



**Titre:** Modélisation des propriétés électromagnétiques de métamatériaux  
à base de réseaux de fils ferromagnétiques

**Auteur:** Vincent Boucher  
Author:

**Date:** 2010

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Boucher, V. (2010). Modélisation des propriétés électromagnétiques de  
métamatériaux à base de réseaux de fils ferromagnétiques [Ph.D. thesis, École  
Citation: Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/416/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/416/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** David Ménard  
Advisors:

**Programme:** Génie physique  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÉLISATION DES PROPRIÉTÉS ÉLECTROMAGNÉTIQUES DE  
MÉTAMATÉRIAUX À BASE DE RÉSEAUX DE FILS FERROMAGNÉTIQUES

VINCENT BOUCHER  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE PHYSIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION DU  
DIPLOME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR  
(GÉNIE PHYSIQUE)  
OCTOBRE 2010

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

MODÉLISATION DES PROPRIÉTÉS ÉLECTROMAGNÉTIQUES DE  
MÉTAMATÉRIAUX À BASE DE RÉSEAUX DE FILS FERROMAGNÉTIQUES

présentée par : BOUCHER Vincent

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. TEYSSEDOU Alberto, Ph.D., président

M. MÉNARD David, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. MASUT Remo A., Ph.D., membre

M. VÁZQUEZ Manuel, Ph.D., membre

## REMERCIEMENTS

La réalisation de cette thèse a bénéficié de la contribution et de l'appui de nombreuses personnes. En premier lieu, je voudrais remercier chaleureusement mon directeur de recherche, le professeur David Ménard de l'École Polytechnique de Montréal, de m'avoir proposé un projet aussi passionnant et de m'avoir guidé et encouragé tout au long de mes études doctorales. Sa rigueur scientifique, sa créativité et ses qualités humaines se sont avérées essentielles à l'accomplissement de ce travail. Il me fait également plaisir de souligner l'apport du professeur Arthur Yelon de l'École Polytechnique de Montréal, dont les connaissances scientifiques et la collaboration à plusieurs étapes du projet ont contribué à améliorer la qualité de cette thèse. De même, j'ai tiré profit de plusieurs discussions avec le professeur Christophe Caloz de l'École Polytechnique de Montréal.

Je voudrais aussi témoigner ma reconnaissance envers les membres du jury, les professeurs Remo A. Masut et Alberto Teyssedou de l'École Polytechnique de Montréal et le professeur Manuel Vázquez de l'Institut des Sciences des Matériaux de Madrid, d'avoir accepté de consacrer du temps à la lecture et à l'évaluation de ma thèse. Leurs recommandations ont su enrichir considérablement la valeur de ce travail.

Je tiens à remercier les collègues étudiants que j'ai côtoyés au Laboratoire de magnétisme, notamment Christian Lacroix, Louis-Philippe Carignan, Élyse Adam, Gabriel Monette, Alexandre Ouimet, Salah Hadj-Messaoud, Nima Nateghi, Fanny Béron, Djamel Seddaoui et Basile Dufay. J'ai beaucoup apprécié les moments passés en leur compagnie et je me sens extrêmement privilégié d'avoir effectué mon doctorat au sein d'un groupe de recherche aussi dynamique et convivial. En particulier, je voudrais remercier Louis-Philippe Carignan pour sa disponibilité et son expertise sur les réseaux de nanofils ferromagnétiques. Nos échanges ont toujours été très fructueux et ont amélioré considérablement la qualité de ce travail. Enfin, je tiens à saluer mes collègues du pavillon J.-Armand-Bombardier, notamment Stéphane Bedwani, Benoît Cardin St-Antoine, Alexandre Châteauneuf, Samuel Lambert-Milot et Stéphane Turcotte, pour leur support constant et le climat de travail agréable qu'ils ont su instaurer.

Je me dois de souligner le soutien financier de mon directeur de recherche, le professeur David Ménard, et de remercier le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG), le Fonds québécois de la recherche sur la nature et les technologies (FQRNT) et la Fondation de Polytechnique pour l'octroi de bourses en recherche. Ces appuis ont grandement facilité la réalisation de cette thèse.

Mes plus sincères remerciements vont à famille, notamment à mes parents pour leur appui inconditionnel, ainsi qu'à mes frères et ma sœur pour la grande complicité qui nous unit. J'aimerais également exprimer ma reconnaissance envers mes amis, en particulier Nicolas, Éric, Clémence, Christian, Caroline, Olivier, François, Isabelle, Simon et Jesse, pour leur soutien et leur présence dans ma vie.

Enfin, je remercie Amélie pour le bonheur, l'amour et tous les projets que nous partageons depuis maintenant cinq ans. Son support, ses encouragements et sa présence à mes côtés ont été indispensables à l'achèvement de ce travail.

# RÉSUMÉ

Les métamatériaux électromagnétiques consistent en des matériaux composites artificiels, structurés à l'échelle sous-longueur d'onde et caractérisés par des propriétés souvent inaccessibles aux matériaux naturels. Depuis la dernière décennie, leur étude suscite un vif engouement au sein de la communauté scientifique, motivé en grande partie par leur potentiel pour des applications novatrices dans les technologies de l'information et des télécommunications. Les métamatériaux s'appuient typiquement sur des arrangements astucieux d'inclusions métalliques ou de permittivité élevée à l'intérieur d'une matrice hôte. Leur structuration sous-longueur d'onde permet de les assimiler à des milieux homogènes et de décrire leur réponse électromagnétique par l'intermédiaire de tenseurs de permittivité et de perméabilité effectives, qui dépendent à la fois des propriétés intrinsèques des inclusions, de leurs paramètres géométriques et de leurs interactions mutuelles.

En particulier, des propositions basées sur l'utilisation d'inclusions ferromagnétiques ont ouvert la voie à une nouvelle classe de métamatériaux caractérisés par des paramètres constitutifs ajustables à l'aide d'un champ magnétique statique et par un spectre d'excitations magnétiques en hyperfréquences plus riche que celui des métamatériaux usuels, lesquels sont fondés sur un effet de magnétisme artificiel à l'intérieur d'inclusions conductrices ou diélectriques. Parmi ces matériaux composites, les réseaux de fils ferromagnétiques apparaissent comme des candidats prometteurs pour des dispositifs en hyperfréquences, des applications magnéto-optiques et des métamatériaux à indice de réfraction négatif. Or, l'exploitation technologique de ces réseaux requiert des modèles théoriques capables de décrire leur réponse à des ondes électromagnétiques.

Dans ce contexte, l'objectif principal de ce travail consiste à établir des expressions analytiques pour la permittivité et la perméabilité effectives de métamatériaux à base de réseaux de fils ferromagnétiques conducteurs. En particulier, nous considérons le cas de fils de rayon allant de 10 nm à 100  $\mu\text{m}$ , aimantés axialement et excités dans les hyperfréquences (1–100 GHz) par des champs électrique et magnétique respectivement parallèle et perpendiculaire à l'axe des fils. De même, nous portons une attention particulière à l'évaluation du potentiel de ces réseaux à présenter, sur une même plage de fréquences, des réponses électrique et magnétique simultanément ajustables par un champ magnétique statique.

Pour ce faire, nous développons une procédure d'homogénéisation de type Maxwell Garnett, qui incorpore l'influence du retard électromagnétique (notamment de l'effet de peau) sur la réponse gyromagnétique tensorielle des fils individuels, de même que l'effet des interactions dipolaires interfils sur le comportement macroscopique de réseaux de taille finie. Il convient

de souligner qu'il s'agit là d'aspects dont le traitement est en général incomplet ou négligé dans la littérature.

Notre méthode de dérivation consiste d'abord à résoudre le problème de la diffusion d'une onde électromagnétique par un fil individuel, en vue d'obtenir la réponse dipolaire de sa polarisation et de son aimantation dynamiques en régime d'effet de peau arbitraire. Cette réponse est ensuite incorporée dans notre procédure d'homogénéisation, ce qui mène à des expressions générales pour la permittivité et la perméabilité effectives du réseau, lesquelles dépendent notamment des natures gyromagnétique et métallique des fils, de la géométrie du réseau et des interactions dipolaires interfils. En outre, nos résultats montrent que la prise en compte de l'effet de peau est grandement simplifiée par la renormalisation des propriétés intrinsèques des fils, laquelle fait intervenir des facteurs dépendant de  $k_w a$ , où  $k_w$  est l'amplitude complexe du vecteur d'onde à l'intérieur des fils de rayon  $a$ .

Notre expression pour la perméabilité effective du réseau est un tenseur gyrotrope, dont les éléments diagonaux et hors diagonaux adoptent une forme compacte en fonction de composantes de perméabilité renormalisée, qui décrivent l'influence du retard électromagnétique à l'intérieur des fils. Il importe de souligner que l'incorporation simultanée de la gyrotropie et du retard électromagnétique constitue une extension des modèles présentés dans la littérature, lesquels se limitent à traiter l'un ou l'autre de ces aspects.

De façon similaire, la permittivité effective s'exprime simplement en fonction de l'impédance totale d'un fil placé dans le réseau, laquelle peut être décomposée en contributions interne et externe. D'abord, la partie interne tient compte de l'effet de peau dans les fils et correspond, lorsque ceux-ci sont ferromagnétiques, à une magnétoimpédance. Il peut alors en résulter une réponse magnétodiélectrique, c'est-à-dire une permittivité effective dépendant du champ magnétique statique. En revanche, la partie externe est contrôlée principalement par la géométrie et fixe la valeur de la fréquence plasma typiquement associée aux réseaux de fils métalliques excités par un champ électrique axial.

Nous introduisons également le concept de réponse effective externe afin de tenir compte explicitement des interactions dipolaires à l'intérieur d'un métamatériau de taille finie excité par des champs dynamiques spatialement uniformes en son voisinage. Le concept est appliqué à la description de la résonance ferromagnétique du mode uniforme d'un réseau de fils à l'intérieur duquel les interactions dipolaires statiques et dynamiques doivent être explicitement considérées. En particulier, nous démontrons comment le tenseur de désaimantation dû aux interactions dipolaires peut être lié au tenseur de désaimantation de forme du réseau macroscopique.

La présentation du modèle théorique est suivie par une analyse détaillée de la solution générale, en vue d'en préciser les implications et les limites. Pour ce faire, nous considérons

un réseau de fils ferromagnétiques de nickel caractérisés par des propriétés intrinsèques représentatives et étudions l'évolution de ses réponses électrique et magnétique en fonction des paramètres géométriques et de l'effet de peau. D'une part, l'examen de la réponse magnétique montre que des réseaux denses et un effet de peau faible sont nécessaires à l'obtention d'une perméabilité effective substantielle et possiblement négative entre les fréquences de résonance et d'antirésonance. En revanche, notre modèle de permittivité indique que de tels réseaux présentent un comportement métallique (c.-à-d., dissipatif) et que l'observation d'une réponse magnétodiélectrique optimale et accompagnée de faibles pertes requiert plutôt des réseaux dilués et un effet de peau modéré.

De même, nous décrivons comment l'utilisation de nanofils semi-isolés, c'est-à-dire dont la continuité électrique n'est pas assurée, permet d'exploiter la perméabilité effective de réseaux denses de nanofils. De tels réseaux se comportent alors comme des isolants magnétiques effectifs, mais ne présentent plus de réponse magnétodiélectrique. Par conséquent, nous concluons que les conditions pour lesquelles les réseaux de fils ferromagnétiques conducteurs présentent une permittivité et une perméabilité significatives et accordables par un champ magnétique statique tendent à être mutuellement exclusives.

Par la suite, nous appliquons notre formalisme théorique à l'étude de la perméabilité effective de réseaux denses de nanofils ferromagnétiques (c.-à-d., caractérisés par un effet de peau négligeable) incorporés dans une matrice diélectrique. Dans ces réseaux, les fils individuels montrent un comportement bistable en fonction du champ magnétique statique axial et, lorsque le réseau est partiellement désaimanté, se répartissent alors en deux populations d'aimantations antiparallèles, dont les proportions relatives peuvent être ajustées à l'aide de cycles d'hystérésis mineurs. De plus, la présence de ces deux populations modifie de façon importante la perméabilité effective du réseau, laquelle peut notamment montrer deux pics d'absorption distincts. Pour expliquer ce phénomène de double résonance ferromagnétique, nous généralisons notre procédure d'homogénéisation au cas d'un réseau formé de deux populations antiparallèles, liées par les interactions dipolaires. Le calcul mène à des expressions analytiques pour les composantes diagonales et hors diagonales du tenseur de perméabilité effective, desquelles sont déduites des relations explicites pour les deux fréquences de résonance qui leur sont associées.

Notre modèle de perméabilité effective est ensuite confronté avec l'expérience. Pour ce faire, des mesures de résonance ferromagnétique large bande (1–40 GHz) en configuration de ligne microruban ont été réalisées sur un réseau de nanofils de  $\text{Co}_{94}\text{Fe}_5\text{B}_1$ , de diamètre moyen de 45 nm, incorporés dans une membrane d'alumine de distance interpore moyenne de 110 nm. De façon générale, les spectres de perméabilité complexe extraits des données expérimentales démontrent un excellent accord avec les spectres théoriques, notamment en



ce qui a trait au comportement du profil, de l'amplitude, de la position et de la largeur des deux pics de résonance en fonction du champ magnétique statique et de l'aimantation rémanente du réseau. Des écarts observés lorsque la séparation entre les deux pics devient faible sont attribués à des fluctuations spatiales du champ local d'interaction, lesquelles ne sont pas prises en compte dans le modèle.

Enfin, nous présentons une synthèse des résultats principaux obtenus pendant la réalisation de cette thèse, en insistant sur les contributions originales, les limites et les extensions possibles du modèle théorique.

# ABSTRACT

Electromagnetic metamaterials consist of artificially designed subwavelength composite materials exhibiting properties not readily available in natural materials. Over the last decade, the study of their electromagnetic response has sparked considerable interest in the scientific community, owing largely to their potential for novel applications in information and telecommunication technologies. Metamaterials typically rely on clever arrangements of metallic or high-permittivity inclusions in a host matrix. Their subwavelength structure allows us to treat them as homogeneous media and to describe their macroscopic electromagnetic response in terms of effective permittivity and permeability tensors which depend upon the intrinsic properties of the inclusions, their geometrical parameters, and their mutual interactions.

In particular, recent proposals for the use of ferromagnetic inclusions have opened the way to a new class of microwave metamaterials, characterized by magnetic-field-tuneable constitutive parameters and by a spectrum of magnetic excitations richer than that of most present-day metamaterials, which are based on the artificial magnetism exhibited by nonmagnetic conducting or dielectric inclusions. Among these magnetic composite materials, arrays of ferromagnetic wires emerge as interesting candidates for microwave devices, magneto-optical applications, and negative-refractive-index metamaterials. However, exploiting the full technological potential of such arrays requires theoretical models able to describe their response to electromagnetic waves.

In this context, the main objective of this work is to establish analytical expressions for the effective permittivity and permeability of metamaterials based on arrays of ferromagnetic conducting wires. Specifically, we consider the case of axially magnetized wires of radius ranging from 10 nm to 100  $\mu\text{m}$ , which are excited in the microwave frequency range (1–100 GHz) by electric and magnetic fields parallel and perpendicular to the axis of the wires, respectively. We place special emphasis on evaluating the potential of these ferromagnetic wire arrays to produce, over the same frequency range, simultaneous magnetic-field-tuneable electric and magnetic responses.

Our theoretical approach consists of developing a Maxwell-Garnett-type homogenization procedure, which incorporates the influence of electromagnetic retardation (e.g., skin effect) on the tensorial gyromagnetic response of the individual wires, as well as the effect of interwire dipolar interactions on the macroscopic behaviour of finite-size arrays. It must be noted that the treatment in the literature of these aspects is generally lacking or incomplete.

First, our method of derivation requires solving the problem of the scattering and absorption of an electromagnetic wave by an individual wire, so as to obtain the dipolar responses of its dynamic polarization and magnetization in the regime of arbitrary skin effect. These responses are then incorporated into our homogenization procedure, in order to yield general expressions for the effective permittivity and permeability of the array, which depend upon the gyromagnetic and metallic properties of the wires, the geometrical parameters of the array, and the interwire dipolar interactions. Our results show that the consideration of skin effect is greatly simplified by introducing  $k_w a$ -dependent renormalized expressions for the wire intrinsic properties, where  $k_w$  is the complex amplitude of the wave vector inside the wires of radius  $a$ .

Our expression for the effective permeability tensor of the array is a gyrotropic tensor, with diagonal and off-diagonal components expressed compactly in terms of renormalized permeability components which account for electromagnetic retardation inside the wires. It must be emphasized that our explicit treatment of both gyrotropy and electromagnetic retardation constitutes an extension of existing models, which are restricted to considering only one or the other of these two aspects.

Similarly, we find that the effective permittivity of the array can be expressed simply in terms of the total impedance of a single wire placed in the array, which can itself be decomposed into internal and external contributions. On the one hand, the internal part accounts for the skin effect inside the wires and results, for ferromagnetic wires, in a magnetoimpedance effect. This may then lead to a magnetodielectric response, that is, to a magnetic-field-tuneable effective permittivity. On the other hand, the external part, which depends mostly on the geometrical parameters of the array, controls the value of the effective plasma frequency typically associated with the electric response of arrays of metallic wires excited by an axial electric field.

We also introduce the effective external response of a finite-size array excited by spatially uniform dynamic fields, in order to account for the interwire dipolar interactions. The concept is applied to describe the uniform-mode ferromagnetic resonance of a wire array in which both static and dynamic dipolar interactions must be explicitly considered. In particular, we demonstrate how the demagnetizing tensor due to dipolar interactions can be related to the shape demagnetizing tensor of the macroscopic array.

The presentation of the model is followed by a detailed analysis of the implications and limitations of our theoretical results. This is achieved by considering an array of nickel wires with representative parameters and by studying how its electric and magnetic responses vary as a function of the geometrical parameters and with the importance of skin effect. On the one hand, we show that dense arrays and weak skin effect are necessary conditions for

substantial effective permeability, which may become negative between the resonance and antiresonance frequencies. On the other hand, our permittivity model indicates that such arrays behave as effective magnetic metals (i.e., they exhibit significant Ohmic losses) and that, in contrast, the observation of a low-loss magnetodielectric response instead requires dilute arrays and moderate skin effect.

We also describe how the effective permeability of dense arrays of nanowires can be exploited by using semi-isolated wires, that is, wires for which electrical continuity is not maintained at either of their ends. Such arrays then behave as effective magnetic insulators but no longer show magnetodielectric effects. Hence, we conclude that the conditions under which arrays of ferromagnetic wires exhibit effective permittivity and permeability that are simultaneously significant and tuneable by a static magnetic field tend to be mutually exclusive.

Next, we apply our theoretical formalism to the study of the effective permeability of dense arrays of nanowires (i.e., characterized by negligible skin effect) embedded in a dielectric membrane. In these arrays, the individual wires exhibit a bistable response as a function of the static axial magnetic field, so that when the array is partially demagnetized, the wires split into two oppositely magnetized populations, the relative proportions of which can be adjusted by using minor hysteresis cycles. Further, the presence of these two populations strongly modifies the effective permeability of the array, which may then display two distinct absorption peaks. We account for this double resonance phenomenon by generalizing our homogenization procedure to the case of an array composed of two populations of interacting bistable nanowires. This yields analytical expressions for the diagonal and off-diagonal components of the effective permeability tensor, from which we deduce explicit relations for the two resonance frequencies.

In order to validate our effective permeability model, broadband microstrip line ferromagnetic resonance measurements (1–40 GHz) have been performed on an array of  $\text{Co}_{94}\text{Fe}_5\text{B}_1$  nanowires, of average diameter 45 nm, embedded into an alumina membrane of average interpore distance 110 nm. These show that the complex permeability spectra extracted from the experimental data are generally in excellent agreement with the theoretical spectra. In particular, the model accounts well for the dependence of the shape, amplitude, position, and width of the two-peak permeability spectra as a function of the applied static magnetic field and the remanent magnetization of the array. Discrepancies observed when the peaks are close to each other are attributed to spatial fluctuations of the local interaction field, which are not accounted for in our model.

Finally, we summarize the main results of this work and highlight the original contributions, limits, and possible extensions of our theoretical model.

# TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS . . . . .	iii
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	ix
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	xii
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xv
LISTE DES FIGURES . . . . .	xvi
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xviii
LISTE DES SIGLES ET SYMBOLES . . . . .	xix
CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 Mise en contexte : les métamatériaux électromagnétiques . . . . .	1
1.2 Problématique : modélisation des propriétés électromagnétiques effectives . . . .	4
1.3 Objectifs du projet de recherche . . . . .	8
1.4 Organisation de la thèse . . . . .	10
1.5 Communications scientifiques . . . . .	11
CHAPITRE 2 APPROCHE THÉORIQUE GÉNÉRALE . . . . .	13
2.1 Introduction . . . . .	13
2.2 Définition du système étudié . . . . .	13
2.3 Réponse externe d'un fil ferromagnétique individuel . . . . .	19
2.4 Réponse macroscopique du réseau de fils et propriétés électromagnétiques ef- fectives . . . . .	23
2.5 Théories de milieu effectif . . . . .	25
2.6 Procédure d'homogénéisation . . . . .	27
2.7 Diffusion d'une onde électromagnétique plane par un fil ferromagnétique ai- manté axialement . . . . .	31
2.7.1 Solution générale du problème de diffusion . . . . .	31
2.7.2 Solution du problème de diffusion en régime quasi statique étendu . . . .	35

2.8	Sommaire . . . . .	36
CHAPITRE 3 PROPRIÉTÉS ÉLECTROMAGNÉTIQUES DE RÉSEAUX DE FILS FERROMAGNÉTIQUES . . . . . 38		
3.1	Introduction . . . . .	38
3.2	Propriétés magnétiques . . . . .	39
3.2.1	Réponse d'un fil individuel : tenseur de susceptibilité externe . . . . .	39
3.2.2	Réponse du réseau de fils : tenseur de perméabilité effective . . . . .	44
3.2.3	Étude de cas limites . . . . .	48
3.3	Propriétés électriques . . . . .	56
3.3.1	Réponse d'un fil individuel : susceptibilité externe . . . . .	56
3.3.2	Réponse du réseau de fils : permittivité effective . . . . .	58
3.3.3	Analyse de la solution . . . . .	61
3.3.4	Étude de cas limites . . . . .	67
3.4	Réponse effective externe et interactions dipolaires . . . . .	71
3.4.1	Tenseur de susceptibilité magnétique effective externe . . . . .	72
3.4.2	Interactions dipolaires . . . . .	74
3.4.3	Limite quasi statique et tenseurs de désaimantation effectifs . . . . .	77
3.5	Sommaire . . . . .	79
CHAPITRE 4 APPLICATION ET DISCUSSION DU MODÈLE . . . . . 82		
4.1	Introduction . . . . .	82
4.2	Réponse magnétique . . . . .	83
4.2.1	Influence de l'effet de peau sur la réponse magnétique d'un fil individuel de nickel . . . . .	83
4.2.2	Perméabilité renormalisée de fils magnétiques : comparaison entre con- ducteurs et isolants . . . . .	87
4.2.3	Réseaux de fils et perméabilité négative . . . . .	92
4.3	Réponse électrique . . . . .	96
4.3.1	Permittivité effective de réseaux denses . . . . .	97
4.3.2	Réponse magnétodiélectrique de réseaux dilués . . . . .	100
4.3.3	Permittivité de réseaux de nanofils de longueur finie . . . . .	103
4.4	Réponse électromagnétique et synthèse . . . . .	108
CHAPITRE 5 RÉPONSE MAGNÉTIQUE EFFECTIVE DE RÉSEAUX NON SATU- RÉS DE NANOFILS FERROMAGNÉTIQUES BISTABLES . . . . . 113		
5.1	Mise en contexte : réseaux de nanofils ferromagnétiques . . . . .	113

5.1.1	Propriétés magnétiques à l'état saturé . . . . .	115
5.1.2	Réseaux non saturés et double résonance . . . . .	116
5.1.3	Organisation du chapitre . . . . .	118
5.2	Modèle théorique . . . . .	118
5.2.1	Considérations préliminaires et configuration magnétique statique . . .	118
5.2.2	Formalisme de Maxwell Garnett . . . . .	120
5.2.3	Réponse d'un fil individuel : tenseur de susceptibilité externe . . . . .	123
5.2.4	Réponse du réseau de fils : tenseur de perméabilité effective . . . . .	126
5.2.5	Conditions de résonance . . . . .	127
5.2.6	Étude des modes propres . . . . .	132
5.3	Comparaison avec l'expérience . . . . .	135
5.3.1	Méthode expérimentale . . . . .	135
5.3.2	Double résonance ferromagnétique . . . . .	140
5.3.3	Interactions dipolaires . . . . .	140
5.3.4	États rémanents . . . . .	143
5.4	Discussion . . . . .	145
5.5	Sommaire . . . . .	146
CHAPITRE 6	CONCLUSION . . . . .	148
6.1	Synthèse et contributions originales du travail . . . . .	148
6.2	Perspectives et travaux futurs . . . . .	153
RÉFÉRENCES	. . . . .	160
ANNEXES	. . . . .	174

# LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Développements en série de Maclaurin des fonctions de Bessel et Hankel et de leur dérivée première pour les ordres 0 et $\pm 1$ . . . . .	39
Tableau 4.1	Propriétés intrinsèques des fils de Ni et de YIG considérés dans les calculs théoriques. . . . .	82
Tableau 5.1	Paramètres physiques utilisés dans les calculs théoriques pour modéliser les résultats expérimentaux. . . . .	139
Tableau 6.1	Fonctions de réponse associées aux quatre niveaux hiérarchiques de l'approche théorique, introduits pour décrire la réponse de réseaux de fils ferromagnétiques. . . . .	149



# LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Représentation schématique d'un réseau saturé de fils ferromagnétiques aimantés axialement et définition des paramètres géométriques pertinents et du système de coordonnées cartésiennes. . . . .	14
Figure 2.2	Représentation schématique des niveaux d'approximation décrivant les réponses dipolaires externes de la polarisation et de l'aimantation d'un fil soumis à des champs dynamiques locaux spatialement uniformes. . .	22
Figure 2.3	Représentation conceptuelle de la procédure d'homogénéisation d'un réseau de fils ferromagnétiques. . . . .	24
Figure 2.4	Représentation schématique du réseau de fils ferromagnétiques incorporés dans une matrice diélectrique et définition de la cellule unitaire équivalente plongée dans le milieu effectif. . . . .	28
Figure 2.5	Représentation schématique de la diffusion d'une onde électromagnétique plane par un fil ferromagnétique aimanté axialement. . . . .	32
Figure 3.1	Problème de conditions aux frontières à résoudre pour déterminer le tenseur de perméabilité effective d'un réseau de fils ferromagnétiques. .	44
Figure 3.2	Problème de conditions aux frontières à résoudre pour déterminer la permittivité effective d'un réseau de fils ferromagnétiques. . . . .	59
Figure 4.1	Partie imaginaire de la composante diagonale du tenseur de susceptibilité externe du fil en fonction du champ magnétique statique appliqué, pour un fil individuel de Ni de rayon allant de 10 nm à 100 $\mu\text{m}$ . . . . .	84
Figure 4.2	Comportement des paramètres de résonance ferromagnétique d'un fil de Ni en fonction de l'importance de l'effet de peau. . . . .	85
Figure 4.3	Comportement en fréquence de trois fonctions de réponse magnétiques d'un fil unique de Ni et d'un fil unique de YIG. . . . .	88
Figure 4.4	Perméabilité effective relative $\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}/\mu_0$ en fonction de la fréquence pour un réseau de fils de Ni de rayon allant de 100 nm à 100 $\mu\text{m}$ . . . . .	93
Figure 4.5	Paramètre d'amortissement critique $\tilde{\alpha}_c$ d'un réseau de fils de Ni en fonction de l'importance de l'effet de peau. . . . .	95
Figure 4.6	Permittivité effective relative $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}/\epsilon_m$ en fonction de la fréquence pour un réseau de fils de Ni de rayon allant de 100 nm à 100 $\mu\text{m}$ . . . . .	97
Figure 4.7	Comportement en fréquence de la permittivité effective relative $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}/\epsilon_m$ d'un réseau de fils de Ni de rayon 0,5 et 1 $\mu\text{m}$ , pour différentes valeurs du champ magnétique statique appliqué. . . . .	102

Figure 4.8	Représentation schématique d'un réseau de fils ferromagnétiques en fonction du facteur de remplissage des pores de la matrice. . . . .	104
Figure 4.9	Représentation schématique de la procédure d'homogénéisation en deux étapes permettant d'obtenir, dans la limite QS, la permittivité effective de réseaux de nanofils ferromagnétiques de longueur finie. . . . .	106
Figure 4.10	Permittivité effective relative $\epsilon_{\text{eff}}/\epsilon_m$ d'un réseau de nanofils ferromagnétiques de longueur finie en fonction du facteur de remplissage des pores. . . . .	108
Figure 5.1	Représentation schématique d'un réseau de nanofils ferromagnétiques incorporés dans les pores d'une membrane diélectrique. La composition des fils et les paramètres géométriques des réseaux fabriqués au Laboratoire de magnétisme sont indiqués. . . . .	114
Figure 5.2	Représentation schématique d'un réseau non saturé formé de deux populations antiparallèles de nanofils bistables aimantés axialement. . .	119
Figure 5.3	Problème d'homogénéisation à résoudre pour déterminer le tenseur de perméabilité effective d'un réseau non saturé formé de deux populations de nanofils bistables aimantés antiparallèlement. . . . .	122
Figure 5.4	Représentation schématique de la précession de l'aimantation des fils aimantés vers le haut et vers le bas lorsqu'excités dans les modes propres du tenseur de perméabilité effective. . . . .	134
Figure 5.5	Vue en éclaté de la ligne microruban à l'intérieur de laquelle est incorporé le réseau de nanofils ferromagnétiques et définition de la valeur des paramètres géométriques pertinents. . . . .	136
Figure 5.6	Courbe d'hystérésis de l'aimantation normalisée d'un réseau de nanofils de CoFeB, mesurée parallèlement au champ magnétique statique axial. . .	137
Figure 5.7	Dépendance en fréquence de la perméabilité caractéristique relative d'un réseau de nanofils de CoFeB, en différents points situés sur la branche supérieure de la courbe d'hystérésis majeure. . . . .	141
Figure 5.8	Fréquences de résonance mesurées en fonction du champ magnétique statique suivant la branche supérieure de la courbe d'hystérésis majeure d'un réseau de nanofils de CoFeB. . . . .	142
Figure 5.9	Dépendance en fréquence de la perméabilité caractéristique relative d'un réseau de nanofils de CoFeB dans différents états rémanents. . .	144
Figure 5.10	Fréquences de résonance mesurées en fonction de l'aimantation rémanente normalisée d'un réseau de nanofils de CoFeB. . . . .	145

# LISTE DES ANNEXES

Annexe A	Remarques sur la singularité des tenseurs de susceptibilité magnétique de dimension $3 \times 3$ dans l'approximation des petits signaux . . . . .	174
Annexe B	Démonstration de l'équivalence de deux procédures d'homogénéisation dans la limite isotrope . . . . .	181
Annexe C	Dérivation du paramètre d'amortissement critique dans la limite quasi statique . . . . .	184

# LISTE DES SIGLES ET SYMBOLES

## Sigles

EQS	Quasi statique étendu ( <i>extended quasistatic</i> )
FMAR	Antirésonance ferromagnétique ( <i>ferromagnetic antiresonance</i> )
FMR	Résonance ferromagnétique ( <i>ferromagnetic resonance</i> )
IP	Dans le plan ( <i>in-plane</i> )
OP	Hors plan ( <i>out-of-plane</i> )
QS	Quasi statique
SE	Effet de peau ( <i>skin effect</i> )
SI	Système international d'unités
TE	Transverse électrique
TEM	Transverse électromagnétique
TM	Transverse magnétique
YIG	Grenat d'yttrium et de fer ( <i>yttrium iron garnet</i> )

## Symboles latins

$a$	Rayon d'un fil
$a_0$	Coefficient d'amplitude (complexe) du mode 0 de l'onde diffusée
$a_{\pm 1}$	Coefficient d'amplitude (complexe) du mode $\pm 1$ de l'onde diffusée
$a_n$	Coefficient d'amplitude (complexe) du mode $n$ de l'onde diffusée
$b$	Rayon externe de la cellule unitaire équivalente
$\langle \mathbf{b} \rangle$	Induction magnétique dynamique moyenne à l'intérieur du réseau de fils
$b_0$	Coefficient d'amplitude (complexe) du mode 0 de l'onde transmise
$b_{\pm 1}$	Coefficient d'amplitude (complexe) du mode $\pm 1$ de l'onde transmise
$\mathbf{b}_m$	Induction magnétique dynamique dans la matrice
$\mathbf{b}_{m\uparrow,\downarrow}$	Induction magnétique dynamique dans la matrice au voisinage des fils aimantés vers le haut ( $\uparrow$ ) et vers le bas ( $\downarrow$ )
$b_n$	Coefficient d'amplitude (complexe) du mode $n$ de l'onde transmise
$\mathbf{b}_w$	Induction magnétique dynamique à l'intérieur des fils
$\langle b_{\pm} \rangle$	Composante de l'induction magnétique dynamique moyenne du réseau de fils dans les modes de polarisations circulaires droite (+) et gauche (−)
$\langle \mathbf{b}_{\perp} \rangle$	Induction magnétique dynamique moyenne du réseau de fils dans le plan transverse à l'axe des fils
$c_0$	Vitesse de la lumière dans le vide [ $c_0 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} \approx 2,998 \times 10^8$ m/s]
$c_m$	Vitesse de la lumière dans la matrice
$C_n^{\rho}(k_w \rho)$	Dépendance radiale de la composante selon $\rho$ du mode $n$ du champ magnétique $\mathbf{h}_w$
$C_n^{\phi}(k_w \rho)$	Dépendance radiale de la composante selon $\phi$ du mode $n$ du champ magnétique $\mathbf{h}_w$
$d$	Diamètre d'un fil
$\langle \mathbf{d} \rangle$	Induction électrique dynamique moyenne à l'intérieur du réseau de fils
$\mathbf{d}_m$	Induction électrique dynamique dans la matrice
$\mathbf{d}_w$	Induction électrique dynamique à l'intérieur des fils
$D$	Distance interfil
$\langle \mathbf{e} \rangle$	Champ électrique dynamique moyen à l'intérieur du réseau de fils
$\mathbf{e}_{\text{ext}}$	Champ électrique dynamique externe
$\mathbf{e}_{\text{loc}}$	Champ électrique dynamique local (amplitude complexe : $e_{\text{loc}} = e_{\text{loc}0} e^{-i\omega t}$ )
$\mathbf{e}_m$	Champ électrique dynamique dans la matrice

$\mathbf{e}_{\text{scat}}$	Champ électrique dynamique diffusé par le fil
$\mathbf{e}_w$	Champ électrique dynamique à l'intérieur des fils (amplitude complexe : $e_w$ )
$e_z$	Composante axiale (selon $z$ ) du champ électrique dynamique
$f$	Fraction surfacique du réseau occupée par les fils
$f_0$	Paramètre décrivant l'arrangement des pores du réseau de fils
$f_1$	Proportion non remplie des pores du réseau de fils de longueur finie
$f_2$	Proportion remplie des pores du réseau de fils de longueur finie
$f_{\uparrow,\downarrow}$	Fraction surfacique du réseau occupée par les fils aimantés vers le haut ( $\uparrow$ ) et vers le bas ( $\downarrow$ )
$F(k_w a)$	Facteur de renormalisation en régime quasi statique étendu
$g$	Facteur gyromagnétique (facteur de Landé)
$g_{\uparrow,\downarrow}$	Proportion de fils du réseau aimantés vers le haut ( $\uparrow$ ) et vers le bas ( $\downarrow$ )
$G(k_i a)$	Facteur de renormalisation en régime quasi statique étendu pour une inclusion quelconque
$G(k_w a)$	Facteur de renormalisation en régime quasi statique étendu
$h$	Épaisseur du réseau de fils (hauteur des pores)
$\hbar$	Constante de Planck réduite ( $\hbar \approx 1,055 \times 10^{-34}$ J.s)
$\langle \mathbf{h} \rangle$	Champ magnétique dynamique moyen à l'intérieur du réseau de fils
$\mathbf{h}_{\text{ext}}$	Champ magnétique dynamique externe
$\mathbf{h}_{\text{int}}$	Champ magnétique dynamique dû aux interactions dipolaires interfils
$\mathbf{h}_{\text{loc}}$	Champ magnétique dynamique local (amplitude complexe : $h_{\text{loc}} = h_{\text{loc}0} e^{-i\omega t}$ )
$\mathbf{h}_m$	Champ magnétique dynamique dans la matrice
$\mathbf{h}_{m\uparrow,\downarrow}$	Champ magnétique dynamique dans la matrice au voisinage des fils aimantés vers le haut ( $\uparrow$ ) et vers le bas ( $\downarrow$ )
$\mathbf{h}_{\text{scat}}$	Champ magnétique dynamique diffusé par le fil
$\mathbf{h}_{\text{scat}\uparrow,\downarrow}$	Champ magnétique dynamique diffusé par les fils aimantés vers le haut ( $\uparrow$ ) et vers le bas ( $\downarrow$ )
$\mathbf{h}_w$	Champ magnétique dynamique à l'intérieur des fils
$\mathbf{h}_{w\uparrow,\downarrow}$	Champ magnétique dynamique à l'intérieur des fils aimantés vers le haut ( $\uparrow$ ) et vers le bas ( $\downarrow$ )
$h_\phi$	Composante circonférentielle (selon $\phi$ ) du champ magnétique dynamique

$\langle h_{\pm} \rangle$	Composante du champ magnétique dynamique moyen du réseau de fils dans les modes de polarisations circulaires droite (+) et gauche (-)
$\langle \mathbf{h}_{\perp} \rangle$	Champ magnétique dynamique moyen du réseau de fils dans le plan transverse à l'axe des fils
$\mathbf{H}_{\text{ext}0}$	Champ magnétique statique appliqué (amplitude : $H_{\text{ext}0}$ )
$H_n^{(1)}(u)$	Fonction de Hankel de première espèce d'ordre $n$
$H_r$	Champ de renversement d'un cycle d'hystérésis mineur
$\mathbf{H}_w$	Champ magnétique total à l'intérieur des fils (amplitude : $H_w$ )
$\mathbf{H}_{w0}$	Champ magnétique statique à l'intérieur des fils (amplitude $H_{w0}$ )
$\mathbf{H}_{w0\uparrow,\downarrow}$	Champ magnétique statique à l'intérieur des fils aimantés vers le haut ( $\uparrow$ ) et vers le bas ( $\downarrow$ )
$\mathbf{H}_{w\uparrow,\downarrow}$	Champ magnétique total à l'intérieur des fils aimantés vers le haut ( $\uparrow$ ) et vers le bas ( $\downarrow$ )
$i$	Unité imaginaire ( $i = \sqrt{-1}$ )
$\bar{I}$	Matrice identité
$J_n(u)$	Fonction de Bessel de première espèce d'ordre $n$
$k_c$	Amplitude (complexe) du vecteur d'onde caractéristique de la ligne microruban
$\mathbf{k}_{\text{eff}}$	Vecteur d'onde à l'intérieur du milieu effectif (amplitude complexe : $k_{\text{eff}}$ )
$\bar{\bar{k}}_{\text{eff}}$	Matrice antisymétrique dont le produit avec un vecteur arbitraire donne un résultat identique au produit vectoriel de $\mathbf{k}_{\text{eff}}$ avec ce même vecteur
$\mathbf{k}_{\text{ext}}$	Vecteur d'onde dans le milieu à l'extérieur du réseau (amplitude complexe : $k_{\text{ext}}$ )
$k_i$	Amplitude (complexe) du vecteur d'onde à l'intérieur d'une inclusion
$k_m$	Amplitude (complexe) du vecteur d'onde dans la matrice
$\mathbf{k}_w$	Vecteur d'onde à l'intérieur des fils (amplitude complexe : $k_w$ )
$k_{w0}$	Amplitude (complexe) du vecteur d'onde à l'intérieur d'un fil non magnétique (c.-à-d., avec $\bar{\bar{\mu}}_w \rightarrow \mu_0$ )
$K(k_w a)$	Facteur de renormalisation en régime quasi statique étendu
$l$	Rapport entre l'épaisseur $h$ et le diamètre $2R$ du réseau de fils
$L$	Longueur d'un fil
$L_{\text{ext}}$	Inductance externe d'un fil placé dans le réseau

$L_w$	Magnétoinductance d'un fil (inductance interne d'un fil ferromagnétique)
$\langle \mathbf{m} \rangle$	Aimantation dynamique moyenne du réseau de fils
$\langle \mathbf{m}_s \rangle$	Aimantation dynamique moyenne d'une inclusion sphérique en régime quasi statique étendu
$\mathbf{m}_w$	Aimantation dynamique d'un fil
$\langle \mathbf{m}_w \rangle$	Aimantation dynamique moyenne d'un fil en régime quasi statique étendu
$\mathbf{m}_{w\uparrow,\downarrow}$	Aimantation dynamique des fils aimantés vers le haut ( $\uparrow$ ) et vers le bas ( $\downarrow$ )
$\langle \mathbf{M}_0 \rangle$	Aimantation statique moyenne du réseau de fils (amplitude : $\langle M_0 \rangle$ )
$\langle M_{0r} \rangle$	Aimantation rémanente du réseau de fils
$\langle M_{0s} \rangle$	Aimantation à saturation du réseau de fils
$M_s$	Aimantation spontanée d'un fil
$\mathbf{M}_w$	Aimantation totale d'un fil
$\mathbf{M}_{w0}$	Aimantation statique d'un fil (amplitude : $M_s$ )
$\mathbf{M}_{w\uparrow,\downarrow}$	Aimantation totale des fils aimantés vers le haut ( $\uparrow$ ) et vers le bas ( $\downarrow$ )
$n_{\max}$	Nombre de fils sur un segment de droite, de longueur $R$ , reliant le centre du réseau à sa circonférence
$n_w$	Indice de réfraction complexe du métal ferromagnétique qui constitue les fils
$\bar{\bar{N}}$	Tenseur de désaimantation dû aux interactions dipolaires intra et interfils (composantes : $N_{\text{ip}}$ et $N_{\text{op}}$ )
$\bar{\bar{N}}_d$	Tenseur de désaimantation de forme d'un disque de rayon $R$ et de hauteur $h$ (composantes : $N_{\text{ip}}^d$ et $N_{\text{op}}^d$ )
$\bar{\bar{N}}_{\text{eff}}$	Tenseur de désaimantation effectif du réseau de fils (composantes $N_{\text{ip}}^{\text{eff}}$ et $N_{\text{op}}^{\text{eff}}$ )
$\bar{\bar{N}}_{\text{int}}$	Tenseur de désaimantation dû aux interactions dipolaires interfils (composantes : $N_{\text{ip}}^{\text{int}}$ et $N_{\text{op}}^{\text{int}}$ )
$\bar{\bar{N}}_w$	Tenseur de désaimantation de forme d'un fil individuel de rayon $a$ et de longueur $L$ (composantes $N_{\text{ip}}^w$ et $N_{\text{op}}^w$ )
$\bar{\bar{N}}_{w\perp}$	Tenseur de désaimantation de forme transverse d'un fil individuel de rayon $a$ et de longueur $L$ ( $\bar{\bar{N}}_{w\perp}$ est égal à $N_{\text{ip}}^w \bar{\bar{I}}$ )
$\langle \mathbf{p} \rangle$	Polarisation dynamique moyenne du réseau de fils
$\langle \mathbf{p}_w \rangle$	Polarisation dynamique moyenne d'un fil en régime quasi statique étendu



$q$	Facteur de remplissage géométrique de la ligne microruban
$\mathbf{r}$	Vecteur position tridimensionnel (amplitude : $r$ )
$\hat{\mathbf{r}}$	Vecteur unitaire dans la direction radiale en coordonnées sphériques
$R$	Rayon du réseau de fils
$R_{\text{dc}}$	Résistance d'un fil en courant continu
$s$	Paramètre de longueur normalisée du réseau de fils ( $s = L/2D$ )
$S$	Coefficients de diffusion ( <i>scattering parameters</i> ) de la ligne microruban
$S_{11}$	Coefficient de réflexion de la ligne microruban
$S_{21}$	Coefficient de transmission de la ligne microruban
$t$	Temps
$u$	Variable complexe arbitraire
$V_w$	Volume d'un fil
$x$	Coordonnée du système cartésien $xyz$
$\hat{\mathbf{x}}$	Vecteur unitaire dans la direction $x$
$y$	Coordonnée du système cartésien $xyz$
$\hat{\mathbf{y}}$	Vecteur unitaire dans la direction $y$
$z$	Coordonnée des systèmes cartésien $xyz$ et cylindrique $\rho\phi z$
$\hat{\mathbf{z}}$	Vecteur unitaire dans la direction $z$
$Z_c$	Impédance caractéristique de la ligne microruban
$Z_C$	Impédance due à la capacité d'un fil de longueur finie placé dans le réseau
$Z_L$	Impédance due à l'inductance externe $L_{\text{ext}}$ d'un fil placé dans le réseau
$Z_{\text{tot}}$	Impédance totale d'un fil placé dans le réseau
$Z_w$	Impédance intrinsèque d'un fil

## Symboles grecs

$\alpha$	Paramètre d'amortissement de Gilbert
$\alpha_c$	Paramètre d'amortissement critique au-delà duquel la partie réelle de la composante de perméabilité effective $\mu_{\text{eff}\perp}$ (limite quasi statique) ne devient pas négative entre la résonance et l'antirésonance
$\tilde{\alpha}_c$	Paramètre d'amortissement critique renormalisé au-delà duquel la partie réelle de la composante de perméabilité effective $\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}$ ne devient pas négative entre la résonance et l'antirésonance
$\alpha_{c0}$	Quantité intervenant dans l'expression de $\alpha_c$
$\bar{\bar{\alpha}}_{m,w}$	Tenseur de polarisabilité magnétique d'un fil
$\beta$	Rapport $\mu_t/\mu$ des composantes hors diagonale et diagonale du tenseur de perméabilité intrinsèque gyrotrope $\bar{\bar{\mu}}_w$
$\gamma$	Rapport gyromagnétique ( $\gamma = - \gamma $ )
$\gamma_E$	Constante d'Euler ( $\gamma_E \approx 0,5772$ )
$\gamma_{p,\text{eff}}$	Fréquence (angulaire) de relaxation dans le modèle plasmonique de la permittivité effective du réseau
$\Gamma(u)$	Fonction décrivant la dépendance radiale du champ électrique diffusé par le fil dans le mode $n = 0$
$\delta_{\text{eff}0}$	Profondeur de pénétration non magnétique effective du réseau de fils dans la limite QS
$\delta_i$	Profondeur de pénétration d'une inclusion
$\delta_w$	Profondeur de pénétration d'un fil
$\delta_{w0}$	Profondeur de pénétration non magnétique d'un fil
$\Delta f$	Aimantation moyenne du réseau normalisée par l'aimantation spontanée $M_s$ d'un fil
$\Delta f_r$	Aimantation rémanente du réseau normalisée par l'aimantation spontanée $M_s$ d'un fil
$\Delta g$	Aimantation moyenne du réseau normalisée par son aimantation à saturation $\langle M_{0s} \rangle$
$\Delta g_r$	Aimantation rémanente du réseau normalisée par son aimantation à saturation $\langle M_{0s} \rangle$
$\Delta\omega_{\text{res}}$	Séparation entre les fréquences angulaires de résonance $\omega_{\text{res}+}$ et $\omega_{\text{res}-}$
$\epsilon_0$	Permittivité du vide ( $\epsilon_0 \approx 8,854 \times 10^{-12} \text{ C} \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ )
$\epsilon_c$	Permittivité caractéristique de la ligne microruban
$\epsilon_{\text{eff}}$	Composante axiale du tenseur $\bar{\bar{\epsilon}}_{\text{eff}}$ dans la limite quasi statique (correspond formellement à $\epsilon_{\text{eff}\parallel}$ )

$\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$	Tenseur de permittivité effective du réseau de fils
$\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$	Composante axiale du tenseur $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$ en régime quasi statique étendu (correspond formellement à $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}\parallel}$ )
$\epsilon_{\text{eff}1}$	Permittivité effective axiale, dans la limite quasi statique, de la portion non remplie du réseau de fils de longueur finie
$\epsilon_{\text{eff}2}$	Permittivité effective axiale, dans la limite quasi statique, de la portion remplie du réseau de fils de longueur finie
$\epsilon_i$	Permittivité intrinsèque d'une inclusion
$\tilde{\epsilon}_i$	Permittivité renormalisée d'une inclusion
$\epsilon_m$	Permittivité intrinsèque de la matrice
$\bar{\epsilon}_m$	Tenseur de permittivité intrinsèque de la matrice
$\epsilon_w$	Permittivité intrinsèque d'un fil
$\bar{\epsilon}_w$	Tenseur de permittivité intrinsèque d'un fil
$\tilde{\epsilon}_w$	Permittivité renormalisée d'un fil
$\tilde{\epsilon}_{w,F}$	Permittivité d'un fil renormalisée par le facteur $F(k_w a)$
$\epsilon_\infty$	Permittivité intrinsèque à très hautes fréquences, dans le cadre du modèle de Drude
$\zeta_m$	Impédance d'onde intrinsèque de la matrice
$\zeta_w$	Impédance d'onde intrinsèque d'un fil
$\eta$	Composante diagonale du tenseur $\bar{\eta}_w$ dans la limite quasi statique
$\tilde{\eta}$	Composante diagonale du tenseur $\bar{\eta}_w$ en régime quasi statique étendu
$\eta_{\text{cell}}$	Susceptibilité magnétique externe de la cellule unitaire équivalente dans la limite quasi statique
$\bar{\eta}_{\text{cell}}$	Tenseur de susceptibilité magnétique externe de la cellule unitaire équivalente
$\tilde{\eta}_{\text{cell}}$	Susceptibilité magnétique externe de la cellule unitaire équivalente en régime quasi statique étendu
$\eta_{\text{eff}}$	Composante diagonale du tenseur $\bar{\eta}_{\text{eff}}$ dans la limite quasi statique
$\bar{\eta}_{\text{eff}}$	Tenseur de susceptibilité magnétique effective externe du réseau de fils
$\tilde{\eta}_{\text{eff}}$	Composante diagonale du tenseur $\bar{\eta}_{\text{eff}}$ en régime quasi statique étendu
$\eta_{\text{eff},t}$	Composante hors diagonale du tenseur $\bar{\eta}_{\text{eff}}$ dans la limite quasi statique
$\tilde{\eta}_{\text{eff},t}$	Composante hors diagonale du tenseur $\bar{\eta}_{\text{eff}}$ en régime quasi statique étendu
$\tilde{\eta}_{\text{eff}\parallel}$	Composante axiale du tenseur $\bar{\eta}_{\text{eff}}$ en régime quasi statique étendu

$\eta_t$	Composante hors diagonale du tenseur $\bar{\bar{\eta}}_w$ dans la limite quasi statique
$\tilde{\eta}_t$	Composante hors diagonale du tenseur $\bar{\eta}_w$ en régime quasi statique étendu
$\eta_{t\uparrow,\downarrow}$	Composante hors diagonale du tenseur $\bar{\eta}_{w\uparrow,\downarrow}$ des fils aimantés vers le haut ( $\uparrow$ ) et vers le bas ( $\downarrow$ ) dans la limite quasi statique
$\eta_w$	Susceptibilité magnétique externe d'un fil isotrope dans la limite quasi statique
$\bar{\bar{\eta}}_w$	Tenseur de susceptibilité magnétique externe d'un fil
$\bar{\eta}_w$	Susceptibilité magnétique externe d'un fil isotrope en régime quasi statique étendu
$\bar{\eta}_{w\uparrow,\downarrow}$	Tenseur de susceptibilité magnétique externe des fils aimantés vers le haut ( $\uparrow$ ) et vers le bas ( $\downarrow$ )
$\eta_{\uparrow,\downarrow}$	Composante diagonale du tenseur $\bar{\eta}_{w\uparrow,\downarrow}$ des fils aimantés vers le haut ( $\uparrow$ ) et vers le bas ( $\downarrow$ ) dans la limite quasi statique
$\eta_{\parallel}$	Composante axiale du tenseur $\bar{\eta}_w$ dans la limite quasi statique
$\tilde{\eta}_{\parallel}$	Composante axiale du tenseur $\bar{\eta}_w$ en régime quasi statique étendu
$\eta_{\parallel\uparrow,\downarrow}$	Composante axiale du tenseur $\bar{\eta}_{w\uparrow,\downarrow}$ des fils aimantés vers le haut ( $\uparrow$ ) et vers le bas ( $\downarrow$ ) dans la limite quasi statique
$\theta_k$	Angle entre le vecteur d'onde $\mathbf{k}_w$ et l'aimantation statique $\mathbf{M}_{w0}$ d'un métal ferromagnétique
$\bar{\bar{\kappa}}_{\text{cell}}$	Tenseur de susceptibilité électrique externe de la cellule unitaire équivalente
$\bar{\bar{\kappa}}_{\text{eff}}$	Tenseur de susceptibilité électrique effective externe du réseau de fils
$\bar{\kappa}_w$	Composante axiale du tenseur $\bar{\bar{\kappa}}_w$ dans la limite quasi statique (correspond formellement à $\kappa_{w\parallel}$ )
$\bar{\bar{\kappa}}_w$	Tenseur de susceptibilité électrique externe d'un fil
$\tilde{\kappa}_w$	Composante axiale du tenseur $\bar{\bar{\kappa}}_w$ en régime quasi statique étendu (correspond formellement à $\tilde{\kappa}_{w\parallel}$ )
$\lambda_{\text{eff}}$	Longueur d'onde dans le milieu effectif
$\mu$	Composante diagonale du tenseur $\bar{\bar{\mu}}_w$
$\tilde{\mu}$	Composante diagonale de perméabilité renormalisée
$\mu_0$	Perméabilité du vide ( $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1}$ )
$\mu_B$	Magnéton de Bohr ( $\mu_B \approx 9,274 \times 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2$ )
$\mu_c$	Perméabilité caractéristique de la ligne microruban
$\mu_{\text{eff}}$	Composante diagonale du tenseur $\bar{\bar{\mu}}_{\text{eff}}$ dans la limite quasi statique
$\bar{\bar{\mu}}_{\text{eff}}$	Tenseur de perméabilité effective du réseau de fils

$\tilde{\mu}_{\text{eff}}$	Composante diagonale du tenseur $\bar{\bar{\mu}}_{\text{eff}}$ en régime quasi statique étendu
$\mu_{\text{eff},t}$	Composante hors diagonale du tenseur $\bar{\bar{\mu}}_{\text{eff}}$ dans la limite quasi statique
$\tilde{\mu}_{\text{eff},t}$	Composante hors diagonale du tenseur $\bar{\bar{\mu}}_{\text{eff}}$ en régime quasi statique étendu
$\mu_{\text{eff}\pm}$	Composante du tenseur $\bar{\bar{\mu}}_{\text{eff}}$ associée aux modes de polarisations circulaires droite (+) et gauche (−) dans la limite quasi statique
$\mu_{\text{eff}\pm\uparrow,\downarrow}$	Composante du tenseur $\bar{\bar{\mu}}_{\text{eff}}$ associée aux modes de polarisations circulaires droite (+) et gauche (−) et due aux fils aimantés vers le haut (↑) et vers le bas (↓) dans la limite quasi statique
$\mu_{\text{eff}\parallel}$	Composante axiale du tenseur $\bar{\bar{\mu}}_{\text{eff}}$ dans la limite quasi statique
$\tilde{\mu}_{\text{eff}\parallel}$	Composante axiale du tenseur $\bar{\bar{\mu}}_{\text{eff}}$ en régime quasi statique étendu
$\mu_{\text{eff}\perp}$	Perméabilité de Voigt effective dans la limite quasi statique
$\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}$	Perméabilité de Voigt effective en régime quasi statique étendu
$\mu_i$	Perméabilité intrinsèque d'une inclusion
$\tilde{\mu}_i$	Perméabilité renormalisée d'une inclusion
$\mu_m$	Perméabilité intrinsèque de la matrice
$\bar{\bar{\mu}}_m$	Tenseur de perméabilité intrinsèque de la matrice
$\mu_t$	Composante hors diagonale du tenseur $\bar{\bar{\mu}}_w$
$\tilde{\mu}_t$	Composante hors diagonale de perméabilité renormalisée
$\mu_w$	Perméabilité intrinsèque d'un fil isotrope
$\mu_w(\theta_k)$	Perméabilité scalaire équivalente associée à l'onde qui se propage dans un métal ferromagnétique avec un vecteur d'onde $\mathbf{k}_w$ faisant un angle $\theta_k$ avec la direction de l'aimantation statique $\mathbf{M}_{w0}$
$\bar{\bar{\mu}}_w$	Tenseur de perméabilité intrinsèque d'un fil
$\tilde{\mu}_w$	Perméabilité renormalisée d'un fil isotrope
$\mu_{\parallel}$	Composante du tenseur $\bar{\bar{\mu}}_w$ parallèle à l'axe de gyrotropie (c.-à-d., selon la direction de l'aimantation statique $\mathbf{M}_{w0}$ )
$\tilde{\mu}_{\parallel}$	Composante axiale de perméabilité renormalisée
$\mu_{\perp}$	Perméabilité de Voigt
$\tilde{\mu}_{\perp}$	Perméabilité de Voigt renormalisée
$\rho$	Coordonnée radiale du système cylindrique $\rho\phi z$
$\hat{\rho}$	Vecteur unitaire dans la direction $\rho$
$\sigma_{\text{eff}}$	Conductivité électrique effective du réseau de fils dans la limite quasi statique
$\sigma_w$	Conductivité électrique intrinsèque d'un fil

$\tau$	Temps de relaxation du gaz électronique dans le cadre du modèle de Drude
$\phi$	Coordonnée azimutale du système cylindrique $\rho\phi z$
$\hat{\phi}$	Vecteur unitaire dans la direction $\phi$
$\chi$	Composante diagonale du tenseur $\bar{\chi}_w$
$\chi_{\text{eff}}$	Composante diagonale du tenseur $\bar{\chi}_{\text{eff}}$ dans la limite quasi statique
$\bar{\chi}_{\text{eff}}$	Tenseur de susceptibilité magnétique effective du réseau
$\chi_{\text{eff},t}$	Composante hors diagonale du tenseur $\bar{\chi}_{\text{eff}}$ dans la limite quasi statique
$\chi_t$	Composante hors diagonale du tenseur $\bar{\chi}_w$
$\chi_w$	Susceptibilité magnétique intrinsèque d'un fil isotrope
$\bar{\chi}_w$	Tenseur de susceptibilité magnétique intrinsèque d'un fil
$\chi_{\parallel}$	Composante axiale du tenseur $\bar{\chi}_w$
$\omega$	Fréquence angulaire
$\omega_0$	Fréquence angulaire proportionnelle à l'amplitude $H_{\text{ext}0}$ du champ magnétique statique appliqué
$\omega_{\text{ar}}$	Fréquence angulaire d'antirésonance ferromagnétique d'un fil individuel dans la limite d'effet de peau
$\omega_{\text{cyl}}$	Fréquence angulaire de résonance ferromagnétique d'un fil individuel dans la limite quasi statique
$\omega_H$	Fréquence angulaire proportionnelle à l'amplitude $H_{w0}$ du champ magnétique statique à l'intérieur des fils
$\omega_H^*$	Fréquence angulaire complexe égale à $\omega_H - i\alpha\omega$
$\omega_M$	Fréquence angulaire proportionnelle à l'aimantation spontanée $M_s$
$\omega_p$	Fréquence angulaire plasma
$\omega_{p,\text{eff}}$	Fréquence angulaire plasma effective du réseau de fils
$\omega_{\text{res}}$	Fréquence angulaire de résonance ferromagnétique d'un fil
$\bar{\omega}_{\text{res}}$	Valeur moyenne de $\omega_{\text{res}+}$ et $\omega_{\text{res}-}$
$\omega_{\text{res,eff}}$	Fréquence angulaire de résonance du réseau de fils
$\omega_{\text{res,eff}}^*$	Fréquence angulaire de résonance complexe égale à $\omega_{\text{res,eff}} - i\alpha\omega$
$\omega_{\text{res}\pm}$	Fréquence angulaire de résonance des modes de polarisations circulaires droite (+) et gauche (-)
$\omega_{\delta}$	Fréquence angulaire à laquelle la profondeur de pénétration non magnétique $\delta_{w0}$ devient égale au rayon $a$ du fil (c.-à-d., $a/\delta_{w0} = 1$ lorsque $\omega = \omega_{\delta}$ )

$\omega_{\pm}$	Fréquence angulaire à laquelle la partie réelle de $\mu_{\text{eff}\perp}$ s'annule, correspondant à la résonance $(-)$ et à l'antirésonance $(+)$
$\omega_{\perp}$	Fréquence angulaire de résonance ferromagnétique d'un fil individuel dans la limite d'effet de peau
$\omega_{\uparrow,\downarrow}$	Fréquence angulaire de résonance dans le champ local des fils aimantés vers le haut $(\uparrow)$ et vers le bas $(\downarrow)$
$\omega_{\uparrow,\downarrow}^*$	Fréquence angulaire complexe égale à $\omega_{\uparrow,\downarrow} - i\alpha\omega$
$\Omega_{\pm}$	Dénominateur de $\mu_{\text{eff}\pm}$

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

### 1.1 Mise en contexte : les métamatériaux électromagnétiques

Le développement d'applications plus performantes dans les technologies de l'information et des télécommunications s'appuie en grande partie sur notre capacité à comprendre et à contrôler la réponse électromagnétique des matériaux qui constituent les dispositifs. Dans ce contexte, la dernière décennie a été marquée par l'émergence d'une nouvelle classe de matériaux, les *métamatériaux électromagnétiques*, qui permettent d'élargir considérablement notre maîtrise des phénomènes électromagnétiques dans la matière et qui apparaissent comme des candidats prometteurs pour des applications technologiques, notamment dans les hyperfréquences et les fréquences optiques [1–4].

Les métamatériaux électromagnétiques consistent en des matériaux composites artificiels qui présentent des fonctions de réponse et des relations de dispersion uniques ou hors du commun, souvent inaccessibles aux matériaux naturels. Ils sont typiquement constitués d'inclusions conductrices ou de permittivité élevée, de composition et de géométrie (taille, forme, orientation, séparation, arrangement, etc.) choisies, incorporées dans une matrice hôte. Leur structuration sous-longueur d'onde permet de les traiter comme des matériaux homogènes, caractérisés par une permittivité et une perméabilité macroscopiques effectives. Ces fonctions de réponse peuvent alors être déterminées à l'aide de théories de milieu effectif [5] et vont dépendre à la fois des propriétés intrinsèques des inclusions, de leurs paramètres géométriques et de leurs interactions mutuelles.

L'engouement actuel pour les métamatériaux et l'étude de leurs propriétés électromagnétiques s'explique notamment par la démonstration expérimentale, dans les hyperfréquences, d'une permittivité et d'une perméabilité simultanément négatives [6], puis d'un indice de réfraction négatif [7] dans une structure périodique formée par l'association de réseaux de fils métalliques [8] et de résonateurs annulaires fendus (en anglais, *split ring resonators*) [9], caractérisés respectivement par une permittivité et une perméabilité effectives négatives. Ces résultats ont permis de vérifier certaines des prédictions théoriques formulées à la fin des années 1960 par Veselago [10], qui a étudié la réponse d'un matériau hypothétique décrit par une permittivité et une perméabilité à la fois isotropes, réelles et négatives. Il a démontré qu'une onde qui se propage dans un tel milieu possède des propriétés électromagnétiques



renversées par rapport à celles des matériaux « conventionnels », en particulier un indice de réfraction réel et négatif, de même que des vecteurs d'onde et de Poynting antiparallèles.<sup>1</sup> Or, pendant plus de 30 ans, peu d'attention a été portée aux prédictions de Veselago, notamment en raison de l'absence de matériaux isotropes connus qui soient caractérisés à la fois par un indice de réfraction négatif et de faibles pertes.

L'intérêt pour le sujet s'est toutefois ravivé au cours des dix dernières années, en particulier grâce aux travaux de Pendry *et al.* [8, 9], qui ont étudié deux structures artificielles permettant d'obtenir séparément des réponses électrique et magnétique négatives dans les hyperfréquences. D'une part, ils ont réintroduit une idée connue depuis les années 1960 [13], voulant qu'un réseau de longs fils métalliques parallèles soumis à un champ électrique dynamique axial se comporte comme un plasma artificiel dilué, c'est-à-dire avec une permittivité effective négative sous la fréquence plasma du réseau [8]. De plus, lorsque l'effet de peau dans les fils est assez important pour limiter les pertes ohmiques, cette fréquence plasma effective est alors contrôlée par la géométrie du réseau et les propriétés de la matrice hôte, mais demeure essentiellement indépendante de la composition des fils.

D'autre part, ils ont montré qu'une inclusion métallique constituée de deux anneaux fendus concentriques et soumise à un champ magnétique dynamique normal au plan des anneaux engendre un moment magnétique dipolaire effectif, caractérisé par une dispersion en fréquence équivalente à celle d'un circuit résonant de type RLC [9].<sup>2</sup> Il en résulte que la réponse collective d'un ensemble de tels anneaux peut être interprétée comme une perméabilité effective de forme lorentzienne, dont la partie réelle peut devenir négative entre les fréquences de résonance et d'antirésonance du réseau.

Comme dans le cas de la réponse plasmonique d'un réseau de fils métalliques, les caractéristiques spectrales de la perméabilité effective résonante d'un réseau d'anneaux conducteurs sont déterminées par la géométrie et l'environnement des inclusions, plutôt que par leurs propriétés intrinsèques, lesquelles n'affectent que la composante dissipative de la réponse. Il convient également de souligner que l'obtention d'une perméabilité macroscopique par l'intermédiaire de la réponse inductive et capacitive d'un ensemble de boucles de courant de géométrie choisie constitue un exemple de *magnétisme artificiel*, au sens où une perméabi-

---

1. Soulignons que lorsque la dissipation est prise en compte, la permittivité et la perméabilité deviennent des nombres complexes, de sorte que le critère de Veselago pour obtenir un indice de réfraction avec une partie réelle négative doit être généralisé en conséquence, comme discuté notamment aux références [11, 12].

2. Notons que la possibilité de produire un moment magnétique effectif à partir de la réponse inductive et capacitive d'anneaux conducteurs fendus était déjà connue dans les années 1950 [14]. Le caractère innovant de la structure proposée par Pendry *et al.* réside plutôt dans l'utilisation d'inclusions constituées de deux anneaux fendus concentriques, entre lesquels existe un couplage capacitif important. Ce couplage permet d'abaisser suffisamment la fréquence de résonance des anneaux pour qu'un réseau formé de tels résonateurs puisse être considéré comme un matériau homogène, décrit par une perméabilité effective macroscopique.

lité effective substantielle et dispersive est obtenue sans l'aide de matériaux intrinsèquement magnétiques.

Depuis la réalisation expérimentale [7] d'un métamatériau à indice de réfraction négatif basé sur les deux structures proposées par Pendry *et al.* [8, 9], la plupart des métamatériaux considérés dans la littérature s'appuient sur de telles combinaisons d'inclusions formées de métaux non magnétiques et arrangées en deux sous-réseaux indépendants, l'un associé à la permittivité effective et l'autre à la perméabilité effective. Ce type de métamatériaux possède toutefois plusieurs restrictions et lacunes [15–18], notamment une réponse anisotrope, une structure relativement complexe, une faible homogénéité et une fréquence d'opération fixée par la géométrie, laquelle mène à une largeur de bande relativement étroite et à une ajustabilité par un paramètre externe limitée. De plus, la mise à l'échelle d'inclusions métalliques en vue d'obtenir une réponse magnétique artificielle à des fréquences significativement plus élevées que les hyperfréquences s'avère difficile en raison de la saturation de la fréquence de résonance et de la diminution de la réponse magnétique de ces structures lorsque leur taille est réduite (voir notamment le chapitre 16 de la référence [4]).

Pour palier à certaines de ces limitations, mentionnons que plusieurs auteurs [15–24] ont proposé des matériaux composites axés plutôt sur l'excitation de résonances dipolaires électriques et magnétiques de type Mie [25] à l'intérieur d'inclusions diélectriques sous-longueur d'onde. De tels métamatériaux sont caractérisés par une structure plus simple, des pertes souvent plus faibles et des fréquences d'opération typiquement plus élevées que leur contrepartie à base d'éléments métalliques. Par contre, ils requièrent des inclusions avec des permittivités très élevées et demeurent difficilement ajustables à l'aide d'un paramètre externe.

Une approche prometteuse pour l'élaboration de métamatériaux présentant des fonctions de réponse accordables dans les hyperfréquences consiste à utiliser des matériaux intrinsèquement magnétiques, de manière à exploiter leurs résonances naturelles et la richesse de leurs relations de dispersion dans cette gamme de fréquences [26]. Dans ce contexte, des propositions récentes pour l'utilisation d'inclusions ferromagnétiques, caractérisées par une réponse simultanément gyrotrope et dispersive, ont ouvert la voie à une nouvelle classe de métamatériaux dotés d'une perméabilité [27–35] ou d'une permittivité [32, 36–39] effectives ajustables par un champ magnétique statique.

Parmi ces métamatériaux magnétiques, les réseaux de fils à la fois métalliques et ferromagnétiques ont fait l'objet de plusieurs études théoriques et expérimentales au cours des dernières années, motivées par leur potentiel pour des dispositifs en hyperfréquences ajustables ou non réciproques [40–45], des absorbeurs électromagnétiques [46, 47], des applications magnéto-optiques [48, 49] et des métamatériaux à indice de réfraction négatif [50–56]. En particulier, l'analyse de la réponse de réseaux saturés de nanofils ferromagnétiques en

interaction et incorporés dans les pores d’une membrane diélectrique a permis de mettre en évidence la richesse de leur spectre d’excitations magnétiques dans les hyperfréquences, lequel peut supporter aussi bien un mode de précession uniforme [57–61] que des modes non uniformes d’ondes de spin [62–65]. Plus récemment, ces réseaux ont également été considérés à l’état non saturé [66–70], dans lequel leur perméabilité effective peut notamment présenter deux pics d’absorption distincts, associés à la présence de deux populations de fils bistables liés par les interactions dipolaires [67–70].

## 1.2 Problématique : modélisation des propriétés électromagnétiques effectives

La perspective d’obtenir des réponses gyromagnétique et magnétodiélectrique<sup>3</sup> simultanément ajustables par l’application d’un champ magnétique statique motive l’étude de la réponse dans les hyperfréquences de métamatériaux formés d’ensembles d’inclusions à la fois métalliques et intrinsèquement magnétiques, en particulier les réseaux de fils ferromagnétiques. L’exploitation du potentiel technologique de ces milieux magnétiques effectifs requiert alors d’établir des modèles théoriques capables de décrire leur interaction avec une onde électromagnétique. Par définition, les métamatériaux consistent en des matériaux composites homogènes, c’est-à-dire qu’à leur fréquence d’opération, la taille caractéristique de leurs inhomogénéités demeure substantiellement inférieure à la longueur de l’onde avec laquelle ils interagissent. Il en résulte qu’ils peuvent être décrits par l’électrodynamique des milieux continus.

Dans ce contexte, la réponse collective d’un ensemble d’inclusions sous-longueur d’onde incorporées dans une matrice hôte peut être remplacée conceptuellement par celle d’un milieu homogène équivalent, décrit par une permittivité et une perméabilité effectives. De façon générale, ces deux fonctions de réponse peuvent être obtenues à l’aide de théories de milieu effectif, lesquelles permettent de lier les propriétés des constituants individuels au comportement macroscopique du matériau composite global. Or, le développement d’expressions pour la permittivité et la perméabilité effectives de matériaux composites constitués d’inclusions intrinsèquement magnétiques pose plusieurs difficultés théoriques, lesquelles ne sont pas toujours prises en compte convenablement dans la littérature.

Le défi principal de la modélisation des propriétés effectives de ces métamatériaux consiste à incorporer correctement la réponse à la fois dispersive et anisotrope des inclusions métalliques et ferromagnétiques dans les hyperfréquences, laquelle est gouvernée essentiellement par

---

3. Dans le cadre de cette thèse, une réponse magnétodiélectrique correspond à une permittivité effective qui dépend de la valeur du champ magnétique statique.

deux mécanismes distincts : (i) la précession gyromagnétique et résonante de l'aimantation et (ii) l'effet de peau. D'une part, leur perméabilité intrinsèque est un tenseur gyrotrope, dont les composantes diagonales et hors diagonales complexes montrent un comportement résonant en fonction de la fréquence et du champ magnétique statique. Cette réponse magnétique est caractérisée par une résonance ferromagnétique (FMR, pour *ferromagnetic resonance*), une antirésonance ferromagnétique (FMAR, pour *ferromagnetic antiresonance*) et une largeur de résonance due aux pertes magnétiques intrinsèques [26].

D'autre part, indépendamment de sa perméabilité intrinsèque, un corps métallique soumis à un champ magnétique dynamique acquiert une aimantation, laquelle tire son origine des courants de Foucault engendrés à l'intérieur de la profondeur de peau [71]. Il en résulte une réponse diamagnétique et dissipative, qui dépend de  $k_i a$ , où  $k_i$  est l'amplitude du vecteur d'onde à l'intérieur d'une inclusion individuelle de taille caractéristique  $a$ . Or, pour les métaux ferromagnétiques dans les hyperfréquences, la nature gyromagnétique de la perméabilité intrinsèque se manifeste dans le comportement dispersif de  $k_i$ , qui à son tour modifie la réponse diamagnétique et les pertes ohmiques générées par les courants de Foucault. Les réponses ferromagnétique et métallique sont donc étroitement liées, le couplage étant maximal lorsque la fréquence de résonance ferromagnétique s'approche de la fréquence à laquelle la profondeur de pénétration devient comparable à la taille des inclusions. Dans ce régime, la diffusion d'une onde électromagnétique par des inclusions simultanément métalliques et gyromagnétiques est caractérisée par des fréquences de résonance et d'antirésonance qui dépendent de la taille et par une largeur de résonance déterminée par l'effet combiné des pertes magnétiques et de conduction [72, 73].

Or, plusieurs caractéristiques propres à cette nature à la fois métallique et ferromagnétique n'ont pas été complètement incorporées dans les modèles visant à décrire les propriétés électromagnétiques de métamatériaux magnétiques. Le comportement macroscopique d'un matériau composite est habituellement lié à la diffusion électromagnétique des inclusions individuelles, par l'intermédiaire de théories de milieu effectif, notamment les formalismes de Maxwell Garnett et de Bruggeman [5]. Dans leur formulation usuelle la plus simple, ces procédures d'homogénéisation sont dérivées dans le cadre de l'approximation quasi statique (QS), laquelle suppose que les champs dynamiques à l'intérieur des inclusions sont spatialement uniformes ou, de façon équivalente, que la condition  $|k_i| a \ll 1$  s'applique. Dans cette limite, les propriétés électriques et magnétiques effectives ne tiennent généralement pas compte de la taille des inclusions et peuvent être déterminées de façon indépendante. Il en résulte que les relations obtenues pour la permittivité effective ne dépendent que de la permittivité des inclusions, alors que celles dérivées pour la perméabilité effective ne font intervenir que la perméabilité des inclusions.

En plus de sa relative simplicité, l'approximation QS possède l'avantage de pouvoir être étendue de façon relativement directe au cas d'inclusions caractérisées par des propriétés intrinsèques anisotropes [5, 74, 75]. Dans ce contexte, plusieurs groupes ont proposé des expressions pour le tenseur de perméabilité effective de matériaux composites formés d'inclusions gyromagnétiques excitées dans un mode de précession uniforme [28, 32, 52, 76–78]. En revanche, l'hypothèse de champs dynamiques spatialement uniformes à l'intérieur des inclusions pose d'importantes restrictions sur leur taille maximale permise et constitue le principal désavantage lié à la limite QS [74]. En particulier, la profondeur de pénétration  $\delta_i = 1/\text{Im}[k_i]$  des champs à l'intérieur d'un métal typique peut facilement devenir inférieure à  $1\ \mu\text{m}$  dans les hyperfréquences, ce qui mène à des effets de propagation et d'atténuation à l'intérieur des inclusions et qui, par conséquent, invalide le recours aux théories QS.

Un modèle théorique qui permet de prendre en compte les difficultés engendrées par le retard électromagnétique à l'intérieur des inclusions a été proposé par L. Lewin en 1947, pour le cas d'un réseau cubique d'inclusions sphériques de permittivité  $\epsilon_i$  et de perméabilité  $\mu_i$  complexes et isotropes [79]. À l'aide de la théorie de la diffusion électromagnétique de Mie [25, 80], il a dérivé les propriétés intrinsèques *renormalisées*  $\tilde{\epsilon}_i = \epsilon_i G(k_i a)$  et  $\tilde{\mu}_i = \mu_i G(k_i a)$  des inclusions sphériques, où  $G(k_i a)$  est un facteur de renormalisation qui incorpore l'effet du retard électromagnétique à l'intérieur des inclusions. Grâce à l'introduction des paramètres renormalisés  $\tilde{\epsilon}_i$  et  $\tilde{\mu}_i$ , la théorie de Lewin constitue une généralisation du formalisme original de Maxwell Garnett [81] à des valeurs arbitraires de  $k_i a$ . Dans cette approche,  $\tilde{\epsilon}_i$  et  $\tilde{\mu}_i$  jouent alors le rôle des propriétés intrinsèques  $\epsilon_i$  et  $\mu_i$ , respectivement. Soulignons également que dans ce régime, les expressions dérivées par Lewin pour la permittivité et la perméabilité effectives du réseau dépendent toutes deux à la fois de la permittivité  $\epsilon_i$  et de la perméabilité  $\mu_i$  intrinsèques des inclusions. En particulier, ces résultats mettent en évidence l'idée qu'au-delà de la limite QS, un composite peut présenter une réponse macroscopique à la fois magnétique et dispersive, même s'il est formé d'inclusions qui intrinsèquement ne le sont pas.

L'approche de Lewin a été subséquentement étendue par Khizhnyak à des inclusions ellipsoïdales [82], puis à des réseaux bidimensionnels de fils infinis [83], mais n'a pas encore été généralisée au cas d'inclusions dotées de propriétés intrinsèques anisotropes. En dépit de cette restriction, la théorie de Lewin a été utilisée au cours des deux dernières décennies pour dériver les propriétés électromagnétiques effectives de divers systèmes composés de particules magnétiques [84–93], c'est-à-dire en considérant les effets du retard électromagnétique  $\propto k_i a$  à l'intérieur des inclusions individuelles, mais en négligeant leur réponse gyromagnétique tensorielle.

Cette question a été récemment considérée par Jin *et al.* [34], qui ont dérivé des expressions pour les paramètres constitutifs effectifs de réseaux denses de fils ferrimagnétiques aimantés

axialement. Leur traitement du problème électromagnétique comporte cependant un certain nombre de lacunes. D’abord, bien qu’ils aient incorporé à la fois la gyrotropie et la dépendance en  $k_i a$  de la réponse des fils individuels, leur modèle résulte tout de même en une perméabilité effective *scalaire*, laquelle s’applique uniquement à un mode de propagation spécifique à l’intérieur d’un réseau d’étendue latérale infinie. Or, la forme gyrotrope complète du tenseur de perméabilité effective est en général requise pour traiter d’autres modes de propagation ou pour décrire adéquatement la réponse d’un réseau de taille finie. En effet, les paramètres constitutifs obtenus à l’aide de théories de milieu effectif ne tiennent en général pas compte des dimensions finies du métamatériau. Ces propriétés doivent alors être distinguées des propriétés mesurées expérimentalement, par exemple en cavité résonante ou en configuration de ligne de transmission. Il est important de souligner que cette distinction demeure souvent implicite dans la littérature portant sur les matériaux composites magnétiques.

De plus, comme aux références [21, 94] traitant de fils isotropes, l’expression développée à la référence [34] pour la permittivité effective de réseaux de fils gyrotropes tient compte de l’impédance interne des fils, mais néglige leur inductance externe. Or, cette dernière quantité doit être prise en compte dans un traitement complet, puisqu’elle fixe, entre autres, la fréquence plasma effective du réseau [8, 95]. Dans ce contexte, deux études [36, 38] ont modélisé la permittivité effective de réseaux de fils ferromagnétiques en incorporant à la fois leur inductance externe et leur magnétoimpédance, laquelle détermine alors la réponse magnétodiélectrique du réseau. Notamment, les travaux de la référence [36] ont vérifié expérimentalement que la permittivité effective dans les hyperfréquences de réseaux dilués de microfils ferromagnétiques caractérisés par un effet de peau modéré dépend fortement de la magnétoimpédance des fils et peut donc être ajustée par l’application d’un champ magnétique statique.

En revanche, leur modèle ne considère toutefois qu’un seul type de réseaux et, par conséquent, n’étudie pas de façon systématique le comportement de la permittivité effective en fonction de la taille et de la séparation des fils, lesquelles contrôlent respectivement l’importance de l’effet de peau et la position de la fréquence plasma effective. De même, ils ne résolvent pas de façon formelle le problème de la diffusion d’une onde électromagnétique par un fil individuel, de sorte que l’importance relative de l’inductance externe et de la magnétoimpédance n’est pas mise en évidence de façon explicite.

La permittivité du réseau est également influencée par la longueur des fils, notamment en ce qui a trait à son caractère fini ou infini.<sup>4</sup> En effet, d’une part, l’application de la formule de Maxwell Garnett à un réseau dense de nanofils ferromagnétiques continus prédit une réponse

---

4. Expérimentalement, les fils peuvent être considérés comme étant de longueur infinie lorsque la continuité électrique est assurée à leurs deux extrémités.

métallique dominée par les pertes ohmiques à l'intérieur des fils [32]. D'autre part, des études théoriques [96] et expérimentales [43, 96] portant sur des réseaux de nanofils semi-isolés et incorporés dans les pores d'une membrane nanoporeuse ont plutôt indiqué un comportement diélectrique, contrôlé essentiellement par les propriétés de la matrice et la géométrie du réseau plutôt que par la conductivité des fils. Dans ce contexte, le rôle de la longueur finie des fils et de leur continuité électrique sur la permittivité effective du réseau mérite d'être approfondi.

