulte que l’erreur d’approximation prend beaucoup plus d’importance et l’intégration diverge rapidement lors de la propagation. L’erreur

est par ailleurs d'autant plus importante que N est élevé, puisque le changement de forme de l'impulsion est plus important quand la non-linéarité est forte par rapport à la dispersion.

En résumé, dans le régime de dispersion anormale, il existe une différence notable entre les systèmes à l'ordre 4 et à l'ordre 2 non-linéaire. Le système à l'ordre 4 donne des résultats précis pour la phase logarithmique et pour la phase quadratique avec une contribution non-linéaire. Toutefois le système à l'ordre 2 ne donnent des résultats qualitativement précis que dans le cas où $N = 1$ ou sur de très courtes distances de propagation pour toutes les représentations de la phase considérée.

6.5 Approximation de l'ÉSNL

Dans cette section, à l'instar de ce que nous avons fait au chapitre 4, nous utilisons les approximations présentées précédemment pour analyser l'ÉSNL. Contrairement à ce que nous avons fait au chapitre 4, nous analysons ici la forme de l'impulsion. Après avoir analysé les différents modèles possibles pour approximer les moments, nous ne considérons ici que la représentation de la forme par le facteur de forme κ_{PT} ainsi que la phase non-linéaire puisqu'ils donnent les résultats les plus précis. Nous regardons aussi la phase logarithmique à des fins de comparaison. L'analyse précédente nous montre également qu'il est difficile de résoudre les équations de propagation des moments d'ordre élevé puisqu'il faut approximer bon nombre de moments. Dans cette section, nous n'utilisons que le moment $\langle PT^2 \rangle$ comme moment d'ordre supérieur afin de définir κ_{PT} .

6.5.1 Phase quadratique avec contribution non-linéaire

Écrivons l'équation d'évolution du facteur de forme κ_{PT} en utilisant la phase non-linéaire définie par l'éq. (6.20). En utilisant le moment $\langle T^2 \rangle$ pour remplacer le paramètre b , nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa_{PT}}{dz} &= -2\beta_2 \frac{\langle PT^2 \Omega^2 \rangle_i}{\langle P \rangle \langle T^2 \rangle} + 2\beta_2 \frac{\langle P \Omega^2 \rangle_i \langle PT^2 \rangle}{\langle P \rangle^2 \langle T^2 \rangle} - 2\beta_2 \frac{\langle PT^2 \rangle \langle T \Omega \rangle_r}{\langle P \rangle \langle T^2 \rangle^2} \\ &= f\beta_2 \kappa_{PT} \frac{\langle P \rangle}{\langle T^2 \rangle} \left[\frac{4}{3} \frac{(9 - a - 3a^2)}{(2 - 3a)(3 + a)} \kappa_P - 1 \right] \end{aligned} \quad (6.48)$$

où a est le paramètre de Pearson et κ_P le facteur de forme donné par l'éq. (6.15). Encore une fois, nous utilisons une représentation hybride entre les moments et les paramètres à des fins de clarté. Si nous nous attardons aux points fixes de l'éq. (6.48), c'est-à-dire les conditions où la dérivée est nulle et donc que κ_{PT} ne change pas, nous trouvons différentes conditions. Remarquons tout d'abord que l'éq. (6.48) est très similaire à l'éq. (6.21) décrivant l'évolution de κ_T et que les deux ont plusieurs points fixes en commun. Nous voyons tout d'abord que l'éq. (6.48) ne dépend pas du paramètre de phase quadratique h . Ceci n'est guère surprenant car, comme nous l'avons vu au chapitre 4, une des conséquences de supposer la phase quadratique est que la forme de l'impulsion est invariante. Ainsi seul le paramètre de phase f change la forme de l'impulsion ; il s'ensuit que la forme de l'impulsion est invariante lorsque $f = 0$. Nous voyons également que la dérivée est nulle dans le cas purement non-linéaire, lorsque $\beta_2 = 0$, ce qui est conséquent avec la solution analytique. Lorsque le moment $\langle P \rangle$ est nul, la puissance est infiniment faible, ce qui revient à être dans un cas purement dispersif qui, à cause de l'approximation de la phase quadratique, donne une forme invariante. De manière similaire, une impulsion infiniment large est invariante car nous retrouvons dans le cas d'une émission continue. Le terme dans les crochets du membre de droite de l'éq. (6.48) s'annule lorsque $a = \{-1; 1, 8\}$. Lorsque $a = -1$, l'impulsion est parabolique qui est obtenue asymptotiquement lors le cas d'une propagation très non-linéaire. La valeur $a = 1, 8$ provient de la divergence de la définition des moments. Le facteur κ_{PT} est essentiellement positif.

Bien qu'il apparait que l'évolution de l'impulsion soit proportionnelle au paramètre de phase f , il serait intéressant de comprendre sous quelles conditions ce paramètre devient nul. En se limitant seulement aux moments d'ordre 2, il est possible de réécrire ce paramètre en termes des moments $\langle P \rangle$, $\langle T^2 \rangle$, $\langle \Omega^2 \rangle$ et $\langle T\Omega \rangle_r$.

$$f = \frac{3(2-3a)}{4\kappa_P\langle P \rangle} \left(\frac{3+a}{6-a} \right) \left(\langle T\Omega \rangle_r \pm \Delta^{\frac{1}{2}} \right) \quad (6.49)$$

$$\Delta = \langle T\Omega \rangle_r^2 - \frac{16}{3} \frac{\kappa_P}{(2-3a)} \left(\frac{6-a}{3+a} \right) \left[\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle - \langle T\Omega \rangle_r^2 - \frac{1}{4(2-3a)} \left(\frac{2-a}{1+a} \right) \right] \quad (6.50)$$

En regardant cette définition de f , il n'est pas évident de voir dans quelles conditions nous avons $f = 0$. Il est toutefois clair que la seule possibilité pour avoir $f = 0$ est que le terme $\langle T\Omega \rangle_r \pm \sqrt{\Delta} = 0$ et donc $\Delta = \langle T\Omega \rangle_r^2$ ou $\Delta = \langle T\Omega \rangle_r^2 = 0$ puisque le

terme en κ_P ne peut être nul de manière physiquement significative. Regardons s'il est possible d'obtenir ces conditions en écrivant explicitement la première condition.

$$\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle - \langle T\Omega \rangle_r^2 = \frac{1}{4(2-3a)} \left(\frac{2-a}{1+a} \right) \quad (6.51)$$

Cette condition n'est rien d'autre que la définition de l'invariant I_1 lorsque la phase est quadratique selon l'éq. (6.18). Cette condition est vérifiée dans deux cas ; lorsque la propagation est dispersive et donc $f = 0$ et lorsque l'impulsion n'est pas chirpée, c'est-à-dire $\langle T\Omega \rangle_r = 0$. Évidemment, l'invariance dans le cas dispersif ne s'applique que pour l'impulsion gaussienne ; c'est une approximation pour les autres formes d'impulsions. La phase constante représentée par $\langle T\Omega \rangle_r = 0$ est le cas de l'impulsion solitonique pour laquelle la propagation est invariante. Voyons si nous pouvons retrouver la forme de l'impulsion en sécante hyperbolique dans ce cas. Du fait que le moment $\langle T\Omega \rangle_r = 0$, nous obtenons l'équation suivante.

$$\langle T\Omega \rangle_r = -\frac{2h}{(2-3a)} + \frac{f}{2}\langle P \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{f}{4}(2-3a)\langle P \rangle \quad (6.52)$$

En posant que la forme de l'impulsion et que l'énergie demeurent constantes lors de la propagation, il s'ensuit que $\langle P \rangle$ est également constant et donc que sa dérivée est nulle. Puisque le seul moment présent dans la dérivée de $\langle P \rangle$ est $\langle P\Omega^2 \rangle_i$, nous en déduisons que ce dernier est nul, ce qui nous donne une autre relation entre les paramètres de la phase.

$$\langle P\Omega^2 \rangle_i = -\frac{h}{b}\langle P \rangle + \frac{f}{3b}\langle P^2 \rangle \left(\frac{6-a}{3+a} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{f}{3}\kappa_P \left(\frac{6-a}{3+a} \right) \langle P \rangle \quad (6.53)$$

En égalant les éqs. (6.52) et (6.53), nous obtenons une expression ne dépendant que du paramètre a et qui définit donc la forme de l'impulsion. En résolvant cette équation, nous trouvons deux valeurs $a = \{-1,0595; -0,9405\}$ qui sont bien approximées par $a \approx -1$. La forme d'impulsion obtenue est parabolique alors que nous nous attendions à obtenir une sécante hyperbolique. Comment expliquer cette différence ? La réponse se cache dans la nature de l'invariance de l'impulsion solitonique. Le soliton demeure invariant lors de sa propagation car la dispersion et la non-linéarité se contrecarrent. Autrement dit, la phase issue de la non-linéarité annule celle provenant de la dispersion. Hors, dans notre modèle, la dispersion est modélisée par une phase quadratique ;

il s'ensuit que l'impulsion doit être parabolique pour que la phase non-linéaire, ayant la forme de l'impulsion, puisse l'annuler. Nous en déduisons donc qu'une modélisation plus précise devrait s'attarder à mieux modéliser la phase dispersive.

6.5.2 Phase logarithmique

À des fins de comparaisons, regardons les points fixes de l'évolution de la forme de l'impulsion en utilisant la phase logarithmique.

$$\frac{d\kappa_{PT}}{dz} = \frac{10\beta a\kappa_{PT}}{(2-3a)(2+a)} \frac{\langle T\Omega \rangle_r}{\langle T^2 \rangle} \quad (6.54)$$

La phase logarithmique permet de représenter l'évolution de la forme de l'impulsion dans certains cas. L'invariance de l'impulsion lorsque la phase est constante ou lorsque la dispersion est absente est bien représentée. Nous voyons aussi que la forme de l'impulsion cesse de changer lorsque la largeur de l'impulsion devient arbitrairement grande. Toutefois certaines différences sont remarquables. Premièrement, nous ne voyons plus apparaître le cas dispersif lorsque la puissance est très faible. Ceci vient du fait qu'il n'y a qu'un seul paramètre de phase pour représenter la dispersion et la non-linéarité. Du même coup, de poser que $\langle T\Omega \rangle_r = 0$ ne nous permet plus de déterminer la forme de l'impulsion solitonique. Deuxièmement, la phase logarithmique ne nous permet pas d'obtenir la forme asymptotique parabolique de l'impulsion. Finalement, notons que l'évolution de la forme de l'impulsion devient invariante lorsque $a = 0$. Hors, ceci n'a de sens que pour une propagation purement dispersive. Ceci suggère que la phase logarithmique pourrait être un candidat intéressant à envisager dans le futur pour mieux modéliser la phase dispersive.

6.5.3 Rupture du front d'onde

Le rupture du front d'onde est un phénomène important lors de la propagation car il détermine le point à partir duquel l'impulsion n'a plus une forme de «cloche». Elle est d'autant plus importante dans les lasers puisque seules les impulsions ne se brisant pas peuvent exister dans un régime stable d'opération car l'impulsion doit être stationnaire d'un tour à l'autre dans la cavité. La rupture du front d'onde se produit lors que la dérivée de la phase, le chirp, n'est plus une fonction monotone (Anderson *et al.*, 1992), autrement dit, lorsque la dérivée seconde de la phase a plus

d'un zéro. Ainsi, si nous pouvons trouver plus d'une racine à la dérivée seconde de la phase, nous savons que l'impulsion est sur le point de se briser. Écrivons comment cette condition se manifeste dans le cas de la phase quadratique avec contribution non-linéaire et dans le cas de la phase logarithmique.

Phase quadratique avec contribution non-linéaire

La condition de rupture du front d'onde s'écrit de la manière suivante,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial T^2} = 2h + 2fP_c \left(1 + \frac{a}{b}T^2\right)^{-\frac{1}{a}} \frac{[(2+a)T^2 - b]}{(aT^2 + b)^2} = 0 \quad (6.55)$$

en n'oubliant pas que si le paramètre a est négatif, la fonction n'est définie que dans l'intervalle $T =]-\sqrt{a/b}, \sqrt{a/b}[$. En remaniant, elle peut être exprimée sous une forme transcendante plus simple.

$$(1 + a\tau^2)^{2+\frac{1}{a}} = K_{hf} [1 - (2+a)\tau^2] \quad \text{où} \quad K_{hf} = \frac{fP_c}{hb} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{t}{\sqrt{b}} \quad (6.56)$$

Si l'éq. (6.56) est vérifiée pour une valeur réelle et positive de τ , alors l'impulsion est en train de se rompre. S'il n'existe pas de telle valeur, l'impulsion est stable. Par exemple, si nous sommes dans un régime où $f = 0$ (par exemple, purement dispersif), $K_{hf} = 0$ et donc l'équation se réduit à

$$(1 + a\tau^2)^{2+\frac{1}{a}} = 0. \quad (6.57)$$

Dans un tel cas, aucune valeur de a sur l'intervalle où la fonction est définie ne peut satisfaire cette équation et l'impulsion ne peut se briser, peu importe la valeur de a . Notons que lorsque cette situation représente un cas purement dispersif, nous voyons une autre limite de l'approximation de la phase quadratique car certaines formes d'impulsions peuvent se briser dans lors d'une propagation purement dispersive.

La condition décrite par l'éq. (6.56) est particulière à la modélisation et non à la propagation. Si à un moment donné lors de l'utilisation de cette modélisation, la condition 6.56 est satisfaite, nous savons que l'impulsion est sur le point de se briser. Ainsi, si nous voulons savoir la distance à laquelle l'impulsion se brise lorsqu'elle se propage dans un milieu dispersif et non-linéaire, il faut résoudre la propagation et vérifier quand la condition 6.56 devient satisfaite. Une autre façon de procéder est de

linéariser l'ESNL, ce qui permet de découpler le temps et la distance de propagation et de ce fait déterminer la distance de rupture du front d'onde (Anderson *et al.*, 1992). En supposant que l'impulsion n'est pas initialement chirpée, le point de rupture est défini selon cette méthode par

$$z_R = -\frac{1}{\beta_2} \left[\frac{\partial^2 \phi_L}{\partial T^2} \right]^{-1} \quad (6.58)$$

$$\phi_L = \frac{\beta_2}{2|A|} \frac{\partial^2}{\partial T^2} |A| - \gamma |A|^2 \quad (6.59)$$

où ϕ_L est la phase obtenue par la linéarisation de l'ESNL. Il est apparent à partir de l'éq. (6.58) que la distance de rupture est négative tant que la dérivée seconde demeure positive. Si cette dernière vient à être nulle, la distance de rupture devient infinie ; l'impulsion commence à se briser. Lorsque ϕ_L devient très négatif, l'impulsion se brise rapidement. En utilisant la distribution de Pearson comme forme initiale, la condition pour voir apparaître la rupture, soit $\phi_L = 0$ s'écrit alors

$$a\tau^2[5 + 6(1+a)(1-a\tau^2)] = -K [1 - (2+a)\tau^2] (1+a\tau^2)^{2-\frac{1}{a}} \quad \text{où} \quad K = 2\frac{\gamma P_c b}{\beta_2} \quad (6.60)$$

où τ prend la même valeur que précédemment. Il existe une grande similitude entre l'éq. (6.60) et l'éq. (6.56) montrant ainsi que notre modélisation s'apparente à une linéarisation de l'ESNL. Toutefois, nous voyons quelques différences. Par exemple, lorsque $K = 0$, la condition purement dispersive s'écrit

$$a[5 + 6(1+a)(1-a\tau^2)] = 0 \quad (6.61)$$

Cette condition est toujours satisfaite, peu importe la valeur de τ lorsque l'impulsion est gaussienne, c'est-à-dire lorsque $a = 0$, comme attendu. Nous voyons aussi que l'impulsion ne se brise pas lorsque $a \in]-1, 0[$ et lorsque $a < -11/6$. Il serait intéressant d'étudier plus à fond ces cas afin de savoir s'ils représentent bien des impulsions ne se brisant pas lorsqu'elles se dispersent ou si ces cas sont des artefacts provenant de la modélisation. La difficulté à répondre à cette question vient du fait que la largeur de bande de ces impulsions est infiniment large puisqu'elles sont tronquées dans le temps et donc difficile à analyser numériquement. Notons toutefois que la condition (6.61)

montre bien que les impulsions ayant $a > 0$, dont le soliton, se brisent lorsqu'elles se dispersent.

Phase logarithmique

En utilisant la modélisation logarithmique de la phase, la condition de rupture du front d'onde devient

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial T^2} = \frac{4acT^2}{(aT^2 + b)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4acT^2 = 0. \quad (6.62)$$

Il s'ensuit que l'impulsion dans ce cas ne se brise jamais car la seule racine du système est $T = 0$. La phase logarithmique n'est donc pas suffisamment précise pour représenter la propagation linéaire et non-linéaire puisque les impulsions se dispersant peuvent également se briser (Anderson *et al.*, 1992). Toutefois, elle est utilisée avec succès pour calculer les impulsions en régime stationnaire des lasers.

6.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'utilisation des moments pour décrire l'évolution de la forme de l'impulsion. La forme de l'impulsion est décrite en comparant des moments entre eux ; il faut donc avoir recours à des moments d'ordre supérieur. Deux options ont été considérées. La première consiste à prendre des opérateurs de temps et de fréquences d'ordre plus élevé, ce qui donne les moments d'ordre 4 (puisque les impulsions sont supposées symétriques et que l'ÉSNL est symétrique, les moments d'ordre 3 sont nuls). L'autre option est de comparer avec des moments non-linéaires à l'ordre 2, c'est-à-dire utilisant l'opérateur P . Dans chacun de ces cas, un système d'équations différentielles est établi pour décrire l'évolution de tous ces moments lors de la propagation.

À l'instar du système à l'ordre 2, les systèmes d'équations différentielles d'ordre 4 et d'ordre 2 non-linéaires sont ouverts, c'est-à-dire qu'ils contiennent des moments qui ne font pas partie du système. De plus, il y a maintenant plusieurs moments externes qui ne peuvent être représentés par des moments internes que par une approximation sur la phase. Nous avons étudié trois formes de la phase du champ : une phase quadratique, une phase logarithmique et une phase quadratique avec une contribution non-linéaire. La phase quadratique est la même que celle utilisée pour résoudre le

système à l'ordre 2. La phase logarithmique est couramment utilisée dans les propagations solitoniques. L'ajout d'une contribution non-linéaire à la phase quadratique, proportionnelle à la puissance du champ, permet de mieux refléter la physique de l'ÉSNL. Au moyen de ces représentations, il est possible d'exprimer tous les moments du système, internes ou externes, en fonction des paramètres du modèle. Les paramètres du modèle peuvent par la suite être exprimés en fonction des moments internes du système pour le fermer. Différentes combinaisons de moments internes ont été choisies sur la base de leur simplicité et ont été étudiées. La validation de ces modèles s'est faite en les comparant avec des champs simulés numériquement.

Il ressort de cette comparaison que le *paramètre a est représenté plus précisément par le facteur de forme κ_{PT} que par le facteur de forme κ_T* . Pour ce qui est des paramètres de phase, *les moments $\langle T\Omega \rangle_r$ et $\langle PT\Omega \rangle_r$ donnent une plus grande précision que le moment $\langle T^3\Omega \rangle_r$* . La raison est que les moments non-linéaires utilisent l'opérateur P qui pondère le centre de l'impulsion, ce que ne font pas les opérateurs linéaires. Cela suggère que le système à l'ordre 2 non-linéaire est plus précis que le système à l'ordre 4 pour décrire l'évolution de la forme de l'impulsion. Pour vérifier que tel est le cas, les deux systèmes, une fois fermés en utilisant les diverses représentations, ont été intégrés numériquement dans les deux régimes de dispersion. Il s'avère que dans le régime de dispersion normale, les deux systèmes sont d'égale précision. Toutefois, dans le régime de dispersion anormale, le système à l'ordre 4 est plus précis car le système à l'ordre 2 diverge, surtout lorsque $N > 1$. Ce résultat semble contradictoire par rapport à la comparaison précédente. La clé est qu'une chaîne n'est pas plus forte que le plus faible de ses maillons. Ainsi, il suffit qu'un des moments du système soit mal représenté pour que l'intégration de tous les moments du système divergent. Le système à l'ordre 4 comporte moins de moments externes que le système à l'ordre 2. De plus, ces moments externes sont beaucoup moins non-linéaires. Il en résulte que le système à l'ordre 2 non-linéaire est plus instable aux erreurs d'approximations dans le régime de dispersion anormale où la forme de l'impulsion change de manière significative lors de la propagation.

En général, le nombre d'équations à considérer dans le système dépend de la précision de la représentation. Lorsque les moments externes sont en moyenne bien représentés en fonction des moments internes, l'évolution du paramètre de forme a est la mieux décrite lorsque toutes les équations différentielles du système sont considérées. Toutefois, pour éviter que le système ne diverge, il faut retirer les équations

différentielles où les moments externes ne sont pas correctement approximatés et approximer le moment interne de l'équation différentielle retirée. *Une règle approximative est de ne pas approximer les moments définis par les opérateurs Ω^3 et Ω^4 .* Le nombre minimal de moments considérés dans le système doit être égal au nombre de paramètres, soit trois moments pour la norme et deux (ou un seul) pour la phase, totalisant cinq. En employant la méthode des moments classiques, seulement cinq équations seraient nécessaires. Cependant en incluant plus de moments, la description faite du champ par les moments ne se limite plus à l'ansatz de la distribution de Pearson pour décrire le champ et la description devient plus précise.

Nous avons donc établi différentes façons d'utiliser les moments d'ordre supérieur pour obtenir la forme de l'impulsion, ainsi que les limitations d'une telle approche. La modélisation employée dans ce chapitre peut maintenant être appliquée à une équation plus complexe, l'équation de Ginzburg-Landau, utilisée pour décrire les impulsions dans les lasers à fibre.

Chapitre 7

Les moments et les lasers

Dans ce chapitre, les moments sont utilisés pour caractériser les impulsions produites par les lasers. Les impulsions à la sortie d'un laser dépendent de sa configuration et des paramètres de la cavité. Cette dépendance est exprimée sous la forme d'équations différentielles partielles décrivant la propagation de l'impulsion dans la cavité laser. Nous utilisons les moments dans ce chapitre afin de résoudre ces équations de propagation. Nous nous attardons ici seulement au modèle moyen pour décrire les lasers. Dans un modèle moyen, tous les éléments sont supposés être linéaires et présents simultanément dans la fibre de sorte que l'ordre dans lequel ces éléments sont traversés par l'impulsion est ignoré (Haus, 2000). Par opposition, un modèle discret tient compte de chaque élément individuellement lors de la propagation. L'avantage du modèle moyen est sa simplicité car les équations de propagation sur un passage se réduisent à une seule équation différentielle. Nous résolvons donc dans ce chapitre les équations différentielles de différents modèles moyens décrivant divers lasers à l'aide du formalisme des moments.

Nous énumérons dans un premier temps les différents éléments optiques se retrouvant dans les lasers et nous donnons la modélisation utilisée pour représenter leur effet sur la propagation du champ. Nous définissons ensuite l'équation différentielle du modèle moyen à l'aide de ces éléments. Par l'application de différents opérateurs, l'équation différentielle est ensuite transformée en un système d'équations sur les moments. Ces équations sont ensuite résolues dans trois cas particuliers dont les solutions analytiques sont connues pour valider l'approche utilisée et dans trois cas où aucune solution analytique exacte n'est connue.

7.1 Éléments optiques

Dans cette section, les composantes se retrouvant typiquement dans les cavités laser sont présentées et leur effet est modélisé sous forme différentielle. Nous nous li-

mitons ici aux effets pairs ; nous négligeons les effets impairs. Il en résulte que les effets non-linéaires d'ordre supérieur tel l'auto-décalage Raman et l'auto-raïdissement sont négligés, ce qui limitent la validité du modèle aux impulsions d'une durée supérieure à la picoseconde. De plus, certains éléments couramment utilisés ou présents dans les lasers tels les modulateurs de phase ou la dispersion de troisième ordre sont ignorés.

7.1.1 Élement dispersif

L'amplitude du champ à travers un élément montrant de la dispersion chromatique est déformée puisque chaque fréquence dans l'impulsion se propage à une vitesse différente. En supposant que la dispersion est quadratique en fréquence, elle s'écrit

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \quad (7.1)$$

où β_2 est le paramètre de dispersion. Ce cas a été présenté à la section 4.3.1.

7.1.2 Filtre spectral

L'évolution de l'amplitude du champ à travers un filtre spectral gaussien passe-bande s'écrit

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \quad (7.2)$$

où σ est inversement proportionnel à la largeur de bande au carré du filtre.

7.1.3 Déphasage non-linéaire

La propagation à travers un élément présentant de l'auto-modulation génère une phase non-linéaire et un élargissement spectral. L'évolution de l'amplitude s'écrit dans ce cas

$$\frac{\partial A}{\partial z} = i\gamma |A|^2 A \quad (7.3)$$

où le facteur γ donne l'ampleur de la non-linéarité.

7.1.4 Absorbant saturable

L'évolution de l'amplitude du champ se propageant à travers un élément présentant une saturation proportionnelle à la puissance, tels un absorbant saturable ou une absorption non-linéaire s'écrit :

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\delta}{2} |A|^2 A. \quad (7.4)$$

Lorsque nous sommes en présence d'une absorption proportionnelle à la puissance, telle l'absorption à deux photons, le facteur δ est négatif. Il est positif dans le cas d'une absorption saturable, c'est-à-dire qui diminue avec la puissance. Ce terme est souvent accompagné d'un terme constant décrivant une perte ou un gain constant.

