POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
affiliée à l'Université de Montréal

Une application de la méthode des vitesses et de l'interpolation transfinie à la modélisation de l'interaction fluide-structure d'un cylindre elliptique oscillant

DANIKA COUTURE-PECK
Département de génie mécanique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
Génie mécanique

Février 2020

© Danika Couture-Peck, 2020.

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
affiliée à l'Université de Montréal

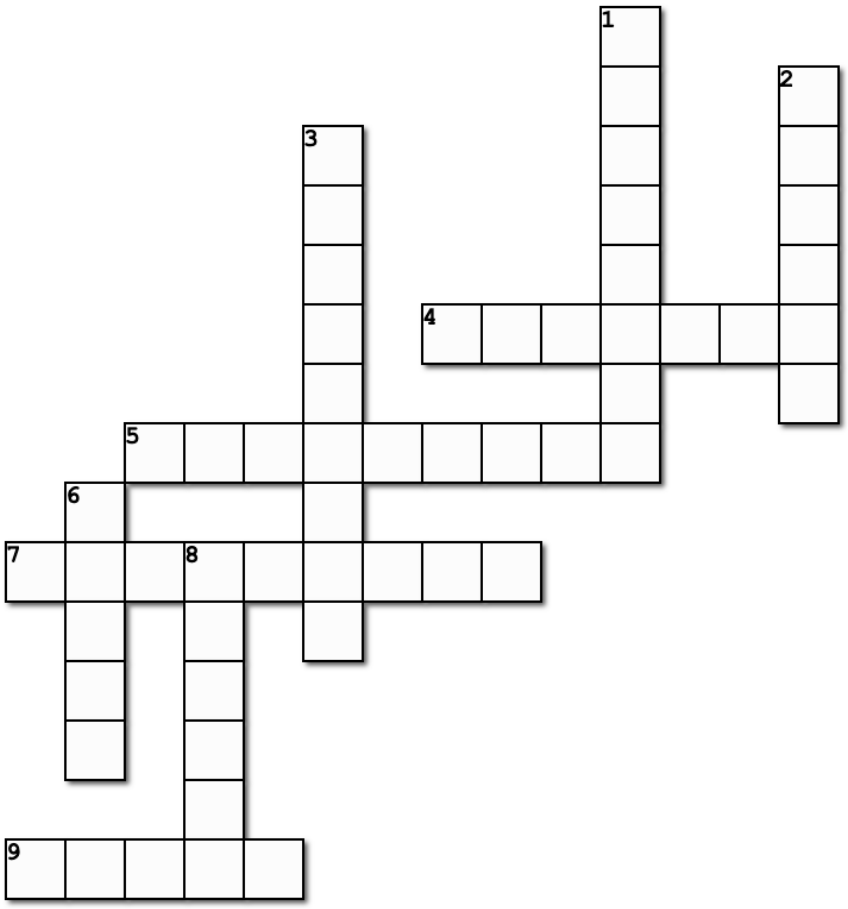
Ce mémoire intitulé :

Une application de la méthode des vitesses et de l'interpolation transfinie à la modélisation de l'interaction fluide-structure d'un cylindre elliptique oscillant

présenté par **Danika COUTURE-PECK**
en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

Stéphane ÉTIENNE, président
André GARON, membre et directeur de recherche
Ricardo CAMARERO, membre

REMERCIEMENTS



1. L'homme qui a toujours su m'épauler et me pousser à continuer, malgré les moments où la motivation n'y était pas. Merci de m'accompagner tous les jours et surtout d'accepter que je t'explique ma maîtrise de long en large même si c'est aussi clair que du chinois pour toi.

2. Mon fidèle ami qui m'a non seulement tenu compagnie à presque tous les midis, mais qui m'a aussi permis de relativiser sur la complexité de ma maîtrise en m'expliquant la sienne. Merci de me permettre de décompresser. Tu fais partie de mon équilibre.

3. Merci à ma chère colocataire avec qui j'ai passé ces deux belles années. Ce fût plaisant de discuter avec toi des hauts et des bas de la maîtrise et de rager contre LaTeX la grande majorité du temps.

4. Vous m'avez soutenu tout au long de mon parcours universitaire comme personne

d'autre ne l'a fait. Je ne pourrais vous remercier suffisamment pour tout le temps que vous avez pris à sincèrement essayer de comprendre les éléments finis... Ça viendra ! PS : Vous avez enfin fini de payer mes études !

5. Merci à celui qui a su me pousser à peaufiner mes présentations de conférence jusqu'à la toute fin pour que j'arrive à présenter un travail à la hauteur de ce que je suis capable de faire.

6. Un acolyte de bureau incroyable qui aura pris un bon 4 ans avant d'échanger plus de deux phrases avec moi. L'attente en a toutefois valu la peine ! Merci de m'avoir accompagnée tout au long de ce projet de maîtrise et d'avoir su m'aider et me faire rire aux bons moments.

7. À celui avec qui j'ai vécu ma première expérience d'enseignement, un gros merci ! J'ai toujours eu d'intéressantes discussions sur la pédagogie avec toi et tu m'as souvent amené à me questionner davantage sur ma façon de communiquer mes connaissances aux étudiants et j'en suis très reconnaissante. Merci aussi d'être toujours ouvert à ce que j'ai à amener.

8. Celui qui a toujours eu la patience de m'expliquer comment fonctionne le code, Linux, GitHub et bref tous les outils qui m'ont permis de compléter cette maîtrise. Merci aussi pour les nombreux biscuits !

9. Définitivement le meilleur directeur de recherche que j'aurais pu souhaiter avoir. Merci pour ton soutien constant et les nombreux croissants. Tu as su me pousser à toujours donner le meilleur de moi-même et je t'en suis très reconnaissante. Merci aussi pour les opportunités incroyables que tu m'as données, que ce soit la semaine de cours intensifs en Belgique, la conférence en Allemagne, ou tout simplement de travailler à tes côtés.

RÉSUMÉ

Comme le dit son nom, un problème d'interaction fluide-structure est principalement caractérisé par l'interaction entre les équations du domaine fluide et celles du domaine solide. Selon le niveau de couplage entre ces deux domaines, différents problèmes numériques peuvent survenir lorsque l'effet de masse ajoutée est important. On vise donc à développer une méthode de résolution entièrement monolithique permettant de contourner ces problèmes tout en arrivant à mieux représenter la physique du problème. Cette approche vise ainsi à éviter le coût de calcul important que représente le remaillage en déplaçant plutôt les noeuds du maillage selon le mouvement de l'objet solide dans le domaine fluide. De cette façon, la position des noeuds du maillage représente une nouvelle inconnue du problème.

En ce qui concerne le déplacement des noeuds, plusieurs méthodes sont déjà bien établies. Il y a les méthodes basées sur les équations aux dérivées partielles, dont font partie la méthode du pseudo-solide et la MMPDE, ainsi que les méthodes algébriques. Vu leur potentiel de recherche et la facilité avec laquelle celles-ci peuvent être implémentées dans un programme d'éléments finis déjà existant, les méthodes algébriques sont particulièrement intéressantes. Ce sont plus précisément IDW, ITM et ITB qui sont testées ici.

Avant de se plonger dans le développement de la méthode de résolution monolithique, IDW, ITM et ITB sont étudiées en profondeur pour arriver à conclure qu'aucune d'entre elles ne se démarquent clairement des deux autres. En effet, selon le type de mouvement étudié, la précision de chacune varie. ITM se démarque légèrement dans les cas de rotation et de déformation pure, mais sous certaines conditions seulement. En ce qui concerne la translation, toutes les méthodes semblent équivalentes. Ces tests préliminaires mettent aussi de l'avant l'importance de la méthode d'intégration utilisée. En effet, le lien est très fort entre la méthode d'intégration et la méthode d'interpolation puisque le programme intègre d'abord la position des noeuds pour ensuite interpoler la vitesse de ceux-ci. Ainsi, une méthode d'intégration comme Runge-Kutta 4 permet d'obtenir des résultats beaucoup plus précis que la méthode d'Euler et ce pour une charge d'intégration, communément appelée *workload*, équivalente. La meilleure méthode de déplacement des noeuds à implémenter peut donc varier selon le mouvement étudié ainsi que selon différentes contraintes externes, comme la nécessité ou non d'implémenter une méthode linéairement exacte ou bien la limitation de la méthode d'intégration à utiliser. Il demeure important de souligner qu'ITM et ITB se démarquent d'IDW par le fait que celles-ci sont transfinies. Cela signifie que la représentation exacte de l'objet est considérée lors du déplacement des noeuds et non seulement le nuage de points

formant celui-ci. Il s'avère d'ailleurs que ces deux méthodes convergent plus rapidement qu'IDW, c'est-à-dire qu'un moins grand nombre de sous-étapes de déplacement est nécessaire, ce qui est particulièrement utile lors de l'étude d'un mouvement imprévisible.

Le mouvement auquel on s'intéresse ici correspond au comportement chaotique d'un cylindre elliptique solide dans un écoulement fluide qui ne peut que tourner autour d'un certain centre de rotation. À la suite de plusieurs tests, le pas de temps $dt = 0.05$ avec BDF2 a été choisi comme étant suffisamment précis sans nécessiter un coût de calcul trop important. Le modèle ALE/FFI avec l'approximation 4-ITM-$\mathcal{IE}_1$ a été choisie comme étant le modèle le plus précis pour ce type de mouvement ; ce dernier n'a été appliqué qu'à une certaine partie du domaine afin de minimiser le temps de calcul sans compromettre la précision des résultats. Une fois toutes les équations nécessaires à la méthode de résolution monolithique implémentées, vérifiées et validées dans *EF8*, la simulation de l'ellipse dans un écoulement à $Re = \{200, 300, 400\}$ et où la distance entre le point de pivot et le centre géométrique de l'ellipse varie telle que $r = \{0.1, 0.12, 0.13, 0.14, 0.16\}$ a été effectuée. On y observe trois principaux types de mouvement, soit la stabilité asymétrique, qui survient à un faible nombre de Re, la phase chaotique, qui apparaît lorsque le nombre de Re est graduellement augmenté, et la stabilité symétrique qui suit lorsque le nombre de Re est encore supérieur. Cette séquence des différents types de mouvement demeure toujours le même, mais plus la distance entre le point de pivot et le centre géométrique de l'ellipse augmente, plus la transition entre ces phases est retardée.

En pratique, cette simulation peut représenter une bouée remorquée par un bateau ou bien un câble sous-marin soumis à l'écoulement de l'eau. Il est donc toujours préférable d'éviter la phase chaotique, soit celle où le mouvement de rotation de l'ellipse est tout à fait aléatoire et dont les amplitudes de rotation sont assez importantes. La phase de stabilité asymétrique est donc préférable puisque l'amplitude des angles balayés par l'ellipse est largement inférieure à la phase chaotique, mais aussi à la stabilité symétrique. Un coefficient d'amortissement servant justement à limiter le mouvement de l'ellipse dans l'écoulement a donc été ajouté aux équations. Pour $Re = 1000$ et $r = 0.16$, une combinaison qui engendre normalement un mouvement chaotique de l'ellipse si aucun amortissement n'est imposé, on observe bel et bien un retard dans la transition entre les différentes phases. L'intervalle efficace de la vitesse réduite adimensionnelle observée est donc $U_r = [0.6, 1.0]$, c'est-à-dire l'intervalle où le mouvement n'atteint pas la phase chaotique, mais où l'ellipse n'est pas non plus sur-amortie.

La méthode de résolution monolithique où la position des noeuds du maillage fait aussi partie des inconnus s'est donc avérée précise et efficace. Plusieurs tests restent à être complétés pour arriver à quantifier le gain que celle-ci représente dans le cadre de la résolution de différents

problèmes d'IFS.

ABSTRACT

A fluid-structure interaction problem, as the name says, is mainly characterized by the interaction between the equations of the fluid domain and those of the solid domain. Depending on the level of the coupling between these two domains, different numerical problems can arise when the added mass effect is significant. We therefore aim to develop an entirely monolithic resolution method able to circumvent these problems while representing more accurately the physics of the problem. This approach thus aims to avoid the significant computation cost that the remeshing represents by rather moving the nodes of the mesh according to the motion of the solid object in the fluid domain. Hence, the position of the nodes of the mesh represents a new unknown of the problem.

With regard to the displacement of the nodes, several methods are already well established. There are the methods based on partial differential equations, which include the pseudo-solid method and the MMPDE, as well as the algebraic methods. Given their research potential and the ease with which these can be implemented in an already existing finite element program, algebraic methods are particularly interesting. More specifically, IDW, TMI and TBI are the ones tested here.

Before diving into the development of the monolithic resolution method, IDW, TMI and TBI are studied in greater depth to conclude that neither of them clearly stands out from the other two. Indeed, depending on the type of motion studied, the precision of each varies. TMI slightly stands out in the case of pure rotation and deformation, but only under certain conditions. As far as translation is concerned, all the methods seem to be equivalent. These preliminary tests also highlight the importance of the integration method used. Indeed, the link is very strong between the integration method and the interpolation method since the program first integrates the position of the nodes and then interpolates their velocity. Thus, an integration method like Runge-Kutta 4 makes it possible to obtain much more precise results than the Euler method for an equivalent workload. The best method for the displacement of the nodes to be implemented can therefore vary according to the motion studied as well as according to various external constraints, such as the need or not to implement a linearly exact method or the limitation of the integration method used. It is important to emphasize that TMI and TBI differ from IDW since they are transfinite. This means that the exact representation of the object is considered when moving the nodes and not only the cloud of points forming it. It also turns out that these two methods converge faster than IDW, that is to say that a smaller number of displacement sub-steps is necessary,

which is particularly useful for the study of highly irregular motion.

The motion we are looking into here corresponds to the chaotic behavior of a solid elliptical cylinder in a fluid flow which can only rotate around a certain pivot. Following several tests, the time step of $dt = 0.05$ with BDF2 was chosen as being sufficiently precise without requiring an important computation cost. The ALE/FFI model with the 4-TMI-$\mathcal{IE}_1$ approximation was chosen as being the most precise model for this type of motion; it has only been applied to a certain part of the domain in order to minimize the computation time without compromising the accuracy of the results. Once all the equations needed for the monolithic resolution method have been implemented, verified and validated in *EF8*, the simulation of the ellipse in a flow at $Re = \{200, 300, 400\}$ and where the distance between the pivot point and the geometric center of the ellipse varies as $r = \{0.1, 0.12, 0.13, 0.14, 0.16\}$ was completed. Three main types of motion have been identified: asymmetric stability, which occurs at a low Re number, the chaotic phase, which appears when the Re number is gradually increased, and symmetrical stability which follows when the Re number is even higher. This motion sequence always remains the same. However, as the distance between the pivot point and the geometric center of the ellipse increases, the transition between these phases is delayed.

In practice, this simulation can represent a buoy towed by a boat or a riser subjected to the flow of water. It is therefore always preferable to avoid the chaotic phase, that is, where the rotational motion of the ellipse is completely random and where amplitudes of rotation are quite large. The asymmetric stability phase is therefore preferable since the amplitude of the angles swept by the ellipse is much lower than in the chaotic phase, but also less than in the symmetrical stability. A damping coefficient which precisely serves to limit the motion of the ellipse in the flow has then been added to the equations. For $Re = 1000$ and $r = 0.16$, a combination which normally generates a chaotic motion of the ellipse if no damping is imposed, we do observe a delay in the transition between the different phases. The effective interval of the dimensionless reduced speed observed is thus $U_r = [0.6, 1.0]$, i.e. the interval where the motion does not reach the chaotic phase, but where the ellipse is not overdamped either.

The monolithic resolution method where the position of the nodes of the mesh are also a part of the unknowns has proved to be precise and effective. Several tests remain to be completed in order to quantify the gain that it represents in the context of the resolution of various FSI problems.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS iii

RÉSUMÉ v

ABSTRACT viii

TABLE DES MATIÈRES x

LISTE DES TABLEAUX xiii

LISTE DES FIGURES xv

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS xxi

LISTE DES ANNEXES xxii

CHAPITRE 1 INTRODUCTION 1
- 1.1 Éléments de la problématique 1
  - 1.1.1 Interaction fluide-structure 1
  - 1.1.2 Déplacement des noeuds du maillage 3
- 1.2 Objectifs de recherche 3
- 1.3 Plan du mémoire 4

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE 5
- 2.1 Interaction fluide-structure 5
- 2.2 Maillages mobiles 7
  - 2.2.1 Méthodes basées sur les équations aux dérivées partielles 8
  - 2.2.2 Méthodes algébriques 10

CHAPITRE 3 MATHÉMATIQUES DE L'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE 18
- 3.1 Survol des éléments finis 18
  - 3.1.1 Formulation variationnelle 18
  - 3.1.2 Fonctions d'interpolation 20
  - 3.1.3 Schéma d'intégration en temps 21
- 3.2 Formulation Euler-Lagrange (ALE) des équations de Navier-Stokes 22
  - 3.2.1 Cinématiques lagrangienne et eulérienne de l'écoulement 22

3.2.2 Cinématique lagrangienne et eulérienne du domaine mobile 23
3.2.3 Cinématique eulérienne-lagrangienne de l'écoulement 24
3.2.4 Synthèse 25
3.3 Équation de conservation du moment angulaire 26
3.4 Interpolation de la position des noeuds du maillage 28
3.4.1 Interpolation sur une infinité de points et interpolation transfinie . . 28
3.4.2 Généralisation des différentes méthodes d'interpolation algébriques . 29
3.4.3 Modélisation de la dynamique du maillage 30
3.5 Formulation faible monolithique de l'interaction fluide-structure 38
3.5.1 Dynamique du fluide 38
3.5.2 Dynamique des solides 40
3.5.3 Cinématique des frontières du maillage 40
3.5.4 Cinématique des noeuds du maillage 42
3.5.5 Synthèse 43
3.6 Équations adimensionnelles 43
3.6.1 Adimensionnalisation des équations de Navier-Stokes 43
3.6.2 Adimensionnalisation des équations de la dynamique des solides . . . 44

CHAPITRE 4 VÉRIFICATION ET VALIDATION 47
4.1 Vérification 47
4.1.1 Écoulement stationnaire 48
4.1.2 Écoulement transitoire 50
4.1.3 Méthodologie du calcul des forces exercées par le fluide 60
4.2 Validation 64
4.2.1 Vortex de Föppl 65
4.2.2 Allées de Von Karman 67
4.2.3 Cavité entraînée 70

CHAPITRE 5 COMPARAISONS ET APPLICATION 73
5.1 Comparaison des méthodes 73
5.1.1 Méthodologie de comparaison 73
5.1.2 Étude des différents mouvements 74
5.2 Application du maillage mobile 78
5.2.1 Ellipse chaotique de Weymouth 78
5.2.2 Sensibilité de la solution 79
5.2.3 Application à l'ellipse de Weymouth [1] 91

CHAPITRE 6 CONCLUSION 107
6.1 Synthèse des travaux 107
6.2 Limitations de la solution proposée 108
6.3 Améliorations futures 109

RÉFÉRENCES 110

ANNEXES 115

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1 Fonctions à bases radiales à support global, tiré de [2], où $x = ||\boldsymbol{x}||$. 14

Tableau 2.2 Fonctions à bases radiales à support compact, tiré de [3], où $\xi = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}||/R$, $R > 0$ étant la rayon du support compact 14

Tableau 3.1 Résolution de l'équation de la chaleur à l'aide de la méthode des ÉF 20

Tableau 3.2 Composition des formules d'interpolation de IDW, ITM et ITB . . . 30

Tableau 3.3 Composition de la formule d'interpolation de RBF 30

Tableau 3.4 Changements de variable pour l'adimensionnalisation de l'équation de Navier-Stokes sous forme ALE. Une variable dimensionnelle correspond à la multiplication de sa variable adimensionnelle et de son échelle dimensionnelle. 44

Tableau 3.5 Changements de variable pour l'adimensionnalisation de l'équation de la dynamique du solide. Une variable dimensionnelle correspond à la multiplication de sa variable adimensionnelle et de son échelle dimensionnelle. 45

Tableau 3.6 Correspondance entre les paramètres clés dimensionnels et leur équivalent adimensionnel 46

Tableau 4.1 Détails du test de vérification de la discrétisation en espace de *EF8* . 48

Tableau 4.2 Normes de l'erreur en vitesse et en pression pour un champ de vitesse linéaire et une pression constante ($Re = 1$) 50

Tableau 4.3 Détails du test de vérification de la discrétisation en temps de *EF8* . 53

Tableau 4.4 Taux de convergence des différents schémas d'intégration temporelle BDF selon l'ordre de la condition initiale $u_0(t)$ 53

Tableau 4.5 Détails du test de vérification de la discrétisation en temps de *EF8* par rapport à la solution manufacturée 54

Tableau 4.6 Détails du test de vérification de l'interaction entre les discrétisations en espace et en temps de *EF8* 57

Tableau 4.7 Détails du test de vérification du calcul des forces par la méthode des multiplicateurs de Lagrange 62

Tableau 4.8 Comparaison des dimensions relatives des vortex de Föppl et du coefficient de traînée du cylindre provenant de différentes références . . 67

Tableau 4.9 Comparaison des coefficients de forces et du nombre de Strouhal provenant de différentes références. La valeur C_D correspond à la valeur moyenne du coefficient et la valeur ΔC_D correspond à la demi-amplitude de l'oscillation du coefficient. 70
Tableau 4.10 Comparaison de la vitesse u, de la pression p et de la vorticité ω le long de la ligne centrale verticale du domaine 72
Tableau 4.11 Comparaison de la vitesse v, de la pression p et de la vorticité ω le long de la ligne centrale horizontale du domaine 72
Tableau 5.1 Amplitude de θ et d'ω permettant de calculer l'aire de la plus petite boîte contenant la solution pour différentes dimensions de la zone mobile du maillage. Tous les maillages sont composés d'environ 23 000 noeuds. 81
Tableau 5.2 Amplitude de θ et d'ω permettant de calculer l'aire de la plus petite boîte contenant la solution pour le maillage M_1. Le pourcentage (%) de différence est toujours calculé avec l'aire de la boîte du dt supérieur. 84
Tableau 5.3 Amplitude de θ et d'ω permettant de calculer l'aire de la plus petite boîte contenant la solution pour le maillage M_2. Le pourcentage (%) de différence est toujours calculé avec l'aire de la boîte du dt supérieur. 84
Tableau 5.4 Amplitude de θ et d'ω permettant de calculer l'aire de la plus petite boîte contenant la solution pour le maillage M_3. Le pourcentage (%) de différence est toujours calculé avec l'aire de la boîte du dt supérieur. 85
Tableau 5.5 Amplitude de θ et d'ω permettant de calculer l'aire de la plus petite boîte contenant la solution pour ITB et ITM et pour différentes valeurs de k 89
Tableau 5.6 Amplitude de θ et d'ω permettant de calculer l'aire de la plus petite boîte contenant la solution pour les interpolants géométriques P_1 et P_2 et pour ITB et ITM 91
Tableau C.1 Normes de l'erreur en vitesse et en pression pour un champ de vitesses linéaire et une pression constante ($Re = 1$) pour un domaine ayant subi une rotation de 45° dans le sens anti-horaire 117
Tableau C.2 Normes de l'erreur en vitesse et en pression pour un champ de vitesses linéaire et une pression constante ($Re = 10$) 117
Tableau C.3 Normes de l'erreur en vitesse et en pression pour un champ de vitesses linéaire et une pression constante ($Re = 10$) pour un domaine ayant subi une rotation de 45° dans le sens anti-horaire 118

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 Schématisation des différents problèmes pouvant survenir selon le niveau de couplage utilisé pour la résolution des problèmes d'IFS, adapté de [4] 2

Figure 2.1 Les trois domaines à résoudre dans le cas d'un problème d'IFS selon Dettmer et Perić [5] 6

Figure 2.2 Schématisation de l'interpolation au point P par la méthode IDW . . 11

Figure 2.3 Interpolation de la position des noeuds d'un maillage (zone grisée) à partir d'un nuage de points $E = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_8\}$ formant l'objet solide placé dans un domaine fluide Ω 12

Figure 2.4 Triangulation d'un polygone étoilé 16

Figure 3.1 Comparaison entre le domaine Ω à résoudre avec la méthode de Ritz et avec la méthode des ÉF, où les domaines élémentaires Ω_e sont considérés 19

Figure 3.2 Schématisation de la discrétisation en temps pour des formules BDF d'ordres différents 21

Figure 3.3 Analogie entre la seconde loi de Newton et l'équation de Navier-Stokes 22

Figure 3.4 Cinématique de Lagrange pour un domaine se déformant entre t_0 et t_1 où la zone grisée représente le fluide et le trait plein le domaine étudié 23

Figure 3.5 Schématisation de la rotation d'un solide 3D en rotation autour d'un axe normal au plan $x \circ y$ 27

Figure 3.6 Interpolation à partir d'un nuage de points (gauche), à partir d'un maillage d'éléments finis (milieu) et à partir d'une courbe continue (droite) formant l'objet solide placé dans un domaine fluide maillé (zone grisée) 29

Figure 3.7 Schématisation du domaine fluide Ω au sein duquel 2 solides ($s = 2$) sont en mouvement. Seule la zone grisée est maillée. 32

Figure 3.8 Comparaison des formulations temporelles et de la formulation de forme quant au déplacement d'un solide. Les flèches grises montrent les déplacements intermédiaires entre la position initiale et finale de l'objet solide alors que la flèche noire montre le déplacement en une seule étape du solide de sa position initiale à sa position finale à l'aide de la méthode $\mathcal{IE}_1$. 37

Figure 3.9 Schématisation du mouvement d'un solide par transformation générale. À droite on observe la translation d'un carré entre $\mu = 0$ et $\mu = 1$ et à gauche la rotation d'une ellipse où les noeuds à la frontière se déplacent linéairement sur leur rayon entre $\mu = 0$ et $\mu = 1$. 42
Figure 4.1 Maillage triangulaire composé de 22 éléments et de 57 noeuds 49
Figure 4.2 Schématisation des conditions u, v, p imposées aux frontières (Γ) du domaine fluide (Ω) pour la vérification de la résolution de la discrétisation en espace 49
Figure 4.3 Normes de l'erreur en vitesses (gauche) et en pression (droite) pour un champ de vitesses d'ordre élevé et une pression linéaire 51
Figure 4.4 Maillage triangulaire composé de 70 éléments et de 163 noeuds . . . 52
Figure 4.5 Schématisation des conditions v, p et de la condition initiale $u_0(t)$ imposées aux frontières (Γ) du domaine fluide (Ω) pour la vérification de la résolution en temps pour quatre cas différents 52
Figure 4.6 Schématisation des conditions $\mathbf{u}$ et $\mathbf{X}$ imposées aux frontières (Γ) du domaine fluide (Ω) pour la vérification de la solution manufacturée de [6]. Où aucune condition limite n'est spécifiée, ce sont les conditions naturelles qui sont appliquées. 54
Figure 4.7 Normes de l'erreur en vitesses (gauche) et en pression (droite) pour la solution manufacturée 2D de Hay et al. [6]. Les pentes de référence P sont aussi présentées à titre de comparaison. 55
Figure 4.8 Lignes de courant superposées au champ de pression à $t = 0.2$ (gauche) et à $t = 1.1$ (droite) obtenus à l'aide d'un maillage mobile 56
Figure 4.9 Maillage mobile à $t = 0.0$ (gauche) et à $t = 1.1$ (droite) 56
Figure 4.10 Schématisation des conditions u, v, p imposées aux frontières (Γ) du domaine fluide (Ω) pour la vérification combinée de la résolution de la discrétisation en espace et en temps 58
Figure 4.11 Normes de l'erreur en vitesses et en pression au temps final en fonction du pas de temps (gauche) et de la taille des éléments du maillage (droite) selon différents raffinement pour BDF1 59
Figure 4.12 Exemple de problème 1D à 5 DDL pour la résolution des équations de Navier-Stokes par éléments finis 60
Figure 4.13 Maillage triangulaire formé de 428 éléments et de 908 noeuds 62
Figure 4.14 Schématisation des conditions u, v imposées aux frontières (Γ) du domaine fluide (Ω) pour la vérification du calcul des forces 62

Figure 4.15 Force dans la direction x en fonction du temps exercée par le fluide sur le cylindre et calculée sur un maillage de 428 éléments (gauche) et de 1712 éléments (droite) pour différents nombres de points d'intégration de Gauss 63
Figure 4.16 Force dans la direction y exercée par le fluide sur le cylindre en fonction du temps calculée sur un maillage de 428 éléments (gauche) et de 1712 éléments (droite) pour différents nombres de points d'intégration de Gauss 64
Figure 4.17 Schématisation des conditions u, v imposées aux frontières (Γ) du domaine fluide (Ω) pour la validation des vortex Föppl 65
Figure 4.18 Dimensions des vortex de Föppl créés par un écoulement à $Re = 30$ autour d'un cylindre circulaire. Celles-ci sont visualisées en superposant les lignes de courant à la vorticité en z. 66
Figure 4.19 Maillage triangulaire formé de 2694 éléments et de 5525 noeuds . . . 67
Figure 4.20 Champs des vitesses en x (haut), en y (milieu) et de la pression (bas) pour les allées de Von Karman créées par l'écoulement fluide autour d'un cylindre circulaire 68
Figure 4.21 Champ de pression et vecteurs de force exercée par le fluide sur le cylindre calculés via les multiplicateurs de Lagrange pour les allées de Von Karman créées par l'écoulement fluide autour d'un cylindre circulaire 69
Figure 4.22 Schématisation des conditions u, v, p imposées aux frontières (Γ) du domaine fluide (Ω) pour la validation de la cavité entraînée 71
Figure 4.23 Lignes de courant (gauche), vorticité en z (milieu) et champ de pression (droite) pour la cavité entraînée 71
Figure 5.1 Schéma de la géométrie de base pour la translation et la rotation où le rectangle hachuré est le solide placé à l'intérieur du domaine fluide 75
Figure 5.2 Géométrie de base pour le test à déformation constante (gauche) et pour le test pour lequel l'intensité de déformation varie (droite) et où le rectangle hachuré correspond au solide placé à l'intérieur du domaine fluide 76
Figure 5.3 Maillage déformé par ITM jumelé à Runge-Kutta 4 pour $k = 5$ et pour une charge d'intégration de 240, tiré de [7] 77
Figure 5.4 Schéma du cylindre elliptique rigide à une degré de liberté dans un écoulement fluide de vitesse U adapté de [1] 78

Figure 5.5 Définition de la plus petite boîte (en pointillé) pouvant contenir le mouvement de l'ellipse 80
Figure 5.6 Schéma de la réduction progressive de la zone mobile du maillage (zone hachurée) à l'intérieur du domaine complet. Le reste du domaine est composé d'un maillage fixe 81
Figure 5.7 Évolution du temps de calcul en fonction du nombre de degrés de liberté qui est directement relié à la grandeur de la zone mobile du domaine 82
Figure 5.8 Schéma de la méthodologie utilisée pour étudier l'influence du raffinement du maillage et du pas de temps sur la solution obtenue 83
Figure 5.9 Vitesse de rotation ω en fonction de l'angle de rotation θ pour différents dt pour le maillage grossier M_1 (gauche), pour le maillage normal M_2 (centre) et pour le maillage fin M_3 (droite) 84
Figure 5.10 Évolution de l'aire de la plus petite boîte contenant le mouvement de l'ellipse en fonction du dt pour les trois maillages testés 85
Figure 5.11 Évolution du minimum du f_{SS} en fonction du temps de la simulation pour une rotation rigide avec le modèle ALE/FTD (gauche) et une transformation générale avec le modèle ALE/FFI (droite) 87
Figure 5.12 Zoom sur le maillage autour de l'ellipse en rotation où le paramètre d'intégration est le temps (gauche) et le paramètre de forme (droite) 88
Figure 5.13 Évolution du $\min(f_{ss})$ en fonction de l'angle de rotation θ de l'ellipse pour les différentes méthodes d'interpolation 90
Figure 5.14 Schématisation des conditions u, v imposées aux frontières (Γ) du domaine fluide (Ω) pour l'étude de la sensibilité du comportement de l'ellipse en fonction de Re et du ratio r/L 92
Figure 5.15 Vitesse de rotation ω en fonction de l'angle de rotation θ pour $Re = \{200, 300, 400\}$ et $r/L = \{0.1, 0.12, 0.13, 0.14, 0.16\}$ 93
Figure 5.16 Angle de rotation θ en fonction du temps pour $Re = \{200, 300, 400\}$ et $r/L = \{0.1, 0.12, 0.13, 0.14, 0.16\}$ 94
Figure 5.17 Champ de vorticité (gauche) et champ de pression et vecteurs du champ de vitesse (droite) pour un écoulement à $Re = 200$ avec $r/L = 0.1$ de type stabilité asymétrique à $\bar{t} = \{13.5, 15.5, 17.5\}$ (de haut en bas) 95
Figure 5.18 Champ de vorticité (gauche) et champ de pression et vecteurs du champ de vitesse (droite) pour un écoulement à $Re = 400$ avec $r/L = 0.1$ de type stabilité symétrique à $\bar{t} = \{9.5, 11, 13\}$ (de haut en bas) . 96

Figure 5.19 Champ de vorticité (gauche) et champ de pression et vecteurs du champ de vitesse (droite) pour un écoulement à $Re = 300$ avec $r/L = 0.13$ de type chaotique à $\bar{t} = \{15.5, 30.5, 72.5\}$ (de haut en bas) . . . 97
Figure 5.20 Vitesse de rotation ω en fonction de l'angle de rotation θ pour $Re = 100, 125, 150, 175, ...400$ et $r/L = 0.13$ . . . 98
Figure 5.21 Angle de rotation θ en fonction du temps pour $Re = \{100, 125, 150,$-$175, ...400\}$ et $r/L = 0.13$ . . . 99
Figure 5.22 Schématisation de la méthodologie pour les simulations à pas de temps adaptatif . . . 100
Figure 5.23 Vitesse de rotation ω en fonction de l'angle de rotation θ pour $Re = 200$ et $Re = 400$ avec $r/L = 0.13$ avec un pas de temps adaptatif en fonction de l'erreur . . . 101
Figure 5.24 Schématisation des conditions u, v et $\mathbf{T}$ imposées aux frontières (Γ) du domaine fluide (Ω) pour l'étude de l'influence du coefficient d'amortissement . . . 103
Figure 5.25 Vitesse de rotation ω en fonction de l'angle de rotation θ pour $Re = 1000$ et $r/L = 0.16$ pour $U_r = \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 2.0, 3.0\}$ . . . 104
Figure 5.26 Angle de rotation θ en fonction du temps pour $U_r = \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8,$-$1.0, 2.0, 3.0\}$ et $r/L = 0.13$ . . . 106
Figure A.1 Correction de la grille de mots croisés des remerciements . . . 115
Figure C.1 Normes de l'erreur en vitesses et en pression pour un champs de vitesses quadratique et une pression linéaire pour un domaine ayant subi une rotation de 45° dans le sens anti-horaire . . . 118
Figure D.1 Normes de l'erreur en vitesses et en pression au temps final en fonction du pas de temps (gauche) et de la taille des éléments du maillage (droite) selon différents raffinement pour BDF2 . . . 119
Figure D.2 Normes de l'erreur en vitesses et en pression au temps final en fonction du pas de temps (gauche) et de la taille des éléments du maillage (droite) selon différents raffinement pour BDF3 . . . 120
Figure E.1 Maillage composé de 11 159 éléments, de 22 547 noeuds et où tous les noeuds sont mobiles . . . 121
Figure E.2 Maillage composé de 12 115 éléments, de 24 445 noeuds et où un sous-domaine est mobile . . . 122
Figure E.3 Maillage composé de 11 641 éléments, de 23 491 noeuds et où un sous-domaine est mobile . . . 122

Figure E.4 Maillage composé de 11 415 éléments, de 23 039 noeuds et où un sous-domaine est mobile 123
Figure F.1 Vitesse de rotation ω en fonction de l'angle de rotation θ pour le maillage entièrement mobile (haut-gauche), pour une grande zone de maillage mobile (haut-droite), pour une zone de maillage mobile de taille moyenne (bas-gauche) et pour une petite zone mobile (bas-droite) 124
Figure G.1 Vitesse de rotation ω en fonction de l'angle de rotation θ pour les noeuds déplacés à l'aide de la méthode ITB avec $k = 4$ (haut-gauche) et $k = 5$ (haut-droite) et ceux déplacés à l'aide de la méthode ITM avec $k = 4$ (bas-gauche) et $k = 5$ (bas-droite) 125
Figure H.1 Vitesse de rotation ω en fonction de l'angle de rotation θ pour les noeuds déplacés à l'aide de la méthode ITB en utilisant l'interpolant géométrique P_1 (haut-gauche) et P_2 (haut-droite) et ceux déplacés à l'aide de la méthode ITM en utilisant l'interpolant géométrique P_1 (bas-gauche) et P_2 (bas-droite) 126
Figure I.1 Schéma des vortex dans le sillage de l'ellipse à haut Re 127

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

IFS	Interaction Fluide-Structure
EF8	Programme d'Éléments Finis - 8e version
VIV	Vortex Induced Vibrations
ÉF	Éléments finis
VMS	Variational Multiscale Stabilized
IB	Immersed Boundary
ALE	Arbitrary Lagrangian Eulerian
FMALE	Fixed Mesh Arbitrary Lagrangian Eulerian
CUTFEM	Méthode des éléments finis coupés
EDP	Équations aux Dérivées Partielles
MMPDE	Moving Mesh Partial Differenciation Equation
EDO	Équations aux Dérivées Ordinaires
RBF	Radial Basis Function method
IDW	Inverse Distance-Weighting method
ITM	Interpolation Transfinie en Moyenne
DDL	Degré de liberté
BDF	Backward Differentiation Formula
ITB	Interpolation Transfinie Barycentrique
FTD	Formulation Temporelle Différentielle
FTI	Formulation Temporelle Intégrale
RK4	Runge-Kutta d'ordre 4
FFFI	Formulation de Forme Intégrale
V&V	Vérification et Validation
AIAA	American Institute of Aeronautics and Astronautics
BDIM	Boundary Data Immersion Method

LISTE DES ANNEXES

Annexe A Correction des remerciements 115

Annexe B Méthode de vérification par solution manufacturée 116

Annexe C Vérification complémentaire de la résolution d'un écoulement stationnaire par *EF8* 117

Annexe D Vérification combinée de la discrétisation en espace et en temps pour $BDF2$ et $BDF3$ 119

Annexe E Maillages où la zone de maillage mobile varie 121

Annexe F Graphiques du mouvement de l'ellipse selon les différentes dimensions de la zone mobile du maillage 124

Annexe G Graphiques du mouvement de l'ellipse selon les différentes valeurs de k pour ITB et ITM 125

Annexe H Graphiques du mouvement de l'ellipse selon les différents interpolants géométriques pour ITB et ITM 126

Annexe I Modélisation de la condition limite naturelle 127

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Les problèmes d'interaction fluide-structure (IFS) sont omniprésents en ingénierie. On peut d'abord penser à l'écoulement du sang dans les artères et les veines du corps humain ou bien à l'interaction entre la houle des vagues et les plateformes pétrolières. Il y a aussi l'exemple classique de l'écoulement de l'air autour d'un avion qui crée les forces de portance et de traînée sur celui-ci. Dans tous ces problèmes, le mouvement du fluide a une influence sur le mouvement de la structure et vice-versa. La dynamique de ces deux domaines physiques doit donc être prise en compte lors de la modélisation de ces phénomènes.

Il est d'abord nécessaire de déterminer quel niveau de couplage entre le domaine fluide et le domaine solide est nécessaire à la simulation du problème étudié. La méthode de résolution pour chacun de ces domaines, que celle-ci soit implicite ou non, doit ensuite être déterminée. C'est alors que les équations à résoudre sont explicitées et peuvent être implémentées.

1.1 Éléments de la problématique

1.1.1 Interaction fluide-structure

Les problèmes d'IFS sont des problèmes de mécanique où les équations régissant la dynamique des fluides et la mécanique du solide sont couplées dans le but de modéliser l'influence d'un écoulement fluide visqueux et incompressible autour d'une structure élastique non-linéaire.

Il existe plusieurs façons de résoudre numériquement ce type de problème comme en témoigne la Figure 1.1. Dans un premier temps, il est possible de résoudre indépendamment le domaine fluide et le domaine solide ou bien de résoudre ces deux domaines de façon unifiée. En procédant de façon partitionnée, les équations qui régissent l'écoulement et le déplacement de la structure sont assemblées dans deux systèmes d'équations distincts. Cela permet d'utiliser des logiciels spécialisés et d'ainsi obtenir d'importants gains en efficacité puisque les matrices sont souvent mieux conditionnées que dans le cas d'un problème unifié [4]. En choisissant cette voie, il est possible de coupler faiblement le domaine fluide au domaine solide, ce qui implique que les deux systèmes d'équations sont résolus séquentiellement à chaque pas de temps à l'aide de méthodes directes ou itératives adaptées aux caractéristiques des systèmes algébriques. Il s'agit de la méthode la plus efficace, c'est-à-dire celle où le coût de calcul est le plus faible. Il est aussi possible de coupler fortement le domaine fluide au domaine solide. En effet, pour accroître la robustesse du calcul, toutes les inconnues impliquées dans l'un des systèmes algébriques sont résolues implicitement à l'exception des variables partagées

entre les systèmes et un certain nombre d'itérations est effectué à chaque pas de temps pour s'assurer de la cohérence de la solution. Le coût de calcul devient rapidement plus important. En ce qui concerne la résolution unifiée des domaines fluide et solide, il demeure

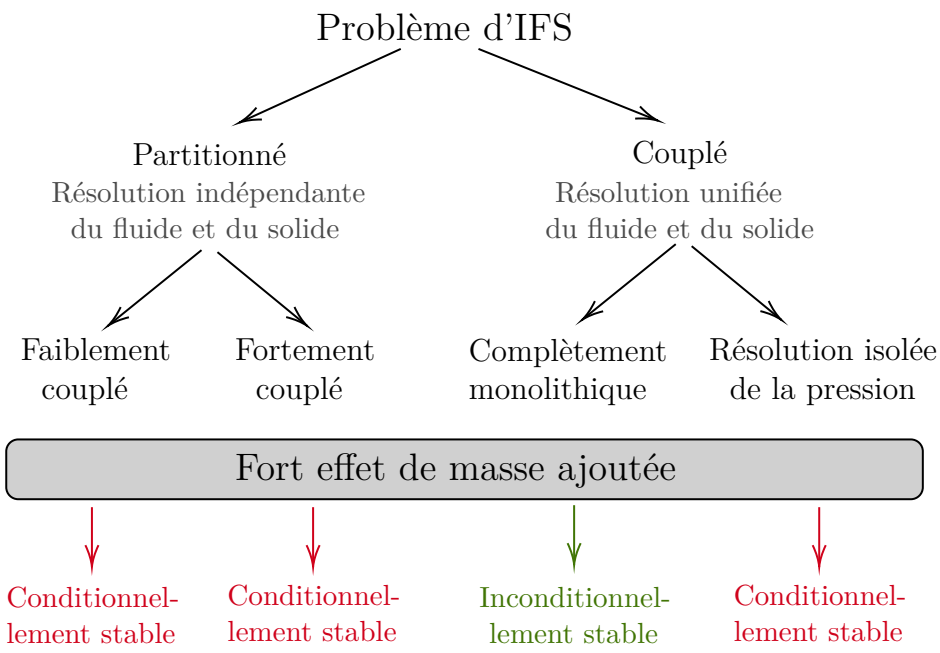


Figure 1.1 Schématisation des différents problèmes pouvant survenir selon le niveau de couplage utilisé pour la résolution des problèmes d'IFS, adapté de [4]

possible de résoudre la pression indépendamment du champs de vitesse du fluide, réduisant ainsi le coût de calcul comparativement à la méthode complètement monolithique [4]. Cette dernière donne les mêmes résultats que la méthode partitionnée fortement couplée, mais la différence fondamentale entre ces deux techniques réside dans leur façon de gérer l'effet de masse ajoutée.

Definition 1.1.1. *Approche monolithique.* Selon l'approche dite monolithique, les équations de l'écoulement et du déplacement de la structure sont assemblées dans un seul système d'équations. Elles sont résolues, à chaque étape de temps, à l'aide d'une méthode de calcul algébrique directe [1] ou itérative [2]. Dans cette approche, toutes les inconnues impliquées dans les différents termes [3] des équations sont évaluées au temps courant de la solution. L'approche monolithique est donc également implicite.

Definition 1.1.2. *Effet de masse ajoutée.* L'effet de masse ajoutée est communément utilisé dans la littérature pour identifier les instabilités qui surviennent lors de la modélisation d'un

1. Par exemple les méthodes de factorisation LU PARDISO ou MUMPS.
2. Par exemple la méthode GMRES et ses méthodes de préconditionnement.
3. Par exemple l'accélération locale, $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$, et l'accélération convective, $((\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot\nabla)\mathbf{u}$, des équations de Navier-Stokes.

écoulement interne incompressible pour lequel la densité du fluide est proche ou supérieure de celle du solide, c'est-à-dire lorsque le ratio de masse ρ_s/ρ_f est petit. Par exemple, l'effet de masse ajoutée est pratiquement inexistant en aéroélasticité alors qu'il est très important dans le domaine de la biomécanique.

On voit d'ailleurs, à la Figure 1.1, les conséquences d'un fort effet de masse ajoutée sur chacune des méthodes de résolution. C'est alors qu'on peut observer que seule une résolution complètement monolithique des équations fluides et solides permet d'éviter les instabilités numériques tout en assurant la convergence de la solution.

1.1.2 Déplacement des noeuds du maillage

Un écoulement visqueux incompressible autour d'une structure élastique entraîne nécessairement le déplacement, la rotation ou bien la déformation de celle-ci. Peu importe la méthode de résolution choisie, que ce soit par volumes finis ou par éléments finis, le maillage doit s'ajuster au mouvement de la structure. Une méthode largement utilisée, mais toutefois très coûteuse, correspond au remaillage.

Definition 1.1.3. *Remaillage.* Le remaillage consiste à générer un nouveau maillage à une ou plusieurs reprises au fil du déplacement de la structure selon l'importance du mouvement. Il s'agit ainsi de reconstruire toutes les structures de données nécessaires à la construction d'un maillage, comme la table de connectivité.

Une méthode moins coûteuse correspond à la gestion d'un maillage mobile. Alors que la structure se déplace ou se déforme, il est possible de bouger les différents noeuds du maillage afin d'adapter celui-ci à la nouvelle configuration physique, et ce à chaque pas de temps. Il n'est nullement nécessaire de reconstruire les structures de données. Il faut toutefois implémenter une méthode permettant de mettre à jour la position des noeuds du maillage selon le mouvement de la structure. Cette méthode possède aussi ses limites puisqu'il faut préserver la validité du maillage de façon à ce que la résolution numérique demeure possible.

1.2 Objectifs de recherche

Ainsi, le but de cette recherche consiste à développer une méthode de résolution des problèmes d'IFS complètement monolithique dans laquelle le domaine fluide et le domaine solide sont résolus à chaque pas de temps, tout comme le mouvement des noeuds du maillage, à l'aide de la méthode des vitesses. Cette approche ne rencontre ainsi aucun problème lorsque l'effet de masse ajoutée est important et n'implique pas non plus la lourdeur du remaillage lorsque la

structure se déplace ou se déforme. Il est alors nécessaire d'étudier les différentes méthodes permettant de gérer un maillage mobile pour connaître leurs forces ainsi que leurs faiblesses. Comme le code d'éléments finis du groupe de recherche est déjà développé, il est nécessaire d'implémenter les méthodes d'interpolation du taux de déformation du maillage à l'intérieur de celui-ci pour ensuite pouvoir le vérifier, le valider et finalement l'appliquer à des problèmes concrets d'interaction fluide-structure.

1.3 Plan du mémoire

Après un court survol des éléments finis et des équations de Navier-Stokes, une bonne partie de ce mémoire sera dédiée à l'explication des multiples équations mathématiques qui entrent en ligne de compte pour la résolution monolithique d'un problème d'IFS à l'aide d'un maillage mobile, soit le Chapitre 3. Suivra ensuite plusieurs tests de vérification et de validation de l'implémentation du code d'éléments finis du laboratoire, *EF8*, au Chapitre 4, allant de la vérification des taux de convergence à la validation de problèmes physiques et ce, en passant par la modélisation de solutions manufacturées. L'application de cette nouvelle méthode au problème d'un cylindre elliptique solide placé dans un écoulement fluide sera effectuée au Chapitre 5 pour finalement conclure le mémoire.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

2.1 Interaction fluide-structure

Dans plusieurs cas, les spécificités du problème physique à résoudre permettent d'identifier la meilleure méthode de résolution numérique à utiliser. Cependant, pour un même problème, plusieurs méthodes peuvent demeurer valides. Le choix final peut alors dépendre d'une multitude d'autres contraintes, que ce soit de la difficulté d'implémentation, de la précision nécessaire ou bien du coût de calcul pour ne nommer que ceux-ci.

Dans le cas de Samaniego et al. [8], l'approche découplée est employée pour modéliser les vibrations induites par vortex (VIV) dans le sillage d'un cylindre où le ratio de masse est grand. Cela signifie que les domaines fluide et solide sont résolus indépendamment. Ils utilisent ainsi un solveur parallèle utilisant des éléments finis (ÉF) basés sur la formulation faible stabilisée, mieux connue sous le nom de *Variational Multiscale Stabilized formulation* (VMS), pour résoudre la partie fluide du problème. Les forces de traction exercées par le fluide sont ensuite appliquées au solide. En ce qui concerne le mouvement des noeuds du maillage, deux différentes stratégies sont adoptées. La première consiste à bouger les noeuds situés à la frontière entre le fluide et le solide avec la méthode de la frontière immergée (*Immersed Boundary method* (IB)) alors que la seconde utilise plutôt une variante de la formulation Euler-Lagrange (ALE), soit la méthode *Fixed Mesh* ALE (FMALE). Celle-ci modélise virtuellement le mouvement du fluide à chaque pas de temps pour ensuite le projeter sur le maillage qui demeure fixe à l'aide de la méthode du krigeage. Des algorithmes spécifiques doivent toutefois être appliqués pour s'assurer de la cohérence géométrique des noeuds. Au final, Samaniego et al. concluent que la méthode utilisant le maillage mobile est plus précise et converge plus rapidement.

Malheureusement, aucune de ces méthodes ne peut être appliquée à des problèmes où le ratio de masse est prêt de 1. En effet, ce type de problème nécessite un couplage plus fort entre le domaine fluide et solide. C'est d'ailleurs ce que soulignent Lozovskiy et al. [9]. qui souhaitent modéliser l'écoulement hémodynamique dans un vaisseau sanguin souffrant d'un anévrisme. Ces derniers évitent ainsi les instabilités souvent présentes dans les modèles faiblement couplés en utilisant une approche fortement couplée par ÉF où la formulation ALE des équations de Navier-Stokes est résolue. Ils arrivent à réduire le coût de calcul à l'aide d'une technique d'extrapolation qui mène à une méthode semi-implicite où seule la solution à un problème linéaire est nécessaire à chaque pas de temps. La stabilité de cette technique est d'ailleurs démontrée. Toutefois, le calcul du mouvement des noeuds demeure quant à lui découplé de

la résolution des vitesses, des déplacements et de la pression. Cela entraîne des limitations importantes puisque seuls de faibles déplacements peuvent être traités.

Une autre approche intéressante correspond à celle de Dettmer et Perić [5] qui arrivent à modéliser le phénomène des VIV tout comme le flottement d'un pont à l'aide d'une méthode monolithique par ÉF utilisant aussi la formulation ALE des équations de Navier-Stokes. Celle-ci permet d'utiliser un maillage mobile qui est géré par un algorithme permettant de maintenir la qualité du maillage tout au long du mouvement de la structure. L'alternative d'un maillage fixe est mentionnée, mais celle-ci est limitée à un seul solide immergé dans un domaine fluide infini et est donc considérée trop restrictive. La méthode généralisée-α est employée pour l'intégration en temps, permettant ainsi un mouvement en une seule étape et assurant une stabilité inconditionnelle pour les problèmes d'ordre 2. Le système complet comporte donc plusieurs équations non-linéaires et est schématisé à la Figure 2.1. Les forces de tractions exercées par le fluide permettent de déterminer le mouvement de la frontière solide qui, elle, détermine la géométrie du domaine fluide et permet donc le mouvement des noeuds. Toutefois, cette méthode n'a pas été généralisée à des problèmes où le ratio de masse est faible. Il est donc possible que des instabilités surviennent. Dans les cas présentés par Dettmer et Perić, la dynamique du solide est assez simple pour que le problème se résume essentiellement à la résolution de l'écoulement fluide et du mouvement du maillage.