La modélisation des propriétés électromagnétiques de métamatériaux formés d'inclusions gyromagnétiques requiert également de prendre en compte leurs interactions mutuelles, notamment lorsque leur densité est élevée. D'abord, la théorie de Maxwell Garnett tient compte des interactions dipolaires *dynamiques* à l'intérieur d'un matériau composite non borné, par l'intermédiaire du champ de cavité de Lorentz. Or, l'hypothèse implicite d'un réseau infini, laquelle se retrouve dans la plupart des études traitant des propriétés électromagnétiques de matériaux composites, empêche la prise en compte des pôles à la surface d'échantillons de taille finie. De plus, lorsque le métamatériau possède une aimantation statique moyenne non nulle, les inclusions sont également soumises à un champ d'interaction *statique*, lequel s'ajoute aux champs appliqué et de désaimantation de forme. Cette contribution n'est toutefois pas prise en compte *a priori* dans le modèle de Maxwell Garnett et doit être explicitement considérée dans le terme de champ statique effectif, lequel apparaît dans les expressions des composantes du tenseur de perméabilité intrinsèque des inclusions (voir notamment la référence [26], p. 23).

Il importe de souligner que cette distinction entre les interactions dipolaires statiques et dynamiques ne ressort pas toujours explicitement dans la littérature portant sur les matériaux composites magnétiques [76, 78, 89]. Dans ce contexte, plusieurs groupes ont étudié l'effet des interactions dipolaires sur la résonance ferromagnétique de matériaux composites magnétiques saturés [57, 61, 97–102]. Or, ces études se limitent à obtenir la position de la résonance, sans toutefois dériver une expression pour le tenseur de perméabilité effective. Notons enfin que la compréhension des interactions dipolaires entre les inclusions est fondamentale pour étudier des métamatériaux caractérisés par une configuration magnétique statique plus complexe, par exemple les réseaux non saturés de nanofils ferromagnétiques bistables, dont le spectre de perméabilité effective présente notamment deux pics de résonance distincts [66–70].

### 1.3 Objectifs du projet de recherche

La section précédente nous a permis d'exposer certains éléments théoriques qui doivent être considérés lors de la modélisation de la réponse électromagnétique de matériaux composites formés d'inclusions à la fois conductrices et intrinsèquement magnétiques. Nous avons



recensé et décrit plusieurs problèmes ou lacunes rencontrés couramment dans la littérature, en particulier l'absence de modèles qui incluent simultanément le caractère gyromagnétique de la perméabilité intrinsèque des inclusions et le retard électromagnétique à l'intérieur de celles-ci. Ces considérations justifient la modélisation des paramètres constitutifs effectifs de métamatériaux magnétiques.

Dans ce contexte, l'objectif général de cette thèse consiste à établir un modèle théorique pour la permittivité et la perméabilité effectives de réseaux de fils à la fois métalliques et ferromagnétiques. Notre formalisme incorporera notamment les effets du retard électromagnétique sur la réponse gyrotrope des fils et l'influence des interactions dipolaires sur le comportement macroscopique de réseaux de taille finie. Pour ce faire, nous développerons une procédure d'homogénéisation qui permettra de lier les propriétés électromagnétiques des fils individuels aux paramètres constitutifs effectifs du matériau composite global. Nous analyserons ensuite notre solution générale en fonction des paramètres géométriques du réseau, en portant une attention particulière à la possibilité d'obtenir, dans les hyperfréquences, des réponses électrique et magnétique simultanément ajustables par un champ magnétique statique et accompagnées de pertes raisonnables. Enfin, nous généraliserons notre modèle de perméabilité effective et le validerons en comparant les spectres théoriques aux spectres extraits de mesures expérimentales en configuration de ligne microruban réalisées sur un réseau de nanofils de CoFeB.

De façon plus précise, l'objectif général sera réalisé par l'atteinte des objectifs spécifiques suivants :

1. Établir une procédure d'homogénéisation, basée sur le formalisme de Maxwell Garnett, qui prend en compte à la fois le retard électromagnétique à l'intérieur des fils et la nature tensorielle de leur perméabilité gyrotrope intrinsèque.
2. Incorporer au modèle l'effet des interactions dipolaires statiques et dynamiques, en particulier pour des réseaux de taille finie.
3. Déterminer l'influence du retard électromagnétique sur la réponse magnétique d'un fil individuel et sur celle du réseau, notamment en ce qui a trait à la position de la résonance et de l'antirésonance, ainsi qu'à la largeur de la courbe d'absorption.
4. Formaliser la dérivation de la permittivité effective de réseaux de fils ferromagnétiques, notamment en explicitant les différentes contributions à l'impédance totale des fils placés dans le réseau.
5. Préciser les conditions de réalisation d'un effet magnétodiélectrique significatif.



6. Évaluer la possibilité théorique d'observer, sur une même plage de fréquences, des dispersions électrique et magnétique significatives et simultanément ajustables par un champ magnétique statique.
7. Généraliser l'expression du tenseur de perméabilité effective au cas de réseaux non saturés de nanofils ferromagnétiques bistables, dans le but de confronter le modèle théorique aux données expérimentales disponibles au Laboratoire de magnétisme et de décrire le phénomène de double résonance ferromagnétique.

## 1.4 Organisation de la thèse

La suite du document s'articule comme suit. Le chapitre 2 établit d'abord l'approche théorique générale à partir de laquelle nous dériverons les propriétés effectives de réseaux de fils ferromagnétiques. Notre procédure d'homogénéisation s'appuie sur le formalisme de Maxwell Garnett, que nous généralisons afin d'incorporer l'effet combiné du retard électromagnétique à l'intérieur des fils et de la nature gyrotrope de leur perméabilité intrinsèque. Ce chapitre présente également la solution générale du problème de la diffusion d'une onde électromagnétique par un fil ferromagnétique aimanté axialement, une étape essentielle qui nous permettra de mieux délimiter les conditions d'application particulières du modèle général.

Au chapitre 3, nous nous appuyons sur la solution du problème de diffusion pour déterminer des expressions analytiques pour la perméabilité et la permittivité effectives de réseaux de fils ferromagnétiques. Ces résultats tiennent compte à la fois de la géométrie du réseau, de l'effet de peau à l'intérieur des fils individuels, de la nature tensorielle de leur réponse gyromagnétique et de leur impédance totale lorsque placés dans le réseau. Nous introduisons également le concept de susceptibilité effective externe d'un matériau composite de taille finie, que nous appliquons au traitement de la résonance ferromagnétique du mode uniforme d'un réseau de fils dont la réponse est dominée par les interactions dipolaires.

L'analyse et la discussion de la solution générale sont ensuite présentées au chapitre 4. Nous étudions en détail l'effet des paramètres géométriques et du retard électromagnétique sur la réponse du réseau et mettons en évidence les conditions qui mènent à une permittivité et une perméabilité effectives substantielles dans les hyperfréquences. De plus, nous établissons les limites fondamentales associées aux réseaux de fils ferromagnétiques et examinons la possibilité théorique d'obtenir des réponses électrique et magnétique simultanément ajustables par un champ magnétique statique.

Le chapitre 5 est consacré à l'étude de réseaux de nanofils bistables. Sous la saturation du réseau, les fils se répartissent en deux populations d'aimantations antiparallèles, de sorte que le spectre de perméabilité effective présente deux pics d'absorption distincts. Pour traiter cette

double résonance ferromagnétique, nous généralisons l'expression du tenseur de perméabilité effective dérivée au chapitre 3 au cas de deux populations de nanofils bistables et déduisons les deux conditions de résonance qui y sont associées. Nous constatons que l'accord observé entre le modèle théorique et les résultats expérimentaux s'avère en général excellent.

Enfin, le chapitre 6 résume les résultats principaux obtenus dans le cadre de cette thèse, décrit les contributions originales du modèle théorique et présente des perspectives pour des travaux futurs.

## 1.5 Communications scientifiques

Les résultats présentés dans le cadre de cette thèse ont mené à quatre publications principales [32, 35, 67, 68] dans des revues avec comité de lecture et à une présentation orale lors d'une conférence internationale. Ces contributions sont décrites sommairement ci-dessous. Mentionnons également que pendant la durée de cette thèse, j'ai également contribué, comme coauteur, à deux actes de conférence avec comité de lecture, sept conférences avec comité de lecture et trois conférences avec invitation.

### Publications dans des revues avec comité de lecture

V. Boucher et D. Ménard, « Effective magnetic properties of arrays of interacting ferromagnetic wires exhibiting gyromagnetic anisotropy and retardation effects », *Physical Review B*, vol. 81, no. 17, p. 174404, 2010. Sélectionné dans le *Virtual Journal of Nanoscale Science & Technology*, vol. 21, no. 20, 2010.

Cet article présente le modèle théorique complet de la réponse magnétique effective de réseaux de fils ferromagnétiques. Le formalisme incorpore simultanément le retard électromagnétique à l'intérieur des fils et leur réponse gyromagnétique intrinsèque, les interactions dipolaires intra et interfils, ainsi que l'effet de la taille finie du réseau. Le contenu de cet article fait notamment l'objet des sections 2.7, 3.2, 3.4 et 4.2 de la thèse.

V. Boucher, L.-P. Carignan, T. Kodera, C. Caloz, A. Yelon et D. Ménard, « Effective permeability tensor and double resonance of interacting bistable ferromagnetic nanowires », *Physical Review B*, vol. 80, no. 22, p. 224402, 2009.

Cet article est consacré à l'étude de la réponse magnétique de réseaux non saturés de nanofils ferromagnétiques répartis en deux populations d'aimantations antiparallèles. Le tenseur

gyrotrope de perméabilité effective du réseau est établi, à partir duquel sont dérivées des expressions explicites pour les deux conditions de résonance associées au caractère bistable de l'aimantation statique des fils. Le modèle est ensuite comparé à des données expérimentales mesurées en configuration de ligne microruban. Les résultats présentés dans cet article composent l'essentiel du chapitre 5 de cette thèse.

L.-P. Carignan, V. Boucher, T. Kodera, C. Caloz, A. Yelon et D. Ménard, « Double ferromagnetic resonance in nanowire arrays », *Applied Physics Letters*, vol. 95, no. 6, p. 062504, 2009. Sélectionné dans le *Virtual Journal of Nanoscale Science & Technology*, vol. 20, no. 8, 2009.

Dans cet article, nous avons fait la démonstration expérimentale du phénomène de double résonance dans les réseaux non saturés de nanofils ferromagnétiques bistables. Le modèle théorique de perméabilité effective qui explique les résultats expérimentaux y est décrit de façon sommaire. Ces travaux sont considérés au chapitre 5 de la thèse.

V. Boucher et D. Ménard, « Electromagnetic properties of ferromagnetic nanowire arrays », *Journal of Applied Physics*, vol. 103, no. 7, p. 07E720, 2008. Sélectionné dans le *Virtual Journal of Nanoscale Science & Technology*, vol. 17, no. 7, 2008.

Cet article propose un modèle préliminaire, basé sur le formalisme de Maxwell Garnett, pour la permittivité et la perméabilité effectives de réseaux de nanofils ferromagnétiques. L'analyse met l'accent sur la possibilité théorique d'obtenir, dans les hyperfréquences, des réponses gyromagnétique et magnétodiélectrique simultanément ajustables par un champ magnétique statique. De plus, le concept de réponse effective externe d'un matériau composite de taille finie est introduit. Des éléments de cet article sont présentés notamment aux chapitres 3 et 4 de la thèse.

### **Présentation orale à une conférence internationale avec comité de lecture**

V. Boucher et D. Ménard, « Electromagnetic properties of ferromagnetic nanowire arrays », 52nd Magnetism and Magnetic Materials Conference, Tampa, Floride, États-Unis, (5–9 novembre 2007, présenté le 6 novembre 2007).

# CHAPITRE 2

## APPROCHE THÉORIQUE GÉNÉRALE

### 2.1 Introduction

Ce chapitre nous permettra d'établir l'approche théorique sur laquelle repose la thèse. Notre objectif principal consiste à développer une procédure générale pour obtenir les propriétés électromagnétiques effectives de réseaux de fils ferromagnétiques, dans le cas où l'effet de peau à l'intérieur des fils modifie de façon non triviale leur réponse gyromagnétique. À la section 2.2, nous allons d'abord définir les paramètres géométriques et l'état magnétique statique du réseau, de même que les propriétés intrinsèques de ses constituants. La description de la méthode de dérivation fera ensuite l'objet des sections 2.3 à 2.6. Nous favoriserons une approche qui met l'accent sur la signification physique du formalisme plutôt que sur ses aspects mathématiques, notamment en insistant sur les liens entre les étapes de la modélisation et sur le fondement des hypothèses et des approximations utilisées. Nous porterons une attention particulière à l'influence du retard électromagnétique sur la réponse dipolaire d'une inclusion gyrotrope et à la justification de la procédure d'homogénéisation, laquelle s'appuie sur la définition d'une cellule unitaire centrée sur le fil et plongée dans le milieu effectif dont les propriétés sont à déterminer. Nous concluons le chapitre à la section 2.7, en présentant la solution générale de la diffusion d'une onde électromagnétique par un fil individuel aimanté axialement. Ce résultat constituera notre point de départ pour dériver, au chapitre 3, la perméabilité et la permittivité effectives de réseaux de fils en interaction.

Avant de poursuivre, soulignons que l'approche théorique qui sera développée aux sections 2.3 à 2.6 s'avère générale et pourrait être adaptée à tout matériau composite dont la structure hiérarchique s'apparente à celle des réseaux de fils, à la condition de modifier en conséquence la forme des expressions pour les paramètres physiques donnés à la section 2.2. De plus, malgré que les réponses électrique et magnétique soient traitées sur un pied d'égalité dans ce chapitre, nous mettrons davantage l'emphasis, au cours des chapitres subséquents, sur les propriétés magnétiques des réseaux de fils.

### 2.2 Définition du système étudié

Considérons un ensemble de fils ferromagnétiques parallèles, de diamètre  $d = 2a$  et de longueur  $L \gg d$ , incorporés dans une matrice circulaire d'épaisseur  $h = L$  et de rayon  $R \gg h$ .

Les fils forment un réseau bidimensionnel de distance interfil moyenne  $D$  et occupent une fraction  $f = f_0 (\pi a^2/D^2)$  de la matrice, où  $f_0$  est une constante qui dépend de la symétrie du réseau (p. ex., carrée, hexagonale ou aléatoire). Pour simplifier le traitement analytique et sans perte de généralité, nous allons poser dans ce chapitre que  $f_0 = 1$ , ce qui correspond à un réseau de symétrie carrée avec  $f = \pi a^2/D^2$ . Nous définissons également un système de coordonnées cartésiennes tel que l'axe  $z$  coïncide avec l'axe des fils et définit la direction hors plan (OP, pour *out-of-plane*), alors que les axes  $x$  et  $y$  correspondent aux directions dans le plan (IP, pour *in-plane*). Une représentation schématique du réseau est montrée à la figure 2.1.

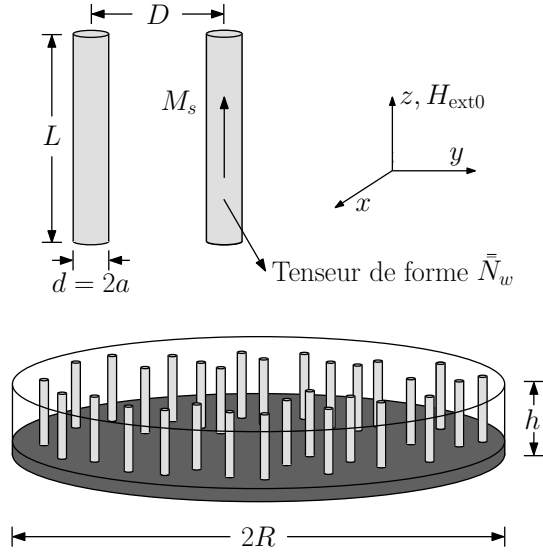


Figure 2.1 Représentation schématique d'un réseau saturé de fils ferromagnétiques aimantés axialement et définition des paramètres géométriques pertinents et du système de coordonnées cartésiennes.

Nous traitons les fils du réseau comme des ellipsoïdes de révolution prolates et monodomaines, soumis à un champ magnétique statique externe  $\mathbf{H}_{\text{ext}0} = H_{\text{ext}0} \hat{\mathbf{z}}$ . Nous supposons que le champ est suffisamment élevé pour saturer les fils selon leur axe, de sorte que  $\mathbf{M}_{w0} = M_s \hat{\mathbf{z}}$  correspond à l'aimantation statique des fils, où la valeur de l'aimantation spontanée  $M_s$  dépend de la nature du matériau et de la température. Cette configuration magnétique statique conduit à un réseau saturé de fils aimantés axialement, caractérisé par une aimantation statique moyenne

$$\langle \mathbf{M}_0 \rangle = f \mathbf{M}_{w0} = f M_s \hat{\mathbf{z}} = \langle M_{0s} \rangle \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.1)$$

où  $\langle M_{0s} \rangle = f M_s$  désigne l'aimantation à saturation du réseau. Notons que le fait de modéliser les fils comme des ellipsoïdes de révolution permet, d'une part, de supposer que leur

aimantation statique  $\mathbf{M}_{w0}$  est spatialement uniforme et, d'autre part, de tenir compte de leur forme par l'intermédiaire du tenseur de désaimantation (ou de dépolérisation)

$$\bar{\bar{N}}_w = \begin{pmatrix} N_{\text{ip}}^w & 0 & 0 \\ 0 & N_{\text{ip}}^w & 0 \\ 0 & 0 & N_{\text{op}}^w \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

où les facteurs de désaimantation dans le plan et hors plan,  $N_{\text{ip}}^w$  et  $N_{\text{op}}^w$ , satisfont la relation  $2N_{\text{ip}}^w + N_{\text{op}}^w = 1$  [103]. Notons que pour de longs fils avec  $L \gg d$ , nous trouvons que  $N_{\text{ip}}^w \approx 1/2$  et  $N_{\text{op}}^w \approx 0$ .

La description de la réponse électromagnétique du réseau requiert de considérer des expressions pour la permittivité et la perméabilité dynamiques intrinsèques de la matrice,  $\bar{\bar{\epsilon}}_m$  et  $\bar{\bar{\mu}}_m$ , et des fils,  $\bar{\bar{\epsilon}}_w$  et  $\bar{\bar{\mu}}_w$ . Ceci consiste à établir les relations constitutives

$$\mathbf{d}_m = \bar{\bar{\epsilon}}_m \mathbf{e}_m, \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{b}_m = \bar{\bar{\mu}}_m \mathbf{h}_m \quad (2.3b)$$

dans la matrice et

$$\mathbf{d}_w = \bar{\bar{\epsilon}}_w \mathbf{e}_w, \quad (2.4a)$$

$$\mathbf{b}_w = \bar{\bar{\mu}}_w \mathbf{h}_w \quad (2.4b)$$

à l'intérieur des fils, lesquelles permettent de lier les inductions aux champs à l'intérieur des deux constituants.<sup>1</sup> En général, les propriétés électromagnétiques  $\bar{\bar{\epsilon}}_m$ ,  $\bar{\bar{\epsilon}}_w$ ,  $\bar{\bar{\mu}}_m$  et  $\bar{\bar{\mu}}_w$  correspondent à des tenseurs d'ordre deux, qui peuvent être représentés par des matrices  $3 \times 3$  dans un système de coordonnées choisi. Leurs composantes sont des nombres complexes, qui peuvent dépendre de la fréquence (dispersion temporelle), de la longueur d'onde (dispersion spatiale), du champ magnétique statique, de la température, etc.<sup>2</sup> Des expressions pour les tenseurs de permittivité et de perméabilité peuvent être obtenues à l'aide de modèles micro-

---

1. Signalons que les expressions pour  $\bar{\bar{\epsilon}}_m$  et  $\bar{\bar{\epsilon}}_w$  incluent la conductivité des matériaux respectifs.

2. Dans le cadre de cette thèse, nous adoptons la convention selon laquelle les vecteurs sont désignés par des lettres en caractère gras, alors que les tenseurs sont dénotés par l'ajout d'une double barre  $\bar{\bar{\cdot}}$  au-dessus du symbole.

scopiques de la matière, lesquels mènent aux équations du mouvement pour la polarisation et l'aimantation dynamiques soumises à des champs électromagnétiques.

D'abord, nous supposons que la matrice est constituée d'un matériau diélectrique et non magnétique, caractérisé par des propriétés électromagnétiques scalaires et locales. La permittivité  $\bar{\epsilon}_m \rightarrow \epsilon_m$  est donc essentiellement réelle (autrement dit,  $\text{Re}[\epsilon_m] \gg \text{Im}[\epsilon_m]$ ) et faiblement dispersive dans les hyperfréquences, alors que la perméabilité  $\bar{\mu}_m \rightarrow \mu_m = \mu_0$  est égale à celle du vide.

La réponse électromagnétique intrinsèque de fils ferromagnétiques conducteurs est toutefois plus complexe et doit être déterminée, en général, par la résolution simultanée des équations de Maxwell, incluant la loi d'Ohm, et de l'équation du mouvement de l'aimantation [104]. D'abord, nous supposons que les propriétés électriques peuvent être décrites dans le cadre du modèle de Drude, qui considère le métal comme un gaz d'électrons libres et suppose l'existence d'un temps de relaxation  $\tau$ , qui décrit les mécanismes de dissipation dans le système [105]. Dans les hyperfréquences, ce modèle mène à une permittivité isotrope, locale et essentiellement imaginaire, donnée par [106]

$$\epsilon_w = \epsilon_\infty - \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i/\tau)} \approx \frac{i\sigma_w}{\omega}, \quad (2.5)$$

avec  $\epsilon_\infty$  la permittivité à très hautes fréquences,  $\epsilon_0$  la permittivité du vide,  $\omega_p$  la fréquence plasma et  $\sigma_w = \epsilon_0 \tau \omega_p^2$  la conductivité de Drude statique. Soulignons que cette expression ignore les effets galvanomagnétiques,<sup>3</sup> néglige les courants de déplacement par rapport aux courants de conduction et suppose que  $\omega\tau \ll 1$  dans les hyperfréquences, correspondant au régime de Hagen-Rubens [106]. La permittivité très élevée ( $|\epsilon_w| \gg \epsilon_0$ ) et imaginaire décrite par l'équation (2.5) mène à une pénétration finie des champs électromagnétiques à l'intérieur du métal, laquelle peut être caractérisée par la profondeur de pénétration non magnétique

$$\delta_{w0} = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma_w\mu_0}}. \quad (2.6)$$

Notons que cette formulation suppose une relation locale entre la densité de courant et le champ électrique (c.-à-d., indépendante du vecteur d'onde  $\mathbf{k}_w$  à l'intérieur des fils). Par conséquent, ce régime ne permet pas de traiter l'effet de peau anormal, lequel survient généralement à basses températures, lorsque le libre parcours moyen des électrons devient supérieur à la profondeur de pénétration [108].

---

3. De façon générale, la conduction électrique dans un métal ferromagnétique dépend de la valeur du champ magnétique et de l'aimantation, de sorte que la loi d'Ohm doit être modifiée pour inclure les effets galvanomagnétiques ordinaires et spontanés, tels que les effets Hall et la magnétorésistance [107]. Toutefois, dans le cadre cette thèse, nous allons admettre que l'équation (2.5) suffit.

Dans l'hypothèse où l'interaction d'échange et l'anisotropie magnétocristalline peuvent être négligées, le tenseur de perméabilité intrinsèque  $\bar{\mu}_w$  établit une relation locale entre l'induction et le champ magnétiques dynamiques à l'intérieur du métal ferromagnétique, telle que décrite par l'équation (2.4b).<sup>4</sup> L'établissement d'expressions explicites pour les composantes de  $\bar{\mu}_w$  requiert alors de considérer la réponse dynamique de l'aimantation totale  $\mathbf{M}_w$  du fil, laquelle peut être décrite par l'équation du mouvement suivante [26]

$$\frac{\partial \mathbf{M}_w}{\partial t} = -\mathbf{M}_w \times \left( \mu_0 |\gamma| \mathbf{H}_w - \frac{\alpha}{M_s} \frac{\partial \mathbf{M}_w}{\partial t} \right), \quad (2.7)$$

où  $\mathbf{H}_w$  est le champ effectif interne agissant sur les moments magnétiques à l'intérieur du matériau,  $\alpha$  est la constante d'amortissement phénoménologique de Gilbert et  $\gamma = -|\gamma| = -g\mu_B/\hbar$  est le rapport gyromagnétique, avec  $g$  le facteur gyromagnétique (facteur de Landé),  $\mu_B$  le magnéton de Bohr et  $\hbar$  la constante de Planck divisée par  $2\pi$ . L'aimantation et le champ effectif interne peuvent ensuite être séparés en des composante statique et dynamique

$$\mathbf{M}_w = \mathbf{M}_{w0} + \mathbf{m}_w = M_s \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{m}_w, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{H}_w = \mathbf{H}_{w0} + \mathbf{h}_w = H_{w0} \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{h}_w, \quad (2.9)$$

où les vecteurs en caractères majuscules affectés d'un indice 0 désignent des quantités statiques, alors que les caractères minuscules représentent des quantités dynamiques. Dans l'approximation des petits signaux, nous posons que  $|\mathbf{m}_w| \ll M_s$  et  $|\mathbf{h}_w| \ll H_{w0}$ , ce qui permet de linéariser l'équation (2.7). En supposant une dépendance temporelle harmonique proportionnelle à  $e^{-i\omega t}$  pour les composantes dynamiques, la résolution du système d'équations résultant mène au tenseur de susceptibilité magnétique intrinsèque  $\bar{\chi}_w$ , lequel définit la relation constitutive

$$\mathbf{m}_w = \bar{\chi}_w \mathbf{h}_w. \quad (2.10)$$

Enfin, la relation  $\mathbf{b}_w = \mu_0 (\mathbf{h}_w + \mathbf{m}_w) = \bar{\mu}_w \mathbf{h}_w$  permet d'obtenir le tenseur gyrotrope de perméabilité intrinsèque du métal ferromagnétique [26]

---

4. Lorsque l'interaction d'échange est considérée, la solution combinée des équations de Maxwell et de l'équation du mouvement de l'aimantation indique que la perméabilité  $\bar{\mu}_w$  montre un caractère non local, c'est-à-dire dépendant de  $\mathbf{k}_w$ . La relation de dispersion  $\omega(\mathbf{k}_w)$  du métal ferromagnétique possède alors quatre branches de vecteurs d'onde différents, qui décrivent quatre modes présentant des caractères distincts d'ondes électromagnétiques et d'ondes de spin [104]. La relation de dispersion de chacun de ces modes et leurs caractéristiques physiques respectives sont discutées à la référence [109], alors que la réponse non locale associée aux effets combinés de l'échange et de l'effet de peau anormal est étudiée à la référence [110]. Enfin, mentionnons que nous avons justifié le fait de négliger l'interaction d'échange à la référence [35].



$$\bar{\bar{\mu}}_w = \mu_0 \left( \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\chi}}_w \right) = \begin{pmatrix} \mu & -i\mu_t & 0 \\ i\mu_t & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

où  $\bar{\bar{I}}$  est la matrice identité et

$$\mu = \mu_0 \frac{\omega_H^* (\omega_H^* + \omega_M) - \omega^2}{(\omega_H^*)^2 - \omega^2}, \quad (2.12a)$$

$$\mu_t = \mu_0 \frac{\omega_M \omega}{(\omega_H^*)^2 - \omega^2} \quad (2.12b)$$

sont les composantes transverses diagonales et hors diagonales de  $\bar{\bar{\mu}}_w$ , avec

$$\omega_H^* = \omega_H - i\alpha\omega = \mu_0|\gamma|H_{w0} - i\alpha\omega, \quad (2.13)$$

$$\omega_M = \mu_0|\gamma|M_s. \quad (2.14)$$

De plus,  $\mu_{\parallel}$  désigne ici la composante de  $\bar{\bar{\mu}}_w$  parallèle à l'axe de gyrotropie, c'est-à-dire selon la direction de l'aimantation statique  $\mathbf{M}_{w0} = M_s \hat{\mathbf{z}}$ . Il est important de souligner que dans l'approximation des petits signaux (approximation linéaire) utilisée dans ce travail, la composante dynamique  $\mu_{\parallel}$  devient strictement égale à la perméabilité du vide (c.-à-d.,  $\mu_{\parallel} = \mu_0$ ). Or, physiquement, nous avons plutôt que  $\mu_{\parallel} \approx \mu_0$ , en raison notamment des réponses diamagnétique et paramagnétique intrinsèques du matériau, auxquelles peuvent s'ajouter des contributions non linéaires dans l'équation du mouvement de l'aimantation [Éq. (2.7)]. De même, nous allons voir plus loin que, mathématiquement, il est avantageux d'admettre que  $\mu_{\parallel}$  diffère légèrement de  $\mu_0$ . En particulier, l'ajout phénoménologique de  $\mu_{\parallel}$  va nous permettre d'écrire, de façon mathématiquement rigoureuse, le tenseur de perméabilité effective  $\bar{\bar{\mu}}_{\text{eff}}$  du réseau de fils comme un tenseur  $3 \times 3$ , sans toutefois influencer la réponse dominante dans le plan transverse à l'axe de gyrotropie. Cette question est examinée de façon plus approfondie à l'annexe A.

Le tenseur  $\bar{\bar{\mu}}_w$  donné à l'équation (2.11) décrit alors la perméabilité intrinsèque du matériau massif en fonction du champ interne  $\mathbf{h}_w$  et ce, indépendamment des dimensions géométriques de l'échantillon. Les composantes complexes  $\mu$  et  $\mu_t$  dépendent de la valeur de l'aimantation spontanée et tiennent compte des pertes magnétiques intrinsèques, par l'intermédiaire de la constante d'amortissement  $\alpha$ . Dans les hyperfréquences, cette perméabilité possède un caractère résonant en fonction de la fréquence d'opération et du champ magné-

tique statique, avec un pôle et un zéro correspondant à la résonance et à l'antirésonance ferromagnétiques, respectivement.

Une fois que la permittivité et la perméabilité intrinsèques  $\epsilon_w$  et  $\bar{\mu}_w$  ont été définies, nous pouvons les substituer dans les équations de Maxwell pour obtenir la relation de dispersion  $\omega(\mathbf{k}_w)$  du métal ferromagnétique massif. Nous trouvons alors qu'une onde électromagnétique s'y propage avec un indice de réfraction complexe  $n_w$ , lequel dépend de l'angle  $\theta_k$  formé par le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_w$  et l'aimantation statique  $\mathbf{M}_{w0}$ . Il s'ensuit que

$$n_w(\theta_k) = c_0 [\epsilon_w \mu_w(\theta_k)]^{1/2}, \quad (2.15)$$

où  $c_0 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$  est la vitesse de la lumière dans le vide et  $\mu_w(\theta_k)$  est une perméabilité scalaire équivalente, qui dépend de l'angle  $\theta_k$  et des composantes  $\mu$  et  $\mu_t$ , comme montré à la référence [26], p. 97. Notons que dans le cas où les pertes sont suffisamment faibles, la partie réelle de  $n_w$  peut devenir négative entre les fréquences de résonance et d'antirésonance de  $\mu_w(\theta_k)$ . Toutefois, en raison de l'importance de l'effet de peau, la partie imaginaire de  $n_w$  demeure très élevée, de sorte que l'onde s'atténue fortement en pénétrant dans le matériau.<sup>5</sup>

Enfin, les vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_w$  obtenus en résolvant l'équation séculaire  $\omega(\mathbf{k}_w) = 0$  peuvent être utilisés dans les conditions aux frontières électromagnétiques à la surface du matériau afin de déterminer l'impédance, les coefficients de réflexion et de transmission, ou tout autre paramètre physique d'intérêt.<sup>6</sup>

## 2.3 Réponse externe d'un fil ferromagnétique individuel

La section précédente a permis de définir les paramètres géométriques et l'état magnétique statique du réseau de fils, ainsi que les propriétés intrinsèques de ses constituants. Avant de passer à la modélisation du réseau comme un matériau homogène équivalent, décrit par des paramètres constitutifs effectifs, nous allons d'abord caractériser la réponse *externe* d'un fil ferromagnétique individuel soumis à une onde électromagnétique. En particulier, nous allons introduire différents régimes d'opération, qui s'appliquent selon l'importance de la propagation électromagnétique à l'intérieur et à l'extérieur du fil.

---

5. Mentionnons qu'une démonstration expérimentale d'un indice de réfraction doté d'une partie réelle négative dans les hyperfréquences a effectivement été réalisée dans une couche mince de métal ferromagnétique ( $\text{La}_{2/3}\text{Ca}_{1/3}\text{MnO}_3$ ) [111]. Toutefois, ces mesures ont indiqué, d'une part, que la composante imaginaire de l'indice de réfraction demeure considérable, correspondant à une atténuation importante de l'onde, et, d'autre part, que l'indice de réfraction est fortement anisotrope en fonction de la polarisation de l'onde incidente.

6. Comme mentionné précédemment, lorsque l'interaction d'échange est prise en compte dans l'équation du mouvement de l'aimantation, la relation de dispersion  $\omega(\mathbf{k}_w)$  comporte quatre solutions distinctes pour  $\mathbf{k}_w$ . Dans ce cas, des conditions aux frontières supplémentaires pour l'aimantation dynamique doivent alors être imposées à la surface de l'échantillon et vont s'ajouter aux conditions de continuité habituelles pour les champs électromagnétiques [112].

Considérons un fil ferromagnétique placé dans une matrice de permittivité  $\epsilon_m$  et de perméabilité  $\mu_0$ . Le fil, caractérisé par les propriétés intrinsèques  $\epsilon_w$  et  $\bar{\mu}_w$  [Éqs. (2.5) et (2.11)], est soumis à une onde électromagnétique incidente. La procédure consiste alors à résoudre le problème de la diffusion de l'onde par le fil ferromagnétique, ce qui requiert de satisfaire les conditions de continuité imposées par les équations de Maxwell à la surface du fil, dans le but de déterminer l'amplitude des champs diffusés et transmis.

De façon générale, l'onde incidente peut être développée en une expansion multipolaire d'ondes partielles, lesquelles vont constituer une infinité de modes orthogonaux et vont exciter des réponses collectives de la polarisation  $\mathbf{p}_w$  et de l'aimantation  $\mathbf{m}_w$  dynamiques du fil. Chacune de ces réponses peut alors être assimilée à celle d'un multipôle ponctuel et être décrite par une susceptibilité externe multipolaire. Les susceptibilités externes, qui dépendent elles-mêmes de la taille et de la composition du fil, sont proportionnelles à l'amplitude de l'onde diffusée du mode correspondant [113].

La solution générale de la diffusion d'une onde électromagnétique plane par un cylindre infini et caractérisé par le tenseur de perméabilité gyrotrope de l'équation (2.11) est présentée à la référence [114] et s'avère relativement complexe.<sup>7</sup> Des solutions approximatives peuvent néanmoins être obtenues selon l'importance du retard électromagnétique à l'intérieur et à l'extérieur du fil, lequel sera pris en compte par les valeurs de  $|k_m|a$  et  $|k_w|a$  devant l'unité. Les termes  $k_m$  et  $k_w$  correspondent respectivement à l'amplitude complexe des vecteurs d'onde des champs dans la matrice (c.-à-d., incidents et diffusés) et des champ transmis à l'intérieur du fil de rayon  $a$ .

Supposons d'abord que les champs dans la matrice demeurent spatialement uniformes au voisinage du fil, ce qui se traduit par l'inégalité

$$|k_m|a \ll 1. \quad (2.16)$$

Un calcul direct montre que cette condition est aisément satisfaite pour les intervalles de fréquences (1–100 GHz) et de rayons (0,01–100  $\mu\text{m}$ ) considérés dans le cadre de cette thèse. Par conséquent, à partir de maintenant, nous supposerons toujours que les fils individuels du réseau sont excités par des champs locaux  $\mathbf{e}_{\text{loc}}$  et  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$  uniformes. De plus, comme nous le verrons plus loin, la condition  $|k_m|a \ll 1$  s'avère essentielle à l'homogénéisation du réseau et donc à la définition des tenseurs de permittivité et de perméabilité effectives.

La conséquence principale entraînée par la satisfaction de l'équation (2.16) réside toutefois dans le fait que la réponse du mode *dipolaire* domine largement celles des autres modes, de sorte que l'effet des pôles d'ordres supérieurs peut être négligé [72, 74, 84, 115]. Il est alors

---

7. Mentionnons toutefois que la dérivation explicite des susceptibilités externes multipolaires n'est pas présentée à la référence [114].

possible d'introduire les tenseurs de susceptibilités externes électrique  $\bar{\bar{\kappa}}_w$  et magnétique  $\bar{\bar{\eta}}_w$  associés à la réponse dipolaire du fil. Ces deux fonctions de réponse définissent les relations constitutives

$$\langle \mathbf{p}_w \rangle = \epsilon_m \bar{\bar{\kappa}}_w \mathbf{e}_{\text{loc}}, \quad (2.17a)$$

$$\langle \mathbf{m}_w \rangle = \bar{\bar{\eta}}_w \mathbf{h}_{\text{loc}}, \quad (2.17b)$$

où les crochets angulaires  $\langle . \rangle$  désignent des moyennes spatiales de  $\mathbf{p}_w$  et  $\mathbf{m}_w$ , lesquelles sont généralement non uniformes à l'intérieur du fil, puisqu'aucune restriction n'a encore été imposée quant à la valeur de  $|k_w|a$ .<sup>8</sup> Nous allons maintenant considérer cet aspect en étudiant les trois régimes d'opération illustrés à la figure 2.2. Ces différents niveaux d'approximation se distinguent par l'importance du retard électromagnétique à l'intérieur du fil et par les solutions pour les susceptibilités externes  $\bar{\bar{\kappa}}_w$  et  $\bar{\bar{\eta}}_w$ .

Dans le cas le plus simple, les champs sont également uniformes à l'intérieur du fil, de sorte que la condition

$$|k_w|a \ll 1 \quad (2.18)$$

s'applique et définit la limite QS (ou limite de Rayleigh [5]). Dans ce cas, la propagation électromagnétique est négligeable à l'intérieur du fil, ce qui correspond à des modes d'oscillations uniformes de la polarisation et de l'aimantation dynamiques. Par conséquent, les problèmes électrostatique et magnétostatique pour déterminer respectivement  $\bar{\bar{\kappa}}_w$  et  $\bar{\bar{\eta}}_w$  sont découplés [74, 116, 117]. Leur résolution mène alors aux expressions compactes suivantes (voir notamment l'équation 5.78 à la référence [5])

$$\bar{\bar{\kappa}}_w^{-1} = \left( \frac{\bar{\bar{\epsilon}}_w}{\epsilon_m} - \bar{\bar{I}} \right)^{-1} + \bar{\bar{N}}_w, \quad (2.19a)$$

$$\bar{\bar{\eta}}_w^{-1} = \left( \frac{\bar{\bar{\mu}}_w}{\mu_0} - \bar{\bar{I}} \right)^{-1} + \bar{\bar{N}}_w, \quad (2.19b)$$

---

8. Notons que les tenseurs  $\bar{\bar{\kappa}}_w$  et  $\bar{\bar{\eta}}_w$  correspondent également à des tenseurs de polarisabilités dipolaires électrique et magnétique *par unité de volume de l'inclusion*. Par exemple, un fil de volume  $V_w$  et d'aimantation  $\mathbf{m}_w$  possède un moment dipolaire magnétique  $V_w \mathbf{m}_w$ , lequel est lié au champ local par la relation  $V_w \mathbf{m}_w = \bar{\bar{\alpha}}_{m,w} \mathbf{h}_{\text{loc}}$ , où le tenseur de polarisabilité magnétique  $\bar{\bar{\alpha}}_{m,w}$  du fil vaut  $\bar{\bar{\alpha}}_{m,w} = V_w \bar{\bar{\eta}}_w$ , de sorte que  $\bar{\bar{\eta}}_w = V_w^{-1} \bar{\bar{\alpha}}_{m,w}$  et décrit bien une polarisabilité par unité de volume du fil. Le terme « susceptibilité externe » est utilisé notamment dans la littérature traitant de la résonance ferromagnétique du mode uniforme d'un ellipsoïde [26] et nous adopterons cette nomenclature dans le cadre de ce travail.

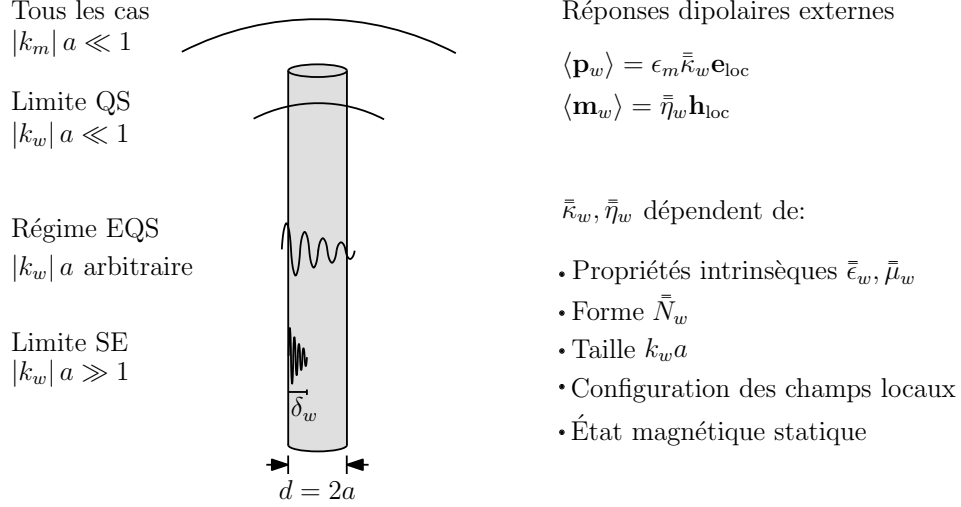


Figure 2.2 Représentation schématique des différents niveaux d'approximation décrivant les réponses dipolaires externes de la polarisation et de l'aimantation d'un fil soumis aux champs dynamiques locaux  $\mathbf{e}_{\text{loc}}$  et  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$ , lesquels demeurent spatialement uniformes au voisinage du fil ( $|k_m| a \ll 1$ ) : limite quasi statique (QS) avec  $|k_w| a \ll 1$ , régime quasi statique étendu (EQS, pour *extended quasistatic*) où la valeur  $|k_w| a$  est arbitraire et limite d'effet de peau (SE, pour *skin effect*) avec  $|k_w| a \gg 1$ . Les réponses sont prises en compte par les tenseurs de susceptibilité externe  $\bar{\bar{\kappa}}_w$  et  $\bar{\bar{\eta}}_w$ , dont les dépendances sont indiquées.

lesquelles satisfont l'équation (2.17) dans la limite  $\langle \mathbf{p}_w \rangle = \mathbf{p}_w$  et  $\langle \mathbf{m}_w \rangle = \mathbf{m}_w$ . Dans l'approximation QS, la réponse dipolaire externe d'un fil individuel est déterminée uniquement par ses propriétés intrinsèques et sa forme. En particulier, notons que le pôle de  $\bar{\bar{\eta}}_w$  coïncide avec la formule de Kittel [118], laquelle détermine la fréquence de résonance ferromagnétique du mode uniforme d'un fil modélisé comme un ellipsoïde de révolution.

Comme mentionné précédemment, l'équation (2.16) est facilement satisfaite dans les hyperfréquences pour des fils de taille micro ou nanométrique. En revanche, l'équation (2.18) impose des champs uniformes à l'intérieur du fil et constitue une condition beaucoup plus restrictive dans le cas de métaux ferromagnétiques. En effet, la permittivité imaginaire élevée associée au caractère métallique et l'augmentation de la perméabilité près de la résonance ferromagnétique impliquent que  $|k_w| \gg |k_m|$  et mènent à une profondeur de pénétration finie  $\delta_w = 1/\text{Im}[k_w]$  des champs à l'intérieur du fil. De plus, lorsque l'épaisseur de peau devient suffisamment petite devant le rayon du fil pour remplir la condition  $|k_w| a \gg 1$ , les champs dynamiques demeurent confinés à sa surface et la limite d'effet de peau (SE, pour *skin effect*) est atteinte. Comme dans la limite QS, nous trouvons alors que la réponse externe du fil devient indépendante de sa taille [72].

Or, il existe un intervalle de rayons pour lequel ni  $|k_w|a \ll 1$ , ni  $|k_w|a \gg 1$  ne sont satisfaites, que nous allons désigner comme le régime quasi statique étendu (EQS, pour *extended quasistatic*) [74]. Ce régime plus général se caractérise par une valeur arbitraire de  $k_w a$  et se réduit ainsi aux limites QS et SE lorsque l'effet de peau dans le fil devient respectivement négligeable et dominant. En régime EQS, les tenseurs  $\bar{\kappa}_w$  et  $\bar{\eta}_w$  vont dépendre de façon non triviale des propriétés intrinsèques  $\epsilon_w$  et  $\bar{\mu}_w$  du fil, de sa forme et de sa taille, de la configuration des champs locaux  $\mathbf{e}_{\text{loc}}$  et  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$ , ainsi que de l'état magnétique statique  $\mathbf{M}_{w0}$  du fil.

En terminant cette section, mentionnons que le régime EQS va constituer le cadre théorique général à l'intérieur duquel nous allons modéliser la réponse électromagnétique des réseaux de fils ferromagnétiques. Notons également que la terminologie « quasi statique étendu » peut porter à confusion, puisqu'aucune restriction n'est imposée quant à la valeur de  $k_w a$ . En effet, le régime EQS s'appuie sur un calcul entièrement dynamique des champs à l'intérieur du fil, lequel requiert uniquement que les champs locaux  $\mathbf{e}_{\text{loc}}$  et  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$  qui excitent le fil soient uniformes.

## 2.4 Réponse macroscopique du réseau de fils et propriétés électromagnétiques effectives

Nous allons maintenant considérer le comportement macroscopique d'un ensemble de fils parallèles, en nous appuyant sur les résultats des sections précédentes pour les propriétés intrinsèques du réseau et la réponse externe des fils individuels. Du point de vue électromagnétique, la possibilité d'assimiler un milieu donné à un matériau homogène décrit par l'électrodynamique des milieux continus est dictée par la valeur du rapport entre la longueur d'onde dans le matériau et la taille de ses inhomogénéités. Autrement dit, lorsqu'une onde électromagnétique se propage dans un réseau de fils avec une longueur d'onde effective  $\lambda_{\text{eff}}$  beaucoup plus grande que la taille caractéristique des fils et leur séparation moyenne, le réseau peut, en théorie, être caractérisé par des tenseurs de permittivité  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et de perméabilité  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  dynamiques effectives. Ces fonctions de réponse macroscopiques lient les inductions moyennes  $\langle \mathbf{d} \rangle$  et  $\langle \mathbf{b} \rangle$  aux champs moyens  $\langle \mathbf{e} \rangle$  et  $\langle \mathbf{h} \rangle$  à l'intérieur du réseau et définissent les relations constitutives suivantes :

$$\langle \mathbf{d} \rangle = \bar{\epsilon}_{\text{eff}} \langle \mathbf{e} \rangle, \quad (2.20a)$$

$$\langle \mathbf{b} \rangle = \bar{\mu}_{\text{eff}} \langle \mathbf{h} \rangle. \quad (2.20b)$$

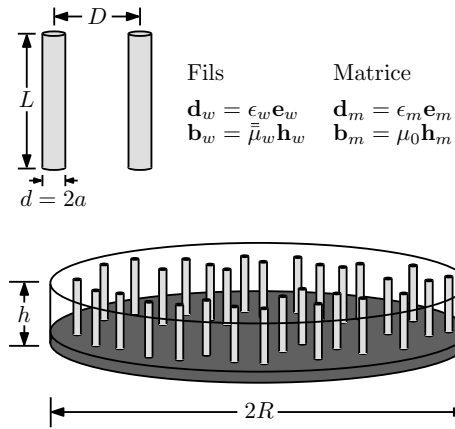
L'introduction des équations (2.20a) et (2.20b) permet alors de remplacer conceptuellement le réseau de fils de la figure 2.3(a) par le matériau homogène équivalent montré à la figure 2.3(b). Dans ce contexte, les tenseurs  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  doivent alors être interprétés comme les propriétés intrinsèques du matériau homogénéisé, c'est-à-dire que  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  vont jouer un rôle identique à celui de  $\bar{\epsilon}_w$  et  $\bar{\mu}_w$  dans le contexte des matériaux naturels. Par conséquent, la propagation d'une onde électromagnétique plane harmonique de la forme  $e^{i(\mathbf{k}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$  à l'intérieur du réseau peut, en principe, être décrite par des équations de Maxwell macroscopiques, lesquelles s'expriment en fonction des propriétés effectives  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  comme

$$\mathbf{k}_{\text{eff}} \times \langle \mathbf{e} \rangle = \omega \bar{\mu}_{\text{eff}} \langle \mathbf{h} \rangle, \quad (2.21a)$$

$$\mathbf{k}_{\text{eff}} \times \langle \mathbf{h} \rangle = -\omega \bar{\epsilon}_{\text{eff}} \langle \mathbf{e} \rangle, \quad (2.21b)$$

où  $\mathbf{k}_{\text{eff}}$  est un vecteur d'onde effectif dans le réseau de fils homogénéisé. Les équations (2.21a) et (2.21b) indiquent que  $\langle \mathbf{e} \rangle$  et  $\langle \mathbf{h} \rangle$  représentent les champs macroscopiques pertinents à l'échelle  $2\pi/|\mathbf{k}_{\text{eff}}| = \lambda_{\text{eff}} \gg d, D$ . De plus, soulignons que notre définition pour  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  inclut le tenseur de conductivité effective du réseau.

(a) Réseau de fils ferromagnétiques



(b) Matériau homogène équivalent

Relations constitutives	Équations de Maxwell
$\langle \mathbf{d} \rangle = \bar{\epsilon}_{\text{eff}} \langle \mathbf{e} \rangle$	$\mathbf{k}_{\text{eff}} \times \langle \mathbf{e} \rangle = \omega \bar{\mu}_{\text{eff}} \langle \mathbf{h} \rangle$
$\langle \mathbf{b} \rangle = \bar{\mu}_{\text{eff}} \langle \mathbf{h} \rangle$	$\mathbf{k}_{\text{eff}} \times \langle \mathbf{h} \rangle = -\omega \bar{\epsilon}_{\text{eff}} \langle \mathbf{e} \rangle$
Relation de dispersion $\omega(\mathbf{k}_{\text{eff}})$	
$\det [\bar{\mathbf{k}}_{\text{eff}} \cdot \bar{\epsilon}_{\text{eff}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{k}}_{\text{eff}} + \omega^2 \bar{\mu}_{\text{eff}}] = 0$	

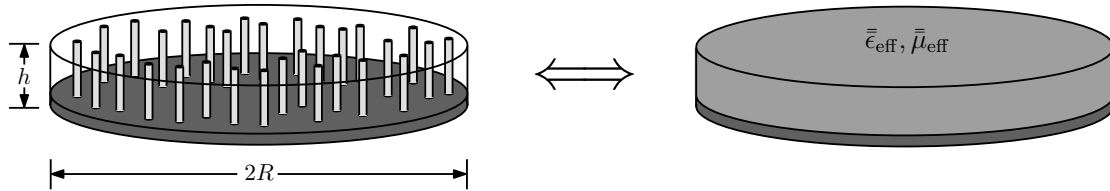


Figure 2.3 (a) Matériau composite de dimensions finies, composé de fils ferromagnétiques incorporés dans une matrice diélectrique. (b) Matériau homogène équivalent décrit par les propriétés électromagnétiques effectives  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$ , lesquelles sont obtenues par l'homogénéisation du réseau de fils montré en (a). Les tenseurs  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  définissent les équations de Maxwell macroscopiques et mènent à la relation de dispersion  $\omega(\mathbf{k}_{\text{eff}})$  du matériau composite homogénéisé.

La combinaison des deux équations de Maxwell permet ensuite d'établir la relation de dispersion  $\omega(\mathbf{k}_{\text{eff}})$  du réseau. Pour exprimer  $\omega(\mathbf{k}_{\text{eff}})$  sous une forme matricielle compacte dans laquelle  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  apparaissent explicitement, nous pouvons introduire le tenseur antisymétrique d'ordre deux  $\bar{\bar{k}}_{\text{eff}}$ , défini en fonction des composantes cartésiennes de  $\mathbf{k}_{\text{eff}}$  comme [119]

$$\bar{\bar{k}}_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} 0 & -k_{\text{eff},z} & k_{\text{eff},y} \\ k_{\text{eff},z} & 0 & -k_{\text{eff},x} \\ -k_{\text{eff},y} & k_{\text{eff},x} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Concrètement, le tenseur  $\bar{\bar{k}}_{\text{eff}}$  permet de remplacer les produits vectoriels dans les équations (2.21a) et (2.21b) par des produits matriciels, ce qui mène à

$$\bar{\bar{k}}_{\text{eff}} \langle \mathbf{e} \rangle = \omega \bar{\mu}_{\text{eff}} \langle \mathbf{h} \rangle, \quad (2.23a)$$

$$\bar{\bar{k}}_{\text{eff}} \langle \mathbf{h} \rangle = -\omega \bar{\epsilon}_{\text{eff}} \langle \mathbf{e} \rangle, \quad (2.23b)$$

que nous pouvons combiner pour exprimer la relation de dispersion  $\omega(\mathbf{k}_{\text{eff}})$  comme un déterminant séculaire, c'est-à-dire

$$\det \left[ \bar{\bar{k}}_{\text{eff}} \cdot \bar{\epsilon}_{\text{eff}}^{-1} \cdot \bar{\bar{k}}_{\text{eff}} + \omega^2 \bar{\mu}_{\text{eff}} \right] = 0. \quad (2.24)$$

La résolution de cette équation établit les relations permises entre  $\omega$  et les vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_{\text{eff}}$  des ondes planes qui se propagent dans le milieu effectif caractérisé par  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$ . Les solutions pour  $\mathbf{k}_{\text{eff}}$  peuvent ensuite être utilisées dans les conditions aux frontières imposées par les équations (2.21a) et (2.21b), dans le but de lier les champs  $\mathbf{e}_{\text{ext}}$  et  $\mathbf{h}_{\text{ext}}$  d'une onde incidente et les champs moyens  $\langle \mathbf{e} \rangle$  et  $\langle \mathbf{h} \rangle$  à l'intérieur du réseau. Cette procédure permet alors d'extraire, en principe, des paramètres effectifs d'intérêt, tels que l'impédance caractéristique, l'indice de réfraction, la profondeur de pénétration et les coefficients de réflexion et de transmission.

## 2.5 Théories de milieu effectif

Aller plus loin avec les équations macroscopiques générales développées à la section précédente nécessite d'établir des expressions pour les tenseurs  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  en fonction des propriétés intrinsèques de la matrice et des fils, des paramètres géométriques, des interactions interfils et de l'état magnétique statique du réseau. Pour ce faire, nous allons maintenant considérer un modèle de milieu effectif, que nous allons généraliser au régime EQS dans le but de traiter le



cas d'inclusions ferromagnétiques conductrices caractérisées par une réponse gyromagnétique tensorielle et un effet de peau qui ne peuvent être négligés *a priori*.

L'étude de la réponse électromagnétique de milieux hétérogènes en fonction des propriétés de leurs constituants possède une longue histoire, qui remonte au début de l'électromagnétisme moderne. Il existe aujourd'hui une vaste littérature permettant de décrire les diverses approches possibles pour calculer les paramètres électromagnétiques effectifs.<sup>9</sup> La plupart des modèles utilisés actuellement constituent des généralisations ou des variations des formalismes précurseurs établis par Maxwell Garnett [81], puis par Bruggeman [5], lesquels s'appuient eux-mêmes sur les relations antérieures de Clausius-Mossotti et de Lorentz-Lorenz [105].

La théorie de Maxwell Garnett s'applique bien lorsque l'un des deux constituants peut être considéré comme une matrice continue, dans laquelle l'autre constituant est incorporé sous la forme d'inclusions isolées et de géométrie bien définie. Il s'agit d'un modèle de champ moyen qui fait intervenir l'approximation dipolaire de deux façons distinctes [113]. D'une part, les inclusions polarisables sont traitées comme des dipôles induits, suffisamment éloignés les uns des autres pour agir comme des diffuseurs indépendants. D'autre part, seules les interactions dipolaires entre les inclusions sont considérées, par l'intermédiaire du champ de cavité de Lorentz, lequel consiste à approximer l'effet de toutes les inclusions sur une inclusion donnée par un champ moyen uniforme.

En revanche, dans le modèle de Bruggeman, les deux constituants sont traités comme des inclusions plongées dans le milieu effectif et soumises aux champs moyens  $\langle \mathbf{e} \rangle$  et  $\langle \mathbf{h} \rangle$ . Dans cette approche symétrique, les propriétés effectives sont déterminées par autoconsistance, en imposant que les déviations par rapport aux champs moyens causées par la polarisation et l'aimantation des inclusions s'annulent en moyenne.

Dans notre contexte, les réseaux de fils ferromagnétiques parallèles incorporés dans une matrice diélectrique peuvent être adéquatement traités comme un ensemble d'inclusions isolées et plongées dans un milieu hôte. Cette représentation correspond à celle décrite par la théorie de Maxwell Garnett, sur laquelle nous allons par conséquent nous concentrer exclusivement dans le cadre de cette thèse.<sup>10</sup> Pour sa part, l'approche de Bruggeman pourrait être utilisée pour décrire, par exemple, un matériau composite où les fils sont distribués aléatoire-

---

9. Le livre de A. Sihvola [5] présente une bonne introduction aux théories de milieu effectif. De même, pour une revue historique du sujet, le lecteur pourra notamment consulter les références [120, 121].

10. Notons également que d'un point de vue strictement analytique, l'approche de Maxwell Garnett mène à des expressions explicites pour les tenseurs  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$ , lesquelles s'avèrent beaucoup plus simples que les relations implicites prédites par le formalisme de Bruggeman, notamment dans le cas d'inclusions gyromagnétiques dans la limite QS [76, 77]. De plus, la théorie de Maxwell Garnett permet d'inclure plus directement les effets de retard électromagnétique associés à la taille finie des inclusions en régime EQS [113], comme traité dans le cadre de cette thèse.

ment sur une surface plane (c.-à-d., avec l'axe des fils dans la direction IP) et peuvent alors former des chemins de percolation.

Dans sa forme originale [81], la formule de Maxwell Garnett a été établie dans la limite QS, pour le cas d'inclusions sphériques caractérisées par des propriétés intrinsèques isotropes, mais a depuis été généralisée à plusieurs égards [5]. En particulier, les propriétés électromagnétiques effectives QS d'un ensemble d'inclusions ellipsoïdales anisotropes et orientées parallèlement dans une matrice isotrope peuvent s'écrire sous la forme générale suivante (voir notamment l'équation 5.81 à la référence [5]) :

$$\frac{\bar{\epsilon}_{\text{eff}}}{\epsilon_m} = \bar{I} + f \left[ \bar{\kappa}_w^{-1} - f \bar{N}_w \right]^{-1} = \bar{I} + f \left[ \left( \frac{\bar{\epsilon}_w}{\epsilon_m} - \bar{I} \right)^{-1} + (1-f) \bar{N}_w \right]^{-1}, \quad (2.25a)$$

$$\frac{\bar{\mu}_{\text{eff}}}{\mu_0} = \bar{I} + f \left[ \bar{\eta}_w^{-1} - f \bar{N}_w \right]^{-1} = \bar{I} + f \left[ \left( \frac{\bar{\mu}_w}{\mu_0} - \bar{I} \right)^{-1} + (1-f) \bar{N}_w \right]^{-1}, \quad (2.25b)$$

où nous avons utilisé les résultats de l'équation (2.19) pour obtenir les membres de droite.

Nous constatons que les tenseurs  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  dépendent des propriétés intrinsèques  $\epsilon_m$  et  $\mu_0$  de la matrice, de la fraction  $f$  occupée par les fils, de leur tenseur de forme  $\bar{N}_w$  et, principalement, de leurs susceptibilités externes électrique  $\bar{\kappa}_w$  et magnétique  $\bar{\eta}_w$ . Comme mentionné à la section 2.3, ces tenseurs décrivent la réponse dipolaire de la polarisation  $\mathbf{p}_w$  et de l'aimantation  $\mathbf{m}_w$  dynamiques des inclusions soumises aux champs locaux  $\mathbf{e}_{\text{loc}}$  et  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$  dans le matériau composite et excitées dans un mode d'oscillation uniforme. Rappelons que les champs locaux diffèrent des champs macroscopiques moyens  $\langle \mathbf{e} \rangle$  et  $\langle \mathbf{h} \rangle$  en raison des interactions dipolaires entre les fils.

Dans l'approximation QS, les formules de Maxwell Garnett données aux équations (2.25a) et (2.25b) peuvent être obtenues de plusieurs façons [5, 122, 123]. Dans cette limite, les propriétés effectives sont d'abord dérivées à fréquence nulle, c'est-à-dire en considérant la réponse des inclusions à des champs statiques, puis appliquées en régime dynamique à la condition que la longueur d'onde dans le milieu effectif demeure grande par rapport à la taille caractéristique des inhomogénéités.

## 2.6 Procédure d'homogénéisation

Dans le cadre de cette thèse, nous voulons développer une méthode de dérivation des propriétés effectives  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  qui demeure valide en régime EQS, c'est-à-dire lorsque le retard électromagnétique à l'intérieur des fils se répercute sur les paramètres constitutifs macroscopiques.

piques du réseau. Pour ce faire, nous allons utiliser une approche basée sur la définition d'une cellule unitaire équivalente plongée dans un milieu effectif caractérisé par les propriétés  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  que nous cherchons à déterminer [124–127]. De plus, nous allons voir comment cette méthode peut être adaptée pour tenir compte de la perméabilité intrinsèque tensorielle des fils.

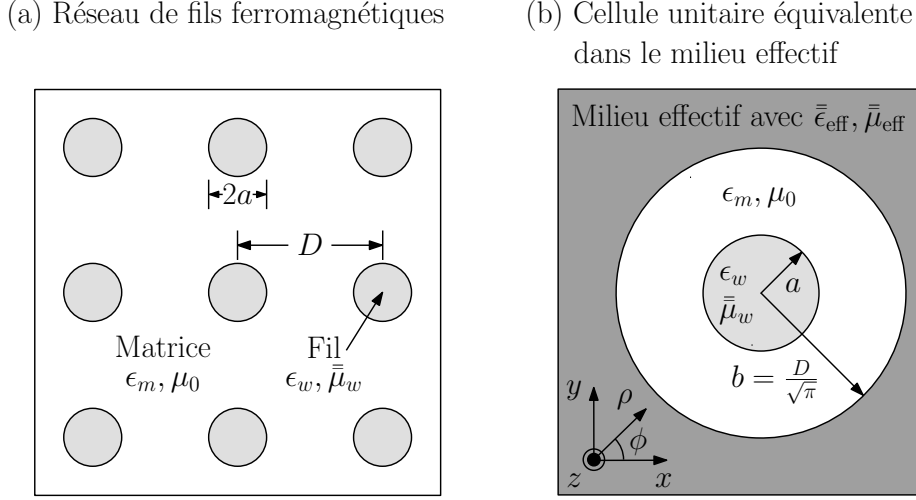


Figure 2.4 (a) Représentation schématique du réseau de fils ferromagnétiques conducteurs parallèles incorporés dans une matrice diélectrique non magnétique. La cellule unitaire du réseau est un carré de côté  $D$ , comprenant un fil de rayon  $a$  en son centre. (b) Définition de la cellule unitaire équivalente circulaire de rayon externe  $b = D/\sqrt{\pi}$ , plongée dans un milieu effectif caractérisé par les propriétés constitutives  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  à déterminer. Notons que l'origine des systèmes de coordonnées en (b) coïncide en fait avec le centre du fil.

La figure 2.4(a) montre une représentation schématique d'un réseau de fils ferromagnétiques parallèles, dont la cellule unitaire consiste en un carré de côté  $D$ , comprenant un fil de rayon  $a$  en son centre. La procédure d'homogénéisation décrite aux références [124–127] consiste d'abord à définir une cellule unitaire *équivalente* constituée d'un fil, de rayon  $a$  et de propriétés intrinsèques  $\epsilon_w$  et  $\bar{\mu}_w$ , recouvert d'une enveloppe cylindrique de rayon externe  $b = D/\sqrt{\pi}$  et de propriétés  $\epsilon_m$  et  $\mu_m = \mu_0$ , qui représente la matrice. Cette définition nous assure que la fraction du réseau  $f = a^2/b^2 = \pi a^2/D^2$  occupée par les fils dans la cellule unitaire équivalente demeure identique à celle de la cellule unitaire carrée de la figure 2.4(a).<sup>11</sup>

Nous supposons ensuite que la cellule unitaire équivalente est plongée dans un milieu effectif caractérisé par les propriétés  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$ , que nous cherchons à déterminer et qui satisfont respectivement les équations (2.20a) et (2.20b). La procédure d'homogénéisation requiert

11. Notons que pour un réseau de symétrie arbitraire, nous devons prendre  $b = D/\sqrt{\pi f_0}$  pour conserver la fraction du réseau occupée par les fils.

alors de résoudre le problème de la diffusion d'une onde électromagnétique par la cellule unitaire équivalente centrée à l'origine commune des systèmes de coordonnées cartésiennes  $xyz$  et cylindriques  $\rho\phi z$ .

Pour ce faire, nous considérons une onde plane qui se propage dans le milieu effectif avec un vecteur d'onde  $\mathbf{k}_{\text{eff}}$  et des champs électrique  $\langle \mathbf{e} \rangle$  et magnétique  $\langle \mathbf{h} \rangle$ . En particulier, le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_{\text{eff}}$  s'exprime en fonction des composantes de  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$ , par l'intermédiaire de la relation de dispersion donnée à l'équation (2.24). Au contact avec la cellule unitaire, l'onde plane incidente est partiellement réfléchie et partiellement transmise, en accord avec les conditions de continuité des champs imposées par les équations de Maxwell.

La condition d'homogénéisation du réseau consiste ensuite à imposer que l'amplitude des champs diffusés s'annule dans la limite  $|k_{\text{eff}}|b \ll 1$ , c'est-à-dire lorsque la longueur d'onde dans le milieu effectif est substantiellement plus grande que la taille de la cellule unitaire équivalente.<sup>12</sup> Lorsque ce critère de diffusion nulle est satisfait, la cellule unitaire plongée dans le milieu effectif devient « invisible » à l'onde électromagnétique qui s'y propage ou, de façon équivalente, les champs  $\langle \mathbf{e} \rangle$  et  $\langle \mathbf{h} \rangle$  ne sont pas perturbés par la présence de la cellule. Mentionnons que cette condition de diffusion nulle revient à exiger que les susceptibilités externes  $\bar{\kappa}_{\text{cell}}$  et  $\bar{\eta}_{\text{cell}}$  de la cellule unitaire équivalente s'annulent dans la limite  $|k_{\text{eff}}|b \ll 1$ .

Récemment, cette méthode a été mise à profit pour obtenir la réponse effective *scalaire* en régime EQS de divers métamatériaux [21, 34, 94]. Il est toutefois important d'insister sur le fait que cette approche ne peut être utilisée directement si  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  sont des tenseurs. En effet, dans ce cas, le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_{\text{eff}}$ , lequel est la quantité physique qui intervient directement dans le problème de diffusion, peut devenir une fonction relativement complexe des composantes de  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$ . Il en résulte que l'application de la condition de diffusion nulle ne permet pas, en général, de déterminer l'ensemble des composantes de  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$ .

Or, dans le cadre de cette thèse, la nature ferromagnétique des fils va mener à une perméabilité effective *tensorielle* dans les hyperfréquences. Pour l'obtenir, nous allons plutôt considérer une méthode similaire, développée à la référence [23] dans le cas isotrope, que nous allons étendre au traitement de la réponse gyrotrope des réseaux de fils ferromagnétiques.

Cette méthode s'appuie également sur la cellule unitaire équivalente de la figure 2.4(b). Toutefois, plutôt que d'imposer une diffusion nulle par la cellule, l'approche requiert de satisfaire les conditions de continuité des champs électromagnétiques à l'interface en  $\rho = b$  entre la cellule unitaire et le milieu effectif. Les conditions aux frontières vont alors faire intervenir les propriétés intrinsèques des fils et de la matrice pour les champs à l'intérieur de la cellule et les propriétés effectives  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  à déterminer pour les champs à l'extérieur de la

---

12. Notons que cette limite permet de déterminer  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  de façon indépendante.

cellule. Notons que dans le cas isotrope, les deux approches peuvent être utilisées de façon équivalente, comme montré à l'annexe B.

La procédure d'homogénéisation que nous allons utiliser comporte deux étapes. La première étape nécessite de résoudre le problème de la diffusion d'une onde électromagnétique par un fil ferromagnétique individuel, comme discuté à la section 2.3. L'objectif consiste à exprimer les champs diffusés  $\mathbf{e}_{\text{scat}}$  et  $\mathbf{h}_{\text{scat}}$  et transmis  $\mathbf{e}_w$  et  $\mathbf{h}_w$  en fonction des champs incidents  $\mathbf{e}_{\text{loc}}$  et  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$ , puis à déterminer les tenseurs de susceptibilité externe  $\bar{\kappa}_w$  et  $\bar{\eta}_w$  du fil en régime EQS.

La deuxième étape requiert de résoudre le problème de conditions aux frontières en  $\rho = b$ , lorsque la cellule unitaire équivalente est plongée dans le milieu effectif [Fig. 2.4(b)]. Les champs à l'extérieur de la cellule ( $a < \rho < b$ ) correspondent aux champs dans la matrice,  $\mathbf{e}_m = \mathbf{e}_{\text{loc}} + \mathbf{e}_{\text{scat}}$  et  $\mathbf{h}_m = \mathbf{h}_{\text{loc}} + \mathbf{h}_{\text{scat}}$ , obtenus lors de la résolution du problème de diffusion et faisant intervenir les susceptibilités externes  $\bar{\kappa}_w$  et  $\bar{\eta}_w$ . Dans cette approche, notons que toute l'information concernant la réponse des fils individuels est contenue dans les expressions pour les champs diffusés  $\mathbf{e}_{\text{scat}} \propto \bar{\kappa}_w$  et  $\mathbf{h}_{\text{scat}} \propto \bar{\eta}_w$ . Les propriétés effectives  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  du réseau s'obtiennent alors en satisfaisant les équations suivantes en  $\rho = b$  :

$$\langle \mathbf{e} \rangle \cdot \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{e}_m \cdot \hat{\mathbf{z}}, \quad \langle \mathbf{h} \rangle \cdot \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{h}_m \cdot \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.26a)$$

$$\langle \mathbf{e} \rangle \cdot \hat{\phi} = \mathbf{e}_m \cdot \hat{\phi}, \quad \langle \mathbf{h} \rangle \cdot \hat{\phi} = \mathbf{h}_m \cdot \hat{\phi}, \quad (2.26b)$$

$$(\bar{\epsilon}_{\text{eff}} \langle \mathbf{e} \rangle) \cdot \hat{\rho} = (\epsilon_m \mathbf{e}_m) \cdot \hat{\rho}, \quad (\bar{\mu}_{\text{eff}} \langle \mathbf{h} \rangle) \cdot \hat{\rho} = (\mu_0 \mathbf{h}_m) \cdot \hat{\rho}, \quad (2.26c)$$

ce qui assure la continuité des composantes tangentielles des champs et de la composante normale des inductions à la surface de la cellule unitaire équivalente. La possibilité d'appliquer ces conditions à plusieurs valeurs de l'angle  $\phi$  permet, en principe, de déterminer l'ensemble des composantes des tenseurs  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$ .

Ceci termine la description de notre approche théorique générale pour la modélisation des propriétés effectives de réseaux de fils ferromagnétiques conducteurs. À la section suivante nous allons résoudre explicitement le problème de la diffusion d'une onde électromagnétique plane par un fil individuel aimanté axialement. En particulier, nous allons voir qu'en régime EQS, les réponses dipolaires électrique et magnétique dominent la réponse du fil et, pour cette raison, seront considérées en détail au chapitre 3. Cette étude nous permettra alors d'obtenir les tenseurs de susceptibilité externe  $\bar{\kappa}_w$  et  $\bar{\eta}_w$  des fils individuels, puis les propriétés effectives  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  du réseau.

## 2.7 Diffusion d'une onde électromagnétique plane par un fil ferromagnétique aimanté axialement

L'application de la procédure d'homogénéisation de Maxwell Garnett en vue de dériver les propriétés effectives  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  du réseau requiert d'abord de connaître les réponses électrique et magnétique externes d'un fil individuel. Pour ce faire, nous allons maintenant considérer la diffusion d'une onde électromagnétique plane par un fil unique, dans le cas où le retard électromagnétique à l'intérieur du fil (régime EQS) et la nature gyrotrope de sa perméabilité intrinsèque  $\bar{\mu}_w$  jouent un rôle significatif. Notre analyse du problème de diffusion s'inspire de celles de Maryško [72] et de Kraus [73], qui ont étudié l'influence de l'effet de peau sur la résonance ferromagnétique d'un fil conducteur. Nous allons étendre ces travaux en dérivant des expressions explicites pour les tenseurs de susceptibilité externe  $\bar{\kappa}_w$  et  $\bar{\eta}_w$ .

### 2.7.1 Solution générale du problème de diffusion

La configuration du problème de diffusion est montrée à la figure 2.5. Un fil ferromagnétique aimanté axialement est placé dans une matrice isotrope de permittivité  $\epsilon_m$  et de perméabilité  $\mu_0$ . Le fil, de diamètre  $d = 2a$ , de longueur  $L$  (supposée infinie dans le problème de diffusion) et d'aimantation spontanée  $M_s$ , est centré à l'origine commune des systèmes de coordonnées cartésiennes  $xyz$  et cylindriques  $\rho\phi z$ , de façon à ce que l'axe du fil coïncide avec l'axe  $z$ . Pour un long fil isolé, le champ de désaimantation axial est négligeable, de sorte que le champ statique externe  $\mathbf{H}_{\text{ext}0} = H_{\text{ext}0}\hat{\mathbf{z}}$  est approximativement égal au champ statique interne  $\mathbf{H}_{w0}$ .

Nous considérons une onde incidente de polarisation transverse magnétique (TM),<sup>13</sup> qui se propage dans la direction positive de l'axe  $x$  avec une fréquence angulaire  $\omega$  et des champs électrique axial et magnétique transverse donnés par

$$\mathbf{e}_{\text{loc}} = e_{\text{loc}0} e^{i(k_m x - \omega t)} \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.27a)$$

$$\mathbf{h}_{\text{loc}} = -\frac{e_{\text{loc}0}}{\zeta_m} e^{i(k_m x - \omega t)} \hat{\mathbf{y}} = -h_{\text{loc}0} e^{i(k_m x - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}, \quad (2.27b)$$

où  $k_m = \omega\sqrt{\epsilon_m\mu_0}$  et  $\zeta_m = \sqrt{\mu_0/\epsilon_m}$  désignent respectivement le vecteur d'onde et l'impédance intrinsèque dans la matrice. Il convient de souligner ici que les champs locaux  $\mathbf{e}_{\text{loc}}$  et  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$

---

13. Dans le cas de la diffusion d'une onde électromagnétique par un cylindre infini, la désignation *transverse* électrique (magnétique) correspond à une onde incidente dont le champ électrique (magnétique) est *transverse* à l'axe du cylindre.

associés à l'onde incidente qui excite le fil représentent les champs qui existeraient à la position occupée par le fil si celui-ci était absent.

### Diffusion par un fil ferromagnétique aimanté axialement

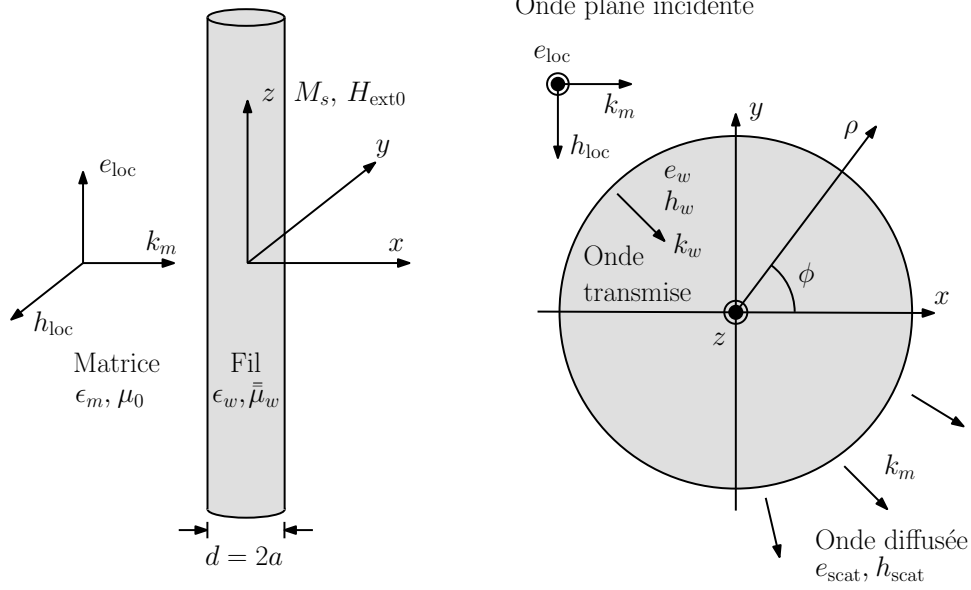


Figure 2.5 Représentation schématique de la diffusion d'une onde électromagnétique plane par un fil ferromagnétique aimanté axialement. Définition des systèmes de coordonnées cartésiennes  $xyz$  et cylindriques  $\rho\phi z$ , de même que des paramètres des ondes incidente, diffusée et transmise.

La symétrie cylindrique du problème suggère ensuite d'exprimer les champs incidents  $\mathbf{e}_{\text{loc}}$  et  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$  à l'aide des fonctions élémentaires du système de coordonnées cylindriques  $\rho\phi z$ . En utilisant l'identité de Jacobi-Anger (voir notamment la référence [128], p. 694)

$$e^{iu \cos \phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(u) e^{in\phi}, \quad (2.28)$$

avec  $u \cos \phi = k_m \rho \cos \phi = k_m x$ , nous obtenons

$$\mathbf{e}_{\text{loc}} = e_{\text{loc}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k_m \rho) e^{in\phi} \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.29a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\text{loc}} &= -\frac{i}{\omega \mu_0} (\nabla \times \mathbf{e}_{\text{loc}}) \\ &= h_{\text{loc}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \left[ n \frac{J_n(k_m \rho)}{k_m \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + i J'_n(k_m \rho) \hat{\boldsymbol{\phi}} \right] e^{in\phi}, \end{aligned} \quad (2.29b)$$

où les  $J_n(u)$  représentent les fonctions de Bessel de première espèce et la notation  $J'_n(u)$  désigne la dérivée de  $J_n(u)$  par rapport à son argument. Signalons également que le champ magnétique incident  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$  a été obtenu à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday et notons que la dépendance temporelle des champs a été absorbée dans les facteurs d'amplitude  $e_{\text{loc}} = e_{\text{loc}0}e^{-i\omega t}$  et  $h_{\text{loc}} = h_{\text{loc}0}e^{-i\omega t}$ . Les équations (2.29a) et (2.29b) montrent alors qu'en coordonnées cylindriques, une onde plane s'exprime comme une somme infinie de modes orthogonaux.

À l'interface entre le fil et la matrice, l'onde incidente est partiellement réfléchiée et partiellement transmise, en accord avec les conditions aux frontières imposées par les équations de Maxwell à la surface du fil en  $\rho = a$ .

D'une part, les champs diffusés doivent correspondre à une onde qui s'éloigne du fil et qui s'annule lorsque  $\rho \rightarrow \infty$  [80]. Dans ce cas, l'onde diffusée fait intervenir les fonctions de Hankel de première espèce  $H_n^{(1)}(u)$  et se propage vers les  $\rho > 0$  avec un vecteur d'onde  $k_m$  et des champs électrique et magnétique exprimés comme

$$\mathbf{e}_{\text{scat}} = e_{\text{loc}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n a_n H_n^{(1)}(k_m \rho) e^{in\phi} \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.30a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\text{scat}} &= -\frac{i}{\omega \mu_0} (\nabla \times \mathbf{e}_{\text{scat}}) \\ &= h_{\text{loc}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n a_n \left[ n \frac{H_n^{(1)}(k_m \rho)}{k_m \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + i H_n^{(1)'}(k_m \rho) \hat{\boldsymbol{\phi}} \right] e^{in\phi}, \end{aligned} \quad (2.30b)$$

où  $a_n$  est le coefficient d'amplitude des champs diffusés associés au mode propre  $n$ . Comme mentionné à la section 2.3, les champs électrique et magnétique diffusés dans le mode  $n$  peuvent être interprétés comme les champs produits par des multipôles électrique et magnétique ponctuels, d'amplitude proportionnelle à  $a_n$ .

D'autre part, pour le champ électrique incident de l'équation (2.29a) et un fil caractérisé par une permittivité scalaire  $\epsilon_w$ , le champ électrique  $\mathbf{e}_w = e_w(\rho, \phi) \hat{\mathbf{z}}$  transmis à l'intérieur du fil demeure strictement axial et satisfait l'équation d'onde

$$\nabla \times [\bar{\bar{\mu}}_w^{-1} (\nabla \times \mathbf{e}_w)] - \omega^2 \epsilon_w \mathbf{e}_w = \mathbf{0}, \quad (2.31)$$

où  $\bar{\bar{\mu}}_w^{-1}$  est l'inverse du tenseur de perméabilité de l'équation (2.11). L'équation (2.31) peut ensuite être mise sous la forme de l'équation de Poisson à deux dimensions en coordonnées polaires,

$$\frac{\partial^2 e_w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial e_w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 e_w}{\partial \phi^2} + k_w^2 e_w = 0, \quad (2.32)$$



où  $k_w$  correspond à l'amplitude complexe du vecteur d'onde radial à l'intérieur du fil. Ce vecteur d'onde s'exprime en fonction des propriétés intrinsèques du fil comme

$$k_w = \omega \sqrt{\epsilon_w \mu_{\perp}} = \left( \frac{1+i}{\delta_{w0}} \right) \sqrt{\frac{\mu_{\perp}}{\mu_0}}, \quad (2.33)$$

où

$$\mu_{\perp} = \frac{\mu^2 - \mu_t^2}{\mu} = \mu_0 \frac{(\omega_H^* + \omega_M)^2 - \omega^2}{\omega_H^* (\omega_H^* + \omega_M) - \omega^2} \quad (2.34)$$

représente la perméabilité scalaire effective dans la configuration TM étudiée ici, pour laquelle l'onde se propage perpendiculairement à la direction de l'aimantation statique [26]. Notons ici que la perméabilité scalaire  $\mu_{\perp}$  est souvent désignée comme la *perméabilité de Voigt* dans la littérature (voir notamment la référence [129], p. 211).