7.1.5 Déphasage quadratique

L'évolution de l'amplitude du champ se propageant à travers un élément induisant une phase temporelle quadratique s'écrit

$$\frac{\partial A}{\partial z} = i \frac{\rho}{2} T^2 A. \quad (7.5)$$

Ce genre de phase est typique induite par le fonctionnement même des modulateurs électro-optiques où l'indice de réfraction change avec la tension ou le courant appliqué aux électrodes.

7.1.6 Filtre temporel

L'évolution de l'amplitude du champ se propageant à travers un élément induisant un filtrage temporel dans le temps tel qu'un modulateur d'intensité acousto- ou électro-optique s'écrit

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{\epsilon}{2} T^2 A \quad (7.6)$$

où le facteur ϵ est inversement proportionnel au carré de la largeur du filtre temporel.

7.1.7 Gain uniforme

L'évolution de l'amplitude du champ se propageant à travers un élément générant un gain uniforme g s'écrit

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{g}{2} A. \quad (7.7)$$

Notons que si g est négatif, nous obtenons une perte uniforme.

7.1.8 Gain saturable en énergie

L'évolution de l'amplitude du champ se propageant à travers un élément avec un gain saturable lent en énergie s'écrit

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{g_0}{2(1 + E/E_{\text{sat}})} A \quad (7.8)$$

où g_0 est le gain petit signal, E est l'énergie de l'impulsion et E_{sat} l'énergie de saturation du milieu de gain.

7.1.9 Gain saturable en puissance

L'évolution de l'amplitude du champ se propageant à travers un élément avec un gain saturable lent en puissance s'écrit

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{g_0}{2(1 + |A|^2/P_{\text{sat}})} A \quad (7.9)$$

où g_0 est le gain petit signal et P_{sat} la puissance de saturation du milieu de gain.

7.1.10 Fibre optique

Comme nous l'avons vu aux chapitres précédents, la fibre optique peut être modélisée par un élément dispersif et un élément avec une phase non-linéaire, ce qui donne l'ÉSNL.

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + i \gamma |A|^2 A \quad (7.10)$$

Bien qu'il soit possible d'ajouter les pertes de la fibre dans la modélisation, ce n'est pas nécessaire puisque les longueurs de fibre sont typiquement courtes dans les lasers et que les pertes sont faibles comparées aux pertes des autres composants.

7.1.11 Fibre de gain

Une fibre de gain peut être modélisée de manière réaliste par un gain saturable ainsi qu'un filtre spectral représentant l'étendue finie du gain.

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\sigma}{2} \frac{g_0}{(1 + E/E_{\text{sat}})} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \quad (7.11)$$

7.2 Modèle moyen

Dans les modèles moyens, le champ de l'impulsion est supposé changer très peu lors de la propagation à travers les différents éléments optiques. Dans ce cas, la propagation à travers un élément optique décrit sous forme différentielle par $H(A, T)$ peut être obtenu en intégrant de part et d'autre en supposant que le champ intervenant dans la définition est invariant, c'est-à-dire $H(A, T) = H(A_0, T)$, ce qui donne

$$\frac{\partial A}{\partial z} = H(A, T)A = H(A_0, T)A \quad \Rightarrow \quad A = A_0 \exp[H(A_0, T)z]. \quad (7.12)$$

Ainsi le champ résultant de la propagation à travers M éléments optiques est obtenue en multipliant les fonctions de transfert.

$$A = A_0 \exp \left[\sum_{i=1}^M H_i(A_0, T) z_i \right] \quad (7.13)$$

En supposant que la propagation à travers les différents éléments optiques se fait en boucle, nous pouvons déterminer la variation du champ à chaque itération de la cavité ainsi créée. Puisque les changements sont supposés faibles, le développement en série de Taylor de la fonction exponentielle peut être fait ; la variation du champ s'écrit alors

$$A - A_0 \approx \sum_{i=1}^M H_i(A_0, T) z_i = \frac{dA}{d\zeta} \quad (7.14)$$

où ζ est correspond à une unité de temps normalisée marquant un cycle dans la cavité. Si nous considérons le cas général où tous les effets sont présents, nous obtenons

$$\frac{dA}{d\zeta} = \frac{(\bar{\sigma} - i\bar{\beta}_2)}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \left(\frac{\bar{\delta}}{2} + \bar{\gamma} \right) |A|^2 A + \frac{\bar{g}}{2} A - \frac{(\bar{\epsilon} - i\bar{\rho})}{2} T^2 A \quad (7.15)$$

où \bar{g} est le gain net (gain moins perte) qui peut être soit le gain petit signal, soit le gain saturable en puissance, soit le gain saturable en énergie. Les quantités barrées représentent les quantités nettes ; nous entendons par quantités nettes la somme de tous les éléments dans la cavité donnant un certain effet. Par exemple, la dispersion β_2 est donnée en secondes carrées par mètre alors que $\bar{\beta}_2 = \sum_k \beta_{2k} L_k$ est l'effet total des k éléments dispersifs dans la cavité, en secondes carrées. Si nous posons ($\bar{\epsilon} = \bar{\rho} = 0$), l'éq. (7.15) se réduit à l'équation de Ginzburg-Landau (ÉGL). L'éq. (7.15) est donc une équation de Ginzburg-Landau étendue (ÉGLÉ), mais légèrement différente de ce qu'on retrouve dans la littérature (Akhmediev *et al.*, 2001). L'ÉGLÉ retrouvée le plus couramment contient des termes non-linéaires supplémentaires montrant des phases et des absorptions saturables en $|A|^4$, ce qui permet d'obtenir des solutions analytiques dans le cas stationnaire (Akhmediev *et al.*, 1996). Toutefois, toutes ces solutions supposent que le mécanisme de synchronisation des modes dans la cavité est passif et est décrit par le terme d'absorption saturable afin d'obtenir une solution analytique. Lorsque le mécanisme de synchronisation des modes est actif, il n'existe pas de solution analytiques de l'ÉGLÉ.

L'éq. (7.15) est l'équation maîtresse du laser. Elle permet de décrire l'évolution de l'impulsion dans la cavité laser. Lorsque nous voulons déterminer l'impulsion stationnaire dans la cavité laser, nous supposons que la dérivée du champ est nulle, à une phase près. L'équation maîtresse devient alors dans le cas stationnaire :

$$i\psi A = \frac{(\bar{\sigma} - i\bar{\beta}_2)}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \left(\frac{\bar{\delta}}{2} + i\bar{\gamma} \right) |A|^2 A + \frac{\bar{g}}{2} A - \frac{(\bar{\epsilon} - i\bar{\rho})}{2} T^2 A \quad (7.16)$$

où ψ est un déphasage. Selon les termes qui sont supposés nuls, il existe différentes solutions analytiques à l'éq. (7.16) ; certaines combinaisons de termes n'en ont pas. Il est difficile a priori de trouver ces solutions puisque le système est non-linéaire ; plusieurs cas ont toutefois déjà été étudiés. Nous essayons dans le reste de cette section de trouver une solution générale de l'éq. (7.16) à l'aide des moments.

7.2.1 Définition des équations sur les moments

Afin de résoudre à l'aide des moments, il nous faut décrire le champ de l'impulsion laser par différents moments. Tout comme au chapitre 4, nous favorisons les moments les plus naturels pour décrire les impulsions : $\langle T^2 \rangle$, $\langle T\Omega \rangle_r$, $\langle \Omega^2 \rangle$ et $\langle P \rangle$. Nous appliquons donc les opérateurs définissant ces moments de part et d'autre de l'éq. (7.16), multiplions ensuite par A^* et nous intégrons sur tout le temps afin d'obtenir un ensemble d'équations sur les moments décrivant les propriétés de l'impulsion stationnaire dans le laser. L'opérateur de plus bas ordre que nous appliquons est 1, ce qui génère deux équations lorsque nous séparons les parties réelles et imaginaires.

$$0 = -\bar{\sigma}\langle \Omega^2 \rangle + \bar{\delta}\langle P \rangle + \bar{g} - \bar{\epsilon}\langle T^2 \rangle \quad (7.17)$$

$$\psi = \frac{\bar{\beta}_2}{2}\langle \Omega^2 \rangle + \bar{\gamma}\langle P \rangle + \frac{\bar{\rho}}{2}\langle T^2 \rangle \quad (7.18)$$

L'éq. (7.17) montre la partie dissipative du régime stationnaire, c'est-à-dire que le gain doit être égal aux pertes. L'éq. (7.18) montre la partie conservative, soit la phase accumulée sur un aller-retour dans la cavité. Nous procédons de même pour l'opérateur T^2 ce qui génère également deux équations. Notons que la partie imaginaire des moments a été remplacée par sa partie partie réelle équivalente (voir Annexe A).

$$0 = -\bar{\sigma}\langle T^2\Omega^2 \rangle_r + 2\bar{\beta}_2\langle T\Omega \rangle_r + \bar{\delta}\langle PT^2 \rangle + \bar{g}\langle T^2 \rangle - \bar{\epsilon}\langle T^4 \rangle \quad (7.19)$$

$$\psi\langle T^2 \rangle = \frac{\bar{\beta}_2}{2}\langle T^2\Omega^2 \rangle_r + \bar{\sigma}\langle T\Omega \rangle_r + \bar{\gamma}\langle PT^2 \rangle + \frac{\bar{\rho}}{2}\langle T^4 \rangle \quad (7.20)$$

Si nous divisons l'éq. (7.19) et (7.20) par $\langle T^2 \rangle$, nous obtenons des équations représentant également la conservation de l'énergie et le déphasage sur un aller-retour respectivement. Une différence est cependant remarquable ; la présence d'un terme contenant β_2 dans l'équation dissipative et un terme contenant σ dans l'équation conservative. Cela vient du fait que les équations représentent les variations des parties conservatives et dissipatives relatives à la largeur de l'impulsion. L'équation conservative indique comment la largeur de l'impulsions croît ou décroît ; ainsi le terme en $\bar{\beta}_2$ représente l'élargissement dû à la dispersion. L'équation dissipative représente le changement d'une composante quadratique moyenne de la phase. Ainsi le filtrage spectral $\bar{\sigma}$ crée une diminution du «chirp» de l'impulsion. Nous voyons apparaître des moments d'ordre supérieur à 2 ; ces termes devront être approximés pour résoudre le

système d'équations.

De manière similaire, en appliquant l'opérateur P , nous obtenons les équations suivantes.

$$0 = -\bar{\sigma}\langle P\Omega^2\rangle_r - \bar{\beta}_2\langle P\Omega^2\rangle_i + \bar{\delta}\langle P^2\rangle + \bar{g}\langle P\rangle - \bar{\epsilon}\langle PT^2\rangle \quad (7.21)$$

$$\psi\langle P\rangle = \frac{\bar{\beta}_2}{2}\langle P\Omega^2\rangle_r - \frac{\bar{\sigma}}{2}\langle P\Omega^2\rangle_i + \bar{\gamma}\langle P^2\rangle + \frac{\bar{\rho}}{2}\langle PT^2\rangle \quad (7.22)$$

Il faut interpréter ici l'éq. (7.21) comme le changement de la puissance crête et l'éq. (7.22) comme le changement de la composante de la phase qui corrèle avec la puissance crête, la phase non-linéaire.

En appliquant l'opérateur $T\Omega$, les équations obtenues mélangent les informations de déphasage et de gain net.

$$\psi = \frac{3}{2}\bar{\beta}_2\langle\Omega^2\rangle - \bar{\sigma}\langle T\Omega^3\rangle_r + \frac{3}{2}\bar{\gamma}\langle P\rangle + \bar{\delta}\langle PT\Omega\rangle_r + \bar{g}\langle T\Omega\rangle_r - \bar{\epsilon}\langle T^3\Omega\rangle_r - \frac{\bar{\rho}}{2}\langle T^2\rangle \quad (7.23)$$

$$\psi\langle T\Omega\rangle_r = \frac{\bar{\beta}_2}{2}\langle T\Omega^3\rangle_r + \frac{\bar{\sigma}}{2}\langle\Omega^2\rangle + \bar{\gamma}\langle PT\Omega\rangle_r - \frac{\bar{\delta}}{8}\langle P\rangle + \frac{\bar{\rho}}{2}\langle T^3\Omega\rangle_r - \frac{\bar{\epsilon}}{2}\langle T^2\rangle \quad (7.24)$$

Puisque l'opérateur $T\Omega$ contient une partie réelle et une partie imaginaire, nous avons ici un couplage entre les parties conservatives et dissipatives. Toutefois seulement la partie réelle de l'opérateur $T\Omega$ a le sens d'une phase, la partie imaginaire étant une constante. Le dernier opérateur représentant les moments d'ordre 0 et 2 est Ω^2 . Les équations obtenues de cet opérateur s'écrivent comme suit.

$$0 = -\bar{\sigma}\langle\Omega^4\rangle + 2\bar{\gamma}\langle P\Omega^2\rangle_i + \bar{\delta}\langle P\Omega^2\rangle_r + \bar{g}\langle\Omega^2\rangle - \bar{\epsilon}\langle T^2\Omega^2\rangle_r - 2\bar{\rho}\langle T\Omega\rangle_r \quad (7.25)$$

$$\psi\langle\Omega^2\rangle = \frac{\bar{\beta}_2}{2}\langle\Omega^4\rangle + \bar{\gamma}\langle P\Omega^2\rangle_r - \frac{\bar{\delta}}{2}\langle P\Omega^2\rangle_i - \bar{\epsilon}\langle T\Omega\rangle_r + \frac{\bar{\rho}}{2}\langle T^2\Omega^2\rangle_r \quad (7.26)$$

Encore une fois, il faut interpréter l'équation conservative (7.25) comme étant la modification de la largeur de bande lors d'un cycle dans la cavité à l'état stationnaire. L'équation dissipative (7.26) décrit la modification de la composante de la phase qui corrèle avec Ω^2 lors d'un cycle.

À ces 10 équations décrivant différentes relations entre les moments, nous en ajoutons finalement deux autres en utilisant l'opérateur PT^2 . Comme nous l'avons vu au chapitre 6, ce moment donne une bonne approximation de la forme de l'impulsion

lorsqu'il est comparé aux moments $\langle T^2 \rangle$ et $\langle P \rangle$.

$$0 = -\bar{\sigma}\langle PT^2\Omega^2 \rangle_r - \bar{\beta}_2\langle PT^2\Omega^2 \rangle_i + \bar{\delta}\langle P^2T^2 \rangle + \bar{g}\langle PT^2 \rangle - \bar{\epsilon}\langle PT^4 \rangle \quad (7.27)$$

$$\psi\langle PT^2 \rangle = \frac{\bar{\beta}_2}{2}\langle PT^2\Omega^2 \rangle_r - \frac{\bar{\sigma}_2}{2}\langle PT^2\Omega^2 \rangle_i + \bar{\gamma}\langle P^2T^2 \rangle + \frac{\bar{\rho}}{2}\langle PT^4 \rangle \quad (7.28)$$

Ces 12 équations permettent de déterminer les propriétés de l'impulsion laser stationnaire. Nous avons cependant encore le problème des moments d'ordre supérieur ; le système fait intervenir 19 moments différents (en supposant que le gain peut potentiellement dépendre de l'énergie E) et seulement 11 équations (puisque le paramètre ψ est décrit l'impulsion et non la cavité laser et est donc inconnu, nous lui dédions l'éq. (7.18) et la retirons des équations du système). Quatre de ces moments ne sont présents que dans les deux dernières équations. Même en les omettant, il reste 15 moments pour 9 équations. Il faut approximer les moments d'ordre supérieur pour résoudre le système. Finalement nous terminons cette section en écrivant (à la page suivante) toutes les équations décrites ci-haut en y substituant le paramètre ψ par l'éq. (7.18).

$$0 = -\bar{\sigma}\langle\Omega^2\rangle + \bar{\delta}\langle P\rangle + \bar{g} - \bar{\epsilon}\langle T^2\rangle \quad (7.29a)$$

$$\psi = \frac{\bar{\beta}_2}{2}\langle\Omega^2\rangle + \bar{\gamma}\langle P\rangle + \frac{\bar{\rho}}{2}\langle T^2\rangle \quad (7.29b)$$

$$0 = -\bar{\sigma}\kappa_{T\Omega}\langle\Omega^2\rangle + 2\bar{\beta}_2\frac{\langle T\Omega\rangle_r}{\langle T^2\rangle} + \bar{\delta}\kappa_{PT}\langle P\rangle + \bar{g} - \bar{\epsilon}\kappa_T\langle T^2\rangle \quad (7.29c)$$

$$0 = \frac{\bar{\beta}_2}{2}(\kappa_{T\Omega} - 1)\langle T^2\Omega^2\rangle_r + \bar{\sigma}\frac{\langle T\Omega\rangle_r}{\langle T^2\rangle} + \bar{\gamma}(\kappa_{PT} - 1)\langle P\rangle + \frac{\bar{\rho}}{2}(\kappa_T - 1)\langle T^2\rangle \quad (7.29d)$$

$$0 = -\bar{\sigma}\kappa_{P\Omega}\langle\Omega^2\rangle - \bar{\beta}_2\frac{\langle P\Omega^2\rangle_i}{\langle P\rangle} + \bar{\delta}\kappa_P\langle P\rangle + \bar{g} - \bar{\epsilon}\kappa_{PT}\langle T^2\rangle \quad (7.29e)$$

$$0 = \frac{\bar{\beta}_2}{2}(\kappa_{P\Omega} - 1)\langle\Omega^2\rangle - \frac{\bar{\sigma}_2}{2}\frac{\langle P\Omega^2\rangle_i}{\langle P\rangle} + \bar{\gamma}(\kappa_P - 1)\langle P\rangle + \frac{\bar{\rho}}{2}(\kappa_{PT} - 1)\langle T^2\rangle \quad (7.29f)$$

$$0 = \bar{\beta}_2\langle\Omega^2\rangle - \bar{\sigma}\langle T\Omega^3\rangle_r + \frac{\bar{\gamma}}{2}\langle P\rangle + \bar{\delta}\langle PT\Omega\rangle_r + \bar{g}\langle T\Omega\rangle_r - \bar{\epsilon}\langle T^3\Omega\rangle_r - \bar{\rho}\langle T^2\rangle \quad (7.29g)$$

$$0 = \frac{\bar{\beta}_2}{2}(\kappa_{T\Omega^3} - 1)\langle T\Omega\rangle_r\langle\Omega^2\rangle + \frac{\bar{\sigma}}{2}\langle\Omega^2\rangle + \bar{\gamma}\left(\frac{\langle PT\Omega\rangle_r}{\langle P\rangle\langle T\Omega\rangle_r} - 1\right)\langle P\rangle\langle T\Omega\rangle_r \\ - \frac{\bar{\delta}}{8}\langle P\rangle + \frac{\bar{\rho}}{2}(\kappa_{T^3\Omega} - 1)\langle T^2\rangle\langle T\Omega\rangle_r - \frac{\bar{\epsilon}}{2}\langle T^2\rangle \quad (7.29h)$$

$$0 = -\bar{\sigma}\kappa_{\Omega}\langle\Omega^2\rangle + 2\bar{\gamma}\frac{\langle P\Omega^2\rangle_i}{\langle\Omega^2\rangle} + \bar{\delta}\kappa_{P\Omega}\langle P\rangle + \bar{g} - \bar{\epsilon}\kappa_{T\Omega}\langle T^2\rangle - 2\bar{\rho}\frac{\langle T\Omega\rangle_r}{\langle\Omega^2\rangle} \quad (7.29i)$$

$$0 = \frac{\bar{\beta}_2}{2}(\kappa_{\Omega} - 1)\langle\Omega^2\rangle + \bar{\gamma}(\kappa_{P\Omega} - 1)\langle P\rangle - \frac{\bar{\delta}}{2}\frac{\langle P\Omega^2\rangle_i}{\langle\Omega^2\rangle} - \bar{\epsilon}\frac{\langle T\Omega\rangle_r}{\langle\Omega^2\rangle} + \frac{\bar{\rho}}{2}(\kappa_{T\Omega} - 1)\langle T^2\rangle \quad (7.29j)$$

$$0 = -\bar{\sigma}\kappa_{PT\Omega}\langle\Omega^2\rangle - \bar{\beta}_2\frac{\langle PT^2\Omega^2\rangle_i}{\langle PT^2\rangle} + \bar{\delta}\kappa_{P^2T^2}\langle P\rangle + \bar{g} - \bar{\epsilon}\kappa_{PT^4}\langle T^2\rangle \quad (7.29k)$$

$$0 = \frac{\bar{\beta}_2}{2}(\kappa_{PT\Omega} - 1)\langle\Omega^2\rangle - \frac{\bar{\sigma}_2}{2}\frac{\langle PT^2\Omega^2\rangle_i}{\langle PT^2\rangle} + \bar{\gamma}(\kappa_{P^2T^2} - 1)\langle P\rangle + \frac{\bar{\rho}}{2}(\kappa_{PT^4} - 1)\langle T^2\rangle \quad (7.29l)$$

7.2.2 Approximation des moments d'ordre supérieur

Pour résoudre le système d'équations décrivant le laser, il nous faut simplifier les moments d'ordre supérieur. Pour ce faire, nous utilisons la distribution de Pearson pour modéliser la norme du champ dans la définition de ces moments. Nous devons également choisir une modélisation pour la phase. Nous avons vu au chapitre précédent que la phase décrivant le mieux la propagation dans l'ÉSNL est la phase quadratique avec une contribution non-linéaire. Cette modélisation contient toute-fois deux paramètres h et f pour décrire la phase. Compte tenu du grand nombre d'équations, nous simplifions la modélisation en utilisant une phase à un seul paramètre, ce qui nous laisse le choix entre la phase quadratique et la phase logarithmique. Nous optons pour la phase logarithmique car elle est d'une part plus précise que la phase quadratique et d'autre part, plusieurs solutions exactes des équations maîtresses ont une phase logarithmique et finalement elle ne présente pas de rupture du front d'onde. De plus, nous n'analysons ici que les solutions stationnaires, qui sont moins sensibles aux approximations que les solutions dynamiques. Rappelons donc la modélisation de l'amplitude que nous utilisons pour simplifier les moments d'ordre supérieur.

$$A(T) = \sqrt{P_c} \left(1 + \frac{a}{b} T^2\right)^{-\frac{(1+ic)}{2a}} \quad (7.30)$$

où P_c est la puissance crête, b est proportionnel au carré de la durée de l'impulsion, c est l'ampleur de la phase et a est le paramètre de forme. En substituant l'éq. (7.30) dans les moments externes, nous pouvons les exprimer à l'aide des paramètres a , b , c et P_c . Le résultat de cette substitution est présenté à l'annexe D. Pour résoudre le système d'équations, il faut par la suite exprimer ces paramètres en fonction des moments faisant partie du système. Un choix logique s'impose pour certains de ces paramètres. Par exemple la durée b , la phase c et la puissance crête P_c se modélisent bien par $\langle T^2 \rangle$, $\langle T\Omega \rangle_r$ et $\langle P \rangle$ respectivement. Nous avons vu au chapitre 6 qu'il y a plusieurs façons différentes de représenter le paramètre a ; c'est pour cette raison que nous préférons conserver ce paramètre comme une variable du système et ne pas le remplacer par son équivalent en moments. Ceci constitue une approximation moins précise, mais simplifie considérablement l'analyse. Dans l'expression des moments en fonction des paramètres, il ressort que les moments contenant l'opérateur Ω^2 contiennent le paramètre c^2 . Nous remplaçons donc le paramètre c^2 par $\langle \Omega^2 \rangle$, ce qui

a plus de sens physique que $\langle T\Omega \rangle_r^2$. Il se trouve alors que le paramètre c est remplacé par deux moments différents, $\langle \Omega^2 \rangle$ et $\langle T\Omega \rangle_r$ selon le contexte. Il serait possible de procéder de même pour d'autres paramètres. Par exemple, P_c pourrait être remplacé par E . En renversant ce raisonnement, pourquoi ne pas utiliser que les paramètres au lieu des moments ? Comme nous l'avons discuté au chapitre 6, utiliser les moments permet d'extraire plus d'informations du système. Le choix des moments à utiliser doit être dicté par la physique du problème, ce qui rend les approximations plus justes. Ainsi, les changements de variables cités ci-haut s'écrivent comme suit.

$$b = (2 - 3a) \langle T^2 \rangle \quad (7.31)$$

$$c = 2 \langle T\Omega \rangle_r \quad (7.32)$$

$$c^2 = 4(2 - 3a) \left(\frac{1 + a}{2 - a} \right) \langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle - 1 \quad (7.33)$$

$$P_c = \sqrt{2} \left(\frac{8 - a}{2 - a} \right) \left(\frac{4 - a}{16 - a} \right) \langle P \rangle \quad (7.34)$$

Maintenant que nous pouvons exprimer les moments d'ordre supérieur en fonction des moments du système, il reste à savoir *quels* moments nous approximations. L'approche la plus simple est de modéliser tous les moments d'ordre supérieur. Nous perdons toutefois de la précision en procédant ainsi, puisqu'il n'est pas nécessaire d'approximer autant ; cela toutefois diminue le nombre de variables à considérer. En omettant les éqs. (7.27) et (7.28), nous devons simplifier un minimum de 7 moments pour résoudre (puisque a est maintenant considéré une variable du système) et un maximum de 10 moments en ne conservant que les moments $\langle T^2 \rangle$, $\langle T\Omega \rangle_r$, $\langle \Omega^2 \rangle$, $\langle P \rangle$ et le paramètre a . Nous avons vu précédemment que les moments purs temporels sont très bien représentés par la distribution de Pearson. Nous pouvons donc approximer les moments $\langle T^4 \rangle$, $\langle PT^2 \rangle$, $\langle P^2 \rangle$ et E sans trop d'erreurs. Les moments décrivant la phase plutôt dans le temps qu'en fréquence introduisent également peu d'erreurs puisque l'éq. (7.30) est définie dans le temps. Nous approximations donc $\langle T^3 \rangle_r$, $\langle PT\Omega \rangle_r$ et $\langle P\Omega^2 \rangle_i$, qui, bien qu'il contienne l'opérateur Ω^2 , s'apparente à $\langle T\Omega \rangle_r$ comme nous l'avons vu au chapitre 4. Nous avons ainsi 7 moments que nous pouvons retirer du système. Réécrivons les éqs. (7.21) à (7.28), en substituant la définition des moments approximations, en remplaçant \bar{g} par l'éq. (7.17) et en remplaçant ψ par l'éq. (7.18). Le résultat est 8 équations ne dépendant que des moments d'ordre 2 et de paramètres

de formes.