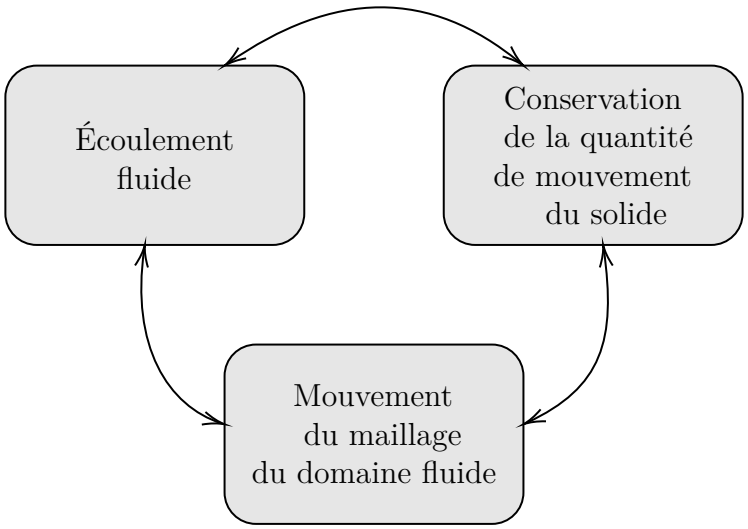


Figure 2.1 Les trois domaines à résoudre dans le cas d'un problème d'IFS selon Dettmer et Perić [5]

Schott, Ager et Wall présentent, quant à eux, une nouvelle méthode permettant de résoudre des problèmes d'interaction fluide-structure plus complexes où la structure connaît de grandes

déformations [10]. Celle-ci consiste à entourer la structure d'un fin domaine où la formulation ALE des équations de Navier-Stokes est appliquée et d'entourer ce dernier d'un domaine au maillage fixe et purement eulérien. Cette méthode est autant applicable aux éléments finis, aux volumes finis ou aux méthodes discontinues de Galerkin. Le lien numérique entre les deux sous-domaines est imposé faiblement par la méthode de Nitsche et le mouvement du maillage est géré par la méthode des éléments finis coupés (CUTFEM). En ce qui concerne la mise à jour des noeuds du maillage, c'est la technique du pseudo-solide qui est appliquée au sous-domaine ALE. Comme la technique présentée est monolithique, la procédure de mise à jour de la position des noeuds est ajoutée au système qui est alors résolu implicitement.

On remarque assez rapidement que la résolution numérique d'un problème d'IFS peut se faire de plusieurs façons différentes. Dans le cas présent, tel que mentionné à la Section 1.2, le but est de développer une méthode de résolution générale permettant de traiter un grand éventail de problèmes. Ainsi, les méthodes monolithiques semblent moins contraignantes que les méthodes partitionnées. Il est aussi important de considérer que la résolution se fera à partir du code *EF8* déjà existant. Même si celui-ci sera forcément modifié, la structure de données ainsi que les méthodes déjà implémentées doivent être considérées.

La méthode ALE est largement utilisée en IFS et semble définitivement être la meilleure méthode permettant de modéliser ce type de phénomènes. Il reste toutefois à déterminer si cette formulation doit être appliquée à tout le domaine ou bien qu'à une partie restreinte de celui-ci pour minimiser le coût de calcul. Cependant, dans un contexte de recherche, la contrainte du coût de calcul est moins présente même si elle demeure intéressante à étudier pour une potentielle application commerciale. Finalement, la littérature semble s'orienter davantage vers les méthodes où le maillage est mobile puisque celles-ci sont plus versatiles et plus précises.

Une revue de littérature s'attardant davantage aux différents algorithmes de gestion du maillage mobile et d'interpolation de la vitesse des noeuds du maillage est donc nécessaire.

2.2 Maillages mobiles

Les multiples méthodes permettant de gérer un maillage mobile peuvent être divisées en deux principales catégories : (1) les méthodes basées sur les équations aux dérivées partielles (EDP) et (2) les méthodes algébriques.

2.2.1 Méthodes basées sur les équations aux dérivées partielles

Origines

Les méthodes basées sur les équations aux dérivées partielles perçoivent la mise à jour du maillage comme le résultat de la déformation d'un milieu virtuel continu.

Les premiers balbutiements de ce type de méthodes peuvent être retracés jusqu'en 1966, où Winslow [11], qui travaille alors avec les différences finies, construit numériquement un maillage triangulaire à l'aide de l'équation de Laplace qu'il résout par des surrelaxations successives. Il arrive ainsi à générer un maillage aux coordonnées curvilignes en agençant un maillage triangulaire structuré aux lignes de courant équipotent, typiques d'un problème magnétostatique.

C'est alors que Thompson, Mastin et Warzi [12], en 1982, reprennent le travail de Winslow et arrivent à obtenir un maillage qui coïncident avec toutes les frontières d'un domaine irrégulier. Ceux-ci utilisent un système de coordonnées qui, couplé avec le mouvement physique, s'adapte dynamiquement et permet le déplacement du maillage avec les frontières.

Au cours de la même période, dans une série d'articles, Lynch [13] et Lynch et O'Neil [14] ont été les premiers à utiliser l'équation des solides élastiques pour adapter le maillage aux déformations des frontières du domaine physique. Cette idée fut reprise et développée par Sackinger, Schunk et Rao [15] en 1996 pour la modélisation de l'interaction fluide-structure connaissant de grandes déformations. En particulier, ils expliquent comment linéariser un système d'équations lorsque les coordonnées du maillage font également partie des inconnues du système d'équations. La construction d'un tel système monolithique est essentiel pour assurer la stabilité de l'intégration temporelle des phénomènes physiques lorsque le ratio de masse entre le fluide et la structure est égal ou inférieur à l'unité. En 2006, Dettmer et Perić [5] ont, à juste titre, noté que les coordonnées intérieures du maillage sont dépendantes des coordonnées des frontières mobiles, réduisant ainsi considérablement la taille du système d'équations sans compromettre le taux de convergence optimal de la linéarisation de Newton-Raphson.

Pseudo-solide

Dans les simulations d'interaction fluide-structure, l'approche la plus courante pour le déplacement des noeuds du maillage est la méthode du pseudo-solide. Différentes stratégies peuvent être utilisées pour contrôler les propriétés du pseudo-solide afin d'optimiser la qualité du maillage. Les stratégies en une étape attribuent un coefficient de rigidité aux éléments

en fonction des propriétés géométriques initiales. Les stratégies en deux étapes, largement étudiées par Xu et Accorsi [16], commencent par une analyse pseudo-structurelle linéaire basée sur les déplacements prescrits aux frontières, puis les déformations sont utilisées pour attribuer une rigidité non homogène lors de la seconde analyse.

MMPDE

Au milieu des années 90', dans une série de papiers [17–20], Huang et Russel établissent les bases de la méthode de déplacement des noeuds connue sous l'abréviation MMPDE (*Moving Mesh Partial Differenciation Equation*). Ils reconnaissent ainsi la nature variationnelle de ce type de méthodes. Les équations du problème à résoudre sont donc remplacées par un système dont les inconnues incluent la solution du problème physique et les coordonnées des noeuds du maillage. En appliquant le principe d'équidistribution à une fonction d'une caractéristique du problème physique (telle que le gradient de la solution), ils développent une série d'équations différentielles aux dérivées partielles, elliptiques et paraboliques, pour contrôler la position des noeuds. Ce faisant, ils lient les coordonnées du domaine physique aux coordonnées invariantes dans le temps du domaine de calcul, c'est-à-dire $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$.

En 1998 [21], ils étendent le domaine d'application de la méthode MMPDE aux géométries 2D et 3D. Puisque les équations sont exprimées en fonction des variables du domaine de calcul, la méthode MMPDE peut également déplacer les noeuds d'un domaine physique dont les frontières se déforment.

Pour obtenir les équations aux dérivées partielles, Huang et Russel se sont inspirés des travaux de Winslow [11] sur la génération de systèmes de coordonnées curvilignes à l'aide d'équations de Laplace. La transformation de coordonnées entre le domaine physique et le domaine de calcul, i.e. $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})$, s'obtient de l'extrémisation de la fonctionnelle

$$I(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\boldsymbol{x} \sum_i (\nabla \xi^i)^t G_i^{-1} (\nabla \xi^i),$$

avec G_i une matrice symétrique définie sur l'espace de fonctions, satisfaisant $\delta I(\boldsymbol{\xi}) = 0$ ou $\nabla \cdot (G_i^{-1} \nabla \xi^i) = 0$. Huang et Russel proposent différentes constructions pour les matrices G_i. Tout comme Winslow, on peut écrire la fonctionnelle en fonction des coordonnées du domaine physique $\boldsymbol{x}$, i.e. $I(\boldsymbol{x})$.

On distingue trois approches pour adapter un maillage en fonction de l'estimation de l'erreur ou d'une fonction de contrôle. L'adaptivité h consiste à subdiviser le maillage, l'adaptivité p à choisir le degré du polynôme d'interpolation, et l'adaptivité r à déplacer les noeuds du maillage. Cao, Huang et Russel [22] décrivent l'adaptivité r pour les maillages non-structurés

basée sur la méthode MMPDE. Les applications numériques illustrent le potentiel de la méthode pour le contrôle et le mouvement des noeuds du maillage dans des configurations complexes. Cependant, la difficulté réside dans la construction de la fonction de contrôle pour capturer simultanément plusieurs structures de l'écoulement.

Les méthodes basées sur les équations aux dérivées partielles ont ainsi connu de grandes améliorations dans les dernières décennies et ont donc atteint un niveau de sophistication assez impressionnant où il est à la fois possible de contrôler la mise à jour de la position des noeuds du maillage et l'erreur de discrétisation. Ces méthodes, par leur nature, ajoutent toutefois des équations différentielles au système qui en contient déjà plusieurs, servant à représenter le phénomène physique. Il s'agit donc d'équations supplémentaires qui doivent aussi être discrétisées, que ce soit par la méthodes des différences finies, des éléments finis ou bien des volumes finis. C'est d'ailleurs cette caractéristique intrinsèque à ces méthodes qui a mené au développement d'une autre catégorie de méthodes, soit les méthodes algébriques.

2.2.2 Méthodes algébriques

Les méthodes algébriques sont essentiellement des méthodes d'interpolation qui pondèrent le déplacement des noeuds du maillage selon le déplacement des frontières mobiles et résolvent ainsi des équations aux dérivées ordinaires (EDO). La preuve de l'existence d'une solution d'une EDO est beaucoup plus simple que pour une EDP, qui requiert l'analyse de l'espace solution et la construction d'approximations élémentaires appropriées. Les méthodes algébriques sont donc beaucoup plus faciles à implémenter, ce qui les rend très intéressantes pour les développeurs qui souhaitent simplement ajouter la résolution d'un maillage mobile à un programme de résolution d'équations différentielles déjà existant. Ici, principalement trois méthodes sont étudiées, soit la *Radial Basis Functions method* (RBF), l'*Inverse Distance-Weighting method* (IDW) et l'Interpolation Transfinie en Moyenne (ITM).

IDW

En 1968, Shepard [23] définit pour la première fois la méthode d'interpolation de données non-structurées par une pondération inverse à la distance entre les interpolés et les données de l'interpolation. Cette méthode est devenue un outil essentiel pour l'analyse des données en météorologie, en biologie, en imagerie et en géoscience. La méthode peut être aisément étendue à des dimensions supérieures de l'espace et est en fait une généralisation de l'approximation de Lagrange aux espaces multidimensionnels. Depuis quelques années, elle est devenue une méthode très compétitive pour déplacer les noeuds du maillage lors de la simulation de problème d'IFS. IDW se base ainsi sur un nuage de points auxquels les données sont

connues pour interpoler celles-ci sur les autres points du domaine. La Figure 2.2, représentant des points auxquels Shepard applique la fonction d'interpolation 2.1, en illustre justement un exemple.

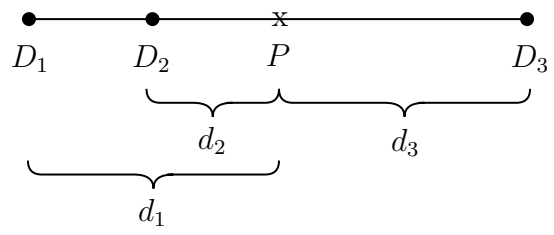


Figure 2.2 Schématisation de l'interpolation au point P par la méthode IDW

$$f(P) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i \frac{1}{d_i^k}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{d_i^k}} & \text{si } d_i \neq 0, \\ z_i & \text{si } d_i = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

où P correspond au point auquel on veut interpoler les données,

N au nombre de points où les données sont connues,
z_i à l'information connue à chaque point,
k à la dimension (espace $\mathbb{R}^k$) et
d_i à la distance entre le point où l'on veut interpoler les données et ceux où les données sont connues.

Shepard discute aussi de la construction des fonctions de pondération à support global et à support compact pour minimiser le coût du calcul, l'erreur d'interpolation et pour modéliser l'effet de barrières.

Witteveen et Bijl [24] sont les premiers à appliquer la méthode d'interpolation de Shepard au déplacement des noeuds d'un maillage. Ils utilisent donc la position des noeuds composants les frontières pour interpoler la position de tous les noeuds du maillage. Cette application est illustrée à la Figure 2.3 où une ellipse solide, composée du nuage de point $E = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_8\}$ est située dans un domaine fluide Ω.

La formule d'interpolation utilisée correspond ainsi à l'Équation (2.2) et est simplement une application de la formule d'interpolation originale de Shepard.

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{\sum\limits_{\boldsymbol{\xi} \in E} f(\boldsymbol{\xi}) \frac{1}{||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}||^k}}{\sum\limits_{\boldsymbol{\xi} \in E} \frac{1}{||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}||^k}} \tag{2.2}$$

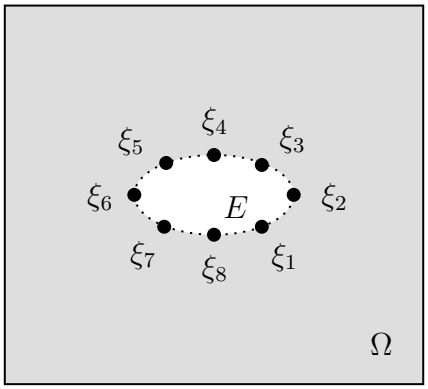


Figure 2.3 Interpolation de la position des noeuds d'un maillage (zone grisée) à partir d'un nuage de points $E = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_8\}$ formant l'objet solide placé dans un domaine fluide Ω

où $E = \{\xi_1, ..., \xi_m\}$ correspond au nuage de points,

$f(\boldsymbol{\xi})$ aux données à ces points et
k à la dimension (espace $\mathbb{R}^k$).

Witteveen et Bijl réalisent plusieurs essais numériques qui démontrent le gain substantiel en efficacité sur la méthode RBF de De Boer [2], détaillée à la Section 2.2.2, sans compromettre la précision des calculs et la qualité des maillages.

IDW est une méthode d'interpolation qui gagne rapidement en popularité, il est toutefois intéressant de la comparer à la méthode du pseudo-solide. Barral, Luke et Alauzet [25] se sont justement attardés à cette comparaison pour en conclure que le préconditionneur nuit à la programmation parallèle de la méthode du pseudo-solide. Quant à elle, l'interpolation pondérée en fonction de la distance bénéficie d'un excellent niveau de programmation parallèle. Les performances de ces méthodes sont mesurées à l'aide d'une métrique de la qualité du maillage et du nombre d'échange d'arêtes. Les tests incluent, en 3D, la compression radiale d'un cylindre, la déflexion d'une poutre et la traînée d'un F-117. Il semble qu'en général la méthode IDW soit la plus efficiente. Toutefois, la méthode du pseudo-solide nécessite beaucoup moins d'échange de sommets si le cisaillement de l'écoulement est important.

Landry, Soulaïmai, Luke et Haj Ali [26] décrivent, quant à eux, une méthodologie pour déplacer le maillage en fonction du déplacement des frontières. Ils utilisent IDW pour calculer le champ de déplacement, puis appliquent divers algorithmes de lissage pour améliorer la qualité du maillage et éliminer les éléments enchevêtrés. Leur méthode s'est révélée efficace pour la simulation de l'interaction fluide-structure d'une aile symétrique et d'une aile en flèche. Cependant, des améliorations sont nécessaires pour traiter la déformation du maillage

lorsque les frontières mobiles sont très près les unes des autres.

RBF

De Boer, Van der Shoot et Bijl [2] sont les premiers à proposer des bases radiales pour adapter un maillage aux déformations des frontières. Ils ont testé six bases radiales à support global, c'est-à-dire que la position de tous les noeuds influence la position du noeud interpolé, ainsi que huit bases radiales à support compact, où seulement la position des noeuds situés à un certain rayon du noeud interpolé est prise en compte. Les déplacements des noeuds internes s'obtiennent de la somme des contributions de la base radiale. Tout comme IDW, RBF interpole à partir d'un nuage de points $E = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m\}$ où la fonction $f(\xi_i)$ est connue, tel qu'illustré à la Figure 2.3. C'est donc en trouvant la solution au système linéaire de l'Équation (2.3) que les coefficients $\{\lambda_1, ...\lambda_m\}$ de la méthode d'interpolation $u(\boldsymbol{x})$ de l'Équation (2.4) sont déterminés [1].

$$\begin{bmatrix} \varphi(||\boldsymbol{\xi_1} - \boldsymbol{\xi_1}||) & ... & \varphi(||\boldsymbol{\xi_1} - \boldsymbol{\xi_m}||) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(||\boldsymbol{\xi_m} - \boldsymbol{\xi_1}||) & ... & \varphi(||\boldsymbol{\xi_m} - \boldsymbol{\xi_m}||) \end{bmatrix}_{m \times m} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{\xi_1}) \\ \vdots \\ f(\boldsymbol{\xi_m}) \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi(||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi_j}||) \tag{2.4}$$

où $|| \cdot ||$ correspond à la mesure de la distance entre deux points,

m au nombre de points où les données sont connues,
$\varphi(||\boldsymbol{\xi_j} - \boldsymbol{\xi_i}||)$ à une fonction à base radiale qui dépend de la distance entre deux points,
λ_i aux coefficients recherchés et
$f(\boldsymbol{\xi_i})$ aux données connues aux points $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m\}$.

Les différentes fonctions à bases radiales à support global sont présentées au Tableau 2.1 et celles à support compact, tirées des travaux de Wendland [3] sont présentées au Tableau 2.2.

Les tests incluent, en 2D, la translation et la rotation d'un rectangle, ainsi que l'extension du volet d'une aile. Les résultats démontrent que cette méthodologie produit des maillages de qualité supérieure à celle de l'analogie des ressorts de Farhat [27]. La qualité relative des éléments est utilisée pour mesurer l'effet de différentes bases radiales. De Boer, Van der Shoot et Bijl concluent en recommandant la fonction à base radiale C^2 à support compact.

1. Un polynôme linéaire peut être ajouté au système s'il est nécessaire que la méthode soit linéairement exacte.

Tableau 2.1 Fonctions à bases radiales à support global, tiré de [2], où $x = ||\boldsymbol{x}||$

No	**Nom**	**Abbréviation**	$\boldsymbol{\varphi}(||\boldsymbol{x}||)$
1	Spline de plaque mince	TPS	$x^2 \log(x)$
2	Biharmoniques multiquadriques	MQB	$\sqrt{a^2 + x^2}$
3	Biharmoniques multiquadriques inverses	IMQB	$\sqrt{\frac{1}{a^2+x^2}}$
4	Biharmoniques quadriques	QB	$1 + x^2$
5	Biharmoniques quadriques inverses	IQB	$\frac{1}{1+x^2}$
6	Gaussienne	Gauss	e^{-x^2}

Tableau 2.2 Fonctions à bases radiales à support compact, tiré de [3], où $\xi = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}||/R$, $R > 0$ étant la rayon du support compact

No	**Nom**	$\varphi(||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}||)$
7	CP C^0	$(1-\xi)^2$
8	CP C^2	$(1-\xi)^4(4\xi+1)$
9	CP C^4	$(1-\xi)^6(\frac{35}{3}\xi^2+6\xi+1)$
10	CP C^6	$(1-\xi)^8(32\xi^3+25\xi^2+8\xi+1)$
11	CTPS C^0	$(1-\xi)^5$
12	CTPS C^1	$1+\frac{80}{3}\xi^2-40\xi^3+15\xi^4-\frac{8}{3}\xi^5+20\xi^2\log(\xi)$
13	CTPS C^2_a	$1-30\xi^2-10\xi^3+45\xi^4-6\xi^5-60\xi^3\log(\xi)$
14	CTPS C^2_b	$1-20\xi^2+80\xi^3-45\xi^4-16\xi^5+60\xi^4\log(\xi)$

Quelques années plus tard, Rendall et Allen [28, 29] appliquent justement la fonction à base radiale C^2 de Wendland [3] pour déformer le maillage volumique du fluide en fonction de la déformation d'une ou de plusieurs surfaces aéroélastiques. Cette méthode est certes efficace et robuste, mais requiert la construction d'une matrice contenant N^2 coefficients où N est le nombre de sommets du maillage à déformer. Ainsi, on obtient une matrice de 10^{12} nombres réels pour un petit maillage 3D de 10^6 noeuds. La solution directe de ce système d'équations est très coûteuse et même prohibitive en 3D. Ils proposent donc un algorithme très élaboré pour réduire la taille du système d'équations avec un impact limité sur le contrôle des déplacements des noeuds du maillage.

Encore plus récemment, Coulier et Darve [30] utilisent la méthode des bases radiales pour interpoler le déplacement des noeuds du maillage pour des problèmes d'IFS. La robustesse de l'interpolation utilisée est soulignée. Cependant, le système d'équations des coefficients de l'interpolation est dense, i.e. de l'ordre du nombre N de noeuds, et la solution directe est

donc de complexité $\mathcal{O}(N^3)$. Les solveurs de Krylov se buttent, pour leur part, au mauvais conditionnement du système avec l'augmentation considérable du nombre de coefficients à calculer en 3D.

ITM

En 1999, Floater et Gotsman [31] étudient la construction d'une transformation continue entre deux maillages de $\mathbb{R}^2$. Ils montrent que pour toutes paires de maillages convexes et compatibles, avec des frontières identiques, il est possible de construire, par des combinaisons convexes, une transformation continue non-dégénérée de l'un vers l'autre. La transformation linéaire communément utilisée entre deux maillages peut induire des éléments inversés. Floater et Gotsman étudient donc les conditions suffisantes pour obtenir une bonne transformation, et, à l'aide des coordonnées barycentriques, ils obtiennent un système d'équations dont la solution détermine les coefficients de la transformation. Cette technique, appelée le *morphing*, est utilisée en imagerie pour la transformation continue et animée d'une image en une autre. Entre les deux images, le maillage des objets est donc modifié. Le cadre théorique de cette méthode peut être exploité pour déplacer le maillage des objets en interaction fluide-structure.

En 2003, Floater [32] généralise les coordonnées barycentriques à un polygone convexe à k côtés pour la paramétrisation et la déformation de triangulations. La construction en coordonnées barycentriques est lisse (C^∞) et varie continûment par rapport aux sommets de la triangulation. Il nomme ces coordonnées *mean value coordinates* puisque leur construction satisfait le théorème de la moyenne.

Les points $v_0, v_1, ..., v_k$ sont les sommets d'une triangulation dans $\mathbb{R}^2$ de façon à ce que v_0 n'est jamais sur le bord du polygone convexe formé par $v_1, ..., v_k$, tel qu'illustré à la Figure 2.4.

L'objectif est l'étude des poids $\lambda_1, ..., \lambda_k \geq 0$ tel que

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^k \quad & \lambda_i v_i = v_0, \\ \textstyle\sum_{i=1}^k \quad & \lambda_i = 1. \end{aligned}$$

Dans le cas de polygones convexes, les poids, exprimés tel que

$$\lambda_i = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^k w_j} \text{ avec } w_i = \frac{\tan(\alpha_{i-1}/2) + \tan \alpha_i/2}{\|v_i - v_0\|},$$

sont les coordonnées pour v_0 par rapport à $v_1, ..., v_k$ [33].

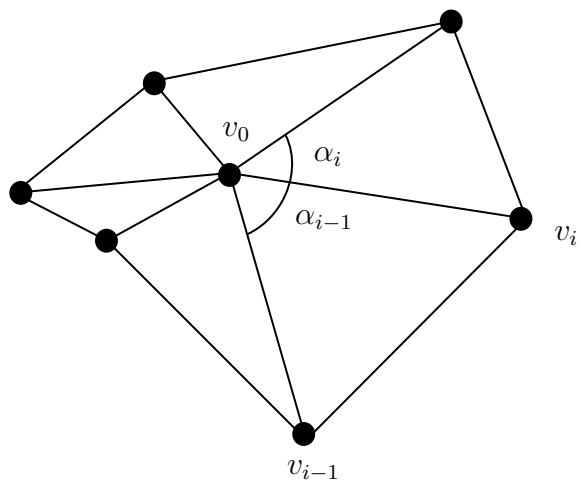


Figure 2.4 Triangulation d'un polygone étoilé

En 2009, Dyken et Floater [34] peaufinent davantage le développement de l'interpolation transfinie en moyenne d'une fonction f définie sur des courbes fermées (sans boucle) du plan. Ils établissent des conditions suffisantes pour assurer la cohérence de l'ITM, c'est-à-dire des conditions qui garantissent que l'ITM est un interpolant. Ils généralisent ainsi la formule d'interpolation aux domaines non-convexes en comptant le nombre d'intersections entre la ligne $[v_0, p]$, joignant le point v_0 et tout point p de la frontière, et la frontière du domaine.

Bruvoll et Floater [35] poursuivent sur cette lancée en généralisant ces résultats dans $\mathbb{R}^n$. Dans $\mathbb{R}^3$, ils obtiennent des formules pour l'interpolation transfinie d'une fonction f évaluée sur une surface fermée qui délimite une région de l'espace.

Dans $\mathbb{R}^n$, l'interpolation transfinie en moyenne peut être réécrite sous la forme intégrale de l'Équation (2.5)

$$u(x) = \frac{1}{\phi(x)} \int_\Gamma f(\xi) \frac{\xi - x}{\|\xi - x\|^{n+1}} \cdot n(\xi)\, d\Gamma, \tag{2.5}$$

avec

$$\phi(x) = \int_\Gamma \frac{\xi - x}{\|\xi - x\|^{n+1}} \cdot n(\xi)\, d\Gamma,$$

pour $\xi \in \Gamma$ et Γ une hypersurface de dimension $n - 1$.

En ce qui concerne la modélisation de problèmes d'IFS à l'aide de la méthode des éléments finis, le progrès le plus intéressant est fait par Ju [36] qui applique la formulation intégrale (2.5) dans $\mathbb{R}^2$ en remplaçant la courbe par une collection de segments de droite. L'applica-

tion de cette méthode à la résolution de problème d'IFS semble ainsi avoir un intéressant potentiel. Le but original de l'ITM diffère de celui d'IDW et de RBF par le fait que l'interpolation est basée sur des courbes continues plutôt que sur un nuage de points. En éléments finis, il est possible d'approximer ces courbes par plusieurs segments de droite sur lesquels différentes fonctions d'interpolation géométriques peuvent être appliquées. On peut penser ici à des polynômes de Lagrange linéaires ou bien quadratiques et mêmes à des fonctions trigonométriques. La flexibilité de l'ITM, quant à la précision de l'approximation géométrique des frontières, différencie cette méthode des autres et souligne du fait même le potentiel de recherche qu'elle représente.

CHAPITRE 3 MATHÉMATIQUES DE L'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE

Pour arriver à l'implémentation monolithique d'une méthode de résolution par éléments finis à maillage mobile, il est évidemment nécessaire de mieux comprendre les différents éléments qui la composent. Ce chapitre vise donc à revenir brièvement sur la méthode des éléments finis, à détailler mathématiquement la formulation Euler-Lagrange des équations de Navier-Stokes ainsi que l'équation de conservation du moment angulaire et à reformuler les différentes méthodes d'interpolation de la position des noeuds du maillage pour finalement établir les équations clées a implémenter dans *EF8*.

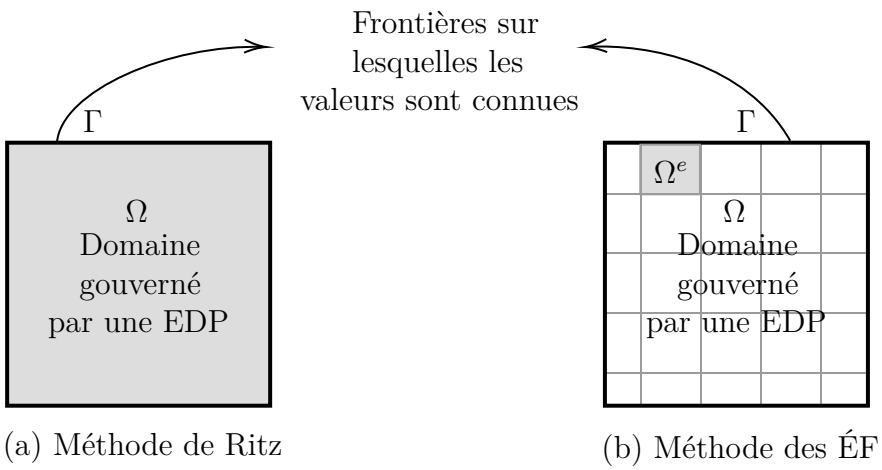
3.1 Survol des éléments finis

La méthode de Ritz (1909) [37], qui sert à approximer la solution d'une équation aux dérivées partielles dont les conditions frontières sont connues, est souvent considérée comme l'ancêtre des éléments finis. Dans cette section, c'est l'équation de la chaleur 1D, qui permet de connaître le champ de température à l'intérieur d'un domaine, qui sera utilisée à titre d'exemple dans le but d'expliquer cette méthode.

3.1.1 Formulation variationnelle

La méthode de Ritz, tout comme la méthode des ÉF, est basée sur la formulation variationnelle des EDP. Elle permet d'affaiblir l'équation en la multipliant par une fonction test ainsi qu'en l'intégrant sur tout son domaine pour transformer celle-ci en un système matriciel qui peut être résolu à l'aide de fonctions d'interpolation. Cela donne lieu à une approximation de la solution sur tout le domaine qui varie selon l'ordre de précision désiré. Toutefois, la méthode de Ritz devient rapidement coûteuse et imprécise pour les problèmes moindrement complexes et est pratiquement inapplicable aux géométries 2D et 3D. En contrepartie, les ÉF appliquent pratiquement la même procédure, mais sur un domaine discrétisé, c'est-à-dire sur un maillage composé de plusieurs petits domaines élémentaires (Ω_e). Cette différence entre la méthode de Ritz et celle des ÉF est justement illustrée à la Figure 3.1. Les ÉF permettent ainsi de réduire considérablement la taille du système d'équations, de réduire son conditionnement et de généraliser la discrétisation des formulations variationnelles aux problèmes multidimensionnels.

Les ÉF permettent de résoudre une EDP sur un maillage. Par exemple, dans le cas de



(a) Méthode de Ritz (b) Méthode des ÉF

Figure 3.1 Comparaison entre le domaine Ω à résoudre avec la méthode de Ritz et avec la méthode des ÉF, où les domaines élémentaires Ω_e sont considérés

l'équation de la chaleur, la méthode des ÉF permet, en 1D, de trouver la température exacte aux noeuds et les fonctions d'interpolation permettent ensuite d'approximer le champ de température sur chaque élément. On dit alors que le degré de liberté de l'approximation correspond à la température aux noeuds de l'élément.

Definition 3.1.1. *Degrés de liberté (DDL).* En ÉF, les degrés de liberté correspondent aux valeurs du champ déterminé par l'EDP. Dans le cas de l'équation de la chaleur, il n'y a qu'un seul champ, soit la température alors que l'équation de Navier-Stokes, par exemple, comportent plusieurs champs, soient la vitesse d'écoulement et la pression du fluide.

Comme mentionné précédemment, la démarche mathématique est essentiellement la même que pour la méthode de Ritz, comme en témoigne les équations du Tableau 3.1 pour une solution dans $H_0^1(\Omega)$.

Dans la Tableau 3.1,

k correspond à la conductivité thermique du matériau,
T à la température,
f à la production volumique,
Ω au domaine,
φ aux fonctions tests,
Ψ_i et Ψ_j aux fonctions d'interpolation,
a_{ij}^e à la matrice bilinéaire élémentaire,
b_i^e au vecteur linéaire élémentaire,

Tableau 3.1 Résolution de l'équation de la chaleur à l'aide de la méthode des ÉF

Description	**Équation**
Formulation forte	$-\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) - f = 0, \quad \forall x \in \Omega$
Formulation faible continue	$\int_\Omega \frac{d\varphi}{dx} k \frac{dT}{dx} dx = \int_\Omega \frac{d}{dx}\left(\varphi k \frac{dT}{dx}\right) dx + \int_\Omega \varphi f dx$
Formulation faible discrète	$\sum_{e=1}^{NELM} \int_{\Omega^e} \frac{d\varphi^e}{dx} k \frac{dT^e}{dx} dx = \int_\Omega \varphi^e f dx$
Système matriciel élémentaire	$\sum_{e=1}^{NELM} \left(\int_{\Omega^e} \frac{d\Psi_i}{dx} k \frac{d\Psi_j}{dx} dx\right) T_j^e = \sum_{e=1}^{NELM} \int_{\Omega^e} \Psi_i f dx$ $a_{ij}^e \vec{T_j^e} = \vec{b_i^e}$

$NELM$ au nombre d'éléments à l'intérieur du domaine et
l'exposant e indique que les variables sont calculées sur un élément du domaine.

Cependant, comme la résolution de l'EDP se fait sur chaque élément du domaine, une étape supplémentaire s'ajoute, soit l'assemblage des résultats élémentaires pour obtenir le système d'équations global permettant de résoudre l'équation de la chaleur sur tout le domaine. Plusieurs tables permettent ainsi de mettre en relation les coordonnées des noeuds du maillage, les éléments du domaine ainsi que les degrés de liberté à résoudre. D'un point de vue informatique, cette opération nécessite beaucoup d'espace et plusieurs mises à jour des structures de données, ce qui devient rapidement lourd et peut entraîner des erreurs. C'est d'ailleurs pour cette raison que l'on souhaite éviter de remailler le domaine si celui-ci se déforme puisque cela implique des coûts de calcul élevés.

3.1.2 Fonctions d'interpolation

Le Tableau 3.1 fait apparaître les fonctions test φ et d'interpolation Ψ. Dans le cas présent, l'approche de Galerkin est utilisée, c'est-à-dire que les mêmes fonctions servent à la fois de fonctions tests et d'interpolation. Celles-ci servent ainsi à approximer le champ de DDL, mais aussi la géométrie du domaine. Selon le problème à résoudre et la géométrie du domaine, il est possible de choisir des fonctions qui donneront des résultats plus précis. Par exemple, pour des problèmes simples, des fonctions d'interpolation linéaires peuvent être suffisantes. Toutefois, comme le dit leur nom, ces fonctions ne permettent de capturer exactement qu'une distribution linéaire des DDL sur chaque élément ainsi que des géométries linéaires. Lorsqu'on a des géométries moindrement complexes, comme des courbes, les fonctions d'interpolation quadratiques ou d'ordre supérieur sont plus intéressantes puisqu'elles approximent plus fidèlement

la géométrie. Il faut toutefois être prudent puisqu'il faut s'assurer d'être sous-paramétrique ou bien isoparamétrique pour éviter des problèmes d'instabilité numérique. En d'autres mots, le degré de la fonction d'interpolation de la géométrie ne doit pas dépasser le plus petit degré des fonctions d'interpolation approximant les champs de DDL.

3.1.3 Schéma d'intégration en temps

Comme c'est le cas pour plusieurs problèmes, les DDL ne varient pas seulement dans l'espace, mais aussi en temps. Alors que le maillage permet de discrétiser l'espace, un schéma de discrétisation doit être choisi pour permettre la discrétisation du DDL en temps. Dans le cas présent, ce sont les formules de différentiation arrière, communément appelées *Backward Differentiation Formula* (BDF), qui sont utilisées puisque celles-ci sont déjà implémentées dans *EF8*. Ces formules permettent d'approximer la dérivée d'une fonction $y = f(t)$ au temps $t = t_n$ en considérant les différentes valeurs de cette fonction aux temps précédents. Les formules BDF utilisées varient selon le nombre de pas de temps précédents considérés, tel que l'illustre la Figure 3.2.

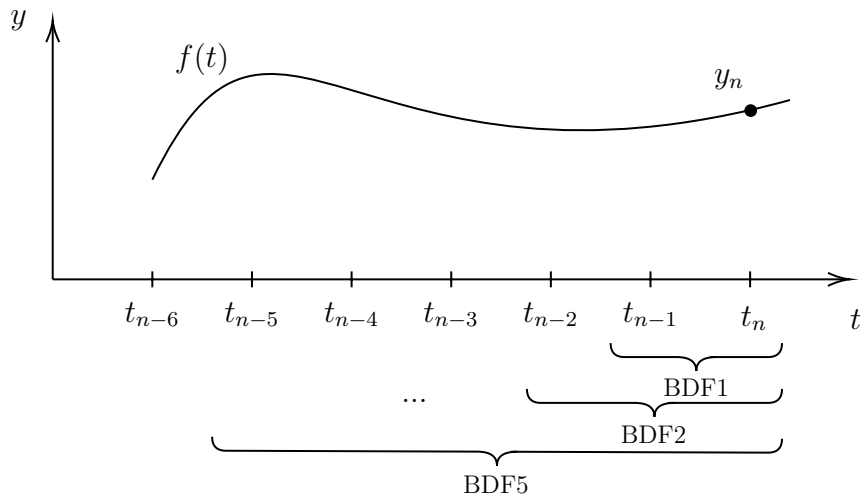


Figure 3.2 Schématisation de la discrétisation en temps pour des formules BDF d'ordres différents

On choisit ainsi le schéma de discrétisation BDF selon le problème à résoudre puisque les formules diffèrent par leur région de stabilité.

3.2 Formulation Euler-Lagrange (ALE) des équations de Navier-Stokes

Lors de la résolution d'un problème impliquant un écoulement fluide, il est nécessaire de résoudre les équations de Navier-Stokes qui décrivent le mouvement d'un fluide newtonien. L'équation de Navier-Stokes correspond en réalité à une autre forme de la seconde loi de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, comme cela est illustré à la Figure 3.3. En effet, le terme de force $\mathbf{F}$ contient, par exemple, les forces visqueuses ainsi que le terme de pression. La complexité de l'équation de Navier-Stokes réside principalement dans la définition du terme d'accélération $\mathbf{a}$.

$$\underbrace{\rho}_{m}\underbrace{\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + ((\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot\nabla)\mathbf{u}\right]}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\nabla\cdot\left[p\mathbb{I} + \mu\left(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u}\right)\right]}_{\mathbf{F}}$$

Figure 3.3 Analogie entre la seconde loi de Newton et l'équation de Navier-Stokes

La description du mouvement d'un fluide peut se faire de deux façons équivalentes, soit via la formulation lagrangienne ou eulérienne.

3.2.1 Cinématiques lagrangienne et eulérienne de l'écoulement

Soit $U_0 \subset \mathbb{R}^n$, le domaine mouillé initialement par le fluide. Nous supposons qu'il existe une application continue et bijective de classe $C^1(]T_0, T_1[)$ telle que $\forall t \in]T_0, T_1[$, c'est-à-dire l'intervalle de temps de la simulation,

$$\mathbf{p}(t) : U_0 \to U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall x_0 \in U_0, x = \mathbf{p}(t, x_0)\} \subset \mathbb{R}^n \quad .$$

Celle-ci est illustrée à la Figure 3.4. Dans le domaine U_0, l'hypothèse du continuum modélise le fluide réel et permet l'utilisation des EDP pour décrire les lois de conservation de masse, d'énergie et de quantité de mouvement. Ainsi, chaque point de coordonnées $x_0 \in U_0$ détermine uniquement une particule du fluide et $\mathbf{p}(t, x_0) \in \mathbb{R}^n$ sa position en fonction du temps.

La cinématique lagrangienne décrit le mouvement des particules de fluide de U_0 dans $\mathbb{R}^n$.

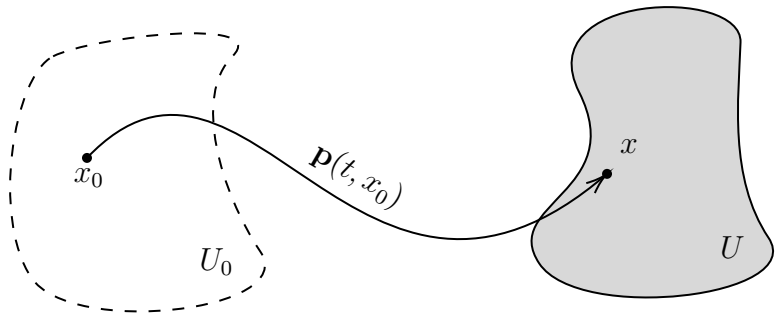


Figure 3.4 Cinématique de Lagrange pour un domaine se déformant entre t_0 et t_1 où la zone grisée représente le fluide et le trait plein le domaine étudié

Nous notons par

$$\mathbf{u}_L(t, x_0) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{p}(t, x_0)$$

la vitesse lagrangienne de la particule $x_0 \in U_0$, et, par $\mathbf{u}_E(t, x)$ la vitesse eulérienne de la particule au point $x \in U \subset \mathbb{R}^n$. Ces cinématiques satisfont la relation

$$\mathbf{u}_L(t, x_0) = \mathbf{u}_E(t, \mathbf{p}(t, x_0)) \equiv \mathbf{u}_E \circ \mathbf{p}(t, x_0)$$

puisque la vitesse de l'écoulement est indépendante de la cinématique utilisée (lagrangienne ou eulérienne). Cette dernière relation permet d'exprimer l'accélération de la particule de fluide selon les cinématiques lagrangienne ou eulérienne. Nous écrivons donc l'accélération lagrangienne $\mathbf{a}_L(t, x_0)$ telle que

$$\mathbf{a}_L(t, x_0) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}_L(t, x_0) = \frac{d}{dt}\mathbf{u}_E(t, \mathbf{p}(t, x_0)) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}_E(t, x) + (\mathbf{u}_E(t, x) \cdot \nabla_x)\mathbf{u}_E(t, x)\right)_{x=\mathbf{p}(t,x_0)} ,$$

et l'accélération eulérienne $\mathbf{a}_E(t, x)$ telle que

$$\mathbf{a}_E(t, x) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}_E(t, x) + (\mathbf{u}_E(t, x) \cdot \nabla_x)\mathbf{u}_E(t, x) \ .$$

3.2.2 Cinématique lagrangienne et eulérienne du domaine mobile

Soit $V_0 \subset \mathbb{R}^n$, l'ensemble des points où sont évaluées les propriétés de l'écoulement. Les noeuds du maillage appartiennent à cet ensemble. Nous supposons qu'il existe une application

continue et bijective de classe $C^1(]T_0, T_1[)$ telle que $\forall t \in]T_0, T_1[$, c'est-à-dire l'intervalle de temps de la simulation,

$$\mathbf{g}(t) : V_0 \to V = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \hat{x}_0 \in V_0, \hat{x} = \mathbf{g}(t, \hat{x}_0)\} \subset \mathbb{R}^n$$

et $V \subset U$ pour qu'il soit mouillé par l'écoulement. Notons également que dans le domaine V_0, chaque point de coordonnées $\hat{x}_0$ détermine uniquement un point d'échantillonnage des propriétés de l'écoulement et $\mathbf{g}(t, \hat{x}_0) \in \mathbb{R}^n$ sa position en fonction du temps.

La cinématique lagrangienne décrit le mouvement des points de V_0 dans $\mathbb{R}^n$. Nous notons par

$$\mathbf{v}_L(t, \hat{x}_0) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}(t, \hat{x}_0)$$

la vitesse lagrangienne du point $\hat{x}_0 \in V_0$, et, par $\mathbf{v}_E(t, x)$ la vitesse eulérienne de ce point à $x \in V \subset \mathbb{R}^n$. Ces cinématiques satisfont la relation

$$\mathbf{v}_L(t, \hat{x}_0) = \mathbf{v}_E(t, \mathbf{g}(t, \hat{x}_0)) \equiv \mathbf{v}_E \circ \mathbf{g}(t, \hat{x}_0)$$

puisque la vitesse du point est indépendante de la cinématique utilisée (lagrangienne ou eulérienne).

3.2.3 Cinématique eulérienne-lagrangienne de l'écoulement

Nous écrivons $\mathbf{u}_{EL}(t, \hat{x}_0)$ l'expression de la vitesse eulérienne-lagrangienne $\forall \hat{x}_0 \in V_0 \subset \mathbb{R}^n$. Elle s'obtient de la composition des fonctions $\mathbf{g}$ et $\mathbf{u}_E$ selon

$$\mathbf{u}_{EL}(t, \hat{x}_0) = \mathbf{u}_E(t, \mathbf{g}(t, \hat{x}_0)) \equiv \mathbf{u}_E \circ \mathbf{g}(t, \hat{x}_0) \ .$$

Cette cinématique décrit l'évolution temporelle de la vitesse de l'écoulement en un point du domaine mobile identifié par sa position initiale $\hat{x}_0$. Nous pouvons donc exprimer la variation temporelle de la vitesse eulérienne-lagrangienne au point $\hat{x}_0$ de la façon suivante

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}_{EL}(t, \hat{x}_0) = \frac{d}{dt}\mathbf{u}_E(t, \mathbf{g}(t, \hat{x}_0)) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}_E(t, \mathbf{g}(t, \hat{x}_0)) + \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}(t, \hat{x}_0) \cdot \nabla_x\right) \mathbf{u}_E(t, x)\Big|_{x=\mathbf{g}(t,\hat{x}_0)}$$

ou, de façon équivalente, par

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}_{EL}(t, \hat{x}_0) = \left(\frac{\partial \mathbf{u}_E}{\partial t} + (\mathbf{v}_E \cdot \nabla_x)\, \mathbf{u}_E\right) \circ \mathbf{g}(t, \hat{x}_0) \ .$$

Ensuite, en bougeant légèrement les termes de l'équation précédente, nous écrivons la dérivée temporelle de la vitesse eulérienne en fonction de la vitesse eulérienne-lagrangienne

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}_E}{\partial t}\right) \circ \mathbf{g}(t, \hat{x}_0) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}_{EL}(t, \hat{x}_0) - ((\mathbf{v}_E \cdot \nabla_x)\, \mathbf{u}_E) \circ \mathbf{g}(t, \hat{x}_0) \ ,$$

pour modifier l'expression de l'accélération d'une particule de l'écoulement

$$\mathbf{a}_E(t, x) \circ \mathbf{g}(t, \hat{x}_0) = \left(\frac{\partial \mathbf{u}_E}{\partial t}\right) \circ \mathbf{g}(t, \hat{x}_0) + ((\mathbf{u}_E \cdot \nabla_x)\, \mathbf{u}_E) \circ \mathbf{g}(t, \hat{x}_0) \ ,$$

selon la position du point d'échantillonnage (ou du maillage). Nous obtenons donc l'expression eulérienne-lagrangienne de l'accélération de la particule de fluide,

$$\mathbf{a}_E(t, x) \circ \mathbf{g}(t, \hat{x}_0) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}_{EL}(t, \hat{x}_0) + (((\mathbf{u}_E - \mathbf{v}_E) \cdot \nabla_x)\, \mathbf{u}_E) \circ \mathbf{g}(t, \hat{x}_0) \ ,$$

ou, de manière équivalente,

$$\mathbf{a}_E(t, x) = \frac{\partial \mathbf{u}_{EL}}{\partial t} \circ \mathbf{g}^{-1}(t, x) + ((\mathbf{u}_E - \mathbf{v}_E) \cdot \nabla_x)\, \mathbf{u}_E \ ,$$

la formulation recherchée.

3.2.4 Synthèse

Il est d'usage d'écrire l'accélération du fluide sous la forme suivante

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + ((\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \nabla_x)\, \mathbf{u} \ ,$$

qu'il est maintenant possible d'interpréter correctement en fonction du résultat de la section précédente dans le contexte de la méthode des éléments finis.

Rappelons qu'à un noeud du maillage, nous connaissons toujours sa position initiale $\hat{x}_0$ et sa position courante x au temps t : $(\hat{x}_0, x)$. Également, nous connaissons la vitesse $\mathbf{u}$ en ce noeud, et cette vitesse est donc la valeur des expressions eulérienne-lagrangienne ou eulérienne, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{EL}(t, \hat{x}_0) = \mathbf{u}_E(t, x)$, selon le contexte du calcul à réaliser. Ainsi l'approximation élémentaire de la vitesse en fonction des valeurs nodales $\mathbf{u}_i$,

$$\mathbf{u}^h = \sum L_i\, \mathbf{u}_i \approx \mathbf{u}_E \ ,$$

s'interprète comme l'approximation de la l'expression $\mathbf{u}_E$ de la cinématique eulérienne ; il en

va de même pour $\mathbf{v}^h$. De plus, l'approximation de la dérivée temporelle des vitesses à un noeud par la formule BDF peut être écrite telle que

$$\dot{\mathbf{u}}_i = \sum \alpha_k \mathbf{u}_i^k \approx \frac{\partial \mathbf{u}_{EL}}{\partial t}(t, \hat{x}_{0_i})$$

et

$$\dot{\mathbf{u}}^h = \sum L_i \, \dot{\mathbf{u}}_i \approx \frac{\partial \mathbf{u}_{EL}}{\partial t} \circ \mathbf{g}^{-1}(t, x) \ ,$$

où u_i^0 à u_i^n sont les valeurs de la solution de l'indice du temps courant ($k = 0$) aux indices des temps antérieurs.

3.3 Équation de conservation du moment angulaire

Dans le cadre de ce mémoire, on s'intéresse particulièrement au mouvement rotationnel. Ainsi, l'équation décrivant la dynamique des solides correspond simplement à l'équation de conservation du moment angulaire. Soit I le second moment de masse ($[I] = ML^2$) [1] d'un objet en rotation par rapport à l'axe normal au plan $x \circ y$, c'est-à-dire dans la direction normale au plan. La conservation du moment angulaire s'écrit

$$\left(I \frac{d^2\theta}{dt^2} + \zeta \frac{d\theta}{dt} + \kappa\theta \right) e_z + \int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \times \boldsymbol{\lambda} dS \quad = \quad 0$$

où θ correspond à l'angle de rotation du solide,

ζ ($[\zeta] = ML^2T^{-1}$) à la constante d'amortissement,
κ ($[\kappa] = ML^2T^{-2}$) à la constante du ressort en torsion,
$(x - x_c)$ à un vecteur dans le plan correspondant au bras de levier entre un point du solide et le centre de rotation x_c et
λ à un second vecteur dans le plan correspondant au multiplicateur de Lagrange des contraintes appliquées au système.

Naturellement, l'intégration est réalisée sur la surface S d'un solide dans $\mathbb{R}^3$ pour obtenir le couple exercé sur celui-ci. Le solide est représenté à la Figure 3.5.

En physique, le second moment de masse se calcule selon la relation

$$I = \int_V r^2 dm$$

1. On utilise les dimensions usuelles M, L et T de la masse, de la longueur et du temps.

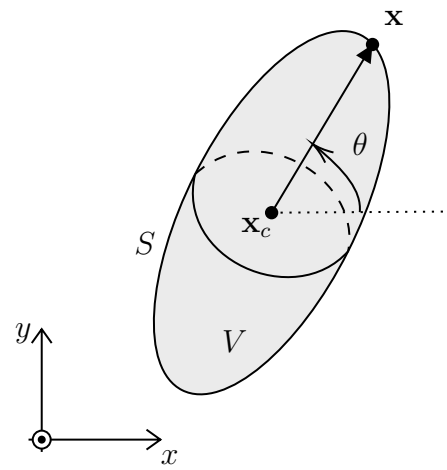


Figure 3.5 Schématisation de la rotation d'un solide 3D en rotation autour d'un axe normal au plan $x \circ y$

où V correspond au volume occupé par le solide,

r à la mesure de la distance entre un point à l'intérieur de V et le centre de rotation et $dm = \rho_s dV$ au différentiel de masse (ρ_s correspond à la masse volumique du solide).

Pour simplifier les calculs en 2D, nous supposons que le solide est un cylindre de section constante A et de longueur h dans la direction normale au plan, c'est-à-dire $V = Ah$ et $dV = dAh$. Si, de plus, la masse volumique du solide est constante, alors

$$I = \int_V r^2 dm = \rho_s h \int_A r^2 dA = \rho_s h I_0$$

avec I_0 ($[I_0] = L^4$) le second moment polaire d'inertie.