La méthode de séparation des variables permet ensuite d'exprimer  $\mathbf{e}_w$  comme une somme infinie de modes cylindriques orthogonaux, c'est-à-dire

$$\mathbf{e}_w = e_w(\rho, \phi) \hat{\mathbf{z}} = e_{\text{loc}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n b_n J_n(k_w \rho) e^{in\phi} \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.35)$$

où les  $b_n$  sont les coefficients d'amplitude associés aux modes de l'onde transmise. Pour sa part, le champ magnétique à l'intérieur du fil s'obtient directement à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_w &= -\frac{i}{\omega} \bar{\mu}_w^{-1} (\nabla \times \mathbf{e}_w) \\ &= h_{\text{loc}} \frac{\zeta_w}{\zeta_w} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n b_n \left[ C_n^{\rho}(k_w \rho) \hat{\rho} + i C_n^{\phi}(k_w \rho) \hat{\phi} \right] e^{in\phi}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

où l'impédance intrinsèque du fil  $\zeta_w$  vaut

$$\zeta_w = \sqrt{\frac{\mu_{\perp}}{\epsilon_w}} = \left( \frac{1-i}{\sigma_w \delta_{w0}} \right) \sqrt{\frac{\mu_{\perp}}{\mu_0}} = -\frac{ik_w}{\sigma_w}. \quad (2.37)$$

De même, les coefficients  $C_n^{\rho}(k_w \rho)$  et  $C_n^{\phi}(k_w \rho)$  sont définis comme [72]

$$C_n^{\rho}(k_w \rho) = n \frac{J_n(k_w \rho)}{k_w \rho} - \beta J_n'(k_w \rho), \quad (2.38a)$$

$$C_n^{\phi}(k_w \rho) = J_n'(k_w \rho) - n\beta \frac{J_n(k_w \rho)}{k_w \rho}, \quad (2.38b)$$

où  $\beta = \mu_t/\mu$  correspond au rapport des éléments hors diagonal et diagonal du tenseur de perméabilité intrinsèque  $\bar{\mu}_w$  et tient compte du caractère gyrotrope du fil ferromagnétique.

Enfin, la détermination des coefficients  $a_n$  et  $b_n$  nécessite de satisfaire les conditions aux frontières pour la continuité de  $e_z$  et  $h_\phi$  à la surface du fil en  $\rho = a$ . En considérant l'orthogonalité des différents modes cylindriques, nous obtenons les relations

$$J_n(k_m a) + a_n H_n^{(1)}(k_m a) = b_n J_n(k_w a), \quad (2.39a)$$

$$J'_n(k_m a) + a_n H_n^{(1)'}(k_m a) = \frac{\zeta_m}{\zeta_w} b_n C_n^\phi(k_w a), \quad (2.39b)$$

que nous résolvons pour obtenir

$$a_n = \frac{\zeta_m C_n^\phi(k_w a) J_n(k_m a) - \zeta_w J_n(k_w a) J'_n(k_m a)}{\zeta_w J_n(k_w a) H_n^{(1)'}(k_m a) - \zeta_m C_n^\phi(k_w a) H_n^{(1)}(k_m a)}, \quad (2.40)$$

$$b_n = \frac{2i\zeta_w/\pi k_m a}{\zeta_w J_n(k_w a) H_n^{(1)'}(k_m a) - \zeta_m C_n^\phi(k_w a) H_n^{(1)}(k_m a)}, \quad (2.41)$$

où le Wronskien des fonctions de Bessel (voir notamment la référence [130], p. 706)

$$J_n(k_m a) H_n^{(1)'}(k_m a) - J'_n(k_m a) H_n^{(1)}(k_m a) = \frac{2i}{\pi k_m a} \quad (2.42)$$

a été utilisé à l'équation (2.41) pour simplifier le numérateur de  $b_n$ .

Ceci complète la solution générale du problème de diffusion d'une onde électromagnétique plane par un fil ferromagnétique infini, aimanté axialement et excité dans la configuration TM. Notons que dans la limite  $\beta = 0$ , les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  se réduisent aux expressions valides dans le cas de la diffusion d'une onde plane par un cylindre isotrope (voir notamment la référence [80], p. 301).

### 2.7.2 Solution du problème de diffusion en régime quasi statique étendu

Nous allons maintenant considérer spécifiquement la réponse du fil en régime EQS, c'est-à-dire lorsque les champs incidents et diffusés demeurent spatialement uniformes en son voisinage, ce qui se traduit par la satisfaction des conditions  $|k_m|a \ll 1$  [Éq. (2.16)] et  $|k_m|\rho \ll 1$  pour  $\rho \lesssim D$ .<sup>14</sup> Ces deux conditions permettent alors de développer en série de Maclaurin

14. Notons que la deuxième condition, qui implique des champs uniformes dans la matrice à l'échelle de la cellule unitaire, est exigée par notre procédure d'homogénéisation décrite à la section 2.6.

toutes les fonctions de Bessel et de Hankel ayant  $k_m \rho$  ou  $k_m a$  comme argument dans les équations (2.29)–(2.42), ce qui simplifie considérablement la solution du problème de diffusion.

Le recours aux développements en série permet notamment de montrer que dans la limite  $|k_m| a \ll 1$ , les coefficients de diffusion  $a_n$  donnés à l'équation (2.40) deviennent proportionnels à (voir par exemple l'équation 5–117 à la référence [131])

$$a_n \propto \begin{cases} \left(\frac{k_m a}{2}\right)^2 & n = 0, \pm 1 \\ \frac{(k_m a/2)^{2|n|}}{|n|! (|n| - 1)!} & |n| > 1. \end{cases} \quad (2.43)$$

Ce résultat indique que les modes  $n = 0$  et  $n = \pm 1$ , lesquels décrivent respectivement les réponses dipolaires électrique et magnétique du fil [21, 23, 34], dominent les autres modes en régime EQS [72], de sorte que les coefficients d'ordres supérieurs (c.-à-d., avec  $|n| > 1$ ) peuvent être négligés. Or, la satisfaction de l'inégalité  $|k_m| a \ll 1$  constitue également une condition nécessaire à la modélisation du réseau de fils comme un matériau homogène décrit par des propriétés électromagnétiques macroscopiques. Par conséquent, seuls les modes dipolaires  $n = 0$  et  $n = \pm 1$  interviendront dans les expressions pour les paramètres constitutifs effectifs du réseau de fils, que nous dériverons et étudierons en détail au cours du chapitre 3.

Dans ce contexte, les coefficients de diffusion  $a_0$  et  $a_{\pm 1}$ , calculés à partir de l'équation (2.40) dans la limite  $|k_m| a \ll 1$ , vont permettre d'établir les tenseurs de susceptibilités externes électrique  $\bar{\bar{\kappa}}_w$  et magnétique  $\bar{\bar{\eta}}_w$  d'un fil individuel, comme discuté à la section 2.3. Ces deux fonctions de réponse vont ensuite intervenir dans la procédure d'homogénéisation décrite à la section 2.6, laquelle mène à la permittivité  $\bar{\bar{\epsilon}}_{\text{eff}}$  et à la perméabilité  $\bar{\bar{\mu}}_{\text{eff}}$  effectives du réseau de fils.

## 2.8 Sommaire

Dans ce chapitre, nous avons développé une approche théorique générale pour décrire la réponse électromagnétique effective en régime EQS d'un métamatériau formé d'inclusions gyromagnétiques. La procédure est appliquée à l'étude de réseaux de fils ferromagnétiques conducteurs. En particulier, nous avons introduit le système étudié, présenté les étapes de la modélisation et défini les fonctions de réponse, les paramètres physiques et les régimes d'opération pertinents. De plus, nous avons explicité la signification physique de notre procédure d'homogénéisation et justifié les hypothèses et approximations qui lui sont associées.

Le modèle théorique sur lequel repose la thèse s'appuie sur une structure hiérarchique qui comporte plusieurs échelles. Au niveau le plus fondamental, la section 2.2 a d'abord caractérisé

le métamatériau considéré, en définissant ses paramètres géométriques et son état magnétique statique, de même que les propriétés intrinsèques de ses constituants. La section 2.3 a ensuite été consacrée à l'étude de la réponse externe en régime EQS d'un fil individuel soumis à une onde électromagnétique. Dans ce régime d'opération général, les tenseurs de susceptibilité externe  $\bar{\bar{\kappa}}_w$  et  $\bar{\bar{\eta}}_w$  décrivent la réponse dipolaire du fil en fonction de ses propriétés intrinsèques, de ses dimensions (forme et taille) et de sa configuration magnétique statique.

Les sections 2.4 à 2.6 ont présenté en détail la procédure d'homogénéisation qui nous permettra, au cours des chapitres suivants, d'établir les propriétés effectives  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  d'un réseau de fils ferromagnétiques, à partir de la réponse des inclusions individuelles. En particulier, nous avons justifié notre recours au formalisme de Maxwell Garnett comme théorie de milieu effectif et nous avons décrit de façon générale notre méthode de dérivation des paramètres constitutifs du réseau. Cette approche s'appuie sur la définition d'une cellule unitaire équivalente plongée dans le milieu effectif et sur la satisfaction des conditions aux frontières appropriées à sa surface. Soulignons qu'un quatrième niveau hiérarchique, la réponse effective externe, sera introduit au chapitre 3 pour tenir compte de la réponse d'un réseau de taille finie excité par des champs dynamiques spatialement uniformes en son voisinage.

Finalement, à la section 2.7, nous avons débuté l'application directe de notre formalisme aux réseaux de fils ferromagnétiques, en traitant la diffusion d'une onde plane incidente dans la configuration TM par un fil individuel aimanté axialement. Nous avons notamment montré qu'en régime EQS, la solution générale du problème de diffusion est dominée par les modes  $n = 0$  et  $n = \pm 1$ , qui sont respectivement associés aux réponses dipolaires électrique et magnétique du fil. Au chapitre 3, nous étudierons en détail ces deux modes, en vue de dériver les propriétés effectives  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  de réseaux de fils ferromagnétiques.

Enfin, avant de poursuivre, il convient de souligner que l'originalité de notre procédure d'homogénéisation réside principalement dans la prise en compte simultanée du retard électromagnétique à l'intérieur des inclusions métalliques et de la gyrotropie associée à leur nature ferromagnétique, ce qui, à notre connaissance, n'a jamais été incorporé de façon systématique et complète dans un même formalisme. Il importe également d'insister sur la généralité de notre approche théorique, qui peut, en principe, être appliquée à tout matériau hétérogène caractérisé par une structure hiérarchique similaire à celle des réseaux de fils ferromagnétiques. Pour ce faire, il s'agit de modifier en conséquence les expressions présentées à la section 2.2 pour les paramètres géométriques du métamatériau et les propriétés intrinsèques de ses constituants.

## CHAPITRE 3

# PROPRIÉTÉS ÉLECTROMAGNÉTIQUES DE RÉSEAUX DE FILS FERROMAGNÉTIQUES

### 3.1 Introduction

Au cours du chapitre précédent, nous avons établi l'approche théorique générale préconisée dans le cadre de cette thèse et nous avons défini les quantités physiques requises pour obtenir les paramètres constitutifs effectifs  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  de réseaux de fils ferromagnétiques, notamment les propriétés intrinsèques ( $\bar{\epsilon}_w$  et  $\bar{\mu}_w$ ) et externes ( $\bar{\kappa}_w$  et  $\bar{\eta}_w$ ) des fils individuels. Nous avons également élaboré une procédure d'homogénéisation basée sur le formalisme de Maxwell Garnett, que nous appliquerons maintenant afin de dériver les propriétés effectives  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  du réseau.

Cette procédure en deux étapes consiste d'abord à résoudre le problème de la diffusion d'une onde électromagnétique par un fil unique, en vue d'obtenir les susceptibilités externes  $\bar{\kappa}_w$  et  $\bar{\eta}_w$ , puis à satisfaire les conditions de continuité des champs à la surface de la cellule unitaire équivalente plongée dans le milieu effectif. La première étape du problème d'homogénéisation a été résolue dans le cas général à la section 2.7, pour le cas d'un fil ferromagnétique excité dans la configuration TM. Ce résultat nous a alors permis de montrer que lorsque la condition  $|k_m|a \ll 1$  est satisfaite (régime EQS), seuls les modes dipolaires électrique ( $n = 0$ ) et magnétique ( $n = \pm 1$ ) doivent être considérés pour obtenir les susceptibilités externes du fil et, ultimement, les propriétés électromagnétiques effectives du réseau.

Dans ce chapitre, nous étudierons en détail ces deux modes en vue d'établir la réponse électromagnétique macroscopique du réseau de fils en régime EQS. D'abord, à la section 3.2, nous dériverons le tenseur de susceptibilité magnétique externe  $\bar{\eta}_w$  d'un fil individuel dans le mode  $n = \pm 1$ , puis utiliserons ce résultat dans notre procédure d'homogénéisation pour déterminer la perméabilité effective gyrotrope  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  du réseau. Ensuite, à la section 3.3, nous emploierons une méthode similaire pour établir la susceptibilité électrique externe  $\bar{\kappa}_w$  d'un fil isolé, puis la permittivité effective  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  du réseau dans le mode  $n = 0$ . Enfin, à la section 3.4, nous introduirons le concept de réponse effective externe d'un métamatériau de taille finie, dans le but de traiter sa réponse à des champs externes dynamiques spatialement uniformes en son voisinage. En particulier, nous étudierons la résonance ferromagnétique du mode uniforme d'un réseau de fils ferromagnétiques et montrerons comment les interactions dipolaires interfils

peuvent être prises en compte par l'intermédiaire d'un tenseur de désaimantation effectif  $\bar{N}_{\text{eff}}$ , lequel pourra aussi être exprimé en fonction des dimensions géométriques macroscopiques du réseau. Soulignons ici que l'essentiel des résultats théoriques présentés aux sections 3.2 et 3.4 a été publié à la référence [35].

De façon générale, notre procédure consistera à écrire les expressions pour  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  valides en régime EQS sous une forme identique à celle des résultats connus dans la limite QS, lesquels sont donnés à l'équation (2.25). Pour ce faire, nous appliquerons une procédure de renormalisation des propriétés intrinsèques  $\bar{\epsilon}_w$  et  $\bar{\mu}_w$ , laquelle incorporera, d'une part, l'effet du retard électromagnétique et, d'autre part, la gyrotropie des fils (pour  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$ ) et leur inductance externe lorsque placés dans la cellule unitaire du réseau (pour  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$ ). Enfin, signalons que les développements en série de Maclaurin requis pour l'analyse des modes  $n = 0$  et  $n = \pm 1$  en régime EQS sont regroupés au tableau 3.1, dans lequel  $\gamma_E \approx 0,5772$  désigne la constante d'Euler.

Tableau 3.1 Développements en série de Maclaurin des fonctions de Bessel et Hankel et de leur dérivée première pour les ordres 0 et  $\pm 1$ .

Fonction	Développement	Dérivée	Développement
$J_0(u)$	1	$J'_0(u)$	$-\frac{u}{2}$
$J_{\pm 1}(u)$	$\pm \frac{u}{2}$	$J'_{\pm 1}(u)$	$\pm \frac{1}{2}$
$H_0^{(1)}(u)$	$1 + \frac{2i}{\pi} \left[ \ln\left(\frac{u}{2}\right) + \gamma_E \right]$	$H_0^{(1)'}(u)$	$-\frac{u}{2} + \frac{2i}{\pi u}$
$H_{\pm 1}^{(1)}(u)$	$\pm \left( \frac{u}{2} - \frac{2i}{\pi u} \right)$	$H_{\pm 1}^{(1)'}(u)$	$\pm \left( \frac{1}{2} + \frac{2i}{\pi u^2} \right)$

## 3.2 Propriétés magnétiques

### 3.2.1 Réponse d'un fil individuel : tenseur de susceptibilité externe

Dans la configuration TM et en régime EQS, les propriétés magnétiques sont dominées par celles du mode  $n = \pm 1$ , lequel décrit la réponse dipolaire de l'aimantation dynamique  $\langle \mathbf{m}_w \rangle$  des fils excités par le champ local  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$ . Rappelons que pour un fil placé dans le réseau, le champ local  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$  est formé d'une contribution externe au réseau et d'une contribution due aux interactions dipolaires interfils.

La première étape pour obtenir la perméabilité effective  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  du réseau consiste à dériver le tenseur gyrotrope de susceptibilité externe  $\bar{\eta}_w$  d'un fil individuel, dont nous allons exprimer les composantes diagonales et hors diagonales sous une forme compacte, identique à celle des relations valides dans la limite QS [26, 132]. Pour ce faire, nous allons définir les composantes

de *perméabilité renormalisée*  $\tilde{\mu}$  et  $\tilde{\mu}_t$ , qui vont dépendre de  $k_w a$  et que nous pourrions substituer aux composantes intrinsèques  $\mu$  et  $\mu_t$ , aux endroits où ces dernières apparaissent dans les résultats QS.<sup>1</sup>

À l'extérieur du fil, le champ magnétique  $\mathbf{h}_m$  dans la matrice s'exprime comme la somme du champ local incident sur le fil et du champ diffusé par celui-ci, c'est-à-dire

$$\mathbf{h}_m = \mathbf{h}_{\text{loc}} + \mathbf{h}_{\text{scat}}, \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$  et  $\mathbf{h}_{\text{scat}}$  sont donnés respectivement aux équations (2.29b) et (2.30b). En conservant uniquement le mode  $n = \pm 1$ , ces deux équations se réduisent à

$$\mathbf{h}_{\text{loc}} = -2 \left[ \frac{J_1(k_m \rho)}{k_m \rho} \sin \phi \hat{\boldsymbol{\rho}} + J_1'(k_m \rho) \cos \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \right] h_{\text{loc}} \quad (3.2)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\text{scat}} = & \left[ \frac{i H_1^{(1)}(k_m \rho)}{k_m \rho} (a_1 e^{i\phi} - a_{-1} e^{-i\phi}) \hat{\boldsymbol{\rho}} \right. \\ & \left. - H_1^{(1)'}(k_m \rho) (a_1 e^{i\phi} + a_{-1} e^{-i\phi}) \hat{\boldsymbol{\phi}} \right] h_{\text{loc}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

En régime EQS, les fonctions de Bessel et de Hankel ayant  $k_m \rho$  ou  $k_m a$  comme argument peuvent être remplacées par leur développement en série de Maclaurin donné au tableau 3.1. D'abord, le champ incident agissant sur le fil se simplifie considérablement et s'écrit comme

$$\mathbf{h}_{\text{loc}} = -h_{\text{loc}} \hat{\mathbf{y}} = -h_{\text{loc}0} e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{y}}, \quad (3.4)$$

ce qui correspond, comme attendu, à un champ local dynamique, transverse à l'axe du fil et spatialement uniforme en son voisinage. Soulignons que l'équation (3.4) aurait pu être obtenue directement en posant  $k_m = 0$  dans l'équation (2.27b). Ensuite, l'équation (3.3) pour le champ diffusé se réduit à

$$\mathbf{h}_{\text{scat}} = \frac{2}{\pi (k_m \rho)^2} \left[ (a_1 e^{i\phi} - a_{-1} e^{-i\phi}) \hat{\boldsymbol{\rho}} - i (a_1 e^{i\phi} + a_{-1} e^{-i\phi}) \hat{\boldsymbol{\phi}} \right] h_{\text{loc}}, \quad (3.5)$$

où nous avons exprimé les coefficients de réflexion  $a_{\pm 1}$  sous la forme compacte

---

1. Dans le cadre de cette thèse, les quantités renormalisées qui s'appliquent en régime EQS seront désignées par symbole  $\tilde{\phantom{x}}$  inscrit au-dessus du caractère.

$$a_{\pm 1} = i\pi \left( \frac{k_m a}{2} \right)^2 \left[ \frac{\tilde{\mu}^2 - (\tilde{\mu}_t \mp \mu_0)^2}{(\tilde{\mu} + \mu_0)^2 - \tilde{\mu}_t^2} \right], \quad (3.6)$$

grâce à l'introduction des composantes de perméabilité renormalisée  $\tilde{\mu}$  et  $\tilde{\mu}_t$ . Ces quantités, qui diffèrent des propriétés intrinsèques  $\mu$  et  $\mu_t$  en raison du retard électromagnétique à l'intérieur du fil, sont définies comme

$$\tilde{\mu} = \mu \left[ \frac{(1 - \beta^2) G(k_w a)}{1 - \beta^2 G^2(k_w a)} \right], \quad (3.7a)$$

$$\tilde{\mu}_t = \mu_t \left[ \frac{(1 - \beta^2) G^2(k_w a)}{1 - \beta^2 G^2(k_w a)} \right] = \tilde{\mu} \beta G(k_w a), \quad (3.7b)$$

où

$$G(k_w a) = \frac{F(k_w a)}{1 - F(k_w a)}, \quad (3.8)$$

$$F(k_w a) = \frac{J_1(k_w a)}{k_w a J_0(k_w a)} \quad (3.9)$$

sont des facteurs de renormalisation dépendant des fonctions de Bessel  $J_0(k_w a)$  et  $J_1(k_w a)$ , lesquelles reflètent la symétrie cylindrique du fil. Signalons que la signification physique des propriétés magnétiques renormalisées  $\tilde{\mu}$  et  $\tilde{\mu}_t$  ressortira plus clairement lorsque nous aurons dérivé notre expression pour le tenseur de susceptibilité externe  $\bar{\eta}_w$ . Enfin, par analogie avec l'équation (2.34), nous pouvons aussi définir la perméabilité de Voigt renormalisée

$$\tilde{\mu}_{\perp} = \frac{\tilde{\mu}^2 - \tilde{\mu}_t^2}{\tilde{\mu}} = \mu_{\perp} G(k_w a), \quad (3.10)$$

qui adopte une forme plus simple que  $\tilde{\mu}$  et  $\tilde{\mu}_t$ , puisque que c'est  $\mu_{\perp}$  (et non  $\mu$  ou  $\mu_t$ ) qui intervient explicitement dans les expressions pour  $k_w$  et  $\zeta_w$  données respectivement aux équations (2.33) et (2.37) et qui, par conséquent, gouverne la propagation d'ondes à l'intérieur du fil aimanté axialement.

Comme mentionné à section 2.3, le régime EQS correspond à l'excitation d'une réponse *dipolaire* de l'aimantation du fil. Par conséquent, le champ diffusé donné à l'équation (3.5) doit également pouvoir s'exprimer comme le champ dipolaire bidimensionnel produit par un dipôle ponctuel, positionné à l'origine et doté d'un moment magnétique par unité de volume



égal à  $\langle \mathbf{m}_w \rangle$ . Il s'ensuit que  $\mathbf{h}_{\text{scat}}$  peut s'écrire de façon équivalente comme (voir notamment la référence [71], p. 194)

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\text{scat}} &= \frac{a^2}{2\rho^2} [2 (\langle \mathbf{m}_w \rangle \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}) \hat{\boldsymbol{\rho}} - \langle \mathbf{m}_w \rangle] \\ &= \frac{a^2}{2\rho^2} [2 (\bar{\bar{\eta}}_w \mathbf{h}_{\text{loc}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}) \hat{\boldsymbol{\rho}} - \bar{\bar{\eta}}_w \mathbf{h}_{\text{loc}}]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Notons que la deuxième ligne de l'équation (3.11) découle de l'équation (2.17b) et indique que le champ diffusé est lié au champ local  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$  par l'intermédiaire du tenseur de susceptibilité externe  $\bar{\bar{\eta}}_w$ , que nous cherchons à déterminer.<sup>2</sup>

En réarrangeant ensuite l'équation (3.5) sous une forme identique à celle de l'équation (3.11) nous trouvons, par identification, la susceptibilité externe du fil

$$\bar{\bar{\eta}}_w = \begin{pmatrix} \tilde{\eta} & -i\tilde{\eta}_t & 0 \\ i\tilde{\eta}_t & \tilde{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\eta}_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

qui correspond à un tenseur gyrotrope, dont les composantes diagonales et hors diagonales s'expriment en fonction des composantes de perméabilité renormalisée  $\tilde{\mu}$  et  $\tilde{\mu}_t$  comme

$$\tilde{\eta} = \frac{2(\tilde{\mu}^2 - \tilde{\mu}_t^2 - \mu_0^2)}{(\tilde{\mu} + \mu_0)^2 - \tilde{\mu}_t^2}, \quad (3.13a)$$

$$\tilde{\eta}_t = \frac{4\mu_0\tilde{\mu}_t}{(\tilde{\mu} + \mu_0)^2 - \tilde{\mu}_t^2}. \quad (3.13b)$$

Soulignons ici que la composante axiale  $\tilde{\eta}_{\parallel}$  a été ajoutée de façon *ad hoc* au tenseur  $\bar{\bar{\eta}}_w$  (voir l'annexe A), puisqu'elle n'apparaît pas lors de la résolution du problème de diffusion dans la configuration TM. Pour obtenir une expression explicite pour  $\tilde{\eta}_{\parallel}$ , il faudrait alors traiter la configuration transverse électrique (TE), dans laquelle un fil aimanté axialement est soumis à une onde incidente caractérisée par des champs électrique et magnétique respectivement

---

2. Soulignons la similitude entre la forme bidimensionnelle du champ dipolaire donnée à l'équation (3.11) et sa forme tridimensionnelle plus connue. En effet, en régime EQS, le champ dipolaire tridimensionnel diffusé par une sphère de rayon  $a$ , placée à l'origine et d'aimantation dynamique moyenne  $\langle \mathbf{m}_s \rangle$  vaut (voir notamment la référence [71], p. 193)

$$\mathbf{h}_{\text{scat}} = \frac{a^3}{3r^3} [3 (\langle \mathbf{m}_s \rangle \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \langle \mathbf{m}_s \rangle],$$

où  $\hat{\mathbf{r}}$  est le vecteur unitaire en coordonnées sphériques et  $r$  est la distance par rapport à l'origine.

perpendiculaire et parallèle à son axe. Or, la configuration TE ne sera pas considérée dans le cadre de ce travail.<sup>3</sup> Par contre, comme discuté à l'annexe A, l'introduction d'une composante  $\tilde{\eta}_{\parallel}$  non nulle au tenseur  $\bar{\eta}_w$  va nous permettre de rendre plus transparent le traitement mathématique de certaines relations présentées plus loin dans ce chapitre, notamment les équations (3.36), (3.104), (3.108) et (3.117).

Les équations (3.12) et (3.13) décrivent la réponse complexe, tensorielle et dépendant de  $k_w a$  (régime EQS) de l'aimantation d'un fil ferromagnétique aimanté axialement et excité dans la configuration TM. Ces relations constituent un des résultats principaux de cette thèse. La dérivation du tenseur de susceptibilité externe  $\bar{\eta}_w$  représente également la première étape de notre procédure d'homogénéisation visant à déterminer le tenseur de perméabilité effective  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  d'un réseau de fils ferromagnétiques, lequel sera obtenu à la sous-section suivante. De plus, en réexprimant la relation générale liant le champ diffusé  $\mathbf{h}_{\text{scat}}$  au champ local  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$  [Éq. (3.5)] sous la forme équivalente d'un champ dipolaire bidimensionnel [Éq. (3.11)], nous avons pu établir une *définition* pour l'aimantation dynamique moyenne  $\langle \mathbf{m}_w \rangle$  d'un fil en régime EQS.

Nous devons insister sur le fait que la prise en compte du retard électromagnétique à l'intérieur des fils est grandement simplifiée par l'introduction des composantes de perméabilité renormalisée  $\tilde{\mu}$  et  $\tilde{\mu}_t$ , lesquelles mènent à des expressions pour  $\tilde{\eta}$  et  $\tilde{\eta}_t$  compactes et formellement identiques aux résultats valides dans la limite QS [voir notamment l'équation (3.29)]. En particulier, nos relations pour  $\tilde{\mu}$  et  $\tilde{\mu}_t$  incorporent, par l'intermédiaire du facteur de renormalisation  $G(k_w a)$ , tous les effets de propagation et d'atténuation à l'intérieur du fil. Par conséquent, la réponse magnétique du fil en régime EQS, caractérisée par les positions de la résonance et de l'antirésonance, de même que par la largeur, la forme et l'amplitude de la courbe d'absorption, montrera une dépendance non triviale en fonction du produit  $k_w a$  et donc, en fonction du rayon du fil.

Dans ce contexte, les relations conventionnelles utilisées pour décrire la résonance ferromagnétique dans les limites QS et SE (voir la sous-section 3.2.3) ne s'appliquent généralement pas en régime EQS. De même, les différentes contributions à la largeur de résonance de  $\bar{\eta}_w$  ne peuvent être aisément distinguées, puisque  $\tilde{\mu}$  et  $\tilde{\mu}_t$  dépendent explicitement du vecteur d'onde  $k_w$ . Or, comme mentionné à la section 2.2, le vecteur d'onde dans un métal ferromagnétique obéit à une relation de dispersion relativement complexe dans les hyperfréquences, qui tient compte à la fois du caractère résonant de la perméabilité gyrotrope et de l'effet de peau associé à la conductivité élevée. Par conséquent, la largeur de résonance de  $\bar{\eta}_w$  obser-

---

3. Mentionnons tout de même qu'en raison de la symétrie des équations de Maxwell, l'expression pour  $\tilde{\eta}_{\parallel}$  valide dans la configuration TE s'avère formellement identique au résultat que nous allons établir pour la composante axiale de susceptibilité électrique externe  $\tilde{\kappa}_{w\parallel} = \tilde{\kappa}_w$  dans la configuration TM [Éq. (3.53)]. Dans ce contexte, par analogie avec notre expression pour  $\tilde{\kappa}_w$ , il serait alors possible d'exprimer  $\tilde{\eta}_{\parallel}$  en fonction d'une composante de perméabilité renormalisée, laquelle ferait intervenir notamment la composante de perméabilité intrinsèque  $\mu_{\parallel}$  et un facteur renormalisation dépendant des fonctions de Bessel.

vée expérimentalement reflétera à la fois les pertes magnétiques intrinsèques attribuables à l'amortissement de Gilbert et celles liées aux courants de Foucault générés à l'intérieur de la profondeur de peau.

### 3.2.2 Réponse du réseau de fils : tenseur de perméabilité effective

La réponse d'un fil individuel en régime EQS va maintenant être utilisée dans les conditions aux frontières magnétiques en vue de dériver une expression pour le tenseur de perméabilité effective  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  dans le régime électromagnétique général, pour lequel la propagation d'ondes est permise dans le réseau et où aucune restriction n'est imposée quant à la valeur de  $|k_{\text{eff}}| R$ , où  $R$  tient compte des dimensions latérales du réseau, comme montré à la figure 2.1.<sup>4</sup> Notre résultat final sera exprimé en fonction des composantes  $\tilde{\eta}$  et  $\tilde{\eta}_t$  du tenseur de susceptibilité externe, lesquelles incorporent à la fois le caractère gyrotrope et la dépendance en  $k_w a$  de la réponse des fils individuels.

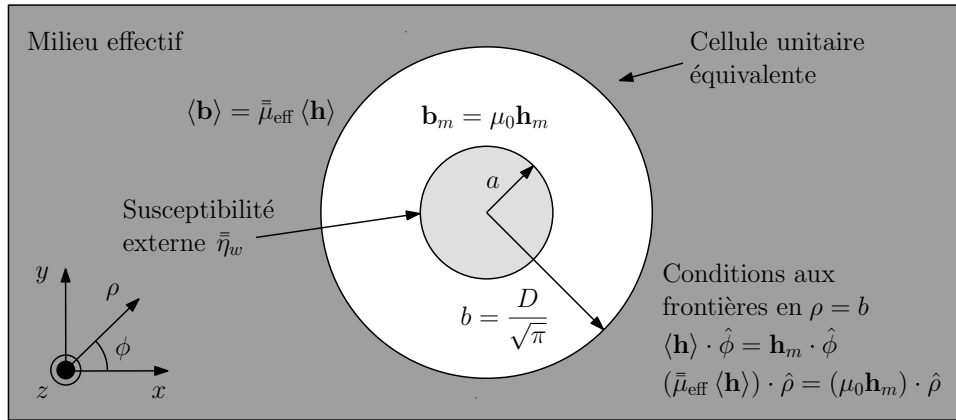


Figure 3.1 Définition du problème de conditions aux frontières à résoudre pour déterminer le tenseur de perméabilité effective du réseau de fils. La cellule unitaire équivalente de rayon  $b = D/\sqrt{\pi}$  est plongée dans le milieu effectif de perméabilité  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  à déterminer et comprend, en son centre, un fil de rayon  $a$  et de susceptibilité externe  $\bar{\eta}_w$ . Notons que l'origine des systèmes de coordonnées coïncide avec le centre du fil.

Notre méthode de résolution s'appuie sur la satisfaction des conditions aux frontières données à l'équation (2.26) pour le champ et l'induction magnétiques à l'interface entre la cellule unitaire équivalente et le milieu effectif, comme montré à la figure 3.1. Pour la

4. Les conditions d'homogénéisation  $|k_{\text{eff}}| a \ll 1$  et  $|k_{\text{eff}}| D \ll 1$  doivent toutefois être satisfaites.

configuration TM considérée, les conditions pertinentes qui s'appliquent en  $\rho = b$  peuvent s'écrire comme

$$\langle \mathbf{h} \rangle \cdot \hat{\phi} = \mathbf{h}_m \cdot \hat{\phi}, \quad (3.14a)$$

$$\langle \mathbf{b} \rangle \cdot \hat{\rho} = \mathbf{b}_m \cdot \hat{\rho}, \quad (3.14b)$$

où  $\mathbf{h}_m$  et  $\mathbf{b}_m = \mu_0 \mathbf{h}_m$  désignent respectivement le champ et l'induction magnétiques dans la matrice, laquelle correspond à la région externe ( $a < \rho < b$ ) de la cellule unitaire équivalente. Mentionnons que les équations (3.14a) et (3.14b) constituent nos *définitions* pour le champ  $\langle \mathbf{h} \rangle$  et l'induction  $\langle \mathbf{b} \rangle = \bar{\bar{\mu}}_{\text{eff}} \langle \mathbf{h} \rangle$  magnétiques moyennes du réseau de fils.

La procédure va maintenant consister à appliquer les équations (3.14a) et (3.14b) en  $\rho = b$ , pour différentes valeurs de  $\phi$ , dans le but d'exprimer  $\langle \mathbf{h} \rangle$  et  $\langle \mathbf{b} \rangle$  en fonction du champ local  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$  agissant sur le fil placé au centre de la cellule unitaire [Éq. (3.4)] et du tenseur de susceptibilité externe  $\bar{\bar{\eta}}_w$ . Les expressions résultantes pour  $\langle \mathbf{h} \rangle$  et  $\langle \mathbf{b} \rangle$  vont ensuite être substituées dans la relation constitutive  $\langle \mathbf{b} \rangle = \bar{\bar{\mu}}_{\text{eff}} \langle \mathbf{h} \rangle$  [Éq. (2.20b)], ce qui va mener à notre résultat final pour  $\bar{\bar{\mu}}_{\text{eff}}$ .

La première étape requiert donc de lier les champs  $\mathbf{h}_m$  et  $\mathbf{b}_m$  au champ local  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$ . Pour ce faire, nous insérons les équations (3.4) et (3.11) dans l'équation (3.1), ce qui nous permet d'obtenir le champ magnétique dans la matrice ( $a < \rho < b$ ) en régime EQS

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_m &= \mathbf{h}_{\text{loc}} + \mathbf{h}_{\text{scat}} \\ &= \mathbf{h}_{\text{loc}} + \frac{a^2}{2\rho^2} [2(\bar{\bar{\eta}}_w \mathbf{h}_{\text{loc}} \cdot \hat{\rho}) \hat{\rho} - \bar{\bar{\eta}}_w \mathbf{h}_{\text{loc}}] \\ &= \mathbf{h}_{\text{loc}} + \frac{a^2}{2\rho^2} [2(\hat{\rho} \otimes \hat{\rho}) - \bar{\bar{I}}] \bar{\bar{\eta}}_w \mathbf{h}_{\text{loc}}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

où les composantes de  $\bar{\bar{\eta}}_w$  sont données à l'équation (3.13) et  $\hat{\rho} \otimes \hat{\rho}$  correspond au produit dyadique de  $\hat{\rho} = \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}}$  avec lui-même. Un calcul direct montre que

$$[2(\hat{\rho} \otimes \hat{\rho}) - \bar{\bar{I}}] = \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

que nous pouvons remplacer dans l'équation (3.15) en vue d'établir des expressions explicites pour les composantes  $x$  et  $y$  de  $\mathbf{h}_m = h_{m,x}(\rho, \phi) \hat{\mathbf{x}} + h_{m,y}(\rho, \phi) \hat{\mathbf{y}}$  en fonction de  $\mathbf{h}_{\text{loc}} = -h_{\text{loc}} \hat{\mathbf{y}}$ . Pour sa part, l'induction magnétique dans la matrice s'obtient en utilisant l'équation (3.15)

dans la relation  $\mathbf{b}_m = \mu_0 \mathbf{h}_m$ . Soulignons également que la notation dyadique introduite à la deuxième ligne de l'équation (3.15) permet de séparer les contributions magnétique et géométrique du champ  $\mathbf{h}_{\text{scat}}$  diffusé par le fil.

La procédure requiert ensuite de lier  $\mathbf{h}_m$  et  $\mathbf{b}_m$  aux champs moyens  $\langle \mathbf{h} \rangle$  et  $\langle \mathbf{b} \rangle$  en satisfaisant les conditions de continuité pour la composante tangentielle du champ magnétique [Éq. (3.14a)] et de la composante normale de l'induction magnétique [Éq. (3.14b)] en  $\rho = b$ . D'une part, ces conditions impliquent que la composante  $y$  du champ magnétique et la composante  $x$  de l'induction magnétique sont continues en  $(\rho = b, \phi = 0, \pi)$ , c'est-à-dire

$$\langle h_y \rangle = h_{m,y} = - \left( 1 - \frac{f\tilde{\eta}}{2} \right) h_{\text{loc}}, \quad (3.17a)$$

$$\langle b_x \rangle = b_{m,x} = i\mu_0 \left( \frac{f\tilde{\eta}_t}{2} \right) h_{\text{loc}}. \quad (3.17b)$$

Signalons ici que la relation  $f = a^2/b^2$  a été employée afin d'introduire la fraction du réseau occupée par les fils dans les conditions aux frontières. D'autre part, la composante  $x$  du champ magnétique et la composante  $y$  de l'induction magnétique sont continues en  $(\rho = b, \phi = \pm\pi/2)$ , de sorte que

$$\langle h_x \rangle = h_{m,x} = -i \left( \frac{f\tilde{\eta}_t}{2} \right) h_{\text{loc}}, \quad (3.18a)$$

$$\langle b_y \rangle = b_{m,y} = -\mu_0 \left( 1 + \frac{f\tilde{\eta}}{2} \right) h_{\text{loc}}. \quad (3.18b)$$

En combinant ensuite les équations (3.17) et (3.18), nous obtenons les expressions tensorielles suivantes pour le champ moyen  $\langle \mathbf{h} \rangle$  et l'induction moyenne  $\langle \mathbf{b} \rangle$  en fonction du champ local  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$

$$\langle \mathbf{h} \rangle = \left( \bar{I} - f\bar{N}_w\bar{\eta}_w \right) \mathbf{h}_{\text{loc}}, \quad (3.19a)$$

$$\langle \mathbf{b} \rangle = \mu_0 \left[ \bar{I} + f \left( \bar{I} - \bar{N}_w \right) \bar{\eta}_w \right] \mathbf{h}_{\text{loc}}, \quad (3.19b)$$

où  $\bar{N}_w$  est donné à l'équation (2.2) et possède des composantes transverses  $N_{\text{ip}}^w \approx 1/2$  et longitudinale  $N_{\text{op}}^w \approx 0$  dans la limite de fils très longs avec  $L \gg d$ . Enfin, nous substituons

l'équation (3.19a) dans la relation  $\langle \mathbf{b} \rangle = \bar{\bar{\mu}}_{\text{eff}} \langle \mathbf{h} \rangle$  [Éq. (2.20b)], puis comparons le résultat avec l'équation (3.19b). Le calcul est direct et mène à l'expression explicite suivante pour le tenseur de perméabilité effective du réseau en régime EQS

$$\frac{\bar{\bar{\mu}}_{\text{eff}}}{\mu_0} = \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\chi}}_{\text{eff}} = \bar{\bar{I}} + f \left( \bar{\bar{\eta}}_w^{-1} - f \bar{\bar{N}}_w \right)^{-1}, \quad (3.20)$$

où  $\bar{\bar{\chi}}_{\text{eff}}$  est le tenseur de susceptibilité effective, défini par la relation

$$\langle \mathbf{m} \rangle = \bar{\bar{\chi}}_{\text{eff}} \langle \mathbf{h} \rangle = f \left( \bar{\bar{\eta}}_w^{-1} - f \bar{\bar{N}}_w \right)^{-1} \langle \mathbf{h} \rangle. \quad (3.21)$$

Le tenseur  $\bar{\bar{\chi}}_{\text{eff}}$  établit un lien entre le champ moyen  $\langle \mathbf{h} \rangle$  et l'aimantation dynamique moyenne du réseau  $\langle \mathbf{m} \rangle$ , laquelle est égale au produit de l'aimantation moyenne  $\langle \mathbf{m}_w \rangle$  des fils individuels en régime EQS et de la fraction  $f$  qu'ils occupent dans le réseau, c'est-à-dire que  $\langle \mathbf{m} \rangle = f \langle \mathbf{m}_w \rangle$ . Mentionnons ici que le terme  $-f \bar{\bar{N}}_w$  aux équations (3.20) et (3.21) représente le champ de cavité de Lorentz et tient compte, dans un réseau non borné, des interactions dipolaires *dynamiques* entre les fils.

L'examen de l'équation (3.20) indique que le tenseur de la perméabilité effective  $\bar{\bar{\mu}}_{\text{eff}}$  en régime EQS adopte la même forme que la relation QS de Maxwell Garnett donnée par l'équation (2.25b), mais où  $\bar{\eta}_w$  est donnée par l'équation (3.12) plutôt que par l'équation (2.19b). De plus, un calcul explicite montre que  $\bar{\bar{\mu}}_{\text{eff}}$  conserve le caractère gyrotrope de la susceptibilité externe  $\bar{\eta}_w$  des fils individuels, c'est-à-dire

$$\bar{\bar{\mu}}_{\text{eff}} = \mu_0 \left( \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\chi}}_{\text{eff}} \right) = \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_{\text{eff}} & -i\tilde{\mu}_{\text{eff},t} & 0 \\ i\tilde{\mu}_{\text{eff},t} & \tilde{\mu}_{\text{eff}} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mu}_{\text{eff}\parallel} \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

où les composantes transverses diagonales et hors diagonales sont données par

$$\frac{\tilde{\mu}_{\text{eff}}}{\mu_0} = 1 + 2f \left[ \frac{2\tilde{\eta} - f(\tilde{\eta}^2 - \tilde{\eta}_t^2)}{(f\tilde{\eta} - 2)^2 - (f\tilde{\eta}_t)^2} \right], \quad (3.23a)$$

$$\frac{\tilde{\mu}_{\text{eff},t}}{\mu_0} = \frac{4f\tilde{\eta}_t}{(f\tilde{\eta} - 2)^2 - (f\tilde{\eta}_t)^2} \quad (3.23b)$$

et où la composante axiale  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\parallel}$  satisfait la relation  $\langle b_z \rangle = \tilde{\mu}_{\text{eff}\parallel} \langle h_z \rangle$ . Or, comme pour la composante de susceptibilité externe  $\tilde{\eta}_{\parallel}$  introduite en 3.2.1, la composante  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\parallel}$  n'intervient

pas dans la configuration TM considérée ici et peut être obtenue en se plaçant dans la configuration TE.<sup>5</sup>

Notre résultat pour le tenseur gyrotrope de perméabilité effective  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  incorpore l'effet de la forme des fils  $\bar{N}_w$ , de la fraction  $f$  qu'ils occupent dans le réseau et, principalement, de leur tenseur de susceptibilité externe  $\bar{\eta}_w$ , qui tient compte, en régime EQS, à la fois de la gyrotropie, des pertes magnétiques intrinsèques et de la dépendance en  $k_w a$  de la réponse des fils individuels. La réponse dynamique du réseau dépend également, par l'intermédiaire du terme  $\omega_H$ , du champ magnétique *statique* à l'intérieur des fils, lequel est déterminé, dans le cas d'un réseau borné, à la fois par le champ appliqué  $H_{\text{ext}0}$  et les interactions dipolaires interfils [61].

### 3.2.3 Étude de cas limites

Notre solution analytique pour la réponse magnétique du réseau de fils est générale et permet de retrouver, comme cas particulier, plusieurs expressions existant dans la littérature. Dans ce qui suit, nous allons valider les relations théoriques établies pour  $\bar{\eta}_w$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  [Éqs. (3.12) et (3.20), respectivement] en étudiant leur comportement dans plusieurs limites d'intérêt.

#### Réseau non borné

Dans la configuration TM, une onde se propage dans le réseau perpendiculairement à la direction de l'aimantation statique moyenne  $\langle \mathbf{M}_0 \rangle = f M_s \hat{\mathbf{z}}$ . Lorsque le réseau est non borné dans le plan  $xy$  (c.-à-d., selon les directions IP), sa réponse magnétique est prise en compte par la perméabilité effective scalaire

$$\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp} = \frac{\tilde{\mu}_{\text{eff}}^2 - \tilde{\mu}_{\text{eff},t}^2}{\tilde{\mu}_{\text{eff}}} = \mu_0 \frac{(f\tilde{\eta} + 2)^2 - (f\tilde{\eta}_t)^2}{4 - f^2(\tilde{\eta}^2 - \tilde{\eta}_t^2)}, \quad (3.24)$$

laquelle joue un rôle équivalent à celui de la perméabilité de Voigt  $\mu_{\perp}$  [Éq. (2.34)] dans le contexte des matériaux naturels. Or, un calcul direct montre que notre équation (3.24) est identique à l'expression obtenue par Jin *et al.* [34] pour la perméabilité effective d'un matériau composite formé de cylindres ferrimagnétiques caractérisés par le tenseur de perméabilité gyrotrope de l'équation (2.11). Le résultat de la référence [34] a toutefois été établi en imposant la condition de diffusion nulle par la cellule unitaire équivalente plongée dans le milieu effectif. Par conséquent, cette approche ne s'applique que pour un mode de propagation spécifique et,

---

5. Encore une fois, en invoquant la symétrie des équations de Maxwell, nous pouvons déduire, par analogie avec notre expression pour  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}\parallel} = \tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  valide dans la configuration TM [Éq. (3.64)], que  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\parallel}$  dans la configuration TE pourrait s'écrire sous la forme compacte  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\parallel} = (1 - f)\mu_0 + f\tilde{\mu}_{\parallel}$ , où  $\tilde{\mu}_{\parallel}$  est la composante axiale de perméabilité renormalisée. Signalons qu'une telle relation pour  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\parallel}$  a notamment été proposée à la référence [133].

comme discuté à la section 2.6, ne mène pas à des expressions explicites pour les composantes diagonales  $\tilde{\mu}_{\text{eff}}$  et hors diagonales  $\tilde{\mu}_{\text{eff},t}$ , données à l'équation (3.23).

Dans ce contexte, il convient d'insister sur le fait que la perméabilité effective scalaire  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}$ , telle que proposée à la référence [34], ne constitue qu'une combinaison particulière des composantes de  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$ . Notamment,  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}$  caractérise la propagation d'ondes électromagnétiques dans le plan d'un réseau de *non borné*. En revanche, lorsque des ondes guidées se propagent dans un réseau faisant partie d'une structure *bornée*, comme considéré au chapitre 5 et aux références [67, 68], la forme gyrotrope complète de  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  est en général requise pour décrire convenablement la réponse magnétique effective [134].

### Limite isotrope

Dans le cas d'un fil isotrope (c.-à-d., avec  $\mu_t = 0$  et  $\bar{\mu}_w \rightarrow \mu_w$ ) soumis à un champ magnétique dynamique transverse à son axe, le tenseur de susceptibilité externe en régime EQS se réduit également à un scalaire (c.-à-d.,  $\tilde{\eta}_t = 0$  et  $\bar{\eta}_w \rightarrow \tilde{\eta}_w$  dans le plan *transverse* à l'axe de gyrotropie) donné par

$$\tilde{\eta}_w = \frac{2(\tilde{\mu}_w - \mu_0)}{(\tilde{\mu}_w + \mu_0)}, \quad (3.25)$$

où

$$\tilde{\mu}_w = \mu_w G(k_w a) \quad (3.26)$$

est la perméabilité transverse renormalisée d'un fil isotrope, telle qu'introduite initialement par Khizhnyak [83]. De même, la substitution de l'équation (3.25) dans l'équation (3.20) mène à  $\tilde{\mu}_{\text{eff},t} = 0$  et à une perméabilité effective transverse

$$\frac{\tilde{\mu}_{\text{eff}}}{\mu_0} = \frac{2 + f\tilde{\eta}_w}{2 - f\tilde{\eta}_w} = \frac{\tilde{\mu}_w(1 + f) + \mu_0(1 - f)}{\tilde{\mu}_w(1 - f) + \mu_0(1 + f)}, \quad (3.27)$$

qui coïncide avec l'expression pour la perméabilité effective en régime EQS d'un réseau de fils isotropes soumis à un champ magnétique dynamique transverse. Soulignons que l'équation (3.27) a d'abord été établie à la référence [83], puis redérivée par différents auteurs [21, 23, 88, 135].

### Limite quasi statique

Dans la limite QS, l'aimantation des fils est excitée dans un mode de précession uniforme, de sorte que  $\langle \mathbf{m}_w \rangle$  se réduit à  $\mathbf{m}_w$ . La satisfaction de l'inégalité  $|k_w|a \ll 1$  [Éq. (2.18)] à l'intérieur des fils permet de remplacer les fonctions de Bessel  $J_0(k_w a)$  et  $J_1(k_w a)$  par leur



développement en série donné au tableau 3.1, ce qui mène à  $F(k_w a) \approx 1/2$  et  $G(k_w a) \approx 1$ . Dans cette limite, les composantes de perméabilité renormalisée  $\tilde{\mu}$  et  $\tilde{\mu}_t$  ne dépendent plus de  $k_w a$  et coïncident avec leur valeur intrinsèque, c'est-à-dire que  $\tilde{\mu} = \mu$  et  $\tilde{\mu}_t = \mu_t$ . Il s'ensuit que le tenseur de susceptibilité externe se réduit à sa forme QS connue [26, 132]

$$\mathbf{m}_w = \bar{\bar{\eta}}_w \mathbf{h}_{\text{loc}} = \begin{pmatrix} \eta & -i\eta_t & 0 \\ i\eta_t & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{\parallel} \end{pmatrix} \mathbf{h}_{\text{loc}}, \quad (3.28)$$

caractérisée par des composantes transverses diagonales et hors diagonales données par

$$\eta = \frac{2(\mu^2 - \mu_t^2 - \mu_0^2)}{(\mu + \mu_0)^2 - \mu_t^2} = \frac{\omega_M (\omega_H^* + \omega_M/2)}{(\omega_H^* + \omega_M/2)^2 - \omega^2}, \quad (3.29a)$$

$$\eta_t = \frac{4\mu_0\mu_t}{(\mu + \mu_0)^2 - \mu_t^2} = \frac{\omega_M\omega}{(\omega_H^* + \omega_M/2)^2 - \omega^2}. \quad (3.29b)$$

Pour sa part, la composante axiale est excitée dans la configuration TE et vaut  $\eta_{\parallel} = \mu_{\parallel}/\mu_0 - 1$ , ce qui peut être déduit de l'équation (2.19b) appliquée au cas de longs fils avec  $N_{\text{ip}}^w = 1/2$  et  $N_{\text{op}}^w = 0$ .

Lorsque les pertes sont faibles ( $\alpha \ll 1$ ), les composantes  $\eta$  et  $\eta_t$  montrent un pôle à la fréquence

$$\omega_{\text{cyl}} = \omega_H + \frac{\omega_M}{2}, \quad (3.30)$$

qui correspond à la condition de résonance du mode uniforme prédite par la formule de Kittel pour le cas d'un cylindre infini aimanté axialement [26, 118]. Dans l'approximation QS,  $\eta$  et  $\eta_t$  conservent ainsi le profil lorentzien intrinsèque de  $\mu$  et  $\mu_t$  et possèdent une largeur de résonance déterminée uniquement par les pertes magnétiques intrinsèques, prises en compte par la constante d'amortissement de Gilbert.

Une expression tensorielle explicite pour la susceptibilité externe  $\bar{\bar{\eta}}_w$  en fonction de la susceptibilité intrinsèque  $\bar{\bar{\chi}}_w$  peut être établie en se plaçant dès le départ dans la limite magnétostatique. Dans ce cas, le champ magnétique à l'intérieur du fil vaut (voir notamment l'équation 1.85 à la référence [26])

$$\mathbf{h}_w = \mathbf{h}_{\text{loc}} - \bar{N}_w \mathbf{m}_w, \quad (3.31)$$

où le champ de désaimantation dynamique  $-\bar{N}_w \mathbf{m}_w$  tire son origine des pôles magnétiques non compensés à la surface du fil et dépend de la forme de celui-ci par l'intermédiaire du tenseur de désaimantation  $\bar{N}_w$  [Éq. (2.2)]. Le recours aux équations (2.10) et (3.28) permet ensuite d'effectuer les substitutions  $\mathbf{h}_w = \bar{\chi}_w^{-1} \mathbf{m}_w$  et  $\mathbf{h}_{\text{loc}} = \bar{\eta}_w^{-1} \mathbf{m}_w$  dans l'équation (3.31), puis de retrouver la relation tensorielle QS liant les tenseurs de susceptibilités externe et intrinsèque (voir notamment l'équation 1.111 à la référence [26])

$$\bar{\eta}_w^{-1} = \bar{\chi}_w^{-1} + \bar{N}_w. \quad (3.32)$$

Soulignons que cette expression est équivalente à l'équation (2.19b) et indique que dans la limite QS, la réponse externe du fil est déterminée uniquement par sa susceptibilité intrinsèque  $\bar{\chi}_w$  et sa forme  $\bar{N}_w$ , sans égard à sa taille. En outre, pour un long fil avec  $N_{\text{ip}}^w = 1/2$  et  $N_{\text{op}}^w = 0$ , l'équation (3.32) conduit aux équations (3.29a) et (3.29b) pour les composantes transverses  $\eta$  et  $\eta_t$ , respectivement, de même qu'à  $\eta_{\parallel} = \mu_{\parallel}/\mu_0 - 1$  pour la composante axiale excitée dans la configuration TE.

Il est important de mentionner que d'un point de vue purement mathématique, l'équation (3.32) devient invalide dans l'approximation des petits signaux, soit lorsque  $\mu_{\parallel}$  est pris comme étant *strictement* égal à  $\mu_0$ . En effet, comme montré à l'annexe A, nous trouvons que dans cette limite, les composantes axiales des tenseurs  $\bar{\chi}_w$  et  $\bar{\eta}_w$  sont égales à 0. Il en résulte que  $\bar{\chi}_w$  et  $\bar{\eta}_w$  sont des matrices singulières (c.-à-d., dont le déterminant s'annule), ce qui implique que les matrices inverses  $\bar{\chi}_w^{-1}$  et  $\bar{\eta}_w^{-1}$  n'existent pas (voir notamment la référence [130], p. 181). Dans ce contexte, l'introduction *ad hoc*, mais physiquement justifiée, d'une composante axiale  $\mu_{\parallel}$  légèrement différente de  $\mu_0$  dans le tenseur de perméabilité intrinsèque  $\bar{\mu}_w$  nous permet alors d'utiliser l'équation (3.32) de façon rigoureuse, c'est-à-dire en employant des tenseurs de dimension  $3 \times 3$ .

Pour un réseau de fils dans la limite QS, la substitution des équations (2.11) et (3.32) dans l'équation (3.20) permet d'exprimer la perméabilité effective du réseau en fonction de la réponse intrinsèque des fils comme

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\mu}_{\text{eff}}}{\mu_0} &= \bar{I} + \bar{\chi}_{\text{eff}} \\ &= \bar{I} + f \left[ \bar{\chi}_w^{-1} + (1-f) \bar{N}_w \right]^{-1} \\ &= \bar{I} + f \left[ \left( \frac{\bar{\mu}_w}{\mu_0} - \bar{I} \right)^{-1} + (1-f) \bar{N}_w \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

qui correspond à l'expression QS de Maxwell Garnett appliquée à un ensemble d'inclusions anisotropes parallèles [5, 32, 78]. De même, la substitution de l'équation (3.29) dans les équations (3.22) et (3.23) mène à

$$\bar{\bar{\mu}}_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \mu_{\text{eff}} & -i\mu_{\text{eff},t} & 0 \\ i\mu_{\text{eff},t} & \mu_{\text{eff}} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\text{eff}\parallel} \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{\text{eff}}}{\mu_0} &= 1 + 2f \left[ \frac{2\eta - f(\eta^2 - \eta_t^2)}{(f\eta - 2)^2 - (f\eta_t)^2} \right] \\ &= \frac{[\omega_H^* + \omega_M(1-f)/2][\omega_H^* + \omega_M(1+f)/2] - \omega^2}{[\omega_H^* + \omega_M(1-f)/2]^2 - \omega^2}, \end{aligned} \quad (3.35a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{\text{eff},t}}{\mu_0} &= \frac{4f\eta_t}{(f\eta - 2)^2 - (f\eta_t)^2} \\ &= \frac{f\omega_M\omega}{[\omega_H^* + \omega_M(1-f)/2]^2 - \omega^2}, \end{aligned} \quad (3.35b)$$

où  $\omega_H$  (dans  $\omega_H^* = \omega_H - i\alpha\omega$ ) est proportionnel au champ statique total à l'intérieur des fils et inclut, comme nous le verrons à la section 3.4, des contributions du champ appliqué et des interaction dipolaires interfils. Pour sa part, la composante axiale  $\mu_{\text{eff}\parallel}$  est excitée uniquement dans la configuration TE et vaut  $\mu_{\text{eff}\parallel} = \mu_0(1 + f\eta_{\parallel})$ .

Il est également possible d'obtenir une expression similaire à l'équation (3.32), mais qui lie plutôt la susceptibilité effective du réseau  $\bar{\bar{\chi}}_{\text{eff}}$  à la susceptibilité intrinsèque des fils  $\bar{\bar{\chi}}_w$ . En effet, l'examen de l'équation (3.33) permet de déduire la relation tensorielle suivante

$$\left( \frac{\bar{\bar{\chi}}_{\text{eff}}}{f} \right)^{-1} = \bar{\bar{\chi}}_w^{-1} + (1-f)\bar{\bar{N}}_w, \quad (3.36)$$

qui incorpore les effets de désaimantation causés à la fois par la forme des fils et par leurs interactions dipolaires mutuelles. En terminant, soulignons que les équations (3.28)–(3.36) gouvernent notamment la réponse magnétique dans les hyperfréquences de réseaux saturés de nanofils ferromagnétiques de rayon  $a \lesssim 100$  nm [57–61].

Enfin, pour un réseau de fils isotropes dans la limite QS, nous trouvons que

$$\bar{\bar{\mu}}_w \rightarrow \mu_w \quad \text{et} \quad \bar{\bar{\eta}}_w \rightarrow \eta_w = \frac{2(\mu_w - \mu_0)}{(\mu_w + \mu_0)}, \quad (3.37)$$

de sorte que l'équation (3.20) pour  $\bar{\mu}_{\text{eff}} \rightarrow \mu_{\text{eff}}$  se réduit à l'expression suivante

$$\frac{\mu_{\text{eff}} - \mu_0}{\mu_{\text{eff}} + \mu_0} = f \frac{\mu_w - \mu_0}{\mu_w + \mu_0} = \frac{f\eta_w}{2}, \quad (3.38)$$

qui coïncide avec la forme conventionnelle des équations de Maxwell Garnett et de Clausius-Mossotti [5]. Rappelons encore une fois que ces derniers résultats pour  $\eta_w$  et  $\mu_{\text{eff}}$  décrivent respectivement la réponse d'un fil et du réseau lorsque soumis à un champ magnétique dynamique *transverse* (c.-à-d., dans la configuration TM).

### Limite d'effet de peau dominant

Dans la limite opposée d'un effet de peau important, la condition  $|k_w|a \gg 1$  est satisfaite et le rapport des fonctions de Bessel  $J_1(k_w a)/J_0(k_w a)$  tend asymptotiquement vers  $i$ . Les facteurs de renormalisation  $F(k_w a)$  et  $G(k_w a)$  se réduisent à  $i/k_w a$ , ce qui implique que leurs parties réelle et imaginaire sont toutes deux beaucoup plus petites que 1. Les composantes de perméabilité renormalisée sont alors bien approximées par

$$\tilde{\mu} \approx \frac{i\mu(1 - \beta^2)}{k_w a} = \frac{i\mu_{\perp}}{k_w a}, \quad (3.39a)$$

$$\tilde{\mu}_t \approx -\frac{\mu_t(1 - \beta^2)}{(k_w a)^2} = -\frac{\mu_{\perp}\beta}{(k_w a)^2}, \quad (3.39b)$$

où le résultat  $\mu_{\perp} = \mu(1 - \beta^2)$  découle de l'équation (2.34) et nous rappelons que  $\beta = \mu_t/\mu$ . Les équations (3.39a) et (3.39b) mènent à la relation  $\tilde{\mu}_t \approx (i\beta/k_w a)\tilde{\mu}$ , de laquelle nous déduisons que  $|\tilde{\mu}| \gg |\tilde{\mu}_t|$ .<sup>6</sup> Par conséquent, l'inégalité  $|\tilde{\eta}| \gg |\tilde{\eta}_t|$  est également satisfaite, de sorte que le tenseur  $\bar{\eta}_w$  se réduit essentiellement à une quantité scalaire égale à l'élément diagonal  $\tilde{\eta}$ . De l'équation (3.13), nous déduisons que

$$\tilde{\eta} \approx \frac{2(\tilde{\mu} - \mu_0)}{(\tilde{\mu} + \mu_0)} \approx -2 \left( 1 - 2\frac{\tilde{\mu}}{\mu_0} \right), \quad (3.40)$$

où la condition  $|\tilde{\mu}| \ll \mu_0$  a été prise en compte pour obtenir le membre de droite. Nous utilisons ensuite l'équation (2.33) pour le vecteur d'onde  $k_w$ , dans le but d'écrire l'équation (3.39a)

---

6. En effet, l'amplitude du rapport  $\tilde{\mu}_t/\tilde{\mu} = i\beta/k_w a$  est en général substantiellement inférieure à 1. D'une part, l'hypothèse d'un effet de peau dominant implique que  $|k_w|a \gg 1$ . D'autre part, un calcul direct permet de vérifier que l'amplitude de  $\beta$  est typiquement inférieure à 1, sauf près de la résonance ferromagnétique de  $\mu_{\perp}$ , où elle devient supérieure à 1, mais demeure tout de même inférieure à  $|k_w|a$  pour des valeurs réalistes du paramètre d'amortissement de Gilbert  $\alpha$ . Toutefois, dans le cas où ces conditions ne seraient pas satisfaites, les relations générales pour  $\tilde{\eta}$  et  $\tilde{\eta}_t$ , données respectivement aux équations (3.13a) et (3.13b), devraient alors être utilisées.

pour  $\tilde{\mu}$  en fonction de la profondeur de pénétration non magnétique  $\delta_{w0}$ . En insérant ce résultat dans l'équation (3.40), nous trouvons

$$\tilde{\eta} \approx -2 \left[ 1 - (1 + i) \frac{\delta_{w0}}{a} \sqrt{\frac{\mu_{\perp}}{\mu_0}} \right], \quad (3.41)$$

où le deuxième terme du membre de droite est beaucoup plus petit que 1 dans la limite SE. Soulignons que dans le cas d'un conducteur cylindrique *non magnétique* (c.-à-d., avec  $\mu_{\perp} = \mu_0$ ), nous trouvons que l'équation (3.41) se réduit au résultat connu  $\tilde{\eta} \approx -2 [1 - (1 + i) \delta_{w0}/a]$  proportionnel à  $\omega^{-1/2}$ , tel que présenté à la référence [71], p. 192.

De façon équivalente, la combinaison des équations (2.33) pour  $k_w$  et (2.37) pour  $\zeta_w$  permet d'exprimer  $\tilde{\mu}$  dans l'équation (3.39a) comme  $\tilde{\mu} = i\zeta_w/\omega a$ , qui fait intervenir l'impédance d'onde intrinsèque. En substituant ensuite ce résultat dans l'équation (3.40), nous retrouvons l'expression pour  $\tilde{\eta}$  dérivée par Maryško [72] dans limite SE

$$\tilde{\eta} \approx -2 \left( 1 - \frac{2i}{k_m a} \frac{\zeta_w}{\zeta_m} \right). \quad (3.42)$$

L'équation (3.42) montre que pour un effet de peau important, la réponse de l'aimantation du fil est essentiellement gouvernée par son impédance intrinsèque, qui dans notre cas s'écrit comme

$$\zeta_w = \sqrt{\frac{\mu_{\perp}}{\epsilon_w}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_w}} \left[ \frac{(\omega_H^* + \omega_M)^2 - \omega^2}{\omega_H^* (\omega_H^* + \omega_M) - \omega^2} \right]^{1/2} \quad (3.43)$$

et constitue une quantité indépendante de la taille du fil. Par conséquent, les fréquences de résonance  $\omega_{\perp}$  et d'antirésonance  $\omega_{ar}$  de  $\tilde{\eta}$  vont alors coïncider avec celles de  $\zeta_w$ . Lorsque les pertes sont faibles ( $\alpha \ll 1$ ), ces deux fréquences valent

$$\omega_{\perp} = \sqrt{\omega_H (\omega_H + \omega_M)}, \quad (3.44)$$

$$\omega_{ar} = \omega_H + \omega_M. \quad (3.45)$$

Soulignons ici que la limite SE s'applique bien à l'étude de microfils métalliques de rayon de l'ordre de 100  $\mu\text{m}$  [136]. Il convient également d'insister sur le fait que l'équation (3.42) indique que dans la limite SE, la susceptibilité externe du fil présente le phénomène d'antirésonance ferromagnétique à  $\omega = \omega_{ar}$ . À cette fréquence, la partie réelle de l'impédance intrinsèque  $\zeta_w$  atteint un minimum et l'induction magnétique devient très faible à l'intérieur des fils (car  $\text{Re}[\mu_{\perp}] \approx 0$  à l'antirésonance). Suivant la loi d'Ohm et l'équation de Maxwell-Faraday, les courants de Foucault induits dans les fils et les pertes qui leur sont associées sont

alors substantiellement réduites, ce qui mène à une augmentation significative de la profondeur de pénétration et à un minimum de l'absorption, laquelle est proportionnelle à  $\text{Im}[\tilde{\eta}]$ . Mentionnons que l'antirésonance n'est pas observée dans la limite QS, puisque dans ce cas, la profondeur de pénétration reste toujours supérieure au rayon des fils. Par conséquent, les pertes par courants de Foucault demeurent toujours négligeables et la courbe d'absorption ne possède pas de minimum local.

Pour un conducteur parfait avec  $\sigma_w \rightarrow \infty$ , l'impédance intrinsèque  $\zeta_w$  et la perméabilité renormalisée  $\tilde{\mu}$  tendent toutes deux vers 0, de sorte que la susceptibilité externe  $\tilde{\eta}$  donnée à l'équation (3.42) se réduit à la valeur constante  $\tilde{\eta} = -2$ , laquelle dépend uniquement de la forme du conducteur et de l'orientation du champ dynamique local. Dans cette limite, il est intéressant de mentionner qu'un fil conducteur soumis à un champ magnétique *dynamique* se comporte exactement comme un corps parfaitement diamagnétique plongé dans un champ magnétique *statique*, c'est-à-dire comme un matériau supraconducteur avec une susceptibilité intrinsèque  $\chi_w = -1$  (voir la référence [71], p. 190). En effet, la susceptibilité externe  $\eta_w$  d'un fil supraconducteur placé dans un champ magnétique statique transverse à l'axe peut être obtenue à partir de l'équation (3.37) valide dans la limite QS isotrope. Le calcul explicite mène à

$$\eta_w = \frac{\chi_w}{1 + N_{\text{ip}}^w \chi_w} = \frac{2(\mu_w - \mu_0)}{(\mu_w + \mu_0)} = -2, \quad (3.46)$$

où  $\mu_w = \mu_0(\chi_w + 1) = 0$  et  $N_{\text{ip}}^w = 1/2$ , ce qui constitue bien un résultat identique à l'équation (3.42) dans la limite d'un conducteur cylindrique parfait soumis à un champ magnétique dynamique perpendiculaire à son axe, c'est-à-dire  $\tilde{\eta} \rightarrow -2$ .

Enfin, pour un réseau de fils dans la limite SE, nous substituons  $\tilde{\eta} \approx 2(\tilde{\mu} - \mu_0)/(\tilde{\mu} + \mu_0)$  [Éq. (3.40)] et  $\tilde{\eta}_t \approx 0$  dans l'équation (3.23) et nous trouvons une perméabilité effective transverse scalaire (car  $\tilde{\mu}_{\text{eff},t} \approx 0$ ) donnée par

$$\frac{\tilde{\mu}_{\text{eff}}}{\mu_0} \approx \frac{2 + f\tilde{\eta}}{2 - f\tilde{\eta}} = \frac{\tilde{\mu}(1 + f) + \mu_0(1 - f)}{\tilde{\mu}(1 - f) + \mu_0(1 + f)}, \quad (3.47)$$

qui adopte la même forme que l'équation (3.27) dans le cas isotrope. Enfin, pour un réseau de fils ferromagnétiques parfaitement conducteurs, nous avons  $\tilde{\mu} \approx 0$  et

$$\frac{\tilde{\mu}_{\text{eff}}}{\mu_0} \approx \frac{1 - f}{1 + f}, \quad (3.48)$$

qui dépend uniquement des paramètres géométriques du réseau et décroît avec  $f$ , ce qui reflète le fait que l'induction moyenne  $\langle \mathbf{b} \rangle$  est alors complètement exclue du volume des fils en raison de leur réponse diamagnétique parfaite.

En résumé, les limites QS et SE de la réponse EQS générale sont caractérisées par des paramètres de résonance ferromagnétique indépendants du rayon des fils. En particulier, la largeur de résonance de la susceptibilité externe  $\bar{\eta}_w$  est gouvernée par le paramètre de Gilbert  $\alpha$  dans la limite QS (petits diamètres) et par la partie réelle de l'impédance intrinsèque  $\zeta_w$  dans la limite SE (grands diamètres). Entre ces deux limites, les expressions EQS générales doivent être utilisées et mènent à des paramètres de résonance ferromagnétique présentant une dépendance non triviale en fonction de la taille des fils.

Ceci complète la section portant sur la modélisation de la réponse magnétique du réseau de fils en régime EQS. Dans ce qui suit, nous allons étudier le comportement électrique du réseau et déduire sa permittivité effective.

### 3.3 Propriétés électriques

#### 3.3.1 Réponse d'un fil individuel : susceptibilité externe

En régime EQS, les propriétés électriques du réseau sont données par la réponse du mode  $n = 0$ . Comme à la section précédente, nous allons d'abord considérer la susceptibilité externe  $\bar{\kappa}_w$  d'un fil individuel, puis déterminer la permittivité effective  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  du réseau en résolvant le problème de conditions aux frontières à la surface de la cellule unitaire équivalente incorporée dans le milieu effectif. Or, dans la configuration TM, tous les champs électriques sont parallèles à l'axe des fils. Par conséquent, dans le cadre de cette thèse, seules les composantes *axiales* des tenseurs  $\bar{\kappa}_w$  et  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  devront être considérées pour décrire la réponse électrique des fils et du réseau. Pour leur part, les composantes transverses de  $\bar{\kappa}_w$  et  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  (c.-à-d., dans le plan perpendiculaire à l'axe des fils) interviendraient plutôt dans la configuration TE.

Les champs électriques incident, diffusé et transmis dans le mode  $n = 0$  s'obtiennent respectivement à partir des équations (2.29a), (2.30a) et (2.35). Nous trouvons alors

$$\mathbf{e}_{\text{loc}} = e_{\text{loc}} J_0(k_m \rho) \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.49a)$$

$$\mathbf{e}_{\text{scat}} = e_{\text{loc}} a_0 H_0^{(1)}(k_m \rho) \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.49b)$$

$$\mathbf{e}_w = e_{\text{loc}} b_0 J_0(k_w \rho) \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.49c)$$

où les coefficients  $a_0$  et  $b_0$  sont donnés aux équations (2.40) et (2.41), respectivement. En régime EQS, les fonctions de Bessel et de Hankel ayant  $k_m \rho$  ou  $k_m a$  comme argument peuvent être remplacées par les développements en série donnés au tableau 3.1. Il en résulte que

$$\mathbf{e}_{\text{loc}} = e_{\text{loc}} \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.50a)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{\text{scat}} &= -e_{\text{loc}} \left[ \frac{\tilde{\epsilon}_{w,F} - \epsilon_m}{\tilde{\epsilon}_{w,F} \Gamma(k_m a) + \epsilon_m} \right] \left( \frac{a}{\rho} \right)^2 \Gamma(k_m \rho) \hat{\mathbf{z}} \\ &= -e_{\text{loc}} \tilde{\kappa}_w \left( \frac{a}{\rho} \right)^2 \Gamma(k_m \rho) \hat{\mathbf{z}},\end{aligned}\tag{3.50b}$$

$$\mathbf{e}_w = e_{\text{loc}} \left[ \frac{\epsilon_m}{\tilde{\epsilon}_{w,F} \Gamma(k_m a) + \epsilon_m} \right] \frac{J_0(k_m \rho)}{J_0(k_m a)} \hat{\mathbf{z}},\tag{3.50c}$$

où

$$\tilde{\epsilon}_{w,F} = 2\epsilon_w F(k_w a)\tag{3.51}$$

est une permittivité renormalisée qui dépend du facteur  $F(k_w a)$  défini à l'équation (3.9) et

$$\Gamma(k_m \rho) = \frac{(k_m \rho)^2}{2} \left[ \ln \left( \frac{k_m \rho}{2} \right) + \gamma_E - \frac{i\pi}{2} \right]\tag{3.52}$$

est une fonction qui décrit la dépendance radiale du champ diffusé  $\mathbf{e}_{\text{scat}}$ . Rappelons ici que  $\gamma_E \approx 0,5772$  est la constante d'Euler. Nous avons également défini, à l'équation (3.50b), la susceptibilité électrique externe renormalisée  $\tilde{\kappa}_w$  d'un fil individuel en régime EQS,

$$\tilde{\kappa}_w = \frac{\tilde{\epsilon}_{w,F} - \epsilon_m}{\tilde{\epsilon}_{w,F} \Gamma(k_m a) + \epsilon_m},\tag{3.53}$$

qui s'exprime de façon compacte en fonction de  $\tilde{\epsilon}_{w,F}$  et  $\Gamma(k_m a)$ . Notons que formellement, la susceptibilité externe  $\tilde{\kappa}_w$  donnée à l'équation (3.53) correspond à la composante axiale de  $\bar{\bar{\kappa}}_w$ , c'est-à-dire à  $\tilde{\kappa}_{w\parallel}$ .

Avant de poursuivre, certaines remarques s'imposent quant aux résultats obtenus aux équations (3.50)–(3.53). D'abord, comme attendu, le champ dynamique local  $\mathbf{e}_{\text{loc}}$  agissant sur les fils est spatialement uniforme en régime EQS. Nous constatons ensuite que la fonction  $\Gamma(k_m \rho)$  est essentiellement proportionnelle à  $(k_m \rho)^2$ , puisque le terme logarithmique ne varie que faiblement avec  $k_m \rho$ . Par conséquent, le champ diffusé  $\mathbf{e}_{\text{scat}} \propto \Gamma(k_m \rho) / \rho^2$  sera approximativement uniforme au voisinage du fil, c'est-à-dire pour des distances  $\rho$  qui satisfont la condition  $|k_m| \rho \ll 1$ . Enfin, soulignons que dans la limite QS, nous trouvons que  $\tilde{\epsilon}_{w,F} \rightarrow \epsilon_w$  et  $\Gamma(k_m a) \rightarrow 0$ , ce qui implique que

$$\tilde{\kappa}_w \rightarrow \kappa_w = \frac{\epsilon_w - \epsilon_m}{\epsilon_m} = \frac{\epsilon_w}{\epsilon_m} - 1,\tag{3.54}$$

comme attendu pour un fil infini soumis à un champ électrique axial. Notons que l'équation (3.54) pour  $\kappa_w$  (qui correspond formellement à  $\kappa_{w\parallel}$ ) peut être obtenue directement à partir de l'équation (2.19a) pour  $\bar{\bar{\kappa}}_w$ . Pour ce faire, il s'agit de calculer la composante axiale



de  $\bar{\kappa}_w$  dans le cas d'un fil unique doté d'une permittivité isotrope  $\epsilon_w$  et d'un facteur de dépolarisation axial  $N_{\text{op}}^w = 0$ .

En terminant, il convient de mentionner que la susceptibilité externe  $\tilde{\kappa}_w$  du fil n'interviendra pas dans l'expression finale de la permittivité effective renormalisée  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  en régime EQS donnée à l'équation (3.63). Par conséquent, dans ce qui suit, nous allons dériver la permittivité effective sans considérer explicitement l'équation (3.53) pour  $\tilde{\kappa}_w$ .

### 3.3.2 Réponse du réseau de fils : permittivité effective

Nous allons maintenant étudier la réponse électrique effective du réseau de fils dans le mode  $n = 0$ . Or, la configuration TM requiert de considérer uniquement la composante de  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  parallèle à l'axe des fils, c'est-à-dire  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}\parallel}$ . Par conséquent, puisque que seule cette composante va intervenir dans le traitement analytique, nous allons poser à partir de maintenant que  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}\parallel} = \tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$ , ce qui va nous permettre de simplifier la notation. Sur la base de ces considérations, la réponse électrique effective du réseau est décrite par la relation

$$\langle \mathbf{d} \rangle = \tilde{\epsilon}_{\text{eff}} \langle \mathbf{e} \rangle, \quad (3.55)$$

où  $\langle \mathbf{e} \rangle$  et  $\langle \mathbf{d} \rangle$  sont tous deux orientés selon  $z$ . Comme lors du calcul de la perméabilité effective présenté à la section 3.2, la détermination de  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  s'appuiera sur la satisfaction des conditions aux frontières pour le champ et l'induction électriques à l'interface  $\rho = b$  entre la cellule unitaire équivalente et le milieu effectif, comme montré à la figure 3.2. Rappelons ici que le rayon externe  $b$  de la cellule unitaire équivalente est lié à la distance interfil du réseau carré par la relation  $b = D/\sqrt{\pi}$ .

D'abord, le champ électrique  $\mathbf{e}_m$  dans la matrice s'exprime comme la somme du champ local agissant sur le fil placé au centre de la cellule unitaire équivalente et du champ diffusé par celui-ci, lesquels sont donnés aux équations (3.49a) et (3.49b), respectivement. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_m &= \mathbf{e}_{\text{loc}} + \mathbf{e}_{\text{scat}} \\ &= e_{\text{loc}} \left[ J_0(k_m \rho) + a_0 H_0^{(1)}(k_m \rho) \right] \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Signalons ici que les expressions exactes pour les champs  $\mathbf{e}_{\text{loc}}$  et  $\mathbf{e}_{\text{scat}}$  ont été utilisées à l'équation (3.56). En effet, il s'avère plus simple de faire la transition au régime EQS plus loin dans la procédure d'homogénéisation.

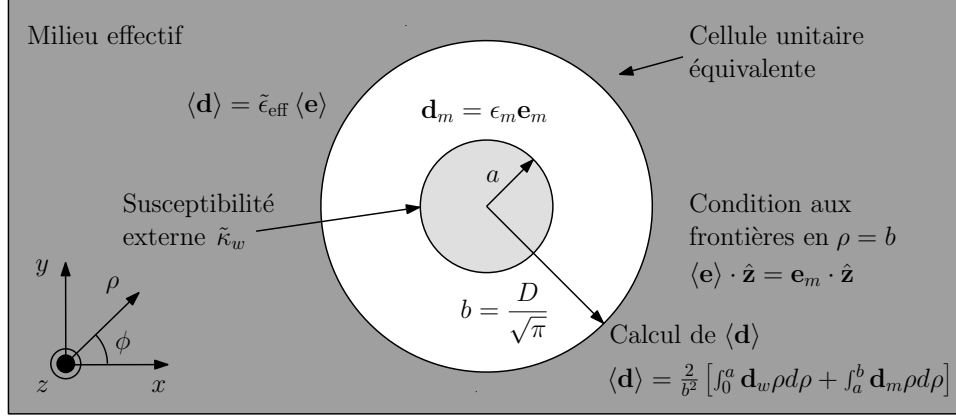


Figure 3.2 Définition du problème de conditions aux frontières pour déterminer la permittivité effective du réseau de fils. La cellule unitaire équivalente de rayon  $b = D/\sqrt{\pi}$  est plongée dans le milieu effectif de permittivité  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  à déterminer et comprend, en son centre, un fil de rayon  $a$  et de susceptibilité externe  $\tilde{\kappa}_w$ . Notons que l'origine des systèmes de coordonnées coïncide avec le centre du fil.