$$0 = -\bar{\sigma}(\kappa_{T\Omega} - 1)\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle + 2\bar{\beta}_2 \langle T\Omega \rangle_r - \frac{2\bar{\delta}\langle P \rangle \langle T^2 \rangle}{(4-3a)} - 4\bar{\epsilon} \left(\frac{1-a}{2-5a} \right) \langle T^2 \rangle^2 \quad (7.35a)$$

$$0 = \bar{\beta}_2(\kappa_{T\Omega} - 1)\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle + 2\bar{\sigma} \langle T\Omega \rangle_r - \frac{4\bar{\gamma}\langle P \rangle \langle T^2 \rangle}{(4-3a)} + 4\bar{\rho} \left(\frac{1-a}{2-5a} \right) \langle T^2 \rangle^2 \quad (7.35b)$$

$$0 = -\bar{\sigma}(\kappa_{P\Omega} - 1)\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle - \frac{\bar{\beta}_2 \langle T\Omega \rangle_r}{2(2-3a)} \left(\frac{4-a}{2+a} \right) + \bar{\delta}(\kappa_P - 1)\langle P \rangle \langle T^2 \rangle + \frac{2\bar{\epsilon}\langle T^2 \rangle^2}{(4-3a)} \quad (7.35c)$$

$$0 = \frac{\bar{\beta}_2}{2}(\kappa_{P\Omega} - 1)\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle - \frac{\bar{\sigma} \langle T\Omega \rangle_r}{4(2-3a)} \left(\frac{4-a}{2+a} \right) + \bar{\gamma}(\kappa_P - 1)\langle P \rangle \langle T^2 \rangle - \frac{\bar{\rho}\langle T^2 \rangle^2}{(4-3a)} \quad (7.35d)$$

$$0 = -\bar{\sigma}(\kappa_{T\Omega^3} - 1)\langle T\Omega \rangle_r \langle \Omega^2 \rangle + \bar{\beta}_2 \langle \Omega^2 \rangle + \frac{\bar{\gamma}}{2} \langle P \rangle - \frac{\bar{\delta}}{2} \langle P \rangle \langle T\Omega \rangle_r - 2\bar{\epsilon} \langle T^2 \rangle \langle T\Omega \rangle_r - \bar{\rho} \langle T^2 \rangle \quad (7.35e)$$

$$0 = \bar{\beta}_2(\kappa_{T\Omega^3} - 1)\langle T\Omega \rangle_r \langle \Omega^2 \rangle + \bar{\sigma} \langle \Omega^2 \rangle - \frac{\bar{\delta}}{4} \langle P \rangle - \bar{\gamma} \langle P \rangle \langle T\Omega \rangle_r + 2\bar{\rho} \langle T^2 \rangle \langle T\Omega \rangle_r - \bar{\epsilon} \langle T^2 \rangle \quad (7.35f)$$

$$0 = -\bar{\sigma}(\kappa_{\Omega} - 1)\langle \Omega^2 \rangle^2 + \bar{\delta}(\kappa_{P\Omega} - 1)\langle P \rangle \langle \Omega^2 \rangle + \frac{\bar{\gamma}\langle P \rangle}{(2-3a)} \left(\frac{4-a}{2+a} \right) \frac{\langle T\Omega \rangle_r}{\langle T^2 \rangle} - \bar{\epsilon}(\kappa_{T\Omega} - 1)\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle - 2\bar{\rho} \langle T\Omega \rangle_r \quad (7.35g)$$

$$0 = \bar{\beta}_2(\kappa_{\Omega} - 1)\langle \Omega^2 \rangle^2 + 2\bar{\gamma}(\kappa_{P\Omega} - 1)\langle P \rangle \langle \Omega^2 \rangle - \frac{\bar{\delta}\langle P \rangle}{2(2-3a)} \left(\frac{4-a}{2+a} \right) \frac{\langle T\Omega \rangle_r}{\langle T^2 \rangle} + \bar{\rho}(\kappa_{T\Omega} - 1)\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle - 2\bar{\epsilon} \langle T\Omega \rangle_r \quad (7.35h)$$

Nous procédons de la même façon avec les éqs. (7.27) et (7.28) en approximant les moments relatifs au temps $\langle P^2 T^2 \rangle$ et $\langle PT^4 \rangle$ ainsi que le moment $\langle PT^2 \Omega^2 \rangle_i$.

$$0 = -\bar{\sigma}(\kappa_{PT\Omega} - 1)\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle + \frac{\bar{\beta}_2}{2} \left(\frac{4-3a}{2-3a} \right) \left(\frac{1+2a}{2+a} \right) \langle T\Omega \rangle_r + \bar{\delta} \left[\frac{\kappa_P}{3} \left(\frac{4-3a}{2-a} \right) - 1 \right] \langle P \rangle \langle T^2 \rangle - 2\bar{\epsilon} \left(\frac{1-2a}{4-5a} \right) \langle T^2 \rangle^2 \quad (7.36)$$

$$0 = \bar{\beta}_2(\kappa_{PT\Omega} - 1)\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle + \frac{\bar{\sigma}}{2} \left(\frac{4-3a}{2-3a} \right) \left(\frac{1+2a}{2+a} \right) \langle T\Omega \rangle_r + 2\bar{\gamma} \left[\frac{\kappa_P}{3} \left(\frac{4-3a}{2-a} \right) - 1 \right] \langle P \rangle \langle T^2 \rangle + 2\bar{\rho} \left(\frac{1-2a}{4-5a} \right) \langle T^2 \rangle^2 \quad (7.37)$$

Les différents facteurs de forme ont été définis au chapitre 3. Nous les répétons ici pour plus de clarté.

$$\begin{aligned}\kappa_{T\Omega} &= \frac{\langle T^2 \Omega^2 \rangle_r}{\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle} & \kappa_{T\Omega 3} &= \frac{\langle T \Omega^3 \rangle_r}{\langle T \Omega \rangle_r \langle \Omega^2 \rangle} & \kappa_{\Omega} &= \frac{\langle \Omega^4 \rangle}{\langle \Omega^2 \rangle^2} \\ \kappa_{P\Omega} &= \frac{\langle P \Omega^2 \rangle_r}{\langle P \rangle \langle \Omega^2 \rangle} & \kappa_{PT\Omega} &= \frac{\langle PT^2 \Omega^2 \rangle_r}{\langle P \rangle \langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle}\end{aligned}\quad (7.38)$$

Nous avons ainsi quatre facteurs de forme et cinq variables pour les neuf premières équations et un facteur de forme pour les deux équations provenant de l'opérateur PT^2 . Le facteur κ_P est défini explicitement en fonction du paramètre a .

$$\kappa_P = \frac{\langle P^2 \rangle}{\langle P \rangle^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{8-a}{2-a} \right) \left(\frac{24-a}{6-a} \right) \left(\frac{4-a}{16-a} \right)^2 \approx \sqrt{3} \left(\frac{2-a}{3-2a} \right) \quad (7.39)$$

Notons qu'il se peut que certaines de ces équations soient redondantes selon les effets présents dans la cavité laser, ce qui implique que des simplifications supplémentaires devront être faites. Ces équations forment un système qui est non-linéaire et doit être résolu selon le cas particulier étudié afin d'obtenir les paramètres de l'impulsion en régime stationnaire. Bien que le système soit relativement grand, il est toutefois plus facile de résoudre ce système d'équations non-linéaires que de résoudre l'équation différentielle particulière de l'équation maîtresse. De plus, il est possible de déterminer une solution approximative là où une solution analytique ne peut être trouvée. Pour se convaincre de la validité et de l'intérêt de ces équations, procédons à l'étude de cas particuliers.

7.2.3 Validation du modèle

Afin de valider notre modèle moyen, nous le comparons à trois cas où une solution analytique est connue. C'est trois modèles sont le laser à verrouillage actif des modes, le laser à verrouillage passif des modes et le laser solitonique.

Laser à verrouillage actif des modes ($\bar{\beta}_2 = \bar{\delta} = \bar{\gamma} = \bar{\rho} = 0$)

Dans le cas du laser à verrouillage actif des modes, il n'y a pas de dispersion chromatique ($\bar{\beta}_2 = 0$), de non-linéarité ($\bar{\gamma} = 0$), d'absorbant saturable ($\bar{\delta} = 0$) ou de phase quadratique ($\bar{\rho} = 0$) (Siegman et Kuizenga, 1974). Dans ce cas, le système

d'équations (7.35) devient

$$0 = -\bar{\sigma}(\kappa_{T\Omega} - 1)\langle\Omega^2\rangle - 4\bar{\epsilon}\left(\frac{1-a}{2-5a}\right)\langle T^2\rangle \quad (7.40a)$$

$$0 = 2\bar{\sigma}\langle T\Omega\rangle_r \quad (7.40b)$$

$$0 = -\bar{\sigma}(\kappa_{P\Omega} - 1)\langle\Omega^2\rangle + \frac{2\bar{\epsilon}\langle T^2\rangle}{(4-3a)} \quad (7.40c)$$

$$0 = -\frac{\bar{\sigma}\langle T\Omega\rangle_r}{4(2-3a)}\left(\frac{4-a}{2+a}\right) \quad (7.40d)$$

$$0 = -\bar{\sigma}(\kappa_{T\Omega 3} - 1)\langle T\Omega\rangle_r\langle\Omega^2\rangle - 2\bar{\epsilon}\langle T^2\rangle\langle T\Omega\rangle_r \quad (7.40e)$$

$$0 = \bar{\sigma}\langle\Omega^2\rangle - \bar{\epsilon}\langle T^2\rangle \quad (7.40f)$$

$$0 = -\bar{\sigma}(\kappa_{\Omega} - 1)\langle\Omega^2\rangle - \bar{\epsilon}(\kappa_{T\Omega} - 1)\langle T^2\rangle \quad (7.40g)$$

$$0 = -2\bar{\epsilon}\langle T\Omega\rangle_r \quad (7.40h)$$

avec les deux équations supplémentaire provenant de PT^2 .

$$0 = -\bar{\sigma}(\kappa_{PT\Omega} - 1)\langle\Omega^2\rangle - 2\bar{\epsilon}\left(\frac{1-2a}{4-5a}\right)\langle T^2\rangle \quad (7.41)$$

$$0 = \frac{\bar{\sigma}}{2}\left(\frac{4-3a}{2-3a}\right)\left(\frac{1+2a}{2+a}\right)\langle T\Omega\rangle_r \quad (7.42)$$

Nous déduisons des éqs. (7.40b), (7.40d), (7.40e), (7.40d), (7.40h) et (7.42) que $\langle T\Omega\rangle_r = 0$, ce qui n'est guère surprenant puisqu'aucun élément optique de la cavité n'induit de déphasage entre les différentes parties de l'impulsion. De l'éq. (7.40f), nous déduisons une relation importante entre les filtrages temporels et spectraux.

$$\bar{\sigma}\langle\Omega^2\rangle = \bar{\epsilon}\langle T^2\rangle \quad (7.43)$$

Il s'ensuit qu'en régime stationnaire, il y a un équilibre entre le filtrage temporel et spectral de sorte que les deux sont égaux. Nous voyons ici un avantage de conserver les moments par rapport à n'utiliser que les paramètres de la modélisation de Pearson. Nous pouvons tirer des conclusions sur la physique du système car les moments permettent de travailler dans les domaines spectral et temporel simultanément. En remplaçant l'éq. (7.43) dans les éqs. (7.40a), (7.40c), (7.40g) et (7.41), nous trouvons

4 équations reliant différents facteurs de forme entre eux.

$$\kappa_{T\Omega} = 1 - 4 \left(\frac{1-a}{2-5a} \right) \quad (7.44)$$

$$\kappa_{P\Omega} = 1 + \frac{2}{(4-3a)} \quad (7.45)$$

$$\kappa_{\Omega} = 2 - \kappa_{T\Omega} = 1 + 4 \left(\frac{1-a}{2-5a} \right) \quad (7.46)$$

$$\kappa_{PT\Omega} = 1 - 2 \left(\frac{1-2a}{4-5a} \right) \quad (7.47)$$

Nous avons ainsi différents facteurs de forme qui dépendent du paramètre de forme a , mais aucune de ces équations ne nous renseigne directement sur la valeur de ce paramètre. Il nous faut donc approximer un des paramètres de forme pour déterminer a . La raison pour laquelle nous devons approximer davantage est que plus de la moitié des équations nous informaient uniquement sur la phase de l'impulsion et non sur la forme ; nous nous retrouvons donc avec trop d'inconnues. En suivant la logique d'approximer le moment de plus bas ordre, nous approximons le facteur $\kappa_{T\Omega}$.

$$\kappa_{T\Omega} = 3 \left(\frac{2-3a}{2-a} \right) - \frac{1}{\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle} \quad (7.48)$$

Toutefois le facteur $\kappa_{T\Omega}$ ne dépend pas que de a ; il faut une autre approximation. Pour ce faire, nous écrivons l'expression du principe d'incertitude en fonction des moments pour l'approximation de la phase logarithmique.

$$\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle = \frac{(1 + 4\langle T\Omega \rangle_r^2)}{4(2-3a)} \left(\frac{2-a}{1+a} \right) = \frac{1}{4(2-3a)} \left(\frac{2-a}{1+a} \right) \quad (7.49)$$

Il s'ensuit que $\kappa_{T\Omega}$ s'écrit alors

$$\kappa_{T\Omega} = - (1 + 4a) \left(\frac{2-3a}{2-a} \right) \quad (7.50)$$

et ne dépend que du paramètre a . Cela nous permet de déterminer la valeur de a au moyen des éqs. (7.50) et (7.44).

$$1 - 4 \left(\frac{1-a}{2-5a} \right) = - (1 + 4a) \left(\frac{2-3a}{2-a} \right) \quad \Rightarrow \quad a = \left\{ 0, \frac{4}{5} \right\} \quad (7.51)$$

Nous trouvons ainsi deux valeurs du paramètre a . Il est surprenant, quoique possible, qu'il y ait deux valeurs de a . Pour vérifier qu'il n'y ait pas d'inconsistances sur ces deux valeurs, nous évaluons le produit durée-largeur spectral pour chacune d'entre elles.

$$\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle = \left\{ \frac{1}{4}, -\frac{5}{12} \right\} \quad (7.52)$$

Ce produit ne pouvant être négatif, nous en déduisons que la solution $a = 4/5$ est inconsistante. Il s'ensuit que la solution est $a = 0$, ce qui donne une forme d'impulsion gaussienne, ce qui est prédit par la solution analytique de Siegmann-Huizenga. Connaissant le paramètre a , il est possible de déterminer les autres moments du système à l'aide des éqs. (7.49), (7.43) et (7.17).

$$\langle T^2 \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}}} \quad \langle \Omega^2 \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}}} \quad \bar{g} = \sqrt{\bar{\sigma} \bar{\epsilon}} \quad (7.53)$$

Les facteurs de forme deviennent alors

$$\kappa_{T\Omega} = -1 \quad \kappa_{P\Omega} = \frac{3}{2} \quad \kappa_{\Omega} = 3 \quad \kappa_{PT\Omega} = \frac{1}{2}. \quad (7.54)$$

Nous déduisons entre autres de ces facteurs de forme que le spectre de l'impulsion est également gaussien puisque $\kappa_{\Omega} = 3$.

Nous avons maintenant déterminé les moments de l'impulsion en fonction des paramètres généraux du laser. Pour déterminer les moments en fonction des paramètres spécifiques de la cavité laser, nous procédons aux substitutions suivantes. En supposant que le milieu de gain a une largeur de bande finie Ω_f un gain petit signal g_0 , que la cavité a une perte nette α et que le modulateur a une modulation égale de $\sqrt{M}\Omega_M$, les constantes $\bar{\epsilon}$, $\bar{\sigma}$ et \bar{g} s'écrivent

$$\bar{\sigma} = \frac{g_0}{\Omega_f^2} \quad \bar{\epsilon} = M\Omega_M^2 \quad \bar{g} = g_0 - \alpha \quad (7.55)$$

ce qui est exactement le résultat obtenu en résolvant analytiquement l'équation maîtresse (Siegman et Kuizenga, 1974). Notons qu'à aucun moment l'énergie ou la puissance crête de l'impulsion stationnaire n'ont été spécifiées. Pour les déterminer, il faut pousser l'analyse plus loin que le modèle de Siegmann-Huizenga, ce qui est très facile avec le formalisme des moments. Il suffit de remplacer le gain g_0 par un gain saturable

$g_0/(1 + \langle P \rangle / \langle P_{\text{sat}} \rangle)$, ce qui fixe la puissance de l'impulsion stationnaire.

$$\langle P \rangle = \left(\frac{g_0}{\alpha + \sqrt{\bar{\sigma}\bar{\epsilon}}} \right) \langle P \rangle_{\text{sat}} \quad (7.56)$$

Laser à verrouillage passif des modes ($\bar{\beta}_2 = \bar{\gamma} = \bar{\epsilon} = \bar{\rho} = 0$)

Nous avons retrouvé la forme gaussienne de l'impulsion stationnaire du laser à verrouillage actif des modes à la section précédente. La forme gaussienne est un cas particulier de la distribution de Pearson ; il n'est pas surprenant que nous l'ayons retrouvée. Un test de validation plus intéressant nous permettrait de voir si, en résolvant, nous retrouvons une forme d'impulsion qui n'est qu'approximativement représentée par la distribution de Pearson. Pour ce faire, nous étudions maintenant le laser à verrouillage actif des modes qui a une sécante hyperbolique comme solution stationnaire analytique (Haus *et al.*, 1975). Comme nous l'avons vu au chapitre 3, la sécante hyperbolique n'est pas représentée exactement par la distribution de Pearson.

Le laser à verrouillage passif des modes est modélisé en éliminant les termes quadratiques ($\bar{\epsilon} = \bar{\rho} = 0$) et les autres termes de phases ($\bar{\beta}_2 = \bar{\gamma} = 0$). Dans ce cas, les éqs. (7.35) se réduisent aux équations suivantes.

$$0 = -\bar{\sigma}(\kappa_{T\Omega} - 1)\langle \Omega^2 \rangle - \frac{2\bar{\delta}\langle P \rangle}{(4 - 3a)} \quad (7.57a)$$

$$0 = 2\bar{\sigma}\langle T\Omega \rangle_r \quad (7.57b)$$

$$0 = -\bar{\sigma}(\kappa_{P\Omega} - 1)\langle \Omega^2 \rangle + \bar{\delta}(\kappa_P - 1)\langle P \rangle \quad (7.57c)$$

$$0 = -\frac{\bar{\sigma}\langle T\Omega \rangle_r}{4(2 - 3a)} \left(\frac{4 - a}{2 + a} \right) \quad (7.57d)$$

$$0 = -\bar{\sigma}(\kappa_{T\Omega 3} - 1)\langle T\Omega \rangle_r \langle \Omega^2 \rangle - \frac{\bar{\delta}}{2}\langle P \rangle \langle T\Omega \rangle_r \quad (7.57e)$$

$$0 = \bar{\sigma}\langle \Omega^2 \rangle - \frac{\bar{\delta}}{4}\langle P \rangle \quad (7.57f)$$

$$0 = -\bar{\sigma}(\kappa_{\Omega} - 1)\langle \Omega^2 \rangle + \bar{\delta}(\kappa_{P\Omega} - 1)\langle P \rangle \quad (7.57g)$$

$$0 = -\frac{\bar{\delta}\langle P \rangle}{2(2 - 3a)} \left(\frac{4 - a}{2 + a} \right) \frac{\langle T\Omega \rangle_r}{\langle T^2 \rangle} \quad (7.57h)$$

avec les deux équations supplémentaire suivantes

$$0 = -\bar{\sigma}(\kappa_{PT\Omega} - 1)\langle\Omega^2\rangle + \bar{\delta}\left[\frac{\kappa_P}{3}\left(\frac{4-3a}{2-a}\right) - 1\right]\langle P\rangle \quad (7.58)$$

$$0 = \frac{\bar{\sigma}}{2}\left(\frac{4-3a}{2-3a}\right)\left(\frac{1+2a}{2+a}\right)\langle T\Omega\rangle_r. \quad (7.59)$$

Une fois de plus le moment $\langle T\Omega\rangle_r = 0$ par les éqs. (7.57b), (7.57d), (7.57e), (7.57d), (7.57h) et (7.59) puisqu'aucun élément dans la cavité ne crée de déphasage. L'éq. (7.57f) nous donne une relation importante entre la largeur spectrale de l'impulsion et sa puissance crête.

$$\bar{\delta}\langle P\rangle = 4\bar{\sigma}\langle\Omega^2\rangle \quad (7.60)$$

Cette équation est analogue à l'éq. (7.43). Elle dit que la perte par filtrage dans le milieu de gain doit être comparable à la perte dans l'absorbant saturable. Cette relation permet de déterminer les relations entre les facteurs de forme.

$$\kappa_{T\Omega} = 1 - \frac{8}{(4-3a)} \quad (7.61)$$

$$\kappa_{P\Omega} = 1 + 4(\kappa_P - 1) \quad (7.62)$$

$$\kappa_{\Omega} = 1 + 4(\kappa_{P\Omega} - 1) = 1 + 16(\kappa_P - 1) \quad (7.63)$$

$$\kappa_{PT\Omega} = 1 + 4\left[\frac{\kappa_P}{3}\left(\frac{4-3a}{2-a}\right) - 1\right] \quad (7.64)$$

Nous nous retrouvons devant le même problème qu'avec le laser à verrouillage actif des modes. En procédant comme dans ce cas, nous obtenons deux valeurs pour le paramètre a ,

$$1 - \frac{8}{(4-3a)} = -(1+4a)\left(\frac{2-3a}{2-a}\right) \quad \Rightarrow \quad a = \{0, 2324; 1, 434\} \quad (7.65)$$

dont seulement la première valeur, $a = 0, 2324$, donne un produit $\langle T^2\rangle\langle\Omega^2\rangle$ positif. À partir de cette valeur de a , nous pouvons calculer les autres facteurs de forme. Pour vérifier la validité de notre méthode, nous comparons ces facteurs de forme avec ceux calculés à partir de la solution analytique exacte. La comparaison est présentée à la table (7.2.3).

Facteur de forme	$a=0,2324$	sécante hyperbolique	erreur relative
κ_P	1,194	1,2	0,50%
κ_T	4.664	4,2	11,04%
κ_{PT}	0.3921	0,3945	0,61%
$\kappa_{T\Omega}$	-1,422	-1,432	0,70%
$\kappa_{P\Omega}$	1,776	1,8	1,33%
κ_Ω	4,102	4,2	2,33%
$\kappa_{PT\Omega}$	-0,0256	-0.0238	7,56%

TABLEAU 7.1 Comparaison des facteurs de forme de la solution exacte et approximative du laser à verrouillage passif des modes.

