



Titre: Développement d'un programme de simulation numérique
d'écoulements visqueux compressibles

Auteur: Clément Lombardo
Author:

Date: 2019

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Lombardo, C. (2019). Développement d'un programme de simulation numérique
d'écoulements visqueux compressibles [Master's thesis, Polytechnique Montréal].
Citation: PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/4142/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/4142/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:** Jean-Yves Trépanier
Advisors:

Programme: Génie mécanique
Program:

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

**Développement d'un programme de simulation numérique d'écoulements
visqueux compressibles**

CLÉMENT LOMBARDO

Département de génie mécanique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
Génie mécanique

Décembre 2019

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

**Développement d'un programme de simulation numérique d'écoulements
visqueux compressibles**

présenté par **Clément LOMBARDO**

en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

Ricardo CAMARERO, président

Jean-Yves TRÉPANIER, membre et directeur de recherche

Marcelo REGGIO, membre

DÉDICACE

À mes amis les Carichoux...

REMERCIEMENTS

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur de recherche, le Prof. Jean-Yves Trépanier, qui m'a apporté assistance et conseils tout au long de ma maîtrise. Son expérience et son écoute m'ont permis de grandement progresser.

J'aimerais aussi remercier l'entreprise General Electric Grid Solution pour le soutien financier apporté à cette recherche, et particulièrement le Dr. Philippe Robin-Jouan pour son expertise et son implication dans le projet de recherche, et le Dr. Guillaume Pernaumat pour son aide précieuse lors du développement du programme.

Merci aussi à mon collègue de laboratoire Soheil Namvar, pour sa convivialité et l'aide qu'il m'a apportée tout au long de cette maîtrise.

Enfin je remercie à mes parents, qui m'ont soutenu durant tout ce parcours.

RÉSUMÉ

Le présent projet de recherche a pour objectif le développement de méthodes de simulation numérique d'écoulements compressibles et visqueux, par la création d'un programme permettant de simuler ce type d'écoulement, dans l'optique d'aider la conception des disjoncteurs à haute-tension.

La recherche se concentre uniquement sur la résolution des équations modélisant la mécanique des fluides, sans prise en compte des autres phénomènes physiques liées aux disjoncteurs à haute-tension qui pourront être traités comme des termes sources.

Les écoulements fluides sont modélisés par les équations de Navier-Stokes qui sont formulées de manière à permettre leur résolution numérique.

Le programme permet de simuler des écoulements en trois dimensions. La méthode des volumes finis est appliquée pour la résolution, qui se fait par l'intermédiaire d'un maillage structuré hexaédrique. Les flux convectifs, qui sont régis par une équation hyperbolique sont déterminés grâce à un schéma numérique de Roe modifié. Les flux diffusifs qui sont modélisés par une équation parabolique, sont calculés à l'aide d'un schéma numérique de différences finies.

Les modèles de gaz réels ne sont pas l'objet de cette recherche, ceux-ci sont développés spécifiquement par l'industrie et pourront être ajoutés ultérieurement. Cependant l'implémentation des modèles numériques a été pensée de telle sorte que l'extension aux gaz réels soit facilitée.

Afin de vérifier les modèles numériques, plusieurs test de vérification et de validation ont été réalisés sur des écoulements compressibles et visqueux avec un modèle de gaz parfait.

L'analyse des résultats montre que le programme permet d'obtenir une bonne approximation des solutions analytiques, et le niveau de précision pour une première approche est atteint. Le projet de recherche pose les bases de la résolution en vue d'un développement futur, laissant la place à de nombreuses méthodes d'optimisation et de traitement des géométries complexes.

ABSTRACT

The current research project has the objective to develop numerical simulation method of compressible viscous flows, through the development of a program to simulate these flows, in order to help with the design of high-voltage circuit-breakers. The focus is put only on the fluid models, the other physical phenomena could be introduced in a future work as source terms. The physical model are the 3D Navier-Stokes equations, which are solved numerically by the finite volume method. The solver works with a hexahedral rectangular mesh. The convective fluxes governed by a hyperbolic equation, are computed using to a modified Roe scheme, and the diffusive fluxes governed by a parabolic equation, are computed with a finite difference scheme.

The formulation is based on a perfect gas, and the implementation is thought to ease the adding of real gas models, but the real gas models are not a part of the current research project.

In order to verify the model and the implementation, several verification and validation test cases are simulated. The results show a good approximation of the analytical solution, the precision level is reached as a first approach. This project paves the way for future developments with the addition of multiple optimization methods, gas models and geometry treatments.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vi
TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES TABLEAUX	x
LISTE DES FIGURES	xi
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xiv
LISTE DES ANNEXES	xv
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Principe et fonctionnement des disjoncteurs à haute-tension	1
1.1.1 Modèles numériques précédemment développés	2
1.2 Projet de recherche	3
1.3 Organisation du mémoire	4
CHAPITRE 2 CADRE D'ÉTUDE	5
2.1 Définition des grandeurs et notation	5
2.2 Équations de conservation	5
2.2.1 Équation de continuité	6
2.2.2 Équation de quantité de mouvement	6
2.2.3 Équation de l'énergie	7
2.2.4 Contraintes visqueuses	7
2.2.5 Formulation locale des équation de Navier-Stokes	8
2.2.6 Fluides Newtoniens	9
2.3 Propriétés du fluide	10
2.3.1 Hypothèse de Stokes	11
2.3.2 Détermination de la viscosité par la loi de Sutherland	11

2.4	Équation d'état	11
2.5	Coefficient de conductivité thermique	12
2.6	Propriétés thermodynamiques	12
CHAPITRE 3 MODÉLISATION NUMÉRIQUE		13
3.1	Méthode des volumes finis	13
3.1.1	Définition des vecteurs de calcul	13
3.2	Discrétisation des équations de Navier-Stokes	14
3.3	Maillage	15
3.3.1	Définition du domaine	17
3.4	Flux convectif	17
3.4.1	Méthode de Roe-Pyke	18
3.5	Flux diffusif	21
3.5.1	Méthode utilisée	21
3.5.2	Reconstitution des valeurs aux faces	21
3.5.3	Calcul des dérivées partielles	21
3.6	Intégration temporelle	23
3.6.1	Calcul du pas de temps	24
3.7	Conditions aux limites	25
3.7.1	Cellules virtuelles	25
3.7.2	Condition de paroi solide	25
3.7.3	Condition de débit massique	27
3.7.4	Condition d'entrée supersonique	28
3.7.5	Condition de sortie supersonique	29
3.7.6	Condition de champ libre - pression	29
3.7.7	Condition d'entrée - pression	29
3.7.8	Condition de périodicité et jonction de zone	29
3.7.9	Résumé des conditions aux limites	30
3.8	Implémentation	30
CHAPITRE 4 VÉRIFICATION ET VALIDATION DU CODE		32
4.1	Paramètres généraux	32
4.1.1	Paramètres de simulation	32
4.1.2	Résultats présentés	32
4.2	Vérification des termes convectifs	33
4.2.1	Tube à choc	33
4.2.2	Détente de Prandtl-Meyer	38

4.2.3	Écoulements convergents	46
4.3	Vérification des termes énergétiques, cas d'un transfert thermique simple . .	50
4.4	Vérification des termes diffusifs	51
4.4.1	Couche limite sur plaque plane	51
4.4.2	Marche descendante	55
4.5	Conclusion de la validation	59
CHAPITRE 5 CONCLUSION		60
5.1	Synthèse des travaux	60
5.2	Limitations de la solution proposée	60
5.3	Améliorations futures	61
RÉFÉRENCES		62
ANNEXES		66

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Conditions aux limites implémentées	30
Tableau 4.1	Valeurs par défaut pour les simulations	32
Tableau 4.2	Cas test étudiés	33
Tableau 4.3	Paramètres du domaine et du maillage utilisés pour les cas de tube à choc	34
Tableau 4.4	Conditions initiales utilisées pour les cas de tube à choc	35
Tableau 4.5	Valeurs des conditions aux limites pour la détente de Prandtl-Meyer .	40
Tableau 4.6	Conditions initiales pour la détente de Prandtl-Meyer	40
Tableau 4.7	Dimensions du domaine pour la détente de Prandtl-Meyer	41
Tableau 4.8	Paramètres du maillage pour la détente de Prandtl-Meyer	41
Tableau 4.9	Paramètres d'intégration temporelle pour la détente de Prandtl-Meyer	41
Tableau 4.10	Conditions initiales pour l'écoulement sur une plaque plane	51
Tableau 4.11	Maillage et domaine	51
Tableau 4.12	Conditions d'entrée	52
Tableau 4.13	Conditions de sortie	52
Tableau 4.14	Paramètres du domaine	55
Tableau 4.15	Paramètres du maillage	56

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Exemple de disjoncteur (disjoncteur à réservoir vivant) installé sur site. Source : https://www.gegridsolutions.com/HVMV_Equipment/catalog/LiveTank_CircuitBreakers.htm	1
Figure 1.2	Schéma vue en coupe d'un disjoncteur à haute tension. Source : Pernaudat [1]	2
Figure 2.1	Volume de contrôle	6
Figure 2.2	Contraintes visqueuses s'exerçant sur un volume infinitésimal de fluide	8
Figure 3.1	Paramétrisation du maillage selon la direction $\mathbf{e}_i$	17
Figure 3.2	Paramétrisation du maillage à la frontière. Les cellules virtuelles sont représentées en gris et l'orientation des face dépend de la position de la frontière.	25
Figure 3.3	Fonctionnement du programme	31
Figure 4.1	Description et paramétrisation du tube à choc à l'instant initial et à l'instant t	34
Figure 4.2	Résultats obtenus pour différentes tailles de maillage (100, 500, 1000 et 5000 mailles dans la direction du tube à choc). Le nombre de Mach, la température, la pression et la masse volumique sont tracé selon l'axe du tube à choc.	35
Figure 4.3	Erreur observée pour différentes tailles de maillage (100, 500, 1000 et 5000 mailles dans la direction du tube à choc). Les erreurs sur le nombre de Mach, la température, la pression et la masse volumique sont tracé selon l'axe du tube à choc.	36
Figure 4.4	Erreur observée pour différentes tailles de maillage (10000 et 15000 mailles dans la direction du tube à choc). Les erreurs sur le nombre de Mach, la température, la pression et la masse volumique sont tracé selon l'axe du tube à choc.	37
Figure 4.5	Détermination de la convergence spatiale, l'erreur moyenne est tracée en fonction du nombre de maille dans la direction du tube à choc. . .	37
Figure 4.6	Détente de Prandtl-Meyer	38
Figure 4.7	Paramétrisation et conditions aux limites pour la détente de Prandtl-Meyer.	39
Figure 4.8	Isocontours pour la détente de Prandtl-Meyer (maillage 41x121x281). . .	42

Figure 4.9	Comparaison des résultats de la détente de Prandtl-Meyer pour différentes dimensions de maillage. Les courbes présentées correspondent aux valeurs du nombre de Mach, de la température, de la pression et de la masse volumique observées dans le plan de sortie.	43
Figure 4.10	Erreur observée pour différentes dimensions de maillage. Les courbes présentées correspondent aux valeurs du nombre de Mach, de la température, de la pression et de la masse volumique observées dans le plan de sortie.	44
Figure 4.11	Comparaison des résultats avec ou sans raffinement local pour la détente de Prandtl-Meyer	45
Figure 4.12	Erreur observée pour différents types de raffinement local pour la détente de Prandtl-Meyer	45
Figure 4.13	Écoulements convergents	46
Figure 4.14	Écoulements convergents - Conditions aux limites	47
Figure 4.15	Isocontours pour le cas de l'écoulement convergent, pour le maillage 6x241x561	48
Figure 4.16	Résultats pour le cas de l'écoulement convergent. Les simulations sont réalisées avec 2100, 8400, 33600 et 134400 mailles et les profils de nombre de Mach, de température, de pression et de masse volumique sont évalués dans le plan de sortie.	49
Figure 4.17	Erreur observée pour le cas de l'écoulement convergent. Les simulations sont réalisées avec 2100, 8400, 33600 et 134400 mailles et les erreurs pour le nombre de Mach, la température, la pression et la masse volumique sont évaluées dans le plan de sortie.	50
Figure 4.18	Comparaison du profil de température pour le transfert thermique simple (interpolé aux nœuds)	51
Figure 4.19	Conditions aux limites pour la couche limite sur plaque plane	52
Figure 4.20	Détail du maillage utilisé pour l'écoulement de couche limite sur plaque plane avec un raffinement en tangente hyperbolique dans les deux directions d'intérêt	53
Figure 4.21	Résultats de simulation de la couche limite, pour un maillage 4x101x101, raffiné en tangente hyperbolique	54
Figure 4.22	Conditions aux limites pour le cas de la marche descendante	56
Figure 4.23	Résultats de simulation pour la marche descendante (196020 mailles), pour la vitesse suivant l'axe principal de l'écoulement	57

Figure 4.24	Mesure des longueurs de recirculation, les segments horizontaux représentent les longueurs de recirculation retenues	58
Figure B.1	Détente de Prandtl-Meyer	68

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

SF6 Hexafluorure de soufre

CO2 Dioxyde de carbone

EDP Équation aux Dérivées Partielles

WENO Weighted Essentially Non-Oscillatory

CFL Courant–Friedrichs–Lewy condition

3D Trois dimensions

2D Deux dimensions

LISTE DES ANNEXES

Annexe A	Démonstrations	66
Annexe B	Solutions analytiques	68

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

1.1 Principe et fonctionnement des disjoncteurs à haute-tension

Les disjoncteurs à haute-tension ont un rôle important dans le processus de distribution d'électricité. Ils ont deux fonctions essentielles : la première est d'assurer la protection du circuit électrique faces aux anomalies, par exemple en cas de surcharge due à la foudre, et la deuxième est de permettre l'isolation d'une partie du circuit sur demande en cas de besoin. En dehors de ces cas, le disjoncteur assure la transmission du courant électrique.



Figure 1.1 Exemple de disjoncteur (disjoncteur à réservoir vivant) installé sur site. Source : https://www.gegridsolutions.com/HVMV_Equipment/catalog/LiveTank_CircuitBreakers.htm

La figure 1.2 montre les différentes pièces qui composent le disjoncteur à haute-tension. L'ensemble est rempli d'un gaz isolant choisi spécifiquement pour ses propriétés physiques, notamment sa rigidité diélectrique. Pour interrompre le courant électrique, les contacts d'arcs mâles et femelles sont séparés grâce à un système mécanique. Compte-tenu des fortes tensions

entre ces éléments, le gaz initialement isolant, devient conducteur et il se produit un arc électrique. Pour éteindre l'arc électrique, il faut que le milieu redevienne isolant. Le courant alternatif permet d'avoir une tension nulle entre les contacts lors du passage au courant zéro. Durant la période où la tension est presque nulle, on doit s'assurer que les propriétés du gaz, notamment sa température et sa pression, retrouvent des valeurs permettant d'assurer l'isolation.

C'est pour cela que le mécanisme doit produire un écoulement de fluide qui va pouvoir rendre le milieu isolant, par exemple par l'apport de gaz à basse température et par l'évacuation des gaz chauds.

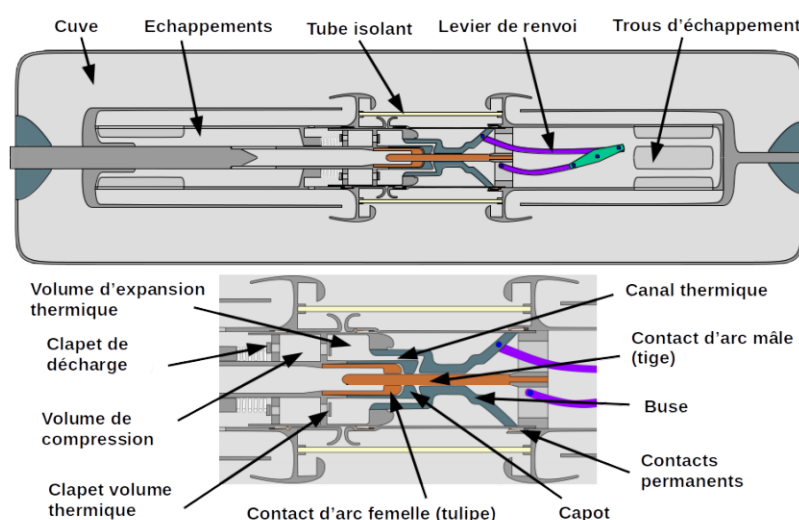


Figure 1.2 Schéma vue en coupe d'un disjoncteur à haute tension. Source : Pernaumat [1]

La simulation des écoulements au sein d'un disjoncteur à haute-tension présente donc un intérêt important car elle en facilite la conception. L'arrivée de nouveaux gaz répondant aux contraintes environnementales [2] relance les développements liés à l'étude des disjoncteurs à haute-tension.

1.1.1 Modèles numériques précédemment développés

Pernaumat [1] détaille le processus actuellement utilisé pour simuler les écoulements au sein des disjoncteurs, ainsi que les modifications à apporter aux modèles actuels.

Initialement, la simulation se fait en considérant le domaine comme 2D-axisymétrique, mais l'approche en trois dimensions est envisagée pour améliorer la précision des simulations par rapport aux mesures expérimentales. Compte-tenu de l'impact d'un modèle 3D en matière

de temps de calcul et de taille de données, la modélisation 3D est appliquée seulement dans les zones du mécanisme où l'approche 2D-axisymétrique s'avère moins fidèle

La viscosité des gaz était jusqu'à présent négligée et le logiciel se limitait à la résolution des équations d'Euler. Pour certaines parties du mécanisme, notamment les chambres d'échappement ainsi que la zone située autour de l'arc électrique, les observations montrent que la viscosité du fluide n'est plus négligeable. Dans ces zones, le fluide peut être soumis à des contraintes de cisaillement importantes et des phénomènes de turbulence peuvent apparaître. Ces phénomènes ont un impact notamment sur la dissipation énergétique dans le fluide ce qui a des conséquences sur les résultats des simulations. C'est dans ce contexte qu'une approche en trois dimensions prenant en compte la viscosité est pertinente, et donc les simulations devront être réalisées en résolvant les équations de Navier-Stokes complètes.

1.2 Projet de recherche

Dans le cadre d'une collaboration de longue date entre l'École Polytechnique Montréal et General Electric Grid Solution, des méthodes numériques sont mises en place afin de simuler les phénomènes physiques au sein des disjoncteurs à haute-tension dans le but de faciliter leur conception. Cette collaboration a permis le développement du logiciel de simulation MC3, qui incorpore de nombreux modèles spécifiques à chaque phénomène présent au sein d'un disjoncteur à haute-tension. Ce logiciel est en constante évolution et de nouvelles pistes d'amélioration sont examinées au fur et à mesure de son développement. La volonté de se diriger vers des méthodes nouvelles impose une refonte globale du logiciel, et ainsi permet d'assurer le suivi des évolutions technologiques.

Ce mémoire a pour objet l'amélioration des modèles numériques permettant de simuler les écoulements au sein des disjoncteurs à haute-tension en prenant en compte les phénomènes liés à la viscosité du fluide. Le développement et la vérification d'un code de calcul permettant de simuler des écoulements de fluides compressibles et visqueux en trois dimensions fait partie intégrante du projet de recherche.

Ce projet est intégré au sein de la collaboration avec l'industrie et doit donc répondre à certaines attentes particulières. Aussi, le développement se concentre uniquement sur le solveur fluide sans prise en compte des autres physiques liées aux disjoncteurs à haute-tension qui seront intégrées ultérieurement. La compatibilité du projet avec les évolutions en cours et futures doit être assurée, ce qui justifie certains choix qui ont été fait au cours du développement.

1.3 Organisation du mémoire

Le chapitre 1 est une mise en contexte, il présente l'intérêt de l'étude du point de vue industriel et le projet de collaboration. Le chapitre 2 du mémoire est consacrée à la modélisation des phénomènes physiques. Ce chapitre expose les équations qui vont par la suite être résolues numériquement et détaille les modèles utilisés pour déterminer les caractéristiques de l'écoulement. Le chapitre 3 du mémoire présente les méthodes numériques utilisées pour pouvoir résoudre les équations présentées dans le chapitre 2, les méthodes de discrétisation spatiales et temporelles sont étudiées et les schémas numériques sont détaillés. Le chapitre 4 présente les différents cas qui sont utilisés pour vérifier et valider le modèle, cette partie expose chaque cas et présente les résultats obtenus accompagnés d'une analyse critique. Le cinquième chapitre conclue le mémoire et expose les améliorations possibles.

