



**Titre:** Commande robuste autoséquentée par synthèse  $H^\infty$  structurée :  
Application à la dynamique longitudinale d'un drone à corps  
Title: inclinable

**Auteur:** Olivier Gougeon  
Author:

**Date:** 2019

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Gougeon, O. (2019). Commande robuste autoséquentée par synthèse  $H^\infty$   
Citation: structurée : Application à la dynamique longitudinale d'un drone à corps  
inclinable [Mémoire de maîtrise, Polytechnique Montréal]. PolyPublie.  
<https://publications.polymtl.ca/4046/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/4046/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** David Saussié  
Advisors:

**Programme:** génie électrique  
Program:

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**

affiliée à l'Université de Montréal

**Commande robuste autoséquentée par synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée : Application à la dynamique longitudinale d'un drone à corps inclinable**

**OLIVIER GOUGEON**

Département de génie électrique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*  
Génie aérospatial

Août 2019

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**

affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

**Commande robuste autoséquencée par synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée : Application à la dynamique longitudinale d'un drone à corps inclinable**

présenté par **Olivier GOUGEON**

en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

**Richard GOURDEAU**, président

**David SAUSSIÉ**, membre et directeur de recherche

**Léandro Ribeiro LUSTOSA**, membre

## DÉDICACE

*"En recuerdo de ti  
Mi muy querida España  
Mi tierra de escapada  
Mi fuente de  
inspiración"*

*"La primera vez que te vi No  
sabía que algún día Escribiría  
nuestra historia Entre las  
líneas de este guion"*

*"Me enseñaste que no importa el  
destino Siempre que haya un camino  
Gracias a ti"*

*"Hoy sé que no hay  
bienvenidas Sin sus inevitables  
despedidas Nunca me olvidaré  
de ti"*

—LB

## REMERCIEMENTS

Mes toutes premières gratitudes vont à mon directeur de maîtrise, David Saussié, qui supervise mes travaux de recherche depuis déjà quatre années, m'ayant initié à cet univers à même ma dernière année de baccalauréat. Son encadrement régulier, ses révisions sans failles et son soutien y sont pour beaucoup dans l'aboutissement de mon projet de recherche. Je lui dois également à lui – et ses collègues-professeurs de la section Automatique & Systèmes – ma passion pour l'automatique appliquée aux systèmes aérospatiaux qui s'est développée pendant mon parcours aux cycles supérieurs à Polytechnique Montréal. Je souhaite également remercier François Defaÿ et Joël Bordeneuve-Guibé du laboratoire DCAS de l'ISAE-SUPAERO qui m'ont encadré et fait bénéficier de leur expertise en drones convertibles pendant mon séjour de recherche en France à l'hiver 2018.

Je suis particulièrement reconnaissant au jury, composé de Richard Gourdeau et Leandro Ribeiro Lustosa, d'avoir accepté de lire mon mémoire et de participer à sa soutenance. Je remercie spécialement ce dernier et Hugo Lhachemi qui se sont impliqués personnellement dans mon projet en partageant avec moi leur expertise respective en modélisation et commande de systèmes dynamiques hautement non linéaires. Leur soutien sans fin via des correspondances électroniques m'a permis à tous coups de surmonter les obstacles techniques rencontrés pendant l'exécution de mon projet.

Les résultats présentés dans cet ouvrage ont été rendus possibles grâce aux bourses des organismes subventionnaires suivants : Fonds de recherche du Québec – Nature et technologies (FRQNT), Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG), Mitacs, Campus France, Fondation Arbour, CMC Électronique Inc. ainsi que Fondation et alumni de Polytechnique Montréal. Je suis infiniment reconnaissant envers ces organismes boursiers m'ayant soutenu financièrement et permis de me concentrer pleinement sur mon projet de recherche pendant mon cheminement universitaire.

Sur une note au teint amical maintenant, je désire d'abord exprimer ma profonde reconnaissance à André et Aïssa, deux amis rencontrés dans le laboratoire MRASL au sein duquel j'ai effectué ma maîtrise, qui sont chers à mes yeux et qui m'ont toujours soutenu à la fois dans et hors ce milieu de recherche. De même, je remercie tous ses membres qui ont contribué à en faire un environnement de travail jovial pendant mon passage : Tien, Carlos, Doug, Catherine, Justin, Jérémie, les Mathieu<sup>3</sup>, Arnaud, Florian et Sylvain ; *merci*. Pareillement, je suis reconnaissant envers les étudiants internationaux espagnols que j'ai encadrés et côtoyés pendant mon passage à Polytechnique : vous avez participé à en faire un lieu d'études convi-

vial. J'adresse un merci spécial à Antonio et Dani pour votre charisme unique. J'ai également une pensée marquée pour mes amis toulousains rencontrés pendant mon passage à l'ISAE qui m'ont rapidement intégré à leur groupe et m'ont permis de profiter pleinement de mes trois mois passés en France. Je remercie également mes coéquipiers de soccer dont leur dévouement à ce sport d'équipe me motive constamment à me surpasser à la fois à l'intérieur et à l'extérieur du terrain. Enfin, mon tour d'amitié ne serait complet sans mentionner mon groupe d'amis du secondaire qui même après presque 10 années persiste d'être une source de bonheur continuelle dans ma vie quotidienne. Un *grand* merci à tous !

Je souhaite accorder une mention spéciale à ma famille – mon père François, ma mère Nathalie, mon frère Alexis et ma sœur Émilie – pour leur appui inaltérable dans mes vies universitaire et personnelle. Je vous exprime ma plus sincère reconnaissance. Je remercie également Petit BamBou, un ami virtuel dont les effets bien réels m'ont permis de conserver un esprit lucide pendant ces longues semaines de rédaction.

Je conclus ces remerciements en dédiant ce mémoire à l'Espagne, qui dans les dernières cinq années de ma vie y a occupé une place centrale en tant que terre de retraite et d'inspiration. La joie de vivre, la positivité et le laisser-faire de son peuple ont fini par s'imprégner en moi de manière à façonner l'espace entre les lignes de ce manuscrit et faire de moi une meilleure personne. Ultimement, sa culture m'a fait prendre conscience que le moyen est porteur d'un bien plus grand bagage que la fin en soi et que tout voyage mené à terme ne fait que mettre la table pour le suivant...

## RÉSUMÉ

Ce mémoire explore la conception d'un autopilote longitudinal pour le MAVION de l'ISAE-SUPAERO, un aéronef convertible à corps inclinable. Ce type d'appareil volant se situe à la croisée entre un avion possédant des composantes aérodynamiques optimales pour le vol à haute vitesse et un multicoptère possédant des composantes propulsives lui donnant ainsi une grande agilité en vol stationnaire. Un tel croisement donne lieu à une dynamique hautement non linéaire où la partie issue de l'avion est naturellement stable, tandis que celle venant du multicoptère est instable. Afin de bien modéliser l'interaction aérodynamique complexe entre ces deux dynamiques distinctes, on utilise une nouvelle méthode de modélisation, la  $\phi$ -théorie, qui n'introduit aucune singularité contrairement à la  $\pi$ -théorie classique de Buckingham.

La dualité présente dans le comportement dynamique d'un convertible requiert alors d'utiliser une solution de contrôle adéquate. Pour ce faire, on retient une architecture de commande classique consistant en un retour de sortie statique linéaire augmenté d'une action intégrale sur l'erreur de régulation. Pour pallier la grande non-linéarité du système dynamique, on séquence les gains du contrôleur en fonction d'une variable endogène du système. Cela génère un terme de couplage caché (TCC) associé à la variation locale des gains qui, lorsque mal géré, peut considérablement nuire aux performances de l'autopilote.

Deux options sont alors possibles pour synthétiser les gains à partir de modèles linéarisés sur l'ensemble du domaine de vol. La première méthode consiste à ignorer le TCC et d'utiliser n'importe quelle technique de synthèse linéaire unimodèle telle la synthèse LQR. Les gains obtenus sont alors interpolés à posteriori en fonction de la variable de séquençement. La seconde méthode propose plutôt d'incorporer explicitement la fonction de séquençement des gains à même l'étape de synthèse permettant alors de considérer l'effet du TCC. Cela nécessite alors d'utiliser une synthèse multimodèle telle la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée issue de la commande robuste. Celle-ci permet notamment d'effectuer une optimisation multiobjectif de plusieurs critères de performances appliqués sous la forme de gabarits fréquentiels. La synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  est résolue numériquement en utilisant la fonction `SYSTUNE` de MATLAB®. Tous les modèles linéarisés des synthèses LQR et  $\mathcal{H}_\infty$  respectent alors les performances prescrites.

Les performances de ces synthèses sont ensuite validées sur le modèle non linéaire pour différents scénarios de vol. L'analyse révèle que les performances du contrôleur LQR ne sont pas conservées sur le modèle non linéaire. En revanche, la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  ayant considéré le TCC performe significativement mieux. Ce gain en performance se fait néanmoins au prix d'un temps de résolution plus accru et d'une synthèse plus complexe à mettre en œuvre.

## ABSTRACT

This Master’s thesis explores the problem of designing a longitudinal autopilot for the ISAE-SUPAERO MAVION, a hybrid tilt-body aircraft. This aircraft is the combination of an airplane which has optimal aerodynamic components for high-speed flight and a multicopter which has variable speed propulsion components, giving it great agility in hovering flight. Such a combination leads to a highly nonlinear dynamic where the airplane aspect is naturally stable, while the multicopter aspect is unstable. In order to model the complex aerodynamic interaction between these two distinct dynamics, we use a novel modeling method, called  $\phi$ -theory, which does not introduce any singularity unlike Buckingham’s  $\pi$ -theory.

The duality that is present in the dynamic behaviour of a hybrid aircraft also requires the use of an appropriate control solution. For this purpose, we use a classic control architecture in aeronautics consisting of a linear static output feedback augmented with an integral term related to the control error. To compensate for the high nonlinearity of the dynamic system, the gains of the controller are scheduled in function of an endogenous variable of the system. This generates a hidden coupling term (HCT) associated with the local variation of the gains which, when poorly managed, can significantly impact the performance of the autopilot.

Two options are available for the synthesis of gains generated from models which are linearized over the entire flight envelope. The first method consists of ignoring the HCT, so that any single-model linear synthesis technique such as LQR synthesis can be used. Resulting gains are interpolated afterwards according to the scheduling variable. The second method proposes instead to explicitly incorporate the gain scheduling function directly into the synthesis step, allowing the impact of the HCT to be taken into account. This then requires the use of a multi-model synthesis such as the structured  $\mathcal{H}_\infty$  synthesis derived from robust control theory. It enables a multi-objective optimization of several performance criteria which are applied in the form of frequency templates. The  $\mathcal{H}_\infty$  synthesis is numerically solved using the `SYSTUNE` MATLAB<sup>®</sup> function. All linearized models of the LQR and  $\mathcal{H}_\infty$  syntheses thus meet the specified performance requirements.

Validation of these syntheses performance is done by running several simulations on the nonlinear model for different flight cases. The analysis shows that, for the LQR synthesis, the results are not replicated to the nonlinear model. In fact, the  $\mathcal{H}_\infty$  synthesis which considered the HCT performs significantly better than its counterpart. However, this increase in performance is achieved at the expense of a much longer numerical solving time and a more complex synthesis to implement.

## PRÉAMBULE

Le projet de recherche ayant mené à la rédaction de ce mémoire a été proposé par le professeur Saussié à l'automne 2016. À ce moment, l'idée était d'explorer différentes techniques de commandes pouvant être appliquées à un nouveau type de machine volante : le convertible. L'aéronef convertible est un appareil alliant à la fois les composantes principales de l'avion et du multicoptère. La dualité de ces systèmes donne lieu à un comportement hybride permettant à l'aéronef d'effectuer une *conversion* – d'où son appellation d'aéronef *convertible* – entre deux modes d'opération distincts : le vol d'avancement propre à l'avion et le vol stationnaire propre au multicoptère. Ce premier mode permet d'atteindre des vitesses de pointe, tandis que le second est surtout utilisé lors des phases de décollage et d'atterrissage.

Afin de se familiariser avec les aéronefs convertibles, il a été convenu d'entrée de jeu que le projet de maîtrise comporterait un séjour de recherche au sein d'un établissement spécialisé en la matière. À cet effet, pendant une durée de trois mois à l'hiver 2018, l'auteur de ce mémoire a séjourné à Toulouse en France afin d'intégrer l'équipe du Département de conception et conduite des véhicules aéronautiques et spatiaux (DCAS) à l'ISAE-SUPAERO. Le séjour a été supervisé par l'ingénieur-chercheur François Defaÿ et l'enseignant-chercheur Joël Bordeneuve-Guibé du DCAS. Concrètement, ce séjour a permis de rencontrer Leandro Ribeiro Lustosa et d'étudier attentivement le modèle d'aéronef convertible qu'il a développé pendant son doctorat à l'ISAE. Cette collaboration internationale s'est d'ailleurs poursuivie au retour de l'auteur à Montréal avec l'accueil de stagiaires venus de Toulouse.

Au fil des ans, le professeur Saussié a développé une grande expertise en commande robuste et plus particulièrement vis-à-vis l'utilisation de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  appliquée aux systèmes aéronautiques et spatiaux. De fait, il possède plusieurs publications scientifiques à son actif portant sur ce sujet qui ont été rédigées en collaboration avec les étudiants qu'il a encadrés aux cycles supérieurs : Vincent Dubanchet, Hugo Lhachemi, Tien Nguyen, Catherine Massé, Pierre Daligault, Pierre Lallet et Frédérick Laliberté. De fait, la possibilité d'obtenir un tel encadrement a poussé l'auteur de ce mémoire à collaborer avec Mme Massé afin de publier un article portant sur la commande robuste d'un multicoptère volant en présence de vent [1]. Cette publication a été présentée à l'*International Conference on Unmanned Aircraft Systems* (ICUAS) qui s'est tenue en juin 2018 à Dallas aux États-Unis. Par conséquent, cette expérience a donc naturellement guidé l'auteur de ce mémoire à retenir cette méthode dans son propre projet de recherche.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	vi
ABSTRACT . . . . .	vii
PRÉAMBULE . . . . .	viii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	ix
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xii
LISTE DES FIGURES . . . . .	xiii
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . .	xix
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xxi
CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 Contexte du projet de recherche . . . . .	1
1.2 Problématique étudiée . . . . .	2
1.3 Objectifs poursuivis . . . . .	4
1.4 Plan du mémoire . . . . .	6
CHAPITRE 2 FONDEMENTS THÉORIQUES ET REVUE DE LITTÉRATURE . . . . .	7
2.1 Modélisation de systèmes dynamiques . . . . .	7
2.1.1 Modélisation dynamique minimale d'un corps solide . . . . .	8
2.2 Méthodes de commandes pour systèmes non linéaires . . . . .	16
2.2.1 Méthodes de commandes pour un aéronef convertible . . . . .	20
2.2.2 Approche purement non linéaire . . . . .	21
2.2.3 Approche linéaire multimodèle . . . . .	23
2.3 Problématique du séquençement de contrôleurs . . . . .	31
2.4 Méthodologie retenue . . . . .	33
CHAPITRE 3 MODÉLISATION D'UN CONVERTIBLE À CORPS INCLINABLE . . . . .	35

3.1	Présentation du prototype étudié . . . . .	35
3.2	Aérodynamique classique de Buckingham : la $\pi$ -théorie . . . . .	38
3.3	Aérodynamique adaptée de Lustosa : la $\phi$ -théorie . . . . .	41
3.4	Efforts aérodynamiques complets du modèle de Lustosa . . . . .	43
3.5	Modèles d'état du convertible à corps inclinable . . . . .	45
3.5.1	Dynamique du corps solide à 6 DDL . . . . .	45
3.5.2	Dynamique des actionneurs : moteurs et élevons . . . . .	48
3.5.3	Dynamique complète du convertible . . . . .	50
CHAPITRE 4 ANALYSE DU MODÈLE DYNAMIQUE LONGITUDINAL . . . . .		51
4.1	Modèle d'état . . . . .	51
4.2	Saturations des actionneurs . . . . .	52
4.2.1	Moteurs . . . . .	53
4.2.2	Élevons . . . . .	53
4.3	Incertitudes paramétriques . . . . .	54
4.4	Équilibre statique du vol de croisière . . . . .	56
4.5	Linéarisation . . . . .	60
4.6	Commandabilité . . . . .	61
4.7	Dynamique naturelle : pôles et zéros invariants . . . . .	61
4.7.1	Pôles . . . . .	62
4.7.2	Zéros invariants . . . . .	63
4.7.3	Analyse de la dynamique naturelle . . . . .	64
CHAPITRE 5 CONCEPTION D'UN AUTOPILOTE LONGITUDINAL . . . . .		67
5.1	Architecture généralisée du contrôleur . . . . .	67
5.1.1	Architecture non linéaire . . . . .	68
5.1.2	Architecture à l'équilibre . . . . .	72
5.1.3	Architecture linéarisée . . . . .	73
5.2	Synthèses linéaires . . . . .	76
5.2.1	Synthèse optimale LQR . . . . .	79
5.2.2	Synthèse robuste $\mathcal{H}_\infty$ structurée . . . . .	83
5.3	Autopilote longitudinal pour un aéronef convertible à corps inclinable . . . . .	90
5.3.1	Cahier des charges : Autopilote longitudinal . . . . .	93
5.3.2	Architecture non linéaire : Autopilote longitudinal . . . . .	94
5.3.3	Architecture à l'équilibre : Autopilote longitudinal . . . . .	94
5.3.4	Architecture linéarisée : Autopilote longitudinal . . . . .	95
5.3.5	Synthèse optimale LQR : Autopilote longitudinal . . . . .	95

5.3.6	Synthèse robuste $\mathcal{H}_\infty$ structurée : Autopilote longitudinal . . . . .	98
5.4	Synthèses incertaines par retour d'état statique . . . . .	104
5.4.1	Analyse de la symétrie des transferts des gains par RES . . . . .	106
5.4.2	RES + LQR + PPP + NOM . . . . .	108
5.4.3	RES + $\mathcal{H}_\infty$ + PPP + INC . . . . .	114
5.4.4	RES + $\mathcal{H}_\infty$ + SMM + INC . . . . .	119
5.4.5	RES + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + INC . . . . .	123
5.4.6	Comparaison des synthèses LQR <i>vs</i> $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	127
5.5	Comparaisons de synthèses supplémentaires . . . . .	129
5.5.1	Comparaison des synthèses NOM <i>vs</i> INC . . . . .	130
5.5.2	Comparaison des synthèses RES <i>vs</i> RSS . . . . .	132
CHAPITRE 6	VALIDATION DU SYSTÈME DE COMMANDES DE VOL . . . . .	135
6.1	Simulations sur le modèle non linéaire des synthèses LQR <i>vs</i> $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	135
6.1.1	Parcours complet du domaine de vol des synthèses LQR <i>vs</i> $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	137
6.1.2	Suivi de références multiples en simultané des synthèses LQR <i>vs</i> $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	142
6.1.3	Résistance aux perturbations de vent des synthèses LQR <i>vs</i> $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	146
6.1.4	Comparaison des simulations LQR <i>vs</i> $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	150
6.2	Comparaisons de simulations supplémentaires . . . . .	151
6.2.1	Comparaison des simulations NOM <i>vs</i> INC . . . . .	151
6.2.2	Comparaison des simulations RES <i>vs</i> RSS . . . . .	153
CHAPITRE 7	CONCLUSION . . . . .	155
7.1	Synthèse et discussion des travaux . . . . .	155
7.2	Limitations et améliorations de la solution proposée . . . . .	157
7.3	Bilan du projet de recherche . . . . .	158
RÉFÉRENCES	. . . . .	159
ANNEXES	. . . . .	170

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1	États minimaux et nécessaires à la modélisation dynamique d'un corps solide . . . . .	9
Tableau 2.2	Solution retenue pour chaque élément de la problématique abordée dans le projet . . . . .	34
Tableau 5.1	Caractéristiques des deux méthodes comparées pour la conception de $\mathcal{C}$	78
Tableau 5.2	Valeur numérique nominale des paramètres du modèle d'état longitudinal	92
Tableau 5.3	Analogie entre les variables régulées et les actions PID . . . . .	96
Tableau 5.4	Gabarits fréquentiels utilisés dans les synthèses $\mathcal{H}_\infty$ structurées multi-modèles . . . . .	100
Tableau 5.5	Caractéristiques du matériel informatique utilisé dans le projet de recherche . . . . .	106
Tableau 5.6	Comparaison des synthèses LQR et $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	128
Tableau 5.7	Comparaison des synthèses NOM <i>vs</i> INC . . . . .	131
Tableau 5.8	Comparaison des synthèses RES <i>vs</i> RSS . . . . .	133
Tableau 6.1	Comparaison des simulations LQR <i>vs</i> $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	150
Tableau 6.2	Comparaison des simulations NOM <i>vs</i> INC . . . . .	152
Tableau 6.3	Comparaison des simulations RES <i>vs</i> RSS . . . . .	154
Tableau A.1	Année du premier vol de convertibles selon le type et l'époque . . . . .	174
Tableau B.1	Définition des différentes approches étudiées dans le problème de séquençement de contrôleurs . . . . .	195
Tableau B.2	Récapitulatif des résultats d'analyse du problème de séquençement de gains . . . . .	201
Tableau C.1	Référentiels utilisés afin de définir la dynamique d'un corps solide à 6 DDL . . . . .	209

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	MAVION en campagne de soufflerie afin de caractériser son aérodynamique [8] . . . . .	3
Figure 2.1	Forces et moments dans le repère objet d'un corps solide à 6 DDL . .	12
Figure 2.2	Problème de commande analysé en boucle fermée . . . . .	17
Figure 2.3	Problème de commande analysé en boucle ouverte . . . . .	18
Figure 2.4	Problème de commande analysé en boucle fermée sans estimateur . .	19
Figure 3.1	MAVION de l'ISAE [8] . . . . .	36
Figure 3.2	Dimensions du MAVION (mm) [8] . . . . .	36
Figure 3.3	Définition du sens des entrées commandables du MAVION [8] . . . .	37
Figure 4.1	Incertitudes paramétriques considérées dans la synthèse des contrôleurs	55
Figure 4.2	Courbes de l'équilibre longitudinal pour $\theta_e$ , $\omega_e$ et $\delta_e$ selon l'évolution de $v_{ne}$ . . . . .	59
Figure 4.3	Évolution des pôles et zéros invariants selon $v_{ne}$ de la dynamique naturelle de la famille de modèles longitudinaux incluant les jeux de paramètres nominal et incertains . . . . .	65
Figure 5.1	Architecture généralisée du contrôleur non linéaire $\mathcal{C}$ . . . . .	71
Figure 5.2	Architecture généralisée des contrôleurs linéarisés $\Delta\mathcal{C}_{k,\ell}$ . . . . .	76
Figure 5.3	Problème de commande généralisé dans le cadre de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ structurée multimodèle utilisant des gains autoséquencés [18] . . . . .	87
Figure 5.4	Parcours typique 2D du MAVION lors d'une mission complète . . . . .	90
Figure 5.5	Analyse de la symétrie des transferts des gains $\mathbf{K}_x = \Delta\mathbf{u}/\Delta\mathbf{x}$ et $\mathbf{K}_i = \Delta\mathbf{u}/\Delta\xi$ pour les synthèses par RES . . . . .	107
Figure 5.6	Gains de la synthèse RES + LQR + PPP + NOM . . . . .	109
Figure 5.7	Pôles en BF de la synthèse RES + LQR + PPP + NOM . . . . .	109
Figure 5.8	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{z}/\Delta\mathbf{r}$ de la synthèse RES + LQR + PPP + NOM	111
Figure 5.9	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{s}/\Delta\mathbf{r}$ de la synthèse RES + LQR + PPP + NOM	111
Figure 5.10	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{z}/\Delta\mathbf{w}$ de la synthèse RES + LQR + PPP + NOM	113
Figure 5.11	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{s}/\Delta\mathbf{w}$ de la synthèse RES + LQR + PPP + NOM	113
Figure 5.12	Évolution du gain $\gamma$ en fonction de $v_{ne}$ de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + PPP + INC . . . . .	114
Figure 5.13	Gains de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + PPP + INC . . . . .	116
Figure 5.14	Pôles en BF de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + PPP + INC . . . . .	116
Figure 5.15	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{z}/\Delta\mathbf{r}$ de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + PPP + INC	117

Figure 5.16	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{s}/\Delta\mathbf{r}$ de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + PPP + INC	117
Figure 5.17	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{z}/\Delta\mathbf{w}$ de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + PPP + INC	118
Figure 5.18	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{s}/\Delta\mathbf{w}$ de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + PPP + INC	118
Figure 5.19	Gains de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + SMM + INC . . . . .	120
Figure 5.20	Pôles en BF de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + SMM + INC . . . . .	120
Figure 5.21	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{z}/\Delta\mathbf{r}$ de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + SMM + INC	121
Figure 5.22	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{s}/\Delta\mathbf{r}$ de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + SMM + INC	121
Figure 5.23	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{z}/\Delta\mathbf{w}$ de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + SMM + INC	122
Figure 5.24	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{s}/\Delta\mathbf{w}$ de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + SMM + INC	122
Figure 5.25	Gains de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + INC . . . . .	124
Figure 5.26	Pôles en BF de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + INC . . . . .	124
Figure 5.27	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{z}/\Delta\mathbf{r}$ de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + INC	125
Figure 5.28	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{s}/\Delta\mathbf{r}$ de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + INC	125
Figure 5.29	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{z}/\Delta\mathbf{w}$ de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + INC	126
Figure 5.30	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{s}/\Delta\mathbf{w}$ de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + INC	126
Figure 5.31	Comparaison des gains des synthèses LQR <i>vs</i> $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	127
Figure 5.32	Comparaison des gains des synthèses NOM <i>vs</i> INC . . . . .	131
Figure 5.33	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{s}/\Delta\mathbf{w}$ de la synthèse RSS + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + NOM	132
Figure 6.1	Incertitudes paramétriques considérées dans les simulations de validation	136
Figure 6.2	Variables des synthèses LQR <i>vs</i> $\mathcal{H}_\infty$ pour le cas DOM + NOM . . . . .	139
Figure 6.3	Gains des synthèses LQR <i>vs</i> $\mathcal{H}_\infty$ pour le cas DOM + NOM . . . . .	139
Figure 6.4	Variables des synthèses LQR <i>vs</i> $\mathcal{H}_\infty$ pour le cas DOM + INC . . . . .	141
Figure 6.5	Gains des synthèses LQR <i>vs</i> $\mathcal{H}_\infty$ pour le cas DOM + INC . . . . .	141
Figure 6.6	Variables des synthèses LQR <i>vs</i> $\mathcal{H}_\infty$ pour le cas REF + NOM . . . . .	143
Figure 6.7	Gains des synthèses LQR <i>vs</i> $\mathcal{H}_\infty$ pour le cas REF + NOM . . . . .	143
Figure 6.8	Variables des synthèses LQR <i>vs</i> $\mathcal{H}_\infty$ pour le cas REF + INC . . . . .	145
Figure 6.9	Gains des synthèses LQR <i>vs</i> $\mathcal{H}_\infty$ pour le cas REF + INC . . . . .	145
Figure 6.10	Variables des synthèses LQR <i>vs</i> $\mathcal{H}_\infty$ pour le cas VEN + NOM . . . . .	147
Figure 6.11	Gains des synthèses LQR <i>vs</i> $\mathcal{H}_\infty$ pour le cas VEN + NOM . . . . .	147
Figure 6.12	Variables des synthèses LQR <i>vs</i> $\mathcal{H}_\infty$ pour le cas VEN + INC . . . . .	149
Figure 6.13	Gains des synthèses LQR <i>vs</i> $\mathcal{H}_\infty$ pour le cas VEN + INC . . . . .	149
Figure 6.14	Variables des synthèses NOM <i>vs</i> INC pour le cas REF + INC . . . . .	152
Figure 6.15	Variables des synthèses RES <i>vs</i> RSS pour le cas VEN + NOM . . . . .	154
Figure A.1	Phases de vol d'un aéronef convertible (sans vent) [87] . . . . .	173
Figure A.2	Convair XFY-1 Pogo [88] . . . . .	174
Figure A.3	Parrot Swing [89] . . . . .	174

Figure A.4	Kamov Ka-22 Vintokryl [90] . . . . .	176
Figure A.5	Amazon Prime Air [91] . . . . .	176
Figure A.6	LTV XC-142 [92] . . . . .	179
Figure A.7	NASA Greased Lightning 10 [93] . . . . .	179
Figure A.8	Hawker Siddeley Harrier [94] . . . . .	182
Figure A.9	LMC F-35 Lightning II [95] . . . . .	182
Figure A.10	Système de poussée vectorielle du F-35 [96] . . . . .	182
Figure A.11	Bell Boeing V-22 Osprey [97] . . . . .	184
Figure A.12	Ares V-Hawk X4 [98] . . . . .	184
Figure A.13	Boeing Phantom Swift [99] . . . . .	185
Figure A.14	Samad Aero. Starling Jet [100] . . . . .	185
Figure B.1	Grandeurs dynamiques d'une voiture en montée possédant 1 DDL . .	187
Figure B.2	Grandeurs dynamiques d'une voiture roulant sur une chaussée horizontale	190
Figure B.3	Réponses temporelles obtenues avec la variable de séquençement exo- gène $v_c$ . . . . .	196
Figure B.4	Réponses temporelles obtenues avec la variable de séquençement endo- gène $v$ . . . . .	198
Figure C.1	Référentiels utilisés afin de définir la dynamique d'un corps solide à 6 DDL . . . . .	209
Figure E.1	Définition du vecteur position du centre aérodynamique (CA) du MA- VION [9] . . . . .	226
Figure E.2	Définition des sections d'aile $S_k$ du MAVION [9] . . . . .	229
Figure E.3	Définition des sections d'aile mouillées $S_{m,k}$ du MAVION [9] . . . . .	230
Figure E.4	Définition des bras de levier du MAVION [9] . . . . .	232
Figure E.5	Polaire elliptique portance-résistance du MAVION pour une définition sans singularité des efforts aérodynamiques peu importe l'angle d'at- taque [8] . . . . .	235
Figure E.6	Modélisation des élevons comme une variation de cambrure du profil alaire du MAVION [8] . . . . .	235
Figure E.7	Illustration de la vitesse aérodynamique effective vue par le MAVION [8]	236
Figure F.1	Courbes d'équilibre du vol longitudinal pour $v_{ne}$ , $\omega_e$ et $\delta_e$ du MAVION [9]	246
Figure F.2	Comparaison à l'équilibre des vols stationnaire et d'avancement du MAVION . . . . .	246
Figure F.3	Grandeurs intervenant dans l'équilibre du virage coordonné du MAVION	247
Figure F.4	Courbes d'équilibre du virage coordonné pour $\phi_e$ et $\theta_e$ du MAVION [8]	253
Figure F.5	Courbes d'équilibre du virage coordonné pour $\omega_{1_e}$ et $\omega_{2_e}$ du MAVION [8]	253

Figure F.6	Courbes d'équilibre du virage coordonné pour $\delta_{1_e}$ et $\delta_{2_e}$ du MAVION [8]	253
Figure G.1	Gains de la synthèse RES + LQR + PPP + NOM . . . . .	261
Figure G.2	Pôles en BF de la synthèse RES + LQR + PPP + NOM . . . . .	261
Figure G.3	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{z}/\Delta\mathbf{r}$ de la synthèse RES + LQR + PPP + NOM	262
Figure G.4	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{s}/\Delta\mathbf{r}$ de la synthèse RES + LQR + PPP + NOM	262
Figure G.5	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{z}/\Delta\mathbf{w}$ de la synthèse RES + LQR + PPP + NOM	263
Figure G.6	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{s}/\Delta\mathbf{w}$ de la synthèse RES + LQR + PPP + NOM	263
Figure G.7	Gains de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + PPP + NOM . . . . .	264
Figure G.8	Pôles en BF de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + PPP + NOM . . . . .	264
Figure G.9	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{z}/\Delta\mathbf{r}$ de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + PPP + NOM	265
Figure G.10	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{s}/\Delta\mathbf{r}$ de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + PPP + NOM	265
Figure G.11	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{z}/\Delta\mathbf{w}$ de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + PPP + NOM	266
Figure G.12	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{s}/\Delta\mathbf{w}$ de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + PPP + NOM	266
Figure G.13	Gains de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + SMM + NOM . . . . .	267
Figure G.14	Pôles en BF de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + SMM + NOM . . . . .	267
Figure G.15	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{z}/\Delta\mathbf{r}$ de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + SMM + NOM	268
Figure G.16	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{s}/\Delta\mathbf{r}$ de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + SMM + NOM	268
Figure G.17	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{z}/\Delta\mathbf{w}$ de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + SMM + NOM	269
Figure G.18	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{s}/\Delta\mathbf{w}$ de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + SMM + NOM	269
Figure G.19	Gains de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + NOM . . . . .	270
Figure G.20	Pôles en BF de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + NOM . . . . .	270
Figure G.21	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{z}/\Delta\mathbf{r}$ de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + NOM	271
Figure G.22	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{s}/\Delta\mathbf{r}$ de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + NOM	271
Figure G.23	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{z}/\Delta\mathbf{w}$ de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + NOM	272
Figure G.24	Réponses temporelles $\Delta\mathbf{s}/\Delta\mathbf{w}$ de la synthèse RES + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + NOM	272
Figure G.25	Comparaison des gains des synthèses RES + NOM . . . . .	273
Figure G.26	Comparaison des gains des synthèses NOM vs INC . . . . .	273
Figure G.27	Variables des synthèses NOM vs INC pour le cas DOM + NOM . . . . .	275
Figure G.28	Gains des synthèses NOM vs INC pour le cas DOM + NOM . . . . .	275
Figure G.29	Variables des synthèses NOM vs INC pour le cas DOM + INC . . . . .	276
Figure G.30	Gains des synthèses NOM vs INC pour le cas DOM + INC . . . . .	276
Figure G.31	Variables des synthèses NOM vs INC pour le cas REF + NOM . . . . .	277
Figure G.32	Gains des synthèses NOM vs INC pour le cas REF + NOM . . . . .	277
Figure G.33	Variables des synthèses NOM vs INC pour le cas REF + INC . . . . .	278
Figure G.34	Gains des synthèses NOM vs INC pour le cas REF + INC . . . . .	278
Figure G.35	Variables des synthèses NOM vs INC pour le cas VEN + NOM . . . . .	279

Figure G.36	Gains des synthèses NOM <i>vs</i> INC pour le cas VEN + NOM . . . . .	279
Figure G.37	Variables des synthèses NOM <i>vs</i> INC pour le cas VEN + INC . . . . .	280
Figure G.38	Gains des synthèses NOM <i>vs</i> INC pour le cas VEN + INC . . . . .	280
Figure H.1	Analyse de la symétrie des transferts des gains $\mathbf{K}_y = \Delta \mathbf{u} / \Delta \mathbf{y}$ et $\mathbf{K}_i = \Delta \mathbf{u} / \Delta \xi$ pour les synthèses par RSS . . . . .	282
Figure H.2	Gains de la synthèse RSS + LQR + PPP + NOM . . . . .	283
Figure H.3	Pôles en BF de la synthèse RSS + LQR + PPP + NOM . . . . .	283
Figure H.4	Réponses temporelles $\Delta \mathbf{z} / \Delta \mathbf{r}$ de la synthèse RSS + LQR + PPP + NOM	284
Figure H.5	Réponses temporelles $\Delta \mathbf{s} / \Delta \mathbf{r}$ de la synthèse RSS + LQR + PPP + NOM	284
Figure H.6	Réponses temporelles $\Delta \mathbf{z} / \Delta \mathbf{w}$ de la synthèse RSS + LQR + PPP + NOM	285
Figure H.7	Réponses temporelles $\Delta \mathbf{s} / \Delta \mathbf{w}$ de la synthèse RSS + LQR + PPP + NOM	285
Figure H.8	Gains de la synthèse RSS + $\mathcal{H}_\infty$ + PPP + NOM . . . . .	286
Figure H.9	Pôles en BF de la synthèse RSS + $\mathcal{H}_\infty$ + PPP + NOM . . . . .	286
Figure H.10	Réponses temporelles $\Delta \mathbf{z} / \Delta \mathbf{r}$ de la synthèse RSS + $\mathcal{H}_\infty$ + PPP + NOM	287
Figure H.11	Réponses temporelles $\Delta \mathbf{s} / \Delta \mathbf{r}$ de la synthèse RSS + $\mathcal{H}_\infty$ + PPP + NOM	287
Figure H.12	Réponses temporelles $\Delta \mathbf{z} / \Delta \mathbf{w}$ de la synthèse RSS + $\mathcal{H}_\infty$ + PPP + NOM	288
Figure H.13	Réponses temporelles $\Delta \mathbf{s} / \Delta \mathbf{w}$ de la synthèse RSS + $\mathcal{H}_\infty$ + PPP + NOM	288
Figure H.14	Gains de la synthèse RSS + $\mathcal{H}_\infty$ + SMM + NOM . . . . .	289
Figure H.15	Pôles en BF de la synthèse RSS + $\mathcal{H}_\infty$ + SMM + NOM . . . . .	289
Figure H.16	Réponses temporelles $\Delta \mathbf{z} / \Delta \mathbf{r}$ de la synthèse RSS + $\mathcal{H}_\infty$ + SMM + NOM	290
Figure H.17	Réponses temporelles $\Delta \mathbf{s} / \Delta \mathbf{r}$ de la synthèse RSS + $\mathcal{H}_\infty$ + SMM + NOM	290
Figure H.18	Réponses temporelles $\Delta \mathbf{z} / \Delta \mathbf{w}$ de la synthèse RSS + $\mathcal{H}_\infty$ + SMM + NOM	291
Figure H.19	Réponses temporelles $\Delta \mathbf{s} / \Delta \mathbf{w}$ de la synthèse RSS + $\mathcal{H}_\infty$ + SMM + NOM	291
Figure H.20	Gains de la synthèse RSS + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + NOM . . . . .	292
Figure H.21	Pôles en BF de la synthèse RSS + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + NOM . . . . .	292
Figure H.22	Réponses temporelles $\Delta \mathbf{z} / \Delta \mathbf{r}$ de la synthèse RSS + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + NOM	293
Figure H.23	Réponses temporelles $\Delta \mathbf{s} / \Delta \mathbf{r}$ de la synthèse RSS + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + NOM	293
Figure H.24	Réponses temporelles $\Delta \mathbf{z} / \Delta \mathbf{w}$ de la synthèse RSS + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + NOM	294
Figure H.25	Réponses temporelles $\Delta \mathbf{s} / \Delta \mathbf{w}$ de la synthèse RSS + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + NOM	294
Figure H.26	Comparaison des gains des synthèses RSS + NOM . . . . .	295
Figure H.27	Variables des synthèses RSS + NOM pour le cas DOM + NOM . . . . .	296
Figure H.28	Gains des synthèses RSS + NOM pour le cas DOM + NOM . . . . .	296
Figure H.29	Variables des synthèses RSS + NOM pour le cas DOM + INC . . . . .	297
Figure H.30	Gains des synthèses RSS + NOM pour le cas DOM + INC . . . . .	297
Figure H.31	Variables des synthèses RSS + NOM pour le cas REF + NOM . . . . .	298
Figure H.32	Gains des synthèses RSS + NOM pour le cas REF + NOM . . . . .	298

Figure H.33	Variables des synthèses RSS + NOM pour le cas REF + INC . . . . .	299
Figure H.34	Gains des synthèses RSS + NOM pour le cas REF + INC . . . . .	299
Figure H.35	Variables des synthèses RSS + NOM pour le cas VEN + NOM . . . . .	300
Figure H.36	Gains des synthèses RSS + NOM pour le cas VEN + NOM . . . . .	300
Figure H.37	Variables des synthèses RSS + NOM pour le cas VEN + INC . . . . .	301
Figure H.38	Gains des synthèses RSS + NOM pour le cas VEN + INC . . . . .	301

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

1D	Une dimension
2D	Deux dimensions
3D	Trois dimensions
ADAV	Aéronef à décollage et atterrissage verticaux
AI	Aile inclinable
BF	Boucle fermée
BO	Boucle ouverte
CA	Centre aérodynamique
CED	Centre d'excellence sur les drones
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i>
CG	Centre de gravité
CI	Corps inclinable
CM	Centre de masse
CRSNG	Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada
DCAS	Département de conception et conduite des véhicules aéronautiques et spatiaux
DCM	<i>Direction Cosine Matrix</i>
DDL	Degré de liberté
DOM	Domaine
FRQNT	Fonds de recherche du Québec – Nature et technologies
FU	Fusion avion-multicoptère
GNC	Guidage, navigation et commande
HCT	<i>Hidden Coupling Term</i>
HY	Hybride
I	Intégral
ICUAS	<i>International Conference on Unmanned Aircraft Systems</i>
INC	Incertain
ISAE	Institut supérieur de l'aéronautique et de l'espace

LFT	<i>Linear Fractional Transformation</i>
LMC	<i>Lockheed Martin Corporation</i>
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i>
LPV	<i>Linear Parameter-Varying</i>
LQG	<i>Linear Quadratic Gaussian</i>
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
MEI	Ministère de l'Économie et de l'Innovation
MI	Moteur inclinable
MIMO	<i>Multiple Input Multiple Output</i>
MPC	<i>Model Predictive Control</i>
MRASL	<i>Mobile Robotics and Autonomous Systems Laboratory</i>
MSL	<i>Mean Sea Level</i>
NASA	<i>National Aeronautics and Space Administration</i>
NED	<i>North East Down</i>
NOM	Nominal
PD	Proportionnel et dérivé
PID	Proportionnel, intégral et dérivé
PPP	Point par point
PV	Poussée vectorielle
REF	Référence
RES	Retour d'état statique
RSS	Retour de sortie statique
SMC	<i>Sliding Mode Control</i>
SMM	Synthèse multimodèle
TCC	Terme de couplage caché
USD	<i>United States Dollar</i>
VEN	Vent
VTOL	<i>Vertical Takeoff and Landing</i>

**LISTE DES ANNEXES**

ANNEXE A	TYPES D'AÉRONEFS CONVERTIBLES . . . . .	170
ANNEXE B	EXEMPLE D'UNE VOITURE AVEC RÉGULATEUR DE VITESSE	186
ANNEXE C	RAPPELS MATHÉMATIQUES . . . . .	202
ANNEXE D	ÉQUIVALENCE DES THÉORIES $\Pi$ ET $\Phi$ . . . . .	219
ANNEXE E	DÉTAILS SUPPLÉMENTAIRES DE MODÉLISATION . . . . .	225
ANNEXE F	ANALYSES SUPPLÉMENTAIRES DU MODÈLE COMPLET . . .	238
ANNEXE G	RETOUR D'ÉTAT STATIQUE : NOMINAL <i>VS</i> INCERTAIN . . .	260
ANNEXE H	RETOUR DE SORTIE STATIQUE : SYNTHÈSES NOMINALES . .	281

## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

*Tout commencement a une fin...*

— Jean-Baptiste Monge

Les sections présentées dans ce chapitre d'introduction dressent un portrait d'ensemble afin que le lecteur comprenne adéquatement les sujets de recherche abordés dans ce mémoire et qu'il en saisisse correctement l'étendue. Plus précisément, on y présente le contexte associé au projet de recherche, la problématique qui est étudiée, les objectifs poursuivis dans le cadre de la recherche et le plan détaillé du mémoire montrant comment est orchestrée la division des étapes afin de résoudre la problématique énoncée.

### 1.1 Contexte du projet de recherche

Selon la prestigieuse banque américaine Morgan Stanley, l'industrie des véhicules volants en milieu urbain représenterait un marché pouvant atteindre une valeur entre 615 et 2 900 milliards USD d'ici l'an 2040 [2]. Ces estimations astronomiques sont principalement justifiées par l'intérêt grandissant des investisseurs issus de secteurs variés : transport, énergie, ressources naturelles, télécommunications, surveillance, sécurité, inspection, construction, etc. Toutefois, les analystes s'entendent pour dire que le marché le plus intéressant demeure celui du transport de marchandises et de personnes. En effet, *The Vertical Flight Society* publie régulièrement sur son blogue plusieurs articles démontrant l'intérêt toujours grandissant pour cette industrie : révélation au public d'un nouveau prototype d'aéronef, lancement d'une nouvelle compagnie dans l'industrie des taxis volants, création d'un nouveau consortium en transport autonome, réalisation avec succès d'un premier vol d'essai, tenue d'une énième conférence portant sur l'avenir de l'aviation urbaine, etc. [3].

Saisissant l'engouement autour de cette industrie émergente, le Gouvernement du Québec a inscrit noir sur blanc son grand intérêt pour l'industrie du drone dans sa nouvelle Stratégie québécoise de l'aérospatiale 2016-2026 [4]. De fait, le troisième objectif de ce document se lit comme suit : « Développer le secteur des drones et ses applications civiles ». Ces intentions se sont traduites par des investissements majeurs de la part du Gouvernement du Québec dans le Centre d'excellence sur les drones (CED) basé à Alma dans la région du Saguenay-Lac-Saint-Jean. D'ailleurs, le CED a récemment reçu une nouvelle subvention afin de lancer le projet Qualia qui consiste en la mise en place d'infrastructures extérieures complexes recréant divers scénarios rencontrés quotidiennement afin de valider les performances de drones [5].

Les nombreux investissements en temps et en argent dans cette industrie sont surtout justifiés par le grand potentiel de bénéfices qui y est rattaché. Non seulement le véhicule volant apporterait-il une solution afin de désengorger les systèmes routiers terrestres, mais son avènement permettrait de parcourir de plus grandes distances plus rapidement et surtout plus efficacement par rapport à un hélicoptère. De fait, l'utilisation d'aéronefs convertibles pouvant voler efficacement en mode avion permettrait de réduire considérablement la consommation d'énergie dans un contexte de transport en milieu urbain où le décollage et l'atterrissage verticaux sont nécessaires. De ce fait, leur utilisation permettrait de réduire l'empreinte environnementale et la nuisance sonore par rapport au secteur du transport aérien conventionnel. Néanmoins, dans sa note ministérielle d'avril 2019, le ministère de l'Économie et de l'Innovation du Québec (MEI) rappelle que l'automatisation dans l'industrie de l'aviation comporte plusieurs risques [6]. Parmi ceux-ci, on compte notamment la menace de la cyberattaque, mais surtout la perte de vigilance pour le pilote qu'entraîne le traitement passif des données de vol par les systèmes automatisés. Dans le contexte d'un aéronef sans pilote où l'entièreté des systèmes est automatisée, cela devient encore plus vrai. Afin d'effectuer des missions de transport de charges en toute sécurité, il devient alors impératif pour l'automaticien d'accorder une extrême importance à la conception des systèmes de commandes de vol qu'il développe. En effet, ce dernier doit garantir la navigabilité de l'aéronef en dépit des variations qui peuvent survenir pendant un vol. Par exemple, la modification de la vitesse aérodynamique de l'appareil – résultant d'un changement commandé ou bien d'une rafale de vent – fait varier ses caractéristiques aérodynamiques qui sont responsables de le maintenir dans les airs. De plus, pour une même série d'appareils, certaines caractéristiques physiques peuvent différer et influencer les performances du système de commandes. Le défi consiste alors à considérer explicitement toutes les variations envisageables au moment de sa conception.

## 1.2 Problématique étudiée

La problématique étudiée dans le cadre du projet de recherche consiste en la conception d'un système de commandes de vol pour un aéronef convertible tel que le MAVION conçu à l'ISAE-SUPAERO par [7] (cf. figure 1.1). Il est possible de segmenter le problème en quatre sous-problématiques qui forment alors les éléments de la problématique globale du projet :

- P1.** Le système mathématique retenu afin de modéliser la dynamique de l'aéronef ;
- P2.** L'architecture de commandes choisie afin d'asservir le système dynamique ;
- P3.** La technique de synthèse privilégiée afin de synthétiser les gains du contrôleur ;
- P4.** La méthode de séquençage des gains adoptée afin de permettre l'implémentation

sur le modèle non linéaire de gains obtenus à partir de modèles linéarisés.



Figure 1.1 MAVION en campagne de soufflerie afin de caractériser son aérodynamique [8]

Une attention particulière doit être portée à l'élément de problématique **P1**, puisque le modèle mathématique retenu est utilisé dans la synthèse des gains du système de commandes de vol. Ainsi, on doit s'assurer que le modèle choisi contienne toutes les dynamiques dominantes du système que l'on souhaite asservir. Pour un aéronef convertible, il s'agit donc de bien capturer l'aérodynamique associée à chacune de ses composantes principales, soit les surfaces portantes et les moteurs à hélice. De plus, en raison de ses dynamiques mélangées de l'avion et du multicoptère, il faut s'assurer de bien modéliser l'interaction entre les composantes du convertible afin d'obtenir un modèle cohérent.

L'élément **P2** est important, puisque l'architecture de commandes utilisée dicte les performances qui peuvent être atteintes par le contrôleur de vol. Ainsi, il s'agit de bien définir le cahier des charges associées aux performances désirées de l'aéronef afin de respecter les critères prescrits. Concrètement, cette étape consiste à sélectionner les variables mesurées ou estimées qui sont utilisées dans la loi de commandes et définir la structure de l'algorithme mathématique utilisé afin de générer les commandes du système dynamique.

La sous-problématique **P3** est étroitement liée à **P2**, puisqu'elle consiste à fixer la valeur des paramètres libres compris dans la loi de commandes de vol. De plus, les techniques de synthèse ne permettent pas toutes d'imposer les mêmes types de critères de performances. Il s'agit donc de retenir la technique la plus polyvalente permettant de prescrire un éventail de critères afin de synthétiser les meilleurs gains pour le système de commandes.

Enfin, le dernier élément de la problématique principale, soit **P4**, est intrinsèquement attaché à **P3**, puisqu'il est fonction de la technique de synthèse choisie. De fait, la méthode utilisée

afin de séquencer les paramètres libres calculés à l'étape de synthèse dépend de l'inclusion ou de l'exclusion de l'équation de séquençement des gains dans les modèles linéarisés. En y incluant explicitement cette équation à priori, aucune étape supplémentaire n'est requise au moment de l'implémentation. Toutefois, son exclusion demande de synthétiser des fonctions d'interpolation à posteriori pour les gains obtenus à partir de modèles linéarisés discrets.

En somme, l'ensemble de ces éléments constitue la problématique qui est abordée dans le cadre du projet de recherche et dont les résultats sont présentés dans ce mémoire. On précise que ceux-ci sont explorés rigoureusement dans la revue de littérature qui suit ce chapitre.

### 1.3 Objectifs poursuivis

Des quatre éléments de problématique présentés à la section précédente découlent les objectifs qui sont poursuivis dans le projet de recherche. Ces derniers, au nombre de sept, sont définis afin de répondre précisément à toutes les sous-problématiques soulevées par la considération du problème principal consistant précisément en la conception d'un autopilote longitudinal pour un aéronef convertible à corps inclinable<sup>1.1</sup>. Ces objectifs sont :

- O1.** Dresser l'état de l'art des différents types d'aéronefs convertibles existants ;
- O2.** Valider le modèle non linéaire d'un convertible à corps inclinable conçu par Lustosa [8, 9] et proposer un modèle d'actionneurs ;
- O3.** Analyser le modèle de Lustosa et en extraire sa dynamique longitudinale augmentée de celle des actionneurs ;
- O4.** Concevoir un système de commandes de vol pouvant être utilisé par le MAVION comme autopilote longitudinal afin d'asservir la vitesse d'avancement et l'altitude ;
- O5.** Synthétiser les gains du contrôleur en utilisant la technique de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée, multimodèle et multiobjectif issue de la commande robuste linéaire ;
- O6.** Séquencer automatiquement les gains en fonction d'une variable mesurée ou estimée qui est appropriée ;
- O7.** Valider les performances de l'autopilote longitudinal à l'aide de simulations effectuées sur le modèle non linéaire en le comparant à une synthèse LQR unimodèle classique.

Le premier objectif **O1** consiste en une revue des différents types d'aéronefs convertibles qui ont été conçus depuis l'avènement de l'aviation. Cette analyse permet de prendre conscience des différents efforts qui interviennent dans la modélisation d'un aéronef convertible. Cet objectif est formulé afin de fournir des outils supplémentaires à la sous-problématique **P1**.

---

1.1. Ce type d'aéronef convertible est défini formellement aux sections 3.1 et A.1.

L'objectif **O2** découle directement de l'élément de problématique **P1** quant au modèle dynamique qui a été retenu dans le cadre du projet de recherche. Il s'agit d'un convertible à corps inclinable, dénommé MAVION, qui a été conçu et fabriqué par Jean-Marc Moschetta à l'ISAE [7]. Le modèle dynamique simplifié mathématiquement pour des fins d'asservissement a été développé par Lustosa dans le cadre des travaux effectués pendant son doctorat [8,10,11]. On précise que le modèle mathématique du système étudié dans ce mémoire est tiré directement de [9] et que chaque équation qui y est présentée est rigoureusement vérifiée.

L'objectif **O3** consiste à analyser le modèle dynamique proposé par Lustosa afin de caractériser la dynamique linéarisée. Il s'agit alors d'étudier la stabilité naturelle du système dynamique linéarisé qui prend en compte la dynamique des actionneurs. Il est également formulé afin de répondre à **P1**.

L'objectif **O4** est formulé afin de répondre directement à la problématique principale étudiée dans le projet de recherche, soit la conception de l'autopilote longitudinal. L'élément de problématique **P2** est solutionné en retenant une architecture de commande classique par retour de sorties augmenté d'une action intégrale sur l'erreur des variables régulées – la vitesse d'avancement et l'altitude dans ce cas-ci.

L'objectif **O5** est formulé afin de répondre à l'élément **P3**. En raison du contexte du projet de recherche qui a été abordé à la section précédente, on retient la technique de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée qui permet de considérer plusieurs modèles linéarisés et de prescrire un grand nombre de critères de performance variés. De plus, cette technique est issue de la commande robuste qui permet d'améliorer la robustesse de la loi de commandes vis-à-vis différentes incertitudes. Par exemple, elle permet de considérer explicitement les incertitudes paramétriques comprises dans le modèle mathématique.

L'objectif **O6** découle de la sous-problématique **P4** qui consiste à séquencer les gains en utilisant une variable issue du système dynamique étudié. La variable retenue, en l'occurrence la vitesse d'avancement, est choisie de sorte à paramétrer la solution de l'équilibre longitudinal du MAVION. Puisque cette technique ne requiert aucune étape subséquente au moment de l'implémentation en raison de la considération explicite de l'équation de séquençement au moment de la synthèse des gains sur les modèles linéarisés, on dit qu'elle est automatique – motivant son appellation d'*autoséquencement* [12–15].

On précise que les objectifs **O4**, **O5** et **O6** reliés respectivement à l'architecture, la technique de synthèse et la méthode de séquençement retenues dans le projet de maîtrise sont basés sur les travaux effectués par Lhachemi dans [12, 16, 17] et *principalement* [18]. De plus, on souligne que la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée, une variante de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  où l'architecture du contrôleur est fixée à priori de sorte à générer un contrôleur d'ordre réduit, a récemment été

rendue accessible à tous grâce aux travaux de Pierre Apkarian dans [19–21]. L’intégration de ces travaux à même MATLAB<sup>®</sup> a été réalisée en grande partie par Pascal Gahinet.

Enfin, le dernier objectif, **O7**, est formulé afin de valider que toutes les solutions retenues répondent aux sous-problématiques **P1-P4**. Pour ce faire, on effectue plusieurs simulations où l’on met à l’épreuve l’autopilote longitudinal dans divers cas de validation représentant différents scénarios de vol. Le logiciel SIMULINK<sup>®</sup> est utilisé afin de conduire ces simulations.

## 1.4 Plan du mémoire

La structure du mémoire est dictée directement par la problématique et les objectifs du projet de recherche. De fait, le chapitre 2 introduit tous les fondements théoriques associés aux éléments de la problématique principale, soit **P1-P4**. Le chapitre 3 présente le modèle non linéaire utilisé afin de modéliser l’aéronef convertible étudié dans le projet de recherche. Conformément à **O2**, les équations de ce modèle sont rigoureusement vérifiées. Le chapitre 4 montre l’analyse qui est effectuée afin de caractériser la stabilité longitudinale naturelle du convertible tel qu’énoncé par **O3**. Les objectifs **O4-O6** sont abordés dans le chapitre 5 – la pierre angulaire de cet ouvrage – qui détaille toutes les étapes menant à la conception de l’autopilote longitudinal pour le MAVION. Le dernier objectif, soit **O7**, est rempli dans le chapitre 6 qui contient tous les résultats et analyses issus des simulations effectuées afin de valider la conception du système de commandes. Enfin, une synthèse des travaux accomplis et des résultats qui en découlent est effectuée dans le chapitre 7 dans lequel y sont également discutées les limitations et les améliorations possibles de la solution proposée dans ce mémoire.

Outre les sept chapitres que contient ce mémoire, on note également la présence de huit annexes. L’annexe A présente l’état de l’art des différents types d’aéronefs (**O1**). L’annexe B utilise un exemple pratique afin d’illustrer les concepts abordés au chapitre 2. L’annexe C est constituée de rappels mathématiques nécessaires à la compréhension des équations présentées dans ce mémoire. L’annexe D fournit le détail des développements mathématiques afin de prouver l’équivalence entre la modélisation aérodynamique classique de Buckingham et celle proposée par Lustosa. L’annexe E contient quant à elle des précisions supplémentaires portant sur la modélisation aérodynamique de Lustosa. L’annexe F fournit des analyses supplémentaires de ce modèle. Enfin, les annexes G et H compilent des résultats de synthèses et de simulations supplémentaires obtenus pour deux synthèses additionnelles qui ont été investiguées lors de la réalisation du projet de recherche. Il s’agit respectivement d’une synthèse par retour d’état statique ne considérant pas les incertitudes paramétriques ; puis, d’une synthèse par retour de sortie statique utilisant également une configuration paramétrique nominale.

## CHAPITRE 2 FONDEMENTS THÉORIQUES ET REVUE DE LITTÉRATURE

*Je n'ai pas de talent particulier.*

*Je suis passionnément curieux.*

— Albert Einstein

Ce chapitre présente les fondements théoriques constituant la base de ce mémoire. Une attention particulière est d'abord portée à la modélisation d'un système dynamique indéformable. Une revue de littérature est ensuite effectuée portant sur les méthodes de commandes pour les systèmes non linéaires et le séquençement de contrôleurs.

### 2.1 Modélisation de systèmes dynamiques

Sous certaines hypothèses et en combinant des méthodes théoriques et empiriques, la dynamique d'un système peut habituellement être modélisée mathématiquement et représentée sous la forme d'un modèle d'état explicite non linéaire prenant la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}). \quad (2.1)$$

La nature d'un système étant intrinsèquement liée à sa dynamique et ses paramètres physiques, on définit un système dynamique  $\mathcal{S}$  comme suit :

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\varrho}) := \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\varrho}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

avec :

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , le vecteur des  $n$  états du système  $\mathcal{S}$  évoluant selon la dynamique prescrite par la fonction vectorielle non linéaire  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$  ;
- $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ , le vecteur des  $m$  entrées commandables permettant d'effectuer certaines actions contrôlées afin de faire évoluer l'état  $\mathbf{x}$  selon une forme désirée ;
- $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^v$  le vecteur des  $v$  entrées perturbatrices perturbant indésirablement l'état  $\mathbf{x}$  ;
- $\boldsymbol{\varrho} \in \mathbb{R}^{N_p}$  le vecteur des  $N_p$  paramètres<sup>2.1</sup> du système ;
- $\mathbf{x}_0$  la valeur initiale du vecteur d'état  $\mathbf{x}$  à  $t = t_0$ .

---

2.1. Dans ce mémoire, on utilise sciemment la différence entre un *paramètre*  $p$  qui est de nature *constante* par rapport au temps ( $\dot{p} = 0$ ) et une *variable*  $v$  dont la valeur peut *évoluer* dans le temps ( $\dot{v} \neq 0$ ).

Une variable (état, entrée, sortie, commande, référence, etc.) d'un système  $\mathcal{S}$  est dite *endogène* lorsque l'évolution de celle-ci se produit de manière dépendante et interne au système. En d'autres mots, cela signifie que son évolution est connue à priori et peut donc être prédite – en supposant qu'on dispose des mesures adéquates (incluant les perturbations). De ce fait, les états du vecteur  $\mathbf{x}$  sont endogènes puisqu'ils sont entièrement définis par la fonction vectorielle  $\mathbf{f}$  qui est supposée connue. Une variable est dite *exogène* lorsque son évolution se produit de manière indépendante et externe au système; elle ne dépend pas des variables endogènes du système. Ainsi, cela implique que son évolution est inconnue et ne peut donc pas être prédite à priori : elle ne peut qu'être observée (ou mesurée) au moment même où elle survient. De ce fait, les entrées perturbatrices du vecteur  $\mathbf{w}$  sont exogènes puisqu'elles ne sont définies par aucun modèle mathématique.

Les entrées commandables du vecteur  $\mathbf{u}$  peuvent être vues comme des variables endogènes ou exogènes selon l'analyse du système qui est conduite. En effet, une analyse du système en boucle fermée (BF) – c.-à-d. en considérant qu'un système de commandes  $\mathcal{C}$  génère le vecteur  $\mathbf{u}$  en réponse à un vecteur de signaux de référence  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^q$  fourni en entrée et aux grandeurs mesurées, estimées ou connues à priori – implique que les entrées commandables sont vues comme des variables endogènes puisque leur évolution est définie par  $\mathcal{C}$ . À l'opposé, une analyse de  $\mathcal{S}$  en boucle ouverte (BO) – c.-à-d. sans la présence du système de commandes  $\mathcal{C}$  – implique que ces dernières sont alors considérées comme exogènes puisque leur évolution est indéfinie. Cette explication est reprise à la section 2.2 où elle y est illustrée à travers la comparaison des figures 2.2 et 2.3.

Un exemple pratique illustrant le processus de modélisation d'un système dynamique est fourni à l'annexe B.1. À travers l'exemple commun d'une voiture, on montre la forme mathématique que peut prendre un système dynamique  $\mathcal{S}$  en plus d'expliciter la différence entre des variables endogène et exogène.

### 2.1.1 Modélisation dynamique minimale d'un corps solide

À la section précédente, on a effectué l'hypothèse que tout système dynamique  $\mathcal{S}$  peut être défini mathématiquement en utilisant le modèle d'état explicite non linéaire (2.2). L'objectif de cette section est de développer le modèle mathématique minimal et nécessaire à la modélisation d'un système dynamique bien précis : celui d'un corps solide tridimensionnel (3D) qui est *par définition* non déformable. Concrètement, cela implique de définir les deux composantes essentielles de  $\mathcal{S}$  :

1. Le vecteur des  $n$  états  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  ;
2. La fonction vectorielle  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$  de leur évolution.

De fait, il s'agit de préciser la nature de  $\mathbf{f}$  en 3D à l'image de ce qui a été fait à l'équation (B.2) de l'annexe B.1 avec l'exemple minimaliste d'une voiture évoluant dans un espace unidimensionnel (1D). Pour ce faire, il est nécessaire de définir certains repères où sont projetées les grandeurs physiques du modèle défini par  $\mathcal{S}$ . Pour la majorité des systèmes pouvant évoluer dans les airs, au moins trois repères distincts sont nécessaires afin de modéliser mathématiquement la dynamique d'un corps solide possédant six degrés de liberté (6 DDL), c.-à-d. trois en translation et trois en rotation :

1.  $\mathcal{R}_i$  : le repère inertiel ;
2.  $\mathcal{R}_o$  : le repère objet ;
3.  $\mathcal{R}_a$  : le repère aérodynamique.

Étant donné l'importance accordée à ces derniers, une section complète de l'annexe C est consacrée à leur définition. Ainsi, à la section C.2, le positionnement de l'origine et l'orientation des axes composant chacun de ces trois repères sont définis au tableau C.1 et une représentation de ceux-ci est fournie à la figure C.1. L'analyse de cette dernière figure permet de constater qu'au moins quatre grandeurs vectorielles sont d'un grand intérêt :

1.  $\mathbf{p}_{o/i}^i$  : vecteur de la position linéaire relative de  $\mathcal{R}_o$  par rapport à  $\mathcal{R}_i$  projeté dans  $\mathcal{R}_i$  ;
2.  $\Phi_{o/i}$  : pseudo-vecteur<sup>2.2</sup> de la position angulaire relative de  $\mathcal{R}_o$  par rapport à  $\mathcal{R}_i$  ;
3.  $\mathbf{v}_{o/i}^o$  : vecteur de la vitesse linéaire relative de  $\mathcal{R}_o$  par rapport à  $\mathcal{R}_i$  projeté dans  $\mathcal{R}_o$  ;
4.  $\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o$  : vecteur de la vitesse angulaire relative de  $\mathcal{R}_o$  par rapport à  $\mathcal{R}_i$  projeté dans  $\mathcal{R}_o$ .

Tableau 2.1 États minimaux et nécessaires à la modélisation dynamique d'un corps solide

	Position	Vitesse
Linéaire	$\mathbf{p}_{o/i}^i = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^i$	$\mathbf{v}_{o/i}^o = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}^o$
Angulaire	$\Phi_{o/i} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}^o$

2.2. On utilise l'appellation *pseudo-vecteur*, puisque ce dernier n'est pas un vecteur proprement dit dans le sens qu'il ne définit pas une grandeur vectorielle possédant une direction, un sens et une norme. En fait, ce dernier constitue plutôt un ensemble regroupant les grandeurs scalaires  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$  qui peuvent être utilisées afin de former leur matrice de rotation associée  $\mathbf{R}(\Phi_{o/i})$ . Cette dernière appartient plutôt au groupe spécial orthogonal  $SO(3)$  qui est non commutatif et ne forme pas un espace vectoriel (cf. annexe C.2.2). Toutefois, la représentation de  $\Phi_{o/i}$  sous forme d'un vecteur est pertinente dans le sens où elle permet d'effectuer des opérations vectorielles/matricielles avec ce dernier. D'ailleurs, le fait que ce pseudo-vecteur ne soit pas un *vrai* vecteur justifie pourquoi ce dernier n'est pas projeté dans aucun repère et ne possède pas d'exposant.

Le tableau 2.1 donne les composantes scalaires de chacun de ces vecteurs. Il est à noter que le choix du repère de projection de chaque grandeur vectorielle est tout à fait arbitraire ; on privilégie généralement certains repères par souci de simplicité. On définit alors le vecteur d'état  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{12}$  rassemblant les 12 états minimaux nécessaires à la modélisation de la dynamique d'un corps solide possédant 6 DDL :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{o/i}^i \\ \Phi_{o/i} \\ \mathbf{v}_{o/i}^o \\ \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

L'étape suivante est donc de déterminer la fonction vectorielle  $\mathbf{f}$  donnant la variation temporelle du vecteur d'état, soit  $\dot{\mathbf{x}}$ . Au total, quatre équations vectorielles sont nécessaires afin de quantifier les quatre vecteurs composant le vecteur d'état  $\mathbf{x}$ . Ces équations sont issues de la cinématique et de la dynamique, soit deux branches de la mécanique appliquée sur un corps solide. Les quatre équations permettant de modéliser l'évolution des quatre états vectoriels  $\mathbf{p}_{o/i}^i$ ,  $\Phi_{o/i}$ ,  $\mathbf{v}_{o/i}^o$  et  $\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o$  sont respectivement :

1.  ${}^i\dot{\mathbf{p}}_{o/i}^i$  : l'équation cinématique de navigation (en translation) ;
2.  $\dot{\Phi}_{o/i}$  : l'équation cinématique d'Euler (en rotation) ;
3.  ${}^o\dot{\mathbf{v}}_{o/i}^o$  : l'équation dynamique de forces (en translation) ;
4.  ${}^o\dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i}^o$  : l'équation dynamique de moments (en rotation).

Les hypothèses liées à ces équations sont les suivantes :

- H1.** Le corps de l'objet associé au repère  $\mathcal{R}_o$  est indéformable ;
- H2.** La masse de l'objet demeure constante en tout temps ( $\dot{m} = 0$ ) ;
- H3.** Le repère inertiel  $\mathcal{R}_i$  est un repère galiléen où le principe d'inertie s'applique<sup>2.3</sup> ;
- H4.** La propagation<sup>2.4</sup> de ces équations différentielles se fait sur un court laps de temps.

Ces hypothèses sont utilisées pour les raisons respectives suivantes :

- Sans **H1**, il faudrait modéliser l'interaction mécanique de chaque partie déformable composant l'objet étudié ;

---

2.3. Le principe d'inertie stipule que la vitesse d'un corps ponctuel est constante si et seulement si la somme des forces s'exerçant sur lui est nulle. Mathématiquement, on peut le définir comme suit :  $\dot{\mathbf{v}} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{f}_\Sigma = \mathbf{0}$ . En d'autres mots, cela veut dire que tout corps dans un repère galiléen – qui est libre de forces appliquées – possède un mouvement de translation rectiligne uniforme et conserve une vitesse constante (norme et direction). Ainsi, seule l'application d'une force sur le corps ponctuel peut faire varier sa vitesse.

2.4. La propagation d'une équation différentielle désigne tout simplement son processus d'intégration par rapport au temps, qui est d'ailleurs souvent effectué de manière numérique.

- Sans **H2**, la masse  $m$  serait un état propre au système  $\mathcal{S}$  nécessitant alors que son évolution  $\dot{m}$  soit définie dans  $\mathbf{f}$  ;
- Sans **H3**, les lois de la physique galiléenne ne s’appliqueraient pas ;
- Sans **H4**, les mouvements astraux ne pourraient pas être négligés.

Les sous-sections suivantes présentent les quatre équations vectorielles associées à  $\mathbf{p}_{o/i}^i$ ,  $\Phi_{o/i}$ ,  $\mathbf{v}_{o/i}^o$  et  $\omega_{o/i}^o$ . Elles sont essentiellement reprises de [1]. Le lecteur averti peut retrouver tout le détail de ces équations dans les ouvrages [22–25] traitant notamment de la modélisation classique de systèmes aéronautiques et spatiaux.

## Équations cinématiques

La cinématique est la branche de la mécanique qui étudie le mouvement d’un corps indépendamment des forces ou des moments le produisant. C’est en appliquant cette théorie que sont développées les équations (2.4) et (2.5) définissant respectivement l’évolution temporelle des positions linéaire et angulaire d’un corps solide à 6 DDL sans avoir recours aux forces et moments.

**Équation cinématique de navigation (en translation)** L’évolution temporelle de la position linéaire du repère  $\mathcal{R}_o$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_i$  projetée et dérivée<sup>2.5</sup> dans le repère  $\mathcal{R}_i$ , notée  ${}^i\dot{\mathbf{p}}_{o/i}^i$ , est donnée par l’équation cinématique de navigation suivante :

$${}^i\dot{\mathbf{p}}_{o/i}^i = \mathbf{R}_{o/i}^\top(\Phi_{o/i})\mathbf{v}_{o/i}^o \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{R}_{o/i}(\Phi_{o/i})$  est la matrice de rotation paramétrée en fonction des angles d’Euler  $\Phi_{o/i}$ . Cette matrice permet d’obtenir la projection d’un vecteur  $\mathbf{v}$  dans le repère  $\mathcal{R}_o$ ,  $\mathbf{v}^o$  à partir de sa projection dans le repère  $\mathcal{R}_i$ , c.-à-d.  $\mathbf{v}^i$ . Sa définition est donnée à l’équation (C.18) de la section C.2.2.

**Équation cinématique d’Euler (en rotation)** L’évolution temporelle de l’orientation du repère  $\mathcal{R}_o$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_i$ , notée  $\dot{\Phi}_{o/i}$ , est donnée par l’équation cinématique d’Euler suivante :

$$\dot{\Phi}_{o/i} = \mathbf{H}(\Phi_{o/i})\omega_{o/i}^o \quad (2.5)$$

---

2.5. La section C.4.1 aborde le thème de la dérivation d’un vecteur par rapport au temps, son repère de dérivation et la nomenclature correspondante.

avec

$$\mathbf{H}(\Phi_{o/i}) = \begin{bmatrix} 1 & s_\phi t_\theta & c_\phi t_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi/c_\theta & c_\phi/c_\theta \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

et où  $c_x := \cos x$ ,  $s_x := \sin x$  et  $t_x := \tan x$ .

## Équations dynamiques

La dynamique est la branche de la mécanique qui étudie la relation entre le mouvement d'un corps; et les forces et les moments qui le produisent. C'est en appliquant cette théorie que sont développées les équations (2.7) et (2.9) définissant respectivement l'évolution temporelle des vitesses linéaire et angulaire d'un corps solide à 6 DDL en ayant recours aux forces  $\mathbf{f}_\Sigma^o \in \mathbb{R}^3$  et aux moments  $\mathbf{m}_\Sigma^o \in \mathbb{R}^3$ , dont les composantes respectives  $f_{\Sigma_x}, f_{\Sigma_y}, f_{\Sigma_z}$  et  $m_{\Sigma_x}, m_{\Sigma_y}, m_{\Sigma_z}$  exprimées dans le repère objet  $\mathcal{R}_o$  sont illustrées à la figure 2.1. Celles-ci représentent respectivement les sommes de toutes les forces et de tous les moments agissant au CM<sup>2.6</sup> du corps solide indéformable de masse  $m$  et de tenseur d'inertie  $\mathbf{I}^o$  exprimé dans le repère de l'objet  $\mathcal{R}_o$ . Les forces  $\mathbf{f}_\Sigma^o$  et les moments  $\mathbf{m}_\Sigma^o$  sont, de manière générale, des fonctions vectorielles non linéaires des paramètres physiques  $\boldsymbol{\rho}$ , du vecteur d'état  $\mathbf{x}$ , des vecteurs des entrées commandables  $\mathbf{u}$  et des entrées perturbatrices  $\mathbf{w}$ .

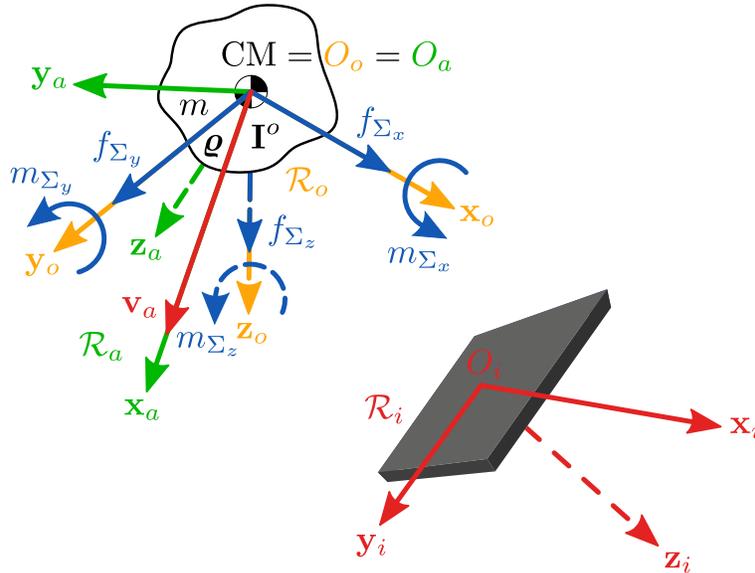


Figure 2.1 Forces et moments dans le repère objet d'un corps solide à 6 DDL

2.6. On effectue l'hypothèse que le CM de l'objet indéformable est parfaitement mesurable et statique de sorte à pouvoir y placer parfaitement l'origine  $O_o$  du repère  $\mathcal{R}_o$ .

**Équation dynamique de forces (en translation)** L'évolution temporelle de la vitesse linéaire du repère  $\mathcal{R}_o$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_i$  projetée et dérivée (cf. section C.4.1) dans le repère  $\mathcal{R}_o$ , notée  ${}^o\dot{\mathbf{v}}_{o/i}^o$ , est donnée par l'équation dynamique de forces en translation, dérivée de la seconde loi de Newton <sup>2.7</sup> :

$${}^o\dot{\mathbf{v}}_{o/i}^o = \frac{1}{m} \mathbf{f}_{\Sigma}^o(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\varrho}) - \left[ \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \right]_{\times} \mathbf{v}_{o/i}^o \quad (2.7)$$

où

$$\mathbf{f}_{\Sigma}^o(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\varrho}) = \begin{bmatrix} f_{\Sigma_x}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\varrho}) \\ f_{\Sigma_y}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\varrho}) \\ f_{\Sigma_z}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\varrho}) \end{bmatrix}^o. \quad (2.8)$$

**Équation dynamique de moments (en rotation)** L'évolution temporelle de la vitesse angulaire du repère  $\mathcal{R}_o$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_i$  projetée et dérivée (cf. section C.4.1) dans le repère  $\mathcal{R}_o$ , notée  ${}^o\dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i}^o$ , est donnée par l'équation dynamique de moments en rotation, dérivée du théorème du moment cinétique (cf. section C.4.2) :

$${}^o\dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i}^o = \left( \mathbf{I}^o \right)^{-1} \left( \mathbf{m}_{\Sigma}^o(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\varrho}) - \left[ \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \right]_{\times} \mathbf{I}^o \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \right) \quad (2.9)$$

où

$$\mathbf{m}_{\Sigma}^o(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\varrho}) = \begin{bmatrix} m_{\Sigma_x}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\varrho}) \\ m_{\Sigma_y}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\varrho}) \\ m_{\Sigma_z}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\varrho}) \end{bmatrix}^o. \quad (2.10)$$

### Ajout du vent

En présence de forces et de moments aérodynamiques, il est nécessaire de définir la vitesse aérodynamique  $\mathbf{v}_a$  ou  $\mathbf{v}_{o/w} \in \mathbb{R}^3$ , c.-à-d. la vitesse de l'objet par rapport au vent :

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_{o/w} = \mathbf{v}_{o/i} - \mathbf{v}_{w/i} \quad (2.11)$$

où  $\mathbf{v}_{w/i} \in \mathbb{R}^3$  est le vecteur de la vitesse du vent par rapport au référentiel inertiel. Dans la pratique, la vitesse du vent  $\mathbf{v}_{w/i}$  est normalement définie dans le repère inertiel  $\mathcal{R}_i$  et

---

<sup>2.7.</sup> La section C.4.2 aborde le thème de la dérivation d'un vecteur dans des repères distincts et menant à la définition des équations (2.7) et (2.9).

constitue l'entrée perturbatrice  $\mathbf{w}$  de  $\mathcal{S}$  :

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_{w/i}^i = \begin{bmatrix} w_n \\ w_e \\ w_d \end{bmatrix}^i. \quad (2.12)$$

Sa dynamique à court terme et locale à  $\mathcal{R}_o$  est imprévisible et difficilement mesurable ou estimable en raison du bruit de mesure, de la géométrie du corps de l'objet et de la complexité de la dynamique des fluides.

La vitesse aérodynamique (2.11) peut être définie dans le repère  $\mathcal{R}_o$  en utilisant la DCM  $\mathbf{R}_{o/i}$  :

$$\mathbf{v}_a^o = \mathbf{v}_{o/w}^o = \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ w_a \end{bmatrix}^o = \mathbf{v}_{o/i}^o - \mathbf{v}_{w/i}^o = \mathbf{v}_{o/i}^o - \mathbf{R}_{o/i}(\Phi_{o/i})\mathbf{v}_{w/i}^i \quad (2.13)$$

où son module est noté :

$$V_a = \|\mathbf{v}_a\| = \sqrt{u_a^2 + v_a^2 + w_a^2}. \quad (2.14)$$

### Modèle d'état complet minimal

Tout système dynamique  $\mathcal{S}$  composé d'un corps solide possédant 6 DDL peut être ainsi modélisé à l'aide du système de 12 équations différentielles scalaires d'ordre 1 suivant :

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\varrho}) := \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\varrho}) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} {}^i\dot{\mathbf{p}}_{o/i}^i \\ \dot{\Phi}_{o/i} \\ {}^o\dot{\mathbf{v}}_{o/i}^o \\ {}^o\dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{o/i}^\top(\Phi_{o/i})\mathbf{v}_{o/i}^o \\ \mathbf{H}(\Phi_{o/i})\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \\ \frac{1}{m}\mathbf{f}_\Sigma^o(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\varrho}) - [\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o]_\times \mathbf{v}_{o/i}^o \\ (\mathbf{I}^o)^{-1} \left( \mathbf{m}_\Sigma^o(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\varrho}) - [\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o]_\times \mathbf{I}^o \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \right) \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (2.15)$$

issu des équations (2.4), (2.5), (2.7), (2.9) et de l'équation du vent (2.11), si des forces et des moments aérodynamiques interviennent dans les expressions de  $\mathbf{f}_\Sigma^o$  et  $\mathbf{m}_\Sigma^o$ .

On note que le choix des angles d'Euler peut constituer un inconvénient majeur. En effet, cette paramétrisation comporte une singularité<sup>2.8</sup> pour la valeur  $\theta = \pm 90^\circ$  comme le témoigne le dénominateur  $\cos \theta$  dans l'équation (2.6). Bien qu'il existe d'autres paramétrisations possibles

---

2.8. On souligne que la représentation des angles d'Euler n'est pas adéquate pour la modélisation d'un aéronef convertible opérant fréquemment dans une plage d'angles d'assiette contenant cette singularité – notamment en phase de vol stationnaire. Afin de remédier à ce problème, deux solutions distinctes utilisant les quaternions et la DCM sont présentées respectivement aux équations (3.25) et (3.28).

de la position angulaire de  $\mathcal{R}_o$  par rapport à  $\mathcal{R}_i$ <sup>2.9</sup>, celle d'Euler possède l'avantage d'être physiquement parlante (ce sont des angles en radian), et surtout, d'être minimale du point de vue du nombre de paramètres requis (trois paramètres utilisés pour un objet possédant trois DDL en rotation). Ceci explique pourquoi elle est encore largement utilisée en aéronautique.

Ainsi, l'analyse de  $\mathcal{S}$  en (2.15) révèle que les seules composantes qui n'ont pas été définies dans ce modèle sont les paramètres physiques  $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^{N_p}$ , l'entrée commandable  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ , les forces  $\mathbf{f}_\Sigma^o \in \mathbb{R}^3$  et les moments  $\mathbf{m}_\Sigma^o \in \mathbb{R}^3$ . En effet, la nature de ces quatre éléments est la seule chose qui permet de distinguer un système  $\mathcal{S}$  d'un autre.

Enfin, puisque la force gravitationnelle s'applique de manière identique à tout corps solide indéformable peu importe sa géométrie, c.-à-d. en son CM, et la force étant orientée dans la même direction et le même sens que  $\mathbf{z}_i$ , on peut ajouter au système  $\mathcal{S}$  en (2.15) la définition supplémentaire suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\Sigma^o(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\rho}) &= \mathbf{f}_{\Sigma^*}^o(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\rho}) + \mathbf{f}_g^o(\Phi_{o/i}, m, g_0) \\ &= \mathbf{f}_{\Sigma^*}^o(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\rho}) + \mathbf{R}_{o/i}(\Phi_{o/i}) m \mathbf{g}^i \end{aligned} \quad (2.16)$$

avec

$$\mathbf{g}^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_0 \end{bmatrix}^i. \quad (2.17)$$

où  $\mathbf{g}^i$  désigne le vecteur gravité projeté dans  $\mathcal{R}_i$  et  $g_0$  la constante de gravité standard prise au niveau moyen de la hauteur des mers (MSL en anglais). Le vecteur  $\mathbf{f}_{\Sigma^*}^o$  est désormais la somme de toutes les autres forces appliquées au CM du système  $\mathcal{S}$  et projetées dans  $\mathcal{R}_o$ .

On note que ce même ajout n'est pas nécessaire pour le moment  $\mathbf{m}_\Sigma^o$  ; la force gravitationnelle  $\mathbf{f}_g^o$  étant appliquée au CM de  $\mathcal{S}$ , il n'y a aucun bras de levier, et donc aucun moment résultant. De fait, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_\Sigma^o(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\rho}) &= \mathbf{m}_{\Sigma^*}^o(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\rho}) + \mathbf{m}_g^o(\Phi_{o/i}, m, g_0) \\ &= \mathbf{m}_{\Sigma^*}^o(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\rho}) + \underbrace{\mathbf{r}_{g/o}^o \times \mathbf{f}_g^o(\Phi_{o/i}, m, g_0)}_{=0} \\ &= \mathbf{m}_{\Sigma^*}^o(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\rho}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

où  $\mathbf{r}_{g/o}^o \in \mathbb{R}^3$  est le vecteur position projeté dans  $\mathcal{R}_o$  du point d'application de la force gravitationnelle  $\mathbf{f}_g^o$  par rapport à l'origine  $O_o$ . Or, cette grandeur est nulle, d'où  $\mathbf{m}_{\Sigma^*}^o = \mathbf{m}_\Sigma^o$ .

---

<sup>2.9.</sup> Cf. section C.2.2 pour les différentes manières de représenter la position angulaire d'un repère  $\mathcal{R}_o$  par rapport à un autre repère  $\mathcal{R}_i$ .



L'annexe A a comme objectif de dresser un portrait succinct des différents types d'aéronefs convertibles qui existent et d'identifier ce qui rend chacun de ces systèmes uniques. Pour ce faire, les trois composantes tout justement introduites  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{f}_{\Sigma^*}^o$  et  $\mathbf{m}_{\Sigma}^o$  sont définies pour chacun des types d'aéronefs convertibles étudiés. La définition des paramètres  $\boldsymbol{\varrho}$  est volontairement omise afin de simplifier l'exercice.

Concrètement, cinq types de convertibles y sont présentés : corps inclinable, fusion avion-multicoptère, aile inclinable, poussée vectorielle et moteurs inclinables. Un sixième type *hybride* est également défini afin de désigner n'importe quel convertible combinant plusieurs types à la fois. L'analyse des forces et des moments de ces différents types montre que la transition de la phase de vol stationnaire à la phase de vol d'avancement implique un jeu complexe d'équilibre des forces de sustentation (combattant celle de la gravité) et de propulsion (combattant celle de la traînée aérodynamique).

La régulation de l'équilibre de tels systèmes dynamiques  $\mathcal{S}$  est rendue possible grâce à l'existence d'un système complémentaire, nommé *contrôleur* et désigné par le symbole  $\mathcal{C}$ , qui a été brièvement évoqué au début de la section 2.1. La prochaine section traite exclusivement du fonctionnement de ce système complémentaire.

## 2.2 Méthodes de commandes pour systèmes non linéaires

La *commande* consiste à solutionner le *problème* suivant, illustré à la figure 2.2 :



En utilisant les mesures  $\boldsymbol{\gamma}$  fournies par les capteurs  $\mathcal{M}$  et les estimations  $\boldsymbol{\chi}$  calculées par l'estimateur  $\mathcal{E}$ , concevoir un contrôleur  $\mathcal{C}$  générant la commande  $\mathbf{u}$  qui permette d'asservir le système  $\mathcal{S}$ , soumis aux perturbations  $\mathbf{w}$  et aux incertitudes sur ses paramètres  $\boldsymbol{\varrho}$ , afin que celui-ci suive les références  $\mathbf{r}$  générées par l'opérateur  $\mathcal{O}$ .



Le système  $\mathcal{M}$  composé des capteurs est défini comme suit :

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{\beta}) := \begin{cases} \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{f}_b(\mathbf{b}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{\beta}) \\ \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{h}(\mathbf{b}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{\beta}) \\ \mathbf{b}(t_0) = \mathbf{b}_0 \end{cases} \quad (2.19)$$

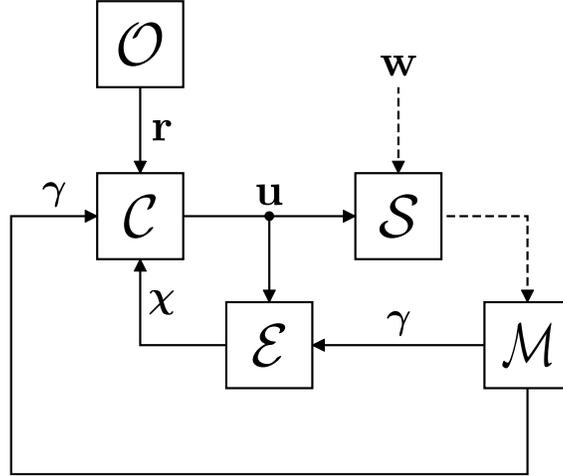


Figure 2.2 Problème de commande analysé en boucle fermée

où  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N_b}$  représente les  $N_b$  états<sup>2.10</sup> du système de capteurs  $\mathcal{M}$  évoluant selon la dynamique prescrite par la fonction vectorielle  $\mathbf{f}_b \in \mathbb{R}^{N_b}$  qui est généralement de nature non linéaire,  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{N_\beta}$  représente les  $N_\beta$  paramètres constants physiques de  $\mathcal{M}$ ,  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^g$  représente la fonction vectorielle générant les  $g$  mesures contenues dans  $\boldsymbol{\gamma}$  et  $\mathbf{b}_0$  représente la valeur initiale des états  $\mathbf{b}$  lorsque le système  $\mathcal{M}$  est mis en marche au temps  $t = t_0$ . On note que le système de capteurs  $\mathcal{M}$  est composé de deux parties distinctes :

1. **Dynamique** : définie par l'équation différentielle vectorielle  $\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{f}_b$  ;
2. **Statique** : définie par l'équation algébrique vectorielle  $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{h}$ .

Le système  $\mathcal{E}$  représentant l'estimateur est défini comme suit :

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{\iota}) := \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{f}_\chi(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{\iota}) \\ \boldsymbol{\chi}(t_0) = \boldsymbol{\chi}_0 \end{cases} \quad (2.20)$$

où  $\boldsymbol{\chi} \in \mathbb{R}^{N_\chi}$  représente les  $N_\chi$  états estimés par l'estimateur  $\mathcal{E}$  évoluant selon la dynamique prescrite par la fonction vectorielle  $\mathbf{f}_\chi \in \mathbb{R}^{N_\chi}$  qui est généralement de nature non linéaire,  $\boldsymbol{\iota} \in \mathbb{R}^{N_\iota}$  représente les  $N_\iota$  paramètres constants de conception de  $\mathcal{E}$  et  $\boldsymbol{\chi}_0$  représente la valeur initiale des estimations  $\boldsymbol{\chi}$  lorsque le système  $\mathcal{E}$  est mis en marche au temps  $t = t_0$ . On note que l'estimateur  $\mathcal{E}$  est composé exclusivement d'une partie dynamique qui est définie par l'équation différentielle et vectorielle  $\dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{f}_\chi$ .

Le système de l'opérateur  $\mathcal{O}$  est défini comme suit :

$$\mathcal{O} := \{\mathbf{r}\} \quad (2.21)$$

2.10. Par exemple, ces états pourraient être le biais et le facteur d'échelle de chaque capteur.

où  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^q$  représente les  $q$  références désirées (ou commandées) par l'opérateur  $\mathcal{O}$ . On précise que l'opérateur  $\mathcal{O}$  peut autant être un humain qu'un ordinateur et que sa seule tâche consiste à définir les objectifs de commande  $\mathbf{r}$  (ou de régulation), dits de *haut niveau*.

Le système du contrôleur  $\mathcal{C}$  est défini comme suit :

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\kappa}) := \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{f}_{\xi}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\kappa}) \\ \mathbf{u} = \mathbf{f}_u(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\kappa}) \\ \boldsymbol{\xi}(t_0) = \boldsymbol{\xi}_0 \end{cases} \quad (2.22)$$

où  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{N_{\xi}}$  représente les  $N_{\xi}$  états du contrôleur  $\mathcal{C}$  évoluant selon la dynamique prescrite par la fonction vectorielle  $\mathbf{f}_{\xi} \in \mathbb{R}^{N_{\xi}}$  qui est généralement de nature non linéaire,  $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^{N_{\kappa}}$  représente les  $N_{\kappa}$  paramètres constants de conception de  $\mathcal{C}$ ,  $\mathbf{f}_u \in \mathbb{R}^m$  représente la fonction vectorielle générant les  $m$  entrées commandables contenues dans  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ , dites de *bas niveaux*, et  $\boldsymbol{\xi}_0$  représente la valeur initiale des états  $\boldsymbol{\xi}$  lorsque le système  $\mathcal{C}$  est mis en marche au temps  $t = t_0$ . On note que le contrôleur  $\mathcal{C}$  est composé de deux parties distinctes :

1. **Dynamique** : définie par l'équation différentielle vectorielle  $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{f}_{\xi}$  ;
2. **Statique** : définie par l'équation algébrique vectorielle  $\mathbf{u} = \mathbf{f}_u$ .

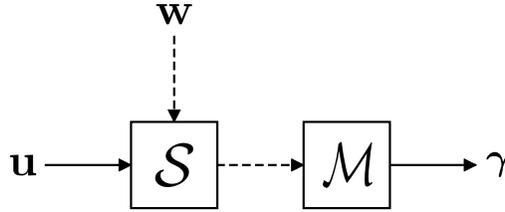


Figure 2.3 Problème de commande analysé en boucle ouverte

On clarifie maintenant le caractère endogène ou exogène des nouvelles grandeurs tout justement définies. Les états des capteurs  $\mathbf{b}$ , les mesures  $\boldsymbol{\gamma}$ , les estimations  $\boldsymbol{\chi}$  et les états du contrôleur  $\boldsymbol{\xi}$  sont toutes des grandeurs endogènes, puisqu'elles sont respectivement définies par  $\mathbf{f}_b$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{f}_{\chi}$  et  $\mathbf{f}_{\xi}$ . L'entrée de référence  $\mathbf{r}$  est de nature exogène, puisqu'elle est totalement indépendante du reste du système. Comme il a été mentionné à la section 2.1, l'entrée commandable  $\mathbf{u}$  peut prendre les deux natures endogène ou exogène. Lorsque l'analyse est conduite en considérant le système du contrôleur  $\mathcal{C}$  tel que représenté à la figure 2.2, on dit que celle-ci est effectuée en *boucle fermée* (BF) et l'entrée commandable  $\mathbf{u}$  est alors considérée *endogène*, puisque sa nature est entièrement définie par  $\mathcal{C}$ . Toutefois, lorsque l'analyse est conduite sans considérer le système  $\mathcal{C}$  qui définit  $\mathbf{u}$  tel que représenté à la figure 2.3, on dit plutôt que cette dernière est effectuée en *boucle ouverte* (BO) :  $\mathbf{u}$  est alors de nature exogène au même titre que  $\mathbf{w}$ .



Souvent, lorsqu'on aborde le problème de régulation des états d'un système dynamique (soit l'opposé du problème d'estimation de ses états), on effectue l'hypothèse qu'il est possible de mesurer parfaitement n'importe quel état du système dynamique  $\mathcal{S}$ . Par conséquent, le système de l'estimateur  $\mathcal{E}$  n'est pas requis, puisque les capteurs  $\mathcal{M}$  mesurent directement toutes les informations  $\gamma$  nécessaires au bon fonctionnement du contrôleur  $\mathcal{C}$  – sans la présence d'une dynamique interne  $\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{f}_b$  :

$$\mathcal{M}(\varrho) := \{\gamma = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \varrho)\}. \quad (2.23)$$

Il n'est donc pas nécessaire d'effectuer d'estimations  $\chi$ , car toutes les grandeurs d'intérêt sont déjà connues. Ainsi, le problème de commande, initialement composé de cinq systèmes, peut être réduit à quatre systèmes. La figure 2.4 illustre ce cas particulier simplifié.

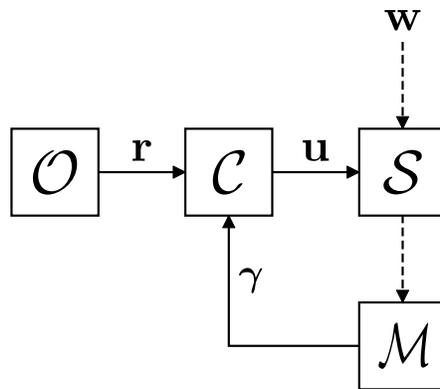


Figure 2.4 Problème de commande analysé en boucle fermée sans estimateur

Ainsi, dans ce nouveau cas de figure, le problème de commande se résume comme suit :



Choisir la fonction  $\mathbf{h}$  définissant les mesures  $\gamma$  fournies par les capteurs de  $\mathcal{M}$ , les fonctions vectorielles  $\mathbf{f}_\xi$  et  $\mathbf{f}_u$  ainsi que les valeurs des paramètres  $\kappa$  du contrôleur  $\mathcal{C}$ , afin que la commande  $\mathbf{u}$  générée permette d'asservir le système  $\mathcal{S}$ , soumis aux perturbations  $\mathbf{w}$  et aux incertitudes sur ses paramètres  $\varrho$ , pour que celui-ci suive les références  $\mathbf{r}$  générées par l'opérateur  $\mathcal{O}$ .



Cette reformulation simplifiée du problème de commande fait intervenir deux concepts fondamentaux et indépendants dans le processus d’asservissement du système  $\mathcal{S}$  à l’aide du contrôleur  $\mathcal{C}$  :

1. L’**architecture** de  $\mathcal{C}$  :

- Elle est définie par la nature des fonctions vectorielles  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{f}_\xi$  et  $\mathbf{f}_u$  qui peuvent être statiques ou dynamiques ;
- Elle définit comment les informations disponibles dans  $\mathcal{C}$  sont utilisées pour calculer  $\mathbf{u}$  : par rétroaction et/ou par alimentation directe, statiquement et/ou dynamiquement ;

2. La **méthode de synthèse** de  $\mathcal{C}$  :

- Elle désigne la méthode qui est utilisée afin de calculer les  $N_\kappa$  paramètres libres  $\kappa$  du contrôleur  $\mathcal{C}$  ;
- Ce processus prend le nom de *synthèse* des paramètres libres (communément appelés *gains*) de  $\mathcal{C}$  ; il existe un grand nombre de différentes méthodes de synthèses dont certaines sont abordées aux sections 2.2.2 et 2.2.3.

L’annexe B.2 aborde l’exemple d’un problème de commande concret rencontré dans la vie quotidienne de plusieurs humains : soit l’utilisation du régulateur de vitesse d’une voiture afin d’alléger la tâche de conduite du conducteur.

### 2.2.1 Méthodes de commandes pour un aéronef convertible

Les cas de figure, concernant les sources de forces et de moments des différents types d’aéronefs convertibles présentés à l’annexe A, démontrent que la modélisation mathématique de ces systèmes fait intervenir plusieurs composantes propres à l’avion et au multicoptère. En plus de la phase de vol de transition qui crée de forts couplages dynamiques entre ces deux dynamiques distinctes, la modélisation de systèmes volants à 6 DDL fait intervenir des équations non linéaires comme le témoigne le modèle général développé en (2.15). Voici un aperçu résumant ces différentes sources non linéaires :

- La paramétrisation de la matrice de rotation  $\mathbf{R}_{o/i}$ , que ce soit en fonction des angles d’Euler ou bien des quaternions, fait toujours apparaître respectivement des fonctions trigonométriques (C.18) et quadratiques (C.24), ainsi que leurs inverses, respectivement (C.19) et (C.25) ;
- La modélisation de la norme des forces  $F_a$  et des moments  $M_a$  aérodynamiques (contenus respectivement dans  $F_{\Sigma^*}$  et  $M_\Sigma$ ) fait également intervenir des équations quadratiques, puisque la grandeur de ces dernières est, par nature, proportionnelle au carré de la norme de la vitesse aérodynamique  $V_a$  :  $F_a \propto V_a^2$  et  $M_a \propto V_a^2$  [25] ;

- La modélisation de la norme des forces propulsives ou de poussée  $F_p$  développées par des moteurs tournant à une vitesse angulaire  $\omega$  est également proportionnelle au carré de cette dernière grandeur :  $F_p \propto \omega^2$  ;
- Enfin, comme discuté auparavant, la modélisation de  $\mathcal{S}$  dans (2.15) crée souvent de forts couplages dynamiques générant alors des non-linéarités supplémentaires entre les différentes variables indépendantes de  $\mathbf{f}$  ; soit  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{w}$ .

À la lumière de ces propos, il devient alors évident que la régulation de certaines grandeurs du système  $\mathcal{S}$ , tel un aéronef convertible appelé à évoluer très rapidement dans un vaste domaine de vol, demande également la conception d'un contrôleur  $\mathcal{C}$  d'un niveau de complexité certain. Deux approches distinctes existent concernant la conception de  $\mathcal{C}$  :

1. **Approche purement non linéaire** : elle consiste à concevoir un contrôleur  $\mathcal{C}$  non linéaire à l'image de (2.22) en se basant sur le modèle non linéaire (2.2) ;
2. **Approche linéaire multimodèle** : elle consiste à concevoir une série de contrôleurs se comportant comme un seul tout, en se basant sur la linéarisation du système non linéaire  $\mathcal{S}$  autour d'une série de plusieurs points d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_\ell}$  générant alors autant de systèmes linéarisés  $\Delta\mathcal{S}_\ell$ .

Ces première et seconde méthodes sont présentées respectivement aux sections 2.2.2 et 2.2.3.

### 2.2.2 Approche purement non linéaire

Il existe des méthodes purement non linéaires afin de concevoir un contrôleur non linéaire  $\mathcal{C}$  tel que défini par (2.22). Toutefois, puisque ces méthodes ne font pas l'objet principal de ce mémoire, on se limite à survoler quelques-unes de ces techniques. Voici un bref aperçu de différentes méthodes de commande non linéaires :

- **Récursion intégrale** → La commande par récursion intégrale (ou *integrator backstepping* en anglais) consiste à séparer le contrôleur  $\mathcal{C}$  en plusieurs sous-contrôleurs  $\mathcal{C}_k$  de manière à ce que chaque sous-système  $\mathcal{C}_k$  placé en aval stabilise celui situé en amont  $\mathcal{C}_{k-1}$  (où le contrôleur  $\mathcal{C}_1$  est placé au plus haut niveau en amont). Ce faisant, il est possible d'appliquer des méthodes de contrôle distinctes et indépendantes à chaque sous-système  $\mathcal{C}_k$ . Les sous-systèmes  $\mathcal{C}_k$  sont généralement liés entre eux à travers une équation différentielle de sorte à créer une *récursion intégrale* – justifiant le nom de cette technique. Cette méthode a été appliquée avec succès au prototype à corps inclinable Roll&Fly dans [26].
- **Mode de glissement** → La commande par mode de glissement (ou *sliding mode control*, abrégé SMC, en anglais) consiste à réguler un système en lui imposant une

dynamique souhaitée, dite *surface de glissement*. Pour ce faire, le contrôleur  $\mathcal{C}$  est normalement constitué de deux sous-systèmes où le premier, noté  $\mathcal{C}_a$ , a pour but d'attirer les états  $\mathbf{x}$  du système  $\mathcal{S}$  vers la surface de glissement où le second contrôleur, noté  $\mathcal{C}_g$ , a pour but de maintenir les états  $\mathbf{x}$  dans cette espace d'état, soit la surface de glissement. Cette forme de commande implique normalement qu'au moins un des deux contrôleurs  $\mathcal{C}_a$  ou  $\mathcal{C}_g$  est discontinu. Une application de cette méthode est donnée dans [27].

- **Inversion dynamique avec linéarisation par bouclage** → La commande par inversion dynamique avec linéarisation par bouclage consiste à prendre avantage de l'existence d'un modèle  $\mathcal{S}$  représentant fidèlement la dynamique du système étudié. Une fois le système  $\mathcal{S}$  connu et défini, il est possible de procéder à une transformation non linéaire de  $\mathcal{S}$ , impliquant généralement un retour par bouclage, afin de trouver une commande  $\mathbf{u}$  qui linéarise le système  $\mathcal{S}$  du point de vue entrées/sorties. Il est ensuite possible d'appliquer n'importe quelle technique classique de contrôle linéaire (cf. section 2.2.3 pour ces différentes techniques). La technique de l'inversion dynamique avec linéarisation par bouclage est notamment utilisée dans [28].

De manière générale, les techniques de commandes non linéaires reposent sur la recherche d'une fonction de Lyapunov afin de prouver que le système en boucle fermée, composé du système dynamique  $\mathcal{S}$  et de son système de régulation  $\mathcal{C}$ , est stable. La théorie de Lyapunov est intrinsèquement liée à la commande non linéaire et demeure un sujet très vaste. D'autres sujets fondamentaux de la commande non linéaire sont : le théorème de Sontag, le principe d'invariance de LaSalle, les systèmes plats, le théorème du petit gain, l'équivalence topologique, l'approche de la géométrie différentielle et les perturbations singulières. Toutes ces notions sont abordées avec rigueur dans [29] et une application concrète de la méthode de Lyapunov est disponible dans [30].

Bien entendu, il existe d'autres types de commandes pouvant être également appliquées dans leur forme non linéaire comme la commande prédictive (ou *model predictive control*, abrégé MPC, en anglais) qui utilise le modèle  $\mathcal{S}$  d'un système dynamique afin d'anticiper son comportement futur et d'en prendre compte dans la forme de  $\mathcal{C}$ . Des méthodes de commande non linéaire supplémentaires peuvent être retrouvées dans [31–33].

Enfin, une dernière méthode de commande non linéaire est celle du séquençement de gains (*gain-scheduling* en anglais) qui est d'ailleurs largement utilisée dans le domaine aérospatial. Cette méthode fait l'objet des deux prochaines sections 2.2.3 et 2.3 où elle y est respectivement définie et analysée en détail.

### 2.2.3 Approche linéaire multimodèle

Bien qu'il existe plusieurs méthodes de commande *purement non linéaires* telles que celles évoquées à la section 2.2.2 précédente, souvent, leurs applications théorique et pratique peuvent s'avérer être une tâche très ardue – et surtout très complexe – en raison notamment de leur lourdeur mathématique. Afin de remédier à ce problème, les automaticiens ont souvent recours aux méthodes de commandes linéaires classiques (telles la commande par placement de pôles ou la commande LQR qui sont abordées plus loin dans cette section), mais appliquées à des systèmes non linéaires en utilisant la méthode du séquençement de gains.

Concrètement, la technique du séquençement de gains consiste à concevoir une série de  $N_\vartheta$  contrôleurs linéaires  $\Delta\mathcal{C}_{k,\ell}$  pour former un seul contrôleur  $\mathcal{C}$  pouvant opérer sur un large domaine d'opération. Pour ce faire, on linéarise le système non linéaire  $\mathcal{S}$  autour d'une série de  $N_\vartheta$  points d'équilibre  $\vartheta_{e_{k,\ell}}$  générant alors autant de systèmes linéarisés  $\Delta\mathcal{S}_{k,\ell}$ . Un contrôleur linéaire  $\Delta\mathcal{C}_{k,\ell}$  peut ensuite être conçu pour chaque système linéarisé  $\Delta\mathcal{S}_{k,\ell}$  en utilisant des méthodes de commandes linéaires classiques. Toutefois, le contrôleur global  $\mathcal{C}$ , ainsi formé par l'union de tous les contrôleurs linéarisés  $\Delta\mathcal{C}_{k,\ell}$ , est généralement de nature non linéaire en raison de la *stratégie de séquençement* entre les différents sous-contrôleurs  $\Delta\mathcal{C}_{k,\ell}$ . Celle-ci prend typiquement la forme d'une fonction non linéaire  $\phi(\sigma)$  où les variables de séquençement  $\sigma$  sont choisies parmi certaines grandeurs connues (les références  $\mathbf{r}$ , les mesures  $\gamma$  ou les estimations  $\chi$ ); elle gère de manière automatique le changement entre les différents sous-contrôleurs  $\Delta\mathcal{C}_{k,\ell}$ .

L'article [34] présente une vue d'ensemble du problème de séquençement de gains, et des applications de cette technique sont effectuées, entre autres, dans [35, 36].

#### Formulation du problème de commande linéaire multimodèle

On formule maintenant le problème de commande linéaire. Pour ce faire, il est d'abord nécessaire de définir ce qu'est un point d'équilibre  $\vartheta_{e_{k,\ell}}$ . Une fois défini, on linéarise autour de ce point les différents systèmes du problème de commande simplifié présenté à la section 2.2.

**Définition du point d'équilibre** Par nature, le point d'équilibre  $\vartheta_e$  d'un système  $\mathcal{S}$  dépend de la valeur des paramètres  $\varrho \in \mathbb{R}^{N_p}$  du système  $\mathcal{S}$  :

$$\vartheta_e(\varrho) := \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(\varrho) \\ \mathbf{u}_e(\varrho) \\ \mathbf{w}_e(\varrho) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m+v}. \quad (2.24)$$

Or, puisque les paramètres  $\boldsymbol{\varrho}$  d'un système  $\mathcal{S}$  comportent généralement des incertitudes :

$$\boldsymbol{\varrho} = \boldsymbol{\varrho}_0 \pm \delta\boldsymbol{\varrho}$$

où  $\boldsymbol{\varrho}_0 \in \mathbb{R}^{N_p}$  et  $\delta\boldsymbol{\varrho} \in \mathbb{R}^{*N_p}$  représentent respectivement les valeurs nominales et incertaines absolues associées aux paramètres  $\boldsymbol{\varrho}$ , il est donc judicieux de considérer un ensemble P composé de  $N_\varrho$  jeux de vecteurs-paramètres  $\boldsymbol{\varrho}_k$  eux-mêmes composés de  $N_p$  paramètres chacun :

$$P := \bigcup_{k=0}^{N_\varrho-1} \{\boldsymbol{\varrho}_k\} \quad (2.25)$$

où l'ensemble des paramètres P peut désormais contenir à la fois le jeu de paramètres nominaux  $\boldsymbol{\varrho}_0$  et plusieurs autres jeux  $\boldsymbol{\varrho}_1, \boldsymbol{\varrho}_2, \dots, \boldsymbol{\varrho}_{N_\varrho-1}$  représentant chacun un jeu possible de paramètres considérés avec leurs différentes incertitudes. Par exemple, on pourrait construire l'ensemble P en considérant toutes les combinaisons possibles issues des incertitudes maximums ( $\boldsymbol{\varrho}_0 + \delta\boldsymbol{\varrho}$ ) et minimums ( $\boldsymbol{\varrho}_0 - \delta\boldsymbol{\varrho}$ ) associées à  $\boldsymbol{\varrho}$ . Cela générerait alors  $2^{N_p}$  vecteurs  $\boldsymbol{\varrho}_k$  différents.

Ainsi, en considérant la dépendance de chaque point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_k}$  associée à son jeu de paramètres  $\boldsymbol{\varrho}_k$ , on réécrit (2.24) comme suit :

$$\boldsymbol{\vartheta}_{e_k}(\boldsymbol{\varrho}_k) := \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{e_k}(\boldsymbol{\varrho}_k) \\ \mathbf{u}_{e_k}(\boldsymbol{\varrho}_k) \\ \mathbf{w}_{e_k}(\boldsymbol{\varrho}_k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m+v}. \quad (2.26)$$

Cependant, pour un même jeu de paramètres physiques  $\boldsymbol{\varrho}_k$ , le point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_k}$  peut avoir plusieurs solutions qui sont paramétrées chacune selon une configuration à l'équilibre particulière  $\boldsymbol{\sigma}_{e_\ell} \in \mathbb{R}^s$  qui est d'intérêt dans la conception du contrôleur  $\mathcal{C}$ . On définit alors l'ensemble E des  $N_\sigma \in \mathbb{N}^*$  configurations à l'équilibre particulières  $\boldsymbol{\sigma}_{e_\ell}$  :

$$E := \bigcup_{\ell=1}^{N_\sigma} \{\boldsymbol{\sigma}_{e_\ell}\}. \quad (2.27)$$

Enfin, avec toutes les définitions requises qui sont maintenant introduites, on redéfinit une nouvelle fois (2.26) afin de prendre en compte cette seconde dépendance :

$$\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}(\boldsymbol{\varrho}_k, \boldsymbol{\sigma}_{e_\ell}) := \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{e_{k,\ell}}(\boldsymbol{\varrho}_k, \boldsymbol{\sigma}_{e_\ell}) \\ \mathbf{u}_{e_{k,\ell}}(\boldsymbol{\varrho}_k, \boldsymbol{\sigma}_{e_\ell}) \\ \mathbf{w}_{e_{k,\ell}}(\boldsymbol{\varrho}_k, \boldsymbol{\sigma}_{e_\ell}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m+v} \quad (2.28)$$

pour lequel on définit l'ensemble  $\Theta_e$  composé de  $N_\vartheta = N_\varrho \times N_\sigma$  points d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$ , nommé *domaine d'équilibre* ou *domaine de linéarisation* ou encore *domaine d'opération*, comme suit :

$$\Theta_e := \bigcup_{k=0}^{N_\varrho-1} \bigcup_{\ell=1}^{N_\sigma} \{ \boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}(\boldsymbol{\varrho}_k, \boldsymbol{\sigma}_{e_\ell}) \} \quad (2.29)$$

où l'ensemble  $\Theta_e$  comporte  $N_\vartheta \times (n + m + v)$  grandeurs scalaires.

**N. B. :** À partir de maintenant, la dépendance explicite de  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$  à  $\boldsymbol{\varrho}_k$  et  $\boldsymbol{\sigma}_{e_\ell}$  est volontairement omise afin d'alléger la notation. Ainsi, lorsque seulement  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$  est utilisé, les deux dépendances mentionnées demeurent implicitement en vigueur. Ceci est particulièrement vrai pour la dépendance d'une fonction quelconque à  $\boldsymbol{\varrho}_k$  qui est souvent omise au profit d'être déjà implicitement comprise dans  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$ .

De ce fait, le point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$  défini en (2.28) représente la combinaison particulière des états  $\mathbf{x}_{e_{k,\ell}}$ , des entrées commandables  $\mathbf{u}_{e_{k,\ell}}$  et des entrées perturbatrices  $\mathbf{w}_{e_{k,\ell}}$  pour laquelle la dynamique du système  $\mathcal{S}$  n'évolue pas : on dit donc qu'il est à l'*équilibre*. L'équilibre du système  $\mathcal{S}$  à un point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$ , noté  $\mathcal{S}_{e_{k,\ell}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}})$ , est défini comme suit :

$$\mathcal{S}_{e_{k,\ell}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) := \{ \dot{\mathbf{x}}_{e_{k,\ell}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}_{e_{k,\ell}}, \mathbf{u}_{e_{k,\ell}}, \mathbf{w}_{e_{k,\ell}; \boldsymbol{\varrho}_k}) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) = \mathbf{0} \} \quad (2.30)$$

où la solution<sup>2.11</sup> de l'équation  $\mathbf{f}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  prise de (2.2) donne les valeurs du point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$ . Toutefois, puisque cette équation vectorielle ne contient que  $n$  équations scalaires et qu'il y a, *en principe*,  $n + m + v$  variables scalaires à solutionner, il est donc nécessaire de fournir les valeurs de  $m+v$  variables scalaires. De manière générale, une première partie comprenant  $\varsigma - (m + v)$  équations de contraintes scalaires nulles supplémentaires sont obtenues par la nature même du point d'équilibre recherché. Par exemple, si l'équilibre recherché est statique, alors plusieurs grandeurs sont alors nulles, ce qui réduit la taille du problème à solutionner. Il existe souvent une seconde partie  $\boldsymbol{\sigma}_{e_\ell} \in \mathbb{R}^\varsigma$  comprenant alors  $\varsigma$  variables pouvant prendre différentes valeurs pour le même équilibre recherché. Par exemple, un avion effectuant un vol de croisière à une altitude constante peut voler à différentes vitesses aérodynamiques  $V_a$ . Ainsi, les grandeurs appartenant à ce second groupe deviennent alors également des paramètres de la linéarisation du système  $\mathcal{S}_{e_{k,\ell}}$  autour du point d'équilibre retenu  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$ . Le problème possède alors autant d'équations que d'inconnues et peut donc être résolu. On dit d'ailleurs que le point  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$  de  $\mathcal{S}_{e_{k,\ell}}$  constitue également ses *paramètres de linéarisation* ou *paramètres d'opération* ou encore *paramètres d'équilibre*.

2.11. Dans l'équation (2.30), la grandeur  $\dot{\mathbf{x}}_{e_{k,\ell}}$  est nulle, puisqu'un équilibre correspond à une valeur constante.

Une fois le point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$  solutionné<sup>2.12</sup>, on peut procéder de la même manière afin de trouver les valeurs à l'équilibre des autres systèmes impliqués dans le problème de commande :

- Pour le système des capteurs  $\mathcal{M}$ , on obtient :

$$\mathcal{M}_{e_{k,\ell}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) := \left\{ \boldsymbol{\gamma}_{e_{k,\ell}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_{e_{k,\ell}}, \mathbf{u}_{e_{k,\ell}}, \mathbf{w}_{e_{k,\ell}}) = \mathbf{h}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) \right\} \quad (2.31)$$

où  $\boldsymbol{\gamma}_{e_{k,\ell}}$  sont les mesures à l'équilibre du système  $\mathcal{S}_{e_{k,\ell}}$ . Celles-ci sont obtenues directement en évaluant  $\mathbf{h}$  au point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$ .

- Pour le système de l'opérateur  $\mathcal{O}$ , on a :

$$\mathcal{O}_{e_{k,\ell}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) := \left\{ \mathbf{r}_{e_{k,\ell}} \right\} \quad (2.32)$$

où  $\mathbf{r}_{e_{k,\ell}}$  sont les références à l'équilibre.

- Pour le système du contrôleur  $\mathcal{C}$ , on a :

$$\mathcal{C}_{e_{k,\ell}}(\boldsymbol{\kappa}_{k,\ell}, \boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) := \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}}_{e_{k,\ell}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{0} = \mathbf{f}_\xi(\boldsymbol{\xi}_{e_{k,\ell}}, \mathbf{r}_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\gamma}_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\varrho}_k, \boldsymbol{\kappa}_{k,\ell}) \\ \mathbf{u}_{e_{k,\ell}} = \mathbf{f}_u(\boldsymbol{\xi}_{e_{k,\ell}}, \mathbf{r}_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\gamma}_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\varrho}_k, \boldsymbol{\kappa}_{k,\ell}) \end{cases} \quad (2.33)$$

qui peut être résolu sans problème, puisque généralement, le nombre  $q$  de références est identique au nombre  $m$  d'entrées commandables. Les deux inconnues sont donc  $\boldsymbol{\xi}_{e_{k,\ell}} \in \mathbb{R}^{N_\xi}$  et  $\mathbf{r}_{e_{k,\ell}} \in \mathbb{R}^q$ . Les grandeurs  $\boldsymbol{\varrho}_k$ ,  $\mathbf{u}_{e_{k,\ell}}$  et  $\boldsymbol{\gamma}_{e_{k,\ell}}$  sont déjà connues, puisque  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$  a été résolu. La solution de l'équilibre de  $\mathcal{C}_{e_{k,\ell}}$  est alors fonction de  $\boldsymbol{\kappa}_{k,\ell}$ .

Ainsi, l'équilibre de tous les systèmes  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{C}$  dépend donc seulement du point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$  – qui est lui-même défini à partir du jeu de paramètres  $\boldsymbol{\varrho}_k$  et de la configuration particulière désirée à l'équilibre  $\boldsymbol{\sigma}_{e_\ell}$  – et du jeu de paramètres  $\boldsymbol{\kappa}_{k,\ell}$  du contrôleur. D'ailleurs, cela est également vrai pour le système de l'estimateur  $\mathcal{E}$ , même si son cas n'est pas abordé ici.

**Linéarisation du système dynamique** Le système  $\Delta\mathcal{S}_{k,\ell}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}})$  représente la linéarisation de Taylor à l'ordre 1 du système dynamique  $\mathcal{S}$  autour de son point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$ . Cette dynamique linéarisée demeure valide tant que la grandeur  $\Delta\boldsymbol{\vartheta}_{k,\ell}$  du modèle linéarisé  $\Delta\mathcal{S}_{k,\ell}$  demeure proche du voisinage de  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$ . On note qu'on peut retrouver la pseudo-grandeur<sup>2.13</sup> non linéaire  $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_{k,\ell}$  associée au modèle non linéaire  $\mathcal{S}$  à partir de la grandeur linéarisée  $\Delta\boldsymbol{\vartheta}_{k,\ell}$  à

2.12. Souvent, lorsqu'il existe plus qu'une seule solution au problème d'équilibre, il est possible de rejeter toutes celles n'ayant pas de sens physique ou étant à l'extérieur du domaine d'opération du système afin de ne retenir qu'une seule solution unique au problème d'équilibre.

2.13. On dit *pseudo-grandeur*, puis que la grandeur  $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_{k,\ell}$  donnée par la relation (2.34) n'est pas la vraie valeur non linéaire de  $\boldsymbol{\vartheta}$ . En effet, sa vraie valeur  $\boldsymbol{\vartheta}$  est donnée par la dynamique non linéaire du système (2.2).

travers la relation suivante :

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_{k,\ell} = \boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}} + \Delta \boldsymbol{\vartheta}_{k,\ell}. \quad (2.34)$$

**N. B. :** Bien qu'elle puisse s'avérer être un peu lourde, la notation concernant l'usage de l'indice  $\square_{k,\ell}$  pour les variables du système linéaire  $\Delta \mathcal{S}_{k,\ell}$  est conservée afin d'insister sur le fait que toute variable linéaire  $\Delta \square_{k,\ell}$  est intrinsèquement liée à son système linéarisé  $\Delta \mathcal{S}_{k,\ell}$  dans le sens qu'elle représente seulement l'évolution de la dynamique locale à  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$ .

On procède maintenant à la linéarisation du système dynamique  $\mathcal{S}$ . Pour les grandeurs :

$$\boldsymbol{\vartheta} := \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m+v} \quad \text{et} \quad \Delta \boldsymbol{\vartheta}_{k,\ell} := \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{k,\ell} \\ \Delta \mathbf{u}_{k,\ell} \\ \Delta \mathbf{w}_{k,\ell} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m+v}, \quad (2.35)$$

on définit le système  $\Delta \mathcal{S}_{k,\ell}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}})$ , représentant la linéarisation du système dynamique  $\mathcal{S}$  autour de son point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$ , comme suit :

$$\Delta \mathcal{S}_{k,\ell}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) := \begin{cases} \Delta \dot{\mathbf{x}}_{k,\ell} = \Delta \mathbf{f}_{k,\ell}(\Delta \mathbf{x}_{k,\ell}, \Delta \mathbf{u}_{k,\ell}, \Delta \mathbf{w}_{k,\ell}, \boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\rho}_k) \\ \Delta \mathbf{x}_{k,\ell}(t_0) = \Delta \mathbf{x}_{0k,\ell} \end{cases} \quad (2.36)$$

avec

$$\Delta \mathbf{f}_{k,\ell}(\Delta \boldsymbol{\vartheta}_{k,\ell}, \boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) := \nabla \mathbf{f}(\boldsymbol{\vartheta})|_{\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}} \Delta \boldsymbol{\vartheta}_{k,\ell} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}} \Delta \mathbf{x}_{k,\ell} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}} \Delta \mathbf{u}_{k,\ell} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{w}} \Big|_{\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}} \Delta \mathbf{w}_{k,\ell} \quad (2.37)$$

où l'opération  $\nabla \mathbf{f}(\boldsymbol{\vartheta})$ , représentant le calcul du gradient de la fonction vectorielle  $\mathbf{f}$  par rapport à sa variable indépendante  $\boldsymbol{\vartheta}$ , est définie à la section C.5.6.

Enfin, on définit l'ensemble  $\Delta \mathcal{S}(\Theta_e)$  des  $N_\vartheta$  systèmes linéarisés  $\Delta \mathcal{S}_{k,\ell}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}})$ , comme suit :

$$\Delta \mathcal{S}(\Theta_e) := \bigcup_{k=0}^{N_\vartheta-1} \bigcup_{\ell=1}^{N_\sigma} \Delta \mathcal{S}_{k,\ell}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) \quad (2.38)$$

où  $\Delta \mathcal{S}$  représente l'ensemble des  $N_\vartheta \in \mathbb{N}^*$  modèles linéaires  $\Delta \mathcal{S}_{k,\ell}$ ; chacun étant linéarisé autour de son point d'équilibre correspondant  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$ .

**Linéarisation du système de capteurs** Pareillement, on définit le système  $\Delta \mathcal{M}_{k,\ell}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}})$ , représentant la linéarisation du système de capteurs  $\mathcal{M}$  autour de son point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$ ,

comme suit :

$$\Delta\mathcal{M}_{k,\ell}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) := \left\{ \Delta\boldsymbol{\gamma}_{k,\ell} = \Delta\mathbf{h}_{k,\ell}(\Delta\mathbf{x}_{k,\ell}, \Delta\mathbf{u}_{k,\ell}, \Delta\mathbf{w}_{k,\ell}, \boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\rho}_k) \right\} \quad (2.39)$$

avec

$$\Delta\mathbf{h}_{k,\ell}(\Delta\boldsymbol{\vartheta}_{k,\ell}, \boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) := \nabla\mathbf{h}(\boldsymbol{\vartheta})|_{\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}} \Delta\boldsymbol{\vartheta}_{k,\ell} = \frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{x}}\bigg|_{\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}} \Delta\mathbf{x}_{k,\ell} + \frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{u}}\bigg|_{\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}} \Delta\mathbf{u}_{k,\ell} + \frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{w}}\bigg|_{\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}} \Delta\mathbf{w}_{k,\ell} \quad (2.40)$$

et

$$\Delta\mathcal{M}(\Theta_e) := \bigcup_{k=0}^{N_e-1} \bigcup_{\ell=1}^{N_\sigma} \Delta\mathcal{M}_{k,\ell}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}). \quad (2.41)$$

**Linéarisation du système de l'opérateur** On définit le système  $\Delta\mathcal{O}_{k,\ell}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}})$ , représentant la linéarisation du système de l'opérateur  $\mathcal{O}$  autour de son point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$ , comme suit :

$$\Delta\mathcal{O}_{k,\ell}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) := \{\Delta\mathbf{r}_{k,\ell}\} \quad (2.42)$$

et

$$\Delta\mathcal{O}(\Theta_e) := \bigcup_{k=0}^{N_e-1} \bigcup_{\ell=1}^{N_\sigma} \Delta\mathcal{O}_{k,\ell}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}). \quad (2.43)$$

**Linéarisation du système du contrôleur** Pour les grandeurs :

$$\boldsymbol{\varpi} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{r} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix}, \quad \Delta\boldsymbol{\varpi}_{k,\ell} := \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\xi}_{k,\ell} \\ \Delta\mathbf{r}_{k,\ell} \\ \Delta\boldsymbol{\gamma}_{k,\ell} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varpi}_{e_{k,\ell}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_{e_{k,\ell}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) \\ \mathbf{r}_{e_{k,\ell}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) \\ \boldsymbol{\gamma}_{e_{k,\ell}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

toutes comprises dans l'ensemble  $\mathbb{R}^{N_\xi+q+g}$ , on définit le système  $\Delta\mathcal{C}_{k,\ell}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\kappa}_{k,\ell})$ , représentant la linéarisation du système du contrôleur  $\mathcal{C}$  autour de son point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$ , comme suit :

$$\Delta\mathcal{C}_{k,\ell}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\kappa}_{k,\ell}) := \begin{cases} \Delta\dot{\boldsymbol{\xi}}_{k,\ell} = \Delta\mathbf{f}_{\boldsymbol{\xi}_{k,\ell}}(\Delta\boldsymbol{\xi}_{k,\ell}, \Delta\mathbf{r}_{k,\ell}, \Delta\boldsymbol{\gamma}_{k,\ell}, \boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\kappa}_{k,\ell}) \\ \Delta\mathbf{u}_{k,\ell} = \Delta\mathbf{f}_{\mathbf{u}_{k,\ell}}(\Delta\boldsymbol{\xi}_{k,\ell}, \Delta\mathbf{r}_{k,\ell}, \Delta\boldsymbol{\gamma}_{k,\ell}, \boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\kappa}_{k,\ell}) \\ \Delta\boldsymbol{\xi}_{k,\ell}(t_0) = \Delta\boldsymbol{\xi}_{0_{k,\ell}} \end{cases} \quad (2.45)$$

avec

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{f}_{\xi_{k,\ell}}(\Delta \varpi_{k,\ell}, \vartheta_{e_{k,\ell}}, \kappa_{k,\ell}) &:= \nabla \mathbf{f}_{\xi}(\varpi) \Big|_{\varpi_{e_{k,\ell}}(\vartheta_{e_{k,\ell}})} \Delta \varpi_{k,\ell} \\
&= \frac{\partial \mathbf{f}_{\xi}}{\partial \xi} \Big|_{\varpi_{e_{k,\ell}}(\vartheta_{e_{k,\ell}})} \Delta \xi_{k,\ell} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\xi}}{\partial \mathbf{r}} \Big|_{\varpi_{e_{k,\ell}}(\vartheta_{e_{k,\ell}})} \Delta \mathbf{r}_{k,\ell} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\xi}}{\partial \gamma} \Big|_{\varpi_{e_{k,\ell}}(\vartheta_{e_{k,\ell}})} \Delta \gamma_{k,\ell}, \\
\Delta \mathbf{f}_{u_{k,\ell}}(\Delta \varpi_{k,\ell}, \vartheta_{e_{k,\ell}}, \kappa_{k,\ell}) &:= \nabla \mathbf{f}_u(\varpi) \Big|_{\varpi_{e_{k,\ell}}(\vartheta_{e_{k,\ell}})} \Delta \varpi_{k,\ell} \\
&= \frac{\partial \mathbf{f}_u}{\partial \xi} \Big|_{\varpi_{e_{k,\ell}}(\vartheta_{e_{k,\ell}})} \Delta \xi_{k,\ell} + \frac{\partial \mathbf{f}_u}{\partial \mathbf{r}} \Big|_{\varpi_{e_{k,\ell}}(\vartheta_{e_{k,\ell}})} \Delta \mathbf{r}_{k,\ell} + \frac{\partial \mathbf{f}_u}{\partial \gamma} \Big|_{\varpi_{e_{k,\ell}}(\vartheta_{e_{k,\ell}})} \Delta \gamma_{k,\ell}
\end{aligned} \tag{2.46}$$

et

$$\Delta \mathcal{C}(\Theta_e, \mathbf{K}) := \bigcup_{k=0}^{N_e-1} \bigcup_{\ell=1}^{N_\sigma} \Delta \mathcal{C}_{k,\ell}(\vartheta_{e_{k,\ell}}, \kappa_{k,\ell}) \tag{2.47}$$

où

$$\mathbf{K} := \bigcup_{k=0}^{N_e-1} \bigcup_{\ell=1}^{N_\sigma} \{\kappa_{k,\ell}\} \tag{2.48}$$

est l'ensemble contenant le jeu de paramètres de chacun des contrôleurs linéarisés  $\Delta \mathcal{C}_{k,\ell}$ .