Considérons maintenant les conditions aux frontières en  $\rho = b$ . D'une part, l'équation (2.26a) impose que la composante axiale du champ électrique soit continue à la surface de la cellule unitaire ( $\rho = b$ ), ce qui implique que

$$\langle \mathbf{e} \rangle = \mathbf{e}_m (\rho = b) = e_{\text{loc}} \left[ J_0(k_m b) + a_0 H_0^{(1)}(k_m b) \right] \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.57)$$

En revanche, la même procédure ne peut être appliquée pour le déplacement électrique, puisque  $\mathbf{d}_m$  n'a pas de composante normale à la surface de la cellule unitaire équivalente [autrement dit, l'équation (2.26c) mène au résultat trivial  $\mathbf{d}_m \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}} = 0$ ]. Par conséquent, nous devons calculer explicitement la moyenne de  $\langle \mathbf{d} \rangle$  à l'intérieur de la cellule unitaire. Nous trouvons que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{d} \rangle &= \frac{1}{\pi b^2} \left( \int_0^a \int_0^{2\pi} \mathbf{d}_w \rho d\phi d\rho + \int_a^b \int_0^{2\pi} \mathbf{d}_m \rho d\phi d\rho \right) \\ &= \frac{2}{b^2} \left( \int_0^a \epsilon_w \mathbf{e}_w \rho d\rho + \int_a^b \epsilon_m \mathbf{e}_m \rho d\rho \right) \\ &= \frac{2e_{\text{loc}}}{b^2} \left\{ \epsilon_w b_0 \int_0^a J_0(k_w \rho) \rho d\rho + \epsilon_m \int_a^b \left[ J_0(k_w \rho) + a_0 H_0^{(1)}(k_w \rho) \right] \rho d\rho \right\} \hat{\mathbf{z}}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

où nous avons utilisé les équations (3.49c) et (3.56) pour  $\mathbf{e}_w$  et  $\mathbf{e}_m$ , respectivement. La résolution des intégrales donne

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{d} \rangle = 2e_{\text{loc}} \left\{ f\epsilon_w b_0 \frac{J_1(k_w a)}{k_w a} + \epsilon_m \left[ \frac{J_1(k_m b)}{k_m b} - f \frac{J_1(k_m a)}{k_m a} \right] \right. \\ \left. + \epsilon_m a_0 \left[ \frac{H_1^{(1)}(k_m b)}{k_m b} - f \frac{H_1^{(1)}(k_m a)}{k_m a} \right] \right\} \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Il convient de mentionner que les équations (3.57) et (3.59) représentent respectivement nos *définitions* pour le champ  $\langle \mathbf{e} \rangle$  et le déplacement  $\langle \mathbf{d} \rangle$  électriques moyens du réseau de fils en fonction du champ électrique local  $\mathbf{e}_{\text{loc}}$ .

L'étape suivante de la dérivation consiste à passer en régime EQS. Pour ce faire, nous utilisons les développements en série du tableau 3.1 dans les équations (3.57) et (3.59), ce qui mène à

$$\langle \mathbf{e} \rangle = e_{\text{loc}} \left\{ \frac{[1 + f\Gamma(k_m b)]\epsilon_m + [\Gamma(k_m a) - f\Gamma(k_m b)]\tilde{\epsilon}_{w,F}}{\tilde{\epsilon}_{w,F}\Gamma(k_m a) + \epsilon_m} \right\} \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.60)$$

$$\langle \mathbf{d} \rangle = e_{\text{loc}}\epsilon_m \left\{ \frac{(1-f)\epsilon_m + [f + (1-f)\Gamma(k_m a)]\tilde{\epsilon}_{w,F}}{\tilde{\epsilon}_{w,F}\Gamma(k_m a) + \epsilon_m} \right\} \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.61)$$

où les coefficients  $a_0$  et  $b_0$  ont été remplacés par

$$\begin{aligned} a_0 &= i\pi \left( \frac{k_m a}{2} \right)^2 \left[ \frac{\tilde{\epsilon}_{w,F} - \epsilon_m}{\tilde{\epsilon}_{w,F}\Gamma(k_m a) + \epsilon_m} \right], \\ b_0 &= \frac{1}{J_0(k_w a)} \left[ \frac{\epsilon_m}{\tilde{\epsilon}_{w,F}\Gamma(k_m a) + \epsilon_m} \right]. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Enfin, nous substituons les équations (3.60) et (3.61) dans l'équation (3.55), ce qui nous permet d'obtenir notre expression générale pour la permittivité effective en régime EQS d'un réseau de fils ferromagnétiques excités dans la configuration TM

$$\tilde{\epsilon}_{\text{eff}} = \epsilon_m \frac{(1-f)\epsilon_m + [f + (1-f)\Gamma(k_m a)]\tilde{\epsilon}_{w,F}}{[1 + f\Gamma(k_m b)]\epsilon_m + [\Gamma(k_m a) - f\Gamma(k_m b)]\tilde{\epsilon}_{w,F}}. \quad (3.63)$$

Signalons que ce même résultat a été dérivé récemment par Chern *et al* [23], lesquels ont étudié les propriétés électromagnétiques effectives d'un réseau bidimensionnel de fils diélectriques, en s'appuyant sur une procédure d'homogénéisation équivalente à celle présentée dans ce travail. Pour aller plus loin, nous devons maintenant procéder à l'analyse détaillée de la permittivité effective de l'équation (3.63), dans le but d'en clarifier la signification physique.

### 3.3.3 Analyse de la solution

Sous sa forme actuelle, l'équation (3.63) manque quelque peu de transparence. Afin de mieux faire ressortir le sens physique de la solution en régime EQS, il convient de réexprimer l'équation (3.63) sous la forme compacte suivante

$$\tilde{\epsilon}_{\text{eff}} = (1 - f) \epsilon_m + f \tilde{\epsilon}_w, \quad (3.64)$$

où la permittivité renormalisée

$$\tilde{\epsilon}_w = \epsilon_w K(k_w a) \quad (3.65)$$

est obtenue en multipliant la permittivité intrinsèque  $\epsilon_w$  des fils par le facteur de renormalisation

$$K(k_w a) = \frac{\epsilon_m}{\epsilon_w} \left[ \frac{\tilde{\epsilon}_{w,F} + (1 - f) \Gamma(k_m b) (\tilde{\epsilon}_{w,F} - \epsilon_m)}{\epsilon_m + \tilde{\epsilon}_{w,F} \Gamma(k_m a) - f \Gamma(k_m b) (\tilde{\epsilon}_{w,F} - \epsilon_m)} \right]. \quad (3.66)$$

Ce facteur tient compte à la fois du retard électromagnétique à l'intérieur des fils et de la structure de la cellule unitaire équivalente, par l'intermédiaire de  $\tilde{\epsilon}_{w,F}$  et des facteurs  $\Gamma(k_m a)$  et  $\Gamma(k_m b)$ , respectivement. Nous devons souligner que l'introduction de la permittivité renormalisée  $\tilde{\epsilon}_w$  permet d'exprimer  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  sous une forme identique au résultat de Maxwell Garnett valide dans la limite QS, comme nous allons le montrer à l'équation (3.89) (voir également la référence [5]). Rappelons également que les équations (3.64)–(3.66) ont été obtenues sans approximer davantage l'équation (3.63).

Il est maintenant possible de simplifier l'équation (3.66) à deux égards. D'une part, dans le cas de fils conducteurs, nous avons généralement que  $|\epsilon_w| \gg |\epsilon_m|$ , ce qui nous permet d'écrire

$$\tilde{\epsilon}_{w,F} - \epsilon_m \approx \tilde{\epsilon}_{w,F}. \quad (3.67)$$

Cette approximation est aisément satisfaite dans les intervalles de fréquences d'opération (1–100 GHz) et de rayons de fils (0,01–100  $\mu\text{m}$ ) considérés dans le cadre de ce travail et ce, même en régime SE, où  $\tilde{\epsilon}_{w,F}$  est substantiellement réduite (en valeur absolue) par rapport à sa valeur intrinsèque  $\epsilon_w$ . D'autre part, nous pouvons également poser que

$$1 + (1 - f) \Gamma(k_m b) \approx 1, \quad (3.68)$$

puisque même pour une valeur de  $k_m b$  aussi élevée que 0,3 (c.-à-d., près de la limite de la condition d'homogénéisation du réseau), nous trouvons que  $|\Gamma(k_m b)|$  demeure inférieur à 0,1.

En considérant les approximations des équations (3.67) et (3.68), l'équation (3.66) se réduit alors à

$$K(k_w a) = \frac{2F(k_w a)}{1 - \frac{\epsilon_w}{\epsilon_m} F(k_w a) (k_m a)^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}, \quad (3.69)$$

où nous avons utilisé le résultat exact

$$f\Gamma(k_m b) - \Gamma(k_m a) = \frac{(k_m a)^2}{2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (3.70)$$

au numérateur de  $K(k_w a)$ . Enfin, nous pouvons exprimer l'équation (3.69) en fonction du rapport  $a/\delta_{w0}$ , ce qui va nous permettre de mieux quantifier l'influence de l'effet de peau à l'intérieur des fils individuels sur leur permittivité renormalisée  $\tilde{\epsilon}_w$ . Nous trouvons alors que

$$\begin{aligned} K(k_w a) &= \frac{2F(k_w a)}{1 - 2i \left(\frac{a}{\delta_{w0}}\right)^2 F(k_w a) \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \\ &= \left[ \frac{1}{2F(k_w a)} - i \left(\frac{a}{\delta_{w0}}\right)^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

À partir d'ici, nous allons étudier le sens physique du facteur de renormalisation  $K(k_w a)$  en l'exprimant sous deux formes équivalentes, qui seront dérivées sans introduire d'approximations supplémentaires à l'équation (3.71). D'abord, nous allons expliciter le lien entre  $K(k_w a)$  et l'impédance totale d'un fil ferromagnétique placé dans la cellule unitaire équivalente. Ensuite, nous allons montrer que  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  peut s'écrire comme une réponse plasmonique de Drude, soit sous une forme similaire à celle de l'équation (2.5) pour la permittivité intrinsèque  $\epsilon_w$  du métal qui compose les fils.

### Écriture en fonction de l'impédance totale du fil

Nous allons d'abord exprimer le facteur de renormalisation  $K(k_w a)$  donné à l'équation (3.71) en fonction de l'impédance totale d'un fil individuel, laquelle peut être décomposée comme

$$Z_{\text{tot}} = Z_w + Z_L = Z_w - i\omega L_{\text{ext}}, \quad (3.72)$$

où  $Z_w$  est l'impédance interne du fil et  $Z_L = -i\omega L_{\text{ext}}$  est l'impédance associée à l'inductance externe  $L_{\text{ext}}$  du fil lorsque placé dans le réseau.<sup>7</sup> Comme nous allons le voir, la forme particulière prise par  $L_{\text{ext}}$  va dépendre de la configuration de la cellule unitaire équivalente.

Considérons d'abord le terme  $Z_w$ . L'impédance interne  $Z_w$  d'un fil de rayon  $a$  et de longueur  $L$  est définie comme le rapport entre la tension et le courant dans le fil et peut s'écrire comme [136]

$$Z_w = Z_s \left( \frac{L}{2\pi a} \right), \quad (3.73)$$

où  $Z_s = (e_z/h_\phi) |_{\rho=a}$  est l'impédance de surface du fil dans la configuration TM. Une expression explicite pour  $Z_s$  en fonction de l'impédance d'onde intrinsèque  $\zeta_w = \sqrt{\mu_\perp/\epsilon_w}$  [Éq. (2.37)] peut être dérivée par l'intermédiaire des équations (2.36) et (3.49c), ce qui mène à<sup>8</sup>

$$Z_s = i\zeta_w \frac{J_0(k_w a)}{J_1(k_w a)} = i\sqrt{\frac{\mu_\perp}{\epsilon_w}} \left[ \frac{J_0(k_w a)}{J_1(k_w a)} \right]. \quad (3.74)$$

En substituant ensuite l'équation (3.74) dans l'équation (3.73) et en considérant que  $\zeta_w = -ik_w/\sigma_w$  [Éq. (2.37)], nous trouvons

$$\frac{Z_w}{R_{\text{dc}}} = \frac{a\sigma_w}{2} Z_s = \frac{ia\sigma_w\zeta_w}{2} \frac{J_0(k_w a)}{J_1(k_w a)} = \frac{k_w a}{2} \frac{J_0(k_w a)}{J_1(k_w a)} = \frac{1}{2F(k_w a)}, \quad (3.75)$$

où  $R_{\text{dc}} = L/\pi\sigma_w a^2$  est la résistance du fil en courant continu et  $F(k_w a)$  est le facteur de renormalisation défini à l'équation (3.9). Enfin, nous insérons l'équation (3.75) dans l'équation (3.71), ce qui permet d'obtenir le résultat intermédiaire

$$K(k_w a) = \left[ \frac{Z_w}{R_{\text{dc}}} - i \left( \frac{a}{\delta_{w0}} \right)^2 \ln \left( \frac{b}{a} \right) \right]^{-1}. \quad (3.76)$$

Notons qu'en utilisant cette valeur de  $K(k_w a)$  dans l'équation (3.64), la permittivité effective  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  qui en résulte est équivalente aux expressions proposées aux références [36, 37, 137, 138].<sup>9</sup> Toutefois, ces études ont dérivé leur résultat à l'aide de méthodes moins rigoureuses que celle proposée dans le cadre de cette thèse. En particulier, le problème de la diffusion d'une

7. Soulignons que dans le cas d'un fil *infini* excité par un champ électrique *axial*, l'impédance  $Z_{\text{tot}}$  ne possède pas de composante capacitive.

8. Dans le mode  $n = 0$ , le champ électrique axial  $e_z$  à la surface du fil découle de l'équation (3.49c) et vaut  $e_z |_{\rho=a} = e_{\text{loc}} b_0 J_0(k_w a)$ . De même, le champ magnétique circonférentiel  $h_\phi$  à la surface du fil est obtenu en conservant uniquement le mode  $n = 0$  dans l'équation (2.36), c'est-à-dire que  $h_\phi |_{\rho=a} = -i \frac{e_{\text{loc}}}{\zeta_w} b_0 J_1(k_w a)$ . Enfin, nous déduisons l'équation (3.74) en substituant ces deux résultats dans  $Z_s = (e_z/h_\phi) |_{\rho=a}$ .

9. Il est important de mentionner qu'aux références [36, 37, 137, 138], le résultat pour la permittivité effective n'est pas exprimé de façon compacte en fonction d'un facteur de renormalisation comme celui de notre équation (3.76).

onde électromagnétique par un fil individuel n'est pas résolu de façon exacte dans ces travaux, de sorte que les différentes hypothèse et approximations sur lesquelles s'appuient leurs expressions pour la permittivité effective ne ressortent pas toujours de façon explicite.

Nous voulons maintenant introduire le terme d'impédance inductive  $Z_L = -i\omega L_{\text{ext}}$  dans l'expression du facteur de renormalisation  $K(k_w a)$ . Pour ce faire, il s'agit de remarquer que le terme  $-i(a/\delta_{w0})^2 \ln(b/a)$  dans l'équation (3.76) peut s'écrire comme  $-i\omega L_{\text{ext}}/R_{\text{dc}}$ , à la condition de *définir* l'inductance externe  $L_{\text{ext}}$  du fil placé dans la cellule unitaire équivalente de rayon interne  $a$  et de rayon externe  $b$  comme

$$L_{\text{ext}} = \frac{\mu_0 L}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (3.77)$$

Nous pouvons alors déduire notre expression finale pour le facteur de renormalisation

$$K(k_w a) = \left(\frac{Z_w}{R_{\text{dc}}} + \frac{Z_L}{R_{\text{dc}}}\right)^{-1} = \left(\frac{Z_{\text{tot}}}{R_{\text{dc}}}\right)^{-1}, \quad (3.78)$$

avec

$$\frac{Z_L}{R_{\text{dc}}} = -i\omega \frac{L_{\text{ext}}}{R_{\text{dc}}} = -i\left(\frac{a}{\delta_{w0}}\right)^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (3.79)$$

Ce résultat implique notamment que

$$\tilde{\epsilon}_w = \epsilon_w \left(\frac{Z_{\text{tot}}}{R_{\text{dc}}}\right)^{-1}, \quad (3.80)$$

ce qui indique que la permittivité renormalisée  $\tilde{\epsilon}_w$  du fil s'obtient simplement en divisant sa permittivité intrinsèque  $\epsilon_w$  par son impédance totale normalisée  $Z_{\text{tot}}/R_{\text{dc}}$ . Enfin, la substitution de l'équation (3.80) dans l'équation (3.64) mène à une expression générale pour la permittivité effective du réseau de fils ferromagnétiques

$$\tilde{\epsilon}_{\text{eff}} = (1 - f) \epsilon_m + f \tilde{\epsilon}_w = (1 - f) \epsilon_m + f \epsilon_w \left(\frac{Z_{\text{tot}}}{R_{\text{dc}}}\right)^{-1}. \quad (3.81)$$

Les équations (3.80) et (3.81) constituent un des résultats importants de cette thèse. Notons qu'à la référence [32], nous avons initialement développé ces expressions sur la base de considérations phénoménologiques. Or, dans le cadre de cette thèse, nous avons en plus démontré explicitement que ces relations découlent naturellement de la solution rigoureuse du problème de la diffusion d'une onde électromagnétique par un fil ferromagnétique infini, puis de l'application, en régime EQS, de la procédure d'homogénéisation de Maxwell Garnett présentée à la section 2.6.

Notre résultat général pour la permittivité effective  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  du réseau incorpore explicitement l'influence de l'impédance  $Z_{\text{tot}}$  d'un fil sur le comportement en régime EQS d'un réseau de fils ferromagnétiques soumis à un champ électrique axial. Autrement dit, le terme  $Z_{\text{tot}}/R_{\text{dc}}$  tient compte de tous les effets causés par le retard électromagnétique et l'inductance externe des fils individuels qui font que  $\tilde{\epsilon}_w$  diffère de sa valeur intrinsèque  $\epsilon_w$ .

Au meilleur de notre connaissance, la permittivité effective d'un réseau de fils n'a jamais été exprimée sous la forme de l'équation (3.81). De plus, soulignons que dans le cas particulier de fils ferromagnétiques, l'impédance  $Z_w$  décrit une *magnétoimpédance*, c'est-à-dire que  $Z_w$  dépend de la perméabilité intrinsèque des fils, par l'intermédiaire de l'impédance intrinsèque  $\zeta_w = \sqrt{\mu_{\perp}/\epsilon_w}$  [Éq. (3.75)]. Cette magnétoimpédance va ultimement se répercuter sur la permittivité effective  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  du réseau [Éq. (3.81)], notamment dans les hyperfréquences, où  $\mu_{\perp}$  montre un comportement résonant en fonction de la fréquence et du champ magnétique statique. Dans ce contexte, l'ajustabilité de la permittivité effective par l'application d'un champ magnétique statique correspond à un effet *magnétodiélectrique*.

Mentionnons également que la forme compacte de l'équation (3.81) permet d'envisager plusieurs généralisations pour  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$ , qui pourraient être obtenues en modifiant l'expression utilisée pour  $Z_{\text{tot}}/R_{\text{dc}}$ . En effet, sous la forme donnée à l'équation (3.77), l'inductance externe  $L_{\text{ext}}$  d'un fil est équivalente à celle d'un câble coaxial de rayon interne  $a$  et de rayon externe  $b$ , dont la configuration peut être, comme attendu, assimilée à celle de la cellule unitaire équivalente. Nous pouvons donc en déduire que la topologie choisie pour décrire le réseau de fils gouvernera le choix de l'expression appropriée pour  $L_{\text{ext}}$ . Par exemple, en imposant que le champ magnétique azimuthal produit par les fils s'annule à mi-chemin de la distance interfil, nous trouverions plutôt que [137]

$$L_{\text{ext}} = \frac{\mu_0 L}{2\pi} \ln \left[ \frac{D^2}{4a(D-a)} \right]. \quad (3.82)$$

Un calcul direct montre que les expressions pour  $L_{\text{ext}}$  données aux équations (3.77) et (3.82) sont du même ordre de grandeur pour des valeurs réalistes du rapport  $a/D = a/b\sqrt{\pi}$ .

De même, la permittivité effective  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  pourrait aussi être généralisée pour décrire un réseau de fils de longueur  $L$  explicitement finie, comme nous le discuterons de façon plus détaillée au chapitre 4. En particulier, nous verrons que la réponse électrique de réseaux de *nanofils* ferromagnétiques électrodéposés dans les pores d'une membrane diélectrique est en fait dominée par une réponse de nature essentiellement capacitive, dont l'origine physique est liée au remplissage incomplet des nanopores de la matrice par les fils.



## Écriture en fonction d'une fréquence plasma effective

Il est connu depuis les années 1960 [13] qu'un réseau de longs fils métalliques parallèles soumis à un champ électrique dynamique axial se comporte comme un plasma artificiel, caractérisé par une permittivité effective négative sous la fréquence plasma du réseau. Cette idée a notamment été réintroduite par Pendry *et al.* [8] au milieu des années 1990 et est maintenant exploitée dans le contexte des métamatériaux. Par conséquent, l'équation (3.64) pour la permittivité effective  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  du réseau avec  $K(k_w a)$  donné à l'équation (3.71) peut s'écrire sous la forme équivalente d'une réponse plasmonique de Drude, c'est-à-dire sous une forme similaire à l'équation (2.5) pour la permittivité intrinsèque  $\epsilon_w$  du métal qui constitue les fils. Le calcul mène à

$$\frac{\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}}{\epsilon_m} = (1 - f) - \frac{\omega_{p,\text{eff}}^2}{\omega(\omega + i\gamma_{p,\text{eff}})}, \quad (3.83)$$

où la fréquence plasma  $\omega_{p,\text{eff}}$  et le paramètre d'amortissement  $\gamma_{p,\text{eff}}$  effectifs sont exprimés comme

$$\omega_{p,\text{eff}}^2 = \frac{2}{\epsilon_m \mu_0 b^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2c_m^2}{b^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (3.84)$$

et

$$\gamma_{p,\text{eff}} = \left(\frac{a\epsilon_m Z_s}{2f}\right) \omega_{p,\text{eff}}^2 = \frac{Z_s}{a\mu_0 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}, \quad (3.85)$$

avec  $c_m = (\epsilon_m \mu_0)^{-1/2}$  la vitesse de la lumière dans la matrice. Notons que ces relations pour  $\omega_{p,\text{eff}}$  et  $\gamma_{p,\text{eff}}$  ont été présentées précédemment aux références [39, 138], pour le cas de réseaux dilués de microfils ferromagnétiques.

Dans ce modèle, la fréquence plasma effective  $\omega_{p,\text{eff}}$  est une quantité réelle, qui dépend des paramètres géométriques du réseau, en particulier de la distance interfil  $D = b\sqrt{\pi}$ , de même que des propriétés intrinsèques de la matrice, mais qui n'est pas affectée par la composition des fils. En revanche, la fréquence de relaxation  $\gamma_{p,\text{eff}}$  est une quantité complexe, proportionnelle à l'impédance de surface  $Z_s$  des fils individuels. D'une part, la partie réelle de  $\gamma_{p,\text{eff}}$  décrit l'amortissement de la permittivité effective  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$ , en incorporant à la fois les pertes par courants de Foucault liées à la nature métallique des fils et les pertes magnétiques intrinsèques causées

par leur réponse gyromagnétique résonante. D'autre part, la partie imaginaire de  $\gamma_{p,\text{eff}}$  va modifier la position à laquelle la partie réelle de  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  s'annule.<sup>10</sup>

### 3.3.4 Étude de cas limites

Nous allons maintenant considérer les résultats établis pour la permittivité effective du réseau dans divers cas limites pertinents. Notre approche va consister à étudier comment l'expression générale pour  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  est modifiée par l'effet de peau à l'intérieur des fils, c'est-à-dire par la valeur du rayon normalisé  $a/\delta_{w0}$ . Pour ce faire, nous exprimons d'abord l'équation (3.81) explicitement en fonction des impédances normalisées  $Z_w/R_{\text{dc}}$  et  $Z_L/R_{\text{dc}}$

$$\tilde{\epsilon}_{\text{eff}} = (1 - f) \epsilon_m + f \epsilon_w \left( \frac{Z_w}{R_{\text{dc}}} + \frac{Z_L}{R_{\text{dc}}} \right)^{-1}. \quad (3.86)$$

Nous constatons que le comportement de  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  en fonction de  $a/\delta_{w0}$  sera gouverné par celui de  $Z_w/R_{\text{dc}}$  et de  $Z_L/R_{\text{dc}}$ .

Nous voulons également étudier comment la forme plasmonique de  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  donnée à l'équation (3.83) est modifiée par le retard électromagnétique à l'intérieur des fils. Pour ce faire, il est utile d'exprimer les paramètres plasmoniques  $\omega_{p,\text{eff}}$  et  $\gamma_{p,\text{eff}}$  en fonction des impédances normalisées  $Z_w/R_{\text{dc}}$  et  $Z_L/R_{\text{dc}}$ . Nous trouvons alors que

$$\omega_{p,\text{eff}}^2 = \frac{-if\omega\sigma_w}{\epsilon_m} \left( \frac{Z_L}{R_{\text{dc}}} \right)^{-1} = \frac{f\sigma_w}{\epsilon_m} \left( \frac{L_{\text{ext}}}{R_{\text{dc}}} \right)^{-1}, \quad (3.87a)$$

$$\gamma_{p,\text{eff}} = -i\omega \left( \frac{Z_L}{Z_w} \right)^{-1} = \left( \frac{L_{\text{ext}}}{Z_w} \right)^{-1}, \quad (3.87b)$$

ce qui montre que la fréquence plasma effective  $\omega_{p,\text{eff}}$  est contrôlée par l'impédance externe  $Z_L$ , alors que le paramètre d'amortissement effectif  $\gamma_{p,\text{eff}}$  est proportionnel au rapport  $Z_w/Z_L$ .

### Limite quasi statique

Considérons d'abord la limite QS, dans laquelle la condition  $|k_w|a \ll 1$  est satisfaite, ce qui implique que  $F(k_w a) \approx 1/2$  et donc que l'équation (3.75) se réduit à  $Z_w/R_{\text{dc}} \approx 1$ . De plus, puisque l'impédance externe est proportionnelle à  $(a/\delta_{w0})^2 \ll 1$  [Éq. (3.79)], nous trouvons que  $|Z_L| \ll |Z_w|$  ou, de façon équivalente, que  $Z_{\text{tot}} \approx Z_w \approx R_{\text{dc}}$ .<sup>11</sup> Il s'ensuit que le facteur de renormalisation  $K(k_w a)$  de l'équation (3.71) se réduit à

10. En effet, dans la limite où  $\gamma_{p,\text{eff}} = 0$ , l'équation (3.83) se simplifie comme  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}/\epsilon_m \approx (1 - f) - \omega_{p,\text{eff}}^2/\omega^2$ , de sorte que  $\text{Re}[\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}] = 0$  lorsque  $\omega = \omega_{p,\text{eff}}(1 - f)^{-1/2}$ . En revanche, une valeur non nulle de  $\gamma_{p,\text{eff}}$  va modifier la fréquence à laquelle la partie réelle de  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  passe par zéro.

11. En effet, dans la limite QS,  $|Z_L/R_{\text{dc}}| = (a/\delta_{w0})^2 \ln(b/a) \ll 1$  car  $\ln(b/a)$  est de l'ordre de l'unité pour des valeurs réalistes du rapport  $b/a$ .

$$K(k_w a) = \left( \frac{Z_w}{R_{\text{dc}}} + \frac{Z_L}{R_{\text{dc}}} \right)^{-1} \approx \left( \frac{Z_w}{R_{\text{dc}}} \right)^{-1} \approx 1, \quad (3.88)$$

de sorte que la permittivité effective devient égale à

$$\tilde{\epsilon}_{\text{eff}} \approx \epsilon_{\text{eff}} = (1 - f) \epsilon_m + f \epsilon_w \quad (3.89)$$

et coïncide avec la limite QS de la formule de Maxwell Garnett appliquée à un ensemble d'inclusions cylindriques parallèles, soumises à un champ électrique axial, que nous pouvons obtenir directement à partir de l'équation (2.25a). Dans ce cas, la permittivité effective correspond à une simple interpolation linéaire entre la permittivité intrinsèque de la matrice, pour  $f = 0$ , et celle des fils, pour  $f = 1$ .

De façon équivalente, la satisfaction de l'inégalité  $|Z_L| \ll |Z_w|$  implique que  $|\gamma_{p,\text{eff}}| \gg \omega$  [voir l'équation (3.87b)], de sorte que

$$\tilde{\epsilon}_{\text{eff}} \approx \epsilon_m \left[ (1 - f) + \frac{i\omega_{p,\text{eff}}^2}{\omega\gamma_{p,\text{eff}}} \right]. \quad (3.90)$$

Or, dans la limite QS, le rapport  $\omega_{p,\text{eff}}^2/\gamma_{p,\text{eff}}$  vaut  $f\sigma_w/\epsilon_m$ , ce qui permet de vérifier que les équations (3.89) et (3.90) sont équivalentes.

### Limite d'effet de peau dominant

Dans la limite SE, l'inégalité  $a/\delta_{w0} \gg 1$  s'applique et le rapport  $J_0(k_w a)/J_1(k_w a)$  à l'équation (3.74) tend vers  $-i$ , de sorte que  $Z_s \approx \zeta_w$ .<sup>12</sup> Il en résulte que l'impédance interne normalisée du fil donnée à l'équation (3.75) se réduit à

$$\frac{Z_w}{R_{\text{dc}}} \approx \frac{a\sigma_w\zeta_w}{2} = \frac{1-i}{2} \left( \frac{a}{\delta_{w0}} \right) \sqrt{\frac{\mu_{\perp}}{\mu_0}}, \quad (3.91)$$

où le membre de droite découle de l'équation (2.37) pour  $\zeta_w$ . Ce résultat implique que les équations (3.78) pour  $K(k_w a)$  et (3.81) pour  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  demeurent valides à la condition d'utiliser, dans l'impédance normalisée  $Z_{\text{tot}}/R_{\text{dc}}$ , la valeur de  $Z_w/R_{\text{dc}}$  donnée à l'équation (3.91). De même, l'équation (3.83) pour  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  s'applique intégralement, à la condition d'exprimer le paramètre d'amortissement comme

---

12. Notons que ce résultat est attendu en régime SE, puisque le rayon de courbure des fils devient alors beaucoup plus grand que la profondeur de pénétration de l'onde, de sorte que chacun des fils se comporte comme un conducteur planaire (métal semi-infini), dont l'impédance de surface  $Z_s$  est égale à l'impédance d'onde intrinsèque  $\zeta_w$ .

$$\gamma_{p,\text{eff}} \approx \left( \frac{a\epsilon_m\zeta_w}{2f} \right) \omega_{p,\text{eff}}^2 = \frac{\zeta_w}{a\mu_0 \ln \left( \frac{b}{a} \right)}, \quad (3.92)$$

c'est-à-dire en remplaçant simplement  $Z_s$  par  $\zeta_w$  dans l'équation (3.85). Par ailleurs, notons que l'expression pour la fréquence plasma [Éq. (3.84)] demeure inchangée dans la limite SE.

L'équation (3.91) montre également que le terme d'impédance interne  $Z_w/R_{\text{dc}}$  est proportionnel à  $a/\delta_{w0}$  dans la limite SE. En revanche, le terme d'inductance externe  $Z_L/R_{\text{dc}}$  varie quant à lui en  $(a/\delta_{w0})^2$  [Éq. (3.79)], ce qui entraîne que  $|Z_L| \gg |Z_w|$  et donc que  $|\gamma_{p,\text{eff}}| \ll \omega$  [voir l'équation (3.87b)]. Par conséquent, lorsque l'effet de peau est dominant, nous trouvons que  $Z_{\text{tot}} \approx Z_L$ , de sorte que la permittivité effective du réseau se réduit alors à

$$\tilde{\epsilon}_{\text{eff}} \approx (1-f)\epsilon_m + f\epsilon_w \left( \frac{Z_L}{R_{\text{dc}}} \right)^{-1} \quad (3.93)$$

ou, de façon équivalente, à [36, 37, 95]

$$\tilde{\epsilon}_{\text{eff}} \approx \epsilon_m \left[ (1-f) - \left( \frac{\omega_{p,\text{eff}}}{\omega} \right)^2 \right], \quad (3.94)$$

que nous avons obtenu en considérant l'inégalité  $|\gamma_{p,\text{eff}}| \ll \omega$  dans l'équation (3.83). L'équation (3.94) décrit alors une réponse diélectrique essentiellement réelle et dominée par la fréquence plasma effective, laquelle est contrôlée exclusivement par les propriétés de la matrice et les paramètres géométriques du réseau. De plus, lorsque  $\omega = \omega_{p,\text{eff}}(1-f)^{-1/2}$ , la partie réelle de  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  est caractérisée par un changement de signe, passant de négative à positive.

### Limite magnétoinductive

Enfin, examinons le cas où l'effet de peau dans les fils est faible, mais non négligeable. Dans ce cas, l'impédance interne  $Z_w$  peut s'écrire comme la somme de la résistance en courant continu  $R_{\text{dc}}$  et d'une contribution inductive linéairement proportionnelle à  $\omega$ , c'est-à-dire

$$Z_w \approx R_{\text{dc}} - i\omega L_w, \quad (3.95)$$

où  $L_w$  est l'inductance interne des fils, que nous allons désigner comme la *magnétoinductance* dans le cas de fils ferromagnétiques. Pour exprimer  $Z_w$  sous la forme de l'équation (3.95), nous pouvons développer l'expression générale [Éq. (3.75)] en série de Maclaurin par rapport à  $k_w a$ , en utilisant les développements des fonctions de Bessel suivants

$$J_0(k_w a) \approx 1 - \left( \frac{k_w a}{2} \right)^2, \quad J_1(k_w a) \approx \frac{k_w a}{2} \left[ 1 - \frac{(k_w a)^2}{8} \right]. \quad (3.96)$$

Nous trouvons alors que

$$\frac{Z_w}{R_{dc}} \approx 1 - i \frac{\mu_{\perp}}{4\mu_0} \left( \frac{a}{\delta_{w0}} \right)^2 = 1 - i\omega \frac{L_w}{R_{dc}}, \quad (3.97)$$

de sorte que

$$\frac{L_w}{R_{dc}} = \frac{\mu_{\perp}}{4\mu_0\omega} \left( \frac{a}{\delta_{w0}} \right)^2 \quad (3.98)$$

et

$$L_w = \frac{\mu_{\perp} L}{8\pi} = \frac{\mu_0 L}{8\pi} \left[ \frac{(\omega_H^* + \omega_M)^2 - \omega^2}{\omega_H^* (\omega_H^* + \omega_M) - \omega^2} \right]. \quad (3.99)$$

Ce dernier résultat indique que dans la limite  $|k_w|a \ll 1$ , la magnétoinductance devient proportionnelle à la perméabilité de Voigt  $\mu_{\perp}$ . Il en résulte que le caractère résonant de  $\mu_{\perp}$  en fonction de la fréquence et du champ magnétique statique va se répercuter d'abord sur  $L_w$ , puis sur la permittivité renormalisée  $\tilde{\epsilon}_w = \epsilon_w (Z_{tot}/R_{dc})^{-1}$  des fils individuels et enfin sur la permittivité effective  $\tilde{\epsilon}_{eff}$  du réseau.

En substituant l'équation (3.97) dans l'équation (3.72) et en considérant l'équation (3.79), nous obtenons finalement [32]

$$\frac{Z_{tot}}{R_{dc}} \approx 1 - i\omega \left( \frac{L_w + L_{ext}}{R_{dc}} \right) = 1 - i \left( \frac{a}{\delta_{w0}} \right)^2 \left[ \frac{\mu_{\perp}}{4\mu_0} + \ln \left( \frac{b}{a} \right) \right]. \quad (3.100)$$

Ce résultat indique que  $Z_{tot}/R_{dc}$  possède une composante résistive indépendante de la fréquence et une composante inductive proportionnelle à  $(a/\delta_{w0})^2$ , laquelle reflète la nature métallique des fils et représente la somme de leur magnétoinductance  $L_w$  et de leur inductance externe  $L_{ext}$ . Le terme magnétoinductif est contrôlé par la composante de perméabilité  $\mu_{\perp}$  et découle du caractère ferromagnétique des fils, alors que le terme d'inductance externe décrit leur réponse plasmonique et dépend uniquement des paramètres géométriques du réseau et des propriétés de la matrice.

Ceci termine la présentation du modèle pour la permittivité effective de réseaux saturés de fils ferromagnétiques infinis, axialement aimantés et excités dans la configuration TM. Dans la section qui suit, nous allons considérer explicitement la réponse de réseaux de taille finie soumis à des champs dynamiques spatialement uniformes en son voisinage.

### 3.4 Réponse effective externe et interactions dipolaires

Les sections précédentes ont montré comment dériver les propriétés électromagnétiques effectives  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  de réseaux de fils ferromagnétiques. Ces fonctions de réponse décrivent le comportement macroscopique intrinsèque d'un métamatériau, indépendamment de sa taille ou de sa forme, et permettent de déduire sa relation de dispersion [Éq. (2.24)]. Celle-ci peut ensuite être utilisée dans les conditions aux frontières électromagnétiques à la surface du matériau composite, dans le but d'obtenir différents paramètres électromagnétiques, tels que l'impédance, l'indice de réfraction et les coefficients optiques. Les paramètres constitutifs  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  jouent ainsi un rôle équivalent aux propriétés intrinsèques  $\bar{\epsilon}_w$  et  $\bar{\mu}_w$  dans le contexte des matériaux naturels. Or, les techniques d'homogénéisation menant à des propriétés électromagnétiques effectives, telles que la procédure de Maxwell Garnett, supposent généralement que le matériau composite est non borné, de sorte que l'effet des pôles non compensés à la surface d'échantillons de taille finie n'est pas encore pris en compte à cette étape.

Lorsqu'une onde électromagnétique caractérisée par les champs  $\mathbf{e}_{\text{ext}}$  et  $\mathbf{h}_{\text{ext}}$  et le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_{\text{ext}}$ , supposés connus, est incidente sur un réseau de fils de taille finie (voir la figure 2.1, les champs macroscopiques moyens  $\langle \mathbf{e} \rangle$  et  $\langle \mathbf{h} \rangle$  et le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_{\text{eff}}$  à l'intérieur du matériau effectif sont inconnus *a priori*. Dans le cas le plus général, on se trouve dans le régime de propagation électromagnétique, où aucune restriction n'est imposée aux produits  $|k_{\text{ext}}| R$  et  $|k_{\text{eff}}| R$ , respectivement à l'extérieur et à l'intérieur du réseau de rayon  $R$ . L'obtention des paramètres de l'onde à l'intérieur du réseau requiert alors de résoudre le problème électromagnétique qui consiste à substituer  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  dans les équations de Maxwell macroscopiques [Éq. (2.21)], puis à satisfaire les conditions aux frontières appropriées à la surface du réseau.

Le problème général se simplifie lorsque l'inégalité  $|k_{\text{ext}}| R \ll 1$  est satisfaite. Dans ce cas, nous pouvons assimiler le réseau à une inclusion macroscopique de dimensions finies et de propriétés intrinsèques  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$ , soumise à des champs dynamiques  $\mathbf{e}_{\text{ext}}$  et  $\mathbf{h}_{\text{ext}}$  spatialement uniformes en son voisinage. L'approche multiniveau préconisée dans le cadre de cette thèse suggère alors d'étendre, aux métamatériaux de taille finie, la distinction entre propriétés intrinsèques et propriétés externes déjà appliquée aux inclusions individuelles. Pour ce faire, nous définissons les tenseurs de susceptibilité *effective externe*  $\bar{\kappa}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\eta}_{\text{eff}}$ , lesquels vont établir les relations constitutives suivantes

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \epsilon_0 \bar{\kappa}_{\text{eff}} \mathbf{e}_{\text{loc}}, \quad (3.101a)$$

$$\langle \mathbf{m} \rangle = \bar{\eta}_{\text{eff}} \mathbf{h}_{\text{loc}}. \quad (3.101b)$$

L'introduction de ces deux fonctions de réponse permet alors de lier la polarisation  $\langle \mathbf{p} \rangle$  et l'aimantation  $\langle \mathbf{m} \rangle$  moyennes du réseau de fils aux champs externes dynamiques, mais spatialement uniformes, qui lui sont imposés.

Dans le cas où aucune restriction n'est imposée quant à la valeur de  $|k_{\text{eff}}| R$  à l'intérieur du réseau, les susceptibilités effectives externes  $\bar{\bar{\kappa}}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\bar{\eta}}_{\text{eff}}$  dépendront non seulement de la forme et des propriétés effectives  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  du réseau, mais également du retard électromagnétique à l'intérieur de celui-ci. Par conséquent, comme pour la réponse EQS d'un fil unique, il serait alors possible, en principe, de renormaliser les composantes de  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  à l'aide de facteurs géométriques dépendant de  $k_{\text{eff}} R$  et liés à la forme macroscopique du réseau. La procédure consisterait ensuite à utiliser ces propriétés effectives renormalisées dans le but d'établir des expressions explicites pour les composantes de  $\bar{\bar{\kappa}}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\bar{\eta}}_{\text{eff}}$ .

Or, dans le cadre de cette thèse, nous allons toutefois imposer la condition supplémentaire  $|k_{\text{eff}}| R \ll 1$  à l'intérieur du réseau, lequel se trouve alors lui-même dans la limite QS.<sup>13</sup> Dans ces conditions, les champs externes  $\mathbf{e}_{\text{ext}}$  et  $\mathbf{h}_{\text{ext}}$ , qui peuvent correspondre expérimentalement aux champs d'un mode non perturbé d'une cavité résonante, vont exciter des oscillations uniformes de la polarisation  $\langle \mathbf{p} \rangle$  et de l'aimantation  $\langle \mathbf{m} \rangle$  dynamiques moyennes du réseau. Soulignons que ces exigences sont généralement remplies lors de mesures de résonance ferromagnétique du mode uniforme impliquant des réseaux de taille suffisamment petite. De telles expériences se sont notamment avérées très utiles pour étudier l'effet des interactions dipolaires sur la réponse en hyperfréquences de réseaux de nanofils ferromagnétiques [57–61].

Dans ce qui suit, nous allons démontrer comment la résonance ferromagnétique du mode uniforme d'un réseau de fils peut être convenablement décrite à l'aide du tenseur de susceptibilité *magnétique* effective externe  $\bar{\bar{\eta}}_{\text{eff}}$ , tel que défini à l'équation (3.101b). Nous allons également introduire le tenseur de désaimantation effectif  $\bar{\bar{N}}_{\text{eff}}$ , qui tient compte des interactions dipolaires dans le réseau, et nous allons expliciter son lien avec d'autres tenseurs de désaimantation considérés dans la littérature. Enfin, soulignons que la réponse effective externe *électrique*, laquelle est prise en compte par le tenseur  $\bar{\bar{\kappa}}_{\text{eff}}$ , ne sera pas considérée explicitement dans le cadre de cette thèse. Toutefois, la plupart des résultats obtenus pour  $\bar{\bar{\eta}}_{\text{eff}}$  pourront être appliqués à  $\bar{\bar{\kappa}}_{\text{eff}}$ .

### 3.4.1 Tenseur de susceptibilité magnétique effective externe

Considérons un réseau de diamètre  $2R$ , d'épaisseur  $h = L \ll R$  et de susceptibilité effective  $\bar{\chi}_{\text{eff}}$ , tel que montré à la figure 2.1. Supposons également que le réseau est soumis au champ

---

13. Notons que la satisfaction de la condition  $|k_{\text{eff}}| R \ll 1$  pour le réseau *global* n'empêche pas la réponse des fils *individuels* d'être en régime EQS, correspondant à une valeur arbitraire de  $|k_w| a$ .

magnétique dynamique spatialement uniforme  $\mathbf{h}_{\text{ext}}$ , lequel excite un mode de précession uniforme de son aimantation moyenne  $\langle \mathbf{m} \rangle$ . La relation constitutive définie à l'équation (3.101b) peut alors être explicitée comme

$$\langle \mathbf{m} \rangle = \bar{\bar{\eta}}_{\text{eff}} \mathbf{h}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_{\text{eff}} & -i\tilde{\eta}_{\text{eff},t} & 0 \\ i\tilde{\eta}_{\text{eff},t} & \tilde{\eta}_{\text{eff}} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\eta}_{\text{eff}\parallel} \end{pmatrix} \mathbf{h}_{\text{ext}}, \quad (3.102)$$

où la susceptibilité magnétique effective externe  $\bar{\bar{\eta}}_{\text{eff}}$  est un tenseur gyrotrope, qui relie l'aimantation dynamique moyenne  $\langle \mathbf{m} \rangle$  du réseau au champ alternatif externe  $\mathbf{h}_{\text{ext}}$ .

Aller plus loin avec l'équation (3.102) requiert d'obtenir une relation entre la susceptibilité effective externe  $\bar{\bar{\eta}}_{\text{eff}}$  et la susceptibilité effective  $\bar{\bar{\chi}}_{\text{eff}}$  dérivée en 3.2.2. Pour ce faire, nous *définissons* d'abord le tenseur de désaimantation effectif  $\bar{\bar{N}}_{\text{eff}}$ , de façon à ce que la relation

$$\langle \mathbf{h} \rangle = \mathbf{h}_{\text{ext}} - \bar{\bar{N}}_{\text{eff}} \langle \mathbf{m} \rangle \quad (3.103)$$

soit satisfaite. Cette équation établit alors un lien entre le champ externe  $\mathbf{h}_{\text{ext}}$  et le champ moyen  $\langle \mathbf{h} \rangle$  à l'intérieur du réseau. Le champ  $\langle \mathbf{h} \rangle$  est donc spatialement uniforme, puisque, d'une part,  $\mathbf{h}_{\text{ext}}$  et  $\langle \mathbf{m} \rangle$  le sont par hypothèse et, d'autre part, nous supposons que les composantes de  $\bar{\bar{N}}_{\text{eff}}$  sont indépendantes de la position dans le réseau.

Il convient de souligner que l'équation (3.103) constitue une généralisation de l'équation (3.31) au cas de métamatériaux décrits par des propriétés électromagnétiques effectives. Dans ce contexte, le tenseur  $\bar{\bar{N}}_{\text{eff}}$  tient compte des pôles non compensés à la surface d'un réseau de taille finie et, comme nous le verrons, pourra être interprété comme le tenseur de désaimantation de forme du matériau composite homogénéisé. En effet, la prise en compte des interactions dipolaires va nous permettre, en 3.4.2, de dériver une expression explicite pour  $\bar{\bar{N}}_{\text{eff}}$ , notamment en vue d'établir comment celui-ci est lié au tenseur de désaimantation de forme  $\bar{\bar{N}}_d$  d'un disque magnétique homogène de rayon  $R$  et d'épaisseur  $h = L$ . Toutefois, pour le moment, nous supposons seulement que  $\bar{\bar{N}}_{\text{eff}}$  existe et qu'il satisfait l'équation (3.103).

Comme lors de la dérivation de l'équation (3.32), nous pouvons alors utiliser les équations (3.21) et (3.102) pour effectuer les substitutions  $\langle \mathbf{h} \rangle = \bar{\bar{\chi}}_{\text{eff}}^{-1} \langle \mathbf{m} \rangle$  et  $\mathbf{h}_{\text{ext}} = \bar{\bar{\eta}}_{\text{eff}}^{-1} \langle \mathbf{m} \rangle$  dans l'équation (3.103), ce qui mène à la relation

$$\bar{\bar{\eta}}_{\text{eff}}^{-1} = \bar{\bar{\chi}}_{\text{eff}}^{-1} + \bar{\bar{N}}_{\text{eff}}. \quad (3.104)$$

Ce résultat indique que le tenseur de susceptibilité effective externe  $\bar{\bar{\eta}}_{\text{eff}}$  constitue la fonction de réponse appropriée pour décrire la réponse observée lors de mesures de résonance ferroma-



gnétique du mode uniforme de l'aimantation dynamique moyenne  $\langle \mathbf{m} \rangle$  d'un réseau de taille finie, caractérisé par la susceptibilité effective  $\bar{\chi}_{\text{eff}}$  et le tenseur de désaimantation effectif  $\bar{N}_{\text{eff}}$ .

L'équation (3.104) démontre également l'importance d'établir une distinction entre  $\bar{\chi}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\eta}_{\text{eff}}$ . En effet, d'une part, la susceptibilité effective  $\bar{\chi}_{\text{eff}}$  décrit la réponse de l'aimantation d'un métamatériau au champ dynamique *moyen*  $\langle \mathbf{h} \rangle$ , lequel apparaît dans les équations de Maxwell macroscopiques [Éq. (2.21)] décrivant la propagation d'ondes électromagnétiques dans le matériau composite homogénéisé et ce, indépendamment de sa taille et de sa forme. D'autre part, la susceptibilité effective externe  $\bar{\eta}_{\text{eff}}$  décrit la réponse d'un métamatériau dans le cas particulier d'un champ dynamique *externe*  $\mathbf{h}_{\text{ext}}$  spatialement uniforme en son voisinage. La réponse effective externe du métamatériau dépend alors de sa forme globale, par l'intermédiaire du tenseur de désaimantation effectif  $\bar{N}_{\text{eff}}$ . En particulier, soulignons que c'est le pôle de  $\bar{\eta}_{\text{eff}}$ , plutôt que celui de  $\bar{\chi}_{\text{eff}}$ , qui correspond à la fréquence du pic d'absorption observé lors d'une expérience de résonance ferromagnétique du mode uniforme, par exemple en cavité hyperfréquence.

### 3.4.2 Interactions dipolaires

Nous allons maintenant montrer qu'une expression explicite pour  $\bar{N}_{\text{eff}}$  peut être obtenue en liant la réponse en résonance ferromagnétique d'un fil unique, dérivée précédemment en 3.2.1, à celle d'un réseau de fils en interaction. Pour ce faire, nous combinons les équations (3.21) et (3.104), ce qui permet d'exprimer  $\bar{\eta}_{\text{eff}}$  en fonction de  $\bar{\eta}_w$  comme

$$\left( \frac{\bar{\eta}_{\text{eff}}}{f} \right)^{-1} = \bar{\eta}_w^{-1} + f \left( \bar{N}_{\text{eff}} - \bar{N}_w \right), \quad (3.105)$$

où le terme  $f(\bar{N}_{\text{eff}} - \bar{N}_w)$  tient compte des interactions interfils, comme nous allons maintenant le démontrer.

D'abord, dans la limite  $|k_{\text{eff}}| R \ll 1$ , le champ local  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$  agissant sur chacun des fils est constitué du champ externe  $\mathbf{h}_{\text{ext}}$ , provenant de sources situées à l'extérieur du réseau, et de la somme  $\mathbf{h}_{\text{int}}$  des champs d'interaction produits par tous les autres fils du réseau. Nous pouvons alors écrire

$$\mathbf{h}_{\text{loc}} = \mathbf{h}_{\text{ext}} + \mathbf{h}_{\text{int}} = \mathbf{h}_{\text{ext}} - \bar{N}_{\text{int}} \langle \mathbf{m}_w \rangle, \quad (3.106)$$

où  $\bar{N}_{\text{int}}$  représente le tenseur d'interaction dérivé à la référence [61] afin d'incorporer l'influence des interactions dipolaires à la fois intra et interfils sur la dépendance angulaire de la résonance ferromagnétique de réseaux de nanofils ferromagnétiques dans la limite QS.

En particulier, les travaux de la référence [61] ont démontré que la composante *axiale* de  $\bar{\bar{N}}_{\text{int}}$  peut être exprimée comme

$$N_{\text{op}}^{\text{int}} = f \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ns}{(n^2 + s^2)^{3/2}}, \quad (3.107)$$

où  $s = L/2D$  est un paramètre de longueur normalisée. La sommation infinie à l'équation (3.107) dépend uniquement de paramètres géométriques et tend asymptotiquement vers l'unité dans le régime *monopolaire*, défini par la condition  $L \gg D$ . Dans cette limite,  $N_{\text{op}}^{\text{int}}$  se réduit à  $f$ , alors que les composantes transverses  $N_{\text{ip}}^{\text{int}}$  tendent toutes deux vers  $-f/2$ , puisque la trace du tenseur d'interaction  $\bar{\bar{N}}_{\text{int}}$  est nulle [61, 139], c'est-à-dire que  $2N_{\text{ip}}^{\text{int}} + N_{\text{op}}^{\text{int}} = 0$ .

Les équations (2.17b) et (3.102) permettent alors d'effectuer les substitutions  $\mathbf{h}_{\text{loc}} = \bar{\eta}_w^{-1} \langle \mathbf{m}_w \rangle$  et  $\mathbf{h}_{\text{ext}} = \bar{\eta}_{\text{eff}}^{-1} \langle \mathbf{m} \rangle = f \bar{\eta}_{\text{eff}}^{-1} \langle \mathbf{m}_w \rangle$  dans l'équation (3.106), ce qui mène

$$\left( \frac{\bar{\eta}_{\text{eff}}}{f} \right)^{-1} = \bar{\eta}_w^{-1} + \bar{\bar{N}}_{\text{int}}, \quad (3.108)$$

où nous avons utilisé la relation  $\langle \mathbf{m} \rangle = f \langle \mathbf{m}_w \rangle$  existant entre l'aimantation moyenne des fils et celle du réseau.

Ce dernier résultat montre bien comment les interactions dipolaires interfils modifient la résonance ferromagnétique d'un réseau de fils en interaction. En effet, le fait de négliger ces interactions est équivalent à poser  $\bar{\bar{N}}_{\text{int}} = 0$ , ce qui mène à l'expression  $\bar{\eta}_{\text{eff}} = f \bar{\eta}_w$ , valide uniquement dans la limite diluée. Cette relation implique que  $\mathbf{h}_{\text{ext}} = \mathbf{h}_{\text{loc}}$  à l'équation (3.106) et prédit que la fréquence de résonance du réseau dans le champ *externe*  $\mathbf{h}_{\text{ext}}$  est identique à celle d'un fil individuel dans le champ *local*  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$ . Or, cette hypothèse n'est valable que dans le cas de métamatériaux magnétiques *dilués* [76]. Par contre, pour des matériaux composites relativement *denses* [61, 68], les interactions dipolaires vont modifier substantiellement la réponse magnétique, notamment en résonance ferromagnétique, et ne peuvent donc pas être négligées.

La comparaison des équations (3.105) et (3.108) mène alors à une *définition* pour le tenseur de désaimantation effectif du réseau, c'est-à-dire

$$\bar{\bar{N}}_{\text{eff}} = \bar{\bar{N}}_w + f^{-1} \bar{\bar{N}}_{\text{int}}, \quad (3.109)$$

où  $\bar{\bar{N}}_{\text{eff}}$  est exprimé en fonction des tenseurs connus  $\bar{\bar{N}}_w$  et  $\bar{\bar{N}}_{\text{int}}$ , lesquels dépendent uniquement des paramètres géométriques du réseau. De même, la comparaison formelle des équations (3.103) et (3.104) et des équations (3.31) et (3.32) suggère que  $\bar{\bar{N}}_{\text{eff}}$  pourrait également représenter le tenseur de désaimantation de forme macroscopique du réseau de fils. En ce sens, il s'avère alors pertinent de comparer l'équation (3.109) pour  $\bar{\bar{N}}_{\text{eff}}$  avec le tenseur de

désaimantation  $\bar{\bar{N}}_d$  d'un disque magnétique homogène de forme identique à celle du réseau de fils.

En effet, le facteur de désaimantation hors plan  $N_{\text{op}}^d$  au centre d'un disque circulaire de rayon  $R$  et d'épaisseur  $h = L$  vaut [140]

$$N_{\text{op}}^d = 1 - \frac{l}{(1 + l^2)^{1/2}}, \quad (3.110)$$

où  $l = L/2R$  désigne le rapport entre l'épaisseur et le diamètre du disque. Pour leur part, les composantes dans le plan  $N_{\text{ip}}^d$  peuvent être obtenues directement de la relation  $2N_{\text{ip}}^d + N_{\text{op}}^d = 1$ . De plus, pour un disque infini dans les deux directions IP, nous trouvons que  $l$  tend vers 0, ce qui mène à  $N_{\text{ip}}^d \approx 0$  et  $N_{\text{op}}^d \approx 1$ , comme attendu dans le cas d'une plaque circulaire infiniment mince (voir notamment la référence [26], p. 25).

Nous allons maintenant démontrer que dans le cas de longs fils ( $L \gg d$ ) en régime monopolaire ( $L \gg D$ ), l'équation (3.109) se réduit simplement à l'équation (3.110), c'est-à-dire que  $\bar{\bar{N}}_w + f^{-1}\bar{\bar{N}}_{\text{int}}$  coïncide avec le tenseur de désaimantation de forme  $\bar{\bar{N}}_d$  d'un disque mince.

D'abord, nous avons que le tenseur de forme  $\bar{\bar{N}}_w$  de long fils est caractérisé par des facteurs de désaimantation  $N_{\text{ip}}^w = 1/2$  et  $N_{\text{op}}^w = 0$ . Ensuite, pour un réseau de fils de diamètre *fini*, la composante axiale du tenseur d'interaction peut être obtenue en retranchant, de l'équation (3.107) valide dans le cas d'un réseau infini, la contribution des fils situés à *l'extérieur* du réseau de rayon  $R$ , c'est-à-dire en  $\rho > R$ . Nous trouvons alors qu'au centre du réseau

$$N_{\text{op}}^{\text{int}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{fns}{(n^2 + s^2)^{3/2}} - \sum_{n=n_{\text{max}}}^{\infty} \frac{fns}{(n^2 + s^2)^{3/2}}, \quad (3.111)$$

où  $n_{\text{max}} = R/D$  est le nombre de fils sur un segment de droite reliant le centre du réseau à sa circonférence [61].

En régime monopolaire, le premier terme du membre de droite de l'équation (3.111) se réduit simplement à  $f$ . Pour évaluer le second terme, nous posons l'hypothèse supplémentaire que les fils situés en  $\rho > R$  sont localisés suffisamment loin du centre du réseau pour que nous puissions les traiter comme une distribution d'aimantation continue. Nous pouvons alors remplacer la sommation sur  $n$  par une intégrale, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} N_{\text{op}}^{\text{int}} &= f \left[ 1 - \int_{n_{\text{max}}}^{\infty} \frac{ns}{(n^2 + s^2)^{3/2}} dn \right] \\ &= f \left[ 1 - \frac{l}{(1 + l^2)^{1/2}} \right], \end{aligned} \quad (3.112)$$

où  $l = s/n_{\max} = L/2R$ , comme défini plus haut. Pour de longs fils avec  $N_{\text{op}}^w = 0$ , nous obtenons enfin

$$N_{\text{op}}^{\text{eff}} = N_{\text{op}}^w + f^{-1}N_{\text{op}}^{\text{int}} = 1 - \frac{l}{(1+l^2)^{1/2}} = N_{\text{op}}^d, \quad (3.113)$$

ce qui, comme anticipé, coïncide avec l'équation (3.110) pour le facteur de désaimantation au centre d'un disque mince. La même relation est évidemment vérifiée par les deux composantes  $N_{\text{ip}}^{\text{eff}}$ , c'est-à-dire que  $N_{\text{ip}}^{\text{eff}} = N_{\text{ip}}^d$ , ce que nous pouvons déduire directement des relations  $2N_{\text{ip}}^w + N_{\text{op}}^w = 1$  et  $2N_{\text{ip}}^{\text{int}} + N_{\text{op}}^{\text{int}} = 0$ . Enfin, dans le cas limite d'un réseau infini, l'équation (3.107) mène à  $N_{\text{op}}^{\text{int}} = f$ , de sorte que  $N_{\text{ip}}^{\text{int}} = -f/2$ . Nous obtenons alors  $N_{\text{op}}^{\text{eff}} = 1$  et  $N_{\text{ip}}^{\text{eff}} = 0$ , ce qui coïncide également avec les facteurs de désaimantation  $N_{\text{op}}^d$  et  $N_{\text{ip}}^d$  d'un disque mince infini.

En résumé, lorsque les conditions  $L \gg d$  et  $L \gg D$  sont simultanément satisfaites, l'équation (3.113) indique que notre approche générale, laquelle inclut explicitement les interactions dipolaires et mène au tenseur de désaimantation effectif  $\bar{\bar{N}}_{\text{eff}}$  défini à l'équation (3.109), se réduit simplement à la formulation macroscopique basée sur le tenseur de désaimantation de forme  $\bar{\bar{N}}_d$  de l'équation (3.110). Dans ce régime, la résonance ferromagnétique du réseau de fils peut alors être interprétée aussi bien en fonction de  $\bar{\bar{N}}_{\text{eff}}$  que de  $\bar{\bar{N}}_d$ .

### 3.4.3 Limite quasi statique et tenseurs de désaimantation effectifs

Les travaux sur la résonance ferromagnétique de réseaux de nanofils typiques avec  $a \lesssim 100$  nm satisfont généralement la condition  $|k_w|a \ll 1$ , ce qui correspond à une réponse QS des fils individuels [57–61, 67, 68]. Dans cette limite, les composantes transverses de  $\bar{\eta}_{\text{eff}}$  se réduisent à  $\eta_{\text{eff}}$  et  $\eta_{\text{eff},t}$ , dont nous pouvons obtenir des expressions explicites en substituant les équations (3.29a) et (3.29b) dans l'équations (3.108), ce qui conduit à

$$\eta_{\text{eff}} = \frac{f\omega_M [\omega_H^* + \omega_M(1-f)/2]}{[\omega_H^* + \omega_M(1-f)/2]^2 - \omega^2}, \quad (3.114a)$$

$$\eta_{\text{eff},t} = \frac{f\omega_M\omega}{[\omega_H^* + \omega_M(1-f)/2]^2 - \omega^2}, \quad (3.114b)$$

où nous avons utilisé le fait qu'en régime monopolaire, les composantes  $N_{\text{ip}}^{\text{int}}$  et  $N_{\text{op}}^{\text{int}}$  du tenseur d'interaction  $\bar{\bar{N}}_{\text{int}}$  valent  $-f/2$  et  $f$ , respectivement.

Dans cette équation, la fréquence angulaire  $\omega_H$  (dans  $\omega_H^* = \omega_H - i\alpha\omega$ ) est proportionnelle au champ *statique* total à l'intérieur des fils et vaut  $\omega_H = \omega_0 - f\omega_M$ , où  $\omega_0 = \mu_0 |\gamma| H_{\text{ext}0}$  et  $-f\omega_M$  tiennent compte respectivement du champ appliqué et du champ d'interaction interfil axial. Pour sa part, le terme  $\omega_M(1-f)/2$  tient compte des interactions *dynamiques* à la fois

intra et interfils. Mentionnons ici que l'annexe A présente une discussion sur les façons bien distinctes de tenir compte des interactions statiques et dynamiques.

Enfin, lorsque les pertes magnétiques sont faibles ( $\alpha \ll 1$ ), les composantes  $\eta_{\text{eff}}$  et  $\eta_{\text{eff},t}$  possèdent un pôle à la fréquence

$$\begin{aligned}\omega_{\text{res,eff}} &= \omega_H + \frac{\omega_M}{2} (1 - f) \\ &= \omega_0 + \frac{\omega_M}{2} (1 - 3f),\end{aligned}\tag{3.115}$$

qui correspond à la fréquence de résonance du mode uniforme d'un ensemble de fils en interaction excités dans la limite QS. Soulignons que ce résultat a été initialement obtenu à la référence [57], sur la base de considérations phénoménologiques, puis retrouvé subséquemment grâce à une expression formelle du champ d'interaction dipolaire [61].

Dans ce contexte, la référence [61] a également défini le tenseur de désaimantation total  $\bar{\bar{N}}$  du réseau comme

$$\bar{\bar{N}} = \bar{\bar{N}}_w + \bar{\bar{N}}_{\text{int}}.\tag{3.116}$$

Ce résultat signifie qu'en raison des interactions dipolaires intra et interfils, lesquelles sont respectivement prises en compte par les tenseurs  $\bar{\bar{N}}_w$  et  $\bar{\bar{N}}_{\text{int}}$ , le champ  $\mathbf{h}_w$  à l'intérieur des fils individuels diffère du champ externe  $\mathbf{h}_{\text{ext}}$  qui excite le réseau. Or, en substituant l'équation (3.32) dans l'équation (3.108), nous déduisons la relation

$$\left(\frac{\bar{\eta}_{\text{eff}}}{f}\right)^{-1} = \bar{\chi}_w^{-1} + \bar{\bar{N}},\tag{3.117}$$

qui indique que dans la limite QS, le tenseur de désaimantation  $\bar{\bar{N}}$  relie la susceptibilité intrinsèque  $\bar{\chi}_w$  des fils individuels à la réponse effective externe  $\bar{\eta}_{\text{eff}}$  d'un réseau de taille finie de fils en interaction.

En terminant, nous allons montrer comment obtenir une seconde expression pour  $\bar{\bar{N}}$ . Pour ce faire, nous supposons que la relation  $\bar{\bar{N}}_{\text{eff}} = \bar{\bar{N}}_d$  est satisfaite (régime monopolaire), puis nous combinons les équations (3.109) et (3.116), ce qui mène à la relation

$$\bar{\bar{N}} = (1 - f) \bar{\bar{N}}_w + f \bar{\bar{N}}_d.\tag{3.118}$$

Ce résultat implique que  $\bar{\bar{N}}$  peut également être interprété comme une interpolation linéaire entre  $\bar{\bar{N}}_w$  et  $\bar{\bar{N}}_d$ , correspondant respectivement à un ensemble dilué de fils isolés (quand  $f = 0$ )

et à un disque mince d'aimantation uniforme et de forme identique à celle du réseau (quand  $f = 1$ ). En particulier, lorsque  $f = 1/3$  nous trouvons que  $\bar{N} = \bar{I}/3$ , ce qui implique que le réseau devient isotrope du point de vue des interactions dipolaires. L'équation (3.117) prédit alors que la fréquence de résonance du réseau ne dépend plus de la direction du champ statique appliqué [57].

Mentionnons que l'équation (3.118) a été établie initialement par Netzelmann [97], par l'intermédiaire d'une approche de champ moyen basée sur des considérations d'énergie magnétostatique, dans le but de décrire la résonance ferromagnétique de rubans magnétiques formés de particules de ferrites. Ce modèle a depuis été appliqué ou généralisé à l'étude de différentes hétérostructures magnétiques [98–102]. Or, rappelons que lorsque la longueur  $L$  des fils est beaucoup plus grande que leur diamètre  $d$  et leur séparation  $D$  (autrement dit, quand  $\bar{N}_{\text{eff}} = \bar{N}_d$ ), notre approche décrite par l'équation (3.116) et basée sur les interactions dipolaires intra et interfils devient rigoureusement équivalente à la formulation macroscopique pour  $\bar{N}$  menant à l'équation (3.118).

### 3.5 Sommaire

Au terme de ce chapitre, nous avons établi un modèle pour les propriétés électromagnétiques effectives de réseaux de fils ferromagnétiques aimantés axialement et excités dans la configuration TM. Dans ce contexte, nous nous sommes appuyés sur l'approche théorique développée au chapitre 2, notamment la procédure d'homogénéisation en régime EQS et la solution générale du problème de diffusion par un fil ferromagnétique. L'objectif principal de la modélisation a consisté à incorporer l'effet du retard électromagnétique sur la réponse gyrotrope et inductive des fils individuels. Pour ce faire, nous avons introduit les propriétés renormalisées  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{\mu}_t$  et  $\tilde{\epsilon}_w$ , qui nous ont permis d'écrire nos expressions pour la perméabilité et la permittivité effectives sous une forme identique à celle des relations valides dans la limite QS. De même, nous avons privilégié une méthode de dérivation qui met l'accent sur l'interprétation physique des résultats et leur validation dans divers cas limites.

La section 3.2 a été consacrée à l'étude des propriétés magnétiques et constitue le cœur de la thèse. D'abord, nous avons dérivé le tenseur de susceptibilité externe  $\bar{\bar{\eta}}_w$ , qui décrit, en régime EQS, la réponse dipolaire d'un fil individuel excité dans le mode  $n = \pm 1$ . Les composantes diagonales  $\tilde{\eta}$  et hors diagonales  $\tilde{\eta}_t$  de  $\bar{\bar{\eta}}_w$  sont données à l'équation (3.13) et constituent un des résultats importants de ce travail. Elles s'expriment de façon compacte en fonction des composantes de perméabilité renormalisée  $\tilde{\mu}$  et  $\tilde{\mu}_t$  et tiennent compte des éléments suivants :

1. La réponse gyromagnétique intrinsèque  $\bar{\mu}_w$  des fils individuels.

2. Leur forme cylindrique, par la présence des fonctions Bessel dans les facteurs de renormalisation  $F(k_w a)$  et  $G(k_w a)$ .
3. Leur taille, par l'intermédiaire du facteur  $k_w a$ .
4. Leur état magnétique statique, qui correspond ici à un réseau saturé de fils aimantés axialement.
5. Le type d'excitation, c'est-à-dire ici le mode  $n = \pm 1$  dans la configuration TM.

Notons qu'au chapitre 5, nous verrons comment généraliser le tenseur  $\bar{\eta}_w$  au cas d'un réseau non saturé, constitué de deux populations de nanofils bistables aimantées antiparallèlement. Nous avons ensuite incorporé le résultat pour  $\bar{\eta}_w$  dans notre procédure d'homogénéisation de Maxwell Garnett, ce qui nous a permis d'obtenir des expressions analytiques [Éq. (3.23)] pour les composantes diagonales  $\tilde{\mu}_{\text{eff}}$  et hors diagonales  $\tilde{\mu}_{\text{eff},t}$  du tenseur de perméabilité effective  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  d'un réseau de fils ferromagnétiques. Notre modèle pour  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  tient compte de la nature à la fois gyrotrope et métallique des fils, de même que de l'influence des paramètres géométriques sur la réponse macroscopique du réseau. Enfin, nous avons terminé cette section en montrant comment nos expressions générales pour  $\bar{\eta}_w$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  permettent de retrouver plusieurs résultats particuliers, notamment dans les limites QS et SE.

La réponse électrique du réseau soumis à un champ axial dans le mode  $n = 0$  a ensuite fait l'objet de la section 3.3. Après avoir obtenu la susceptibilité externe  $\tilde{\kappa}_w$  d'un fil individuel, nous avons dérivé l'équation (3.64) pour la permittivité effective  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  du réseau en régime EQS. Nous avons exprimé notre résultat général sous une forme identique à celle valide dans la limite QS, grâce à l'introduction de la permittivité renormalisée  $\tilde{\epsilon}_w = \epsilon_w K(k_w a)$ , où  $K(k_w a)$  est un facteur de renormalisation qui tient compte du retard électromagnétique à l'intérieur des fils et de leur effet inductif lorsque placés en réseau. Le résultat principal de cette section est notre démonstration que  $K(k_w a)$  peut s'exprimer simplement comme  $(Z_{\text{tot}}/R_{\text{dc}})^{-1}$  [Éq. (3.78)], où  $Z_{\text{tot}}$  est l'impédance totale d'un fil du réseau et  $R_{\text{dc}}$  est sa résistance en courant continu. L'impédance  $Z_{\text{tot}}$  peut elle-même être décomposée en une partie interne  $Z_w$ , qui dépend de l'effet de peau et donne lieu à une magnétoimpédance lorsque les fils sont ferromagnétiques, et en une partie externe  $Z_L$ , qui décrit l'inductance externe  $L_{\text{ext}}$  d'un fil placé dans la cellule unitaire équivalente. La formulation résultante pour la permittivité effective en fonction de  $Z_{\text{tot}}/R_{\text{dc}}$  est donnée à l'équation (3.81) et permet de faire ressortir clairement le sens physique de la solution. Enfin, nous avons montré, en accord avec les modèles existants, que la permittivité effective peut s'écrire sous la forme équivalente d'une réponse plasmonique et nous avons validé notre expression pour  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  en retrouvant plusieurs cas limites pertinents.

Finalement, à la section 3.4, nous avons considéré le comportement d'un réseau de taille finie soumis à un champ électrique ou magnétique spatialement uniforme. Pour ce faire,

nous avons défini les susceptibilités effectives externes électrique  $\bar{\bar{\kappa}}_{\text{eff}}$  et magnétique  $\bar{\bar{\eta}}_{\text{eff}}$  du réseau [Éq. (3.101)], dans le but de décrire les oscillations uniformes de sa polarisation et de son aimantation dynamiques moyennes. Dans ce contexte, nous avons décrit comment le tenseur  $\bar{\bar{\eta}}_{\text{eff}}$  représente la fonction de réponse appropriée pour décrire l'excitation d'un mode de précession uniforme de l'aimantation d'un réseau de fils ferromagnétiques. Pour exprimer  $\bar{\bar{\eta}}_{\text{eff}}$  en fonction du tenseur de susceptibilité effective  $\bar{\bar{\chi}}_{\text{eff}}$ , nous avons défini le tenseur de désaimantation effectif  $\bar{\bar{N}}_{\text{eff}}$ , qui incorpore l'effet des pôles non compensés à la surface du réseau [Éq. (3.104)]. Nous avons ensuite établi le lien entre  $\bar{\bar{N}}_{\text{eff}}$  et le tenseur  $\bar{\bar{N}}_{\text{int}}$  introduit à la référence [61] pour tenir compte des interactions dipolaires interfils. Nous avons également démontré que pour de longs fils en régime monopolaire,  $\bar{\bar{N}}_{\text{eff}}$  devient rigoureusement équivalent au tenseur de désaimantation de forme  $\bar{\bar{N}}_d$  d'un disque magnétique homogène de dimensions identiques à celles du réseau. Enfin, nous avons mis en évidence les relations existant entre  $\bar{\bar{N}}_{\text{eff}}$  et différentes approches utilisées dans la littérature pour décrire la résonance ferromagnétique d'ensembles de nanoparticules dans la limite QS.



# CHAPITRE 4

## APPLICATION ET DISCUSSION DU MODÈLE

### 4.1 Introduction

Les deux chapitres précédents nous ont permis d'établir l'approche théorique sur laquelle s'appuie la thèse, puis de l'appliquer à la détermination des propriétés électromagnétiques effectives dans les hyperfréquences de réseaux de fils ferromagnétiques aimantés axialement et excités dans la configuration TM. Dans ce chapitre, nous allons discuter la solution générale établie au chapitre 3, dans le but d'en préciser les implications et les limites. Nous allons clarifier l'impact des paramètres géométriques, de la gyrotropie et du retard électromagnétique sur  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  et  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$ , en portant une attention particulière aux conditions pour lesquelles les réseaux de fils ferromagnétiques présentent des fonctions de réponse intéressantes dans les hyperfréquences.

Pour ce faire, nous appliquerons les résultats théoriques prédits par notre modèle à un réseau de fils métalliques et ferromagnétiques de nickel (Ni), caractérisés par les propriétés intrinsèques représentatives données au tableau 4.1. À moins d'indications contraires, ces paramètres seront utilisés dans le calcul de toutes les courbes présentées dans le cadre de ce chapitre. Nous indiquons également les propriétés du grenat d'yttrium et de fer (YIG, pour *yttrium iron garnet*), un matériau ferrimagnétique isolant, qui sera considéré en 4.2.2 dans le but de comparer la réponse gyromagnétique de fils individuels conducteurs (Ni) et diélectriques (YIG).

Tableau 4.1 Propriétés intrinsèques des fils de Ni et de YIG considérés dans les calculs théoriques.

Propriété	Symbole (unités)	Matériau	
		Ni	YIG
Aimantation spontanée	$M_s$ (kA/m)	460	140
Facteur gyromagnétique	$g$	2,2	2
Constante de Gilbert	$\alpha$	0,03	0,005
Conductivité de Drude	$\sigma_w$ ( $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ )	$1,5 \times 10^7$	—
Permittivité intrinsèque relative	$\epsilon_w/\epsilon_0$	$i\sigma_w/\omega\epsilon_0$	$15(1 + 0,001i)$

La section 4.2 sera consacrée à l'analyse de la réponse magnétique. Nous étudierons d'abord l'influence de l'effet de peau sur la résonance, l'antirésonance et la largeur de la

courbe d'absorption de la susceptibilité externe  $\bar{\eta}_w$  d'un fil individuel de Ni. Nous comparerons ensuite la réponse du fil de Ni à celle d'un fil de YIG, dans le cas où la condition  $|k_w|a \approx 1$  est satisfaite pour les deux matériaux. Enfin, nous examinerons la réponse effective  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  d'un réseau de fils de Ni, notamment en vue de clarifier les conditions nécessaires à l'obtention d'une perméabilité effective substantielle et possiblement négative entre la résonance et l'antirésonance.

La permittivité effective  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  du réseau sera ensuite considérée à la section 4.3. D'une part, nous décrirons comment la forme spectrale de  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  est modifiée par la perméabilité intrinsèque des fils et les paramètres géométriques du réseau, lesquels vont contrôler l'effet de peau et la fréquence plasma effective  $\omega_{p,\text{eff}}$ . En particulier, nous établirons les critères qui mènent à une réponse magnétodiélectrique optimale dans les hyperfréquences, c'est-à-dire à la fois substantielle et accompagnée de faibles pertes. D'autre part, nous considérerons la réponse de réseaux de nanofils de longueur finie et décrirons une approche pour intégrer cet effet.

Finalement, à la section 4.4, nous combinerons les réponses magnétique et électrique effectives dans le but de décrire sommairement la propagation d'ondes électromagnétiques dans le réseau. Cette discussion va nous permettre de faire ressortir les caractéristiques des principaux régimes d'opération propres aux réseaux de fils ferromagnétiques conducteurs aimantés axialement et excités dans la configuration TM.

## 4.2 Réponse magnétique

### 4.2.1 Influence de l'effet de peau sur la réponse magnétique d'un fil individuel de nickel

L'effet de peau associé à la génération de courants de Foucault dans un matériau conducteur peut modifier de façon significative la dispersion et la dissipation de la réponse d'un fil ferromagnétique conducteur excité par un champ magnétique alternatif. Pour illustrer cet effet, considérons un fil de Ni de rayon  $a$ , placé dans le vide et amené à saturation par un champ magnétique statique axial  $\mathbf{H}_{\text{ext}0}$ . Le fil est également soumis à un champ magnétique dynamique transverse  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$  de fréquence  $\omega/2\pi = 24$  GHz, à laquelle la profondeur de pénétration non magnétique  $\delta_{w0}$  du Ni vaut  $0,84 \mu\text{m}$ . En configuration TM, le champ  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$  excite le fil dans le mode  $n = \pm 1$ , de sorte que la réponse de l'aimantation dynamique  $\langle \mathbf{m}_w \rangle = \bar{\eta}_w \mathbf{h}_{\text{loc}}$  du fil est décrite par les équations (3.12) et (3.13).

Expérimentalement, cette configuration peut être réalisée en plaçant le fil dans une cavité résonante, de manière à ce que l'axe du fil soit perpendiculaire au champ magnétique hyperfréquence d'un mode non perturbé de la cavité, puis en mesurant la puissance absorbée par le fil en balayant le champ magnétique statique appliqué [72, 73, 141]. En supposant que la

théorie des perturbations s'applique (voir par exemple la référence [142], chap. 6), le changement de fréquence de résonance complexe de la cavité est alors proportionnel à la composante diagonale  $\tilde{\eta}$  du tenseur de susceptibilité externe  $\tilde{\eta}_w$  (voir notamment la référence [26], p. 138). En particulier, la partie imaginaire de  $\tilde{\eta}$  reflète l'absorption d'énergie par le fil.

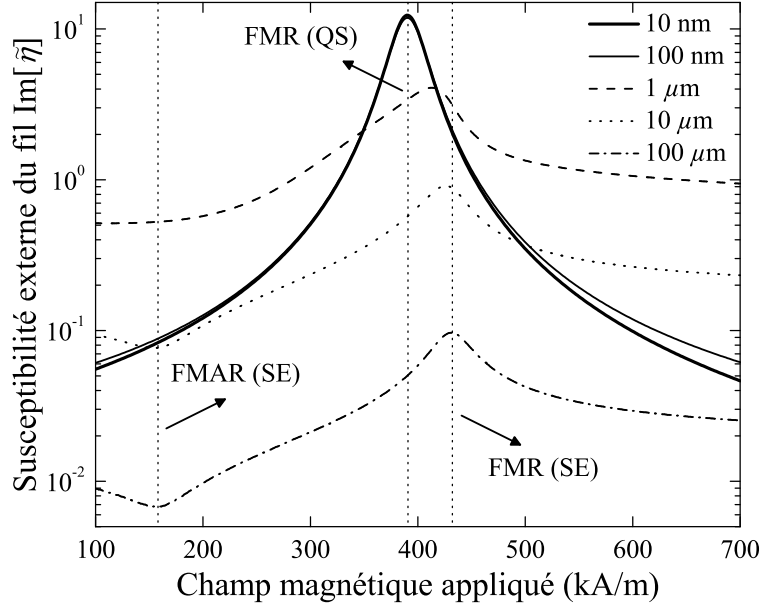


Figure 4.1 Partie imaginaire de la composante diagonale  $\tilde{\eta}$  du tenseur de susceptibilité externe du fil en fonction du champ magnétique appliqué, à 24 GHz, pour un fil individuel de Ni de rayon allant de 10 nm à 100  $\mu\text{m}$ . Les courbes sont obtenues à l'aide de l'équation (3.13a) en utilisant les paramètres du tableau 4.1. Les lignes verticales en trait pointillé indiquent les valeurs de champ qui satisfont la condition de résonance dans la limite QS [Éq. (3.30)] et les conditions de résonance et d'antirésonance dans la limite SE [Éqs. (3.44) et (3.45), respectivement].

La figure 4.1 montre la partie imaginaire de  $\tilde{\eta}$  calculée à l'aide de l'équation (3.13a) en fonction du champ magnétique statique externe (100–700 kA/m) pour un fil unique de Ni avec différentes valeurs de rayon allant de 10 nm à 100  $\mu\text{m}$ . Les spectres théoriques illustrent l'influence de l'effet de peau sur les conditions de résonance et d'antirésonance, de même que sur la largeur, la forme et l'amplitude de la courbe d'absorption (notons que l'échelle de  $\text{Im}[\tilde{\eta}]$  est logarithmique à la figure 4.1). Les caractéristiques générales de la réponse du fil sont également présentées à la figure 4.2, qui montre le comportement des principaux paramètres de résonance ferromagnétique en fonction du rayon normalisé  $a/\delta_{w0}$ , lequel s'étend sur cinq ordres de grandeur et couvre les limites d'effet de peau faible ( $a/\delta_{w0} \lesssim 0,1$ ) et dominant ( $a/\delta_{w0} \gtrsim 50$ ).

