



**Titre:** Contrôle du vol longitudinal d'un avion civil avec satisfaction de  
Title: qualités de manoeuvrabilité

**Auteur:** David Alexandre Saussié  
Author:

**Date:** 2010

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Saussié, D. A. (2010). Contrôle du vol longitudinal d'un avion civil avec  
Citation: satisfaction de qualités de manoeuvrabilité [Thèse de doctorat, École  
Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/396/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/396/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** Lahcen Saydy, Caroline Bérard, & Ouassima Akhrif  
Advisors:

**Programme:** génie électrique  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CONTRÔLE DU VOL LONGITUDINAL D'UN AVION CIVIL AVEC SATISFACTION DE  
QUALITÉS DE MANŒUVRABILITÉ

DAVID ALEXANDRE SAUSSIÉ  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR  
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)  
AOÛT 2010

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

CONTRÔLE DU VOL LONGITUDINAL D'UN AVION CIVIL AVEC SATISFACTION DE  
QUALITÉS DE MANŒUVRABILITÉ

présentée par : SAUSSIÉ, David Alexandre

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. GOURDEAU, Richard, Ph.D., président.

M. SAYDY, Lahcen, Ph.D., membre et directeur de recherche.

Mme. BÉRARD, Caroline, Doct., membre et codirectrice de recherche.

Mme. AKHRIF, Ouassima, Ph.D., membre et codirectrice de recherche.

Mme. BOTEZ, Ruxandra, Ph.D., membre.

M. M'SAAD, Mohammed, Ph.D., membre externe.

*À mes parents...*



## REMERCIEMENTS

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont été effectués dans le cadre d’une cotutelle Canada-France entre l’École Polytechnique de Montréal, au sein de la section Automation du Département de Génie Électrique, et l’Institut Supérieur de l’Aéronautique et de l’Espace, au DCSD<sup>1</sup> de l’ONERA.

Je tiens tout d’abord à remercier les trois encadrants de cette thèse sans qui je n’aurais jamais pu mener à bien un tel travail. Sans aucun ordre particulier, je remercie tout d’abord Caroline Bérard, rencontrée en 2000 du temps où l’ISAE était encore Supaéro, et qui m’a littéralement donné le goût pour l’Automatique grâce à son encadrement et son enthousiasme. Je remercie ensuite Ouassima Akhrif, grâce à qui j’ai eu la chance de travailler sur des données réelles d’un avion de chez *Bombardier Inc.* J’ai largement pu profiter de ses compétences théoriques et de sa vaste expérience. Enfin, le dernier mais non des moindres : mon directeur de recherche, Lahcen Saydy. Il est pour moi un modèle de rigueur et de connaissances, et une personne sur qui j’ai toujours pu compter et avec qui j’ai beaucoup partagé. Outre leurs qualités indéniables de chercheurs, ces trois personnes m’ont aussi donné le goût de l’enseignement et je ne saurais jamais assez les remercier de m’avoir laissé la chance de transmettre mes connaissances aux nombreux étudiants que j’ai pu croiser aussi bien au Canada qu’en France.

Je remercie ensuite les membres du jury, Richard Gourdeau, Mohammed M’Saad (venu spécialement de France) et Ruxandra Botez pour avoir accepté de lire mon mémoire et participer à la soutenance.

Je tiens particulièrement à remercier Carsten Döll pour sa précieuse aide et sa disponibilité lors de mes séjours en France.

Faire un Ph.D. nécessite de garder un certain équilibre dans sa vie personnelle et je tiens ainsi à souligner le support de ma famille et de mes amis (trop nombreux pour être tous cités ici). Que mes parents voient dans cette thèse l’accomplissement de tout ce qu’ils ont fait pour moi ; je la leur dédie.

---

1. Département Commande des Systèmes et Dynamique du vol

## RÉSUMÉ

Satisfaire les qualités de manœuvrabilité demeure toujours une contrainte essentielle lors de la conception des commandes de vol. Ces critères de différentes natures sont le fruit d'une longue expérience d'essais en vol et d'analyse de données et il convient de les considérer pour espérer un bon comportement de l'appareil en vol. Dans ce cadre, l'enjeu de cette thèse est d'élaborer des méthodes de synthèse capables de satisfaire au mieux ces critères en respectant d'une part des architectures classiques imposées par le constructeur et, d'autre part, en adoptant une nouvelle architecture de contrôle. Le travail est effectué sur le vol longitudinal d'un avion d'affaire de *Bombardier Inc.*, le *Challenger 604*.

Une première étape consiste à rassembler les qualités de manœuvrabilité les plus souvent utilisées et de les confronter. Nous étudions plus particulièrement le critère du dropback pour lequel une analyse théorique permet d'établir une formulation pratique utilisable lors d'une synthèse. De plus, la confrontation de ces critères sur un modèle standard met en évidence des critères dominants, qui, une fois satisfaits, impliquent que d'autres critères le sont aussi.

Nous pouvons dès lors considérer le problème de satisfaction de ces critères dominants dans le cadre d'une loi de contrôle dont l'architecture est imposée. Nous nous tournons alors du côté des applications gardiennes (Saydy *et al.*, 1990). Initialement destinées à l'étude de la robustesse, elles sont intégrées dans différents algorithmes pour la synthèse de correcteur. Ce problème s'inscrit dans le cadre plus général de stabilisation par retour de sortie et de synthèse de correcteurs d'ordre réduit. Il en ressort des algorithmes permettant la stabilisation de système et le placement de pôles dans une région du plan complexe. Ceux-ci sont étendus dans le cadre du séquençement du contrôleur sur toute l'enveloppe de vol en fonction de certains paramètres.

Nous faisons ensuite fi de la structure du correcteur en conservant seulement les mêmes sorties. L'idée est à présent d'utiliser une synthèse  $H_\infty$  pour obtenir un correcteur satisfaisant les qualités de manœuvrabilité grâce à l'appariement avec un modèle de référence ; ce correcteur est aussi robuste à des variations de masse et de centrage de l'avion. Grâce aux travaux sur la commande modale robuste (Magni, 2002), nous pouvons réduire substantiellement l'ordre de ce correcteur ainsi que le structurer afin de nous rapprocher d'une architecture classique. Une méthode d'auto-séquencement de correcteurs, nous permet finalement de séquencer ce correcteur à travers toute l'enveloppe de vol.

Deux voies différentes sont donc empruntées pour la résolution du même problème ; chacune montre ses avantages et ses inconvénients.

## ABSTRACT

Fulfilling handling qualities still remains a challenging problem during flight control design. These criteria of different nature are derived from a wide experience based upon flight tests and data analysis, and they have to be considered if one expects a good behaviour of the aircraft. The goal of this thesis is to develop synthesis methods able to satisfy these criteria with fixed classical architectures imposed by the manufacturer or with a new flight control architecture. This is applied to the longitudinal flight model of a *Bombardier Inc.* business jet aircraft, namely the *Challenger 604*.

A first step of our work consists in compiling the most commonly used handling qualities in order to compare them. A special attention is devoted to the dropback criterion for which theoretical analysis leads us to establish a practical formulation for synthesis purpose. Moreover, the comparison of the criteria through a reference model highlighted dominant criteria that, once satisfied, ensure that other ones are satisfied too.

Consequently, we are able to consider the fulfillment of these criteria in the fixed control architecture framework. Guardian maps (Saydy *et al.*, 1990) are then considered to handle the problem. Initially for robustness study, they are integrated in various algorithms for controller synthesis. Incidentally, this fixed architecture problem is similar to the static output feedback stabilization problem and reduced-order controller synthesis. Algorithms performing stabilization and pole assignment in a specific region of the complex plane are then proposed. Afterwards, they are extended to handle the gain-scheduling problem. The controller is then scheduled through the entire flight envelope with respect to scheduling parameters.

Thereafter, the fixed architecture is put aside while only conserving the same output signals. The main idea is to use  $H_\infty$  synthesis to obtain an initial controller satisfying handling qualities thanks to reference model pairing and robust versus mass and center of gravity variations. Using robust modal control (Magni, 2002), we are able to reduce substantially the controller order and to structure it in order to come close to a classical architecture. An auto-scheduling method finally allows us to schedule the controller with respect to scheduling parameters.

Two different paths are used to solve the same problem; each one exhibits its own advantages and disadvantages.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vi
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	vii
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xii
LISTE DES FIGURES . . . . .	xiv
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xviii
LISTE DES SIGLES, ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS . . . . .	xix
LISTE DES PUBLICATIONS . . . . .	xx
INTRODUCTION . . . . .	1
1 REVUE DE LITTÉRATURE & OBJECTIFS . . . . .	6
1.1 Revue de littérature . . . . .	7
1.1.1 Les qualités de manœuvrabilité . . . . .	7
1.1.2 Stabilisation par retour de sortie . . . . .	9
1.1.3 Méthodes de synthèse de commande de vol . . . . .	13
1.1.4 Séquencement de contrôleurs . . . . .	16
1.2 Objectifs, démarche et contributions . . . . .	23
1.2.1 Objectif 1 : Les Qualités de Manœuvrabilité Essentielles ( <i>Common Handling Qualities</i> ) . . . . .	23
1.2.2 Objectif 2 : Méthodologies de synthèse pour un contrôleur d'architecture fixe	24
1.2.3 Objectif 3 : Synthèse d'un contrôleur moderne de référence, structuration et séquencement . . . . .	26
<b>I MODÉLISATION &amp; QUALITÉS DE MANŒUVRABILITÉ</b>	<b>28</b>
2 MODÉLISATION & ANALYSE . . . . .	30
2.1 Modèle du <i>Challenger 604</i> . . . . .	31

2.1.1	Modèle Avion . . . . .	32
2.1.2	Modèle Actionneur . . . . .	41
2.1.3	Modèle Capteurs IRU . . . . .	42
2.1.4	Modèle Manche . . . . .	43
2.1.5	Modèle Pilote . . . . .	43
2.1.6	Architecture de contrôle . . . . .	44
2.2	Analyse en boucle ouverte . . . . .	46
2.2.1	Enveloppe de Vol . . . . .	46
2.2.2	Évolution des pôles BO selon le Mach et l'altitude . . . . .	48
2.2.3	Évolution des pôles BO selon les variations de masse et centrage . . . . .	49
2.3	Réduction et modélisation LFT . . . . .	50
2.3.1	Réduction . . . . .	51
2.3.2	Interpolation et mise sous forme LPV/LFT . . . . .	57
3	LES QUALITÉS DE MANŒUVRABILITÉ . . . . .	66
3.1	Les qualités de manœuvrabilité . . . . .	67
3.1.1	Notations . . . . .	67
3.1.2	Définitions et spécifications militaires . . . . .	68
3.1.3	Échelles qualitatives . . . . .	69
3.1.4	Critères modaux . . . . .	74
3.1.5	Critères temporels . . . . .	78
3.1.6	Critères fréquentiels . . . . .	89
3.2	Étude du Dropback . . . . .	95
3.2.1	Notations . . . . .	95
3.2.2	Formules analytiques du dropback . . . . .	97
3.2.3	Applications sur des architectures de contrôle . . . . .	99
3.2.4	Lien entre le dropback et le dépassement . . . . .	103
3.3	Confrontation des critères sur un modèle standard . . . . .	109
3.3.1	Les critères modaux et temporels . . . . .	110
3.3.2	Étude des critères fréquentiels . . . . .	115

## II APPROCHE PAR APPLICATIONS GARDIENNES 133

4	APPLICATIONS GARDIENNES . . . . .	135
4.1	Préliminaires mathématiques . . . . .	135
4.1.1	Produit bialterné . . . . .	135
4.1.2	Bezoutien . . . . .	136
4.2	Applications gardiennes et semi-gardiennes . . . . .	137
4.2.1	Applications gardiennes . . . . .	137
4.2.2	Applications semi-gardiennes . . . . .	138

4.2.3	Corollaire des composantes . . . . .	139
4.3	Stabilité robuste . . . . .	140
4.3.1	Famille monoparamétrique . . . . .	140
4.3.2	Famille biparamétrique . . . . .	140
4.4	Exemples d'applications . . . . .	141
4.4.1	Synthèse d'un correcteur PI . . . . .	141
4.4.2	Robustesse d'un contrôleur par retour d'état . . . . .	143
5	ARTICLE 1 : LONGITUDINAL FLIGHT CONTROL SYNTHESIS WITH GUARDIAN MAPS . . . . .	145
5.1	Introduction . . . . .	146
5.2	Guardian Maps . . . . .	147
5.2.1	Definition : . . . . .	147
5.2.2	Characterization of stabilizing gains : . . . . .	148
5.2.3	One-parameter family stability test . . . . .	149
5.3	A Guardian Map-Based Synthesis Procedure . . . . .	151
5.3.1	Complex plane regions . . . . .	151
5.3.2	Algorithm . . . . .	153
5.3.3	Example . . . . .	154
5.4	Flight Controller Problem . . . . .	159
5.4.1	Open-loop model description . . . . .	159
5.4.2	Controller architectures . . . . .	161
5.4.3	Handling quality constraints . . . . .	164
5.5	Controller design method . . . . .	164
5.5.1	Closed-loop pole confinement . . . . .	164
5.5.2	Dropback adjustment . . . . .	166
5.5.3	Design procedure . . . . .	166
5.5.4	Design example . . . . .	167
5.6	Results on the 20 flight conditions . . . . .	168
5.6.1	Pitch rate control . . . . .	168
5.6.2	$C^*$ control . . . . .	170
5.7	Conclusion . . . . .	173
6	ARTICLE 2 : GAIN SCHEDULING WITH GUARDIAN MAPS FOR LONGITUDINAL FLIGHT CONTROL . . . . .	175
6.1	Introduction . . . . .	176
6.2	Guardian Maps : a brief review . . . . .	178
6.2.1	Guardian Maps . . . . .	178
6.2.2	Stabilizing gain characterization . . . . .	179
6.2.3	Robust stability . . . . .	180

6.3	Gain-scheduling procedure . . . . .	185
6.3.1	Single-parameter gain-scheduling algorithm . . . . .	186
6.3.2	Two-parameter gain-scheduling algorithm . . . . .	191
6.4	Flight Controller Problem . . . . .	192
6.4.1	Open-loop LPV description . . . . .	193
6.4.2	Controller architecture . . . . .	195
6.4.3	Handling qualities . . . . .	196
6.5	Controller design . . . . .	196
6.5.1	Constraints . . . . .	197
6.5.2	Scheduled controller w.r.t. $M$ at $h_0 = 5000$ ft . . . . .	198
6.5.3	Scheduled controller w.r.t $M$ and $h$ . . . . .	200
6.6	Conclusion . . . . .	203

### III APPROCHE PAR CONTRÔLE MODAL ROBUSTE 204

7	DE LA SYNTHÈSE $H_\infty$ À L'AUTO-SÉQUENCÉMENT D'UN CORRECTEUR RÉDUIT ROBUSTE . . . . .	207
7.1	Première étape : synthèse $H_\infty$ . . . . .	207
7.1.1	La forme standard . . . . .	207
7.1.2	Le problème $H_\infty$ . . . . .	208
7.1.3	Résolution classique du problème $H_\infty$ . . . . .	209
7.1.4	Application . . . . .	214
7.1.5	Conclusion sur la synthèse $H_\infty$ . . . . .	219
7.2	Deuxième étape : réduction modale du correcteur $H_\infty$ . . . . .	222
7.2.1	Rappels théoriques sur la commande modale robuste . . . . .	223
7.2.2	Réduction par la structure modale dominante du correcteur . . . . .	229
7.2.3	Application . . . . .	233
7.2.4	Conclusion sur la réduction . . . . .	240
7.3	Troisième étape : auto-séquencement du correcteur . . . . .	241
7.3.1	Rappels théoriques . . . . .	241
7.3.2	Application . . . . .	244
7.3.3	Conclusion sur l'auto-séquencement . . . . .	251
7.4	Conclusion . . . . .	252
8	ARTICLE 3 : ROBUST SCHEDULED CONTROL OF LONGITUDINAL FLIGHT WITH HANDLING QUALITY SATISFACTION . . . . .	253
8.1	Introduction . . . . .	254
8.2	Robust modal control . . . . .	255
8.2.1	Notations . . . . .	255
8.2.2	Eigenstructure assignment . . . . .	255

8.2.3	Multi-model modal control . . . . .	256
8.2.4	Modal reduction . . . . .	257
8.2.5	Self-scheduling control . . . . .	259
8.3	Model and constraints . . . . .	260
8.3.1	<i>Challenger 604</i> aircraft model . . . . .	260
8.3.2	Handling quality requirements . . . . .	261
8.4	Application to the longitudinal flight control problem . . . . .	262
8.4.1	$H_\infty$ synthesis . . . . .	262
8.4.2	Controller reduction using modal multimodel approach . . . . .	264
8.4.3	Self-scheduled controller . . . . .	268
8.5	Conclusion . . . . .	274
DISCUSSION GÉNÉRALE ET CONCLUSION . . . . .		275
RÉFÉRENCES . . . . .		278
ANNEXES . . . . .		292
A RÉDUCTION DE MODÈLES . . . . .		292
A.1	Gramiens et réalisation équilibrée . . . . .	292
A.2	Réduction équilibrée . . . . .	293
A.3	Approximation de la norme de Hankel . . . . .	294
A.4	Réduction par les perturbations singulières . . . . .	294
B DÉTAILS DES CALCULS POUR LES QUALITÉS DE MANŒVRABILITÉ . . . . .		296
B.1	Calcul du dépassement pour un deuxième ordre avec zéro . . . . .	296
B.2	Formule pour les bandes passantes . . . . .	300



## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1	Saturation de la gouverne en position et vitesse . . . . .	42
Tableau 2.2	Températures et masses volumiques correspondantes au niveau de la mer . .	48
Tableau 2.3	Configurations masse/centrage considérées . . . . .	49
Tableau 2.4	Valeurs extrêmes de la zone 1 . . . . .	64
Tableau 2.5	Valeurs extrêmes de la zone 2 . . . . .	65
Tableau 3.1	Classification des avions . . . . .	69
Tableau 3.2	Description des niveaux de l'échelle PIO . . . . .	73
Tableau 3.3	Niveau des qualités de vol . . . . .	74
Tableau 3.4	Amortissement $\zeta_{ph}$ du mode phugoïde . . . . .	76
Tableau 3.5	Amortissement $\zeta_{sp}$ du mode <i>short period</i> . . . . .	76
Tableau 3.6	Limitations du CAP . . . . .	80
Tableau 3.7	Limitations sur $n/\alpha$ et $\omega_{sp}$ pour phases de vol de catégorie C . . . . .	80
Tableau 3.8	Limites du dropback pour phases terminales . . . . .	88
Tableau 3.9	Équivalences entre $\tau_G$ , $\tau'_G$ et $\tau_p$ . . . . .	93
Tableau 3.10	Cahier des charges . . . . .	96
Tableau 3.11	Formules relatives au lien entre dépassement $D$ et dropback $Drb$ . . . . .	108
Tableau 5.1	Open-loop poles . . . . .	156
Tableau 5.2	Iterations of the algorithm . . . . .	159
Tableau 5.3	Handling Quality Boundaries . . . . .	164
Tableau 5.4	Flight Condition #12 . . . . .	167
Tableau 5.5	Evolution of $D_k$ . . . . .	167
Tableau 5.6	Pole placement on flight condition #12 - Pitch rate control . . . . .	168
Tableau 5.7	Handling quality results for pitch rate control . . . . .	171
Tableau 5.8	Handling quality results for $C^*$ control . . . . .	174
Tableau 6.1	Algorithm steps . . . . .	190
Tableau 6.2	Handling Quality Boundaries . . . . .	197
Tableau 6.3	Nominal eigenvalue assignment on $(M_0, h_0) = (0.25, 5000)$ . . . . .	198
Tableau 7.1	Signaux du modèle augmenté $P(s)$ . . . . .	215
Tableau 7.2	Pondérations des cas 4-5-6 . . . . .	219
Tableau 7.3	Qualités de manœuvrabilité avec le correcteur $H_\infty$ retenu . . . . .	220
Tableau 7.4	Pôles du correcteur réduit . . . . .	236
Tableau 7.5	Structure du correcteur réduit 1 . . . . .	236
Tableau 7.6	Contraintes de placement pour la réduction 1 . . . . .	236
Tableau 7.7	Structure du correcteur réduit 2 . . . . .	237
Tableau 7.8	Contraintes de placement pour la réduction 2 . . . . .	238
Tableau 7.9	Structure du correcteur réduit 3 . . . . .	238

Tableau 7.10	Contraintes de placement pour la réduction 3 . . . . .	238
Tableau 7.11	Qualités de manœuvrabilité avec le correcteur réduit 3 . . . . .	240
Tableau 7.12	Choix des pôles du correcteur séquencé . . . . .	245
Tableau 7.13	Structure du correcteur initial $K_0(s)$ pour l'auto-séquencement . . . . .	245
Tableau 7.14	Contraintes pour le correcteur initial du séquencement $K_0(s)$ . . . . .	245
Tableau 7.15	Contraintes supplémentaires pour le correcteur séquencé en $\bar{q}$ . . . . .	246
Tableau 7.16	Contraintes supplémentaires pour le correcteur séquencé en $\bar{q}$ et $h$ . . . . .	250
Tableau 8.1	Grid points for varying $m$ and $x_{cg}$ . . . . .	260
Tableau 8.2	Handling qualities . . . . .	262
Tableau 8.3	Handling quality values of the $H_\infty$ controller . . . . .	265
Tableau 8.4	Reduced controller poles . . . . .	266
Tableau 8.5	First reduced controller structure . . . . .	266
Tableau 8.6	Placement constraints for first reduction . . . . .	266
Tableau 8.7	Second reduced controller structure . . . . .	267
Tableau 8.8	Placement constraints for reduced controller . . . . .	267
Tableau 8.9	Handling quality values with the final reduced $H_\infty$ controller . . . . .	268
Tableau 8.10	Scheduled controller poles . . . . .	268
Tableau 8.11	Structure of the initial controller for self-scheduling . . . . .	269
Tableau 8.12	Placement constraints for initial controller $K_0(s)$ . . . . .	269
Tableau 8.13	Additionnal constraints for scheduled controller $K(s, \delta\bar{q})$ . . . . .	270
Tableau 8.14	Additional constraints for $\bar{q}$ et $h$ . . . . .	273

## LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Les différentes boucles de contrôle en jeu . . . . .	31
Figure 2.2	Boucle ouverte . . . . .	32
Figure 2.3	Passage de $R_o$ à $R_b$ . . . . .	34
Figure 2.4	Passage de $R_b$ à $R_a$ . . . . .	35
Figure 2.5	Définition des angles pour le vol longitudinal . . . . .	38
Figure 2.6	Répartition des modes longitudinaux dans le plan complexe . . . . .	41
Figure 2.7	Contrôle de la vitesse de tangage . . . . .	45
Figure 2.8	Contrôle $C^*$ . . . . .	45
Figure 2.9	Enveloppe de vol . . . . .	46
Figure 2.10	Évolution du mode <i>short period</i> suivant le Mach et l'altitude . . . . .	48
Figure 2.11	Évolution du mode <i>short period</i> suivant la masse et le centrage . . . . .	50
Figure 2.12	Différentes voies pour obtenir un correcteur d'ordre réduit . . . . .	52
Figure 2.13	Comparaison de la position du <i>short period</i> entre les modèles complet et tronqué	54
Figure 2.14	Comparaison des diagrammes de Bode de $q_{mes}/\delta_c$ pour différentes approxi- mations du retard pur . . . . .	55
Figure 2.15	Valeurs singulières de Hankel de la réalisation équilibrée de l'ensemble action- neur+capteurs . . . . .	56
Figure 2.16	Diagramme de Bode de la boucle ouverte $q_{mes}/\delta_c$ et des différentes réductions	57
Figure 2.17	Mise sous forme LFT . . . . .	59
Figure 2.18	Interpolation en masse et centrage . . . . .	60
Figure 2.19	Découpage de l'enveloppe de vol . . . . .	62
Figure 2.20	Interpolation avec la forme 1 . . . . .	62
Figure 2.21	Résultats et comparaison des 2 formes d'interpolation . . . . .	63
Figure 2.22	Interpolation avec la forme 2 . . . . .	64
Figure 3.1	Échelle d'opinion de Cooper-Harper . . . . .	71
Figure 3.2	Échelle d'opinion pour les oscillations induites par le pilote (PIO) . . . . .	72
Figure 3.3	Mise en évidence du mode phugoïde - Réponse à un échelon de $\delta_e$ . . . . .	75
Figure 3.4	Mise en évidence du mode <i>short period</i> - Réponse à un échelon de $\delta_e$ . . . . .	77
Figure 3.5	Réponse en tangage $q$ à une entrée échelon $\delta_{ref}$ . . . . .	78
Figure 3.6	Limitations sur la pulsation propre $\omega_{sp}$ - Phase de vol A . . . . .	81
Figure 3.7	Limitations sur la pulsation propre $\omega_{sp}$ - Phase de vol B . . . . .	82
Figure 3.8	Limitations sur la pulsation propre $\omega_{sp}$ - Phase de vol C . . . . .	83
Figure 3.9	Limitations en CAP et en amortissement $\zeta_{sp}$ - Phase de vol A . . . . .	84
Figure 3.10	Définition du dropback . . . . .	86
Figure 3.11	Niveaux de dropback . . . . .	87
Figure 3.12	Dropback vs. dépassement . . . . .	88

Figure 3.13	Définition de la bande passante et du retard de phase sur le transfert $\theta/\delta_{ref}$ .	89
Figure 3.14	Comparaison des bandes passantes et retards de phase . . . . .	91
Figure 3.15	Critère pour $\omega_{BW_\theta}$ et $\tau_p$ . . . . .	91
Figure 3.16	Critère de la bande passante pour $\omega_{BW_\theta}$ et $\omega_{BW_\gamma}$ . . . . .	92
Figure 3.17	Critère pour $\omega_{BW_\theta}$ et $\tau_p$ . . . . .	93
Figure 3.18	Critère de la bande passante pour $\omega_{BW_\theta}$ et $\omega_{BW_\gamma}$ . . . . .	94
Figure 3.19	Réponse du système à un échelon unité . . . . .	99
Figure 3.20	Loi de contrôle classique . . . . .	100
Figure 3.21	Loi de contrôle $C^*$ . . . . .	101
Figure 3.22	Illustration du lien entre dropback positif et dépassement . . . . .	105
Figure 3.23	Pourcentage de dépassement en fonction de $\zeta_{sp}$ pour $Drb = 0$ . . . . .	108
Figure 3.24	Pourcentage de dépassement en fonction de $\zeta_{sp}$ et $\omega_{sp}$ pour $Drb = \{0, 0.1, 0.2, 0.3\}$	109
Figure 3.25	Tracé des contraintes pour $T_\theta = \{0.1, 0.5, 1.0, 1.5\}$ et $V_0 = \{85, 300\}$ . . . . .	112
Figure 3.26	Effet du retard pur sur le dropback et le temps de réponse ( $T_\theta = 0.5$ ) . . . . .	113
Figure 3.27	Effet du retard pur sur le dropback et compensation . . . . .	114
Figure 3.28	Diagrammes de Bode de $\theta/\delta_{ref}$ et $q/\delta_{ref}$ . . . . .	115
Figure 3.29	Diagrammes de Bode de $\theta/\delta_{ref}$ avec et sans retard. . . . .	116
Figure 3.30	Diagrammes de Bode de $q/\delta_{ref}$ pour différents cas. . . . .	117
Figure 3.31	Surface de paramètres assurant $\omega_{BW_{phase}} = 1.4$ rad/s. . . . .	119
Figure 3.32	Satisfaction de $\omega_{BW_{phase}}$ versus les autres critères . . . . .	120
Figure 3.33	Surface de paramètres assurant $\omega_{-180^\circ} = 3$ rad/s. . . . .	121
Figure 3.34	Surface de paramètres assurant $\omega_{BW_{gain}} = 1.4$ rad/s. . . . .	122
Figure 3.35	Tracé des contraintes pour $T_\theta = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$ . . . . .	124
Figure 3.36	Influence du retard pur $\tau$ sur $\omega_{BW_{phase}}$ pour $T_\theta = \{0.5, 1.5\}$ . . . . .	126
Figure 3.37	Influence du retard pur $\tau$ sur $\omega_{-180^\circ}$ pour $T_\theta = \{0.5, 1.5\}$ . . . . .	127
Figure 3.38	Influence du retard pur $\tau$ sur $\tau_p$ pour $T_\theta = \{0.5, 1.5\}$ . . . . .	128
Figure 3.39	Influence du retard pur $\tau$ sur $\omega_{BW_{gain}}$ pour $T_\theta = \{0.5, 1.5\}$ . . . . .	129
Figure 3.40	Tracé des contraintes pour $T_\theta = \{0.1, 0.2, 0.4, 0.5, 1.0, 1.5\}$ avec un retard pur $\tau = 0.15$ . . . . .	130
Figure 4.1	Régions de stabilité d'intérêt . . . . .	138
Figure 4.2	Régions stables ou instables . . . . .	139
Figure 4.3	Système rebouclé par un correcteur PI . . . . .	141
Figure 4.4	Domaine $\Omega$ à garder . . . . .	142
Figure 4.5	Région gardant le domaine $\Omega$ . . . . .	142
Figure 4.6	Région gardant le domaine $\Omega$ . . . . .	144
Figure 5.1	Regions for Example 5.2.2 . . . . .	149
Figure 5.2	Stability region $\Omega$ . . . . .	150
Figure 5.3	Set $C_3$ of all gains ensuring $\Omega$ -stability . . . . .	150
Figure 5.4	Control problems under study . . . . .	151

Figure 5.5	Unstable set $\Gamma$ and stable set $\Omega$ . . . . .	152
Figure 5.6	Examples of unstable and stable sets . . . . .	153
Figure 5.7	Search algorithm illustration . . . . .	156
Figure 5.8	Feedback configuration . . . . .	156
Figure 5.9	Region $\Omega_t$ and open-loop poles . . . . .	157
Figure 5.10	Guardian map plot for the successive regions $D_k$ . . . . .	158
Figure 5.11	Flight envelope . . . . .	160
Figure 5.12	Open-loop short period pole dispersion . . . . .	161
Figure 5.13	Pitch rate control system . . . . .	162
Figure 5.14	$C^*$ control system . . . . .	162
Figure 5.15	Target zone $\Omega$ . . . . .	165
Figure 5.16	Pole iterations on flight condition #12 - Pitch rate control . . . . .	168
Figure 5.17	Time response iterations on flight condition #12 - Pitch rate control . . . . .	169
Figure 5.18	Closed-loop poles for pitch rate control . . . . .	170
Figure 5.19	Time responses for pitch rate control . . . . .	170
Figure 5.20	Closed-loop poles for $C^*$ control . . . . .	172
Figure 5.21	$C^*$ output time responses . . . . .	172
Figure 5.22	Pitch rate time responses for $C^*$ control . . . . .	173
Figure 6.1	Regions for Example 6.2.2 . . . . .	179
Figure 6.2	Stability region $\Omega$ . . . . .	180
Figure 6.3	Set $C_3$ of all gains ensuring $\Omega$ -stability . . . . .	180
Figure 6.4	Instability of $I_{\max}(r_2^0) \times I_{\max}(r_1^0)$ . . . . .	182
Figure 6.5	Largest stable rectangle with a fixed side . . . . .	182
Figure 6.6	Example . . . . .	184
Figure 6.7	Feedback configuration . . . . .	187
Figure 6.8	General stability target region and open-loop poles . . . . .	188
Figure 6.9	Stabilizing gain regions for different values of $a = \{0, 10\}$ . . . . .	189
Figure 6.10	Algorithm results and scheduled gains w.r.t. $a$ . . . . .	190
Figure 6.11	Eigenvalue value confinement with the scheduled controller . . . . .	191
Figure 6.12	Algorithm 2 illustration . . . . .	192
Figure 6.13	Flight envelope . . . . .	194
Figure 6.14	Short-period mode evolution within the flight envelope . . . . .	194
Figure 6.15	Attitude hold control system . . . . .	195
Figure 6.16	Target zone $\Omega$ . . . . .	197
Figure 6.17	Scheduled gains w.r.t. $M$ at $h_0 = 5000$ ft . . . . .	199
Figure 6.18	Closed-loop pole confinement for $M \in [0.25 \ 0.6]$ at $h_0 = 5000$ ft . . . . .	200
Figure 6.19	Time-responses for $M \in [0.25 \ 0.6]$ at $h_0 = 5000$ ft . . . . .	200
Figure 6.20	Scheduled gains $K_p$ and $K_i$ w.r.t. $M$ and $h$ . . . . .	201
Figure 6.21	Closed-loop pole confinement for full flight envelope . . . . .	202

Figure 6.22	Time-responses for full flight envelope . . . . .	202
Figure 6.23	Gain and Phase margin for full flight envelope . . . . .	203
Figure 7.1	Modèle Augmenté . . . . .	208
Figure 7.2	Problème $H_\infty$ Standard . . . . .	208
Figure 7.3	Paramétrisation de la solution du problème sous-optimal . . . . .	213
Figure 7.4	Filtres de pondération sur le système augmenté . . . . .	214
Figure 7.5	Modèle de synthèse $H_\infty$ . . . . .	215
Figure 7.6	Synthèse $H_\infty$ - Cas 1 . . . . .	218
Figure 7.7	Synthèse $H_\infty$ - Cas 2 . . . . .	218
Figure 7.8	Synthèse $H_\infty$ - Cas 3 . . . . .	219
Figure 7.9	Pondérations sur la commande . . . . .	219
Figure 7.10	Diagramme de Bode des retours en $q$ et $n_z$ . . . . .	220
Figure 7.11	Réponses temporelles en $q$ pour les cas 4-5-6 . . . . .	221
Figure 7.12	Pôles en boucle fermée pour les 8 configurations avec le correcteur $H_\infty$ . . . . .	222
Figure 7.13	Lieux des racines avec le correcteur équilibré . . . . .	234
Figure 7.14	Analyse modale avec la précommande . . . . .	234
Figure 7.15	Analyse modale sans la précommande . . . . .	235
Figure 7.16	Diagramme de Bode des correcteurs . . . . .	237
Figure 7.17	Réponses temporelles avec le correcteur réduit 3 . . . . .	239
Figure 7.18	Pôles en boucle fermée pour les 8 configurations avec le correcteur réduit 3 . . . . .	240
Figure 7.19	Réponses temporelles avec $K(s, \delta\bar{q})$ pour les modèles 1.x à 4.x . . . . .	247
Figure 7.20	Carte des pôles avec $K(s, \delta\bar{q})$ pour les modèles 1.x à 4.x . . . . .	247
Figure 7.21	Évolution du mode <i>Short Period</i> avec $K(s, \delta\bar{q})$ pour $M \in [0.25, 0.6]$ et $h =$ 5000 ft (Configuration masse/centrage nominale) . . . . .	248
Figure 7.22	Carte des pôles avec $K(s, \delta\bar{q})$ pour les 160 modèles . . . . .	249
Figure 7.23	Carte des pôles avec $K(s, \delta\bar{q}, \delta h)$ pour les 160 modèles . . . . .	251
Figure 7.24	Réponses temporelles avec $K(s, \delta\bar{q}, \delta h)$ pour l'ensemble des 160 modèles . . . . .	251
Figure 8.1	Flight envelope . . . . .	261
Figure 8.2	Augmented model . . . . .	263
Figure 8.3	Standard $H_\infty$ synthesis . . . . .	263
Figure 8.4	$H_\infty$ synthesis diagram . . . . .	264
Figure 8.5	Time responses of the $H_\infty$ controller . . . . .	265
Figure 8.6	Time responses of the final reduced $H_\infty$ controller . . . . .	267
Figure 8.7	Time-responses with $K(s, \delta\bar{q})$ for Models 1.x à 4.x . . . . .	270
Figure 8.8	Pole map with $K(s, \delta\bar{q})$ for Models 1.x à 4.x . . . . .	271
Figure 8.9	Short period mode evolution with $K(s, \delta\bar{q})$ for $M \in [0.25, 0.6]$ and $h =$ 5000 ft (Models x.1) . . . . .	271
Figure 8.10	Pole map with $K(s, \delta\bar{q}, \delta h)$ for the 160 models . . . . .	273
Figure 8.11	Time-responses with $K(s, \delta\bar{q}, \delta h)$ for the 160 models . . . . .	274

**LISTE DES ANNEXES**

Annexe A	RÉDUCTION DE MODÈLES . . . . .	292
Annexe B	DÉTAILS DES CALCULS POUR LES QUALITÉS DE MANŒUVRABILITÉ	296

## LISTE DES SIGLES, ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS

### Acronymes :

BMI	Bilinear Matrix Inequality
CAP	Control Anticipate Parameter
CAS	Control Augmentation System
DOF	Dynamic Output Feedback
IRU	Inertial Reference Unit
LFT	Linear Fractionnal Transformation
LMI	Linear Matrix Inequality
LPV	Linear Parameter Varying
LQG	Linear Quadratic Guassian
LQR	Linear Quadratic Regulator
LTI	Linear Time Invariant
LTR	Loop Transfer Recovery
MIMO	Multi-Input Multi-Output
PIO	Pilot-Induced Oscillation
SAS	Stability Augmentation System
SISO	Single-Input Single-Output
SOF	Static Output Feedback
TAS	True Airspeed

### Notations :

$\mathbb{R}$	Corps des nombres réels
$\mathbb{C}$	Corps des nombres complexes
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Ensemble des matrices réelles de dimension $n$
$\mathring{\mathbb{C}}_-$	Demi-plan complexe gauche ouvert
$\Omega$	Sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$ symétrique par rapport à l'axe réel
$\partial\mathcal{D}, \bar{\mathcal{D}}$	Frontière et adhérence de $\mathcal{D}$
$\lambda_i(A)$	Valeur propre de $A$
$\sigma(A)$	Ensemble des valeurs propres de $A$ (en comptant les multiplicités)



## LISTE DES PUBLICATIONS

- (Saussié *et al.*, 2006) D. Saussié, O. Akhrif, L. Saydy et C. Chiappa  
Self-scheduling robust pitch rate control based on multi-model eigen-structure assignment and guardian maps robustness assessment  
5<sup>th</sup> IFAC Symposium on Robust Control Design, 2006
- (Saussié *et al.*, 2007) D. Saussié, C. Bérard, O. Akhrif et L. Saydy  
Robust control of longitudinal flight with handling qualities constraints  
Conference on Systems and Control, Marrakech, Morocco, 2007
- (Saussié *et al.*, 2008a) D. Saussié, L. Saydy et O. Akhrif  
Gain scheduling control design for a pitch-axis missile autopilot  
AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, Honolulu, 2008
- (Saussié *et al.*, 2008b) D. Saussié, G. Baldesi, C. Döll et C. Bérard  
Self-Scheduling controller for a launcher in atmospheric ascent  
Proceedings of the 17<sup>th</sup> IFAC World Congress, Seoul, Korea, 2008
- (Saussié *et al.*, 2009) D. Saussié, O. Akhrif, L. Saydy et C. Bérard  
Longitudinal flight control synthesis with guardian maps  
AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, Chicago, 2009
- (Saussié *et al.*, 2010a) D. Saussié, O. Akhrif et L. Saydy  
Pitch rate control with guardian map based algorithm  
18th Mediterranean Conference on Control and Automation, Marrakech, Morocco, 2010
- (Saussié *et al.*, 2010b) D. Saussié, O. Akhrif, L. Saydy et C. Bérard  
Longitudinal Flight Control Synthesis with Guardian Maps  
Soumis à Journal of Aircraft 2010
- (Saussié *et al.*, 2010c) D. Saussié, L. Saydy, O. Akhrif et C. Bérard  
Gain Scheduling with Guardian Maps for Longitudinal Flight Control  
Soumis à Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2010
- (Saussié *et al.*, 2010d) D. Saussié, C. Bérard, O. Akhrif et L. Saydy  
Robust and scheduled controller for longitudinal flight with handling quality satisfaction  
Soumis à The Aeronautical Journal, 2010

## INTRODUCTION

### Contexte

Les commandes de vol électriques (ou *fly-by-wire* dans le monde anglo-saxon) désignent les systèmes d'aide au pilotage où les commandes du pilote sont traitées de façon automatique et envoyées sous la forme de signaux électriques aux surfaces de commande. Lors de son vol inaugural en 1969, le Concorde fut le premier avion civil à intégrer des commandes de vol électriques sous forme analogique. Ce n'est qu'en 1987, presque 20 ans plus tard, que le premier avion avec des commandes de vol électriques numériques prenait son envol : l'Airbus A320 (Farineau, 1989; Farineau et Letron, 1990; Favre, 1994). Initié en 1977, le projet A320 du consortium européen *Airbus* révolutionne l'aviation civile de l'époque. S'il permet à l'avionneur européen de devenir un incontournable de la scène mondiale, il ouvre surtout une nouvelle ère pour l'aviation commerciale et pour des projets de plus en plus ambitieux ; outre un cockpit entièrement numérisé, il est en effet le premier avion à intégrer complètement des commandes de vol électriques. La réponse de *Boeing Inc.* ne se fait pas attendre et en 1994, le B-777 est le premier avion de la firme utilisant entièrement cette technologie.

Les commandes de vol électriques ont amené un plus indéniable au monde de l'aéronautique, aussi bien dans l'aviation civile que militaire. Elles permettent de substantielles réductions de masse (câblages mécaniques, poulies) et de coût. Du point de vue du pilote, elles assurent une meilleure manœuvrabilité de l'appareil sur tout le domaine de vol et une sécurité accrue avec la protection de l'enveloppe de vol ; le système assure en fait que le pilote ne va pas voler dans des configurations à risque (vitesse trop faible, angle d'incidence trop grand, altitude trop élevée...) (Pallett et Coyle, 1993). Elles permettent aussi de manœuvrer dans des configurations où les marges de stabilité naturelles de l'avion sont faibles voire même des configurations aérodynamiquement instables sur une partie de l'enveloppe de vol. De telles configurations instables en boucle ouverte ont leur avantage dans le domaine de l'aviation militaire où elles sont synonymes de meilleure efficacité aérodynamique (Avanzini et Galeani, 2005; Suresh *et al.*, 2005).

Néanmoins, du fait des retards numériques engendrés par les ordinateurs de bord, les commandes de vol électriques ont donné naissance à de nouveaux phénomènes dont il faut tenir compte lors de l'élaboration du contrôleur de vol, comme par exemple les PIO ou *Pilot-Induced Oscillations*. De plus, dans un souci d'améliorer les qualités de vol et le confort, l'ingénieur est maintenant confronté à un imposant cahier des charges composé de plusieurs contraintes appelées qualités de manœuvrabilité et/ou qualités de vol (Gibson, 1997, 1999; Hodgkinson, 1999; US Department of Defense, 1990). Ces contraintes portant aussi bien sur l'amortissement de certains modes que sur les réponses fréquentielles de certains transferts de boucles, définissent plusieurs niveaux de satisfaction et traduisent la facilité qu'a un pilote à manœuvrer l'appareil. Les qualités de manœuvrabilité

constituent un aspect très important de la synthèse d'un contrôleur de vol et il est primordial de bien définir les contraintes afin d'obtenir le comportement désiré de l'avion.

## Enjeux

L'expérience acquise au fil des années par les avionneurs a dégagé certaines lois de commande qui se sont montrées particulièrement efficaces. Elles sont le fruit d'une vaste expérience, de beaucoup d'expérimentations et reposent sur le sens physique de l'ingénieur. Balas (2003) recense la plupart des techniques de synthèse utilisées actuellement en commande de vol à travers le monde ; il constate que les capacités requises pour synthétiser un contrôleur de vol avancé ne sont pas transmises aisément d'une génération d'ingénieurs à une autre et il existe peu de matériel dans la littérature qui puisse être utilisé comme référence par les ingénieurs afin de synthétiser un contrôleur de vol complet.

Si la plupart des avions actuels ont encore des commandes de vol élaborées sur des techniques dites "classiques" (diagramme de Bode, lieu des racines), les techniques modernes ouvrent de nouvelles voies dans la synthèse des contrôleurs de vol. Elles ont l'avantage de pouvoir considérer plusieurs types de contraintes et d'assurer le rebouclage de plusieurs boucles en même temps, contrairement aux méthodes classiques qui ne synthétisent qu'une seule boucle à la fois. (Tischler, 1996) rassemble une série d'articles sur la synthèse de commandes de vol par des méthodes modernes et on doit constater que les contrôleurs établis sont toujours simplifiés afin de les implanter sur l'appareil ; en effet, bien qu'efficaces, les méthodes modernes génèrent des contrôleurs de trop grande complexité, qu'il faut donc réduire par la suite. De plus, avec l'avènement des gros porteurs comme l'A380 et les défis économiques pour réduire les coûts des transports (prix du baril), les structures deviennent de plus en plus flexibles et il faut souvent tenir compte de cet aspect dans l'élaboration du contrôleur des avions souples<sup>2</sup> (Kubica, 1995; Dardenne, 1998; Puyou, 2005).

Enfin les qualités de manœuvrabilité suscitent toujours un certain questionnement. Lors de la conférence AIAA GNC<sup>3</sup> Hawaii 2008, une des sessions portant sur les qualités de manœuvrabilité fut d'ailleurs intitulée *On the utter futility of modern control theory to meet handling qualities requirements*<sup>4</sup>. À lui seul, ce titre résume le conflit qui peut encore subsister entre les partisans de méthodes classiques pour concevoir des contrôleurs en vol et les partisans de méthodes modernes qui souhaitent imposer leurs nouvelles méthodes auprès des industriels. Il faut néanmoins nuancer cela puisque plusieurs méthodes modernes comme le placement de structures propres (Farineau, 1989) ou le contrôle optimal (Blight *et al.*, 1994) ont été utilisées dans la conception des commandes de vol de l'A320 ou du B-767 et sont maintenant monnaie courante dans l'industrie.

Pour faire un raccourci, le but recherché est d'obtenir un contrôleur de structure la plus simple

---

2. L'aspect contrôle de l'avion souple sera laissé de côté.

3. *Guidance, Navigation and Control*

4. Que l'on pourrait traduire par " Sur la totale futilité des méthodes de contrôle moderne à satisfaire les exigences des qualités de manœuvrabilité"

possible, ayant un sens physique<sup>5</sup> pour un ingénieur, qui soit performant sur toute l’enveloppe de vol, robuste à certaines variations de paramètres, séquencés par rapport à d’autres et qui remplisse un cahier des charges constitué de plusieurs qualités de manœuvrabilité.

## Axes de recherche

Notre travail s’inscrit dans la suite de (Akhrif *et al.*, 1998), projet de recherche mené à la demande de *Bombardier Inc.*, où les auteurs s’intéressent à l’optimisation d’un contrôleur de vol longitudinal dont la structure est fixée *a priori*. Les paramètres du contrôleur sont optimisés afin de satisfaire toutes les contraintes de manœuvrabilité sur toute l’enveloppe de vol. C’est néanmoins un processus long et très coûteux en temps de calcul. Les résultats ne sont d’ailleurs pas garantis. Une démarche similaire est proposée dans (Tischler *et al.*, 2002) où l’auteur avec son logiciel CONDUIT<sup>®</sup> améliore les performances d’un contrôleur par optimisation des gains.

Le premier problème d’intérêt est la constitution du cahier des charges et en particulier les qualités de manœuvrabilité que l’on cherche à satisfaire. Une étude sera faite pour établir les qualités de manœuvrabilité que l’on pourrait qualifier de prépondérantes et celles plus secondaires. De plus on cherchera pour certaines d’entre elles à les exprimer de façon analytique en fonction des paramètres du système et/ou du contrôleur. Étant de différentes natures (modales, temporelles, fréquentielles), on cherchera aussi par le biais de modèles de référence à les rassembler sous une même forme.

Un second problème se pose alors : l’architecture fixe imposée par l’avionneur est-elle capable de satisfaire toutes les contraintes que l’on cherche à satisfaire ? Si tel n’est pas le cas, quelles sont alors les performances atteignables par cette architecture ? De plus, doit-on s’astreindre à une architecture fixe et en choisir les gains pour garder une structure connue et significative pour des ingénieurs, ou peut-on s’affranchir de cette architecture pour en trouver une plus performante quitte à complexifier la loi de commande ? Du fait de la cotutelle, deux voies seront abordées : une première voie où nous gardons l’architecture imposée et tentons d’en tirer le maximum et une seconde voie où nous cherchons une nouvelle forme de contrôleur en conservant seulement les mêmes entrées et les mêmes mesures.

La première voie s’inscrit dans les domaines de la stabilisation par retour de sorties (Kimura, 1978; Syrmos *et al.*, 1997) et du placement de pôles dans une région du plan complexe (Gutman et Jury, 1981; Ackermann, 1993; Barmish, 1994). En nous basant sur les travaux de Saydy *et al.* (1990), nous utilisons les applications gardiennes pour apporter une nouvelle approche dans ces deux domaines. Elles seront appliquées par la suite à notre problématique de choix de gains d’un contrôleur à architecture fixe. De plus, dans l’optique d’un séquençement des contrôleurs, nous introduisons une nouvelle façon d’obtenir des correcteurs séquencés, ce qui viendra étendre les méthodes

---

5. i.e. utilisation de contrôleurs classiques de type PID, de filtres, etc...

répertoriées dans (Leith et Leithead, 2000) et (Rugh et Shamma, 2000).

Pour la seconde voie, nous nous dirigeons vers une synthèse  $H_\infty$  (Zames, 1981; Doyle *et al.*, 1989) où la satisfaction des qualités de manœuvrabilité sera assurée entre autre grâce à un modèle de référence. Comme le correcteur obtenu sera d'ordre élevé<sup>6</sup>, il faudra procéder à une réduction en cherchant à simplifier et à structurer le correcteur autant que possible. Nous nous baserons pour cela sur les travaux de Chable (2003) eux-même basés sur le contrôle modal robuste développé dans (Magni, 2002). Le séquençement du correcteur sera assuré dans la droite ligne des thèses de Le Gorrec (1998) et Döll (2001).

## Plan de la thèse

Le **chapitre 1** est consacré à la revue de la littérature sur les différents thèmes abordés dans la thèse, soit les qualités de manœuvrabilité, les problèmes de stabilisation par retour de sorties, les méthodes de synthèse communément utilisées en commande de vol et le séquençement de contrôleur. Le chapitre se conclut sur les différents objectifs de la thèse ainsi que les contributions qui y sont rapportées.

La suite du mémoire est divisée en 3 parties, chacune subdivisée en chapitres. La **partie 1** est consacrée à la modélisation de l'avion et aux qualités de manœuvrabilité. Nous nous attardons dans le **chapitre 2** à la description et à l'analyse complète de notre modèle d'avion, soit le *Challenger 604* de *Bombardier Inc.* Y sont présentées les équations de la mécanique du vol et leur linéarisation dans le cas du vol longitudinal, ainsi que les différents éléments intervenant dans la boucle de contrôle : actionneur, capteurs, manche et pilote. On analyse ensuite l'évolution de la dynamique de l'avion au travers de l'enveloppe de vol pour différentes valeurs de masse et de centrage. Le chapitre est achevé sur la réduction d'ordre de nos modèles ainsi que de l'obtention de modèles interpolés/LFT qui nous serviront dans la suite du travail. Les qualités de manœuvrabilité sont abordées de façon plus spécifique dans le **chapitre 3**. Après une analyse de différents critères, nous détaillons plus particulièrement le dropback de Gibson pour lequel une étude complète est faite. Nous terminons en confrontant les différentes qualités de manœuvrabilité sur un modèle standard et établissons une hiérarchie des contraintes pour mettre en avant celles qui sont prépondérantes.

Les **partie 2** et **partie 3** constituent la pierre d'angle de cette thèse et l'illustration-même de sa dualité franco-canadienne. On aborde dans la **partie 2** le travail traité à l'École Polytechnique de Montréal et basé sur l'utilisation des applications gardiennes. Cette partie est composée de 3 chapitres dont 2 présentant des articles écrits sur différents sujets en lien avec notre problème. Le **chapitre 4** présente la base théorique des applications gardiennes. Le premier article (**chapitre 5**) traite du placement automatique de pôles dans une région donnée du plan complexe ainsi qu'une ap-

---

6. C'est un des inconvénients majeurs de la synthèse  $H_\infty$

plication à notre problème de commande de vol avec architecture fixe. Le deuxième article (**chapitre 6**) est l'aboutissement de notre travail sur le séquençement de contrôleur. La **partie 3** est consacrée au travail effectué à l'ISAE<sup>7</sup> de Toulouse ; outre divers articles préparatoires publiés dans diverses conférences, on y trouve une présentation du contrôle modal robuste ainsi que son application à la réduction et au séquençement de correcteurs (**chapitre 7**). L'article présenté dans le **chapitre 8** montre alors une application complète de ces techniques sur notre problème. Libérés de la contrainte d'architecture fixe, nous y présentons un nouveau contrôleur d'ordre réduit séquencé sur l'enveloppe de vol et robuste à des variations de masse et de centrage dans la mesure du possible.

Nous effectuons enfin une synthèse afin de comparer les résultats obtenus par les deux approches, notamment les avantages/désavantages ainsi que les performances respectives des contrôleurs obtenus. On y fait ensuite un résumé des contributions ainsi que les différents axes de recherche à privilégier pour la suite.

---

7. Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace

## CHAPITRE 1

### REVUE DE LITTÉRATURE & OBJECTIFS

Nous débutons cette thèse par une revue de littérature sur différents thèmes évoqués dans l'introduction et qui motiveront notre travail.

Nous porterons d'abord notre attention sur les qualités de manœuvrabilité qui sont le point de départ et la première motivation de notre recherche. Il s'agit ici d'évoquer la littérature consacrée au sujet, notamment les grandes tendances et les méthodes d'obtention de ces qualités de manœuvrabilité; elles seront reprises plus en détail dans la troisième partie.

Nous souhaitons ensuite emprunter deux voies différentes pour la conception de notre contrôleur du vol longitudinal : une première voie où la structure de contrôle est imposée et une seconde voie où cette contrainte est relâchée avec néanmoins l'objectif d'obtenir un contrôleur aussi simple que possible. La synthèse d'un contrôleur d'architecture fixe s'inscrit en fait dans la lignée des problèmes de stabilisation par retour de sortie et de synthèse d'ordre fixe. Nous consacrerons donc une partie de la revue de littérature à ce vaste sujet qui reste au premier plan de l'automatique. Afin d'aborder le problème de synthèse sans contrainte d'architecture, nous verrons ensuite les différentes méthodes communément utilisées pour la synthèse de contrôleur de vol. Néanmoins, la plupart de ces méthodes s'appliquent en général en un point de fonctionnement donné de l'enveloppe de vol et il nous faut par la suite séquencer le contrôleur en fonction de paramètres représentatifs de la condition de vol; on parle alors de *gain-scheduling* ou encore de séquençement de gains. Ce point constituera notre dernier sujet d'étude.

Forts de cette revue de littérature, nous définirons les objectifs que nous nous sommes fixés ainsi que les contributions obtenues.

## 1.1 Revue de littérature

La synthèse d'un contrôleur de vol fait intervenir plusieurs aspects. Il s'agit d'abord de définir un certain nombre de contraintes à satisfaire, se présentant sous la forme de qualités de manœuvrabilité et de vol. S'ensuit le choix d'une architecture : on peut partir d'une architecture classique dont les ingénieurs ont une bonne connaissance, ou éventuellement en proposer une nouvelle. L'architecture reste intimement liée à la méthode retenue pour la synthèse du contrôleur de vol puisque souvent la méthode choisie va imposer la structure du contrôleur. De plus, les performances de ce contrôleur doivent s'étendre à l'ensemble de l'enveloppe de vol nécessitant ainsi le séquençement du contrôleur (*gain-scheduling*).

Dans le cas d'une architecture dite classique, on doit ajuster les gains et les filtres variables afin de satisfaire le cahier des charges. Ceci s'inscrit donc dans le cadre général de la stabilisation par retour statique de sorties et des problèmes subséquents dont la minimisation de l'abscisse spectrale, le confinement de pôles dans une région du plan complexe et la satisfaction de critères de type  $H_2/H_\infty$ .

Nous passerons donc en revue ces différents aspects. Dans un premier temps, nous aborderons les qualités de manœuvrabilité qui seront reprises plus en détail dans le **chapitre 3**. Nous présenterons le problème général de stabilisation par retour de sorties ainsi que les méthodes actuelles pour le résoudre. Nous traiterons ensuite différentes méthodes de synthèse qui ont été utilisées dans la conception de contrôleur en vol pour terminer sur l'aspect séquençement de ces contrôleurs.

### 1.1.1 Les qualités de manœuvrabilité

Depuis les frères Wright et le début de l'aviation, les qualités de manœuvrabilité ont toujours été un vaste sujet de recherche et ce n'est pas en vain que les deux pères de l'aviation considéraient que "équilibrer et diriger" un avion, était un des enjeux les plus importants. Avec l'avènement des commandes de vol électriques et des avions contrôlés électroniquement, il a fallu repousser encore plus loin les limites du domaine et comprendre les nouveaux phénomènes dus aux retards introduits par les éléments électroniques.

C'est au prix d'innombrables essais en vol qu'ont pu être dégagés ce que l'on nomme les qualités de manœuvrabilité. Cooper et Harper (1969) les définissent comme "ces qualités ou caractéristiques d'un avion qui régissent la facilité et la précision avec lesquelles le pilote est capable d'effectuer les tâches requises". À partir de critères qualitatifs comme l'opinion du pilote, on en a déduit des critères quantitatifs afin de guider les ingénieurs dans la conception de lois de commande remplissant ces qualités de manœuvrabilité. Loin d'être une science exacte, la traduction de critères qualitatifs en critères quantitatifs demeure un problème très actuel qui propose encore de nombreux défis.

Dans l'aéronautique militaire, la plupart des qualités de manœuvrabilité sont rassemblées dans



les références MIL-STD-1797A (US Department of Defense, 1990, 1997) où elles sont documentées par de nombreuses métriques alors que dans le domaine civil, les normes officiels (JAR 25 pour l'Europe (JAR, 1974) et FAR 25 pour les États-Unis (FAR, 1974)) définissent très peu de métriques et de performances à remplir. Dès lors, les avionneurs civils bâtissent un cahier des charges qui leur est propre en s'inspirant des qualités de manœuvrabilité du monde militaire.

Les livres de Gibson (1997, 1999) et Hodgkinson (1999) servent de références en matière de qualités de manœuvrabilité ; les auteurs y présentent essentiellement les qualités de manœuvrabilité militaires, en précisant qu'un avionneur civil devrait facilement pouvoir les adapter. Gautrey (1998) adapte ainsi dans sa thèse les qualités de manœuvrabilité militaires à un avion régional et constitue un cahier des charges qu'il cherche à satisfaire à travers divers types de lois de commande ; certains critères sont alors rendus moins contraignants pour le cas d'un avion civil.

Comme le montrent (Ashkenas, 1984) et (Mitchell *et al.*, 2004), le monde des qualités de manœuvrabilité est en constante évolution et doit faire face à de nouveaux problèmes au fur et à mesure que les technologies évoluent. Depuis l'avènement des commandes de vol électriques (*fly-by-wire*) de nouveaux problèmes se sont posés aux ingénieurs du fait des retards numériques engendrés par les calculateurs et notamment les PIOs (*Pilot-Induced Oscillations*) (Mitchell et Hoh, 2000).

En voulant être exhaustif, on peut recenser de nombreuses qualités de manœuvrabilité et les considérer toutes lors de la synthèse d'un contrôleur peut résulter en une démarche très lourde. De plus, certains critères sont "complétés" au fur et à mesure, voir modifiés. C'est le cas par exemple de (Gautrey et Cook, 1998) qui développe un nouveau critère GCAP<sup>1</sup> (à partir d'anciennes données portant sur le CAP<sup>2</sup>) pour tenir compte des dynamiques des capteurs et des actionneurs. Tokutake *et al.* (2005) effectue une démarche similaire en définissant une autre variante du CAP.

Lors de la conférence AIAA GNC 2009 à Chicago, une des sessions était intitulée *Control Methods to Meet Handling Quality Requirements*<sup>3</sup> démontrant ainsi qu'il y a encore un manque à combler dans le domaine. Le problème n'est donc plus simplement de traduire des critères qualitatifs en critères quantitatifs mais de les inclure explicitement dans une méthode de synthèse afin de les satisfaire *a priori*. Malgré un tel titre, aucun des articles présentés ne répondait véritablement au sujet et il s'agissait essentiellement de vérification *a posteriori* des critères. Néanmoins d'intéressantes questions furent posées quant aux modèles de référence censés satisfaire les qualités de manœuvrabilité. Il en ressort aussi que la modélisation du comportement du pilote demeure plus que jamais à l'ordre du jour lors de la conception de lois de contrôle (Hess, 2009).