## Synthèses linéaires classiques

La linéarisation du problème de commande composé des systèmes  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{C}$  a permis d'obtenir respectivement leur approximation linéaire  $\Delta \mathcal{S}_{k,\ell}$ ,  $\Delta \mathcal{M}_{k,\ell}$ ,  $\Delta \mathcal{O}_{k,\ell}$  et  $\Delta \mathcal{C}_{k,\ell}$  autour du point d'équilibre  $\vartheta_{e_{k,\ell}}$ . Il est alors possible d'appliquer n'importe quelle méthode linéaire pour synthétiser les gains de  $\Delta \mathcal{C}_{k,\ell}$ , c.-à-d. calculer les paramètres libres  $\kappa_{k,\ell}$ . Parmi ces méthodes, on retrouve notamment les méthodes de commandes linéaires suivantes qui peuvent être réparties en trois grands groupes :

- **Commande modale :**

- ▶ **Synthèse par placement de pôles :** elle permet de définir la dynamique en boucle fermée (BF) du système linéarisé en choisissant les pôles (ou valeurs propres) en BF désirés, définissant alors les performances du système en BF ;
- ▶ **Synthèse par placement de structures propres :** elle permet de définir plus précisément la dynamique en boucle fermée du système linéarisé en ayant également un certain contrôle sur les vecteurs propres en BF qui définissent la relation (ou le couplage) entre les différentes dynamiques ;

- **Commande optimale :**

- ▶ **Synthèse LQR :** elle permet de minimiser un certain critère quadratique qui définit les performances souhaitées en BF ;

- ▶ **Synthèse LQG** : elle effectue ce que fait la synthèse LQR en reconstruisant en plus le vecteur d'état  $\mathbf{x}$  du système à l'aide d'un estimateur  $\mathcal{E}$  ;
- **Commande robuste** :
  - ▶ **Synthèse  $\mathcal{H}_\infty$**  : elle permet de minimiser la norme  $\mathcal{H}_\infty$  de certains transferts entrée/sortie pondérés par des filtres afin de respecter des gabarits fréquentiels, générant alors un contrôleur dynamique d'ordre très élevé sans architecture particulière ;
  - ▶ **Synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée** : elle permet d'appliquer les mêmes genres de critères de performances que la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ , mais en réduisant considérablement l'ordre du contrôleur synthétisé grâce à l'utilisation d'une architecture de contrôle déterminée à priori.

Ces méthodes de commandes linéaires ont été largement étudiées dans la littérature et font l'objet de plusieurs ouvrages. Par exemple, [37] aborde en profondeur la théorie des systèmes linéaires multivariables qui inclut en autres les synthèses par placement de pôles et de structures propres. Pour tout ce qui touche à la commande optimale, [38, 39] sont deux références incontournables. Enfin, les bases de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  sont présentées dans [40] et celles de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée dans des publications plus récentes : algorithme d'optimisation non lisse dans [19], synthèse multimodèle avec la fonction MATLAB<sup>®</sup> `HINFSTRUCT` dans [20] et généralisation de la solution développée avec la fonction MATLAB<sup>®</sup> `SYSTUNE` dans [21]. D'ailleurs, des applications de cette nouvelle méthode ont été effectuées avec succès dans [17, 41, 42].

## Synthèse LPV

Les méthodes de synthèses linéaires présentées à la section précédente misent toutes sur la technique du séquençement de gain afin d'être appliquées à un système non linéaire. Toutefois, la technique du séquençement de gain, qui est effectuée dans un cadre linéaire, n'apporte aucune garantie à priori sur la stabilité et les performances du système non linéaire en boucle fermée. Cette technique de synthèse utilisant les modèles linéarisés  $\Delta\mathcal{S}_{k,\ell}$  nécessite donc toujours d'être validée à posteriori par simulations sur le modèle non linéaire  $\mathcal{S}$ . Souvent, les bons résultats obtenus sur les modèles linéarisés ne sont pas transférables au modèle non linéaire et il s'avère nécessaire de faire marche arrière et de retourner à la planche à dessin afin d'itérer une nouvelle synthèse linéaire. Ainsi, c'est souvent par un processus itératif d'essais et erreurs que l'on parvient à trouver une solution acceptable sur le modèle non linéaire.

Pour remédier à ce problème majeur de la technique du séquençement de gain, une nouvelle technique encore plus récente que la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  a été développée afin d'apporter des ga-

ranties de stabilité et performances *dès le début* du processus de synthèse effectuée sur les modèles linéarisés. Celle-ci prend le nom de *linear parameter-varying control*, dit simplement : méthode de commande ou synthèse LPV.

Ainsi, pour le cadre où un système non linéaire comporte des paramètres qui varient selon ses états – ce qui est le cas pour des gains séquencés en fonction d'états – la synthèse LPV permet d'apporter des garanties de stabilité et de performances non seulement localement à chaque point d'équilibre de synthèse  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$ , mais à travers tout son domaine d'opération à l'équilibre  $\Theta_e$  *en incluant également* les points d'opération situés entre deux points discrets  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$ . Ces garanties sont notamment apportées grâce aux outils théoriques d'analyse suivants : formalisme LFT, mise sous forme LMI du problème et la  $\mu$ -analyse.

Toutefois, cette nouvelle méthode qui fait encore l'objet de plusieurs publications demeure entièrement en dehors du spectre de ce présent ouvrage. Le lecteur averti est invité à consulter les références suivantes pour en apprendre davantage : [43–48].

### 2.3 Problématique du séquençement de contrôleurs

Le dernier objectif de ce chapitre est d'aborder la problématique concernant l'utilisation de la technique du séquençement de contrôleurs. À priori, cette technique semble proposer une solution *magique* qui permet d'utiliser n'importe quelle méthode de synthèse linéaire sur un système non linéaire. Toutefois, à la section précédente, on a insisté sur le fait que cette technique n'apporte aucune garantie au niveau du fonctionnement global du correcteur non linéaire – c.-à-d. en dehors de chaque point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$  considéré pendant la synthèse.

Fondamentalement, la problématique du séquençement de contrôleurs émerge naturellement lorsqu'on fait varier les gains en fonction de variables endogènes du système tels les état  $\mathbf{x}$ , les mesures  $\boldsymbol{\gamma}$  ou les estimations  $\boldsymbol{\chi}$ . Puisque les gains varient en fonction d'une variable que l'on cherche – directement ou indirectement – à réguler, cela crée manifestement une boucle de rétroaction supplémentaire (cf. figure 5.2). Dans [17], l'auteur démontre clairement que, si cette dynamique interne ou *cachée* n'est pas considérée à l'étape de synthèse linéaire des gains, cela peut considérablement affecter les performances du système non linéaire en boucle fermée. Concrètement, on dit que ce *terme de couplage caché* (TCC) a le potentiel de *parasiter* le comportement non linéaire du système bouclé par rapport aux performances imposées sur les systèmes linéarisés en BF. Le TCC est défini mathématiquement à la section 5.1.3.

Mis à part la synthèse LPV, il existe une autre approche utilisant la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée multimodèle permettant d'améliorer considérablement les chances de succès du processus de synthèse effectué sur les différents modèles linéarisés  $\Delta\mathcal{S}_{k,\ell}$ . Sans rentrer dans les détails à ce

stade-ci (cela constitue l'essence même du chapitre 5), on présente dans cette section trois approches couramment utilisées pour le séquençement des gains d'un contrôleur non linéaire  $\mathcal{C}$  synthétisé à partir de sa version linéarisée  $\Delta\mathcal{C}$  :

1. **Approche naïve** : elle consiste à utiliser naïvement dans le contrôleur non linéaire les gains obtenus à partir des synthèses effectuées localement sur chaque modèle linéarisé autour de son point d'équilibre, soit le principe même de la synthèse *unimodèle* ;
2. **Approche architecturale** : elle consiste à effectuer une modification de l'architecture classique du contrôleur non linéaire afin d'annuler l'effet parasite du TCC généré par le séquençement de ces mêmes gains obtenus par synthèse *unimodèle* ;
3. **Approche synthétique** : elle consiste à considérer explicitement le TCC lié au séquençement de gains dès l'étape de synthèse des gains sur l'ensemble complet des modèles linéarisés – soit le principe de la synthèse *multimodèle* – permettant alors de conserver une architecture de contrôle classique, mais avec des gains différents.

#### DÉFINITIONS IMPORTANTES

- **Synthèse linéaire unimodèle** : elle consiste à effectuer une synthèse point par point (PPP) de manière à trouver un jeu de gains  $\kappa_{k,\ell}(\mathcal{V}_{e_{k,\ell}})$  pour chaque modèle linéarisé  $\Delta\mathcal{S}_{k,\ell}$  localement autour de son point d'équilibre  $\mathcal{V}_{e_{k,\ell}}$  sans prendre en compte les autres modèles linéarisés appartenant à l'ensemble de modèles linéarisés  $\Delta\mathcal{S}(\Theta_e)$  – cf. section 2.2.3 pour la nomenclature utilisée.
- **Synthèse linéaire multimodèle** : elle consiste à effectuer une synthèse multimodèle (SMM) prenant en compte tous les modèles linéarisés  $\Delta\mathcal{S}_{k,\ell}(\mathcal{V}_{e_{k,\ell}})$  de manière à trouver un jeu de gain unique  $\kappa(\mathbf{E})$  pouvant être appliqué à l'ensemble complet des modèles linéarisés  $\Delta\mathcal{S}(\Theta_e)$  de sorte que le gain  $\kappa_{k,\ell}(\mathcal{V}_{e_{k,\ell}})$  de chaque modèle linéarisé  $\Delta\mathcal{S}_{k,\ell}$  autour de son point d'équilibre  $\mathcal{V}_{e_{k,\ell}}$  puisse s'obtenir en fonction de ce gain unique :  $\kappa_{k,\ell}(\kappa(\mathbf{E}))$ .

Pour illustrer la problématique du séquençement de gains, l'annexe B.3 présente l'exemple pratique d'un régulateur de vitesse de voiture dont les gains sont séquençés en fonction de la vitesse du véhicule. Les trois approches (définies mathématiquement au tableau B.1) y sont comparées afin de montrer que, si le séquençement des gains n'est pas explicitement considéré lors de la synthèse des contrôleurs linéarisés, cela peut avoir de graves conséquences sur le comportement en BF du contrôleur non linéaire. De plus, dans cet exemple, on y analyse également l'impact de la nature, exogène ou endogène, de la variable de séquençement choisie sur les performances en BF à travers l'étude des deux cas suivants :

1. **Nature exogène** : en utilisant une variable exogène telle une entrée de référence  $\mathbf{r}$  ;
2. **Nature endogène** : en utilisant une variable endogène telle une sortie mesurée  $\gamma$ .

En somme, les résultats compilés dans l'annexe B.3.3 de cette analyse bidimensionnelle (portant à la fois sur la méthode retenue afin de gérer le TCC relié au séquençement des gains et celle concernant le choix du type de la variable de séquençement) effectuée sur l'exemple simplifié d'une voiture concordent avec la littérature quant à la meilleure stratégie de séquençement à adopter. De fait, celle-ci consiste à utiliser l'approche synthétique qui définit à priori la fonction de séquençement des gains permettant alors de considérer explicitement le TCC au moment de la synthèse des gains en effectuant une synthèse multimodèle.

## 2.4 Méthodologie retenue

Dans ce chapitre, trois grands thèmes ont été abordés. Premièrement, la section 2.1 a introduit la définition formelle d'un système dynamique non linéaire  $\mathcal{S}$  utilisée dans le cadre de ce mémoire. Cela a ensuite mené à la définition générale d'un modèle dynamique minimal pouvant être utilisé pour n'importe quel corps solide possédant 6 DDL. Deuxièmement, la section 2.2 a introduit la définition formelle du problème de commande faisant appel à des méthodes de commande pour systèmes non linéaires tel un aéronef convertible. Finalement, la section 2.3 a présenté la problématique du séquençement de contrôleurs linéaires utilisant des gains ayant été synthétisés sur des modèles linéarisés  $\Delta S$  autour de différentes positions d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}(\boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\sigma}_{e_\ell})$ . Deux thèmes clés ont été abordés concernant la problématique du séquençement de contrôleurs : l'architecture de commande (classique *versus* modifiée) et la gestion du séquençement de contrôleurs (variable de séquençement exogène *vs* endogène).

Le système dynamique retenu dans ce projet de recherche est le prototype à corps inclinable de l'ISAE qui a été développé par [49]. Le MAVION est retenu en raison de la collaboration active de recherche entre cet établissement et Polytechnique Montréal. Puis, les résultats d'analyses plus approfondies présentées à l'annexe B.3 ont permis d'identifier les meilleures solutions issues de la littérature concernant la commande par séquençement de gains :

- Architecture de commande classique composée d'un retour de sorties afin de stabiliser le système et d'une action intégrale sur l'erreur de suivi afin de le réguler ;
- Approche synthétique basée sur la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée multimodèle et utilisation de gains non linéaires séquencés en fonction de variables endogènes.

Un résumé condensé des solutions retenues pour chaque élément de la problématique abordée dans le projet de recherche est présenté au tableau 2.2.

Concrètement, la modélisation retenue pour le MAVION est celle présentée dans [8,9]. Même

Tableau 2.2 Solution retenue pour chaque élément de la problématique abordée dans le projet

Élément de la problématique	Solution retenue
Système dynamique	Dynamique longitudinale de l'aéronef convertible à corps inclinable de l'ISAE-SUPAERO : le MAVION
Architecture de commande	Architecture classique linéaire composée d'un retour de sorties augmenté d'une action intégrale sur l'erreur de régulation
Synthèse des gains	Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ structurée multimodèle dans le cadre de la commande robuste linéaire
Séquencement de contrôleurs linéaires	Variable de séquencement endogène paramétrant la solution de l'équilibre longitudinale

si de nombreuses méthodes de contrôle ont été appliquées avec succès à des aéronefs convertibles à corps inclinables [8,26,31,50–65], c'est la méthode de commande présentée dans [17,18] s'affranchissant des termes de couplage cachés (TCC) qui est retenue.

Enfin, en guise de validation, la nouvelle solution de commande présentée dans ce mémoire est comparée à la solution originale présentée dans les travaux de [8] utilisant la synthèse linéaire LQR unimodèle. Les deux méthodes de synthèse sont comparées en effectuant des simulations sur le même modèle non linéaire du MAVION et en utilisant la même architecture de commande ainsi que la même méthode de gestion du séquencement de contrôleurs linéarisés à l'aide d'une variable endogène.

## CHAPITRE 3    MODÉLISATION D’UN CONVERTIBLE À CORPS INCLINABLE

*La mécanique a deux branches,  
la statique et la dynamique.*  
— Jean le Rond d’Alembert

Ce chapitre présente brièvement le modèle mathématique de l’aéronef convertible étudié dans le cadre de ce projet de maîtrise. Il s’agit d’un modèle du prototype MAVION qui a été développé par des aérodynamiciens de l’Institut supérieur de l’aéronautique et de l’espace (ISAE) dans le cadre d’un programme subventionné par la US Air Force<sup>3.1</sup>. Le modèle mathématique de la dynamique du MAVION a été développé par Leandro Ribeiro Lustosa durant son doctorat à l’ISAE. Toutes les informations contenues dans ce mémoire concernant sa modélisation aérodynamique sont tirées explicitement de sa thèse [8] et de son article de journal [9]. Par souci de clarté et de cohérence, le modèle complet est détaillé à nouveau dans les annexes D et E. Cela est entre autres justifié par l’ajout d’explications et la modification de certaines notations afin d’uniformiser la présentation.

Tout d’abord, le prototype physique du MAVION est présenté. Puis, les principes fondamentaux de la théorie classique de l’aérodynamique de Buckingham sont ensuite rappelés afin d’illustrer le contraste avec celle de Lustosa. La théorie adaptée de Lustosa est ensuite appliquée à la modélisation aérodynamique du MAVION afin de formuler l’expression de ses forces et moments aérodynamiques. Enfin, on formule le modèle d’état complet du MAVION qui est composé de son modèle dynamique à 6 DDL et des modèles dynamiques de ses actionneurs : moteurs et élevons<sup>3.2</sup>.

### 3.1 Présentation du prototype étudié

Le prototype développé par l’équipe de recherche de l’ISAE est un tout petit drone à corps inclinable, ou *tail-sitter* en anglais, possédant une envergure de 420 mm, une corde de 210 mm et une masse totale de 430 g. Sa petite taille peut être appréciée à la figure 3.1 où il est

---

3.1. L’identifiant de la subvention de recherche est FA8655-07-M-4010 et les résultats de recherche qui y sont reliés sont présentés dans le rapport final [7].

3.2. Le mot *élevon* est un mot-valise constitué des termes anglophones *elevator* (gouverne de profondeur) et *aileron*, formant *elevon*. Concrètement, c’est une surface de contrôle qui se retrouve surtout sur les aéronefs de type aile volante. Selon la grandeur de l’appareil, on retrouve toujours un jeu pair de ces composantes qui sont situées sur le bord de fuite de l’aile. Ces surfaces permettent à la fois de contrôler les moments de roulis et de tangage.

photographié à côté d'une canette de boisson gazeuse de 355 ml. Les dimensions hors-tout dans le plan directionnel de l'aéronef sont présentées à la figure 3.2.

Ces figures permettent de constater que la géométrie du MAVION est composée de trois composantes principales :

1. **Aile** : il s'agit de la partie fixe du profil alaire mesurant 420 mm d'envergure par 140 mm de portion de corde générant la force de portance principale de l'aéronef ;
2. **Élevons** : il s'agit des deux parties mobiles du profil alaire mesurant chacune 175 mm de largeur par 70 mm de portion de corde générant des moments autour du CM du MAVION ;
3. **Hélices** : il s'agit des deux composantes rotatives du moteur générant chacune une force de propulsion dans la direction  $\mathbf{x}_o$  du repère objet  $\mathcal{R}_o$  associé au MAVION.

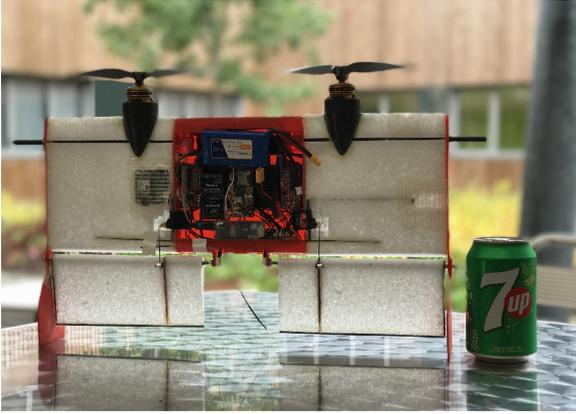


Figure 3.1 MAVION de l'ISAE [8]

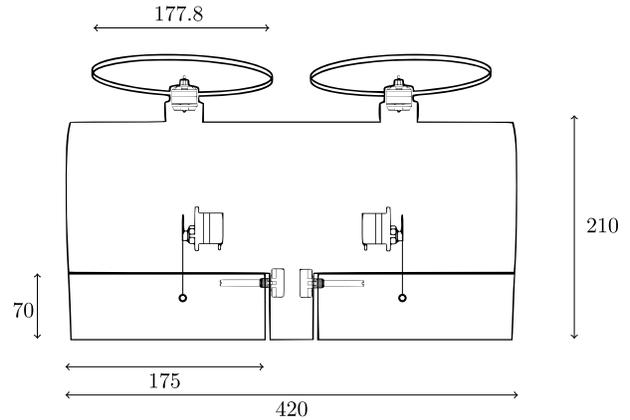


Figure 3.2 Dimensions du MAVION (mm) [8]

Le MAVION possède quatre entrées commandables qui sont représentées en rouge dans la figure 3.3 :

$$\mathbf{u} = [\omega_{1_c} \quad \omega_{2_c} \quad \delta_{1_c} \quad \delta_{2_c}]^T \in \mathbb{R}^4 \quad (3.1)$$

où  $\omega_{1_c}$  et  $\omega_{2_c}$  représentent respectivement la vitesse angulaire *commandée*, exprimée en rad/s, associée aux moteurs gauche et droit, lorsque le MAVION est vu du haut. La déflexion *commandée* de la position angulaire, exprimée en rad, des élévons gauche et droit est respectivement définie comme  $\delta_{1_c}$  et  $\delta_{2_c}$ . Le sens, positif ou négatif, des vitesses et des déflexions angulaires gauche et droite est défini à la figure 3.3. Ces sens suivent la convention du repère direct orthonormé  $\mathcal{R}_o$  associé au CM du MAVION.

On s'intéresse maintenant à la génération des forces et des moments principaux du MAVION :

- **Vol stationnaire** :

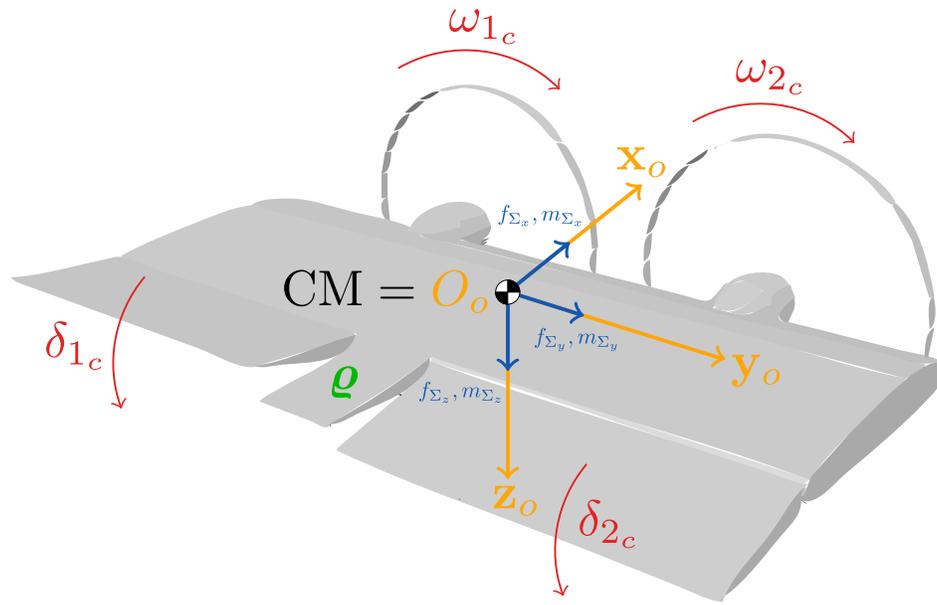


Figure 3.3 Définition du sens des entrées commandables du MAVION [8]

- ▶ Force de sustentation : *normalement* orientée selon  $+\mathbf{x}_o$  et produite par les deux moteurs tournant aux vitesses *vraies*<sup>3.3</sup>  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ;
- ▶ Force de propulsion : aucune à priori, l'aéronef doit modifier son orientation afin de la générer par le biais de sa composante de sustentation ;
- ▶ Moment de roulis : généré *principalement*<sup>3.4</sup> par des déflexions *vraies*<sup>3.5</sup> opposées des deux élevons  $\delta_1$  et  $\delta_2$  ;
- ▶ Moment de tangage : généré par des déflexions *vraies* identiques des deux élevons  $\delta_1$  et  $\delta_2$  ;
- ▶ Moment de lacet : généré *principalement* en créant un différentiel des *vraies* vitesses angulaires  $\omega_1$  et  $\omega_2$  associées aux moteurs ;

■ **Vol d'avancement :**

- ▶ Force de sustentation : *normalement* orientée selon  $-\mathbf{z}_o$  et produite principalement par la partie fixe du profil alaire avec la participation secondaire des élevons, puis celle tertiaire d'une certaine composante de la force propulsive des moteurs ;

3.3. Celles-ci sont différentes des vitesses commandées  $\omega_{1c}$  et  $\omega_{2c}$  à cause de la dynamique des moteurs.

3.4. On dit *principalement*, puisque les moments de roulis et de lacet du MAVION sont dans les faits couplés. En effet, il est également possible de générer un moment de roulis en imposant un différentiel de *vraies* vitesses aux moteurs  $\omega_1$  et  $\omega_2$  en raison des couples de réactions générés sur le corps solide de l'objet. Puis, pareillement, il est également possible de générer un moment de lacet en actionnant qu'un seul élevon à la fois.

3.5. Celles-ci sont différentes des déflexions commandées  $\delta_{1c}$  et  $\delta_{2c}$  à cause de la dynamique des élevons.

- ▶ Force de propulsion : *normalement* orientée selon  $+\mathbf{x}_o$  et produite par une partie de la force propulsive des moteurs, l'autre participant à la sustentation ;
- ▶ Moment de roulis : *idem* que pour le vol stationnaire ;
- ▶ Moment de tangage : *idem* que pour le vol stationnaire ;
- ▶ Moment de lacet : *idem* que pour le vol stationnaire.

Le détail des forces et des moments aérodynamiques du MAVION est présenté à l'annexe E.2 après avoir abordé dans la section 3.3 la théorie de l'aérodynamique développée par Lustosa.

### 3.2 Aérodynamique classique de Buckingham : la $\pi$ -théorie

Classiquement, les bases de la théorie de l'aérodynamique sont issues du théorème de Vaschy-Buckingham, également appelé le théorème  $\pi$ , consistant à effectuer l'analyse dimensionnelle d'un problème physique quelconque afin d'en extraire ses composantes adimensionnelles fondamentales. Bien que n'étant pas reliée spécifiquement à l'aérodynamique, par abus de langage, la théorie de Buckingham est souvent utilisée afin de définir la théorie de l'aérodynamique. Dans ce mémoire, on réfère à la théorie classique de l'aérodynamique, ou bien celle de Buckingham, comme étant celle de la  $\pi$ -théorie. Cette décision est prise afin d'effectuer le contraste par après avec la théorie modifiée de l'aérodynamique développée par Lustosa, soit la  $\phi$ -théorie. Toutes les équations mises de l'avant dans cette section peuvent être retrouvées dans n'importe quel ouvrage traitant de la modélisation aérodynamique classique comme ceux de [22, 24, 25].

Pour un profil d'aile de surface alaire  $S \in \mathbb{R}_+^*$  situé dans un écoulement d'air de masse volumique  $\rho_0 \in \mathbb{R}_+^*$  et de vitesse aérodynamique  $V_a \in \mathbb{R}^+$ , la  $\pi$ -théorie, permet typiquement de modéliser les forces aérodynamiques  $\mathbf{f}_a^a \in \mathbb{R}^3$  dans le repère aérodynamique  $\mathcal{R}_a$ , tandis que les moments aérodynamiques  $\mathbf{m}_a^o \in \mathbb{R}^3$  sont plutôt modélisés dans le repère objet  $\mathcal{R}_o$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a^a &= \frac{1}{2} \rho_0 V_a^2 S \mathbf{c}_a^a \\ \mathbf{m}_a^o &= \frac{1}{2} \rho_0 V_a^2 S \mathbf{B} \mathbf{k}_a^o \end{aligned} \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{c}_a^a \in \mathbb{R}^3$  et  $\mathbf{k}_a^o \in \mathbb{R}^3$  sont respectivement les coefficients aérodynamiques des forces exprimées dans  $\mathcal{R}_a$  et des moments exprimés dans  $\mathcal{R}_o$  :

$$\mathbf{c}_a^a = \begin{bmatrix} -C_D(\dots) \\ -C_C(\dots) \\ -C_L(\dots) \end{bmatrix}^a \quad ; \quad \mathbf{k}_a^o = \begin{bmatrix} C_l(\dots) \\ C_m(\dots) \\ C_n(\dots) \end{bmatrix}^o \quad (3.3)$$

avec  $(\dots)$  dénotant la dépendance de ces coefficients à des grandeurs aérodynamiques.

De plus,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}$  est la matrice des dimensions caractéristiques pour chacun des trois plans composant le profil d'aile :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

où  $b$  et  $c$  sont respectivement l'envergure et la corde moyenne du profil aérodynamique.

Les composantes des coefficients aérodynamiques  $\mathbf{c}_a^a$  et  $\mathbf{k}_a^o$  sont les nombres adimensionnels issus du théorème de Vaschy-Buckingham appliqué au problème d'un profil alaire évoluant dans un écoulement d'air. Plus précisément, ces coefficients adimensionnels sont eux-mêmes fonction des deux autres coefficients adimensionnels fondamentaux en aérodynamique, soit le nombre de Reynolds  $Re \in \mathbb{R}_+^*$  et celui de Mach  $Ma \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$\begin{aligned} Re &= \frac{\rho_0 V_a c}{\mu_0} \\ Ma &= \frac{V_a}{a_0} \end{aligned} \quad (3.5)$$

où les scalaires  $\mu_0 \in \mathbb{R}_+^*$  et  $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$  représentent respectivement le coefficient de viscosité de l'air et la vitesse de propagation du son dans l'écoulement d'air. Les nombres de Reynolds et de Mach sont d'une importance capitale dans la caractérisation de l'écoulement d'air dans lequel opère un aéronef : les forces et les moments aérodynamiques sont directement influencés par ces deux grandeurs.

Enfin,  $V_a$  est la norme euclidienne du vecteur de la vitesse aérodynamique  $\mathbf{v}_a \in \mathbb{R}^3$  (cf. page 13 concernant l'inclusion du vent dans le modèle dynamique de tout corps solide à 6 DDL) :

$$\begin{aligned} V_a &= \|\mathbf{v}_a\|_2 = \sqrt{\mathbf{v}_a^\top \mathbf{v}_a} \\ \mathbf{v}_a &= \mathbf{v}_{o/w} = \mathbf{v}_{o/i} - \mathbf{v}_{w/i} \end{aligned} \quad (3.6)$$

où  $\mathbf{v}_{o/i} \in \mathbb{R}^3$  est la vitesse de  $\mathcal{R}_o$  par rapport au repère inertiel  $\mathcal{R}_i$  et  $\mathbf{v}_{w/i} \in \mathbb{R}^3$  est la vitesse du vent par rapport à  $\mathcal{R}_i$ . Typiquement, les grandeurs  $\mathbf{v}_a$ ,  $\mathbf{v}_{o/i}$  et  $\mathbf{v}_{w/i}$  sont respectivement définies dans  $\mathcal{R}_o$ ,  $\mathcal{R}_o$  et  $\mathcal{R}_i$  :

$$\mathbf{v}_a^o = \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ w_a \end{bmatrix}^o ; \quad \mathbf{v}_{o/i}^o = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}^o ; \quad \mathbf{v}_{w/i}^i = \begin{bmatrix} w_n \\ w_e \\ w_d \end{bmatrix}^i . \quad (3.7)$$

Afin d'exprimer les forces aérodynamiques  $\mathbf{f}_a^a$  (initialement définies dans  $\mathcal{R}_a$ ) dans  $\mathcal{R}_o$ , il est nécessaire d'effectuer deux rotations d'angles  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\beta \in \mathbb{R}$  définissant respectivement l'angle d'attaque et l'angle de dérapage de l'aéronef par rapport à l'écoulement d'air :

$$\mathbf{f}_a^o = \mathbf{R}_{o/a}(\alpha, \beta)\mathbf{f}_a^a \quad (3.8)$$

où  $\mathbf{R}_{o/a}(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  est la matrice de rotation effectuant la transformation  $\mathcal{R}_a \rightarrow \mathcal{R}_o$ . Les angles  $\alpha$  et  $\beta$  sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan\left(\frac{w_a}{u_a}\right) \\ \beta &= \arcsin\left(\frac{v_a}{V_a}\right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

pour lesquels une valeur de vitesse nulle  $\mathbf{v}_a = \mathbf{0}$  peut causer un problème de continuité – en raison de la division par des termes potentiellement nuls. Pour s'en convaincre, on peut calculer les gradients de (3.9) :

$$\begin{aligned} \nabla\alpha &= \left[ \frac{-w_a}{u_a^2 + w_a^2} \quad 0 \quad \frac{u_a}{u_a^2 + w_a^2} \right]^\top \\ \nabla\beta &= \left[ \frac{-u_a v_a}{\sqrt{\frac{u_a^2 + w_a^2}{u_a^2 + v_a^2 + w_a^2}} (u_a^2 + v_a^2 + w_a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \frac{\sqrt{\frac{u_a^2 + w_a^2}{u_a^2 + v_a^2 + w_a^2}}}{\sqrt{u_a^2 + v_a^2 + w_a^2}} \quad \frac{-v_a w_a}{\sqrt{\frac{u_a^2 + w_a^2}{u_a^2 + v_a^2 + w_a^2}} (u_a^2 + v_a^2 + w_a^2)^{\frac{3}{2}}} \right]^\top \end{aligned} \quad (3.10)$$

où l'on constate que les dérivées directionnelles<sup>3.6</sup> de  $\alpha$  et  $\beta$  sont également discontinues pour le cas  $\mathbf{v}_a = \mathbf{0}$ . Or, puisque ce cas de vitesse nulle correspond au cas de vol stationnaire pour un drone convertible, on conclut donc que la paramétrisation traditionnelle utilisant la  $\pi$ -théorie de Buckingham avec les angles  $\alpha$  et  $\beta$  n'est pas un choix envisageable. En effet, la possibilité d'effectuer un vol stationnaire constitue une caractéristique essentielle à tout aéronef convertible. Il s'avère donc nécessaire de reformuler le problème de la transformation entre les repères  $\mathcal{R}_a$  et  $\mathcal{R}_o$  afin d'obtenir une paramétrisation sans singularité. Cette recherche d'une nouvelle solution est primordiale afin de modéliser les forces et les moments aérodynamiques sans problème pour toutes les phases de vol d'un convertible, *notamment la phase stationnaire à vitesse nulle*. La  $\phi$ -théorie de Lustosa, présentée à la section suivante, apporte cette solution.

---

3.6. Cf. section C.5.6 pour les définitions du gradient d'une fonction et de la dérivée directionnelle.

### 3.3 Aérodynamique adaptée de Lustosa : la $\phi$ -théorie

La section précédente a démontré que l'aérodynamique classique de Buckingham ne pouvait pas être retenue afin de modéliser l'aérodynamique d'un aéronef convertible. En effet, en utilisant la  $\pi$ -théorie afin de modéliser les forces et les moments aérodynamiques, une singularité est introduite dans la matrice de rotation  $\mathbf{R}_{o/a}(\alpha, \beta)$  pour une vitesse aérodynamique nulle. Dans la littérature, plusieurs autres auteurs se sont intéressés à cette problématique rencontrée dans la modélisation de tout aéronef convertible [31, 50, 66–71]. Chacun a proposé, à sa façon, une solution afin de remédier au problème de singularité illustré à la section 3.2.

La théorie de Lustosa reprend les principes fondamentaux des différentes solutions ayant déjà été proposées dans la littérature. Toutefois, elle apporte une nouvelle contribution scientifique significative que voici :



*This paper addresses fundamental issues in tail-sitting and transition flight aerodynamics modeling in view of sum-of-squares (SOS) algorithmic guidance and control design. A novel approach, called  $\phi$ -theory, for modeling aerodynamic forces and moments is introduced herein. It yields polynomial-like differential equations of motion that are well suited to SOS solvers for real-time algorithmic guidance and control law synthesis. The proposed  $\phi$ -theory allows for first principles model parameter identification and captures dominant dynamical features over the entire flight envelope. Furthermore,  $\phi$ -theory yields numerically stable and consistent models for 360 deg angles of attack and sideslip. Additionally, an algorithm is provided for analytically computing all feasible longitudinal flight operating points. Finally, to establish  $\phi$ -theory validity, predicted trim points and wind-tunnel experiments are compared.*

— Résumé de l'article de Lustosa [9]



Ainsi, en contraste avec la  $\pi$ -théorie, la  $\phi$ -théorie paramètre la transformation des repères  $\mathcal{R}_a \rightarrow \mathcal{R}_o$  sans avoir recours aux angles d'attaque et de dérapage. Elle utilise plutôt directement les composantes du vecteur de la vitesse aérodynamique  $\mathbf{v}_a$  qui renferme toute

l'information reliée à  $\alpha$  et  $\beta$ . La conséquence directe de cette approche est l'abandon de fonctions trigonométriques au profit de fonctions polynomiales. En plus de pouvoir être appliquée pour n'importe quelles valeurs de vitesses aérodynamiques, notamment la vitesse nulle représentant la phase de vol stationnaire, la  $\phi$ -théorie garantie de modéliser les comportements dynamiques dominants également retrouvés dans la  $\pi$ -théorie, mais exprimés de manière simple et élégante à l'aide de polynômes. En effet, les travaux de Lustosa ont démontré dans [9] que sa  $\phi$ -théorie se compare très bien à la  $\pi$ -théorie, en plus de valider le tout à l'aide d'essais expérimentaux effectués en soufflerie avec le MAVION. En somme, la  $\phi$ -théorie permet de formuler les forces  $\mathbf{f}_a^o \in \mathbb{R}^3$  et moments  $\mathbf{m}_a^o \in \mathbb{R}^3$  aérodynamiques *directement* dans le repère objet  $\mathcal{R}_o$  sans passer par le repère aérodynamique  $\mathcal{R}_a$ , et surtout, sans insérer aucune singularité dans le modèle non linéaire comme le ferait la  $\pi$ -théorie.

La  $\phi$ -théorie adopte la formulation suivante [9] :

$$\boldsymbol{\tau}_a^o = -\frac{1}{2}\rho_0\eta_a S \mathbf{C} \Phi_a^o(\boldsymbol{\eta}_a^o) \mathbf{C} \boldsymbol{\eta}_a^o, \quad (3.11)$$

où  $\boldsymbol{\tau}_a^o \in \mathbb{R}^6$  représente les forces et les moments aérodynamiques dans  $\mathcal{R}_o$  :

$$\boldsymbol{\tau}_a^o = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a^o \\ \mathbf{m}_a^o \end{bmatrix}^o, \quad (3.12)$$

$\boldsymbol{\eta}_a^o \in \mathbb{R}^6$  contient les vitesses linéaire et angulaire du *flux aérodynamique* dans  $\mathcal{R}_o$  :

$$\boldsymbol{\eta}_a^o = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_a^o \\ \boldsymbol{\omega}_a^o \end{bmatrix}^o, \quad (3.13)$$

et  $\boldsymbol{\omega}_a^o \in \mathbb{R}^3$  est définie en matière de *vorticité*<sup>3.7</sup> aérodynamique (cf. sections C.5.2 et C.5.6 concernant respectivement les opérations du produit vectoriel  $\times$  et du gradient  $\nabla$ ) :

$$\boldsymbol{\omega}_a^o = \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}_a^o = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{v}_a^o. \quad (3.14)$$

La  $\phi$ -norme, soit  $\eta_a \in \mathbb{R}^+$ , est définie comme suit :

$$\eta_a = \sqrt{\|\mathbf{v}_a^o\|_2^2 + \phi_a \|\boldsymbol{\omega}_a^o\|_2^2}, \quad \phi_a \in \mathbb{R}_+^* \quad (3.15)$$

---

3.7. Tout *flux aérodynamique* stationnaire, ou écoulement d'air, comporte deux composantes principales. La première est linéaire : on parle alors de la *linéarité*  $\mathbf{v}_a^o$  du flux stationnaire. La seconde est angulaire : on parle alors de la *vorticité*  $\boldsymbol{\xi}_a^o$  du flux stationnaire.

et  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}_+^{6 \times 6}$  est une extension de la matrice des dimensions caractéristiques (3.4) :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{B} \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Enfin,  $\Phi_a^o(\boldsymbol{\eta}_a^o) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  est la matrice des  $\phi$ -coefficients aérodynamiques dans  $\mathcal{R}_o$  :

$$\Phi_a^o(\boldsymbol{\eta}_a^o) = \begin{bmatrix} \Phi_{fv}^o(\mathbf{v}_a^o) & \Phi_{f\omega}^o(\boldsymbol{\omega}_a^o) \\ \Phi_{mv}^o(\mathbf{v}_a^o) & \Phi_{m\omega}^o(\boldsymbol{\omega}_a^o) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

où  $\Phi_{fv}^o \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  et  $\Phi_{f\omega}^o \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  sont les  $\phi$ -coefficients traduisant respectivement les vitesses linéaire  $\mathbf{v}_a^o$  et angulaire  $\boldsymbol{\omega}_a^o$  aérodynamiques en force aérodynamique  $\mathbf{f}_a^o$ , puis  $\Phi_{mv}^o \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  et  $\Phi_{m\omega}^o \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  sont les  $\phi$ -coefficients traduisant respectivement  $\mathbf{v}_a^o$  et  $\boldsymbol{\omega}_a^o$  en moment aérodynamique  $\mathbf{m}_a^o$ .

La paramétrisation matricielle proposée par la  $\phi$ -théorie la rend compatible avec un vaste éventail d'applications mathématiques. Par exemple, dans [9], il est montré comment effectuer le transport de forces  $\mathbf{f}_a^o$  et de moments  $\mathbf{m}_a^o$  d'un repère à un autre directement dans  $\mathbb{R}^6$  – concept également applicable aux vitesses linéaire  $\mathbf{v}_a^o$  et angulaire  $\boldsymbol{\omega}_a^o$ . De plus, en supposant que  $\Phi_a^o > \mathbf{0}$  et à l'aide d'un candidat de Lyapunov judicieusement choisi, [9] montre que l'énergie aérodynamique contenue dans (3.11) est dissipative. L'existence et la forme des états à l'équilibre pour un système dynamique constitué d'un corps solide à 6 DDL sont également étudiées. Pour plus de détails concernant les principes fondamentaux de la  $\phi$ -théorie présentée dans cette section, le lecteur est invité à se référer à la thèse de Lustosa [8] ou bien à son format condensé constituant l'article [9].

### 3.4 Efforts aérodynamiques complets du modèle de Lustosa

Les annexes E.1 et E.2 contiennent tous les détails afin d'appliquer la  $\phi$ -théorie aux trois composantes aérodynamiques du MAVION. Ce processus permet alors d'identifier quatre sources d'efforts aérodynamiques : les deux hélices, les deux sections d'aile, les deux élevons et l'interaction hélice-profil due au courant d'air induit par les hélices balayant les surfaces aérodynamiques (aile + élevons).

Les forces  $\mathbf{f}_{\Sigma^*}^o$  et les moments  $\mathbf{m}_{\Sigma}^o$  aérodynamiques complets du MAVION sont fonctions de :

- $\boldsymbol{\varrho} \rightarrow$  le vecteur rassemblant tous les paramètres physiques du modèle du MAVION ;
- $\mathbf{x}_{\Sigma}$ ,  $\mathbf{u}_{\Sigma}$  et  $\mathbf{w}_{\Sigma} \rightarrow$  les vecteurs du modèle d'état associé aux efforts aérodynamiques :

$$\mathbf{x}_\Sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{o/i}^o \\ \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \quad \mathbf{u}_\Sigma = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_\Sigma = \mathbf{v}_{w/i}^i = \begin{bmatrix} w_n \\ w_e \\ w_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.18)$$

La somme totale des forces aérodynamiques du MAVION est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\Sigma^*}^o(\mathbf{x}_\Sigma, \mathbf{u}_\Sigma, \mathbf{w}_\Sigma, \boldsymbol{\varrho}) &= \underbrace{\mathbf{f}_{t,1}^o(\omega_1) + \mathbf{f}_{t,2}^o(\omega_2)}_{\text{poussée des moteurs}} - \underbrace{\frac{\rho_0 \eta_a S}{2} (\boldsymbol{\Phi}_{fv}^o \mathbf{v}_a^o + \boldsymbol{\Phi}_{f\omega}^o \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o)}_{\text{aile}} \\ &- \underbrace{\frac{S}{4S_p} \boldsymbol{\Phi}_{fv}^o (\mathbf{f}_{t,1}^o(\omega_1) + \mathbf{f}_{t,2}^o(\omega_2))}_{\text{interaction hélice-aile}} + \underbrace{\frac{\rho_0 \eta_a S}{4} (\boldsymbol{\Phi}_{fv}^o [\boldsymbol{\xi}_f^o] \times \mathbf{v}_a^o + \boldsymbol{\Phi}_{f\omega}^o [\boldsymbol{\xi}_f^o] \times \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o)}_{\text{élevons}} (\delta_1 + \delta_2) \\ &+ \underbrace{\frac{S}{4S_p} \boldsymbol{\Phi}_{fv}^o [\boldsymbol{\xi}_f^o] \times (\delta_1 \mathbf{f}_{t,1}^o(\omega_1) + \delta_2 \mathbf{f}_{t,2}^o(\omega_2))}_{\text{interaction hélice-élevon}} \end{aligned} \quad (3.19)$$

et la somme totale des moments aérodynamiques du MAVION est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_\Sigma^o(\mathbf{x}_\Sigma, \mathbf{u}_\Sigma, \mathbf{w}_\Sigma, \boldsymbol{\varrho}) &= \underbrace{\mathbf{m}_{d,1}^o(\omega_1) + \mathbf{m}_{d,2}^o(\omega_2)}_{\text{résistance des hélices}} + \underbrace{\mathbf{m}_{g,1}^o(\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o, \omega_1) + \mathbf{m}_{g,2}^o(\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o, \omega_2)}_{\text{effet gyroscopique}} \\ &- \underbrace{\frac{\rho_0 \eta_a S}{2} \mathbf{B} (\boldsymbol{\Phi}_{mv}^o \mathbf{v}_a^o + \boldsymbol{\Phi}_{m\omega}^o \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o)}_{\text{aile}} - \underbrace{\frac{S}{4S_p} \mathbf{B} \boldsymbol{\Phi}_{mv}^o (\mathbf{f}_{t,1}^o(\omega_1) + \mathbf{f}_{t,2}^o(\omega_2))}_{\text{interaction hélice-aile}} \\ &+ \underbrace{\frac{\rho_0 \eta_a S}{4} \mathbf{B} (\boldsymbol{\Phi}_{mv}^o [\boldsymbol{\xi}_m^o] \times \mathbf{v}_a^o + \boldsymbol{\Phi}_{m\omega}^o [\boldsymbol{\xi}_m^o] \times \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o)}_{\text{élevons}} (\delta_1 + \delta_2) \\ &+ \underbrace{\frac{S}{4S_p} \mathbf{B} \boldsymbol{\Phi}_{mv}^o [\boldsymbol{\xi}_m^o] \times (\delta_1 \mathbf{f}_{t,1}^o(\omega_1) + \delta_2 \mathbf{f}_{t,2}^o(\omega_2))}_{\text{interaction hélice-élevon}} + \underbrace{[\mathbf{r}_{p,1}^o] \times \mathbf{f}_{t,1}^o(\omega_1) + [\mathbf{r}_{p,2}^o] \times \mathbf{f}_{t,2}^o(\omega_2)}_{\text{réaction de la poussée des moteurs}} \\ &- \underbrace{\frac{S}{4S_p} ([\mathbf{r}_{a,1}^o] \times \boldsymbol{\Phi}_{fv}^o \mathbf{f}_{t,1}^o(\omega_1) + [\mathbf{r}_{a,2}^o] \times \boldsymbol{\Phi}_{fv}^o \mathbf{f}_{t,2}^o(\omega_2))}_{\text{réaction de l'interaction hélice-aile}} \\ &+ \underbrace{\frac{\rho_0 \eta_a S}{4} (\delta_1 [\mathbf{r}_{a,1}^o] \times + \delta_2 [\mathbf{r}_{a,2}^o] \times) (\boldsymbol{\Phi}_{fv}^o [\boldsymbol{\xi}_f^o] \times \mathbf{v}_a^o + \boldsymbol{\Phi}_{f\omega}^o [\boldsymbol{\xi}_f^o] \times \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o)}_{\text{réaction des élevons}} \\ &+ \underbrace{\frac{S}{4S_p} (\delta_1 [\mathbf{r}_{a,1}^o] \times \boldsymbol{\Phi}_{fv}^o [\boldsymbol{\xi}_f^o] \times \mathbf{f}_{t,1}^o(\omega_1) + \delta_2 [\mathbf{r}_{a,2}^o] \times \boldsymbol{\Phi}_{fv}^o [\boldsymbol{\xi}_f^o] \times \mathbf{f}_{t,2}^o(\omega_2))}_{\text{réaction de l'interaction hélice-élevon}}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

### 3.5 Modèles d'état du convertible à corps inclinable

Cette section présente les différents modèles d'état pouvant être utilisés afin de modéliser la dynamique du corps solide à 6 DDL du MAVION. Ces modèles sont complétés avec la modélisation des actionneurs de l'aéronef convertible.

#### 3.5.1 Dynamique du corps solide à 6 DDL

À la section précédente, on a présenté la formulation des forces  $\mathbf{f}_{\Sigma^*}^o$  et des moments  $\mathbf{m}_{\Sigma}^o$  aérodynamiques du MAVION dans le repère objet  $\mathcal{R}_o$  – cf. équations (3.19) et (3.20), respectivement. De plus, à la section 2.1.1, on a défini le modèle d'état minimal de la modélisation dynamique d'un corps solide à 6 DDL en utilisant la paramétrisation des angles d'Euler. L'annexe C.2.2 rappelle qu'il existe différentes représentations de la position angulaire d'un repère objet  $\mathcal{R}_o$  par rapport à un repère inertiel  $\mathcal{R}_i$  fixe agissant comme référence : c.-à-d. les angles d'Euler, les quaternions et la matrice de rotation. Cette section a pour but de définir trois modèles d'état distincts pouvant être utilisés afin de définir la dynamique complète du corps solide du MAVION. Ces modèles d'état utilisent respectivement les représentations des angles d'Euler ( $\mathcal{S}_{\Phi}$ ), des quaternions ( $\mathcal{S}_q$ ) et de la matrice de rotation ( $\mathcal{S}_R$ ). Ces modèles d'état sont d'ailleurs repris dans l'analyse de la dynamique du MAVION présentée au chapitre 4, la conception de son système de commande  $\mathcal{C}$  présentée au chapitre 5 et la validation par simulations du système de commandes présentée au chapitre 6.

Les trois modèles d'état non linéaires présentés dans cette section possèdent les entrées commandables  $\mathbf{u}_{\Sigma}$  et les entrées perturbatrices  $\mathbf{w}_{\Sigma}$  définies à la section précédente en (3.18). Toutefois, ils utilisent des vecteurs d'état différents afin d'obtenir des modèles d'état s'appliquant mieux dans une situation qu'une autre.

### Modèle d'état utilisant les vitesses linéaires dans $\mathcal{R}_o$ et les angles d'Euler

Le premier modèle d'état présenté dans cette section utilise les vitesses linéaires  $\mathbf{v}_{o/i}^o$  et les angles d'Euler  $\Phi_{o/i}$  afin de générer le système  $\mathcal{S}_\Phi$  :

$$\mathcal{S}_\Phi(\boldsymbol{\varrho}) := \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_\Phi = \mathbf{f}_\Phi(\mathbf{x}_\Phi, \mathbf{u}_\Sigma, \mathbf{w}_\Sigma, \boldsymbol{\varrho}) \\ \Leftrightarrow \\ \begin{bmatrix} {}^i\dot{\mathbf{p}}_{o/i}^i \\ \dot{\Phi}_{o/i} \\ {}^o\dot{\mathbf{v}}_{o/i}^o \\ {}^o\dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{o/i}^\top(\Phi_{o/i})\mathbf{v}_{o/i}^o \\ \mathbf{H}(\Phi_{o/i})\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \\ \frac{1}{m}\mathbf{f}_{\Sigma^*}^o(\mathbf{x}_\Sigma(\mathbf{x}_\Phi), \mathbf{u}_\Sigma, \mathbf{w}_\Sigma, \boldsymbol{\varrho}) + \mathbf{R}_{o/i}(\Phi_{o/i})\mathbf{g}^i - [\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o]_\times \mathbf{v}_{o/i}^o \\ (\mathbf{I}^o)^{-1} \left( \mathbf{m}_\Sigma^o(\mathbf{x}_\Sigma(\mathbf{x}_\Phi), \mathbf{u}_\Sigma, \mathbf{w}_\Sigma, \boldsymbol{\varrho}) - [\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o]_\times \mathbf{I}^o \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \right) \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}_\Phi(t_0) = \mathbf{x}_{\Phi_0} \end{cases} \quad (3.21)$$

avec

$$\mathbf{x}_\Phi = \left[ \left( \mathbf{p}_{o/i}^i \right)^\top \quad \left( \Phi_{o/i} \right)^\top \quad \left( \mathbf{v}_{o/i}^o \right)^\top \quad \left( \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \right)^\top \right]^\top \in \mathbb{R}^{12} \quad (3.22)$$

et les vecteurs  $\mathbf{x}_\Sigma$ ,  $\mathbf{u}_\Sigma$ ,  $\mathbf{w}_\Sigma$  ont été définis en (3.18).

### Modèle d'état utilisant les vitesses linéaires dans $\mathcal{R}_i$ et les quaternions

Le second modèle d'état présenté dans cette section utilise la vitesse linéaire  $\mathbf{v}_{o/i}^i$  et le quaternion  $\mathbf{q}_{o/i}$ , au lieu de la vitesse linéaire  $\mathbf{v}_{o/i}^o$  et des angles d'Euler  $\Phi_{o/i}$ . Le vecteur  $\mathbf{v}_{o/i}^i \in \mathbb{R}^3$ , représentant la vitesse linéaire de  $\mathcal{R}_o$  par rapport à  $\mathcal{R}_i$  exprimée dans  $\mathcal{R}_i$ , est défini par :

$$\mathbf{v}_{o/i}^i = \begin{bmatrix} v_n & v_e & v_d \end{bmatrix}^{i^\top}, \quad (3.23)$$

et le vecteur des quaternions  $\mathbf{q}_{o/i} \in \mathbb{H}$  (cf. annexe C.3) par :

$$\mathbf{q}_{o/i} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^\top. \quad (3.24)$$

On rappelle que la matrice de rotation peut être paramétrée en fonction du quaternion en utilisant (C.24), soit  $\mathbf{R}_{o/i}(\mathbf{q}_{o/i})$  et que  $\mathbf{v}_{o/i}^o = \mathbf{R}_{o/i}(\mathbf{q}_{o/i})\mathbf{v}_{o/i}^i$ . On génère ainsi le système  $\mathcal{S}_q$  :

$$\mathcal{S}_q(\boldsymbol{\varrho}) := \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_q = \mathbf{f}_q(\mathbf{x}_q, \mathbf{u}_\Sigma, \mathbf{w}_\Sigma, \boldsymbol{\varrho}) \\ \Leftrightarrow \\ \begin{bmatrix} {}^i\dot{\mathbf{p}}_{o/i}^i \\ \dot{\mathbf{q}}_{o/i} \\ {}^i\dot{\mathbf{v}}_{o/i}^i \\ {}^o\dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{o/i}^\top(\mathbf{q}_{o/i})\mathbf{v}_{o/i}^o \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o)\mathbf{q}_{o/i} \\ \frac{1}{m}\mathbf{R}_{o/i}^\top(\mathbf{q}_{o/i})\mathbf{f}_{\Sigma^*}^o(\mathbf{x}_\Sigma(\mathbf{x}_q), \mathbf{u}_\Sigma, \mathbf{w}_\Sigma, \boldsymbol{\varrho}) + \mathbf{g}^i \\ (\mathbf{I}^o)^{-1}\left(\mathbf{m}_\Sigma^o(\mathbf{x}_\Sigma(\mathbf{x}_q), \mathbf{u}_\Sigma, \mathbf{w}_\Sigma, \boldsymbol{\varrho}) - [\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o]_\times \mathbf{I}^o \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o\right) \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}_q(t_0) = \mathbf{x}_{q_0} \end{cases} \quad (3.25)$$

avec

$$\mathbf{x}_q = \left[ (\mathbf{p}_{o/i}^i)^\top \quad (\mathbf{q}_{o/i})^\top \quad (\mathbf{v}_{o/i}^i)^\top \quad (\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o)^\top \right]^\top \in \mathbb{R}^{13} \quad (3.26)$$

où l'on précise que le vecteur  $\mathbf{x}_\Sigma$  défini en (3.18) peut également être défini en fonction de l'état  $\mathbf{x}_q$  associé au système  $\mathcal{S}_q$ . On a en effet :

$$\mathbf{x}_\Sigma(\mathbf{x}_q) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{o/i}^o \\ \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{o/i}(\mathbf{q}_{o/i})\mathbf{v}_{o/i}^i \\ \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

On rappelle également que l'expression  $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o)$  est définie en (C.26).

### Modèle d'état utilisant les vitesses linéaires dans $\mathcal{R}_o$ et la matrice de rotation

Le dernier modèle d'état présenté dans cette section utilise les vitesses linéaires  $\mathbf{v}_{o/i}^o$  et la matrice de rotation  $\mathbf{R}_{o/i}$  sans paramétrisation particulière afin de générer le système  $\mathcal{S}_R$  :

$$\mathcal{S}_R(\boldsymbol{\varrho}) := \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_R = \mathbf{f}_R(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_\Sigma, \mathbf{w}_\Sigma, \boldsymbol{\varrho}) \\ \Leftrightarrow \\ \begin{bmatrix} {}^i\dot{\mathbf{p}}_{o/i}^i \\ \Xi(\dot{\mathbf{R}}_{o/i}) \\ {}^o\dot{\mathbf{v}}_{o/i}^o \\ {}^o\dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{o/i}^\top \mathbf{v}_{o/i}^o \\ \Xi(-[\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o]_\times \mathbf{R}_{o/i}) \\ \frac{1}{m}\mathbf{f}_{\Sigma^*}^o(\mathbf{x}_\Sigma(\mathbf{x}_R), \mathbf{u}_\Sigma, \mathbf{w}_\Sigma, \boldsymbol{\varrho}) + \mathbf{R}_{o/i}\mathbf{g}^i - [\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o]_\times \mathbf{v}_{o/i}^o \\ (\mathbf{I}^o)^{-1}\left(\mathbf{m}_\Sigma^o(\mathbf{x}_\Sigma(\mathbf{x}_R), \mathbf{u}_\Sigma, \mathbf{w}_\Sigma, \boldsymbol{\varrho}) - [\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o]_\times \mathbf{I}^o \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o\right) \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}_R(t_0) = \mathbf{x}_{R_0} \end{cases} \quad (3.28)$$

avec

$$\mathbf{x}_R = \left[ (\mathbf{p}_{o/i}^i)^\top \quad \Xi(\mathbf{R}_{o/i})^\top \quad (\mathbf{v}_{o/i}^o)^\top \quad (\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o)^\top \right]^\top \in \mathbb{R}^{18} \quad (3.29)$$

où la fonction  $\mathbf{v} = \Xi(\mathbf{M})$  transforme une matrice  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{p \times q}$  en un vecteur colonne  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{pq}$ .



Les trois systèmes  $\mathcal{S}_\Phi$ ,  $\mathcal{S}_q$  et  $\mathcal{S}_R$  présentent chacun des avantages et des désavantages. Par exemple, le système  $\mathcal{S}_\Phi$  est le seul système utilisant une représentation minimale de la position angulaire du repère  $\mathcal{R}_o$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_i$ , mais comporte le désavantage de posséder une singularité à  $\theta = \pm 90^\circ$  en raison du dénominateur  $\cos \theta$  dans (2.6). À son tour, le système  $\mathcal{S}_q$  ne comporte aucune singularité, mais demande de maintenir la contrainte d'égalité  $\mathbf{q}_{o/i}^\top \mathbf{q}_{o/i} = 1$  reliée à la norme unitaire du vecteur quaternion défini en (C.20). Enfin, le système  $\mathcal{S}_R$  ne comporte aucune singularité tout comme  $\mathcal{S}_q$ , mais demande cette fois de maintenir six contraintes d'égalité reliées à l'orthogonalité de la matrice de rotation  $\mathbf{R}_{o/i}$  définie en (C.16). On précise que tous ces systèmes modélisent la même dynamique du MAVION.

On note également que le nombre de contraintes d'égalité, demandant d'être maintenues dans le processus d'intégration numérique de ces modèles d'état, correspond exactement au nombre d'ordres de grandeur dépassant l'ordre de la représentation minimale. De fait, la représentation angulaire d'un corps solide à 6 DDL possède un ordre minimal de 3, soit un ordre pour chacun des trois angles directeurs nécessaires afin de positionner de manière arbitraire dans l'espace un tel solide. Ainsi, pour le vecteur des quaternions défini dans  $\mathbb{H} \sim \mathbb{R}^4$ , il y a  $4 - 3 = 1$  contrainte d'égalité. Puis, pour la matrice de rotation définie dans  $\mathbb{R}^{3 \times 3} \sim \mathbb{R}^9$ , il y a  $9 - 3 = 6$  contraintes d'égalité. Ces contraintes d'égalité doivent être prises en compte lors de la linéarisation des systèmes  $\mathcal{S}_q$  et  $\mathcal{S}_R$  afin d'obtenir des modèles d'état linéarisés possédant une représentation minimale de l'attitude.

Enfin, on précise que le tenseur d'inertie du MAVION exprimé dans  $\mathcal{R}_o$  peut être défini avec seulement trois paramètres tels que  $\mathbf{I}^o = \text{diag}([I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}]) \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}$ , puisque le MAVION comporte deux plans de symétrie qui sont géométriques, massiques et propulsifs. Le premier plan de symétrie est situé dans le plan longitudinal  $\mathbf{x}_o$ - $O_o$ - $\mathbf{z}_o$  et le second plan de symétrie est situé dans le plan directionnel  $\mathbf{x}_o$ - $O_o$ - $\mathbf{y}_o$ . En effet, la  $\phi$ -théorie de Lustosa utilisée afin de modéliser le MAVION dans ce chapitre pose l'hypothèse que le profil alaire de ce dernier est symétrique. Il en est de même pour le profil des élevons qui est dans les faits découpé à l'intérieur même du profil de l'aile<sup>3.8</sup>.

### 3.5.2 Dynamique des actionneurs : moteurs et élevons

Dans cette section, on s'intéresse spécifiquement à la modélisation dynamique des actionneurs. Deux types d'actionneurs sont présents sur le MAVION : les moteurs et les élevons.

---

<sup>3.8.</sup> De fait, le MAVION ne possède pas un profil alaire symétrique. Il utilise un profil MH 45 (cf. figure E.1) dont le 2/3 constitue la partie fixe de l'aile et l'autre 1/3 est utilisé afin d'y découper les élevons [8].

L'objectif dans la modélisation des actionneurs est de considérer le *décalage dynamique* qui existe entre, par exemple, une commande  $\omega_{1c}$  envoyée au moteur gauche du MAVION par le système de régulation  $\mathcal{C}$  et la vraie vitesse  $\omega_1$  de l'hélice atteinte au moment de l'envoi de la commande. Puisqu'un actionneur constitue un système dynamique à part entière, il est donc généralement nécessaire de les asservir afin d'obtenir des garanties sur ses performances (temps de réponse, dépassement, ordre de la réponse, etc.). À cet effet, la modélisation des actionneurs présentée dans cette section tient pour acquis que ces systèmes dynamiques ont déjà été asservis. En d'autres mots, ils opèrent déjà en boucle fermée de manière stable (cf. figure 2.4) : par exemple, on sait que  $\omega_1 \rightarrow \omega_{1c}$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

Ainsi, chaque moteur associé à sa vitesse angulaire  $\omega_k$  peut être modélisé par le système dynamique suivant :

$$\mathcal{S}_{\omega_k}(\tau_\omega) := \begin{cases} \dot{\omega}_k = f_\omega(\omega_k, \omega_{k_c}, \tau_\omega) = \frac{1}{\tau_\omega}(\omega_{k_c} - \omega_k) \\ \omega_k(t_0) = \omega_{k_0} \end{cases} \quad (3.30)$$

avec  $x_{\omega_k} = \omega_k$ ,  $u_{\omega_k} = \omega_{k_c}$ ,  $w_{\omega_k} = \emptyset$  et  $\tau_\omega \in \mathbb{R}_+^*$  est la constante de temps du modèle dynamique linéaire de premier ordre des moteurs.

Pareillement, on peut modéliser la dynamique associée à la déflexion angulaire  $\delta_k$  de chaque élévon comme suit :

$$\mathcal{S}_{\delta_k}(\tau_\delta) := \begin{cases} \dot{\delta}_k = f_\delta(\delta_k, \delta_{k_c}, \tau_\delta) = \frac{1}{\tau_\delta}(\delta_{k_c} - \delta_k) \\ \delta_k(t_0) = \delta_{k_0} \end{cases} \quad (3.31)$$

avec  $x_{\delta_k} = \delta_k$ ,  $u_{\delta_k} = \delta_{k_c}$ ,  $w_{\delta_k} = \emptyset$  et  $\tau_\delta \in \mathbb{R}_+^*$  est la constante de temps du modèle dynamique linéaire de premier ordre des élévons.

En somme, il est désormais possible d'augmenter n'importe quel des systèmes dynamiques du MAVION obtenus à la section précédente, en y ajoutant les systèmes dynamiques des moteurs  $\mathcal{S}_{\omega_k}$  et des élévons  $\mathcal{S}_{\delta_k}$ . Ainsi, en plus de contenir les variables d'état définies dans ces systèmes respectifs, un modèle d'état augmenté de la dynamique des quatre actionneurs du MAVION comprend les variables supplémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\omega\delta} &= [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \delta_1 \quad \delta_2]^\top \\ \mathbf{u}_{\omega\delta} &= [\omega_{1c} \quad \omega_{2c} \quad \delta_{1c} \quad \delta_{2c}]^\top \\ \mathbf{w}_{\omega\delta} &= \emptyset \end{aligned} \quad (3.32)$$

Aucune entrée perturbatrice  $\mathbf{w}_{\omega\delta}$  n'est considérée dans la modélisation dynamique des systèmes d'actionneurs. On constate également que  $\mathbf{u}_{\omega\delta} = \mathbf{u}$ , soit les entrées commandables du MAVION qui ont été définies en (3.1).

La modélisation dynamique des actionneurs permet de considérer explicitement leur dynamique, c.-à-d. le(s) pôle(s) associé(s) à chaque actionneur, au moment d'effectuer la synthèse du système de commande  $\mathcal{C}$ . Cela permet donc d'imposer des contraintes supplémentaires sur la recherche des paramètres libres  $\boldsymbol{\kappa}$  de  $\mathcal{C}$  et d'augmenter les chances d'obtenir un système de commande fonctionnel une fois implémenté sur le vrai système physique. Entre autres, cela permet d'éviter que les actionneurs saturent en raison de commandes  $\mathbf{u}_{\omega\delta}$  variant trop rapidement pour la dynamique des états  $\mathbf{x}_{\omega\delta}$  associés à ces actionneurs.

### 3.5.3 Dynamique complète du convertible

On peut désormais définir le modèle d'état complet du MAVION incluant la dynamique de son corps rigide définie par l'un ou l'autre des systèmes  $\mathcal{S}_\Phi$ ,  $\mathcal{S}_q$  et  $\mathcal{S}_R$ ; et les dynamiques de ses actionneurs définies par les systèmes  $\mathcal{S}_{\omega_k}$  et  $\mathcal{S}_{\delta_k}$  :

$$\mathcal{S}_m(\boldsymbol{\rho}_m) := \left\{ \mathcal{S}_\Phi(\boldsymbol{\rho}_m) \vee \mathcal{S}_q(\boldsymbol{\rho}_m) \vee \mathcal{S}_R(\boldsymbol{\rho}_m) \right\} \wedge \bigcup_{k=1}^2 \mathcal{S}_{\omega_k}(\boldsymbol{\rho}_m) \wedge \bigcup_{k=1}^2 \mathcal{S}_{\delta_k}(\boldsymbol{\rho}_m) \quad (3.33)$$

avec les vecteurs de la représentation d'état donnés par :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_m &:= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\Phi \vee \mathbf{x}_q \vee \mathbf{x}_R \\ \mathbf{x}_{\omega\delta} \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_m &:= \mathbf{u}_{\omega\delta} \\ \mathbf{w}_m &:= \mathbf{w}_\Sigma \end{aligned} \quad (3.34)$$

où le symbole  $\vee$  représente un **OU** logique et le symbole  $\wedge$  représente un **ET** logique. Enfin, tous les paramètres scalaires, intervenant dans le système dynamique complet du MAVION, composent le vecteur  $\boldsymbol{\rho}_m$ . On retient l'indice  $m$  comme dans MAVION.

## CHAPITRE 4 ANALYSE DU MODÈLE DYNAMIQUE LONGITUDINAL

*Les choses paraissent simples jusqu'à  
ce qu'on commence à les analyser.*  
— Audrey Niffenegger

Ce chapitre présente l'analyse dynamique longitudinale du modèle du MAVION présenté au chapitre 3 et développé à l'aide de la  $\phi$ -théorie de Lustosa. On retient le modèle simplifié de la dynamique longitudinale, puisque l'application présentée au chapitre 5 consiste en la conception d'un autopilote longitudinal. Ce modèle est toutefois complexifié en y ajoutant les saturations statiques et dynamiques des actionneurs. Il est à noter que toutes les études subséquentes présentées dans ce mémoire découlent directement de ce nouveau modèle d'état. L'annexe F présente des analyses supplémentaires du modèle complet. On y retrouve l'analyse détaillée de deux cas de vol particuliers : le vol longitudinal et le virage coordonné. De plus, on y présente les équations linéarisées du modèle complet dans leur forme matricielle.

### TRAVAUX ORIGINAUX

L'ouverture du chapitre 4 marque le début des travaux originaux de l'auteur de ce mémoire. De fait, ce qui est présenté au chapitre 3 et aux annexes D, E et F consiste en une validation indépendante des travaux effectués par Lustosa dans [8] et [9]. Ainsi, le reste de ce manuscrit se consacre entièrement aux nouveaux travaux originaux.

#### 4.1 Modèle d'état

Le modèle d'état complet de la dynamique longitudinale augmentée des dynamiques de l'altitude et des actionneurs est défini comme suit :

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\varrho}) := \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\varrho}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

où

$$\begin{cases} \mathbf{x} = [u \ w \ q \ \theta \ h \ \omega \ \delta]^\top \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{u} = [\omega_c \ \delta_c]^\top \in \mathbb{R}^m \\ \mathbf{w} = [w_n \ w_d]^\top \in \mathbb{R}^v \end{cases} \quad (4.2)$$

sont les variables du modèle d'état définissant le système  $\mathcal{S}$  avec  $n = 7$ ,  $m = 2$  et  $v = 2$ . La fonction vectorielle  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$  définissant l'évolution temporelle de l'état  $\mathbf{x}$ , soit  $\dot{\mathbf{x}}$ , est définie :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\rho}) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{u} = f_1(\dots) = -wq - g_0 \sin \theta - \frac{\rho_0 S \phi_{11}^{fv}}{2m} \eta u_a + \left( \frac{2k_t}{m} - \frac{S \phi_{11}^{fv} k_t}{2m S_p} \right) \omega^2 + \frac{\rho_0 S \phi_{11}^{fv} \xi_{f_y}}{2m} \eta w_a \delta \\ \dot{w} = f_2(\dots) = uq + g_0 \cos \theta - \frac{\rho_0 S}{2m} \left( \phi_{33}^{fv} w_a + c \phi_{32}^{f\omega} q \right) \eta - \frac{\rho_0 S \phi_{33}^{fv} \xi_{f_y}}{2m} \eta u_a \delta - \frac{S \phi_{33}^{fv} \xi_{f_y} k_t}{2m S_p} \omega^2 \delta \\ \dot{q} = f_3(\dots) = -\frac{\rho_0 S c}{2I_{yy}} \left( \phi_{23}^{mv} w_a + c \phi_{22}^{m\omega} q \right) \eta - \frac{\rho_0 S c \phi_{23}^{mv} \xi_{m_y}}{2I_{yy}} \eta u_a \delta - \frac{S c \phi_{23}^{mv} \xi_{m_y} k_t}{2I_{yy} S_p} \omega^2 \delta \\ \dot{\theta} = f_4(\dots) = q \\ \dot{h} = f_5(\dots) = -v_d = u \sin \theta - w \cos \theta \\ \dot{\omega} = f_6(\dots) = \frac{1}{\tau_\omega} (\omega_c - \omega) \\ \dot{\delta} = f_7(\dots) = \frac{1}{\tau_\delta} (\delta_c - \delta) \end{cases} \quad (4.3)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \sqrt{u_a^2 + w_a^2} \\ u_a = u - w_n \cos \theta + w_d \sin \theta \\ w_a = w - w_n \sin \theta - w_d \cos \theta \\ \phi_{11}^{fv} = C_{D0} \\ \phi_{33}^{fv} = C_{L\alpha} + C_{D0} \\ \phi_{23}^{mv} = -r_{ca} (C_{L\alpha} + C_{D0}) / c \\ \phi_{32}^{f\omega} = \phi_{23}^{mv} \\ \phi_{22}^{m\omega} = -C_{m_q} / 2 \end{array} \right. \quad (4.4)$$

et la valeur numérique des paramètres contenus dans  $\boldsymbol{\rho}$  est présentée au tableau 5.2. On rappelle que la dynamique du système présenté en (4.3) est complètement découplée de l'altitude  $h$  en raison de l'hypothèse **H4** (cf. page 10).

## 4.2 Saturations des actionneurs

Plusieurs non-linéarités comprises dans le système (4.3) résultent notamment du fait que toute force (ou moment) aérodynamique  $F_a$  (ou  $M_a$ ) est proportionnelle au carré de la vitesse aérodynamique  $V_a$  :  $F_a \propto V_a^2$  (ou  $M_a \propto V_a^2$ ). Or, d'autres composantes non linéaires interviennent également dans la modélisation retenue de l'aéronef convertible. Il s'agit des

saturation statiques et dynamiques des actionneurs (moteurs et élevons).

Dans ce mémoire, une saturation statique est définie comme étant la saturation appliquée à une borne (inférieure  $x_{sat}^-$  ou supérieure  $x_{sat}^+$ ) d'un état  $x$ , tandis que la saturation dynamique est appliquée à la dérivée temporelle de l'état  $x$ , soit  $\dot{x}$ . On précise que la saturation des actionneurs concerne l'état ( $\omega$  ou  $\delta$ ) et non l'entrée commandable ( $\omega_c$  ou  $\delta_c$ ) du système dynamique associé à chacun des actionneurs.

#### 4.2.1 Moteurs

Les moteurs possèdent les saturations statiques suivantes :

$$\omega_{sat}(\omega) = \begin{cases} \omega_{sat}^- & \text{si } \omega < \omega_{sat}^- \\ \omega & \text{si } \omega_{sat}^- \leq \omega \leq \omega_{sat}^+ \\ \omega_{sat}^+ & \text{si } \omega > \omega_{sat}^+ \end{cases} \quad (4.5)$$

et les saturations dynamiques suivantes :

$$\dot{\omega}_{sat}(\dot{\omega}) = \begin{cases} \dot{\omega}_{sat}^- & \text{si } \dot{\omega} < \dot{\omega}_{sat}^- \\ \dot{\omega} & \text{si } \dot{\omega}_{sat}^- \leq \dot{\omega} \leq \dot{\omega}_{sat}^+ \\ \dot{\omega}_{sat}^+ & \text{si } \dot{\omega} > \dot{\omega}_{sat}^+ \end{cases} \quad (4.6)$$

On explicite les domaines de l'état  $\omega$  et de sa dérivée  $\dot{\omega}$  afin de considérer ces saturations :

$$\begin{aligned} \omega &\in \{ \omega \in \mathbb{R} \mid \omega_{sat}^- \leq \omega \leq \omega_{sat}^+ \} \\ \dot{\omega} &\in \{ \dot{\omega} \in \mathbb{R} \mid \dot{\omega}_{sat}^- \leq \dot{\omega} \leq \dot{\omega}_{sat}^+ \} \end{aligned} \quad (4.7)$$

où les valeurs numériques de  $\omega_{sat}^-$ ,  $\omega_{sat}^+$ ,  $\dot{\omega}_{sat}^-$  et  $\dot{\omega}_{sat}^+$  sont présentées au tableau 5.2.

#### 4.2.2 Élevons

Les élevons possèdent les saturations statiques suivantes :

$$\delta_{sat}(\delta) = \begin{cases} \delta_{sat}^- & \text{si } \delta < \delta_{sat}^- \\ \delta & \text{si } \delta_{sat}^- \leq \delta \leq \delta_{sat}^+ \\ \delta_{sat}^+ & \text{si } \delta > \delta_{sat}^+ \end{cases} \quad (4.8)$$

et les saturations dynamiques suivantes :

$$\dot{\delta}_{sat}(\dot{\delta}) = \begin{cases} \dot{\delta}_{sat}^- & \text{si } \dot{\delta} < \dot{\delta}_{sat}^- \\ \dot{\delta} & \text{si } \dot{\delta}_{sat}^- \leq \dot{\delta} \leq \dot{\delta}_{sat}^+ \\ \dot{\delta}_{sat}^+ & \text{si } \dot{\delta} > \dot{\delta}_{sat}^+ \end{cases} . \quad (4.9)$$

On explicite les domaines de l'état  $\delta$  et de sa dérivée  $\dot{\delta}$  afin de considérer ces saturations :

$$\begin{aligned} \delta &\in \{ \delta \in \mathbb{R} \mid \delta_{sat}^- \leq \delta \leq \delta_{sat}^+ \} \\ \dot{\delta} &\in \{ \dot{\delta} \in \mathbb{R} \mid \dot{\delta}_{sat}^- \leq \dot{\delta} \leq \dot{\delta}_{sat}^+ \} \end{aligned} \quad (4.10)$$

où les valeurs numériques de  $\delta_{sat}^-$ ,  $\delta_{sat}^+$ ,  $\dot{\delta}_{sat}^-$  et  $\dot{\delta}_{sat}^+$  sont présentées au tableau 5.2.

### 4.3 Incertitudes paramétriques

Dans la science du guidage, de la navigation et de la commande (GNC), l'utilisation d'un modèle mathématique simplifié est souvent préférée à celle d'un modèle complexe plus élaboré. La raison principale de ce choix est que le travail de l'ingénieur-automaticien consiste à concevoir des algorithmes de GNC qui sont simples, intuitifs et performants (notamment en matière de temps d'exécution sur le matériel informatique). Dans la grande majorité des cas, il est possible d'utiliser un modèle mathématique simplifié qui capture tout de même les comportements dynamiques les plus importants d'un système. Ce sont alors ces modèles simplifiés qui sont utilisés dans la synthèse des algorithmes de GNC afin de réduire la charge de travail de l'automaticien.

Toutefois, il peut arriver que le comportement d'un système dynamique soit sensible à la variation de certains paramètres utilisés dans la modélisation mathématique dudit système. Dans la pratique, la variation d'un paramètre peut être attribuée à l'incertitude associée à la mesure ou l'estimation d'un paramètre physique. Afin de pallier le problème de la sensibilité paramétrique, une solution possible est de considérer une famille de plusieurs modèles discrets où chaque modèle ajouté dans la famille possède un jeu unique de paramètres. Par exemple, pour un modèle quelconque paramétré selon le paramètre physique  $p$  dont la précision de mesure est connue à  $\pm \delta p$ , il serait judicieux de constituer une famille de trois modèles évalués chacun à  $p - \delta p$ ,  $p$  et  $p + \delta p$ . Ces trois modèles forment alors une famille de modèles qui inclut le cas nominal ( $p$ ) et ses cas incertains extrêmes ( $p - \delta p$  et  $p + \delta p$ ).

Ainsi, on choisit d'étudier la sensibilité des paramètres  $r_{ca}$  et  $C_{m_q}$  issus du modèle d'état longitudinal défini en (4.3) et (4.4). Ces paramètres sont judicieusement choisis pour les deux

raisons suivantes :

1. Tel qu'indiqué en (4.3) et (4.4), ce sont les deux seuls paramètres du modèle intervenant strictement dans les coefficients aérodynamiques de moment en tangage  $\phi_{23}^{mv}$  et  $\phi_{22}^{m\omega}$  qui dictent la dynamique de la variation de la vitesse de tangage, soit  $\dot{q}$  ;
2. L'analyse du système à résoudre pour le vol longitudinal en croisière donné en (F.16) montre que ces deux paramètres n'interviennent pas dans les courbes d'équilibre du modèle d'état longitudinal<sup>4.1</sup> – ce qui simplifie l'analyse de l'effet des incertitudes paramétriques.

Pareillement à la méthode utilisée par [18], on choisit de considérer des incertitudes de l'ordre de  $\pm 10$  % sur les paramètres incertains  $r_{ca}$  et  $C_{mq}$ . Le domaine paramétrique incertain est constitué de la famille de modèles incertains qui inclut le cas nominal et les cas incertains extrêmes. D'ailleurs, ce domaine paramétrique incertain est considéré dans la conception du système de commandes de vol présentée au chapitre 5. Une illustration de ce domaine incertain est présentée à la figure 4.1.

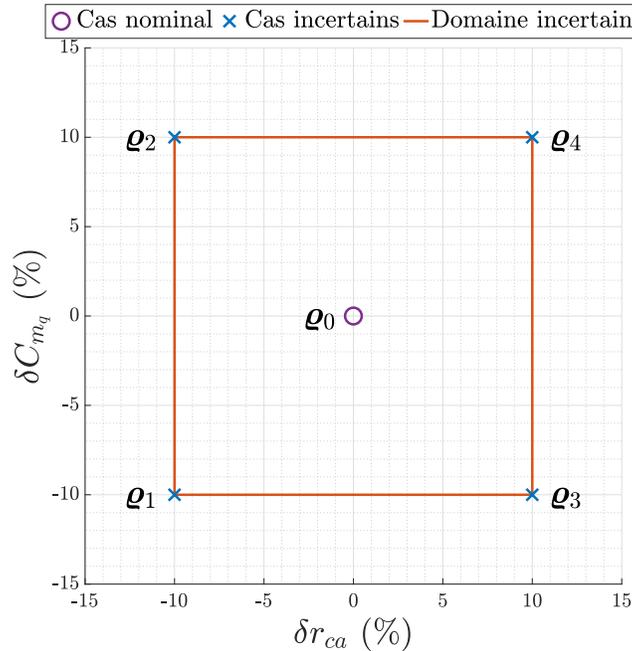


Figure 4.1 Incertitudes paramétriques considérées dans la synthèse des contrôleurs

L'analyse de la figure 4.1 montre que cinq configurations paramétriques différentes sont retenues afin d'effectuer la synthèse linéaire multimodèle au chapitre 5. On assemble ces cinq

4.1. Le fait que la solution de l'équilibre longitudinal du modèle donné par la  $\phi$ -théorie de Lustosa soit indépendante de la position relative entre le CA et le CM, soit  $r_{ca}$ , est complètement contre-intuitif d'un point de vue physique. Cet aspect de la  $\phi$ -théorie est présentement à l'étude.

configurations paramétriques dans  $P$  avec  $N_o = 5$  – cf. équation (2.25) :

$$P := \bigcup_{k=0}^4 \{\boldsymbol{q}_k\} \quad (4.11)$$

où les différents jeux de paramètres  $\boldsymbol{q}_k$  contenant les différentes valeurs incertaines  $r_{ca} \pm \delta r_{ca}$  et  $C_{m_q} \pm \delta C_{m_q}$  sont définis à la figure 4.1. On précise que tous les autres paramètres compris dans  $\boldsymbol{q}_k$  sont pris à leur valeur nominale comme indiqué dans le tableau 5.2.

#### 4.4 Équilibre statique du vol de croisière

Les variables à l'équilibre du système  $\mathcal{S}$  défini en (4.1) sont :

$$\boldsymbol{\vartheta}_{e_k}(\boldsymbol{q}_k) := \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{e_k}(\boldsymbol{q}_k) \\ \mathbf{u}_{e_k}(\boldsymbol{q}_k) \\ \mathbf{w}_{e_k}(\boldsymbol{q}_k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{11} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathbf{x}_{e_k} = [u_{e_k} & w_{e_k} & q_{e_k} & \theta_{e_k} & h_{e_k} & \omega_{e_k} & \delta_{e_k}]^\top \in \mathbb{R}^7 \\ \mathbf{u}_{e_k} = [\omega_{c_{e_k}} & \delta_{c_{e_k}}]^\top \in \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{w}_{e_k} = [w_{n_{e_k}} & w_{d_{e_k}}]^\top \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (4.12)$$

où l'on explicite que la solution du point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_k}$  dépend de la valeur associée à son vecteur paramètre  $\boldsymbol{q}_k$  dont chacun a été défini à la figure 4.1.

On reprend alors la même définition du point d'équilibre associé au vol de croisière qui est présentée à l'annexe F.1.1, en ajoutant cette fois les implications issues de l'ajout de l'altitude dans le modèle d'état, celui des actionneurs et la considération du vecteur vent comme entrée :

- **Modélisation atmosphérique omise** : cela implique qu'on peut prendre n'importe quelle valeur pour  $h_e$ , puisque cet état n'intervient absolument pas dans le modèle – on prend donc  $h_e = 0$  ;
- **Dynamique des actionneurs découplée** : cela implique qu'on peut donner indépendamment les points d'équilibre des actionneurs, soit  $\omega_e = \omega_{c_e}$  et  $\delta_e = \delta_{c_e}$  ;
- **Aucun vent à l'équilibre** : cela implique que les deux composantes du vecteur vent sont nulles, soit  $w_{n_e} = w_{d_e} = 0$ .

En se rappelant que  $u_e = v_{n_e} \cos \theta_e$  et  $w_e = v_{n_e} \sin \theta_e$ , puisque  $v_{d_e} = 0$  – cf. équation (F.5) – on réécrit les variables d'équilibre en conservant strictement les termes non nuls :

$$\boldsymbol{\vartheta}_{e_k}(v_{n_{e_k}}, \theta_{e_k}, \omega_{e_k}, \delta_{e_k}) := \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{e_k}(v_{n_{e_k}}, \theta_{e_k}, \omega_{e_k}, \delta_{e_k}) \\ \mathbf{u}_{e_k}(\omega_{e_k}, \delta_{e_k}) \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{e_k} = [v_{n_{e_k}} \cos \theta_{e_k} & v_{n_{e_k}} \sin \theta_{e_k} & 0 & \theta_{e_k} & 0 & \omega_{e_k} & \delta_{e_k}]^\top \\ \mathbf{u}_{e_k} = [\omega_{e_k} & \delta_{e_k}]^\top \\ \mathbf{w}_{e_k} = [0 & 0]^\top \end{cases} \quad (4.14)$$

où la dépendance explicite au vecteur paramètre  $\boldsymbol{\varrho}_k$  des variables d'état et de leurs composantes est indiquée par l'indice  $k$ .

On constate alors que le point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_k}$  défini en (4.13) est fonction de quatre paramètres. Or, en se basant sur les résultats de l'annexe F.1.1, on sait que l'équilibre du vol longitudinal à 3 DDL fournit seulement trois équations d'équilibre qui sont  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  pour notre modèle d'état défini en (4.3). Il est donc nécessaire de poser un paramètre afin de paramétrer la solution de l'équilibre :

$$\sigma_{e_\ell} = v_{n_{e_\ell}} \quad (4.15)$$

où au lieu d'utiliser l'angle d'assiette  $\theta_e$  comme paramètre de la solution et comme il a été fait à l'annexe F.1.1, on choisit plutôt de paramétrer l'équilibre en fonction de la vitesse d'avancement  $v_{n_e}$ . On spécifie que ce choix est effectué puisqu'on utilisera la vitesse d'avancement horizontale  $v_n = \sigma$  comme paramètre de séquençage des gains  $\boldsymbol{\kappa}$  dans la conception de l'autopilote longitudinal présenté au chapitre 5. Ce choix semble plus logique, étant donné qu'on sait que la variation de la vitesse est directement proportionnelle à la somme des forces.

On peut donc réécrire le point d'équilibre défini initialement en (4.13) afin de tenir compte de cette nouvelle dépendance :

$$\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}(\sigma_{e_\ell}, \boldsymbol{\varrho}_k) = \boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}(v_{n_{e_\ell}}, \theta_{e_{k,\ell}}, \omega_{e_{k,\ell}}, \delta_{e_{k,\ell}}) \quad (4.16)$$

où l'on rappelle que l'indice  $k$  se rapporte aux cinq jeux de paramètres physiques définis dans P en (4.11). L'indice  $\ell$  est quant à lui associé aux  $N_\sigma$  configurations à l'équilibre particulières  $\sigma_{e_\ell}$  que l'on souhaite étudier. On précise également que  $\sigma_{e_\ell} = v_{n_{e_\ell}}$  ne dépend pas de l'indice  $k$ , puisque c'est le paramètre de la solution à l'équilibre. En d'autres mots, cette valeur est maintenue constante, peu importe la configuration paramétrique retenue. C'est plutôt la valeur des autres grandeurs à l'équilibre  $\theta_{e_{k,\ell}}$ ,  $\omega_{e_{k,\ell}}$  et  $\delta_{e_{k,\ell}}$  qui est fonction à la fois de la configuration paramétrique considérée  $\boldsymbol{\varrho}_k$  et du paramètre  $v_{n_{e_\ell}}$  de la solution d'équilibre.

Le système à l'équilibre est donc donné par :

$$\mathcal{S}_{e_k, \ell}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_k, \ell}) := \left\{ \dot{\mathbf{x}}_{e_k, \ell} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}_{e_k, \ell}, \mathbf{u}_{e_k, \ell}, \mathbf{w}_{e_k, \ell}, \boldsymbol{\varrho}_k) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_k, \ell}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{\vartheta}_{e_k, \ell}) \\ f_2(\boldsymbol{\vartheta}_{e_k, \ell}) \\ f_3(\boldsymbol{\vartheta}_{e_k, \ell}) \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{3 \times 1} \right\} \quad (4.17)$$

dont la solution pour  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_k, \ell}$  paramétrée en fonction de  $\theta_{e_k}$  est donnée en (F.21). Une alternative ad hoc afin d'obtenir la solution paramétrée plutôt en fonction de  $v_{n_{e_\ell}}$  est d'utiliser un tableau de correspondances (*lookup table* en anglais). Pour ce faire, on génère le tableau sur tout le domaine de  $\Theta_e^\dagger$  – cf. équation (F.9) – en prenant des valeurs discrètes pour  $\theta_{e_k}$  qui utilisent des intervalles de  $0.1^\circ$ . Puis, une fois le tableau construit avec les valeurs de  $v_{n_{e_\ell}}$ ,  $\theta_{e_k}$ ,  $\omega_{e_k}$  et  $\delta_{e_k}$  correspondantes, on décide d'en extraire par interpolation cubique (*spline* en anglais), 31 points d'équilibre distincts calculés pour chacun des jeux de paramètres  $\boldsymbol{\varrho}_k \in \mathbf{P}$  et le domaine de vitesses d'avancement suivants :

$$\mathbf{E} := \bigcup_{\ell=1}^{N_\sigma=31} \{\sigma_{e_\ell}\} = \{v_{n_{e_\ell}} \in \mathbb{N} \mid 0 \leq v_{n_{e_\ell}} \leq 30 \text{ m/s} \wedge \ell \in \mathbb{N}^* : 1 \leq \ell \leq 31\}. \quad (4.18)$$

De ce fait, l'ensemble  $\Theta_e$  comprenant tous les points d'équilibre considérés dans la résolution de (4.17) est défini comme suit :

$$\Theta_e := \bigcup_{k=0}^4 \bigcup_{\ell=1}^{31} \{\boldsymbol{\vartheta}_{e_k, \ell}(\boldsymbol{\varrho}_k, \sigma_{e_\ell})\}. \quad (4.19)$$

Au total, il y a donc  $5 \times 31 = 155$  points d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_k, \ell}$  différents issus des 31 différentes vitesses d'équilibre  $v_{n_{e_\ell}}$  calculées pour 5 jeux de paramètres  $\boldsymbol{\vartheta}_k$  différents<sup>4.2</sup>.

Ainsi, les courbes de l'équilibre longitudinal pour  $\theta_e$ ,  $\omega_e$  et  $\delta_e$  sont présentées selon l'évolution de  $v_{n_e}$  à la figure 4.2 pour les 155 points d'équilibre considérés  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_k, \ell} \in \Theta_e$ .

L'analyse de la figure 4.2 montre que le vecteur paramètre  $\boldsymbol{\varrho}_k$  n'influence pas les solutions d'équilibre pour les incertitudes paramétriques considérées (cf. section 4.3), soit  $\delta r_{ca}$  et  $\delta C_{m_q}$  (cf. figure 4.1). Chaque graphique comporte donc qu'une seule courbe bleue à défaut d'en avoir  $N_\varrho = 5$ . Toutefois, on remarque bien les  $N_\sigma = 31$  points discrets utilisés en mauve pour calculer les équilibres de chaque courbe bleue. On précise que les courbes bleues ont été interpolées afin d'obtenir un meilleur affichage. Ces mêmes courbes d'équilibre longitudinal sont également présentées en fonction de  $\theta_e$  à la figure F.1 et une illustration des différentes grandeurs intervenant dans cet équilibre est fournie à la figure F.2.

4.2. Cf. page 24 pour la définition des ensembles  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\Theta_e$ .

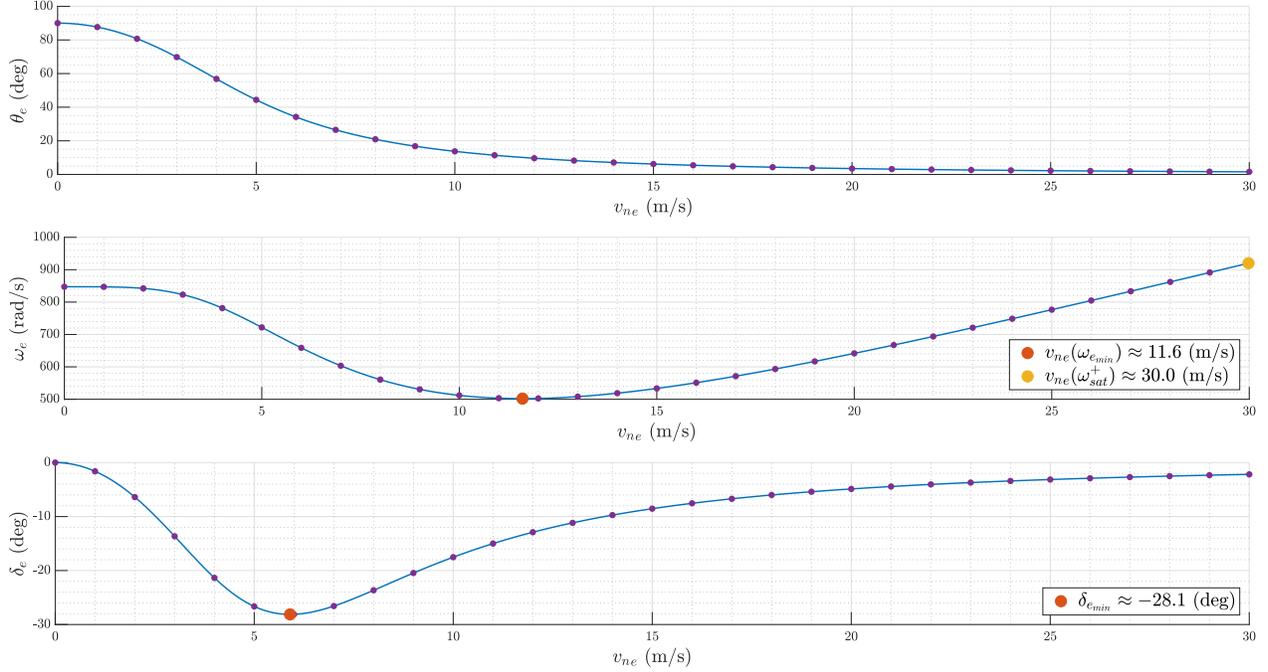


Figure 4.2 Courbes de l'équilibre longitudinal pour  $\theta_e$ ,  $\omega_e$  et  $\delta_e$  selon l'évolution de  $v_{ne}$

Enfin, quelques faits notables supplémentaires méritent d'être mentionnés concernant la figure 4.2. L'analyse de la courbe de  $\omega_e$  en fonction de  $v_{ne}$  révèle deux points caractéristiques importants de l'équilibre longitudinal. D'abord, on constate un minimum situé à  $v_{ne}(\omega_{e_{min}}) \approx 11.6$  m/s. Ce minimum peut être utilisé comme une première approximation<sup>4.3</sup> de la vitesse d'avancement optimale afin de maximiser l'autonomie du MAVION, puisqu'il correspond à la vitesse de rotation des moteurs minimum et donc une consommation d'énergie minimum. Le second point caractéristique situé sur cette courbe correspond à la vitesse d'avancement maximale du MAVION, soit  $v_{ne}(\omega_{sat}^+) \approx 30.0$  m/s. Cette vitesse d'avancement maximale est directement liée à la saturation maximale des moteurs dont la valeur est de  $\omega_{sat}^+ = 920$  rad/s. D'ailleurs, cela définit également le domaine d'opération du MAVION :  $V_a \leq 30$  m/s. De fait, même si l'équilibre a été calculé sans vent, on peut associer la valeur de vitesse inertielle  $v_{ne}$  à son équivalent en vitesse aérodynamique qui inclut la composante horizontale de vent  $w_{ne}$  telle que  $v_{ane} = v_{ne} - w_{ne}$ , puisqu'il s'agit d'un équilibre<sup>4.4</sup>. Un autre

4.3. En réalité, il existe deux vitesses d'avancement optimales selon si l'objectif est de maximiser le temps de vol ou la distance parcourue. De plus, ces vitesses optimales ne dépendent pas seulement de la vitesse de rotation des hélices, mais également de la finesse de l'aéronef qui est une caractéristique aérodynamique définissant le rapport entre les forces de portance et de traînée, faisant alors intervenir la vitesse aérodynamique.

4.4. En effet, un aéronef qui se déplace physiquement par rapport à  $\mathcal{R}_i$  à une vitesse  $v_{ane} = v_{ne}$  dans une masse d'air stationnaire ( $w_{ne} = 0$ ) aura le même angle d'assiette à l'équilibre  $\theta_e$  qu'un aéronef stationnaire par rapport à  $\mathcal{R}_i$  ( $v_{ne} = 0$ ), mais positionnée dans une masse d'air se déplaçant à une vitesse  $v_{ane} = -w_{ne}$ .

point caractéristique du MAVION est présent sur la courbe d'équilibre de  $\delta_e$  en fonction de  $v_{ne}$ . Il s'agit de la déflexion angulaire d'équilibre maximale en valeur absolue du MAVION ayant une valeur d'environ  $\delta_{e_{max}} = |\delta_{e_{min}}| \approx 28.1$  deg. Cette valeur est importante, puisqu'elle doit se situer en deçà de la valeur de saturation absolue de l'élevon située à  $\delta_{sat}^\pm = 45$  deg<sup>4.5</sup>. Enfin, on rappelle que les points d'équilibre pour le domaine de vitesses d'avancement négatives, soit  $-30 \leq v_{ne} \leq 0$  m/s peuvent être obtenus facilement grâce à la symétrie de l'équilibre longitudinal définie en (F.10).

#### 4.5 Linéarisation

La linéarisation du système longitudinal non linéaire du MAVION donné en (4.1) autour de tous les points d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}} \in \Theta_e$  définis en (4.19) permet d'obtenir les systèmes linéarisés :

$$\Delta\mathcal{S}_{k,\ell}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) := \begin{cases} \Delta\dot{\mathbf{x}}_{k,\ell} = \mathbf{A}_{k,\ell}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}})\Delta\mathbf{x}_{k,\ell} + \mathbf{B}_{u_{k,\ell}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}})\Delta\mathbf{u}_{k,\ell} + \mathbf{B}_{w_{k,\ell}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}})\Delta\mathbf{w}_{k,\ell} \\ \Delta\mathbf{x}_{k,\ell}(t_0) = \Delta\mathbf{x}_{0_{k,\ell}} \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\text{avec } \mathbf{A}_{k,\ell}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) := \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}}, \quad \mathbf{B}_{u_{k,\ell}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) := \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_{w_{k,\ell}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) := \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}} \quad (4.21)$$

où l'opération  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial(\cdot)}$  est définie en (C.6).

L'ensemble  $\Delta\mathcal{S}$  comprenant les 155 modèles linéarisés pour chacun des points d'équilibre compris dans  $\Theta_e$  est défini comme suit – cf. équation (2.38) :

$$\Delta\mathcal{S}(\Theta_e) := \bigcup_{k=0}^4 \bigcup_{\ell=1}^{31} \Delta\mathcal{S}_{k,\ell}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}). \quad (4.22)$$

Les expressions analytiques des matrices jacobiennes  $\mathbf{A}_{k,\ell}$ ,  $\mathbf{B}_{u_{k,\ell}}$  et  $\mathbf{B}_{w_{k,\ell}}$  étant relativement complexes, elles ne sont pas présentées dans ce mémoire. Deux avenues sont possibles afin de les obtenir. Dans un premier temps, on peut les calculer directement à partir du modèle d'état donné en (4.3), et valider le résultat en extrayant les composantes longitudinales du modèle d'état linéarisé complet du MAVION présenté en (F.45). On mentionne toutefois que ce dernier modèle ne comporte pas l'entrée de vent ni la modélisation des actionneurs.

---

4.5. Du point de vue aérodynamique, il existe également une plage d'opération optimale pour l'élevon se situant autour de  $|\delta_k| = \delta^* \approx 30^\circ$ . Au-delà de la valeur critique  $\delta^*$ , on approche une plage d'opération plus turbulente où la masse d'air circulant sur l'élevon finira par décrocher si l'on continue d'augmenter la valeur de déflexion. Le décrochage de l'élevon doit être à tout prix évité, puisque cela se traduit par une perte de contrôle totale des mouvements de roulis et de tangage qui en dépendent. La zone de décrochage complet se situe toutefois au-delà de  $\delta_{sat}^\pm$ .

L'ajout de la matrice  $\mathbf{B}_w$  peut toutefois être effectué facilement à l'aide du rappel concernant la dérivation vectorielle présenté à l'annexe C.5.3.

Enfin, on précise que contrairement à l'ensemble des points d'équilibre  $\Theta_e$  de dimension 155 qui comporte dans les faits seulement  $155/5 = 31$  points d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$  distincts en raison du choix des paramètres incertains qui n'affecte pas la solution de l'équilibre du système  $\mathcal{S}_{e_{k,\ell}}$ , l'ensemble de tous les systèmes linéarisés  $\Delta\mathcal{S}$  comprend bien 155 modèles linéaires  $\Delta\mathcal{S}_{e_{k,\ell}}$  distincts. En effet, les différents vecteurs paramètres  $\boldsymbol{\rho}_k$  intervenant dans l'évaluation des matrices jacobiniennes  $\mathbf{A}_{k,\ell}$ ,  $\mathbf{B}_{u_{k,\ell}}$  et  $\mathbf{B}_{w_{k,\ell}}$  expliquent cette distinction importante.

#### 4.6 Commandabilité

Dans cette section, on cherche à valider que le système dynamique  $\mathcal{S}$  donné en (4.3) est bien commandable, du moins, d'un point de vue linéaire. Ainsi, on vérifie le critère de commandabilité de Kalman qui est défini pour un système linéarisé  $\Delta\mathcal{S}$  autour d'un point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_e$ .

##### CRITÈRE DE COMMANDABILITÉ DE KALMAN

Une paire de matrices  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_u)$  issues de la linéarisation d'un système dynamique non linéaire où  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathbf{B}_u \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est dite commandable au sens linéaire si et seulement si la matrice de commandabilité  $\mathbf{M}_c$  :

$$\mathbf{M}_c(\mathbf{A}, \mathbf{B}_u) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_u & \mathbf{A}\mathbf{B}_u & \mathbf{A}^2\mathbf{B}_u & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}_u \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times nm} \quad (4.23)$$

est de rang plein – c.-à-d. que  $\text{rang}(\mathbf{M}_c) = n$ . △

Il s'avère que tous les modèles linéaires  $\Delta\mathcal{S}_{k,\ell}$  appartenant à la famille  $\Delta\mathcal{S}$  de modèles linéarisés autour des points d'équilibre de  $\Theta_e$  vérifient ce critère<sup>4.6</sup>.

Enfin, on précise que la propriété duale de l'observabilité est analysée à la section 5.3.4 une fois qu'a été défini le système de capteurs  $\Delta\mathcal{M}$  utilisé dans l'autopilote longitudinal.

#### 4.7 Dynamique naturelle : pôles et zéros invariants

Dans cette section, on analyse la dynamique *naturelle*<sup>4.7</sup> et linéarisée du MAVION. L'étude présentée porte précisément sur l'évolution des pôles et des zéros invariants naturels de chacun

4.6. Cette vérification a été effectuée directement sur MATLAB® à l'aide de la fonction `ctrb` uniquement pour le modèle utilisant la représentation des angles d'Euler.

4.7. La dynamique *naturelle* correspond à la dynamique d'un système non asservi : c.-à-d. sans la présence d'un système de régulation tel que celui illustré à la figure 2.2 qui permet d'obtenir une boucle fermée.

des modèles  $\Delta S_{k,\ell}$  linéarisés en fonction de la configuration de paramètres incertains  $\boldsymbol{\rho}_k$  et du paramètre d'équilibre  $\sigma_{e_\ell} = v_{n_{e_\ell}}$ . On présente maintenant un bref rappel de la définition des pôles et des zéros invariants dans lequel on précise également l'importance de chacun.

#### 4.7.1 Pôles

Le vecteur  $\boldsymbol{\lambda}_{k,\ell} \in \mathbb{C}^n$  comprenant les  $n$   $\lambda_{j_{k,\ell}} \in \mathbb{C}$  pôles (ou valeurs propres) d'un système linéarisé  $\Delta S_{k,\ell}$  autour de  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$  est défini comme suit :

$$\boldsymbol{\lambda}_{k,\ell} = \left[ \lambda_{1_{k,\ell}} \quad \lambda_{2_{k,\ell}} \quad \lambda_{3_{k,\ell}} \quad \cdots \quad \lambda_{n_{k,\ell}} \right]^\top \in \mathbb{C}^n. \quad (4.24)$$

On note que les pôles  $\lambda_{j_{k,\ell}}$  appartiennent à l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  :

$$\lambda_{j_{k,\ell}} = \sigma_{j_{k,\ell}} \pm i \omega_{j_{k,\ell}} \quad (4.25)$$

où  $\sigma_{j_{k,\ell}} \in \mathbb{R}$  et  $\omega_{j_{k,\ell}} \in \mathbb{R}$  sont respectivement les composantes réelle et imaginaire associées au pôle complexe  $\lambda_{j_{k,\ell}} \in \mathbb{C}$ . Les  $n$  pôles  $\lambda_{j_{k,\ell}}$  composant le vecteur des pôles  $\boldsymbol{\lambda}_{k,\ell}$  peuvent être calculés en solutionnant l'équation caractéristique du système  $\Delta S_{k,\ell}$  :

$$\det(\mathbf{A}_{k,\ell} - s\mathbf{I}_{n \times n}) = 0 \quad \text{où } s \in \mathbb{C} \quad (4.26)$$

qui peut également être développée sous la forme de son polynôme caractéristique en utilisant le théorème de D'Alembert<sup>4.8</sup> :

$$\det(\mathbf{A}_{k,\ell} - s\mathbf{I}_{n \times n}) = (\lambda_{1_{k,\ell}} - s)(\lambda_{2_{k,\ell}} - s)(\lambda_{3_{k,\ell}} - s) \cdots (\lambda_{n_{k,\ell}} - s) = 0 \quad (4.27)$$

faisant alors apparaître explicitement chaque pôle  $\lambda_{j_{k,\ell}}$  de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}_{k,\ell}$ .

Les pôles d'un système  $\Delta S_{k,\ell}$  sont importants, puisqu'ils dictent la dynamique naturelle du système. En d'autres mots, les valeurs scalaires  $\sigma_{j_{k,\ell}}$  et  $\omega_{j_{k,\ell}}$  du pôle  $\lambda_{j_{k,\ell}}$  influencent directement deux propriétés importantes d'un pôle : sa fréquence naturelle  $\omega_{n_{j_{k,\ell}}}$  et son taux d'amortissement  $\zeta_{j_{k,\ell}}$ . Ce sont les pôles qui peuvent donner une dynamique *rapide* ou *lente*<sup>4.9</sup>, *fortement amortie* ou *faiblement amortie*<sup>4.10</sup>, ou encore, *stable* ou *instable*<sup>4.11</sup> à un

4.8. Ce théorème est également connu sous l'appellation *théorème fondamental de l'algèbre*.

4.9. Pour deux pôles  $\lambda_{1_{k,\ell}}$  et  $\lambda_{2_{k,\ell}}$ , le premier pôle est dit plus rapide que le second si la fréquence naturelle  $\omega_{n_{j_{k,\ell}}}$  respective de chacun est telle que  $\omega_{n_{1_{k,\ell}}} > \omega_{n_{2_{k,\ell}}}$ .

4.10. Pour deux pôles  $\lambda_{1_{k,\ell}}$  et  $\lambda_{2_{k,\ell}}$ , le premier pôle est dit plus amorti que le second si le taux d'amortissement  $\zeta_{j_{n_{k,\ell}}}$  respectif de chacun est tel que  $\zeta_{1_{n_{k,\ell}}} > \zeta_{2_{n_{k,\ell}}}$ .

4.11. La dynamique associée à un pôle  $\lambda_{j_{k,\ell}}$  est dite *stable* si et seulement si la valeur associée à sa partie réelle est strictement négative :  $\sigma_{j_{k,\ell}} < 0$ . Dans le cas opposé,  $\sigma_{j_{k,\ell}} \geq 0$ , on dit que le pôle est *instable*.

système dynamique. Les performances naturelles du système en découlent directement. Cela est particulièrement vrai dans le *régime transitoire*<sup>4.12</sup>. On précise que toutes ces explications sont intrinsèquement rattachées aux systèmes linéaires du second ordre dont les deux pôles sont donnés par  $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$  où  $\sigma = -\zeta\omega_n$  et  $\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ .

#### 4.7.2 Zéros invariants

Les zéros invariants d'un système linéarisé  $\Delta S_{k,\ell}$  sont les valeurs de  $s \in \mathbb{C}$  faisant chuter le rang de la matrice de transmission  $\mathbf{T}_{k,\ell}(s)$  associée à un transfert particulier que l'on désire analyser. Par exemple, on peut s'intéresser au transfert  $\frac{\Delta \mathbf{z}_{k,\ell}}{\Delta \mathbf{u}_{k,\ell}}(s)$  représentant la dynamique entre le vecteur d'entrée  $\Delta \mathbf{u}_{k,\ell} \in \mathbb{R}^m$  et le vecteur de sortie  $\Delta \mathbf{z}_{k,\ell} \in \mathbb{R}^q$  du système linéarisé  $\Delta S_{k,\ell}$ . Pour le cas d'équilibre sans vent ( $\Delta \mathbf{w}_{k,\ell} = \mathbf{0}$ ), la sortie d'intérêt  $\Delta \mathbf{z}_{k,\ell}$  peut normalement être exprimée en fonction de l'état  $\Delta \mathbf{x}_{k,\ell}$ , de l'entrée commandable  $\Delta \mathbf{u}_{k,\ell}$ , du point d'équilibre associé  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$  et de la configuration paramétrique retenue  $\boldsymbol{\varrho}_k$  :

$$\Delta \mathbf{z}_{k,\ell} := \Delta \mathbf{g}_{k,\ell}(\Delta \mathbf{x}_{k,\ell}, \Delta \mathbf{u}_{k,\ell}, \boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\varrho}_k) \quad (4.28)$$

avec

$$\Delta \mathbf{g}_{k,\ell} := \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}} \Delta \mathbf{x}_{k,\ell} + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}} \Delta \mathbf{u}_{k,\ell} \quad (4.29)$$

tel que

$$\mathbf{E}_{k,\ell} := \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_{u_{k,\ell}} := \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}} \quad (4.30)$$

où  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^q$  est la fonction vectorielle donnant la sortie non linéaire  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^q$  à laquelle est associée sa forme  $\Delta \mathbf{z}_{k,\ell}$  linéarisée autour du point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$ .

La matrice de transmission  $\mathbf{T}_{k,\ell}(s)$  associée au transfert  $\frac{\Delta \mathbf{z}_{k,\ell}}{\Delta \mathbf{u}_{k,\ell}}(s)$  de  $\Delta S_{k,\ell}$  est donnée par :

$$\mathbf{T}_{k,\ell}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{k,\ell} - s\mathbf{I}_{n \times n} & \mathbf{B}_{u_{k,\ell}} \\ \mathbf{E}_{k,\ell} & \mathbf{F}_{u_{k,\ell}} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n+q) \times (n+m)} \quad \text{et} \quad s \in \mathbb{C}. \quad (4.31)$$

Ainsi, pour un vecteur  $\mathbf{v}_{k,\ell} \in \mathbb{C}^o$  :

$$\mathbf{v}_{k,\ell} = \begin{bmatrix} v_{1_{k,\ell}} & v_{2_{k,\ell}} & v_{3_{k,\ell}} & \cdots & v_{o_{k,\ell}} \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{C}^o \quad (4.32)$$

comprenant les  $o$   $v_{j_{k,\ell}} \in \mathbb{C}$  zéros invariants associés à la matrice de transmission  $\mathbf{T}_{k,\ell}(s)$  qui

---

4.12. Le *régime transitoire* d'un système *stable* correspond au délai entre le changement d'un état stable vers un nouvel état stable. Le *régime permanent* correspond quant à lui au maintien d'un état stable.

est elle-même associée à un point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$ , les zéros invariants le composant peuvent être calculés en solutionnant l'équation caractéristique de la matrice de transmission  $\mathbf{T}_{k,\ell}(s)$  :

$$\det\left(\mathbf{T}_{k,\ell}(s)\right) = 0 \quad \text{où } s \in \mathbb{C} \quad (4.33)$$

qui peut également être développée sous la forme de son polynôme caractéristique en utilisant le théorème de D'Alembert :

$$\det\left(\mathbf{T}_{k,\ell}(s)\right) = (v_{1_{k,\ell}} - s)(v_{2_{k,\ell}} - s)(v_{3_{k,\ell}} - s) \cdots (v_{o_{k,\ell}} - s) = 0 \quad (4.34)$$

faisant alors apparaître explicitement chaque zéro invariant  $v_{j_{k,\ell}}$  de la matrice de transmission  $\mathbf{T}_{k,\ell}(s)$  associée au transfert  $\frac{\Delta \mathbf{z}_{k,\ell}}{\Delta \mathbf{u}_{k,\ell}}(s)$  de  $\Delta S_{k,\ell}$ . On précise que les valeurs de  $s \in \mathbb{C}$  annulant le déterminant de la matrice de transmission  $\mathbf{T}_{k,\ell}(s)$  correspondent aux zéros invariants  $v_{j_{k,\ell}}$ , puisqu'ils font forcément chuter le rang de  $\mathbf{T}_{k,\ell}(s)$  en annulant son déterminant.

Les zéros invariants d'une matrice de transmission  $\mathbf{T}_{k,\ell}(s)$  sont importants, puisqu'ils dictent la dynamique naturelle du système. Notamment, ceux-ci jouent un rôle important dans la dynamique du régime transitoire du transfert  $\frac{\Delta \mathbf{z}_{k,\ell}}{\Delta \mathbf{u}_{k,\ell}}(s)$ . En particulier, un transfert *stable* comprenant un zéro invariant à partie réelle positive, soit un zéro *instable*, possède un *undershoot* dans sa phase transitoire entre deux états stables. Ce phénomène est d'ailleurs illustré à l'aide de la fonction de transfert (B.16) en BF dans l'exemple de la voiture munie de son régulateur de vitesse à l'annexe B.3.2.

### 4.7.3 Analyse de la dynamique naturelle

L'évolution des pôles et des zéros invariants selon  $v_{ne}$  de la dynamique naturelle de la famille de modèles longitudinaux linéarisés  $\Delta \mathcal{S}(\Theta_e)$  est présentée à la figure 4.3. On précise que les zéros invariants ont été tracés pour le transfert faisant intervenir la sortie  $\mathbf{g} = [v_n \ h]^\top$ . Ces deux sorties scalaires ont été choisies consciencieusement, puisqu'elles sont généralement les sorties que l'on cherche à réguler dans la conception d'un autopilote longitudinal<sup>4.13</sup>. Le calcul des  $n = 7$  pôles de  $\Delta S_{k,\ell}$  est effectué avec la fonction `EIG` de MATLAB<sup>®</sup>, tandis que celui des  $o = 2$  zéros invariants est fait avec la fonction `TZERO`.

Ainsi, la figure 4.3 comporte  $7 \times 5 \times 31 = 1085$  pôles  $\lambda_{j_{k,\ell}}$  et  $2 \times 5 \times 31 = 310$  zéros invariants  $v_{j_{k,\ell}}$ . Sur les 7 pôles d'un modèle linéarisé  $\Delta S_{k,\ell}$ , 2 pôles complexes conjugués rapides sont associés au mode *short period*, 2 pôles lents sont associés au mode phugoïde, 1 pôle est associé à la dynamique de l'altitude et 2 pôles sont associés aux actionneurs : un premier pour la

---

4.13. De fait, ce sont précisément ces sorties qui sont retenues dans la conception du système de commande présentée au chapitre 5.

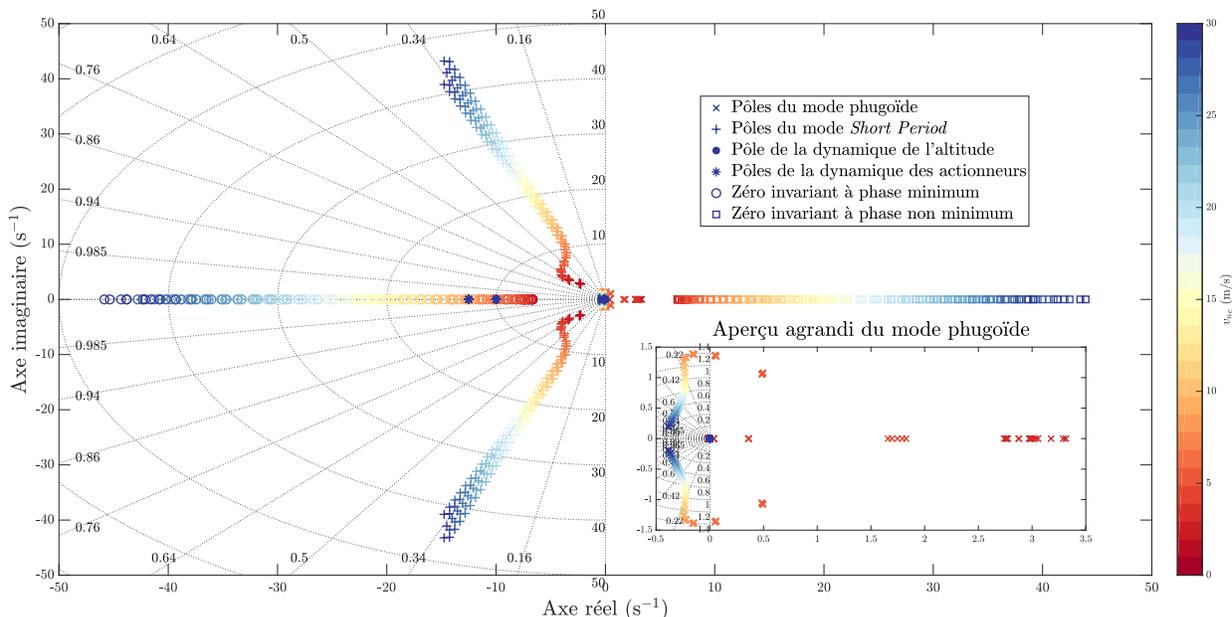


Figure 4.3 Évolution des pôles et zéros invariants selon  $v_{ne}$  de la dynamique naturelle de la famille de modèles longitudinaux incluant les jeux de paramètres nominal et incertains

dynamique des moteurs et un second pour la dynamique des élevons<sup>4.14</sup>. Sur les 2 zéros invariants, un premier est situé dans la partie réelle négative du plan complexe, tandis que le second est plutôt situé dans la partie positive du plan complexe : il y a donc un zéro à phase non minimum dans la dynamique naturelle du MAVION [72–75]. Cela signifie donc que les réponses temporelles en BF du système de commande contiendront un *undershoot* et que cet effet indésirable devra être analysé afin de s’assurer qu’il ne gêne pas l’atteinte des performances visées (cf. section 5.3.1).

De plus, on constate que les pôles et les zéros invariants sont peu sensibles aux incertitudes paramétriques. En effet, ces valeurs obtenues pour différentes configurations paramétriques  $\boldsymbol{\rho}_k$  montrent peu de variation. On peut donc faire l’hypothèse que la dynamique naturelle du MAVION n’est pas très sensible à l’incertitude associée aux paramètres  $r_{ca}$  et  $C_{mq}$ . Néanmoins, cette hypothèse doit être confirmée à l’aide de simulations effectuées sur le modèle non linéaire incluant le système d’asservissement – qui lui peut être sensible à ces paramètres. Cela justifie la pertinence d’effectuer des simulations de validation au chapitre 6.

Plus en détail maintenant, l’analyse de la figure 4.3 montre que l’amortissement naturel

4.14. On se rappelle que dans le modèle réduit à la dynamique longitudinale, la modélisation des deux moteurs  $\omega = -\omega_1 = \omega_2$  ainsi que celle des deux élevons  $\delta = \delta_1 = \delta_2$  est réduite à une seule dimension pour chaque actionneur étant donné la symétrie qui existe dans cette dynamique. Cela explique pourquoi il y a seulement 2 pôles associés aux actionneurs au lieu de 4 comme le nombre d’actionneurs présents sur le MAVION.

des pôles du mode *short period* n'est quasiment pas influencé par l'évolution de la vitesse d'équilibre  $v_{ne}$ . Toutefois, on remarque que celui-ci devient de plus en plus rapide au fur et à mesure qu'augmente cette grandeur. Ces pôles demeurent stables pour tout le domaine  $\Theta_e$ . L'analyse du mode phugoïde est encore plus intéressante. En effet, les pôles associés à ce mode sont d'abord instables et majoritairement réels pour de faibles vitesses, puis entre 6 et 7 m/s, ils deviennent stables et complexes conjugués avec un amortissement très faible. Puis, plus la vitesse d'avancement à l'équilibre augmente, plus ils deviennent amortis. Le pôle de l'altitude se retrouve à sa position triviale, soit à l'origine, correspondant à une dynamique d'intégration pure (altitude := intégration de la vitesse verticale). Les pôles des actionneurs ne sont également pas influencés par  $v_{ne}$ . Celui des moteurs est situé en  $-12.5$  et celui des élevons en  $-10$ . Ce sont des pôles stables relativement rapides. Enfin, les zéros invariants se comportent quasiment comme des zéros miroirs dont l'un est de valeur négative et l'autre de valeur positive. On remarque que les zéros invariants instables à basse vitesse possèdent une fréquence naturelle inférieure à celles des actionneurs : le phénomène de sous-dépassement devrait alors se manifester sur les réponses temporelles en BF.

De manière générale, on peut conclure que pour de faibles vitesses d'avancement, la dynamique longitudinale naturelle du MAVION est instable et lente. Puis, pour de grandes vitesses d'avancement, elle est stable et rapide. Cela est tout à fait logique, puisqu'une très basse vitesse correspond à une position quasi stationnaire avec  $\theta_e \approx 90^\circ$  tel un multicoptère qui possède une dynamique naturelle instable. Puis, une grande vitesse correspond à une position d'avancement avec  $\theta_e \rightarrow 0^\circ$  tel un avion qui possède une dynamique naturelle stable. De fait, on constate réellement le comportement hybride de ce type de drone convertible dans l'analyse de ses pôles. Tout cela consiste en une caractéristique intrinsèque à tout aéronef convertible tel que ceux présentés à l'annexe A. On précise que tous les pôles – hormis ceux des actionneurs – sont nuls pour une vitesse d'avancement  $v_{ne} = 0$  m/s. Cela renforce le lien qui existe entre la dynamique de la phase stationnaire du MAVION, un aéronef convertible à corps inclinable, et celle d'un multicoptère qui possède également des pôles nuls pour une vitesse d'avancement nulle.

Enfin, l'agrandissement des pôles du mode phugoïde présenté à la figure 4.3 montre que, pour des incréments constants de vitesses  $v_{ne}$ , le déplacement de ces pôles dans le plan complexe est beaucoup plus important pour de faibles vitesses que pour de grandes vitesses. Ainsi, cela démontre qu'il aurait été pertinent de considérer un domaine de vitesses d'avancement  $E$  défini en (4.18) non-uniforme où davantage de points sont considérés pour les faibles vitesses que pour les grandes vitesses. En d'autres mots, cela aurait permis de réduire le nombre de modèles linéarisés considérés dans les synthèses effectuées au chapitre 5, réduisant ainsi la complexité du problème numérique à solutionner.

## CHAPITRE 5 CONCEPTION D’UN AUTOPILOTE LONGITUDINAL

*Pour qu’une œuvre d’architecture soit  
belle, il faut que tous les éléments  
possèdent une justesse de situation, de  
dimensions, de formes et de couleurs.*

— Antoni Gaudí

Ce chapitre constitue la pièce maîtresse de ce mémoire. Tous les éléments présentés aux chapitres 2, 3 et 4 y sont mis à profit afin de concevoir un système de commande de vol robuste et autoséquenté pour le MAVION. Ce chapitre est divisé en quatre grandes sections.

D’abord, l’architecture retenue pour le système de commande est présentée à la section 5.1. Ensuite, la section 5.2 présente les deux méthodes de synthèses linéaires comparées dans cet ouvrage. La première méthode étudiée consiste en la synthèse LQR qui est reprise des travaux de Lustosa dans [8]. La seconde méthode abordée est la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée basée sur les travaux de [17] qui constitue la contribution principale. Puis, à la section 5.3, on présente la conception d’un autopilote longitudinal pour le MAVION basée sur les deux méthodes précédentes. Enfin, les résultats issus des synthèses LQR et  $\mathcal{H}_\infty$  sont présentés et comparés à la section 5.4.

### 5.1 Architecture généralisée du contrôleur

Cette section présente l’architecture de commande retenue pour le contrôleur du MAVION. Comme il a été dit à la section 2.4, on utilise une architecture classique linéaire composée d’un retour de sorties (ayant comme gain  $\mathbf{K}_\gamma$ ) augmenté d’une action intégrale (ayant comme gain  $\mathbf{K}_\xi$ ) sur l’erreur de régulation. Cette architecture a déjà fait ses preuves dans la littérature et elle constitue une excellente candidate afin de réguler un système dynamique autour d’une valeur d’équilibre.

Or, on souhaite réguler le système, non seulement autour d’un seul point d’équilibre particulier  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$ , mais aussi globalement pour tout le domaine d’opération considéré  $\Theta_e$ . Pour ce faire, on retient la solution consistant à séquencer de façon continue plusieurs contrôleurs linéaires  $\Delta\mathcal{C}_{k,\ell}$  en faisant varier les gains  $\mathbf{K}_\gamma$  et  $\mathbf{K}_\xi$  en fonction d’une variable de séquençement  $\sigma$ . Toutefois, puisque la nature de ces fonctions de séquençement est non linéaire, cela a pour effet de rendre l’architecture globale du contrôleur non linéaire.

Les sections 5.1.1, 5.1.2 et 5.1.3 présentent respectivement les formes non linéaire, à l’équilibre

et linéarisée de l'architecture généralisée du système de commande de vol utilisé pour le MAVION. L'architecture est dite *généralisée*, puisqu'elle peut être reprise et appliquée à plusieurs problèmes de régulation – notamment dans le milieu aérospatial qui utilise couramment ce type d'architecture de commandes.

### 5.1.1 Architecture non linéaire

On s'attarde maintenant à définir les différents systèmes  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{C}$  du problème de commande du MAVION tel qu'illustré précédemment à la figure 2.4.

Le système de capteurs  $\mathcal{M}$  est défini comme suit :

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{\varrho}) := \{\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\varrho}) \in \mathbb{R}^g\} \quad (5.1)$$

où  $\boldsymbol{\gamma}$  est le vecteur des sorties utilisées dans la loi de commande du contrôleur  $\mathcal{C}$ . L'objectif du problème de commande est défini par l'opérateur  $\mathcal{O}$  :

$$\mathcal{O} := \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^q\} \quad (5.2)$$

qui a pour seule tâche de produire le vecteur des références  $\mathbf{r}$  à suivre. La loi de commande  $\mathcal{C}$  est définie comme suit :

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\varrho}_0, \boldsymbol{\kappa}) := \begin{cases} \mathbf{z} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma}) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{e} = \mathbf{r} - \mathbf{z} \\ \sigma = \nu(\boldsymbol{\gamma}) \\ \mathbf{u} = \underbrace{\mathbf{K}_\xi(\sigma, \boldsymbol{\kappa}_\xi)}_{\text{gain I}} \boldsymbol{\xi} + \underbrace{\mathbf{K}_\gamma(\sigma, \boldsymbol{\kappa}_\gamma)}_{\text{gain PD}} \left( \boldsymbol{\gamma} - \underbrace{\boldsymbol{\gamma}_\S(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{0,\S}})}_{\text{ajustement pour le domaine symétrique}} \right) + \underbrace{\mathbf{u}_\S(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{0,\S}})}_{\text{ajustement pour le domaine symétrique}} \\ \boldsymbol{\xi}(t_0) = \boldsymbol{\xi}_0 \end{cases} \quad (5.3)$$

où

$$\begin{cases} \boldsymbol{\kappa} := [(\boldsymbol{\kappa}_\xi)^\top \quad (\boldsymbol{\kappa}_\gamma)^\top]^\top \\ \boldsymbol{\vartheta}_{e_{0,\S}} := \boldsymbol{\vartheta}_{e_{0,\S}}(\boldsymbol{\varrho}_0, \sigma_{e_\S}) \end{cases} \quad (5.4)$$

et  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur des sorties régulées dans le problème de commande,  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur de l'intégrale des erreurs de régulation  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^q$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$  est la variable de séquençement des gains ayant comme fonction non linéaire  $\nu \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{K}_\xi \in \mathbb{R}^{m \times q}$  est le gain matriciel associé à l'action intégrale de  $\mathcal{C}$ ,  $\boldsymbol{\kappa}_\xi$  est le vecteur contenant tous les paramètres ajustables de  $\mathbf{K}_\xi$ ,  $\mathbf{K}_\gamma \in \mathbb{R}^{m \times g}$  est le gain matriciel associé aux actions proportionnelle et dérivée de  $\mathcal{C}$ ,  $\boldsymbol{\kappa}_\gamma$  est

le vecteur contenant tous les paramètres ajustables de  $\mathbf{K}_\gamma$ ,  $\gamma_\S \in \mathbb{R}^g$  est la valeur à l'équilibre du vecteur de sorties au point de symétrie  $\sigma_{e_\S}$  du domaine de séquençement à l'équilibre E et  $\mathbf{u}_\S \in \mathbb{R}^m$  la valeur à l'équilibre du vecteur de commande à ce même point. Le point de symétrie du domaine d'équilibre est noté  $\vartheta_{e_{0,\S}}$ , puisqu'il est calculé avec la configuration paramétrique nominale  $\varrho_0$  et le point de symétrie  $\sigma_{e_\S}$  du domaine de séquençement à l'équilibre. On précise que ce dernier point est fonction de la dynamique du système étudié.

