

Titre: Prédiction de l'érosion de cavitation par une méthode multi-échelle
Title:

Auteur: Lydia Plastre
Author:

Date: 2019

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Plastre, L. (2019). Prédiction de l'érosion de cavitation par une méthode multi-échelle [Mémoire de maîtrise, Polytechnique Montréal]. PolyPublie.
Citation: <https://publications.polymtl.ca/4030/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/4030/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Jean-Yves Trépanier, & François Guibault
Advisors:

Programme: Génie mécanique
Program:

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

Prédiction de l'érosion de cavitation par une méthode multi-échelle

LYDIA PLASTRE

Département de génie mécanique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*

Génie mécanique

Août 2019

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

Prédiction de l'érosion de cavitation par une méthode multi-échelle

présenté par **Lydia PLASTRE**

en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

Marcelo REGGIO, président

Jean-Yves TRÉPANIÉ, membre et directeur de recherche

François GUIBAULT, membre et codirecteur de recherche

Stéphane ÉTIENNE, membre

DÉDICACE

*À ma famille, Amandine et Anthony qui m'ont toujours encouragée à prendre des chemins
que je n'aurais jamais osé emprunter toute seule . . .*

REMERCIEMENTS

Dans un premier temps, je tiens à remercier mon directeur de recherche, François Guibault, qui, grâce à son intérêt sans faille pour mon projet, sa grande disponibilité, son sens de l'écoute ainsi que ses conseils inspirés a continuellement su m'aider à avancer. Je remercie également mon co-directeur Jean-Yves Trépanier pour ses enseignements qui ont marqué le début de mon projet.

Merci à Christophe Devals pour son accompagnement constant ainsi que pour son expertise avec CFX qu'il a su partager de manière à toujours me guider au mieux.

Merci à Maxime Gauthier et Bernd Nennemann pour leur encadrement qui a su maintenir le lien entre mon projet et Andritz grâce aux réunions régulières desquelles de nouvelles pistes de recherche sont tout le temps ressorties.

Je désire également remercier Julien Dompierre pour sa flexibilité et l'aide qu'il m'a apportée avec Vanemesh, ainsi que Jean-Marc Chevalier pour son expertise technique précieuse.

Merci au soutien financier du programme Génie Par la Simulation fondé par le programme FONCER du Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada.

J'en viens à remercier mes amis de l'INSA, Lénéïg, et tous ceux qui ont participé à rendre mon expérience ici si belle : mes collègues du laboratoire pour la bonne humeur qui y a régné, Poly-Théâtre pour l'accueil chaleureux, les Sportifs pour les parties de wallyball intensives et tous les bons moments partagés, les Carichoux pour ces deux ans de vie commune au top du cool et enfin Diane, Boule et Bulle qui n'ont jamais cessé de m'inspirer.

RÉSUMÉ

Ce projet porte sur la prédiction de l'érosion de cavitation permise par l'implémentation d'un modèle numérique. Celle-ci doit permettre de déterminer quelles seront les zones les plus menacées par le phénomène ainsi que de quantifier de manière relative l'érosion de cavitation.

Dans le domaine des turbines hydrauliques, la cavitation, caractérisée par l'apparition de bulles qui ont un pouvoir érosif lorsqu'elles implosent, a des conséquences néfastes pour les installations. En effet, des vibrations sont rencontrées, du bruit est engendré et des dégradations du matériel par érosion sont inévitables. Les machines sont alors endommagées, ce qui réduit leurs durées de vie. Bien que le phénomène soit connu, il convient de l'appréhender de manière suffisamment complète afin de le contraindre efficacement, notamment grâce au développement de nouveaux procédés. Ainsi, anticiper l'impact de l'érosion sur les surfaces matérielles est motivé tant par des raisons technologiques qu'économiques. Cette aspiration est néanmoins rendue difficile par le fait que le problème implique deux échelles distinctes : l'échelle de l'écoulement, dite macroscopique, ainsi que l'échelle des bulles, dite microscopique.

Ce travail vise à mettre en place le modèle de prédiction choisi grâce à l'utilisation couplée de deux outils : un solveur fluide commercial (CFX), ainsi qu'un module Python. L'enjeu est ici de proposer une démarche numérique optimisée reposant sur ces dispositifs et permettant d'obtenir les résultats recherchés, à savoir la localisation ainsi que la quantification de l'érosion de cavitation pour la configuration à l'étude.

Les étapes de validation ont été menées sur des cas d'étude constitués de profils d'aile dans des veines d'essai pour lesquels des résultats expérimentaux étaient disponibles dans la littérature. Une méthode hiérarchisée en plusieurs étapes détaillées ci-dessous a été suivie :

1. Détermination, mise en place et validation de la démarche relative à l'échelle macroscopique
2. Mise en place des calculs relatifs à l'échelle microscopique nécessaires à la détermination du coefficient d'érosion de cavitation
3. Visualisation des résultats et comparaison avec les données de la littérature

ABSTRACT

This project relates to the prediction of cavitation erosion done with the implementation of a numerical model. The work aims at predicting two aspects of the phenomenon: determining areas most endangered and quantifying cavitation erosion in a relative way.

In hydraulic turbines, cavitation, characterized by the apparition of bubbles which have an erosive power when they implode, has unwanted consequences. Indeed, vibrations, noise and material degradation are at stake. This is damaging for hydraulic machinery and threatens the lifespan of every installation. Even if this issue is relatively well-known, it should be noted that gaining a better picture of the phenomenon is needed to limit adequately its impact, through the development of new processes. Thus, developing a method which can anticipate this phenomenon with good accuracy is vital from the designer's perspective for both technological and economical reasons. Nevertheless, attaining this objective is complicated by the fact that this is a two scales problem: a macroscopic one, flow related, and a microscopic one, centered on bubbles.

This work aims at implementing a cavitation erosion prediction model thanks to the combined use of a commercial solver (CFX) and a Python module. The challenge is to propose an optimized numerical method based on these tools to obtain the expected results, which are the localization and the quantification of cavitation erosion for the studied configuration.

Validation steps were conducted on case studies composed of foils in water tunnels for which experimental results were available in the literature. The several stages of the used method are enumerated as follows:

1. Determination, implementation and validation of the macroscopic approach
2. Implementation of the calculations for the microscopic scale which are needed for the determination of the cavitation erosion coefficient
3. Visualization of the results and comparison with reference data

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vi
TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES TABLEAUX	ix
LISTE DES FIGURES	x
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Objectif du travail	7
1.2 Structure du mémoire	8
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE	9
2.1 Mise en équation	9
2.2 Modèle de turbulence	11
2.3 Modèle de cavitation	16
2.4 Prédiction de l'érosion de cavitation	17
2.4.1 Méthodes expérimentales	18
2.4.2 Méthodes analytiques	19
2.4.3 Méthodes numériques centrées sur le fluide	21
2.4.4 Méthodes numériques avec un couplage entre le fluide et la surface solide	28
CHAPITRE 3 ÉCHELLE MACROSCOPIQUE	34
3.1 Détermination de la stratégie de simulation macroscopique avec l'étude d'un cas test	34
3.1.1 Présentation du cas test	34
3.1.2 Étude des modèles homogène et inhomogène de CFX	42
3.2 Calculs relatifs à l'échelle macroscopique	48

3.2.1	Présentation du cas étudié	48
3.2.2	Présentation des résultats des simulations URANS	52
CHAPITRE 4 ÉCHELLE MICROSCOPIQUE		54
4.1	Calcul de la puissance de cavitation	54
4.1.1	Présentation des équations du modèle	54
4.1.2	Exportation des données	55
4.2	Calcul de la puissance matérielle surfacique	55
4.2.1	Présentation des équations du modèle	55
4.2.2	Méthode de l'angle solide	56
4.2.3	Présentation des méthodes de calcul envisagées	60
4.3	Calcul du coefficient d'intensité d'érosion de cavitation	66
4.3.1	Présentation des équations du modèle	66
4.3.2	Exportation des données	66
CHAPITRE 5 VISUALISATION DES RÉSULTATS		67
5.1	Interpolation des résultats	67
5.2	Visualisation des résultats avec CFD-Post	68
5.2.1	Influence de la valeur seuil	68
5.2.2	Comparaison avec les résultats de Leclercq	69
CHAPITRE 6 CONCLUSION		73
6.1	Synthèse des travaux	73
6.2	Limitations de la solution proposée	75
6.3	Améliorations futures	75
RÉFÉRENCES		76

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1	Modèles numériques d'érosion - Première partie	30
Tableau 2.2	Modèles numériques d'érosion - Deuxième partie	31
Tableau 3.1	Conditions de sortie	35
Tableau 3.2	Maillages considérés	36
Tableau 3.3	Points à l'étude	36
Tableau 3.4	Valeurs aux points étudiés	36
Tableau 3.5	Erreurs calculées au point de l'extrados	37
Tableau 3.6	Erreurs calculées au point au niveau du bord de fuite	37
Tableau 3.7	Maillages considérés	50
Tableau 3.8	Points à l'étude	50
Tableau 3.9	Valeurs aux points étudiés	50
Tableau 3.10	Erreurs calculées au point de l'extrados	51
Tableau 3.11	Erreurs calculées au point au niveau du bord de fuite	51
Tableau 4.1	Cas test pour le calcul de l'angle solide - Coordonnées du point source	59
Tableau 4.2	Dimensions du cas d'étude	61
Tableau 4.3	Comparaison des méthodes de calcul	65

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Diagramme de phases de l'eau	1
Figure 1.2	Différentes formes de cavitation autour d'un profil d'aile : (a) bulles isolées, (b) poche attachée instationnaire, (c) vortex de Von Karman, [1]	2
Figure 1.3	Formes de cavitation dans une turbine Francis : (1) cavitation au bord d'attaque, (2) bulles de cavitation isolées, (3) tourbillon de cavitation dans l'aspirateur, (4) vortex de cavitation inter-aube, [2]	4
Figure 1.4	Schéma de compression d'une bulle. En haut : compression d'une bulle isolée, en bas : compression d'une bulle située en proche paroi	5
Figure 1.5	Présentation de la méthode de travail	7
Figure 2.1	Méthode suivie	33
Figure 3.1	Géométrie du premier cas test : NACA66	34
Figure 3.2	Géométrie du premier cas test : NACA66	34
Figure 3.3	Maillage de la veine d'essai	38
Figure 3.4	Maillage autour du profil	38
Figure 3.5	Maillage au niveau du bord d'attaque	38
Figure 3.6	Maillage au niveau du bord de fuite	38
Figure 3.7	Répartition des monitors le long de l'extrados	39
Figure 3.8	Echelle macroscopique : étapes de simulation en régime stationnaire .	40
Figure 3.9	Echelle macroscopique : étapes de simulation en régime instationnaire	41
Figure 3.10	Contour de pression - $\sigma = 1.49$	42
Figure 3.11	Contour de vitesse - $\sigma = 1.49$	43
Figure 3.12	Contour de la fraction de phase liquide - $\sigma = 1.49$	43
Figure 3.13	Comparaison des coefficients de pression - $\sigma = 1.49$	44
Figure 3.14	Evolution des contours de fraction de phase vapeur, Résultats de Leroux à gauche [3], résultats de CFX à droite - $\sigma = 1$	46
Figure 3.15	Comparaison des coefficients $Cl+$ - $\sigma = 1$	47
Figure 3.16	Géométrie du cas étudié : NACA65012	48
Figure 3.17	Géométrie du cas étudié : NACA65012	49
Figure 3.18	Maillage de la veine d'essai	52
Figure 3.19	Maillage autour du profil	52
Figure 3.20	Maillage au niveau du bord d'attaque	52
Figure 3.21	Maillage au niveau du bord de fuite	52
Figure 3.22	Evolution de C_p le long de l'extrados	53

Figure 4.1	Condition de prise en compte des points fluides	56
Figure 4.2	Schématisation angle solide	57
Figure 4.3	Maillage avant triangulation	58
Figure 4.4	Maillage triangulé	58
Figure 4.5	Cas test - Angle solide	59
Figure 4.6	Schématisation de la mise en place numérique de la méthode matricielle	62
Figure 4.7	Influence du nombre de flux parallèles utilisés sur la durée du calcul .	63
Figure 4.8	Schématisation de la mise en place numérique de la méthode vectorielle	64
Figure 4.9	Influence du nombre de flux parallèles utilisés sur la durée du calcul .	65
Figure 5.1	Schéma de la géométrie d'interpolation pour un nœud	67
Figure 5.2	Puissance matérielle - a) $\Theta = 3 \cdot 10^6 W/m^3$, b) $\Theta = 5 \cdot 10^6 W/m^3$ c) $\Theta = 1 \cdot 10^7 W/m^3$	68
Figure 5.3	Coefficient d'intensité d'érosion de cavitation - a) Résultats de Leclercq [4], b) Nos résultats pour $\Theta = 5 \cdot 10^6$	69
Figure 5.4	Puissance volumique de cavitation	70
Figure 5.5	Terme de masse volumique	71
Figure 5.6	Terme de pression	71
Figure 5.7	Produit des termes de masse volumique et de pression	72
Figure 5.8	Terme de divergence de vitesse	72
Figure 6.1	Schéma de synthèse des travaux	74

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

Abréviations

BSL	Baseline
CFD	Simulation numérique en dynamique des fluides (Computational Fluid Dynamics)
CPU	Central Processing Unit
EAI	Erosion Aggressiveness Index
MDER	Mean Depth of Erosive Rate
NACA	National Advisory Committee for Aeronautics
PVDF	Polyfluorure de Vinylidène
RANS	Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations
RMS	Root Mean Square
RNG	Re-Normalisation Group
SAS	Scale-Adaptative Simulation
SPH-ALE	Smoothed Particle Hydrodynamics - Arbitrary Lagrangian Eulerian
SST	Shear Stress Transport
URANS	Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations

Notations

Caractères grecs

α	Fraction volumique de la phase vapeur
δ	Symbole de Kronecker
ϵ	Taux de dissipation
λ	Inverse de l'aire de l'élément surfacique
μ_g	Viscosité dynamique de la phase vapeur
μ_l	Viscosité dynamique de la phase liquide
μ_m	Viscosité dynamique du mélange
μ_t	Viscosité dynamique turbulente
χ	Puissance matérielle surfacique
ψ	Puissance de cavitation
ρ	Masse volumique du fluide
ρ_g	Masse volumique du mélange
ρ_l	Masse volumique de la phase vapeur
ρ_m	Masse volumique de la phase liquide

σ	Nombre de Thoma (ou nombre de cavitation)
σ_{crit}	Nombre de Thoma critique
τ	Contrainte visqueuse
Θ	Valeur seuil de puissance volumique de cavitation
ω	Taux spécifique de dissipation
Ω	Angle solide

Caractères latins

A	Aire de l'élément surfacique
C_p	Coefficient de pression
E_{cav}	Énergie de cavitation de la structure cavitante
I_{cav}	Coefficient d'intensité d'érosion de cavitation
$\dot{m}^-$	Taux de transfert de masse entre les phases par unité de volume pour l'évaporation
$\dot{m}^+$	Taux de transfert de masse entre les phases par unité de volume pour la condensation
k	Énergie cinétique turbulente
N	Nombre de pas de temps
n_f	Nombre de points du fluide
n_t	Nombre de triangles
p	Pression
p_{sat}	Pression de saturation
Re	Nombre de Reynolds
u	Vitesse du fluide
V	Volume de l'élément de fluide
V_{vap}	Volume de la structure cavitante
Y^+	Distance au mur adimensionnelle

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Dans la société moderne, les temps sont au développement d'alternatives à l'utilisation de ressources telles que le charbon, le pétrole ou encore le nucléaire. L'exploitation d'infrastructures axées sur l'hydroélectricité entre particulièrement bien dans le cadre de cette transition énergétique. Celle-ci a d'ailleurs largement opéré au Québec, puisque d'après la branche "Énergie et Ressources naturelles" du gouvernement du Québec, en 2011, plus de 97% de la production totale d'électricité est d'origine renouvelable (principalement issue des capacités hydrauliques de la région) [5]. L'hydroélectricité prenant une part grandissante sur le marché, il convient de s'y intéresser de manière plus précise, afin de le rendre notamment plus performant. Pour ce faire, il s'agira, dans le présent travail, d'exploiter les outils de simulation, de les améliorer ou les compléter, afin de comprendre les phénomènes physiques rencontrés dans les centrales hydrauliques.

Le projet dont le présent document fait mention concerne la prédiction de l'érosion de cavitation dans les turbines.

La cavitation est rencontrée lors d'un changement de phase de l'eau causé par une chute de pression, sans changement de température. Lorsque la pression passe sous la pression de vapeur saturante, l'eau passe de l'état liquide à l'état gazeux. Ceci peut être visualisé sur le schéma de la figure 1.1.

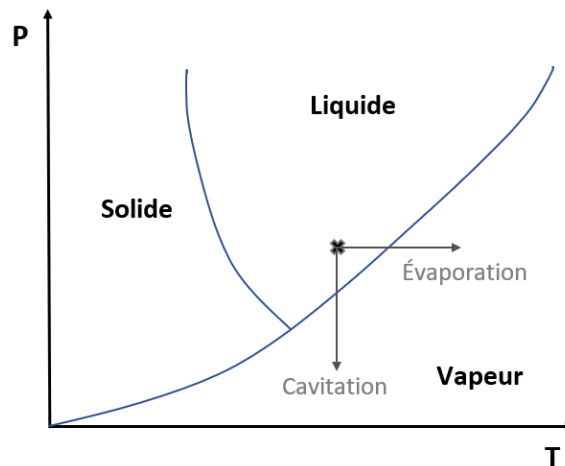


Figure 1.1 Diagramme de phases de l'eau

Ce phénomène physique est donc caractérisé par une apparition de bulles qui peut prendre plusieurs formes, dépendant des conditions hydrauliques, de la géométrie ou encore de la qualité du fluide [1, 6].

Premièrement, des bulles isolées peuvent être rencontrées (première partie de la figure 1.2). Elle se déplacent en suivant l'écoulement et éclatent lorsque le gradient de pression est trop fort. Ces bulles isolées ont un pouvoir érosif très faible.

Puis, la cavitation peut se présenter sous la forme de poches attachées (deuxième partie de la figure 1.2), généralement situées dans les zones de dépression sur un profil. Ces dernières sont constituées d'un ensemble de bulles qui se développent à la paroi du solide placé dans l'écoulement, et restent sensiblement à la même place. Elles peuvent prendre deux formes, caractéristiques de deux régimes différents. Le premier (relatif à la « sheet cavitation ») présente peu de risques pour le solide puisqu'il est formé de bulles stables et fines. Le second (« cloud cavitation ») en revanche, est très dommageable dans la mesure où il présente des instabilités et de fortes oscillations dans la longueur de la poche. Cette forme de cavitation a un très grand potentiel érosif et doit donc être anticipée lorsqu'elle concerne les machines hydrauliques.

Enfin, les régions à haute vorticité peuvent développer de la cavitation en leur centre, du fait de la présence de basses pressions. Ceci se caractérise par la formation d'un tourbillon de diamètre approximativement constant (troisième partie de la figure 1.2). Ce phénomène cause des dégâts particulièrement lorsqu'il intervient dans des régions proches des parois solides, tel que le bord de fuite d'un profil. Il se distingue également par le fait qu'il est très bruyant et implique des vibrations conséquentes.

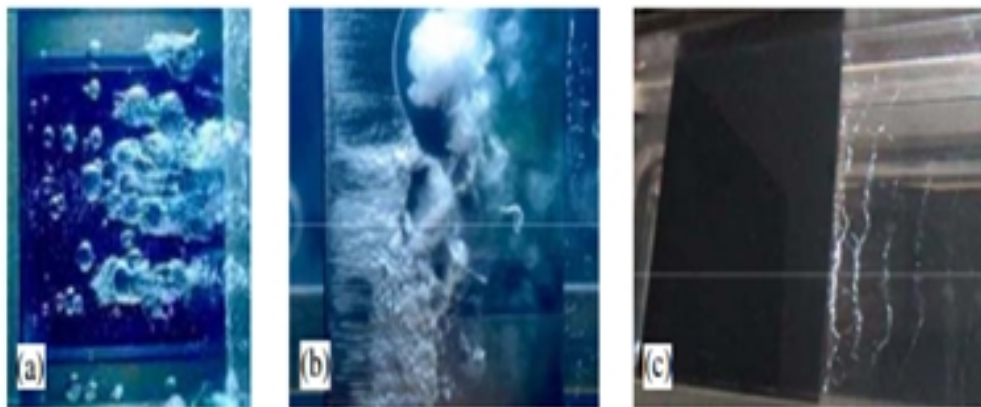


Figure 1.2 Différentes formes de cavitation autour d'un profil d'aile : (a) bulles isolées, (b) poche attachée instationnaire, (c) vortex de Von Karman, [1]

Par ailleurs, la cavitation concerne particulièrement les écoulements à grande vitesse. En effet, le théorème de Bernoulli nous enseigne qu'une augmentation de la vitesse d'un écoulement est compensée par une diminution du champ de pression associé. On notera alors que plus la vitesse augmente, plus les dégâts causés par la cavitation sont importants, et ceci pour deux raisons. Premièrement, à plus grande vitesse, la quantité de bulles formée est augmentée. Deuxièmement, une plus grande vitesse conduit à des plus grands gradients de pression à proximité d'obstacles ou de surfaces, qui facilitent l'implosion des bulles.

La cavitation est un phénomène fréquemment rencontré en aéronautique, dans l'industrie navale, ainsi que dans les turbomachines. Ce changement de phase remet en cause le bon fonctionnement des machines pour lesquelles les conditions d'opération optimales prévoient un fluide sous forme intégralement liquide. Ainsi, des vibrations sont provoquées, des pertes de performances rencontrées, et l'érosion des matériaux favorisée. La cavitation peut toucher de nombreuses parties d'une installation (voir la figure 1.3). On pourra par exemple citer la cavitation attachée au bord d'attaque des pales de la roue d'une turbine Francis exploitée avec une chute plus grande que la chute prévue par la conception, ou encore le tourbillon de cavitation (torche) se formant dans l'aspirateur à charge partielle par exemple. Ceci explique le fait que les chercheurs portent une attention particulière à ce phénomène qui intervient dans les plages de fonctionnement hors-design. En effet, mieux le comprendre pourrait permettre de grandes avancées techniques comme économiques dans la mesure où les conceptions pourraient être améliorées, les maintenances mieux gérées, les durées de vies optimisées et donc les réparations et les coûts diminués.

La cavitation n'est pas un phénomène rare ou isolé. En effet, elle est d'autant plus présente qu'elle est encouragée par les dernières avancées technologiques qui favorisent les grandes vitesses de rotation, une recherche de la diminution de l'excavation et l'élargissement des plages des conditions d'opération. L'érosion associée causant d'énormes dégâts dans de multiples domaines, de manière directe (matériel) ou indirecte (économique par exemple), il paraît indispensable d'être capable de les anticiper avec justesse.

De nombreuses méthodes existent déjà pour réduire la cavitation. On pourra notamment citer le développement de nouveaux équipements, tel que l'injection d'air. Cependant, ces stratégies, bien qu'intéressantes dans la mesure où elles permettent de diminuer les dégâts, conduisent à des pertes de rendement que l'exploitant cherche à éviter.

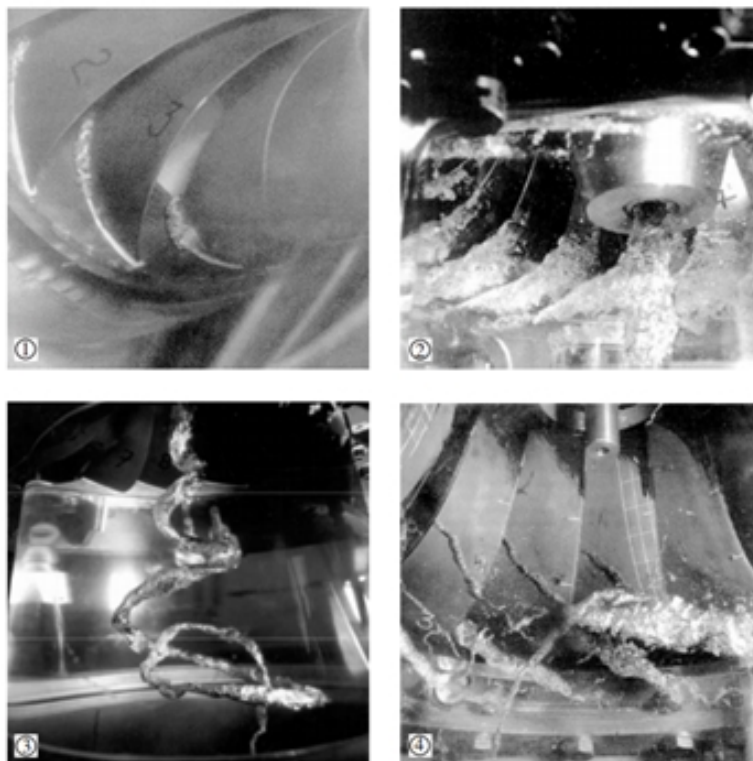


Figure 1.3 Formes de cavitation dans une turbine Francis : (1) cavitation au bord d'attaque, (2) bulles de cavitation isolées, (3) tourbillon de cavitation dans l'aspirateur, (4) vortex de cavitation inter-aube, [2]

L'idée ici est de profiter des possibilités qu'offrent les simulations numériques. D'une part, elles proposent des facilités en comparaison avec les mises en place fastidieuses et onéreuses que nécessitent les expériences. D'autant plus que la caractérisation de l'érosion de cavitation met en jeu une multitude de paramètres qu'il serait difficile de contrôler expérimentalement. D'autre part, elles sont particulièrement intéressantes lorsqu'il s'agit d'appréhender la physique des zones qui, à l'échelle d'une turbine notamment, ne peuvent pas être atteintes par une simple inspection.

La modélisation de la cavitation repose à la fois sur les équations de la dynamique des fluides et sur un modèle de cavitation caractérisant le comportement de la phase vapeur. S'intéresser à l'érosion associée nécessitera une « approche solide » additionnelle. En effet, l'érosion de cavitation a pour origine l'implosion violente et répétitive (mécanisme de fatigue) de bulles en proche paroi, due à la différence de pression entre l'intérieur de la bulle et le liquide environnant. Ainsi, en plus d'être bruyante et de causer des vibrations, la cavitation est très dommageable pour les surfaces solides de la machine puisqu'elle est accompagnée de pertes volumiques de matériau.