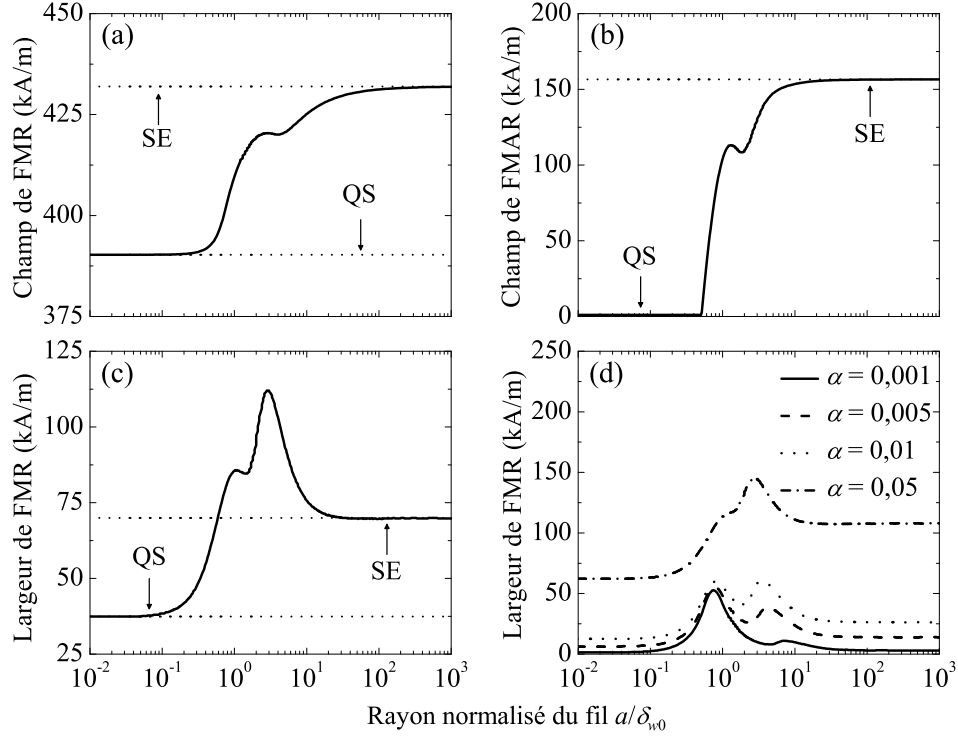


Figure 4.2 Comportement des paramètres de résonance ferromagnétique en fonction du rayon normalisé  $a/\delta_{w0}$  d'un fil de Ni à 24 GHz, où  $\delta_{w0} = 0,84 \mu\text{m}$ . (a) Champ de résonance, (b) champ d'antirésonance et (c) largeur de résonance. Les courbes sont extraites de l'expression de  $\tilde{\eta}$  calculées à l'aide de l'équation (3.13a) et des paramètres du tableau 4.1. Les valeurs indépendantes de la taille attendues dans les limites QS et SE sont indiquées par des lignes horizontales en trait pointillé. (d) Comme (c) mais pour différentes valeurs de la constante de Gilbert.

Dans la limite QS, le champ magnétique incident pénètre complètement à l'intérieur du fil et excite des oscillations uniformes de l'aimantation. La susceptibilité externe  $\tilde{\eta}$  se réduit alors à  $\eta$  [Éq. (3.29a)], de sorte que le champ de résonance satisfait l'équation (3.30) et qu'aucun minimum local dans l'absorption n'est observé au champ d'antirésonance. Dans cette limite, la largeur de résonance ne varie pas avec  $a/\delta_{w0}$  et augmente de façon linéaire avec la valeur de la constante d'amortissement  $\alpha$  de Gilbert, comme montré aux figures 4.2(c) et 4.2(d), respectivement.

En revanche, dans la limite SE, les courants de Foucault confinent les champs électromagnétiques à l'intérieur de la profondeur de peau  $\delta_w \ll a$ . La susceptibilité externe  $\tilde{\eta}$  se réduit à l'équation (3.42) et suit alors le comportement de l'impédance d'onde intrinsèque  $\zeta_w$  du fil [Éq. (3.43)], laquelle tient compte à la fois du caractère métallique et des propriétés gyromagnétiques du Ni. En particulier, les conditions de résonance et d'antirésonance satisfont

respectivement les équations (3.44) et (3.45), alors que l'absorption et la largeur de résonance sont contrôlées par la partie réelle de  $\zeta_w$

L'augmentation de  $a/\delta_{w0}$  dans le régime intermédiaire entre les limites QS et SE transforme progressivement le mode de résonance uniforme en un mode de surface, ce qui introduit une dépendance non triviale de la réponse du fil en fonction  $k_w a$  et modifie de façon importante la valeur des paramètres de résonance ferromagnétique. D'abord, la courbe d'absorption perd son profil lorentzien symétrique et voit son amplitude diminuer de façon importante (Fig. 4.1). Ensuite, la figure 4.2(a) montre que le champ de résonance augmente avec  $a/\delta_{w0}$ , passant de la valeur satisfaisant l'équation (3.30), pour le mode uniforme d'un cylindre aimanté axialement, à celle satisfaisant l'équation (3.44), pour la résonance parallèle d'un métal.

La figure 4.2(b) permet ensuite de constater qu'à partir de  $a/\delta_{w0} \approx 0,5$ , l'antirésonance apparaît comme un minimum local dans la courbe d'absorption. Le champ d'antirésonance augmente graduellement avec  $a/\delta_{w0}$  et atteint ultimement, dans la limite SE, la valeur du champ satisfaisant l'équation (3.45). De façon équivalente, la figure 4.1 montre que l'antirésonance devient clairement visible dans le spectre de susceptibilité externe à partir de  $a \geq 10 \mu\text{m}$ .

Enfin, les figures 4.2(c) et 4.2(d) indiquent que la largeur de résonance est maximale lorsque  $1 \lesssim a/\delta_{w0} \lesssim 10$ , en raison des pertes importantes causées par les courants de Foucault générés à l'intérieur de la profondeur de peau. En effet, cette contribution est beaucoup moins marquée dans les limites QS et SE. Dans le premier cas, le mécanisme d'amortissement est dominé par les pertes magnétiques intrinsèques, puisque l'écrantage par les courants de Foucault est négligeable. Dans le second cas, le champ incident ne pénètre pratiquement pas à l'intérieur du conducteur, de sorte que les courants de Foucault volumiques demeurent peu impliqués dans l'absorption de l'énergie électromagnétique [143].

Le comportement des paramètres de résonance ferromagnétique dans le régime de transition où  $1 \lesssim a/\delta_{w0} \lesssim 10$  peut être interprété en considérant que la susceptibilité externe  $\tilde{\eta}$  du fil devient alors une fonction complexe de  $k_w a$ , qui résulte du couplage entre un mode de volume uniforme et un mode de surface fortement non uniforme. En effet, en régime EQS, ces deux modes sont caractérisés par des paramètres de résonance ferromagnétique différents, mais par des contributions à la largeur de résonance interreliées et d'importance comparable. Par conséquent, les courbes de la figure 4.2 montrent certaines irrégularités dans le régime de transition, telles qu'une légère diminution dans le comportement autrement monotone croissant des champs de résonance et d'antirésonance et un double pic dans la largeur de résonance. Soulignons que la présence de plus d'un maximum dans la largeur de résonance a également été prédit à la référence [72]. Enfin, mentionnons que les valeurs exactes choisies

pour les propriétés intrinsèques du fil (c.-à-d.,  $M_s$ ,  $g$ ,  $\alpha$  et  $\sigma_w$ ) n'influencent toutefois pas de façon marquée la forme et les caractéristiques générales des spectres de susceptibilité externe montrés à la figure 4.1.

#### 4.2.2 Perméabilité renormalisée de fils magnétiques : comparaison entre conducteurs et isolants

Jusqu'à maintenant, nous avons mis l'emphasis sur la réponse de fils ferromagnétiques *conducteurs* et avons montré que le retard électromagnétique à l'intérieur des fils individuels, pris en compte par le paramètre  $k_w a$ , se manifeste principalement par l'effet de peau et les pertes par courants de Foucault qui y sont associées. Or, il est important de souligner que le formalisme développé dans le cadre de cette thèse est plus général et s'applique en fait à tout matériau décrit par le tenseur de perméabilité gyrotrope de l'équation (2.11), à la condition que sa permittivité  $\epsilon_w$  demeure isotrope et locale. En particulier, notre modèle permet de décrire la réponse électromagnétique de fils ferrimagnétiques *isolants*, tels que les ferrites et les grenats, qui possèdent une permittivité intrinsèque essentiellement réelle et non dispersive dans les hyperfréquences [144]. Pour ces matériaux,  $k_w a$  est principalement réel (sauf près de la résonance ferromagnétique), ce qui permet d'anticiper que leur réponse en régime EQS puisse différer de celle des métaux ferromagnétiques, pour lesquels les parties réelle et imaginaire de  $k_w a$  sont d'importance comparable.

Dans cette section, nous allons examiner l'influence de la permittivité intrinsèque  $\epsilon_w$  sur la réponse gyromagnétique en régime EQS d'un fil individuel, en comparant la composante de perméabilité renormalisée  $\tilde{\mu}_\perp = \mu_\perp G(k_w a)$  [Éq. (3.10)] du Ni et du YIG. En effet, ces deux matériaux sont dotés de propriétés magnétiques intrinsèques similaires, mais de comportements électriques diamétralement opposés. Nous verrons notamment que dans le cas du YIG, la perméabilité renormalisée  $\tilde{\mu}_\perp$  présente un comportement résonant quasi périodique en fonction de  $k_w a$ , qui tire son origine dans l'excitation de résonances internes de type Mie lorsque  $|k_w| a \gtrsim 1$  [80]. Ce comportement se distingue de celui d'un fil conducteur, pour lequel l'effet de peau domine et la perméabilité renormalisée  $\tilde{\mu}_\perp$  présente les caractéristiques d'une relaxation.

Nous considérons un fil ferromagnétique conducteur de Ni ( $a = 2 \mu\text{m}$ ) et un fil ferrimagnétique isolant de YIG ( $a = 2 \text{ mm}$ ), dont les propriétés intrinsèques sont données au tableau 4.1. Pour les deux matériaux, la valeur du rayon  $a$  a été choisie de façon à ce que la fréquence à laquelle  $|k_w| a \approx 1$  soit près de la fréquence de résonance ferromagnétique de  $\mu_\perp$  donnée à l'équation (3.44). Dans ces conditions, les réponse gyromagnétique et dépendant de  $k_w a$  sont fortement couplées, de sorte que la perméabilité renormalisée  $\tilde{\mu}_\perp = \mu_\perp G(k_w a)$  [Éq. (3.10)] est modifiée de façon significative par rapport à sa valeur intrinsèque  $\mu_\perp$ .

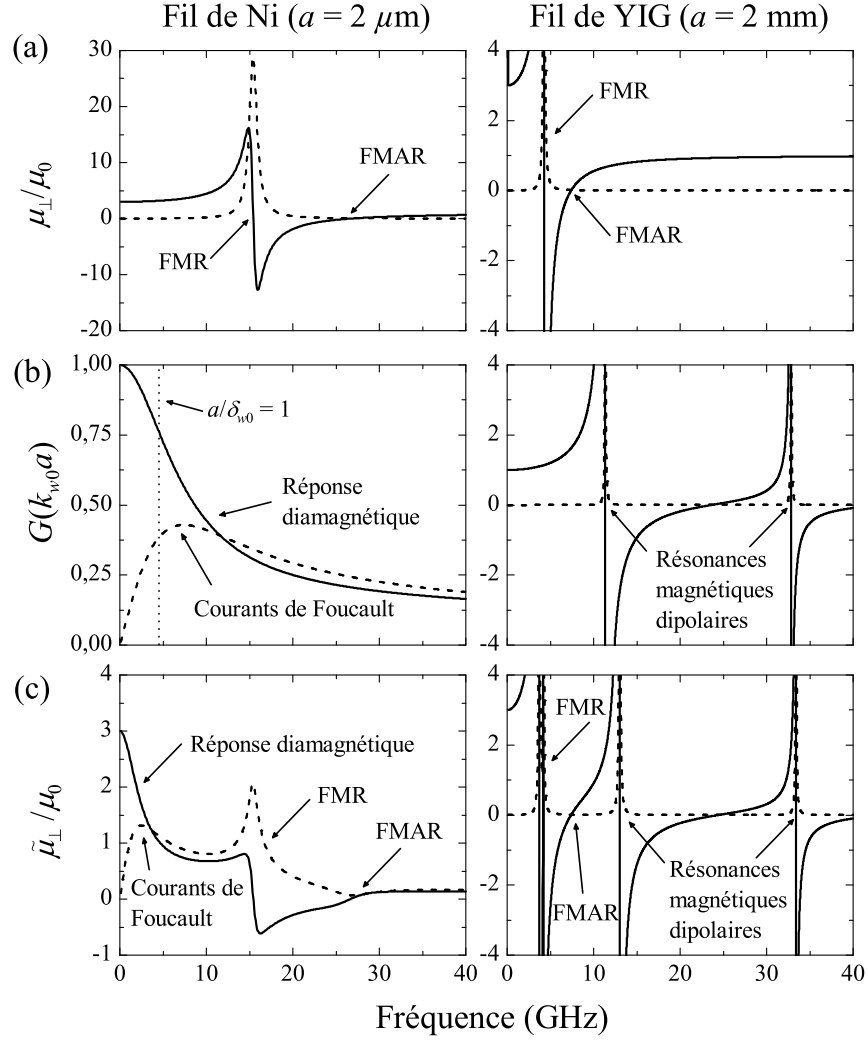


Figure 4.3 Comportement en fréquence de trois fonctions de réponse magnétiques d'un fil unique de Ni ( $a = 2 \mu\text{m}$ , colonne de gauche) et d'un fil unique de YIG ( $a = 2 \text{ mm}$ , colonne de droite), dont les propriétés intrinsèques sont données au tableau 4.1. (a) Composante de perméabilité intrinsèque relative  $\mu_{\perp}/\mu_0$  pour un fil saturé par un champ magnétique statique axial  $H_{\text{ext}0} = \frac{1}{2}M_s$ . (b) Composante de perméabilité renormalisée relative  $\tilde{\mu}_{\perp}/\mu_0 = G(k_{w0}a)$  pour un fil à l'état non magnétique, soumis à un champ magnétique statique « infini ». (c) Composante de perméabilité renormalisée relative  $\tilde{\mu}_{\perp}/\mu_0$  pour un fil saturé par un champ magnétique statique axial  $H_{\text{ext}0} = \frac{1}{2}M_s$ . Les parties réelle et imaginaire sont dénotées par des courbes continues et tiretées, respectivement.

La figure 4.3 compare les spectres (1–40 GHz) de trois fonctions de réponse magnétiques d'un fil unique de Ni (colonne de gauche) et d'un fil unique de YIG (colonne de droite). Pour chaque spectre, les parties réelle et imaginaire sont dénotées par des courbes continues et tiretées, respectivement. D'abord, la figure 4.3(a) montre la perméabilité intrinsèque relative  $\mu_{\perp}/\mu_0$  calculée à partir de l'équation (2.34) avec  $H_{\text{ext}0} = \frac{1}{2}M_s$ . Ensuite, les figures 4.3(b)



et 4.3(c) étudient la perméabilité renormalisée relative  $\tilde{\mu}_\perp/\mu_0$  du Ni et du YIG pour deux régimes : non magnétique et saturé.

D'une part, la figure 4.3(b) considère la réponse d'un fil unique soumis à un champ magnétique appliqué  $H_{\text{ext}0}$  « infini ». Dans ce cas, la perméabilité gyrotrope intrinsèque  $\bar{\mu}_w$  se réduit à  $\mu_0$ , de sorte que les fils de Ni et de YIG se comportent effectivement comme des matériaux non magnétiques.<sup>1</sup> Cette limite vise à examiner uniquement l'influence de la permittivité intrinsèque  $\epsilon_w$  des fils de Ni et de YIG sur leur perméabilité renormalisée  $\tilde{\mu}_\perp$ , laquelle devient alors égale  $\tilde{\mu}_\perp = \mu_0 G(k_{w0}a)$ , où  $k_{w0} = \omega\sqrt{\epsilon_w\mu_0}$  est un vecteur d'onde non magnétique dépendant de  $\epsilon_w$ . Dans ce contexte, le facteur de renormalisation  $G(k_{w0}a) = \tilde{\mu}_\perp/\mu_0$  montré à la figure 4.3(b) correspond alors à la perméabilité renormalisée relative des fils à l'état non magnétique.

D'autre part, la figure 4.3(c) montre la perméabilité renormalisée relative  $\tilde{\mu}_\perp$  pour le cas de fils saturés selon leur axe par un champ magnétique  $H_{\text{ext}0} = \frac{1}{2}M_s$ . Les courbes résultantes permettent de comparer l'effet combiné des propriétés intrinsèques  $\epsilon_w$  et  $\bar{\mu}_w$  sur la réponse magnétique renormalisée (régime EQS) d'un fil de Ni et d'un fil de YIG.

Procédons maintenant à l'analyse détaillée des spectres de la figure 4.3. D'abord, la figure 4.3(a) montre que les réponses magnétiques intrinsèques du Ni et du YIG possèdent toutes deux un profil lorentzien, dont la position, la largeur et l'amplitude sont déterminées uniquement par leurs propriétés magnétiques respectives ( $M_s$ ,  $g$  et  $\alpha$ ) et par la valeur du champ appliqué  $H_{\text{ext}0}$ . Notons que dans la limite statique ( $\omega \rightarrow 0$ ), nous trouvons que  $\mu_\perp/\mu_0 \approx 1 + M_s/H_{\text{ext}0} = 3$  à la fois pour le Ni et le YIG. Ce dernier résultat peut être déduit en posant  $\omega = 0$  et  $\omega_H = \omega_0 = \frac{1}{2}\omega_M$  dans l'équation (2.34).

En revanche, bien que la dispersion de  $\mu_\perp$  soit la même pour les deux matériaux, la figure 4.3(b) montre que les spectres de la perméabilité renormalisée relative à l'état non magnétique,  $G(k_{w0}a)$ , diffèrent de façon importante. Dans la colonne de gauche, nous constatons que la réponse du fil de Ni possède la forme d'une relaxation centrée en  $a/\delta_{w0} \approx 1$  (la condition  $a/\delta_{w0} = 1$  est indiquée par une ligne verticale en trait pointillé). Dans le régime de transition où  $a/\delta_{w0} \approx 1$ , l'effet d'écrantage des courants de Foucault mène à une décroissance monotone de la partie réelle de  $G(k_{w0}a)$ , laquelle passe alors de 1 lorsque  $a/\delta_{w0} \ll 1$  (comportement non magnétique) à 0 lorsque  $a/\delta_{w0} \gg 1$  (comportement supraconducteur). De même, l'amortissement causé par les courants de Foucault est décrit par la partie imaginaire de  $G(k_{w0}a)$ , laquelle s'annule en  $\omega = 0$ , augmente proportionnellement à  $(a/\delta_{w0})^2 \propto \omega$  lorsque  $a/\delta_{w0} \ll 1$ , atteint un maximum en  $a/\delta_{w0} \approx 1$ , puis décroît proportionnellement à  $(a/\delta_{w0})^{-1} \propto \omega^{-1/2}$  lorsque  $a/\delta_{w0} \gg 1$ , comme décrit notamment à la référence [71], p. 192.

---

1. En effet, lorsque  $\omega_0 = \mu_0 |\gamma| H_{\text{ext}0} \gg \omega, \omega_M$ , les équations (2.12a) et (2.12b) pour les composantes  $\mu$  et  $\mu_t$  de  $\bar{\mu}_w$  se réduisent respectivement à  $\mu \approx \mu_0$  et  $\mu_t \approx \mu_0 (\omega_M \omega / \omega_0^2) \ll \mu_0$ , de sorte que  $\bar{\mu}_w \rightarrow \mu_0$  et que le fil peut être assimilé à matériau non magnétique.



Dans la colonne de droite, la réponse magnétique renormalisée  $G(k_{w0}a)$  du fil de YIG présente un caractère multirésonant, attribuable à l'excitation de résonances magnétiques dipolaires de type Mie à l'intérieur du fil cylindrique [25, 80]. Les fréquences de résonance correspondent aux pôles de  $G(k_{w0}a)$ , lesquels satisfont la condition  $k_{w0}aJ_0(k_{w0}a) = J_1(k_{w0}a)$  [voir l'équation (3.8)] et, par conséquent, suivent le caractère oscillatoire quasi périodique des fonctions de Bessel. Ces résonances dimensionnelles s'accompagnent d'un maximum de la partie imaginaire de  $G(k_{w0}a)$  et d'un changement de signe de sa partie réelle, laquelle devient donc négative sur un petit intervalle du côté à haute fréquence de chaque pôle. Il convient également de souligner la nature dipolaire de ces résonances (c.-à-d., sous-longueur d'onde), puisqu'elles surviennent pour  $|k_{w0}|a \gtrsim 1$ , mais lorsque  $|k_m|a$  est inférieur à 1.

L'amplitude et la largeur des pics d'absorption sont déterminées par les pertes diélectriques, de sorte qu'une augmentation de  $\text{Im}[\epsilon_w]$  tend à amortir le caractère résonant de  $G(k_{w0}a)$  et ultimement, à restreindre  $\text{Re}[G(k_{w0}a)]$  à des valeurs positives. De plus, lorsque la condition  $|\text{Im}[\epsilon_w]| \gg |\text{Re}[\epsilon_w]|$  est atteinte, le spectre de  $G(k_{w0}a)$  se transforme alors en celui d'un fil conducteur, qui ne montre pas de résonance autour  $a/\delta_{w0} \approx 1$ , mais plutôt une relaxation, comme pour le fil de Ni [Fig. 4.3(b), colonne de gauche]. Enfin, soulignons que les spectres montrés à la figure 4.3(b) indiquent qu'en régime EQS, un fil conducteur ou isolant peut présenter une réponse magnétique renormalisée  $\tilde{\mu}_\perp$  dispersive et complexe, même si sa perméabilité intrinsèque est égale à  $\mu_0$ .

Comme attendu, ces caractéristiques dépendant de  $\epsilon_w$  se retrouvent également dans la réponse gyromagnétique renormalisée montrée à la figure 4.3(c). Dans la colonne de gauche, la réponse intrinsèque du Ni demeure apparente dans la perméabilité renormalisée, même si l'effet de peau modifie de façon significative la forme spectrale de  $\tilde{\mu}_\perp/\mu_0$  par rapport à celle de  $\mu_\perp/\mu_0$ . D'une part, la réponse diamagnétique réduit la partie réelle de  $\tilde{\mu}_\perp/\mu_0$  considérablement lorsque la fréquence augmente, de sorte que celle-ci demeure toujours inférieure à 1 (même à la résonance ferromagnétique) et décroît vers 0 à hautes fréquences. D'autre part, les pertes attribuables aux courants de Foucault mènent à un pic additionnel dans la partie imaginaire de  $\tilde{\mu}_\perp/\mu_0$  autour de  $a/\delta_{w0} \approx 1$ , ainsi qu'à une diminution de l'amplitude et à un élargissement du pic de résonance ferromagnétique.

En revanche, dans la colonne de droite, la perméabilité renormalisée du fil de YIG consiste essentiellement en la superposition de sa réponse gyromagnétique intrinsèque et d'une série de résonances magnétiques dipolaires, lesquelles correspondent aux pôles de  $G(k_wa)$  et apparaissent aux fréquences satisfaisant la condition  $k_waJ_0(k_wa) = J_1(k_wa)$ . Dans ce contexte, la réponse du fil de YIG présente plusieurs régions de perméabilité renormalisée négative, dont les positions spectrales peuvent être ajustées, dans une certaine mesure, par l'application d'un champ magnétique statique.

Il convient de souligner que la réponse multirésonante de la perméabilité renormalisée  $\tilde{\mu}_\perp$  d'un fil unique de YIG va se répercuter sur sa susceptibilité externe  $\bar{\eta}_w$ , puis sur la perméabilité effective  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  d'un réseau formé d'un ensemble de tels fils. Dans ce contexte, les références [33, 34] ont modélisé la perméabilité<sup>2</sup> et la permittivité<sup>3</sup> effectives en régime EQS d'un réseau de fils ferrimagnétiques de YIG. Ils ont proposé que ce système pourrait présenter, dans les hyperfréquences, un indice de réfraction négatif et ajustable par l'application d'un champ magnétique statique.

Par rapport à ces travaux, il est toutefois important d'insister sur le fait que l'excitation de résonances de type Mie dans l'intervalle de fréquences où la perméabilité intrinsèque  $\bar{\mu}_w$  possède un caractère résonant nécessite que la condition  $|k_w| a \approx 1$  soit satisfaite dans les hyperfréquences (c.-à-d., près de la résonance ferromagnétique des fils). Or, pour des matériaux ferrimagnétiques typiques, ceci requiert des valeurs pour  $a$  (et donc pour  $D$ ) relativement importantes (c.-à-d.,  $a$  et  $D \gtrsim 1$  mm), puisque l'amplitude  $|k_w|$  du vecteur d'onde dans le YIG n'est pas beaucoup plus élevée que sa valeur  $|k_m|$  dans la matrice (même en supposant que  $\epsilon_m = \epsilon_0$  et  $\mu_m = \mu_0$ ). Il en résulte que pour des réseaux de fils ferrimagnétiques, les conditions d'homogénéisation  $|k_m| a \ll 1$  et  $|k_m| D \ll 1$  pourraient n'être que faiblement ou pas du tout satisfaites lorsque  $|k_w| a \approx 1$ .<sup>4</sup> En revanche, comme nous allons le voir en 4.2.3, l'utilisation de fils ferromagnétiques conducteurs de dimensions sous-microniques assure que les conditions d'homogénéisation sont remplies, tout en minimisant les pertes par courants de Foucault.

En terminant, les résultats de cette section indiquent que l'obtention de métamatériaux basés sur l'excitation de résonances de type Mie à l'intérieur d'inclusions diélectriques requiert que les conditions  $|k_m| a \ll 1$  et  $|k_m| D \ll 1$  soient simultanément satisfaites lorsque  $|k_w| a \approx 1$ . Cette contrainte nécessite alors de recourir à des inclusions constituées de matériaux à indice de réfraction élevé et essentiellement réel, de manière à s'assurer que  $|k_w| \gg |k_m|$ . Dans ce contexte, mentionnons que plusieurs groupes [15–24] ont récemment modélisé la réponse électromagnétique effective d'ensembles d'inclusions diélectriques de permittivité élevée. En

---

2. Comme discuté en 3.2.3, l'expression pour la perméabilité effective présentée aux références [33, 34] s'applique pour un réseau non borné et correspond à notre relation pour  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}$  donnée à l'équation (3.24). Notons également que les auteurs des références [33, 34] ne considèrent pas les interactions dipolaires interfils statiques, c'est-à-dire qu'ils posent  $\omega_H = \omega_0$  plutôt que  $\omega_H = \omega_0 - f\omega_M$  (en régime monopolaire, voir la section 3.4).

3. L'expression pour la permittivité effective développée aux références [33, 34] correspond, dans notre notation, à  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}} = (1 - f)\epsilon_m + f\tilde{\epsilon}_{w,F}$ . Par conséquent, ce résultat néglige la contribution à la permittivité effective due à l'impédance externe des fils  $Z_L = -i(a/\delta_{w0})^2 \ln(\frac{b}{a})$  [Éq. (3.79)], ce qui est équivalent à supposer que  $K(k_w a) \approx (Z_w/R_{\text{dc}})^{-1} = 2F(k_w a)$ .

4. En effet, à la figure 4.3(c) (colonne de droite), les conditions  $|k_w| a = 1$  et  $|k_m| a = 1$  sont atteintes autour de 9 et 24 GHz, respectivement, ce qui nous apparaît trop rapproché pour assurer une bonne homogénéité à de tels composites.

particulier, ces études ont proposé d'utiliser de tels systèmes pour obtenir des métamatériaux à indice de réfraction négatif, c'est-à-dire caractérisés par une permittivité et une perméabilité effectives simultanément négatives sur une même gamme de fréquences.

### 4.2.3 Réseaux de fils et perméabilité négative

En plus des restrictions imposées par le retard électromagnétique à l'intérieur des fils individuels, la réponse magnétique d'un ensemble de fils en interaction est également réduite par l'effet de la dilution des fils dans la matrice hôte, ce qui peut, par exemple, restreindre la partie réelle de la perméabilité effective à des valeurs positives. L'étude de cette question, qui s'avère essentielle au développement de métamatériaux dotés de fonctions de réponse négatives, sera maintenant abordée ici.

Considérons un réseau saturé de fils de Ni aimantés axialement et caractérisés par les propriétés données au tableau 4.1, qui remplissent les pores d'une matrice diélectrique de permittivité  $\epsilon_m = 10\epsilon_0$ , de perméabilité  $\mu_m = \mu_0$  et d'étendue latérale infinie. Les fils occupent une fraction  $f = 0,20$  du réseau et sont soumis à un champ magnétique statique axial  $H_{\text{ext}0} = \frac{1}{2}M_s$ . Le champ statique effectif  $H_{w0}$  à l'intérieur des fils inclut une contribution additionnelle due au champ d'interaction dipolaire interfil, de sorte qu'en régime monopolaire, nous avons  $H_{w0} = H_{\text{ext}0} - fM_s$  et donc  $\omega_H = \omega_0 - f\omega_M$ , comme en 3.4.3.

Nous supposons qu'une onde se propage dans le plan du réseau avec des champs électrique et magnétique respectivement parallèle et perpendiculaire à l'axe des fils (configuration TM). Dans le cas d'un réseau infini, ce mode est caractérisé par la perméabilité effective scalaire  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}$  donnée à l'équation (3.24), où les composantes  $\tilde{\eta}$  et  $\tilde{\eta}_t$  sont calculées à l'aide de l'équation (3.13). Nous devons insister ici sur le fait que l'utilisation de  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}$  n'est rigoureusement valide que dans le cas de réseaux *non bornés*. En effet, lorsque des ondes *guidées* se propagent dans une structure de taille finie (p. ex., une ligne de transmission),  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}$  ne représente pas nécessairement la perméabilité caractéristique qui détermine la constante de propagation du système. Par conséquent, la forme tensorielle complète de la perméabilité effective  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$ , prise en compte aux équations (3.22) et (3.23), est en général requise [134].<sup>5</sup> De plus, même lorsque le réseau peut être considéré infini, la composante  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}$  ne s'applique que pour le mode où  $\mathbf{k}_{\text{eff}} \perp \langle \mathbf{M}_0 \rangle$ , de sorte que les expressions explicites pour les composantes diagonales et hors diagonales de  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  s'avèrent également nécessaires pour étudier d'autres configurations de propagation.

---

5. Par exemple, au chapitre 5, nous verrons que pour un réseau de nanofils aimantés axialement placé en configuration de ligne microruban, la propagation d'ondes dans le plan de la structure est régie, dans la limite QS, par la composante diagonale  $\mu_{\text{eff}}$  de  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  plutôt que par la composante  $\mu_{\text{eff}\perp}$ , laquelle s'appliquerait pour ce mode si le réseau était effectivement non borné. Pour plus de détails, le lecteur pourra également consulter nos travaux aux références [43, 67, 68].

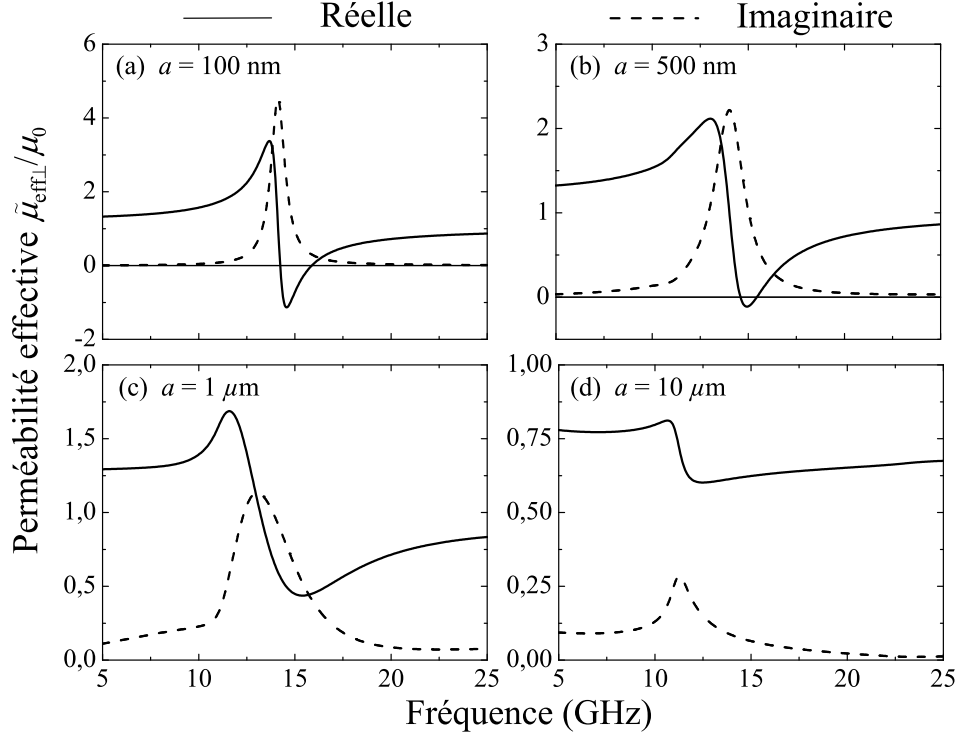


Figure 4.4 Parties réelle et imaginaire de la composante de perméabilité effective relative  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}/\mu_0$  en fonction de la fréquence pour un réseau de fils de Ni de rayon (a) 100 nm, (b) 500 nm, (c) 1  $\mu\text{m}$  et (d) 10  $\mu\text{m}$ . Les spectres sont calculés à l'aide de l'équation (3.24) avec  $H_{\text{ext}0} = \frac{1}{2}M_s$ ,  $f = 0,20$  et les paramètres donnés au tableau 4.1. Les parties réelle et imaginaire sont dénotées par des courbes continues et tiretées, respectivement.

La dépendance en fréquence des parties réelle et imaginaire de  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}/\mu_0$  est montrée à la figure 4.4 pour un réseau de fils de Ni de différents rayons. À la figure 4.4(a),  $a = 100$  nm et l'approximation QS est valide, de sorte que  $\tilde{\eta} \approx \eta$  et  $\tilde{\eta}_t \approx \eta_t$  satisfont l'équation (3.29). Dans ce cas,  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}$  se réduit à  $\mu_{\text{eff}\perp}$  et possède un profil lorentzien, caractérisé par des fréquences de résonance et d'antirésonance entre lesquelles la partie réelle de  $\mu_{\text{eff}\perp}$  devient négative. Lorsque la taille des fils augmente [Figs. 4.4(b) à 4.4(d)], la limite QS ne tient plus et les expressions générales pour  $\tilde{\eta}$  et  $\tilde{\eta}_t$  doivent être utilisées [Éq. (3.13)]. Il en résulte que la fréquence de résonance de  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}$  diminue graduellement, alors que la courbe d'absorption, décrite par  $\text{Im}[\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}]$ , s'élargit, décroît en amplitude et devient asymétrique. Dans ce régime, les paramètres de résonance ferromagnétique de  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}$  dépendent de façon non triviale des propriétés intrinsèques des fils, de la géométrie du réseau, du paramètre  $k_w a$  et du champ magnétique statique. Enfin, au-delà d'une certaine taille de fils, qui correspondrait à  $a \gtrsim 50$   $\mu\text{m}$  dans le cas étudié, le régime d'effet de peau dominant est atteint. Les fils présentent alors un comportement diamagnétique presque parfait (c.-à-d.,  $\tilde{\eta} \approx -2$  et  $\tilde{\eta}_t \approx 0$ ), de sorte

que  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp} \approx \tilde{\mu}_{\text{eff}} \approx \mu_0 (1 - f) / (1 + f) \approx 0,67$  [Éq. (3.48)], qui dépend uniquement de  $f$ . En régime SE, soulignons que la décroissance de  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}$  en fonction de  $f$  reflète le fait que l'induction magnétique devient alors presque nulle à l'intérieur des fils.

Les spectres montrés à la figure 4.4 indiquent également qu'il existe un rayon critique pour les fils (entre 500 nm et 1  $\mu\text{m}$  dans le cas étudié ici), au-delà duquel l'amortissement effectif agissant sur les fils devient suffisamment important pour empêcher la partie réelle de  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}$  de devenir négative entre ses fréquences de résonance et d'antirésonance. Le passage en régime EQS, qui survient lorsque  $a/\delta_{w0} \approx 1$ , a donc deux conséquences importantes sur la réponse magnétique effective du réseau. D'une part, l'hypothèse d'un mode de précession uniforme à l'intérieur des fils devient invalide et, d'autre part, la perméabilité effective est éventuellement restreinte à des valeurs positives et ce, indépendamment de la valeur du paramètre d'amortissement magnétique  $\alpha$ .

Dans ce contexte, soulignons que plusieurs groupes [50–55] ont exploré la possibilité théorique d'obtenir un indice de réfraction négatif à partir de réseaux de fils ferromagnétiques conducteurs de rayon  $a \gtrsim 1 \mu\text{m}$ . Cependant, toutes ces études ont modélisé les propriétés électromagnétiques effectives des réseaux en supposant un mode de précession uniforme de l'aimantation des fils, malgré le fait que la condition  $a/\delta_{w0} \gtrsim 1$  s'appliquent pour toutes les tailles de fils considérées dans ces travaux. Or, l'examen des spectres de la figure 4.4 montre qu'une telle approche est injustifiée. En particulier, le recours à l'approximation QS pour décrire la réponse magnétique de réseaux de fils de rayon  $a \gtrsim 1 \mu\text{m}$  mène à une perméabilité effective dotée d'un profil lorentzien similaire à celui de la figure 4.4(a) (c.-à-d., avec un intervalle avec  $\text{Re}[\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}] < 0$ ), ce qui nous semble erroné. En revanche, lorsque le retard électromagnétique à l'intérieur des fils est pris en compte de façon explicite, la perméabilité effective du réseau s'apparentera plutôt à celle de la figure 4.4(d) et ne montrera pas de région où  $\text{Re}[\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}] < 0$ .

Sur la base de ces considérations, il est alors possible, lorsque la valeur de  $a/\delta_{w0}$  n'empêche pas *a priori* d'obtenir un intervalle de perméabilité effective négative, de déterminer la valeur critique  $\tilde{\alpha}_c$  du paramètre d'amortissement  $\alpha$  au-delà de laquelle la partie réelle de  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}$  demeure toujours positive. Dans ce contexte, la figure 4.5 montre la dépendance de  $\tilde{\alpha}_c$  en fonction de  $a/\delta_{w0}$  pour un réseau de fils de Ni avec les paramètres du tableau 4.1 et  $\delta_{w0} = 0,84 \mu\text{m}$  (profondeur de peau du Ni à 24 GHz). Pour ces courbes, la valeur du paramètre critique a été extraite de spectres de  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}$  calculés à l'aide de l'équation (3.24).

À la figure 4.5(a),  $H_{\text{ext}0}/M_s = 0,50$  et la fraction  $f$  s'étend entre 0,05 et 0,40, alors qu'à la figure 4.5(b),  $f = 0,20$  et  $H_{\text{ext}0}/M_s$  s'étend de 0,25 à 1,00. Ces résultats indiquent que la valeur de  $\tilde{\alpha}_c$  augmente lorsque  $f$  augmente ou que  $H_{\text{ext}0}/M_s$  diminue, de sorte que l'obtention d'un intervalle de perméabilité effective négative est favorisé dans le cas de réseaux denses,

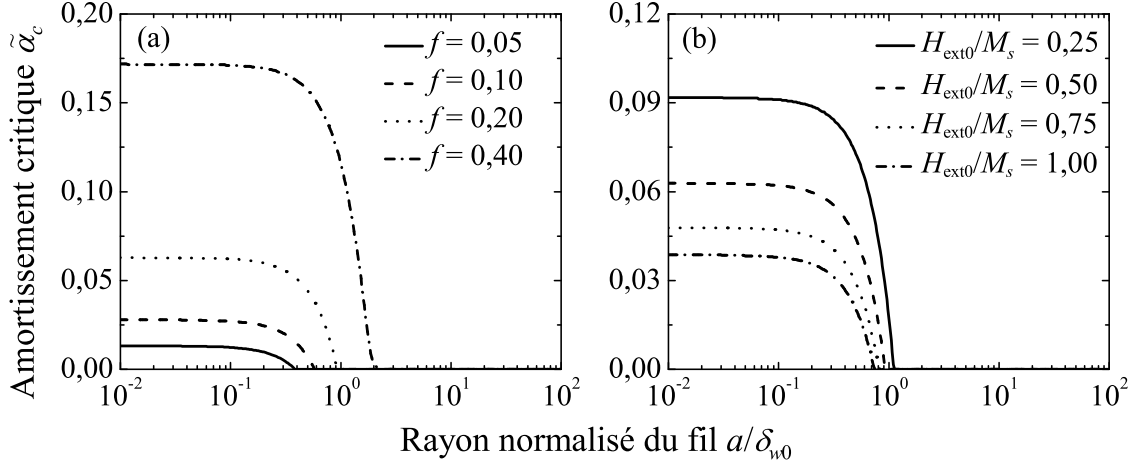


Figure 4.5 Paramètre d'amortissement critique  $\tilde{\alpha}_c$  d'un réseau de fils de Ni en fonction du rayon normalisé  $a/\delta_{w0}$ . (a)  $H_{\text{ext}0}/M_s = 0,50$  avec  $f$  allant de 0,05 à 0,40. (b)  $f = 0,20$  avec  $H_{\text{ext}0}/M_s$  allant de 0,25 à 1,00. Les paramètres intrinsèques des fils de Ni sont donnés au tableau 4.1 et  $\delta_{w0}$  désigne la profondeur de pénétration non magnétique du Ni à 24 GHz, c'est-à-dire  $\delta_{w0} = 0,84 \mu\text{m}$ . L'amortissement critique  $\tilde{\alpha}_c$  correspond à la valeur maximale de  $\alpha$  qui permet à la partie réelle de  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}$  de devenir négative entre ses fréquences de résonance et d'antirésonance.

soumis à de faibles champs magnétiques statiques. Enfin, comme discuté précédemment, la perméabilité effective ne devient jamais négative lorsque  $a/\delta_{w0} \gtrsim 1$  et ce, même dans le cas hypothétique d'un réseau de fils sans pertes magnétiques intrinsèques (c.-à-d., avec  $\alpha = 0$ ).

Il ne semble pas possible d'établir une expression analytique générale pour le paramètre d'amortissement critique  $\tilde{\alpha}_c$  qui soit valide dans tout le régime EQS. Toutefois, dans la limite QS, le paramètre critique  $\tilde{\alpha}_c$  se réduit à  $\alpha_c$  et nous pouvons alors montrer que (voir l'annexe C)

$$\alpha_c = \alpha_{c0} - \sqrt{\alpha_{c0}^2 - 1}, \quad (4.1)$$

où

$$\alpha_{c0} = \frac{2}{f} \left[ \frac{H_{\text{ext}0}}{M_s} + \frac{(1 - 2f)}{2} \right]. \quad (4.2)$$

Ce résultat montre que dans l'approximation QS, la valeur du paramètre d'amortissement critique  $\alpha_c$  est fixée uniquement par  $f$  et la valeur du rapport  $H_{\text{ext}0}/M_s$ . En particulier,  $\alpha_c$  est indépendant du rayon normalisé  $a/\delta_{w0}$  et correspond à la portion horizontale des courbes montrées à la figure 4.5.

Le paramètre  $\alpha_c$  représente ainsi la valeur maximale du paramètre de Gilbert permettant d'obtenir, dans la limite QS, une région de perméabilité effective négative à l'aide de réseaux

non bornés de fils ferromagnétiques. Par exemple, pour un réseau dense de nanofils avec  $f = 0,30$  et soumis à un champ magnétique statique relativement faible ( $H_{\text{ext}0}/M_s = 0,25$ ), nous trouvons que  $\alpha_c \approx 0,17$ . Or, cette valeur est supérieure aux valeurs typiques pour  $\alpha$  attendues dans le cas de métaux ferromagnétiques, c'est-à-dire avec  $\alpha$  allant de 0,001 à 0,05 (voir par exemple la référence [26], p. 381). Par conséquent, ce résultat indique que des réseaux de nanofils dotés de paramètres physiques réalistes pourraient, en théorie, montrer une réponse magnétique négative entre les fréquences de résonance et d'antirésonance de leur perméabilité effective.

Toutefois, pour des réseaux réels, le paramètre d'amortissement effectif qui décrit l'élargissement de la résonance de la perméabilité effective est affecté non seulement par les pertes magnétiques intrinsèques et celles dues aux courants de Foucault, mais également par des contributions dites inhomogènes et liées, par exemple, à la variance statistique des paramètres géométriques du réseau, de même qu'à la rugosité de surface et à la nature granulaire des fils individuels. Dans ce contexte, il est possible qu'il faille ajouter un terme d'amortissement de type Bloch–Bloembergen (c.-à-d., un temps de relaxation, voir notamment la référence [26], p. 18) à l'équation du mouvement de l'aimantation [Éq. (2.7)] pour incorporer ces différents mécanismes de pertes.

En terminant, cette section a permis de montrer que l'obtention d'une réponse magnétique substantielle dans les hyperfréquences à partir de réseaux de fils ferromagnétiques conducteurs requiert, d'une part, que l'effet de peau soit négligeable ou faible et, d'autre part, que le réseau ne soit pas trop dilué. Ces conditions sont notamment remplies dans le cas de réseaux de nanofils relativement denses, c'est-à-dire avec  $f \gtrsim 0,1$ . En revanche, lorsque le retard électromagnétique commence à se manifester dans la réponse des fils ou que ceux-ci sont trop dilués dans la matrice, le modèle prédit que la perméabilité effective du réseau tend essentiellement vers une constante positive, inférieure ou égale à la perméabilité du vide  $\mu_0$ .

### 4.3 Réponse électrique

Nous allons maintenant considérer la réponse électrique effective d'un réseau de fils ferromagnétiques excités dans la configuration TM. Nous examinerons d'abord comment l'effet de peau et la position de la fréquence plasma  $\omega_{p,\text{eff}}$  modifient le spectre de permittivité effective  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$ . Nous porterons une attention particulière à la possibilité d'observer une réponse magnétodiélectrique significative dans les hyperfréquences, c'est-à-dire une influence de la perméabilité intrinsèque  $\bar{\mu}_w$  des fils (et donc du champ magnétique statique) sur la dispersion en fréquence de  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$ . Enfin, nous discuterons de l'effet de la longueur finie des fils sur la



permittivité de réseaux de nanofils ferromagnétiques, dans le cas où ceux-ci ne remplissent pas complètement les pores de la matrice diélectrique.

#### 4.3.1 Permittivité effective de réseaux denses

Nous allons d'abord étudier la permittivité effective de réseaux *denses* de fils ferromagnétiques excités dans la configuration TM. Comme en 4.2.3, nous considérons un réseau saturé et non borné de fils de Ni aimantés axialement et décrits par les propriétés intrinsèques données au tableau 4.1. Les fils sont incorporés dans les pores d'une matrice diélectrique caractérisée par  $\epsilon_m = 10\epsilon_0$ ,  $\mu_m = \mu_0$  et  $f = 0,20$ . Un champ magnétique statique  $H_{\text{ext}0} = \frac{1}{2}M_s$  est appliqué selon l'axe des fils, de sorte qu'en régime monopolaire, le champ interne vaut  $H_{w0} = H_{\text{ext}0} - fM_s$ , où  $-fM_s$  tient compte des interactions dipolaires interfils.

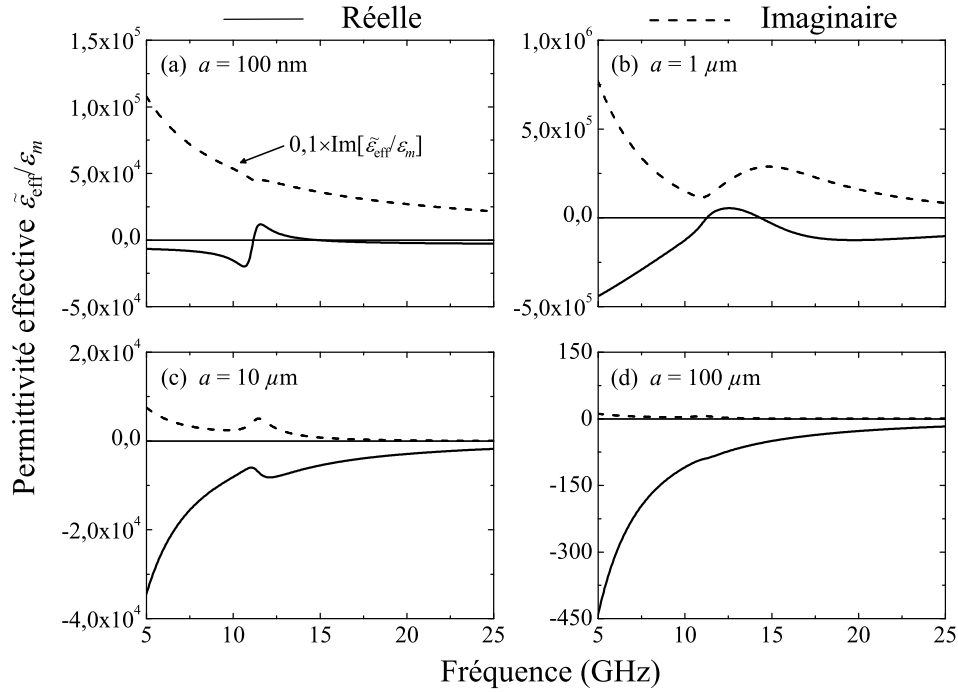


Figure 4.6 Parties réelle et imaginaire de la permittivité effective relative  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}/\epsilon_m$  en fonction de la fréquence pour un réseau de fils de Ni de rayon (a) 100 nm, (b) 1  $\mu\text{m}$ , (c) 10  $\mu\text{m}$  et (d) 100  $\mu\text{m}$ . Les courbes sont calculées à l'aide de l'équation (3.63) avec  $H_{\text{ext}0} = \frac{1}{2}M_s$ ,  $f = 0,20$  et les paramètres du Ni donnés au tableau 4.1. Les parties réelle et imaginaire sont dénotées par des courbes continues et tiretées, respectivement. Notons qu'en (a), la partie imaginaire de  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}/\epsilon_m$  est multipliée par 0,1.

La figure 4.6 montre le comportement en fonction de la fréquence des parties réelle et imaginaire de  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}/\epsilon_m$ , que nous avons calculées à l'aide de l'équation (3.63) pour différents



rayons allant de 100 nm à 100  $\mu\text{m}$ .<sup>6</sup> Pour l'intervalle de fréquences considéré (5–25 GHz), la profondeur de pénétration non magnétique  $\delta_{w0}$  du Ni est de l'ordre de 1  $\mu\text{m}$ , de sorte que les courbes de permittivité effective de la figure 4.6 couvrent les régimes d'effet de peau faible ( $a/\delta_{w0} \approx 0,1$  pour  $a = 100$  nm), modéré ( $a/\delta_{w0} \approx 1$  et 10 pour  $a = 1$  et 10  $\mu\text{m}$ , respectivement) et dominant ( $a/\delta_{w0} \approx 100$  pour 100  $\mu\text{m}$ ). De plus, comme  $f = 0,20$  pour tous les spectres, la distance interfil  $D$  passe approximativement de 400 nm à 400  $\mu\text{m}$  entre les figures 4.6(a) et 4.6(d). Ces résultats permettent de mettre en évidence les deux éléments principaux qui gouvernent la permittivité effective de réseaux denses de fils ferromagnétiques, soit sa nature plasmonique et sa dépendance en fonction de la perméabilité intrinsèque des fils.

D'une part, la réponse électrique du réseau peut être décrite dans le cadre du modèle plasmonique de Drude, c'est-à-dire que  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  peut s'exprimer sous la forme de l'équation (3.83), laquelle fait intervenir une fréquence plasma  $\omega_{p,\text{eff}}$  et un paramètre d'amortissement  $\gamma_{p,\text{eff}}$  effectifs. Dans ce modèle,  $\text{Re}[\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}]$  est négative (positive) lorsque  $\omega \lesssim \omega_{p,\text{eff}}$  ( $\omega \gtrsim \omega_{p,\text{eff}}$ ), alors que  $\text{Im}[\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}]$  est proportionnelle à  $\text{Re}[\gamma_{p,\text{eff}}]$  et tient compte des mécanismes de dissipation dans le réseau. Comme indiqué à l'équation (3.84), la valeur de la fréquence plasma effective est gouvernée uniquement par les propriétés de la matrice et les paramètres géométriques du réseau. En particulier,  $\omega_{p,\text{eff}}$  est inversement proportionnelle à la distance interfil  $D = b\sqrt{\pi}$ , de sorte que la fréquence plasma décroît linéairement de 100 THz à 100 GHz, lorsque  $D$  passe de 400 nm à 400  $\mu\text{m}$  entre les figures 4.6(a) et 4.6(d).<sup>7</sup> Par conséquent, aux fréquences d'opération considérées (5–25 GHz), la partie réelle de  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  demeure strictement négative pour les quatre spectres.

D'autre part, nous avons vu en 3.3.3 que  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  pouvait s'exprimer de façon équivalente en fonction de l'impédance totale normalisée  $Z_{\text{tot}}/R_{\text{dc}}$  d'un fil placé dans le réseau [Éq. (3.81)]. Selon cette formulation, les spectres de la figure 4.6 peuvent être interprétés en considérant l'importance relative des contributions interne  $Z_w$  et externe  $Z_L$  à l'impédance totale. En particulier, lorsque les fils sont ferromagnétiques, l'impédance  $Z_w$  de l'équation (3.75) devient une magnétoimpédance et dépend alors de la réponse gyromagnétique des fils, par l'intermédiaire de la perméabilité de Voigt  $\mu_{\perp}$ . Il en résulte que le comportement résonant de  $\mu_{\perp}$  en fonction de la fréquence et du champ magnétique statique se répercute sur  $Z_w$  et, ultimement, sur  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$ . La permittivité effective du réseau présente alors une réponse magnétodiélectrique,

6. Mentionnons que le calcul de  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}/\epsilon_m$  à l'aide des équations (3.81) et (3.83) mène à des spectres essentiellement identiques à ceux obtenus par l'intermédiaire de la relation un peu plus générale de l'équation (3.63).

7. Comme la fraction  $f$  occupée par les fils est identique pour les quatre spectres montrés à la figure 4.6, le terme  $\ln(b/a) = \ln(D/a\sqrt{\pi})$ , qui apparaît dans l'expression de  $\omega_{p,\text{eff}}$  [Éq. (3.84)], possède la même valeur pour toutes les courbes.

qui se manifeste principalement au voisinage de la fréquence de résonance de  $\mu_{\perp}$  [Éq. (3.44)], soit entre 10 et 15 GHz pour les spectres considérés à la figure 4.6.

À la figure 4.6(a), la fréquence plasma effective vaut approximativement 100 THz, ce qui excède considérablement la fréquence d'opération et, par conséquent, entraîne des pertes très importantes dans les hyperfréquences. De plus, comme l'effet de peau est faible ( $a/\delta_{w0} \approx 0,1$ ), il en résulte que  $Z_w \approx R_{dc} - i\omega L_w$ , de sorte que la limite magnétoinductive s'applique. L'expression pour  $Z_{tot}/R_{dc}$  est alors dominée par une composante résistive (c.-à-d., réelle et non dispersive), à laquelle s'ajoutent deux termes de correction proportionnels à  $(a/\delta_{w0})^2 \ll 1$  et liés à la magnétoinductance et à l'inductance externe des fils, comme indiqué à l'équation (3.100). Le caractère essentiellement réel de  $Z_{tot}/R_{dc}$  entraîne que seule  $\text{Re}[\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}]$  est modifiée de façon significative par la magnétoinductance des fils. Toutefois, puisque  $|\text{Im}[\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}]| \gg |\text{Re}[\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}]|$ ,<sup>8</sup> la permittivité effective  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  est dominée par sa partie imaginaire, de sorte que globalement, aucune réponse magnétodiélectrique utile n'est observée. Par conséquent, les réseaux denses de nanofils ferromagnétiques présentent un comportement métallique, lequel peut être décrit, dans la limite QS, à l'aide d'une conductivité effective  $\sigma_{\text{eff}} \approx f\sigma_w$ .<sup>9</sup>

En revanche, aux figures 4.6(b) et 4.6(c), l'augmentation de la distance interfil par rapport à la figure 4.6(a) abaisse la fréquence plasma effective jusqu'à 10 et 1 THz, respectivement. Il en résulte une diminution du paramètre d'amortissement  $\gamma_{p,\text{eff}}$  et des pertes associées à  $\text{Im}[\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}]$ , lesquelles demeurent toutefois significatives. De même, l'augmentation du rayon des fils accroît l'importance de l'effet peau, si bien que  $a/\delta_{w0} \approx 1$  à la figure 4.6(b) et  $a/\delta_{w0} \approx 10$  à la figure 4.6(c). Dans ce régime, la magnétoimpédance  $Z_w/R_{dc}$  doit être calculée à l'aide de la relation générale donnée à l'équation (3.75) et va alors modifier de façon notable les parties réelle et imaginaire de la permittivité effective  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  dans l'intervalle entre 10 et 15 GHz.

Enfin, à la figure 4.6(d), la distance interfil est suffisamment importante pour abaisser la fréquence plasma effective dans les hyperfréquences ( $\omega_{p,\text{eff}}/2\pi \approx 100$  GHz), de sorte que  $|\text{Im}[\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}]| < |\text{Re}[\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}]|$ . Par conséquent, les pertes sont substantiellement réduites par rapport aux cas des figures 4.6(a) à 4.6(c).<sup>10</sup> De plus, comme l'effet de peau est dominant ( $a/\delta_{w0} \approx 100$ ), la permittivité effective  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  est bien décrite par les équations (3.93) ou (3.94). Ces relations dépendent des propriétés électromagnétiques de la matrice et des paramètres

8. Notons qu'à la figure 4.6(a), la partie imaginaire de  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}/\epsilon_m$  est multipliée par un facteur 0,1.

9. Dans la limite QS, la permittivité effective est donnée par l'équation (3.89), qui peut s'écrire comme  $\epsilon_{\text{eff}} = (1 - f)\epsilon_m + if\sigma_w/\omega$ , où nous avons considéré que  $\epsilon_w = i\sigma_w/\omega$  [Éq. (2.5)]. Or, pour des réseaux denses de fils conducteurs excités dans les hyperfréquences, le premier terme est négligeable par rapport au second, de sorte que  $\epsilon_{\text{eff}} \approx if\sigma_w/\omega$ . Enfin, en définissant la conductivité effective  $\sigma_{\text{eff}}$  du réseau comme  $\epsilon_{\text{eff}} = i\sigma_{\text{eff}}/\omega$ , nous trouvons, par identification, que  $\sigma_{\text{eff}} \approx f\sigma_w$ .

10. La partie réelle de  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  demeure toutefois strictement négative puisque la fréquence plasma effective demeure supérieure aux fréquences d'opération considérées à la figure 4.6.

géométriques du réseau, mais demeurent indépendantes des propriétés intrinsèques des fils.<sup>11</sup> En particulier, la réponse magnétodiélectrique de  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  est négligeable (même près de la résonance ferromagnétique), de sorte que la permittivité du réseau devient équivalente à celle d'un ensemble de fils conducteurs non magnétiques.

En résumé, la permittivité effective dans les hyperfréquences de réseaux denses de fils ferromagnétiques excités dans la configuration TM dépend fortement du retard électromagnétique à l'intérieur des fils. Lorsque que l'effet de peau est faible, l'impédance totale  $Z_{\text{tot}}$  des fils est dominée par sa composante résistive et le réseau se comporte essentiellement comme un métal effectif. Par conséquent, la permittivité effective présente des pertes considérables dans les hyperfréquences et une réponse magnétodiélectrique globalement peu significative. Dans le cas plus général d'un effet de peau modéré ( $a \approx \delta_{w0}$ ), l'impédance intrinsèque  $Z_w$  devient une magnétoimpédance, qui dépend de la perméabilité intrinsèque des fils et qui modifie de façon appréciable les parties réelle et imaginaire de  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$ . Toutefois, en raison du fait que la fréquence plasma effective reste élevée par rapport aux hyperfréquences, les pertes demeurent substantielles dans ce régime. Enfin, quand l'effet de peau domine la réponse des fils et que la fréquence plasma est réduite dans les hyperfréquences, la permittivité effective est contrôlée principalement par la géométrie du réseau et s'accompagne de pertes relativement faibles.

#### 4.3.2 Réponse magnétodiélectrique de réseaux dilués

La section précédente a permis d'établir les conditions favorables à l'obtention d'une réponse magnétodiélectrique substantielle et accompagnée de pertes faibles. D'une part, comme montré aux figures 4.6(b) et 4.6(c), l'effet de peau doit être modéré pour que la perméabilité intrinsèque des fils modifie de façon appréciable leur impédance totale  $Z_{\text{tot}}$  et, par conséquent, la permittivité effective du réseau [Éq. (3.81)]. D'autre part, la réduction des pertes associées à la partie imaginaire de  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  requiert que la distance interfil soit suffisamment grande pour abaisser la fréquence plasma effective  $\omega_{p,\text{eff}}$  jusqu'aux hyperfréquences, comme montré à la figure 4.6(d), où  $\omega_{p,\text{eff}}/2\pi \approx 100$  GHz. Pour des métaux ferromagnétiques typiques, ces deux conditions sont satisfaites pour des fils de rayon  $a \approx 1 \mu\text{m}$ , séparés d'une distance  $D \approx 1$  mm, ce qui correspond à des réseaux dilués de microfils ferromagnétiques avec  $f \approx 10^{-6}$ .

Dans ce contexte, les références [36, 37] ont mesuré la permittivité effective dans les hyperfréquences de réseaux de microfils de CoFeSiB. Ils ont notamment montré que la dispersion de la réponse électrique du composite dépend fortement des propriétés magnétiques des fils et qu'elle peut être ajustée par l'application d'un champ magnétique statique. De même, ils ont

---

11. Les propriétés intrinsèques des fils sont prises en compte exclusivement par les termes  $Z_w$  et  $\gamma_{p,\text{eff}}$ . Or, lorsque l'effet de peau est dominant, nous trouvons que  $|Z_w| \ll |Z_L|$  et  $|\gamma_{p,\text{eff}}| \ll \omega$ , de sorte que  $Z_w$  et  $\gamma_{p,\text{eff}}$  n'apparaissent pas dans les équations (3.93) et (3.94), respectivement. Autrement dit, dans la limite SE, les champs ne pénètrent pas l'intérieur des fils et ne « sondent » donc pas leurs propriétés intrinsèques.

proposé un modèle théorique qui démontre un bon accord avec les résultats expérimentaux.<sup>12</sup> Notons cependant que pour des réseaux aussi dilués, la perméabilité effective est essentiellement égale à celle du vide (c.-à-d.,  $\bar{\mu}_{\text{eff}} \rightarrow \mu_0$ ), ce qui signifie que la réponse gyromagnétique intrinsèque des fils se manifeste uniquement par l'intermédiaire de la permittivité effective.

La figure 4.7 montre la dépendance en fréquence des parties réelle et imaginaire de  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}/\epsilon_m$  d'un réseau de fils de Ni de rayon (a)  $a = 0,5 \mu\text{m}$  et (b)  $a = 1 \mu\text{m}$ , décrits par les paramètres du tableau 4.1 et soumis à quatre valeurs différentes du champ magnétique statique  $H_{\text{ext}0}$  allant de  $0,05M_s$  à  $0,50M_s$ . De plus, les fils sont incorporés dans une matrice non magnétique de permittivité  $\epsilon_m = 10\epsilon_0$  et sont séparés d'une distance  $D = 750 \mu\text{m}$ , de sorte que  $f \approx 1,4 \times 10^{-6}$  pour  $a = 0,5 \mu\text{m}$  et  $f \approx 5,6 \times 10^{-6}$  pour  $a = 1 \mu\text{m}$ . Ces paramètres mènent à une fréquence plasma effective  $\omega_{p,\text{eff}}/2\pi \approx 20 \text{ GHz}$  pour toutes les courbes présentées à la figure 4.7.<sup>13</sup>

De façon générale, la permittivité effective du réseau peut être analysée en considérant les trois fréquences caractéristiques suivantes :

1. La fréquence plasma effective  $\omega_{p,\text{eff}}$  du réseau [Éq. (3.84)], qui contrôle le changement de signe de la partie réelle de  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  et qui dépend principalement de la distance interfil et des propriétés électromagnétiques de la matrice.
2. La fréquence de résonance  $\omega_{\perp}$  de la magnétoimpédance  $Z_w$  des fils [Éq. (3.44)], qui tient compte de l'influence de la perméabilité intrinsèque des fils sur la permittivité effective du réseau.
3. La fréquence  $\omega_{\delta} = 2/\sigma_w\mu_0a^2$  à laquelle la profondeur de pénétration non magnétique  $\delta_{w0}$  devient égale au rayon  $a$  du fil (c.-à-d.,  $a/\delta_{w0} = 1$  lorsque  $\omega = \omega_{\delta}$ ). Notons que la valeur de  $\omega_{\delta}$  est inversement proportionnelle à l'importance de l'effet de peau.

À la figure 4.7, la valeur de la fréquence plasma est fixée de façon à être comprise dans l'intervalle 5–25 GHz, alors que  $\omega_{\perp}$  et  $\omega_{\delta}$  sont variées dans le but d'étudier l'influence de la perméabilité intrinsèque des fils et de l'effet de peau sur la permittivité effective du réseau, respectivement. D'une part, lorsque le champ magnétique statique appliqué  $H_{\text{ext}0}$  est augmenté de  $0,05M_s$  à  $0,50M_s$ , le rapport  $\omega_{\perp}/\omega_{p,\text{eff}}$  passe approximativement de 0,20 à 0,80.

---

12. Comme mentionné au chapitre 3, l'expression pour la permittivité effective développée aux références [36, 37] est équivalente à notre équation (3.64), où  $K(k_w a)$  est remplacée par sa valeur donnée à l'équation (3.76). Toutefois, leur méthode de dérivation est moins rigoureuse et, notamment, ne considère pas explicitement le problème de la diffusion d'une onde électromagnétique incidente par un fil ferromagnétique individuel.

13. La fréquence plasma effective est indépendante de  $H_{\text{ext}0}$  et ne dépend que faiblement du rayon (dépendance logarithmique). En effet, pour  $D = 750 \mu\text{m}$  et  $\epsilon_m = 10\epsilon_0$ , l'équation (3.84) mène à  $\omega_{p,\text{eff}}/2\pi \approx 19,4 \text{ GHz}$  pour  $a = 0,5 \mu\text{m}$  [Fig. 4.7(a)] et  $\omega_{p,\text{eff}}/2\pi \approx 20,5 \text{ GHz}$  pour  $a = 1 \mu\text{m}$  [Fig. 4.7(b)]. Notons que les valeurs de  $D$  et  $\epsilon_m$  ont été choisies pour que la valeur de la fréquence plasma effective soit comprise entre 5 et 25 GHz.

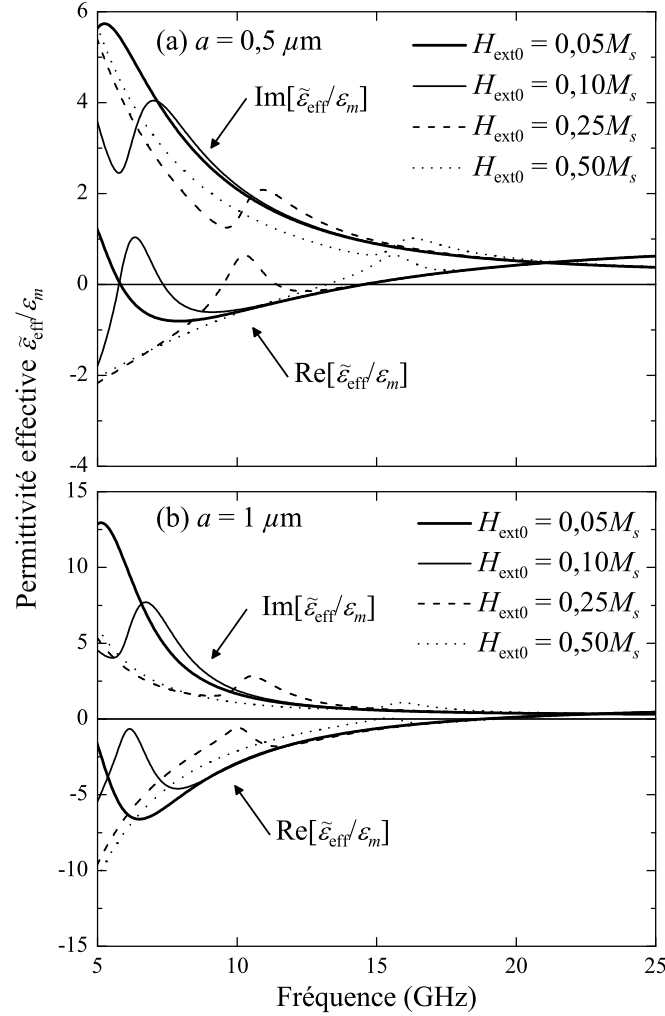


Figure 4.7 Parties réelle et imaginaire de la permittivité effective relative  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}/\epsilon_m$  en fonction de la fréquence pour un réseau de fils de Ni de rayon (a)  $a = 0,5 \mu\text{m}$  et (b)  $a = 1 \mu\text{m}$ . Les courbes sont calculées à l'aide de l'équation (3.63) pour différentes valeurs du champ appliqué  $H_{\text{ext}0}$  allant de  $0,05M_s$  à  $0,50M_s$  et avec  $D = 750 \mu\text{m}$ ,  $b = D/\sqrt{\pi}$ ,  $f = a^2/b^2$ ,  $\epsilon_m = 10\epsilon_0$  et les paramètres du Ni donnés au tableau 4.1.

D'autre part,  $\omega_\delta/\omega_{p,\text{eff}} \approx 3,5$  lorsque  $a = 0,5 \mu\text{m}$  [Fig. 4.7(a)] et  $\omega_\delta/\omega_{p,\text{eff}} \approx 0,8$  lorsque  $a = 1 \mu\text{m}$  [Fig. 4.7(b)].<sup>14</sup>

Les courbes de la figure 4.7 montrent que le caractère résonant de la perméabilité intrinsèque des fils peut modifier de façon significative la permittivité effective du réseau, en particulier lorsque le champ magnétique statique externe est faible (c.-à-d., pour une petite valeur de  $\omega_\perp/\omega_{p,\text{eff}}$ ) et que l'effet de peau n'est pas trop important [Fig. 4.7(a)]. De façon

14. De façon équivalente, nous trouvons que la valeur de  $a/\delta_{w0}$  en  $\omega = \omega_{p,\text{eff}}$  est approximativement égale à 0,5 lorsque  $a = 0,5 \mu\text{m}$  et à 1,1 lorsque  $a = 1 \mu\text{m}$ , ce qui indique que l'effet de peau est plus important dans le cas considéré à la figure 4.7(b).

générale, cette réponse magnétodiélectrique se manifeste près de  $\omega = \omega_{\perp}$ , par la présence d'un maximum de  $\text{Im} [\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}]$  (pic d'absorption) et d'une zone de dispersion anormale de  $\text{Re} [\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}]$ . De plus, pour un effet de peau et un champ magnétique appliqué suffisamment faibles,  $\text{Re} [\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}]$  peut devenir positive sur un intervalle de fréquences autour de  $\omega = \omega_{\perp}$ , comme montré à la figure 4.7(a) pour  $H_{\text{ext}0} = 0,10M_s$  et  $0,25M_s$ . Lorsque c'est le cas, la condition  $\text{Re} [\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}] = 0$  est alors satisfaite pour trois valeurs de  $\omega$ , c'est-à-dire deux près de  $\omega_{\perp}$ , dont les positions sont ajustables par  $H_{\text{ext}0}$ , et une troisième autour de  $\omega_{p,\text{eff}}$ , dont la position est fixée par la géométrie et les propriétés de la matrice.

En résumé, la permittivité effective  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  dans les hyperfréquences de réseaux dilués ( $f \approx 10^{-6}$ ) de fils ferromagnétiques caractérisés par un effet de peau modéré ( $a/\delta_{w0} \approx 1$ ) dépend fortement de la perméabilité intrinsèque des fils, de sorte que la forme spectrale de  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  peut être ajustée par l'application d'un champ magnétique statique, notamment les zones où  $\text{Re} [\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}] < 0$ . Cette réponse magnétodiélectrique s'ajoute alors à la réponse plasmonique contrôlée par la géométrie et propre aux réseaux de fils conducteurs non magnétiques.

### 4.3.3 Permittivité de réseaux de nanofils de longueur finie

Nous allons maintenant examiner la permittivité effective de réseaux de fils de longueur *finie*. En effet, il convient de rappeler que le modèle théorique que nous avons développé suppose des fils de longueur *infinie*. Cette hypothèse nous a notamment permis, à la section 2.7, de résoudre de façon analytique le problème de la diffusion d'une onde électromagnétique par un fil individuel. Expérimentalement, la condition de fils infinis, ou continus, peut être réalisée en s'assurant que la continuité électrique des fils est satisfaite en leurs deux extrémités, à l'aide, par exemple, de contacts métalliques externes. Une configuration qui respecte ce critère est montrée à la figure 4.8(a) et consiste à insérer le réseau entre les deux plans conducteurs d'une ligne de transmission, de manière à former un guide d'ondes à plaques parallèles. En effet, dans cet exemple, les fils peuvent être considérés de longueur infinie puisqu'ils sont connectés aux deux parois du guide.

Sur la base de ces considérations, nos expressions pour la permittivité et la perméabilité effectives ne sont rigoureusement valides que si la continuité électrique des fils est assurée. Dans le cas contraire, des écarts entre les prédictions théoriques et la réponse observée expérimentalement peuvent survenir. Toutefois, pour un réseau de fils aimantés axialement et excités dans la configuration TM, les champs électrique et magnétique sont respectivement parallèle et perpendiculaire à l'axe des fils, ce qui entraîne que seule la permittivité effective (axiale) sera affectée de façon substantielle par la longueur finie des fils.<sup>15</sup>

---

15. En effet, dans la configuration TM, les composantes dynamiques du champ magnétique et de l'aimantation des fils demeurent essentiellement confinées dans le plan du réseau (approximation des petits signaux),

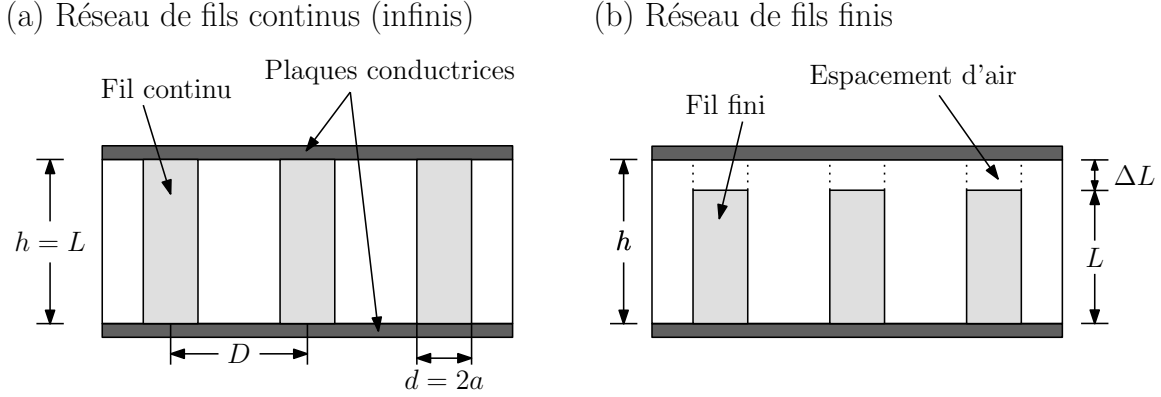


Figure 4.8 Représentation schématique d'un réseau de fils incorporés dans les pores d'une matrice diélectrique. (a) Fils de longueur « infinie » qui remplissent complètement les pores de la matrice et qui établissent un contact électrique avec les deux plaques du guide d'ondes à plaques parallèles. (b) Fils de longueur « finie » qui remplissent partiellement les pores de la matrice, de sorte qu'il existe un espace d'air, d'épaisseur  $\Delta L = h - L$ , entre l'extrémité supérieure de chaque fil et le plan conducteur placé au-dessus du réseau.

Or, il s'avère que dans certaines situations, l'absence de contact électrique à l'une ou aux deux extrémités des fils peut modifier la permittivité effective du réseau de façon avantageuse par rapport à la réponse prédite pour des fils pouvant être considérés infinis [Éq. (3.63)]. C'est notamment le cas pour les réseaux denses de nanofils ferromagnétiques, dont les spectres théoriques de perméabilité et de permittivité effectives ont été présentés respectivement aux figures 4.4(a) et 4.6(a) en supposant des fils de longueur infinie. D'une part, nous avons vu que l'obtention d'une perméabilité effective substantielle requiert des réseaux denses ( $f \gtrsim 0,1$ ) et un effet de peau négligeable ( $a/\delta_{w0} \ll 1$ ), ce qui est assuré par l'utilisation de nanofils de rayon  $a \lesssim 100$  nm. D'autre part, nous avons montré que la réponse électrique de tels réseaux est équivalente à celle d'un métal massif, caractérisé par une conductivité effective  $\sigma_{\text{eff}} \approx f\sigma_w$ . Par conséquent, lorsque nous pouvons traiter les fils comme étant de longueur infinie, notre modèle prédit que le comportement métallique de réseaux denses de nanofils ferromagnétiques et les pertes qui y sont associées limitent fortement le potentiel de ces métamatériaux en vue d'applications à des dispositifs visant à exploiter leur réponse magnétique.

En revanche, dans le cas où la continuité électrique des fils n'est pas satisfaite, comme montré à la figure 4.8(b), la permittivité effective observée expérimentalement diffère radicalement de la réponse métallique prédite par l'équation (3.63) et illustrée à la figure 4.6(a). De tels réseaux peuvent être obtenus par électrodéposition de métal ferromagnétique à l'intérieur des nanopores d'une membrane diélectrique, en s'assurant que la longueur  $L$  des fils

---

de sorte que la forme dispersive de la perméabilité effective  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  n'est que faiblement influencée par la longueur finie des fils, pour autant que la condition  $L \gg d$  soit respectée.



demeure inférieure à la hauteur  $h = L + \Delta L$  des pores, où  $\Delta L$  correspond à l'épaisseur de la portion supérieure non remplie de chaque pore.<sup>16</sup> Il en résulte des réseaux denses de nanofils ferromagnétiques *semi-isolés*, c'est-à-dire où les fils sont en contact uniquement avec le plan conducteur inférieur, lequel joue notamment le rôle de cathode lors du processus d'électro-déposition. Cette configuration permet de s'affranchir des pertes par effet Joule associées aux réseaux de fils continus, sans toutefois réduire de façon trop importante leur réponse gyromagnétique. Les réseaux de nanofils semi-isolés se comportent alors comme des *isolants magnétiques effectifs* et, par conséquent, constituent une solution de remplacement prometteuse aux matériaux ferrimagnétiques (p. ex., les ferrites et les grenats) utilisés actuellement dans les dispositifs en hyperfréquences non réciproques ou ajustables par un paramètre externe.

Dans ce qui suit, nous allons présenter une expression QS pour la permittivité effective  $\epsilon_{\text{eff}}$  de réseaux de nanofils de longueur finie, en nous appuyant sur la procédure d'homogénéisation en deux étapes illustrée à la figure 4.9. La première étape pour obtenir  $\epsilon_{\text{eff}}$  consiste à décomposer le réseau de la figure 4.9(a) en deux sous-réseaux d'épaisseurs  $\Delta L$  et  $L$ , constitués respectivement de fils de permittivités  $\epsilon_0$  (l'espacement d'air) et  $\epsilon_w$  (le métal), incorporés dans une matrice de permittivité  $\epsilon_m$ . Dans la limite QS et pour un champ électrique axial, les permittivités effectives des deux sous-réseaux de fils s'expriment simplement comme [voir l'équation (3.89)]

$$\epsilon_{\text{eff1}} = (1 - f) \epsilon_m + f \epsilon_0, \quad (4.3a)$$

$$\epsilon_{\text{eff2}} = (1 - f) \epsilon_m + f \epsilon_w. \quad (4.3b)$$

La structure résultante est montrée à la figure 4.9(b) et consiste en un empilement de deux couches minces homogénéisées, de permittivités  $\epsilon_{\text{eff1}}$  et  $\epsilon_{\text{eff2}}$ , soumises à un champ électrique dans la direction normale à leur plan. Signalons ici que l'équation (4.3b) pourrait être généralisée au régime EQS en remplaçant simplement  $\epsilon_{\text{eff2}}$  et  $\epsilon_w$  par  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff2}}$  et  $\tilde{\epsilon}_w = \epsilon_w (Z_{\text{tot}}/R_{\text{dc}})^{-1}$ , respectivement.

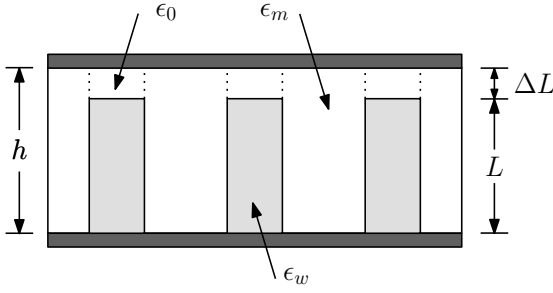
La deuxième étape consiste à déterminer la permittivité effective  $\epsilon_{\text{eff}}$  du réseau homogénéisé montré à la figure 4.9(c) en fonction de  $\epsilon_{\text{eff1}}$  et  $\epsilon_{\text{eff2}}$ . Pour ce faire, il s'agit d'appliquer

---

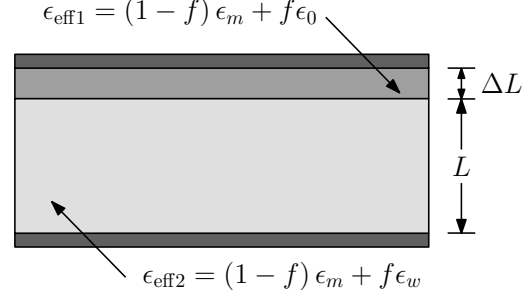
16. Notons que le schéma montré à la figure 4.8(b) n'est pas à l'échelle. En effet, pour les réseaux de nanofils considérés dans le cadre de ce travail, la longueur  $L$  des fils demeure significativement supérieure à leur rayon  $a$  et à leur séparation  $D$ , alors que le facteur de remplissage  $L/h$  des pores varie habituellement entre 0,5 et 0,8. Par conséquent, l'épaisseur  $\Delta L = h - L$  de l'espacement d'air s'avère également beaucoup plus grand que le rayon et la séparation des fils (p. ex., voir les valeurs typiques pour  $a$ ,  $D$  et  $L$  données à la figure 5.1).