Comme le suggère les dimensions de ζ, nous pouvons l'exprimer en fonction du second moment de masse (ou polaire) et d'une fréquence pour écrire

$$\zeta = 2\pi f_n I = \rho_s h 2\pi f_n I_0 = \rho_s h \zeta_0$$

où $\zeta_0 = 2\pi f_n I_0$ ($[\zeta_0] = L^4 T^{-1}$) est le coefficient d'amortissement polaire. En procédant de manière analogue, on définit κ_0 tel que $\kappa = \rho_s \kappa_0 h$ pour compléter l'analyse [2].

Pour compléter le développement, on approche l'élément de surface du solide par $dS = h d\Gamma$ où $\Gamma = \partial A$, la frontière de la surface projetée du solide dans le plan. En utilisant l'ensemble

2. L'expression de κ_0 ne sera pas développée puisqu'elle n'est pas utilisée dans le cadre des études de ce mémoire

de ces développements et définitions, on obtient l'Équation (3.1)

$$\rho_s I_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \rho_s \zeta_0 \frac{d\theta}{dt} + \rho_s \, \kappa_0 \, \theta + \int_\Gamma ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \times \boldsymbol{\lambda}) \cdot e_z \, d\Gamma = 0, \tag{3.1}$$

soit l'équation de conservation du moment angulaire dans le plan pour un solide de masse volumique uniforme. Pour faciliter son implémentation, cette équation différentielle d'ordre 2 est réécrite sous la forme d'un système de deux équations différentielles d'ordre 1,

$$\rho_s I_0 \dot{\omega} + \rho_s \zeta_0 \omega + \rho_s \kappa_0 \theta + \int_\Gamma ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \times \boldsymbol{\lambda}) \cdot e_z d\Gamma = 0 \tag{3.2}$$

$$\dot{\theta} = \omega \ , \tag{3.3}$$

où ω est la vitesse de rotation angulaire. Des conditions initiales sur θ et ω sont éventuellement prescrites pour déterminer la solution du système d'équations.

3.4 Interpolation de la position des noeuds du maillage

Tel que mentionné au Chapitre 2, il existe plusieurs méthodes permettant de calculer la nouvelle position des noeuds du maillage au fil d'une simulation. Dans le cas présent, les méthodes algébriques attirent davantage notre intérêt puisque celles-ci sont beaucoup plus faciles à implémenter dans un programme d'éléments finis déjà existant. Étant plus récentes que les méthode basées sur les équations aux dérivées partielles, elles représentent aussi un sujet intéressant de recherche et laissent place à encore beaucoup d'amélioration.

3.4.1 Interpolation sur une infinité de points et interpolation transfinie

Les méthodes algébriques déjà bien établies dans le domaine de la gestion des maillages mobiles, c'est-à-dire IDW et RBF, basent leur interpolation sur un nuage de points auxquels l'information est connue. Celles-ci utilisent donc la position des noeuds aux frontières pour interpoler le taux de déformation des noeuds à l'intérieur du domaine. L'ITM, quant à elle, se différencie par le fait qu'elle interpole à partir des courbes continues composant les frontières et non seulement à partir des noeuds. C'est ce qui lui confère son caractère transfini. La Figure 3.6, inspirée du travail de Garon et Delfour [38–40], permet justement de bien imager cette différence. Elle présente un exemple très simple, soit une ellipse rigide placée au sein d'un domaine fluide Ω. La zone grisée représente la zone maillée. C'est donc en se basant sur le mouvement de l'ellipse et de la frontière extérieure du domaine fluide que IDW, RBF et ITM peuvent interpoler le taux de déformation des noeuds situés à l'intérieur du domaine Ω. Dans le cas où la géométrie exacte de l'ellipse est connue, IDW et RBF approximent

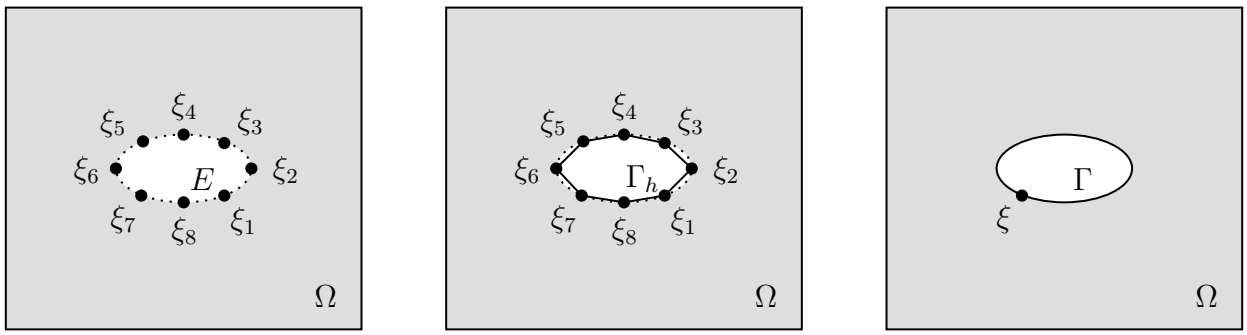


Figure 3.6 Interpolation à partir d'un nuage de points (gauche), à partir d'un maillage d'éléments finis (milieu) et à partir d'une courbe continue (droite) formant l'objet solide placé dans un domaine fluide maillé (zone grisée)

celle-ci par un nuage de points $E = \{\xi_1, ..., \xi_8\}$ formés des noeuds de l'ellipse. Ces derniers bougent alors selon le mouvement entraîné par l'écoulement du fluide et l'ellipse doit ensuite être reconstruite. Ainsi, seule l'information des noeuds est conservée entre la position initiale des frontières et leur position déformée. Il s'agit aussi de la seule information utilisée pour interpoler le taux de déformation des autres noeuds du maillage. Pour ce qui est de l'ITM, la géométrie exacte de l'ellipse, c'est-à-dire la courbe continue Γ qui la compose, est déformée et sert aussi à l'interpolation du taux de déformation des noeuds du maillage. Cela équivaut en quelque sorte à interpoler à partir d'un nuage infini de points. On maximise ainsi la précision de l'interpolation en prenant avantage de toute l'information disponible. Toutefois, tel que mentionné au Chapitre 2, il est parfois plus facile de baser l'interpolation de l'ITM sur un maillage d'éléments finis Γ_h. Cette méthode demeure plus précise que de baser l'interpolation sur un nuage de points puisqu'un maillage contient non seulement l'information concernant les noeuds, mais aussi concernant les éléments connectant ceux-ci. Cette technique permet donc de contrôler la précision de l'interpolation par l'intermédiaire des fonctions d'interpolation géométriques.

3.4.2 Généralisation des différentes méthodes d'interpolation algébriques

En étudiant plus en profondeur les différentes méthodes algébriques, il est possible de regrouper celles-ci. En effet, on peut faire ressortir une formule d'interpolation générale $u(\boldsymbol{x})$, qui peut être présentée sous sa forme discrète ou continue, qui s'applique à la fois à IDW et à ITM et où seule le changement d'une fonction de poids $\varphi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})$ permet de passer d'une méthode d'interpolation à l'autre. Le Tableau 3.2 présente justement cette formule sous ses différentes formes. Une nouvelle méthode d'interpolation hybride peut même être ajoutée en appliquant

la fonction de poids de IDW à la formule d'interpolation continue de l'ITM, donnant ainsi lieu à l'Interpolation Transfinie Barycentrique (ITB) qui est en fait la version transfinie de IDW. Le développement mathématique de cette méthode est davantage détaillé par Delfour et Garon [38,39]. On peut maintenant noter k-IDW, k-ITM et k-ITB les différentes méthodes en fonction de l'exposant k employé.

Tableau 3.2 Composition des formules d'interpolation de IDW, ITM et ITB

Type	**Formule d'interpolation**	**Fonction de poids**
IDW	$u(\boldsymbol{x}) := \dfrac{\sum_{j=1}^{m} f(\boldsymbol{\xi_j})\varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi_j})}{\sum_{j=1}^{m}\varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi_j})}$	$\varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi_j}) = \dfrac{1}{\lvert\lvert\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi_j}\rvert\rvert^k}$ $k = n^*$
ITM	$u(\boldsymbol{x}) := \dfrac{\int_\Gamma f(\boldsymbol{\xi})\varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})d\Gamma}{\int_\Gamma \varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})d\Gamma}$	$\varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}) = \dfrac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{\xi})d\Gamma}{\lvert\lvert\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}\rvert\rvert^k}$ $k = n^* + 1$
ITB		$\varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}) = \dfrac{1}{\lvert\lvert\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}\rvert\rvert^k}$ $k = n^*$

* Dimension de l'espace $\mathbb{R}^n$.

En ce qui concerne RBF, cette méthode est légèrement différente dans sa structure, principalement parce que celle-ci ne contient pas de fonctions de poids, mais plutôt différentes fonctions à bases radiales. Tout comme IDW, ITM et ITB, elle demeure composée d'une fonction d'interpolation générale à l'intérieur de laquelle différentes fonctions peuvent être implémentées. La fonction d'interpolation $u(\boldsymbol{x})$ présentée au Tableau 3.3 est la même que l'Équation (2.4) présentée au Chapitre 2.

Tableau 3.3 Composition de la formule d'interpolation de RBF

Type	**Formule d'interpolation**	**Fonctions à bases radiales**
RBF	$u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi(\lvert\lvert\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi_j}\rvert\rvert)$	Tableau 2.1 Tableau 2.2

3.4.3 Modélisation de la dynamique du maillage

Outre le choix de la méthode d'interpolation du taux de déformation des noeuds du maillage, il existe différentes approches pour mettre celle-ci en oeuvre. On décrit ici trois approches

pour la modélisation de la dynamique du maillage. La première approche, la plus naturelle, exprime l'évolution du maillage en fonction du temps à l'aide d'une équation différentielle ordinaire. La seconde exprime l'évolution du maillage en fonction du temps à l'aide d'une formulation intégrale. Finalement, la troisième approche, moins intuitive, décrit l'évolution du maillage à l'aide d'une fonction de forme.

Dans le but de différencier les différentes approches, on note la fonction $x(t)$ comme étant la position des noeuds du maillage en fonction du temps et la fonction $X(t, \mu)$ celle décrivant la position des noeuds en fonction du facteur de forme μ. Pour écrire la relation entre ces deux définitions, on pose l'hypothèse que le facteur de forme μ varie linéairement aux frontières du domaine. On suppose ainsi que

$$X(t, \mu) = x(0) + \mu(x(t) - x(0))$$

aux frontières mobiles. Ainsi,

$$\partial_\mu X \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dX}{d\mu} = x(t) - x(0) \equiv x - x^*$$

où x^* correspond à la position initiale des noeuds, soit leur position au temps $t = 0$.

Soit $\Omega(t)$ le domaine de calcul muni de s frontières en mouvement, $\Gamma_i(t)$, et d'une frontière immobile, $\Gamma_0(t)$. On définit par

$$\Gamma_i^s = \cup_{k=i}^s \Gamma_k$$

l'union des frontières d'indice i à s, tel que schématisé à la Figure 3.7. Pour alléger la notation $\Omega \equiv \Omega(t)$ et $\Gamma_i^s \equiv \Gamma_i^s(t)$. Ainsi Γ_1^s dénote l'union de toutes des frontières mobiles et Γ_0^s l'union de toutes les frontières au temps t. Également, on note spécifiquement par $\Omega(0)$ et $\Gamma_i^s(0)$, les domaines en $t = 0$, c'est-à-dire à l'état dit de référence. On note également θ_i^* et $x_{c_i}^*$ l'état de référence des solides, c'est-à-dire l'orientation et la position du centre de rotation. On a également x_i la position d'un noeud du maillage au temps implicite t et x_i^* la position initiale de ce noeud.

Finalement, on note par $\mathcal{N}$ les numéros de noeuds du maillage mobile incluant les noeuds des frontières, et par $\mathcal{N}^\circ$ les numéros des noeuds du maillage mobile à l'exclusion des noeuds des frontières. On note aussi par $\mathcal{S} = \{1, ..., s\}$ l'ensemble des numéros des solides.

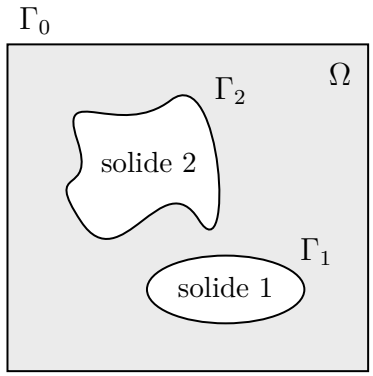


Figure 3.7 Schématisation du domaine fluide Ω au sein duquel 2 solides ($s = 2$) sont en mouvement. Seule la zone grisée est maillée.

Formulation Temporelle Différentielle (FTD)

Pour obtenir les coordonnées du maillage mobile, on suppose que les coordonnées $x(t)$ dépendent du temps. Si la dérivée temporelle des coordonnées aux parois mobiles est connue, alors les valeurs de $x_i(t) \equiv x_i$ s'obtiennent de l'intégration de

$$\frac{dx_i}{dt} = V(x_i, v; t) = \frac{\displaystyle\int_{\Gamma_0^s(t)} v\varphi(x_i - x)d\Gamma}{\displaystyle\int_{\Gamma_0^s(t)} \varphi(x_i - x)d\Gamma} \quad \forall i \in \mathcal{N}^\circ$$

avec

$$x_i(0) = x_i^* \ \ \forall i \in \mathcal{N}^\circ$$

et

$$v \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dx}{dt}$$

la vitesse de déformation des noeuds de la frontière mobile. Pour les besoins du calcul numérique, on approche la dérivée temporelle des noeuds de $\mathcal{N}^\circ$ par une formule aux différences arrières (BDF) implicite

$$\frac{dx_i}{dt} \approx \sum_{k=0}^{N} \alpha_k x_i^k$$

avec $x_i^k = x_i(t_k)$. Puisque la méthode est implicite, on a $t = t_0$, le temps courant, et $t_0 > t_1 > ... > t_n$, avec n l'ordre de la méthode BDF. Finalement, on écrit l'Équation (3.4) telle que

$$\frac{dx_i}{dt}\int_{\Gamma_0^s}\varphi(x_i - x)d\Gamma - \int_{\Gamma_0^s} v\varphi(x_i - x)d\Gamma = 0 \quad \forall i \in \mathcal{N}^\circ \tag{3.4}$$

dans laquelle on omet $\Gamma_0^s \equiv \Gamma_0^s(t)$ par convention. Pour les problèmes d'IFS, v est une inconnue du problème qui est déterminée par une équation qui décrit l'évolution de la frontière en fonction des contraintes du fluide et des propriétés dynamiques du solide.

Formulation Temporelle Intégrale (FTI)

On considère maintenant l'équation différentielle (3.4) de la section précédente et on l'intègre directement sur l'intervalle $]0, T[$. On obtient

$$x_i(T) - x_i(0) = \int_0^T dt \frac{\displaystyle\int_{\Gamma_0^s(t)} v\varphi(x_i - x)d\Gamma}{\displaystyle\int_{\Gamma_0^s(t)} \varphi(x_i - x)d\Gamma} \quad \forall i \in \mathcal{N}^\circ$$

ou, sur un sous-intervalle $]t_1, t_2[$,

$$x_i(t_2) = x_i(t_1) + \mathcal{T}(t_1, t_2, x_i) \quad \forall i \in \mathcal{N}^\circ$$

avec

$$\mathcal{T}(t_1, t_2, x_i) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\displaystyle\int_{\Gamma_0^s(t)} v\varphi(x_i - x)d\Gamma}{\displaystyle\int_{\Gamma_0^s(t)} \varphi(x_i - x)d\Gamma} \quad .$$

La formulation sur $]t_1, t_2[$ permet de faire évoluer une solution connue en t_1 vers le temps t_2. Elle est utile dans le contexte du calcul numérique.

Pour les besoins du calcul numérique, on doit définir la vitesse de déformation de la géométrie dans l'intervalle $]t_1, t_2[$. Tel que mentionné précédemment, on suppose que cette variation est linéaire en tout point homologue de la géométrie, c'est-à-dire

$$x(t) = x(t_1) + \frac{(x(t_2) - x(t_1))(t - t_1)}{t_2 - t_1}$$

et

$$v(t) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \quad .$$

Ainsi $v(t)$ n'est donc pas la vitesse de déformation instantanée de la frontière, mais bien celle de la trajectoire décrite par la sécante reliant les positions du point aux temps t_1 (position connue) et t_2 (position prédite). L'intégrale en temps de $\mathcal{T}$ peut ensuite être approchée à l'aide des méthodes explicites d'intégration Euler, du point milieu ou de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4), pour simplifier les calculs. En particulier, on note respectivement par $\mathcal{TE}(t_1, t_2, x_i)$, $\mathcal{TM}(t_1, t_2, x_i)$ et $\mathcal{TRK}4(t_1, t_2, x_i)$ les approximations à l'aide de la méthode d'Euler, du point milieu et de RK4. Spécifiquement, on obtient

$$\mathcal{TE}(t_1, t_2, x_i) = (t_2 - t_1) \frac{\displaystyle\int_{\Gamma_0^s(t_1)} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{(t_2 - t_1)} \varphi(x_i(t_1) - x(t_1)) d\Gamma}{\displaystyle\int_{\Gamma_0^s(t_1)} \varphi(x_i(t_1) - x(t_1)) d\Gamma}$$

ou, plus simplement,

$$\mathcal{TE}(t_1, t_2, x_i) = \frac{\displaystyle\int_{\Gamma_0^s(t_1)} (x(t_2) - x(t_1)) \varphi(x_i(t_1) - x(t_1)) d\Gamma}{\displaystyle\int_{\Gamma_0^s(t_1)} \varphi(x_i(t_1) - x(t_1)) d\Gamma}.$$

Dans cette dernière expression, les intégrales sont calculées avec des valeurs connues au temps t_1 pour prédire une valeur au temps t_2.

De cette nouvelle nomenclature en découlent d'autres très similaires, soient

— k-ITM-$\mathcal{TE}$, qui est l'approximation Euler explicite de $\mathcal{T}$ pour la fonction de pondération de la méthode d'interpolation ITM. Ainsi, 3-ITM-$\mathcal{TE}$ désigne cette méthode pour $k = 3$;

— k-ITB-$\mathcal{TE}$, qui est l'approximation Euler explicite de $\mathcal{T}$ pour la fonction de pondération de la méthode d'interpolation ITB. Ainsi, 3-ITB-$\mathcal{TE}$ désigne cette méthode pour $k = 3$;

— k-ITM-$\mathcal{TM}$, qui est l'approximation du point milieu (*midpoint*) de $\mathcal{T}$ pour la fonction de pondération de la méthode d'interpolation ITM. Ainsi, 3-ITM-$\mathcal{TM}$ désigne cette méthode pour $k = 3$;

— k-ITB-$\mathcal{TM}$, qui est l'approximation du point milieu (*midpoint*) de $\mathcal{T}$ pour la fonction de pondération de la méthode d'interpolation ITB. Ainsi, 3-ITB-$\mathcal{TM}$ désigne cette méthode pour $k = 3$;

— k-ITM-$\mathcal{TRK}4$, qui est l'approximation Runge-Kutta d'ordre 4 de $\mathcal{T}$ pour la fonction

de pondération de la méthode d'interpolation ITM. Ainsi, 3-ITM-$\mathcal{TRK}4$ désigne cette méthode pour $k = 3$;

— k-ITB-$\mathcal{TRK}4$, qui est l'approximation Runge-Kutta d'ordre 4 de $\mathcal{T}$ pour la fonction de pondération de la méthode d'interpolation ITB. Ainsi, 3-ITB$-\mathcal{TRK}4$ désigne cette méthode pour $k = 3$.

Formulation de Forme Intégrale (FFI)

Pour obtenir les coordonnées du maillage mobile, on suppose l'existence d'une fonction de forme $X(t, \mu)$ telle que $x(t) = X(t, 1)$ et $x(0) = X(t, 0)$. Si la dérivée de forme, c'est-à-dire par rapport au paramètre μ, est connue aux frontières mobiles, alors les valeurs de $X_i(t, 1) \equiv x_i$ s'obtiennent de l'intégration de

$$\partial_\mu X_i = \mathcal{V}(X_i, X, \partial_\mu X; \mu t) = \frac{\displaystyle\int_{\Gamma_0^s(\mu t)} \partial_\mu X \varphi(X_i - X) d\Gamma}{\displaystyle\int_{\Gamma_0^s(\mu t)} \varphi(X_i - X) d\Gamma} \quad \forall i \in \mathcal{N}^\circ$$

avec

$$X_i(t, 0) = x_i^* \ \ \forall i \in \mathcal{N}^\circ$$

pour écrire l'Équation (3.5)

$$X_i(t, 1) - X_i(t, 0) = x_i - x_i^* = \int_0^1 d\mu \mathcal{V}(X_i, X, \partial_\mu X; \mu t) \ \ \forall i \in \mathcal{N}^\circ \ , \tag{3.5}$$

soit l'expression générale de la position des noeuds x_i du domaine mobile avec $\mathcal{V}$ la pseudo-vitesse de déformation du maillage.

Pour les besoins du calcul numérique, on formule cette expression générale sur n sous-intervalles d'intégration pour écrire

$$x_i - x_i^* = \mathcal{I}(\varphi, \partial_\mu X, n) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} d\mu \mathcal{V}(X_i, X, \partial_\mu X; \mu t)$$

À la suite de quoi, pour approcher $\mathcal{I}$, on utilise $\partial_\mu X(t, \mu) = x - x^*$, qui provient de l'hypothèse de la variation linéaire de la fonction de forme $X(t, \mu)$ aux frontières énoncée en début de section, et les méthodes explicites d'Euler ou de Runge-Kutta d'ordre 4 pour réaliser

l'intégration par rapport à μ. On écrit alors

$$\mathcal{IE}(\varphi, x - x^*, n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \mathcal{V}(X_i, X, x - x^*; (k/n)t)$$

l'approximation avec Euler explicite et $\mathcal{IRK}4(\varphi, x - x^*, n)$ pour l'approximation avec Runge-Kutta d'ordre 4.

En particulier, on note par

$$\mathcal{IE}_1(\varphi, x - x^*) = \mathcal{IE}(\varphi, x - x^*, 1) = \mathcal{V}(X_i, X, x - x^*; 0) = \frac{\displaystyle\int_{\Gamma_0^s(0)} (x - x^*)\varphi(X_i(t,0) - X(t,0))d\Gamma}{\displaystyle\int_{\Gamma_0^s(0)} \varphi(X_i(t,0) - X(t,0))d\Gamma}$$

l'approximation $\mathcal{IE}$ à un pas. Après l'identification des $X_i(t,0) = x_i^*$ et $X(t,0) = x^*$, elle s'écrit

$$x_i - x_i^* = \frac{\displaystyle\int_{\Gamma_0^s(0)} (x - x^*)\, \varphi(x_i^* - x^*)d\Gamma}{\displaystyle\int_{\Gamma_0^s(0)} \varphi(x_i^* - x^*)d\Gamma}$$

ou, de façon équivalente, telle qu'à l'Équation (3.6)

$$x_i - x_i^* \int_{\Gamma_0^s(0)} \varphi(x_i^* - x^*)d\Gamma - \int_{\Gamma_0^s(0)} (x - x^*)\, \varphi(x_i^* - x^*)d\Gamma \;\; \forall i \in \mathcal{N}^\circ \;\; . \tag{3.6}$$

Elle est la moins précise de cette famille de méthodes, mais ne couple que les coordonnées x_i aux coordonnées x_i^* des noeuds du maillage. D'un point de vue schématique, il est possible d'illustrer la différence entre la formulation de forme $\mathcal{IE}$ et les formulations temporelles telle qu'à la Figure 3.8.

Dans le même ordre d'idée qu'à la section précédent, on établie une nomenclature telle que

— k-ITM-$\mathcal{IE}_1$ est l'approximation Euler explicite de $\mathcal{I}$ pour la fonction de pondération de la méthode d'interpolation ITM avec un seul intervalle ($n = 1$). Ainsi, 3-ITM$-\mathcal{IE}_1$ désigne cette méthode pour $k = 3$;

— k-ITB-$\mathcal{IE}_1$ est l'approximation Euler explicite de $\mathcal{T}$ pour la fonction de pondération de la méthode d'interpolation ITB avec un seul intervalle ($n = 1$). Ainsi, 3-ITB$-\mathcal{TE}_1$ désigne cette méthode pour $k = 3$.

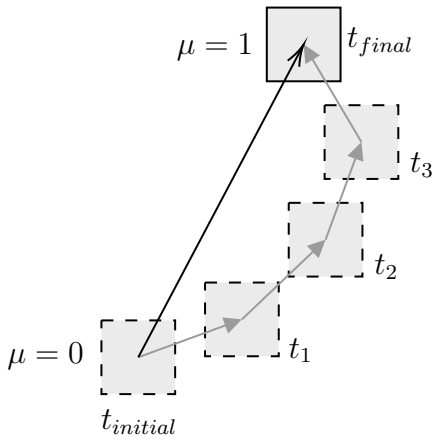


Figure 3.8 Comparaison des formulations temporelles et de la formulation de forme quant au déplacement d'un solide. Les flèches grises montrent les déplacements intermédiaires entre la position initiale et finale de l'objet solide alors que la flèche noire montre le déplacement en une seule étape du solide de sa position initiale à sa position finale à l'aide de la méthode $\mathcal{IE}_1$.

Synthèse

FTD, FTI et FFI sont des formulations qui possèdent chacune des avantages et des inconvénients. Soit $\#N$ le nombre de noeuds de la partie mobile du maillage. En 2D, le nombre de variables associées au maillage est donc égal, au minimum, à $2 \times \#N$ (pour x et y), et ce peu importe la formulation utilisée.

L'approche FTD, tel que mentionné précédemment, se prête intuitivement à la méthode de résolution monolithique en IFS vu son caractère implicite. Elle requiert toutefois un minimum de DDL supplémentaires par rapport à la simulation des équations de Navier-Stokes sur un maillage fixe, soit $(2 \times \#N)$ DDL quelque soit l'ordre de la méthode BDF utilisé. Dans cette approche, l'évolution des coordonnées des noeuds du maillage est concurrente à celle de la géométrie ; le système est donc fortement couplé et parfois difficile à linéariser. Des problèmes numériques sont possibles si la géométrie évolue très rapidement. De plus, l'intégration temporelle est sujette au cumul des erreurs de troncature et peut causer l'enchevêtrement des éléments du maillage lorsque la simulation est réalisée sur de longues périodes de temps.

L'approche FTI, quant à elle, se prête davantage à la méthode de résolution partitionnée en IFS et ne requiert donc aucun DDL supplémentaire par rapport à la simulation des équations de Navier-Stokes sur un maillage fixe. En effet, le maillage est mis à jour itérativement à la suite des calculs de l'écoulement et des déplacements. Ce découplage fait en sorte que cette approche est relativement facile à mettre en oeuvre par l'utilisation de méthodes expli-

cites puisqu'on évite la linéarisation de systèmes d'équations. Tout comme l'approche FTD l'enchevêtrement du maillage est possible lorsque la simulation est réalisée sur de longues périodes de temps [40]. De plus, la formulation partitionnée s'avère inadéquate lorsque le ratio de masse (ρ_s/ρ_f) est inférieur à l'unité, puisque les systèmes d'équations sont alors inconditionnellement instables.

L'approche FFI a été conçue pour éviter l'enchevêtrement du maillage lorsque les simulations sont réalisées sur de longues périodes de temps. Elle se prête aisément à la méthode de résolution partitionnée et ne requiert alors aucun DDL supplémentaire ; mais requiert tout de même beaucoup plus d'opérations par étape de temps que l'approche FTI. L'approche FFI se prête également à la méthode de résolution monolithique mais requiert, respectivement, $(n \times 2 \times \#N)$ DDL pour l'approximation $\mathcal{IE}$ et $(3 \times n \times 2 \times \#N)$ DDL pour l'approximation $\mathcal{IRK}4$, avec n le nombre de sous-intervalles. Par contre, la méthode $\mathcal{IE}_1$ ne requiert que $(2 \times \#N)$ DDL et est donc, à cet égard, équivalente à l'approche FTD. De plus, la méthode $\mathcal{IE}_1$ est linéaire et n'est donc pas sujette aux instabilités de l'approche FTD lorsque le maillage évolue brusquement d'un pas de temps à l'autre. En contrepartie, l'enchevêtrement du maillage demeure possible si les déplacements sont très grands.

Le domaine d'application de la méthode $\mathcal{IE}_1$ de l'approche FFI inclut l'étude de l'oscillation d'un solide par rapport à son centre de gravité. De grands déplacements sont alors admissibles si les noeuds du maillage mobile, en contact avec le solide, peuvent se mouvoir librement selon la méthodologie développée dans ce mémoire.

3.5 Formulation faible monolithique de l'interaction fluide-structure

Alors que la formulation ALE des équations de Navier-Stokes, l'équation de conservation du moment angulaire ainsi que les différentes formulation permettant de modéliser la dynamique du maillage ont été détaillées précédemment, on vise ici à rassembler et synthétiser toutes les équations nécessaires à la résolution monolithique d'un problème d'IFS. On s'attarde d'abord à la dynamique du fluide, à celle des solides ainsi qu'aux différentes formes de la cinématique des noeuds aux frontières et du maillage entier.

3.5.1 Dynamique du fluide

Les équations détaillant la dynamique du fluide proviennent évidemment des équations de Navier-Stokes. On obtient assez facilement la formulation faible de ces équations sous la forme

ALE tel que détaillé aux Équations (3.7) et (3.8).

$$\underbrace{\int_\Omega \hat{\mathbf{u}} \cdot \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} d\Omega}_{\text{variation temporelle}} + \underbrace{\int_\Omega \hat{\mathbf{u}} \cdot \rho \left(\mathbf{u} \cdot \nabla\right) \mathbf{u}\, d\Omega}_{\text{accélération du fluide}} + \underbrace{\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) : \nabla \hat{\mathbf{u}}\, d\Omega}_{\text{tenseur de contraintes sur le domaine}} +$$

$$\underbrace{\int_\Omega \hat{\mathbf{u}} \cdot \rho \left(-\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \cdot \nabla\right) \mathbf{u}\, d\Omega}_{\text{accélération des noeuds du maillage}} = \underbrace{\int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_0^s} \hat{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{n}\, d\Gamma}_{\text{tenseur de contraintes sur les frontières immobiles}} \tag{3.7}$$

$$-\int_\Omega \hat{q}\, \nabla(\mathbf{u})\, d\Omega = 0 \tag{3.8}$$

où $\hat{\mathbf{u}}$ et $\hat{q}$ correspondent à des fonctions tests,

ρ à la masse volumique du fluide,
$\mathbf{u}$ au vecteur vitesse du fluide,
$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p)$ au tenseur qui contient à la fois les contraintes visqueuses et celles issues de la pression,
$\partial\mathbf{x}/\partial t$ à la vitesse de déformation des noeuds $\mathbf{x}$ du maillage et
$\mathbf{n}$ à la normale dirigée vers l'extérieur du domaine.

Or, comme la résolution se veut monolithique, il faut, déjà à ce stade, imposer une condition d'adhérence entre le fluide, les solides ainsi que le maillage. En d'autres mots, on veut indiquer que la vitesse de déplacement du fluide aux frontières solides est égale à la vitesse de déformation de ces frontières et qu'il en est de même pour la vitesse de déplacement des noeuds du maillage situés sur ces frontières. On passe alors par une fonctionnelle faisant apparaître le multiplicateur de Lagrange λ telle que

$$I(\mathbf{u}, \lambda) = \int_{\cup_{i=1}^s \Gamma_i} \lambda \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})\, d\Gamma, \tag{3.9}$$

qui, une fois extrémisée, permet d'écrire

$$\delta I(\mathbf{u}, \lambda) = \int_{\cup_{i=1}^s \Gamma_i} \underbrace{\delta\lambda}_{\hat{\lambda}} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})\, d\Gamma + \int_{\cup_{i=1}^s \Gamma_i} \lambda \cdot \underbrace{\delta\mathbf{u}}_{\hat{\mathbf{u}}}\, d\Gamma. \tag{3.10}$$

Il est important de spécifier ici que l'intégrale est effectuée sur les frontières en mouvement seulement, soit $\cup_{i=1}^s \Gamma_i$, puisque ce sont sur ces frontières que la contrainte d'égalité des vitesses est imposée. Dans le cas présent, les variations $\delta\lambda$ et $\delta\mathbf{u}$ correspondent aux fonctions tests de ces variables, soit respectivement $\hat{\lambda}$ et $\hat{\mathbf{u}}$. Il suffit maintenant d'ajouter les différents termes de l'Équation (3.10) au système composé des équations (3.7) et (3.8). On obtient ainsi les Équations (3.11), (3.12) et (3.13) où les termes ajoutés par la minimisation de la fonctionnelle

sont mis en évidence.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \hat{\mathbf{u}} \cdot \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} d\Omega + \int_\Omega \hat{\mathbf{u}} \cdot \rho \left(\mathbf{u} \cdot \nabla\right) \mathbf{u}\, d\Omega &+ \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) : \nabla \hat{\mathbf{u}}\, d\Omega + \\
\int_\Omega \hat{\mathbf{u}} \cdot \rho \left(-\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \cdot \nabla\right) \mathbf{u}\, d\Omega \boxed{-\sum_{i=1}^{s} \int_{\Gamma_i} \hat{\mathbf{u}} \cdot \lambda\, d\Gamma} &= \int_{\partial\Omega \setminus \cup_{i=1}^{s} \Gamma_i} \hat{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{n}\, d\Gamma \qquad (3.11) \\
-\int_\Omega \hat{q}\, \nabla(\mathbf{u})\, d\Omega &= 0 \qquad (3.12) \\
\boxed{-\sum_{i=1}^{s} \int_{\Gamma_i} \hat{\lambda} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})\; d\Gamma} &= 0 \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

On utilise ici l'approximation $P_2P_1P_2$ pour approcher les variables des champs $\mathbf{u}$,p et $\boldsymbol{\lambda}$ des Équations (3.11)-(3.13). On applique ainsi une approximation quadratique pour $\mathbf{u}$, linéaire pour p et quadratique pour $\boldsymbol{\lambda}$. Celles-ci sont continues et généralisent l'approximation P_2P_1 de Taylor-Hood.

3.5.2 Dynamique des solides

L'équation de la conservation du moment angulaire, qui régit la dynamique des solides étudiée ici, a été largement détaillée à la Section 3.3. Les Équations (3.14) et (3.15) ne sont donc qu'un rappel des Équations (3.2) et (3.3).

$$\begin{aligned}
\rho_s I_0 \dot{\omega} + \rho_s \zeta_0 \omega + \rho_s \kappa_0 \theta + \int_\Gamma ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \times \boldsymbol{\lambda}) \cdot e_z d\Gamma &= 0 \quad \forall i \in \mathcal{S} \qquad (3.14) \\
\dot{\theta} &= \omega \quad \forall i \in \mathcal{S} \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

3.5.3 Cinématique des frontières du maillage

Tout comme il existe différentes formulations permettant de modéliser la dynamique du maillage (Section 3.4.3), il est aussi possible de déplacer l'objet solide selon deux approches, soit par rotation rigide, ou bien à l'aide d'une transformation générale.

Mouvement rigide

Le mouvement rigide des frontières des solides, qui est occasionné par l'écoulement fluide, peut être exprimé tel qu'aux Équations (3.16) et (3.17).

$$\int_{\Gamma_i(0)} \hat{x} \cdot (\underbrace{x - x_{c_i}}_{\substack{\text{Translate à la} \\ \text{nouvelle position}}} - \underbrace{R(\theta_i - \theta_i^*)(x^* - x_{c_i}^*)}_{\substack{\text{Impose la nouvelle rotation} \\ \text{au bras de levier} \\ \text{de la position précédente}}}) d\Gamma \quad = \quad 0 \quad \forall i \in \mathcal{S} \tag{3.16}$$

$$\int_{\Gamma_i} \hat{v} \cdot (v - v_{c_i} - \omega_i P(x - x_{c_i})) d\Gamma \quad = \quad 0 \quad \forall i \in \mathcal{S} \tag{3.17}$$

où $\hat{x}$ et $\hat{v}$ correspondent aux fonctions tests de chaque équation,

x à la position des noeuds frontières du solide au temps t,
x_{c_i} à la position du centre de rotation du solide au temps t,
θ_i à la position angulaire des noeuds frontières du solide au temps t,
θ_i^* à la position angulaire initiale des noeuds frontière du solide,
x^* à la position initiale des noeuds frontières du solide,
$x_{c_i}^*$ à la position initiale du centre de rotation du solide,
R à la matrice de rotation en 2D,
v à la vitesse de déplacement des noeuds frontières du solide au temps t,
v_{c_i} à la vitesse de déplacement du centre de rotation du solide au temps t,
ω_i à la vitesse angulaire des noeuds frontières du solide au temps t et
P à $R(\pi/2)$.

Transformation générale

Il est aussi possible de procéder à la rotation de l'ellipse en voyant plutôt celle-ci comme une déformation de l'ellipse entre sa position angulaire initiale et sa position angulaire finale. De cette façon, on a l'impression que les noeuds glissent sur l'ellipse lorsque celle-ci se met en mouvement. Cela est dû au fait que chaque noeud du maillage ne peut que se déplacer sur son propre rayon et conserve toujours la même position angulaire. Cette technique s'agence non seulement très bien avec la formulation FFI, mais elle permet aussi de minimiser le déplacement des noeuds du maillage. Son équation générale est présentée à l'Équation (3.18).

$$\int_{\Gamma_i(0)} \hat{x} \cdot F(t, x, x_{c_i}, \theta_i; x^*, x_{c_i}^*, \theta_i^*) \, d\Gamma \quad = \quad 0 \quad \forall i \in \mathcal{S} \tag{3.18}$$

avec F une fonction qui décrit la déformation de la frontière de l'objet. La construction de cette fonction est détaillée par Delfour et Garon [38]. Cette transformation permet de vérifier

l'hypothèse de linéarité de $X(t,\mu) = x(0)+\mu(x(t)-x(0))$ pour les noeuds de la frontière. Elle est très intuitive pour un mouvement de translation, mais l'est moins pour un mouvement de rotation, tel qu'on peut le constater à la Figure 3.9. Elle demeure valide dans ces deux cas.

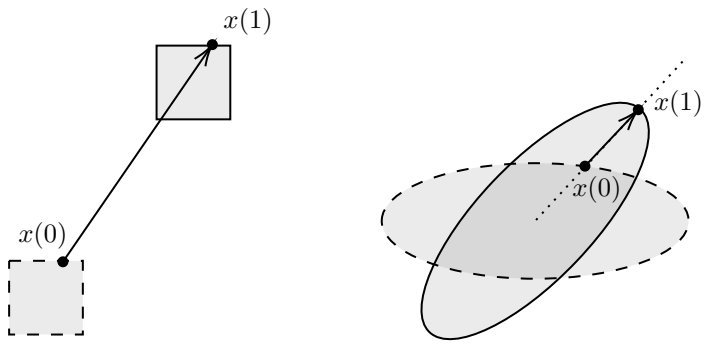


Figure 3.9 Schématisation du mouvement d'un solide par transformation générale. À droite on observe la translation d'un carré entre $\mu = 0$ et $\mu = 1$ et à gauche la rotation d'une ellipse où les noeuds à la frontière se déplacent linéairement sur leur rayon entre $\mu = 0$ et $\mu = 1$.

L'impact de l'utilisation de l'équation du mouvement rigide ou de la transformation générale sur le mouvement de noeuds du maillage est un facteur important à étudier. En effet, les noeuds à la frontière entre l'objet solide et le fluide ont une grande influence sur tous les noeuds du maillage et donc sur comment ceux-ci se déplacent au fil de la simulation. Ces deux approches seront donc testées en profondeur avant de procéder aux applications numériques.

3.5.4 Cinématique des noeuds du maillage

Les noeuds à l'intérieur du maillage, soit $x_i \in \mathcal{N}^\circ$, peuvent être déplacés selon différentes approches, tel qu'expliqué à la Section 3.4.3. Si on utilise l'approche FFI (k-ITM-$\mathcal{IE}_1$ ou k-ITB-$\mathcal{IE}_1$), c'est l'Équation (3.19) qui régit l'interpolation du taux de déformation des noeuds du maillage au fil de la simulation.

$$(x_i - x_i^*)\int_{\Gamma_0^s(0)} \varphi(x_i^* - x^*)d\Gamma - \int_{\Gamma_0^s(0)} (x - x^*)\varphi(x_i^* - x^*)d\Gamma = 0 \quad \forall i \in \mathcal{N}^\circ \tag{3.19}$$

Si on applique plutôt l'approche FTD, c'est l'Équation (3.20) qui régit l'interpolation du taux de déformation des noeuds du maillage au fil de la simulation.

$$\frac{dx_i}{dt}\int_{\Gamma_0^s} \varphi(x_i - x)d\Gamma - \int_{\Gamma_0^s} v\varphi(x_i - x)d\Gamma \quad = \quad 0 \quad \forall i \in \mathcal{N}^\circ \tag{3.20}$$

3.5.5 Synthèse

Pour mettre en oeuvre le modèle ALE avec la formulation FTD, il est nécessaire d'appliquer les Équations (3.11), (3.12), (3.13), (3.14), (3.15), (3.16), (3.17) et (3.20) qui modélisent le mouvement d'un corps rigide en rotation.

Pour le modèle ALE avec la formulation FFI, ce sont les Équations (3.11), (3.12), (3.13), (3.14), (3.15), (3.16), (3.17) et (3.19) qui modélisent le mouvement d'un corps rigide en rotation par l'approximation de forme.

Finalement, pour appliquer le modèle ALE avec la formulation FFI en procédant à une rotation par transformation générale, ce sont les Équations (3.11), (3.12), (3.13), (3.14), (3.15), (3.18) et (3.19) qui modélisent le mouvement d'un corps rigide en rotation par l'approximation de forme.

On explicite ainsi toutes les équations nécessaires à la résolution des problèmes d'IFS où le mouvement est purement rotationnel et où la résolution du domaine fluide, du domaine solide et de la position des noeuds du maillage est totalement monolithique.

3.6 Équations adimensionnelles

Maintenant que toutes les équations constitutives de la méthode de résolution monolithique sont établies, il est nécessaire de procéder à leur adimensionnalisation. Les équations des Sections 3.5.3 et 3.5.4 étant homogènes, il est inutile de les adimensionnaliser. On se concentre alors sur les équations de Navier-Stokes ainsi que sur celles de la dynamique des solides.

3.6.1 Adimensionnalisation des équations de Navier-Stokes

Tel que mentionné à la Section 3.2, les équations de Navier-Stokes sous forme ALE s'écrivent telles que

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \left((\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u} \right] - \nabla \cdot \sigma(p, \mathbf{u}) = 0 \quad , \tag{3.21}$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad . \tag{3.22}$$

où $\sigma(p, \mathbf{u}) = p\mathbb{I} + \mu \left(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u} \right)$. Les changements de variables ainsi que les différentes échelles dimensionnelles sont présentés au Tableau 3.4 où U_0 correspond à la vitesse en amont de l'écoulement à l'infini, L_0 à la longueur du grand axe de l'ellipse et ρ_0 à la masse volumique du fluide. On peut en déduire $T_0 = L_0/U_0$. Le nombre de Re devient donc $Re = \dfrac{\rho_0 U_0 L_0}{\mu}$ et

Tableau 3.4 Changements de variable pour l'adimensionnalisation de l'équation de Navier-Stokes sous forme ALE. Une variable dimensionnelle correspond à la multiplication de sa variable adimensionnelle et de son échelle dimensionnelle.

Variable dimensionnelle	**Variable adimensionnelle**	**Échelle dimensionnelle**
ρ	$\bar{\rho}$	ρ_0
μ	$\bar{\mu}$	$\rho_0 L_0 T_0$
$\mathbf{u}$	$\bar{\mathbf{u}}$	U_0
$\mathbf{v}$	$\bar{\mathbf{v}}$	U_0
p	$\bar{p}$	$\rho_0 U_0^2$
t	$\bar{t}$	T_0
∇	$\bar{\nabla}$	$1/L_0$

$\bar{\sigma} = -\bar{p}\mathbb{I} + \frac{1}{Re}(\bar{\nabla}\bar{u} + \bar{\nabla}^T\bar{u})$. Ainsi, en remplaçant les variables dimensionnelles par les variables adimensionnelles dans les Équations (3.21) et (3.22), on obtient

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{t}} + \left((\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{v}}) \cdot \bar{\nabla}\right) \bar{\mathbf{u}} = \bar{\nabla} \cdot \bar{\sigma} \quad ,$$
$$-\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad ,$$

où $\mu = 1/Re$.

3.6.2 Adimensionnalisation des équations de la dynamique des solides

Il est ensuite nécessaire de procéder à l'adimensionnalisation des équations de la dynamique des solides, soient

$$\rho_s \left(I_0 \dot{\omega} + \zeta_0 \omega + \kappa_0 \theta\right) + \int_\Gamma ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \times \boldsymbol{\lambda}) \cdot e_z d\Gamma = 0 \quad , \tag{3.23}$$

$$\frac{d}{dt}\theta = \omega \quad , \tag{3.24}$$

qui sont tirées des Équations (3.14) et (3.15) et où ρ_s correspond à la masse volumique du solide. Les changements de variables ainsi que les différentes échelles dimensionnelles qui s'ajoutent à ceux présentés au Tableau 3.4 sont présentés au Tableau 3.5 où U_0 demeure la vitesse en amont de l'écoulement à l'infini, L_0 la longueur du grand axe de l'ellipse et ρ_0 la masse volumique du fluide.

Ainsi, en remplaçant les variables dimensionnelles par les variables adimensionnelles dans les

Tableau 3.5 Changements de variable pour l'adimensionnalisation de l'équation de la dynamique du solide. Une variable dimensionnelle correspond à la multiplication de sa variable adimensionnelle et de son échelle dimensionnelle.

Variable dimensionnelle	**Variable adimensionnelle**	**Échelle dimensionnelle**
ρ_s	$\bar{\rho}_s$	ρ_0
ω	$\bar{\omega}$	U_0/L_0
$\dot{\omega}$	$\bar{\dot{\omega}}$	U_0^2/L_0^2
I_0	$\bar{I}_0$	$1/L_0^4$
ζ_0	$\bar{\zeta}_0$	$1/(L_0^4 T_0)$
κ_0	$\bar{\kappa}_0$	$1/(L_0^4 T_0^2)$
$\mathbf{x}$	$\bar{\mathbf{x}}$	L_0
$\mathbf{x}_c$	$\bar{\mathbf{x}}_c$	L_0
$\boldsymbol{\lambda}$	$\bar{\boldsymbol{\lambda}}$	$\rho_0/(L_0 T_0^2)$
Γ	$\bar{\Gamma}$	L_0

Équations (3.23) et (3.24), on obtient

$$r_m \left(\bar{I}_0 \bar{\dot{\omega}} + \bar{\zeta}_0 \bar{\omega} + \bar{\kappa}_0 \theta \right) + \int_\Gamma ((\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_c) \times \bar{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot e_z \, d\bar{\Gamma} = 0$$

$$\frac{d}{d\bar{t}} \theta = \bar{\omega}$$

où $r_m = \rho_s/\rho_0$. On peut également écrire

$$\zeta_0 = 2\pi f_n I_0 = 2\pi \bar{f}_n \bar{I}_0 \frac{L_0^4}{T_0}$$

et

$$\bar{\zeta}_0 = 2\pi \bar{f}_n \bar{I}_0 = \frac{2\pi}{U_r} \bar{I}_0$$

où $U_r = 1/\bar{f}_n$ correspond à la vitesse réduite et où f_n est une fréquence de l'ellipse.

Finalement, pour obtenir les équations sans dimension, il suffit d'appliquer la correspondance entre les paramètres dimensionnels et adimensionnels du Tableau 3.6. Pour les applications qui suivent, on allège l'équation adimensionnelle en omettant le symbole $\bar{\cdot}$ sur les variables.
s

Tableau 3.6 Correspondance entre les paramètres clés dimensionnels et leur équivalent adimensionnel

ρ	μ	ρ_s	I_0	ζ_0	κ_0
1	$\frac{1}{Re}$	r_m	$\bar{I}_0$	$\frac{2\pi}{U_r}\bar{I}_0$	$\bar{\kappa}_0$

CHAPITRE 4 VÉRIFICATION ET VALIDATION

Le programme *EF8* est utilisé par le groupe de recherche depuis plusieurs années et a déjà été vérifié et validé à maintes reprises. Toutefois, dans le but d'y intégrer la formulation ALE des équations de Navier-Stokes ainsi que l'interpolation transfinie permettant de résoudre le taux de déformation des noeuds du maillage et ainsi rendre ce dernier mobile, plusieurs modifications du code ont été requises. Il est donc essentiel de vérifier et de valider celui-ci à nouveau. Les processus de vérification et de validation (V&V) connaissent différentes définitions dans la littérature scientifique et même dans le domaine de la dynamique des fluides numérique comme en témoignent Oberkampf et al. [41]. Ici, ce sont les définitions de l'*American Institute of Aeronautics and Astronautics* (AIAA) qui servent de lignes directrices pour les différents tests de V&V.

Definition 4.0.1. *Vérification.* Le processus de vérification vise à déterminer que « l'implémentation du modèle numérique représente bel et bien la description conceptuel du modèle faite par le développeur ainsi que la solution de celui-ci »[Notre traduction] [42]. En d'autres mots, la vérification permet de s'assurer que les équations et les algorithmes implémentés sont résolus correctement et donnent les solutions attendues.

Definition 4.0.2. *Validation.* Le processus de validation permet « de déterminer le degré de précision d'un modèle numérique quant à sa représentation d'un phénomène réel du point de vue de l'utilisation désirée de ce modèle »[Notre traduction] [42]. La validation vise ainsi à s'assurer que ce sont les bonnes équations et les bons algorithmes qui sont résolus dans le but de représenter un phénomène réel avec une précision acceptable selon l'application.

4.1 Vérification

Selon le problème à résoudre, la dimension temporelle peut avoir ou non une influence sur le phénomène étudié. C'est pourquoi le programme *EF8* peut être utilisé pour résoudre des problèmes stationnaires ainsi que transitoires. Dans le cas des problèmes stationnaires, seul l'espace est discrétisé par la méthode des éléments finis alors que la discrétisation temporelle s'ajoute dans le cas des problèmes transitoires. Pour toutes les études de cette section, c'est le modèle ALE jumelé à l'approche FTD, détaillée au Chapitre 3, qui est employé.

4.1.1 Écoulement stationnaire

Les problèmes stationnaires sont un bon moyen de vérifier la discrétisation de l'espace utilisé par *EF8* puisque celle-ci n'est pas influencée par la discrétisation temporelle.

Vérification de la discrétisation en espace

Le Tableau 4.1 résume l'objectif, les moyens d'évaluation, les hypothèses ainsi que les critères de robustesse du premier test de vérification. On comprend donc que ce test vise à vérifier la justesse de la mise en oeuvre de l'approximation P_2P_1, utilisée pour les champs de vitesses et de pression. Les critères de robustesse, quant à eux, servent à s'assurer que les résultats obtenus ne sont pas influencés par des paramètres desquels ils devraient être indépendants. Ici, on vérifie la robustesse des résultats par rapport à l'orientation de la géométrie et à la valeur du nombre de Re. Les taux de convergence devraient donc être conservés, peu importe la valeur de ces paramètres. Ici, $\mu = 1/Re$ et $\rho = 1$.

Tableau 4.1 Détails du test de vérification de la discrétisation en espace de *EF8*

Objectif(s)	**Moyen(s) d'évaluation**	**Hypothèse(s)**	**Critère(s) de robustesse**
Vérifier la discrétisation P_2P_1 pour les vitesses et la pression	Taux de convergence basés sur les normes H^1 et L^2 en fonction du raffinement du maillage	Taux de convergence $\geqslant 2$ pour les vitesses (norme H^1) $\geqslant 2$ pour la pression (norme L^2)	Rotation de la géométrie et différents Re

La Figure 4.1 montre la géométrie et le maillage initial, c'est-à-dire le plus grossier, sur lequel est basée l'analyse du taux de convergence. Ce maillage a été raffiné à plusieurs reprises pour permettre le calcul de la norme H^1 de l'erreur en vitesse et de la norme L^2 de l'erreur en pression dans le but d'obtenir leurs taux de convergence.