Étant donné que la solution de l'équilibre longitudinal comporte une symétrie en  $\sigma_{e_\S}$ , il est possible d'effectuer la synthèse des gains en considérant seulement les vitesses d'avancement positives contenues dans l'ensemble E tel que défini en (4.18). En procédant ainsi, on se retrouve à synthétiser des gains  $\mathbf{K}_\xi^+$  et  $\mathbf{K}_\gamma^+$  valides seulement pour le domaine des vitesses d'avancement positives ( $\sigma_{e_\ell} = v_{n_{e_\ell}} \geq 0$  m/s). Afin d'obtenir des gains  $\mathbf{K}_\xi$  et  $\mathbf{K}_\gamma$  valides sur l'entièreté du domaine de vol ( $-30 \leq v_n \leq 0$  m/s), il est nécessaire de procéder à un ajustement des gains  $\mathbf{K}_\xi^+$  et  $\mathbf{K}_\gamma^+$ .

Si on prend l'exemple du gain  $\mathbf{K}_\xi \in \mathbb{R}^{m \times q}$  séquencé en fonction de  $\sigma$ , on sait qu'il est responsable du lien qui relie l'intégrale de l'erreur  $\xi \in \mathbb{R}^q$  à son terme correspondant de commande  $\mathbf{u}_\xi = \mathbf{K}_\xi(\sigma)\xi$ . On peut donc dire que le gain  $\mathbf{K}_\xi$  est responsable du transfert  $\frac{\Delta \mathbf{u}_\xi}{\Delta \xi}$  linéarisé à la vitesse d'équilibre  $v_{n_e}$ . De plus, puisqu'il existe une symétrie sur le domaine de séquençement à l'équilibre en  $v_{n_{e_\S}} = \sigma_{e_\S}$ , on sait alors que chaque composante  $k_{\xi_{ij}}$  de  $\mathbf{K}_\xi$  calculée pour une vitesse d'équilibre négative  $v_{n_e}^- = \sigma_e < \sigma_{e_\S}$  sera forcément une fonction paire ( $\oplus$ ) ou impaire ( $\ominus$ ) de la même composante calculée pour une vitesse d'équilibre positive  $v_{n_e}^+ = \sigma_e > \sigma_{e_\S}$  si  $|v_{n_e}^-| = v_{n_e}^+$ . De fait, si la composante de gain  ${}^\oplus k_{\xi_{ij}}$  fait intervenir un transfert pair, alors on aura l'identité  ${}^\oplus k_{\xi_{ij}}(v_{n_e}^-) = {}^\oplus k_{\xi_{ij}}(v_{n_e}^+)$ . Au contraire, si la composante de gain  ${}^\ominus k_{\xi_{ij}}$  correspond à un transfert impair, alors on aura plutôt l'identité  ${}^\ominus k_{\xi_{ij}}(v_{n_e}^-) = -{}^\ominus k_{\xi_{ij}}(v_{n_e}^+)$ . Or, il s'avère que la parité des transferts  $k_{\xi_{ij}}$  est une propriété constante pour un système dynamique. Cela veut donc dire qu'une fois qu'a été déterminée la parité de chacun des transferts  $k_{\xi_{ij}}$ , que le résultat de chacun peut être sauvegardé dans une matrice constante  $\mathbf{K}_\xi^\S$  qui est de même dimension que  $\mathbf{K}_\xi$ . Ainsi, pour un transfert  $k_{\xi_{ij}}$  de nature paire, on peut assigner la valeur +1 à la composante  $k_{\xi_{ij}}^\S$  correspondante dans  $\mathbf{K}_\xi^\S$ . Au contraire, pour un transfert  $k_{\xi_{ij}}$  de nature impaire, on assigne plutôt la valeur -1 à la composante  $k_{\xi_{ij}}^\S$  correspondante dans  $\mathbf{K}_\xi^\S$ . Par conséquent, la matrice de symétrie (ou de parité)  $\mathbf{K}_\xi^\S$  ainsi construite possède un domaine spécial tel que  $\mathbf{K}_\xi^\S \in \mathbb{I}^{m \times q}$  où  $\mathbb{I} := \{-1, +1\}$ . On note que la même démarche peut être appliquée au gain  $\mathbf{K}_\gamma \in \mathbb{R}^{m \times g}$  responsable du transfert  $\frac{\Delta \mathbf{u}_\gamma}{\Delta \gamma}$  linéarisé en  $v_{n_e}$  afin d'obtenir sa matrice de symétrie constante  $\mathbf{K}_\gamma^\S \in \mathbb{I}^{m \times g}$ .

### TRAVAIL ORIGINAL PRINCIPAL

On spécifie que l'équation (5.5) est à la base des travaux originaux présentés dans ce mémoire. En effet, une partie notable du projet de recherche a porté sur la formalisation de la méthodologie qui est associée à cette équation. L'objectif principal de l'approche proposée est d'effectuer la synthèse des gains de manière à tirer profit de la symétrie du modèle dynamique longitudinal du MAVION. Concrètement, la méthode présentée dans ce chapitre consiste à synthétiser d'abord des gains qui sont valides seulement pour la partie positive du domaine de séquençement. Puis, à posteriori, on applique une transformation judicieuse à ces gains afin qu'ils puissent être utilisés également sur le domaine de séquençement négatif. La transformation alors employée repose sur l'analyse de la parité des transferts en boucle fermée associés à chacune des composantes des gains intervenant dans la loi de commandes.

Ceci étant dit, en partant de gains  $\mathbf{K}_\xi^+$  et  $\mathbf{K}_\gamma^+$  synthétisés pour des vitesses d'avancement positives, il est possible d'obtenir l'équivalent de ces gains valide pour le domaine de vol complet grâce à l'opération spéciale suivante :

$$\underbrace{\mathbf{K}_\square(\sigma, \boldsymbol{\kappa}_\square)}_{\text{gain valide pour le domaine complet}} := \underbrace{\left( \mathbf{K}_\square^\S(\boldsymbol{\kappa}_\square^\S) \right)^{\odot \mathfrak{N}(\sigma)}}_{\text{ajustement du gain pour le domaine négatif}} \odot \underbrace{\mathbf{K}_\square^+(|\sigma|, \boldsymbol{\kappa}_\square^+)}_{\text{gain valide pour le domaine positif}} \quad (5.5)$$

où

$$\boldsymbol{\kappa}_\square := \left[ \left( \boldsymbol{\kappa}_\square^\S \right)^\top \quad \left( \boldsymbol{\kappa}_\square^+ \right)^\top \right]^\top, \quad \forall \square \in \{\xi, \gamma\} \quad (5.6)$$

$$\mathfrak{N}(\sigma) := \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma \geq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}$$

et l'opérateur  $\odot$  est utilisé afin de représenter les opérations de produit ou de puissance de Hadamard, définies à l'annexe C.5.5. En somme, grâce aux opérations de Hadamard, il est possible de calculer le gain matriciel  $\mathbf{K}_\square$  sur l'ensemble du domaine de vol en utilisant seulement l'information de la parité du transfert de ses composantes qui est contenue dans  $\mathbf{K}_\square^\S$  et le gain  $\mathbf{K}_\square^+$  calculé pour le domaine de vitesses d'avancement positives. Profiter de la symétrie du domaine de séquençement à l'équilibre E permet de réduire de moitié le nombre de modèles linéarisés utilisés dans la synthèse des gains. Enfin, on note que  $\mathfrak{N}(\sigma) = 1$  pour  $v_n = \sigma < 0$  permet l'ajustement du gain  $\mathbf{K}_\square^+$  afin d'obtenir  $\mathbf{K}_\square^-$  et que  $\mathfrak{N}(\sigma) = 0$  pour  $v_n = \sigma \geq 0$  a comme résultat d'utiliser directement  $\mathbf{K}_\square^+$  en opérant sur  $\mathbf{K}_\square^\S$  afin de générer une nouvelle matrice de symétrie identité contenant que des +1 partout. Ainsi, la

loi de commande non linéaire de  $\mathcal{C}$  est définie à l'aide de (5.3) et (5.5). La méthode pour déterminer la valeur ( $-1$  ou  $+1$ ) de chacune des composantes des matrices de symétrie  $\mathbf{K}_\xi^s$  et  $\mathbf{K}_\gamma^s$  est présentée à la section 5.4.1.

On précise également que l'ajout des points de symétrie constants  $\gamma_s$  et  $\mathbf{u}_s$  dans la loi de commande en (5.3) est absolument nécessaire<sup>5.1</sup> afin d'assurer que le contrôleur possède un comportement uniforme et symétrique sur tout le domaine de vol du MAVION. Concrètement, cela est inévitable, puisqu'on considère seulement la portion positive de ce domaine lors de la synthèse des paramètres des gains matriciels  $\mathbf{K}_\xi$  et  $\mathbf{K}_\gamma$  respectivement contenus dans les vecteurs  $\kappa_\xi$  et  $\kappa_\gamma$ . Une explication plus étoffée est apportée à la section 5.1.3 avec la version linéarisée  $\Delta\mathcal{C}$  du système de commande.

L'architecture du contrôleur non linéaire définie en (5.3) est schématisée à la figure 5.1.

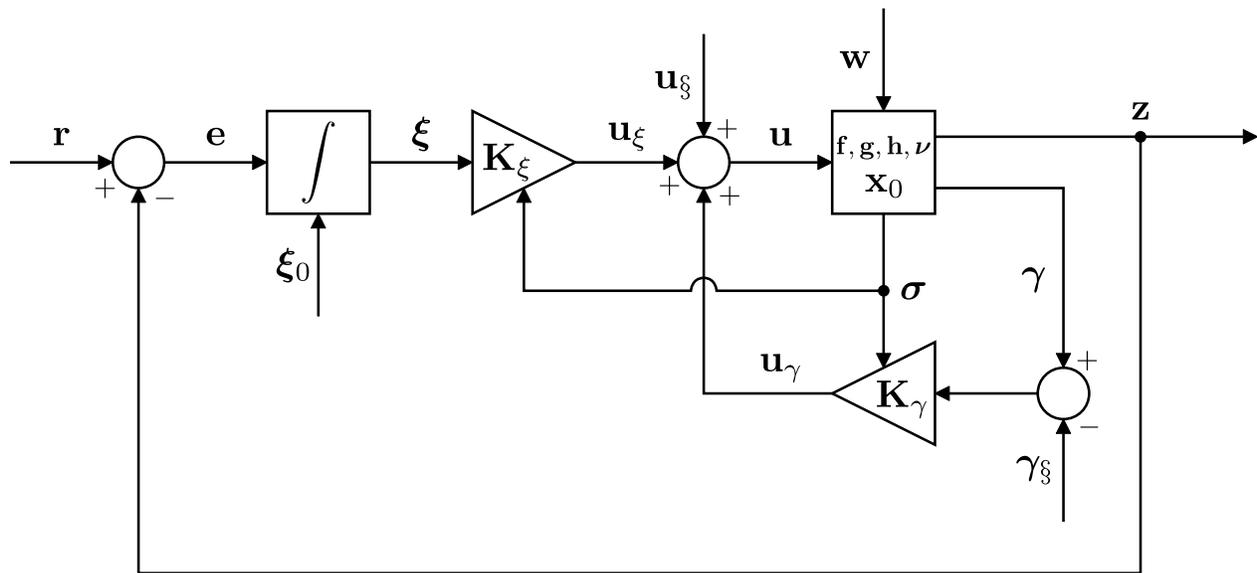


Figure 5.1 Architecture généralisée du contrôleur non linéaire  $\mathcal{C}$

5.1. Cf. section *Fixed Trim Condition* dans [18].

### PRÉCISION IMPORTANTE

À partir de maintenant, tous les développements qui suivent concernant l'objectif ultime de ce chapitre – soit la synthèse des gains  $\mathbf{K}_\xi$  et  $\mathbf{K}_\gamma$  qui apparaissent dans le contrôleur non linéaire défini en (5.3) – impliquent seulement les gains  $\mathbf{K}_\xi^+$  et  $\mathbf{K}_\gamma^+$  qui sont valides exclusivement pour le domaine des vitesses d'avancement positives défini en (4.18).

Cela est notamment le cas pour les modèles à l'équilibre, les modèles linéarisés et pour les synthèses linéaires définis respectivement aux sections 5.1.2, 5.1.3 et 5.2. Cette même précision s'applique pour la section 5.3 qui consiste en une application concrète de la théorie présentée dans les sections qui la précèdent. Les simulations de validation conduites au chapitre 6 sur le domaine de vol complet – qui inclut les vitesses d'avancement négatives – sont effectuées en utilisant la transformation définie en (5.5) qui permet d'ajuster les gains  $\mathbf{K}_\square^+$  afin qu'ils soient valides sur le domaine de vol complet.

On précise que cette façon de procéder est retenue afin de tirer profit de la symétrie comprise dans la dynamique longitudinale du MAVION. Concrètement, cela permet de réduire le nombre  $N_\vartheta$  de modèles linéarisés utilisés dans les synthèses linéaires. Ce nombre est particulièrement critique dans la méthode linéaire multimodèle employée avec la technique de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée dont la solution est calculée numériquement en trouvant le minimum d'une fonction à laquelle sont imposées plusieurs contraintes d'inégalités.

#### 5.1.2 Architecture à l'équilibre

On considère maintenant l'équilibre du système de commande. L'équilibre du système de capteurs donné en (5.1) est défini comme suit :

$$\mathcal{M}_{e_{k,\ell}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) := \left\{ \gamma_{e_{k,\ell}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_{e_{k,\ell}}, \mathbf{u}_{e_{k,\ell}}, \mathbf{w}_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\rho}_k) = \mathbf{h}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) \in \mathbb{R}^g \right\} \quad (5.7)$$

où  $\gamma_{e_{k,\ell}}$  est la mesure à l'équilibre du système  $\mathcal{S}_{e_{k,\ell}}$  qui est obtenue directement en évaluant  $\mathbf{h}$  au point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$ . Pour le système de l'opérateur  $\mathcal{O}$  défini en (5.2), on a :

$$\mathcal{O}_{e_{k,\ell}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) := \left\{ \mathbf{r}_{e_{k,\ell}} \in \mathbb{R}^q \right\} \quad (5.8)$$

où  $\mathbf{r}_{e_{k,\ell}}$  est la référence à l'équilibre. Pour le système du contrôleur  $\mathcal{C}$  défini en (5.3), on a :

$$\mathcal{C}_{e_{k,\ell}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\kappa}^+) := \begin{cases} \mathbf{z}_{e_{k,\ell}} = \mathbf{g}(\gamma_{e_{k,\ell}}) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}_{e_{k,\ell}} = \mathbf{e}_{e_{k,\ell}} = \mathbf{r}_{e_{k,\ell}} - \mathbf{z}_{e_{k,\ell}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{r}_{e_{k,\ell}} = \mathbf{z}_{e_{k,\ell}} \\ \sigma_{e_\ell} = \nu(\gamma_{e_{k,\ell}}) \\ \mathbf{u}_{e_{k,\ell}} = \mathbf{K}_\xi^+(\sigma_{e_\ell}, \boldsymbol{\kappa}_\xi^+) \boldsymbol{\xi}_{e_{k,\ell}} + \mathbf{K}_\gamma^+(\sigma_{e_\ell}, \boldsymbol{\kappa}_\gamma^+) (\gamma_{e_{k,\ell}} - \gamma_\S(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{0,\S}})) + \mathbf{u}_\S(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{0,\S}}) \\ \Leftrightarrow \\ \boldsymbol{\xi}_{e_{k,\ell}} = \mathbf{K}_\xi^+(\sigma_{e_\ell}, \boldsymbol{\kappa}_\xi^+)^{-1} \left( \mathbf{u}_{e_{k,\ell}} - \mathbf{u}_\S(\cdot) - \mathbf{K}_\gamma^+(\sigma_{e_\ell}, \boldsymbol{\kappa}_\gamma^+) (\gamma_{e_{k,\ell}} - \gamma_\S(\cdot)) \right) \end{cases} \quad (5.9)$$

où  $\mathbf{z}_{e_{k,\ell}}$  est le vecteur des sorties régulées à l'équilibre égal à celui des références  $\mathbf{r}_{e_{k,\ell}}$  à l'équilibre,  $\sigma_{e_\ell}$  est la variable de séquençement à l'équilibre et  $\boldsymbol{\xi}_{e_{k,\ell}}$  est la valeur à l'équilibre de l'équation dynamique du contrôleur.

D'ailleurs, si l'on suppose que le système  $\mathcal{S}$  est déjà à l'équilibre au moment d'initialiser le contrôleur  $\mathcal{C}$  au temps  $t_0$ , c.-à-d. que  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_e$ , il s'avère judicieux d'initialiser également le contrôleur à son équilibre de manière à obtenir  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_e$  qui implique que  $\boldsymbol{\xi}_0 = \boldsymbol{\xi}_e$ . D'ailleurs, cela suppose qu'il n'y a pas de vent au temps  $t_0$  :  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}_e = \mathbf{0}$ . Ainsi, la condition initiale de l'équation dynamique de  $\mathcal{C}$  en (5.3) peut être prise à la valeur suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}(t_0) &:= \boldsymbol{\xi}_0 = \boldsymbol{\xi}_e(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{0,0}}, \boldsymbol{\kappa}^+) = \boldsymbol{\xi}_e(\boldsymbol{\varrho}_0, \sigma_{e_0}, \boldsymbol{\kappa}^+) = \boldsymbol{\xi}_{e_{0,0}} \\ &= \mathbf{K}_\xi^+(\sigma_{e_0}, \boldsymbol{\kappa}_\xi^+)^{-1} \left( \mathbf{u}_{e_{0,0}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{0,0}}) - \mathbf{u}_\S(\cdot) - \mathbf{K}_\gamma^+(\sigma_{e_0}, \boldsymbol{\kappa}_\gamma^+) (\gamma_{e_{0,0}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{0,0}}) - \gamma_\S(\cdot)) \right) \\ \boldsymbol{\vartheta}_{e_{0,0}} &:= \boldsymbol{\vartheta}_{e_{0,0}}(\boldsymbol{\varrho}_0, \sigma_{e_0}) \end{aligned} \quad (5.10)$$

où  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{0,0}}$  représente la valeur du point d'équilibre lorsqu'il est évalué pour la configuration paramétrique nominale  $\boldsymbol{\varrho}_0$  – soit la seule qui est réellement connue – et la grandeur de séquençement à l'équilibre  $\sigma_{e_0}$  voulue au temps initial  $t_0$ .

### 5.1.3 Architecture linéarisée

On s'intéresse maintenant à la linéarisation des systèmes non linéaires  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{C}$  définis à la section 5.1.1 autour de leur équilibre défini à la section 5.1.2.

La linéarisation de  $\mathcal{M}$  défini en (5.1) autour de son équilibre défini en (5.7) donne :

$$\Delta\mathcal{M}_{k,\ell}(\vartheta_{e_{k,\ell}}) := \left\{ \Delta\gamma_{k,\ell} = \mathbf{C}_{k,\ell}(\vartheta_{e_{k,\ell}})\Delta\mathbf{x}_{k,\ell} + \mathbf{D}_{u_{k,\ell}}(\vartheta_{e_{k,\ell}})\Delta\mathbf{u}_{k,\ell} + \mathbf{D}_{w_{k,\ell}}(\vartheta_{e_{k,\ell}})\Delta\mathbf{w}_{k,\ell} \right\} \quad (5.11)$$

où

$$\mathbf{C}_{k,\ell}(\vartheta_{e_{k,\ell}}) := \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\vartheta_{e_{k,\ell}}}, \quad \mathbf{D}_{u_{k,\ell}}(\vartheta_{e_{k,\ell}}) := \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\vartheta_{e_{k,\ell}}} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_{w_{k,\ell}}(\vartheta_{e_{k,\ell}}) := \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\vartheta_{e_{k,\ell}}} \quad (5.12)$$

avec

$$\Delta\mathcal{M}(\Theta_e) := \bigcup_{k=0}^4 \bigcup_{\ell=1}^{31} \Delta\mathcal{M}_{k,\ell}(\vartheta_{e_{k,\ell}}). \quad (5.13)$$

La linéarisation de  $\mathcal{O}$  défini en (5.2) autour de son équilibre défini en (5.8) donne :

$$\Delta\mathcal{O}_{k,\ell}(\vartheta_{e_{k,\ell}}) := \{ \Delta\mathbf{r}_{k,\ell} \} \quad (5.14)$$

avec

$$\Delta\mathcal{O}(\Theta_e) := \bigcup_{k=0}^4 \bigcup_{\ell=1}^{31} \Delta\mathcal{O}_{k,\ell}(\vartheta_{e_{k,\ell}}). \quad (5.15)$$

La linéarisation de  $\mathcal{C}$  défini en (5.3) autour de son équilibre défini en (5.9) donne :

$$\Delta\mathcal{C}_{k,\ell}(\vartheta_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\kappa}^+) := \left\{ \begin{array}{l} \Delta\mathbf{z}_{k,\ell} = \mathbf{E}_{k,\ell}(\vartheta_{e_{k,\ell}})\Delta\mathbf{x}_{k,\ell} + \mathbf{F}_{u_{k,\ell}}(\vartheta_{e_{k,\ell}})\Delta\mathbf{u}_{k,\ell} + \mathbf{F}_{w_{k,\ell}}(\vartheta_{e_{k,\ell}})\Delta\mathbf{w}_{k,\ell} \\ \Delta\dot{\boldsymbol{\xi}}_{k,\ell} = \Delta\mathbf{e}_{k,\ell} = \Delta\mathbf{r}_{k,\ell} - \Delta\mathbf{z}_{k,\ell} \\ \Delta\sigma_{k,\ell} = \mathbf{G}_{k,\ell}(\vartheta_{e_{k,\ell}})\Delta\mathbf{x}_{k,\ell} + \mathbf{H}_{u_{k,\ell}}(\vartheta_{e_{k,\ell}})\Delta\mathbf{u}_{k,\ell} + \mathbf{H}_{w_{k,\ell}}(\vartheta_{e_{k,\ell}})\Delta\mathbf{w}_{k,\ell} \\ \Delta\mathbf{u}_{k,\ell} = \mathbf{K}_{\xi}^+(\sigma_{e_{\ell}}, \boldsymbol{\kappa}_{\xi}^+)\Delta\boldsymbol{\xi}_{k,\ell} + \mathbf{K}_{\gamma}^+(\sigma_{e_{\ell}}, \boldsymbol{\kappa}_{\gamma}^+)\Delta\gamma_{k,\ell} + \underbrace{\mathbf{K}_{\sigma}^+(\vartheta_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\kappa}^+)\Delta\sigma_{k,\ell}}_{\text{TCC}} \\ \Delta\boldsymbol{\xi}_{k,\ell}(t_0) = \Delta\boldsymbol{\xi}_{0_{k,\ell}} \end{array} \right. \quad (5.16)$$

où l'on remarque l'apparition d'un nouveau gain  $\mathbf{K}_{\sigma}^+ \in \mathbb{R}^{m \times s}$  qui multiplie la variable de séquençement linéarisée  $\Delta\sigma_{k,\ell} \in \mathbb{R}^s$ . De fait, en notant que les termes constants  $\boldsymbol{\gamma}_{\S}$  et  $\mathbf{u}_{\S}$  s'annulent à l'équilibre, l'équation du contrôleur non linéaire  $\mathcal{C}$  définie en (5.3) est tout à fait analogue à sa version linéarisée définie en (5.16) – à l'exception près du nouveau gain  $\mathbf{K}_{\sigma}^+$ , apparu à cause du séquençement des gains  $\mathbf{K}_{\xi}^+$  et  $\mathbf{K}_{\gamma}^+$  en fonction de la variable endogène  $\sigma$ . Il y a donc une boucle de rétroaction *cachée* à l'intérieur même de la dynamique du contrôleur non linéaire, qui lorsqu'on linéarise le contrôleur  $\mathcal{C}$ , fait apparaître le terme supplémentaire  $\mathbf{K}_{\sigma}^+\Delta\sigma_{k,\ell}$  dans la dynamique du contrôleur linéarisé  $\Delta\mathcal{C}_{k,\ell}$ . Ce terme, nommé

terme de couplage caché ou tout simplement TCC<sup>5.2</sup>, est donc intrinsèquement due à la méthode retenue afin de séquencer les gains des différents contrôleurs linéarisés  $\Delta\mathcal{C}_{k,\ell}$  en fonction d'une variable endogène<sup>5.3</sup>.

Pour le cas général où les gains  $\mathbf{K}_{\square}^+$  sont séquencés en fonction de  $\varsigma$  variables de séquencement distinctes comprises dans le vecteur  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^{\varsigma}$ , la valeur du gain  $\mathbf{K}_{\sigma}^+$  associé au TCC est :

$$\mathbf{K}_{\sigma}^+(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\kappa}^+) := \frac{\partial \mathbf{K}_{\xi}^+(\boldsymbol{\kappa}_{\xi}^+)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}_{e_{\ell}}} \left( \mathbf{I}_{\varsigma \times \varsigma} \otimes \boldsymbol{\xi}_{e_{k,\ell}} \right) + \frac{\partial \mathbf{K}_{\gamma}^+(\boldsymbol{\kappa}_{\gamma}^+)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}_{e_{\ell}}} \left( \mathbf{I}_{\varsigma \times \varsigma} \otimes (\boldsymbol{\gamma}_{e_{k,\ell}} - \boldsymbol{\gamma}_{\S}) \right) \quad (5.17)$$

où l'opérateur  $\otimes$  désigne le produit de Kronecker défini à l'annexe C.5.4. De plus, on précise que la dérivée partielle des gains matriciels  $\mathbf{K}_{\square}^+$  par rapport au vecteur des variables de séquencement  $\boldsymbol{\sigma}$  est développée arbitrairement en utilisant la disposition en ligne telle que définie en (C.10) afin de gérer la troisième dimension découlant de cette opération.

L'analyse plus approfondie du gain  $\mathbf{K}_{\sigma}^+$  montre qu'il dépend des grandeurs suivantes :

- $\frac{\partial \mathbf{K}_{\square}^+(\boldsymbol{\kappa}_{\square}^+)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}_{e_{\ell}}}$  représentant la dérivée de la fonction du gain  $\mathbf{K}_{\square}^+$  par rapport au vecteur de séquencement  $\boldsymbol{\sigma}$  – le tout évalué à la valeur d'équilibre  $\boldsymbol{\sigma}_{e_{\ell}}$ . Le calcul de cette grandeur demande donc que l'évolution du gain  $\mathbf{K}_{\square}^+$  par rapport à  $\boldsymbol{\sigma}$  soit connue a priori avant même d'effectuer le réglage des paramètres  $\boldsymbol{\kappa}_{\square}^+$  ! En d'autres mots, cela nécessite que la fonction de gain non linéaire  $\mathbf{K}_{\square}^+(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}_{\square}^+)$  soit définie a priori de sorte que seul son vecteur paramètre  $\boldsymbol{\kappa}_{\square}^+$  soit inconnu au moment d'effectuer la synthèse linéaire des paramètres libres. Cela définit le principe même de l'*autoséquencement* : soit le fait d'utiliser des fonctions de gains paramétrées et choisies avant même d'effectuer la synthèse de leurs paramètres libres.
- $\boldsymbol{\xi}_{e_{k,\ell}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\kappa}^+)$  représentant la condition d'équilibre de la dynamique du contrôleur non linéaire  $\mathcal{C}$  qui dépend du point d'équilibre considéré  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$  et des paramètres libres  $\boldsymbol{\kappa}^+$  que l'on cherche à synthétiser. Celle-ci a été définie en (5.9).
- $\boldsymbol{\gamma}_{e_{k,\ell}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}})$  représentant la valeur à l'équilibre des sorties mesurées du système de capteurs  $\mathcal{M}$  qui dépend du point d'équilibre considéré  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$ . Celle-ci a été définie en (5.7).
- $\boldsymbol{\gamma}_{\S}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{0,\S}})$  représentant le point constant de symétrie du domaine d'équilibre  $\Theta_e$  associé aux sorties mesurées et utilisé afin que la loi de commande ait un comportement uniforme et symétrique. Celui-ci a été défini en (5.3).

---

5.2. *Hidden Coupling Term* (HCT) en anglais.

5.3. La problématique entourant l'utilisation de cette méthode de séquencement de gains est largement étudiée dans le chapitre 3 de [17].

Les matrices jacobiennes apparaissant dans le contrôleur linéarisé  $\Delta\mathcal{C}_{k,\ell}$  défini en (5.16) sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{k,\ell}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) &:= \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}}, & \mathbf{F}_{u_{k,\ell}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) &:= \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}}, & \mathbf{F}_{w_{k,\ell}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) &:= \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}} \\ \mathbf{G}_{k,\ell}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) &:= \left. \frac{\partial \nu}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}}, & \mathbf{H}_{u_{k,\ell}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) &:= \left. \frac{\partial \nu}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}}, & \mathbf{H}_{w_{k,\ell}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) &:= \left. \frac{\partial \nu}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}} \end{aligned} \quad (5.18)$$

qui appartiennent à la famille des 155 contrôleurs linéarisés définie comme suit :

$$\Delta\mathcal{C}(\Theta_e, \boldsymbol{\kappa}^+) := \bigcup_{k=0}^4 \bigcup_{\ell=1}^{31} \Delta\mathcal{C}_{k,\ell}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\kappa}^+). \quad (5.19)$$

L'architecture des contrôleurs linéarisés définie en (5.16) est schématisée à la figure 5.2.

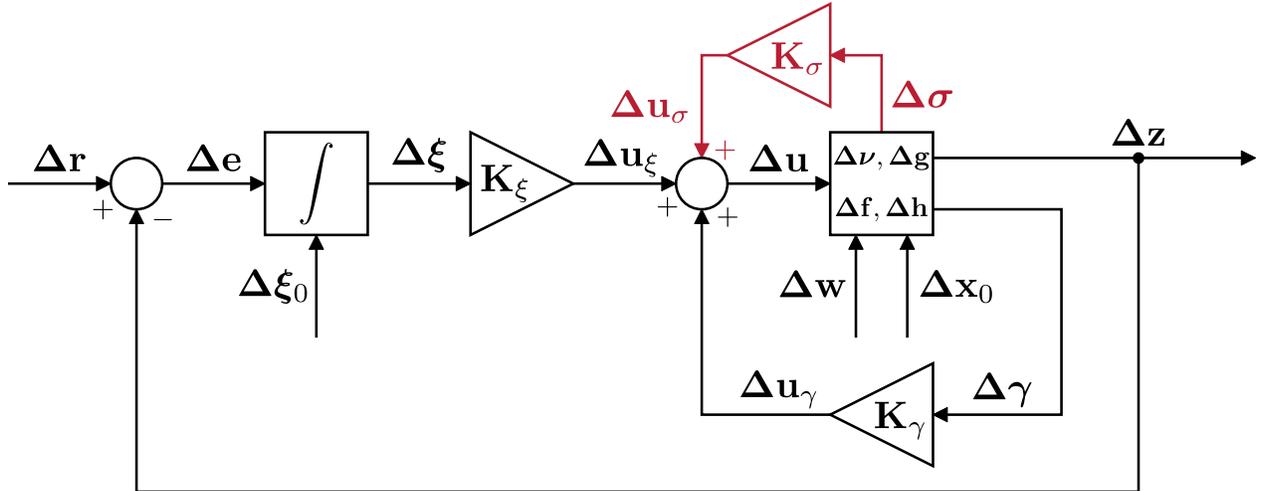


Figure 5.2 Architecture généralisée des contrôleurs linéarisés  $\Delta\mathcal{C}_{k,\ell}$

## 5.2 Synthèses linéaires

Cette section présente les deux méthodes qui sont comparées pour la conception du système de commandes de vol dans le cadre de ce mémoire.

La première méthode est basée sur l'approche naïve décrite à la section 2.3. Elle utilise la technique de synthèse LQR issue de la commande optimale. Pour l'approche naïve, on utilise une synthèse unimodèle<sup>5.4</sup> afin de trouver un jeu de paramètres  $\boldsymbol{\kappa}_{k,\ell}^+$  différent pour chaque

5.4. Cf. section 2.3.

modèle  $\Delta\mathcal{S}_{k,\ell}$  linéarisé à son point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$  appartenant au domaine de linéarisation  $\Theta_e$ . Le cadre de la synthèse unimodèle ne permet pas d'inclure le TCC dans les synthèses. Ainsi, pour l'implémentation sur le contrôleur non linéaire  $\mathcal{C}$ , le séquençement des différents gains  $\mathbf{K}_{\square_{k,\ell}}^+$  est effectué à posteriori en fonction de la variable de séquençement  $\sigma$  en utilisant une fonction d'interpolation cubique<sup>5.5</sup> pour chaque composante des gains  $\mathbf{K}_{\square_{k,\ell}}^+$  afin d'obtenir des fonctions de gains non linéaires  $\mathbf{K}_{\square}^+(\lvert\sigma\rvert, \boldsymbol{\kappa}_{\square}^+)$  opérant sur tout le domaine  $\Theta_e$ . Puisque les 31 synthèses linéaires sont effectuées point par point (PPP : implique que chaque synthèse est unimodèle), il n'est pas possible de considérer les incertitudes paramétriques dans les synthèses. Ainsi, on utilise la configuration paramétrique nominale  $\boldsymbol{\varrho}_0$ . En tout, 31 synthèses sont requises afin d'obtenir les paramètres de  $\mathcal{C}$ .

La seconde méthode basée sur l'approche synthétique<sup>5.6</sup> utilise la technique de synthèse  $\mathcal{H}_{\infty}$  structurée issue de la commande robuste. Pour l'approche synthétique, on utilise une synthèse multimodèle afin de trouver directement un seul jeu de paramètres  $\boldsymbol{\kappa}^+$  unique pour toute la famille de modèles linéarisés considérés dans  $\Theta_e$  (4.19). En procédant ainsi, aucun travail supplémentaire n'est nécessaire afin d'effectuer l'implémentation sur le contrôleur non linéaire  $\mathcal{C}$ , puisque les fonctions de séquençement sont intégrées à même l'architecture de commande considérée dans la synthèse multimodèle (SMM). Cela permet notamment d'inclure directement le TCC. La synthèse multimodèle permet de considérer autant de modèles linéarisés que désirés. Ainsi, pour chacun des 31 modèles linéarisés  $\mathcal{S}_{k,\ell}$ , on considère 5 configurations paramétriques différentes  $\boldsymbol{\varrho}_k$  : une nominale et quatre incertaines (4.11). Par conséquent, chaque synthèse multimodèle considère  $31 \times 5 = 155$  modèles linéarisés différents, soit autant de points d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$ . Toutefois, la complexité de ce problème de synthèse comprenant 155 modèles linéarisés et plusieurs contraintes de performance demande d'effectuer 3 synthèses multimodèles avant d'obtenir l'itération finale des paramètres libres  $\boldsymbol{\kappa}^+$  du contrôleur non linéaire  $\mathcal{C}$ . Chacune de ces itérations (ou synthèses) intermédiaires est utilisée afin d'initialiser la suivante. On note que la première itération de la synthèse  $\mathcal{H}_{\infty}$  structurée multimodèle est initialisée à partir de la synthèse LQR unimodèle obtenue à l'aide de la première méthode. Il y a donc seulement 3 synthèses supplémentaires à effectuer dans cette seconde méthode, si l'on exclut les 31 déjà effectuées à la première méthode. En tout,  $31 + 155 \times 3 = 496$  modèles linéarisés sont impliqués dans l'obtention finale des paramètres des gains séquencés  $\mathbf{K}_{\square}^+(\lvert\sigma\rvert, \boldsymbol{\kappa}_{\square}^+)$  de la méthode #2.

Un résumé des caractéristiques de ces deux méthodes de conception est fourni au tableau 5.1.




---

5.5. On utilise la fonction `SPLINE` de MATLAB®.

5.6. Cf. section 2.3.

Tableau 5.1 Caractéristiques des deux méthodes comparées pour la conception de  $\mathcal{C}$ 

Caractéristique \ Méthode	#1	#2
Approche	Naïve	Synthétique
Type de commande	Optimale	Robuste
Technique de synthèse	LQR	$\mathcal{H}_\infty$ structurée
Synthèse des gains	Unimodèle	Multimodèle
Inclusion du TCC dans les synthèses	Impossible	Possible
Séquencement des gains	Séquencement effectué à postériori par interpolation cubique	Fonctions de séquencement intégrées à priori dans l'architecture de commande
Incertitudes paramétriques	Configuration paramétrique nominale seulement	Configurations paramétriques nominale (1) et incertaines (4)
Nombre de configurations paramétriques $\boldsymbol{q}_k$ par synthèse	1	1 + 4 = 5
Nombre de points de séquencement à l'équilibre $\sigma_{e_\ell}$ par synthèse	1	PPP : 1 SMM/TCC : 31
Nombre de modèles linéarisés $\Delta\mathcal{S}_{k,\ell}$ par synthèse	1 × 1 = 1	PPP : 5 × 1 = 5 SMM/TCC : 5 × 31 = 155
Nombre total de synthèses requises pour obtenir les fonctions de gains finales $\mathbf{K}_\square^+(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}_\square^+)$	31	31 LQR + 31 $\mathcal{H}_\infty$ (PPP) + 2 $\mathcal{H}_\infty$ (SMM/TCC) = 64
Nombre total de modèles linéarisés impliqués dans l'obtention des gains finaux	1 × 31 = 31	31 LQR + 155 × 3 $\mathcal{H}_\infty$ = 496

En plus des variables d'état définies à la section 5.1, des sorties supplémentaires sont considérées dans les synthèses linéaires. Il s'agit du vecteur  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{\rho}$  des sorties de saturations statique et dynamique associées au modèle d'état de chaque groupe d'actionneurs défini à la section 3.5.2. Ses formes non linéaire, à l'équilibre et linéarisée, sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &:= \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{\rho} \\ \mathbf{s}_{e_{k,\ell}} &:= \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}_{e_{k,\ell}}, \mathbf{u}_{e_{k,\ell}}, \mathbf{w}_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\rho}_k) = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) \in \mathbb{R}^{\rho} \\ \Delta \mathbf{s}_{k,\ell} &:= \mathbf{M}_{k,\ell}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) \Delta \mathbf{x}_{k,\ell} + \mathbf{N}_{u_{k,\ell}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) \Delta \mathbf{u}_{k,\ell} + \mathbf{N}_{w_{k,\ell}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) \Delta \mathbf{w}_{k,\ell} \end{aligned} \quad (5.20)$$

avec

$$\mathbf{M}_{k,\ell}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) := \left. \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}}, \quad \mathbf{N}_{u_{k,\ell}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) := \left. \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}} \quad \text{et} \quad \mathbf{N}_{w_{k,\ell}}(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) := \left. \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}}. \quad (5.21)$$

### 5.2.1 Synthèse optimale LQR

La première méthode détaillée dans le tableau 5.1 nécessite d'effectuer 31 synthèses linéaires unimodèles LQR par retour de sortie généralisée  $\gamma$  en augmentant le tout d'une action intégrale sur l'erreur de suivi  $\boldsymbol{\xi}$ . Cette section a pour but d'expliciter cette tâche non triviale, puisque la théorie de la commande optimale que l'on peut retrouver dans [38, 39] définit normalement la solution au problème LQR pour un retour d'état statique (RES). En effet, le retour de sortie statique (RSS) effectué dans le cadre de la synthèse LQR constitue un problème à part entière.

En appliquant quelques hypothèses, il est toutefois possible de transformer le problème de RSS en un problème de RES. On considère les hypothèses suivantes :

- **Aucun vent dans la synthèse** : toutes les matrices jacobiennes associées aux entrées perturbatrices  $\Delta \mathbf{w}_{k,\ell}$  sont nulles dans la synthèse LQR. Ceci constitue une hypothèse triviale, puisque par définition, on considère un équilibre sans vent.
- **Sortie généralisée fonction seulement de l'état** : la matrice jacobienne  $\mathbf{D}_{u_{k,\ell}}$  est nulle. On note que cela constitue une hypothèse très faible, puisque les états des actionneurs se retrouvent dans la matrice jacobienne  $\mathbf{A}_{k,\ell}$  dû à leur modélisation dynamique.
- **Mêmes dimensions pour les vecteurs de sortie généralisée et d'état** :  $n = g$ . Cette hypothèse est nécessaire afin que  $\mathbf{C}_{k,\ell}$  soit inversible.
- **L'état complet est observable à partir de la sortie généralisée** : la paire de matrices  $(\mathbf{A}_{k,\ell}, \mathbf{C}_{k,\ell})$  est observable<sup>5.7</sup>. Cela est également nécessaire afin que la

---

5.7. Le test d'observabilité de Kalman est défini à l'équation (5.52).

matrice  $\mathbf{C}_{k,\ell}$  soit inversible.

L'application de ces hypothèses permet d'obtenir le système linéarisé simplifié suivant :

$$\Delta\mathcal{S}_{k,\ell}^{\star}(\vartheta_{e_{k,\ell}}) := \left\{ \Delta\dot{\mathbf{x}}_{k,\ell} = \mathbf{A}_{k,\ell}(\vartheta_{e_{k,\ell}})\Delta\mathbf{x}_{k,\ell} + \mathbf{B}_{u_{k,\ell}}(\vartheta_{e_{k,\ell}})\Delta\mathbf{u}_{k,\ell} \right\} \quad (5.22)$$

où la condition initiale de ce système simplifié est volontairement omise. Le système de capteurs linéarisé simplifié est donné par :

$$\Delta\mathcal{M}_{k,\ell}^{\star}(\vartheta_{e_{k,\ell}}) := \left\{ \Delta\gamma_{k,\ell} = \mathbf{C}_{k,\ell}(\vartheta_{e_{k,\ell}})\Delta\mathbf{x}_{k,\ell} \right\}, \quad (5.23)$$

tandis que celui du contrôleur est donné par :

$$\Delta\mathcal{C}_{k,\ell}^{\star}(\vartheta_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\kappa}_{k,\ell}^+) := \begin{cases} \Delta\mathbf{z}_{k,\ell} = \mathbf{E}_{k,\ell}(\vartheta_{e_{k,\ell}})\Delta\mathbf{x}_{k,\ell} + \mathbf{F}_{u_{k,\ell}}(\vartheta_{e_{k,\ell}})\Delta\mathbf{u}_{k,\ell} \\ \Delta\dot{\boldsymbol{\xi}}_{k,\ell} = \Delta\mathbf{e}_{k,\ell} = \Delta\mathbf{r}_{k,\ell} - \Delta\mathbf{z}_{k,\ell} \\ \Delta\mathbf{u}_{k,\ell} = \mathbf{K}_{\xi_{k,\ell}}^+(\boldsymbol{\kappa}_{k,\ell}^+)\Delta\boldsymbol{\xi}_{k,\ell} + \mathbf{K}_{\gamma_{k,\ell}}^+(\boldsymbol{\kappa}_{k,\ell}^+)\Delta\gamma_{k,\ell} \end{cases} \quad (5.24)$$

où l'on précise que les fonctions de séquencement des gains  $\mathbf{K}_{\square_{k,\ell}}^+$  ne sont pas incluses dans l'architecture de contrôle. Cela signifie donc que pour chaque synthèse effectuée à un point d'équilibre  $\vartheta_{e_{k,\ell}}$ , on trouve un jeu de paramètres associé  $\boldsymbol{\kappa}_{k,\ell}^+$  qui renferme toutes les composantes des gains  $\mathbf{K}_{\xi_{k,\ell}}^+$  et  $\mathbf{K}_{\gamma_{k,\ell}}^+$ . Il n'y a donc pas de variable de séquencement  $\boldsymbol{\sigma}$  ni de gain  $\mathbf{K}_{\sigma}^+$  associé au TCC. De fait, ce terme ne peut être calculé à partir de l'architecture fixe de  $\Delta\mathcal{C}_{k,\ell}^{\star}$ , puisqu'on effectue une synthèse unimodèle PPP.

Le problème de commande écrit sous la forme actuelle des systèmes  $\Delta\mathcal{S}_{k,\ell}^{\star}$ ,  $\Delta\mathcal{M}_{k,\ell}^{\star}$  et  $\Delta\mathcal{C}_{k,\ell}^{\star}$  ne peut être résolu avec la fonction **LQR** de MATLAB<sup>®</sup>, puisqu'il s'agit d'un RSS. Il faut donc modifier sa forme afin d'obtenir un problème équivalent utilisant un RES afin de pouvoir utiliser la fonction **LQR**. La solution consiste à effectuer un changement de base, afin d'exprimer la dynamique de  $\Delta\mathcal{S}_{k,\ell}^{\star}$  en utilisant plutôt la sortie généralisée  $\Delta\gamma_{k,\ell}$  comme état au lieu de  $\Delta\mathbf{x}_{k,\ell}$ . Ce faisant, le RSS devient un RES. Pour ce faire, il suffit de noter que :

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_{k,\ell} = \mathbf{C}_{k,\ell}\Delta\mathbf{x}_{k,\ell} &\Leftrightarrow \Delta\mathbf{x}_{k,\ell} = \mathbf{C}_{k,\ell}^{-1}\Delta\gamma_{k,\ell} \\ \Delta\dot{\gamma}_{k,\ell} = \mathbf{C}_{k,\ell}\Delta\dot{\mathbf{x}}_{k,\ell} &\Leftrightarrow \Delta\dot{\mathbf{x}}_{k,\ell} = \mathbf{C}_{k,\ell}^{-1}\Delta\dot{\gamma}_{k,\ell} \end{aligned} \quad (5.25)$$

où la dépendance explicite des matrices jacobiennes au point d'équilibre  $\vartheta_{e_{k,\ell}}$  est désormais omise pour le reste de la démarche. De plus, on rappelle que  $\mathbf{C}_{k,\ell}$  est inversible. En utilisant les identités définies en (5.25), il est possible de réécrire la dynamique du système  $\Delta\mathcal{S}^{\star}$

comme suit :

$$\Delta\bar{\mathcal{S}}_{k,\ell}^{\star}(\vartheta_{e_{k,\ell}}) := \left\{ \Delta\dot{\gamma}_{k,\ell} = \underbrace{\mathbf{C}_{k,\ell}\mathbf{A}_{k,\ell}\mathbf{C}_{k,\ell}^{-1}}_{:=\bar{\mathbf{A}}_{k,\ell}}\Delta\gamma_{k,\ell} + \underbrace{\mathbf{C}_{k,\ell}\mathbf{B}_{u_{k,\ell}}}_{:=\bar{\mathbf{B}}_{k,\ell}}\Delta\mathbf{u}_{k,\ell} \right\} \quad (5.26)$$

et celle du système  $\Delta\mathcal{C}_{k,\ell}^{\star}$  comme suit :

$$\Delta\bar{\mathcal{C}}_{k,\ell}^{\star}(\vartheta_{e_{k,\ell}}, \kappa_{k,\ell}^+) := \begin{cases} \Delta\mathbf{z}_{k,\ell} = \underbrace{\mathbf{E}_{k,\ell}\mathbf{C}_{k,\ell}^{-1}}_{:=\bar{\mathbf{E}}_{k,\ell}}\Delta\gamma_{k,\ell} + \underbrace{\mathbf{F}_{u_{k,\ell}}}_{:=\bar{\mathbf{F}}_{k,\ell}}\Delta\mathbf{u}_{k,\ell} \\ \Delta\dot{\xi}_{k,\ell} = \Delta\mathbf{e}_{k,\ell} = \Delta\mathbf{r}_{k,\ell} - \Delta\mathbf{z}_{k,\ell} \\ \Delta\mathbf{u}_{k,\ell} = \mathbf{K}_{\xi_{k,\ell}}^+(\kappa_{k,\ell}^+)\Delta\xi_{k,\ell} + \mathbf{K}_{\gamma_{k,\ell}}^+(\kappa_{k,\ell}^+)\Delta\gamma_{k,\ell} \end{cases} \quad (5.27)$$

où cette nouvelle architecture de commande  $\Delta\bar{\mathcal{C}}_{k,\ell}^{\star}$  constitue désormais un RES où le vecteur d'état de  $\Delta\bar{\mathcal{S}}_{k,\ell}^{\star}$  est  $\Delta\gamma_{k,\ell}$ . En posant les grandeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{x}_{a_{k,\ell}} &:= \left[ (\Delta\xi_{k,\ell})^\top \quad (\Delta\gamma_{k,\ell})^\top \right]^\top \\ \mathbf{K}_{a_{k,\ell}}^+ &:= \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{\xi_{k,\ell}}^+ & -\mathbf{K}_{\gamma_{k,\ell}}^+ \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

on obtient le nouveau système augmenté :

$$\Delta\mathcal{SC}_{a_{k,\ell}}^{\star}(\vartheta_{e_{k,\ell}}, \kappa_{k,\ell}^+) := \begin{cases} \Delta\dot{\mathbf{x}}_{a_{k,\ell}} := \mathbf{A}_{a_{k,\ell}}\Delta\mathbf{x}_{a_{k,\ell}} + \mathbf{B}_{a_{k,\ell}}\Delta\mathbf{u}_{k,\ell} \\ \Delta\mathbf{u}_{k,\ell} := -\mathbf{K}_{a_{k,\ell}}^+\Delta\mathbf{x}_{a_{k,\ell}} \end{cases} \quad (5.29)$$

avec

$$\mathbf{A}_{a_{k,\ell}} := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{q \times q} & -\bar{\mathbf{E}}_{k,\ell} \\ \mathbf{0}_{g \times q} & \bar{\mathbf{A}}_{k,\ell} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_{a_{k,\ell}} := \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{F}}_{k,\ell} \\ \bar{\mathbf{B}}_{k,\ell} \end{bmatrix}. \quad (5.30)$$

L'analyse du nouveau système augmenté  $\Delta\mathcal{SC}_{a_{k,\ell}}^{\star}$  permet maintenant de voir clairement qu'il s'agit d'un RES où l'état utilisé dans le retour est celui augmenté. De fait, le problème formulé en (5.29) peut désormais être utilisé directement avec la fonction **LQR** en y insérant les matrices augmentées  $\mathbf{A}_{a_{k,\ell}}$ ,  $\mathbf{B}_{a_{k,\ell}}$ ,  $\mathbf{Q}_{a_{k,\ell}}$  et  $\mathbf{R}_{k,\ell}$  afin de trouver  $\mathbf{K}_{a_{k,\ell}}^+$  défini en (5.28) qui inclut la valeur des deux gains recherchés  $\mathbf{K}_{\square_{k,\ell}}^+$  pour l'architecture originale définie en (5.24) utilisant la sortie généralisée  $\Delta\gamma_{k,\ell}$  comme RSS.

Les matrices  $\mathbf{Q}_{a_{k,\ell}} \in \mathbb{R}^{(q+g) \times (q+g)}$  et  $\mathbf{R}_{k,\ell} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  correspondent aux matrices de pondération utilisées dans la résolution du problème LQR. Ce sont ces matrices qui dictent directement les performances du système obtenu en BF suite à la synthèse LQR. En effet, ce problème de régulation consiste à minimiser le critère de performance quadratique suivant :

$$\mathcal{J} := \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \left( \Delta\mathbf{x}_{a_{k,\ell}}^\top \mathbf{Q}_{a_{k,\ell}} \Delta\mathbf{x}_{a_{k,\ell}} + \Delta\mathbf{u}_{k,\ell}^\top \mathbf{R}_{k,\ell} \Delta\mathbf{u}_{k,\ell} \right) dt \quad (5.31)$$

qui peut être interprété comme la minimisation de l'énergie dépensée par l'état  $\Delta \mathbf{x}_{a_k, \ell}$  et la commande  $\Delta \mathbf{u}_{k, \ell}$  afin de ramener le système à son équilibre suite à une perturbation quelconque. Cette énergie est calculée sur un horizon infini de manière à ce que le système en BF atteigne son régime permanent.

### CRITÈRE DE STABILISABILITÉ DE POPOV-BELEVITCH-HAUTUS

Une paire de matrices  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  avec  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est dite stabilisable si et seulement si la matrice de stabilisabilité  $\mathbf{M}_s$  :

$$\mathbf{M}_s(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} s\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)} \quad (5.32)$$

est de rang plein  $\forall s \in \mathbb{C}^+$  – c.-à-d. que  $\text{rang}(\mathbf{M}_s) = n \forall s \in \mathbb{C}^+$ .  $\triangle$

### CRITÈRE DE DÉTECTABILITÉ DE POPOV-BELEVITCH-HAUTUS

Une paire de matrices  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  avec  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{g \times n}$  est dite détectable si et seulement si la matrice de détectabilité  $\mathbf{M}_d$  :

$$\mathbf{M}_d(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \begin{bmatrix} s\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+g) \times n} \quad (5.33)$$

est de rang plein  $\forall s \in \mathbb{C}^+$  – c.-à-d. que  $\text{rang}(\mathbf{M}_d) = n \forall s \in \mathbb{C}^+$ .  $\triangle$

Ainsi, si les paires de matrices  $(\mathbf{A}_{a_k, \ell}, \mathbf{B}_{a_k, \ell})$  et  $(\mathbf{A}_{a_k, \ell}, \sqrt{\mathbf{Q}_{a_k, \ell}})$  sont respectivement stabilisable et détectable, la solution du problème de minimisation du critère de Kalman défini en (5.31) est donnée par :

$$\mathbf{K}_{a_k, \ell}^+ := \mathbf{R}_{k, \ell}^{-1} \mathbf{B}_{a_k, \ell}^\top \mathbf{P}_{a_k, \ell} \quad (5.34)$$

où  $\mathbf{P}_{a_k, \ell} \geq \mathbf{0}$  est la solution symétrique de l'équation algébrique de Riccati :

$$\mathbf{P}_{a_k, \ell} \mathbf{A}_{a_k, \ell} + \mathbf{A}_{a_k, \ell}^\top \mathbf{P}_{a_k, \ell} - \mathbf{P}_{a_k, \ell} \mathbf{B}_{a_k, \ell} \mathbf{R}_{k, \ell}^{-1} \mathbf{B}_{a_k, \ell}^\top \mathbf{P}_{a_k, \ell} + \mathbf{Q}_{a_k, \ell} = \mathbf{0}. \quad (5.35)$$

Ainsi, en faisant appel 31 fois à la fonction `LQR` de MATLAB<sup>®</sup>, on obtient les 31 gains de Kalman  $\mathbf{K}_{a_k, \ell}^+$  dont chacun contient les gains recherchés  $\mathbf{K}_{\xi_k, \ell}^+$  et  $\mathbf{K}_{\gamma, \ell}^+$  pour chaque modèle linéarisé en fonction de  $\sigma_{e_\ell} \in \mathbf{E}$ . Si l'on sauvegarde les composantes des 31 gains  $\mathbf{K}_{\square_k, \ell}^+$  dans un vecteur colonne  $\boldsymbol{\kappa}_{\square}^+$ , on peut créer à posteriori par interpolation cubique la fonction  $\mathbf{K}_{\square}^+(\sigma, \boldsymbol{\kappa}_{\square}^+)$  qui donne le gain pour le domaine positif du contrôleur non linéaire défini en (5.3) et (5.5). On rappelle que toutes les synthèses LQR unimodèles sont effectuées avec la

configuration paramétrique nominale  $\boldsymbol{\rho}_0$ . En somme, il s'agit de trouver le bon réglage des matrices  $\mathbf{Q}_{a_{k,\ell}}$  et  $\mathbf{R}_{k,\ell}$  afin d'obtenir les performances en BF désirées.

### 5.2.2 Synthèse robuste $\mathcal{H}_\infty$ structurée

Dans cette section, on présente tous les détails concernant la seconde méthode de synthèse définie dans le tableau 5.1. Plus précisément, on s'intéresse à trois éléments : la forme de la fonction de séquençement des gains, la théorie de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  et la méthodologie employée afin de résoudre le problème de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  à l'aide d'outils numériques.

#### Fonction de séquençement des gains

La seconde méthode utilise la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée multimodèle. L'utilisation de cette méthode permet entre autres de considérer un nombre arbitraire de modèles linéarisés  $\Delta\mathcal{S}_{k,\ell}$  dans le processus de synthèse dont la solution rend un jeu unique  $\boldsymbol{\kappa}^+$  contenant tous les paramètres du contrôleur non linéaire  $\mathcal{C}$  pour le domaine de vitesses d'avancement positives à l'équilibre  $v_{n_{e_\ell}} \in \mathbb{E}$ . De plus, cette approche synthétique permet de définir la forme des fonctions de séquençement en les intégrant à priori dans l'architecture fixe de la loi de commande. Cela permet alors de calculer explicitement la matrice de gains associée au TCC.

Ainsi, pour le contrôleur non linéaire  $\mathcal{C}$  défini en (5.3) et (5.5), chacune des composantes  $k_{\square_{ij}}^+$  du gain  $\mathbf{K}_\square^+$  est alors séquençée à l'aide d'une fonction unique consistant en la combinaison linéaire de paramètres  ${}^b k_{\square_{ij}}^+$  et de sous-fonctions non linéaires  $\phi_b$  dépendant de  $|\sigma|$  :

$$k_{\square_{ij}}^+ \left( |\sigma|, \boldsymbol{\kappa}_\square^+ \right) := \sum_{b=1}^{\varphi} {}^b k_{\square_{ij}}^+ \left( \boldsymbol{\kappa}_\square^+ \right) \phi_b \left( |\sigma| \right) \quad (5.36)$$

où l'on précise que chaque composante de gains  $k_{\square_{ij}}^+$  possède son propre jeu de  $\varphi$  paramètres  ${}^b k_{\square_{ij}}^+$ . Toutefois, on explicite que toutes les composantes  $k_{\square_{ij}}^+$  utilisent le même jeu de  $\varphi$  sous-fonctions  $\phi_b$ . Or, en rassemblant toutes ces sous-fonctions dans un vecteur  $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^\varphi$  :

$$\boldsymbol{\phi} \left( |\sigma| \right) = \left[ \phi_1 \left( |\sigma| \right) \quad \cdots \quad \phi_b \left( |\sigma| \right) \quad \cdots \quad \phi_\varphi \left( |\sigma| \right) \right]^\top \in \mathbb{R}^\varphi, \quad \forall b \in \{\mathbb{N}^* \wedge b \leq \varphi\} \quad (5.37)$$

et en utilisant l'opérateur  $\otimes$  représentant le produit de Kronecker défini à la section C.5.4, il est possible de réécrire le séquençement de chaque composante de gain  $k_{\square_{ij}}^+$  définie en (5.36) sous sa forme matricielle appliquée directement au gain complet  $\mathbf{K}_\square^+$  :

$$\mathbf{K}_\square^+ \left( |\sigma|, \boldsymbol{\kappa}_\square^+ \right) := \mathbf{K}_\square^\phi \left( \boldsymbol{\kappa}_\square^+ \right) \left( \boldsymbol{\phi} \left( |\sigma| \right) \otimes \mathbf{I}_{(q \times q) \vee (g \times g)} \right) = \sum_{b=1}^{\varphi} {}^b \mathbf{K}_\square^+ \left( {}^b \boldsymbol{\kappa}_\square^+ \right) \phi_b \left( |\sigma| \right) \quad (5.38)$$

où les  $\varphi$  paramètres  ${}^b k_{\square_{ij}}^+$  de chaque composante de gain  $k_{\square_{ij}}^+$  sont maintenant contenus dans la matrice  $\mathbf{K}_{\square}^{\phi}$  – au nombre total de  $m \times \varphi(q \vee g)$  paramètres  ${}^b k_{\square_{ij}}^+$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\square}^{\phi}(\boldsymbol{\kappa}_{\square}^+) &:= \left[ {}^1 \mathbf{K}_{\square}^+(\boldsymbol{\kappa}_{\square}^+) \mid {}^2 \mathbf{K}_{\square}^+(\boldsymbol{\kappa}_{\square}^+) \mid \dots \mid {}^b \mathbf{K}_{\square}^+(\boldsymbol{\kappa}_{\square}^+) \mid \dots \mid {}^{\varphi} \mathbf{K}_{\square}^+(\boldsymbol{\kappa}_{\square}^+) \right] \in \mathbb{R}^{m \times \varphi(q \vee g)} \\ \text{avec } \boldsymbol{\kappa}_{\square}^+ &:= \left[ ({}^1 \boldsymbol{\kappa}_{\square}^+)^{\top} \quad ({}^2 \boldsymbol{\kappa}_{\square}^+)^{\top} \quad \dots \quad ({}^b \boldsymbol{\kappa}_{\square}^+)^{\top} \quad \dots \quad ({}^{\varphi} \boldsymbol{\kappa}_{\square}^+)^{\top} \right]^{\top} \in \mathbb{R}^{m \varphi(q \vee g)} \quad \text{et} \\ {}^b \mathbf{K}_{\square}^+(\boldsymbol{\kappa}_{\square}^+) &:= \begin{bmatrix} {}^b k_{\square_{11}}^+ & {}^b k_{\square_{12}}^+ & \dots & {}^b k_{\square_{1(q \vee g)}}^+ \\ {}^b k_{\square_{21}}^+ & {}^b k_{\square_{22}}^+ & \dots & {}^b k_{\square_{2(q \vee g)}}^+ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^b k_{\square_{m1}}^+ & {}^b k_{\square_{m2}}^+ & \dots & {}^b k_{\square_{m(q \vee g)}}^+ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (q \vee g)} \end{aligned} \quad (5.39)$$

où l'on précise que l'expression  $(q \vee g)$  vaut  $q$  lorsque  $\square := \xi$  et  $g$  lorsque  $\square := \gamma$ .

Pour la fonction de séquençement des gains  $\mathbf{K}_{\square}^+$  définie en (5.38), le gain  $\mathbf{K}_{\sigma}^+$  associé au TCC défini en (5.17) est donné par l'expression suivante :

$$\mathbf{K}_{\sigma}^+(\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\kappa}^+) := \mathbf{K}_{\xi}^{\phi}(\boldsymbol{\kappa}_{\xi}^+) \left( \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}_{e_{\ell}}} \otimes \boldsymbol{\xi}_{e_{k,\ell}} \right) + \mathbf{K}_{\gamma}^{\phi}(\boldsymbol{\kappa}_{\gamma}^+) \left( \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}_{e_{\ell}}} \otimes (\boldsymbol{\gamma}_{e_{k,\ell}} - \boldsymbol{\gamma}_{\S}) \right) \quad (5.40)$$

où l'on précise que cette expression est conservée pour sa forme générale où les  $\varphi$  fonctions de séquençement  $\phi_b$  comprises dans  $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^{\varphi}$  pourraient dépendre chacune de  $\varsigma$  variables de séquençement comprises dans le vecteur  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^{\varsigma}$ . On rappelle que la valeur de  $\boldsymbol{\xi}_{e_{k,\ell}}$  est donnée en (5.9), celle de  $\boldsymbol{\gamma}_{e_{k,\ell}}$  en (5.7) et celle de  $\boldsymbol{\gamma}_{\S}$  en (5.3).

Par conséquent, les nouveaux gains constants  $\mathbf{K}_{\xi}^{\phi} \in \mathbb{R}^{m \times \varphi q}$  et  $\mathbf{K}_{\gamma}^{\phi} \in \mathbb{R}^{m \times \varphi g}$  deviennent alors les seuls paramètres réglables du contrôleur lorsqu'on effectue sa synthèse en utilisant une fonction de séquençement  $\boldsymbol{\phi}(|\boldsymbol{\sigma}|)$  déjà fixée à priori. En d'autres mots, cela permet de figer l'architecture de commande pour la synthèse multimodèle. On note également que les choix du nombre et de la nature des sous-fonctions  $\phi_b$ , qui sont de manière générale des fonctions non linéaires de  $|\boldsymbol{\sigma}|$ , doivent refléter l'intensité de la non-linéarité des fonctions d'équilibre du système étudié<sup>5.8</sup> afin que les gains puissent bien s'adapter à la dynamique non linéaire du système. De fait, le nombre  $\varphi$  de sous-fonctions choisies dicte directement le nombre total  $m \times \varphi(q + g)$  de paramètres libres dans la synthèse multimodèle. Un nombre peu élevé de paramètres libres empêchera l'atteinte de bonnes performances sur l'ensemble du domaine de séquençement considéré, tandis qu'un nombre trop élevé ralentira considérablement la résolution numérique du problème de synthèse  $\mathcal{H}_{\infty}$  structurée multimodèle. Enfin, on note qu'il faut considérer au moins  $N_{\sigma} \geq \varphi$  points de séquençement à l'équilibre  $\boldsymbol{\sigma}_{e_{\ell}}$  différents

<sup>5.8.</sup> Cf. figure 4.2.

pour qu'une solution existe<sup>5.9</sup>.

### Théorie de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$

Maintenant que l'architecture complète du problème de commande a été définie avec notamment la fonction de séquençement des gains  $\phi(|\sigma|)$ , il s'agit d'aborder comment utiliser la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée multimodèle afin d'imposer les performances souhaitées. De manière analogue aux matrices  $\mathbf{Q}_{a_k,\ell}$  et  $\mathbf{R}_{k,\ell}$  qui dictent les performances obtenues en BF pour la synthèse LQR, ce sont les fonctions fréquentielles matricielles  $\mathbf{W}_{j,k,\ell}$  qui définissent les performances désirées en BF dans le cadre de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ . On précise que les *fonctions fréquentielles* portent également les appellations *gabarits fréquentiels*, *fonctions de pondération* ou *filtres fréquentiels*.

Les filtres fréquentiels  $\mathbf{W}_{j,k,\ell}$  sont définis comme suit :

$$\mathbf{W}_{j,k,\ell}(s, \mathbf{U}_{j,k,\ell}) \quad \text{avec} \quad s \in \mathbb{C} \quad (5.41)$$

où  $s$  est la variable fréquentielle du domaine complexe et  $\mathbf{U}_{j,k,\ell}$  est le vecteur de taille variable comprenant tous les paramètres définissant le filtre fréquentiel  $\mathbf{W}_{j,k,\ell}$ . Ce vecteur est lui-même défini comme suit :

$$\mathbf{U}_{j,k,\ell}(\mathcal{G}_j, \boldsymbol{\vartheta}_{e_k,\ell}) \quad (5.42)$$

où  $\mathcal{G}_j$  représente le type de gabarit que l'on souhaite appliquer selon le critère de performance imposé au système en BF. Par exemple, quelques types de gabarits en BF sont ceux de : suivi de consigne, découplage, pôles, marges de stabilité, saturations, bruit, rejet de perturbations, sensibilité, etc. Sur MATLAB<sup>®</sup>, ces types de gabarits sont tous représentés sous la forme d'objets et proviennent de la classe `TUNINGGOAL`. À titre d'exemple, l'objet permettant d'imposer un gabarit de suivi porte le nom de `TUNINGGOAL.STEPTRACKING`. On précise également que, de manière générale, chaque filtre fréquentiel  $\mathbf{W}_{j,k,\ell}$  peut être appliqué à un modèle linéarisé particulier qui est défini par son point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_k,\ell}$ . Il est toutefois possible – et même souvent souhaitable – d'appliquer un même filtre  $\mathbf{W}_{j,k,\ell}$  à plusieurs points d'équilibre distincts. En faisant ainsi, cela revient à uniformiser le critère de performance associé à  $\mathbf{W}_{j,k,\ell}$  à l'ensemble des points d'équilibre alors considérés pour ce filtre.

L'ensemble  $\mathcal{U}$  comprenant tous les paramètres des filtres fréquentiels imposés dans une syn-

---

5.9. Il est toutefois conseillé d'en prendre beaucoup plus afin de surcontraindre le problème de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée multimodèle et améliorer le processus de résolution numérique. Dans le cadre de ce projet de recherche, le nombre  $N_\sigma \approx 10\varphi$  s'est avéré être un bon ordre de grandeur.

thèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée multimodèle est défini comme suit :

$$\mathcal{U} := \bigcup_{j=1}^{N_{\mathcal{U}}} \bigcup_{k=0}^{N_{\rho}-1} \bigcup_{\ell=1}^{N_{\sigma}} \left\{ \mathbf{U}_{j,k,\ell} \left( \mathcal{G}_j, \boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}} \right) \right\}. \quad (5.43)$$

Puis, l'ensemble de tous les filtres fréquentiels impliqués dans la synthèse est défini comme :

$$\mathcal{W}(\mathcal{U}) := \bigcup_{j=1}^{N_{\mathcal{U}}} \bigcup_{k=0}^{N_{\rho}-1} \bigcup_{\ell=1}^{N_{\sigma}} \left\{ \mathbf{W}_{j,k,\ell} \left( s, \mathbf{U}_{j,k,\ell} \right) \right\} \quad (5.44)$$

où l'on note que les ensembles  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{W}$  sont de dimensions  $N_{\mathcal{U}} \times N_{\rho} \times N_{\sigma}$ .

Maintenant, si l'on définit que :

- $\mathbf{S}_{k,\ell} \left( s, \boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}} \right)$  : est la fonction de transfert associée aux modèles linéarisés du système dynamique  $\Delta \mathcal{S}_{k,\ell} \left( \boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}} \right)$  et du groupe de capteurs  $\Delta \mathcal{M}_{k,\ell} \left( \boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}} \right)$  ;
- $\mathbf{C}_{k,\ell} \left( s, \boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\kappa}^+ \right)$  : est la fonction de transfert associée au modèle linéarisé du contrôleur  $\Delta \mathcal{C}_{k,\ell} \left( \boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\kappa}^+ \right)$  ;

alors la fonction de transfert du modèle linéarisé en boucle fermée  $\mathbf{G}_{k,\ell}$  est donnée par la *Linear Fractional Transformation* (LFT) inférieure  $\mathcal{F}_i$  de  $\mathbf{S}_{k,\ell}$  et  $\mathbf{C}_{k,\ell}$  [18, 40] :

$$\mathbf{G}_{k,\ell} \left( s, \boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\kappa}^+ \right) := \mathcal{F}_i \left( \mathbf{S}_{k,\ell} \left( s, \boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}} \right), \mathbf{C}_{k,\ell} \left( s, \boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\kappa}^+ \right) \right). \quad (5.45)$$

Dans les faits, les filtres  $\mathbf{W}_{j,k,\ell}$  sont appliqués à des sous-transferts précis de  $\mathbf{G}_{k,\ell}$ , notés  $\mathbf{T}_{j,k,\ell} \left( s, \mathcal{G}_j, \boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\kappa}^+ \right)$ , qui dépendent du type de gabarit  $\mathcal{G}_j$  que l'on souhaite imposer au dit transfert. Concrètement, le problème de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  consiste à trouver les paramètres libres  $\boldsymbol{\kappa}^+$  qui permettent de minimiser la norme  $\mathcal{H}_\infty$  de chaque transfert  $\mathbf{T}_{j,k,\ell}$  pondéré par son filtre  $\mathbf{W}_{j,k,\ell}$  – globalement pour tous les modèles considérés en BF  $\mathbf{G}_{k,\ell}$  :

$$\gamma_{j,k,\ell} := \min_{\boldsymbol{\kappa}^+} \left\| \mathbf{W}_{j,k,\ell} \left( s, \mathbf{U}_{j,k,\ell} \right) \mathbf{T}_{j,k,\ell} \left( s, \mathcal{G}_j, \boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}, \boldsymbol{\kappa}^+ \right) \right\|_{\infty} \quad \forall \{j, k, \ell\} \in \mathcal{I} \quad (5.46)$$

où  $\gamma_{j,k,\ell}$  est la valeur minimisée (ou le gain) de la norme  $\mathcal{H}_\infty$  du transfert pondéré associé et  $\mathcal{I} := \{1, 2, \dots, N_{\mathcal{U}}\} \times \{1, 2, \dots, N_{\rho}\} \times \{1, 2, \dots, N_{\sigma}\}$ . On note que le critère de performance imposé par le filtre  $\mathbf{W}_{j,k,\ell}$  au transfert  $\mathbf{T}_{j,k,\ell}$  est entièrement respecté si et seulement si le gain  $\mathcal{H}_\infty$  vaut  $\gamma_{j,k,\ell} < 1$ . Une valeur  $\gamma_{j,k,\ell} \geq 1$  indique que le critère n'est pas *strictement* respecté. Toutefois, une valeur légèrement supérieure à 1 est souvent tolérable et signifie que le critère est *partiellement* respecté.

L'ensemble de tous les gains  $\mathcal{H}_\infty$   $\gamma_{j,k,\ell}$  calculés dans la synthèse multimodèle et multiobjectif

est défini comme suit :

$$\mathcal{Y} := \bigcup_{j=1}^{N_{\mathcal{U}}} \bigcup_{k=0}^{N_e-1} \bigcup_{\ell=1}^{N_{\sigma}} \{\gamma_{j,k,\ell}\}. \quad (5.47)$$

Puis, le gain  $\mathcal{H}_{\infty}$  global associé à la synthèse est défini comme suit :

$$\gamma := \max(\mathcal{Y}). \quad (5.48)$$

Les liens qui unissent les grandeurs intervenant dans le problème de synthèse  $\mathcal{H}_{\infty}$  structurée, multimodèle et multiobjectif sont illustrés à la figure 5.3. Enfin, ce problème est solutionné en utilisant la fonction `SYSTUNE` de MATLAB<sup>®</sup> qui a été développée suite aux travaux de [19–21].

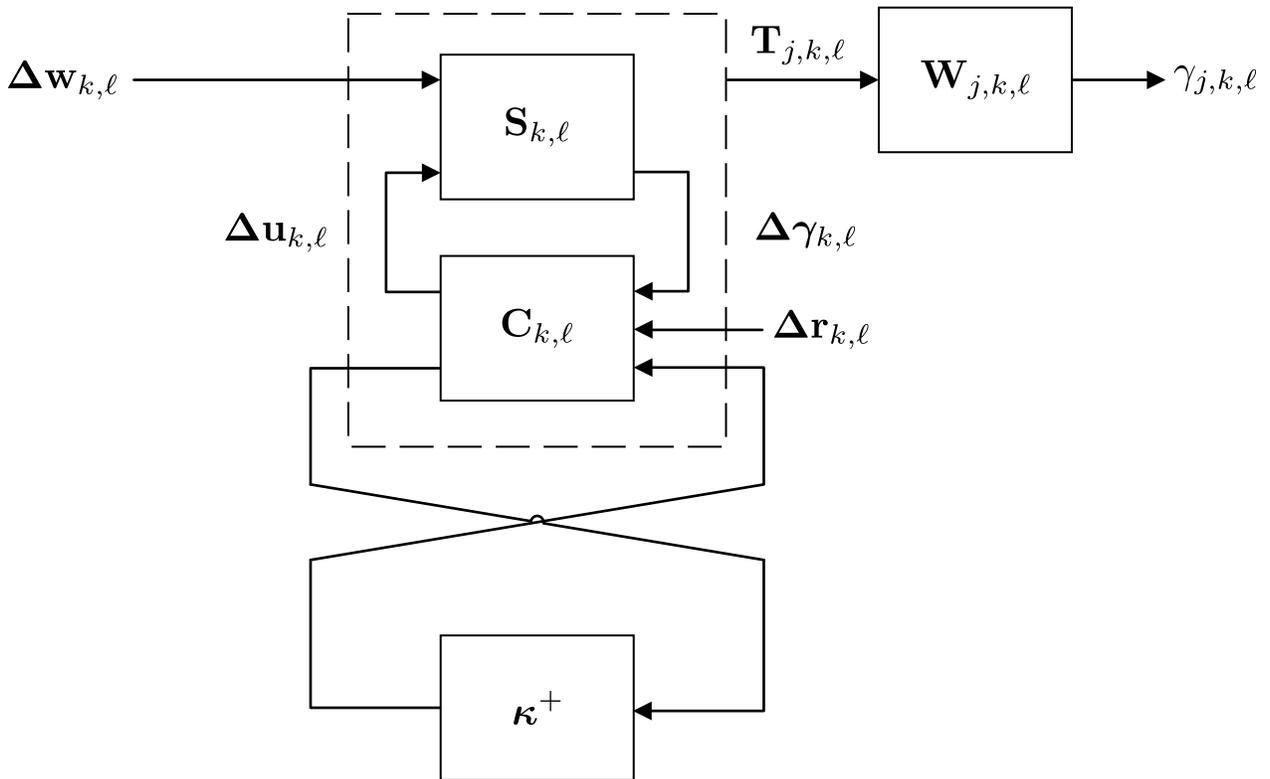


Figure 5.3 Problème de commande généralisé dans le cadre de la synthèse  $\mathcal{H}_{\infty}$  structurée multimodèle utilisant des gains autoséquencés [18]

### Méthodologie de résolution numérique

Puisque le problème de synthèse  $\mathcal{H}_{\infty}$  structurée, multimodèle et multiobjectif est résolu à l'aide d'outils numériques – c.-à-d. en utilisant la fonction `SYSTUNE` de MATLAB<sup>®</sup>, cela im-

plique que la valeur des paramètres recherchés  $\kappa^+$  doit être initialisée à une certaine valeur se rapprochant le plus possible de la solution recherchée. Avant d'effectuer la première synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ , la seule information dont on dispose est celle issue de la synthèse LQR. Toutefois, bien que les méthodes de synthèses LQR et  $\mathcal{H}_\infty$  possèdent la même architecture consistant en un retour de sortie augmenté d'une action intégrale, ces deux méthodes n'emploient pas les mêmes fonctions de séquençement pour leurs gains  $\mathbf{K}_\xi^+$  et  $\mathbf{K}_\gamma^+$ . Ainsi, ces deux méthodes ne possèdent pas le même vecteur de paramètres  $\kappa^+$ . Par conséquent, il n'est pas possible d'utiliser directement la solution de la méthode LQR afin d'initialiser la méthode  $\mathcal{H}_\infty$ . Cependant, l'analyse des courbes de gains obtenues pour la synthèse LQR peut guider consciencieusement le choix des paramètres initiaux de la première synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ . Puis, une fois cette première synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  effectuée, les deux synthèses suivantes peuvent être initialisées en utilisant les résultats respectifs de leur synthèse précédente. Il y a donc au total quatre synthèses (et donc quatre jeux de gains!) impliquées dans la seconde méthode : la première synthèse issue de la première méthode utilisant la synthèse LQR et les trois synthèses  $\mathcal{H}_\infty$ . Ces trois dernières synthèses sont découpées judicieusement afin d'augmenter progressivement la complexité du problème de synthèse multimodèle et multiobjectif. Cette façon de procéder permet de faciliter la résolution numérique du problème de synthèse à chaque étape intermédiaire. On précise que toutes ces synthèses sont dépendantes et doivent être effectuées dans un ordre précis afin d'obtenir les gains finaux qui sont utilisés dans le système de commandes de vol.

Les quatre synthèses comprises dans ce processus sont les suivantes :

1. **LQR + PPP** : Synthèse initiale LQR unimodèle effectuée point par point pour chacun des modèles compris dans le domaine de séquençement à l'équilibre E. Cette synthèse utilise les paramètres nominaux  $\varrho_0$ , puisqu'elle n'admet pas un cadre multimodèle. Le TCC n'est pas inclus dans cette synthèse. Elle permet toutefois d'obtenir rapidement un premier jeu de  $2 \times 31$  gains  $\mathbf{K}_{\xi_{k,\ell}}^+$  et  $\mathbf{K}_{\gamma_{k,\ell}}^+$  afin d'analyser leur parité sur le domaine de séquençement (cf. section 5.4.1), puis d'initialiser la première synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ .
2.  **$\mathcal{H}_\infty$  + PPP** : Première synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée effectuée à mi-chemin entre une synthèse PPP et une synthèse multimodèle (SMM). L'aspect multimodèle concerne les 5 différentes configurations paramétriques et l'aspect unimodèle concerne les 31 points de séquençement à l'équilibre considérés dans la synthèse. Ainsi, comme pour la synthèse LQR + PPP, un total de  $2 \times 31$  gains  $\mathbf{K}_{\square_{k,\ell}}^+$  sont synthétisés pour chacune des 31 familles comprenant 5 modèles avec des configurations paramétriques différentes. La recherche des  $2 \times 31$  gains est initialisée à l'aide des gains trouvés à la synthèse précédente LQR + PPP. Cette synthèse sert essentiellement à valider que l'ensemble des filtres fréquentiels (cf. section 5.3.6) qui sont utilisés dans le cadre de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  respectent le cahier des charges (cf. section 5.3.1). Les fonctions de séquençement

ne sont pas utilisées dans cette synthèse ni le TCC, puisque les points d'équilibre sont considérés PPP.

3.  $\mathcal{H}_\infty + \text{SMM}$  : Synthèse intermédiaire  $\mathcal{H}_\infty$  structurée multimodèle qui est effectuée d'un seul coup sur l'ensemble de tous les modèles appartenant à  $\Theta_e$ . Cela inclut la variation des configurations paramétriques  $\boldsymbol{\rho}_k$  et celle des points de séquençement d'équilibre  $\sigma_{e_\ell}$ . Le nombre de paramètres libres  $\kappa^+$  est restreint à la configuration architecturale utilisant la fonction de séquençement  $\boldsymbol{\phi}$  sans toutefois considérer le TCC dans les modèles linéarisés. La *partie constante* des gains de cette synthèse est initialisée avec les gains obtenus à la 2<sup>e</sup> synthèse  $\mathcal{H}_\infty + \text{PPP}$ , tandis que leur *partie variable*<sup>5.10</sup> est initialisée à une valeur nulle. Cette première synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  entièrement multimodèle sert essentiellement à valider que les mêmes filtres fréquentiels qui sont utilisés à la 2<sup>e</sup> synthèse  $\mathcal{H}_\infty + \text{PPP}$  permettent toujours de respecter le cahier des charges ; malgré le fait que le nombre de *paramètres libres* dans le problème de synthèse de gains SMM a diminué par rapport à la synthèse de gains PPP<sup>5.11</sup>.
4.  $\mathcal{H}_\infty + \text{TCC}$  : Dernière synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  et également l'ultime synthèse de la méthodologie de résolution numérique. Cette synthèse est effectuée en tout point identiquement à la synthèse précédente  $\mathcal{H}_\infty + \text{SMM}$  à une exception près : le TCC est finalement inclus dans l'architecture linéarisée des modèles considérés dans cette synthèse multimodèle. Puisqu'elle utilise également la fonction de séquençement  $\boldsymbol{\phi}$ , les paramètres des gains contenus dans  $\kappa^+$  et trouvés à la synthèse précédente peuvent être réutilisés tels quels dans l'initialisation de cette dernière synthèse.

Enfin, on note que les acronymes suivants sont utilisés afin de définir les deux configurations paramétriques considérées dans cette méthodologie :

1. **NOM** : configuration paramétrique nominale utilisant seulement  $\boldsymbol{\rho}_0$  dans le cadre de la synthèse LQR unimodèle ;
2. **INC** : configurations paramétriques incertaines utilisant toutes les configurations  $\boldsymbol{\rho}_k$  dans le cas des synthèses  $\mathcal{H}_\infty$  multimodèles.

---

5.10. Par exemple, pour un gain scalaire  $k \in \mathbb{R}$  séquencé en fonction de l'état  $\sigma \in \mathbb{R}$  tel que  $k(\sigma) = k_0 + k_1\sigma + k_2\sigma^2 + k_3\sigma^3 + \dots + k_n\sigma^n$ , la *partie constante* du gain séquencé  $k(\sigma)$  correspond au gain  $k(0) = k_0$ , tandis que sa *partie variable* correspond aux gains  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ . Cf. sections 5.3.6 et 5.4.1 pour plus de détails concernant les différentes parties constante et variable des gains.

5.11. Dans les synthèses LQR + PPP et  $\mathcal{H}_\infty + \text{PPP}$ , il y a  $m \times (q + g) \times N_\sigma$  paramètres libres en tout pour les  $2 \times N_\sigma$  gains  $\mathbf{K}_{\xi_{k,\ell}}^+$  et  $\mathbf{K}_{\gamma_{k,\ell}}^+$ . Dans les synthèses  $\mathcal{H}_\infty + \text{SMM}$  et  $\mathcal{H}_\infty + \text{TCC}$ , il y a  $m \times (q + g) \times \varphi$  paramètres libres en tout pour les deux gains  $\mathbf{K}_\xi^\phi$  et  $\mathbf{K}_\gamma^\phi$ . Or, de manière générale, on prend toujours  $\varphi < N_\sigma$ . Ainsi, pour le second groupe de synthèses, il y a  $\frac{N_\sigma}{\varphi}$  moins de paramètres libres que pour le premier groupe.

### 5.3 Autopilote longitudinal pour un aéronef convertible à corps inclinable

Cette section présente l'application des deux méthodes de synthèses présentées au tableau 5.1. L'application retenue dans le cadre du projet consiste en la conception d'un autopilote pour la dynamique longitudinale du MAVION. Concrètement, un tel système consiste en la régulation et le suivi de la vitesse d'avancement  $v_n$  et de l'altitude  $h$ . Par exemple, si l'on considère le parcours de vol typique et minimaliste d'un tel drone convertible présenté à la figure 5.4, la phase de décollage consiste à réguler la vitesse d'avancement  $v_n$  à une valeur nulle tout en augmentant progressivement l'altitude  $h$  jusqu'à sa valeur de croisière. Ensuite, l'aéronef effectue un vol de transition en partant d'une vitesse d'avancement nulle jusqu'à atteindre sa vitesse de croisière désirée. Toute la phase de vol de croisière est ensuite effectuée à altitude et vitesse d'avancement constantes. L'autopilote s'assure également de rejeter les perturbations de vent qui peuvent survenir à tout moment. Puis, l'engin effectue une seconde transition cette fois à l'approche de son point d'atterrissage afin de réduire progressivement sa vitesse d'avancement jusqu'à une vitesse nulle. L'aéronef effectue ensuite un atterrissage en présence de vent en maintenant sa vitesse inertielle nulle. Cette dernière phase de vol sollicite pleinement la loi de commandes en matière de régulation de la vitesse d'avancement inertielle  $v_n$  et l'altitude  $h$ . Le parcours est complété lorsque le drone revient à son altitude initiale.

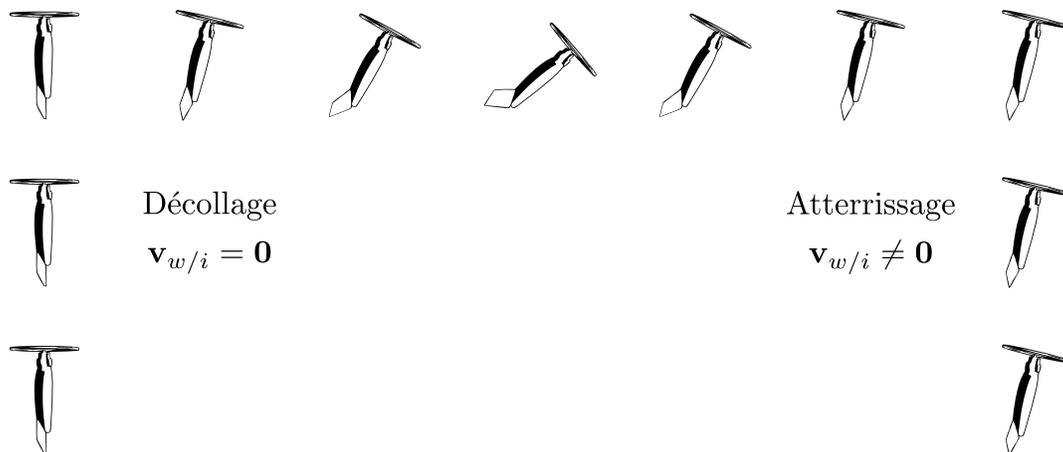


Figure 5.4 Parcours typique 2D du MAVION lors d'une mission complète

La loi de commandes de vol se base sur les courbes d'équilibre présentées à la figure 4.2 du modèle d'état du MAVION présenté à la section 4.1. On considère également le vecteur  $\mathbf{s}$  des sorties de saturations définies à la section 4.2. Les incertitudes paramétriques considérées dans les synthèses sont celles définies à la figure 4.1.

Cette section reprend exactement les mêmes titres des sous-sections des sections 5.1 et 5.2

en effectuant cette fois l'application concrète des méthodes présentées pour le cas de la conception d'un autopilote longitudinal. Puisque la démarche associée aux deux méthodes de synthèses a déjà été détaillée dans ces deux sections, on précise que seuls les éléments clés permettant de reproduire les résultats de synthèses et de simulations présentés respectivement aux sections 5.4 et 6.1 sont donnés dans cette section. Enfin, la première sous-section consiste en la présentation du cahier des charges définissant les critères de performance désirés. Ces derniers sont alors étroitement reliés aux choix des matrices de pondération  $\mathbf{Q}_{a_k, \ell}$  et  $\mathbf{R}_{k, \ell}$  dans la synthèse LQR unimodèle présentée à la section 5.2.1 et aux filtres fréquentiels  $\mathbf{W}_{j, k, \ell}$  dans la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée multimodèle présentée à la section 5.2.2.

La valeur numérique nominale de chaque paramètre du modèle longitudinal du MAVION contenu dans le vecteur  $\boldsymbol{\rho}_0$  est celle présentée au tableau 5.2 de la page suivante.

Tableau 5.2 Valeur numérique nominale des paramètres du modèle d'état longitudinal

Symbole	Description	Valeur	Unité(s)
Paramètres inertiels			
$m$	masse	0.430	kg
$I_{yy}$	moment d'inertie en tangage	0.0036	kg m <sup>2</sup>
Paramètres atmosphériques			
$g_0$	gravité standard	9.80665	m/s <sup>2</sup>
$\rho_0$	masse volumique standard de l'air	1.225	kg/m <sup>3</sup>
Paramètres alaires			
$r_{ca}$	décalage du centre aérodynamique par rapport au CG	-0.10c	m
$c$	corde	0.210	m
$S$	surface alaire totale	0.0882	m <sup>2</sup>
Paramètres aérodynamiques			
$C_{L\alpha}$	coefficient de portance	$2\pi$	—
$C_{D0}$	coefficient de traînée	0.1	—
$C_{mq}$	coefficient de moment en tangage	-0.5	—
Paramètres des actionneurs			
$S_p$	surface balayée par une hélice	0.0346	m <sup>2</sup>
$k_t$	coefficient de poussée des moteurs	$3.136e-6$	N s <sup>2</sup> /rad <sup>2</sup>
$\tau_\omega$	constante de temps des moteurs	0.08	s
$\tau_\delta$	constante de temps des élévons	0.10	s
$\xi_{fy}$	coefficient d'efficacité en force des élévons	1/3	—
$\xi_{my}$	coefficient d'efficacité en moment des élévons	2/3	—
Paramètres de saturation des actionneurs			
$\omega_{sat}^-$	borne inférieure de saturation statique des moteurs	0	rad/s
$\omega_{sat}^+$	borne supérieure de saturation statique des moteurs	920	rad/s
$\dot{\omega}_{sat}^-$	borne inférieure de saturation dynamique des moteurs	-1000	rad/s <sup>2</sup>
$\dot{\omega}_{sat}^+$	borne supérieure de saturation dynamique des moteurs	3000	rad/s <sup>2</sup>
$\delta_{sat}^-$	borne inférieure de saturation statique des élévons	$-\pi/4$	rad
$\delta_{sat}^+$	borne supérieure de saturation statique des élévons	$\pi/4$	rad
$\dot{\delta}_{sat}^-$	borne inférieure de saturation dynamique des élévons	-1	rad/s
$\dot{\delta}_{sat}^+$	borne supérieure de saturation dynamique des élévons	1	rad/s

### 5.3.1 Cahier des charges : Autopilote longitudinal

Afin de rendre crédible l'étude de cas effectuée dans cette section, un cahier des charges complet est élaboré pour la conception de l'autopilote longitudinal de l'aéronef convertible :

1. **Domaine de vol** :  $-30 \leq v_n \leq 30$  m/s (l'aéronef qui a été modélisé avec un profil alaire symétrique doit pouvoir voler à la fois sur son ventre et sur son dos) ;
2. **Sorties disponibles** : tout le vecteur d'état  $\mathbf{x}$  incluant ceux des actionneurs (on effectue l'hypothèse qu'il est soit possible de les mesurer ou bien de les estimer rapidement en concevant des estimateurs/filtres) ;
3. **Variables régulées** : la vitesse d'avancement  $v_n$  et l'altitude  $h$  ;
4. **Erreurs de suivi** : l'architecture de la loi de contrôle doit assurer des erreurs nulles en régime permanent pour les variables régulées ( $v_n(\infty) \rightarrow v_{nc}$  et  $h(\infty) \rightarrow h_c$ ) ;
5. **Temps de réponse** :  $t_{v_n} = 1.5$  s et  $t_h = 3$  s (on accorde la priorité à la régulation en vitesse par rapport à celle en position) ;
6. **Dépassements** : on tolère des dépassements maximums de l'ordre de 5 % sur les sorties régulées  $v_n$  et  $h$  ;
7. **Découplages** : un échelon commandé en vitesse  $v_{nc}$  doit entraîner une variation d'au plus 10 % en altitude  $h$  et *idem* pour l'effet de  $h_c$  sur  $v_n$  avec des temps de réponse de l'ordre de  $t_r = 4.5$  s sur ces deux transferts couplés ;
8. **Saturations** : afin d'éviter la saturation dynamique des actionneurs ( $\dot{\omega}$  et  $\dot{\delta}$ ), leur sollicitation pour des entrées commandées en escalier unitaire ( $v_{nc}$  et  $h_c$ ) et perturbées ( $w_n$  et  $w_d$ ) est limitée à 50 % de leurs valeurs limites (cf. tableau 5.2 pour les valeurs de saturation des actionneurs) ;
9. **Stabilité et robustesse** : marge de gain de 12 dB, marge de phase de  $45^\circ$ , amortissement minimum de 0.5, fréquence maximum de 100 Hz et fréquence de décroissance exponentielle minimale de 0.5 Hz imposés aux pôles du système en BF ;
10. **Incertitudes paramétriques** : le système de commandes de vol doit maintenir des performances *acceptables*<sup>5.12</sup> pour des variations paramétriques indépendantes de l'ordre de  $\pm 25$  % pour le coefficient aérodynamique du moment en tangage  $C_{mq}$  et la position du centre aérodynamique  $r_{ca}$  (la synthèse linéaire du contrôleur est toutefois effectuée avec la valeur atténuée de  $\pm 10$  % à l'image de la méthode employée par [18]).

---

5.12. Une analyse qualitative de ce qui est *acceptable* est effectuée lors de la validation par simulations du système de commandes de vol au chapitre 6.

### 5.3.2 Architecture non linéaire : Autopilote longitudinal

On définit explicitement les variables du modèle d'état qui sont utilisées dans le système de commandes de vol.

Les grandeurs du modèle d'état utilisées dans les systèmes  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{C}$  sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\gamma} := \mathbf{x} = [u \ w \ q \ \theta \ h \ \omega \ \delta]^\top \in \mathbb{R}^g \\ \mathbf{r} := [v_{nc} \ h_c]^\top \in \mathbb{R}^q \\ \mathbf{z} := \mathbf{g}(\boldsymbol{\gamma}) = [\nu(\boldsymbol{\gamma}) \ h]^\top = [v_n \ h]^\top \in \mathbb{R}^q \\ \boldsymbol{\xi} := [v_{ni} \ h_i]^\top \in \mathbb{R}^q \\ \sigma := \nu(\boldsymbol{\gamma}) = u \cos \theta + w \sin \theta = v_n \in \mathbb{R}^\varsigma \\ \mathbf{u} := [\omega_c \ \delta_c]^\top \in \mathbb{R}^m \\ \mathbf{w} := [w_n \ w_d]^\top \in \mathbb{R}^v \end{array} \right. \quad (5.49)$$

où  $g = n = 7$ ,  $q = 2$ ,  $\varsigma = 1$ ,  $m = 2$  et  $v = 2$ .

Sans surprise, le point de symétrie du domaine de séquençement E correspond à la valeur de vitesse d'avancement nulle :  $\sigma_{e_\S} = \sigma_{e_1} = v_{n_{e_1}} = 0$  m/s. Les valeurs d'équilibre correspondantes non nulles comprises dans  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{0,\S}}$  et calculées avec  $\boldsymbol{\varrho}_0$  sont :

$$\boldsymbol{\vartheta}_{e_{0,\S}}(\boldsymbol{\varrho}_0, \sigma_{e_\S}) := \boldsymbol{\vartheta}_{e_{0,1}}(\boldsymbol{\varrho}_0, \sigma_{e_1}) = \boldsymbol{\vartheta}_{e_{0,1}}(v_{n_{e_1}}, \theta_{e_{0,1}}, \omega_{e_{0,1}}, \delta_{e_{0,1}}) \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{n_{e_1}} = 0 \text{ m/s} \\ \theta_{e_{0,1}} = 90 \text{ deg} \\ \omega_{e_{0,1}} = 847 \text{ rad/s} \\ \delta_{e_{0,1}} = 0 \text{ deg} \end{array} \right. \quad (5.50)$$

ce qui donne les deux points de symétrie suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\gamma}_\S := [0 \ 0 \ 0 \ \pi/2 \ 0 \ 847 \ 0]^\top \\ \mathbf{u}_\S := [847 \ 0]^\top \end{array} \right. \quad (5.51)$$

### 5.3.3 Architecture à l'équilibre : Autopilote longitudinal

Les courbes d'équilibre calculées à partir de la solution donnée en (F.21) ont déjà été données à la figure 4.2.

### 5.3.4 Architecture linéarisée : Autopilote longitudinal

Obtenir les expressions analytiques des matrices jacobiennes comprises dans les systèmes linéarisés  $\Delta\mathcal{S}_{k,\ell}$ ,  $\Delta\mathcal{M}_{k,\ell}$  et  $\Delta\mathcal{C}_{k,\ell}$  serait tout à fait possible, mais leur complexité rend leur présentation sur du papier de format lettre quelque peu difficile. Celles-ci ont toutefois été calculées à l'aide de deux logiciels différents afin de valider leur exactitude. Ainsi, elles ont d'abord été obtenues en utilisant le SYMBOLIC MATH TOOLBOX™ disponible sur MATLAB® de MATHWORKS® ; puis, validées en utilisant le logiciel à représentation symbolique MATHEMATICA® de WOLFRAM®. Le lecteur est invité à procéder pareillement.

Le test d'observabilité du critère de Kalman a été effectué avec la fonction `obsv` de MATLAB® et les paires de matrices  $(\mathbf{A}_{k,\ell}, \mathbf{C}_{k,\ell})$  sont bien observables pour tous les points d'équilibre contenus dans le domaine d'opération  $\Theta_e$  considéré dans les synthèses. Ceci n'est aucunement une surprise, puisqu'on sait que les modèles d'état linéarisés  $\Delta\mathcal{S}_{k,\ell}$  et  $\Delta\mathcal{M}_{k,\ell}$  donnés respectivement en (4.20) et (5.11) sont déjà définis en utilisant une forme minimale<sup>5.13</sup>, puisqu'ils utilisent la représentation minimale des angles d'Euler pour la dynamique de la cinématique en rotation<sup>5.14</sup> et que  $\mathbf{C}_{k,\ell} = \mathbf{I}_{n \times n}$ . De plus, la commandabilité des paires  $(\mathbf{A}_{k,\ell}, \mathbf{B}_{u_{k,\ell}})$  a déjà été vérifiée à la section 4.6.

#### CRITÈRE D'OBSERVABILITÉ DE KALMAN

Une paire de matrices  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  avec  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{g \times n}$  est dite observable si et seulement si la matrice d'observabilité  $\mathbf{M}_o$  :

$$\mathbf{M}_o(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{gn \times n} \quad (5.52)$$

est de rang plein – c.-à-d. que  $\text{rang}(\mathbf{M}_o) = n$ . △

### 5.3.5 Synthèse optimale LQR : Autopilote longitudinal

À la section 5.3.2, on a fait l'hypothèse que tout le vecteur d'état  $\mathbf{x}$  est mesurable. Puis, à la section 5.2.1, on a montré comment il est possible de rapporter le problème de commande

5.13. Des modèles d'état linéarisés  $\Delta\mathcal{S}_{k,\ell}$  et  $\Delta\mathcal{M}_{k,\ell}$  admettent une représentation minimale si et seulement si leur paire de matrices  $(\mathbf{A}_{k,\ell}, \mathbf{B}_{u_{k,\ell}})$  est commandable et leur paire de matrices  $(\mathbf{A}_{k,\ell}, \mathbf{C}_{k,\ell})$  est observable.

5.14. Cf. page 48 concernant les différentes représentations de la cinématique en rotation.

par RSS en un problème de RES si  $\Delta\gamma_{k,\ell} = \mathbf{C}_{k,\ell}\Delta\mathbf{x}_{k,\ell}$ , c.-à-d. que les sorties mesurées dépendent exclusivement des états du système. Un autre fait notable de cette technique est qu'elle permet de pondérer plutôt les sorties  $\gamma$  au lieu des états  $\mathbf{x}$ . Or, il s'avère que cela est fortement souhaitable pour la synthèse de l'autopilote longitudinal dont l'objectif est de réguler la vitesse d'avancement  $v_n$  et l'altitude  $h$ .

Normalement, lorsqu'on pondère une variable d'état dans le cadre de la synthèse LQR avec des objectifs de performance en BF pour des entrées en échelon (cf. section 5.3.1 pour le cahier des charges), on souhaite jouer sur trois paramètres définissant la forme de la régulation : l'action proportionnelle (P), l'action intégrale (I) et l'action dérivée (D). En effet, l'utilisation conjointe de ces trois actions permet de recréer l'effet d'un contrôleur PID qui est facile à ajuster. Pour ce faire, il suffit de débiter en ajustant le gain P jusqu'à l'atteinte du plateau de régime permanent avec le temps de réponse souhaité. Puis, on poursuit en ajustant le gain D afin d'obtenir l'amortissement désiré et l'ajustement final est effectué en modifiant le gain I<sup>5.15</sup>. Cependant, l'architecture de commande retenue dans la section 5.1.1 ne consiste pas en un PID classique. Il n'y a donc pas de gains  $k_p$ ,  $k_i$  et  $k_d$  à proprement parler. Néanmoins, il est possible de recréer l'effet PID en effectuant un choix judicieux des variables pondérées.

Tableau 5.3 Analogie entre les variables régulées et les actions PID

Variable régulée \ Action	P	I	D
Vitesse d'avancement	$v_n$	$v_{n_i}$	$a_n$
Altitude	$h$	$h_i$	$-v_d$

Le tableau 5.3 montre que pour chaque variable régulée, en l'occurrence  $v_n$  et  $h$  pour l'autopilote longitudinal, il existe une variable recréant l'effet PID. De fait, pour l'action proportionnelle rattachée au gain multipliant la variable  $v_n$ , il est possible de recréer l'action intégrale en multipliant  $v_{n_i}$  (contenue dans  $\xi$ ) par un gain. De même, afin de recréer l'action dérivée, il suffit d'utiliser l'accélération  $a_n$  qui est la dérivée de la vitesse  $v_n$ . Pour l'altitude  $h$ , on peut procéder pareillement en utilisant plutôt  $h_i$  et  $-v_d$ . Ainsi, au lieu de pondérer le vecteur d'état  $\mathbf{x}$  dont la plupart des états sont exprimés dans le repère  $\mathcal{R}_o$ , on décide plutôt de pondérer un autre vecteur  $\mathbf{y}$  avec les variables du tableau 5.3 qui sont plutôt exprimées dans  $\mathcal{R}_i$ , soit le même repère que les variables de régulation contenues dans  $\mathbf{z}$ . On définit ce

5.15. À vrai dire, ces trois actions sont couplées par rapport à l'atteinte des performances visées et il est souvent nécessaire d'itérer à quelques reprises avant d'obtenir les performances visées. Toutefois, la démarche générale qui est donnée consiste en une excellente façon d'entamer le processus.

nouveau vecteur comme suit :

$$\mathbf{y} := \mathbf{h}_y(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\varrho}) = [v_n \ h \ a_n \ v_d \ q \ \omega \ \delta]^\top \in \mathbb{R}^p$$

$$\text{avec } \begin{cases} v_n := u \cos \theta + w \sin \theta \\ v_d := w \cos \theta - u \sin \theta \\ a_u := \dot{u} + qw = f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\varrho}) + qw \\ a_w := \dot{w} - qu = f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\varrho}) - qu \\ a_n := a_u \cos \theta + a_w \sin \theta \end{cases} \quad (5.53)$$

où  $p = g = n = 7$ . De plus, on rappelle que  $f_1$  et  $f_2$  sont définies en (4.3). On note également que le choix de retenir  $v_d$  ou  $-v_d$  dans  $\mathbf{y}$  ne fait que changer le signe des composantes de gains correspondant à cette grandeur. De fait, l'action dérivée est conservée identiquement dans les deux cas.

Si l'on pose que  $\boldsymbol{\gamma} := \mathbf{y} = \mathbf{h}_y(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\varrho})$  et qu'on utilise la méthode de transformation RSS  $\rightarrow$  RES présentée à la section 5.2.1, une fois la linéarisation de  $\mathbf{h}_y$  effectuée autour de son point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$ , on obtient le vecteur d'état augmenté  $\Delta \mathbf{x}_{a_{k,\ell}}$  suivant – cf. (5.28) :

$$\Delta \mathbf{x}_{a_{k,\ell}} := \left[ \underbrace{\Delta v_{n_i} \ \Delta h_i}_I \ \underbrace{\Delta v_n \ \Delta h}_P \ \underbrace{\Delta a_n \ \Delta v_d}_D \ \Delta q \ \Delta \omega \ \Delta \delta \right]^\top \in \mathbb{R}^{q+p} \quad (5.54)$$

où les actions PID sont maintenant clairement mises en évidence ! Ainsi, en procédant comme il a été expliqué plutôt et suite à quelques itérations afin d'obtenir des performances qui respectent tous les critères du cahier des charges, on obtient les matrices de pondération diagonales suivantes associées respectivement à  $\Delta \mathbf{x}_{a_{k,\ell}}$  et  $\Delta \mathbf{u}_{k,\ell}$  :

$$\mathbf{Q}_{a_{k,\ell}} := \begin{bmatrix} 6.307 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.227 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1562 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1313 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \times 10^{-10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001313 \end{bmatrix} \quad \forall (k, \ell) \quad (5.55)$$

$$\text{et } \mathbf{R}_{k,\ell} := \begin{bmatrix} 1.6 \times 10^{-5} & 0 \\ 0 & 5.252 \end{bmatrix} \forall (k, \ell). \quad (5.56)$$

Ces deux matrices constantes ont été utilisées pour les 31 points d'équilibre  $v_{n_{e_\ell}}$  contenus dans E. En effet, l'utilisation de pondérations constantes sur tout le domaine de séquençement a permis d'obtenir de très bonnes performances. On précise également que la vérification des tests de stabilisabilité et de détectabilité définis respectivement en (5.32) et (5.33) sont complétés avec succès pour les paires de matrices respectives  $(\mathbf{A}_{a_{k,\ell}}, \mathbf{B}_{a_{k,\ell}})$  et  $(\mathbf{A}_{a_{k,\ell}}, \sqrt{\mathbf{Q}_{a_{k,\ell}}})$ . De plus, on souligne que les bonnes pondérations peuvent rapidement être trouvées en suivant un processus itératif, puisque la fonction `LQR` de MATLAB<sup>®</sup> permet d'obtenir la solution de chaque point d'équilibre de manière quasi instantanée. En effet, la résolution numérique de la synthèse LQR unimodèle pour les 31 modèles considérés est de l'ordre de 2.5 s seulement !

Ainsi, l'application de la méthode mise de l'avant dans cette section permet d'obtenir les 31 jeux de gains  $\mathbf{K}_{\xi_{k,\ell}}^+$  et  $\mathbf{K}_{y_{k,\ell}}^+$ . Toutefois, ce second gain  $\mathbf{K}_{y_{k,\ell}}^+$  n'est valide que pour les nouvelles sorties  $\mathbf{y}$ . Pour obtenir le gain utilisable dans l'architecture de commandes utilisant un RES avec  $\boldsymbol{\gamma} := \mathbf{x}$ , il suffit d'utiliser la matrice de changement de base entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  :

$$\mathbf{K}_{\boldsymbol{\gamma}_{k,\ell}}^+ := \mathbf{K}_{x_{k,\ell}}^+ = \mathbf{K}_{y_{k,\ell}}^+ \mathbf{C}_{y_{k,\ell}} \quad (5.57)$$

où  $\mathbf{C}_{y_{k,\ell}}$  est la matrice jacobienne associée à la linéarisation de  $\mathbf{h}_y$ . Les courbes de gains ainsi obtenues pour  $\mathbf{K}_{\xi_{k,\ell}}^+ \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  et  $\mathbf{K}_{\boldsymbol{\gamma}_{k,\ell}}^+ \in \mathbb{R}^{2 \times 7}$  sont présentées à la figure 5.6. On note également que  $\boldsymbol{\kappa}_{k,\ell}^+ \in \mathbb{R}^{18}$ . Enfin, tous les résultats de cette synthèse LQR sont analysés à la section 5.4.2.

### 5.3.6 Synthèse robuste $\mathcal{H}_\infty$ structurée : Autopilote longitudinal

On présente ici l'application à la dynamique longitudinale de la seconde méthode de synthèses expliquée à la section 5.2.2. Concrètement, on explicite d'abord la fonction de séquençement  $\phi$  retenue pour les gains utilisés dans l'autopilote longitudinal. Puis, on donne également le détail de tous les gabarits fréquentiels  $\mathcal{G}_j$  utilisés dans la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée, multimodèle et multiobjectif. Enfin, les résultats de chacune des étapes intermédiaires de cette méthode sont donnés en fin de section.

#### Choix de la fonction de séquençement des gains

Afin de pouvoir appliquer la seconde méthode de synthèse présentée au tableau 5.1, il est d'abord nécessaire de définir la fonction de séquençement utilisée afin de générer chacune

des composantes des gains  $\mathbf{K}_{\square}^+$ . Ainsi, on considère un séquençement effectué avec la variable  $\sigma := v_n$  de la forme suivante :

$$\begin{aligned} k_{\square_{ij}}^+ \left( |v_n|, \boldsymbol{\kappa}_{\square}^+ \right) &:= \sum_{b=1}^4 {}^b k_{\square_{ij}}^+ \left( \boldsymbol{\kappa}_{\square}^+ \right) |v_n|^{\varphi-1} \\ &= \underbrace{{}^1 k_{\square_{ij}}^+}_{\text{partie constante}} + \underbrace{{}^2 k_{\square_{ij}}^+ |v_n| + {}^3 k_{\square_{ij}}^+ |v_n|^2 + {}^4 k_{\square_{ij}}^+ |v_n|^3}_{\text{partie variable}} \end{aligned} \quad (5.58)$$

qui est essentiellement un polynôme de degré 3 que l'on peut reporter dans sa forme équivalente utilisant plutôt le vecteur de la fonction de séquençement  $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^{\varphi}$  avec  $\varphi = 4$  :

$$\boldsymbol{\phi}(|v_n|) = \begin{bmatrix} 1 & |v_n| & |v_n|^2 & |v_n|^3 \end{bmatrix}^{\top} \in \mathbb{R}^4 \quad (5.59)$$

auquel sont associés les nouveaux gains  $\mathbf{K}_{\xi}^{\phi} \in \mathbb{R}^{2 \times 8}$  et  $\mathbf{K}_{\gamma}^{\phi} \in \mathbb{R}^{2 \times 28}$  de sorte que le vecteur  $\boldsymbol{\kappa}^+ \in \mathbb{R}^{72}$  contient les 72 paramètres réglables de la synthèse. On note que la première composante de  $\boldsymbol{\phi}$ , soit  $\phi_1 = 1$ , représente la *partie constante* de la fonction de gain, tandis que les trois autres composantes constituent la *partie variable*. La partie constante domine la contribution globale du gain lorsque la vitesse d'avancement  $v_n$  est faible. Les gains qui y sont associés sont donc très importants dans la synthèse. Ceci est encore plus vrai, car la vitesse nulle  $v_n = 0$ , utilisant alors uniquement la partie constante du gain, représente la phase de vol stationnaire qui est très importante au décollage et à l'atterrissage. Une attention particulière doit être portée aux paramètres compris dans  $\boldsymbol{\kappa}^+$  qui y sont associés. De fait, si on reprend les explications données à la page 69 concernant la parité des fonctions de gain, alors toutes les composantes de gains reliées à un transfert impair doivent être bloquées à une valeur nulle dans le processus de synthèse. Cela implique notamment qu'il y a moins de 72 paramètres libres dans le processus de synthèse, puisque certaines composantes de  $\mathbf{K}_{\xi}^{\phi}$  et  $\mathbf{K}_{\gamma}^{\phi}$  sont annulées et bloquées. De fait, ce sont précisément les paramètres  ${}^1 k_{\square_{ij}}^+$  de (5.58) qui doivent être annulés lorsque  $k_{\square_{ij}}^+$  est associé à un transfert impair, soit  $k_{\square_{ij}}^+ := {}^{\ominus} k_{\square_{ij}}^+$ . La raison pour laquelle il faut mettre  ${}^1 k_{\square_{ij}}^+ = 0$  pour ces cas-là est très simple : toute fonction impaire a une ordonnée à l'origine nulle par définition. En effet, la définition  ${}^{\ominus} k_{\square_{ij}}^+(v_{n_e}^-) = -{}^{\ominus} k_{\square_{ij}}^+(v_{n_e}^+)$  implique que cette grandeur est nulle en  $v_{n_e} = 0$ . On rappelle que l'analyse de la parité des transferts associés aux composantes de gains est effectuée à la section 5.4.1.

### Gabarits fréquentiels utilisés dans les synthèses $\mathcal{H}_{\infty}$

Le tableau 5.4 présente les 14 différents gabarits fréquentiels  $\mathcal{G}_j$  qui sont utilisés dans les synthèses  $\mathcal{H}_{\infty}$  structurées, multimodèles et multiobjectifs de la seconde méthode décrite au

tableau 5.1.

Tableau 5.4 Gabarits fréquentiels utilisés dans les synthèses  $\mathcal{H}_\infty$  structurées multimodèles

$\mathcal{G}_j$	$\{k, \ell\}$	TUNINGGOAL	$\mathbf{T}_{j,k,\ell}$	$\mathbf{U}_{j,k,\ell}$
$\mathcal{G}_1$	$\times 155$	.STEPTRACKING	$\Delta v_n / \Delta v_{nc}$	REFSYS = $G_{k,\ell}^{v_n}(s, \boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}})$ RELGAP = 0.05 MODELS = $\{k, \ell\}$
$\mathcal{G}_2$	$\times 1$	.STEPTRACKING	$\Delta h / \Delta h_c$	REFSYS = $G^h(s)$ RELGAP = 0.05
$\mathcal{G}_3$	$\times 1$	.STEPREJECTION	$\Delta v_n / \Delta h_c$	PEAK = 0.1 TSETTLE = 2.9 ZETA = 0.5
$\mathcal{G}_4$	$\times 1$	.STEPREJECTION	$\Delta h / \Delta v_{nc}$	<i>idem</i>
$\mathcal{G}_5$	$\times 1$	.POLES	<b>G</b>	MINDECAY = 0.5 MINDAMPING = 0.5 MAXFREQ = 60
$\mathcal{G}_6$	$\times 1$	.MARGINS	<b><math>\Delta u</math></b>	GAINMARGIN = 12 PHASEMARGIN = 45
$\mathcal{G}_7$	$\times 1$	.GAINS	$\Delta \dot{\omega} / \Delta v_{nc}$	GAINVALUE = 0.5 $\dot{\omega}_{sat}^-$
$\mathcal{G}_8$	$\times 1$	.GAINS	$\Delta \dot{\omega} / \Delta h_c$	<i>idem</i>
$\mathcal{G}_9$	$\times 1$	.GAINS	$\Delta \dot{\omega} / \Delta w_n$	<i>idem</i>
$\mathcal{G}_{10}$	$\times 1$	.GAINS	$\Delta \dot{\omega} / \Delta w_d$	<i>idem</i>
$\mathcal{G}_{11}$	$\times 1$	.GAINS	$\Delta \dot{\delta} / \Delta v_{nc}$	GAINVALUE = 0.5 $\delta_{sat}^+$
$\mathcal{G}_{12}$	$\times 1$	.GAINS	$\Delta \dot{\delta} / \Delta h_c$	<i>idem</i>
$\mathcal{G}_{13}$	$\times 1$	.GAINS	$\Delta \dot{\delta} / \Delta w_n$	<i>idem</i>
$\mathcal{G}_{14}$	$\times 1$	.GAINS	$\Delta \dot{\delta} / \Delta w_d$	<i>idem</i>

On précise que les gabarits fréquentiels  $\mathcal{G}_j$  sont appliqués aux modèles en boucle fermée  $\mathbf{G}_{k,\ell}$  en utilisant la même stratégie employée par [1, 41, 76, 77] qui consiste à se servir de la fonction **SYSTUNE** du CONTROL SYSTEM TOOLBOX™ de MATLAB®. La seconde colonne du tableau 5.4 indique si le gabarit  $\mathcal{G}_j$  est appliqué 1 seule fois à l'ensemble de tous les modèles en BF ou bien s'il est appliqué individuellement à chacun des 155 modèles contenus dans la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ . La troisième colonne du tableau montre le type de gabarit qui est employé avec la classe **TUNINGGOAL** de MATLAB®. La quatrième colonne indique à quel transfert (ou point d'analyse)  $\mathbf{T}_{j,k,\ell}$  est appliqué le gabarit  $\mathcal{G}_j$ . Enfin, la cinquième et dernière colonne donne les paramètres  $\mathbf{U}_{j,k,\ell}$  qui sont appliqués au transfert  $\mathbf{T}_{j,k,\ell}$  lors de l'appel de la classe **TUNINGGOAL** avec son type de gabarit respectif. On spécifie qu'il y a un total de  $1 \times 155 + 13 \times 1 = 168$  filtres  $\mathbf{W}_{j,k,\ell}$  distincts qui sont appliqués dans chaque synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ . En effet, à l'exception du

premier gabarit  $\mathcal{G}_1$  qui génère un filtre  $\mathbf{W}_{j,k,\ell}$  distinct pour chacun des 155 modèles linéarisés en boucle fermée  $\mathbf{G}_{k,\ell}$ , tous les autres gabarits sont appliqués uniformément et identiquement à l'ensemble de tous les modèles linéarisés en BF. On souligne que le gabarit  $\mathcal{G}_5$  associé aux critères de performance des pôles en BF est appliqué uniformément à tous les modèles  $\mathbf{G}_{k,\ell}$ . Les marges de stabilité (de gain et de phase) définies par le gabarit  $\mathcal{G}_6$  sont quant à elles appliquées identiquement à l'entrée  $\Delta \mathbf{u}$  de tous les systèmes linéarisés  $\Delta \mathcal{S}_{k,\ell}$ . La valeur des paramètres  $\dot{\omega}_{sat}^-$  et  $\dot{\delta}_{sat}^+$  est celle indiquée au tableau 5.2. On met également en évidence que tous les gabarits fréquentiels  $\mathcal{G}_j$  définis dans le tableau 5.4 sont appliqués identiquement à chacune des trois étapes de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  expliquées à la page 88 de la section 5.2.2. Enfin, les paramètres optionnels par défaut sont utilisés lors de l'appel de la fonction `SYSTEME` dans MATLAB®.

Le modèle de référence  $G^{v_n}$  utilisé dans le gabarit  $\mathcal{G}_1$  définissant les performances en suivi imposées au transfert en BF  $\Delta v_n / \Delta v_{n_c}$  est défini comme suit :

$$G_{k,\ell}^{v_n}(s, \boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) := \frac{K_{k,\ell} \left( v_{k,\ell}^+ (\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}) - s \right)}{(\lambda_{k,\ell} + s)^4} \quad (5.60)$$

où  $G_{k,\ell}^{v_n}$  est une fonction de transfert d'ordre 4, qui est générée de manière à avoir un temps de réponse à 2% d'exactement  $t_r^{v_n} = 1.5$  s. On précise que cette fonction de transfert est générée afin d'ajouter explicitement le zéro invariant à phase non minimale  $v_{k,\ell}^+$ , situé dans le plan complexe positif de la figure 4.3, dans la dynamique en BF imposée au transfert  $\frac{\Delta v_n}{\Delta v_{n_c}}$ . De fait, l'analyse des zéros effectuée à la section 4.7 a permis de constater que c'est précisément sur ce transfert qu'intervient l'effet parasite non désirable du sous-dépassement lorsqu'on y injecte une entrée de type échelon. Puisque l'architecture de commande retenue ne permet pas d'annuler ce zéro naturellement instable, il a été décidé de l'ajouter explicitement dans la dynamique imposée en BF. Cette manière de procéder a permis d'obtenir de meilleurs résultats avec la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée que lorsqu'on impose une fonction de transfert analogue de multiplicité 4, mais sans le zéro. Enfin, la valeur du gain  $K_{k,\ell}$  et du pôle  $\lambda_{k,\ell}$  est directement fonction du temps de réponse  $t_r^{v_n}$  et du zéro instable  $v_{k,\ell}^+$  imposés. D'ailleurs, ce gabarit fréquentiel  $\mathcal{G}_1$  est le seul qui varie en fonction du modèle linéarisé autour de son point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{e_{k,\ell}}$  considéré en boucle fermée. Cela mène alors à la génération de 155 filtres fréquentiels  $\mathbf{W}_{1,k,\ell}$  distincts.

Puis, le modèle de référence  $G^h$  utilisé dans le gabarit  $\mathcal{G}_2$  définissant les performances en suivi

imposées au transfert en BF  $\Delta h/\Delta h_c$  est défini comme suit :

$$G^h(s) := \frac{84.071}{(3.028 + s)^4} \quad (5.61)$$

où  $G^h$  est une fonction de transfert d'ordre 4, qui est générée de manière à avoir un temps de réponse à 2% d'exactement  $t_r^h = 3$  s. On précise que la multiplicité 4 est utilisée dans les modèles de référence en boucle fermée  $G^{v_n}$  et  $G^h$  afin d'adoucir la dérivée du signal de référence lors de la phase initiale de l'échelon. Cette façon de procéder permet d'avoir une commande moins agressive et d'améliorer les performances de synthèses  $\mathcal{H}_\infty$  tout en respectant les critères du cahier des charges.

D'ailleurs, les deux modèles de référence  $G_{k,\ell}^{v_n}$  et  $G^h$  sont basés sur le modèle de Strejc qui permet d'identifier la dynamique d'un système en y injectant une entrée de type échelon [78]. La dynamique du système est alors modélisée comme un système linéaire de degré  $n$ , dans lequel est également ajouté un retard pur :

$$G^s(s, K, \tau, \lambda) := \frac{K e^{-\tau s}}{\left(1 - \frac{s}{\lambda}\right)^n} \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (5.62)$$

où  $K \in \mathbb{R}_+^*$  est le gain statique,  $\tau \in \mathbb{R}^+$  est la constante de temps du retard pur et  $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$  est l'unique pôle réel stable de multiplicité  $n$  de la fonction de transfert  $G^s$  du modèle de Strejc. On note que le retard pur a été omis dans les choix de  $G_{k,\ell}^{v_n}$  et  $G^h$ , en prenant  $\tau = 0$ .

Enfin, la valeur de chacun des paramètres contenus dans  $\mathbf{U}_{j,k,\ell}$  et imposés à chaque filtre  $\mathbf{W}_{j,k,\ell}$  est choisie de manière à respecter le cahier des charges qui a été défini à la section 5.3.1.

### Résultats des étapes intermédiaires de synthèse

On se rappelle qu'il est nécessaire de compléter trois étapes (cf. page 88) de synthèses  $\mathcal{H}_\infty$  dans la seconde méthode présentée au tableau 5.1.

Ainsi, les courbes de gain obtenues aux étapes  $\mathcal{H}_\infty + \text{PPP}$ ,  $\mathcal{H}_\infty + \text{SMM}$  et  $\mathcal{H}_\infty + \text{TCC}$  sont respectivement présentées aux figures 5.13, 5.19 et 5.25.

De plus, pour l'étape  $\mathcal{H}_\infty + \text{SMM}$  qui concerne une synthèse multimodèle avec autoséquen-  
cement des gains sans considérer le TCC, on obtient le gain constant  ${}^{\text{SMM}}\mathbf{K}_\xi^\phi$  suivant :

$${}^{\text{SMM}}\mathbf{K}_\xi^\phi := \begin{bmatrix} 0 & 373.1 & 39.19 & -6.822 & 0.08341 & 0.9484 & -0.03688 & -0.03998 \\ 3.349 & 0 & 0.2712 & -0.2092 & -0.07087 & -0.03473 & 0.001658 & 0.00139 \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

où l'on remarque bien la présence des deux composantes nulles  ${}^1k_{\xi_{11}}^+ = {}^1k_{\xi_{22}}^+ = 0$  de  ${}^1\mathbf{K}_\xi^\phi$  qui sont liées aux transferts impairs de la partie constante du gain  ${}^{\text{SMM}}\mathbf{K}_\xi^\phi$  – cf. équations (5.39) et (5.58).

Puis, le gain constant  ${}^{\text{SMM}}\mathbf{K}_\gamma^\phi$  obtenu est :

$${}^{\text{SMM}}\mathbf{K}_\gamma^\phi := \left[ {}^1\mathbf{K}_\gamma^\phi \quad {}^2\mathbf{K}_\gamma^\phi \quad {}^3\mathbf{K}_\gamma^\phi \quad {}^4\mathbf{K}_\gamma^\phi \right] \in \mathbb{R}^{2 \times 28} \quad (5.64)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^1\mathbf{K}_\gamma^\phi := \begin{bmatrix} -270.7 & 0 & 0 & 0 & -507.6 & -0.7659 & 0 \\ 0 & -2.595 & 1.882 & 8.472 & 0 & 0 & -6.514 \end{bmatrix} \\ {}^2\mathbf{K}_\gamma^\phi := \begin{bmatrix} 8.358 & -4.064 & -1.059 & -125.2 & 7.878 & 0.06311 & -112.9 \\ -0.2031 & 0.07156 & -0.1801 & -1.564 & 0.4193 & 0.00265 & -0.5188 \end{bmatrix} \\ {}^3\mathbf{K}_\gamma^\phi := \begin{bmatrix} -1.32 & 0.7176 & 0.1426 & -3.086 & -0.9328 & -0.0004491 & 3.487 \\ 0.04007 & -0.009205 & 0.01193 & 0.4923 & 0.03085 & -0.0002464 & 0.03395 \end{bmatrix} \\ {}^4\mathbf{K}_\gamma^\phi := \begin{bmatrix} 0.04 & -0.021 & -0.003 & 0.27 & 0.044 & -3.7 \times 10^{-5} & -0.031 \\ -0.00096 & 0.00031 & -0.00026 & -0.015 & -0.0015 & 6.7 \times 10^{-6} & -0.00084 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (5.65)$$

On remarque également la présence des sept composantes annulées  ${}^1k_{\gamma_{ij}}^+ = 0$  de  ${}^1\mathbf{K}_\gamma^\phi$  qui sont associées aux transferts impairs du gain  ${}^{\text{SMM}}\mathbf{K}_\gamma^+$  – sa partie constante étant  ${}^1\mathbf{K}_\gamma^\phi$ .

Pareillement, pour l'étape  $\mathcal{H}_\infty + \text{TCC}$  qui concerne une synthèse multimodèle avec autosé- quencement des gains en considérant cette fois le TCC, on obtient le gain constant  ${}^{\text{TCC}}\mathbf{K}_\xi^\phi$  :

$${}^{\text{TCC}}\mathbf{K}_\xi^\phi := \begin{bmatrix} 0 & 429 & 51.57 & -29.04 & 0.6743 & -2.667 & -0.07634 & 0.1009 \\ 1.504 & 0 & 0.4063 & -0.6372 & -0.06873 & 0.01296 & 0.001663 & 0.0001602 \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

où l'on remarque toujours la présence des deux mêmes composantes nulles liées aux transferts impairs. On constate aussi que cette nouvelle itération du gain  $\mathbf{K}_\xi^\phi$  considérant maintenant le TCC, soit  ${}^{\text{TCC}}\mathbf{K}_\xi^\phi$ , est légèrement différente du gain précédent  ${}^{\text{SMM}}\mathbf{K}_\xi^\phi$  afin de prendre en compte cette fois la dynamique qui est associée au TCC tout en respectant les mêmes critères de performance pour ces deux synthèses.