La plupart des auteurs s'accordent à dire que l'érosion est causée par le développement d'une onde de surpression qui suit l'implosion de la bulle, mais aussi par la formation d'un microjet [7–9], lorsque le seuil relatif aux propriétés de résistance des matériaux est franchi. Afin de bien comprendre le phénomène, nous raisonnerons à l'aide de deux situations : la compression d'une bulle isolée, ainsi que celle d'une bulle située en proche paroi [6]. Ces deux situations sont représentées sur la figure 1.4.

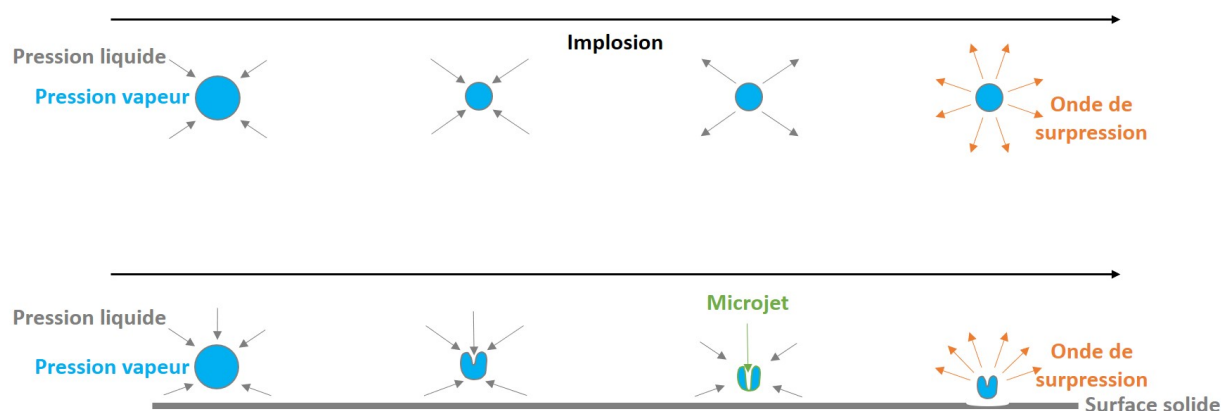


Figure 1.4 Schéma de compression d'une bulle. En haut : compression d'une bulle isolée, en bas : compression d'une bulle située en proche paroi

Dans le cas de la bulle isolée, lorsque celle-ci n'est plus capable de supporter les trop fortes pressions rencontrées, sa taille diminue, jusqu'à son implosion, qui va générer une onde de surpression qui se propagera dans le fluide environnant.

La situation géométrique de la bulle en proche paroi est particulière dans le sens où elle n'est pas symétrique. Cette asymétrie de chargement est responsable de la déformation non symétrique de la bulle lors de sa phase de compression. En effet, une différence de vitesse entre les parties haute et basse de la bulle conduit à une accélération de la partie supérieure, qui se traduit par la création d'un microjet qui traverse la bulle. Finalement, une fois l'implosion passée, une onde de surpression est émise, et cette dernière, combinée à l'effet du microjet, est source de dégâts pour le matériau.

On notera par ailleurs que certains auteurs, tels que Vogel, ont mis en évidence le fait que les bulles ont une tendance à se rapprocher de la paroi solide lorsqu'elles en sont légèrement éloignées [10].

Les creux formés sur la paroi, et leur évolution par rapport au temps en termes de nombre et de taille sont souvent décrits suivant quatre périodes [9, 11] :

- Incubation : période sans pertes de matière, mais durant laquelle des déformations et des microfissures apparaissent. Elle est difficilement mesurable mais est très intéressante puisque certaines corrélations peuvent être établies entre cette période et la durée de vie totale de la pièce solide.
- Accélération : le procédé d'érosion se met en place, le matériau connaît ses premières pertes et fractures. Le taux d'érosion augmente jusqu'à atteindre un certain niveau limite.
- Décélération : le taux d'érosion diminue, du fait de la nouvelle forme de la paroi solide (la forme a changé à cause de l'érosion) et des potentielles interactions entre les ondes de surpression et le gaz ou liquide enfermé dans les creux.
- Stationnaire : équilibre entre le taux d'érosion et la réaction du matériau. Le taux d'érosion conserve une valeur constante, qui est souvent recherchée par les industriels.

Cependant, l'étude de l'érosion de cavitation est rendue difficile par de nombreux aspects. Premièrement, il s'agit d'un problème complexe puisqu'il consiste à s'intéresser à la dynamique de fluides couplée à la réaction de la surface solide touchée par le problème. De plus, différentes phases de l'eau sont concernées, les interfaces propres aux fluides diphasiques et leurs discontinuités interviennent donc dans le problème. Par ailleurs, elle concerne des phénomènes fluides à différentes échelles (spatiales comme temporelles). Or, les simulations URANS prennent en compte des phénomènes « filtrés », basés sur des moyennes, le reste est seulement modélisé. Il y a donc un écart entre l'échelle de simulation et l'échelle de précision nécessaire à la détermination des dommages causés par la cavitation.

L'une des principales difficultés résidera alors dans l'approche qui sera faite des plus petites échelles du problème, indispensables à l'obtention d'une prédiction précise de l'érosion de cavitation.

1.1 Objectif du travail

Pour le présent travail, il s'agira de mettre en place une méthode numérique de prédiction de l'intensité de l'érosion de cavitation dans les turbines. Ceci permettra de déterminer quelles sont les zones les plus susceptibles d'être touchées par le phénomène. En effet, en quantifiant l'intensité de l'érosion, les zones à risques pourront être mises en évidence et visualisées à l'aide d'outils judicieusement choisis tels que des cartes d'intensité. Cette estimation numérique pourra alors permettre d'établir une stratégie pertinente d'anticipation des dégâts. Puis, comme précisé plus haut dans le document, la prédiction de l'érosion et les mesures qui en découleront conduiront à de grandes avancées sur les plans techniques ou encore économiques, d'où l'intérêt porté à cette démarche prometteuse.

Pour ce faire, à la lumière de ce que la revue de littérature a pu révéler, l'idée d'adopter une méthode reposant sur deux échelles a été retenue. Une première échelle, macroscopique, devra permettre de déterminer l'écoulement cavitant et donc la population de bulles. Une seconde échelle, microscopique, centrée sur la poche cavitante, sera destinée à comprendre sa dynamique et donc son implosion. Enfin, un post-traitement de ces derniers résultats nous aidera à déterminer les puissances dommageables mises en jeu, qui nous serviront à caractériser l'intensité de cavitation. Cette démarche peut être résumée dans la figure 1.5.

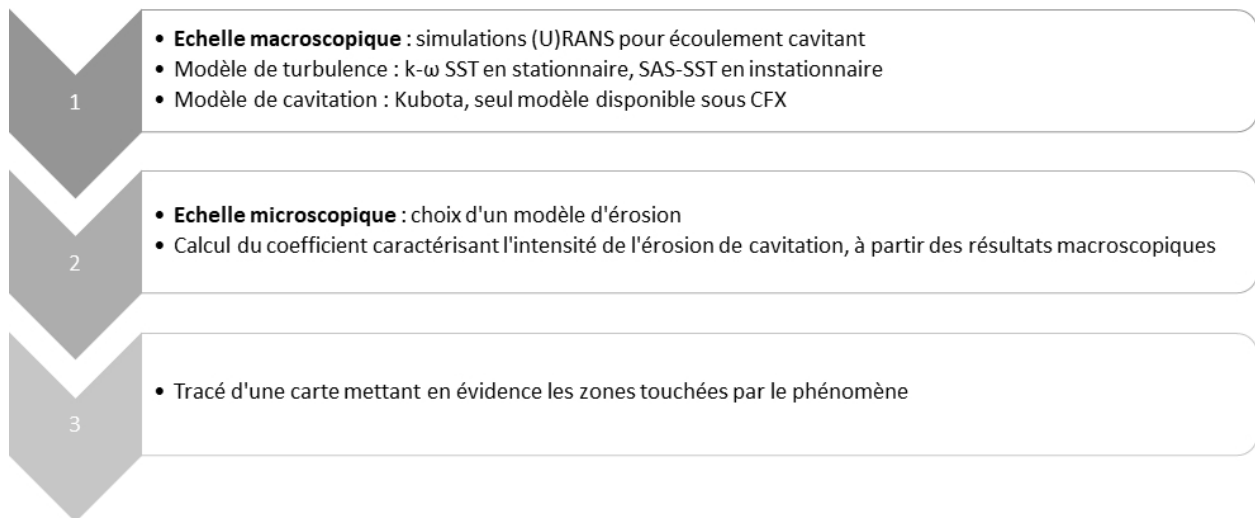


Figure 1.5 Présentation de la méthode de travail

1.2 Structure du mémoire

Le document présenté ici suivra linéairement les étapes qui ont été adoptées au cours du travail.

Dans un premier temps il conviendra d'établir l'état de l'art relatif au domaine étudié afin de déterminer la direction à emprunter. Ensuite, il s'agira d'étudier l'échelle macroscopique du problème, faisant référence à l'écoulement cavitant. Celle-ci est indispensable à la mise en place des calculs suivants, afférents à la partie consacrée à l'échelle des bulles, dite microscopique. Puis, les résultats ainsi déterminés concernant la quantification de l'érosion de cavitation seront visualisés. Enfin, les limites de la démarche présentée seront discutées et de potentielles améliorations proposées.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

Le présent chapitre contient un état de l'art centré sur les points suivants : le modèle de turbulence, le modèle de cavitation, ainsi que la prédiction de l'érosion de cavitation. Il s'agit dans cette partie de se renseigner sur les différentes approches qui ont déjà été envisagées par les auteurs actifs dans le domaine, afin de déterminer suivant quelle direction il sera plus judicieux de travailler.

2.1 Mise en équation

Nous ferons, pour la présente étude, les hypothèses suivantes. Premièrement, le travail concernera les écoulements à hauts nombres de Reynolds Re . Par ailleurs, il s'agira, pour le calcul, de prendre en compte la compressibilité du fluide étant donné que sa masse volumique n'est pas constante mais dépend de la composition du mélange en termes de phases en jeu.

Avant même de chercher à prédire la formation et l'intensité de la cavitation, il s'agit d'en étudier ses caractéristiques.

Premièrement, il est à noter que la cavitation est caractérisée par un coefficient, appelé nombre de cavitation, ou coefficient de Thoma, noté σ , qui exprime le potentiel qu'aura un écoulement à caviter.

On a :

$$\sigma = \frac{p - p_{sat}}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u^2} \quad (2.1)$$

Avec p la pression locale à l'endroit où le nombre de Thoma est évalué, p_{sat} la pression de saturation, ρ la masse volumique du fluide et u sa vitesse. Le nombre de Thoma varie donc dans le domaine, et est généralement évalué à l'entrée ou à la sortie d'une composante.

Plus la valeur de σ est petite, plus la cavitation est susceptible de se produire. On peut notamment définir un nombre de cavitation critique σ_{crit} en-dessous duquel la cavitation apparaît, et donc au-delà duquel la machine peut fonctionner dans des conditions normales.

On choisira ici une approche eulérienne-eulérienne pour laquelle les deux phases sont considérées comme continues et peuvent se pénétrer, formant alors une nouvelle phase continue. On utilise pour cela la notion de fraction volumique, qui est définie pour chacune des deux phases. Les fractions volumiques sont des fonctions continues en espace et en temps, et, étant donné qu'une phase ne peut pas occuper le volume d'une autre, leur somme vaut 1 en tout point. Cette approche vient s'opposer aux considérations faites avec l'approche eulérienne-lagrangienne pour laquelle les bulles de la phase dispersée sont suivies à travers l'écoulement obtenu pour la phase liquide, et pour laquelle la fraction volumique de la phase vapeur est négligée, ce qui n'est pas adapté à l'étude des écoulements cavitants.

Pour un fluide newtonien sans force volumique et sans transfert de chaleur, les équations de conservation pour le mélange sont comme suit.

Équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_m \cdot u_j) = 0 \quad (2.2)$$

Où u est la vitesse de l'écoulement et ρ_m est la masse volumique du mélange, définie par :

$$\rho_m = \alpha \cdot \rho_g + (1 - \alpha) \cdot \rho_l \quad (2.3)$$

Dans la suite du document, les indices g et l font respectivement référence aux phases gazeuse et liquide de l'eau. Ainsi, ρ_g et ρ_l sont respectivement les masses volumiques des phases vapeur et liquide. Et α est le taux de vide (fraction volumique de la phase vapeur).

Équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m \cdot u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho_m \cdot u_i \cdot u_j + p \cdot \delta_{ij} - \tau_{ji} \right] = 0 \quad (2.4)$$

Où p est la pression, δ le symbole de Kronecker et τ est la contrainte visqueuse définie par :

$$\tau_{ij} = 2 \cdot \mu \cdot S_{ij}^* \quad (2.5)$$

Avec

$$\mu = \mu_m + \mu_t \quad (2.6)$$

Où μ_t est la viscosité turbulente dont il sera question à la section suivante et μ_m la viscosité du mélange, définie par :

$$\mu_m = \alpha \cdot \mu_g + (1 - \alpha) \cdot \mu_l \quad (2.7)$$

Le tenseur des contraintes est tel que :

$$S_{ij}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (2.8)$$

Équation de transfert de masse entre les phases :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_l \cdot (1 - \alpha)) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_l \cdot (1 - \alpha) \cdot u_j) = \dot{m}^- - \dot{m}^+ \quad (2.9)$$

Où $\dot{m}^-$ et $\dot{m}^+$ sont les taux de transfert de masse entre les phases par unité de volume, pour l'évaporation et la condensation respectivement.

2.2 Modèle de turbulence

Le choix du modèle de turbulence le plus adapté possible au problème est indispensable à l'obtention de résultats de simulations pertinents. Les auteurs, dont les travaux seront développés plus tard dans ce chapitre, ont opté pour des modèles à deux équations de type k- ε , k- ε RNG, k- ω ou k- ω SST. Tous ces modèles sont disponibles sous CFX. On notera cependant que le modèle k- ω SST est très utilisé, dans la mesure où il combine la précision du modèle k- ε loin de la paroi, ainsi que celle du modèle k- ω en proche paroi. De plus, la correction du modèle de turbulence proposée par Reboud est souvent exploitée puisque la modification de la viscosité turbulente qu'il présente permet de mieux prendre en compte les effets à l'interface causés par la présence de deux phases différentes [12].

Pour notre travail, les modèles de turbulence k- ω SST et SAS-SST seront utilisés pour des régimes respectivement stationnaires et instationnaires. Ce choix est en accord avec les choix de modèles de turbulence généralement observés dans la littérature relative à ces dernières années.

On détaillera ici les équations relatives au modèle k- ω SST utilisées par CFX [13]. Le modèle utilisé ("Baseline k-Omega Model", ou BSL) repose sur le modèle k- ω de Wilcox, ainsi que sur un modèle k- ε transformé.

Les équations du modèle de Wilcox sont les suivantes. La première équation porte sur l'énergie cinétique turbulente k , la seconde sur la fréquence de la turbulence ω .

$$\frac{\partial(\rho \cdot k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \cdot u_j \cdot k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{k1}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \beta' \cdot \rho \cdot k \cdot \omega \quad (2.10)$$

Et

$$\frac{\partial(\rho \cdot \omega)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \cdot u_j \cdot \omega) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\omega 1}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \alpha_1 \cdot \frac{\omega}{k} \cdot P_k - \beta_1 \cdot \rho \cdot \omega^2 \quad (2.11)$$

Où ρ est la masse volumique du fluide, μ sa viscosité, u le vecteur vitesse, P_k le taux de production de la turbulence.

μ_t , la viscosité turbulente, est définie par :

$$\mu_t = \rho \cdot \frac{k}{\omega} \quad (2.12)$$

Le tenseur de contrainte de Reynolds, $\rho \cdot \overline{u_i u_j}$ est défini par :

$$-\rho \cdot \overline{u_i u_j} = \mu_t \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \cdot \delta_{ij} \cdot \left(\rho \cdot k + \mu_t \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (2.13)$$

Où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Les équations du modèle k- ε transformé sont les suivantes :

$$\frac{\partial(\rho \cdot k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \cdot u_j \cdot k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{k2}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \beta' \cdot \rho \cdot k \cdot \omega \quad (2.14)$$

Et

$$\frac{\partial(\rho \cdot \omega)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \cdot u_j \cdot \omega) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\omega 2}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2 \cdot \rho \cdot \frac{1}{\sigma_{\omega 2} \cdot \omega} \cdot \frac{\partial k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \alpha_2 \frac{\omega}{k} \cdot P_k - \beta_2 \cdot \rho \cdot \omega^2 \quad (2.15)$$

Enfin, pour parvenir aux équations du modèle BSL, les équations (2.10) et (2.11) sont multipliées par une fonction F_1 , et les équations (2.14) et (2.15) par $1-F_1$. On a alors :

$$\frac{\partial(\rho \cdot k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \cdot u_j \cdot k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{k3}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \beta' \cdot \rho \cdot k \cdot \omega + P_{kb} \quad (2.16)$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \cdot \omega)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \cdot u_j \cdot \omega) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\omega 3}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + (1 - F_1) \cdot 2 \cdot \rho \cdot \frac{1}{\sigma_{\omega 2} \cdot \omega} \cdot \frac{\partial k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \\ &\quad \alpha_3 \frac{\omega}{k} \cdot P_k - \beta_3 \cdot \rho \cdot \omega^2 + P_{\omega b} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Les coefficients du nouveau modèle $(\beta_3, \alpha_3, \sigma_{k3}, \sigma_{\omega 3})$ sont construits à partir de combinaisons linéaires des coefficients des premiers modèles :

$$\Phi_3 = F_1 \cdot \Phi_1 + (1 - F_1) \cdot \Phi_2 \quad (2.18)$$

Et

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta' = 0.09 \\ \alpha_1 = 5/9 \\ \beta_1 = 0.075 \\ \sigma_{k1} = 2 \\ \sigma_{\omega 1} = 2 \\ \alpha_2 = 0.44 \\ \beta_2 = 0.0828 \\ \sigma_{k2} = 1 \\ \sigma_{\omega 2} = 1/0.856 \end{array} \right.$$

Par ailleurs, on a, pour les termes de production :

$$P_k = \mu_t \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \cdot \left(3 \cdot \mu_t \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \rho \cdot k \right) \quad (2.19)$$

$$P_{kb} = -\frac{\mu_t}{\rho \cdot \sigma_\rho} \cdot g_i \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \quad (2.20)$$

Où σ_ρ vaut 0.9 avec l'approximation de Boussinesq et 1 sinon. g_i fait référence à l'accélération de la pesanteur.

$$P_{\omega b} = \frac{\omega}{k} \left((\alpha + 1) \cdot C_3 \cdot \max(P_{kb}, 0) - P_{kb} \right) \quad (2.21)$$

Où $C_3 = 1$ par défaut

Enfin,

$$\nu_t = \frac{a_1 \cdot k}{\max(a_1 \cdot \omega, S \cdot F_2)} = \frac{\mu_t}{\rho} \quad (2.22)$$

$$P_\omega = \left(\frac{\alpha_3}{\nu_t}\right) P_k \quad (2.23)$$

Et

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4) \quad (2.24)$$

$$\arg_1 = \min\left(\max\left(\frac{\sqrt{k}}{\beta' \cdot \omega \cdot y}, \frac{500 \cdot \nu}{y^2 \cdot \omega}\right), \frac{4 \cdot \rho \cdot k}{CD_{kw} \cdot \sigma_{\omega 2} \cdot y^2}\right) \quad (2.25)$$

$$CD_{kw} = \max\left(2 \cdot \rho \frac{1}{\sigma_{\omega 2} \cdot \omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 1.0 \cdot 10^{-10}\right) \quad (2.26)$$

$$F_2 = \tanh(\arg_2^4) \quad (2.27)$$

$$\arg_2 = \max\left(\frac{2 \cdot \sqrt{k}}{\beta' \cdot \omega \cdot y}, \frac{500 \cdot \nu}{y^2 \cdot \omega}\right) \quad (2.28)$$

$$S = \sqrt{2 \cdot S_{ij} \cdot S_{ij}} \quad (2.29)$$

Où

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.30)$$

Le modèle SAS-SST est basé sur les mêmes équations, il s'agira seulement d'ajouter un terme source Q_{SAS} à l'équation portant sur ω [14]. On notera que des notations similaires à celles précédemment introduites sont utilisées.

On a alors :

$$\frac{\partial(\rho \cdot k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \cdot u_j \cdot k \right) = P_k - \rho \cdot c_\mu \cdot k \cdot \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \cdot \omega)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \cdot u_j \cdot \omega) = \alpha \cdot \frac{\omega}{k} \cdot P_k - \rho \cdot \beta \cdot \omega^2 + Q_{SAS} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \\ + (1 - F_1) \cdot 2 \cdot \rho \cdot \frac{1}{\sigma_{\omega 2} \cdot \omega} \cdot \frac{\partial k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Où

$$Q_{SAS} = \max \left[\rho \cdot \zeta_2 \cdot \kappa \cdot S^2 \left(\frac{L}{L_{\nu K}} \right)^2 - C \cdot \frac{2 \cdot \rho \cdot k}{\sigma_{Phi}} \max \left(\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right), 0 \right] \quad (2.33)$$

Et

$$\begin{cases} \zeta_2 = 3.51 \\ \sigma_\Phi = 2/3 \\ C = 2 \end{cases}$$

L'échelle de longueur du modèle de turbulence est :

$$L = \frac{\sqrt{k}}{c_\mu^{1/4} \cdot \omega} \quad (2.34)$$

Et l'échelle de longueur de von Karman est donnée par :

$$L_{\nu K} = \frac{\kappa \cdot S}{|u''|} \quad (2.35)$$

Où

$$S = \sqrt{2 \cdot S_{ij} \cdot S_{ij}} \quad (2.36)$$

Avec

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (2.37)$$

Et

$$|u''| = \sqrt{\sum_{(i)} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right)^2} \quad (2.38)$$

2.3 Modèle de cavitation

Il existe de nombreux modèles analytiques, implémentables numériquement, permettant de décrire le phénomène de cavitation. Leurs différences résident généralement dans la manière dont la condensation et l'évaporation sont considérées dans les équations. Ils ont été répertoriés et classés dans le travail de Edom [15]. Ils ont néanmoins en commun l'équation de Rayleigh-Plesset, qui est à la base des modèles puisqu'elle décrit le développement d'une bulle de vapeur dans son liquide environnant.

L'équation de caractérisation de l'évolution de la croissance d'une bulle de gaz dans un liquide est la suivante :

$$R_B \frac{d^2 R_B}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR_B}{dt} \right)^2 + \frac{2 \cdot T_\sigma}{\rho_l \cdot R_B} = \frac{p_v - p}{\rho_l} \quad (2.39)$$

Où R_B est le rayon de la bulle, p_v la pression dans la bulle (pression de vaporisation), p la pression du liquide entourant la bulle, ρ_l la masse volumique du liquide et T_σ le coefficient de tension de surface entre les phases liquide et gazeuse.

En négligeant les termes de second ordre et la tension de surface, il reste :

$$\frac{dR_B}{dt} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_v - p}{\rho_l}} \quad (2.40)$$

Dans notre cas, le choix du modèle de cavitation est contraint par le fait que sous CFX, un unique modèle est disponible. Il s'agit du modèle de Rayleigh-Plesset simplifié, parfois nommé modèle de Kubota. Ce dernier repose sur l'hypothèse selon laquelle toutes les bulles ont la même taille et que le transfert de masse total peut être caractérisé par le nombre de bulles et le taux de changement de masse d'une bulle. Tran a montré, en comparant ce dernier modèle au modèle Merkle, que le modèle exploité par CFX est performant lorsqu'il est employé dans des conditions stationnaires et suffisamment satisfaisant en conditions instationnaires, bien que moins précis (Tran, 2015). Il repose, sous CFX, sur les équations suivantes [16].

Dans ce modèle, le taux de variation du volume de la bulle et le taux de variation de sa masse s'expriment comme :

$$\frac{dV_B}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_B^3 \right) = 4 \cdot \pi \cdot R_B^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_v - p}{\rho_l}} \quad (2.41)$$

Et

$$\frac{dm_B}{dt} = \rho_g \cdot \frac{dV_B}{dt} = 4 \cdot \pi \cdot R_B^2 \cdot \rho_g \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_v - p}{\rho_l}} \quad (2.42)$$

Où ρ_g est la masse volumique de la phase gazeuse.

De plus, en considérant une population de N_B bulles par unité de volume, la fraction volumique de vapeur est :

$$r_g = V_B \cdot N_B = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_B^3 \cdot N_B \quad (2.43)$$

Enfin, le transfert de masse par unité de volume à l'interface est défini, dans le cas général (ajustable pour la condensation ou la vaporisation), par :

$$\dot{m}_{fg} = F \cdot \frac{3 \cdot r_g \cdot \rho_g}{R_B} \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \frac{|p_v - p|}{\rho_l}} \cdot \text{sgn}(p_v - p) \quad (2.44)$$

Où

$$\begin{cases} R_{nuc} = 1\mu m, \text{ rayon des sites de nucléation} \\ r_{nuc} = 5 \cdot 10^{-4}, \text{ fraction volumique des sites de nucléation} \\ F_{vap} = 50, \text{ facteur empirique} \\ F_{cond} = 0.01, \text{ facteur empirique} \end{cases}$$

D'autres modèles permettant d'appréhender numériquement la cavitation auraient été envisageables mais il s'agit ici seulement d'utiliser un modèle vérifié dans des travaux précédents et non pas d'améliorer la modélisation de la cavitation comme telle. En effet, l'objectif est plutôt d'utiliser des résultats de simulation d'écoulement cavitant en vue d'évaluer les dommages qui pourraient être engendrés par la présence de cavitation.

2.4 Prédiction de l'érosion de cavitation

L'érosion de cavitation, qui peut occasionner des pertes typiques de $5kg/m^2/10000h$ rien que pour la roue d'une turbine [17], est un fléau pour les industriels. Il s'agit alors de mieux pouvoir l'appréhender, en quantifiant son intensité par exemple, afin de mieux pouvoir la gérer. Pour ce faire, de nombreux modèles ont été développés.

D'abord, nous pourrions citer les méthodes qui reposent sur l'expérimentation, qui permettent une première approche du problème.