Les qualités de manœuvrabilité sont de différentes natures : modale, fréquentielle et temporelle.

---

1. *Generic Control Anticipation Parameter*

2. *Control Anticipation Parameter*

3. Que l'on peut traduire par Méthodes de contrôle pour satisfaire les qualités de manœuvrabilité

On est alors en droit de se demander s'il n'y a pas de redondance entre les différents critères. En effet, un critère de temps de réponse dans le domaine temporel peut sensiblement correspondre à une largeur de bande passante dans le domaine fréquentiel, ou un certain placement de pôles dans le plan complexe. Ainsi il se peut qu'en remplissant une qualité de manœuvrabilité en particulier, d'autres soient automatiquement satisfaites (Saussié, 2004). Ceci fait l'objet d'une analyse particulière dans la thèse afin de mettre en évidence cette redondance.

Comme le **chapitre 3** est entièrement dévolu aux qualités de manœuvrabilité, nous y développerons le sujet avec notamment les définitions des échelles qualitatives, les classements des appareils et des tâches et la description des qualités de manœuvrabilité en jeu.

### 1.1.2 Stabilisation par retour de sortie

La stabilisation par retour de sortie est identifiée comme un problème ouvert majeur de la commande, comme en témoignent (Bernstein, 1992) et (Blondel *et al.*, 1995). La plupart des approches utilisées pour tenter de résoudre ce problème sont rassemblées dans (Syrmos *et al.*, 1997).

On considèrera dans la présente section la stabilisation du système :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  et  $y \in \mathbb{R}^p$ .

La stabilisation d'un système LTI par retour statique de sortie (SOF pour *Static Output Feedback*) consiste à chercher, si elle existe, une matrice de retour  $K \in \mathbb{R}^{m \times p}$  qui stabilise le système de manière interne, soit :

$$\Lambda(A + BKC) \subset \mathring{\mathbb{C}}_-. \quad (1.2)$$

où  $\Lambda(\cdot)$  désigne l'ensemble des valeurs propres. On définit pour toute matrice  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , l'abscisse spectrale  $\alpha$ , notée  $\alpha(M)$ , comme la plus grande partie réelle des valeurs propres de  $M$  :

$$\alpha(M) \triangleq \max_{\lambda \in \Lambda(M)} \operatorname{Re}(\lambda). \quad (1.3)$$

En utilisant l'abscisse spectrale  $\alpha$ , le problème de stabilisation par retour de sortie revient donc à trouver  $K \in \mathbb{R}^{m \times p}$  tel que :

$$\alpha(A + BKC) < 0. \quad (1.4)$$

Dans le cas d'un retour dynamique de sortie (DOF pour *Dynamic Output Feedback*), nous cherchons un correcteur dynamique d'ordre  $n_K \geq 1$  défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}_K &= A_K x_K + B_K y \\ u &= C_K x_K + D_K y \end{cases} \quad (1.5)$$

On parlera de correcteur d'ordre réduit si  $n_K < n$  et de correcteur d'ordre plein si  $n_K = n$ .

Lorsque le retour est dynamique, il s'agit donc de déterminer  $(A_K, B_K, C_K, D_K)$  telles que :

$$\Lambda(A_{cl}(\hat{K})) \subset \mathring{\mathbb{C}}_- \quad \text{avec} \quad A_{cl}(\hat{K}) = \begin{bmatrix} A + BD_K C & BC_K \\ B_K C & A_K \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Le problème de retour dynamique peut se ramener à un problème de retour statique de la façon suivante. Si l'on pose :

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix}, \quad \hat{y} = \begin{bmatrix} x_K \\ y \end{bmatrix}, \quad \hat{u} = \begin{bmatrix} \dot{x}_K \\ u \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

on peut formuler le modèle d'état augmenté :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}\hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{C}\hat{x} + \hat{D}\hat{u} \end{cases} \quad (1.8)$$

avec

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_{n_K} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & B \\ I_{n_K} & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_K} \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Le retour de sortie statique :

$$\hat{u} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix}}_{\hat{K}} \hat{y} \quad (1.10)$$

est alors équivalent à la commande en boucle fermée par le retour dynamique.

Dépendamment du problème considéré (retour d'état ou de sortie, correcteur statique, dynamique d'ordre plein ou réduit), on peut, dans certains cas particuliers, confirmer (ou infirmer) l'existence d'un correcteur  $K$  :

- Si l'on considère un retour d'état statique ( $C = I$ ), il est nécessaire et suffisant que le couple  $(A, B)$  soit stabilisable, ce qui revient à vérifier que les modes instables de  $A$  sont commandables.
- Si  $n_K = n$  (retour de sortie d'ordre plein), il est nécessaire et suffisant que le couple  $(A, B)$  soit stabilisable et  $(C, A)$  détectable, ou dit autrement que les modes instables de  $A$  soient commandables et observables.
- Si  $n_K < n$  (retour de sortie d'ordre réduit), la condition précédente n'est que nécessaire et non plus suffisante. La condition PIP (*Parity-Interlacing-Property*) vient régler la question dans

le cas de la recherche d'un correcteur dynamique stable (Youla *et al.*, 1974).

- Dans le cas d'un retour statique, il est nécessaire que le système vérifie la condition PIP paire (Wei, 1990).

Ces contraintes d'existence ne s'appliquent qu'à un nombre limité de problèmes de stabilisabilité. De plus, la complexité du problème de stabilisation par retour de sortie statique n'est pas véritablement établie (on suppose que le problème est NP-difficile) et est toujours source d'interrogations (Blondel et Tsitsiklis, 1997).

### ◆ Critère de positivité

Parmi les méthodes constructives simples on peut citer dans le cas des systèmes SISO, pour lesquels  $K$  est un scalaire, le lieu d'Evans (ou lieu des racines) ou le critère de Routh Hurwitz. Que ce soit graphiquement ou par des inégalités, on peut trouver rapidement une éventuelle valeur de  $K$  qui stabiliserait le système. Dans le cas des systèmes MIMO, le problème devient plus complexe et nécessite des méthodes plus élaborées.

On peut ainsi ramener le problème de stabilité à un problème de positivité. En se basant sur les critères de stabilité de Routh-Hurwitz ou de Liénard-Chipart (Liénard et Chipart, 1914), les gains du contrôleur  $K$  doivent en effet vérifier un ensemble d'inégalités scalaires polynomiales. Anderson *et al.* (1975) considèrent alors cet ensemble d'inégalités, munies de quantificateurs, comme une proposition logique et utilisent une méthode de décision (algorithme de Tarski et de Seidenberg) afin de réduire le nombre de quantificateurs et décider, au bout d'un nombre fini d'étapes, si le système est stabilisable ou pas. Néanmoins, comme le montre l'exemple traité dans (Anderson *et al.*, 1975), la mise en oeuvre de l'algorithme nécessite un grand nombre d'étapes même pour un système d'ordre faible. Ainsi l'augmentation de l'ordre du système et du nombre d'entrées/sorties génère un nombre d'étapes d'autant plus grand du fait de la complexité exponentielle de l'algorithme de Traski (Basu *et al.*, 1994), ce qui rend la méthode peu pratique.

### ◆ Théorie de Lyapunov

La théorie de Lyapunov permet quant à elle d'exprimer le problème de stabilisation par retour statique de sortie sous la forme d'une inégalité matricielle. Ainsi, le système est stable en boucle fermée de manière interne si et seulement si il existe  $K \in \mathbb{R}^{m \times p}$  et  $P \succ 0$ ,

$$(A + BKC)^T P + P(A + BKC) \prec 0 \quad (1.11)$$

Une telle inégalité matricielle est en général difficile à résoudre, parce que les inconnues  $(P, K)$  n'interviennent pas de façon linéaire. L'inégalité est appelée inégalité bilinéaire matricielle (ou en anglais BMI, *Bilinear Matrix Inequality*). En revanche, dans le cas d'un retour d'état

( $C = I_n$ ), le changement de variable  $Q = P^{-1}$  et  $Y = KQ$  permet de retrouver la LMI :

$$QA^T + AQ + Y^T B^T + BY \prec 0 \quad (1.12)$$

qui est linéaire en  $(Q, Y)$  avec  $Q \succ 0$ . Le correcteur est reconstruit avec  $K = YQ^{-1}$ . Les problèmes LMI sont de complexité polynomiale et sont relativement bien résolus avec des méthodes numériquement performantes telles que les méthodes de point intérieur, algorithme de l'ellipsoïde ou par optimisation non lisse. Néanmoins dans le cas du retour de sortie et des BMIs qu'il entraîne, le problème ne peut plus être résolu aussi efficacement. (Iwasaki et Skelton, 1995) propose alors un théorème qui transforme la BMI (Eq. 1.11) en deux LMIs couplées ; Le problème est alors connu pour être NP-difficile (Fu et Luo, 1997). Diverses méthodes de résolution ayant plus ou moins de succès ont été établies. Certaines n'ont pas de garantie de convergence (min/max (Geromel *et al.*, 1998), projections alternées (Grigoriadis et Skelton, 1996)). D'autres, comme les méthodes de type Lagrangien augmenté partiel (Fares et Apkarian, 2001; Apkarian *et al.*, 2003) avec contraintes LMI explicites, prennent en compte la contrainte de couplage ; leur convergence vers une solution locale est prouvée (Noll *et al.*, 2004) mais leur mise en place est très gourmande en temps de calcul. Une alternative proposée dans (Henrion *et al.*, 2005) utilise le critère de stabilité d'Hermite. Dans le cas de systèmes SIMO ou MISO, les auteurs formulent le problème de stabilité directement sous forme de BMI en fonction des gains du contrôleur mais sans avoir recours à des variables de Lyapunov additionnelles. Les résultats demeurent mitigés.

#### ◆ Optimisation non lisse

En considérant l'abscisse spectrale  $\alpha(A + BKC)$ , la stabilisation par retour statique peut être assimilée à un problème d'optimisation :

$$\min_{K \in \mathbb{R}^{m \times p}} \alpha(A + BKC) \quad (1.13)$$

Bien évidemment l'application  $K \mapsto A + BKC$  est affine mais  $\alpha(\cdot)$ , bien que continue, n'a pas de bonnes propriétés pour l'optimisation : la fonction est non convexe, non lisse et en général non lipschitzienne (Burke et Overton, 1994, 2001). On doit alors se tourner du côté de l'optimisation non lisse pour tenter de résoudre ce problème. Ceci a donné lieu à de nombreux algorithmes pour tenter d'optimiser localement l'abscisse spectrale.

La solution la plus simple demeure les méthodes de recherche directe (*Direct search method*) où l'on évalue la fonction à minimiser autour d'un point donné selon une configuration et un maillage définis au départ (directions de recherche et taille des pas) et qui peut évoluer tout au long du processus (Higham, 1993; Kolda *et al.*, 2003). Henrion (2007) propose l'application au problème SOF de trois algorithmes de recherche directe disponibles sous Matlab. Leur application sur la banque de problèmes rassemblés sous le nom de COMPl<sub>e</sub>ib (Leibfritz, 2003)

donne des résultats satisfaisants.

Burke *et al.* (2002b) introduisent une méthode numérique inspirée des méthodes de faisceaux (*gradient bundle methods*). Elle repose, à chaque itération, sur une étape d'échantillonnage autour du correcteur courant, pour déterminer la prochaine direction de descente. Du fait de son caractère aléatoire lors de l'étape d'échantillonnage, les résultats diffèrent d'une optimisation à une autre. Des résultats de convergence sont rapportés dans (Burke *et al.*, 2002a, 2005), et l'algorithme est implanté dans un module appelé HIFOO (Burke *et al.*, 2006) qui, outre des problèmes de stabilisation, permet aussi de faire de la synthèse  $H_\infty$  d'ordre fixé *a priori*.

Enfin, Apkarian et Noll (2006) proposent une combinaison de recherche directe et de stratégie non lisse pour la direction de descente et le critère d'arrêt. La méthode est étendue dans (Bompart *et al.*, 2007); les auteurs laissent la recherche directe de côté pour se contenter d'une évaluation du sous-gradient de l'abscisse spectrale afin de déterminer la direction de descente.

Une version plus générale de ce problème est le placement de pôles dans une région du plan complexe (Gutman et Jury, 1981; Saydy *et al.*, 1990; Ackermann, 1993; Barmish, 1994). On définit ainsi des régions de stabilité généralisée dans le plan complexe dans lesquelles on cherche à placer les pôles de notre système.

### 1.1.3 Méthodes de synthèse de commande de vol

Balas (2003) brosse un tableau très représentatif des méthodes de synthèse utilisées à travers le monde. Il débute son article en citant un rapport du AGARD (Advisory Group for Aerospace Research and Development) (Fielding et Moorhouse, 1998) qui constate que l'expérience concernant la synthèse des contrôleurs de vol n'est pas transmise aisément et que très peu de matériel existe dans la littérature courante qui pourrait servir de livre de référence pour la synthèse complète d'un contrôleur de vol. D'un autre côté, le rapport du groupe GARTEUR a répondu en partie à cette attente puisque des chercheurs européens ont appliqué une douzaine de techniques modernes sur deux bancs d'essai d'avion civil RCAM et militaire HIRM (Magni *et al.*, 1997). Un cahier des charges était imposé aux chercheurs qui devaient tirer le maximum de la méthode qui leur était attribuée. Une approche classique a aussi été incluse à fin de comparaison. Tischler (1996) rassemble lui aussi plusieurs articles où différentes méthodes sont proposées, tout comme Pratt (2000).

Les méthodes de synthèse alors recensées sont les suivantes :

- Méthodes classiques par fermetures successives de boucles (voir paragraphe dédié)
- Contrôle Optimal (LQR/LQG/LTR) (Anderson et Moore, 1990; Blight *et al.*, 1994; Kienitz et Grübel, 1998; Mukherjee et Pieper, Paper 2000-3944, 2000; Amato *et al.*, 2000; Crider, 2004)
- Rétroaction quantitative (*Quantitative Feedback*) (Houpis, 1999; Houpis *et al.*, 1994; Reynolds

*et al.*, 1996)

- Inversion Dynamique (Isidori, 1995; Enns *et al.*, 1994; Reiner *et al.*, 1995, 1996; Ito *et al.*, 2002; Patel et Smith, 1998; Papageorgiou et Glover, 2005; Tantale, 2006; Lee *et al.*, 2007)
- Synthèse  $H_\infty$  (voir paragraphe dédié)
- $\mu$ -synthèse (voir paragraphe dédié)
- Placement de structures propres (*Eigenstructure Assignment*) (voir paragraphe dédié)
- Contrôle par logique floue (Mengali, 2000; Barkana, 2005)
- Contrôle par réseaux de neurones (Sharma et Calise, 2005)
- Commande adaptative (Aseltine *et al.*, 1958; Whitaker *et al.*, 1958; Kalman, 1958; Åström, 1983)

On peut classer ces méthodes en différentes catégories selon qu'elles produisent des correcteurs statiques ou dynamiques, et selon qu'elles se basent sur un retour d'état ou sur un retour de sortie. Néanmoins une méthode n'appartient pas forcément à une seule catégorie. Par exemple, le placement de valeurs/vecteurs propres peut s'effectuer sur un retour d'état ou un retour de sortie, et avec un correcteur statique ou dynamique. Nous allons brièvement passer en revue celles, parmi les méthodes, qui sont les plus pertinentes pour notre travail.

#### ◆ Approche classique

Bien que la majorité des systèmes soit des systèmes MIMO (Multi-Input, Multi-Output), la commande classique repose essentiellement sur la synthèse d'une seule boucle à la fois. Les techniques alors utilisées sont alors variables, et peuvent être l'utilisation du lieu des racines pour placer les pôles, ou l'ajustement direct sur le diagramme de Bode. Ces techniques reposent essentiellement sur l'utilisation de contrôleurs de type PID ou de réseaux à avance ou retard de phase. La plupart des livres de commande de vol ont tous un chapitre consacré aux lois de contrôles classiques. Elles sont le fruit de ce que l'expérimentation des ingénieurs a dégagé. Les livres de Etkin (1972), McRuer *et al.* (1973), McLean (1990), Nelson (1998) et Stevens et Lewis (2003) sont parmi les références les plus citées.

Conduisant généralement à des contrôleurs bien connus et relativement simples, l'inconvénient majeur réside précisément dans la fermeture d'une seule boucle à la fois. Néanmoins, cette façon de procéder mène à des contrôleurs satisfaisants. Citons à ce propos le contrôleur de vol de l'avion LAVI (Shmul *et al.*, 1994), celui de l'*Eurofighter 2000* (McCuish, 1994) et enfin celui du VAAC *Harrier* (Shanks *et al.*, 1994). Dans chacun des articles, les auteurs mettent de l'avant la simplicité des contrôleurs obtenus, leur lisibilité<sup>4</sup>, leur portabilité et leur facilité à être retouchés. Ils reconnaissent cependant que cette façon de procéder est très gourmande en temps et que leurs connaissances des méthodes modernes les ont aidé dans la synthèse. Gautrey (1998) souligne aussi qu'une très bonne connaissance du modèle est nécessaire.

---

4. On entend par ce terme la facilité à interpréter physiquement chaque élément du contrôleur.

### ◆ Synthèse $H_\infty$

La synthèse  $H_\infty$ , initiée par Zames (1981) au début des années 80 et développée par la suite par Doyle (1982), se présente comme un problème de stabilisation et de rejet de perturbations où l'on cherche principalement à diminuer l'impact d'une perturbation sur le système tout en le stabilisant. Elle se révèle particulièrement intéressante puisqu'elle permet de prendre en compte, *a priori* et explicitement, des spécifications fréquentielles et temporelles du cahier des charges sous la forme de filtres de pondération. On peut se reporter à (Zhou et Doyle, 1998) et (Alazard *et al.*, 1999) pour une présentation complète de la théorie.

Bien qu'il y ait plusieurs façons de résoudre le problème, on retiendra la méthode de (Doyle *et al.*, 1989) basée sur une approche par variable d'état. Bien que le concept soit assez simple, la synthèse  $H_\infty$  souffre de plusieurs maux dont le premier est que le correcteur obtenu peut être d'ordre très élevé (au moins du même ordre que le système). Il faut donc ensuite réduire ce correcteur afin de le simplifier et le rendre implantable sur un système réel.

Les références (Hyde, 1996; Amato *et al.*, 2003; Kannan et Seetharama, 2005; Luo *et al.*, 2005) rendent compte de synthèses  $H_\infty$  dans le domaine aéronautique. L'appariement de modèle par synthèse  $H_\infty$  de (Hentabli *et al.*, 2003) demeure aussi une idée qui sera poursuivie dans la suite. À noter que dans (Buschek et Calise, 1997), les auteurs synthétisent des correcteurs  $H_\infty$  d'ordre fixé *a priori*.

### ◆ $\mu$ -analyse et $\mu$ -synthèse

La valeur singulière structurée (VSS)  $\mu$  permet de mesurer la performance robuste d'un système. Elle est intensivement utilisée quand on dispose d'un modèle incertain du système à l'étude.

Le pré-requis pour l'utilisation de la  $\mu$ -analyse et la  $\mu$ -synthèse est de reformuler le problème sous forme LFT en rassemblant dans une matrice  $\Delta$  unique toutes les incertitudes. La  $\mu$ -analyse permet d'étudier la stabilité du système malgré la matrice incertaine  $\Delta$ . La  $\mu$ -synthèse cherche à fournir un contrôleur qui assurera la stabilité du système malgré les incertitudes sur  $\Delta$ .

Il n'y pas de méthode directe pour résoudre ce problème d'optimisation. On utilise alors une procédure appelée *D-K itération* dont on ne détaillera pas l'algorithme (Zhou et Doyle, 1998; Alazard *et al.*, 1999). C'est une procédure itérative où l'on alterne résolution du problème  $H_\infty$  standard défini dans le paragraphe précédent et calcul de matrices de *scalings* optimales  $\mathcal{D}$ . La procédure est néanmoins plutôt longue et nécessite la résolution d'un problème d'optimisation complexe. Il n'y a de plus aucune garantie de convergence. Comme dans la synthèse  $H_\infty$ , le contrôleur obtenu est d'ordre élevé et il faut effectuer une réduction du correcteur pour rendre le système implantable.



Pour les applications de  $\mu$ -analyse et  $\mu$ -synthèse dans le domaine aéronautique et spatial, on pourra se référer à (Zhu *et al.*, 2000; Boulet *et al.*, 2001; Mannchen *et al.*, 2002).

#### ◆ Placement de structures propres

Le placement de structures propres est une méthode du domaine temporel qui consiste à placer la structure propre (valeurs propres et vecteurs propres) du système afin d'assurer certaines propriétés dont les performances temporelles et le découplage entrées/sorties. Un livre de référence en la matière est (Liu et Patton, 1998).

Airbus fut un des précurseurs dans l'utilisation du placement de structure propre, notamment dans son application au vol latéral de l'A320 (Farineau et Letron, 1990). Le découplage des entrées vis-à-vis de certaines sorties est bien tenu en compte lors du placement des vecteurs propres. Ceci est aussi illustré dans (Sobel et Shapiro, 1985) et (Piou et Sobel, 1995).

La thèse de Faleiro (1998) présente l'application de ces techniques au cas spécifique du contrôleur de vol. Comme le placement de structures propres n'assure *a priori* aucune propriété de robustesse en terme de stabilité ou de performance, des méthodes sont alors développées dans sa thèse pour augmenter les propriétés de robustesse, notamment en choisissant judicieusement les vecteurs propres de la boucle fermée. Il en est de même dans la thèse de Le Gorrec (1998) où est développée une approche robuste pour le contrôle modal. Les multiples applications de sa méthode sont rapportées dans (Magni *et al.*, 1998; Magni, 1999). Nous y reviendrons dans la **partie 3** pour présenter plus en détails cette approche.

En général, le contrôleur fourni est un correcteur statique, bien que la méthode puisse être utilisée pour des correcteurs dynamiques (Magni, 1999). On peut utiliser aussi un pré-correcteur pour modeler la réponse du système à certaines entrées. Le placement de structure propre donne des correcteurs simples, très facilement implantables mais la lisibilité tend à être réduite si des structures plus complexes sont exigées. Pour cette raison, on utilise souvent ces correcteurs pour des problèmes de régulation et pour la conception de contrôleurs de bas niveau, alors que les boucles externes sont synthétisées de façon classique pour le contrôle de haut niveau.

#### 1.1.4 Séquencement de contrôleurs

Dans la section précédente, nous avons considéré des méthodes qui permettent de synthétiser des correcteurs en un point de vol donné. Ces correcteurs sont obtenus sur des modèles linéarisés dont la validité est limitée au voisinage du point d'équilibre choisi. Dès lors, le correcteur ne sera

efficace que localement, le terme localement étant lui-même qualitatif et dépendant du système et du point d'équilibre choisi. Le problème est alors de trouver un correcteur qui sera performant sur toute l'enveloppe de vol : ou bien, on cherche un correcteur unique à paramètres fixes et robuste aux changements de condition de vol, ou bien on cherche un correcteur séquencé en fonction de variables de séquençement représentatives des conditions de vol. L'enveloppe de vol étant particulière vaste, la dynamique de l'avion change de façon significative entre deux points de fonctionnement extrêmes de l'enveloppe. Il est donc utopique de chercher un correcteur à paramètres fixes qui serait performant en tout point.

Le séquençement de gains (ou de contrôleurs), plutôt connu sous sa dénomination anglaise *gain scheduling* est un terme qui regroupe différentes techniques pour synthétiser un correcteur séquencé, c'est-à-dire dont les gains varient avec les valeurs courantes des signaux choisis pour le séquençement. On ne considère que le séquençement des gains selon des variables continues de séquençement, en écartant ainsi les techniques dites de *switching* entre contrôleurs (Leonessa *et al.*, 1988). Avant les années 90, peu de choses ont été publiées sur le sujet mais en 2000, Rugh et Shamma (2000) ainsi que Leith et Leithead (2000) donnent une vue d'ensemble sur le séquençement de gains. Selon le recensement de (Rugh et Shamma, 2000), 25 articles sur le sujet ont été publiés dans les années 80 comparativement à 101 et 185 dans la première et seconde moitié des années 90. Le séquençement de gains était alors surtout un problème appliqué et les techniques de séquençement étaient tenues secrètes par les industriels et les militaires. Le domaine aéronautique a d'ailleurs été l'un des premiers domaines d'application. Néanmoins, il demeurait surtout un manque flagrant de théorie vis-à-vis de ce sujet (Fromion et Scorletti, 2003). La procédure d'obtention d'un correcteur séquencé se fait au travers de 4 étapes :

1. Élaboration d'un modèle LPV (*Linear Parameter Varying*) du système
2. Utilisation de méthodes de synthèse linéaires
3. Implantation des correcteurs dont les coefficients varient de façon continue en fonction des variables de séquençement
4. Évaluation de la performance.

#### ◆ Modèle LPV

La première étape consiste à obtenir un modèle du système sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x + B(\theta)u \\ y = C(\theta)x + D(\theta)u \\ \theta(t) \in \mathcal{P} \end{cases} \quad (1.14)$$

où les matrices du modèle d'état dépendent explicitement du paramètre variant  $\theta(t)$ , dont l'évolution appartient au domaine borné  $\mathcal{P}$ . Le vecteur  $\theta$  peut être constitué de signaux exo-

gènes ou de variables internes. La façon classique d’obtenir ce genre de système demeure la linéarisation jacobienne. À partir d’une famille de points d’équilibre d’un système, paramétrée par  $\theta$ , on linéarise le système autour de cette famille pour obtenir un système linéaire dont les matrices dépendent explicitement de  $\theta$ . Pour chaque valeur fixée de  $\theta$ , le système linéarisé décrit le comportement local du système non linéaire autour d’un point d’équilibre. On pourra se référer à (Bruzelius *et al.*, 2004) pour une discussion sur les incidences d’un choix judicieux pour les formes LPV et à (Casella et Lovera, 2008) pour un survol récent des différentes techniques pour obtenir un système LPV.

Dans le domaine aéronautique, ce sont les conditions de vol qui définissent l’équilibre et donc le vecteur  $\theta$ . On peut y trouver communément les variables suivantes : le Mach, l’altitude, la vitesse, la pression dynamique, etc. Ces mêmes variables peuvent éventuellement servir de variables de séquençement quand vient le temps de construire le contrôleur séquencé.

C’est au niveau des étapes 2 et 3 que se distinguent essentiellement les deux grands courants des techniques de séquençement de gain. On peut distinguer une approche classique basée sur la linéarisation du système dans laquelle les étapes 2 et 3 sont distinctes et une approche plus moderne basée sur des méthodes de synthèse LPV ou LFT dans lesquelles les étapes 2 et 3 sont résolues en même temps.

#### ◆ Séquençement : approche classique

Cette approche est aussi surnommée *Divide and Conquer* (“Diviser et Conquérir”), ce qui en reflète plutôt bien la philosophie. Le principe général est relativement simple :

- à partir d’un modèle non linéaire que l’on a mis sous forme LPV par linéarisation jacobienne (voir ci-haut), on choisit plusieurs valeurs du vecteur paramètre  $\theta$  (donc plusieurs positions d’équilibre) et on obtient donc autant de modèles linéarisés autour de différentes positions d’équilibre,
- pour chacun des modèles linéarisés obtenus, on synthétise un contrôleur LTI ; la technique de synthèse est laissée libre à l’utilisateur (voir les méthodes présentées dans la section 1.1.3),
- on interpole ensuite chacun des contrôleurs par rapport à une ou des variables de séquençement. Généralement ces variables de séquençement sont choisies parmi les composantes du vecteur  $\theta$ , représentatives de la position d’équilibre,
- et enfin on implante un contrôleur non linéaire basé sur cette famille de contrôleurs linéaires.

Chacune de ces étapes a son lot de “problèmes” associés. Le premier est évidemment le choix du nombre de points d’équilibre. Si l’on prend peu de points, on risque de ne pas recouvrir tout le domaine efficacement, et si l’on prend beaucoup de points, cela implique la synthèse d’autant

de contrôleurs linéaires et leur séquençement. Cela est évidemment lié au fait que les correcteurs LTI synthétisés autour des positions d'équilibre ne sont performants que localement. Il faut donc prendre un nombre suffisant de points. Ensuite l'interpolation des correcteurs demeure un problème d'actualité. Dépendamment de la structure et de l'ordre du contrôleur, l'interpolation peut être plus ou moins fastidieuse. On peut distinguer plusieurs approches suivant la structure du contrôleur :

- Interpolation linéaire des pôles, des gains et des zéros des fonctions de transfert du correcteur (Nichols *et al.*, 1993). Dans cet article, les auteurs ont synthétisé des contrôleurs  $H_\infty$  en différents points d'équilibre de l'enveloppe de vol d'un missile. Ils réduisent d'abord les fonctions de transfert des différents correcteurs obtenus, leur donnent une structure similaire (même nombre de pôles et de zéros ainsi qu'appariement de pôles et zéros compatibles en terme de dynamiques) et enfin interpolation linéaire des pôles, gains et zéros. Aucune garantie n'est offerte pour assurer la stabilité et la performance hors points de synthèse.
- Interpolation linéaire des solutions des équations de Riccati dans le cadre de la synthèse  $H_\infty$ . Dans (Reichert, 1992), les auteurs interpolent linéairement les solutions, mais doivent néanmoins faire attention à ce que les structures des équations de Riccati soient similaires ; par exemple, les vecteurs d'état doivent être identiques d'un point d'équilibre à un autre. L'article (Aouf *et al.*, 2002) reprend le même principe mais sur un modèle d'avion flexible.
- Interpolation linéaire des coefficients des représentations d'état balancées. Cette approche est utilisée dans (Kellett, 1991) où les différents contrôleurs linéaires sont équilibrés et ensuite interpolés linéairement. L'inconvénient de cette approche demeure que les vecteurs d'état des réalisations équilibrées ne sont pas forcément consistants d'un contrôleur à un autre.
- Interpolation des gains d'état et d'observation de la forme LQG. Dans (Hyde et Glover, 1993) et (Hyde, 1996), les auteurs mettent leurs contrôleurs  $H_\infty$  sous la forme observateur+retour d'état, et interpolent linéairement les matrices d'observation et de retour d'état. Plusieurs suppositions sont faites comme par exemple une variation sans à-coup (*smooth*) des matrices  $(A(\theta), B(\theta), C(\theta), D(\theta))$  et donc éventuellement des solutions présentant des propriétés similaires aux différents points d'équilibre choisis. Outre un problème de cohérence de structure d'un contrôleur à l'autre, il faut stocker les matrices de l'observateur paramétrées par  $\theta$ , d'où une certaine mémoire requise. Les articles (Stilwell et Rugh, 1999; Stilwell, 2001) abordent le même problème mais contrairement à (Hyde et Glover, 1993), la stabilité est garantie entre les points de synthèse.

Parmi les techniques d'interpolation présentées ci-dessus, seuls (Stilwell et Rugh, 1999; Stilwell, 2001) garantissent la stabilité entre les points de synthèse (pour  $\theta$  scalaire réel dans (Stilwell et Rugh, 1999) et  $\theta \in \Gamma \subset \mathbb{R}^2$  dans (Stilwell, 2001)) alors que pour les autres, la stabilité hors point de synthèse est vérifiée *a posteriori* par des simulations sur une grille de

valeurs du vecteur  $\theta$ . Puyou (2005) étend d'ailleurs ce résultat pour un vecteur  $\theta$  de dimension quelconque. Dans les cas d'interpolation de fonctions de transfert et de modèles d'état, les articles (Stilwell et Rugh, 1998, 2000) proposent des solutions garantissant la stabilité sur le modèle linéarisé quand le vecteur  $\theta$  est fixe. De plus, dans le cas scalaire, ils parviennent à garantir la stabilité quand  $\theta(t)$  varie dans le temps, avec cependant une limitation sur le taux de variation  $|\dot{\theta}(t)| < \theta_{\max}$ . La stabilité n'est en général garantie que localement et les simulations sur le système non linéaire viennent donc montrer si le correcteur semble assurer la stabilité globale.

Un dernier problème survient lorsqu'il s'agit d'implanter le correcteur séquencé sur le modèle non linéaire (Rugh et Shamma, 2000; Leith et Leithead, 2000). Certaines précautions doivent être prises pour remédier à des termes couplés cachés (*hidden coupling terms*) qui apparaissent quand on implante le correcteur séquencé sur le système non linéaire (Lawrence et Rugh, 1995). Typiquement l'incidence de ces termes de couplage est plus grande quand les variables de séquençement sont des variables internes du système, par opposition à des signaux exogènes. Kaminer *et al.* (1995) proposent une autre forme d'implantation en faisant intervenir la dérivée de la sortie du processus qui doit être alors mesurée ou évaluée. Il faut de toute façon procéder à une analyse *a posteriori* (Shamma et Athans, 1990, 1991) pour s'assurer de la stabilité globale.

#### ◆ Séquençement LPV et LFT

Cette section rassemble les méthodes LPV et LFT qui combinent les étapes 2 et 3, c'est-à-dire qui permettent d'obtenir un contrôleur automatiquement séquencé.

La synthèse LPV étant assez lourde, on se contentera ici d'en présenter les grandes lignes. Elle consiste en une généralisation aux systèmes LPV du Lemme Borné Réel (voir par exemple (Boyd *et al.*, 1994)), et revient à chercher des fonctions/matrices de Lyapunov  $X(\theta)$ , solutions de LMIs dépendant de  $\theta$  et  $\dot{\theta}$ , donc finalement des solutions dans l'espace infini des fonctions de  $\theta$  d'une infinité de LMIs (pour chaque valeur admissible de  $\theta$  et  $\dot{\theta}$ ). On se reportera à (Rugh et Shamma, 2000) pour l'expression de ces LMIs.

La loi de commande recherchée est sous la forme d'un correcteur global, ayant la même dépendance paramétrique que le système à contrôler. Le correcteur *LPV* s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_K &= A_K(\theta(t))x_K + B_K(\theta(t))y \\ u &= C_K(\theta(t))x_K + D_K(\theta(t))y \end{cases} \quad (1.15)$$

Le problème de l'infinité du nombre de LMIs peut être contourné de 2 façons (Apkarian et Tuan, 2000) : soit par discrétisation du domaine d'évolution de  $\theta$  et  $\dot{\theta}$ , soit en choisissant une structure affine du modèle LPV et/ou une structure *a priori* pour les solutions, ou éventuel-

lement les deux méthodes à la fois. On en vient dans les deux cas à transformer une infinité de contraintes en un nombre fini de contraintes, avec comme inconvénient pour la technique de discrétisation de manquer des valeurs critiques (et donc nécessité de faire une analyse sur une grille raffinée) et pour la technique d'imposition de structure de trop limiter l'espace de recherche des solutions et donc d'avoir un problème infaisable. Cette approche est aussi la seule à considérer le taux de variation  $\dot{\theta}$  et à offrir des garanties de stabilité et de performance en considérant  $\dot{\theta}$ . On peut citer (Becker *et al.*, 1993) et (Sharuz et Behtash, 1992) qui cherchent une matrice de Lyapunov solution constante et (Wu *et al.*, 1996; Bruzelius et Breitholtz, 2001; Pellande, 2001) qui cherchent plusieurs matrices de Lyapunov sur un maillage de l'espace des paramètres. La synthèse LPV souffre néanmoins d'un certain conservatisme du fait par exemple que l'on cherche des fonctions de Lyapunov avec des structures particulières ; elle devient aussi très rapidement gourmande en calculs. Néanmoins, cette façon de procéder a été appliquée avec succès dans le domaine aéronautique dans (Biannic *et al.*, 1997; Biannic et Apkarian, 1999; Spillman, 2000; Szász et al., 2005; Lu *et al.*, 2005).

Les méthodes de synthèse basées sur une forme LFT du système s'appliquent dans le cas particulier où les matrices du système LPV sont des polynômes ou des fractions rationnelles du vecteur  $\theta$ . On se reportera à (Zhou *et al.*, 1996) pour une présentation théorique plus complète et (Magni, 2005) pour un ensemble de fonctions Matlab permettant d'obtenir des formes LFT.

Trois approches exploitant cette forme LFT ont pu être identifiées :

- la première approche se base sur le théorème du petit gain pour fournir une condition suffisante d'existence d'un correcteur auto-séquenté. Le système LFT peut être vu comme un système LTI perturbé par  $\Delta$ . Dans ce cas-là, le vecteur  $\theta$  retranscrit sous la forme  $\Delta$  est considéré comme un paramètre incertain envers lequel le correcteur auto-séquenté doit être robuste. Par exemple, Apkarian et Gahinet (1995) considèrent un correcteur lui-même sous forme LFT et dont la dépendance paramétrique est la même que celle du système LFT. Packard (1994) va dans le même sens.
- la deuxième approche est dérivée du contrôle modal robuste (Magni, 2002) où l'on cherche une forme *a priori* du contrôleur séquenté, et on procède à un placement de structures propres sur les modèles extrêmes du domaine de variation de  $\theta$  (Magni *et al.*, 1998; Magni et Chable, 2002; Döll *et al.*, 2001; Constant *et al.*, 2002). La procédure sera expliquée en détail au chapitre 5 et fera l'objet d'une application.
- la troisième approche est, elle aussi, dérivée du contrôle modal robuste ; le contrôleur auto-séquenté est en revanche directement obtenu par inversion de formes LFT (Chable, 2003; Magni, 2005; Gaulocher *et al.*, 2007). La structure du contrôleur (ordre et forme) est décidée

à l'avance et les pôles doivent être éventuellement fixés. Dépendamment de la forme LFT choisie, cela peut conduire à un correcteur LFT dont la dimension du bloc d'incertitude explose littéralement. Des solutions ont alors été développées pour contourner cet inconvénient par l'utilisation de forme LFT de synthèse (Magni, 2005) mais leur implantation en est plus délicate et nécessite un effort de calcul supplémentaire sur le système embarqué (Magni *et al.*, 2006). Les résultats sont néanmoins prometteurs.

Pour ces trois approches exploitant la forme LFT, le taux de variation  $\dot{\theta}$  n'est pas considéré.

#### ◆ Conclusion sur les méthodes de séquençement

Nous retiendrons de cette étude le grand nombre de façons d'aborder le séquençement de contrôleur et aussi les problèmes associés à chaque approche. Bien que synthétisant en une seule étape un contrôleur séquençé, la synthèse LPV nécessite un retour d'état et ne permet pas de choisir *a priori* la structure du correcteur ; elle sera donc mise de côté. En revanche, l'approche classique du séquençement pourrait être repensée afin de s'affranchir du choix du nombre de points de synthèse nécessaires tout en garantissant la stabilité sur l'ensemble de variation des paramètres.

## 1.2 Objectifs, démarche et contributions

À la lumière de la revue de littérature, nous allons formuler plusieurs objectifs ainsi que les démarches associées pour tenter de les atteindre. L'objectif principal de cette thèse pourrait être résumé de la façon suivante :

***Développer une méthodologie et des guides pour synthétiser de façon rapide et efficace un contrôleur robuste et séquentiel du vol longitudinal d'un avion de transport civil tout en garantissant la satisfaction de qualités de manœuvrabilité.***

Même si la méthodologie repose sur des fondements théoriques plus ou moins accessibles pour l'ingénieur du point de vue mathématique, elle se doit d'être suffisamment simple d'utilisation pour être employée par quelqu'un n'ayant pas toutes les connaissances théoriques sous-jacentes.

En reprenant les différents axes étudiés dans la revue de littérature, nous formulons les objectifs que nous avons cherché à atteindre, les démarches employées ainsi que les contributions effectuées.

### 1.2.1 Objectif 1 : Les Qualités de Manœuvrabilité Essentielles (*Common Handling Qualities*)

Avant de procéder à toute synthèse de contrôleur, il faut définir les performances à atteindre qui sont dans notre cas exprimées pour la plupart en termes de qualités de manœuvrabilité. Mais pour constituer un tel cahier des charges, il s'agit de comprendre ces différents critères. En effet, lors des conférences GNC 2008 et 2009, le thème récurrent sur les qualités de manœuvrabilité était leur satisfaction *a priori* par les méthodes de synthèse. Ce premier objectif d'une meilleure compréhension des qualités de manœuvrabilité se divise en deux sous-objectifs : l'étude d'un critère particulier, le *dropback*, et la confrontation des différents critères pour mettre en évidence les critères prépondérants. Les démarches et contributions accomplies sur ces deux sous-objectifs sont présentées.

#### Contributions pour l'objectif 1

Lors d'une synthèse, il est avantageux d'exprimer un critère de performance explicitement en fonction des gains/matrices d'un contrôleur, à l'instar de (Tokutake *et al.*, 2005). Dans (Saussié, 2004), le critère du *dropback* a pu être exprimé explicitement en fonction des paramètres de la fonction de transfert du système. Dans la présente thèse, une des premières contributions théoriques a été d'établir une formule similaire dans le cas d'un système exprimé sous la forme d'un modèle d'état ; elle a pu être ainsi appliquée à la synthèse d'un correcteur par retour d'état ou de sortie pour mettre en avant quels sont les gains influençant le critère. De plus, sur les architectures de contrôle fournies par *Bombardier Inc.*, le candidat a clairement établi les gains modifiant le *dropback*. Cette formule permet ainsi de régler la valeur exacte du *dropback* sur un système de n'importe quel ordre.



Il est bon de noter qu'avant la formule théorique établie par le candidat, seule une formule sur un système d'ordre 2 standard était disponible (Gibson, 1997). Enfin, il a été montré sur un transfert quelconque que la satisfaction d'un dropback positif passait automatiquement par un dépassement significatif sur les réponses temporelles d'intérêt ; cette corrélation n'était auparavant qu'observée, sans jamais une preuve pour l'étayer et va quelque peu à l'encontre des contraintes cherchant à limiter le dépassement. L'étude sur une fonction de transfert standard d'ordre 2 représentative du comportement de l'avion a permis alors de quantifier le lien entre dépassement et dropback.

Avant de constituer un cahier des charges, il s'agit de s'interroger sur la pertinence des différents critères. En effet les qualités de manœuvrabilité étant de différentes natures, il se pourrait bien que certains critères soient redondants. De plus, certains critères n'étant définis que pour des systèmes réduits de l'avion, il faut discuter de leur validité et de leur extension sur un système d'ordre élevé. Le candidat a donc confronté plusieurs qualités de manœuvrabilité sur un modèle standard représentatif de l'avion. En traçant dans l'espace des paramètres du modèle, les limites de chacun des critères, il a pu mettre en évidence les qualités de manœuvrabilité prépondérantes ; celles qui, une fois satisfaites, assurent que d'autres vont l'être aussi. Ainsi tout au long de ce processus, le candidat a pu mettre en place des guides à la manière de (Gibson, 1997) pour une meilleure compréhension et satisfaction de chacun des critères. Compte-tenu de notre modèle d'avion et des limites imposées par les normes militaires/civiles et le constructeur, il a été établi que sur notre modèle standard, satisfaire des contraintes d'amortissement, de temps de réponse et de dropback permettait dans une certaine mesure de remplir tous les autres critères considérés, notamment les critères fréquentiels. Des formulations mathématiques des critères fréquentiels basées sur le modèle standard ont permis d'ailleurs de faire ressortir des guides supplémentaires. Un produit dérivé de cette étude a été, à la manière de (Hentabli *et al.*, 2003; Hentabli, 2005), de fournir des modèles de référence standards d'ordre 2 utilisables lors d'une synthèse avec appariement de modèle (Srichander, 1993).

### 1.2.2 Objectif 2 : Méthodologies de synthèse pour un contrôleur d'architecture fixe

Le deuxième objectif concerne la synthèse de contrôleurs dont l'architecture est fixée *a priori*. De part leur expérience, les industriels ont développé des architectures de contrôle qu'ils souhaitent conserver lors de la conception des commandes de vol d'un nouvel avion. Ils ont une bonne connaissance ainsi qu'une bonne compréhension de ce type d'architecture<sup>5</sup>, ce qui en facilite le réglage. Dans le rapport (Akhrif *et al.*, 1998), ce problème a été traité en utilisant notamment des algorithmes d'optimisation pour choisir les gains ou améliorer ceux disponibles. Il en est de même pour Tischler qui cherche à optimiser les "paramètres" de décision de plusieurs lois de commande (Tischler *et al.*, 2002, 2005). Par exemple, dans le cas d'un contrôle optimal, il cherche à optimiser les matrices de pondération et dans le cas d'une synthèse  $H_\infty$ , les filtres de pondération. Pour des lois de contrôle classique, il optimise directement les gains. Il s'agit donc dans notre cas d'établir une méthodologie qui permette de régler les gains d'une loi de contrôle tout en satisfaisant un cahier de

---

5. Les architectures sont présentées dans la section 2.1.6

charges constitué à l'issu de l'objectif 1.

## Contributions pour l'objectif 2

Avant de s'attaquer à l'application en aéronautique, le candidat s'est d'abord intéressé au problème plus général de la stabilisation par retour de sortie abordé dans la revue de littérature. En effet, imposer une architecture de contrôle peut se rapprocher d'un tel problème. Parmi les méthodes répertoriées, celles basées sur l'optimisation non lisse et la recherche directe, ont inspiré un premier algorithme basé sur les applications gardiennes (Saydy *et al.*, 1990). Une comparaison<sup>6</sup> avec d'autres algorithmes disponibles et d'autres approches a permis de mettre en évidence le bien-fondé de l'algorithme proposé, notamment par rapport aux techniques reposant sur la formulation BMI du problème (Henrion *et al.*, 2005).

Dans (Saussié, 2004), le candidat proposait une démarche graphique pour choisir les gains du contrôleur tout en assurant de satisfaire à chaque étape les qualités de manœuvrabilité. Néanmoins cette méthodologie n'était appliquée que sur une condition de vol à la fois et l'approche graphique de la démarche ne permettait de régler que deux gains en même temps. De plus, la solution proposée pour le séquençement des gains était *ad hoc* et reposait sur l'expérimentation du candidat.

Au terme de l'objectif 1, le candidat a pu exprimer certains critères sous la forme d'une région de stabilité où les pôles devraient se situer. L'algorithme précédent a donc été adapté pour tenir compte d'un plus large choix de domaine de stabilité d'intérêt. Étant donné une région de stabilité, l'algorithme règle automatiquement les gains du contrôleur<sup>7</sup> pour y placer les pôles en boucle fermée, dans la mesure du possible bien évidemment. Ce nouvel algorithme a été appliqué avec succès sur les deux architectures de contrôle du vol longitudinal proposées par *Bombardier Inc.* Il a de plus été couplé avec la formulation théorique du dropback pour régler directement le critère en question. Ce travail a donné lieu au premier article où la satisfaction de certaines qualités de manœuvrabilité est garantie *a priori* et non vérifiée *a posteriori* :

**Article 1 :** D. Saussié, O. Akhrif, L. Saydy and C. Bérard.  
*Longitudinal Flight Control Synthesis with Guardian Maps.*  
 Soumis à *Journal of Aircraft*.

Le but ultime étant d'obtenir un contrôleur séquentiel sur l'ensemble de l'enveloppe de vol, le candidat s'est ensuite penché sur le séquençement de gains. À l'heure actuelle, on peut principalement utiliser deux voies (Rugh et Shamma, 2000) : ou bien synthétiser plusieurs contrôleurs linéaires que l'on interpole ensuite, ou alors obtenir directement un contrôleur séquentiel. Les deux démarches peuvent s'avérer longue pour la première ou assez lourde (et sans garantie) pour la seconde. Le can-

---

6. Ceci n'est pas présenté ici.

7. Dont l'architecture est fixée *a priori*

didat a alors proposé une troisième voie alternative au problème de séquençement de gains. À partir d'un seul contrôleur synthétisé en un seul point de vol, un algorithme étend ses performances en faisant varier ses gains automatiquement selon la condition de vol. L'algorithme permet de s'affranchir de la synthèse de plusieurs contrôleurs linéaires en différents points de vol et garantit la stabilité locale autour de n'importe quel point de vol ; son application à notre problème de vol longitudinal a montré son efficacité dans le deuxième article de la thèse :

**Article 2 :** D. Saussié, L. Saydy, O. Akhrif and C. Bérard.  
*A Guardian Map Based Technique for Longitudinal Flight Scheduled Controller.*  
 Soumis au journal *AIAA, Guidance, Control and Dynamics*.

### 1.2.3 Objectif 3 : Synthèse d'un contrôleur moderne de référence, structuration et séquençement

Pour ce troisième objectif, nous nous affranchissons de la contrainte d'architecture fixe et ne conservons que les sorties initialement utilisées par *Bombardier Inc.* Le but est de trouver un correcteur séquencé sur l'enveloppe de vol mais aussi robuste à des variations de masse et de centrage.

La contrainte d'architecture fixe peut se montrer assez limitante dans l'obtention de performances robustes ; rien ne garantit que les architectures préconisées par *Bombardier Inc.* soient adaptées pour remplir de telles contraintes. L'idée générale est la suivante : partir d'un premier correcteur performant, sans limitation d'ordre ou de structure, et tenter par la suite de le réduire et de le séquencer pour obtenir un correcteur aussi simple que possible, comparable aux architectures données par le constructeur.

#### Contributions pour l'objectif 3

Les références pour la synthèse d'un premier contrôleur sans restriction d'ordre sont nombreuses comme nous avons pu le voir dans la revue de littérature. Les résultats des travaux effectués sur RCAM et HIRM (Magni *et al.*, 1997) sont une bonne source d'inspiration puisque la plupart des méthodes modernes y sont appliquées. Le candidat s'est inspiré entre autres des travaux de Hentabli (2005) et Puyou (2005). Le travail effectué sur l'objectif 1 a permis de dégager des modèles de référence d'ordre 2 remplissant toutes les qualités de manœuvrabilité. En supposant que le système se comporte comme le modèle de référence sur la bande passante d'intérêt, on est en droit d'espérer que le système satisfera alors les qualités de manœuvrabilité. Le candidat a alors appliqué une synthèse  $H_\infty$  avec appariement de modèle en y adjoignant des critères supplémentaires de robustesse. L'influence de chacune des pondérations sur le schéma de synthèse  $H_\infty$  a été étudiée permettant ainsi de mieux régler les caractéristiques du contrôleur (robustesse, bande passante, etc...).

La question s'est ensuite posée de réduire et structurer les correcteurs obtenus en différents points de vol. À l'image des travaux de Chable (2003), le candidat a utilisé la réduction de correcteurs inspirée de la commande modale robuste (Magni, 2002). C'est à l'heure actuelle la méthode de réduction qui se trouve être la plus performante quand il s'agit de réduire un contrôleur et d'en conserver les performances en boucle fermée. L'application de la méthode sur les différents correcteurs a permis une substantielle réduction tout en conservant les performances ; de plus une structure similaire a pu être adoptée pour les correcteurs obtenus en différents points de vol. Ce détail révèle son importance quand vient le temps du séquençement. La procédure est une fois de plus détaillée avec des étapes successives guidant ainsi l'utilisateur dans la réduction.

La réduction des contrôleurs ayant dégagé des structures similaires, le candidat a pu mettre en application les résultats de Döll (2001) pour obtenir un contrôleur séquentiel fonction de la pression dynamique et de l'altitude. L'avantage de la méthode est le choix de la formule d'interpolation. En effet, le contrôleur séquentiel est bâti de façon itérative et l'utilisateur peut enrichir la formule d'interpolation au fur et à mesure des étapes, rajoutant ainsi des degrés de liberté seulement si nécessaires. Cela fournit un correcteur continuellement séquentiel suivant les paramètres de vol. Le candidat est parvenu ainsi à couvrir l'ensemble du domaine de vol avec un correcteur dont la structure demeure relativement simple.

Au final la contribution est essentiellement méthodologique et applicative ; à partir de diverses méthodes déjà existantes, le candidat a bâti une démarche progressive et détaillée permettant d'obtenir un contrôleur réduit et structuré, séquentiel selon les conditions de vol et robuste face aux variations de certains paramètres. L'application à notre problème a montré l'efficacité de la méthode et la démarche est suffisamment détaillée pour être reproduite sur d'autres modèles. Ceci mène au dernier article :

**Article 3 :** D. Saussié, C. Bérard, O. Akhrif and L. Saydy.  
*A Self-Scheduled Longitudinal Flight Controller with Handling Quality requirements.*  
 Soumis à *The Aeronautical Journal*.

Première partie

# MODÉLISATION & QUALITÉS DE MANŒUVRABILITÉ

# Préambule

Cette première partie expose le problème, aussi bien la modélisation du *Challenger 604* que les qualités de manœuvrabilité en jeu. On tâchera dans un premier temps de fournir une description aussi complète que possible de l'avion ; s'en suivra une analyse de ses caractéristiques en boucle ouverte. Ceci sera conclu par l'étude de la réduction des modèles ainsi que la recherche de modèles interpolés/LFT de l'avion.

Nous aborderons ensuite les qualités de manœuvrabilité. Il s'agira dans un premier temps de recenser un certain nombre d'entre elles (celles les plus communément utilisées). Nous nous attacherons ensuite sur le critère particulier du dropback, sur lequel le candidat a contribué de manière importante. Nous terminerons sur une confrontation de ces différents critères pour mettre en avant ceux qui sont prépondérants.

Cette partie est scindée de la façon suivante :

- le **chapitre 2** présente la modélisation du *Challenger 604* et son analyse.
- le **chapitre 3** aborde le sujet des qualités de manœuvrabilité.

## CHAPITRE 2

### MODÉLISATION & ANALYSE

Nous traitons dans ce chapitre la modélisation de l'avion d'affaires *Challenger 604* de *Bombardier Inc.* La section 2.1 est consacrée à la modélisation de l'appareil à partir des équations de la mécanique du vol ainsi que sa linéarisation autour d'un point de fonctionnement dans le cas du vol longitudinal. Des modélisations de l'actionneur, des capteurs et du manche sont aussi fournies afin de décrire complètement la boucle ouverte de notre appareil.

Nous abordons dans la section 2.2 l'analyse du modèle en boucle ouverte à travers l'enveloppe de vol. Dépendamment du point de vol considéré, le comportement de l'avion change. De plus, comme nous cherchons à rendre nos correcteurs robustes face à des variations de masse et du centre de gravité, nous étudierons l'influence de ces paramètres sur le modèle en boucle ouverte.

Une modélisation fidèle du système est synonyme de système d'ordre élevé. Du point de vue de la synthèse de contrôleurs, il est souhaitable de travailler sur un système d'ordre réduit. Nous traitons alors dans la section 2.3 la réduction de notre boucle ouverte à un ordre suffisamment bas pour faciliter la synthèse. Il faut néanmoins s'assurer que les contrôleurs synthétisés sur un système réduit demeurent performants sur le système original et donc avoir un système réduit reflétant bien le comportement de l'appareil. De plus, nous cherchons une modélisation paramétrée en fonction du Mach, de l'altitude, de la masse et du centrage. En effet, les modèles dont on dispose ont été fournis en certains points de vol et pour différentes valeurs des paramètres (160 modèles en tout); il s'agit donc d'interpoler ces modèles afin d'obtenir une représentation paramétrée.

## 2.1 Modèle du *Challenger 604*

On présente ici la modélisation des différents éléments du *Challenger 604*. Le schéma de la figure 2.1 illustre les différentes boucles de commande que l'on peut trouver sur un avion à commandes de vol électriques (*fly-by-wire*).

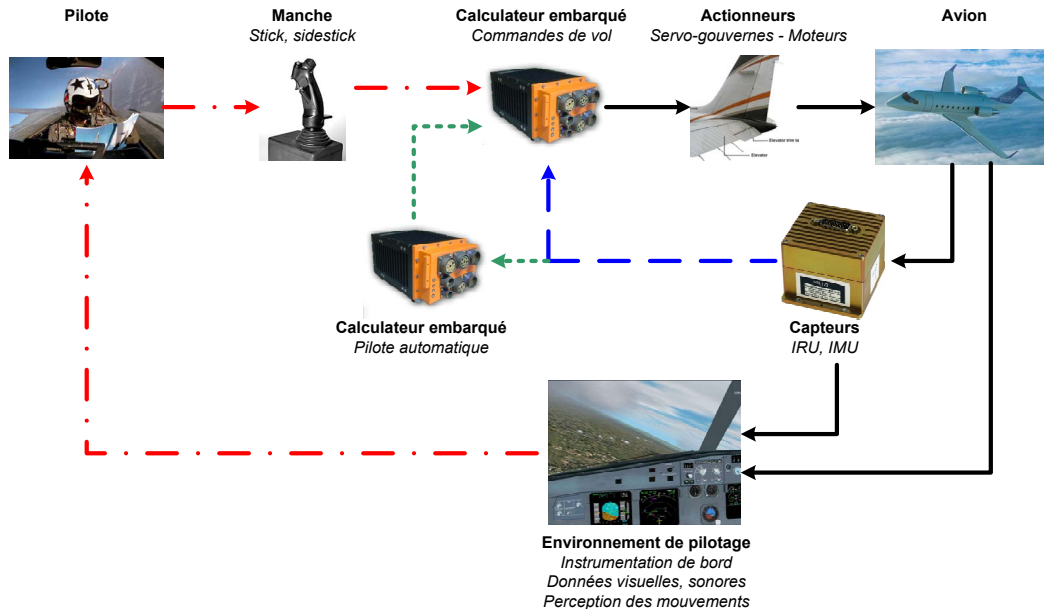


Figure 2.1 Les différentes boucles de contrôle en jeu

On peut y distinguer de façon générale 4 parties ou boucles :

1. la boucle ouverte (représentée aussi sur la figure 2.2). Elle est constituée des actionneurs (servo-gouvernes et surfaces de contrôle, ainsi que les moteurs), de l'avion lui-même et des différents capteurs. Comme nous travaillerons sur le vol longitudinal de l'avion, c'est la gouverne de profondeur qui nous intéresse en particulier. Les boucles de commande qui vont suivre, sont toutes rebouclées sur cette boucle ouverte.
2. une première boucle de commande (— —) qui permet d'améliorer les qualités de vol naturelles de l'avion ainsi que sa manœuvrabilité. Cette boucle de commande est généralement constituée de deux boucles :
  - une boucle SAS (*Stability Augmentation System*) pour augmenter la stabilité de l'appareil,
  - une boucle CAS (*Control Augmentation System*) pour améliorer le contrôle de l'avion.
3. une deuxième boucle de commande (- - -) : le pilote automatique. Différents objectifs sont pris automatiquement en charge par cette boucle :
  - maintien d'attitude,
  - maintien d'altitude,
  - maintien de cap,



- maintien de vitesse.
4. une troisième boucle  $(- \cdot -)$ , qui est la boucle de pilotage dont le pilote est lui-même un élément. Le pilote agit sur le manche (*stick*) et ainsi sur l'appareil, selon les informations qu'il peut recevoir de l'instrumentation de bord et des sensations qu'il ressent. La première boucle de commande de vol électrique vient l'assister dans sa tâche en améliorant la prise en main de l'appareil.

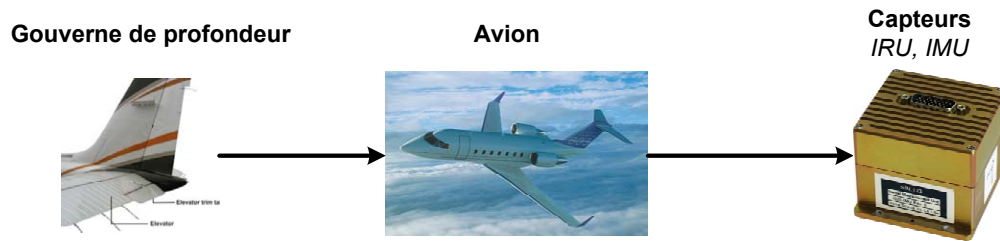


Figure 2.2 Boucle ouverte

Nous allons synthétiser les lois de la première boucle de commande, soient les boucles SAS et CAS, dans le cas d'une architecture classique. On présente d'abord la mécanique du vol de l'avion rigide, ensuite la modélisation de l'actionneur et des capteurs, et enfin les modèles du manche et du pilote.

### 2.1.1 Modèle Avion

#### ◆ Repères utilisés

Trois repères sont utilisés pour mettre en place les équations de la mécanique du vol.

- **Repère normal terrestre** -  $R_o(O, \vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$  : repère lié à la Terre que l'on suppose localement plate et immobile.
  - Origine O : point fixe sur la surface de la Terre.
  - Axe  $\vec{z}_o$  : orienté suivant la direction de la force gravitationnelle  $\vec{g}$ .
  - Axes  $\vec{x}_o$  et  $\vec{y}_o$  : choisis dans le plan horizontal de manière à compléter le repère de façon directe et orthonormée. L'axe  $\vec{x}_o$  est habituellement orienté dans la direction du nord géographique ou magnétique.
- **Repère avion** -  $R_b(G, \vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z}_b)$  : repère lié à l'avion que l'on suppose indéformable.
  - Origine G : centre de gravité de l'avion.
  - Axe  $\vec{x}_b$  : choisi dans le plan de symétrie de l'avion et orienté vers l'avant. Sa définition dans le plan demeure arbitraire. Il est généralement associé à une définition géométrique du fuselage. Si le fuselage est un cylindre,  $\vec{x}_b$  est parallèle à une génératrice.