Nous voyons à la table (7.2.3) que l'accord entre la solution obtenue par les moments et la solution analytique est excellent ; nous avons une erreur moyenne de 3,44%. L'erreur est principalement sur le facteur de forme κ_T et $\kappa_{PT\Omega}$. La raison est que κ_T met beaucoup de poids sur les ailes de la distribution, là où la distribution de Pearson et la sécante hyperbolique diffèrent le plus. Le facteur de forme $\kappa_{PT\Omega}$ fait intervenir trois opérateurs de nature différente ; il s'ensuit que l'erreur y est plus grande. Il ne reste qu'à déterminer l'expression des moments $\langle P \rangle$, $\langle \Omega^2 \rangle$ et $\langle T^2 \rangle$ en fonction des paramètres de la cavité. Nous reprenons pour ce faire l'éq. (7.17) et le principe d'incertitude (7.49).

$$\langle P \rangle = -\frac{4}{3} \frac{\bar{g}}{\bar{\delta}} \quad \langle \Omega^2 \rangle = -\frac{\bar{g}}{3\bar{\sigma}} \quad \langle T^2 \rangle = -0.8257 \frac{\bar{\sigma}}{\bar{g}} \quad (7.66)$$

Nous remarquons que contrairement au verrouillage actif des modes, il faut que le gain net \bar{g} soit négatif pour que les moments soient des quantités positives. Cela signifie que les pertes non saturées doivent être plus grandes que le gain pour que les impulsions soient stables, ce qui reflète la conclusion du modèle analytique (Haus, 2000). Autrement dit, le gain est plus grand que les pertes seulement quand ces dernières sont saturées. Les moments s'expriment en fonction des paramètres de la cavité au moyen des équations suivantes

$$\bar{\sigma} = \frac{g_0}{\Omega_f^2} \quad \bar{\delta} = s_0/P_{\text{abs}} \quad \bar{g} = g_0 - \alpha - s_0 \quad (7.67)$$

où s_0 est la perte petit signal de l'absorbant saturable et P_{abs} est la puissance de sa-

turation de l'absorbant saturable. Il est possible ici encore de tenir compte facilement d'un gain saturable en puissance. Nous obtenons alors la puissance suivante :

$$\langle P \rangle = \frac{2}{3} P_{\text{abs}} \left[\frac{\alpha}{s_0} + \frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{s_0} + \frac{1}{4} \right)^2 + 3 \left(\frac{g_0 - \alpha}{s_0} - 1 \right)} \right] \quad (7.68)$$

Laser solitonique ($\bar{\epsilon} = \bar{\rho} = 0$)

Nous avons montré avec le laser à verrouillage passif des modes que la distribution de Pearson peut être utilisée efficacement pour représenter la forme de l'impulsion, même si ce n'est qu'approximativement. Toutefois, nous n'avons pas encore étudié un cas où l'impulsion stationnaire avait une phase non nulle. Pour y remédier, le dernier cas de validation que nous étudions est le laser solitonique où l'impulsion stationnaire est une sécante hyperbolique qui survient lorsque la largeur de bande du gain est équilibrée par l'absorption saturable et que la dispersion nette anormale $\bar{\beta}_2$ est balancée par la non-linéarité $\bar{\gamma}$ (Haus *et al.*, 1991). Les équations régissant le système s'écrivent alors

$$0 = -\bar{\sigma}(\kappa_{T\Omega} - 1)\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle + 2\bar{\beta}_2 \langle T\Omega \rangle_r - \frac{2\bar{\delta} \langle P \rangle \langle T^2 \rangle}{(4 - 3a)} \quad (7.69a)$$

$$0 = \bar{\beta}_2(\kappa_{T\Omega} - 1)\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle + 2\bar{\sigma} \langle T\Omega \rangle_r - \frac{4\bar{\gamma} \langle P \rangle \langle T^2 \rangle}{(4 - 3a)} \quad (7.69b)$$

$$0 = -\bar{\sigma}(\kappa_{P\Omega} - 1)\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle - \frac{\bar{\beta}_2 \langle T\Omega \rangle_r}{2(2 - 3a)} \left(\frac{4 - a}{2 + a} \right) + \bar{\delta}(\kappa_P - 1)\langle P \rangle \langle T^2 \rangle \quad (7.69c)$$

$$0 = \frac{\bar{\beta}_2}{2}(\kappa_{P\Omega} - 1)\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle - \frac{\bar{\sigma} \langle T\Omega \rangle_r}{4(2 - 3a)} \left(\frac{4 - a}{2 + a} \right) + \bar{\gamma}(\kappa_P - 1)\langle P \rangle \langle T^2 \rangle \quad (7.69d)$$

$$0 = -\bar{\sigma}(\kappa_{T\Omega 3} - 1)\langle T\Omega \rangle_r \langle \Omega^2 \rangle + \bar{\beta}_2 \langle \Omega^2 \rangle + \frac{\bar{\gamma}}{2} \langle P \rangle - \frac{\bar{\delta}}{2} \langle P \rangle \langle T\Omega \rangle_r \quad (7.69e)$$

$$0 = \bar{\beta}_2(\kappa_{T\Omega 3} - 1)\langle T\Omega \rangle_r \langle \Omega^2 \rangle + \bar{\sigma} \langle \Omega^2 \rangle - \frac{\bar{\delta}}{4} \langle P \rangle - \bar{\gamma} \langle P \rangle \langle T\Omega \rangle_r \quad (7.69f)$$

$$0 = -\bar{\sigma}(\kappa_{\Omega} - 1)\langle \Omega^2 \rangle^2 + \bar{\delta}(\kappa_{P\Omega} - 1)\langle P \rangle \langle \Omega^2 \rangle + \frac{\bar{\gamma} \langle P \rangle}{(2 - 3a)} \left(\frac{4 - a}{2 + a} \right) \frac{\langle T\Omega \rangle_r}{\langle T^2 \rangle} \quad (7.69g)$$

$$0 = \bar{\beta}_2(\kappa_{\Omega} - 1)\langle \Omega^2 \rangle^2 + 2\bar{\gamma}(\kappa_{P\Omega} - 1)\langle P \rangle \langle \Omega^2 \rangle - \frac{\bar{\delta} \langle P \rangle}{2(2 - 3a)} \left(\frac{4 - a}{2 + a} \right) \frac{\langle T\Omega \rangle_r}{\langle T^2 \rangle} \quad (7.69h)$$

avec les deux équations supplémentaires provenant de PT^2 .

$$0 = -\bar{\sigma}(\kappa_{PT\Omega} - 1)\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle + \frac{\bar{\beta}_2}{2} \left(\frac{4-3a}{2-3a} \right) \left(\frac{1+2a}{2+a} \right) \langle T\Omega \rangle_r \\ + \bar{\delta} \left[\frac{\kappa_P}{3} \left(\frac{4-3a}{2-a} \right) - 1 \right] \langle P \rangle \langle T^2 \rangle \quad (7.70)$$

$$0 = \bar{\beta}_2(\kappa_{PT\Omega} - 1)\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle + \frac{\bar{\sigma}}{2} \left(\frac{4-3a}{2-3a} \right) \left(\frac{1+2a}{2+a} \right) \langle T\Omega \rangle_r \\ + 2\bar{\gamma} \left[\frac{\kappa_P}{3} \left(\frac{4-3a}{2-a} \right) - 1 \right] \langle P \rangle \langle T^2 \rangle \quad (7.71)$$

Pour résoudre, nous procédons de manière légèrement différente que dans les deux cas précédents. Nous utilisons la symétrie des équations, ce qui permet d'éliminer les facteurs de forme des équations. En prenant chaque paire d'équations similaires, nous éliminons le facteur par substitution, ce qui donne pour les éqs. (7.69)

$$0 = \left(\frac{\bar{\beta}_2}{\bar{\sigma}} + \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\beta}_2} \right) \langle T\Omega \rangle_r - \left(\frac{\bar{\delta}}{\bar{\sigma}} + \frac{2\bar{\gamma}}{\bar{\beta}_2} \right) \frac{\langle P \rangle \langle T^2 \rangle}{(4-3a)} \quad (7.72a)$$

$$0 = \left(\frac{\bar{\beta}_2}{\bar{\sigma}} + \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\beta}_2} \right) \frac{\langle T\Omega \rangle_r}{(2-3a)} \left(\frac{4-a}{2+a} \right) - 2 \left(\frac{\bar{\delta}}{\bar{\sigma}} + \frac{2\bar{\gamma}}{\bar{\beta}_2} \right) (\kappa_P - 1) \langle P \rangle \langle T^2 \rangle \quad (7.72b)$$

$$0 = \left(\frac{\bar{\beta}_2}{\bar{\sigma}} + \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\beta}_2} \right) \langle \Omega^2 \rangle + \frac{1}{4} \left(\frac{2\bar{\gamma}}{\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}_2} \right) \langle P \rangle - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\delta}}{\bar{\sigma}} + \frac{2\bar{\gamma}}{\bar{\beta}_2} \right) \langle P \rangle \langle T\Omega \rangle_r \quad (7.72c)$$

$$0 = 2 \left(\frac{\bar{\delta}}{\bar{\sigma}} + \frac{2\bar{\gamma}}{\bar{\beta}_2} \right) (\kappa_{P\Omega} - 1) \langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle + \left(\frac{2\bar{\gamma}}{\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}_2} \right) \frac{1}{(2-3a)} \left(\frac{4-a}{2+a} \right) \langle T\Omega \rangle_r \quad (7.72d)$$

et pour les éqs. (7.70) et (7.71).

$$0 = \left(\frac{\bar{\beta}_2}{\bar{\sigma}} + \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\beta}_2} \right) \left(\frac{4-3a}{2-3a} \right) \left(\frac{1+2a}{2+a} \right) \langle T\Omega \rangle_r \\ + 2 \left(\frac{\bar{\delta}}{\bar{\sigma}} + \frac{2\bar{\gamma}}{\bar{\beta}_2} \right) \left[\frac{\kappa_P}{3} \left(\frac{4-3a}{2-a} \right) - 1 \right] \langle P \rangle \langle T^2 \rangle \quad (7.73)$$

Les éqs. (7.72a) et (7.72b) nous permettent de définir le paramètre a . En résolvant, nous trouvons trois valeurs $a = \{-0,9790; 0,2246; 1,394\}$. Pour déterminer l'admissibilité de ces trois solutions, nous utilisons encore une fois le principe d'incertitude (éq. (7.49)), en tenant compte cette fois-ci de la phase non nulle de l'impulsion. Il s'ensuit que seule la solution $a = 0,2246$ est valide. Nous pouvons également résoudre le paramètre a à l'aide de l'éq. (7.73); procédons ainsi afin de déterminer si nous

obtenons des valeurs de a consistantes. En résolvant les éqs.(7.72a) et (7.73) ensemble, nous trouvons une seule solution $a = 0,2390$. Les éqs. (7.72b) et (7.73) donne $a = \{0,2573; 0.9823\}$, dont seulement $a = 0,2573$ est admissible. Il s'ensuit que les seules valeurs de a admissibles sont $a = \{0,2246; 0,2390; 0,2573\}$, ce qui donne une valeur moyenne $\bar{a} = 0,2403$; nous reconnaissons ici la sécante hyperbolique que nous avons trouvée précédemment. Les écarts relatifs entre les valeurs par rapport à la valeur moyenne sont de $\Delta a/\bar{a} = 6,53\%; 0,54\%, 7,07\%$. Nous avons donc une variation inférieure à 10% sur la consistance des solutions. Cette valeur moyenne de a est conforme à la solution analytique; nous utilisons donc la valeur moyenne \bar{a} pour déterminer les autres moments de l'impulsion stationnaire.

Il y a plusieurs façon de déterminer les autres moments de la solution. Une façon de procéder est de multiplier l'éq (7.72c) par $\langle T^2 \rangle$ et d'utiliser les éqs. (7.72a) et (7.49) pour n'avoir que le moment $\langle T\Omega \rangle_r$.

$$0 = 1 + 2,956\chi\langle T\Omega \rangle_r - 1,910\langle T\Omega \rangle_r^2 \quad (7.74)$$

$$\chi = \frac{2\bar{\gamma}\bar{\beta}_2 - \bar{\delta}\bar{\sigma}}{2\bar{\gamma}\bar{\sigma} + \bar{\delta}\bar{\beta}_2} \quad (7.75)$$

À des fins de comparaison, si nous utilisons les éqs. (7.69a) et (7.69b), éliminons le terme en $\langle P \rangle \langle T^2 \rangle$ par substitution et explicitons le facteur de forme $\kappa_{T\Omega}$, nous obtenons une équation similaire.

$$0 = 1 + 2,974\chi\langle T\Omega \rangle_r - 1,948\langle T\Omega \rangle_r^2 \quad (7.76)$$

La différence moyenne entre les coefficients n'est que de 1,29%. Pour simplifier les expressions, nous arrondissons les coefficients aux entiers les plus proches, ce qui crée une faible erreur, inférieure à 5%.

$$0 = 1 + 3\chi\langle T\Omega \rangle_r - 2\langle T\Omega \rangle_r^2 \quad (7.77)$$

$$\langle T\Omega \rangle_r = \frac{3\chi + \sqrt{9\chi^2 + 8}}{4} \quad (7.78)$$

La durée s'exprime en fonction de $\langle P \rangle$ à partir de l'éq. (7.72a) et la largeur de bande

à partir du principe d'incertitude.

$$\langle T^2 \rangle = 3,279 \frac{\langle T\Omega \rangle_r}{\langle P \rangle} \left(\frac{\bar{\beta}_2^2 + \bar{\sigma}^2}{2\bar{\gamma}\bar{\sigma} + \bar{\delta}\bar{\beta}_2} \right) \quad (7.79)$$

$$\langle \Omega^2 \rangle = 0,08457 \frac{\langle P \rangle}{\langle T\Omega \rangle_r} (1 + 4\langle T\Omega \rangle_r^2) \left(\frac{2\bar{\gamma}\bar{\sigma} + \bar{\delta}\bar{\beta}_2}{\bar{\beta}_2^2 + \bar{\sigma}^2} \right) \quad (7.80)$$

Finalement la puissance effective est obtenue avec l'éq. (7.17).

$$\langle P \rangle = \frac{\bar{g}(\bar{\beta}_2^2 + \bar{\sigma}^2)\langle T\Omega \rangle_r}{0.08457\bar{\sigma}(1 + 4\langle T\Omega \rangle_r^2)(2\bar{\gamma}\bar{\sigma} + \bar{\delta}\bar{\beta}_2) - \bar{\delta}(\bar{\beta}_2^2 + \bar{\sigma}^2)\langle T\Omega \rangle_r} \quad (7.81)$$

Les moments ainsi trouvés correspondent exactement au modèle analytique développé pour le laser solitonique.

7.2.4 Étude de cas sans solution analytique

Nous avons étudié jusqu'à maintenant des cas où il existait des solutions analytiques. Nous analysons maintenant des lasers où il n'existe pas de telle solution analytique. Nous montrons que notre méthode approximative basée sur les moments et la distribution de Pearson permet de déterminer des solutions dans ce cas. Pour commencer, nous regardons le cas d'un laser sans linéarité, soluble analytiquement et avec non-linéarité qui n'est soluble qu'approximativement.

Laser à verrouillage actif des modes accordable en dispersion ($\bar{\sigma} = \bar{\delta} = \bar{\rho} = 0$)

Pour tester l'intérêt de cette méthode, nous analysons le cas du laser à verrouillage actif des modes accordable en dispersion. Dans ce laser, la dispersion étale le contenu fréquentiel dans le temps et un modulateur ne laisse passer qu'une partie de ce dernier. Nous regardons le cas où aucune non-linéarité n'est présente dans le laser, cas qui est résolu analytiquement (Tamura et Nakazawa, 1996) et le cas où l'auto-modulation de phase est présente. Les équations décrivant le laser, en incluant la non-linéarité,

s'écrivent

$$0 = 2\bar{\beta}_2 \langle T\Omega \rangle_r - 4\bar{\epsilon} \left(\frac{1-a}{2-5a} \right) \langle T^2 \rangle^2 \quad (7.82a)$$

$$0 = \bar{\beta}_2 (\kappa_{T\Omega} - 1) \langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle - \frac{4\bar{\gamma} \langle P \rangle \langle T^2 \rangle}{(4-3a)} \quad (7.82b)$$

$$0 = -\frac{\bar{\beta}_2 \langle T\Omega \rangle_r}{2(2-3a)} \left(\frac{4-a}{2+a} \right) + \frac{2\bar{\epsilon} \langle T^2 \rangle^2}{(4-3a)} \quad (7.82c)$$

$$0 = \frac{\bar{\beta}_2}{2} (\kappa_{P\Omega} - 1) \langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle + \bar{\gamma} (\kappa_P - 1) \langle P \rangle \langle T^2 \rangle \quad (7.82d)$$

$$0 = \bar{\beta}_2 \langle \Omega^2 \rangle + \frac{\bar{\gamma}}{2} \langle P \rangle - 2\bar{\epsilon} \langle T^2 \rangle \langle T\Omega \rangle_r \quad (7.82e)$$

$$0 = \bar{\beta}_2 (\kappa_{T\Omega^3} - 1) \langle T\Omega \rangle_r \langle \Omega^2 \rangle - \bar{\gamma} \langle P \rangle \langle T\Omega \rangle_r - \bar{\epsilon} \langle T^2 \rangle \quad (7.82f)$$

$$0 = \frac{\bar{\gamma} \langle P \rangle}{(2-3a)} \left(\frac{4-a}{2+a} \right) \frac{\langle T\Omega \rangle_r}{\langle T^2 \rangle} - \bar{\epsilon} (\kappa_{T\Omega} - 1) \langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle \quad (7.82g)$$

$$0 = \bar{\beta}_2 (\kappa_{\Omega} - 1) \langle \Omega^2 \rangle^2 + 2\bar{\gamma} (\kappa_{P\Omega} - 1) \langle P \rangle \langle \Omega^2 \rangle - 2\bar{\epsilon} \langle T\Omega \rangle_r \quad (7.82h)$$

en incluant les deux équations suivantes.

$$0 = \frac{\bar{\beta}_2}{2} \left(\frac{4-3a}{2-3a} \right) \left(\frac{1+2a}{2+a} \right) \langle T\Omega \rangle_r - 2\bar{\epsilon} \left(\frac{1-2a}{4-5a} \right) \langle T^2 \rangle^2 \quad (7.83)$$

$$0 = \bar{\beta}_2 (\kappa_{PT\Omega} - 1) \langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle + 2\bar{\gamma} \left[\frac{\kappa_P}{3} \left(\frac{4-3a}{2-a} \right) - 1 \right] \langle P \rangle \langle T^2 \rangle \quad (7.84)$$

Il est facile de déterminer la valeur du paramètre a à partir des éqs. (7.82a), (7.82c) et/ou (7.83); nous trouvons $a = 0$. Nous avons donc une impulsion de forme gaussienne, comme dans le cas du verrouillage actif des modes sans dispersion. Notons que le terme non-linéaire n'influence pas la forme de l'impulsion, ce qui est une approximation. La non-linéarité change la forme spectrale de l'impulsion qui, à travers la dispersion linéaire, transforme la forme temporelle de l'impulsion. Nous ne voyons pas ici cet effet à cause de l'effet moyen de l'équation maîtresse. Nous pouvons toutefois voir l'effet se répercuter sur les facteurs de forme et les moments. Pour résoudre, nous supposons que le milieu de gain est saturable en puissance, et s'écrit

$$\bar{g} = \frac{g_0}{1 + \frac{\langle P \rangle}{\langle P \rangle_{\text{sat}}}} - \alpha \quad \langle P \rangle = \langle P \rangle_{\text{sat}} \left(\frac{g_0}{\bar{\epsilon} \langle T^2 \rangle + \alpha} - 1 \right) \quad (7.85)$$

Le tableau (7.2.4) compare les cas linéaire et non-linéaire.

Moments	Cas linéaire ($\bar{\gamma} = 0$)	Cas non-linéaire ($\bar{\gamma} \neq 0$)
$\langle T^2 \rangle$	$\sqrt{\frac{ \bar{\beta}_2 }{2\bar{\epsilon}}}$	$4\bar{\epsilon}^2 \langle T^2 \rangle^4 - \bar{\beta}_2^2 - 2\bar{\beta}_2 \bar{\gamma} \langle P \rangle_{\text{sat}} \langle T^2 \rangle \left(\frac{g_0}{\bar{\epsilon} \langle T^2 \rangle + \alpha} - 1 \right) = 0$
$\langle T\Omega \rangle_r$	$\frac{\text{sgn}(\bar{\beta}_2)}{2}$	$\frac{\text{sgn}(\bar{\beta}_2)}{2} \sqrt{1 + 2\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\beta}_2} \langle P \rangle_{\text{sat}} \langle T^2 \rangle \left(\frac{g_0}{\bar{\epsilon} \langle T^2 \rangle + \alpha} - 1 \right)}$
$\langle \Omega^2 \rangle$	$\sqrt{\frac{\bar{\epsilon}}{2 \bar{\beta}_2 }}$	$\frac{1}{2\langle T^2 \rangle} + \frac{\bar{\gamma}}{2\bar{\beta}_2} \langle P \rangle_{\text{sat}} \left(\frac{g_0}{\bar{\epsilon} \langle T^2 \rangle + \alpha} - 1 \right)$
$\langle P \rangle$	$\langle P \rangle_{\text{sat}} \left(\frac{g_0}{\sqrt{\frac{ \bar{\beta}_2 }{2\bar{\epsilon}}} + \alpha} - 1 \right)$	$\langle P \rangle_{\text{sat}} \left(\frac{g_0}{\bar{\epsilon} \langle T^2 \rangle + \alpha} - 1 \right)$
$\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{\bar{\gamma}}{2\bar{\beta}_2} \langle P \rangle_{\text{sat}} \langle T^2 \rangle \left(\frac{g_0}{\bar{\epsilon} \langle T^2 \rangle + \alpha} - 1 \right)$
a	0	0
$\kappa_{T\Omega}$	1	$1 + 4\frac{\bar{\gamma} \langle P \rangle}{\bar{\beta}_2 \langle \Omega^2 \rangle}$
$\kappa_{P\Omega}$	1	$1 + \frac{2}{3}(2\sqrt{3} - 3)\frac{\bar{\gamma} \langle P \rangle}{\bar{\beta}_2 \langle \Omega^2 \rangle}$
κ_{Ω}	3	$1 + 2 \left[\frac{\bar{\beta}_2^2 + 2\bar{\beta}_2 \bar{\gamma} \langle P \rangle \langle T^2 \rangle - \frac{8}{3}(2\sqrt{3} - 3)\bar{\gamma}^2 \langle P \rangle^2 \langle T^2 \rangle^2}{(\bar{\beta}_2 + \bar{\gamma} \langle P \rangle \langle T^2 \rangle)^2} \right]$
$\kappa_{T\Omega^3}$	1	$1 + \frac{1}{\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle} 4\frac{\bar{\gamma} \langle P \rangle}{\bar{\beta}_2 \langle \Omega^2 \rangle}$
$\kappa_{PT\Omega}$	1	$1 + 2 \left(1 - \frac{4\sqrt{3}}{9} \right) \frac{\bar{\gamma} \langle P \rangle}{\bar{\beta}_2 \langle \Omega^2 \rangle}$

TABLEAU 7.2 Comparaison des facteurs de forme de la solution exacte et approximative du laser à verrouillage actif des modes accordable en dispersion.

Nous voyons tout d'abord que la solution non-linéaire se réduit à la solution linéaire lorsque la non-linéarité $\bar{\gamma} = 0$. Alors que les facteurs de formes sont constants dans le cas linéaire, nous voyons qu'ils dépendent des paramètres du laser dans le cas non-linéaire. Nous voyons alors l'importance de garder le plus grand nombre de facteurs de formes possible pour bien décrire l'impulsion. Nous voyons ainsi comment la non-linéarité déforme la densité spectrale de l'impulsion. De plus, nous voyons que la déformation générée par les effets non-linéaires est proportionnelle au rapport $\bar{\gamma}/\bar{\beta}_2$. Ainsi une faible non-linéarité peut tout de même avoir un effet remarquable si la dispersion dans la cavité est faible. Nous déduisons aussi de ce rapport que le signe de la dispersion influence l'effet de la non-linéarité. En dispersion nette normale, $\bar{\beta}_2 > 0$, la largeur spectrale de l'impulsion ainsi que son «chirp» augmentent avec la non-linéarité. En dispersion anormale, $\bar{\beta}_2 < 0$, c'est le contraire qui se produit, comme la compression solitonique le prévoit. Notons finalement que la non-linéarité n'influence pas la forme de l'impulsion dans le temps puisque, d'une part, celle-ci est parfaitement définie par l'action du modulateur et, d'autre part, la non-linéarité

n'agit qu'au premier ordre dans le modèle linéarisé des équations maîtresses et, de ce fait, ne change pas la forme de l'impulsion.

Laser à verrouillage passif avec dispersion ($\bar{\sigma} = \bar{\epsilon} = \bar{\gamma} = \bar{\rho} = 0$)

Considérons maintenant un verrouillage passif des modes, au lieu d'un verrouillage actif. Nous négligeons la non-linéarité dans ce cas, question de ne regarder que la différence causée par la nature du verrouillage des modes. Alors que le cas du verrouillage actif avec dispersion avait une solution analytique lorsque la non-linéarité est absente, ce n'est pas le cas ici. Dans le verrouillage passif sans dispersion, l'absorption saturable et la largeur finie du gain se compensent pour former une impulsion sécante hyperbolique, à la manière d'un effet solitonique. Ce n'est pas possible ici car nous avons supposé une largeur infinie du milieu de gain ($\bar{\sigma} = 0$) ; la limitation de la largeur de bande se faisant par le biais de la dispersion. Pour déterminer les paramètres de la solution stationnaire, regardons les équations définissant les moments.

$$0 = \bar{\beta}_2 \langle T\Omega \rangle_r - \frac{\bar{\delta} \langle P \rangle \langle T^2 \rangle}{(4 - 3a)} \quad (7.86a)$$

$$0 = \bar{\beta}_2 (\kappa_{T\Omega} - 1) \langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle \quad (7.86b)$$

$$0 = -\frac{\bar{\beta}_2 \langle T\Omega \rangle_r}{2(2 - 3a)} \left(\frac{4 - a}{2 + a} \right) + \bar{\delta} (\kappa_P - 1) \langle P \rangle \langle T^2 \rangle \quad (7.86c)$$

$$0 = \frac{\bar{\beta}_2}{2} (\kappa_{P\Omega} - 1) \langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle \quad (7.86d)$$

$$0 = \bar{\beta}_2 \langle \Omega^2 \rangle - \frac{\bar{\delta}}{2} \langle P \rangle \langle T\Omega \rangle_r \quad (7.86e)$$

$$0 = \bar{\beta}_2 (\kappa_{T\Omega^3} - 1) \langle T\Omega \rangle_r \langle \Omega^2 \rangle - \frac{\bar{\delta}}{4} \langle P \rangle \quad (7.86f)$$

$$0 = \bar{\delta} (\kappa_{P\Omega} - 1) \langle P \rangle \langle \Omega^2 \rangle \quad (7.86g)$$

$$0 = \bar{\beta}_2 (\kappa_{\Omega} - 1) \langle \Omega^2 \rangle^2 - \frac{\bar{\delta} \langle P \rangle}{2(2 - 3a)} \left(\frac{4 - a}{2 + a} \right) \frac{\langle T\Omega \rangle_r}{\langle T^2 \rangle} \quad (7.86h)$$

Nous procédons de la même façon avec les éqs. (7.27) et (7.28) en approximant les moments relatifs au temps $\langle P^2 T^2 \rangle$ et $\langle P T^4 \rangle$ ainsi que le moment $\langle P T^2 \Omega^2 \rangle_i$.

$$0 = \frac{\bar{\beta}_2}{2} \left(\frac{4 - 3a}{2 - 3a} \right) \left(\frac{1 + 2a}{2 + a} \right) \langle T\Omega \rangle_r + \bar{\delta} \left[\frac{\kappa_P}{3} \left(\frac{4 - 3a}{2 - a} \right) - 1 \right] \langle P \rangle \langle T^2 \rangle \quad (7.87)$$

$$0 = \bar{\beta}_2 (\kappa_{PT\Omega} - 1) \langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle \quad (7.88)$$

Il est facile de déterminer la forme de l'impulsion à l'aide des éqs. (7.86a), (7.86c) et (7.87). En combinant ces équations deux à la fois, nous trouvons différents facteurs de forme dont les seuls se croisant sont $a = \{0,2246; 0,2390; 0,2573\}$ donnant une valeur moyenne de $\bar{a} = 0.2403$. Nous obtenons également dans ce cas une solution sécante hyperbolique à cause de l'action de l'absorbant saturable. Le fait d'avoir un milieu dispersif au lieu d'un milieu de gain filtrant afin de limiter la largeur de bande ne semble pas affecter la forme de l'impulsion. Cela s'explique par le fait que l'absorption saturable cause une décroissance exponentielle des ailes de l'impulsion (Haus *et al.*, 1994). Les autres moments décrivant l'impulsion peuvent être facilement calculés et sont décrits dans le tableau (7.2.4), en posant que le gain s'écrit selon l'éq. (7.67).