Dans un premier temps, des polynômes linéaires ont été imposés sur toutes les frontières du domaine pour les vitesses u et v et une pression constante a été imposée en un point du domaine, tentant ainsi de reproduire la solution manufacturée présentée à la Figure 4.2 et à l'Équation (4.1). La méthode de vérification par solution manufacturée est détaillée à l'Annexe B.

$$\mathbf{u}_{in} = \mathbf{u}_{out} = \mathbf{u}_{down} = \mathbf{u}_{top} = \begin{cases} u = 3x \\ v = -3y + 5 \end{cases} \tag{4.1}$$
$$p = 2$$

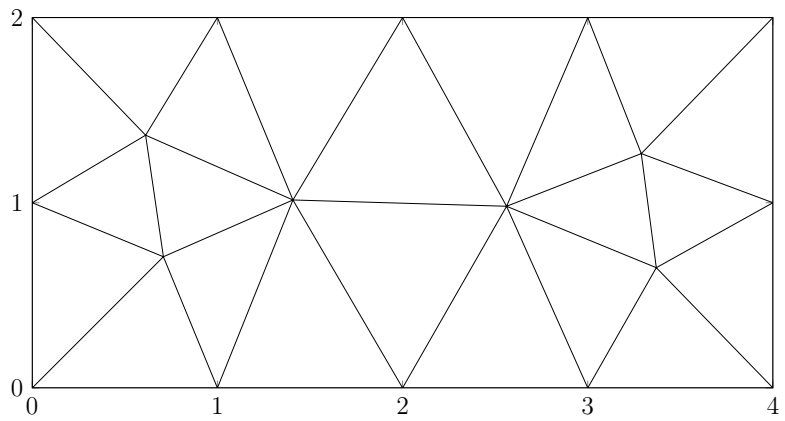


Figure 4.1 Maillage triangulaire composé de 22 éléments et de 57 noeuds

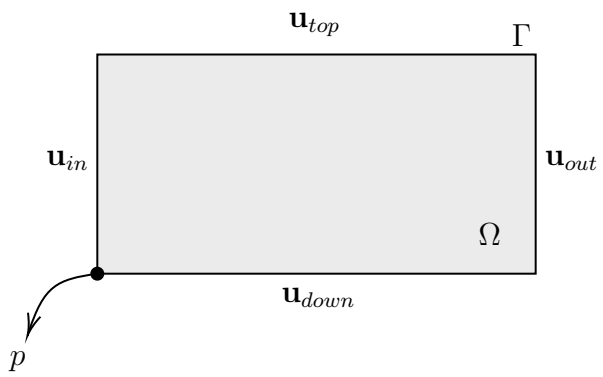


Figure 4.2 Schématisation des conditions u, v, p imposées aux frontières (Γ) du domaine fluide (Ω) pour la vérification de la résolution de la discrétisation en espace

Cette première analyse vérifie que la solution exacte est capturée par *EF8* puisque les polynômes d'interpolation choisis permettent théoriquement de représenter exactement ce type de solution. Le Tableau 4.2 montre justement que la solution est bel et bien capturée exactement pour tous les maillages. En effet, les normes sont toutes de l'ordre du zéro machine. Les résultats sont très semblables pour le domaine ayant subi une rotation ainsi que pour des nombres de *Re* plus élevés. Ces résultats sont présentés aux Tableaux C.1, C.2 et C.3 de l'Annexe C.

Dans un second temps, des polynômes d'ordre supérieur sont imposés sur toutes les frontières du domaine pour les vitesses u et v et une pression linéaire est imposée en un point du domaine, reproduisant cette fois la solution manufacturée présentée à la Figure 4.2 et à

Tableau 4.2 Normes de l'erreur en vitesse et en pression pour un champ de vitesse linéaire et une pression constante ($Re = 1$)

Maillage	**Nombre d'éléments**	**Norme des vitesses ($\mathbf{H^1}$)**	**Norme de la pression ($\mathbf{L^2}$)**
h	22	1.45E-14	1.58E-13
h/2	88	2.65E-14	3.91E-13
h/4	352	7.87E-14	5.58E-12
h/8	1408	1.95E-13	3.09E-11

l'Équation (4.2).

$$\mathbf{u}_{in} = \mathbf{u}_{out} = \mathbf{u}_{down} = \mathbf{u}_{top} = \begin{cases} u = 3x^2y - 4y + 2 \\ v = -3y^2x - 6x \end{cases} \tag{4.2}$$
$$p = 2x + 3$$

En procédant à ce test à différents Re et en faisant varier l'orientation du domaine, on s'assure que les taux de convergence correspondent toujours aux taux de convergence théoriques. C'est d'ailleurs ce que l'on constate à la Figure 4.3 où la norme H^1 de l'erreur en vitesse (gauche) ainsi que la norme L^2 de l'erreur en pression (droite) sont toutes les deux tracées en fonction du nombre d'éléments du maillage et ce, pour différents Re. Encore une fois, les résultats sont très semblables pour le domaine ayant subi une rotation, comme il est possible de le constater à la Figure C.1 de l'Annexe C.

Ces premiers tests de vérification de la discrétisation spatiale permettent de conclure que *EF8* résout correctement l'approximation $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1$ de la formulation variationnelle des équations de Navier-Stokes permettant d'obtenir les champs de vitesses et de pression sur tout le domaine.

4.1.2 Écoulement transitoire

En passant à la résolution des écoulements transitoires, la discrétisation temporelle entre en jeu. Il devient donc possible de vérifier que *EF8* résout correctement les schémas de discrétisation en temps BDF, détaillés à la Section 3.1.3. Toutefois, comme la discrétisation temporelle est ajoutée à la discrétisation spatiale, il est important de vérifier que celles-ci interagissent correctement entre elles. C'est pourquoi une première série de tests visant à vérifier uniquement la discrétisation temporelle est exécutée et qu'une seconde série de tests est ajoutée pour vérifier une combinaison adéquate de l'erreur en temps et en espace.

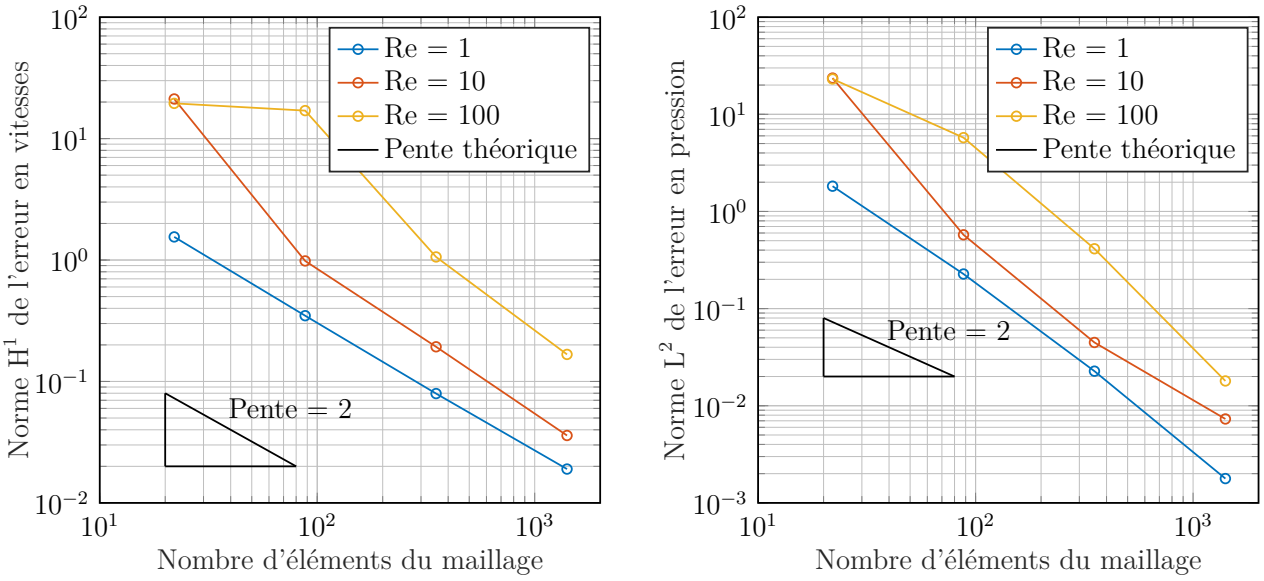


Figure 4.3 Normes de l'erreur en vitesses (gauche) et en pression (droite) pour un champ de vitesses d'ordre élevé et une pression linéaire

Vérification de la discrétisation en temps

En premier lieu, pour vérifier uniquement la résolution de la discrétisation en temps par *EF8*, différentes solutions spatialement exactes sont imposées sur un domaine rectangulaire fluide pour que la norme de l'erreur ne tienne compte que de l'erreur en temps. Il s'agit ainsi d'un problème de conditions initiales et non de conditions limites. À des fins de concision, seuls les schémas les plus utilisés, soit $BDF1$, $BDF2$ et $BDF3$ sont vérifiés. $BDF1$ et $BDF2$ sont d'ailleurs des schémas inconditionnellement stables, ce qui les rend d'autant plus intéressants dans le contexte d'une implémentation monolithique comme c'est le cas de *EF8*. La Figure 4.4 montre le maillage utilisé pour cette série de tests et l'Équation (4.3) présente la condition initiale $u_0(t)$ qui ne dépend que du temps ; ici, $Re = 1$.

Pour s'assurer de l'indépendance de la solution par rapport à la discrétisation spatiale, v et p ont été imposées comme étant nulles sur tout le domaine. Cette méthode permet d'ailleurs d'utiliser la norme H^1 de l'erreur de u en fonction du raffinement du pas de temps comme mesure du taux de convergence tel qu'explicité au Tableau 4.3. Différentes conditions initiales $u_0(t)$ ont ensuite été imposées sur la frontière gauche du domaine dans le but de reproduire les solutions manufacturées de l'Équation (4.3) illustrée à la Figure 4.5 et ainsi tester $BDF1$,

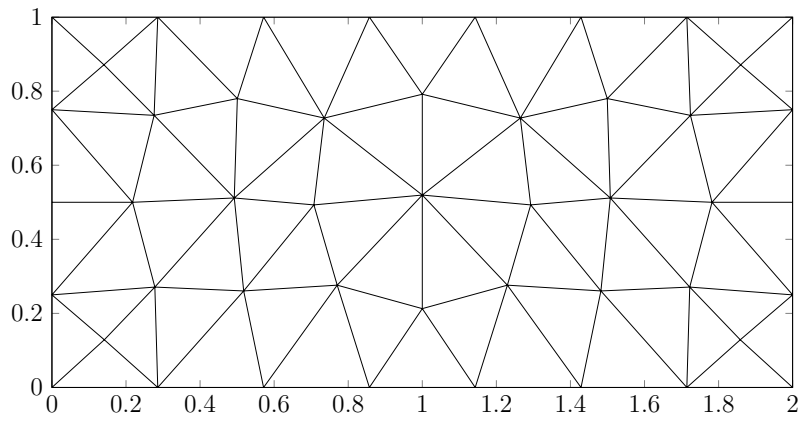


Figure 4.4 Maillage triangulaire composé de 70 éléments et de 163 noeuds

$BDF2$ et $BDF3$ avec chacune de celles-ci.

$$u_0(t) = t^n \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, 4 \tag{4.3}$$

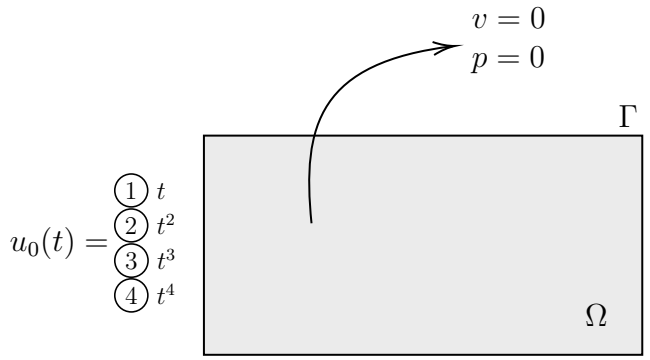


Figure 4.5 Schématisation des conditions v, p et de la condition initiale $u_0(t)$ imposées aux frontières (Γ) du domaine fluide (Ω) pour la vérification de la résolution en temps pour quatre cas différents

Cette série de tests a donné lieu aux résultats présentés au Tableau 4.4. On y voit que les taux de convergence théoriques sont bel et bien respectés pour tous les schémas BDF. De plus, chaque schéma arrive à capturer les solutions exactes tel qu'attendu, c'est-à-dire que $BDF1$ arrive à capturer exactement une solution linéaire, $BDF2$ une solution quadratique et $BDF3$ une solution cubique.

Afin de tester la discrétisation spatiale de façon encore plus consciencieuse, la solution manu-

Tableau 4.3 Détails du test de vérification de la discrétisation en temps de *EF8*

Objectif(s)	**Moyen(s) d'évaluation**	**Hypothèse(s)**
Vérifier la discrétisation en temps $BDF1$, $BDF2$ et $BDF3$	Taux de convergence basé sur la norme H^1 en fonction du raffinement du pas de temps	Taux de convergence $\geqslant 1$ pour $BDF1$ $\geqslant 2$ pour $BDF2$ $\geqslant 3$ pour $BDF3$

Tableau 4.4 Taux de convergence des différents schémas d'intégration temporelle BDF selon l'ordre de la condition initiale $u_0(t)$

Schéma temporel	① $\boldsymbol{u(t) = t}$	② $\boldsymbol{u(t) = t^2}$	③ $\boldsymbol{u(t) = t^3}$	④ $\boldsymbol{u(t) = t^4}$
$BDF1$	Solution exacte	1	1.005973901	1.008933125
$BDF2$	Solution exacte	Solution exacte	1.990897793	1.973049203
$BDF3$	Solution exacte	Solution exacte	Solution exacte	2.990897794

facturée 2D ALE de Hay et al. [6], présentée à l'Équation (4.4), a été reproduite et appliquée tel que schématisée à la Figure 4.6.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \begin{cases} u = -5(x + y(y-1))\sin(2\pi t) \\ v = -5(y - x(x-1))\sin(2\pi t) \end{cases} \\
p &= -(x+y)\sin(2\pi t) \\
\mathbf{X} &= \begin{cases} X = \frac{\phi(t)}{4} xy(x-1) \\ Y = \frac{\phi(t)}{4} xy(y-1) \end{cases} \quad \text{où } \phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \leqslant 0 \\ 4(t - \tanh(t)) & \text{pour } t > 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

où $\mathbf{X}$ permet d'imposer le mouvement des noeuds du maillage.

Ce problème a d'abord été résolu avec *EF8* en utilisant un maillage fixe, c'est-à-dire en omettant les variables X et Y, dans le but de vérifier d'abord la résolution adéquate de la formulation ALE des équations de Navier-Stokes. En utilisant ensuite un maillage mobile, on peut s'assurer que les taux de convergence sont conservés malgré le déplacement des noeuds du maillage. L'objectif, les moyens d'évaluation et les hypothèses de ce test sont présentés au Tableau 4.5.

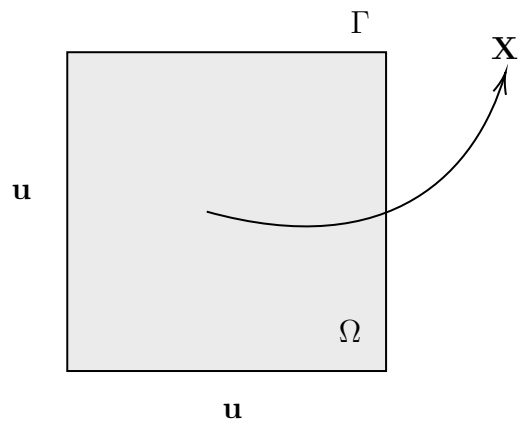


Figure 4.6 Schématisation des conditions **u** et **X** imposées aux frontières (Γ) du domaine fluide (Ω) pour la vérification de la solution manufacturée de [6]. Où aucune condition limite n'est spécifiée, ce sont les conditions naturelles qui sont appliquées.

Tableau 4.5 Détails du test de vérification de la discrétisation en temps de *EF8* par rapport à la solution manufacturée

Objectif(s)	**Moyen(s) d'évaluation**	**Hypothèse(s)**
Vérifier la discrétisation en temps $BDF1$, $BDF2$ et $BDF3$	Taux de convergence basés sur les normes H^1 et L^2 en fonction du raffinement du pas de temps et comparaison des champs de vitesses et de pression avec la solution manufacturée	Taux de convergence $\geqslant 1$ pour $BDF1$ $\geqslant 2$ pour $BDF2$ $\geqslant 3$ pour $BDF3$ Mêmes champs de vitesses et de pression

Les normes de l'erreur en vitesses et en pression pour ce problème sont présentées à la Figure 4.7. La solution a d'abord été générée entre $[0, T]$, où $T = 1.1$, puis comparée à la solution exacte, telle qu'aux Équations (4.5) et (4.6) où E_p et $E_{\mathbf{u}}$ représentent respectivement l'erreur en pression et en vitesses. On a ensuite procédé à un raffinement du pas de temps tout en conservant l'intervalle de simulation $[0, T]$ dans le but d'obtenir les courbes de la Figure 4.7.

$$E_p(\Delta T) = ||p_h(T) - p_{exacte}(T)||_{L^2} \tag{4.5}$$

$$E_{\mathbf{u}}(\Delta T) = ||\mathbf{u}_h(T) - \mathbf{u}_{exacte}(t)||_{H^1} \tag{4.6}$$

On observe que les taux de convergence théoriques sont parfaitement reproduits et ce, autant

pour le maillage fixe que pour le maillage mobile. De plus, les valeurs des différentes normes sont très semblables entre le maillage fixe et mobile. Il est normal que les valeurs ne soient pas exactement les mêmes puisque comme l'un des maillage est mobile, il n'est forcément pas identique au maillage fixe à chaque pas de temps.

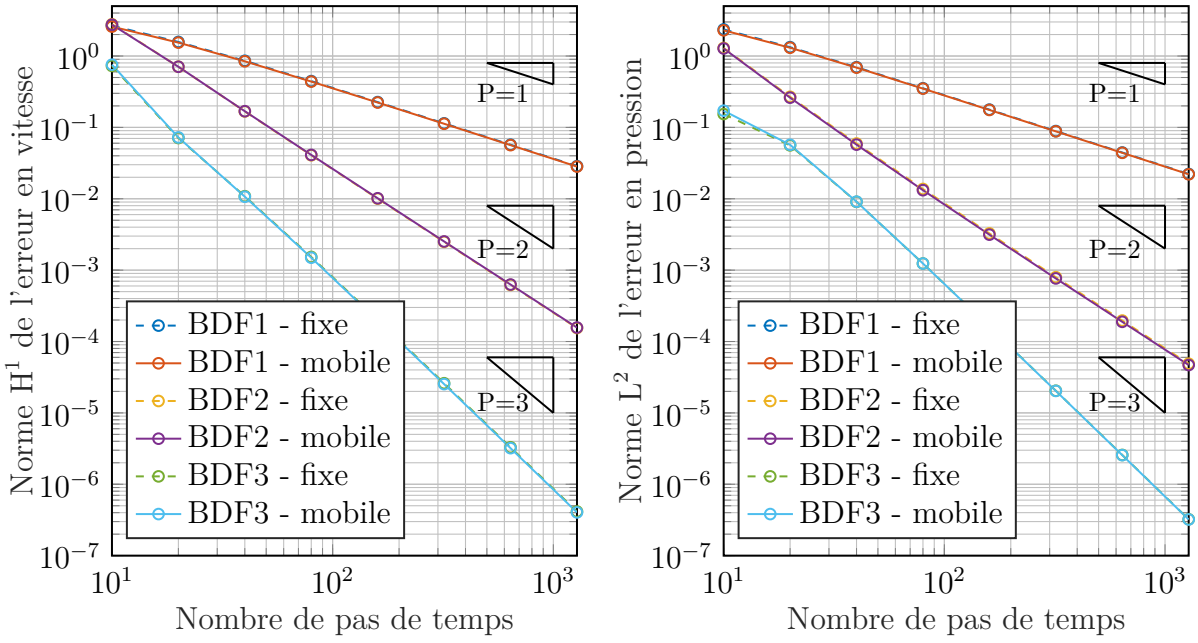


Figure 4.7 Normes de l'erreur en vitesses (gauche) et en pression (droite) pour la solution manufacturée 2D de Hay et al. [6]. Les pentes de référence P sont aussi présentées à titre de comparaison.

En ce qui concerne la comparaison des champs de vitesses et de pression avec ceux de la solution manufacturée, l'analyse est forcément plus qualitative qu'en ce qui concerne les taux de convergence. Il est toutefois possible de superposer les lignes de courant au champ de pression tel que Hay et al. l'ont fait pour ensuite comparer les figures. C'est justement ce qu'on peut observer à la Figure 4.8 où la résolution a été faite sur un maillage mobile. Ces graphiques sont d'ailleurs très semblables à ceux obtenus par Hay et al. aux mêmes valeurs de t.

La Figure 4.9 montre justement le maillage à $t = 0.0$ et à $t = 1.1$. La déformation du maillage devient très évidente. On peut toutefois remarquer que les noeuds de la frontière gauche ainsi que de la frontière du bas ne se déplacent pas, pour faciliter l'imposition des conditions de Dirichlet sur celles-ci. Le même comportement est observé en ce qui concerne les résultats de Hay et al.

Les résultats étant les mêmes ou bien très proches de ceux de la solution manufacturée, il est

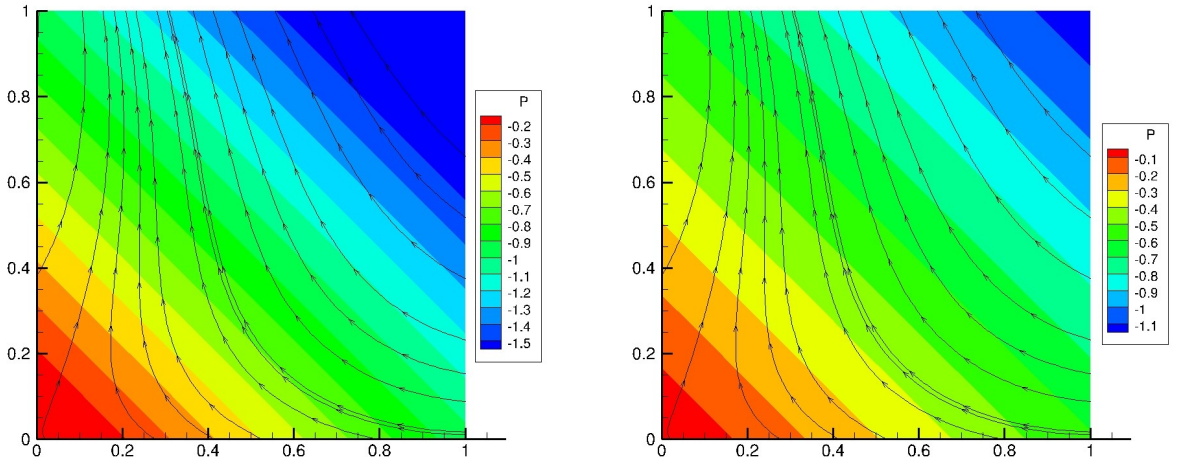


Figure 4.8 Lignes de courant superposées au champ de pression à $t = 0.2$ (gauche) et à $t = 1.1$ (droite) obtenus à l'aide d'un maillage mobile

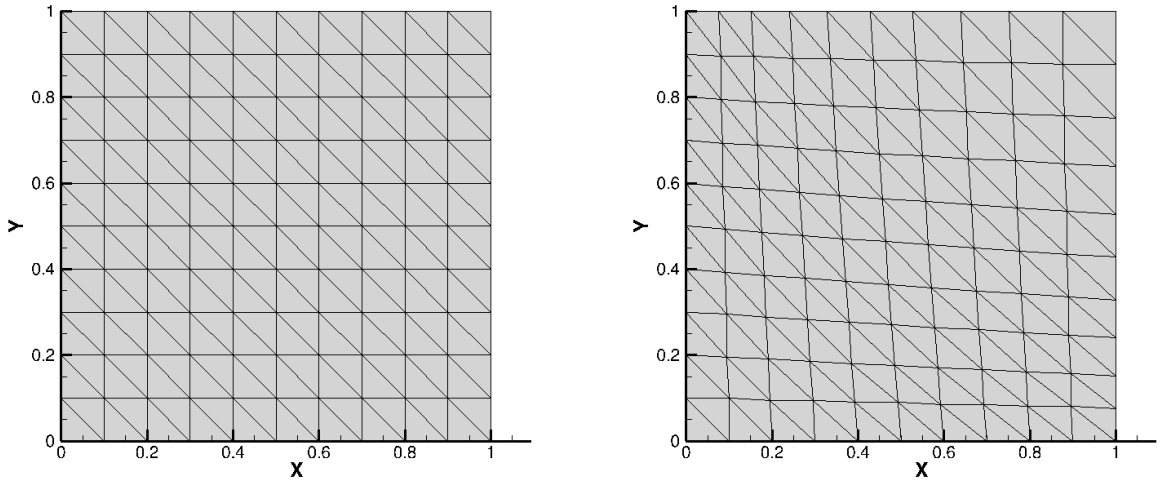


Figure 4.9 Maillage mobile à $t = 0.0$ (gauche) et à $t = 1.1$ (droite)

possible de confirmer que la discrétisation spatiale et temporelle est correctement faite par *EF8*, et ce autant pour un maillage fixe que mobile.

Vérification combinée de la discrétisation en espace et en temps

Maintenant que les discrétisations spatiale et temporelle ont toutes les deux été vérifiées indépendamment, une vérification de l'interaction de celles-ci est nécessaire. Contrairement aux tests précédents, la solution doit maintenant dépendre à la fois de l'espace et du temps pour arriver à étudier l'interaction des erreurs induites par ces deux types de discrétisation. Les détails de cette série de tests sont présentés au Tableau 4.6.

Tableau 4.6 Détails du test de vérification de l'interaction entre les discrétisations en espace et en temps de *EF8*

Objectif(s)	**Moyen(s) d'évaluation**	**Hypothèse(s)**
Vérifier l'interaction entre la discrétisation en temps $BDF1$, $BDF2$ et $BDF3$ et la discrétisation P_2P_1 des vitesses et de la pression	Taux de convergence basés sur les normes H^1 et L^2 en fonction du raffinement du maillage et du pas de temps	Taux de convergence $\geqslant 2$ pour les vitesses (norme H^1) $\geqslant 2$ pour la pression (norme L^2)

Le maillage sur lequel est basé cette série de tests correspond à celui utilisé pour la vérification du taux de convergence en espace, c'est-à-dire celui présenté à la Figure 4.1. La solution manufacturée de l'Équation (4.7) a donc été imposée par des conditions de Dirichlet sur toutes les frontières du domaine pour les vitesses u et v ainsi qu'en imposant la pression p en un point du domaine, tel qu'illustré à la Figure 4.10.

$$\mathbf{u}_{in} = \mathbf{u}_{out} = \mathbf{u}_{down} = \mathbf{u}_{top} = \begin{cases} u = 3x\sin(2\pi t) \\ v = -3y\sin(2\pi t) + 5 \end{cases} \qquad (4.7)$$
$$p = 0$$

Pour cette série de tests, il est important de porter une attention particulière au raffinement du maillage et du pas de temps. En effet, selon les méthodes d'approximation choisies, les taux de convergence théoriques de l'erreur en temps, en vitesses et en pression ne sont pas nécessairement les mêmes. L'Équation (4.8) montre justement comment procéder à un raffinement cohérent du maillage et du pas de temps dans le cas de l'utilisation des polynômes d'interpolation P_2P_1 pour les vitesses et la pression et du schéma $BDF1$ pour la discrétisation en temps. Si le raffinement du maillage et du pas de temps n'est pas cohérent, les taux de convergence des normes de l'erreur en vitesses et en pression ne seront pas conservés. C'est

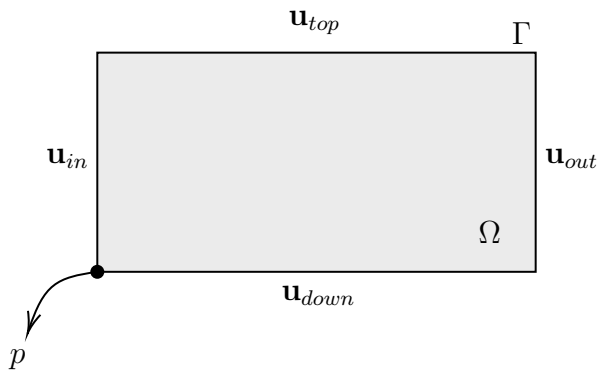


Figure 4.10 Schématisation des conditions u, v, p imposées aux frontières (Γ) du domaine fluide (Ω) pour la vérification combinée de la résolution de la discrétisation en espace et en temps

d'ailleurs ce qui est vérifié par cette série de tests.

$$\begin{aligned} \text{Temps : } BDF1 &\longrightarrow \text{Erreur} \approx \mathcal{O}(\Delta t) \longrightarrow \text{Diviser le pas de temps en 4} \\ \text{Vitesses : Norme H}^1 &\longrightarrow \text{Erreur} \approx \mathcal{O}(h^2) \longrightarrow \text{Diviser la taille des éléments en 2} \\ \text{Pression : Norme L}^2 &\longrightarrow \text{Erreur} \approx \mathcal{O}(h^2) \longrightarrow \text{Diviser la taille des éléments en 2} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Ainsi, plusieurs types de raffinement sont testés :

- Raffinement en espace et en temps : Raffinement simultané cohérent, c'est-à-dire en respectant l'ordre de convergence des vitesses, de la pression et du temps, du maillage et du pas de temps.
- Raffinement en temps : Raffinement du pas de temps seulement en conservant toujours le même maillage (22 éléments).
- Raffinement en espace : Raffinement du maillage seulement en conservant toujours le même pas de temps (10 pas de temps).

La Figure 4.11 présente les résultats obtenus pour ces trois types de raffinement jumelés au schéma de discrétisation en temps $BDF1$. Si on s'attarde au graphique de gauche de la Figure 4.11, on remarque que le raffinement en espace et en temps (les lignes pleines) permet aux vitesses et à la pression de respecter leur taux de convergence théoriques, c'est-à-dire que leur pente est minimalement de 2. Toutefois, si on ne raffine que le pas de temps sans modifier le maillage, seule la pression arrive à respecter son taux de convergence théorique. Le constat est très semblable pour le graphique de droite. En effet, si on raffine uniquement

le maillage sans modifier le pas de temps, la norme de l'erreur en pression stagne et seule la norme de l'erreur des vitesses arrivent à atteindre le taux de convergence théorique. Ce dernier demeure toutefois inférieur à celui obtenu lorsque l'on raffine simultanément et de façon cohérente en espace et en temps.

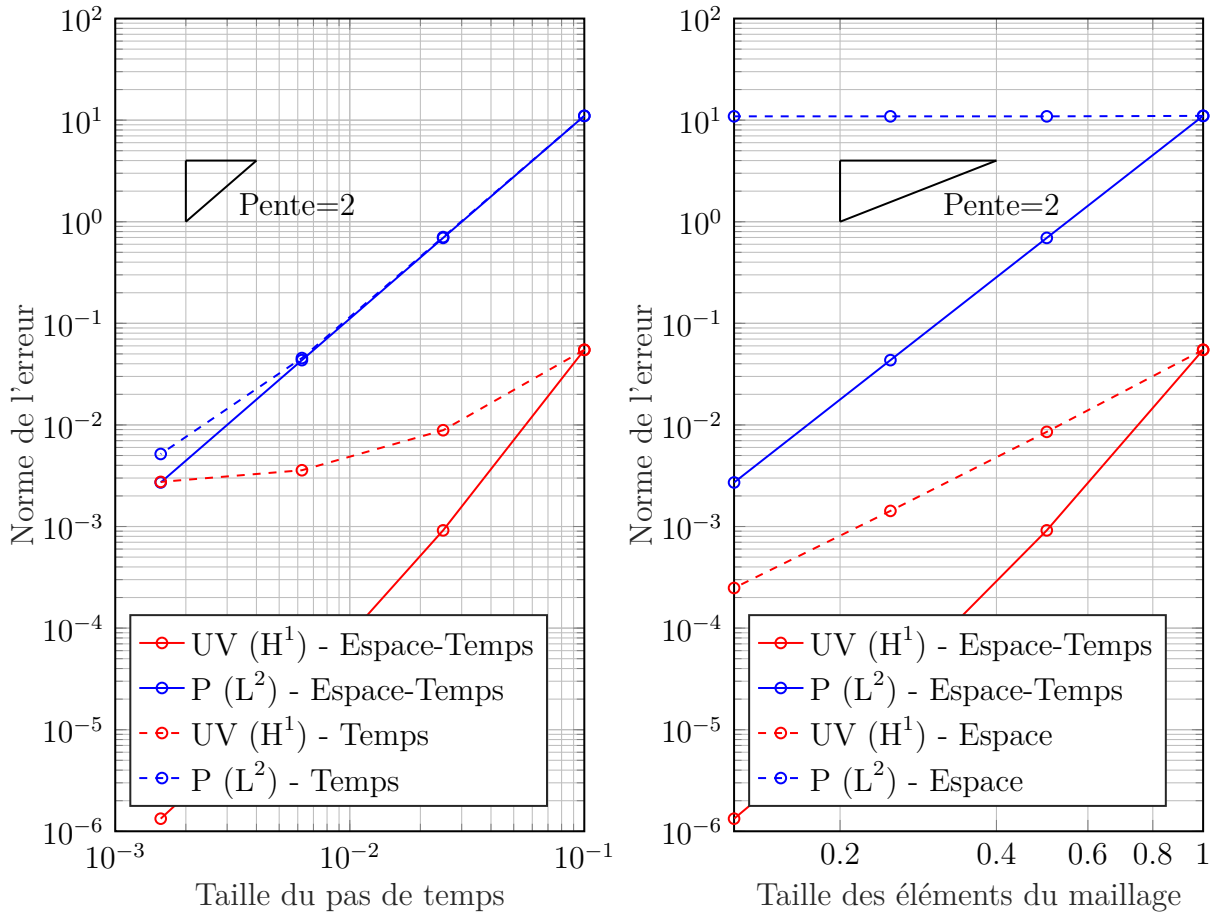


Figure 4.11 Normes de l'erreur en vitesses et en pression au temps final en fonction du pas de temps (gauche) et de la taille des éléments du maillage (droite) selon différents raffinement pour BDF1

Les Figures D.1 et D.2 présentés à l'Annexe D, montrant les résultats obtenus pour les trois types de raffinement jumelés respectivement aux schémas de discrétisation en temps $BDF2$ et $BDF3$, permettent d'observer un comportement très similaire.

On en conclut que peu importe le schéma de discrétisation en temps choisi, c'est-à-dire que ce soit $BDF1$, $BDF2$ ou $BDF3$, un raffinement cohérent en espace et en temps est le seul moyen d'arriver à conserver les taux de convergence lorsqu'on étudie un problème qui dépend à la fois de ces deux discrétisations. *EF8* se comporte donc tel qu'attendu en ce qui concerne

l'interaction entre l'erreur en espace et en temps. D'un point de vue plus général, cette analyse du comportement de l'erreur démontre que lors de la résolution d'un problème d'IFS, il est inutile de raffiner abusivement le pas de temps si le maillage, lui, demeure trop grossier. Cela donnerait une solution probablement très précise, mais au mauvais problème. L'inverse, soit un raffinement abusif du maillage en conservant un pas de temps grossier, est tout autant inutile. C'est pourquoi il est nécessaire de raffiner en espace et en temps de façon cohérente.

4.1.3 Méthodologie du calcul des forces exercées par le fluide

Parmi les données à extraire des problèmes d'IFS, il y a évidemment les forces exercées par le fluide sur le solide. En éléments finis, celles-ci sont communément calculées par la méthode des réactions. Cette méthode ne peut toutefois être utilisée qu'en post-traitement alors qu'il est aussi possible de calculer ces forces à l'aide de multiplicateurs de Lagrange, tel qu'expliqué à la Section 3.5.1, en ajoutant une nouvelle équation au système. Cette nouvelle équation devient très utile dans le cadre du développement d'une méthode monolithique puisqu'elle permet le couplage des équations. Dans le but de vérifier la précision de cette technique moins usuelle, on compare ici les résultats obtenus via les deux méthodes.

Retour sur la méthode des réactions

En ÉF, la méthode des réactions permet d'obtenir la valeur des forces de traction sur une frontière grâce aux coefficients du système algébrique construit selon le nombre de DDL du problème. Si on prend comme exemple un problème 1D à 5 DDL où la vitesse u est imposée en A et en B (u_4 et u_5), tel qu'illustré à la Figure 4.12, le système algébrique construit s'apparente à celui de l'Équation (4.9).

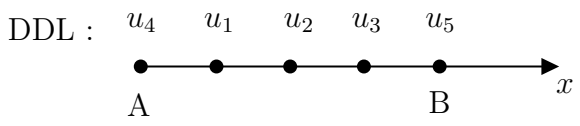


Figure 4.12 Exemple de problème 1D à 5 DDL pour la résolution des équations de Navier-Stokes par éléments finis

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & a_{35} \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & 0 & a_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 + T_A \\ b_5 + T_B \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

La méthode des réactions utilise donc les coefficients de la 4e et 5e ligne de la matrice, c'est-à-dire celles correspondant à la discrétisation des polynômes assignés aux DDL u_4 et u_5, pour calculer les forces de traction en A et en B (T_A et T_B). Ce calcul est explicité aux Équations (4.10) et (4.11).

$$-T_A = b_4 - a_{41}u_1 - a_{44}u_4 \tag{4.10}$$

$$-T_B = b_5 - a_{53}u_3 - a_{55}u_5 \tag{4.11}$$

Cette méthode fiable et précise est utilisée, entre autres, par le logiciel commercial COMSOL.

Comparaison entre les différentes méthodes de calcul des forces

La résolution des forces sur une frontière par la méthode des multiplicateurs de Lagrange ajoute deux équations différentielles au système, soit une pour le calcul des forces dans la direction x et une seconde pour la direction y. Pour comparer la méthode des réactions à celle des multiplicateurs de Lagrange pour le calcul des forces exercées par le fluide sur un corps solide, l'écoulement d'un fluide autour d'un cylindre circulaire est étudié. Afin de créer des allées de Von Karman, un écoulement cisaillé qui devient progressivement un écoulement plan unitaire est imposé à l'entrée du domaine pour initier les instabilités. Le nombre de Re est aussi fixé à 100 pour s'assurer de l'existence d'une solution 2D et $U_0 = L_0 = 1$. La maillage de base utilisé est présenté à la Figure 4.13 et les conditions limites sont présentées à la Figure 4.14 où $\mathbf{u}_{in} = [((0.125y - 0.5) + \min(t/10, 1)(-0.125y + 0.5) + 1) \cdot \mathbf{e}_x]$.

En calculant les forces exercées sur le cylindre par l'écoulement fluide à l'aide des deux méthodes, il est possible de comparer les courbes obtenues. En ce qui concerne la méthode des multiplicateurs de Lagrange, différents maillages sont testés ainsi que différents nombres de points d'intégration de Gauss afin d'étudier leur influence sur la valeur des forces calculées. Un résumé des détails de ce test est présenté au Tableau 4.7

La Figure 4.15 montre les forces exercées sur le cylindre dans la direction x en fonction du temps. Les graphiques de gauche et de droite présentent respectivement les forces calculées sur un maillage de 428 et de 1712 éléments. L'impulsion que l'on remarque entre $t = 0$ et

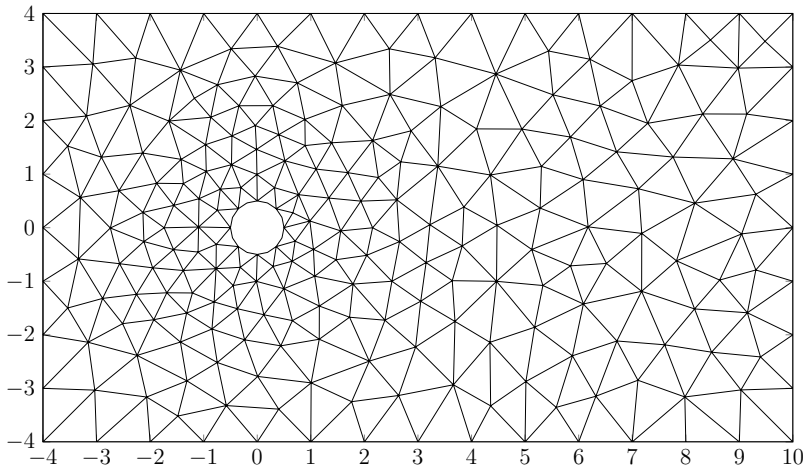


Figure 4.13 Maillage triangulaire formé de 428 éléments et de 908 noeuds

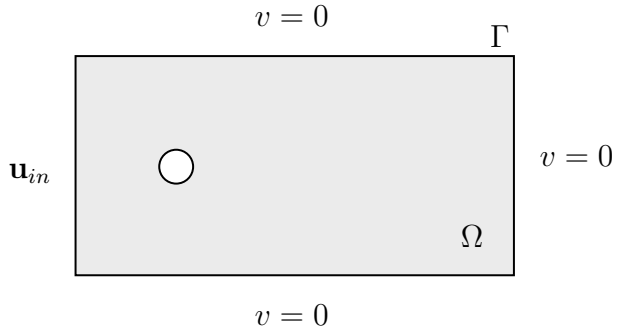


Figure 4.14 Schématisation des conditions u, v imposées aux frontières (Γ) du domaine fluide (Ω) pour la vérification du calcul des forces

Tableau 4.7 Détails du test de vérification du calcul des forces par la méthode des multiplicateurs de Lagrange

Objectif(s)	**Moyen(s) d'évaluation**	**Hypothèse(s)**
Vérifier le calcul des forces par la méthode des multiplicateurs de Lagrange	Graphique des forces exercées par le fluide sur le solide calculées par la méthode des réactions	Courbes de plus en plus rapprochées avec le raffinement du maillage et l'augmentation du nombre de points de Gauss

$t \approx 10$ est due à l'écoulement cisaillé qui est imposé alors qu'un certain régime permanent s'établit à mesure que t augmente. On voit déjà rapidement que les courbes ont toutes la même tendance. Toutefois, les forces calculées par la méthode des multiplicateurs de Lagrange sur le maillage le plus grossier avec 3 points d'intégration de Gauss sont nettement plus distantes de la courbe de référence, c'est-à-dire celle de la force en x calculée à l'aide de la méthode des réactions. Dès qu'on augmente le nombre de points d'intégration de Gauss à 6, la valeur de la force en x en fonction du temps se confond à celle calculée par la méthode des réactions. Sur le graphique de droite, le maillage est plus fin et les courbes sont toutes confondues, même pour une nombre de points d'intégration de 3.

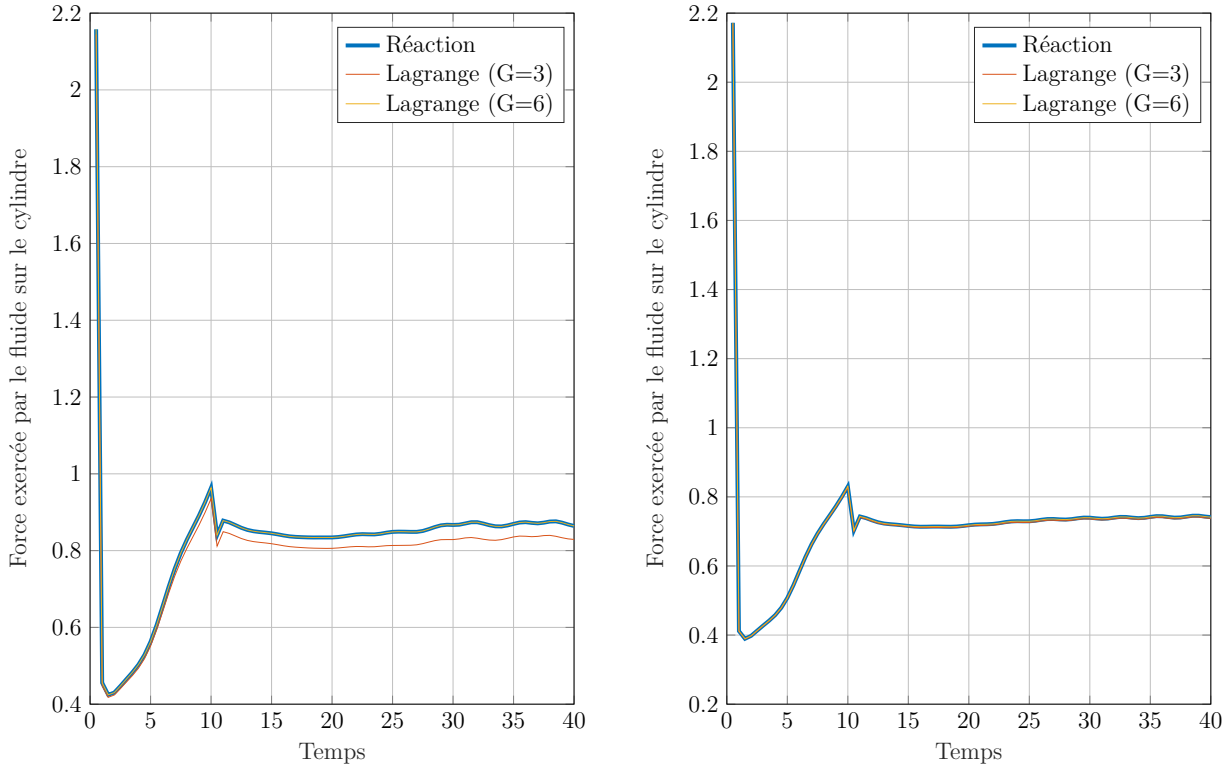


Figure 4.15 Force dans la direction x en fonction du temps exercée par le fluide sur le cylindre et calculée sur un maillage de 428 éléments (gauche) et de 1712 éléments (droite) pour différents nombres de points d'intégration de Gauss

La Figure 4.16 montre plutôt les forces exercées sur le cylindre dans la direction y en fonction du temps. On y observe le même comportement par rapport au nombre de points d'intégration de Gauss et d'éléments du maillage. Ces graphiques permettent aussi de visualiser la nature cyclique des forces en y des allées de Von Karman.

On peut en conclure qu'en choisissant adéquatement le nombre de points d'intégration de

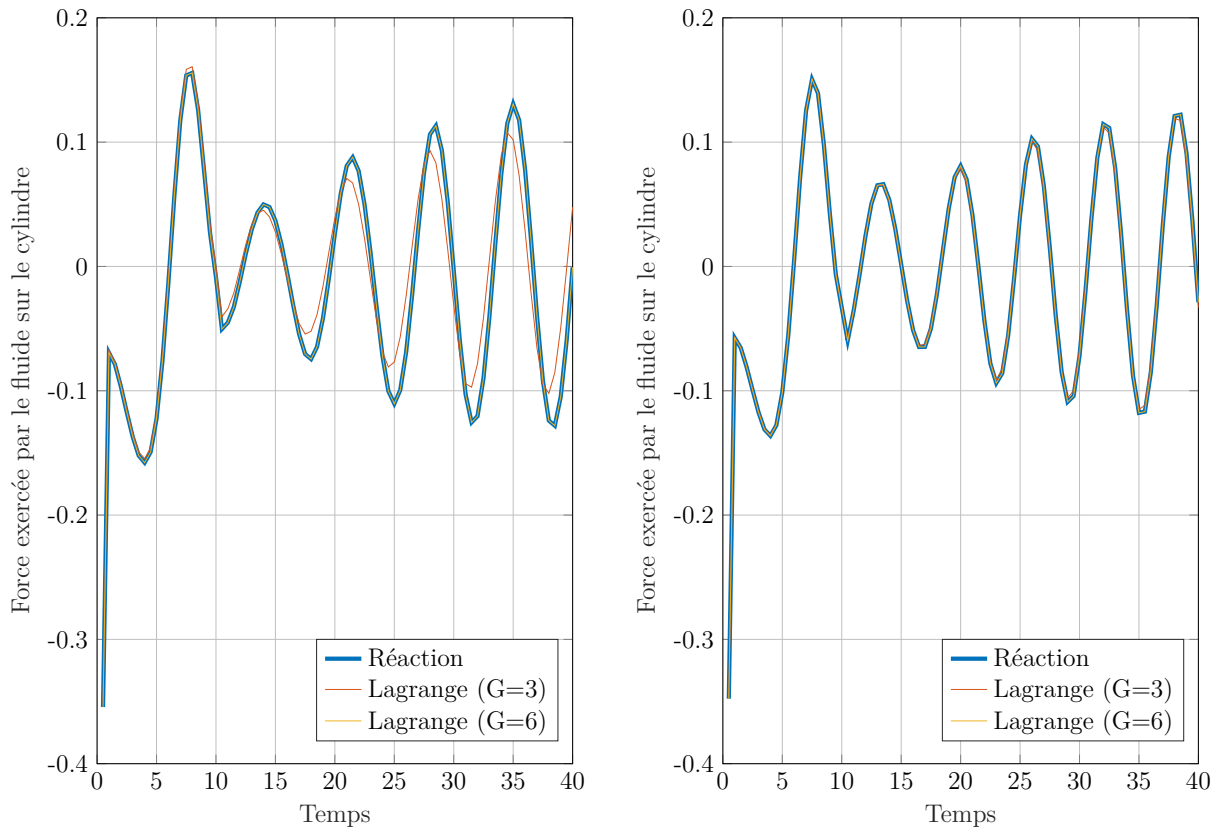


Figure 4.16 Force dans la direction y exercée par le fluide sur le cylindre en fonction du temps calculée sur un maillage de 428 éléments (gauche) et de 1712 éléments (droite) pour différents nombres de points d'intégration de Gauss

Gauss en fonction de la densité du maillage, le calcul des forces par les multiplicateurs de Lagrange est équivalent à celui communément fait par la méthode des réactions. Cela est dû au fait que la géométrie est courbe et qu'un maillage plus fin permet de mieux capturer la géométrie alors qu'un maillage plus grossier nécessite un plus grand nombre de points d'intégration de Gauss pour arriver à un résultat fidèle à la méthode des réactions.

4.2 Validation

Maintenant que la résolution des différentes équations par *EF8* est rigoureusement vérifiée, l'étape subséquente correspond à la validation. Ici le but est de résoudre un problème physique pour lequel des résultats expérimentaux sont disponibles. Il est alors possible de simuler ce problème avec *EF8* et ainsi s'assurer que les équations implémentées correspondent bel et bien aux équations décrivant correctement la physique du problème.

Plusieurs problèmes classiques sont testés. Dans un premier temps, un problème stationnaire est simulé, soit les vortex de Föppl. On pousse ensuite ce même type de problème pour simuler les allées de Von Karman et ainsi modéliser un problème transitoire. Finalement, le problème de la cavité entraînée, différent des deux premiers par sa géométrie et ses conditions limites, est aussi testé.

4.2.1 Vortex de Föppl

Les vortex de Föppl correspondent à des vortex stables et symétriques qui se forment à l'arrière d'un cylindre circulaire placé dans un écoulement à faible nombre de *Re*. C'est en se basant sur le travail de Toja-Silva et al. [43] que ce test a été construit. Comme la solution physique est stationnaire, ce test permet de valider adéquatement la module stationnaire de *EF8*.

Un écoulement unitaire u est donc imposé à l'entrée du domaine alors que la vitesse v y est imposée à 0, tel que la Figure 4.17 permet de le constater. Les conditions naturelles sont imposées à la sortie. Pour s'assurer de la stabilité des vortex de Föppl et ainsi éviter d'initier des allées de Von Karman, *Re* est imposé à 30. Ici, le maillage utilisé est triangulaire, non-structuré et est composé de 209 588 éléments et de 420 257 noeuds, une densité semblable à celle du maillage cartésien utilisé par Toja-Silva.