2.4.1 Méthodes expérimentales

H. Soyama et al. proposent une méthode expérimentale de quantification de l'érosion de cavitation. Pour ceci, ils mettent en évidence l'existence, pour chaque matériau, d'un « niveau seuil », dépendant de la résistance du matériau en question, au-delà duquel la cavitation cause effectivement des dégâts sur la surface solide. Leur travail consiste à mesurer l'intensité de cavitation à l'aide d'un transducteur en polyfluorure de vinylidène (PVDF) ainsi que l'érosion rencontrée, pour différentes conditions de cavitation. Ils montrent que si le « niveau seuil » est correctement choisi, une relation linéaire peut être établie entre l'énergie d'impact et le taux maximal d'érosion du matériau. Cette dépendance permettra alors de déterminer le taux d'érosion, pour un matériau donné, connaissant l'énergie d'impact mesurée [18]. Cette relation avait déjà été mise en lumière par les travaux d'Okada [19].

J.-P. Franc et al., pour prédire l'érosion de cavitation, proposent de mesurer les chargements imposés à la paroi solide. Pour ce faire, ils utilisent un capteur piézoélectrique suffisamment performant pour détecter les chargements ponctuels (sur une petite surface, durant une courte durée). Il est à noter que ce capteur a été étalonné de manière à ne pas prendre en compte les chargements trop faibles pour endommager le matériau. Les expériences sont conduites pour différentes conditions d'opération : la vitesse de l'écoulement varie. Ceci permet de mettre en évidence le fait que les pics sont plus nombreux et d'une plus grande amplitude lorsque la vitesse augmente. Cette technique de mesure du taux de pics ($\text{pics}/\text{cm}^2/\text{s}$) est mise en parallèle avec la technique plus commune d'observation des creux de la surface. Bien qu'il n'y ait pas d'équivalence entre le chargement observé et le diamètre mesuré, les taux sont comparables en termes d'amplitude et suivent donc une même tendance : ils augmentent avec la vitesse de l'écoulement, à des vitesses différentes [20].

A partir de mesures de chargements imposés à une paroi solide (disque) par l'implosion des bulles, S. Hattori et al. proposent une méthode de prédiction de la durée de la période d'incubation (période durant laquelle le collapse des bulles ne conduit pas encore à la création de dommages) basée sur des mesures d'érosion et de chargements pour différentes conditions de cavitation [21].

H. Kato et al. s'intéressent à quantifier la cavitation pour un écoulement aéré, autour d'un profil d'aile. C'est ainsi, qu'ils ont proposé une méthode de prédiction de l'agressivité (répartition des chargements) de la cavitation basée sur la mesure de la distribution des bulles d'air en aval de la zone d'implosion. Néanmoins, malgré la bonne correspondance avec les résultats de mesures de forces, la démarche ne peut être pleinement effectuée, tant elle dépend de nombreux paramètres dont l'influence n'est pas vérifiée [22].

Enfin, A. Presas et al. proposent une technique expérimentale visant à détecter lorsque la cavitation a un caractère érosif. Elle consiste en l'interprétation d'un signal obtenu après le traitement de mesures vibro-acoustiques à hautes fréquences [23].

Bien que très utiles pour comprendre le phénomène, les paramètres mis en jeu, ainsi que pour le dégagement de tendances, les approches intégralement expérimentales ne permettent pas une quantification complète de l'intensité de cavitation. En effet, ces méthodes nécessitent de nombreux moyens (matériels et autres), qui rendent les opérations non répétables et souvent limitées à de petites échelles. En revanche, les expérimentations peuvent servir d'outils permettant de développer des modèles plus universels, ou de références utiles à leur validation.

De nombreux auteurs ont mis au point des modèles analytiques visant à chiffrer l'intensité de l'érosion de cavitation, principalement appliqués à des profils d'aile.

2.4.2 Méthodes analytiques

M. Dular et al. ont développé un modèle d'érosion basé sur des observations faites sur un profil d'aile soumis à un écoulement cavitant. En effet, à partir de visualisations en niveaux de gris de nuages de cavitation, un processus itératif a conduit à l'écriture des équations régissant le problème et permettant une bonne prédiction des dégâts occasionnés. Ce modèle a également fait ses preuves pour l'étude de l'érosion de cavitation rencontrée dans un modèle de pompe étudié. Sa principale limite réside dans le fait qu'il nécessite des données expérimentales illustrant les structures cavitantes, telles que des images qui seront ensuite traitées en vue de l'obtention des résultats recherchés [24].

F. Pereira propose de prédire l'érosion de cavitation en s'intéressant au spectre d'énergie des cavités érosives. Cette approche a l'avantage de prendre en compte les aspects solides et fluides. L'auteur a procédé à la mise en place de tout un processus de techniques expérimentales pour les mesures de poche de cavitation (sur profil NACA 009), de pression (sur NACA 65012), de taux de production des cavités de vapeur, ... Puis, à partir de ces résultats, a développé un schéma analytique de calcul de la puissance érosive (transposable d'un écoulement à un autre) et du lieu de l'implosion des structures. Pour pouvoir reproduire sa démarche, il faudra alors pouvoir déterminer les paramètres nécessaires, auxquels Pereira a accédé expérimentalement [25].

C. Pătrășcoiu a opté pour le développement de plusieurs modèles d'érosion analytiques différents pour le calcul de pertes volumiques par exemple. Si le juste modèle est choisi pour décrire un problème, une assez bonne corrélation est obtenue entre la prédiction de pertes

volumiques et les pertes effectivement constatées expérimentalement. Il convient alors d'avoir des données expérimentales relatives au cas étudié qui permettront de faire le bon choix de modèle, sans quoi l'approche ne fonctionnera pas [26].

Par ailleurs, M. Szkodo propose une approche mathématique de prédiction de l'érosion de cavitation pour laquelle il ne s'agit pas de repérer les zones potentiellement atteintes mais plutôt de chiffrer les grandeurs comme le temps d'incubation, les volumes de pertes ou encore la durabilité moyenne. Pour ce faire, il modélise les probabilités de dommages par une loi de Weibull pour laquelle les paramètres sont judicieusement choisis en fonction des caractéristiques des matériaux concernés [27]. Dans cette même idée, Giren a mis en place un modèle mathématique probabiliste de prédiction de l'érosion (qui est ensuite implémenté et calibré à l'aide de l'expérience). Il est basé notamment sur le chargement imposé à la paroi solide, mais également sur les propriétés du matériau considéré [28].

Chatenet a également mis au point un modèle mathématique, stochastique, pour chiffrer les dégradations du matériau considéré. L'avantage du processus stochastique résidant dans le fait qu'il prend en compte les dégradations précédentes, et aborde donc l'aspect cumulatif du phénomène physique qu'est la cavitation [29].

Enfin, Taillon a développé un modèle statistique destiné à la détermination de la distribution des impacts, d'un point de vue de leur amplitude ainsi que de leur durée. Celui-ci repose sur des mesures de pression [30].

Ces méthodes, bien que prometteuses, sont limitées par les vérifications qu'elles nécessitent ainsi que par le fait qu'elles soient difficilement applicables aux géométries complexes, ce qui est contraignant pour l'étude des machines hydrauliques. Par ailleurs, elles reposent uniquement sur des modèles mathématiques développés à partir de résultats d'expériences auxquels l'accès n'est pas toujours garanti. Ils sont donc, par constitution, difficilement généralisables et ne sont pas directement reliés à la théorie physique décrivant le problème.

Afin de faire face à ces difficultés, des méthodes numériques sont de plus en plus utilisées et développées, ceci afin de bénéficier des facilités qu'elles apportent, tant au niveau de l'exécution qu'au niveau de l'interprétation des résultats. Elles permettent notamment d'éviter d'avoir systématiquement recours aux expériences, comme exigé dans la plupart des modèles présentés précédemment.

2.4.3 Méthodes numériques centrées sur le fluide

Une stratégie fréquemment employée consiste à travailler avec deux échelles : l'échelle macroscopique visant à simuler l'écoulement cavitant, ainsi que l'échelle microscopique centrée sur la caractérisation des bulles et de leurs potentielles implosions. Cette dernière échelle est associée à des modèles d'érosion qui permettent la caractérisation de l'intensité de l'érosion de cavitation. Ils seront classés en trois catégories : les modèles centrés sur l'onde émise à la suite de l'implosion d'une bulle, les modèles centrés sur l'onde émise à la suite de l'implosion d'une population de bulles, ainsi que les modèles centrés sur les microjets formés lors de l'implosion des bulles.

Modèles centrés sur l'onde émise à la suite de l'implosion d'une bulle

R. Fortes-Patella propose un modèle d'étude de l'énergie des ondes de surpression émises par l'implosion de bulles sphériques, cette énergie étant directement (linéairement) reliée à l'érosion de cavitation subie par la surface solide. L'implosion des bulles est approchée par des considérations similaires à celles de Keller [31] alors que les dommages sont simulés à partir d'un schéma basé sur une approche lagrangienne. Il s'agit donc de modéliser l'échelle microscopique [32], jusqu'à la caractérisation des dégâts solides. L'énergie de l'onde de surpression est estimée grâce à une approche acoustique :

$$E_{wave} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^2}{\rho \cdot C_\infty} \int p^2 dt \simeq \frac{4 \cdot \zeta \cdot \pi \cdot P_{max}^2 \cdot r^2}{\rho \cdot C_\infty} \delta t \quad (2.45)$$

Où la pression p est obtenue à partir de l'équation de Keller de la dynamique de bulle et du modèle de Fujikawa pour sa résolution (supposition de l'existence d'un potentiel de vitesse), ζ est un facteur lié à la forme de l'onde de surpression et c_∞ est la célérité du son. Puis, le lien avec les dégâts matériaux est effectué de la manière suivante :

$$E_{wave} = \beta \cdot V_{pit} \quad (2.46)$$

Où β est un facteur dépendant du matériau considéré et V_{pit} le volume des creux formés dans le matériau.

Cette idée avait déjà été développée par ce même auteur qui avait proposé une association entre un modèle numérique fluide 2D axisymétrique capable de simuler l'émission et la propagation des ondes de surpression dans l'eau, et un modèle solide permettant de déterminer les déformations subies par une surface soumise à ces ondes lors de l'implosion des bulles. Cette étude a conduit à l'écriture de lois de similitude qui relient les caractéristiques de l'impact

(telles que la pression ou la distance à la paroi) à la géométrie des creux formés par l'érosion. Ces lois ont permis le développement d'une nouvelle méthode de quantification de l'érosion de cavitation : la création d'histogrammes 3D d'agressivité, qui sont utiles pour prédire les dommages potentiels subis par un matériau pour des conditions de cavitation données [33]. Ce type d'approche nécessite un modèle solide éléments finis, utilisé en parallèle des simulations fluides.

N. Ochiai et al. travaillent à prédire l'érosion de cavitation sur un profil Clark Y 11.7% 2D en étudiant la pression d'impact causée par l'implosion des bulles pour plusieurs cas de cavitation. Leur démarche s'appuie sur deux échelles. D'une part, la simulation de l'écoulement cavitant repose sur la résolution (à l'aide de la méthode des volumes finis), des équations de Navier-Stokes pour deux phases (gaz et liquide) grâce à un modèle homogène développé par Okuda et al. [34] et Iga et al. [35]. D'autre part, l'implosion d'une bulle est caractérisée par une mise en équation de Keller et al. [31] et Yasui [36], pour laquelle l'existence d'un potentiel de vitesse est supposée, pour la détermination du champ de pression. Puis, un algorithme de couplage unilatéral établit le lien entre les deux échelles. Enfin, grâce à la méthode développée par Soyama [18], des résultats concernant l'énergie acoustique d'impact totale à l'origine de l'érosion de cavitation sont obtenus et comparés à des résultats expérimentaux [37]. Elle est calculée comme une somme de toutes les énergies d'impact rencontrées :

$$E = \sum E_i \propto \sum \int P_w^2 dA \quad (2.47)$$

Où P_w est la pression d'impact.

Ces mêmes auteurs ont également exploité le couplage unidirectionnel des deux échelles pour la caractérisation du taux d'érosion pour un profil NACA0015 soumis à un écoulement instationnaire. Ils estiment l'érosion de cavitation à partir d'une relation entre les pressions exercées et la réponse du matériau. Un travail doit donc être fait à l'échelle précise de la bulle, ce qui implique une mise en équation particulière nécessaire à l'obtention de certains paramètres (comme le rayon de bulle) essentiels au modèle [38].

Cette même démarche a été suivie par L. Krümenacker, qui évoque la nécessité d'étudier le phénomène de cette manière. Pour lui, une première échelle, l'échelle des simulations RANS (macroscopique) doit permettre la détermination de l'écoulement cavitant et de la distribution des bulles. Une seconde, microscopique, à des échelles spatiales et temporelles plus petites, doit simuler le comportement d'une bulle en particulier. Enfin, il s'agira pour l'auteur de déterminer le chargement imposé par l'implosion des bulles sur la surface solide (via un calcul de puissance acoustique), pour caractériser l'intensité de l'érosion de cavitation [39]. L'énergie acoustique émise par une bulle est calculée, en utilisant les grandeurs déterminées

à partir de l'équation de Keller, comme :

$$E_{ac} = \int_0^\infty \left(\int_S (p_M^l - p_\infty) u_M^l \cdot n_S dS \right) \quad (2.48)$$

Où les indices "M" font référence au mélange fluide.

Puis, la puissance acoustique d'une cellule est définie comme :

$$P_{ac}(cell) = \dot{N}_B^{imp} \cdot E_{ac} \quad (2.49)$$

Où $\dot{N}_B^{imp}$ est le nombre de bulles quittant une cellule par seconde et correspond au nombre de bulles subissant une variation de pression. Enfin, l'intensité de cavitation s'exprime comme :

$$\dot{W}_{CI}(S_w) = \sum_{cell} \frac{P_{ac}(cell)}{S_w} \quad (2.50)$$

Où S_w est la surface solide atteinte par la portion d'énergie acoustique considérée. Cette méthode est donc centrée sur une bulle, puis généralisée, et ne prend pas bien en compte l'influence des autres bulles sur la propagation de l'énergie [40].

G. Bergeles a développé un nouveau coefficient (Erosion Aggressiveness Index, EAI) pour la caractérisation de l'agressivité de l'érosion de cavitation. Il permet de caractériser de manière plus précise les dégâts causés à la surface solide en prenant en compte les paramètres relatifs au matériau. Il repose sur les pressions imposées à la paroi solide (et sur un calcul de puissance acoustique), ainsi que sur les caractéristiques du matériau concerné. Le chargement moyen imposé à la paroi solide est :

$$P_w = 0.4 \cdot \sqrt{\rho_l \cdot \Delta P} \cdot R_{max}^2 \cdot L_v^2 \cdot \left(\frac{R_{max}}{R} \right)^2 \cdot \left[-n_0 \cdot \frac{D\alpha}{Dt} \right] \quad (2.51)$$

Où ρ_l est la densité de la phase liquide, ΔP la différence de pression entre les deux phases, R_{max} le rayon maximal de la bulle, L_v la région d'influence de l'implosion de la bulle, R le rayon local de la bulle, n_0 le nombre de bulles par unité de volume et α la fraction volumique de vapeur. La grandeur surmontée d'une barre est moyennée dans le temps.

Le coefficient d'intensité est défini comme :

$$EAI = \frac{P_w}{\sigma_y} \cdot \log \left(\frac{L}{t_b} \right) \quad (2.52)$$

Où σ_y est la limite élastique du matériau, L l'échelle caractéristique de l'écoulement, U la

vitesse caractéristique de l'écoulement et t_b le temps d'implosion d'une bulle, calculé par :

$$t_b = 0.92 \cdot \frac{R_{max}}{\sqrt{\frac{\Delta P}{\rho_l}}} \quad (2.53)$$

Le modèle se veut plus complet que d'autres coefficients, dans la mesure où il prend en compte plus de paramètres (tels que le fait que le chargement soit appliqué en fatigue). Il est néanmoins simplifié et permet donc uniquement l'obtention de résultats quantitatifs approchés [41].

Plutôt que de considérer une bulle au centre du processus, comme proposé dans les modèles précédemment présentés, certains auteurs privilégient le développement de modèles d'érosion basés sur les résultats relatifs à toute une population de bulles.

Modèles centrés sur l'onde émise à la suite de l'implosion d'une population de bulles

Z.-R. Li et al. se questionnent sur la nécessité d'effectuer des simulations complexes d'implosion de bulles à l'échelle microscopique. Une étude numérique est menée sur des profils d'aile NACA0015 et NACA0018-45. Les résultats de la dynamique des larges structures cavitantes font l'objet d'un post-traitement visant à établir un lien entre l'érosion de cavitation et les phénomènes de cavitation instationnaires (nuages de cavitation) observés à l'aide des simulations URANS. Il se trouve que l'étude des auteurs a montré que l'accumulation des dérivées de pressions locales par rapport au temps pouvait constituer une fonction représentative de l'intensité de cavitation pertinente [42]. Le coefficient est défini comme :

$$I_{Erosion} = \frac{1}{N} \cdot \sum I_i \quad (2.54)$$

Où l'indice i fait référence à chaque instant déterminé par la période de simulation et le pas de temps, et N est le nombre d'événements pour lesquels la dérivée temporelle de pression est supérieure à un certain seuil judicieusement choisi. Et :

$$I_i = \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t}; \frac{\partial p}{\partial t} \geq Seuil \\ 0; \frac{\partial p}{\partial t} < Seuil \end{cases} \quad (2.55)$$

La démarche de faire intervenir une valeur seuil est justifiée par le fait que lorsque les puissances rencontrées sont faibles, elles ne représentent pas une réelle menace pour la surface solide considérée. Le seuil a ici été choisi grâce à un étalonnage consistant à comparer les

prédictions du modèle obtenues avec différents seuils aux résultats attendus. Cette méthode donne un bon ordre d'idée des zones les plus touchées par le phénomène mais sa validation n'a pas été complétée.

M. S. Mihatsch et al. ont mis en place une méthode permettant la détermination des zones de parois solides qui seront endommagées par l'implosion des bulles de cavitation (taux et intensité de la distribution). Les auteurs ont créé un algorithme capable de déceler, uniquement à partir des résultats d'une simulation URANS (concernant la pression), les implosions dommageables et de les localiser. Cette technique a été validée sur une géométrie axisymétrique de type divergent pour laquelle des études expérimentales ont été menées. Cependant, elle ne mène pas au calcul d'un coefficient pour la quantification de l'érosion, mais uniquement au calcul de pressions qui permettent d'obtenir des résultats relatifs [43].

M. Nohmi et al. proposent une méthode de prédiction simplifiée. Elle est étudiée pour le cas d'un profil Clark Y 11.7%, sous certaines hypothèses, telles que le fait que les bulles trop éloignées de la surface solide ne sont pas nocives ou encore le fait que l'implosion des bulles est due à une grande variation de pression, une estimation de l'érosion peut être formulée. Quatre expressions sont proposées afin de quantifier l'agressivité de la cavitation mais leur pertinence n'a pas été confirmée puisqu'aucune comparaison avec l'expérience n'a été menée [44].

C. Leclercq a réalisé des simulations 2D et 3D sur un profil NACA 65012 pour la détermination d'une estimation de l'intensité de l'érosion de cavitation pour des écoulements cavitants instationnaires. Elle repose sur l'hypothèse émise par R. Fortes-Patella selon laquelle l'érosion est due aux variations d'énergie potentielle des structures cavitantes. L'énergie potentielle est définie comme :

$$E_{pot} = (p - p_{sat}) \cdot V_{vap} \quad (2.56)$$

L'idée est d'estimer un chargement surfacique moyen, $\frac{P_{pot}^{mean}}{\Delta S}$, pour déterminer quelles régions seront les plus érodées. On a :

$$\frac{P_{pot}^{mean}}{\Delta S} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{P_{pot}^{mat}}{\Delta S} \quad (2.57)$$

Où ΔS est un élément de surface, N le nombre de pas de temps et P_{pot}^{mat} représente la puissance potentielle appliquée au matériau et est déterminée à partir des champs de pression et vitesse. Cette approche utilise la même méthode de projection que celle exploitée dans le travail de Laurent Krumenacker : la théorie des angles solides, pour déterminer l'énergie potentielle transmise de la source à la surface [4]. Ce même modèle a été à la base des travaux de J.B. Carrat et al. qui ont comparé leurs résultats numériques 2D avec les expériences qu'ils ont pu mettre en place grâce à des capteurs PVDF pour les mesures de chargement. Il se trouve que les résultats sont bons, hormis au niveau du bord d'attaque, ce qui pourrait être résolu

par le choix d'une approche 3D [45].

C. Flageul et al. proposent également une méthode potentielle. Elle est appliquée à l'étude d'un profil d'aile 2D, et utilise deux modèles d'érosion qui sont comparés : le modèle de Nohmi, et celui développé dans le laboratoire, qui était au coeur du travail de Leclerc. Il s'agit de chiffrer, suivant les schémas développés respectivement dans chacun des deux modèles, l'énergie potentielle des structures cavitantes, nuisible pour la surface solide. Il se trouve que leur propre modèle reste à être amélioré pour la zone amont de l'écoulement cavitant en régime instationnaire, notamment par une approche 3D [46].

Ces modèles ont l'avantage de nécessiter moins de considérations précises au niveau des bulles. Ils peuvent donc être intéressants lorsqu'il s'agit d'une première approche de prédiction de l'érosion de cavitation : les résultats sont suffisamment précis et la mise en place est moins complexe.

D'autre part, des auteurs comme Dular et Peters, plutôt que de considérer l'onde de surpression comme responsable de l'érosion, s'intéressent uniquement aux dégâts causés par les microjets, qu'ils jugent plus importants.

Modèles centrés sur les microjets formés lors de l'implosion des bulles

M. Dular et al. utilisent également un couplage entre les simulations CFD et un modèle d'érosion. Cette combinaison est testée sur un profil d'aile 2D, soumis à différentes conditions d'écoulement. Pour la création du modèle d'érosion et la mise en place du système d'équations décrivant le problème, il a été supposé que les dommages étaient causés par des microjets issus de la déformation des bulles soumises à des ondes de surpression. La démarche analytique est la suivante. Premièrement, le chargement (pression) appliqué au matériau est déterminé :

$$p \approx v_{jet} \cdot \rho_l \cdot c_l \quad (2.58)$$

Où ρ_l est la masse volumique de la phase liquide, c_l la célérité du son dans la phase liquide et v_{jet} la vitesse du jet calculée comme :

$$v_{jet} = 8.97 \cdot \gamma^2 \cdot \sqrt{\frac{p - p_v}{\rho_m}} \quad (2.59)$$

Où γ est une distance adimensionnelle entre le centre de la bulle et la surface, p_v la pression de la phase vapeur et ρ_m la masse volumique du mélange. Sa vitesse critique s'exprime comme :

$$v_{crit} = \sqrt{\frac{p_y}{\rho_l} \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{p_y}{B}\right)^{-\frac{1}{n}}\right)} \quad (2.60)$$

Où p_y est la limite élastique du matériau, $B = 301 MPa$ et $n \approx 7.15$, des constantes fixées. Puis, la portion de pression convertie en énergie de déformation s'exprime comme :

$$p_{def} \approx v_{def} \cdot \rho_l \cdot c_l = (v_{jet} - v_{crit}) \cdot \rho_l \cdot c_l \quad (2.61)$$

Par ailleurs, la durée d'application du chargement est :

$$t_{def} = \frac{r_{jet}}{c_l} \quad (2.62)$$

Où r_{jet} est le rayon du microjet. Puis, les dimensions des creux causés par l'érosion sont données par :

$$d_{pit} = v_{def} \cdot t_{def} \quad (2.63)$$

Où d_{pit} représente la profondeur du creux formé à la surface. Puis,

$$r_{pit} = 26.7 \cdot d_{pit} \quad (2.64)$$

Où r_{pit} est le rayon du creux formé à la surface. Enfin,

$$A_{pit} = \pi \cdot r_{pit}^2 \quad (2.65)$$

Où A_{pit} est l'aire du creux formé à la surface.

L'exploitation du couplage par le processus numérique donne des résultats convaincants dans la mesure où ils sont proches des mesures d'érosion effectuées expérimentalement. Une des limites réside néanmoins dans le fait que l'érosion n'est en général pas très bien prédite au niveau du bord d'attaque [47]. Ces travaux ont conduit A. Peters à développer une méthode de prédiction numérique de l'érosion de cavitation (sous OpenFOAM), dans une conduite axisymétrique. Elle permet d'assurer une prédiction de la localisation des zones à haut potentiel érosif [48].

V. Hidalgo et al. étudient également l'érosion causée par les microjets, en passant par la prédiction de leurs vitesses et celle des zones impactées. Ce modèle est plus efficace que celui de Peters, bien que les zones touchées par le phénomène mises en lumière par le modèle aient des formes différentes de celles obtenues expérimentalement [49].

Ces modèles permettent une bonne prédiction des dégâts infligés à la surface solide si l'on considère que les microjets en sont les principaux responsables.

Afin d'aller plus loin dans l'estimation des dégâts solides, un couplage entre les simulations fluides et la structure peut être envisagé.

2.4.4 Méthodes numériques avec un couplage entre le fluide et la surface solide

C'est l'approche choisie par S. F. Pineda Rondon, qui s'intéresse à caractériser la réponse à la cavitation des matériaux constitutifs d'une turbine Pelton. Pour ce faire, il utilise une méthode de couplage fluide-structure, inspirée de celle mise en place par Nunez-Ramirez et al [50]. D'une part, pour simuler l'implosion d'une bulle, il utilise une méthode SPH-ALE (Smoothed Particle Hydrodynamics avec une description Arbitrary Lagrangian Eulerian) qui permet de passer d'un formalisme lagrangien à un formalisme eulérien et inversement, sans maillage, utile à la résolution des équations relatives au fluide. Ensuite, la dynamique d'une bulle pendant la phase de compression est vérifiée, en comparant ces résultats numériques 2D au modèle analytique de Rayleigh-Plesset correspondant. Puis, le chargement en surface causé par l'implosion de la bulle est caractérisé. D'autre part, il s'agit d'exploiter un modèle d'éléments finis pour quantifier la réponse du matériau, qui connaît alors des zones de traction-compression propices à la rupture par fatigue. Il s'avère que les nombreux chargements conduisent à une contrainte de compression sous la surface (dépendant de la taille de la bulle et de sa distance à la paroi), qui peut atteindre la limite élastique du matériau. La région plastifiée s'étend alors, induisant un durcissement progressif qui rend le solide fragile et plus susceptible de rencontrer des fissures et de l'érosion [6].

De la même manière que précédemment, J.-K. Choi a opté pour un couplage bilatéral entre les simulations fluides de l'implosion des bulles et les simulations solides de type éléments finis, pour la caractérisation des creux visibles en paroi. Il vise à établir un lien entre les chargements en pression et la taille des creux observés. L'étude a montré que la relation n'était que qualitative et que les mesures de volumes endommagés ne suffiraient pas à remonter aux pressions imposées [51].