CHAPITRE 2 CADRE D'ÉTUDE

2.1 Définition des grandeurs et notation

Ce paragraphe introduit certaines grandeurs qui seront utilisées tout au long du mémoire ainsi que leur notation. Sauf mention contraire, ce sont les définitions présentées dans ce chapitre qui s'appliquent pour toutes ces grandeurs.

La pression statique est notée p , la masse volumique est notée ρ , la température thermodynamique T .

Le vecteur vitesse dans l'écoulement s'écrit $\mathbf{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}^T$.

L'énergie totale par unité de masse E est définie par rapport à l'énergie interne par unité de masse e et à l'énergie cinétique par unité de masse $\frac{|\vec{v}|^2}{2}$:

$$E = e + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \quad (2.1)$$

L'enthalpie par unité de masse h est définie telle que :

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad (2.2)$$

Pour les écoulements compressibles, la pression de stagnation est notée p_0 et la température de stagnation est notée T_0 .

2.2 Équations de conservation

Le volume de contrôle Ω est considéré, la surface S est l'enveloppe de Ω . Le vecteur normal à un élément de surface dS est noté $\mathbf{n}$.

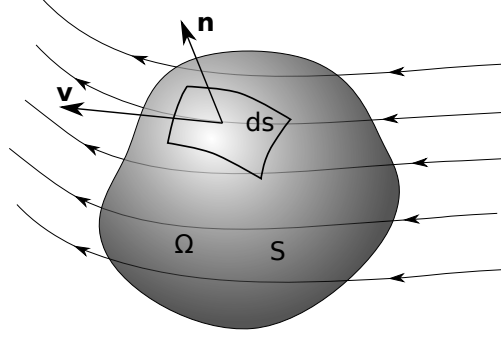


Figure 2.1 Volume de contrôle

2.2.1 Équation de continuité

En l'absence de terme source, la conservation de la masse implique que la variation de la masse contenue dans le volume de contrôle est égale au bilan de masse qui sort du volume de contrôle.

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho d\Omega}_{\text{Variation de la masse}} + \underbrace{\iint_S \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS}_{\text{Flux massique}} = 0 \quad (2.3)$$

2.2.2 Équation de quantité de mouvement

La seconde loi de Newton établit que la variation de la quantité de mouvement d'un corps est égale à la somme des actions extérieures s'exerçant sur ce corps.

$$\underbrace{\iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} d\Omega}_{\text{Variation de la quantité de mouvement}} + \underbrace{\iint_S \rho \mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS}_{\text{Flux de quantité de mouvement}} = \sum \mathbf{F}_{ext} \quad (2.4)$$

Bilan des actions mécaniques

Forces volumiques La somme des forces volumiques s'exerçant sur le système est notée $\mathbf{f}$.

$$\iiint_{\Omega} \rho \mathbf{f} d\Omega \quad (2.5)$$

Forces surfaciques

Les forces de pression s'exerçant sur le système sont :

$$- \oint_S p \mathbf{n} dS \quad (2.6)$$

Les forces visqueuses s'exercent sur le fluide. Le tenseur des contraintes visqueuses est détaillé dans la partie 2.2.4. Le terme correspondant aux forces visqueuses est :

$$- \oint_S (\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.7)$$

2.2.3 Équation de l'énergie

La première loi de la thermodynamique établit que la variation de l'énergie au sein du volume de contrôle est égale à l'énergie échangée avec l'extérieur du volume de contrôle par transfert thermique ou travail mécanique.

$$\underbrace{\iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} d\Omega}_{\text{Variation de l'énergie totale}} + \underbrace{\oint_S \rho E (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS}_{\text{Échanges convectifs}} = \underbrace{\iiint_{\Omega} \dot{q} \rho d\Omega}_{\text{Transfert thermique}} - \underbrace{\oint_S p (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS}_{\text{Travail des forces de pression}} + \underbrace{\iiint_{\Omega} \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{V}) d\Omega}_{\text{Travail des forces volumiques}} + \dot{W}_{visqueux} + \dot{W}_{ext} \quad (2.8)$$

Les frottements visqueux dissipent de l'énergie. Le travail des forces visqueuses $\dot{W}_{visqueux}$ se retrouve dans la formulation locale des équations de la partie 2.2.5. $\dot{W}_{ext}$ est le travail reçu par le système sous forme d'actions mécaniques (par exemple le mouvement des pièces).

2.2.4 Contraintes visqueuses

Un fluide visqueux est un fluide sur lequel s'exercent des contraintes de résistance à l'écoulement lorsqu'il est soumis à des efforts extérieurs.

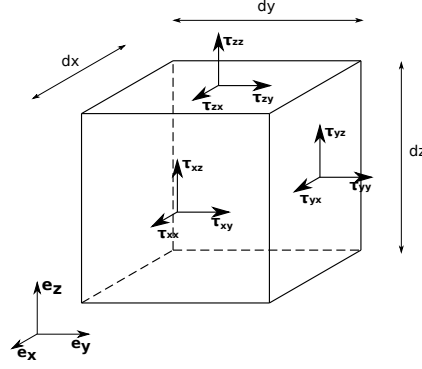


Figure 2.2 Contraintes visqueuses s'exerçant sur un volume infinitésimal de fluide

Le tenseur des contraintes $\bar{\bar{\tau}}$ décrit les contraintes visqueuses qui s'exercent dans le fluide. Ce tenseur possède les composantes suivantes :

$$\bar{\bar{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

2.2.5 Formulation locale des équation de Navier-Stokes

La formulation locale des équations de Navier-Stokes peut s'exprimer à l'aide du tenseur des contraintes [3]. La présence de chocs impose l'utilisation de la forme conservatrice des équations pour la méthode des volumes finis [4].

Conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.10)$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 - \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv - \tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw - \tau_{xz})}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv - \tau_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 - \tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw - \tau_{yz})}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw - \tau_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw - \tau_{zy})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2 - \tau_{zz})}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.13)$$

Conservation de l'énergie

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho H u + Q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho H v + Q_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho H w + Q_z)}{\partial z} = & -\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} - \frac{\partial(u\tau_{xy})}{\partial y} - \frac{\partial(u\tau_{xz})}{\partial z} \\
& - \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} - \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} - \frac{\partial(v\tau_{yz})}{\partial z} \\
& - \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} - \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} - \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Les termes liés au transfert thermique font intervenir la conductivité thermique κ :

$$Q_x = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \tag{2.15}$$

$$Q_y = -\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \tag{2.16}$$

$$Q_z = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \tag{2.17}$$

2.2.6 Fluides Newtoniens

Les gaz utilisés dans les disjoncteurs à haute-tension (SF6, CO2, Air ...) sont des fluides dit Newtoniens. Les contraintes visqueuses dépendent linéairement des déformations. La viscosité permet de faire le lien entre les contraintes visqueuses et les déformations.

La viscosité d'un fluide Newtonien est définie grâce à deux paramètres [5], la viscosité dynamique μ et la seconde viscosité λ .

Équations liant les contraintes visqueuses à la viscosité

Les contraintes visqueuses s'écrivent pour un fluide Newtonien :

$$\tau_{xx} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.18)$$

$$\tau_{yy} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.19)$$

$$\tau_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.20)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.21)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.22)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.23)$$

2.3 Propriétés du fluide

Dans les conditions rencontrées au sein des disjoncteurs à haute-tension, la température peut atteindre 20000 K [6] et les gaz utilisés ne peuvent plus être considérés comme des gaz parfaits. De plus, certaines propriétés comme leur conductivité thermique ou leur viscosité ne peuvent pas être considérées comme constantes [7] [8] [9].

Des modèles doivent donc être développés pour prédire les propriétés du fluide sur de grandes plages de valeurs. Il existe de nombreux modèles physiques faisant l'approximation des différentes propriétés (viscosité, conductivité thermique, capacités thermiques, etc.), et ces propriétés peuvent aussi être déterminées de manière empirique ou par simulation numérique. Chaque modèle couvre un domaine de valeurs, ce qui peut aboutir à l'utilisation de plusieurs modèles différents pour une grandeur, car l'ensemble des valeurs prises par cette grandeur lors du fonctionnement d'un disjoncteur peut être vaste. Certains modèles sont présentés mais leur champ d'application reste toutefois restreint aux cas simples détaillés dans ce mémoire, ils ne sont pas applicables à la simulation réelle des disjoncteurs.

L'industrie développe ses propres tables de valeurs pour les gaz utilisés dans les disjoncteurs à haute-tension. Le solveur fluide utilise alors des valeurs interpolées dans ces tables, qui sont générées par un solveur spécifique. L'étude des modèles utilisés pour prédire les comportements des gaz réels sort du cadre de ce mémoire. Les tables de l'industrie sont considérées comme une donnée d'entrée du programme.

2.3.1 Hypothèse de Stokes

L'hypothèse de Stokes permet d'avoir la relation $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$. Cette hypothèse est en principe valide pour des gaz peu dense ou à faible température. Cependant elle est largement utilisée pour les gaz quelle que soit la température [10]. Pour les calculs de disjoncteurs, l'utilisation de certains gaz polyatomiques comme le dioxyde de carbone peut amener à modifier cette hypothèse. Alors il est nécessaire de connaître la viscosité de volume $\mu_v = \lambda + \frac{2}{3}\mu$, qui n'est plus considérée comme nulle, pour déterminer la valeur de λ .

La viscosité d'un fluide est liée aux interactions moléculaires et par conséquent elle dépend de plusieurs paramètres, notamment la température et de la pression. Il est donc nécessaire d'établir des modèles ou de posséder des données expérimentales permettant de connaître les valeurs de deux grandeurs parmi λ , μ et μ_v . Cependant, l'hypothèse simplificatrice de Stokes permet de caractériser le fluide par une seule grandeur.

2.3.2 Détermination de la viscosité par la loi de Sutherland

Le modèle d'une viscosité constante s'avère limité dès qu'il y a des grandes variations de température ou de pression. L'un des modèles les plus simples pour déterminer la viscosité est la loi de Sutherland.

Ce modèle est limité aux valeurs faibles de pression et de température, il n'est plus valable pour les températures dépassant plusieurs milliers de Kelvin, que l'on retrouve dans les disjoncteurs, mais il permet de facilement valider le programme car les cas qui seront simulés n'impliquent pas de variation trop importante des propriétés des gaz, c'est ce modèle qui est donc utilisé.

La formule de Sutherland est obtenue par la théorie cinétique des gaz parfaits dilués en considérant une interaction moléculaire parfaite [11]. La formule à deux coefficients est utilisée.

$$\mu = \frac{C_1 T^{3/2}}{T + C_2} \quad (2.24)$$

Pour l'air, $C_1 = 1,458 \times 10^{-6}$ et $C_2 = 110,4$ K

2.4 Équation d'état

Pour un gaz parfait, l'équation d'état s'écrit

$$p = \rho RT \quad (2.25)$$

où R est la constante spécifique du gaz considéré. Pour l'air, la valeur $R = 287 \text{ J} \cdot \text{kg} \cdot \text{K}^{-1}$ est retenue.

Pour un gaz réel, la forme de l'équation est conservée, mais la constante spécifique n'est plus considérée comme constante. Cela permet par exemple de tabuler R en fonction de la température et de la pression.

2.5 Coefficient de conductivité thermique

Le coefficient de conductivité thermique κ intervient dans le calcul des termes de transfert thermique.

Tout comme la loi de Sutherland pour la viscosité, il existe des lois obtenues par la théorie cinétique des gaz pour calculer le coefficient de conductivité thermique. Cependant dans les cas étudiés, la simulation avec le nombre de Prandtl constant est privilégiée. Le nombre de Prandtl est défini par

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\kappa} \quad (2.26)$$

Dans les cas de gaz réels, les hypothèses de conductivité thermiques constantes ou de nombre de Prandtl constant ne sont plus valables, et la conductivité doit être déterminée en fonction de l'état du fluide.

2.6 Propriétés thermodynamiques

L'indice adiabatique γ est considéré constant dans les simulation en gaz parfait, pour l'air, gaz diatomique, on utilisera $\gamma = 1,4$.

Les capacités thermiques massiques isobares et isochores sont calculées à l'aide de γ .

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad (2.27)$$

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1} \quad (2.28)$$

Pour un gaz réel, les capacités thermiques massiques ne sont pas constantes.

Les énergies massiques sont calculées à partir des capacité thermiques massiques :

$$e = c_v T \quad (2.29)$$

$$h = c_p T \quad (2.30)$$

CHAPITRE 3 MODÉLISATION NUMÉRIQUE

Dans ce chapitre sont détaillées les méthodes numériques utilisées pour résoudre les équations présentées précédemment.

3.1 Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis est une méthode largement utilisée pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes [12], [13], [14]. Elle est principalement choisie pour ses propriétés conservatrices, notamment lorsqu'il s'agit d'écoulements compressibles.

Le point de départ est un volume infinitésimal de fluide, tel qu'illustré à la figure ??.

3.1.1 Définition des vecteurs de calcul

Le vecteur des variables conservatives $\mathbf{U}$ est défini par :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Les données de ce vecteur sont stockées au centre de chaque cellule, la figure ?? illustre la position des points de calcul du vecteur des variables conservatives.

Le vecteur $\mathbf{U}$ est calculé grâce aux équations présentées dans la partie 2.2.5. Plusieurs vecteurs sont introduits afin de décomposer l'équation pour traiter les termes séparément, en fonction de la physique qui leur est liée et en fonction de la direction spatiale associée aux dérivées.

Les vecteurs de flux convectif sont définis par

$$\mathbf{F}_c = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho Hu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_c = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho Hv \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_c = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho Hw \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Et le vecteur de flux diffusif est défini par

$$\mathbf{F}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \Theta_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \Theta_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ \Theta_z \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

La dernière composante est liée à l'équation de conservation de l'énergie

$$\Theta_x = u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + k\frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.4)$$

$$\Theta_y = u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + k\frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.5)$$

$$\Theta_z = u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} + k\frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.6)$$

Enfin le vecteur de terme source est défini par

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

3.2 Discrétisation des équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes peuvent se mettre sous forme vectorielle en utilisant les formulations locales.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathbf{F}_c - \mathbf{F}_v)}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{G}_c - \mathbf{G}_v)}{\partial y} + \frac{\partial(\mathbf{H}_c - \mathbf{H}_v)}{\partial z} = \mathbf{S} \quad (3.8)$$

La résolution numérique de l'EDP (3.8) fait appel à des méthodes de discrétisation qui vont être détaillées. Tout d'abord, la détermination de la dérivée partielle temporelle se fait à l'aide d'un schéma de discrétisation détaillé dans la partie 3.6. Pour les dérivées partielles spatiales, les termes convectifs et diffusifs sont discrétisés chacun par une méthode différente, détaillées partie 3.4 et 3.5.

3.3 Maillage

La méthode des volumes finis se base sur la discrétisation du domaine en volumes. L'intégrale sur la surface du volume de contrôle est remplacée par la somme des flux qui traversent les surfaces du volume obtenu par discrétisation du domaine.

Le choix du maillage est une étape capitale. Il existe principalement deux types de maillages, les maillages structurés et les maillages non structurés [15]. Les maillages structurés ont pour avantages la simplicité de numérotation, qui se fait de manière implicite, et permet un accès facilité aux données pour le calcul. Les maillages non-structurés ont pour avantage de mieux se conformer à la géométrie réelle des objets complexes, mais ont un coût en stockage de données et en accès mémoire plus élevé.

La géométrie complexe des disjoncteurs à haute-tension et la présence de frontières mobiles a fait que l'utilisation de maillages non structurés a été privilégiée pendant longtemps. Cependant le projet de développement pour les disjoncteurs à haute-tension devrait s'orienter par la suite vers un traitement des géométries complexes par la méthode des frontières immergées [16]. Ce type de méthodes a pour avantage d'utiliser des maillages simples de type cartésien. C'est pour cela que l'utilisation d'un maillage cartésien a été retenue.

Une autre raison justifiant l'utilisation d'un code cartésien est l'utilisation potentielle du code pour la simulation de la zone de l'arc électrique. Afin de simuler cette zone, un sous-domaine parallélépipédique de fluide est extrait du domaine global. Les conditions imposées sur le domaine sont uniquement des conditions de type non solide ainsi que des conditions liées à d'autres physiques (transfert radiatif, électromagnétisme, etc.). Il n'y a donc pas de parois solides à l'intérieur et autour de ce domaine, ce qui permet d'utiliser un maillage cartésien.

L'utilisation d'un maillage cartésien est donc suffisante pour les applications futures mais certains cas de validation actuels, notamment les cas où une couche limite est présente, nécessitent un maillage très raffiné localement. Afin de ne pas alourdir les calculs en imposant un raffinement global du maillage, la possibilité d'utiliser un maillage non uniforme est implémentée. Les distances entre les points consécutifs ne sont alors plus considérées comme constantes. Cet ajout a un coût au niveau du temps de calcul à chaque élément par rapport à un maillage uniforme, mais est largement amorti par la possibilité de raffiner localement le maillage ce qui réduit le nombre d'éléments à utiliser.

Le domaine en trois dimensions est donc subdivisé en parallélépipèdes rectangles, plutôt qu'en cubes, et l'espacement entre les points du maillage est donné lors de la création du maillage.

Pour les cas étudiés, deux types de maillages sont utilisés, les maillages uniformes et les

maillages dont le pas obéit à une loi de concentration. Cette loi de concentration doit permettre à la fois un raffinement près d'une zone d'intérêt et à la fois une certaine régularité dans le maillage de sorte que deux mailles consécutives aient des dimensions proches.

Maillage uniforme Pour un maillage uniforme, les points sont espacés régulièrement. Soit un domaine unidimensionnel de longueur L_x dans la direction $\mathbf{e}_x$, discrétisé en N points les points d'indice $i \in [0, N - 1]$ du maillage ont pour abscisse

$$x_i = L_x \frac{i}{N - 1} \quad (3.9)$$

Concentration en cosinus Une loi de concentration en cosinus permet un raffinement du maillage dans le voisinage d'un plan (par exemple une paroi) et respecte les contraintes géométriques évoquées précédemment. Pour le même domaine et le même nombre de points que pour le maillage uniforme, la concentration en cosinus donne les abscisses suivantes :

$$x_i = L_x \left[1 - \cos \left(\frac{\pi i}{2(N - 1)} \right) \right] \quad (3.10)$$

Concentration en tangente hyperbolique Cette loi de concentration est proposée par [17]. Pour le même domaine et le même nombre de points que précédemment, la concentration en tangente hyperbolique donne les abscisses suivantes :

$$x_i = L_x \left(1 + \frac{\tanh(\delta \frac{i}{N - 1})}{\tanh \delta} \right) \quad (3.11)$$

Où δ est un paramètre de concentration de maillage ($\delta = 4$ pour les simulations).

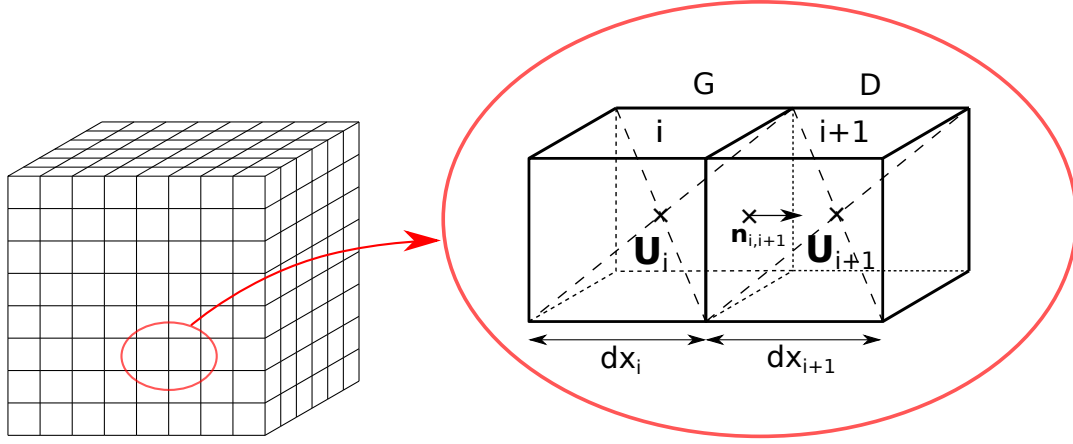


Figure 3.1 Paramétrisation du maillage selon la direction $\mathbf{e}_i$

Le maillage est constitué de points, de faces rectangulaires délimitées par quatre points, et d'éléments parallélépipédiques rectangles délimités par six faces.