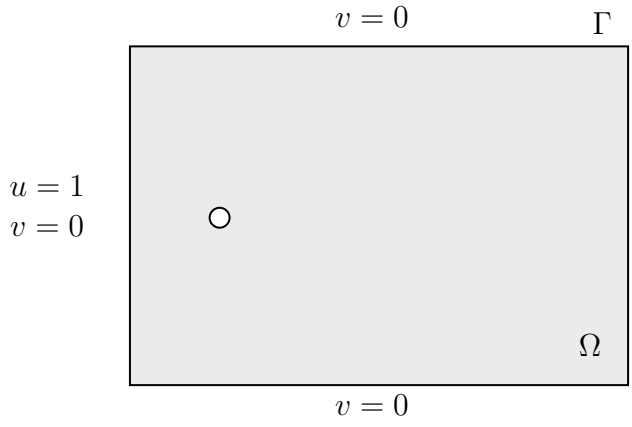


Figure 4.17 Schématisation des conditions u, v imposées aux frontières (Γ) du domaine fluide (Ω) pour la validation des vortex Föppl

En visualisant la solution telle qu'à la Figure 4.18, c'est-à-dire en superposant les lignes de courant à la vorticité en z, on observe très bien les vortex de Föppl. Ceux-ci sont bel et bien stables et symétriques. En suivant la méthodologie de Toja-Silva et al., on se base sur leur

géométrie pour arriver à comparer les résultats obtenus avec *EF8* à ceux de la littérature et de tests expérimentaux. À l'aide de l'intégrale du multiplicateur de Lagrange dans la direction de l'écoulement, il est aussi possible de calculer le C_D du cylindre et d'ajouter celui-ci aux valeurs numériques à comparer. Les dimensions des vortex sont calculées par rapport au

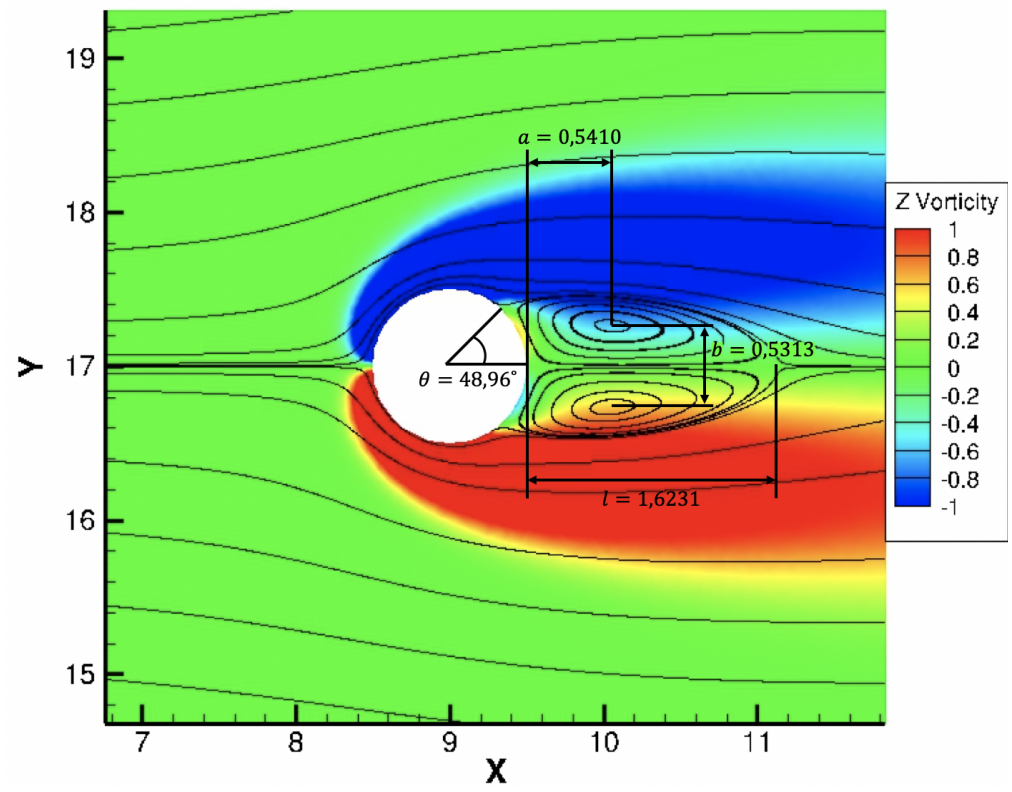


Figure 4.18 Dimensions des vortex de Föppl créés par un écoulement à $Re = 30$ autour d'un cylindre circulaire. Celles-ci sont visualisées en superposant les lignes de courant à la vorticité en z.

diamètre (D) du cylindre circulaire qui correspond à L_0 et qui est ici de 1. Le C_D est, quant à lui, calculé à l'aide de l'Équation (4.12).

$$C_D = \frac{2F_D}{\rho U_0^2 L_0} \tag{4.12}$$

Le Tableau 4.8 résume les résultats obtenus, en partie visibles à la Figure 4.18, tout en les comparant à ceux de la littérature et des test expérimentaux disponibles. On y constate que les résultats obtenus sont tout à fait fidèles à ceux attendus.

Tableau 4.8 Comparaison des dimensions relatives des vortex de Föppl et du coefficient de traînée du cylindre provenant de différentes références

Références	l/D	a/D	b/D	θ	C_D
Toja-Silva et al. [43]	1.71	0.56	0.53	47,93°	1.78
Pinelli et al. [44]	1.70	0.56	0.52	48.05°	1.80
Coutanceau et Bouard*[45]	1.55	0.54	0.54	50.00°	-
Triton*[46]	-	-	-	-	1.74
EF8	1.6231	0.5410	0.5313	48.96°	1.80

* Ces résultats proviennent de tests expérimentaux.

4.2.2 Allées de Von Karman

Même si les allées de Von Karman ont déjà été simulées à la Section 4.1.3 dans le but de vérifier le calcul des forces, ce test de validation est basé sur la publication de Mendes et Branco [47]. Ces derniers ont imposé un écoulement fluide à $Re = 200$ autour d'un cylindre circulaire dont la géométrie et le maillage sont décrits à la Figure 4.19. Les conditions limites sont, quant à elles, les mêmes que celles décrites à la Figure 4.14, c'est-à-dire qu'un écoulement cisaillé à l'entrée permet d'initier les instabilités avant de se transformer en écoulement plan unitaire. Ce test est particulièrement utile pour valider le module transitoire de *EF8*.

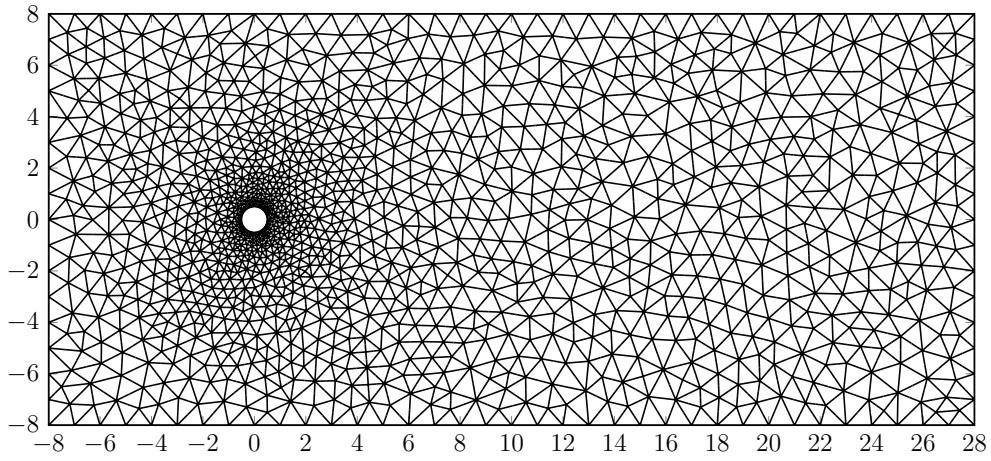


Figure 4.19 Maillage triangulaire formé de 2694 éléments et de 5525 noeuds

Afin de s'assurer du déclenchement adéquat des tourbillons de Von Karman, les champs de vitesses u et v ainsi que le champ de pression p peuvent être visualisés à la Figure 4.20. On y voit facilement les tourbillons créés par l'écoulement initialement cisaillé. Ceux-ci sont cycliques tels que le montrent les graphiques du haut et du milieu. Le graphique de la pression

(bas), quant à lui, représente bien la zone de haute pression en amont du cylindre et les zones de pression négative à l'arrière du cylindre, créées par le retour des vortex.

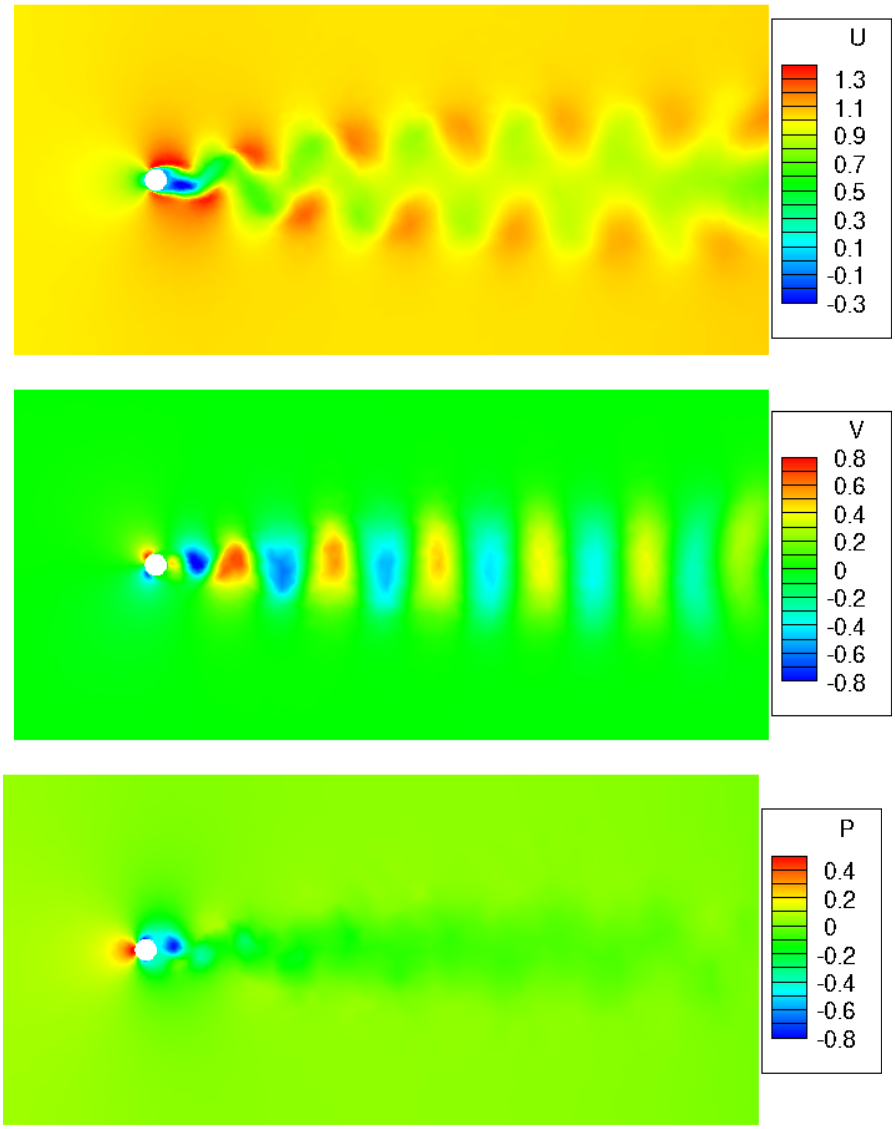


Figure 4.20 Champs des vitesses en x (haut), en y (milieu) et de la pression (bas) pour les allées de Von Karman créées par l'écoulement fluide autour d'un cylindre circulaire

Il est même possible de tracer les vecteurs de la force exercée par le fluide sur le cylindre sur la frontière de celui-ci. Tel que le montre la Figure 4.21, où un zoom sur le cylindre est effectué, les forces calculées à l'aide des multiplicateurs de Lagrange sont tout à fait cohérentes. En effet, comme les multiplicateurs de Lagrange sont composés d'un terme en pression et d'un second en cisaillement, on observe que les vecteurs de forces sont bel et bien alignés avec les pics de pression, soit les zones rouge et bleue. Entre celles-ci, le terme de pression est moins

dominant et le terme de cisaillement gagne en importance ce qui fait en sorte que les vecteurs de force deviennent plutôt tangentiels à la paroi du cylindre. Ce comportement est tout à fait physique.

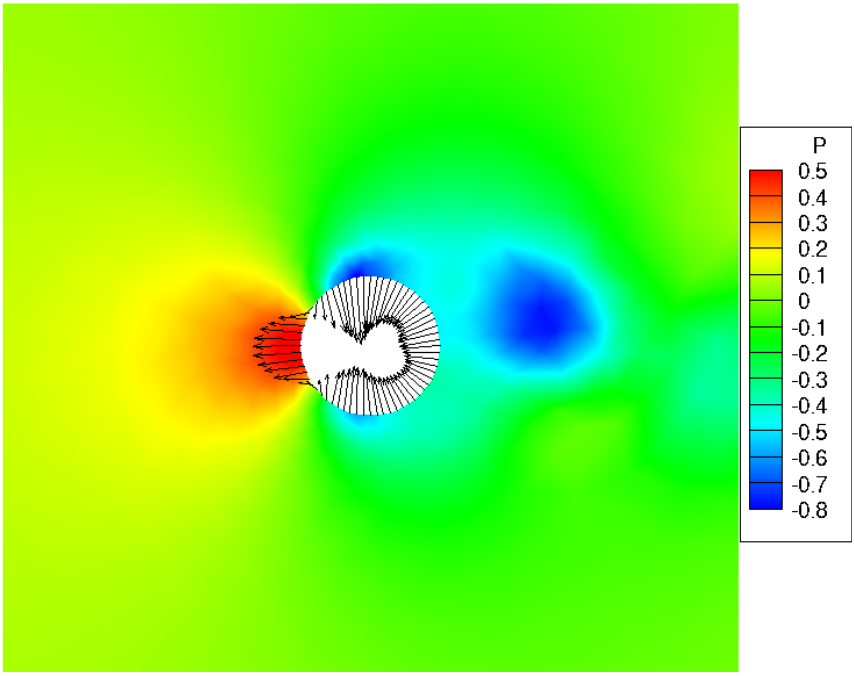


Figure 4.21 Champ de pression et vecteurs de force exercée par le fluide sur le cylindre calculés via les multiplicateurs de Lagrange pour les allées de Von Karman créées par l'écoulement fluide autour d'un cylindre circulaire

Finalement, afin de valider la simulation des allées de Von Karman par *EF8*, le C_D, le C_L ainsi que le nombre de St de l'écoulement autour du cylindre ont été calculés à l'aide des Équations (4.13) et (4.14).

$$C_D(t) = \frac{2F_D(t)}{\rho U_0^2 L_0} \tag{4.13}$$

$$C_L(t) = \frac{2F_L(t)}{\rho U_0^2 L_0} \tag{4.14}$$

où $F_D(t)$ correspond à la force de traînée en fonction du temps, c'est-à-dire à la force exercée par le fluide sur le cylindre dans la direction x,

$F_L(t)$ à la force de portance en fonction du temps, c'est-à-dire à la force exercée par le fluide sur le cylindre dans la direction y,

U_0 à la vitesse caractéristique de l'écoulement, étant ici 1, et

L_0 à la longueur caractéristique, soit le diamètre du cylindre circulaire qui est aussi de 1.

Les valeurs obtenues sont présentées au Tableau 4.9. Elles y sont aussi comparées aux valeurs provenant de tests expérimentaux et d'autres simulations numériques tirées de la littérature.

Tableau 4.9 Comparaison des coefficients de forces et du nombre de Strouhal provenant de différentes références. La valeur C_D correspond à la valeur moyenne du coefficient et la valeur ΔC_D correspond à la demi-amplitude de l'oscillation du coefficient.

Références	$\boldsymbol{C_D \pm \Delta C_D}$	$\boldsymbol{\pm \Delta C_L}$	$\boldsymbol{St}$
Roshko*[48]	1.38		0.18
Lecointe et Piquet [49]	1.46		0.194
Braza et al. [50]	1.38	± 0.77	0.20
Lecointe et Piquet [51]	1.29 ± 0.04	± 0.60	0.195
Franke et al. [52]	1.31	± 0.65	0.194
Zhang et Dalton [53]	1.25 ± 0.03	± 0.54	0.196
Mendes et Branco [47]	1.399 ± 0.049	± 0.726	0.202
EF8	1.3292 ± 0.0349	± 0.5882	0.192

* Ces résultats proviennent de tests expérimentaux.

Tel qu'attendu, les valeurs provenant de *EF8* sont tout à fait alignées avec celles de la littérature.

4.2.3 Cavité entraînée

Finalement, le dernier test de validation correspond au test de la cavité entraînée. Celui-ci modélise une cavité fermée où le déplacement du fluide est créé par le mouvement constant de la frontière supérieure. Comme le domaine ne comporte ni entrée ni sortie, il est important d'imposer la pression en un point. Les conditions limites sont d'ailleurs illustrées à la Figure 4.22 et celles-ci sont fidèles à celles de Bruneau et Saad [54], qui servent de comparaison.

Afin de s'assurer que le mouvement de la frontière supérieure initie un mouvement important et donc observable du fluide, un Re de 1000 est imposé. Le maillage utilisé est triangulaire et cartésien. Il est composé de 32 768 éléments et de 16 641 noeuds tels que $\Delta x = \Delta y = 1/128$.

Afin de comparer les résultats obtenus avec *EF8*, il est d'abord possible de visualiser les lignes de courant, la vorticité en z et le champ de pression. En appliquant les mêmes isocontours que Bruneau et Saad, on obtient les champs décrits à la Figure 4.23. Ceux-ci sont visuellement identiques à ceux attendus. D'un point de vue plus quantitatif, il est aussi possible de comparer la vitesse u, la vitesse v, la pression p et la vorticité ω_z à certains points le long de la ligne centrale verticale ainsi que le long de la ligne centrale horizontale du domaine avec les valeurs obtenues par d'autres méthodes numériques. C'est d'ailleurs ce que permettent les Tableau 4.10 et 4.11.

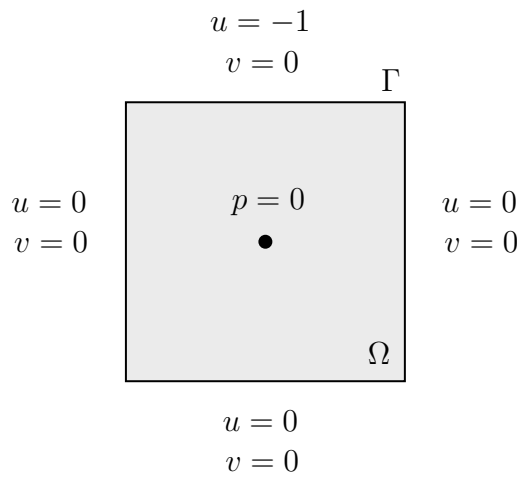


Figure 4.22 Schématisation des conditions u, v, p imposées aux frontières (Γ) du domaine fluide (Ω) pour la validation de la cavité entraînée

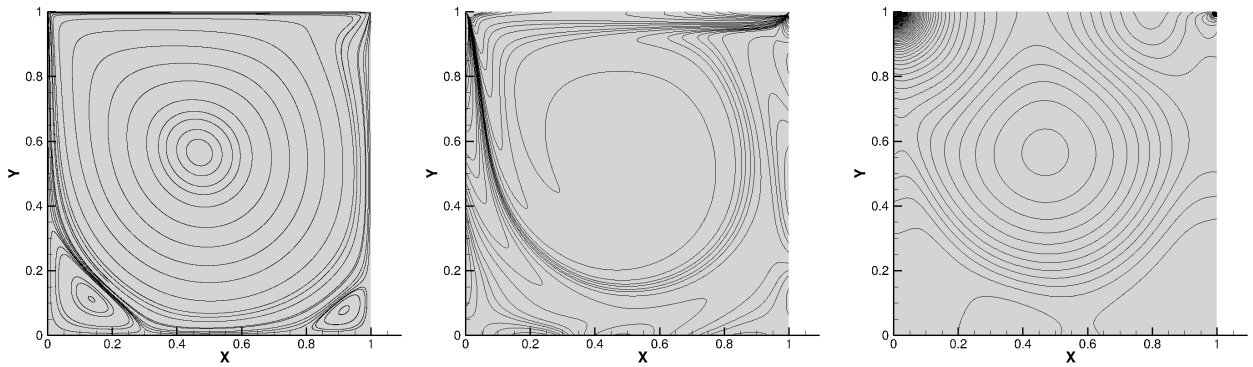


Figure 4.23 Lignes de courant (gauche), vorticité en z (milieu) et champ de pression (droite) pour la cavité entraînée

On constate alors que les données obtenues, telles que la Figure 4.23 le laissait présager, sont très près de celles de la littérature. En comparant les valeurs provenant de la simulation avec *EF8* avec la moyenne des résultas obtenus par [54–56], la différence est de l'ordre du dixième, voire du centième de point de pourcentage. Seule la vorticité calculée aux frontières du domaine fait exception, alors que la différence peut aller jusqu'à 4%. Celle-ci peut être expliquée par le fait que la vorticité est calculée par le logiciel Tecplot qui n'utilise que des polynômes linéaires plutôt que les polynômes quadratiques de la simulation.

Tableau 4.10 Comparaison de la vitesse u, de la pression p et de la vorticité ω le long de la ligne centrale verticale du domaine

$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{u}$ [55]	$\boldsymbol{u}$ [56]	$\boldsymbol{u}$ [54]	$\boldsymbol{u}$ (*EF8*)	$\boldsymbol{p}$ [56]	$\boldsymbol{p}$ [54]	$\boldsymbol{p}$ (*EF8*)	$\boldsymbol{\omega_z}$ [56]	$\boldsymbol{\omega_z}$ [54]	$\boldsymbol{\omega_z}$ (*EF8*)
1.0000	-1.00000	-1.00000	-1.00000	-1.00000	0.052987	0.052971	0.052997	14.7534	14.792	15.0116
0.9688	-0.57492	-0.58083	-0.58031	-0.58088	0.051514	0.051493	0.051519	9.49496	9.4781	9.49755
0.9531	-0.46604	-0.47233	-0.47239	-0.47234	0.050329	0.050314	0.050335	4.85754	4.8628	4.88011
0.7344	-0.18719	-0.18867	-0.18861	-0.18867	0.012122	0.012113	0.012122	2.09121	2.0909	2.09131
0.5000	0.06080	0.06205	0.06205	0.06206	0.000000	0.000000	0.00000	2.06722	2.0669	2.06731
0.2813	0.27805	0.28036	0.28040	0.28037	0.040377	0.040381	0.040374	2.26722	2.2678	2.26782
0.1016	0.29730	0.30045	0.30029	0.30044	0.104187	0.104416	0.104210	-1.63436	-1.6352	-1.63279
0.0625	0.20196	0.20233	0.20227	0.20332	0.109200	0.10916	0.109217	-2.31786	-2.3174	-2.31889
0.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.110591	0.11056	0.110599	-4.16648	-4.1554	-4.09278

Tableau 4.11 Comparaison de la vitesse v, de la pression p et de la vorticité ω le long de la ligne centrale horizontale du domaine

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{v}$ [55]	$\boldsymbol{v}$ [56]	$\boldsymbol{v}$ [54]	$\boldsymbol{v}$ (*EF8*)	$\boldsymbol{p}$ [56]	$\boldsymbol{p}$ [54]	$\boldsymbol{p}$ (*EF8*)	$\boldsymbol{\omega_z}$ [56]	$\boldsymbol{\omega_z}$ [54]	$\boldsymbol{\omega_z}$ (*EF8*)
0.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.077455	0.077429	0.077418	-5.46217	-5.4967	-5.70065
0.0391	-0.27669	-0.29368	-0.29330	-0.29362	0.078685	0.078658	0.078673	-8.24616	-8.2462	-8.22811
0.0547	-0.39188	-0.41037	-0.41018	-0.41031	0.077154	0.077128	0.077149	-6.50867	-6.5097	-6.49747
0.1406	-0.42665	-0.42645	-0.42634	-0.42640	0.049029	0.049004	0.048986	3.43016	3.4294	3.42764
0.5000	0.02526	0.02579	0.02580	0.02579	0.000000	0.000000	0.000000	2.06722	2.0669	2.06731
0.7734	0.33075	0.33399	0.33398	0.33392	0.047260	0.047259	0.047222	2.00174	2.0010	2.00098
0.9062	0.32627	0.33304	0.33290	0.33299	0.084386	0.084369	0.084351	-0.82398	-0.82517	-0.82436
0.9297	0.29012	0.29627	0.29622	0.29622	0.087653	0.087625	0.087617	-1.50306	-1.5025	-1.50549
1.0000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.090477	0.090448	0.090430	-7.66369	-7.6333	-7.43275

CHAPITRE 5 COMPARAISONS ET APPLICATION

Maintenant que les équations de la méthode de résolution monolithique sont bien implémentées dans $EF8$ et qu'elles ont été vérifiées, on revient vers le coeur de cette recherche, soit les différentes méthodes de déplacement des noeuds du maillage. Dans un premier temps, les méthodes sont comparées quant à leur capacité à gérer des maillages subissant des mouvements élémentaires. Tel que souligné à la Section 3.4.2, la structure mathématique d'IDW, d'ITM et d'ITB est assez similaire, c'est pourquoi ce sont ces méthodes qui sont étudiées plus en profondeur. RBF demeure une approche intéressante et efficace, mais elle n'est pas approfondie dans le présent mémoire. Suivra une application concrète de la méthode monolithique à un problème d'IFS où le choix de chaque paramètre de simulation est fait minutieusement.

5.1 Comparaison des méthodes

Dans le but de comparer l'efficacité, la précision et les limitations d'IDW, d'ITM et d'ITB, trois principaux tests sont effectués, soit la translation, la rotation puis la déformation d'un corps rigide. Comme la majorité des mouvements engendrés par l'interaction entre un fluide et un corps rigide correspondent à un de ces mouvements élémentaires ou bien à une combinaison de ceux-ci, il est intéressant de voir quelle méthode se prête le mieux à chacun de ces types de mouvement. Aussi, pour tous les tests visant à comparer les différents mouvements, c'est l'approche FTI, détaillée au Chapitre 3, qui est employée pour décrire la cinématique des noeuds. Toutefois, avant de procéder à ces tests, il est essentiel de déterminer une méthodologie qui permettra de définir un critère de comparaison.

5.1.1 Méthodologie de comparaison

Pour mesurer l'efficacité des différentes méthodes d'interpolation en terme d'adaptivité r, évoquée au Chapitre 2, la métrique de qualité du maillage proposée par Knupp [57] et utilisées par De Boer et al. [2], Garon et Delfour [40] et Couture-Peck et al. [7] est appliquée. Il s'agit du f_{ss} détaillé à l'Équation (5.1) tel que

$$f_{ss} = f_{size} \times f_{shape}, \tag{5.1}$$

où f_{size} mesure le ratio entre l'aire de l'élément déformé et l'élément original tel que $f_{size} = 0$ si l'élément est enchevêtré ou dégénéré et $f_{size} = 1$ si l'aire de l'élément est conservé. f_{shape} mesure quant à lui le caractère équilatéral des éléments de façon à ce que $f_{shape} = 0$ si l'élé-

ment est dégénéré et $f_{shape} = 1$ si l'élément est un triangle équilatéral parfait.
Contrairement à ce à quoi on pourrait s'attendre, la valeur moyenne de f_{ss} n'est que très peu affectée pour le mouvement des noeuds puisque les éléments situés très loin de l'objet en mouvement demeurent pratiquement inchangés et minimisent ainsi l'impact des éléments grandement déformés situés plus près de l'objet. L'étude de la valeur minimale de la métrique f_{ss} est quant à elle très intéressante puisqu'elle permet de voir si le maillage se dégénère au fil du mouvement en étudiant seulement le pire élément du maillage. En effet, si la valeur de $\min(f_{ss})$ tombe à 0 pour une certaine méthode et un certain maillage, cela indique que le maillage n'est plus valide et ne peut donc pas être utilisé pour une simulation. Il faut toutefois être prudent lors de l'analyse de cette métrique. À ce stade, f_{ss} et $\min(f_{ss})$ permettent seulement d'évaluer la qualité géométrique du maillage. Il n'y a pas nécessairement de corrélation entre cette qualité géométrique et la qualité des résultats qu'il serait possible d'obtenir en résolvant un problème d'IFS sur ce maillage.
Une autre valeur dérivée de f_{ss} est intéressante à comparer si l'on change certains paramètres de la simulation, soit le $\min(f_{ss})_{rel}$ détaillé à l'Équation (5.2) tel que

$$\min(f_{ss})_{rel} = \frac{\min(f_{ss})}{\min(f_{ss_\infty})}, \tag{5.2}$$

où $\min(f_{ss_\infty})$ est la valeur asymptotique de $\min(f_{ss})$, soit celle où la position finale des noeuds est exacte. Le ratio $\min(f_{ss})_{rel}$ permet de déterminer le nombre de sous-étapes minimal pour atteindre une certaine qualité relative minimale du maillage. Par exemple, une méthode qui requiert un grand nombre de sous-étapes de déformation pour atteindre une valeur de $\min(f_{ss})_{rel}$ de 1 est une méthode qui converge lentement et qui est donc plus coûteuse à utiliser.

5.1.2 Étude des différents mouvements

Pour les trois différents mouvements étudiés, différents paramètres ont été testés, soit

1. la méthode d'intégration : Euler explicite, la méthode du point milieu (*midpoint*) et Runge-Kutta 4, c'est-à-dire les approximations $\mathcal{TE}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{RK}4$ détaillées à la Section 3.4.3 ;
2. la charge d'intégration, communément appelée *workload*, qui correspond au nombre fois que la fonction d'interpolation est appelée, soit le nombre de sous-étapes de déformation $\times$ le nombre d'étapes d'intégration par sous-étape ;
3. la valeur de l'exposant k qui apparaît dans la formule d'interpolation de chaque méthode de déplacement des noeuds (Section 3.4) et qui contrôle le rayon d'action de chacune

des méthodes, c'est-à-dire la distance entre l'objet en mouvement et le noeud déplacé situé le plus loin de celui-ci.

Translation

Les tests visant à étudier le mouvement de translation ont été effectués par Garon et Delfour [40] et sont basés sur la géométrie présentée à la Figure 5.1. Le bloc solide est ainsi translaté de 5 unités vers le bas et de 5 unités vers la gauche de façon simultanée. Il s'agit d'une translation rigide, c'est-à-dire que les noeuds situés sur le bloc bougent avec celui-ci et que les noeuds environnants sont conséquemment déplacés par les différentes méthodes d'interpolation, soit IDW, ITM et ITB. Les résultats détaillés sont présentés dans [40]. On

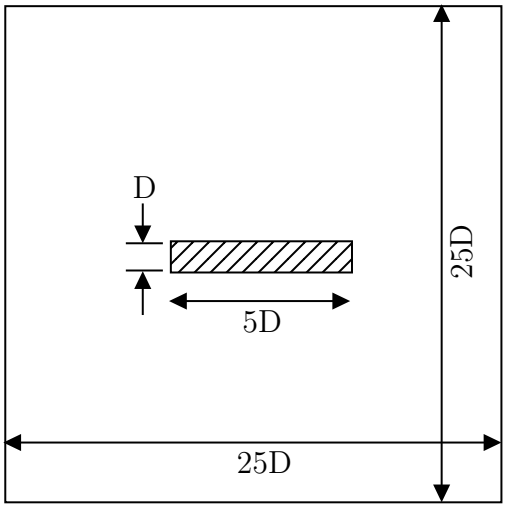


Figure 5.1 Schéma de la géométrie de base pour la translation et la rotation où le rectangle hachuré est le solide placé à l'intérieur du domaine fluide

en retire principalement qu'en appliquant l'exposant k optimal pour chaque méthode, IDW, ITM et ITB sont sensiblement équivalentes en ce qui concerne le mouvement de translation pure. En effet, les trois méthodes convergent approximativement au même rythme vers leur valeur asymptotique $\min(f_{ss_\infty})$. On remarque tout de même qu'en utilisant Runge-Kutta 4 comme méthode d'intégration, la convergence des trois méthodes est beaucoup plus rapide qu'avec Euler explicite, et ce pour une même charge d'intégration.

Rotation

En ce qui concerne le mouvement de rotation, les tests effectués par Garon et Delfour [40] sont aussi basés sur la géométrie de la Figure 5.1. Ici, on procède plutôt à la rotation rigide du bloc

solide de 60° dans le sens anti-horaire. À partir des résultats détaillés par Garon et Delfour, on remarque qu'IDW et ITB n'arrivent en aucun cas à générer un maillage valide pour $k = 2$ alors qu'ITM y arrive pour $k = 3$, une valeur pour laquelle cette méthode est linéairement exacte. De façon plus générale, on observe que la valeur de k a peu d'influence sur la qualité du maillage lorsque que Runge-Kutta 4 est utilisée comme méthode d'intégration. Si on compare les valeurs du ratio $\min (f_{ss})_{rel}$, on remarque qu'ITM est la méthode la plus efficace puisqu'elle converge pour une charge d'intégration largement inférieure à celles nécessaires pour IDW et ITB.

Déformation

Pour ce qui est des tests de déformation, deux différents tests ont été faits, soit un premier test où une déformation constante a été appliquée au bloc rigide de la Figure 5.2 (gauche) dans le but d'identifier les paramètres optimaux pour chaque méthode d'interpolation et un second test, basé sur la géométrie de droite de la Figure 5.2, où l'intensité de la déformation varie afin de déterminer quelle méthode peut soutenir les déformations les plus importantes. Les résultats des tests à déformation constante, détaillés par Couture-Peck et al. [7], montrent

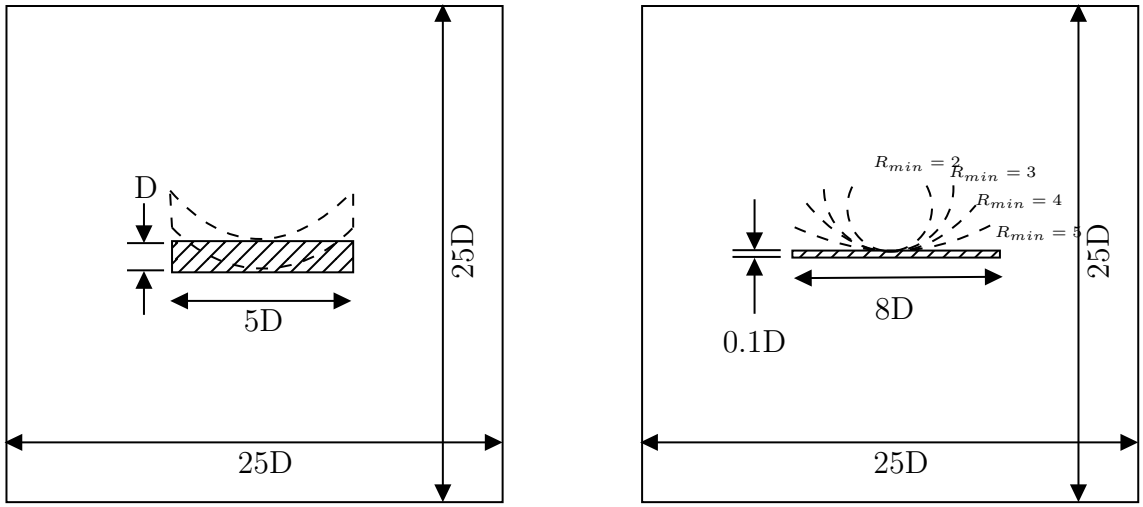


Figure 5.2 Géométrie de base pour le test à déformation constante (gauche) et pour le test pour lequel l'intensité de déformation varie (droite) et où le rectangle hachuré correspond au solide placé à l'intérieur du domaine fluide

que les méthodes d'intégration ont une très grande influence sur la vitesse de convergence des trois méthodes d'interpolation, tout comme c'est le cas pour le mouvement de translation. En effet, les méthodes de déplacement des noeuds convergent très rapidement lorsqu'on emploie la méthode du point milieu ou bien Runge-Kutta 4 comparativement à la méthode d'Euler

explicite. La différence entre les maillages générés par les différentes méthode d'interpolation n'est toutefois pas évidente à ce stade et dépend aussi du maillage utilisé. Il n'est donc pas possible de déterminer clairement une méthode supérieure en ce qui a trait à ce mouvement de déformation.

Les résultats des tests où l'intensité de déformation varie sont quant à eux très intéressants. En effet, Couture-Peck et al. montrent qu'ITM, jumelée à la méthode d'intégration Runge-Kutta 4, est la seule méthode capable de générer un maillage valide pour la déformation de la plus grande intensité testée. La Figure 5.3, tirée de [7] montre d'ailleurs ce maillage.

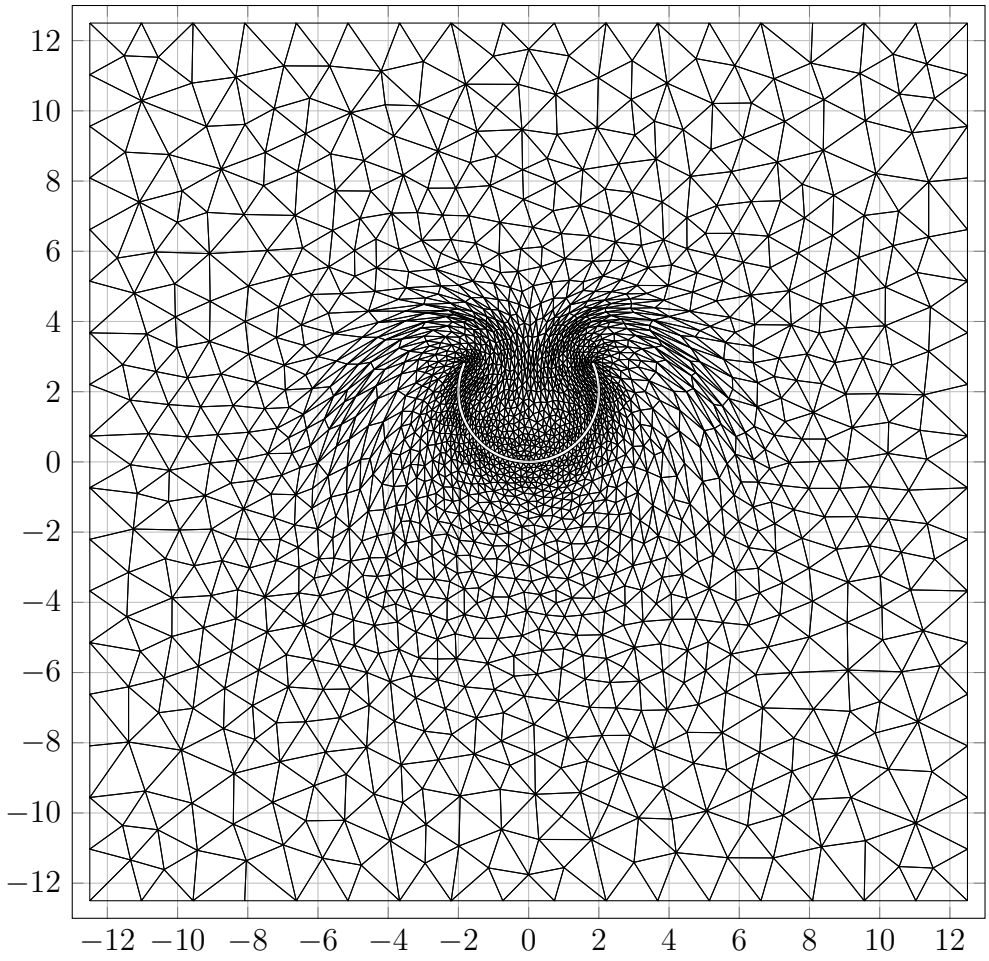


Figure 5.3 Maillage déformé par ITM jumelé à Runge-Kutta 4 pour $k = 5$ et pour une charge d'intégration de 240, tiré de [7]

5.2 Application du maillage mobile

Un des problèmes d'IFS très intéressants à résoudre à l'aide de la formulation ALE des équations de Navier-Stokes et d'un maillage mobile correspond au mouvement chaotique d'un corps rigide dans un écoulement. En effet, comme ce type de mouvement est imprévisible, seules des méthodes robustes permettent de le simuler adéquatement. C'est donc en se basant sur le travail de Gabriel Weymouth [1,58,59] que la simulation du mouvement chaotique d'un cylindre elliptique dans un écoulement a été réalisée.

5.2.1 Ellipse chaotique de Weymouth

Weymouth étudie plus précisément le mouvement 2D d'un cylindre elliptique de longueur caractéristique L_0 dont le mouvement est entraîné par son interaction avec un fluide d'une viscosité non-nulle μ et de vitesse adimensionnelle U_0 [1], tel qu'illustré à la Figure 5.4. Celui-ci peut représenter un capteur immergé dans un liquide ou bien un système d'extraction d'énergie pour lequel le nombre de Reynolds n'excède pas $Re = \frac{\rho_0 U_0 L_0}{\mu} = 10^3$. Seule la distance r entre le centroïde x_0 de l'ellipse et le centre de rotation c contrôle la stabilité du système et est d'ailleurs un exemple souvent utilisé pour démontrer un mouvement chaotique. C'est justement les différents types de sillage, autant stables que chaotiques qui sont étudiés par Weymouth. L'équation du mouvement angulaire utilisée correspond à l'Équation (5.3)

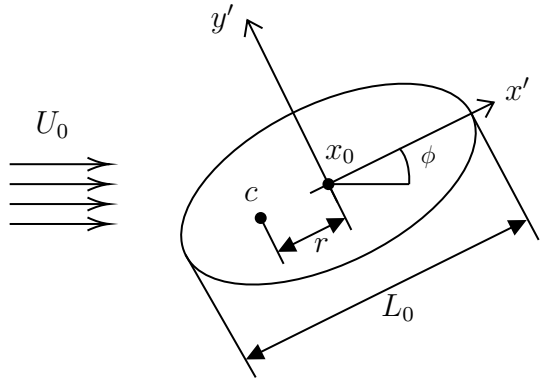


Figure 5.4 Schéma du cylindre elliptique rigide à une degré de liberté dans un écoulement fluide de vitesse U adapté de [1]

qui découle de l'Équation (3.14) présentée à la Section 3.5.

$$\rho_s I_0 \dot{\omega} + \rho_s \zeta_0 \omega + \int_\Gamma ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \times \boldsymbol{\lambda}) \cdot e_z d\Gamma = 0 \quad \forall i \in \mathcal{S} \tag{5.3}$$

où I_0 correspond ici au second moment de masse de l'ellipse par rapport au point de pivot c dont la position est identifiée par $\mathbf{x}_c$. La méthodologie numérique adoptée pour résoudre ce problème, qui est davantage décrite dans les publications précédentes de Weymouth [58, 59], correspond à la méthode *Boundary Data Immersion Method (BDIM)* où les équations décrivant le mouvement du fluide à l'intérieur du domaine sont combinées analytiquement aux conditions de l'interface fluide-solide. Le comportement du solide est contrôlé en appliquant la réaction du corps immergé au fluide et en ajustant ensuite le corps à l'écoulement résultant. Les équations couplées sont alors résolues par la méthode des volumes finis et la méthode de Heun d'ordre 2 est employée pour la discrétisation en temps avec un pas adaptatif.
La condition frontière appliquée à la sortie est particulièrement intéressante. Il s'agit d'une méthode dérivée de la condition de Higdon [60] où les flux massiques sont intégrés sur toutes les autres frontières pour ajuster celui à la sortie et ainsi respecter la loi de conservation globale de la masse. Dans le cas d'*EF8*, la loi de conservation globale de la masse est automatiquement respectée par la méthode de résolution par ÉF. Un tel ajustement n'est donc pas nécessaire.

5.2.2 Sensibilité de la solution

Même en ne se concentrant que sur une application de la nouvelle méthode de résolution monolithique à maillage mobile, plusieurs décisions doivent être prises pour déterminer les valeurs d'une multitude de paramètres de simulation. Telle que le montre la relation symbolique (5.4), la solution S dépend de la méthode de mouvement des noeuds (MMN), du maillage, de l'intervalle de temps étudié ($[t_1, t_2]$), du pas de temps (dt), du polynôme d'interpolation choisi pour la géométrie (P_X) et de la solution initiale (SI) utilisée en entrée.

$$S = \{\text{MMN}, \text{maillage}, [t_1, t_2], dt, P_X; SI\} \tag{5.4}$$

C'est pourquoi il est essentiel d'isoler et de tester chacun de ces paramètres de simulation pour trouver les valeurs optimales. En ce qui concerne les paramètres physiques des simulations, les dimensions du domaine et de l'ellipse en mouvement respectent toujours celles de Weymouth [1]. Quant à lui, le schéma d'intégration en temps utilisé correspond à BDF2. De plus, dans le but des comparer des solutions à régime permanent, le nombre de Re est posé à 400 et le rapport r/L à 0.1.
Finalement, dans le but de comparer les différentes solutions obtenues, les caractéristiques du mouvement de l'ellipse seront considérées, soit l'amplitude angulaire du mouvement (θ) et l'amplitude des vitesses de rotation (ω). Un graphique semblable à celui de la Figure 5.5 sera donc tracé. À partir de celui-ci, il est possible de définir la plus petite boîte contenant

le mouvement de l'ellipse et dont l'aire est définie par amplitude de $\theta \times$ amplitude d'ω. C'est donc l'aire de cette boîte qui servira de principal critère de comparaison.

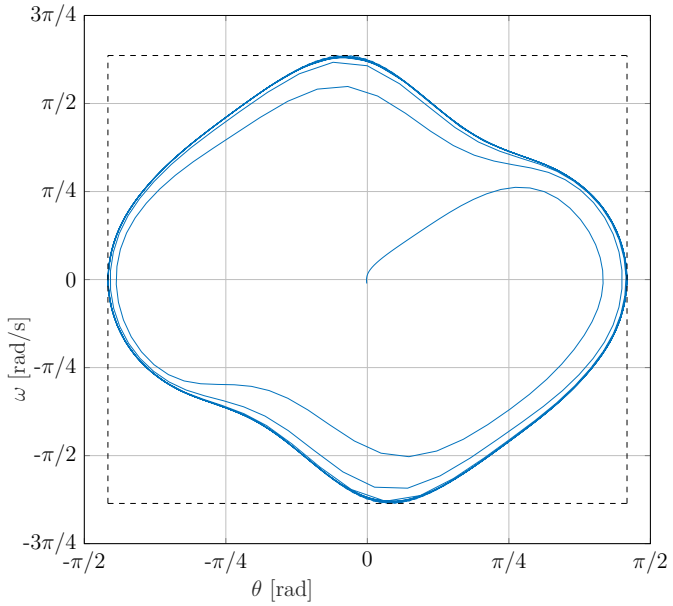


Figure 5.5 Définition de la plus petite boîte (en pointillé) pouvant contenir le mouvement de l'ellipse

Définition de la zone mobile du maillage

Tel qu'expliqué au Chapitre 3, les méthodes transfinies résolvent la position de chaque noeud du maillage comme une inconnue du problème. Cela ajoute inévitablement un grand nombre de degrés de liberté. Il devient donc avantageux de ne définir qu'une partie du domaine comme étant mobile, de façon à limiter le nombre d'inconnues et ainsi minimiser le temps de calcul. On teste d'abord le cas où tout le domaine est mobile, c'est-à-dire que la position de tous les noeuds du maillage fait partie des inconnues. C'est alors le modèle ALE jumelé à l'approche FTD qui est employé (voir Chapitre 3) pour bouger les noeuds du maillage à l'aide d'ITB avec $k = 4$. On définit ensuite un sous-domaine rectangulaire mobile autour de l'ellipse. Celui-ci est alors contenu dans un plus grand domaine pour lequel les noeuds demeurent fixes. Tel qu'illustré à la Figure 5.6, on procède ensuite à la réduction progressive de la taille du domaine mobile tout en vérifiant constamment la précision des résultats ainsi qu'en comparant les temps de calcul. Tous les maillages utilisés sont d'ailleurs présentés à l'Annexe E et ont tous été résolus en utilisant le temps comme paramètre d'intégration.

Visuellement, les graphiques d'ω en fonction de θ sont très semblables, et ce même si la

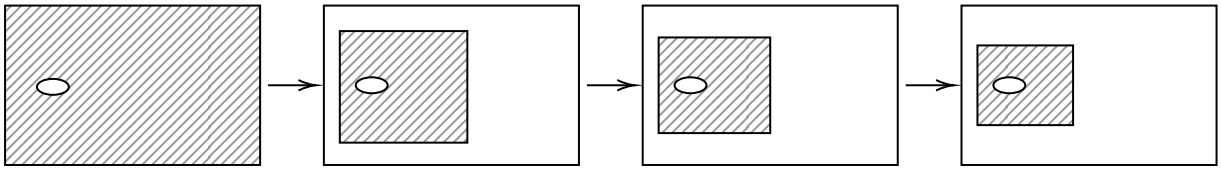


Figure 5.6 Schéma de la réduction progressive de la zone mobile du maillage (zone hachurée) à l'intérieur du domaine complet. Le reste du domaine est composé d'un maillage fixe

zone mobile diffère entre chaque maillage. Ceux-ci sont d'ailleurs présentés à l'Annexe F. Si on compare plus rigoureusement l'aire des boîtes contenant le mouvement de l'ellipse pour chaque maillage, on obtient les résultats présentés au Tableau 5.1. On remarque que même

Tableau 5.1 Amplitude de θ et d'ω permettant de calculer l'aire de la plus petite boîte contenant la solution pour différentes dimensions de la zone mobile du maillage. Tous les maillages sont composés d'environ 23 000 noeuds.

	Amplitude θ	**Amplitude ω**	**Aire boîte**	**% différence**
Complètement mobile	1.4200	1.8587	10.5577	-
Grande zone mobile	1.4360	1.9143	10.9960	4.151%
Zone mobile moyenne	1.4190	1.8832	10.6892	1.245%
Petite zone mobile	1.4144	1.8736	10.5998	0.399%

si les aires des boîtes sont relativement très près les unes des autres, celle du maillage dont la zone mobile est grande est, étonnamment, plus loin de celle du maillage entièrement mobile que le sont celles où la zone mobile est plus petite. Cela est probablement dû au fait que, même si les maillages contiennent environ tous le même nombre de noeuds (23 000), si la zone mobile diffère entre les maillages, cela signifie forcément que les maillages sont différents. Le pourcentage d'écart peut être dû à cette différence globale du maillage plutôt que de la zone mobile en soi. On peut donc conclure que les dimensions de la zone mobile du maillage n'influencent que très peu la précision des résultats et les différents maillages permettent, dans tous les cas, de bien représenter le mouvement de l'ellipse. La différence importante et particulièrement intéressante réside plutôt dans le temps de calcul nécessaire pour résoudre chacun des maillages étudiés. En effet, la Figure 5.7 démontre bien que le temps de calcul croît très rapidement avec le nombre de degrés de liberté totaux. Ainsi, si le mouvement est entièrement connu ou du moins limité, il devient très avantageux de réduire la zone mobile du maillage tout en veillant à ce que celle-ci soit suffisamment grande pour permettre le mouvement complet de l'objet et ainsi réduire considérablement le temps de calcul et donc le coût de la simulation. Dans le cas présent de l'ellipse de Weymouth, on voit que pour le Re et le ratio r/L imposé, tous les maillages étudiés permettent à l'ellipse de se mouvoir sans

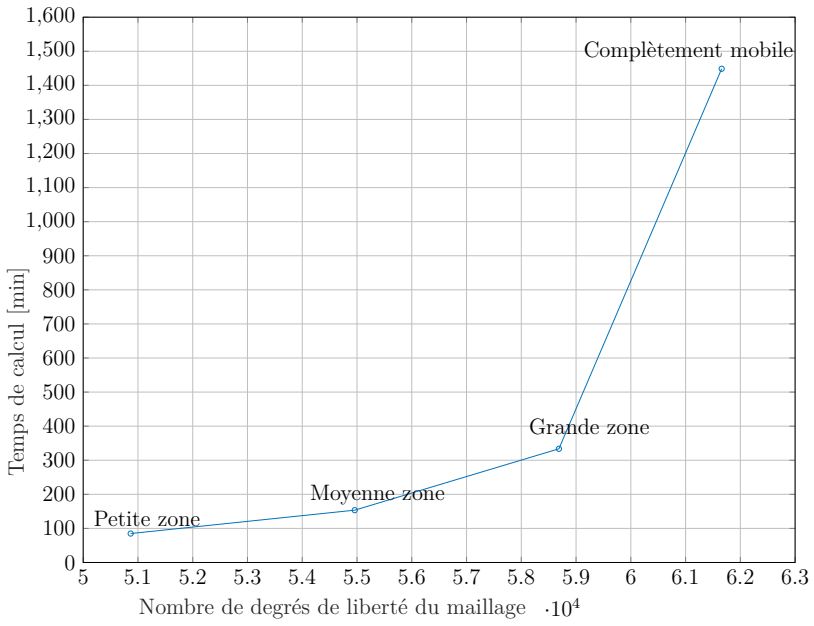


Figure 5.7 Évolution du temps de calcul en fonction du nombre de degrés de liberté qui est directement relié à la grandeur de la zone mobile du domaine

distordre le maillage et ainsi compromettre sa validité. Toutefois, comme le but est justement d'étudier le comportement chaotique de l'ellipse en faisant varier le Re et le ratio r/L, il est plus prudent, même si légèrement plus coûteux, d'utiliser le maillage où la taille de la zone mobile est moyenne, c'est-à-dire le maillage présenté à la Figure E.4 de l'Annexe E.

Raffinement du maillage et du pas de temps

Un autre aspect très important à étudier correspond à la sensibilité de la solution au raffinement du maillage et du pas de temps. C'est encore une fois le modèle ALE jumelé à l'approche FTD qui est employé (voir Chapitre 3) pour bouger les noeuds du maillage. La méthode de déplacement des noeuds ITB avec $k = 4$ a été utilisée pour tous ces tests, mais le comportement est le même pour ITM. Ici, le but est de déterminer le raffinement optimal du maillage, c'est-à-dire celui permettant de capturer adéquatement le comportement de la solution sans nécessiter une trop grande quantité d'éléments. Trois différents maillages sont alors testés : un maillage grossier (M_1), un maillage normal (M_2) et un maillage fin (M_3). Dans le même ordre d'idée, on étudie aussi l'influence du pas de temps dans le but d'obtenir une solution qui converge vers le régime permanent sans, encore une fois, nécessiter un temps de calcul trop important. Quatre différents pas de temps ont été testés avec le schéma BDF2, soit $dt = \{0.1, 0.075, 0.05, 0.025\}$.