Ces méthodes sont plus complètes dans la mesure où elles permettent une caractérisation précise des dégâts de la surface solide. Elles nécessitent néanmoins une lourde mise en place, qui n'est pas forcément indispensable lorsqu'il s'agit uniquement de déterminer de manière relative quelles seront les zones les plus touchées par l'érosion de cavitation.

Dans l'optique de rassembler, synthétiser et classer les différents modèles exploitables de manière numérique, des tableaux (tableaux 2.1 et 2.2, situés aux pages suivantes), ont été dressés. On notera que les équations utilisées n'y sont pas renseignées dans la mesure où elles ont déjà été précisées précédemment, lors de la présentation des modèles.

Tableau 2.1 Modèles numériques d'érosion - Première partie

Auteur	Année	Type de simulation fluide	Centre de l'étude	Méthode	Critère intensité	Approche matériau
Fortes-Patella	2001	URANS	Bulle	Calcul de l'énergie de l'onde de surpression	E_{wave} : énergie de l'onde	Oui
Ochiai	2009	URANS	Bulle	Calcul de l'énergie d'impact	E : énergie d'impact et $MDER$: Mean Depth of Erosion Rate	Oui
Krumenacker	2014	URANS	Bulle	Calcul de la puissance acoustique	$\dot{W}_{Cl}$: puissance acoustique surfacique	Non
Bergeles	2015	RANS	Bulle	Calcul de la puissance acoustique	EAI : Erosion Agressiveness Index	Oui
Li	2014	URANS	Population de bulles	Calcul de l'énergie potentielle des structures cavitantes	$I_{erosion}$: accumulation des gradients de pression domageables	Non
Mihatsch	2013	URANS	Population de bulles	Calcul du taux de condensation et de la divergence du champ de vitesse	p_{wall} : pression appliquée à la surface par l'implosion des bulles	Non
Nohmi	2008	URANS	Population de bulles	Calcul des dérivées temporelles du taux de vide et de la pression	4 propositions d'expression	Non
Leclerc	2016	URANS	Population de bulles	Calcul de l'énergie potentielle des structures cavitantes	P_{pot}^{agr} : puissance potentielle surfacique	Non

Tableau 2.2 Modèles numériques d'érosion - Deuxième partie

Auteur	Année	Type de simulation fluide	Centre de l'étude	Méthode	Critère intensité	Approche matériau
Dular	2009	URANS	Bulle	Calcul des caractéristiques des micro-jets	V_{pit} : Volume des creux causés par l'érosion	Oui
Peters	2015	URANS	Bulle	Calcul des caractéristiques des micro-jets	c_{def} : fraction de l'érosion pour une face, comparée à l'érosion totale prédite	Oui
Hidalgo	2018	URANS	Bulle	Calcul des caractéristiques des micro-jets	$\bar{c}_{flow}$: vitesse adimensionnelle du microjet	Non
Pineda Rondon	2017	SPH	Bulle	Couplage fluide-structure	<i>Impulse</i> : pression imposée à la paroi avec prise en compte de la durée du chargement	Oui
Choi	2016	URANS	Bulle	Couplage fluide-structure	h , D : profondeur et diamètre des creux causés par l'érosion	Oui

A la lumière de ce qui précède, l'approche numérique retenue reposera sur deux échelles. La première échelle, appelée macroscopique, consistera à mener les simulations nécessaires à la détermination des caractéristiques de l'écoulement cavitant. La seconde échelle, microscopique, centrée sur la population de bulles de cavitation, permettra, en utilisant un modèle d'érosion et les résultats de l'échelle macroscopique, de localiser les zones de la surface solide les plus endommagées par les implosions.

Le choix d'utiliser un modèle centré sur une population de bulles plutôt que sur une unique bulle a été fait, dans la mesure où cette approche permet l'obtention de résultats pertinents et nécessite uniquement les résultats des simulations URANS traditionnellement obtenus avec CFX. Par ailleurs, le modèle de Leclercq a été choisi pour sa robustesse permise par l'éventail de paramètres qu'il prend en compte ainsi que pour la pertinence des résultats qu'il permet d'obtenir.

Ainsi, dans un premier temps, il s'agira de mettre en place les simulations URANS, à l'aide de CFX, pour déterminer l'écoulement cavitant. Le calcul de ψ , la puissance de cavitation, grandeur représentative de l'érosion dans le modèle choisi, pourra être effectué pour chaque point fluide à partir des résultats de CFD tels que les champs de pression, de vitesse de l'écoulement ou de masse volumique du mélange. Puis, la méthode de l'angle solide implémentée dans un script Python permettra de déterminer χ , la fraction de ψ qui atteint effectivement la surface solide. Ces calculs sont effectués pour chaque point de la surface solide et chaque pas de temps. Ensuite, à chaque point de la surface solide sera associée une valeur de I_{cav} , le coefficient d'intensité de l'érosion de cavitation, défini comme une moyenne temporelle de χ , grâce à un nouveau script Python. Enfin, les valeurs de I_{cav} déterminées grâce au post-traitement des résultats URANS précédemment décrit seront importées dans CFD-Post, où les zones d'érosion les plus critiques pourront être visualisées. La démarche est schématisée dans la figure 2.1.

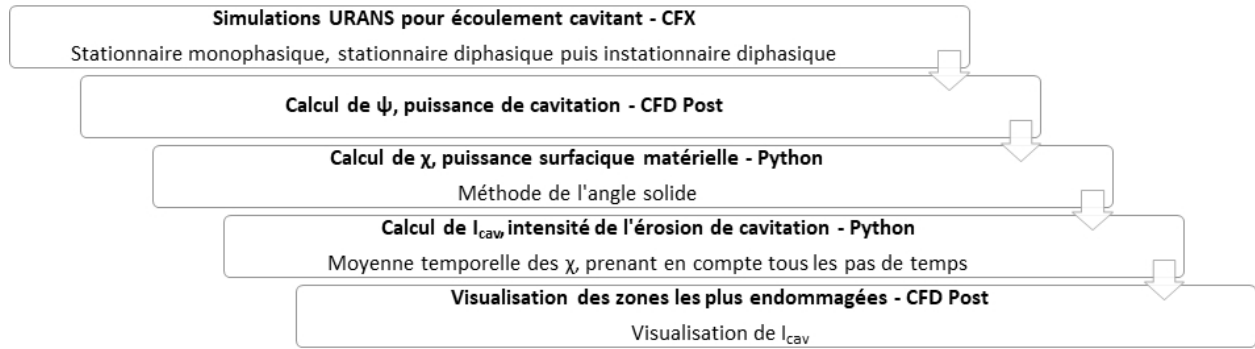


Figure 2.1 Méthode suivie

CHAPITRE 3 ÉCHELLE MACROSCOPIQUE

Dans un premier temps, il s'agira de mettre en place la stratégie numérique suivie sur CFX, qui permettra d'obtenir les résultats relatifs à l'échelle macroscopique, concernant l'écoulement cavitant.

3.1 Détermination de la stratégie de simulation macroscopique avec l'étude d'un cas test

Afin de confirmer la pertinence des méthodes envisagées, on fait le choix de travailler avec une géométrie NACA66, construite à partir des coordonnées fournies dans l'article de Leroux [52], auteur dont le travail servira de référence dans la mesure où nos résultats numériques seront comparés à ses résultats expérimentaux [3].

3.1.1 Présentation du cas test

La géométrie à l'étude peut être observée aux figures 3.1 et 3.2.



Figure 3.1 Géométrie du premier cas test : NACA66



Figure 3.2 Géométrie du premier cas test : NACA66

Les conditions géométriques de simulation sont les suivantes :

- longueur de la veine d’essai : 2.25 m
- section de la veine d’essai : $0.192 \text{ m} \times 0.192 \text{ m}$
- corde du profil : 0.15 m
- angle d’incidence : 6 degrés

Par ailleurs, les conditions aux limites peuvent être résumées ainsi :

- entrée : vitesse d’entrée de 5.33 m/s
- sortie : pression imposée, calculée à partir du nombre de cavitation à l’étude
- murs supérieur et inférieur : conditions de symétrie
- murs latéraux : conditions de non-glissement

La condition de sortie est déterminée à partir du nombre de cavitation défini plus haut dans le document. Ainsi, lorsque la valeur du nombre de cavitation est fixée, il est possible de déterminer la pression en sortie servant de condition à la limite, connaissant les valeurs des autres paramètres. Les valeurs utilisées sont résumées dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1 Conditions de sortie

Nombre de cavitation σ	Pression en sortie (Pa)
1	17361,94
1,49	24316,49

Le maillage a été obtenu grâce à l’utilisation de Vanemesh, logiciel développé au sein même du laboratoire MAGNU. Il nous aura conduit à l’obtention d’un maillage 2D, raffiné à certains endroits judicieusement choisis : la partie supérieure du profil (le long de laquelle se développeront les poches de cavitation), ainsi qu’au niveau du bord de fuite. Cette stratégie a l’avantage de permettre une réduction des temps de calcul dans la mesure où le maillage peut rester grossier dans les zones où l’écoulement ne connaîtra pas de conditions particulières nécessitant beaucoup de précision.

On notera que ce maillage a été sélectionné à la suite d’une étude de convergence en maillage menée sur le cas stationnaire ($\sigma = 1.49$). Cette étude, présentée ci-après et faite à l’aide de la méthode de Celik, a montré qu’à partir d’un certain niveau de raffinement, les résultats sont indépendants du maillage, ainsi, choisir une taille d’éléments plus petite n’est pas pertinent [53].

Trois tailles de maillage ont été choisies, associées à trois échelles de longueur caractéristiques. Celles-ci sont présentées dans le tableau 3.2.

Tableau 3.2 Maillages considérés

Type de maillage	Nombre d'éléments	Taille caractéristique (m)
Fin (1)	1549180	$3.77 \cdot 10^{-3}$
Moyen (2)	946580	$4.44 \cdot 10^{-3}$
Grossier (3)	762450	$4.77 \cdot 10^{-3}$

La pression ainsi que la vitesse de l'écoulement seront les deux grandeurs à l'étude, déterminantes dans les développements qui suivront. Elles seront déterminées en deux points : le premier sur l'extrados, le second dans l'écoulement proche du bord de fuite dont les coordonnées sont détaillées dans le tableau 3.3.

Tableau 3.3 Points à l'étude

Point à l'étude	Coordonnées du point
Extrados	(0.08 ; 0.004 ; -0.1)
Bord de fuite	(0.15 ; -0.016 ; -0.1)

Les valeurs des grandeurs considérées, suivant le maillage utilisé sont présentées dans le tableau 3.4.

Tableau 3.4 Valeurs aux points étudiés

Maillage	Point à l'étude	Pression (Pa)	Vitesse de l'écoulement (m/s)
Fin	Extrados	14263.3	4.48199
Fin	Bord de fuite	25110.2	3.41518
Moyen	Extrados	14257.4	4.47362
Moyen	Bord de fuite	25091.1	3.42725
Grossier	Extrados	14631.2	4.487388
Grossier	Bord de fuite	26069	3.39258

Les erreurs relatives et erreurs relatives extrapolées sont calculées entre les maillages (1) et (2) ainsi qu'entre les maillages (2) et (3) suivant la méthode de Celik pour chacune des grandeurs, nous renseignant sur la qualité du maillage considéré. Elles sont visibles dans les tableaux 3.5 et 3.6 faisant respectivement référence au point situé sur l'extrados et au niveau du bord de fuite.

Tableau 3.5 Erreurs calculées au point de l'extrados

Maillages considérés	Erreur relative (pression)	Erreur relative extra-polée (pression)	Erreur relative (vitesse)	Erreur relative extra-polée (vitesse)	Indice de convergence (pression)	Indice de convergence (vitesse)
(1)-(2)	0.04%	$7.99 \cdot 10^{-5}\%$	0.19%	0.15%	$1.0 \cdot 10^{-4}\%$	0.19%
(2)-(3)	2.62%	0.18%	0.31%	0.74%	0.23%	0.92%

Tableau 3.6 Erreurs calculées au point au niveau du bord de fuite

Maillages considérés	Erreur relative (pression)	Erreur relative extra-polée (pression)	Erreur relative (vitesse)	Erreur relative extra-polée (vitesse)	Indice de convergence (pression)	Indice de convergence (vitesse)
(1)-(2)	0.08%	$5.67 \cdot 10^{-6}\%$	0.35%	0.06%	$7.08 \cdot 10^{-6}\%$	$7.10 \cdot 10^{-2}\%$
(2)-(3)	3.90%	0.06%	1.01%	0.73%	$7.62 \cdot 10^{-2}\%$	0.91

A la lumière de ces résultats, le maillage moyen aurait pu être choisi pour la suite de l'étude, car il permet l'obtention de résultats similaires au maillage fin. Néanmoins, le maillage fin a été préféré afin de bénéficier d'une meilleure précision lors de l'étape de post-traitement (la localisation des zones les plus touchées par l'érosion sera plus précise par exemple). Le maillage est visible aux figures 3.3, 3.4, 3.5 et 3.6.

D'autre part, une valeur de Y^+ moyenne de 36 a été mesurée avec ce maillage. Cette valeur est donnée uniquement à titre indicatif. En effet, d'après la documentation CFX, cette grandeur n'est maintenant plus déterminante dans les calculs dans la mesure où des lois de parois adaptatives accompagnées de traitements automatiques permettent de gérer convenablement les calculs dans cette zone habituellement critique [54].

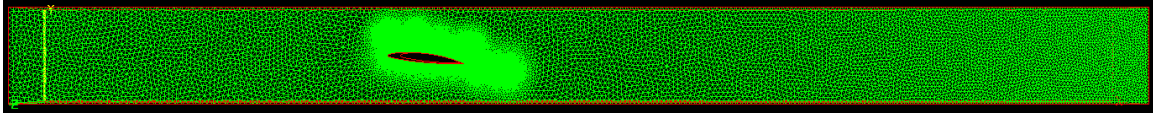


Figure 3.3 Maillage de la veine d'essai

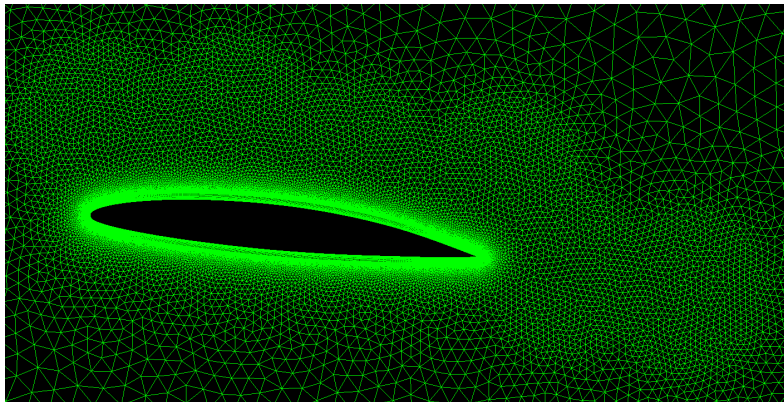


Figure 3.4 Maillage autour du profil

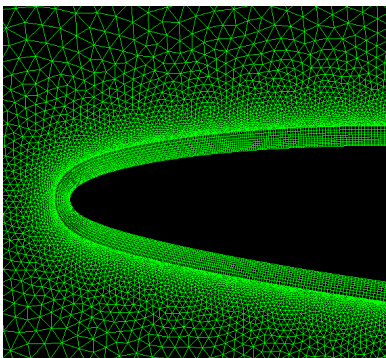


Figure 3.5 Maillage au niveau du bord d'attaque

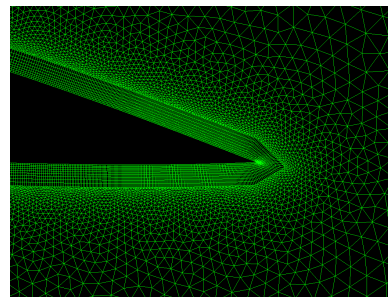


Figure 3.6 Maillage au niveau du bord de fuite

Par ailleurs, dix points (monitors) ont été définis afin de pouvoir accéder à des valeurs ponctuelles de certaines grandeurs (la pression par exemple), ce qui sera utile à la validation de la méthode utilisée. Ceux-ci sont répartis de manière régulière le long de l'extrados. Ils sont visibles en jaune sur la figure 3.7.

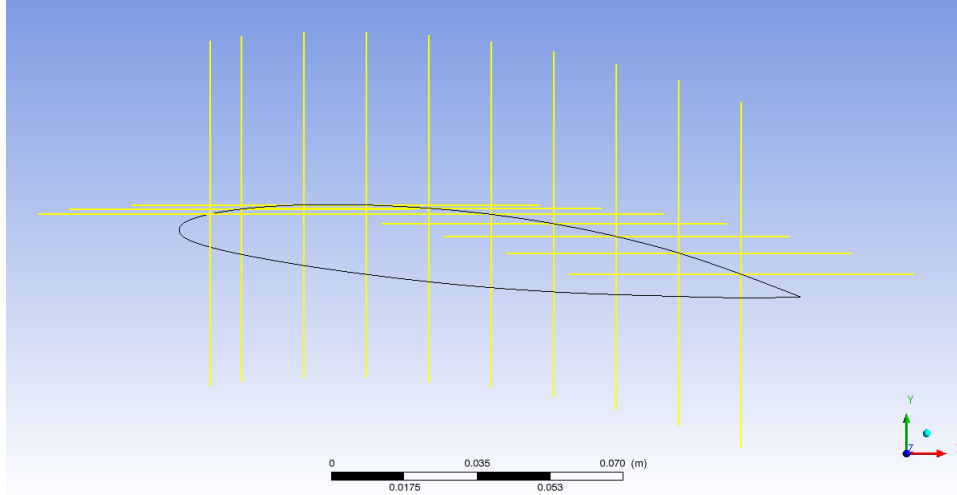


Figure 3.7 Répartition des monitors le long de l'extrados

L'étude macroscopique se fera en deux parties distinctes.

D'une part, une étude stationnaire est menée, avec un nombre de cavitation $\sigma = 1.49$. Il s'agira pour celle-ci, d'effectuer deux étapes de simulation, pour plus de stabilité lors de la résolution. Celles-ci sont détaillées dans la figure 3.8. La première étant une simulation monophasique, dont les résultats permettront l'initialisation de la seconde simulation, multiphasique, conduisant à la modélisation de la cavitation. Le modèle de turbulence choisi est le modèle SST proposé par CFX et conseillé par la littérature. La cavitation est approchée grâce à l'utilisation du modèle de Rayleigh-Plesset, unique modèle disponible avec ce logiciel. Par ailleurs, un critère de convergence RMS est fixé à 10^{-6} et le nombre d'itérations maximal à 500.

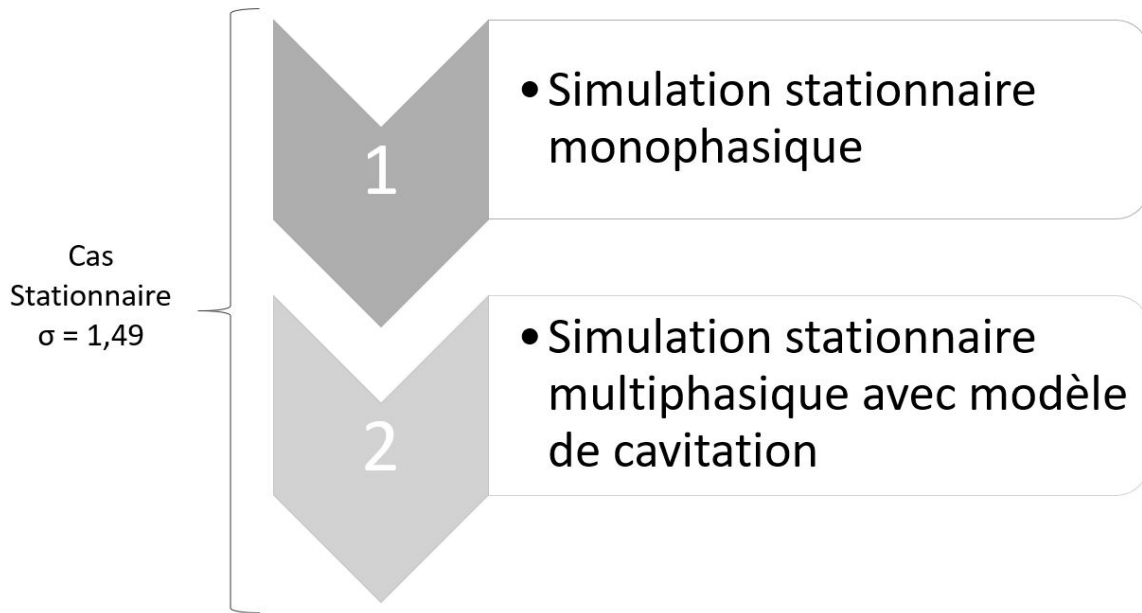


Figure 3.8 Echelle macroscopique : étapes de simulation en régime stationnaire

D'autre part, une étude instationnaire est menée pour un nombre de cavitation $\sigma = 1$. Elle nécessite la mise en place de trois étapes dans les simulations (précisées à la figure 3.9) : la première est stationnaire, à une phase, et sert d'initialisation à la deuxième, stationnaire également mais prenant en compte deux phases du fluide. La troisième, utilisant les résultats de la deuxième pour initialisation, est une simulation instationnaire à deux phases. Une période de $1.5s$ est étudiée, avec des pas de temps de $0.01s$. Le modèle de turbulence utilisé pour la partie stationnaire reste le modèle SST de CFX, alors que le modèle SAS SST est utilisé en instationnaire. Ces choix de modèles de turbulence sont cohérents avec ceux rencontrés dans la littérature. Par ailleurs, la cavitation est toujours approchée grâce à l'utilisation du modèle de Rayleigh-Plesset, avec un facteur de relaxation de 0.1 ainsi qu'un rayon de bulle initialisé par défaut à $10^{-6}m$. Enfin, une valeur d'iteration loop de 10 est utilisée et un critère de convergence RMS est fixé à 10^{-6} .

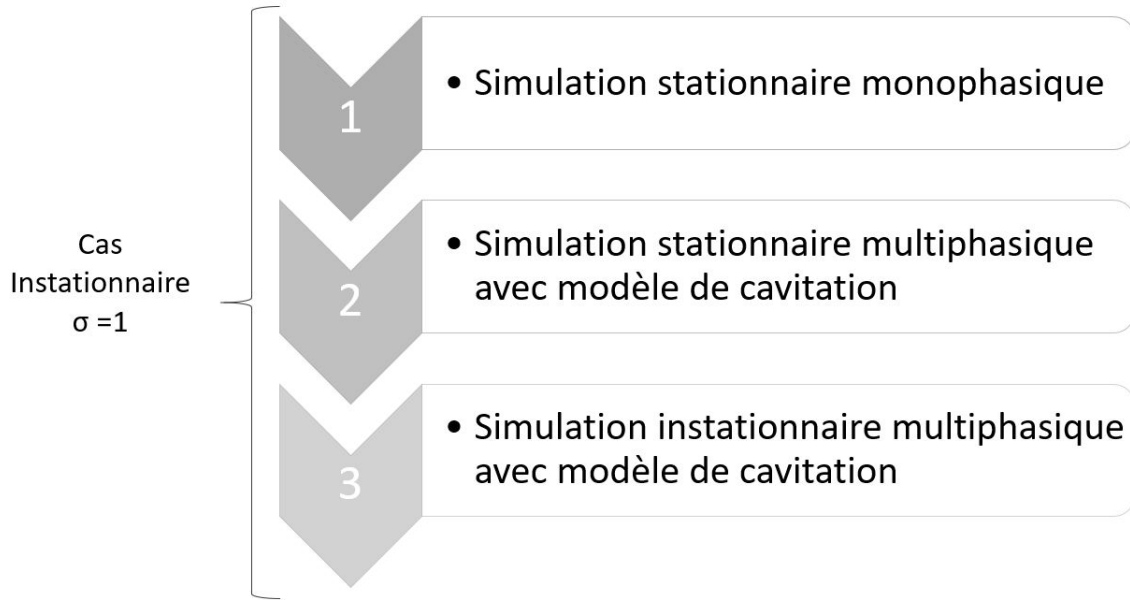


Figure 3.9 Echelle macroscopique : étapes de simulation en régime instationnaire

On notera que pour les simulations monophasiques stationnaires, le schéma d'advection à haute résolution proposé par CFX est utilisé. Il permet de limiter les erreurs de discrétisation. En revanche, les simulations diphasiques sont conduites avec un schéma upwind du premier ordre, robuste, qui permet de stabiliser les calculs à deux phases, mais qui peut impliquer des erreurs de discrétisation notamment visibles lorsque l'on s'intéresse aux gradients spatiaux [55]. Par ailleurs, en ce qui concerne les schémas relatifs aux simulations instationnaires, on notera que le choix s'est porté sur l'utilisation du schéma Backward Euler du premier ordre (implicite), souvent lié à des erreurs de diffusion numérique, mais plus adapté lorsque la notion de fraction volumique intervient, d'après la documentation de CFX [56].

Par ailleurs, on remarquera que l'approche URANS employée ne permet pas de résoudre les structures fines et intermédiaires de la turbulence. Il est difficile de déterminer une fréquence de coupure qui permettrait de caractériser la différence de taille entre les structures turbulentes et de cavitation et donc d'évaluer leur interaction.

3.1.2 Étude des modèles homogène et inhomogène de CFX

Remarque : les résultats présentés ici concernent uniquement les étapes finales (seconde étape en stationnaire et troisième en instationnaire), les phases précédentes servant uniquement à l'initialisation des calculs.

Étude stationnaire

L'étude stationnaire faite avec le modèle homogène permet de mettre en évidence les résultats attendus concernant les contours de pression et vitesse. En effet, la figure 3.10 montre une dépression sur la partie supérieure du bord d'attaque du profil, ainsi qu'une surpression au niveau de la partie inférieure, ce qui est un résultat classique d'aérodynamique.

En termes de vitesses, les résultats obtenus, et visibles sur la figure 3.11 sont également cohérents. En effet, on observe, au niveau du bord d'attaque, une vitesse plus importante sur l'extrados, et plus faible sur l'intrados.

Afin de visualiser les différentes phases de l'écoulement, les contours de la fraction de phase liquide sont tracés à la figure 3.12. Ils permettent de mettre en évidence le fait que l'eau se trouve sous forme liquide dans tout le domaine, excepté sur l'extrados, au niveau du bord d'attaque. Ce résultat est cohérent avec les résultats habituellement observés de manière expérimentale (petite poche de vapeur attachée sur la partie amont supérieure du profil).