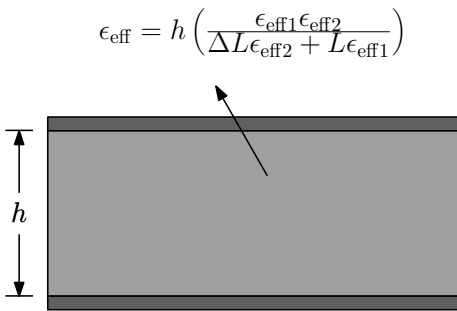
(a) Réseau de fils de longueur finie



(b) Première étape d'homogénéisation



(c) Deuxième étape d'homogénéisation



(d) Expression approximative

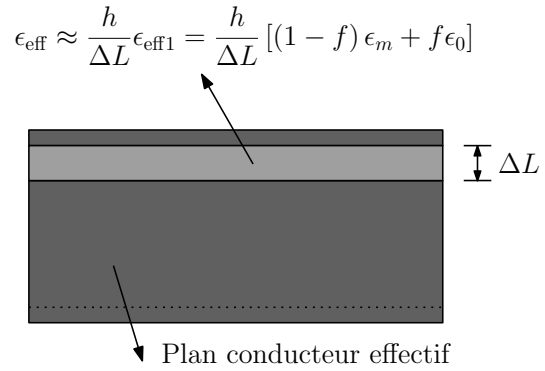


Figure 4.9 Représentation schématique de la procédure d'homogénéisation en deux étapes permettant d'obtenir, dans la limite QS, la permittivité effective  $\epsilon_{\text{eff}}$  de réseaux de nanofils ferromagnétiques de longueur finie. (a) Réseau de nanofils de longueur finie  $L$  et de permittivité  $\epsilon_w$ , incorporés dans les pores de hauteur  $h$  d'une matrice diélectrique de permittivité  $\epsilon_m$ . (b) Première étape d'homogénéisation. (c) Deuxième étape d'homogénéisation. (d) Représentation schématique du réseau correspondant à l'expression approximative pour  $\epsilon_{\text{eff}}$  donnée à l'équation (4.5).

l'équation (2.25a) au cas de disques minces soumis à un champ électrique dans la direction hors plan (c.-à-d., avec un facteur de dépolariation égal à 1). Le calcul est direct et mène à notre résultat final

$$\epsilon_{\text{eff}} = \left( \frac{f_1}{\epsilon_{\text{eff1}}} + \frac{f_2}{\epsilon_{\text{eff2}}} \right)^{-1} = h \left( \frac{\epsilon_{\text{eff1}} \epsilon_{\text{eff2}}}{\Delta L \epsilon_{\text{eff2}} + L \epsilon_{\text{eff1}}} \right), \quad (4.4)$$

où  $f_1 = \Delta L/h$  et  $f_2 = L/h$ . L'équation (4.4) se réduit aux résultats attendus  $\epsilon_{\text{eff1}}$  et  $\epsilon_{\text{eff2}}$  dans les limites d'un réseau vide ( $\Delta L = h$  et  $L = 0$ ) et complètement rempli ( $\Delta L = 0$  et  $L = h$ ), respectivement.

Enfin, soulignons que pour des réseaux de fils métalliques typiques, l'inégalité  $\Delta L \epsilon_{\text{eff2}} \gg L \epsilon_{\text{eff1}}$  est aisément satisfaite, de sorte que l'équation (4.4) se réduit en pratique à

$$\epsilon_{\text{eff}} \approx \frac{h}{\Delta L} \epsilon_{\text{eff}1} = \frac{h}{\Delta L} [(1 - f) \epsilon_m + f \epsilon_0]. \quad (4.5)$$

Dans cette limite, la permittivité effective  $\epsilon_{\text{eff}}$  est contrôlée par les propriétés de la matrice, le facteur de remplissage des pores et leur fraction surfacique, mais demeure indépendante des propriétés intrinsèques des nanofils. Soulignons que notre expression finale pour  $\epsilon_{\text{eff}}$  [Éq. (4.4)] a été obtenue précédemment par Spiegel *et al.* [96], à l'aide d'une méthode équivalente, basée sur le calcul de la capacité totale du réseau de la figure 4.8(b).

Du point de vue de la réponse électrique du réseau, l'équation (4.5) est équivalente à traiter la partie inférieure du réseau, de hauteur  $L$  et de permittivité effective  $\epsilon_{\text{eff}2} = (1 - f) \epsilon_m + f \epsilon_w$ , comme un plan conducteur homogène placé à une distance  $\Delta L$  en dessous de la plaque conductrice supérieure, comme montré à la figure 4.9(d). Suivant cette approche, le réseau peut alors être modélisé comme un diélectrique d'épaisseur  $\Delta L$  et de permittivité effective  $\epsilon_{\text{eff}1} = (1 - f) \epsilon_m + f \epsilon_0$ , inséré entre deux plans conducteurs séparés d'une distance  $\Delta L$ . Or, comme la permittivité effective  $\epsilon_{\text{eff}}$  du réseau est dérivée en supposant un matériau composite d'épaisseur  $h$ , nous devons multiplier  $\epsilon_{\text{eff}1}$  par le facteur  $h/\Delta L$  pour obtenir  $\epsilon_{\text{eff}}$ . En effet, ce facteur permet de tenir compte de la diminution de l'épaisseur apparente du métamatériau, laquelle passe de  $h$  à  $\Delta L$  lorsque des fils métalliques de longueur  $L$  sont électrodéposés dans les pores de la matrice.

Par conséquent, alors que la permittivité effective des réseaux denses de nanofils infinis adopte une forme plasmonique gouvernée par le comportement à la fois résistif et inductif des fils [Éq. (3.83)], la réponse diélectrique de réseaux de nanofils semi-isolés est plutôt dominée par l'effet capacitif de la partie supérieure non remplie des pores, d'épaisseur  $\Delta L$  et de permittivité effective  $\epsilon_{\text{eff}1}$  [Éq. (4.5)]. Dans cette dernière configuration, le modèle prédit que la permittivité effective est contrôlée uniquement par la permittivité de la matrice et les paramètres géométriques du réseau.

La figure 4.10 montre les parties réelle et imaginaire de  $\epsilon_{\text{eff}}/\epsilon_m$  en fonction du facteur de remplissage des pores  $L/h$ .<sup>17</sup> La permittivité effective  $\epsilon_{\text{eff}}$  est calculée à l'aide de l'équation (4.5), avec  $\epsilon_m = 10\epsilon_0 (1 + 0,01i)$  et pour  $f = 0,05, 0,10$  et  $0,20$ . Ici, la partie imaginaire de  $\epsilon_m$  tient compte des pertes diélectriques intrinsèques dans la membrane nanoporeuse. D'abord, comme discuté au paragraphe précédent, les courbes montrent que la permittivité effective du réseau augmente avec l'augmentation de la longueur des fils. L'effet est d'autant plus important lorsque  $L$  s'approche de  $h$ , puisque  $\epsilon_{\text{eff}}$  est inversement proportionnelle à l'épaisseur  $\Delta L = h - L$  de l'espacement d'air [Éq. (4.5)]. Ensuite, nous constatons que l'augmentation de  $f$  entraîne une diminution de la permittivité effective, ce qui s'explique par le fait que  $\epsilon_{\text{eff}}$  est proportionnelle à  $\epsilon_{\text{eff}1} = (1 - f) \epsilon_m + f \epsilon_0$ , laquelle diminue lorsque  $f$  augmente.

---

17. Notons que rigoureusement, nous devrions plutôt écrire  $\epsilon_{\text{eff}}/\text{Re}[\epsilon_m]$ .

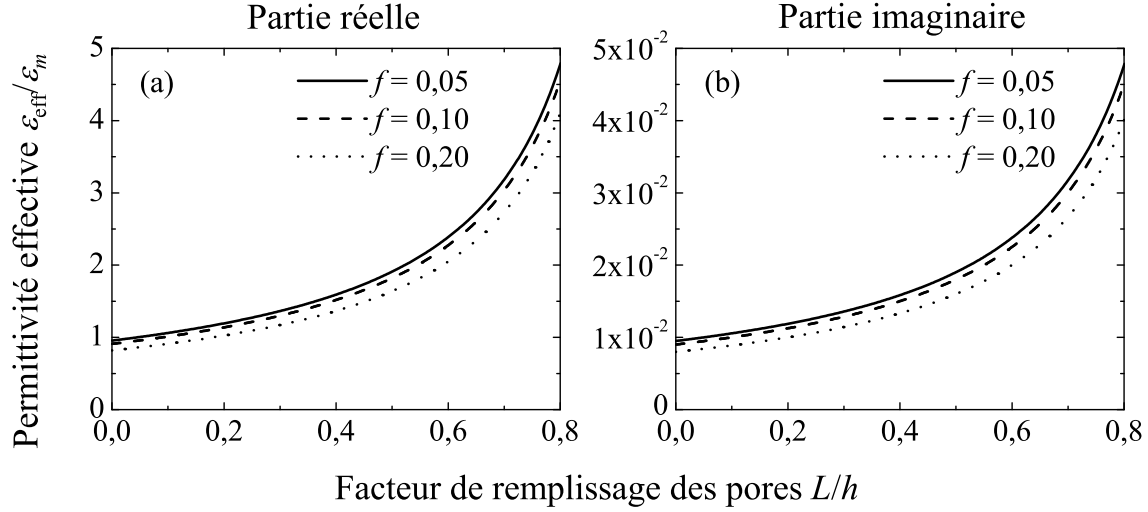


Figure 4.10 Permittivité effective relative  $\epsilon_{\text{eff}}/\epsilon_m$  d'un réseau de nanofils ferromagnétiques de longueur finie en fonction du facteur de remplissage des pores  $L/h$ . (a) Partie réelle de  $\epsilon_{\text{eff}}/\epsilon_m$  et (b) partie imaginaire de  $\epsilon_{\text{eff}}/\epsilon_m$ . Les courbes sont calculées à l'aide de l'équation (4.5), avec  $\epsilon_m = 10\epsilon_0 (1 + 0,01i)$  et pour  $f = 0,05, 0,10$  et  $0,20$ .

Enfin, dans le cadre de ce modèle, la partie imaginaire de  $\epsilon_{\text{eff}}$  est contrôlée exclusivement par celle de  $\epsilon_m$ , c'est-à-dire par les pertes diélectriques dans la matrice nanoporeuse.

En terminant, rappelons que l'équation (4.4) pour la permittivité effective de réseaux de nanofils de longueur finie est valide uniquement lorsque l'épaisseur de l'espacement d'air est beaucoup plus grand que le rayon et la séparation des pores (c.-à-d., lorsque  $\Delta L \gg a, D$ ). Pour la plupart des réseaux de nanofils ferromagnétiques considérés dans la littérature, ces exigences sont habituellement satisfaites. En revanche, l'établissement d'une relation plus générale pour la permittivité effective du réseau, qui ne poserait aucune restriction quant à la valeur de  $a/\Delta L$  et  $D/\Delta L$ , constitue un problème analytique beaucoup plus complexe, qui fait intervenir les interactions électrostatiques entre les fils [145]. Dans ce contexte, le modèle de la référence [145] propose une expression pour la capacité équivalente d'un ensemble de nanofils métalliques et non magnétiques similaire à celui de la figure 4.8. Nous croyons qu'une telle approche pourrait constituer un bon point départ pour généraliser l'équation (4.4) au cas où  $\Delta L$  devient du même ordre de grandeur que  $a$  et  $D$ .

#### 4.4 Réponse électromagnétique et synthèse

Au cours de ce chapitre, nous avons discuté notre modèle pour les propriétés électromagnétiques effectives de réseaux de fils ferromagnétiques conducteurs. Notre analyse a mis l'accent sur l'établissement des conditions relatives aux paramètres géométriques et au re-

tard électromagnétique à l'intérieur des fils qui mènent à des réponses effectives significatives et utiles dans les hyperfréquences. De même, nous avons insisté sur le fait qu'en régime EQS, les fonctions de réponse électrique et magnétique effectives du réseau sont toutes deux influencées à la fois par la permittivité et la perméabilité intrinsèques des fils. Il en résulte alors une réponse gyromagnétique pour  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  qui dépend de l'effet de peau et une réponse plasmonique pour  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  qui peut être ajustée par un champ magnétique statique.

La section 4.2 a été consacrée à l'étude des propriétés magnétiques, en traitant d'abord la réponse d'un fil unique. D'une part, nous avons décrit l'influence du retard électromagnétique à l'intérieur du fil, pris en compte par le rapport  $a/\delta_{w0}$ , sur ses paramètres de résonance ferromagnétique. D'autre part, nous avons examiné l'impact de la permittivité intrinsèque  $\epsilon_w$  des fils sur la dispersion de leur perméabilité renormalisée  $\tilde{\mu}_{\perp}$  en régime EQS, en comparant la réponse de fils magnétiques de Ni (conducteurs) et de YIG (isolants). Nous avons ensuite considéré le comportement magnétique de réseaux de fils, ce qui nous a permis d'identifier le rôle joué par la fraction  $f$  occupée par les fils dans le réseau, le paramètre de Gilbert  $\alpha$  et le rapport  $a/\delta_{w0}$  sur l'amplitude et la forme spectrale de la perméabilité effective. En particulier, nous avons établi les critères qui permettent d'obtenir une zone de perméabilité effective négative entre les fréquences de résonance et d'antirésonance.

La permittivité effective  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  a ensuite été étudiée à la section 4.3, en analysant d'abord la réponse plasmonique de réseaux denses de fils infinis. D'une part, nous avons observé que lorsque la fréquence plasma effective  $\omega_{p,\text{eff}}$  du réseau est significativement supérieure à la fréquence d'opération, la partie imaginaire de  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  et les pertes qui y sont associées dominent la réponse électrique du réseau. Ce dernier montre alors un comportement similaire à celui d'un métal massif décrit dans le cadre du modèle de Drude. Dans ce contexte, abaisser  $\omega_{p,\text{eff}}$  jusqu'aux hyperfréquences (c.-à-d., près de la résonance ferromagnétique des fils) requiert, pour des matrices diélectriques typiques, que la distance interfil  $D$  soit de l'ordre du millimètre.

D'autre part, nous avons illustré comment la forme résonante et l'ajustabilité par un champ magnétique statique de la perméabilité intrinsèque  $\bar{\mu}_w$  des fils se répercutent, par l'intermédiaire de la magnétoimpédance  $Z_w$  des fils, sur la permittivité effective  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  du réseau. Il en résulte alors une réponse magnétodiélectrique, laquelle peut devenir particulièrement importante en régime d'effet de peau modéré. Nous avons ensuite discuté de l'influence de la longueur finie des fils, qui se manifeste notamment lorsque leur continuité électrique n'est pas assurée. Pour ce faire, nous avons considéré la réponse diélectrique de réseaux denses de nanofils ferromagnétiques qui ne remplissent que partiellement les pores d'une membrane diélectrique. Pour ce système, nous avons montré que la réponse résistive et inductive propre aux réseaux denses de nanofils infinis se transforme en une réponse essentiellement capacitive, dominée par la géométrie et les propriétés diélectriques de la matrice.

Dans ce chapitre, nous avons donc étudié séparément la permittivité  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  et la perméabilité  $\tilde{\mu}_{\text{eff}}$  effectives de réseaux de fils ferromagnétiques. Or, dans le cas général, nous avons vu à la section 2.4 que les fonctions de réponse électrique et magnétique doivent être prises en compte simultanément dans les équations de Maxwell macroscopiques pour obtenir la relation de dispersion  $\omega(\mathbf{k}_{\text{eff}})$  et ainsi décrire la réponse électromagnétique globale du réseau. Dans la configuration TM et pour un réseau non borné, l'équation (2.24) pour  $\omega(\mathbf{k}_{\text{eff}})$  se réduit à

$$k_{\text{eff}} = \omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_{\text{eff}} \tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}}, \quad (4.6)$$

de sorte que les différents comportements montrés par  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}$  vont se répercuter sur la dispersion de  $k_{\text{eff}}$ , puis sur la réponse électromagnétique du réseau. Dans ce contexte, les résultats établis au cours des sections 4.2 et 4.3 permettent d'identifier trois régimes d'opération principaux, caractérisés chacun par une réponse électromagnétique spécifique et une combinaison particulière des paramètres géométriques  $a$ ,  $D$  et  $L$ .

Le premier régime correspond aux réseaux denses ( $f \gtrsim 0,1$ ) de nanofils ferromagnétiques de rayon  $a \lesssim 100$  nm (limite QS) et de longueur infinie. D'une part, ces réseaux possèdent une réponse gyromagnétique  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp} \approx \mu_{\text{eff}\perp}$  substantielle et caractérisée par une résonance et une antirésonance ferromagnétiques, dont les positions peuvent être ajustées à la fois par la nature des fils, les paramètres géométriques du réseau et la valeur du champ magnétique statique appliqué, comme illustré à la figure 4.4(a). En revanche, la figure 4.6(a) montre que la permittivité effective  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}} \approx \epsilon_{\text{eff}} = i\sigma_{\text{eff}}/\omega$  de tels réseaux est essentiellement imaginaire et doit plutôt être interprétée en fonction d'une conductivité effective  $\sigma_{\text{eff}} \approx f\sigma_w$ , laquelle est non dispersive et à toutes fins pratiques indépendante du champ magnétique statique (absence de réponse magnéto-diélectrique). Par conséquent, ces réseaux se comportent comme des métaux ferromagnétiques massifs et leurs propriétés effectives possèdent des caractéristiques spectrales similaires à celles des propriétés intrinsèques  $\bar{\mu}_w$  et  $\epsilon_w = i\sigma_w/\omega$  des fils individuels. Par analogie avec l'équation (2.33), l'équation (4.6) peut alors s'exprimer comme

$$k_{\text{eff}} \approx \omega \sqrt{\epsilon_{\text{eff}} \mu_{\text{eff}\perp}} = \left( \frac{1+i}{\delta_{\text{eff}0}} \right) \sqrt{\frac{\mu_{\text{eff}\perp}}{\mu_0}}, \quad (4.7)$$

où  $\delta_{\text{eff}0} = \sqrt{2/\omega\sigma_{\text{eff}}\mu_0}$  est la profondeur de pénétration non magnétique effective du réseau de nanofils.

Les réseaux de fils infinis caractérisés par une fréquence plasma effective  $\omega_{p,\text{eff}}$  dans les hyperfréquences et un effet de peau modéré représentent la deuxième configuration d'intérêt. Pour des valeurs typiques de  $\epsilon_w$  et  $\epsilon_m$ , ces deux conditions sont remplies pour des fils de rayon  $a \approx 1$   $\mu\text{m}$ , séparés d'une distance  $D \approx 1$  mm, ce qui implique des réseaux fortement dilués avec  $f \approx 10^{-6}$ . À la figure 4.7, nous avons montré que la permittivité effective  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$

de tels réseaux est caractérisée par un changement de signe de sa partie réelle autour de  $\omega_{p,\text{eff}}$ , des pertes relativement faibles et une réponse magnétodiélectrique près de la fréquence de résonance ferromagnétique des fils. En revanche, la dilution importante des fils dans le milieu hôte implique que  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}$  devient essentiellement égale à la perméabilité du vide. Par conséquent, l'équation (4.6) se réduit approximativement à

$$k_{\text{eff}} \approx \omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_{\text{eff}} \mu_0}, \quad (4.8)$$

de sorte que le réseau se comporte alors comme un plasma non magnétique, caractérisé par une réponse magnétodiélectrique résonante et ajustable par l'application d'un champ magnétique statique.

Enfin, le dernier régime d'intérêt s'applique aux réseaux denses de nanofils de longueur finie, incorporés dans les pores d'une membrane diélectrique. Le remplissage incomplet des pores permet alors de s'affranchir des pertes par effet Joule associées à la continuité électrique des fils (c.-à-d., aux fils infinis), mais de conserver la réponse gyromagnétique résonante propre aux réseaux denses de nanofils.<sup>18</sup> Dans cette configuration, le réseau est équivalent à un isolant magnétique effectif et l'équation (4.6) se réduit alors à

$$k_{\text{eff}} \approx \omega \sqrt{\epsilon_{\text{eff}} \mu_{\text{eff}\perp}} \approx \omega \sqrt{\frac{h}{\Delta L} \epsilon_{\text{eff}1} \mu_{\text{eff}\perp}} \approx \omega \sqrt{\frac{h}{\Delta L} [(1-f) \epsilon_m + f \epsilon_0] \mu_{\text{eff}\perp}}. \quad (4.9)$$

Cette expression pour  $k_{\text{eff}}$  ne dépend que de la perméabilité effective du réseau, des propriétés diélectriques de la matrice, de la fraction surfacique du réseau occupée par les fils et du facteur de remplissage des pores. Mentionnons qu'au chapitre suivant, nous étudierons cette configuration d'isolant magnétique effectif et établirons une expression pour le tenseur de perméabilité effective de réseaux *non saturés*, formés de deux populations de nanofils bistables d'aimantations antiparallèles. Nous validerons ensuite notre modèle avec l'expérience, en nous appuyant sur le fait que la permittivité effective du réseau est une constante essentiellement réelle et non dispersive, comme prédit par l'équation (4.5).

En terminant, rappelons qu'un des objectifs poursuivis dans le cadre de cette thèse consiste à évaluer la possibilité que les réseaux de fils ferromagnétiques conducteurs puissent présenter, pour un ensemble donné de paramètres géométriques, des réponses gyromagnétique et magnétodiélectrique utiles et substantielles dans les hyperfréquences. Or, la discussion présentée au cours de ce chapitre a permis de montrer que l'obtention d'une réponse gyromagnétique

---

18. En effet, dans la configuration TM, la forme résonante de la perméabilité effective est conservée, même si la permittivité effective du réseau est radicalement modifiée. Comme nous le verrons au chapitre 5, le remplissage incomplet des pores affecte uniquement l'*amplitude* de la susceptibilité effective  $\bar{\chi}_{\text{eff}}$  du réseau. Il en résulte que l'équation (3.33) pour calculer les composantes de  $\bar{\mu}_{\text{eff}} = \mu_0(\bar{I} + \bar{\chi}_{\text{eff}})$  demeure valide, à la condition de remplacer  $\bar{\chi}_{\text{eff}}$  par  $(L/h) \bar{\chi}_{\text{eff}}$ .

substantielle requiert des réseaux denses et un effet de peau faible, alors que l'obtention d'une réponse magnétodiélectrique accompagnée de faibles pertes nécessite plutôt que la fréquence plasma effective soit réduite jusque dans les hyperfréquences et que l'effet de peau soit modéré, ce qui implique des réseaux dilués. Par conséquent, nous concluons que les régimes pour lesquels la perméabilité et la permittivité effectives montrent à la fois une dispersion significative dans les hyperfréquences et une ajustabilité par un champ magnétique statique tendent à être mutuellement exclusifs, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent être atteints simultanément pour un même ensemble de paramètres géométriques.

## CHAPITRE 5

# RÉPONSE MAGNÉTIQUE EFFECTIVE DE RÉSEAUX NON SATURÉS DE NANOFILS FERROMAGNÉTIQUES BISTABLES

### 5.1 Mise en contexte : réseaux de nanofils ferromagnétiques

Le modèle élaboré au cours des chapitres précédents sera maintenant appliqué à l'étude des réseaux de *nanofils* ferromagnétiques incorporés dans une matrice diélectrique, qui constituent un système étudié par notre groupe de recherche. De façon générale, les nanofils ferromagnétiques peuvent être obtenus par électrodéposition d'ions métalliques dans les nanopores d'une membrane diélectrique [146]. Il s'agit d'une méthode de fabrication relativement simple et peu coûteuse, qui mène à des réseaux de haute qualité directement intégrés au substrat. Selon les conditions de dépôt, il est possible d'obtenir des nanofils homogènes (c.-à-d., de composition unique) ou multicouches (c.-à-d., formés par l'alternance de couches magnétiques et non magnétiques). Dans le cadre de cette thèse, nous considérons uniquement les fils homogènes.

La figure 5.1 montre une représentation schématique d'un réseau de nanofils ferromagnétiques incorporés dans une membrane nanoporeuse d'alumine ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ). De tels réseaux sont fabriqués par un collègue du Laboratoire de magnétisme, l'étudiant au doctorat M. Louis-Philippe Carignan. Nous indiquons les plages de valeurs pour les paramètres géométriques internes du réseau ( $d = 2a$ ,  $D$  et  $L$ ), de même que la nature des principaux matériaux utilisés pour les fils (Ni, Co et alliages de CoFeB et de NiFe). Mentionnons que la couche d'or joue le rôle de cathode lors du processus d'électrodéposition et fait partie du plan de masse pour les dispositifs en hyperfréquences. Notons également qu'en général, les fils ne remplissent pas complètement les pores de la matrice (c.-à-d.,  $L < h$ ). Pour une description détaillée de la procédure de fabrication de nos réseaux, le lecteur pourra consulter les références [61, 147, 148].

Dans le cas de fils de taille nanométrique incorporés dans une matrice isolante, la limite QS s'applique, de sorte que les pertes par courants de Foucault, généralement associées aux métaux ferromagnétiques massifs, sont réduites de façon importante. Il en résulte que les réseaux de nanofils se comportent comme des isolants magnétiques effectifs, dont la permittivité



### Réseau de nanofils ferromagnétiques

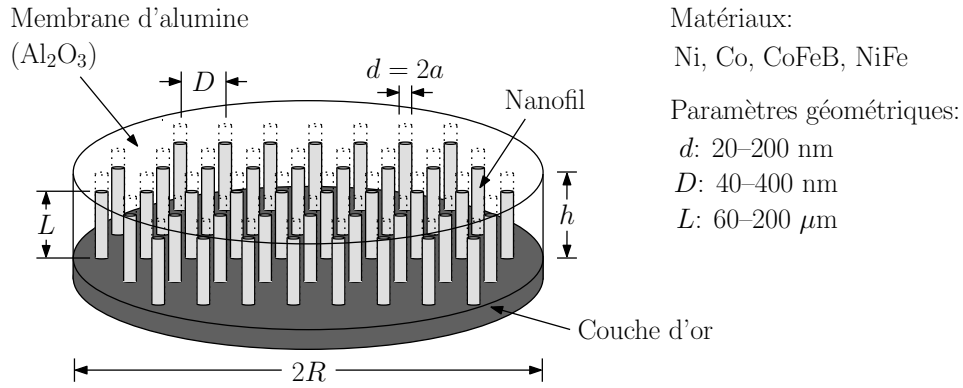


Figure 5.1 Représentation schématique d'un réseau de nanofils ferromagnétiques incorporés dans les pores d'une membrane diélectrique. La composition des fils et les paramètres géométriques des réseaux fabriqués au Laboratoire de magnétisme sont indiqués.

effective  $\epsilon_{\text{eff}}$  est contrôlée par les propriétés diélectriques de la matrice, les paramètres géométriques du réseau et le facteur de remplissage des pores, comme discuté au chapitre 4 [voir notamment l'équation (4.5)]. Pour cette raison, ces matériaux constituent une solution de remplacement intéressante aux matériaux ferrimagnétiques, tels que les ferrites spinelles, les grenats et les hexaferites [149, 150], lesquels sont utilisés actuellement dans des applications en hyperfréquences nécessitant une réponse non réciproque (p. ex., circulateurs et isolateurs) ou ajustable par un champ magnétique statique (p. ex., déphaseurs et filtres accordables). Dans ce contexte, plusieurs études récentes ont proposé des dispositifs basés sur les réseaux de nanofils, notamment des circulateurs [43, 45, 151], des isolateurs [42, 43], des déphaseurs non réciproques [44], des filtres [28, 152] et des absorbeurs [153, 154].

Par comparaison avec les matériaux ferrimagnétiques conventionnels, les réseaux de nanofils ferromagnétiques comportent plusieurs avantages [28, 40, 43, 155]. D'abord, le faible diamètre des fils et leur anisotropie de forme mènent à des réseaux dotés d'une rémanence élevée dans la direction parallèle à l'axe des fils (c.-à-d., normal au plan du réseau), ce qui rend possible leur utilisation à champ nul et sans aimant externe.<sup>1</sup> Ensuite, l'intégration directe des réseaux de nanofils à un substrat planaire assure leur compatibilité avec les circuits intégrés monolithiques en hyperfréquences et permet, en conjonction avec l'absence d'aimant externe, de réduire la taille des dispositifs. De plus, en raison de l'aimantation spontanée généralement plus importante des métaux ferromagnétiques, les réseaux de nanofils possèdent des fréquences d'opération plus élevées que celles de la plupart des ferrites spinelles et des

1. Signalons qu'en régime monopolaire, la porosité  $f$  du réseau doit toutefois demeurer inférieure à 0,33 pour que la direction facile d'anisotropie magnétique effective reste parallèle à l'axe des fils, comme discuté en 3.4.3.

grenats.<sup>2</sup> Enfin, comme nous le verrons dans ce chapitre, la dispersion de la perméabilité effective des réseaux de nanofils montre des caractéristiques uniques, comme une double résonance ferromagnétique à l'état non saturé et, en particulier, à la rémanence.

### 5.1.1 Propriétés magnétiques à l'état saturé

La réponse magnétique dynamique de réseaux saturés de nanofils ferromagnétiques a notamment été caractérisée par des mesures de résonance ferromagnétique du mode de précession uniforme en fonction du champ magnétique statique appliqué (grandeur et orientation), de la fréquence d'opération, des paramètres géométriques et de la composition des fils [57–61]. En particulier, des modèles de champ effectif ont permis de démontrer que l'anisotropie des réseaux est fortement dominée par les interactions dipolaires intra et interfils (en l'absence d'autres sources d'anisotropie, par exemple magnétocristalline). Toutefois, ces approches ne considèrent que la dépendance angulaire de la fréquence de résonance ferromagnétique et, par conséquent, ne proposent généralement pas d'expressions pour le tenseur gyrotrope de perméabilité effective du réseau.

Dans ce contexte, le formalisme que nous avons développé au chapitre 3 permet de décrire la réponse gyromagnétique effective de réseaux de nanofils ferromagnétiques. Pour le cas de nanofils avec  $a \lesssim 100$  nm, l'inégalité  $|k_w|a \ll 1$  est satisfaite dans les hyperfréquences, de sorte que l'approximation QS s'applique. Dans cette limite, des expressions pour les tenseurs de susceptibilités effective  $\bar{\bar{\chi}}_{\text{eff}}$  et effective externe  $\bar{\bar{\eta}}_{\text{eff}}$  en fonction du tenseur de susceptibilité intrinsèque  $\bar{\bar{\chi}}_w$  ont été établies aux équations (3.36) et (3.117), que nous rappelons ici

$$\left(\frac{\bar{\bar{\chi}}_{\text{eff}}}{f}\right)^{-1} = \bar{\bar{\chi}}_w^{-1} + (1-f)\bar{\bar{N}}_w, \quad (5.1a)$$

$$\left(\frac{\bar{\bar{\eta}}_{\text{eff}}}{f}\right)^{-1} = \bar{\bar{\chi}}_w^{-1} + \bar{\bar{N}}. \quad (5.1b)$$

Il est important de souligner que ces fonctions de réponse ont été dérivées en supposant que les fils remplissent complètement les pores de la matrice. Pour tenir compte du cas où la longueur  $L$  des fils est inférieure à la hauteur  $h$  des pores, nous devons multiplier  $\bar{\bar{\chi}}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\bar{\eta}}_{\text{eff}}$  par le facteur  $L/h$ . Autrement dit, lorsque  $L < h$ , les substitutions suivantes doivent être effectuées

$$\bar{\bar{\chi}}_{\text{eff}} \rightarrow (L/h)\bar{\bar{\chi}}_{\text{eff}}, \quad \bar{\bar{\eta}}_{\text{eff}} \rightarrow (L/h)\bar{\bar{\eta}}_{\text{eff}}. \quad (5.2)$$

---

2. Notons que des hexaferrites dotées d'une forte anisotropie uniaxiale dans la direction hors plan peuvent être utilisées à la rémanence et à des fréquences élevées. Par contre, ces matériaux demeurent difficilement compatibles avec la technologie des circuits intégrés planaires.

Nous devons également mentionner que contrairement aux expressions développées en régime EQS, la limite QS ne requiert pas que les fils soient aimantés selon leur axe. En effet, les relations QS pour  $\bar{\chi}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\eta}_{\text{eff}}$  demeurent formellement valides même si l'axe de gyrotropie ne coïncide pas avec l'axe des fils, à la condition d'utiliser les transformations unitaires appropriées pour exprimer  $\bar{\chi}_w$  et les tenseurs de désaimantation  $\bar{\bar{N}}_w$  et  $\bar{\bar{N}}$  dans un même système de coordonnées.<sup>3</sup>

Les équations (5.1a) et (5.1b), dérivées précédemment au chapitre 3, décrivent respectivement les réponses gyromagnétiques effective et effective externe de réseaux saturés de nanofils ferromagnétiques. Elles incorporent l'effet du champ magnétique statique, de la fréquence d'opération, des propriétés intrinsèques des fils, des paramètres géométriques du réseau et des interactions dipolaires à la fois statiques et dynamiques sur la réponse macroscopique du réseau. Dans ce chapitre, nous allons utiliser le modèle établi aux chapitres précédents comme point de départ pour traiter la réponse QS de réseaux *non saturés*, formés de deux populations de nanofils aimantées axialement mais antiparallèlement.

### 5.1.2 Réseaux non saturés et double résonance

L'anisotropie de forme intrinsèque des nanofils mène à des réseaux dotés d'une aimantation rémanente importante, ce qui rend possible le développement de dispositifs en hyperfréquences opérant en l'absence de champ magnétique statique appliqué [40]. Dans ce contexte, Saib *et al.* [156] ont réalisé un circulateur planaire basé sur les réseaux de nanofils et fonctionnant à l'état rémanent. Ils ont également proposé un modèle pour le tenseur de perméabilité effective, qui fait intervenir la rémanence normalisée du réseau et qui s'appuie sur un résultat précédent établi à l'état saturé [28].<sup>4</sup> En revanche, leur approche suppose implicitement que le réseau non saturé est constitué d'une seule population de nanofils et, par conséquent, ne prédit qu'un seul pic de résonance ferromagnétique.

Plus récemment, Encinas *et al.* [157] ont démontré la possibilité d'ajuster la position de la résonance ferromagnétique de réseaux dilués et autopolarisés (*self-biased*) de nanofils de cobalt en fonction de la configuration magnétique statique du réseau. Par l'intermédiaire de cycles de désaimantation, ils ont préparé différents états rémanents, caractérisés par la fraction relative de fils aimantés parallèlement et antiparallèlement au champ magnétique axial. Ils ont également introduit l'idée de dispositifs en hyperfréquences dont l'état magnétique statique peut être contrôlé par le champ appliqué.

---

3. Rappelons que l'axe de gyrotropie est défini par la direction de l'aimantation statique  $\mathbf{M}_{w0}$  et correspond au troisième axe du tenseur  $\bar{\chi}_w$ .

4. Notons que l'expression pour le tenseur de perméabilité effective  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  proposée à la référence [28] est dérivée de façon phénoménologique, c'est-à-dire en imposant que la fréquence de résonance des composantes de  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  coïncide avec l'équation (3.115).

Kou *et al.* [66] ont rapporté des résultats similaires dans le cas de réseaux denses de nanofils de NiFe, pour lesquels les interactions dipolaires interfils affectent substantiellement la réponse dans les hyperfréquences. Ils ont établi deux conditions de résonance, associées aux deux populations de fils bistables aimantées vers le haut et vers le bas, mais n'ont observé qu'un seul pic d'absorption en raison des capacités limitées de leur montage expérimental. Leurs expressions pour les fréquences de résonance s'appuient sur la formule de Kittel pour le mode de précession uniforme d'un ellipsoïde [118], à laquelle ils ont ajouté un terme de correction. Ce terme est donné par le produit de l'aimantation rémanente du réseau et d'un facteur géométrique qui incorpore l'effet des interactions dipolaires statiques le long de l'axe des fils. Leur approche néglige toutefois les interactions dipolaires dynamiques transverses à l'axe des fils, de sorte qu'à l'état saturé, leur résultat diffère du résultat attendu en régime monopolaire [57] [voir aussi l'équation (3.115)].

Au cours d'une récente étude [67], nous avons réalisé des mesures de résonance ferromagnétique large bande en configuration de ligne microruban, en vue d'étudier la réponse en hyperfréquences de réseaux denses de nanofils de CoFeB aimantés axialement et incorporés dans une membrane nanoporeuse d'alumine. En régime non saturé, nous avons observé deux pics de résonance, associés à la présence de deux populations de fils aimantés antiparallèlement. Nous avons généralisé le formalisme présenté aux chapitres 2 et 3 (voir également les références [32] et [35]), afin d'établir le tenseur de perméabilité effective d'un réseau formé de deux populations de nanofils bistables en interaction. Le modèle nous a permis de calculer le coefficient de transmission de la ligne microruban et d'obtenir des expressions explicites pour les fréquences de résonance des deux pics d'absorption. Nous avons constaté que la théorie rend bien compte de la dépendance de la position et de l'amplitude relative des deux pics de résonance en fonction du champ magnétique statique et de l'état rémanent du réseau. Dans une étude plus détaillée [68], dont le contenu fera l'objet de ce chapitre, nous avons présenté les hypothèses qui sous-tendent le modèle, obtenu le tenseur de perméabilité effective du réseau et dérivé les expressions analytiques pour les deux fréquences de résonance. De plus, nous avons validé expérimentalement le modèle de perméabilité effective et proposé une interprétation physique du phénomène de double résonance.

Enfin, De La Torre Medina *et al.* [69, 70] ont également observé et étudié le phénomène de double résonance dans les réseaux non saturés de nanofils ferromagnétiques. Ils ont développé des expressions valides en régime monopolaire pour les fréquences de résonance associées à chacune des deux populations, sans toutefois les confronter directement au formalisme de Kou *et al.* [66] et au nôtre [67, 68]. Leur modèle tient compte des interactions dipolaires statiques et dynamiques entre les fils d'une même population, mais néglige explicitement celles entre les fils de populations différentes (autrement dit, ils supposent que le réseau

est formé de deux sous-réseaux indépendants). Ils ont également validé leur modèle par des mesures de résonance ferromagnétique en fonction de la fréquence et en différents points de la courbe d'hystérésis (courbe majeure, courbes de renversement du premier ordre et états rémanents) sur des réseaux dilués de CoFe et de NiFe.

### 5.1.3 Organisation du chapitre

La structure du chapitre s'appuie sur celle de la référence [68]. Le modèle théorique est présenté à section 5.2. Nous généralisons alors la procédure d'homogénéisation définie et appliquée respectivement aux chapitres 2 et 3, dans le but de dériver, dans la limite QS, le tenseur de perméabilité effective  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  d'un réseau constitué de deux populations antiparallèles de nanofils bistables en interaction. Notre résultat final est donné à l'équation (5.10) et s'exprime de façon compacte en fonction des tenseurs de susceptibilité externe  $\bar{\eta}_{w\uparrow}$  et  $\bar{\eta}_{w\downarrow}$  des fils aimantés vers le haut et vers le bas. La résolution de l'équation du mouvement de l'aimantation des fils de chaque population nous permet ensuite d'obtenir des expressions explicites [Éq. (5.25)] pour les composantes diagonales et hors diagonales de  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$ , ce qui constitue le résultat principal de ce chapitre. Nous établissons également des relations pour les deux fréquences de résonance  $\omega_{\text{res}\pm}$  du réseau non saturé [Éq. (5.27)] et procédons à une analyse des modes propres qui leur sont associés. De plus, nous montrons que les formalismes de Kou *et al.* [66] et de De La Torre Medina *et al.* [69, 70] représentent des cas particuliers de notre modèle général. Enfin, la comparaison entre le modèle et l'expérience est présentée à la section 5.3 et discutée à la section 5.4. Nous constatons que l'accord entre la théorie et les résultats expérimentaux s'avère en général excellent.

## 5.2 Modèle théorique

### 5.2.1 Considérations préliminaires et configuration magnétique statique

Considérons un réseau de nanofils ferromagnétiques caractérisé par les paramètres géométriques indiqués à la figure 2.1 et soumis au champ magnétique statique  $\mathbf{H}_{\text{ext}0} = H_{\text{ext}0}\hat{\mathbf{z}}$  appliqué selon l'axe des fils. Dans le modèle théorique, nous supposons que la fraction du réseau occupée par les fils est donnée par la fraction surfacique des pores  $f = f_0 (\pi a^2/D^2)$ , où  $f_0$  un paramètre qui décrit la symétrie des pores. Comme indiqué à l'équation (5.2), le cas de fils de longueur  $L < h$  pourra être pris en compte en multipliant le tenseur de susceptibilité effective  $\bar{\chi}_{\text{eff}}$  du réseau par le facteur  $L/h$ .

Nous modélisons les fils individuels comme des ellipsoïdes monodomains aimantés axialement et caractérisés par une aimantation statique  $\mathbf{M}_{w0} = \pm M_s \hat{\mathbf{z}}$ , laquelle présente un comportement bistable en fonction du champ magnétique statique appliqué  $\mathbf{H}_{\text{ext}0}$ . Lorsque

$\mathbf{H}_{\text{ext}0}$  est assez élevé pour aligner l'aimantation de tous les fils dans la même direction, le réseau est saturé et possède une aimantation statique moyenne donnée par

$$\langle \mathbf{M}_0 \rangle = \pm f M_s \hat{\mathbf{z}} = \pm \langle M_{0s} \rangle \hat{\mathbf{z}}, \quad (5.3)$$

où le signe à choisir correspond à celui de  $H_{\text{ext}0}$ .

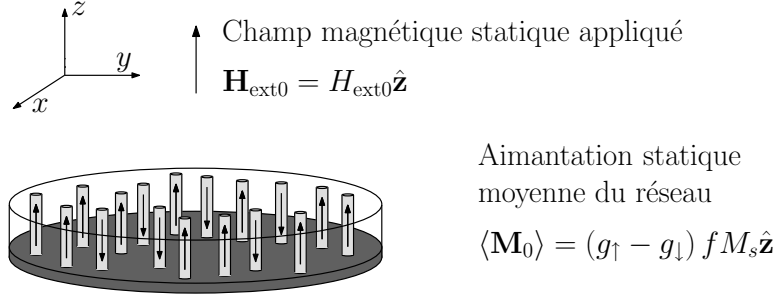


Figure 5.2 Représentation schématique d'un réseau non saturé soumis au champ magnétique statique externe  $\mathbf{H}_{\text{ext}0} = H_{\text{ext}0} \hat{\mathbf{z}}$  et formé de deux populations antiparallèles de nanofils bistables aimantés axialement. Le système de coordonnées cartésiennes  $xyz$  et l'aimantation statique moyenne  $\langle \mathbf{M}_0 \rangle$  du réseau sont également définis.

En régime non saturé, l'aimantation statique moyenne  $|\langle \mathbf{M}_0 \rangle| = \langle M_0 \rangle$  est inférieure à  $\langle M_{0s} \rangle$ . Nous posons alors l'hypothèse que cette réduction est causée par le renversement aléatoire de l'aimantation d'un certain nombre de fils du réseau, ce qui résulte en une distribution spatialement uniforme de deux populations de nanofils bistables aimantés antiparallèlement. Cette configuration magnétique est montrée à la figure 5.2 et possède une aimantation statique moyenne

$$\langle \mathbf{M}_0 \rangle = \langle M_0 \rangle \hat{\mathbf{z}} = (g_{\uparrow} - g_{\downarrow}) f M_s \hat{\mathbf{z}} = \Delta g f M_s \hat{\mathbf{z}} = \Delta f M_s \hat{\mathbf{z}}, \quad (5.4)$$

où  $g_{\uparrow}$  et  $g_{\downarrow}$  désignent les fractions de fils ayant leur aimantation orientée dans les directions positive et négative de l'axe  $z$ , respectivement. Ces deux quantités satisfont la relation  $g_{\uparrow} + g_{\downarrow} = 1$  et définissent le terme  $\Delta g = g_{\uparrow} - g_{\downarrow}$ , lequel doit être interprété comme l'aimantation moyenne du réseau dans la direction  $z$ , *normalisée* par son aimantation à saturation  $\langle M_{0s} \rangle = f M_s$ . Nous définissons également  $\Delta f = \Delta g f = f_{\uparrow} - f_{\downarrow}$ , avec  $f_{\uparrow, \downarrow} = g_{\uparrow, \downarrow} f$ . Suivant ces définitions, nous trouvons que  $\Delta g = \pm 1$  aux saturations positive (+) et négative (-), alors que  $\Delta g = 0$  et  $\langle \mathbf{M}_0 \rangle = 0$  (aimantation moyenne nulle) à la coercivité. De même, lorsque le champ appliqué est nul,  $\langle \mathbf{M}_0 \rangle = \langle M_{0r} \rangle \hat{\mathbf{z}}$ , où  $\langle M_{0r} \rangle$  représente l'aimantation rémanente du réseau. Dans cette limite,  $\Delta g_r = \langle M_{0r} \rangle / \langle M_{0s} \rangle$  correspond alors à la rémanence normalisée du réseau.

Avant de passer au traitement de la réponse dynamique du réseau de fils, il est important de souligner qu'obtenir la valeur de l'aimantation statique normalisée du réseau en fonction du champ appliqué, c'est-à-dire établir la relation fonctionnelle  $\Delta g(H_{\text{ext}0})$ , n'est pas trivial et implique la modélisation de la courbe d'hystérésis du réseau. Cet aspect dépasse le cadre de cette thèse. Par conséquent, la configuration magnétique statique  $\Delta g(H_{\text{ext}0})$  devra être déterminée à partir de mesures magnétométriques, puis utilisée à un champ appliqué  $H_{\text{ext}0}$  donné comme paramètre dans les calculs dynamiques en fonction de la fréquence.

### 5.2.2 Formalisme de Maxwell Garnett

Nous allons maintenant établir une expression théorique pour le tenseur de perméabilité effective  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  d'un réseau non saturé de nanofils bistables, aimantés axialement et distribués selon deux populations antiparallèles de fils en interaction. Pour la gamme de fréquences (1–100 GHz) et les paramètres géométriques des réseaux de nanofils ( $a \lesssim 100$  nm et  $D \lesssim 400$  nm) considérés dans le cadre de cette thèse, l'approximation QS est satisfaite [Éqs. (2.16) et (2.18)]. Par conséquent, l'aimantation des fils individuels est excitée dans un mode de précession uniforme et la réponse des fils ne dépend pas de  $k_w a$ .

Au chapitre 2, nous avons développé une procédure d'homogénéisation de Maxwell Garnett basée sur la satisfaction des conditions de continuité des champs à la surface d'une cellule unitaire équivalente plongée dans le milieu effectif (voir la figure 2.4). L'application de cette approche nous a notamment permis d'établir l'équation (3.20), qui exprime le tenseur de perméabilité effective  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  en régime EQS d'un réseau *saturé* en fonction du tenseur de susceptibilité externe  $\bar{\eta}_w$  des fils individuels.

Dans ce chapitre, nous allons maintenant généraliser cette méthode au traitement de la réponse QS d'un réseau *non saturé*, constitué de deux populations d'inclusions gyromagnétiques aimantées antiparallèlement et interagissant par l'intermédiaire des champs dipolaires. En particulier, nous allons montrer que l'équation (3.20) demeure formellement valide, à la condition de redéfinir le tenseur  $\bar{\eta}_w$  comme la somme des susceptibilités externes  $\bar{\eta}_{w\uparrow}$  et  $\bar{\eta}_{w\downarrow}$  des fils individuels de chaque population, pondérées par leurs proportions relatives respectives  $g_\uparrow$  et  $g_\downarrow$  [voir l'équation (5.11)].

La première étape pour obtenir  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  consiste donc à définir la réponse externe  $\bar{\eta}_{w\uparrow,\downarrow}$  d'un fil individuel de chaque population, laquelle permet de lier l'aimantation dynamique  $\mathbf{m}_{w\uparrow,\downarrow}$  du fil au champ local  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$ . Dans le cas d'une distribution uniforme et aléatoire des deux populations, tous les nanofils du réseau sont soumis au même champ local, lequel est orienté perpendiculairement à l'axe des fils. Le champ local  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$  agissant sur un fil donné est alors formé, d'une part, du champ externe  $\mathbf{h}_{\text{ext}}$ , qui provient de sources situées à l'extérieur de l'échantillon et, d'autre part, du champ  $\mathbf{h}_{\text{int}}$ , qui représente la somme des interactions dipo-



lares interfils dynamiques générées par la précession de l'aimantation de tous les autres fils du réseau. Par conséquent, le comportement de l'aimantation des fils dans le champ local est décrit par la relation constitutive suivante :

$$\mathbf{m}_{w\uparrow,\downarrow} = \bar{\bar{\eta}}_{w\uparrow,\downarrow} \mathbf{h}_{\text{loc}} = \begin{pmatrix} \eta_{\uparrow,\downarrow} & -i\eta_{t\uparrow,\downarrow} & 0 \\ i\eta_{t\uparrow,\downarrow} & \eta_{\uparrow,\downarrow} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{\parallel\uparrow,\downarrow} \end{pmatrix} \mathbf{h}_{\text{loc}}, \quad (5.5)$$

où le tenseur de susceptibilité externe  $\bar{\bar{\eta}}_{w\uparrow,\downarrow}$  de chaque population est caractérisé par des composantes transverses diagonales  $\eta_{\uparrow,\downarrow}$  et hors diagonales  $\eta_{t\uparrow,\downarrow}$ , dont les expressions explicites seront déterminées à la sous-section suivante. Soulignons que la composante axiale  $\eta_{\parallel\uparrow,\downarrow}$  n'intervient pas dans la configuration TM considérée ici et, par conséquent, ne sera pas étudiée de façon explicite dans le cadre de ce chapitre.

L'étape suivante du problème d'homogénéisation consiste à satisfaire les conditions aux frontières appropriées pour le champ et l'induction magnétiques à l'interface entre la cellule unitaire équivalente et le milieu effectif. Toutefois, pour un réseau non saturé, la présence des deux populations de fils requiert de définir deux cellules unitaires équivalentes. Ces cellules, associées aux populations aimantées vers le haut et vers le bas, possèdent des dimensions géométriques  $a$  et  $b = D/\sqrt{\pi f_0}$  identiques, mais se distinguent par la susceptibilité externe du fil placée en leur centre ( $\bar{\eta}_{w\uparrow}$  et  $\bar{\eta}_{w\downarrow}$ , respectivement) et par leur pondération dans les conditions aux frontières avec le milieu effectif ( $g_{\uparrow}$  et  $g_{\downarrow}$ , respectivement).

Le problème à résoudre est illustré à la figure 5.3. Comme à l'équation (3.15), le champ dans la matrice ( $a < \rho < b$ ) de chacune des cellules est composé du champ local  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$  incident sur le fil, de même que du champ dipolaire  $\mathbf{h}_{\text{scat}\uparrow,\downarrow}$  diffusé par celui-ci et exprimé en fonction de son tenseur de susceptibilité externe  $\bar{\eta}_{w\uparrow,\downarrow}$ . Il s'ensuit que l'équation (3.15) peut être généralisée comme

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{m\uparrow,\downarrow} &= \mathbf{h}_{\text{loc}} + \mathbf{h}_{\text{scat}\uparrow,\downarrow} \\ &= \mathbf{h}_{\text{loc}} + \frac{a^2}{2\rho^2} \left[ 2(\hat{\boldsymbol{\rho}} \otimes \hat{\boldsymbol{\rho}}) - \bar{\bar{I}} \right] \bar{\eta}_{w\uparrow,\downarrow} \mathbf{h}_{\text{loc}}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

où la forme matricielle de  $\left[ 2(\hat{\boldsymbol{\rho}} \otimes \hat{\boldsymbol{\rho}}) - \bar{\bar{I}} \right]$  en coordonnées cartésiennes est donnée à l'équation (3.16). Rappelons ici que l'induction dans la matrice s'obtient ensuite directement à partir de la relation  $\mathbf{b}_{m\uparrow,\downarrow} = \mu_0 \mathbf{h}_{m\uparrow,\downarrow}$ .

La procédure nécessite ensuite de lier  $\mathbf{h}_{m\uparrow,\downarrow}$  et  $\mathbf{b}_{m\uparrow,\downarrow}$  aux champs moyens  $\langle \mathbf{h} \rangle$  et  $\langle \mathbf{b} \rangle$ . Pour ce faire, nous devons satisfaire les conditions de continuité appropriées en  $\rho = b$ , que nous



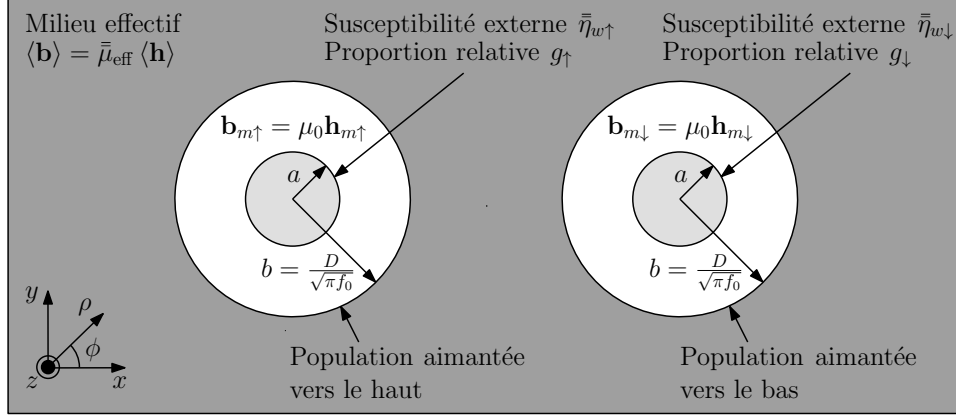


Figure 5.3 Définition du problème d'homogénéisation à résoudre pour déterminer le tenseur de perméabilité effective  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  d'un réseau non saturé formé de deux populations de nanofils bistables aimantés antiparallèlement. Les cellules unitaires équivalentes, de rayon  $b = D/\sqrt{\pi f_0}$ , sont associées aux populations aimantées vers le haut (proportion relative  $g_\uparrow$ ) et vers le bas (proportion relative  $g_\downarrow$ ) et incluent en leur centre un fil de rayon  $a$  et de susceptibilité externe  $\bar{\eta}_{w\uparrow}$  et  $\bar{\eta}_{w\downarrow}$ , respectivement. Les deux cellules sont plongées dans le milieu effectif de perméabilité  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$ , que nous cherchons à déterminer. Notons que pour chaque cellule, l'origine des systèmes de coordonnées coïncide avec le centre du fil.

généralisons en pondérant l'importance des champs associés à chaque cellule par sa proportion relative respective  $g_{\uparrow,\downarrow}$ . Les conditions aux frontières s'expriment alors comme

$$\langle h_y \rangle = g_\uparrow h_{m,y\uparrow} + g_\downarrow h_{m,y\downarrow} = - \left[ 1 - \frac{f}{2} (g_\uparrow \eta_\uparrow + g_\downarrow \eta_\downarrow) \right] h_{\text{loc}}, \quad (5.7a)$$

$$\langle b_x \rangle = g_\uparrow b_{m,x\uparrow} + g_\downarrow b_{m,x\downarrow} = i\mu_0 \left[ \frac{f}{2} (g_\uparrow \eta_{t\uparrow} + g_\downarrow \eta_{t\downarrow}) \right] h_{\text{loc}} \quad (5.7b)$$

en  $(\rho = b, \phi = 0, \pi)$  et

$$\langle h_x \rangle = g_\uparrow h_{m,x\uparrow} + g_\downarrow h_{m,x\downarrow} = -i \left[ \frac{f}{2} (g_\uparrow \eta_{t\uparrow} + g_\downarrow \eta_{t\downarrow}) \right] h_{\text{loc}}, \quad (5.8a)$$

$$\langle b_y \rangle = g_\uparrow b_{m,y\uparrow} + g_\downarrow b_{m,y\downarrow} = -\mu_0 \left[ 1 + \frac{f}{2} (g_\uparrow \eta_\uparrow + g_\downarrow \eta_\downarrow) \right] h_{\text{loc}} \quad (5.8b)$$

en  $(\rho = b, \phi = \pm\pi/2)$ , que nous pouvons combiner pour obtenir les expressions tensorielles

$$\langle \mathbf{h} \rangle = \left[ \bar{I} - f \bar{N}_w (g_{\uparrow} \bar{\eta}_{w\uparrow} + g_{\downarrow} \bar{\eta}_{w\downarrow}) \right] \mathbf{h}_{\text{loc}}, \quad (5.9a)$$

$$\langle \mathbf{b} \rangle = \mu_0 \left[ \bar{I} + f \left( \bar{I} - \bar{N}_w \right) (g_{\uparrow} \bar{\eta}_{w\uparrow} + g_{\downarrow} \bar{\eta}_{w\downarrow}) \right] \mathbf{h}_{\text{loc}}, \quad (5.9b)$$

où  $\bar{N}_w$  est donné à l'équation (2.2) avec  $N_{\text{ip}}^w \approx 1/2$  et  $N_{\text{op}}^w \approx 0$  dans la limite de fils très longs ( $L \gg d$ ). Soulignons qu'en régime saturé, les équations (5.7)–(5.9) se réduisent, comme attendu, aux équations (3.17)–(3.19). Enfin, en insérant l'équation (5.9a) dans  $\langle \mathbf{b} \rangle = \bar{\mu}_{\text{eff}} \langle \mathbf{h} \rangle$  [Éq. (2.20b)], puis en comparant le résultat avec l'équation (5.9b), nous obtenons notre expression générale pour le tenseur de perméabilité effective du réseau non saturé

$$\frac{\bar{\mu}_{\text{eff}}}{\mu_0} = \bar{I} + \bar{\chi}_{\text{eff}} = \bar{I} + f \left[ \bar{\eta}_w^{-1} - f \bar{N}_w \right]^{-1}, \quad (5.10)$$

où  $\bar{\chi}_{\text{eff}}$  est le tenseur de susceptibilité effective du réseau et

$$\bar{\eta}_w = g_{\uparrow} \bar{\eta}_{w\uparrow} + g_{\downarrow} \bar{\eta}_{w\downarrow} \quad (5.11)$$

est défini ici comme un tenseur de susceptibilité externe *équivalent*, qui représente la somme des réponses externes  $\bar{\eta}_{w\uparrow}$  et  $\bar{\eta}_{w\downarrow}$  associées aux deux populations, pondérées par leurs proportions relatives respectives  $g_{\uparrow}$  et  $g_{\downarrow}$ .

Il convient de souligner que l'introduction de  $\bar{\eta}_w$  à l'équation (5.10) mène à une expression pour  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  qui s'avère formellement identique à l'équation (3.20), valide dans le cas d'un réseau saturé formé d'une seule population de fils. Pour aller plus loin avec l'équation (5.10), nous devons dériver des expressions explicites pour les tenseurs de susceptibilité externe  $\bar{\eta}_{w\uparrow}$  et  $\bar{\eta}_{w\downarrow}$  des fils individuels aimantés vers le haut et vers le bas.

### 5.2.3 Réponse d'un fil individuel : tenseur de susceptibilité externe

Examinons maintenant la réponse externe de l'aimantation  $\mathbf{m}_{w\uparrow,\downarrow} = \bar{\eta}_{w\uparrow,\downarrow} \mathbf{h}_{\text{loc}}$  des fils individuels de chaque population en fonction du champ local. Le comportement dynamique d'un fil caractérisé par une aimantation totale

$$\mathbf{M}_{w\uparrow,\downarrow} = \pm M_s \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{m}_{w\uparrow,\downarrow} \quad (5.12)$$

peut être décrit par l'équation du mouvement de l'aimantation

$$\frac{\partial \mathbf{M}_{w\uparrow,\downarrow}}{\partial t} = -\mathbf{M}_{w\uparrow,\downarrow} \times \left( \mu_0 |\gamma| \mathbf{H}_{w\uparrow,\downarrow} - \frac{\alpha}{M_s} \frac{\partial \mathbf{M}_{w\uparrow,\downarrow}}{\partial t} \right), \quad (5.13)$$

où le terme  $\mathbf{H}_{w\uparrow,\downarrow} = \mathbf{H}_{w0\uparrow,\downarrow} + \mathbf{h}_{w\uparrow,\downarrow}$  représente la somme des champs statiques et dynamiques agissant sur les moments magnétiques à l'intérieur de chacun des fils. Dans le cas de fils longs ( $L \gg d$ ) et aimantés axialement, le facteur de désaimantation de forme axial  $N_{\text{op}}^w$  est essentiellement nul, de sorte que le champ statique total  $\mathbf{H}_{w0\uparrow,\downarrow}$  à l'intérieur d'un fil donné est constitué du champ appliqué  $\mathbf{H}_{\text{ext}0}$ , auquel s'ajoute le champ d'interaction interfil axial produit par tous les autres fils du réseau (c.-à-d., des *deux* populations). Il en résulte un champ statique interne identique pour les deux populations, qui vaut

$$\mathbf{H}_{w0\uparrow,\downarrow} = \mathbf{H}_{w0} = (H_{\text{ext}0} - \Delta g N_{\text{op}}^{\text{int}} M_s) \hat{\mathbf{z}}, \quad (5.14)$$

où  $N_{\text{op}}^{\text{int}}$  est l'élément hors plan (c.-à-d., axial) du tenseur d'interaction donné à l'équation (3.107). Ce terme dépend uniquement des paramètres géométriques du réseau et tend asymptotiquement vers la porosité  $f$  en régime monopolaire, où  $L \gg D$  et dans lequel nous nous plaçons dans le cadre de ce chapitre. L'équation (5.14) se réduit alors à

$$\mathbf{H}_{w0} = (H_{\text{ext}0} - \Delta g f M_s) \hat{\mathbf{z}} = (H_{\text{ext}0} - \Delta f M_s) \hat{\mathbf{z}}, \quad (5.15)$$

de sorte que selon le signe de  $\Delta g$ , le champ d'interaction statique sera parallèle ou antiparallèle à l'axe  $z$ . Pour le cas de longs fils caractérisés par des facteurs de désaimantation de forme transverses  $N_{\text{ip}}^w = 1/2$ , l'équation (3.31) liant le champ dynamique *transverse* à l'intérieur des fils au champ local se généralise comme

$$\mathbf{h}_{w\uparrow,\downarrow} = \mathbf{h}_{\text{loc}} - \frac{1}{2} \mathbf{m}_{w\uparrow,\downarrow}. \quad (5.16)$$

Enfin, la mise en commun des équations (5.15) et (5.16) permet d'écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{w\uparrow,\downarrow} &= \mathbf{H}_{w0} + \mathbf{h}_{w\uparrow,\downarrow} \\ &= (H_{\text{ext}0} - \Delta f M_s) \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{h}_{\text{loc}} - \frac{1}{2} \mathbf{m}_{w\uparrow,\downarrow}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Dans la limite des signaux de faible amplitude (c.-à-d.,  $|\mathbf{m}_{w\uparrow,\downarrow}| \ll M_s$  et  $|\mathbf{h}_{w\uparrow,\downarrow}| \ll |\mathbf{H}_{w0}|$ ) et pour une dépendance temporelle harmonique proportionnelle à  $e^{-i\omega t}$ , la substitution des équations (5.12) et (5.17) dans l'équation du mouvement (5.13) mène aux équations du mouvement linéarisées pour  $\mathbf{m}_{w\uparrow}$  et  $\mathbf{m}_{w\downarrow}$

$$i\omega \mathbf{m}_{w\uparrow} = \hat{\mathbf{z}} \times (\omega_M \mathbf{h}_{\text{loc}} - \omega_{\uparrow}^* \mathbf{m}_{w\uparrow}), \quad (5.18a)$$

$$-i\omega \mathbf{m}_{w\downarrow} = \hat{\mathbf{z}} \times (\omega_M \mathbf{h}_{\text{loc}} - \omega_{\downarrow}^* \mathbf{m}_{w\downarrow}), \quad (5.18b)$$

avec  $\omega_M = \mu_0 |\gamma| M_s$  et

$$\omega_{\uparrow,\downarrow}^* = \omega_{\uparrow,\downarrow} - i\alpha\omega = \left( \frac{\omega_M}{2} \pm \omega_H \right) - i\alpha\omega, \quad (5.19)$$

où

$$\omega_H = \mu_0 |\gamma| (H_{\text{ext}0} - \Delta f M_s) = \omega_0 - \Delta f \omega_M \quad (5.20)$$

et  $\omega_0 = \mu_0 |\gamma| H_{\text{ext}0}$  correspondent respectivement au champ statique interne et au champ statique appliqué exprimés en unités de fréquence angulaire. De plus, soulignons que les signes  $+$  et  $-$  à l'équation (5.19) réfèrent respectivement aux populations aimantées vers le haut ( $\uparrow$ ) et vers le bas ( $\downarrow$ ). Enfin, la résolution des équations (5.18a) et (5.18b) conduit au résultat cherché, soit au tenseur de susceptibilité externe de chacune des populations

$$\bar{\eta}_{w\uparrow,\downarrow} = \begin{pmatrix} \eta_{\uparrow,\downarrow} & -i\eta_{t\uparrow,\downarrow} & 0 \\ i\eta_{t\uparrow,\downarrow} & \eta_{\uparrow,\downarrow} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{\parallel\uparrow,\downarrow} \end{pmatrix}, \quad (5.21)$$

dont les composantes transverses diagonales et hors diagonales s'expriment comme

$$\eta_{\uparrow,\downarrow} = \frac{\omega_M \omega_{\uparrow,\downarrow}^*}{(\omega_{\uparrow,\downarrow}^*)^2 - \omega^2}, \quad \eta_{t\uparrow,\downarrow} = \pm \frac{\omega_M \omega}{(\omega_{\uparrow,\downarrow}^*)^2 - \omega^2}. \quad (5.22)$$

Le tenseur  $\bar{\eta}_{w\uparrow,\downarrow}$  décrit le comportement de l'aimantation  $\mathbf{m}_{w\uparrow,\downarrow}$  d'un fil individuel en fonction de la fréquence d'opération, du champ statique interne, de la forme du fil  $\bar{N}_w$  et de ses propriétés intrinsèques  $M_s$ ,  $g$  et  $\alpha$ . Les composantes diagonales et hors diagonales de  $\bar{\eta}_{w\uparrow}$  et  $\bar{\eta}_{w\downarrow}$  peuvent alors être substituées dans l'équation (5.11), ce qui mène au tenseur de susceptibilité externe équivalent  $\bar{\eta}_w$ , lequel prend en compte la configuration magnétique statique du réseau, c'est-à-dire les fractions relatives  $g_{\uparrow}$  et  $g_{\downarrow}$  de fils aimantés vers le haut et vers le bas.

Dans la limite de faible amortissement ( $\alpha \ll 1$ ), les fréquences de résonance dans le champ *local*  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$  des populations aimantées vers le haut et vers le bas sont égales à  $|\omega_{\uparrow}|$  et  $|\omega_{\downarrow}|$ , respectivement. En revanche, les deux pics observés expérimentalement correspondent aux conditions de résonance de la perméabilité effective  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$ , c'est-à-dire de la réponse du réseau au champ dynamique *moyen*  $\langle \mathbf{h} \rangle$ , laquelle sera formulée en 5.2.4. Or, les champs local

$\mathbf{h}_{\text{loc}}$  et moyen  $\langle \mathbf{h} \rangle$  diffèrent en raison des interactions interfils dynamiques liant les précessions de  $\mathbf{m}_{w\uparrow}$  et  $\mathbf{m}_{w\downarrow}$ . En effet, en insérant l'équation (5.5) pour  $\mathbf{m}_{w\uparrow}$  et  $\mathbf{m}_{w\downarrow}$  dans l'équation (5.9a), la relation entre  $\langle \mathbf{h} \rangle$  et  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$  devient

$$\langle \mathbf{h} \rangle = \mathbf{h}_{\text{loc}} - \bar{N}_w (f_{\uparrow} \mathbf{m}_{w\uparrow} + f_{\downarrow} \mathbf{m}_{w\downarrow}), \quad (5.23)$$

où les deux derniers termes du membre de droite correspondent aux champs dynamiques d'interaction exercés sur chacun des fils par l'ensemble des autres fils du réseau. L'équation (5.23) permet de faire ressortir le couplage entre les aimantations dynamiques  $\mathbf{m}_{w\uparrow}$  et  $\mathbf{m}_{w\downarrow}$  des deux populations ou, de façon équivalente, d'illustrer comment la réponse d'un fil de l'une ou l'autre des populations subit l'influence de l'aimantation dynamique des *deux* populations. Il est important de noter que ce couplage est habituellement pris en compte implicitement dans la procédure d'homogénéisation de Maxwell Garnett.

#### 5.2.4 Réponse du réseau de fils : tenseur de perméabilité effective

Nous pouvons maintenant obtenir la perméabilité effective  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  du réseau en substituant notre expression pour  $\bar{\eta}_w = g_{\uparrow} \bar{\eta}_{w\uparrow} + g_{\downarrow} \bar{\eta}_{w\downarrow}$  dans l'équation (5.10), ce qui mène à

$$\bar{\mu}_{\text{eff}} = \mu_0 \left( \bar{I} + \bar{\chi}_{\text{eff}} \right) = \begin{pmatrix} \mu_{\text{eff}} & -i\mu_{\text{eff},t} & 0 \\ i\mu_{\text{eff},t} & \mu_{\text{eff}} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\text{eff}\parallel} \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Nous constatons que  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  prend la forme d'un tenseur gyrotrope dont les composantes transverses diagonales et hors diagonales sont données explicitement par

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{\text{eff}}}{\mu_0} = 1 + \chi_{\text{eff}} = 1 + \frac{\omega_M}{\Omega_+ \Omega_-} & \left\{ f_{\uparrow} \omega_{\uparrow}^* [(\omega_{\downarrow}^*)^2 - \omega^2] + f_{\downarrow} \omega_{\downarrow}^* [(\omega_{\uparrow}^*)^2 - \omega^2] \right. \\ & \left. - \left( \frac{\omega_M}{2} \right) [(f_{\uparrow} \omega_{\downarrow}^* + f_{\downarrow} \omega_{\uparrow}^*)^2 - (\Delta f \omega)^2] \right\}, \end{aligned} \quad (5.25a)$$

$$\frac{\mu_{\text{eff},t}}{\mu_0} = \chi_{\text{eff},t} = \omega_M \omega \frac{f_{\uparrow} [(\omega_{\downarrow}^*)^2 - \omega^2] - f_{\downarrow} [(\omega_{\uparrow}^*)^2 - \omega^2]}{\Omega_+ \Omega_-}, \quad (5.25b)$$

où  $\chi_{\text{eff}}$  et  $\chi_{\text{eff},t}$  correspondent aux composantes transverses du tenseur de susceptibilité effective  $\bar{\chi}_{\text{eff}}$  du réseau de fil, avec  $\langle \mathbf{m} \rangle = \bar{\chi}_{\text{eff}} \langle \mathbf{h} \rangle$  et  $\langle \mathbf{m} \rangle = f_{\uparrow} \mathbf{m}_{w\uparrow} + f_{\downarrow} \mathbf{m}_{w\downarrow}$ . De plus, les termes  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$  au dénominateur de  $\mu_{\text{eff}}$  et  $\mu_{\text{eff},t}$  valent

$$\Omega_{\pm} = \omega^2 \mp \omega \left( 2\omega_H - \frac{\Delta f \omega_M}{2} \right) - \omega_{\uparrow}^* \omega_{\downarrow}^* + \frac{\omega_M}{2} (f_{\uparrow} \omega_{\downarrow}^* + f_{\downarrow} \omega_{\uparrow}^*). \quad (5.26)$$

Soulignons que la résolution des équations quadratiques  $\Omega_+ = 0$  et  $\Omega_- = 0$  pour  $\omega$  mène aux deux fréquences de résonance  $\omega_{\text{res}+}$  et  $\omega_{\text{res}-}$  du tenseur de perméabilité effective, lesquelles seront obtenues à la prochaine sous-section [Éq. (5.27)]. Pour sa part, la composante axiale  $\mu_{\text{eff}\parallel}$  n'intervient pas dans la configuration TM traitée ici. Elle s'exprime en fonction de  $\eta_{\parallel\uparrow}$  et  $\eta_{\parallel\downarrow}$  comme  $\mu_{\text{eff}\parallel} = \mu_0 (1 + f_{\uparrow} \eta_{\parallel\uparrow} + f_{\downarrow} \eta_{\parallel\downarrow})$  et ne montrera typiquement pas de comportement résonant dans le cas de nanofils aimantés axialement.

Nos expressions pour les composantes  $\mu_{\text{eff}}$  et  $\mu_{\text{eff},t}$  du tenseur de perméabilité effective  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  constituent le résultat principal de ce chapitre. Elles fournissent une description complète de la réponse gyromagnétique, complexe et dispersive des réseaux non saturés de nanofils ferromagnétiques bistables et aimantés axialement. En particulier, elles interviennent dans la constante de propagation qui gouverne l'interaction d'ondes électromagnétiques avec un réseau placé à l'intérieur d'une ligne de transmission. Enfin, rappelons qu'en accord avec l'équation (5.2), le remplissage partiel des pores par les nanofils peut être pris en compte en multipliant les composantes diagonales  $\chi_{\text{eff}}$  et hors diagonales  $\chi_{\text{eff},t}$  du tenseur de susceptibilité effective par le facteur  $L/h$ .

### 5.2.5 Conditions de résonance

Nous allons maintenant dériver des expressions explicites pour les fréquences de résonance du tenseur de perméabilité effective  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$ . Dans la limite des faibles pertes ( $\alpha \ll 1$ ), nous pouvons remplacer  $\omega_{\uparrow,\downarrow}^*$  par  $\omega_{\uparrow,\downarrow}$  dans l'équation (5.26), ce qui mène à deux équations quadratiques,  $\Omega_+ = 0$  et  $\Omega_- = 0$ , que nous pouvons résoudre pour  $\omega$ . Les deux solutions positives correspondent aux fréquences de résonance  $\omega_{\text{res}+}$  et  $\omega_{\text{res}-}$  de la perméabilité effective et s'expriment comme

$$\omega_{\text{res}\pm} = \frac{\omega_M}{2} \left\{ \left[ 1 - f + \left( \frac{\Delta f}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \mp \frac{\Delta f}{2} \right\} \pm \omega_H, \quad (5.27)$$

où nous rappelons que  $\omega_H = \omega_0 - \Delta f \omega_M$ .

Les fréquences  $\omega_{\text{res}\pm}$  donnent la position des deux pics d'absorption observés expérimentalement dans les réseaux non saturés de nanofils ferromagnétiques bistables et aimantés axialement. Par conséquent, lorsque les paramètres géométriques, les propriétés intrinsèques et les valeurs de  $H_{\text{ext}0}$  et  $\Delta g$  sont données, le modèle théorique permet de prédire à la fois la position et l'amplitude relative des deux pics de résonance, par l'intermédiaire des fréquences

de résonance  $\omega_{\text{res}\pm}$  et des composantes du tenseur de perméabilité effective  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$ , respectivement.

Pour un réseau saturé, nous avons  $\Delta g = \pm 1$ , de sorte que l'équation (5.27) se simplifie et coïncide, comme attendu, avec le résultat présenté initialement à la référence [57] et valide en régime monopolaire

$$\omega_{\text{res}\pm} = \frac{\omega_M}{2} (1 - 3f) \pm \omega_0. \quad (5.28)$$

Dans le cas d'un réseau non saturé, nous avons plutôt que  $|\Delta g| < 1$ , de sorte qu'il s'avère avantageux de réexprimer l'équation (5.27) comme

$$\omega_{\text{res}\pm} = \bar{\omega}_{\text{res}} \pm \frac{\Delta\omega_{\text{res}}}{2}, \quad (5.29)$$

où

$$\bar{\omega}_{\text{res}} = \frac{\omega_M}{2} \left[ \left( 1 - \frac{f}{2} \right)^2 - f_{\uparrow} f_{\downarrow} \right]^{1/2}, \quad (5.30)$$

$$\Delta\omega_{\text{res}} = 2 \left( \omega_0 - \frac{5}{4} \Delta f \omega_M \right) \quad (5.31)$$

représentent respectivement la moyenne et l'écart entre les fréquences de résonance  $\omega_{\text{res}+}$  et  $\omega_{\text{res}-}$ . Notons ici que le résultat  $(\Delta f)^2 = f^2 - 4f_{\uparrow}f_{\downarrow}$  a été utilisé pour obtenir, à partir de l'équation (5.27), notre expression pour  $\bar{\omega}_{\text{res}}$  sous la forme donnée à l'équation (5.30). L'équation (5.29) implique notamment que les deux pics sont confondus lorsque  $\Delta\omega_{\text{res}} = 0$ , ce qui correspond à un champ appliqué

$$H_{\text{ext}0} = \frac{5}{4} \Delta f M_s = \frac{5}{4} \langle M_{0s} \rangle \Delta g. \quad (5.32)$$

Soulignons toutefois que l'équation (5.32) demeure une condition *implicite* pour  $H_{\text{ext}0}$ , étant donné le comportement hystérétique non trivial montré par l'aimantation normalisée du réseau  $\Delta g(H_{\text{ext}0})$ , qui dépend elle-même du champ appliqué (voir notamment la figure 5.6).

À la rémanence, le champ appliqué  $H_{\text{ext}0}$  est nul (c.-à-d.,  $\omega_0 = 0$ ) et le réseau est autopolarisé. Il s'ensuit que l'écart entre les deux pics devient égal à  $\Delta\omega_{\text{res}} = -5\Delta f_r \omega_M/2$ , de sorte que l'équation (5.29) se réduit à

$$\omega_{\text{res}\pm} = \bar{\omega}_{\text{res}} \mp \frac{5}{4} \Delta f_r \omega_M, \quad (5.33)$$

où  $\Delta f_r = \Delta g_r f$ . Ce résultat indique qu'à l'état rémanent, la séparation entre les pics devient proportionnelle à la rémanence normalisée  $\Delta g_r$  du réseau, laquelle peut être ajustée par l'intermédiaire de cycles d'hystérésis mineurs.

### Interprétation physique de la solution

Exprimée sous la forme de l'équation (5.27), notre solution générale pour les fréquences de résonance manque de transparence, de sorte que la signification physique des différents termes qui contribuent à  $\omega_{\text{res}\pm}$  ne ressort pas explicitement. Pour mettre en évidence cet aspect, nous développons le terme sous la racine carrée dans l'équation (5.27) en série de Maclaurin au deuxième ordre par rapport à  $f$ , ce qui mène à la solution approximative

$$\omega_{\text{res}\pm} \approx \frac{\omega_M}{2} \left( 1 - f_{\uparrow,\downarrow} - \frac{f_{\uparrow}f_{\downarrow}}{2} \right) \pm (\omega_0 - f_{\uparrow}\omega_M + f_{\downarrow}\omega_M), \quad (5.34)$$

où nous avons utilisé la relation  $f_{\uparrow,\downarrow} = (f \pm \Delta f)/2$  pour exprimer le résultat de l'équation (5.34) en fonction de  $f_{\uparrow}$  et  $f_{\downarrow}$ . Notons que cette procédure est appropriée, puisque pour des réseaux de nanofils typiques, la valeur de  $f$  est généralement petite devant l'unité.

Nous allons maintenant identifier l'origine physique des six termes qui apparaissent dans l'expression pour  $\omega_{\text{res}\pm}$  donnée à l'équation (5.34). D'abord, à des fins d'interprétation, il est approprié d'associer  $\omega_{\text{res}+}$  et  $\omega_{\text{res}-}$  aux fréquences de résonance des populations aimantées vers le haut et vers le bas, respectivement.<sup>5</sup> Ensuite, nous pouvons séparer les six termes en trois contributions *dynamiques* et trois contributions *statiques*, que nous avons regroupées à l'intérieur de la première et de la seconde paires de parenthèses, respectivement.

D'une part, les trois champs dynamiques sont perpendiculaires à l'axe des fils et incluent le champ de désaimantation de forme des fils individuels  $\frac{1}{2}\omega_M$ , de même que deux champs d'interaction interfil. Ces deux champs correspondent à l'interaction entre l'aimantation du fil qui résonne à la fréquence  $\omega_{\text{res}\pm}$  et les champs dipolaires produits, d'une part, par tous les autres fils de la population résonante ( $-\frac{1}{2}f_{\uparrow}\omega_M$  pour  $\omega_{\text{res}+}$  et  $-\frac{1}{2}f_{\downarrow}\omega_M$  pour  $\omega_{\text{res}-}$ ) et, d'autre part, par tous les fils de la population non résonante ( $-\frac{1}{4}f_{\uparrow}f_{\downarrow}\omega_M$  à la fois pour  $\omega_{\text{res}+}$  et  $\omega_{\text{res}-}$ ).

D'autre part, les trois champs statiques sont orientés quant à eux parallèlement à l'axe des fils et comprennent le champ appliqué  $\pm\omega_0$ , de même que le champ d'interaction dipolaire axial  $\mp\Delta f\omega_M$  généré par les deux populations aimantées antiparallèlement. Ce dernier se

---

5. Nous verrons en 5.2.6 que cette association devient parfaitement rigoureuse seulement lorsque les développements de  $\omega_{\text{res}+}$  et  $\omega_{\text{res}-}$  par rapport à  $f$  sont limités au premier ordre [Éq. (5.35)]. En général, le pic d'absorption en  $\omega_{\text{res}+}$  ( $\omega_{\text{res}-}$ ) décrit *principalement* la résonance de la population aimantée vers le haut (bas), mais comporte tout de même une contribution non nulle provenant de la population aimantée vers le bas (haut).



décompose en une contribution  $\mp f_{\uparrow} \omega_M$  due à la population aimantée vers le haut et une contribution  $\pm f_{\downarrow} \omega_M$  due à la population aimantée vers le bas.

Or, pour la majorité des réseaux de nanofils considérés expérimentalement,  $f$  est assez faible par rapport à 1 pour que l'interaction dynamique entre les populations résonante et non résonante, laquelle est proportionnelle à  $f_{\uparrow} f_{\downarrow} \leq f^2/4 \ll 1$  [troisième terme à l'équation (5.34)], demeure négligeable. Dans ce contexte, un développement de l'équation (5.27) au premier ordre en  $f$  est généralement suffisant et mène à la relation approximative plus simple

$$\begin{aligned} \omega_{\text{res}\pm} &\approx \frac{\omega_M}{2} (1 - f_{\uparrow,\downarrow}) \pm (\omega_0 - f_{\uparrow} \omega_M + f_{\downarrow} \omega_M) \\ &= \frac{\omega_M}{2} (1 - f_{\uparrow,\downarrow}) \pm \omega_H. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Ce résultat correspond ainsi à l'équation (5.27) dans la limite où l'interaction dipolaire dynamique *interpopulation*, proportionnelle à  $f_{\uparrow} f_{\downarrow}$  à l'équation (5.34), peut être négligée.