- Axe  $\vec{y}_b$  : perpendiculaire au plan de symétrie de l'avion et orienté vers la droite de l'avion au «sens pilote».
- Axe  $\vec{z}_b$  : dans le plan de symétrie de l'avion et orienté vers le «ventre» de celui-ci.
- **Repère aérodynamique** -  $R_a (G, \vec{x}_a, \vec{y}_a, \vec{z}_a)$  : repère lié à la vitesse de l'avion.
  - Origine G : centre de gravité de l'avion.
  - Axe  $\vec{x}_a$  : colinéaire à la vitesse aérodynamique de l'avion  $\vec{V}_a$ .
  - Axe  $\vec{z}_a$  : orthogonal à  $\vec{x}_a$  dans le plan de symétrie de l'avion et orienté vers le «ventre» de celui-ci.
  - Axe  $\vec{y}_a$  : choisi de manière à compléter le repère de façon directe et orthonormée.

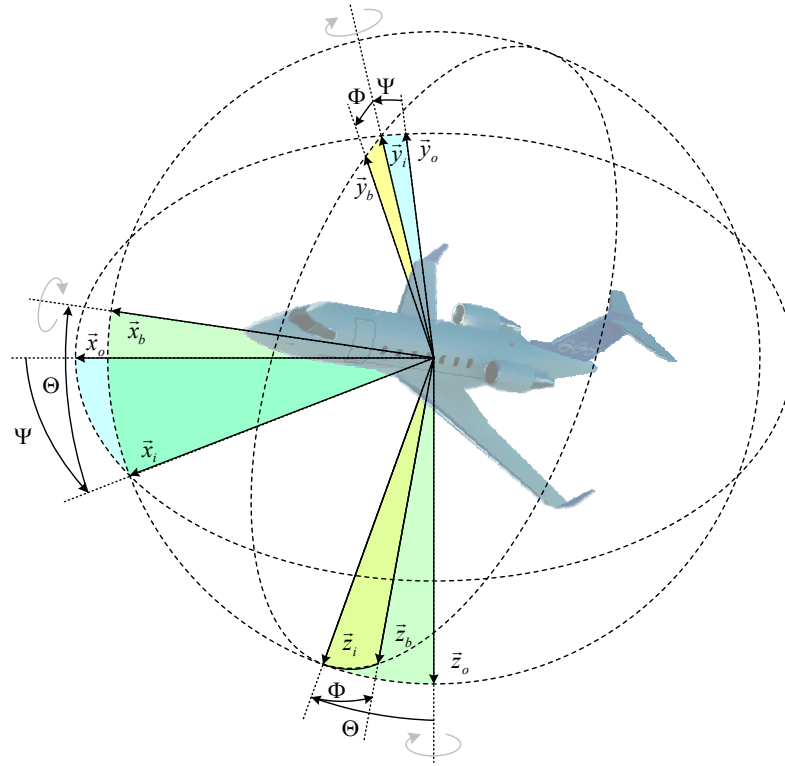
#### ◆ Définition des angles entre repères

Maintenant que les repères ont été définis, leurs positions relatives vont être définies au moyen d'angles. Plusieurs rotations sont nécessaires pour passer d'un repère à un autre.

- **Passage de  $R_o$  à  $R_b$ .** Le passage du repère normal terrestre  $R_o$  au repère avion  $R_b$  correspond au passage d'un repère définissant l'orientation d'un solide à un autre (figure 2.3). Il nécessite l'introduction d'un système de 3 angles :
  1. une rotation de  $\Psi$  (azimut) autour de  $\vec{z}_o$  amène dans le plan horizontal  $\vec{x}_o$  sur  $\vec{x}_i$ , et  $\vec{y}_o$  sur  $\vec{y}_i$ . Le vecteur  $\vec{y}_i$  est porté par l'intersection du plan horizontal contenant G et du plan perpendiculaire à l'axe du fuselage contenant lui aussi G. On en déduit  $\vec{x}_i = \vec{y}_i \wedge \vec{z}_o$ .
  2. une rotation de  $\Theta$  (assiette longitudinale) autour de  $\vec{y}_i$  amène  $\vec{x}_i$  sur  $\vec{x}_b$ .
  3. enfin, une rotation de  $\Phi$  (angle de gîte) autour de  $\vec{x}_b$  amène  $\vec{y}_i$  sur  $\vec{y}_b$ .
- **Passage de  $R_b$  à  $R_a$ .** Le passage du repère avion  $R_b$  au repère aérodynamique  $R_a$  est le passage du vecteur  $\vec{x}_b$  porté par l'axe du fuselage au vecteur  $\vec{x}_a$  porté par la vitesse aérodynamique  $\vec{V}_a$  (figure 2.4). Puisque  $\vec{z}_a$  est dans le plan défini par  $(\vec{x}_b, \vec{z}_b)$  (plan de symétrie de l'avion), deux rotations suffisent :
  1. une rotation de  $-\alpha$  (angle d'incidence) autour de  $\vec{y}_b$  amène  $\vec{z}_b$  sur  $\vec{z}_a$ .
  2. une rotation de  $\beta$  (angle de dérapage) autour de  $\vec{z}_a$  amène  $\vec{y}_b$  sur  $\vec{y}_a$ .

#### ◆ Déplacement du centre de gravité de l'avion

- **Position du centre de gravité dans le repère terrestre  $R_o$** 
  - sur  $(O, \vec{x}_o)$  :  $x$
  - sur  $(O, \vec{y}_o)$  :  $y$
  - sur  $(O, -\vec{z}_o)$  :  $z$  (altitude)

Figure 2.3 Passage de  $R_o$  à  $R_b$ 

- **Vitesse du centre de gravité dans le repère avion  $R_b$**

- sur  $(O, \vec{x}_b)$  :  $U$
- sur  $(O, \vec{y}_b)$  :  $V$
- sur  $(O, \vec{z}_b)$  :  $W$

ce qui donne :

$$U\vec{x}_b + V\vec{y}_b + W\vec{z}_b = V_a\vec{x}_a \quad (2.1)$$

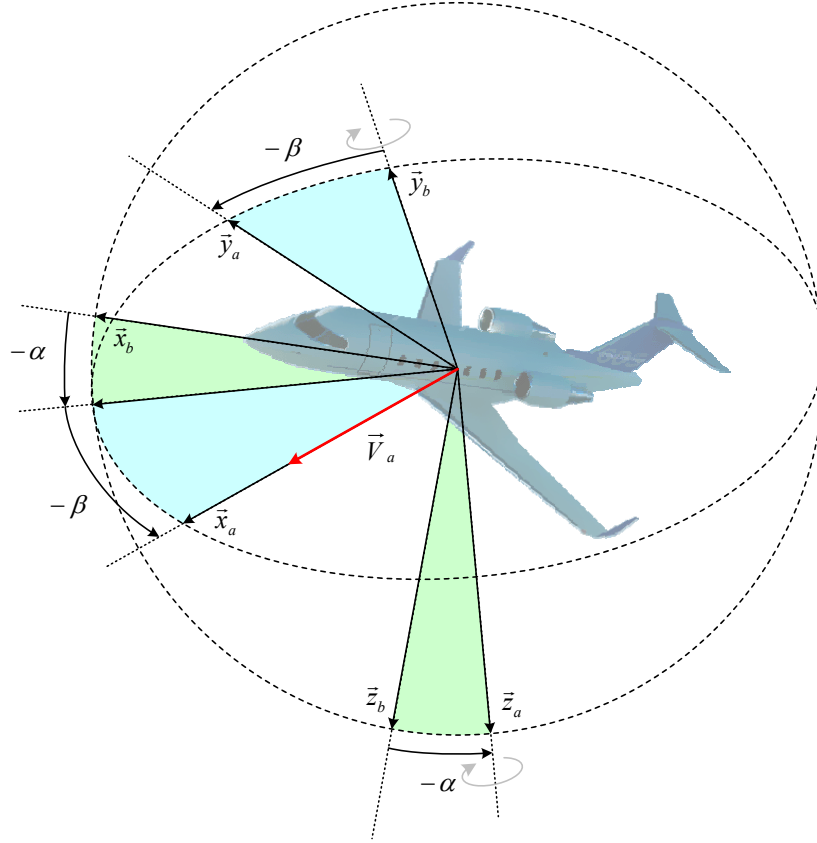
- ◆ **Attitude de l'avion autour de son centre de gravité**

- **Attitude de l'avion dans le repère terrestre**

- $\Psi$  : cap
- $\Theta$  : assiette
- $\Phi$  : angle de gîte

- **Vitesse de rotation du repère avion par rapport au repère terrestre**

- $p$ , vitesse de roulis : vitesse instantanée de rotation autour de l'axe  $\vec{x}_b$
- $q$ , vitesse de tangage : vitesse instantanée de rotation autour de l'axe  $\vec{y}_b$
- $r$ , vitesse de lacet : vitesse instantanée de rotation autour de l'axe  $\vec{z}_b$

Figure 2.4 Passage de  $R_b$  à  $R_a$ 

ce qui donne :

$$p\vec{x}_b + q\vec{y}_b + r\vec{z}_b = \vec{\Omega} \quad (2.2)$$

où  $\vec{\Omega}$  est le vecteur instantané de rotation de  $R_b (G, \vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z}_b)$  dans  $R_o (O, \vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$ .

### ◆ Équations du mouvement

Si l'on fait l'hypothèse que la masse  $m$  de l'avion est constante, les équations générales du mouvement de l'avion rigide, par rapport au repère inertiel terrestre s'écrivent :

#### • Relation fondamentale de la cinématique

$$\left( \frac{d\vec{X}}{dt} \right)_{R_0} = \left( \frac{d\vec{X}}{dt} \right)_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1 R_0} \wedge \vec{X} \quad (2.3)$$

La dérivée par rapport au temps d'un vecteur  $\vec{X}$  dans un repère  $R_0$  est égale à la dérivée par rapport au temps de ce vecteur dans un repère  $R_1$ , à laquelle on ajoute le produit vectoriel de la vitesse de rotation du repère  $R_1$  par rapport à  $R_0$ ,  $\vec{\Omega}_{R_1 R_0}$  par le vecteur  $\vec{X}$ .

- **Équations mécaniques**

- Théorème de la résultante dynamique

$$\sum \vec{F}_e = m \frac{d\vec{V}_T}{dt} \quad (2.4)$$

où  $\vec{V}_T$  représente la vitesse du centre de gravité de l'avion par rapport au repère normal terrestre  $R_o$  et  $\sum \vec{F}_e$  la résultante des forces extérieures agissant sur l'avion (force de pesanteur, forces aérodynamiques et forces de propulsion). En l'absence de vent,  $\vec{V}_T = \vec{V}_a$ .

- Théorème du moment cinétique

$$\sum \vec{M}_e = \mathbf{I} \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \quad (2.5)$$

où  $\sum \vec{M}_e$  le moment résultant des différentes forces agissant sur l'avion (moment des forces aérodynamiques et moment des forces de propulsion).  $\mathbf{I}$  est la matrice d'inertie définie par :

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

où  $I_x$ ,  $I_y$  et  $I_z$  représentent les moments d'inertie selon les axes  $\vec{x}_b$ ,  $\vec{y}_b$  et  $\vec{z}_b$ .  $I_{xy}$ ,  $I_{xz}$  et  $I_{yz}$  sont les produits d'inertie. On considère le cas le plus classique où le plan  $(\vec{x}_b, \vec{z}_b)$  est un plan de symétrie. Sous cette condition, les produits d'inertie  $I_{xy}$  et  $I_{yz}$  sont nuls.

Dans le cas d'un avion symétrique, en l'absence de perturbation atmosphérique, l'ensemble des équations du mouvement sont les suivantes :

- **Équations de translation**

$$X_A + X_T - mg \sin \Theta = m (\dot{U} + qW - rV) \quad (2.7)$$

$$Y_A + Y_T + mg \cos \Theta \sin \Phi = m (\dot{V} + rU - pW) \quad (2.8)$$

$$Z_A + Z_T + mg \cos \Theta \cos \Phi = m (\dot{W} + pV - qU) \quad (2.9)$$

où  $(X_A, Y_A, Z_A)$  sont les composantes des forces aérodynamiques dans le repère avion,  $(X_T, Y_T, Z_T)$  les composantes des forces de poussée et les termes  $-mg \sin \Theta$ ,  $mg \cos \Theta \sin \Phi$  et  $mg \cos \Theta \cos \Phi$  les composantes des forces de pesanteur.

• **Équations de rotation**

$$L_A + L_T = I_x \dot{p} - I_{xz} (\dot{r} + pq) + (I_z - I_y) qr \quad (2.10)$$

$$M_A + M_T = I_y \dot{q} + I_{xz} (p^2 - r^2) + (I_x - I_z) pr \quad (2.11)$$

$$N_A + N_T = I_z \dot{r} - I_{xz} \dot{p} + (I_y - I_z) pq + I_{xz} qr \quad (2.12)$$

où  $(L_A, M_A, N_A)$  sont les composantes des moments dûs aux forces aérodynamiques dans le repère avion et  $(L_T, M_T, N_T)$  les composantes des moments dûs aux forces de poussée.

• **Équations cinématiques**

En utilisant la transformation des coordonnées entre le repère terrestre  $R_o$  et le repère avion  $R_b$ , on peut exprimer la vitesse de l'avion  $(U, V, W)$  en fonction des dérivées des positions  $(x, y, z)$  et des angles  $(\Psi, \Theta, \Phi)$  :

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = T_{bo} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ -\dot{z} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

où  $T_{bo}$  désigne la matrice de passage du repère  $R_o$  au repère  $R_b$ .

$$T_{bo} = \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & \cos \Theta \sin \Psi & -\sin \Theta \\ \sin \Theta \sin \Phi \cos \Psi - \sin \Psi \cos \Phi & \sin \Theta \sin \Phi \sin \Psi + \cos \Psi \cos \Phi & \cos \Theta \sin \Phi \\ \sin \Theta \cos \Phi \cos \Psi + \sin \Psi \sin \Phi & \sin \Theta \cos \Phi \sin \Psi - \cos \Psi \sin \Phi & \cos \Theta \cos \Phi \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Comme toute matrice de rotation, on a :

$$T_{bo}^{-1} = T_{bo}^T = T_{ob} \quad (2.15)$$

D'où, aussi :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ -\dot{z} \end{pmatrix} = T_{ob} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

On peut de même exprimer la vitesse de rotation de l'avion  $(p, q, r)$  en fonction des angles  $(\Psi, \Theta, \Phi)$  et de leurs dérivées.

$$p = \dot{\Phi} - \dot{\Psi} \sin \Theta \quad (2.17)$$

$$q = \dot{\Theta} \cos \Phi + \dot{\Psi} \cos \Theta \sin \Phi \quad (2.18)$$

$$r = -\dot{\Theta} \sin \Phi + \dot{\Psi} \cos \Theta \cos \Phi \quad (2.19)$$

Soit encore :

$$\dot{\Phi} = p + q \tan \Theta \sin \Phi + r \tan \Theta \cos \Phi \quad (2.20)$$

$$\dot{\Theta} = q \cos \Phi - r \sin \Phi \quad (2.21)$$

$$\dot{\Psi} = \frac{q \sin \Phi + r \cos \Phi}{\cos \Theta} \quad (2.22)$$

On trouve ainsi 12 équations différentielles du premier ordre (6 équations cinématiques + 6 équations mécaniques). En supposant l'isotropie horizontale de l'atmosphère, les positions  $(x, y)$  et le cap  $\Psi$  n'influencent pas les forces auxquelles est soumis l'avion. On peut donc laisser de côté les 3 équations différentielles donnant  $\dot{x}, \dot{y}$  et  $\dot{\Psi}$ .

### ◆ Modèle longitudinal

Comme notre étude porte sur le vol longitudinal de l'avion (Fig. 2.5), nous allons nous concentrer sur le modèle longitudinal de l'avion. Nous débuterons tout d'abord par des hypothèses de découplage afin de séparer le vol longitudinal du vol latéral. Nous linéariserons ensuite les équations du modèle longitudinal autour d'une condition d'équilibre.

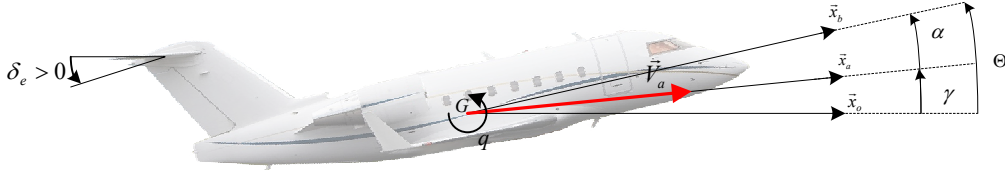


Figure 2.5 Définition des angles pour le vol longitudinal

#### • Hypothèses de découplages et équations longitudinales

On suppose que l'avion vole en ligne droite, dans son plan de symétrie, et que les ailes et la gouverne de direction sont en position neutre. Soit, pour nos grandeurs :

$$V = p = r = \Phi = 0 \quad (2.23)$$

$$\Psi = cst \quad (2.24)$$

– Équation de propulsion sur l'axe  $\vec{x}_b$

$$m\dot{U} = -mqW - mg \sin \Theta + X_A + X_T \quad (2.25)$$

– Équation de sustentation sur l'axe  $\vec{z}_b$

$$m\dot{W} = mqU + mg \cos \Theta + Z_A + Z_T \quad (2.26)$$

– **Équation du moment de tangage**

$$I_y \dot{q} = M_A + M_T \quad (2.27)$$

– **Équation cinématique de la vitesse de tangage**

$$\dot{\Theta} = q \quad (2.28)$$

L'équation d'altitude n'est pas considérée car les modèles numériques fournis par *Bombardier Inc.* ne contiennent pas la variation d'altitude comme variable d'état. Les forces aérodynamiques  $X_A$  et  $Z_A$  sont données par :

$$X_A = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S C_x \quad (2.29)$$

$$Z_A = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S C_z \quad (2.30)$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique de l'air,  $S$  la surface aérodynamique de l'aile,  $C_x$  le coefficient de traînée et  $C_z$  le coefficient de portance. Le moment de tangage par rapport au centre de gravité dû aux forces aérodynamiques est donné par :

$$M_A = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S \bar{c} C_m \quad (2.31)$$

où  $\bar{c}$  représente la corde aérodynamique et  $C_m$  le coefficient de moment en tangage. Les coefficients aérodynamiques  $C_x$ ,  $C_z$  et  $C_m$  sont des fonctions dépendant de plusieurs variables, notamment de l'angle d'incidence  $\alpha$ , du braquage des gouvernes, etc.

### • Linéarisation

On obtient ainsi un système de quatre équations différentielles en fonction des variables longitudinales  $U$ ,  $W$ ,  $q$  et  $\Theta$ . On effectue la linéarisation autour d'un point d'équilibre correspondant à une condition de vol (vitesse et altitude fixées par exemple). Les équations linéarisées se mettent sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & -W_e & -g \cos \Theta_e \\ Z_u & Z_w & U_e & -g \sin \Theta_e \\ M_u & M_w & M_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{\delta_e} \\ Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_e} \\ 0 \end{bmatrix} \delta_e \quad (2.32)$$

où le vecteur d'état  $x$  est composé de variables qui sont des grandeurs par rapport aux



valeurs d'équilibre, soit :

$$\begin{aligned}
 - \text{vitesse horizontale relative} \quad u &= U - U_e \\
 - \text{vitesse verticale relative} \quad w &= W - W_e \\
 - \text{vitesse de tangage} \quad q & \\
 - \text{angle d'assiette relatif} \quad \theta &= \Theta - \Theta_e
 \end{aligned}$$

Nous n'avons inclus dans le modèle linéarisé que la gouverne de profondeur  $\delta_e$  ; la manette des gaz n'est pas une entrée considérée dans notre boucle de commande. Pour plus de précisions sur les dérivées de stabilité  $X_u$ ,  $X_w$ ,  $Z_u$ ,  $Z_w$ ,  $M_u$ ,  $M_w$  et  $M_q$ , le lecteur pourra se reporter aux livres (McRuer *et al.*, 1973), (Cook, 1997), (Nelson, 1998) ou (Stevens et Lewis, 2003).

Dans le sillage de l'aile, l'écoulement subit une déflexion  $\epsilon$  qui provoque une rotation de la vitesse vue par l'empennage arrière. Cette nappe tourbillonnaire émise par l'aile a pour effet de diminuer l'incidence de l'empennage d'un angle  $\epsilon$  (*tail downwash angle*), et ainsi sa portance. Cette réduction d'angle dépend de la distance horizontale et verticale entre l'aile et l'empennage. Il n'est pas mentionné, dans la littérature, de modèle d'état contenant explicitement cet angle  $\epsilon$  comme variable d'état. Nous nous basons sur les données numériques fournies par *Bombardier Inc.* pour rajouter les coefficients relatifs à cette nouvelle variable d'état lors de la linéarisation.

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & -W_e & -g \cos \Theta_e & X_\epsilon \\ Z_u & Z_w & U_e & -g \sin \Theta_e & Z_\epsilon \\ M_u & M_w & M_q & 0 & M_\epsilon \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ E_u & E_w & 0 & 0 & E_\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ \epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{\delta_e} \\ Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_e} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_e \quad (2.33)$$

La figure 2.6 montre la répartition dans le plan complexe des modes longitudinaux sur un cas de vol donné. On retrouve classiquement un mode complexe lent, le mode phugoïde, et un mode complexe rapide, le mode *short period*. Nous les aborderons plus spécifiquement dans la partie portant sur les qualités de manœuvrabilité. Retenons pour l'instant que le mode phugoïde est un mode complexe mal amorti et très lent avec une pulsation propre voisine de 0.1 rad/s. Il représente peu d'intérêt dans le pilotage à court terme. Le mode *short period* ou oscillation d'incidence est aussi généralement un mode complexe moyennement amorti et de pulsation propre voisine de 1 rad/s. Il est de première importance quand il s'agit de piloter l'appareil. Un troisième mode réel plus rapide est apparu du fait que l'on considère aussi l'angle de déflexion  $\epsilon$  comme variable d'état.

Pour les phases de synthèse, nous allons nous concentrer sur la dynamique rapide de l'avion, soit le mode *short period* qui, il s'avère, correspond aux états  $w$  et  $q$ . En tronquant les états

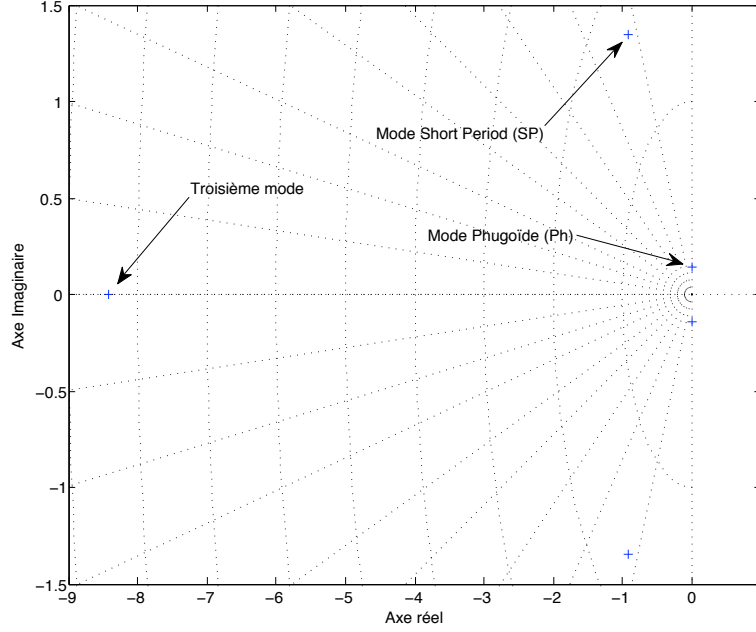


Figure 2.6 Répartition des modes longitudinaux dans le plan complexe

$u$  et  $\theta$  associés au mode phugoïde, on obtient la représentation d'état simplifiée :

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_w & U_e & Z_\epsilon \\ M_w & M_q & M_\epsilon \\ E_w & 0 & E_\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \\ \epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_e} \\ 0 \end{bmatrix} \delta_e \quad (2.34)$$

Les mesures disponibles sont la vitesse de tangage  $q$  et le facteur de charge  $n_z$ , rapport entre l'accélération verticale et la constante de gravité  $g$ . L'accélération verticale est mesurée à une distance  $l_x$  du centre de gravité, d'où :

$$n_z = (\dot{w} - U_e q - l_x \dot{q})/g \quad (2.35)$$

L'équation de sortie s'écrit :

$$\begin{bmatrix} q \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{Z}_w & \tilde{Z}_q & \tilde{Z}_\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \\ \epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{Z}_{\delta_e} \end{bmatrix} \delta_e \quad (2.36)$$

### 2.1.2 Modèle Actionneur

La servo-gouverne, ou dans notre cas le servo-élevateur, n'est pas un élément dynamique neutre de notre boucle ouverte. D'une part, cet élément a sa propre dynamique et il fait déjà l'objet d'un premier asservissement en position. La modélisation et l'asservissement étant déjà fournis par *Bombardier Inc.*, on ne s'intéressera pas au contrôle proprement dit de la gouverne. L'actionneur est

constitué de différents éléments en série représentés par des retards purs ou des fonctions de transfert :

- un retard numérique de 2 ms dû au calculateur représenté par :

$$e^{-0.002s} \quad (2.37)$$

- la servo-gouverne représentée par le transfert :

$$\frac{1746}{s^2 + 50.3s + 1746} \quad (2.38)$$

- ainsi que le retard pur associé à la servo-gouverne de 15 ms :

$$e^{-0.015s} \quad (2.39)$$

- enfin, le transfert entre le cabestan et l'élèveur :

$$\frac{2.08e7}{s^3 + 2.9e4s^2 + 1.77e6s + 2.08e7} \quad (2.40)$$

Chaque retard pur est approximé par un Padé d'ordre 5<sup>1</sup>, ce qui donne une fonction de transfert d'ordre 15 pour l'actionneur ; néanmoins, il se comporte pratiquement comme un premier ordre sur la bande  $[0, 100]$  rad/s. À cela s'ajoutent des saturations en position et en vitesse. Ces données n'ayant pas été fournies, on considèrera les limites typiques du tableau 2.1 .

Tableau 2.1 Saturation de la gouverne en position et vitesse

Position	Vitesse
$[-30^\circ, +17^\circ]$	$30^\circ/\text{s}$

### 2.1.3 Modèle Capteurs IRU

A l'instar de l'actionneur, les capteurs de la plateforme inertielle IRU (*Inertial Reference Unit*) apportent leur propre dynamique à la boucle ouverte. Deux capteurs nous intéressent en l'occurrence : un gyrolaser qui mesure la vitesse de tangage  $q$  et un accéléromètre délivrant l'accélération verticale  $n_z$  de la position où est implantée la plateforme. Selon les données fournies par *Bombardier Inc.*, les deux capteurs sont modélisés de façon similaire par :

- une fonction de transfert d'ordre 2 :

$$\frac{2526.5}{s^2 + 71.17s + 2526.5} \quad (2.41)$$

---

1. Selon les données fournies par *Bombardier Inc.*

- ainsi que le retard pur associé de 16 ms :

$$e^{-0.016s} \quad (2.42)$$

- un filtre linéaire moyennneur de 60 à 300 Hz :

$$\frac{131.29s^2 - 485.96s + 1.97e7}{s^3 + 545s^2 + 164301s + 1.97e7} \quad (2.43)$$

- et un retard numérique de 3 ms dû à l'acquisition de la mesure par le calculateur et représenté par :

$$e^{-0.003s} \quad (2.44)$$

Comme pour l'actionneur, les retards sont approximés par des fonctions de Padé d'ordre 5, ce qui porte l'ordre total des transferts des capteurs à 15.

#### 2.1.4 Modèle Manche

Même si le manche ne fait pas intégralement partie de la première boucle de commande, il peut avoir un rôle non négligeable dans les réponses temporelles et dans l'évaluation de certaines qualités de manœuvrabilité. Le manche est modélisé par :

- un transfert d'ordre 1

$$\frac{15.23}{s + 15.23} \quad (2.45)$$

- un retard pur au premier transfert de 15 ms

$$e^{-0.015s} \quad (2.46)$$

- un filtre anti-crénelage

$$\frac{62.745s^2 + 3.98e7}{s^3 + 505s^2 + 203046s + 3.98e7} \quad (2.47)$$

- deux avances de phase

$$\frac{(0.10101s + 1)^2}{(0.05051s + 1)^2} \quad (2.48)$$

- et un retard numérique de 2 ms dû à l'acquisition de la mesure par le calculateur et représenté par

$$e^{-0.002s} \quad (2.49)$$

#### 2.1.5 Modèle Pilote

Si la plupart des éléments constituant la boucle peuvent être décrits avec un certain degré de précision, il en demeure un dernier qui lui, suscite encore beaucoup d'interrogations et de travaux au sein de la communauté. En mode manuel, le pilote fait partie intégralement de la boucle et constitue

l'élément susceptible de mener à l'instabilité, notamment les PIOs. Obtenir un modèle mathématique d'un comportement humain demeure toujours un vif sujet d'étude (Leacock et Thomson, 2001; Cameron *et al.*, 2003) et plusieurs modèles, du plus simple au plus complexe, ont été proposés. Le modèle le plus simple est de considérer le pilote comme un simple gain + un retard pur. D'autres modélisations incluent des avances et retards de phase. Peu de travaux ont été effectués pour tenir compte explicitement de ce modèle dans les phases de synthèse, même si beaucoup d'articles traitent de la modélisation du pilote elle-même. Une modélisation possible du pilote (McRuer et Krendel, 1974) serait :

$$K_p \frac{1 + T_l s}{1 + T_i s} \left\{ \frac{e^{-\tau s}}{T_n s + 1} \right\} \quad (2.50)$$

où  $K_p$  représente la capacité du pilote à répondre à l'erreur sur l'amplitude de la sortie qu'il contrôle,  $T_i$  et  $T_l$  sont des constantes qui reflètent la capacité du pilote à prédire et générer l'entrée requise. Le retard pur  $e^{-\tau s}$  représente le temps entre la décision de changer l'entrée et l'instant où le changement est réellement appliqué. Et enfin,  $T_n$  est la constante de temps du système neuromusculaire.

Bien que mentionné, nous n'utiliserons pas un tel modèle de pilote. Certaines qualités de manœuvrabilité tiennent compte implicitement d'un modèle de pilote simplifié sous la forme d'un gain et d'un retard pur ; nous nous en contenterons pour la suite.

### 2.1.6 Architecture de contrôle

Dans le cadre de la synthèse de contrôleur d'architecture fixe, *Bombardier Inc.* propose deux architectures : une loi de contrôle classique où l'on cherche à commander la vitesse de tangage  $q$  et une loi de contrôle  $C^*$  où une sortie mixte nommée  $C^*$  est pilotée.

#### ◆ Loi de commande classique

La première loi de commande permet de contrôler directement la vitesse de tangage  $q$ . La boucle de contrôle se scinde en une boucle interne dite SAS et une boucle externe dite CAS (Fig. 2.7). La boucle SAS est constituée de deux filtres d'ordre 1 rebouclés, l'un sur le facteur de charge  $n_z$ , et l'autre, sur la vitesse de tangage  $q$ . Ce dernier filtre (*Wash-Out*) est un filtre passe-haut qui permet d'opérer une action dérivée aux basses fréquences. Le concepteur peut agir sur les gains  $K_{n_z}$  et  $K_q$  de ces deux filtres. La boucle CAS est composée d'un correcteur proportionnel intégral (PI) auquel on ajoute un gain *feedforward*. Les trois gains  $K_p$ ,  $K_i$  et  $K_{ff}$  sont eux aussi ajustables. Le gain  $K_{ff}$  permet surtout de rajouter de la phase au système pour compenser le déphasage accumulé dans les boucles SAS et CAS. Il s'agit donc de régler les 5 gains ( $K_q$ ,  $K_{n_z}$ ,  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_{ff}$ ) afin de remplir le cahier des charges.

#### ◆ Loi de contrôle $C^*$

La seconde loi de commande à l'étude fait intervenir une sortie qui est une combinaison du facteur de charge  $n_z$  et de la vitesse de tangage  $q$  ; elle est appelée  $C^*$  (Fig. 2.8). Il existe dans

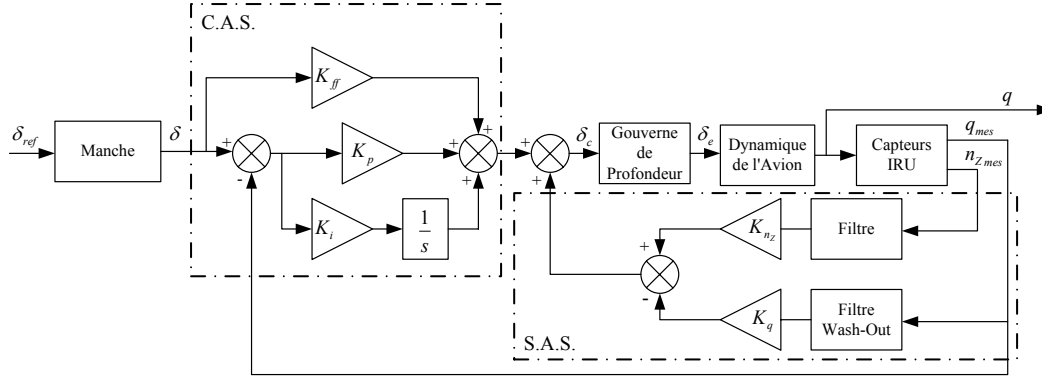
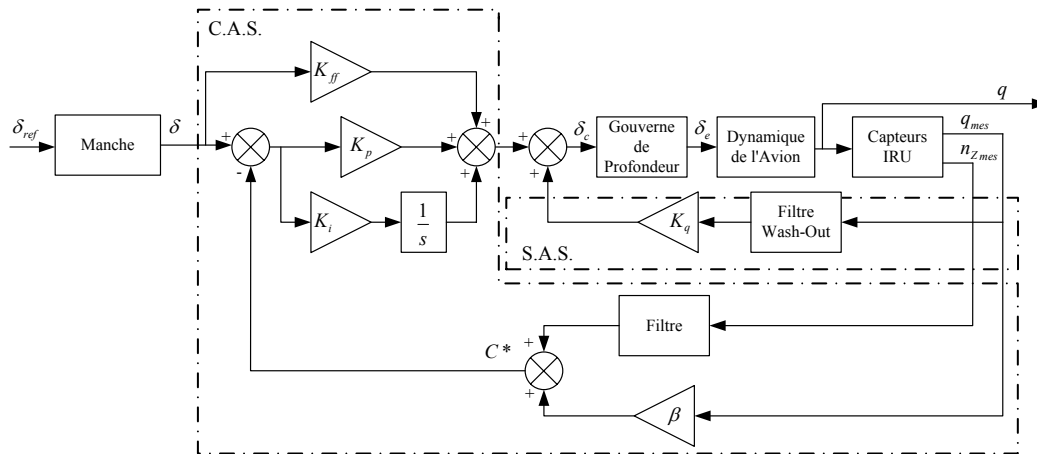


Figure 2.7 Contrôle de la vitesse de tangage

la littérature des qualités de manœuvrabilité un critère appelé  $C^*$ , qui lui aussi fait intervenir le facteur de charge et la vitesse de tangage. La loi et le critère sont cependant deux choses bien distinctes (Tischler, 1996). Cette loi de contrôle a été développée par la NASA lors d'une étude pour la navette spatiale *Space Shuttle*; elle a été reprise sur le *Concorde* dans les années 70 et améliorée ensuite par *Airbus*, qui l'a implantée sur l'*A320*.

Figure 2.8 Contrôle  $C^*$ 

Dans ce cas-ci, la boucle SAS est constituée du filtre *Wash-Out* qui reboucle sur la vitesse de tangage  $q$ , à la différence que nous pouvons à présent agir aussi bien sur le gain  $K_q$  que sur le pôle  $-z_{wo}$  de ce filtre. Par ailleurs, le rebouclage du CAS s'effectue à présent sur la sortie combinée  $C^* = n_z + \beta q$ . La pondération  $\beta$  vaut généralement 12.4; elle est calculée en supposant qu'à une vitesse de 400 ft/s, le pilote est aussi sensible à  $q$  qu'à  $n_z$  (Field, 1993). Pour des plus hautes vitesses, le pilote est plus sensible à  $n_z$  et pour des vitesses moindres à  $q$ . Le facteur de charge  $n_z$  passe au préalable par un filtre passe-bas. Comme dans la loi de

commande précédente, le correcteur est un PI augmenté d'un gain *feedforward*. On peut donc agir sur 4 gains ( $K_q$ ,  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_{ff}$ ) et sur le pôle  $-z_{wo}$  du filtre.

## 2.2 Analyse en boucle ouverte

Nous présentons ici une analyse des modèles numériques fournis par *Bombardier Inc.* Après avoir défini l'enveloppe de vol dans laquelle évolue notre avion, nous effectuerons une étude succincte de l'influence de certains paramètres sur les modes de l'avion. Ces paramètres seront le Mach et l'altitude qui définissent une condition de vol; et pour chaque condition de vol, nous ferons aussi varier la masse et le centrage pour juger de leur influence.

### 2.2.1 Enveloppe de Vol

Boiffier (1998) définit l'enveloppe de vol comme la recherche des limites du vecteur vitesse  $\vec{V}(h)$ , c'est-à-dire pour toute altitude  $h$ , les valeurs des vitesses  $V$  acceptables. On peut obtenir ainsi sur un diagramme  $(h, V)$  ou  $(h, M)$  l'essentiel du domaine de vol de l'avion. Ce domaine s'obtient en regroupant les plafonds de sustentation et de propulsion, déduits à partir des équations de la mécanique de vol et des performances atteignables de l'avion. Dans notre cas, 20 points de vol (altitude et Mach fixés) définissent notre enveloppe de vol (fig. 2.9).

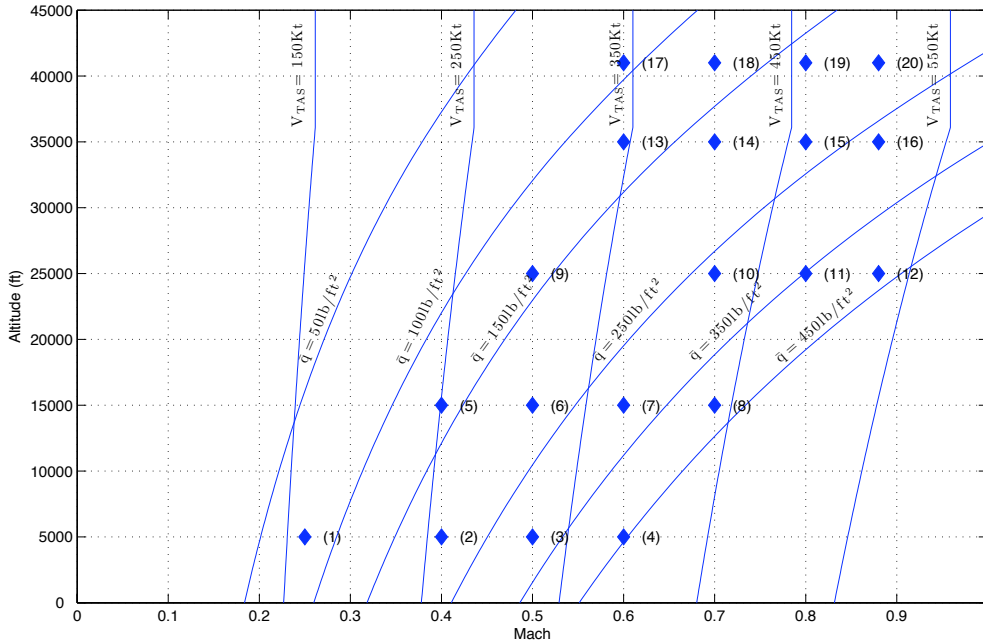


Figure 2.9 Enveloppe de vol

Pour chaque point de vol, la pression dynamique  $\bar{q}$  et la vitesse vraie  $V$  (ou  $V_{TAS}$ ) peuvent être déduites selon les équations (2.51) et (2.52).

$$\bar{q} = \frac{1}{2}\rho V^2 \quad (2.51)$$

$$V = M.a = M\sqrt{\gamma\mathcal{R}T} \quad (2.52)$$

où

- $\rho$  désigne la masse volumique de l'air (en kg/m<sup>3</sup>),
- $a$  la vitesse du son (en m/s),
- $\gamma$  le coefficient adiabatique de l'air ( $\gamma = 1.4$ ),
- $\mathcal{R}$  la constante spécifique de l'air ( $\mathcal{R} = 287.05$  Joules/kg/K°),
- $T$  la température (en K°).

Selon la tranche d'atmosphère considérée, les expressions de la température  $T$  et de la masse volumique de l'air  $\rho$  sont les suivantes :

- Entre 0 km et 11 km d'altitude,

$$T = T_0 + T_h h \quad (2.53)$$

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{T_h}{T_0} h\right)^{\frac{-\gamma}{\mathcal{R}T_h} - 1} \quad (2.54)$$

- Entre 11 km et 20 km d'altitude,

$$T = T_{11} \quad (2.55)$$

$$\rho = \rho_{11} e^{\frac{-\gamma}{\mathcal{R}T_{11}}(h-h_{11})} \quad (2.56)$$

où

- $T_0$  est la température au niveau de la mer,
- $\rho_0$  la masse volumique au niveau de la mer,
- $T_h$  le gradient de température ( $T_h = -6.5 \cdot 10^{-3}$  K°/m entre 0 km et 11 km)
- $T_{11}$  la température à  $h_{11} = 11000$  m,
- $\rho_{11}$  la masse volumique à  $h_{11} = 11000$  m.

Le tableau 2.2 donne les valeurs de  $T_0$  et  $\rho_0$  dépendamment de la température de référence choisie au niveau de la mer. Les valeurs de  $T_{11}$  et  $\rho_{11}$  sont calculées en conséquence puisque les fonctions sont continues à l'altitude de 11 km. Nous supposons pour la suite  $T_0 = 15^\circ\text{C}$  au niveau de la mer, ce qui donne  $T_{11} = 216.65 \text{ K}^\circ = -56.5^\circ\text{C}$  et  $\rho_{11} = 0.3637 \text{ kg/m}^3$

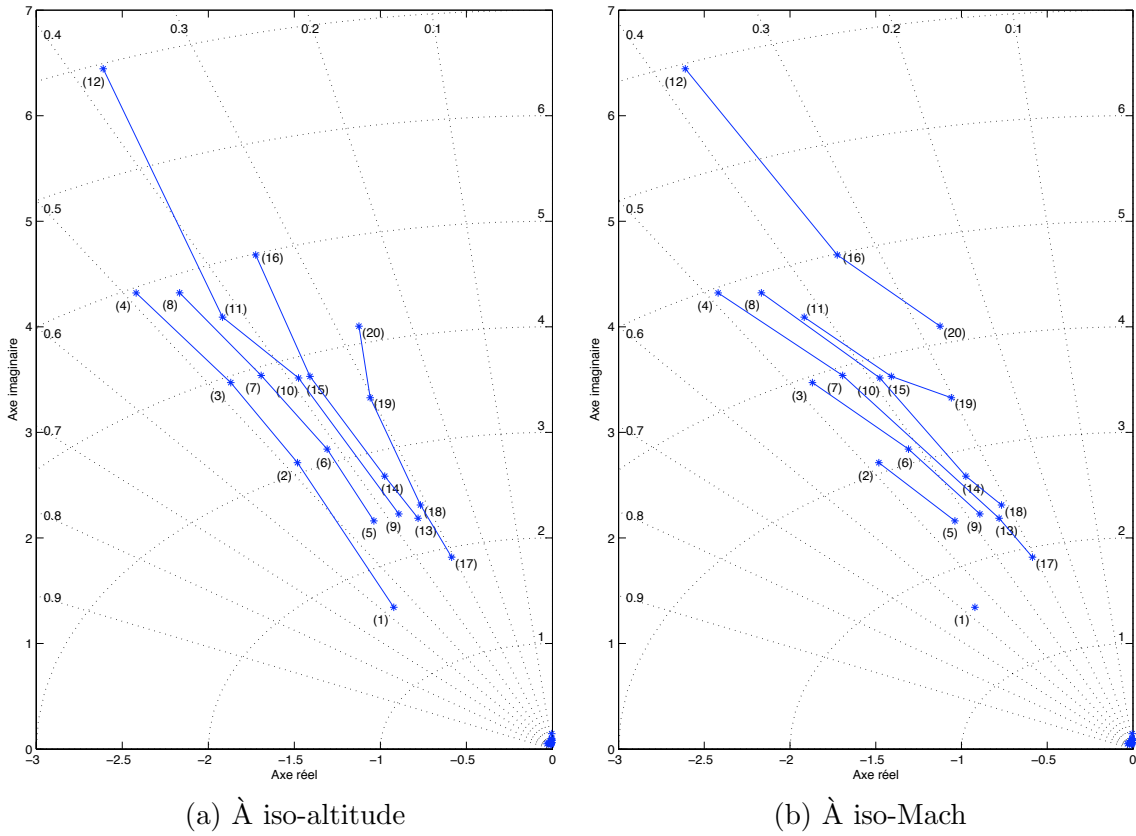


Tableau 2.2 Températures et masses volumiques correspondantes au niveau de la mer

$T_0$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	$T_0$ ( $\text{K}^{\circ}$ )	$\rho_0$ ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )
0	273.15	1.293
15	288.15	1.225
20	293.15	1.204
25	298.15	1.184

### 2.2.2 Évolution des pôles BO selon le Mach et l'altitude

La figure 2.10 montre l'évolution du mode *short period* dans le plan complexe quand on balaie l'enveloppe de vol. Les 20 points représentés correspondent aux 20 conditions de vol de la figure 2.9 pour une masse et un centrage fixés.

Figure 2.10 Évolution du mode *short period* suivant le Mach et l'altitude

On peut faire les observations suivantes :

- pour une altitude fixée, l'augmentation du nombre de Mach augmente la pulsation propre  $\omega_{sp}$

du mode *short period*. Sur la figure 2.10-a, les traits continus correspondent à une augmentation du nombre de Mach à iso-altitude (dans le sens de la numérotation). Une augmentation de la vitesse  $V$  aurait la même influence à iso-altitude. On remarque que l'amortissement  $\zeta_{sp}$  demeure relativement peu perturbé par le changement de vitesse, comparativement à  $\omega_{sp}$ .

- de part la forme de l'enveloppe de vol, il est moins aisé de visualiser l'effet d'une augmentation de l'altitude pour un nombre de Mach fixé. On peut néanmoins voir qu'une augmentation de l'altitude a tendance à diminuer l'amortissement  $\zeta_{sp}$ . Sur la figure 2.10-b, on a représenté par des traits continus une augmentation de l'altitude pour un nombre de Mach fixé (toujours dans le sens de la numérotation). La grande tendance semble être qu'à nombre de Mach fixé, gagner en altitude diminue aussi bien la pulsation propre  $\omega_{sp}$  que l'amortissement  $\zeta_{sp}$ .

### 2.2.3 Évolution des pôles BO selon les variations de masse et centrage

Pour chaque point de vol, on dispose de 8 modèles paramétriques, correspondant à différentes configurations de masse et de centrage (Tab. 2.3). Sur un avion, le centre de gravité est généralement situé légèrement à l'avant du centre de portance de la voilure afin de réduire au minimum les moments dynamiques nécessaires à l'équilibre. La plage de centrage d'un avion est généralement ramenée à un pourcentage de la longueur de la corde moyenne (surface portante divisée par l'envergure). La valeur moyenne du centrage est autour de 25% de la corde.

Tableau 2.3 Configurations masse/centrage considérées

m (lbs) \ $x_{cg}$ (% corde)	16	20	35	38	48
30,000		(1)	(2)		
32,000					(7)
39,000		(3)		(4)	(8)
46,000	(5)			(6)	

La figure 2.11 illustre la répartition du mode *short period* pour différents centrages et masses sur 2 conditions de vol choisies dans l'enveloppe de vol, soient les cas (1) et (4). Dans la condition de vol (1), pour un centrage trop important, le mode *short period* devient apériodique et se déstabilise éventuellement. Dans la condition de vol (4), le mode *short period* demeure stable peu importe les configurations masse/centrage choisies ; pour les autres conditions de vol, on se retrouve dans l'une ou l'autre des situations. Les lignes continues relient les cas de même masse.

On peut faire les observations suivantes :

- Une augmentation du centrage pour une masse fixe modifie la partie imaginaire du mode *short period* en maintenant la partie réelle relativement constante selon les cas de masse. La partie imaginaire diminue en effet jusqu'à ce que le mode *short period* deviennent deux pôles réels

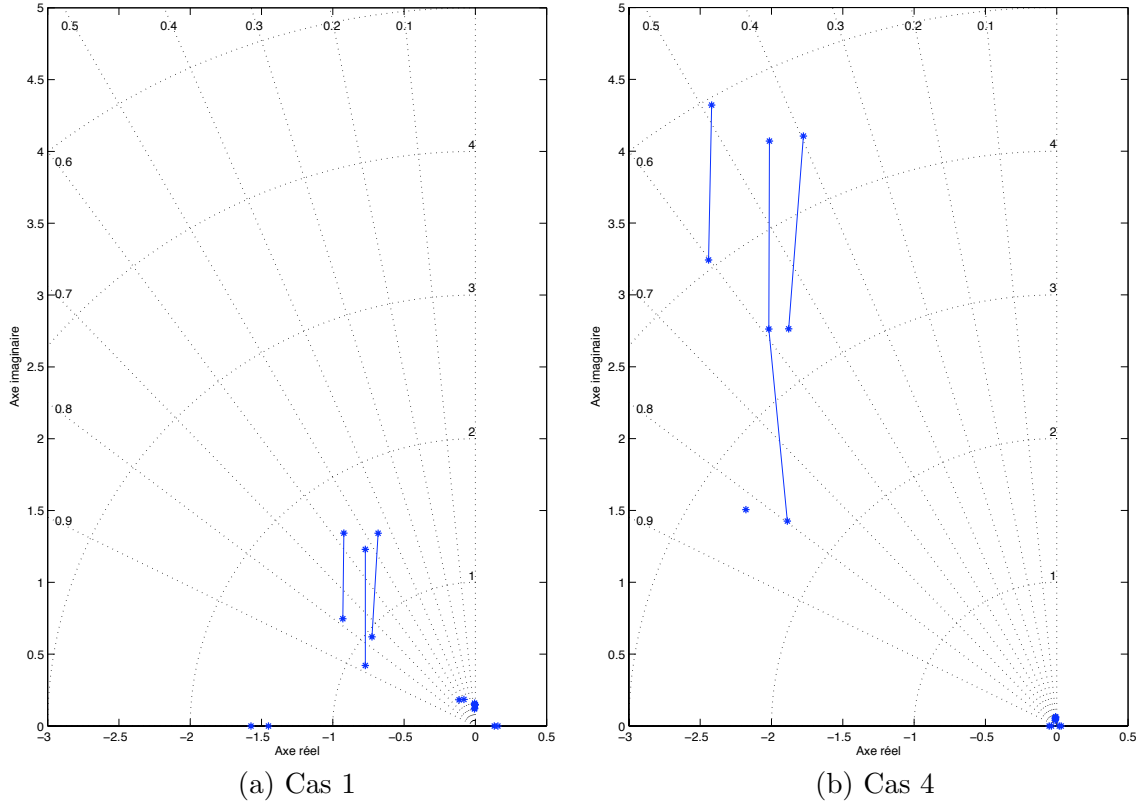


Figure 2.11 Évolution du mode *short period* suivant la masse et le centrage

dont l'un peut se déstabiliser si le centrage devient trop important. Ce résultat est confirmé de façon théorique (par exemple dans (Boiffier, 2000)) où l'approximation utilisée montre que le produit  $\zeta_{sp}\omega_{sp}$  (la partie réelle du mode *short period*) ne dépend pas explicitement du centrage quand le mode est complexe.

- Pour un centrage fixé, une augmentation de la masse a tendance à avoir l'effet opposé sur le mode *short period*. En effet, en augmentant la masse, la partie imaginaire demeure relativement constante et la partie réelle du mode diminue, ralentissant ainsi le mode.
- Peu importe la condition de vol considérée (cas de 1 à 20), la répartition du nuage de points autour du cas de vol nominal est quasi similaire.

### 2.3 Réduction et modélisation LFT

Le présent chapitre est consacré à la réduction d'ordre des modèles ainsi que leur interpolation et/ou mise sous forme LFT. Les modèles fournis par *Bombardier Inc.* sont d'ordre relativement élevé (pour les besoins que l'on en aura) et sont donnés sous forme numérique pour différentes valeurs de Mach, d'altitude, de masse et de centrage.

Pour les besoins de synthèse, il s'agit donc d'obtenir des modèles réduits qui dépendraient explicitement des paramètres cités ci-dessus et pour des besoins d'analyse une modélisation qui dépendraient des mêmes paramètres (sans forcément une réduction d'ordre du système). Le problème de réduction de modèle peut être traité par des techniques classiques de réduction pour abaisser suffisamment l'ordre. En ce qui concerne un modèle dépendant des paramètres, deux voies s'offrent à nous :

- ou bien revenir aux équations de la mécanique du vol et développer un modèle analytique en faisant apparaître les paramètres variables en question,
- ou bien interpoler les 160 modèles fournis en supposant une forme d'interpolation *a priori* pour chacun des coefficients des matrices  $(A, B, C, D)$ .

La première voie mènerait à une modélisation plus précise mais serait plus laborieuse et fournirait probablement une modélisation assez complexe ; la seconde voie serait moins précise mais permettrait d'obtenir un modèle paramétré plus rapidement en résolvant un problème aux moindres carrés pour approximer au mieux les données. Nous présentons dans les deux sections suivantes la réduction et l'interpolation/modélisation LPV/LFT de notre système.

### 2.3.1 Réduction

Lors de la synthèse d'un correcteur, un des premiers problèmes qui peut se poser demeure l'ordre, aussi bien l'ordre du système à contrôler que l'ordre du correcteur obtenu après synthèse. Afin d'obtenir un modèle aussi fidèle que possible à la réalité, l'ordre du système original est souvent élevé. De même, les retards et leurs approximations contribuent eux aussi à augmenter l'ordre du système. Néanmoins peu importe l'ordre du système original, le but est toujours de trouver le correcteur d'ordre le plus petit possible et satisfaisant les critères de performance recherchés.

Le livre d'Obinata et Anderson (2001) constitue une bonne référence sur la réduction de modèles. Il rend compte de façon exhaustive des différentes méthodes de réduction disponibles. Même si la réduction de contrôleur y est abordée, il s'agit essentiellement d'appliquer les mêmes méthodes que pour la réduction de modèles. Après avoir abordé le but d'une réduction de modèle, nous mettons en pratique différentes méthodes pour obtenir un modèle réduit de la boucle ouverte de l'avion.

#### ◆ Pourquoi réduire un modèle et/ou un correcteur ?

Les méthodes modernes comme par exemple les synthèses LQG,  $H_\infty$  ou la  $\mu$ -synthèse peuvent être appliquées sur des systèmes d'ordre élevé mais fournissent des correcteurs d'ordre au moins égal à celui du système ce qui limite leur implémentation directe et nécessite donc une réduction. En revanche, d'autres méthodes qui se basent sur un retour d'état comme la synthèse

LQR ou le placement de pôles ne peuvent être appliquées que sur un système pour lequel tout l'état est mesuré, ce qui est rarement le cas et nécessite éventuellement un observateur.

La figure 2.12 illustre trois voies possibles pour l'obtention d'un correcteur réduit :

1. La première voie consiste à synthétiser un correcteur sur le système d'ordre élevé et de réduire par la suite le correcteur.
2. Pour la deuxième voie, on réduit d'abord l'ordre du système et on effectue une synthèse qui fournit directement un correcteur réduit.
3. La troisième et dernière voie consiste à synthétiser directement un correcteur d'ordre réduit sur le système original d'ordre élevé.

Les première et deuxième voies peuvent être en fait les étapes successives d'une procédure complète. On obtient dans un premier temps un modèle réduit du système à contrôler (ou du moins, on cherche à abaisser l'ordre du système de façon significative). On synthétise ensuite un correcteur sur ce système réduit et on tente encore d'abaisser l'ordre du correcteur : cela constituerait en fait une quatrième voie dénommée synthèse mixte sur la figure 2.12.

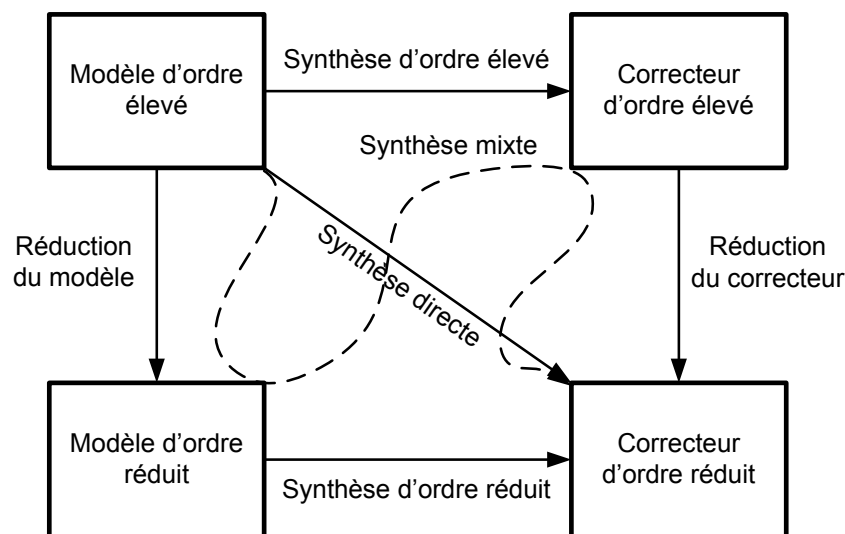


Figure 2.12 Différentes voies pour obtenir un correcteur d'ordre réduit

Quand on synthétise un contrôleur satisfaisant les contraintes sur un modèle réduit, on veut essentiellement que les performances soient conservées ou très légèrement dégradées quand on applique ce correcteur sur le modèle d'ordre plein. Il s'agit donc d'avoir un modèle réduit qui reflète au mieux le comportement du modèle original. Dans le cas d'un correcteur d'ordre élevé qui satisfait un cahier des charges, il faut réduire ce correcteur autant que possible tout en assurant que les performances soient conservées. Néanmoins les méthodes de réduction s'appliquent sur le correcteur seul et on cherche simplement à minimiser la norme de la différence

entre le correcteur d'ordre élevé et le correcteur d'ordre réduit en ignorant complètement la boucle fermée. On peut ainsi réduire une partie de la dynamique du correcteur mais les limites sont vite atteintes dès que l'on veut abaisser encore plus l'ordre du correcteur. Nous verrons dans la Partie 5 une méthode de réduction basée sur le contrôle modal robuste introduit par Magni (2002) et spécialement dédiée à la réduction de correcteurs.

Nous nous intéressons ici à réduire la boucle ouverte de l'avion qui est originalement d'ordre  $35^2$  selon les données fournies par les ingénieurs de *Bombardier Inc.* Nous procéderons par étapes. Comme le mode phugoïde est secondaire dans notre étude, nous tronquerons ce mode dans nos modèles d'état et vérifierons la validité de la troncature. Nous aborderons ensuite le problème des différents retards purs que l'on trouve dans l'actionneur et les capteurs, pour conclure sur la réduction finale.

#### ◆ Troncature du mode phugoïde

Il y a naturellement dans l'avion une relative séparation entre le mode phugoïde et le mode *short period*. De plus, le mode phugoïde étant très basse fréquence, il n'est pas primordial dans le pilotage et tant bien même qu'il serait instable, le pilote serait capable de le contrôler. Cela rejoint la théorie des perturbations singulières dans le sens où l'avion serait un système à deux échelles de temps mais paradoxalement, on tronquerait la partie lente (le mode phugoïde) pour ne contrôler que la partie rapide (le mode *short period*). Le modèle tronqué (Eq. 2.34) est obtenu en enlevant les états  $u$  et  $\theta$ . La figure 2.13 montre l'emplacement du mode *short period* des 20 cas nominaux sur les modèles originaux et les modèles tronqués. On voit en effet que la troncature ne modifie pratiquement pas l'emplacement du *short period*. La conclusion serait la même pour les autres cas avec variation de masse et centrage.