Puis, le gain constant  ${}^{\text{TCC}}\mathbf{K}_\gamma^\phi$  obtenu est :

$${}^{\text{TCC}}\mathbf{K}_\gamma^\phi := \left[ {}^1\mathbf{K}_\gamma^\phi \quad {}^2\mathbf{K}_\gamma^\phi \quad {}^3\mathbf{K}_\gamma^\phi \quad {}^4\mathbf{K}_\gamma^\phi \right] \in \mathbb{R}^{2 \times 28} \quad (5.67)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^1\mathbf{K}_\gamma^\phi := \begin{bmatrix} -305.6 & 0 & 0 & 0 & -562.2 & -0.8738 & 0 \\ 0 & -1.164 & 0.859 & 3.842 & 0 & 0 & -3.065 \end{bmatrix} \\ {}^2\mathbf{K}_\gamma^\phi := \begin{bmatrix} 6.17 & -38.85 & 14.44 & -274.9 & 42.98 & 0.5295 & -74.01 \\ 0.2638 & -0.1815 & 0.09402 & 0.333 & 0.912 & 0.003704 & -0.659 \end{bmatrix} \\ {}^3\mathbf{K}_\gamma^\phi := \begin{bmatrix} -0.0883 & 1.82 & -0.219 & 54.5 & 2.85 & -0.0527 & -18.8 \\ 0.0341 & 0.00331 & -0.0036 & 0.371 & -0.0212 & -0.000324 & -0.00531 \end{bmatrix} \\ {}^4\mathbf{K}_\gamma^\phi := \begin{bmatrix} 0.0096 & -0.021 & -0.0076 & -1.4 & -0.12 & 0.0012 & 0.67 \\ -0.0012 & 6.8 \times 10^{-5} & 9.2 \times 10^{-6} & -0.01 & -0.00015 & 7.5 \times 10^{-6} & 0.00053 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (5.68)$$

On remarque toujours la présence des sept mêmes composantes annulées qui sont associées aux transferts impairs du gain  ${}^{\text{TCC}}\mathbf{K}_\gamma^+$  – sa partie constante étant  ${}^1\mathbf{K}_\gamma^\phi$ . Pour la même raison énoncée pour le gain  ${}^{\text{TCC}}\mathbf{K}_\xi^\phi$ , on constate de légères différences entre les composantes des gains  ${}^{\text{SMM}}\mathbf{K}_\gamma^\phi$  et  ${}^{\text{TCC}}\mathbf{K}_\gamma^\phi$ .

Ainsi, puisque respectivement 2 et 7 composantes sont bloquées à 0 sur les gains constants respectifs  $\mathbf{K}_\xi^\phi$  et  $\mathbf{K}_\gamma^\phi$ , il y a donc un total réel de  $72 - 2 - 7 = 63$  paramètres libres par synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  lorsque l'on recherche les valeurs comprises dans  $\boldsymbol{\kappa}^+ \in \mathbb{R}^{72}$ . On précise également que ce sont les gains constants  $\mathbf{K}_\square^\phi := {}^{\text{TCC}}\mathbf{K}_\square^\phi$  obtenus à l'étape finale du processus détaillé à la page 88 qui sont utilisés dans la loi de commande définie en (5.3), (5.5) et (5.38).

Enfin, les gains  $\mathcal{H}_\infty$  – soit le gain  $\gamma$  défini en (5.48) – obtenus pour les trois étapes de synthèses  $\mathcal{H}_\infty$ , soit  $\mathcal{H}_\infty + \text{PPP}$ ,  $\mathcal{H}_\infty + \text{SMM}$  et  $\mathcal{H}_\infty + \text{TCC}$ , sont présentés au tableau 5.6. Les analyses approfondies des synthèses LQR et  $\mathcal{H}_\infty$  sont présentées à la prochaine section.

#### 5.4 Synthèses incertaines par retour d'état statique

Cette section présente tous les résultats issus des synthèses LQR et  $\mathcal{H}_\infty$  dont certains résultats préliminaires ont déjà été énoncés respectivement aux sections 5.3.5 et 5.3.6.

Les résultats présentés dans cette section prennent soit la forme de figures ou de tableaux. Parmi les figures, on compte notamment les huit résultats importants suivants :

1. Analyse de la symétrie (ou de la parité) des transferts des gains  $\mathbf{K}_x := \mathbf{K}_\gamma^+$  et  $\mathbf{K}_i := \mathbf{K}_\xi^+$  sur le domaine d'opération complet du MAVION ( $-30 \leq v_n \leq 30$  m/s) ;
2. Courbes des gains  $\mathbf{K}_\square^\pm$  en fonction du paramètre de séquençement à l'équilibre  $v_{n_e}$  ;
3. Pôles statiques (ou faux) et pôles dynamiques (ou réels)<sup>5.16</sup> en BF de tous les modèles

5.16. Les pôles statiques ou faux sont ceux calculés à partir des courbes de gains synthétisés sans considérer le

- en BF  $\mathbf{G}_{k,\ell}$  selon l'évolution de  $v_{n_e}$  ;
4. Réponses temporelles en fonction de  $v_{n_e}$  de la sortie régulée  $\Delta \mathbf{z}$  à une entrée de référence  $\Delta \mathbf{r}$  de type échelon unitaire ;
  5. Réponses temporelles en fonction de  $v_{n_e}$  de la sortie de saturation  $\Delta \mathbf{s}$  à une entrée de référence  $\Delta \mathbf{r}$  de type échelon unitaire ;
  6. Réponses temporelles en fonction de  $v_{n_e}$  de la sortie régulée  $\Delta \mathbf{z}$  à une entrée de perturbation  $\Delta \mathbf{w}$  de type échelon unitaire ;
  7. Réponses temporelles en fonction de  $v_{n_e}$  de la sortie de saturation  $\Delta \mathbf{s}$  à une entrée de perturbation  $\Delta \mathbf{w}$  de type échelon unitaire ;
  8. Évolution du gain  $\gamma$  en fonction de  $v_{n_e}$  pour la synthèse  $\mathcal{H}_\infty + \text{PPP}$ .

Puis, des tableaux et des figures supplémentaires sont également utilisés afin de présenter les comparaisons les plus notables des quatre étapes de synthèses détaillées à la page 88.

On termine avec quelques précisions :

- Toutes les courbes montrant des gains sont bien issues des 31 points discrets  $v_{n_{e_{k,\ell}}} \in \mathbb{E}$ . Toutefois, celles-ci ont été lissées afin d'obtenir un affichage plus esthétique.
- On remarque d'ailleurs un changement de nomenclature dans les figures présentées dans cette section pour les composantes des gains :  $k_x := k_\gamma^+$  et  $k_i := k_\xi^+$ . Cette modification est effectuée afin d'explicitier qu'il s'agit bien d'un RES augmenté d'une action intégrale sur l'erreur de suivi.
- Les caractéristiques du matériel informatique utilisé dans le projet de recherche afin d'effectuer notamment les synthèses, les simulations et les figures d'analyses sont répertoriées dans le tableau 5.5. Tous les résultats présentés dans ce mémoire sont intrinsèquement liés à ces caractéristiques et des résultats différents peuvent être obtenus en utilisant un matériel informatique différent. En effet, les résolutions numériques obtenues sont fortement dépendantes de la capacité de calcul du processeur de la machine utilisée. Par exemple, avec une meilleure machine, de meilleurs temps de résolutions numériques pourraient être obtenus. Toutefois, les ordres de grandeur relatifs présentés demeurent tous valides.

---

TCC, tandis que les pôles dynamiques ou réels sont ceux qui le considèrent. On précise que peu importe si la synthèse a été effectuée respectivement sans|avec le TCC, il est toujours possible une fois les gains synthétisés de recalculer quels seraient les pôles respectivement avec|sans le TCC. Pour ce faire, on dérive analytiquement les courbes de gains obtenues en utilisant une approximation par morceaux de courbes cubiques jointes l'une à l'autre à chaque vitesse de séquençement  $v_{n_{e_\ell}}$ . On utilise la fonction `SPLINE` de MATLAB<sup>®</sup> afin de dériver les coefficients des polynômes de degré 3 ainsi obtenus. On rappelle que la dérivée des gains est requise afin d'évaluer le gain du TCC  $\mathbf{K}_\sigma^+$  – cf. équation (5.17).

Tableau 5.5 Caractéristiques du matériel informatique utilisé dans le projet de recherche

Caractéristique	Valeur
Version MATLAB®	R2017b
Système d'exploitation	macOS Mojave 10.14.5
Ordinateur	MacBook Pro Retina Mid 2012
Processeur	2.3 GHz Intel Core i7
Mémoire vive	8 GB 1600 MHz DDR3
Carte graphique dédiée	NVIDIA GeForce GT 650M 1 GB
Carte graphique intégrée	Intel HD Graphics 4000 1536 MB

#### 5.4.1 Analyse de la symétrie des transferts des gains par RES

Dans cette section, on explique comment sont définies les matrices de symétrie  $\mathbf{K}_{\square}^{\S}$  utilisées dans (5.5) afin d'ajuster le signe des composantes des gains  $\mathbf{K}_{\square}^{+}$ . On rappelle que les explications détaillées concernant la parité des transferts associés aux gains ont été données à la page 69.

La figure 5.5 montre l'évolution en fonction de  $v_{n_e}$  de chaque composante des gains  $\mathbf{K}_{\square_{k,\ell}}^{\pm}$  obtenus à la première étape décrite à la page 88, soit celle pour la synthèse LQR + PPP. Ces gains ont été tracés pour le domaine d'opération complet du MAVION en incluant la partie des vitesses d'avancement négatives :  $-30 \leq v_n \leq 30$  m/s. En procédant ainsi, il est alors possible d'étudier la parité du transfert de chaque composante de gain.

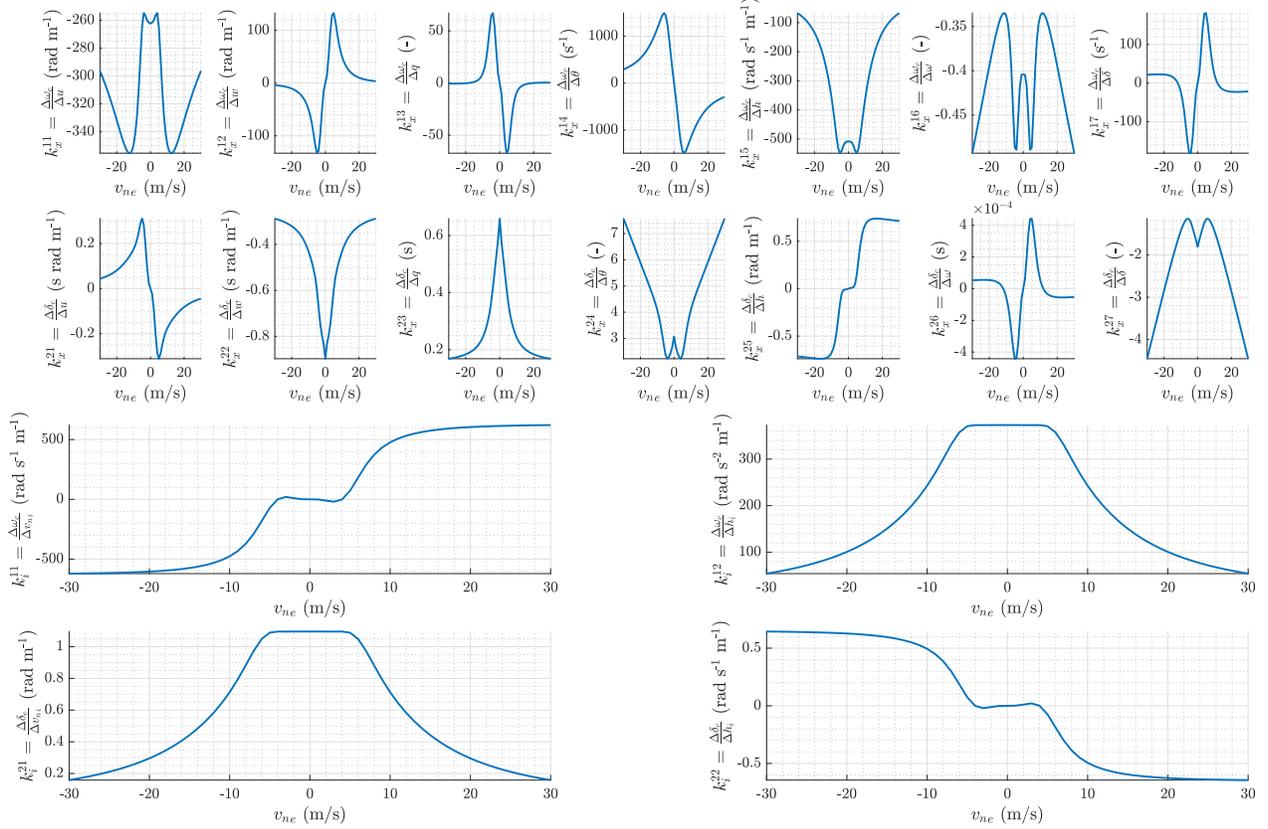


Figure 5.5 Analyse de la symétrie des transferts des gains  $\mathbf{K}_x = \Delta\mathbf{u}/\Delta\mathbf{x}$  et  $\mathbf{K}_i = \Delta\mathbf{u}/\Delta\xi$  pour les synthèses par RES

Si l'on débute en analysant le gain  $\mathbf{K}_i^\pm := \mathbf{K}_\xi^\pm$ , on observe que la courbe de sa première composante  $k_i^{11}$  est clairement une fonction impaire par rapport à  $v_{ne}$ . Par conséquent, sa composante correspondante dans  $\mathbf{K}_\xi^\S$ , soit  $k_{\xi 11}^\S$ , se voit assignée une valeur de  $-1$ . Puis, en effectuant la même analyse, on assigne pour  $k_i^{21}$  une valeur de  $+1$  à  $k_{\xi 21}^\S$ , puisque cette composante de gain correspond cette fois à une fonction paire par rapport à  $v_{ne}$ . En répétant cette analyse pour chaque composante de  $\mathbf{K}_i^\pm$ , on obtient le gain de symétrie  $\mathbf{K}_\xi^\S$  suivant :

$$\mathbf{K}_\xi^\S := \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (5.69)$$

Puis, la même analyse du gain  $\mathbf{K}_x^\pm := \mathbf{K}_\gamma^\pm$  permet d'obtenir le gain de symétrie  $\mathbf{K}_\gamma^\S$  suivant :

$$\mathbf{K}_\gamma^\S := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.70)$$

D'ailleurs, on constate bien que toutes les composantes de gains impaires  ${}^{\ominus}k_{\square}^{ij}$  contenues dans la figure 5.5 passent effectivement par le point  ${}^{\ominus}k_{\square}^{ij}(0) = 0$ , soit l'ordonnée à l'origine. Cela justifie donc pourquoi des valeurs nulles sont bloquées dans les matrices  ${}^1\mathbf{K}_{\square}^{\phi}$  données en (5.66) et (5.67) représentant la partie constante des gains  $\mathbf{K}_{\square}^+$  pour  $v_n = 0$  m/s. Enfin, on souligne que les composantes nulles dans les matrices  ${}^1\mathbf{K}_{\square}^{\phi}$  correspondent comme de fait aux composantes impaires  ${}^{\ominus}k_{\square ij}^{\S} = -1$  dans les matrices de symétrie  $\mathbf{K}_{\square}^{\S}$ .

#### 5.4.2 RES + LQR + PPP + NOM

La section présente et les trois suivantes comportent la validation du respect des critères contenus dans le cahier des charges définies à la section 5.3.1 pour chacune des synthèses définies dans les quatre étapes de la page 88. Ces validations sont effectuées en analysant des figures issues des résultats de ces synthèses.

La figure 5.6 montre les gains obtenus pour le domaine de séquençement positif  $v_{n_e} \in \mathbb{E}$ . On observe une forte variation dans ces courbes, obtenues sans imposer une forme à la fonction de séquençement des gains. Ces fortes variations sont dues à la dynamique naturelle à doubles volets du MAVION qui comporte une partie propre à la dynamique de l'avion pour le vol d'avancement et une autre, propre à celle du multicoptère pour le vol stationnaire (cf. section 4.7). En imposant des critères de performances uniformes pour toutes les vitesses d'avancement  $v_{n_e}$ , les gains se retrouvent donc à varier grandement afin de compenser cette double dynamique couplée.

La figure 5.7 montre l'évolution des faux pôles en BF, notés  ${}^{\circ}\lambda_{0,\ell}^{\text{BF}}$ , et celle des pôles réels en BF, notés  $\lambda_{0,\ell}^{\text{BF}}$ , de tous les modèles en BF  $\mathbf{G}_{0,\ell}$  calculés pour la configuration paramétrique nominale  $\mathbf{g}_0$  et différents points de séquençement à l'équilibre  $v_{n_{e0,\ell}}$ . On rappelle que la synthèse LQR unimodèle ne permet pas de considérer les incertitudes paramétriques. En effectuant la comparaison avec les pôles de la dynamique naturelle présentés à la figure 4.3, on constate d'abord que tous les pôles sont maintenant dans la région stable du plan complexe et possèdent tous une fréquence de décroissance exponentielle minimale de 0.5 Hz comme il a été défini dans le cahier des charges. De plus, on observe que l'amortissement du mode *short period* a été amélioré d'environ 0.34 à environ 0.5 et que tous les pôles possèdent environ un amortissement supérieur (ou très proche) à cette dernière valeur imposée. La fréquence maximum observée est d'environ  $60 < 100$  Hz telle que définie dans le cahier des charges. Enfin, on note que les pôles statiques et dynamiques sont quasiment identiques dans cette synthèse LQR ne prenant pas en compte le TCC.

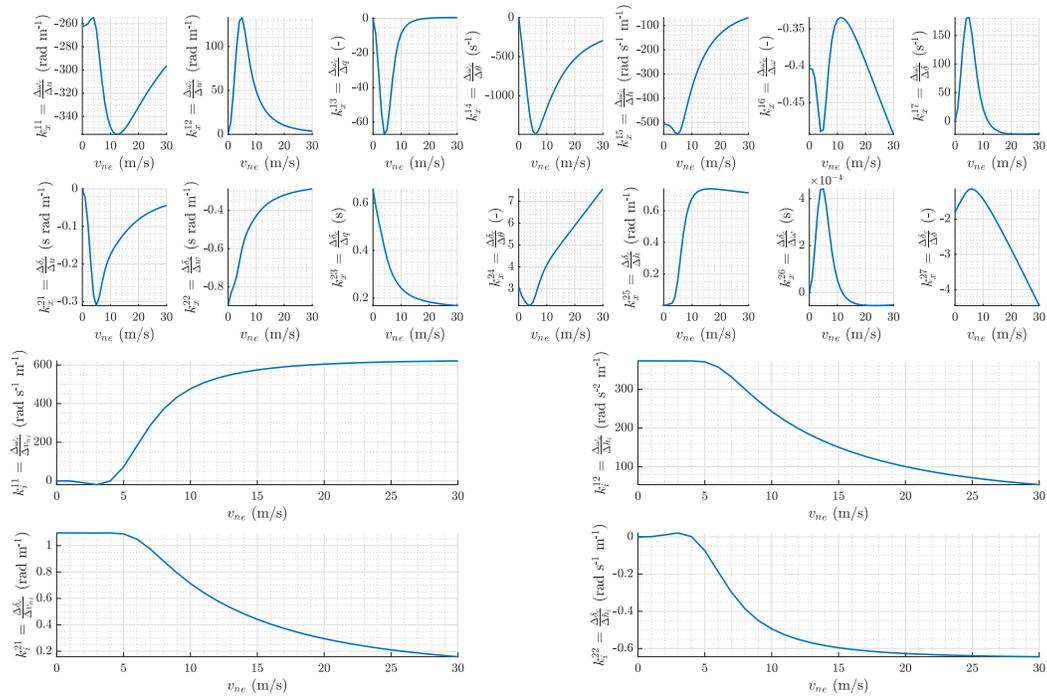


Figure 5.6 Gains de la synthèse RES + LQR + PPP + NOM

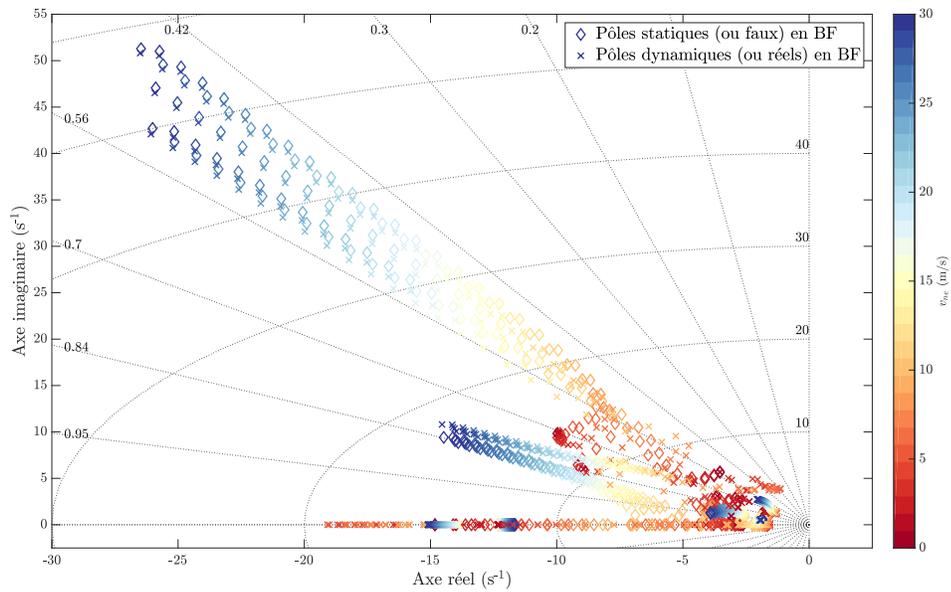


Figure 5.7 Pôles en BF de la synthèse RES + LQR + PPP + NOM

La figure 5.8 montre les performances en suivi de la sortie régulée  $\Delta \mathbf{z}$  pour une entrée de référence  $\Delta \mathbf{r}$  de type échelon unitaire. D'abord, l'analyse des transferts purs, soient  $\Delta z_i / \Delta r_i$ , montre que les erreurs en régime permanent sont bien nulles. On observe des temps de réponse uniformes de respectivement 1.5 et 3 s pour la régulation de la vitesse  $v_n$  et de l'altitude  $h$ . Ces transferts ne comportent quasiment aucun dépassement. L'analyse des transferts croisés, soient  $\Delta z_i / \Delta r_j$ , montre que les performances de découplage sont respectées pour un dépassement maximum de 10 % et un temps de réponse de 4.5 s. Globalement, l'analyse des courbes en fonction de  $v_{n_e}$  révèle que les performances sont moins bonnes pour des vitesses d'avancement faibles proches de la position de vol stationnaire, mais respectent tout de même les critères imposés dans le cahier des charges. Enfin, l'analyse du transfert  $\Delta v_n / \Delta v_{n_e}$  montre bien l'effet indésirable du sous-dépassement relié à la présence d'un zéro à phase non minimum dans la dynamique naturelle de ce transfert (cf. 4.7). Toutefois, ce sous-dépassement d'une valeur maximale de 5 % pour la vitesse d'avancement nulle ne gêne pas l'opération sécuritaire du MAVION.

La figure 5.9 montre les réponses temporelles de la sortie de saturation  $\Delta \mathbf{s}$  pour une entrée de référence  $\Delta \mathbf{r}$  de type échelon unitaire. L'objectif de cette figure est de s'assurer que la saturation dynamique des actionneurs ( $\Delta \dot{\omega}$  et  $\Delta \dot{\delta}$ ) ne dépasse pas le critère de sollicitation fixé à 50 % de la valeur limite de saturation de chaque actionneur. On constate alors que cela est bien respecté dans les deux cas. La saturation statique des actionneurs ( $\Delta \omega$  et  $\Delta \delta$ ) est ajoutée afin de s'assurer que les réponses temporelles de celles-ci ne comportent pas de comportements indésirables. En effet, leur valeur à l'équilibre en régime permanent étant fonction du design des paramètres du MAVION, on ne peut plus influencer ces grandeurs une fois rendu à l'étape de la synthèse du contrôleur. Ceci étant dit, l'analyse de la sortie de saturation statique des moteurs  $\Delta \omega$  confirme que le MAVION ne devrait pas être opéré à sa valeur maximum théorique de 30 m/s, puisque cette dernière sature déjà à partir de 28 m/s dans la réponse à l'échelon unitaire pour  $\Delta \omega / \Delta v_{n_e} + \omega_e$ . Les élévons sont quant à eux sollicités à une valeur bien inférieure à celle de saturation fixée à 45°.

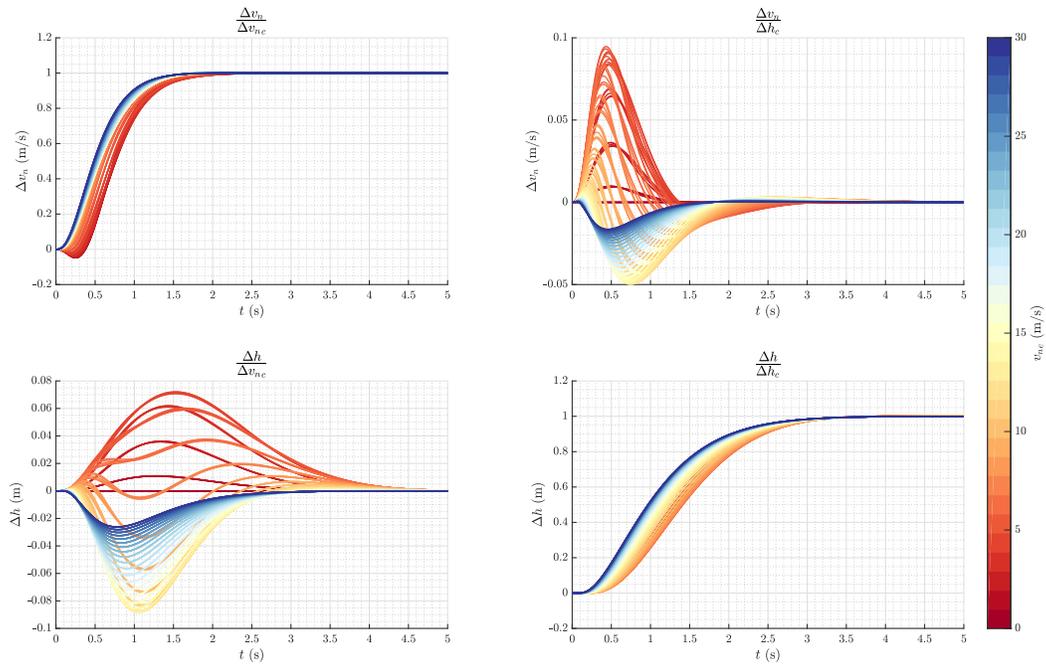


Figure 5.8 Réponses temporelles  $\Delta \mathbf{z} / \Delta \mathbf{r}$  de la synthèse RES + LQR + PPP + NOM

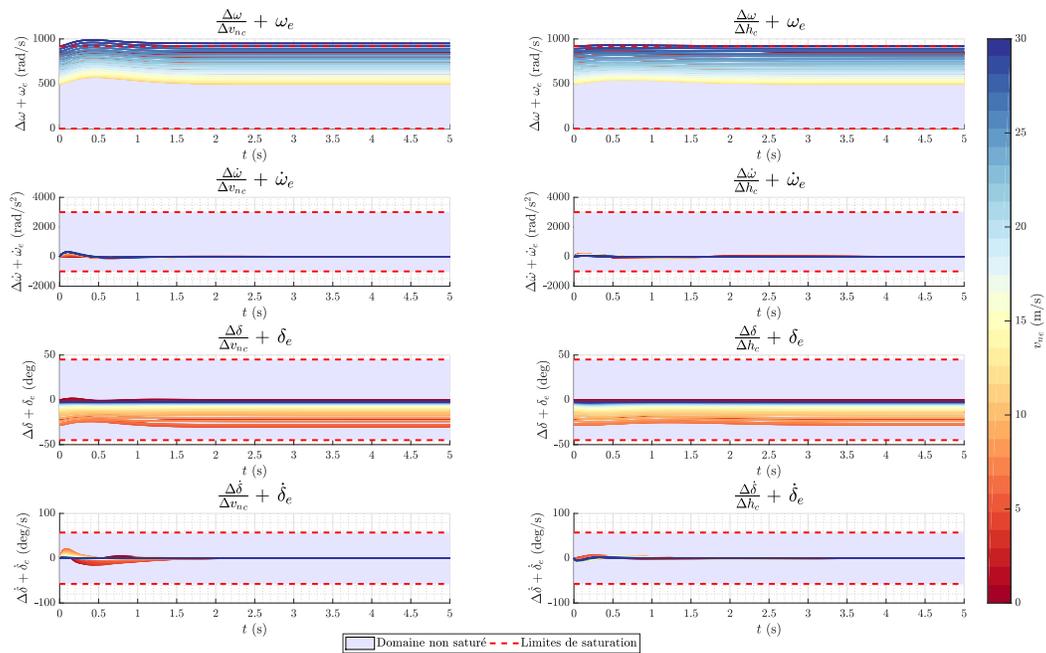


Figure 5.9 Réponses temporelles  $\Delta \mathbf{s} / \Delta \mathbf{r}$  de la synthèse RES + LQR + PPP + NOM

La figure 5.10 montre les réponses temporelles de la sortie régulée  $\Delta \mathbf{z}$  pour une entrée de perturbation  $\Delta \mathbf{w}$  de type échelon unitaire. Bien qu'aucun gabarit fréquentiel ne soit imposé explicitement sur ces transferts – hormis celui de la dynamique des pôles en BF (cf. tableau 5.4) – l'analyse de ces réponses temporelles est très importante afin de s'assurer de la capacité du MAVION à rejeter des perturbations de vent. On observe que toutes les réponses temporelles reviennent à leur équilibre après un temps maximum d'environ 4 s. Toutefois, on note de grands dépassements atteignant presque 40 % pour le transfert  $\Delta v_n / \Delta w_n$  qui représente la capacité du MAVION à rejeter une rafale de vent dans le plan horizontal  $\mathbf{x}_i$ - $O_i$ - $\mathbf{y}_i$ . Cela signifie donc qu'une attention particulière doit être portée lors de l'analyse des simulations conduites sur le modèle non linéaire du MAVION. Ces dernières sont présentées à la section 6.1.3.

La figure 5.11 montre les réponses temporelles de la sortie de saturation  $\Delta \mathbf{s}$  pour une entrée de perturbation  $\Delta \mathbf{w}$  de type échelon unitaire. Cette figure montre explicitement la capacité des actionneurs à pouvoir rejeter efficacement (ou non) une perturbation de vent. Il s'agit alors de s'assurer que les sorties de saturation dynamique  $\Delta \dot{\omega}$  et  $\Delta \dot{\delta}$  restent à l'intérieur de leur domaine non saturé respectif. L'analyse permet d'observer que cela n'est pas un problème pour les moteurs. Toutefois, on observe que les performances pour les élevons sont à la limite de devenir critiques pour les vitesses d'avancement proches de 0 m/s. Il est donc important de surveiller cela de près lors de l'analyse effectuée sur les simulations du modèle non linéaire.

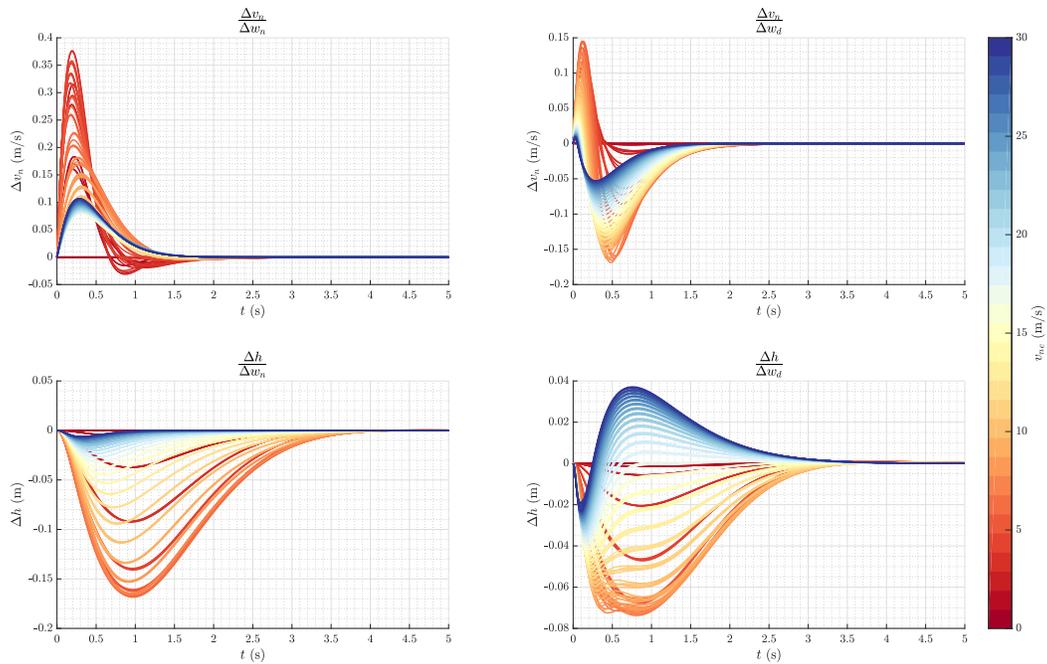


Figure 5.10 Réponses temporelles  $\Delta \mathbf{z} / \Delta \mathbf{w}$  de la synthèse RES + LQR + PPP + NOM

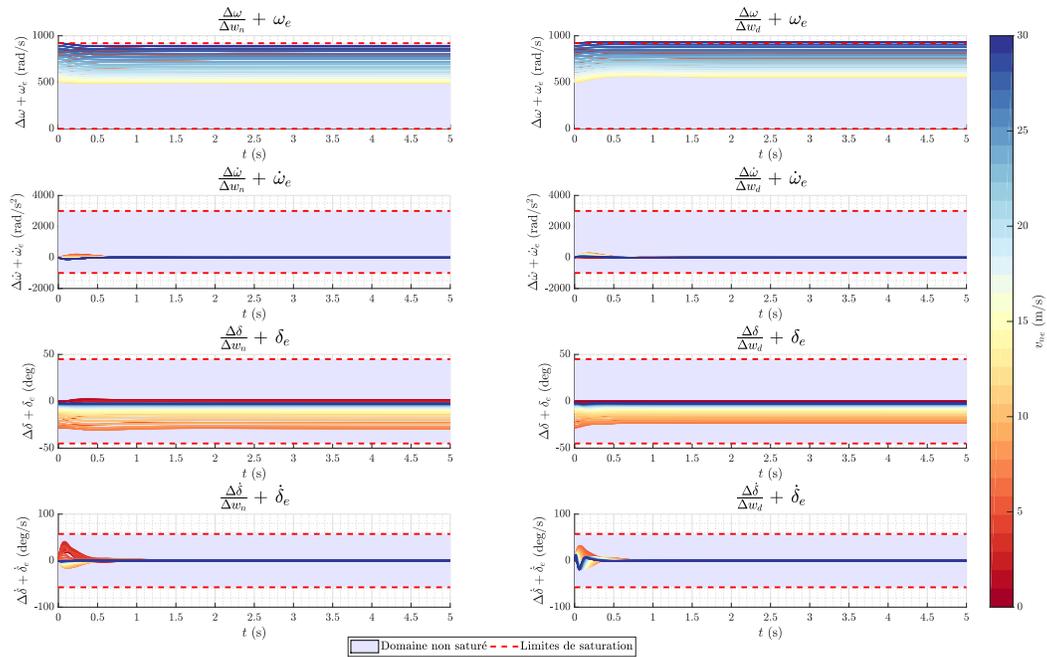


Figure 5.11 Réponses temporelles  $\Delta \mathbf{s} / \Delta \mathbf{w}$  de la synthèse RES + LQR + PPP + NOM

### 5.4.3 RES + $\mathcal{H}_\infty$ + PPP + INC

Cette section présente les résultats des synthèses de l'étape  $\mathcal{H}_\infty$  + PPP définie à la page 88. On rappelle que l'aspect multimodèle de celle-ci concerne seulement les différentes configurations paramétriques qui sont uniquement considérées PPP dans les 31 synthèses effectuées.

On commence l'analyse de cette étape avec la figure 5.12 montrant l'évolution du gain  $\gamma$  de chaque synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  selon la vitesse d'équilibre  $v_{ne}$ . On constate que tous les filtres fréquentiels  $\mathbf{W}_{j,k,\ell}$  définis au tableau 5.4 sont entièrement respectés ( $\gamma < 1$ ) pour la majorité des points d'équilibre. Ceci n'est cependant pas le cas pour les vitesses d'avancement  $v_{ne} = 0$  m/s,  $v_{ne} = 3$  m/s et  $v_{ne} = 22$  m/s où l'on note des gains  $\mathcal{H}_\infty$  respectifs de  $\gamma \approx 1.050$ ,  $\gamma \approx 1.025$  et  $\gamma \approx 1.085$ . Toutefois, cela ne pose pas de problème, puisque ces valeurs sont tout de même très proches de 1 ; cela signifie seulement que certains filtres  $\mathbf{W}_{j,k,\ell}$  ne sont pas respectés entièrement sur l'ensemble de la plage fréquentielle. Contrairement aux vitesses  $v_{ne} = 0$  m/s et  $v_{ne} = 3$  m/s qui correspondent à une dynamique naturelle instable, rien ne semble justifier la difficulté rencontrée afin de respecter tous les filtres en  $v_{ne} = 22$  m/s. On peut alors soupçonner une anomalie due à la résolution numérique du problème de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  multimodèle et multiobjectif.

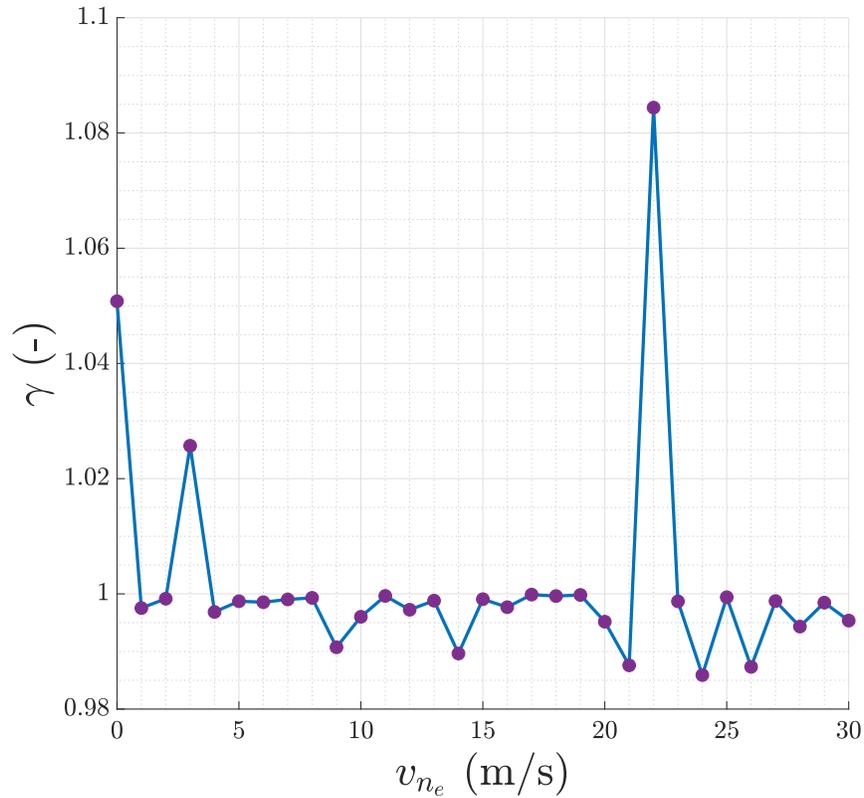


Figure 5.12 Évolution du gain  $\gamma$  en fonction de  $v_{ne}$  de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + PPP + INC

On analyse maintenant les mêmes six figures issues de cette seconde étape de synthèses. Seuls les nouveaux résultats notables sont abordés, puisque les analyses détaillées de tous les points importants apparaissant dans ces figures ont déjà été effectuées à la section précédente en 5.4.2.

Contrairement à l'étape LQR + PPP, l'analyse des courbes de gains à la figure 5.13 issues de l'étape  $\mathcal{H}_\infty + \text{PPP}$  montre que ces dernières ne sont pas continues. Ceci est tout à fait normal, puisque cette étape ne comporte pas de fonction de séquençement. Les gains  $\mathbf{K}_{\square_{k,\ell}}^+$  calculés pour chaque vitesse d'avancement à l'équilibre  $v_{n_{e_{k,\ell}}}$  peuvent donc prendre n'importe quelles valeurs.

L'analyse de la figure 5.14 montre désormais que les pôles statiques et dynamiques ne sont plus du tout similaires. En effet, on remarque que certains pôles dynamiques pour des vitesses élevées sont même instables en BF! Cela est dû à la grande variation discontinue dans les gains obtenus dans cette synthèse PPP, car on rappelle que les pôles réels sont calculés en incluant le TCC qui dépend de la dérivée des gains. Ce comportement indésirable de discontinuité des gains est corrigé dans les étapes  $\mathcal{H}_\infty + \text{SMM}$  et  $\mathcal{H}_\infty + \text{TCC}$  en considérant explicitement la forme du séquençement des gains dans l'architecture de commande.

Les analyses des figures 5.15, 5.16, 5.17 et 5.18 sont analogues à celles effectuées à la section précédente. Ces figures se succèdent sur les pages suivantes.

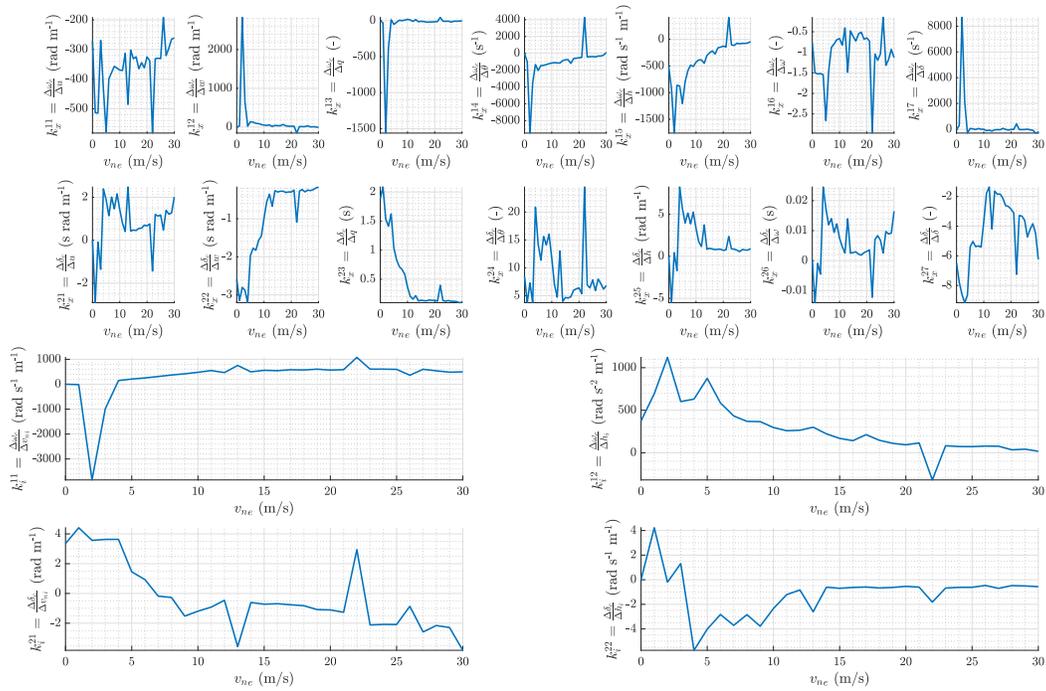


Figure 5.13 Gains de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + PPP + INC

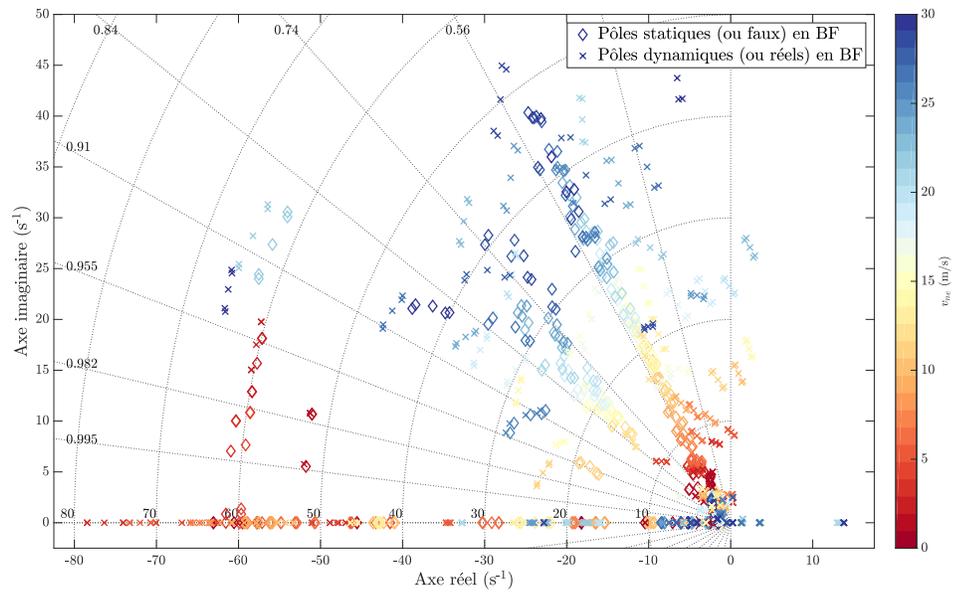


Figure 5.14 Pôles en BF de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + PPP + INC

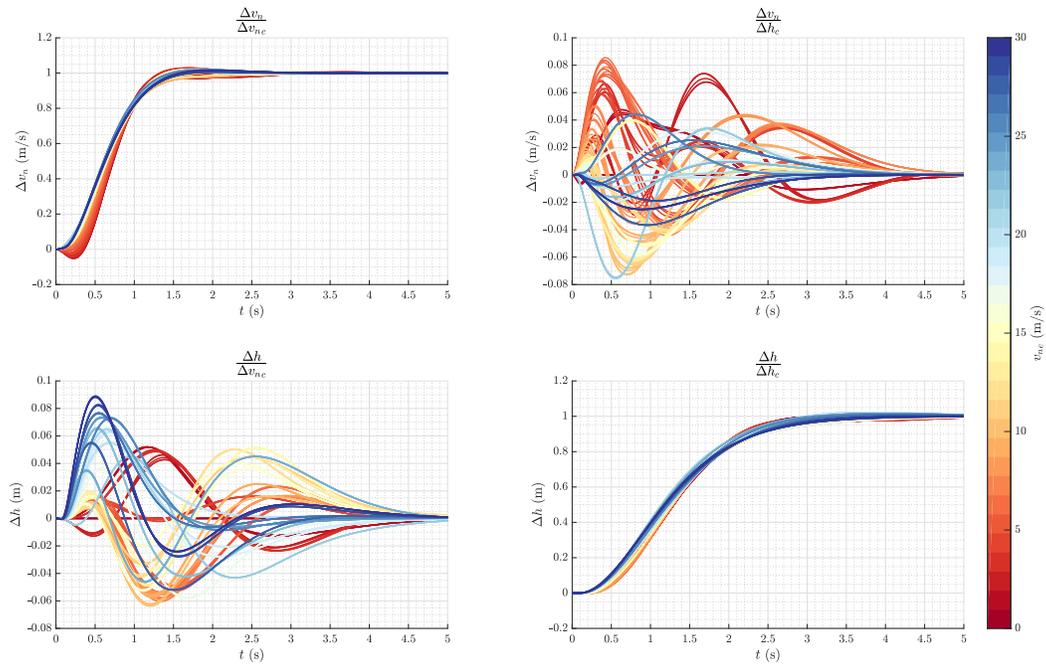


Figure 5.15 Réponses temporelles  $\Delta\mathbf{z}/\Delta\mathbf{r}$  de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + PPP + INC

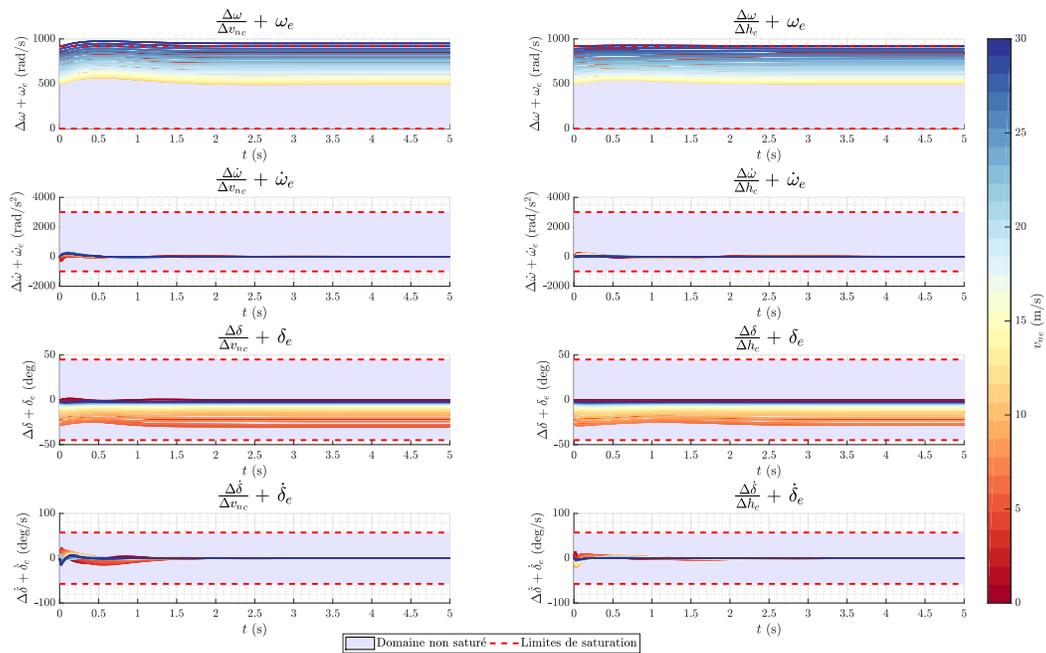


Figure 5.16 Réponses temporelles  $\Delta\mathbf{s}/\Delta\mathbf{r}$  de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + PPP + INC

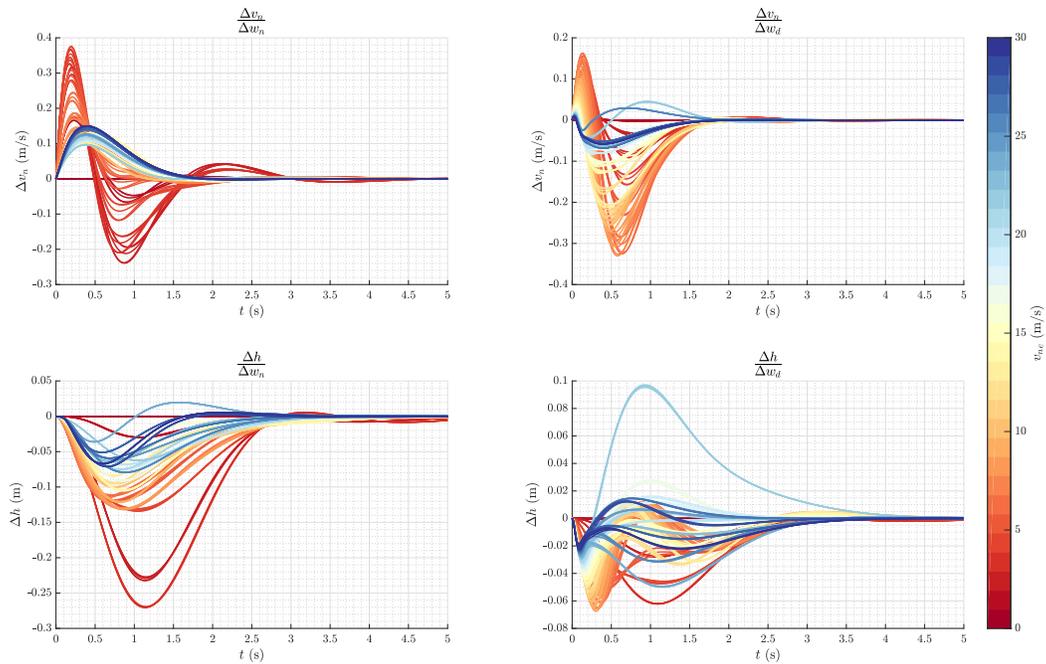


Figure 5.17 Réponses temporelles  $\Delta z/\Delta w$  de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + PPP + INC

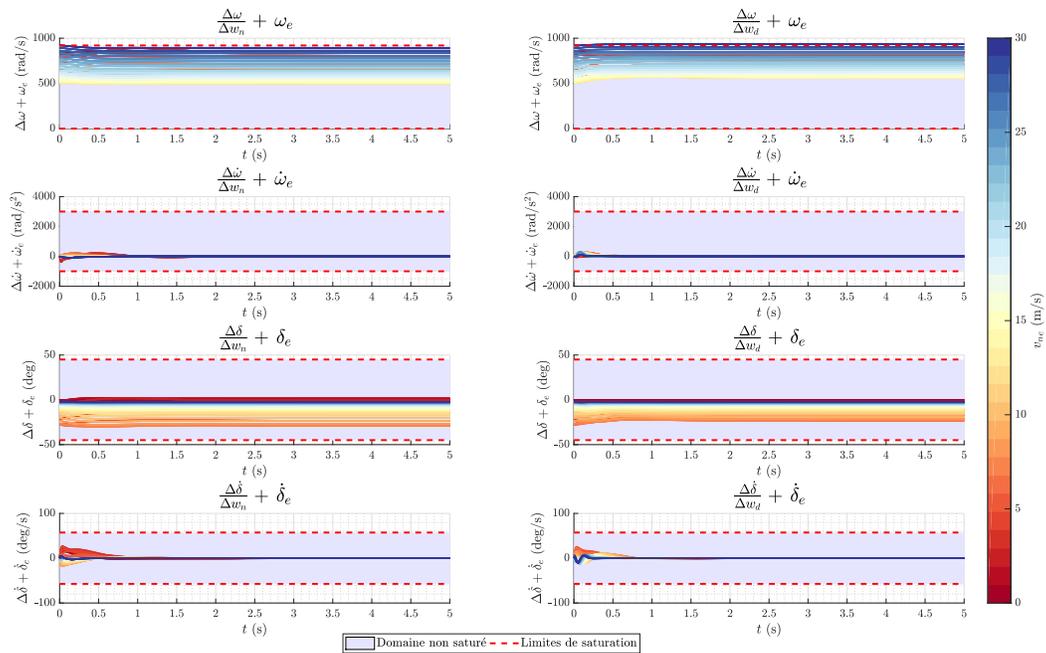


Figure 5.18 Réponses temporelles  $\Delta s/\Delta w$  de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + PPP + INC

#### 5.4.4 RES + $\mathcal{H}_\infty$ + SMM + INC

Cette section présente les résultats de la synthèse de l'étape  $\mathcal{H}_\infty$  + SMM définie à la page 88. On rappelle que celle-ci effectue une seule synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  multimodèle comprenant l'ensemble complet des différentes configurations paramétriques  $\boldsymbol{\varrho}_k$  et des différents points d'équilibre  $v_{n_{e_\ell}}$  – sans toutefois considérer le TCC.

Comme il a été mentionné à la section précédente, seuls les nouveaux résultats notables sont abordés, puisque les analyses détaillées de tous les points importants apparaissant dans les figures d'analyses ont déjà été effectuées à la section 5.4.2.

On entame l'analyse de cette étape avec la figure 5.19 montrant l'évolution des gains. On observe maintenant que les courbes sont continues, puisqu'elles possèdent toutes la forme d'un polynôme de degré 3 – soit la forme imposée par la fonction de séquencement  $\phi$ . On précise que chaque composante de gains possède son propre jeu de coefficients polynomiaux permettant alors à chaque transfert de gains d'être unique. On rappelle que ces coefficients sont contenus dans les matrices constantes  $\mathbf{K}_\square^\phi$ . On observe d'ailleurs que chaque courbe associée à un transfert impair commence bien en 0. Ces paramètres ont été bloqués dans la synthèse des gains  $\mathbf{K}_\square^\phi$  comme expliqué à la page 102.

L'analyse des pôles en BF présentés à la figure 5.20 montre que l'évolution selon  $v_{n_e}$  de ces derniers est beaucoup moins chaotique, maintenant qu'une forme a été prescrite aux courbes de gains. On constate toutefois que les gains issus de cette synthèse qui ne considère pas le TCC génèrent toujours des pôles réels instables en BF. On note également l'augmentation significative de la fréquence de ces derniers jusqu'à la frontière de la limite imposée à 100 Hz.

Les analyses des figures 5.21, 5.22, 5.23 et 5.24 sont analogues à celles effectuées à la section 5.4.2. Ces figures se succèdent sur les pages suivantes.

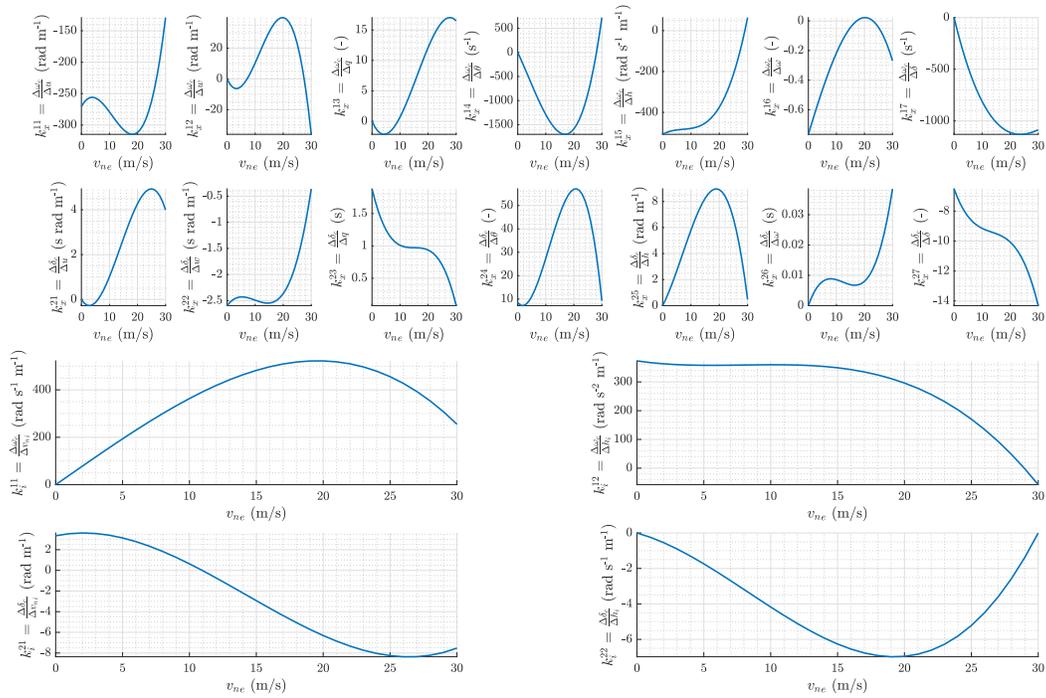


Figure 5.19 Gains de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + SMM + INC

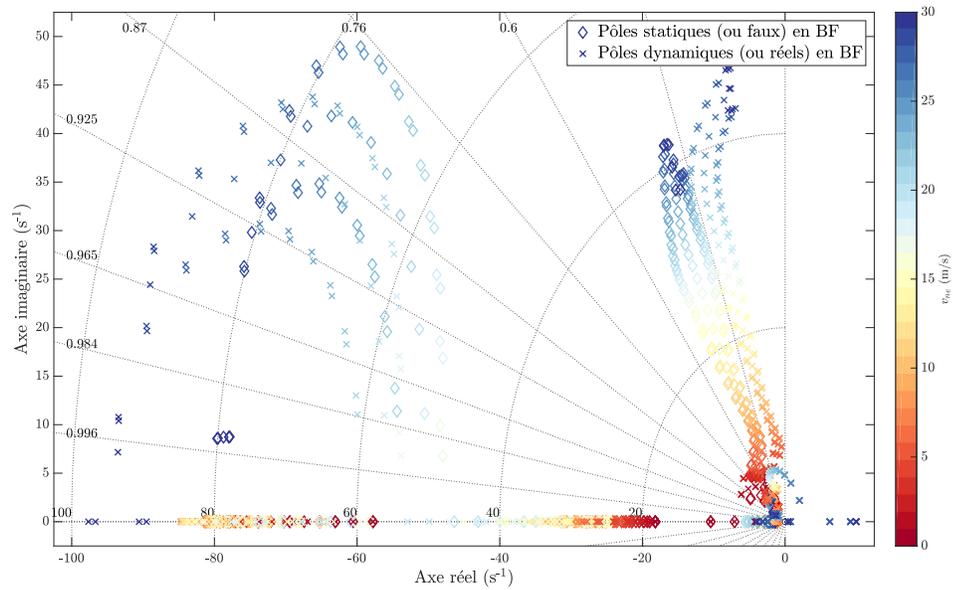


Figure 5.20 Pôles en BF de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + SMM + INC

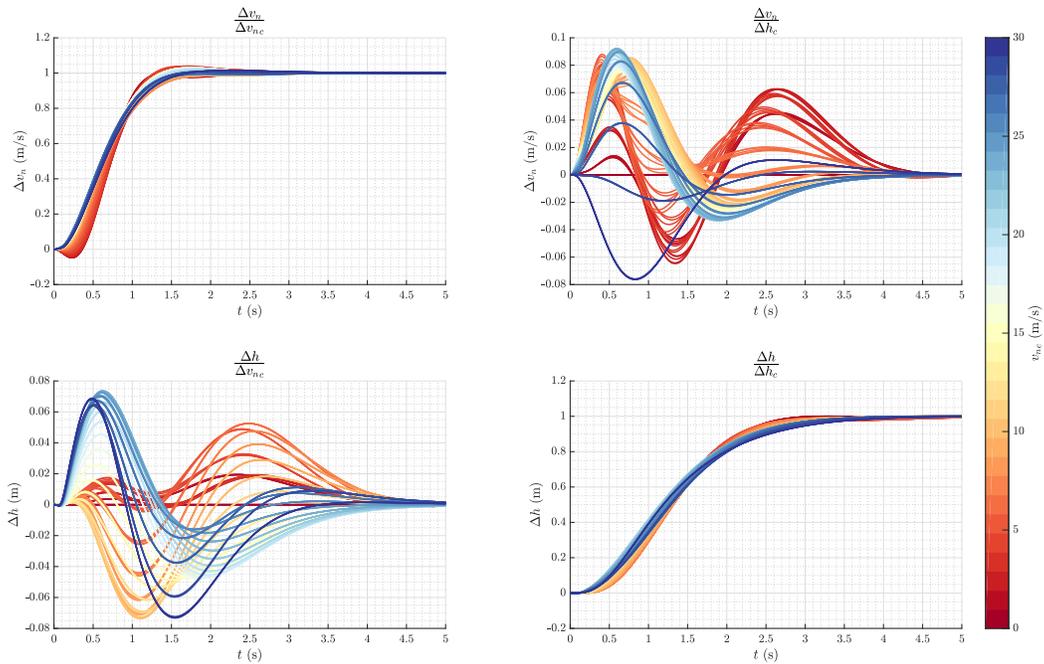


Figure 5.21 Réponses temporelles  $\Delta z/\Delta r$  de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + SMM + INC

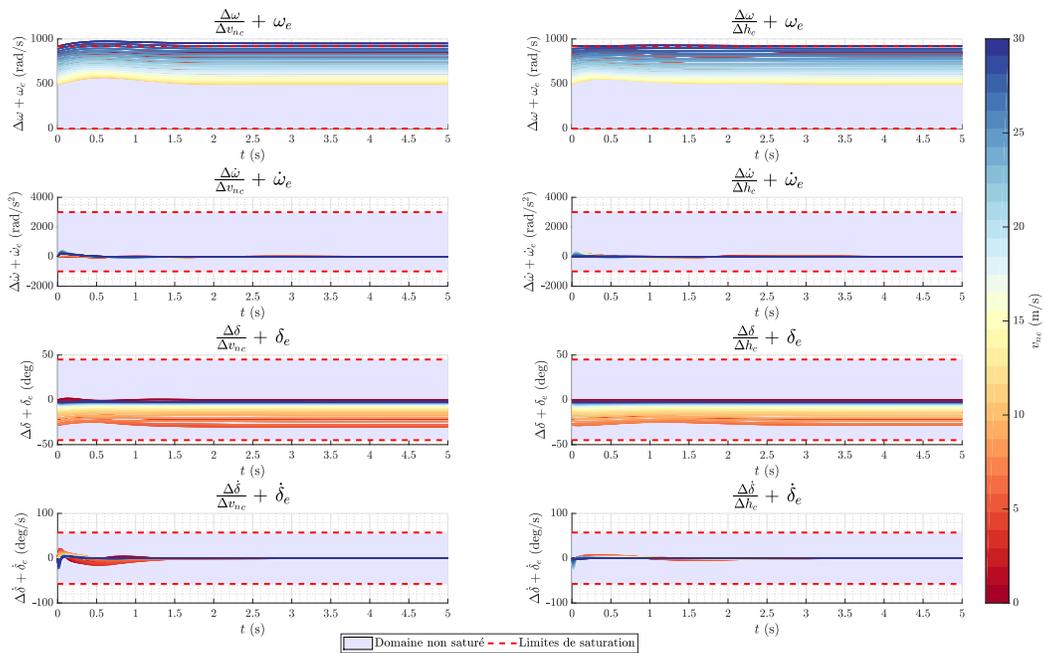


Figure 5.22 Réponses temporelles  $\Delta s/\Delta r$  de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + SMM + INC

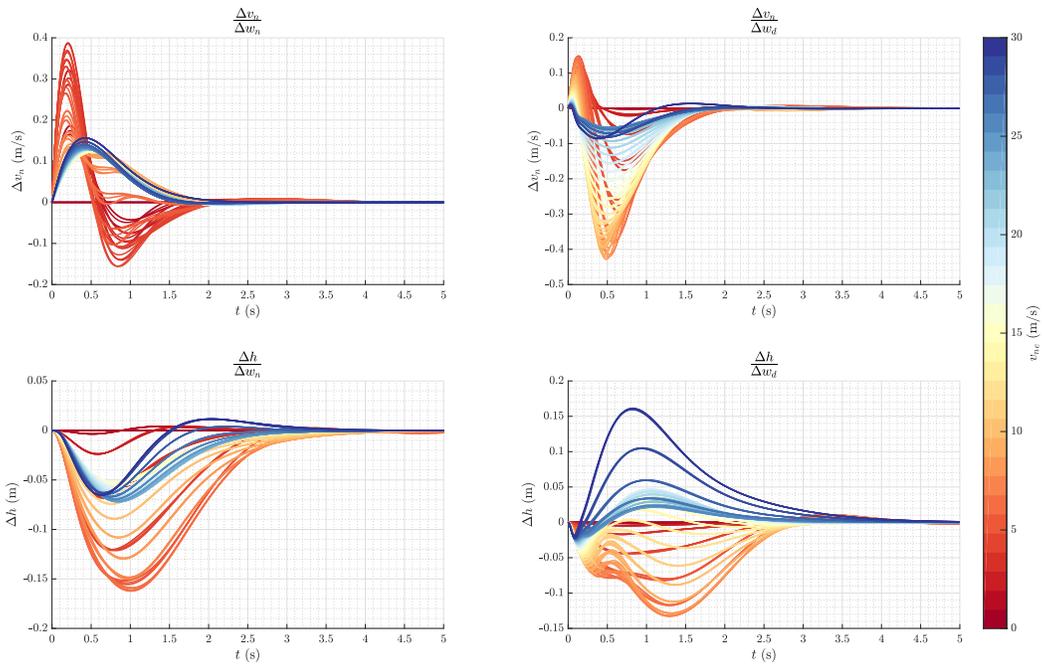


Figure 5.23 Réponses temporelles  $\Delta z/\Delta w$  de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + SMM + INC

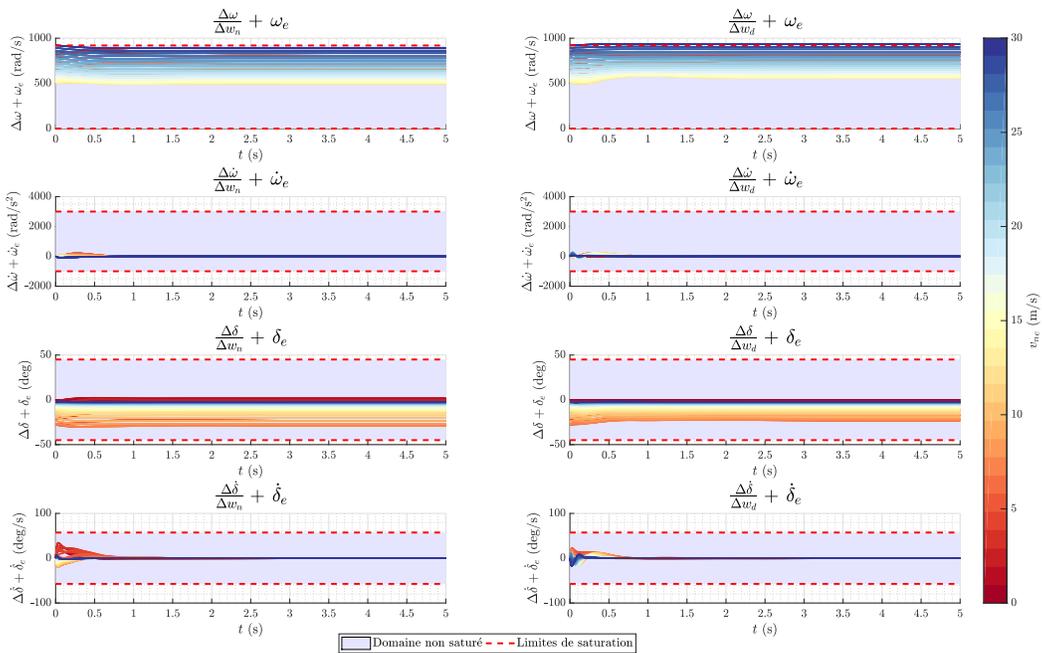


Figure 5.24 Réponses temporelles  $\Delta s/\Delta w$  de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + SMM + INC

### 5.4.5 RES + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + INC

Cette section présente les résultats de l'ultime étape de synthèse  $\mathcal{H}_\infty + \text{TCC}$  définie à la page 88. On rappelle que celle-ci effectue une seule synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  multimodèle comprenant l'ensemble complet des différentes configurations paramétriques  $\boldsymbol{\rho}_k$  et des différents points d'équilibre  $v_{n_{e_\ell}}$  – en considérant cette fois le TCC.

Comme il a été mentionné à la section précédente, seuls les nouveaux résultats notables sont abordés, puisque les analyses détaillées de tous les points importants apparaissant dans les figures d'analyses ont déjà été effectuées à la section 5.4.2.

L'analyse des pôles en BF présentés à la figure 5.26 montre que tous les pôles dynamiques réels en BF sont maintenant stables ! Ceci est rendu possible en considérant explicitement le TCC dans les modèles linéarisés en BF  $\mathbf{G}_{k,\ell}$  dans la synthèse multimodèle.

L'analyse de la figure 5.27 montre également que les transferts de régulation croisée  $\Delta v_n / \Delta h_c$ , soit ceux de découplage, possèdent des dépassements légèrement supérieurs à 10 % pour de faibles vitesses d'avancement. Toutefois, cela n'est pas jugé critique.

Les analyses des figures 5.25, 5.28, 5.29 et 5.30 sont analogues à celles effectuées à la section 5.4.2. Ces figures se succèdent sur les pages suivantes.

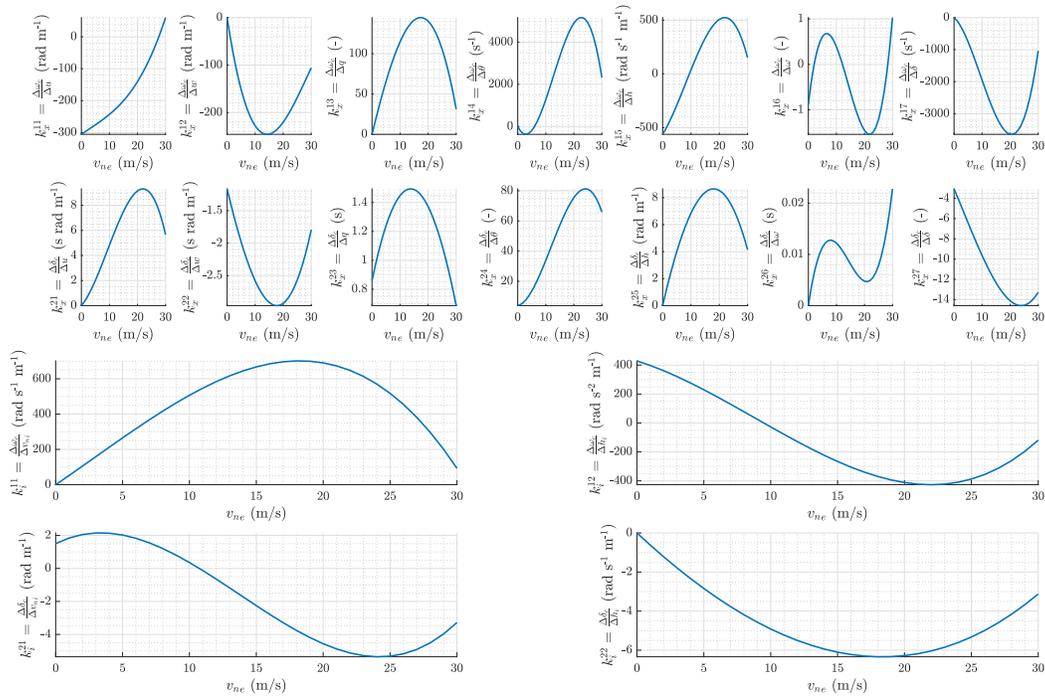


Figure 5.25 Gains de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + TCC + INC

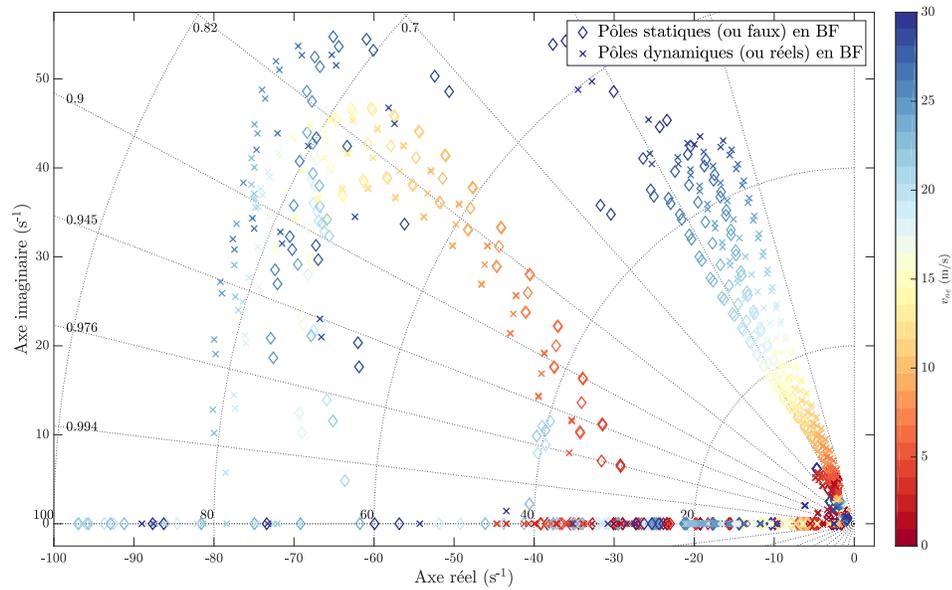


Figure 5.26 Pôles en BF de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + TCC + INC

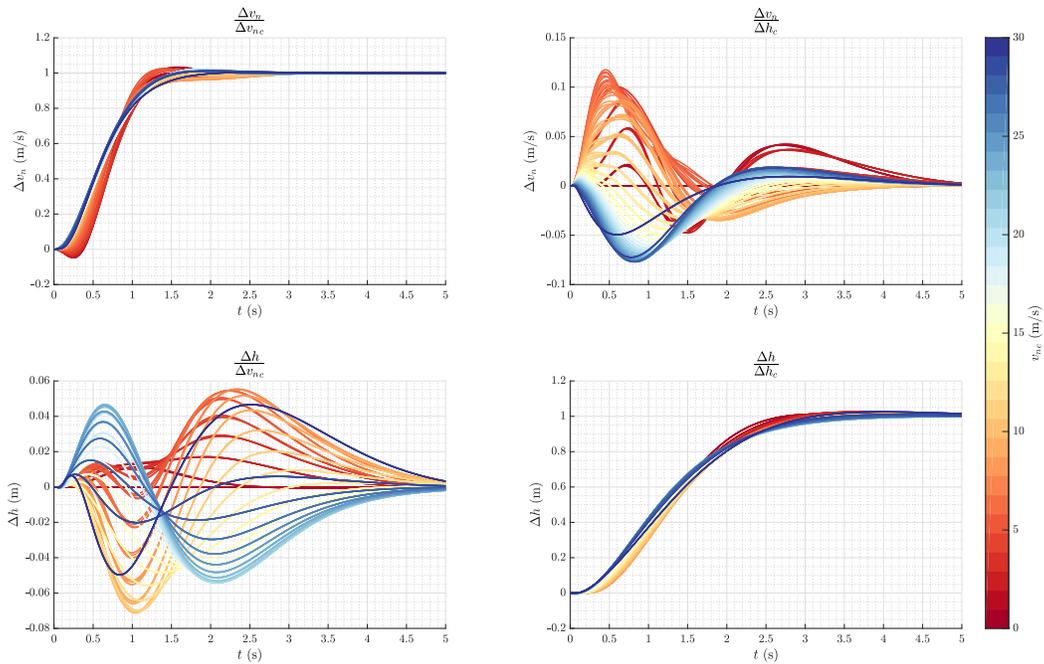


Figure 5.27 Réponses temporelles  $\Delta\mathbf{z}/\Delta\mathbf{r}$  de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + TCC + INC

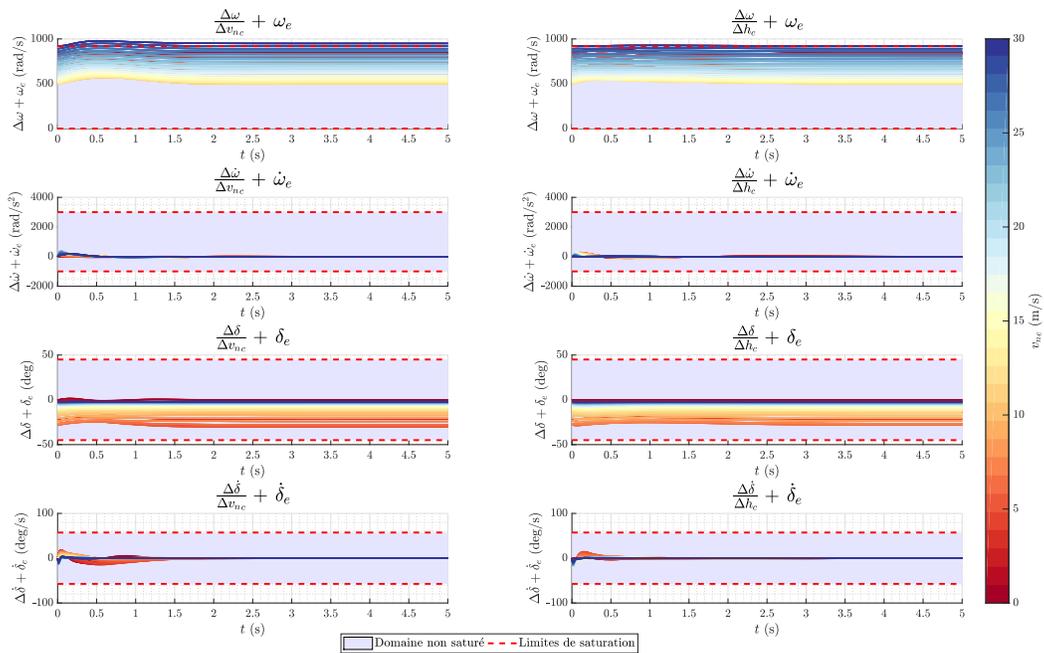


Figure 5.28 Réponses temporelles  $\Delta\mathbf{s}/\Delta\mathbf{r}$  de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + TCC + INC

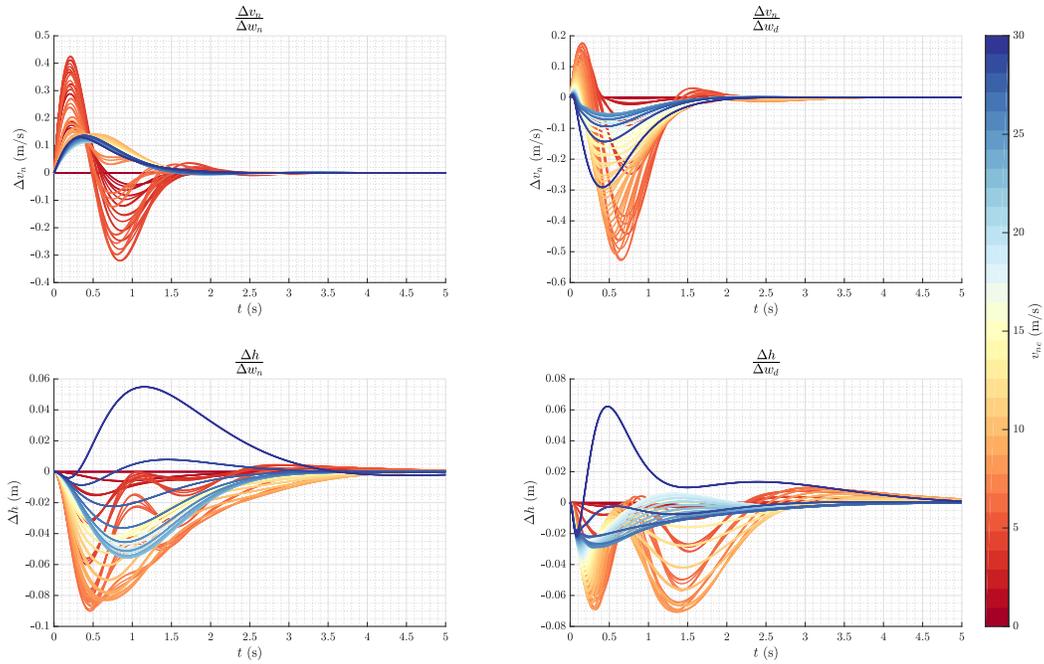


Figure 5.29 Réponses temporelles  $\Delta\mathbf{z}/\Delta\mathbf{w}$  de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + TCC + INC

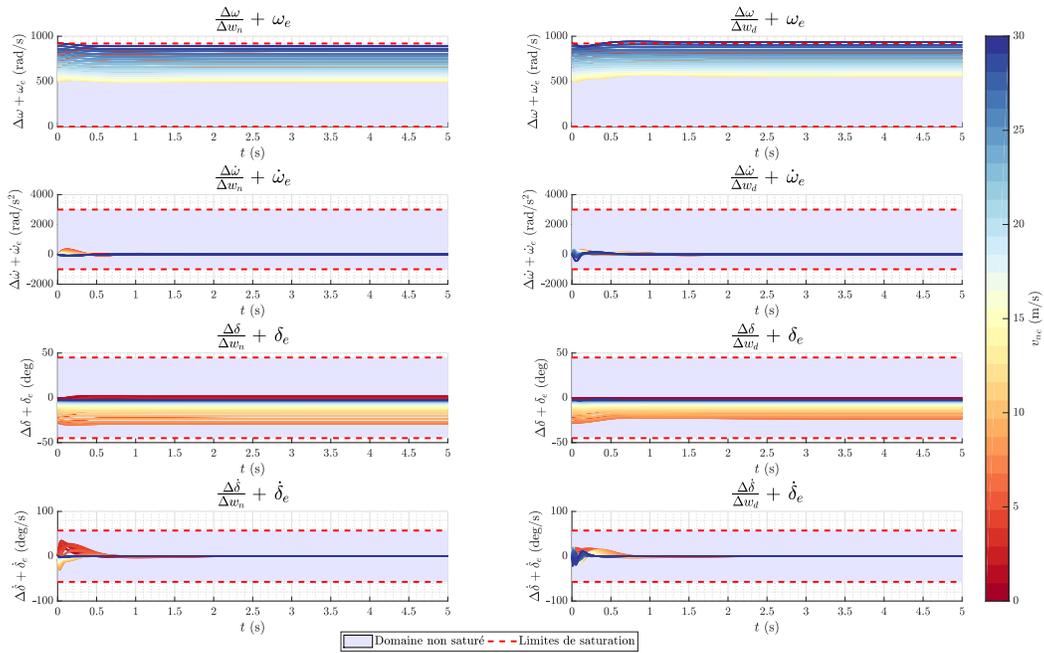


Figure 5.30 Réponses temporelles  $\Delta\mathbf{s}/\Delta\mathbf{w}$  de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + TCC + INC

### 5.4.6 Comparaison des synthèses LQR vs $\mathcal{H}_\infty$

On compare à présent les courbes de gains obtenues pour chacune des quatre étapes synthétiques présentées à la page 88. Ces courbes sont présentées à la figure 5.31. On précise que les courbes de gains ont été normalisées à l'aide de la fonction suivante :

$$\bar{k}_{\square}^{ij}(v_{ne_\ell}) := \frac{k_{\square}^{ij}(v_{ne_\ell}) - \mu(k_{\square}^{ij})}{\sigma(k_{\square}^{ij})} \quad (5.71)$$

où  $\bar{k}_{\square}^{ij}$  est la valeur normalisée de la composante de gain  $k_{\square}^{ij}$  pour la vitesse  $v_{ne_\ell}$ ,  $\mu(k_{\square}^{ij})$  est la moyenne de la valeur de tous les gains d'une même courbe et  $\sigma(k_{\square}^{ij})$  est l'écart-type de la valeur de tous les gains d'une même courbe. On note d'ailleurs que l'équation (5.71) représente le calcul de la *variable centrée réduite* de chaque grandeur  $k_{\square}^{ij}(v_{ne_\ell})$  qui possède alors une moyenne nulle et un écart-type unitaire. Cette normalisation est nécessaire afin de rendre la comparaison pertinente dans le contexte d'un système MIMO où il existe une infinité de gains pouvant donner les mêmes résultats. On note que suite à cette normalisation, les composantes de gains des transferts impairs ne possèdent plus une valeur nulle pour  $v_{ne} = 0$  m/s.

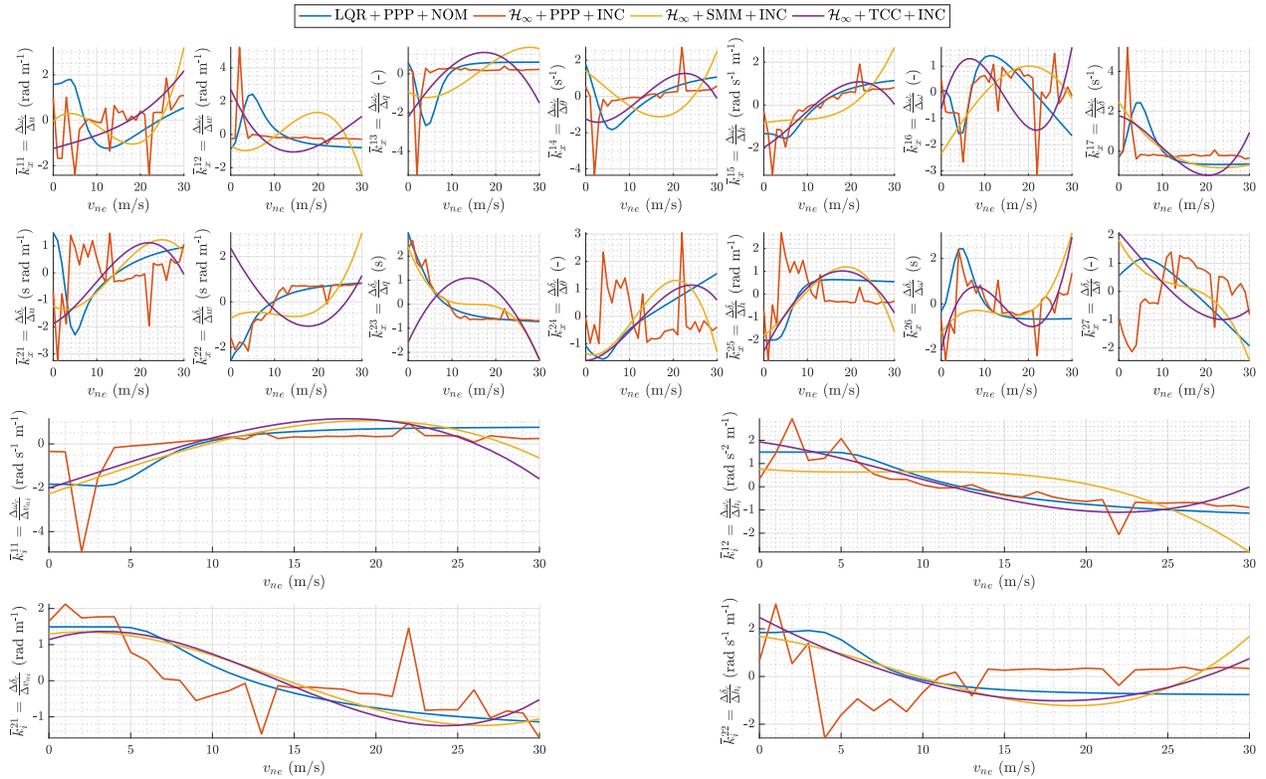


Figure 5.31 Comparaison des gains des synthèses LQR vs  $\mathcal{H}_\infty$

Ainsi, l'analyse de la figure 5.31 permet de constater que toutes les courbes possèdent approximativement la même forme. À quelques exceptions près, on peut effectivement dire qu'elles suivent la même tendance à croître ou décroître en fonction de la vitesse d'avancement à l'équilibre  $v_{ne}$ . On rappelle que les courbes de gains de l'étape LQR + PPP ont été obtenues en utilisant un jeu de matrices de pondérations  $\mathbf{Q}_a := \mathbf{Q}_{a_{k,\ell}}$  et  $\mathbf{R} := \mathbf{R}_{k,\ell}$  constantes sur tout le domaine de séquençement. Ceci explique pourquoi ces courbes synthétisées PPP sont continues. On observe également que celles synthétisées PPP, mais avec la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ , sont discontinues. L'analyse la plus intéressante demeure la comparaison des courbes obtenues aux étapes  $\mathcal{H}_\infty + \text{SMM}$  et  $\mathcal{H}_\infty + \text{TCC}$ , puisque le seul et unique élément distinguant ces deux étapes est respectivement l'exclusion ou l'inclusion du TCC. De manière générale, on observe que la considération du TCC dans la synthèse multimodèle a pour effet de *lisser*<sup>5.17</sup> les courbes de gains. Ceci est d'autant plus vrai en début de domaine de séquençement pour des valeurs de vitesses proches de zéro. Cela semble tout à fait logique, puisque cette partie du domaine de séquençement est la plus critique au sens de sa dynamique naturelle qui est instable dans cette zone.

Tableau 5.6 Comparaison des synthèses LQR et  $\mathcal{H}_\infty$ 

Caractéristique \ Étape	LQR + PPP	$\mathcal{H}_\infty + \text{PPP}$	$\mathcal{H}_\infty + \text{SMM}$	$\mathcal{H}_\infty + \text{TCC}$
Multimodèle	Non	Partiellement	Oui	Oui
Autoséquence- ment	Non	Non	Oui	Oui
TCC	Non	Non	Non	Oui
# $\varrho_k$ / syn.	1	5	5	5
# $\sigma_{e_\ell}$ / syn.	1	1	31	31
# $\vartheta_{e_{k,\ell}}$ / syn.	$1 \times 1 = 1$	$5 \times 1 = 5$	$5 \times 31 = 155$	$5 \times 31 = 155$
$\dim(\kappa^+) / \text{syn.}$	18	18	72	72
# total syn. / étape	31	31	1	1
# total param. bloqués / étape	0	0	9	9
# total param. libres / étape	$18 \times 31 = 558$	$18 \times 31 = 558$	$72 - 9 = 63$	$72 - 9 = 63$
Temps / étape	$t^\star = 2.5 \text{ s}$	$75 \times t^\star$	$270 \times t^\star$	$257 \times t^\star$
Gain $\gamma$	S. O.	1.0844	1.3565	1.4836

Le tableau 5.6 rassemble tous les résultats numériques d'intérêt des étapes de synthèses

---

5.17. Par *lisser*, on entend *réduire l'ordre effectif* de la fonction polynomiale associée à la courbe de gains.

présentées à la page 88. On souhaite attirer l'attention du lecteur sur les trois dernières lignes de ce tableau.

Les première et seconde étapes de synthèse PPP possèdent chacune 558 paramètres libres, tandis que les troisième et quatrième étapes de synthèses multimodèles possèdent seulement 63 paramètres libres. Ces deux dernières étapes possèdent donc  $558/63 \approx 9$  fois moins de paramètres libres que les deux premières. Cela constitue tout le défi de la méthode de conception du système de commandes autoséquenté en utilisant une approche multimodèle basée sur les systèmes linéarisés en BF  $\mathbf{G}_{k,\ell}$ . En effet, il faut atteindre les mêmes performances dans les deux cas unimodèle et multimodèle, mais en utilisant considérablement moins de paramètres libres dans cette seconde approche. En d'autres mots, il faut maintenir les performances en contraignant davantage la forme des courbes de gain. On ne permet pas qu'elles prennent n'importe quelle forme arbitraire non linéaire comme pour la synthèse LQR unimodèle. La forme des synthèses  $\mathcal{H}_\infty$  multimodèles est définie a priori au moment de choisir l'architecture du système de commandes.

L'avant-dernière ligne donne les temps de résolution numérique du problème de synthèse(s) associé à chacune des quatre étapes. On rappelle que ces temps ont été obtenus avec le matériel informatique présenté au tableau 5.5. On observe entre autres que l'ultime synthèse multimodèle et multiobjectif  $\mathcal{H}_\infty + \text{TCC}$  est 257 fois plus longue que la synthèse unimodèle et uniobjectif LQR + PPP. En effet, chaque synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  multimodèle prend plus de 10 minutes avant de converger vers une solution numérique respectant les tolérances prescrites par la fonction `SYSTUNE` de MATLAB®.

Enfin, la dernière colonne présente le gain de la norme  $\mathcal{H}_\infty$  obtenu pour chacune des synthèses  $\mathcal{H}_\infty$ . On constate que la synthèse effectuée à la dernière étape possède un gain  $\gamma = 1.4836 > 1$ . Cela veut donc dire que les filtres prescrits par les gabarits fréquentiels définis au tableau 5.4 n'ont pas été entièrement respectés sur toute leur plage fréquentielle. Toutefois, l'analyse des figures présentées à la section 5.4.5 permet de valider que cela ne pose pas un problème. On termine en soulignant l'accroissement en matière de difficulté de chaque étape de synthèse(s)  $\mathcal{H}_\infty$  à respecter tous les critères de performances du cahier des charges défini à la section 5.3.1. En effet, on observe que le gain de la norme  $\mathcal{H}_\infty$   $\gamma$  croît à chacune de ces étapes auxquelles sont appliqués les mêmes filtres fréquentiels  $\mathbf{W}_{j,k,\ell}$ .

## 5.5 Comparaisons de synthèses supplémentaires

Dans le cadre du projet de recherche, plusieurs itérations ont été effectuées afin de trouver la loi de commandes offrant les meilleures performances pour l'autopilote longitudinal du

MAVION. Dans ce chapitre, on a présenté seulement celle ayant obtenu les meilleures performances : la synthèse  $\mathcal{H}_\infty + \text{TCC}$  utilisant le retour d'état statique (RES) et prenant en compte l'incertitude associée aux paramètres du modèle d'état (INC). Toutefois, avant de conduire cette synthèse incluant les incertitudes paramétriques, une première synthèse  $\mathcal{H}_\infty + \text{TCC}$  en considérant seulement les paramètres nominaux contenus dans  $\boldsymbol{\rho}_0$  a d'abord été conduite afin de mettre en place l'ensemble de la méthodologie.

De plus, une synthèse par retour de sortie statique (RSS) utilisant les nouvelles sorties définies en (5.53) avec des variables principalement exprimées dans le repère inertiel  $\mathcal{R}_i$  a également été étudiée au cours du projet de maîtrise.

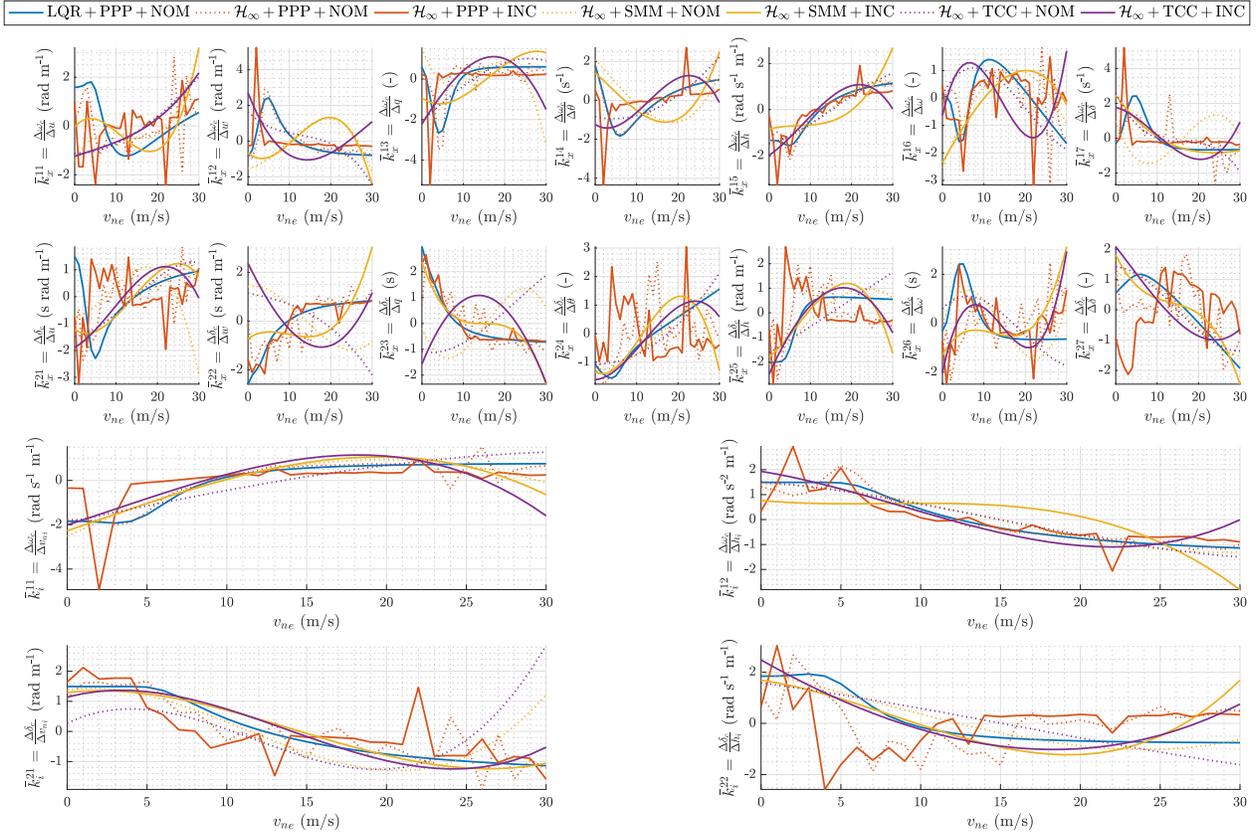
Cette section a pour but de discuter brièvement de ces deux synthèses supplémentaires dont les résultats sont tous présentés respectivement dans les annexes G et H. On précise que seuls les résultats les plus notables sont abordés dans cette section et que ces annexes ne comportent aucune analyse supplémentaire.

### 5.5.1 Comparaison des synthèses NOM *vs* INC

On s'intéresse ici à mesurer l'impact de la considération des incertitudes paramétriques dans la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  multimodèle.

La figure 5.32 superpose toutes les courbes de gains normalisées – cf. équation (5.71) – obtenues dans l'application des quatre étapes définies à la page 88 pour les cas où on exclut (NOM) et inclut (INC) les incertitudes paramétriques dans les synthèses. L'analyse de cette figure montre encore une fois que toutes les courbes de gains ont sensiblement la même allure par rapport à leur évolution selon la vitesse de séquençement  $v_{n_e}$ . Toutefois, on constate que les courbes obtenues pour le cas NOM (en trait pointillé) sont différentes de celles obtenues pour le cas INC (en trait plein).

La différence entre ces deux cas de synthèses est encore plus marquée dans le respect des gabarits fréquentiels définis au tableau 5.4. En effet, le tableau 5.7 montre que des gains  $\gamma$  plus élevés sont obtenus pour le cas INC à chacune des étapes respectives des cas NOM et INC lorsqu'on les compare deux à deux. De plus, le fait de contenir 5 fois plus de modèles dans les synthèses INC augmente considérablement le temps de résolution comme l'indique l'avant-dernière colonne. Toutes les figures issues des résultats des synthèses RES + NOM sont à l'annexe G.1.

Figure 5.32 Comparaison des gains des synthèses NOM *vs* INCTableau 5.7 Comparaison des synthèses NOM *vs* INC

Synthèse	$\gamma$	$N_\rho$	$\# \vartheta_{e_{k,\ell}} / \text{syn.}$	Étape	Temps	Gain $\gamma$
RES + $\mathcal{H}_\infty$ + NOM	<b>x</b>	1	31	PPP	$14 \times t^\star$	1.0000
				SMM	$45 \times t^\star$	1.1845
				TCC	$112 \times t^\star$	1.3855
RES + $\mathcal{H}_\infty$ + INC	<b>x</b>	5	155	PPP	$75 \times t^\star$	1.0844
				SMM	$270 \times t^\star$	1.3565
				TCC	$257 \times t^\star$	1.4836

### 5.5.2 Comparaison des synthèses RES vs RSS

On aborde maintenant la comparaison entre les synthèses  $\mathcal{H}_\infty$  multimodèles effectuées par RES et celles effectuées par RSS pour le cas NOM.

On débute en mentionnant qu'un problème inattendu est survenu en travaillant avec le RSS défini à l'équation (5.53). Concrètement, il a été impossible d'appliquer les gabarits de saturation – soit les gabarits  $\mathcal{G}_9$ ,  $\mathcal{G}_{10}$ ,  $\mathcal{G}_{13}$  et  $\mathcal{G}_{14}$  du tableau 5.4 – pour l'entrée de perturbation  $\Delta \mathbf{w}$ . Ceci est causé par la présence de l'accélération  $a_n$  dans le vecteur de sortie  $\mathbf{y}_k$  qui est utilisé dans la loi de commandes. En effet, une fois cette sortie linéarisée, on obtient une matrice jacobienne  $\mathbf{D}_{w_k, \ell}^y \neq \mathbf{0}$  non nulle liée à la sortie linéarisée  $\Delta \boldsymbol{\gamma} := \Delta \mathbf{y}$ . Cela a pour effet d'injecter les perturbations  $\Delta \mathbf{w}$  directement dans la loi de commandes composée du RSS. Cela constitue un grand contraste par rapport au RES pour lequel la modélisation de sa sortie  $\Delta \boldsymbol{\gamma} := \Delta \mathbf{x}$  génère seulement une matrice jacobienne  $\mathbf{C}_{k, \ell}^x = \mathbf{I}$  valant l'identité. La matrice jacobienne reliée à l'entrée de perturbation  $\Delta \mathbf{w}$  du RES est nulle :  $\mathbf{D}_{w_k, \ell}^x$ . Cela signifie donc que pour le RES, l'entrée de vent n'est pas directement injectée dans la loi de commande comme c'est le cas pour le RSS. En effet, pour le RES, l'entrée perturbatrice doit d'abord passer par la matrice  $\mathbf{B}_{w_k, \ell}$  et être *filtrée* naturellement par la dynamique du modèle d'état avant d'affecter les états  $\Delta \mathbf{x}$  et d'être ensuite injectée dans la loi de commande.

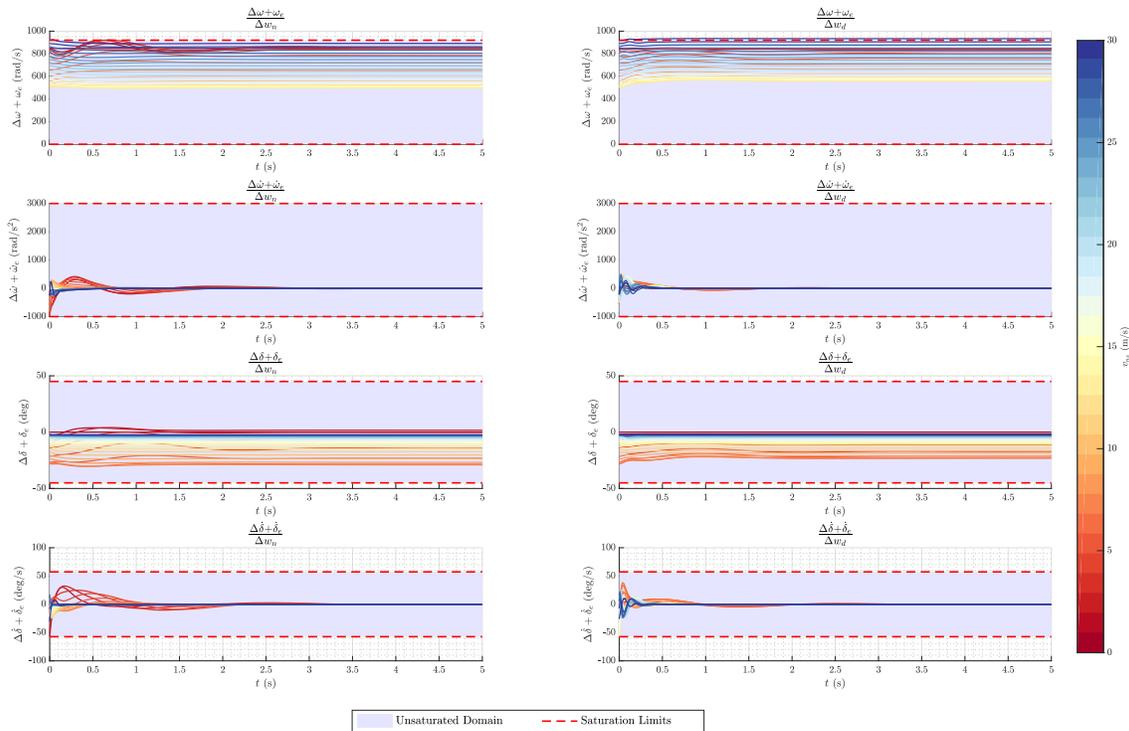


Figure 5.33 Réponses temporelles  $\Delta \mathbf{s} / \Delta \mathbf{w}$  de la synthèse RSS +  $\mathcal{H}_\infty$  + TCC + NOM

Cet aspect concernant la linéarisation de la sortie  $\mathbf{y}$  a un impact direct sur les transferts en BF  $\Delta\mathbf{s}/\Delta\mathbf{w}$ . En effet, l'analyse de la figure 5.33 montre que la réponse temporelle du transfert  $\Delta\dot{\delta}/\Delta w_n$  ( $\dot{\delta}_e = 0$ ) ne débute plus à une valeur nulle au temps initial  $t_0$  comme c'est le cas pour le RES; elle débute plutôt à une valeur tendant à être asymptotiquement grande! Ce comportement temporel est dû précisément à l'explication fournie au paragraphe précédent, soit que la matrice jacobienne  $\mathbf{D}_{w_{k,\ell}}^y \neq \mathbf{0}$  est non nulle pour le RSS. Cela cause alors un problème au moment d'imposer les gabarits limitant le gain maximum de ce transfert à la moitié de la limite de saturation. Les performances globales de la synthèse se voient alors grandement affectées afin de respecter les gabarits de saturation biaisés par ce phénomène. De fait, cela peut être corroboré en analysant les gains  $\gamma$  présentés au tableau 5.33. On remarque alors que ces derniers sont très élevés atteignant même la valeur symbolique  $\gamma \approx 2$ . De plus, pour la synthèse RSS + TCC, on obtient un temps de résolution numérique atteignant les 13 minutes.

Tableau 5.8 Comparaison des synthèses RES *vs* RSS

Synthèse	$\gamma$	$N_\ell$	$\# \vartheta_{e_{k,\ell}} / \text{syn.}$	Étape	Temps	Gain $\gamma$
RES + $\mathcal{H}_\infty$ + NOM	$\mathbf{x}$	1	31	PPP	$14 \times t^\star$	1.0000
				SMM	$45 \times t^\star$	1.1845
				TCC	$112 \times t^\star$	1.3855
RSS + $\mathcal{H}_\infty$ + NOM	$\mathbf{y}$	1	31	PPP	$24 \times t^\star$	1.7416
				SMM	$124 \times t^\star$	1.9905
				TCC	$303 \times t^\star$	2.0020

On précise que la source fondamentale du problème abordé dans cette section consiste en la dynamique du vent qui n'est pas modélisée. En effet, le modèle d'état linéarisé considère que l'échelon de vitesse du vent est appliqué instantanément. Or, dans les faits, la vitesse du vent ne varie pas immédiatement : il y a un certain délai transitoire avant d'atteindre une nouvelle valeur stable lorsque survient une rafale de vent. Afin de corriger ce problème et de pouvoir appliquer les gabarits de saturation correctement, il faudrait augmenter le modèle d'état du MAVION en ajoutant les états des vitesses horizontale et verticale du vent. Par exemple, on pourrait utiliser une dynamique d'ordre 1 linéaire et stable telle qu'utilisée pour la modélisation des actionneurs.

On souligne toutefois que même en ajoutant la dynamique du vent à l'aide d'un filtre linéaire d'ordre 1 possédant une certaine constante de temps au simulateur du MAVION, les simulations effectuées sur le modèle non linéaire montrent que la synthèse par RSS possède de

très mauvaises performances en rejet du vent. Cela justifie d'ailleurs pourquoi on présente seulement la synthèse par RES dans ce chapitre.

Le lecteur désirant analyser toutes les figures issues des résultats de synthèses RSS + NOM est invité à consulter l'annexe H.1. Puis, les simulations sur le modèle non linéaire pour le cas de rejet de l'entrée de vent sont présentées à l'annexe H.2.3.

## CHAPITRE 6 VALIDATION DU SYSTÈME DE COMMANDES DE VOL

*D'autres veulent considérer Wagner  
comme un théoricien qui n'aurait produit  
des opéras que pour vérifier à posteriori  
la valeur de ses propres théories.  
— Charles Baudelaire*

Ce dernier chapitre a pour but d'effectuer la validation du système de commandes de vol qui est présenté au chapitre 5. Pour ce faire, on considère la comparaison des synthèses LQR unimodèles issues de l'étape 1 avec la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  multimodèle issue de l'étape 4. L'objectif ultime est de vérifier si chacune de ces synthèses respecte les critères de performances définis dans le cahier des charges présenté à la section 5.3.1.

L'analyse de ces deux méthodes de synthèse est présentée à la section 6.1 en comparant trois cas de simulations effectuées en utilisant le modèle non linéaire de la dynamique longitudinale du MAVION présenté à la section 4.1. On précise que les saturations statiques et dynamiques des moteurs et des élévons définies à la section 4.2 sont prises en compte dans les simulations effectuées. À la section 6.2, on reprend les comparaisons de synthèses supplémentaires qui sont présentées à la section 5.5, mais en comparant cette fois des cas de simulations sur le modèle non linéaire.

### 6.1 Simulations sur le modèle non linéaire des synthèses LQR vs $\mathcal{H}_\infty$

Cette section présente la comparaison du contrôleur nominal basé sur la synthèse LQR avec le contrôleur obtenu avec la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée. On rappelle que le contrôleur LQR est synthétisé avec une approche unimodèle PPP qui nécessite que ses gains soient interpolés à posteriori au moment de l'implémentation sur le modèle non linéaire. À l'opposé, le contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  utilise une approche multimodèle dans laquelle la fonction de séquençement des gains est intégrée à priori dans l'architecture linéarisée utilisée au moment de la synthèse. Aucune étape supplémentaire n'est donc nécessaire au moment de passer à l'implémentation pour cette seconde approche. On insiste sur le fait que les contrôleurs LQR et  $\mathcal{H}_\infty$  utilisent exactement la même architecture de contrôle définie en (5.3) et que la seule variante consiste en leur fonction de séquençement respective  $\mathbf{K}_\square^+(\sigma, \boldsymbol{\kappa}_\square^+)$  utilisée dans (5.5). Les matrices de symétrie  $\mathbf{K}_\square^\S(\boldsymbol{\kappa}_\square^\S)$  utilisée afin d'ajuster les gains pour le domaine complet sont également identiques. En résumé, seules les valeurs des gains varient d'un cas à l'autre.

Dans ce chapitre, les simulations de validation de l'autopilote longitudinal présenté à la section 5.3 considèrent des variations paramétriques indépendantes de l'ordre de  $\pm 25\%$  pour le coefficient aérodynamique du moment en tangage  $C_{mq}$  et la position du centre aérodynamique  $r_{ca}$ . On rappelle toutefois que les synthèses linéaires des contrôleurs LQR et  $\mathcal{H}_\infty$  ont été effectuées avec la valeur atténuée de  $\pm 10\%$  à l'image de la méthode employée par [18]. Les cinq configurations paramétriques distinctes  $\varrho_k$  utilisées dans les simulations de validation sont illustrées à la figure 6.1.

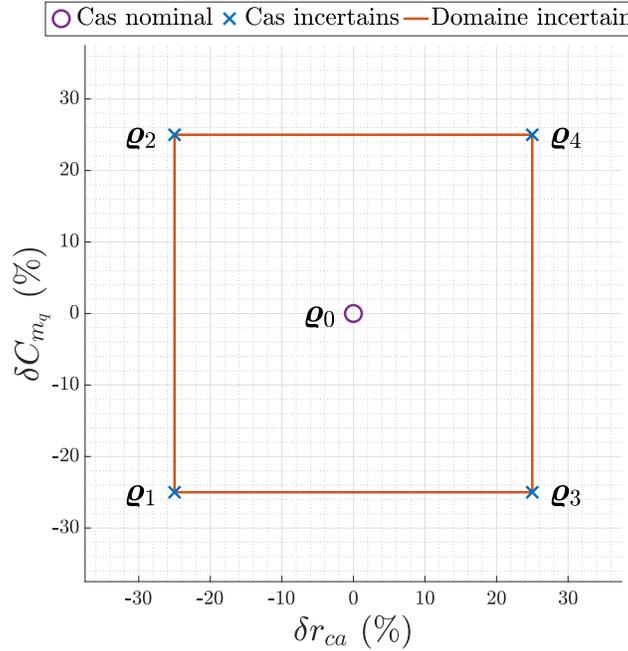


Figure 6.1 Incertitudes paramétriques considérées dans les simulations de validation

Les valeurs nominales des paramètres du modèle non linéaire utilisés dans les simulations de validation sont celles présentées dans le tableau 5.2. Pour comparer les synthèses LQR et  $\mathcal{H}_\infty$ , trois cas de simulations, dénommés *cas de validation* dans cet ouvrage, sont analysés :

1. **Parcours complet du domaine de vol (DOM)** : cas permettant de valider que les contrôleurs fonctionnent bien sur tout le domaine de vol sécuritaire ( $-25 \leq v_n \leq 25$  m/s avec des incréments de forme échelon unité) ;
2. **Suivi de références multiples en simultané (REF)** : cas permettant de valider les performances (erreurs de suivi, temps de réponse, dépassements, découplages, saturations, rejets de perturbations, etc.) des contrôleurs pour différents types de références envoyées en simultané (échelon, rampe et échelon lissé<sup>6.1</sup>) ;

6.1. Comme son nom l'indique, la fonction *échelon lissé* est une version lissée de la fonction échelon unité (ou fonction de Heaviside) où la géométrie de la transition temporelle entre un état initial  $x(t_i)$  et un état

3. **Résistance aux perturbations de vent (VEN)** : cas permettant de valider la performance des contrôleurs pour des entrées de perturbation simulant des rafales de vent (filtrées à  $\pm 4$  m/s) pour les deux phases de vol caractéristiques d'un aéronef convertible à corps inclinable (vol stationnaire à 0 m/s et vol d'avancement à 15 m/s).

Enfin, chacun des cas de validation présentés dans la liste ci-dessus est simulé pour deux configurations paramétriques distinctes :

1. **Configuration paramétrique nominale (NOM)** : une simulation unique conduite pour le jeu de paramètres nominaux définis au tableau 5.2 ;
2. **Configuration paramétrique incertaine (INC)** : quatre simulations supplémentaires conduites pour chacun des jeux de paramètres incertains définis à la figure 6.1.

Au total, il y a donc quinze simulations de validation qui sont effectuées pour chacun des contrôleurs synthétisés : 3 cas de validation (DOM, REF et VEN)  $\times$  5 configurations paramétriques (1 NOM + 4 INC) = 15 simulations par synthèse comparée.

On termine avec quelques précisions concernant des changements dans la nomenclature employée sur les figures de simulations :

- Pour l'accélération inertielle projetée selon  $\mathbf{x}_i$  :  $a_n$  a été définie en (5.53) ;
- Pour la vitesse inertielle projetée dans le repère  $\mathcal{R}_o$  :  $V_b := V_o = \sqrt{u^2 + w^2}$  ;
- Pour la vitesse aérodynamique :  $V_a := \eta$  a été définie en (4.4) ;
- Pour l'angle d'attaque :  $\alpha$  a été défini en (3.9) ;
- Pour les composantes des gains :  $k_x^{ij} := k_\gamma^{ij}$  et  $k_i^{ij} := k_\xi^{ij}$ .

### 6.1.1 Parcours complet du domaine de vol des synthèses LQR vs $\mathcal{H}_\infty$

On s'intéresse ici à comparer les performances des synthèses LQR et  $\mathcal{H}_\infty$  pour le cas de validation DOM (cf. page 136).

#### Configuration paramétrique nominale pour le cas DOM

On commence la comparaison avec la configuration paramétrique nominale NOM (cf. page 137). La figure 6.2 montre les variables d'intérêt intervenant dans les simulations du modèle longitudinal non linéaire du MAVION. Cette figure est composée de 12 sous-figures affichant chacune des réponses temporelles. Les réponses temporelles de la synthèse LQR sont affichées en bleu et celles de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  en rouge.

---

final  $x(t_f)$  est caractérisée par cinq paramètres : temps initial  $t_i$ , valeur initiale  $x_i$ , temps final  $t_f$ , valeur finale  $x_f$  et le degré  $n$  du polynôme utilisé afin de lisser la transition entre les points  $x(t_i)$  et  $x(t_f)$  [79].

La sous-figure de la vitesse d'avancement  $v_n$  montre que les deux contrôleurs suivent sans aucun problème la référence  $v_{n_c}$  d'échelons unitaires évoluant en escalier. Toutefois, l'analyse de la variable  $h$  montre que le contrôleur LQR génère des dépassements de plus de 50 % à chaque nouvelle marche de l'escalier alors que le contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  respecte quant à lui la valeur du cahier des charges fixée à 10 % (cf. section 5.3.1). Pourtant, les figures de synthèses LQR et  $\mathcal{H}_\infty$  montrant les réponses temporelles du transfert  $\Delta\mathbf{z}/\Delta\mathbf{r}$  indiquent toutes les deux que le critère de découplage est respecté sur l'entièreté du domaine de séquençement (cf. figures 5.8 et 5.27, respectivement). Ceci est dû au fait que la dynamique linéarisée dans les synthèses LQR unimodèles PPP ne contient pas la dynamique du TCC générée par le séquençement des gains en fonction d'une variable endogène, soit la vitesse d'avancement  $v_n$ . La conséquence directe de cela est que toutes les analyses issues des modèles linéarisés utilisés dans la synthèse LQR se transposent forcément moins bien à la dynamique non linéaire que les analyses issues de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  ayant considéré la dynamique linéarisée du TCC. Ces résultats démontrent sans équivoque la pertinence et la nécessité de considérer le TCC dès la phase de synthèse des contrôleurs. D'ailleurs, on constate également la symétrie dans les réponses temporelles : certaines variables possèdent une symétrie de parité paire, tandis que d'autres ont plutôt une parité impaire par rapport à la vitesse d'avancement nulle qui est atteinte vers  $t \approx 250$  s. On précise que ce comportement symétrique est rendu possible grâce à l'ajout des termes symétriques  $\gamma_\S$  et  $\mathbf{u}_\S$  dans la loi de commandes définie en (5.3).

La figure 6.3 montre l'évolution temporelle des gains LQR et  $\mathcal{H}_\infty$ . Ces gains ne sont pas normalisés afin de mettre en évidence que toutes les composantes de gains impaires atteignent bien une valeur nulle au temps  $t \approx 250$  s qui est associé à la vitesse d'avancement nulle  $v_n = 0$  m/s. Encore une fois, cette simulation parcourant le domaine de vol complet permet d'observer les parités paire ou impaire des différentes composantes de gains.

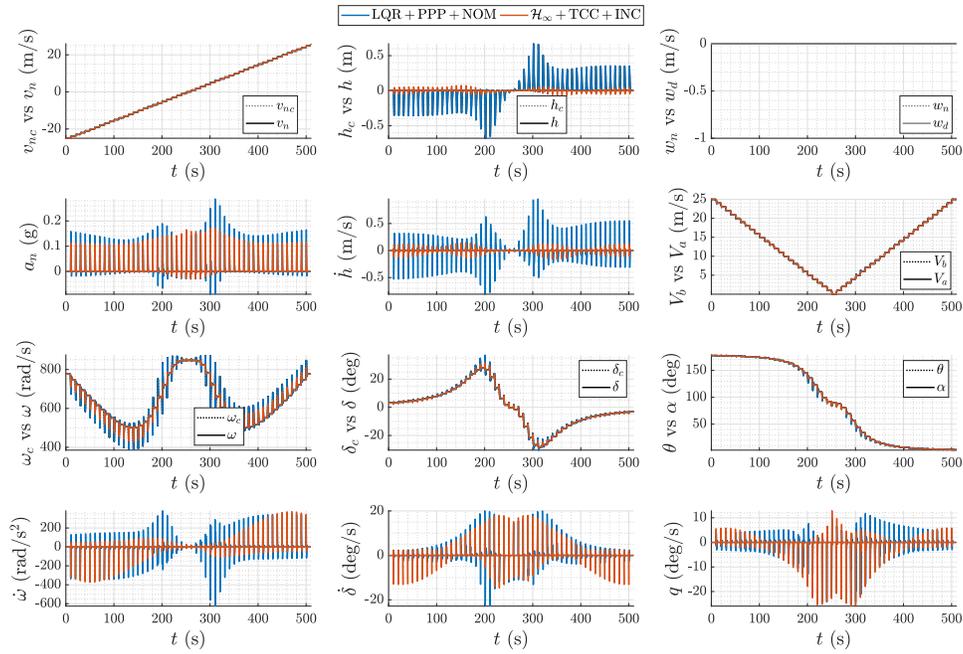


Figure 6.2 Variables des synthèses LQR vs  $\mathcal{H}_\infty$  pour le cas DOM + NOM

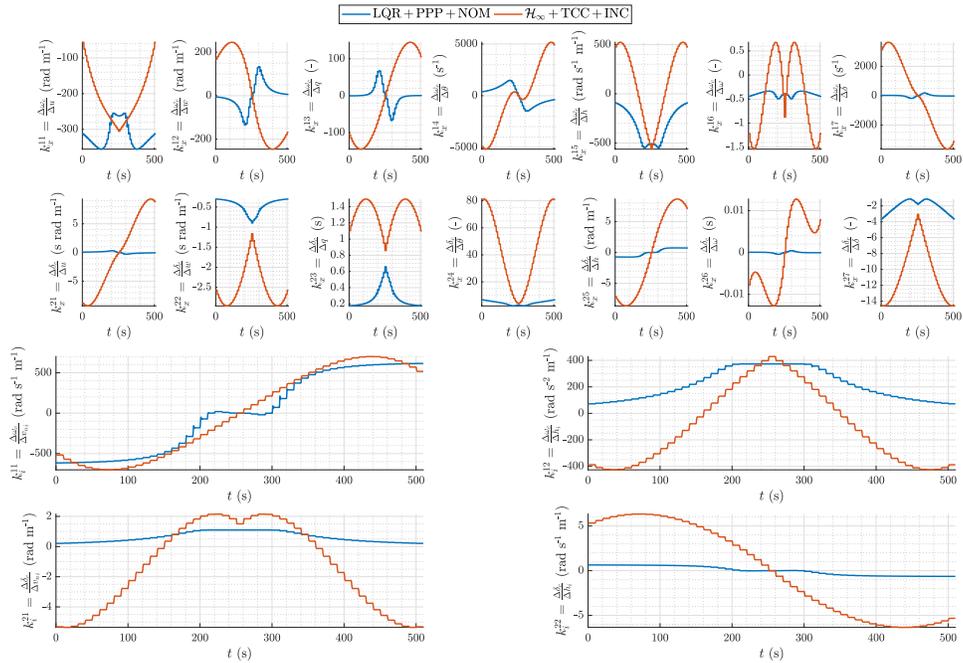


Figure 6.3 Gains des synthèses LQR vs  $\mathcal{H}_\infty$  pour le cas DOM + NOM

### **Configuration paramétrique incertaine pour le cas DOM**

On poursuit la comparaison avec la configuration paramétrique incertaine INC (cf. page 137).

Les figures 6.4 et 6.5 sont les équivalents respectifs des figures 6.2 et 6.3 qui viennent juste d'être analysées. La seule différence consiste en la superposition de quatre cas de simulations supplémentaires (par synthèse comparée) sur chaque figure – en utilisant alors les configurations paramétriques incertaines de la figure 6.1. L'analyse des figures 6.4 et 6.5 révèle que l'incertitude paramétrique n'a visiblement aucun effet sur ce cas de validation consistant à suivre une vitesse de référence en escalier.

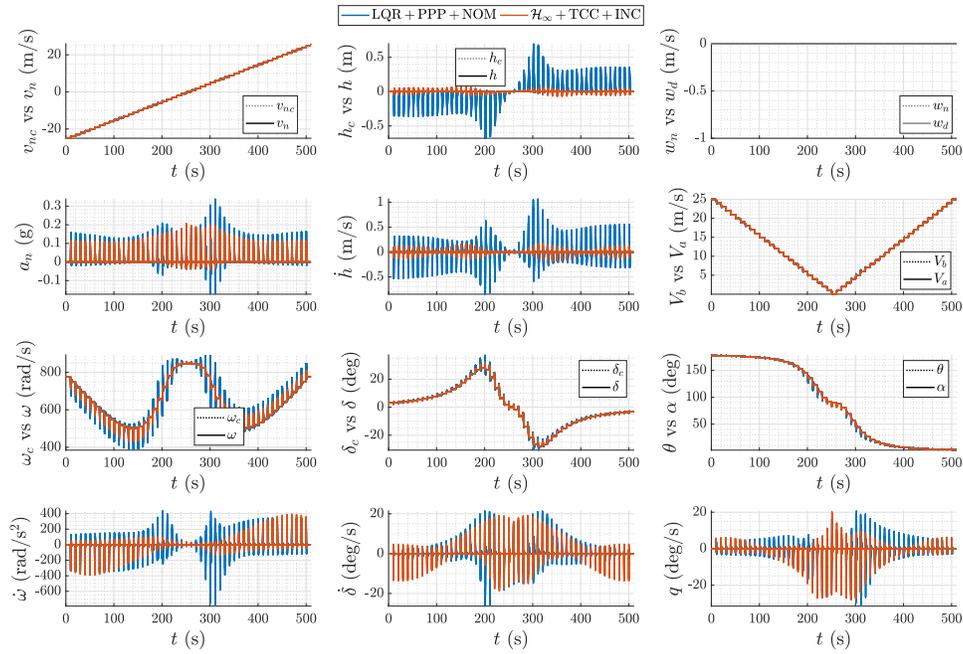


Figure 6.4 Variables des synthèses LQR vs  $\mathcal{H}_\infty$  pour le cas DOM + INC

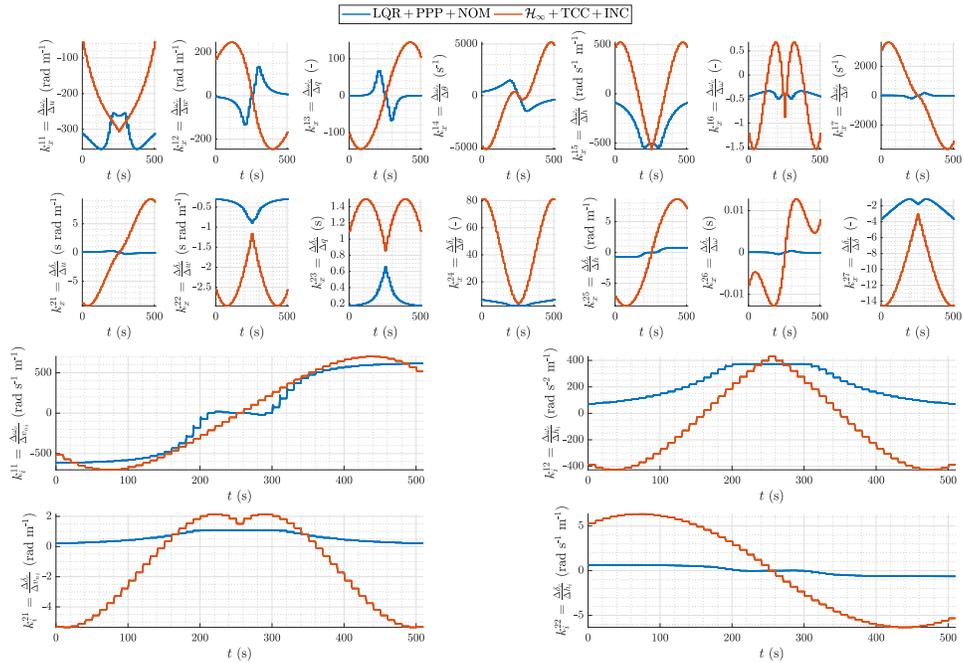


Figure 6.5 Gains des synthèses LQR vs  $\mathcal{H}_\infty$  pour le cas DOM + INC

### 6.1.2 Suivi de références multiples en simultané des synthèses LQR vs $\mathcal{H}_\infty$

On s'intéresse ici à comparer les performances des synthèses LQR et  $\mathcal{H}_\infty$  pour le cas de validation REF (cf. page 136).