Pour un maillage donné, les nombres de points de discrétisation dans les directions $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_j$ et $\mathbf{e}_k$ sont notés N_i , N_j et N_k .

À chaque face du maillage sont associées les cellules adjacentes qui seront notées G pour l'élément situé à gauche de la face et D pour l'élément situé à droite de la face. Est aussi associé à chaque face le vecteur normal à la face, orienté vers l'élément de droite, $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}$. Les pas dans les trois directions sont calculés pour chaque élément à partir de la position des points qui délimitent l'élément.

3.3.1 Définition du domaine

Le domaine de calcul est composé de N_d zones parallélépipédiques rectangles de dimension L_x , L_y et L_z dans les directions $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$. Dans la plupart des cas étudiés, seule une zone est nécessaire. Lorsqu'il existe plusieurs zones, une liste permettant de déterminer les cellules adjacentes est créée.

3.4 Flux convectif

Cette partie se concentre sur la discrétisation spatiale des termes convectifs de l'équation (3.8). Cette discrétisation s'applique sur les méthodes employées pour la résolution des équations d'Euler en trois dimensions.

Parmi les nombreuses méthodes ont été développées pour résoudre ces équations, les plus simples font intervenir des schémas de types différences finies, tels que les schéma Upwind

ou de Lax-Wendroff [18].

Les équations d'Euler hyperboliques prennent la forme d'un problème de Riemann. La résolution de ce type problèmes peut faire appel à des solveurs exacts de type Godunov, ou des solveurs approchés (Roe, Osher, HHLC). Le schéma de Roe [19] [20] [21] est le schéma couramment utilisé pour la résolution des équations d'Euler pour les écoulements compressibles. Il arrive à bien gérer les chocs tout en étant peu couteux en calculs numériques.

3.4.1 Méthode de Roe-Pyke

Le schéma utilisé pour les simulations est celui présenté par Roe et Pike [20] [4], aussi présent dans [22].

Les grandeurs aux faces sont évaluées à partir des grandeurs stockées dans les cellules voisines (notées D et G), en faisant une moyenne selon la méthode de Roe, ces grandeurs moyennes étant désignées par un tilde :

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \frac{u_G + \sqrt{\frac{\rho_D}{\rho_G}} u_D}{1 + \sqrt{\frac{\rho_D}{\rho_G}}} & \tilde{v} &= \frac{v_G + \sqrt{\frac{\rho_D}{\rho_G}} v_D}{1 + \sqrt{\frac{\rho_D}{\rho_G}}} & \tilde{w} &= \frac{w_G + \sqrt{\frac{\rho_D}{\rho_G}} w_D}{1 + \sqrt{\frac{\rho_D}{\rho_G}}} \\ \tilde{H} &= \frac{H_G + \sqrt{\frac{\rho_D}{\rho_G}} H_D}{1 + \sqrt{\frac{\rho_D}{\rho_G}}} & \tilde{a} &= \sqrt{(\gamma - 1)(\tilde{H} - \frac{\mathbf{v}^2}{2})} & \tilde{\mathbf{V}} &= [\tilde{u} \quad \tilde{v} \quad \tilde{w}]\end{aligned}$$

La vitesse moyenne normale à la face est calculée

$$\tilde{V}_n = \tilde{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{n} \quad (3.12)$$

Le calcul des vecteurs propres nécessite les variations de grandeurs entre les cellules :

$$\begin{aligned}
\Delta\rho &= \rho_D - \rho_G \\
\Delta p &= p_D - p_G \\
\Delta u &= u_D - u_G \\
\Delta v &= v_D - v_G \\
\Delta w &= w_D - w_G \\
\Delta V_n &= (\mathbf{V}_D - \mathbf{V}_G) \cdot \mathbf{n}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Les valeurs propres $\tilde{\alpha}_1$ à $\tilde{\alpha}_4$ sont calculées :

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2\tilde{a}^2}(\Delta p - \tilde{\rho}\tilde{a}\Delta V) \tag{3.14}$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \Delta\rho - \frac{\Delta p}{\tilde{a}^2} \tag{3.15}$$

$$\tilde{\alpha}_3 = \frac{1}{2\tilde{a}^2}(\Delta p + \tilde{\rho}\tilde{a}\Delta V) \tag{3.16}$$

$$\tilde{\alpha}_4 = \tilde{\rho} \tag{3.17}$$

Les différentes vitesses des ondes W_1 à W_4 sont calculées :

$$W_1 = |\tilde{V}_n - \tilde{a}| \tag{3.18}$$

$$W_2 = |\tilde{V}_n| \tag{3.19}$$

$$W_3 = |\tilde{V}_n + \tilde{a}| \tag{3.20}$$

$$W_4 = W_2 \tag{3.21}$$

La correction d'entropie présentée par Harten [23] est utilisée. Elle est évoquée de manière plus générale dans [24] :

$$W_{1f} = \begin{cases} \frac{W_1^2}{4\epsilon_1} + \epsilon_1 & \text{si } W_1 < 2\epsilon_1 \\ W_1 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.22}$$

$$W_{3f} = \begin{cases} \frac{W_3^2}{4\epsilon_3} + \epsilon_3 & \text{si } W_3 < 2\epsilon_3 \\ W_3 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.23}$$

Les coefficients ϵ_1 et ϵ_3 doivent être compris entre 0 et $\frac{1}{2}$. On choisit les valeurs $\epsilon_1 = \epsilon_3 = \frac{1}{10}$.

Les vecteurs propres associés R_1 à R_4 associés aux valeurs propres :

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{a}n_x \\ \tilde{v} - \tilde{a}n_y \\ \tilde{w} - \tilde{a}n_z \\ \tilde{H} - \tilde{a}\tilde{V}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \\ \frac{1}{2}\tilde{V}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{a}n_x \\ \tilde{v} + \tilde{a}n_y \\ \tilde{w} + \tilde{a}n_z \\ \tilde{H} + \tilde{a}\tilde{V}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta u - \Delta V_n n_x \\ \Delta v - \Delta V_n n_y \\ \Delta w - \Delta V_n n_z \\ \tilde{u}\Delta u + \tilde{v}\Delta v + \tilde{w}\Delta w - \tilde{V}_n\Delta V_n \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Les termes de dissipation peuvent être calculés à partir des vecteurs propres :

$$\begin{aligned} \Delta F_0 &= W_1\tilde{\alpha}_1 + W_2\tilde{\alpha}_2 + W_3\tilde{\alpha}_3 \\ \Delta F_1 &= W_1\tilde{\alpha}_1(\tilde{u} - \tilde{a}n_x) + W_2\tilde{\alpha}_2\tilde{u} + W_3\tilde{\alpha}_3(\tilde{u} + \tilde{a}n_x) + W_4\tilde{\alpha}_4(\tilde{u} - \tilde{a}n_x) \\ \Delta F_2 &= W_1\tilde{\alpha}_1(\tilde{v} - \tilde{a}n_y) + W_2\tilde{\alpha}_2\tilde{v} + W_3\tilde{\alpha}_3(\tilde{v} + \tilde{a}n_y) + W_4\tilde{\alpha}_4(\Delta v - \Delta V_n n_y) \\ \Delta F_3 &= W_1\tilde{\alpha}_1(\tilde{w} - \tilde{a}n_z) + W_2\tilde{\alpha}_2\tilde{w} + W_3\tilde{\alpha}_3(\tilde{w} + \tilde{a}n_z) + W_4\tilde{\alpha}_4(\Delta w - \Delta V_n n_z) \\ \Delta F_4 &= W_1\tilde{\alpha}_1(\tilde{H} - \tilde{a}\tilde{V}_n) + W_2\tilde{\alpha}_2(\frac{1}{2}\tilde{V}^2) + W_3\tilde{\alpha}_3(\tilde{H} + \tilde{a}\tilde{V}_n) + W_4\tilde{\alpha}_4(\tilde{u}\Delta u + \tilde{v}\Delta v + \tilde{w}\Delta w - \tilde{V}_n\Delta V_n) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Enfin, le vecteur de flux convectif est calculé :

$$\mathbf{F}_c = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\rho_G \mathbf{V}_G + \rho_D \mathbf{V}_D) \cdot \mathbf{n} - \Delta F_0 \\ (\rho_G u_G \mathbf{V}_G + \rho_D u_D \mathbf{V}_D) \cdot \mathbf{n} + (p_G + p_D)n_x - \Delta F_1 \\ (v_G \mathbf{V}_G + \rho_D v_D \mathbf{V}_D) \cdot \mathbf{n} + (p_G + p_D)n_y - \Delta F_2 \\ (w_G \mathbf{V}_G + \rho_D w_D \mathbf{V}_D) \cdot \mathbf{n} + (p_G + p_D)n_z - \Delta F_3 \\ (H_G \mathbf{V}_G + \rho_D H_D \mathbf{V}_D) \cdot \mathbf{n} - \Delta F_4 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

3.5 Flux diffusif

3.5.1 Méthode utilisée

Les vecteurs de flux diffusif (3.3) sont calculés pour chaque face. Les contraintes visqueuses sont calculées à partir des équations (2.18) à (2.23). Le calcul des flux fait appel aux dérivées spatiales de certaines grandeurs ; ce sont les calculs de ces dérivées spatiales qui nécessitent des méthodes de discrétisation.

Il existe plusieurs méthodes de discrétisation spatiale des flux visqueux. Blazek [14] en mentionne deux : par la méthode des différences finies ou par l'application du théorème de Green.

Pour pouvoir capturer les chocs efficacement, la discrétisation des termes visqueux doit se faire avec un schéma de différences finies d'ordre 2 au minimum [25].

Les méthodes d'ordre plus élevé, comme la méthode de WENO, nécessitent un changement dans la formulation en volumes finis et induisent un coût en termes de calcul beaucoup plus élevé.

L'utilisation d'une technique d'ordre élevée n'est pas essentielle pour satisfaire les besoins actuels. C'est donc la méthode des différences finies qui est utilisée pour discrétiser les termes diffusifs.

3.5.2 Reconstitution des valeurs aux faces

Pour calculer les flux diffusifs, certaines grandeurs, notamment les dérivées spatiales du vecteur vitesse, mais aussi de la température, doivent être connues au niveau des faces de chaque élément. Les grandeurs à dériver doivent donc être disponibles au niveau des faces. Cependant, les grandeurs sont définies aux centres des cellules, il faut donc les interpoler sur les faces. La méthode la plus simple est de prendre la moyenne des valeurs des cellules adjacentes à la face, [26] et [14]. Pour chaque face, la valeur de u , v , w , T , P , et plus généralement d'une grandeur Γ est évaluée au niveau d'une face à partir des valeurs des cellules adjacentes, désignées par les indices D et G . On a ainsi la grandeur Γ_M évaluée pour une face :

$$\Gamma_M = \frac{\Gamma_D + \Gamma_G}{2} \quad (3.27)$$

3.5.3 Calcul des dérivées partielles

Les grandeurs calculées aux faces sont utilisées pour calculer des dérivées partielles. Le schéma utilisé est un schéma centré d'ordre 2. Pour traiter les frontières du domaine, il existe deux

possibilités, l'utilisation de cellules virtuelles ou le décentrage du schéma.

Le schéma d'ordre 2 centré requiert normalement l'utilisation d'une rangée de cellules virtuelles aux frontières du domaine, ce qui serait compatible avec le schéma de Roe pour les termes convectifs et permettrait d'imposer des conditions aux limites avec une méthode unique. Cependant comme la méthode utilisée requiert les grandeurs aux faces dans le schéma de différences finies, il faut en réalité deux rangées de cellules virtuelles. Cela complexifie l'imposition des conditions aux limites et peut poser des problèmes pour paralléliser le code. L'utilisation de deux rangées de cellules virtuelles pour les schémas numérique lors du calcul des flux diffusifs n'est donc pas privilégiée.

C'est le décentrage du schéma qui est utilisé, une seule rangée de cellules virtuelles est alors nécessaire.

Les coefficients des schémas sont donnés par Fornberg [27] pour l'ordre de discrétisation voulu.

Pour une face à l'intérieur du domaine, avec $\Gamma = T, u, v, w, P$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma_{Mi,j,k}}{\partial x} &= \frac{\Gamma_{M_{i+1,j,k}} - \Gamma_{M_{i-1,j,k}}}{2\Delta x} \\ \frac{\partial \Gamma_{Mi,j,k}}{\partial y} &= \frac{\Gamma_{M_{i,j+1,k}} - \Gamma_{M_{i,j-1,k}}}{2\Delta y} \\ \frac{\partial \Gamma_{Mi,j,k}}{\partial z} &= \frac{\Gamma_{M_{i,j,k+1}} - \Gamma_{M_{i,j,k-1}}}{2\Delta z}\end{aligned}$$

Pour une face sur une frontière "gauche" :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma_{Mi,j,k}}{\partial x} &= \frac{-3\Gamma_{Mi,j,k} + 4\Gamma_{M_{i+1,j,k}} - \Gamma_{M_{i+2,j,k}}}{2\Delta x} \\ \frac{\partial \Gamma_{Mi,j,k}}{\partial y} &= \frac{-3\Gamma_{Mi,j,k} + 4\Gamma_{M_{i,j+1,k}} - \Gamma_{M_{i,j+2,k}}}{2\Delta y} \\ \frac{\partial \Gamma_{Mi,j,k}}{\partial z} &= \frac{-3\Gamma_{Mi,j,k} + 4\Gamma_{M_{i,j,k+1}} - \Gamma_{M_{i,j,k+2}}}{2\Delta z}\end{aligned}$$

Pour une face sur une frontière "droite" :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma_{Mi,j,k}}{\partial x} &= \frac{3\Gamma_{Mi,j,k} - 4\Gamma_{M_{i-1,j,k}} + \Gamma_{M_{i-2,j,k}}}{2\Delta x} \\ \frac{\partial \Gamma_{Mi,j,k}}{\partial y} &= \frac{3\Gamma_{Mi,j,k} - 4\Gamma_{M_{i,j-1,k}} + \Gamma_{M_{i,j-2,k}}}{2\Delta y} \\ \frac{\partial \Gamma_{Mi,j,k}}{\partial z} &= \frac{3\Gamma_{Mi,j,k} - 4\Gamma_{M_{i,j,k-1}} + \Gamma_{M_{i,j,k-2}}}{2\Delta z}\end{aligned}$$

Pour un maillage non uniforme, ces schémas ne sont plus strictement d'ordre 2. Cependant si la dimension des cellules adjacentes est proche, l'approximation de schéma d'ordre 2 peut être faite. Cette approximation pourra être vérifiée.

3.6 Intégration temporelle

Les disjoncteurs à haute-tension possèdent plusieurs régions ayant un comportement spécifique, les vitesses et températures du fluide peuvent varier très fortement d'une région à l'autre. Dans la zone de l'arc, le fluide atteint des vitesses élevées, tandis que dans les zones d'échappement le fluide peut avoir des vitesses faibles. Les méthodes fonctionnant avec un pas de temps global peuvent s'avérer limitées. Par exemple, [28] propose une méthode partiellement implicite qui permet d'améliorer l'intégration temporelle. La possibilité d'utiliser une méthode hybride explicite-implicite a été envisagée par [1] mais le coût en calcul s'avère trop important compte-tenu du comportement du gaz utilisé actuellement.

Le choix de la méthode d'intégration temporelle se porte sur une méthode explicite en temps. Cependant, ce type de schéma impose une condition sur le pas de temps pour assurer la stabilité.

L'intégration temporelle pour les équations de Navier-Stokes est différente de l'intégration pour les équations d'Euler. [14] et [29] proposent une méthode pour résoudre les équations d'Euler et de Navier-Stokes. L'intégration se fait par un schéma multi-étapes explicite en temps (Runge-Kutta). L'instant t est noté par l'indice n et l'instant $t + \Delta t$ et noté par l'indice $n + 1$. Soit m le nombre d'étapes, le pas de temps $n + 1$ est déterminé à partir du pas de temps n .

$$\mathbf{U}_i^{(0)} = \mathbf{U}_i^n \quad (3.28)$$

$$\mathbf{U}_i^{(1)} = \mathbf{U}_i^{(0)} - \alpha_1 \frac{\Delta t_i}{\Omega_i} \mathbf{R}_i^{(0)} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{U}_i^{(2)} = \mathbf{U}_i^{(0)} - \alpha_2 \frac{\Delta t_i}{\Omega_i} \mathbf{R}_i^{(1)} \quad (3.30)$$

$$\vdots \quad (3.31)$$

$$\mathbf{U}_i^{(n+1)} = \mathbf{U}_i^{(m)} = \mathbf{U}_i^{(0)} - \alpha_m \frac{\Delta t_i}{\Omega_i} \mathbf{R}_i^{(m-1)} \quad (3.32)$$

$$(3.33)$$

où les α_k représentent les coefficients d'étapes. Le vecteur des variables conservatives $\mathbf{U}$ est

calculé à l'étape k à partir du résidu $\mathbf{R}$ évalué à l'étape $k - 1$.

Les cas qui seront traités dans la section 4 sont pour la plupart des cas stationnaires, pour lesquels le schéma est limité à la première étape et devient un schéma d'Euler (schéma du premier ordre).

3.6.1 Calcul du pas de temps

Le pas de temps doit respecter le critère de stabilité. L'étude de la stabilité, dont [30] fait une étude générale pour les schémas numériques les plus courants.

L'article [31] donne la condition sur le pas de temps pour un code non visqueux en maillage cartésien. C'est cette condition qui est utilisée lorsque qu'il n'y a que les termes convectifs. Les rayons spectraux sont calculés à partir de la vitesse du fluide et de la vitesse du son.

L'ajout de termes diffusifs vient modifier le calcul du pas de temps, [32] [18] donnent le pas de temps pour les équations d'Euler avec un terme correspondant à une viscosité artificielle. Ce terme vient s'ajouter au dénominateur, et naturellement le CFL change aussi. Lorsque les termes diffusifs sont calculés directement, le calcul du pas de temps reste identique ; seule la valeur des rayons spectraux est différente. Les rayons spectraux pour les termes visqueux sont calculés en fonction des propriétés du fluide, [14] propose une forme des rayons spectraux diffusifs, [33], [34] et [31] proposent différentes écritures alternatives.

Le pas de temps est finalement calculé pour chaque cellule [14]. Le pas de temps global est le minimum des pas de temps calculés sur l'ensemble des cellules, assurant la stabilité globale.

$$\Delta t = \min_i (t_i) \quad (3.34)$$

avec

$$t_i = \sigma \frac{\Omega_i}{\sum \Lambda_c + 4 \sum \Lambda_v} \quad (3.35)$$

Les termes Λ_c sont les rayons spectraux associés aux termes convectifs et les Λ_v sont les rayons spectraux associés aux termes diffusifs.

Les rayons spectraux pour les termes convectifs sont calculés en même temps que les flux convectifs :

$$\Lambda_c = (|\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}| + c) \Delta S \quad (3.36)$$

Pour un écoulement non turbulent, les rayons spectraux pour les termes diffusifs sont calculés avec les flux diffusifs :

$$\Lambda_v = \max \left(\frac{4}{3\rho}, \frac{\gamma}{\rho} \right) \left(\frac{\mu}{Pr} \right) \frac{(\Delta S)^2}{\Omega} \quad (3.37)$$

Le calcul d'un pas de temps global peut présenter un inconvénient s'il est nécessaire d'avoir localement un pas de temps faible, car tout le domaine se retrouve impacté par un pas de temps faible, ce qui peut augmenter le nombre d'itération et donc le temps de calcul.

3.7 Conditions aux limites

3.7.1 Cellules virtuelles

Afin de faciliter l'imposition des conditions aux limites, des cellules virtuelles sont créées au niveau des faces qui composent la frontière du domaine. Pour chaque face sur laquelle est imposée une condition frontière, une cellule est créée.