#### ◆ Approximation des retards purs

Dans les données fournies par *Bombardier Inc.*, chaque retard pur<sup>3</sup> est approximé par une fonction de transfert d'ordre 5 ; ainsi par exemple, sur le transfert  $q_{mes}/\delta_c$ , cela porte à 20 l'ordre total des transferts modélisant les retards. Pour des fins de simulation, des approximations d'ordre élevé ne sont probablement pas gênantes mais pour une synthèse, elles augmentent artificiellement et probablement inutilement l'ordre du système ; en effet des approximations de Padé d'ordre 2 ou 3 sont en général suffisantes. Comme les modélisations des deux capteurs sont similaires, les retards des capteurs sont jumelés aux retards de l'actionneur pour constituer un retard pur total de 0.036 s en début de la boucle ouverte. Des approximations du retard pur total d'ordre 1 à 4 ont été testées et comparées à la boucle ouverte originale  $q_{mes}/\delta_c$  d'ordre 35 (fig 2.14). Sur la bande de pulsations  $[0.01, 1000]$  rad/s, on ne note aucune véritable différence au niveau du gain ; au niveau de la phase, ce n'est qu'à partir de 100 rad/s qu'une différence apparaît. Finalement une approximation du retard pur total d'ordre 2 est

---

2. Sur le transfert  $q_{mes}/\delta_c$ , on a Actionneur (15) + Avion (5) + Capteur (15)

3. 2 pour l'actionneur et 2 pour chaque capteur

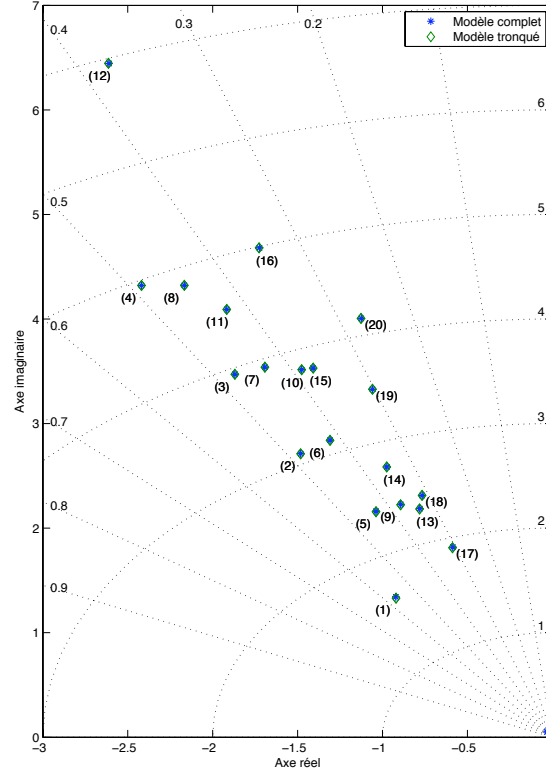


Figure 2.13 Comparaison de la position du *short period* entre les modèles complet et tronqué

utilisée<sup>4</sup> ; ceci permet d'abaisser l'ordre de la boucle ouverte de 35 à 17.

### ◆ Réduction finale

Si pratiquer une synthèse  $H_\infty$  sur un système d'ordre 17 est tout à fait concevable, il faut en revanche encore pousser la réduction pour, entre autres, alléger les calculs lors de l'utilisation des applications gardiennes. Le but recherché est simple : un placement de pôles effectué sur le système réduit doit conduire sensiblement au même placement de pôles quand on implante le correcteur sur le système complet. On s'intéresse bien évidemment ici à placer la dynamique du mode *short period* et les pôles dans la même bande de pulsations. Nous utilisons les concepts de troncature équilibrée présentés en Annexe A.

L'étude suivante est menée sur le cas de vol 1 mais afin de valider la démarche, elle a été menée plus largement sur tous les cas de vol. Avant de procéder à la troncature, nous devons obtenir une réalisation équilibrée avec la fonction `balreal`. L'inconvénient majeur est que le nouveau vecteur d'états correspondant à la réalisation équilibrée est différent et n'a pas forcément conservé les états de l'avion  $u$ ,  $w$ ,  $\theta$ ,  $q$  et  $\epsilon$ . Or nous devons par la suite interpoler les différentes réductions pour obtenir une forme LFT ; comme la partie propre à l'avion est

4. Comparativement à un ordre 20 à l'origine

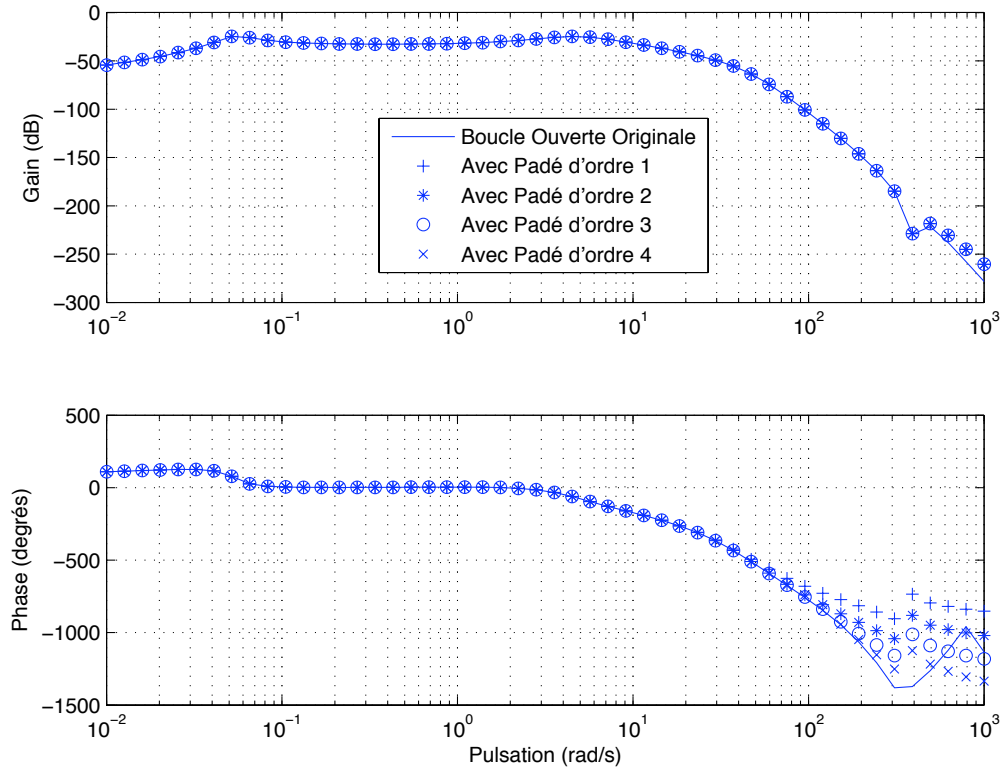


Figure 2.14 Comparaison des diagrammes de Bode de  $q_{mes}/\delta_c$  pour différentes approximations du retard pur

la seule qui varie avec les conditions de vol et les paramètres (masse/centrage), c'est la seule qui nécessitera une interpolation. Nous décidons alors de simplement réduire l'ensemble actionneur+capteurs en laissant de côté la partie avion.

En considérant l'approximation de Padé d'ordre 2 du retard pur total, l'ensemble actionneur+capteurs est maintenant d'ordre 12. La figure 2.15 montre les 12 valeurs singulières de Hankel. Nous allons donc éliminer une à une les valeurs les plus faibles jusqu'à obtenir une réduction satisfaisante.

La figure 2.16 montre les diagrammes de Bode de la boucle ouverte complète ainsi que les différentes réductions opérées. À chaque réduction obtenue, on a ajouté la dynamique d'ordre 3 de l'avion (après troncature du mode phugoïde). Pour juger de la qualité de l'approximation, le diagramme de Bode est un bon indicateur mais nous avons procédé à d'autres essais. Comme notre principal préoccupation est de conserver sur le modèle complet un placement de pôles effectué sur le modèle réduit, nous rebouclons notre système sur différentes valeurs de gain de retour (pour les architectures des figures 3.20 et 3.21). La réduction est jugée bonne si, pour le système rebouclé, on observe une faible différence entre les pôles basse fréquence du modèle complet et ceux du modèle réduit. En procédant de cette façon, une réduction de l'ensemble



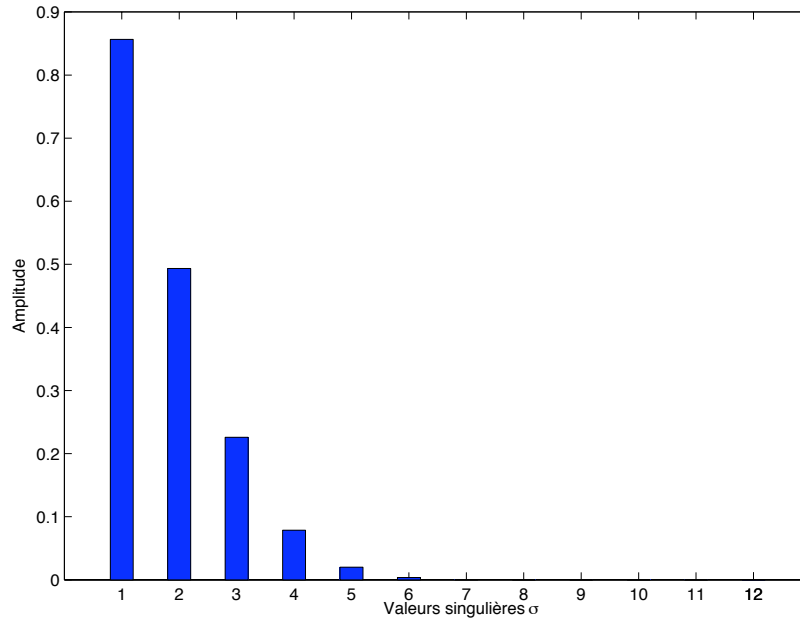


Figure 2.15 Valeurs singulières de Hankel de la réalisation équilibrée de l'ensemble actionneur+capteurs

actionneur+capteurs à l'ordre 5 donne entière satisfaction sur les 160 cas de vol.

En conclusion, après troncature du mode phugoïde et réduction de l'ensemble actionneur+capteur à l'ordre 5, nous avons une boucle ouverte réduite d'ordre 8. Nous résumons ici les différentes étapes effectuées qui pourraient être reprises pour la réduction d'autres modèles longitudinaux d'avion :

1. Troncature du mode Phugoïde et vérification de sa validité en comparant l'emplacement du mode *short period* sur le modèle complet et sur le modèle tronqué.
2. Rassemblement des différents retards purs et approximation unique ; l'ordre de l'approximation de Padé est laissé à l'utilisateur ; un ordre 2 peut suffire.
3. Réalisation équilibrée de l'ensemble actionneur+capteurs avec la fonction `balreal`.
4. Réductions successives par élimination des états ayant les valeurs singulières de Hankel les plus faibles avec la fonction `modred`. L'utilisateur jugera sur des diagrammes de Bode et (éventuellement sur une carte des pôles et zéros) jusqu'à quel ordre il peut réduire le système tout en conservant un comportement similaire sur la bande passante sur laquelle il travaillera.

Il ne nous reste plus qu'à trouver un modèle paramétré de l'avion en fonction du Mach et de

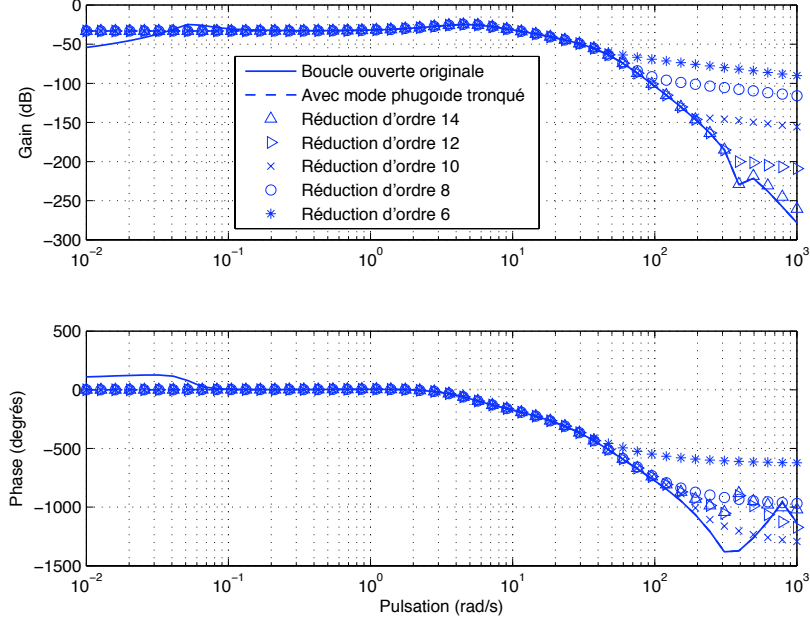


Figure 2.16 Diagramme de Bode de la boucle ouverte  $q_{mes}/\delta_c$  et des différentes réductions

l'altitude, et si possible, de la masse et du centrage.

### 2.3.2 Interpolation et mise sous forme LPV/LFT

Les 160 modèles fournis par *Bombardier Inc.* sont des modèles obtenus pour différentes valeurs du nombre de Mach, de l'altitude, de la masse et du centrage : 20 points de vol définis par un Mach et une altitude, chacun étant décliné en 8 configurations masse/centrage. Pour les besoins de séquençement et d'étude de la robustesse, il s'agit d'obtenir autant que possible un modèle paramétré qui dépendrait de ces 4 grandeurs. Parmi la gamme d'outils numériques mis à notre disposition, nous privilégierons la LFRT Toolbox (Magni, 2005) pour l'interpolation et la mise sous forme LFT. Cet outil rassemble toute une batterie de fonctions qui permettent d'obtenir des formes LFT et de les réduire en utilisant différentes techniques.

Comme il s'agit ici d'interpolation, on doit choisir une forme *a priori* de l'interpolation. On peut choisir des fonctions d'interpolation polynomiales ou rationnelles. Nous nous limiterons aux fonctions polynomiales afin de simplifier la conception.

On définit  $\Theta = [\theta_1, \dots, \theta_p] \in U \subset \mathbb{R}^p$  comme le vecteur de nos paramètres définis sur un domaine  $U$ . On désigne par  $f(\cdot)$  une fonction vectorielle telle que  $\xi = f(\Theta)$ . On dispose de  $N$  valeurs  $\xi^{(i)}$  correspondant à  $N$  choix de  $\Theta$ . On cherche à interpoler ces données par la fonction polynomiale  $\hat{f}(\cdot)$ . La procédure 2.3.1 est appliquée pour résoudre ce problème d'interpolation.

**Procédure 2.3.1. Interpolation au sens des moindres carrés**

1. Prendre  $N$  valeurs de  $\Theta$  dans le domaine et calculer les vecteurs correspondants  $\xi$  pour ces  $N$  points. On a ainsi un ensemble de vecteurs

$$\{\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(N)}\} \quad (2.57)$$

qui satisfont :

$$\begin{aligned} \xi^{(1)} &= f(\Theta^{(1)}) \\ &\vdots \\ \xi^{(N)} &= f(\Theta^{(N)}) \end{aligned} \quad (2.58)$$

2. Choisir une formule d'interpolation polynomiale  $\hat{f}(\cdot)$  où , par exemple,

$$\hat{f}(\Theta) = \alpha_1 \theta_1 + \alpha_2 \theta_2 + \alpha_3 \theta_1 \theta_2 + \dots \quad (2.59)$$

avec  $\alpha_i$  vecteurs de même dimension que  $\xi$  à déterminer.

3. Trouver les vecteurs  $\alpha_i$  qui sont la solution au sens des moindres carrées du système :

$$\begin{bmatrix} \xi^{(1)} \\ \vdots \\ \xi^{(N)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_1^{(1)} I & \theta_2^{(1)} I & \theta_1^{(1)} \theta_2^{(1)} I & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{(N)} I & \theta_2^{(N)} I & \theta_1^{(N)} \theta_2^{(N)} I & \dots \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Pour résoudre ce système, on utilise la matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose, notée  $H^\dagger$  et on obtient :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = H^\dagger \begin{bmatrix} \xi^{(1)} \\ \vdots \\ \xi^{(N)} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

4. Vérifier la qualité de l'approximation  $\hat{f}(\cdot)$ . Si l'approximation n'est pas satisfaisante, choisir plus de points et/ou choisir une autre forme d'interpolation.

Le choix de la forme d'interpolation est important et doit être guidé éventuellement par des considérations physiques, et une certaine connaissance du système. Rajouter des termes dans l'interpolation peut dégager des degrés de liberté pour améliorer l'interpolation.

Comme les modèles de l'actionneur et des capteurs sont fixes, seuls ceux de l'avion seront interpolés en fonction des conditions de vol. Pour rappel, nous disposons de 160 modèles d'état  $(A_i, B_i, C_i, D_i)$  pour différents nombres de Mach, altitudes, masses et centrages. Nous souhaitons donc trouver une interpolation  $(A_\Delta, B_\Delta, C_\Delta, D_\Delta)$  où les  $A_\Delta, B_\Delta, C_\Delta, D_\Delta$  sont des matrices dépen-

dant explicitement du nombre de Mach  $M$ , de l'altitude  $h$ , de la masse  $m$  et du centrage  $x_{cg}$ . On pourrait alors en déduire une forme LFT (Fig. 2.17) dont on pourrait se servir pour des buts de synthèse ou d'analyse. La représentation d'état associée au transfert  $P(s)$  est :

$$P(s) = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

et le bloc d'incertitude réel de la forme :

$$\Delta = \text{diag}(\Delta_M, \Delta_h, \Delta_m, \Delta_{x_{cg}}) \quad (2.63)$$

avec  $\Delta_{\delta_i} = \delta_i I_k$ .

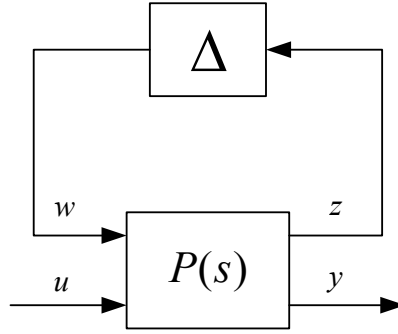


Figure 2.17 Mise sous forme LFT

Nous procéderons par étapes en cherchant d'abord pour une condition de vol donnée une interpolation fonction de la masse et du centrage. Ensuite, nous considérerons les 20 cas nominaux de l'enveloppe de vol et chercherons une interpolation fonction du Mach et de l'altitude.

#### ♦ Interpolation en masse et centrage

Avant de procéder à l'interpolation, nous commençons par normaliser les variations de la masse  $m$  et du centre de gravité  $x_{cg}$ . Nous supposons que la masse et le centre de gravité évoluent de façon indépendante dans le rectangle  $[\underline{m}, \overline{m}] \times [\underline{x}_{cg}, \overline{x}_{cg}]$ . On utilise alors la forme normalisée suivante :

$$m = m_0 + m_1 \delta m \quad (2.64)$$

$$x_{cg} = x_{cg0} + x_{cg1} \delta x_{cg} \quad (2.65)$$

avec  $m_0 = \frac{\overline{m} + \underline{m}}{2}$ ,  $m_1 = \frac{\overline{m} - \underline{m}}{2}$ ,  $x_{cg0} = \frac{\overline{x}_{cg} + \underline{x}_{cg}}{2}$ ,  $x_{cg1} = \frac{\overline{x}_{cg} - \underline{x}_{cg}}{2}$ ,  $\delta m \in [-1, 1]$  et  $\delta x_{cg} \in [-1, 1]$ .

Nous testons deux interpolations possibles :

$$A_{\Delta}^{(1)} = A^{(1)}(\delta m, \delta x_{cg}) = A_0 + A_1 \delta m + A_2 \delta x_{cg} + A_3 \delta m \delta x_{cg} \quad (2.66)$$

$$A_{\Delta}^{(2)} = A^{(2)}(\delta m, \delta x_{cg}) = A_0 + A_1 \delta m + A_2 \delta x_{cg} + A_3 \delta m \delta x_{cg} + \dots + A_4 \delta m^2 + A_5 \delta x_{cg}^2 \quad (2.67)$$

Les matrices  $B_{\Delta}$ ,  $C_{\Delta}$  et  $D_{\Delta}$  sont interpolées de la même façon.

La fonction `data2lfr` de la LFRT Toolbox permet de trouver rapidement les matrices de l'interpolation et rend en plus une forme LFT. Afin d'apprécier la qualité de nos interpolations, nous avons choisi de comparer les emplacements du mode *short period* des modèles originaux et des modèles interpolés (Fig. 2.18). La condition de vol considérée sur la figure est la condition 4 mais la vérification a été faite pour les 19 autres conditions de vol. On peut constater que la première forme d'interpolation est déjà bonne et que la seconde forme vient encore améliorer l'approximation.

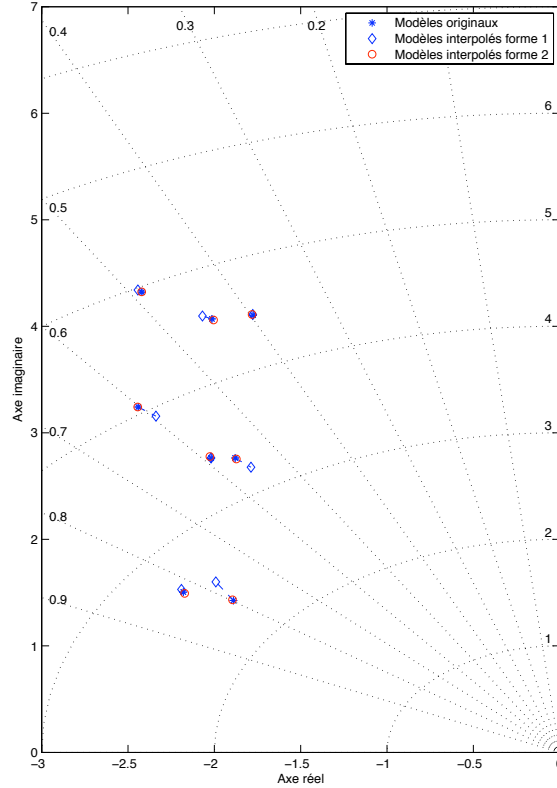


Figure 2.18 Interpolation en masse et centrage

#### ◆ Interpolation en Mach et altitude

Nous cherchons à présent une interpolation pour les 20 conditions de vol sur les 20 modèles

nominaux. Contrairement aux paramètres de masse et de centrage, le nombre de Mach et l'altitude évoluent dans l'enveloppe de vol qui n'est pas un domaine rectangulaire. Par exemple, pour une altitude de 5,000 ft, l'avion peut voler à une vitesse Mach de 0.25, ce qui n'est pas concevable à une altitude de 39,000 ft puisqu'on est hors de l'enveloppe de vol et donc hors des performances atteignables de l'avion. Il est donc inutile de chercher une interpolation valide en ce point. De plus, après quelques premiers essais rapides, il faut chercher une interpolation assez poussée pour bien représenter les 20 modèles. Le problème sera appréhendé en cherchant deux interpolations.

En consultant l'enveloppe de vol de la figure 2.19, on peut distinguer 2 zones : une première zone “basse altitude” entre 5,000 ft et 25,000 ft regroupant les cas 1 à 12 et une seconde zone “haute altitude” entre 25,000 ft et 41,000 ft regroupant les cas 9 à 20.

Nous nous intéressons d'abord à trouver une bonne interpolation pour chacune des deux zones. La normalisation des variables se fera par la suite et dépendra de la zone considérée. Après essais, nous présentons les résultats de deux interpolations possibles : l'une simple (Eq. 2.68) et l'autre plus complexe (Eq. 2.69).

$$A_{\Delta}^{(1)} := A^{(1)}(M, h) = A_0 + A_1M + A_2h + A_3Mh \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} A_{\Delta}^{(2)} := A^{(2)}(M, h) = & A_0 + A_1M + A_2h + A_3Mh + A_4M^2 + A_5h^2 + \dots \\ & + A_6M^2h + A_7Mh^2 + A_8M^2h^2 \end{aligned} \quad (2.69)$$

De plus nous avons procédé de la façon suivante :

1. Recherche d'une interpolation unique à partir des 20 cas de vol nominaux avec la forme 1
2. Recherche de deux interpolations avec la forme 1 sur chacune des zones définies (zone 1 : cas 1 à 12 et zone 2 : cas 9 à 20)
3. Recherche d'une interpolation unique à partir des 20 cas de vol nominaux avec la forme 2
4. Recherche de deux interpolations avec la forme 2 sur chacune des zones définies (zone 2 : cas 1 à 12 et zone 2 : cas 9 à 20)

Comme précédemment, nous avons choisi d'apprécier la qualité de l'interpolation sur l'emplacement du mode *short period* (Fig. 2.20). Même si la première forme d'interpolation est relativement simple, elle conserve relativement bien la répartition du mode *short period* dans l'enveloppe de vol. On peut voir sur la figure 2.20-a que chercher une interpolation simplement sur les 12 premiers modèles de la zone 1 ne donne pas une amélioration décisive, si ce n'est sur le cas 12. La conclusion serait la même avec l'interpolation faite sur la zone 2 (Fig 2.20-b). On aurait pu s'attendre qu'en interpolant dans des sous-domaines, les résultats auraient été améliorés.

En comparant les résultats donnés par les interpolations 1 et 2 (Fig. 2.21), on voit une nette

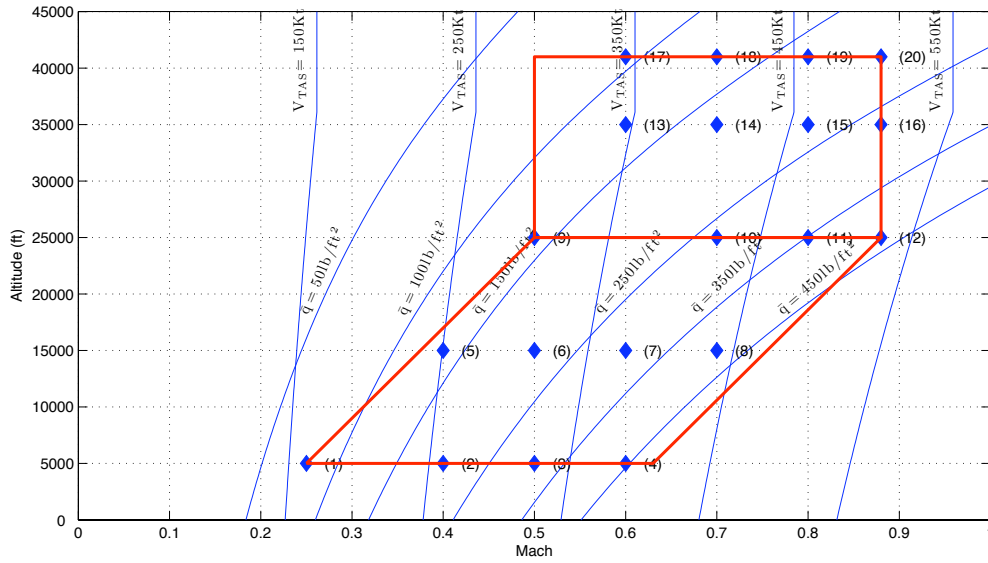


Figure 2.19 Découpage de l'enveloppe de vol

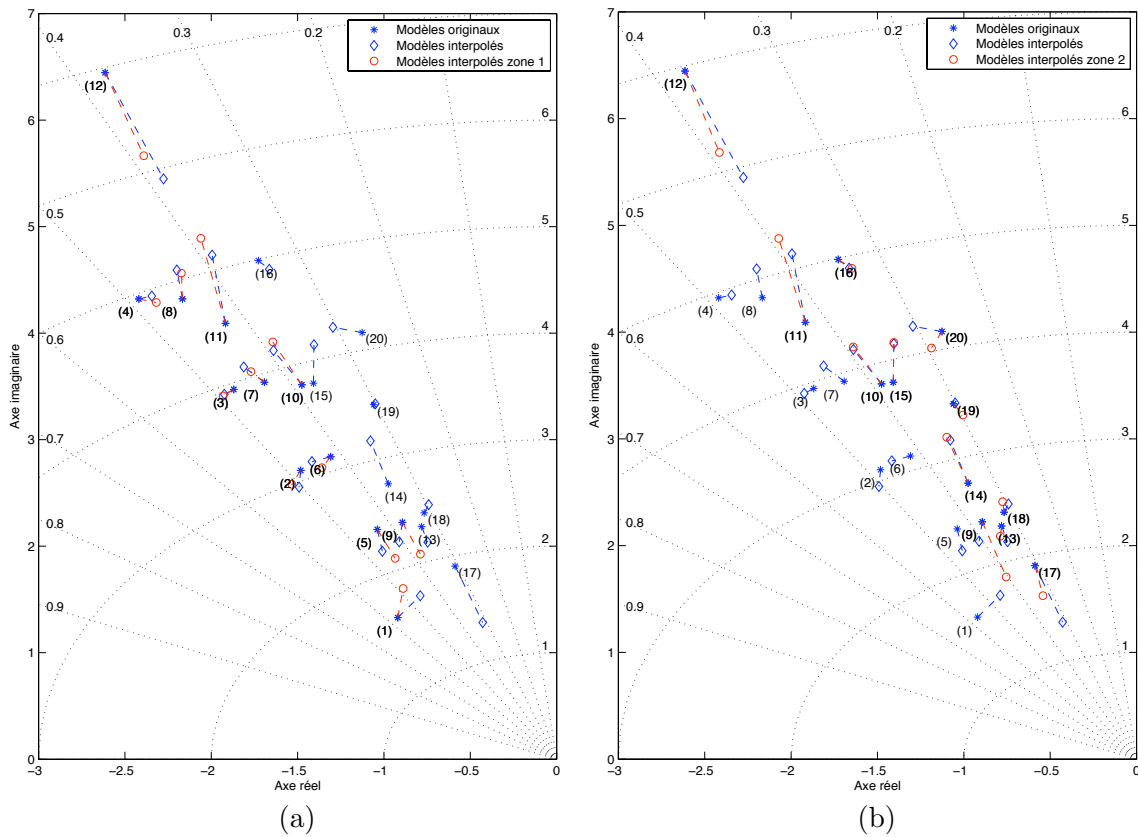


Figure 2.20 Interpolation avec la forme 1

amélioration. Avec plus de degrés de liberté, on est capable de mieux approximer les différentes données.

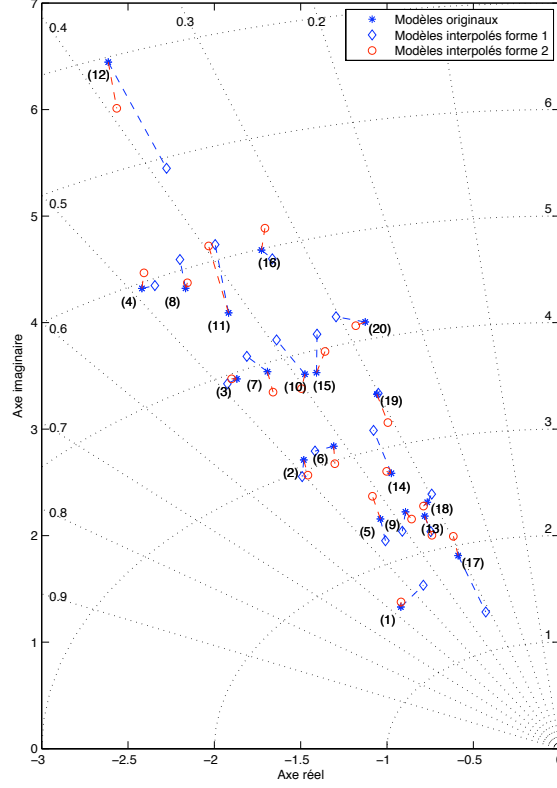


Figure 2.21 Résultats et comparaison des 2 formes d'interpolation

Enfin les figures 2.22-a et 2.22-b montrent les deux interpolations pour chaque sous-domaine avec la forme 2. On note cette fois-ci une nette amélioration quand on procède à une approximation pour chaque sous-domaine. Il demeure que les cas 10 et 11 sont les moins bien approximés. Il faudrait éventuellement rajouter d'autres termes dans l'interpolation, mais nous nous contenterons de la forme 2.

Pour des besoins d'analyse (et éventuellement de synthèse), il faut à présent normaliser ces interpolations. Pour la zone 1 (cas de vol 1 à 12), nous avons choisi un parallélogramme qui couvre tous les cas de vol de la zone ; il s'agit dès lors d'opérer un premier changement de variables pour normaliser l'interpolation. Nous notons  $\delta\theta_1$  et  $\delta\theta_2$  les deux paramètres normalisés ; ils sont des fonctions linéaires du Mach  $M$  et de l'altitude  $h$ . Chaque couple  $(M, h)$  de la zone 1 a son équivalent en couple  $(\delta\theta_1, \delta\theta_2)$  dans le carré normalisé  $[-1, +1] \times [-1, +1]$ . La table 2.4 rassemble les valeurs aux coins du domaine et leur homologue normalisé.

La résolution nous donne alors :

$$M = 0.565 + 0.19\delta\theta_1 + 0.125\delta\theta_2 \quad (2.70)$$

$$h = 15000 + 10000\delta\theta_2 \quad (2.71)$$



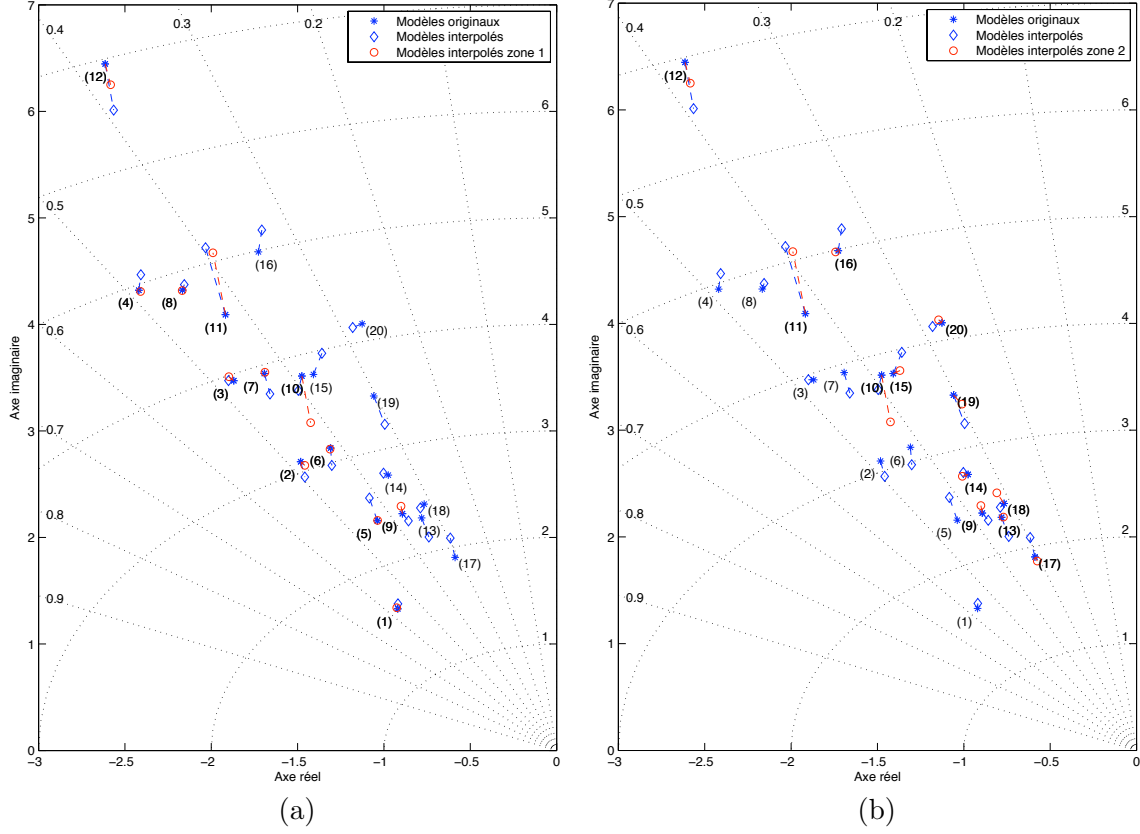


Figure 2.22 Interpolation avec la forme 2

Tableau 2.4 Valeurs extrêmes de la zone 1

$(M, h)$	$(\delta\theta_1, \delta\theta_2)$
$(0.25, 5000)$	$(-1, -1)$
$(0.63, 5000)$	$(+1, -1)$
$(0.5, 25000)$	$(-1, +1)$
$(0.88, 25000)$	$(+1, +1)$

D'où :

$$\delta\theta_1 = -1.9868 + 5.2631M - 6.5789 \cdot 10^{-5}h \quad (2.72)$$

$$\delta\theta_2 = -1.5 + 1.0 \cdot 10^{-5}h \quad (2.73)$$

En ce qui concerne la zone 2 (cas de vol 9 à 20), l'évolution du nombre de Mach et de l'altitude se fait à l'intérieur d'un rectangle. Dès lors, à l'instar de la normalisation en masse et centrage, nous prenons :

$$M = M_0 + M_1\delta M \quad (2.74)$$

$$h = h_0 + h_1\delta h \quad (2.75)$$

avec  $M_0 = \frac{\overline{M}+M}{2}$ ,  $M_1 = \frac{\overline{M}-M}{2}$ ,  $h_0 = \frac{\overline{h}+h}{2}$ ,  $h = \frac{\overline{h}-h}{2}$ ,  $\delta M \in [-1, +1]$  et  $\delta h \in [-1, +1]$ . Les valeurs extrêmes correspondant à la zone 2 sont données dans la table 2.5.

Tableau 2.5 Valeurs extrêmes de la zone 2

Mach	$[\underline{M}, \overline{M}]$	$[0.5, 0.88]$
Altitude	$[\underline{h}, \overline{h}]$	$[25000, 41000]$

#### ♦ Interpolation en fonction des 4 paramètres

Compte-tenu des résultats obtenus dans les deux sections précédentes, nous avons cherché une interpolation dépendant des 4 paramètres à la fois en utilisant les formes les plus adéquates. Cependant la taille de nos blocs de paramètres explose littéralement nécessitant de nombreuses simplifications et cela même dans les formes d'interpolation. Cela ne sera pas présenté ici. Nous utiliserons dans la suite les formes séparées trouvées dans les deux sections précédentes.

## CHAPITRE 3

### LES QUALITÉS DE MANŒUVRABILITÉ

Nous abordons dans ce chapitre les qualités de manœuvrabilité que nous allons chercher à satisfaire. Que l'on se réfère aux normes militaires (US Department of Defense, 1990, 1997), civiles (FAR, 1974; JAR, 1974) ou à certains livres de référence comme (Gibson, 1997, 1999; Hodgkinson, 1999), on peut formuler tout un ensemble de contraintes qui, une fois satisfaites, devraient assurer un pilotage adéquat de l'appareil en vol. Il s'agira donc dans un premier temps d'établir une liste exhaustive de critères que nous chercherons à satisfaire.

Ces critères sont de différentes natures : temporels, fréquentiels ou modaux. Et si certains ont des formulations directes comme l'amortissement d'un mode spécifique par exemple, d'autres nécessitent une interprétation et une analyse plus poussées. Nous étudions en particulier le critère du dropback mis en avant par Gibson afin de poursuivre et compléter le travail qui a été initié dans (Saussié, 2004). Ce critère s'est révélé particulièrement important aux yeux du candidat, d'où l'attention particulière qui lui a été portée. Il en résulte une meilleure compréhension de ce critère ainsi que des formulations pratiques utilisables lors de la synthèse d'un éventuel contrôleur.

Comme dans tout ensemble de contraintes, certaines sont plus restrictives que d'autres et il se peut aussi qu'en satisfaisant certaines d'entre elles, d'autres soient automatiquement satisfaites. Cependant certaines de ces qualités de manœuvrabilité doivent être calculées sur l'avion complet augmenté du contrôleur, ce qui peut se révéler rapidement ardu pour tirer des conclusions significatives. Une emphase particulière a été mise sur des modèles équivalents d'ordre réduit de l'avion qui reproduisent dans une certaine mesure le comportement de l'appareil (Hodgkinson, 2005). Nous travaillerons donc sur un modèle simplifié reflétant le comportement de l'avion idéal afin de mettre en évidence les critères dominants à satisfaire pour remplir automatiquement les autres. Même si ces conclusions ne seront valides que par rapport à notre modèle, elles seront tout de même un bon indicateur sur les critères à privilégier.

### 3.1 Les qualités de manœuvrabilité

Nous abordons dans cette section les différentes qualités de manœuvrabilité communément utilisées. Lors d'essais en simulateur de vol ou en vol, un pilote émet des opinions sur sa prise en main de l'appareil ; chacune de ses opinions est catégorisée par niveaux et indique son niveau de satisfaction. Le travail de l'ingénieur est de déduire ensuite des critères quantitatifs dont il pourra tenir compte lors de la conception de contrôleur de vol.

Après l'introduction de quelques notations, nous débutons par les classifications militaires qui permettent de catégoriser les avions et les phases de vol. Nous poursuivons ensuite sur les niveaux de satisfaction du pilote pour terminer sur les différentes qualités de manœuvrabilité communément utilisées.

#### 3.1.1 Notations

Pour le vol longitudinal, à une altitude et à vitesse  $V_0$  données, la fonction de transfert linéarisée  $\theta/\delta_e$  entre l'angle d'assiette et la déflexion de l'élevateur (obtenue à partir de Eq. 2.32) peut être représentée par :

$$\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{K(1 + T_{\theta_1}s)(1 + T_{\theta_2}s)}{\left(1 + \frac{2\zeta_{ph}}{\omega_{ph}}s + \frac{s^2}{\omega_{ph}^2}\right) \left(1 + \frac{2\zeta_{sp}}{\omega_{sp}}s + \frac{s^2}{\omega_{sp}^2}\right)} \quad (3.1)$$

avec

- $K$  gain statique,
- $\zeta_{ph}$ ,  $\zeta_{sp}$  amortissement des modes phugoïde et *short period*,
- $\omega_{ph}$ ,  $\omega_{sp}$  pulsations naturelles des modes phugoïde et *short period*,
- $T_{\theta_1}$ ,  $T_{\theta_2}$ , constantes de temps du numérateur relatives aux modes phugoïde et *short period*.

Nous considérerons essentiellement le mouvement à court terme de l'avion, donc seulement le mode *short period*. En tronquant ainsi le mode phugoïde, on obtient les transferts classiques suivants :

- l'assiette  $\theta$

$$\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{K_q(1 + T_{\theta_2}s)}{s \left(1 + \frac{2\zeta_{sp}}{\omega_{sp}}s + \frac{s^2}{\omega_{sp}^2}\right)} \quad (3.2)$$

- la vitesse de tangage  $q$

$$\frac{q(s)}{\delta_e(s)} = \frac{K_q(1 + T_{\theta_2}s)}{\left(1 + \frac{2\zeta_{sp}}{\omega_{sp}}s + \frac{s^2}{\omega_{sp}^2}\right)} \quad (3.3)$$

- l'accélération en tangage  $\dot{q}$

$$\frac{\dot{q}(s)}{\delta_e(s)} = \frac{K_q s(1 + T_{\theta_2}s)}{\left(1 + \frac{2\zeta_{sp}}{\omega_{sp}}s + \frac{s^2}{\omega_{sp}^2}\right)} \quad (3.4)$$

où  $K_q$  désigne le taux de variation d'angle d'assiette par unité d'angle d'élevateur.

On définit de même les transferts supplémentaires :

- l'accélération normale  $n_z$  ou facteur de charge

$$\frac{n_z(s)}{\delta_e(s)} = \frac{K_q V_0}{g \left( 1 + \frac{2\zeta_{sp}}{\omega_{sp}} s + \frac{s^2}{\omega_{sp}^2} \right)} \quad (3.5)$$

- la pente  $\gamma$

$$\frac{\gamma(s)}{\delta_e(s)} = \frac{K_q}{s \left( 1 + \frac{2\zeta_{sp}}{\omega_{sp}} s + \frac{s^2}{\omega_{sp}^2} \right)} \quad (3.6)$$

- l'angle d'attaque (ou d'incidence)  $\alpha$

$$\frac{\alpha(s)}{\delta_e(s)} = \frac{K_\alpha}{\left( 1 + \frac{2\zeta_{sp}}{\omega_{sp}} s + \frac{s^2}{\omega_{sp}^2} \right)} \quad (3.7)$$

où  $K_\alpha$  désigne le taux de variation d'angle d'incidence par unité d'angle d'élevateur et  $g$  l'accélération gravitationnelle.

On en déduit ainsi les rapports simples suivants :

$$\frac{\gamma(s)}{\theta(s)} = \frac{1}{(1 + T_{\theta_2} s)} \quad (3.8)$$

$$\frac{n_z(s)}{q(s)} = \frac{V_0}{g(1 + T_{\theta_2} s)} \quad (3.9)$$

### 3.1.2 Définitions et spécifications militaires

Avant de quantifier les qualités de manœuvrabilité, il a d'abord été nécessaire d'introduire plusieurs classifications. Ces définitions et spécifications sont toutes d'origine militaire.

#### ◆ Classification des avions

Selon les spécifications militaires américaines contenues dans MIL-HDBK-1797 (US Department of Defense, 1997), on considère qu'un avion appartient à l'une des 4 catégories décrites dans le tableau 3.1.

#### ◆ Phases de vol

Des catégories regroupant les différentes phases de vol ont été établies afin de spécifier séparément les valeurs des qualités de manœuvrabilité. En effet, certaines phases de vol sont plus

Tableau 3.1 Classification des avions

<i>Classe</i>	<i>Caractéristiques de l'avion</i>
I	Avion léger et petit (Masse maximale $\simeq 5000$ kg)
II	Avion de masse moyenne avec manœuvrabilité modérée (Masse comprise entre 5000 et 30000 kg)
III	Avion massif avec manœuvrabilité modérée (Masse de $+30000$ kg)
IV	Avion de haute manœuvrabilité

contraignantes que d'autres et il s'agit alors d'être plus exigeant au niveau des contraintes à remplir. Quelle que soit la mission que doit accomplir un pilote avec son avion, elle peut être divisée en trois catégories. La référence MIL-STD-1797A (US Department of Defense, 1997) les définit ainsi :

- la *Catégorie A* inclut les phases de vol non terminales exigeant des manœuvres rapides, une poursuite précise (tracking) ou un contrôle précis de la trajectoire. Les phases de vol contenues dans cette catégorie sont : le combat air-air, l'attaque au sol, le largage d'armes, la reconnaissance, la récupération aérienne, l'avitaillement en vol (receveur), le suivi de terrain, la recherche et le sauvetage maritimes, le vol en formation serrée et le vol acrobatique.
- la *Catégorie B* implique les phases de vol non terminales accomplies par des manœuvres graduelles qui ne requièrent pas de poursuite précise. Néanmoins, une certaine précision dans la trajectoire peut être nécessaire. Sont compris dans cette catégorie : la montée, le vol en croisière, le vol en attente, l'avitaillement en vol (citerne), la descente et la livraison aérienne.
- la *Catégorie C*, quant à elle, regroupe les phases de vol terminales accomplies par manœuvres graduelles et nécessitant un contrôle très précis de la trajectoire. Elle comprend le décollage, l'atterrissage et les différents types d'approche.

### 3.1.3 Échelles qualitatives

#### ◆ Échelle Cooper-Harper et opinion du pilote

Les commentaires d'un pilote sur la façon dont se comporte l'avion en vol sont toujours la meilleure source d'informations. En travaillant avec un large nombre de configurations et de pilotes, il a vite été nécessaire de mettre des échelles en place, ou du moins un système de quantification. Le laboratoire *Cornell Aeronautics* où travaillait Harper, utilisa longtemps sa propre échelle pour évaluer les qualités de vol alors que Cooper de la NASA était à l'origine

d'une échelle en 10 points, qui était alors beaucoup plus utilisée de part le monde. Combinant leurs expériences respectives, ils publièrent en 1966 l'échelle Cooper-Harper qui est à présent utilisée universellement (Fig 3.1). Elle fut adoptée en 1970 par l'armée américaine qui s'en servit comme base pour les spécifications militaires américaines des qualités de vol.

L'échelle fut établie à partir de notions élémentaires de psychométrie qui consiste en l'évaluation des capacités psychiques d'un individu. Un classement en 10 points peut paraître excessif pour sonder l'opinion d'une personne mais l'échelle Cooper-Harper est un condensé de plusieurs évaluations. C'est en fait une échelle ordinale et non linéaire, dans le sens où l'intervalle entre deux points, ne correspond pas à un degré de dégradation fixe. Autrement dit, c'est une échelle dichotomique où l'on force le pilote à prendre des décisions afin d'établir sa véritable opinion.

#### ◆ Oscillations induites par le pilote

Parallèlement à l'échelle Cooper-Harper, il existe une échelle spécialisée (Tab. 3.2 et Fig. 3.2) qui est chargée de traiter les qualités de vol à l'origine des oscillations induites par le pilote (*Pilot-Induced Oscillations* - PIO). Les PIOs sont des oscillations prolongées résultant du couplage entre le pilote et la boucle de commande. En utilisant l'expression "induites par le pilote", les ingénieurs signifient qu'elles disparaissent quand le pilote abandonne le contrôle de l'avion.

#### ◆ Niveaux d'acceptabilité des qualités de vol

Devant la multiplication des échelles d'appréciation, des niveaux d'acceptabilité des qualités de vol ont été mis en place afin d'uniformiser ce qui existait auparavant. Ces niveaux, créés en référence à l'échelle Cooper-Harper, sont au nombre de 3, même si, officieusement, on désigne par Niveau 4 toute caractéristique qui ne remplit pas les exigences du Niveau 3. Ainsi les classements 1, 2 et 3 de l'échelle Cooper-Harper forment le Niveau 1 alors que les classements 4, 5 et 6 désignent le Niveau 2; le Niveau 3 est alors composé des classements 7, 8 et 9, laissant le classement 10 pour un éventuel Niveau 4. Ces niveaux indiquent la capacité d'un avion à compléter les missions pour lesquelles il est fait. Le tableau 3.3 résume les définitions de chaque niveau.

L'état normal représente la configuration opérationnelle normale de l'avion en termes, par exemple, de réglages des volets, de masses, d'inerties, etc. Un état défaillant correspond alors à l'état normal modifié par un ou des dysfonctionnements. On distingue aussi des états défaillants spéciaux qui ont peu de chances de se produire mais très difficiles à prédire.

La référence MIL-HDBK-1797 (US Department of Defense, 1997) exige que les qualités de vol soient de Niveau 1 dans l'enveloppe de vol opérationnelle de l'avion. En présence de très

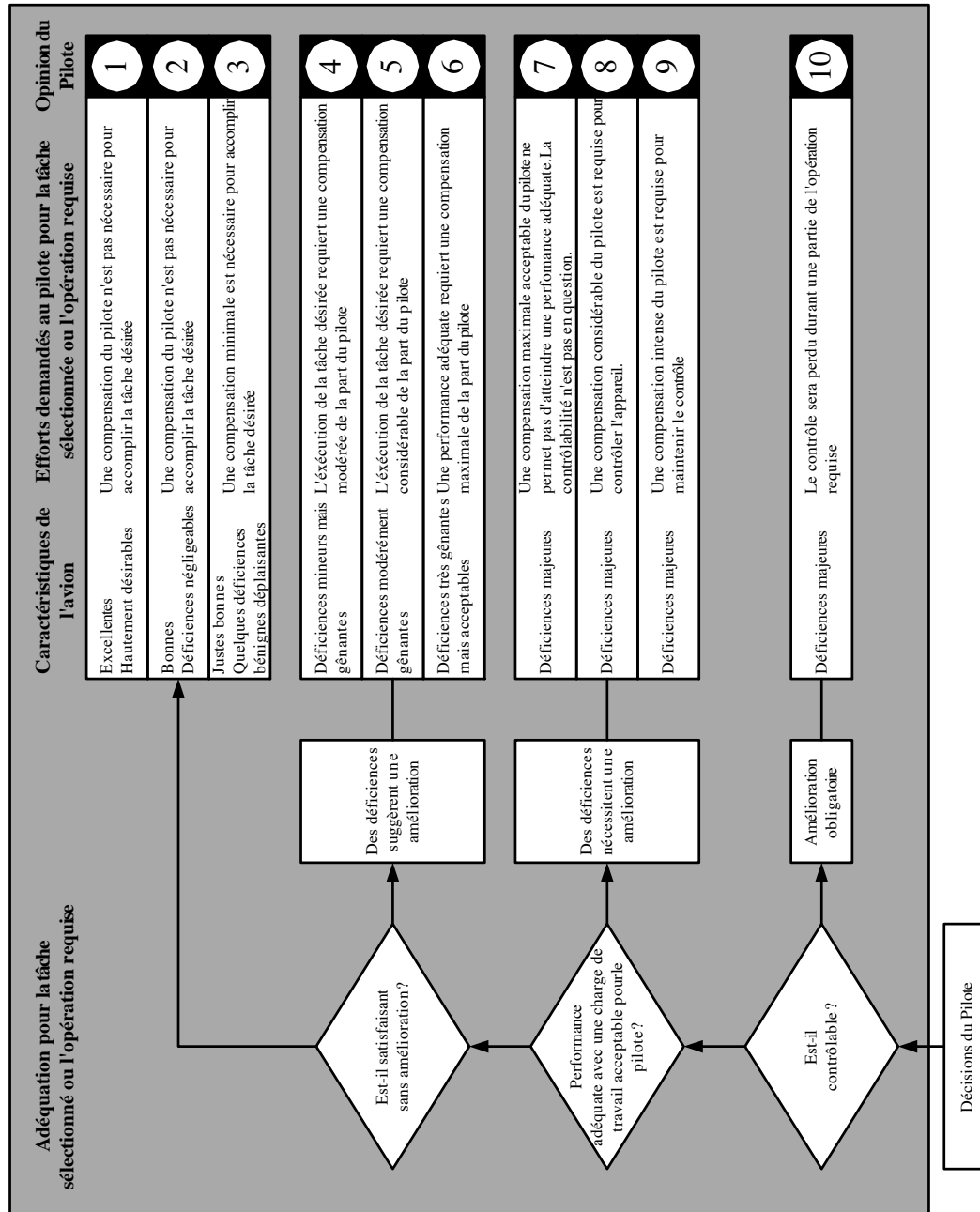


Figure 3.1 Échelle d'opinion de Cooper-Harper



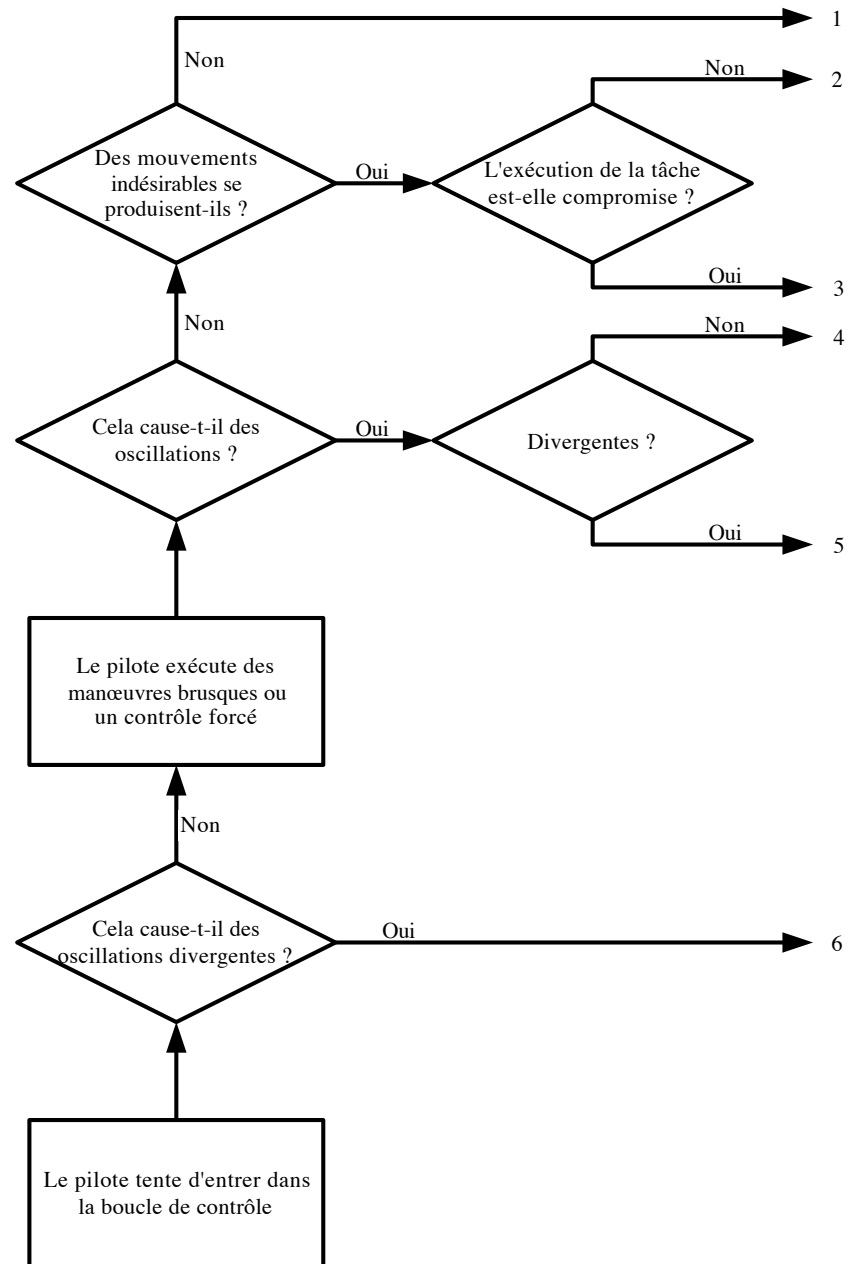


Figure 3.2 Échelle d'opinion pour les oscillations induites par le pilote (PIO)

Tableau 3.2 Description des niveaux de l'échelle PIO

<i>Niveau</i>	<i>Description</i>
1	Le pilote n'a pas tendance à induire des oscillations indésirables.
2	Des mouvements indésirables ont tendance à se produire quand le pilote exécute des manœuvres brusques ou un contrôle forcé. La technique du pilote peut prévenir et éliminer ces mouvements.
3	Des mouvements indésirables sont induits aisément quand le pilote exécute des manœuvres brusques ou un contrôle forcé. Ces mouvements peuvent être prévenus ou éliminés seulement, en sacrifiant l'exécution de la tâche ou en imposant un effort considérable au pilote.
4	Des oscillations ont tendance à se développer quand le pilote exécute des manœuvres brusques ou un contrôle forcé. Le pilote doit réduire son effort de commande ou abandonner la tâche à exécuter pour retrouver le contrôle de l'avion.
5	Des oscillations divergentes tendent à se développer quand le pilote exécute des manœuvres brusques ou un contrôle forcé. Le pilote doit ouvrir la boucle de contrôle en relâchant ou en bloquant le manche.
6	Des perturbations dans le contrôle normal du pilote peuvent causer des oscillations divergentes. Le pilote doit ouvrir la boucle de contrôle en relâchant ou en bloquant le manche.

probables défauts, les qualités de vol doivent demeurer de Niveau 1 ; en revanche, s'il advient des défaillances moins probables, une dégradation des qualités de vol est tolérée. Pour parler de façon statistique, une défaillance arrivant 1 fois sur 100 vols ne doit pas dégrader les qualités de vol en deçà du Niveau 2, et une défectuosité se produisant 1 fois sur 10000 vols doit au plus dégrader les qualités de vol jusqu'au Niveau 3. En présence de turbulences modérées, les qualités de vol peuvent devenir de Niveau 2, et si ces turbulences sont plus sévères, une dégradation au Niveau 3 est acceptée.

Tableau 3.3 Niveau des qualités de vol

<i>Niveau</i>	<i>État</i>	<i>Description</i>
1	Satisfaisant	Les qualités de vol sont complètement adéquates pour la phase de vol de la mission considérée. La tâche désirée est réalisable sans plus de compensation de la part du pilote
2	Acceptable	Les qualités de vol sont adéquates pour accomplir la phase de vol de la mission mais cela entraîne une augmentation de la charge de travail du pilote et/ou une dégradation dans l'efficacité de la mission.
3	Contrôlable	Les qualités de vol rendent l'avion contrôlable mais l'efficacité de la mission est gravement dégradée. De plus, la charge de travail imposée au pilote pour accomplir la mission est telle que le pilote approche la limite de ses capacités. Les phases de vol de catégorie A peuvent être accomplies sans risque et celles des catégories B et C complétées.
4	Rattrapable	Les qualités de vol sont telles que le contrôle peut être maintenu assez longtemps pour sortir d'une perturbation. Toutes les phases de vol peuvent être terminées et le pilote peut accomplir une remise des gaz.