La méthodologie employée et représentée à la Figure 5.8 consiste simplement à tester les différentes valeurs de dt pour chaque maillage en partant du plus grossier au plus fin et en utilisant toujours la solution précédente comme solution initiale. De cette façon, on arrive à simuler un mouvement continu, mais avec différentes valeurs de dt, ce qui permet de voir si un changement apparaît lorsque l'on passe d'une valeur de dt à une autre. Cette série de

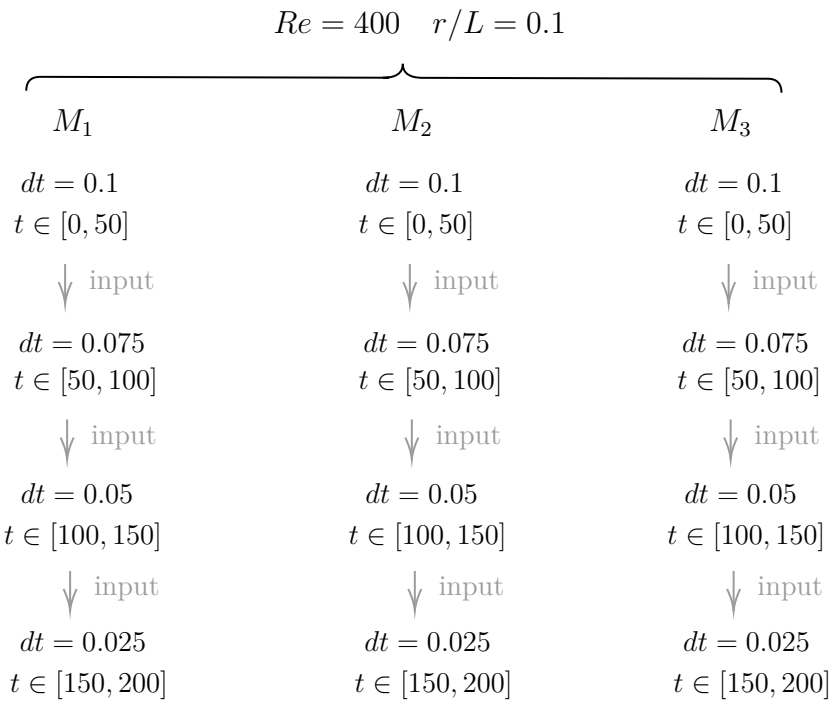


Figure 5.8 Schéma de la méthodologie utilisée pour étudier l'influence du raffinement du maillage et du pas de temps sur la solution obtenue

tests donne ainsi lieu aux graphiques de la Figure 5.9 où l'on peut voir la vitesse de rotation ω en fonction de l'angle de rotation θ pour les trois maillages ainsi que pour les différentes valeurs de dt.

Les trois graphiques de la Figure 5.9 sont globalement assez semblables, mais comportent tout de même quelques différences lorsqu'on s'attarde aux valeurs de l'aire de la plus petite boîte contenant le mouvement de l'ellipse. Les Tableaux 5.2 à 5.4 montrent respectivement ces résultats pour les maillages M_1, M_2 et M_3. On y remarque entre autres que la convergence de l'amplitude de θ et d'ω ne semble pas être monotone, mais bien oscillante. En effet, les valeurs de θ et d'ω n'évoluent pas toutes dans un même sens alors que le dt diminue, elles semblent plutôt osciller autour d'une solution. On remarque quand même la convergence en observant que la différence entre l'aire des boîtes s'amenuise avec le raffinement du dt. La Figure 5.10 permet très bien de voir ce phénomène pour les trois maillages. On sait aussi,

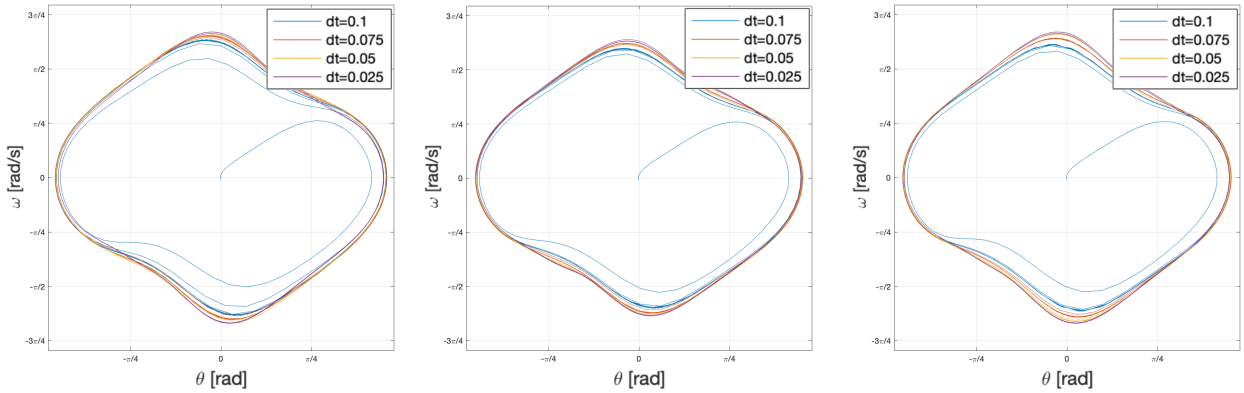


Figure 5.9 Vitesse de rotation ω en fonction de l'angle de rotation θ pour différents dt pour le maillage grossier M_1 (gauche), pour le maillage normal M_2 (centre) et pour le maillage fin M_3 (droite)

Tableau 5.2 Amplitude de θ et d'ω permettant de calculer l'aire de la plus petite boîte contenant la solution pour le maillage M_1. Le pourcentage (%) de différence est toujours calculé avec l'aire de la boîte du dt supérieur.

	Amplitude θ [rad]	**Amplitude ω [rad/s]**	**Aire boîte**	**% différence**
$dt = 0.1$	1.4404	1.9975	11.5088	-
$dt = 0.075$	1.4381	2.0553	11.8233	2.732%
$dt = 0.05$	1.4304	2.1045	12.0416	1.847%
$dt = 0.025$	1.4262	2.0844	11.8910	1.251%

Tableau 5.3 Amplitude de θ et d'ω permettant de calculer l'aire de la plus petite boîte contenant la solution pour le maillage M_2. Le pourcentage (%) de différence est toujours calculé avec l'aire de la boîte du dt supérieur.

	Amplitude θ [rad]	**Amplitude ω [rad/s]**	**Aire boîte**	**% différence**
$dt = 0.1$	1.4192	1.8885	10.7206	-
$dt = 0.075$	1.4210	1.9625	11.1549	4.051%
$dt = 0.05$	1.4140	1.9926	11.2701	1.032%
$dt = 0.025$	1.4101	2.0002	11.2817	0.103%

tel que prouvé à la Section 4.1.2, que l'erreur d'un maillage de bonne qualité diminue pour atteindre un plateau lorsqu'on raffine la pas de temps. Le maillage M_1, c'est-à-dire le plus grossier, ne semble pas se comporter de cette façon. En effet, on observe un certain pic à $dt = 0.05$, ce qui ne se produit pas pour les maillages M_2 et M_3. On peut aussi constater, au Tableau 5.2, que le pourcentage de différence de l'aire de la boîte entre chaque valeur

Tableau 5.4 Amplitude de θ et d'ω permettant de calculer l'aire de la plus petite boîte contenant la solution pour le maillage M_3. Le pourcentage (%) de différence est toujours calculé avec l'aire de la boîte du dt supérieur.

	Amplitude θ [rad]	**Amplitude ω [rad/s]**	**Aire boîte**	**% différence**
$dt = 0.1$	1.4240	1.9333	11.0121	-
$dt = 0.075$	1.4265	2.0214	11.5342	4.741%
$dt = 0.05$	1.4206	2.0849	11.8473	2.714%
$dt = 0.025$	1.4115	2.1078	11.9011	0.454%

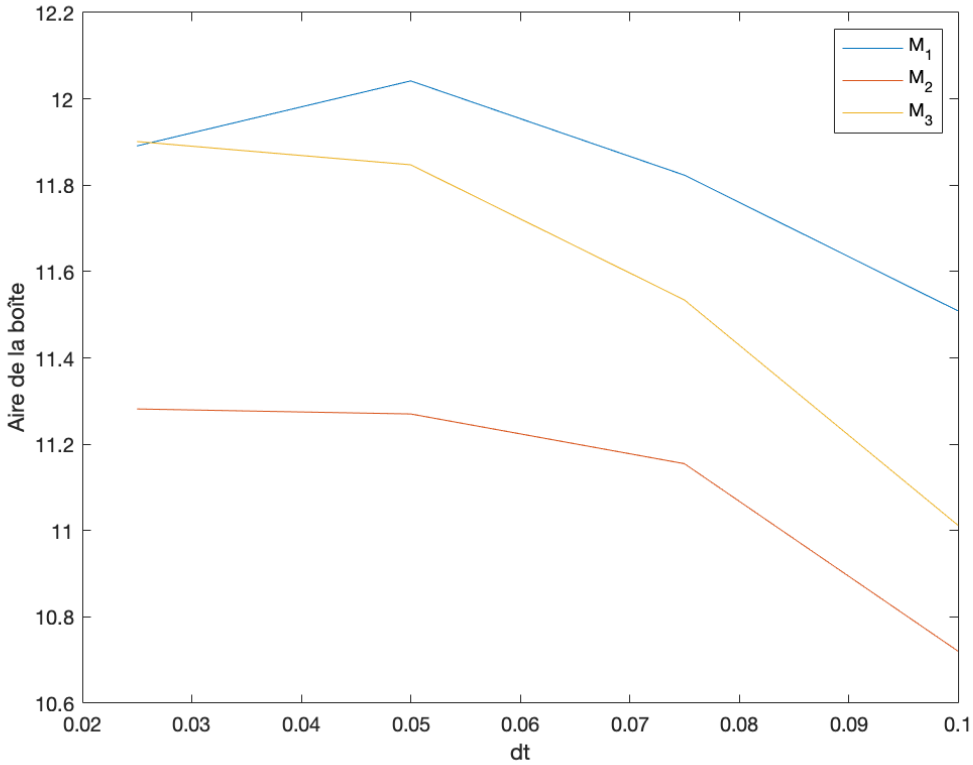


Figure 5.10 Évolution de l'aire de la plus petite boîte contenant le mouvement de l'ellipse en fonction du dt pour les trois maillages testés

de dt converge plus lentement. Ce maillage sera donc éliminé pour les prochains tests. Si on s'attarde aux maillages M_2 et M_3, on voit que leur comportement est très similaire. Il est donc plus judicieux d'utiliser le maillage normal M_2 puisqu'il nécessite moins de temps de calcul que M_3 pour une précision de calcul environ équivalente. Finalement, M_2 et M_3 semblent atteindre un plateau à partir de $dt = 0.05$. En d'autres mots, on obtient très peu

de gain si on continue de raffiner le pas de temps à partir de cette valeur. Un pas de temps de $dt = 0.05$ semble donc adéquat pour les prochains tests.

Influence de la méthode de mouvement des noeuds et de ses paramètres intrinsèques

Pour étudier l'influence des différentes méthodes de mouvement des noeuds, deux principaux aspects sont approfondis :

1. Le paramètre d'intégration utilisé pour calculer le mouvement de l'objet solide, soit par rotation rigide (modèle ALE/FTD) ou bien par transformation générale (modèle ALE/FFI) ;
2. La méthode d'interpolation des vitesses de déformation du maillage, soit ITB ou ITM ainsi que leurs différentes valeurs du paramètre k.

En ce qui concerne le paramètre d'intégration, il est intuitif d'utiliser le temps, c'est-à-dire l'approche FTD présentée à la Section 3.4.3. De plus, tel que mentionné au Chapitre 3, les schémas d'intégration en temps BDF sont utilisés par $EF8$ et sont normalement assez précis. Toutefois, un problème survient lors de longues simulations. En effet, en utilisant le temps comme paramètre d'intégration, le calcul de la nouvelle position de l'ellipse à chaque pas de temps est effectué à partir de la position précédente de l'ellipse. Cela fait en sorte qu'une erreur d'intégration s'accumule au fil de la simulation. Comme le graphique de gauche de la Figure 5.11 permet de le constater, cette erreur d'intégration cause une dégradation de la qualité du maillage et peut même ultimement mener à un maillage invalide (un jacobien négatif) si la simulation est effectuée sur un grand intervalle de temps $[t_1, t_2]$. Ce problème n'est pas apparu dans le cadre des tests effectués précédemment puisque les simulations n'étaient pas suffisamment longue pour que ce comportement se manifeste. Aussi, à la Section 5.1, seule la position des noeuds était résolue ce qui suggérait l'utilisation de l'approche FTI, qui n'a pas ce problème. En effet, on observe un problème d'hystérésis puisque même si le mouvement de l'ellipse est cyclique, le maillage ne reprend pas sa forme initiale à chaque cycle. Une des solutions pourrait être de conserver le modèle ALE/FTD, mais d'utiliser un schéma d'intégration en temps plus précis. Toutefois, cela ne ferait que repousser le problème puisque l'erreur d'intégration continuerait de s'accumuler, mais plus lentement. Une autre solution pourrait être de réduire le pas de temps, mais cela impliquerait une hausse significative du temps de simulation. Ainsi, une toute autre approche est nécessaire.
En changeant le paramètre d'intégration pour un facteur de forme plutôt que le temps, le calcul de la nouvelle position de l'ellipse est toujours effectué en une seule étape à partir de la position initiale de l'ellipse si l'approche k-ITM-$\mathcal{IE}_1$ ou k-ITB-$\mathcal{IE}_1$ est utilisée. On évite

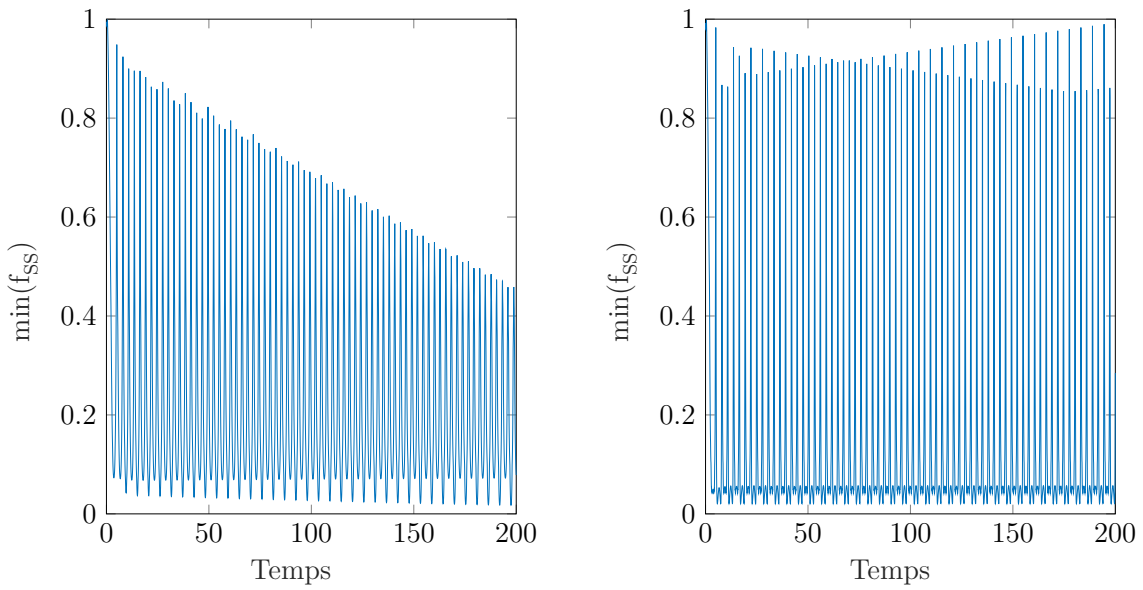


Figure 5.11 Évolution du minimum du f_{SS} en fonction du temps de la simulation pour une rotation rigide avec le modèle ALE/FTD (gauche) et une transformation générale avec le modèle ALE/FFI (droite)

ainsi le problème d'accumulation de l'erreur d'intégration à chaque sous-étape et la qualité de maillage demeure donc constante au fil des cycles, tel que le montre le graphique de droite de la Figure 5.11. Le fait de bouger les noeuds à la frontière à l'aide d'une transformation générale plutôt qu'en procédant à une rotation rigide a aussi une influence sur l'apparence visuelle du maillage final. L'image de gauche de la Figure 5.12 permet de constater que la rotation rigide de l'ellipse engendre une déformation plus généralisée de la zone mobile du maillage puisque pratiquement tous les noeuds mobiles sont entraînés par le mouvement de l'ellipse. L'image de droite de la Figure 5.12, qui montre la rotation de l'ellipse à l'aide d'une transformation générale, montre que la déformation du maillage est beaucoup plus locale, soit très près de la paroi de l'ellipse. Même s'il est visuellement difficile de le constater, la Figure 5.11 prouve bel et bien qu'en utilisant le modèle ALE jumelé à l'approche FFI, on peut non seulement suivre l'ellipse dans son mouvement en minimisant le déplacement des noeuds du maillage, mais aussi mieux conserver la qualité du maillage au fil de la simulation. C'est donc cette approche qui sera utilisée pour les tests. La Figure 5.12 illustre aussi comment les noeuds situés sur la frontière de l'ellipse sont répartis différemment selon la méthode utilisée. En effet, le modèle ALE/FTD fait en sorte que l'ellipse conserve toujours la même discrétisation puisque les noeuds de l'ellipse suivent toujours cette dernière dans son mouvement. L'image de droite, où l'ellipse est plutôt déformée, montre que la répartition

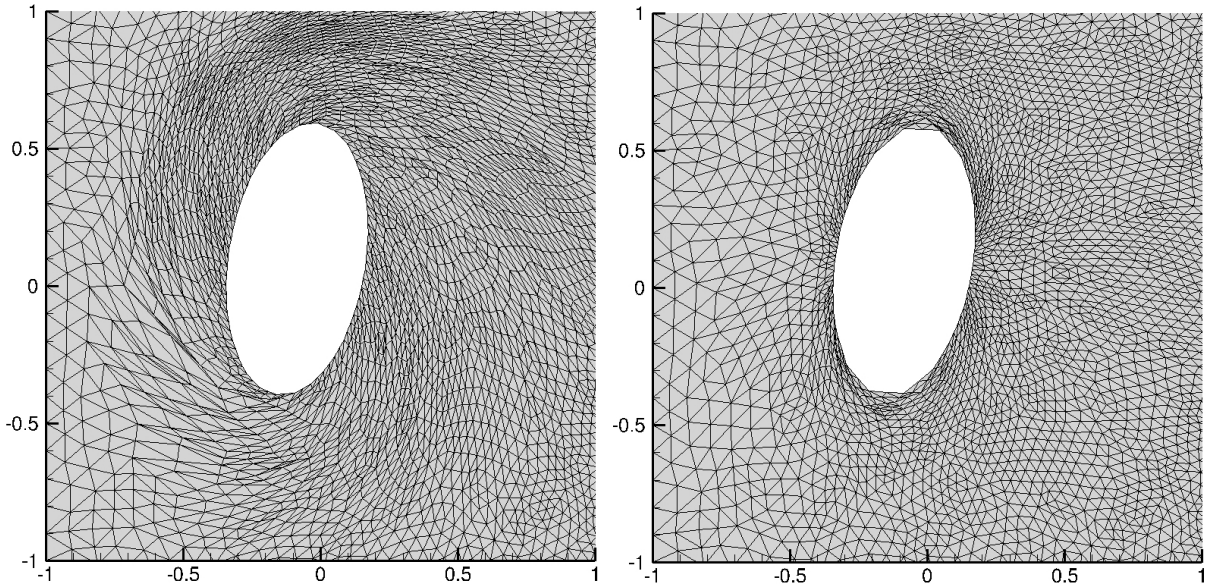


Figure 5.12 Zoom sur le maillage autour de l'ellipse en rotation où le paramètre d'intégration est le temps (gauche) et le paramètre de forme (droite)

des noeuds sur l'ellipse change au fil de son mouvement puisque le maillage initial est généré autour de l'ellipse à la position horizontale.

À la Section 5.1, les divers tests soulignaient l'influence de la méthode d'intégration utilisée sur la validité des maillages générés à une charge d'intégration donnée ainsi que sur la convergence de chaque méthode d'interpolation du taux de déformation du maillage. Toutefois, ces tests simulaient de très grands déplacements, ce qui ne sera pas le cas avec l'ellipse de Weymouth puisque même si le mouvement peut s'avérer chaotique, celui-ci est limité à un degré de liberté, soit la rotation autour d'un point de pivot. De plus, on voit clairement à la Figure 5.11 que l'approche $\mathcal{IE}_1$ arrive sans problème à résoudre le problème étudié lorsque le modèle utilisé correspond à ALE/FFI et permet d'effectuer les déplacement de l'ellipse en une seule étape sans faire apparaître de variables intermédiaires. Il ne devient donc pas pertinent, dans le cas présent, de prendre le temps d'implémenter des méthodes d'intégration d'ordre supérieur compte tenu du fait que la précision actuelle est amplement satisfaisante.

En second lieu, il est intéressant d'étudier l'influence de la méthode d'interpolation des vitesses de déformation des noeuds du maillage sur les résultats obtenus. Pour ce faire, le mouvement de l'ellipse entre $[t_1, t_2] = [150, 500]$ a été étudié, en utilisant la solution à $t = 150$ à régime permanent comme solution initiale. ITM et ITB, les seules méthodes transfinies, ont toutes les deux été testées tout en faisant varier la valeur du paramètre k tel que $k = \{3, 4, 5\}$.

Les résultats obtenus sont très semblables, voire impossible à différencier visuellement, comme il est possible de le constater à la Figure G.1 de l'Annexe G. Le Tableau 5.5 montre lui aussi que les résultats sont très semblables, et ce peu importe la méthode d'interpolation ainsi que son paramètre k. Il est cependant important de noter que tous les tests effectués avec $k = 3$ donnaient rapidement des maillages invalides puisque le rayon d'influence du mouvement est trop petit pour assurer un déplacement cohérent des noeuds du maillage et ainsi éviter toute inversion d'éléments. On constate tout de même une légère réduction de l'aire de la boîte

Tableau 5.5 Amplitude de θ et d'ω permettant de calculer l'aire de la plus petite boîte contenant la solution pour ITB et ITM et pour différentes valeurs de k

Méthode d'interpolation	k	**Amplitude θ**	**Amplitude ω**	**Aire boîte**
	3	-	-	-
ITB	4	1.4156	1.9989	11.3182
	5	1.4130	1.9654	11.1085
	3	-	-	-
ITM	4	1.4148	1.9834	11.2240
	5	1.4149	1.9696	11.1474

pour ITB ainsi que pour ITM lorsqu'on passe de $k = 4$ à $k = 5$. Cette différence n'étant que de 0.687% pour ITM, cette méthode semble particulièrement stable, peu importe la valeur de k.

Si on s'attarde maintenant à l'évolution de la valeur du $\min(f_{ss})$ en fonction du mouvement, on obtient le graphique de la Figure 5.13 où l'on observe que pour toutes les valeurs de k, ITM possède un $\min(f_{ss})$ supérieur à ITB. Même si la valeur $\min(f_{ss})$ n'a qu'une signification géométrique et que cela n'implique pas nécessairement que la précision des calculs effectués sur ces maillages sera meilleure, il est important de considérer que, pour un comportement chaotique, le mouvement de l'ellipse est imprévisible. Il est donc préférable d'utiliser une méthode qui permet de maintenir la validité du maillage le plus longtemps possible, c'est-à-dire pour les mouvements de la plus grande amplitude possible. Dans un cas où le mouvement étudié est connu ou que ses limites sont connues, nul besoin d'accorder trop d'importance au $\min(f_{ss})$. Toutefois, pour l'ellipse de Weymouth, il est préférable d'utiliser la méthode ITM avec le paramètre $k = 4$, puisque c'est cette méthode qui permet de préserver la validité du maillage pour les mouvements les plus importants.

Influence de l'interpolant géométrique

Finalement, le dernier paramètre de simulation testé est le degré de l'interpolant géométrique. Même s'il est évident que l'interpolant P_2 pour la géométrie permet de beaucoup mieux

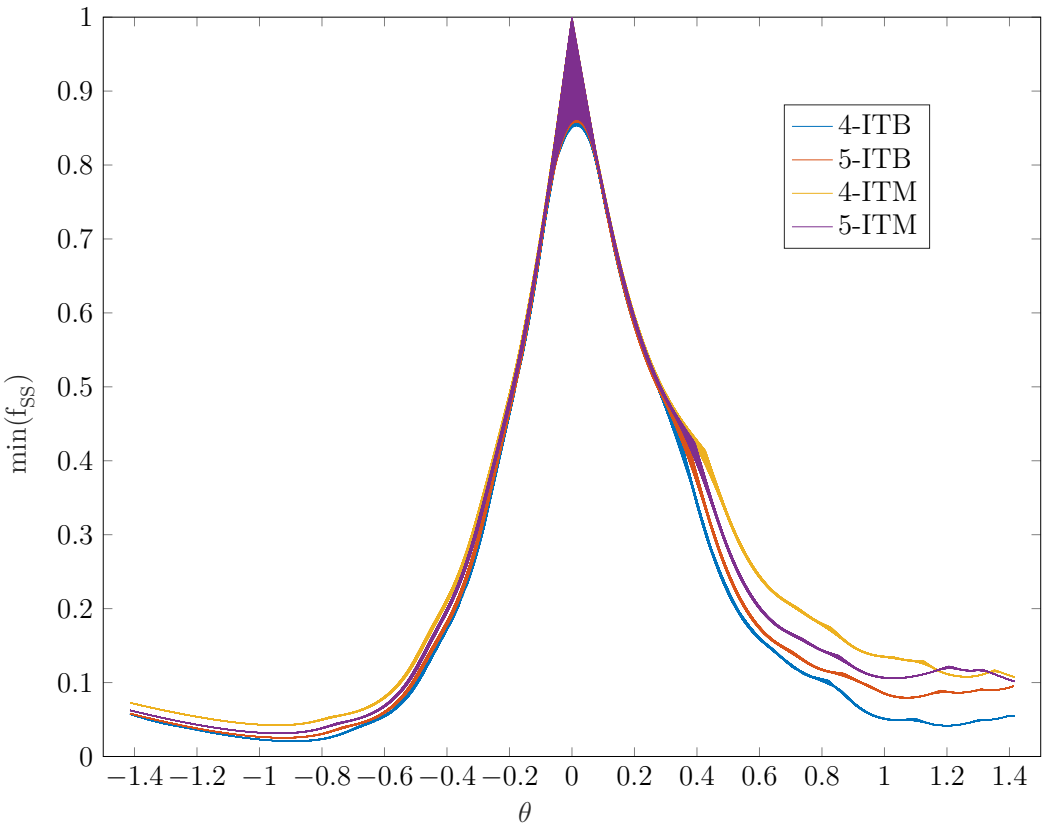


Figure 5.13 Évolution du min(f_{ss}) en fonction de l'angle de rotation θ de l'ellipse pour les différentes méthodes d'interpolation

approximer la forme de l'ellipse, ce type d'interpolant ajoute un très grande nombre de degrés de liberté à résoudre. Il est donc intéressant de se pencher sur les résultats obtenus avec les interpolants P_1 et P_2 et ainsi juger de l'importance de la différence. Ici, c'est le modèle ALE jumelé à l'approche FTD qui déplace les noeuds du maillage à l'aide de la méthode ITB avec $k = 4$. Les graphiques de la vitesse de rotation ω en fonction de l'angle de rotation θ sont présentés à la Figure H.1 de l'Annexe H. Le Tableau 5.6 présente justement ces résultats de façon numérique. On y constate que la différence entre les solutions générées à l'aide des interpolants P_1 et P_2 sont minimes. Il n'est donc pas pertinent d'utiliser un interpolant P_2 considérant l'importante augmentation du temps de calcul que cause l'augmentation du nombre de degrés de liberté. C'est donc l'interpolant géométrique P_1 qui sera utilisé pour les tests subséquents.

Tableau 5.6 Amplitude de θ et d'ω permettant de calculer l'aire de la plus petite boîte contenant la solution pour les interpolants géométriques P_1 et P_2 et pour ITB et ITM

Interpolant	**Méthode d'interpolation**	**Amplitude θ**	**Amplitude ω**	**Aire boîte**
P_1	ITB	1.4142	1.9936	11.2770
	ITM	1.4147	1.9834	11.2238
P_2	ITB	1.4400	2.0528	11.8239
	ITM	1.4392	2.0435	11.7642

5.2.3 Application à l'ellipse de Weymouth [1]

Alors que Weymouth a analysé en détails le mouvement chaotique du cylindre elliptique mis en mouvement via l'écoulement du fluide, on s'intéresse ici particulièrement à deux aspects, soit

1. à la sensibilité du comportement de l'ellipse en fonction de deux paramètres : le nombre de Re et le rapport r/L ;
2. à l'influence du coefficient d'amortissement sur le mouvement de l'ellipse.

En ce qui concerne l'étude paramétrique en fonction de Re et du rapport r/L, le but est d'abord de tenter de retrouver les mêmes résultats que Weymouth, tout en poussant davantage l'analyse et la compréhension du phénomène. Pour ce qui est de l'influence du coefficient d'amortissement, le but est simplement de voir comment il est possible de contrôler le mouvement de l'ellipse en y ajoutant un coefficient d'amortissement. Les paramètres de simulation sont tous fixés suite aux différents tests de la Section 5.2.2 dans le but d'obtenir le meilleur compromis entre la précision et les limites des ressources de calcul. C'est donc le modèle ALE/FFI avec l'approximation 4-ITM-$\mathcal{IE}_1$ qui sera employée, tel qu'expliqué à la Section 5.2.2. On continue aussi à appliquer le schéma d'intégration en temps BDF2. De plus, en utilisant le théorème des axes parallèles ainsi que la forme adimensionnelle des équations de Navier-Stokes sous forme ALE on détermine aisément que $\bar{I}_0 = \frac{5\pi}{512} + r^2\frac{\pi}{8}$ où r correspond à la distance entre le centre géométrique de l'ellipse et son centre de rotation. On applique encore le schéma d'intégration en temps BDF2.

Sensibilité du comportement de l'ellipse

Dans un premier temps une étude paramétrique en fonction du nombre de Re et du ratio r/L a été effectuée. Le détail de l'application des conditions limites sur le domaine est présenté à la Figure 5.14 où $\mathbf{u}_{in} = [((0.05y - 0.25) + \min(t/5, 1)(-0.05y + 0.25) + 1) \cdot \mathbf{e}_x]$. On observe les résultats obtenus aux Figures 5.15 et 5.16. La Figure 5.15 illustre bien le mouvement de

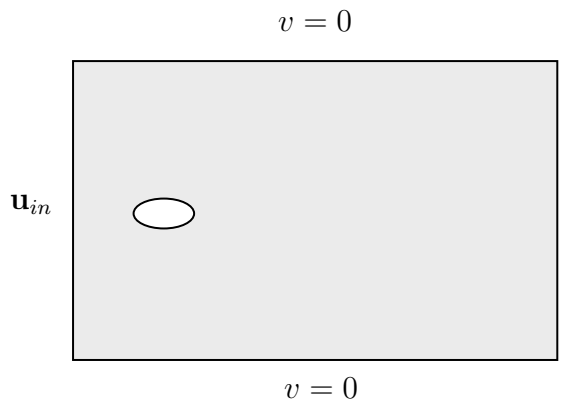


Figure 5.14 Schématisation des conditions u, v imposées aux frontières (Γ) du domaine fluide (Ω) pour l'étude de la sensibilité du comportement de l'ellipse en fonction de Re et du ratio r/L

l'ellipse en traçant la vitesse de rotation ω en fonction de l'angle de rotation θ alors que la Figure 5.16 permet plus facilement de différencier les types de mouvement en traçant l'angle de rotation θ en fonction du temps.

À la Figure 5.15, pour $Re = 200$, on observe que l'ellipse n'oscille que d'un côté sans jamais aller du côté des θ négatifs et ce, pour toutes les valeurs de r/L testées. Il est à noter que le sens de l'oscillation est simplement dicté par le sens du profil en cisaillement à l'entrée de l'écoulement. Ainsi, en inversant le profil de cisaillement, l'ellipse oscille en sens inverse, mais le comportement demeure le même. Celui-ci est d'ailleurs pratiquement périodique et est caractérisé par des allées de Von Karman standards. La Figure 5.17 montre très bien ce comportement à l'aide du champ de vorticité et de pression ainsi que des vecteurs du champ de vitesse. Ce type de mouvement est stable et est donc nommé stabilité asymétrique. En effet, si on observe les graphiques analogues à la Figure 5.16, c'est-à-dire ceux où $Re = 200$, on observe que l'amplitude de θ est bel et bien périodique, mais oscille toujours autour d'une valeur différente de 0. Ce même type de mouvement se produit aussi à $Re = 300$ et $Re = 400$ pour $r/L = 0.16$. À titre de référence, Weymouth [1] nomme ce mouvement *period-1 limit cycle around a single branch*. Cette stabilité asymétrique se différencie de l'autre forme de mouvement stable que l'on observe à Re plus élevé, soit à $Re = 400$ pour des valeurs de r/L de 0.1, 0.12 et 0.13.

En effet, lorsque le nombre de Re est élevé et que le ratio r/L n'excède pas 0.13, l'ellipse oscille autour de $\theta = 0$ avec une amplitude d'oscillation plus importante comme on peut le constater à la Figure 5.16 ainsi que de façon plus visuelle à la Figure 5.18. Ce type de mouvement est nommé stabilité symétrique. Contrairement au mouvement de stabilité asy-

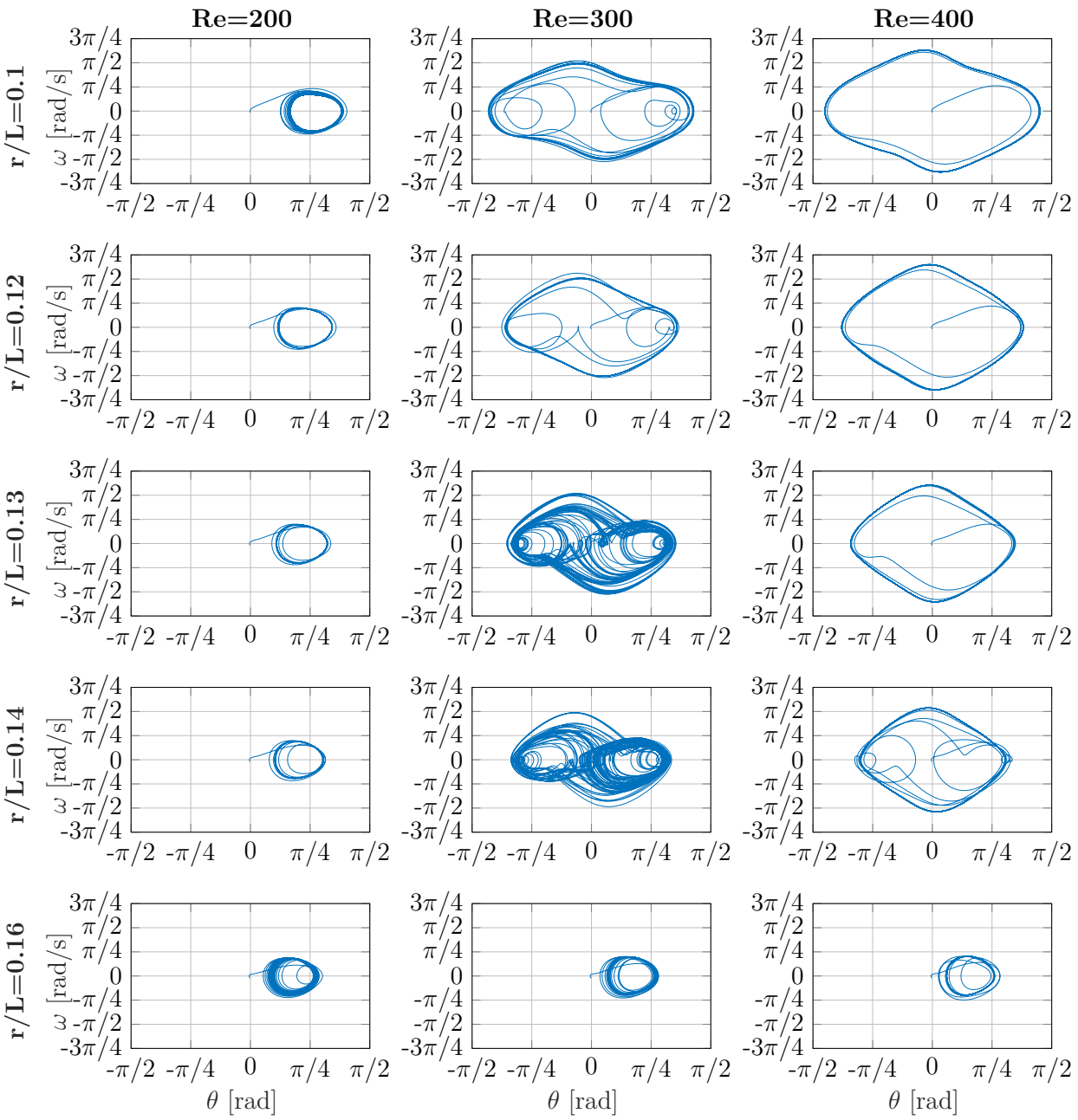


Figure 5.15 Vitesse de rotation ω en fonction de l'angle de rotation θ pour $Re = \{200, 300, 400\}$ et $r/L = \{0.1, 0.12, 0.13, 0.14, 0.16\}$

métrique, les vortex du sillage s'éloignent de ceux de Von Karman. On observe plutôt un vortex principal suivi d'un vortex secondaire, et ce à chaque demi période. On remarque aussi que les vitesses de rotation ω sont beaucoup plus importantes que pour les mouvements de stabilité asymétrique. Weymouth [1] nomme ce mouvement *stable limit cycle*.

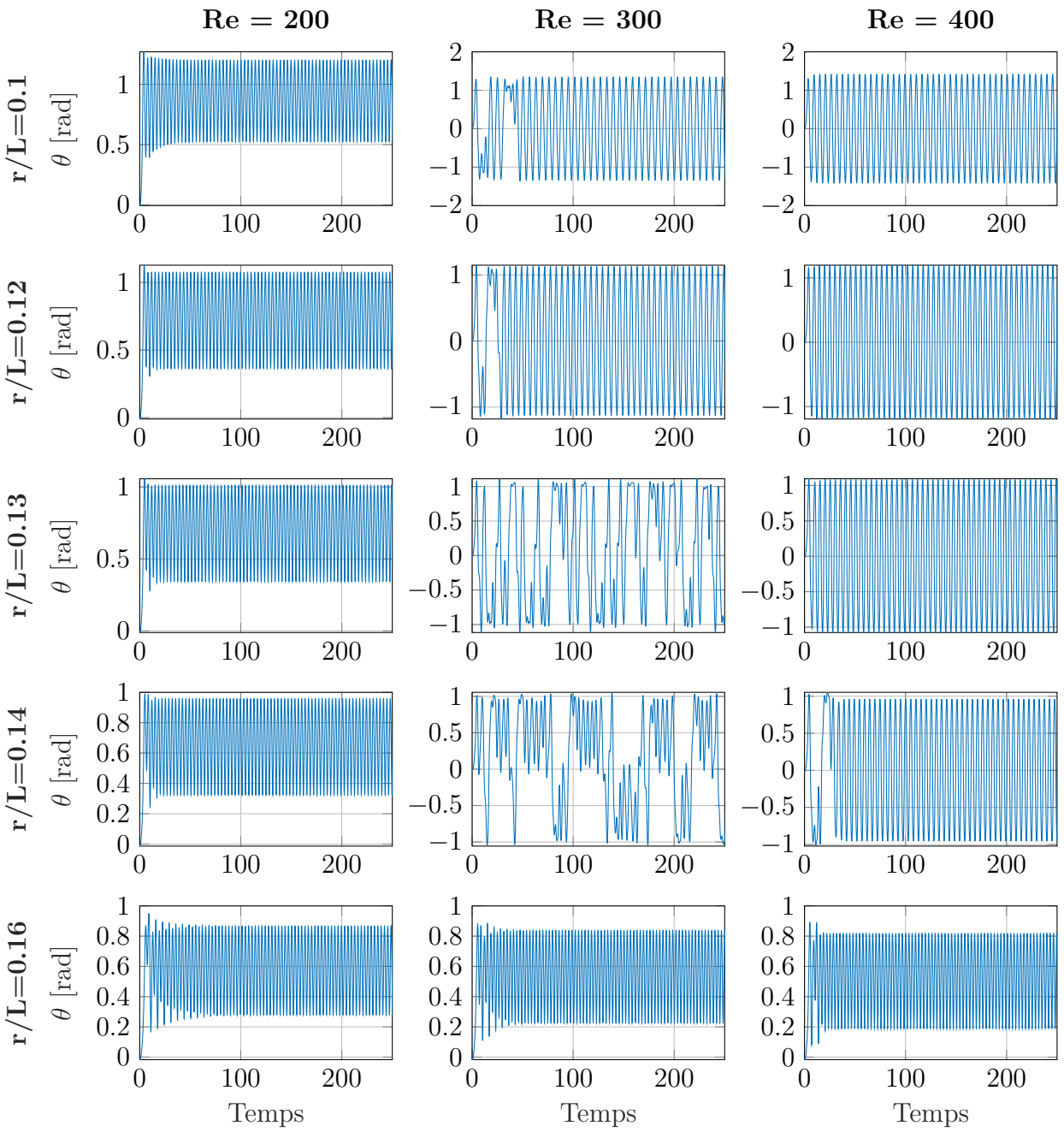


Figure 5.16 Angle de rotation θ en fonction du temps pour $Re = \{200, 300, 400\}$ et $r/L = \{0.1, 0.12, 0.13, 0.14, 0.16\}$

Finalement, pour passer d'un mouvement de stabilité asymétrique à un mouvement de stabilité symétrique en augmentant le nombre de Re, l'ellipse passe par un mouvement chaotique qui est caractérisé par une variation aléatoire d'ω en fonction de θ tel qu'on peut le constater à la Figure 5.16 pour $Re = 300$ et $r/L = \{0.13, 0.14\}$. On constate aussi à la Figure 5.19

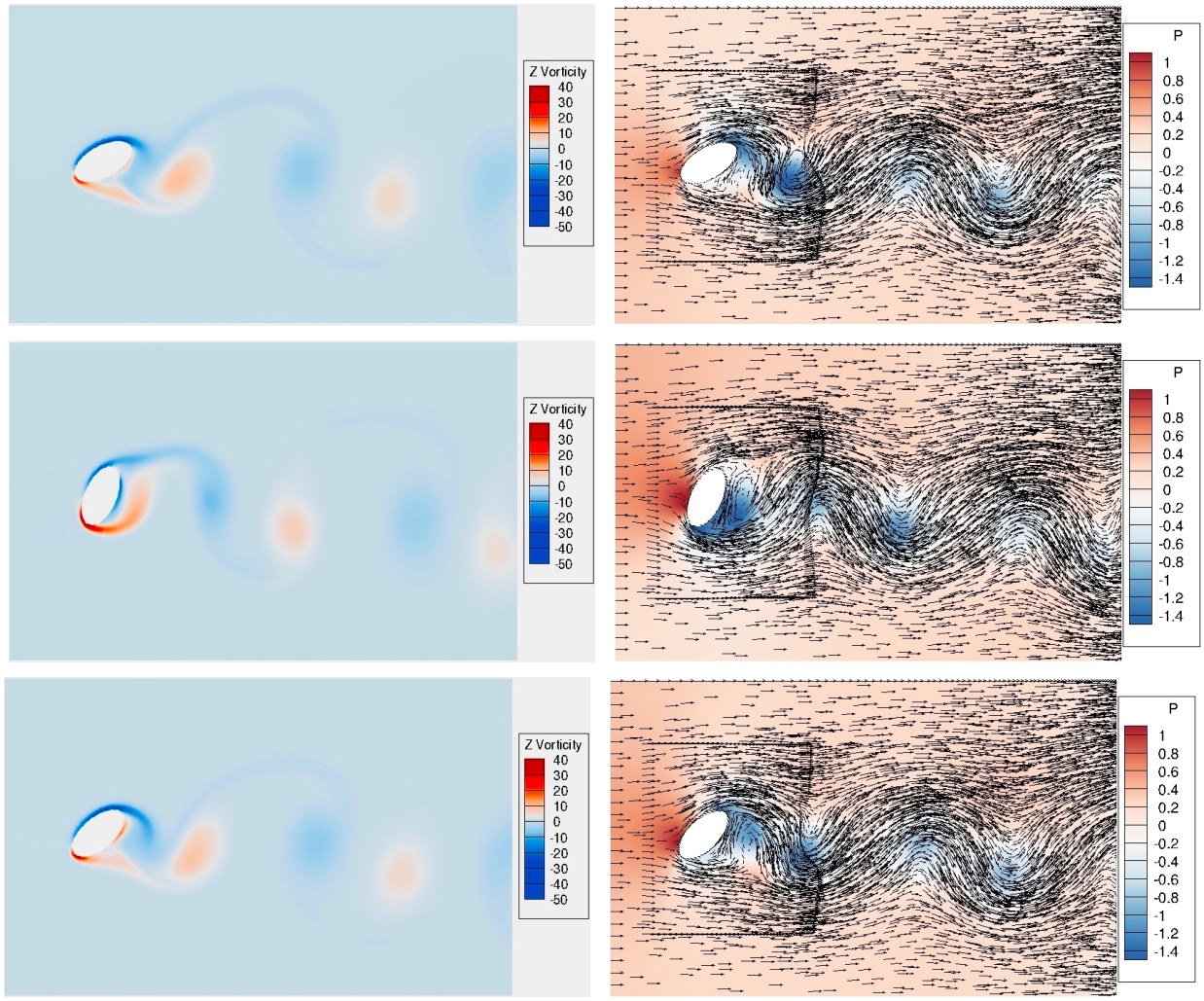


Figure 5.17 Champ de vorticité (gauche) et champ de pression et vecteurs du champ de vitesse (droite) pour un écoulement à $Re = 200$ avec $r/L = 0.1$ de type stabilité asymétrique à $\bar{t} = \{13.5, 15.5, 17.5\}$ (de haut en bas)

que pour un même angle θ, le sillage derrière l'ellipse varie beaucoup, ce qui implique que le moment appliqué sur l'ellipse est différent pour chacun de ces cas, ce qui mène inévitablement à des trajectoires totalement différentes. Il s'agit d'un comportement typiquement chaotique.

Certains mouvement hybrides peuvent aussi être observés, comme c'est le cas à $Re = 300$ pour $r/L = \{0.1, 0.12\}$ ainsi qu'à $Re = 400$ pour $r/L = 0.14$. La Figure 5.16 permet de voir assez clairement que ces mouvements sont principalement composés d'une phase de stabilité symétrique. On peut tout de même y observer quelques épisodes chaotiques.

De façon plus générale, on remarque que l'ellipse passe d'un mouvement de stabilité asymétrique à une phase chaotique pour ensuite atteindre un état de stabilité symétrique à mesure

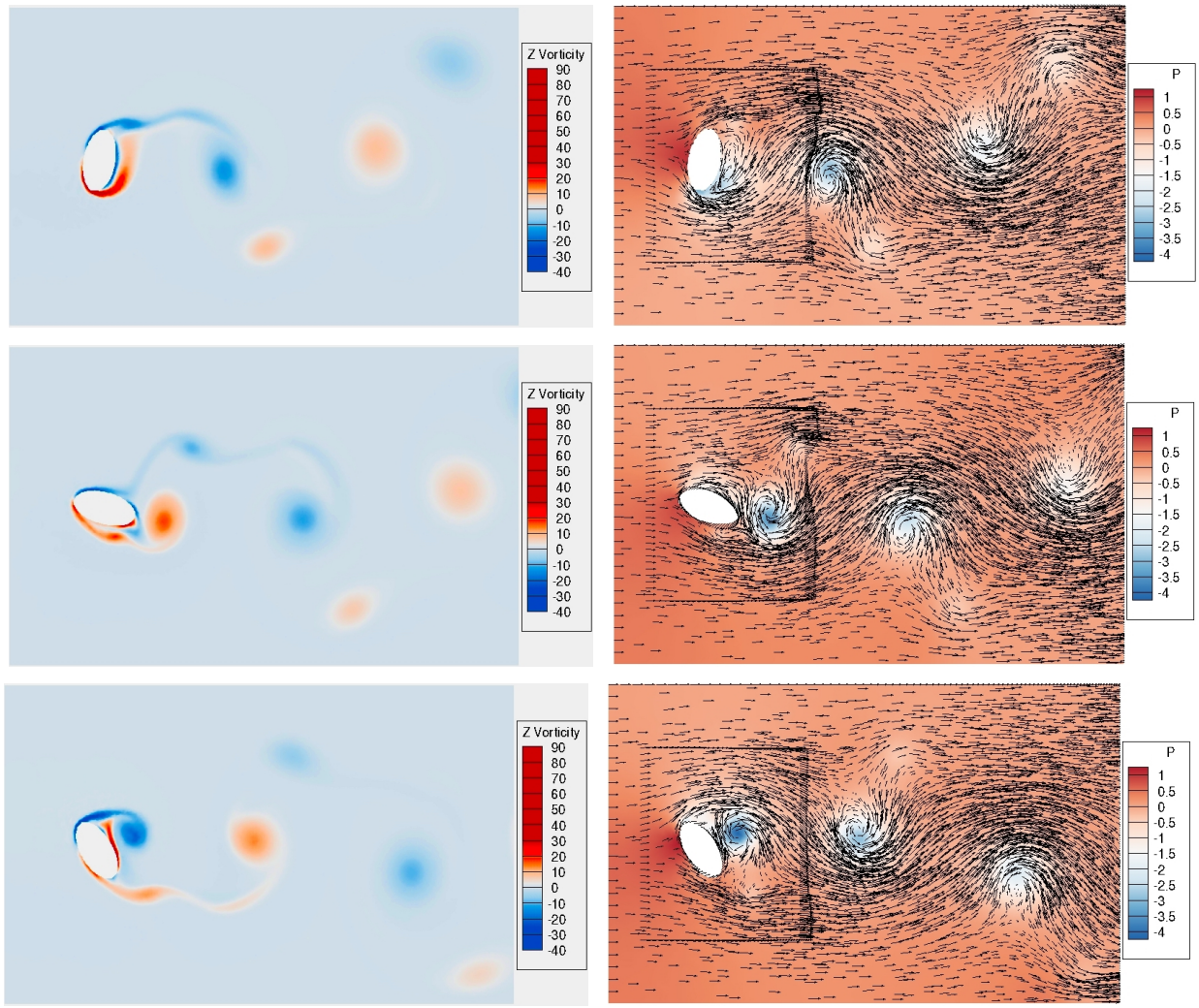


Figure 5.18 Champ de vorticité (gauche) et champ de pression et vecteurs du champ de vitesse (droite) pour un écoulement à $Re = 400$ avec $r/L = 0.1$ de type stabilité symétrique à $\bar{t} = \{9.5, 11, 13\}$ (de haut en bas)

que le Re augmente. On remarque aussi que plus le centre de rotation de l'ellipse s'éloigne de son centre géométrique, c'est-à-dire que le ratio r/L augmente, plus la transition de l'état de stabilité asymétrique vers l'état de stabilité symétrique est lente. En effet, l'amplitude du mouvement diminue avec l'augmentation du ratio r/L et il est de plus en plus nécessaire d'augmenter le Re pour atteindre la phase chaotique qui permet ensuite de passer à l'état de stabilité symétrique. Cela est cohérent avec les résultats de Weymouth [1] qui souligne que l'ellipse la plus instable, c'est-à-dire la configuration qui atteint la phase chaotique au plus bas Re, correspond à celle où le centre de rotation coïncide avec le centre géométrique alors qu'à l'inverse, l'ellipse la plus stable correspond à celle où le centre de rotation est situé au bord d'attaque de l'ellipse.