Moments	Moments et facteurs de forme
$\langle T^2 \rangle$	$\frac{ \beta_2 }{\delta} \frac{2,371s_0}{\langle P \rangle_{\text{sat}}(s_0 + \alpha - g_0)}$
$\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle$	$\frac{1}{2}$
$\langle T\Omega \rangle_r$	$0,7231 \operatorname{sgn}(\bar{\beta}_2)$
$\langle \Omega^2 \rangle$	$0,3616 \frac{\delta}{ \beta_2 } \langle P \rangle_{\text{sat}} \left(1 + \frac{\alpha - g_0}{s_0}\right)$
$\langle P \rangle$	$\langle P \rangle_{\text{sat}} \left(1 + \frac{\alpha - g_0}{s_0}\right)$
$\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle$	$0,8572$
a	$0,2403$
$\kappa_{T\Omega}$	1
$\kappa_{P\Omega}$	1
κ_{Ω}	$2,4944$
$\kappa_{T\Omega 3}$	$1,956$
$\kappa_{PT\Omega}$	1

TABLEAU 7.3 Moments et facteurs de forme de la solution approximative du laser à verrouillage passif en présence de dispersion.

Il y a quelques différences notables par rapport au cas actif et au cas non-dispersif. En comparant avec le cas du verrouillage actif, nous voyons une correspondance entre le rôle joué par le filtrage temporelle actif du modulateur ($\bar{\epsilon}$) et celui passif de l'absorbant saturable ($\bar{\delta}$). Les facteurs de forme ont également des valeurs similaires à l'exception du paramètre κ_{Ω} qui est légèrement plus faible dans le cas passif que dans le cas actif où $\kappa_{\Omega} = 3$ indique une densité spectrale gaussienne. En comparant

maintenant au cas du verrouillage passif sans dispersion, nous voyons également une différence car la valeur de $\kappa_\Omega = 4,2$ signifie dans ce cas que la densité spectrale a également une forme de sécante hyperbolique. Nous en déduisons que l'effet de la dispersion est d'atténuer les ailes spectrales de l'impulsion donnant une densité spectrale s'approchant un peu plus d'une parabole. Une autre différence notable est la forme de la phase décrite à travers le facteur $\kappa_{T\Omega^3}$ qui est deux fois plus grand dans le cas passif que dans le cas actif ce qui reflète également le fait que la densité spectrale est différente. Notons finalement que la méthode des moments présentée ici n'informe pas sur la stabilité des impulsions. Dans le cas du laser avec verrouillage passif avec dispersion, aucun élément ne fixe le taux de répétition dans la cavité, ce qui peut avoir deux conséquences. Premièrement, le spectre devient infiniment large, ce qui est physiquement impossible à cause de l'étendue finie du gain. Deuxièmement, le laser ne se verrouille pas car tous les longueurs d'onde ont des temps de propagation différents dans la cavité. Pour remédier à ce problème, il faudrait un verrouillage hybride des modes.

Laser à verrouillage hybride des modes ($\bar{\beta}_2 = \bar{\gamma} = \bar{\rho} = 0$)

Nous obtenons un verrouillage hybride des modes si nous considérons simultanément un verrouillage actif et passif des modes. Puisqu'aucun terme n'induit un déphasage, nous avons $\langle T\Omega \rangle_r = 0$. Dans ce cas, les équations pertinentes décrivant les autres moments du système s'écrivent

$$0 = -\bar{\sigma}(\kappa_{T\Omega} - 1)\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle - \frac{2\bar{\delta}\langle P \rangle \langle T^2 \rangle}{(4 - 3a)} - 4\bar{\epsilon} \left(\frac{1 - a}{2 - 5a} \right) \langle T^2 \rangle^2 \quad (7.89a)$$

$$0 = -\bar{\sigma}(\kappa_{P\Omega} - 1)\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle + \bar{\delta}(\kappa_P - 1)\langle P \rangle \langle T^2 \rangle + \frac{2\bar{\epsilon}\langle T^2 \rangle^2}{(4 - 3a)} \quad (7.89b)$$

$$0 = \bar{\sigma}\langle \Omega^2 \rangle - \frac{\bar{\delta}}{4}\langle P \rangle - \bar{\epsilon}\langle T^2 \rangle \quad (7.89c)$$

$$0 = -\bar{\sigma}(\kappa_\Omega - 1)\langle \Omega^2 \rangle^2 + \bar{\delta}(\kappa_{P\Omega} - 1)\langle P \rangle \langle \Omega^2 \rangle - \bar{\epsilon}(\kappa_{T\Omega} - 1)\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle \quad (7.89d)$$

avec l'équation supplémentaire suivante.

$$0 = -\bar{\sigma}(\kappa_{PT\Omega} - 1)\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle + \bar{\delta} \left[\frac{\kappa_P}{3} \left(\frac{4 - 3a}{2 - a} \right) - 1 \right] \langle P \rangle \langle T^2 \rangle - 2\bar{\epsilon} \left(\frac{1 - 2a}{4 - 5a} \right) \langle T^2 \rangle^2 \quad (7.90)$$

Nous avons 4 variables à déterminer : $\langle P \rangle$, $\langle T^2 \rangle$, $\langle \Omega^2 \rangle$ et a . En utilisant le principe d'incertitude et l'éq. (7.89c), il nous faut deux équations et donc deux facteurs de forme à réduire. Nous prenons les éqs. (7.89a) et (7.89b), ce qui signifie qu'il faut simplifier les facteurs de forme κ_Ω et $\kappa_{P\Omega}$. Ces facteurs de forme s'écrivent alors

$$\kappa_{T\Omega} = - (1 + 4a) \left(\frac{2 - 3a}{2 - a} \right) \quad (7.91)$$

$$\kappa_{P\Omega} = \frac{3}{2} \left(\frac{4 - a}{2 + a} \right) \left(\frac{1 + a}{2 - a} \right) \quad (7.92)$$

En résolvant nous trouvons trois valeurs pour la forme $a = \{-0,6856; 0; 0,2838\}$. Ces trois valeurs de a sont admissibles puisqu'aucune ne donne une valeur négative de $\langle T^2 \rangle$. Il y a deux façons d'interpréter ces trois valeurs. Premièrement, les trois formes d'impulsions sont des solutions du système d'équations. Deuxièmement, les trois solutions proviennent en partie des approximations sur les moments d'ordre supérieur et certaines d'entre elles ne sont pas des solutions valables. Il est clair que toutes ces valeurs ne peuvent être des solutions du système car le cas gaussien $a = 0$ qui est exactement représenté par la distribution de Pearson n'est pas une solution de l'équation maîtresse. Afin d'éliminer les valeurs de a donnant des solutions invalides, nous approximons le facteur de forme $\kappa_{PT\Omega}$ et résolvons le système à l'aide de ce dernier. Nous obtenons

$$\kappa_{PT\Omega} = \frac{(2 - 3a)}{2} \left(\frac{1 - 4a}{2 + a} \right) \left(\frac{1 + a}{2 - a} \right) \quad (7.93)$$

qui donne, après résolution les valeurs $a = \{0,2325; 0,8707\}$. De ces deux valeurs, la deuxième est invalide par le principe d'incertitude. La première s'approche suffisamment de 0,2838 pour que la différence entre les deux s'explique par les erreurs d'approximation sur les moments d'ordre supérieur. Nous obtenons donc une forme d'impulsion qui s'approche plus d'une sécante hyperbolique que d'une gaussienne. Par ailleurs les facteurs de formes sont, pour la valeur moyenne $\bar{a} = 0.2582$, $\kappa_{T\Omega} = -1,4301$ et $\kappa_{P\Omega} = 1,7954$, ce qui correspond au cas du verrouillage passif à une différence inférieure à 0.3%. Ce résultat correspond bien à ce que nous observons expérimentalement où la modulation active sert à démarrer le verrouillage mais éventuellement dominée par le filtrage passif de l'absorbant qui, ultimement, dicte la forme de l'impulsion (Delfyett *et al.*, 1992), (Weber *et al.*, 1992).

7.3 Conclusion

Les équations différentielles maîtresses des lasers ne sont solubles que dans quelques cas particuliers de manière analytique ; les moments nous permettent toutefois de trouver des solutions approximatives dans la plupart des cas. En écrivant les équations maîtresses des lasers par l'entremise des moments, nous avons pu ramener l'équation différentielle décrivant l'impulsion laser en un système d'équations non-linéaires. Ces équations expriment diverses relations entre des moments d'ordre différent. Pour résoudre le système, il nous a fallu exprimer les moments d'ordre supérieur en fonction des moments de plus bas ordre.

Nous avons utilisé la distribution de Pearson avec une phase logarithmique pour ce faire. Bien que la phase logarithmique soit moins précise que la phase non-linéaire avec une contribution quadratique pour la propagation dans les fibres optiques, elle est fréquemment utilisée dans la plupart des solutions analytiques des lasers. En réduisant les moments d'ordre supérieur aux moments $\langle T^2 \rangle$, $\langle T\Omega \rangle_r$, $\langle \Omega^2 \rangle$ et $\langle P \rangle$ ainsi qu'à différents facteurs de forme, nous avons pu résoudre le système dans divers cas. Nous avons considéré trois cas bien connus et résolus analytiquement pour valider notre méthode : le laser à verrouillage actif, le laser à verrouillage passif et le laser solitonique. Nous avons aussi étudié trois cas où les solutions analytiques n'existent pas : le laser à verrouillage actif accordable en dispersion incluant la non-linéarité, le laser à verrouillage passif incluant la dispersion et le laser à verrouillage hybride.

Les trois cas de validation nous ont donné des résultats très proches des solutions analytiques. Dans le cas du verrouillage actif, nous obtenons le même résultat que la solution analytique. Dans le cas du verrouillage passif, nous avons une erreur moyenne inférieure à 3,5% sur les facteurs de forme des impulsions. De plus, nous obtenons les mêmes relations entre les paramètres des impulsions et les paramètres de la cavité laser que dans le cas analytique. Le laser solitonique nous donne un résultat similaire en procédant de différentes façons pour faire le calcul ; toutes ces façons donnent le même résultats avec une variation inférieure à 8%. Nous obtenons également dans ce cas les mêmes relations, à l'approximation de coefficients près, entre les caractéristiques des impulsions et les paramètres de la cavité.

Nous avons finalement étudié trois cas n'ayant pas de solution analytiques. Le premier de ces cas est le laser à verrouillage actif des modes accordable en dispersion. Il existe une solution analytique à l'équation maîtresse de ce laser lorsque la non-linéarité

est absente. Lorsqu'elle est présente, aucune solution analytique exacte n'existe. Nous avons résolu les équations maîtresses par l'entremise des moments dans les deux cas et les avons comparés. La solution linéaire s'exprime de manière explicite et la solution non-linéaire de manière implicite ; à faible puissance, le cas non-linéaire converge vers le cas linéaire. De plus, nous constatons que la forme de l'impulsion dans le temps ne semble pas être changée par la présence de la non-linéarité ; toutefois les facteurs de forme décrivant la densité spectrale sont fortement influencés par cette dernière.

Le deuxième cas étudié sans solution exacte est le verrouillage passif avec dispersion. Dans le cas passif sans dispersion, c'est la largeur finie du milieu de gain qui limite la durée de l'impulsion temporelle et donne une solution stable. Dans ce cas, il y a un effet «solitonique» entre la perte de l'absorbant saturable et le filtrage spectral du milieu de gain. Qu'arrive-t-il si à l'instar du verrouillage actif accordable en dispersion, nous remplaçons le filtrage par la dispersion ? La solution analytique approximative alors trouvée est encore une sécante hyperbolique. La solution ainsi obtenue ressemble par ailleurs énormément à la solution dans le cas actif où le rôle du filtrage temporel actif du modulateur a été remplacé par le filtrage temporel passif de l'absorbant saturable.

Finalement le dernier cas analysé est le verrouillage hybride où les filtrages temporels actif et passif sont présents dans la cavité. La résolution des équations donne une forme d'impulsion en sécante hyperbolique, ce qui correspond bien à ce qui est observé expérimentalement. Le verrouillage actif, donnant une impulsion gaussienne, ne sert qu'à amorcer le verrouillage qui est finalement dominé par l'absorbant saturable, donnant l'impulsion sécante hyperbolique.

Chapitre 8

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons utilisé les moments afin d'étudier la propagation d'impulsions dans un milieu dispersif et non-linéaire décrite par l'équation de Schrödinger non-linéaire. Pour ce faire, nous avons établi un formalisme de moments complexes, utilisant des opérateurs linéaires et non-linéaires, ce qui a permis de représenter clairement les équations ainsi que la physique sous-jacente. En supposant que la phase temporelle du champ est quadratique et en utilisant les moments d'ordre 2, nous avons dérivé une solution analytique décrivant pour la première fois, à notre connaissance, l'évolution de l'impulsion à la fois dans le régime de dispersion normale et anormale. Cette solution a été obtenue au moyen de trois invariants, dont deux proviennent de l'approximation de la phase quadratique. Ces invariants représentent la conservation de la somme des effets dispersif et non-linéaire, la conservation de l'énergie et la conservation de la forme de l'impulsion. Dans le régime de dispersion normale, l'évolution des moments est asymptotique alors qu'elle est périodique dans le régime de dispersion anormale. Différentes quantités importantes ont pu être obtenues, telles que la distance pour avoir une impulsion « Fourier-limitée » ainsi que sa durée à ce point. Afin de vérifier la validité de cette solution, elle a été comparée à la simulation numérique de l'évolution de l'amplitude complexe du champ. La comparaison montre un excellent accord entre la solution analytique et la solution numérique dans le régime de dispersion normale. Bien que l'accord ne soit pas aussi bon dans le régime de dispersion anormale, le comportement des deux solutions est qualitativement le même. Des équations approximatives *linéaires* ont été obtenues pour décrire l'évolution *non-linéaire* pour de très courtes distances et pour de très longues distances lorsque la dispersion est normale ; on donne aussi la distance à laquelle la transition se fait entre ces deux solutions approximatives.

Les moments d'ordre 2 ne décrivent que les principales caractéristiques de l'impulsion : sa durée, sa largeur spectrale, sa puissance effective et son « chirp ». Ils ne décrivent pas directement la forme de l'impulsion. La solution obtenue en ne

considérant que les moments d'ordre 2 ne permet pas non plus de décrire l'évolution de la forme de l'impulsion puisque le second invariant dit que la forme de l'impulsion est constante. Afin de voir comment une impulsion gaussienne se déforme lors de sa propagation dans un milieu dispersif normal et non-linéaire, nous avons utilisé les équations linéaires approximatives et supposé que les moments de ces équations étaient des fonctions du temps. En remplaçant ces équations dans les solutions analytiques des propagations purement dispersive et purement non-linéaire, nous avons obtenu des solutions implicites. Lorsqu'elles sont comparées aux simulations numériques, ces solutions implicites décrivent très bien la propagation d'une impulsion gaussienne, incluant sa déformation.

Afin d'avoir une façon systématique d'étudier l'évolution de la forme de l'impulsion lors de la propagation dans un milieu dispersif et non-linéaire, il faut aller au-delà d'une simple approximation quadratique de la phase. Pour ce faire, il faut non seulement une meilleure approximation de la phase, mais il faut également pouvoir approximer la norme du champ complexe. Nous avons donc examiné trois modélisations différentes de la phase temporelle : la phase quadratique, la phase quadratique avec une contribution non-linéaire et la phase logarithmique. La norme a été représentée par la distribution de Pearson. Celle-ci permet de représenter une variété de formes d'impulsions dont la gaussienne, la parabole, la lorentzienne ainsi que de passer continûment de l'une à l'autre. Différents moments peuvent être employés afin d'obtenir les paramètres de ces modèles. Plusieurs simulations numériques dans les deux régimes de dispersion ont été faites, d'une part, pour déterminer quelle modélisation est la plus précise et, d'autre part, quels sont les moments les plus adéquats pour représenter les paramètres. Il ressort que la phase quadratique avec contribution non-linéaire donne les résultats les plus précis, que les moments de plus bas ordre donnent de meilleurs résultats et qu'il vaut mieux comparer les moments d'ordre 2 avec les moments d'ordre 2 non-linéaires plutôt qu'aux moments d'ordre 4 pour décrire la forme de l'impulsion. Différentes propagations numériques ont permis de déterminer que les moments contenant les opérateurs Ω^3 et Ω^4 ne sont pas bien décrits par les modèles étudiés et qu'il vaut mieux éviter de les inclure. Finalement, une analyse de points fixes a montré que la modélisation basée sur la distribution de Pearson et la phase quadratique avec contribution stationnaire permet de décrire différentes formes d'impulsion stationnaires dont la gaussienne et la parabole, la sécante hyperbolique ne pouvant toutefois pas être obtenue par ce modèle.

La modélisation développée a ensuite été appliquée aux équations maîtresses des lasers tout-fibre qui décrivent l'impulsion stationnaire de la cavité laser sous forme différentielle. Il existe de nombreuses équations maîtresses selon les différents éléments optiques présents dans la cavité ; chacune de ces équations a une solution différente qu'il faut déterminer. Puisque ces équations sont souvent non-linéaires, il n'existe pas de moyen systématique d'obtenir une solution. En appliquant la méthode des moments et en utilisant la distribution de Pearson ainsi que la phase logarithmique (couramment obtenue dans les solutions des équations maîtresses), les équations maîtresses peuvent être ramenées à un système d'équations algébriques non-linéaires. Ce système a été résolu dans trois cas où une solution analytique à l'équation maîtresse est connue : le laser à verrouillage actif des modes, le laser à verrouillage passif des modes et le laser solitonique. Dans le premier cas, nous avons obtenu la solution analytique à l'équation maîtresse. Dans les deux autres cas, des solutions approximatives qui ont été trouvées donnent les mêmes relations physiques entre les paramètres de l'impulsion et ceux de la cavité et une forme d'impulsion qui s'approche à moins de 5% de la sécante hyperbolique, qui est la forme de la solution analytique dans ces cas. Nous avons ensuite utilisé le même modèle pour décrire trois lasers pour lesquels aucune solution n'est, à notre connaissance, connue : le laser à verrouillage actif des modes accordable en dispersion (incluant la non-linéarité), le laser à verrouillage passif des modes accordable en dispersion et le laser à verrouillage hybride des modes. Dans les trois cas, les solutions obtenues sont cohérentes avec ce qui a été observé expérimentalement. La méthode que nous avons développée permet donc de s'attaquer à des équations maîtresses afin d'obtenir des solutions approximatives lorsque les solutions analytiques ne sont pas connues.

Finissons sur différentes avenues qui peuvent être explorées à l'aide du travail de cette thèse. Premièrement, il est possible de s'attarder à d'autres modélisations et représentations. La distribution de Pearson est probablement la fonction la plus simple pour représenter différentes formes d'impulsion puisqu'elle n'a qu'un paramètre de contrôle. Différentes formes à deux ou plusieurs paramètres sont envisageables, pour représenter, entre autres, le centre et la base de l'impulsion individuellement. La modélisation de la phase peut également être améliorée, en essayant, entre autres, d'obtenir une phase qui soit proportionnelle au carré de la fréquence, mais qui soit exprimée dans le domaine temporel. Une autre option intéressante est d'introduire de nouveaux opérateurs définissant de nouveaux moments. Par exemple, aucun des

opérateurs utilisés ne permet de mesurer le centre de l'impulsion ; les opérateurs en T^j n'accordent que du poids sur les ailes. L'opérateur P le fait seulement quand l'impulsion est une cloche et le fait d'une manière relative à la forme de l'impulsion. Des opérateurs de la forme $1/(1 + T^{2j})$ ou de la forme $(1 + T^2)^{-j}$ permettraient d'avoir une lecture fiable du centre de la distribution. Il faut toutefois se rappeler que la plus grande difficulté avec la modélisation par les moments est de déterminer une représentation de la norme, de la phase et des opérateurs qui sont intégrables dans la définition des moments.

Une autre avenue est de considérer les effets asymétriques tels que la dispersion d'ordre 3, l'auto-raïdissement et l'auto-décalage Raman. Dans ce cas, la norme du champ peut, par exemple, être représentée par la distribution de Pearson incluant l'asymétrie et la phase temporelle étendue en ajoutant un terme linéaire et un terme cubique. La difficulté survenant avec les distributions asymétriques est que les moments centrés ne sont plus égaux aux moments bruts. Les expressions deviennent plus lourdes et difficiles à gérer car les moyennes (moments d'ordre 1) changent avec les effets asymétriques, ce qui a une répercussion sur tous les autres moments.

Il serait également intéressant d'appliquer les moments aux équations couplées telles que les équations définissant le gain Raman ou le mélange à quatre ondes. La difficulté dans ce cas est qu'il y aura différentes covariances ; non seulement entre le temps et les fréquences, mais entre les champs aux différentes longueurs d'onde. Il faut également pouvoir tenir compte des phases relatives des champs aux différentes longueurs d'onde à travers les moments afin de bien modéliser les accords de phases qui sont critiques dans les processus non-linéaires.

Finalement, deux avenues peuvent être envisagées dans le cas des lasers. Premièrement, il serait intéressant d'utiliser d'autres modélisations de la phase et d'étudier l'impact qu'elles ont sur les solutions obtenues par rapport à celles utilisées dans cette thèse. Entre autres, le fait d'utiliser une contribution non-linéaire à la phase donne-t-il d'autres formes d'impulsions ? Si tel est le cas, il y aurait d'autres solutions aux équations maîtresses qui n'apparaissent pas avec les solutions analytiques traditionnelles. Finalement, l'avenue qui est certainement la plus intéressante à explorer est l'étude des équations maîtresses *discrètes*. Les équations maîtresses que l'on retrouve dans la littérature se basent toutes sur les modèles moyens où tous les effets sont supposés déformer peu les impulsions. Or, dans beaucoup de lasers ayant en ce moment une grande importance technologique, tels que les lasers « stretched-pulse »

et auto-similaires, l'impulsion se déforme considérablement dans la cavité et la non-linéarité y joue un rôle clef. La non-linéarité est devenue tellement importante qu'elle cause la rupture du front d'onde, ce qui limite l'énergie des impulsions pouvant être générées par le laser. Ces effets ne peuvent être analysés par les équations maîtresses moyennes. Un modèle est difficilement envisageable dans bien des cas puisqu'il faut trouver une fonction de transfert du champ complexe à travers chaque élément optique de la cavité. Les moments s'avèrent un outil puissant pour calculer ces fonctions de transfert et ainsi obtenir une équation maîtresse discrète exprimée en termes des moments. Ces équations pourraient présupposer une forme d'impulsion ou déterminer une forme moyenne de l'impulsion ou encore suivre la déformation de l'impulsion à travers chaque élément. Une modélisation adéquate de la phase permettrait d'étudier la rupture du front d'onde après chaque élément optique et ainsi déterminer les limitations de ces cavités tout en optimisant leur design.

Références

- AGRAWAL, G. P. (2001). *Nonlinear fiber optics, third edition*. Optics and photonics. Academic Press, 525 B Street, Suite 1900, San Diego, California, 92101-4495, USA.
- AKHMEDIEV, N., SOTO-CRESPO, J. et TOWN, G. (2001). Pulsating solitons, chaotic solitons, period doubling, and pulse coexistence in mode-locked lasers : Complex Ginzburg-Landau equation approach. *Physical Review E*, 63, 56602.
- AKHMEDIEV, N. N., AFANASJEV, V. V. et SOTO-CRESPO, J. M. (1996). Singularities and special solutions of the cubic-quintic complex ginzburg-landau equation. *Phys. Rev. E ; Physical Review E*, 53, 1190–1201.
- ANDALIB, A., ROSTAMI, A. et GRANPAYEH, N. (2008). Analytical investigation and evaluation of pulse broadening factor propagating through nonlinear optical fibers (traditional and optimum dispersion compensated fibers). *Progress In Electromagnetics Research*, 79, 119–136.
- ANDERSON, D. (1983). Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fibers. *Phys. Rev. A*, 27, 3135–3145.
- ANDERSON, D. (1987). Analytic study of pulse broadening in dispersive optical fibers. *Phys. Rev. A ; Physical Review A*, 35, 184–187.
- ANDERSON, D. (1988). Approximate analytical approaches to nonlinear pulse propagation in optical fibers : A comparison. *Phys. Rev. A ; Physical Review A*, 38, 1618–1620.
- ANDERSON, D., DESAIX, M., KARLSSON, M., LISAK, M. et QUIROGA-TEIXEIRO, M. L. (1993a). Wave-breaking free pulses in nonlinear optical fibers. *J. Opt. Soc. Am. B*, 10, 1185–1190.
- ANDERSON, D., DESAIX, M., KARLSSON, M., LISAK, M. et QUIROGA-TEIXEIRO, M. L. (1993b). Wave-breaking-free pulses in nonlinear-optical fibers. *J. Opt. Soc. Am. B*, 10, 1185–1190.
- ANDERSON, D., DESAIX, M., LISAK, M. et QUIROGA-TEIXEIRO, M. L. (1992). Wave breaking in nonlinear-optical fibers. *J. Opt. Soc. Am. B*, 9, 1358–1361.
- ANDERSON, D. et LISAK, M. (1986). Propagation characteristics of frequency-chirped super-gaussian optical pulses. *Opt. Lett.*, 11, 569–571.