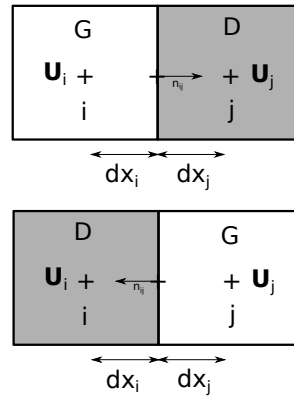


Figure 3.2 Paramétrisation du maillage à la frontière. Les cellules virtuelles sont représentées en gris et l'orientation des face dépend de la position de la frontière.

3.7.2 Condition de paroi solide

Une des conditions aux limites intervenant dans de nombreux cas de simulation d'écoulements visqueux est la condition de paroi solide. Plusieurs modèles permettent de reproduire l'interaction entre un fluide visqueux et une paroi solide. Le modèle de non-glissement est un de ces modèles.

Condition de glissement (symétrie)

Cette condition est principalement utilisée pour la simulation des écoulements non visqueux.

$$\begin{aligned}
 \rho_D &= \rho_G \\
 u_D &= u_G - 2(\mathbf{v}_G \cdot \mathbf{n})n_1 \\
 v_D &= v_G - 2(\mathbf{v}_G \cdot \mathbf{n})n_2 \\
 w_D &= w_G - 2(\mathbf{v}_G \cdot \mathbf{n})n_3 \\
 E_D &= E_G
 \end{aligned}
 \tag{3.38}$$

Condition de non-glissement

La condition de non-glissement impose une vitesse de fluide nulle par rapport à la paroi. L'utilisation de cellules virtuelles permet d'imposer cette condition :

$$\begin{aligned}
 u_D &= -u_G \\
 v_D &= -v_G \\
 w_D &= -w_G
 \end{aligned}
 \tag{3.39}$$

Dans le cas d'une paroi possédant une vitesse non nulle dans le référentiel fixe, cette vitesse est retranchée au niveau de la cellule virtuelle.

Les transferts thermiques à la paroi doivent aussi être considérés. Le flux thermique à la paroi peut être imposé ou la paroi peut être considérée comme isotherme.

Paroi adiabatique

Pour une paroi adiabatique, les gradients de masse volumique et de température sont nuls.

$$\begin{aligned}
 \rho_D &= \rho_G \\
 E_D &= E_G
 \end{aligned}
 \tag{3.40}$$

Température imposée

Pour une paroi isotherme à la température imposée T_m , que valent la masse volumique et l'énergie ?

Calcul de l'énergie L'énergie totale peut être calculée à partir de sa définition

$$E = e + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \quad (3.41)$$

Pour un gaz thermiquement parfait :

$$e = c_v T \quad (3.42)$$

Donc

$$\begin{aligned} E_D &= c_v T_D + \frac{|\mathbf{v}_D|^2}{2} \\ &= c_v (2T_m - T_G) + \frac{|\mathbf{v}_G|^2}{2} \end{aligned}$$

Calcul de la densité L'hypothèse d'un gradient de pression normal à la surface nul donne,

$$p_D = p_m = p_G$$

Pour avoir une température T_m sur la frontière, nécessairement

$$T_m = \frac{T_D + T_G}{2}$$

Donc

$$T_D = 2T_m - T_G$$

et,

$$\begin{aligned} \rho_D &= \frac{p_D}{RT_D} \\ &= \frac{p_G}{R(2T_m - T_G)} \end{aligned} \quad (3.43)$$

3.7.3 Condition de débit massique

Pour un écoulement incompressible, il suffit d'imposer la vitesse du fluide en entrée pour pouvoir imposer le débit. Pour traiter les écoulements compressibles, cette démarche ne suffit

plus, il est nécessaire d'imposer le débit en tenant compte des variations de densité.

Le débit $\dot{m}_m$ est imposé sur la face d'entrée avec la direction $\mathbf{e}_m = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$. La température de stagnation T_{0_m} est donnée.

Pour un écoulement subsonique, la pression sur la face est déterminée à partir de la pression à l'intérieur du domaine en considérant un gradient de pression nul.

Pour un écoulement supersonique, la pression p_m est donnée. Les grandeurs au niveau de la face sont déterminées à partir des relations thermodynamiques.

Le calcul est détaillé en annexe A.

3.7.4 Condition d'entrée supersonique

La condition d'entrée supersonique impose le nombre de Mach M_m , la pression p_m , la température T_m et la direction de l'écoulement $\mathbf{e}_m$, les autres grandeurs sont déterminées à partir du nombre de Mach.

Pour un gaz parfait,

$$\|\mathbf{v}_m\| = M_m * \sqrt{\gamma R T_m} \quad (3.44)$$

La vitesse est appliquée dans la direction donnée,

$$\mathbf{v}_m = \|\mathbf{v}_m\| \mathbf{e}_m \quad (3.45)$$

Ce qui permet de trouver les grandeurs à la face,

$$\begin{aligned} \rho_m &= \frac{p_m}{R T_m} \\ u_m &= \|\mathbf{v}_m\| e_{m1} \\ v_m &= \|\mathbf{v}_m\| e_{m2} \\ w_m &= \|\mathbf{v}_m\| e_{m3} \\ E_m &= c_v T_m + \frac{\mathbf{v}_m^2}{2} \end{aligned} \quad (3.46)$$

3.7.5 Condition de sortie supersonique

La condition de sortie supersonique est traitée numériquement en imposant un gradient nul à la frontière pour toutes les grandeurs. Ainsi

$$\rho_D = \rho_G$$

$$u_D = u_G$$

$$v_D = v_G$$

$$w_D = w_G$$

$$E_D = E_G$$

3.7.6 Condition de champ libre - pression

La pression statique est imposée, les autres grandeurs sont déterminées à partir de cette pression statique et des grandeurs dans le domaine.

3.7.7 Condition d'entrée - pression

La pression et la température de stagnation sont données les autres grandeurs sont déterminées à partir de la pression statique dans le domaine.

3.7.8 Condition de périodicité et jonction de zone

Les contraintes géométriques de périodicité, de même que les contraintes liées à l'utilisation de zones multiples peuvent être imposées de la même manière qu'une condition classique. Pour cela il suffit de donner à la cellule virtuelle adjacente à la cellule sur laquelle la condition doit être imposée, la valeur de la cellule correspondante, par exemple la cellule située sur la face opposée.

3.7.9 Résumé des conditions aux limites

Tableau 3.1 Conditions aux limites implémentées

Type de condition	Grandeurs imposées par l'utilisateur
Symétrie	-
Mur adiabatique	$\mathbf{v}_{mur}$
Mur isotherme	$T_0, \mathbf{v}_{mur}$
Débit massique (subsonique)	$\dot{m}, T_0, \text{direction}$
Débit massique (supersonique)	$\dot{m}, T_0, P, \text{direction}$
Périodicité	Face associée
Jonction de zone	Face associée
Vitesse (supersonique)	$M, P, T, \text{direction}$
Champ libre (supersonique)	-
Sortie pression	P
Entrée pression	P_0, T_0

3.8 Implémentation

Le modèle présenté dans le chapitre 3 est implémenté à l'aide du langage C++. Ce langage a été choisi car il s'agit d'un langage compilé permettant de meilleures performances par rapport aux langages interprétés. La grande popularité de ce langage et la variété des bibliothèques ont eu un influence sur le choix du langage. Le principe global du programme est présenté sur la figure ??.

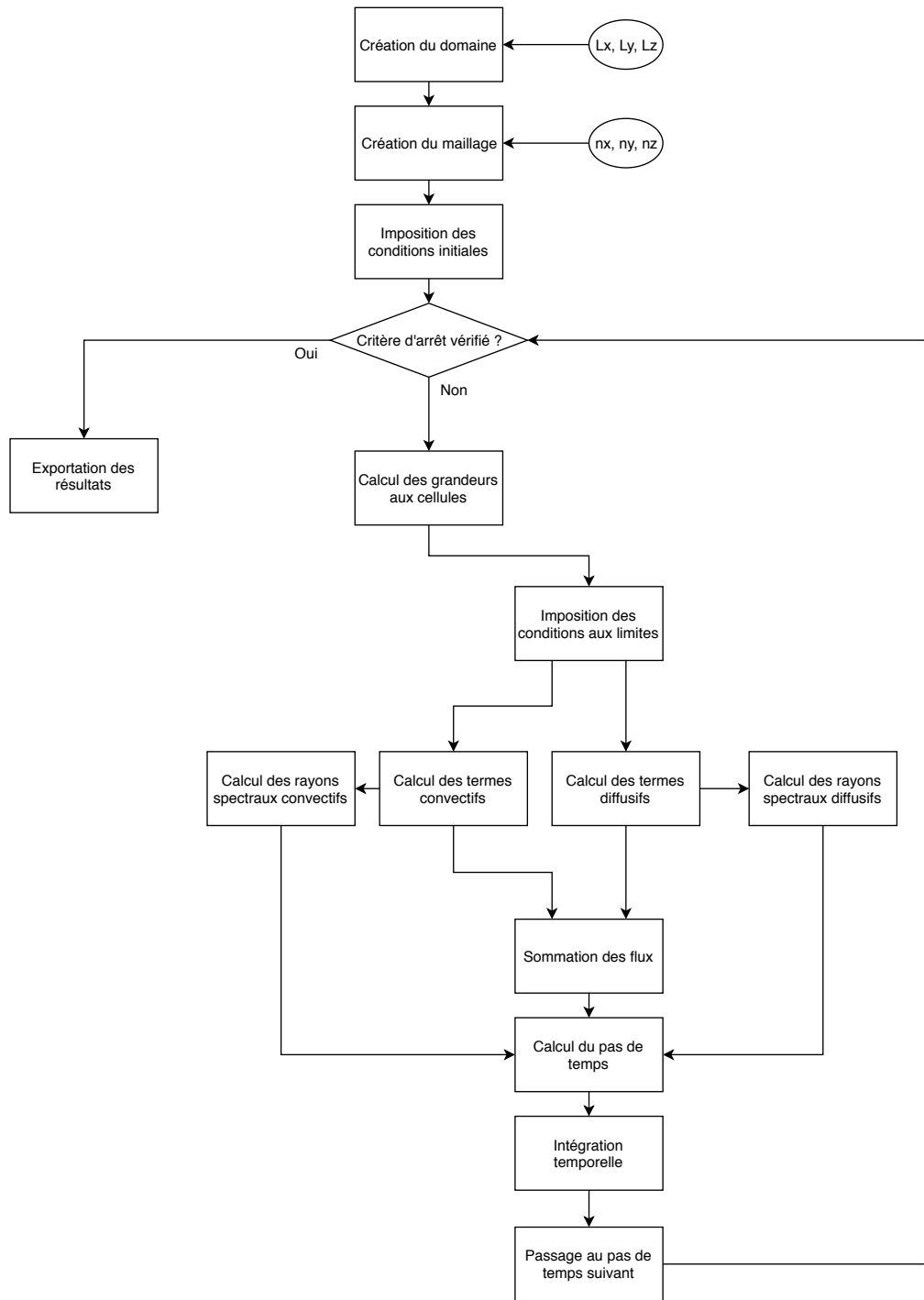


Figure 3.3 Fonctionnement du programme

CHAPITRE 4 VÉRIFICATION ET VALIDATION DU CODE

L'objectif de ce chapitre est de procéder d'abord à la vérification du code. Pour cela des cas test pour lesquels des solutions analytiques ou des résultats expérimentaux sont accessibles sont simulés. Ces solutions sont comparées aux solutions de référence, et on procède ensuite à la validation sur des cas de référence avec des données expérimentales.

4.1 Paramètres généraux

4.1.1 Paramètres de simulation

Sauf mention contraire, les cas test sont réalisés avec un modèle de gaz parfait et les paramètres suivants :

Tableau 4.1 Valeurs par défaut pour les simulations

Grandeur	Valeur
γ	1,4
R	287
μ	Sutherland
Pr	0,7
κ	$R \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\mu}{Pr}$

4.1.2 Résultats présentés

Pour chaque pas de temps, le résidu est calculé en faisant la différence des valeurs du vecteur des variables conservatives moyenné sur l'ensemble du domaine au pas actuel et les valeurs au pas précédent.

$$\mathcal{R}(t) = \frac{1}{N_c} \sum_{i=0}^{N_c} |\mathbf{U}_{i,t} - \mathbf{U}_{i,t-\Delta t}| \quad (4.1)$$

Les résultats de simulation sont obtenus au centre des cellules. Une interpolation trilineaire est réalisée pour tracer les courbes aux positions d'intérêt et comparer les résultats de simulation avec les courbes de références.

Pour n_i points d'interpolation, si on note i l'indice d'un point, $s_{th,i}$ la solution de référence interpolée au point i et $s_{sim,i}$ la solution obtenue par simulation interpolée au point i , l'erreur

locale $\epsilon(i)$ au point i est calculée de la manière suivante

$$\epsilon(i) = |s_{th,i} - s_{sim,i}| \quad (4.2)$$

L'erreur globale, utilisée pour connaître l'ordre convergence spatial est calculée en prenant la moyenne des erreurs locales

$$\mathcal{E} = \frac{1}{n_i} \sum_i \epsilon(i) \quad (4.3)$$

Les isosurfaces présentées sont tracées à l'aide du logiciel de visualisation Tecplot.

Le tableau suivant résume tous les cas présentés dans ce mémoire.

Tableau 4.2 Cas test étudiés

Cas étudié	Équations vérifiées	Section
Tube à choc	Euler 1D	4.2.1
Détente de Prandtl-Meyer	Euler 2D	4.2.2
Écoulements convergents	Euler 2D	4.2.3
Transfert thermique simple	Thermique	4.3
Couche limite sur plaque plane	Navier-Stokes 2D	4.4.1
Marche descendante	Navier-Stokes 2D	4.4.2

4.2 Vérification des termes convectifs

Dans cette partie, le vecteur de flux diffusif est considéré comme nul. Seuls les termes convectifs sont pris en compte. Les équations de Navier-Stokes se ramènent donc aux équations d'Euler. Les cas test considérés sont donc des cas test qui correspondent à ceux d'un fluide compressible non visqueux.

4.2.1 Tube à choc

Le premier cas test est un cas unidimensionnel non stationnaire qui permet de vérifier le code compressible non visqueux. Il s'agit d'un tube à choc classique adapté du cas présenté par Sod [35], largement utilisé pour la vérification des codes compressibles [4]. La géométrie du problème est présentée à la figure 4.1. Au repos, les deux compartiments sont séparés par une membrane. Au temps initial, la membrane est retirée. Il se forme alors un choc ainsi qu'un faisceau d'ondes de détente.

Tableau 4.4 Conditions initiales utilisées pour les cas de tube à choc

Grandeur	Valeur dans la zone de gauche	Valeur dans la zone de droite
u_{ini}	0	0
v_{ini}	0	0
w_{ini}	0	0
P_{ini}	1000000 Pa	100000 Pa
T_{ini}	300 K	300 K
ρ_{ini}	P_{ini}/RT_{ini}	P_{ini}/RT_{ini}

Les résultats obtenus ne dépendent que de l'axe du tube à choc, et donc les courbes sont tracées suivant cette direction.

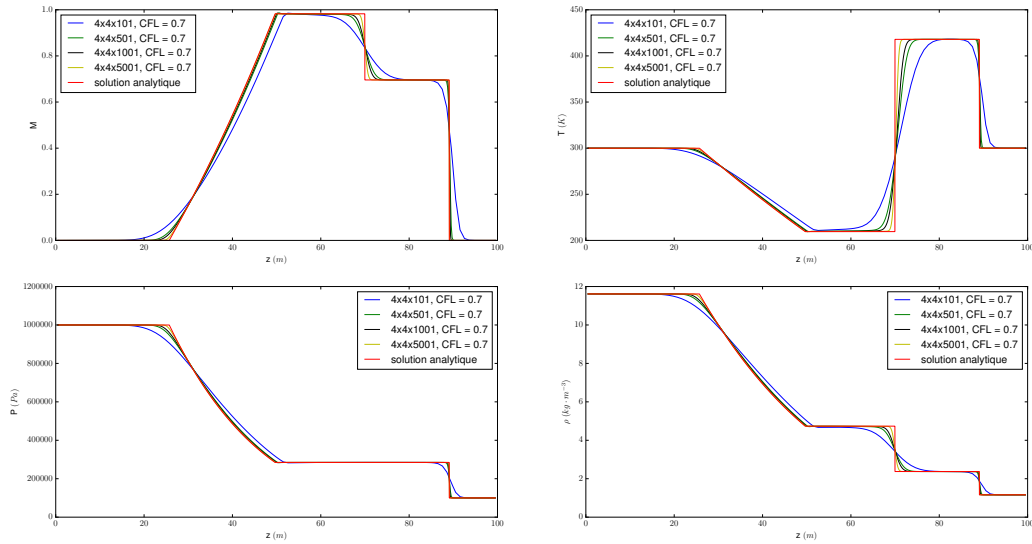


Figure 4.2 Résultats obtenus pour différentes tailles de maillage (100, 500, 1000 et 5000 mailles dans la direction du tube à choc). Le nombre de Mach, la température, la pression et la masse volumique sont tracé selon l'axe du tube à choc.

Les résultats de simulation sont globalement proches de la solution analytique. Le code arrive à bien simuler les zones où les grandeurs sont constantes. La position du choc et du faisceau d'onde sont cohérentes avec la solution analytique. L'erreur est davantage observable au niveau des valeurs prises dans les zones de variations importantes des propriétés.

Cette erreur est réduite par un raffinement du maillage, alors les résultats de simulation tendent à se rapprocher de la solution analytique.

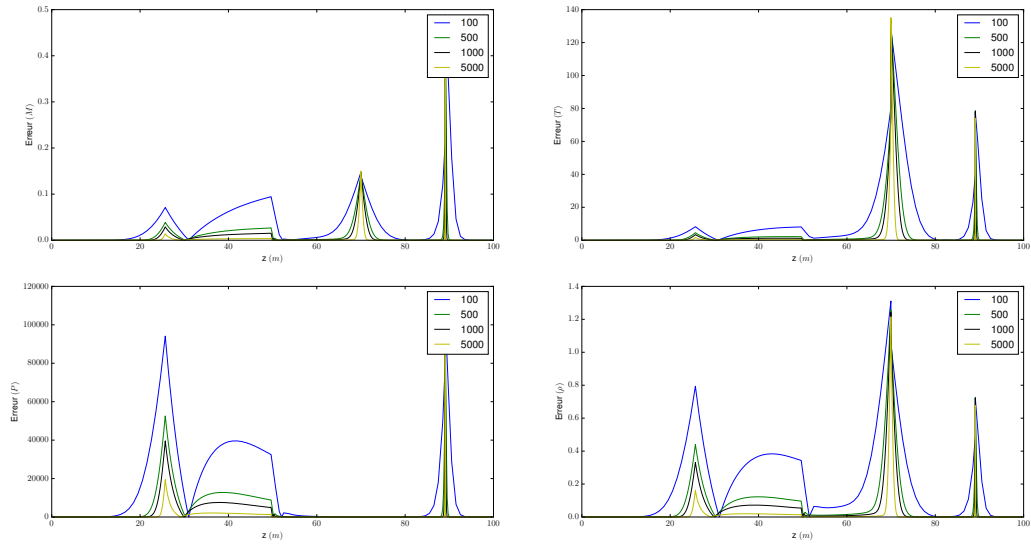


Figure 4.3 Erreur observée pour différentes tailles de maillage (100, 500, 1000 et 5000 mailles dans la direction du tube à choc). Les erreurs sur le nombre de Mach, la température, la pression et la masse volumique sont tracé selon l'axe du tube à choc.