Physiquement, l'équation (5.35) implique qu'à la fréquence  $\omega_{\text{res}+}$ , les fils aimantés vers le haut résonnent, alors que les fils aimantés vers le bas précessent avec une amplitude suffisamment faible pour que nous puissions les considérer comme étant figés et supposer alors que seule la composante statique de leur aimantation influence la résonance de la population aimantée vers le haut. En revanche, à la fréquence  $\omega_{\text{res}-}$ , les fils aimantés vers le bas entrent en résonance, alors que l'amplitude de précession des fils aimantés vers le haut est très faible, ce qui permet de considérer ces derniers comme étant immobiles et donc de supposer que seule la composante statique de leur aimantation modifie la résonance de la population aimantée vers le bas. Dans cette limite, les précessions de  $\mathbf{m}_{w\uparrow}$  et  $\mathbf{m}_{w\downarrow}$  n'interagissent pas entre elles, de sorte que le pic d'absorption en  $\omega_{\text{res}+}$  peut être associé exclusivement à la résonance de l'aimantation  $\mathbf{m}_{w\uparrow}$  de la population de fils aimantés vers le haut, alors que le pic en  $\omega_{\text{res}-}$  peut être associé exclusivement à la résonance de l'aimantation  $\mathbf{m}_{w\downarrow}$  de la populations de fils aimantés vers le bas.<sup>6</sup>

Enfin, à la rémanence, l'équation (5.35) se réduit à

$$\omega_{\text{res}\pm} \approx \frac{\omega_M}{2} \left[ 1 - \frac{f}{2} (1 \pm 5\Delta g_r) \right] \quad (5.36)$$

et varie linéairement avec la rémanence normalisée  $\Delta g_r$ .

---

6. Nous devons insister sur le fait que la précession de chacune des aimantations dynamiques  $\mathbf{m}_{w\uparrow}$  et  $\mathbf{m}_{w\downarrow}$  demeure toutefois toujours influencée par les champs dipolaires *statiques* produits par les *deux* populations.

## Comparaison avec la littérature

Nous allons maintenant comparer notre résultat pour les fréquences de résonance  $\omega_{\text{res}+}$  et  $\omega_{\text{res}-}$  avec les expressions proposées par Kou *et al.* [66] et De La Torre Medina *et al.* [69, 70]. Ces deux groupes ont établi des conditions de résonance pour le cas de réseaux non saturés de nanofils ferromagnétiques qui interagissent par l'intermédiaire des champs dipolaires. Toutefois, dans les deux cas, le traitement des interactions dipolaires demeurent incomplet. Nous allons montrer que leurs expressions représentent en fait deux cas particuliers de notre résultat général [Éq. (5.27)], que nous pouvons déduire directement en négligeant certains termes dans notre développement de  $\omega_{\text{res}\pm}$  au deuxième ordre par rapport à  $f$  [Éq. (5.34)].

Premièrement, le modèle établi par Kou *et al.* [66] inclut les interactions dipolaires statiques axiales, mais ne tient pas compte des interactions dynamiques transverses. Par conséquent, leur résultat peut être obtenu directement à partir de l'équation (5.34) en négligeant les deuxième et troisième termes dynamiques à l'intérieur de la première paire de parenthèses, ce qui mène à

$$\omega_{\text{res}\pm} \approx \frac{\omega_M}{2} (1 \mp 2\Delta f) \pm \omega_0. \quad (5.37)$$

Or, puisque leur condition de résonance a été établie pour des réseaux à l'état rémanent, nous posons  $\omega_0 = 0$  et  $\Delta f = \Delta f_r$  dans l'équation (5.37), ce qui nous permet de retrouver l'équation (4) de la référence [66]

$$\omega_{\text{res}\pm} \approx \frac{\omega_M}{2} (1 \mp 2\Delta f_r). \quad (5.38)$$

Ce résultat montre que l'approche développée par Kou *et al.* néglige implicitement les interactions dipolaires dynamiques perpendiculaires à l'axe des fils, d'une part au sein de la population résonante et d'autre part entre les populations résonante et non résonante. De plus, l'équation (5.37) se réduit à  $\omega_{\text{res}\pm} \approx \frac{1}{2}\omega_M (1 - 2f) \pm \omega_0$  dans le cas d'un réseau saturé, en désaccord avec le résultat de l'équation (5.28).

Deuxièmement, l'approche préconisée par De La Torre Medina *et al.* [69, 70] suppose que chacun des pics d'absorption observés expérimentalement est associé *exclusivement* à la résonance de l'une ou l'autre des deux populations. Cette hypothèse implique que le réseau est constitué de deux populations indépendantes, à l'intérieur desquelles les fils individuels interagissent par l'intermédiaire des interactions dipolaires à la fois statiques et dynamiques. Leurs expressions phénoménologiques pour  $\omega_{\text{res}+}$  et  $\omega_{\text{res}-}$  peuvent être obtenues à partir de notre résultat général en négligeant toutes les interactions dipolaires *interpopulations*, c'est-à-dire en omettant, dans l'équation (5.34), le terme dynamique  $-\frac{1}{4}f_{\uparrow}f_{\downarrow}\omega_M$ , ainsi que les termes statiques  $f_{\downarrow}\omega_M$  pour  $\omega_{\text{res}+}$  et  $f_{\uparrow}\omega_M$  pour  $\omega_{\text{res}-}$ . Il en résulte que

$$\begin{aligned}
\omega_{\text{res}\pm} &\approx \frac{\omega_M}{2} (1 - 3f_{\uparrow,\downarrow}) \pm \omega_0 \\
&= \frac{\omega_M}{2} \left[ 1 - \frac{3f}{2} (1 \pm \Delta g) \right] \pm \omega_0,
\end{aligned} \tag{5.39}$$

qui coïncide avec les équations (14) et (15) de la référence [70].

En terminant, il convient de mentionner que l'équation (5.39) représente également une interpolation linéaire entre le cas d'un réseau saturé, décrit par  $\omega_{\text{res}\pm} = \frac{1}{2}\omega_M (1 - 3f) \pm \omega_0$  lorsque  $f_{\uparrow,\downarrow} = f$ , et le cas d'un fil isolé, caractérisé par  $\omega_{\text{res}\pm} = \frac{1}{2}\omega_M \pm \omega_0$  lorsque  $f_{\uparrow,\downarrow} = 0$ . Cette interprétation nous semble erronée. En effet, ce résultat implique, par exemple, que la réponse d'un fil aimanté vers le haut placé à l'intérieur d'un réseau où tous les autres fils sont aimantés vers le bas (c.-à-d., avec  $\Delta f \approx -f$ ) est formellement identique à la réponse de ce même fil lorsque placé dans le vide. Cette conclusion résulte du fait que l'approche proposée aux références [69, 70] néglige explicitement toutes les interactions dipolaires *interpopulations*. En revanche, selon notre formalisme, un fil aimanté vers le haut placé dans un réseau de fils aimantés vers le bas (c.-à-d., avec  $f \approx f_{\downarrow}$ ) subira un champ statique d'interaction dipolaire égal à  $f_{\downarrow}\omega_M \approx f\omega_M$  et résonnera à la fréquence  $\omega_{\text{res}+} \approx \frac{1}{2}\omega_M (1 + 2f) + \omega_0$ , laquelle diffère de l'expression pour un fil isolé.<sup>7</sup>

### 5.2.6 Étude des modes propres

Le tenseur de perméabilité effective  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  obtenu à la sous-section 5.2.4 adopte la forme gyrotrope de l'équation (5.24) en coordonnées cartésiennes, c'est-à-dire lorsque les projections de  $\langle \mathbf{h} \rangle$  et  $\langle \mathbf{b} \rangle$  dans le plan perpendiculaire à l'axe de gyrotropie (c.-à-d., dans le plan  $xy$ ) s'expriment comme

$$\langle \mathbf{h}_{\perp} \rangle = \langle h_x \rangle \hat{\mathbf{x}} + \langle h_y \rangle \hat{\mathbf{y}}, \tag{5.40}$$

$$\langle \mathbf{b}_{\perp} \rangle = \langle b_x \rangle \hat{\mathbf{x}} + \langle b_y \rangle \hat{\mathbf{y}}. \tag{5.41}$$

Dans cette base, les éléments diagonaux et hors diagonaux de  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  sont donnés respectivement par les équations (5.25a) et (5.25b). Chacune de ces composantes possède deux pics de résonance distincts en  $\omega_{\text{res}+}$  et  $\omega_{\text{res}-}$  [sauf lorsque les pics coïncident, comme indiqué à l'équation (5.32)].

---

7. Notons que le résultat  $\omega_{\text{res}+} = \frac{1}{2}\omega_M (1 + 2f) + \omega_0$  peut être calculé directement en posant  $\Delta f = -f$  dans l'équation (5.27) pour  $\omega_{\text{res}+}$ .

Il est instructif d'obtenir les modes propres liés aux deux fréquences propres, de même que la susceptibilité effective scalaire à un seul pic associée à chacun de ces modes. Or, il est aisé de montrer que le tenseur de perméabilité effective gyrotrope devient diagonal dans une base circulaire et que, dans ce cas, les deux composantes transverses de  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  correspondent à des modes de polarisations circulaires droite et gauche (voir par exemple la référence [26], p. 13–14). Nous pouvons alors écrire que

$$\langle \mathbf{b}_{\perp} \rangle = \begin{pmatrix} \langle b_{+} \rangle \\ \langle b_{-} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{\text{eff}+} & 0 \\ 0 & \mu_{\text{eff}-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle h_{+} \rangle \\ \langle h_{-} \rangle \end{pmatrix}, \quad (5.42)$$

où  $\langle h_{\pm} \rangle = \langle h_x \rangle \mp i \langle h_y \rangle$  et  $\langle b_{\pm} \rangle = \langle b_x \rangle \mp i \langle b_y \rangle$ , de sorte que les signes du haut et du bas réfèrent aux modes de polarisations circulaires droite et gauche, respectivement.<sup>8</sup> De plus, les composantes circulaires de perméabilité effective  $\mu_{\text{eff}+}$  et  $\mu_{\text{eff}-}$  s'expriment en fonction des composantes transverses diagonales et hors diagonales comme

$$\mu_{\text{eff}\pm} = \mu_{\text{eff}} \pm \mu_{\text{eff},t}. \quad (5.43)$$

De façon équivalente, nous pouvons écrire  $\mu_{\text{eff}}$  et  $\mu_{\text{eff},t}$  en fonction des composantes circulaires

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{\mu_{\text{eff}+} + \mu_{\text{eff}-}}{2}, \quad \mu_{\text{eff},t} = \frac{\mu_{\text{eff}+} - \mu_{\text{eff}-}}{2}. \quad (5.44)$$

La substitution des équations (5.25a) et (5.25b) dans l'équation (5.43) permet alors d'obtenir des expressions explicites pour les composantes circulaires

$$\frac{\mu_{\text{eff}\pm}}{\mu_0} = 1 - \omega_M \frac{f_{\uparrow}(\omega_{\downarrow}^* \pm \omega) + f_{\downarrow}(\omega_{\uparrow}^* \mp \omega)}{\Omega_{\pm}}, \quad (5.45)$$

lesquelles adoptent une forme beaucoup plus compacte que celle de  $\mu_{\text{eff}}$  et  $\mu_{\text{eff},t}$ . L'équation (5.45) indique notamment que la fréquence propre  $\omega_{\text{res}+}$ , solution de  $\Omega_{+} = 0$ , correspond à un mode propre de polarisation circulaire droite, auquel est associée la perméabilité effective scalaire  $\mu_{\text{eff}+}$ . De même, la fréquence propre  $\omega_{\text{res}-}$ , solution de  $\Omega_{-} = 0$ , décrit plutôt un mode propre de polarisation circulaire gauche, auquel est associée la perméabilité effective scalaire  $\mu_{\text{eff}-}$ . Autrement dit, les composantes de perméabilité  $\mu_{\text{eff}+}$  et  $\mu_{\text{eff}-}$  possèdent chacune un seul pic de résonance, dont la position est donnée par  $\omega_{\text{res}+}$  et  $\omega_{\text{res}-}$ , respectivement.

L'équation (5.45) permet également de constater que les composantes circulaires  $\mu_{\text{eff}+}$  et  $\mu_{\text{eff}-}$  possèdent chacune un terme proportionnel à  $f_{\uparrow}$  et un terme proportionnel à  $f_{\downarrow}$ , lesquels représentent respectivement les contributions des populations de fils aimantés vers le haut et

---

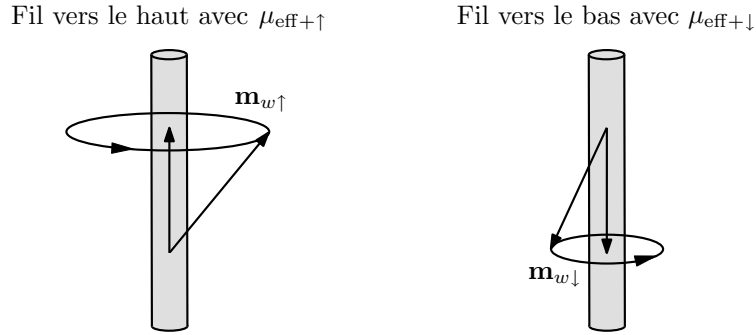
8. Mentionnons que la faible réponse dynamique parallèle à l'axe des nanofils n'est pas prise en compte dans l'équation (5.42).

vers le bas. Par conséquent, nous pouvons décomposer chacune des composantes circulaires comme la somme de deux termes, soit

$$\mu_{\text{eff}\pm} = \mu_{\text{eff}\pm\uparrow} + \mu_{\text{eff}\pm\downarrow}, \quad (5.46)$$

où  $\mu_{\text{eff}\pm\uparrow}$  et  $\mu_{\text{eff}\pm\downarrow}$  sont liés aux populations de fils aimantés vers le haut et vers le bas, respectivement.

- (a) Mode de polarisation circulaire droite avec perméabilité effective  $\mu_{\text{eff}+}$  à la fréquence propre  $\omega = \omega_{\text{res}+}$



- (b) Mode de polarisation circulaire gauche avec perméabilité effective  $\mu_{\text{eff}-}$  à la fréquence propre  $\omega = \omega_{\text{res}-}$

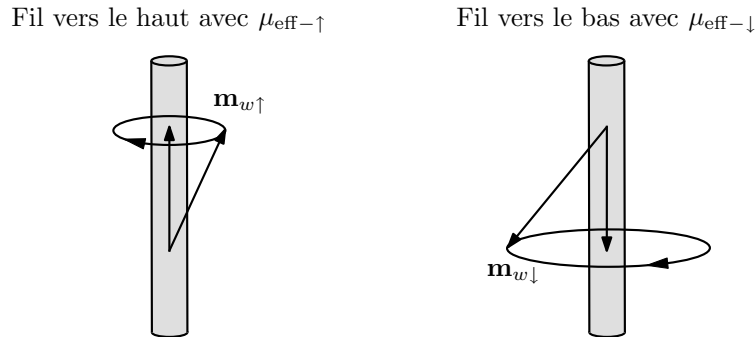


Figure 5.4 Représentation schématique de la précession de l'aimantation des fils aimantés vers le haut et vers le bas lorsqu'excités dans les modes propres du tenseur de perméabilité effective  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$ . (a) Mode de polarisation circulaire droite, de fréquence propre  $\omega_{\text{res}+}$  et de perméabilité effective scalaire  $\mu_{\text{eff}+}$ . Lorsque la fréquence d'excitation approche  $\omega_{\text{res}+}$ , nous trouvons que  $|\mathbf{m}_{w\uparrow}| \gg |\mathbf{m}_{w\downarrow}|$ . (b) Mode de polarisation circulaire gauche, de fréquence propre  $\omega_{\text{res}-}$  et de perméabilité effective scalaire  $\mu_{\text{eff}-}$ . Lorsque la fréquence d'excitation approche  $\omega_{\text{res}-}$ , nous trouvons que  $|\mathbf{m}_{w\uparrow}| \ll |\mathbf{m}_{w\downarrow}|$ .

Dans ce contexte, la figure 5.4 montre une représentation schématique de la précession de l'aimantation des fils aimantés vers le haut et vers le bas lorsqu'excités dans les modes

propres de polarisations circulaires droite et gauche. Un calcul direct permet de montrer que près de  $\omega_{\text{res}+}$ , la contribution de la population de fils aimantés vers le haut à la perméabilité  $\mu_{\text{eff}+}$  du mode de polarisation circulaire droite devient beaucoup plus importante que celle de la populations aimantée vers le bas, de sorte que  $|\mathbf{m}_{w\uparrow}| \gg |\mathbf{m}_{w\downarrow}|$ , comme montré à la figure 5.4(a). Au contraire, lorsque  $\omega$  s'approche de  $\omega_{\text{res}-}$ , la population de fils aimantés vers le bas gouverne la perméabilité  $\mu_{\text{eff}-}$  du mode de polarisation circulaire gauche et, par conséquent,  $|\mathbf{m}_{w\uparrow}| \ll |\mathbf{m}_{w\downarrow}|$ , comme illustré à la figure 5.4(b).

Compte tenu de ces considérations, les équations (5.25a) et (5.44) pour l'élément diagonal  $\mu_{\text{eff}}$  peuvent être simplifiées et exprimées sous la forme compacte

$$\frac{\mu_{\text{eff}}}{\mu_0} \approx 1 - \frac{\omega_M}{2} \left[ \frac{f_{\uparrow}(\omega_{\downarrow}^* + \omega)}{\Omega_+} + \frac{f_{\downarrow}(\omega_{\uparrow}^* + \omega)}{\Omega_-} \right], \quad (5.47)$$

où nous avons négligé les petites contributions à la susceptibilité effective dues à  $\mu_{\text{eff}+\downarrow}$  et  $\mu_{\text{eff}-\uparrow}$ . Dans cette limite, l'équation  $\Omega_{\pm} = 0$  est satisfaite en  $\omega = \omega_{\text{res}\pm}$ , où  $\omega_{\text{res}\pm}$  est donnée à l'équation (5.35). L'équation (5.47) prédit alors que les pôles situés en  $\omega_{\text{res}+}$  et  $\omega_{\text{res}-}$  correspondent *exclusivement* à la résonance des populations aimantées vers le haut (terme  $\propto f_{\uparrow}$ ) et vers le bas (terme  $\propto f_{\downarrow}$ ), respectivement.

## 5.3 Comparaison avec l'expérience

### 5.3.1 Méthode expérimentale

Nous allons maintenant comparer les prédictions du modèle avec l'expérience. Avant de débiter, il convient de mentionner que la fabrication des échantillons, la prise de mesures et l'extraction des données expérimentales considérées au cours de cette section ont été effectuées par M. Louis-Philippe Carignan, étudiant au doctorat en génie physique. En revanche, l'analyse des résultats expérimentaux, la comparaison avec le modèle théorique et la discussion ont été réalisées par l'auteur de cette thèse.

Les mesures expérimentales en hyperfréquences ont été obtenues en configuration de ligne microruban, dans laquelle le réseau de nanofils joue le rôle de substrat, comme montré à la figure 5.5. Une procédure d'anodisation en deux étapes [147, 148] a d'abord été utilisée pour la fabrication de la membrane nanoporeuse d'alumine. Des images obtenues par microscopie électronique à balayage ont révélé un arrangement quasi hexagonal des pores, caractérisé par un diamètre moyen  $d = 45$  nm et une distance interpore moyenne  $D = 110$  nm. Une couche d'adhésion en titane (15 nm) et une couche d'or (1  $\mu\text{m}$ ) ont été successivement déposées sur un des côtés de la membrane d'alumine, préalablement à l'électrodéposition de nanofils amorphes de  $\text{Co}_{94}\text{Fe}_5\text{B}_1$  à l'intérieur des pores ( $h = 220$   $\mu\text{m}$ ) de la membrane d'alumine [61].

La couche d'or, qui a servi de cathode lors du processus d'électrodéposition, a ensuite été fixée au plan de masse de cuivre ( $500\ \mu\text{m}$ ) de la ligne microruban à l'aide de colle époxy conductrice à l'argent. Un processus de lithographie a alors été utilisé pour obtenir une ligne microruban d'une largeur de  $0,5\ \text{mm}$  et d'une longueur de  $16\ \text{mm}$  sur le réseau de nanofils de CoFeB. Enfin, une transition de type coaxial-microruban a permis de connecter un analyseur de réseau vectoriel à la ligne microruban. Notons ici que l'ajustement de la largeur de la ligne microruban à des fins d'adaptation d'impédances n'était pas critique, puisque l'objectif principal de la procédure expérimentale consistait à extraire la perméabilité effective du réseau de nanofils, en vue de la comparer au modèle théorique.

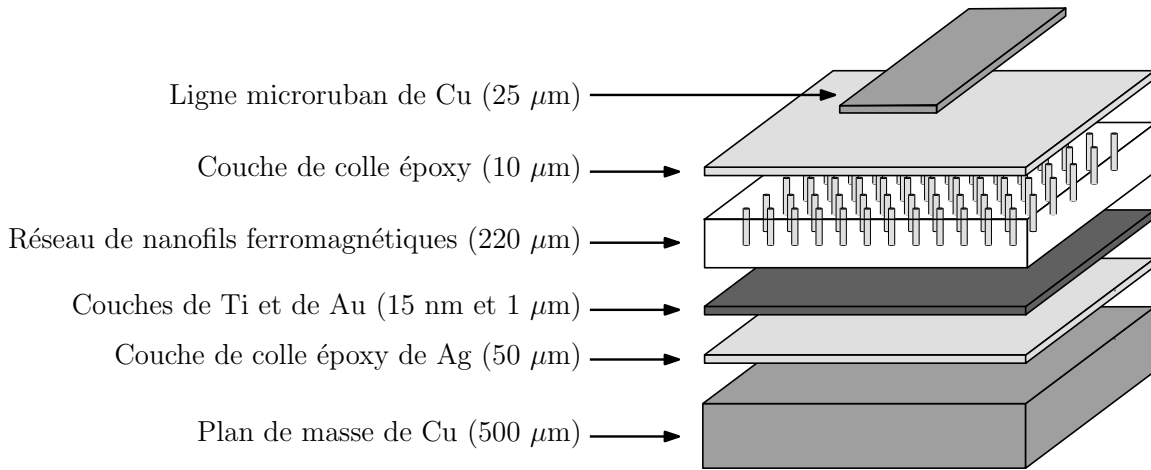


Figure 5.5 Vue en éclaté de la ligne microruban à l'intérieur de laquelle est incorporé le réseau de nanofils ferromagnétiques et définition de la valeur des paramètres géométriques pertinents.

Un magnétomètre à échantillon vibrant a été utilisé pour obtenir des courbes d'hystérésis vectorielles d'un réseau de nanofils de CoFeB provenant de la membrane ayant servi pour la fabrication de la ligne microruban. La figure 5.6 montre la composante d'aimantation normalisée  $\Delta g = \langle M_0 \rangle / \langle M_{0s} \rangle$  (courbe continue), mesurée parallèlement au champ magnétique statique  $H_{\text{ext}0}$  appliqué le long de l'axe des nanofils. Pour toutes les mesures effectuées, la composante de l'aimantation *perpendiculaire* au champ appliqué était négligeable, en accord avec notre hypothèse de deux populations antiparallèles de nanofils bistables. La figure 5.6 présente également six cycles d'hystérésis mineurs (courbes tiretées) débutant à des champs de renversement  $H_r$  allant de  $-2,5\ \text{kOe}$  à  $0\ \text{kOe}$ , par pas de  $0,5\ \text{kOe}$ . Ces cycles mineurs permettent d'ajuster la valeur de  $\Delta g_r = \langle M_{0r} \rangle / \langle M_{0s} \rangle$  à champ nul et ainsi de préparer des états rémanents spécifiques. Les carrés et les cercles indiquent les configurations magnétiques

statiques correspondant aux spectres de perméabilité considérés dans ce qui suit et montrés aux figures 5.7 et 5.9, respectivement. La courbe en trait pointillé correspond quant à elle à la condition de coïncidence des pics [Éq. (5.32)], calculée en utilisant  $M_s = 1400$  kA/m et  $f = 0,12$  comme paramètres. Notons que la droite résultante croise la branche supérieure de la courbe d'hystérésis majeure à  $H_{\text{ext}0} \approx 2,6$  kOe et  $\Delta g \approx 1$ . Enfin, la figure en médaillon montre le comportement de l'aimantation rémanente normalisée  $\Delta g_r = \langle M_{0r} \rangle / \langle M_{0s} \rangle$  en fonction du champ de renversement  $H_r$ .

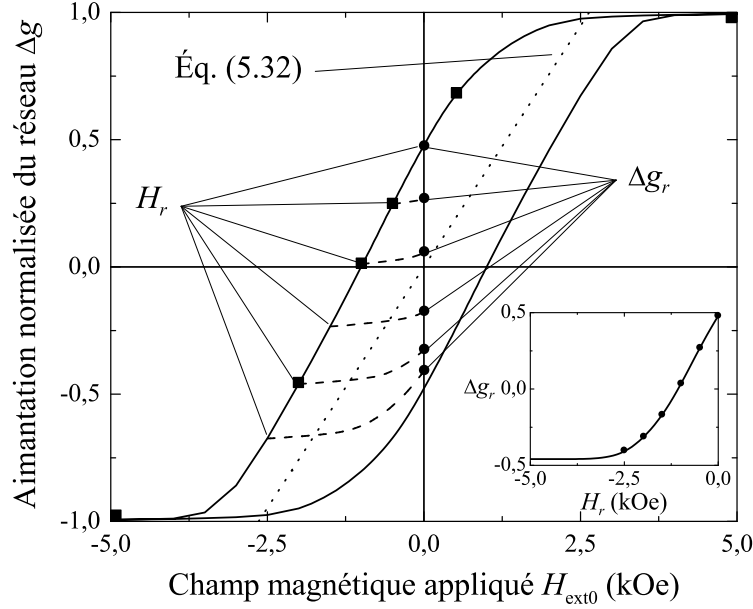


Figure 5.6 Courbe d'hystérésis majeure (trait continu) de l'aimantation normalisée  $\Delta g = \langle M_0 \rangle / \langle M_{0s} \rangle$  d'un réseau de nanofils de CoFeB, mesurée parallèlement au champ magnétique statique axial  $H_{\text{ext}0}$ . Les traits tiretés représentent des courbes d'hystérésis mineures mesurées pour plusieurs valeurs du champ de renversement  $H_r$  et menant à différentes aimantations rémanentes normalisées  $\Delta g_r = \langle M_{0r} \rangle / \langle M_{0s} \rangle$ . Les carrés et les cercles indiquent les configurations magnétiques correspondant aux spectres de perméabilité montrés aux figures 5.7 et 5.9, respectivement. La courbe en trait pointillé illustre la condition de coïncidence des pics [Éq. (5.32)], calculée avec  $M_s = 1400$  kA/m et  $f = 0,12$ . La figure en médaillon montre le comportement de l'aimantation rémanente normalisée du réseau  $\langle M_{0r} \rangle / \langle M_{0s} \rangle$  en fonction du champ de reversement  $H_r$ . Notons que  $1 \text{ kOe} = 1000/4\pi \approx 79,58$  kA/m dans le Système international d'unités (SI).

Des mesures de résonance ferromagnétique large bande en configuration de ligne microruban ont été réalisées afin de confronter notre modèle de perméabilité effective à des données expérimentales. Les paramètres de réflexion  $S_{11}$  et de transmission  $S_{21}$  de la ligne microruban ont été mesurés en fonction de la fréquence (1–40 GHz), pour plusieurs états magnétiques statiques, correspondant à différentes valeurs de  $H_{\text{ext}0}$  et  $\Delta g$ . Le paramètre  $S_{21}$  tient compte



des pertes en transmission dans la structure et est directement relié à la puissance absorbée à la résonance ferromagnétique (c.-à-d., un minimum dans la transmission correspond à un maximum dans l'absorption). Soulignons ici que la partie de l'énergie électromagnétique réfléchie et les défauts d'adaptation d'impédances, décrits par le paramètre  $S_{11}$  et montrés à la référence [43], n'ont pas fait l'objet d'un ajustement particulier en vue d'obtenir une structure adaptée de façon optimale et dotée d'une impédance caractéristique spécifique. Encore un fois, cette situation ne posait pas de problèmes significatifs dans le cadre de cette thèse, puisque nous mettions surtout l'accent sur la validation du formalisme pour le tenseur de perméabilité effective.

Nous faisons l'hypothèse que la ligne microruban supporte un mode fondamental de propagation quasi transverse électromagnétique (TEM), pour lequel les champs dynamiques électrique et magnétique sont respectivement parallèle et perpendiculaire à l'axe des fils (voir notamment la référence [142], p. 59). Par conséquent, la direction de propagation de l'onde est transverse à l'aimantation statique du réseau. Pour un milieu *non borné*, la perméabilité scalaire qui caractérise la propagation d'ondes électromagnétiques dans cette configuration est la perméabilité effective de Voigt, donnée par  $\mu_{\text{eff}\perp} = (\mu_{\text{eff}}^2 - \mu_{\text{eff},t}^2)/\mu_{\text{eff}}$ . Cependant, pour le cas considéré ici, qui correspond à la propagation d'ondes *guidées* à l'intérieur d'une structure bornée, c'est plutôt la composante diagonale  $\mu_{\text{eff}}$  [Éq. (5.25a)] qui intervient dans la constante de propagation de la ligne microruban et qui doit être comparée à la perméabilité extraite des paramètres  $S$  mesurés [134, 158].

Une procédure numérique similaire à la méthode d'optimisation de transmission/réflexion établie par Baker-Jarvis *et al.* [159] a par la suite été utilisée pour extraire, à partir des paramètres  $S$  mesurés, des valeurs expérimentales pour la permittivité  $\epsilon_c$  et la perméabilité  $\mu_c$  caractéristiques de la ligne microruban, qui définissent l'impédance caractéristique  $Z_c = \sqrt{\mu_c/\epsilon_c}$  et la constante de propagation  $k_c = \omega\sqrt{\epsilon_c\mu_c}$  de la structure dans le mode quasi TEM [142]. La référence [159] utilise des développements en séries de Laurent tronqués pour extraire  $\epsilon_c$  et  $\mu_c$  à partir des paramètres  $S$  mesurés. Or, dans le cas traité ici, nous avons plutôt supposé des profils spectraux correspondant à une réponse complexe non dispersive pour  $\epsilon_c$  et à une double lorentzienne pour  $\mu_c$ , comme attendu des équations (4.5) et (5.25), respectivement.

La perméabilité caractéristique  $\mu_c$  dépend à la fois de la perméabilité effective  $\mu_{\text{eff}}$  du réseau de nanofils (composante diagonale de  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$ ) et des paramètres géométriques de la ligne microruban. De façon générale, la présence de champs de fuite dans l'air impliquent que la valeur de  $\mu_c$  est inférieure à celle de  $\mu_{\text{eff}}$ . Des relations exprimant  $\mu_c$  en fonction de  $\mu_{\text{eff}}$ , basées sur un facteur de remplissage en hyperfréquences, ont été proposées dans la littérature, notamment par Pucel et Massé [160]. Leur approche requiert toutefois que le substrat de la

ligne microruban (c.-à-d., le réseau de nanofils dans la cas étudié ici) possède une perméabilité isotrope, dont la partie réelle demeure strictement positive, ce qui n'est pas le cas des réseaux de nanofils ferromagnétiques. De plus, la présence d'une couche d'époxy de faible permittivité et d'épaisseur de  $10\ \mu\text{m}$  entre la ligne microruban de cuivre et le réseau de nanofils (voir la figure 5.5), ainsi que le remplissage incomplet des pores par les nanofils augmentent substantiellement les champs de fuite dans la structure, ce qui réduit davantage la perméabilité caractéristique  $\mu_c$  de la ligne microruban par rapport à la perméabilité effective  $\mu_{\text{eff}}$  du réseau de nanofils prédite par le modèle.

Sur la base de ces considérations, on peut s'attendre à ce qu'un facteur *a priori* inconnu, mais lié à la fois au remplissage incomplet des pores par les nanofils et aux paramètres géométriques de la ligne microruban, modifie la perméabilité  $\mu_{\text{eff}}$  calculée par le modèle. Dans ce contexte, nous avons constaté que l'ensemble des spectres expérimentaux pour  $\mu_c$  peuvent être bien décrits par l'équation (5.25a) pour  $\mu_{\text{eff}} = \mu_0 (1 + \chi_{\text{eff}})$ , à la condition d'utiliser la relation empirique suivante, sous la forme proposée par Dionne et Oates [161] :

$$\mu_c = \mu_0 (1 + q\chi_{\text{eff}}) = \mu_0 + q (\mu_{\text{eff}} - \mu_0), \quad (5.48)$$

où  $q$  est un facteur de remplissage géométrique déterminé expérimentalement. L'effet de  $q$  est alors équivalent à celui de diluer la susceptibilité magnétique effective  $\chi_{\text{eff}}$  d'un facteur  $q$ . Cette procédure est justifiée, d'une part, par l'incorporation du réseau à l'intérieur de la ligne microruban et, d'autre part, par le remplissage incomplet des pores de la matrice par les fils (autrement dit, le facteur  $q$  fait notamment intervenir le rapport  $L/h$ ). Or, comme nous allons le constater dans ce qui suit, une valeur unique,  $q = 0,13$ , nous a permis de rendre compte de tous les résultats expérimentaux, sans ajustement supplémentaire des données. La modélisation du facteur  $q$  en fonction des paramètres de la ligne microruban dépasse toutefois le cadre de cette thèse.

Tableau 5.1 Paramètres physiques utilisés dans les calculs théoriques pour modéliser les résultats expérimentaux.

Paramètre	Symbole (unités)	Valeur
Aimantation spontanée	$M_s$ (kA/m)	1400
Facteur gyromagnétique	$g$	2,26
Paramètre d'amortissement de Gilbert	$\alpha$	0,06
Fraction volumique occupée par les nanofils	$f$	0,12
Facteur de remplissage géométrique	$q$	0,13

### 5.3.2 Double résonance ferromagnétique

Considérons d'abord les spectres de perméabilité obtenus en balayant le champ appliqué de 5 kOe à  $-5$  kOe en suivant la branche supérieure de la courbe d'hystérésis majeure. La figure 5.7 montre les parties réelle et imaginaire de la perméabilité caractéristique relative  $\mu_c/\mu_0$  en fonction de la fréquence pour les six valeurs du champ magnétique appliqué indiquées par des carrés à la figure 5.6. Les spectres considérés couvrent des états magnétiques statiques allant de la saturation positive à la saturation négative. Les courbes tiretées correspondent à la perméabilité caractéristique extraite des paramètres  $S$  mesurés, alors que les courbes continues représentent la perméabilité caractéristique théorique obtenue à partir de l'équation (5.48), avec  $q = 0,13$  et  $\mu_{\text{eff}}$  donné par l'équation (5.25a), elle-même calculée à l'aide des paramètres du tableau 5.1. Il est important de souligner qu'un seul ensemble de paramètres a été utilisé dans le calcul de toutes les courbes théoriques présentées dans ce chapitre.

La figure 5.7 démontre que le modèle rend compte de façon satisfaisante de la position, de la forme, de la largeur et de l'amplitude des spectres de perméabilité à deux pics obtenus à différentes valeurs du champ appliqué  $H_{\text{ext}0}$  et de la configuration magnétique statique  $\Delta g(H_{\text{ext}0})$  qui lui est associée. L'accord est particulièrement bon à la saturation, où la perméabilité effective ne possède qu'un seul pic d'absorption [Figs. 5.7(a) et 5.7(f)], de même que pour les états non saturés caractérisés par deux pics distincts, relativement éloignés l'un de l'autre et d'amplitudes nettement différentes [Figs. 5.7(b) et 5.7(c)]. Certains désaccords sont toutefois observés pour les spectres montrant deux pics relativement rapprochés et d'amplitudes similaires [Figs. 5.7(d) et 5.7(e)]. Dans ces deux derniers cas, pour lesquels la proportion de fils aimantés vers le bas compense ou excède la proportion de fils aimantés vers le haut, le modèle tend à surestimer la fréquence de résonance du pic à plus basse fréquence et donc à sous-estimer la séparation entre les pics observée expérimentalement.

### 5.3.3 Interactions dipolaires

La figure 5.8 montre le comportement des deux fréquences de résonance  $\omega_{\text{res}+}$  et  $\omega_{\text{res}-}$  en fonction du champ magnétique statique appliqué le long de la branche supérieure de la courbe d'hystérésis majeure. Les calculs théoriques, obtenus à partir de l'équation (5.27), et les données expérimentales sont désignés par des traits continus et des carrés, respectivement. La portion tiretée de chaque courbe théorique indique l'intervalle de valeurs pour le champ appliqué à l'intérieur duquel le pic prédit en  $\omega_{\text{res}+}$  ou  $\omega_{\text{res}-}$  n'est pas observé dans la perméabilité effective (c.-à-d.,  $H_{\text{ext}0}$  inférieur à  $-2,5$  kOe pour  $\omega_{\text{res}+}$  et supérieur à  $1$  kOe pour  $\omega_{\text{res}-}$ ). En effet, ces régions correspondent à des configurations magnétiques statiques avec

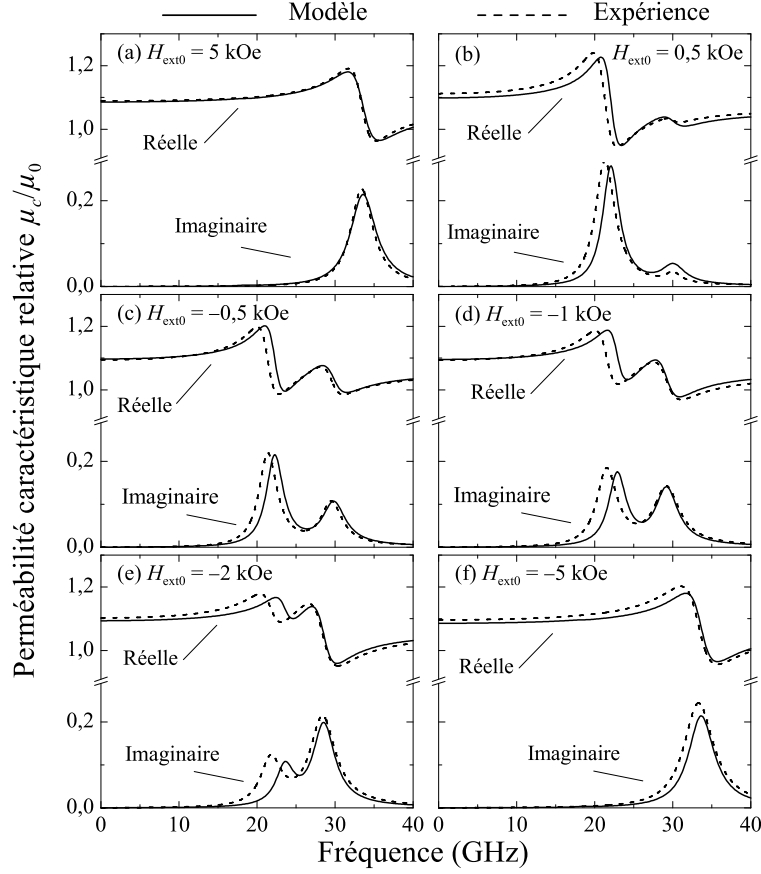


Figure 5.7 Parties réelle et imaginaire de la perméabilité caractéristique relative  $\mu_c/\mu_0$  en fonction de la fréquence pour le réseau de nanofils de CoFeB placé dans les différents états magnétiques statiques ( $H_{\text{ext}0}$ ,  $\Delta g$ ) indiqués par des carrés à la figure 5.6 et situés sur la branche supérieure de la courbe d'hystérésis majeure. (a) (5, 0,99), (b) (0,5, 0,67), (c) (-0,5, 0,25), (d) (-1, 0,001), (e) (-2, -0,46) et (f) (-5, -0,99). Les courbes tiretées représentent les données expérimentales extraites des paramètres  $S$  mesurés. Les courbes continues correspondent aux expressions théoriques obtenues à partir de l'équation (5.48) avec  $q = 0,13$  et  $\mu_{\text{eff}}$  donné par l'équation (5.25a), elle-même calculée à l'aide des paramètres du tableau 5.1. Notons que  $1 \text{ kOe} = 1000/4\pi \approx 79,58 \text{ kA/m}$  en unités SI.

$|\Delta g| \gtrsim 0,75$ , pour lesquelles la proportion relative de l'une des deux populations est trop faible pour produire une réponse significative, de sorte que le réseau se comporte, à toutes fins pratiques, comme un matériau effectif saturé, décrit par l'équation (5.28).

De façon générale, les résultats de la figure 5.8 démontrent que les fréquences de résonance sont bien décrites par le modèle théorique [Éq. (5.27)]. Le comportement en champ appliqué des deux pics de résonance peut être décrit en considérant les interactions dipolaires agissant sur chaque population de fils en fonction de  $\Delta g(H_{\text{ext}0})$  [67, 68]. Pour des champs appliqués supérieurs à 1 kOe et inférieurs à -2,5 kOe, le réseau est essentiellement saturé.

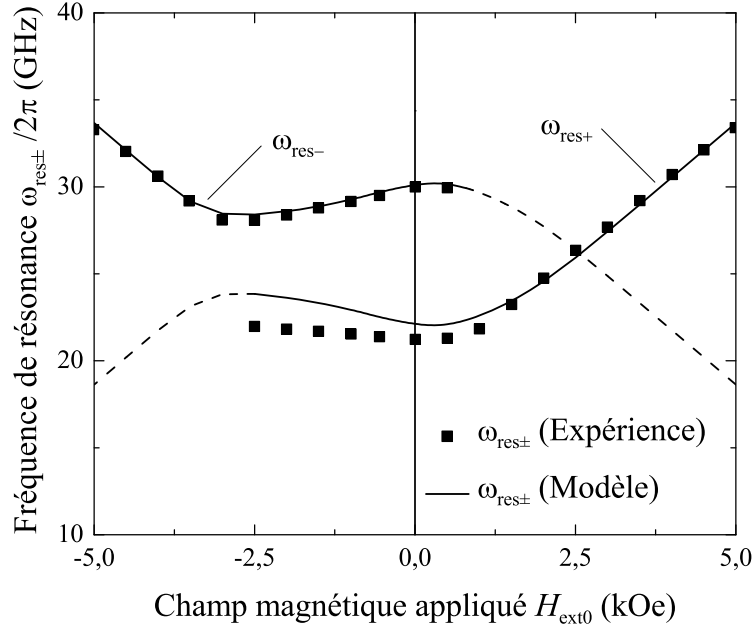


Figure 5.8 Fréquences de résonance  $\omega_{\text{res}+}$  et  $\omega_{\text{res}-}$  mesurées en fonction du champ magnétique statique  $H_{\text{ext}0}$  suivant la branche supérieure de la courbe d'hystérésis majeure montrée à la figure 5.6. Les courbes continues correspondent aux expressions théoriques pour  $\omega_{\text{res}+}$  et  $\omega_{\text{res}-}$ , calculées à l'aide de l'équation (5.27) et des paramètres donnés au tableau 5.1. La région tiretée de chaque courbe indique l'intervalle de valeurs de champ magnétique pour lequel l'amplitude du pic en  $\omega_{\text{res}\pm}$  est négligeable par rapport à celle du pic en  $\omega_{\text{res}\mp}$ , ce qui correspond à des configurations magnétiques statiques caractérisées par  $|\Delta g| \gtrsim 0,75$ . Notons que  $1 \text{ kOe} = 1000/4\pi \approx 79,58 \text{ kA/m}$  en unités SI.

L'équation (5.28) donne alors la fréquence de résonance de la perméabilité effective à un seul pic, laquelle varie linéairement en fonction du champ appliqué, en accord avec les résultats expérimentaux montrés à la figure 5.8. Une diminution du champ appliqué en suivant la branche supérieure de la courbe d'hystérésis majeure provoque le renversement irréversible de l'aimantation d'un certain nombre de fils ce qui, en retour, modifie le spectre de perméabilité effective.

Le champ d'interaction dipolaire statique est orienté initialement vers le bas, antiparallèlement à l'aimantation de la population majoritaire. Lorsque l'aimantation de certains nanofils commence à se renverser de façon aléatoire dans le réseau, l'amplitude du champ effectif d'interaction statique est graduellement réduite, ce qui produit la courbure vers le haut observée dans la dépendance de  $\omega_{\text{res}+}$  en fonction de  $H_{\text{ext}0}$ . À partir de  $H_{\text{ext}0} \approx 0,5 \text{ kOe}$ , un second pic de résonance, d'amplitude plus faible et de fréquence de résonance  $\omega_{\text{res}-}$  plus élevée, apparaît alors dans le spectre de perméabilité effective. Pendant que le renversement des fils individuels se poursuit, le champ d'interaction augmente parallèlement à l'aimantation de la population

aimantée vers haut et antiparallèlement à l'aimantation de la population aimantée vers le bas. Il en résulte que les deux pics présentent des comportements en fréquence opposés en fonction du champ  $H_{\text{ext}0}$  décroissant (c.-à-d.,  $\omega_{\text{res}+}$  augmente et  $\omega_{\text{res}-}$  diminue) et tendent à se rapprocher jusqu'à l'atteinte de la saturation négative à  $H_{\text{ext}0} \approx -2,5$  kOe. À partir de ce point, la réponse est gouvernée uniquement par celle de la population aimantée vers le bas, de sorte que le comportement de  $\omega_{\text{res}-}$  redevient linéaire en fonction du champ appliqué, comme prédit par l'équation (5.28).

Comme pour les spectres de perméabilité effective de la figure 5.7, l'accord entre les résultats théoriques et expérimentaux pour les fréquences de résonance devient moins satisfaisant entre  $-1$  kOe et  $-2,5$  kOe, où le modèle prédit alors une valeur pour  $\omega_{\text{res}+}$  supérieure à celle observée expérimentalement. Bien que l'extraction de  $\mu_c$  à partir des paramètres  $S$  mesurés devient probablement moins fiable lorsque les pics sont près l'un de l'autre et donc plus fortement convolués, cette procédure ne semble pas susceptible de produire ces écarts systématiques, lesquels semblent plutôt liés au processus de renversement. En effet, la position exacte des pics de résonance durant le renversement s'avère particulièrement sensible à notre hypothèse de départ, c'est-à-dire celle d'un réseau idéalisé et caractérisé, en régime non saturé, par deux distributions uniformes de nanofils identiques aimantés vers le haut et vers le bas. Par conséquent, nous anticipons que les fluctuations spatiales du champ local d'interaction, supposé uniforme dans notre modèle, deviennent plus importantes entre le champ coercitif, à  $H_{\text{ext}0} \approx -1$  kOe, et le champ de renversement complet de tous les nanofils (saturation négative), à  $H_{\text{ext}0} \approx -2,5$  kOe. Cet aspect sera élaboré de façon plus détaillée à la section 5.4 en relation, notamment, avec les résultats pour les états rémanents examinés dans ce qui suit.

### 5.3.4 États rémanents

Examinons maintenant la réponse dynamique du réseau de nanofils placé dans différents états rémanents décrits par le paramètre  $\Delta g_r = \langle M_{0r} \rangle / \langle M_{0s} \rangle$  et obtenus à l'aide de cycles d'hystérésis mineurs. La figure 5.9 montre les parties réelle et imaginaire de la perméabilité caractéristique relative  $\mu_c / \mu_0$  en fonction de la fréquence, pour  $H_{\text{ext}0} = 0$  et six valeurs du champ de renversement  $H_r$ , entre  $-2,5$  kOe et  $0$  kOe, par pas de  $0,5$  kOe. Ces valeurs de  $H_r$  correspondent aux courbes mineures menant à des états rémanents avec  $\Delta g_r = \langle M_{0r} \rangle / \langle M_{0s} \rangle$  allant de  $-0,41$  à  $0,48$ , lesquels sont indiqués par des cercles sur l'axe vertical  $H_{\text{ext}0} = 0$  à la figure 5.6. De plus, les courbes tiretées et continues représentent la perméabilité caractéristique extraite des paramètres  $S$  mesurés et calculée à l'aide de l'équation (5.48) avec  $\mu_{\text{eff}}$  donné par l'équation (5.25a), respectivement. Nous constatons que l'accord entre le modèle et l'expérience est très satisfaisant, à l'exception du cas montré à la figure 5.9(d), où la réma-

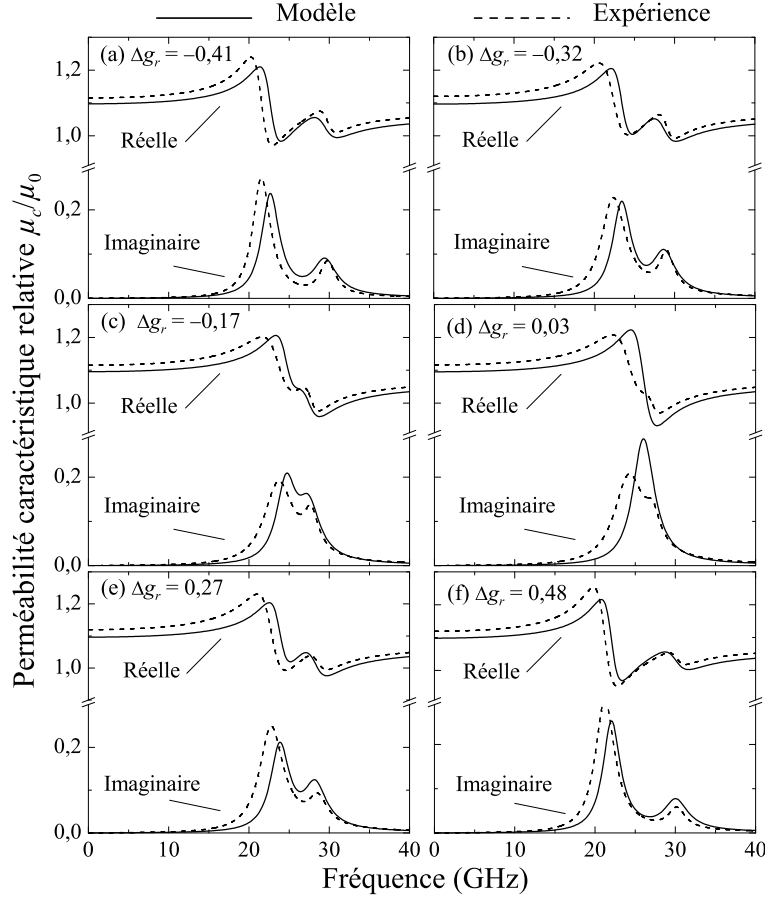


Figure 5.9 Parties réelle et imaginaire de la perméabilité caractéristique relative  $\mu_c/\mu_0$  en fonction de la fréquence pour le réseau de nanofils de CoFeB placé dans les différents états rémanents ( $H_r$ ,  $\Delta g_r$ ) indiqués par des cercles à la figure 5.6. (a)  $(-2,5, -0,41)$ , (b)  $(-2, -0,32)$ , (c)  $(-1,5, -0,17)$ , (d)  $(-1, 0,03)$ , (e)  $(-0,5, 0,27)$  et (f)  $(0, 0,48)$ . Les courbes tiretées représentent les données expérimentales extraites des paramètres  $S$  mesurés. Les courbes continues correspondent aux expressions théoriques calculées à l'aide de l'équation (5.48), avec  $q = 0,13$  et  $\mu_{\text{eff}}$  donné par l'équation (5.25a) avec  $H_{\text{ext}0} = 0$  et les paramètres du tableau 5.1. Notons que  $1 \text{ kOe} = 1000/4\pi \approx 79,58 \text{ kA/m}$  en unités SI.

nence est très faible (c.-à-d.,  $|\Delta g_r| \ll 1$  et  $g_{\uparrow} \approx g_{\downarrow}$ ) et où la perméabilité théorique ne prédit qu'un seul pic, alors que deux pics peuvent être identifiés sur le spectre expérimental.

Cet écart observé près de  $|\Delta g_r| = 0$  est mis en évidence à la figure 5.10, laquelle compare les fréquences de résonance mesurées expérimentalement en fonction de l'état rémanent avec les courbes théoriques calculées à l'aide de l'équation (5.33). Par ailleurs, notons que le désaccord s'avère plus important pour le pic à basse fréquence de la population majoritaire, laquelle correspond à la population aimantée vers le haut lorsque  $\Delta g_r > 0$  et à celle aimantée vers le bas lorsque  $\Delta g_r < 0$ . La considération des interactions dipolaires interfils

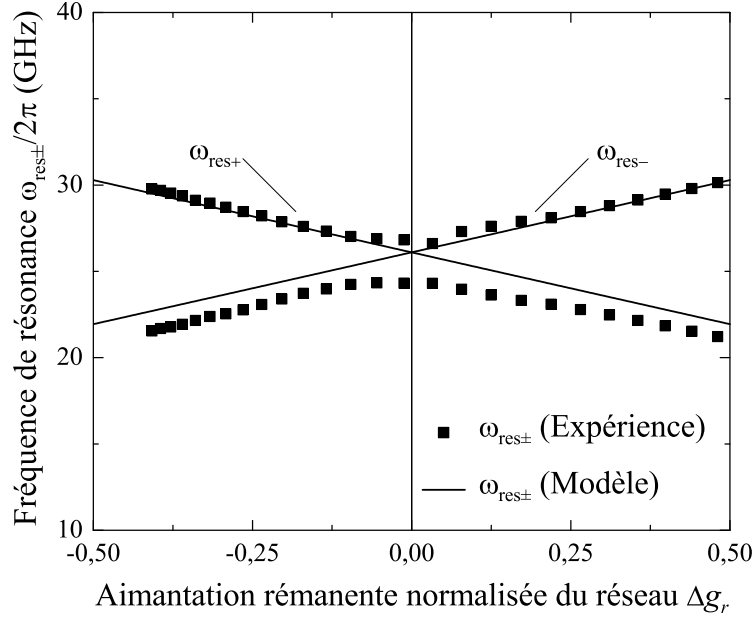


Figure 5.10 Fréquences de résonance  $\omega_{\text{res}+}$  et  $\omega_{\text{res}-}$  mesurées en fonction de la rémanence normalisée  $\Delta g_r = \langle M_{0r} \rangle / \langle M_{0s} \rangle$  du réseau de nanofils de CoFeB. Les courbes continues correspondent aux expressions théoriques de  $\omega_{\text{res}+}$  et  $\omega_{\text{res}-}$  en fonction de  $\Delta g_r$ , obtenues à l'aide de l'équation (5.33) et des paramètres donnés au tableau 5.1. Notons que  $1 \text{ kOe} = 1000/4\pi \approx 79,58 \text{ kA/m}$  en unités SI.

à la rémanence permet de déduire que la population majoritaire est soumise à un champ de désaimantation effectif plus important que la population minoritaire, ce qui mène à un pic d'amplitude supérieure et de fréquence de résonance inférieure à celui de la population minoritaire.

## 5.4 Discussion

Les figures 5.7–5.10 démontrent un bon accord entre les prédictions théoriques et les mesures expérimentales. Ces résultats illustrent la capacité du modèle à décrire la réponse magnétique dynamique complexe (c.-à-d., dispersive et dissipative) de réseaux de nanofils ferromagnétiques et ce, pour plusieurs configurations magnétiques statiques caractérisées par  $H_{\text{ext}0}$  et  $\Delta g$ . En particulier, le modèle rend bien compte de la position et de la largeur des deux pics de résonance, de même que du profil spectral des parties réelle et imaginaire de la perméabilité effective, à l'exception de faibles désaccords dans les positions de résonance lorsque les deux pics sont près l'un de l'autre. Il semble que ces écarts ne soient toutefois pas liés au modèle de perméabilité effective en tant que tel, mais plutôt à notre hypothèse idéalisée exigeant que les fils renversent leur aimantation de façon à toujours préserver une configu-



ration magnétique statique constituée de deux populations aimantées antiparallèlement et distribuées uniformément, pouvant être décrite à l'aide du paramètre unique  $\Delta g$ .

Les fluctuations spatiales des interactions dipolaires, nécessairement présentes dans le cas de réseaux réels non idéaux, modifient en principe la perméabilité effective. L'effet est particulièrement important lorsque les deux pics de résonance sont près l'un de l'autre ou, de façon équivalente, lorsque les deux populations sont soumises à des champs effectifs similaires. La condition  $\Delta\omega_{\text{res}} = 0$ , à laquelle les pics coïncident, est représentée par une droite de pente  $4/(5\langle M_{0s} \rangle)$  passant par l'origine sur la courbe d'aimantation normalisée de la figure 5.6. Le modèle prédit que la convergence des pics est satisfaite lorsque la droite croise un chemin parcouru par l'aimantation à l'intérieur du cycle d'hystérésis. Pour le système étudié, cette condition survient à  $H_{\text{ext}0} \approx 2,6$  kOe, comme montré aux figures 5.6 et 5.8. Par conséquent, la coïncidence n'est pas observée expérimentalement, puisqu'elle correspond à un point  $(H_{\text{ext}0}, \Delta g)$  situé dans la portion (quasi) saturée de la courbe d'hystérésis, pour laquelle la perméabilité effective ne présente déjà qu'un seul pic.

La situation idéale pour valider notre hypothèse d'un champ d'interaction uniforme dans le réseau consiste à obtenir un état à la fois rémanent ( $H_{\text{ext}0} = 0$ ) et globalement désaimanté ( $\Delta g_r = 0$ ), pour lequel le champ de résonance effectif est contrôlé uniquement par les interactions dipolaires. Dans ce contexte, la figure 5.10 démontre que les cycles d'hystérésis mineurs permettent de préparer un tel état. Or, selon l'équation (5.33), les fréquences de résonance  $\omega_{\text{res}+}$  et  $\omega_{\text{res}-}$  devraient alors coïncider en  $\omega_M (\sqrt{1-f})/2$ , ce qui n'est pas le cas expérimentalement. En effet, la figure 5.9(d) montre que pour  $\Delta g_r = 0,03$  (c.-à-d.,  $\Delta g_r \approx 0$ ), les deux pics peuvent encore être clairement distingués, en dépit du fait que l'aimantation rémanente du réseau est essentiellement nulle. Cette constatation suggère la présence d'une interaction résiduelle entre les deux populations et d'un ordre local de l'aimantation à l'intérieur du réseau, lesquels conduisent à un champ d'interaction non nul parallèlement à l'axe des fils et à des valeurs distinctes pour  $\omega_{\text{res}+}$  et  $\omega_{\text{res}-}$ . La prise en compte de ces effets pour expliquer les résultats expérimentaux lorsque l'écart entre les pics devient faible nécessiterait alors d'établir un modèle pour la courbe d'aimantation statique du réseau  $\Delta g(H_{\text{ext}0})$ . Il s'agit là d'un problème d'une complexité considérable, qui n'est pas traité dans le cadre de cette thèse.

## 5.5 Sommaire

Ce chapitre a été consacré à l'établissement d'une expression pour le tenseur de perméabilité effective  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  de réseaux non saturés de nanofils ferromagnétiques bistables et aimantés axialement. Le modèle s'appuie sur le formalisme de Maxwell Garnett, que nous avons géné-

ralisé pour inclure le cas de deux populations de fils gyrotropes, aimantés antiparallèlement et liés par les interactions dipolaires. Nous avons dérivé des expressions explicites pour les composantes complexes diagonales et hors diagonales de  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$ , de même que pour les deux fréquences de résonance qui leur sont associées. Le formalisme incorpore l'effet des interactions dipolaires interfils à la fois statiques et dynamiques, lesquelles sont orientées respectivement parallèlement et perpendiculairement à l'axe des nanofils.

De manière générale, l'accord entre la théorie et les résultats expérimentaux obtenus par des mesures large bande en configuration de ligne microruban s'avère excellent. Le modèle permet de reproduire les spectres de perméabilité complexe extraits des paramètres  $S$  mesurés, notamment en ce qui concerne le profil, la position, l'amplitude et la largeur de la résonance. La théorie explique le comportement des fréquences résonance  $\omega_{\text{res}\pm}$  en fonction du champ magnétique appliqué  $H_{\text{ext}0}$  et de l'aimantation rémanente normalisée  $\Delta g_r$ . L'accord est quelque peu diminué lorsque les pics sont près l'un de l'autre, ce qui suggère une dispersion spatiale non négligeable du champ local d'interaction, laquelle n'est pas prise en compte dans le traitement présenté ici.

En conclusion, notre formalisme propose un cadre théorique général permettant de modéliser la perméabilité dynamique effective de systèmes formés de deux populations d'inclusions gyromagnétiques, qui interagissent entre elles par l'intermédiaire des champs dipolaires. Du point de vue pratique, la théorie présentée dans ce chapitre s'avère pertinente en vue de prédire la réponse électromagnétique de dispositifs en hyperfréquences basés sur des réseaux de nanofils ferromagnétiques placés dans diverses configurations magnétiques statiques, notamment des états rémanents partiellement désaimantés.

## CHAPITRE 6

### CONCLUSION

#### 6.1 Synthèse et contributions originales du travail

Les travaux menés dans le cadre de cette thèse s'inscrivent dans le domaine de recherche des métamatériaux électromagnétiques, une nouvelle classe de matériaux composites artificiels, structurés à l'échelle sous-longueur d'onde et caractérisés par des propriétés hors du commun, qui dépassent souvent celles des matériaux naturels. En particulier, leur structuration sous-longueur d'onde permet de les modéliser comme des matériaux homogènes décrits par des tenseurs de permittivité et de perméabilité effectives, lesquels dépendent à la fois de la composition et de la structuration de leurs constituants. L'intérêt de notre étude réside dans l'engouement considérable suscité par les métamatériaux depuis une quinzaine d'années, lequel s'explique notamment par leur potentiel pour des applications à des dispositifs novateurs ou plus performants.

La majorité des métamatériaux étudiés dans la littérature s'appuient sur des arrangements astucieux d'inclusions conductrices ou de permittivité élevée, mais ne font pas intervenir de matériaux intrinsèquement magnétiques. L'obtention d'une perméabilité effective macroscopique repose alors sur un effet de magnétisme artificiel, lequel peut être généré par l'excitation de résonances de type RLC dans des inclusions métalliques ou de résonances dipolaires magnétiques de type Mie à l'intérieur d'inclusions diélectriques.

En revanche, dans les hyperfréquences, les matériaux ferromagnétiques possèdent un riche spectre d'excitations magnétiques intrinsèques, ce qui ouvre la voie au développement d'une nouvelle classe de métamatériaux caractérisés par des propriétés effectives ajustables par l'application d'un champ magnétique statique. L'exploitation du potentiel technologique de ces nouveaux matériaux nécessite alors de modéliser leur interaction avec des ondes électromagnétiques.

Afin de contribuer à cet effort, cette thèse a été consacrée à l'établissement d'un formalisme théorique permettant de dériver des expressions analytiques pour la permittivité et la perméabilité effectives dans les hyperfréquences de métamatériaux à base de réseaux de fils ferromagnétiques conducteurs. La modélisation entreprise dans le cadre de ce travail visait notamment à combler un certain nombre de manques et de lacunes répertoriés dans la littérature, lesquels concernent principalement la prise en compte simultanée des effets gyro-

Tableau 6.1 Fonctions de réponse associées aux quatre niveaux hiérarchiques de l'approche théorique, introduits pour décrire la réponse de réseaux de fils ferromagnétiques.

Propriétés d'un fil		Propriétés du réseau	
Intrinsèques	Externes	Effectives	Effectives externes
$\mathbf{d}_w = \bar{\epsilon}_w \mathbf{e}_w$	$\langle \mathbf{p}_w \rangle = \epsilon_m \bar{\kappa}_w \mathbf{e}_{\text{loc}}$	$\langle \mathbf{d} \rangle = \bar{\epsilon}_{\text{eff}} \langle \mathbf{e} \rangle$	$\langle \mathbf{p} \rangle = \epsilon_0 \bar{\kappa}_{\text{eff}} \mathbf{e}_{\text{ext}}$
$\mathbf{b}_w = \bar{\mu}_w \mathbf{h}_w$	$\langle \mathbf{m}_w \rangle = \bar{\eta}_w \mathbf{h}_{\text{loc}}$	$\langle \mathbf{b} \rangle = \bar{\mu}_{\text{eff}} \langle \mathbf{h} \rangle$	$\langle \mathbf{m} \rangle = \bar{\eta}_{\text{eff}} \mathbf{h}_{\text{ext}}$

tropes et de retard électromagnétique à l'intérieur des fils, de même que l'incorporation des interactions dipolaires dans le traitement de réseaux de taille finie. Une attention spéciale a également été portée à l'évaluation du potentiel des réseaux de fils à présenter, sur une même plage de fréquences, des réponses électrique et magnétique significatives et simultanément ajustables par un champ magnétique statique.

Pour ce faire, nous avons utilisé la procédure d'homogénéisation de Maxwell Garnett et l'avons généralisée dans le but d'incorporer l'effet combiné du retard électromagnétique à l'intérieur des fils (c.-à-d., de l'effet de peau) et de la nature gyrotrope de leur perméabilité intrinsèque (c.-à-d., tensorielle). Au meilleur de notre connaissance, la prise en compte simultanée de ces deux éléments n'a jamais été considérée explicitement dans la littérature et constitue une des contributions originales de cette thèse. De plus, notre formalisme s'appuie sur une structure hiérarchique, basée sur les quatre niveaux résumés au tableau 6.1 et caractérisés chacun par des fonctions de réponse spécifiques. Cette approche multiniveau permet notamment de lier les propriétés intrinsèques des fils individuels à la réponse effective externe de réseaux de taille finie de fils en interaction, d'une manière qui fait ressortir clairement les hypothèses et les quantités physiques impliquées à chacun des niveaux.

La première étape de notre procédure d'homogénéisation nécessite de résoudre le problème de la diffusion d'une onde plane par un fil ferromagnétique infini, aimanté axialement et excité dans la configuration TM, en vue d'obtenir la réponse dipolaire de sa polarisation  $\langle \mathbf{p}_w \rangle$  et de son aimantation  $\langle \mathbf{m}_w \rangle$  dynamiques moyennes en régime d'effet de peau arbitraire (régime EQS). Suivant l'approche théorique du tableau 6.1, cette réponse est décrite par les tenseurs de susceptibilités externes électrique  $\bar{\kappa}_w$  et magnétique  $\bar{\eta}_w$ , lesquels tiennent compte des propriétés intrinsèques  $\bar{\epsilon}_w$  et  $\bar{\mu}_w$  du fil, de ses paramètres géométriques (taille et forme), de son état magnétique statique et de la configuration des champs locaux (c.-à-d., la configuration TM).

Notre résolution du problème de diffusion a montré que la solution générale s'exprime comme une expansion multipolaire d'ondes partielles, qui forment alors une infinité de modes orthogonaux. En régime EQS, les modes dipolaires électrique  $n = 0$  et magnétique  $n = \pm 1$

dominent la réponse du fil et mènent à des expressions explicites pour  $\bar{\bar{\kappa}}_w$  et  $\bar{\bar{\eta}}_w$ , respectivement. En particulier, la dérivation du tenseur gyrotrope  $\bar{\bar{\eta}}_w$  d'un fil individuel en régime EQS constitue un des résultats importants de cette thèse. Ses éléments diagonaux et hors diagonaux adoptent une forme compacte, grâce à définition des composantes de perméabilité renormalisée  $\tilde{\mu}$  et  $\tilde{\mu}_t$ , lesquelles incorporent l'influence de l'effet de peau sur la réponse gyromagnétique du fil.

L'étape suivante de la méthode de dérivation consiste à utiliser les résultats du problème de diffusion dans le but de dériver la perméabilité et la permittivité effectives d'un réseau de fils ferromagnétiques. D'abord, l'utilisation de notre expression pour  $\bar{\bar{\eta}}_w$  dans la procédure de Maxwell Garnett généralisée a mené à des expressions compactes pour les composantes transverses diagonales et hors diagonales du tenseur gyrotrope de perméabilité effective  $\bar{\bar{\mu}}_{\text{eff}}$  en régime EQS. Notre résultat pour  $\bar{\bar{\mu}}_{\text{eff}}$  représente un apport significatif aux théories existant pour décrire la perméabilité effective de matériaux composites à base d'inclusions ferromagnétiques, lesquelles proposent soit des expressions tensorielles restreintes à la limite QS, soit des expressions valides en régime EQS, mais qui négligent la gyrotropie des inclusions. En particulier, notre modèle étend au cas de fils gyromagnétiques le formalisme précurseur de Lewin [79], lequel constitue une des premières tentatives visant à inclure le retard électromagnétique dans la procédure de Maxwell Garnett.

De façon similaire, nous avons ensuite déterminé la permittivité effective  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  d'un réseau de fils excités par un champ électrique axial. Notre expression pour  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  s'écrit en fonction de l'impédance normalisée  $Z_{\text{tot}}/R_{\text{dc}}$  d'un fil placé dans le réseau, laquelle se décompose en contributions interne et externe. D'abord, la partie interne tient compte de l'effet de peau et correspond, pour des fils ferromagnétiques, à une magnétoimpédance, laquelle peut résulter en une réponse magnétodiélectrique de  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$ . En revanche, la partie externe est de nature inductive et dépend essentiellement des paramètres géométriques du réseau. Au meilleur de notre connaissance, la permittivité effective d'un réseau de fils ferromagnétiques n'a jamais été exprimée de façon compacte en fonction du rapport  $Z_{\text{tot}}/R_{\text{dc}}$ . De plus, à la différence des modèles existants, notre résultat découle de la solution rigoureuse du problème de la diffusion d'une onde électromagnétique par un fil individuel. En ce sens, notre dérivation formelle de  $\tilde{\epsilon}_{\text{eff}}$  constitue un apport original de ce travail.

Les propriétés effectives  $\bar{\bar{\epsilon}}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\bar{\mu}}_{\text{eff}}$  obtenues à partir du formalisme de Maxwell Garnett décrivent le comportement macroscopique intrinsèque d'un réseau de fils ferromagnétiques, sans égard à sa forme ou sa taille. Or, dans cette thèse, nous avons également introduit les tenseurs de susceptibilité effective externe  $\bar{\bar{\kappa}}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\bar{\eta}}_{\text{eff}}$ , afin de décrire la réponse d'un réseau de taille finie excité par des champs dynamiques spatialement uniformes en son voisinage. Les tenseurs  $\bar{\bar{\kappa}}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\bar{\eta}}_{\text{eff}}$  forment alors le quatrième niveau hiérarchique présenté au tableau 6.1

et dépendent respectivement de  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$ , mais également des dimensions macroscopiques du réseau, prises en compte par le tenseur de désaimantation effectif  $\bar{\bar{N}}_{\text{eff}}$ . Il convient de souligner que l'introduction du concept de réponse effective externe d'un matériau composite et sa distinction avec la réponse effective constituent une contribution importante de cette thèse.

Dans ce contexte, nous avons montré que le tenseur  $\bar{\bar{\eta}}_{\text{eff}}$  représente la fonction de réponse appropriée pour décrire la résonance ferromagnétique du mode uniforme d'un réseau de fils ferromagnétiques liés par les interactions dipolaires. En particulier, nous avons dérivé une expression générale pour le tenseur  $\bar{\bar{N}}_{\text{eff}}$  en fonction des tenseurs  $\bar{\bar{N}}_w$  et  $\bar{\bar{N}}_{\text{int}}$ , lesquels dépendent uniquement des paramètres géométriques internes du réseau et tiennent compte des interactions dipolaires intra et interfils, respectivement. Notre traitement mène également à une distinction explicite entre les interactions dipolaires statiques et dynamiques.

Nous avons suivi la présentation de notre modèle théorique par une analyse détaillée de ses implications et de ses limites, en vue notamment d'évaluer le potentiel des réseaux de fils ferromagnétiques à montrer des dispersions magnétique et diélectrique simultanément ajustables à l'aide d'un champ magnétique statique. D'abord, nous avons constaté que l'obtention d'une perméabilité effective substantielle et possiblement négative requiert des réseaux denses et un effet de peau faible. En revanche, de tels réseaux se comportent comme des métaux magnétiques effectifs, ce qui entraîne des pertes diélectriques considérables et empêche d'exploiter les effets magnétodiélectriques prédits par le modèle.

Nous avons ensuite montré que l'obtention d'une réponse magnétodiélectrique optimale dans les hyperfréquences, c'est-à-dire substantielle et accompagnée de pertes acceptables, requiert respectivement un effet de peau modéré ( $a/\delta_{w0} \approx 1$ ) et une distance interfil de l'ordre du millimètre, ce qui correspond typiquement à des réseaux dilués de microfils ferromagnétiques. De même, nous avons décrit comment il est possible de tirer profit de la perméabilité effective de réseaux denses de nanofils en considérant des fils semi-isolés, c'est-à-dire dont la continuité électrique n'est pas assurée. De tels réseaux se comportent alors comme des isolants magnétiques effectifs, mais ne présentent plus de réponse magnétodiélectrique.

En somme, ces résultats indiquent qu'il semble exister un principe d'exclusion mutuelle dans les réseaux de fils ferromagnétiques conducteurs, qui tend à s'opposer à l'observation de dispersions magnétique et diélectrique simultanément ajustables par un champ magnétique statique. En particulier, cette conclusion limite les perspectives d'obtenir, à partir de ces réseaux, un indice de réfraction négatif et accompagné de pertes raisonnables.

Nous avons par la suite validé notre modèle de perméabilité effective, en l'appliquant à l'étude de réseaux de nanofils aimantés axialement et incorporés à l'intérieur des pores d'une membrane diélectrique. Pour ces réseaux, l'aimantation des fils individuels montre un com-

portement bistable en fonction du champ magnétique statique axial, de sorte que sous la saturation du réseau, les fils se répartissent selon deux populations aimantées antiparallèlement, dont les fractions relatives peuvent être ajustées en parcourant des cycles d'hystérésis mineurs. La configuration magnétique statique du réseau non saturé se répercute alors sur son spectre de perméabilité effective, notamment par la présence de deux pics de résonance ferromagnétique.

Dans ce contexte, nous avons montré que notre expression pour la perméabilité effective  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  s'applique intégralement au cas de deux populations, à la condition de redéfinir le tenseur de susceptibilité externe  $\bar{\eta}_w$  comme la somme des susceptibilités externes  $\bar{\eta}_{w\uparrow}$  et  $\bar{\eta}_{w\downarrow}$  des fils individuels de chaque population, pondérées par leur proportion relative respective. En considérant ce changement dans la définition de  $\bar{\eta}_w$ , la résolution de l'équation du mouvement de l'aimantation de chacune des deux populations et l'application de notre procédure de Maxwell Garnett ont mené à des expressions explicites pour les composantes diagonales et hors diagonales de  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$ , de même que pour les fréquences de résonance  $\omega_{\text{res}+}$  et  $\omega_{\text{res}-}$  qui leur sont associées. Ces résultats constituent un apport significatif à la modélisation de la réponse d'ensembles non saturés d'inclusions gyromagnétiques en interaction. En particulier, notre description de l'origine physique des différents champs d'interaction contribuant à  $\omega_{\text{res}+}$  et  $\omega_{\text{res}-}$  a fourni une première explication complète du phénomène de double résonance dans les réseaux non saturés de nanofils ferromagnétiques.

Des mesures de résonance ferromagnétique large bande (1–40 GHz) en configuration de ligne microruban sur un réseau de nanofils de  $\text{Co}_{94}\text{Fe}_5\text{B}_1$  de diamètre moyen de 45 nm incorporés dans une membrane d'alumine de distance interpore moyenne de 110 nm ont ensuite permis de valider notre modèle de perméabilité effective. De façon générale, les spectres de perméabilité complexe extraits des paramètres  $S$  mesurés ont démontré un excellent accord avec les spectres théoriques, notamment pour ce qui est du profil, de la position, de l'amplitude et de la largeur des deux pics de résonance en fonction de l'état magnétique statique du réseau.

Ces résultats indiquent que l'anisotropie magnétique des réseaux considérés est bien décrite en supposant que les interactions dipolaires sont dues à une distribution spatialement uniforme des deux populations de nanofils. En revanche, l'accord est un peu moins satisfaisant lorsque la séparation entre les pics devient faible, notamment dans le cas de réseaux globalement désaimantés à la rémanence. Ces écarts observés entre la théorie et les mesures expérimentales ont été attribués à des variations spatiales du champ local d'interaction, lesquelles sont nécessairement présentes dans le cas de réseaux réels non idéaux, mais ne sont pas prises en compte dans le modèle considéré ici.

En résumé, ce travail apporte les contributions originales suivantes :



1. Établissement d'un formalisme de Maxwell Garnett généralisé, qui incorpore simultanément le retard électromagnétique à l'intérieur des fils et la nature gyrotrope de la perméabilité intrinsèque.
2. Expression de la permittivité effective du réseau en fonction de l'impédance normalisée  $Z_{\text{tot}}/R_{\text{dc}}$  et formalisation de la méthode de dérivation.
3. Développement d'une procédure d'homogénéisation multiniveau, qui inclut la définition de la réponse effective externe d'un matériau composite de taille finie.
4. Détermination du lien entre le tenseur de désaimantation effectif  $\bar{\bar{N}}_{\text{eff}}$  d'un réseau de taille finie et le tenseur  $\bar{\bar{N}}_{\text{int}}$  décrivant les interactions dipolaires interfils.
5. Étude des paramètres de résonance ferromagnétique en régime EQS d'un fil individuel et établissement des conditions requises pour obtenir une perméabilité effective et une réponse magnétodiélectrique significatives à l'aide des réseaux de fils ferromagnétiques.
6. Démonstration de la difficulté à obtenir, sur une même plage de fréquences, des réponses électrique et magnétique substantielles, ajustables par un champ magnétique statique et accompagnées de pertes raisonnables.
7. Généralisation du formalisme de Maxwell Garnett au cas d'un réseau non saturé, constitué de deux populations de nanofils gyrotropes, bistables et liés par les interactions dipolaires.
8. Description théorique et validation expérimentale du phénomène de double résonance dans les réseaux non saturés de nanofils ferromagnétiques.

## 6.2 Perspectives et travaux futurs

Le formalisme théorique établi dans le cadre de cette thèse contribue à une meilleure compréhension des propriétés électromagnétiques effectives de métamatériaux à base de réseaux de fils ferromagnétiques conducteurs. Or, malgré son caractère assez général, le modèle peut encore être étendu ou raffiné à plusieurs égards. Dans cette section, nous allons examiner certains éléments théoriques qui n'ont pas été couverts, ou pas suffisamment, mais qui mériteraient de l'être. Cette analyse nous permettra également de préciser certaines limites ou difficultés à généraliser le modèle et d'évaluer l'impact de certaines hypothèses posées en cours de dérivation. De plus, nous allons exposer des perspectives de recherche pour des travaux futurs, notamment en ce qui a trait à la validation expérimentale de nos prédictions théoriques et à l'application du formalisme à d'autres systèmes d'intérêt.



## Généralisation et validation du modèle théorique

Une première extension du modèle de perméabilité effective consisterait à raffiner le modèle d'anisotropie magnétique utilisé pour dériver la perméabilité intrinsèque  $\bar{\mu}_w$  des fils, notamment par la prise en compte des anisotropies magnétocristalline, magnétoélastique ou surfacique, ainsi que de l'interaction d'échange intercouche dans le cas de fils multicouches. En effet, bien que l'anisotropie magnétique des réseaux de fils doux de CoFeB considérés au chapitre 5 soit largement dominée par les interactions dipolaires intra et interfils, le traitement d'autres systèmes, tels que les fils cristallins de cobalt, nécessiterait probablement d'aller au-delà du modèle considéré ici. Or, l'inclusion de divers types d'anisotropies par l'intermédiaire de champs effectifs internes dans l'équation du mouvement de l'aimantation [Éq. (2.7)] est une procédure connue et habituellement assez directe [26].

Le tenseur gyromagnétique de susceptibilité externe  $\bar{\eta}_w$  des fils individuels pourrait également être utilisé dans une approche de milieu effectif de type Bruggeman [5], plutôt que Maxwell Garnett, ce qui permettrait de modéliser la perméabilité effective de matériaux composites très hétérogènes ou formés d'inclusions moins bien définies. Toutefois, l'application de la condition d'homogénéisation autoconsistante propre à la procédure de Bruggeman ne mène généralement pas à des expressions explicites compactes pour les composantes de  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$ .

Il convient de rappeler qu'une hypothèse simplificatrice associée à la dérivation de notre expression pour  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  réside dans le fait que l'interaction d'échange et, par conséquent, les effets d'échange-conductivité ont été négligés. Ces effets surviennent dans les métaux ferromagnétiques en raison de la génération d'ondes de spin par le champ magnétique dynamique fortement non uniforme à l'intérieur de la profondeur de peau. Il en résulte alors une réponse non locale de la perméabilité intrinsèque  $\bar{\mu}_w$ , de même qu'un élargissement et un déplacement de son spectre de résonance ferromagnétique. Or, il a été démontré que les effets d'échange-conductivité sont d'autant plus prononcés que les fréquences d'opération sont faibles [162], de sorte que nous avons pu les ignorer aux fréquences considérées dans ce travail, c'est-à-dire de l'ordre ou supérieures à 10 GHz. De plus, le fait de négliger le terme d'échange dans l'équation du mouvement de l'aimantation nous empêche de traiter l'excitation d'ondes de spin à l'intérieur des fils, lesquelles mèneraient à des spectres de perméabilité plus complexes. Or, de tels effets ne semblent pas avoir été observés dans les mesures que nous avons effectuées à ce jour.

Un modèle qui incorpore rigoureusement l'interaction d'échange dans la réponse de fils ferromagnétiques uniques aimantés axialement a été élaboré par Kraus [73]. Son approche mène à des expressions relativement complexes pour l'impédance de surface et la puissance absorbée des différents modes de résonance du fil (incluant le mode  $n = \pm 1$ ), mais ne se prête pas aisément à la dérivation d'un tenseur de susceptibilité externe  $\bar{\eta}_w$  qui incorporerait les

effets d'échange-conductivité par l'intermédiaire de composantes de perméabilité renormalisée. Or, dans le formalisme de Maxwell Garnett, l'obtention de la perméabilité effective  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  du réseau requiert en général une expression pour  $\bar{\eta}_w$ .

Compte tenu de ces considérations, l'établissement d'une expression généralisée pour  $\bar{\eta}_w$  qui inclurait les effets d'échange-conductivité ou les modes d'ondes de spin d'un cylindre aimanté axialement [62] est *a priori* possible, mais s'accompagne de difficultés importantes. En ce sens, nous croyons que les travaux des références [73, 136] fournissent des pistes intéressantes pour tenir compte de l'interaction d'échange dans notre procédure de renormalisation. De même, la généralisation de notre modèle pour  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  en vue de décrire l'excitation d'ondes de spin dans les réseaux de nanofils ferromagnétiques [62–65] constitue une suite logique de ce travail. Dans ce contexte, les travaux de la référence [163] nous apparaissent comme un bon point de départ pour incorporer la dépendance spatiale des champs dynamiques d'interaction à l'intérieur du modèle de la référence [61] utilisé dans le cadre de cette thèse.