### 3.1.4 Critères modaux

#### ◆ Amortissement du mode phugoïde

Le mode phugoïde est un mode basse fréquence et oscillant. Il correspond à un échange entre énergie cinétique (vitesse) et énergie potentielle (altitude). Il se manifeste par une oscillation de longue période en assiette  $\theta$ , en variation de vitesse relative  $u$ , en altitude  $h$  et en pente  $\gamma$ , alors que l'angle d'attaque  $\alpha$  demeure relativement constant. Il est généralement stable mais très mal amorti. La figure 3.4 montre une simulation suite à un échelon négatif de la position de la gouverne de profondeur  $\delta_e$ .

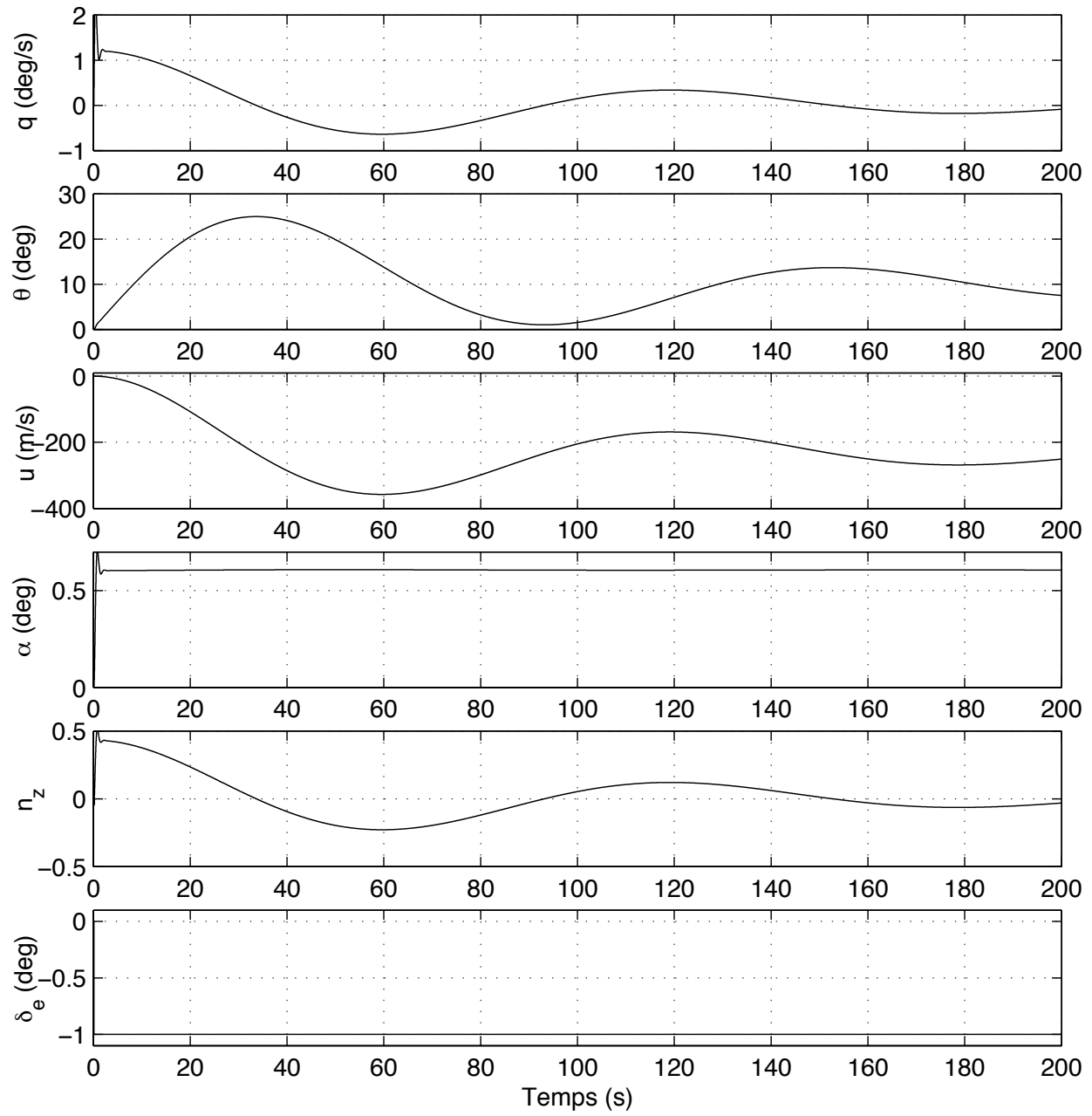


Figure 3.3 Mise en évidence du mode phugoïde - Réponse à un échelon de  $\delta_e$

Les critères concernant ce mode portent sur l'amortissement  $\zeta_{ph}$  et la pulsation propre  $\omega_{ph}$  (Tab. 3.4).

Tableau 3.4 Amortissement  $\zeta_{ph}$  du mode phugoïde

Niveau 1 :	$\zeta_{ph} \geq 0.04$
Niveau 2 :	$\zeta_{ph} \geq 0.00$
Niveau 3 :	$T_{2_{ph}} \geq 55 \text{ sec}$

$T_{2_{ph}}$  désigne le temps pour doubler l'amplitude de la sortie  $\theta$  quand le mode phugoïde est instable (i.e.  $\zeta_{ph} < 0$ ). On a ainsi :

$$T_{2_{ph}} = \frac{-\ln(2)}{\zeta_{ph}\omega_{ph}} \quad (3.10)$$

On souhaite de plus que la pulsation propre  $\omega_{ph}$  soit comprise entre 0.01 et 1 rad/s, l'essentiel étant que les domaines de fréquence des modes phugoïde et *short period* soient bien séparés.

#### ♦ Amortissement du mode *short period*

Le mode *short period* est le mode naturel rapide de l'avion. Dans le monde francophone, il est aussi communément appelé oscillation d'incidence ; par souci d'uniformité et de clarté, nous garderons la dénomination anglophone *short period*. C'est un mode généralement oscillatoire et de moyenne fréquence, qui concerne essentiellement l'angle d'incidence  $\alpha$  (ou angle d'attaque), le tangage  $q$  et le facteur de charge  $n_z$  ; on considère qu'à court terme la variation relative de vitesse  $u$  demeure constante et n'est pas véritablement affectée par les oscillations dues au *short period*. La figure 3.4 montre l'effet à court terme d'un échelon négatif de la position de la gouverne de profondeur  $\delta_e$ . Les valeurs de l'amortissement  $\zeta_{sp}$  désirées sont mentionnées dans le tableau 3.5.

Tableau 3.5 Amortissement  $\zeta_{sp}$  du mode *short period*

	<i>Phases de vol A et C</i>	<i>Phase de vol B</i>
Niveau 1 :	$0.35 \leq \zeta_{sp} \leq 1.30$	$0.30 \leq \zeta_{sp} \leq 2.00$
Niveau 2 :	$0.25 \leq \zeta_{sp} \leq 2.00$	$0.20 \leq \zeta_{sp} \leq 2.00$
Niveau 3 :	$0.15 \leq \zeta_{sp}$	$0.15 \leq \zeta_{sp}$

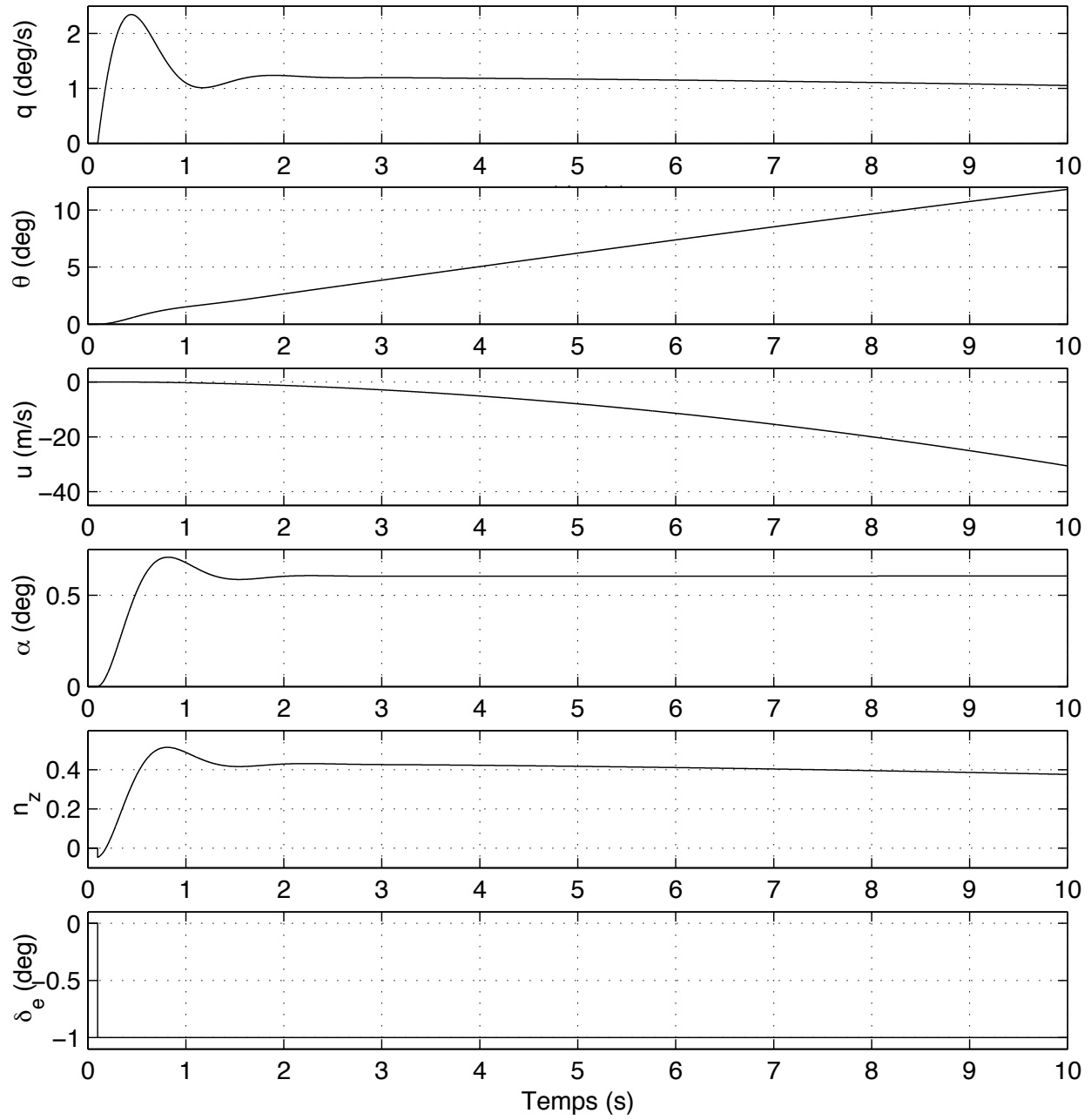


Figure 3.4 Mise en évidence du mode *short period* - Réponse à un échelon de  $\delta_e$

### 3.1.5 Critères temporels

#### ◆ Réponses temporelles

Les qualités de manœuvrabilité portent pour la plupart sur la réponse à court terme, soit celle du mode *short period*. Afin de compléter les critères précédents, on définit plusieurs critères temporels. La figure 3.5 illustre les différentes grandeurs considérées.

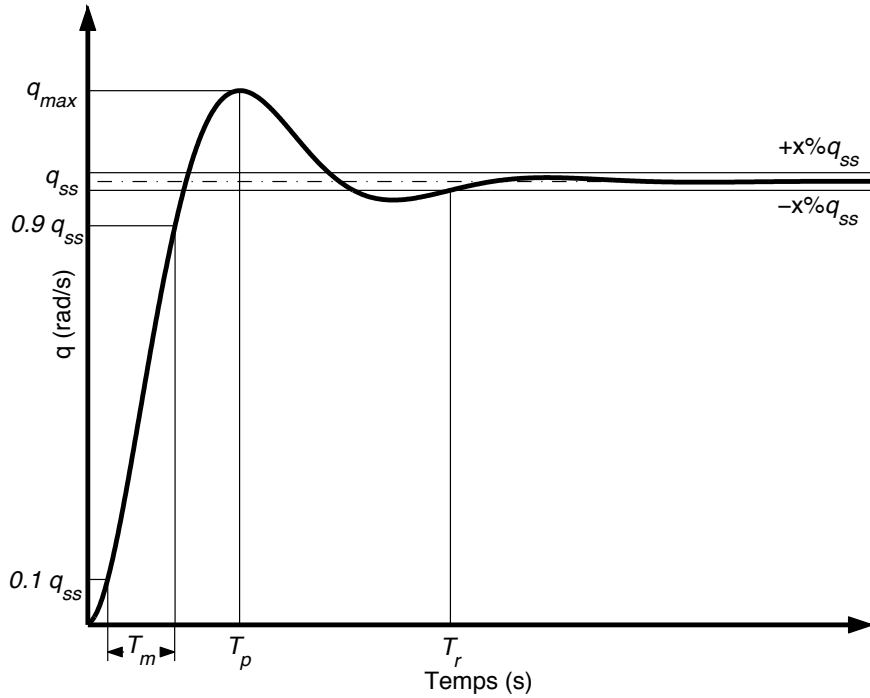


Figure 3.5 Réponse en tangage  $q$  à une entrée échelon  $\delta_{ref}$

Voici les définitions des différents grandeurs :

- $T_m$  : Temps de montée.
- $T_p$  : Temps de pic.
- $D$  : Dépassement (*Overshoot*) pourcentage donné par  $(q_{max} - q_{ss})/q_{ss}$ .
- $T_r$  : Temps d'établissement ou de réponse, nécessaire pour que la réponse temporelle demeure comprise entre  $q_{ss} \pm x\%q_{ss}$  ( $x = 1, 2$  ou  $5$  en général).

On désire avoir des réponses temporelles qui se stabilisent idéalement en moins de 3 secondes quand on considère le système sans le mode Phugoïde. Nous tolérerons néanmoins des temps de réponse de l'ordre de 4 secondes. On veut bien sûr un dépassement relativement faible et un temps de montée adéquat. On astreint souvent à ce que le dépassement de la réponse en vitesse de tangage  $q$  soit inférieur à 20% mais nous verrons par la suite que cette condition demeure toute relative.

### ◆ CAP - *Control Anticipation Parameter*

Avec l'expérience, les contraintes imposées sur l'amortissement  $\zeta_{sp}$  et sur la pulsation naturelle  $\omega_{sp}$  du mode *short period* se sont montrées insuffisantes. En effet, elles ne prenaient pas en considération l'effet du numérateur. La capacité du pilote à contrôler le mouvement à court terme de l'avion dépend aussi bien du mode *short period* que du numérateur. L'effet du zéro  $-1/T_{\theta_2}$  a été incorporé dans le critère appelé CAP (ou *Control Anticipation Parameter*) développé à l'origine par Bihrlé (1966) comme étant une mesure de la relation entre la réponse en tangage  $\theta$  et la réponse en pente  $\gamma$  de l'avion. C'est un moyen pour le pilote de prédire la réponse en pente de l'avion à partir de la réponse en tangage observée ou ressentie.

#### ● Formulation théorique

Le CAP est formulé originalement comme étant le rapport de l'accélération initiale en tangage  $\ddot{\theta}_0$  sur la variation finale d'accélération normale  $n_{z_{ss}}$ .

$$CAP = \frac{\ddot{\theta}_0}{n_{z_{ss}}} \quad (3.11)$$

L'amplitude du CAP donne une bonne indication de la perception que le pilote a des accélérations verticale et en tangage. C'est essentiel à cause du retard entre la commande d'entrée du pilote et l'accélération normale finale.

Lorsque la valeur du CAP est trop faible, l'accélération initiale en tangage est faible comparée à l'accélération normale finale. Ainsi si le pilote met peu de gain sur le manche, il ressentira des efforts par  $g$  corrects mais l'accélération en tangage ressentie sera beaucoup trop faible. En voulant augmenter son gain sur la commande pour obtenir une accélération en tangage correcte, il contribuera alors à augmenter les efforts par  $g$  et ainsi une accélération normale finale trop forte qui entraînera un dépassement important de la trajectoire désirée.

Si au contraire la valeur du CAP est trop haute, l'accélération initiale en tangage est forte comparée à l'accélération normale finale. Ainsi, le pilote ressent une grande accélération en tangage en entrant sa commande. Voulant alors anticiper sur une accélération normale finale trop importante, il va diminuer le gain de sa commande, voire l'inverser. Mais du fait d'un CAP fort, l'avion restera en réalité en dessous de la trajectoire désirée. Il s'agit donc de trouver un compromis entre tous ces phénomènes et donc de limiter la valeur du CAP.

À partir des équations du vol longitudinal, une bonne approximation en a été déduite, fonction de la pulsation naturelle  $\omega_{sp}$  et du zéro  $-1/T_{\theta_2}$  du numérateur.



$$CAP = \frac{\ddot{\theta}_0}{n_{z_{ss}}} \approx \frac{\omega_{sp}^2}{n_z/\alpha} \approx \frac{\omega_{sp}^2}{\frac{V_0}{g} \frac{1}{T_{\theta_2}}} \quad (3.12)$$

où  $V_0$  est la vitesse de l'appareil et  $g$  l'accélération gravitationnelle. La quantité  $n_z/\alpha$  est la sensibilité du facteur de charge à une variation d'incidence. Il s'agit en fait de la quantité  $\Delta n_z/\Delta \alpha$ . À grande vitesse, ce rapport est grand et à basse vitesse, il est faible.

Les limitations du CAP sont données dans le tableau 3.6. Pour les phases de vol de catégorie C, le tableau 3.7 vient donner des limitations additionnelles sur  $n/\alpha$  et  $\omega_{sp}$ . Tous les tableaux et graphes sont tirés du standard militaire américain MIL-HDBK-1797 (US Department of Defense, 1997). Ces limitations sont illustrées sur les figures 3.6, 3.7 et 3.8. La figure 3.9 montre comment on peut combiner CAP et  $\zeta_{sp}$ .

Tableau 3.6 Limitations du CAP

	<i>Phase de vol A</i>	<i>Phase de vol B</i>	<i>Phase de vol C</i>
Niveau 1 :	$0.28 \leq CAP \leq 3.6$ ( $\omega_{sp} \geq 1.0$ )	$0.085 \leq CAP \leq 3.6$ (Pas de $\omega_{sp_{min}}$ )	$0.15 \leq CAP \leq 3.6$ (Voir TAB 3.7)
Niveau 2 :	$0.15 \leq CAP \leq 10.0$ ( $\omega_{sp} \geq 0.6$ )	$0.038 \leq CAP \leq 10.0$ (Pas de $\omega_{sp_{min}}$ )	$0.096 \leq CAP \leq 10.0$ (Voir TAB 3.7)
Niveau 3 :	$0.15 \leq CAP$ (Pas de $\omega_{sp_{min}}$ )	$0.038 \leq CAP$ (Pas de $\omega_{sp_{min}}$ )	$0.096 \leq CAP$ (Pas de $\omega_{sp_{min}}$ )

Tableau 3.7 Limitations sur  $n/\alpha$  et  $\omega_{sp}$  pour phases de vol de catégorie C

Classe	Niveau 1		Niveau 2	
	$\omega_{sp_{min}}$ (rad/s)	$(n/\alpha)_{min}$ (g/rad)	$\omega_{sp_{min}}$ (rad/s)	$(n/\alpha)_{min}$ (g/rad)
I,II-C,IV	0.87	2.7	0.6	1.8
II-L,III	0.7	2.0	0.4	1.0

#### • Formulation pratique

Dans la pratique, le calcul du CAP ne peut se faire en appliquant directement la formule théorique. En effet comme le remarque Gautrey (1998), deux problèmes se posent. Premièrement, l'hypothèse selon laquelle l'accélération normale demeure constante suite à une entrée échelon n'est valide qu'à court terme. Et ensuite, l'accélération initiale en tangage

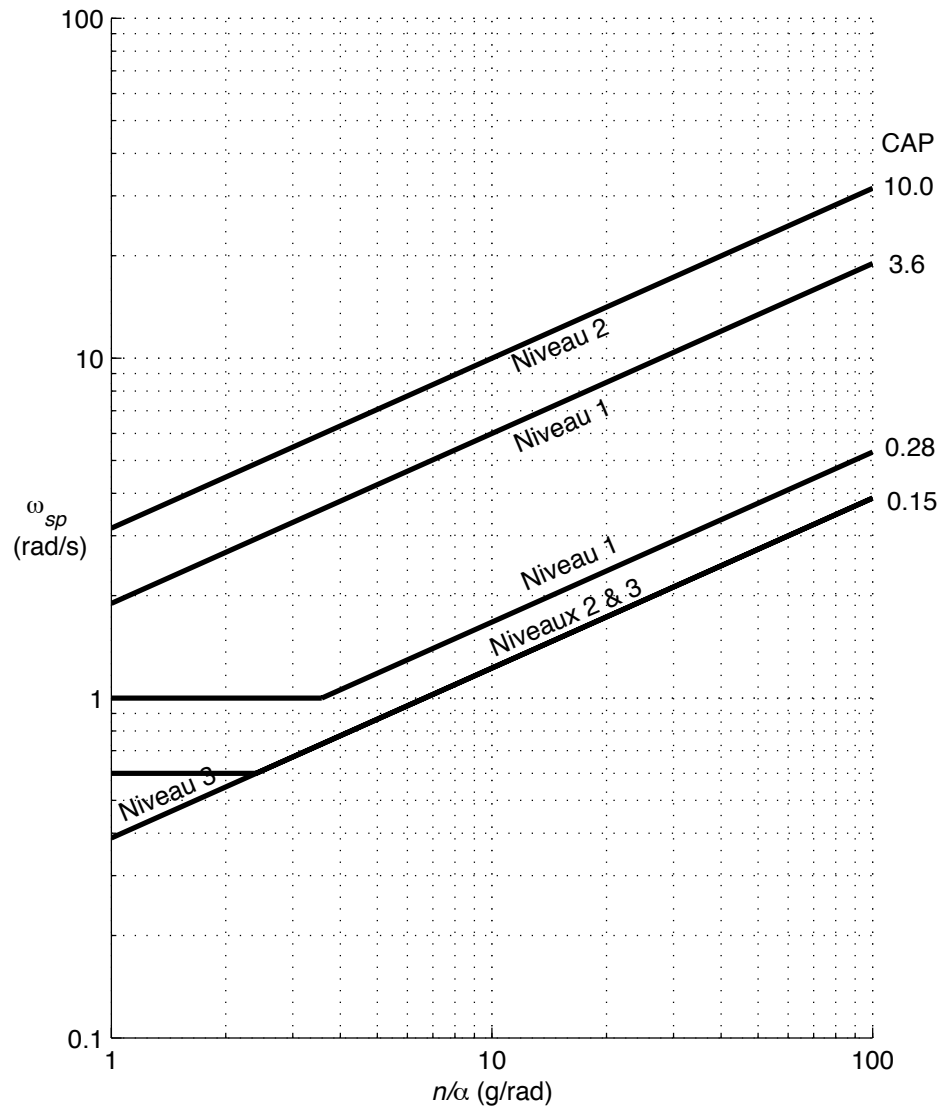


Figure 3.6 Limitations sur la pulsation propre  $\omega_{sp}$  - Phase de vol A

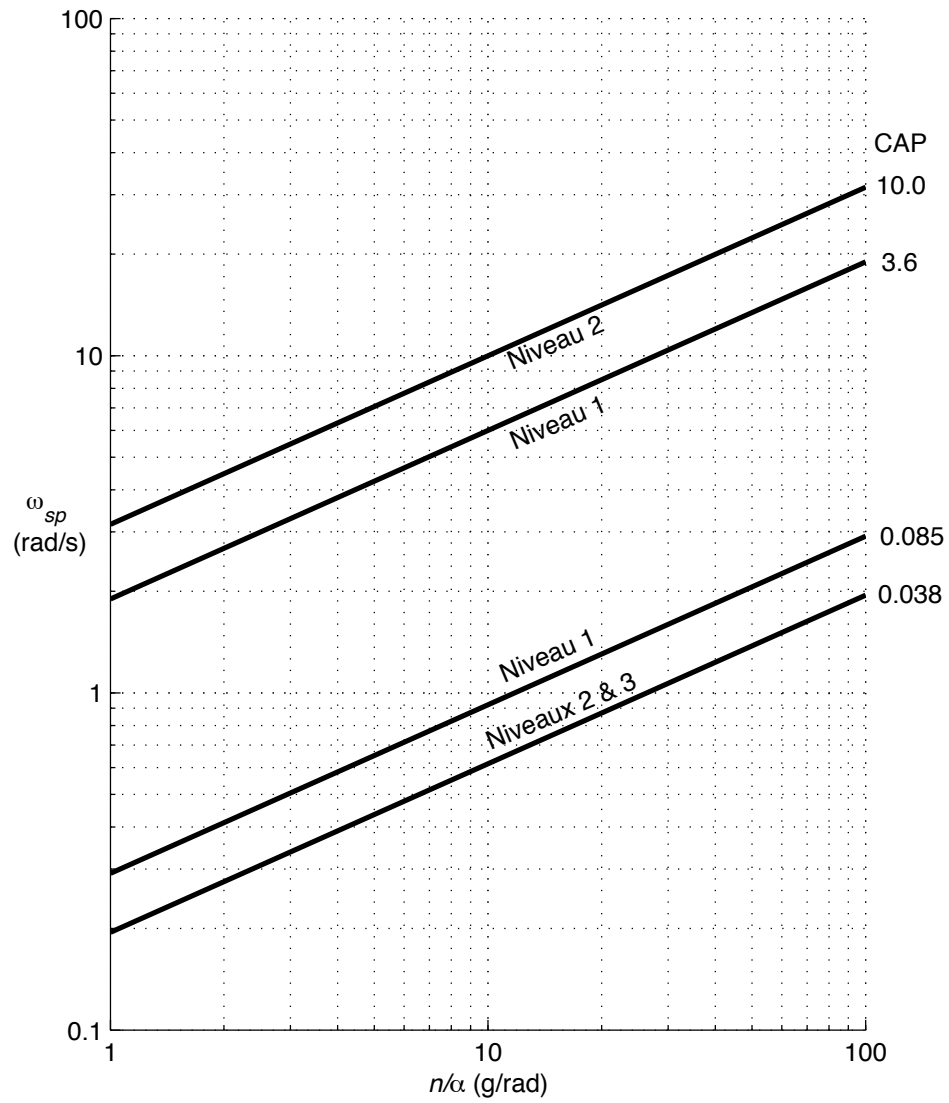


Figure 3.7 Limitations sur la pulsation propre  $\omega_{sp}$  - Phase de vol B

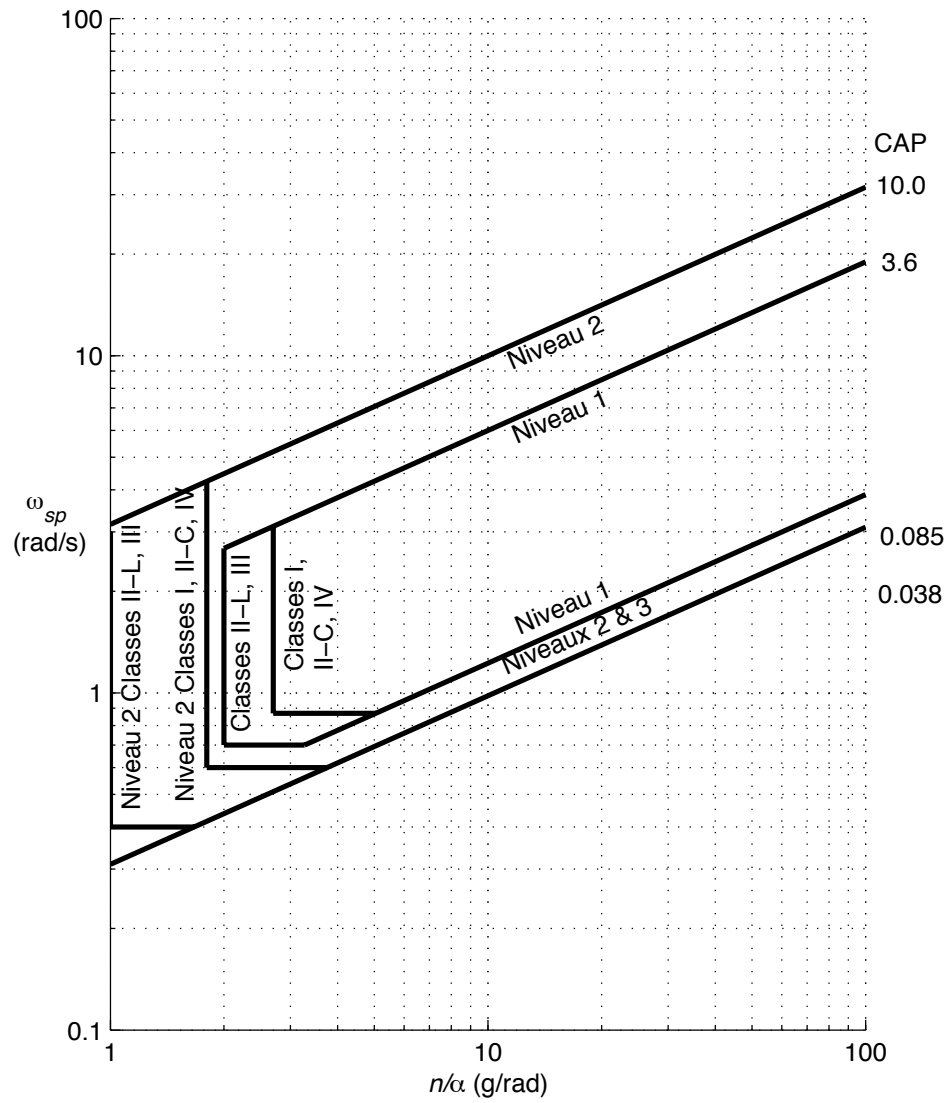


Figure 3.8 Limitations sur la pulsation propre  $\omega_{sp}$  - Phase de vol C

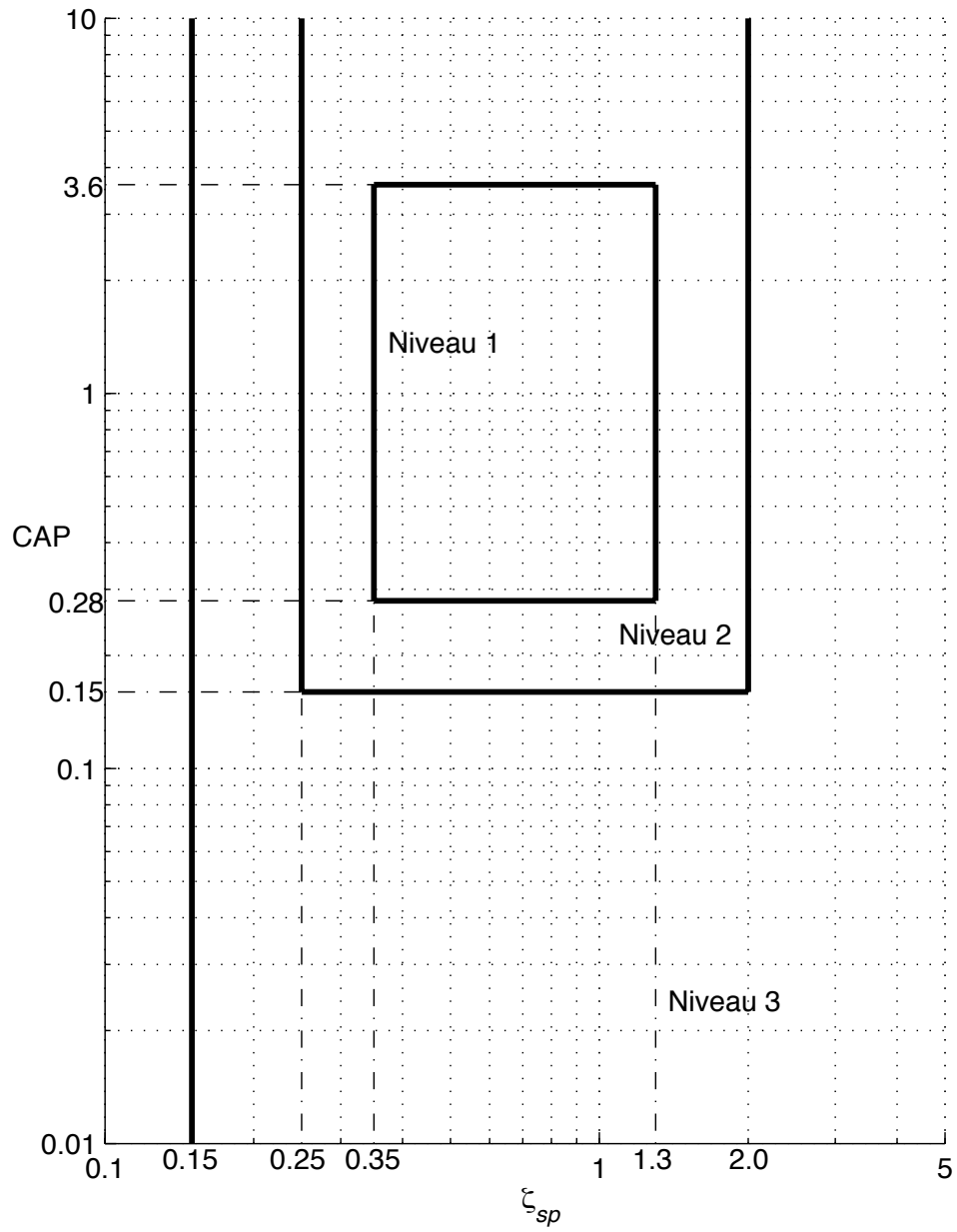


Figure 3.9 Limitations en CAP et en amortissement  $\zeta_{sp}$  - Phase de vol A

est influencée par les effets des actionneurs et autres éléments dynamiques de la boucle de contrôle ; l'accélération initiale est en fait nulle dès que d'autres éléments dynamiques viennent s'ajouter dans la boucle.

Gautrey et Cook (1998) propose deux modifications dans le calcul du critère. D'abord, au lieu d'utiliser l'accélération initiale en tangage  $\ddot{\theta}_0$ , il propose d'utiliser l'accélération maximale  $\ddot{\theta}_{max}$  obtenue lors de la première seconde. Ensuite, en ce qui concerne l'accélération normale  $\Delta n_{zss}$ , elle est remplacée par l'accélération normale maximale modifiée. Gautrey baptise ce CAP, le GCAP pour *Generic Control Anticipation Parameter*. La formule en est la suivante :

$$GCAP = \frac{\ddot{\theta}_{max}}{n_{zmax}} \left( 1 + e^{\frac{-\zeta_{sp}\pi}{\sqrt{1-\zeta_{sp}^2}}} \right) \quad (3.13)$$

Cette formulation est soumise au fait que la réponse à court terme du système est dominée par un second ordre pour lequel  $0 < \zeta_{sp} < 1$ . En appliquant cela sur plusieurs données à sa disposition ainsi que sur des expérimentations qu'il a pu mener à Cranfield, il a trouvé une bonne corrélation entre le CAP et le GCAP. Il souligne que cette formulation peut aussi s'appliquer à des avions qui n'ont pas une réponse conventionnelle.

Gautrey (1998) choisit pour son cahier des charges une valeur de GCAP de 0.6 rad/s<sup>2</sup>/g, même si en fait, le choix est vaste au sein de la zone admissible. De plus, pour la synthèse des lois de contrôle, il fournit une méthodologie afin d'orienter le choix des gains mais ne donne pas véritablement une formulation explicite du GCAP en fonction de ces mêmes gains. Ils sont réglés un par un selon leurs effets séparés sur les différents critères constituant le cahier des charges et un processus itératif permet d'ajuster leur valeur ; il n'y a néanmoins rien de spécifique pour le GCAP. Cette méthodologie de synthèse de lois classiques est par ailleurs fournie seulement pour un avion en phase d'atterrissage.

Il faut regarder du côté des travaux de Tokutake pour trouver une prise en compte directe de la valeur du CAP lors de la synthèse. Les deux articles (Tokutake et Itoh, 2002; Tokutake *et al.*, 2005) s'intéressent particulièrement au CAP et à la satisfaction du critère lors de la synthèse du contrôleur. Le premier article est limité dans l'utilisation de ses résultats ; il a néanmoins l'avantage de montrer la transformation du critère CAP en LMI que l'on peut intégrer dans une synthèse  $H_\infty$  ou autre. Le second apporte des éléments supplémentaires de réponse et met en évidence l'utilité de pouvoir exprimer le critère en fonction des paramètres du système et du contrôleur pour le satisfaire *a priori*, et non pas avoir à vérifier sa valeur *a posteriori*.

## ◆ Dropback

### • Définition

Le dropback est une mesure à court terme des changements d'assiette  $\theta$ . Il est calculé en observant la réponse de l'avion en assiette  $\theta$  suite à une entrée échelon  $\delta_{ref}$  du pilote. On considère en fait la réponse du système réduit, amputé du mode phugoïde. La figure 3.10 illustre le calcul du dropback, noté  $Drb$ ;  $q_{ss}$  désigne la valeur en régime permanent de la vitesse de tangage  $q$ . Dans cet exemple, le dropback est positif; il en est de même pour le rapport  $Drb/q_{ss}$ . Un dropback excessif entraîne une perte de précision et des mouvements trop brusques dans le contrôle du tangage  $q$ .

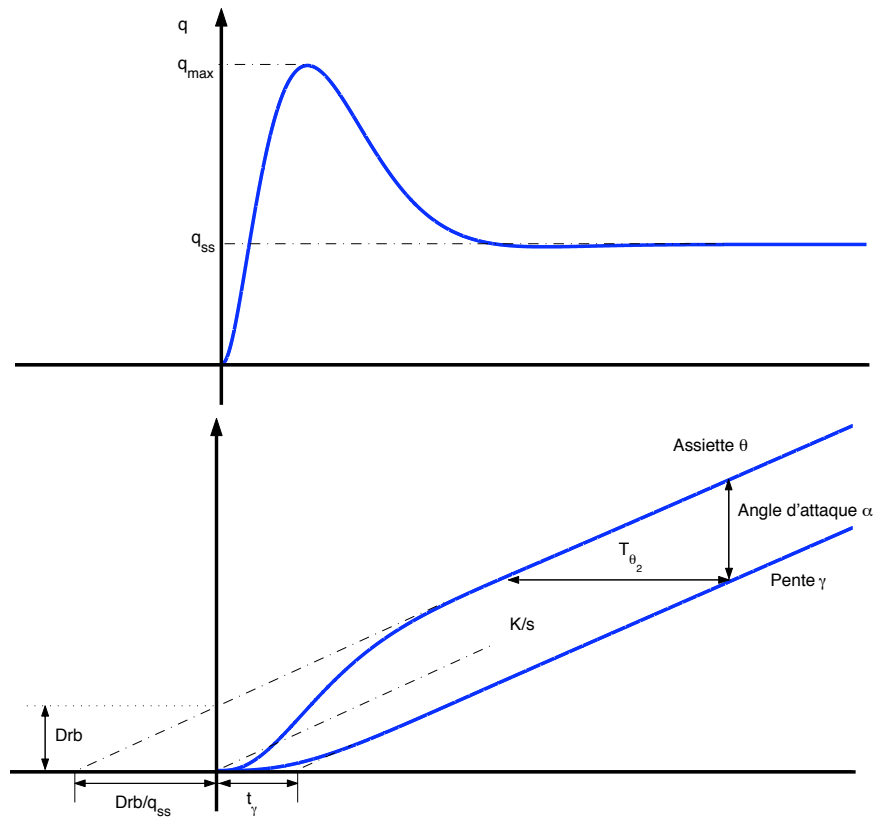


Figure 3.10 Définition du dropback

Le dropback est aussi relié au retard de pente  $t_\gamma$ , tel que montré sur la figure 3.10, par la relation 3.14. Ainsi pour une valeur fixée de  $T_{\theta_2}$ , augmenter le dropback revient à diminuer le retard de pente.

$$T_{\theta_2} = \frac{Drb}{q_{ss}} + t_\gamma \quad (3.14)$$

La figure 3.11 illustre différents niveaux de dropback :

- Cas A : le dropback est positif. La valeur de  $\theta$  en régime permanent est moindre que la valeur au moment où le manche est relâché.
- Cas B : le dropback est nul. La valeur de  $\theta$  en régime permanent est égale à la valeur au moment où le manche est relâché.
- Cas C : le dropback est négatif, aussi appelé *overshoot*. La valeur de  $\theta$  en régime permanent est plus grande que la valeur au moment où le manche est relâché.

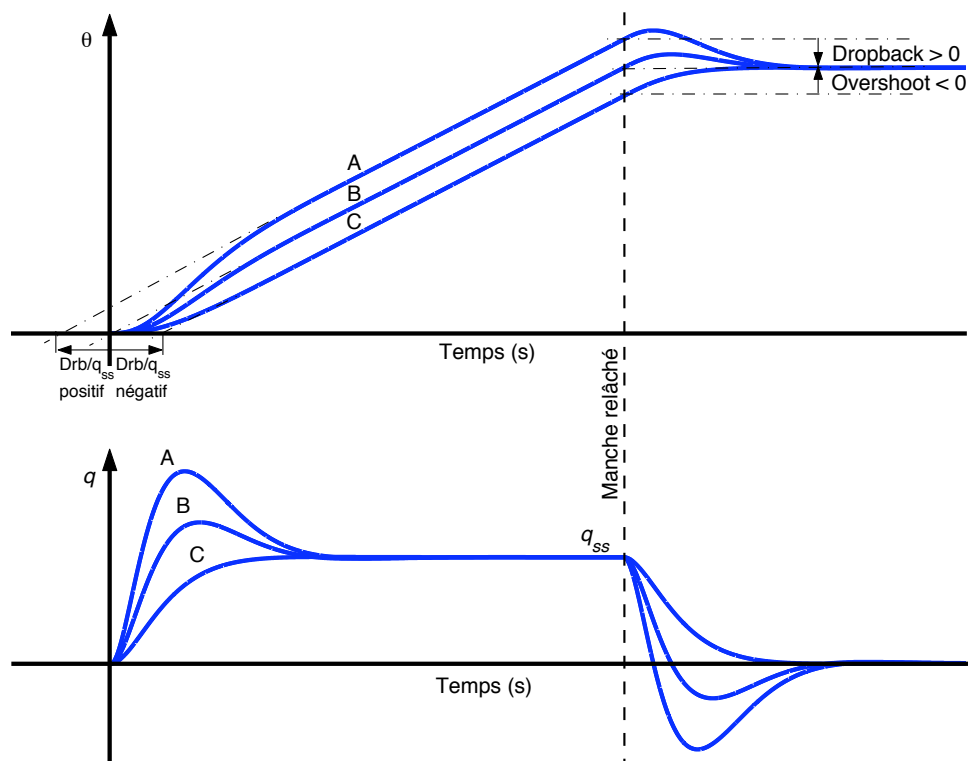


Figure 3.11 Niveaux de dropback

Un dropback négatif est à proscrire ; il est associé à des réponses lentes et imprévisibles aussi bien au niveau de la pente  $\gamma$  que de la poursuite d'assiette  $\theta$ . En effet, on voit qu'avec un dropback négatif, l'avion a tendance à se caler à une valeur supérieure à celle désirée par le pilote. Un dropback nul assure que l'assiette  $\theta$  se comporte en régime permanent comme un intégrateur pur  $K/s$  ; le pilote a l'impression de piloter un intégrateur pur, ce qui est idéal en terme de pilotage.

#### • Limites

Gibson suggère que le rapport  $Drb/q_{ss}$  devrait être inférieur à 0.25 pour une poursuite précise et inférieur à 1.0 pour un atterrissage. *Bombardier Inc.* donne pour sa part les limites



de la Table 3.8.

Tableau 3.8 Limites du dropback pour phases terminales

<i>Exigé</i>	<i>Idéal</i>
$-0.2 < Drb/q_{ss} < 0.5$	$0.0 < Drb/q_{ss} < 0.3$

Le critère du dropback est aussi complété en considérant le dépassement de la réponse en  $q$ . Les deux sont en effet reliés comme nous le montrerons par la suite. Un dépassement excessif conduit à des performances non acceptables. La figure 3.12 tirée de (Mitchell *et al.*, 1994) met en relation le dropback et le dépassement maximum autorisé. On définit ainsi des niveaux de satisfaction que l'on cherche à atteindre. Mooij (1985) et Gibson (1982) montrent que le dropback maximum admissible diminue quand le dépassement  $q_{max}$  augmente.

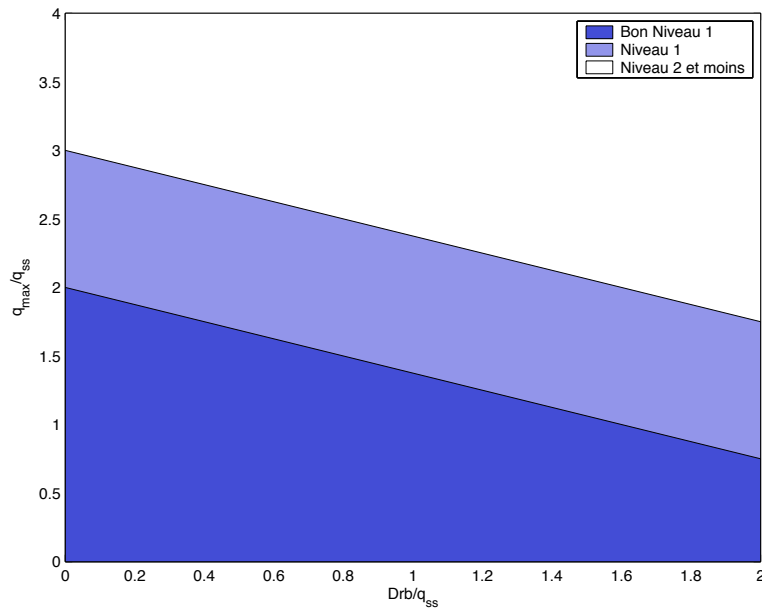


Figure 3.12 Dropback vs. dépassement

En résumé, si l'on se base sur les conclusions de French (1995), le critère du dropback est efficace pour valider la réponse en tangage d'un avion en boucle ouverte pour les tâches de poursuite. Un dropback nul assure non seulement qu'en boucle ouverte, l'angle de tangage de l'appareil restera à la dernière valeur atteinte au moment où l'échelon de manche est retiré mais il permet aussi une meilleure réponse en boucle fermée aux basses fréquences.

### 3.1.6 Critères fréquentiels

#### ◆ Bandes Passantes et Retard de Phase

##### • Définitions

Pour ce critère, nous nous intéresserons aux deux fonctions de transfert  $\theta/\delta_{ref}$  et  $\gamma/\delta_{ref}$ , portant respectivement sur l'assiette  $\theta$  et la pente  $\gamma$ . Dans le cas de l'assiette, la bande passante  $\theta$ -bandwidth est la plus petite des deux pulsations  $\omega_{BW_{Gain}}$  et  $\omega_{BW_{Phase}}$ ,  $\omega_{BW_{Gain}}$  étant la pulsation où le gain a augmenté de 6 dB relativement à la valeur du gain où la phase vaut  $-180^\circ$  et  $\omega_{BW_{Phase}}$  la pulsation où la phase vaut  $-135^\circ$ . La figure 3.13 illustre graphiquement ces bandes passantes. Dans le cas de la pente, la bande passante ( $\gamma$ -bandwidth) est seulement la pulsation où la phase vaut  $-135^\circ$ . En général, une grande bande passante assure des réponses plus rapides alors qu'une faible bande passante entraîne des réponses lentes.

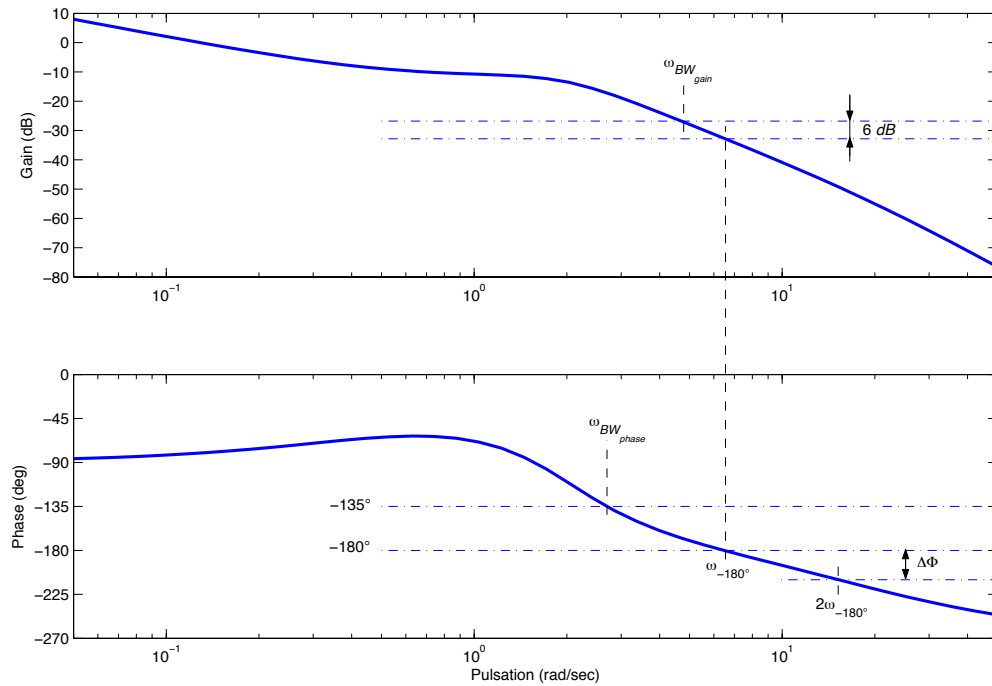


Figure 3.13 Définition de la bande passante et du retard de phase sur le transfert  $\theta/\delta_{ref}$

La référence par rapport à la phase de  $-180^\circ$  est significative car elle représente une frontière potentielle de stabilité quand le pilote entre dans la boucle de contrôle. Si par exemple, le pilote doit maintenir un contrôle forcé en pente durant des conditions turbulentes, alors trois problèmes reliés peuvent entraver l'efficacité du contrôle.

Tout d'abord pour des fréquences suffisamment élevées, la réponse de l'avion sera en retard

de phase de plus de  $180^\circ$  par rapport à la commande du pilote ; il devra alors appliquer un contrôle en avance pour anticiper le mouvement désiré ou perturbé. De plus, aux hautes fréquences, la réponse est beaucoup plus atténuée et le pilote réagira plus fortement sur la commande. En dernier lieu, un retard naturel dans la boucle de rétroaction entre l'erreur en assiette et la commande cyclique du pilote pour corriger cette erreur, peut résulter en un couplage avion-pilote qui produit alors des oscillations très mal amorties : les PIOs évoquées précédemment. Un des buts des critères portant sur les bandes passantes est d'assurer que les pulsations de ces PIOs demeurent bien en dehors du domaine de fréquences requis pour accomplir des missions de précision. Ainsi une marge de phase de  $45^\circ$  est suffisante pour considérer le pilote comme un gain pur, et supposer que son retard naturel ne menacera pas la stabilité. En ce qui concerne la marge de gain de 6 dB, elle autorise le pilote à augmenter sa commande à hautes fréquences et d'avoir ainsi un contrôle plus agressif, tout en garantissant une certaine marge de stabilité.

Aux critères sur les bandes passantes, s'ajoute le critère du retard de phase (*Phase delay*). Il vient en fait compléter les deux précédents dans le sens où il renseigne sur la pente de la courbe de phase au-delà de la pulsation où la phase vaut  $-180^\circ$ . Il s'applique à la phase de la fonction de transfert  $\theta/\delta_{ref}$ . Le retard de phase  $\tau_p$ , exprimé en secondes, est défini de la façon suivante :

$$\tau_p = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\Delta\Phi^\circ}{2\omega_{-180^\circ}} \quad (3.15)$$

où  $\Delta\Phi^\circ$  est la variation de phase en degrés entre  $\omega_{-180^\circ}$  et  $2\omega_{-180^\circ}$  tel qu'illustré sur la figure 3.13.

Plus l'atténuation de la phase est grande, plus faible est la bande passante et avec des actionneurs présentant des retards purs, la pente de la phase devient d'autant plus raide, diminuant d'autant plus la bande passante.

De plus, ce critère peut avoir son importance spécialement dans un système d'ordre élevé puisque deux fonctions de transfert peuvent avoir la même bande passante mais des retards de phase complètement distincts. Ainsi dans le cas de la figure 3.14, la configuration *B* est jugée meilleure du fait d'un retard de phase plus faible, bien que les bandes passantes soient identiques.

#### • Limites

Les deux paragraphes précédents ayant introduit les critères, voici les limites imposées. La figure 3.15 montre les domaines conjoints entre la bande passante de  $\theta/\delta_{ref}$  et le retard de phase  $\tau_p$ . Quant à la figure 3.16, on y trouve les zones reliant les bandes passantes de  $\theta/\delta_{ref}$  et  $\gamma/\delta_{ref}$ . D'une source bibliographique à l'autre, ces zones varient légèrement ; celles-ci sont tirées du livre de Hodgkinson (1999). Dans notre cas pratique, *Bombardier Inc.* souhaite

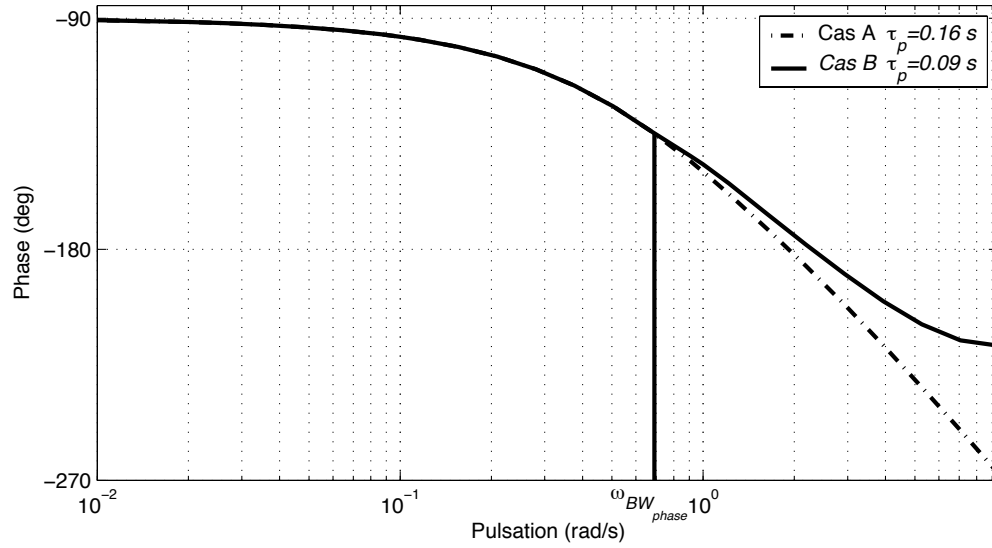


Figure 3.14 Comparaison des bandes passantes et retards de phase

avoir  $\omega_{BW_\theta}$  supérieur à 1.4 rad/s et  $\omega_{BW_\gamma}$  supérieur à 0.6 (rad/s). Pour le retard de phase, il doit être inférieur à 0.2 (s) pour être de niveau 1, voire même idéalement inférieur à 0.14 (s).

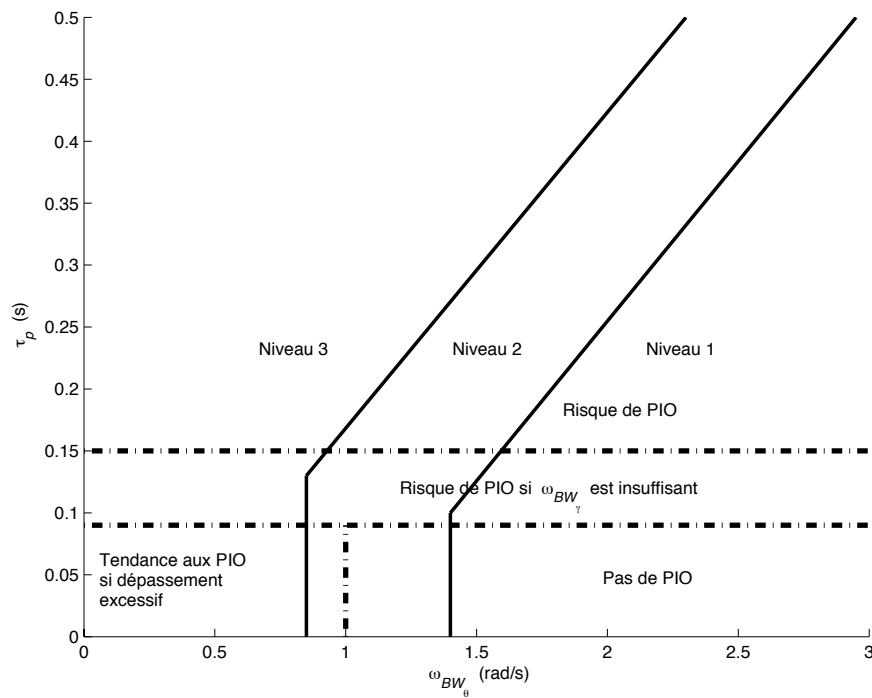


Figure 3.15 Critère pour  $\omega_{BW_\theta}$  et  $\tau_p$

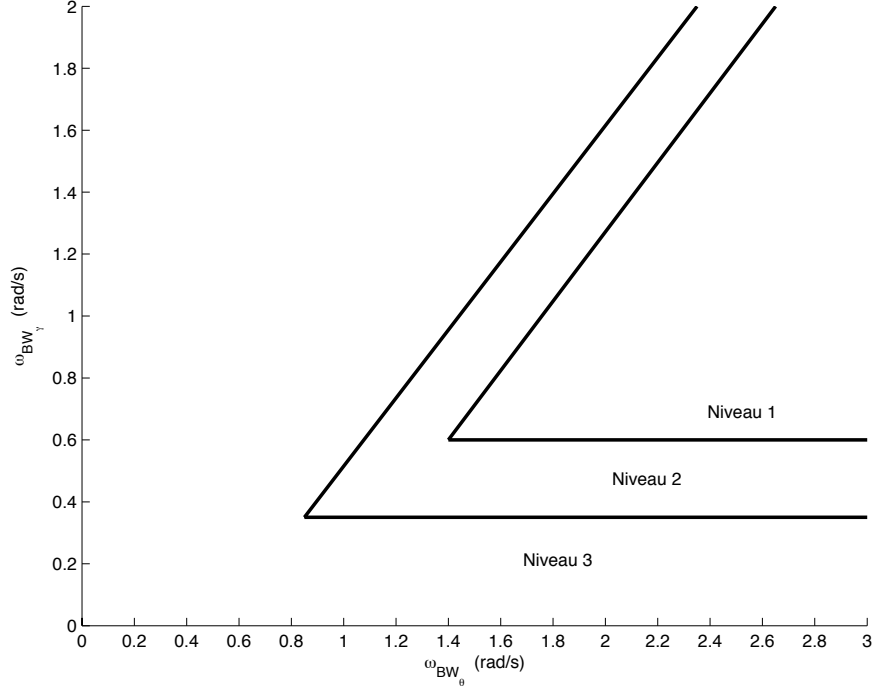


Figure 3.16 Critère de la bande passante pour  $\omega_{BW_\theta}$  et  $\omega_{BW_\gamma}$

#### ◆ Taux de phase moyen de Gibson

À l'instar du retard de phase  $\tau_p$ , Gibson définit en  $\omega_{-180^\circ}$  le taux de phase moyen (*average phase rate*) que nous noterons  $\tau_G$ . Gibons définit  $\tau_G$  comme :

$$\tau_G = \frac{\Delta\Phi^\circ}{\omega_{-180^\circ}(\text{Hz})} \text{ deg/Hz} \quad (3.16)$$

où  $\Delta\Phi^\circ$  est la variation de phase en degrés entre  $\omega_{-180^\circ}$  et  $2\omega_{-180^\circ}$  et  $\omega_{-180^\circ}$  est en Hertz. Le retard de phase et le taux de phase moyen sont deux mesures interchangeables. En effet, en considérant leur définition (Eqs. 3.15 et 3.16), on a :

$$\tau_p = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\Delta\Phi^\circ}{2\omega_{-180^\circ}} = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\Delta\Phi^\circ}{2 \times 2\pi\omega_{-180^\circ}(\text{Hz})} = \frac{\tau_G}{720} \quad (3.17)$$

De même si on change les unités de  $\tau_G$  afin qu'il soit exprimé en secondes comme  $\tau_p$ , on aura :

$$\tau'_G = \frac{\tau_G}{360} \quad (3.18)$$

Et donc finalement :

$$\tau_p = \frac{\tau'_G}{2} \quad (3.19)$$

Les figures 3.17 et 3.18 représentent les gabarits définissant les niveaux de satisfaction. La première figure est le gabarit original tel qu'on peut le trouver dans (Gibson, 1997) et la

seconde, un gabarit modifié avec les pulsations en rad/s et le taux de phase moyen modifié. Cette seconde figure permet d'établir un lien plus direct avec les critères de bande passante et retard de phase. On notera aussi que ces gabarits imposent des limites basses sur la pulsation  $\omega_{-180^\circ}$ . Le tableau 3.9 donne les équivalences entre  $\tau_G$ ,  $\tau'_G$  et  $\tau_p$  pour les valeurs limites définissant les différents niveaux.