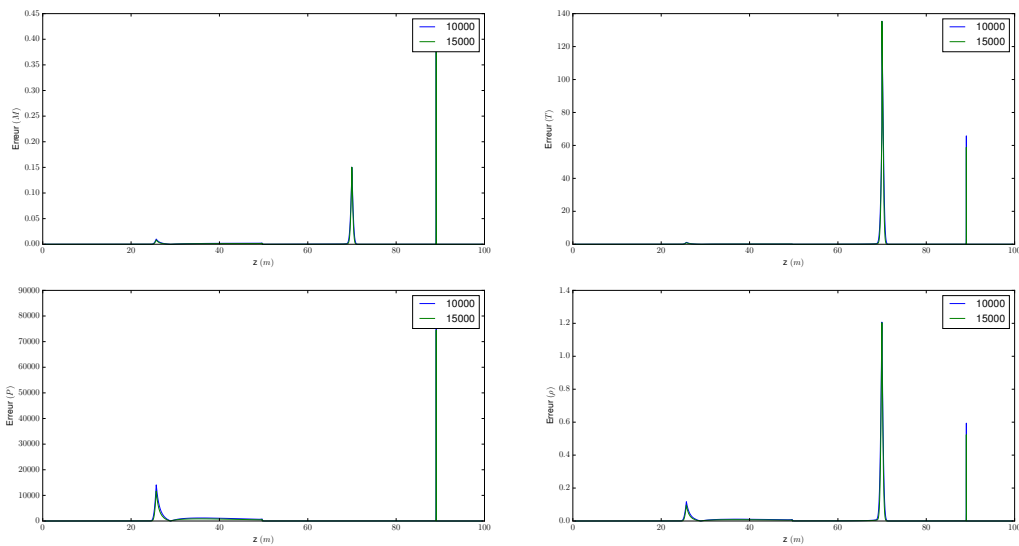


Figure 4.4 Erreur observée pour différentes tailles de maillage (10000 et 15000 mailles dans la direction du tube à choc). Les erreurs sur le nombre de Mach, la température, la pression et la masse volumique sont tracé selon l'axe du tube à choc.

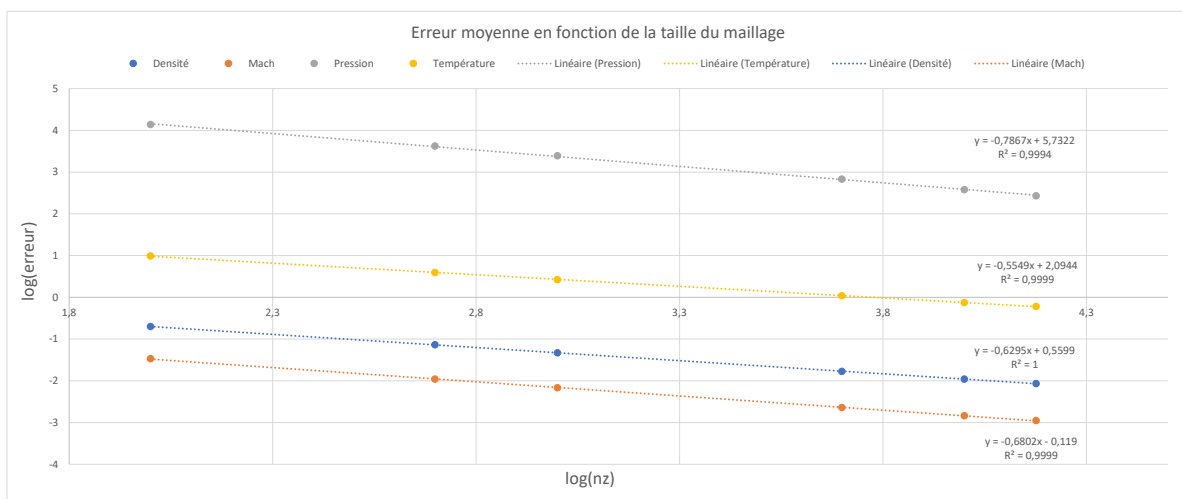


Figure 4.5 Détermination de la convergence spatiale, l'erreur moyenne est tracée en fonction du nombre de maille dans la direction du tube à choc.

La figure 4.5 présente l'erreur globale moyenne calculée pour chaque maillage. Le tracé de

cette erreur permet de confirmer l'ordre de convergence spatiale du schéma. L'ordre de convergence n'est pas exactement le même pour chaque grandeur, la température converge plus lentement que les autres grandeurs. L'ordre de convergence spatiale est globalement compris entre 0,5 et 1.

4.2.2 Détente de Prandtl-Meyer

La détente de Prandtl-Meyer se produit lorsqu'un écoulement supersonique rencontre une géométrie présentant un coin formant un angle plus grand que l'horizontale (Figure 4.6).

La simulation de ce cas a pour objectif de vérifier la présence d'ondes de détente dans un écoulement supersonique avec une géométrie en deux dimensions. La géométrie présente un point singulier ce qui permet de vérifier la robustesse du code dans cette situation.

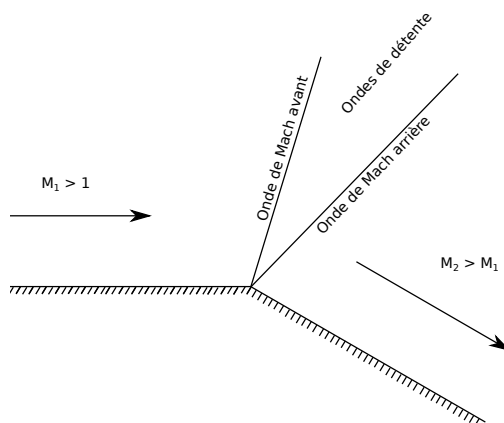


Figure 4.6 Détente de Prandtl-Meyer

Ce cas a été choisi car il possède une solution analytique détaillée en annexe B.

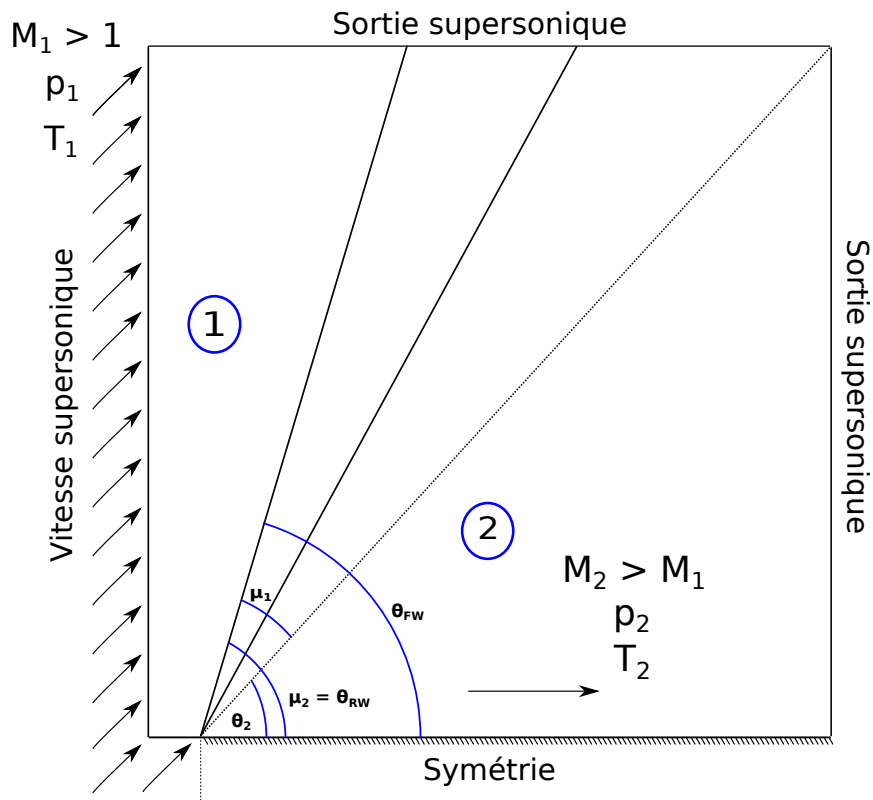


Figure 4.7 Paramétrisation et conditions aux limites pour la détente de Prandtl-Meyer.

L'adaptation du problème se fait en imposant une entrée supersonique avec une direction d'écoulement permettant de reformer l'angle de de flexion avec la condition de frontière solide. La géométrie est visible sur la figure 4.7. Les faces dans la direction perpendiculaire au plan de l'écoulement sont des conditions de symétrie. Les faces d'entrée et de sortie sont supersoniques.

Le domaine est choisi suffisamment grand pour permettre aux ondes de Mach d'intersecter la face de sortie opposée au mur. Ainsi l'ensemble de la zone de détente est observable sur une des faces de sortie.

Cette modélisation a pour inconvénient de placer le point anguleux du problème physique sur un point singulier du maillage, qui se situe à l'un des angles du domaine et où deux conditions aux limites différentes sont imposées : l'une de vitesse et l'autre de frontière solide. Cela peut entraîner plusieurs sources d'imprécision qui ne vont pas dépendre du solveur mais directement de la manière de modéliser le problème. Les sources d'imprécision qui dépendent de la modélisation géométrique sont présentées dans les paragraphes suivants.

Dans le cas réel où le fluide est visqueux, le point singulier se situant au niveau d'une paroi solide, la vitesse du fluide est presque nulle aux alentours de ce point. Comme la couche limite est très peu épaisse, l'approximation d'un fluide non visqueux va impacter faiblement les résultats, cela permet d'imposer la même vitesse sur toute la face d'entrée, et limite l'interaction entre la condition de paroi et la condition d'entrée supersonique.

Le point de déflexion se situe au niveau du coin du domaine ; dans la réalité l'écoulement se développe en amont, l'écoulement "voit" la perturbation en aval. Pour la modélisation qui a été choisie, l'information de la perturbation de l'écoulement n'est pas transmise en amont de l'écoulement. Cela peut avoir un impact sur la précision des résultats. Cependant avec un angle bien choisi, le début de la zone de détente en amont forme un angle faible ce qui va permettre d'avoir une zone de détente qui s'éloigne de la paroi lorsque l'on s'éloigne du point singulier. Cela restreint la zone où l'écoulement n'a pas le temps de se développer.

Pour essayer de contrer les effets du point singulier, plusieurs modifications sont testées, comme un raffinement du maillage au niveau du point, ou un déplacement du point sur la frontière inférieure du domaine afin de le positionner sur un bord du domaine et non plus sur un coin. C'est cette configuration qui est présentée sur la figure 4.7.

Paramètres de simulation

Tableau 4.5 Valeurs des conditions aux limites pour la détente de Prandtl-Meyer

Grandeur	Valeur
M_1	1,8
P_1	100000 Pa
T_1	300 K
θ_1	20°

Tableau 4.6 Conditions initiales pour la détente de Prandtl-Meyer

Grandeur	Valeur
u_{ini}	0
v_{ini}	0
w_{ini}	0
P_{ini}	200000 Pa
T_{ini}	400 K
ρ_{ini}	P_{ini}/RT_{ini}

Tableau 4.7 Dimensions du domaine pour la détente de Prandtl-Meyer

Cas	Cas 5	Autres cas
L_x	1 m	1 m
L_y	3,15 m	3 m
L_z	7 m	7 m
Coin	0,2 m	0 m

Tableau 4.8 Paramètres du maillage pour la détente de Prandtl-Meyer

Cas	Cas 1 et 6	Cas 2	Cas 3	Cas 4	Cas 5
Type	Uniforme	Uniforme	Uniforme	Raffiné (cos)	Uniforme
n_x	21	31	41	21	21
n_y	61	91	121	61	64
n_z	141	211	281	141	141
Coin	0	0	0	0	4

Tableau 4.9 Paramètres d'intégration temporelle pour la détente de Prandtl-Meyer

Cas	Cas 6	Autres cas
CFL	0,7	0,2

Résultats

Les lignes de Mach convergent théoriquement vers le point anguleux. Sur les tracés isocontours de la simulation, les lignes de Mach ne convergent pas exactement vers le point anguleux. Les points d'intersection entre les lignes de Mach et la face inférieure s'étalent dans une zone étroite près du point anguleux.

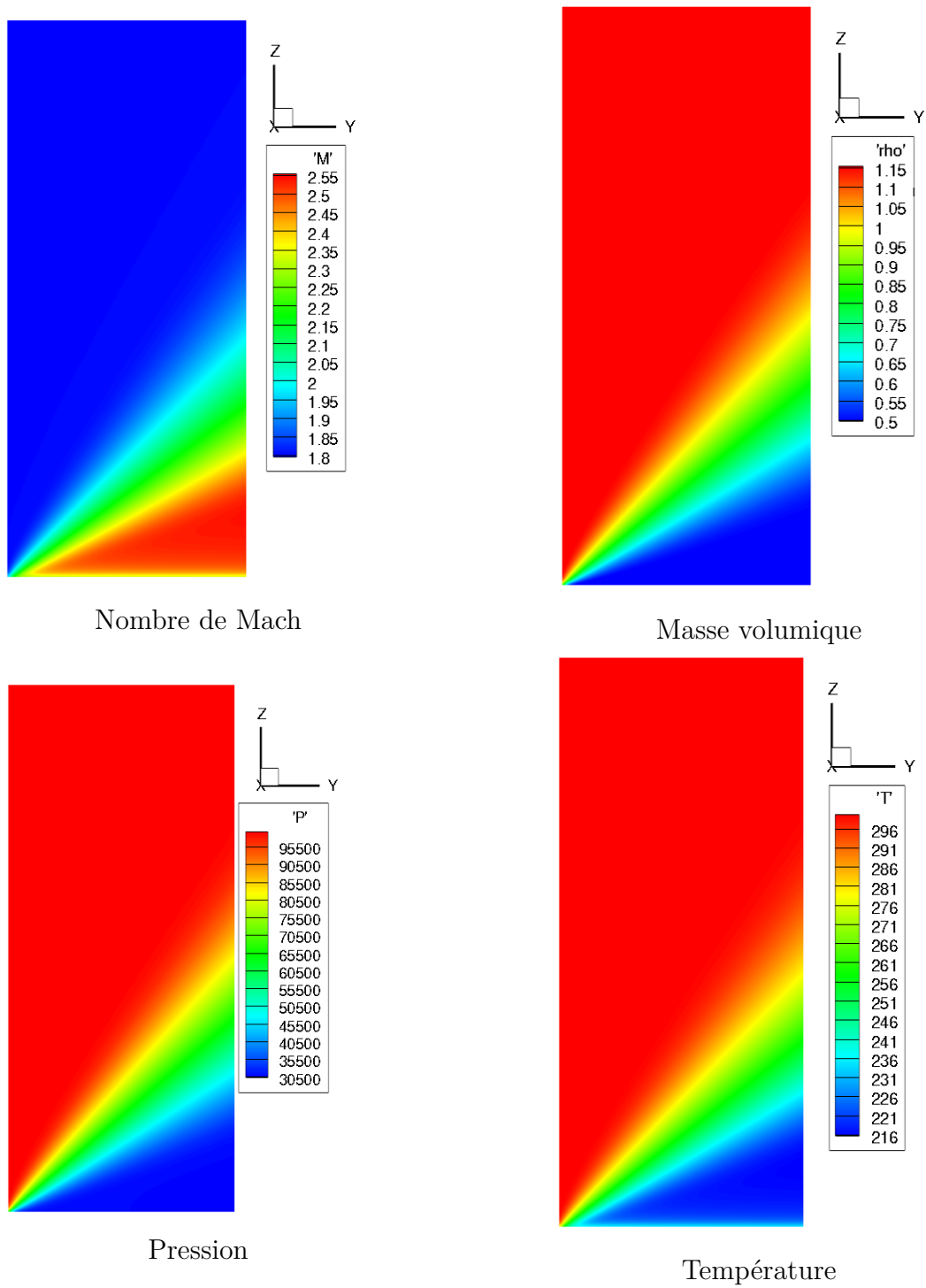


Figure 4.8 Isocontours pour la détente de Prandtl-Meyer (maillage 41x121x281)

Pour tous les cas simulés, les courbes obtenues (figure 4.9) ont la même allure. Dans la zone proche de la paroi supérieure, où les grandeurs ont la même valeur que sur la face d'entrée,

les courbes se superposent à la solution analytique et l'erreur tend vers 0 (figure 4.10). Dans la zone de détente, l'erreur est faible. Au niveau des ondes de Mach amont et aval, l'erreur devient plus importante. Enfin, dans la zone près de la paroi solide, l'erreur est élevée.

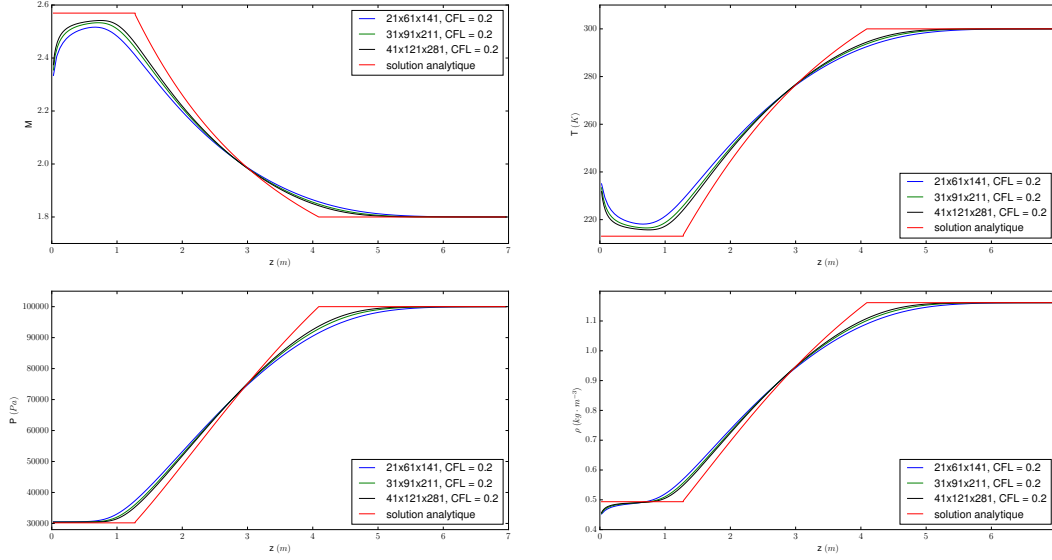


Figure 4.9 Comparaison des résultats de la détente de Prandtl-Meyer pour différentes dimensions de maillage. Les courbes présentées correspondent aux valeurs du nombre de Mach, de la température, de la pression et de la masse volumique observées dans le plan de sortie.

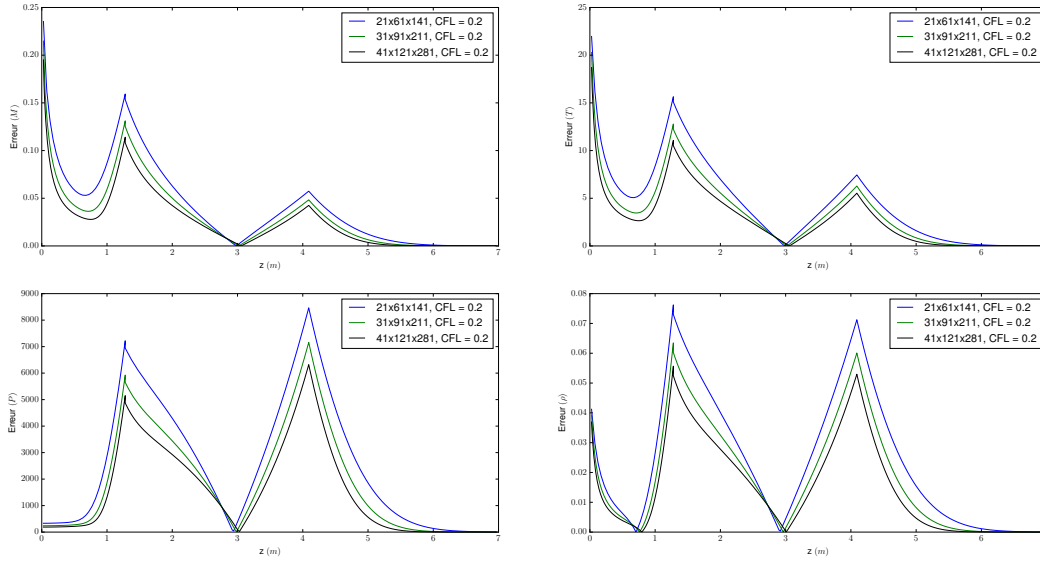


Figure 4.10 Erreur observée pour différentes dimensions de maillage. Les courbes présentées correspondent aux valeurs du nombre de Mach, de la température, de la pression et de la masse volumique observées dans le plan de sortie.