- ANDERSON, D., LISAK, M., BERNTSON, A. et 2 (2001). A variational approach to nonlinear evolution equations in optics. *Pramana*, 917–936.
- ANDERSON, D., LISAK, M. et REICHEL, T. (1988). Asymptotic propagation properties of pulses in a soliton-based optical-fiber communication system. *J. Opt. Soc. Am. B*, 5, 207–210.
- BALE, B. (2009). Analytic theory of parabolic pulses in dissipative systems with rapidly varying mean-zero dispersion. *Phys. Rev. E; Physical Review E*, 79.
- BALE, B. G., KUTZ, J. N. et WISE, F. (2008). Analytic theory of self-similar mode-locking. *Opt. Lett.*, 33, 911–913.
- BEECH-BRANDT, J. et SMYTH, N. (2001). Pulse evolution in nonlinear optical fibers with sliding-frequency filters. *Physical Review E*, 63, 56604.
- BÉLANGER, N. (1996). *Étude des moments de l'équation de Schrödinger non-linéaire avec perte*. Mémoire de maîtrise, Université Laval.
- BÉLANGER, P. A. (1991). Beam propagation and the ABCD ray matrices. *Opt. Lett.*, 16, 196–198.
- BÉLANGER, P.-A. (2005). On the profile of pulses generated by fiber lasers. *Opt. Express*, 13, 8089–8096.
- BÉLANGER, P.-A. (2006). On the profile of pulses generated by fiber lasers : the highly-chirped positive dispersion regime (similariton). *Opt. Express*, 14, 12174–12182.
- BÉLANGER, P. A. et BÉLANGER, N. (1995). Rms characteristics of pulses in nonlinear dispersive lossy fibers. *Optics Communications*, 117, 56–60.
- BÉLANGER, P. A., GAGNON, L. et PARÉ, C. (1989). Solitary pulses in an amplified nonlinear dispersive medium. *Opt. Lett.*, 14, 943–945.
- BÉLANGER, P.-A. et PARÉ, C. (1999). Second-order moment analysis of dispersion-managed solitons. *J. Lightwave Technol.*, 17, 445.
- BRANDT-PEARCE, M., JACOBS, I., LEE, J.-H. et SHAW, J. K. (1999). Optimal input gaussian pulse width for transmission in dispersive nonlinear fibers. *J. Opt. Soc. Am. B*, 16, 1189–1196.
- CHANG, G. (2005). Self-similar parabolic beam generation and propagation. *Phys. Rev. E; Physical Review E*, 72.

- CHEN, C., WAI, P. et MENYUK, C. (1994). Stability of passively mode-locked fiber lasers with fast saturable absorption. *Optics letters*, 19, 198.
- CHEN, S. (2005a). Chirped self-similar solutions of a generalized nonlinear schrödinger equation model. *Phys. Rev. E; Physical Review E*", 71.
- CHEN, S. (2005b). Self-similar evolutions of parabolic, hermite-gaussian, and hybrid optical pulses : Universality and diversity. *Phys. Rev. E; Physical Review E*", 72.
- CHEN, Z., TAYLOR, A. et EFIMOV, A. (2010). Soliton dynamics in non-uniform fiber tapers : analytical description through an improved moment method. *Journal of the Optical Society of America B*, 27, 1022–1030.
- CHONG, A., RENNINGER, W. H. et WISE, F. W. (2007). All-normal-dispersion femtosecond fiber laser with pulse energy above 20 nj. *Opt. Lett.*, 32, 2408–2410.
- COHEN, L. (1994). The uncertainty principle in signal analysis. *Proceedings of the IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis, 1994*. 182–185.
- CRAIG, C. C. (1936). A new exposition and chart for the pearson system of frequency curves. *Annals of Mathematical Statistics*, 7, 16–28.
- DELFYETT, P. J., FLOREZ, L., STOFFET, N., GMITTER, T. et ANDREADAKIS, N. (1992). 200-fs optical pulse generation and intracavity pulse evolution in a hybrid mode-locked semiconductor diode-laser/amplifier system. *Opt. Lett.*, 17, 670–672.
- DESAIX, M., ANDERSON, D. et LISAK, M. (1991). Variational approach to collapse of optical pulses. *J. Opt. Soc. Am. B*, 8, 2082–2086.
- DODONOV, V. V. et MAN'KO, O. V. (2000). Universal invariants of quantum-mechanical and optical systems. *J. Opt. Soc. Am. A*, 17, 2403–2410.
- DU, K.-M., HERZIGER, G., LOOSEN, P. et RÜHL, F. (1992). Coherence and intensity moments of laser light. *Optical and Quantum Electronics*, 24.
- DUDLEY, J., FINOT, C., RICHARDSON, D. et MILLOT, G. (2007). Self-similarity in ultrafast nonlinear optics. *Nature Physics*, 3, 597–603.
- ELGIN, J. N. et KELLY, S. M. J. (1993). Spectral modulation and the growth of resonant modes associated with periodically amplified solitons. *Opt. Lett.*, 18.
- FERMANN, M. (2000). Self-similar propagation and amplification of parabolic pulses in optical fibers. *Phys. Rev. Lett. ; Physical Review Letters*", 84, 6010–6013.

- FOREST, M. G., KUTZ, J. N. et MCLAUGHLIN, K. R.-T. (1999). Nonsoliton pulse evolution in normally dispersive fibers. *J. Opt. Soc. Am. B*, 16, 1856–1862.
- FREEMAN, M. O. et SALEH, B. E. A. (1988). Moment invariant in the space and frequency domains. *J. Opt. Soc. Am. A*, 5, 1073–1084.
- GEER, J. F. (1995). Rational trigonometric approximations using fourier series partial sums. *Journal of Scientific Computing*, 10, 325–356.
- HAKIM, V. et RAPPEL, W. (1992). Dynamics of the globally coupled complex Ginzburg-Landau equation. *Physical Review A*, 46, 7347–7350.
- HAUS, H. (1975a). A theory of forced mode locking. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 11, 323–330.
- HAUS, H. (1975b). Theory of mode locking with a fast saturable absorber. *Journal of Applied Physics*, 46, 3049.
- HAUS, H. A. (2000). Mode-locking of lasers. *IEEE Journal on Selected Topics in Quantum Electronics*, 6, 1173–1185.
- HAUS, H. A., FUJIMOTO, J. G. et IPPEN, E. P. (1991). Structures for additive pulse mode locking. *J. Opt. Soc. Am. B*, 8, 2068–2076.
- HAUS, H. A., IPPEN, E. P. et TAMURA, K. (1994). Additive-pulse modelocking in fiber lasers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 30, 200–208.
- HAUS, H. A., SHANK, C. V. et IPPEN, E. P. (1975). Shape of passively mode-locked laser pulses. *Optics Communications*, 15, 29–31.
- HAUS, H. A., TAMURA, K., NELSON, L. E. et IPPEN, E. P. (1995). Stretched-pulse additive pulse mode-locking in fiber ring lasers : Theory and experiment. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 31, 591–598.
- HIROOKA, T. et NAKAZAWA, M. (2004). Parabolic pulse generation by use of a dispersion-decreasing fiber with normal group-velocity dispersion. *Opt. Lett.*, 29, 498–500.
- ILDAY, F. (2004). Self-similar evolution of parabolic pulses in a laser. *Phys. Rev. Lett. ; Physical Review Letters*, 92.
- ILDAY, F. . O., BUCKLEY, J. R., LIM, H., WISE, F. W. et CLARK, W. G. (2003a). Generation of 50-fs, 5-nj pulses at 1.03 μm from a wave-breaking-free fiber laser. *Opt. Lett.*, 28, 1365–1367.

- ILDAY, F. . O., LIM, H., BUCKLEY, J. R. et WISE, F. W. (2003b). Practical all-fiber source of high-power, 120-fs pulses at 1 μm . *Opt. Lett.*, 28, 1362–1364.
- JI, X. et LÜ, B. (2003). Changes in the kurtosis parameter of super-gaussian beams passing through a spherically aberrated lens. *Optical and Quantum Electronics*, 35, 749–755.
- KALASHNIKOV, V. L., PODIVILOV, E., CHERNYKH, A., NAUMOV, S., FERNANDEZ, A., GRAF, R. et APOLONSKI, A. (2005). Approaching the microjoule frontier with femtosecond laser oscillators : theory and comparison with experiment. *New Journal of Physics*, 7, 1–16.
- KÄRTNER, F. X., KOPF, D. et KELLER, U. (1995). Solitary-pulse stabilization and shortening in actively mode-locked lasers. *J. Opt. Soc. Am. B*, 12, 486–496.
- KRUGLOV, V. (2003). Exact self-similar solutions of the generalized nonlinear schrödinger equation with distributed coefficients. *Phys. Rev. Lett. ; Physical Review Letters*”, 90.
- KRUGLOV, V. (2005). Exact solutions of the generalized nonlinear schrödinger equation with distributed coefficients. *Phys. Rev. E ; Physical Review E*”, 71.
- KRUGLOV, V., MÉCHIN, D. et HARVEY, J. (2004). Self-similar solutions of the generalized schrödinger equation with distributed coefficients. *Opt. Express*, 12, 6198–6207.
- KRUGLOV, V. I. et HARVEY, J. D. (2006). Asymptotically exact parabolic solutions of the generalized nonlinear schrödinger equation with varying parameters. *J. Opt. Soc. Am. B*, 23, 2541–2550.
- KRUGLOV, V. I., PEACOCK, A. C., DUDLEY, J. M. et HARVEY, J. D. (2000). Self-similar propagation of high-power parabolic pulses in optical fiber amplifiers. *Opt. Lett.*, 25, 1753–1755.
- LEON-GARCIA, A. (1994). *Probability and Random Processes for Electrical Engineering*. Addison Wesley.
- LIU, X. (2010). Pulse evolution without wave breaking in a strongly dissipative-dispersive laser system. *Phys. Rev. A ; Physical Review A*”, 81.
- MAHDI, B., HAIDER, A. et MEHDE, M. (2010). Analytic technique for active mode-locked fiber lasers. *Eng. and Tech. Journal*, 28, 631–638.

- MAÏMISTOV, A. I. (1993). Evolution of solitary waves which are approximately solitons of nonlinear schrödinger equation. *Soviet physics, JETP*, 77, 727–731.
- MALOMED, B. (1997). Dynamics of solitary waves in the zakharov model equations. *Phys. Rev. E; Physical Review E*, 55, 962–968.
- MARCUSE, D. (1992). Rms width of pulses in nonlinear dispersive fibers. *Lightwave Technology, Journal of*, 10, 17–21.
- MARCUSE, D., MENYUK, C. R. et HOLZLÖHNER, R. (1999). Time shift of pulses due to dispersion slope and nonlinearity. *Photonics Technology Letters, IEEE*, 11, 1611–1613.
- MARTI-PANAMENO, E., SANCHEZ-MONDRAGON, J. J. et VYSOULKH, V. A. (1994). Theory of soliton pulse forming in an actively modelocked fiber laser. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 30, 822.
- MARTÍNEZ, C., ENCINAS-SANZ, F., SERNA, J., MEJÍAS, P. M. et MARTÍNEZ-HERRERO, R. (1997). On the parametric characterization of the transversal spatial structure of laser pulses. *Optics Communications*, 139, 299–305.
- MARTINEZ, O. E., FORK, R. L. et GORDON, J. P. (1984). Theory of passively mode-locked lasers including self-phase modulation and group-velocity dispersion. *Optics letters*, 9, 156–158.
- MARTÍNEZ-HERRERO, R. et MEJÍAS, P. M. (1997). On the fourth-order spatial characterization of lser beams : new invariant parameter through abc systems. *Optics Communications*, 140, 57–60.
- MARTÍNEZ-HERRERO, R., MEJÍAS, P. M., SANCHEZ, M. et NEIRA, J. L. H. (1992). Third- and fourth-order parametric characterization of partially coherent beams propagating through abcd optical systems. *Optical and Quantum Electronics*, 24, S1021–S1026.
- MARTÍNEZ-HERRERO, R., PIQUERO, G. et MEJÍAS, P. M. (1995). On the propagation of the kurtosis parameter of general beams. *Optics Communications*, 115, 225–232.
- MCKINSTRIE, C. J., SANTHANAM, J. et AGRAWAL, G. P. (2002). Gordon-haus timing jitter in dispersion-managed systems with lumped amplification : analytical approach. *J. Opt. Soc. Am. B*, 19, 640–649.
- MOORES, J. (1993). On the ginzburg-landau laser mode-locking model with fifth-order saturable absorber term. *Optics Communications*, 96, 65–70.

- NELSON, L., JONES, D., TAMURA, K., HAUS, H. et IPPEN, E. (1997). Ultrashort-pulse fiber ring lasers. *Applied Physics B : Lasers and Optics*, 65, 277–294.
- PEARSON, K. (1916). Mathematical contributions to the theory of evolution - xix. second supplement to a memoir on skew variation. *JSTOR : Philosophical Transaction A*, 216, 429–457.
- PONOMARENKO, S. (2006). Do solitonlike self-similar waves exist in nonlinear optical media? *Phys. Rev. Lett. ; Physical Review Letters*”, 97.
- PONOMARENKO, S. (2010). Spatial optical similaritons in conservative nonintegrable systems. *Phys. Rev. A ; Physical Review A*”, 81.
- POTASEK, M. J., AGRAWAL, G. P. et PINAULT, S. C. (1986). Analytic and numerical study of pulse broadening in nonlinear dispersive optical fibers. *J. Opt. Soc. Am. B*, 3, 205–211.
- RENNINGER, W. H., CHONG, A. et WISE, F. W. (2008). Dissipative solitons in normal-dispersion fiber lasers. *Phys. Rev. A*, 77, 023814.
- ROSENBERG, C., ANDERSON, D., DESAIX, M., JOHANNISSON, P. et LISAK, M. (2007). Evolution of optical pulses towards wave breaking in highly nonlinear fibres. *Optics Communications*, 273, 272–277.
- RUEHL, A., HUNDERTMARK, H., WANDT, D., FALLNICH, C. et KRACHT, D. (2005). 0.7w all-fiber erbium oscillator generating 64 fs wave breaking-free pulses. *Opt. Express*, 13, 6305–6309.
- RUEHL, A., PROCHNOW, O., WANDT, D., KRACHT, D., BURGOYNE, B., GODBOUT, N. et LACROIX, S. (2006). Dynamics of parabolic pulses in an ultrafast fiber laser. *Opt. Lett.*, 31, 2734–2736.
- SANTHANAM, J. et AGRAWAL, G. P. (2003). Raman-induced spectral shifts in optical fibers : general theory based on the moment method. *Optics Communications*, 222, 413–420.
- SIEGMAN, A. E. et KUIZENGA, D. J. (1970). Modulator frequency detuning effects in the fm mode-locked laser. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 6, 803–808.
- SIEGMAN, A. E. et KUIZENGA, D. J. (1974). Active mode-coupling phenomena in pulsed and continuous lasers. *Opto-electronics*, 6, 43–66.

- SOTO-CRESPO, J. M., AKHMEDIEV, N. N., AFANASJEV, V. V. et WABNITZ, S. (1997). Pulse solutions in cubic-quintic complex ginzburg-landau equation in the case of normal dispersion. *Phys. Rev. E; Physical Review E*, 55, 4783–4796.
- SPENCE, D. J. et MILDREN, R. P. (2007). Mode locking using stimulated raman scattering. *Opt. Express*, 15, 8170–8175.
- TALENTI, G. (1987). Recovering a function from a finite number of moments. *Inverse Problems*, 3, 501–517.
- TAMURA, K. et NAKAZAWA, M. (1996). Dispersion-tuned harmonically mode-locked fiber ring laser for self-synchronization to an external clock. *Opt. Lett.*, 21, 1984–1986.
- TOMLINSON, W. J., STOLEN, R. H. et JOHNSON, A. M. (1985). Optical wave breaking of pulses in nonlinear optical fibers. *Opt. Lett.*, 10, 457–459.
- TSOY, E. N. et AKHMEDIEV, N. (2005). Bifurcations from stationary to pulsating solitons in the cubic-quintic complex ginzburg-landau equation. *Physics Letters A*, 343, 417–422.
- TSOY, E. N. et DE STERKE, C. M. (2006). Dynamics of ultrashort pulses near zero dispersion wavelength. *J. Opt. Soc. Am. B*, 23, 2425–2433.
- USECHAK, N. et AGRAWAL, G. (2005a). Rate-equation approach for frequency-modulation mode locking using the moment method. *Journal of the Optical Society of America B*, 22, 2570–2580.
- USECHAK, N. et AGRAWAL, G. (2005b). Semi-analytic technique for analyzing mode-locked lasers. *Optics express*, 13, 2075–2081.
- WABNITZ, S. (2007). Analytical dynamics of parabolic pulses in nonlinear optical fiber amplifiers. *Photonics Technology Letters, IEEE*, 19, 1041–1135.
- WABNITZ, S. et FINOT, C. (2008). Theory of parabolic pulse propagation in nonlinear dispersion-decreasing optical fiber amplifiers. *J. Opt. Soc. Am. B*, 25, 614–621.
- WEBER, A. G., SCHNELL, M., FISCHBECK, G. et BIMBERG, D. (1992). Generation of single femtosecond pulses by hybrid mode locking of a semiconductor laser. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 28, 2220–2223.
- WEBER, H. (1992). Propagation of higher-order intensity moments in quadratic-index media. *Optical and Quantum Electronics*, 24, S1027–S1049.

YANG, J. et FAN, D. (1999). Intensity-moments characterization of general pulsed paraxial beams with the wigner distribution function. *J. Opt. Soc. Am. A*, 16, 2488–2493.

ZAKHAROV, V. E. et SHABAT, A. B. (1972). Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Soviet physics, JETP*, 34, 62–69.

ZHURAVLEV, M. N. et OSTROVSKAYA, N. V. (2004). Dynamics of nls solitons described by the cubic-quintic ginzburg-landau equation. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 99, 427–442.

Annexe A

Définitions et propriétés des moments

Cette annexe présente différentes propriétés des moments et explicite certaines des définitions des moments.

A.1 Propriétés des moments complexes

Considérons le moment $\langle t^j \omega^k \rangle$ d'ordre $n = j + k$ défini dans le domaine temporel.

$$\langle t^j \omega^k \rangle = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} A^* t^j \left(i \frac{d}{dt} \right)^k A dt \quad (\text{A.1})$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |A(t)|^2 dt. \quad (\text{A.2})$$

En faisant la transformée de Fourier de l'éq. (A.1), les moments peuvent être définis dans le domaine spectral.

$$\langle t^j \omega^k \rangle = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(\omega) \omega^k \left(i \frac{d}{d\omega} \right)^j \tilde{A}^*(\omega) d\omega \quad (\text{A.3})$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{A}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{A.4})$$

A.1.1 Définition des moments purs dans le domaine spectral

En posant $j = 0$ dans l'éq. (A.3), les moments purs spectraux s'écrivent

$$\langle \omega^k \rangle = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^k |A(\omega)|^2 d\omega. \quad (\text{A.5})$$

Il ressort de l'éq. (A.5) que les moments purs spectraux sont bien réels.

A.1.2 Définitions récurrentes

Il est possible d'exprimer le moment $\langle t^j \omega^k \rangle$ différemment en intégrant par partie k fois la définition éq. (A.1).

$$\langle t^j \omega^k \rangle = \langle \omega^k t^j \rangle^* \quad (\text{A.6})$$

$$= \sum_{\substack{p=0 \\ p \leq j}}^k (-i)^p \frac{j!k!}{p!(j-p)!(k-p)!} \langle t^{j-p} \omega^{k-p} \rangle^*. \quad (\text{A.7})$$

L'éq. (A.7) est intéressante car elle exprime le moment $\langle t^j \omega^k \rangle$ en fonction des moments d'ordre égal ou inférieur. Pour y voir plus clair, exprimons les parties réels et imaginaires de $\langle t^j \omega^k \rangle$ en fonction de ces moments d'ordre inférieur

$$\begin{aligned} \langle t^j \omega^k \rangle_r &= \frac{1}{2} (\langle t^j \omega^k \rangle + \langle t^j \omega^k \rangle^*) \\ &= \sum_{\substack{p=1 \\ p \leq j \\ p \text{ impair}}}^k (-1)^{\frac{p+1}{2}} \frac{p!}{2} \binom{j}{p} \binom{k}{p} \langle t^{j-p} \omega^{k-p} \rangle_i - \sum_{\substack{p=2 \\ p \leq j \\ p \text{ pair}}}^k (-1)^{\frac{p}{2}} \frac{p!}{2} \binom{j}{p} \binom{k}{p} \langle t^{j-p} \omega^{k-p} \rangle_r \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} \langle t^j \omega^k \rangle_i &= -\frac{i}{2} (\langle t^j \omega^k \rangle - \langle t^j \omega^k \rangle^*) \\ &= \sum_{\substack{p=1 \\ p \leq j \\ p \text{ impair}}}^k (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{p!}{2} \binom{j}{p} \binom{k}{p} \langle t^{j-p} \omega^{k-p} \rangle_r - \sum_{\substack{p=2 \\ p \leq j \\ p \text{ pair}}}^k (-1)^{\frac{p}{2}} \frac{p!}{2} \binom{j}{p} \binom{k}{p} \langle t^{j-p} \omega^{k-p} \rangle_i \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

en fonction de ces moments d'ordre inférieur où les indices r et i dénotent respectivement les parties réels et imaginaires. Nous voyons à l'éq. (A.8) que la partie réel $\langle t^j \omega^k \rangle_r$ dépend de la partie imaginaire et la partie réelle des moments d'ordre égal ou inférieur. Il en va de même pour la partie imaginaire $\langle t^j \omega^k \rangle_i$. Il est donc possible, par substitution, d'exprimer les parties imaginaires des moments en fonction des parties réelles des moments d'ordre inférieur. Une autre façon d'écrire les parties réelles et imaginaires des moments est d'utiliser les relations de commutation et

d'anti-commutation des moments.

$$[t^j, \omega^k] = \langle t^j \omega^k \rangle - \langle \omega^k t^j \rangle = \langle t^j \omega^k \rangle - \langle t^j \omega^k \rangle^* = 2i \langle t^j \omega^k \rangle_i \quad (\text{A.10})$$

$$\{t^j, \omega^k\} = \langle t^j \omega^k \rangle + \langle \omega^k t^j \rangle = \langle t^j \omega^k \rangle + \langle t^j \omega^k \rangle^* = 2 \langle t^j \omega^k \rangle_r. \quad (\text{A.11})$$

Nous voyons à l'éq. (A.10) que les opérateurs t^j et ω^k ne commutent que pour les moments purs, c'est-à-dire lorsque $j = 0$ ou $k = 0$.

A.2 Définitions explicites des moments

Les sous-sections suivantes contiennent les définitions des moments présentées de manières explicites en terme de l'amplitude de la distribution complexe, $A(t)$ et $A^*(t)$, ainsi que sa norme et sa phase $A(t) = r(t) \exp[i\phi(t)]$. Les indices r et i dénotent respectivement les parties réelle et imaginaire. Lorsqu'aucun indice n'est présente, le moment n'a pas de partie imaginaire et est donc réel. Les dépendances temporelles des quantités, (t) , n'est pas explicitement affichées pour alléger la lecture.