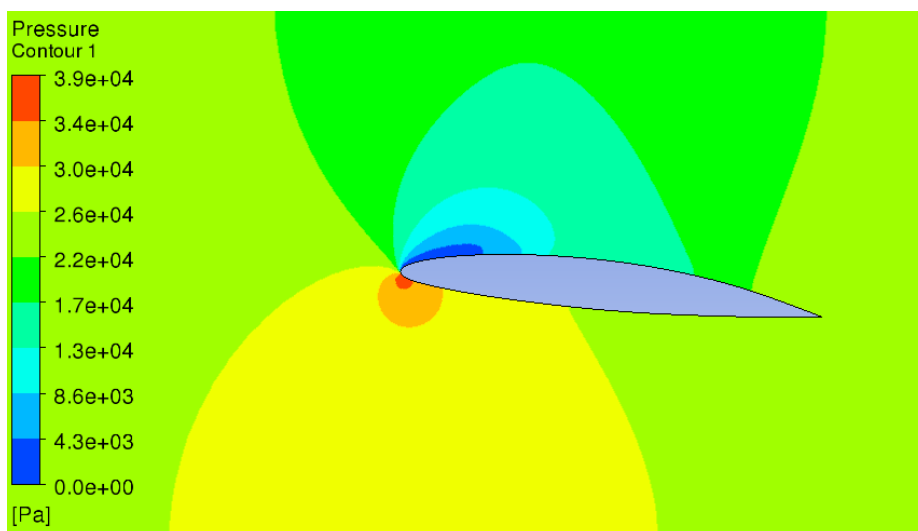
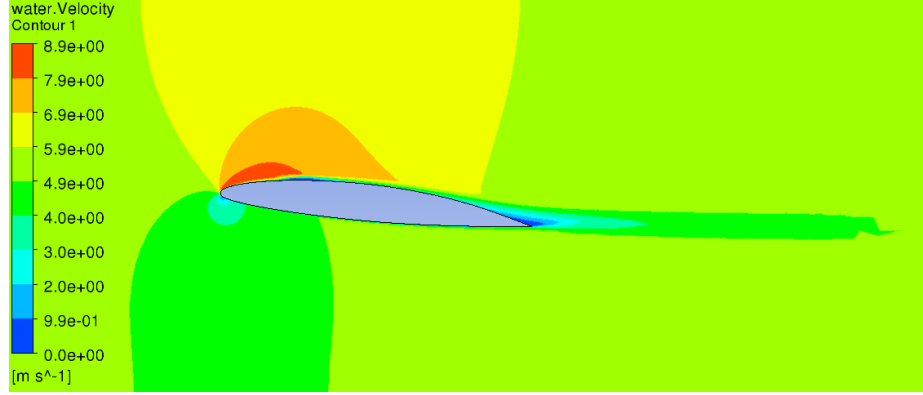
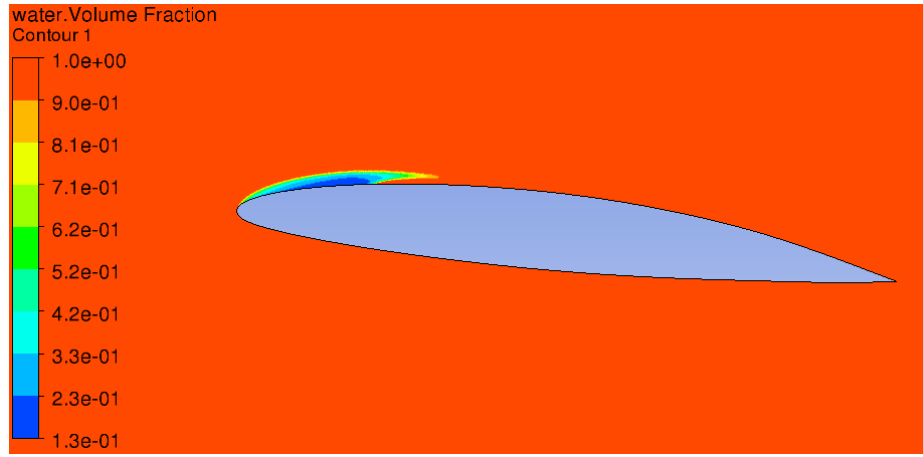


Figure 3.10 Contour de pression - $\sigma = 1.49$

Figure 3.11 Contour de vitesse - $\sigma = 1.49$ Figure 3.12 Contour de la fraction de phase liquide - $\sigma = 1.49$

Enfin, une comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques peut être faite en étudiant l'évolution du coefficient de pression C_p le long de l'extrados. Ainsi, pour cette étude, les points (monitors) présentés précédemment sont utilisés. En effet, des valeurs de pression sont nécessaires au calcul. Ce coefficient est défini de la manière suivante :

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{0.5 \cdot \rho \cdot u_\infty^2} \quad (3.1)$$

Où p fait référence à la pression au point concerné, p_∞ à la pression en sortie, ρ à la masse volumique du mélange au point et u_∞^2 à une vitesse de référence de l'écoulement choisie comme la vitesse imposée à l'entrée.

La comparaison, visible sur la figure 3.13, montre que les résultats obtenus à l'aide de CFX sont en accord avec les résultats attendus, prédits par les expériences de Leroux. Néanmoins, on notera une différence entre les deux séries de valeurs en ce qui concerne les points situés entre le tiers et la moitié de la corde, ce qui correspond à la région voisine de la zone de fermeture de la poche. Ceci pourrait s'expliquer par les modélisations de la turbulence et de la cavitation qui ont été faites. En effet, à ce sujet, Tran a mis en évidence le fait que le modèle de Kubota proposé par CFX n'était pas le modèle de cavitation existant le plus performant. De plus, les viscosités turbulentes utilisées dans les modèles de turbulence implémentés dans CFX ne sont pas adaptées aux études biphasiques [57].

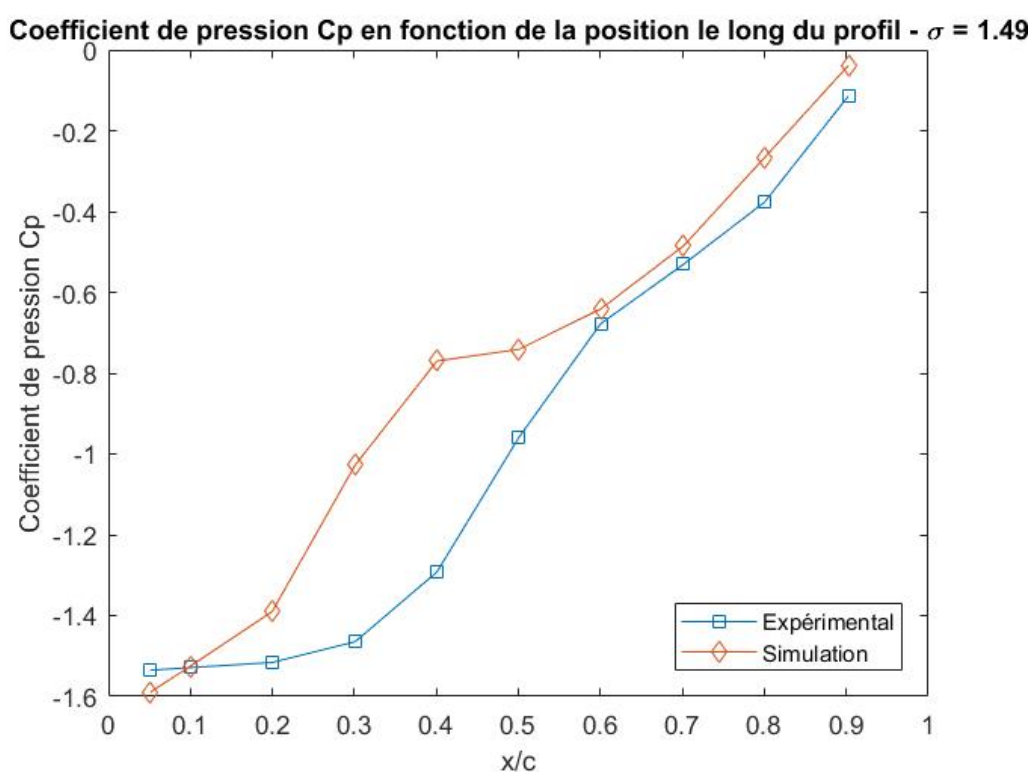


Figure 3.13 Comparaison des coefficients de pression - $\sigma = 1.49$

Étude instationnaire

La simulation est faite sur 1.5s, avec un pas de temps de 0.01s, correspondant pour ce cas à un nombre de Courant RMS d'environ 234, ce qui est bien plus grand que l'ordre de l'unité, souvent considéré comme condition limitante, mais qui n'est pas nécessaire pour la stabilité des calculs selon la documentation CFX [58]. Le choix d'un pas de temps plus petit permettrait néanmoins sa réduction.

L'étude instationnaire a permis de mettre en évidence la formation périodique d'une poche de vapeur avec détachement, au niveau de l'extrados. Elle apparaît au niveau du bord d'attaque et est emportée le long du profil par le fluide en mouvement. Ceci est visible sur la figure 3.14, sur laquelle uniquement le premier cycle de détachement est représenté. Une comparaison avec les résultats numériques et expérimentaux de Leroux est menée. Il se trouve que le développement de la poche paraît relativement bien prédit par CFX, en dépit d'un léger décalage temporel dans la prédiction du mouvement de la poche de cavitation.

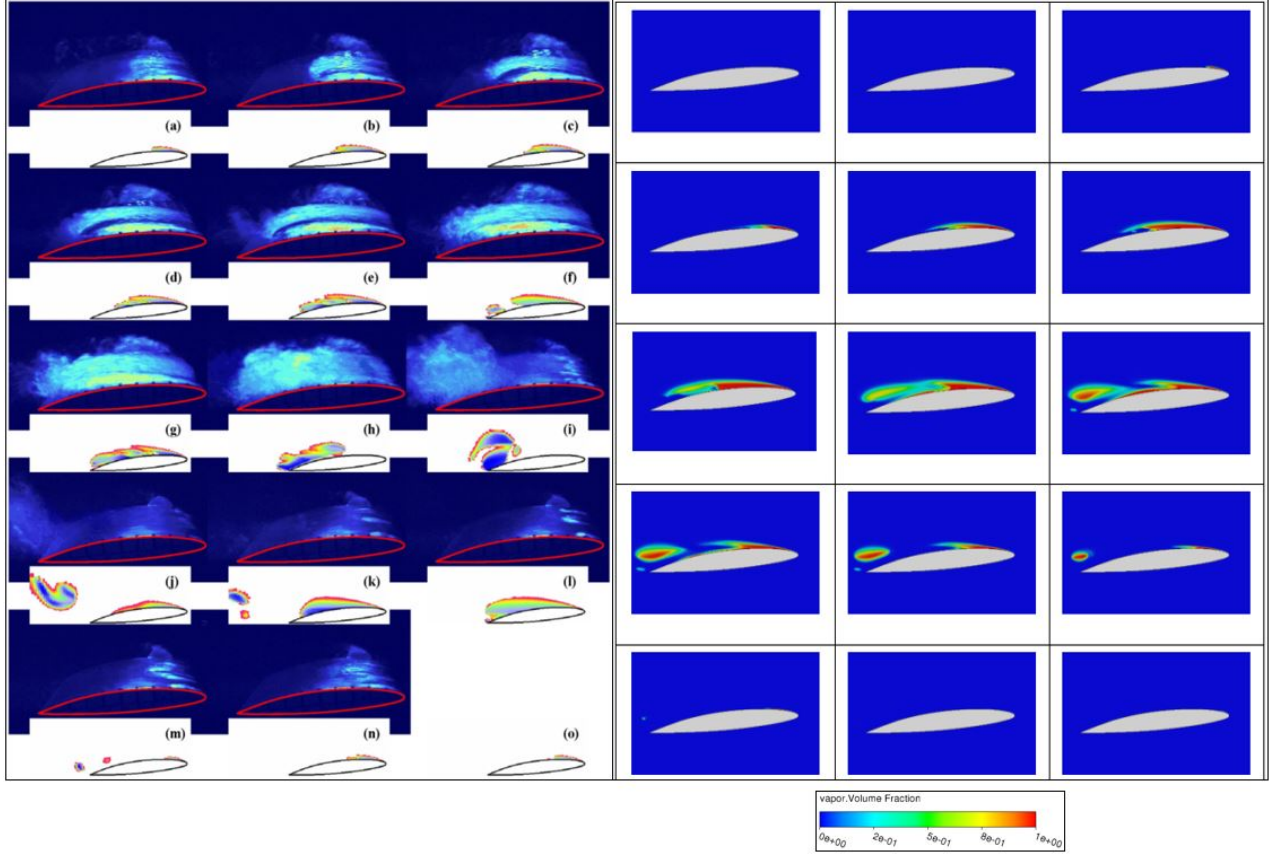


Figure 3.14 Evolution des contours de fraction de phase vapeur, Résultats de Leroux à gauche [3], résultats de CFX à droite - $\sigma = 1$

Sous CFX, le choix du modèle diphasique est donné à l'utilisateur, qui optera pour un modèle homogène, ou bien pour un modèle inhomogène. Les équations résolues dans chacun des cas sont détaillées dans le travail de Stenmark [59]. La différence entre les deux réside dans le fait que, contrairement aux considérations faites dans le modèle homogène où une vitesse globale est définie, commune aux deux phases, chacune des phases du modèle inhomogène peut avoir sa propre vitesse, d'où l'apparition d'une vitesse de glissement. Afin de choisir le modèle le plus adapté au cas instationnaire, les deux ont été employés et comparés avec les résultats expérimentaux publiés par Leroux concernant ce régime. Les fréquences de détachement sont étudiées via le coefficient C_l^+ . Celui-ci est défini de la manière suivante :

$$C_l^+ = \sum_{i=1}^{10} C_p\left(\frac{x_i}{c}, t\right) \cdot \Delta\left(\frac{x_i}{c}\right) \quad (3.2)$$

Dans notre cas, les dix points d'étude étant espacés de manière régulière, cette équation peut se simplifier à :

$$C_l^+ = 0.1 \cdot \sum_{i=1}^{10} C_{p_i} \quad (3.3)$$

Il conviendra alors, pour l'étude, de calculer les dix coefficients de pression à chaque pas de temps, afin d'établir la valeur de C_l^+ à chaque étape. Cette démarche nous conduit à l'obtention des résultats présentés à la figure 3.15.

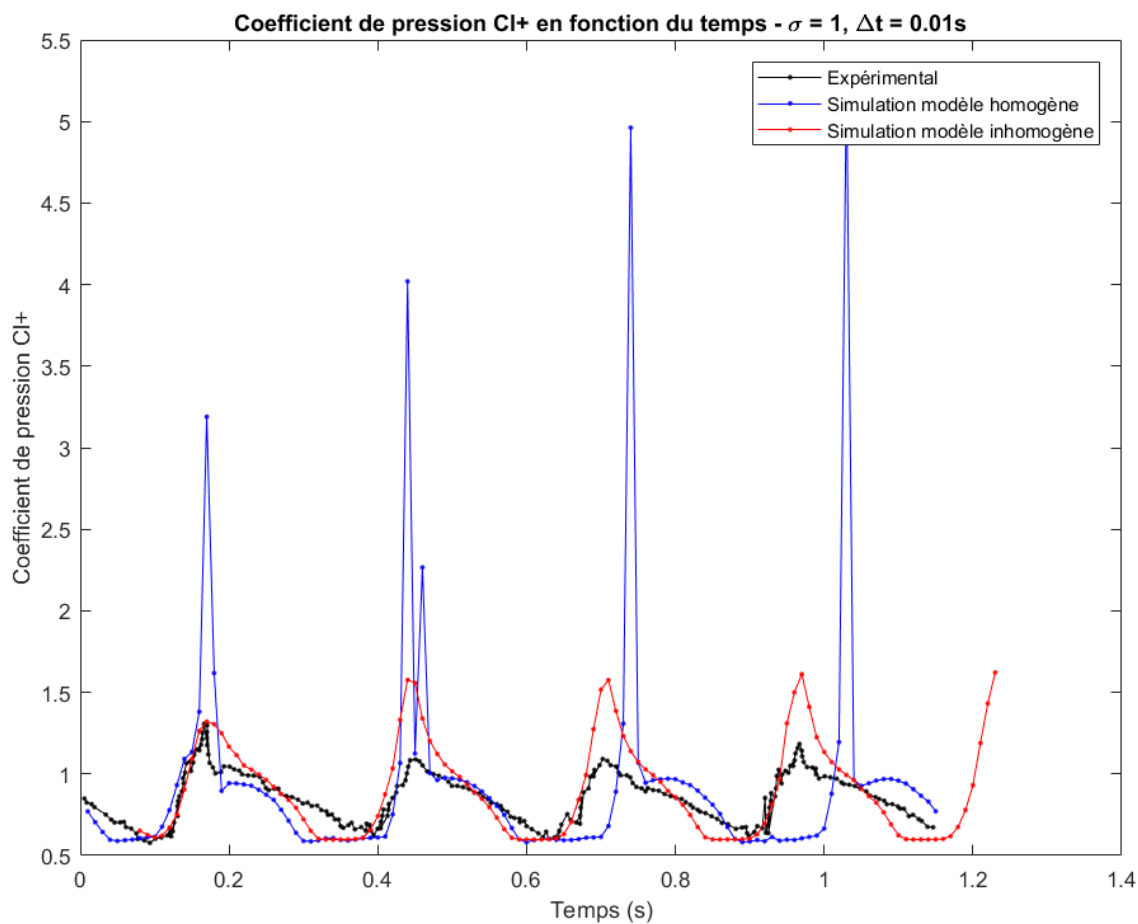


Figure 3.15 Comparaison des coefficients Cl^+ - $\sigma = 1$

Dans un premier temps, il est à noter que les simulations relatives au modèle homogène conduisent à l'obtention de valeurs de pression isolées, et donc à des valeurs de C_l^+ incohérentes avec les valeurs attendues. Par ailleurs, on peut remarquer que le détachement de la poche lié au modèle homogène n'est pas synchronisé avec le détachement obtenu de manière expérimentale. En revanche, la fréquence de détachement relative au modèle inhomogène est identique à celle de l'expérience, les signaux restant bien en phase au cours du temps. Ainsi, pour le reste du travail, nous ferons le choix d'utiliser le modèle inhomogène proposé par CFX, qui est en accord avec les résultats expérimentaux de Leroux d'un point de vue fréquentiel. On notera néanmoins que les valeurs obtenues numériquement ne sont pas identiques aux valeurs expérimentales, ce qui pourrait être dû, comme précisé précédemment, aux modélisations de la turbulence et de la cavitation.

3.2 Calculs relatifs à l'échelle macroscopique

3.2.1 Présentation du cas étudié

La géométrie à l'étude est identique à celle de Leclercq. Elle est visible aux figures 3.16 et 3.17. Il s'agit d'un profil NACA65012, qui a notamment été étudié expérimentalement par Pereira [25] et dont les coordonnées du contour sont disponibles dans le livre d'aérodynamique de Abbott [60].

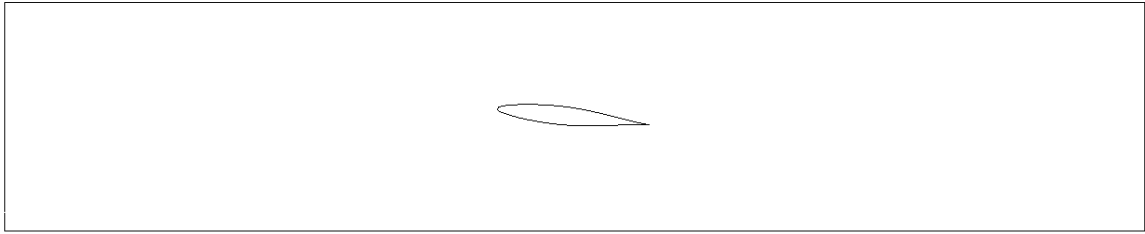


Figure 3.16 Géométrie du cas étudié : NACA65012

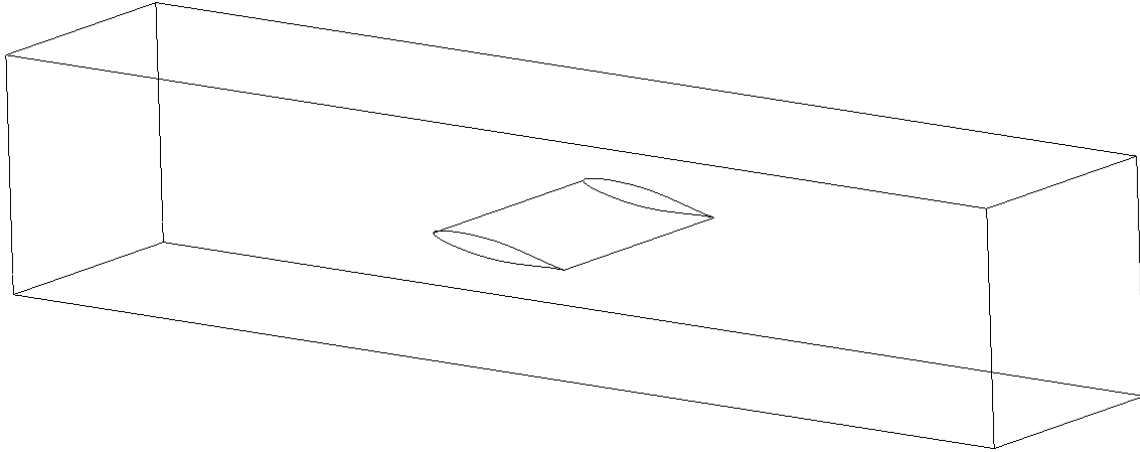


Figure 3.17 Géométrie du cas étudié : NACA65012

Les conditions géométriques de simulation sont les suivantes :

- longueur de la veine d’essai : 0.75 m
- section de la veine d’essai : $0.15 \text{ m} \times 0.15 \text{ m}$
- corde du profil : 0.1 m

Par ailleurs, les conditions aux limites peuvent être résumées ainsi :

- entrée : vitesse d’entrée de 15 m/s
- sortie : pression imposée, fixée en fonction de la pression attendue à l’entrée
- murs supérieur et inférieur : conditions de symétrie
- murs latéraux : conditions de non-glissement

Dans un premier temps, il conviendra, comme précédemment, de faire une étude de maillage pour le problème. Les paramètres utilisés par Leclercq et présentés plus haut seront utilisés, le profil est étudié avec un angle d’incidence de 6 degrés, pour une simulation stationnaire relative à un nombre de Thoma $\sigma = 1.41$. Le nombre de Thoma étant, dans ce cas-ci, calculé à partir de la pression à l’entrée de la veine d’essai, il convient de déterminer la pression correspondante à imposer en condition de sortie. Pour ce faire, il s’agira de procéder en plusieurs itérations. L’objectif étant d’obtenir un nombre de Thoma de 1.41, la pression de sortie correspondante est déterminée à $1.55 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

Comme précédemment, trois tailles de maillage ont été choisies pour l’utilisation de la méthode de Celik. Celles-ci sont présentées dans le tableau 3.7.

La pression ainsi que la vitesse de l’écoulement seront une nouvelle fois les deux grandeurs à l’étude. Elles seront déterminées en deux points : le premier sur l’extrados, le second dans l’écoulement proche du bord de fuite dont les coordonnées sont détaillées dans le tableau 3.8.

Tableau 3.7 Maillages considérés

Type de maillage	Nombre d'éléments	Taille caractéristique (m)
Fin (1)	2486660	$1.89 \cdot 10^{-3}$
Moyen (2)	874060	$2.68 \cdot 10^{-3}$
Grossier (3)	680640	$2.92 \cdot 10^{-3}$

Tableau 3.8 Points à l'étude

Point à l'étude	Coordonnées du point
Extrados	(0.05 ; 0.007 ; -0.07)
Bord de fuite	(0.1 ; -0.006 ; -0.07)

Les valeurs des grandeurs considérées, suivant le maillage utilisé sont présentées dans le tableau 3.9.

Tableau 3.9 Valeurs aux points étudiés

Maillage	Point à l'étude	Pression (Pa)	Vitesse de l'écoulement (m/s)
Fin	Extrados	97529.5	11.6246
Fin	Bord de fuite	165523	12.5137
Moyen	Extrados	97479.8	12.1057
Moyen	Bord de fuite	164564	12.645
Grossier	Extrados	102743	11.2996
Grossier	Bord de fuite	166684	12.4557

Les erreurs relatives et erreurs relatives extrapolées sont calculées entre les maillages (1) et (2) ainsi qu'entre les maillages (2) et (3). Elles sont visibles dans les tableaux 3.10 et 3.11 faisant respectivement référence au point situé sur l'extrados et au niveau du bord de fuite.

Tableau 3.10 Erreurs calculées au point de l'extrados

Maillages considérés	Erreur relative (pression)	Erreur relative extrapolée (pression)	Erreur relative (vitesse)	Erreur relative extrapolée (vitesse)	Indice de convergence (pression)	Indice de convergence (vitesse)
(1)-(2)	$5.1 \cdot 10^{-2}\%$	$3.44 \cdot 10^{-10}\%$	4.14%	2.43%	$4.29 \cdot 10^{-10}\%$	2.97%
(2)-(3)	5.4%	$6.06 \cdot 10^{-2}\%$	6.66%	19.62%	$7.57 \cdot 10^{-2}\%$	30.51%

Tableau 3.11 Erreurs calculées au point au niveau du bord de fuite

Maillages considérés	Erreur relative (pression)	Erreur relative extrapolée (pression)	Erreur relative (vitesse)	Erreur relative extrapolée (vitesse)	Indice de convergence (pression)	Indice de convergence (vitesse)
(1)-(2)	0.58%	0.11%	1.05%	1.12%	$1.41 \cdot 10^{-1}\%$	1.38%
(2)-(3)	1.29%	2.43%	1.50%	7.95%	$2.96 \cdot 10^{-2}\%$	10.80%

A la lumière de ces résultats, le maillage moyen est encore une fois suffisant en termes de convergence en vitesse et pression aux zones considérées. On préférera néanmoins utiliser un maillage plus fin (intermédiaire entre le maillage fin et le maillage moyen), visible aux figures 3.18, 3.19, 3.20 et 3.21.