La diminution de la taille des mailles permet d'obtenir une précision plus élevée sur l'ensemble des points. Le gain se fait surtout au niveau des ondes de Mach amont et aval, le début et la fin de la zone de détente sont mieux simulés. La solution approche davantage le plateau entre la paroi solide et la zone de détente lorsque la taille de maille diminue, le gain à ce niveau est intéressant. L'erreur reste importante dans la zone proche de la paroi, la diminution globale de la taille des mailles a un faible impact sur les résultats obtenus dans cette zone. Ainsi, la diminution de la taille globale des mailles permet d'avoir une meilleure précision pour les points à l'intérieur du domaine. Pour les points proches de la paroi solide, pour lesquelles l'influence de la singularité est importante, le gain est moindre. Pour pouvoir gagner en précision dans cette zone, il peut être intéressant d'envisager un raffinement local du maillage. Le type de raffinement utilisé est de type cosinus, tel que présenté dans la partie 3.3. Les résultats obtenus sont détaillés sur les figures 4.11 et 4.12.

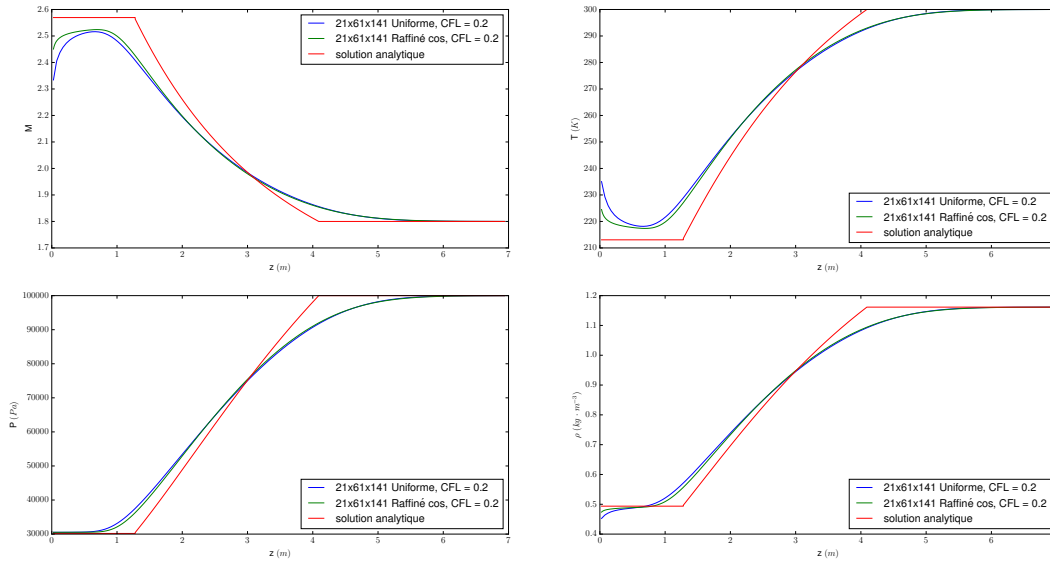


Figure 4.11 Comparaison des résultats avec ou sans raffinement local pour la détente de Prandtl-Meyer

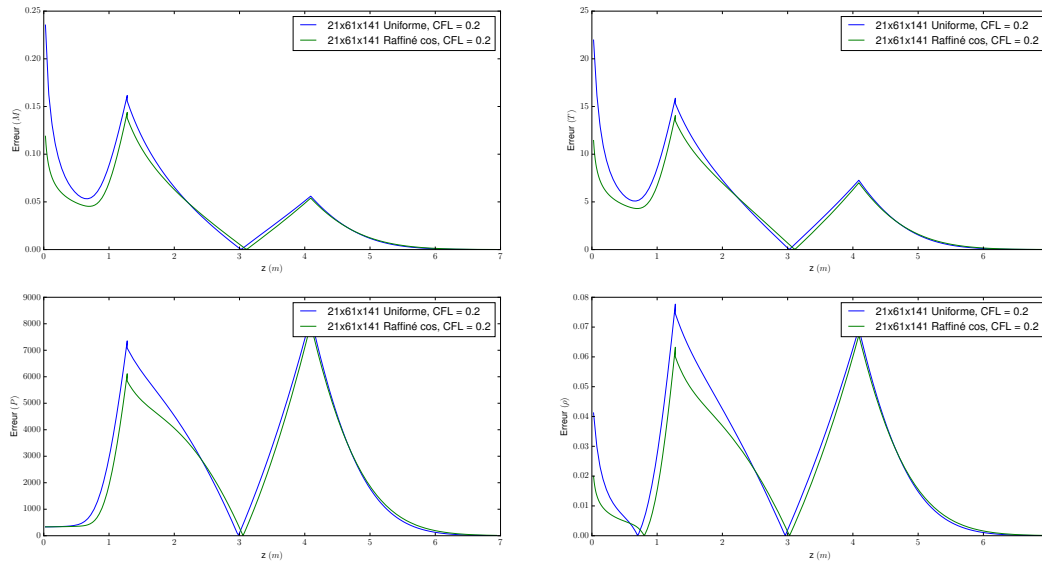


Figure 4.12 Erreur observée pour différents types de raffinement local pour la détente de Prandtl-Meyer

La précision dans la zone éloignée de la paroi solide, où les mailles sont plus grandes que pour un maillage uniforme, est très faiblement impactée par le raffinement local. En revanche, pour la zone proche de la paroi, le gain en précision est important. Pour un nombre de maille identique, le raffinement local permet d'augmenter la précision générale de la solution et diminue fortement l'impact de la singularité sur les résultats. L'inconvénient majeur de ce type de maillage est la lenteur de convergence.

Pour essayer de réduire davantage l'impact de la singularité, la position du coin est décalée de quelques mailles. On n'observe pas de changement significatif sur la précision des résultats. La convergence des résultats se fait dans un temps identique, le décalage n'a pas d'influence notable sur la convergence des résultats. Ainsi, pour la modélisation géométrique choisie, la position de la singularité sur la face inférieure n'a pas réellement d'impact sur la simulation.

4.2.3 Écoulements convergents

Le cas étudié se produit lorsque deux écoulements supersoniques de directions différentes se rencontrent, par exemple au niveau d'un coin. La géométrie de l'écoulement est présentée figure 4.13.

Le détail de la solution analytique se trouve en annexe.

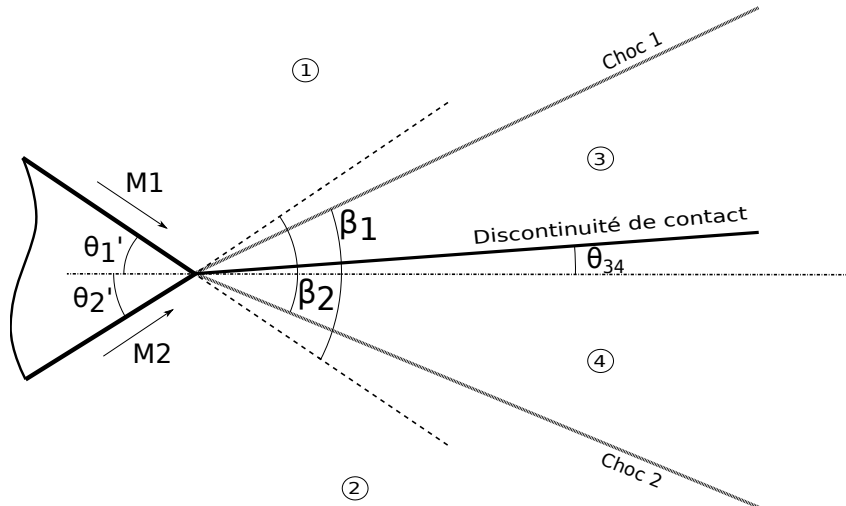


Figure 4.13 Écoulements convergents

La modélisation géométrique impose les mêmes contraintes que la détente de Prandtl-Meyer. Ce cas a été simulé pour les écoulements multi-espèces dans le logiciel MC3 avec un maillage non structuré [36], ce qui permettait de modéliser l'écoulement en amont du point anguleux. Comme pour la détente de Prandtl-Meyer, la géométrie doit être adaptée pour pouvoir être simulée avec un maillage cartésien. L'implémentation des conditions aux limites est détaillée à la figure 4.14.

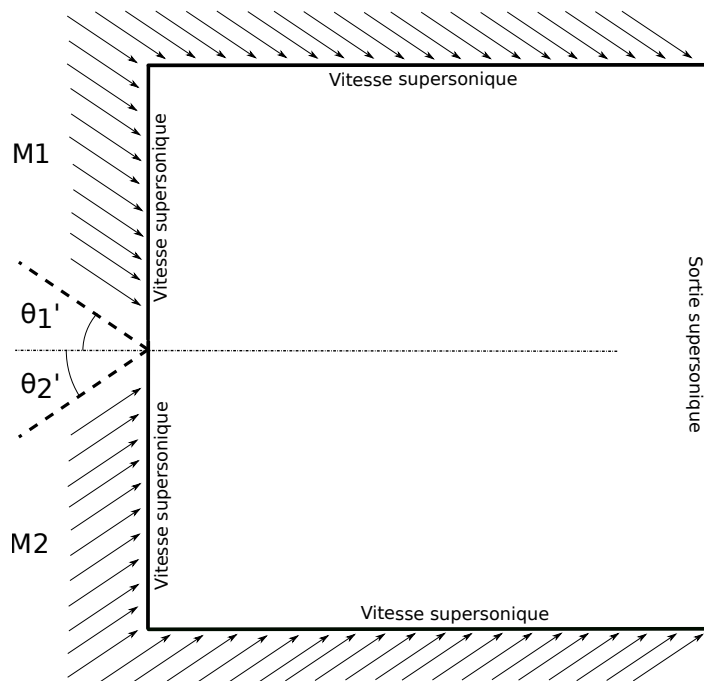


Figure 4.14 Écoulements convergents - Conditions aux limites

Résultats

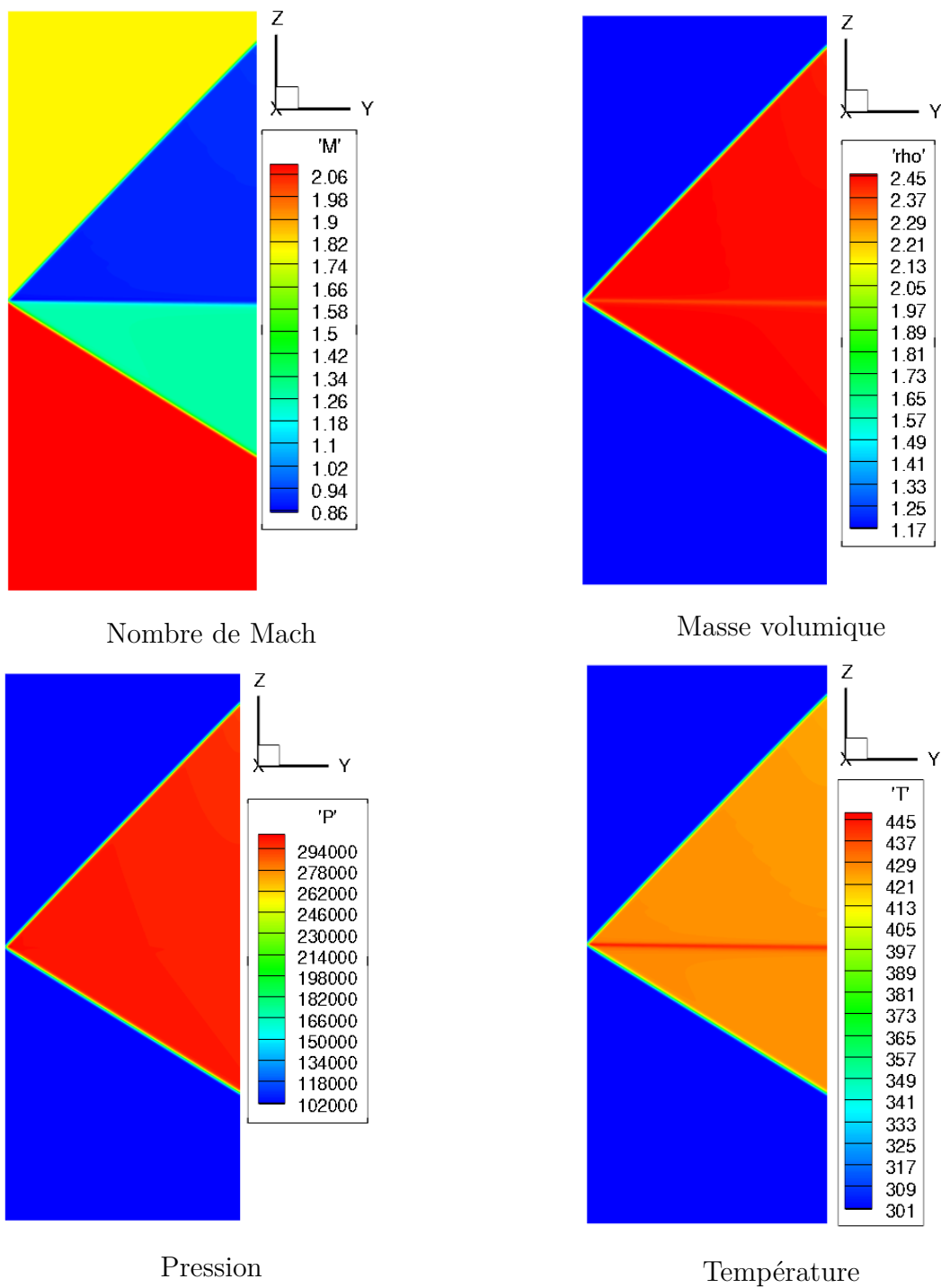


Figure 4.15 Isocontours pour le cas de l'écoulement convergent, pour le maillage 6x241x561

Les isocontours illustrés sur la figure 4.15 permettent d'observer de manière qualitative les résultats obtenus. Tout d'abord, les chocs sont bien simulés, les valeurs obtenues correspondent globalement aux valeurs obtenues par la théorie. Il existe cependant une zone proche de la discontinuité de contact où les résultats s'éloignent de la solution analytique. Pour la pression, qui doit être la même dans toute la zone se situant entre les chocs, les écarts de pression sont à peine observables, la simulation est donc bonne pour cette grandeur. Théoriquement, la transition entre les deux zones de nombre de Mach différents entre les chocs est parfaite et se fait de manière discontinue, les résultats de simulation montrent une zone très peu étendue, qui se rapproche de la discontinuité réelle.

Pour la masse volumique et la température, il apparaît une zone située autour de la discontinuité de contact où la simulation produit des résultats s'éloignant de la solution théorique.

Le tracé des résultats dans le plan de sortie permet de mieux visualiser et de quantifier l'erreur au niveau de la zone de discontinuité de contact.

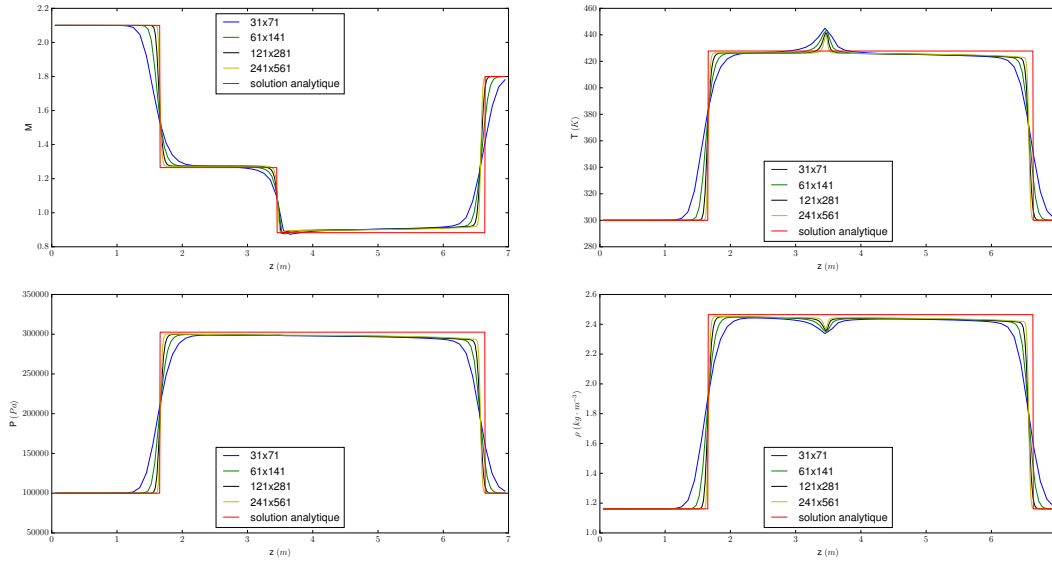


Figure 4.16 Résultats pour le cas de l'écoulement convergent. Les simulations sont réalisées avec 2100, 8400, 33600 et 134400 mailles et les profils de nombre de Mach, de température, de pression et de masse volumique sont évalués dans le plan de sortie.

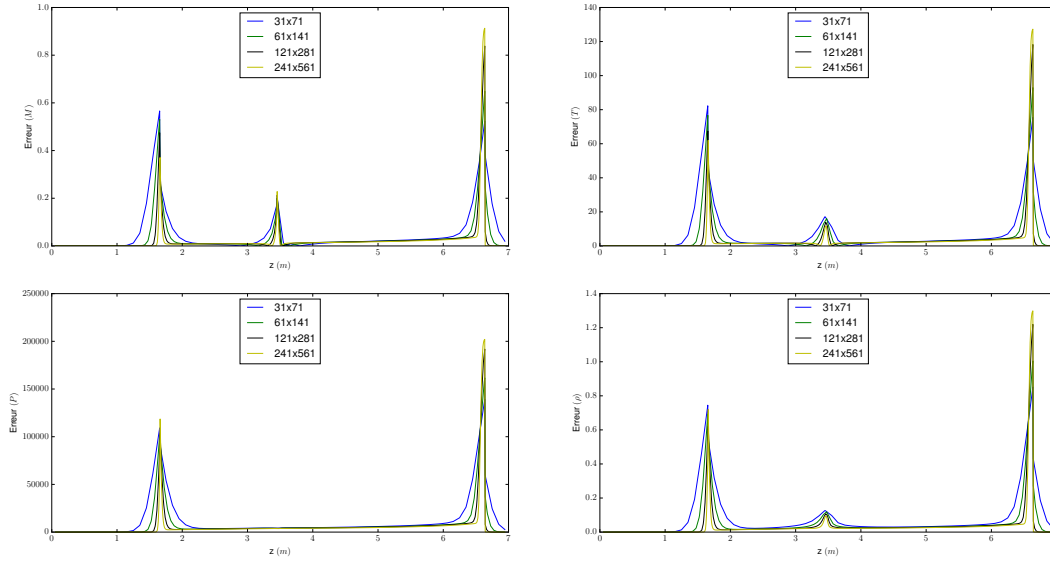


Figure 4.17 Erreur observée pour le cas de l'écoulement convergent. Les simulations sont réalisées avec 2100, 8400, 33600 et 134400 mailles et les erreurs pour le nombre de Mach, la température, la pression et la masse volumique sont évaluées dans le plan de sortie.

Les résultats obtenus pour différentes tailles de maillages sont tracés à la figure 4.16. L'erreur calculée est visible sur la figure 4.17. La position des chocs est obtenue par simulation avec une bonne précision. Il existe cependant un écart entre la solution théorique et les résultats obtenus. Les zones de valeurs constantes sont moins bien simulées que pour les cas de tube à choc ou de détente de Prandtl-Meyer, un écart de quelques pourcents est observable.

Un pic est visible sur les courbes au niveau de la discontinuité de contact, qui n'est pas présent sur la solution analytique. La simulation réalisée par [36] ne présente pas cette anomalie ce qui laisse supposer que les résultats obtenus sont impactés par la modélisation géométrique choisie. En effet cette anomalie émane directement du point anguleux : le fait de modéliser le coin de manière non physique peut impacter les résultats. On touche là à une limite du code cartésien sans traitement particulier des frontières solides.