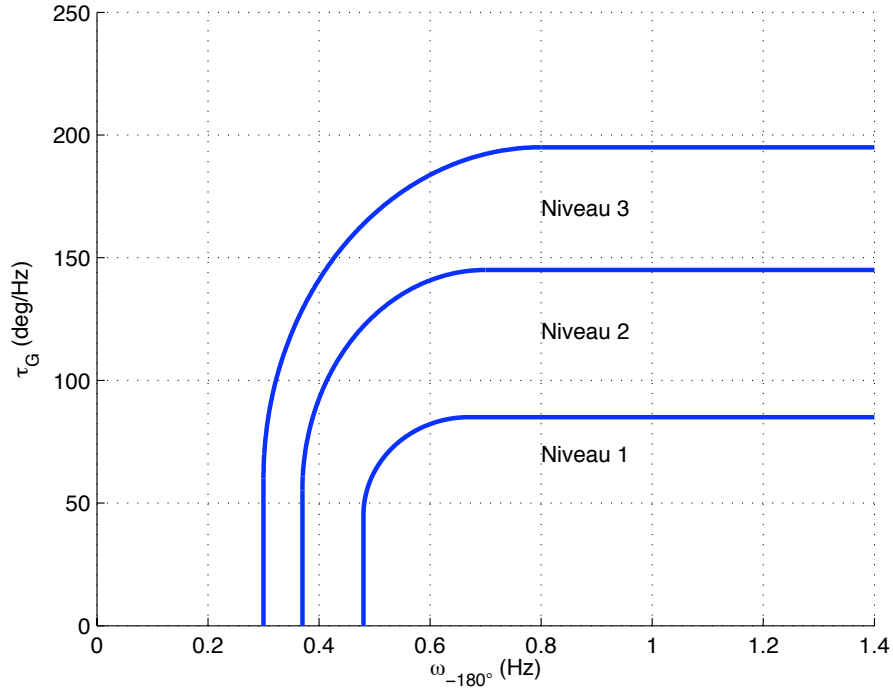


Figure 3.17 Critère pour  $\omega_{BW_\theta}$  et  $\tau_p$

Tableau 3.9 Équivalences entre  $\tau_G$ ,  $\tau'_G$  et  $\tau_p$

$\tau_G$ (deg/Hz)	$\tau'_G$ (s)	$\tau_p$ (s)
85	0.24	0.12
145	0.40	0.20
195	0.54	0.27

On peut remarquer que le taux de phase moyen de Gibson impose des limites plus fortes que le retard de phase afin de satisfaire le niveau 1. En effet pour être de niveau 1, Gibson conseille un taux de phase moyen inférieur à 0.24 s, correspondant à un retard de phase de 0.12 s alors que *Bombardier Inc.* suggère de prendre un retard de phase inférieur à 0.2 s pour être de niveau 1, voire même idéalement inférieur à 0.14, ce qui est équivalent respectivement à un taux de phase moyen de 0.4 et 0.28. D'ailleurs, un taux de phase moyen de 0.4 correspond à

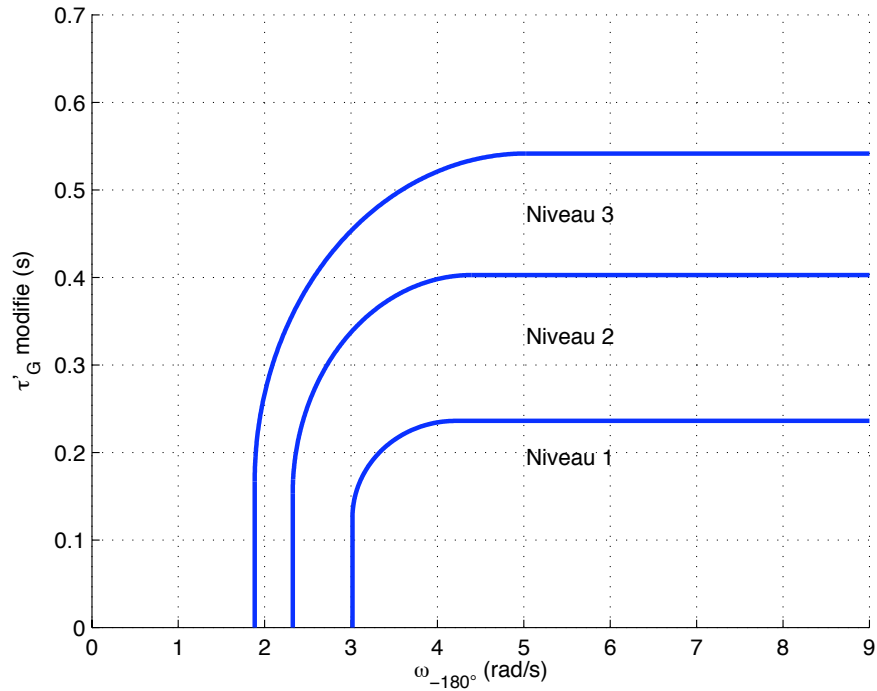


Figure 3.18 Critère de la bande passante pour  $\omega_{BW_\theta}$  et  $\omega_{BW_\gamma}$

la limite du niveau 2. On peut alors s'interroger sur la cohérence des limites entre les deux mesures. Il faut rappeler que ces gabarits sont d'abord destinés à des avions militaires et qu'il faut éventuellement les adapter aux avions de transport. Il est raisonnable de penser que les limites imposées à un avion militaire vont être plus exigeantes que sur un avion civil. Nous statuons sur la question en suivant les recommandations de *Bombardier Inc.* et en cherchant donc idéalement un retard de phase inférieur à 0.14 s (i.e. un taux de phase moyen de 0.28 s) ou pour être au moins de niveau 1 un retard de phase de 0.2 s (i.e un taux de phase moyen de 0.4 s).

## Conclusion

Nous venons de recenser les différentes qualités de manœuvrabilité qui seront considérées par la suite. Étant initialement établies pour des avions militaires, il a fallu les adapter pour des avions civils en relaxant certaines valeurs limites suivant les conseils émis par *Bombardier Inc.*, notamment au niveau des critères fréquentiels. Les valeurs limites des critères dépendent de la phase de vol et de la classe de l'avion. Notre avion d'affaires *Challenger* appartient à la classe II<sup>1</sup> et nous nous plaçons dans la catégorie B en ce qui concerne la phase de vol<sup>2</sup>. Le tableau 3.10 représente alors notre cahier

1. Avion de masse moyenne.

2. Montée, vol en croisière, descente.

des charges avec les limites de niveau 1 pour les critères. Comme notre but est essentiellement de contrôler l'appareil à court terme, les exigences sur le mode phugoïde sont laissées de côté. Notre objectif sera donc de synthétiser un contrôleur pour satisfaire *a priori* ce cahier des charges.

### 3.2 Étude du Dropback

Nous allons dans cette section étudier en particulier le critère du dropback de Gibson. Suivant l'expérience du candidat, la satisfaction de ce critère jumelé avec un bon amortissement et un temps de réponse adéquat permet en général d'obtenir un comportement satisfaisant de l'appareil. Durant sa maîtrise (Saussié, 2004), le candidat a pu établir une formule théorique permettant d'exprimer la valeur du dropback en fonction des coefficients de la fonction de transfert du système, et ce, en ne se limitant pas à un système d'ordre 2 standard (Gibson, 1997). Ceci se révèle particulièrement important car, avec ou sans rétroaction, les autres pôles et zéros du système<sup>3</sup> ont une influence sur la valeur du critère et doivent donc être considérés. Nous établirons alors, de façon similaire, une formule théorique pour un système d'ordre quelconque exprimé sous la forme d'un modèle d'état.

Ces formules sont valables pour des modèles de la vitesse de tangage  $q$  privé du mode lent phugoïde. Elles peuvent ensuite être utilisées par exemple dans le cadre de la synthèse d'un contrôleur. En effet pour une architecture fixée, on peut exprimer la valeur du critère en fonction des gains du contrôleur et donc ajuster automatiquement la valeur du dropback.

Gibson (1999) met une emphase particulière sur le dropback. Nous compléterons le travail qu'il a effectué en étudiant le lien entre dépassement et dropback. En effet, bien souvent on cherche à limiter le dépassement en pensant qu'il est préjudiciable au système. Néanmoins, dans le cas du contrôle de la vitesse de tangage  $q$ , un dropback positif est toujours synonyme de dépassement plus ou moins important ; c'est ce que nous établirons.

#### 3.2.1 Notations

Supposons que la fonction de transfert  $q/\delta_{ref}$ <sup>4</sup>, stable, ait la formulation générale (3.20), la dynamique du mode phugoïde ayant été ôtée.

$$\frac{q}{\delta_{ref}} = K \frac{\prod_{i=1}^k (1 + T_i s) \prod_{i=1}^l (s^2 + 2\xi_i \phi_i s + \phi_i^2)}{\prod_{i=1}^m (1 + \tau_i s) \prod_{i=1}^n (s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2)} ; \quad \phi_i \neq 0 \quad (3.20)$$

avec  $k + 2l < m + 2n$ . En développant, on obtient :

---

3. Autres que les pôles du mode *short period* et le zéro associé.

4.  $\delta_{ref}$  étant l'entrée de référence considérée, en BO ou en BF.



Tableau 3.10 Cahier des charges

Critère	Type	Limites	
Amortissement du <i>short period</i>	Modal	$0.3 \leq \zeta_{sp} \leq 2$	
Temps de réponse à 5%	Temporel	$T_r \leq 3 \text{ s}$	
Dropback $\frac{Drb}{q_{ss}}$	Temporel	Exigé	$0 \leq \frac{Drb}{q_{ss}} \leq 0.3$
		Idéal	$-0.2 \leq \frac{Drb}{q_{ss}} \leq 0.5$
CAP	Temporel	$0.085 \leq \text{CAP} \leq 0.36$	
Bande passante $\omega_{BW_\theta}$	Fréquentiel	$\omega_{BW_\theta} \geq 1.4 \text{ rad/s}$	
Retard de phase $\tau_p$	Fréquentiel	Exigé	$\tau_p \leq 0.2 \text{ s}$
		Idéal	$\tau_p \leq 0.14 \text{ s}$
Taux de phase moyen $\tau_G$	Fréquentiel	Exigé	$\tau_G \leq 145 \text{ rad/s}$
		Idéal	$\tau_G \leq 85 \text{ rad/s}$
Taux de phase moyen modifié $\tau'_G$	Fréquentiel	Exigé	$\tau'_G \leq 0.4 \text{ s}$
		Idéal	$\tau'_G \leq 0.28 \text{ s}$
Pulsation critique $\omega_{-180^\circ}$	Fréquentiel	$\omega_{-180^\circ} \geq 3 \text{ rad/s}$	

$$\frac{q}{\delta_{ref}} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_{k+2l}s^{k+2l} + \dots + a_1s + a_0}{b_{m+2n}s^{m+2n} + \dots + b_1s + b_0}. \quad (3.21)$$

Enfin sous forme de modèle d'état, on a (3.22).

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + B\delta_{ref} \\ q &= Cx \end{cases} \quad (3.22)$$

### 3.2.2 Formules analytiques du dropback

#### ◆ À partir de la fonction de transfert

Le dropback est donné par (Saussié, 2004) :

$$\frac{Drb}{q_{ss}} = \left( \sum_{j=1}^k T_j + \sum_{j=1}^l 2 \frac{\xi_j}{\phi_j} \right) - \left( \sum_{j=1}^m \tau_j + \sum_{j=1}^n 2 \frac{\zeta_j}{\omega_j} \right) \quad (3.23)$$

ou à partir de (3.21) :

$$\frac{Drb}{q_{ss}} = \frac{a_1}{a_0} - \frac{b_1}{b_0} \quad (3.24)$$

#### Remarques :

- Pour le produit de deux fonctions de transfert  $q/\delta_{ref} = F_1(s)F_2(s)$ , le dropback est clairement additif :

$$\frac{Drb}{q_{ss}} = \frac{Drb_1}{q_{ss_1}} + \frac{Drb_2}{q_{ss_2}}, \quad (3.25)$$

où  $Drb_i/q_{ss_i}$  est le dropback associé à la fonction de transfert  $F_i(s)$ .

- En présence d'un retard pur  $\tau$  tel que  $q/\delta_{ref} = e^{-\tau s}F_1(s)$ , le dropback est donné par :

$$\frac{Drb}{q_{ss}} = -\tau + \frac{Drb_1}{q_{ss_1}}. \quad (3.26)$$

En effet, un retard pur décale la réponse temporelle de  $\tau$  et d'après la figure 3.10, le dropback est alors diminué de  $\tau$ .

#### ◆ À partir du modèle d'état

À l'instar de la formulation analytique du dropback à partir de la fonction de transfert  $q/\delta_{ref}$ , nous proposons une formule dans le cas où le système est représenté sous la forme d'un modèle d'état.

**Proposition 3.2.1.** *Étant donnée une formulation d'état de  $q/\delta_{ref}$  sous la forme (3.22), le dropback est donné par (3.27).*

$$\frac{Drb}{q_{ss}} = \frac{CA^{-2}B}{CA^{-1}B} \quad (3.27)$$

### Démonstration

D'après (Eq. 3.22), on a

$$\frac{q}{\delta_{ref}} = C(sI - A)^{-1}B. \quad (3.28)$$

Pour  $A$  non singulière et tout  $s \neq \lambda_i(A)$ , on peut donc écrire<sup>5</sup> :

$$\frac{q}{\delta_{ref}} = -CA^{-1}(I - sA^{-1})^{-1}B \quad (3.29)$$

$$= -CA^{-1}(I + sA^{-1} + s^2A^{-2} + \dots)B \quad (3.30)$$

$$\triangleq \alpha_1 + \alpha_2s + \alpha_3s^2 + \dots \quad (3.31)$$

avec  $\alpha_i = -CA^{-i}B, i = 1, 2, \dots$

Par un produit en croix de (Eq. 3.21) et (Eq. 3.31), on déduit, en égalant les puissances de  $s$ , que :

$$a_0 = \alpha_1 b_0 \quad (3.32)$$

$$a_1 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_0 \quad (3.33)$$

$$\vdots$$

Le dropback étant donné par (Eq. 3.24), on obtient :

$$\frac{Drb}{q_{ss}} = \frac{a_1}{a_0} - \frac{b_1}{b_0} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{CA^{-2}B}{CA^{-1}B} \quad (3.34)$$

■

**Exemple 3.2.2.** Soit la fonction de transfert :

$$\frac{q}{\delta_{ref}} = \frac{9(s+8)(s+2)}{(s^2 + 5.6s + 16)(s^2 + 4.2s + 9)} \quad (3.35)$$

qui peut s'écrire aussi comme :

$$\frac{q}{\delta_{ref}} = \frac{9s^2 + 90s + 144}{s^4 + 9.8s^3 + 48.52s^2 + 117.6s + 144} \quad (3.36)$$

La réponse à un échelon unité est représentée sur la figure 3.19. Graphiquement, on en déduit que  $Drb/q_{ss} \approx -0.2$ .

Si on applique la formule donnée par (3.23) ou (3.24), on trouve  $Drb/q_{ss} \approx -0.1916$ . En mettant cette fonction de transfert sous forme d'état, on obtient les matrices (3.37), (3.38) et

---

5. On peut vérifier que  $(sI - A) * - \sum_{i=0}^{\infty} s^i A^{-(i+1)} = I, \forall s \neq \lambda_i(A)$

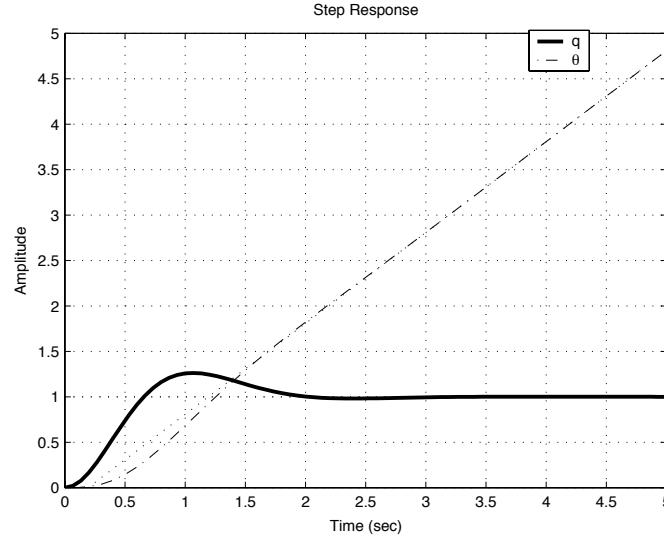


Figure 3.19 Réponse du système à un échelon unité

(3.39).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -144 & -117.6 & -48.52 & -9.8 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$C = \begin{bmatrix} 144 & 90 & 9 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

L'application de la formule (3.27) donne aussi  $Drb/q_{ss} \approx -0.1916$ .

### 3.2.3 Applications sur des architectures de contrôle

Ces formulations du dropback vont être appliquées sur les deux architectures proposées par *Bombardier Inc.* ainsi que sur le cas général d'un contrôleur par retour d'état ou de sortie.

#### ◆ Contrôle de la vitesse de tangage

Nous reprenons l'architecture de contrôle de la vitesse de tangage  $q$  présentée en figure 2.7. Nous en choisissons une version simplifiée pour alléger les calculs, néanmoins la démarche serait exactement la même dans le cas d'une architecture plus complexe. La figure 3.20 montre la

structure simplifiée choisie où les transferts sont notés :

$$\frac{N_1(s)}{D(s)} = \frac{n_{1m}s^m + \dots + n_{11}s + n_{10}}{d_ns^n + \dots + d_1s + d_0} \quad (3.40)$$

$$\frac{N_2(s)}{D(s)} = \frac{n_{2m}s^m + \dots + n_{21}s + n_{20}}{d_ns^n + \dots + d_1s + d_0} \quad (3.41)$$

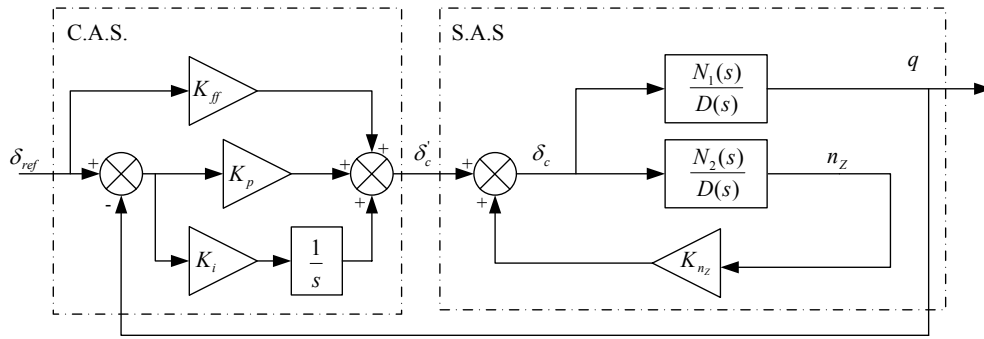


Figure 3.20 Loi de contrôle classique

Le transfert entre la vitesse de tangage et l'entrée du pilote est supposé stable pour les gains choisis :

$$\frac{q}{\delta_{ref}} = \frac{((K_p + K_{ff})s + K_i)N_1(s)}{(D(s) - K_{n_z}N_2(s))s + (K_p s + K_i)N_1(s)} \quad (3.42)$$

$$\frac{q}{\delta_{ref}} = \frac{\dots + (K_p n_{10} + K_{ff} n_{10} + K_i n_{11})s + (K_i n_{10})}{\dots + (d_0 - K_{n_z} n_{20} + K_p n_{10} + K_i n_{11})s + (K_i n_{10})} \quad (3.43)$$

En utilisant la relation (3.24), on en déduit alors que le dropback vaut :

$$\frac{Drb}{q_{ss}} = \frac{K_p n_{10} + K_{ff} n_{10} + K_i n_{11}}{K_i n_{10}} - \frac{d_0 - K_{n_z} n_{20} + K_p n_{10} + K_i n_{11}}{K_i n_{10}} \quad (3.44)$$

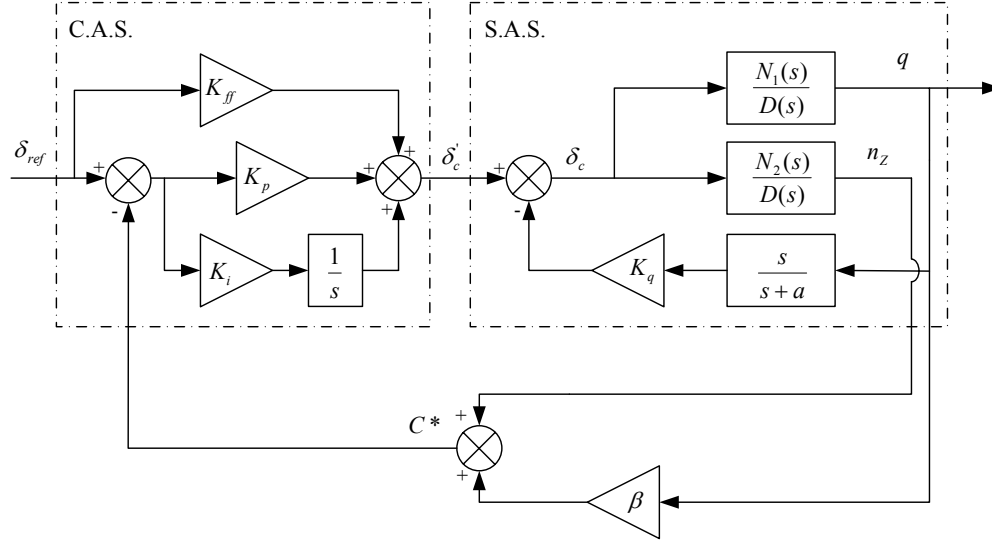
Soit,

$$\boxed{\frac{Drb}{q_{ss}} = \frac{K_{ff} n_{10} - d_0 + K_{n_z} n_{20}}{K_i n_{10}}} \quad (3.45)$$

Ainsi, le dropback ne dépend pas du gain  $K_p$ . Pour une utilisation pratique, le temps de réponse doit être adéquat afin d'atteindre au plus vite le régime permanent pour lequel la formule est valide. En effet, ce qui est primordial pour le pilote, c'est l'effet à court terme afin qu'il puisse contrôler l'angle de tangage  $\theta$  et par la suite la pente  $\gamma$ .

#### ◆ Contrôle $C^*$

Nous procédons comme précédemment afin de calculer le dropback pour la loi de contrôle  $C^*$  présentée en figure 2.8. Nous basons notre calcul sur la figure 3.21.

Figure 3.21 Loi de contrôle  $C^*$ 

Le transfert entre la vitesse de tangage et l'entrée du pilote est supposé stable pour les gains choisis :

$$\frac{q}{\delta_{ref}} = \frac{((K_p + K_{ff})s + K_i)N_1(s)(s + a)}{(D(s)(s + a) + K_q s N_1(s))s + (K_p s + K_i)(s + a)(\beta N_1(s) + N_2(s))} \quad (3.46)$$

$$= \frac{\dots + (K_p n_{10} a + K_{ff} n_{10} a + K_i n_{10} + K_i n_{11} a)s + (K_i n_{10} a)}{\dots + (d_0 a + K_p(\beta n_{10} + n_{20})a + K_i(\beta n_{11} + n_{21})a + K_i(\beta n_{10} + n_{20}))s + (K_i(\beta n_{10} + n_{20})a)} \quad (3.47)$$

En utilisant la relation (3.24), on en déduit alors que le dropback vaut :

$$\frac{Drb}{q_{ss}} = \frac{K_p n_{10} a + K_{ff} n_{10} a + K_i n_{10} + K_i n_{11} a}{K_i n_{10} a} - \frac{d_0 a + K_p(\beta n_{10} + n_{20})a + K_i(\beta n_{11} + n_{21})a + K_i(\beta n_{10} + n_{20})}{K_i(\beta n_{10} + n_{20})a} \quad (3.48)$$

Soit,

$$\boxed{\frac{Drb}{q_{ss}} = \frac{K_{ff}}{K_i} + \frac{n_{11}}{n_{10}} - \frac{d_0}{K_i(\beta n_{10} + n_{20})} - \frac{\beta n_{11} + n_{21}}{\beta n_{10} + n_{20}}} \quad (3.49)$$

On rappelle qu'en général le paramètre  $\beta$  est fixé et vaut 12.4. Ainsi, avec cette architecture, le dropback dépend seulement des gains  $K_i$  et  $K_{ff}$ .

On peut donc reprendre les résultats établis sur les deux architectures de contrôle sous la forme suivante :

**Guideline 1 :** Dans le cas d'architectures classiques de contrôle (Figs 3.20 & 3.21) incorporant un PI dans la boucle CAS, le gain proportionnel  $K_p$  ne modifie pas la valeur du dropback. Celui-ci peut être réglé par le gain *feedforward*  $K_{ff}$  sans pour autant modifier la dynamique des pôles en boucle fermée.

◆ **Retour d'état et retour de sortie**

Dans le cas d'un retour de sortie, ou d'état, on peut prouver que le dropback est une fraction rationnelle linéaire fonction des gains du retour. On suppose de plus que le système n'a qu'une seule entrée. Soit le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \\ q &= C_q x \end{cases} \quad (3.50)$$

où  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times 1}$  et  $C_q \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ . On suppose de plus que  $A$  est non singulière. Si l'on applique le retour de sortie  $u = Ky + \delta_{ref}$  (où  $\delta_{ref}$  désigne la nouvelle entrée du système et  $K \in \mathbb{R}^{1 \times p}$ , choisi tel que  $(1 - KD) \neq 0$ ) alors le système en boucle fermée devient :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \underbrace{(A + B(1 - KD)^{-1}KC)}_{\tilde{A}} x + \underbrace{B(1 - KD)^{-1}}_{\tilde{B}} \delta_{ref} \\ q &= C_q x \end{cases} \quad (3.51)$$

Ainsi en appliquant la formule (3.27) pour  $\tilde{A}$  non singulière, on trouve :

$$\frac{Drb}{q_{ss}} = \frac{C_q \tilde{A}^{-2} \tilde{B}}{C_q \tilde{A}^{-1} \tilde{B}} = \frac{C_q (A + B(1 - KD)^{-1}KC)^{-2} B}{C_q (A + B(1 - KD)^{-1}KC)^{-1} B} \quad (3.52)$$

En nous servant de l'égalité :

$$(A + BD^{-1}C)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(D + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \quad (3.53)$$

on en déduit alors

$$\tilde{A}^{-1}B = A^{-1}B - A^{-1}B(1 - KD + KCA^{-1}B)^{-1}KCA^{-1}B \quad (3.54)$$

$$= \frac{A^{-1}B(1 - KD)}{1 - KD + KCA^{-1}B} \quad (3.55)$$

$$C_q \tilde{A}^{-1} = C_q A^{-1} - C_q A^{-1}B(1 - KD + KCA^{-1}B)^{-1}KCA^{-1} \quad (3.56)$$

$$= C_q A^{-1} - \frac{C_q A^{-1}BKCA^{-1}}{1 - KD + KCA^{-1}B} \quad (3.57)$$

Et

$$C_q \tilde{A}^{-1} B = \frac{C_q A^{-1} B (1 - KD)}{1 - KD + KCA^{-1}B} \quad (3.58)$$

$$C_q \tilde{A}^{-2} B = \frac{C_q A^{-2} B (1 - KD)}{1 - KD + KCA^{-1}B} - \frac{C_q A^{-1} BKCA^{-2} B (1 - KD)}{(1 - KD + KCA^{-1}B)^2} \quad (3.59)$$

On peut alors en déduire la valeur du dropback :

$$\boxed{\frac{Drb}{q_{ss}} = \frac{C_q A^{-2} B}{C_q A^{-1} B} - \frac{KCA^{-2} B}{1 + K(CA^{-1}B - D)}} \quad (3.60)$$

On peut aussi considérer la loi de commande  $u = Ky + K_i \int (\delta_{ref} - q)$  dans laquelle on intègre l'erreur entre la référence et  $q$  afin d'améliorer la précision. En notant  $x_i$  l'état associé à l'intégrateur, on obtient le modèle d'état en boucle fermée :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A + B(1 - KD)^{-1}KC) & B(1 - KD)^{-1}K_i \\ -C_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta_{ref} \\ q = \begin{bmatrix} C_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.61)$$

Des calculs similaires aux précédents nous mèneraient à l'expression du dropback suivante :

$$\boxed{\frac{Drb}{q_{ss}} = \frac{1 + K(CA^{-1}B - D)}{C_q A^{-1}BK_i}} \quad (3.62)$$

L'égalité ainsi obtenue montre bien que dans le cas d'un retour de sortie ou d'état, avec ou sans retour intégral sur  $q$ , le dropback est une fraction rationnelle linéaire fonction des gains. On peut donc énoncer la conclusion suivante :

**Guideline 2 :** Dans le cas d'une architecture de contrôle par retour d'état ou retour de sortie, le dropback peut être réglé via une contrainte linéaire portant sur les gains du contrôleur selon l'équation (3.60) dans le cas sans retour intégral sur  $q$  ou selon l'équation (3.62) dans le cas avec retour intégral sur  $q$ .

### 3.2.4 Lien entre le dropback et le dépassement

On cherche idéalement à avoir un dropback positif, voire nul. Rappelons qu'avoir un dropback nul assure, après transitoire, de piloter un intégrateur pur, ce qui est intéressant en terme de précision. Mais on remarque que les réponses temporelles présentant des dropbacks positifs sont toujours



synonymes de dépassement plus ou moins fort ; dans (Gibson, 1997), Gibson présente des réponses temporelles en  $q$  avec un fort dépassement qui ont été très bien notées par les pilotes (le dropback était positif et le dépassement était de l'ordre de 100%), alors que les réponses avec un dropback négatif et peu de dépassement ont été plutôt mal cotées par ceux-ci. Selon les conclusions obtenues à partir d'observations empiriques, nous allons valider analytiquement l'énoncé suivant :

**Guideline 3 : Pour avoir un dropback positif ou nul, il est nécessaire qu'il y ait au moins un zéro stable et un dépassement suffisant sur la réponse en vitesse de tangage  $q$ .**

Nous débuterons d'abord par une étude sur une fonction quelconque pour ensuite nous concentrer sur le cas particulier de notre modèle standard d'ordre 2 avec zéro et retard.

#### ◆ Étude pour une fonction quelconque

Considérons tout d'abord un système d'ordre  $n$  stable de la forme :

$$\frac{q}{\delta_{ref}} = \frac{a_0}{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0}. \quad (3.63)$$

Le dropback est alors :

$$\frac{Drb}{q_{ss}} = -\frac{b_1}{b_0} \quad (3.64)$$

Comme le transfert (3.63) est stable,  $b_0$  et  $b_1$  sont du même signe et le dropback est donc strictement négatif. Ainsi, sans zéro au numérateur, on ne peut espérer avoir un dropback positif ou nul. Il faut donc rajouter des zéros stables afin d'obtenir éventuellement un dropback positif.

Poursuivons ce raisonnement afin d'établir cette nécessité du dépassement pour obtenir un dropback positif. Soit  $q(t)$  la réponse du système à un échelon unité et  $q_{ss}$  la valeur en régime permanent. Comme  $q(t) = \dot{\theta}(t)$ , on peut déduire graphiquement de la figure 3.22 que l'équation de l'asymptote de  $\theta(t)$  est  $Drb + q_{ss}t$ , soit :

$$Drb = \lim_{t \rightarrow \infty} (\theta(t) - q_{ss}t) \quad (3.65)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (q(t) - q_{ss}) dt \quad (3.66)$$

$$= \int_0^\infty (q(t) - q_{ss}) dt \quad (3.67)$$

$$\frac{Drb}{q_{ss}} = \int_0^\infty \left( \frac{q(t)}{q_{ss}} - 1 \right) dt \quad (3.68)$$

Toujours en se référant à la figure 3.22, on peut interpréter la relation (3.67) comme l'aire marquée en bleu entre les courbes  $q(t)$  et  $q_{ss}$ . L'aire est comptée négativement quand  $q(t) <$

$q_{ss}$  et positivement pour  $q(t) > q_{ss}$ . Ainsi pour avoir un dropback positif, il faut avoir un dépassement suffisamment important (aire positive) pour compenser la montée (aire négative). Sur la figure 3.22, on peut estimer grossièrement que l'aire positive est plus importante que l'aire négative, menant ainsi à un dropback positif.

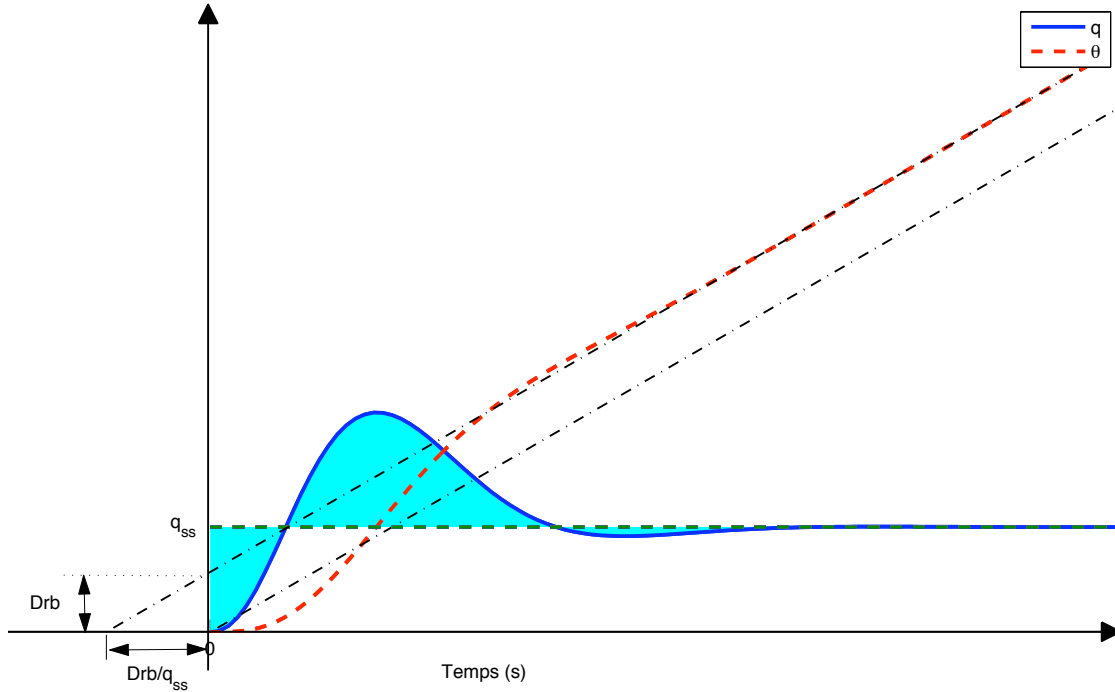


Figure 3.22 Illustration du lien entre dropback positif et dépassement

#### ◆ Étude sur le modèle standard

Afin de quantifier ce lien entre le dropback et le dépassement, nous allons à présent procéder à un calcul analytique sur le modèle standard de l'avion réduit au mode *short period* :

$$\frac{q}{\delta_{ref}} = \frac{K_q(1 + T_\theta s)e^{-\tau s}}{\left(1 + \frac{2\zeta_{sp}}{\omega_{sp}}s + \frac{s^2}{\omega_{sp}^2}\right)} \quad (3.69)$$

Par souci de simplicité pour les calculs qui vont être développés, on choisira  $K_q = 1$  pour avoir un gain statique unitaire<sup>6</sup> et on supposera le retard pur  $\tau$  nul. Le retard ne modifie pas la valeur du dépassement ; il n'est pas donc nécessaire de l'inclure dans le modèle standard. On retiendra en revanche qu'il diminue la valeur du dropback de  $\tau$  selon l'équation (3.26). Nous travaillons donc sur la fonction de transfert :

$$\frac{q}{\delta_{ref}} = \frac{\omega_{sp}^2(1 + T_\theta s)}{s^2 + 2\zeta_{sp}\omega_{sp}s + \omega_{sp}^2} \quad (3.70)$$

6. Un gain statique, unitaire ou pas, ne modifie pas la valeur du dropback.

D'après (3.23), le dropback est alors :

$$\frac{Drb}{q_{ss}} = T_\theta - \frac{2\zeta_{sp}}{\omega_{sp}} \quad (3.71)$$

• **Expression analytique du dépassement**

Nous établissons dans un premier temps la valeur du dépassement suivant les valeurs de  $\omega_{sp}$ ,  $\zeta_{sp}$  et  $T_\theta$  pour une entrée échelon unité. Le détail des calculs pour le dépassement d'un deuxième ordre avec zéro est disponible dans l'Annexe B.1.

– Pour  $0 < \zeta_{sp} < 1$ ,

$$D = e^{-\frac{\zeta_{sp}\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)}{\sqrt{1 - \zeta_{sp}^2}}} \left( \sqrt{1 - 2\zeta_{sp}\omega_{sp}T_\theta + \omega_{sp}^2 T_\theta^2} \right) \quad (3.72)$$

avec

$$\phi = \arctan \frac{1 - \zeta_{sp}\omega_{sp}T_\theta}{\omega_{sp}T_\theta \sqrt{1 - \zeta_{sp}^2}} \quad (3.73)$$

– Pour  $\zeta_{sp} = 1$  et  $\omega_{sp}T_\theta > 1$  (afin qu'il y ait dépassement),

$$D = (\omega_{sp}T_\theta - 1)e^{-\frac{\omega_{sp}T_\theta}{\omega_{sp}T_\theta - 1}} \quad (3.74)$$

– Pour  $\zeta_{sp} > 1$  et  $1 + T_\theta(-\zeta_{sp}\omega_{sp} + \omega_{sp}\sqrt{\zeta_{sp}^2 - 1}) < 0$  (afin qu'il y ait dépassement),

$$D = \left( \frac{1 + T_\theta(-\zeta_{sp}\omega_{sp} - \omega_{sp}\sqrt{\zeta_{sp}^2 - 1})}{1 + T_\theta(-\zeta_{sp}\omega_{sp} + \omega_{sp}\sqrt{\zeta_{sp}^2 - 1})} \right)^{-\frac{\zeta_{sp}}{2\sqrt{\zeta_{sp}^2 - 1}}} \left( \sqrt{1 - 2\zeta_{sp}\omega_{sp}T_\theta + \omega_{sp}^2 T_\theta^2} \right) \quad (3.75)$$

• **Dépassement en fonction du dropback**

Afin d'établir un lien entre le dépassement et le dropback, nous éliminons le paramètre  $T_\theta$  en insérant le dropback dans les formules du dépassement à l'aide de l'équation (3.71)<sup>7</sup>.

– Pour  $0 < \zeta_{sp} < 1$

$$D = e^{-\frac{\zeta_{sp}\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)}{\sqrt{1 - \zeta_{sp}^2}}} \left( \sqrt{1 + 2\zeta_{sp}\omega_{sp}Drb + \omega_{sp}^2 Drb^2} \right) \quad (3.76)$$

7. La valeur en régime permanent est bien entendu  $q_{ss} = 1$ .

avec

$$\phi = \arctan \frac{1 - 2\zeta_{sp}^2 - \zeta_{sp}\omega_{sp}Drb}{(\omega_{sp}Drb + 2\zeta_{sp})\sqrt{1 - \zeta_{sp}^2}} \quad (3.77)$$

Si l'on impose  $Drb = 0$ , le dépassement n'est alors plus fonction de  $\omega_{sp}$  mais seulement de  $\zeta_{sp}$ , comme pour un deuxième ordre standard. Dans ce cas-là, en utilisant les relations trigonométriques pour simplifier l'expression, le dépassement vaut :

$$D = e^{-\frac{\zeta_{sp}(\pi - \arccos(1 - 2\zeta_{sp}^2))}{\sqrt{1 - \zeta_{sp}^2}}} \quad (3.78)$$

– Pour  $\zeta_{sp} = 1$

$$D = (\omega_{sp}Drb + 1)e^{-\frac{\omega_{sp}Drb + 2}{\omega_{sp}Drb + 1}} \quad (3.79)$$

Pour le cas particulier  $Drb = 0$ , on a :

$$D = e^{-2} \approx 0.1353 \quad (3.80)$$

– Pour  $\zeta_{sp} > 1$

$$D = \left( \frac{1 - (\omega_{sp}Drb + 2\zeta_{sp})(\zeta_{sp} + \sqrt{\zeta_{sp}^2 - 1})}{1 - (\omega_{sp}Drb + 2\zeta_{sp})(\zeta_{sp} - \sqrt{\zeta_{sp}^2 - 1})} \right)^{-\frac{\zeta_{sp}}{2\sqrt{\zeta_{sp}^2 - 1}}} \left( \sqrt{1 + 2\zeta_{sp}\omega_{sp}Drb + \omega_{sp}^2Drb^2} \right) \quad (3.81)$$

Enfin si  $Drb = 0$ , le dépassement n'est plus fonction de  $\omega_{sp}$  mais seulement de  $\zeta_{sp}$ , comme pour le cas précédent. Dans ce cas-là, le dépassement vaut :

$$D = (1 - 2\zeta_{sp}^2 + \zeta_{sp}\sqrt{\zeta_{sp}^2 - 1})^{-\frac{\zeta_{sp}}{\sqrt{\zeta_{sp}^2 - 1}}} \quad (3.82)$$

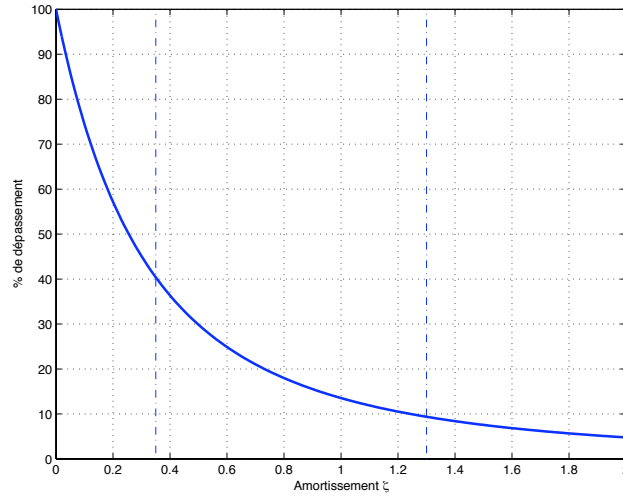
### • Récapitulatif et analyse

Le tableau 3.11 rassemble les différentes formules obtenues pour le dépassement.

La figure 3.23 présente le dépassement correspondant à un dropback nul pour des valeurs de  $\zeta_{sp}$  comprise entre 0 et 2. Si l'on se restreint à un amortissement  $\zeta_{sp}$  inférieur à 1, on peut déduire que dans le cas du modèle standard (Eq. 3.69), pour un dropback même nul, le dépassement est au minimum de 13.5%

Tableau 3.11 Formules relatives au lien entre dépassement  $D$  et dropback  $Drb$ 

	$D = f(\zeta_{sp}, \omega_{sp}, T_\theta)$	$D = f(\zeta_{sp}, \omega_{sp}, Drb)$	$D$ pour $Drb = 0$
$0 < \zeta_{sp} < 1$	Éq. 3.72	Éq. 3.76	Éq. 3.78
$\zeta_{sp} = 1$	Éq. 3.74	Éq. 3.79	Éq. 3.80
$\zeta_{sp} > 1$	Éq. 3.75	Éq. 3.81	Éq. 3.82

Figure 3.23 Pourcentage de dépassement en fonction de  $\zeta_{sp}$  pour  $Drb = 0$ 

La figure 3.24 rassemble des surfaces de même dropback ( $Drb = \{0, 0.1, 0.2, 0.3\}$ ) en fonction de  $\zeta_{sp}$  et  $\omega_{sp}$ . La surface de dropback nul est en dessous des trois autres. Pour des valeurs de dropback supérieures à 0, le dépassement sera ainsi toujours plus grand que le dépassement nécessaire pour avoir un dropback nul. D'ailleurs, si l'on se restreint encore à un amortissement inférieur à 1, on peut conclure que dans le cas du modèle standard, pour avoir un dropback positif, le dépassement doit être au minimum de 13.5% et ce, peu importe  $\omega_{sp}$ .

Si l'on considère de plus l'effet du retard  $\tau$  sur notre modèle standard, on diminue la valeur du dropback tout en laissant le dépassement intact. Il faut donc un dépassement plus important pour compenser l'effet indésirable du retard si l'on veut conserver la valeur du dropback sans retard.

## Conclusion

Nous avons pu compléter dans ce chapitre les connaissances disponibles sur le dropback en établissant plusieurs formules théoriques permettant de l'exprimer en fonction des paramètres du système. Ces formules se sont montrées utiles pour exprimer le dropback en fonction des gains d'un contrôleur et ce, sans aucune restriction sur l'ordre du système ou l'architecture du contrôleur. Sur

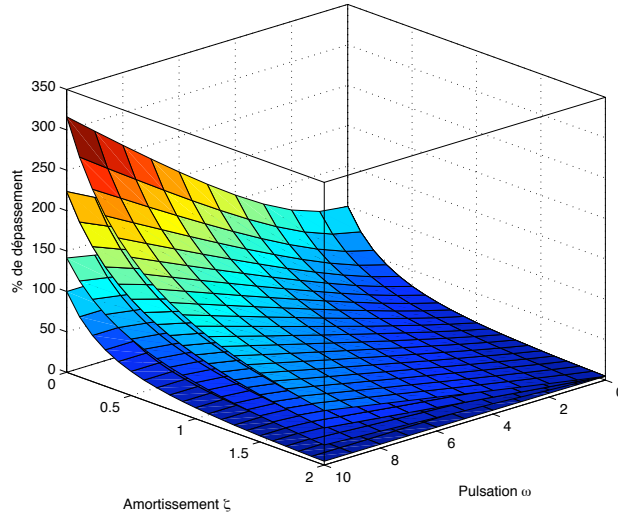


Figure 3.24 Pourcentage de dépassement en fonction de  $\zeta_{sp}$  et  $\omega_{sp}$  pour  $Drb = \{0, 0.1, 0.2, 0.3\}$

un modèle standard de l'avion, nous avons pu ensuite quantifier de façon analytique le lien entre un dropback positif (ce qui est conseillé en général) et le dépassement nécessaire sur la réponse en  $q(t)$ ; l'un ne va pas sans l'autre.

### 3.3 Confrontation des critères sur un modèle standard

Nous allons à présent confronter les différents critères du cahier des charges (Tab. 3.10) sur le modèle standard défini auparavant (Eq. 3.69). Les différents critères permettent en effet d'établir des conditions sur chacun des paramètres. Si certains critères peuvent s'exprimer explicitement en fonction des inconnus (e.g. amortissement, dropback, CAP, dépassement...), d'autres ne le peuvent pas (e.g. bandes passantes, retard de phase...). Cette étude nous servira ainsi à déterminer parmi les critères ceux qui seraient éventuellement prépondérants et qui, une fois satisfaits, permettraient de satisfaire automatiquement d'autres critères. Nous débuterons par les critères temporels et modaux et continuerons sur les critères fréquentiels; nous concluerons quant aux critères à privilégier.

Nous rappelons que le modèle standard de l'avion est choisi sous la forme<sup>8</sup> :

$$F(s) = \frac{q}{\delta_{ref}} = \frac{\omega_{sp}^2 (1 + T_{\theta} s) e^{-\tau s}}{s^2 + 2\zeta_{sp} \omega_{sp} s + \omega_{sp}^2} \quad (3.83)$$

Les critères fréquentiels sont calculés sur la fonction de transfert  $\theta/\delta_{ref}$  :

$$G(s) = \frac{\theta}{\delta_{ref}} = \frac{\omega_{sp}^2 (1 + T_{\theta} s) e^{-\tau s}}{s(s^2 + 2\zeta_{sp} \omega_{sp} s + \omega_{sp}^2)} \quad (3.84)$$

---

8. En supposant que les 2 pôles et le zéro sont dans le demi-plan gauche

### 3.3.1 Les critères modaux et temporels

Nous allons dans un premier temps confronter les critères modaux et temporels sur notre modèle standard. Ils ont l'avantage de pouvoir être exprimés de façon relativement simple en fonction des paramètres du modèle.

#### ◆ Traduction en fonction des paramètres

Le critère sur l'amortissement du mode *short period* donne directement une contrainte sur le paramètre  $\zeta_{sp}$ . Quant au dropback, les formules (3.24) et (3.26) donnent directement :

$$Drb = T_\theta - \frac{2\zeta_{sp}}{\omega_{sp}} - \tau \quad (3.85)$$

Parmi tous les critères, seul le CAP fait intervenir un paramètre supplémentaire qui est la vitesse de croisière de l'avion  $V_0$ . Pour le modèle standard, celui-ci est donné par :

$$CAP = \frac{\omega_{sp}^2}{V_0 \frac{1}{g T_\theta}} \quad (3.86)$$

Comme dans l'enveloppe de vol (Fig. 2.9), le nombre de Mach est compris entre 0.25 et 0.88, nous considérerons que la vitesse  $V_0$  est comprise<sup>9</sup> entre 85 et 300 m/s.

Pour un système du deuxième ordre standard sans zéro, le temps de réponse à 5% est approximativement donné par<sup>10</sup> :

$$T_r \approx \frac{3}{\zeta_{sp}\omega_{sp}} \quad (0 < \zeta_{sp} \leq 0.69) \quad (3.87)$$

$$T_r \approx \frac{6.6\zeta_{sp} - 1.94}{\omega_{sp}} \quad (\zeta_{sp} \geq 0.69). \quad (3.88)$$

Pour tenir compte de l'ajout d'un zéro, les coefficients de ces approximations sont modifiés en conséquence. En présence d'un retard pur, on remplace simplement  $T_r$  par  $T_r - \tau$ .

#### ◆ Tracé des critères

Nous allons donc confronter ces 4 premiers critères dans l'espace des paramètres  $(\zeta_{sp}, \omega_{sp}, T_\theta)$ . Nous supposons dans un premier temps que  $\tau = 0$ . Pour 4 valeurs de  $T_\theta = \{0.1, 0.5, 1, 1.5\}$ , nous traçons dans le plan  $(\zeta_{sp}, \omega_{sp})$  les 4 contraintes (Figure 3.25). La zone foncée représente la satisfaction des critères avec un dropback idéal et la zone claire la satisfaction des critères avec les limites exigées pour le dropback. De plus comme le CAP dépend de la vitesse, nous avons

9. En prenant  $a = 340$  m/s pour la vitesse du son. Cela demeure un encadrement grossier car la vitesse du son diminue avec l'altitude.

10. Les formules données dans (Kuo et Golnaraghi, 2010) n'ont pas été jugées satisfaisantes ; d'autres approximations sont proposées ici.

tracé deux séries de graphes pour les vitesses minimale (Figs 3.25(a),(c),(e),(g)) et maximale (Figs 3.25(b),(d),(f),(h)).

Au vu de ces graphes, nous pouvons formuler les remarques suivantes :

- Quand  $T_\theta$  augmente, la zone admissible  $(\zeta_{sp}, \omega_{sp})$  diminue ; cela est principalement relié au dropback. Pour  $T_\theta = 1.5$ , on peut voir sur les figures 3.25(g)-(h) que la zone est déjà très restreinte. Au-delà de  $T_\theta = 2.5$ , il n'y a plus de zone admissible.<sup>11</sup>
- Pour de faibles valeurs de  $T_\theta$ , même si la zone admissible est grande, cela nécessite de fortes valeurs de  $\omega_{sp}$  à haute vitesse. Nous limiterons de même la valeur minimale de  $T_\theta$  à 0.1. D'ailleurs satisfaire le dropback au niveau idéal, nécessite des valeurs de  $\omega_{sp}$  d'autant plus fortes.
- Les zones admissibles augmentent avec la vitesse  $V_0$ . Le CAP étant le seul critère dépendant de la vitesse, on voit qu'avec une augmentation de  $V_0$ , les zones admissibles deviennent plus grandes. Néanmoins la limite haute du critère tend à agrandir la zone vers de grandes valeurs de  $\omega_{sp}$  ce qui n'est pas forcément utile puisque l'on cherche à demeurer proche des pulsations naturelles de l'avion ( $1 \leq \omega_{sp} \leq 10$ ). On peut aussi remarquer qu'à faible vitesse le CAP n'est pas un critère dominant. En effet la limite basse du CAP est automatiquement satisfaite dès que le dropback et le temps de réponse sont assurés. Si l'on augmente  $V_0$ , la limite basse du CAP vient nuancer légèrement cette conclusion.
- Il est possible de choisir des valeurs de paramètres uniques qui satisfassent toutes les contraintes, notamment celle du CAP, et ce peu importe la vitesse  $V_0$ , e.g.  $(\zeta_{sp}, \omega_{sp}, T_\theta) = (0.7, 4, 0.5)$

Nous pouvons alors en déduire les guides suivants, valables pour notre cahier des charges et notre modèle standard :

**Guideline 4 : Il est conseillé d'avoir  $0.1 < T_\theta < 1.5$  ; pour des valeurs plus faibles de  $T_\theta$ , on a recours à des valeurs de  $\omega_{sp}$  trop importantes pour satisfaire les critères et pour des valeurs plus fortes de  $T_\theta$ , les critères de dropback et de temps de réponse sont difficilement satisfaisables simultanément.**

11. Cela correspond à l'intersection entre la contrainte sur la partie réelle des pôles et la contrainte de dropback à 0.5



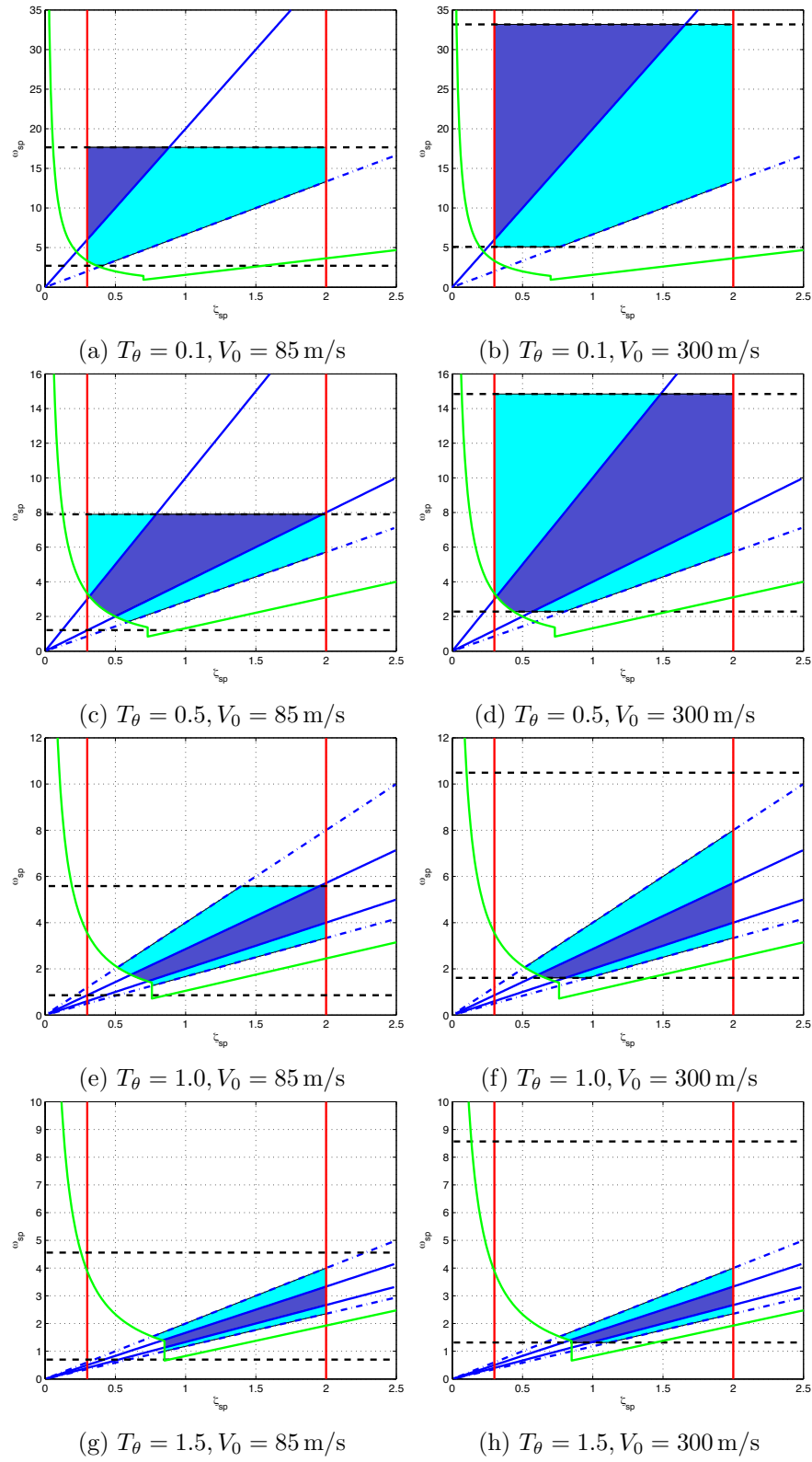


Figure 3.25 Tracé des contraintes pour  $T_\theta = \{0.1, 0.5, 1.0, 1.5\}$  et  $V_0 = \{85, 300\}$

**Guideline 5 :** À basse vitesse, les critères prépondérants sont ceux de dropback, de temps de réponse et d'amortissement. Quand la vitesse augmente, il faut tenir compte graduellement du critère de CAP. Si besoin, il peut être satisfait en augmentant la pulsation  $\omega_{sp}$ .

#### ◆ Effet d'un retard pur

L'ajout d'un retard pur  $\tau$  influence essentiellement le critère du dropback et celui du temps de réponse. En effet si on se fie à la définition du CAP, c'est le rapport de l'accélération initiale en tangage ressentie par le pilote sur la variation finale d'accélération normale. La présence du retard pur ne fait que retarder la réponse du système d'un certain temps  $\tau$  mais l'accélération initiale en tangage ressentie sera relativement la même donc le CAP n'est pas fondamentalement modifié.

La figure 3.26 montre l'effet d'un retard pur de 0.2s sur le critère portant sur la partie réelle des pôles (courbes vertes) et sur le dropback (courbes bleues). En ce qui concerne la partie réelle des pôles, le retard pur diminue légèrement la zone admissible. En revanche, l'effet est plus net sur le dropback avec une augmentation de la pente de la droite.

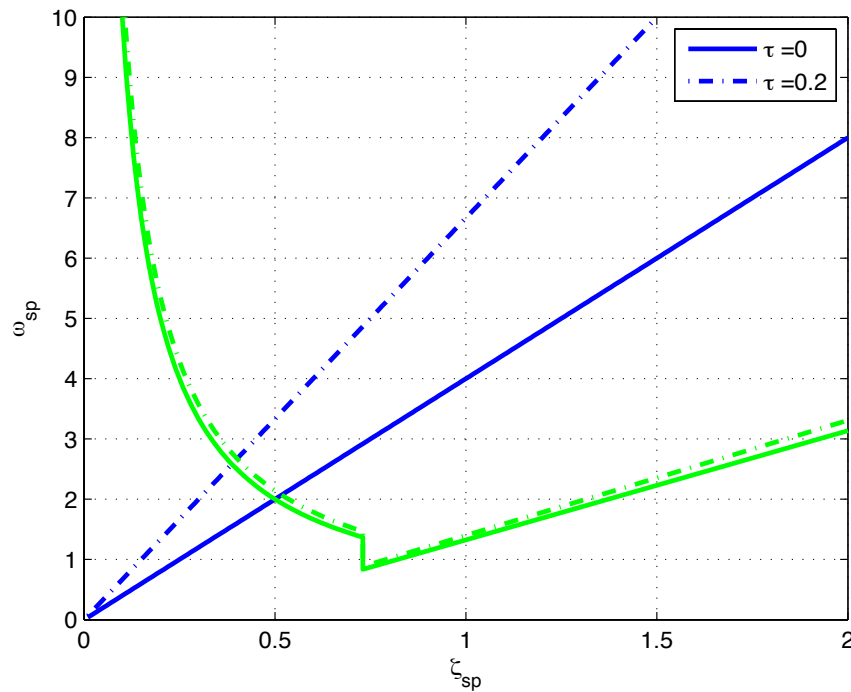


Figure 3.26 Effet du retard pur sur le dropback et le temps de réponse ( $T_\theta = 0.5$ )



### 3.3.2 Étude des critères fréquentiels

Nous nous penchons maintenant sur les critères fréquentiels : la bande passante  $\omega_{BW_\theta}$ , le retard de phase  $\tau_p$  et le taux de phase moyen  $\tau_G$ . Notre but est de montrer qu'en satisfaisant les 4 premiers critères du tableau 3.10, nous remplissons aussi ces contraintes dans une certaine mesure. Nous avons vu dans la section 3.1.6 l'équivalence entre  $\tau_p$  et  $\tau_G$  ; nous n'étudierons dans la suite que  $\tau_p$ . Après des calculs préliminaires, l'étude sera d'abord menée sans retard pur et ensuite avec retard pur afin de montrer la détérioration des critères fréquentiels.