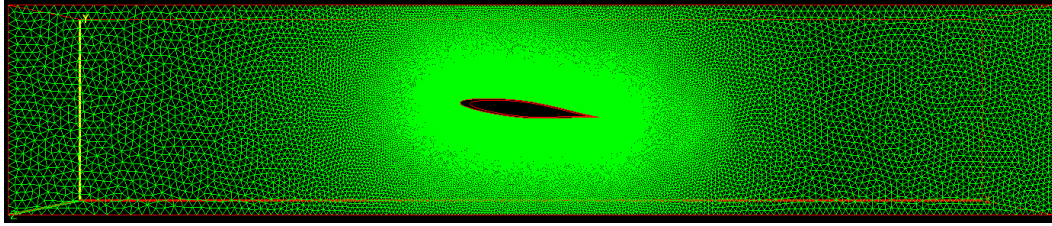


Figure 3.18 Maillage de la veine d'essai

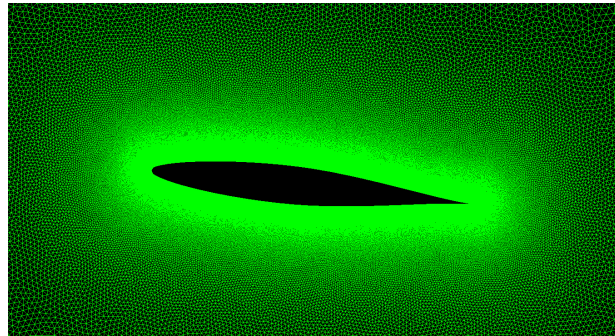


Figure 3.19 Maillage autour du profil

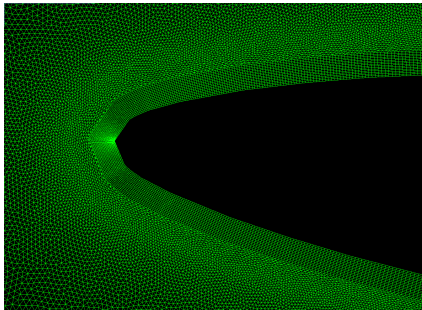


Figure 3.20 Maillage au niveau du bord d'attaque

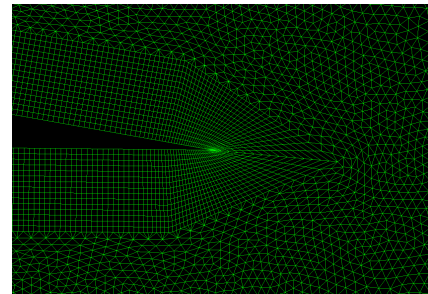


Figure 3.21 Maillage au niveau du bord de fuite

D'autre part, une valeur de Y^+ moyenne de 39 a été mesurée avec ce maillage. Comme précédemment, cette valeur est donnée uniquement à titre indicatif.

3.2.2 Présentation des résultats des simulations URANS

Il s'agit ici de valider les résultats des simulations URANS instationnaires de l'échelle macroscopique avec cette géométrie. Pour cette étape, les données expérimentales de Pereira seront utilisées.

L'objectif étant ici d'obtenir un nombre de Thoma de 1.08, la pression en entrée doit être de $1.25 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Trois itérations ont suffi à déterminer la pression de sortie correspondante ($1.18 \cdot 10^5 \text{ Pa}$).

Le coefficient de pression C_p est utilisé comme grandeur de comparaison entre nos résultats et les résultats expérimentaux de Pereira, ce qui est visible à la figure 3.22.

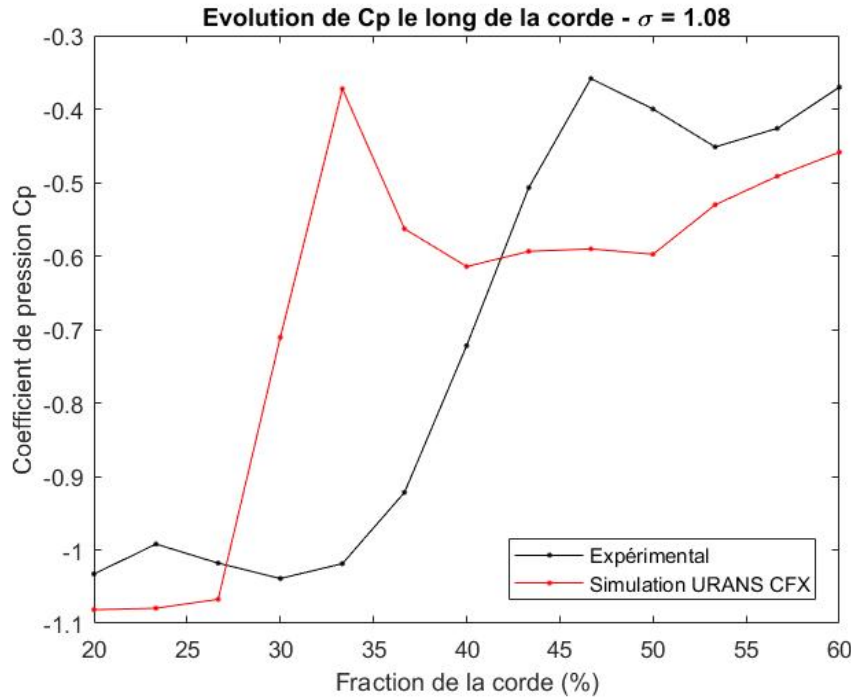


Figure 3.22 Evolution de C_p le long de l'extrados

On remarque ici que la méthode numérique permet de bien prédire la tendance en pression rencontrée au niveau de l'extrados, en revanche, elle est en décalage avec les résultats expérimentaux. En effet, alors que le maximum du coefficient est atteint numériquement au tiers de l'extrados, il est seulement atteint à la moitié du profil expérimentalement. Cet écart pourrait être expliqué par le schéma de calcul choisi, qui, comme précisé plus haut, est robuste mais peut introduire des erreurs numériques. Par ailleurs, les modélisations de la turbulence et de la cavitation qui ont été faites pourraient être à l'origine de ce décalage.

On notera que le nombre de Courant RMS est élevé. En effet, il vaut ici 742, mais sa réduction en diminuant le pas de temps impliquerait des coûts de calcul supplémentaires non nécessaires puisque les calculs sont stables.

CHAPITRE 4 ÉCHELLE MICROSCOPIQUE

Le modèle de Leclercq repose sur le calcul de l'énergie de cavitation des structures de vapeur, E_{cav} , dont la définition utilisée s'écrit comme suit :

$$E_{cav} = (p - p_{sat}) \cdot V_{vap} \quad (4.1)$$

Avec V_{vap} le volume de la structure cavitante considérée.

Les calculs nécessaires à l'obtention des valeurs de coefficient d'intensité d'érosion de cavitation sont présentés dans les paragraphes suivants.

4.1 Calcul de la puissance de cavitation

4.1.1 Présentation des équations du modèle

La puissance volumique de cavitation par cellule de fluide est déterminée à partir de l'expression de l'énergie de cavitation. On a alors, d'après les développements de l'auteur :

$$\frac{\psi}{V} = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dE_{cav}}{dt} = -(p - p_{sat}) \cdot \frac{d\alpha}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} \quad (4.2)$$

Ce qui a été simplifié en :

$$\frac{\psi}{V} = -(p - p_{sat}) \cdot \frac{\rho}{\rho_l - \rho_v} \cdot \nabla \cdot u \quad (4.3)$$

Où ψ est la puissance de cavitation et V le volume de la cellule fluide considérée.

Grâce à la possibilité offerte à l'utilisateur par CFD-Post, des variables ont été définies afin de calculer les valeurs de puissance volumique de cavitation à chacun des points du fluide. Ces valeurs, une fois exportées, serviront aux calculs suivants, nécessaires à la détermination du coefficient d'intensité de l'érosion de cavitation.

On notera que le choix d'utiliser le modèle inhomogène a été fait. Ainsi, la vitesse u de l'écoulement, prenant en compte ses deux phases n'est pas définie. Elle a donc été déterminée par pondération à partir des vitesses des phases liquide et vapeur, de la même manière que la masse volumique du mélange est définie dans les équations présentées dans la partie 2.1.

4.1.2 Exportation des données

L'exportation des données a été pensée de manière à traiter uniquement les valeurs pertinentes. Le choix de n'exporter, pour chaque pas de temps, que les valeurs de puissance volumique de cavitation supérieures à un certain seuil Θ a été fait. Ainsi, le nombre d'opérations ultérieures de post-traitement sera réduit. Ceci est justifié par le fait que les puissances de faible intensité ne sont pas dommageables pour le matériau de la surface solide.

Pour ce faire, un volume a été créé à l'aide de CFD-Post, contenant uniquement les points associés aux valeurs de puissance volumique de cavitation supérieures au seuil Θ .

On notera que l'influence sur les résultats de la valeur seuil Θ choisie sera discutée dans la partie 5.2.1.

4.2 Calcul de la puissance matérielle surfacique

4.2.1 Présentation des équations du modèle

La puissance matérielle surfacique est définie comme la puissance de cavitation qui atteindra effectivement la surface solide. Elle sera calculée dans un script Python à partir des données exportées plus tôt à l'aide de CFD-Post. Pour chaque pas de temps et chaque cellule j de la surface solide, elle est calculée comme :

$$\chi_j = \frac{1}{A_j} \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \sum_i \Omega_{ij} \cdot \psi_i \quad (4.4)$$

Où A_j est l'aire de la cellule j considérée et Ω_{ij} est l'angle solide associé à la cellule j et au point fluide i considérés. Par ailleurs, les points fluides i sont tels que :

$$\overrightarrow{O_j M_i} \cdot \vec{n}_j > 0 \quad (4.5)$$

Où O_j est le centre de la cellule considérée sur la surface solide, M_i le centre de la cellule fluide considérée et $\vec{n}_j$ la normale sortante de la cellule considérée sur la surface solide.

Cette condition permet par exemple de ne pas prendre en compte l'influence d'un point du fluide situé sur la partie supérieure du profil dans la considération des dégâts causés sur la partie inférieure de celui-ci, elle est schématisée à la figure 4.1.

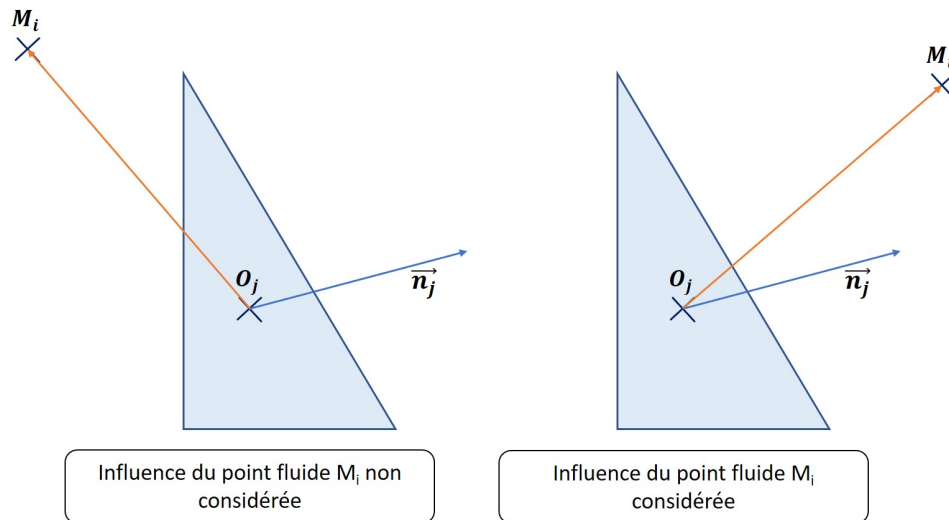


Figure 4.1 Condition de prise en compte des points fluides

4.2.2 Méthode de l'angle solide

La méthode de l'angle solide permet de déterminer l'influence d'un point source sur une surface donnée. L'angle solide est défini comme le rapport entre deux grandeurs. La première est l'aire de la surface de la sphère de centre O interceptée par le cône de sommet O et de base constituée de la surface étudiée. La seconde est le carré du rayon de la sphère. Dans notre cas, la sphère est choisie comme unitaire, l'angle solide se réduit donc à l'aire de la calotte sphérique présentée à la figure 4.2.

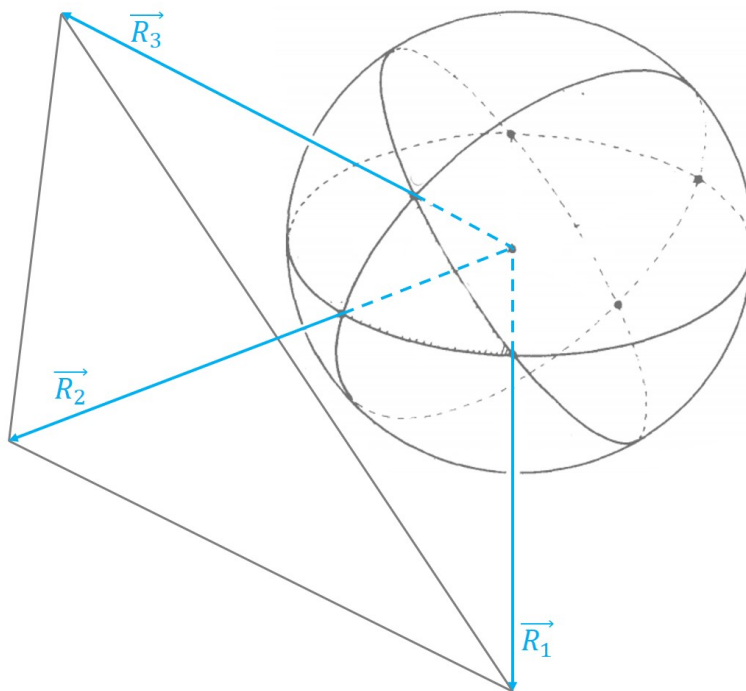


Figure 4.2 Schématisation angle solide

Cette méthode sera utilisée dans notre cas pour quantifier la manière dont la puissance de cavitation associée à un point fluide va atteindre la surface considérée. La formulation utilisée a été développée par Oosterom [61], pour une surface triangulaire.

Le maillage original visible à la figure 4.3 étant constitué de quadrangles, il convient alors de l'ajuster afin de pouvoir utiliser la mise en équation proposée. La triangulation nécessaire aux calculs conduit au maillage visible à la figure 4.4.

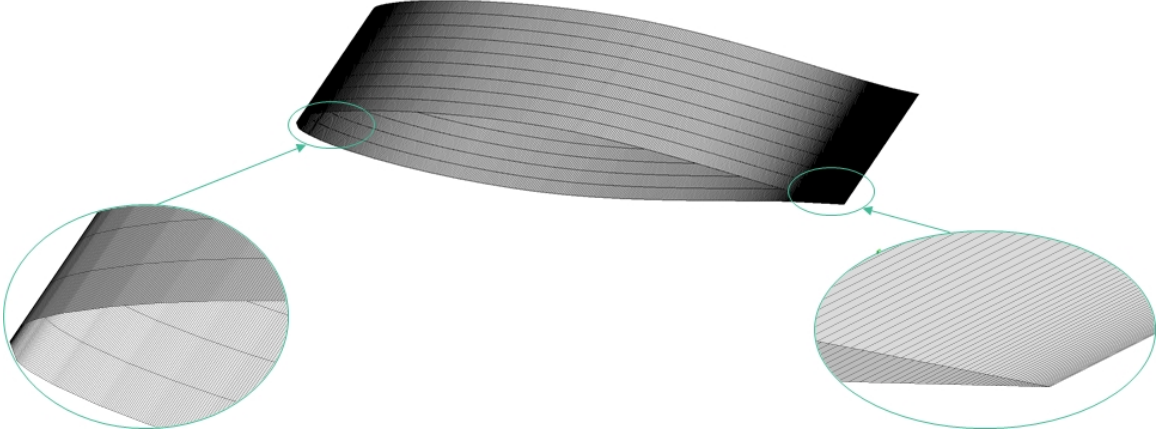


Figure 4.3 Maillage avant triangulation

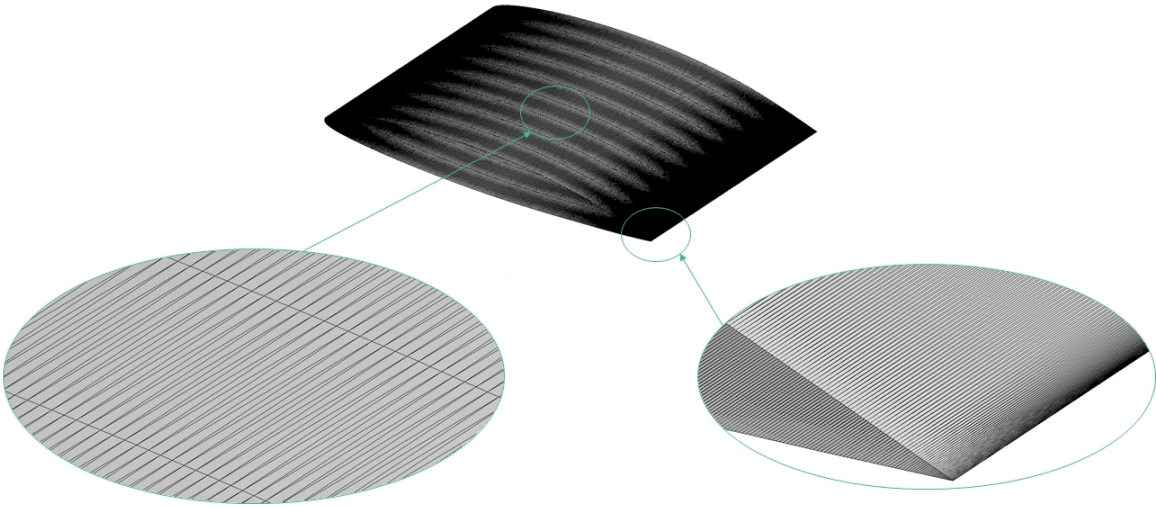


Figure 4.4 Maillage triangulé

La valeur de l'angle solide est associée à un couple constitué d'un triangle (relatif à l'indice j) de la surface solide et d'un point du fluide (relatif à l'indice i). Les notations utilisées sont celles détaillées à la figure 4.2. Le calcul de l'angle solide Ω_{ij} se fait alors de la manière suivante :

$$\Omega_{ij} = 2 \times \left| \text{Arctan} \left(\frac{\vec{R}_1 \cdot (\vec{R}_2 \wedge \vec{R}_3)}{\|\vec{R}_1\| \times \|\vec{R}_2\| \times \|\vec{R}_3\| + (\vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2) \times \|\vec{R}_3\| + (\vec{R}_1 \cdot \vec{R}_3) \times \|\vec{R}_2\| + (\vec{R}_2 \cdot \vec{R}_3) \times \|\vec{R}_1\|} \right) \right| \quad (4.6)$$

Afin de vérifier la pertinence des calculs effectués, un cas test a été mis en place. Il s'agira de s'intéresser à l'influence d'un point source sur les faces d'un cube de côté 2 dans lequel le point se trouve. Les résultats obtenus sont présentés à la figure 4.5 pour laquelle les coordonnées des points sources sont précisées dans le tableau 4.1.

Tableau 4.1 Cas test pour le calcul de l'angle solide - Coordonnées du point source

Cas d'étude	Coordonnées du point source
a)	$(0;0;0)$
b)	$(0.8;0;0)$
c)	$(0.8;0.8;0)$
d)	$(0.8;0.8;0.8)$

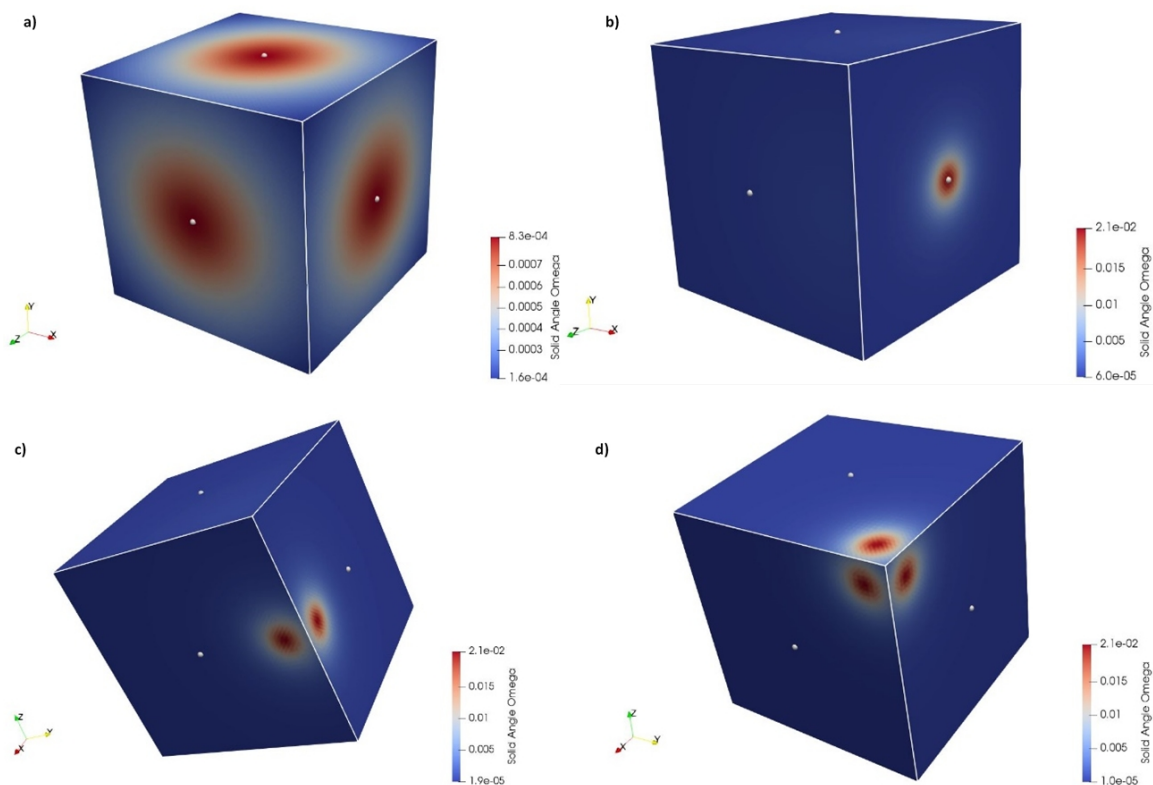


Figure 4.5 Cas test - Angle solide

On remarque que lorsque le point source est centré dans le cube, les valeurs d'angle solide sont parfaitement réparties sur ses six faces. Par ailleurs, les autres cas d'étude montrent que les valeurs d'angle solide sont plus grandes pour les zones des faces les plus proches du point source. Ces résultats étant les résultats attendus, la méthode pourra être utilisée pour effectuer les projections de puissance de cavitation sur la surface solide afin d'obtenir la puissance matérielle surfacique, quantité directement reliée au coefficient d'érosion.

4.2.3 Présentation des méthodes de calcul envisagées

L'étape de post-traitement mise en place grâce aux scripts Python implique un très grand nombre de données. En effet, il s'agit de considérer chaque couple composé d'un triangle de la surface solide et d'un point source situé dans le fluide, ce qui représente plusieurs millions de configurations par pas de temps pour le calcul de l'angle solide. Ainsi, il s'agit d'envisager des méthodes permettant de limiter le coût de ces opérations. Deux méthodes, permettant de traiter les données relatives à un pas de temps donné sont présentées ci-après.

Méthode matricielle

La méthode matricielle consiste à réécrire l'équation 4.4 de manière à remplacer notamment la somme par des opérations matricielles de type produits. Cette réécriture, pour un calcul plus efficace avec Python, se présente sous la forme suivante :

$$[\chi] = \frac{1}{4\pi} \cdot ([\Omega][\psi]) \times [\lambda] \quad (4.7)$$

Avec

$$\forall j \in \llbracket 1; n_t \rrbracket, \lambda_j = \frac{1}{A_j} \quad (4.8)$$

Où " $\times$ " fait référence à un produit terme à terme. $[\Omega]$ est une matrice de taille $n_t \times n_f$ composée des valeurs d'angle solide respectant la condition de l'équation 4.5 et associées à chaque couple fluide-solide, $[\psi]$ est de taille $n_f \times 1$ et composée des valeurs de puissance de cavitation associées à chaque point fluide et enfin, n_t et n_f sont respectivement le nombre de triangles dans le maillage de la surface solide et le nombre de points du fluide.

Les dimensions du cas étudié sont résumées, pour un pas de temps donné, dans le tableau 4.2, pour lequel $\Theta_1 = 3 \cdot 10^6 W/m^3$, $\Theta_2 = 5 \cdot 10^6 W/m^3$ et $\Theta_3 = 1 \cdot 10^7 W/m^3$.

La méthode mise en place numériquement a été schématisée à la figure 4.6.

Tableau 4.2 Dimensions du cas d'étude

Éléments du maillage	Nœuds du maillage	Triangles	Points fluides	Points fluides pour Θ_1	Points fluides pour Θ_2	Points fluides pour Θ_3
$1.4 \cdot 10^6$	$8.7 \cdot 10^5$	$2.3 \cdot 10^3$	$8.5 \cdot 10^5$	$2.3 \cdot 10^4$	$6.9 \cdot 10^3$	$3.7 \cdot 10^3$

Afin de réduire les temps de calculs, d'une durée d'un peu moins de 9h (avec CPU de type i7-3770), leur optimisation a été menée. La stratégie a consisté à paralléliser les calculs de manière à profiter des multiples CPU de la machine. Ceci est possible dans la mesure où les grandeurs calculées sont indépendantes d'un triangle à un autre. Pour ce faire, plutôt que de travailler avec des matrices de grandes dimensions, plusieurs matrices de dimensions plus petites sont utilisées, avant un rassemblement des résultats. En effet, les matrices $[\Omega]$ et $[\lambda]$ ont été divisées en autant de matrices qu'il y aura de flux de calculs lancés de manière simultanée. Ainsi, il y aura autant de matrices $[\chi]$. Les calculs matriciels ont alors lieu, pour chaque flux, sur un nombre de triangles réduit, puis le regroupement de tous les triangles permet l'obtention de la matrice $[\chi]$ finale recherchée.