Une autre limite du modèle concerne l'exigence que le champ et l'aimantation statiques soient parallèles à l'axe des fils. Cette configuration symétrique permet notamment d'utiliser la méthode de séparation des variables en coordonnées cylindriques dans le problème de diffusion, lequel doit nécessairement être résolu pour obtenir  $\bar{\eta}_w$  en régime EQS. Par conséquent, l'extension de notre formalisme à d'autres orientations du champ magnétique statique pose de sérieuses complications. Il faut toutefois souligner que dans la limite QS, l'équation (3.32) pour  $\bar{\eta}_w$  demeure valide peu importe l'orientation du champ statique par rapport à l'axe des fils, à la condition d'exprimer les tenseurs  $\bar{\chi}_w$  et  $\bar{N}_w$  dans un même système de coordonnées.

De façon similaire, la généralisation de notre formalisme EQS à d'autres formes d'inclusions, notamment en vue de décrire la réponse d'ensembles d'inclusions sphériques [84–87, 89–93], pose un défi théorique considérable. En effet, le problème de la diffusion d'une onde électromagnétique plane par une sphère gyrotrope n'a pas été résolu de façon analytique, puisque les équations de Maxwell ne sont alors plus séparables [164]. Toutefois, nous croyons qu'il serait pertinent de tenter de résoudre le problème en se plaçant dès le départ en régime EQS, c'est-à-dire en supposant d'emblée que les champs à l'extérieur de la sphère sont spatialement uniformes en son voisinage.

Au chapitre 5, nous avons modélisé de façon satisfaisante les spectres de perméabilité effective complexe de réseaux de nanofils ferromagnétiques bistables soumis à un champ magnétique statique axial. Toutefois, notre modèle dynamique pour  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  ne permet pas de prédire l'état magnétique statique du réseau en fonction du champ appliqué, c'est-à-dire sa courbe d'hystérésis. En pratique, cette information doit alors être déterminée à partir de mesures magnétométriques. Dans ce contexte, il serait pertinent de tenter d'incorporer

l'effet de la coercivité, de la rémanence ou de l'approche lente à la saturation dans le modèle d'interaction dipolaire proposé la référence [61].

En raison de la symétrie des équations de Maxwell, le formalisme élaboré dans le cadre de cette thèse peut être directement adapté pour dériver le tenseur de permittivité effective  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  dépendant de  $k_w a$  d'un réseau de fils aimantés axialement, caractérisés par un tenseur de permittivité intrinsèque gyrotrope  $\bar{\epsilon}_w$  et soumis à un champ électrique dynamique perpendiculaire à leur axe (c.-à-d., dans la configuration TE). Le calcul de  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  dans cette configuration permettrait alors de décrire la réponse gyroélectrique de réseaux de fils ferromagnétiques, notamment les effets magnéto-optiques [48, 49] et l'effet Hall dans les hyperfréquences.

Il convient de souligner que l'équation (4.4) pour la permittivité effective  $\epsilon_{\text{eff}}$  de nanofils semi-isolés doit être considérée comme une ébauche, qui fournit une approximation raisonnable du comportement diélectrique du réseau dans la limite où  $\Delta L \gg a, D$ . En ce sens, nous croyons qu'il serait possible d'améliorer le modèle en s'inspirant du calcul de capacité équivalente proposé à la référence [145], lequel incorpore l'effet des interactions électrostatiques entre les fils. Suivant cette méthode, nous anticipons que le calcul de  $\epsilon_{\text{eff}}$ , qui ferait alors intervenir une sommation d'interactions mutuelles entre des charges de surface, pourrait mener à un tenseur formellement similaire au tenseur d'interaction dipolaire dérivé à la référence [61]. De même, comme suggéré à la référence [137], nous pourrions également adapter l'équation (3.72) pour  $Z_{\text{tot}}$  en y ajoutant un terme d'impédance capacitive  $Z_C$ , qui tiendrait compte de la capacité non nulle des fils semi-isolés et qui dépendrait des paramètres géométriques du réseau, notamment du facteur de remplissage des fils.

Il va sans dire que la généralisation du formalisme théorique devra être complétée par des mesures expérimentales. En effet, au cours de ce travail, seul le modèle de perméabilité effective de réseaux non saturés de nanofils dans la limite QS a été confronté directement à l'expérience. D'abord, des mesures systématiques sur des fils ferromagnétiques de tailles micrométrique et sous-micrométrique devront être réalisées afin de valider notre expression pour la susceptibilité externe  $\bar{\eta}_w$  d'un fil individuel en régime EQS. Dans ce contexte, un collègue du Laboratoire de magnétisme, M. Basile Dufay, a effectué des mesures de résonance ferromagnétique en cavité résonante sur des microfils magnétiques doux de rayon  $a \approx 10 \mu\text{m}$ , caractérisés par un effet de peau modéré à fort. Les spectres obtenus expérimentalement ont pu être reproduits à l'aide du modèle et ont montré les comportements attendus pour ce qui est de la résonance, de l'antirésonance, de même que du profil et de la largeur de la courbe d'absorption. Toutefois, ces mesures devront faire partie d'une étude ultérieure plus complète.

De même, il serait intéressant d'appliquer le modèle pour  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  établi au chapitre 5 à des réseaux de nanofils de composition ou de géométrie différentes. Nous croyons que de telles mesures pourraient permettre de mieux comprendre les écarts observés entre le modèle et

l'expérience lorsque les deux pics de résonance sont près l'un de l'autre et, éventuellement, d'établir un lien entre l'importance de ces écarts et la forme de la courbe d'hystérésis du réseau.

Enfin, l'amélioration du modèle pour la permittivité effective des réseaux de nanofils semi-isolés devra être accompagnée par des mesures expérimentales. Dans ce contexte, une étude récente [43] effectuée par M. Louis-Philippe Carignan, un collègue du Laboratoire de magnétisme, a permis d'extraire la permittivité du substrat de la ligne microruban montrée à la figure 5.5. Or, dans cette configuration, le substrat est formé non seulement du réseau de nanofils, mais également d'une couche d'époxy, de sorte que les résultats de la référence [43] ne mènent pas directement à la permittivité effective  $\epsilon_{\text{eff}}$  du réseau de nanofils, telle que définie dans le cadre de notre modèle. Pour aller plus loin, nous envisageons que des mesures large bande en configuration de ligne microruban ou des mesures en cavité résonante constitueraient, en l'absence de couche d'époxy dans les deux cas, des méthodes pertinentes pour caractériser plus en détail la réponse diélectrique de réseaux de nanofils semi-isolés. De telles expériences permettraient alors de mieux comprendre l'influence des paramètres géométriques du réseau (notamment du facteur de remplissage vertical des pores), de la composition des fils et du champ magnétique statique sur la permittivité effective  $\epsilon_{\text{eff}}$ .

### Application à d'autres systèmes d'intérêt

Ce travail a été consacré à la modélisation des propriétés électromagnétiques dans les hyperfréquences de réseaux de fils ferromagnétiques conducteurs. Or, pour ce faire, nous avons développé une approche théorique générale, qui peut être adaptée, en principe, à tout matériau composite dont la structure hiérarchique s'apparente à celle des réseaux de fils. Dans cette dernière section, nous allons présenter quelques perspectives d'application du formalisme à d'autres systèmes étudiés au Laboratoire de magnétisme ou en voie de l'être.

D'abord, notre procédure d'homogénéisation pourrait être utilisée pour modéliser la réponse de matériaux composites à base d'inclusions sphériques à la fois métalliques et ferromagnétiques. En effet, il a été proposé que l'activité magnéto-optique de tels matériaux puisse être significativement amplifiée près de la résonance plasmonique de surface des inclusions individuelles [165]. Dans ce contexte, une étude récente [166] menée par M. Gabriel Monette, un collègue du Laboratoire de magnétisme, a rapporté un effet Faraday géant dans un ensemble de nanoagrégats ferromagnétiques de MnP encastrés dans une épicoche semi-conductrice de GaP. Nous croyons que notre formalisme pourrait alors être utilisé dans le but de dériver le tenseur gyrotrope de permittivité effective  $\bar{\epsilon}_{\text{eff}}$  de ce système et ainsi de décrire la réponse magnéto-optique observée expérimentalement. En particulier, la généralisation du formalisme de Maxwell Garnett au cas de deux populations gyrotropes, telle que

présentée dans ce travail, pourrait s'avérer utile en vue d'incorporer l'effet des différentes orientations cristallographiques des nanoagrégats de MnP dans la matrice de GaP. Enfin, des calculs préliminaires semblent indiquer que la limite QS s'applique pour les fréquences d'opération et les tailles d'inclusions considérées à la référence [166]. Par conséquent, les difficultés décrites précédemment associées au traitement d'inclusions sphériques gyrotropes en régime EQS pourraient être évitées.

Notre formalisme théorique pourrait également être appliqué à l'étude de l'impédance électrique d'un ensemble de microfils ferromagnétiques parallèles et interagissant fortement. De tels arrangements ont récemment fait l'objet d'études expérimentales [167, 168], mais leur réponse électromagnétique n'a toutefois pas été modélisée de façon théorique. De même, la question de savoir si une configuration multifil peut présenter une magnétoimpédance plus sensible que celle d'un fil unique demeure ouverte. Nous anticipons que ce système, dont les dimensions latérales demeurent inférieures à la longueur des fils, pourrait être modélisé comme un conducteur magnétique cylindrique macroscopique, caractérisé par une permittivité et une perméabilité effectives. Nous souhaiterions notamment étudier l'effet de peau effectif du cylindre homogénéisé, en vue de vérifier si la magnétoimpédance des fils individuels mène à une magnétoimpédance effective du matériau composite.

L'étude de la réponse électromagnétique des réseaux de nanofils multicouches constitue une autre suite logique de cette thèse. En effet, bien que la résonance ferromagnétique et les interactions dipolaires dans ces réseaux aient fait l'objet de travaux récents [61, 169], leur permittivité et leur perméabilité effectives n'ont pas, au meilleur de notre connaissance, été considérées de façon explicite. Dans ce contexte, le caractère multiniveau de notre approche théorique se prête naturellement au traitement de tels systèmes, lesquels comportent trois échelles de structuration, c'est-à-dire les couches ferromagnétiques, les fils et le réseau global. Une première étape consisterait à déterminer une expression pour le tenseur de susceptibilité externe  $\bar{\bar{\eta}}_w$  d'un fil multicouche individuel, qui tiendrait compte de sa géométrie, de sa composition et des interactions entre les couches magnétiques. Cette expression généralisée pour  $\bar{\bar{\eta}}_w$  pourrait ensuite être utilisée dans la procédure de Maxwell Garnett, en vue de dériver la perméabilité effective  $\bar{\mu}_{\text{eff}}$  du réseau. De plus, la modélisation des propriétés électromagnétiques effectives des réseaux de nanofils multicouches devrait notamment inclure l'interaction d'échange entre les couches et l'influence de différents effets de magnéto-transport, tels que la magnéto-résistance géante et le transfert de spin.

En définitive, le formalisme général développé dans le cadre de cette thèse a mené à des expressions analytiques pour les propriétés électromagnétiques effectives de métamatériaux à base de réseaux de fils ferromagnétiques conducteurs. Une contribution importante du travail réside dans l'incorporation simultanée du retard électromagnétique à l'intérieur des fils et de

la nature gyrotrope de leur perméabilité intrinsèque. L'analyse détaillée du modèle théorique nous a permis d'établir les limites et les possibilités offertes par ces réseaux, notamment la difficulté à obtenir à la fois une permittivité et une perméabilité effectives substantielles dans les hyperfréquences. De plus, des mesures expérimentales ont validé le modèle pour la perméabilité effective de réseaux de nanofils, notamment le phénomène de double résonance en régime non saturé. Enfin, le modèle élaboré au cours de ce travail représente un apport significatif à la compréhension de la réponse électromagnétique de métamatériaux constitués d'inclusions gyromagnétiques conductrices et s'avère suffisamment général pour être appliqué ou étendu à l'étude de plusieurs systèmes d'intérêt.

## RÉFÉRENCES

- [1] C. Caloz et T. Itoh, *Electromagnetic Metamaterials : Transmission Line Theory and Microwave Applications*. New York : Wiley, 2005.
- [2] N. Engheta et R. W. Ziolkowski, éd., *Metamaterials : Physics and Engineering Explorations*. New York : Wiley, 2006.
- [3] A. K. Sarychev et V. M. Shalaev, *Electrodynamics of Metamaterials*. Singapore : World Scientific, 2007.
- [4] F. Capolino, éd., *Metamaterials Handbook*. Boca Raton : CRC Press, 2009.
- [5] A. Sihvola, *Electromagnetic Mixing Formulas and Applications*. London : Institution of Electrical Engineers, 1999.
- [6] D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser et S. Schultz, « Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity », *Physical Review Letters*, vol. 84, no. 18, p. 4184–4187, 2000.
- [7] R. A. Shelby, D. R. Smith et S. Schultz, « Experimental verification of a negative index of refraction », *Science*, vol. 292, no. 5514, p. 77–79, 2001.
- [8] J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart et I. Youngs, « Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures », *Physical Review Letters*, vol. 76, no. 25, p. 4773–4776, 1996.
- [9] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins et W. J. Stewart, « Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena », *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 47, no. 11, p. 2075–2084, 1999.
- [10] V. G. Veselago, « The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$  », *Soviet Physics–Uspekhi*, vol. 10, no. 4, p. 509–514, 1968.
- [11] M. W. McCall, A. Lakhtakia et W. S. Weiglhofer, « The negative index of refraction demystified », *European Journal of Physics*, vol. 23, no. 3, p. 353–359, 2002.
- [12] R. X. Wu et D. Y. Zou, « Phase diagram of lossy negative index metamaterials », *Applied Physics Letters*, vol. 93, no. 10, p. 101106, 2008.
- [13] W. Rotman, « Plasma simulation by artificial dielectrics and parallel-plate media », *IRE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 10, no. 1, p. 82–95, 1962.
- [14] S. A. Schelkunoff et H. T. Friis, *Antennas : Theory and Practice*. New York : Wiley, 1952.



- [15] C. L. Holloway, E. F. Kuester, J. Baker-Jarvis et P. Kabos, « A double negative (DNG) composite medium composed of magnetodielectric spherical particles embedded in a matrix », *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 51, no. 10, p. 2596–2603, 2003.
- [16] L. Jylhä, I. Kolmakov, S. Maslovski et S. Tretyakov, « Modeling of isotropic backward-wave materials composed of resonant spheres », *Journal of Applied Physics*, vol. 99, no. 4, p. 043102, 2006.
- [17] L. Peng, L. Ran, H. Chen, H. Zhang, J. A. Kong et T. M. Grzegorzczak, « Experimental observation of left-handed behavior in an array of standard dielectric resonators », *Physical Review Letters*, vol. 98, no. 15, p. 157403, 2007.
- [18] Q. Zhao, L. Kang, B. Du, H. Zhao, Q. Xie, X. Huang, B. Li, J. Zhou et L. Li, « Experimental demonstration of isotropic negative permeability in a three-dimensional dielectric composite », *Physical Review Letters*, vol. 101, no. 2, p. 027402, 2008.
- [19] V. Yannopapas et A. Moroz, « Negative refractive index metamaterials from inherently non-magnetic materials for deep infrared to terahertz frequency ranges », *Journal of Physics : Condensed Matter*, vol. 17, no. 25, p. 3717–3734, 2005.
- [20] M. S. Wheeler, J. S. Aitchison et M. Mojahedi, « Three-dimensional array of dielectric spheres with an isotropic negative permeability at infrared frequencies », *Physical Review B*, vol. 72, no. 19, p. 193103, 2005.
- [21] Y. Wu, J. Li, Z.-Q. Zhang et C. T. Chan, « Effective medium theory for magneto-dielectric composites : Beyond the long-wavelength limit », *Physical Review B*, vol. 74, no. 8, p. 085111, 2006.
- [22] J. A. Schuller, R. Zia, T. Taubner et M. L. Brongersma, « Dielectric metamaterials based on electric and magnetic resonances of silicon carbide particles », *Physical Review Letters*, vol. 99, no. 10, p. 107401, 2007.
- [23] R.-L. Chern et Y.-T. Chen, « Effective parameters for photonic crystals with large dielectric contrast », *Physical Review B*, vol. 80, no. 7, p. 075118, 2009.
- [24] R.-L. Chern et X.-X. Liu, « Effective parameters and quasi-static resonances for periodic arrays of dielectric spheres », *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 27, no. 3, p. 488–497, 2010.
- [25] G. Mie, « Beiträge zur optik trüber medien, speziell kolloidaler metallösungen », *Annalen der Physik*, vol. 330, no. 3, p. 377–445, 1908.
- [26] A. G. Gurevich et G. A. Melkov, *Magnetization Oscillations and Waves*. Boca Raton : CRC Press, 1996.



- [27] S. T. Chui et L. Hu, « Theoretical investigation on the possibility of preparing left-handed materials in metallic magnetic granular composites », *Physical Review B*, vol. 65, no. 14, p. 144407, 2002.
- [28] A. Saib, D. Vanhoenacker-Janvier, I. Huynen, A. Encinas, L. Piraux, E. Ferain et R. Legras, « Magnetic photonic band-gap material at microwave frequencies based on ferromagnetic nanowires », *Applied Physics Letters*, vol. 83, no. 12, p. 2378–2380, 2003.
- [29] G. Dewar, « A thin wire array and magnetic host structure with  $n < 0$  », *Journal of Applied Physics*, vol. 97, no. 10, p. 10Q101, 2005.
- [30] F. J. Rachford, D. N. Armstead, V. G. Harris et C. Vittoria, « Simulations of ferrite-dielectric-wire composite negative index materials », *Physical Review Letters*, vol. 99, no. 5, p. 057202, 2007.
- [31] H. Zhao, J. Zhou, Q. Zhao, B. Li, L. Kang et Y. Bai, « Magnetotunable left-handed material consisting of yttrium iron garnet slab and metallic wires », *Applied Physics Letters*, vol. 91, no. 13, p. 131107, 2007.
- [32] V. Boucher et D. Ménard, « Electromagnetic properties of ferromagnetic nanowire arrays », *Journal of Applied Physics*, vol. 103, no. 7, p. 07E720, 2008.
- [33] S. Liu, W. Chen, J. Du, Z. Lin, S. T. Chui et C. T. Chan, « Manipulating negative-refractive behavior with a magnetic field », *Physical Review Letters*, vol. 101, no. 15, p. 157407, 2008.
- [34] J. Jin, S. Liu, Z. Lin et S. T. Chui, « Effective-medium theory for anisotropic magnetic metamaterials », *Physical Review B*, vol. 80, no. 11, p. 115101, 2009.
- [35] V. Boucher et D. Ménard, « Effective magnetic properties of arrays of interacting ferromagnetic wires exhibiting gyromagnetic anisotropy and retardation effects », *Physical Review B*, vol. 81, no. 17, p. 174404, 2010.
- [36] O. Reynet, A.-L. Adenot, S. Deprot, O. Acher et M. Latrach, « Effect of the magnetic properties of the inclusions on the high-frequency dielectric response of diluted composites », *Physical Review B*, vol. 66, no. 9, p. 094412, 2002.
- [37] O. Acher, M. Ledieu, A.-L. Adenot et O. Reynet, « Microwave properties of diluted composites made of magnetic wires with giant-magneto-impedance effect », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 39, no. 5, p. 3085–3090, 2003.
- [38] D. P. Makhnovskiy et L. V. Panina, « Field dependent permittivity of composite materials containing ferromagnetic wires », *Journal of Applied Physics*, vol. 93, no. 7, p. 4120–4129, 2003.

- [39] L. V. Panina, « Magnetoimpedance (MI) in amorphous wires : new materials and applications », *Physica Status Solidi A : Applications and Materials Science*, vol. 206, no. 4, p. 656–662, 2009.
- [40] A. Encinas, M. Demand, L. Vila, L. Piraux et I. Huynen, « Tunable remanent state resonance frequency in arrays of magnetic nanowires », *Applied Physics Letters*, vol. 81, no. 11, p. 2032–2034, 2002.
- [41] A. Saib et I. Huynen, « Transmission lines on periodic bandgap metamaterials : from microwaves to optics applications », *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*, vol. 7, no. 2, p. S124–S132, 2005.
- [42] B. K. Kuanr, V. Veerakumar, R. Marson, S. R. Mishra, R. E. Camley et Z. Celinski, « Nonreciprocal microwave devices based on magnetic nanowires », *Applied Physics Letters*, vol. 94, no. 20, p. 202505, 2009.
- [43] L.-P. Carignan, T. Kodera, A. Yelon, D. Ménard et C. Caloz, « Integrated and self-biased planar magnetic microwave circuits based on ferromagnetic nanowire substrates », *Proceedings of the 39th European Microwave Conference, Rome*, p. 743–746, IEEE Press, Piscataway, NJ, 2009.
- [44] J. De La Torre Medina, J. Spiegel, M. Darques, L. Piraux et I. Huynen, « Differential phase shift in nonreciprocal microstrip lines on magnetic nanowired substrates », *Applied Physics Letters*, vol. 96, no. 7, p. 072508, 2010.
- [45] M. Darques, J. De La Torre Medina, L. Piraux, L. Cagnon et I. Huynen, « Microwave circulator based on ferromagnetic nanowires in an alumina template », *Nanotechnology*, vol. 21, no. 14, p. 145208, 2010.
- [46] J.-R. Liu, M. Itoh, M. Terada, T. Horikawa et K.-I. Machida, « Enhanced electromagnetic wave absorption properties of Fe nanowires in gigahertz range », *Applied Physics Letters*, vol. 91, no. 9, p. 093101, 2007.
- [47] L. Qiao, X. Han, B. Gao, J. Wang, F. Wen et F. Li, « Microwave absorption properties of the hierarchically branched Ni nanowire composites », *Journal of Applied Physics*, vol. 105, no. 5, p. 053911, 2009.
- [48] S. Melle, J. L. Menéndez, G. Armelles, D. Navas, M. Vázquez, K. Nielsch, R. B. Wehrspohn et U. Gösele, « Magneto-optical properties of nickel nanowire arrays », *Applied Physics Letters*, vol. 83, no. 22, p. 4547–4549, 2003.
- [49] J. B. González-Díaz, A. García-Martín, G. Armelles, D. Navas, M. Vázquez, K. Nielsch, R. B. Wehrspohn et U. Gösele, « Enhanced magneto-optics and size effects in ferromagnetic nanowire arrays », *Advanced Materials*, vol. 19, no. 18, p. 2643–2647, 2007.

- [50] N. García et E. V. Ponizovskaia, « Low-loss left-handed materials using metallic magnetic cylinders », *Physical Review E*, vol. 71, no. 4, p. 046611, 2005.
- [51] Y.-S. Zhou, B.-Y. Gu et F.-H. Whang, « Ferromagnetic wire lattice with a tunable negative index of refraction for microwaves using an external magnetic field », *Europhysics Letters*, vol. 75, no. 5, p. 737–742, 2006.
- [52] J. Chen, D. Tang, B. Zhang, Y. Yang, M. Lu, H. Lu, F. Lu et W. Xu, « Left-handed materials made of dilute ferromagnetic wire arrays with gyrotropic tensors », *Journal of Applied Physics*, vol. 102, no. 2, p. 023106, 2007.
- [53] E. Demirel, A. C. Basaran et B. Aktas, « Possible negative refraction in two dimensional ferromagnetic wire lattice », *The European Physical Journal B*, vol. 69, no. 2, p. 173–180, 2009.
- [54] H. García-Miquel, J. Carbonell, V. E. Boria et J. Sánchez-Dehesa, « Experimental evidence of left handed transmission through arrays of ferromagnetic microwires », *Applied Physics Letters*, vol. 94, no. 5, p. 054103, 2009.
- [55] J. Carbonell, H. García-Miquel et J. Sánchez-Dehesa, « Double negative metamaterials based on ferromagnetic microwires », *Physical Review B*, vol. 81, no. 2, p. 024401, 2010.
- [56] A. Labrador, C. Gómez-Polo, J. I. Pérez-Landazábal, V. Zablotskii, I. Ederra, R. Gonzalo, G. Badini-Confalonieri et M. Vázquez, « Magnetotunable left-handed FeSiB ferromagnetic microwires », *Optics Letters*, vol. 35, no. 13, p. 2161–2163, 2010.
- [57] A. Encinas-Oropesa, M. Demand, L. Piraux, I. Huynen et U. Ebels, « Dipolar interactions in arrays of nickel nanowires studied by ferromagnetic resonance », *Physical Review B*, vol. 63, no. 10, p. 104415, 2001.
- [58] M. Demand, A. Encinas-Oropesa, S. Kenane, U. Ebels, I. Huynen et L. Piraux, « Ferromagnetic resonance studies of nickel and permalloy nanowire arrays », *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 249, no. 1–2, p. 228–233, 2002.
- [59] C. A. Ramos, E. Vassallo Brigneti et M. Vázquez, « Self-organized nanowires : evidence of dipolar interactions from ferromagnetic resonance measurements », *Physica B : Condensed Matter*, vol. 354, no. 1–4, p. 195–197, 2004.
- [60] I. Dumitru, F. Li, J. B. Wiley, D. Cimpoesu, A. Stancu et L. Spinu, « Study of magnetic interactions in metallic nanowire networks », *IEEE Transactions on Magnetism*, vol. 41, no. 10, p. 3361–3363, 2005.
- [61] L.-P. Carignan, C. Lacroix, A. Ouimet, M. Ciureanu, A. Yelon et D. Ménard, « Magnetic anisotropy in arrays of Ni, CoFeB, and Ni/Cu nanowires », *Journal of Applied Physics*, vol. 102, no. 2, p. 023905, 2007.

- [62] R. Arias et D. L. Mills, « Theory of spin excitations and the microwave response of cylindrical ferromagnetic nanowires », *Physical Review B*, vol. 63, no. 13, p. 134439, 2001.
- [63] Z. K. Wang, M. H. Kuok, S. C. Ng, D. J. Lockwood, M. G. Cottam, K. Nielsch, R. B. Wehrspohn et U. Gösele, « Spin-wave quantization in ferromagnetic nickel nanowires », *Physical Review Letters*, vol. 89, no. 2, p. 027201, 2002.
- [64] R. Arias et D. L. Mills, « Theory of collective spin waves and microwave response of ferromagnetic nanowire arrays », *Physical Review B*, vol. 67, no. 9, p. 094423, 2003.
- [65] A. A. Stashkevich, Y. Roussigné, P. Djemia, S. M. Chérif, P. R. Evans, A. P. Murphy, W. R. Hendren, R. Atkinson, R. J. Pollard, A. V. Zayats, G. Chaboussant et F. Ott, « Spin-wave modes in Ni nanorod arrays studied by Brillouin light scattering », *Physical Review B*, vol. 80, no. 14, p. 144406, 2009.
- [66] X. Kou, X. Fan, H. Zhu et J. Q. Xiao, « Tunable ferromagnetic resonance in NiFe nanowires with strong magnetostatic interaction », *Applied Physics Letters*, vol. 94, no. 11, p. 112509, 2009.
- [67] L.-P. Carignan, V. Boucher, T. Kadera, C. Caloz, A. Yelon et D. Ménard, « Double ferromagnetic resonance in nanowire arrays », *Applied Physics Letters*, vol. 95, no. 6, p. 062504, 2009.
- [68] V. Boucher, L.-P. Carignan, T. Kadera, C. Caloz, A. Yelon et D. Ménard, « Effective permeability tensor and double resonance of interacting bistable ferromagnetic nanowires », *Physical Review B*, vol. 80, no. 22, p. 224402, 2009.
- [69] J. De La Torre Medina, L. Piraux et A. Encinas, « Tunable zero field ferromagnetic resonance in arrays of bistable magnetic nanowires », *Applied Physics Letters*, vol. 96, no. 4, p. 042504, 2010.
- [70] J. De La Torre Medina, L. Piraux, J. M. Olais Govea et A. Encinas, « Double ferromagnetic resonance and configuration-dependent dipolar coupling in unsaturated arrays of bistable magnetic nanowires », *Physical Review B*, vol. 81, no. 14, p. 144411, 2010.
- [71] L. D. Landau et E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*. Oxford : Pergamon, 1e éd., 1960.
- [72] M. Maryško, « The influence of electromagnetic propagation on ferromagnetic resonance in an infinite cylinder », *Physica Status Solidi A : Applications and Materials Science*, vol. 47, no. 1, p. 277–286, 1978.
- [73] L. Kraus, « Theory of ferromagnetic resonances in thin wires », *Czechoslovak Journal of Physics, Section B*, vol. 32, no. 11, p. 1264–1282, 1982.

- [74] M. E. Brodwin et M. K. Parsons, « New approach to the perturbation of cavity resonators by homogeneous, isotropic spheres », *Journal of Applied Physics*, vol. 36, no. 2, p. 494–504, 1965.
- [75] P. H. Lissberger et P. W. Saunders, « Optical and magneto-optical properties of thin film cermet », *Thin Solid Films*, vol. 34, no. 2, p. 323–333, 1976.
- [76] V. B. Bregar et M. Pavlin, « Effective-susceptibility tensor for a composite with ferromagnetic inclusions : Enhancement of effective-media theory and alternative ferromagnetic approach », *Journal of Applied Physics*, vol. 95, no. 11, p. 6289–6293, 2004.
- [77] V. B. Bregar, « Effective-medium approach to the magnetic susceptibility of composites with ferromagnetic inclusions », *Physical Review B*, vol. 71, no. 17, p. 174418, 2005.
- [78] J. Ramprecht et D. Sjöberg, « Magnetic losses in composite materials », *Journal of Physics D : Applied Physics*, vol. 41, no. 13, p. 135005, 2008.
- [79] L. Lewin, « The electrical constants of a material loaded with spherical particles », *Journal of the Institution of Electrical Engineers—Part III : Radio and Communication Engineering*, vol. 94, no. 27, p. 65–68, 1947.
- [80] H. C. van de Hulst, *Light Scattering by Small Particles*. New York : Wiley, 1957.
- [81] J. C. Maxwell Garnett, « Colours in metal glasses and in metallic films », *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, vol. 203, no. 1, p. 385–420, 1904.
- [82] N. A. Khizhnyak, « Artificial anisotropic dielectrics : I–III », *Soviet Physics—Technical Physics*, vol. 27, no. 9, p. 2006–2037, 1957.
- [83] N. A. Khizhnyak, « Artificial anisotropic dielectrics formed from two-dimensional lattices of infinite bars and rods », *Soviet Physics—Technical Physics*, vol. 29, no. 5, p. 604–614, 1959.
- [84] C. A. Grimes et D. M. Grimes, « Permeability and permittivity spectra of granular materials », *Physical Review B*, vol. 43, no. 13, p. 10780–10788, 1991.
- [85] D. Rousselle, A. Berthault, O. Acher, J. P. Bouchaud et P. G. Zerah, « Effective medium at finite frequency : Theory and experiment », *Journal of Applied Physics*, vol. 74, no. 1, p. 475–479, 1993.
- [86] L. Olmedo, G. Chateau, C. Deleuze et J. L. Forveille, « Microwave characterization and modelization of magnetic granular materials », *Journal of Applied Physics*, vol. 73, no. 10, p. 6992–6994, 1993.
- [87] R. G. Geyer, J. Mantese et J. Baker-Jarvis, « Effective medium theory for ferrite-loaded materials », *National Institute of Standards and Technology Technical Note*, vol. 1371, 1994.

- [88] E. Matagne, « Macroscopic electric characterization of bundles of conductors », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 31, no. 3, p. 1464–1467, 1995.
- [89] R. Ramprasad, P. Zurcher, M. Petras, M. Miller et P. Renaud, « Magnetic properties of metallic ferromagnetic nanoparticle composites », *Journal of Applied Physics*, vol. 96, no. 1, p. 519–529, 2004.
- [90] L. Z. Wu, J. Ding, H. B. Jiang, C. P. Neo, L. F. Chen et C. K. Ong, « High frequency complex permeability of iron particles in a nonmagnetic matrix », *Journal of Applied Physics*, vol. 99, no. 8, p. 083905, 2006.
- [91] O. Acher et S. Dubourg, « Generalization of Snoek’s law to ferromagnetic films and composites », *Physical Review B*, vol. 77, no. 10, p. 104440, 2008.
- [92] A. N. Lagarkov et K. N. Rozanov, « High-frequency behavior of magnetic composites », *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 321, no. 14, p. 2082–2092, 2009.
- [93] C. P. Neo, Y. Yang et J. Ding, « Calculation of complex permeability of magnetic composite materials using ferromagnetic resonance model », *Journal of Applied Physics*, vol. 107, no. 8, p. 083906, 2010.
- [94] X. Hu, C. T. Chan, J. Zi, M. Li et K.-M. Ho, « Diamagnetic response of metallic photonic crystals at infrared and visible frequencies », *Physical Review Letters*, vol. 96, no. 22, p. 223901, 2006.
- [95] A. K. Sarychev, R. C. McPhedran et V. M. Shalaev, « Electrodynamics of metal-dielectric composites and electromagnetic crystals », *Physical Review B*, vol. 62, no. 12, p. 8531–8539, 2000.
- [96] J. Spiegel, J. De La Torre, M. Darques, L. Piraux et I. Huynen, « Permittivity model for ferromagnetic nanowired substrates », *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 17, no. 7, p. 492–494, 2007.
- [97] U. Netzelmann, « Ferromagnetic resonance of particulate magnetic recording tapes », *Journal of Applied Physics*, vol. 68, no. 4, p. 1800–1807, 1990.
- [98] J. Dubowik, « Shape anisotropy of magnetic heterostructures », *Physical Review B*, vol. 54, no. 2, p. 1088–1091, 1996.
- [99] G. N. Kakazei, A. F. Kravets, N. A. Lesnik, M. M. Pereira de Azevedo, Y. G. Pogorelov et J. B. Sousa, « Ferromagnetic resonance in granular thin films », *Journal of Applied Physics*, vol. 85, no. 8, p. 5654–5656, 1999.
- [100] I. Dumitru, D. D. Sandu et C. G. Verdes, « Model of ferromagnetic resonance in interacting fine particle systems », *Physical Review B*, vol. 66, no. 10, p. 104432, 2002.



- [101] D. S. Schmool, R. Rocha, J. B. Sousa, J. A. M. Santos, G. N. Kakazei, J. S. Gari-taonandia et L. Lezama, « The role of dipolar interactions in magnetic nanoparticles : Ferromagnetic resonance in discontinuous magnetic multilayers », *Journal of Applied Physics*, vol. 101, no. 10, p. 103907, 2007.
- [102] R. Skomski, G. C. Hadjipanayis et D. J. Sellmyer, « Effective demagnetizing factors of complicated particle mixtures », *IEEE Transactions on Magnetism*, vol. 43, no. 6, p. 2956–2958, 2007.
- [103] J. A. Osborn, « Demagnetizing factors of the general ellipsoid », *Physical Review*, vol. 67, no. 11–12, p. 351–357, 1945.
- [104] W. S. Ament et G. T. Rado, « Electromagnetic effects of spin wave resonance in ferromagnetic metals », *Physical Review*, vol. 97, no. 6, p. 1558–1566, 1955.
- [105] N. W. Ashcroft et N. D. Mermin, *Solid State Physics*. Toronto : Thomson Learning, 1976.
- [106] M. Dressel et G. Grüner, *Electrodynamics of Solids : Optical Properties of Electrons in Matter*. Cambridge : Cambridge University Press, 2002.
- [107] H. J. Juretschke, « Electromagnetic theory of dc effects in ferromagnetic resonance », *Journal of Applied Physics*, vol. 31, no. 8, p. 1401–1406, 1960.
- [108] G. E. H. Reuter et E. H. Sondheimer, « The theory of the anomalous skin effect in metals », *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 195, no. 1042, p. 336–364, 1948.
- [109] C. E. Patton, « Classical theory of spin-wave dispersion for ferromagnetic metals », *Czechoslovak Journal of Physics, Section B*, vol. 26, no. 8, p. 925–935, 1976.
- [110] L. L. Hirst et R. E. Prange, « Exchange effects in ferromagnetic resonance with nonlocal conductivity », *Physical Review*, vol. 139, no. 3A, p. A892–A900, 1965.
- [111] A. Pimenov, A. Loidl, K. Gehrke, V. Moshnyaga et K. Samwer, « Negative refraction observed in a metallic ferromagnet in the gigahertz frequency range », *Physics Review Letters*, vol. 98, no. 19, p. 197401, 2007.
- [112] G. T. Rado et J. R. Weertman, « Spin-wave resonance in a ferromagnetic metal », *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, vol. 11, no. 3–4, p. 315–333, 1959.
- [113] W. T. Doyle, « Optical properties of a suspension of metal spheres », *Physical Review B*, vol. 39, no. 14, p. 9852–9858, 1989.
- [114] S. N. Samaddar, « Scattering of plane waves from an infinitely long cylinder of anisotropic materials at oblique incidence with an application to an electronic scanning antenna », *Applied Scientific Research, Section B*, vol. 10, no. 5–6, p. 385–411, 1963.

- [115] N. Bloembergen, « On the magnetic resonance absorption in conductors », *Journal of Applied Physics*, vol. 23, no. 12, p. 1383–1389, 1952.
- [116] R. C. Jones, « A generalization of the dielectric ellipsoid problem », *Physical Review*, vol. 68, no. 3–4, p. 93–96, 1945.
- [117] A. D. Berk et B. A. Lengyel, « Magnetic fields in small ferrite bodies with applications to microwave cavities containing such bodies », *Proceedings of the IRE*, vol. 43, no. 11, p. 1587–1591, 1955.
- [118] C. Kittel, « On the theory of ferromagnetic resonance absorption », *Physical Review*, vol. 73, no. 2, p. 155–161, 1948.
- [119] D. D. Stancil et A. Prabhakar, *Spin Waves : Theory and Applications*. New York : Springer, 2009.
- [120] R. Landauer, « Electrical conductivity in inhomogeneous media », *Electrical transport and optical properties of inhomogeneous media* (J. C. Garland et D. B. Tanner, éd.), vol. 40, p. 2–45, New York : American Institute of Publishing, 1978.
- [121] C. Brosseau, « Modelling and simulation of dielectric heterostructures : a physical survey from an historical perspective », *Journal of Physics D : Applied Physics*, vol. 39, no. 7, p. 1277–1294, 2006.
- [122] W. L. Bragg et A. B. Pippard, « The form birefringence of macromolecules », *Acta Crystallographica*, vol. 6, no. 11–12, p. 865–867, 1953.
- [123] C. F. Bohren et N. C. Wickramasinghe, « On the computation of optical properties of heterogeneous grains », *Astrophysics and Space Science*, vol. 50, no. 2, p. 461–472, 1977.
- [124] G. B. Smith, « Dielectric constants for mixed media », *Journal of Physics D : Applied Physics*, vol. 10, no. 4, p. L39–L42, 1977.
- [125] G. B. Smith, « The scope of effective medium theory for fine metal particle solar absorbers », *Applied Physics Letters*, vol. 35, no. 9, p. 668–670, 1979.
- [126] W. Lamb, D. M. Wood et N. W. Ashcroft, « Long-wavelength electromagnetic propagation in heterogeneous media », *Physical Review B*, vol. 21, no. 6, p. 2248–2266, 1980.
- [127] G. A. Niklasson, C. G. Granqvist et O. Hunderi, « Effective medium models for the optical properties of inhomogeneous materials », *Applied Optics*, vol. 20, no. 1, p. 26–30, 1981.
- [128] C. D. Cantrell, *Modern Mathematical Methods for Physicists and Engineers*. Cambridge : Cambridge University Press, 2000.



- [129] M. G. Cottam, éd., *Linear and nonlinear spin waves in magnetic films and superlattices*. Singapore : World Scientific, 1994.
- [130] G. B. Arfken et H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*. San Diego : Academic, 5e éd., 2001.
- [131] R. F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*. New York : McGraw-Hill, 1961.
- [132] R. A. Waldron, « Intrinsic and external permeabilities and susceptibilities of gyro-magnetic materials », *British Journal of Applied Physics*, vol. 14, no. 10, p. 700–703, 1963.
- [133] S. Deprot, A.-L. Adenot, F. Bertin, E. Hervé et O. Acher, « High frequency losses of ferromagnetic wires near the gyromagnetic resonance », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 37, no. 4, p. 2404–2406, 2001.
- [134] E. Schloemann, « Advances in ferrite microwave materials and devices », *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 209, no. 1–3, p. 15–20, 2000.
- [135] A. K. Sarychev et V. M. Shalaev, « Electromagnetic field fluctuations and optical nonlinearities in metal-dielectric composites », *Physics Reports*, vol. 335, no. 6, p. 275–371, 2000.
- [136] D. Ménard et A. Yelon, « Theory of longitudinal magnetoimpedance in wires », *Journal of Applied Physics*, vol. 88, no. 1, p. 379–393, 2000.
- [137] S. I. Maslovski, S. A. Tretyakov et P. A. Belov, « Wire media with negative effective permittivity : A quasi-static model », *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 35, no. 1, p. 47–51, 2002.
- [138] D. P. Makhnovskiy, L. V. Panina, C. Garcia, A. P. Zhukov et J. Gonzalez, « Experimental demonstration of tunable scattering spectra at microwave frequencies in composite media containing CoFeCrSiB glass-coated amorphous ferromagnetic wires and comparison with theory », *Physical Review B*, vol. 74, no. 6, p. 064205, 2006.
- [139] A. J. Newell, W. Williams et D. J. Dunlop, « A generalization of the demagnetizing tensor for nonuniform magnetization », *Journal of Geophysical Research*, vol. 98, no. B6, p. 9551–9555, 1993.
- [140] J. R. Eshbach, « Spin-wave propagation and the magnetoelastic interaction in yttrium iron garnet », *Journal of Applied Physics*, vol. 34, no. 4, p. 1298–1304, 1963.
- [141] S. E. Lofland, H. García-Miquel, M. Vázquez et S. M. Bhagat, « Microwave magnetoabsorption in glass-coated amorphous microwires with radii close to skin depth », *Journal of Applied Physics*, vol. 92, no. 4, p. 2058–2063, 2002.

- [142] L. F. Chen, C. K. Ong, C. P. Neo, V. V. Varadan et V. K. Varadan, *Microwave Electronics : Measurement and Materials Characterization*. New York : Wiley, 2004.
- [143] J. Lam, « Magnetic permeability of a simple cubic lattice of conducting magnetic spheres », *Journal of Applied Physics*, vol. 60, no. 12, p. 4230–4235, 1986.
- [144] B. Lax et K. J. Button, *Microwave Ferrites and Ferrimagnetics*. New York : McGraw-Hill, 1962.
- [145] N. S. Averkiev et A. Shik, « Capacitance properties of a system of coupled nanowires », *Physical Review B*, vol. 59, no. 4, p. 3250–3254, 1999.
- [146] A. Fert et L. Piraux, « Magnetic nanowires », *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 200, no. 1–3, p. 338–358, 1999.
- [147] S. Zhao, K. Chan, A. Yelon et T. Veres, « Preparation of open-through anodized aluminium oxide films with a clean method », *Nanotechnology*, vol. 18, no. 24, p. 245304, 2007.
- [148] L.-P. Carignan, M. Massicotte, C. Caloz, A. Yelon et D. Ménard, « Magnetization reversal in arrays of Ni nanowires with different diameters », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 45, no. 10, p. 4070–4073, 2009.
- [149] M. Pardavi-Horvath, « Microwave applications of soft ferrites », *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 215–216, p. 171–183, 2000.
- [150] J. D. Adam, L. E. Davis, G. F. Dionne, E. F. Schloemann et S. N. Stitzer, « Ferrite devices and materials », *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 50, no. 3, p. 721–737, 2002.
- [151] A. Saib, M. Darques, L. Piraux, D. Vanhoenacker-Janvier et I. Huynen, « An unbiased integrated microstrip circulator based on magnetic nanowired substrate », *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 53, no. 6, p. 2043–2049, 2005.
- [152] B. Ye, F. Li, D. Cimpoesu, J. B. Wiley, J.-S. Jung, A. Stancu et L. Spinu, « Passive high-frequency devices based on superlattice ferromagnetic nanowires », *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 316, no. 2, p. e56–e58, 2007.
- [153] B. K. Kuanr, R. Marson, S. R. Mishra, A. V. Kuanr, R. E. Camley et Z. J. Celinski, « Gigahertz frequency tunable noise suppressor using nickel nanorod arrays and Permalloy films », *Journal of Applied Physics*, vol. 105, no. 7, p. 07A520, 2009.
- [154] B. Nam, Y.-H. Choa, S.-T. Oh, S. K. Lee et K. H. Kim, « Broadband RF noise suppression by magnetic nanowire-filled composite films », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 45, no. 6, p. 2777–2780, 2009.

- [155] M. Darques, J. Spiegel, J. De La Torre Medina, I. Huynen et L. Piraux, « Ferromagnetic nanowire-loaded membranes for microwave electronics », *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 321, no. 14, p. 2055–2065, 2009.
- [156] A. Saib, M. Darques, L. Piraux, D. Vanhoenacker-Janvier et I. Huynen, « Unbiased microwave circulator based on ferromagnetic nanowires arrays of tunable magnetization state », *Journal of Physics D : Applied Physics*, vol. 38, no. 16, p. 2759–2763, 2005.
- [157] A. Encinas, L. Vila, M. Darques, J. M. George et L. Piraux, « Configurable multiband microwave absorption states prepared by field cycling in arrays of magnetic nanowires », *Nanotechnology*, vol. 18, no. 6, p. 065705, 2007.
- [158] M. E. Hines, « Reciprocal and nonreciprocal modes of propagation in ferrite stripline and microstrip devices », *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 19, no. 5, p. 442–451, 1971.
- [159] J. Baker-Jarvis, M. D. Janezic, J. H. Grosvenor, Jr. et R. G. Geyer, « Transmission/reflection and short-circuit line methods for measuring permittivity and permeability », *National Institute of Standards and Technology Technical Note*, vol. 1355, 1992.
- [160] R. A. Pucel et D. J. Massé, « Microstrip propagation on magnetic substrates—Part I : Design theory », *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 20, no. 5, p. 304–308, 1972.
- [161] G. F. Dionne et D. E. Oates, « Tunability of microstrip ferrite resonator in the partially magnetized state », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 33, no. 5, p. 3421–3423, 1997.
- [162] L. Kraus, « Theory of giant magneto-impedance in the planar conductor with uniaxial magnetic anisotropy », *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 195, no. 3, p. 764–778, 1999.
- [163] O. N. Martyanov, V. F. Yudanov, R. N. Lee, S. A. Nepijko, H. J. Elmers, C. M. Schneider et G. Schönhense, « Ferromagnetic resonance investigation of collective phenomena in two-dimensional periodic arrays of Co particles », *Applied Physics A : Materials Science and Processing*, vol. 81, no. 4, p. 679–683, 2005.
- [164] S. Rajagopalan et J. K. Furdyna, « Magnetic dimensional resonances in  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  spheres », *Physical Review B*, vol. 39, no. 4, p. 2532–2540, 1989.
- [165] A. A. Zharov et V. V. Kurin, « Giant resonant magneto-optic Kerr effect in nanostructured ferromagnetic materials », *Journal of Applied Physics*, vol. 102, no. 12, p. 123514, 2007.
- [166] G. Monette, C. Lacroix, S. Lambert-Milot, V. Boucher, D. Ménard et S. Francœur, « Giant magneto-optical Faraday effect in GaP epilayers containing MnP magnetic nanoclusters », *Journal of Applied Physics*, vol. 107, no. 9, p. 09A949, 2010.

- [167] M. H. Phan, H. X. Peng, S. C. Yu et M. R. Wisnom, « Large enhancement of GMI effect in polymer composites containing Co-based ferromagnetic microwires », *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 316, no. 2, p. e253–e256, 2007.
- [168] J. Fan, J. Wu, N. Ning, H. Chiriac et X. Li, « Magnetic dynamic interaction in amorphous microwire array », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 46, no. 6, p. 2431–2434, 2010.
- [169] J. De La Torre Medina, M. Darques, T. Blon, L. Piroux et A. Encinas, « Effects of layering on the magnetostatic interactions in microstructures of  $\text{Co}_x\text{Cu}_{1-x}/\text{Cu}$  nanowires », *Physical Review B*, vol. 77, no. 1, p. 014417, 2008.
- [170] E. Schlömann, « Microwave behavior of partially magnetized ferrites », *Journal of Applied Physics*, vol. 41, no. 1, p. 204–214, 1970.
- [171] A. H. Sihvola, « Peculiarities in the dielectric response of negative-permittivity scatterers », *Progress In Electromagnetics Research*, vol. PIER–66, p. 191–198, 2006.

## ANNEXE A

### Remarques sur la singularité des tenseurs de susceptibilité magnétique de dimension $3 \times 3$ dans l'approximation des petits signaux

Dans cette annexe, nous allons clarifier une difficulté formelle liée à la dimension (c.-à-d.,  $2 \times 2$  ou  $3 \times 3$ ) des tenseurs de susceptibilité magnétique considérés dans le cadre de ce travail, soit  $\bar{\bar{\chi}}_w$ ,  $\bar{\bar{\eta}}_w$ ,  $\bar{\bar{\chi}}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\bar{\eta}}_{\text{eff}}$ . En particulier, nous allons indiquer en quoi la relation donnée à l'équation (3.32), c'est-à-dire

$$\bar{\bar{\eta}}_w^{-1} = \bar{\bar{\chi}}_w^{-1} + \bar{\bar{N}}_w, \quad (\text{A.1})$$

conduit, sous cette forme, à des singularités dans l'approximation des petits signaux et nous allons montrer comment on peut remédier à ce problème. Ces remarques vont également s'appliquer aux relations similaires existant entre les différents tenseurs de susceptibilité magnétique, comme par exemple les équations (3.36), (3.104), (3.108) et (3.117). De plus, l'analyse présentée ici va permettre d'explicitier davantage les façons bien distinctes de prendre en compte les champs de désaimantation (et d'interaction) statique et dynamique dans les relations constitutives.

#### Tenseur de susceptibilité intrinsèque dans l'approximation des petits signaux

Considérons d'abord l'équation du mouvement de l'aimantation exprimée sous la forme donnée à l'équation (2.7), c'est-à-dire avec un terme d'amortissement phénoménologique  $\alpha$  de Gilbert

$$\frac{\partial \mathbf{M}_w}{\partial t} = -\mathbf{M}_w \times \left( \mu_0 |\gamma| \mathbf{H}_w - \frac{\alpha}{M_s} \frac{\partial \mathbf{M}_w}{\partial t} \right), \quad (\text{A.2})$$

où l'aimantation et le champ effectif peuvent être séparés en une composante statique et une composante dynamique [Éqs. (2.8) et (2.9)]

$$\mathbf{M}_w = \mathbf{M}_{w0} + \mathbf{m}_w = M_s \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{m}_w, \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{H}_w = \mathbf{H}_{w0} + \mathbf{h}_w = H_{w0} \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{h}_w. \quad (\text{A.4})$$

Signalons que sous cette forme, l'équation du mouvement conserve la norme de l'aimantation. En effet, en multipliant scalairement les deux membres de l'équation (A.2) par  $\mathbf{M}_w$ , nous trouvons que  $\partial(|\mathbf{M}_w|^2)/\partial t = 0$ , ce qui nous permet de déduire que  $|\mathbf{M}_w|$  ne varie pas dans le temps.

L'approximation des petits signaux consiste alors à poser que l'amplitude des champs dynamiques est très faible par rapport à celle des champs statiques, c'est-à-dire que  $|\mathbf{m}_w| \ll M_s$  et  $|\mathbf{h}_w| \ll H_{w0}$ , ce qui permet de linéariser l'équation (A.2). En supposant ensuite une dépendance temporelle harmonique proportionnelle à  $e^{-i\omega t}$  pour les composantes de  $\mathbf{h}_w$  et  $\mathbf{m}_w$ , la résolution du système d'équations résultant mène au tenseur de susceptibilité magnétique intrinsèque *transverse*  $\bar{\bar{\chi}}_w$ , qui définit la relation

$$\mathbf{m}_w = \bar{\bar{\chi}}_w \mathbf{h}_w = \begin{pmatrix} \chi & -i\chi_t \\ i\chi_t & \chi \end{pmatrix} \mathbf{h}_w, \quad (\text{A.5})$$

où

$$\chi = \frac{\omega_M \omega_H^*}{(\omega_H^*)^2 - \omega^2}, \quad (\text{A.6a})$$

$$\chi_t = \frac{\omega_M \omega}{(\omega_H^*)^2 - \omega^2} \quad (\text{A.6b})$$

sont les composantes diagonales et hors diagonales de  $\bar{\bar{\chi}}_w$ , lesquelles sont liées aux composantes transverses du tenseur de perméabilité intrinsèque  $\bar{\bar{\mu}}_w$  de l'équation (2.12) par les relations  $\mu = \mu_0(1 + \chi)$  et  $\mu_t = \mu_0\chi_t$ , respectivement.

Ce résultat indique notamment que dans l'approximation des petits signaux, l'aimantation dynamique  $\mathbf{m}_w$  demeure confinée dans le plan transverse à l'axe de gyrotropie (c.-à-d., l'axe  $z$  dans le cas traité ici), de sorte que  $\bar{\bar{\chi}}_w$  se réduit à un tenseur  $2 \times 2$ . En effet, lorsque les termes non linéaires sont négligés, la résolution du système décrit par l'équation (A.2) conduit à la relation triviale  $m_{w,z} = \chi_{\parallel} h_{w,z} = 0$ , ce qui implique que nous devons poser  $\chi_{\parallel} = 0$ , où  $\chi_{\parallel}$  est la composante axiale de  $\bar{\bar{\chi}}_w$ , telle que  $\mu_{\parallel} = \mu_0(1 + \chi_{\parallel})$ .

### Tenseur de susceptibilité externe d'un fil individuel dans l'approximation des petits signaux et la limite quasi statique

Nous allons maintenant considérer la réponse externe d'un fil individuel caractérisé par le tenseur de désaimantation  $\bar{\bar{N}}_w$ , lequel possède des composantes dans le plan  $N_{ip}^w \approx 1/2$  et hors plan  $N_{op}^w \approx 0$  [Éq. (2.2)]. Nous supposons que le fil est soumis à un champ dynamique local  $\mathbf{h}_{loc}$ , qui demeure spatialement uniforme en son voisinage. Dans la limite QS, le champ dynamique  $\mathbf{h}_w$  à l'intérieur du fil est également uniforme et peut être obtenu à partir de la version bidimensionnelle de l'équation (3.31), c'est-à-dire

$$\mathbf{h}_w = \mathbf{h}_{loc} - \bar{\bar{N}}_{w\perp} \mathbf{m}_w, \quad (\text{A.7})$$

où  $\bar{\bar{N}}_{w\perp}$  est un tenseur de désaimantation *transverse*  $2 \times 2$  donné par

$$\bar{\bar{N}}_{w\perp} = \begin{pmatrix} N_{ip}^w & 0 \\ 0 & N_{ip}^w \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Notons ici que le terme  $-\bar{\bar{N}}_{w\perp} \mathbf{m}_w$  représente le champ de désaimantation dynamique.

La réponse de l'aimantation  $\mathbf{m}_w$  du fil dans le champ local  $\mathbf{h}_{loc}$  est décrite par le tenseur de susceptibilité externe  $\bar{\bar{\eta}}_w$ , lequel établit la relation constitutive  $\mathbf{m}_w = \bar{\bar{\eta}}_w \mathbf{h}_{loc}$  définie à l'équation (3.28). Pour déterminer  $\bar{\bar{\eta}}_w$ , nous pouvons remplacer  $\mathbf{h}_w$  et  $\mathbf{h}_{loc}$  dans l'équation (A.7) par  $\bar{\bar{\chi}}_w^{-1} \mathbf{m}_w$  et  $\bar{\bar{\eta}}_w^{-1} \mathbf{m}_w$ , respectivement. Le calcul est direct et mène à l'expression tensorielle de dimension  $2 \times 2$

$$\bar{\bar{\eta}}_w^{-1} = \bar{\bar{\chi}}_w^{-1} + \bar{\bar{N}}_{w\perp}, \quad (\text{A.9})$$

que nous pouvons expliciter comme

$$\begin{pmatrix} \eta & -i\eta_t \\ i\eta_t & \eta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \chi & -i\chi_t \\ i\chi_t & \chi \end{pmatrix}^{-1} + \begin{pmatrix} N_{ip}^w & 0 \\ 0 & N_{ip}^w \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Enfin, en substituant l'équation (A.6) dans l'équation (A.10), nous trouvons que les composantes transverses de  $\bar{\bar{\eta}}_w$  s'expriment comme

$$\eta = \frac{\omega_M (\omega_H^* + N_{ip}^w \omega_M)}{(\omega_H^* + N_{ip}^w \omega_M)^2 - \omega^2}, \quad (\text{A.11a})$$

$$\eta_t = \frac{\omega_M \omega}{(\omega_H^* + N_{ip}^w \omega_M)^2 - \omega^2}, \quad (\text{A.11b})$$

ce qui, comme attendu, coïncide avec les relations obtenues à l'équation (3.29), dans la limite où  $N_{\text{ip}}^w = 1/2$ .

### Problème avec l'équation (A.1) dans l'approximation des petits signaux

Les résultats que nous venons de présenter montrent que dans l'approximation des petits signaux, nous travaillons, en général, dans un sous-espace bidimensionnel, de sorte que  $\bar{\bar{\chi}}_w$  et  $\bar{\bar{\eta}}_w$  se réduisent à des tenseurs  $2 \times 2$ , liés par l'intermédiaire du tenseur  $\bar{\bar{N}}_{w\perp}$ . D'un point de vue strictement mathématique, il en résulte que l'application de la relation  $\bar{\bar{\eta}}_w^{-1} = \bar{\bar{\chi}}_w^{-1} + \bar{\bar{N}}_w$ , donnée à l'équation (A.1) et impliquant des tenseurs  $3 \times 3$ , pose une difficulté formelle. En effet, l'équation (A.1) s'écrit alors de façon explicite comme

$$\begin{pmatrix} \eta & -i\eta_t & 0 \\ i\eta_t & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \chi & -i\chi_t & 0 \\ i\chi_t & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} + \begin{pmatrix} N_{\text{ip}}^w & 0 & 0 \\ 0 & N_{\text{ip}}^w & 0 \\ 0 & 0 & N_{\text{op}}^w \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

et s'avère problématique. En effet, lorsque les susceptibilités  $\bar{\bar{\chi}}_w$  et  $\bar{\bar{\eta}}_w$  sont exprimées comme des matrices  $3 \times 3$ , caractérisées par des composantes axiales  $\chi_{\parallel}$  et  $\eta_{\parallel}$  strictement égales à 0, nous trouvons que leur déterminant respectif s'annule, ce qui implique que  $\bar{\bar{\chi}}_w$  et  $\bar{\bar{\eta}}_w$  sont des matrices singulières, c'est-à-dire que les matrices inverses  $\bar{\bar{\chi}}_w^{-1}$  et  $\bar{\bar{\eta}}_w^{-1}$  n'existent pas (voir notamment la référence [130], p. 181). Par conséquent, nous devons en conclure que l'équation (A.1) requiert un traitement particulier pour pouvoir être employée dans l'approximation des petits signaux.

Or, dans la littérature, la distinction entre les équations (A.1), dimension  $3 \times 3$ , et (A.9), de dimension  $2 \times 2$ , est rarement établie de façon explicite. Par exemple, à la référence [26] [voir en particulier les équations (1.42), (1.111) et (1.112)], nous constatons que la relation (A.1) est utilisée dans l'approximation des petits signaux, même si les susceptibilités intrinsèque  $\bar{\bar{\chi}}_w$  et externe  $\bar{\bar{\eta}}_w$  y sont définies comme des tenseurs  $3 \times 3$ , comme à l'équation (A.12). En revanche, à la référence [170], la relation liant  $\bar{\bar{\chi}}_w$  et  $\bar{\bar{\eta}}_w$  est présentée sous une forme équivalente à celle de notre équation (A.9), c'est-à-dire en fonction d'un tenseur de désaimantation transverse  $\bar{\bar{N}}_{w\perp}$  de dimension  $2 \times 2$ .

Dans le cadre de cette thèse, il nous est apparu souhaitable et avantageux de pouvoir généraliser les tenseurs de susceptibilité magnétique  $\bar{\bar{\chi}}_w$ ,  $\bar{\bar{\eta}}_w$ ,  $\bar{\bar{\chi}}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\bar{\eta}}_{\text{eff}}$  en les exprimant comme des matrices  $3 \times 3$ , malgré que dans la configuration TM considérée, la réponse magnétique est essentiellement bidimensionnelle, c'est-à-dire qu'elle reste confinée dans le plan perpendiculaire à l'axe de gyrotropie. Pour ce faire, une approche possible consiste à ajouter la composante de



susceptibilité axiale  $\chi_{\parallel} \ll 1$  au tenseur de susceptibilité intrinsèque  $\bar{\bar{\chi}}_w$ , ce qui est équivalent à admettre que  $\mu_{\parallel} \neq \mu_0$  dans le tenseur de perméabilité intrinsèque de l'équation (2.11). Il convient d'insister ici sur le fait que la présence d'une composante axiale  $\chi_{\parallel}$  différente de 0 est physiquement raisonnable et attendue, en raison notamment des réponses diamagnétique et paramagnétique intrinsèques du matériau, de même que des contributions non linéaires à l'équation du mouvement [Éq. (2.7)]. Dans ce contexte, l'équation (A.1) s'exprime alors comme

$$\begin{pmatrix} \eta & -i\eta_t & 0 \\ i\eta_t & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{\parallel} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \chi & -i\chi_t & 0 \\ i\chi_t & \chi & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{\parallel} \end{pmatrix}^{-1} + \begin{pmatrix} N_{\text{ip}}^w & 0 & 0 \\ 0 & N_{\text{ip}}^w & 0 \\ 0 & 0 & N_{\text{op}}^w \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

où les composantes transverses  $\eta$  et  $\eta_t$  sont toujours données par l'équation (A.11). Nous pouvons également montrer que dans la limite où  $\chi_{\parallel}$  tend vers 0, la composante axiale de la susceptibilité externe vaut

$$\eta_{\parallel} = \frac{\chi_{\parallel}}{1 + N_{\text{op}}^w \chi_{\parallel}} \approx \chi_{\parallel} \ll 1 \quad (\text{A.14})$$

et demeure donc négligeable.

Ce résultat montre que l'introduction d'une faible composante axiale au tenseur  $\bar{\bar{\chi}}_w$  assure la rigueur mathématique de la relation tensorielle  $\bar{\bar{\eta}}_w^{-1} = \bar{\bar{\chi}}_w^{-1} + \bar{\bar{N}}_w$ , sans toutefois modifier les réponses transverses  $\eta$  et  $\eta_t$  de l'aimantation excitée dans la configuration TM. Mentionnons enfin que la présence de  $\chi_{\parallel} \neq 0$  va également introduire une faible composante axiale aux tenseurs de susceptibilités effective  $\bar{\bar{\chi}}_{\text{eff}}$  et effective externe  $\bar{\bar{\eta}}_{\text{eff}}$ , par l'intermédiaire des équations (3.36) et (3.117).

### Distinction entre les contributions statique et dynamique aux champs de désaimantation et d'interaction

Les résultats présentés dans cette annexe permettent également d'illustrer plus explicitement comment les champs de désaimantation statique (axial) et dynamique (transverse) interviennent dans les expressions pour les composantes transverses  $\eta$  et  $\eta_t$  du tenseur de susceptibilité externe  $\bar{\bar{\eta}}_w$ , données à l'équation (A.11).

D'abord, le champ de désaimantation *dynamique*, pris en compte par le terme  $N_{\text{ip}}^w \omega_M$ , apparaît explicitement dans les expressions pour  $\eta$  et  $\eta_t$  lors de l'application de l'équation (A.9) [ou, de façon équivalente, de l'équation (A.1)]. En effet, l'examen des équations (A.6) et

(A.11) permet de constater que les composantes  $\eta$  et  $\eta_t$  peuvent être obtenues à partir des expressions pour les composantes  $\chi$  et  $\chi_t$  en remplaçant simplement  $\omega_H^*$  par  $\omega_H^* + N_{\text{ip}}^w \omega_M$ .

Pour sa part, le champ de désaimantation *statique* est contenu à l'intérieur du terme  $\omega_H^* = \omega_H - i\alpha\omega$ , lequel apparaît dans les composantes  $\chi$  et  $\chi_t$  du tenseur de susceptibilité intrinsèque  $\bar{\chi}_w$  [Éq. (A.6)]. En effet, le terme  $\omega_H$  peut être décomposé comme  $\omega_H = \omega_0 - N_{\text{op}}^w \omega_M$ , où  $\omega_0$  représente le champ magnétique statique appliqué et  $-N_{\text{op}}^w \omega_M$  désigne le champ de désaimantation statique. La substitution de  $\omega_H$  par  $\omega_0 - N_{\text{op}}^w \omega_M$  dans l'équation (A.11) mène alors à

$$\eta = \frac{\omega_M [\omega_0 + (N_{\text{ip}}^w - N_{\text{op}}^w) \omega_M - i\alpha\omega]}{[\omega_0 + (N_{\text{ip}}^w - N_{\text{op}}^w) \omega_M - i\alpha\omega]^2 - \omega^2}, \quad (\text{A.15a})$$

$$\eta_t = \frac{\omega_M \omega}{[\omega_0 + (N_{\text{ip}}^w - N_{\text{op}}^w) \omega_M - i\alpha\omega]^2 - \omega^2}. \quad (\text{A.15b})$$

Lorsque les pertes sont faibles ( $\alpha \ll 1$ ), les composantes  $\eta$  et  $\eta_t$  possèdent un pôle en

$$\omega_{\text{res}} = \omega_0 + (N_{\text{ip}}^w - N_{\text{op}}^w) \omega_M, \quad (\text{A.16})$$

qui correspond à la formule de Kittel appliquée à un ellipsoïde de révolution [26, 118]. De plus, dans la limite d'un fil infini caractérisé par  $N_{\text{ip}}^w = 1/2$  et  $N_{\text{op}}^w = 0$ , l'équation (A.16) coïncide, comme attendu, avec l'équation (3.30) pour  $\omega_{\text{cyl}}$  [notons qu'à l'équation (3.30),  $\omega_H = \omega_0$  lorsque  $N_{\text{op}}^w = 0$ ].

Soulignons que ces considérations s'appliquent également aux interactions dipolaires interfils. Par exemple, dans la limite QS, nous avons montré à l'équation (3.117) que le tenseur de susceptibilité effective externe  $\bar{\eta}_{\text{eff}}$  du réseau est lié au tenseur de susceptibilité intrinsèque  $\bar{\chi}_w$  des fils comme

$$\left( \frac{\bar{\eta}_{\text{eff}}}{f} \right)^{-1} = \bar{\chi}_w^{-1} + \bar{N}, \quad (\text{A.17})$$

où  $\bar{N} = \bar{N}_w + \bar{N}_{\text{int}}$  est le tenseur de désaimantation total du réseau défini à la référence [61] et à l'équation (3.116).

D'abord, par analogie avec les équations (A.1) et (A.11), nous pouvons tenir compte des interactions intra et interfils *dynamiques* en remplaçant  $\omega_H^*$  dans  $\chi$  et  $\chi_t$  par  $\omega_H^* + N_{\text{ip}} \omega_M =$

$\omega_H^* + (N_{\text{ip}}^w + N_{\text{ip}}^{\text{int}}) \omega_M$ , ce qui nous permet de dériver des expressions explicites pour les composantes transverses de  $\bar{\eta}_{\text{eff}}$  :

$$\eta_{\text{eff}} = \frac{f \omega_M (\omega_H^* + N_{\text{ip}} \omega_M)}{(\omega_H^* + N_{\text{ip}} \omega_M)^2 - \omega^2}, \quad (\text{A.18a})$$

$$\eta_{\text{eff},t} = \frac{f \omega_M \omega}{(\omega_H^* + N_{\text{ip}} \omega_M)^2 - \omega^2}. \quad (\text{A.18b})$$

Le champ d'interaction *statique* est ensuite obtenu en exprimant  $\omega_H$ , dans  $\omega_H^* = \omega_H - i\alpha\omega$ , comme  $\omega_H = \omega_0 - N_{\text{op}} \omega_M = \omega_0 - (N_{\text{op}}^w + N_{\text{op}}^{\text{int}}) \omega_M$ , où  $\omega_0$  est proportionnel au champ magnétique appliqué et  $-N_{\text{op}} \omega_M = -(N_{\text{op}}^w + N_{\text{op}}^{\text{int}}) \omega_M$  décrit les interactions intra et interfils statiques. En considérant cette expressions pour  $\omega_H$  dans l'équation (A.18), nous trouvons alors

$$\eta_{\text{eff}} = \frac{f \omega_M [\omega_0 + (N_{\text{ip}} - N_{\text{op}}) \omega_M - i\alpha\omega]}{[\omega_0 + (N_{\text{ip}} - N_{\text{op}}) \omega_M - i\alpha\omega]^2 - \omega^2}, \quad (\text{A.19a})$$

$$\eta_{\text{eff},t} = \frac{f \omega_M \omega}{[\omega_0 + (N_{\text{ip}} - N_{\text{op}}) \omega_M - i\alpha\omega]^2 - \omega^2}. \quad (\text{A.19b})$$

Dans la limite  $\alpha \ll 1$ , les composantes  $\eta_{\text{eff}}$  et  $\eta_{\text{eff},t}$  ont un pôle en

$$\omega_{\text{res,eff}} = \omega_0 + (N_{\text{ip}}^w - N_{\text{op}}^w) \omega_M, \quad (\text{A.20})$$

qui adopte une forme identique à la formule de Kittel de l'équation (A.16).

Enfin, dans le cas de longs fils ( $L \ll d$ ) en régime monopolaire ( $L \ll D$ ), nous avons  $N_{\text{ip}}^w = 1/2$ ,  $N_{\text{ip}}^{\text{int}} = -f/2$ ,  $N_{\text{op}}^w = 0$  et  $N_{\text{op}}^{\text{int}} = f$ , ce qui implique que  $N_{\text{ip}} = (1 - f)/2$  et  $N_{\text{op}} = f$ . Dans cette limite, nous trouvons que l'équation (A.19) se réduit à l'équation (3.114), alors que la fréquence de résonance  $\omega_{\text{res,eff}}$  se simplifie et coïncide avec le résultat de l'équation (3.115), c'est-à-dire

$$\omega_{\text{res,eff}} = \omega_0 + \frac{\omega_M}{2} (1 - 3f), \quad (\text{A.21})$$

qui correspond à la condition de résonance du mode uniforme d'un ensemble de fils en interaction excités dans la limite QS.

## ANNEXE B

### Démonstration de l'équivalence de deux procédures d'homogénéisation dans la limite isotrope

Dans cette annexe, nous allons démontrer l'équivalence, dans la limite isotrope, de deux procédures d'homogénéisation basées sur la définition d'une cellule unitaire équivalente plongée dans le milieu effectif dont nous cherchons à déterminer les propriétés. Pour un réseau de fils excités dans la configuration TM, la cellule unitaire équivalente consiste en un cylindre de rayon  $a$  et de perméabilité intrinsèque isotrope  $\mu_w$ , représentant le fil, lequel est recouvert d'une coquille cylindrique de rayon externe  $b$  et de perméabilité  $\mu_0$ , représentant la matrice. En régime EQS, la perméabilité renormalisée du fil vaut  $\tilde{\mu}_w = \mu_w G(k_w a)$  [Éq. (3.26)], ce qui mène à une susceptibilité externe donnée par  $\tilde{\eta}_w = 2(\tilde{\mu}_w - \mu_0) / (\tilde{\mu}_w + \mu_0)$  [Éq. (3.25)]. La situation considérée correspond à la limite isotrope de la figure 3.1.

Nous voulons démontrer que pour des fils caractérisés par une perméabilité intrinsèque isotrope, la perméabilité effective  $\tilde{\mu}_{\text{eff}}$  du réseau en régime EQS peut être déterminée à l'aide de deux méthodes équivalentes. D'une part, en imposant que le champ diffusé par la cellule unitaire plongée dans le milieu effectif s'annule et, d'autre part, en satisfaisant les conditions de continuité des champs à l'interface entre la cellule et le milieu effectif.

Considérons d'abord la première méthode. La condition de diffusion nulle par la cellule unitaire équivalente consiste à imposer que sa susceptibilité externe renormalisée  $\tilde{\eta}_{\text{cell}}$  s'annule.<sup>1</sup> Dans ce contexte, la référence [171] a montré que dans la configuration TM considérée ici,  $\tilde{\eta}_{\text{cell}}$  peut s'exprimer comme

$$\tilde{\eta}_{\text{cell}} = 2 \frac{(\mu_0 - \tilde{\mu}_{\text{eff}})(\tilde{\mu}_w + \mu_0) + f(\mu_0 + \tilde{\mu}_{\text{eff}})(\tilde{\mu}_w - \mu_0)}{(\mu_0 + \tilde{\mu}_{\text{eff}})(\tilde{\mu}_w + \mu_0) + f(\mu_0 - \tilde{\mu}_{\text{eff}})(\tilde{\mu}_w - \mu_0)}, \quad (\text{B.1})$$

où  $f = (a/b)^2$  désigne la fraction du réseau occupée par les fils.<sup>2</sup> La condition de diffusion nulle impose alors que  $\tilde{\eta}_{\text{cell}} = 0$ , ce qui requiert que le numérateur de  $\tilde{\eta}_{\text{cell}}$  s'annule à l'équation (B.1). Le calcul est direct et mène à

---

1. Comme dans le cas d'un fil individuel, signalons que l'amplitude du champ magnétique diffusé par la cellule unitaire équivalente est proportionnelle à sa susceptibilité externe  $\tilde{\eta}_{\text{cell}}$  en régime EQS.

2. Signalons qu'à la référence [171], l'équation (B.1) a toutefois été dérivée dans la limite QS. Pour généraliser ce résultat au régime EQS, nous avons dû effectuer les substitutions suivantes :  $\eta_{\text{cell}} \rightarrow \tilde{\eta}_{\text{cell}}$ ,  $\mu_{\text{eff}} \rightarrow \tilde{\mu}_{\text{eff}}$  et  $\mu_w \rightarrow \tilde{\mu}_w$ .

$$\frac{\tilde{\mu}_{\text{eff}} - \mu_0}{\tilde{\mu}_{\text{eff}} + \mu_0} = f \frac{\tilde{\mu}_w - \mu_0}{\tilde{\mu}_w + \mu_0}, \quad (\text{B.2})$$

ce qui correspond à la formule implicite de Maxwell Garnett appliquée à un réseau de longs fils cylindriques parallèles excités dans la configuration TM. Enfin, en isolant  $\tilde{\mu}_{\text{eff}}$ , nous déduisons la relation explicite suivante

$$\tilde{\mu}_{\text{eff}} = \mu_0 \frac{2 + f\tilde{\eta}_w}{2 - f\tilde{\eta}_w} = \mu_0 \frac{\tilde{\mu}_w(1 + f) + \mu_0(1 - f)}{\tilde{\mu}_w(1 - f) + \mu_0(1 + f)} \quad (\text{B.3})$$

qui, comme attendu, est identique au résultat donné à l'équation (3.27).

Examinons maintenant la deuxième méthode, qui consiste plutôt à satisfaire les conditions de continuité des champs à l'interface entre la cellule unitaire équivalente et le milieu effectif. D'abord, le champ  $\mathbf{h}_m$  dans la matrice ( $a < \rho < b$ ) est constitué du champ local  $\mathbf{h}_{\text{loc}}$  qui excite le fil et du champ  $\mathbf{h}_{\text{scat}}$  diffusé par celui-ci. Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_m &= \mathbf{h}_{\text{loc}} + \mathbf{h}_{\text{scat}} \\ &= \mathbf{h}_{\text{loc}} + \frac{a^2}{2\rho^2} \left[ 2(\hat{\boldsymbol{\rho}} \otimes \hat{\boldsymbol{\rho}}) - \bar{\bar{I}} \right] \tilde{\eta}_w \mathbf{h}_{\text{loc}}, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

ce qui correspond à l'équation (3.15) dans la limite isotrope, où  $\bar{\eta}_w \rightarrow \tilde{\eta}_w$  avec  $\tilde{\eta}_w$  donné à l'équation (3.25). Rappelons que la forme matricielle de  $\left[ 2(\hat{\boldsymbol{\rho}} \otimes \hat{\boldsymbol{\rho}}) - \bar{\bar{I}} \right]$  est explicitée à l'équation (3.16).

La procédure d'homogénéisation requiert ensuite de lier les champs  $\mathbf{h}_m$  et  $\mathbf{b}_m = \mu_0 \mathbf{h}_m$  dans la matrice ( $a < \rho < b$ ) aux champs moyens  $\langle \mathbf{h} \rangle$  et  $\langle \mathbf{b} \rangle = \tilde{\mu}_{\text{eff}} \langle \mathbf{h} \rangle$  dans le milieu effectif ( $\rho > b$ ), lorsque les fils sont soumis au champ local  $\mathbf{h}_{\text{loc}} = -h_{\text{loc}} \hat{\mathbf{y}}$ . Pour ce faire, nous devons considérer les conditions aux frontières en  $\rho = b$  pour la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique (en  $\phi = 0$ ) et de la composante normale de l'induction magnétique (en  $\phi = \pi/2$ ). Il en résulte que

$$\langle h_y \rangle = - \left( 1 - \frac{f}{2} \tilde{\eta}_w \right) h_{\text{loc}} \quad (\text{B.5})$$

pour la composante tangentielle du champ magnétique et

$$\langle b_y \rangle = -\mu_0 \left( 1 + \frac{f}{2} \tilde{\eta}_w \right) h_{\text{loc}} \quad (\text{B.6})$$

pour la composante normale de l'induction magnétique. La perméabilité effective  $\tilde{\mu}_{\text{eff}} = \langle b_y \rangle / \langle h_y \rangle$  vaut alors

$$\tilde{\mu}_{\text{eff}} = \frac{\langle b_y \rangle}{\langle h_y \rangle} = \mu_0 \frac{2 + f\tilde{\eta}_w}{2 - f\tilde{\eta}_w} = \mu_0 \frac{\tilde{\mu}_w (1 + f) + \mu_0 (1 - f)}{\tilde{\mu}_w (1 - f) + \mu_0 (1 + f)}, \quad (\text{B.7})$$

qui est identique à l'équation (B.3). Ceci complète la démonstration.

## ANNEXE C

### Dérivation du paramètre d'amortissement critique dans la limite quasi statique

Cette annexe est consacrée à la dérivation, dans la limite QS, du paramètre d'amortissement critique  $\alpha_c$ , qui correspond à la valeur maximale du paramètre  $\alpha$  de Gilbert au-delà de laquelle la partie réelle de  $\mu_{\text{eff}\perp}$  ne devient plus négative entre ses fréquences de résonance et d'antirésonance.

La composante de perméabilité effective  $\mu_{\text{eff}\perp}$  correspond à l'équation (3.24) pour  $\tilde{\mu}_{\text{eff}\perp}$  dans la limite QS, c'est-à-dire

$$\mu_{\text{eff}\perp} = \frac{\mu_{\text{eff}}^2 - \mu_{\text{eff},t}^2}{\mu_{\text{eff}}} = \mu_0 \frac{(f\eta + 2)^2 - (f\eta_t)^2}{4 - f^2(\eta^2 - \eta_t^2)}, \quad (\text{C.1})$$

où les composantes transverses diagonales  $\eta$  et hors diagonales  $\eta_t$  du tenseur de susceptibilité externe  $\bar{\bar{\eta}}_w$  sont données respectivement aux équations (3.29a) et (3.29b). Pour déterminer  $\alpha_c$ , nous substituons d'abord les expressions pour  $\eta$  et  $\eta_t$  dans l'équation (C.1), ce qui mène à

$$\frac{\mu_{\text{eff}\perp}}{\mu_0} = \frac{(\omega_{\text{res,eff}}^* + f\omega_M)^2 - \omega^2}{\omega_{\text{res,eff}}^* (\omega_{\text{res,eff}}^* + f\omega_M) - \omega^2}, \quad (\text{C.2})$$

avec  $\omega_{\text{res,eff}}^* = \omega_{\text{res,eff}} - i\alpha\omega$ , où  $\omega_{\text{res,eff}}$  est donnée à l'équation (3.115). Nous devons ensuite déterminer les fréquences qui annulent la partie réelle de  $\mu_{\text{eff}\perp}$ . Lorsque la valeur du paramètre d'amortissement  $\alpha$  est suffisamment petite (c.-à-d.,  $\alpha \leq \alpha_c$ ), il s'ensuit que la condition  $\text{Re}[\mu_{\text{eff}\perp}] = 0$  est satisfaite aux deux fréquences suivantes

$$\omega_{\pm} = \frac{\sqrt{(\omega_{\text{res,eff}} + f\omega_M) [(1 - \alpha^2)(2\omega_{\text{res,eff}} + f\omega_M) \pm \Delta\omega]}}{\sqrt{2}(1 + \alpha^2)}, \quad (\text{C.3})$$

où le terme

$$\Delta\omega = \sqrt{[(1 - \alpha^2)f\omega_M]^2 - 16\alpha^2\omega_{\text{res,eff}}(\omega_{\text{res,eff}} + f\omega_M)} \quad (\text{C.4})$$

tient compte de la séparation entre les fréquences de résonance ( $\omega_-$ ) et d'antirésonance ( $\omega_+$ ) de  $\mu_{\text{eff}\perp}$ . Ces deux fréquences coïncident lorsque  $\Delta\omega = 0$  (et donc que  $\alpha = \alpha_c$ ), ce qui

représente la limite au-delà de laquelle  $\text{Re}[\mu_{\text{eff}\perp}]$  demeure toujours positive. La résolution de l'équation  $\Delta\omega = 0$  pour  $\alpha$  mène alors à notre résultat final pour le paramètre d'amortissement critique  $\alpha_c$ , que nous exprimons de façon compacte comme

$$\alpha_c = \alpha_{c0} - \sqrt{\alpha_{c0}^2 - 1}, \quad (\text{C.5})$$

où

$$\alpha_{c0} = \frac{2}{f} \left[ \frac{H_{\text{ext}0}}{M_s} + \frac{(1 - 2f)}{2} \right] \quad (\text{C.6})$$

dépend de la fraction du réseau  $f$  occupée par les fils et du rapport  $H_{\text{ext}0}/M_s$  entre le champ magnétique statique externe  $H_{\text{ext}0}$  et l'aimantation spontanée  $M_s$ . Pour  $\alpha < \alpha_c$ , la partie réelle de la perméabilité effective  $\mu_{\text{eff}\perp}$  possède un intervalle de valeurs négatives entre ses fréquences de résonance et d'antirésonance. En revanche, lorsque  $\alpha > \alpha_c$ , la partie réelle de  $\mu_{\text{eff}\perp}$  demeure toujours positive et aucune région de perméabilité effective négative n'est observée.