A.2.1 Moments complexes

Ordre 0

Le moment d'ordre 0 est utilisé pour normalisée les moments d'ordre supérieurs.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} r^2 dt \quad (\text{A.12})$$

Ordre 1

Les moments d'ordre 1 représentent la position de la distribution dans le domaine temporel et spectral.

$$\langle t \rangle = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t |A|^2 dt = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t r^2 dt \quad (\text{A.13})$$

$$\langle \omega \rangle = \frac{i}{E} \int_{-\infty}^{\infty} A^* \frac{dA}{dt} dt = -\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} r^2 \frac{d\phi}{dt} dt \quad (\text{A.14})$$

Ordre 2

Les moments d'ordre 2 sont reliés à la largeur temporel et spectral de l'impulsion ainsi qu'à l'ampleur de la phase.

$$\langle t^2 \rangle = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |A|^2 dt = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 r^2 dt \quad (\text{A.15})$$

$$\langle t\omega \rangle_r = \Re \left\{ \frac{i}{E} \int_{-\infty}^{\infty} A^* t \frac{dA}{dt} dt \right\} = -\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} r^2 t \frac{d\phi}{dt} dt \quad (\text{A.16})$$

$$\langle t\omega \rangle_i = \Im \left\{ \frac{i}{E} \int_{-\infty}^{\infty} A^* t \frac{dA}{dt} dt \right\} = -\frac{1}{2} \quad (\text{A.17})$$

$$\langle \omega^2 \rangle = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} A^* t \frac{d^2 A}{dt^2} dt = -\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 dt \quad (\text{A.18})$$

Ordre 3

Les moments d'ordre 3 caractérisent l'asymétrie de la norme et de la phase de la distribution.

$$\langle t^3 \rangle = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t^3 |A|^2 dt = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t^3 r^2 dt \quad (\text{A.19})$$

$$\langle t^2 \omega \rangle_r = \Re \left\{ \frac{i}{E} \int_{-\infty}^{\infty} A^* t^2 \frac{dA}{dt} dt \right\} = -\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} r^2 t^2 \frac{d\phi}{dt} dt \quad (\text{A.20})$$

$$\langle t^2 \omega \rangle_i = \Im \left\{ \frac{i}{E} \int_{-\infty}^{\infty} A^* t^2 \frac{dA}{dt} dt \right\} = -\langle t \rangle \quad (\text{A.21})$$

$$\langle t\omega^2 \rangle_r = -\Re \left\{ \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} A^* t \frac{d^2 A}{dt^2} dt \right\} = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + tr^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 dt \quad (\text{A.22})$$

$$\langle t\omega^2 \rangle_i = -\Im \left\{ \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} A^* t \frac{d^2 A}{dt^2} dt \right\} = -\langle \omega \rangle \quad (\text{A.23})$$

$$\langle \omega^3 \rangle = -\frac{i}{E} \int_{-\infty}^{\infty} A^* \frac{d^3 A}{dt^3} dt = -\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} 3 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \frac{d\phi}{dt} - r^2 \frac{d^3 \phi}{dt^3} dt \quad (\text{A.24})$$

Ordre 4

La forme de l'impulsion est caractérisée en comparant les moments d'ordre 4 avec les moments d'ordre 2.

$$\langle t^4 \rangle = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t^3 |A|^2 dt = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t^4 r^2 dt \quad (\text{A.25})$$

$$\langle t^3 \omega \rangle_r = \Re \left\{ \frac{i}{E} \int_{-\infty}^{\infty} A^* t^3 \frac{dA}{dt} dt \right\} = -\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} r^2 t^3 \frac{d\phi}{dt} dt \quad (\text{A.26})$$

$$\langle t^3 \omega \rangle_i = \Im \left\{ \frac{i}{E} \int_{-\infty}^{\infty} A^* t^3 \frac{dA}{dt} dt \right\} = -\frac{3}{2} \langle t^2 \rangle \quad (\text{A.27})$$

$$\langle t^2 \omega^2 \rangle_r = -\Re \left\{ \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} A^* t^2 \frac{d^2 A}{dt^2} dt \right\} = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + t^2 r^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 dt - 1 \quad (\text{A.28})$$

$$\langle t^2 \omega^2 \rangle_i = -\Im \left\{ \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} A^* t^2 \frac{d^2 A}{dt^2} dt \right\} = -2 \langle t \omega \rangle_r \quad (\text{A.29})$$

$$\langle t \omega^3 \rangle_r = -\Re \left\{ \frac{i}{E} \int_{-\infty}^{\infty} A^* t \frac{d^3 A}{dt^3} dt \right\} = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} -3t \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \frac{d\phi}{dt} + \frac{3}{2} r^2 \frac{d^2 \phi}{dt^2} + r^2 t \frac{d^3 \phi}{dt^3} dt \quad (\text{A.30})$$

$$\langle t \omega^3 \rangle_i = -\Im \left\{ \frac{i}{E} \int_{-\infty}^{\infty} A^* t \frac{d^3 A}{dt^3} dt \right\} = -\frac{3}{2} \langle \omega^2 \rangle \quad (\text{A.31})$$

$$\langle \omega^4 \rangle = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} A^* \frac{d^4 A}{dt^4} dt \quad (\text{A.32})$$

$$= \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^2 r}{dt^2} \right)^2 - \left[r \frac{d^2 r}{dt^2} + 3 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^4 - r^2 \left(\frac{d^2 \phi}{dt^2} \right)^2 dt \quad (\text{A.33})$$

A.2.2 Moments non-linéaires

Ordre 1

Les moments d'ordre 1 non-linéaires décrivent l'asymétrie de la norme de l'impulsion dans le domaine temporel et la position dans le domaine spectral.

$$\langle Pt \rangle = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t |A|^4 dt = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t r^4 dt \quad (\text{A.34})$$

$$\langle P\omega \rangle_r = \Re \left\{ \frac{i}{E} \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 A^* \frac{dA}{dt} dt \right\} = -\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} r^4 \frac{d\phi}{dt} dt \quad (\text{A.35})$$

$$\langle P\omega \rangle_i = \Re \left\{ \frac{i}{E} \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 A^* \frac{dA}{dt} dt \right\} = 0 \quad (\text{A.36})$$

Ordre 2

Les moments d'ordre 2 non-linéaires sont reliés à la largeur temporel et spectral de l'impulsion ainsi qu'à l'ampleur de la phase.

$$\langle Pt^2 \rangle = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |A|^4 dt = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 r^2 dt \quad (\text{A.37})$$

$$\langle Pt\omega \rangle_r = \Re \left\{ \frac{i}{E} \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 A^* t \frac{dA}{dt} dt \right\} = -\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} r^4 t \frac{d\phi}{dt} dt \quad (\text{A.38})$$

$$\langle Pt\omega \rangle_i = \Im \left\{ \frac{i}{E} \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 A^* t \frac{dA}{dt} dt \right\} = -\frac{\langle P \rangle}{4} \quad (\text{A.39})$$

$$\langle P\omega^2 \rangle_r = -\Re \left\{ \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 A^* \frac{dA}{dt} dt \right\} = -\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} r^3 \frac{d^2 r}{dt^2} - r^4 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 dt \quad (\text{A.40})$$

$$\langle P\omega^2 \rangle_i = -\Re \left\{ \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 A^* \frac{dA}{dt} dt \right\} = -\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r^4}{2} \frac{d^2 \phi}{dt^2} dt \quad (\text{A.41})$$

A.3 Moments centrés

Dans cette section, les relations explicites entre les moments centrés et les moments bruts sont présentées.

A.3.1 Moments complexes

Ordre 1

Les moments centrés sont par définition nuls.

$$\langle T \rangle = 0 \quad (\text{A.42})$$

$$\langle \Omega \rangle = 0 \quad (\text{A.43})$$

Ordre 2

$$\langle T^2 \rangle = \langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2 \quad (\text{A.44})$$

$$\langle T\Omega \rangle_r = \langle t\omega \rangle_r - \langle t \rangle \langle \omega \rangle \quad (\text{A.45})$$

$$\langle \Omega^2 \rangle = \langle \omega^2 \rangle - \langle \omega \rangle^2 \quad (\text{A.46})$$

Ordre 3

$$\langle T^3 \rangle = \langle t^3 \rangle - 3\langle t^2 \rangle \langle t \rangle + 2\langle t \rangle^3 \quad (\text{A.47})$$

$$\langle T^2\Omega \rangle_r = \langle t^2\omega \rangle_r - 2\langle t\omega \rangle_r \langle t \rangle - \langle t^2 \rangle \langle \omega \rangle + 2\langle t \rangle^2 \langle \omega \rangle \quad (\text{A.48})$$

$$\langle T\Omega^2 \rangle_r = \langle t\omega^2 \rangle_r - 2\langle t\omega \rangle_r \langle \omega \rangle - \langle t \rangle \langle \omega^2 \rangle + 2\langle t \rangle \langle \omega \rangle^2 \quad (\text{A.49})$$

$$\langle \Omega^3 \rangle = \langle \omega^3 \rangle - 3\langle \omega^2 \rangle \langle \omega \rangle + 2\langle \omega \rangle^3 \quad (\text{A.50})$$

Ordre 4

$$\langle T^4 \rangle = \langle t^4 \rangle - 4\langle t^3 \rangle \langle t \rangle + 6\langle t^2 \rangle \langle t \rangle^2 - 3\langle t \rangle^4 \quad (\text{A.51})$$

$$\langle T^3 \Omega \rangle_r = \langle t^3 \omega \rangle_r - 3\langle t^2 \omega \rangle_r \langle t \rangle + 3\langle t \omega \rangle_r \langle t \rangle^2 - \langle t^3 \rangle \langle \omega \rangle - 3\langle t^2 \rangle \langle t \rangle \langle \omega \rangle + 3\langle t \rangle^3 \langle \omega \rangle \quad (\text{A.52})$$

$$\begin{aligned} \langle T^2 \Omega^2 \rangle_r &= \langle t^2 \omega^2 \rangle_r - 2\langle t^2 \omega \rangle_r \langle \omega \rangle - 2\langle t \omega^2 \rangle_r \langle t \rangle + 4\langle t \omega \rangle_r \langle t \rangle \langle \omega \rangle \\ &\quad + \langle \omega^2 \rangle \langle t \rangle^2 + \langle t^2 \rangle \langle \omega \rangle^2 - 3\langle \omega \rangle^2 \langle t \rangle^2 \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

$$\langle T \Omega^3 \rangle = \langle t \omega^3 \rangle_r - 3\langle t \omega^2 \rangle_r \langle \omega \rangle + 3\langle t \omega \rangle_r \langle \omega \rangle^2 - \langle t \rangle \langle \omega^3 \rangle - 3\langle \omega^2 \rangle \langle t \rangle \langle \omega \rangle + 3\langle t \rangle \langle \omega \rangle^3 \quad (\text{A.54})$$

$$\langle \Omega^4 \rangle = \langle \omega^4 \rangle - 4\langle \omega^3 \rangle \langle \omega \rangle + 6\langle \omega^2 \rangle \langle \omega \rangle^2 - 3\langle \omega \rangle^4 \quad (\text{A.55})$$

A.3.2 Moments non-linéaires

Ordre 1

$$\langle PT \rangle = \langle Pt \rangle - \langle P \rangle \langle t \rangle \quad (\text{A.56})$$

$$\langle P \Omega \rangle_r = \langle P \omega \rangle_r - \langle P \rangle \langle \omega \rangle \quad (\text{A.57})$$

Ordre 2

$$\langle PT^2 \rangle = \langle Pt^2 \rangle - 2\langle Pt \rangle \langle t \rangle + \langle P \rangle \langle t \rangle^2 \quad (\text{A.58})$$

$$\langle PT \Omega \rangle_r = \langle Pt \omega \rangle_r - \langle Pt \rangle \langle \omega \rangle - \langle P \omega \rangle_r \langle t \rangle + \langle P \rangle \langle t \rangle \langle \omega \rangle \quad (\text{A.59})$$

$$\langle P \Omega^2 \rangle_r = \langle P \omega^2 \rangle_r - 2\langle P \omega \rangle_r \langle \omega \rangle + \langle P \rangle \langle \omega \rangle^2 \quad (\text{A.60})$$

$$\langle P \Omega^2 \rangle_i = \langle P \omega^2 \rangle_i \quad (\text{A.61})$$

Annexe B

Détails de calculs

B.1 Résolution du système dispersif à l'ordre 4

Soit le système dispersif décrit par l'équation de propagation

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}. \quad (\text{B.1})$$

Les équations d'évolution des moments complexes centrés d'ordre 4 s'écrivent dans ce cas

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle T^4 \rangle = 4\beta_2 \langle T^3 \Omega \rangle_r \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle T^3 \Omega \rangle = 3\beta_2 \left(\frac{1}{2} + \langle T^2 \Omega^2 \rangle_r \right) \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle T^2 \Omega^2 \rangle = 2\beta_2 \langle T \Omega^3 \rangle_r \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle T \Omega^3 \rangle = \beta_2 \langle \Omega^4 \rangle_r \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle \Omega^2 \rangle = 0. \quad (\text{B.6})$$

Le système peut être intégré en commençant par l'éq. (B.6) et en remontant jusqu'à l'éq. (B.2). On obtient alors

$$\langle T^4 \rangle = \langle T^4 \rangle_0 + 4\beta_2 \langle T^3 \Omega \rangle_0 z + 6\beta_2^2 \left(\frac{1}{2} + \langle T^2 \Omega^2 \rangle_0 \right) z^2 + 4\beta_2^3 \langle T \Omega^3 \rangle_0 z^3 + \beta_2^4 \langle \Omega^4 \rangle_0 z^4 \quad (\text{B.7})$$

$$\langle T^3 \Omega \rangle = \langle T^3 \Omega \rangle_0 + 3\beta_2 \left(\frac{1}{2} + \langle T^2 \Omega^2 \rangle_0 \right) z + 3\beta_2^2 \langle T \Omega^3 \rangle_0 z^2 + \beta_2^3 \langle \Omega^4 \rangle_0 z^3 \quad (\text{B.8})$$

$$\langle T^2 \Omega^2 \rangle = \langle T^2 \Omega^2 \rangle_0 + 2\beta_2 \langle T \Omega^3 \rangle_0 z + \beta_2^2 \langle \Omega^4 \rangle_0 z^2 \quad (\text{B.9})$$

$$\langle T \Omega^3 \rangle = \langle T \Omega^3 \rangle_0 + \beta_2 \langle \Omega^4 \rangle_0 z \quad (\text{B.10})$$

$$\langle \Omega^4 \rangle = \langle \Omega^4 \rangle_0. \quad (\text{B.11})$$

Le changement de forme d'impulsion peut être exprimé par le facteur de forme κ_T à l'aide des éqs. (B.7) et (4.30c).

$$\begin{aligned} \kappa_T &= \frac{\langle T^4 \rangle}{\langle T^2 \rangle^2} \\ &= \frac{\langle T^4 \rangle_0 + 4\beta_2 \langle T^3 \Omega \rangle_0 z + 6\beta_2^2 \left(\frac{1}{2} + \langle T^2 \Omega^2 \rangle_0 \right) z^2 + 4\beta_2^3 \langle T \Omega^3 \rangle_0 z^3 + \beta_2^4 \langle \Omega^4 \rangle_0 z^4}{\left(\langle T^2 \rangle_0 + 2\beta_2 \langle T \Omega \rangle_{r0} z + \beta_2^2 \langle \Omega^2 \rangle_0 z^2 \right)^2} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Annexe C

Fonctions utiles

C.1 Fonction Gamma

Cette annexe présente quelques propriétés utiles de la fonction Gamma.

C.1.1 Définition

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad x > 0 \quad (\text{C.1})$$

Le cas où $x \leq 0$ est calculé en utilisant les propriétés suivantes.

C.1.2 Propriétés

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = x! \quad (\text{C.2})$$

$$\Gamma(nx) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} n^{nx-\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(x + \frac{k}{n}\right) \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{C.3})$$

$$\Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x\Gamma(x)\sin(\pi x)} = -\frac{\pi}{\Gamma(x+1)\sin(\pi x)} \quad (\text{C.4})$$

$$2^{2x} = \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(2x)}{\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)} \quad (\text{C.5})$$

C.1.3 Approximation asymptotique ($x \rightarrow \infty$)

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} - \frac{571}{2488320x^4} + \dots \right) \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(x)} = \sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{8x} + \frac{1}{28x^2} + \frac{5}{1024x^3} - \frac{21}{32768x^4} + \dots \right) \approx \sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{8x} \right) \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{\Gamma\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(x)} \approx \frac{1}{4\sqrt{x}} \left(\frac{8x-1}{2x-1} \right) \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x+b)} \approx 1 + \frac{(a-b)(a+b-1)}{2x} \quad (\text{C.9})$$

C.1.4 Valeurs particulières

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (\text{C.10})$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad (\text{C.11})$$

C.2 Fonction Beta

Cette annexe présente quelques propriétés utiles de la fonction Beta.

C.2.1 Définition

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad x > 0, \quad y > 0 \quad (\text{C.12})$$

$$= \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (\text{C.13})$$

Les valeurs négatives de x et y sont déterminés à partir de la relation de récurrence C.2.

C.2.2 Propriétés

$$B(x, y) = b^y (1 + b)^x \int_0^1 \frac{t^{x-1} (1 - t)^{y-1}}{(b + t)^{x+y}} dt \quad (\text{C.14})$$

Annexe D

Définition des moments de la distribution de Pearson

Dans cette annexe, les différents moments sont exprimés en fonction des paramètres des deux représentations de Pearson utilisées au cours de ce travail. Ces deux représentations sont

$$A_c(T) = \sqrt{P_c} \left(1 + \frac{a}{b}T^2\right)^{-\frac{(1+ic)}{2a}} \quad (\text{D.1})$$

$$A_{hf}(T) = \sqrt{P_c} \left(1 + \frac{a}{b}T^2\right)^{-\frac{1}{2a}} \exp(hT^2 + f|A_{hf}(T)|^2) \quad (\text{D.2})$$

Les deux représentations ne diffèrent que dans la définition de la phase. Ainsi, elles partagent les mêmes définitions des moments ne contenant pas l'opérateur Ω puisque la phase est définie dans le domaine temporel.

D.1 Relations de récurrence

La distribution de Pearson peut être réécrite sous forme différentielle en dérivant par rapport au temps les éqs. (D.1) et (D.2).

$$(aT^2 + b) \frac{d}{dT} A_c = -(1 + ic) A_c T \quad (\text{D.3})$$

$$(aT^2 + b) \frac{d}{dT} A_{hf} = -A_{hf} T + (aT^2 + b) \left(2hT + f \frac{d}{dT} |A_{hf}|^2\right) A_{hf} \quad (\text{D.4})$$

Il est facile d'obtenir des relations de récurrence entre certains moments en multipliant par l'opérateur t^j ou P^p ou en appliquant l'opérateur ω^k ou n'importe quelle combinaison de ces dernier, en multipliant par A^* et en intégrant de part et d'autre l'éq. (D.3) ou (D.4). Par exemple, appliquons l'opérateur ω de part et d'autre de

l'éq. (D.3), multiplions par A_c^* et intégrons par rapport à T . Nous obtenons alors

$$a\langle T^2\Omega^2\rangle + b\langle\Omega^2\rangle + 2ia\langle T\Omega\rangle = 1 + ic + (c - i)\langle T\Omega\rangle \quad (\text{D.5})$$

qui se sépare en partie réelle et imaginaire pour donner

$$\Re \Rightarrow a\langle T^2\Omega^2\rangle_r + b\langle\Omega^2\rangle + a = c\langle T\Omega\rangle_r + \frac{1}{2} \quad (\text{D.6})$$

$$\Im \Rightarrow 0 = \frac{c}{2} - \langle T\Omega\rangle_r. \quad (\text{D.7})$$

D.2 Calcul typique d'un moment

Considérons le calcul du moment $\langle P^p T^{j-1}\Omega\rangle_r$ avec une phase quadratique.

$$\langle P^p T^{j-1}\Omega\rangle_r = \Re \left\{ \frac{i}{E} \int_{r_-}^{r_+} |A_h|^{2p} A^* T^{j-1} \frac{dA_h}{dT} dT \right\} \quad (\text{D.8})$$

$$= -\frac{2h}{bE} \int_{r_-}^{r_+} P_c^{p+1} \left(1 + \frac{a}{b} T^2 \right)^{-\frac{(p+1)}{a}} T^j dT \quad (\text{D.9})$$

Les racines T_+ et T_- sont les valeurs de T où la distribution s'annule ; ces valeurs sont

$$T_{\pm} = \begin{cases} \pm\infty & \text{lorsque } a \geq 0 \\ \pm\sqrt{\frac{b}{|a|}} & \text{lorsque } a < 0 \end{cases}. \quad (\text{D.10})$$

Il est plus simple de réécrire l'éq. (D.9) en faisant le changement de variable suivant

$$\theta = \frac{|a|}{b} T^2 \quad d\theta = \frac{2|a|}{b} T dT \quad (\text{D.11})$$

et en exploitant la symétrie de la distribution de Pearson pour obtenir

$$\langle P^p T^{j-1}\Omega\rangle_r = -\frac{2h}{bE} P_c^{p+1} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{j+1}{2}} \begin{cases} \int_0^{+\infty} \frac{\theta^{\frac{j-1}{2}}}{(1+\theta)^{\frac{(p+1)}{a}}} d\theta & \text{lorsque } a \geq 0 \\ i(-1)^{\frac{j}{2}} \int_0^1 \frac{\theta^{\frac{j-1}{2}}}{(1-\theta)^{\frac{(p+1)}{a}}} d\theta & \text{lorsque } a < 0 \end{cases}. \quad (\text{D.12})$$

En remplaçant l'expression de l'énergie par l'éq. (D.18), on obtient

$$\langle P^p T^{j-1} \Omega \rangle_r = -\frac{2hP_c^p}{\sqrt{\pi}b} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\right)} \begin{cases} \int_0^{+\infty} \frac{\theta^{\frac{j-1}{2}}}{(1+\theta)^{\frac{(p+1)}{a}}} d\theta & \text{si } a \geq 0 \\ -(-1)^{\frac{j}{2}} \tan\left(\frac{\pi}{a}\right) \int_0^1 \frac{\theta^{\frac{j-1}{2}}}{(1-\theta)^{\frac{(p+1)}{a}}} d\theta & \text{si } a < 0 \end{cases} \quad (\text{D.13})$$

L'intégrale définit directement la fonction beta définie à l'annexe C.

$$\langle P^p T^{j-1} \Omega \rangle_r = -\frac{2hP_c^p}{\sqrt{\pi}b} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\right)} \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{a} - \frac{(j+1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{a}\right)} & \text{si } a \geq 0 \\ -(-1)^{\frac{j}{2}} \tan\left(\frac{\pi}{a}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)\Gamma\left[1 - \left(\frac{p+1}{a}\right)\right]}{\Gamma\left[\frac{j+3}{2} - \left(\frac{p+1}{a}\right)\right]} & \text{si } a < 0 \end{cases} \quad (\text{D.14})$$

Il est possible de simplifier d'avantage l'éq. (D.14) en multipliant l'argument de la fonction gamma de l'expression où $a < 0$ en utilisant la propriété éq. (C.4) de la fonction gamma.

$$\begin{aligned} \langle P^p T^{j-1} \Omega \rangle_r &= -\frac{2hP_c^p}{\sqrt{\pi}b} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{a} - \frac{(j+1)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{a}\right)} \\ &\times \begin{cases} 1 & \text{si } a \geq 0 \\ -(-1)^{\frac{j}{2}} \tan\left(\frac{\pi}{a}\right) \frac{\sin\left[\pi\left(\frac{p+1}{a}\right) - \frac{\pi}{2}(j+1)\right]}{\sin\left[\pi\left(\frac{p+1}{a}\right)\right]} & \text{si } a < 0 \end{cases} \quad (\text{D.15}) \end{aligned}$$

Cette dernière expression se simplifie davantage si en notant que m est un entier .

$$\begin{aligned} \langle P^p T^{j-1} \Omega \rangle_r &= -\frac{2hP_c^p}{\sqrt{\pi}b} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{a} - \frac{j+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{a}\right)} \\ &\times \begin{cases} 1 & \text{si } a \geq 0 \\ \tan\left(\frac{\pi}{a}\right) \cot\left[\frac{\pi}{a}(p+1)\right] & \text{si } a < 0 \end{cases} \quad (\text{D.16}) \end{aligned}$$

Il est possible de l'exprimer plus simplement en fonction du moment $\langle P^p T^j \rangle$

$$\langle P^p T^{j-1} \Omega \rangle_r = -\frac{2h}{b} \langle P^p T^j \rangle \quad (\text{D.17})$$

D.3 Moments d'ordre 0

$$E = P_c \sqrt{\frac{\pi b}{a}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)} \begin{cases} 1 & \text{lorsque } a \geq 0 \\ -i \cot\left(\frac{\pi}{a}\right) & \text{lorsque } a < 0 \end{cases} \quad (\text{D.18})$$

$$\approx \frac{P_c}{4} \sqrt{\pi b} \left(\frac{8-a}{2-a} \right) \quad (\text{D.19})$$

$$\langle P^p \rangle = P_c^p \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{a} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{a}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{a}\right) \Gamma\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\right)} \begin{cases} 1 & \text{lorsque } a \geq 0 \\ \tan\left(\frac{\pi}{a}\right) \cot\left[\frac{\pi}{a}(p+1)\right] & \text{lorsque } a < 0 \end{cases} \quad (\text{D.20})$$

$$\approx \frac{P_c^p}{\sqrt{p+1}} \left(\frac{2-a}{8-a} \right) \left[\frac{8(p+1)-a}{2(p+1)-a} \right] \quad (\text{D.21})$$

D.4 Moments d'ordre 2

D.4.1 Phase en c

$$\langle T^2 \rangle = \frac{b}{(2-3a)} \quad (\text{D.22})$$

$$\langle T\Omega \rangle_r = \frac{c}{2} \quad (\text{D.23})$$

$$\langle \Omega^2 \rangle = \frac{(1+c^2)}{4b} \left(\frac{2-a}{1+a} \right) \quad (\text{D.24})$$

$$\langle PT^2 \rangle = \frac{b\langle P \rangle}{(4-3a)} \quad (\text{D.25})$$

$$\langle PT\Omega \rangle_r = \frac{c\langle P \rangle}{4} \quad (\text{D.26})$$

$$\langle P\Omega^2 \rangle_i = \frac{c\langle P \rangle}{4b} \left(\frac{4-a}{2+a} \right) \quad (\text{D.27})$$

$$\langle P\Omega^2 \rangle_r = \frac{(3+c^2)\langle P \rangle}{8b} \left(\frac{4-a}{2+a} \right) \quad (\text{D.28})$$

$$\langle P^2T^2 \rangle = \frac{b\langle P^2 \rangle}{3(2-a)} \quad (\text{D.29})$$

$$\langle P^2T\Omega \rangle_r = \frac{c\langle P^2 \rangle}{2(3+a)} \quad (\text{D.30})$$

$$\langle P^2\Omega^2 \rangle_i = \frac{c\langle P^2 \rangle}{3b} \left(\frac{6-a}{3+a} \right) \quad (\text{D.31})$$

$$\langle P^2\Omega^2 \rangle_r = \frac{\langle P^2 \rangle}{12b} (5+c^2) \left(\frac{6-a}{3+a} \right) \quad (\text{D.32})$$