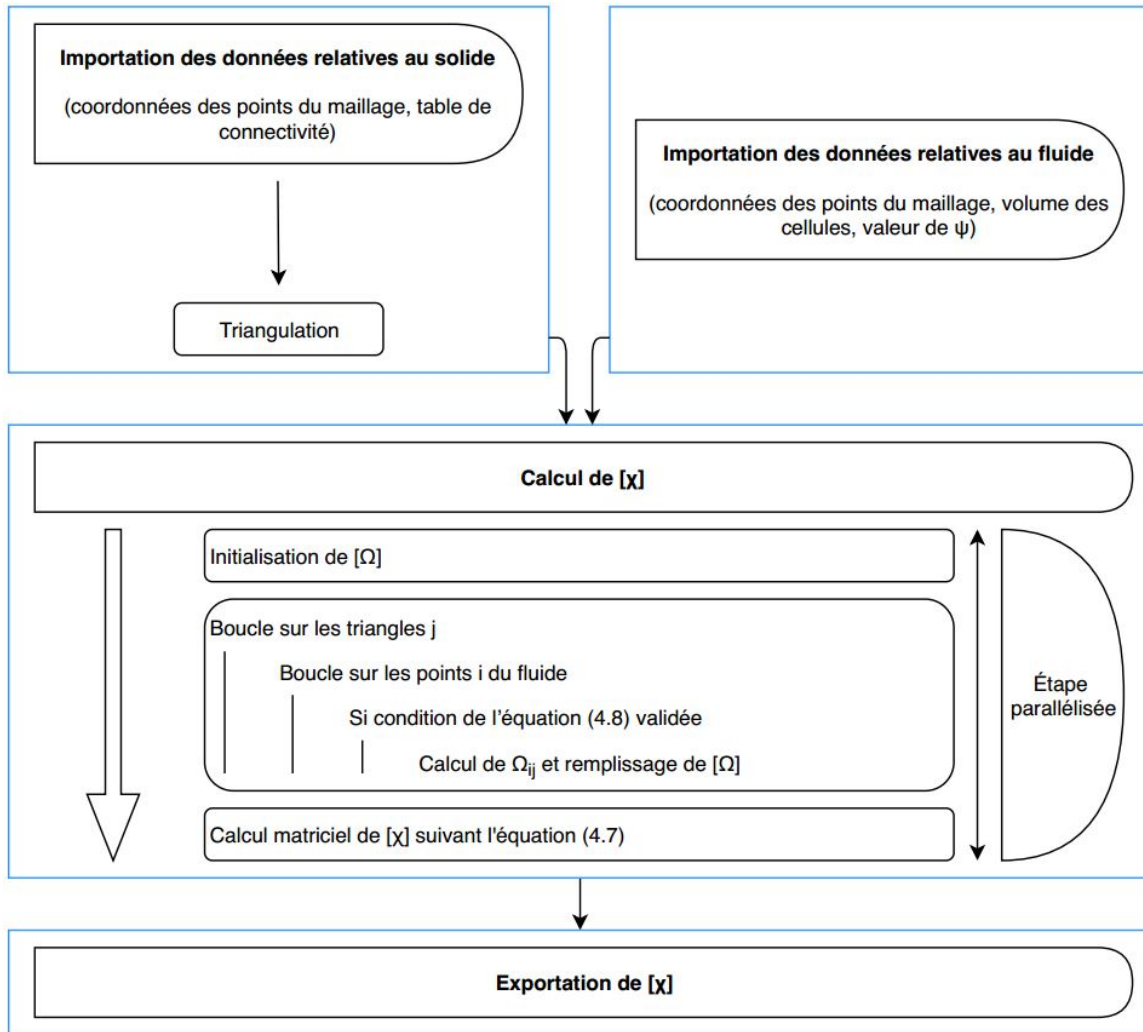


Figure 4.6 Schématisation de la mise en place numérique de la méthode matricielle

Une étude de l'influence du nombre de flux choisi a été menée sur une machine à 4 cœurs. Les résultats sont présentés sur la figure 4.7.

On peut remarquer qu'à partir d'un certain nombre de flux, 4 dans notre cas, multiplier les opérations de parallélisation s'avère inutile. En effet, à partir de 4 flux utilisés, la durée des calculs reste stable, à un peu plus de 2h. Ainsi, il n'est pas nécessaire de faire appel à plus de flux qu'il n'y a de cœurs dans la machine pour les calculs. Pour la suite du travail, un nombre de flux parallèles de 4 sera conservé pour le calcul de la puissance matérielle surfacique.

On notera cependant qu'environ 99% du temps de calcul est réservé au remplissage de la matrice $[\Omega]$, à l'aide d'une double boucle. Il pourrait donc être intéressant d'employer une méthode de calcul qui ne ferait pas intervenir celle-ci.

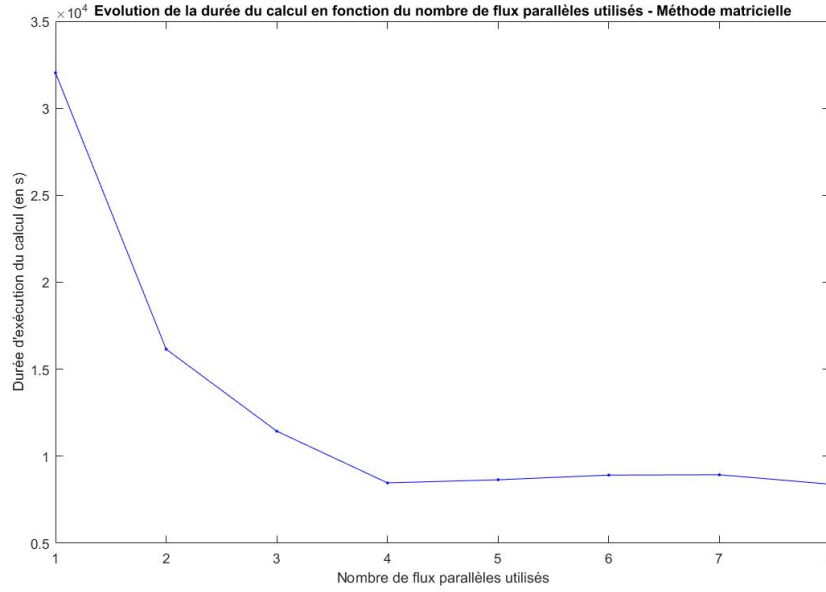


Figure 4.7 Influence du nombre de flux parallèles utilisés sur la durée du calcul

Méthode vectorielle

Plutôt que de considérer de manière simultanée l'ensemble des couples triangle-point fluide, il s'agira là de s'intéresser à chaque point fluide l'un après l'autre. Pour ce faire, un point fluide i est sélectionné, puis les valeurs de Ω_{ij} associées aux couples constitués de ce point ainsi que de tous les triangles sont calculés. Ensuite, les valeurs de χ_{ij} correspondant à ce point sont calculées pour chaque triangle. Puis l'opération qui permet d'obtenir Ω_i et χ_i est répétée pour chaque point fluide, et une accumulation de toutes les valeurs de χ_{ij} est effectuée, afin de déterminer l'influence de tous les points fluides sources sur l'ensemble des triangles.

Les grandeurs considérées sont donc $[\Omega]$ de taille $n_t \times 1$, $[\psi]$ de taille $n_t \times 1$ et $[\lambda]$ de taille $n_t \times 1$. Ceci pour l'obtention de $[\chi]$ de taille $n_t \times 1$. Cette stratégie permet donc également de sauver de l'espace mémoire puisqu'il n'est alors plus nécessaire de conserver toutes les valeurs Ω_{ij} associées à tous les couples, mais seulement celles utiles au calcul en cours.

La méthode mise en place numériquement a été schématisée à la figure 4.8.

Tout comme effectué avec la méthode matricielle, une parallélisation des calculs a été mise en place afin de réduire le temps d'exécution de ce post-traitement. Les résultats présentant l'influence du nombre de flux utilisés sur la durée des calculs sont visibles à la figure 4.9.

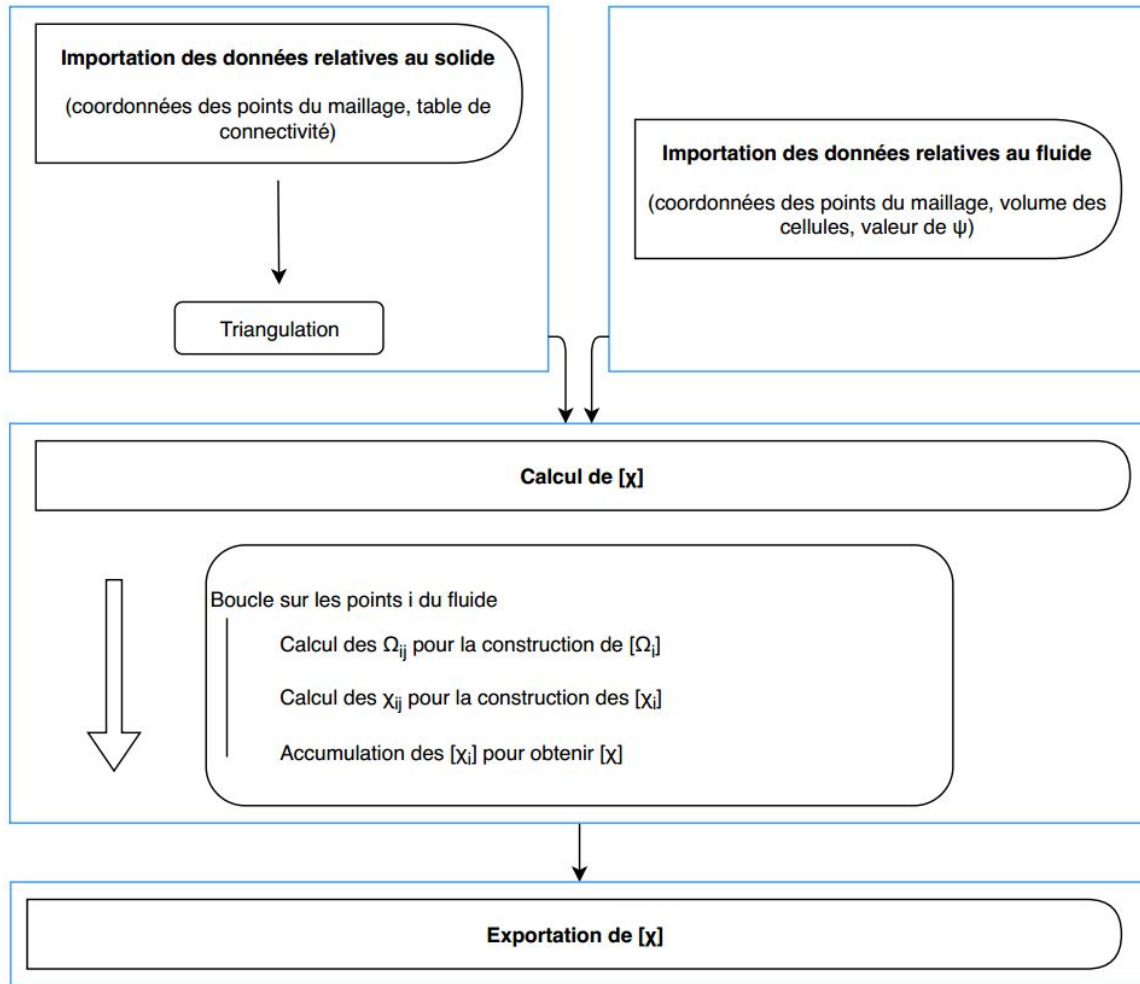


Figure 4.8 Schématisation de la mise en place numérique de la méthode vectorielle

On remarque d'une part que la méthode vectorielle est effectivement plus intéressante que la méthode matricielle en termes de temps de calculs. Ces derniers sont résumés dans le tableau 4.3. C'est également une méthode plus avantageuse d'un point de vue de la mémoire réquisitionnée puisqu'elle ne fait pas intervenir de matrices à stocker mais uniquement des vecteurs.

D'autre part, tout comme pour la méthode matricielle, il n'est pas nécessaire de réquisitionner plus de 4 flux parallèles pour les calculs, le temps d'exécution restant stable au-delà de ce nombre.

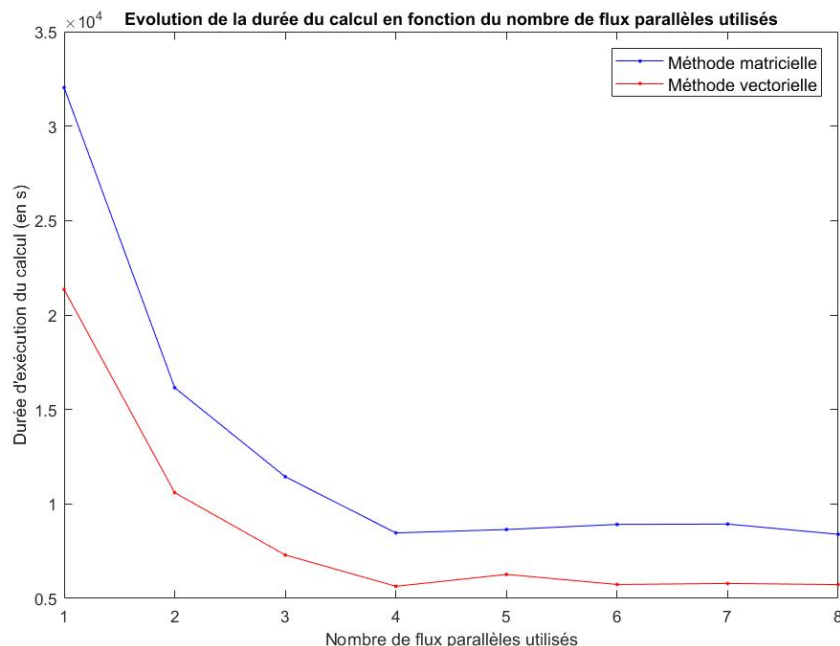


Figure 4.9 Influence du nombre de flux parallèles utilisés sur la durée du calcul

Tableau 4.3 Comparaison des méthodes de calcul

Méthode	Durée des calculs	Durée des calculs après parallélisation
Méthode matricielle	9h	2h20
Méthode vectorielle	6h	1h30

Limite des méthodes proposées

Une limite des méthodes présentées réside dans le fait que les pas de temps sont traités de manière successive et indépendante, ce qui conduit à répéter un très grand nombre d'opérations (comme le calcul de l'angle solide pour un couple donné). Ceci pourrait être évité si, plutôt que d'exporter un fichier par pas de temps, un fichier global, qui permettrait de traiter tous les points fluides d'intérêt pouvait être créé. Cette démarche a été envisagée. Il s'agit dans ce cas de calculer la puissance volumique de cavitation aux points fluides au cours des simulations URANS, grâce à la définition de variables dans CFX-Pre. Ainsi, son accumulation aux points peut être faite en cours de calcul, et il s'agira finalement d'exporter, via CFD-Post, uniquement les valeurs dépassant un nouveau seuil. Ceci conduit à une réduction conséquente de la durée du post-traitement, qui ne nécessite plus 1h30 par pas de temps considéré mais autant de temps pour l'intégralité de la période étudiée.

Ce processus doit encore être ajusté, la définition des variables étant compliquée par l'utilisation du modèle inhomogène.

4.3 Calcul du coefficient d'intensité d'érosion de cavitation

4.3.1 Présentation des équations du modèle

Le coefficient d'intensité d'érosion de cavitation est défini comme une moyenne temporelle des puissances matérielles surfaciques par unité de surface considérée. Ainsi, il s'écrit, pour un triangle j donné :

$$I_{cav,j} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N \chi_j \quad (4.9)$$

Où N correspond au nombre de pas de temps étudié.

4.3.2 Exportation des données

Une fois calculées, les valeurs de coefficient d'érosion d'intensité de cavitation sont exportées dans un fichier CSV qu'il sera possible d'importer dans CFD-Post pour une visualisation des résultats.

CHAPITRE 5 VISUALISATION DES RÉSULTATS

Les valeurs d'intensité d'érosion de cavitation obtenues en suivant les développements présentés précédemment seront visualisées grâce à l'outil CFD-Post.

5.1 Interpolation des résultats

Les valeurs de coefficient d'érosion ont été calculées au centre des triangles constitutifs du maillage de la surface solide. Cependant, l'utilisation de CFD-Post pour une visualisation des résultats implique d'importer les données aux nœuds du maillage plutôt qu'au centre des mailles. Ainsi, il est nécessaire d'effectuer une interpolation des valeurs au centre des faces pour obtenir les valeurs aux nœuds, ceci est mis en place à l'aide d'un script Python.

La méthode utilisée consiste à définir la valeur à un nœud comme étant la somme des valeurs associées aux centres des faces reliées au nœud d'intérêt, pondérée par un coefficient relatif aux distances entre le nœud et les centres. Ainsi, plus un point est loin du nœud considéré, moins la valeur d'intensité associée pèsera dans le calcul. Par exemple, si l'interpolation devait être faite avec le point central de la figure 5.1, les valeurs au centre des six mailles qui lui sont reliées seraient prises en compte dans le calcul, avec une part plus importante pour les centres les plus proches.

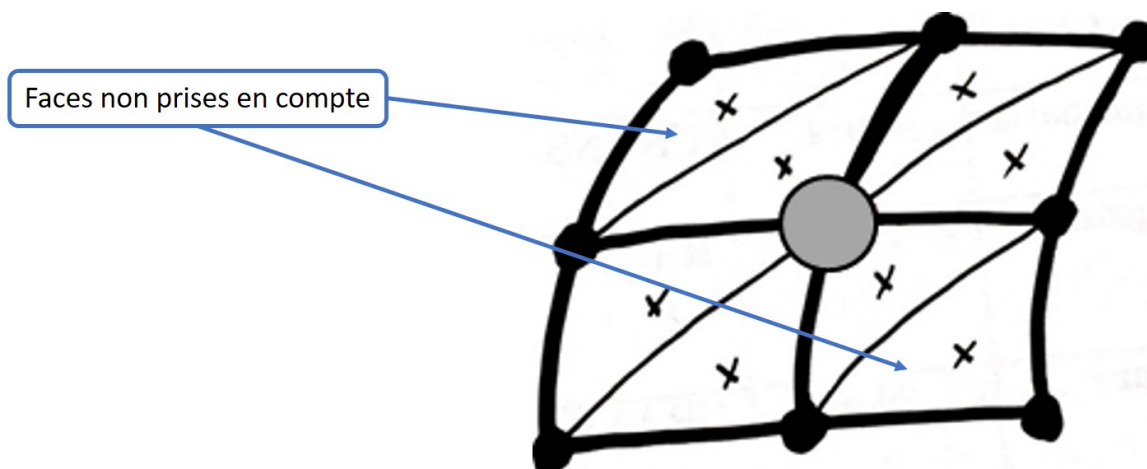


Figure 5.1 Schéma de la géométrie d'interpolation pour un nœud

Le calcul effectué s'écrit de la manière suivante :

$$I_{cav,noeud} = \frac{1}{(n-1) \cdot L} \times \sum_{i=1}^n (L - L_i) \cdot I_{cav,i} \quad (5.1)$$

Où n est le nombre de faces reliées au nœud considéré, L_i est la distance entre le nœud considéré et le centre de la face i , et L est tel que :

$$L = \sum_{i=1}^n L_i \quad (5.2)$$

Par ailleurs, on vérifie bien que la pondération est correctement construite :

$$\frac{1}{(n-1) \cdot L} \times \sum_{i=1}^n (L - L_i) = \frac{(n \cdot L) - \sum_{i=1}^n L_i}{(n-1) \cdot L} = \frac{(n \cdot L) - L}{(n-1) \cdot L} = \frac{(n-1) \cdot L}{(n-1) \cdot L} = 1 \quad (5.3)$$

Grâce à cette méthode, les valeurs d'intensité d'érosion de cavitation précédemment calculées au centre des mailles de la surface solide sont définies aux nœuds, nous permettant ainsi d'utiliser CFD-Post pour la visualisation des résultats.

5.2 Visualisation des résultats avec CFD-Post

5.2.1 Influence de la valeur seuil

Comme précisé plus haut, la valeur seuil Θ est un paramètre d'exportation des valeurs de puissance volumique de cavitation qui détermine la quantité de données qui seront post-traitées à chaque pas de temps. Dans cette partie il s'agira de comprendre l'influence de Θ sur les résultats de coefficient d'intensité d'érosion de cavitation obtenus.

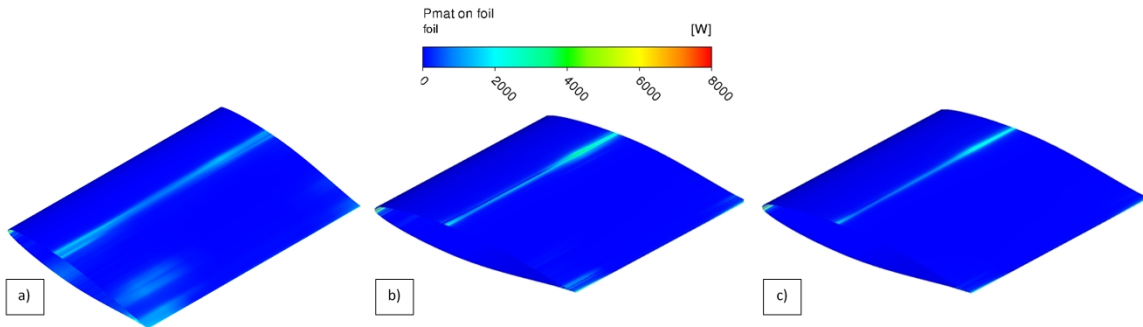


Figure 5.2 Puissance matérielle - a) $\Theta = 3 \cdot 10^6 W/m^3$, b) $\Theta = 5 \cdot 10^6 W/m^3$ c) $\Theta = 1 \cdot 10^7 W/m^3$

Comme attendu, on remarque que plus la valeur de Θ retenue est élevée, plus la prédiction est localisée, centrée sur les zones les plus touchées par le phénomène. Ceci est dû au fait que plus Θ est grand, moins nombreuses sont les sources d'érosion de cavitation prises en compte. A titre indicatif, on précise que la valeur seuil $\Theta = 5 \cdot 10^6 \text{ W/m}^3$ est mille fois plus petite que le maximum de la puissance volumique de cavitation dans le domaine. Il revient à l'utilisateur le choix d'étalonner cette grandeur, qui peut donc être utilisée comme un filtre, permettant de sélectionner dans quelle mesure la prédiction obtenue ciblera les zones à risque. On voit dans la figure ci-dessus qu'augmenter la valeur seuil permet de se concentrer uniquement sur une zone plus réduite, celle de la fermeture de la poche, habituellement soulignée comme étant la zone la plus endommagée par l'érosion de cavitation. Si le but de l'étude est de mettre en évidence uniquement les zones les plus critiques, une grande valeur seuil sera suffisante, ce qui aura également l'avantage de réduire les temps de calcul puisque moins de points sources seront considérés.

5.2.2 Comparaison avec les résultats de Leclercq

Les résultats concernant le coefficient d'intensité d'érosion de cavitation ont été présentés dans la partie précédente. Ceux-ci peuvent être mis en parallèle avec les résultats obtenus par Leclercq. La comparaison est présentée à la figure 5.3.

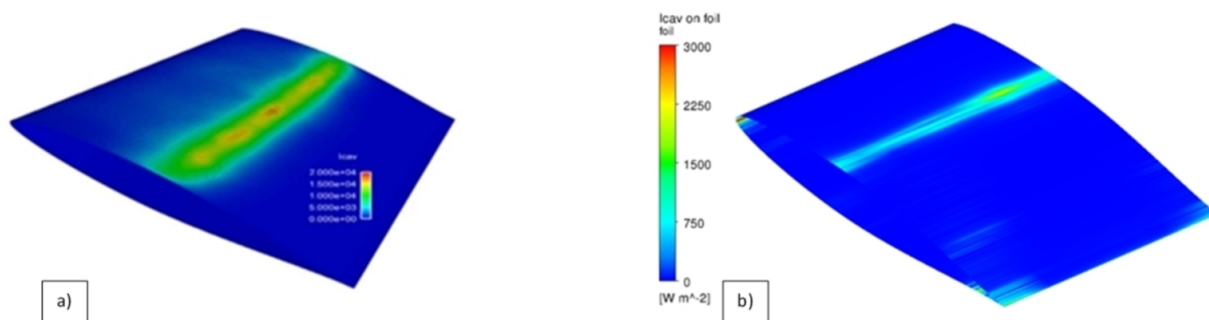


Figure 5.3 Coefficient d'intensité d'érosion de cavitation - a) Résultats de Leclercq [4], b) Nos résultats pour $\Theta = 5 \cdot 10^6$

On remarque que, de manière cohérente avec les observations de Leclercq, la zone de fermeture de la poche est identifiée par le modèle comme une zone où l'érosion de cavitation est présente. En revanche, nos résultats présentent également une petite zone au niveau du bord d'attaque ainsi qu'une au bord de fuite comme étant à risque, ce qui n'était pas mis en avant dans les travaux de Leclercq. Ceci provient du calcul de puissance volumique de cavitation.

En effet, les zones soulignées correspondent aux zones les plus proches de grandes sources de puissance volumique de cavitation, ce qui est visible pour un pas de temps donné à la figure 5.4.

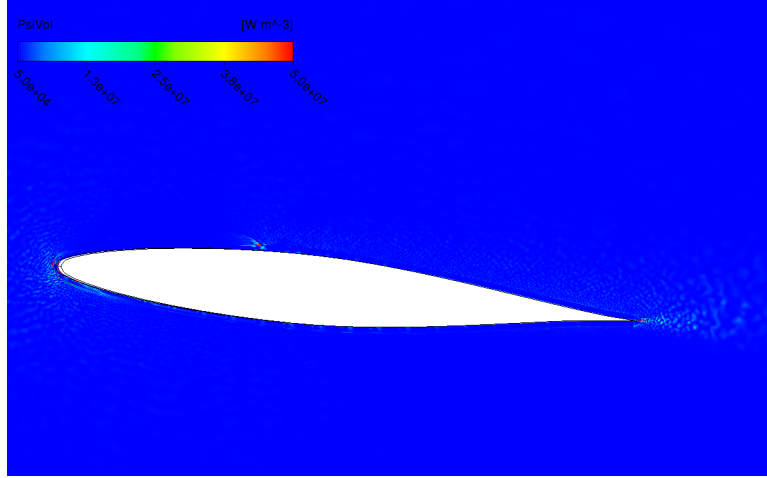


Figure 5.4 Puissance volumique de cavitation

Ceci s'est traduit, de par l'utilisation de la méthode de l'angle solide, par de grandes valeurs de coefficient d'intensité d'érosion aux endroits mentionnés. Afin de comprendre pourquoi de si grandes valeurs de puissance volumique de cavitation sont rencontrées au niveau du bord d'attaque et du bord de fuite, on étudiera l'influence de chacun des termes utiles à son calcul. On rappelle que la puissance volumique de cavitation s'écrit comme :

$$\frac{\psi}{V} = -(p - p_{sat}) \cdot \frac{\rho}{\rho_l - \rho_v} \cdot \nabla \cdot u \quad (5.4)$$

Premièrement, le terme de masse volumique est étudié. Le champ est visible à la figure 5.5. On constate que le champ observé est comme attendu : il vaut environ 1 dans la poche de cavitation et est compris entre 0 et 1 en dehors, sans singularités au niveau des bords d'attaque et de fuite.