#### Configuration paramétrique nominale pour le cas REF

On entame la comparaison avec la configuration paramétrique nominale NOM (cf. page 137).

La figure 6.6 montre l'évolution temporelle des différentes variables d'intérêt pour deux fonctions de référence simultanées  $v_{n_c}$  et  $h_c$  de signe distinct. Ces fonctions de référence sont constituées de sous-fonctions de référence mises bout à bout dans cet ordre :

1. Échelon lissé ;
2. Échelon pur ;
3. Échelon pur ;
4. Échelon pur dans le sens contraire ;
5. Rampe dans le sens contraire ;
6. Rampe dans le sens contraire.

On constate également que le cas de validation REF inclut huit évènements de perturbations de vent horizontal  $w_n$  qui surviennent aux temps  $t_{w_n} := \{10, 20, 30, 40, 60, 70, 80, 90\}$  s. Ces perturbations prennent alors une valeur de  $\pm 4$  m/s  $\approx \pm 15$  km/h. L'analyse de la vitesse d'avancement  $v_n$  montre bien le sous-dépassement au temps  $t = 10$  s dû au zéro à phase non minimale dans la dynamique en BF de ce transfert. Toutefois, on constate que cela ne pose aucun problème. Globalement, les réponses temporelles en vitesse  $v_n$  et en altitude  $h$  montrent que la synthèse LQR possède de grands dépassements avec parfois des oscillations aux temps  $t = \{50, 60, 80, 100\}$  s. La synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  ayant considéré le TCC n'affiche toutefois aucun dépassement de cette même ampleur. On constate également que les deux contrôleurs génèrent des saturations en  $\omega$ ,  $\delta$ ,  $\dot{\omega}$  et  $\dot{\delta}$ . Toutefois, ces saturations surviennent sur de très courts laps de temps et ne semblent pas gêner le bon fonctionnement des contrôleurs. Enfin, la figure comparant la vitesse inertielle  $V_b := V_o$  à la vitesse aérodynamique  $V_a$  illustre le très bon fonctionnement de l'autopilote longitudinal qui a pour objectif de réguler les variables dans le repère inertiel  $\mathcal{R}_i$ . En effet, on constate que malgré les perturbations de vent faisant varier la vitesse aérodynamique  $V_a$ , la vitesse inertielle  $V_o$  demeure constante par rapport à sa valeur de référence. Cela est justement l'objectif recherché ! En effet, on souhaite contrôler le MAVION par rapport au référentiel inertiel dans lequel il évolue indépendamment de sa vitesse aérodynamique qui perturbe les forces et les moments générés par ses actionneurs.

La figure 6.7 montre les courbes de gains obtenues pour ce cas de validation.

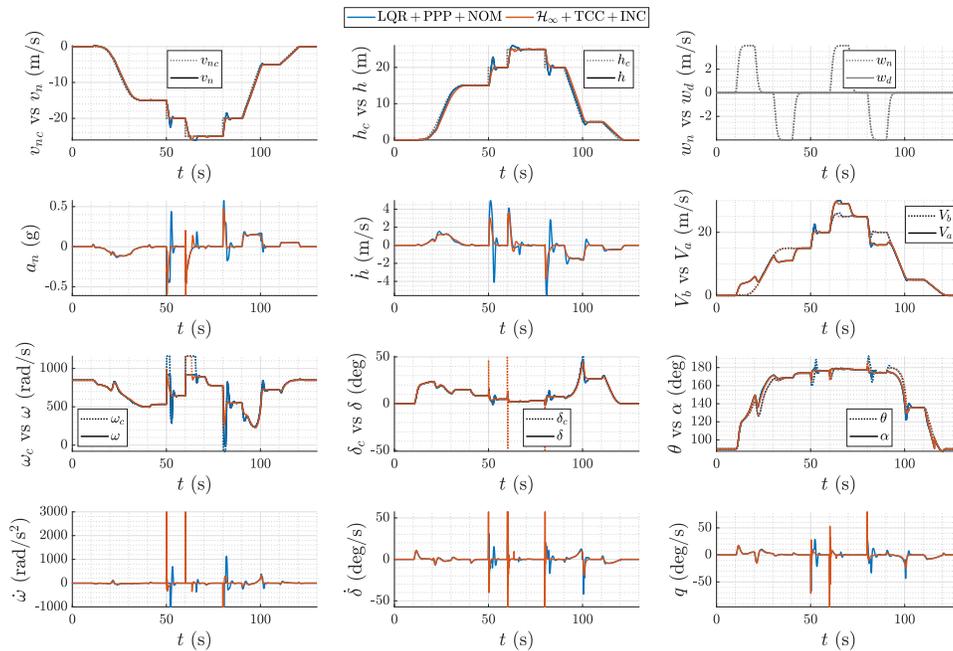


Figure 6.6 Variables des synthèses LQR vs  $\mathcal{H}_\infty$  pour le cas REF + NOM

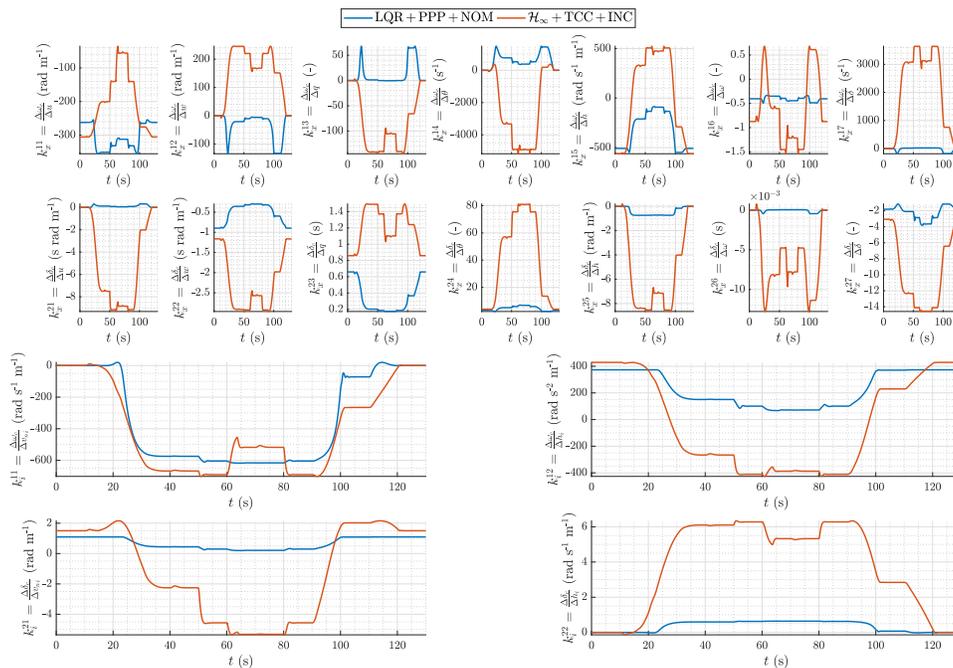


Figure 6.7 Gains des synthèses LQR vs  $\mathcal{H}_\infty$  pour le cas REF + NOM

### Configuration paramétrique incertaine pour le cas REF

On poursuit la comparaison avec la configuration paramétrique incertaine INC (cf. page 137).

Les figures 6.8 et 6.9 sont les équivalents respectifs des figures 6.6 et 6.7 qui viennent juste d'être analysées. La seule différence consiste en la superposition supplémentaire des quatre cas de simulations (par synthèse comparée) considérant les configurations paramétriques incertaines. L'analyse des figures 6.8 et 6.9 révèle que l'incertitude associée aux valeurs des paramètres  $C_{m_q}$  et  $r_{ca}$  a peu d'effet sur les performances des contrôleurs LQR et  $\mathcal{H}_\infty$ . En effet, à part quelques variations dans les courbes – notamment dans la zone de vitesse aérodynamique maximale survenant entre 60 et 70 s, – les performances en suivi de références multiples et simultanées demeurent peu affectées. On note toutefois que la plupart des configurations paramétriques génèrent des saturations dans les actionneurs – sans toutefois gêner les performances. La figure des courbes de gains illustre quant à elle la variation des gains selon la configuration paramétrique simulée. On note que ces variations sont minimales.

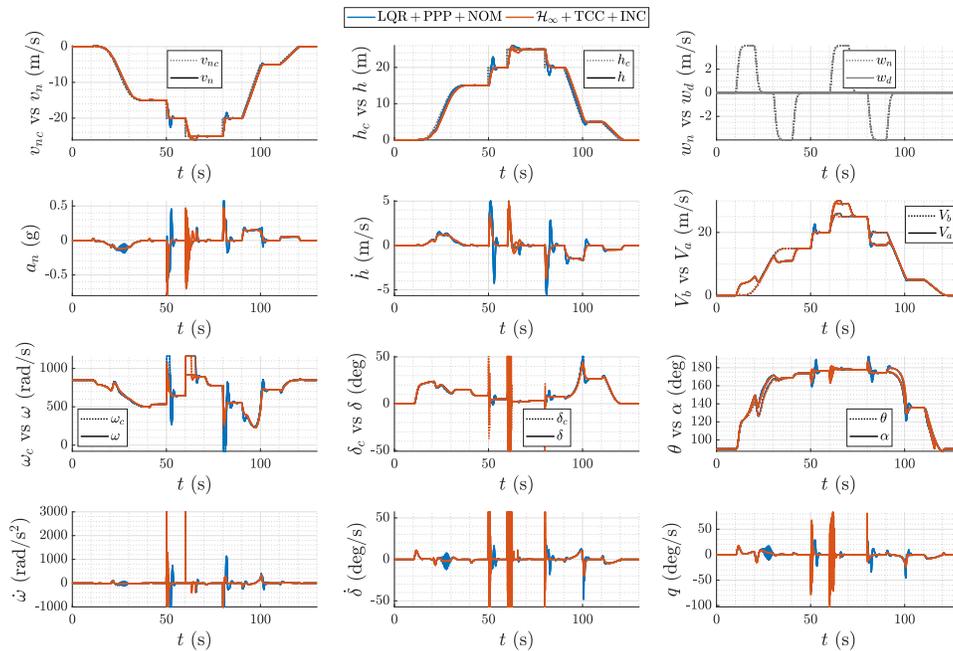


Figure 6.8 Variables des synthèses LQR vs  $\mathcal{H}_\infty$  pour le cas REF + INC

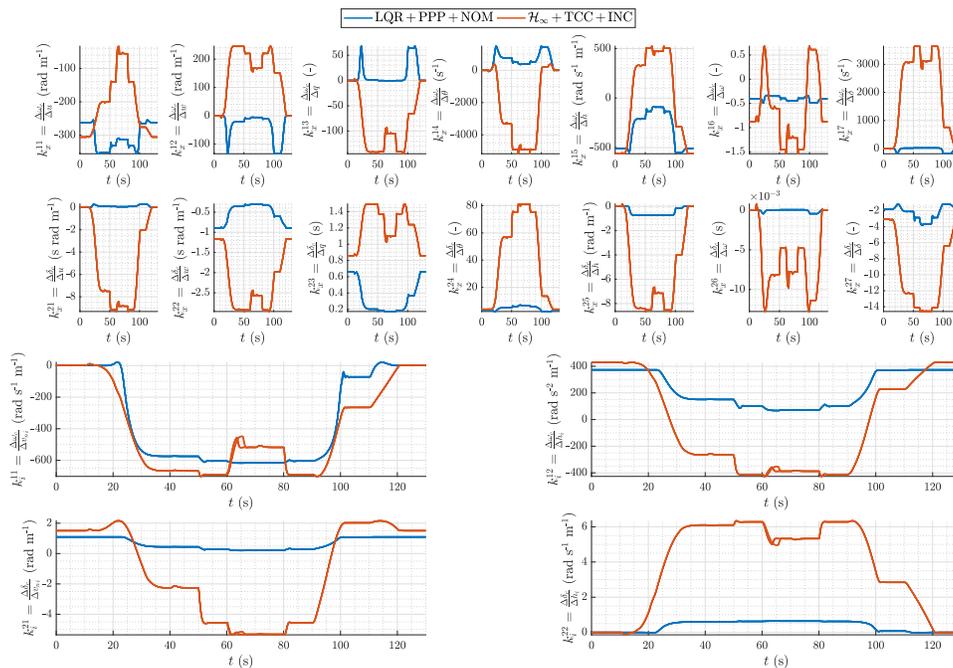


Figure 6.9 Gains des synthèses LQR vs  $\mathcal{H}_\infty$  pour le cas REF + INC

### 6.1.3 Résistance aux perturbations de vent des synthèses LQR vs $\mathcal{H}_\infty$

On s'intéresse ici à comparer les performances des synthèses LQR et  $\mathcal{H}_\infty$  pour le cas de validation VEN (cf. page 136).

#### Configuration paramétrique nominale pour le cas VEN

On entame la comparaison avec la configuration paramétrique nominale NOM (cf. page 137).

La figure 6.10 montre d'abord que le MAVION débute en position de vol stationnaire ; puis, effectue une transition rapide vers un vol d'avancement à 15 m/s. Cette transition rapide est paramétrée en utilisant une fonction d'échelon lissé (cf. note de bas de page 6.1). Ensuite, pour chaque phase de vol, on injecte des perturbations de vent de face et de dos afin de comparer les performances du système de commandes pour chacune des deux dynamiques dominantes du MAVION (respectivement celles du multicoptère et de l'avion). Comme on peut s'y attendre, les performances en régulation de la vitesse d'avancement  $v_n$  et de l'altitude  $h$  sont légèrement meilleures dans la phase de vol d'avancement que dans la phase stationnaire. Ceci est attendu, puisque la phase stationnaire est la plus difficile à asservir en raison de sa dynamique naturellement instable. De plus, en phase stationnaire, la position verticale de l'aile composant le MAVION le rend vulnérable aux rafales de vent horizontales qui sont injectées en simulation. L'analyse du changement agressif en vitesse d'avancement montre toutefois que le contrôleur LQR possède de très mauvaises performances. En effet, lors de ce changement en vitesse, on constate que le dépassement en altitude  $h$  est 25 fois plus grand pour le contrôleur LQR que pour le contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  – ce qui est tout à fait inacceptable par rapport au cahier des charges établi ! Encore une fois, cela démontre la pertinence d'utiliser une synthèse multimodèle plus complexe avec des gains autoséquencés – qui permet de considérer le TCC dans les modèles linéarisés. D'ailleurs, le graphique  $V_b$  vs  $V_a$  permet encore une fois d'apprécier la capacité de l'autopilote longitudinal à bien réguler la vitesse inertielle par rapport à la vitesse aérodynamique perturbée.

La figure 6.11 montre les courbes de gains obtenues pour ce cas de validation.

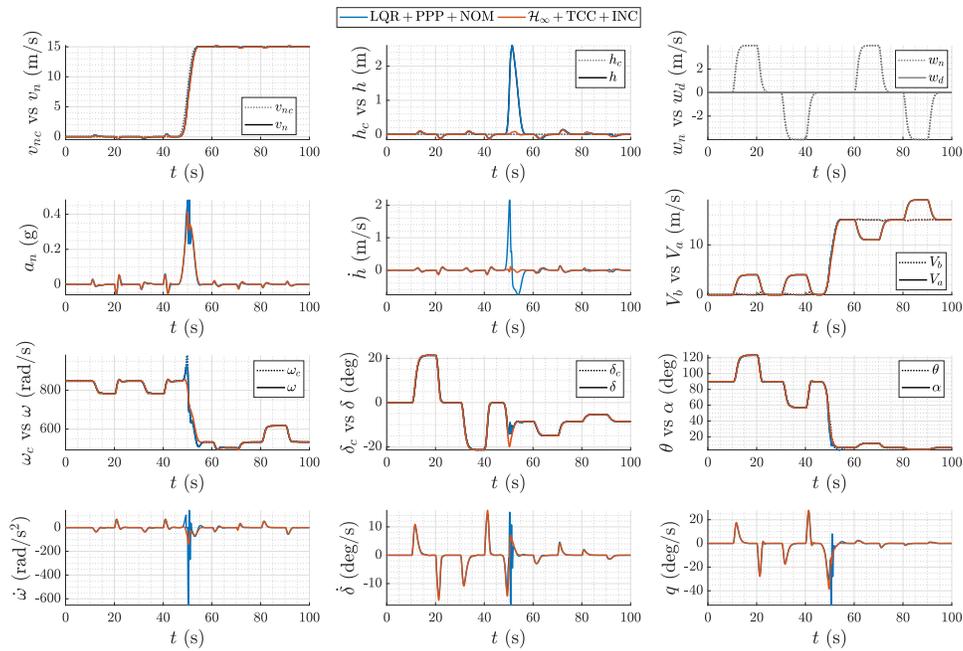


Figure 6.10 Variables des synthèses LQR vs  $\mathcal{H}_\infty$  pour le cas VEN + NOM

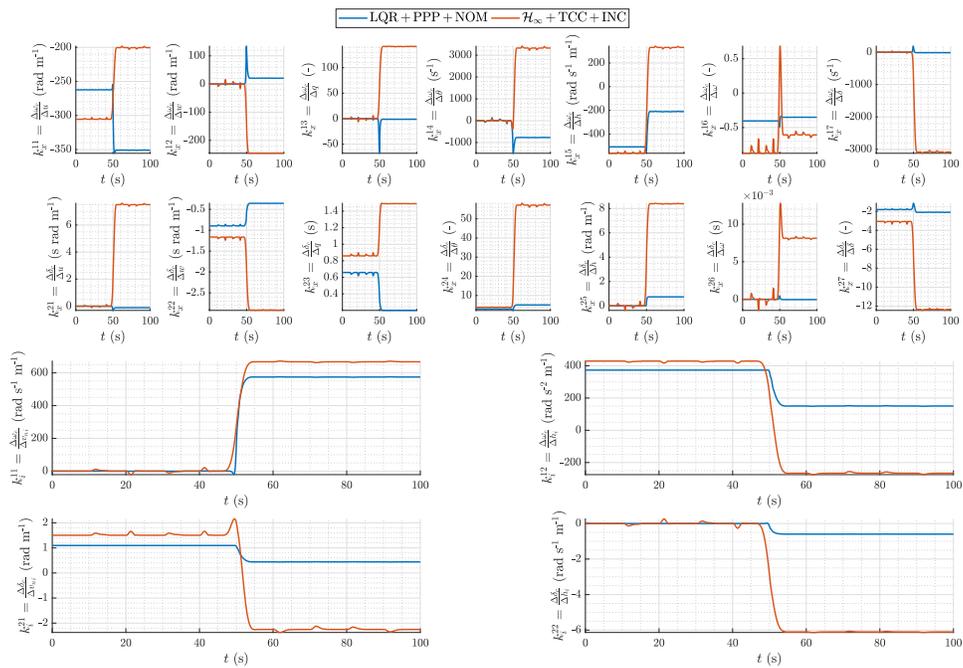


Figure 6.11 Gains des synthèses LQR vs  $\mathcal{H}_\infty$  pour le cas VEN + NOM

### Configuration paramétrique incertaine pour le cas VEN

On poursuit la comparaison avec la configuration paramétrique incertaine INC (cf. page 137).

Les figures 6.12 et 6.13 sont les équivalents respectifs des figures 6.10 et 6.11 qui viennent juste d'être analysées. La seule différence consiste en la considération des configurations paramétriques incertaines pour ces deux premières figures. L'analyse des figures 6.12 et 6.13 révèle que l'incertitude paramétrique n'a pratiquement aucun impact sur les performances des contrôleurs LQR et  $\mathcal{H}_\infty$ . En effet, les deux semblent être capables de pouvoir tolérer ces incertitudes pour le cas de validation VEN.

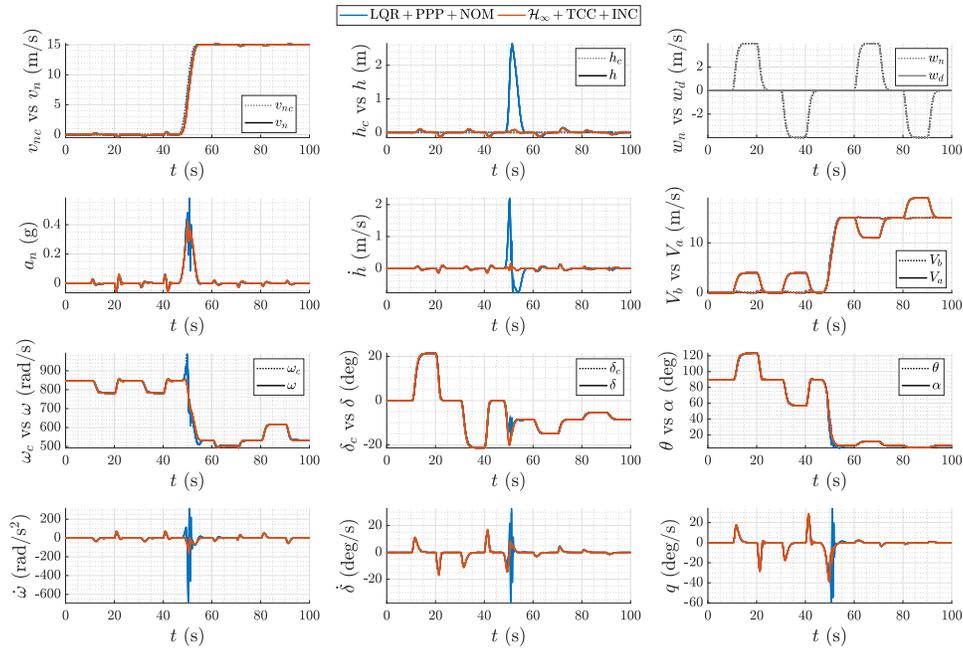


Figure 6.12 Variables des synthèses LQR vs  $\mathcal{H}_\infty$  pour le cas VEN + INC

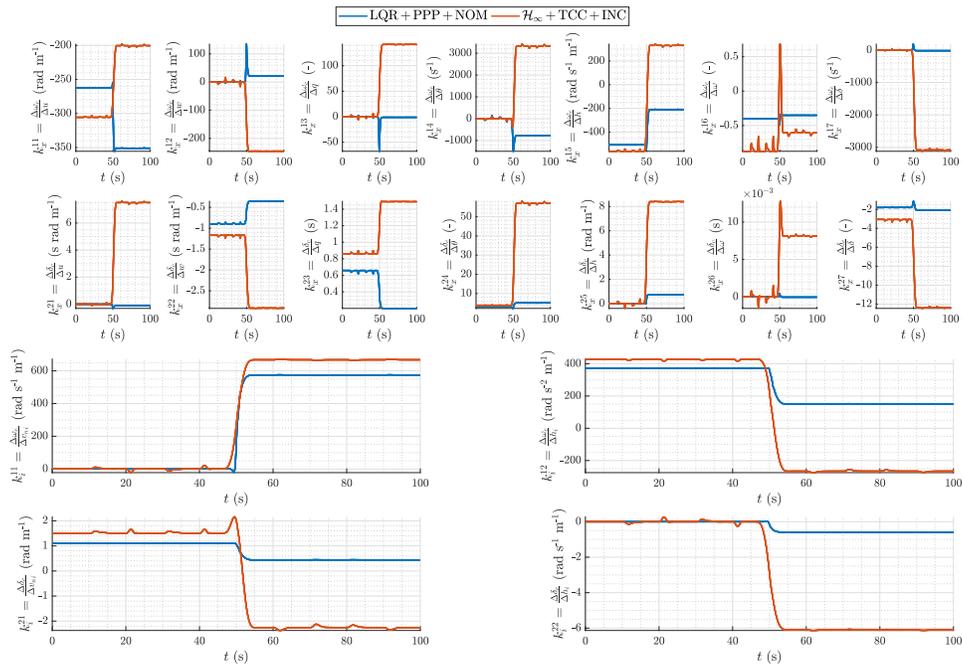


Figure 6.13 Gains des synthèses LQR vs  $\mathcal{H}_\infty$  pour le cas VEN + INC

#### 6.1.4 Comparaison des simulations LQR vs $\mathcal{H}_\infty$

Avant de commencer les analyses, on tient à clarifier qu'une configuration paramétrique – NOM ou INC – utilisée dans une synthèse est totalement indépendante de celle utilisée dans une simulation. En effet, dans ce premier cas, la configuration paramétrique sert à inclure, si souhaité, l'effet de la variation de paramètres du modèle sur les gains synthétisés. Dans le second cas, la configuration paramétrique sert plutôt à valider que les gains synthétisés – peu importe la configuration paramétrique utilisée dans la synthèse – sont robustes à l'incertitude de certains paramètres en particulier.

On compare maintenant tous les résultats obtenus à la section 6.1. Le tableau 6.1 compile tous les résultats des différents cas de validation simulés pour les configurations paramétriques nominale et incertaines. L'analyse du tableau permet de constater que la synthèse nominale LQR possède de très mauvaises performances. En effet, les analyses présentées dans les sections précédentes montrent qu'au moins un effet indésirable intervient dans chaque cas de validation considéré pour les deux types de configurations paramétriques. À l'opposé, la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ , qui est celle proposée par l'auteur de ce mémoire, obtient de très bonnes performances sur l'ensemble des cas étudiés.

En conclusion, la considération du TCC dans la synthèse des gains pour une loi de commande utilisant des gains séquencés est primordiale afin d'assurer que les résultats obtenus sur les modèles linéarisés soient transposables au modèle non linéaire. On note toutefois que même si la synthèse LQR issue de la commande optimale ne possède pas de bonnes performances par rapport à l'effet du TCC, elle semble tout de même être aussi performante face aux incertitudes paramétriques que la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  issue de la commande robuste.

Tableau 6.1 Comparaison des simulations LQR vs  $\mathcal{H}_\infty$

Synthèse	Configuration paramétrique	Cas de validation		
		DOM	REF	VEN
RES + LQR + PPP + NOM	NOM	☹	☹	☹
	INC	☹	☹	☹
RES + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + INC	NOM	😊	😊	😊
	INC	😊	😊	😊

## 6.2 Comparaisons de simulations supplémentaires

À la section 5.5, on a expliqué que d'autres synthèses ont été étudiées dans le cadre de ce projet de recherche. Notamment, une première synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + TCC + NOM sans considérer les incertitudes a été réalisée afin de prendre en compte leur effet. Puis, une seconde synthèse RSS +  $\mathcal{H}_\infty$  + TCC + NOM utilisant le retour de sortie  $\mathbf{y}$  définie en (5.53) a également été étudiée afin de considérer le cas plus généralisé de RSS.

Les résultats de synthèses de ces deux méthodes supplémentaires étudiées sont disponibles respectivement aux annexes G.1 et H.1, tandis que leurs résultats respectifs de simulations le sont aux annexes G.2 et H.2. On précise qu'aucune analyse n'est fournie dans ces annexes.

Toutefois, les deux prochaines sous-sections présentent respectivement le résultat de simulations le plus notable de chacune de ces synthèses supplémentaires.

### 6.2.1 Comparaison des simulations NOM *vs* INC

Les analyses des simulations présentées dans la section 6.1 ont permis de valider hors de tout doute que la considération du TCC dans les modèles linéarisés en utilisant des gains dont la forme est choisie à priori s'avère nécessaire afin d'obtenir de bonnes performances sur le modèle non linéaire.

Dans cette section, on cherche à valider si l'inclusion des modèles linéarisés incertains est réellement nécessaire dans le processus de synthèse multimodèle afin d'obtenir des gains robustes face aux incertitudes paramétriques. Les résultats des simulations présentées dans l'annexe G.2 sont compilés dans le tableau 6.2. On constate que seul le cas de validation REF + INC a obtenu de mauvaises performances.

La figure 6.14 montre les réponses temporelles des variables d'intérêt pour ce cas de validation. On rappelle que ce cas de validation revient à simuler les différentes configurations paramétriques incertaines définies à la figure 6.1 pour des références commandées simultanément. Les courbes bleues sont les simulations utilisant les gains synthétisés sans considérer les incertitudes paramétriques, tandis que les courbes rouges les considèrent. On constate alors que les courbes issues de la synthèse NOM saturent rapidement en présence d'incertitudes paramétriques ayant pour effet de déstabiliser le système, tandis que la synthèse INC est stable pour toutes les configurations incertaines simulées.

En somme, cela permet de valider que l'inclusion de modèles incertains dans la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  multimodèle est souhaitable afin d'obtenir de meilleures performances. Ainsi, ce résultat suggère qu'il est pertinent d'effectuer une analyse de sensibilité paramétrique d'un modèle

dynamique afin de déterminer quels sont ses paramètres les plus sensibles. Puis, si ces paramètres sensibles possèdent de grandes incertitudes physiques, il est alors judicieux de les inclure dans la synthèse multimodèle.

Tableau 6.2 Comparaison des simulations NOM *vs* INC

Synthèse	Configuration paramétrique	Cas de validation		
		DOM	REF	VEN
RES + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + NOM	NOM	😊	😊	😊
	INC	😊	😡	😊
RES + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + INC	NOM	😊	😊	😊
	INC	😊	😊	😊

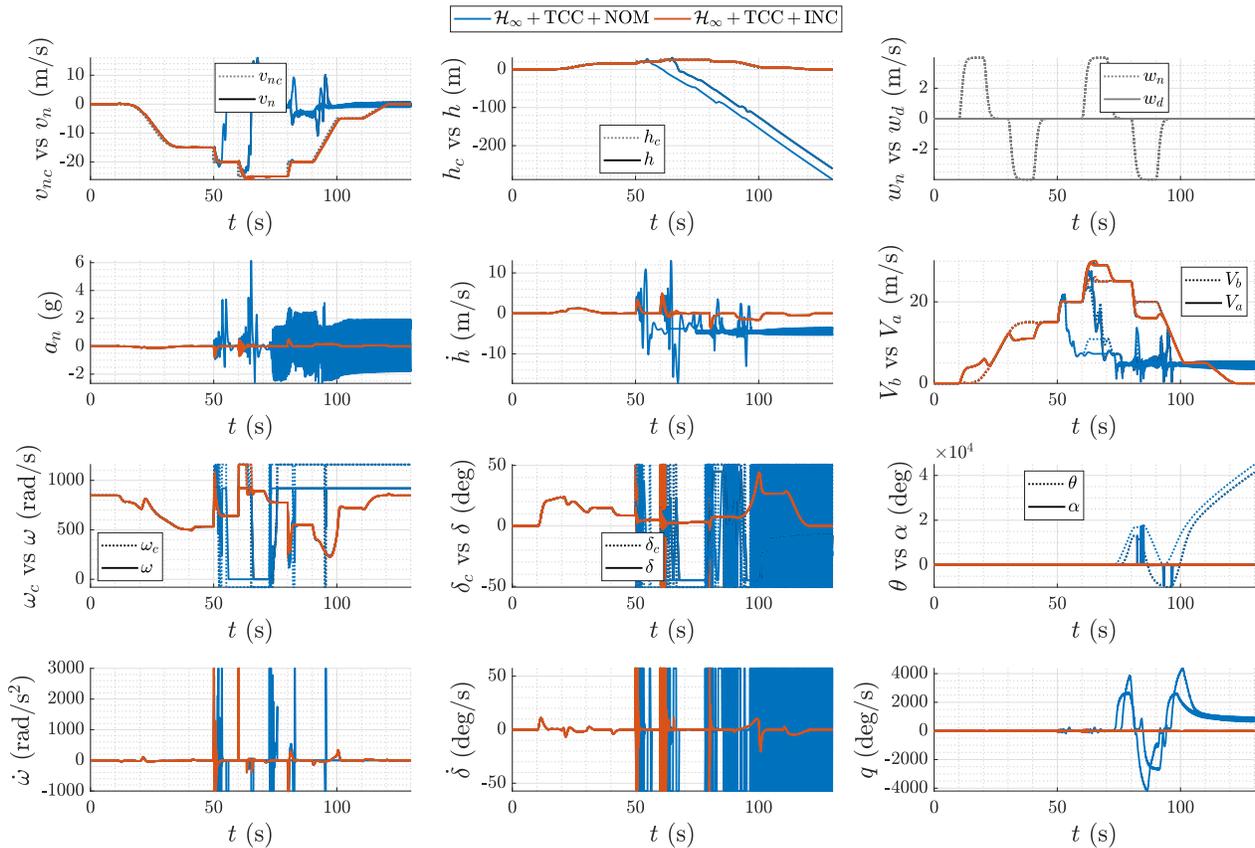


Figure 6.14 Variables des synthèses NOM *vs* INC pour le cas REF + INC

### 6.2.2 Comparaison des simulations RES vs RSS

À la section 5.5.2, on a décortiqué le problème que pose la présence de l'accélération inertielle  $a_n$  dans le retour de sortie  $\mathbf{y}$  en (5.53). Plus précisément, on a constaté que cela empêche l'utilisation des gabarits censés empêcher la saturation dynamique des actionneurs (cf. tableau 5.4). On a également mentionné que cela est dû au fait que la dynamique du vent n'est pas modélisée dans le modèle d'état retenu pour le MAVION – ce qui empêche d'utiliser, pour le RSS, les gabarits de saturations tels qu'ils ont été définis pour le RES qui ne possède pas ce même problème.

Dans cette section, on cherche à illustrer que l'utilisation de l'accélération dans la loi de commande n'est pas triviale pour un aéronef convertible à corps inclinable comme le MAVION. Les résultats de simulations de la loi de commande utilisant un RSS sont présentés à la section H.2 et leurs résultats sont compilés dans le tableau 6.3. On constate que la synthèse avec RSS possède de très mauvaises performances en rejet du vent.

La figure 6.15 montre les réponses temporelles des variables d'intérêt pour le cas de validation VEN + NOM. On rappelle que ce cas de validation correspond à injecter des rafales de vent lorsque le MAVION est dans sa position correspondant à ses deux configurations de base, soit en phase de vol stationnaire et en phase de vol d'avancement. On souligne d'ailleurs que ces simulations utilisent la configuration paramétrique la moins contraignante, soit celle avec des paramètres nominaux. On précise également que les rafales de vent sont filtrées afin de simuler une dynamique plus douce qu'un simple échelon pur et discontinu. L'analyse de la figure montre alors que le contrôleur RSS sature au moment de recevoir une rafale de vent à  $t = 20$  s alors qu'il est dans sa position la plus critique, soit celle qui est verticale pour le vol stationnaire. Puis, le drone devient rapidement instable. Toutefois, le contrôleur RES ne possède pas ce problème.

En somme, cela démontre que l'utilisation de l'accélération dans le retour statique d'un autopilote longitudinal – dont la loi de commande est linéaire par rapport à la multiplication des gains – n'est pas une tâche triviale pour un aéronef convertible à corps inclinable. En effet, puisque l'accélération  $a_n$  est directement proportionnelle à la force générée par la rafale de vent  $w_n$ , son inclusion dans le retour statique de commandes est plus problématique que celui de la vitesse qui est d'un ordre dynamique inférieur. Bref, le retour de sortie  $\mathbf{y}$  tel que défini en (5.53) demande une étude plus approfondie.

Tableau 6.3 Comparaison des simulations RES vs RSS

Synthèse	Configuration paramétrique	Cas de validation		
		DOM	REF	VEN
RES + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + NOM	NOM	😊	😊	😊
	INC	😊	😞	😊
RSS + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + NOM	NOM	😊	😊	😞
	INC	😊	😊	😞

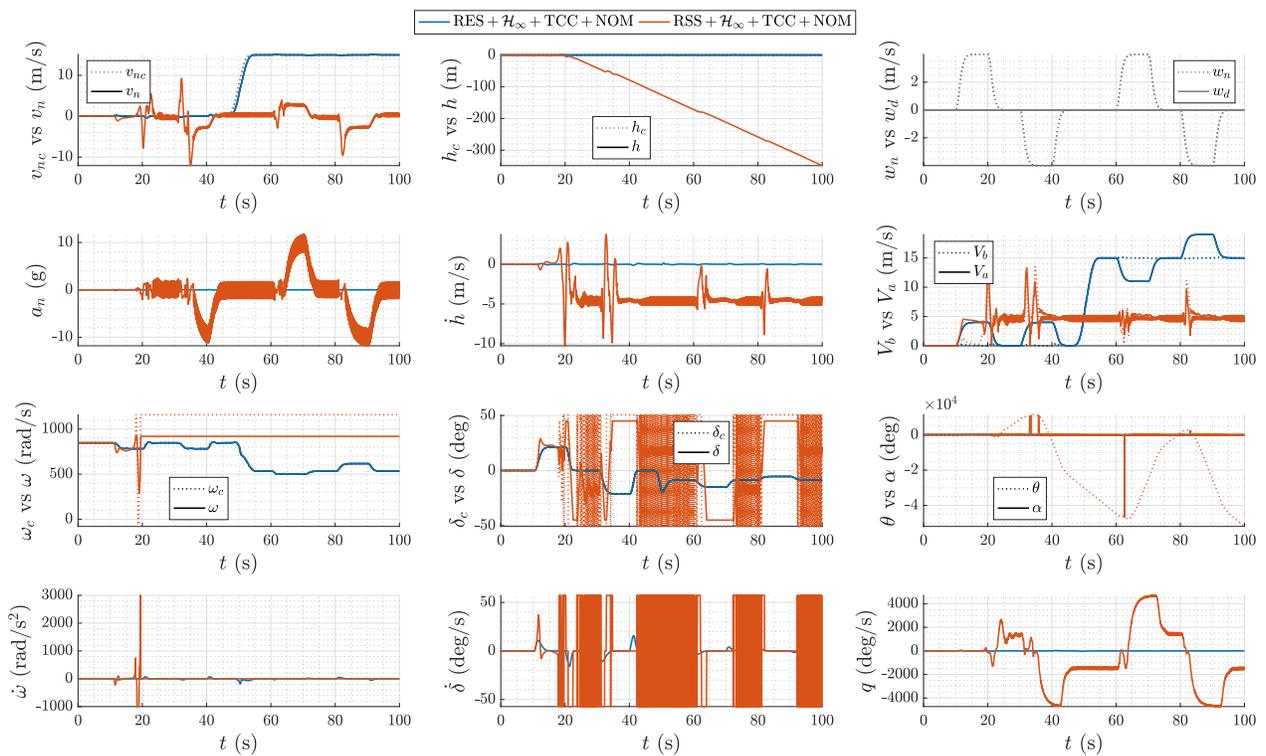


Figure 6.15 Variables des synthèses RES vs RSS pour le cas VEN + NOM

## CHAPITRE 7 CONCLUSION

*... et toute fin est un commencement.*

— Jean-Baptiste Monge

Dans les premières pages de ce mémoire, on a posé la problématique principale du projet de recherche, soit de concevoir un autopilote longitudinal pour un aéronef convertible à corps inclinable tel le MAVION de l'ISAE. De cette problématique ont émergé quatre éléments qui ont été étudiés dans le cadre du projet : la modélisation d'un tel système dynamique, son architecture de commande, la technique de synthèse utilisée pour calculer les gains du contrôleur et la méthode retenue afin de séquencer les gains sur l'entière du domaine de vol. Afin de répondre à ces sous-problématiques, sept objectifs ont alors été définis afin de guider les travaux de recherche qui sont présentés dans ce mémoire.

Cet ultime chapitre présente une synthèse des résultats les plus notables. Puis, une analyse critique des limitations de la solution proposée est réalisée afin de formuler des pistes d'améliorations futures. Enfin, on procède à la présentation du bilan du projet de recherche.

### 7.1 Synthèse et discussion des travaux

Dans le chapitre 2, on a notamment posé le formalisme mathématique de la dynamique et du contrôleur d'un système mécanique. De fait, les définitions énoncées dans les sections 2.1 et 2.2.3 sont réutilisées à maintes reprises dans le mémoire. Au chapitre 3, en (3.19) et (3.20), on a établi respectivement quels sont les forces et les moments du MAVION, ce qui a permis de proposer trois modèles d'état distincts ; chacun ayant ses avantages et inconvénients. Puis, au chapitre 4, on a délimité le cadre du travail à la dynamique longitudinale du MAVION. L'analyse des pôles et zéros en BO illustrés à la figure 4.3 a montré que la dynamique naturelle d'un convertible à corps inclinable comporte deux comportements bien distincts. Le premier correspond à la phase stationnaire qui est instable et le second correspond à la phase d'avancement qui est stable. On a notamment constaté la présence d'un zéro à phase non minimale sur le transfert faisant intervenir les variables régulées.

Au chapitre 5 – représentant le cœur de l'ouvrage – on a d'abord présenté la méthode générique qui est utilisée afin de concevoir l'autopilote longitudinal. On a entre autres introduit les équations (5.3) et (5.5) du contrôleur non linéaire qui, lorsque combinées, proposent une nouvelle manière originale de gérer l'implémentation de gains synthétisés à partir de seulement la moitié d'un domaine d'équilibre possédant une symétrie. À la section 5.3.1, on a

présenté le cahier des charges assemblé définissant les critères de performances désirés pour le système de commandes. Puis, a suivi l'application de la méthode proposée de conception de la loi de commandes qui requiert l'exécution des quatre étapes détaillées à la page 88. La comparaison des synthèses nominale et proposée, respectivement les synthèses LQR + PPP et  $\mathcal{H}_\infty + \text{TCC}$  définies au tableau 5.1, a révélé que les modèles linéarisés de celles-ci possèdent tous les mêmes performances sur l'ensemble du domaine d'équilibre. Au tableau 5.6, on a d'ailleurs souligné le temps de résolution beaucoup plus élevé de la synthèse proposée prenant 257 fois plus de temps que la synthèse nominale. Ensuite, à la section 5.5, on a effectué la comparaison de deux synthèses supplémentaires dont les résultats sont respectivement annexés en G et H. La première comparaison a montré que la considération des modèles à configuration paramétrique incertaine diminue le respect global des gabarits fréquentiels définis au tableau 5.4, sans toutefois atteindre un seuil critique. Puis, la seconde comparaison a illustré une difficulté inattendue rencontrée avec la synthèse par RSS utilisant l'accélération inertielle horizontale. De fait, son utilisation empêche l'emploi des mêmes gabarits utilisés pour la synthèse RES, puisque la dynamique du vent n'est pas modélisée.

Enfin, dans le chapitre 6, on a présenté la validation de l'autopilote longitudinal consistant à comparer les résultats de simulations des synthèses nominale et proposée pour différents cas de validation définis à la page 136. Globalement, l'analyse des réponses temporelles compilée dans le tableau 6.1 a montré que la considération explicite du TCC – c.-à-d. en introduisant la fonction de séquençement à priori dans l'architecture des systèmes linéarisés utilisés dans la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  multimodèle – permet d'obtenir de bien meilleures performances qu'une approche ad hoc consistant à interpoler les gains à posteriori au moment de l'implémentation sur le système non linéaire. Ces résultats ont alors illustré le contraste entre ceux obtenus sur les modèles linéarisés et ceux obtenus sur le modèle non linéaire. Puis, comme pour les synthèses, deux comparaisons de simulations supplémentaires ont été présentées. La première comparaison illustrée au tableau 6.2 a justifié le grand intérêt de profiter de l'optimisation multiobjectif de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  permettant de considérer également des modèles linéarisés possédant des paramètres incertains. En effet, les gains synthétisés sans considérer les incertitudes paramétriques ont obtenu de moins bonnes performances que ceux les considérant. Comme il était attendu suite à l'analyse des synthèses, la seconde comparaison présentée au tableau 6.3 a confirmé que la synthèse effectuée par RSS possède des performances nettement inférieures à celle par RES à l'égard de la capacité à rejeter des perturbations de vent. En somme, les simulations produites ont prouvé que la synthèse proposée  $\mathcal{H}_\infty + \text{TCC}$  est nettement supérieure à la synthèse nominale LQR + PPP.

## 7.2 Limitations et améliorations de la solution proposée

Bien que la solution proposée dans ce mémoire ait obtenu de très bonnes performances vis-à-vis de son concurrent nominal, l'analyse critique de cette première permet tout de même d'identifier quelques limitations et de proposer des pistes d'améliorations.

À cet effet, il convient d'aborder le temps de résolution numérique associé aux synthèses  $\mathcal{H}_\infty$  multimodèles et multiobjectifs. Bien qu'un temps de 15 minutes soit relativement très court par rapport à d'autres domaines comme la mécanique des fluides numérique (CFD en anglais), cette durée a tout de même constitué un défi dans l'application de la méthode suggérée. En effet, l'étape préliminaire consistant à ajuster les paramètres des gabarits fréquentiels et à trouver la bonne fonction de séquençement des gains s'est révélée être un travail à part entière. Cela a demandé d'y consacrer *énormément* de temps avant de trouver la combinaison optimale permettant de respecter au mieux l'ensemble des critères du cahier des charges. Ainsi, afin de réduire le temps consacré à cette étape d'ajustements, l'auteur suggère d'utiliser un ordinateur possédant des performances supérieures à celles présentées au tableau 5.5.

De plus, en simulations, il a été constaté que l'autopilote longitudinal conçu sature rapidement lorsqu'on augmente la grandeur de l'échelon filtré de vent perturbant le système. Cela justifie pourquoi ce dernier a été limité à seulement  $\approx 15$  m/s afin d'éviter de déstabiliser le système. Afin de lever ce problème propre aux convertibles à corps inclinable, il serait nécessaire d'intégrer un système supplémentaire à l'image de [33] permettant de gérer la sollicitation des actionneurs de manière à sacrifier les performances en suivi de référence au profit de conserver la stabilité de l'aéronef. Sinon, une autre approche serait de revoir complètement l'architecture de commandes afin de considérer explicitement la gestion des perturbations de vent au moment de la synthèse comme le fait [64] pour le même type de convertible.

Ensuite, les effets du bruit n'ont pas été considérés dans la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  multiobjectif ni dans les simulations présentées. De fait, le système dynamique comporte deux sources de bruit distinctes qui ont été omises : celui des mesures utilisées dans la loi de commande et celui des entrées de vitesses du vent perturbant le système. Par conséquent, deux améliorations pourraient être réalisées concernant ces omissions. D'abord, on pourrait ajouter deux gabarits fréquentiels afin de limiter le gain des transferts faisant intervenir respectivement les plages fréquentielles des bruits de mesure et de perturbation. Puis, il serait intéressant d'ajouter ces sources de bruit dans les simulations afin d'évaluer la performance de la solution proposée vis-à-vis ces sources aléatoires.

Enfin, la plus grande critique concerne la méthode de synthèse elle-même qui a été retenue pour le système de commandes. Cette méthode consistant à séquencer plusieurs contrô-

leurs synthétisés à l'aide de modèles linéarisés afin de générer un contrôleur non linéaire par l'implémentation de la fonction de séquençement ne demeure valide en théorie que pour des *variations suffisamment lentes* des consignes de référence. Bien que différents types de consignes aient été testés (échelon pur, rampe et échelon lissé), aucune preuve mathématique ou analyse supplémentaire n'ont été apportées afin de quantifier ce qu'est une *variation suffisamment lente*. De plus, à l'heure actuelle où les publications de systèmes de commandes non linéaires abondent, il serait judicieux de comparer la méthode proposée dans ce mémoire à ces nouveaux contrôleurs non linéaires dits *universels* [80] ou *géométriques* [81]. De fait, ce dernier type de contrôleur tire avantage de l'algèbre de Lie permettant de formuler les équations du système modélisé et du contrôleur directement dans le groupe euclidien spécial  $SE(3)$  [82]. Cela s'avère être un grand contraste par rapport au groupe orthogonal spécial  $SO(3)$  (cf. section C.2.2) qui est généralement plus populaire auprès des automaticiens issus du domaine aérospatial [24]. À titre d'exemple, [83, 84] tirent profit de cette méthode qui permet également d'intégrer explicitement des termes non linéaires dans la loi de commandes afin de compenser de nombreux phénomènes aérodynamiques perturbateurs tels que ceux modélisés dans [85, 86].

### 7.3 Bilan du projet de recherche

Le projet de recherche poursuivi dans le cadre du programme de maîtrise en génie aérospatial a permis de visiter toutes les phases nécessaires à la conception d'un système de commandes pour un système dynamique complexe tel que le MAVION. En effet, l'élaboration de l'autopilote longitudinal pour un convertible à corps inclinable a permis de passer au travers des étapes suivantes : revue de la littérature, modélisation mathématique de l'aéronef, analyse du système dynamique, conception du contrôleur et validation des performances.

Malgré la complexité de la solution retenue consistant à gérer à la fois la synthèse et le séquençement des gains dans une même étape de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée, autoséquencée, multimodèle et multiobjectif considérant alors le TCC ; on peut notamment retenir que cette approche a permis d'obtenir de très bons résultats uniformes sur l'entièreté du domaine de vol de l'aéronef. On souligne également que l'énorme complexité découlant de cette méthode a été atténuée en grande partie grâce à l'utilisation de la fonction `SYSTUNE` de MATLAB®.

Au final, les travaux présentés dans ce mémoire ouvrent la porte à la conception de l'autopilote directionnel/latéral qui est nécessaire avant de pouvoir valider expérimentalement la méthode de synthèse qui a été proposée. L'auteur de cet ouvrage souhaite prospérité à la collaboration internationale entre les laboratoires DCAS et MRASL née de ce projet de recherche. Enfin, il espère voir le MAVION voler prochainement du fruit de ses efforts tenaces.

## RÉFÉRENCES

- [1] C. Masse *et al.*, “Modeling and Control of a Quadcopter Flying in a Wind Field : A Comparison Between LQR and Structured H-infinity Control Techniques,” dans *2018 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*. Dallas, TX, USA : IEEE, juin 2018, p. 1408–1417. [En ligne]. Disponible : <https://ieeexplore.ieee.org/document/8453402/>
- [2] E. Dey, “Morgan Stanley’s Numbers on Flying Cars : \$2.9 Trillion, 20 Years,” *Bloomberg*, déc. 2018. [En ligne]. Disponible : <https://www.bloomberg.com/news/articles/2018-12-13/flying-cars-may-become-a-3-trillion-market-in-20-years>
- [3] The Vertical Flight Society, “The Electric VTOL News.” [En ligne]. Disponible : <http://evtol.news/category/news/>
- [4] Gouvernement du Québec, “Stratégie québécoise de l’aérospatiale : Horizon 2016-2026,” 2016. [En ligne]. Disponible : [https://www.economie.gouv.qc.ca/fileadmin/contenu/documents\\_soutien/strategies/strategie\\_aerospatiale/strategie\\_aerospatiale.pdf](https://www.economie.gouv.qc.ca/fileadmin/contenu/documents_soutien/strategies/strategie_aerospatiale/strategie_aerospatiale.pdf)
- [5] J. Hudon, “Centre d’excellence sur les drones d’Alma : un simulateur à aire ouverte,” *Le Quotidien*, juill. 2019. [En ligne]. Disponible : <https://www.lequotidien.com/actualites/centre-dexcellence-sur-les-drones-dalma-un-simulateur-a-aire-ouverte-c8ef0248854fdf84c91d64cab2821231>
- [6] Ministère de l’économie et de l’innovation du Québec, “Automatisation dans l’industrie de l’aviation : avantages et risques,” *Vecteurs économie et innovation*, avr. 2019. [En ligne]. Disponible : [https://www.economie.gouv.qc.ca/objectifs/informer/vecteurs/vecteurs-actualites/vecteurs-actualites-details/?no\\_cache=1&tx\\_ttnews%5Btt\\_news%5D=23537&tx\\_ttnews%5Bcat%5D=&cHash=a807e4fa113465a5d26d4c5711dde60a](https://www.economie.gouv.qc.ca/objectifs/informer/vecteurs/vecteurs-actualites/vecteurs-actualites-details/?no_cache=1&tx_ttnews%5Btt_news%5D=23537&tx_ttnews%5Bcat%5D=&cHash=a807e4fa113465a5d26d4c5711dde60a)
- [7] J.-M. Moschetta, “A Fixed-Wing Micro Air Vehicle with Hovering Capability,” Defense Technical Information Center, Fort Belvoir, VA, Rapport technique, déc. 2010. [En ligne]. Disponible : <http://www.dtic.mil/docs/citations/ADA535140>
- [8] L. Lustosa, “The phi-theory approach to flight control design of hybrid vehicles,” Thèse de doctorat, ISAE-SUPAERO, Toulouse, France, 2017. [En ligne]. Disponible : [https://depozit.isae.fr/theses/2017/2017\\_Ribeiro\\_Lustosa\\_Leandro\\_D.pdf](https://depozit.isae.fr/theses/2017/2017_Ribeiro_Lustosa_Leandro_D.pdf)
- [9] L. R. Lustosa, F. Defaÿ et J.-M. Moschetta, “Global Singularity-Free Aerodynamic Model for Algorithmic Flight Control of Tail Sitters,” *Journal of Guidance, Control,*

- and Dynamics*, vol. 42, n<sup>o</sup>. 2, p. 303–316, févr. 2019. [En ligne]. Disponible : <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.G003374>
- [10] L. R. Lustosa, F. Defay et J. M. Moschetta, “Development of the flight model of a tilt-body MAV,” dans *2014 International Micro Air Vehicle Conference and Competition (IMAV 2014)*. Delft, Netherlands : OATAO, août 2014, p. 7. [En ligne]. Disponible : [http://oatao.univ-toulouse.fr/11978/1/Lustosa\\_11978.pdf](http://oatao.univ-toulouse.fr/11978/1/Lustosa_11978.pdf)
- [11] L. R. Lustosa, F. Defay et J.-M. Moschetta, “Longitudinal study of a tilt-body vehicle : modeling, control and stability analysis,” dans *Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), 2015 International*. IEEE, 2015, p. 816–824.
- [12] H. Lhachemi, “Synthèse et validation d’un système de commandes de vol robuste et autoséquenté,” Mémoire de maîtrise, Polytechnique Montréal, 2013. [En ligne]. Disponible : [https://publications.polymtl.ca/1306/1/2013\\_HugoLhachemi.pdf](https://publications.polymtl.ca/1306/1/2013_HugoLhachemi.pdf)
- [13] H. Lhachemi, D. Saussie et G. Zhu, “A Robust and Self-Scheduled Longitudinal Flight Control System : a Multi-Model and Structured H-infinity Approach,” dans *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. National Harbor, Maryland : American Institute of Aeronautics and Astronautics, janv. 2014. [En ligne]. Disponible : <http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2014-0601>
- [14] —, “Performance enhancement of a self-scheduled longitudinal flight control system via multi-objective optimization,” dans *2014 American Control Conference*. Portland, OR, USA : IEEE, juin 2014, p. 1377–1383. [En ligne]. Disponible : <http://ieeexplore.ieee.org/document/6859147/>
- [15] H. Lhachemi, D. Saussié et G. Zhu, “A structured H-infinity-based optimization approach for integrated plant and self-scheduled flight control system design,” *Aerospace Science and Technology*, vol. 45, p. 30–38, sept. 2015. [En ligne]. Disponible : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1270963815001182>
- [16] —, “Explicit hidden coupling terms handling in gain-scheduling control design via eigenstructure assignment,” *Control Engineering Practice*, vol. 58, p. 1–11, janv. 2017. [En ligne]. Disponible : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0967066116301964>
- [17] H. Lhachemi, “Commande des systèmes aérospatiaux non linéaires et à dimension infinie,” Thèse de doctorat, Polytechnique Montreal, 2017. [En ligne]. Disponible : [https://publications.polymtl.ca/2875/1/2017\\_HugoLhachemi.pdf](https://publications.polymtl.ca/2875/1/2017_HugoLhachemi.pdf)
- [18] H. Lhachemi, D. Saussié et G. Zhu, “Handling Hidden Coupling Terms in Gain-Scheduling Control Design : Application to a Pitch-Axis Missile Autopilot,” dans *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. San Diego, California,

- USA : American Institute of Aeronautics and Astronautics, janv. 2016. [En ligne]. Disponible : <http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2016-0365>
- [19] P. Apkarian et D. Noll, “Nonsmooth Optimization for Multidisk H-infinity Synthesis,” *European Journal of Control*, vol. 12, n<sup>o</sup>. 3, p. 229–244, janv. 2006. [En ligne]. Disponible : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S094735800670471X>
- [20] P. Apkarian, P. Gahinet et C. Buhr, “Multi-model, multi-objective tuning of fixed-structure controllers,” dans *2014 European Control Conference (ECC)*. Strasbourg, France : IEEE, juin 2014, p. 856–861. [En ligne]. Disponible : <http://ieeexplore.ieee.org/document/6862200/>
- [21] P. Apkarian, M. N. Dao et D. Noll, “Parametric robust structured control design,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 60, n<sup>o</sup>. 7, p. 1857–1869, 2015.
- [22] D. A. Caughey, *Introduction to Aircraft Stability and Control - Course Notes for M&AE 5070*. Ithaca, New York : Sibley School of Mechanical & Aerospace Engineering - Cornell University, 2011. [En ligne]. Disponible : [https://courses.cit.cornell.edu/mae5070/Caughey\\_2011\\_04.pdf](https://courses.cit.cornell.edu/mae5070/Caughey_2011_04.pdf)
- [23] A. H. De Ruiter, C. Damaren et J. R. Forbes, *Spacecraft Dynamics and Control - An Introduction*. Wiley, 2012.
- [24] P. C. Hughes, *Spacecraft attitude dynamics*. Mineola, N.Y : Dover Publications, 2004.
- [25] B. L. Stevens, F. L. Lewis et E. N. Johnson, *Aircraft Control and Simulation*, 3<sup>e</sup> éd. Wiley, 2016.
- [26] P. A. Alh riti re *et al.*, “Nonlinear control of a particular tilt-body MAV : The Roll&Fly,” dans *Control and Automation (MED), 2016 24th Mediterranean Conference on*. IEEE, 2016, p. 826–831.
- [27] G. Perozzi *et al.*, “On sliding mode control design for UAV using realistic aerodynamic coefficients,” dans *2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*. Melbourne, Australia : IEEE, d c. 2017, p. 5403–5408. [En ligne]. Disponible : <http://ieeexplore.ieee.org/document/8264459/>
- [28] Z. Liu *et al.*, “VTOL UAV Transition Maneuver Using Incremental Nonlinear Dynamic Inversion,” *International Journal of Aerospace Engineering*, p. 20, 2018.
- [29] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3<sup>e</sup>  d. Prentice Hall, 2002.
- [30] G. Flores et R. Lozano, “Lyapunov-based controller using singular perturbation theory : An application on a mini-UAV,” dans *Proc. American Control Conf*, juin 2013, p. 1596–1601.

- [31] R. Ritz et R. D’Andrea, “A global controller for flying wing tailsitter vehicles,” dans *2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Singapore, Singapore : IEEE, mai 2017, p. 2731–2738. [En ligne]. Disponible : <http://ieeexplore.ieee.org/document/7989318/>
- [32] M.-D. Hua *et al.*, “Introduction to feedback control of underactuated VTOL vehicles : A review of basic control design ideas and principles,” *IEEE Control Systems*, vol. 33, n<sup>o</sup>. 1, p. 61–75, févr. 2013. [En ligne]. Disponible : <https://ieeexplore.ieee.org/document/6415376/>
- [33] X. Shi *et al.*, “Nonlinear Control of Autonomous Flying Cars with Wings and Distributed Electric Propulsion,” dans *2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. Miami Beach, FL : IEEE, déc. 2018, p. 5326–5333. [En ligne]. Disponible : <https://ieeexplore.ieee.org/document/8619578/>
- [34] D. J. Leith et W. E. Leithead, “Survey of gain-scheduling analysis and design,” *International Journal of Control*, vol. 73, n<sup>o</sup>. 11, p. 1001–1025, janv. 2000. [En ligne]. Disponible : <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/002071700411304>
- [35] R. G. Hernandez-Garcia et H. Rodriguez-Cortes, “Transition flight control of a cyclic tiltrotor UAV based on the Gain-Scheduling strategy,” dans *2015 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*. Denver, CO, USA : IEEE, juin 2015, p. 951–956. [En ligne]. Disponible : <http://ieeexplore.ieee.org/document/7152383/>
- [36] P. Poksawat, L. Wang et A. Mohamed, “Gain Scheduled Attitude Control of Fixed-Wing UAV With Automatic Controller Tuning,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 26, n<sup>o</sup>. 4, p. 1192–1203, juill. 2018. [En ligne]. Disponible : <https://ieeexplore.ieee.org/document/7954051/>
- [37] W. J. Rugh, *Linear System Theory*, 2<sup>e</sup> éd., ser. Prentice Hall information and system sciences series. Upper Saddle River, N.J : Prentice Hall, 1996.
- [38] F. Lewis, D. Vrabie et V. Syrmos, *Optimal Control*, 3<sup>e</sup> éd. John Wiley & Sons, 2012.
- [39] R. B. Vinter, *Optimal control*, 1<sup>er</sup> éd., ser. Modern Birkhäuser classics. Boston : Birkhäuser, 2010.
- [40] K. Zhou, J. C. Doyle et K. Glover, *Robust and Optimal Control*. PRENTICE HALL, Englewood Cliffs, New Jersey 07632 : Prentice Hall, 1995.
- [41] D.-T. Nguyen, D. Saussie et L. Saydy, “Fault-Tolerant Control of a Hexacopter UAV based on Self-Scheduled Control Allocation,” dans *2018 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*. Dallas, TX, USA : IEEE, juin 2018, p. 385–393. [En ligne]. Disponible : <https://ieeexplore.ieee.org/document/8453440/>

- [42] C. Massé, “Modélisation et commande d’un quadricoptère en présence de vent,” Mémoire de maîtrise, Polytechnique Montreal, 2018.
- [43] A. Ghersin et R. Sanchez Pena, “LPV control of a 6-DOF vehicle,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 10, n°. 6, p. 883–887, nov. 2002. [En ligne]. Disponible : <http://ieeexplore.ieee.org/document/1058058/>
- [44] Sungyung Lim et J. How, “Modeling and H-sub-infinity control for switched linear parameter-varying missile autopilot,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 11, n°. 6, p. 830–838, nov. 2003. [En ligne]. Disponible : <http://ieeexplore.ieee.org/document/1255659/>
- [45] Bei Lu, Fen Wu et SungWan Kim, “Switching LPV control of an F-16 aircraft via controller state reset,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 14, n°. 2, p. 267–277, mars 2006. [En ligne]. Disponible : <http://ieeexplore.ieee.org/document/1597197/>
- [46] X. Wei et L. del Re, “Gain Scheduled  $H_{\infty}$  Control for Air Path Systems of Diesel Engines Using LPV Techniques,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 15, n°. 3, p. 406–415, mai 2007. [En ligne]. Disponible : <http://ieeexplore.ieee.org/document/4162497/>
- [47] J. Mohammadpour et C. W. Scherer, édit., *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*. Boston, MA : Springer US, 2012. [En ligne]. Disponible : <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4614-1833-7>
- [48] C. Hoffmann et H. Werner, “A Survey of Linear Parameter-Varying Control Applications Validated by Experiments or High-Fidelity Simulations,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 23, n°. 2, p. 416–433, mars 2015. [En ligne]. Disponible : <http://ieeexplore.ieee.org/document/6847202/>
- [49] C. Thipyopas et J.-M. Moschetta, “Experimental Analysis of a Fixed-Wing VTOL MAV in Ground Effect,” *International Journal of Micro Air Vehicles*, vol. 2, n°. 1, p. 33–53, mars 2010. [En ligne]. Disponible : <http://journals.sagepub.com/doi/10.1260/1756-8293.2.1.33>
- [50] D. Poinot, “Commande d’un drone en vue de la conversion vol rapide-vol stationnaire,” Thèse de doctorat, ISAE-SUPAERO, Toulouse, France, 2008.
- [51] J. M. Beach *et al.*, “Tailsitter attitude control using resolved tilt-twist,” dans *Proc. Int. Conf. Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, mai 2014, p. 768–779.
- [52] R. Chiappinelli et M. Nahon, “Modeling and Control of a Tailsitter UAV,” dans *2018 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, juin 2018, p. 400–409.

- [53] C. De Wagter *et al.*, “Design, control, and visual navigation of the DelftaCopter VTOL tail-sitter UAV,” *Journal of Field Robotics*, vol. 35, n<sup>o</sup>. 6, p. 937–960, sept. 2018. [En ligne]. Disponible : <http://doi.wiley.com/10.1002/rob.21789>
- [54] A. Flores, A. M. de Oca et G. Flores, “A Simple Controller for the Transition Maneuver of a Tail-Sitter Drone,” dans *2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. Miami Beach, FL : IEEE, déc. 2018, p. 4277–4281. [En ligne]. Disponible : <https://ieeexplore.ieee.org/document/8619303/>
- [55] J. Liang *et al.*, “Tailsitter VTOL flying wing aircraft attitude control,” dans *Proc. 31st Youth Academic Annual Conf. of Chinese Association of Automation (YAC)*, nov. 2016, p. 439–443.
- [56] R. Lozano et others, *Objets volants miniatures : modélisation et commande embarquée*. Hermes Science Lavoisier, 2007.
- [57] T. Matsumoto *et al.*, “A hovering control strategy for a tail-sitter VTOL UAV that increases stability against large disturbance,” dans *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, mai 2010, p. 54–59.
- [58] S. M. Nogar et C. M. Kroninger, “Development of a Hybrid Micro Air Vehicle Capable of Controlled Transition,” *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 3, n<sup>o</sup>. 3, p. 2269–2276, juill. 2018. [En ligne]. Disponible : <https://ieeexplore.ieee.org/document/8278182/>
- [59] S. Swarnkar *et al.*, “Biplane-Quadrotor Tail-Sitter UAV : Flight Dynamics and Control,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 41, n<sup>o</sup>. 5, p. 1049–1067, mai 2018. [En ligne]. Disponible : <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.G003201>
- [60] S. Verling *et al.*, “Full attitude control of a VTOL tailsitter UAV,” dans *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation (ICRA)*, mai 2016, p. 3006–3012.
- [61] —, “Model-based transition optimization for a VTOL tailsitter,” dans *2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Singapore, Singapore : IEEE, mai 2017, p. 3939–3944. [En ligne]. Disponible : <http://ieeexplore.ieee.org/document/7989454/>
- [62] W. Wang *et al.*, “Adaptive Attitude Control for a Tail-Sitter UAV with Single Thrust-Vectored Propeller,” dans *2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Brisbane, QLD : IEEE, mai 2018, p. 6581–6586. [En ligne]. Disponible : <https://ieeexplore.ieee.org/document/8463158/>
- [63] Y. Wu *et al.*, “Hummingbird : An Open-Source Dual-Rotor Tail-Sitter Platform for Research and Education,” *arXiv :1810.03196 [cs]*, oct. 2018, arXiv : 1810.03196. [En ligne]. Disponible : <http://arxiv.org/abs/1810.03196>

- [64] Y. Yang *et al.*, “Active Disturbance Rejection Control of a Flying-Wing Tailsitter in Hover Flight,” (*unav*), oct. 2018. [En ligne]. Disponible : <https://ieeexplore.ieee.org/document/8594470/>
- [65] D. Zhang *et al.*, “Transitional Flight of Tail-Sitter Unmanned Aerial Vehicle Based on Multiple-Model Adaptive Control,” *Journal of Aircraft*, vol. 55, n<sup>o</sup>. 1, p. 390–395, janv. 2018. [En ligne]. Disponible : <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.C034232>
- [66] P. Castillo, R. Lozano et A. E. Dzul, *Modelling and control of mini-flying machines*, ser. Advances in industrial control. London; New York : Springer, 2005, oCLC : ocm61141310.
- [67] R. Lozano, *Unmanned aerial vehicles : Embedded control*. John Wiley & Sons, 2010.
- [68] K. P. Valavanis et G. J. Vachtsevanos, édit., *Handbook of Unmanned Aerial Vehicles*. New York : Springer, 2014.
- [69] Y. Ameho, “Du pilotage d’une famille de drones à celui d’un drone hybride via la commande adaptative,” Thèse de doctorat, ISAE-SUPAERO, Toulouse, France, oct. 2013.
- [70] D. K. Phung, “Conception, modélisation, et commande d’un mini-drone convertible,” Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France, 2015.
- [71] R. Chiappinelli, “Modeling and control of a flying wing Tailsitter unmanned aerial vehicle,” Mémoire de maîtrise, McGill, Montréal, QC, 2018.
- [72] C. Tomlin *et al.*, “Output tracking for a non-minimum phase dynamic CTOL aircraft model,” dans *Proceedings of 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 2. New Orleans, LA, USA : IEEE, 1995, p. 1867–1872. [En ligne]. Disponible : <http://ieeexplore.ieee.org/document/480615/>
- [73] L. Fiorentini *et al.*, “Nonlinear control of non-minimum phase hypersonic vehicle models,” dans *2009 American Control Conference*. St. Louis, MO, USA : IEEE, 2009, p. 3160–3165. [En ligne]. Disponible : <http://ieeexplore.ieee.org/document/5160211/>
- [74] R. Caverly et J. R. Forbes, “Zero Shaping of Nonminimum Phase Aircraft Dynamics,” dans *2018 AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. Kissimmee, Florida : American Institute of Aeronautics and Astronautics, janv. 2018. [En ligne]. Disponible : <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2018-0601>
- [75] J. Maciejowski, “Right-half plane zeros are not necessary for inverse response,” dans *2018 European Control Conference (ECC)*. Limassol : IEEE, juin 2018, p. 2488–2492. [En ligne]. Disponible : <https://ieeexplore.ieee.org/document/8550187/>

- [76] D.-T. Nguyen, D. Saussie et L. Saydy, “Quaternion-based robust fault-tolerant control of a quadrotor UAV,” dans *2017 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*. Miami, FL, USA : IEEE, juin 2017, p. 1333–1342. [En ligne]. Disponible : <http://ieeexplore.ieee.org/document/7991516/>
- [77] D.-T. Nguyen, D. Saussié et L. Saydy, “Robust Self-Scheduled Fault-Tolerant Control of a Quadrotor UAV,” dans *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, juill. 2017, p. 5761–5767. [En ligne]. Disponible : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2405896317316361>
- [78] S. Skoczowski et A. Osadowski, “A Simple Identification Method for the Order of the Strejc Model and its Application to Autotuning,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 27, n<sup>o</sup>. 3, p. 319 – 325, 1994. [En ligne]. Disponible : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667017461295>
- [79] “Smoothstep,” juin 2019, page Version ID : 901157812. [En ligne]. Disponible : <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Smoothstep&oldid=901157812>
- [80] E. Bulka et M. Nahon, “A Universal Controller for Unmanned Aerial Vehicles,” dans *2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. Madrid, Spain : IEEE, oct. 2018, p. 4171–4176. [En ligne]. Disponible : <https://ieeexplore.ieee.org/document/8593878/>
- [81] T. Lee, M. Leok et N. H. McClamroch, “Geometric tracking control of a quadrotor UAV on SE(3),” dans *49th IEEE Conference on Decision and Control*. Atlanta, GA, USA : IEEE, déc. 2010, p. 6.
- [82] T. D. Barfoot, *State Estimation for Robotics*. Cambridge University Press, 2019.
- [83] T. Lee, M. Leok et N. H. McClamroch, “Control of Complex Maneuvers for a Quadrotor UAV using Geometric Methods on SE(3),” *arXiv :1003.2005 [cs, math]*, mars 2010, arXiv : 1003.2005. [En ligne]. Disponible : <http://arxiv.org/abs/1003.2005>
- [84] F. A. Goodarzi, D. Lee et T. Lee, “Geometric Adaptive Tracking Control of a Quadrotor UAV on SE(3) for Agile Maneuvers,” *arXiv :1411.2986 [math]*, nov. 2014, arXiv : 1411.2986. [En ligne]. Disponible : <http://arxiv.org/abs/1411.2986>
- [85] H. Huang *et al.*, “Aerodynamics and control of autonomous quadrotor helicopters in aggressive maneuvering,” dans *2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Kobe, Japan : IEEE, mai 2009, p. 6.
- [86] J. Svacha, K. Mohta et V. Kumar, “Improving Quadrotor Trajectory Tracking By Compensating for Aerodynamic Effects,” dans *2017 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*. Miami, FL, USA : IEEE, juin 2017, p. 7.
- [87] Jetijones, “MV-22 Osprey Line Drawing,” mars 2011. [En ligne]. Disponible : [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MV-22\\_Osprey\\_Line\\_Drawing.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MV-22_Osprey_Line_Drawing.svg)

- [88] “Convair XFY-1 Pogo,” janv. 1951. [En ligne]. Disponible : [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Convair\\_XFY-1\\_Pogo\\_2.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Convair_XFY-1_Pogo_2.jpg)
- [89] “Parrot SWING,” nov. 2017. [En ligne]. Disponible : <https://www.parrot.com/us/minidrones/parrot-swing>
- [90] Fa2013a, “Kamov Ka-22,” avr. 2016. [En ligne]. Disponible : <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kamov-Ka-22.jpg>
- [91] “Amazon Prime Air.” [En ligne]. Disponible : <https://www.amazon.com/Amazon-Prime-Air/b?ie=UTF8&node=8037720011>
- [92] NASA, “A Ling-Temco-Vought XC-142a tested at the NASA Langley Research Center in 1969,” janv. 1969. [En ligne]. Disponible : [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ling-Temco-Vought\\_XC-142A.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ling-Temco-Vought_XC-142A.jpg)
- [93] D. C. Bowman, “Ten-Engine Electric Plane Prototype Takes Off,” mai 2015. [En ligne]. Disponible : <http://www.nasa.gov/image-feature/ten-engine-electric-plane-prototype-takes-off>
- [94] U. A. Force, “Hawker Siddeley XV-6a Kestrel.” [En ligne]. Disponible : <https://www.nationalmuseum.af.mil/Upcoming/Photos/igphoto/2001315677/>
- [95] D. Imagery, “Pictured is the first of the UK’s F-35b Lightning II jets to be flown to the UK,” juill. 2016. [En ligne]. Disponible : [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:RAF\\_F-35B\\_STOVL\\_RIAT\\_2016.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:RAF_F-35B_STOVL_RIAT_2016.jpg)
- [96] Tosaka, “F-35b Joint Strike Fighter’s (thrust vectoring nozzle and lift fan),” juill. 2008. [En ligne]. Disponible : [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:F-35B\\_Joint\\_Strike\\_Fighter\\_\(thrust\\_vectoring\\_nozzle\\_and\\_lift\\_fan\).PNG](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:F-35B_Joint_Strike_Fighter_(thrust_vectoring_nozzle_and_lift_fan).PNG)
- [97] J. Haseltine, “A U.S. V-22 Osprey tiltrotor aircraft flies a test mission,” août 2003. [En ligne]. Disponible : [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:V-22\\_Osprey\\_tiltrotor\\_aircraft.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:V-22_Osprey_tiltrotor_aircraft.jpg)
- [98] “Show Request : Ares V-Hawk X4,” 2016. [En ligne]. Disponible : <https://forum.flitetest.com/index.php?threads/show-request-ares-v-hawk-x4.24711/>
- [99] “Boeing Phantom Swift,” janv. 2017. [En ligne]. Disponible : <https://www.globalsecurity.org/military/systems/aircraft/phantom-swift.htm>
- [100] T. Risen, “Samad Aerospace targets passenger flight with electric e-Starling,” juill. 2018. [En ligne]. Disponible : <https://aerospacemedia.aiaa.org/samad-aerospace-targets-passenger-flight-with-electric-e-starling/>
- [101] J. Apkarian, “Attitude Control of Pitch-Decoupled VTOL Fixed Wing Tiltrotor,” dans *2018 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*.

- Dallas, TX, USA : IEEE, juin 2018, p. 195–201. [En ligne]. Disponible : <https://ieeexplore.ieee.org/document/8453473/>
- [102] D. Zheng, “Some new results on optimal and suboptimal regulators of the LQ problem with output feedback,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, n<sup>o</sup>. 5, p. 557–560, mai 1989.
- [103] A. Trofino-Neto et V. Kucera, “Stabilization via static output feedback,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, n<sup>o</sup>. 5, p. 764–765, mai 1993. [En ligne]. Disponible : <http://ieeexplore.ieee.org/document/277243/>
- [104] Zheng-guang Yang et Xiu-hong Wang, “Fundamental Theorem for Optimal Output Feedback Problem with Quadratic Performance Criterion,” dans *2006 6th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Dalian, China : IEEE, 2006, p. 1800–1804. [En ligne]. Disponible : <http://ieeexplore.ieee.org/document/1712664/>
- [105] J. Engwerda et A. Weeren, “A result on output feedback linear quadratic control,” *Automatica*, vol. 44, n<sup>o</sup>. 1, p. 265–271, janv. 2008. [En ligne]. Disponible : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0005109807002579>
- [106] F. Lewis, D. Vrabie et V. Syrmos, “Chapter 8 : Output Feedback and Structured Control,” dans *Optimal Control*, 3<sup>e</sup> éd. John Wiley & Sons, 2012.
- [107] L. B. Prasad, B. Tyagi et H. O. Gupta, “Optimal control of nonlinear inverted pendulum dynamical system with disturbance input using PID controller & LQR,” dans *2011 IEEE International Conference on Control System, Computing and Engineering*. Penang, Malaysia : IEEE, nov. 2011, p. 540–545. [En ligne]. Disponible : <http://ieeexplore.ieee.org/document/6190585/>
- [108] H. Lhachemi, D. Saussié et G. Zhu, “An enhanced velocity-based algorithm for safe implementations of gain-scheduled controllers,” *International Journal of Control*, vol. 90, n<sup>o</sup>. 9, p. 1973–1989, sept. 2017. [En ligne]. Disponible : <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00207179.2016.1231424>
- [109] J. Li *et al.*, “Disturbance Accommodating LQR Method Based Pitch Control Strategy for Wind Turbines,” dans *2008 Second International Symposium on Intelligent Information Technology Application*. Shanghai, China : IEEE, déc. 2008, p. 766–770. [En ligne]. Disponible : <http://ieeexplore.ieee.org/document/4739675/>
- [110] A. K. Singh et B. C. Pal, “An extended linear quadratic regulator for LTI systems with exogenous inputs,” *Automatica*, vol. 76, p. 10–16, févr. 2017. [En ligne]. Disponible : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S000510981630406X>
- [111] “Matrix calculus,” juin 2019, page Version ID : 900663565. [En ligne]. Disponible : [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Matrix\\_calculus&oldid=900663565](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Matrix_calculus&oldid=900663565)

- [112] D. Saussié, *ELE6208A - Commande des systèmes aéronautiques et spatiaux - Notes de cours*. Montréal, QC : Polytechnique Montréal, avr. 2017.
- [113] J. Le Ny, *ELE6209A - Systèmes de navigation - Notes de cours*. Montréal, QC : Polytechnique Montréal, mai 2017.
- [114] K. B. Petersen et M. S. Pedersen, *The Matrix Cookbook*. Petersen & Pedersen, nov. 2012.
- [115] B. W. McCormick, *Aerodynamics, aeronautics, and flight mechanics*. Wiley New York, 1995, vol. 2.
- [116] G. Leishman, *Principles of Helicopter Aerodynamics with CD Extra*, ser. Cambridge aerospace series. Cambridge University Press, 2006.

## ANNEXE A TYPES D'AÉRONEFS CONVERTIBLES

Cette annexe présente un survol des différents types d'aéronefs convertibles afin de bien saisir les caractéristiques fondamentales de tels systèmes dynamiques. Une présentation du cadre historique de ces aéronefs est également effectuée en parallèle.



Historiquement, les forces armées ont toujours été confrontées au problème de transporter sur de grandes distances leurs avions militaires – sans toutefois devoir les faire voler afin d'être indépendant d'une infrastructure de décollage et d'atterrissage, d'éviter de solliciter les pilotes seulement à des fins de déplacement des aéronefs et de surtout économiser le carburant. L'idée de les transporter par navires est apparue logiquement et c'est ainsi que s'est amorcée la construction des porte-avions de guerre, soit d'immenses navires possédant au moins une piste de décollage et d'atterrissage. Or, la longueur d'une piste étant normalement de quelques kilomètres (environ 2 à 3 km), l'utilisation de systèmes mécaniques complexes et encombrants, composés de câbles catapultant les avions au décollage et les rattrapant à l'atterrissage, s'avérait nécessaire.

Dans l'optique de se libérer de la dépendance à ces installations coûteuses, les forces militaires ont eu l'idée d'unir dans un même aéronef les composantes clés de l'avion et de l'hélicoptère. Ainsi est apparu le plus grand problème en lien avec cette idée tant ingénieuse et audacieuse :



Comment allier au mieux les performances exceptionnelles du vol d'avancement de l'avion, possédant une plus grande vitesse de croisière et pouvant transporter de plus lourdes charges utiles, avec les performances remarquables du vol stationnaire de l'hélicoptère, possédant une agilité accrue à très basse vitesse et ne nécessitant aucune distance horizontale au décollage et à l'atterrissage ?



Fondamentalement, tout engin volant doit pouvoir développer une force de sustentation afin de combattre la gravité qui le tire vers le centre de la Terre, puis une force de propulsion vers

la direction de déplacement souhaitée afin de combattre la résistance de l'air qu'il rencontre. Pour l'avion, la force de sustentation est développée par sa surface portante principale, l'aile qui génère une force de portance aérodynamique, et la force de propulsion est développée par ses moteurs. Pour l'hélicoptère, les pales agissant comme des ailes tournantes développent à la fois les forces de sustentation et de propulsion selon l'orientation qui leur est donnée. Or, pour les avions traditionnels, les forces de sustentation et de propulsion étant fixées au corps de l'objet  $\mathcal{R}_o$ , il est nécessaire de pouvoir les réorienter afin de pouvoir modifier la direction de l'appareil comme souhaité. L'avion possède donc des surfaces aérodynamiques principales fixes (aile, puis stabilisateurs horizontal et vertical) et réglables (ailerons et gouvernes) afin de générer des moments autour de ses trois axes dans  $\mathcal{R}_o$ . La production de ces forces et de ces moments est détaillée comme suit :

- **Force de sustentation** : *normalement*<sup>A.1</sup> orientée selon  $-\mathbf{z}_o$  et *principalement*<sup>A.2</sup> produite par l'aile ;
- **Force de propulsion** : *normalement* orientée selon  $+\mathbf{x}_o$  et *principalement* produite par les moteurs ;
- **Moment de roulis** : *toujours*<sup>A.3</sup> généré autour de  $\mathbf{x}_o$  et *principalement* produit par les ailerons ;
- **Moment de tangage** : *toujours* généré autour de  $\mathbf{y}_o$  et *principalement* produit par la gouverne de profondeur ;
- **Moment de lacet** : *toujours* généré autour de  $\mathbf{z}_o$  et *principalement* produit par la gouverne de direction ;

où l'on note qu'aucune composante n'est présente sur l'avion afin de produire une force orientée selon l'axe  $\mathbf{y}_o$ , ce qui est généralement le cas pour tout aéronef dont le plan normal à  $\mathbf{y}_o$ , soit  $\mathbf{x}_o$ - $O_o$ - $\mathbf{z}_o$ , est un plan de symétrie. Cela justifie donc l'importance de pouvoir créer des moments autour des trois axes de  $\mathcal{R}_o$  afin de pouvoir réorienter les forces de sustentation et de propulsion et permettre à l'aéronef de se diriger vers une direction arbitraire.

Ainsi, c'est en usant de beaucoup d'ingéniosité et en maniant ces principes de base que les scientifiques ont conçu une multitude de différents prototypes au cours des dernières 65

---

A.1. On dit *normalement*, puisque dans les faits, la force de sustentation d'un avion est orientée vers  $-\mathbf{z}_a$ , car elle dépend de la vitesse aérodynamique  $\mathbf{v}_a$ . Toutefois, pour un vol de croisière effectué à altitude constante, les axes  $\mathbf{z}_o$  et  $\mathbf{z}_a$  sont *normalement* situés très proches l'un de l'autre à un angle d'attaque  $\alpha$  près. De plus, les moteurs sont *normalement* installés avec une orientation légèrement différente de l'axe  $\mathbf{x}_o$ .

A.2. On dit *principalement*, puisque théoriquement, toutes les surfaces de l'avion contribuent à générer des forces et des moments aérodynamiques. Parmi ces surfaces, on compte notamment les surfaces secondaires (volets hypersustentateurs, destructeurs de portance et stabilisateur horizontal réglable) et les surfaces tertiaires (fuselage, nacelle des moteurs et train d'atterrissage).

A.3. On dit *toujours*, puisque c'est une convention pour les moments de roulis, de tangage et de lacet qui sont toujours définis dans le repère  $\mathcal{R}_o$  de l'objet.

années afin de répondre de leur mieux à cette question fondamentale posée précédemment. À travers les nombreux essais et erreurs, cinq variantes principales ont émergé :

1. **Corps inclinable (CI)** : les composantes aérodynamiques et propulsives étant fixes, c'est l'engin volant au complet qui doit basculer pour réorienter ses forces de portance et propulsives afin d'assurer respectivement sa sustentation et sa propulsion ;
2. **Fusion avion-multicoptère (FU)** : nul besoin d'effectuer de bascule, puisque l'aéronef embarque à la fois les composantes aérodynamiques et propulsives (toutes celles de l'avion et toutes celles de l'hélicoptère) qui s'occupent alors d'assurer de manière indépendante la sustentation et la propulsion de l'appareil ;
3. **Aile inclinable (AI)** : à l'image du corps inclinable, cette fois, c'est l'aile au complet, à laquelle sont normalement fixés les moteurs de l'aéronef, qui bascule afin d'effectuer le réglage du jeu de forces de sustentation et de propulsion – le corps de l'aéronef restant à niveau ;
4. **Poussée vectorielle (PV)** : les composantes aérodynamiques et propulsives normales de l'avion assurent respectivement la sustentation et la propulsion de l'appareil en vol d'avancement, tandis qu'un système complexe d'orientation de la force propulsive permet à l'appareil de bénéficier de forces de sustentation et de propulsion en vol stationnaire ;
5. **Moteur inclinable (MI)** : de manière très similaire à l'aile inclinable, ce sont seulement les moteurs, normalement positionnés à chacun des bouts de l'aile, qui basculent afin de contrôler le jeu entre les forces de sustentation et de propulsion.

Enfin, une dernière variante résultant de la combinaison de n'importe laquelle de ces cinq variantes principales est également considérée dans cet ouvrage, soit la variante *hybride* (HY). Ces aéronefs à décollage et atterrissage verticaux (ADAV ou VTOL en anglais) sont aujourd'hui mieux connus sous les noms d'aéronefs *hybrides* ou *convertibles*, la seconde appellation étant préférée dans cet ouvrage. Ainsi, un aéronef convertible, ou tout simplement un convertible, possède la caractéristique unique de pouvoir opérer dans trois phases de vol distinctes illustrées à la figure A.1 (exemple pris pour le type CI Bell Boeing V-22 Osprey) :

1. **Vol stationnaire** : phase où le convertible profite de sa dynamique d'hélicoptère et effectue soit un décollage ou un atterrissage vertical, ou bien encore une mission nécessitant de maintenir une position fixe ;
2. **Vol d'avancement** : phase où le convertible profite de sa dynamique d'avion afin d'effectuer un vol de croisière rapide et efficace du point de vue aérodynamique ;
3. **Vol de transition** : phase où les dynamiques d'avion et d'hélicoptère sont grandement couplées dans la transition du vol stationnaire au vol d'avancement ou *vice-versa*.

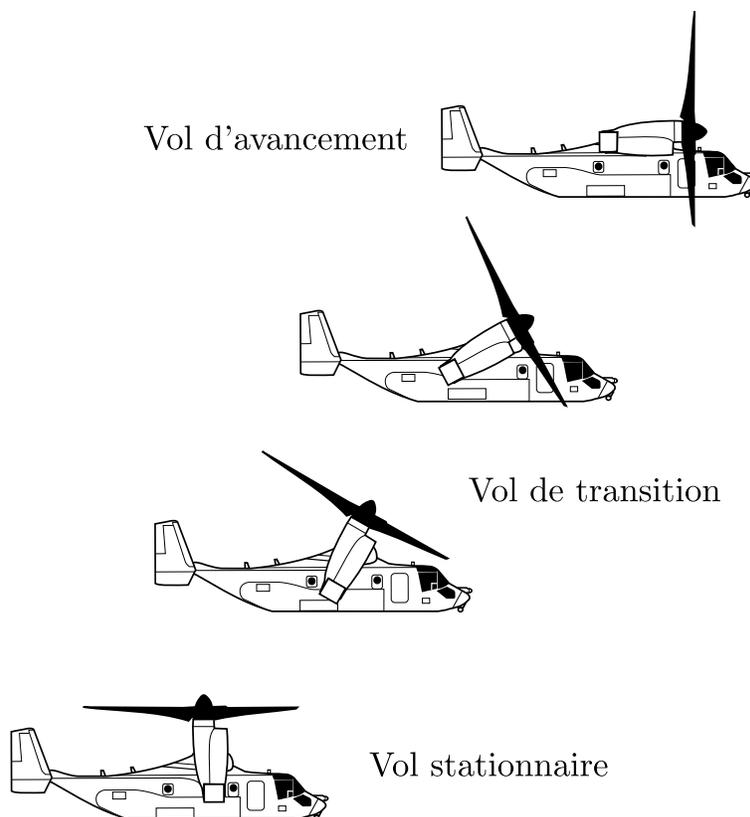


Figure A.1 Phases de vol d'un aéronef convertible (sans vent) [87]

Afin de bien saisir les subtilités entre les différents types de convertibles et le fonctionnement de chacune de leurs phases de vol, douze aéronefs convertibles sont présentés à travers les sections de cette annexe. *Dans la mesure du possible*, une combinaison d'un prototype ancien avec pilote, dit *précurseur*, et d'un prototype plus moderne sans pilote, dit *successeur*, a été retenue pour le choix des deux prototypes appartenant à un même type. Ceux-ci sont répertoriés au tableau A.1 où l'année du premier vol de chaque prototype est notamment mise en évidence afin de situer chronologiquement l'évolution des différents types de convertibles <sup>A.4</sup>.

Pour chacun des types de convertibles et en s'appuyant seulement sur l'exemple du prototype *successeur*, les sections suivantes s'attardent d'abord à définir le vecteur  $\mathbf{u}$  des entrées commandables de chacun des aéronefs étudiés. Puis, les forces  $\mathbf{f}_{\Sigma}^o$  et les moments  $\mathbf{m}_{\Sigma}^o$  agissant sur  $\mathcal{S}$  sont identifiés sans être développés. Enfin, la méthode de contrôle des différents degrés de liberté de  $\mathcal{S}$  à l'aide de  $\mathbf{u}$  est grossièrement abordée selon les phases de vol stationnaire

A.4. Toutes les dates comprises dans le tableau A.1 sont tirées de l'encyclopédie libre en ligne Wikipédia ou correspondent à la date de téléversement de vidéos YouTube. Ainsi, leur exactitude ne peut être corroborée, mais cela demeure la meilleure estimation possible. Il est recommandé de les considérer seulement à titre indicatif de l'ordre chronologique d'apparition des différents prototypes convertibles.

Tableau A.1 Année du premier vol de convertibles selon le type et l'époque

Type	Précurseur		Successeur	
	Année	Nom	Année	Nom
CI	1954	Convair XFY-1 Pogo	2016	Parrot Swing
FU	1960	Kamov Ka-22 Vintokryl	2015	Amazon Prime Air
AI	1964	LTV XC-142	2014	NASA GL-10 Greased Lightning
PV	1966	Hawker Siddeley Harrier	2006	Lockheed Martin F-35 Lightning II
MI	1989	Bell Boeing V-22 Osprey	2016	Ares V-Hawk X4
HY	2013	Boeing Phantom Swift	2018	Samad Aerospace Starling Jet

ou d'avancement à l'aide des différentes grandeurs définies au préalable. Le lecteur curieux est invité à consulter les ouvrages [31, 50, 66–71] qui traitent notamment de la modélisation dynamique de différents types de convertibles.

### A.1 Corps inclinable

Les figures A.2 et A.3 montrent deux prototypes de convertibles à corps inclinable : respectivement le Pogo et le Swing. Tous les deux possèdent la caractéristique fondamentale de décoller à la verticale avec leur corps incliné à un angle de  $90^\circ$ . Ils doivent ensuite effectuer une bascule d'*environ*  $-90^\circ$  afin de se positionner à un angle d'assiette *proche* de  $0^\circ$  pour effectuer un vol d'avancement efficace<sup>A.5</sup>.



Figure A.2 Convair XFY-1 Pogo [88]



Figure A.3 Parrot Swing [89]

A.5. On dit *environ* et *proche*, puisqu'en vol d'avancement à altitude constante, l'angle d'assiette est légèrement supérieur à  $0^\circ$  ; le convertible a alors un angle d'attaque non nul qui permet de générer la portance.

Si on s'attarde seulement au prototype plus moderne, le Swing en l'occurrence, on peut identifier les quatre entrées commandables de  $\mathbf{u}$  :

$$\mathbf{u} = [\omega_{h,d} \ \omega_{b,d} \ \omega_{b,g} \ \omega_{h,g}]^\top \quad (\text{A.1})$$

où  $\omega_{h,d}$ ,  $\omega_{b,d}$ ,  $\omega_{b,g}$  et  $\omega_{h,g}$  sont les vitesses angulaires des quatre moteurs. Les indices  $h/b$  (haut/bas) et  $d/g$  (droite/gauche) indiquent la position du moteur lorsqu'on regarde le convertible de l'arrière.

Les sources des forces  $\mathbf{f}_{\Sigma^*}^o$  (excluant le poids) et des moments  $\mathbf{m}_{\Sigma}^o$  sont les suivantes :

- $\mathbf{f}_t^o$  : la force de poussée résultante développée par tous les moteurs ;
- $\mathbf{m}_t^o$  : le moment de réaction résultant dû aux bras de levier des moteurs et de leurs composantes rotatives ;
- $\mathbf{f}_a^o$  : la force aérodynamique résultante (portance et traînée) générée par toutes les surfaces aérodynamiques ;
- $\mathbf{m}_a^o$  : le moment aérodynamique résultant (portance et traînée) généré par toutes les surfaces aérodynamiques.

Ainsi, une modélisation mathématique simplifiée des forces et des moments agissant sur le Swing pourrait être :

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{\Sigma^*}^o = \mathbf{f}_t^o + \mathbf{f}_a^o \\ \mathbf{m}_{\Sigma}^o = \mathbf{m}_t^o + \mathbf{m}_a^o \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

On s'intéresse maintenant à la génération des forces et des moments principaux :

■ **Vol stationnaire :**

- ▶ Force de sustentation : *normalement*<sup>A.6</sup> orientée selon  $+\mathbf{x}_o$  et produite par les 4 moteurs ;
- ▶ Force de propulsion : aucune à priori, l'aéronef doit modifier son orientation afin de la générer par le biais de sa composante de sustentation ;
- ▶ Moment de roulis : généré par le différentiel deux à deux de la vitesse angulaire des moteurs situés sur les côtés opposés diagonaux ;
- ▶ Moment de tangage : généré par le différentiel deux à deux de la vitesse angulaire des moteurs situés sur les côtés opposés haut et bas ;
- ▶ Moment de lacet : généré par le différentiel deux à deux de la vitesse angulaire des moteurs situés sur les côtés opposés gauche et droit ;

---

A.6. On dit ici *normalement*, car cela ne sera pas exactement le cas en présence de vent de travers qui aura pour conséquence de faire basculer le Swing afin d'équilibrer les forces et moments.

■ **Vol d'avancement :**

- ▶ Force de sustentation : *normalement* orientée selon  $-\mathbf{z}_o$  et produite par une combinaison de l'aile en croix et des moteurs ;
- ▶ Force de propulsion : *normalement* orientée selon  $+\mathbf{x}_o$  et produite par une partie de la force propulsive des moteurs, l'autre participant à la sustentation ;
- ▶ Moment de roulis : *idem* que pour le vol stationnaire ;
- ▶ Moment de tangage : *idem* que pour le vol stationnaire ;
- ▶ Moment de lacet : *idem* que pour le vol stationnaire.

Selon le tableau A.1, le prototype à corps inclinable a été le premier prototype d'aéronef convertible inventé. Toutefois, le fait de devoir basculer entièrement l'aéronef entre les deux phases de vol comporte manifestement un inconvénient majeur. Cela limite en effet le transport de charges utiles dont l'orientation pourrait être sensible à la gravité. De plus, il est sûr que cela incommoderait la majorité des passagers.

## A.2 Fusion avion-multicoptère

Les figures A.4 et A.5 montrent deux prototypes de convertibles consistant en une fusion avion-multicoptère : respectivement le Vintokryl et le prototype d'Amazon. Tous les deux possèdent la caractéristique fondamentale de jumeler sur un même aéronef les composantes essentielles de l'avion et du multicoptère. Le prototype d'Amazon décolle à la verticale à l'aide de ses huit moteurs placés en tandem (c.-à-d. l'un au-dessus de l'autre) et se propulse ensuite vers l'avant à l'aide de son moteur arrière. Enfin, on note également la présence de surfaces de contrôle secondaires situées sur les stabilisateurs horizontaux et verticaux afin d'effectuer des ajustements de précision dans le but d'équilibrer les forces et les moments de l'appareil lorsqu'il opère en régime permanent (c.-à-d. en vol de croisière).



Figure A.4 Kamov Ka-22 Vintokryl [90]



Figure A.5 Amazon Prime Air [91]

En supposant que chaque groupe de deux moteurs disposés en tandem sert seulement à des fins de redondance et que le second moteur est seulement mis en marche lorsque le premier fait défaut, on peut identifier cinq entrées commandables essentielles :

$$\mathbf{u} = [\omega_{d,av} \quad \omega_{d,ar} \quad \omega_{g,ar} \quad \omega_{g,av} \quad \omega_p]^\top \quad (\text{A.3})$$

où  $\omega_{d,av}$ ,  $\omega_{d,ar}$ ,  $\omega_{g,ar}$  et  $\omega_{g,av}$  sont les vitesses angulaires des quatre moteurs et  $\omega_p$  la vitesse angulaire du moteur situé à l'arrière. Les indices  $d/g$  (droite/gauche) et  $av/ar$  (avant/arrière) indiquent la position du moteur lorsqu'on regarde le convertible d'en haut.

Les sources des forces  $\mathbf{f}_{\Sigma^*}^o$  (excluant la gravité) et des moments  $\mathbf{m}_{\Sigma}^o$  sont les suivantes :

- $\mathbf{f}_t^o$  : la force de poussée résultante développée par tous les moteurs situés dans le plan horizontal ;
- $\mathbf{m}_t^o$  : le moment de réaction résultant dû aux bras de levier des moteurs situés dans le plan horizontal et de leurs composantes rotatives ;
- $\mathbf{f}_p^o$  : la force de poussée résultante développée par le moteur situé à l'arrière ;
- $\mathbf{m}_p^o$  : le moment de réaction résultant dû au bras de levier du moteur situé à l'arrière et de ses composantes rotatives ;
- $\mathbf{f}_a^o$  : la force aérodynamique résultante (portance et traînée) générée par toutes les surfaces aérodynamiques ;
- $\mathbf{m}_a^o$  : le moment aérodynamique résultant (portance et traînée) généré par toutes les surfaces aérodynamiques.

Ainsi, une modélisation mathématique simplifiée des forces et des moments agissant sur le drone d'Amazon pourrait être :

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{\Sigma^*}^o = \mathbf{f}_t^o + \mathbf{f}_p^o + \mathbf{f}_a^o \\ \mathbf{m}_{\Sigma}^o = \mathbf{m}_t^o + \mathbf{m}_p^o + \mathbf{m}_a^o \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

On s'intéresse maintenant à la génération des forces et des moments principaux :

■ **Vol stationnaire :**

- ▶ Force de sustentation : *normalement* orientée selon  $-\mathbf{z}_o$  et produite par les 4 moteurs situés dans le plan horizontal ;
- ▶ Force de propulsion : aucune force propulsive n'est nécessaire dans cette phase de vol, l'aéronef peut toutefois activer n'importe quel moteur s'il souhaite effectuer une correction quelconque ;

- ▶ Moment de roulis : généré par le différentiel deux à deux de la vitesse angulaire des moteurs situés dans le plan horizontal sur les côtés opposés gauche et droit ;
  - ▶ Moment de tangage : généré par le différentiel deux à deux de la vitesse angulaire des moteurs situés dans le plan horizontal sur les côtés opposés avant et arrière ;
  - ▶ Moment de lacet : généré par le différentiel deux à deux de la vitesse angulaire des moteurs situés dans le plan horizontal sur les côtés opposés diagonaux ;
- **Vol d'avancement :**
- ▶ Force de sustentation : *normalement* orientée selon  $-\mathbf{z}_o$  et produite par une combinaison des surfaces portantes (majoritaire) et des moteurs (minoritaire) situés dans le plan horizontal, selon la vitesse d'avancement ;
  - ▶ Force de propulsion : *normalement* orientée selon  $+\mathbf{x}_o$  et produite essentiellement par le moteur situé à l'arrière ;
  - ▶ Moment de roulis : *idem* que pour le vol stationnaire ;
  - ▶ Moment de tangage : *idem* que pour le vol stationnaire ;
  - ▶ Moment de lacet : *idem* que pour le vol stationnaire.

La fusion de la dynamique de l'avion avec celle du multicoptère a beau régler le problème de bascule du corps, elle n'est certes pas la meilleure configuration du point de vue de l'optimisation du nombre et de l'utilisation des différentes composantes embarquées sur l'aéronef. En effet, pour la grande majorité des prototypes de type fusion avion-multicoptère, les composantes associées à l'avion ne sont pas utilisées lorsque celles associées au multicoptère sont en fonction, et vice-versa.

### A.3 Aile inclinable

Les figures A.6 et A.7 montrent deux prototypes de convertibles possédant au moins une aile inclinable : le XC-142 et le Lightning. Tous les deux possèdent la caractéristique fondamentale de dépendre de la bascule de leur surface portante principale, c.-à-d. leur aile, afin de modifier le jeu des forces de sustentation et de propulsion qui en découlent. En effet, on remarque que tous les moteurs sont fixés à l'aile qui bascule. Le Lightning décolle à la verticale avec ses deux ailes positionnées à  $90^\circ$  (en l'occurrence, tous ses moteurs sont également positionnés à  $90^\circ$ ). Il effectue ensuite une transition en vol d'avancement en basculant ses deux ailes de manière à les positionner dans le plan horizontal. La stabilité de cette opération est assurée en contrôlant la vitesse angulaire de chacun des 10 moteurs qui sont embarqués sur l'aéronef. De plus, l'aile avant dispose de trois ailerons situés de part et d'autre du fuselage, tandis

que l'aile arrière dispose d'un aileron situé de part et d'autre de la queue de l'appareil. Tous ces ailerons participent également au processus de stabilisation actif de l'aéronef pendant sa phase de transition.



Figure A.6 LTV XC-142 [92]



Figure A.7 NASA Greased Lightning 10 [93]

En supposant que les quatre moteurs situés sur un même côté de l'aile forment un seul groupe moteur et *idem* pour les trois ailerons d'un même côté de l'aile, puis, en négligeant arbitrairement la gouverne de direction dans l'analyse, on peut identifier 10 entrées commandables distinctes :

$$\mathbf{u} = [\omega_{d,av} \ \omega_{d,ar} \ \omega_{g,ar} \ \omega_{g,av} \ \delta_{d,av} \ \delta_{d,ar} \ \delta_{g,ar} \ \delta_{g,av} \ \theta_{av} \ \theta_{ar}]^T \quad (\text{A.5})$$

où  $\omega_{d,av}$ ,  $\omega_{d,ar}$ ,  $\omega_{g,ar}$  et  $\omega_{g,av}$  sont les vitesses angulaires des groupes moteurs,  $\delta_{d,av}$ ,  $\delta_{d,ar}$ ,  $\delta_{g,ar}$  et  $\delta_{g,av}$  sont les positions angulaires des groupes d'ailerons, et enfin  $\theta_{av}$  et  $\theta_{ar}$  sont les positions angulaires des ailes avant et arrière. Les indices *d/g* (droite/gauche) et *av/ar* (avant/arrière) indiquent la position du groupe moteur ou du groupe d'ailerons lorsqu'on regarde le convertible d'en haut.

Les sources des forces  $\mathbf{f}_{\Sigma^*}^o$  (excluant la gravité) et des moments  $\mathbf{m}_{\Sigma}^o$  sont les suivantes :

- $\mathbf{f}_t^o$  : la force de poussée résultante développée par tous les groupes moteurs ;
- $\mathbf{m}_t^o$  : le moment de réaction résultant dû aux bras de levier de tous les groupes moteurs et de leurs composantes rotatives ;
- $\mathbf{f}_\delta^o$  : la force aérodynamique résultante développée par la variation de la position angulaire de tous les groupes d'ailerons ;
- $\mathbf{m}_\delta^o$  : le moment de réaction résultant dû aux bras de levier associés aux forces aérodynamiques des groupes ailerons et de leurs composantes rotatives ;
- $\mathbf{f}_a^o$  : la force aérodynamique résultante (portance et traînée) générée par toutes les surfaces aérodynamiques (autres que les ailerons) ;

- $\mathbf{m}_a^o$  : le moment aérodynamique résultant (portance et traînée) généré par toutes les surfaces aérodynamiques (autres que les ailerons).

Ainsi, une modélisation mathématique simplifiée des forces et des moments agissant sur le Lightning pourrait être :

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{\Sigma^*}^o = \mathbf{f}_t^o + \mathbf{f}_\delta^o + \mathbf{f}_a^o \\ \mathbf{m}_\Sigma^o = \mathbf{m}_t^o + \mathbf{m}_\delta^o + \mathbf{m}_a^o \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

On s'intéresse maintenant à la génération des forces et des moments principaux :

- **Vol stationnaire :**

- ▶ Force de sustentation : *normalement* orientée selon  $-\mathbf{z}_o$  et produite par l'ensemble de tous les groupes moteurs ;
- ▶ Force de propulsion : aucune force propulsive n'est nécessaire dans cette phase de vol, l'aéronef peut toutefois activer n'importe quel moteur, modifier la position de ses ailerons ou encore celle de ses ailes s'il souhaite effectuer une correction quelconque ;
- ▶ Moment de roulis : généré par le différentiel deux à deux de la vitesse angulaire des groupes moteurs *et/ou*<sup>A.7</sup> de la position angulaire des groupes d'ailerons situés sur les côtés opposés gauche et droit ;
- ▶ Moment de tangage : généré par le différentiel deux à deux de la vitesse angulaire des groupes moteurs *et/ou* de la position angulaire des ailes situés sur les côtés opposés avant et arrière ;
- ▶ Moment de lacet : généré par le différentiel deux à deux de la vitesse angulaire des moteurs *et/ou* de la position angulaire des groupes d'ailerons situés sur les côtés opposés diagonaux ;

- **Vol d'avancement :**

- ▶ Force de sustentation : *normalement* orientée selon  $-\mathbf{z}_o$  et produite par une combinaison des surfaces portantes (majoritaire) et des moteurs (minoritaire) selon la vitesse d'avancement ;
- ▶ Force de propulsion : *normalement* orientée selon  $+\mathbf{x}_o$  et produite essentiellement par tous les groupes moteurs ;

---

A.7. On note qu'en raison du grand nombre d'entrées commandables comprises dans  $\mathbf{u}$ , il existe plusieurs combinaisons différentes de sollicitation afin d'engendrer un même mouvement. Il est ainsi possible de *découpler les entrées* afin de contrôler des mouvements particuliers au lieu de contrôler directement les entrées commandables. En anglais, ce processus prend le nom de *control* (ou *actuator*) *allocation* et est une étape indispensable au contrôle de tout système dit *suractionné*, soit un système possédant plusieurs redondances au niveau de ses entrées commandables par rapport au contrôle de certains degrés de liberté.

- ▶ Moment de roulis : *idem* que pour le vol stationnaire ;
- ▶ Moment de tangage : *idem* que pour le vol stationnaire ;
- ▶ Moment de lacet : *idem* que pour le vol stationnaire.

Le retour à un design beaucoup plus proche de l'avion classique (le Lightning possède toutes les structures d'un avion classique mis à part ses ailes inclinables et ses moteurs ajoutés à l'arrière) permet d'optimiser l'utilisation de toutes les composantes embarquées. En effet, lorsque configuré pour le vol d'avancement à grande vitesse, ce prototype se comporte de manière identique à un avion et cela permet d'optimiser l'efficacité aérodynamique et l'autonomie de l'appareil. Toutefois, le basculement des ailes à vitesse d'avancement non nulle entraîne une multitude d'effets aérodynamiques qui sont difficiles à modéliser et à gérer en plein vol. La prochaine section présente un prototype différent qui a surtout été développé pour le besoin des forces armées opérant des machines de guerre volantes. Celles-ci doivent notamment pouvoir décoller et atterrir autant bien sur des pistes situées sur la terre ferme que sur des bateaux en pleine mer.

#### A.4 Poussée vectorielle

Les figures A.8 et A.9 montrent deux prototypes de convertibles ayant recours à la poussée vectorielle afin d'effectuer un décollage vertical : respectivement le Harrier et le F-35. Tous les deux possèdent la caractéristique fondamentale d'embarquer un turboréacteur dont le flux d'air sortant peut être redirigé vers le dessous de l'aéronef. Cela permet de créer une force de réaction vers le haut qui maintient l'aéronef dans les airs lorsque sa vitesse d'avancement est nulle. Ce système complexe peut être analysé plus en détail à la figure A.10 où le système de poussée vectorielle d'un F-35 est présenté. La mécanique de vol d'un avion ayant déjà été abordée dans les sections précédentes de cette annexe, on s'intéresse seulement au système de poussée vectorielle permettant de maintenir l'aéronef en sustentation pendant les phases de décollage et d'atterrissage verticaux. En effet, l'analyse de la propulsion de cet appareil est identique à celle d'un avion traditionnel<sup>A.8</sup>.

En s'attardant seulement aux composantes du système de poussée vectorielle, on peut identifier cinq entrées commandables distinctes :

$$\mathbf{u} = \left[ \omega_{av} \quad \omega_{ar} \quad \lambda_g \quad \lambda_d \quad \theta_{ar} \right]^T \quad (\text{A.7})$$

où  $\omega_{d,av}$  et  $\omega_{d,ar}$  sont respectivement les vitesses angulaires de la soufflante avant et du

---

A.8. En réalité, ces avions militaires peuvent utiliser leur système de poussée vectorielle afin d'effectuer des manœuvres aériennes normalement impossibles pour par exemple éviter les tirs d'un avion de chasse ennemi.



Figure A.8 Hawker Siddeley Harrier [94]



Figure A.9 LMC F-35 Lightning II [95]

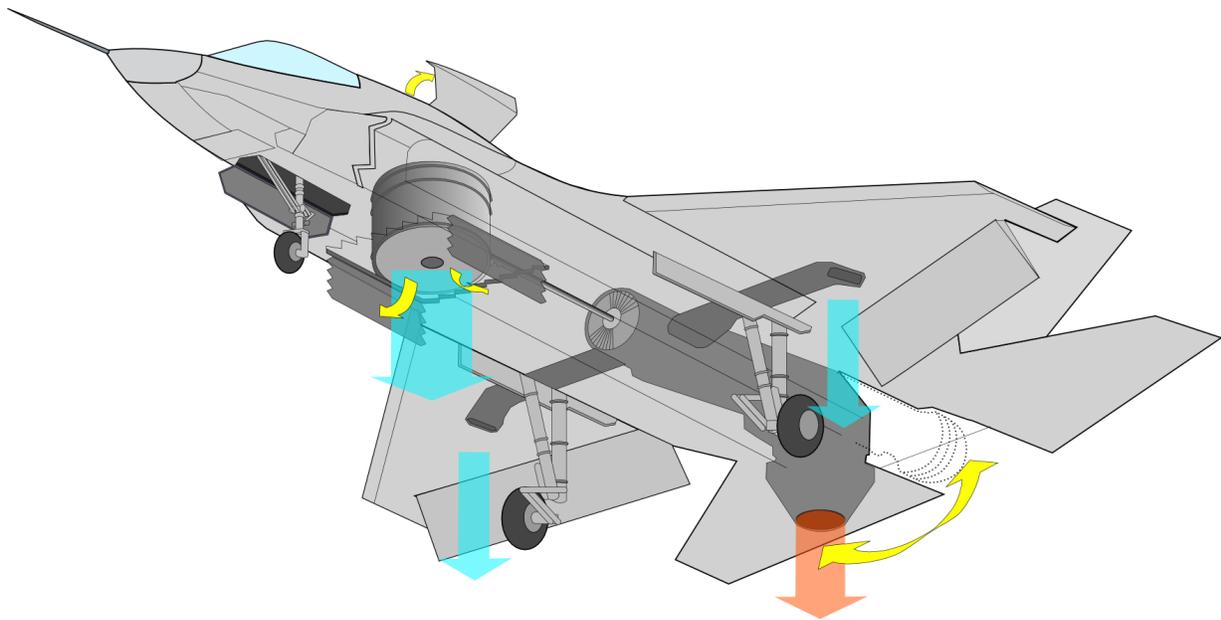


Figure A.10 Système de poussée vectorielle du F-35 [96]

turboréacteur arrière,  $\lambda_g$  et  $\lambda_d$  les ratios d'air détourné depuis les étages de compression du moteur vers les tuyères gauche et droite du système de poussée vectorielle et  $\theta_{ar}$  la position angulaire latérale (gauche-droite) de la tuyère du moteur arrière <sup>A.9</sup>.

Les sources des forces  $\mathbf{f}_{\Sigma^*}^o$  (excluant la gravité) et des moments  $\mathbf{m}_{\Sigma}^o$  pour le système de poussée vectorielle sont les suivantes :

- $\mathbf{f}_t^o$  : la force de poussée résultante développée par les quatre sorties du système de poussée vectorielle ;
- $\mathbf{m}_t^o$  : le moment de réaction résultant dû aux bras de levier des quatre forces générées de manière indépendante par le système de poussée vectorielle.

Ainsi, une modélisation mathématique simplifiée des forces et des moments agissant sur le F-35 pourrait être :

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{\Sigma^*}^o = \mathbf{f}_t^o \\ \mathbf{m}_{\Sigma}^o = \mathbf{m}_t^o \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

On s'intéresse maintenant à la génération des forces et des moments principaux :

■ **Vol stationnaire :**

- ▶ Force de sustentation : *normalement* orientée selon  $-\mathbf{z}_o$  et produite par l'ensemble de toutes les sorties propulsives du système de poussée vectorielle ;
- ▶ Force de propulsion : aucune force propulsive n'est nécessaire dans cette phase de vol, l'aéronef peut toutefois modifier l'intensité de ses sorties vectorielles s'il souhaite effectuer une correction quelconque ;
- ▶ Moment de roulis : généré par le différentiel des poussées produites par les tuyères gauche et droite ;
- ▶ Moment de tangage : généré par le différentiel des poussées produites par la soufflante avant et le moteur principal arrière ;
- ▶ Moment de lacet : généré par l'orientation latérale donnée à la tuyère du moteur arrière.

Bien entendu, le F-35 est un mastodonte de guerre ayant été développé à un coût astronomique afin de répondre aux exigences les plus sévères en matière de performance et de sécurité militaires. Toutefois, le système de poussée vectorielle est unique en son genre et rappelle au lecteur que le développement de tels systèmes nécessite de très grands moyens – tels ceux pouvant être fournis par les organisations militaires de plusieurs pays. La prochaine section

---

A.9. Bien que ce ne soit pas illustré à la figure A.10, la tuyère de sortie du moteur arrière est inclinable dans les deux plans longitudinal (autour de  $\mathbf{y}_o$ ) et latéral (autour de  $\mathbf{x}_o$ ) de l'aéronef. Le contrôle du positionnement longitudinal de la tuyère arrière n'est pas requis pendant le vol stationnaire.

présente le type de convertible à moteurs inclinables auquel appartient un autre mastodonte de guerre : le Osprey.

## A.5 Moteurs inclinables

Les figures A.11 et A.12 montrent deux convertibles possédant au moins un groupe de deux moteurs inclinables : respectivement le Osprey et le V-Hawk. Tous les deux possèdent la caractéristique fondamentale de dépendre de la bascule de leurs moteurs afin de modifier le jeu des forces de sustentation et de propulsion qui en dépendent. Les surfaces portantes restent toutefois fixes. Le Osprey décolle à la verticale avec ses deux moteurs positionnés à  $90^\circ$ . Il effectue ensuite une transition en vol d'avancement en basculant ses deux moteurs de manière à les positionner vers l'avant (Fig. A.1).



Figure A.11 Bell Boeing V-22 Osprey [97]



Figure A.12 Ares V-Hawk X4 [98]

Le fonctionnement d'un aéronef convertible à moteurs inclinables étant très similaire à celui d'un convertible à aile inclinable, ce premier n'est pas détaillé dans cette section. Le lecteur est invité à consulter la section A.3 afin d'en déduire par lui-même son fonctionnement.

## A.6 Hybride

Les figures A.13 et A.14 montrent deux prototypes de convertibles combinant au moins deux des cinq types de convertibles présentés jusqu'ici dans cette section : respectivement le Phantom et le Starling. On désigne ce type de convertibles combinant plusieurs composantes différentes comme un convertible *hybride*<sup>A.10</sup>. Ces deux prototypes combinent à la fois des moteurs inclinables et des moteurs intégrés à leur fuselage. Ce dernier joue d'ailleurs un rôle très important dans la sustentation de ces appareils dans la mesure où il possède une forme

A.10. À ne pas confondre avec l'une des variantes de définitions utilisées dans la littérature des aéronefs convertibles où *convertible* et *hybride* partagent parfois le même sens. Dans ce mémoire, ces deux mots désignent deux concepts distincts et bien définis.

très aérodynamique générant une grande force de portance par rapport à un fuselage classique d'avion.



Figure A.13 Boeing Phantom Swift [99]



Figure A.14 Samad Aero. Starling Jet [100]

Selon les types de composantes que comporte le convertible étudié, le lecteur est invité à se référer aux sections A.1, A.2, A.3, A.4 ou A.5 afin d'en déduire son fonctionnement. De plus, le lecteur est invité à consulter [50,68–71,101] où plusieurs autres prototypes sont présentés.

## ANNEXE B    EXEMPLE D'UNE VOITURE AVEC RÉGULATEUR DE VITESSE

Cette annexe utilise l'exemple pratique d'une voiture munie d'un régulateur de vitesse afin d'illustrer trois problèmes propres à l'automatique. Dans un premier temps, l'exemple de la voiture est mis à contribution afin de mettre en lumière le processus de modélisation d'un système dynamique. Ensuite, l'exemple du régulateur de vitesse d'une voiture est abordé afin de montrer concrètement comment concevoir un système de commande régulant un système dynamique. Enfin, l'exemple du séquençement des gains d'un régulateur de vitesse de voiture est utilisé afin d'étudier le problème du séquençement de contrôleurs. Ces trois exemples pédagogiques sont présentés afin d'éclaircir les notions théoriques présentées respectivement dans les sections 2.1, 2.2 et 2.3.

### B.1 Exemple d'une voiture comme système dynamique

Un exemple commun de système dynamique  $\mathcal{S}$  est une voiture dont on veut modéliser l'évolution de la vitesse  $v$  (état  $x := v \in \mathbb{R}$ ; vitesse de la voiture) selon deux évènements distincts :

1. lorsque l'on appuie plus ou moins sur la pédale d'accélérateur qui fait alors varier le couple généré par le moteur de la voiture (entrée commandable  $u := \theta_p \in \mathbb{R}$ ; angle de la pédale) ;
2. lorsque survient un changement soudain et abrupt de la pente de la chaussée qui fait alors accélérer ou décélérer la voiture en raison de son poids (entrée perturbatrice  $w := \theta_c \in \mathbb{R}$ ; angle de la chaussée).

Ainsi, en reprenant la notation de (2.2), on peut modéliser la voiture comme un système dynamique s'écrivant comme suit :

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\varrho}) := \begin{cases} \dot{v} = f(v, \theta_p, \theta_c, \boldsymbol{\varrho}) \\ v(t_0) = v_0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

$$\boldsymbol{\varrho} = [m_v \quad \varepsilon_m \quad S_a \quad \mu_f \quad g_0]^\top$$

où  $f \in \mathbb{R}$  est une fonction scalaire modélisant toutes les forces spécifiques<sup>B.1</sup> responsables de la variation de la vitesse de la voiture  $\dot{v}$  dont la vitesse initiale au temps  $t_0$  est  $v_0$  et  $\boldsymbol{\varrho} \in \mathbb{R}^5$  représente les cinq paramètres physiques de la voiture. On peut distinguer quatre

---

B.1. Une force spécifique  $f_s$  est définie comme le rapport entre une force  $f$  et une masse  $m$  :  $f_s = \frac{f}{m}$ .

forces spécifiques différentes agissant sur la voiture :

1.  $\mathbf{f}_a(\theta_p, m_v, \varepsilon_m)$  : force spécifique d'accélération due au couple généré par le moteur d'efficacité  $\varepsilon_m$  lorsque l'on appuie sur la pédale d'accélérateur  $\theta_p$  pour la voiture de masse  $m_v$  ;
2.  $\mathbf{f}_r(v, m_v, S_a)$  : force spécifique de traînée aérodynamique due au contact entre la voiture et la masse d'air de surface  $S_a$  qu'elle traverse à une vitesse  $v$  ;
3.  $\mathbf{f}_{f,g}(\theta_c, m_v, \mu_f, g_0)$  : forces spécifiques de frottement  $\mathbf{f}_f(\theta_c, m_v, \mu_f)$  et gravitationnelle  $\mathbf{f}_g(\theta_c, g_0)$  dues respectivement à la friction du contact des pneus avec la chaussée possédant un coefficient de frottement  $\mu_f$  et la gravité terrestre de grandeur  $g_0$  ; toutes les deux dépendent de l'angle de la chaussée  $\theta_c$ .

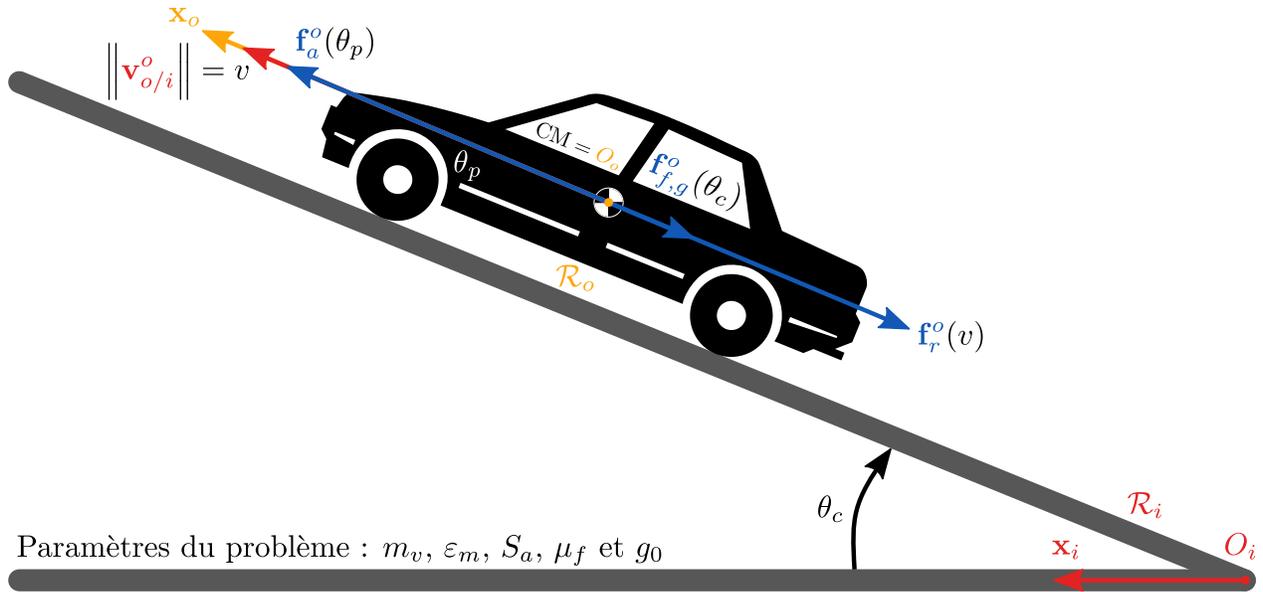


Figure B.1 Grandeurs dynamiques d'une voiture en montée possédant 1 DDL

Pour le cas précis d'une voiture montant une côte, la figure B.1 illustre la projection de ces quatre forces spécifiques<sup>B.2</sup> dans le repère de la voiture, noté  $\mathcal{R}_o$ , qui possède une seule dimension selon l'axe  $\mathbf{x}_o$ . Ainsi, pour ce cas particulier, on peut préciser davantage la nature de  $f$  dans (B.1) :

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\varrho}) := \begin{cases} \dot{v} = -f_r(v, m_v, S_a) + f_a(\theta_p, m_v, \varepsilon_m) - f_{f,g}(\theta_c, m_v, \mu_f, g_0) \\ v_0 = v(t_0) \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

B.2. Cf. section C.1.4 concernant la nomenclature employée pour la projection d'un vecteur dans un repère.

où le signe des forces spécifiques agissant sur le centre de masse de la voiture est introduit dans la définition de  $\mathcal{S}$ .

Dans cet exemple, la vitesse de la voiture  $v$  est une variable endogène puisque sa variation  $\dot{v}$  est directement liée à sa propre valeur instantanée  $v$  ainsi qu'aux deux entrées  $\theta_p$  et  $\theta_c$ , qui peuvent survenir et modifier la dynamique de  $\mathcal{S}$ . En effet, en appliquant une méthode de modélisation adéquate (Newton, Lagrange, etc.), il serait possible de développer un modèle mathématique pour les forces spécifiques  $f_r$ ,  $f_a$  et  $f_{f,g}$  de (B.2) liant directement l'évolution de la vitesse de la voiture  $\dot{v}$  à sa valeur instantanée  $v$  ainsi qu'aux angles de la pédale  $\theta_p$  et de la chaussée  $\theta_c$ . Cette dernière grandeur  $\theta_c$  correspond à la composante exogène, puisque l'on émet l'hypothèse que l'évolution  $\dot{\theta}_c$  de la pente de la chaussée n'est pas connue a priori ni modélisée.

Comme expliqué précédemment, le caractère *endogène* ou *exogène* de l'entrée commandable  $\theta_p$  dépend du type d'analyse que l'on désire effectuer. Son caractère ainsi que celui d'une sortie, d'une commande et d'une référence sont abordés à la section 2.2 et illustrés à l'aide de l'exemple de la section B.2.

## B.2 Exemple du régulateur de vitesse d'une voiture comme système de commande

Le régulateur de vitesse (ou *cruise control* en anglais) est un système intégré à toute voiture moderne qui permet de réguler automatiquement la vitesse de la voiture. Son fonctionnement est plutôt simple : à l'aide de boutons, le conducteur programme la vitesse de conduite désirée et le système de régulation se charge de maintenir constante la vitesse du véhicule sans que le conducteur ait à toucher à la pédale d'accélérateur. De fait, la fonction principale du régulateur de vitesse est de corriger la vitesse du véhicule lorsque la pente de la chaussée diminue ou augmente – ce qui entraîne un changement de vitesse en raison de la force gravitationnelle exercée sur la voiture.

Ainsi, on reprend l'exemple de la voiture débuté à la section B.1 en analysant cette fois son régulateur de vitesse en tant que système de commande. On se rappelle que le système est modélisé par (B.2). On suppose d'abord que la voiture est munie d'un système de capteurs  $\mathcal{M}$  mesurant directement la vitesse  $v \in \mathbb{R}$  et l'accélération  $a = f_a(v, \theta_p, \theta_c, \boldsymbol{\varrho}) \in \mathbb{R}$  du véhicule de sorte à fournir les deux mesures  $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^2$  :

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{\varrho}) := \left\{ \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{h}(v, \theta_p, \theta_c, \boldsymbol{\varrho}) = \begin{bmatrix} v & a \end{bmatrix}^\top \right\}. \quad (\text{B.3})$$

On définit ensuite l'objectif  $r \in \mathbb{R}$  de l'opérateur  $\mathcal{O}$  qui est le conducteur du véhicule dans cet exemple :

$$\mathcal{O} := \{r = v_c\} \quad (\text{B.4})$$

où  $v_c \in \mathbb{R}$  est la vitesse commandée (ou désirée) par l'opérateur  $\mathcal{O}$ . En d'autres mots, c'est la vitesse qui est réglée dans le régulateur de vitesse de la voiture par le conducteur.

Enfin, on définit le système  $\mathcal{C}$  du régulateur de vitesse ayant pour tâche de maintenir la vitesse du véhicule  $v$  à une vitesse de référence commandée  $v_c$  par  $\mathcal{O}$  comme suit :

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\varrho})) := \begin{cases} \dot{\xi} = f_{\xi}(v_c, v) = e = v_c - v \\ \theta_p = f_u(\xi, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\varrho})) = k_p(\boldsymbol{\varrho})v + k_i(\boldsymbol{\varrho})\xi + k_d(\boldsymbol{\varrho})a \\ \xi(t_0) = \xi_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

où  $e \in \mathbb{R}$  est l'erreur de suivi entre la vitesse désirée  $v_c$  et la vitesse courante  $v$  du véhicule (l'état  $\xi \in \mathbb{R}$  représente donc l'intégrale temporelle de l'erreur de suivi, ou en d'autres mots, son accumulation) et  $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\varrho}) = [k_p(\boldsymbol{\varrho}) \quad k_i(\boldsymbol{\varrho}) \quad k_d(\boldsymbol{\varrho})]^\top \in \mathbb{R}^3$  représente le vecteur des trois paramètres de conception du contrôleur  $\mathcal{C}$  qui sont généralement fonction des paramètres physiques  $\boldsymbol{\varrho}$  de  $\mathcal{S}^{\text{B.3}}$ . On note également que le régulateur de vitesse  $\mathcal{C}$  suppose que l'accumulation de l'erreur de suivi est nulle au moment où il est mis en marche au temps  $t_0$ .