4.3 Vérification des termes énergétiques, cas d'un transfert thermique simple

Pour ce cas, seules les conditions aux limites thermiques sont appliquées. La vitesse est nulle pour les conditions aux limites et les conditions initiales. L'objectif de ce cas test est de simplement vérifier la bonne obtention du profil de température linéaire. Pour accélérer la

convergence, une conductivité thermique élevée est imposée. Ce cas est testé dans les trois directions de l'espace, et le profil linéaire est bien observé (figure 4.18), ce qui permet de vérifier la bonne implémentation des termes de diffusion thermique.

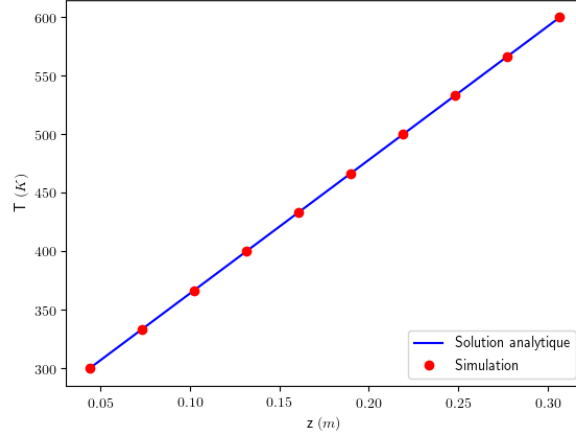


Figure 4.18 Comparaison du profil de température pour le transfert thermique simple (interpolé aux nœuds)

4.4 Vérification des termes diffusifs

Dans cette partie, des cas test sont réalisés afin de vérifier le code en prenant en compte les termes visqueux et termes de transfert thermique.

4.4.1 Couche limite sur plaque plane

Le cas d'un écoulement parallèle à une plaque plane est étudié. Cet écoulement entraîne l'apparition d'une couche limite. Le nombre de Reynolds vaut approximativement 8×10^5 .

Tableau 4.10 Conditions initiales pour l'écoulement sur une plaque plane

Grandeur	Valeur
u_{ini}	0
v_{ini}	60.0 m s^{-1}
w_{ini}	0
P_{ini}	100000 Pa
T_{ini}	300 K
ρ_{ini}	P_{ini}/RT_{ini}

Tableau 4.11 Maillage et domaine

Grandeur	Valeur
n_x	4
n_y	101
n_z	101
L_x	0.1 m
L_y	0.35052 m
L_z	0.03 m
Position non glissement	0.05 m

Tableau 4.12 Conditions d'entrée

Grandeur	Valeur
M	0,2
T_0	300 K
P_0	1000000 Pa
$\mathbf{e}_{dir}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix}$

Tableau 4.13 Conditions de sortie

Grandeur	Valeur
P	97250.0 Pa

Les conditions aux limites imposées sont une condition d'entrée où un nombre de Mach subsonique est imposé, orienté dans la direction $\mathbf{e}_{dir}$. L'écoulement est physiquement plan, une condition de périodicité est imposée selon l'axe $\mathbf{e}_x$. La face supérieure ainsi que le plan de sortie sont à une pression fixée. Sur la face inférieure, une condition de non-glissement est imposée. Afin de permettre le développement de l'écoulement en amont de la plaque, une condition de paroi non visqueuse est imposée dans la zone d'entrée. Les conditions aux limites sont illustrées sur la figure 4.19.

La simulation d'une couche limite nécessite une grande précision au niveau de la discrétisation. Le maillage utilisé est raffiné au niveau de la paroi où la condition de non-glissement est imposée, et un raffinement supplémentaire est réalisé dans la zone de formation de la couche limite. Le détail du maillage est illustré sur la figure 4.20, la formule de génération est de la forme tangente hyperbolique détaillée dans la partie 3.3.

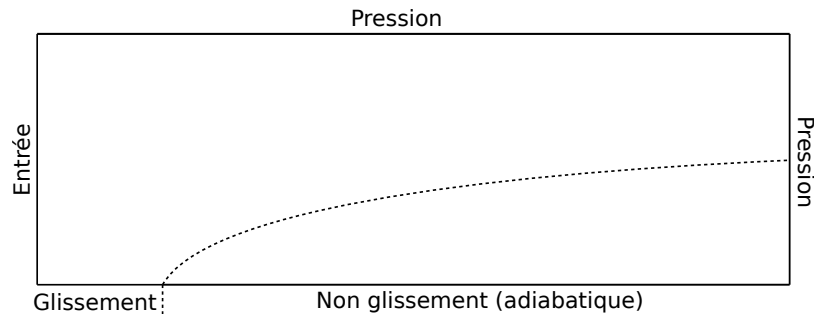


Figure 4.19 Conditions aux limites pour la couche limite sur plaque plane

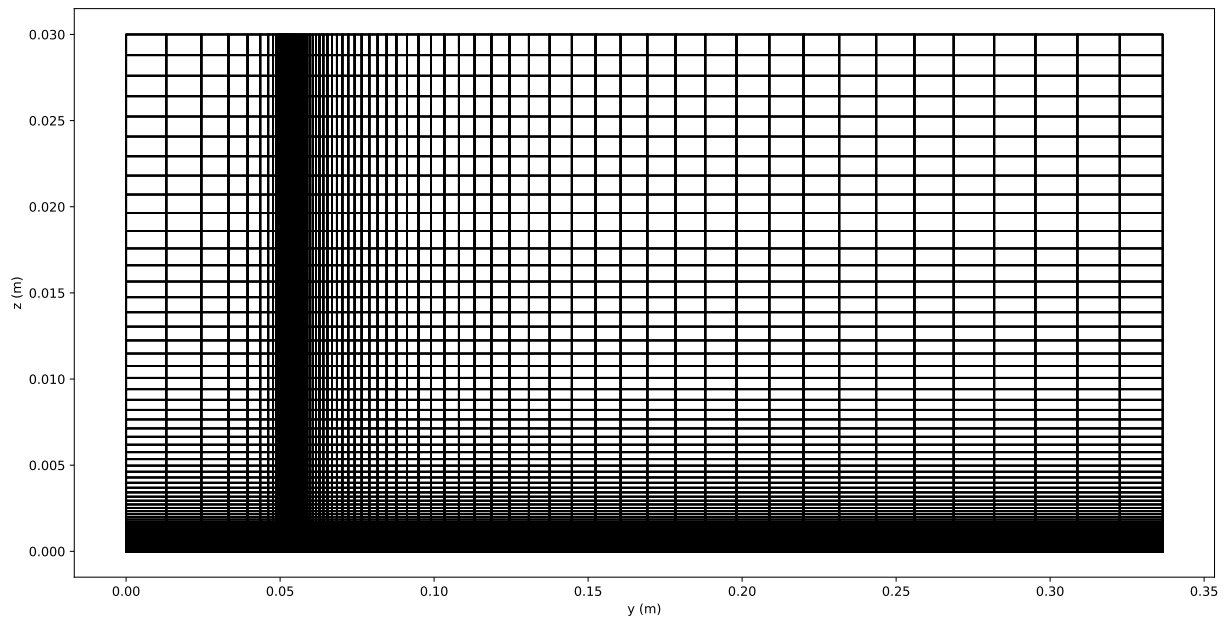


Figure 4.20 Détail du maillage utilisé pour l'écoulement de couche limite sur plaque plane avec un raffinement en tangente hyperbolique dans les deux directions d'intérêt

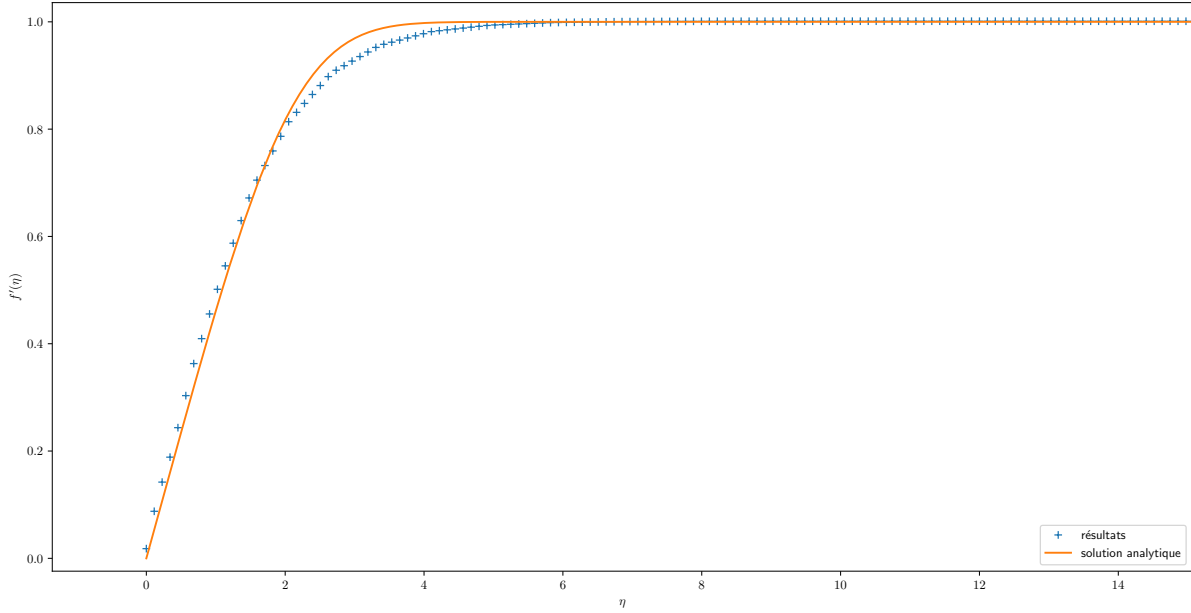


Figure 4.21 Résultats de simulation de la couche limite, pour un maillage 4x101x101, raffiné en tangente hyperbolique

Afin de comparer plusieurs solutions, notamment la solution développée par Blasius, les grandeurs adimensionnées sont utilisées. Ces grandeurs sont définies avec la transformation de Howarth,

$$\eta = \int_0^z \frac{\rho}{\rho_\infty} dz \sqrt{\frac{\rho_\infty v}{2\mu_\infty x}} \quad (4.4)$$

$$f'(\eta) = \frac{v}{V_\infty} \quad (4.5)$$

Les résultats de simulation sont visibles figure 4.21. Ils montrent une bonne simulation de l'écoulement de couche limite, les solutions simulées et théoriques sont très proches. La zone proche de la fin de la couche limite est cependant moins bien simulée, mais la solution simulée reste proche de la théorique.

Pour des nombres de Mach élevés, la modélisation par un gaz réel est importante, en effet ce sont les effets liés à l'augmentation de la température au niveau de la paroi adiabatique qui ont la plus forte influence sur la solution [37].

4.4.2 Marche descendante

Un écoulement en conduite plane rencontre une marche descendante. Ce cas permet de vérifier l'aspect multidimensionnel du code.

Le domaine est subdivisé en deux zones, une zone d'entrée qui permet à l'écoulement d'être pleinement développé lorsqu'il rencontre la marche, et une zone en aval de la marche dans laquelle les phénomènes de recirculation sont observés.

Une condition de débit est imposée en entrée, avec les valeurs du débit et de la température de stagnation choisies pour avoir un nombre de Mach de 0,3 (écoulement quasi-compressible). Une pression est imposée sur la face de sortie. Une condition de périodicité est imposée dans la direction perpendiculaire au plan de l'écoulement.

La jonction entre les zones se fait par une méthode similaire à la condition de périodicité, les valeurs d'une zone est imposée sur la cellule virtuelle correspondante, et une fonction assure la détermination des cellules adjacentes. La taille de la zone amont est le résultat d'un compromis entre le besoin d'avoir une longueur la plus longue possible pour obtenir un écoulement pleinement développé, et le besoin de limiter la longueur de la zone pour ne pas trop augmenter le nombre de mailles, étant donné que le maillage est uniforme pour ce cas. Les observations montrent un écoulement parallèle à l'axe principal de l'écoulement dans la zone amont, et une vitesse près de la paroi qui tend vers zéro, ce qui est une indication du bon développement de l'écoulement en amont avant la rencontre avec la zone de la marche. Vers la fin de la zone amont, avant la marche, l'écoulement commence à changer de direction, ce qui montre l'utilité de la zone de développement.

Le détail des conditions aux limites est visible sur la figure 4.22.

Le nombre de Reynolds vaut 800, ce qui correspond à un écoulement laminaire.

Tableau 4.14 Paramètres du domaine

Zone	Zone amont	Zone aval
L_x	1.0	15.0
L_y	0.5	1.0
L_z	0.0454545	0.0454545

Tableau 4.15 Paramètres du maillage

Zone	Zone amont	Zone aval
n_x	67	991
n_y	34	67
n_z	4	4



Figure 4.22 Conditions aux limites pour le cas de la marche descendante

Seule la zone en aval de la marche est présentée sur la figure 4.23.

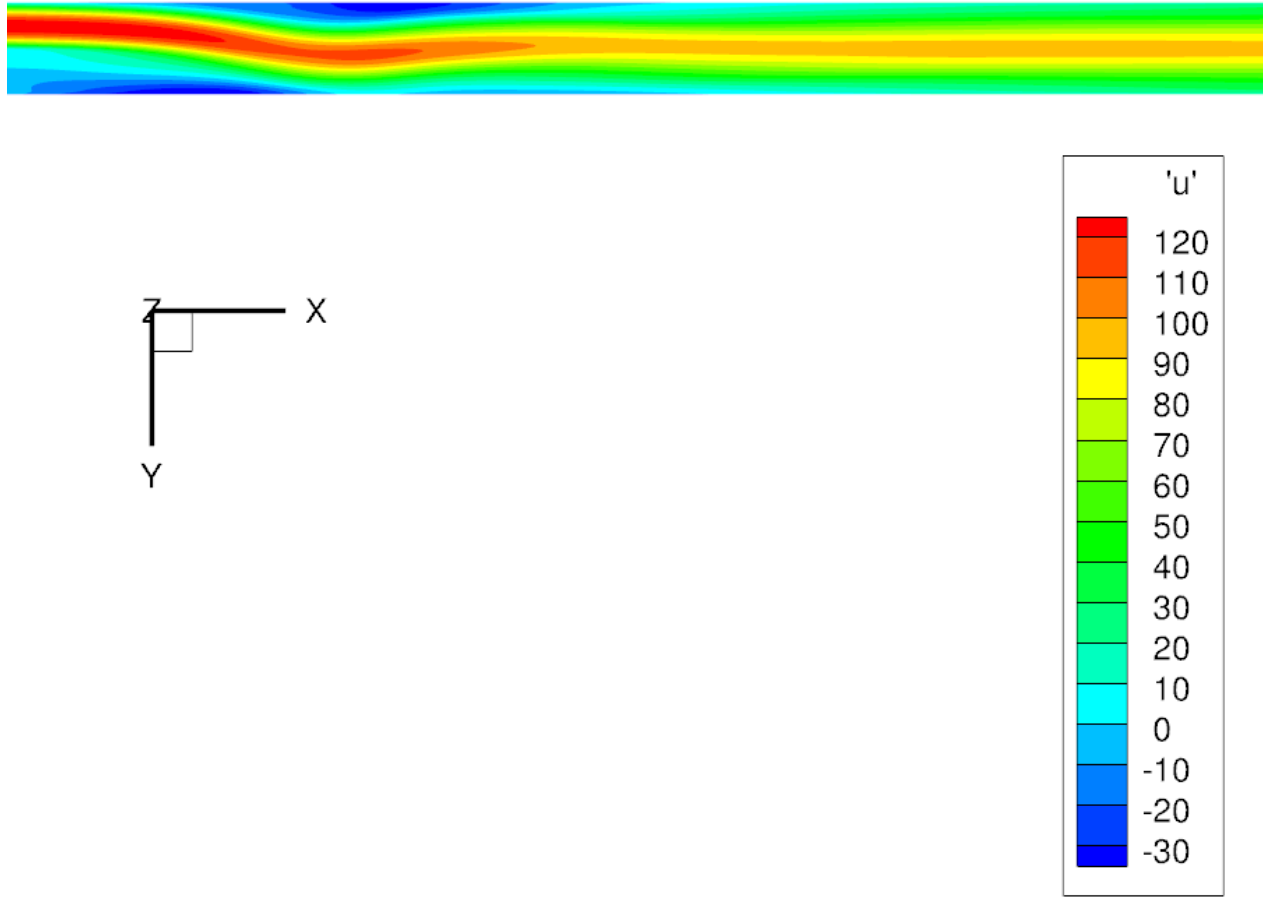


Figure 4.23 Résultats de simulation pour la marche descendante (196020 mailles), pour la vitesse suivant l'axe principal de l'écoulement

Des zones de recirculation sont observées sur la figure 4.23. Les contours de vitesses sont similaires à ceux observés expérimentalement. Une comparaison qualitative peut être réalisée, les contours sont similaires aux résultats expérimentaux, notamment ceux étudiés par [38].

En utilisant les notations de [38], la longueur de recirculation mesurée est $\frac{x}{S} = 7,1$ pour la fin de la première zone de recirculation, ce qui est proche de la valeur expérimentale mesurée par [38], qui est $\frac{x}{S} = 7,6$. La longueur mesurée pour le début de la deuxième zone de recirculation est $\frac{x}{S} = 5,6$, ce qui est très proche de la valeur expérimentale $\frac{x}{S} = 5,5$ pour $Re = 800$.

Le détail des tracés pour les mesures des longueurs de recirculation est donné figure 4.24, la

longueur des segments présentée est mesurée, et la variable adimensionnelle $\frac{x}{S}$ est calculée (avec $S = 0.5$ m). La figure montre qu'il est difficile de déterminer avec précision la longueur des zones de recirculation, le début et la fin des zones sont mesurés avec une forte incertitude. Les valeurs sont donc comparées en prenant en compte ces fortes incertitudes de mesures. Même avec une incertitude de 0.5 sur la mesure de $\frac{x}{S}$, les résultats de simulation restent proches des résultats expérimentaux.

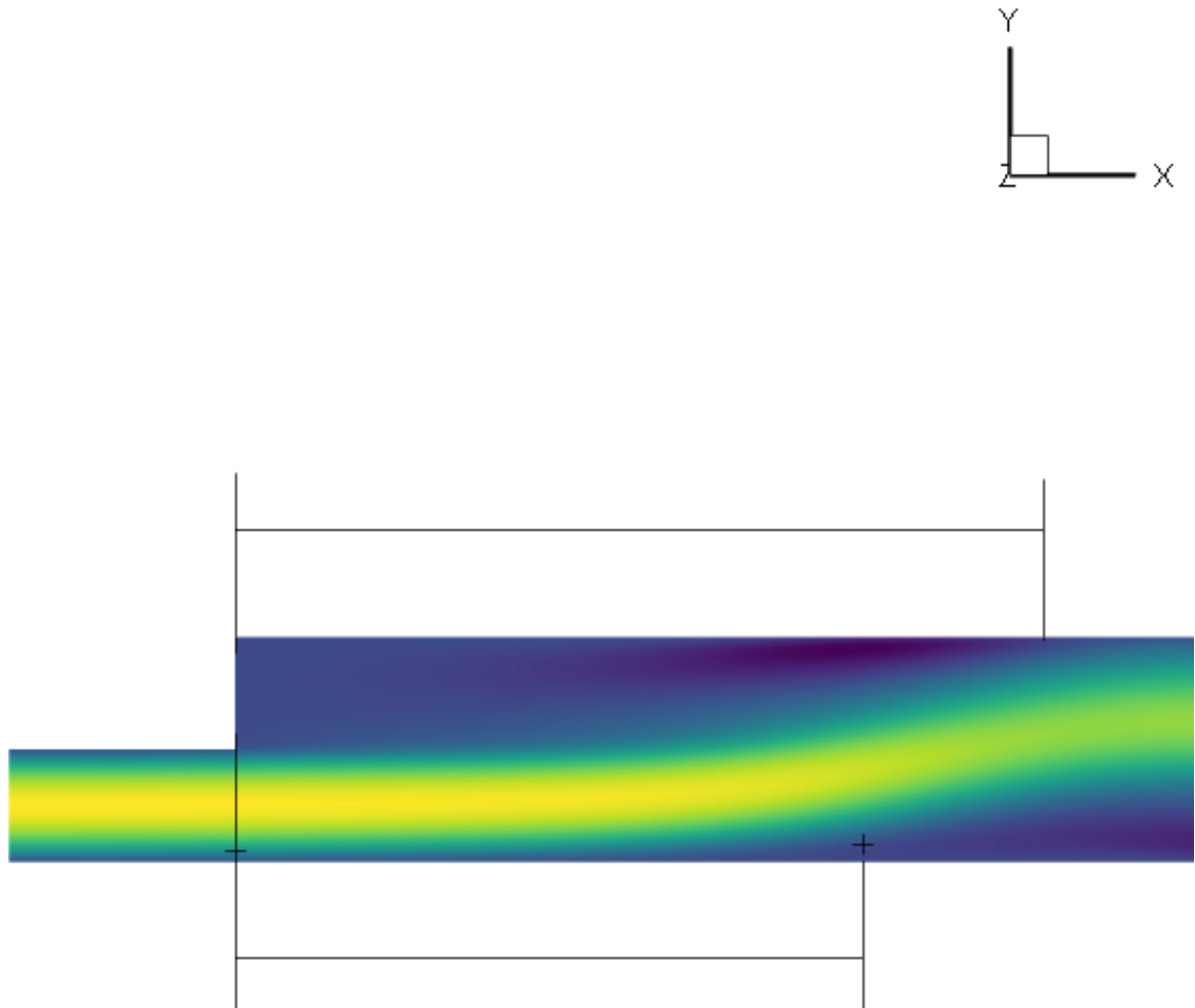


Figure 4.24 Mesure des longueurs de recirculation, les segments horizontaux représentent les longueurs de recirculation retenues

Les observations montrent que le programme est capable de réaliser une simulation correcte pour un écoulement complexe et multidimensionnel. Cependant, les incertitudes liées à la

mesure des longueurs ne permettent pas d’avoir des résultats précis. Aussi une validation plus approfondie requiert plus de simulation en faisant varier le nombre de Reynolds.