Ensuite, le terme de pression est étudié, il est visible à la figure 5.6. De la même manière, le résultat obtenu est cohérent avec le résultat attendu.

Alors, sans surprise, le produit des termes de pression et de masse volumique est également pertinent, comme le montre la figure 5.7.

Il s'agit donc de s'intéresser au terme de divergence de vitesse, présenté à la figure 5.8.

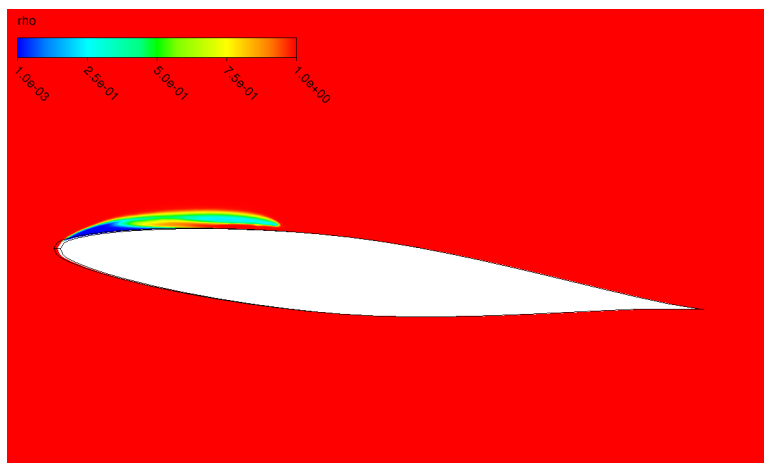


Figure 5.5 Terme de masse volumique

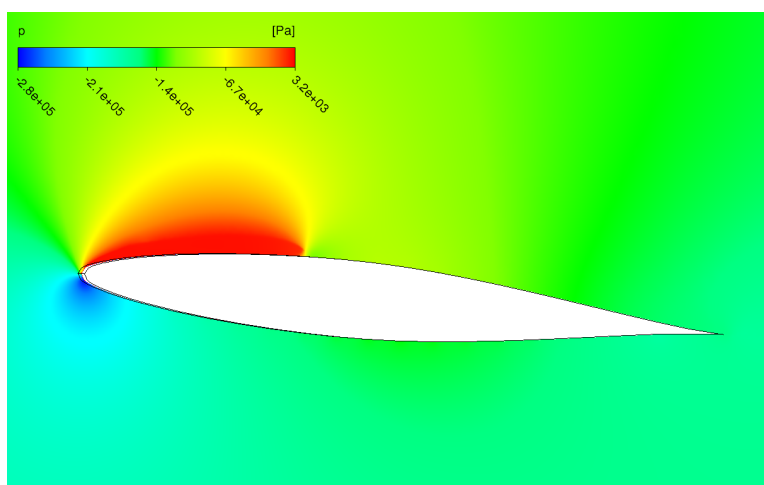


Figure 5.6 Terme de pression

On constate ici qu'au-delà du fait que le contour de la poche soit mis en avant, les zones voisines des bords d'attaque et de fuite sont également soulignées. Ceci s'explique par le fait que ce sont des régions dans lesquelles de grands gradients spatiaux de vitesse sont observés. En effet, la vitesse est quasi nulle au sein de la poche mais non nulle en dehors, d'où le marquage de son contour. De même, elle est maximale au niveau du bord d'attaque et plus faible ailleurs, d'où un important gradient. Enfin, la condition de non-glissement à la paroi du profil y impose une vitesse nulle, ce qui se ressent au niveau du bord de fuite, proche d'un secteur où la vitesse est différente de zéro.

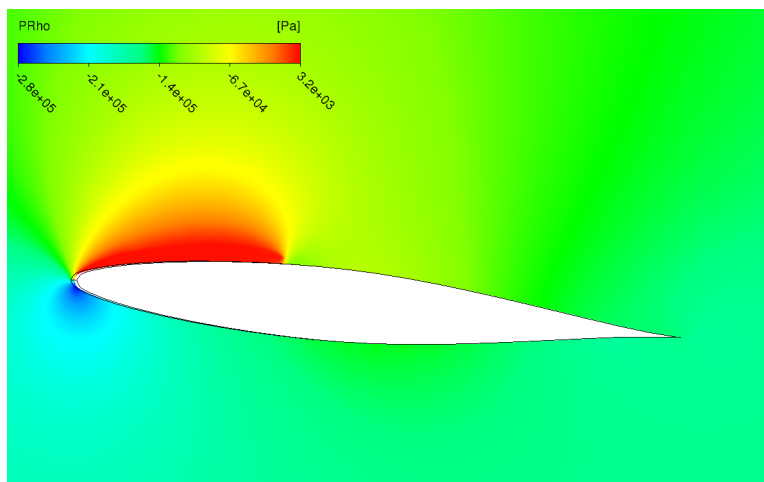


Figure 5.7 Produit des termes de masse volumique et de pression

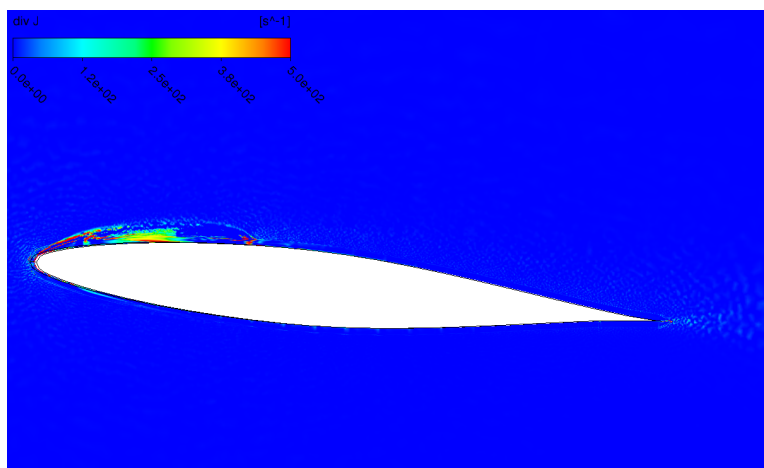


Figure 5.8 Terme de divergence de vitesse

Ainsi, le fait que les zones au niveau des bords d'attaque et de fuite soient mises en avant trouve son origine dans la mise en équation même du modèle, faisant intervenir la divergence de la vitesse de l'écoulement. Ceci peut néanmoins être limité par l'utilisation d'une valeur seuil, comme mentionné plus haut.

CHAPITRE 6 CONCLUSION

6.1 Synthèse des travaux

Il a été proposé, dans le présent document, une stratégie de prédiction de l'érosion de la surface d'un profil soumis à la cavitation. Celle-ci est basée sur une approche multi-échelles développée dans le modèle de Leclercq.

La première échelle, macroscopique, est au niveau de l'écoulement tandis que la seconde, microscopique est située à l'échelle des bulles. Les calculs de l'échelle macroscopique sont conduits à l'aide du logiciel commercial CFX et permettent l'obtention des champs de grandeurs telles que la pression ou la vitesse de l'écoulement, qui sont indispensables à la mise en place des calculs relatifs à l'échelle microscopique. Ces derniers sont effectués dans un script Python, dont la finalité est de fournir les valeurs du coefficient d'intensité d'érosion de cavitation. Finalement, ces résultats sont visualisés dans CFD-Post, afin de mettre en lumière les zones du profil les plus susceptibles d'être touchées par le phénomène. Ce processus a été résumé dans la figure 6.1.

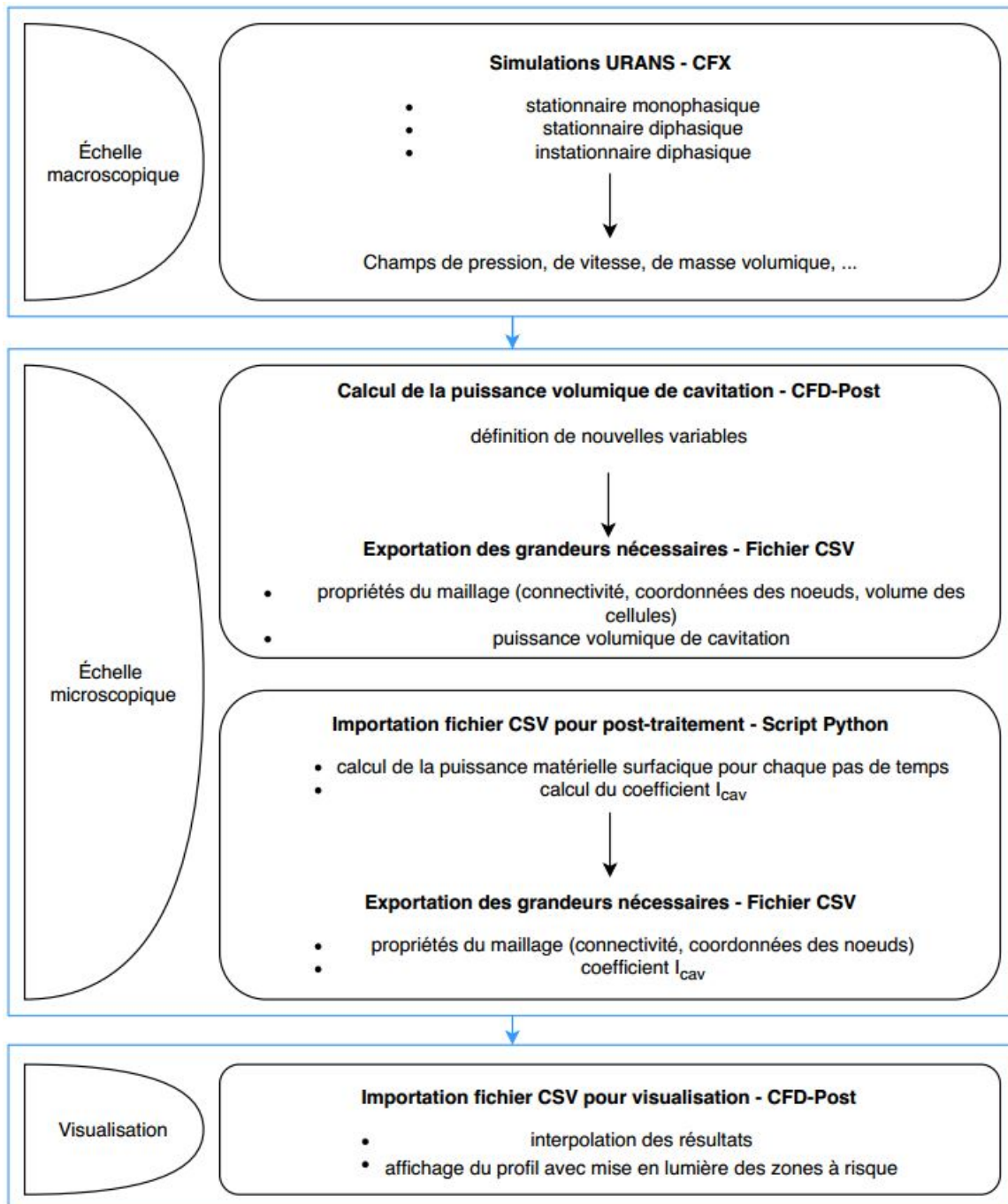


Figure 6.1 Schéma de synthèse des travaux

6.2 Limitations de la solution proposée

Les résultats obtenus grâce à cette méthode permettent une relativement bonne prédiction de l'érosion de cavitation. En effet, l'implémentation du modèle a permis d'obtenir des résultats semblables aux résultats expérimentaux obtenus avec le profil à l'étude. On notera cependant que certaines améliorations doivent être apportées, notamment pour mieux appréhender le phénomène au niveau des bords d'attaque et de fuite. Par ailleurs, une des difficultés majeure réside dans le fait que le post-traitement est une opération coûteuse, pouvant impliquer de grandes durées d'exécution des calculs.

6.3 Améliorations futures

Comme visualisé lors de la comparaison avec les résultats de Leclercq, les résultats obtenus ne sont pas parfaitement en adéquation avec les résultats attendus. Plusieurs pistes peuvent être envisagées afin d'améliorer la prédiction.

Premièrement, un plus grand nombre de pas de temps pourrait être étudié, afin d'obtenir une moyenne temporelle des puissances matérielles surfaciques plus réaliste, et donc un coefficient d'érosion de cavitation plus pertinent. Ceci impliquerait une nouvelle fois des calculs supplémentaires.

Par ailleurs, il s'agit de trouver un équilibre entre la finesse du maillage et celle des pas de temps caractéristiques des simulations instationnaires utilisés. En effet, comme déjà mentionné dans la partie 3.2.2, les nombres de Courant rencontrés sont élevés. Utiliser des pas de temps plus fins permettrait de les réduire. Ainsi, une meilleure stabilité serait assurée, ce qui pourrait permettre d'utiliser un schéma de calcul de meilleure résolution. Cependant, cette démarche est rendue difficile par le fait que le modèle inhomogène est moins robuste que le modèle homogène. Par ailleurs, afin de conserver des résultats indépendants du maillage et une localisation précise des dégâts attendus à la surface du profil, un maillage fin est indispensable, ce qui contraint la réduction du nombre de Courant. Il s'agit donc d'optimiser ce jeu de paramètres afin d'améliorer les résultats obtenus tout en conservant des temps de calcul raisonnables, dans le but d'atteindre des résultats plus proches des résultats attendus. Par ailleurs, il s'agirait d'étudier l'influence des modèles de cavitation et de turbulence sur les résultats obtenus. Les écarts par rapport aux données de référence pourraient être en partie expliqués par le fait que les modélisations ne sont pas suffisamment précises.

Enfin, il pourrait être intéressant de développer de manière plus complète la méthode consistant à effectuer l'accumulation des puissances volumiques de cavitation au cours des simulations URANS pour un gain de temps considérable.

RÉFÉRENCES

- [1] X. Escaler, E. Egusquiza, M. Farhat, F. Avellan et M. Coussirat, “Detection of cavitation in hydraulic turbines,” *Mechanical systems and signal processing*, vol. 20, n°. 4, p. 983–1007, 2006.
- [2] P. Kumar et R. Saini, “Study of cavitation in hydro turbines—a review,” *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 14, n°. 1, p. 374–383, 2010.
- [3] J.-B. Leroux, O. Coutier-Delgosha et J. A. Astolfi, “A joint experimental and numerical study of mechanisms associated to instability of partial cavitation on two-dimensional hydrofoil,” *Physics of fluids*, vol. 17, n°. 5, p. 052101, 2005.
- [4] C. Leclercq, A. Archer, R. Fortes-Patella et F. Cerru, “Numerical cavitation intensity on a hydrofoil for 3d homogeneous unsteady viscous flows,” *International Journal of Fluid Machinery and Systems*, vol. 10, n°. 3, p. 254–263, 2017.
- [5] Gouvernement du Québec. (2011) Production d’électricité québec. [En ligne]. Disponible : <https://mern.gouv.qc.ca/energie/statistiques/statistiques-production-electricite.jsp>
- [6] S. F. Pineda Rondon, “Numerical prediction of cavitation erosion,” Thèse de doctorat, Lyon, 2017.
- [7] S. Fujikawa et T. Akamatsu, “Experimental investigations of cavitation bubble collapse by a water shock tube,” *Bulletin of JSME*, vol. 21, n°. 152, p. 223–230, 1978.
- [8] E. Johnsen et T. Colonius, “Numerical simulations of non-spherical bubble collapse,” *Journal of fluid mechanics*, vol. 629, p. 231–262, 2009.
- [9] K.-H. Kim, G. Chahine, J.-P. Franc et A. Karimi, *Advanced experimental and numerical techniques for cavitation erosion prediction*. Springer, 2014, vol. 106.
- [10] A. Vogel, W. Lauterborn et R. Timm, “Optical and acoustic investigations of the dynamics of laser-produced cavitation bubbles near a solid boundary,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 206, p. 299–338, 1989.
- [11] J.-P. Franc et J.-M. Michel, *Fundamentals of cavitation*. Springer Science & Business Media, 2006, vol. 76.
- [12] J.-L. Reboud, B. Stutz et O. Coutier, “Two phase flow structure of cavitation : experiment and modeling of unsteady effects,” dans *3rd International Symposium on Cavitation CAV1998, Grenoble, France*, vol. 26, 1998.

- [13] I. SAS IP. (2018) Two equation turbulence models. [En ligne]. Disponible : https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/cfx_thry/i1302321.html#i1302649
- [14] ——. (2018) Scale-adaptive simulation theory. [En ligne]. Disponible : https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/17.0/en-us/help/cfx_thry/thry_turb_sas.html
- [15] E. Edom, “Etude des modèles de cavitation pour des écoulements sur un profil naca66 avec openfoam,” Mémoire de maîtrise, Ecole Polytechnique de Montréal, 2017.
- [16] I. SAS IP. (2018) Cavitation model. [En ligne]. Disponible : https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/cfx_thry/cfxMultInteCavi.html
- [17] R. Singh, S. Tiwari et S. K. Mishra, “Cavitation erosion in hydraulic turbine components and mitigation by coatings : current status and future needs,” *Journal of materials engineering and performance*, vol. 21, n°. 7, p. 1539–1551, 2012.
- [18] H. Soyama, H. Kumano et M. Saka, “A new parameter to predict cavitation erosion,” <http://resolver.caltech.edu/cav2001:sessionA3.002>, 2001.
- [19] T. Okada, Y. Iwai, S. Hattori et N. Tanimura, “Relation between impact load and the damage produced by cavitation bubble collapse,” *Wear*, vol. 184, n°. 2, p. 231–239, 1995.
- [20] J.-P. Franc, M. Riondet, A. Karimi et G. L. Chahine, “Impact load measurements in an erosive cavitating flow,” *Journal of Fluids Engineering*, vol. 133, n°. 12, p. 121301, 2011.
- [21] S. Hattori, T. Hirose et K. Sugiyama, “Prediction method for cavitation erosion based on measurement of bubble collapse impact loads,” *Wear*, vol. 269, n°. 7-8, p. 507–514, 2010.
- [22] H. Kato, A. Konno, M. Maeda et H. Yamaguchi, “Possibility of quantitative prediction of cavitation erosion without model test,” *Journal of fluids engineering*, vol. 118, n°. 3, p. 582–588, 1996.
- [23] A. Presas, Y. Luo, D. Vantelin, M. Egusquiza, Z. Wang, C. Valero et E. Egusquiza, “Detection of erosive cavitation on hydraulic turbines through demodulation analysis,” 2018.
- [24] M. Dular, B. Stoffel et B. Širok, “Development of a cavitation erosion model,” *Wear*, vol. 261, n°. 5-6, p. 642–655, 2006.
- [25] F. Pereira, “Prédiction de l’érosion de cavitation : approche énergétique,” *These de doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne*, 1997.
- [26] C. Pătrășcoiu, “New analytical cavitation erosion models,” *WSEAS Transactions on Mathematics*, n°. 8, 2008.
- [27] M. Szkodo, “Mathematical description and evaluation of cavitation erosion resistance of materials,” *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 164, p. 1631–1636, 2005.

- [28] B. Gireń et J. Frączak, “Phenomenological prediction tool for cavitation erosion fed with the international cavitation erosion test results,” *Wear*, vol. 364, p. 1–9, 2016.
- [29] Chatenet, Gagnon, Tõn-Thât, Fouladirad, Remy et Tahan, “Stochastic modelling of cavitation erosion in francis runner,” 2018.
- [30] Taillon, Onishi, Mineshima et Miyagawa, “Statistical analysis of cavitation erosion impacts in a vibratory apparatus with copulas,” 2018.
- [31] J. B. Keller et I. I. Kolodner, “Damping of underwater explosion bubble oscillations,” *Journal of applied physics*, vol. 27, n^o. 10, p. 1152–1161, 1956.
- [32] R. Fortes Patella, G. Challier, J.-L. Reboud et A. Archer, “Cavitation erosion mechanism : Numerical simulations of the interaction between pressure waves and solid boundaries,” <http://resolver.caltech.edu/cav2001:sessionA3.006>, 2001.
- [33] R. F. Patella et J.-L. Reboud, “A new approach to evaluate the cavitation erosion power,” *Journal of fluids engineering*, vol. 120, n^o. 2, p. 335–344, 1998.
- [34] K. Okuda et T. Ikohagi, “Numerical simulation of collapsing behavior of bubble clouds,” *Trans. JSME Ser. B*, vol. 62, n^o. 603, p. 3792–3797, 1996.
- [35] Y. Iga, M. Nohmi, A. Goto, B. R. Shin et T. Ikohagi, “Numerical study of sheet cavitation breakoff phenomenon on a cascade hydrofoil,” *Journal of Fluids Engineering*, vol. 125, n^o. 4, p. 643–651, 2003.
- [36] K. Yasui, “Variation of liquid temperature at bubble wall near the sonoluminescence threshold,” *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 65, n^o. 9, p. 2830–2840, 1996.
- [37] N. Ochiai, Y. Iga, M. Nohmi et T. Ikohagi, “Numerical prediction of cavitation erosion in cavitating flow,” 2009.
- [38] —, “Study of quantitative numerical prediction of cavitation erosion in cavitating flow,” *Journal of Fluids Engineering*, vol. 135, n^o. 1, p. 011302, 2013.
- [39] L. Krumenacker, R. Fortes-Patella et A. Archer, “Numerical estimation of cavitation intensity,” dans *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, vol. 22, n^o. 5. IOP Publishing, 2014, p. 052014.
- [40] L. Krumenacker, “Contribution à la prévision de l’érosion de cavitation à partir de simulations numériques : proposition d’un modèle à deux échelles pour l’estimation du chargement imposé en paroi par le fluide,” Thèse de doctorat, Grenoble Alpes, 2015.
- [41] G. Bergeles, J. Li, L. Wang, F. Koukouvini et M. Gavaises, “An erosion aggressiveness index (eai) based on pressure load estimation due to bubble collapse in cavitating flows within the rans solvers,” *SAE International Journal of Engines*, vol. 8, n^o. 2015-24-2465, p. 2276–2284, 2015.

- [42] Z.-r. Li, M. Pourquie et T. van Terwisga, “Assessment of cavitation erosion with a urans method,” *Journal of Fluids Engineering*, vol. 136, n°. 4, p. 041101, 2014.
- [43] M. S. Mihatsch, S. J. Schmidt, M. Thalhamer et N. A. Adams, “Numerical prediction of erosive collapse events in unsteady compressible cavitating flows,” dans *MARINE 2011, IV International Conference on Computational Methods in Marine Engineering*. Springer, 2013, p. 187–198.
- [44] M. Nohmi, T. Ikohagi et Y. Iga, “Numerical prediction method of cavitation erosion,” dans *ASME 2008 Fluids Engineering Division Summer Meeting collocated with the Heat Transfer, Energy Sustainability, and 3rd Energy Nanotechnology Conferences*. American Society of Mechanical Engineers, 2008, p. 1139–1145.
- [45] J.-B. Carrat, T. Bouvard, R. F. Patella et J.-P. Franc, “Cavitation aggressiveness on a hydrofoil,” dans *29th IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems*, 2018.
- [46] C. Flageul, R. Fortes-Patella et A. Archer, “Cavitation erosion prediction by numerical simulations,” *ISROMAC14, Honolulu*, 2012.
- [47] M. Dular et O. Coutier-Delgosha, “Numerical modelling of cavitation erosion,” *International journal for numerical methods in Fluids*, vol. 61, n°. 12, p. 1388–1410, 2009.
- [48] A. Peters, H. Sagar, U. Lantermann et O. el Moctar, “Numerical modelling and prediction of cavitation erosion,” *Wear*, vol. 338, p. 189–201, 2015.
- [49] V. Hidalgo, X. Luo, F. X. Escaler Puigoriol, E. Valencia et P. Cruz, “Numerical simulation of the cavitation micro-jet velocity and erosion on a plane-convex hydrofoil with semicylindrical obstacle,” dans *Proceedings of the 29th IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems*, 2018, p. 1–5.
- [50] J. Nunez-Ramirez, J.-C. Marongiu, M. Brun et A. Combescure, “A partitioned approach for the coupling of sph and fe methods for transient nonlinear fsi problems with incompatible time-steps,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 109, n°. 10, p. 1391–1417, 2017.
- [51] J.-K. Choi et G. L. Chahine, “Relationship between material pitting and cavitation field impulsive pressures,” *Wear*, vol. 352, p. 42–53, 2016.
- [52] J.-B. Leroux, J. A. Astolfi et J. Y. Billard, “An experimental study of unsteady partial cavitation,” *Journal of fluids engineering*, vol. 126, n°. 1, p. 94–101, 2004.
- [53] I. B. Celik, U. Ghia, P. J. Roache et C. J. Freitas, “Procedure for estimation and reporting of uncertainty due to discretization in cfd applications,” *Journal of fluids Engineering-Transactions of the ASME*, vol. 130, n°. 7, 2008.
- [54] Sharcnet. (2019) Solver yplus and yplus. [En ligne]. Disponible : https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/17.0/en-us/help/cfx_mod/i1303520.html

- [55] ——. (2019) Advection term. [En ligne]. Disponible : https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/cfx_mod/i1313685.html
- [56] ——. (2019) Transient scheme. [En ligne]. Disponible : https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/cfx_mod/i1313549.html
- [57] T. D. Tran, B. Nennemann, T. C. Vu et F. Guibault, “Numerical simulation of cavitating flow around a hydrofoil,” dans *ASME 2014 4th Joint US-European Fluids Engineering Division Summer Meeting collocated with the ASME 2014 12th International Conference on Nanochannels, Microchannels, and Minichannels*. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, 2014.
- [58] Sharcnet. (2019) Courant number. [En ligne]. Disponible : https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/cfx_thry/i1298716.html#cfxBasiVariCour
- [59] E. Stenmark. (2013) Navier-stokes equations. [En ligne]. Disponible : <http://publications.lib.chalmers.se/records/fulltext/182902/182902.pdf>
- [60] I. H. Abbott et A. E. Von Doenhoff, *Theory of wing sections, including a summary of airfoil data*. Courier Corporation, 1959.
- [61] A. Van Oosterom et J. Strackee, “The solid angle of a plane triangle,” *IEEE transactions on Biomedical Engineering*, n^o. 2, p. 125–126, 1983.