De ce fait, les grandeurs endogènes de ce problème de commande sont  $v$ ,  $a$  et  $\xi$ , tandis que les grandeurs exogènes sont  $v_c$  et  $\theta_c$ . Comme discuté à la section 2.2, la nature endogène ou exogène de  $\theta_p$  dépend du type d'analyse effectuée (respectivement en BF ou en BO).

L'architecture donnée au contrôleur  $\mathcal{C}$  et définie par les fonctions scalaires  $f_{\xi}$  et  $f_u$  est une architecture classique souvent rencontrée dans la littérature et portant le nom de *retour de sortie avec bouclage intégral* [102–106]. Elle s'apparente à l'architecture du correcteur PID (possédant des actions proportionnelle, intégrale et dérivée), qui demeure à ce jour l'architecture la plus utilisée dans les problèmes de commande [107]. La ressemblance entre ces deux architectures est due au fait que la fonction  $f_u$  de (B.5) reproduit les trois actions du PID en ayant respectivement recours à la vitesse mesurée  $v$ , l'accumulation temporelle de son erreur  $\xi = \int_{t_0}^{t_f} e(t) dt$  et la variation de la vitesse  $\dot{v} = a$ , soit l'accélération. Cela justifie d'ailleurs le choix des indices pour les paramètres (ou gains)  $k_p$ ,  $k_i$  et  $k_d$  du contrôleur  $\mathcal{C}$  en (B.5).

Par exemple, en choisissant bien la valeur donnée à chacun des paramètres  $\boldsymbol{\kappa}$ , il serait possible de faire accélérer automatiquement la voiture de manière à ce qu'elle conserve sa vitesse de

---

B.3. Par exemple, une voiture de masse  $m_v$  plus lourde qu'une autre pourrait avoir des gains  $\boldsymbol{\kappa}(m_v)$  plus grands afin de compenser cette augmentation de masse.

croisière  $v_c$  définie par le conducteur, lorsque survient soudainement une forte pente positive sur la route. Toutefois, la manière (par exemple, lente ou agressive) dont évoluera la vitesse  $v$  afin de rejoindre  $v_c$  dépend des valeurs assignées à  $\kappa$ , de la vitesse initiale du véhicule  $v_0$  où survient le changement de la pente de la chaussée et de la valeur de la pente  $\theta_p$  elle-même. Plusieurs méthodes de synthèse des gains  $k_p$ ,  $k_i$  et  $k_d$  existent afin de trouver le compromis donnant les meilleures performances selon le domaine d'opération considéré pour  $v$  et  $\theta_p$ . Quelques-unes de ces méthodes sont abordées aux sections 2.2.2 et 2.2.3. Une justification plus étoffée de l'importance de ces méthodes y est donnée.

### B.3 Exemple du séquençement des gains d'un régulateur de vitesse de voiture comme problème de séquençement de contrôleurs

On procède à une application pratique inspirée grandement de l'exemple 12.6 présenté dans [29]. On reprend alors l'exemple de la voiture muni d'un régulateur de vitesse (cf. sections B.1 et B.2). On considère le cas spécifique où la voiture roule sur une route parfaitement horizontale, c.-à-d. que l'angle de la chaussée est nul,  $\theta_c = 0$ . La perturbation  $w := \theta_c$  n'est donc pas considérée dans cet exemple. Cet exemple simplifié est illustré à la figure B.2.

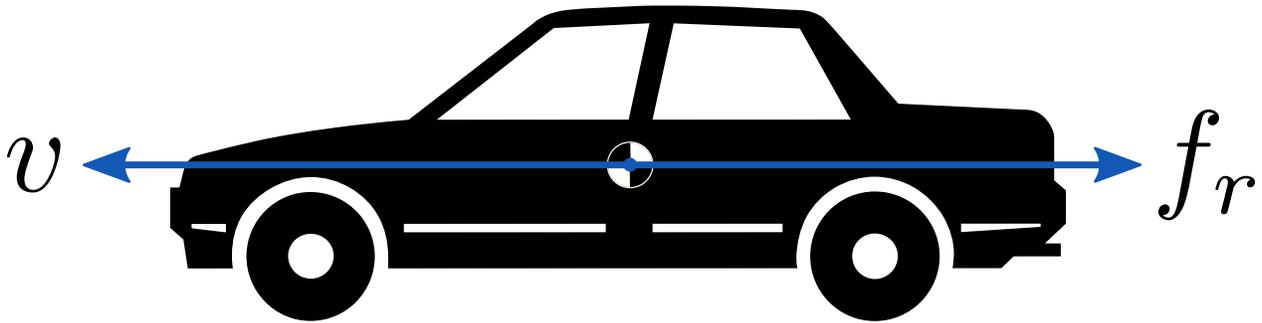


Figure B.2 Grandeurs dynamiques d'une voiture roulant sur une chaussée horizontale

On représente arbitrairement <sup>B.4</sup> le système dynamique d'une voiture en mouvement à partir

---

B.4. À dire vrai, le système dynamique utilisé dans l'exemple 12.6 de [29] ne représente pas exactement la dynamique d'une voiture, mais pour des fins de pédagogie et de continuité avec les exemples abordés précédemment dans ce chapitre, on décide arbitrairement d'imposer et d'accepter l'analogie comme étant plausible. On verra à travers l'exemple que cela est effectivement le cas. Bref, que ça tient la route!

du système non linéaire suivant comprenant désormais deux états :

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\rho}) := \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta_p, \boldsymbol{\rho}) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{f}_r \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan \frac{f_r}{m_v} + c_r v \\ \frac{f_r}{m_v} + \frac{c_a \theta_p}{m_v} \end{bmatrix} \stackrel{\boldsymbol{\rho}}{=} \begin{bmatrix} \tan f_r + v \\ f_r + \theta_p \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = [f_{r_0} \ v_0]^\top \\ \boldsymbol{\rho} = [m_v \ c_r \ c_a]^\top = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} = [f_r \ v]^\top \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

où l'état  $f_r \in \mathbb{R}$  représente la force de traînée exercée sur le véhicule lorsqu'il se déplace, et l'état  $v \in \mathbb{R}$  représente la vitesse du véhicule. On définit les paramètres constants suivants :  $m_v \in \mathbb{R}^*$  représente la masse du véhicule,  $c_r \in \mathbb{R}^*$  représente le coefficient liant la vitesse  $v$  à la variation de la force de traînée  $\dot{f}_r$  et  $c_a \in \mathbb{R}^*$  représente le coefficient liant l'angle de la pédale d'accélérateur  $\theta_p$ , l'entrée  $u$  du système, à la variation de la vitesse du véhicule  $\dot{v}$ . On mentionne également que le terme  $\frac{f_r}{m_v}$  peut être vu comme étant la force spécifique de frottement qui intervient à deux reprises dans  $\dot{\mathbf{x}}$ . Enfin, on effectue l'hypothèse arbitraire que chacun des paramètres compris dans  $\boldsymbol{\rho}$  possède une valeur unitaire, permettant de simplifier les expressions scalaires de  $\mathbf{f}$ .

On décide de paramétrer les valeurs d'équilibre du système de la voiture donné en (B.6) en fonction du paramètre de séquençement à l'équilibre  $\sigma_e \in \mathbb{R}$  qui dans cet exemple correspond uniquement à la vitesse à l'équilibre  $v_e \in \mathbb{R}$  de la voiture,  $\sigma_e := v_e$ . On obtient alors la solution suivante :

$$\mathbf{x}_e(v_e) = \begin{bmatrix} f_{r_e}(v_e) \\ v_e(v_e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\arctan v_e \\ v_e \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$\theta_{p_e}(v_e) = \arctan v_e$$

qui est tout à fait logique pour ce problème appliqué à la dynamique d'une voiture. En effet, pour une vitesse d'équilibre nulle ( $v_e = 0$ ), on obtient une commande en accélération nulle ( $\theta_{p_e} = 0$ ) et aucune force de traînée générée ( $f_{r_e} = 0$ ). De plus, pour une valeur positive de vitesse d'équilibre souhaitée ( $v_e > 0$ ), on obtient également une valeur d'angle de pédale positive ( $\theta_{p_e} > 0$ ) et une force de traînée dans la direction opposée à celle de la vitesse du véhicule ( $f_{r_e} < 0$ ).

On effectue maintenant l'hypothèse qu'il est possible de mesurer directement les deux états du système, soit la force de traînée  $f_r$  de la voiture et sa vitesse  $v$ . Le système de capteurs  $\mathcal{M}$  est donc défini comme suit :

$$\mathcal{M} := \left\{ \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = [f_r \ v]^\top \right\} \quad (\text{B.8})$$

où  $\gamma \in \mathbb{R}^2$  représente les sorties pouvant être utilisées dans le régulateur de vitesse  $\mathcal{C}$ .

L'objectif de l'opérateur  $\mathcal{O}$ , ou du conducteur, est de réguler la vitesse de la voiture  $v$  en émettant une consigne  $v_c \in \mathbb{R}$  agissant alors comme la valeur de référence souhaitée pour la vitesse du véhicule :

$$\mathcal{O} := \{r = v_c\}. \quad (\text{B.9})$$

Le manuel à bord de la voiture révèle que le régulateur de vitesse  $\mathcal{C}$  possède le fonctionnement suivant afin de générer automatiquement la valeur d'angle de la pédale d'accélérateur  $\theta_p \in \mathbb{R}$  en fonction des mesures  $\gamma$  qu'il effectue :

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa}(v_e)) := \begin{cases} \dot{\xi} = f_\xi(v_c, v) = e = v - v_c \\ \theta_p = f_u(\boldsymbol{\kappa}(v_e), \gamma, \xi) = -k_f(v_e)f_r - k_v(v_e)v - k_\xi(v_e)\xi \\ \xi(t_0) = \xi_0 = \frac{-1}{k_\xi(v_{e_0})} (k_f(v_{e_0})f_{r_0} + k_v(v_{e_0})v_0 + \theta_{p_0}) \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

$$\text{avec } \boldsymbol{\kappa}(v_e) = \begin{bmatrix} k_f(v_e) \\ k_v(v_e) \\ k_\xi(v_e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + v_e^2)(3 + v_e^2) + 3 + \frac{1}{1+v_e^2} \\ 3 + v_e^2 \\ \frac{-1}{1+v_e^2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

où  $e = v - v_c$  représente l'erreur de régulation,  $\theta_p$  est l'entrée commandable,  $\xi$  est l'accumulation temporelle de l'erreur de régulation  $e$ , et  $k_f$ ,  $k_v$  et  $k_\xi$  sont les gains respectifs de  $f_r$ ,  $v$  et  $\xi$ , tous contenus dans  $\boldsymbol{\kappa}$ . La valeur initiale de l'état du contrôleur  $\xi_0$  est initialisée de sorte à placer le contrôleur  $\mathcal{C}$  à l'équilibre. On remarque aussi que les gains contenus dans  $\boldsymbol{\kappa}$  sont une fonction non linéaire de la vitesse à l'équilibre de la voiture  $v_e$  qui agit à titre de paramètre de séquençement  $\sigma_e$  pour ces gains. C'est précisément ce séquençement des gains qui rend le contrôleur non linéaire, malgré son architecture classique issue de la commande linéaire. Les gains  $\boldsymbol{\kappa}(v_e)$  de (B.10) ont été choisis par [29] afin de placer arbitrairement – avec la commande modale linéaire basée sur le système linéarisé  $\Delta\mathcal{S}_\ell$  de (B.6) – les trois<sup>B.5</sup> pôles du système en boucle fermée (BF) à  $-1$  et  $-1/2 \pm j\sqrt{3}/2$  pour toutes les vitesses à l'équilibre  $v_e \in \mathbb{R}$ . C'est une manière judicieuse de procéder afin de s'assurer du comportement uniforme du système *linéarisé* en BF dans tout son domaine d'opération.



Mais qu'en est-il du système *non linéaire* en boucle fermée ? Son comportement sera-t-il également uniforme ? Et comment gérer

---

B.5. Deux pôles venant des états du système  $\mathcal{S}$  ( $f_r$  et  $v$ ), puis le troisième issu de l'état du contrôleur  $\mathcal{C}$  ( $\xi$ ).

en temps réel la valeur  $v_e$  de la vitesse du véhicule à l'équilibre dans  $\mathcal{C}$  qui n'existe pas dans les faits ?



En effet, cela constitue la problématique même du séquençement de gains synthétisés à l'aide d'une méthode de commande linéaire, puisque le système  $\mathcal{S}$  est, par sa nature même, dynamique. Il n'est donc généralement pas à l'équilibre. En d'autres mots, la grandeur  $v_e$  – pourtant comprise dans le contrôleur non linéaire (B.10) – n'existe pas. De fait, il existe seulement deux grandeurs se rapprochant de  $v_e$  auxquelles a accès le contrôleur  $\mathcal{C}$  : il s'agit de la consigne de référence  $v_c$  et de la mesure de la vitesse  $v$ . Toutefois, le remplacement de  $v_e$  dans (B.10) par l'une ou l'autre de ces grandeurs ne garantit en rien que les performances assignées au système linéarisé seront les mêmes que pour celles du système non linéaire (B.6). Les sections B.3.1 et B.3.2 présentent respectivement ces deux alternatives où, dans la première, la variable de séquençement exogène  $\sigma := v_c$  est utilisée ; puis, dans la seconde, la variable de séquençement endogène  $\sigma := v$  est plutôt préférée.

Ensuite, la seconde architecture de contrôle, composée d'un nouveau système de capteurs  $\mathcal{M}^*$  et d'un nouveau contrôleur  $\mathcal{C}^*$ , utilisée dans l'approche architecturale précédemment introduite est définie comme suit :

$$\mathcal{M}^* := \left\{ \dot{\gamma} = \mathbf{h}^*(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dot{f}_r & \dot{v} \end{bmatrix}^\top \right\} \quad (\text{B.12})$$

$$\mathcal{C}^*(\boldsymbol{\kappa}(v_e)) := \begin{cases} \dot{\xi} = f_\xi(\boldsymbol{\kappa}(v_e), \dot{\gamma}, v_c) = -k_f(v_e)\dot{f}_r - k_v(v_e)\dot{v} - k_\xi(v_e)(v - v_c) \\ \theta_p = f_u(\xi) = \xi \\ \xi(t_0) = \xi_0 = \theta_{p_0} \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

où l'on remarque que le nouveau système de capteurs  $\mathcal{M}^*$  mesure désormais directement la dérivée des états  $\mathbf{x}$ , soit  $\dot{\gamma} = \dot{\mathbf{x}}$ . De plus, on remarque que le nouveau contrôleur  $\mathcal{C}^*$  possède sensiblement la même forme que l'original. De fait, le seul élément différent consiste en l'emplacement de l'action intégrale dans l'architecture de contrôle qui a été déplacée à la toute fin de la chaîne de contrôle. On note d'ailleurs que le nouveau contrôleur  $\mathcal{C}^*$  utilise les mêmes gains  $\boldsymbol{\kappa}$  que l'ancien  $\mathcal{C}$ . Ce type d'architecture prend le nom de contrôleur basé sur la vitesse ou *velocity-based controller* en anglais. L'architecture spéciale de ce contrôleur a pour effet d'éliminer naturellement par sa forme la dynamique du TCC qui est engendrée par le séquençement de gains (cf. section 2.3). Toutefois, l'architecture du *velocity-based controller* comporte un problème majeur : elle requiert de pouvoir mesurer la dérivée des sorties  $\dot{\gamma}$  qui sont normalement utilisées dans une architecture de contrôle plus classique comme

le contrôleur  $\mathcal{C}$ . Or, dans la pratique, cela s'avère souvent être impossible et nécessite alors d'utiliser des filtres complexes afin d'effectuer des dérivations numériques des mesures  $\gamma$  qui sont généralement bruitées. De fait, la conception de ces filtres vient restreindre davantage le problème de commande et peut devenir un facteur limitant dans l'atteinte de performances optimales pour le système de commande global. Une version améliorée comportant de nouvelles directives concernant la synthèse de ces filtres est présentée dans [108].

Enfin, la dernière approche synthétique consiste à gérer l'effet du TCC engendré par le séquençement de gains directement dans l'étape de synthèse des gains. Cette approche utilise la même structure du contrôleur  $\mathcal{C}$  présentée en (B.10), mais possède les nouveaux gains suivants :

$$\boldsymbol{\kappa}^*(v_e) = \begin{bmatrix} k_f^*(v_e) \\ k_v^*(v_e) \\ k_\xi^*(v_e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 - 0.05v_e + 9.2v_e^2 + 0.001v_e^3 + 1.4v_e^4 \\ 7.6 - 0.03v_e + 7.9v_e^2 \\ -1.2 + 0.003v_e + 0.5v_e^2 - 0.002v_e^3 - 0.07v_e^4 + 0.0001(v_e^5 + v_e^6) \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

qui ont été calculés en utilisant la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée multimodèle pour des vitesses à l'équilibre  $v_e$  discrétisées en 11 points entre 0 et 1 km/min à raison de sauts de 0.1 km/min (soit entre 0 et 60 km/h avec des sauts de 6 km/h). En plus d'aborder directement le problème des effets parasites, la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée multimodèle a entre autres permis d'accomplir les actions suivantes : assigner des dynamiques transitoires en BF différentes à chaque point de synthèse  $v_e$  afin de gérer les zéros à phase non minimale, imposer une dynamique (temps de réponse et dépassement) en BF uniforme pour les pôles à travers tout le domaine de synthèse, ajouter des marges de stabilité en gain et en phase et délimiter le positionnement des pôles en BF dans le domaine fréquentiel. Cela montre alors la grande flexibilité de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée multimodèle par rapport à la synthèse unimodèle utilisée dans les approches naïve et architecturale qui n'effectue qu'un placement de pôles en BF. L'analyse des gains en (B.14) montre qu'une forme polynomiale a été privilégiée pour les fonctions des gains compris dans  $\boldsymbol{\kappa}^*$ . En effet, les gains  $k_f^*$ ,  $k_v^*$  et  $k_\xi^*$  sont respectivement des polynômes d'ordre 4, 2 et 6 avec comme variable indépendante  $v_e$ . Le détail de toutes les étapes ayant mené à la synthèse de ces nouveaux gains est volontairement omis dans cet exemple, puisqu'il constitue l'essence même du chapitre 5.

Les deux prochaines sections présentent l'analyse bidirectionnelle qui est conduite en effectuant des simulations sur le modèle non linéaire  $\mathcal{S}$  de (B.6). Dans un premier temps, les trois approches proposées plus tôt sont comparées lorsque l'on utilise l'entrée exogène  $v_e := v_c$  afin d'effectuer le séquençement de gains. Puis, dans un second temps, la même analyse est effectuée pour ces trois approches, mais en utilisant cette fois l'entrée endogène  $v_e := v$ . Pour

chaque approche étudiée dans le problème de séquençement de contrôleurs, l'architecture et la technique de synthèse des gains correspondantes sont présentées dans le tableau B.1. L'analyse bidirectionnelle est conclue en récapitulant les faits les plus notables.

Tableau B.1 Définition des différentes approches étudiées dans le problème de séquençement de contrôleurs

Approche	Architecture	Synthèse des gains
Naïve	Classique (B.10)	Placement de pôles unimodèle (B.11)
Architecturale	Modifiée (B.13)	Placement de pôles unimodèle (B.11)
Synthétique	Classique (B.10)	$\mathcal{H}_\infty$ structurée multimodèle (B.14)



En résumé, si on réutilise les définitions introduites à la section 2.2.3, la problématique du séquençement de contrôleurs linéarisés consiste à trouver une alternative aux gains synthétisés en fonction des paramètres à l'équilibre, soit  $\kappa_{k,\ell}(\vartheta_{e_{k,\ell}})$ , de manière à ce qu'ils soient exprimés uniquement en fonction des grandeurs réellement disponibles lors de l'implémentation. Les grandeurs disponibles sont celles contenues dans le vecteur  $\varpi$  ; soit l'état du contrôleur  $\xi$ , la référence  $\mathbf{r}$  et la sortie mesurée  $\gamma$ . En faisant ainsi, on peut dès lors exprimer le nouveau jeu de paramètres unique  $\kappa$  en fonction de cette grandeur :  $\kappa(\varpi)$ . Du point de vue de la synthèse linéaire, cela consiste à trouver une fonction  $\mathbf{f}_\kappa$ , généralement non linéaire, permettant d'exprimer le jeu de paramètres  $\kappa_{k,\ell}$  de chaque modèle linéarisé en fonction du jeu de paramètres unique  $\kappa$  et des mesures linéaires qui sont disponibles  $\Delta\varpi_{k,\ell}$  :

$$\kappa_{k,\ell} := \nabla \mathbf{f}_\kappa(\varpi, \kappa) \Big|_{\varpi_{e_{k,\ell}}(\vartheta_{e_{k,\ell}})} \Delta\varpi_{k,\ell} \quad (\text{B.15})$$

où  $\mathbf{f}_\kappa$  est la fonction de séquençement du contrôleur non linéaire  $\mathcal{C}(\varrho, \kappa)$ .

### B.3.1 Séquençement en fonction de variables exogènes

La figure B.3 montre les réponses temporelles obtenues sur le modèle non linéaire utilisé avec la variable de séquençement exogène  $\sigma := v_c$ . On considère le cas où l'opérateur du véhicule  $\mathcal{O}$  part d'une vitesse initiale nulle  $v_0 = 0$  et désire accélérer progressivement jusqu'à atteindre sa vitesse de croisière finale située à  $v_f = 1 \text{ km/min} = 60 \text{ km/h}$ . Pour ce faire, le conducteur décide d'utiliser le régulateur de vitesse de sa voiture en faisant progressivement augmenter sa vitesse à l'aide d'échelons filtrés d'une valeur de  $\Delta v = 0.1 \text{ km/min} = 6 \text{ km/h}$ .

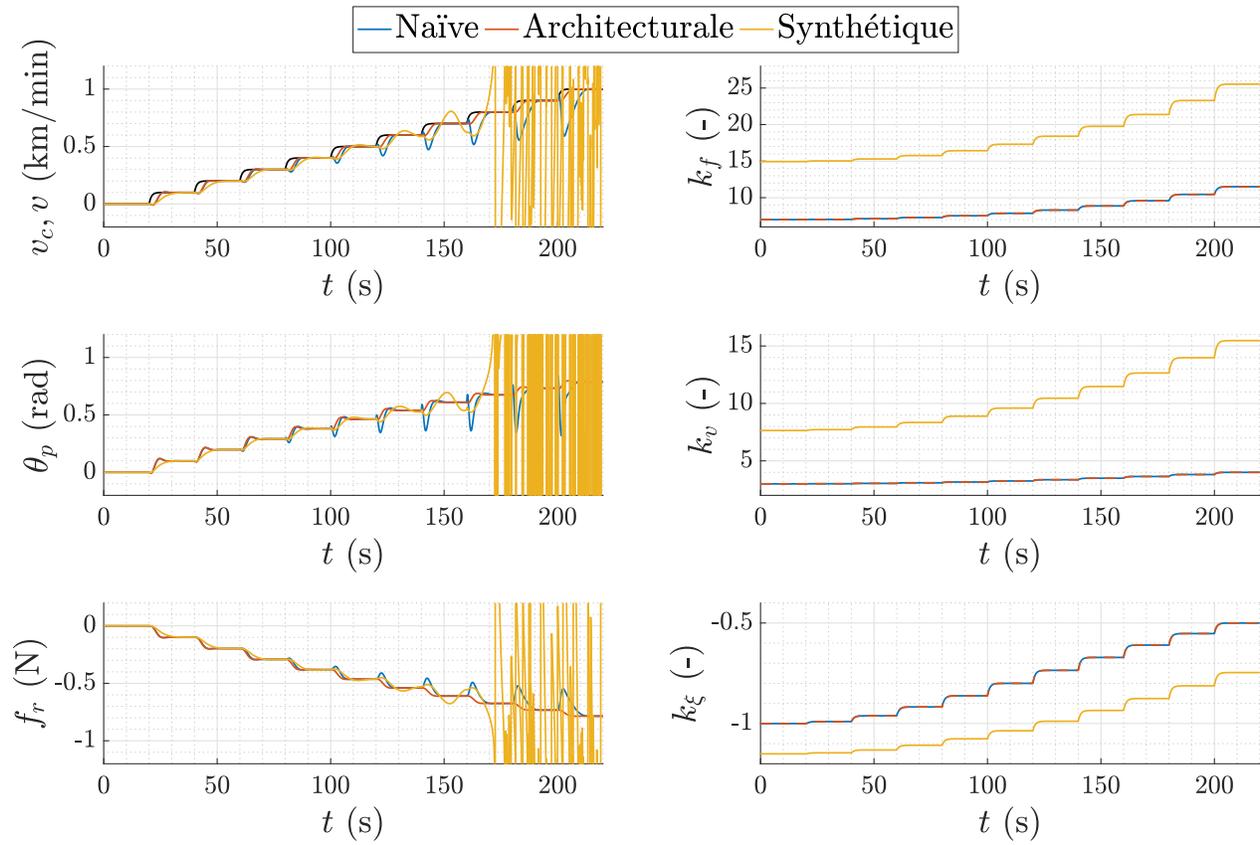


Figure B.3 Réponses temporelles obtenues avec la variable de séquençage exogène  $v_c$

Le côté gauche de la figure montre respectivement dans l'ordre de haut en bas : l'évolution de la vitesse réelle  $v$  par rapport à la consigne de référence filtrée  $v_c$  (représentée en noir) générée par l'opérateur  $\mathcal{O}$ , la commande envoyée au moteur  $\theta_p$  par le régulateur de vitesse  $\mathcal{C}$  et la mesure de la force de traînée  $f_r$  rencontrée par la voiture pendant l'évolution de sa vitesse d'avance. Le côté droit de la figure montre respectivement dans l'ordre de haut en bas : l'évolution de la valeur des trois gains  $k_f$ ,  $k_v$  et  $k_\xi$  utilisés dans le régulateur de vitesse  $\mathcal{C}$ . Les approches naïve, architecturale et synthétique sont respectivement représentées à l'aide des couleurs bleue, rouge et jaune.

L'analyse de la figure B.3 montre d'abord que le suivi de la vitesse  $v$  par rapport à la vitesse commandée  $v_c$  s'effectue parfaitement pour l'approche architecturale. Ceci n'est pas une surprise, puisqu'il a déjà été mentionné que la modification de son architecture permettait d'annuler le TCC. Puis, l'approche naïve montre qu'elle fonctionne initialement aussi bien que l'approche architecturale, mais que les performances se détériorent progressivement à mesure qu'augmente la vitesse  $v$ . Dans les faits, on remarque que cette détérioration de performances survient vers  $v_{critique} = 0.4 \text{ km/min} = 24 \text{ km/h}$ . Il en est de même pour l'approche synthétique dont le contrôleur de vitesse devient totalement instable une fois atteint le plateau de  $v_{instable} = 0.6 \text{ km/min} = 36 \text{ km/h}$ .

De plus, les affirmations présentées au début de la section B.3 sont corroborées : à la vitesse initiale nulle  $v_0 = 0$ , la pédale d'accélérateur est également à un angle nul  $\theta_{p_0} = 0$  et la voiture ne rencontre aucune force de traînée  $f_{r_0} = 0$ . La voiture est donc initialement à un état d'équilibre. Puis, progressivement, en augmentant la vitesse de la voiture, l'angle de la pédale augmente également et la force de traînée rencontrée par la voiture devient également plus grande<sup>B.6</sup>. Le côté droit de la figure montre quant à lui l'évolution continue des gains, rendue possible grâce au filtrage de la commande échelonnée  $v_c$  qui est normalement discontinue pour des entrées de type échelon. On remarque notamment la différence entre les gains synthétisés par placement de pôles à l'aide de la commande modale unimodèle et ceux synthétisés avec la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée à l'aide de la commande robuste multimodèle.

Cette méthode utilisant l'entrée exogène  $v_c$  afin de séquencer les gains qui ont été synthétisés sur plusieurs modèles linéarisés à l'équilibre a notamment été utilisée par [8, 107, 109, 110].

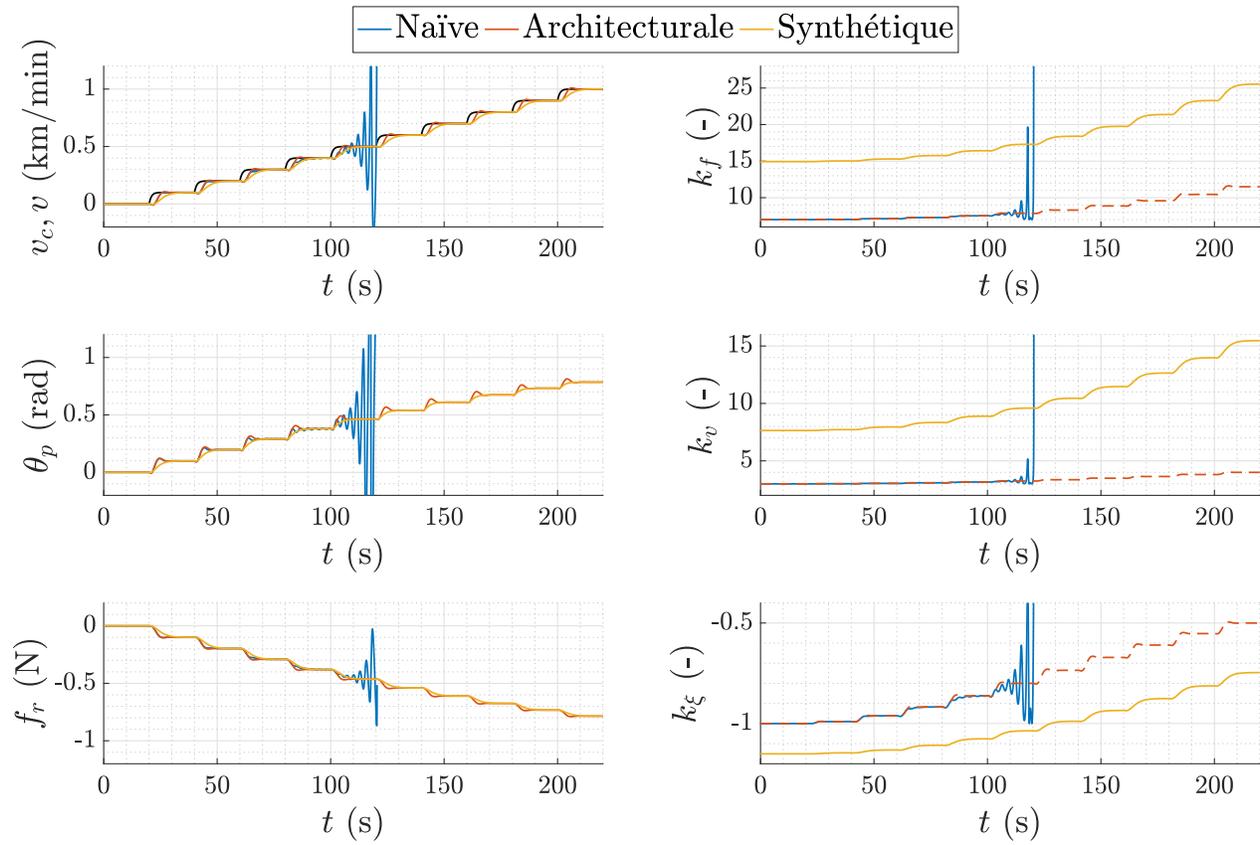


Figure B.4 Réponses temporelles obtenues avec la variable de séquençage endogène  $v$

### B.3.2 Séquencement en fonction de variables endogènes

La figure B.4 montre les réponses temporelles obtenues sur le modèle non linéaire utilisé avec la variable de séquencement endogène  $\sigma := v$ .

L'analyse de la figure B.4 montre d'abord que le suivi de la vitesse  $v$  par rapport à la vitesse commandée  $v_c$  s'effectue parfaitement pour l'approche architecturale. Encore une fois, ceci était attendu pour les raisons déjà mentionnées. Puis, l'approche naïve montre qu'elle fonctionne initialement aussi bien que l'approche architecturale, mais que les performances se détériorent rapidement à mesure qu'augmente la vitesse  $v$ . De fait, on remarque qu'elle devient complètement instable vers la même valeur  $v_{critique}$  précédemment définie. Cependant, cette fois, l'approche synthétique possède de très bonnes performances uniformes tout au long du domaine parcouru en vitesse.

De plus, le côté droit de la figure montre quant à lui l'évolution continue des gains, rendue possible cette fois grâce au séquencement des gains par la variable endogène  $v$  qui est par nature continue ! Si l'on compare les approches architecturale et synthétique, on peut également apprécier l'amélioration des performances en BF. En effet, sur les graphiques situés à gauche, les courbes jaunes montrent que les dépassements retrouvés sur les courbes rouges ont été complètement enlevés dans le processus de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée multimodèle, tout en conservant des temps de réponse à 2 % identiques. Ceci est particulièrement vrai pour l'entrée commandable  $\theta_p$ .

Enfin, une dernière amélioration, quoique très subtile, peut être observée à la figure B.4. Il s'agit de la gestion du zéro à phase non minimale compris dans la dynamique en BF des systèmes linéarisés  $\Delta\mathcal{S}$  qui est donnée par la fonction de transfert suivante [17] :

$$\frac{\Delta v}{\Delta \theta_p}(v_e) = \frac{\frac{-s}{1+v_e^2} + 1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} = \frac{(1 + v_e^2) - s}{(1 + v_e^2)(s^3 + 2s^2 + 2s + 1)}. \quad (\text{B.16})$$

L'analyse de cette fonction de transfert entre l'entrée commandable  $\Delta\theta_p$  et la sortie régulée  $\Delta v$  révèle la présence d'un zéro en  $z = 1 + v_e^2 \in \mathfrak{R}^+$  qui se retrouve du côté positif de l'axe réel dans le plan complexe. Ce zéro à *phase non minimale* a pour effet de créer un dépassement initial dans la direction opposée à celle souhaitée lorsque l'on effectue un changement de vitesse à l'aide d'entrées de type échelon. Ce phénomène particulier, nommé sous-dépassement ou *undershoot* en anglais, peut être observé sur le graphique de la vitesse  $v$  situé dans le coin supérieur gauche où l'on voit, particulièrement dans les premiers instants de la simulation, un

---

B.6. La valeur de la force de traînée  $f_r$  rencontrée par la voiture est négative dans cet exemple, puisque la valeur de la vitesse  $v$  est positive : la force de traînée  $f_r$  s'oppose toujours à la direction de la vitesse  $v$  de la voiture.

léger sous-dépassement rouge au-dessous de la courbe jaune dans les premiers instants transitoires de chaque saut de type échelon. On remarque alors que plus la vitesse augmente, plus le léger sous-dépassement rouge sous la courbe jaune tend à s'effacer. Ce sous-dépassement est dû explicitement à la présence du zéro à phase non minimale compris dans la dynamique en BF de ce transfert particulier. Sa disparition est également annoncée dans l'équation du zéro  $z = 1 + v_e^2$ , puisque sa grandeur croît de manière quadratique avec la vitesse. Ainsi, pour de grandes vitesses, son influence tend à devenir négligeable dû à l'augmentation de sa fréquence naturelle. On note d'ailleurs que ce sous-dépassement est également présent sur la courbe de l'entrée commandable  $\theta_p$ . L'utilisation de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée multimodèle a toutefois permis d'uniformiser le sous-dépassement sur tout le domaine d'opération en imposant explicitement la valeur différente du zéro à phase non minimale dans la dynamique en BF pour chacun des modèles linéarisés<sup>B.7</sup>. Selon l'amplitude de ce sous-dépassement initial agissant vers la direction opposée à celle souhaitée et les critères associés au cahier des charges du problème de commande spécifique au système étudié, cet effet indésirable peut devenir problématique pour la sécurité opérationnelle du système et/ou les performances du système de régulation. La gestion de l'effet indésirable généré par les zéros à phase non minimale par la modification de l'architecture de commande consiste en un problème en soit qui dépasse largement le cadre du travail présenté dans ce mémoire. Il peut toutefois être judicieusement traité lors de la phase de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ . La méthode employée est présentée à l'équation (5.60). Au besoin, le lecteur est invité à consulter les références suivantes : [72–75].

### B.3.3 Bilan des différentes approches de séquençement

Les analyses effectuées dans les sections B.3.1 et B.3.2 ont permis de comparer les performances d'un système de régulation utilisant des gains séquencés et synthétisés à partir de modèles linéarisés lorsqu'on utilise une variable de séquençement exogène, telle une consigne de référence  $\mathbf{r}$ , *versus* lorsqu'on utilise plutôt une variable de séquençement endogène, telle une mesure  $\gamma$ . De plus, pour chacun de ces deux types de variables de séquençement, trois approches différentes ont également été comparées quant à la manière de gérer le séquençement de différents contrôleurs synthétisés sur des modèles linéarisés.

Le récapitulatif des résultats d'analyse de ce problème est présenté au tableau B.2. Sans surprise, on constate d'abord que l'approche architecturale annulant les effets parasites liés au séquençement de contrôleurs obtient deux bons résultats pour chaque type de variable de séquençement. L'approche naïve a obtenu des performances mitigées pour la variable exogène et complètement insatisfaisantes pour la variable endogène. Concernant maintenant

---

B.7. Cette stratégie est d'ailleurs reprise dans le chapitre 5.

Tableau B.2 Récapitulatif des résultats d'analyse du problème de séquençement de gains

Variable de séquençement \ Approche	Naïve	Architecturale	Synthétique
Exogène : $v_c$	☹️	😊	☹️
Endogène : $v$	☹️	😊	😊

l'approche synthétique, elle a également obtenu des performances mitigées pour la variable endogène comme l'approche naïve, mais elle a très bien fonctionné avec la variable endogène.

À travers cet exemple pratique de la régulation de la vitesse d'une voiture, deux effets parasites indésirables, complètement différents et indépendants ont été relevés :

1. **Instabilité du système en BF à l'approche d'un seuil** : cet effet parasite est dû au séquençement même sur le modèle non linéaire de gains ayant été synthétisés à partir de modèles linéarisés, créant alors ce qu'on appelle des *termes de couplage cachés* (TCC) abordés par exemple dans les travaux de [17] ;
2. **Dépassement initial dans la direction contraire à celle souhaitée** : cet effet parasite est dû à la présence de zéros à phase non minimale dans la dynamique naturelle du système, créant alors les dépassements observés aux figures B.3 et B.4.

La compilation dans le tableau B.2 des résultats de chacun des six cas étudiés dans l'analyse bidirectionnelle effectuée aux sections B.3.1 et B.3.2 a permis de retenir trois cas fonctionnels : l'approche architecturale utilisant une variable de séquençement exogène ou endogène, et l'approche synthétique utilisant une variable de séquençement endogène.

De plus, il a été démontré que l'utilisation de la technique de séquençement de gains calculés avec la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée multimodèle, formalisée par [17], permet d'adresser directement, dès la phase de synthèse des gains, les problèmes créés par les deux effets parasites relevés précédemment – sans avoir recours à la modification de l'architecture classique de contrôle (B.10).

Enfin, il a été expliqué que l'architecture modifiée ne constitue pas une solution envisageable en raison des nombreux défis liés à son implémentation.

## ANNEXE C    RAPPELS MATHÉMATIQUES

Cette annexe présente un rappel des définitions mathématiques usuelles rencontrées dans cet ouvrage. En effet, la manipulation d'équations complexes demande l'utilisation d'une nomenclature et d'une notation précises. De plus, la manipulation et la transformation de grandeurs dans divers repères font appel à des définitions rigoureuses. Enfin, quelques équations mathématiques utiles portant sur le quaternion et les dérivées vectorielles sont présentées. La vérification de ces définitions est laissée au lecteur.

### C.1 Nomenclatures, notations et conventions

Cette section présente les différentes nomenclatures et notations adoptées dans cet ouvrage.

#### C.1.1 Ensembles

Sauf indication contraire, tous les ensembles (ou groupes) de nombres sont présentés en utilisant une calligraphie à l'allure hachurée. Voici quelques exemples :

- $\mathbb{N}$  : nombres naturels ;
- $\mathbb{Z}$  : nombres entiers ;
- $\mathbb{Q}$  : nombres rationnels ;
- $\mathbb{R}$  : nombres réels ;
- $\mathbb{I}$  : nombres irrationnels ;
- $\mathbb{C}$  : nombres complexes ;
- $\mathbb{H}$  : nombres hypercomplexes ; en l'occurrence, les quaternions.

De manière générale, les dimensions d'un élément matriciel bidimensionnel  $\mathbf{M}$  (dont la première dimension  $l$  correspond au nombre de lignes de  $\mathbf{M}$  et la seconde dimension  $c$  correspond au nombre de colonnes de  $\mathbf{M}$ ) appartenant à un ensemble  $\mathbb{E}$  s'écrivent en exposant tel que  $\mathbf{M} \in \mathbb{E}^{l \times c}$ . Lorsque la seconde dimension est unitaire, c.-à-d. que  $c = 1$ , la notation  $\mathbf{m} \in \mathbb{E}^l$  est préférée à  $\mathbf{M} \in \mathbb{E}^{l \times 1}$  afin de faire respectivement la différence entre un vecteur et une matrice<sup>C.1</sup>. La notation complète  $\mathbf{M} \in \mathbb{E}^{1 \times c}$  est toutefois conservée afin de définir un *vecteur ligne* (ou bien une matrice possédant qu'une seule ligne, c.-à-d. que  $l = 1$ )<sup>C.2</sup>.

---

C.1. Cf. section C.1.2 pour la notation concernant les différentes grandeurs mathématiques définies dans le cadre de cet ouvrage (scalaire, vecteur, matrice ou ensemble).

C.2. Cf. section C.1.3 pour la convention utilisée dans cet ouvrage concernant la disposition des grandeurs mathématiques dans le cadre du calcul multivariable.

Sauf indication contraire, tous les autres ensembles (ou groupes) – excluant ceux des nombres – sont présentés en utilisant une calligraphie à l’allure manuscrite. Voici quelques exemples :

- $\mathcal{R}$  : repère ;
- $\mathcal{F}$  : famille ;
- $\mathcal{S}$  : système ;
- $\mathcal{C}$  : contrôleur.

De plus, des indices ou exposants peuvent être utilisés afin d’ajouter les sens suivants à tout ensemble de nombres :

- $+$  : est utilisé afin de désigner seulement la partie *positive* de l’ensemble, incluant le zéro (si présent) ;
- $-$  : est utilisé afin de désigner seulement la partie *négative* de l’ensemble, incluant le zéro (si présent) ;
- $*$  : est utilisé afin de désigner que le zéro est exclu de l’ensemble.

On décide que le positionnement de ces symboles ( $+$ ,  $-$  ou  $*$ ) peut changer de manière arbitraire entre un positionnement en indice *versus* en exposant, afin d’alléger parfois la notation. Voici quelques exemples :

- $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}_* = \mathbb{N}_*^1$  : désigne les nombres scalaires naturels *sans* le zéro ;
- $\mathbb{Z}^- = \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z}_-^1$  : désigne les nombres scalaires entiers *négatifs incluant* le zéro ;
- $\mathbb{R}_+^3$  : désigne un vecteur possédant *trois* dimensions dont les composantes scalaires peuvent prendre des valeurs *positives incluant* le zéro ;
- $\mathbb{R}_{*+}^3 = \mathbb{R}_{*+}^3$  : désigne un vecteur possédant trois dimensions dont les composantes scalaires peuvent prendre des valeurs *strictement* positives ;
- $\mathbb{R}_*^- = \mathbb{R}_*^-$  : désigne les nombres réels scalaires *strictement* négatifs.

On note que les nombres représentant la dimension des ensembles sont toujours positionnés en exposant, quitte à placer en indice deux symboles.

### C.1.2 Dimensionnement

Sauf indication contraire, les définitions suivantes prévalent concernant la dimension des grandeurs mathématiques utilisées dans ce mémoire :

- $x$  ou  $\theta$  : scalaire (lettre minuscule en italique ou symbole minuscule) ;
- $X$  ou  $\Theta$  : scalaire ou ensemble (lettre majuscule en italique ou symbole majuscule) ;
- $\mathbf{x}$  ou  $\boldsymbol{\theta}$  : vecteur (lettre droite et minuscule en gras ou symbole minuscule en gras) ;

- **X** ou **Θ** : matrice (lettre droite et majuscule en gras ou symbole majuscule en gras).

De plus, la majorité du temps, un scalaire exprimé par une lettre majuscule en italique telle que  $V$  désigne soit la norme euclidienne associée à son vecteur  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  :

$$V = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \quad (\text{C.1})$$

ou bien le résultat  $S$  de la somme de toutes ses composantes discrétisées  $s_{ij}$  :

$$S = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n s_{ij}. \quad (\text{C.2})$$

On note que l'opérateur « $\cdot$ » en (C.1) représente l'opération du *produit scalaire* qui est définie à la section C.5.1.

### C.1.3 Dispositions en calcul multivariable

Sauf indication contraire, tout vecteur  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  présenté dans cet ouvrage est défini en utilisant la disposition en colonne :

$$\mathbf{a} := \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ \cdots \ a_n]^\top \in \mathbb{R}^n \quad (\text{C.3})$$

où les  $a_i = \{a_i \in \mathbb{R} \mid i \in \{\mathbb{N}^* \cap i \leq n\}\}$  représentent les  $n$  composantes du vecteur  $\mathbf{a}$  et l'opérateur  $(\cdot)^\top$  représente l'opération *transpose*. De plus, la dérivée partielle d'une fonction scalaire  $b(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}$  par rapport à sa variable indépendante vectorielle  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ , notée  $\frac{\partial b}{\partial \mathbf{a}}$ , est développée en utilisant la disposition en ligne :

$$\frac{\partial b}{\partial \mathbf{a}} := \left[ \frac{\partial b}{\partial a_1} \quad \frac{\partial b}{\partial a_2} \quad \frac{\partial b}{\partial a_3} \quad \cdots \quad \frac{\partial b}{\partial a_n} \right] \in \mathbb{R}^{1 \times n}. \quad (\text{C.4})$$

L'opération opposée, soit la dérivée partielle de la fonction vectorielle  $\mathbf{a}(b) \in \mathbb{R}^n$  par rapport

à sa variable indépendante scalaire  $b \in \mathbb{R}$  conserve la disposition en colonne :

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial b} := \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial b} \\ \frac{\partial a_2}{\partial b} \\ \frac{\partial a_3}{\partial b} \\ \vdots \\ \frac{\partial a_n}{\partial b} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{C.5})$$

Une autre opération souvent réalisée est le calcul de la dérivée partielle d'une fonction vectorielle  $\mathbf{a}(\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^n$  par rapport à sa variable indépendante également vectorielle  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  :

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{b}} := \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial b_1} & \frac{\partial a_1}{\partial b_2} & \frac{\partial a_1}{\partial b_3} & \cdots & \frac{\partial a_1}{\partial b_m} \\ \frac{\partial a_2}{\partial b_1} & \frac{\partial a_2}{\partial b_2} & \frac{\partial a_2}{\partial b_3} & \cdots & \frac{\partial a_2}{\partial b_m} \\ \frac{\partial a_3}{\partial b_1} & \frac{\partial a_3}{\partial b_2} & \frac{\partial a_3}{\partial b_3} & \cdots & \frac{\partial a_3}{\partial b_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_n}{\partial b_1} & \frac{\partial a_n}{\partial b_2} & \frac{\partial a_n}{\partial b_3} & \cdots & \frac{\partial a_n}{\partial b_m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}. \quad (\text{C.6})$$

De plus, pour une matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times q}$  :

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2q} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times q} \quad (\text{C.7})$$

où les  $a_{ij} = \{a_{ij} \in \mathbb{R} \mid i \in \{\mathbb{N}^* \cap i \leq p\}, j \in \{\mathbb{N}^* \cap j \leq q\}\}$  représentent les  $pq$  composantes de la matrice  $\mathbf{A}$ , on définit l'opération de la dérivée partielle de la fonction matricielle  $\mathbf{A}(b) \in \mathbb{R}^{p \times q}$  par rapport à sa variable indépendante scalaire  $b \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial b} := \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial b} & \frac{\partial a_{12}}{\partial b} & \frac{\partial a_{13}}{\partial b} & \cdots & \frac{\partial a_{1q}}{\partial b} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial b} & \frac{\partial a_{22}}{\partial b} & \frac{\partial a_{23}}{\partial b} & \cdots & \frac{\partial a_{2q}}{\partial b} \\ \frac{\partial a_{31}}{\partial b} & \frac{\partial a_{32}}{\partial b} & \frac{\partial a_{33}}{\partial b} & \cdots & \frac{\partial a_{3q}}{\partial b} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_{p1}}{\partial b} & \frac{\partial a_{p2}}{\partial b} & \frac{\partial a_{p3}}{\partial b} & \cdots & \frac{\partial a_{pq}}{\partial b} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times q}. \quad (\text{C.8})$$

Puis, on peut également définir son opération inverse, soit la dérivée partielle d'une fonction

scalaire  $b(\mathbf{A}) \in \mathbb{R}$  par rapport à sa variable indépendante matricielle  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times q}$  :

$$\frac{\partial b}{\partial \mathbf{A}} := \begin{bmatrix} \frac{\partial b}{\partial a_{11}} & \frac{\partial b}{\partial a_{12}} & \frac{\partial b}{\partial a_{13}} & \dots & \frac{\partial b}{\partial a_{1q}} \\ \frac{\partial b}{\partial a_{21}} & \frac{\partial b}{\partial a_{22}} & \frac{\partial b}{\partial a_{23}} & \dots & \frac{\partial b}{\partial a_{2q}} \\ \frac{\partial b}{\partial a_{31}} & \frac{\partial b}{\partial a_{32}} & \frac{\partial b}{\partial a_{33}} & \dots & \frac{\partial b}{\partial a_{3q}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial b}{\partial a_{p1}} & \frac{\partial b}{\partial a_{p2}} & \frac{\partial b}{\partial a_{p3}} & \dots & \frac{\partial b}{\partial a_{pq}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times q}. \quad (\text{C.9})$$

Enfin, on définit de manière *arbitraire*<sup>C.3</sup> que la dérivée d'une fonction matricielle  $\mathbf{A}(\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{p \times q}$  par rapport à sa variable indépendante vectorielle  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  est développée en utilisant la disposition en ligne suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{b}} := \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial b_1} & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial b_2} & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial b_3} & \dots & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial b_m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times mq}. \quad (\text{C.10})$$

Ces conventions et notations portant sur le calcul multivariable, aussi appelé *calcul matriciel*, sont expliquées plus en détail dans [111].

#### C.1.4 Projection d'un vecteur dans un repère

On dit qu'un vecteur  $\mathbf{v}$ , caractérisé par une grandeur  $V = \|\mathbf{v}\|$  et une direction  $\mathbf{v}/V$ , est projeté dans un repère  $\mathcal{R}_\square$  lorsque toutes ses composantes sont exprimées à partir de la base vectorielle de  $\mathcal{R}_\square$ . Une fois projeté dans  $\mathcal{R}_\square$ , le vecteur  $\mathbf{v}$  est noté  $\mathbf{v}^\square$ .

## C.2 Repères et changement de repères

La modélisation dynamique d'un corps solide possédant six degrés de liberté (6 DDL) nécessite de définir des repères (ou bases) vectoriels  $\mathcal{R}$  dans lesquels sont projetées les différentes grandeurs vectorielles  $\mathbf{v}$  définissant la nature du système  $\mathcal{S}$ . Souvent, il s'avère utile d'effectuer des transformations en reprojétant un vecteur initialement projeté dans un premier repère  $\mathcal{R}_1$  dans un nouveau repère  $\mathcal{R}_2$ . Ce processus est effectué à l'aide d'une *matrice de rotation*.

---

C.3. On dit *arbitraire*, puisque le calcul de la dérivée partielle d'une matrice par rapport à un vecteur implique un résultant possédant trois dimensions. Toutefois, puisqu'il est impossible de représenter la troisième dimension sur du papier 2D, on décide *arbitrairement* d'apposer la troisième dimension de manière à former un résultat matriciel grandissant dans le sens de la disposition en ligne telle que définie en (C.10).

### C.2.1 Repères

Pour un corps solide à 6 DDL évoluant dans un espace tridimensionnel, six mouvements sont permis : trois en translation et trois en rotation. Ainsi, afin de définir tous ses états (cf. tableau 2.1), il est nécessaire d'utiliser un espace vectoriel appartenant à  $\mathbb{R}^3$ . Par convention et simplicité, la base vectorielle orthonormée directe est souvent retenue :

$$\mathcal{R} := \left\{ O, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (\text{C.11})$$

où  $O$  est l'origine de la base (ou du repère) et les vecteurs  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$  la constituant sont de norme unitaire et orthogonaux deux à deux (base *orthonormée*) et le produit vectoriel de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  donne  $\mathbf{z}$  (base *directe*). En résumé, on a :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{a} = \mathbf{b} \\ 0 & \text{si } \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \end{cases}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} \quad (\text{C.12})$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}.$$

Dans la pratique, trois repères distincts sont souvent utilisés afin de modéliser mathématiquement la dynamique d'un corps solide :

1. Le repère inertiel  $\mathcal{R}_i$  agit à titre de repère absolu où s'appliquent les lois de la physique. Il permet également d'y positionner un objet.
2. Le repère objet  $\mathcal{R}_o$  est rattaché à l'objet positionné dans  $\mathcal{R}_i$ . Il permet notamment de quantifier les forces et moments qui agissent sur l'objet.
3. Le repère aérodynamique  $\mathcal{R}_a$  est similaire à  $\mathcal{R}_o$  dans le sens qu'il est également rattaché à l'objet. La différence est qu'il permet précisément de quantifier les forces et moments *aérodynamiques* qui agissent sur l'objet, puisqu'il est orienté vers le vecteur de vitesse aérodynamique  $\mathbf{v}_a$ .

Le positionnement de l'origine et l'orientation des axes composant chacun de ces repères sont définis au tableau C.1 et une représentation de ceux-ci est fournie à la figure C.1.

Il est à noter qu'il existe plusieurs variantes du repère inertiel  $\mathcal{R}_i$  présenté dans cette section. En effet, selon les phénomènes astraux (rotation de la Terre sur elle-même, révolution de la Terre autour du Soleil, révolution du Soleil autour du centre galactique, etc.) que l'on souhaite prendre en considération dans le modèle dynamique de  $\mathcal{S}$ , il peut s'avérer judicieux d'opter pour un repère inertiel plus complexe. Dans cet ouvrage, on retient le repère  $\mathcal{R}_i$  le plus simple : tous les mouvements astraux sont négligés. Ce repère, communément appelé

repère NED en anglais pour *North East Down*, est également appelé *plan local tangent* en raison de son positionnement par rapport à l'ellipsoïde de référence de la Terre utilisant la norme WGS84 (cf. tableau C.1). L'utilisation du repère inertiel NED demeure valide lorsque la propagation des équations définissant le système  $\mathcal{S}$  s'effectue sur une courte durée et que le déplacement relatif de  $\mathcal{R}_o$  par rapport à  $\mathcal{R}_i$  demeure petit. En d'autres mots, il peut être utilisé lorsque l'on s'intéresse à l'évolution locale de  $\mathcal{R}_o$  par rapport à  $\mathcal{R}_i$ . Un exemple d'application concrète est le vol d'un quadricoptère dans un parc.

Les définitions contenues dans cette annexe sont reprises de [112].

Tableau C.1 Référentiels utilisés afin de définir la dynamique d'un corps solide à 6 DDL

Repère	Composante	Description
Inertiel : $\mathcal{R}_i = \{O_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i\}$	Origine $O_i$	Point arbitraire situé à la surface de la Terre
	Axe $\mathbf{x}_i$	Vecteur orienté vers le Nord géographique
	Axe $\mathbf{y}_i$	Vecteur complétant le trièdre direct et indiquant l'Est géographique
	Axe $\mathbf{z}_i$	Vecteur orienté vers l'intérieur de la Terre et normal à la surface de la Terre
Objet : $\mathcal{R}_o = \{O_o, \mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o\}$	Origine $O_o$	Point situé au CM de l'objet
	Axe $\mathbf{x}_o$	Vecteur orienté vers l'avant, en général selon un plan de symétrie de l'objet
	Axe $\mathbf{y}_o$	Vecteur complétant le trièdre direct et orienté vers le côté droit de l'objet
	Axe $\mathbf{z}_o$	Vecteur orienté vers le ventre de l'objet, dans le plan de symétrie et perpendiculaire à $\mathbf{x}_o$
Aérodynamique : $\mathcal{R}_a = \{O_a, \mathbf{x}_a, \mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a\}$	Origine $O_a$	Point situé au CM de l'objet
	Axe $\mathbf{x}_a$	Vecteur orienté selon le vecteur de la vitesse aérodynamique $\mathbf{v}_a$ de l'objet
	Axe $\mathbf{y}_a$	Vecteur complétant le trièdre direct
	Axe $\mathbf{z}_a$	Vecteur orienté en fonction de l'angle d'attaque $\alpha$ et projeté dans le plan $\mathbf{x}_o$ - $O_o$ - $\mathbf{z}_o$

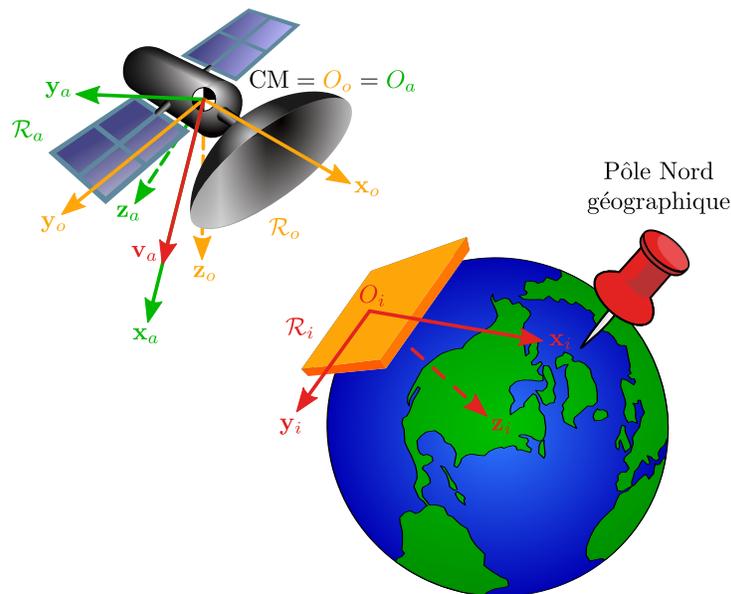


Figure C.1 Référentiels utilisés afin de définir la dynamique d'un corps solide à 6 DDL

### C.2.2 Changement de repères

En utilisant un vecteur de position noté

$$\mathbf{p}_{b/a}^a := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^a \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{C.13})$$

il est possible de déterminer la position linéaire et relative du repère  $\mathcal{R}_b$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_a$ , projetée dans  $\mathcal{R}_a$ ; ces deux repères possédant des positions relatives linéaire et angulaire différentes. Toutefois, comment exprimer une grandeur  $\mathbf{p}_{b/a}$  initialement projetée dans  $\mathcal{R}_a$ , c.-à-d.  $\mathbf{p}_{b/a}^a$ , dans un nouveau repère  $\mathcal{R}_b$ , c.-à-d.  $\mathbf{p}_{b/a}^b$ ? Et plus encore, qu'en est-il du positionnement angulaire et relatif de  $\mathcal{R}_b$  par rapport à  $\mathcal{R}_a$ ?

Pour répondre à cette première question, il est nécessaire de définir la matrice de rotation  $\mathbf{R}_{b/a}$  qui permet de transformer  $\mathbf{p}_{b/a}^a$  en  $\mathbf{p}_{b/a}^b$  :

$$\mathbf{p}_{b/a}^b = \mathbf{R}_{b/a} \mathbf{p}_{b/a}^a \quad (\text{C.14})$$

où la matrice de rotation  $\mathbf{R}_{b/a}$  est définie comme suit :

$$\mathbf{R}_{b/a} := \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b \cdot \mathbf{x}_a & \mathbf{x}_b \cdot \mathbf{y}_a & \mathbf{x}_b \cdot \mathbf{z}_a \\ \mathbf{y}_b \cdot \mathbf{x}_a & \mathbf{y}_b \cdot \mathbf{y}_a & \mathbf{y}_b \cdot \mathbf{z}_a \\ \mathbf{z}_b \cdot \mathbf{x}_a & \mathbf{z}_b \cdot \mathbf{y}_a & \mathbf{z}_b \cdot \mathbf{z}_a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (\text{C.15})$$

où les deux ensembles de vecteurs  $\{\mathbf{x}_a, \mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a\}$  et  $\{\mathbf{x}_b, \mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b\}$  correspondent aux vecteurs composant respectivement les bases orthonormées et directes des repères  $\mathcal{R}_a$  et  $\mathcal{R}_b$  tels que définis à la section C.2.1. On note que toute matrice de rotation  $\mathbf{R}$  appartient au groupe spécial orthogonal  $SO(3)$  défini comme suit :

$$SO(3) := \{ \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{I}_3, \det \mathbf{R} = 1 \}. \quad (\text{C.16})$$

Par conséquent, toute matrice de rotation  $\mathbf{R}$  possède la propriété fondamentale suivante :

$$\mathbf{R}_{b/a}^{-1} = \mathbf{R}_{b/a}^\top = \mathbf{R}_{a/b} \quad (\text{C.17})$$

où  $\mathbf{R}_{a/b}$  permet alors d'effectuer la transformation opposée de  $\mathbf{R}_{b/a}$ .

La réponse à la seconde question, soit la capacité de pouvoir définir la position angulaire relative d'un repère  $\mathcal{R}_b$  par rapport à un autre repère  $\mathcal{R}_a$ , est plus difficile à obtenir, dans la

mesure où il existe plusieurs représentations possibles pour cette position relative. Pour en nommer que quelques-unes :

- **Angles d'Euler** : la position angulaire relative est définie à l'aide de trois paramètres,  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$  appartenant tous à  $\mathbb{R}$ , appelés les *angles d'Euler* ;
- **Axe et angle** : la position angulaire relative est définie à l'aide de quatre paramètres, l'axe  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  et son angle  $\phi_a \in \mathbb{R}$  ;
- **Quaternions** : la position angulaire relative est définie à l'aide de quatre paramètres de manière similaire à la représentation *axe et angle*, mais en utilisant un espace particulier où le quaternion  $\mathbf{q} = [q_0 \ \mathbf{q}_{1:3}^\top]^\top \in \mathbb{H}$  avec  $q_0 \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{q}_{1:3} \in \mathbb{R}^3$  (cf. section C.3) ;
- **DCM (*Direction Cosine Matrix*)** : la position angulaire relative est définie à l'aide de neuf paramètres, en l'occurrence, les composantes de la matrice de rotation  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  définie précédemment.

Chacune de ces représentations possède des avantages (simplicité, nombre de paramètres, manipulation algébrique, etc.) et des inconvénients (singularité, discontinuité, domaine borné, etc.). Le lecteur averti est invité à consulter le chapitre 6 de [82] pour les différentes définitions de ces représentations angulaires. Essentiellement, il suffit de retenir que l'information permettant de retrouver la position angulaire relative d'un repère  $\mathcal{R}_b$  par rapport à un autre repère  $\mathcal{R}_a$  est entièrement contenue dans la matrice de rotation  $\mathbf{R}$ .

À titre d'exemple, la matrice de rotation  $\mathbf{R}_{o/i}$ , représentant le positionnement angulaire relatif du repère objet  $\mathcal{R}_o$  par rapport au repère inertiel  $\mathcal{R}_i$ , paramétrée en fonction des angles d'Euler  $\Phi_{o/i} = [\phi \ \theta \ \psi]^\top$ , s'exprime comme suit [82] :

$$\mathbf{R}_{o/i}(\Phi_{o/i}) := \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & c_\theta s_\psi & -s_\theta \\ s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi c_\theta \\ c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (\text{C.18})$$

où  $c_x := \cos x$  et  $s_x := \sin x$ .

De manière similaire, il est possible d'exprimer les angles d'Euler  $\Phi_{o/i}$  en fonction de la matrice de rotation  $\mathbf{R}_{o/i}$  comme suit [82] :

$$\Phi_{o/i}(\mathbf{R}_{o/i}) := \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan2(r_{23}, r_{33}) \\ -\arcsin(r_{13}) \\ \arctan2(r_{12}, r_{11}) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.19})$$

Le changement de représentation angulaire  $\mathbf{R}_{o/i} \rightarrow \Phi_{o/i}$  entraîne une perte d'information.

### C.3 Quaternions

Comme discuté à la section C.2.2, l'utilisation d'un quaternion  $\mathbf{q}_{b/a}$  est une autre façon de représenter la position angulaire relative d'un repère  $\mathcal{R}_b$  par rapport à un autre repère  $\mathcal{R}_a$ . De manière générale, un quaternion  $\mathbf{q}$  est défini comme suit [82] :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_{1:3} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{H} \quad \text{où} \quad \mathbb{H} = \left\{ \mathbf{q} \mid \mathbf{q}^\top \mathbf{q} = 1, q_0 \in \mathbb{R}, \mathbf{q}_{1:3} \in \mathbb{R}^3 \right\}. \quad (\text{C.20})$$

On définit également le conjugué  $\bar{\mathbf{q}}$  du quaternion  $\mathbf{q}$  :

$$\text{conj}(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{q}} := \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix}^\top, \quad (\text{C.21})$$

sa norme  $\|\mathbf{q}\|$  :

$$\|\mathbf{q}\| = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} := q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \quad (\text{C.22})$$

et son inverse  $\mathbf{q}^{-1}$  :

$$\mathbf{q}^{-1} := \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|}. \quad (\text{C.23})$$

L'avantage principal du quaternion est qu'il permet d'exprimer la matrice de rotation et la cinématique en rotation sans utiliser de fonctions trigonométriques. En effet, pour un quaternion  $\mathbf{q}_{o/i}$  exprimant la position angulaire relative d'un repère objet  $\mathcal{R}_o$  par rapport à un repère inertiel  $\mathcal{R}_i$ , on obtient la matrice de rotation  $\mathbf{R}_{o/i}$  équivalente suivante :

$$\mathbf{R}_{o/i}(\mathbf{q}_{o/i}) := \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_0q_2 - q_1q_3) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_0q_1 - q_2q_3) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.24})$$

La relation inverse est donnée par [113] :

$$\mathbf{q}_{o/i}(\mathbf{R}_{o/i}) = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}} \\ \text{signe}^*(r_{23} - r_{32})\sqrt{1 + r_{11} - r_{22} - r_{33}} \\ \text{signe}^*(r_{31} - r_{13})\sqrt{1 - r_{11} + r_{22} - r_{33}} \\ \text{signe}^*(r_{12} - r_{21})\sqrt{1 - r_{11} - r_{22} + r_{33}} \end{bmatrix} \quad (\text{C.25})$$

où  $\text{signe}^*(x) := \begin{cases} +1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$

où la fonction  $\text{signe}^*(x)$  est une variante spéciale de la fonction plus communément utilisée  $\text{signe}(x) = +1$  si  $x > 0$ ,  $0$  si  $x = 0$  et  $-1$  sinon.

L'évolution de la cinématique en rotation exprimée à l'aide du quaternion est, quant à elle, donnée par (cf. tableau 2.1) :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_{o/i} &= \mathbf{\Omega}(\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o) \mathbf{q}_{o/i} \\ \text{où } \mathbf{\Omega}(\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o) &:= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

## C.4 Dérivation d'un vecteur

Cette section aborde deux concepts importants par rapport à la dérivation vectorielle. Dans un premier temps, la section C.4.1 aborde la dérivation d'un vecteur par rapport au temps. Dans un second temps, la section C.4.2 aborde la dérivation d'un même vecteur dans des repères distincts.

### C.4.1 Dérivation par rapport au temps

La dérivée d'un vecteur physique  $\mathbf{v}$  par rapport au temps  $t$ , notée

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

dépend du point de vue de l'observateur qui observe l'évolution temporelle de ladite grandeur  $\mathbf{v}$ . En d'autres mots, cela signifie que l'évolution dépend du repère  $\mathcal{R}$  depuis lequel est effectuée son observation. Ainsi, on définit toujours la dérivée temporelle d'un vecteur  $\mathbf{v}$  par rapport au repère de dérivation  $\mathcal{R}_{\square}$ , dont l'opération adopte la nomenclature suivante :

$$\square \dot{\mathbf{v}}.$$

### C.4.2 Dérivation dans des repères distincts

Pour un repère fixe, en l'occurrence le repère inertiel  $\mathcal{R}_i$ , et un repère mobile, en l'occurrence le repère objet  $\mathcal{R}_o$ , l'équation de Coriolis stipule que la dérivée temporelle d'un vecteur  $\mathbf{v}$  par rapport à un repère fixe  $\mathcal{R}_i$  peut être reliée directement à la dérivée temporelle du même

vecteur par rapport à un second repère mobile  $\mathcal{R}_o$  :

$${}^i\dot{\mathbf{v}} = {}^o\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega}_{o/i} \times \mathbf{v} \quad (\text{C.27})$$

où le vecteur  $\boldsymbol{\omega}_{o/i}$  représente la vitesse de rotation angulaire instantanée du repère mobile  $\mathcal{R}_o$  par rapport au repère fixe  $\mathcal{R}_i$ . L'équation (C.27) est très utile à la modélisation dynamique. En effet, en partant de la seconde loi de Newton appliquée dans le repère inertiel  $\mathcal{R}_i$  :

$$\mathbf{f}_\Sigma^i = m \mathbf{a}_{o/i}^i = m {}^i\dot{\mathbf{v}}_{o/i}^i \quad (\text{C.28})$$

où le vecteur  $\mathbf{f}_\Sigma^i$  représente la somme des forces appliquées au centre de masse (CM) du corps solide de masse  $m$  qui possède une accélération linéaire  $\mathbf{a}_{o/i}^i$  et une vitesse linéaire  $\mathbf{v}_{o/i}^i$  relatives de  $\mathcal{R}_o$  par rapport à  $\mathcal{R}_i$  (tous ces vecteurs étant projetés et dérivés dans  $\mathcal{R}_i$ ), il est possible de reprojeter (C.28) dans  $\mathcal{R}_o$  :

$$\mathbf{f}_\Sigma^o = m \mathbf{a}_{o/i}^o = m {}^i\dot{\mathbf{v}}_{o/i}^o. \quad (\text{C.29})$$

Si on projette maintenant (C.27) dans  $\mathcal{R}_o$ , on obtient :

$${}^i\dot{\mathbf{v}}_{o/i}^o = {}^o\dot{\mathbf{v}}_{o/i}^o + \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \times \mathbf{v}_{o/i}^o \quad (\text{C.30})$$

qui peut être réinjectée dans (C.29) de manière à obtenir :

$$\mathbf{f}_\Sigma^o = m \left( {}^o\dot{\mathbf{v}}_{o/i}^o + \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \times \mathbf{v}_{o/i}^o \right) \quad (\text{C.31})$$

qui constitue l'équation vectorielle principale à la modélisation de la dynamique en translation de tout corps solide dont la résultante des forces appliquées en son CM est projetée dans son repère objet  $\mathcal{R}_o$ .

De manière analogue, mais en partant cette fois du théorème du moment cinétique, il est possible d'obtenir l'équation vectorielle principale à la modélisation de la dynamique en rotation de tout corps solide dont la résultante des moments appliqués en son CM est projetée dans son repère objet  $\mathcal{R}_o$  :

$$\mathbf{m}_\Sigma^o = \mathbf{I}^o {}^o\dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i}^o + \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \times \left( \mathbf{I}^o \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \right) \quad (\text{C.32})$$

où le vecteur  $\mathbf{m}_\Sigma^o$  représente la somme des moments appliqués au centre de masse (CM) du corps solide dont le tenseur d'inertie  $\mathbf{I}^o$  est calculé dans  $\mathcal{R}_o$  et dont l'objet possède une accélération angulaire  ${}^o\dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i}^o$  et une vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o$  relatives de  $\mathcal{R}_o$  par rapport à  $\mathcal{R}_i$

(tous ces vecteurs étant désormais projetés et dérivés dans  $\mathcal{R}_o$ ).

On note également les propriétés suivantes pour le vecteur de vitesse de rotation instantanée reliant la dérivée d'un vecteur pris dans deux repères différents :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{2/1} &= -\boldsymbol{\omega}_{1/2} \\ \boldsymbol{\omega}_{3/1} &= \boldsymbol{\omega}_{3/2} + \boldsymbol{\omega}_{2/1} \\ {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_{2/1} &= {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_{2/1}\end{aligned}\tag{C.33}$$

où interviennent les trois repères  $\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_2$  et  $\mathcal{R}_3$ .

Les définitions contenues dans cette section sont reprises de [112].

## C.5 Opérations

Cette section définit certaines opérations (ainsi que leur notation) inhabituelles qui sont utilisées dans le cadre de ce mémoire.

### C.5.1 Produit scalaire

Pour deux vecteurs  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  et  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  exprimés dans le même repère tridimensionnel, orthonormé et direct  $\mathcal{R}$ , l'opération du *produit scalaire* de  $\mathbf{a}$  avec  $\mathbf{b}$  donne  $c \in \mathbb{R}$  :

$$c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := \sum_{k=1}^3 a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\tag{C.34}$$

pour lequel on note les propriétés suivantes :

$$c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^\top \mathbf{b} = \mathbf{b}^\top \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta\tag{C.35}$$

où  $\theta$  est l'angle formé entre la direction des vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ , puis l'opération  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne telle que définie en (C.1).

### C.5.2 Produit vectoriel

Sans rentrer dans aucun détail, les résultats importants de [82] sont présentés ici<sup>C.4</sup>.

Pour deux vecteurs  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  et  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  exprimés dans le même repère tridimensionnel, ortho-

---

C.4. Cf. section 6.1.3 *Cross Product*.

normé et direct  $\mathcal{R}$ , l'opération du *produit vectoriel* de  $\mathbf{u}$  avec  $\mathbf{v}$  donne  $\mathbf{w}$  :

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = [\mathbf{u}]_{\times} \mathbf{v} = -[\mathbf{v}]_{\times} \mathbf{u} \quad (\text{C.36})$$

où pour un vecteur  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ , l'opération  $[\cdot]_{\times}$  sur  $\mathbf{r}$  définit la matrice antisymétrique suivante :

$$[\mathbf{r}]_{\times} := \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}. \quad (\text{C.37})$$

Comme l'indique (C.36), on note que le produit vectoriel est une opération non commutative.

### C.5.3 Dérivées vectorielles

Ici, deux résultats de [114] issus de l'algèbre vectorielle sont présentés. Plus précisément, il s'agit de dérivées vectorielles utilisées dans le processus de linéarisation présenté à la section F.2.3.

Pour un premier vecteur  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ , la dérivée de sa norme par rapport à lui-même donne :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( \|\mathbf{v}\|_2 \right) = \frac{\mathbf{v}^{\top}}{\|\mathbf{v}\|_2} = \hat{\mathbf{v}}^{\top}, \quad \forall \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \quad (\text{C.38})$$

où  $\hat{\mathbf{v}}$  représente le vecteur unitaire de  $\mathbf{v}$ .

Pour un second vecteur  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  n'étant pas fonction de  $\mathbf{v}$ , on obtient le résultat suivant :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( [\mathbf{v}]_{\times} \mathbf{u} \right) = -[\mathbf{u}]_{\times} \quad (\text{C.39})$$

où  $[\mathbf{u}]_{\times} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  représente la matrice antisymétrique associée au vecteur  $\mathbf{u}$  telle que définie en (C.37).

### C.5.4 Produit de Kronecker

L'opérateur  $\otimes$  représente l'opération du produit de Kronecker. Pour des matrices  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ , il est défini comme suit :

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} := \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \quad (\text{C.40})$$

pour lequel la matrice résultante possède entre autres la propriété suivante :  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}$ .

### C.5.5 Produit de Hadamard

L'opérateur  $\odot$  désigne l'opération du produit de Hadamard qui est également connue sous l'appellation du produit de Schur. Cette opération consiste en la multiplication terme à terme des coefficients de deux matrices de mêmes dimensions.

Pour des matrices de mêmes dimensions  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , le produit de Hadamard est défini comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \odot \mathbf{B} &:= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

où l'on note que la matrice  $\mathbf{C}$  qui résulte de cette opération est de mêmes dimensions que les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  ayant composé son produit de Hadamard. D'ailleurs, on précise que cette opération n'est pas définie pour deux matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  de dimensions différentes.

### Puissance de Hadamard

On note qu'il est possible d'étendre le résultat du produit de Hadamard à l'opération d'exponentiation afin de définir la puissance de Hadamard.

Pour une matrice  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{p \times q}$  et un scalaire  $k \in \mathbb{R}$ , la puissance de Hadamard est définie comme suit :

$$\mathbf{X}^{\odot k} := \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1q} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pq} \end{bmatrix}^{\odot k} = \begin{bmatrix} x_{11}^k & x_{12}^k & \cdots & x_{1q}^k \\ x_{21}^k & x_{22}^k & \cdots & x_{2q}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1}^k & x_{p2}^k & \cdots & x_{pq}^k \end{bmatrix} = \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{p \times q} \quad (\text{C.42})$$

où l'on note que la matrice  $\mathbf{Y}$  qui résulte de cette opération est de mêmes dimensions que la matrice  $\mathbf{X}$ .

### C.5.6 Gradient d'une fonction vectorielle et dérivée directionnelle

#### Gradient d'une fonction vectorielle

L'opérateur  $\nabla$  représente l'opération ayant pour but de calculer le *gradient d'une fonction vectorielle*  $\mathbf{f}(\boldsymbol{\vartheta}) \in \mathbb{R}^n$  où  $\boldsymbol{\vartheta}$  est le vecteur de la variable indépendante de  $\mathbf{f}$ . Pour un vecteur  $\boldsymbol{\vartheta} \in \mathbb{R}^{n+m+v}$  constitué de trois sous-vecteurs  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  et  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^v$  :

$$\boldsymbol{\vartheta} := \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m+v}, \quad (\text{C.43})$$

on obtient donc que la fonction vectorielle  $\mathbf{f}$  est également dépendante des sous-vecteurs  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{w}$  telle que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$ . Le gradient de  $\mathbf{f}(\boldsymbol{\vartheta})$  est ainsi donné par :

$$\nabla \mathbf{f}(\boldsymbol{\vartheta}) := \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{w}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n+m+v)} \quad (\text{C.44})$$

où l'on note que le gradient  $\nabla \mathbf{f}$  est une matrice de dimensions  $n \times (n + m + v)$ . L'opération du calcul des dérivées partielles de deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{b}}$ , a été définie en (C.6).

#### Dérivée directionnelle

De plus, pour un vecteur  $\Delta \boldsymbol{\vartheta} \in \mathbb{R}^{n+m+v}$  rassemblant les vecteurs  $\Delta \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Delta \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  et  $\Delta \mathbf{w} \in \mathbb{R}^v$  :

$$\Delta \boldsymbol{\vartheta} := \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{w} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m+v}, \quad (\text{C.45})$$

on peut définir la *dérivée directionnelle* de la fonction vectorielle  $\mathbf{f}$  au point  $\boldsymbol{\vartheta}$  par rapport à la direction de  $\Delta \boldsymbol{\vartheta}$  comme suit :

$$\nabla_{\Delta \boldsymbol{\vartheta}} \mathbf{f}(\boldsymbol{\vartheta}) := \nabla \mathbf{f}(\boldsymbol{\vartheta}) \Delta \boldsymbol{\vartheta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{w}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{w} \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{w}} \Delta \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{C.46})$$

où l'on note que la dérivée directionnelle  $\nabla_{\Delta \boldsymbol{\vartheta}} \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur de dimension  $n$ .

## ANNEXE D ÉQUIVALENCE DES THÉORIES $\pi$ ET $\phi$

Cette annexe a pour but d'expliciter le lien direct qui existe entre les théories  $\pi$  et  $\phi$  utilisées pour la modélisation des forces et des moments aérodynamiques d'un profil d'aile de dimensions finies. Ces deux théories ont respectivement été présentées aux sections 3.2 et 3.3. Plus précisément, cette annexe démontre comment obtenir les  $\phi$ -coefficients  $\Phi_{fv}^o$ ,  $\Phi_{f\omega}^o$ ,  $\Phi_{mv}^o$  et  $\Phi_{m\omega}^o$  à partir des  $\pi$ -coefficients de la théorie classique de Buckingham.

De plus, pour le cas particulier des forces aérodynamiques dues aux vitesses linéaires aérodynamiques, on montre comment l'application de la théorie des profils minces permet d'obtenir une modélisation très simple de départ pour l'ingénieur-automaticien.

Les résultats principaux présentés dans cette section sont tirés de [8] et [9]. Certaines étapes et explications supplémentaires sont ajoutées afin de clarifier la démarche.

### D.1 Forces aérodynamiques dues aux vitesses linéaires aérodynamiques

Cette section présente la relation entre les  $\pi$ -coefficients aérodynamiques ( $C_D$ ,  $C_C$  et  $C_L$ ) et la matrice des  $\phi$ -coefficients aérodynamiques  $\Phi_{fv}^o$  générant les forces aérodynamiques dues aux vitesses linéaires aérodynamiques.

Tel qu'énoncé en (3.2), la  $\pi$ -théorie permet de modéliser les forces aérodynamiques  $\mathbf{f}_a^a \in \mathbb{R}^3$  dans  $\mathcal{R}_a$  comme suit :

$$\mathbf{f}_a^a = \frac{1}{2}\rho_0 V_a^2 S \mathbf{c}_a^a \quad (\text{D.1})$$

que l'on peut exprimer dans  $\mathcal{R}_o \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  en utilisant la matrice de transformation  $\mathbf{R}_{o/a}$  effectuant le changement de repère  $\mathcal{R}_a \rightarrow \mathcal{R}_o$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a^o &= \mathbf{R}_{o/a} \mathbf{f}_a^a \\ &= \frac{1}{2}\rho_0 V_a^2 S \mathbf{R}_{o/a} \mathbf{c}_a^a. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Ainsi, en reprenant seulement le premier terme de (E.7) associé aux forces dues aux vitesses linéaires aérodynamiques  $\mathbf{v}_a^o$  et en adoptant les hypothèses présentées à la section E.1, on obtient la formulation équivalente en utilisant la  $\phi$ -théorie :

$$\mathbf{f}_{a,fv}^o = -\frac{1}{2}\rho_0 V_a S \Phi_{fv}^o \mathbf{v}_a^o. \quad (\text{D.3})$$

En posant l'équivalence entre (D.2) et (D.3), on obtient :

$$\begin{aligned} -V_a \mathbf{R}_{o/a} \mathbf{c}_a^a &= \mathbf{\Phi}_{fv}^o \mathbf{v}_a^o \\ -\mathbf{c}_a^a &= \mathbf{R}_{a/o} \mathbf{\Phi}_{fv}^o \frac{\mathbf{v}_a^o}{V_a} \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

où  $\mathbf{R}_{a/o} = \mathbf{R}_{o/a}^{-1} = \mathbf{R}_{o/a}^\top$ . On poursuit en développant le dernier terme pour le cas longitudinal où  $\beta = 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{v}_a^o}{V_a} &= \frac{1}{V_a} \mathbf{R}_{o/a} \mathbf{v}_a^a \\ &= \frac{1}{V_a} \begin{bmatrix} c_\alpha & 0 & -s_\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\alpha & 0 & c_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^a \\ &= \begin{bmatrix} c_\alpha & 0 & s_\alpha \end{bmatrix}^{o\top}. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Puis, toujours pour le cas longitudinal, on développe (D.4) avec le résultat trouvé en (D.5) :

$$\begin{aligned} - \begin{bmatrix} -C_D \\ 0 \\ -C_L \end{bmatrix}^a &= \begin{bmatrix} c_\alpha & 0 & s_\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\alpha & 0 & c_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{fv}^{11} & 0 & \phi_{fv}^{13} \\ 0 & \phi_{fv}^{22} & 0 \\ \phi_{fv}^{13} & 0 & \phi_{fv}^{33} \end{bmatrix}^o \begin{bmatrix} c_\alpha \\ 0 \\ s_\alpha \end{bmatrix}^o \\ \begin{bmatrix} C_D \\ 0 \\ C_L \end{bmatrix}^a &= \begin{bmatrix} \phi_{fv}^{11} c_\alpha^2 + 2\phi_{fv}^{13} c_\alpha s_\alpha + \phi_{fv}^{33} s_\alpha^2 \\ 0 \\ \phi_{fv}^{13} c_\alpha^2 + (\phi_{fv}^{33} - \phi_{fv}^{11}) c_\alpha s_\alpha - \phi_{fv}^{13} s_\alpha^2 \end{bmatrix}^a \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

où la matrice  $\mathbf{\Phi}_{fv}^o$  a été simplifiée pour le cas du vol longitudinal :

- $\phi_{fv}^{12} = \phi_{fv}^{23} = 0$  : en raison de la symétrie de part et d'autre du plan  $\mathbf{x}_o$ - $O_o$ - $\mathbf{z}_o$  qui fait en sorte qu'aucune force latérale n'est générée en vol longitudinal ;
- $\phi_{fv}^{ij} = \phi_{fv}^{ji} \forall \{i, j\} \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$  : en raison de la propriété  $\mathbf{\Phi}_a^o > 0$  imposant alors une symétrie dans ses sous-matrices par bloc  $\mathbf{\Phi}_{fv}^o$ ,  $\mathbf{\Phi}_{f\omega}^o$ ,  $\mathbf{\Phi}_{mv}^o$  et  $\mathbf{\Phi}_{m\omega}^o$ .

On note que la force aérodynamique de travers reliée au coefficient  $C_C$  n'est pas considérée dans le cas longitudinal – d'où l'identité triviale retrouvée sur la deuxième ligne. La modélisation de cette grandeur est réintroduite dans le résultat final de manière simplifiée.

Sachant que  $c_\alpha^2 + s_\alpha^2 = 1$ , on réécrit (D.6) :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C_D(\alpha) \\ C_L(\alpha) \end{bmatrix}^a &= \begin{bmatrix} c_\alpha^2(\phi_{fv}^{11} - \phi_{fv}^{33}) + \phi_{fv}^{33} + 2\phi_{fv}^{13}c_\alpha s_\alpha \\ 2c_\alpha^2\phi_{fv}^{13} - \phi_{fv}^{13} + (\phi_{fv}^{33} - \phi_{fv}^{11})c_\alpha s_\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \phi_{fv}^{11} - \phi_{fv}^{33} & 2\phi_{fv}^{13} \\ 2\phi_{fv}^{13} & \phi_{fv}^{33} - \phi_{fv}^{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\alpha^2 \\ c_\alpha s_\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{fv}^{33} \\ -\phi_{fv}^{13} \end{bmatrix}^a \end{aligned} \quad (D.7)$$

qui en utilisant l'identité trigonométrique de la formule de l'angle double :

$$\begin{bmatrix} c_\alpha^2 \\ c_\alpha s_\alpha \end{bmatrix}^a = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) + 1 \\ \sin(2\alpha) \end{bmatrix}^a \quad (D.8)$$

permet de réécrire (D.7) comme :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C_D(\alpha) \\ C_L(\alpha) \end{bmatrix}^a &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \phi_{fv}^{11} - \phi_{fv}^{33} & 2\phi_{fv}^{13} \\ 2\phi_{fv}^{13} & \phi_{fv}^{33} - \phi_{fv}^{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) + 1 \\ \sin(2\alpha) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{fv}^{33} \\ -\phi_{fv}^{13} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_{fv}^{11} - \phi_{fv}^{33} & 2\phi_{fv}^{13} \\ 2\phi_{fv}^{13} & \phi_{fv}^{33} - \phi_{fv}^{11} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_\phi = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{\phi 1} & \mathbf{a}_{\phi 2} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_{fv}^{11} + \phi_{fv}^{33} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_\phi}. \end{aligned} \quad (D.9)$$

On poursuit la démarche en dérivant (D.9) par rapport à  $\alpha$  afin de faire apparaître les dérivées des  $\pi$ -coefficients évaluées en  $\alpha = 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \begin{bmatrix} C_D(\alpha) \\ C_L(\alpha) \end{bmatrix}^a \right)_{\alpha=0} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \mathbf{A}_\phi \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) \end{bmatrix} + \mathbf{b}_\phi \right)_{\alpha=0} \\ \begin{bmatrix} C_{D\alpha}(\alpha) \\ C_{L\alpha}(\alpha) \end{bmatrix}^a_{\alpha=0} &= 2\mathbf{A}_\phi \begin{bmatrix} -\sin(2\alpha) \\ \cos(2\alpha) \end{bmatrix}_{\alpha=0} \\ \begin{bmatrix} C_{D\alpha}(0) \\ C_{L\alpha}(0) \end{bmatrix}^a &= 2\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \phi_{fv}^{11} - \phi_{fv}^{33} & 2\phi_{fv}^{13} \\ 2\phi_{fv}^{13} & \phi_{fv}^{33} - \phi_{fv}^{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\phi_{fv}^{13} \\ \phi_{fv}^{33} - \phi_{fv}^{11} \end{bmatrix}^a. \end{aligned} \quad (D.10)$$

Or, selon la  $\pi$ -théorie, pour un profil aérodynamique mince et symétrique, on sait que :

$$\begin{aligned} C_{D\alpha}(0) &= 0 \\ C_{L\alpha}(0) &= C_{L\alpha}(\alpha) = C_{L\alpha} = 2\pi \end{aligned} \quad (D.11)$$

permettant ainsi d'obtenir de (D.10) et (D.11) les relations suivantes entre les  $\pi$ -coefficients et les  $\phi$ -coefficients :

$$\begin{aligned}\phi_{fv}^{13} &= 0 \\ \phi_{fv}^{33} &= C_{L\alpha} + \phi_{fv}^{11}.\end{aligned}\tag{D.12}$$

On poursuit en évaluant (D.9) en  $\alpha = 0$  en considérant cette fois les nouvelles identités trouvées en (D.12) :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} C_D(0) \\ C_L(0) \end{bmatrix}^a &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \phi_{fv}^{11} - \phi_{fv}^{33} & 0 \\ 0 & \phi_{fv}^{33} - \phi_{fv}^{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \phi_{fv}^{11} + \phi_{fv}^{33} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C_{D_0} \\ C_{L_0} \end{bmatrix}^a &= \begin{bmatrix} \phi_{fv}^{11} \\ 0 \end{bmatrix}^a.\end{aligned}\tag{D.13}$$

Pour compléter l'équivalence des deux théories, on se rabat sur la  $\pi$ -théorie afin de poser  $\phi_{fv}^{22} = C_{Y_0}$  de manière classique comme coefficient de la force aérodynamique de travers dans  $\mathcal{R}_o$  (au lieu de  $C_{C_0}$  dans  $\mathcal{R}_a$ ). En somme, (D.12) et (D.13) donnent :

$$\Phi_{fv}^o = \begin{bmatrix} C_{D_0} & 0 & 0 \\ 0 & C_{Y_0} & 0 \\ 0 & 0 & C_{L\alpha} + C_{D_0} \end{bmatrix}^o\tag{D.14}$$

où l'on constate bien l'équivalence entre les coefficients des deux théories.

## D.2 Moments aérodynamiques dus aux vitesses linéaires aérodynamiques

Cette section présente la relation qui existe entre les forces et les moments aérodynamiques dus aux vitesses linéaires aérodynamiques.

Puisque les forces aérodynamiques sont dans les faits appliquées au centre (ou foyer) aérodynamique situé à une distance  $\mathbf{r}_{ca/o}^o$  du centre de gravité (cf. figure E.1), un moment résultant est donc exercé sur le corps solide dans  $\mathcal{R}_o$ . Ainsi, on obtient donc que (cf. section C.5.2) :

$$\mathbf{m}_{a,mv}^o = [\mathbf{r}_{ca/o}^o]_{\times} \mathbf{f}_{a,fv}^o.\tag{D.15}$$

En reprenant les termes liés à la vitesse linéaire aérodynamique  $\mathbf{v}_a^o$  dans (E.7) et (E.8), on développe (D.15) afin d'obtenir :

$$-\frac{\rho_0 \eta_a S}{2} \mathbf{B} \Phi_{mv}^o \mathbf{v}_a^o = -\frac{\rho_0 \eta_a S}{2} [\mathbf{r}_{ca/o}^o]_{\times} \Phi_{fv}^o \mathbf{v}_a^o\tag{D.16}$$

où l'on peut isoler  $\Phi_{mv}^o$  afin d'obtenir :

$$\Phi_{mv}^o = \mathbf{B}^{-1}[\mathbf{r}_{ca/o}^o]_{\times} \Phi_{fv}^o \quad (\text{D.17})$$

où, pour l'hypothèse d'un profil symétrique, le centre aérodynamique est situé sur l'axe  $\mathbf{x}_o$  :

$$\mathbf{r}_{ca/o}^o = [r_{ca} \ 0 \ 0]^{o\top} \quad (\text{D.18})$$

où  $r_{ca} \in \mathbb{R}$  représente la distance entre la position des centres aérodynamique et de gravité :  $r_{ca} < 0$  pour un centre de gravité situé devant le centre aérodynamique.

Ainsi, pour le résultat de  $\Phi_{fv}^o$  obtenu à la section D.1, le développement de (D.17) donne :

$$\Phi_{mv}^o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_{ca}(C_{L\alpha} + C_{D0})/c \\ 0 & r_{ca}C_{Y0}/b & 0 \end{bmatrix}^o. \quad (\text{D.19})$$

### D.3 Forces aérodynamiques dues aux vitesses angulaires du corps rigide

Cette section présente la relation qui existe entre les forces aérodynamiques dues aux vitesses angulaires du corps rigide et les moments aérodynamiques dus aux vitesses linéaires aérodynamiques.

Afin d'obtenir un modèle aérodynamique stable dont l'énergie est dissipative, il est nécessaire que  $\Phi_a^o > 0$  [9]. Par conséquent, on obtient l'identité supplémentaire :

$$\Phi_{f\omega}^o = \Phi_{mv}^{o\top} \quad (\text{D.20})$$

où la matrice  $\Phi_{mv}^o$  a été définie à la section précédente en D.2.

### D.4 Moments aérodynamiques dus aux vitesses angulaires du corps rigide

Cette section présente la relation entre la dérivée des  $\pi$ -coefficients aérodynamiques ( $C_{l_p}$ ,  $C_{l_q}$ ,  $C_{l_r}$ ,  $C_{m_p}$ ,  $C_{m_q}$ ,  $C_{m_r}$ ,  $C_{n_p}$ ,  $C_{n_q}$  et  $C_{n_r}$ ) et la matrice des  $\phi$ -coefficients aérodynamiques  $\Phi_{m\omega}^o$  générant les moments aérodynamiques dus aux vitesses angulaires du corps rigide.

Tel qu'énoncé en (3.2), la  $\pi$ -théorie permet de modéliser les moments aérodynamiques  $\mathbf{m}_a^o$  dans  $\mathcal{R}_o$  comme suit :

$$\mathbf{m}_a^o = \frac{1}{2}\rho_0 V_a^2 S \mathbf{B} \mathbf{k}_a^o. \quad (\text{D.21})$$

Si l'on s'intéresse seulement qu'aux moments aérodynamiques  $\mathbf{m}_{a,m\omega}^o$  dus aux vitesses angulaires  $\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o$ , la  $\pi$ -théorie propose la modélisation classique suivante pour ses coefficients aérodynamiques  $\mathbf{k}_{m\omega}^o = [C_{l,m\omega} \quad C_{m,m\omega} \quad C_{n,m\omega}]^{o\top}$  qui lui sont associés [25] :

$$\begin{aligned} C_{l,m\omega} &= \frac{1}{2V_a} (bC_{l_p}p + cC_{l_q}q + bC_{l_r}r) \\ C_{m,m\omega} &= \frac{1}{2V_a} (bC_{m_p}p + cC_{m_q}q + bC_{m_r}r) \\ C_{n,m\omega} &= \frac{1}{2V_a} (bC_{n_p}p + cC_{n_q}q + bC_{n_r}r) \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

que l'on peut réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{a,m\omega}^o &= \frac{1}{2}\rho_0 V_a^2 S \mathbf{B} \mathbf{k}_{m\omega}^o \\ &= \frac{1}{2}\rho_0 V_a^2 S \mathbf{B} \frac{1}{2V_a} \mathbf{K}_{m\omega}^o \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \\ &= \frac{1}{4}\rho_0 V_a S \mathbf{B} \mathbf{K}_{m\omega}^o \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

où

$$\mathbf{K}_{m\omega}^o = \begin{bmatrix} C_{l_p} & C_{l_q} & C_{l_r} \\ C_{m_p} & C_{m_q} & C_{m_r} \\ C_{n_p} & C_{n_q} & C_{n_r} \end{bmatrix}^o. \quad (\text{D.24})$$

Ainsi, en reprenant (E.8) sous les hypothèses présentées à la section E.1, on obtient la formulation équivalente en utilisant la  $\phi$ -théorie :

$$\mathbf{m}_{a,m\omega}^o = -\frac{1}{2}\rho_0 V_a S \mathbf{B} \boldsymbol{\Phi}_{m\omega}^o \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o. \quad (\text{D.25})$$

Enfin, la comparaison directe de (D.23) et (D.25) permet d'obtenir l'équivalence suivante entre les coefficients de la  $\phi$ -théorie et ceux de la  $\pi$ -théorie :

$$\boldsymbol{\Phi}_{m\omega}^o = -\frac{1}{2}\mathbf{K}_{m\omega}^o \quad (\text{D.26})$$

où les coefficients des dérivées aérodynamiques croisées  $C_{l_q}$ ,  $C_{l_r}$ ,  $C_{m_p}$ ,  $C_{m_r}$ ,  $C_{n_p}$  et  $C_{n_q}$  peuvent également être approximés nuls en l'absence de valeurs précises. De plus, afin d'obtenir une dynamique naturellement stable, il est nécessaire que  $C_{l_p} < 0$ ,  $C_{m_q} < 0$  et  $C_{n_r} < 0$ .

## ANNEXE E DÉTAILS SUPPLÉMENTAIRES DE MODÉLISATION

Cette annexe présente tous les détails supplémentaires nécessaires afin de bien comprendre la modélisation de Lustosa de l'aéronef convertible à corps inclinable présentée au chapitre 3.

### E.1 Application de la $\phi$ -théorie à un profil d'aile

La paramétrisation utilisant des coefficients aérodynamiques définis dans  $\mathcal{R}_o$  (au lieu de  $\mathcal{R}_a$ ) peut à priori sembler peu intuitive. Il est donc primordial d'explicitier les liens qui existent entre la  $\pi$ -théorie de Buckingham présentée à la section 3.2 et la  $\phi$ -théorie de [9] présentée à la section 3.3. Ainsi, en se basant sur des hypothèses principalement issues du cas de vol longitudinal, l'annexe D montre comment la  $\phi$ -théorie peut être appliquée à un profil d'aile. Plus précisément, il est montré que le modèle (3.11) issu de l'application complète de la  $\phi$ -théorie peut être simplifié en effectuant les approximations suivantes [9] :

1.  $\eta_a \approx V_a$  : pour le vol longitudinal,  $\|\mathbf{v}_a\|_2^2 \gg \phi_a \|\boldsymbol{\omega}_a\|_2^2$  ;
2.  $\boldsymbol{\omega}_a^o \approx \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o$  : pour un vent nul  $\mathbf{v}_{w/i} = \mathbf{0}$  ;
3.  $\Phi_a^o(\boldsymbol{\eta}_a^o) \approx \Phi_a^o$  : pour des coefficients constants qui permettent tout de même de capturer les caractéristiques aérodynamiques dominantes d'un profil d'aile (décrochage, dérivées aérodynamiques, dissipation de l'énergie, etc.) à travers les trois phases de vol (stationnaire, transition et avancement).

Ainsi, en appliquant ces approximations, on obtient les  $\phi$ -coefficients suivants (cf. annexe D) :

$$\begin{aligned}
 \Phi_{fv}^o &= \begin{bmatrix} C_{D_0} & 0 & 0 \\ 0 & C_{Y_0} & 0 \\ 0 & 0 & C_{L\alpha} + C_{D_0} \end{bmatrix}^o & ; & \Phi_{f\omega}^o = \Phi_{mv}^{o\top} \\
 \Phi_{mv}^o &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_{ca}(C_{L\alpha} + C_{D_0})/c \\ 0 & r_{ca}C_{Y_0}/b & 0 \end{bmatrix}^o & ; & \Phi_{m\omega}^o = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} C_{l_p} & C_{l_q} & C_{l_r} \\ C_{m_p} & C_{m_q} & C_{m_r} \\ C_{n_p} & C_{n_q} & C_{n_r} \end{bmatrix}^o
 \end{aligned} \tag{E.1}$$

où les coefficients des dérivées aérodynamiques croisées  $C_{l_q}, C_{l_r}, C_{m_p}, C_{m_r}, C_{n_p}$  et  $C_{n_q} \in \mathbb{R}$  peuvent également être approximés nuls en l'absence de valeurs précises. On précise que les coefficients des dérivées aérodynamiques principales situés sur la diagonale de  $\Phi_{m\omega}^o$  ( $C_{l_p}, C_{m_q}$  et  $C_{n_r} \in \mathbb{R}$ ) sont chacun de valeur négative pour une aérodynamique stable. Le coefficient  $C_{D_0} \in \mathbb{R}$ , appelé coefficient de traînée de profil, est associé à la résistance aérodynamique

minimum pour un angle d'attaque  $\alpha = 0$ . Le coefficient  $C_{Y_0} \in \mathbb{R}$  est associé à la force aérodynamique générée par le vent de travers dans  $\mathcal{R}_a$ , mais projeté sur  $\mathbf{y}_o$ . Le coefficient  $C_{L_\alpha} \in \mathbb{R}$  représente la pente de la partie linéaire de la fonction  $C_L(\alpha)$  valant environ  $2\pi$  selon la  $\pi$ -théorie.

On note également que  $r_{ca} \in \mathbb{R}$  représente la distance entre le centre aérodynamique (noté CA ou  $ca$  en indice) du profil alaire et le centre de masse de l'aéronef situé à l'origine du repère  $\mathcal{R}_o$ . Cette grandeur est située sur l'axe  $\mathbf{x}_o$  et est définie positive vers  $\mathbf{x}_o^+$ . De fait, il s'agit de la projection sur l'axe  $\mathbf{x}_o$  du vecteur position  $\mathbf{r}_{ca/o} \in \mathbb{R}^3$  représentant la position 3D du centre aérodynamique par rapport au CM. Ceci est illustré à la figure E.1.

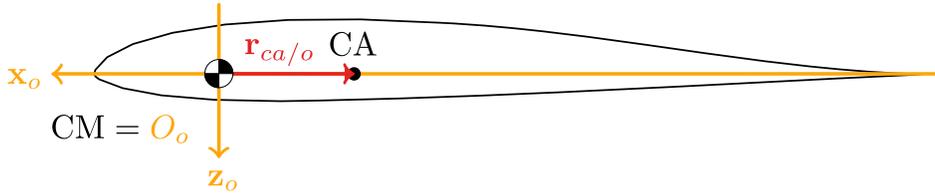


Figure E.1 Définition du vecteur position du centre aérodynamique (CA) du MAVION [9]

On constate alors que les quatre  $\phi$ -coefficients matriciels de la super matrice  $\Phi_a^o$  définie en (3.17) sont exprimés en fonction des  $\pi$ -coefficients scalaires classiques de la  $\pi$ -théorie. Cela démontre le lien direct qui existe entre la  $\pi$ -théorie de Buckingham et la  $\phi$ -théorie de Lustosa. La démonstration de ce lien est présentée dans l'annexe D.

## E.2 Application de la $\phi$ -théorie à un aéronef convertible à corps inclinable

Ensemble, l'annexe D et la section E.1 montrent comment il est possible d'appliquer la  $\phi$ -théorie à un profil alaire. Dans cette présente section, on s'intéresse à l'étape ultime de la modélisation d'un aéronef convertible à corps inclinable : l'application de la  $\phi$ -théorie à toutes les composantes aérodynamiques du MAVION, soit le corps principal constituant l'aile et les deux élevons.

Les forces et moments agissant sur le drone proviennent de quatre sources :

1. **Hélices** : la vitesse angulaire de chaque hélice  $\omega_k$  génère une force de poussée (ou de propulsion)  $\mathbf{f}_{t,k}^o$  ainsi que des moments  $\mathbf{m}_{d,k}^o$  et  $\mathbf{m}_{g,k}^o$  respectivement dus à la résistance aérodynamique et aux effets gyroscopiques ;
2. **Ailes** : chaque section d'aile  $S_k$  (qui inclut la surface de l'élevon associée à  $\delta_k$ ) génère une force  $\mathbf{f}_{w,k}^o$  et un moment  $\mathbf{m}_{w,k}^o$  ;

3. **Élevons** : la déflexion d'angle  $\delta_k$  de chaque élevon génère une force  $\mathbf{f}_{e,k}^o$  et un moment  $\mathbf{m}_{e,k}^o$  faisant varier les efforts aérodynamiques produits par la surface nominale  $S_k$  en admettant l'hypothèse d'un profil à cambrure variable (cf. section E.5) ;
4. **Interaction hélice-profil** : chaque section d'aile mouillée  $S_{m,k}$  (qui inclut la surface de l'élevon mouillée et associée à  $\delta_k$ ) génère une force  $\mathbf{f}_{p,k}^o$  et un moment  $\mathbf{m}_{p,k}^o$  supplémentaires dus au flux d'air généré par l'hélice  $\omega_k$  interagissant avec le profil aérodynamique composé d'une section d'aile et d'un élevon (phénomène des *sillages tourbillonnaires*<sup>E.1</sup> générés par la rotation de chaque hélice tournant à une vitesse  $\omega_k$ ).

Les prochaines sous-sections présentent le détail complet menant à la définition des forces  $\mathbf{f}_{\Sigma^*}^o \in \mathbb{R}^3$  et moments  $\mathbf{m}_{\Sigma^*}^o \in \mathbb{R}^3$  dans le repère objet  $\mathcal{R}_o$  qui ont précédemment été définis à la section 2.1.1. Ensemble, les sections 3.5 et E.2.5 définissent la modélisation complète non linéaire du MAVION.

On note également que la majorité des indices utilisés dans les sous-sections suivantes proviennent de la terminologie anglophone suivante :

- $t$  : *thrust* ou poussée ;
- $d$  : *drag* ou résistance ;
- $g$  : *gyroscopic* ou gyroscopique ;
- $w$  : *wing* ou aile ;
- $e$  : *elevon* ou élevon ;
- $p$  : *prop-wash* ou sillage tourbillonnaire.

---

E.1. Le phénomène de *sillage tourbillonnaire*, communément appelé *prop-wash* en anglais, correspond à la vitesse aérodynamique effective  $\mathbf{v}_e$  vue par une surface portante (une aile). La vitesse aérodynamique effective correspond à la somme de la vitesse aérodynamique  $\mathbf{v}_a$ , représentant le mouvement relatif de l'aéronef par rapport à la masse d'air dans laquelle il vole (ce qui fait également intervenir la vitesse du vent), et celle de la vitesse induite  $\mathbf{v}_i$  par les hélices situées tout près de la voilure, soit  $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_i$  (cf. figure E.7). En d'autres mots, c'est la vitesse réelle de l'écoulement d'air vue par une surface portante lorsqu'un moteur est situé *assez près* pour que ce phénomène induit localement à l'emplacement de l'hélice ne soit plus négligeable. La valeur limite de *proximité* entre un moteur et une surface portante afin que soit considéré ce phénomène dépend de trois paramètres : la forme de l'appareil, la distance entre le moteur et la voilure, puis la puissance générée par le moteur. Par exemple, sur les avions de ligne, même si les moteurs sont positionnés sous l'aile, ce phénomène est non négligeable pour l'écoulement d'air effectif vu par les empennages arrière.

### E.2.1 Efforts dus aux hélices

Selon la théorie de l'aérodynamique classique des moteurs à hélices retrouvée dans [115,116], la vitesse angulaire de chaque hélice  $\omega_k$  génère une force de poussée  $\mathbf{f}_{t,k}^o \in \mathbb{R}_+^3$  :

$$\mathbf{f}_{t,k}^o = \begin{bmatrix} k_t \omega_k^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^o \quad (\text{E.2})$$

où  $k_t \in \mathbb{R}_+^*$  représente le coefficient de poussée de chaque hélice  $\omega_k$  <sup>E.2</sup>.

La rotation de l'hélice  $\omega_k$  à travers une masse d'air génère également un couple de réaction  $\mathbf{m}_{d,k}^o \in \mathbb{R}^3$  dû à la résistance aérodynamique :

$$\mathbf{m}_{d,k}^o = \begin{bmatrix} -\text{signe}(\omega_k) k_d \omega_k^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^o \quad (\text{E.3})$$

pour  $\omega_1 \leq 0$  et  $\omega_2 \geq 0$  où  $k_d \in \mathbb{R}_+^*$  est le coefficient de résistance aérodynamique de chaque hélice  $\omega_k$ . La fonction  $\text{signe}(\cdot)$  est définie comme suit :

$$\text{signe}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

où  $x \in \mathbb{R}$  est un scalaire quelconque.

De plus, la rotation des pièces rotatives de chaque moteur (rotor, palier et hélice) tournant à une vitesse  $\omega_k$  produit un moment gyroscopique résultant dans  $\mathcal{R}_o$  (cf. section E.3) :

$$\mathbf{m}_{g,k}^o = -(p + \omega_k)(J_{p_x} - J_{p_n}) \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ -q \end{bmatrix}^o \quad (\text{E.5})$$

où l'on rappelle que  $p, q, r$  sont les composantes de  $\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o$  dans  $\mathcal{R}_o$ . Les grandeurs scalaires  $J_{p_x} \in \mathbb{R}_+^*$  et  $J_{p_n} \in \mathbb{R}_+^*$  représentent les paramètres diagonaux du tenseur d'inertie de l'ensemble des pièces rotatives du moteur modélisé comme un disque où  $J_{p_x}$  est l'inertie autour de l'axe de

---

E.2. La poussée négative pour une rotation en sens inverse des hélices n'est pas implémentée dans le modèle pour des raisons physiques. De manière générale, les hélices sont installées afin de tourner et créer une force de poussée dans une seule direction. En effet, les hélices  $\omega_1$  et  $\omega_2$  du MAVION tournent respectivement dans les sens négatif et positif de l'axe  $\mathbf{x}_o$  (cf. figure 3.3).

rotation de cet ensemble et  $J_{p_n}$  est l'inertie radiale/perpendiculaire à cette première direction. La somme des moments purs dus à l'hélice  $\omega_k$  est donnée par :

$$\mathbf{m}_{\tau,k}^o = \mathbf{m}_{d,k}^o + \mathbf{m}_{g,k}^o. \quad (\text{E.6})$$

### E.2.2 Efforts dus aux sections d'aile

Selon la  $\phi$ -théorie détaillée à la section E.1, chaque section d'aile  $S_k$  génère une force  $\mathbf{f}_{w,k}^o \in \mathbb{R}^3$  :

$$\mathbf{f}_{w,k}^o = -\frac{\rho_0 \eta_a S_k}{2} \left( \Phi_{fv}^o \mathbf{v}_a^o + \Phi_{f\omega}^o \mathbf{B} \omega_{o/i}^o \right) \quad (\text{E.7})$$

et un moment  $\mathbf{m}_{w,k}^o \in \mathbb{R}^3$  :

$$\mathbf{m}_{w,k}^o = -\frac{\rho_0 \eta_a S_k}{2} \mathbf{B} \left( \Phi_{mv}^o \mathbf{v}_a^o + \Phi_{m\omega}^o \mathbf{B} \omega_{o/i}^o \right) \quad (\text{E.8})$$

où la section d'aile  $S_k \in \mathbb{R}_+^*$  est composée d'une moitié d'aile et d'un élevon complet tel qu'illustré à la figure E.2.

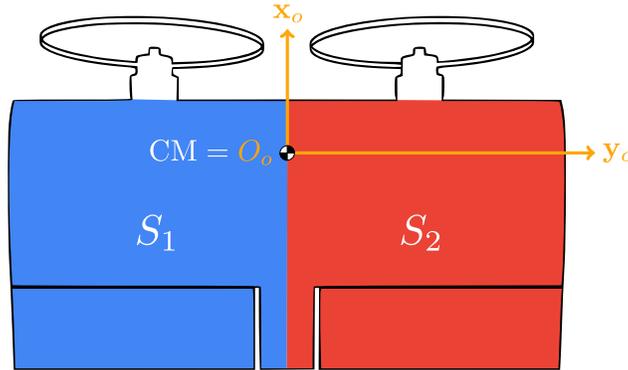


Figure E.2 Définition des sections d'aile  $S_k$  du MAVION [9]

### E.2.3 Efforts dus aux élevons

Selon la théorie des profils aérodynamiques à cambrure variable présentée à la section E.5, la déflexion d'angle  $\delta_k$  de chaque élevon génère une force  $\mathbf{f}_{e,k}^o \in \mathbb{R}^3$  :

$$\mathbf{f}_{e,k}^o = \frac{\rho_0 \eta_a S_k}{2} \left( \Phi_{fv}^o [\delta_k \boldsymbol{\xi}_f^o] \times \mathbf{v}_a^o + \Phi_{f\omega}^o [\delta_k \boldsymbol{\xi}_f^o] \times \mathbf{B} \omega_{o/i}^o \right) \quad (\text{E.9})$$

et un moment  $\mathbf{m}_{e,k}^o \in \mathbb{R}^3$  :

$$\mathbf{m}_{e,k}^o = \frac{\rho_0 \eta_a S_k}{2} \mathbf{B} \left( \Phi_{mv}^o [\delta_k \boldsymbol{\xi}_m^o] \times \mathbf{v}_a^o + \Phi_{m\omega}^o [\delta_k \boldsymbol{\xi}_m^o] \times \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \right) \quad (\text{E.10})$$

où  $\boldsymbol{\xi}_f^o = [0 \ \xi_{f_y} \ 0]^{\text{oT}}$  et  $\boldsymbol{\xi}_m^o = [0 \ \xi_{m_y} \ 0]^{\text{oT}}$  sont respectivement les coefficients d'efficacité de force et de moment des élévons définis dans  $\mathcal{R}_o$ . Ces deux dernières grandeurs agissent à titre de paramètres du modèle mathématique et ils peuvent être réglés afin de le faire correspondre aux données expérimentales recueillies en soufflerie.

#### E.2.4 Efforts dus à l'interaction hélice-profil

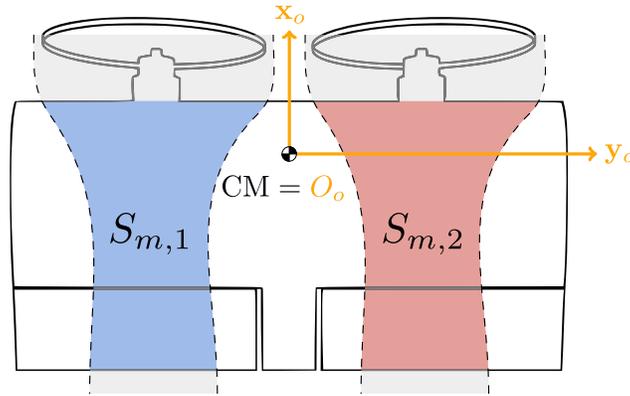


Figure E.3 Définition des sections d'aile mouillées  $S_{m,k}$  du MAVION [9]

Selon la théorie de superposition des flux d'air générés par la vitesse aérodynamique du corps rigide et l'hélice de chaque moteur (cf. section E.6 et figure E.7), chaque section d'aile mouillée  $S_{m,k}$ , qui inclut la surface de l'élévon mouillée et associée à  $\delta_k$  (cf. figure E.3), génère une force  $\mathbf{f}_{p,k}^o \in \mathbb{R}^3$  supplémentaire due au flux d'air généré par l'hélice de vitesse  $\omega_k$  :

$$\mathbf{f}_{p,k}^o = \underbrace{-\frac{S_{m,k}}{2S_p} \Phi_{fv}^o \mathbf{f}_{t,k}^o}_{\text{hélice-aile}} + \underbrace{\frac{S_{m,k}}{2S_p} \Phi_{fv}^o [\delta_k \boldsymbol{\xi}_f^o] \times \mathbf{f}_{t,k}^o}_{\text{hélice-élévon}} \quad (\text{E.11})$$

ainsi qu'un moment  $\mathbf{m}_{p,k}^o \in \mathbb{R}^3$  :

$$\mathbf{m}_{p,k}^o = \underbrace{-\frac{S_{m,k}}{2S_p} \mathbf{B} \Phi_{mv}^o \mathbf{f}_{t,k}^o}_{\text{hélice-aile}} + \underbrace{\frac{S_{m,k}}{2S_p} \mathbf{B} \Phi_{mv}^o [\delta_k \boldsymbol{\xi}_m^o] \times \mathbf{f}_{t,k}^o}_{\text{hélice-élévon}} \quad (\text{E.12})$$

où  $S_p \in \mathbb{R}_+^*$  est la surface du disque balayé par la rotation d'une hélice.

### E.2.5 Efforts complets

Cette section présente les forces et les moments complets du modèle dynamique du MAVION.

#### Forces complètes

La somme des forces aérodynamiques (aile, élevoon et interaction hélice-profil) agissant dans  $\mathcal{R}_o$  est donnée par :

$$\mathbf{f}_{a,k}^o = \mathbf{f}_{w,k}^o + \mathbf{f}_{e,k}^o + \mathbf{f}_{p,k}^o. \quad (\text{E.13})$$

La somme de toutes les forces (autres que la gravité) agissant dans  $\mathcal{R}_o$  est alors donnée par :

$$\mathbf{f}_{\Sigma^*}^o = \sum_{k=1}^2 (\mathbf{f}_{t,k}^o + \mathbf{f}_{a,k}^o) \quad (\text{E.14})$$

dont l'expression détaillée est donnée en (3.19) à la page 44.

#### Moments complets

La somme des moments aérodynamiques est donnée par :

$$\mathbf{m}_{a,k}^o = \mathbf{m}_{w,k}^o + \mathbf{m}_{e,k}^o + \mathbf{m}_{p,k}^o. \quad (\text{E.15})$$

Afin d'obtenir la somme totale des moments dans  $\mathcal{R}_o$ , il est nécessaire de considérer les bras de levier des différentes forces qui n'agissent pas directement au CM du MAVION. On considère d'abord les hélices  $\omega_k$  dont les centres sont situés à l'origine  $O_{p,k}$  du repère  $\mathcal{R}_{p,k}$ . Le vecteur position de ce repère par rapport au centre de masse du drone exprimé dans  $\mathcal{R}_o$  est  $\mathbf{r}_{p,k}^o \in \mathbb{R}^3$ . On considère également les sections d'aile découpées  $S_k$  dont les centres sont situés à l'origine  $O_{a,k}$  du repère  $\mathcal{R}_{a,k}$ . Le vecteur position de ce repère par rapport au CM du drone exprimé dans  $\mathcal{R}_o$  est  $\mathbf{r}_{a,k}^o \in \mathbb{R}^3$ . La figure E.4 définit clairement toutes ces grandeurs<sup>E.3</sup>.

Les vecteurs positions sont ainsi donnés par :

$$\mathbf{r}_{p,1}^o = \begin{bmatrix} r_{p,x} \\ -r_{p,y} \\ 0 \end{bmatrix}^o ; \quad \mathbf{r}_{p,2}^o = \begin{bmatrix} r_{p,x} \\ r_{p,y} \\ 0 \end{bmatrix}^o ; \quad \mathbf{r}_{a,1}^o = \begin{bmatrix} 0 \\ -r_{a,y} \\ 0 \end{bmatrix}^o ; \quad \mathbf{r}_{a,2}^o = \begin{bmatrix} 0 \\ r_{a,y} \\ 0 \end{bmatrix}^o \quad (\text{E.16})$$

E.3. Les vecteurs positions  $\mathbf{r}_{a,k}^o$  ne pointent pas vers les centres aérodynamiques  $CA_k$ , puisque les forces et les moments aérodynamiques ont été modélisés directement au CM situé à l'origine  $O_o$  du repère  $\mathcal{R}_o$ . En effet, les  $\phi$ -coefficients sont exprimés en fonction de la grandeur  $r_{ca}$  qui représente le décalage longitudinal du CA par rapport au CM. Ainsi, les vecteurs positions  $\mathbf{r}_{a,k}^o$  ne prennent compte que du décalage latéral du CA, puisque celui longitudinal a déjà été considéré.

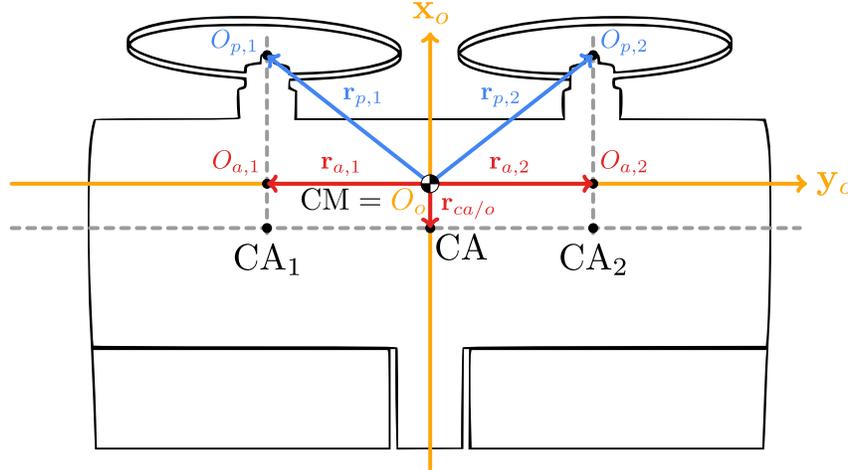


Figure E.4 Définition des bras de levier du MAVION [9]

paramétrés par  $r_{p,x} \in \mathbb{R}^+$ ,  $r_{p,y} \in \mathbb{R}^+$  et  $r_{a,y} \in \mathbb{R}^+$  et génèrent les moments de réaction suivants dans  $\mathcal{R}_o$  :

$$\mathbf{m}_{r,k}^o = [\mathbf{r}_{p,k}^o] \times \mathbf{f}_{t,k}^o + [\mathbf{r}_{a,k}^o] \times \mathbf{f}_{a,k}^o. \quad (\text{E.17})$$

La somme totale des moments agissant dans  $\mathcal{R}_o$  est donnée par :

$$\mathbf{m}_{\Sigma}^o = \sum_{k=1}^2 \left( \mathbf{m}_{\tau,k}^o + \mathbf{m}_{a,k}^o + \mathbf{m}_{r,k}^o \right) \quad (\text{E.18})$$

dont l'expression détaillée est donnée en (3.20) à la page 44.



On apporte maintenant deux précisions importantes concernant les forces  $\mathbf{f}_{\Sigma}^*$  et les moments  $\mathbf{m}_{\Sigma}$  présentés respectivement aux équations (3.19) et (3.20).

Premièrement, l'analyse de ces équations révèle que les termes  $S_{m,k}$ , représentant les deux sections d'aile mouillées, n'y interviennent pas. En effet, si l'on définit cette grandeur en fonction d'une section d'aile complète  $S_k$  comme suit :

$$S_{m,k} = \xi_{S,k} S_k \Leftrightarrow \xi_{S,k} = \frac{S_{m,k}}{S_k} \quad (\text{E.19})$$

où  $\xi_{S,k} \in \mathbb{R}_+^*$  représente le rapport géométrique entre une section d'aile mouillée  $S_{m,k}$  et une section complète d'aile  $S_k$ , ce qui peut également être vu comme l'efficacité de l'hélice  $\omega_k$  à générer un écoulement d'air induit sur le profil d'air (cf. section E.6), on peut définir la

surface totale de l'aile  $S \in \mathbb{R}_+^*$  comme :

$$S = bc = S_1 + S_2 = \frac{S_{m,1}}{\xi_{S,1}} + \frac{S_{m,1}}{\xi_{S,2}}. \quad (\text{E.20})$$

Or, sachant que par symétrie on a :

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= S_1 = S_2 \\ \frac{S_m}{2} &= S_{m,1} = S_{m,2} \\ \xi_S &= \xi_{S,1} = \xi_{S,2} \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

en supposant que chaque hélice  $\omega_k$  possède une même efficacité parfaite  $\xi_S = 100\% = 1$ , on obtient finalement que :

$$\frac{S}{2} = S_1 = S_2 = S_{m,1} = S_{m,2}, \quad (\text{E.22})$$

faisant alors disparaître les termes des sections de surface mouillées  $S_{m,k}$ , puisque les équations (3.19) et (3.20) sont désormais seulement fonction de la surface totale  $S$ . De fait, l'efficacité des hélices  $\xi_S \in \mathbb{R}_+^*$  doit être vue comme un paramètre réglable du modèle du MAVION ou de tout aéronef convertibile à corps inclinable de type *tail-sitter*. Les essais expérimentaux en soufflerie effectués par [8] ont d'ailleurs montré que prendre une valeur unitaire (ou parfaite) pour ce paramètre donnait de bons résultats. Toutefois, le lecteur désirant réintégrer explicitement ce paramètre dans la modélisation afin d'effectuer sa propre caractérisation en soufflerie de  $\xi_S$  peut très bien le faire étant donné que toutes les informations nécessaires ont été mises à sa disposition. De manière générale, plus les moteurs sont puissants et proches de la surface alaire, plus  $\xi_S \rightarrow 1$ . Dans le cas contraire, on aura plutôt  $\xi_S \rightarrow 0$ . Enfin, on mentionne que pour un aéronef de type *tail-sitter*, il est très important de maximiser  $\xi_S$ , puisque la capacité à pouvoir générer des moments à l'aide des élevons  $\delta_k$  dépend directement de cette grandeur lorsque l'aéronef effectue un vol à vitesse aérodynamique nulle  $\mathbf{v}_a = \mathbf{0}$ . Dans ce cas particulier, c'est plutôt la vitesse induite par les moteurs  $\mathbf{v}_i(\omega_1, \omega_2)$  qui prend le relais afin de générer un flux d'air donnant alors leur raison d'être aux élevons (cf. section E.6).

Deuxièmement, on note aussi que le terme correspondant au moment de réaction dû aux forces aérodynamiques générées par chaque section d'aile s'annule dans (3.20), puisqu'il a été supposé que chacune génère une force identique avec des bras de levier également identiques, mais de signes opposés<sup>E.4</sup>.

---

E.4. Dans les faits, ceci est faux, puisque le déplacement angulaire du corps  $\omega_{o/i}^o$ , génère un angle d'attaque induit  $\alpha_i$  qui est différent pour les sections gauche et droite de l'aile lorsque l'aéronef effectue un mouvement de roulis ( $p \neq 0$ ). Pour  $p > 0$ , la section d'aile droite tombe en augmentant l'angle d'attaque effectif  $\alpha_e = \alpha - \alpha_i$

### E.3 Effet gyroscopique des hélices

L'expression (E.6) des moments purs dus à l'hélice  $\omega_k$  est obtenue en effectuant la somme du couple de réaction (E.3) dû à la résistance aérodynamique et du moment gyroscopique (E.5). Cette première quantité est issue de la modélisation aérodynamique classique d'une hélice en rotation alors que la seconde est dérivée en développant l'équation du mouvement de l'hélice à partir de son propre repère. À la section 3.1.3 de [8], il est détaillé comment obtenir (E.6).

### E.4 Polaire elliptique portance-résistance du profil alaïre

À l'annexe D, on a détaillé les étapes du calcul des  $\phi$ -coefficients de Lustosa à partir des  $\pi$ -coefficients de Buckingham. Pour ce faire, on a appliqué plusieurs hypothèses issues de l'aérodynamique longitudinale. Par conséquent, les quatre  $\phi$ -matrices  $\Phi_{fv}^o$ ,  $\Phi_{f\omega}^o$ ,  $\Phi_{mv}^o$  et  $\Phi_{m\omega}^o$  contiennent en fait toute l'information nécessaire afin de tracer la polaire elliptique portance-résistance du MAVION qui est illustrée à la figure E.5 pour les deux configurations typiques d'un convertible à corps inclinable. La figure située en haut montre la polaire pour un vol d'avancement, tandis que celle située en bas illustre la polaire pour un vol stationnaire.

À la section 2.2.2 de [8], l'auteur explique comment calculer la force aérodynamique résultante, notée  $\mathbf{F}_w$  dans la figure E.5, à partir de cet outil pour un angle d'attaque arbitraire. On se rappelle que la modélisation aérodynamique issue de la  $\phi$ -théorie ne possède pas de singularité. Enfin, on précise que le tracé de la polaire elliptique portance-résistance est intrinsèquement relié à la matrice  $\mathbf{A}_\phi$  définie dans (D.9) comme il est expliqué dans [8].

### E.5 Modélisation des élevons comme une variation de la cambrure alaïre

Afin de modéliser les efforts aérodynamiques générés par chaque élevon, on reprend la polaire elliptique portance-résistance du profil alaïre définie à la section E.4. Concrètement, Lustosa modélise les élevons en appliquant un changement de phase à cette polaire. Cette modification est illustrée à la figure E.6.

La figure de gauche montre la polaire obtenue lorsque l'élevon est droit. Pour ce cas, la force aérodynamique résultante est fonction seulement de l'angle d'attaque  $\alpha$ , puisque la contribution additionnelle de l'élevon est nulle. Puis, pour une déflexion de grandeur  $\delta$  appliquée à

---

(cf. figure E.7) alors que la section d'aile gauche monte en le diminuant. Ceci génère alors des forces de portance différentes et donc un moment résultant sur le corps de l'objet. Or, la modélisation explicite et complète de ce phénomène aérodynamique est négligée dans le modèle mathématique du MAVION. On considère plutôt qu'il est pris en compte dans le coefficient de la dérivée aérodynamique  $C_{l_p}$  compris dans  $\Phi_{m\omega}^o$  de (E.1).