D.4.2 Phase en h et f

$$\langle T^2 \rangle = \frac{b}{(2-3a)} \quad (\text{D.33})$$

$$\langle T\Omega \rangle_r = -\frac{2h}{(2-3a)} + \frac{f}{2}\langle P \rangle \quad (\text{D.34})$$

$$\langle \Omega^2 \rangle = \frac{1}{4b} \left(\frac{2-a}{1+a} \right) + \frac{4h^2}{b(2-3a)} - \frac{hf}{b}\langle P \rangle + \frac{f^2\langle P^2 \rangle}{3b} \left(\frac{6-a}{3+a} \right) \quad (\text{D.35})$$

$$\langle PT^2 \rangle = \frac{b\langle P \rangle}{(4-3a)} \quad (\text{D.36})$$

$$\langle PT\Omega \rangle_r = -\frac{2h\langle P \rangle}{(4-3a)} + \frac{f\langle P^2 \rangle}{3} \quad (\text{D.37})$$

$$\langle P\Omega^2 \rangle_i = -\frac{h}{b}\langle P \rangle + \frac{f\langle P^2 \rangle}{3b} \left(\frac{6-a}{3+a} \right) \quad (\text{D.38})$$

$$\langle P\Omega^2 \rangle_r = \frac{3\langle P \rangle}{8b} \left(\frac{4-a}{2+a} \right) + \frac{4h^2\langle P \rangle}{b(4-3a)} - \frac{4hf}{3b}\langle P^2 \rangle + \frac{f^2\langle P^3 \rangle}{4b} \left(\frac{8-a}{4+a} \right) \quad (\text{D.39})$$

$$\langle P^2\Omega^2 \rangle_i = -\frac{4h}{3b}\langle P^2 \rangle + \frac{f\langle P^3 \rangle}{2b} \left(\frac{8-a}{4+a} \right) \quad (\text{D.40})$$

$$\langle P^2\Omega^2 \rangle_r = \frac{\langle P^2 \rangle}{12b} \left[5 \left(\frac{6-a}{3+a} \right) + \frac{16h^2}{(2-a)} \right] - \frac{hf}{b}\langle P^3 \rangle + \frac{f^2\langle P^4 \rangle}{5b} \left(\frac{10-a}{5+a} \right) \quad (\text{D.41})$$

D.4.3 Moments d'ordre 4

D.4.4 Phase en c

$$\langle T^4 \rangle = \frac{3b^2}{(2-3a)(2-5a)} \quad (\text{D.42})$$

$$\langle T^3 \Omega \rangle_r = \frac{3}{2} \frac{bc}{(2-3a)} \quad (\text{D.43})$$

$$\langle T^2 \Omega^2 \rangle_r = -\frac{1}{4} \left(\frac{1-3c^2+4a}{1+a} \right) \quad (\text{D.44})$$

$$\langle T \Omega^3 \rangle_r = \frac{3}{8} \frac{c(1+c^2)(2-a)}{b(1+a)(1+2a)} \quad (\text{D.45})$$

$$\langle \Omega^4 \rangle = \frac{3}{16} \frac{(1+c^2)(4-a^2)[4a(1+a)+1+c^2]}{b^2(1+3a)(1+2a)(1+a)} \quad (\text{D.46})$$

$$\langle PT^4 \rangle = \frac{3b^2 \langle P \rangle}{(4-3a)(4-5a)} \quad (\text{D.47})$$

$$\langle PT^3 \Omega \rangle_r = \frac{3}{4} \frac{bc \langle P \rangle}{(4-3a)} \quad (\text{D.48})$$

$$\langle PT^2 \Omega^2 \rangle_i = -\frac{c \langle P \rangle}{4} \left(\frac{1+2a}{2+a} \right) \quad (\text{D.49})$$

$$\langle PT^2 \Omega^2 \rangle_r = \frac{\langle P \rangle}{8} \frac{[3(1+c^2)-2(1+2a)]}{(2+a)} \quad (\text{D.50})$$

$$\langle PT \Omega^3 \rangle_i = \frac{3}{32} \frac{\langle P \rangle}{b} \frac{(4-a)[c^2(1-2a)-3(1+2a)]}{(2+a)(1+a)} \quad (\text{D.51})$$

$$\langle PT \Omega^3 \rangle_r = \frac{3}{32} \frac{c \langle P \rangle}{b} \frac{(c^2+4a+5)}{(1+a)} \left(\frac{4-a}{2+a} \right) \quad (\text{D.52})$$

$$\langle P \Omega^4 \rangle_i = \frac{3}{16} \frac{c \langle P \rangle}{b^2} \frac{(16-a^2)[c^2+3+2a(2+a)]}{(2+3a)(2+a)(1+a)} \quad (\text{D.53})$$

$$\langle P \Omega^4 \rangle_r = \frac{3}{64} \frac{\langle P \rangle}{b^2} \frac{(16-a^2)[4a(c^2+3)(2+a)+c^4+2c^2+9]}{(2+3a)(2+a)(1+a)} \quad (\text{D.54})$$

D.4.5 Phase en h et f

$$\langle T^4 \rangle = \frac{3b^2}{(2-3a)(2-5a)} \quad (\text{D.55})$$

$$\langle T^3 \Omega \rangle_r = -\frac{6bh}{(2-3a)(2-5a)} + \frac{3}{2} \frac{bf\langle P \rangle}{(4-3a)} \quad (\text{D.56})$$

$$\langle T^2 \Omega^2 \rangle_r = -\frac{1}{4} \left(\frac{1+4a}{1+a} \right) + \frac{12h^2}{(2-3a)(2-5a)} - \frac{6hf\langle P \rangle}{(4-3a)} + \frac{f^2\langle P^2 \rangle}{(3+a)} \quad (\text{D.57})$$

$$\begin{aligned} \langle T \Omega^3 \rangle_r = & -\frac{3}{2} \frac{h}{b} \left[\left(\frac{1-2a}{1+a} \right) + \frac{16h^2}{(2-3a)(2-5a)} \right] + \frac{9}{16} \frac{f\langle P \rangle}{b(1+a)} \left(\frac{4-a}{2+a} \right) \\ & + 18 \frac{h^2 f\langle P \rangle}{b(4-3a)} - 6 \frac{hf^2\langle P^2 \rangle}{b(3+a)} + \frac{3}{8} \frac{f^3\langle P^3 \rangle}{b(2+a)} \left(\frac{8-a}{4+a} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.58})$$

$$\begin{aligned} \langle \Omega^4 \rangle = & \frac{3}{16b^2} \left[\left(\frac{4-a^2}{1+3a} \right) \left(\frac{1+2a}{1+a} \right) + 32h^2 \left(\frac{1-2a}{1+a} \right) - \frac{256h^4}{(2-3a)(2-5a)} \right] \\ & - \frac{9}{2} \frac{hf\langle P \rangle}{b^2(1+a)} \left(\frac{4-a}{2+a} \right) - 48 \frac{h^3 f\langle P \rangle}{b^2(4-3a)} + 12 \frac{h^2 f^2\langle P^2 \rangle}{b^2(3+a)} \\ & + \frac{f^2\langle P^2 \rangle}{12b^2} \frac{(36-a^2)(4a^2+12a+11)}{(3+2a)(3+a)(1+a)} - 3 \frac{hf^3\langle P^3 \rangle}{b^2(2+a)} \left(\frac{8-a}{4+a} \right) \\ & + \frac{3}{5} \frac{f^4\langle P^4 \rangle}{b^2} \frac{(100-a^2)}{(5+3a)(5+2a)(5+a)} \end{aligned} \quad (\text{D.59})$$

$$\langle PT^4 \rangle = \frac{3b^2 \langle P \rangle}{(4-3a)(4-5a)} \quad (\text{D.60})$$

$$\langle PT^3 \Omega \rangle_r = -6 \frac{bh \langle P \rangle}{(4-3a)(4-5a)} + f \langle P^2 T^2 \rangle \quad (\text{D.61})$$

$$\langle PT^2 \Omega^2 \rangle_i = \frac{h \langle P \rangle}{(4-3a)} - \frac{f \langle P^2 \rangle}{3} \left(\frac{3+2a}{3+a} \right) \quad (\text{D.62})$$

$$\langle PT^2 \Omega^2 \rangle_r = \frac{\langle P \rangle}{8} \left[\left(\frac{1-4a}{2+a} \right) + \frac{96h^2}{(4-5a)(4-3a)} \right] - \frac{4}{3} \frac{hf \langle P^2 \rangle}{(2-a)} + \frac{3}{4} \frac{f^2 \langle P^3 \rangle}{(4+a)} \quad (\text{D.63})$$

$$\langle PT \Omega^3 \rangle_i = \frac{3}{32} \frac{\langle P \rangle}{b} \left[\frac{32h^2}{(4-3a)} - 3 \left(\frac{1+2a}{1+a} \right) \left(\frac{4-a}{2+a} \right) \right] \quad (\text{D.64})$$

$$\begin{aligned} & + 2 \frac{ahf \langle P^2 \rangle}{b(3+a)} - \frac{3}{16} \frac{f^2 \langle P^3 \rangle}{b} \left(\frac{1+2a}{2+a} \right) \left(\frac{8-a}{4+a} \right) \\ \langle PT \Omega^3 \rangle_r = & -\frac{3}{4} \frac{h}{b} \langle P \rangle \left[\frac{32h^2}{(4-5a)(2-3a)} + \left(\frac{5-2a}{2+a} \right) \right] - \frac{9}{2} \frac{hf^2 \langle P^3 \rangle}{b(4+a)} \end{aligned} \quad (\text{D.65})$$

$$\begin{aligned} & + 4 \frac{h^2 f \langle P^2 \rangle}{b(2-a)} + \frac{f \langle P^2 \rangle}{4b} \left(\frac{11+4a}{3+2a} \right) \left(\frac{6-a}{3+a} \right) + \frac{3}{5} \frac{f^3 \langle P^4 \rangle}{b(5+2a)} \left(\frac{10-a}{5+a} \right) \\ \langle P \Omega^4 \rangle_i = & \frac{3}{4} \frac{h \langle P \rangle}{b^2} \left[\frac{3(4-a)}{(1+a)(2+a)} + \frac{32h^2}{(4-3a)} \right] - \frac{3}{4} \frac{hf^2 \langle P^3 \rangle}{b^2} \left(\frac{5-2a}{2+a} \right) \left(\frac{8-a}{4+a} \right) \\ & + 24 \frac{h^2 f \langle P^2 \rangle}{b^2(3+a)} + \frac{f \langle P \rangle}{6b^2} \frac{(36-a^2)(2a^2+6a+7)}{(1+a)(3+a)(3+2a)} \\ & + \frac{6}{5} \frac{f^3 \langle P^4 \rangle}{b^2} \frac{(100-a^2)}{(5+a)(5+2a)(5+3a)} \end{aligned} \quad (\text{D.66})$$

$$\begin{aligned} \langle P \Omega^4 \rangle_r = & -\frac{3}{64} \frac{\langle P \rangle}{b^2} \left[3 \left(\frac{16-a^2}{2+a} \right) \left(\frac{1+2a}{1+a} \right) + 64h^2 \left(\frac{1-4a}{2+a} \right) + \frac{1024h^4}{(4-3a)(4-5a)} \right] \\ & - 10 \frac{hf \langle P \rangle}{b^2} \left(\frac{1+4a}{3+2a} \right) \left(\frac{6-a}{3+a} \right) - \frac{32}{3} \frac{h^3 f \langle P^2 \rangle}{b^2(2-a)} - \frac{24}{5} \frac{hf^3 \langle P^4 \rangle}{b^2(5+2a)(5+a)} \\ & + 9 \frac{h^2 f^2 \langle P^3 \rangle}{b^2(4+a)} + \frac{f^2 \langle P^3 \rangle}{32b^2} \frac{(64-a^2)(12a^2-48a-51)}{(4+a)(4+3a)(2+a)} \\ & + \frac{f^4 \langle P^5 \rangle}{12b^2} \frac{(144-a^2)}{(6+a)(3+a)(2+a)} \end{aligned} \quad (\text{D.67})$$

D.5 Moments d'ordre 6

D.5.1 Phase en c

$$\langle T^6 \rangle = \frac{15b^3}{(2-3a)(2-5a)(2-7a)} \quad (\text{D.68})$$

$$\langle T^5 \Omega \rangle_r = \frac{15}{2} \frac{cb^2}{(2-3a)(2-5a)} \quad (\text{D.69})$$

$$\langle T^4 \Omega^2 \rangle_r = \frac{3b}{(2-3a)} \left[\frac{5}{4} \frac{(1+c^2)}{(1+a)} - 2 \right] \quad (\text{D.70})$$

$$\langle T^3 \Omega^3 \rangle_r = 3c \left[\frac{5}{8} \frac{(1+c^2)}{(1+a)(1+2a)} - 1 \right] \quad (\text{D.71})$$

D.6 Moments non-linéaires d'ordre arbitraire

D.6.1 Phase en h

$$\langle T^{2m} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{b}{a} \right)^m \Gamma \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2} - m \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2} \right)} \quad (\text{D.72})$$

$$= b^m \prod_{k=1}^m \frac{(2k-1)}{[2 - (2k+1)a]} \quad (\text{D.73})$$

$$\langle T^{2m-1} \Omega \rangle_r = -\frac{2h}{\sqrt{\pi}b} \left(\frac{b}{a} \right)^m \Gamma \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2} - m \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2} \right)} \quad (\text{D.74})$$

$$= -2hb^{m-1} \prod_{k=1}^m \frac{(2k-1)}{[2 - (2k+1)a]} = \frac{\langle T\Omega \rangle_r}{\langle T^2 \rangle} \langle T^{2m} \rangle \quad (\text{D.75})$$

$$\langle T^{2m} \Omega^2 \rangle_r = -\frac{1}{\sqrt{8\pi}} \left(\frac{b}{a} \right)^m \Gamma \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma \left(\frac{1}{a} - \frac{3}{2} - m \right)}{a(1+a)\Gamma \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2} \right)} \quad (\text{D.76})$$

$$\langle T^{2m} \Omega^2 \rangle_i = -2m \langle T^{2m-1} \Omega \rangle_r \quad (\text{D.77})$$

$$\langle T^{2m-1} \Omega^3 \rangle_r = \frac{3}{4} \frac{\langle T\Omega \rangle_r \langle T^{2m} \rangle}{\langle T^2 \rangle^2 (1+a)(2-3a)} [2 - (2m-1)(1+2a)][2 - a(2m+1)] \quad (\text{D.78})$$

$$+ \frac{\langle T\Omega \rangle_r \langle T^{2m} \rangle}{4\langle T^2 \rangle^2 (1+a)} \frac{(2m+1)}{[2 - (2m+3)a]} [4(2-3a)(1+a)\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle - (2-a)]$$

$$\langle T^{2m+1} \Omega^3 \rangle_i = \frac{\langle T^{2m} \rangle}{8\langle T^2 \rangle (2-3a)} \left(\frac{1+2m}{1+a} \right) [2m(1+4a) - 3][2 - a(2m+1)] \quad (\text{D.79})$$

$$- \frac{3}{8} \frac{\langle T\Omega \rangle_r \langle T^{2m} \rangle}{\langle T^2 \rangle} \frac{(2m+1)}{[2 - (2m+3)a]} [4(2-3a)(1+a)\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle - (2-a)]$$

$$\langle PT^{2m} \rangle = b^m \langle P \rangle \prod_{k=1}^m \frac{(2k-1)}{[4 - (2k+1)a]} \quad (\text{D.80})$$

$$\langle PT^{2m-1} \Omega \rangle_r = -\frac{2h}{\sqrt{\pi}b} \left(\frac{b}{a} \right)^m \langle P \rangle \Gamma \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma \left(\frac{2}{a} - \frac{1}{2} - m \right)}{\Gamma \left(\frac{2}{a} - \frac{1}{2} \right)} \quad (\text{D.81})$$

$$= -2hb^{m-1} \langle P \rangle \prod_{k=1}^m \frac{(2k-1)}{[4 - (2k+1)a]} = \frac{\langle T\Omega \rangle_r}{\langle T^2 \rangle} \langle PT^{2m} \rangle \quad (\text{D.82})$$

$$(\text{D.83})$$

$$\langle P^p T^{2m} \rangle = b^m \langle P^p \rangle \prod_{k=1}^m \frac{(2k-1)}{[2(p+1) - (2k+1)a]} \quad (\text{D.84})$$

$$\langle P^p T^{2m-1} \Omega^2 \rangle_r = \frac{\langle P^p T^{2m} \rangle}{4\langle T^2 \rangle} \left(\frac{2m+1}{1+a} \right) \left[\frac{4(1+a)(2-3a)\langle T^2 \rangle \langle \Omega^2 \rangle - (2-a)}{2(p+1) - (2m+3)a} \right] \quad (\text{D.85})$$

$$+ \frac{\langle P^p T^{2m} \rangle}{4\langle T^2 \rangle} \frac{[2(p+1) - (2m+1)a][2(p+1) - 2m(1+2a) - 1]}{(p+1)(p+1+a)(2-3a)} \\ \langle P^p T^{2m} \Omega^2 \rangle_i = -\frac{\langle T \Omega \rangle_r}{\langle T^2 \rangle} \langle P^p T^{2m} \rangle \left(\frac{2m-p}{p+1} \right) \quad (\text{D.86})$$

D.7 Autres moments

D.7.1 Phase en c

$$\left\langle P \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right\rangle = -\frac{2}{3} \frac{\langle P^2 \rangle}{b} \left(\frac{6-a}{3+a} \right) \quad (\text{D.87})$$

$$\left\langle P \left| \frac{\partial A}{\partial t} \right|^2 \right\rangle = \frac{(1+c^2)\langle P^2 \rangle}{12b} \left(\frac{6-a}{3+a} \right) \quad (\text{D.88})$$

$$\left\langle \frac{\partial A^*}{\partial T} \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} \right\rangle_r = -\frac{3}{128} \frac{\langle P \rangle}{b^2} \frac{(1+c^2)(16-a^2)[4a(2+a)+c+3]}{(1+a)(2+a)(2+3a)} \quad (\text{D.89})$$

$$\left\langle \frac{\partial A^*}{\partial T} \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} \right\rangle_i = -\frac{3}{64} \frac{c\langle P \rangle}{b^2} \frac{(1+c^2)(16-a^2)}{(1+a)(2+a)(2+3a)} \quad (\text{D.90})$$

$$\left\langle \frac{\partial A^*}{\partial t} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \Omega \right\rangle_r = \frac{c}{16} \frac{\langle P \rangle}{b^2} \frac{(1+c^2)}{(1+a)} \left(\frac{4+a}{2+3a} \right) \left(\frac{4-a}{2+a} \right) \quad (\text{D.91})$$

$$\left\langle \frac{\partial A^*}{\partial t} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \Omega \right\rangle_i = \frac{1}{64} \frac{\langle P \rangle}{b^2} (3c^2-1) \frac{(1+c^2)}{(1+a)} \left(\frac{4+a}{2+3a} \right) \left(\frac{4-a}{2+a} \right) \quad (\text{D.92})$$

$$\left\langle \frac{\partial P}{\partial T} T \Omega^2 \right\rangle_r = \frac{(1+3c^2-2a)}{16b(1+a)} \langle P \rangle \left(\frac{4-a}{2+a} \right) \quad (\text{D.93})$$

$$\left\langle T \frac{\partial A^*}{\partial T} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \right\rangle_r = \frac{(1+c^2)}{32b} \langle P \rangle \left(\frac{1-2a}{1+a} \right) \left(\frac{4-a}{2+a} \right) \quad (\text{D.94})$$

D.7.2 Phase en h et f

$$\left\langle P \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right\rangle = -\frac{2}{3} \frac{\langle P^2 \rangle}{b} \left(\frac{6-a}{3+a} \right) \quad (\text{D.95})$$

$$\left\langle P \left| \frac{\partial A}{\partial t} \right|^2 \right\rangle = \frac{\langle P^2 \rangle}{4b} \left[\left(\frac{2-a}{3+a} \right) + \frac{16h^2}{(6-a)} \right] - \frac{hf}{b} \langle P^3 \rangle + \frac{f^2 \langle P^4 \rangle}{5b} \left(\frac{10-a}{5+a} \right) \quad (\text{D.96})$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial A^*}{\partial T} \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} \right\rangle_r &= -\frac{3}{64} \frac{\langle P \rangle}{b^2} \left[\left(\frac{16-a^2}{2+a} \right) \left(\frac{1+2a}{1+a} \right) + 128h^2 \left(\frac{1-a}{2+a} \right) + \frac{1024h^4}{(4-3a)(4-5a)} \right] \\ &+ 2 \frac{hf \langle P^2 \rangle}{b^2} \left(\frac{3-a}{3+2a} \right) \left(\frac{6-a}{3+a} \right) + \frac{24}{5} \frac{hf^3 \langle P^4 \rangle}{b^2(5+2a)} \left(\frac{10-a}{5+a} \right) \\ &- 18 \frac{h^2 f^2 \langle P^3 \rangle}{b^2(4+a)} + \frac{32}{3} \frac{h^3 f \langle P^2 \rangle}{b^2(2-a)} - \frac{3}{4} \frac{f^2 \langle P^3 \rangle (64-a^2)}{b^2(4+3a)(4+a)(2+a)} \\ &- \frac{f^4 \langle P^5 \rangle (144-a^2)}{12b^2 (6+a)(3+a)(2+a)} \end{aligned} \quad (\text{D.97})$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial A^*}{\partial T} \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} \right\rangle_i &= \frac{3}{8} \frac{h}{b^2} \langle P \rangle \left[\frac{32h^2}{(4-3a)} + \left(\frac{1-2a}{1+a} \right) \left(\frac{4-a}{2+a} \right) \right] - 12 \frac{h^2 f \langle P^2 \rangle}{b^2(3+a)} \\ &+ \frac{9}{4} \frac{hf^2 \langle P^3 \rangle}{b^2} \left(\frac{8-a}{4+a} \right) \left(\frac{1+2a}{2+a} \right) + \frac{f \langle P^2 \rangle (36-a^2)(1+6a+2a^2)}{12b^2 (1+a)(3+a)(3+2a)} \\ &- \frac{3}{5} \frac{f^3 \langle P^4 \rangle (100-a^2)}{b^2 (5+3a)(5+2a)(5+a)} \end{aligned} \quad (\text{D.98})$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial A^*}{\partial t} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \Omega \right\rangle_r &= -\frac{1}{4} \frac{h}{b^2} \langle P \rangle \left[\frac{32h^2}{(4-3a)} + \left(\frac{1-2a}{1+a} \right) \left(\frac{4-a}{2+a} \right) \right] + 8 \frac{h^2 f \langle P^2 \rangle}{b^2(3+a)} \\ &- \frac{3}{2} \frac{hf^2 \langle P^3 \rangle}{b^2(2+a)} \left(\frac{8-a}{4+a} \right) + \frac{f \langle P^2 \rangle (36-a^2)}{6b^2 (3+a)(3+2a)(1+a)} \\ &+ \frac{2}{5} \frac{f^3 \langle P^4 \rangle (100-a^2)}{b^2 (5+a)(5+2a)(5+3a)} \end{aligned} \quad (\text{D.99})$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial A^*}{\partial t} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \Omega \right\rangle_i &= \frac{\langle P \rangle}{64} \left[-\frac{(16-a^2)}{(1+a)(2+a)(2+3a)} + 64h^2 \left(\frac{1-4a}{2+a} \right) + \frac{3072h^4}{(4-3a)(4-5a)} \right] \\ &+ \frac{hf \langle P^2 \rangle}{2b^2} \left(\frac{6-11a}{3+2a} \right) \left(\frac{6-a}{3+a} \right) - \frac{24}{5} \frac{hf^3 \langle P^4 \rangle}{b^2(5+2a)} \left(\frac{10-a}{5+a} \right) \\ &- \frac{32}{3} \frac{h^3 f \langle P^2 \rangle}{b^2(2-a)} + 12 \frac{h^2 f^2 \langle P^3 \rangle}{b^2(4+a)} + \frac{5}{8} \frac{f^2 \langle P^3 \rangle (64-a^2)}{b^2(4+a)(4+3a)(2+a)} \\ &+ \frac{f^4 \langle P^5 \rangle (144-a^2)}{12b^2(6+a)(3+a)(2+a)} \end{aligned} \quad (\text{D.100})$$

$$\left\langle \frac{\partial P}{\partial T} T \Omega^2 \right\rangle_r = \frac{\langle P \rangle}{16b} \left[\frac{96h^2}{(4-3a)} + \left(\frac{1-2a}{1+a} \right) \left(\frac{4-a}{2+a} \right) \right] + 4 \frac{hf \langle P^2 \rangle}{b(3+a)} \quad (\text{D.101})$$

$$- \frac{3}{8} \frac{f^2 \langle P^3 \rangle}{b(2+a)} \left(\frac{8-a}{4+a} \right)$$

$$\left\langle T \frac{\partial A^*}{\partial T} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \right\rangle_r = \frac{\langle P \rangle}{32b} \left(\frac{4-a}{2+a} \right) \left(\frac{1-2a}{1+a} \right) + \frac{h^2 \langle P \rangle}{b(4-3a)} + \frac{2}{3} \frac{ahd \langle P^2 \rangle}{b(3+a)} \quad (\text{D.102})$$

$$- \frac{d^2 \langle P^3 \rangle}{16b} \left(\frac{1+2a}{2+a} \right) \left(\frac{8-a}{4+a} \right)$$