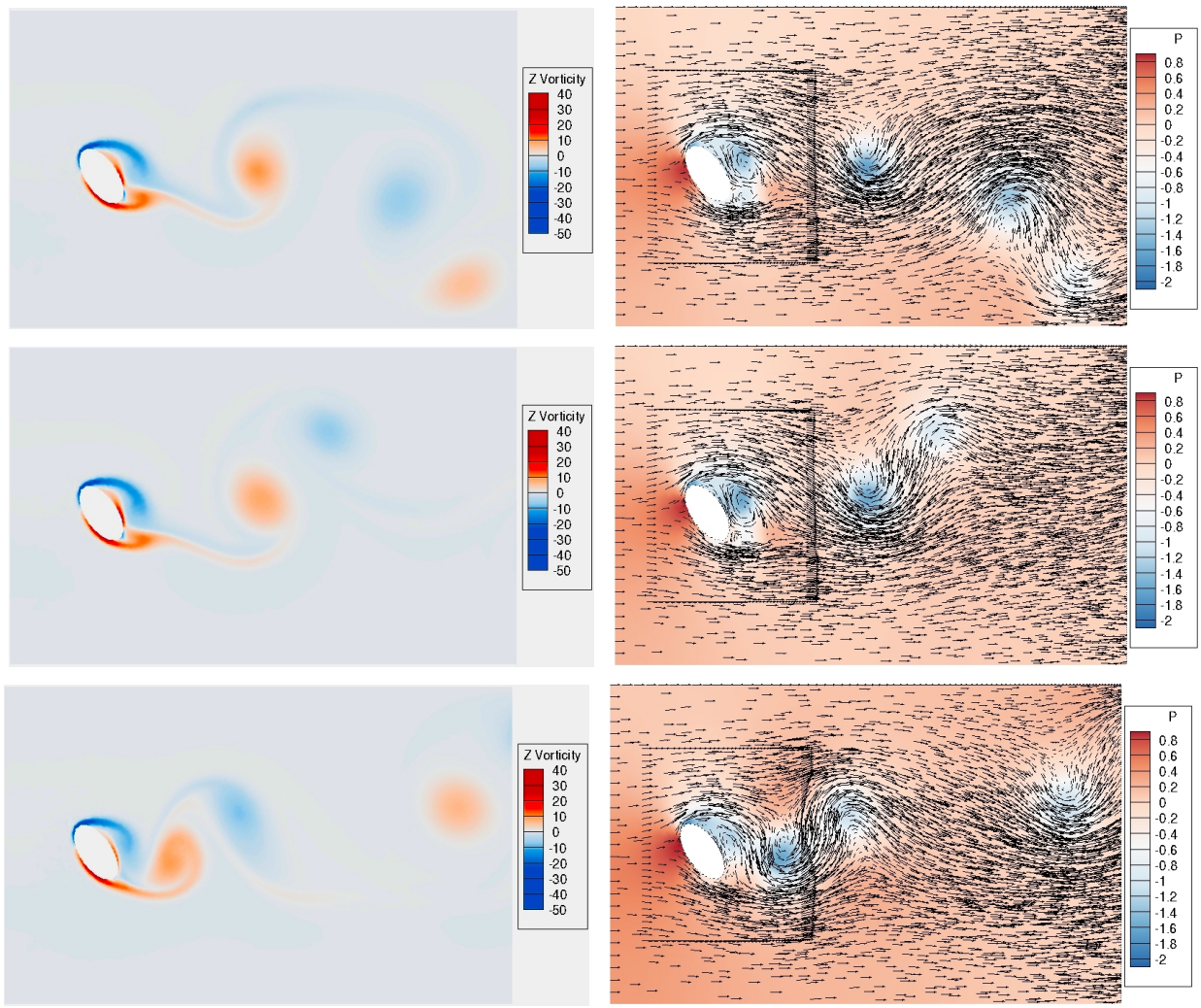


Figure 5.19 Champ de vorticité (gauche) et champ de pression et vecteurs du champ de vitesse (droite) pour un écoulement à $Re = 300$ avec $r/L = 0.13$ de type chaotique à $\bar{t} = \{15.5, 30.5, 72.5\}$ (de haut en bas)

Lorsque l'on compare minutieusement ces résultats avec ceux de Weymouth [1], on observe les mêmes types de mouvement, mais avec un certain décalage par rapport au Re. En effet, Weymouth obtient les mêmes résultats, mais à des nombres de Re légèrement inférieurs. Ainsi, dans le but de pousser davantage l'analyse des différents mouvements de l'ellipse pour un r/L constant, une série de tests à $r/L = 0.13$ a été réalisée pour un plus grand éventail de Re. Il est donc possible d'observer plus en détails la transition entre les différents types de mouvement aux Figures 5.20 et 5.21 où $Re = \{100, 125, 150, 175, ...400\}$.

On y voit assez clairement que le mouvement de stabilité asymétrique est présent de $Re = 100$ à $Re = 225$ alors qu'une transition s'entame à $Re = 250$ où on observe un début

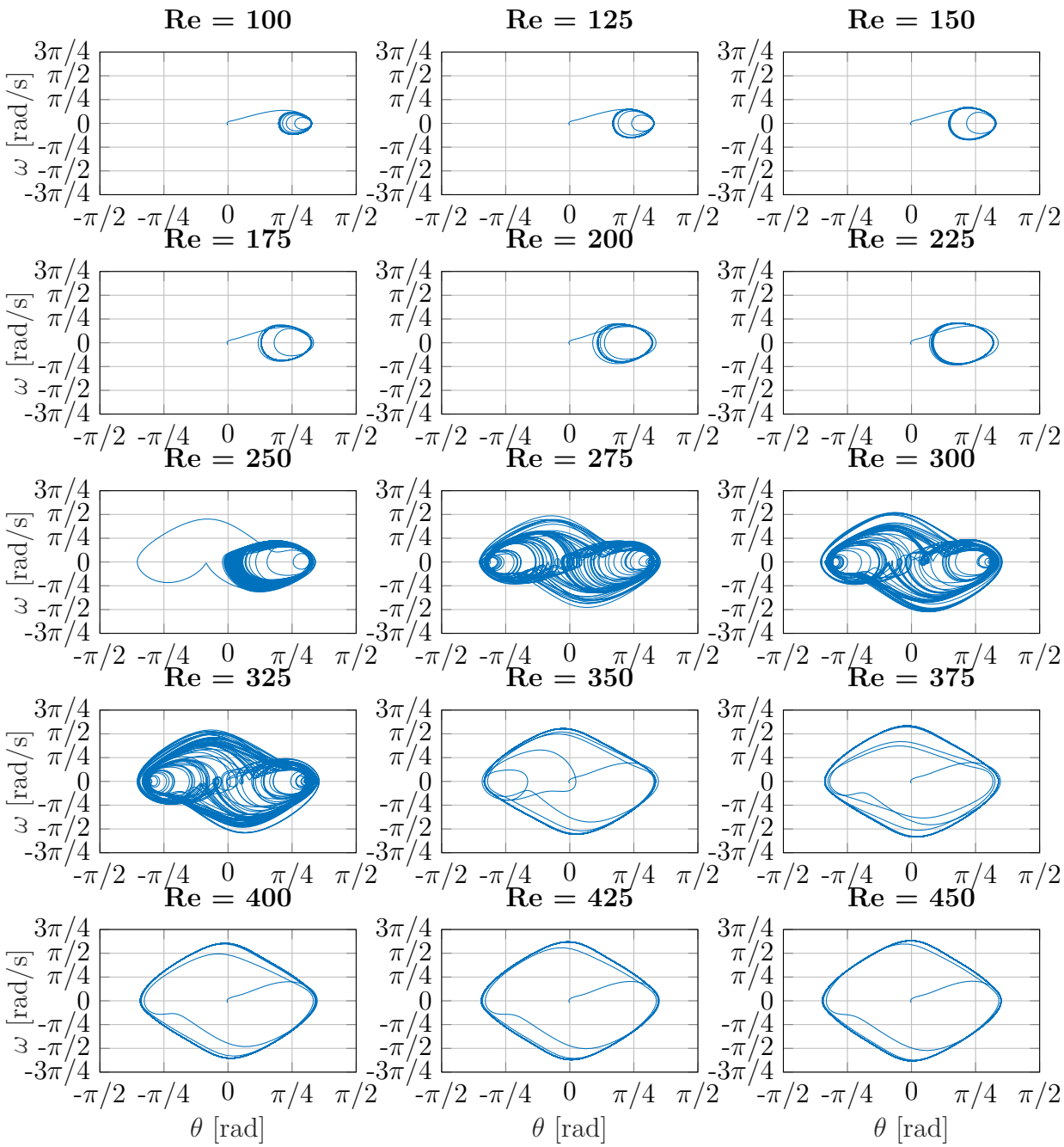


Figure 5.20 Vitesse de rotation ω en fonction de l'angle de rotation θ pour $Re = 100, 125, 150, 175, ...400$ et $r/L = 0.13$

de mouvement chaotique. Le mouvement de l'ellipse devient alors pleinement chaotique de $Re = 275$ à $Re = 325$ pour ensuite atteindre une seconde phase de transition à $Re = 350$ où on observe encore quelques traces du mouvement chaotique avant d'atteindre le mouvement

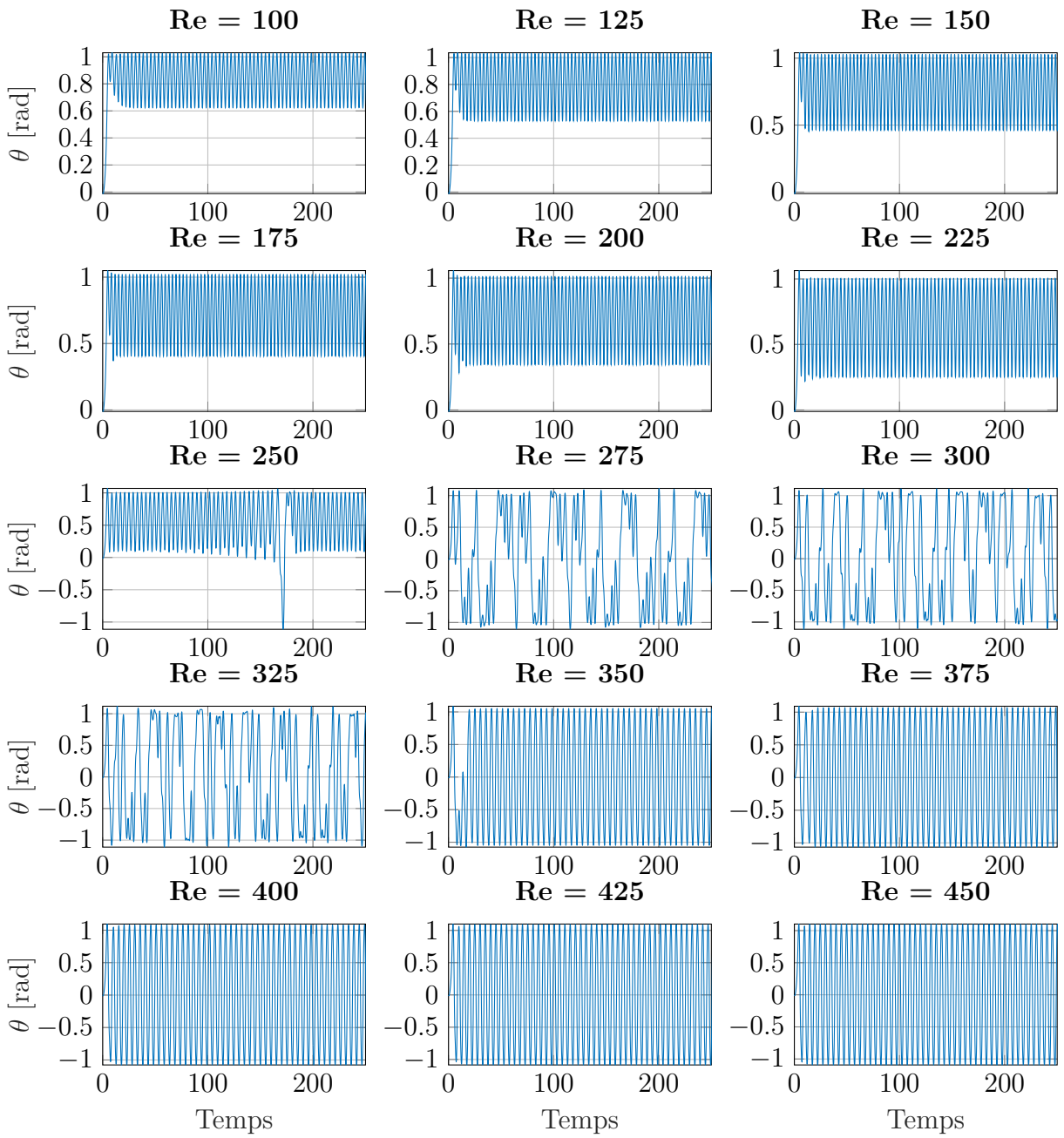


Figure 5.21 Angle de rotation θ en fonction du temps pour $Re = \{100, 125, 150, 175, ...400\}$ et $r/L = 0.13$

de stabilité symétrique à partir de $Re = 375$. Cette série de tests permet non seulement de s'assurer de la cohérence des simulations en raffinant le nombre de Re, mais aussi à cibler des combinaisons $Re - r/L$ dont le mouvement de l'ellipse diffère de celui obtenu par Weymouth pour ces mêmes combinaisons $Re - r/L$.

La légère discordance entre les résultats obtenus avec *EF8* et ceux de Weymouth mène à une nouvelle série de simulations qui vise à s'assurer que les solutions obtenues ne sont pas le fruit d'erreurs numériques. Ainsi, on utilise les solutions obtenus à $Re = 200$ et $Re = 400$, encore une fois avec $r/L = 0.13$, comme solutions initiales pour poursuivre ces simulations, mais avec un pas de temps adaptatif permettant ainsi de contrôler l'erreur. La méthodologie de cette série de simulations est d'ailleurs illustrée à la Figure 5.22.

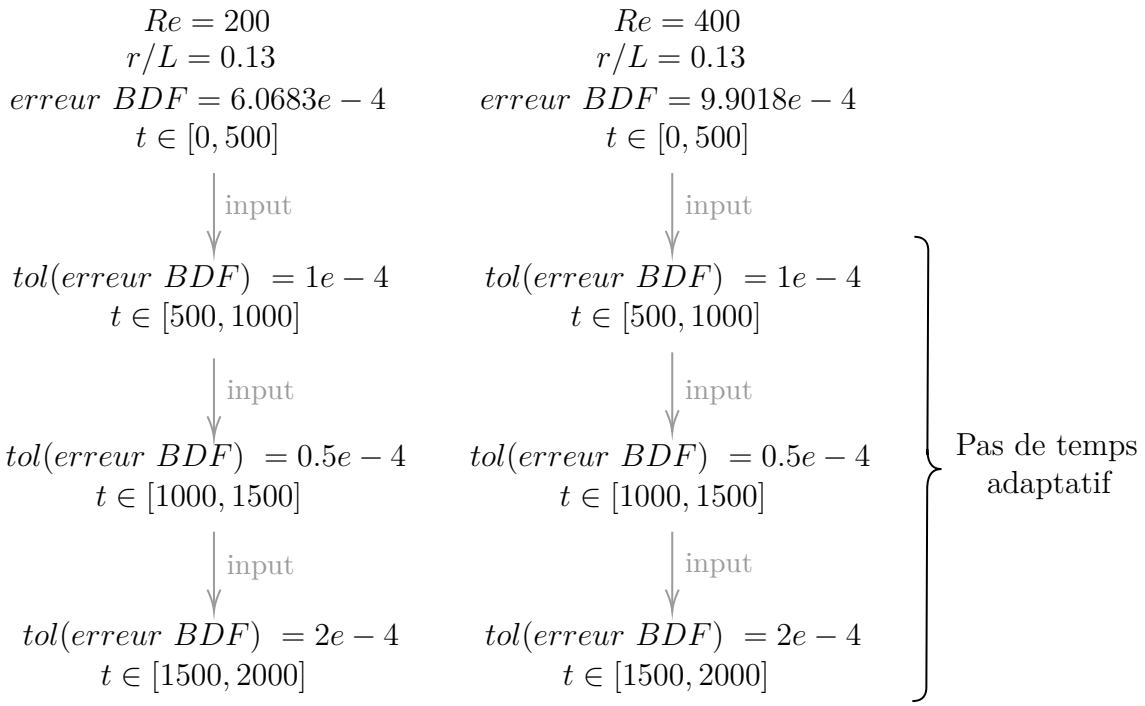


Figure 5.22 Schématisation de la méthodologie pour les simulations à pas de temps adaptatif

Ces simulations servent ainsi à s'assurer que les solutions obtenues ne sont pas dépendantes du pas de temps et que même en réduisant significativement l'erreur, le comportement de l'ellipse demeure le même. Les résultats obtenus, présentés à la Figure 5.23, prouvent justement que c'est bel et bien le cas. On y voit les solutions obtenues par *EF8* pour $Re = 200$ et $Re = 400$ pour un temps adimensionnel t qui va de 0 à 2000 mais pour lequel un pas de temps adaptatif est utilisé de $t = [500, 2000]$ en imposant différentes tolérances pour l'erreur de l'intégration en temps (BDF). On y voit que le comportement de l'ellipse demeure le même et ce, malgré l'utilisation d'un pas de temps adaptatif.

Avant l'application de la méthode de résolution monolithique développée et implémentée dans *EF8* au problème de l'ellipse de Weymouth, la sensibilité de la solution par rapport à tous les paramètres de simulation a été largement étudiée à la section 5.2.2. Parmi ces paramètres, différents maillages ont été testés et le comportement de l'ellipse n'était pas dépendant de

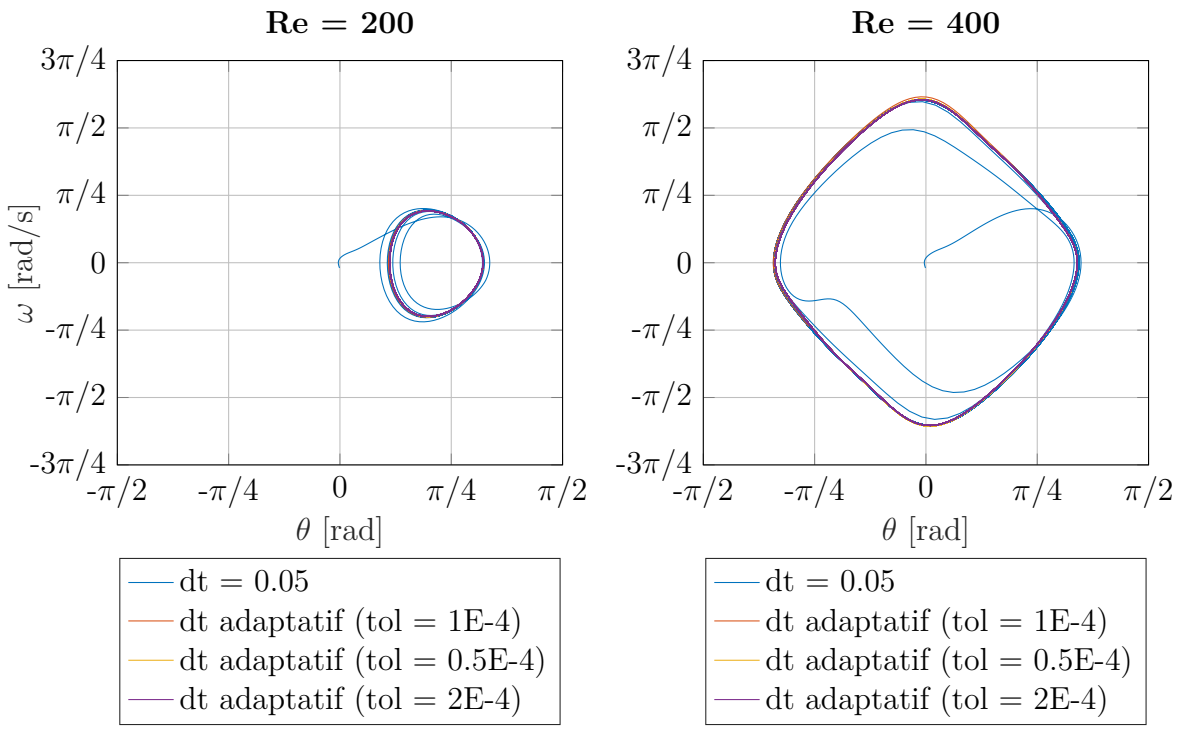


Figure 5.23 Vitesse de rotation ω en fonction de l'angle de rotation θ pour $Re = 200$ et $Re = 400$ avec $r/L = 0.13$ avec un pas de temps adaptatif en fonction de l'erreur

ceux-ci. L'erreur en espace ne peut donc pas expliquer la différence entre les présents résultats et ceux de Weymouth. Alors que ceux-ci pourraient provenir de l'erreur numérique en temps, cette hypothèse a été testée et infirmée à l'aide des simulations effectuées à pas de temps adaptatif. On en conclut donc que nos solutions semblent entièrement cohérentes et valides.

En ce qui concerne les résultats obtenus par Weymouth, certaines informations sont manquantes. Par exemple, ce dernier ne mentionne pas l'erreur qui lui permet de gérer son pas de temps adaptatif. Il utilise aussi une méthode de résolution différente, soit les équations couplées BDIM qu'il discrétise à l'aide de la méthode des volumes finis. Weymouth utilise aussi un maillage cartésien alors que les maillages utilisés ici sont non-structurés. En utilisant la méthode de Heun d'ordre 2, il est possible qu'une légère erreur d'intégration cause le décalage observé entre les transitions des différents types de mouvement. De plus, le fait que Weymouth doive utiliser une condition particulière en sortie pour s'assurer de respecter la loi de conservation globale de masse pousse à croire que des erreurs numériques se glissent dans ses simulations, ce qui peut aussi expliquer les différences observées. Finalement, Weymouth utilise la méthode de déplacement virtuel pour simuler la rotation de l'ellipse à l'intérieur du domaine. Celle-ci engendre inévitablement des erreurs, alors que la méthode développée

et implémentée ici, soit ITM, vise justement à réduire ces erreurs et à mieux représenter le comportement physique de l'ellipse.

Influence du coefficient d'amortissement

Alors que l'Équation (3.23) de la Section 3.6 avec $\zeta_0 = \kappa_0 = 0$ est utilisée pour étudier les différents types de mouvement de l'ellipse, on se penche maintenant sur cette même équation mais en y ajoutant le terme d'amortissement ζ_0. Le but est donc d'étudier le comportement de l'ellipse alors qu'on y ajoute un couple d'amortissement structurel linéaire. Le Re imposé est de 1000 et le ratio r/L est de 0.16. Cette combinaison de $Re - r/L$ est utilisée puisqu'elle est chaotique si aucun amortissement n'est appliqué. Le détail de l'application des différentes conditions limites sur le domaine est présenté à la Figure 5.24 où $\mathbf{u}_{in} = [((0.05y - 0.25) + \min(t/5, 1)(-0.05y + 0.25) + 1) \cdot \mathbf{e}_x]$ et où la condition limite de sortie $\mathbf{T}_{OpenBoundary}$ est détaillée à l'Annexe I. L'ajout de cette condition limite en sortie, qui vise à imiter la condition naturelle, est dû au nombre de Re important. Comme $Re = 1000$ est largement supérieur aux différents Re imposés à la section précédente, un problème classique survient en procédant à ces simulations dans le même domaine que précédemment, c'est-à-dire $5L_0 \times 8L_0$ où L_0 correspond au grand axe de l'ellipse. En effet, une grande quantité de vortex sont créés et la viscosité du fluide est trop basse pour arriver à amortir ceux-ci et ainsi dissiper et transporter correctement l'énergie cinétique dans le domaine. Cela fait en sorte que l'énergie cinétique grimpe sans cesse à l'intérieur du domaine jusqu'à ce que le niveau de pression atteigne des valeurs trop élevées et force donc l'arrêt de la simulation. La solution usuelle à ce problème est d'allonger le domaine de calcul pour permettre aux vortex de se dissiper avant de franchir la sortie du domaine. Toutefois, comme on veut ici conserver le même domaine que Weymouth, les dimensions du domaine ne peuvent être changées. On remédie donc à la situation en appliquant une condition de sortie qui régule l'énergie cinétique pour empêcher la montée en flèche de celle-ci.

Tel que détaillé à la Section 3.6, la version adimensionnelle de ζ correspond en fait à $\left(\frac{2\pi}{U_r}\right)\bar{I}_0$. Comme $\bar{I}_0$ dépend de la géométrie de l'ellipse ainsi que du ratio r/L qui est maintenu constant et que r_m est fixé à 1, le paramètre d'étude devient $U_r = \frac{1}{\bar{f}_n}$ qui est la vitesse réduite de l'ellipse. On se questionne donc à savoir quelle est la U_r maximale permettant d'éviter que l'ellipse entre dans sa phase de mouvement chaotique. On s'intéresse aussi au mouvement de l'ellipse pour différentes valeurs de U_r. Les résultats pour les valeurs de $U_r = \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 2.0, 3.0\}$ sont présentés à la Figure 5.23. On y observe trois comportements distincts.

L'amortissement a pour but de retarder la phase chaotique, c'est-à-dire que l'ellipse doit être

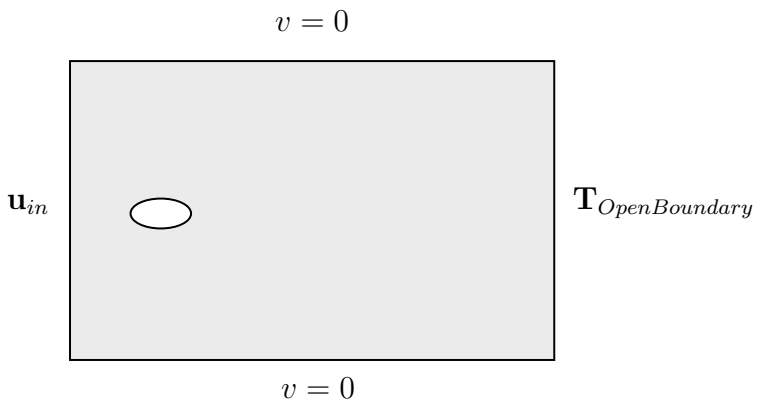


Figure 5.24 Schématisation des conditions u, v et $\mathbf{T}$ imposées aux frontières (Γ) du domaine fluide (Ω) pour l'étude de l'influence du coefficient d'amortissement

dans sa phase de stabilité asymétrique, soit la phase précédant la phase chaotique, pour qu'on considère que l'amortissement est efficace.

Dans un premier temps, on semble observer cet amortissement efficace à la Figures 5.25 pour $U_r = \{0.6, 0.8, 1.0, 2.0\}$ où l'ellipse oscille autour d'une valeur positive de θ. Pour $U_r = 0.2$ et $U_r = 0.4$, l'ellipse est sur-amortie. En effet, on observe que l'ellipse oscille dans le sens inverse de son mouvement naturel, c'est-à-dire le mouvement de l'ellipse sans amortissement lorsque son comportement est du type stabilité asymétrique. En absence d'amortissement, l'écoulement cisaillé entrant où la vitesse est supérieure à la paroi du haut fait en sorte que le bord d'attaque de l'ellipse a tendance à pointer vers le bas et l'ellipse se met alors à osciller dans les valeurs positives de θ. Toutefois, ce qu'on observe pour $U_r = 0.2$ et $U_r = 0.4$, correspond plutôt à une trop grande réponse de l'ellipse qui, étant sur-amortie, tente de contrer l'écoulement qu'elle perçoit à son bord d'attaque en s'orientant parallèlement aux forces qu'elle subit. Le bord d'attaque de l'ellipse va alors vers le haut et elle se met à osciller, à très faible amplitude, dans les θ négatifs. Finalement, on voit clairement qu'à $U_r = 3.0$ et $U_r = 4.0$, l'amortissement n'est pas suffisant et le mouvement de l'ellipse demeure chaotique. Il faut donc être prudent avec l'amortissement imposé à l'ellipse puisque les valeurs de U_r ont une borne inférieure et supérieure si on désire un amortissement qui retarde la phase chaotique de l'ellipse sans que celle-ci soit sur-amortie.

Dans un second temps, on se penche sur l'évolution de l'angle de rotation θ de l'ellipse en fonction du temps présentée à la Figure 5.26. On constate encore une fois un comportement sur-amorti pour $U_r = \{0.2, 0.4\}$ où les valeurs de θ balayées sont toutes négatives. Toutefois, contrairement à ce qu'on pouvait constater à la Figure 5.25, l'intervalle de U_r où l'ellipse est dans une phase de stabilité asymétrique semble plutôt se limiter à $U_r = [0.6, 1.0]$. En

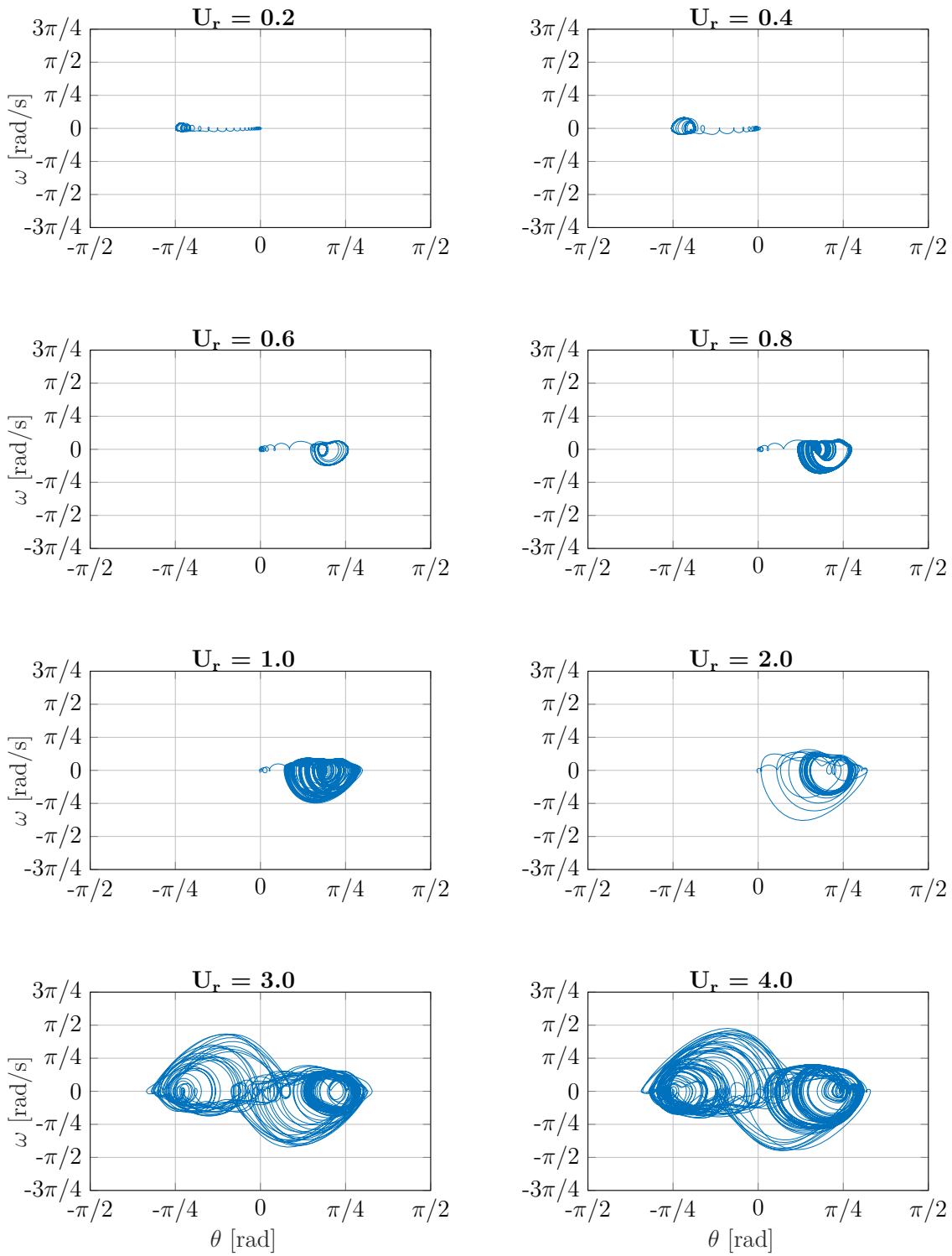


Figure 5.25 Vitesse de rotation ω en fonction de l'angle de rotation θ pour $Re = 1000$ et $r/L = 0.16$ pour $U_r = \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 2.0, 3.0\}$

effet, on voit clairement un épisode chaotique au début de la simulation à $U_r = 2.0$, ce qu'on n'arrivait pas à voir en observant uniquement la Figure 5.25. On peut aussi noter que l'évolution de θ en fonction du temps pour $U_r = [0.6, 1.0]$, soit lorsque l'ellipse est dans la phase de stabilité asymétrique, est moins régulière que pour cette même phase observée lors des tests sans amortissement. Il est normal qu'en ajoutant le paramètre d'amortissement on ne retrouve pas exactement le même comportement que lorsque celui-ci est ignoré. L'ellipse conserve tout de même le comportement recherché, soit un comportement stable, à faible amplitude et où aucun épisode chaotique n'est observé. En ce qui concerne $U_r = 3.0$ et $U_r = 4.0$, la Figure 5.26 mène aux mêmes conclusions que précédemment, soit que l'ellipse a un comportement chaotique et que l'amortissement n'est donc pas suffisant. Dans le cas présent et pour les valeurs testées, on observe donc que l'intervalle efficace de U_r est environ $[0.6, 1.0]$.

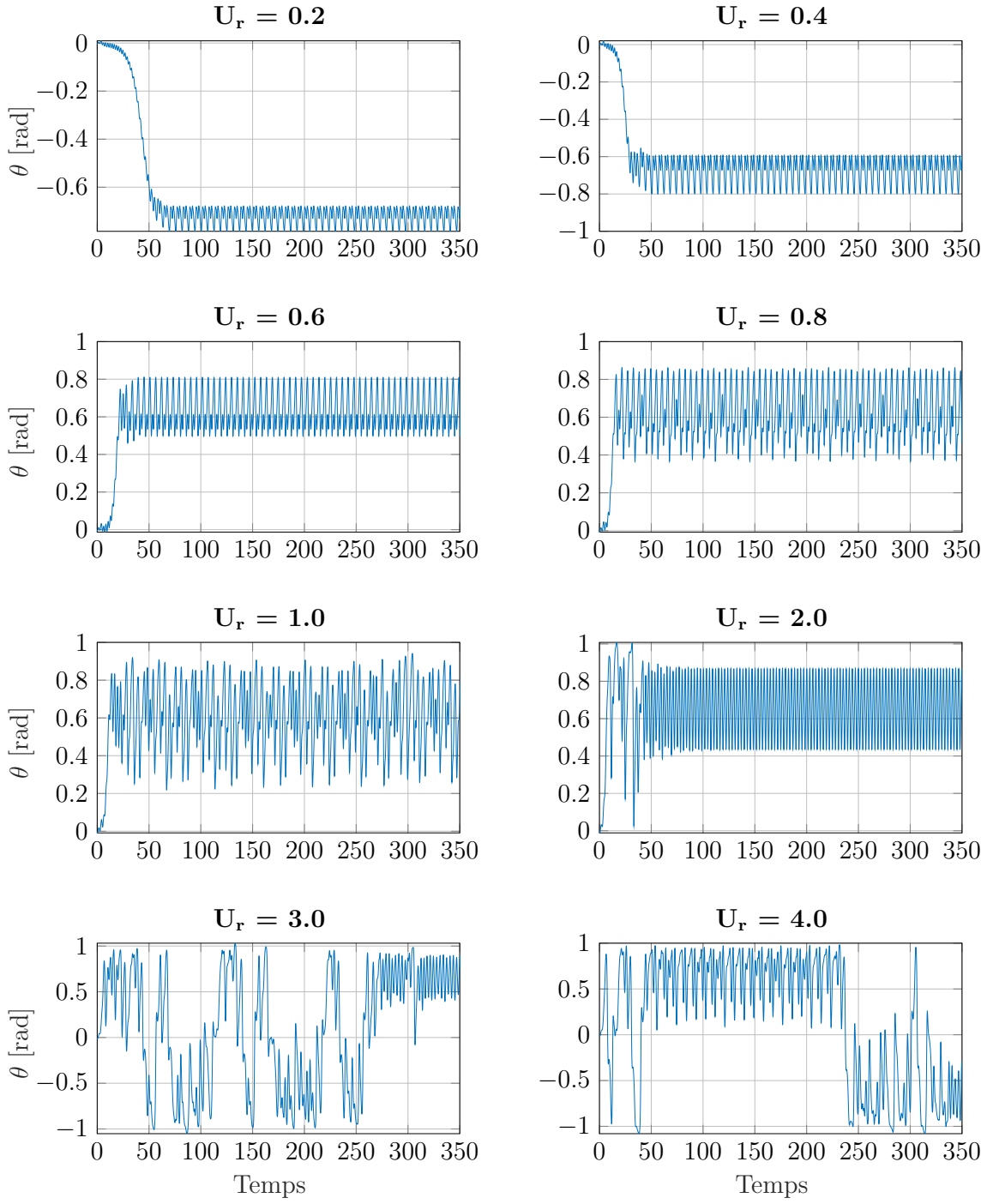


Figure 5.26 Angle de rotation θ en fonction du temps pour $U_r = \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 2.0, 3.0\}$ et $r/L = 0.13$

CHAPITRE 6 CONCLUSION

L'implémentation d'une méthode de résolution entièrement monolithique développée pour résoudre des problèmes d'IFS a été complétée. Outre le fort couplage existant entre les équations, qui permet d'éviter les complications souvent amenées par l'effet de masse ajoutée, c'est définitivement la méthode de mouvement des noeuds, qui fait entièrement partie du système d'équations à résoudre et qui permet d'éviter le remaillage, qui caractérise l'unicité de cette méthode.
Ce mémoire ne fait toutefois état que des premiers pas du développement de cette méthode.

6.1 Synthèse des travaux

L'essence du travail de ce mémoire repose sur la mise en oeuvre de la méthode des vitesses basées sur différentes méthodes d'interpolation.

Dans un premier temps, les différentes méthodes d'interpolation ont été indépendamment étudiées. En se concentrant particulièrement sur ITM et ITB, une approche partitionnée a d'abord été testée, soit l'approche ALE/FTI. Des résultats très encourageants ont été obtenus et ont permis de comparer ces méthodes à d'autres plus établies et d'ainsi identifier les forces et les faiblesses de chacune.

Suite à cette étude approfondie des méthodes d'interpolation, il a été question de mettre en oeuvre la méthode des vitesses avec les équations de Navier-Stokes dans le but de résoudre des problèmes d'IFS. L'approche FTD, la plus intuitive, a alors été testée. Alors que cette approche se prête très bien au couplage monolithique, un problème d'hystérésis a été identifié et a ainsi forcer le développement d'une autre approche, l'approche FFI. Cette dernière a, à son tour, poussé au développement d'une alternative originale permettant de modéliser la rotation d'un objet par l'intermédiaire d'une transformation générale plutôt que de procéder à une rotation rigide de celui-ci. Plusieurs tests ont alors été effectués et ont permis de tirer des conclusions très encourageantes sur la précision des résultats ainsi que sur la possibilité de déplacer les noeuds du maillage tout en conserver la qualité géométrique de celui-ci.

Plusieurs tests de vérification et de validation ont ensuite été effectués pour s'assurer que les équations ont toutes été implémentées correctement et que celles-ci représentent bel et bien les comportements désirés. On a ainsi pu conclure que la nouvelle méthode monolithique conserve les taux de convergence théoriques et permet aussi le contrôle de la précision en temps et en espace. Une série de comparaisons avec des résultats numériques et expérimentaux ont aussi

permis de valider cette nouvelle approche.

Finalement, la nouvelle méthode de résolution monolithique avec le modèle ALE/FFI a été appliquée à un problème d'IFS où une ellipse à un degré de liberté se met en mouvement rotationnel dans un écoulement fluide. Alors qu'une première série de tests permet de préciser une partie des résultats de Weymouth [1], une seconde série permet surtout d'approfondir la compréhension de l'influence de l'amortissement sur le système dynamique. On arrive ainsi à mieux qualifier l'impact d'un coefficient d'amortissement non nul sur le comportement naturellement chaotique de l'ellipse.

6.2 Limitations de la solution proposée

Dans le cas présent, il est important de mentionner que l'approche FFI-$\mathcal{IE}_1$, telle qu'implémentée actuellement, ne peut que résoudre un problème d'IFS où un seul objet solide se déplace dans un espace infini. De plus, la généralisation de la transformation générale utilisée pour déplacer les noeuds situés à la frontière de l'objet solide ne peut qu'être appliquée à des géométries étoilées. Il s'agit ainsi des deux principales limites des travaux présentés dans ce mémoire.

Aussi, les cas étudiés ont tous un ratio de masse r_m de 1 puisque la majorité des applications testées ne comportent ni raideur, ni friction. C'est d'ailleurs dans cet ordre d'idée que les équations adimensionnelles ont été développées. Ainsi, pour des cas où la raideur et la friction sont importantes et où r_m est faible, une révision de l'adimensionnalisation serait nécessaire puisque présentement, si r_m temps vers 0, tous les termes de l'équation de la dynamique du solide tendent aussi vers 0.

Tel que mentionné, l'approche FFI-$\mathcal{IE}_1$ donne des résultats tout à fait satisfaisants pour les applications testées. Toutefois, la méthode d'intégration d'Euler en une étape ($\mathcal{IE}_1$) est évidemment moins précise que plusieurs autres méthodes d'intégration comme la méthode du point milieu ou RK4. Si de telles méthodes devaient être testées, une révision de la mise en oeuvre serait nécessaire puisque la formulation mathématique actuelle n'est pas adéquate.

La grande majorité des tests ont été effectués à pas de temps fixe puisque le but était principalement de comprendre l'influence de chaque paramètre et d'ainsi arriver à qualifier correctement le comportement de la méthode monolithique implémentée. Si on voulait procéder aux mêmes tests, mais avec un pas de temps adaptatif, une méthode de contrôle de l'erreur en espace qui arriverait à repositionner les noeuds de façon dynamique devrait aussi être implémentée. En effet, tel que prouvé, il est important de raffiner en temps et en espace de façon cohérente si on désire conserver la précision des calculs.

6.3 Améliorations futures

Dans le même ordre d'idées des limitations mentionnées, il serait important de réfléchir à la nécessité ou non d'une implémentation entièrement monolithique, soit d'inclure le calcul du déplacement des noeuds du maillage au système d'équations ou non. L'approche monolithique est évidemment la plus sécuritaire, mais est aussi très dispendieuse en terme de temps de calcul. Il serait donc intéressant de quantifier le gain que celle-ci représente par rapport aux méthodes plus traditionnelles. En effet, en considérant la position des noeuds comme des inconnues au même titre que les champs de DDL, on rempli une grande partie des matrices. Même si celles-ci demeurent creuses, cela a définitivement un impact non négligeable sur l'efficacité du calcul.

De plus, une grande partie du travail effectué correspond au développement des méthodes transfinies de déplacement des noeuds. Dans le but d'améliorer la flexibilité de celles-ci et de les rendre plus compétitives, il serait très pertinent que la représentation géométrique des solides étudiés soit indépendante de la discrétisation par éléments finis. En effet, alors que ces méthodes transfinies ont permis de passer d'un nuage de points à un maillage d'éléments finis, la prochaine étape vise à passer à une représentation via une courbe continue et exacte. Présentement, la position de chaque noeud du maillage est contrôlée par la position de chaque noeud de la frontière de l'objet solide alors qu'une représentation à l'aide d'une courbe continue permettrait de relier chaque noeud du maillage à un maximum de 3 DDL (en 2D). Le calcul deviendrait ainsi beaucoup moins lourd et les structures de données seraient grandement simplifiées.

Comme beaucoup d'efforts ont été mis sur les méthodes d'interpolation ainsi que sur le détail de l'implémentation implicite de la méthode monolithique, la parallélisation de plusieurs parties du code a été négligée, comme la construction des matrices. Un effort en ce sens permettrait certainement d'améliorer l'efficacité du calcul.

Il serait aussi très intéressant d'introduire le calcul de la métrique de la qualité du maillage à l'algorithme de déplacement des noeuds pour ainsi potentiellement permettre un contrôle actif de l'erreur en fonction de celle-ci. On pourrait aussi introduire des éléments de Taylor-Hood d'ordres supérieurs tels que $P_3P_2P_3$ alors que seuls les éléments $P_2P_1P_2$ ont été testés jusqu'à présent.

RÉFÉRENCES

[1] G. D. Weymouth, “Chaotic rotation of a towed elliptical cylinder,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 743, p. 385–398, mars 2014.

[2] A. De Boer, M. Van der Schoot et H. Bijl, “Mesh deformation based on radial basis function interpolation,” *Computers & Structures*, vol. 85, n°. 11, p. 784–795, 2007, fourth MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics.

[3] H. Wendland, “Konstruktion und Untersuchung radialer Basisfunktionen mit kompaktem Träger,” Thèse de doctorat, Dissertation der Georg-August-Universität zu Göttingen, Georg-August-Universität Göttingen, Wilhelmsplatz 1 (Aula), 37073 Göttingen, juin 1996.

[4] S. Idelsohn, F. Del Pin et R. Rossi, “Avoiding Instabilities Caused by Added Mass Effects in Fluid-Structure Interaction Problems,” dans *Arbitrary Lagrangian-Eulerian and Fluid-Structure Interaction*, M. Souli et D. J. Benson, édit. Hoboken, NJ USA : John Wiley & Sons, Inc., mars 2013, p. 165–220.

[5] W. Dettmer et D. Perić, “A computational framework for fluid-rigid body interaction : Finite element formulation and applications,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, n°. 13, p. 1633–1666, 2006, a Tribute to Thomas J.R. Hughes on the Occasion of his 60th Birthday.

[6] A. Hay, K. Yu, S. Étienne, A. Garon et D. Pelletier, “High-order temporal accuracy for 3D finite-element ALE flow simulations,” *Computers & Fluids*, vol. 100, p. 204–217, 2014.

[7] D. Couture-Peck, F. Bérard et A. Garon, “Transfinite Mesh Updating Method in Monolithic Fluid-Structure Simulations for Deformation Movement,” dans *Modern Finite Element Technologies - Mathematical and Mechanical Aspects*, Bad Honnef, Germany, juill. 2019.

[8] C. Samaniego, G. Houzeaux, E. Samaniego et M. Vázquez, “Parallel embedded boundary methods for fluid and rigid-body interaction,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 290, p. 387–419, 2015.

[9] A. Lozovskiy, M. A. Olshanskii, V. Salamatova et Y. V. Vassilevski, “An unconditionally stable semi-implicit FSI finite element method,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 297, p. 437–454, 2015.

[10] B. Schott, C. Ager et W. Wall, “A monolithic approach to fluid-structure interaction based on a hybrid Eulerian-ALE fluid domain decomposition involving cut elements,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, mars 2019.

[11] A. M. Winslow, “Numerical solution of the quasilinear poisson equation in a nonuniform triangle mesh,” *Journal of Computational Physics*, vol. 1, n°. 2, p. 149–172, 1966.

[12] J. F. Thompson, Z. U. Warsi et C. W. Mastin, “Boundary-fitted coordinate systems for numerical solution of partial differential equations - A review,” *Journal of Computational Physics*, vol. 47, n°. 1, p. 1–108, 1982.

[13] D. R. Lynch et K. O’Neil, “Finite elements in water resources : Proceedings of the Third International Conference on Finite Elements in Water Resources,” p. 7.111–7.120, 1980, conference held at the University of Mississippi in May, 1980.

[14] D. R. Lynch, “Unified approach to simulation on deforming elements with application to phase change problems,” *Journal of Computational Physics*, vol. 47, n°. 3, p. 387–411, 1982.

[15] P. Sackinger, P. Schunk et R. Rao, “A Newton-Raphson Pseudo-Solid Domain Mapping Technique for Free and Moving Boundary Problems : A Finite Element Implementation,” *Journal of Computational Physics*, vol. 125, n°. 1, p. 83–103, 1996.

[16] Z. Xu et M. Accorsi, “Finite element mesh update methods for fluid-structure interaction simulations,” *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 40, n°. 9, p. 1259–1269, 2004.

[17] W. Huang, Y. Ren et R. Russell, “Moving Mesh Partial Differential Equations (MMPDES) Based on the Equidistribution Principle,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 31, n°. 3, p. 709–730, 1994.

[18] W. Huang, Y. Ren et R. D. Russell, “Moving Mesh Methods Based on Moving Mesh Partial Differential Equations,” *Journal of Computational Physics*, vol. 113, n°. 2, p. 279–290, 1994.

[19] W. Huang et R. D. Russell, “A moving collocation method for solving time dependent partial differential equations,” *Applied Numerical Mathematics*, vol. 20, n°. 1, p. 101–116, 1996, method of Lines for Time-Dependent Problems.

[20] W. Huang et R. Russell, “Analysis of Moving Mesh Partial Differential Equations with Spatial Smoothing,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 34, n°. 3, p. 1106–1126, 1997.

[21] W. Huang et R. D. Russell, “A high dimensional moving mesh strategy,” *Applied Numerical Mathematics*, vol. 26, n°. 1, p. 63–76, 1998.

[22] W. Cao, W. Huang et R. D. Russell, “An r-Adaptive Finite Element Method Based upon Moving Mesh PDEs,” *Journal of Computational Physics*, vol. 149, n°. 2, p. 221–244, 1999.

[23] D. Shepard, “A Two-dimensional Interpolation Function for Irregularly-spaced Data,” dans *Proceedings of the 1968 23rd ACM National Conference*, ser. ACM ’68. ACM, 1968, p. 517–524.

[24] J. Witteveen et H. Bijl, “Explicit Mesh Deformation Using Inverse Distance Weighting Interpolation,” dans *19th AIAA Computational Fluid Dynamics*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2018/12/15 2009.

[25] N. Barral, E. Luke et F. Alauzet, “Two Mesh Deformation Methods Coupled with a Changing-connectivity Moving Mesh Method for CFD Applications,” *Procedia Engineering*, vol. 82, p. 213–227, 2014, 23rd International Meshing Roundtable (IMR23).

[26] J. Landry, A. Soulaïmani, E. Luke et A. B. H. Ali, “Robust moving mesh algorithms for hybrid stretched meshes : Application to moving boundaries problems,” *Journal of Computational Physics*, vol. 326, p. 691–721, 2016.

[27] C. Farhat, C. Degrand, B. Koobus et M. Lesoinne, “Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, n°. 163, p. 231–245, 1998.

[28] T. Rendall et C. Allen, “Efficient mesh motion using radial basis functions with data reduction algorithms,” *Journal of Computational Physics*, vol. 228, n°. 17, p. 6231–6249, 2009.

[29] ——, “Reduced surface point selection options for efficient mesh deformation using radial basis functions,” *Journal of Computational Physics*, vol. 229, n°. 8, p. 2810–2820, 2010.

[30] P. Coulier et E. Darve, “Efficient mesh deformation based on radial basis function interpolation by means of the inverse fast multipole method,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 308, p. 286–309, 2016.

[31] M. S. Floater et C. Gotsman, “How to morph tilings injectively,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 101, n°. 1, p. 117–129, 1999.

[32] M. S. Floater, “Mean value coordinates,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 20, n°. 1, p. 19–27, 2003.

[33] ——, “Wachspress and Mean Value Coordinates,” dans *Approximation Theory XIV : San Antonio 2013*, G. E. Fasshauer et L. L. Schumaker, édit. Cham : Springer International Publishing, 2014, vol. 83, p. 81–102.

[34] C. Dyken et M. S. Floater, “Transfinite mean value interpolation,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 26, n°. 1, p. 117–134, 2009.

[35] S. Bruvoll et M. S. Floater, “Transfinite mean value interpolation in general dimension,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 233, n°. 7, p. 1631–1639, 2010, international Conference on Multivariate Approximation and Interpolation with Applications (MAIA 2007).

[36] T. Ju, S. Schaefer et J. Warren, “Mean Value Coordinates for Closed Triangular Meshes,” *ACM Trans. Graph.*, vol. 24, n°. 3, p. 561–566, juill. 2005.

[37] W. Ritz, “Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik,” *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, vol. 135, p. 1–61, 1909.

[38] M. C. Delfour et A. Garon, “Transfinite interpolations for free and moving boundary problems,” *Journal of Pure and Applied Functional Analysis*, vol. 04, n°. 04, p. 765–801, 2019.

[39] ——, “On the Transfinite Mean Value Interpolation of Dyken and Floater,” *Journal of Pure and Applied Functional Analysis*, vol. 05, n°. 00, p. 1–11, 2020 (accepted 2019).

[40] A. Garon et M. C. Delfour, “Mesh adaptation based on transfinite mean value interpolation,” *Journal of Computational Physics*, p. 109248, janv. 2020.