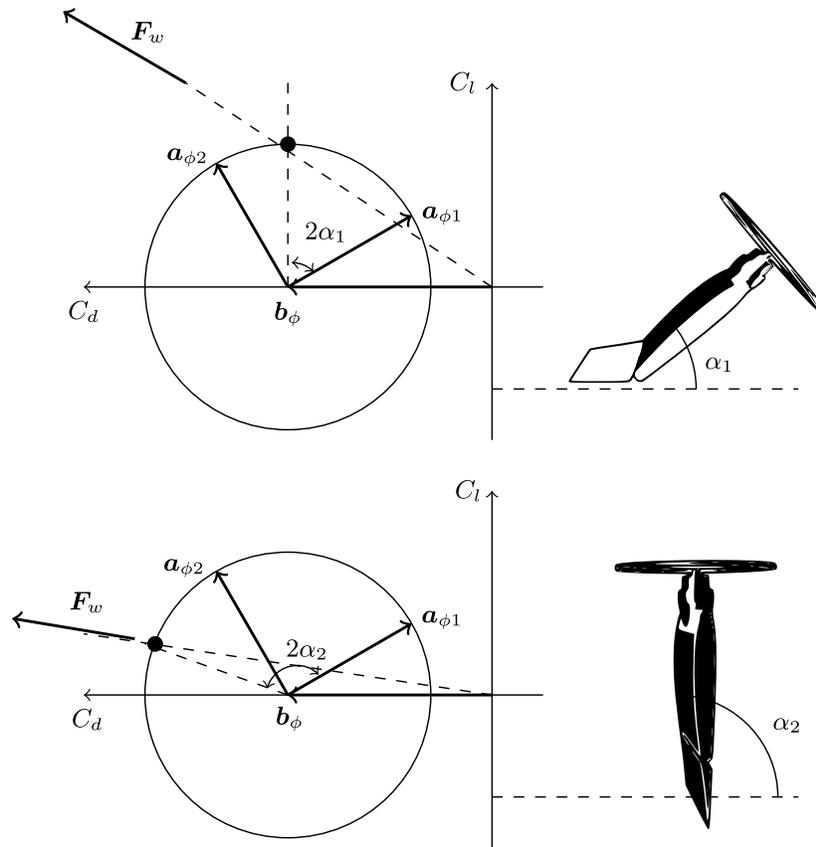


Figure E.5 Polaire elliptique portance-résistance du MAVION pour une définition sans singularité des efforts aérodynamiques peu importe l'angle d'attaque [8]

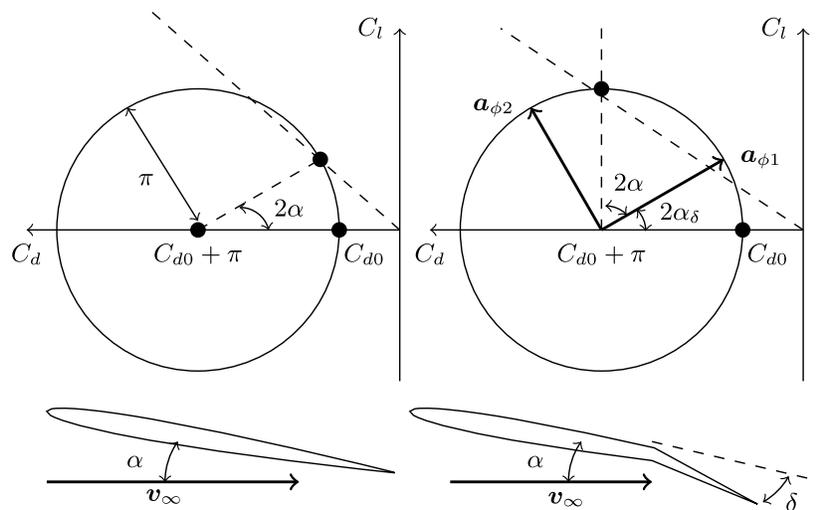


Figure E.6 Modélisation des élévons comme une variation de cambrure du profil alaire du MAVION [8]

l'élevon, la figure de droite montre alors que cette même polaire subit un décalage de phase de  $2\alpha_\delta(\delta)$ . Cette rotation est directement fonction de la déflexion  $\delta$  de l'élevon.

De manière générale, il faut retenir que cette modélisation est analogue à effectuer une modification instantanée de la cambrure du profil alaire du MAVION. Ainsi, une augmentation de  $\delta$  génère une augmentation de portance. À la section 2.2.3 de [8], il est également expliqué que cette modélisation donne lieu à un angle de décrochage du MAVION située au-delà de  $\alpha_s = 45^\circ$  avec un coefficient de portance associé de  $C_L(\alpha_s) = \pi$ .

Les principes abordés dans cette section justifient la modélisation retenue pour les forces (E.9) et les moments (E.10) générés par un élevon.

## E.6 Interaction hélice-profil

Le MAVION est conçu de sorte que ses moteurs à hélice soient positionnés très près des surfaces aérodynamiques. Ceci est voulu afin de générer un courant d'air sur celles-ci lorsque l'aéronef effectue un vol stationnaire ne générant alors aucune vitesse aérodynamique (pour un vent nul). Cela permet ainsi aux surfaces portantes, soit l'aile et les élevons, de pouvoir générer des efforts aérodynamiques pour les deux phases de vol du MAVION. Cette interaction entre les hélices et les profils aérodynamiques est illustrée à la figure E.3.

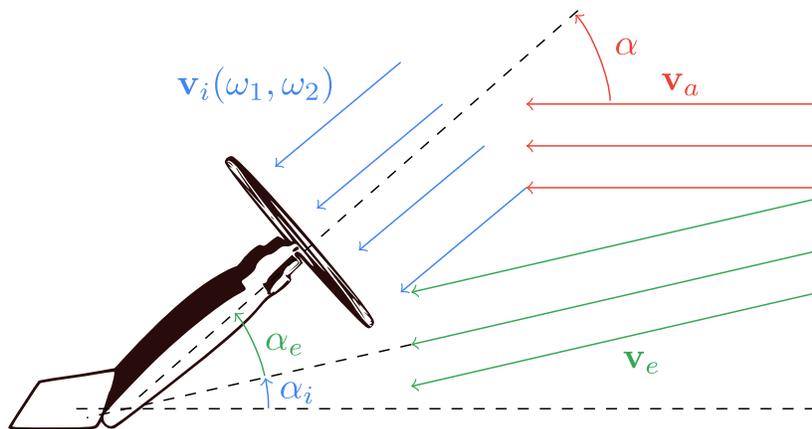


Figure E.7 Illustration de la vitesse aérodynamique effective vue par le MAVION [8]

Du point de vue physique, le flux d'air supplémentaire ainsi généré par les hélices peut être vu comme une source d'énergie cinétique additionnelle qui est transmise à la masse d'air locale qui circule sur les profils aérodynamiques du MAVION. Mathématiquement, on peut modéliser cette interaction comme l'addition de cette vitesse additive, alors dénommée vitesse induite  $\mathbf{v}_i$ , avec la vitesse aérodynamique normale  $\mathbf{v}_a$  afin de former la vitesse effective  $\mathbf{v}_e$  vue

par les surfaces portantes. Le même principe peut s'appliquer à l'angle d'attaque effectif  $\alpha_e$  qui est alors fonction de l'angle d'attaque normal  $\alpha$  et de l'angle d'attaque induit  $\alpha_i$  associé à la vitesse induite. Cette interaction aérodynamique particulière se modélise donc ainsi :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_e = \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_i \\ \alpha_e = \alpha - \alpha_i \end{cases} \quad (\text{E.23})$$

où ces deux équations sont illustrées à la figure E.7.

Les principes abordés dans cette section justifient la modélisation retenue pour les forces (E.11) et les moments (E.12) dus à l'interaction hélice-profil. À la section 2.3 de [8], il est détaillé comment obtenir ces équations à partir du principe de la conservation de la quantité de mouvement d'un fluide incompressible sans viscosité évoluant en régime permanent.

## ANNEXE F ANALYSES SUPPLÉMENTAIRES DU MODÈLE COMPLET

Cette annexe présente des analyses supplémentaires du modèle complet du MAVION présenté au chapitre 3. On y retrouve l'analyse détaillée de deux cas de vol particuliers : le vol longitudinal et le virage coordonné. De plus, on y présente les équations linéarisées du modèle complet dans leur forme matricielle. Afin d'obtenir un modèle linéaire de réalisation minimale, on procède à une formulation locale de la cinématique en rotation.

### F.1 Cas de vol particuliers

Dans un premier temps, cette section présente en détail la réduction du modèle complet du MAVION formulé en (3.33) aux modèles considérant simplement les dynamiques du vol longitudinal et du virage coordonné – sans considérer la dynamique des actionneurs. Dans un second temps, on présente une méthode de résolution pour les cas d'équilibre considérés.

De plus, on précise que la dynamique représentant l'évolution temporelle de la position inertielle  $\mathbf{p}_{o/i}^i$  définie dans (3.33) est volontairement omise, puisqu'elle est complètement découplée des autres dynamiques. De fait, ce découplage est dû à l'hypothèse **H4** (cf. page 10) effectuée dans la modélisation dynamique d'un corps solide à 6 DDL. En effet, puisqu'on considère que la propagation des équations différentielles de (3.33) s'effectue sur un court laps de temps, cela signifie que la variation des paramètres atmosphériques, qui sont généralement fonction de l'altitude  $z$  du MAVION telles la masse volumique de l'air  $\rho(z)$  et la constante de gravité  $g(z)$ , peut être négligée. On utilise alors les valeurs initiales constantes des paramètres  $\rho_0$  et  $g_0$  qui sont associés à l'altitude initiale  $z_0$  considérée dans la propagation des équations différentielles. Quoique cette même distinction n'ait pas été faite de manière aussi explicite, le même principe s'applique à tous les coefficients aérodynamiques constants qui dépendent généralement de l'altitude  $z$  dont  $\Phi_a^o$ ,  $k_t$ ,  $k_d$  et  $\xi_S$ .

Les équations des modèles réduits au vol longitudinal et au virage coordonné présentées dans cette section sont développées pour le cas nominal sans vent ( $\mathbf{w}_{w/i} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_{o/i}$ ). Afin de simplifier les équations, on considère aussi le cas  $\psi = 0$  qui implique alors que la composante de la vitesse  $\mathbf{v}_{o/i}^i$  projetée sur l'axe  $\mathbf{y}_i$  est nulle,  $v_e = 0$  (3.23). De ce fait, les solutions obtenues dans le plan horizontal pour  $v_n$  peuvent être facilement projetées à nouveau pour  $\psi \neq 0$  en utilisant une matrice de rotation  $\mathbf{R}_{o/i}^{z_i}(\psi)$ , représentant alors la rotation unique d'un angle  $\psi$  autour de l'axe  $\mathbf{z}_i$  dans  $\mathcal{R}_i$  – c.-à-d. pour  $\phi = \text{constant}$  et  $\theta = \text{constant}$  dans  $\mathbf{R}_{o/i}(\Phi_{o/i})$  de (C.18). Cette simplification est effectuée, puisqu'en l'absence de vent, la valeur de  $\psi$  n'a

aucune incidence sur la dynamique d'un aéronef. Il en va de même pour la position en  $x$  et  $y$  dans  $\mathcal{R}_i$ .

### F.1.1 Vol longitudinal

Cette section se consacre à la dynamique réduite au vol longitudinal du MAVION sans prendre en compte la dynamique des actionneurs. Elle reprend le système  $\mathcal{S}_\Phi$  défini en (3.21) en supposant que l'entrée en vent est nulle,  $\mathbf{w}_\Sigma = \mathbf{v}_{w/i}^i = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v}_a^o = \mathbf{v}_{o/i}^o$ .

Concrètement, la dynamique longitudinale d'un aéronef est définie comme l'analyse des deux mouvements linéaires pouvant s'effectuer dans le plan  $\mathbf{x}_o$ - $O$ - $\mathbf{z}_o$  et du mouvement angulaire pouvant s'effectuer autour de l'axe  $\mathbf{y}_o$ . De ce fait, le déplacement linéaire selon l'axe  $\mathbf{y}_o$  ou les déplacements angulaires autour des axes  $\mathbf{x}_o$  et  $\mathbf{z}_o$  sont bloqués. En d'autres mots, on simplifie l'analyse du corps solide possédant 6 DDL à seulement celle d'un corps solide possédant désormais 3 DDL. On analyse alors seulement les trois mouvements pouvant être effectués dans le plan longitudinal de l'aéronef tels qu'ils viennent d'être définis.

### Modèle d'état du vol longitudinal

Pour le vol longitudinal s'effectuant dans le repère  $\mathcal{R}_o$  les variables du modèle d'état (3.21) peuvent être simplifiées comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{o/i} = [0 \quad \theta \quad 0]^\top \\ \mathbf{v}_{o/i}^o = [u \quad 0 \quad w]^{o\top} = \mathbf{v}_a^o \\ \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o = [0 \quad q \quad 0]^{o\top} = [0 \quad \dot{\theta} \quad 0]^{o\top} \\ \mathbf{R}_{o/i}(\Phi_{o/i}) = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & -s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \\ \omega = -\omega_1 = \omega_2 \\ \delta = \delta_1 = \delta_2 \\ \mathbf{v}_{w/i}^i = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (\text{F.1})$$

où  $\omega \in \mathbb{R}^+$  est l'entrée commandable envoyée identiquement aux deux moteurs telle que  $\omega_1 = -\omega$  et  $\omega_2 = \omega$ , et  $\delta \in \mathbb{R}$  est l'entrée commandable envoyée identiquement aux deux élevons. On note également que les contraintes d'égalité sur les entrées commandables  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont issues du cas de vol longitudinal imposant alors une symétrie de la dynamique par rapport au plan  $\mathbf{x}_o$ - $O$ - $\mathbf{z}_o$ . Les entrées  $\omega_1$  et  $\omega_2$  diffèrent en signe à cause de la définition

de leur sens positif respectif qui est équivalente à celle de  $\omega_{k_c}$  (cf. figure 3.3).

Ainsi, en appliquant les simplifications définies en (F.1) au système complet  $\mathcal{S}_\Phi$  défini en (3.21), on obtient le nouveau modèle d'état réduit à la dynamique longitudinale suivant :

$$\mathcal{S}_{lon}(\boldsymbol{\varrho}) := \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{lon} = \mathbf{f}_{lon}(\mathbf{x}_{lon}, \mathbf{u}_{lon}, \boldsymbol{\varrho}) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = q \\ \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \mathbf{f}_{\Sigma_{xz}}^o(\mathbf{x}_{lon}, \mathbf{u}_{lon}, \boldsymbol{\varrho}) - q \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \\ \dot{q} = \ddot{\theta} = \frac{1}{I_{yy}} m_{\Sigma_y}(\mathbf{x}_{lon}, \mathbf{u}_{lon}, \boldsymbol{\varrho}) \end{cases} \\ \mathbf{x}_{lon}(t_0) = \mathbf{x}_{lon_0} = [\theta_0 \quad u_0 \quad w_0 \quad q_0]^\top \end{cases} \quad (\text{F.2})$$

avec  $\mathbf{x}_{lon} = [\theta \quad u \quad w \quad q]^\top$  et  $\mathbf{u}_{lon} = [\omega \quad \delta]^\top$ . La fonction  $\mathbf{f}_{\Sigma_{xz}}^o \in \mathbb{R}^2$  représente le vecteur de la somme des forces définie en (3.19), mais comprenant seulement les composantes  $f_{\Sigma_x}$  et  $f_{\Sigma_z}$  telles que définies en (2.8) et  $m_{\Sigma_y} \in \mathbb{R}$  représente pareillement la composante agissant autour de  $\mathbf{y}_o$  dans la somme des moments définie en (3.20) dont les composantes sont définies en (2.10). Enfin, on rappelle que les expressions de  $\mathbf{f}_{\Sigma_{xz}}^o$  et  $m_{\Sigma_y}$  sont évaluées en prenant  $\mathbf{w}_{o/i} = \mathbf{0}$ .

### Équilibre du vol longitudinal pour un vol de croisière

Les variables à l'équilibre du système  $\mathcal{S}_{lon}$  défini en (F.2) sont :

$$\mathbf{x}_{lon_e} := [\theta_e \quad u_e \quad w_e \quad q_e]^\top \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_{lon_e} := [\omega_e \quad \delta_e]^\top \quad (\text{F.3})$$

qu'on assemble dans le vecteur du point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{lon_e}$  :

$$\boldsymbol{\vartheta}_{lon_e}(\boldsymbol{\varrho}) := \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{lon_e}(\boldsymbol{\varrho}) \\ \mathbf{u}_{lon_e}(\boldsymbol{\varrho}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad (\text{F.4})$$

où l'on explicite le fait que la solution du point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{lon_e}$  dépend du vecteur des paramètres  $\boldsymbol{\varrho}$  du système  $\mathcal{S}_{lon}$  défini en (F.2).

On choisit maintenant d'analyser le point d'équilibre particulier du vol de croisière effectué dans le plan longitudinal. L'équilibre du vol de croisière est défini comme suit :

1. **Altitude constante** : cela implique que la vitesse verticale à l'équilibre orientée selon  $\mathbf{z}_i$  dans  $\mathcal{R}_i$  est nulle, soit  $v_{d_e} = 0$ , cf. équation (3.23) ;
2. **Position angulaire constante** : cela implique que la vitesse angulaire à l'équilibre autour de  $\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_o$  est nulle, soit  $q_e = 0$  ;
3. **Vitesse d'avancement constante** : cela implique que la vitesse horizontale à l'équi-

libre orientée selon  $\mathbf{x}_i$  dans  $\mathcal{R}_i$ , soit  $v_{n_e}$ , est constante – tout comme l’angle d’assiette  $\theta_e$  qui lui est associé.

En utilisant  $v_{d_e} = 0$  et en notant que :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{o/i_e}^o &= \mathbf{R}_{o/i}(\Phi_{o/i_e})\mathbf{v}_{o/i_e}^i \\ &\Leftrightarrow \\ \begin{bmatrix} u_e \\ 0 \\ w_e \end{bmatrix}^o &= \begin{bmatrix} c_{\theta_e} & 0 & -s_{\theta_e} \\ 0 & 1 & 0 \\ s_{\theta_e} & 0 & c_{\theta_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n_e} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^i = v_{n_e} \begin{bmatrix} c_{\theta_e} \\ 0 \\ s_{\theta_e} \end{bmatrix}^o \Leftrightarrow \begin{cases} u_e = v_{n_e} c_{\theta_e} \\ w_e = v_{n_e} s_{\theta_e} \end{cases}, \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

il est possible d’exprimer  $\mathbf{x}_{lon_e}$  en fonction seulement de  $\theta_e$  et  $v_{n_e}$  en utilisant (F.5), puisque  $q_e = 0$ . On peut donc réécrire (F.4) explicitement en fonction de ses quatre variables d’état non nulles :

$$\boldsymbol{\vartheta}_{lon_e}(\theta_e, v_{n_e}, \omega_e, \delta_e) := \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{lon_e}(\theta_e, v_{n_e}) \\ \mathbf{u}_{lon_e}(\omega_e, \delta_e) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad (\text{F.6})$$

où la dépendance explicite aux paramètres du système contenus dans  $\boldsymbol{\varrho}$  des variables d’équilibre  $\theta_e$ ,  $v_{n_e}$ ,  $\omega_e$  et  $\delta_e$  a été volontairement omise afin d’alléger la notation.

Ainsi, on peut définir l’équilibre du système  $\mathcal{S}_{lon}$  au point d’équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{lon_e}$ , noté  $\mathcal{S}_{lon_e}$ , comme suit – cf. équation (2.30) :

$$\mathcal{S}_{lon_e}(\boldsymbol{\vartheta}_{lon_e}) := \left\{ \dot{\mathbf{x}}_{lon_e} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{f}_{lon}(\mathbf{x}_{lon_e}, \mathbf{u}_{lon_e}, \boldsymbol{\varrho}) = \mathbf{f}_{lon}(\boldsymbol{\vartheta}_{lon_e}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\Sigma_{xz}}^o(\boldsymbol{\vartheta}_{lon_e}) \\ m_{\Sigma_y}(\boldsymbol{\vartheta}_{lon_e}) \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{3 \times 1} \right\} \quad (\text{F.7})$$

qui forme alors un système composé de trois équations scalaires avec les quatre inconnues de  $\boldsymbol{\vartheta}_{lon_e}$  qui ont été définies en (F.6). Pour résoudre ce système, il est donc nécessaire de définir l’une des quatre inconnues comme un paramètre de la solution. On retient arbitrairement  $\sigma_{lon_e} = \theta_e$  comme paramètre de la solution du problème de l’équilibre du système longitudinal  $\mathcal{S}_{lon_e}$  défini en (F.7). Enfin, on redéfinit le point d’équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{lon_e}$  afin d’explicitier sa dépendance à ce paramètre :

$$\boldsymbol{\vartheta}_{lon_e}(\sigma_{lon_e}, \boldsymbol{\varrho}) := \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{lon_e}(\sigma_{lon_e}, \boldsymbol{\varrho}) \\ \mathbf{u}_{lon_e}(\sigma_{lon_e}, \boldsymbol{\varrho}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6. \quad (\text{F.8})$$

## Solution de l’équilibre du vol longitudinal

Cette section présente la solution au problème d’équilibre du vol longitudinal défini en (F.7). On précise que la solution présentée a été développée par Lustosa. Le lecteur désirant obtenir

plus de détails est invité à consulter [8] et [9]. On définit maintenant le problème d'équilibre du vol longitudinal de Lustosa.

**Problème d'équilibre du vol longitudinal :** Pour un angle d'assiette donné  $\theta_e \in \Theta_e^\dagger$  tel que  $\Theta_e^\dagger := \{\theta_e \in \mathbb{R} : 0^\circ < \theta_e \leq 90^\circ\}$ , trouver les valeurs composant l'ensemble solution  $X_e(\theta_e) := \{v_{n_e}(\theta_e), \omega_e(\theta_e), \delta_e(\theta_e)\}$  en résolvant le système :

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{\Sigma_{xz}}^o(\theta_e, v_{n_e}, \omega_e, \delta_e, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0} \\ m_{\Sigma_y}(\theta_e, v_{n_e}, \omega_e, \delta_e, \boldsymbol{\rho}) = 0 \end{cases}, \quad \forall \theta_e \in \Theta_e^\dagger. \quad (\text{F.9})$$

△

On précise que le problème (F.9) ne comporte pas de solution pour le domaine  $-180^\circ \leq \theta_e \leq 0^\circ$ , puisque cela correspond au positionnement du MAVION avec ses moteurs pointant dans la même direction que  $\mathbf{z}_i$  et que cette configuration ne permet pas d'obtenir un équilibre des forces et des moments tel que requis par (F.9). De plus, on définit la solution seulement pour le domaine  $\Theta_e^\dagger$ , puisque le domaine  $\Theta_e^\ddagger := \{\theta_e \in \mathbb{R} : 90^\circ < \theta_e < 180^\circ\}$  possède une solution symétrique au premier domaine. En effet, dans ce second domaine, utilisant le symbole  $\ddagger$  en exposant et correspondant à un vol effectué sur le dos de l'aéronef plutôt que sur le ventre, on obtient les équivalences suivantes pour la solution du problème (F.9) :

$$\begin{cases} \theta_e^\ddagger = 180^\circ - \theta_e \\ v_{n_e}^\ddagger = -v_{n_e}(\theta_e) \\ \omega_e^\ddagger = \omega_e(\theta_e) \\ \delta_e^\ddagger = -\delta_e(\theta_e) \end{cases} \quad (\text{F.10})$$

où  $v_{n_e}(\theta_e)$ ,  $\omega_e(\theta_e)$  et  $\delta_e(\theta_e)$  sont les solutions trouvées au problème (F.9) pour  $\theta_e = 180^\circ - \theta_e^\ddagger$ .

**N. B. :** Dans le cas du système  $\mathcal{S}_q$  paramétré avec les quaternions en (3.25), les identités suivantes sont utilisées pour le vol longitudinal :

$$q_{0_e}(\theta_e) = \cos\left(\frac{\theta_e}{2}\right) \quad \text{et} \quad q_{2_e}(\theta_e) = \sin\left(\frac{\theta_e}{2}\right). \quad (\text{F.11})$$

Pour  $v_{n_e} \geq 0$ , le système donné par (F.9) peut être exprimé sous la forme linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\theta(\theta_e) \mathbf{x}_\theta(v_{n_e}, \omega_e, \delta_e) &= \mathbf{b}_\theta(\theta_e) \\ \mathbf{x}_\theta(v_{n_e}, \omega_e, \delta_e) &:= \begin{bmatrix} x_{\theta_1} & x_{\theta_2} & x_{\theta_3} & x_{\theta_4} \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} v_{n_e}^2 & \delta_e v_{n_e}^2 & \delta_e T_e(\omega_e) & T_e(\omega_e) \end{bmatrix}^\top, \quad \forall \theta_e \in \Theta_e^\dagger \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

où  $\mathbf{A}_\theta(\theta_e) \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$  et  $\mathbf{b}_\theta(\theta_e) \in \mathbb{R}^3$  sont respectivement une matrice et un vecteur constants paramétrés selon  $\theta_e$ , et  $\mathbf{x}_\theta(v_{n_e}, \omega_e, \delta_e) \in \mathbb{R}^4$  est le vecteur de la solution recherchée. Enfin, l'expression  $T_e(\omega_e) = k_t \omega_e^2$  est utilisée afin de simplifier l'écriture de  $\mathbf{A}_\theta(\theta_e)$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\theta &= \begin{bmatrix} \frac{-\rho_0 S}{2} \Phi_{fv}^{xz} \begin{bmatrix} c_{\theta_e} \\ s_{\theta_e} \end{bmatrix} & \frac{\rho_0 S}{2} \Phi_{fv}^{xz} [\boldsymbol{\xi}_f^{xz}]_\times \begin{bmatrix} c_{\theta_e} \\ s_{\theta_e} \end{bmatrix} & \frac{S}{2S_p} \Phi_{fv}^{xz} [\boldsymbol{\xi}_f^{xz}]_\times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{S}{2S_p} \Phi_{fv}^{xz} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \frac{-\rho_0 S c}{2} \Phi_{mv}^y \begin{bmatrix} c_{\theta_e} \\ s_{\theta_e} \end{bmatrix} & \frac{\rho_0 S c}{2} \Phi_{mv}^y [\boldsymbol{\xi}_m^y]_\times \begin{bmatrix} c_{\theta_e} \\ s_{\theta_e} \end{bmatrix} & \frac{S c}{2S_p} \Phi_{mv}^y [\boldsymbol{\xi}_m^y]_\times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \frac{-S c}{2S_p} \Phi_{mv}^y \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (\text{F.13}) \\ \mathbf{b}_\theta &= m g_0 \begin{bmatrix} s_{\theta_e} & -c_{\theta_e} & 0 \end{bmatrix}^\top \end{aligned}$$

$$\text{où } \begin{cases} \Phi_{fv}^{xz} = \begin{bmatrix} C_{D_0} & 0 \\ 0 & C_{L_\alpha} + C_{D_0} \end{bmatrix}, & [\boldsymbol{\xi}_f^{xz}]_\times = \begin{bmatrix} 0 & \xi_{f_y} \\ -\xi_{f_y} & 0 \end{bmatrix} \\ \Phi_{mv}^y = \begin{bmatrix} 0 & -r_{ca}(C_{L_\alpha} + C_{D_0})/c \end{bmatrix}, & [\boldsymbol{\xi}_m^y]_\times = \begin{bmatrix} 0 & \xi_{m_y} \\ -\xi_{m_y} & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{F.14})$$

sont les formulations équivalentes de leur analogue défini au chapitre 3, mais pour le cas longitudinal possédant 3 DDL.

En remarquant que :

$$\begin{bmatrix} x_{\theta_2} \\ x_{\theta_3} \end{bmatrix} = \delta_e \begin{bmatrix} x_{\theta_1} \\ x_{\theta_4} \end{bmatrix} \quad (\text{F.15})$$

et en réduisant la matrice augmentée  $[\mathbf{A}_\theta | \mathbf{b}_\theta]$  à sa forme échelonnée, on obtient la forme :

$$[\mathbf{A}_\theta | \mathbf{b}_\theta] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_3 \end{array} \middle| \begin{array}{c} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{array} \right]. \quad (\text{F.16})$$

On pose  $\epsilon = T_e \in \mathbb{R}_+^*$  afin d'obtenir le système d'équations :

$$\mathbf{x}_\theta = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 \end{bmatrix}^\top + \epsilon \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \end{bmatrix}^\top. \quad (\text{F.17})$$

En insérant (F.17) dans (F.15), on obtient :

$$\begin{cases} \beta_2 + \epsilon\alpha_2 = \delta_e(\beta_1 + \epsilon\alpha_1) \\ \beta_3 + \epsilon\alpha_3 = \delta_e\epsilon \end{cases} \quad (\text{F.18})$$

que l'on réécrit sous la forme d'un polynôme caractéristique d'ordre 2 en fonction de  $\epsilon$  :

$$(\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3)\epsilon^2 + (\beta_2 - \beta_1\alpha_3 - \beta_3\alpha_1)\epsilon - \beta_1\beta_3 = 0 \quad (\text{F.19})$$

ayant comme solutions possibles :

$$\epsilon_i = \frac{-(\beta_2 - \beta_1\alpha_3 - \beta_3\alpha_1) \pm \sqrt{(\beta_2 - \beta_1\alpha_3 - \beta_3\alpha_1)^2 + 4\beta_1\beta_3(\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3)}}{2(\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3)}, \quad i \in \{1, 2\} \quad (\text{F.20})$$

où les conditions sur l'ensemble  $E_i := \{\epsilon_i \in \mathbb{R} \mid \epsilon_i = T_e > 0 \wedge x_{\theta_1}(\epsilon_i) = v_{n_e}^2 \geq 0\}$  doivent être respectées afin d'obtenir une solution physiquement valide.

La solution du problème (F.9) est donc :

$$X_e(\theta_e) := \begin{cases} v_{n_e}(\theta_e) = \sqrt{x_{\theta_1}(\epsilon_i)} \\ \omega_e(\theta_e) = \sqrt{\frac{\epsilon_i}{k_t}} \\ \delta_e(\theta_e) = \frac{x_{\theta_3}(\epsilon_i)}{\epsilon_i} \end{cases}, \quad \forall \epsilon_i(\theta_e) \in E_i : i \in \{1, 2\} \wedge \theta_e \in \Theta_e^\dagger. \quad (\text{F.21})$$

On rappelle que la solution pour  $\sigma_e = \theta_e \in \Theta_e^\dagger$  est donnée par (F.10) et qu'aucune solution physique n'existe pour  $\sigma_e = \theta_e \notin \Theta_e^\dagger \cup \Theta_e^\ddagger$ .

Les courbes d'équilibre de la solution (F.21) sont esquissées à la figure F.1 pour le domaine  $\Theta_e^\dagger$ . Cette figure, tirée de [9], montre la comparaison entre les courbes d'équilibre statique obtenues à partir de la modélisation classique utilisant la  $\pi$ -théorie (cf. section 3.2), la modélisation modifiée de Lustosa utilisant la  $\phi$ -théorie (cf. section 3.3) et l'expérimentation effectuée en soufflerie. On constate alors que les résultats de Lustosa corroborent la modélisation classique de Buckingham ainsi que les données expérimentales recueillies en soufflerie. Bien que les courbes ne se superposent pas exactement, la modélisation effectuée à l'aide de la  $\phi$ -théorie capture clairement et efficacement le comportement non linéaire de ces courbes d'équilibre – sans toutefois introduire de singularité dans le modèle mathématique non linéaire. De plus, ces courbes illustrent bien le jeu d'échange de responsabilité qui s'effectue dans les variables d'état à l'équilibre afin de maintenir les forces de sustentation et de propulsion à l'équilibre.

En effet, on remarque qu'en vol stationnaire ( $\theta_e = 90^\circ$ ), la vitesse des moteurs à l'équilibre  $\omega_e$  est très grande afin de soutenir dans les airs l'aéronef. Puis, celle-ci diminue au fur et à mesure que la vitesse à l'équilibre  $v_{n_e}$  augmente au profit de la force de sustentation générée par le profil alaire. Puis, arrive un certain point où lorsque la vitesse  $v_{n_e}$  est très grande, la vitesse des moteurs  $\omega_e$  se remet à grimper rapidement afin de compenser la résistance aérodynamique qui devient de plus en plus grande – jusqu'à atteindre éventuellement la saturation des moteurs, délimitant du même coup la vitesse de croisière maximale du MAVION. Le même genre d'analyse peut être effectué pour la déflexion angulaire  $\delta_e$  des élevons. Au début, l'élevon est à  $90^\circ$  dans sa position d'équilibre stationnaire sans vent. Puis, sa valeur absolue augmente progressivement avec la vitesse afin de contrer le moment aérodynamique jusqu'à atteindre un extremum où elle se remet à descendre puisqu'il devient plus efficace avec l'augmentation de la vitesse.

Enfin, la figure F.2 présente un résumé du signe des grandeurs d'équilibre  $\theta_e$ ,  $v_{n_e}$ ,  $\omega_e$  et  $\delta_e$  associés au vol longitudinal sans présence de vent. Elle permet également d'apprécier le positionnement des élevons selon le type de vol effectué.

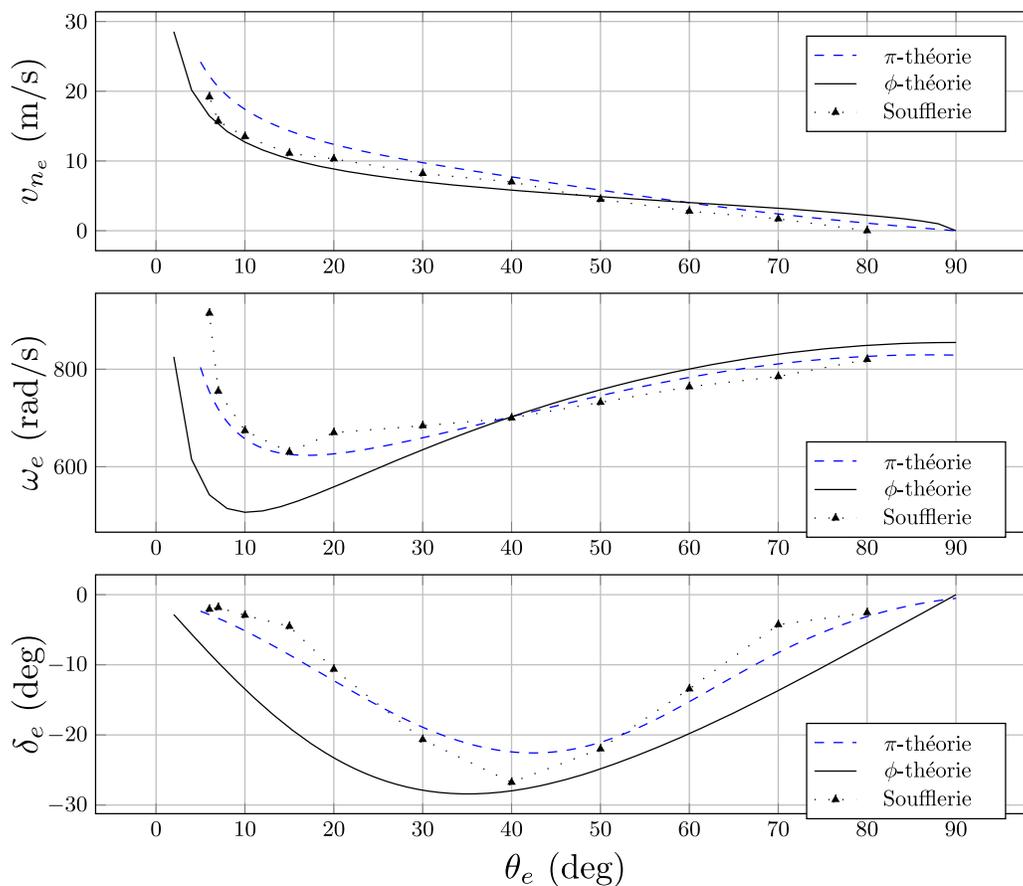


Figure F.1 Courbes d'équilibre du vol longitudinal pour  $v_{n_e}$ ,  $\omega_e$  et  $\delta_e$  du MAVION [9]

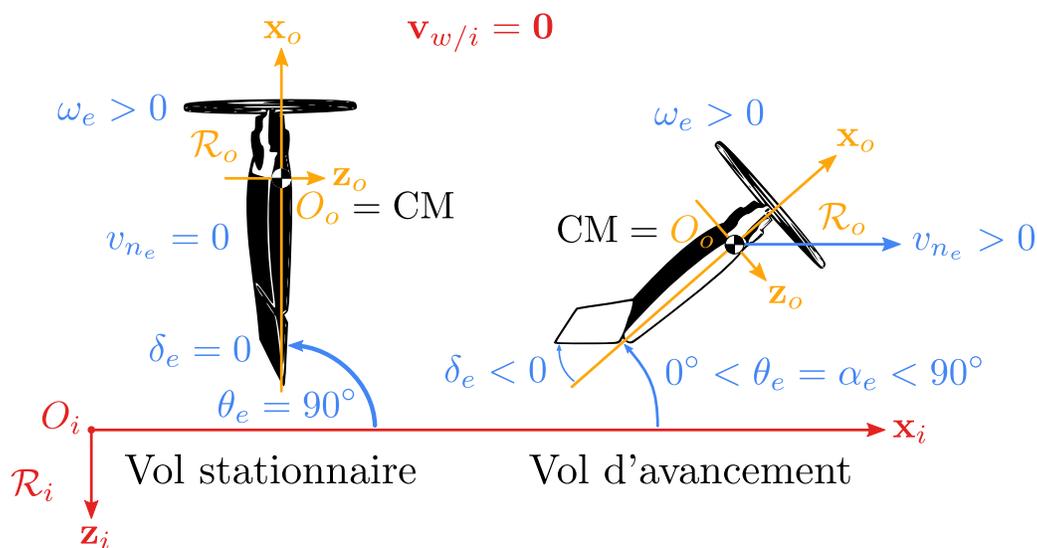


Figure F.2 Comparaison à l'équilibre des vols stationnaire et d'avancement du MAVION

### F.1.2 Virage coordonné

Cette section se consacre à l'étude de la dynamique lorsque le MAVION effectue un virage coordonné. Afin de décrire la dynamique du virage coordonné, on reprend des parties des systèmes  $\mathcal{S}_\Phi$  et  $\mathcal{S}_q$  définis respectivement en (3.21) et (3.25).

Concrètement, la dynamique d'un virage coordonné est définie comme l'analyse du mouvement angulaire cyclique effectué dans le plan horizontal  $\mathbf{x}_i$ - $O_i$ - $\mathbf{y}_i$  autour de l'axe  $\mathbf{z}_i$ . Il s'agit d'une manœuvre utilisée afin d'effectuer un virage circulaire où tous les forces et moments agissant sur l'aéronef sont équilibrés. Ainsi, pendant cette manœuvre, l'appareil maintient son altitude  $z_e$ , sa vitesse d'avancement  $v_{n_e}$  et ses positions angulaires en roulis  $\phi_e$  et tangage  $\theta_e$ . Pour ce faire, le virage doit être effectué à une vitesse de rotation constante  $\dot{\psi}_e = \omega_{d_e}$ , entraînant alors une évolution périodique de l'angle de cap  $\psi_e(t) = \psi_e(t + T)$  où  $T$  est le temps requis pour compléter un tour. Le rayon  $R$  du virage circulaire effectué est donné par  $R = v_{n_e}/\omega_{d_e}$  et la période est donnée par  $T = 2\pi/\omega_{d_e}$ . Pendant cette manœuvre, les états des actionneurs  $\omega_{k_e}$  et  $\delta_{k_e}$  sont également maintenus constants. Toutes ces grandeurs qui interviennent dans l'équilibre du virage coordonné du MAVION sont illustrées à la figure F.3.

Enfin, contrairement au vol longitudinal où il est possible d'obtenir un modèle d'état réduit à 3 DDL, l'étude du virage coordonné nécessite de maintenir un modèle dynamique à 6 DDL.

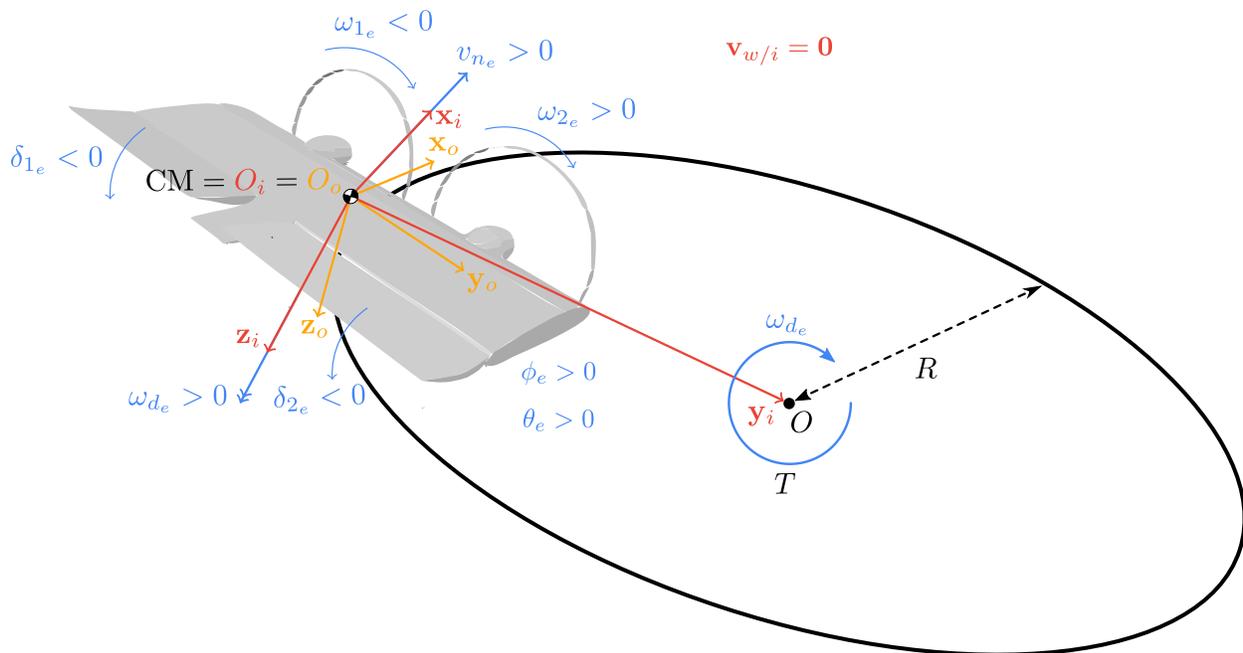


Figure F.3 Grandeurs intervenant dans l'équilibre du virage coordonné du MAVION

## Modèle d'état du virage coordonné

Afin d'analyser la dynamique du virage coordonné, on choisit de retenir le modèle d'état suivant ne comprenant ni la dynamique de la position linéaire ni l'entrée perturbatrice du vecteur vent :

$$\mathcal{S}_{vir}(\boldsymbol{\varrho}) := \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{vir} = \mathbf{f}_{vir}(\mathbf{x}_{vir}, \mathbf{u}_{vir}, \boldsymbol{\varrho}) \\ \Leftrightarrow \\ \begin{bmatrix} \dot{\Phi}_{o/i} \\ {}^i\dot{\mathbf{v}}_{o/i}^i \\ {}^o\dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(\Phi_{o/i})\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \\ \frac{1}{m}\mathbf{R}_{o/i}^\top(\Phi_{o/i})\mathbf{f}_{\Sigma^*}^o(\mathbf{x}_\Sigma(\mathbf{x}_{vir}), \mathbf{u}_{vir}, \boldsymbol{\varrho}) + \mathbf{g}^i \\ (\mathbf{I}^o)^{-1}\left(\mathbf{m}_\Sigma^o(\mathbf{x}_\Sigma(\mathbf{x}_{vir}), \mathbf{u}_{vir}, \boldsymbol{\varrho}) - [\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o]_\times \mathbf{I}^o \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o\right) \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}_{vir}(t_0) = \mathbf{x}_{vir_0} \end{cases} \quad (\text{F.22})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{vir} &:= \left[ \left( \Phi_{o/i} \right)^\top \quad \left( \mathbf{v}_{o/i}^i \right)^\top \quad \left( \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \right)^\top \right]^\top \\ \mathbf{u}_{vir} &:= \mathbf{u}_\Sigma = \left[ \omega_1 \quad \omega_2 \quad \delta_1 \quad \delta_2 \right]^\top \end{aligned} \quad (\text{F.23})$$

et où l'on note que la grandeur  $\mathbf{x}_\Sigma$  intervenant dans les expressions de  $\mathbf{f}_{\Sigma^*}^o$  définie en (E.14) et  $\mathbf{m}_\Sigma^o$  définie en (3.20) peut être exprimée strictement en fonction de l'état  $\mathbf{x}_{vir}$  en utilisant les expressions  $\mathbf{R}_{o/i}$  ( $\Phi_{o/i}$ ) définie en (C.18) et  $\mathbf{v}_{o/i}^o = \mathbf{R}_{o/i}(\Phi_{o/i})\mathbf{v}_{o/i}^i$ . De plus les expressions de  $\mathbf{f}_{\Sigma^*}^o$  et  $\mathbf{m}_\Sigma^o$  sont évaluées en prenant  $\mathbf{w}_{o/i} = \mathbf{0}$ .

## Équilibre du virage coordonné

Les variables à l'équilibre du virage coordonné peuvent être définies comme suit :

$$\Phi_{o/i_e} := \begin{bmatrix} \phi_e \\ \theta_e \\ \psi_e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{o/i_e}^i = \begin{bmatrix} v_{n_e} \\ v_{e_e} \\ v_{d_e} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_{o/i_e}^o = \mathbf{R}_{o/i}^\top \boldsymbol{\omega}_{o/i_e}^o = \begin{bmatrix} \omega_{n_e} \\ \omega_{e_e} \\ \omega_{d_e} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{vir_e} := \begin{bmatrix} \omega_{1_e} \\ \omega_{2_e} \\ \delta_{1_e} \\ \delta_{2_e} \end{bmatrix} \quad (\text{F.24})$$

où l'on décide plutôt d'utiliser le vecteur de la vitesse de rotation instantanée projeté dans  $\mathcal{R}_i$  dans le cadre de la résolution de l'équilibre du virage coordonné.

On assemble ces grandeurs dans le vecteur du point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{vir_e}$  :

$$\boldsymbol{\vartheta}_{vir_e}(\boldsymbol{\rho}) := \begin{bmatrix} \Phi_{o/i_e}(\boldsymbol{\rho}) \\ \mathbf{v}_{o/i_e}^i(\boldsymbol{\rho}) \\ \boldsymbol{\omega}_{o/i_e}^i(\boldsymbol{\rho}) \\ \mathbf{u}_{vir_e}(\boldsymbol{\rho}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{13} \quad (\text{F.25})$$

où l'on explicite le fait que la solution du point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{vir_e}$  dépend du vecteur des paramètres  $\boldsymbol{\rho}$  du système  $\mathcal{S}_{vir}$  défini en (F.22).

L'équilibre du virage coordonné est défini qualitativement comme suit :

1. **Altitude constante** : la vitesse verticale à l'équilibre orientée selon  $\mathbf{z}_i$  dans  $\mathcal{R}_i$  est nulle, soit  $v_{d_e} = 0$  ;
2. **Virage à rayon constant** : la composante de la vitesse radiale est nulle, soit  $v_{e_e} = 0$  pour  $\psi_e = 0$  ;
3. **Vitesse d'avancement constante** : la vitesse horizontale à l'équilibre orientée selon  $\mathbf{x}_i$  dans  $\mathcal{R}_i$ , soit  $v_{n_e}$ , est constante – tout comme les angles de roulis  $\phi_e$  et d'assiette  $\theta_e$  qui lui sont associés ;
4. **Virage circulaire et planaire** : la seule vitesse de rotation à l'équilibre non nulle est  $\omega_{d_e}$  autour de  $\mathbf{z}_i$  et les autres sont nulles, soit  $\omega_{n_e} = \omega_{e_e} = 0$ .

Comme il a été fait pour l'équilibre du vol longitudinal, on précise qu'on retient arbitrairement le cas où  $\psi_e = 0$  afin de simplifier les équations. Cela est possible, puisque cet état n'influence en rien la dynamique du virage coordonné à l'équilibre.

Ainsi, en prenant en compte ces valeurs d'équilibre nulles, on obtient :

$$\Phi_{o/i_e} := \begin{bmatrix} \phi_e \\ \theta_e \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{o/i_e}^i = \begin{bmatrix} v_{n_e} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_{o/i_e}^i = \mathbf{R}_{o/i_e}^\top \boldsymbol{\omega}_{o/i_e}^o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{d_e} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_{vir_e} := \begin{bmatrix} \omega_{1_e} \\ \omega_{2_e} \\ \delta_{1_e} \\ \delta_{2_e} \end{bmatrix} \quad (\text{F.26})$$

permettant de constater que le vecteur de la position d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{vir_e}$  contient en fait seulement 8 valeurs d'équilibre non nulles. On le redéfinit donc comme suit :

$$\boldsymbol{\vartheta}_{vir_e}(\phi_e, \theta_e, v_{n_e}, \omega_{d_e}, \omega_{1_e}, \omega_{2_e}, \delta_{1_e}, \delta_{2_e}) := \begin{bmatrix} \Phi_{o/i_e}(\phi_e, \theta_e) \\ \mathbf{v}_{o/i_e}^i(v_{n_e}) \\ \boldsymbol{\omega}_{o/i_e}^i(\omega_{d_e}) \\ \mathbf{u}_{vir_e}(\omega_{1_e}, \omega_{2_e}, \delta_{1_e}, \delta_{2_e}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{13} \quad (\text{F.27})$$

où la dépendance explicite des variables d'équilibre au vecteur paramètre  $\boldsymbol{\rho}$  a été volontairement omise afin d'alléger la notation.

L'équilibre du virage coordonné est défini mathématiquement dans  $\mathcal{R}_i$  comme suit :

$$\begin{cases} {}^i\dot{\mathbf{v}}_{o/i_e} = \boldsymbol{\omega}_{o/i_e}^i \times \mathbf{v}_{o/i_e}^i \\ {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i_e}^i = {}^o\dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i_e}^i = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{R}_{o/i_e}^\top {}^o\dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i_e}^o = \mathbf{0} \Leftrightarrow {}^o\dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i_e}^o = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{F.28})$$

où la première équation vectorielle faisant intervenir  ${}^i\dot{\mathbf{v}}_{o/i_e}$  représente la condition d'accélération tangentielle nulle (équilibre des forces) et la seconde équation vectorielle faisant intervenir  ${}^o\dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i_e}^o$  représente la condition d'un virage effectué à courbure et vitesse de rotation constantes.

Ainsi, en posant les équivalences nécessaires entre le modèle d'état à l'équilibre du virage coordonné défini en (F.22) et la définition mathématique de l'équilibre donnée en (F.28), on peut définir l'équilibre du système  $\mathcal{S}_{vir_e}$  au point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{vir_e}$ , noté  $\mathcal{S}_{vir_e}$ , comme suit :

$$\mathcal{S}_{vir_e}(\boldsymbol{\vartheta}_{vir_e}) := \begin{cases} [\boldsymbol{\omega}_{o/i_e}^i]_\times \mathbf{v}_{o/i_e}^i = \frac{1}{m} \mathbf{R}_{o/i}^\top(\boldsymbol{\vartheta}_{vir_e}) \mathbf{f}_{\Sigma^*}^o(\boldsymbol{\vartheta}_{vir_e}) + \mathbf{g}^i \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} = (\mathbf{I}^o)^{-1} \left( \mathbf{m}_{\Sigma}^o(\boldsymbol{\vartheta}_{vir_e}) - [\mathbf{R}_{o/i}(\boldsymbol{\vartheta}_{vir_e}) \boldsymbol{\omega}_{o/i_e}^i]_\times \mathbf{I}^o \mathbf{R}_{o/i}(\boldsymbol{\vartheta}_{vir_e}) \boldsymbol{\omega}_{o/i_e}^i \right) \end{cases} \quad (\text{F.29})$$

où les mêmes remarques déjà mentionnées s'appliquent concernant les expressions de  $\mathbf{R}_{o/i}$ ,  $\mathbf{f}_{\Sigma^*}^o$  et  $\mathbf{m}_{\Sigma}^o$  pouvant être exprimées en fonction de  $\boldsymbol{\vartheta}_{vir_e}$  à l'aide d'identités appropriées déjà définies dans cette section.

On note que l'équation vectorielle à l'équilibre de la cinématique en rotation de (F.22) :

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}_{o/i_e} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\Phi}_{o/i_e}) \boldsymbol{\omega}_{o/i_e}^o = \mathbf{H}(\boldsymbol{\Phi}_{o/i_e}) \mathbf{R}_{o/i}(\boldsymbol{\Phi}_{o/i_e}) \boldsymbol{\omega}_{o/i_e}^i \quad (\text{F.30})$$

n'est pas considérée dans le système de l'équilibre du virage coordonné  $\mathcal{S}_{vir_e}$ , puisqu'elle permet tout simplement d'obtenir l'équation triviale  $\dot{\psi}_e = \omega_{d_e}$ .

Le système à l'équilibre (F.29) forme alors un système composé de six équations scalaires avec les huit inconnues de  $\boldsymbol{\vartheta}_{vir_e}$  qui ont été définies en (F.27). Pour résoudre ce système, il est donc nécessaire de définir deux inconnues comme des paramètres de la solution recherchée. On retient arbitrairement  $\boldsymbol{\sigma}_{vir_e} = [v_{n_e} \ \omega_{d_e}]^\top$  afin de paramétrer la solution du problème d'équilibre  $\mathcal{S}_{vir_e}$ . Enfin, on redéfinit le point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_{vir_e}$  afin d'expliciter la dépendance

à ce nouveau paramètre vectoriel :

$$\boldsymbol{\vartheta}_{vir_e}(\boldsymbol{\sigma}_{vir_e}, \boldsymbol{\varrho}) := \begin{bmatrix} \Phi_{o/i_e}(\boldsymbol{\sigma}_{vir_e}, \boldsymbol{\varrho}) \\ \mathbf{v}_{o/i_e}^i(\boldsymbol{\sigma}_{vir_e}, \boldsymbol{\varrho}) \\ \boldsymbol{\omega}_{o/i_e}^i(\boldsymbol{\sigma}_{vir_e}, \boldsymbol{\varrho}) \\ \mathbf{u}_{vir_e}(\boldsymbol{\sigma}_{vir_e}, \boldsymbol{\varrho}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{13} \quad (\text{F.31})$$

pour lequel sa solution est abordée à la prochaine section.

### Solution de l'équilibre du virage coordonné

On définit maintenant le problème d'équilibre du virage coordonné.

**Problème d'équilibre du virage coordonné :** Pour des vitesses d'avancement  $v_{n_e}$  et de rotation  $\omega_{d_e}$  données par  $\boldsymbol{\sigma}_{vir_e}$ , trouver les valeurs composant l'ensemble solution  $Y_e(\boldsymbol{\sigma}_{vir_e}) := \{\phi_e(\boldsymbol{\sigma}_{vir_e}), \theta_e(\boldsymbol{\sigma}_{vir_e}), \omega_{1_e}(\boldsymbol{\sigma}_{vir_e}), \omega_{2_e}(\boldsymbol{\sigma}_{vir_e}), \delta_{1_e}(\boldsymbol{\sigma}_{vir_e}), \delta_{2_e}(\boldsymbol{\sigma}_{vir_e})\}$  en résolvant le système  $\mathcal{S}_{vir_e}(\boldsymbol{\vartheta}_{vir_e})$  défini en (F.29)  $\forall \boldsymbol{\sigma}_{vir_e}$  admissibles.  $\triangle$

Malheureusement, les nombreuses non-linéarités comprises dans le système d'équations (F.29) rendent la recherche d'une solution analytique très complexe, voire impossible. Ainsi, on se penche plutôt vers la recherche d'une solution numérique. En utilisant n'importe quel solveur non linéaire tel que la fonction `FSOLVE` de MATLAB<sup>®</sup>, il est possible de solutionner le problème d'équilibre du virage coordonné. De plus, on note qu'il est possible d'initialiser la recherche de solution en commençant par le cas  $\omega_{d_e} = 0$  qui ramène alors au problème d'équilibre longitudinal dont la solution est connue et a été définie en (F.21). Puis, on itère en utilisant la solution précédente afin d'initialiser la recherche de la solution suivante. En progressant ainsi, il est possible de couvrir tout le domaine de solutions possibles au problème (F.29). Les solutions ainsi obtenues sont présentées aux figures F.4, F.5 et F.6 tirées de [8].

L'analyse de ces figures révèle tout d'abord que le domaine de la solution du problème d'équilibre du virage coordonné n'est pas infini. En effet, on observe sur ces figures les limites du domaine de vol. Contrairement à l'équilibre longitudinal dont le domaine est limité par la saturation des actionneurs afin de vaincre la force de traînée, le domaine de l'équilibre du virage coordonné est plutôt limité par la dynamique même de cette manœuvre d'équilibre. On note également que ces courbes d'équilibre du virage coordonné peuvent également être utilisées afin de déterminer l'équilibre longitudinal du vol en croisière. En effet, le vol longitudinal en croisière est un cas d'équilibre particulier du virage coordonné avec un rayon infini !

Enfin, comme pour le cas longitudinal, on note qu'il existe également une symétrie dans la solution du problème d'équilibre du virage coordonné. En effet, pour un virage effectué vers la gauche avec  $\omega_{d_e} < 0$ , plutôt que vers la droite avec  $\omega_{d_e} > 0$ , il est possible de retrouver les valeurs du point d'équilibre  $\boldsymbol{\rho}_{vir_e}$  pour  $\omega_{d_e} < 0$  en effectuant des opérations de signe sur la solution trouvée pour  $\omega_{d_e} > 0$  ou *vice-versa*. Le lecteur est invité à déduire ces opérations par lui-même.

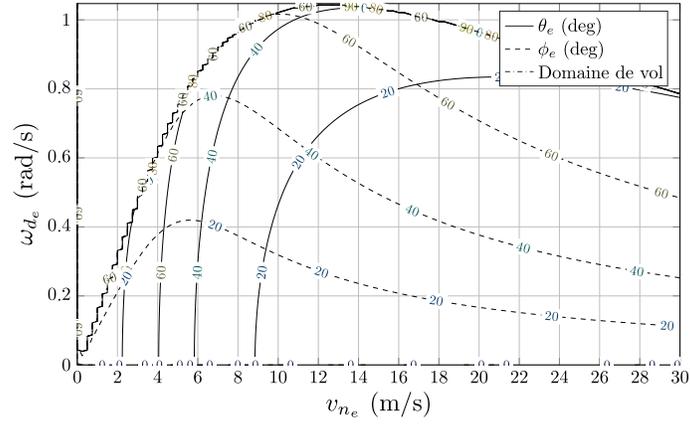


Figure F.4 Courbes d'équilibre du virage coordonné pour  $\phi_e$  et  $\theta_e$  du MAVION [8]

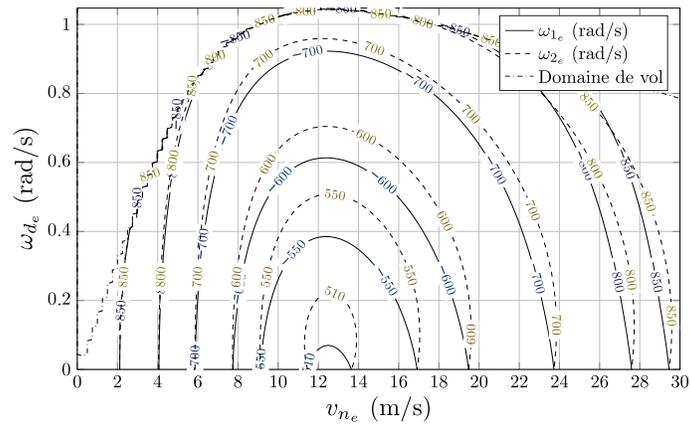


Figure F.5 Courbes d'équilibre du virage coordonné pour  $\omega_{1_e}$  et  $\omega_{2_e}$  du MAVION [8]

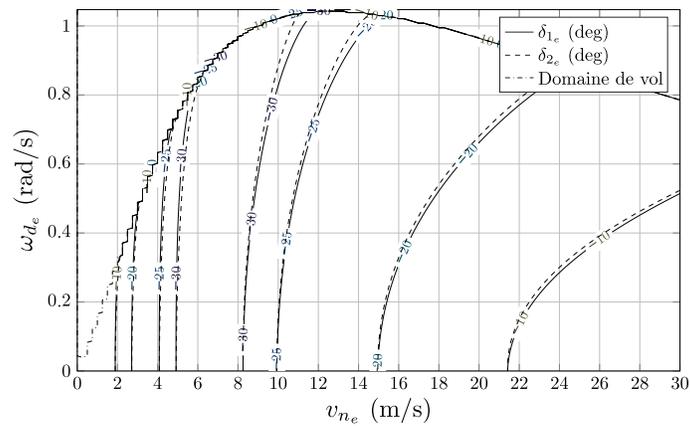


Figure F.6 Courbes d'équilibre du virage coordonné pour  $\delta_{1_e}$  et  $\delta_{2_e}$  du MAVION [8]

## F.2 Linéarisation du modèle

Cette section présente la linéarisation du modèle non linéaire du MAVION présenté au chapitre 3. L'objectif est d'obtenir le modèle d'état linéarisé de la dynamique du MAVION en conservant les équations sous leur forme vectorielle. Pour ce faire, il est nécessaire de reformuler la dynamique de la cinématique en rotation définie préalablement en (2.5). Ceci s'avère nécessaire, puisque la forme de la matrice  $\mathbf{H}(\Phi_{o/i})$  n'admet pas une représentation facilement dérivable sous forme vectorielle.

La solution à ce problème consiste à reformuler localement la modélisation de la cinématique en rotation par rapport à un nouveau repère secondaire fixe  $\mathcal{R}_s$ . Les sections F.2.1 et F.2.2 abordent cette problématique.

Aussi, on ne considère pas la dynamique des actionneurs dans cette section pour deux raisons. D'abord, les systèmes (3.30) et (3.31) sont déjà linéaires. Puis, leur dynamique est totalement découplée des autres états du MAVION. Ils peuvent donc être traités séparément. Le modèle d'état linéarisé dans  $\mathcal{R}_o$  de la dynamique du MAVION est présenté à la section F.2.3.

On précise que le modèle d'état linéarisé est issu des travaux de [8].

### F.2.1 Reformulation locale de la cinématique en rotation

Puisque le vol longitudinal est une solution particulière du virage coordonné pour les conditions  $\omega_{d_e} = \phi_e = 0$ ,  $\omega_e = -\omega_{1_e} = \omega_{2_e}$  et  $\delta_e = \delta_{1_e} = \delta_{2_e}$ , on choisit de linéariser le modèle (3.21) au point d'équilibre obtenu pour le virage coordonné – soit une solution plus générale.

Pour ce faire, on adopte une approche consistant à utiliser des angles d'Euler locaux  $\boldsymbol{\psi}_{o/s} := [\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3]^\top$ . On introduit un nouveau repère secondaire  $\mathcal{R}_s$  correspondant à la position angulaire de  $\mathcal{R}_o$  par rapport à  $\mathcal{R}_i$  pour une position d'équilibre précisément définie. Les angles  $\boldsymbol{\psi}_{o/s}$  représentent alors de petites déviations angulaires de  $\mathcal{R}_o$  par rapport à  $\mathcal{R}_s$  dans le voisinage de la position d'équilibre qui est associée à  $\mathcal{R}_s$ . Ainsi, le repère  $\mathcal{R}_s$  est fixe pour une position d'équilibre définie pour laquelle on souhaite obtenir son modèle linéarisé associé.

L'équation cinématique d'Euler donne – cf. équation (2.6) :

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}_{o/s} = \begin{bmatrix} 1 & s_{\psi_1} t_{\psi_2} & c_{\psi_1} t_{\psi_2} \\ 0 & c_{\psi_1} & -s_{\psi_1} \\ 0 & \frac{s_{\psi_1}}{c_{\psi_2}} & \frac{c_{\psi_1}}{c_{\psi_2}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{o/s}^o \quad (\text{F.32})$$

où  $\boldsymbol{\omega}_{o/s}^o$  est la vitesse angulaire de  $\mathcal{R}_o$  par rapport à  $\mathcal{R}_s$  projetée dans  $\mathcal{R}_o$ . Or, pour de petites

déviations angulaires  $\boldsymbol{\psi}_{o/s} \rightarrow \mathbf{0}$  locales à  $\mathcal{R}_s$ , on obtient :

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}_{o/s} \approx \boldsymbol{\omega}_{o/s}^o. \quad (\text{F.33})$$

On décompose maintenant le vecteur des vitesses angulaires  $\boldsymbol{\omega}_{o/s}^o$  de telle sorte à faire apparaître les états  $\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o$  :

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}_{o/s} \approx \boldsymbol{\omega}_{o/s}^o = \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o - \boldsymbol{\omega}_{s/i}^o \quad (\text{F.34})$$

et on fait apparaître les nouveaux états  $\boldsymbol{\psi}_{o/s}$  à travers sa *Direction Cosine Matrix* (DCM) :

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}_{o/s} \approx \boldsymbol{\omega}_{o/s}^o = \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o - \boldsymbol{\omega}_{s/i}^o = \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o - \mathbf{R}_{o/s}(\boldsymbol{\psi}_{o/s})\boldsymbol{\omega}_{s/i}^s \quad (\text{F.35})$$

où l'on note que pour de petites déviations angulaires  $\boldsymbol{\psi}_{o/s} \rightarrow \mathbf{0}$  :

$$\mathbf{R}_{o/s}(\boldsymbol{\psi}_{o/s}) \approx \mathbf{I} - [\boldsymbol{\psi}_{o/s}]_{\times}. \quad (\text{F.36})$$

Ainsi, pour l'hypothèse de petites déviations angulaires  $\boldsymbol{\psi}_{o/s} \rightarrow \mathbf{0}$ , (F.33) et (F.36) donnent des équivalences exactes (du point de vue d'une analyse linéaire du premier ordre) et on obtient :

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}_{o/s} = \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o - (\mathbf{I} - [\boldsymbol{\psi}_{o/s}]_{\times})\boldsymbol{\omega}_{s/i}^s. \quad (\text{F.37})$$

On analyse maintenant le point d'équilibre de (F.37). En se plaçant exactement à la position angulaire correspondant à l'emplacement de  $\mathcal{R}_s$ , on obtient le point d'équilibre  $\boldsymbol{\psi}_{o/s_e} = \mathbf{0}$  et donc  $\dot{\boldsymbol{\psi}}_{o/s_e} = \mathbf{0}$ . Ainsi, à ce point d'équilibre de linéarisation, (F.37) donne l'identité supplémentaire :

$$\boldsymbol{\omega}_{s/i_e}^s = \boldsymbol{\omega}_{o/i_e}^o. \quad (\text{F.38})$$

## F.2.2 Reformulation locale du modèle d'état

En notant que l'expression :

$$\mathbf{R}_{o/i} = \mathbf{R}_{o/s}(\boldsymbol{\psi}_{o/s})\mathbf{R}_{s/i} = (\mathbf{I} - [\boldsymbol{\psi}_{o/s}]_{\times})\mathbf{R}_{s/i} \quad (\text{F.39})$$

évaluée au point d'équilibre  $\boldsymbol{\psi}_{o/s_e} = \mathbf{0}$  donne :

$$\mathbf{R}_{s/i_e} = \mathbf{R}_{o/i_e}, \quad (\text{F.40})$$

il est possible de réécrire (3.21) comme suit :

$$\mathcal{S}^*(\boldsymbol{\varrho}) := \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\psi}}_{o/s} = \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o - (\mathbf{I} - [\boldsymbol{\psi}_{o/s}]_{\times}) \boldsymbol{\omega}_{s/i}^s \\ {}^o\dot{\mathbf{v}}_{o/i}^o = \frac{1}{m} \mathbf{f}_{\Sigma}^o(\mathbf{x}_{\Sigma}(\mathbf{x}^*), \mathbf{u}_{\Sigma}, \mathbf{w}_{\Sigma}, \boldsymbol{\varrho}) - [\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o]_{\times} \mathbf{v}_{o/i}^o \\ {}^o\dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i}^o = \mathbf{I}^{o-1} \mathbf{m}_{\Sigma}^o(\mathbf{x}_{\Sigma}(\mathbf{x}^*), \mathbf{u}_{\Sigma}, \mathbf{w}_{\Sigma}, \boldsymbol{\varrho}) - \mathbf{I}^{o-1} [\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o]_{\times} \mathbf{I}^o \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \\ \mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0^* \end{cases} \quad (\text{F.41})$$

où  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^9$  est le nouveau vecteur d'état comprenant la nouvelle paramétrisation des positions angulaires définies par rapport au point d'équilibre étudié :

$$\mathbf{x}^* := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_{o/s} \\ \mathbf{v}_{o/i}^o \\ \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \end{bmatrix}. \quad (\text{F.42})$$

Il est à noter que les variables supplémentaires  $\boldsymbol{\omega}_{s/i}^s$  et  $\mathbf{R}_{s/i}$  introduites dans (F.41) sont bien définies au point d'équilibre de linéarisation tel qu'indiqué par (F.38) et (F.40). En effet, la dynamique du système (F.37) est valide seulement dans le voisinage de  $\boldsymbol{\psi}_{o/s_e}$ . En d'autres mots, cette dynamique est déjà sous sa forme linéarisée en raison de l'hypothèse de petites déviations angulaires utilisée en (F.36).

### F.2.3 Modèle d'état linéarisé

On définit le point d'équilibre du virage coordonné utilisant le nouveau modèle d'état (F.41) comme suit :

$$\boldsymbol{\vartheta}_e^*(\boldsymbol{\sigma}_e^*, \boldsymbol{\varrho}) := \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e^*(\boldsymbol{\sigma}_e^*, \boldsymbol{\varrho}) \\ \mathbf{u}_e^*(\boldsymbol{\sigma}_e^*, \boldsymbol{\varrho}) \end{bmatrix} \quad (\text{F.43})$$

où  $\boldsymbol{\sigma}_e^* = \boldsymbol{\sigma}_{vir_e}$  et  $\mathbf{u}_e^* = \mathbf{u}_{vir_e}$  - cf. équation (F.31).

Pour ce point d'équilibre et sans s'attarder à la dynamique liée à l'entrée perturbatrice ( $\mathbf{w} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_{o/i}$  et  $\eta = \|\mathbf{v}_{o/i}\|_2$ ), on obtient le modèle d'état linéarisé :

$$\Delta \mathcal{S}^*(\boldsymbol{\vartheta}_e^*) := \begin{cases} \Delta \dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{A}^*(\boldsymbol{\vartheta}_e^*) \Delta \mathbf{x}^* + \mathbf{B}^*(\boldsymbol{\vartheta}_e^*) \Delta \mathbf{u}^* \\ \Delta \mathbf{x}^*(t_0) = \Delta \mathbf{x}_0^* \end{cases} \quad (\text{F.44})$$

$$\text{où } \mathbf{A}^*(\boldsymbol{\vartheta}_e^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}_{o/i}^o}{\partial \mathbf{v}_{o/i}^o} & \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}_{o/i}^o}{\partial \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o} & \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}_{o/i}^o}{\partial \boldsymbol{\psi}_{o/s}} \\ \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i}^o}{\partial \mathbf{v}_{o/i}^o} & \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i}^o}{\partial \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o} & \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i}^o}{\partial \boldsymbol{\psi}_{o/s}} \\ \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\psi}}_{o/s}}{\partial \mathbf{v}_{o/i}^o} & \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\psi}}_{o/s}}{\partial \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o} & \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\psi}}_{o/s}}{\partial \boldsymbol{\psi}_{o/s}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\vartheta}_e^* \quad \text{et } \mathbf{B}^*(\boldsymbol{\vartheta}_e^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}_{o/i}^o}{\partial \omega_1} & \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}_{o/i}^o}{\partial \omega_2} & \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}_{o/i}^o}{\partial \delta_1} & \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}_{o/i}^o}{\partial \delta_2} \\ \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i}^o}{\partial \omega_1} & \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i}^o}{\partial \omega_2} & \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i}^o}{\partial \delta_1} & \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i}^o}{\partial \delta_2} \\ \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\psi}}_{o/s}}{\partial \omega_1} & \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\psi}}_{o/s}}{\partial \omega_2} & \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\psi}}_{o/s}}{\partial \delta_1} & \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\psi}}_{o/s}}{\partial \delta_2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\vartheta}_e^* . \quad (\text{F.45})$$

Les composantes matricielles ( $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ ) de  $\mathbf{A}^*$  et vectorielles ( $\mathbb{R}^3$ ) de  $\mathbf{B}^*$  sont obtenues en dérivant les équations vectorielles décrites en (F.41) et en les évaluant au point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_e^*$ .

Ainsi, en notant que :

$$\hat{\mathbf{v}}_{o/i}^o = \frac{\mathbf{v}_{o/i}^o}{\|\mathbf{v}_{o/i}^o\|_2} = \begin{cases} \frac{\mathbf{v}_{o/i}^o}{\eta} & \text{si } \eta \neq 0 \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{F.46})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_o = [1 \quad 0 \quad 0]^\top \quad (\text{F.47})$$

et en se rappelant les résultats de dérivées vectorielles présentés à la section C.5.3, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^o \dot{\mathbf{v}}_{o/i}^o}{\partial \mathbf{v}_{o/i}^o} &= -\frac{\rho_0 S}{4m} \boldsymbol{\Phi}_{fv}^o \left( 2\mathbf{I}_{3 \times 3} - \delta_1 [\boldsymbol{\xi}_f^o]_\times - \delta_2 [\boldsymbol{\xi}_f^o]_\times \right) \left( \eta \mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathbf{v}_{o/i}^o \hat{\mathbf{v}}_{o/i}^{o \top} \right) \\ &\quad - \frac{\rho_0 S}{4m} \boldsymbol{\Phi}_{f\omega}^o \left( 2\mathbf{I}_{3 \times 3} - \delta_1 [\boldsymbol{\xi}_f^o]_\times - \delta_2 [\boldsymbol{\xi}_f^o]_\times \right) \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \hat{\mathbf{v}}_{o/i}^{o \top} - [\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o]_\times \end{aligned} \quad (\text{F.48})$$

$$\frac{\partial^o \dot{\mathbf{v}}_{o/i}^o}{\partial \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o} = -\frac{\rho_0 \eta S}{4m} \boldsymbol{\Phi}_{f\omega}^o \left( 2\mathbf{I}_{3 \times 3} - \delta_1 [\boldsymbol{\xi}_f^o]_\times - \delta_2 [\boldsymbol{\xi}_f^o]_\times \right) \mathbf{B} + [\mathbf{v}_{o/i}^o]_\times \quad (\text{F.49})$$

$$\frac{\partial^o \dot{\mathbf{v}}_{o/i}^o}{\partial \boldsymbol{\psi}_{o/s}} = [\mathbf{R}_{s/i} \mathbf{g}^i]_\times \quad (\text{F.50})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^o \frac{\partial^o \dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i}^o}{\partial \mathbf{v}_{o/i}^o} &= -\frac{\rho_0 S}{4} \mathbf{B} \boldsymbol{\Phi}_{mv}^o \left( 2\mathbf{I}_{3 \times 3} - \delta_1 [\boldsymbol{\xi}_m^o]_\times - \delta_2 [\boldsymbol{\xi}_m^o]_\times \right) \left( \eta \mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathbf{v}_{o/i}^o \hat{\mathbf{v}}_{o/i}^{o \top} \right) \\ &\quad - \frac{\rho_0 S}{4} \mathbf{B} \boldsymbol{\Phi}_{m\omega}^o \left( 2\mathbf{I}_{3 \times 3} - \delta_1 [\boldsymbol{\xi}_m^o]_\times - \delta_2 [\boldsymbol{\xi}_m^o]_\times \right) \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \hat{\mathbf{v}}_{o/i}^{o \top} \\ &\quad + \frac{\rho_0 S}{4} \left( \delta_1 [\mathbf{r}_{a,1}^o]_\times + \delta_2 [\mathbf{r}_{a,2}^o]_\times \right) \boldsymbol{\Phi}_{fv}^o [\boldsymbol{\xi}_f^o]_\times \left( \eta \mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathbf{v}_{o/i}^o \hat{\mathbf{v}}_{o/i}^{o \top} \right) \\ &\quad + \frac{\rho_0 S}{4} \left( \delta_1 [\mathbf{r}_{a,1}^o]_\times + \delta_2 [\mathbf{r}_{a,2}^o]_\times \right) \boldsymbol{\Phi}_{f\omega}^o [\boldsymbol{\xi}_f^o]_\times \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \hat{\mathbf{v}}_{o/i}^{o \top} \end{aligned} \quad (\text{F.51})$$

$$\mathbf{I}^o \frac{\partial^o \dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i}^o}{\partial \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o} = (J_{p_x} - J_{p_n}) \sum_{k=1}^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -r & 0 & -(p + \omega_k) \\ q & p + \omega_k & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{F.52})$$

$$- \frac{\rho_0 \eta S}{4} \mathbf{B} \Phi_{m\omega}^o \left( 2\mathbf{I}_{3 \times 3} - \delta_1 [\boldsymbol{\xi}_m^o]_{\times} - \delta_2 [\boldsymbol{\xi}_m^o]_{\times} \right) \mathbf{B} \\ + \frac{\rho_0 \eta S}{4} \left( \delta_1 [\mathbf{r}_{a,1}^o]_{\times} + \delta_2 [\mathbf{r}_{a,2}^o]_{\times} \right) \Phi_{f\omega}^o [\boldsymbol{\xi}_f^o]_{\times} \mathbf{B} + [\mathbf{I}^o \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o]_{\times} - [\boldsymbol{\omega}_{o/i}^o]_{\times} \mathbf{I}^o$$

$$\frac{\partial^o \dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i}^o}{\partial \boldsymbol{\psi}_{o/s}} = \mathbf{0}_{3 \times 3} \quad (\text{F.53})$$

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{\psi}}_{o/s}}{\partial \mathbf{v}_{o/i}^o} = \mathbf{0}_{3 \times 3} \quad (\text{F.54})$$

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{\psi}}_{o/s}}{\partial \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o} = \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (\text{F.55})$$

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{\psi}}_{o/s}}{\partial \boldsymbol{\psi}_{o/s}} = -[\boldsymbol{\omega}_{s/i}^s]_{\times} \quad (\text{F.56})$$

$$m \frac{\partial^o \dot{\mathbf{v}}_{o/i}^o}{\partial \omega_k} = 2k_t \omega_k \left( \mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{S}{4S_p} \Phi_{fv}^o \left( \mathbf{I}_{3 \times 3} - \delta_k [\boldsymbol{\xi}_f^o]_{\times} \right) \right) \hat{\mathbf{x}}_o, \quad \forall k \in \{1, 2\} \quad (\text{F.57})$$

$$m \frac{\partial^o \dot{\mathbf{v}}_{o/i}^o}{\partial \delta_k} = \frac{\rho_0 \eta S}{4} \left( \Phi_{fv}^o [\boldsymbol{\xi}_f^o]_{\times} \mathbf{v}_{o/i}^o + \Phi_{f\omega}^o [\boldsymbol{\xi}_f^o]_{\times} \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \right) \\ + \frac{S}{4S_p} \Phi_{fv}^o [\boldsymbol{\xi}_f^o]_{\times} \mathbf{f}_{t,k}^o(\omega_k), \quad \forall k \in \{1, 2\} \quad (\text{F.58})$$

$$\mathbf{I}^o \frac{\partial^o \dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i}^o}{\partial \omega_k} = -2 \text{signe}(\omega_k) k_d \omega_k \hat{\mathbf{x}}_o - (J_{p_x} - J_{p_n}) \begin{bmatrix} 0 & r & -q \end{bmatrix}^{\top} \\ - \frac{k_t \omega_k S}{2S_p} \mathbf{B} \Phi_{mv}^o \left( \mathbf{I}_{3 \times 3} - \delta_k [\boldsymbol{\xi}_m^o]_{\times} \right) \hat{\mathbf{x}}_o + 2k_t \omega_k [\mathbf{r}_{p,k}^o]_{\times} \hat{\mathbf{x}}_o \\ - \frac{k_t \omega_k S}{2S_p} [\mathbf{r}_{a,k}^o]_{\times} \Phi_{fv}^o \left( \mathbf{I}_{3 \times 3} - \delta_k [\boldsymbol{\xi}_f^o]_{\times} \right) \hat{\mathbf{x}}_o, \quad \forall k \in \{1, 2\} \quad (\text{F.59})$$

$$\mathbf{I}^o \frac{\partial^o \dot{\boldsymbol{\omega}}_{o/i}^o}{\partial \delta_k} = \frac{\rho_0 \eta S}{4} \mathbf{B} \left( \Phi_{mv}^o [\boldsymbol{\xi}_m^o]_{\times} \mathbf{v}_{o/i}^o + \Phi_{m\omega}^o [\boldsymbol{\xi}_m^o]_{\times} \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \right) + \frac{S}{4S_p} \mathbf{B} \Phi_{mv}^o [\boldsymbol{\xi}_m^o]_{\times} \mathbf{f}_{t,k}^o(\omega_k) \\ + \frac{\rho_0 \eta S}{4} [\mathbf{r}_{a,k}^o]_{\times} \left( \Phi_{fv}^o [\boldsymbol{\xi}_f^o]_{\times} \mathbf{v}_{o/i}^o + \Phi_{f\omega}^o [\boldsymbol{\xi}_f^o]_{\times} \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}_{o/i}^o \right) \\ + \frac{S}{4S_p} [\mathbf{r}_{a,k}^o]_{\times} \Phi_{fv}^o [\boldsymbol{\xi}_f^o]_{\times} \mathbf{f}_{t,k}^o(\omega_k), \quad \forall k \in \{1, 2\} \quad (\text{F.60})$$

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{\psi}}_{o/s}}{\partial \omega_k} = \mathbf{0}_{3 \times 1}, \quad \forall k \in \{1, 2\} \quad (\text{F.61})$$

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{\psi}}_{o/s}}{\partial \delta_k} = \mathbf{0}_{3 \times 1}, \quad \forall k \in \{1, 2\}. \quad (\text{F.62})$$

Enfin, il est important de rappeler que toutes les composantes de  $\mathbf{A}^*$  et  $\mathbf{B}^*$  doivent être évaluées au point d'équilibre  $\boldsymbol{\vartheta}_e^*$  défini en (F.43) – en prenant soin d'utiliser les identités à l'équilibre définies en (F.38) et (F.40).

## ANNEXE G RETOUR D'ÉTAT STATIQUE : NOMINAL VS INCERTAIN

Cette annexe contient les résultats associés à la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + TCC + NOM. On précise que celle-ci a été effectuée en utilisant exactement la même méthode présentée à la page 88 du chapitre 5. La seule distinction consiste en l'exclusion des modèles linéarisés incertains. Ainsi, cette synthèse a été réalisée avec la configuration paramétrique nominale  $\boldsymbol{\rho}_0$  et les 31 points de séquençement à l'équilibre  $\sigma_{e_\ell} \in E$ .

Cette annexe est divisée en deux parties. La section G.1 contient les résultats obtenus à partir des modèles linéarisés de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + TCC + NOM. Puis, la section G.2 contient les résultats de simulations conduites sur le modèle non linéaire comparant les configurations NOM et INC. La synthèse de la configuration INC est celle présentée au chapitre 5.

Aucune analyse n'est effectuée dans cette annexe.

### G.1 Synthèses nominales par retour d'état statique

Cette section contient les résultats de synthèses obtenus à partir des modèles linéarisés.

#### G.1.1 Analyse de la symétrie des transferts des gains par RES

La symétrie des transferts de gains est indépendante de la configuration paramétrique utilisée. Les matrices de symétrie  $\mathbf{K}_\xi^{\S}$  et  $\mathbf{K}_\gamma^{\S}$  pour cette synthèse sont les mêmes que celles présentées à la section 5.4.1.

### G.1.2 RES + LQR + PPP + NOM

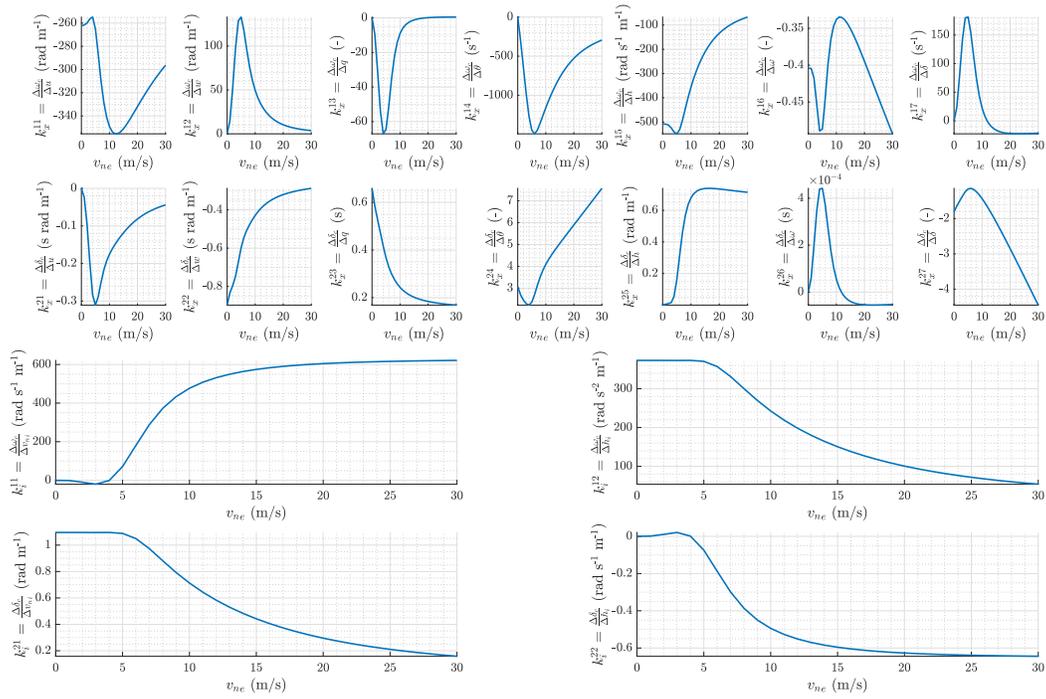


Figure G.1 Gains de la synthèse RES + LQR + PPP + NOM

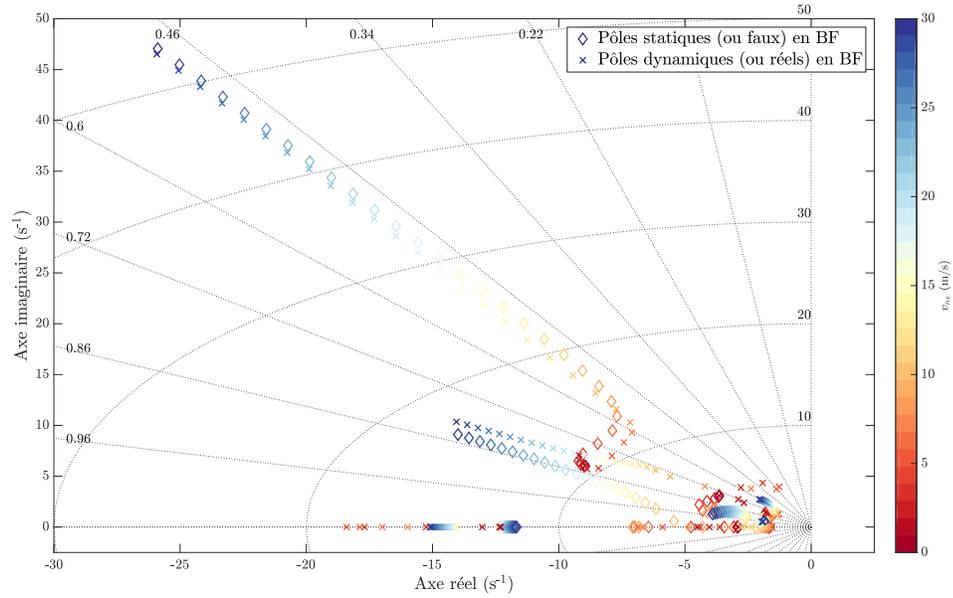


Figure G.2 Pôles en BF de la synthèse RES + LQR + PPP + NOM

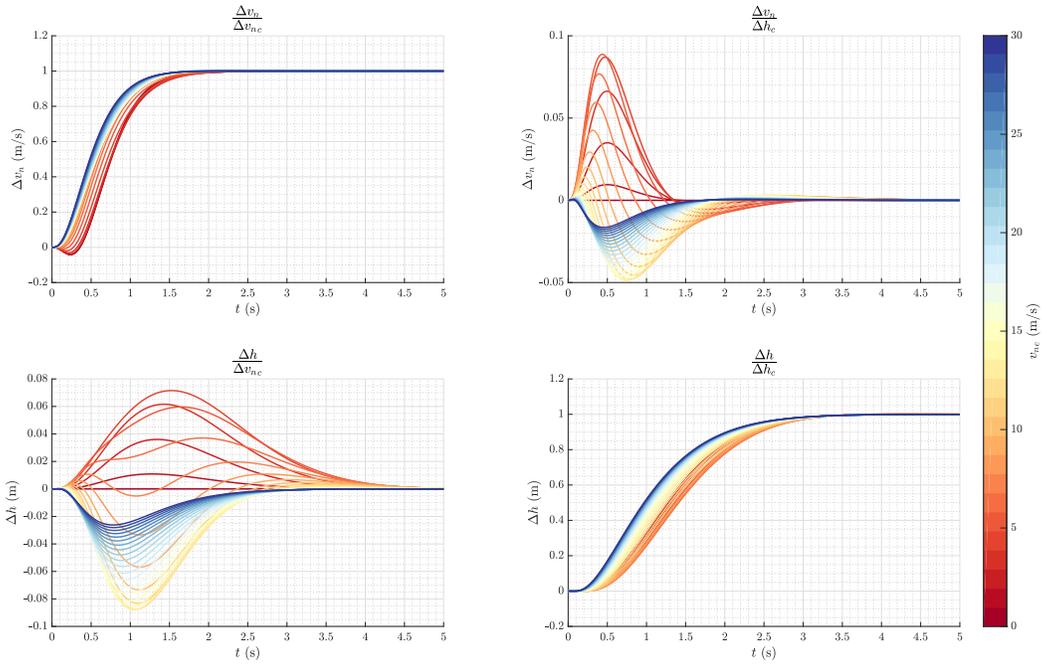


Figure G.3 Réponses temporelles  $\Delta \mathbf{z} / \Delta \mathbf{r}$  de la synthèse RES + LQR + PPP + NOM

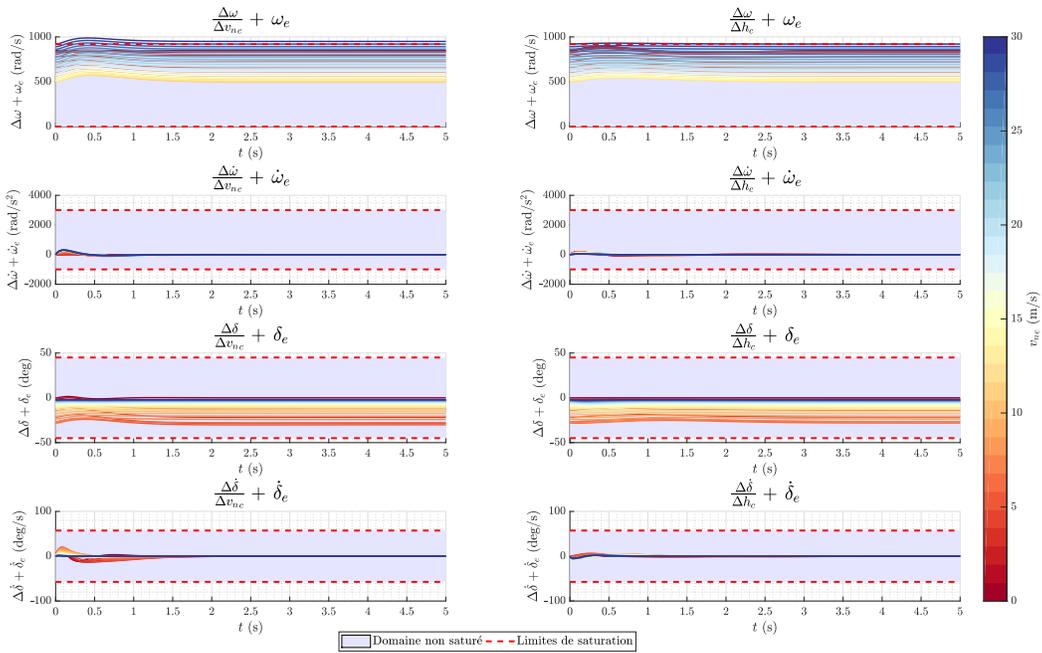


Figure G.4 Réponses temporelles  $\Delta \mathbf{s} / \Delta \mathbf{r}$  de la synthèse RES + LQR + PPP + NOM

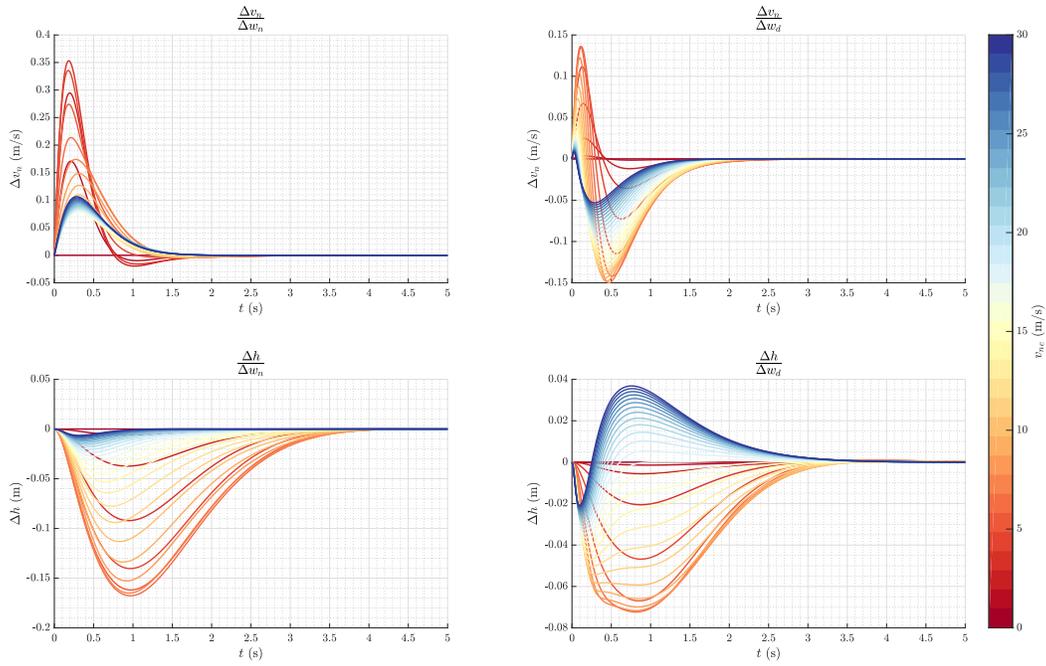


Figure G.5 Réponses temporelles  $\Delta \mathbf{z} / \Delta \mathbf{w}$  de la synthèse RES + LQR + PPP + NOM

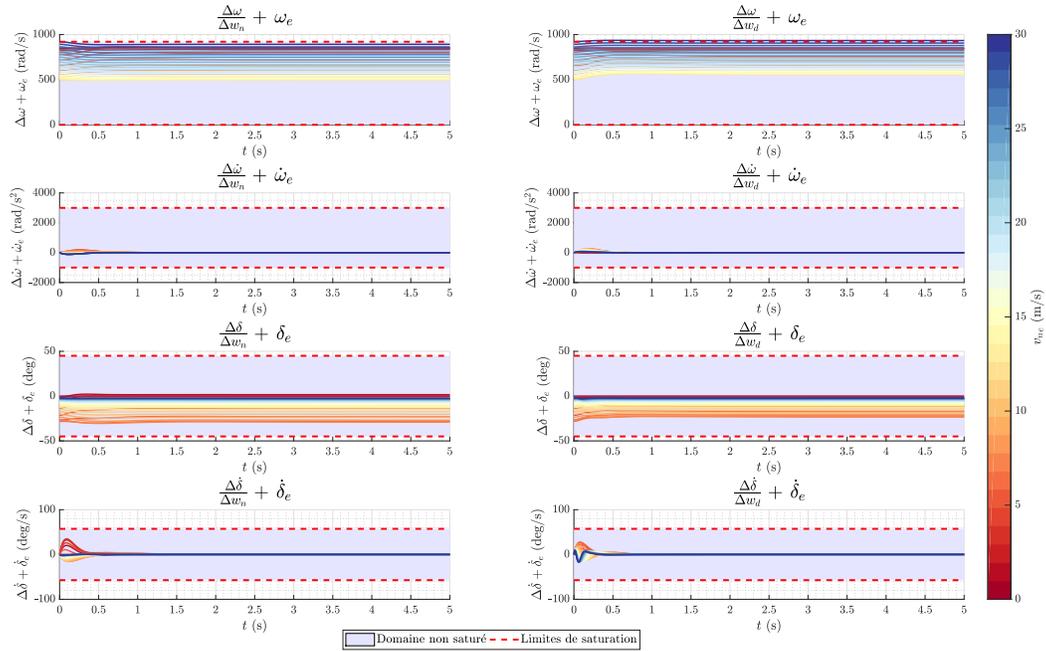


Figure G.6 Réponses temporelles  $\Delta \mathbf{s} / \Delta \mathbf{w}$  de la synthèse RES + LQR + PPP + NOM

### G.1.3 RES + $\mathcal{H}_\infty$ + PPP + NOM

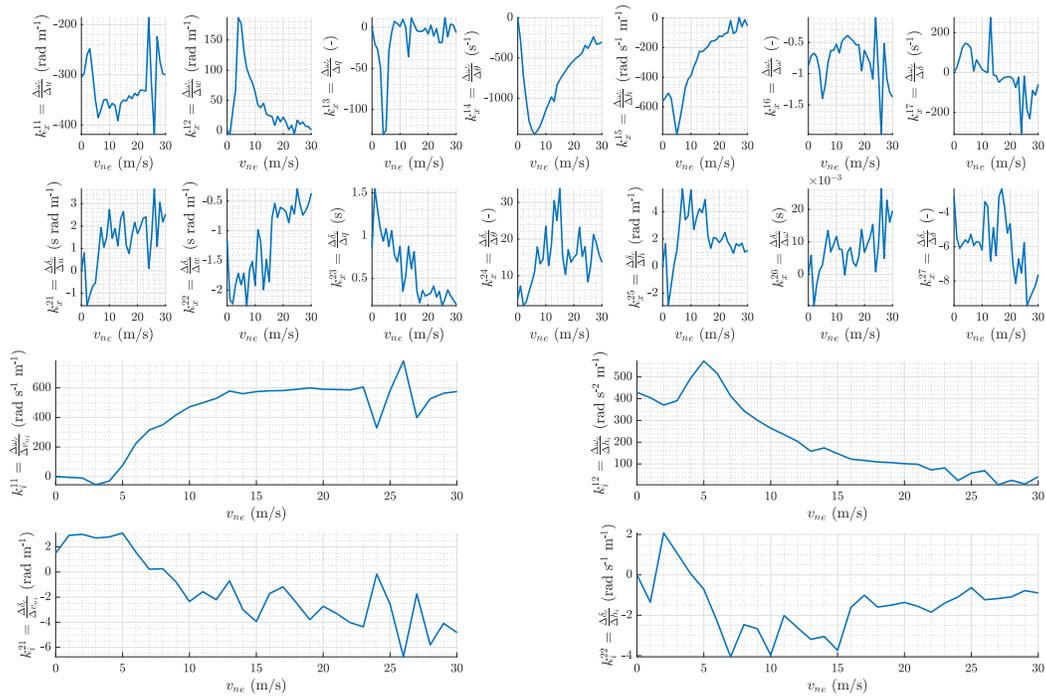


Figure G.7 Gains de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + PPP + NOM

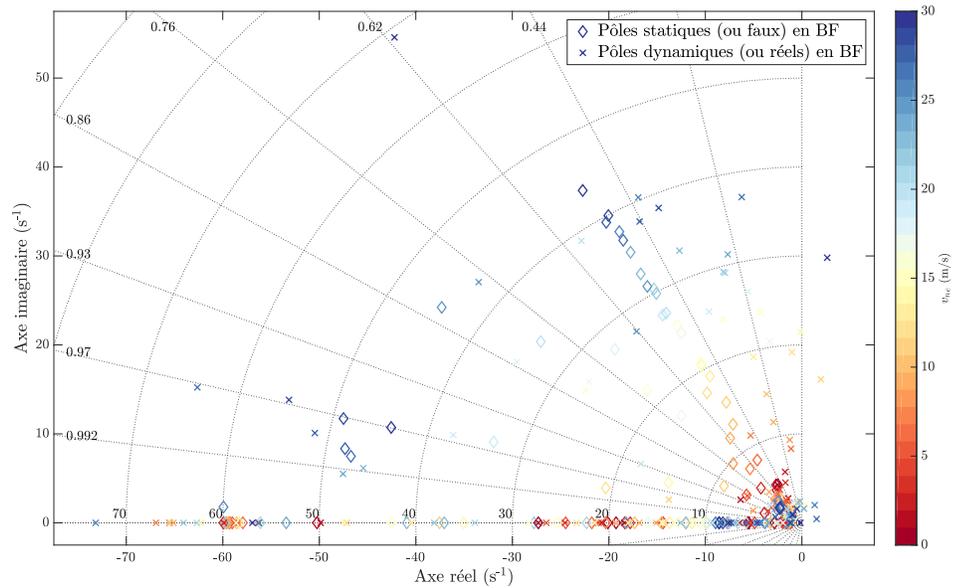


Figure G.8 Pôles en BF de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + PPP + NOM

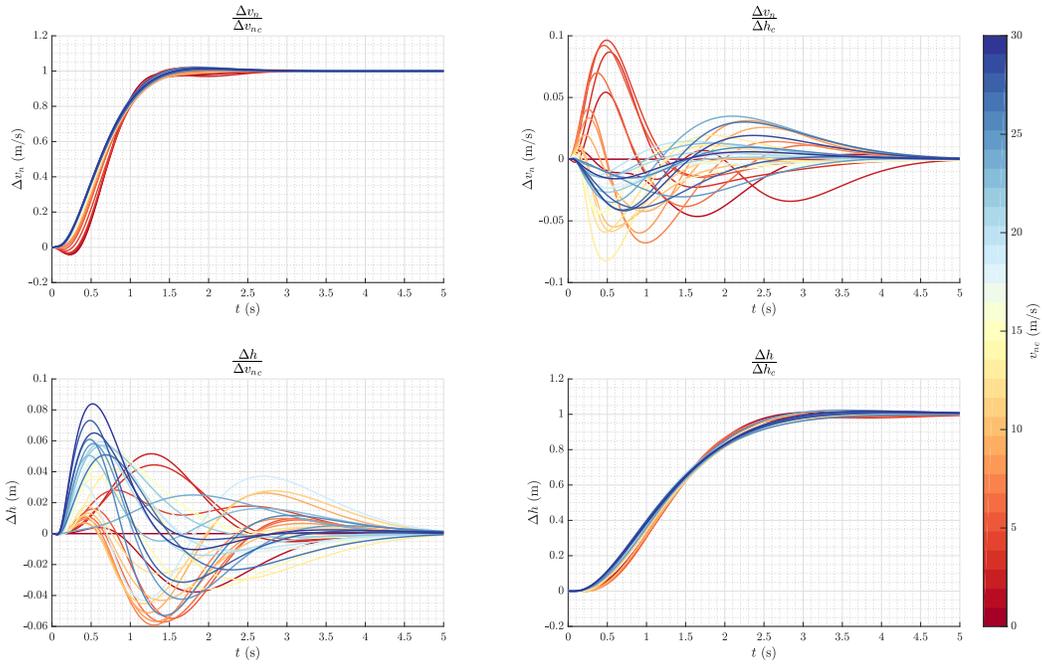


Figure G.9 Réponses temporelles  $\Delta z/\Delta r$  de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + PPP + NOM

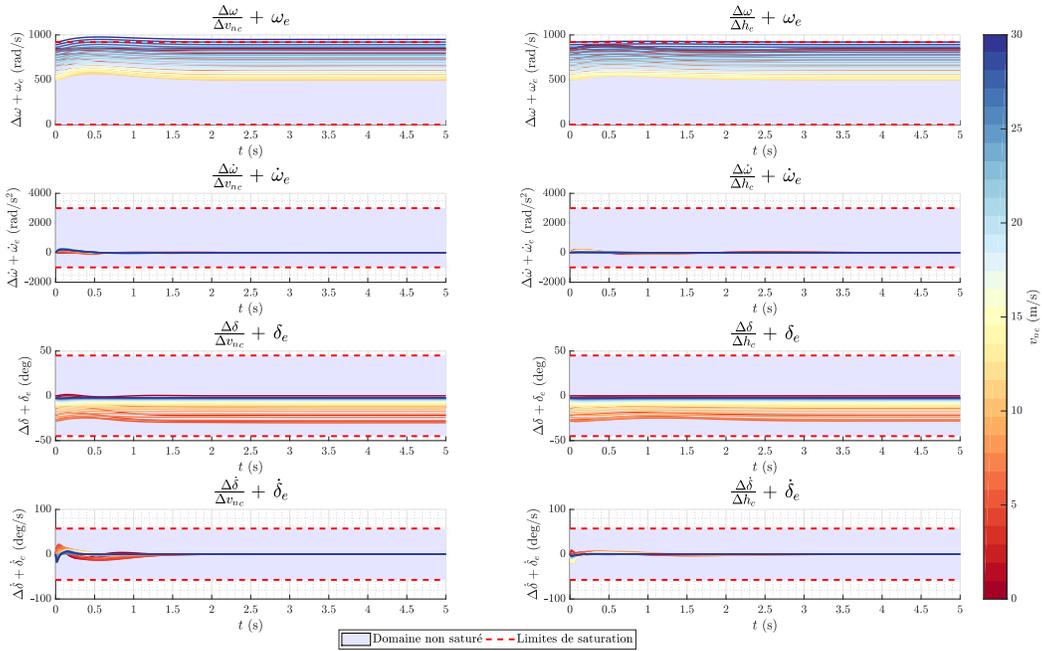


Figure G.10 Réponses temporelles  $\Delta s/\Delta r$  de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + PPP + NOM

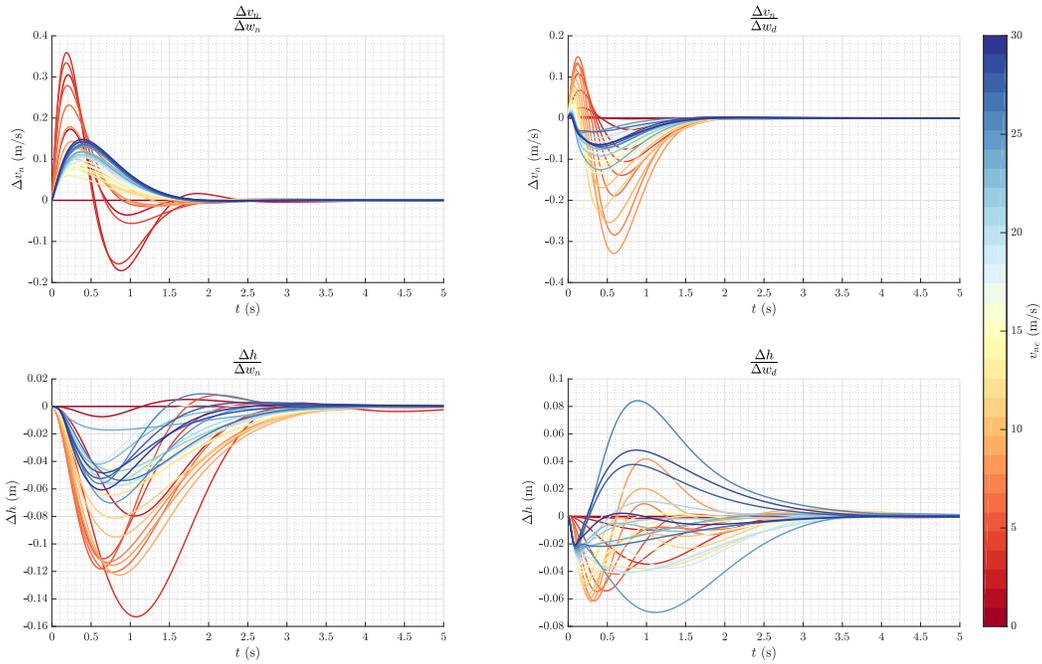


Figure G.11 Réponses temporelles  $\Delta z/\Delta w$  de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + PPP + NOM

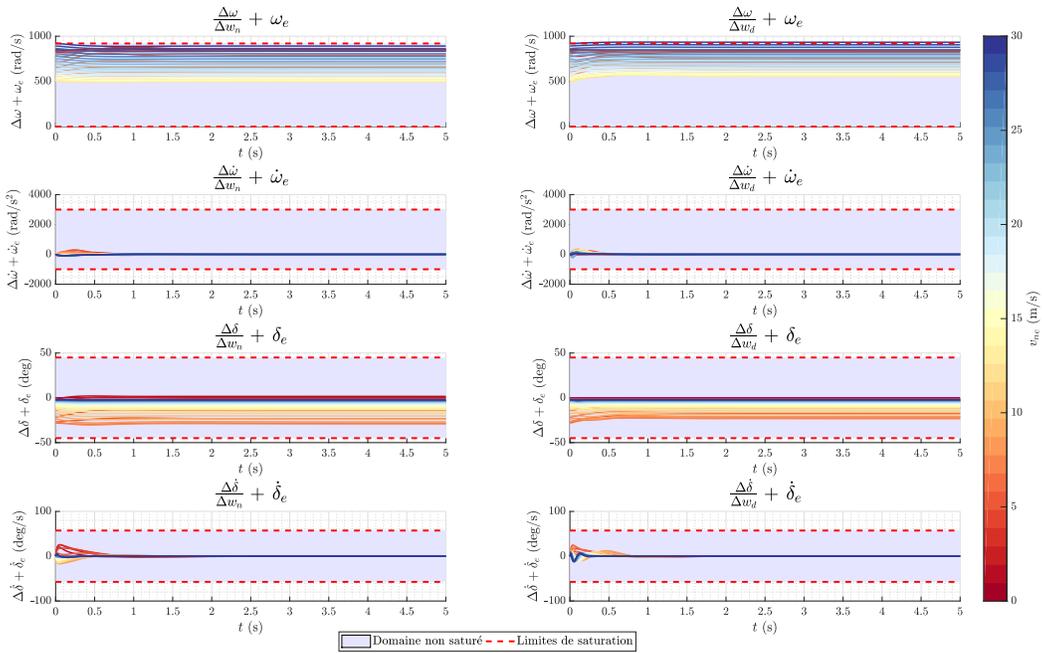


Figure G.12 Réponses temporelles  $\Delta s/\Delta w$  de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + PPP + NOM

G.1.4 RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + SMM + NOM

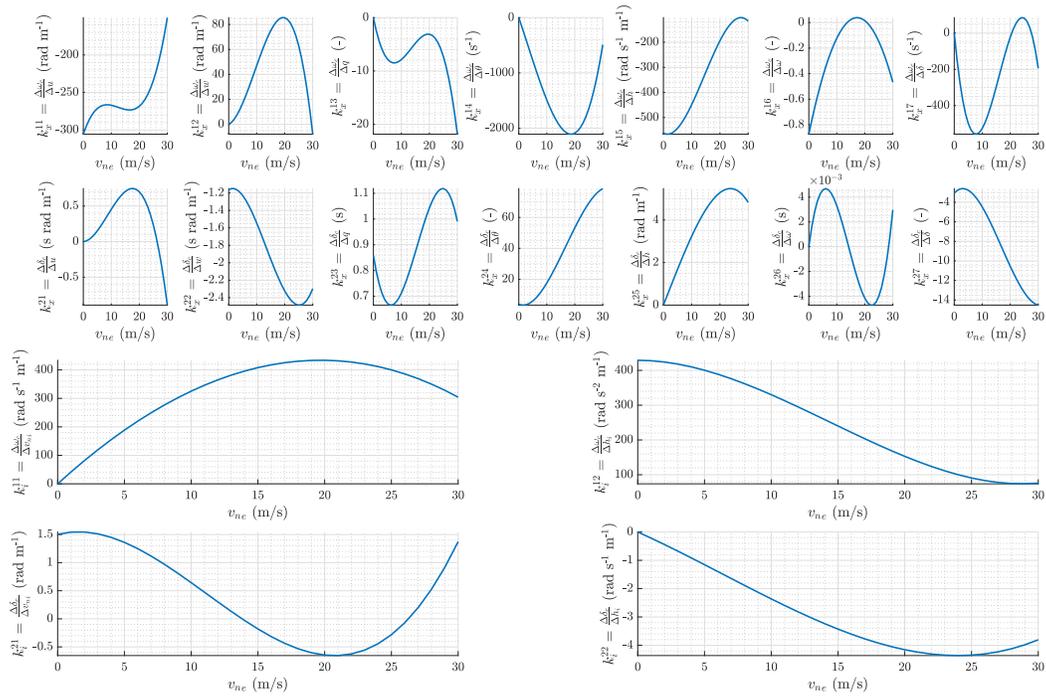


Figure G.13 Gains de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + SMM + NOM

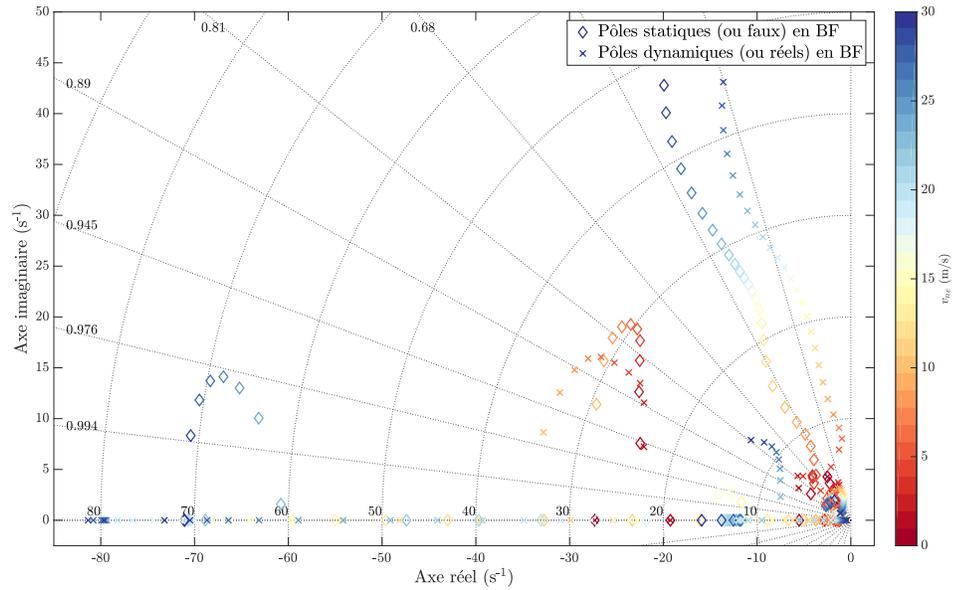


Figure G.14 Pôles en BF de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + SMM + NOM

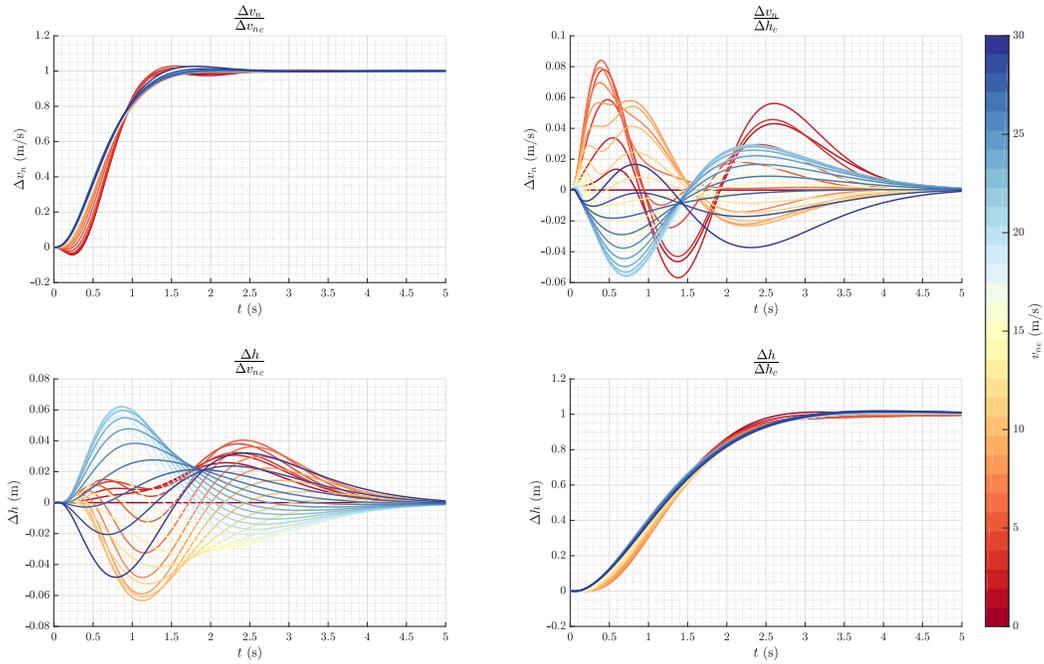


Figure G.15 Réponses temporelles  $\Delta z/\Delta r$  de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + SMM + NOM

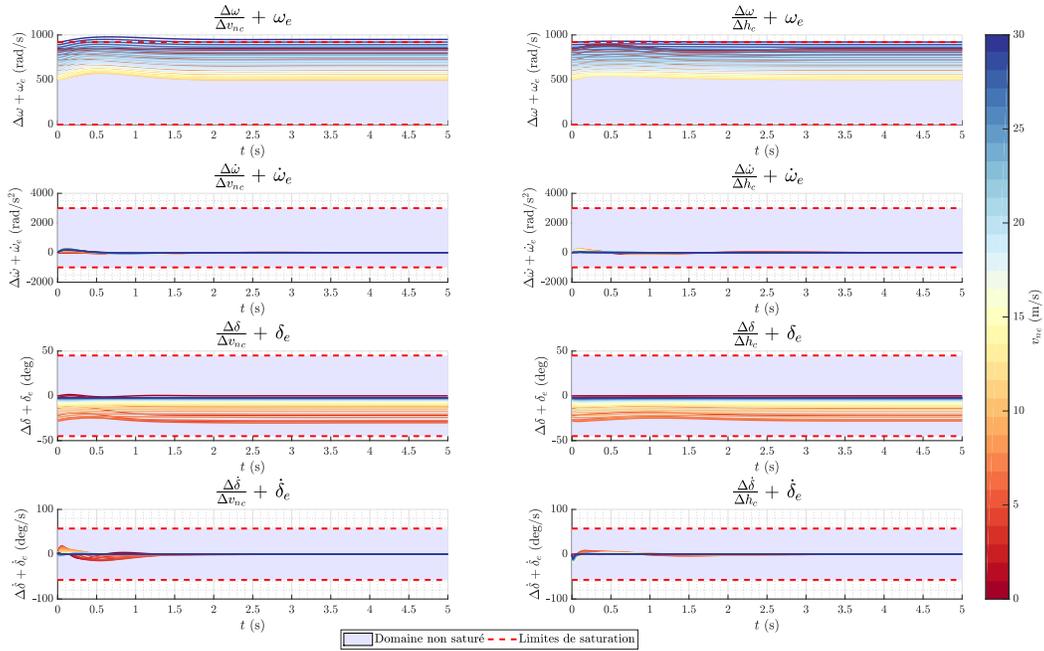


Figure G.16 Réponses temporelles  $\Delta s/\Delta r$  de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + SMM + NOM

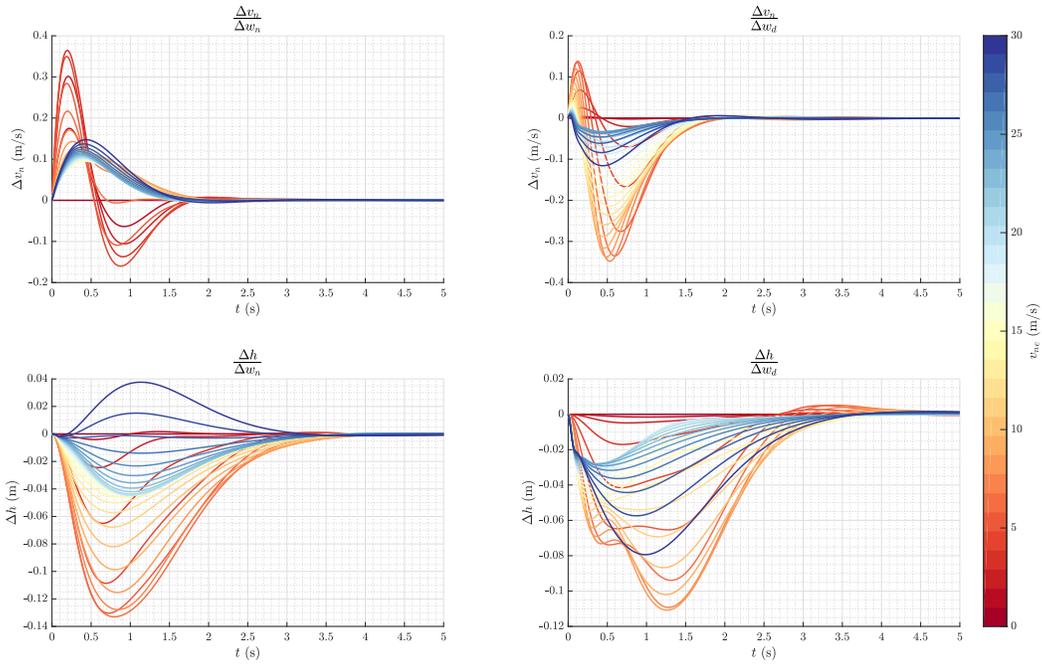


Figure G.17 Réponses temporelles  $\Delta z/\Delta w$  de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + SMM + NOM

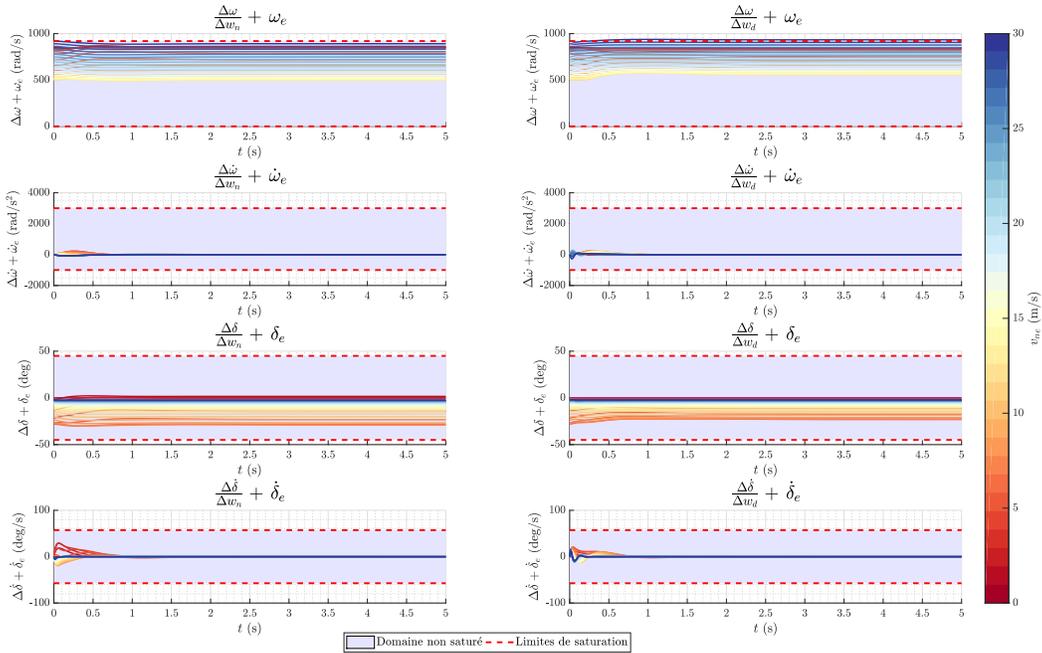


Figure G.18 Réponses temporelles  $\Delta s/\Delta w$  de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + SMM + NOM

G.1.5 RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + TCC + NOM

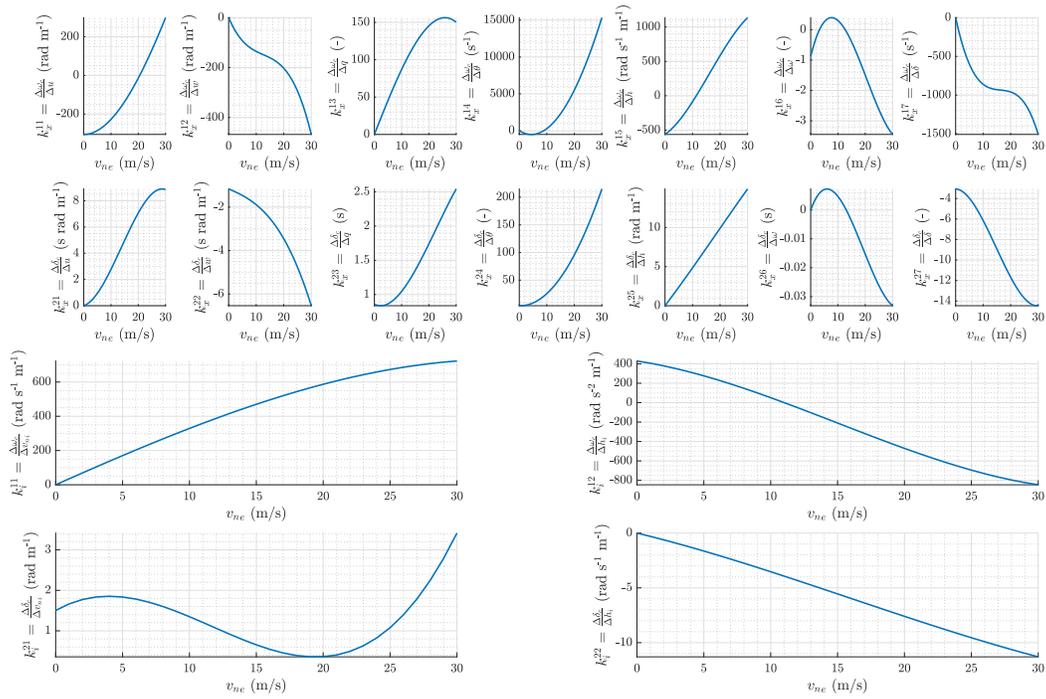


Figure G.19 Gains de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + TCC + NOM

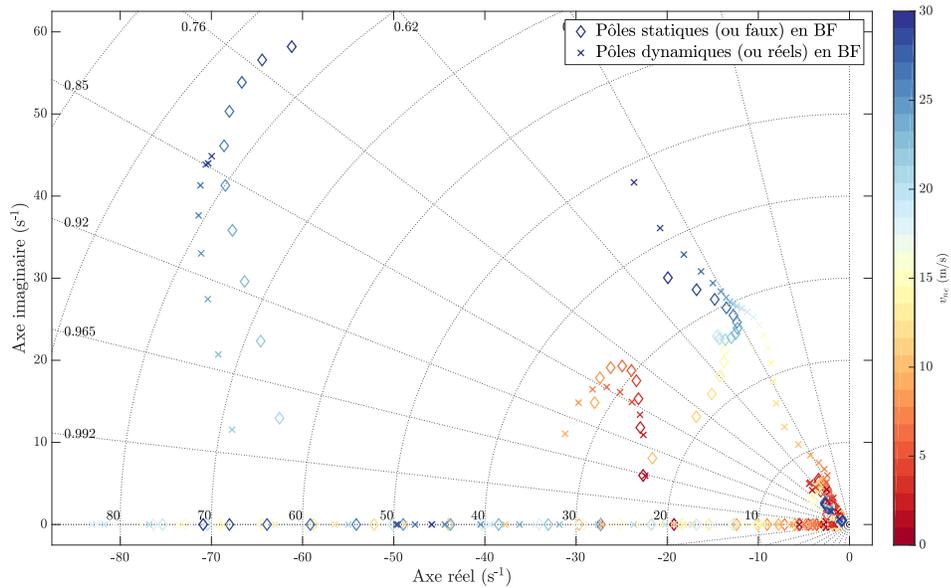


Figure G.20 Pôles en BF de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + TCC + NOM

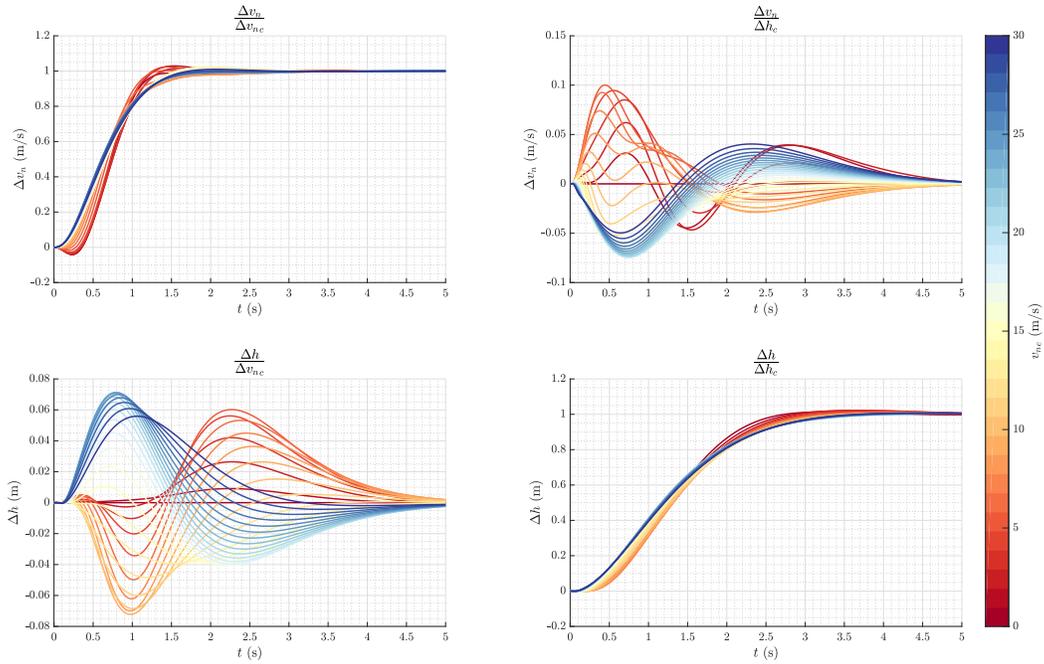


Figure G.21 Réponses temporelles  $\Delta \mathbf{z} / \Delta \mathbf{r}$  de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + TCC + NOM

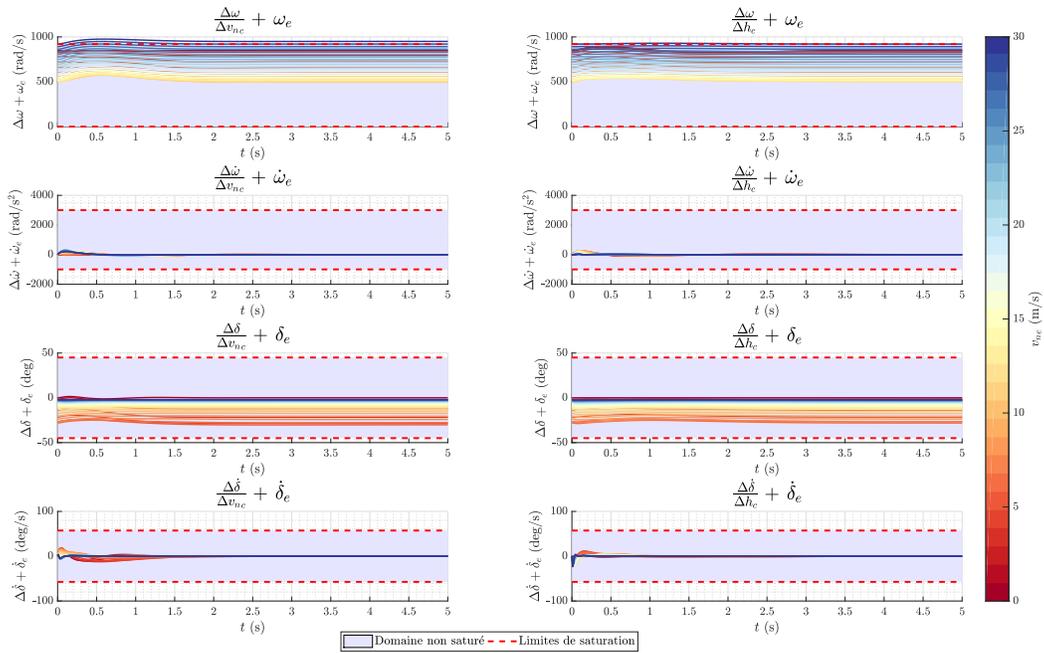


Figure G.22 Réponses temporelles  $\Delta \mathbf{s} / \Delta \mathbf{r}$  de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + TCC + NOM

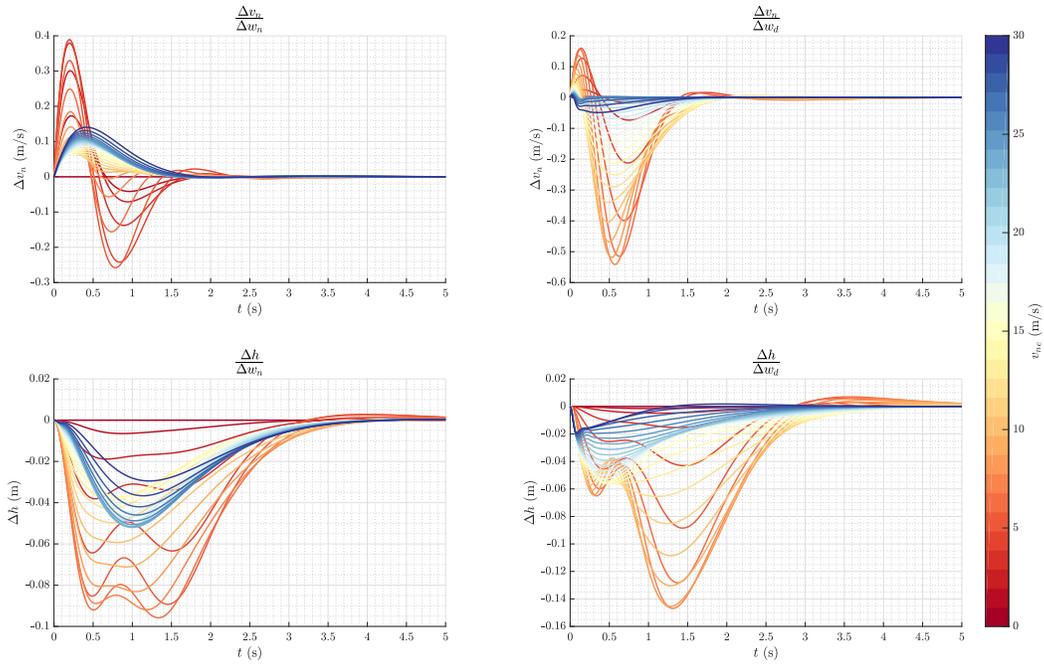


Figure G.23 Réponses temporelles  $\Delta z/\Delta w$  de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + TCC + NOM

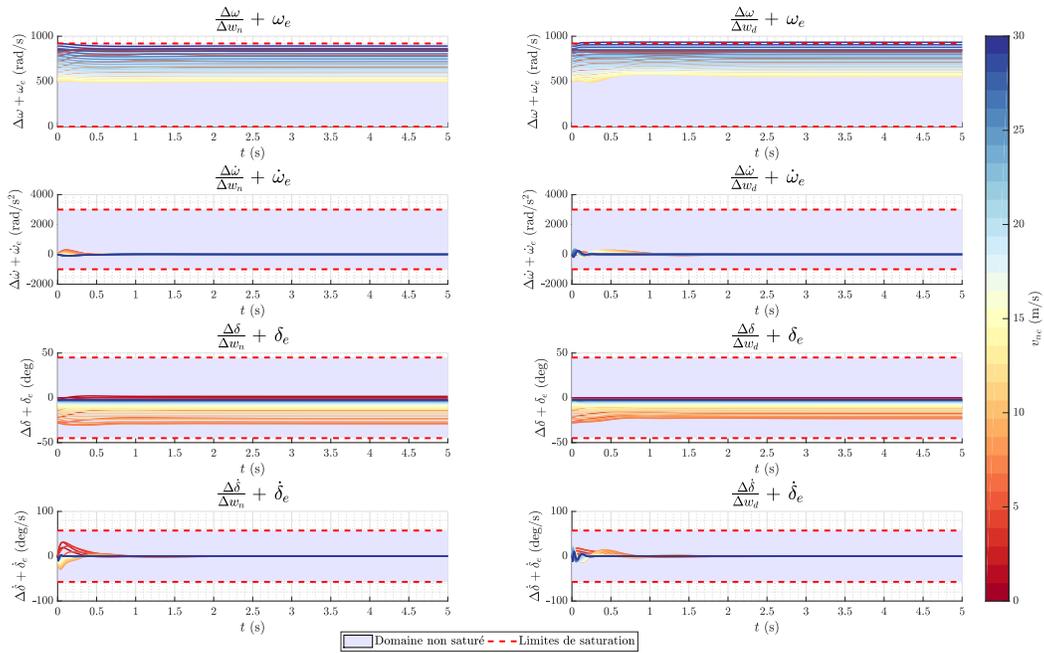


Figure G.24 Réponses temporelles  $\Delta s/\Delta w$  de la synthèse RES +  $\mathcal{H}_\infty$  + TCC + NOM

### G.1.6 Comparaison des synthèses RES + NOM et NOM vs INC

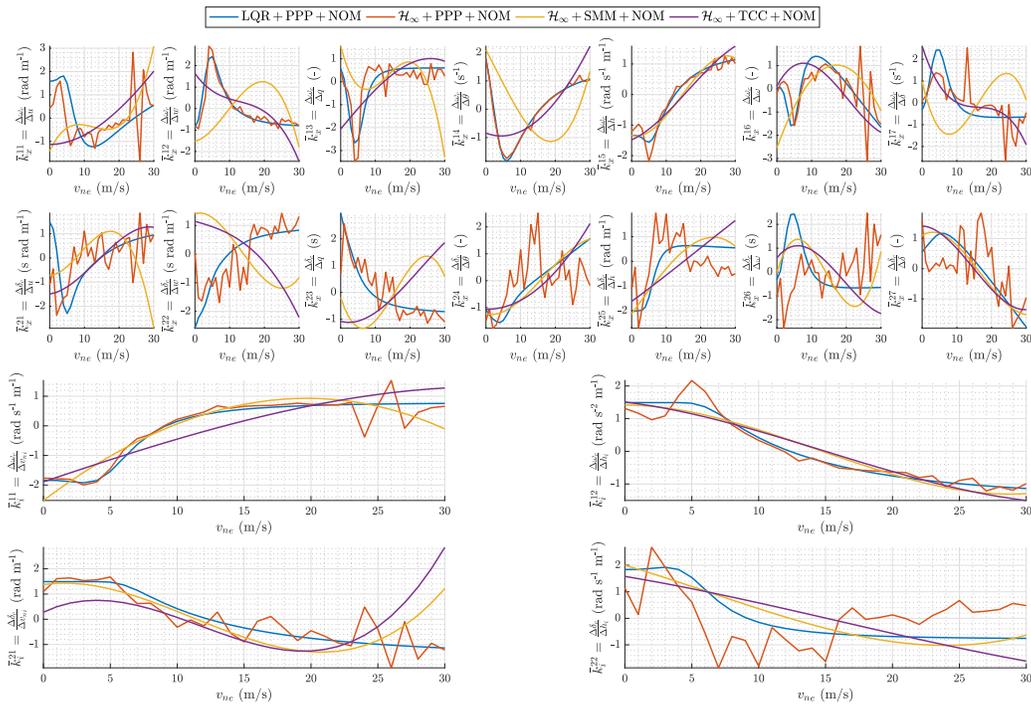


Figure G.25 Comparaison des gains des synthèses RES + NOM

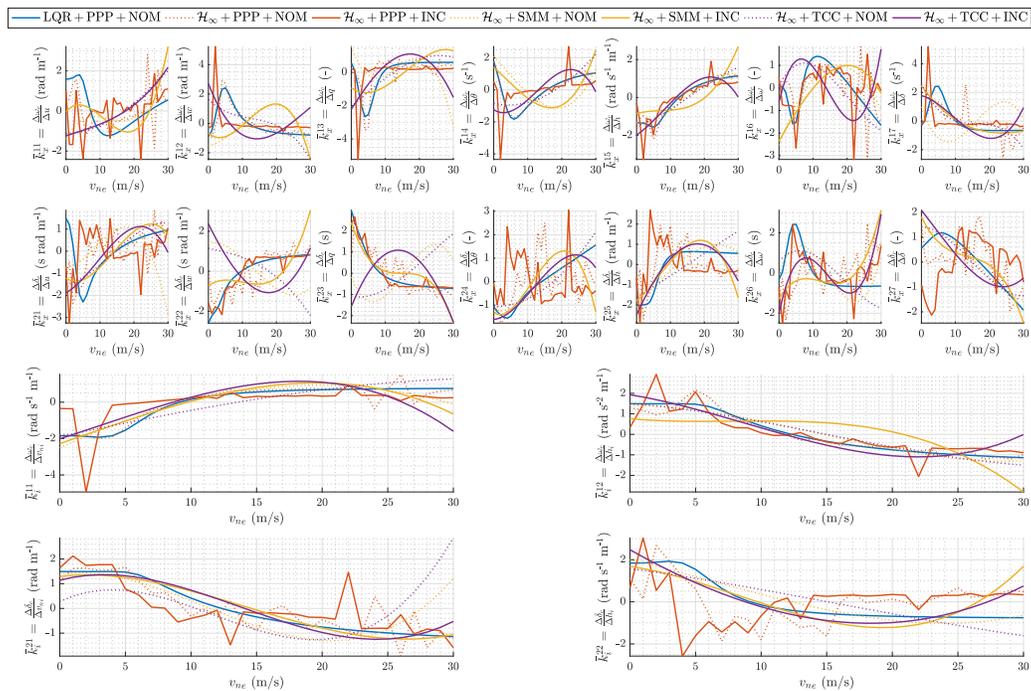


Figure G.26 Comparaison des gains des synthèses NOM vs INC

## G.2 Simulations sur le modèle non linéaire des synthèses NOM *vs* INC

Cette section contient les résultats de simulations comparant les configurations NOM et INC.