#### ◆ Calculs préliminaires

Pour déterminer les bandes passantes et le retard de phase, il nous faut calculer les pulsations où le déphasage de  $G(s)$  vaut respectivement  $-135^\circ$  et  $-180^\circ$ , soit de façon équivalente les pulsations où le déphasage de  $F(s) = sG(s)$  vaut  $-45^\circ$  et  $-90^\circ$  (Fig. 3.28).

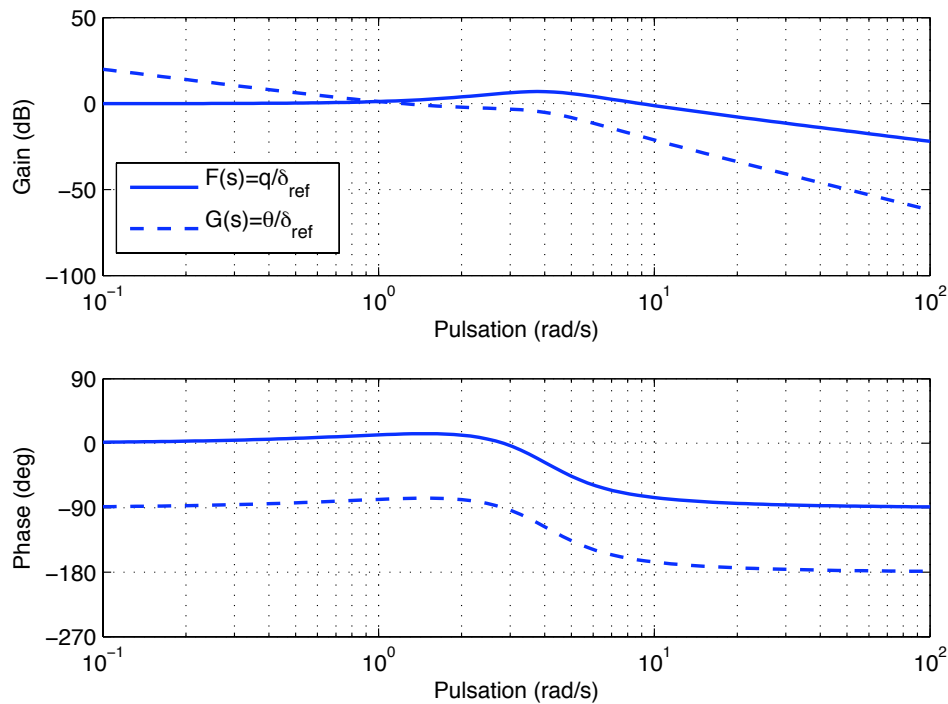


Figure 3.28 Diagrammes de Bode de  $\theta/\delta_{ref}$  et  $q/\delta_{ref}$ .

En l'absence de retard pur  $\tau$ , la phase du système  $G(s)$  est comprise entre  $-270^\circ$  et  $+0^\circ$  (entre  $-180^\circ$  et  $+90^\circ$  pour le système  $F(s)$ ). Nous verrons cependant que le système  $G(s)$  ne peut déphaser en deçà de  $-180^\circ$  que sous certaines conditions. En revanche dès que  $\tau > 0$ , le problème ne se pose plus et on peut toujours définir  $\omega_{-180^\circ}$  (Fig. 3.29).

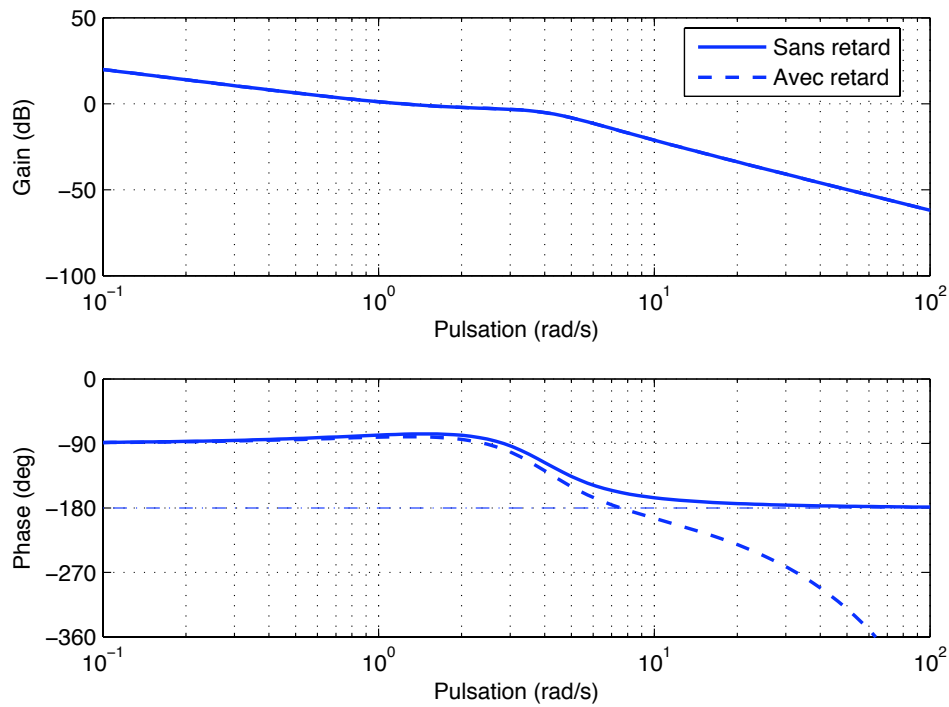


Figure 3.29 Diagrammes de Bode de  $\theta/\delta_{ref}$  avec et sans retard.

Comme les phases d'intérêt de  $F(s)$  sont  $-45^\circ$  et  $-90^\circ$ , l'angle de phase  $\varphi$  est alors donné par<sup>13</sup> :

$$\angle F(j\omega) = \varphi = -\tau\omega + \arctan\left(\frac{(\omega_{sp}^2 - \omega^2)T_\theta\omega - 2\zeta_{sp}\omega_{sp}\omega}{\omega_{sp}^2 - \omega^2 + 2\zeta_{sp}T_\theta\omega_{sp}\omega^2}\right) \quad (3.89)$$

Soit :

$$\tan(\varphi + \tau\omega) = \frac{(\omega_{sp}^2 - \omega^2)T_\theta\omega - 2\zeta_{sp}\omega_{sp}\omega}{\omega_{sp}^2 - \omega^2 + 2\zeta_{sp}T_\theta\omega_{sp}\omega^2} \quad (3.90)$$

Ce qui nous conduit à résoudre (Eq. 3.91) afin de déterminer la pulsation  $\omega$  pour laquelle la phase  $\varphi$ .

$$T_\theta\omega^3 + \tan(\varphi + \tau\omega)(2\zeta_{sp}T_\theta\omega_{sp} - 1)\omega^2 + (2\zeta_{sp}\omega_{sp} - T_\theta\omega_{sp}^2)\omega + \omega_{sp}^2 \tan(\varphi + \tau\omega) = 0 \quad (3.91)$$

Pour  $\varphi$  fixé, résoudre analytiquement une telle équation en  $\omega$  est hors de notre portée.<sup>14</sup> Dépendamment des valeurs des paramètres (que l'on suppose tous positifs), cette équation peut avoir une ou trois solutions réelles (mais au moins une toujours positive).

Nous supposons par la suite que  $0 \leq \zeta_{sp} \leq 1$  afin d'avoir une seule solution  $\omega$  positive (avec

13. Le lecteur trouvera le détail des calculs dans l'Annexe B.2

14. À la rigueur, on pourrait supposer  $\tau = 0$ , et résoudre une équation de degré 3 par la méthode de Cardan.

ou sans retard pur). En effet, dès que  $\zeta_{sp} \geq 1$ , on a deux pôles réels et dépendamment de la position du zéro, on peut avoir plusieurs pulsations avec un même déphasage. On illustre sur la figure 3.30 différents cas possibles. Le cas 1 représente le cas classique où le système ne déphase pas au-delà de  $-90^\circ$ . Le cas 2 est un cas particulier que nous verrons dans la section 3.3.2 où le système déphase de plus  $-90^\circ$  et enfin le cas 3 représente le cas de deux pôles réels avec 3 pulsations possibles donnant une phase de  $-45^\circ$ .

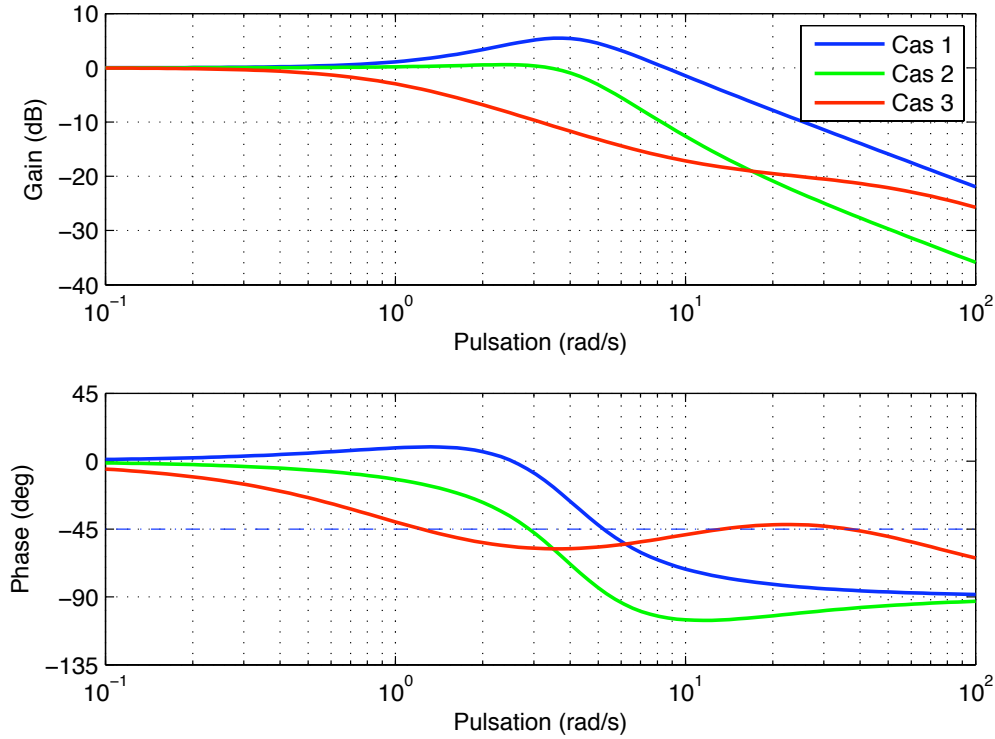


Figure 3.30 Diagrammes de Bode de  $q/\delta_{ref}$  pour différents cas.

Si on ne peut résoudre explicitement ces équations en  $\omega$ , on peut en revanche raisonner à l'inverse. Les critères imposent des valeurs minimales de pulsation pour certaines valeurs de la phase. Si l'on note  $\omega_0$  la pulsation pour laquelle la phase vaut  $\varphi_0$ , on peut exprimer la pulsation naturelle  $\omega_{sp}$  en fonction des autres paramètres. L'équation (3.91) est maintenant une équation d'ordre 2 en  $\omega_{sp}$  :

$$\begin{aligned}
 (\tan(\varphi_0 + \tau\omega_0) - T_\theta\omega_0)\omega_{sp}^2 + 2\zeta_{sp}\omega_0(T_\theta\omega_0 \tan(\varphi_0 + \tau\omega_0) + 1)\omega_{sp} \\
 + \omega_0^2(T_\theta\omega_0 - \tan(\varphi_0 + \tau\omega_0)) = 0 \quad (3.92)
 \end{aligned}$$

La solution positive est alors :

$$\boxed{\omega_{sp} = \omega_0 \left( X + \sqrt{X^2 + 1} \right)} \quad (3.93)$$

avec

$$\boxed{X = \zeta_{sp} \frac{T_\theta \omega_0 \tan(\varphi_0 + \tau \omega_0) + 1}{T_\theta \omega_0 - \tan(\varphi_0 + \tau \omega_0)}} \quad (3.94)$$

Finalement pour nos deux cas particuliers  $\varphi_0 = -45^\circ$  et  $\varphi_0 = -90^\circ$ , on a respectivement :

$$X_{-45^\circ} = \zeta_{sp} \frac{\tan \tau \omega_0 (T_\theta \omega_0 + 1) - (T_\theta \omega_0 - 1)}{\tan \tau \omega_0 (T_\theta \omega_0 - 1) + (T_\theta \omega_0 + 1)} \quad (3.95)$$

et

$$X_{-90^\circ} = \zeta_{sp} \frac{\tan \tau \omega_0 - T_\theta \omega_0}{T_\theta \omega_0 \tan \tau \omega_0 + 1} \quad (3.96)$$

Ces calculs permettent ainsi d'exprimer de façon analytique  $\omega_{sp}$  en fonction des autres paramètres  $\zeta_{sp}$  et  $T_\theta$  pour les phases d'intérêt. Les expressions obtenues vont nous permettre de déterminer dans l'espace des paramètres les régions assurant une pulsation minimale  $\omega_0$  pour des déphasages de  $-45^\circ$  et  $-90^\circ$ .

#### ◆ Modèle standard sans retard pur

Nous supposons dans cette section qu'il n'y a pas de retard dans le modèle standard ( $\tau = 0$ ).

##### • Étude sur $\omega_{BW_{phase}}$

Comme dit précédemment, la bande passante en phase  $\omega_{BW_{phase}}$  est la pulsation pour laquelle la phase de  $q/\delta_{ref}$  vaut  $-45^\circ$ . En se référant à (3.93) et (3.95), pour  $\tau = 0$ , l'expression de  $\omega_{sp}$  est :

$$\omega_{sp} = \omega_0 \left( \zeta_{sp} \frac{1 - T_\theta \omega_0}{1 + T_\theta \omega_0} + \sqrt{\left( \zeta_{sp} \frac{1 - T_\theta \omega_0}{1 + T_\theta \omega_0} \right)^2 + 1} \right) \quad (3.97)$$

La pulsation  $\omega_0$  est la pulsation pour laquelle la phase de  $q/\delta_{ref}$  est de  $-45^\circ$ . La valeur minimale souhaitée de  $\omega_{BW_{phase}}$  est 1.4 rad/s. La figure 3.31 montre alors la surface constituée des triplets  $(\omega_{sp}, \zeta_{sp}, T_\theta)$  qui assurent exactement une bande passante  $\omega_{BW_{phase}} = \omega_0 = 1.4$  rad/s. Tout triplet choisi au-dessus de cette surface donne une bande passante en phase plus grande. Nous avons délibérément choisi  $T_\theta$  inférieur à 2.5 en accord avec les résultats de la section 3.3.1

Pour quatre valeurs de  $T_\theta = \{0.1, 0.5, 1.0, 1.5\}$ , nous avons tracé dans le plan  $(\zeta_{sp}, \omega_{sp})$  les courbes assurant une bande passante en phase de 1.4 rad/s ainsi que celles correspondant aux critères de dropback, d'amortissement et de temps de réponse (partie réelle des pôles). On peut observer que pour les quatre valeurs de  $T_\theta$  considérées, les régions satisfaisant le dropback, l'amortissement et le temps de réponse sont complètement incluses dans la région

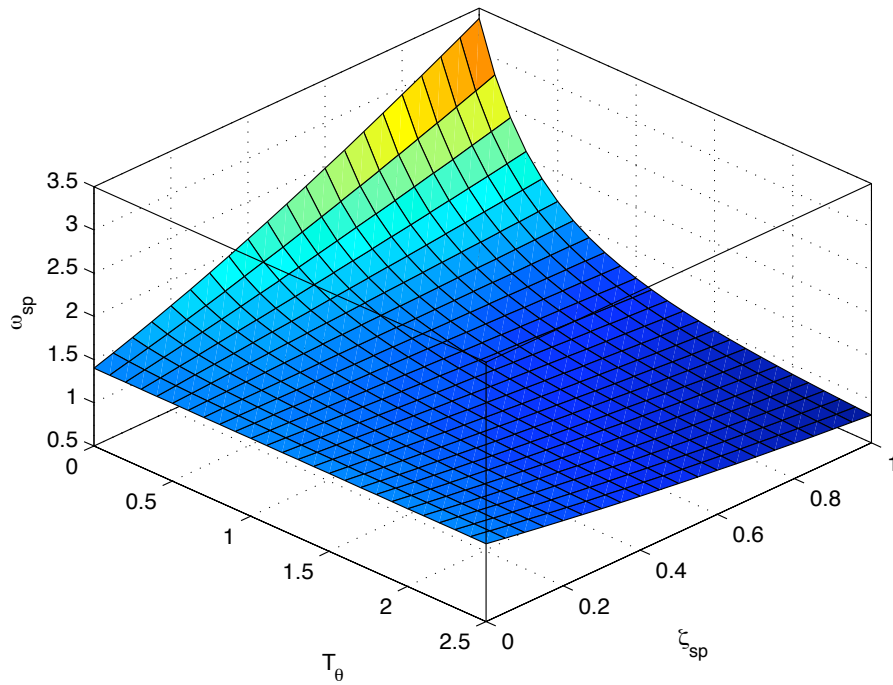


Figure 3.31 Surface de paramètres assurant  $\omega_{BW_{phase}} = 1.4 \text{ rad/s}$ .

satisfaisant le critère de bande passante en phase. Ceci nous permet d'établir la conclusion suivante :

**Guideline 7 :** Pour notre cahier des charges et pour le modèle standard sans retard pur, satisfaire le dropback, l'amortissement et le temps de réponse permet d'assurer automatiquement une bande passante en phase supérieure à 1.4 rad/s

- **Étude sur  $\omega_{-180^\circ}$ ,  $\tau_p$  et  $\omega_{BW_{gain}}$**

- **Pulsation critique  $\omega_{-180^\circ}$**

Les grandeurs  $\omega_{BW_{gain}}$  et  $\tau_p$  ne sont définies que quand le transfert  $\theta/\delta_{ref}$  parvient à déphaser de  $-180^\circ$ , soit  $q/\delta_{ref}$  déphasant de  $-90^\circ$  (Cas 2 sur la figure 3.30). Sans la présence d'un retard pur, nous ne sommes pas toujours garantis de pouvoir définir  $\omega_{-180^\circ}$ . Pour avoir un déphasage de  $-90^\circ$ , la partie réelle de  $F(j\omega)$  doit être nulle et la partie



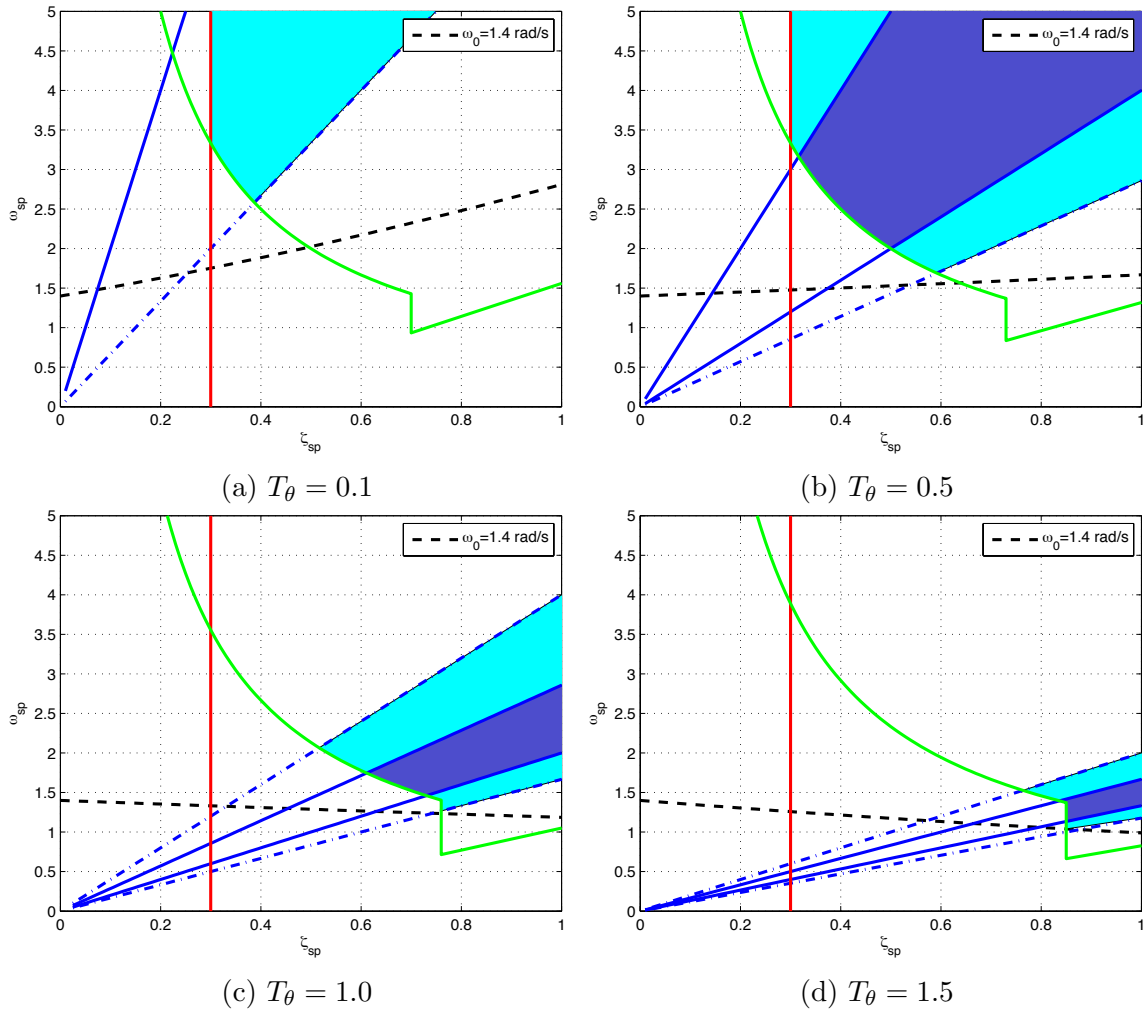


Figure 3.32 Satisfaction de  $\omega_{BW_{phase}}$  versus les autres critères

imaginaire négative. Soit :

$$\omega_{sp}^2 - \omega^2 + 2\zeta_{sp}T_\theta\omega_{sp}\omega^2 = 0 \quad (3.98)$$

$$(\omega_{sp}^2 - \omega^2)T_\theta\omega - 2\zeta_{sp}\omega_{sp}\omega < 0 \quad (3.99)$$

D'où, si  $1 - 2\zeta_{sp}T_\theta\omega_{sp} > 0$ ,

$$\omega_{-180^\circ} = \frac{\omega_{sp}}{\sqrt{1 - 2\zeta_{sp}T_\theta\omega_{sp}}} \quad (3.100)$$

L'inégalité (3.99) est alors automatiquement vérifiée pour  $\omega = \omega_{-180^\circ}$ . Le transfert  $\theta/\delta_{ref}$  parvient donc à déphaser à  $-180^\circ$  à une pulsation finie  $\omega_{-180^\circ}$  si  $-\frac{1}{T_\theta} < -2\zeta_{sp}\omega_{sp}$ . Autrement dit, si le zéro est au moins deux fois plus négatif que la partie réelle des pôles complexes. La figure 3.33 représente la surface de paramètres assurant une pulsation critique  $\omega_{-180^\circ} = 3 \text{ rad/s}$  pour  $T_\theta < 0.5$ .

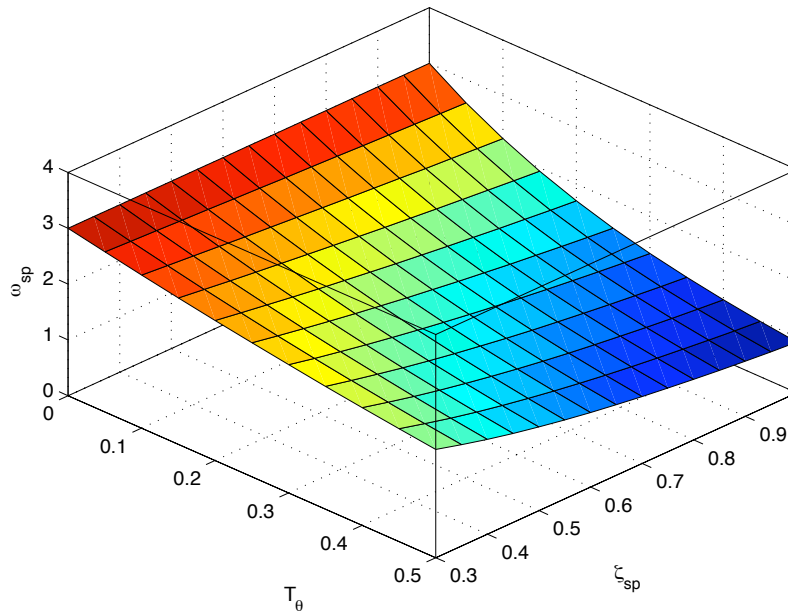


Figure 3.33 Surface de paramètres assurant  $\omega_{-180^\circ} = 3 \text{ rad/s}$ .

– **Bande passante en gain**  $\omega_{BW_{gain}}$

La bande passante en gain  $\omega_{BW_{gain}}$  est définie comme étant la pulsation où le système  $G(s)$  regagne 6 dB par rapport au gain où la phase vaut  $-180^\circ$  (soit la pulsation où le gain est doublé). Il faut donc résoudre :

$$|G(j\omega)| = 2|G(j\omega_{-180^\circ})| \quad (3.101)$$

Après calculs, on a :

$$|G(j\omega_{-180^\circ})| = \frac{1 - 2\zeta_{sp}T_\theta\omega_{sp}}{2\zeta_{sp}\omega_{sp}} \quad (3.102)$$

Ce qui nous mène finalement à une équation d'ordre 6 en  $\omega$  :

$$(1 - 2\zeta_{sp}T_\theta\omega_{sp})^2\omega^6 - 2\omega_{sp}^2(1 - 2\zeta_{sp}^2)(1 - 2\zeta_{sp}T_\theta\omega_{sp})^2\omega^4 + \\ + \omega_{sp}^4(1 - \zeta_{sp}T_\theta\omega_{sp})(1 - 3\zeta_{sp}T_\theta\omega_{sp})\omega^2 - \omega_{sp}^6\zeta_{sp}^2 = 0 \quad (3.103)$$

Si l'on fixe une fois de plus la valeur de  $\omega = \omega_0$ , on peut obtenir une équation d'ordre 6 en  $\omega_{sp}$

$$\zeta_{sp}^2(3\omega_0^2T_\theta^2 - 1)\omega_{sp}^6 - (4\omega_0^2\zeta_{sp}T_\theta)\omega_{sp}^5 + \omega_0^2(1 - 8\zeta_{sp}^2T_\theta^2\omega_0^2 + 16\zeta_{sp}^4T_\theta^2\omega_0^2)\omega_{sp}^4 + \\ + 8\omega_0^4\zeta_{sp}T_\theta(1 - 2\zeta_{sp}^2)\omega_{sp}^3 - 2\omega_0^4(1 - 2\zeta_{sp}^2 - 2\zeta_{sp}^2T_\theta^2\omega_0^2)\omega_{sp}^2 - \\ - (4\omega_0^6\zeta_{sp}T_\theta)\omega_{sp} + \omega_0^6 = 0 \quad (3.104)$$

Contrairement à ce que l'on pouvait faire précédemment, on ne peut exprimer explicitement  $\omega_{sp}$  en fonction des autres paramètres. Nous avons cependant tracé sur la figure 3.34 la surface de paramètres assurant une bande passante en gain  $\omega_{BW_{gain}} = 1.4$  rad/s en résolvant l'équation (3.104) pour  $\omega_0 = 1.4$  et sur un échantillonnage de valeurs  $(T_\theta, \zeta_{sp})$ .

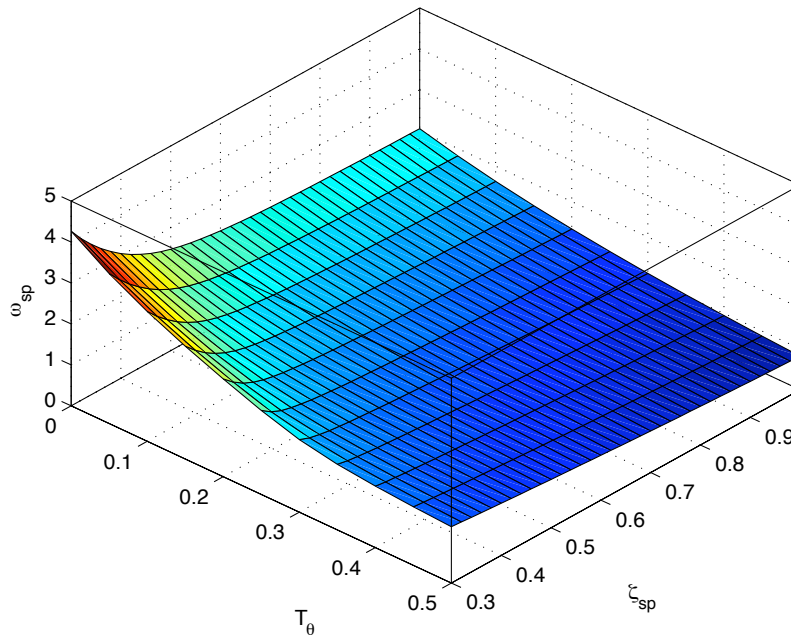


Figure 3.34 Surface de paramètres assurant  $\omega_{BW_{gain}} = 1.4$  rad/s.

– **Retard de phase  $\tau_p$**

Selon la définition du retard de phase, il faut dans un premier temps calculer la phase à  $2\omega_{-180^\circ}$ . Soit :

$$\angle F(2j\omega_{-180^\circ}) = -\frac{3\pi}{2} + \arctan \left( \frac{2(\omega_{sp}^2 - 4\omega_{-180^\circ}^2)T_\theta\omega_{-180^\circ} - 4\zeta_{sp}\omega_{sp}\omega_{-180^\circ}}{\omega_{sp}^2 - 4\omega_{-180^\circ}^2 + 8\zeta_{sp}T_\theta\omega_{sp}\omega_{-180^\circ}^2} \right) \quad (3.105)$$

Si nous remplaçons  $\omega_{-180^\circ}$  par son expression en fonction des paramètres, l'expression ne serait pas véritablement simplifiée. Cela nous conduit finalement à l'expression du retard de phase :

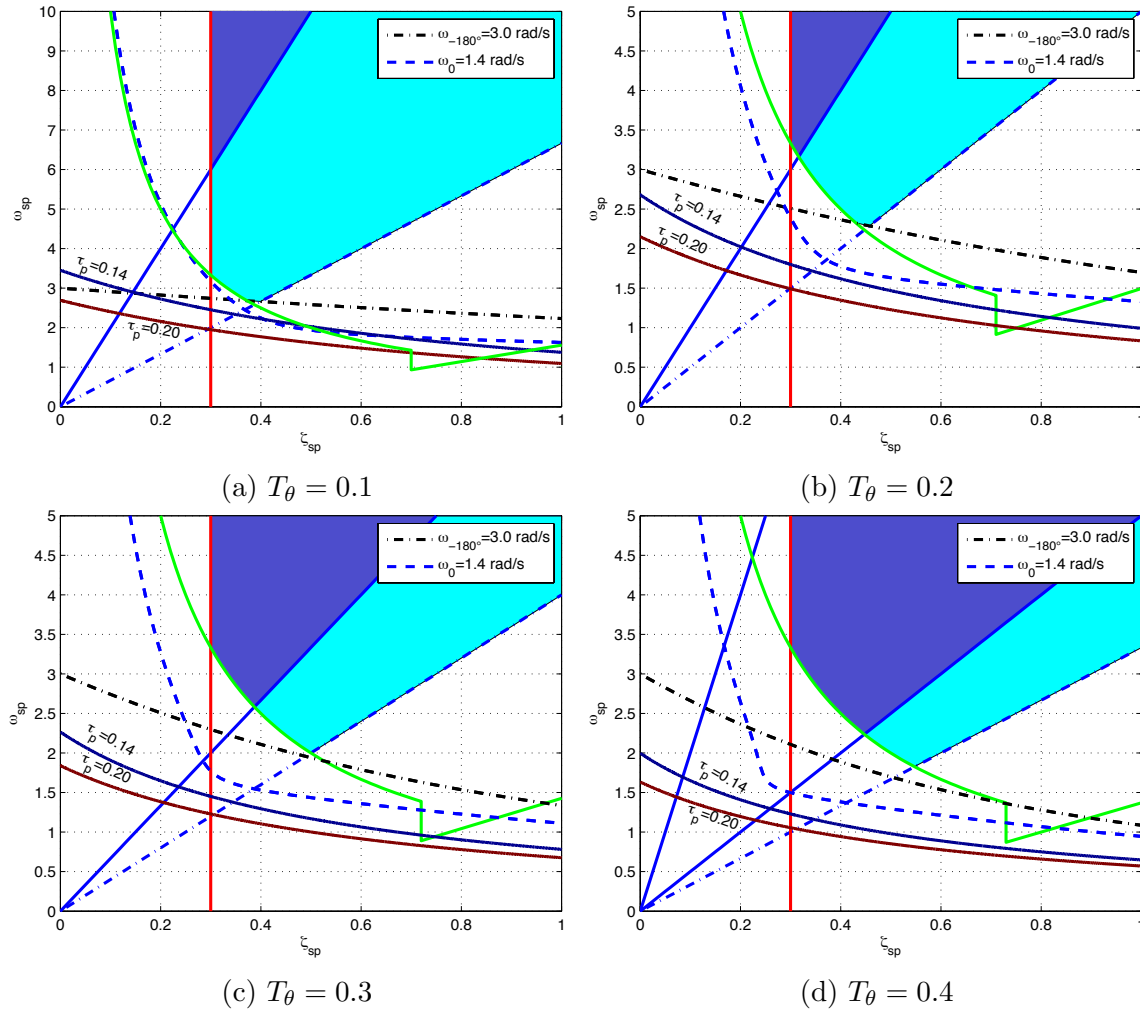
$$\tau_p = \frac{-\pi - \angle F(2j\omega_{-180^\circ})}{2\omega_{-180^\circ}} \quad (3.106)$$

$$\tau_p = \frac{1}{2\omega_{-180^\circ}} \left( \arctan \left( \frac{\omega_{sp}^2 - 4\omega_{-180^\circ}^2 + 8\zeta_{sp}T_\theta\omega_{sp}\omega_{-180^\circ}^2}{2(\omega_{sp}^2 - 4\omega_{-180^\circ}^2)T_\theta\omega_{-180^\circ} - 4\zeta_{sp}\omega_{sp}\omega_{-180^\circ}} \right) \right) \quad (3.107)$$

Comme précédemment, nous avons tracé sur la figure 3.35, pour  $T_\theta = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$ , les régions satisfaisant les contraintes d'amortissement, de dropback (idéal et exigé) et de temps de réponse ainsi que celles relatives à la bande passante en gain, au retard de phase et à la pulsation critique. En ce qui concerne le retard de phase, pour une valeur de  $T_\theta$  fixée, nous avons tracé dans le plan  $(\zeta_{sp}, \omega_{sp})$  les lignes de niveau de  $\tau_p$  valant 0.14 et 0.20, correspondant respectivement aux valeurs idéale et exigée du retard de phase pour être de niveau 1.

Pour les 4 valeurs de  $T_\theta$  considérées, satisfaire les 4 premiers critères de notre cahier des charges en prenant un dropback au niveau idéal ( $0 \leq Drb \leq 0.3$ ) assurent de remplir les critères de bande passante, de retard de phase et de pulsation critique  $\omega_{-180^\circ}$ . Une étude plus exhaustive pour des valeurs de  $T_\theta$  supplémentaires va dans le même sens. Quand on satisfait le dropback au niveau exigé ( $-0.2 \leq Drb \leq 0.5$ ), la frontière de dropback négative vient légèrement transgresser la limite définie par la pulsation critique  $\omega_{-180^\circ}$ . On valide ainsi notre *guideline* suivant :

**Guideline 8 : Pour notre cahier des charges et pour le modèle standard sans retard pur, assurer le dropback positif, l'amortissement et le temps de réponse permet d'assurer automatiquement de satisfaire les critères de bande passante en gain, de pulsation critique  $\omega_{-180^\circ}$  et de retard de phase.**

Figure 3.35 Tracé des contraintes pour  $T_\theta = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$ 

Il nous reste à présent à vérifier la validité de ces conclusions sur notre modèle standard avec retard pur.

#### ◆ Rajout du retard pur $\tau$

Le retard pur est censé grossièrement modéliser les dynamiques haute-fréquence négligées et d'autres retards de différentes natures (aérodynamiques, numériques...). Intuitivement, si l'on rajoute un retard pur au standard, on ne peut guère espérer améliorer la satisfaction des qualités de manœuvrabilité. Par exemple, on diminue automatiquement la valeur du dropback (Exemple 3.3.1). Nous avons vu que dépendamment du placement relatif du zéro ( $-1/T_\theta$ ) par rapport aux pôles, notre modèle standard peut ne pas déphaser au-delà de  $-180^\circ$ ; l'ajout du retard pur va permettre de "gommer" ce défaut et nous serons toujours en mesure de calculer la bande passante en gain ainsi que le retard de phase. Néanmoins, nous montrerons qu'une

augmentation du retard est synonyme de diminution de la bande passante et d'augmentation du retard de phase. Pour cette étude, nous considérons un retard pur maximum  $\tau$  de 0.15 s car comme nous le verrons, pour des valeurs supérieures, on ne peut plus satisfaire le critère du retard de phase.

- **Effet sur  $\omega_{BW_{phase}}$**

S'il ne modifie pas le gain de la fonction de transfert, le retard pur apporte en revanche un déphasage qui croît linéairement avec la pulsation  $-\tau\omega$ . La bande passante définie par  $\omega_{BW_{phase}}$  est la pulsation pour laquelle la phase vaut  $-135^\circ$ . Notons  $\omega_{-135^\circ}$  cette pulsation pour le système sans retard pur et  $\omega_{-135^\circ}^{(\tau)}$  celle pour le système avec retard. Dans le cas du modèle standard, la phase est décroissante autour de  $-135^\circ$ , donc rajouter le retard pur va faire diminuer la phase d'autant plus rapidement et nous aurons ainsi :

$$\omega_{-135^\circ}^{(\tau)} < \omega_{-135^\circ} \quad (3.108)$$

faisant ainsi diminuer la valeur de la bande passante  $\omega_{BW_{phase}}$ . De la même façon, plus grand sera  $\tau$ , plus rapide sera la décroissance de la phase et ainsi :

$$0 < \tau_1 < \tau_2 \Rightarrow \omega_{-135^\circ}^{(\tau_2)} < \omega_{-135^\circ}^{(\tau_1)} < \omega_{-135^\circ} \quad (3.109)$$

Il s'agit à présent de tenir compte du retard pur dans la formule relative à la bande passante en phase. En reprenant les équations (3.93) et (3.95), on a tracé sur la figure 3.36 les courbes assurant une bande passante en phase de 1.4 rad/s pour  $T_\theta = \{0.5, 1.5\}$  et différentes valeurs de retard pur  $\tau = \{0, 0.05, 0.10, 0.15\}$ . La région située au-dessus des courbes satisfait  $\omega_{BW_{phase}} > 1.4$ . On voit donc bien que l'augmentation du retard pur diminue l'espace admissible. En revanche, augmenter la valeur de  $T_\theta$  permet d'abaisser les courbes et d'augmenter ainsi le domaine.

**Guideline 9 : L'augmentation du retard pur diminue la bande passante en phase  $\omega_{BW_{phase}}$  ainsi que le domaine admissible dans l'espace des paramètres. Augmenter  $T_\theta$  permet d'améliorer  $\omega_{BW_{phase}}$ .**

- **Effet sur  $\omega_{-180^\circ}$  et  $\tau_p$**

La présence du retard pur permet à  $F(s)$  de déphaser au-delà de  $-180^\circ$  et donc de définir  $\omega_{-180^\circ}$  pour tout  $\zeta_{sp}$ ,  $\omega_{sp}$ ,  $T_\theta$  et  $\tau$ . Par un raisonnement analogue à celui fait pour  $\omega_{BW_{phase}}$ , l'augmentation du retard pur sur le modèle standard fait diminuer la pulsation critique  $\omega_{-180^\circ}$ .

Quant au retard de phase, le déphasage apporté par le retard pur vient se rajouter au

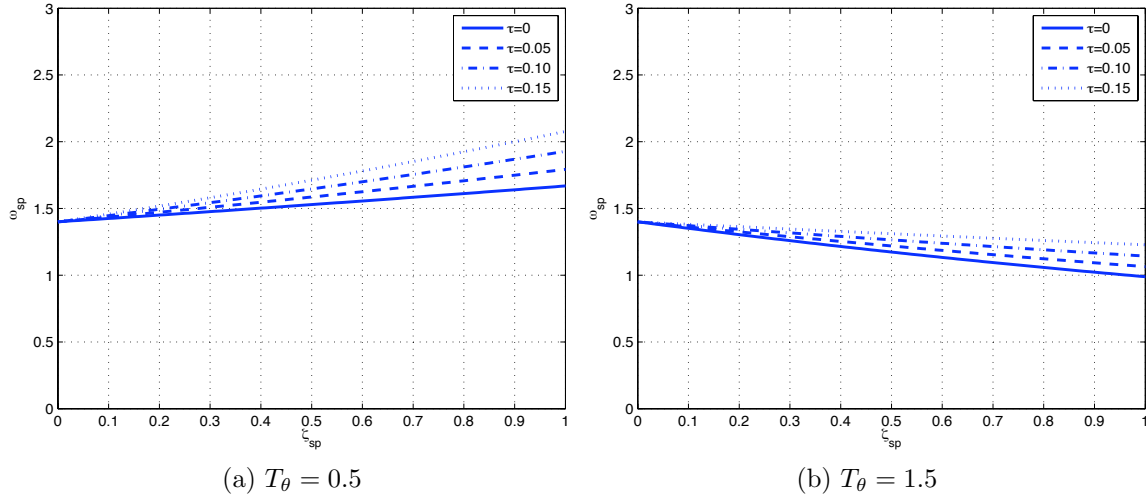


Figure 3.36 Influence du retard pur  $\tau$  sur  $\omega_{BW_{phase}}$  pour  $T_\theta = \{0.5, 1.5\}$

déphasage du système sans retard pur. La variation de phase de  $\omega_{-180^\circ}$  à  $2\omega_{-180^\circ}$  est la somme de la variation de phase dû au retard pur additionnée de celle du système sans retard. Ainsi la contribution  $\tau'_p$  du retard pur au retard de phase est donnée par :

$$\tau'_p = \frac{(-\tau\omega_{-180^\circ}) - (-2\tau\omega_{-180^\circ})}{2\omega_{-180^\circ}} = \frac{\tau\omega_{-180^\circ}}{2\omega_{-180^\circ}} = \frac{\tau}{2} \quad (3.110)$$

Nous ne pouvons cependant strictement affirmer que le retard de phase sera alors au minimum de  $\frac{\tau}{2}$ . En effet dépendamment de  $T_\theta$ ,  $\zeta_{sp}$  et  $\omega_{sp}$ , la variation de phase  $\Delta\Phi^\circ$  du modèle standard sans retard pur pourrait être négative entre  $\omega_{-180^\circ}$  et  $2\omega_{-180^\circ}$ . Néanmoins nous supposons dans la suite que ce n'est pas le cas et que le retard de phase a donc une valeur minimale de  $\frac{\tau}{2}$ . Dès lors il est inutile d'espérer que le retard de phase soit satisfait sur un modèle standard avec un retard pur plus grand que 0.28 s puisque le retard de phase serait au minimum de 0.14, rendant ainsi la satisfaction idéale du critère impossible et cela sans compter la contribution du modèle sans retard pur. Nous limiterons par la suite notre étude à un retard pur inférieur à 0.15 s. Au-delà, le candidat s'est rendu compte qu'il devient difficile de satisfaire toutes les qualités de manœuvrabilités.

**Guideline 10 :** Il est impossible de satisfaire le critère de retard de phase au niveau idéal si le retard pur est supérieur à 0.28 s et au niveau exigé si le retard pur est supérieur à 0.4 s

En utilisant les équations (3.93) et (3.96), on a tracé sur la figure 3.37 les courbes assurant une pulsation critique  $\omega_{-180^\circ}$  de 3 rad/s pour  $T_\theta = \{0.5, 1.5\}$  et différentes valeurs de retard

pur  $\tau = \{0, 0.05, 0.10, 0.15\}$ . Les conclusions sont semblables à l'étude faite pour la bande passante en phase :

**Guideline 11 : L'augmentation du retard pur diminue la pulsation critique  $\omega_{-180^\circ}$  ainsi que le domaine admissible dans l'espace des paramètres. Augmenter  $T_\theta$  permet d'améliorer  $\omega_{-180^\circ}$ .**

En revanche, comme on ne peut exprimer de façon explicite  $\omega_{-180^\circ}$  en fonction des paramètres  $\tau$ ,  $T_\theta$ ,  $\zeta_{sp}$  et  $\omega_{sp}$ , il n'est dès lors plus possible d'obtenir de formulations pour  $\tau_p$  et  $\omega_{BW_{gain}}$ . On estime alors numériquement la valeur de  $\omega_{-180^\circ}$  sur une grille de valeurs des paramètres pour déterminer ensuite les valeurs de  $\tau_p$  et  $\omega_{BW_{gain}}$ . On trace ensuite les lignes de niveau qui nous intéressent pour déterminer les domaines admissibles.

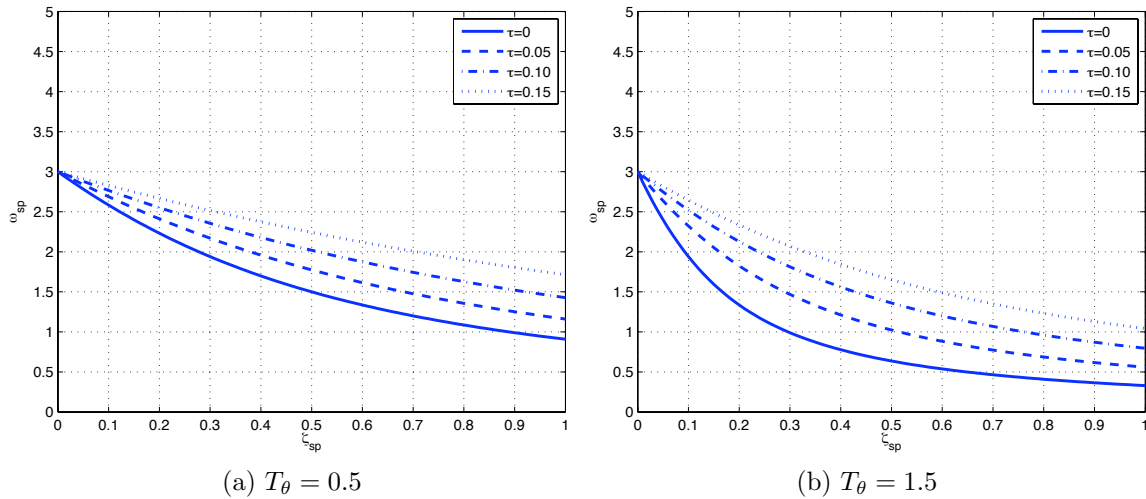


Figure 3.37 Influence du retard pur  $\tau$  sur  $\omega_{-180^\circ}$  pour  $T_\theta = \{0.5, 1.5\}$

La figure 3.38 illustre de la même façon l'influence du retard pur sur le retard de phase. Les courbes tracées correspondent à un retard de phase de 0.14 s. Les conclusions sont une fois de plus similaires aux précédentes :

**Guideline 12 : L'augmentation du retard pur diminue le retard de phase  $\tau_p$  ainsi que le domaine admissible dans l'espace des paramètres. Augmenter  $T_\theta$  permet d'améliorer  $\tau_p$ .**

- Effet sur  $\omega_{BW_{gain}}$



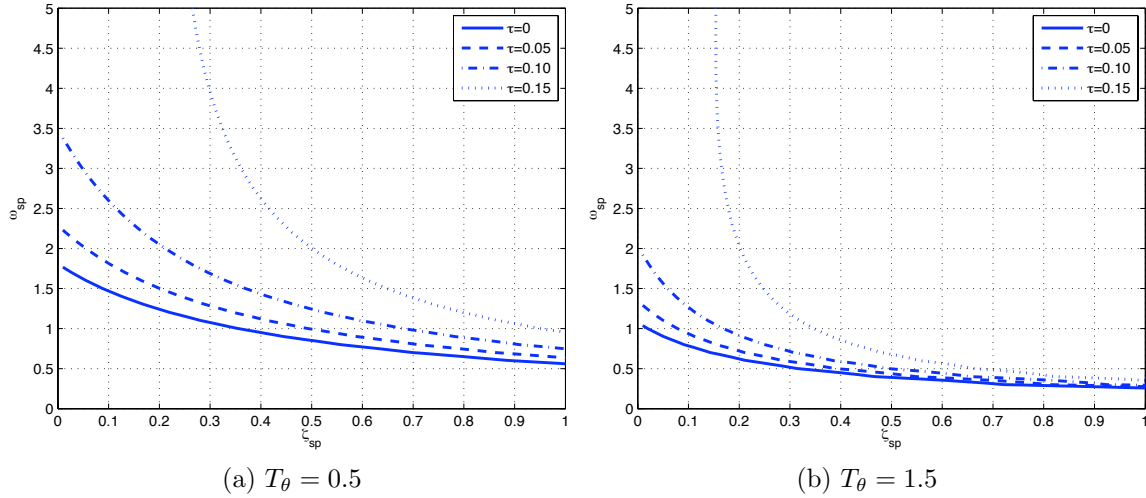


Figure 3.38 Influence du retard pur  $\tau$  sur  $\tau_p$  pour  $T_\theta = \{0.5, 1.5\}$

Le retard pur ne modifie pas le gain du modèle standard et comme dit précédemment une augmentation du retard pur diminue la pulsation critique  $\omega_{-180^\circ}$ . Pour notre modèle standard, il est légitime de penser que le gain est décroissant autour de  $\omega_{-180^\circ}$  et donc qu'en cherchant la pulsation où le système regagne 6 dB, on ait :

$$\omega_{BW_{gain}} < \omega_{-180^\circ} \quad (3.111)$$

De la même façon, en augmentant  $\tau$ , on aurait :

$$\tau_1 < \tau_2 \Rightarrow \omega_{-180^\circ}^{(\tau_2)} < \omega_{-180^\circ}^{(\tau_1)} \Rightarrow \omega_{BW_{gain}}^{(\tau_2)} < \omega_{BW_{gain}}^{(\tau_1)} \quad (3.112)$$

faisant ainsi une nouvelle fois diminuer la bande passante.

La figure 3.39 montre l'influence du retard pur  $\tau$  sur  $\omega_{BW_{gain}}$ . Les conclusions sont encore similaires aux précédentes quant à la diminution de la zone admissible quand  $\tau$  augmente. En revanche une augmentation de  $T_\theta$  n'a plus forcément un effet bénéfique sur l'augmentation du domaine. On peut d'ores et déjà remarquer que le critère en question vient limiter beaucoup plus drastiquement le domaine.

**Guideline 13 : L'augmentation du retard pur diminue la bande passante en gain  $\omega_{BW_{gain}}$  ainsi que le domaine admissible dans l'espace des paramètres.**

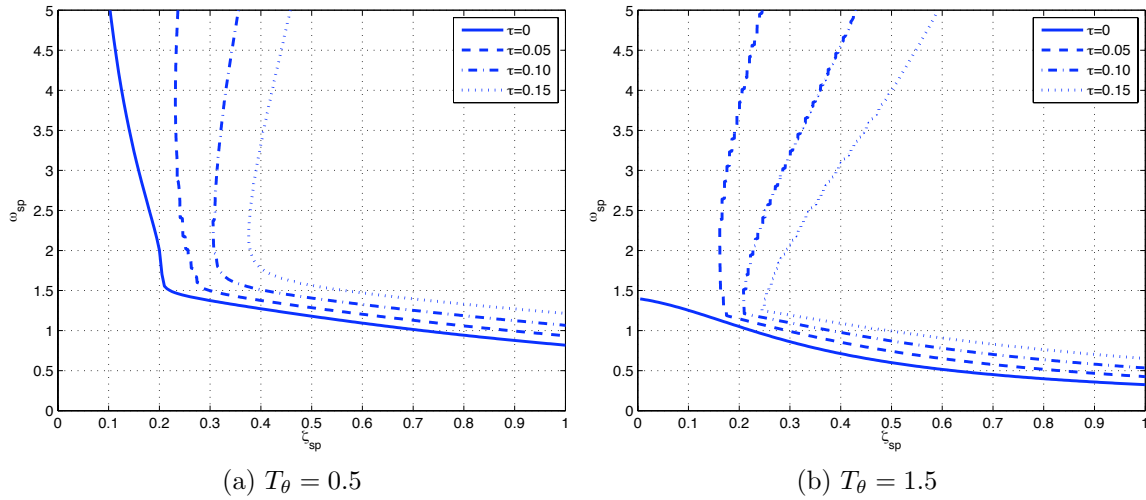


Figure 3.39 Influence du retard pur  $\tau$  sur  $\omega_{BW_{gain}}$  pour  $T_\theta = \{0.5, 1.5\}$

### Bilan

Si l'on dresse finalement un bilan de l'influence du retard pur, on peut remarquer que par rapport au modèle standard sans retard pur, l'ajout du retard ne peut avoir, en règle générale (et sauf cas particuliers) qu'un effet néfaste :

- en diminuant la pulsation critique  $\omega_{-180^\circ}$
- en diminuant la bande passante  $\omega_{BW_\theta}$  (composée de  $\omega_{BW_{phase}}$  et  $\omega_{BW_{gain}}$ )
- en augmentant le retard de phase  $\tau_p$ .

### ◆ Confrontation des qualités de manœuvrabilité pour un retard $\tau = 0.15$ ,

Comme tous les critères fréquentiels se dégradent avec une augmentation du retard pur, nous allons tracer à titre d'exemple les qualités de manœuvrabilité pour un retard pur maximum  $\tau = 0.15$ . La figure 3.40 représente le tracé des contraintes pour des valeurs de  $T_\theta = \{0.1, 0.2, 0.4, 0.5, 1.0, 1.5\}$ . En plus des critères de dropback, de temps de réponse et d'amortissement, y sont représentées les courbes assurant une bande passante de 1.4 rad/s, la courbe de pulsation critique 3.0 rad/s ainsi que les courbes correspondant à des retards de phase de 0.14 et 0.2 s. Comme auparavant la zone foncée correspond à une satisfaction des critères avec un dropback idéal et la zone claire à une satisfaction avec dropback exigé.

L'étude des graphes nous amène aux remarques suivantes :

- Les conclusions et les conseils établis sur le modèle sans retard pur ne sont plus que partiellement valides. Satisfaire les 4 premiers critères n'est plus suffisant pour remplir les critères fréquentiels pour un retard pur  $\tau = 0.15$ . Diminuer la valeur de  $\tau$  permettrait néanmoins de retrouver peu à peu les conclusions du modèle sans retard pur.

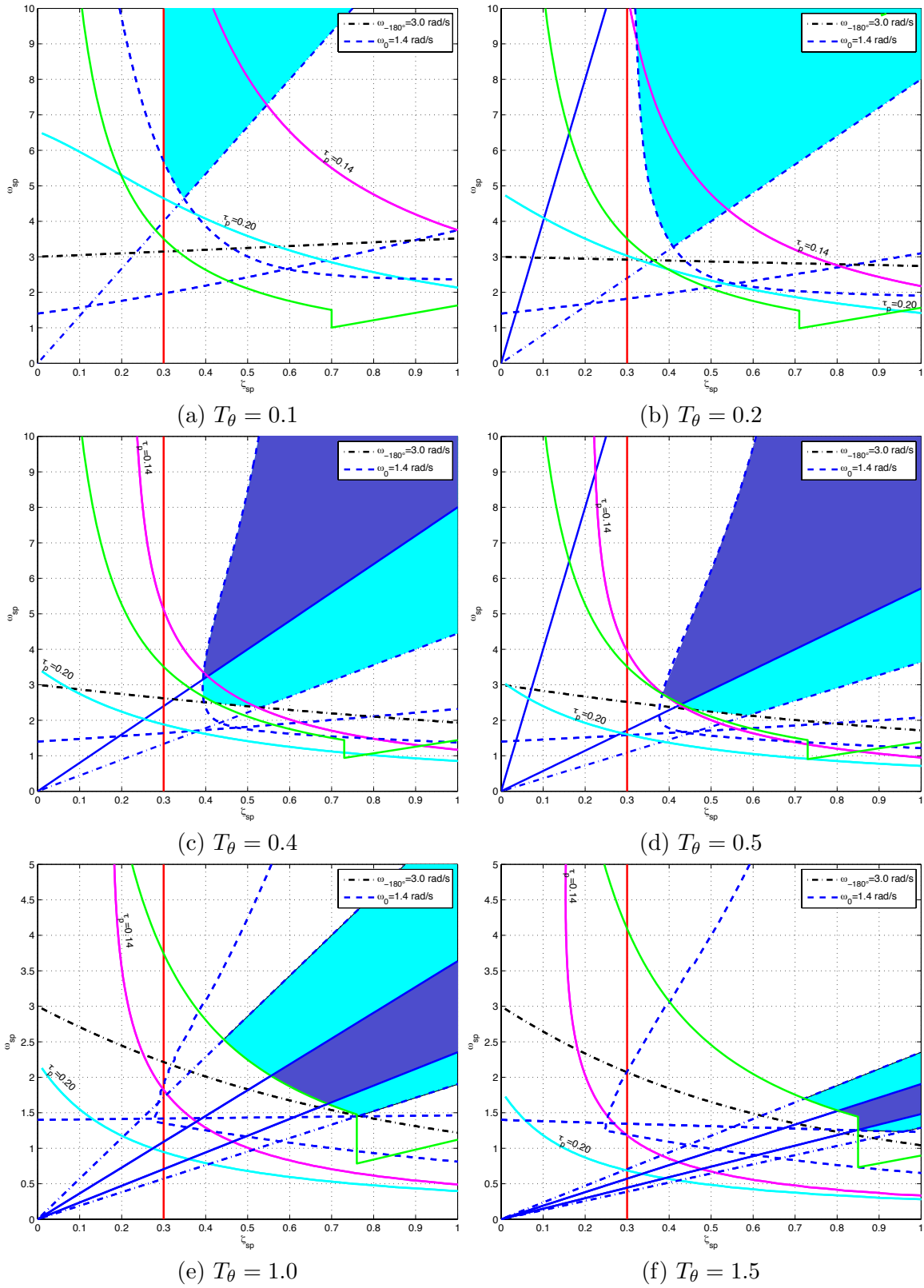


Figure 3.40 Tracé des contraintes pour  $T_\theta = \{0.1, 0.2, 0.4, 0.5, 1.0, 1.5\}$  avec un retard pur  $\tau = 0.15$

- Pour  $T_\theta = 0.1$ , il n'est plus possible de satisfaire le dropback au niveau idéal. En effet, la quantité  $T_\theta - \tau$  est négative et comme  $Drb = T_\theta - \tau - \frac{2\zeta_{sp}}{\omega_{sp}}$ , on ne peut espérer un dropback positif. Cela rejoint la discussion précédente où le retard doit être compensé par une valeur  $T_\theta$  plus grande. On peut aussi interpréter cela de la façon suivante : avec un retard pur important, la perte de phase doit être compensée par un zéro ; plus le zéro sera proche de l'origine, plus la compensation sera importante aux basses fréquences.
- Le critère portant sur le retard de phase est toujours satisfait pour une valeur de 0.20 ; en revanche ce n'est pas toujours le cas pour la valeur idéal de 0.14. Au-delà de  $T_\theta = 0.2$ , la valeur idéale est néanmoins assurée.
- Pour les valeurs faibles de  $T_\theta = \{0.1, 0.2, 0.4, 0.5\}$ , la bande passante en gain vient limiter le domaine admissible et la contrainte doit être considérée. En revanche, la bande passante en phase ne pose pas de problème particulier.
- Pour les valeurs les plus hautes  $T_\theta = \{1.0, 1.5\}$ , la contrainte sur la pulsation critique à  $-180^\circ$  vient légèrement empiéter sur le domaine comme dans le cas sans retard pur.