[41] W. L. Oberkampf et T. G. Trucano, “Verification and validation in computational fluid dynamics,” *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 38, n°. 3, p. 209–272, avr. 2002.

[42] American Institute of Aeronautics and Astronautics, édit., *Guide for the Verification and Validation of Computational Fluid Dynamics Simulations*. Reston, VA : American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998.

[43] F. Toja-Silva, J. Favier et A. Pinelli, “Radial basis function (RBF)-based interpolation and spreading for the immersed boundary method,” *Computers & Fluids*, vol. 105, p. 66–75, déc. 2014.

[44] A. Pinelli, I. Naqavi, U. Piomelli et J. Favier, “Immersed-boundary methods for general finite-difference and finite-volume Navier–Stokes solvers,” *Journal of Computational Physics*, vol. 229, n°. 24, p. 9073–9091, déc. 2010.

[45] M. Coutanceau et R. Bouard, “Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. Part 1. Steady flow,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 79, n°. 2, p. 231–256, févr. 1977.

[46] D. J. Tritton, “Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 6, n°. 4, p. 547–567, nov. 1959.

[47] P. Mendes et F. Branco, “Analysis of fluid-structure interaction by an arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element formulation,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 30, n°. 7, p. 897–919, août 1999.

[48] A. Roshko, “Experiments on the flow past a circular cylinder at very high Reynolds number,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 10, n°. 3, p. 345–356, 1961.

[49] Y. Lecointe et J. Piquet, “On the use of several compact methods for the study of unsteady incompressible viscous flow round a circular cylinder,” *Computers & Fluids*, vol. 12, n°. 4, p. 255–280, janv. 1984.

[50] M. Braza, P. Chassaing et H. H. Minh, “Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 165, n°. -1, p. 79, avr. 1986.

[51] Y. Lecointe et J. Piquet, “Flow Structure in the Wake of an Oscillating Cylinder,” *Journal of Fluids Engineering*, vol. 111, n°. 2, p. 139, 1989.

[52] R. Franke, W. Rodi et B. Schönung, “Numerical calculation of laminar vortex-shedding flow past cylinders,” *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 35, p. 237–257, janv. 1990.

[53] J. Zhang et C. Dalton, “Interaction of a Steady Approach Flow and a Circular Cylinder Undergoing Forced Oscillation,” *Journal of Fluids Engineering*, vol. 119, n°. 4, p. 808, 1997.

[54] C.-H. Bruneau et M. Saad, “The 2D lid-driven cavity problem revisited,” *Computers & Fluids*, vol. 35, n°. 3, p. 326–348, mars 2006.

[55] U. Ghia, K. Ghia et C. Shin, “High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method,” *Journal of Computational Physics*, vol. 48, n°. 3, p. 387–411, déc. 1982.

[56] O. Botella et R. Peyret, “Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow,” *Computers & Fluids*, vol. 27, n°. 4, p. 421–433, mai 1998.

[57] P. M. Knupp, “Algebraic mesh quality metrics for unstructured initial meshes,” *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 39, n°. 3, p. 217–241, janv. 2003.

[58] G. D. Weymouth, D. Dommermuth, K. Hendrickson et D. K. P. Yue, “Advancements in Cartesian-grid methods for computational ship hydrodynamics,” 2006.

[59] G. Weymouth et D. K. Yue, “Boundary data immersion method for Cartesian-grid simulations of fluid-body interaction problems,” *Journal of Computational Physics*, vol. 230, n°. 16, p. 6233–6247, juill. 2011.

[60] R. L. Higdon, “Radiation Boundary Conditions for Dispersive Waves,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 31, n°. 1, p. 64–100, févr. 1994.

[61] S. Dong, G. Karniadakis et C. Chryssostomidis, “A robust and accurate outflow boundary condition for incompressible flow simulations on severely-truncated unbounded domains,” *Journal of Computational Physics*, vol. 261, p. 83–105, mars 2014.

ANNEXE A CORRECTION DES REMERCIEMENTS

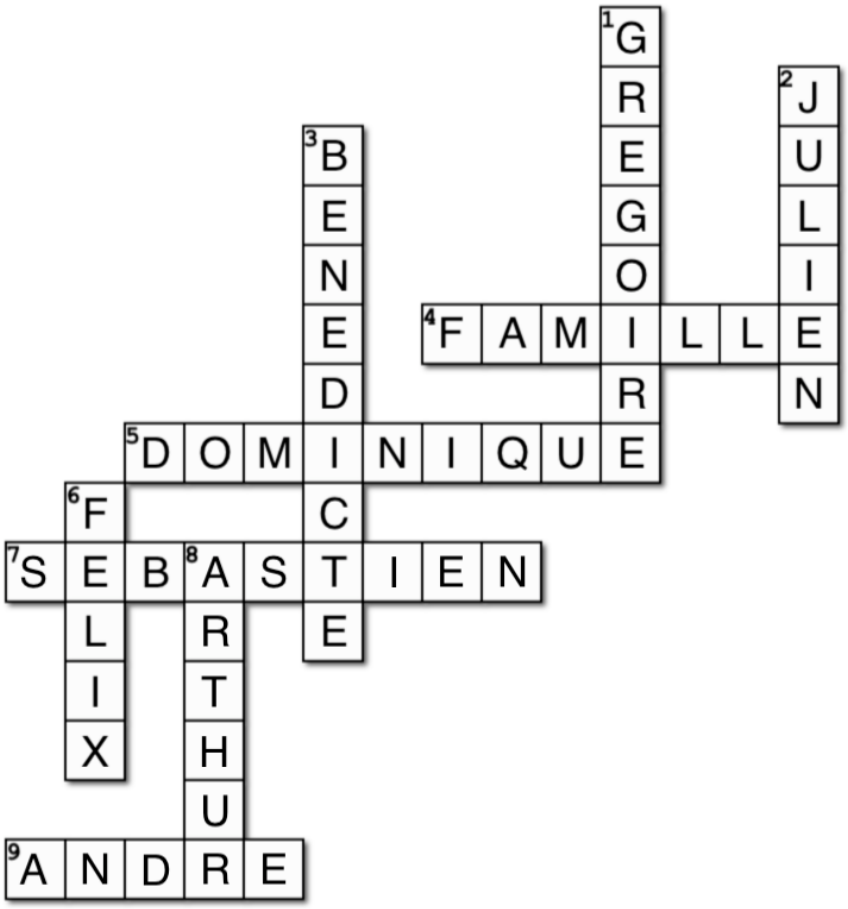


Figure A.1 Correction de la grille de mots croisés des remerciements

ANNEXE B MÉTHODE DE VÉRIFICATION PAR SOLUTION MANUFACTURÉE

La méthode des solution manufacturée est une méthode largement utilisée en dynamique des fluides pour faire la vérification d'un programme logiciel scientifique. Elle consiste à imposer la solution analytique d'un problème connu pour ensuite en vérifier les taux de convergence théoriques [42].

Dans le cas présent, les équations étudiées sont celles de Navier-Stokes. On procède ainsi à l'imposition d'un champ de vitesses et de pression tel qu'explicité aux Équations (B.1) et (B.2), où les indices sm indiquent que les champs proviennent explicitement de la solution manufacturée.

$$\rho_{sm}\left[\frac{\partial \mathbf{u}_{sm}}{\partial t} + ((\mathbf{u}_{sm} - \mathbf{v}_{sm}) \cdot \nabla)\mathbf{u}_{sm}\right] - \nabla \cdot \left[p_{sm}\mathbb{I} + \mu_{sm}\left(\nabla \mathbf{u}_{sm} + \nabla^T \mathbf{u}_{sm}\right)\right] = \mathbf{F}_{sm} \quad \text{(B.1)}$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{u}_{sm} = 0 \quad \text{(B.2)}$$

Selon le cas, les champs connus peuvent être imposés par l'intermédiaire de conditions limites aux bords, sur tout le domaine ou comme condition initiale pour certaines solutions manufacturées temporelles.

Pour toutes les solutions manufacturées de la Section 4.1, les champs de DDL imposés sont tous explicités, tout comme le moyen par lequel ils sont imposés. Le terme source $\mathbf{F}_{sm}$ de l'Équation (B.1) est, quant à lui, toujours calculé analytiquement puis injecté dans la formulation faible de l'Équation (B.1). On s'assure ainsi que les équations ((B.1) et (B.2)) sont respectées.

Il est ensuite possible de procéder au raffinement du maillage ou du pas de temps pour vérifier les taux de convergence désirés.

ANNEXE C VÉRIFICATION COMPLÉMENTAIRE DE LA RÉSOLUTION D'UN ÉCOULEMENT STATIONNAIRE PAR *EF8*

Les Tableaux C.1, C.2 et C.3 et la Figure C.1 montrent bien l'indépendance de la résolution de la discrétisation spatiale pour un écoulement stationnaire par rapport à l'orientation du domaine et au nombre de *Re*.

Tel qu'attendu, en utilisant les polynômes d'interpolation P_2P_1, *EF8* arrive à capturer exactement la solution pour un problème où le champ de vitesses est linéaire et la pression constante.

Tableau C.1 Normes de l'erreur en vitesse et en pression pour un champ de vitesses linéaire et une pression constante ($Re = 1$) pour un domaine ayant subi une rotation de 45° dans le sens anti-horaire

Maillage	**Nombre d'éléments**	**Norme des vitesses (H^1)**	**Norme de la pression (L^2)**
h	22	1.53E-14	2.19E-13
h/2	88	2.01E-14	1.71E-13
h/4	352	3.97E-14	2.07E-12
h/8	1408	7.94E-14	8.82E-12

Tableau C.2 Normes de l'erreur en vitesse et en pression pour un champ de vitesses linéaire et une pression constante ($Re = 10$)

Maillage	**Nombre d'éléments**	**Norme des vitesses (H^1)**	**Norme de la pression (L^2)**
h	22	2.86E-14	4.13E-14
h/2	88	3.91E-14	6.33E-14
h/4	352	9.20E-14	7.02E-13
h/8	1408	1.92E-13	2.97E-12

La Figure C.1, quant à elle, présente les normes de l'erreur en vitesse et en pression pour un champ de vitesse quadratique et une pression linéaire pour un domaine ayant subi une rotation de 45° dans le sens anti-horaire. On constate que pour tous les nombres de *Re* testés, le taux de convergence est supérieur au taux de convergence théorique de 2, ce qui confirme que *EF8* résout adéquatement la discrétisation spatiale P_2P_1 pour ce type de problème.

Tableau C.3 Normes de l'erreur en vitesse et en pression pour un champ de vitesses linéaire et une pression constante ($Re = 10$) pour un domaine ayant subi une rotation de 45° dans le sens anti-horaire

Maillage	**Nombre d'éléments**	**Norme des vitesses (H^1)**	**Norme de la pression (L^2)**
h	22	3.18E-14	3.06E-14
h/2	88	3.12E-14	1.68E-14
h/4	352	4.80E-14	2.22E-13
h/8	1408	8.62E-14	9.15E-13

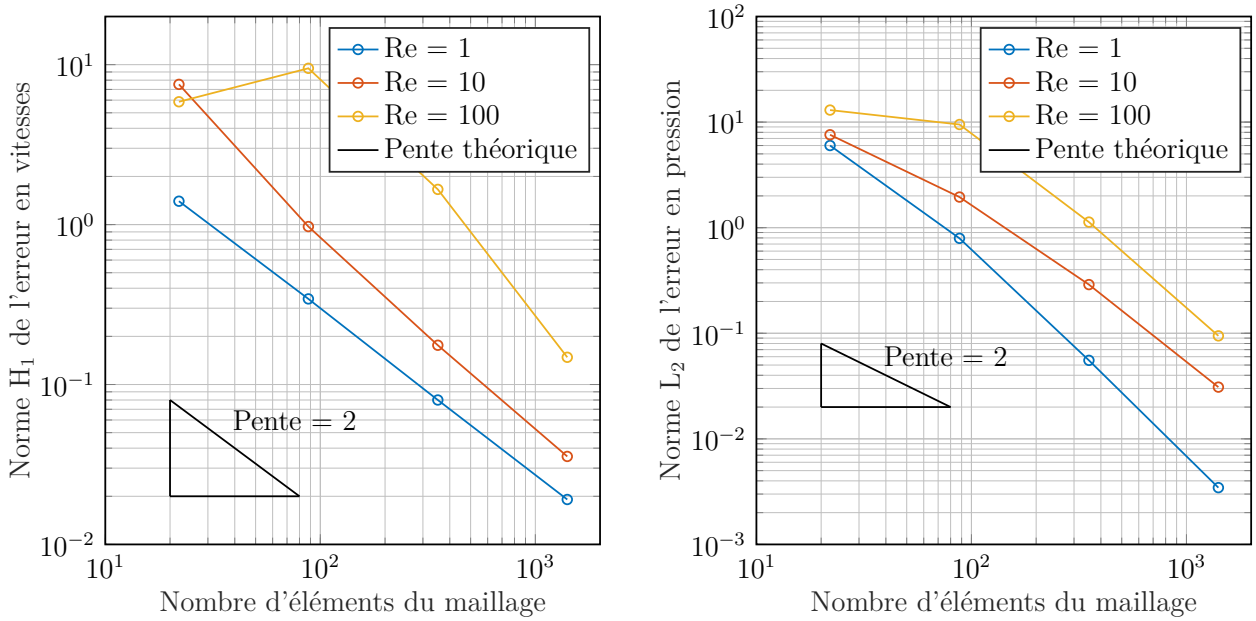


Figure C.1 Normes de l'erreur en vitesses et en pression pour un champs de vitesses quadratique et une pression linéaire pour un domaine ayant subi une rotation de 45° dans le sens anti-horaire

ANNEXE D VÉRIFICATION COMBINÉE DE LA DISCRÉTISATION EN ESPACE ET EN TEMPS POUR $BDF2$ ET $BDF3$

Les Figures D.1 et D.2 montrent des comportements très similaires. On y observe en effet que le raffinement en temps permet bel et bien de respecter le taux de convergence de 2 pour la norme L^2 de la pression, mais pas pour la norme $H1$ des vitesses alors qu'on observe un comportement inverse pour le raffinement en espace.

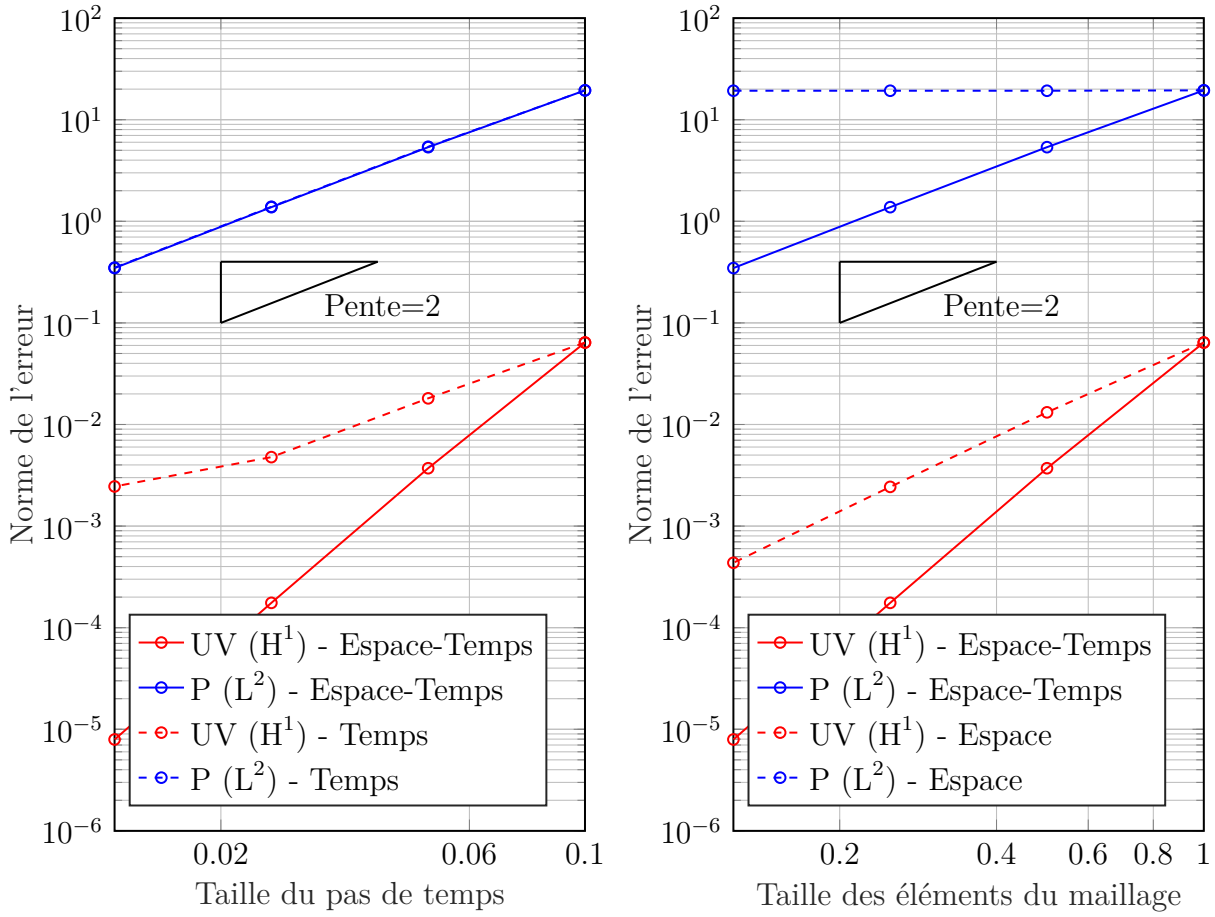


Figure D.1 Normes de l'erreur en vitesses et en pression au temps final en fonction du pas de temps (gauche) et de la taille des éléments du maillage (droite) selon différents raffinement pour BDF2

Ainsi, seul le raffinement combiné en espace et en temps permet de respecter les taux de convergence théoriques pour les champs de vitesses et de pression.

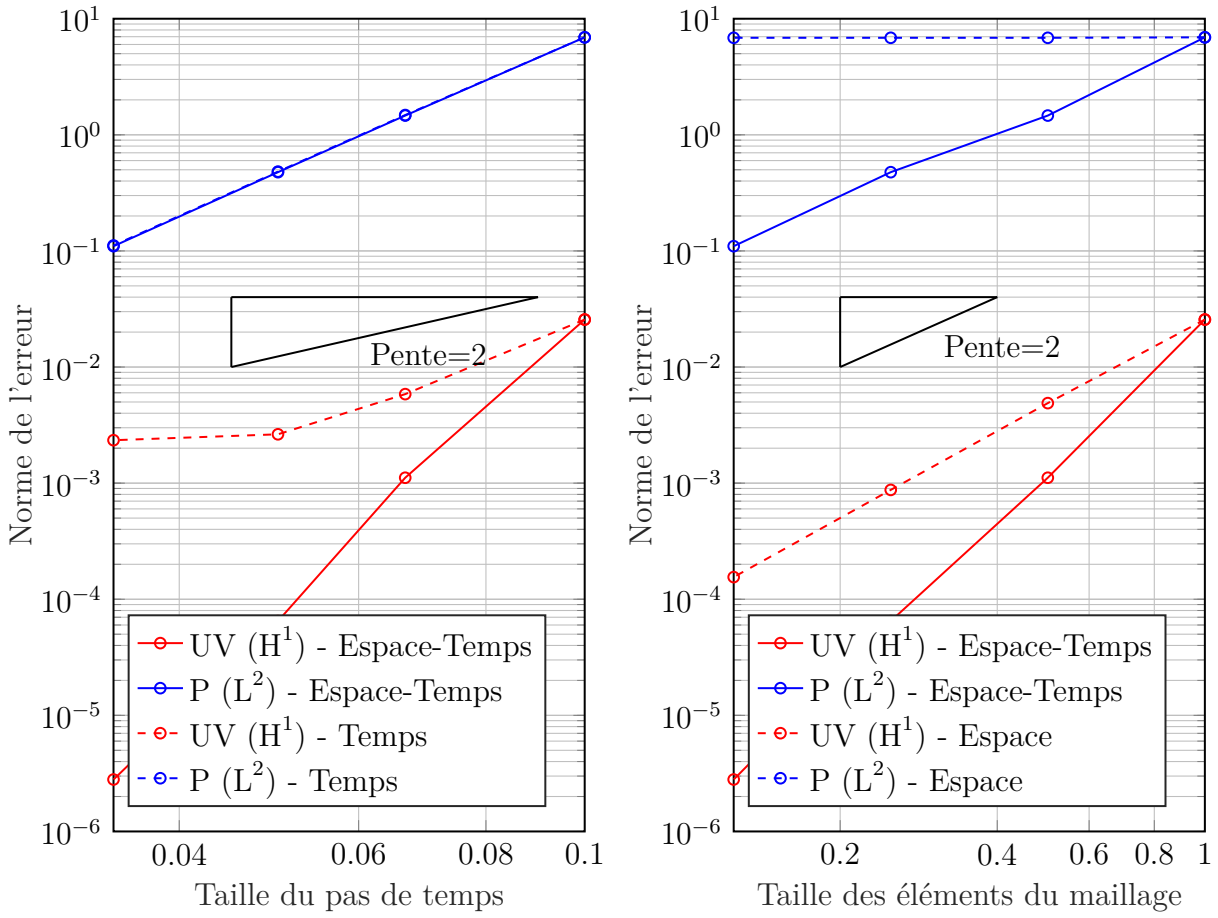


Figure D.2 Normes de l'erreur en vitesses et en pression au temps final en fonction du pas de temps (gauche) et de la taille des éléments du maillage (droite) selon différents raffinement pour BDF3

ANNEXE E MAILLAGES OÙ LA ZONE DE MAILLAGE MOBILE VARIE

Le premier maillage testé, présenté à la Figure E.4 possède le plus grande nombre de degrés de liberté, soit 61 659, puisque tous les noeuds sont mobiles et font ainsi tous partie des inconnues à résoudre. Le second maillage testé contient un grand sous-domaine mobile alors que le reste

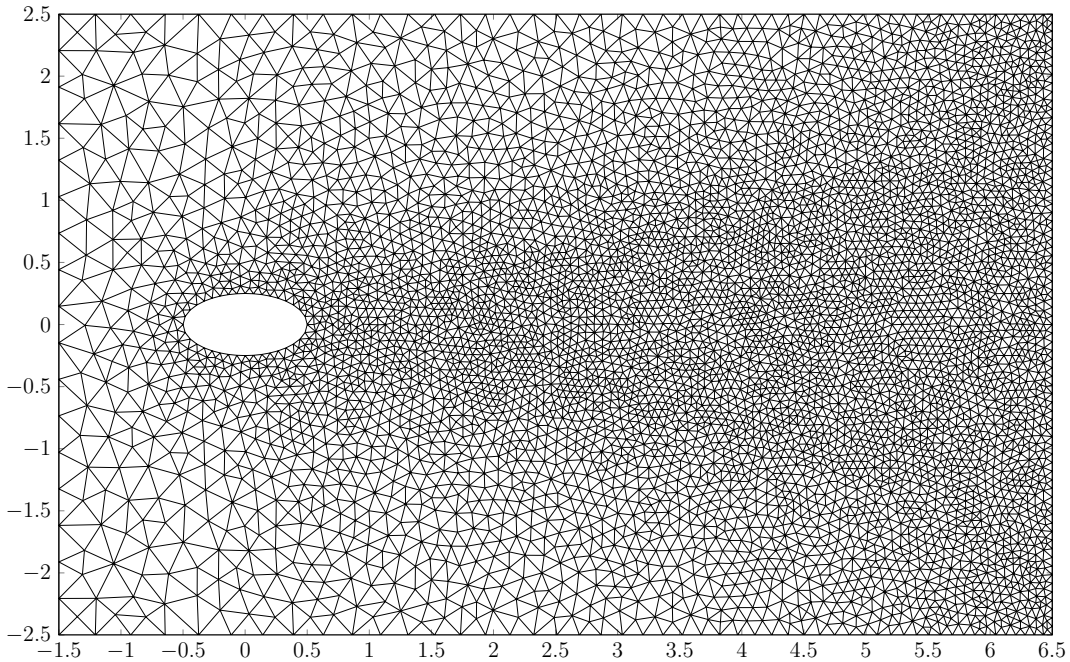


Figure E.1 Maillage composé de 11 159 éléments, de 22 547 noeuds et où tous les noeuds sont mobiles

du domaine est fixe, ce qui donne un total de 58 687 degrés de liberté. Le troisième maillage testé contient un sous-domaine mobile de taille moyenne alors que le reste du domaine est fixe, ce qui donne un total de 54 958 degrés de liberté. Finalement, le quatrième maillage testé contient un petit sous-domaine mobile alors que le reste du domaine est fixe, ce qui donne un total de 50 867 degrés de liberté. Tel qu'attendu, le nombre de degrés de liberté diminue avec la taille du sous-domaine mobile du maillage.

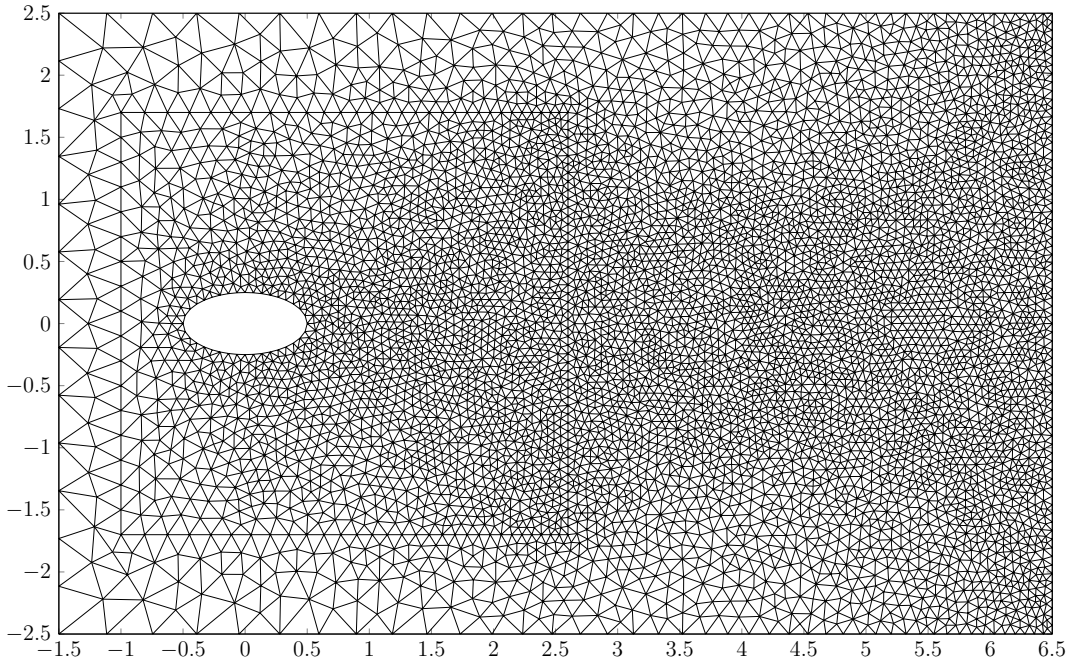


Figure E.2 Maillage composé de 12 115 éléments, de 24 445 noeuds et où un sous-domaine est mobile

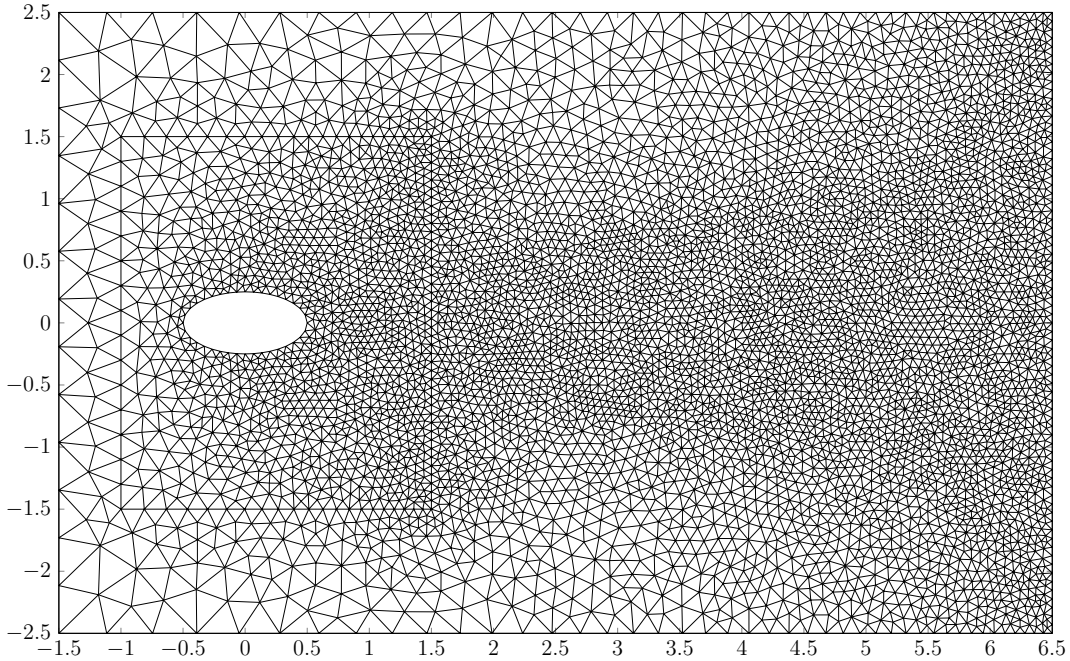


Figure E.3 Maillage composé de 11 641 éléments, de 23 491 noeuds et où un sous-domaine est mobile

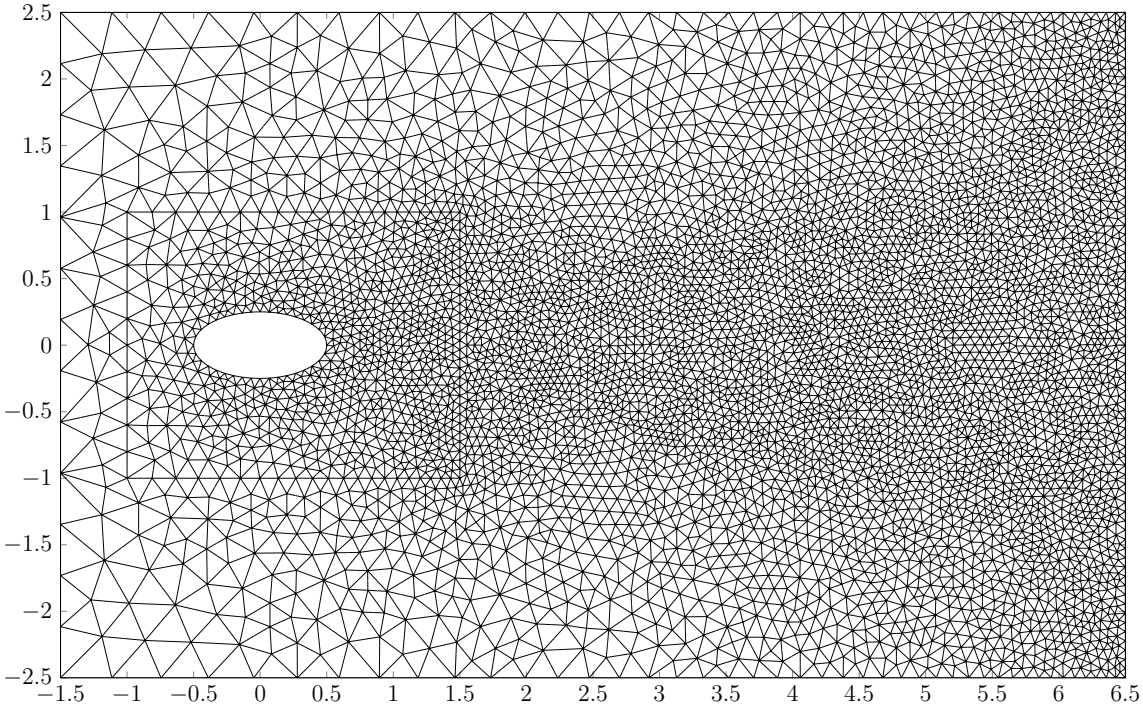


Figure E.4 Maillage composé de 11 415 éléments, de 23 039 noeuds et où un sous-domaine est mobile

ANNEXE F GRAPHIQUES DU MOUVEMENT DE L'ELLIPSE SELON LES DIFFÉRENTES DIMENSIONS DE LA ZONE MOBILE DU MAILLAGE

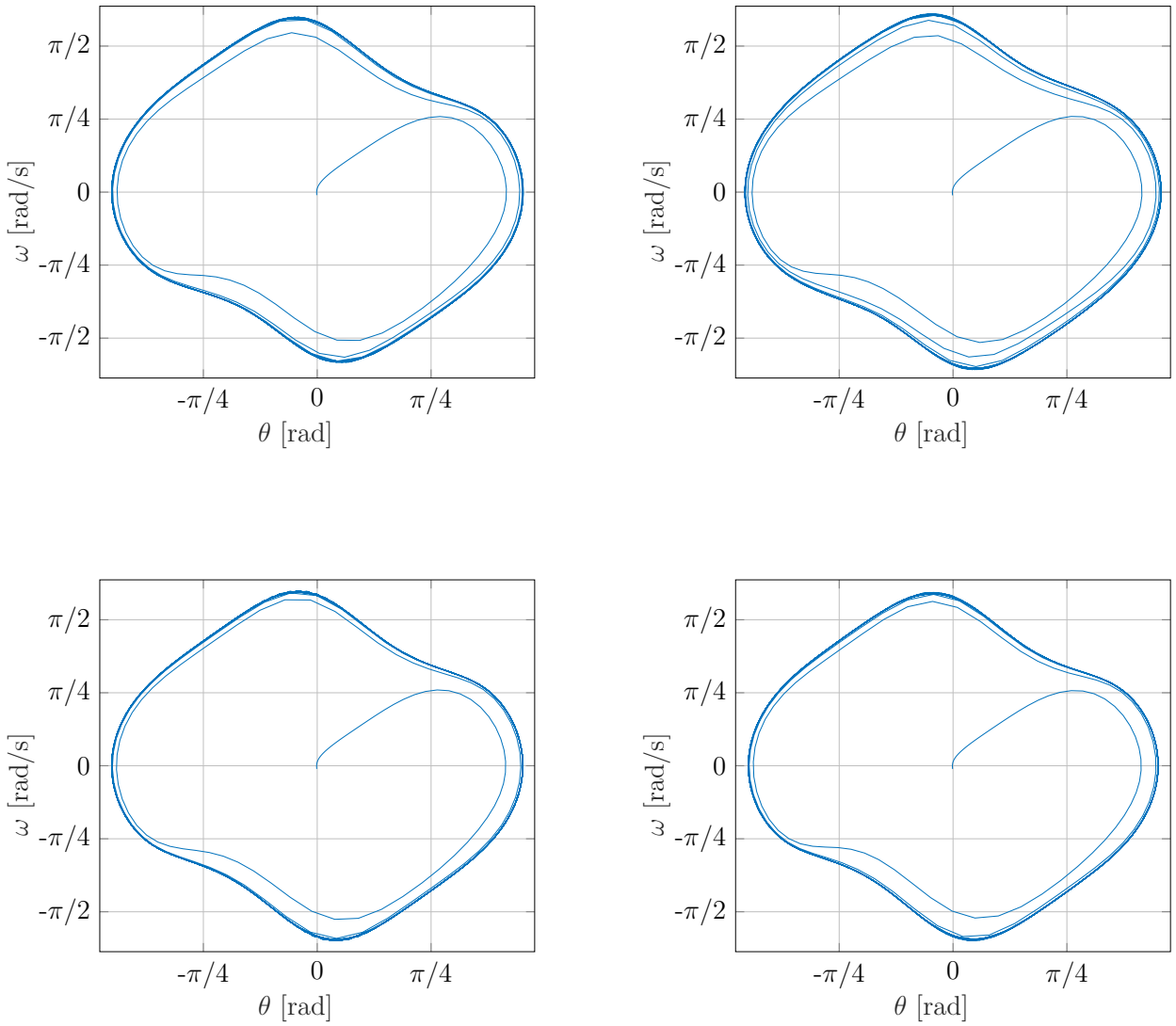


Figure F.1 Vitesse de rotation ω en fonction de l'angle de rotation θ pour le maillage entièrement mobile (haut-gauche), pour une grande zone de maillage mobile (haut-droite), pour une zone de maillage mobile de taille moyenne (bas-gauche) et pour une petite zone mobile (bas-droite)

ANNEXE G GRAPHIQUES DU MOUVEMENT DE L'ELLIPSE SELON LES DIFFÉRENTES VALEURS DE K POUR ITB ET ITM

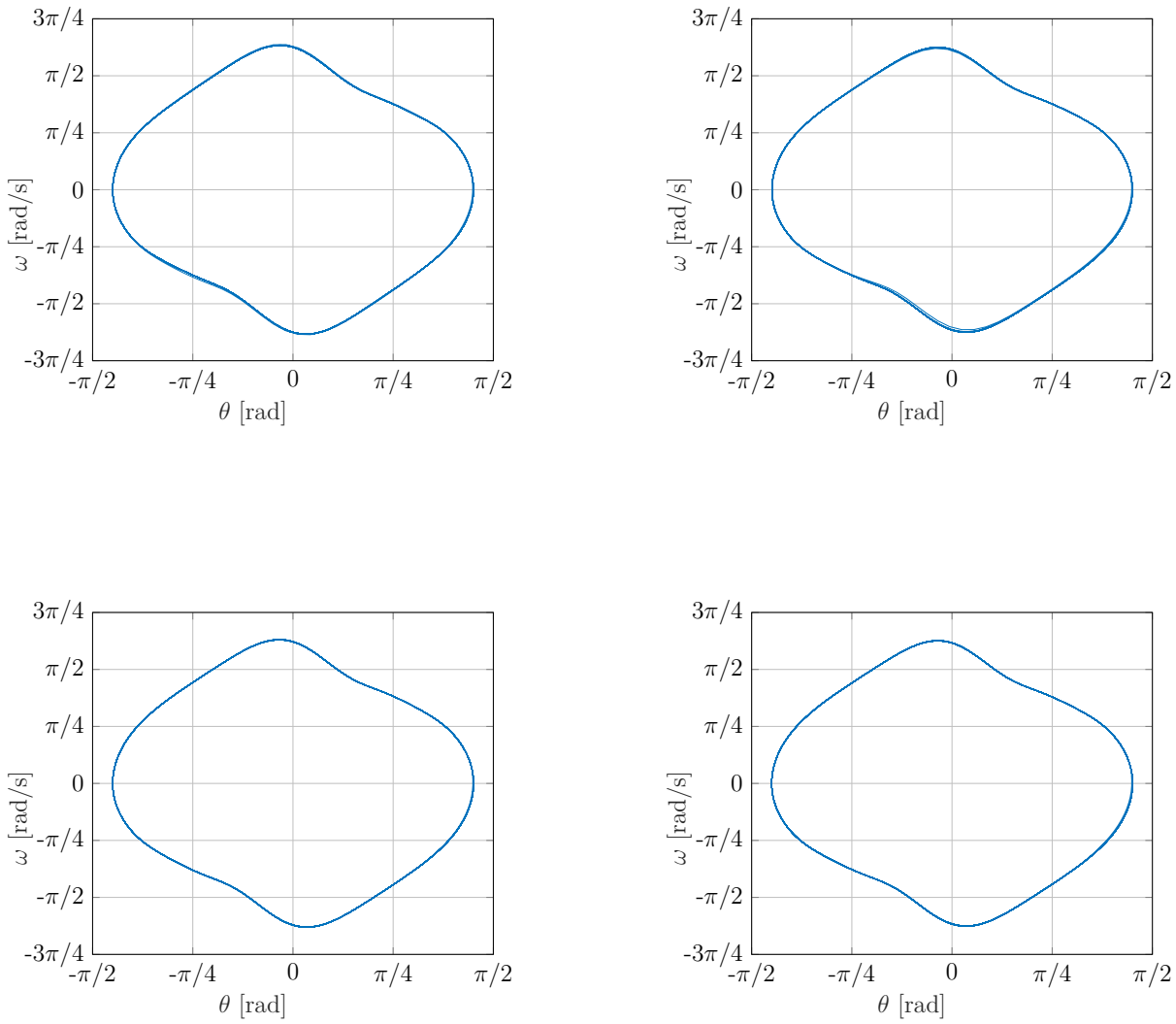


Figure G.1 Vitesse de rotation ω en fonction de l'angle de rotation θ pour les noeuds déplacés à l'aide de la méthode ITB avec $k = 4$ (haut-gauche) et $k = 5$ (haut-droite) et ceux déplacés à l'aide de la méthode ITM avec $k = 4$ (bas-gauche) et $k = 5$ (bas-droite)

ANNEXE H GRAPHIQUES DU MOUVEMENT DE L'ELLIPSE SELON LES DIFFÉRENTS INTERPOLANTS GÉOMÉTRIQUES POUR ITB ET ITM

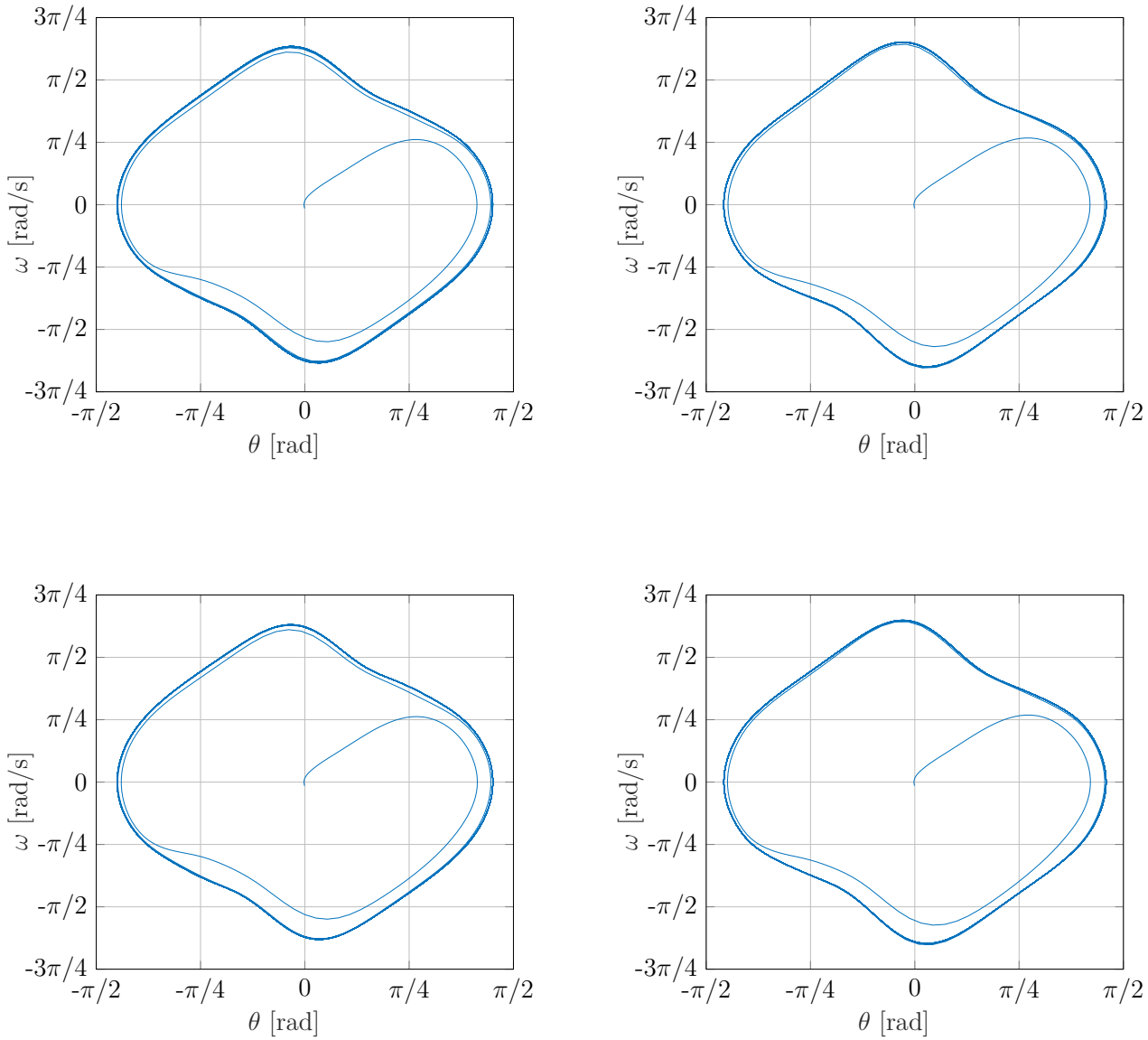


Figure H.1 Vitesse de rotation ω en fonction de l'angle de rotation θ pour les noeuds déplacés à l'aide de la méthode ITB en utilisant l'interpolant géométrique P_1 (haut-gauche) et P_2 (haut-droite) et ceux déplacés à l'aide de la méthode ITM en utilisant l'interpolant géométrique P_1 (bas-gauche) et P_2 (bas-droite)

ANNEXE I MODÉLISATION DE LA CONDITION LIMITE NATURELLE

Soit l'équation de conservation de l'énergie cinétique

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E_c) + \nabla \cdot (\rho E_c \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma})\mathbf{u}, \tag{I.1}$$

et son intégrale

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho E_c d\Omega = \int_{\partial\Omega}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{u} - \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}E_c)d\Gamma - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \nabla\mathbf{u}d\Omega - ... \quad .$$

Influence de la condition de sortie

On souhaite d'abord étudier l'influence de la condition de traction nulle sur la conservation de l'énergie cinétique dans le domaine. Comme $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}$, cela implique que $\mathbf{T}\cdot\mathbf{u}$ est toujours positif, tout comme le terme $\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \nabla\mathbf{u}d\Omega$ qui correspond à la perte d'énergie par friction. Au début de la simulation, comme un écoulement plan $\mathbf{u}$ est imposé à l'entrée, il est normal que l'énergie cinétique augmente à l'intérieur du système. À la sortie, si on n'applique aucune condition frontière, c'est la condition naturelle qui est appliquée, c'est-à-dire $\mathbf{T} = 0$. Dans le cas où le profil de l'écoulement à la sortie s'approche d'un écoulement plan, le terme $\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}E_c$ est positif et un certain équilibre de l'énergie cinétique est maintenu à l'intérieur du domaine. Toutefois, lorsqu'il y a présence de vortex, tel qu'à la Figure I.1, certains problèmes peuvent survenir. En effet, un vortex implique qu'une partie de l'écoulement à la sortie est sortante

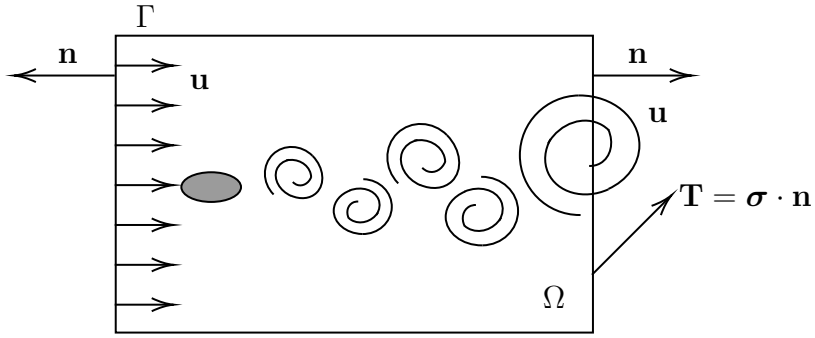


Figure I.1 Schéma des vortex dans le sillage de l'ellipse à haut Re

alors qu'une autre partie est entrante, ce qui fait en sorte que le signe du terme $\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}E_c$ peut varier. Si les vortex sont rapides, ceux-ci peuvent se dissiper rapidement grâce à la perte d'énergie par friction. À l'inverse, si les vortex sont lents et que le Re est élevé, l'énergie des vortex peine à être entièrement dissipée par la friction du fluide qui est alors peu visqueux.

Un nouveau vortex arrive alors avant que l'énergie cinétique du précédent soit dissipée et c'est ainsi que l'énergie cinétique du système ne fait qu'augmenter. Cette énergie cinétique se manifeste sous forme de pression et on observe alors un énorme pic de pression à la sortie du domaine juste avant que le programme ne cesse de fonctionner. Il est donc nécessaire d'implémenter une condition de sortie, développée initialement par Dong et al. [61], qui permet de gérer l'entrée et la sortie d'énergie cinétique de façon dynamique telle que

$$\mathbf{T} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} \geqslant 0 \\ \rho\dfrac{|\mathbf{u}|^2}{2}\mathbf{n} & \text{si } \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} < 0 \end{cases}$$

Il faut ensuite arriver à régulariser cette fonction afin d'avoir un profil continu de traction normale à la sortie du domaine. Telle que détaillée à l'Équation (I.2), c'est la fonction tanh qui permet de lisser la condition frontière à la sortie. C'est d'ailleurs cette équation qui est implémentée dans *EF8* comme la condition frontière *Open Boundary*.

$$\mathbf{T} = \rho\frac{|\mathbf{u}|^2}{2}\mathbf{n}\cdot S(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) \quad \text{où} \quad S(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} \geqslant 0 \\ 1 & \text{si } \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} < 0 \end{cases}$$
$$S(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) = \frac{1}{2}\left(1 - \tanh\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{U_0\delta}\right)\right) \tag{I.2}$$

où U_0 correspond à la vitesse caractéristique de référence et δ contrôle la transition de la fonction tanh de façon à ce que plus δ est petit, plus la transition est étroite et vice-versa.

Démonstration de l'équation de conservation de l'énergie cinétique (I.1)
Dans le domaine étudié, plusieurs lois de conservation doivent être respectées. La loi de conservation de la masse, présentée à l'Équation (I.3), est la première d'entre elles.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0$$
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \tag{I.3}$$

La loi de conservation de la quantité de mouvement, présentée à l'Équation (I.4), doit aussi être respectée.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u}) + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) = \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}$$
$$\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u}\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho\right\} = \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{I.4}$$

Connaissant ces deux lois de conservation, on cherche maintenant l'expression de la conser-

vation de l'énergie cinétique E_c. Comme $E_c = \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}$, on peut faire apparaître la dérivée de l'énergie cinétique telle qu'à l'Équation (I.5).

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2}\frac{\partial |\mathbf{u}|^2}{2} \tag{I.5}$$

Ainsi, si on multiplie l'Équation (I.4) par $\mathbf{u}$, on obtient l'Équation (I.6) qui permet de faire apparaître l'énergie cinétique E_c.

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} + \rho\left((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right)\mathbf{u} + |\mathbf{u}|^2\left\{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho\right\} &= \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{u} \\
\rho\frac{\partial E_c}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)E_c + E_c\left\{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho\right\} & \\
+E_c\left\{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho\right\} &= \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{u} \\
\left(\rho\frac{\partial E_c}{\partial t} + E_c\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)E_c + E_c\rho\nabla\cdot\mathbf{u} + E_c(\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho + E_c\underbrace{\left\{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u})\right\}}_{=0} &= \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{u}
\end{aligned} \tag{I.6}$$

De plus, il est possible d'écrire que

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\rho E_c\mathbf{u}) &= \rho E_c\nabla\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla(\rho E_c), \\
&= E_c\rho\nabla\cdot\mathbf{u} + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)E_c + E_c(\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho,
\end{aligned}$$

ce qui permet, une fois combiné à l'Équation (I.6), d'obtenir l'équation de conservation de l'énergie cinétique recherchée, c'est-à-dire l'Équation (I.7).

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E_c) + \nabla\cdot(\rho E_c\mathbf{u}) = \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{u} \tag{I.7}$$

Il est aussi possible de réécrire le terme de droite de l'Équation (I.7) tel que

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{u}) = \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla u.$$

Le terme $\boldsymbol{\sigma} : \nabla u$ représente alors le frottement visqueux. L'Équation (I.7) peut donc être

réécrite telle qu'à l'Équation (I.8).

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho E_c) + \nabla \cdot (\rho E_c \mathbf{u}) &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho E_c) &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} - \boldsymbol{\rho} \mathbf{u} \boldsymbol{E_c}) - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u}\end{aligned} \tag{I.8}$$

Maintenant, pour savoir comment varie l'énergie cinétique à l'intérieur du domaine illustré à la Figure I.1, il suffit d'intégrer l'Équation (I.8) sur le domaine tel que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(\rho E_c) d\Omega &= \int_{\partial\Omega} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} - \rho \mathbf{u} E_c) d\Gamma - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} d\Omega - ..., \\ \frac{d}{dt} \int_\Omega \rho E_c d\Omega &= \int_{\partial\Omega} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u} - \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} E_c) d\Gamma - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} d\Omega - ...,\end{aligned}$$

où un terme correspondant au travail effectué par le fluide sur l'objet est toujours soustrait.