### G.2.1 Parcours complet du domaine de vol des synthèses NOM vs INC

#### Configuration paramétrique nominale pour le cas DOM

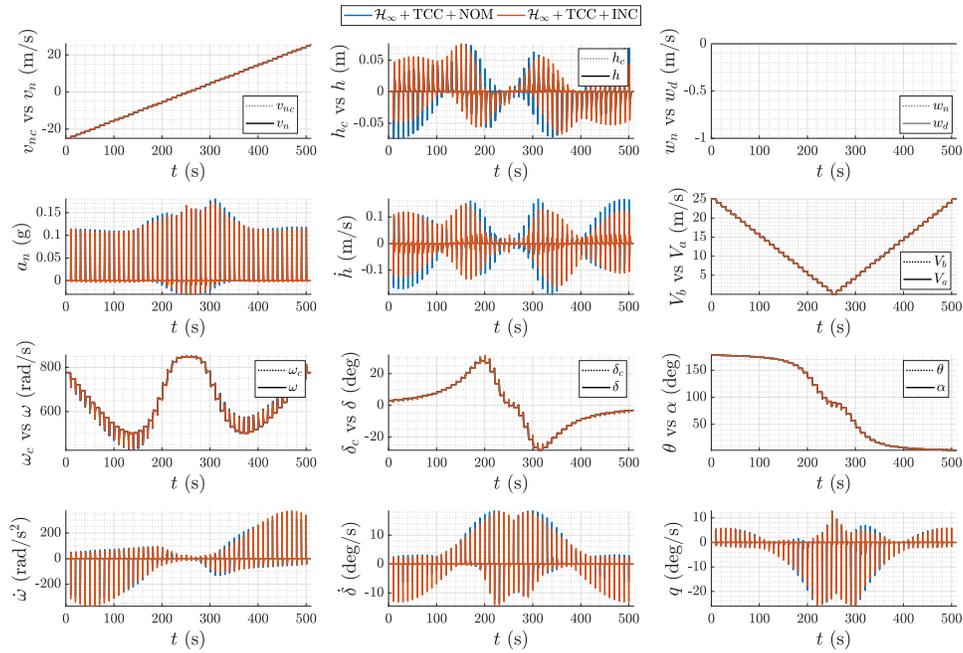


Figure G.27 Variables des synthèses NOM vs INC pour le cas DOM + NOM

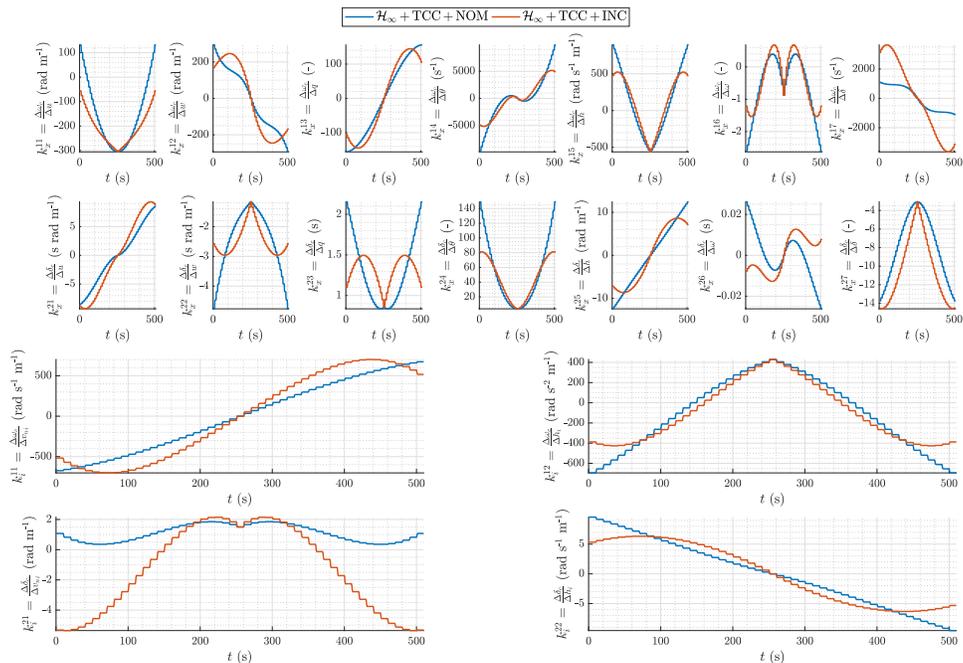


Figure G.28 Gains des synthèses NOM vs INC pour le cas DOM + NOM

### Configuration paramétrique incertaine pour le cas DOM

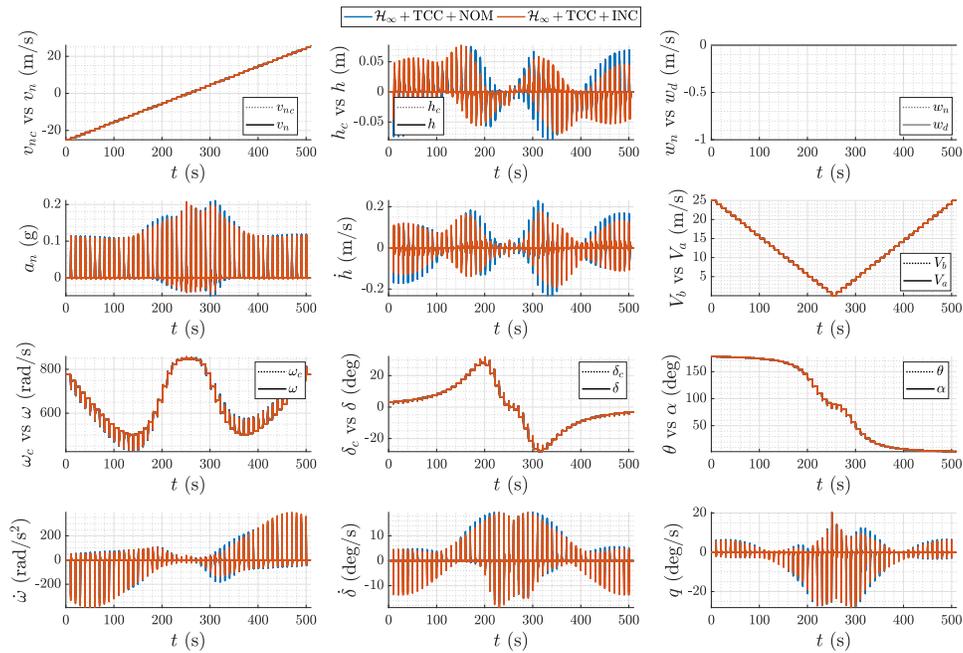


Figure G.29 Variables des synthèses NOM vs INC pour le cas DOM + INC

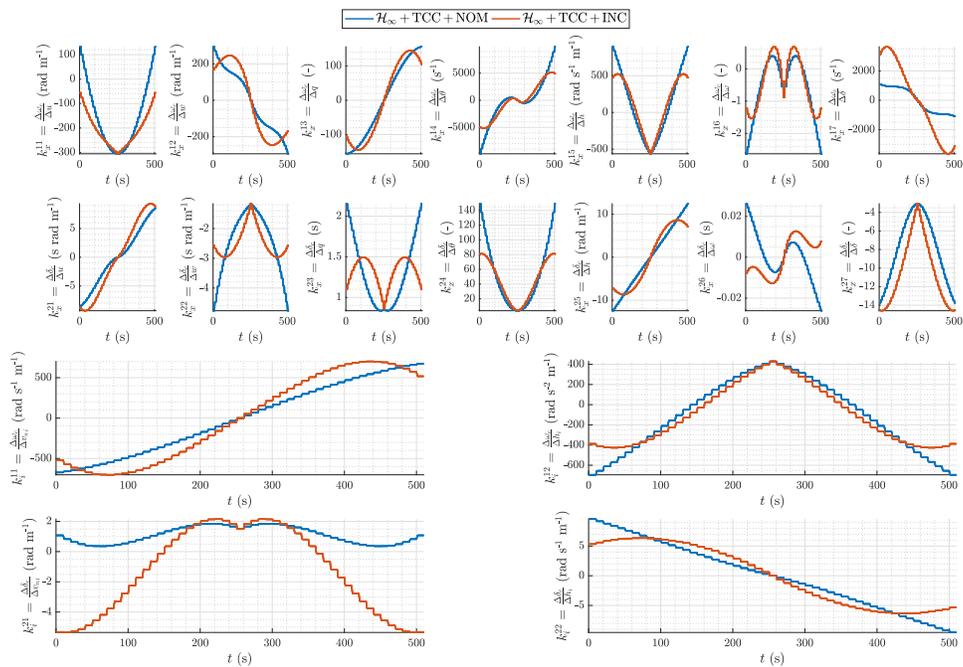


Figure G.30 Gains des synthèses NOM vs INC pour le cas DOM + INC

## G.2.2 Suivi de références multiples en simultan e des synth es NOM vs INC

### Configuration param trique nominale pour le cas REF

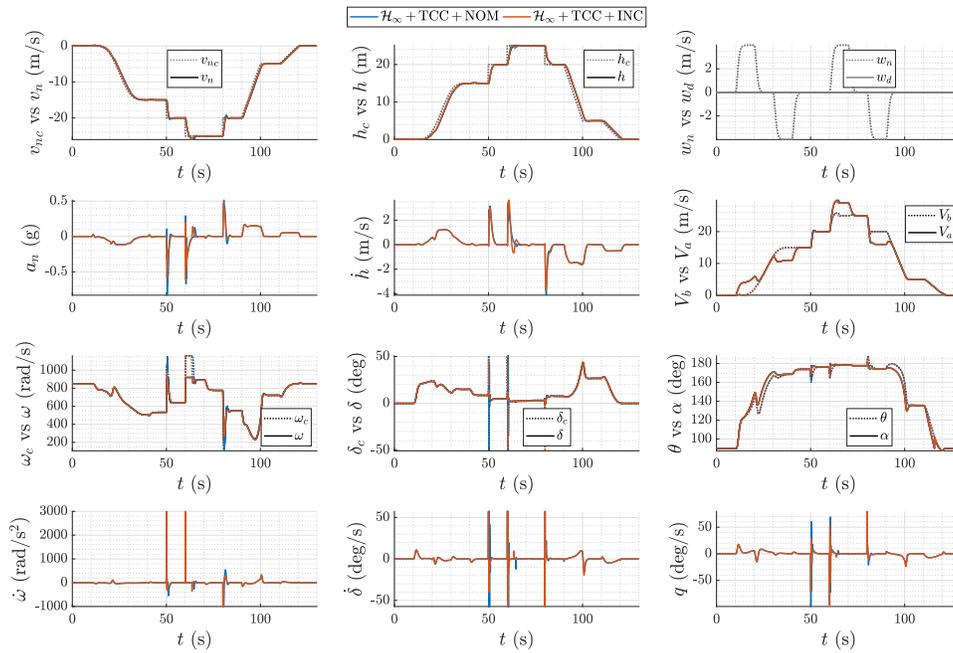


Figure G.31 Variables des synth es NOM vs INC pour le cas REF + NOM

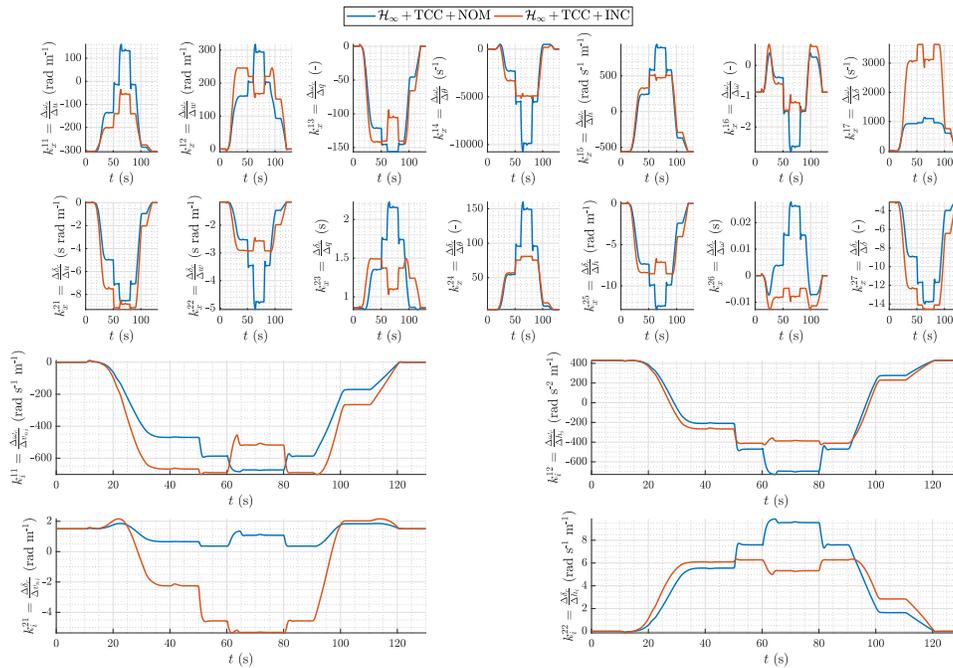


Figure G.32 Gains des synth es NOM vs INC pour le cas REF + NOM

Configuration paramétrique incertaine pour le cas REF

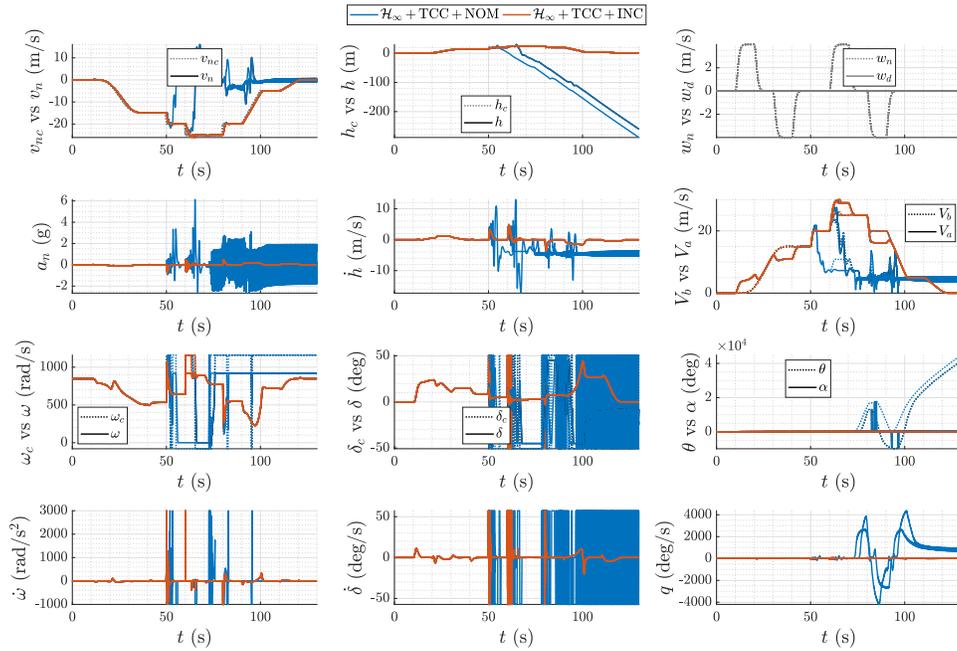


Figure G.33 Variables des synthèses NOM vs INC pour le cas REF + INC

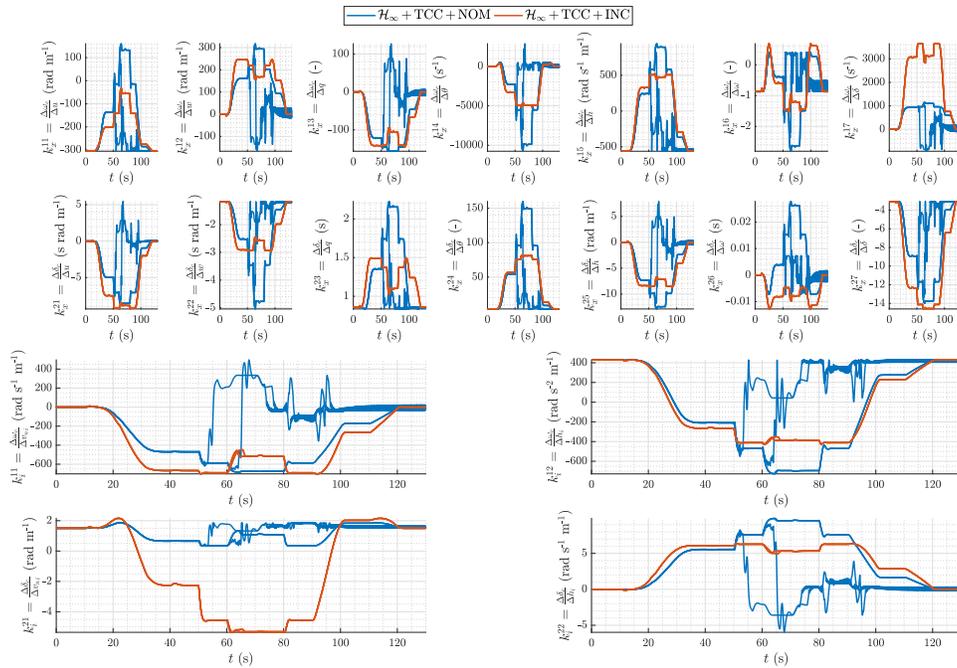


Figure G.34 Gains des synthèses NOM vs INC pour le cas REF + INC

### G.2.3 Résistance aux perturbations de vent des synthèses NOM vs INC

#### Configuration paramétrique nominale pour le cas VEN

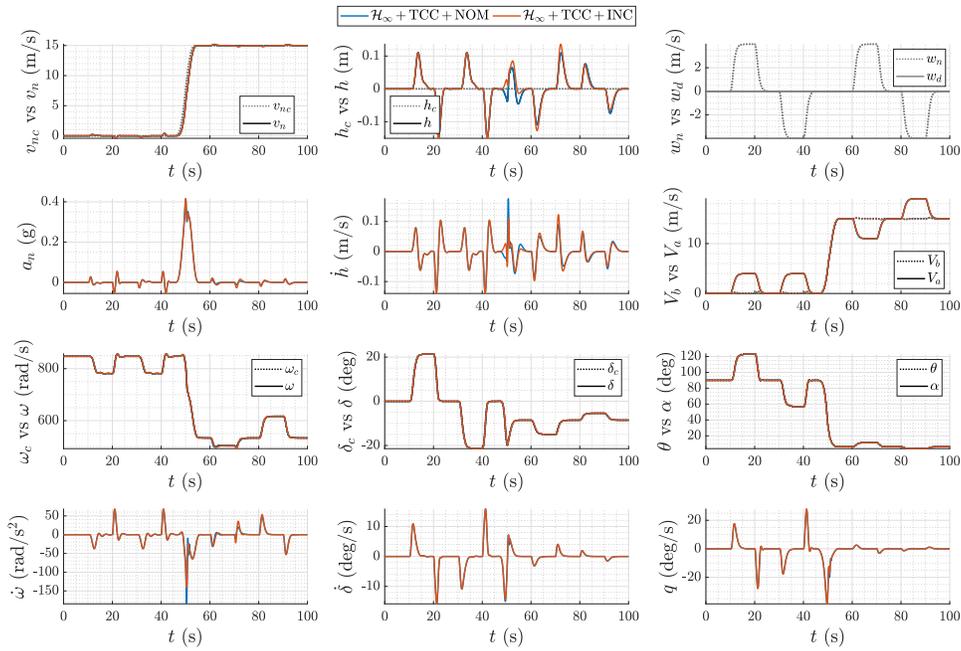


Figure G.35 Variables des synthèses NOM vs INC pour le cas VEN + NOM

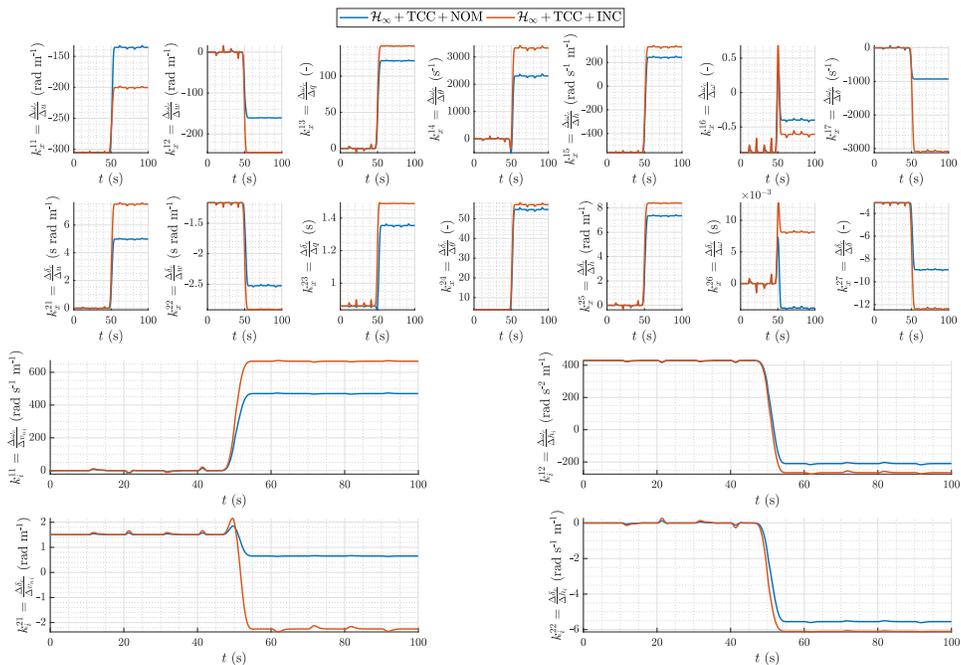


Figure G.36 Gains des synthèses NOM vs INC pour le cas VEN + NOM

### Configuration paramétrique incertaine pour le cas VEN

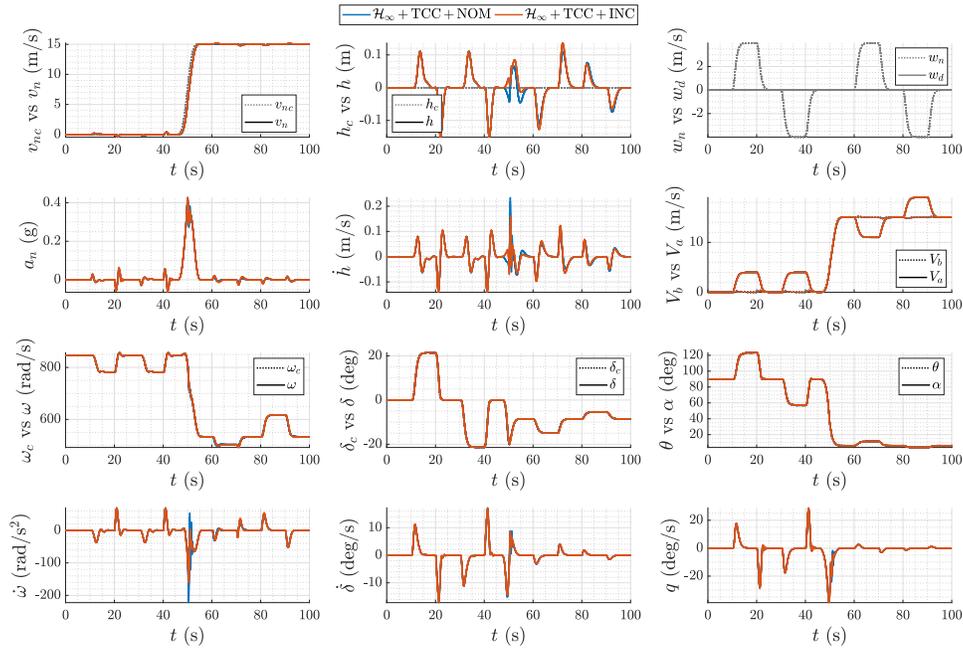


Figure G.37 Variables des synthèses NOM vs INC pour le cas VEN + INC

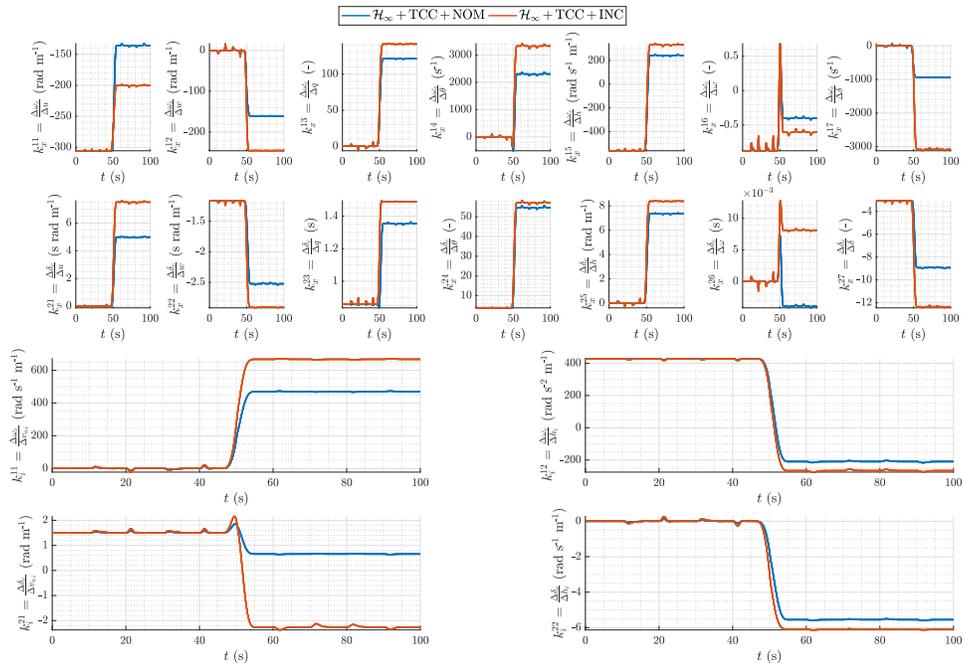


Figure G.38 Gains des synthèses NOM vs INC pour le cas VEN + INC

## ANNEXE H    RETOUR DE SORTIE STATIQUE : SYNTHÈSES NOMINALES

Cette annexe contient les résultats associés à la synthèse  $\text{RSS} + \mathcal{H}_\infty + \text{TCC} + \text{NOM}$ . On précise que celle-ci a été effectuée en utilisant exactement la même méthode présentée à la page 88 du chapitre 5. La seule distinction consiste en l'utilisation de la sortie  $\mathbf{y}$  définie en (5.53) au lieu de l'état  $\mathbf{x}$  défini en (4.2), pour la boucle de rétroaction. On précise que cette synthèse a été réalisée avec la configuration paramétrique nominale  $\boldsymbol{\varrho}_0$  et les 31 points de séquençement à l'équilibre  $\sigma_{e\ell} \in \mathbf{E}$ .

Puisque plusieurs difficultés ont été rencontrées lors de la réalisation de cette synthèse (cf. sections 5.5.2 et 6.2.2), celle-ci utilise plutôt un polynôme d'ordre 4 comme fonction de séquençement :

$$\boldsymbol{\phi}(|v_n|) = \begin{bmatrix} 1 & |v_n| & |v_n|^2 & |v_n|^3 & |v_n|^4 \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^4. \quad (\text{H.1})$$

Cela s'est avéré être nécessaire afin d'augmenter le nombre de paramètres libres dans la synthèse multimodèle et ainsi favoriser le respect des gabarits fréquentiels imposés (cf. tableau 5.4).

Cette annexe est divisée en deux parties. La section H.1 contient les résultats obtenus à partir des modèles linéarisés de la synthèse  $\text{RSS} + \mathcal{H}_\infty + \text{TCC} + \text{NOM}$ . Puis, la section H.2 contient les résultats de simulations conduites sur le modèle non linéaire comparant les synthèses obtenues aux étapes LQR et TCC.

Aucune analyse n'est effectuée dans cette annexe.

### H.1 Synthèses nominales par retour de sortie statique

Cette section contient les résultats de synthèses obtenus à partir des modèles linéarisés.

#### H.1.1 Analyse de la symétrie des transferts des gains par RSS

En utilisant la même méthode appliquée pour le RES à la section 5.4.1, l'analyse de la figure H.1 permet d'obtenir la matrice de symétrie suivante pour le retour de sortie statique  $\boldsymbol{\gamma} := \mathbf{y}$  :

$$\mathbf{K}_\gamma^\S := \mathbf{K}_y^\S = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{H.2})$$

On précise que la matrice de symétrie  $\mathbf{K}_{\gamma}^{\xi\delta}$  n'est pas affectée par le choix du vecteur de sortie généralisée  $\gamma$ .

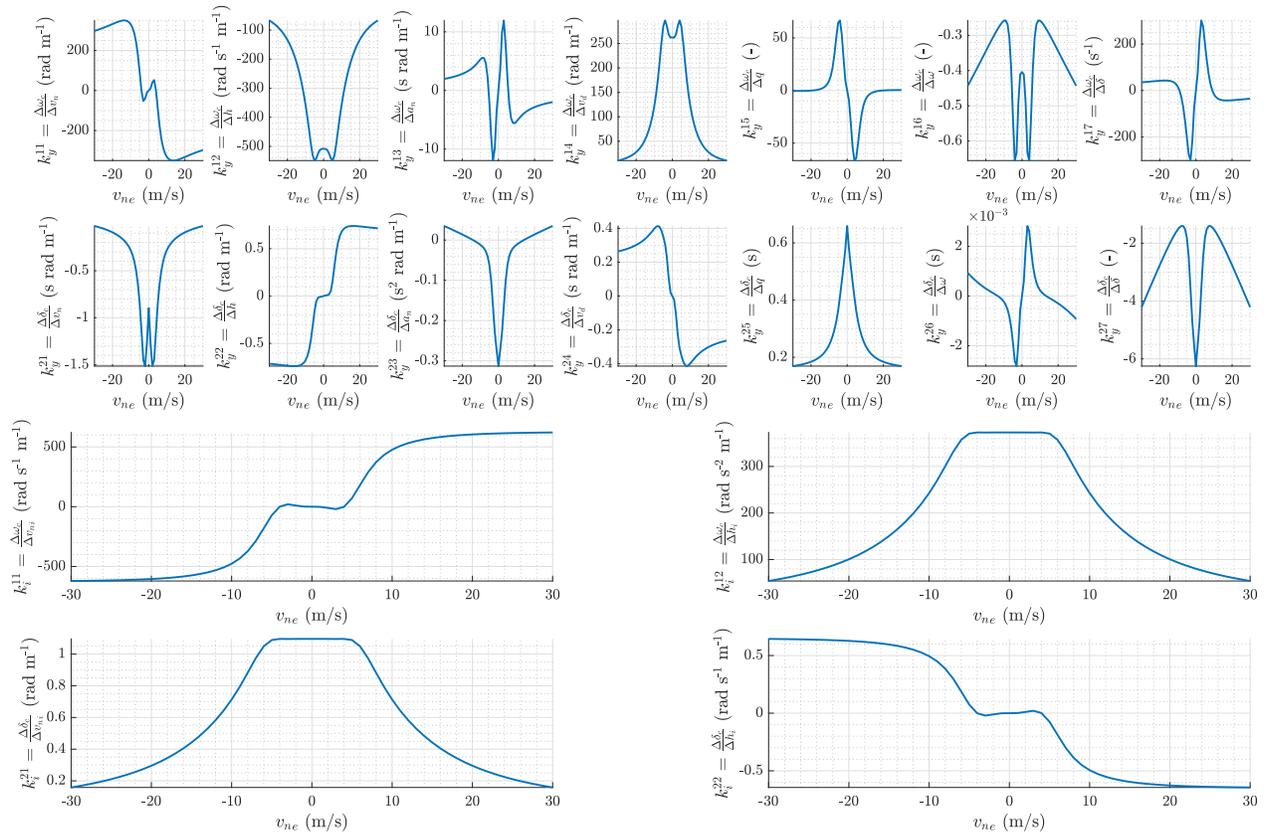


Figure H.1 Analyse de la symétrie des transferts des gains  $\mathbf{K}_y = \Delta \mathbf{u} / \Delta \mathbf{y}$  et  $\mathbf{K}_i = \Delta \mathbf{u} / \Delta \xi$  pour les synthèses par RSS

### H.1.2 RSS + LQR + PPP + NOM

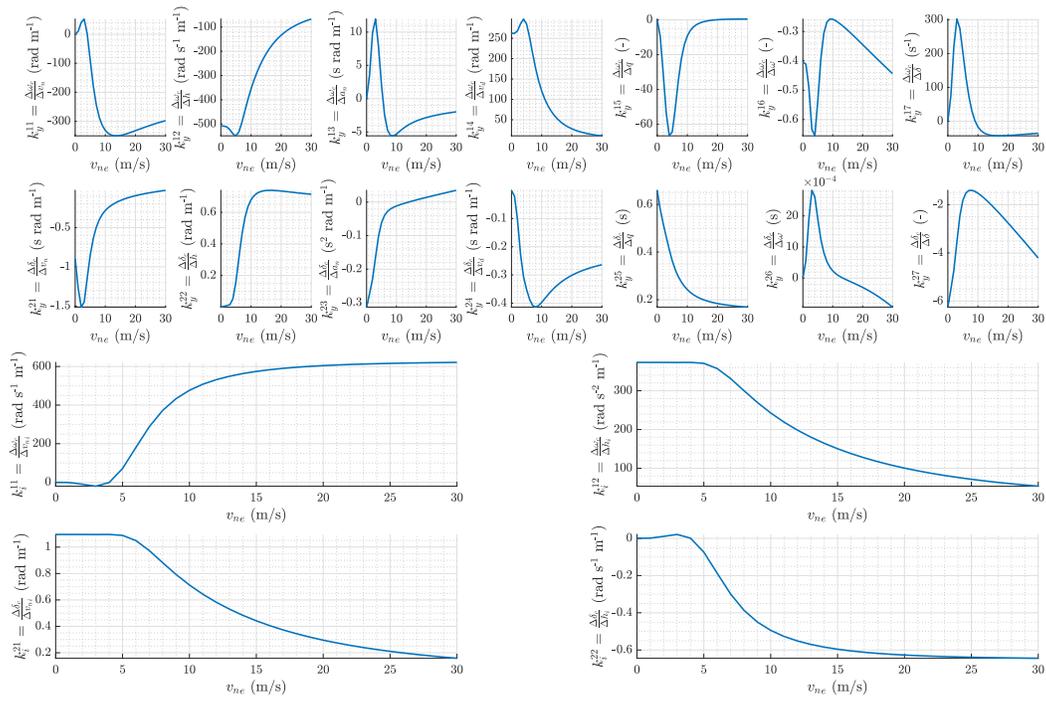


Figure H.2 Gains de la synthèse RSS + LQR + PPP + NOM

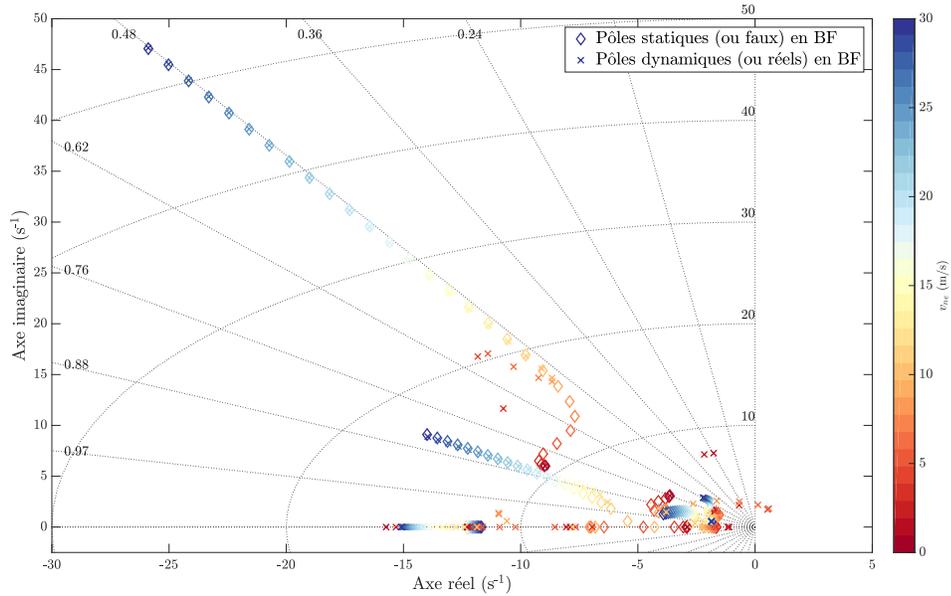


Figure H.3 Pôles en BF de la synthèse RSS + LQR + PPP + NOM

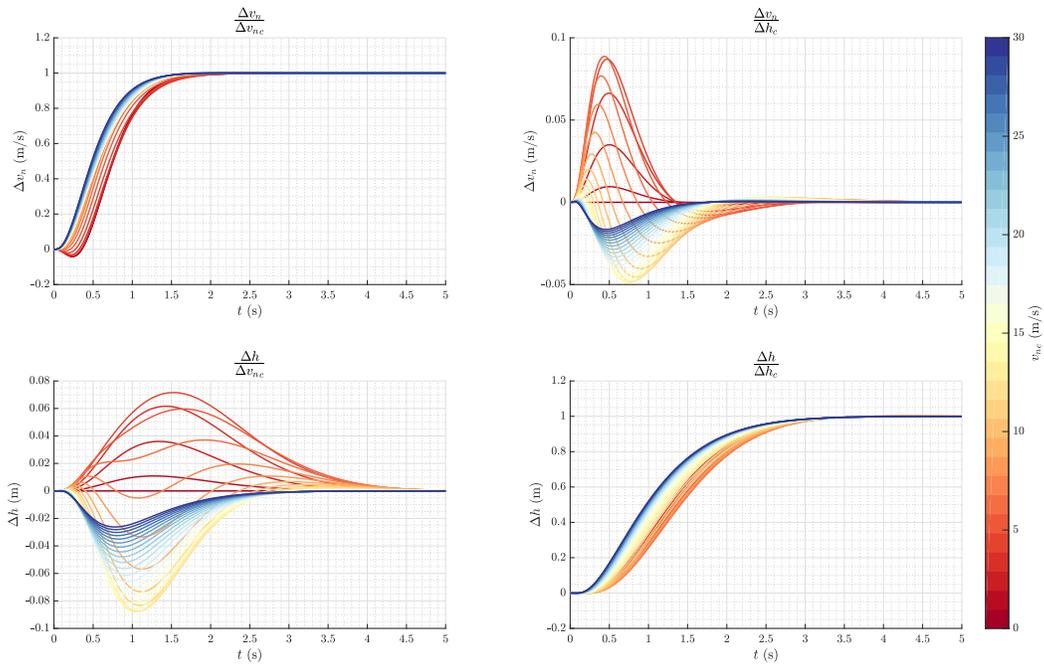


Figure H.4 Réponses temporelles  $\Delta z/\Delta r$  de la synthèse RSS + LQR + PPP + NOM

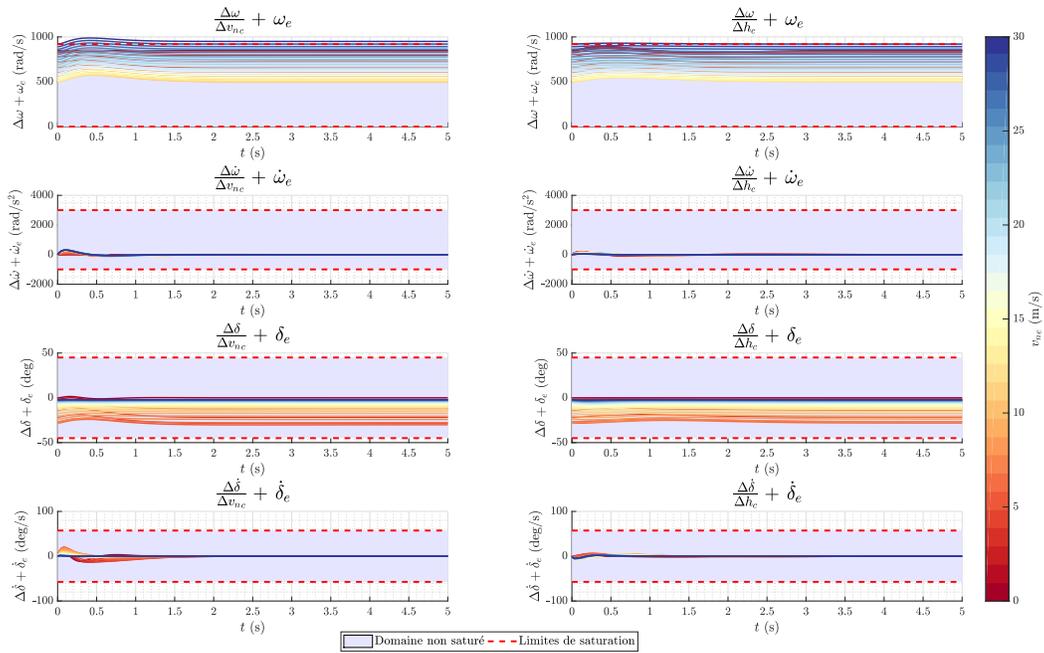


Figure H.5 Réponses temporelles  $\Delta s/\Delta r$  de la synthèse RSS + LQR + PPP + NOM

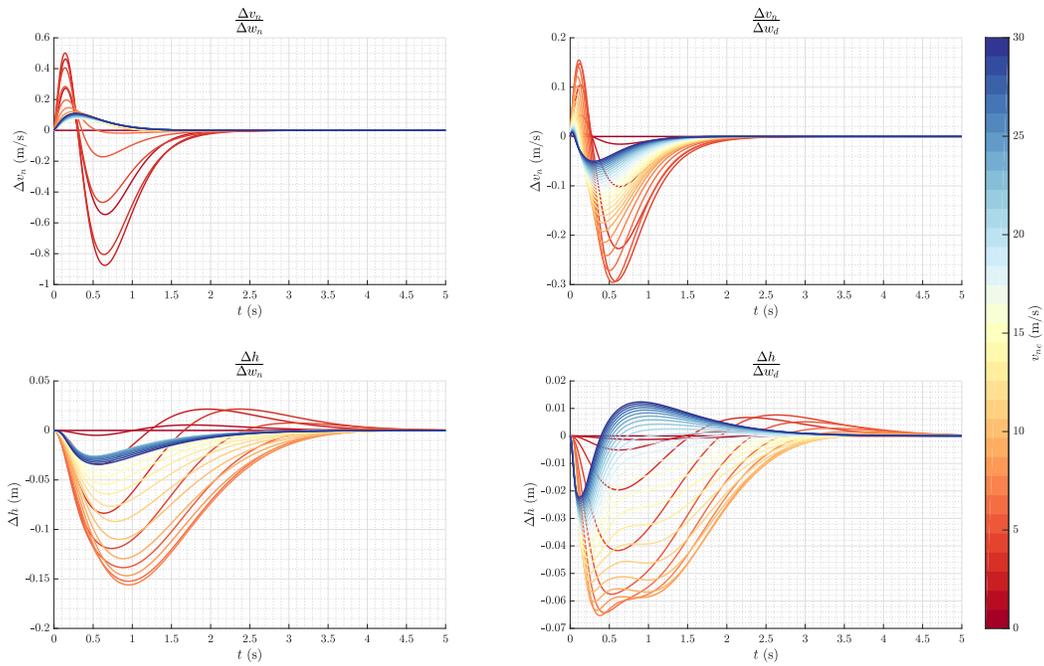


Figure H.6 Réponses temporelles  $\Delta \mathbf{z} / \Delta \mathbf{w}$  de la synthèse RSS + LQR + PPP + NOM

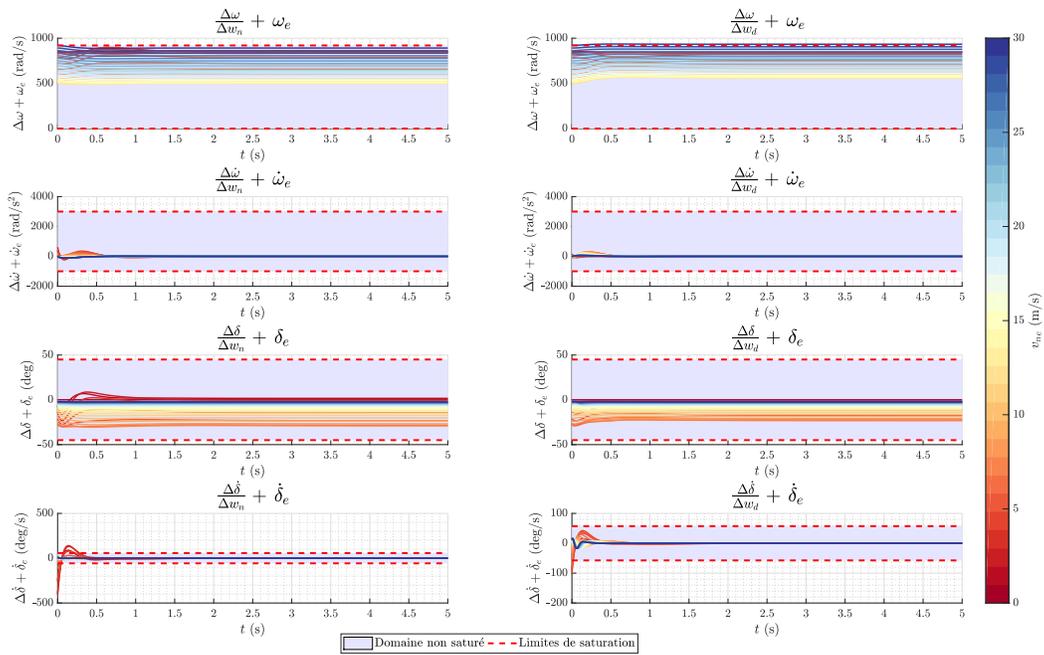


Figure H.7 Réponses temporelles  $\Delta \mathbf{s} / \Delta \mathbf{w}$  de la synthèse RSS + LQR + PPP + NOM

### H.1.3 RSS + $\mathcal{H}_\infty$ + PPP + NOM

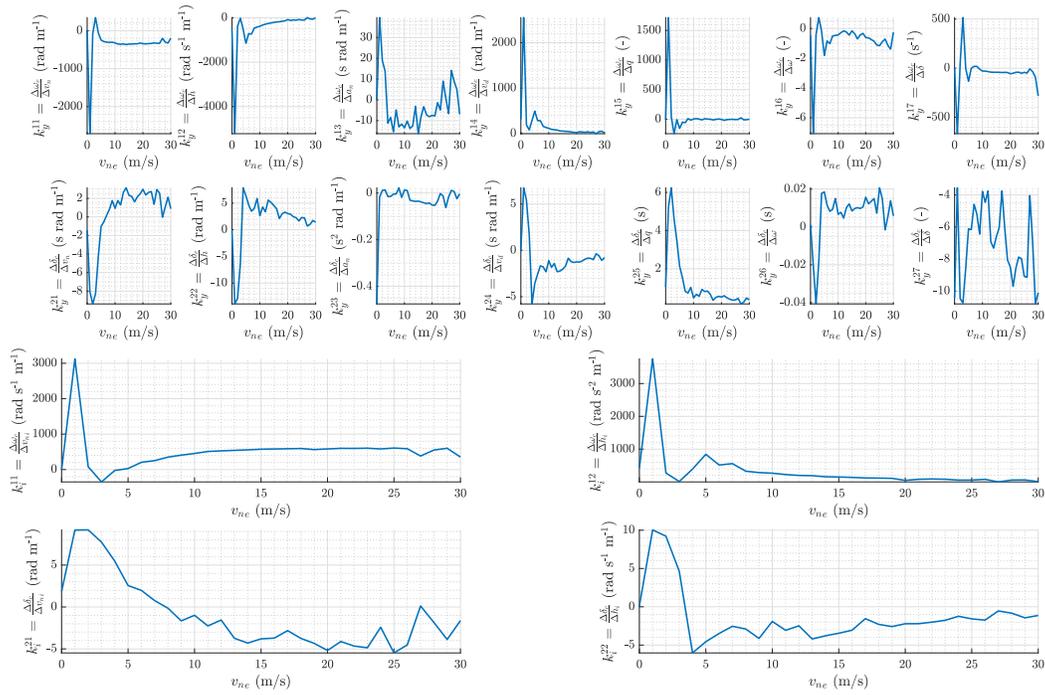


Figure H.8 Gains de la synthèse RSS +  $\mathcal{H}_\infty$  + PPP + NOM

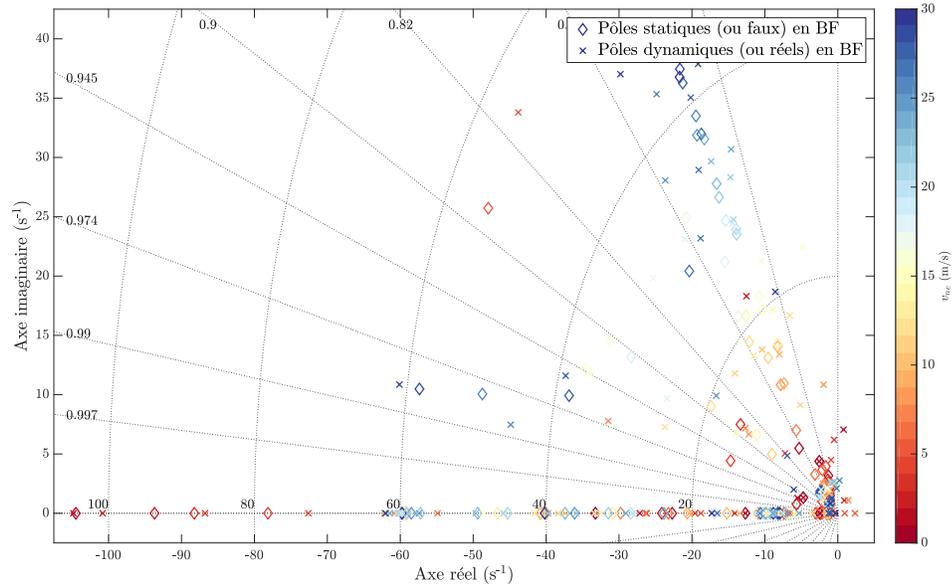


Figure H.9 Pôles en BF de la synthèse RSS +  $\mathcal{H}_\infty$  + PPP + NOM

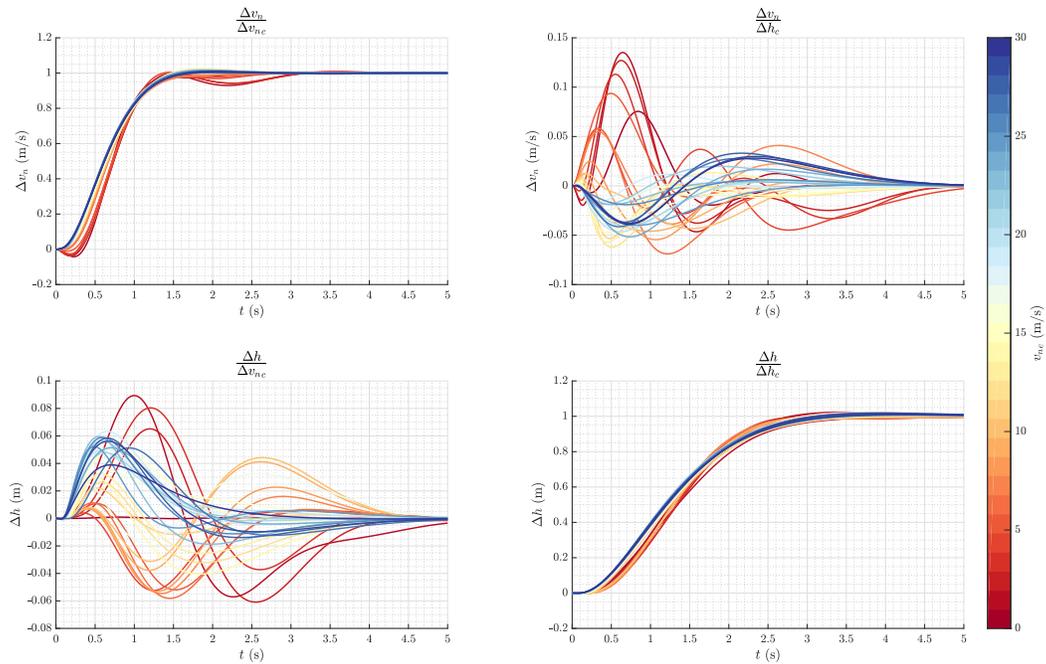


Figure H.10 Réponses temporelles  $\Delta \mathbf{z} / \Delta \mathbf{r}$  de la synthèse RSS +  $\mathcal{H}_\infty$  + PPP + NOM

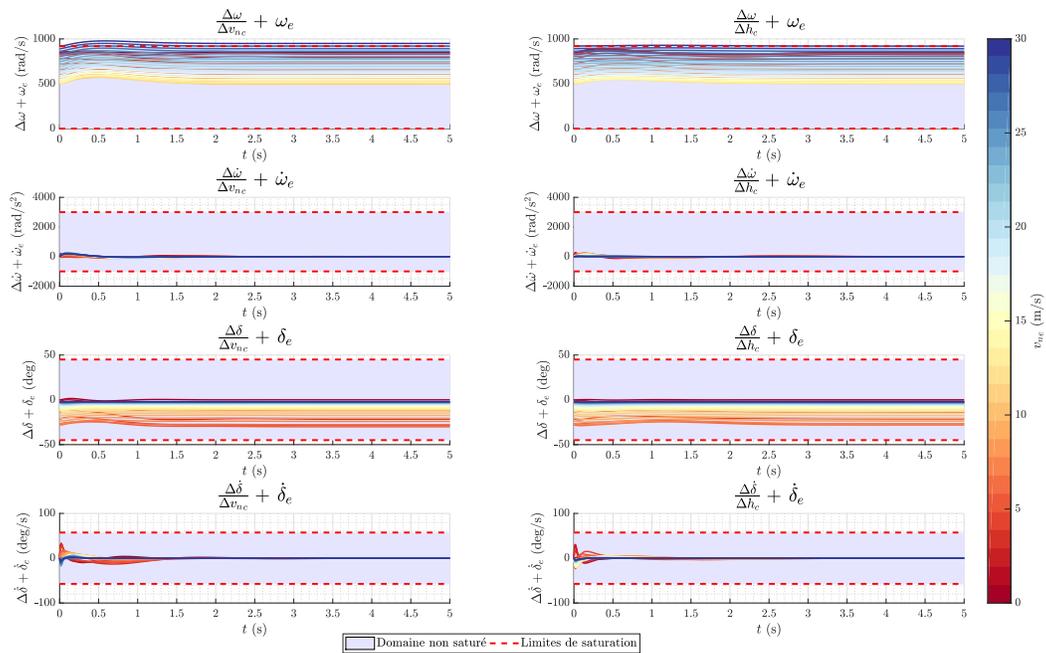


Figure H.11 Réponses temporelles  $\Delta \mathbf{s} / \Delta \mathbf{r}$  de la synthèse RSS +  $\mathcal{H}_\infty$  + PPP + NOM

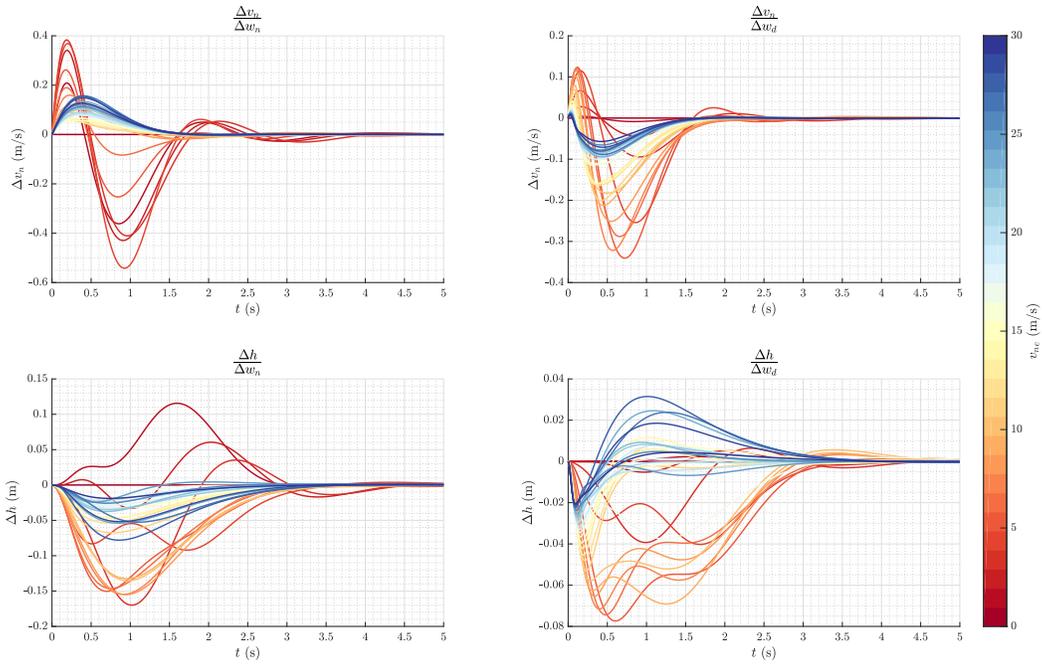


Figure H.12 Réponses temporelles  $\Delta \mathbf{z} / \Delta \mathbf{w}$  de la synthèse RSS +  $\mathcal{H}_\infty$  + PPP + NOM

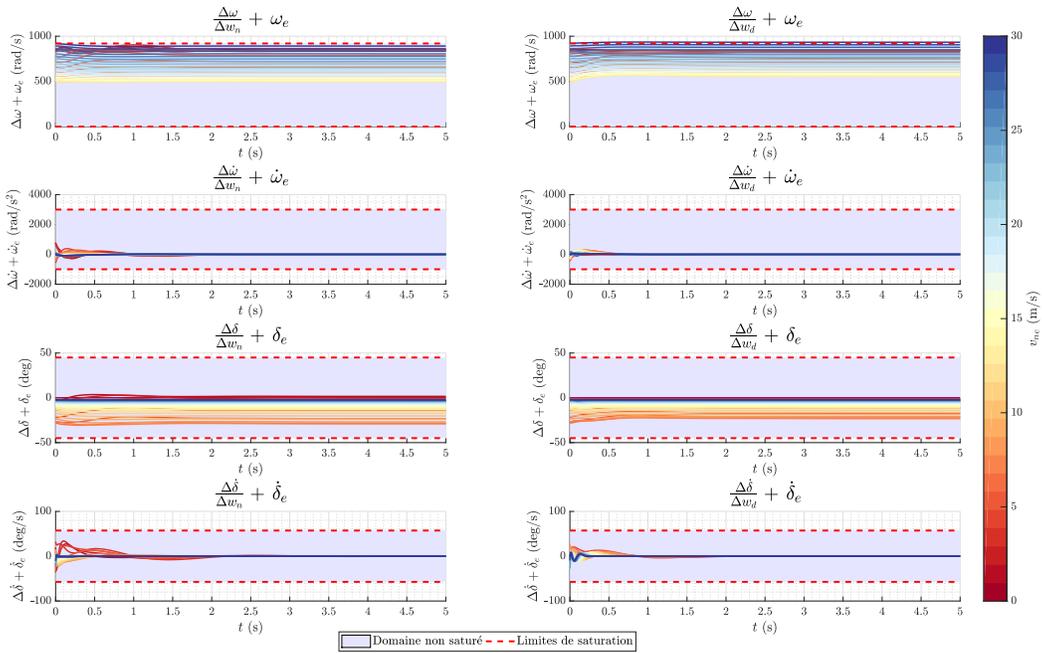


Figure H.13 Réponses temporelles  $\Delta \mathbf{s} / \Delta \mathbf{w}$  de la synthèse RSS +  $\mathcal{H}_\infty$  + PPP + NOM

### H.1.4 RSS + $\mathcal{H}_\infty$ + SMM + NOM

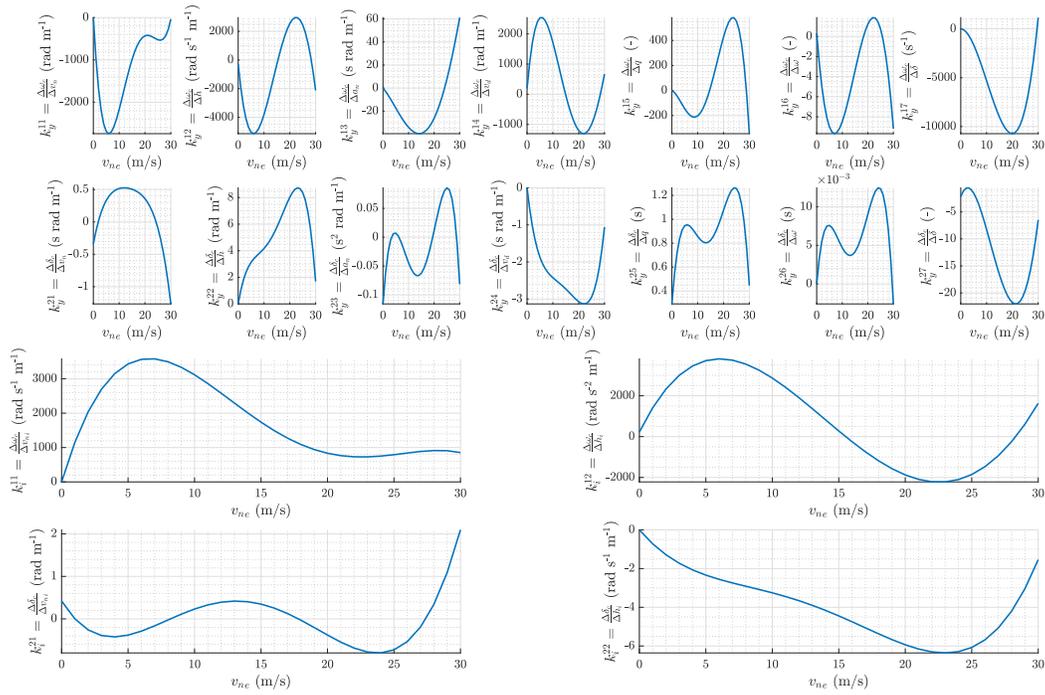


Figure H.14 Gains de la synthèse RSS +  $\mathcal{H}_\infty$  + SMM + NOM

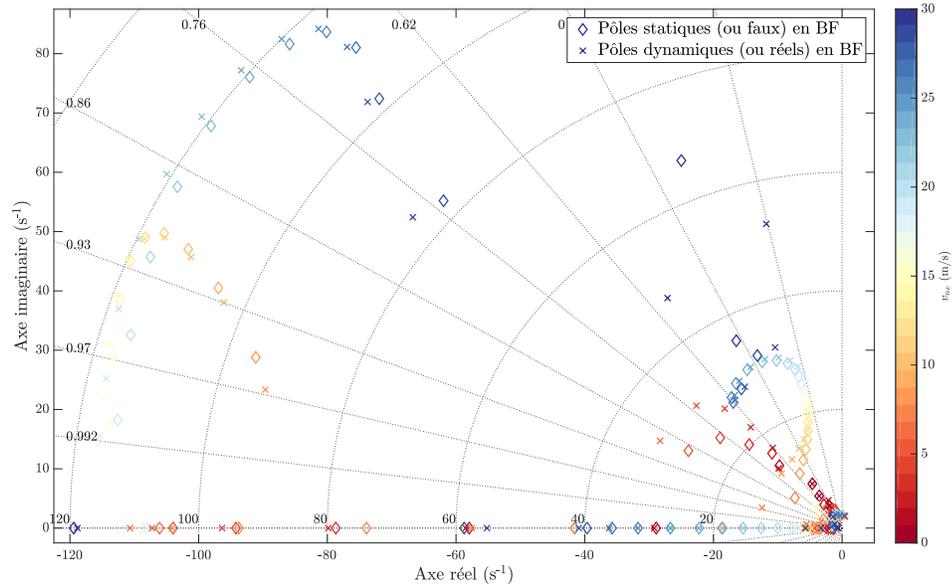


Figure H.15 Pôles en BF de la synthèse RSS +  $\mathcal{H}_\infty$  + SMM + NOM

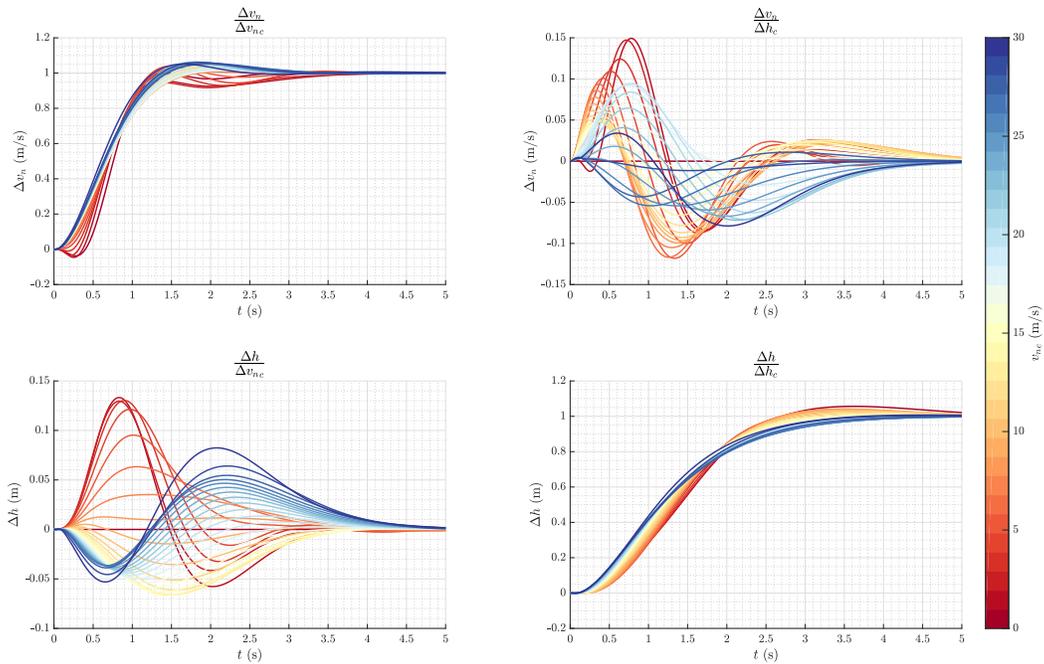


Figure H.16 Réponses temporelles  $\Delta\mathbf{z}/\Delta\mathbf{r}$  de la synthèse RSS +  $\mathcal{H}_\infty$  + SMM + NOM

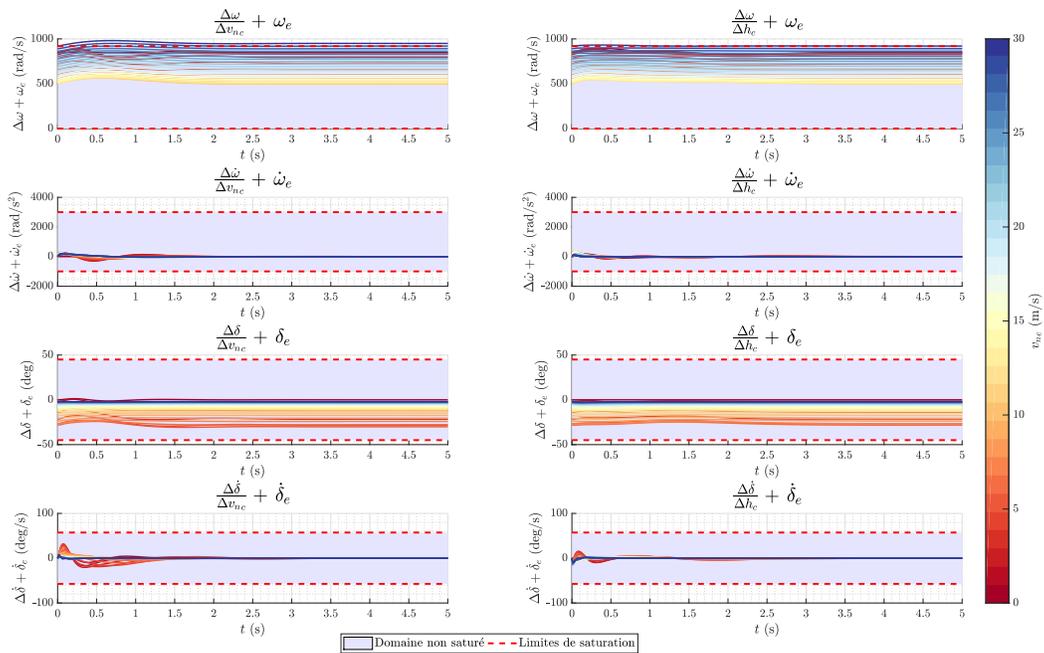


Figure H.17 Réponses temporelles  $\Delta\mathbf{s}/\Delta\mathbf{r}$  de la synthèse RSS +  $\mathcal{H}_\infty$  + SMM + NOM

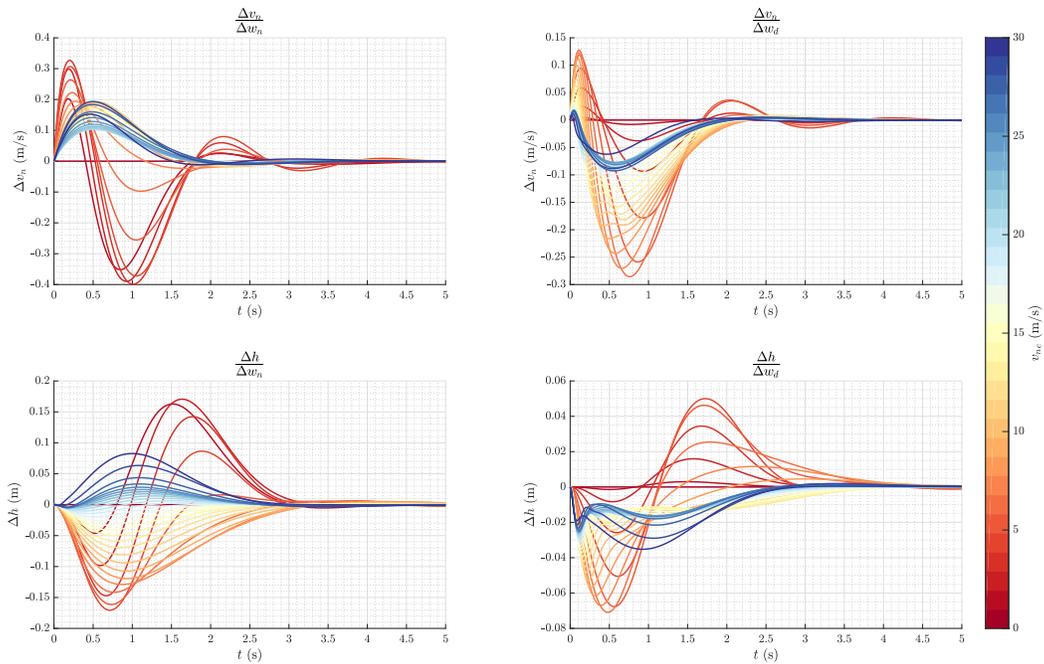


Figure H.18 Réponses temporelles  $\Delta z/\Delta w$  de la synthèse RSS +  $\mathcal{H}_\infty$  + SMM + NOM

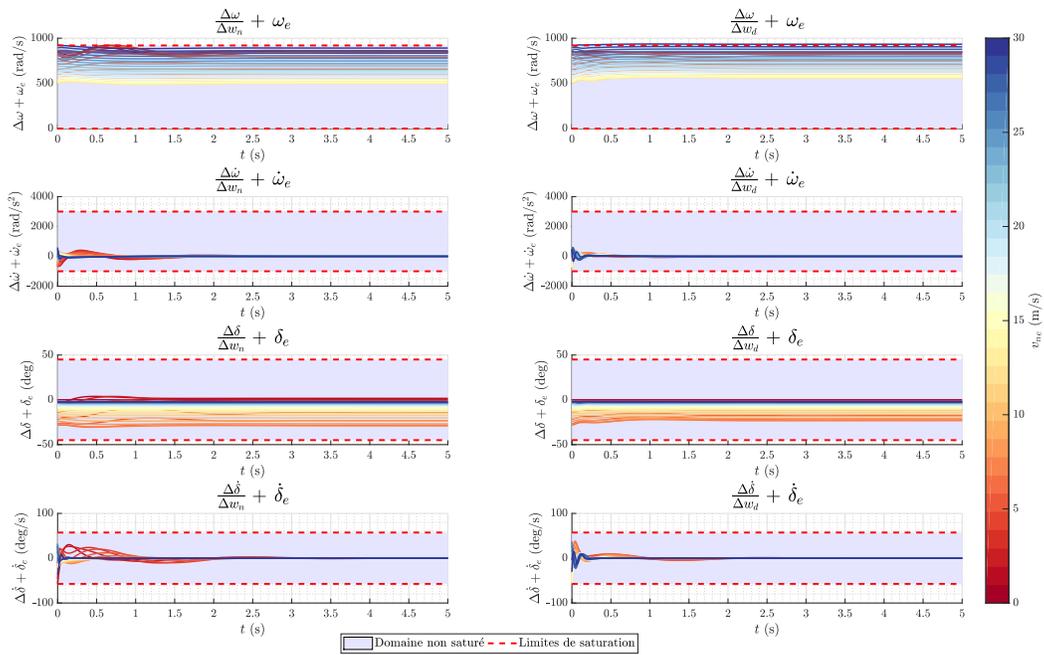


Figure H.19 Réponses temporelles  $\Delta s/\Delta w$  de la synthèse RSS +  $\mathcal{H}_\infty$  + SMM + NOM

### H.1.5 RSS + $\mathcal{H}_\infty$ + TCC + NOM

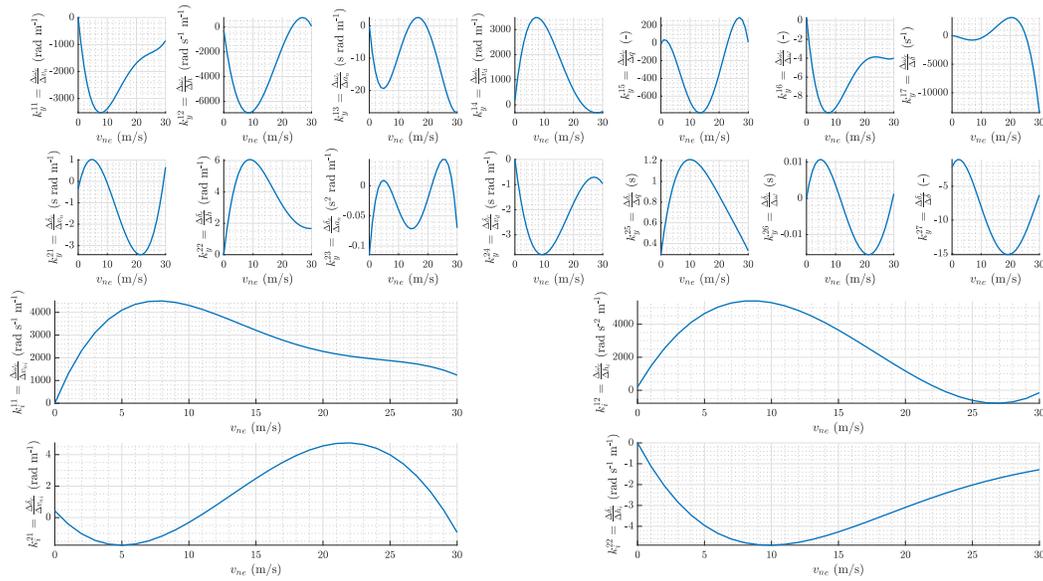


Figure H.20 Gains de la synthèse RSS +  $\mathcal{H}_\infty$  + TCC + NOM

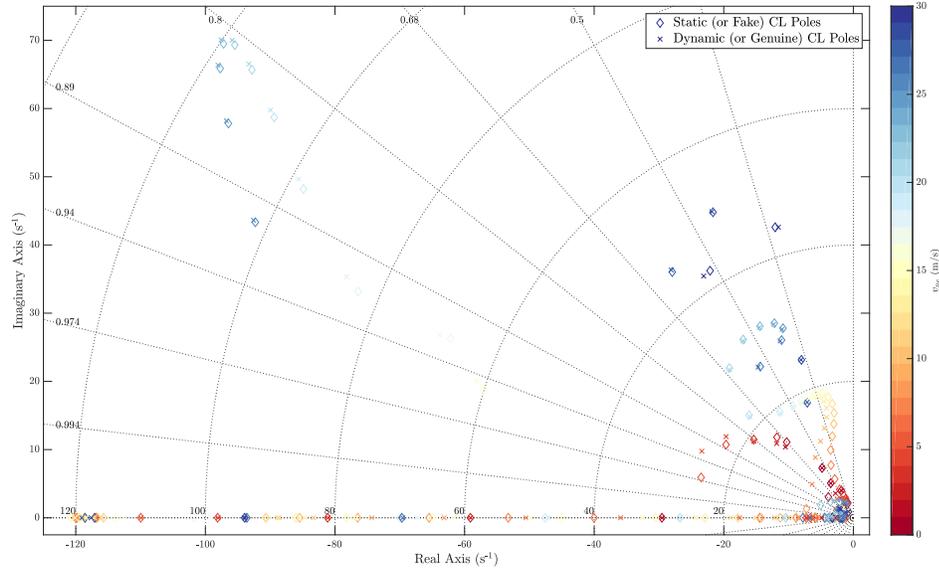


Figure H.21 Pôles en BF de la synthèse RSS +  $\mathcal{H}_\infty$  + TCC + NOM

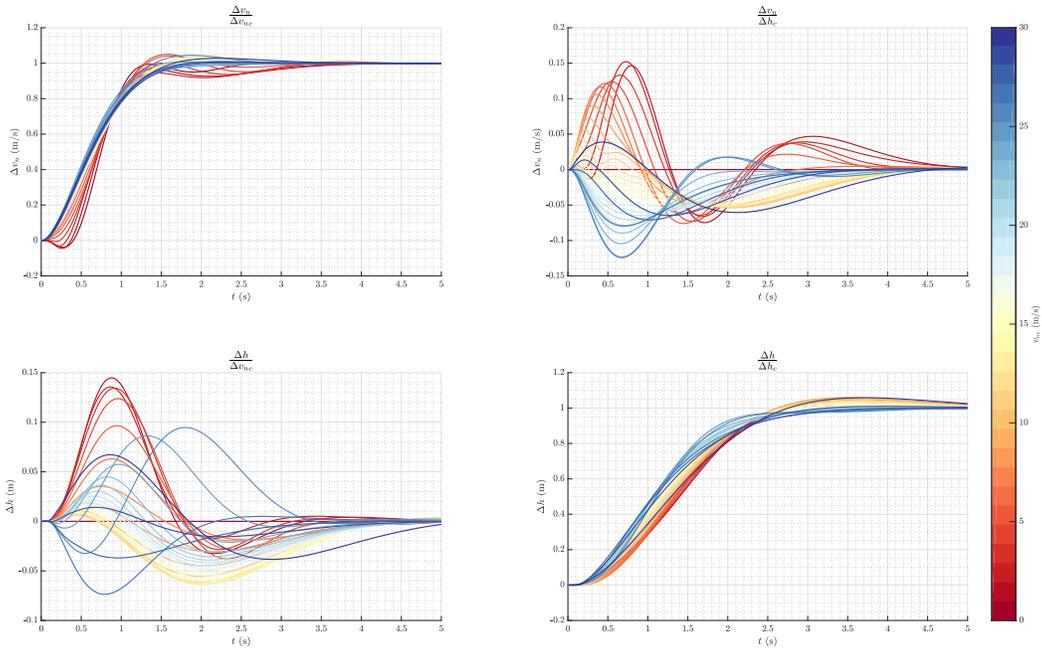


Figure H.22 Réponses temporelles  $\Delta \mathbf{z}/\Delta \mathbf{r}$  de la synthèse RSS +  $\mathcal{H}_\infty$  + TCC + NOM

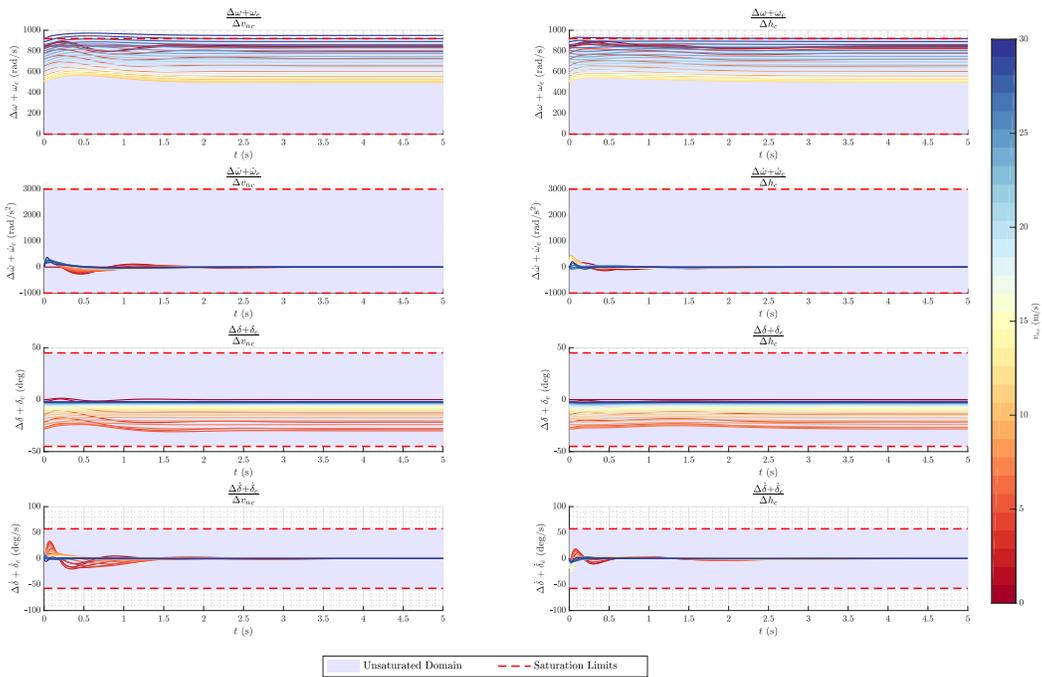


Figure H.23 Réponses temporelles  $\Delta \mathbf{s}/\Delta \mathbf{r}$  de la synthèse RSS +  $\mathcal{H}_\infty$  + TCC + NOM

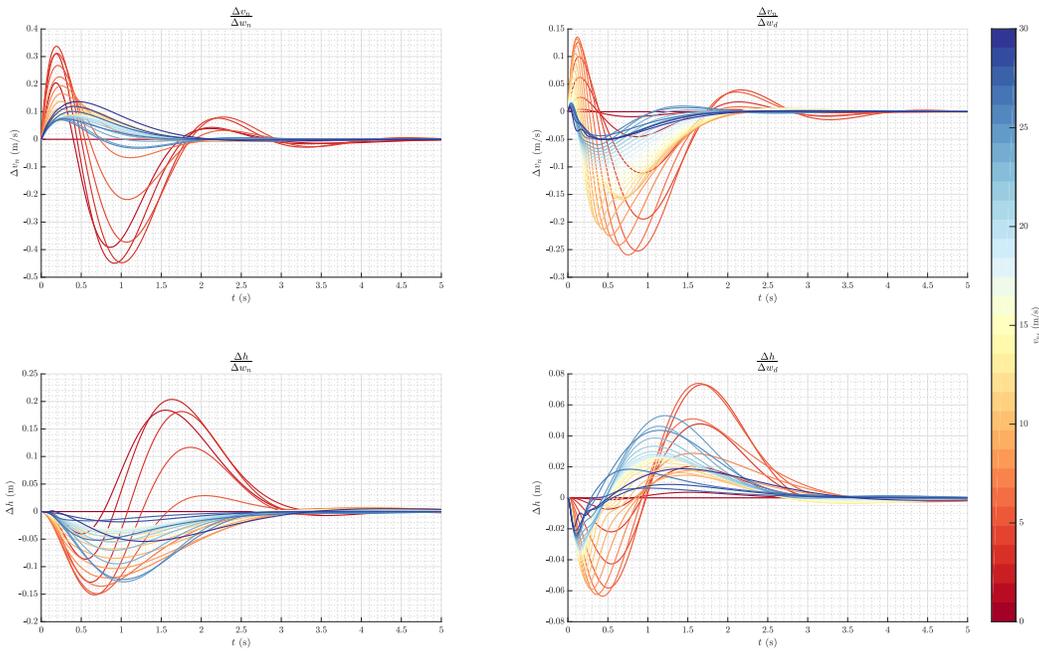


Figure H.24 Réponses temporelles  $\Delta \mathbf{z}/\Delta \mathbf{w}$  de la synthèse RSS +  $\mathcal{H}_\infty$  + TCC + NOM

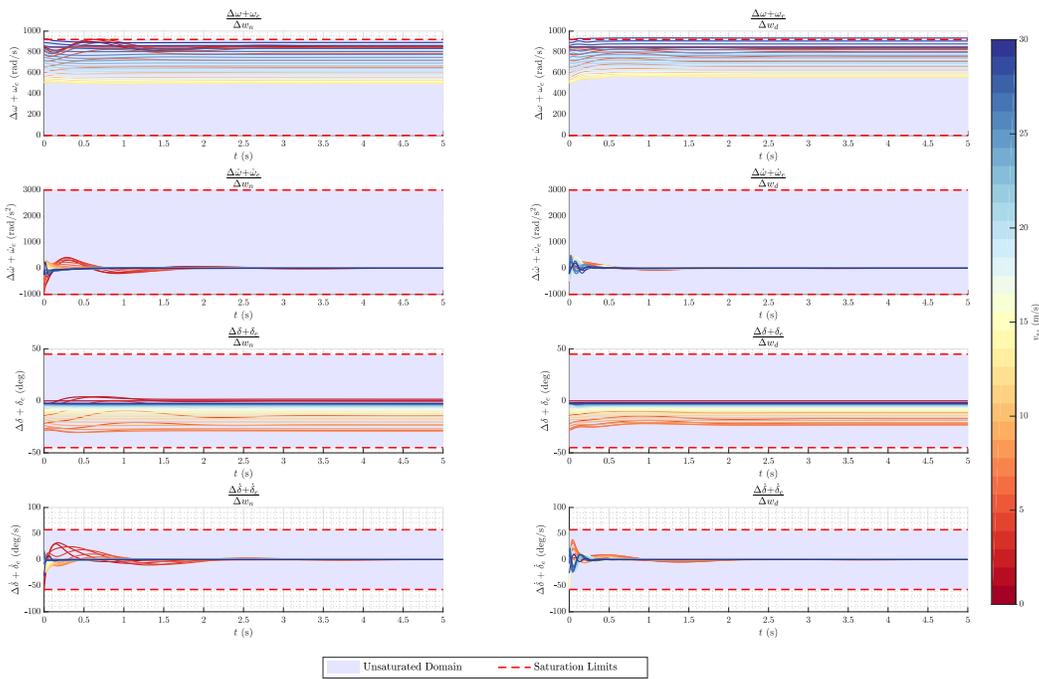


Figure H.25 Réponses temporelles  $\Delta \mathbf{s}/\Delta \mathbf{w}$  de la synthèse RSS +  $\mathcal{H}_\infty$  + TCC + NOM

## H.1.6 Comparaison des synthèses RSS + NOM

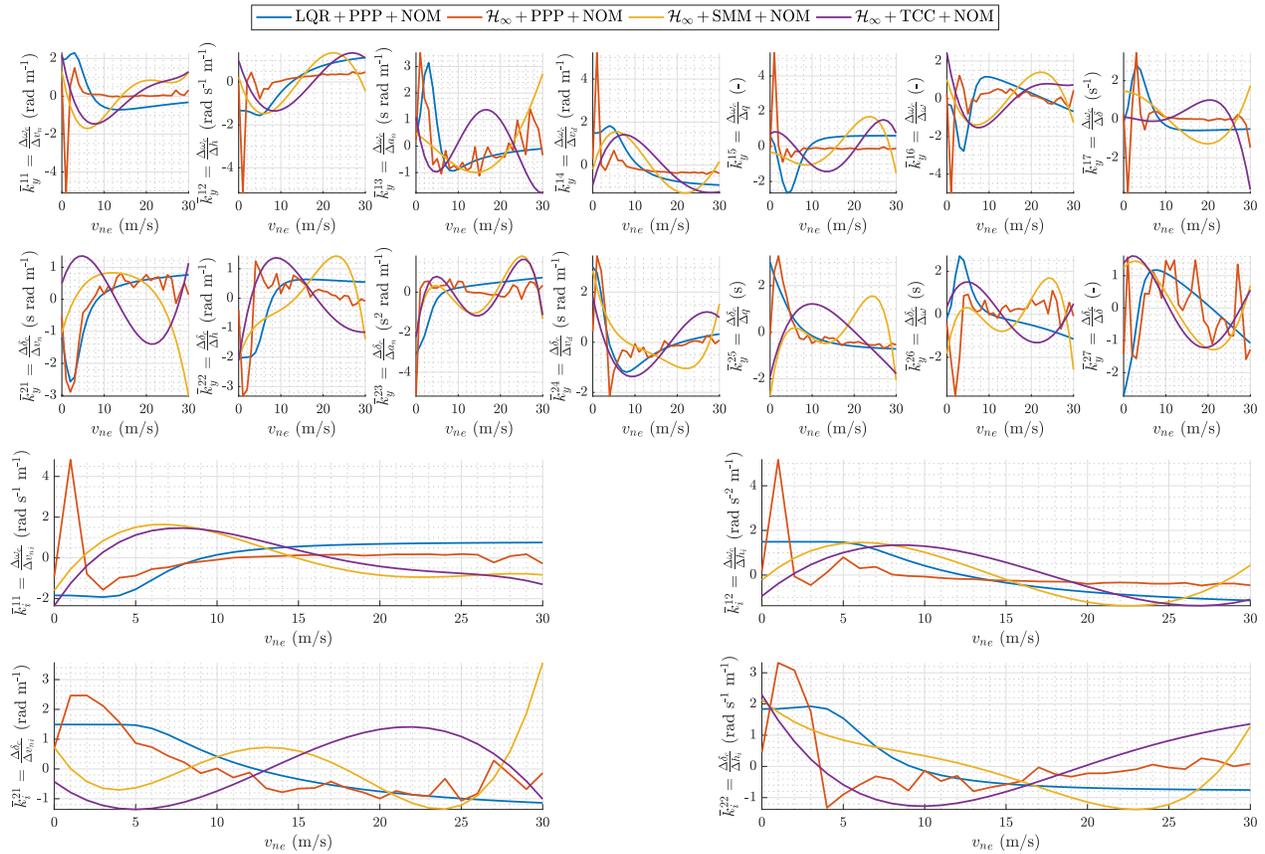


Figure H.26 Comparaison des gains des synthèses RSS + NOM

## H.2 Simulations sur le modèle non linéaire des synthèses RSS + NOM

Cette section contient les résultats de simulations comparant les étapes LQR et TCC pour un RSS + NOM.

## H.2.1 Parcours complet du domaine de vol des synthèses RSS + NOM

### Configuration paramétrique nominale pour le cas DOM

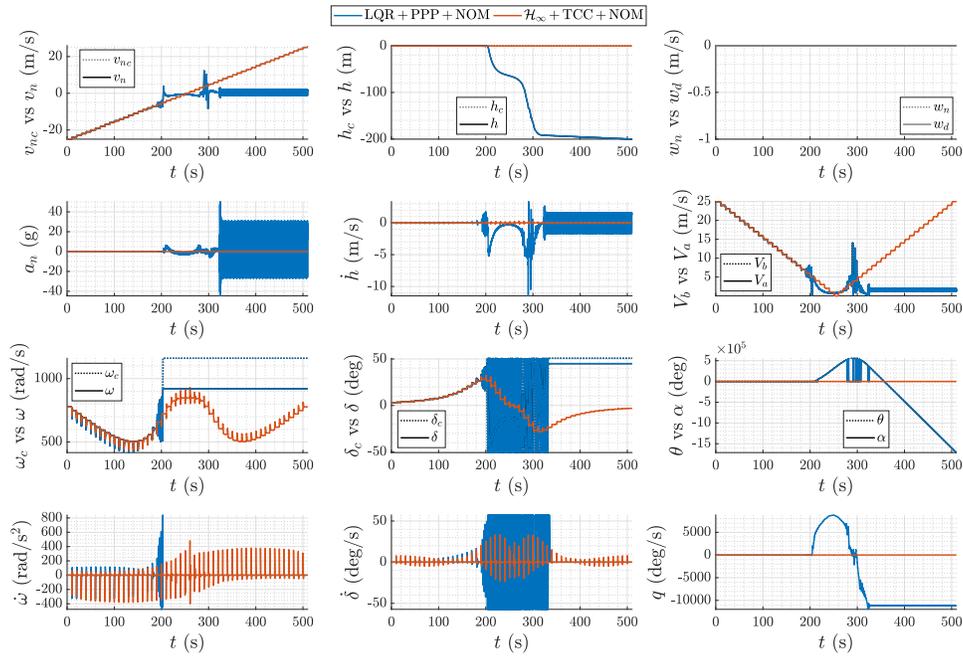


Figure H.27 Variables des synthèses RSS + NOM pour le cas DOM + NOM

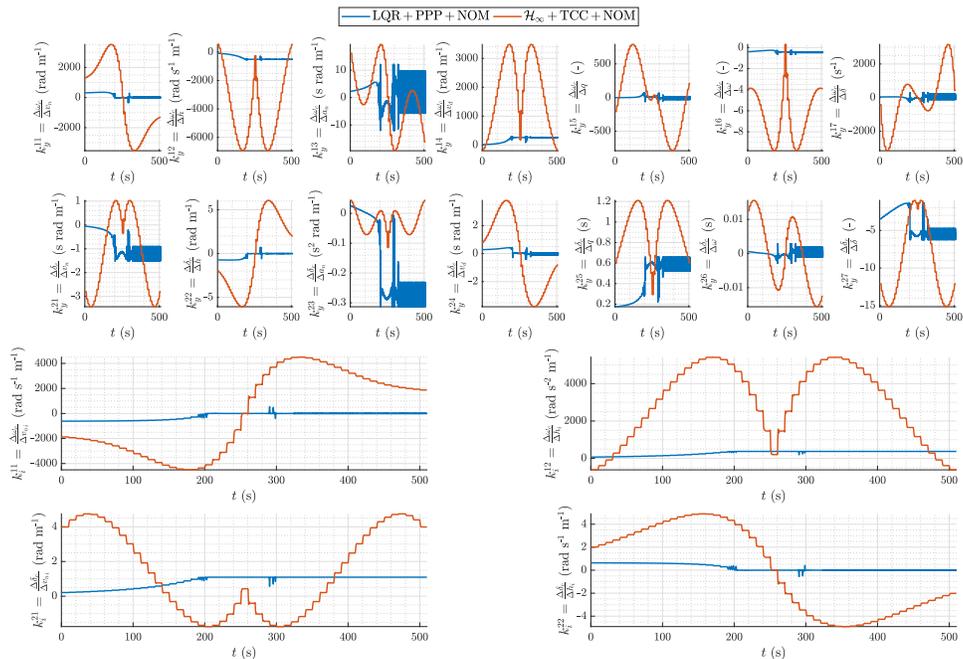


Figure H.28 Gains des synthèses RSS + NOM pour le cas DOM + NOM

### Configuration paramétrique incertaine pour le cas DOM

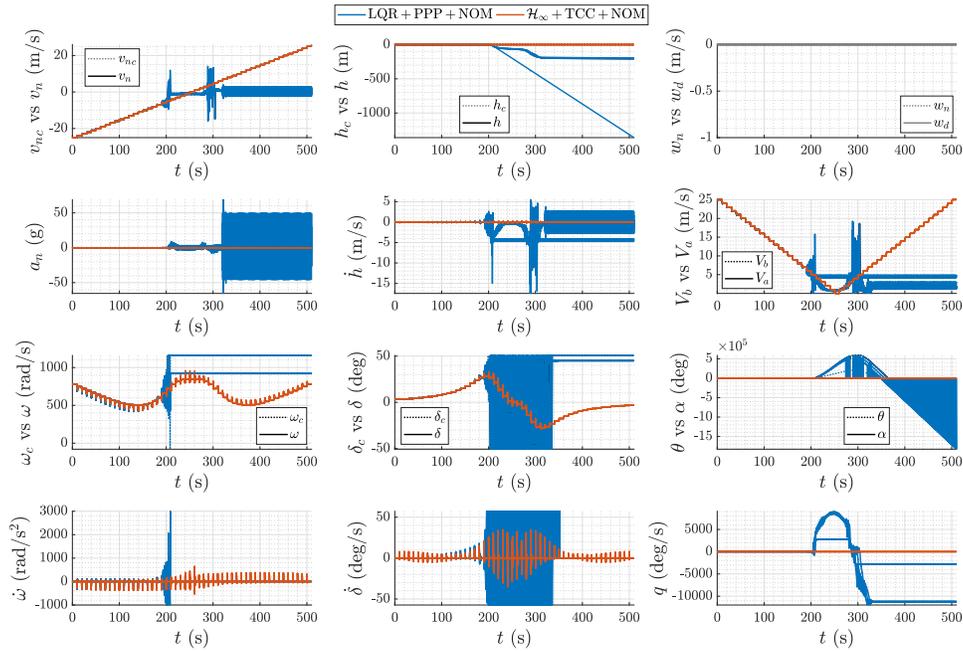


Figure H.29 Variables des synthèses RSS + NOM pour le cas DOM + INC

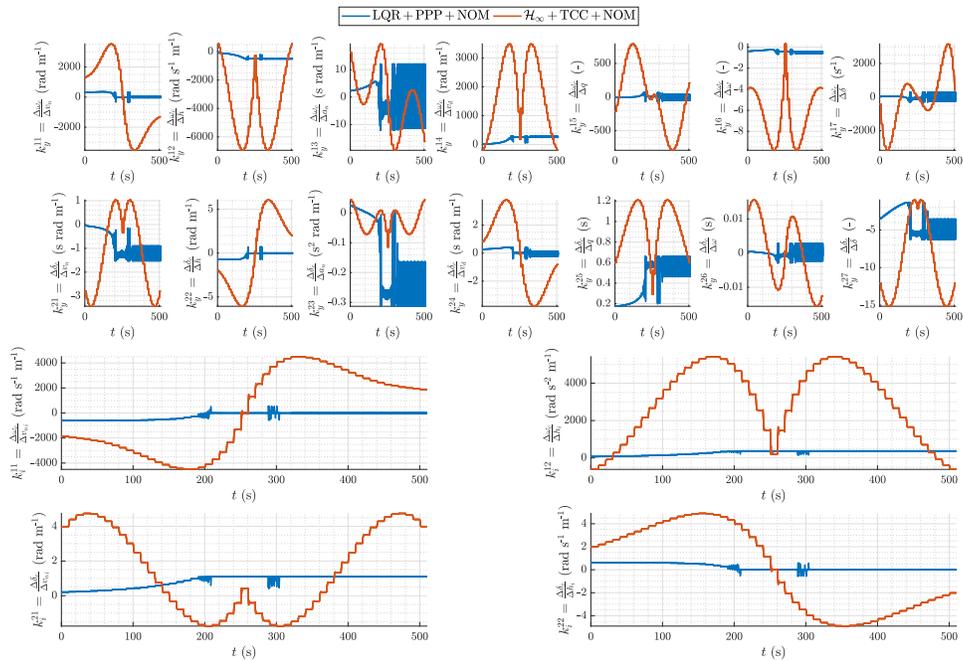


Figure H.30 Gains des synthèses RSS + NOM pour le cas DOM + INC

## H.2.2 Suivi de références multiples en simultan e des synth es RSS + NOM

### Configuration param trique nominale pour le cas REF

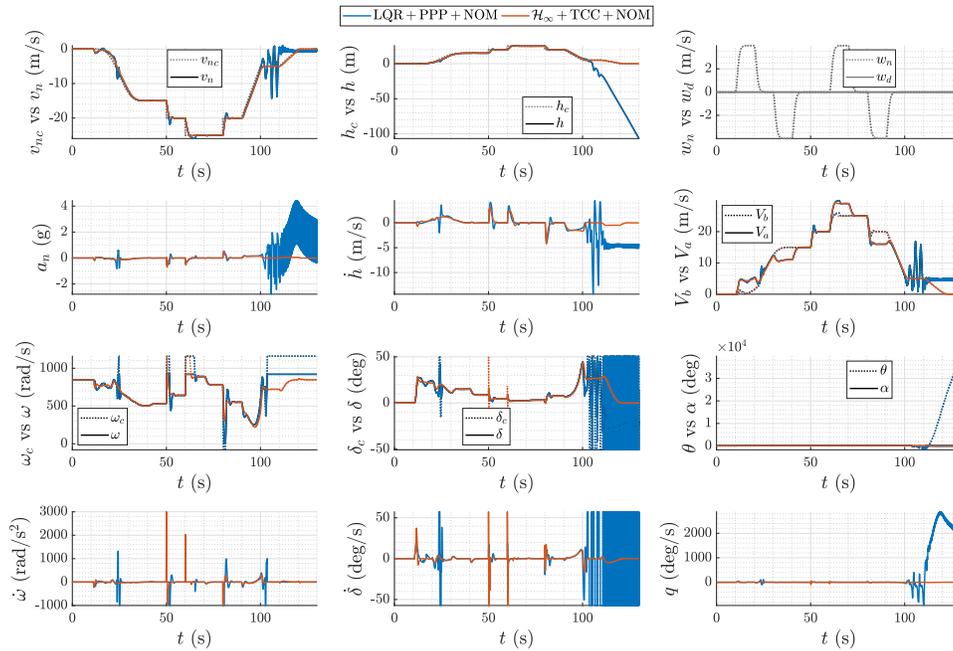


Figure H.31 Variables des synth es RSS + NOM pour le cas REF + NOM

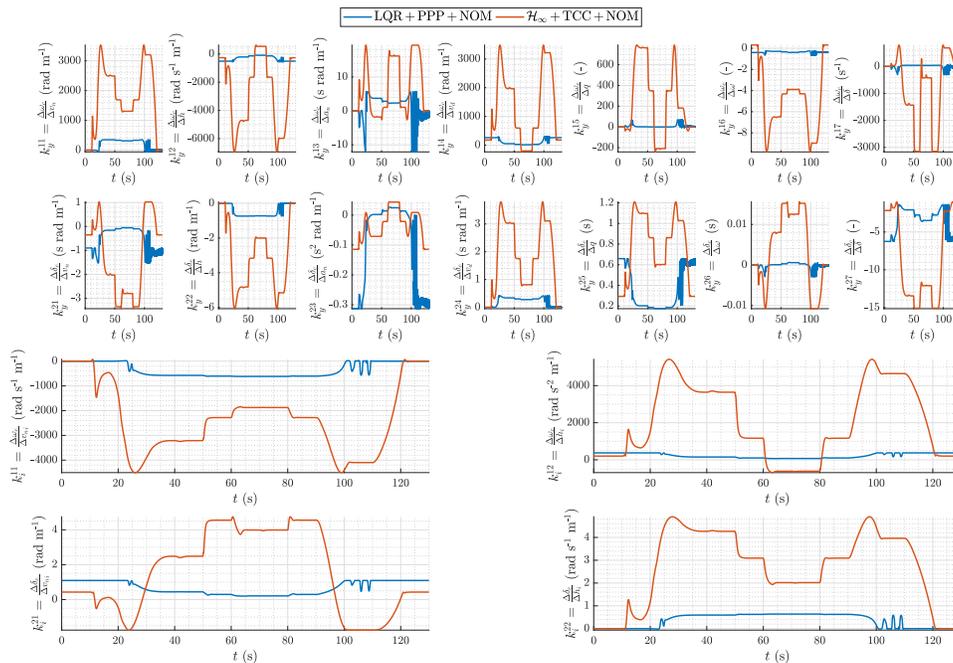


Figure H.32 Gains des synth es RSS + NOM pour le cas REF + NOM

### Configuration paramétrique incertaine pour le cas REF

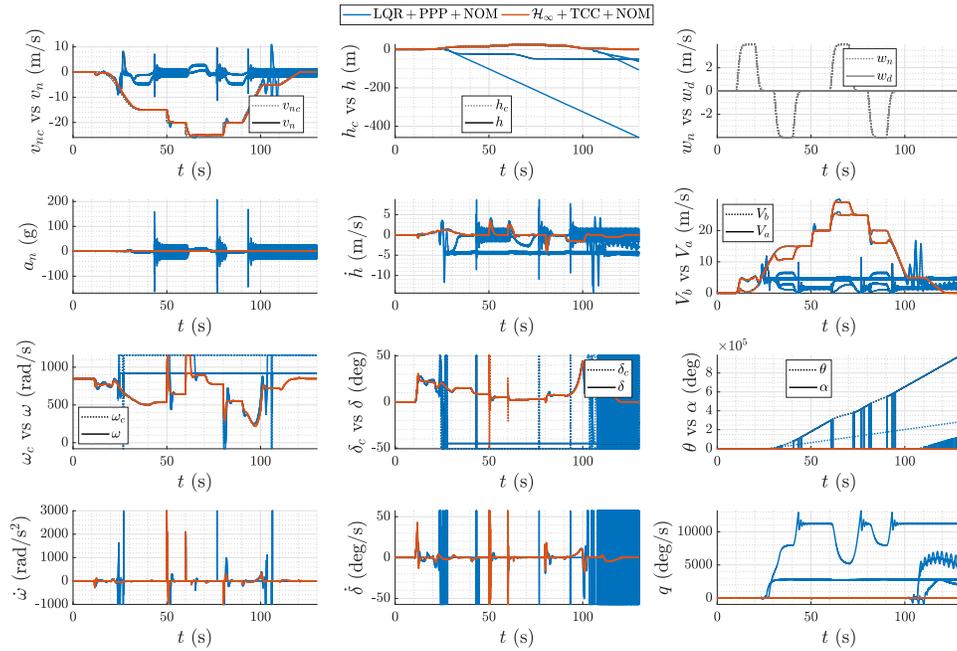


Figure H.33 Variables des synthèses RSS + NOM pour le cas REF + INC

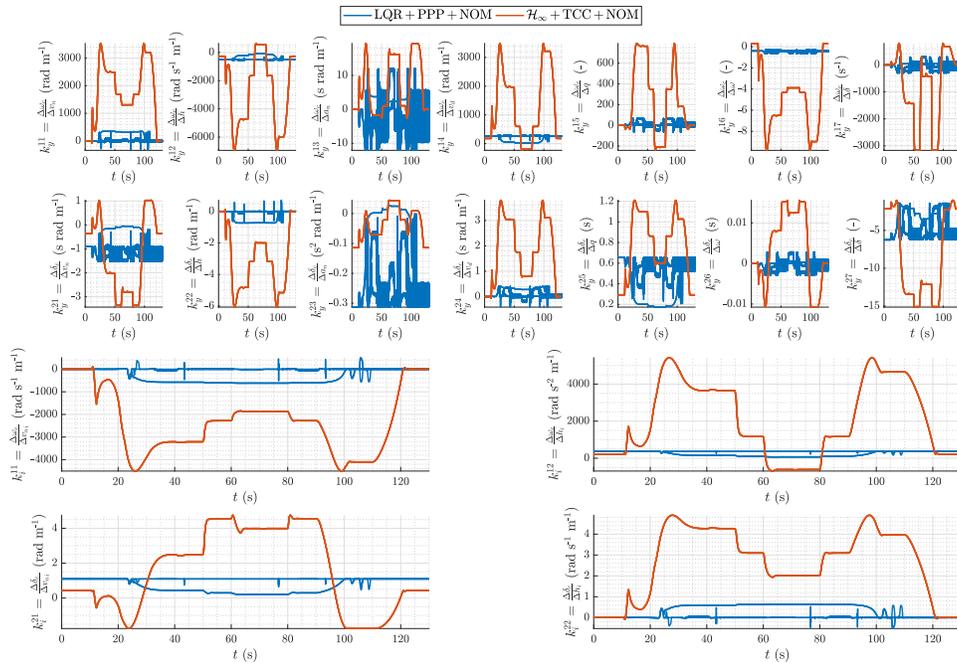


Figure H.34 Gains des synthèses RSS + NOM pour le cas REF + INC

### H.2.3 Résistance aux perturbations de vent des synthèses RSS + NOM

#### Configuration paramétrique nominale pour le cas VEN

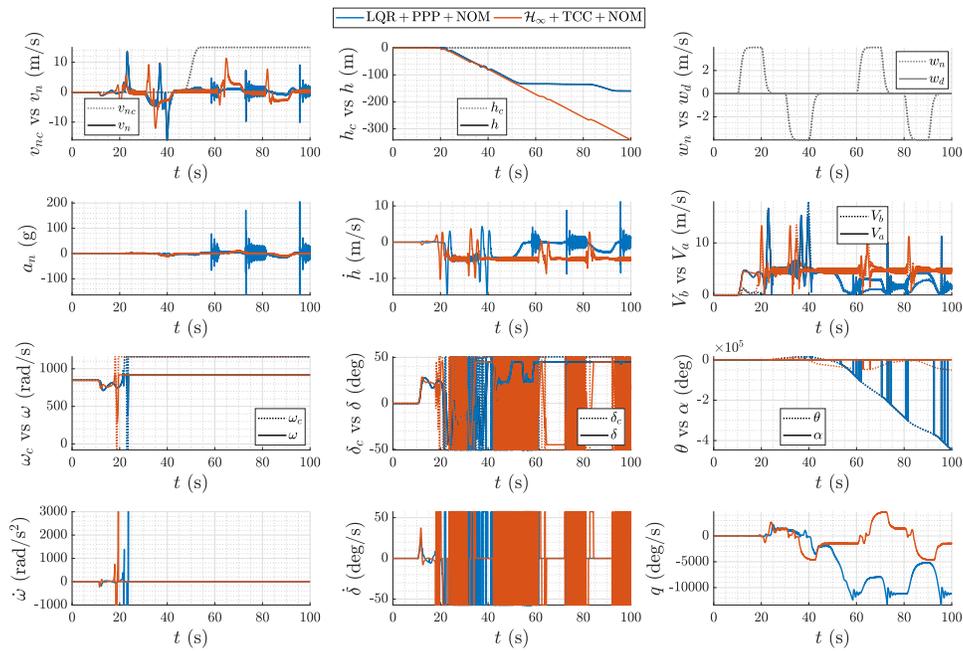


Figure H.35 Variables des synthèses RSS + NOM pour le cas VEN + NOM

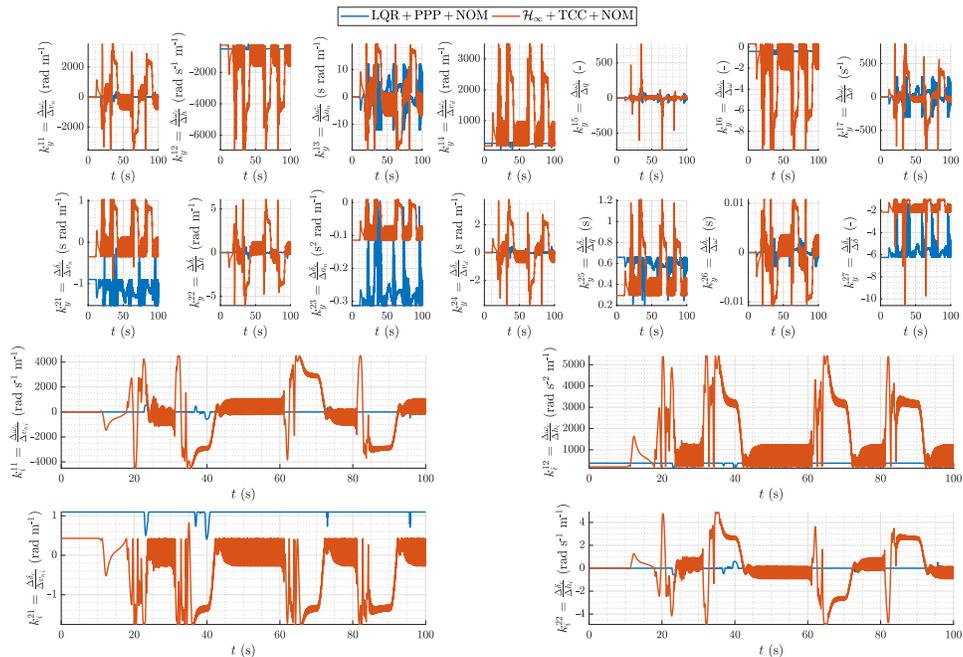


Figure H.36 Gains des synthèses RSS + NOM pour le cas VEN + NOM

## Configuration paramétrique incertaine pour le cas VEN

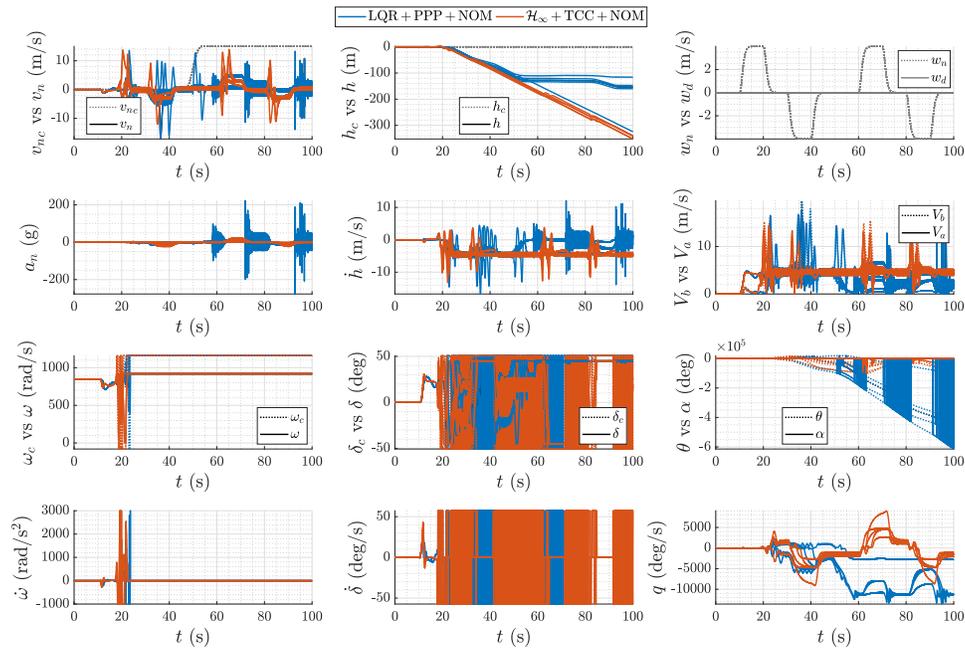


Figure H.37 Variables des synthèses RSS + NOM pour le cas VEN + INC

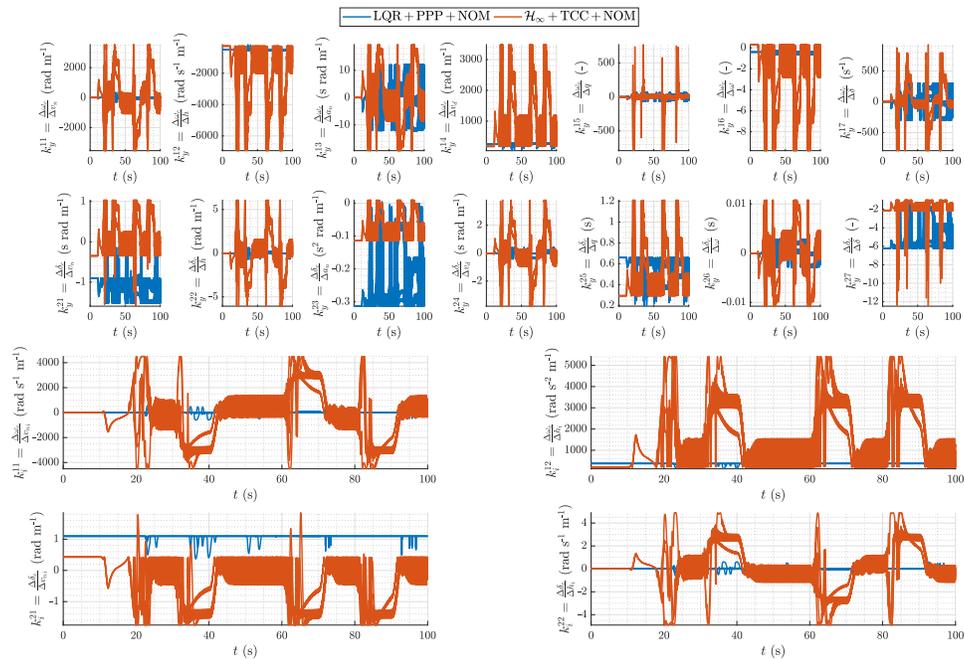


Figure H.38 Gains des synthèses RSS + NOM pour le cas VEN + INC