4.5 Conclusion de la validation

Les résultats de validation des termes convectifs montrent que le programme permet de simuler des écoulements compressibles avec une bonne précision, aussi bien en régime stationnaire qu’en régime transitoire. Les termes liés aux transfert thermique ont été implémentés avec succès. Enfin, les termes diffusifs liés aux phénomènes de viscosité ont pu être validés sur des cas classiques.

La réalisation des cas test dans plusieurs directions permet, aux vues de la formulation des modèles, de considérer que la validation des cas test présentés, qui sont physiquement en deux dimensions, permet de valider l’aspect tridimensionnel du code.

CHAPITRE 5 CONCLUSION

Ce chapitre fait la synthèse des travaux présentés précédemment et présente des pistes d'amélioration pour les futurs projets.

5.1 Synthèse des travaux

Les modèles physiques ont été présentés, et l'implémentation numérique a été détaillée. L'implémentation sous la forme d'un programme réalisé en C++ a permis de simuler des cas test de validation qui ont permis de s'assurer de la véracité des modèles numériques et de la justesse de l'implémentation.

Le principal objectif de ce projet était de réaliser un programme de simulation des écoulements compressibles et visqueux en trois dimensions, cet objectif a été atteint. L'approche en trois dimensions ouvre de nouvelles perspectives de simulation, une précision supplémentaire peut être apportées pour des géométries qui ne sont pas axi-symétriques. Les résultats de simulation montrent que le programme permet de faire une bonne approximation des écoulements visqueux compressibles, y compris en régime transitoire.

Ce projet de recherche permet donc de poser les bases d'un développement futur, mais le programme demeure limité pour une utilisation en l'état pour une simulation directe des disjoncteurs.

5.2 Limitations de la solution proposée

L'approche présentée dans ce mémoire présente de fortes limitations si elle est appliquée telle quelle pour une simulation des disjoncteurs à haute-tension en fonctionnement réel.

Tout d'abord l'approche par la méthode des volumes finis classique sur un maillage structuré de type hexahédrique rectangulaire ne permet pas de modéliser la géométrie complexe des disjoncteurs, les cas sont actuellement limités aux domaines rectangulaires, ou à une modélisation géométrique très peu précise.

Les simulations présentent un temps de convergence très long lorsqu'il s'agit de simuler des cas proches de l'état stationnaire, en effet le schéma convectif utilisé est performant pour les écoulements à nombre de Mach élevé, mais est limité lorsque les écoulements sont faiblement compressibles.

Les schémas numériques utilisés pour la discrétisation temporelle et la discrétisation des

termes diffusifs sont d'ordre faible, ce qui a un impact sur la convergence des résultats.

Enfin l'implémentation de la méthode soulève des problèmes d'ordre informatique spécifiques aux calculs haute performance, certaines méthodes ont été appliquées mais l'optimisation du programme peut encore être améliorée.

5.3 Améliorations futures

La principale amélioration possible est l'intégration d'un modèle de gaz réels, ce qui permettra de simuler les écoulements dans les conditions de température des disjoncteurs à haute-tension.

D'autres améliorations peuvent être proposées :

- La gestion des géométries complexes est à mettre en place. La prise en compte de la géométrie pourrait se faire par une approche de type frontières immergées. Cette méthode permettrait de conserver le maillage cartésien, en augmentant fortement la précision au niveau des frontières.
- Des techniques permettant d'améliorer la vitesse de convergence telles que l'utilisation de grilles multiples, l'utilisation d'un pas de temps local permettrait d'accélérer la convergence pour les cas stationnaires.
- La précision et la vitesse de convergence pourrait être améliorée soit par l'utilisation de schémas numériques d'ordre plus élevé pour le calcul des flux diffusifs soit par l'utilisation d'un schéma temporel d'ordre plus élevés pour augmenter la précision pour les écoulements instationnaires. Le passage vers des schémas d'ordre élevé nécessiterait cependant une refonte de la formulation, notamment au niveau de la reconstruction des grandeurs aux faces, par exemple par l'application de la méthode de WENO.

RÉFÉRENCES

- [1] G. Pernaumat, “Une approche multi-physiques et multi-échelles pour l’amélioration de l’efficacité de la modélisation et de la simulation des disjoncteurs haute-tension,” thèse de doctorat, Dép. de génie mécanique, École Polytechnique de Montréal, Montréal, QC, 2017.
- [2] P. Robin-Jouan, K. Bousoltane, Y. Kieffel, J.-Y. Trépanier, R. Camarero, S. Arabi et G. Pernaumat, “Analysis of Last Development Results for High Voltage Circuit-breakers Using New G3 Gas,” *Plasma Physics and Technology Journal*, vol. 4, p. 157–160, janv. 2017.
- [3] “Governing Equations of Fluid Dynamics,” Berlin, Heidelberg.
- [4] E. F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- [5] R. E. Meyer, *Introduction to Mathematical Fluid Dynamics*. Dover Publications, 2010.
- [6] X. D. ZHANG, J.-Y. TRÉPANIER et R. CAMARERO, “Modelling and Computation of Arc-Flow Interaction in Circuit-Breakers,” *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, vol. 2, n°. 1, p. 41–64, janv. 1994.
- [7] W. Wang, M. Rong, Y. Wu et J. D. Yan, “Fundamental properties of high-temperature SF6 mixed with CO2 as a replacement for SF6 in high-voltage circuit breakers,” *Journal of Physics D : Applied Physics*, vol. 47, n°. 25, p. 255201, mai 2014.
- [8] Y. Wu, C. Wang, H. Sun, A. B. Murphy, M. Rong, F. Yang, Z. Chen, C. Niu et X. Wang, “Properties of C4f7n–CO2 thermal plasmas : thermodynamic properties, transport coefficients and emission coefficients,” *Journal of Physics D : Applied Physics*, vol. 51, n°. 15, p. 155206, mars 2018.
- [9] A. Gleizes, “Thermodynamic and Electrical Properties of SF6-N2 Thermal Plasmas,” dans *Gaseous Dielectrics VIII*, L. G. Christophorou et J. K. Olthoff, édit. Boston, MA : Springer US, 1998, p. 169–179.
- [10] G. Buresti, “A note on stokes’ hypothesis,” *Acta Mechanica*, vol. 226, 10 2015.
- [11] W. Sutherland, “LII. *The viscosity of gases and molecular force*,” *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 36, n°. 223, p. 507–531, déc. 1893.
- [12] H. K. Versteeg et W. Malalasekera, *An Introduction to Computational Fluid Dynamics : The Finite Volume Method*. Pearson Education Limited, 2007.

- [13] J. H. Ferziger et M. Perić, *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2002.
- [14] J. Blazek, *Computational Fluid Dynamics : Principles and Applications*, 1^{er} éd. Baden-Daettwil, Switzerland : Elsevier, 2001.
- [15] D. J. Mavriplis, “Chapter 7 - Mesh generation and adaptivity for complex geometries and flows,” dans *Handbook of Computational Fluid Mechanics*, R. Peyret, édit. London : Academic Press, janv. 1996, p. 417–459.
- [16] Y. Scheiffer, “Comparaison de résolutions elliptiques entre la méthode des frontières immergées et la méthode des volumes finis,” Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, déc. 2018.
- [17] M. Vinokur, “On one-dimensional stretching functions for finite-difference calculations,” *Journal of Computational Physics*, vol. 50, n^o. 2, p. 215–234, mai 1983. [En ligne]. Disponible : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999183900657>
- [18] V. P. et Y. Kallinderis, “A 3d Finite-Volume Scheme for the Euler Equations on Adaptive Tetrahedral Grids,” *J. Comput. Phys.*, vol. 113, n^o. 2, p. 249–267, août 1994.
- [19] P. L. Roe, “Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes,” *Journal of Computational Physics*, vol. 43, n^o. 2, p. 357–372, oct. 1981.
- [20] P. L. Roe et J. Pike, “Efficient Construction and Utilisation of Approximate Riemann Solutions,” dans *Proc. Of the Sixth Int’L. Symposium on Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, VI*. Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands : North-Holland Publishing Co., 1985, p. 499–518, event-place : Versailles, France.
- [21] J. L. Steger et R. F. Warming, “Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods,” *Journal of Computational Physics*, vol. 40, n^o. 2, p. 263–293, avr. 1981.
- [22] K. Xu et K. H. Prendergast, “Numerical navier-stokes solutions from gas kinetic theory,” *Journal of Computational Physics*, vol. 114, n^o. 1, p. 9–17, sept. 1994.
- [23] A. Harten, “High resolution schemes for hyperbolic conservation laws,” *Journal of Computational Physics*, vol. 49, n^o. 3, p. 357–393, mars 1983.
- [24] M. Pelanti, L. Quartapelle et L. Vigevano, “A review of entropy fixes as applied to Roe’s linearization,” p. 46.
- [25] Y. Shen, G. Zha et X. Chen, “High Order Conservative Differencing for Viscous Terms and the Application to Vortex-Induced Vibration Flows,” p. 20.
- [26] P. Birken, *Numerical Methods for the Unsteady Compressible Navier-Stokes Equations*, janv. 2012.

- [27] B. Fornberg, "Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids," *Mathematics of Computation*, vol. 51, n°. 184, p. 699, oct. 1988.
- [28] K. J. Badcock, "A partially implicit method for simulating viscous aerofoil flows," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 19, n°. 3, p. 259–267, 1994.
- [29] A. Jameson, W. Schmidt et E. Turkel, *Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge Kutta time stepping schemes*, 1981.
- [30] K. E. Atkinson, *An introduction to numerical analysis*, 2^e éd. New York : Wiley, 1989.
- [31] R. C. Swanson, E. Turkel et J. A. White, "An effective multigrid method for high-speed flows," *Communications in Applied Numerical Methods*, vol. 8, n°. 9, p. 671–681, sept. 1992.
- [32] Y. Kallinderis, "A 3-D finite-volume method for the Navier-Stokes equations with adaptive hybrid grids," *Applied Numerical Mathematics*, vol. 20, n°. 4, p. 387–406, avr. 1996.
- [33] A. Rizzi et B. Müller, "Comparison of Euler and Navier-Stokes solutions for vortex flow over a delta wing," *The Aeronautical Journal*, vol. 92, n°. 914, p. 145–153, avr. 1988.
- [34] A. Loseille et V. Menier, "Multi-scale mesh adaptation for viscous flows," dans *7th AIAA Theoretical Fluid Mechanics Conference*. Atlanta, GA : American Institute of Aeronautics and Astronautics, juin 2014. [En ligne]. Disponible : <http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2014-2925>
- [35] G. A. Sod, "A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws," *Journal of Computational Physics*, vol. 27, n°. 1, p. 1–31, avr. 1978.
- [36] S. Arabi, J.-Y. Trépanier et R. Camarero, "A simple extension of Roe's scheme for multi-component real gas flows," *Journal of Computational Physics*, vol. 388, p. 178–194, juill. 2019.
- [37] H. Schlichting et K. Gersten, *Boundary-Layer Theory*, 9^e éd. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2017.
- [38] B. F. Armaly, D. F., P. J. C. F. et S. B., "Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 127.
- [39] G. Degrez, C. H. Boccadoro et J. F. Wendt, "The interaction of an oblique shock wave with a laminar boundary layer revisited. an experimental and numerical study," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 177, p. 247–263, 1987.
- [40] J. D. Anderson, *Modern Compressible Flow : With Historical Perspective*. McGraw-Hill Education, 2009.

- [41] D. Chae, C. Kim et O.-H. Rho, “Development of an improved gas-kinetic bgk scheme for inviscid and viscous flows,” *Journal of Computational Physics*, vol. 158.
- [42] “Laminar Flow Theory. By P. A. LAGERSTROM. Princeton University Press, 1996. 268 pp. ISBN 0 691 02598 3.” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 382, p. 374–378, mars 1999.
- [43] Howarth Leslie et Taylor Geoffrey Ingram, “Concerning the effect of compressibility on lam inar boundary layers and their separation,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 194, n°. 1036, p. 16–42, juill. 1948.

ANNEXE A DÉMONSTRATIONS

Condition de débit imposé

On souhaite imposer le débit massique $\dot{m}_m$ avec la direction $\mathbf{e}_m = [e_{1m} \ e_{2m} \ e_{3m}]^T$. La température T_{0m} est aussi imposée. La pression p_m est soit imposée (écoulement supersonique), soit déterminée à partir de la pression dans le domaine (écoulement subsonique), et dans ce cas $p_m = p_G$.

Le débit qui traverse la face vaut

$$\dot{m}_m = \rho_m \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{n}_m A \quad (\text{A.1})$$

où $\mathbf{v}_m = \|\mathbf{v}_m\| \mathbf{e}_m$ est le vecteur vitesse de l'écoulement, $\mathbf{n}_m$ est le vecteur normal de la face et A est l'aire de la face. Donc

$$\rho_m \|\mathbf{v}_m\| \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{n}_m = \frac{\dot{m}_m}{A} \quad (\text{A.2})$$

Pour un écoulement stationnaire la première loi de la thermodynamique s'écrit

$$h_{0m} = h_m + \frac{\mathbf{v}_m^2}{2} \quad (\text{A.3})$$

Pour un gaz caloriquement parfait

$$T_{0m} = T_m + \frac{\mathbf{v}_m^2}{2c_p} \quad (\text{A.4})$$

et

$$p_m = \rho_m R T_m \quad (\text{A.5})$$

Donc

$$\rho_m = \frac{p_m}{R \left(T_{0m} - \frac{\mathbf{v}_m^2}{2c_p} \right)} \quad (\text{A.6})$$

En injectant dans A.2,

$$\frac{p_m}{R \left(T_{0m} - \frac{\mathbf{v}_m^2}{2c_p} \right)} \|\mathbf{v}_m\| \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{n}_m = \frac{\dot{m}_m}{A} \quad (\text{A.7})$$

et donc

$$\frac{1}{2c_p}\mathbf{v}_m^2 + \frac{p_m A}{R\dot{m}_m}\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{n}_m \|\mathbf{v}_m\| - T_{0_m} = 0 \quad (\text{A.8})$$

La norme de la vitesse s'obtient comme solution de l'équation A.8.

$$\Delta = \frac{p_m^2 A^2}{R^2 \dot{m}_m^2} (\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{n}_m)^2 + 2 \frac{T_{0_w}}{c_p} \quad (\text{A.9})$$

Comme $\Delta > \frac{p_m^2 A^2}{R^2 \dot{m}_m^2} (\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{n}_m)^2$ car $2 \frac{T_{0_w}}{c_p} > 0$, la racine positive de A.8 est :

$$\|\mathbf{v}_m\| = c_p \left(\frac{-p_m A}{R\dot{m}_m} + \sqrt{\Delta} \right) \quad (\text{A.10})$$

Le vecteur des variables conservatives peut alors être calculé,

$$\begin{aligned} u_m &= \|\mathbf{v}_m\| e_{1_m} \\ v_m &= \|\mathbf{v}_m\| e_{2_m} \\ w_m &= \|\mathbf{v}_m\| e_{3_m} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

La température à la face est calculée

$$T_m = T_{0_m} - \frac{(u_m^2 + v_m^2 + w_m^2)}{2c_p} \quad (\text{A.12})$$

Et les deux dernières composantes sont calculées

$$\begin{aligned} \rho_m &= \frac{p_m}{RT_m} \\ E_m &= c_v T_m + \frac{(u_m^2 + v_m^2 + w_m^2)}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

ANNEXE B SOLUTIONS ANALYTIQUES

Détente de Prandtl-Meyer

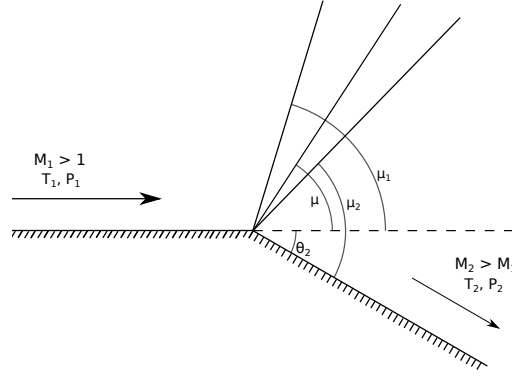


Figure B.1 Détente de Prandtl-Meyer

On fait appel à la fonction de Prandtl-Meyer ν , qui a pour définition en gaz parfait [40] :

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M^2-1)} - \tan^{-1} \sqrt{M^2-1} \quad (\text{B.1})$$

Soit θ_1 l'angle de déflexion, la fonction de Prandtl-Mayer permet de lier les nombres de Mach à l'entrée et à la sortie par la relation :

$$\theta_2 = \nu(M_2) - \nu(M_1) \quad (\text{B.2})$$

Le nombre de Mach dans l'écoulement en amont est connu, la relation permet de trouver le nombre de Mach en aval. Une fois que le nombre de Mach en aval a été déterminé, les relations isentropiques permettent de trouver la pression et la température.

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2} \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (\text{B.4})$$

L'angle de Mach est déterminé à partir du nombre de Mach.

$$\mu_1 = \arcsin \left(\frac{1}{M_1} \right) \quad (\text{B.5})$$

$$\mu_2 = \arcsin \left(\frac{1}{M_2} \right) \quad (\text{B.6})$$

Une fois les caractéristiques en amont et en aval calculées, on cherche à connaître les caractéristiques de l'écoulement au sein de la région d'expansion. Pour tout θ dans l'intervalle $[\theta_1, \theta_2]$, au sein de la région d'expansion on a

$$\nu(M) = \theta + \nu(M_1) \quad (\text{B.7})$$

En résolvant l'équation B.7 on trouve M . À partir des relations isentropiques on peut calculer P , T et ρ . À partir de la définition de l'angle de Mach, on trouve μ . Cela nous permet de remonter à l'angle entre l'onde de Mach et la paroi aval, et donc de pouvoir tracer les solutions analytiques dans tout l'espace.

Le code ci-dessous est utilisé pour générer la solution analytique. L'intervalle $[\theta_1, \theta_2]$ est subdivisé en plusieurs points et la méthode précédente est appliquée pour déterminer toutes les grandeurs.

Écoulements convergents

La solution analytique est exposée dans [36].

Couche limite

L'écoulement de couche limite est modélisé en prenant en compte l'aspect compressible de l'écoulement. Les équations présentées par [37] permettent de calculer la solution analytique. Cette solution fait appel aux théories exposées par [41], [42] et [43].