Avec la présence du retard pur, il ne suffit plus de remplir les 4 premiers critères pour automatiquement satisfaire tous les autres. Néanmoins, on peut observer que satisfaire un dropback idéal et avoir un amortissement suffisamment grand permettent de satisfaire les critères. Si l'on considère le critère portant sur l'amortissement du mode *short period*, la limite basse de 0.3 peut paraître en effet insuffisante. Ainsi en observant les cas où  $T_\theta = \{0.1, 0.2, 0.4\}$ , considérer un amortissement plus grand que 0.5 par exemple permet alors de satisfaire les critères fréquentiels.

Finalement en remplissant les 4 premiers critères avec un dropback nul (ce qui est l'idéal selon Gibson), un bon amortissement  $\zeta_{sp} \geq 0.5$ , et une valeur de  $T_\theta$  suffisamment grande, nous aurons un modèle standard satisfaisant tous les critères considérés.

## Conclusion

L'étude a été menée sur un modèle standard d'ordre 2 avec zéro et retard pur censé représenter le comportement de l'avion à court terme, et donc les conclusions sont essentiellement valides quand l'avion peut être approximé de cette manière (ce qui est souvent le cas). Cela nous a permis de mettre en évidence des critères qui sont prépondérants par rapport à d'autres, ainsi que des conseils et des guides afin de satisfaire au mieux les qualités de manœuvrabilités. Nous privilégierons par la suite ces critères dominants (dropback, amortissement et temps de réponse) en supposant implicitement

que si le système en boucle fermée se comporte de façon similaire à notre modèle standard, alors tous les autres critères considérés seront satisfaits. L'étude ne constitue pas une preuve formelle mais néanmoins, elle permet une meilleure compréhension de l'évolution des critères avec les valeurs des paramètres et met en évidence des guides pour améliorer les valeurs des qualités de manoeuvrabilité si elles font défaut.

L'analyse effectuée ainsi que les graphes permettent aussi de construire facilement des modèles standards de référence satisfaisant toutes les qualités de manoeuvrabilité et que l'on peut utiliser dans une synthèse  $H_\infty$  pour faire de l'appariement de modèle. On synthétise ainsi un correcteur qui assure que le système se comporte comme le modèle de référence sur la bande de fréquences d'intérêt, en minimisant par exemple :

$$\min \| (F(s, K) - F_{ref}(s))W(s) \|_\infty \quad (3.113)$$

où  $F(s, K)$  est la fonction de transfert en boucle fermée dépendant du correcteur  $K$ ,  $F_{ref}(s)$  le modèle de référence dont on veut reproduire le comportement et  $W(s)$  un filtre de pondération passe-bas qui assure un bon suivi de modèle aux basses fréquences sur la bande passante considérée.

Deuxième partie

# APPROCHE PAR APPLICATIONS GARDIENNES

# Préambule

Nous traitons dans cette partie notre première approche pour résoudre le problème. Il s'agit de conserver les architectures de correction (Figs. 2.7 et 2.8) imposées par *Bombardier Inc.* afin de satisfaire un certain nombre de qualités de manœuvrabilité.

Nous avons vu dans le **chapitre 3** qu'en satisfaisant les contraintes d'amortissement, de temps de réponse et de dropback, on remplissait les autres qualités de manœuvrabilité; cela nécessitait néanmoins l'hypothèse assez forte que le système se comporte comme un transfert d'ordre 2 avec zéro. L'**article 1** propose alors un algorithme basé sur les applications gardiennes qui placent les pôles dans une région spécifique du plan complexe pour un contrôleur d'architecture fixe.

L'**article 2** vient quant à lui proposer deux algorithmes pour assurer le séquençement des gains du contrôleur pour des systèmes à un et deux paramètres. En effet, l'avion opérant dans une large enveloppe de vol, le contrôleur doit pouvoir assurer les performances quelle que soit la condition de vol. Les gains du contrôleur sont alors fonction de paramètres (les variables de séquençement) qui rendent compte de la condition de vol actuelle.

Le candidat tient à faire remarquer que les premières sections des articles sont assez similaires et reprennent les notions introduites dans le **chapitre 4**; il en est de même pour les sections consacrées à la description du problème qui sont des courtes répétitions des **chapitre 2 & 3**.

Cette partie est scindée de la façon suivante :

- le **chapitre 4** présente brièvement les éléments théoriques nécessaires en lien avec les applications gardiennes.
- le **chapitre 5** est l'**article 1** où est présenté l'algorithme de placement de pôles dans une région spécifique avec son application à notre problème.
- le **chapitre 6** est l'**article 2** traitant du séquençement de contrôleurs.

## CHAPITRE 4

### APPLICATIONS GARDIENNES

Le présent chapitre vise à donner des notions élémentaires sur ce que sont les applications gardiennes et semi-gardiennes. L'étude de la stabilité généralisée de familles de polynômes ou de matrices a largement été développé après que Kharitonov eut commencé à étudier la stabilité de familles de polynômes réels avec coefficients incertains. Plusieurs ont poursuivi dans cette voie.

Développées par Saydy *et al.* (1990), les applications gardiennes et semi-gardiennes se présentent alors comme un nouvel outil qui permet de répondre à ce problème de stabilité généralisée. On entend par stabilité généralisée le confinement des valeurs propres d'une matrice ou des racines d'un polynôme à l'intérieur d'un domaine  $\Omega$  du plan complexe.

Les applications gardiennes sont des fonctions scalaires des paramètres incertains de la famille de matrices ou de polynômes considérée, qui ont la propriété de s'annuler dès que l'on est à la limite de stabilité. On peut alors déterminer les ensembles de paramètres pour lesquels nous sommes assurés que la famille considérée demeurera stable par rapport à un domaine  $\Omega$  du plan complexe. Il est ainsi possible de construire des applications gardiennes pour une grande variété de domaines  $\Omega$ .

Après de brefs rappels mathématiques, nous définirons les applications gardiennes et semi-gardiennes ainsi que la méthode pour les obtenir. Nous terminerons sur des exemples d'application.

#### 4.1 Préliminaires mathématiques

Avant de rentrer dans le vif du sujet, nous introduirons ici deux outils mathématiques qui auront leur importance dans la construction des applications gardiennes : le produit bialterné de deux matrices et le Bezoutien de deux polynômes.

##### 4.1.1 Produit bialterné

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de dimension  $n \times n$  et  $V^n$ , le  $\frac{1}{2}n(n-1)$ -tuplet constitué des paires d'entiers  $(p, q)$ ,  $p = 2, 3, \dots, n$ ,  $q = 1, \dots, p-1$ , listé lexicalement, c'est-à-dire :

$$V^n = [(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1) \dots, (n, n-1)]. \quad (4.1)$$

Soit  $V_i^n$  la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $V^n$  et

$$f((p, q); (r, s)) = \frac{1}{2} \left( \det \begin{bmatrix} a_{pr} & a_{ps} \\ b_{qr} & b_{qs} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b_{pr} & b_{ps} \\ a_{qr} & a_{qs} \end{bmatrix} \right). \quad (4.2)$$



Le produit bialterné de  $A$  et  $B$ , noté  $A \odot B$  est la matrice carrée  $C$  de dimension  $\frac{1}{2}n(n-1)$  dont les éléments sont donnés par :

$$c_{ij} = f(V_i^n; V_j^n). \quad (4.3)$$

Le produit bialterné présente des propriétés intéressantes quant aux valeurs propres. Notons

$$\Psi(A, A) = \sum_{p,q} \psi_{pq} A^p \odot A^q, \quad (4.4)$$

et les valeurs propres de la matrice  $A$  (de dimension  $n$ ),  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Nous avons alors le lemme suivant établi dans (Stephanos, 1900) :

**Lemme 4.1.1.** *Les valeurs propres de  $\Psi(A, A)$  sont les  $\frac{1}{2}n(n-1)$  valeurs*

$$\psi(\lambda_i, \lambda_j) = \frac{1}{2} \sum_{p,q} \psi_{pq} (\lambda_i^p \lambda_j^q + \lambda_i^q \lambda_j^p), \quad i = 2, \dots, n, \quad j = 1, \dots, i-1. \quad (4.5)$$

Par exemple, si  $A$  est une matrice  $3 \times 3$  alors  $\sigma(A \odot A) = \{\lambda_1 \lambda_2, \lambda_1 \lambda_3, \lambda_2 \lambda_3\}$ .

#### 4.1.2 Bezoutien

Étant donné le polynôme  $a(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ , on définit le polynôme  $\hat{a}(s) := s^n a(s^{-1}) = a_0 s^n + \dots + a_{n-1} s + a_n$  et la matrice

$$S(a) := \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ a_2 & \vdots & \dots & a_n & 0 \\ \vdots & a_n & \dots & \vdots & \vdots \\ a_n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Le Bezoutien  $B(a, b)$  de deux polynômes  $a$  and  $b$  peut alors être exprimé comme la matrice de dimensions  $n \times n$ ,  $n$  étant le plus haut des degrés des polynômes  $a$  et  $b$ , donnée par :

$$B(a, b) := S(a)S(\hat{b})P - S(b)S(\hat{a})P, \quad (4.7)$$

avec  $P$  une certaine matrice de permutation (Lancaster et Tismenetsky, 1985). Notre intérêt dans le Bezoutien réside dans le résultat suivant.

**Lemme 4.1.2.** *Les polynômes  $a(s)$  and  $b(s)$  n'ont aucun zéro en commun si et seulement si le Bezoutien  $B(a, b)$  (ou, de façon équivalente, la matrice  $S(a)S(\hat{b}) - S(b)S(\hat{a})$ ) est non singulière.*

## 4.2 Applications gardiennes et semi-gardiennes

Abordons à présent les définitions des applications gardiennes et semi-gardiennes. Avant tout chose, nous noterons  $\mathcal{S}$  l'ensemble  $\mathcal{S}(\Omega)$ , où

$$\mathcal{S}(\Omega) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \sigma(A) \subset \Omega\} \quad (4.8)$$

pour les problèmes de stabilité de matrices, et

$$\mathcal{S}(\Omega) = \{p \in \mathcal{P}_n : \mathcal{Z}(p) \subset \Omega\} \quad (4.9)$$

pour les problèmes inhérents à la stabilité des polynômes. L'ensemble  $\Omega$  est un sous-ensemble ouvert du plan complexe. Les ensembles  $\mathcal{S}(\Omega)$  désignent des ensembles de stabilité généralisée.

### 4.2.1 Applications gardiennes

**Définition 4.2.1.** Soit  $\mathcal{X}$  l'ensemble des matrices carrées réelles de dimension  $n$ , ou l'ensemble de tous les polynômes de degré  $n$  à coefficients réels, et  $\mathcal{S}$  un sous-ensemble ouvert de  $\mathcal{X}$ . Soit  $\nu$  une application de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathbb{C}$ . On dit que  $\nu$  *garde*  $\mathcal{S}$ , si, pour tout  $x \in \bar{\mathcal{S}}$ , on a

$$\nu(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \partial\mathcal{S}. \quad (4.10)$$

On dit aussi que  $\nu$  est une *application gardienne* pour  $\mathcal{S}$ .

La proposition qui suit est utile quand il s'agit de tester la stabilité (généralisée) de familles paramétrées de matrices ou de polynômes relativement à un domaine  $\Omega$  du plan complexe correspondant à l'ensemble de stabilité désiré. Soit  $r = (r_1, \dots, r_k) \in U$ , où  $U$  est un sous-ensemble connecté de  $\mathbb{R}^k$ , et  $x(r)$  une matrice ou un polynôme de  $\mathcal{X}$  dépendant de façon continue du vecteur paramétrique  $r$ . Etant donné un sous-ensemble ouvert  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{X}$ , on cherche les conditions minimales pour que  $x(r)$  demeure dans  $\mathcal{S}$  pour tout  $r \in U$ .

**Proposition 4.2.2.** Soit l'ensemble  $\mathcal{S}$  gardé par l'application gardienne  $\nu$  et supposons que  $x(r_0) \in \mathcal{S}$  pour un  $r_0 \in U$ . Alors

$$x(r) \in \mathcal{S} \quad \forall r \in U \quad \Longleftrightarrow \quad \nu(x(r)) \neq 0 \quad \forall r \in U. \quad (4.11)$$

**Exemple 4.2.3.** Nous donnons ici des applications gardiennes correspondant à des régions classiques du plan complexe (Fig. 4.1) construites à partir du produit bialterné.

- Stabilité d'Hurwitz : pour  $\Omega = \mathring{\mathbb{C}}_-$ , une application gardienne est donnée par :

$$\nu_H(A) = \det(A \odot I) \det(A) \quad (4.12)$$

- *Marge de stabilité : pour le demi-plan gauche ouvert décalé de  $\alpha$ , une application gardienne est donnée par :*

$$\nu_m(A) = \det(A \odot I - \alpha I \odot I) \det(A - \alpha I) \quad (4.13)$$

- *Pour le cône d'angle  $2\theta$ , une application gardienne est donnée par :*

$$\nu_d(A) = \det(A^2 \odot I + (1 - 2\zeta^2)A \odot A) \det(A) \quad (4.14)$$

où  $\zeta \triangleq \cos \theta$  désigne l'amortissement limite.

- *Pour le cercle de rayon  $\omega > 0$ , une application gardienne est donnée par :*

$$\nu_p(A) = \det(A \odot A - \omega^2 I \odot I) \det(A - \omega I) \det(A + \omega I) \quad (4.15)$$

Une façon systématique de construire des applications pour différentes régions  $\Omega$  peut être trouvée dans (Saydy et al., 1990).

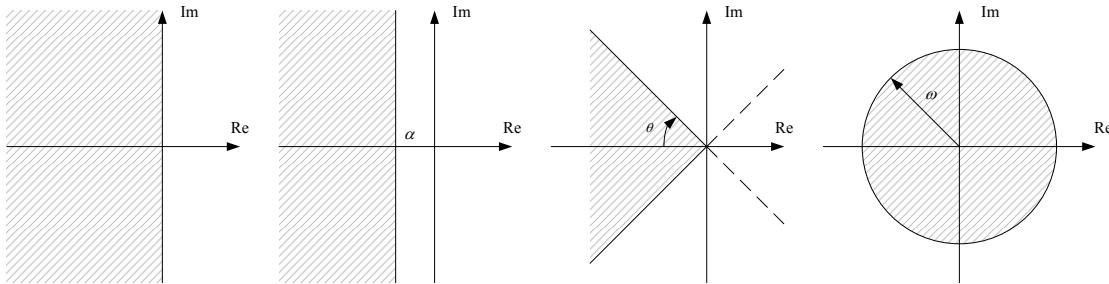


Figure 4.1 Régions de stabilité d'intérêt

#### 4.2.2 Applications semi-gardiennes

On introduit à présent la notion d'application semi-gardienne.

**Définition 4.2.4.** Soit  $\mathcal{S}$  et  $\nu$  définis précédemment. L'application  $\nu$  est dite semi-gardienne pour  $\mathcal{S}$ , si, pour tout  $x \in \bar{\mathcal{S}}$ , on a

$$x \in \partial\mathcal{S} \implies \nu(x) = 0. \quad (4.16)$$

Un élément  $x \in \mathcal{S}$  pour lequel  $\nu(x) = 0$  est appelé *blind spot* pour  $(\nu, \mathcal{S})$ .

On établit de même la proposition suivante qui est analogue à la Proposition 4.2.2 en considérant cette fois-ci les *blind spots*.

**Proposition 4.2.5.** Soit l'ensemble  $\mathcal{S}$  semi-gardé par l'application semi-gardienne  $\nu$  et supposons que  $x(r_0) \in \mathcal{S}$  pour un  $r_0 \in U$ . Alors

$$x(r) \in \mathcal{S} \quad \forall r \in U \iff x(r) \in \mathcal{S} \quad \forall r \in U_{cr} \quad (4.17)$$

où

$$U_{cr} = \{r \in U : \nu(x(r)) = 0\}. \quad (4.18)$$

### 4.2.3 Corollaire des composantes

Soit  $\{A(r) : r \in U \subset \mathbb{R}^k\}$  une famille de matrices  $n \times n$  qui dépend de façon continue du vecteur paramétrique  $r := (r_1, \dots, r_k)$  où  $U$  est un sous-ensemble connecté de  $\mathbb{R}^k$ . Le Corollaire 4.2.6 vient compléter la Proposition 4.2.2.

**Corollaire 4.2.6.** *Soit  $S(\Omega)$  gardé par l'application  $\nu_\Omega$  et la famille  $\{A(r) : r \in U\}$ . Alors l'ensemble  $\mathcal{C}$  défini par :*

$$\mathcal{C} = \{r \in U : \nu_\Omega(A(r)) = 0\} \quad (4.19)$$

*divise l'espace des paramètres en composantes  $\mathcal{C}_i$  qui sont soit stables ou instables par rapport à  $\Omega$ . Il suffit de tester un vecteur  $r^i$  de chacune des composantes  $\mathcal{C}_i$  pour savoir si elle est stable ou pas.*

Dans l'utilisation que nous ferons des applications gardiennes, nous manipulerons des familles de polynômes dépendant de 2 paramètres à la fois (en l'occurrence des gains). Il suffit alors de tracer dans le plan des paramètres les courbes où l'application s'annule. Cela découpe l'espace en différentes régions ; en testant un seul couple de chaque région, nous saurons si elle est stable ou pas. Un exemple est donné sur la figure 4.2.

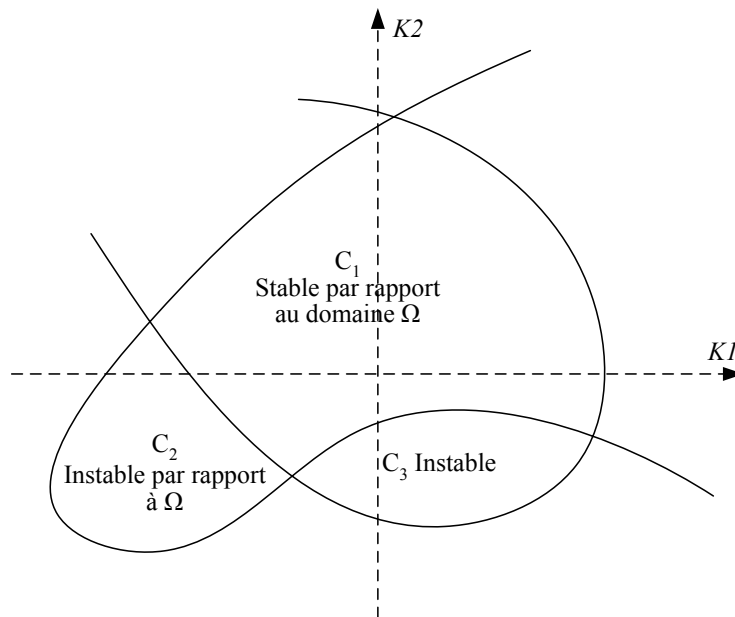


Figure 4.2 Régions stables ou instables

### 4.3 Stabilité robuste

Nous proposons ici deux résultats pour tester la stabilité de familles à un ou deux paramètres. Ces résultats seront utilisés dans les deux articles.

#### 4.3.1 Famille monoparamétrique

Nous considérons ici une famille de matrices polynomiales dépendant d'un seul paramètre  $r$  :

$$A(r) = A_0 + rA_1 + \dots + r^k A_k \quad (4.20)$$

où les  $A_i$  sont des matrices constantes. On suppose de plus que  $A(r_0)$  est stable par rapport à  $\Omega$ . L'application gardienne  $\nu_\Omega(A(r))$  est aussi un polynôme en  $r$ . Nous cherchons le plus grand intervalle ouvert contenant  $r_0$  tel que  $A(r)$  soit stable par rapport à  $\Omega$ . Soit :

$$\begin{aligned} r^- &\doteq \sup \{r < r_0 : \nu_\Omega(A(r)) = 0\} \text{ (or } -\infty \text{ sinon)} \\ r^+ &\doteq \inf \{r > r_0 : \nu_\Omega(A(r)) = 0\} \text{ (or } +\infty \text{ sinon)} \end{aligned}$$

les limites maximales de perturbation autour de  $r = r_0$  pour la non singularité des matrices.

**Lemme 4.3.1.** *Soit  $A(r) = A_0 + rA_1 + \dots + r^k A_k$  une matrice polynomiale dépendant du paramètre incertain réel  $r$  avec  $A_i$  matrices constantes données et telle que  $A(r_0)$  soit stable par rapport à  $\Omega$ . Soit  $S(\Omega)$  gardé par l'application  $\nu_\Omega$ . Alors  $A(r)$  est stable par rapport à  $\Omega$  pour tout  $r \in (r^-, r^+)$ . C'est le plus grand intervalle contenant  $r_0$ .*

#### 4.3.2 Famille biparamétrique

On considère à présent les familles de matrices dépendant de deux paramètres réels  $r_1$  et  $r_2$  :

$$A(r_1, r_2) = \sum_{i=0}^{i=k} \sum_{j=0}^{j=l} r_1^i r_2^j A_{ij} \quad (4.21)$$

où les  $A_{ij}$  sont des matrices constantes. Nous étudions la stabilité de cette famille par rapport au domaine  $\Omega$  pour lequel  $S(\Omega)$  est pourvu d'une application gardienne polynomique. Le théorème de (Saydy *et al.*, 1990) donne des conditions nécessaires et suffisantes pour établir la stabilité de  $A(r_1, r_2)$  sur un domaine rectangulaire  $(r_1, r_2) \in [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2]$ .

**Théorème 4.3.2.** *(Saydy *et al.*, 1990) Soit  $\Omega$  un sous-ensemble du plan complexe tel que  $S(\Omega)$  soit gardé par une application gardienne polynomique  $\nu_\Omega$ . Soit  $\mathcal{A} = \{A(r_1, r_2) : (r_1, r_2) \in [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2]\}$  une famille nominale stable de matrices réelles, e.g.  $A(\alpha_1, \alpha_2) \in S(\Omega)$ . Alors la famille  $\mathcal{A}$  est stable par rapport à  $\Omega$  si et seulement si  $U_{cr}^2 = \emptyset$  et les polynômes monovariabiles  $p_{[\alpha_2]}$  et  $p_{[\beta_2]}$ ,  $r_2 \in U_{cr}^1$ , n'ont pas de zéros dans  $[\alpha_1, \beta_1]$ . Ici  $p_{[r_2]}$  désigne le polynôme monovariabale en  $r_1$  quand*

on fixe  $r_2$  dans  $\nu_\Omega(A(r_1, r_2))$ ,  $p'_{[r_2]}$  sa dérivée par rapport à  $r_1$ ,

$$U_{cr}^1 := \left\{ r_2 \in [\alpha_2, \beta_2] : \det B(p_{[r_2]}, p'_{[r_2]}) = 0 \right\} \quad (4.22)$$

et

$$U_{cr}^2 := \left\{ r_2 \in [\alpha_2, \beta_2] : p_{[r_2]}(\alpha_1) p_{[r_2]}(\beta_1) = 0 \right\} \quad (4.23)$$

Le théorème sera étendu dans l'article **2** pour trouver le plus grand rectangle de côté fixe tel que  $A(r_1, r_2)$  soit stable par rapport à  $\Omega$ .

## 4.4 Exemples d'applications

### 4.4.1 Synthèse d'un correcteur PI

Supposons le système de la figure 4.3 où le système est rebouclé par un correcteur PI. On veut déterminer les couples  $(K_p, K_i)$  qui nous assurent que les pôles en boucle fermée auront un amortissement  $\zeta$  minimum de 0.707, une partie réelle  $\alpha$  plus petite que -2 et une pulsation maximale  $\omega_m$  de 10 rad/s. La figure 4.4 représente la région du plan complexe où l'on désire placer les pôles.

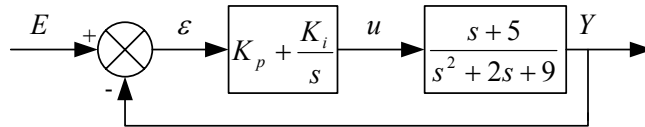


Figure 4.3 Système rebouclé par un correcteur PI

Le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée est alors :

$$D(s) = s^3 + (2 + K_p)s^2 + (9 + 5K_p + K_i)s + 5K_i \quad (4.24)$$

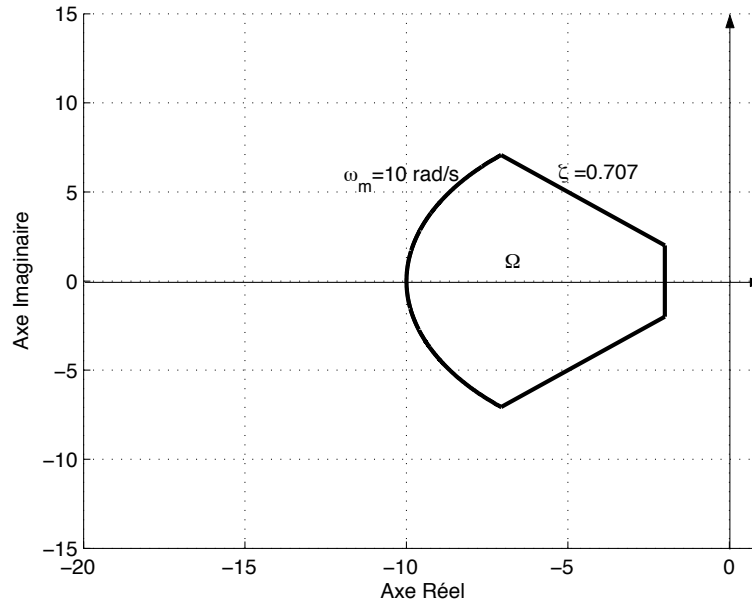
Et la matrice compagne équivalente :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5K_i & -(9 + 5K_p + K_i) & -(2 + K_p) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

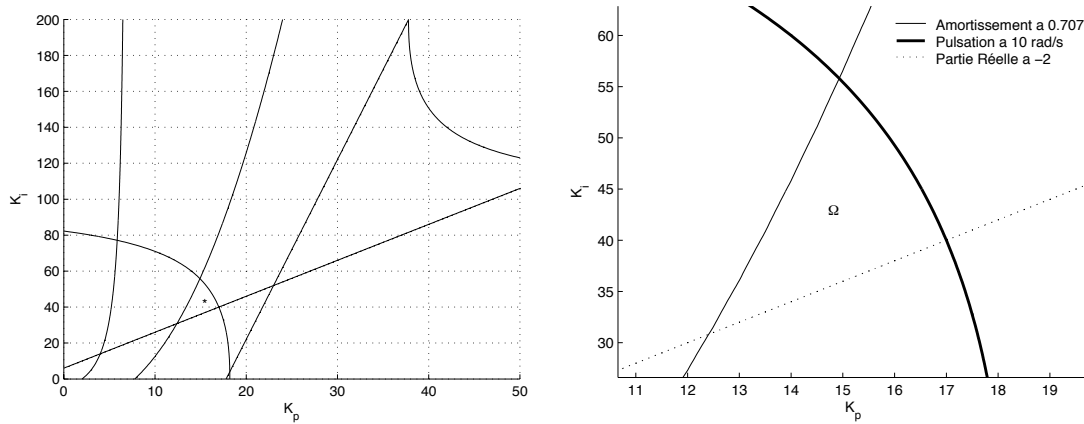
Une application gardienne correspondant à  $\Omega$  est donnée par la multiplication des trois applications gardiennes (4.13), (4.14) et (4.15) avec les valeurs  $\alpha = -2$ ,  $\zeta = 0.707$  et  $\omega = 10$ .

Afin de visualiser les courbes qui annulent l'application gardienne, nous utiliserons la fonction `contour` de Matlab qui permet de tracer les lignes de niveau 0.

La figure 4.5 représente les courbes où l'application gardienne  $\nu(K_p, K_i)$  s'annule et nous trouvons ainsi la région qui satisfait tous les critères à la fois (en testant éventuellement chaque région) ;

Figure 4.4 Domaine  $\Omega$  à garder

tous les couples  $(K_p, K_i)$  de cette région nous garantissent de garder les pôles de notre système dans le domaine  $\Omega$ . Bien évidemment pour un contrôleur à deux gains, le graphe nous montre aisément les régions de stabilité. En revanche pour trois gains ou plus, cela n'est plus aussi aisé. L'algorithme développé dans l'article 1 viendra répondre à ce problème.

Figure 4.5 Région gardant le domaine  $\Omega$

#### 4.4.2 Robustesse d'un contrôleur par retour d'état

On considère à présent le problème du pendule inverse monté sur un chariot. Une fois linéarisé autour de la position verticale, le modèle d'état du système est le suivant :

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (4.26)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m}{M}g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{M+m}{M}\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u \quad (4.27)$$

On suppose que nominalemment  $M = 1$  kg,  $m = 1$  kg,  $l = 1$  m et  $g = 9.81$  m.s<sup>-2</sup>. Le retour d'état  $u = KX$  avec  $K = \begin{bmatrix} 8.5 & 11 & 82 & 23 \end{bmatrix}$  stabilise le système et met les pôles à l'intérieur du cône d'amortissement  $\zeta = 0.5$ . Nous allons tester la robustesse de notre contrôleur face à des variations dans la longueur  $l$  et la masse  $m$  de la tige. Le but est quelles que soient les variations de ces paramètres, les pôles demeurent à l'intérieur du cône d'amortissement.

Le système en boucle fermée est alors :

$$\dot{X} = (A + BK)X = A_{BF}X \quad (4.28)$$

et l'application gardienne correspondant au cône d'amortissement est donnée par (4.14) avec  $\zeta = 0.5$  :

$$\nu_d(A_{BF}) = \det(A_{BF}^2 \odot I + (1 - 2\zeta^2)A_{BF} \odot A_{BF}) \det(A_{BF}) \quad (4.29)$$

Comme  $A_{BF}$  dépend de  $m$  et  $l$ , on obtient alors  $\nu_d(m, l)$ . La figure 4.6 représente la région où l'application gardienne s'annule. Pour tous les couples  $(m, l)$  dans cette région, nous avons la garantie que notre retour d'état garde tous les pôles à l'intérieur du cône d'amortissement 0.5. Nous avons tracé aussi la courbe de stabilité ; au-delà de cette courbe, le contrôleur choisi ne peut plus maintenir le système stable.



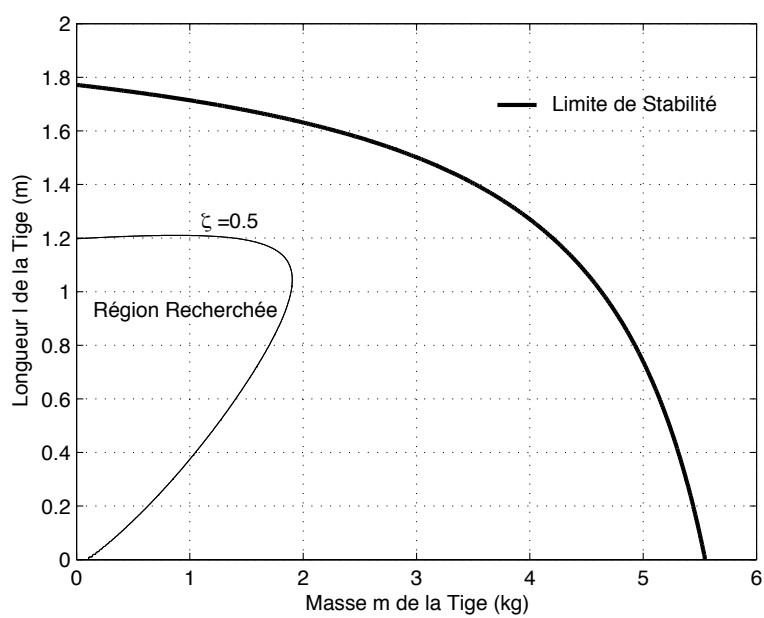


Figure 4.6 Région gardant le domaine  $\Omega$

## CHAPITRE 5

### ARTICLE 1 : LONGITUDINAL FLIGHT CONTROL SYNTHESIS WITH GUARDIAN MAPS

Nous devons dans ce premier article utiliser les architectures de correction (Figs. 2.7 et 2.8) imposées par *Bombardier Inc.* afin de satisfaire un certain nombre de qualités de manœuvrabilité.

Une partie des qualités de manœuvrabilité peut être exprimée sous la forme d'une région de stabilité du plan complexe. Nous proposons alors un algorithme basé sur les applications gardiennes dont le but est de déterminer des gains permettant de placer les pôles du système dans cette région de stabilité cible. Une fois le placement de pôles effectué, nous sommes garantis de satisfaire certaines qualités de manœuvrabilité comme vu dans le **chapitre 3**.

La procédure de synthèse est alors complétée par l'utilisation de la formule théorique du drop-back. Dépendamment de l'architecture de contrôle choisie, on peut explicitement exprimer le drop-back en fonction des gains permettant ainsi d'ajuster exactement sa valeur.

La procédure est appliquée pour les deux lois de contrôle présentées et sur l'ensemble des 20 conditions de vol définissant l'enveloppe de vol. Elle permet de trouver rapidement et automatiquement des gains adéquats comparativement à une démarche SISO classique (lieu des racines, diagramme de Bode) gourmande en temps et qu'il faudrait répéter pour chaque condition de vol.

# Longitudinal Flight Control Synthesis with Guardian Maps

D. Saussié, O. Akhrif, L. Saydy and C. Bérard

*Article soumis à Journal of Aircraft, 2010*

## Abstract

A flight controller design methodology with a fixed controller architecture guaranteeing given handling quality requirements is proposed. The new methodology, mainly based upon guardian maps, first translates handling qualities in terms of eigenvalue confinement or linear constraints, then tunes gradually the parameters of the controller until the requirements are satisfied; i.e., essentially until all -or part of- closed-loop poles lie within a specified target region of the complex plane. An example that illustrates the longitudinal flight controller design of a *Challenger 604* aircraft is presented on 20 different points of the flight envelope. The methodology is successfully applied using two different fixed longitudinal flight controller architectures of interest, namely pitch rate control and  $C^*$  control.

## 5.1 Introduction

Satisfying handling qualities remains one of the most important concerns of flight control engineers nowadays (Mitchell *et al.*, 2004). Several handling quality criteria that a flight controller must ideally satisfy have been proposed (US Department of Defense, 1997; Hodgkinson, 1999; Gibson, 1999). The longitudinal handling qualities concern mainly the short-period dynamics of the aircraft, most of which (as will be shown) can be cast in terms of eigenvalue confinement. Moreover, high order effects like pure time delay cannot be ignored in the modeling as they often lead to degradation in pilot rating and can be at the origin of undesirable behavior such as PIOs (Mitchell *et al.*, 2004). Fulfilling *a priori* these requirements still remains a challenging problem.

Traditionally, flight control systems use simple control schemes derived from the wide experience acquired by flight control engineers. Classic schemes have indeed a well studied and understood architecture (Nelson, 1998; Stevens et Lewis, 2003), and work well in many practical applications. But because of stringent performance and robustness requirements, modern control techniques are more suited to the design of new flight control systems (Adams *et al.*, 1995; Magni *et al.*, 1997) as they can handle many different types of constraints (Puyou *et al.*, 2004; Tokutake *et al.*, 2005). However, their complexity can prevent them from being directly implemented and controller reduction is usually needed. Nevertheless, mixing a classic fixed architecture with modern methods provides interesting ways of solving nowadays problems (Osborne *et al.*, 1994; Mattei et Scordamaglia, 2008).

When the controller architecture is fixed, the question is one of knowing how to adjust the controller gains in order to fulfill beforehand the desired requirements which includes satisfying given handling qualities. In general, this problem boils down to a static or dynamic output feedback with constraints to satisfy. Some handling qualities can be cast as pole confinement constraints and one has to tune the gains to ensure that the dominant poles lie in a target region of the complex plane. This problem is still open (Bernstein, 1992; Blondel *et al.*, 1995) and causes much attention (Syrmos *et al.*, 1997). Indeed, depending on the control architectures, there is, in general, no guarantee that one can put the closed-loop poles in a specific region of the complex plane.

The present article builds on the work initiated by Saydy *et al.* (2000) and pursued later by Saussié *et al.* (2003, 2006b). For implementation purposes, this work proposes a simple fixed architecture controller for a business jet aircraft with a systematic procedure for choosing the controller gains of the longitudinal flight control system in order to achieve given performance and robustness requirements (Akhric *et al.*, 1998). The technique relies in part on guardian maps (Saydy *et al.*, 1990).

The theory of guardian maps deals with the robust generalized stability of families of parameterized linear systems. Generalized stability deals with the confinement of system poles to general regions of the complex plane of which the left half-plane and the open unit disk are the two traditional examples. In robustness studies, the parameters are uncertain parameters. In the present work, the parameters are taken to be the controller gains. A multivariable polynomial in the gains is obtained with the property that when set to zero, it divides the gain space into components that are either stable or unstable relatively to the given subset  $\Omega$  of the complex plane.

The paper is organized as follows. Section 1 briefly presents guardian map theory and Section 2 introduces the algorithm to tune automatically the controller gains in order to achieve desired eigenvalue confinement. In Section 3, the aircraft model of a *Challenger 604* is introduced and the handling qualities described. Section 4 deals with the design procedure and its application on a given arbitrary flight condition. Section 5 gathers the results for the remaining flight conditions.

## 5.2 Guardian Maps

The guardian map approach was introduced by Saydy *et al.* (1990) as a unifying tool for the study of generalized stability of parameterized families of matrices or polynomials. Here, generalized stability means confinement of matrix eigenvalues or polynomial zeros to general open subsets of the complex plane and includes the open left half-plane and the unit circle as special cases. Some of the basic concepts are introduced.

### 5.2.1 Definition :

Basically, guardian maps are scalar valued maps defined on the set of  $n \times n$  real matrices (or  $n^{\text{th}}$ -order polynomials) that take non-zero values on the set of  $\Omega$ -stable matrices (or polynomials) and vanish on its boundary. The description below will focus on families of matrices with the

understanding that it applies to polynomials as well. We are hence interested in stability sets of the form :

$$S(\Omega) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \Lambda(A) \subset \Omega\} \quad (5.1)$$

where  $\Omega$  is an open subset of the complex plane of interest, and  $\Lambda(A)$  denotes the set consisting of all the eigenvalues of  $A$ . Such sets  $S(\Omega)$  will be referred to as *generalized stability sets*, and thus represent the set of all matrices which are stable relative to  $\Omega$ , i.e. which have all their eigenvalues in  $\Omega$ .

**Définition 5.2.1.** *Let  $\nu$  map  $\mathbb{R}^{n \times n}$  into  $\mathbb{C}$ . We say that  $\nu$  guards  $S(\Omega)$  if for all  $A \in \bar{S}(\Omega)$ , the following equivalence holds :*

$$\nu(A) = 0 \Leftrightarrow A \in \partial S(\Omega) \quad (5.2)$$

Here  $\bar{S}$  denotes closure of the set  $S$  and  $\partial S$  its boundary. The map is said to be *polynomic* if it is a polynomial function of the entries of its argument.

**Example 5.2.2.** *Some guardian maps are given for classical regions (Fig. 5.1).*

- *Hurwitz Stability : for  $\Omega = \mathring{\mathbb{C}}_-$ , a guardian map is*

$$\nu_H(A) = \det(A \odot I) \det(A) \quad (5.3)$$

where  $\odot$  denotes the bialternate product (Stephanos, 1900).

- *Stability margin : the open  $\alpha$ -shifted half-plane region has a corresponding guardian map*

$$\nu_m(A) = \det(A \odot I - \alpha I \odot I) \det(A - \alpha I) \quad (5.4)$$

- *The conic sector with inner angle  $2\theta$  has a corresponding guardian map given by*

$$\nu_d(A) = \det(A^2 \odot I + (1 - 2\zeta^2)A \odot A) \det(A) \quad (5.5)$$

where  $\zeta \triangleq \cos \theta$  denotes the limiting damping ratio.

- *Schur stability : for the circle of radius  $\omega > 0$ , a corresponding guardian map is*

$$\nu_p(A) = \det(A \odot A - \omega^2 I \odot I) \det(A^2 - \omega^2 I) \quad (5.6)$$

A systematic way of constructing guardian maps for various  $\Omega$  regions can be found in (Saydy et al., 1990).

## 5.2.2 Characterization of stabilizing gains :

Let  $\{A(r) : r \in U \subset \mathbb{R}^k\}$  be a continuous family of  $n \times n$  matrices which depend on the parameter vector  $r := (r_1, \dots, r_k)$  where each entry lies in a given range for which only the bounds are known, say  $r \in U \subset \mathbb{R}^k$ .

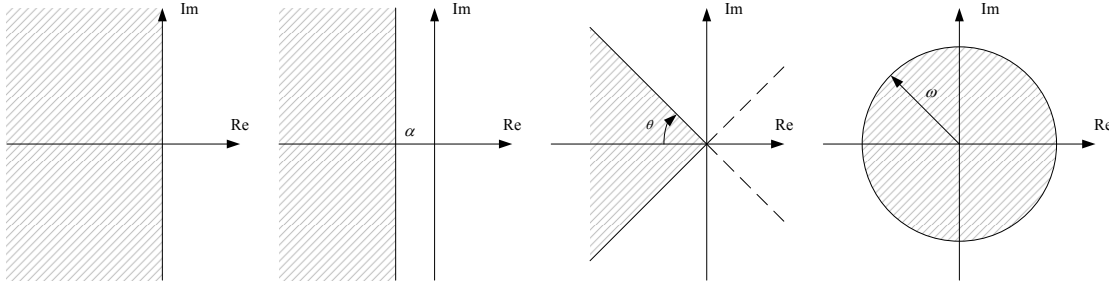


Figure 5.1 Regions for Example 5.2.2

**Theorem 5.2.3.** Let  $S(\Omega)$  be guarded by the map  $\nu_\Omega$ . The family  $\{A(r) : r \in U\}$  is stable relative to  $\Omega$  if and only if

- (i) it is nominally stable, i.e.  $A(r_0) \in S(\Omega)$  for some  $r_0 \in U$ ; and,
- (ii)  $\nu_\Omega(A(r)) \neq 0$ , for all  $r \in U$ .

**Corollary 5.2.4.** Let  $S(\Omega)$  be guarded by the map  $\nu$  and consider the family  $\{A(r) : r \in U\}$ . Then the set  $\mathcal{C}$  defined by :

$$\mathcal{C} = \{r \in \mathbb{R}^k : \nu_\Omega(A(r)) = 0\} \quad (5.7)$$

divides the parameter space  $\mathbb{R}^k$  into components  $\mathcal{C}_i$  that are either stable or unstable relative to  $\Omega$ . To see which situation prevails for a given component  $\mathcal{C}_i$ , one has to test  $A(r)$  for any one vector in  $\mathcal{C}_i$ .

**Example 5.2.5.** Suppose that the closed-loop poles of a given system are specified by the polynomial :

$$p(s) = s^3 + k_1 s^2 + k_2 s + 1 \quad (5.8)$$

where  $k_1, k_2$  denote some controller gains. If the damping region  $\zeta > 0.707$  is the one considered (see Fig. 5.2), then one obtains (e.g. by applying Eq. (5.5) to the companion matrix corresponding to  $p$ ) :

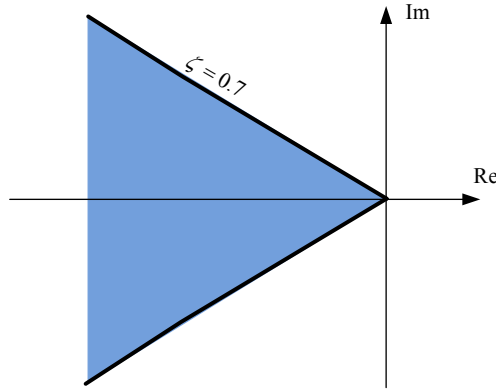
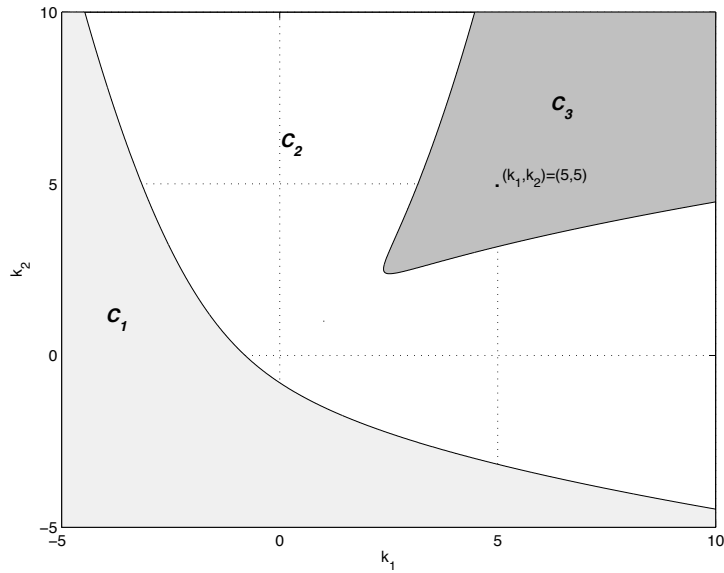
$$\nu_\Omega(p) = 2k_2^3 - k_1^2 k_2^2 - 4k_1 k_2 + 2k_1^3 + 1 \quad (5.9)$$

Setting this quantity to 0 yields the 3 components in the parameter space  $(k_1, k_2)$  of Fig. 5.3. It can be verified that the set of all gains  $(k_1, k_2)$  which place all the closed-loop poles within the damping zone of Fig. 5.2 is the component  $\mathcal{C}_3$ . Any other choice of the gains yields closed-loop poles which are not entirely within  $\Omega$ . We arrive to this conclusion simply by testing three pairs  $(k_1, k_2)$  in  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  and  $\mathcal{C}_3$  respectively.

### 5.2.3 One-parameter family stability test

In the following, we consider single-parameter polynomial matrices of the form :

$$A(r) = A_0 + rA_1 + \dots + r^k A_k \quad (5.10)$$

Figure 5.2 Stability region  $\Omega$ Figure 5.3 Set  $C_3$  of all gains ensuring  $\Omega$ -stability

with  $A_i$  given constant matrices and such that  $A(r_0)$  is  $\Omega$ -stable. The corresponding guardian map  $\nu_\Omega(A(r))$  is a polynomial in  $r$ . We seek to find the largest open stability interval w.r.t.  $\Omega$  around  $r_0$ . Let

$$r^- \doteq \sup \{r < r_0 : \nu_\Omega(A(r)) = 0\} \text{ (or } -\infty \text{ if none exists)}$$

$$r^+ \doteq \inf \{r > r_0 : \nu_\Omega(A(r)) = 0\} \text{ (or } +\infty \text{ if none exists)}$$

be the maximal perturbation bounds for nonsingularity of matrices around  $r = r_0$ .

**Lemma 5.2.6.** *Let  $A(r) = A_0 + rA_1 + \dots + r^k A_k$  be a polynomial matrix in the uncertain parameter  $r$  real with given constant matrices  $A_i$  such that  $A(r_0)$  is stable w.r.t.  $\Omega$  and let  $S(\Omega)$  be guarded by*

a map  $\nu_\Omega$ . Then  $A(r)$  is stable relative to  $\Omega$  for all  $r \in (r^-, r^+)$ . Furthermore, this interval is the largest one containing  $r_0$ .

To know more about guardian map theory, the reader is referred to (Saydy *et al.*, 1990) .

### 5.3 A Guardian Map-Based Synthesis Procedure

In this section, the proposed control design algorithm is described. We consider the following control problem :

**Problem 5.3.1.** Let  $P(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  be a minimal realization of a system for which a fixed architecture output feedback controller  $K$  is sought (Fig. 5.4). Let  $\mathbf{K} = [K_j] \in \mathbb{R}^n$  denote the vector of variable gains to be tuned. The objective is to put forth a systematic procedure that will produce  $\mathbf{K}$  which possibly places the closed-loop poles in a specific target region  $\Omega_t$  of the complex plane.

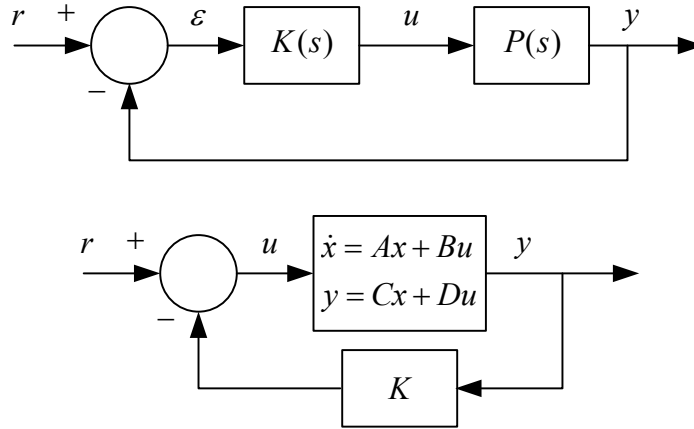


Figure 5.4 Control problems under study

First we define particular regions of interest ( $\Gamma$  or  $\Omega$ ) of the complex plane in which the initial (open-loop) eigenvalues are confined. Then we introduce the algorithms based upon guardian maps w.r.t. these regions.

#### 5.3.1 Complex plane regions

We start by establishing some definitions and notations. We first introduce the stability region  $\Omega \subset \text{OLHP}$  defined by the three constraints illustrated in Fig. 5.5. That is, for  $\alpha < 0$  and  $0 < \theta < \pi/2$ , we define :

$$\Omega \triangleq \Omega(\alpha, \theta, \omega) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re}(\lambda) < \alpha, \zeta(\lambda) > \cos \theta, |\lambda| < \omega\} \quad (5.11)$$



where  $\zeta(\cdot)$  denotes the damping ratio of the complex number  $\lambda$ . Even though other stability sets can be considered, we limit our presentation to this one, which is important for the application at hand. For cases when the open-loop system is not necessarily stable, we also define the region  $\Gamma$  (Fig. 5.5) such that :

$$\Gamma \triangleq \Gamma(\alpha, \omega) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re}(\lambda) < \alpha, |\lambda - \alpha| < \omega\} \quad (5.12)$$

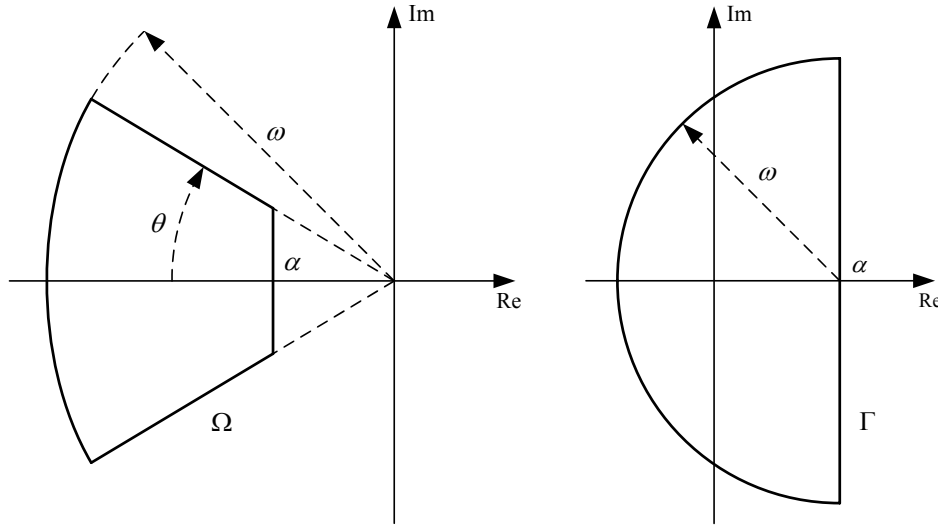


Figure 5.5 Unstable set  $\Gamma$  and stable set  $\Omega$

Let  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  be a set of complex numbers. If  $\Lambda \not\subset \text{OLHP}$  then  $\Gamma_\Lambda \triangleq \Gamma(\alpha_\Lambda, \omega_\Lambda)$  with  $\alpha_\Lambda = \max\{\text{Re}(\lambda_i)\}$  and  $\omega_\Lambda = \max\{|\lambda_i - \alpha_\Lambda|\}$ . If  $\Lambda \subset \text{OLHP}$  then  $\Omega_\Lambda \triangleq \Omega(\alpha_\Lambda, \theta_\Lambda, \omega_\Lambda)$  with  $\alpha_\Lambda = \max\{\text{Re}(\lambda_i)\}$ ,  $\theta_\Lambda = \cos^{-1}(\min\{\zeta(\lambda_i)\})$  and  $\omega_\Lambda = \max\{|\lambda_i|\}$ .

**Example 5.3.2.** Let  $\Lambda_1 = \{1, -1, -2 \pm 4j, -3 \pm j\}$  and  $\Lambda_2 = \{-1, -2 \pm j, -4 \pm j, -5\}$ . According to the above definitions,  $\Gamma_{\Lambda_1} = \Gamma(1, 5)$  and  $\Omega_{\Lambda_2} = \Omega(-1, \pi/6, 5)$  as shown in Fig. 5.6 (dark areas).

Finally, for given  $\Omega$ -shaped target region  $\Omega_t$ , we define the following set operation :

- for unstable set  $\Gamma$ ,  $D = \Omega_t \vee \Gamma$  denotes the smallest  $\Gamma$ -shaped region that contains both  $\Omega_t$  and  $\Gamma$ .
- for stable set  $\Omega$ ,  $D = \Omega_t \vee \Omega$  denotes the smallest  $\Omega$ -shaped region that contains both  $\Omega_t$  and  $\Omega$ .

**Example 5.3.3.** Let the target region  $\Omega_t = \Omega(-2, \pi/4, 6)$ . For the sets  $\Lambda_1$  and  $\Lambda_2$  defined in Example 5.3.2 and their corresponding regions  $\Gamma_{\Lambda_1}$  and  $\Omega_{\Lambda_2}$ , we have then  $D_1 = \Omega_t \vee \Gamma_{\Lambda_1} = \Gamma(1, 7)$  and  $D_2 = \Omega_t \vee \Omega_{\Lambda_2} = \Omega(-1, \pi/4, 6)$  as shown in Fig. 5.6 (light areas).

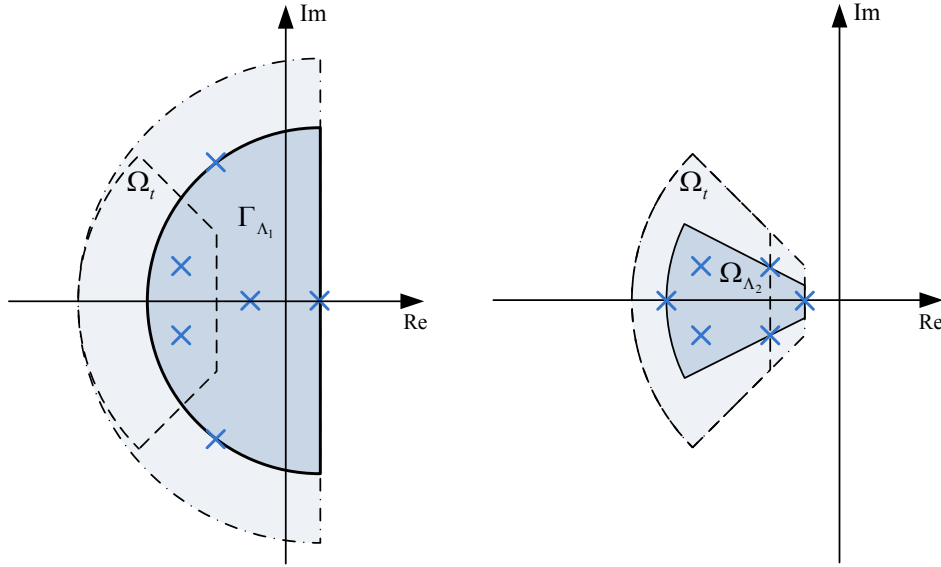


Figure 5.6 Examples of unstable and stable sets

### 5.3.2 Algorithm

The algorithm aims at placing the closed-loop poles inside a specific target region  $\Omega_t$  by tuning the gain vector  $\mathbf{K} = [K_j] \in \mathbb{R}^p$ . It does so by building a sequence of regions  $D_0 \supset \dots \supset D_k \supset \dots \supset \Omega_t$  with the aim of converging to  $\Omega_t$ . The algorithm essentially alternates between two steps :

- Step 1 : For given  $D_k$  (corresponding to  $\Omega_t$  and the closed-loop poles placed by  $\mathbf{K}^k$ ), set  $\nu_{D_k}(\mathbf{K}) = 0$  and find a  $D_k$ -stable component  $\mathcal{C}_k$  (Corollary 5.2.4) such that any choice of gain  $\mathbf{K}$  ensures that all eigenvalues are inside  $D_k$ .
- Step 2 : Choose a gain  $\mathbf{K}^{k+1}$  inside the active component  $\mathcal{C}_k$  and define the new  $D_{k+1}$  region w.r.t  $\Omega_t$  and the set of eigenvalues obtained with  $\mathbf{K}^{k+1}$ .

#### Setting active component

Let  $\mathbf{K}^0$  be an initial, possibly arbitrary, choice of the controller gains and  $\Lambda_0 = \{\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots\}$  the resulting closed-loop poles, i.e. the eigenvalues of the closed-loop state-space matrix  $A_{cl}(\mathbf{K}^0)$ . If  $\Lambda_0 \subset \text{OLHP}$  then  $D_0 = \Omega_t \vee \Omega_{\Lambda_0}$ , otherwise  $D_0 = \Omega_t \vee \Gamma_{\Lambda_0}$ . (Note that if  $D_0 = \Omega_t$ , we stop here as  $\mathbf{K}^0$  places the closed-loop poles inside  $\Omega_t$ .)

By construction of the guardian map corresponding to  $D_0$ ,  $\nu_{D_0}(A_{cl}(\mathbf{K}^0)) = 0$ . According to Corollary 5.2.4,  $\mathbf{K}^0$  lies on the boundary of a component, say  $\mathcal{C}_1$ , assumed to be  $D_0$ -stable. Next step is to find  $\mathbf{K}^1$  which lies strictly inside  $\mathcal{C}_1$ , referred to as the active component for this step. (Refer to Section 5.3.2 for explanations on why and how this is done.) This new choice of controller gains  $\mathbf{K}^1$ ; it can be shown that  $D_1 \subset D_0$  where  $D_1$  is obtained in a similar fashion as  $D_0$  using  $\Lambda_1$ , the set of eigenvalues of  $A_{cl}(\mathbf{K}^1)$ , i.e.  $D_1 = \Omega_t \wedge \Omega_{\Lambda_1}$  or  $D_1 = \Omega_t \wedge \Gamma_{\Lambda_1}$ . The procedure is then repeated for  $D_1$ ,  $\mathbf{K}^1$  and  $\nu_{D_1}(\cdot)$  in order to find  $\mathbf{K}^2$  (inside the new active component) and

consequently the new set  $D_2$  is a subset of  $D_1$ , i.e  $D_2 \subset D_1 \subset D_0$ .

In light of the way that the  $D_i$ 's are constructed (set operation with  $\Omega_t$ ), the sequence of regions  $D_k$  is built to tend towards  $\Omega_t$ , though no guaranty exists that  $\Omega_t$  will be reached. In the worst case, we will reach a limiting region where no improvement can be obtained. Algorithm 1 illustrates this.

Since we are using output feedback, any uncontrollable pole of the open-loop system outside  $\Omega_t$  will stop the progression of  $D_k$ 's towards  $\Omega_t$ . For instance, recall that output feedback being used, we have no theoretical means to ascertain *a priori* whether that  $\Omega_t$  can be reached or not.

### Search inside an active component

According to Corollary 5.2.4, any choice of gains  $\mathbf{K}$  strictly inside a stable component  $\mathcal{C}_1$  ensures that all the eigenvalues of  $A_{cl}(\mathbf{K})$  are strictly inside  $D_0$ . As  $D_0$  is defined according to the closed-loop eigenvalues placed by  $\mathbf{K}_0$ , some eigenvalues lie on the border of  $D_0$  and consequently,  $\nu_{D_0}(\mathbf{K}_0) = 0$ .

The main and intuitive idea is that by picking a new vector  $\mathbf{K}$  well inside the active component  $\mathcal{C}_1$ , hence sufficiently far from its border, the resulting closed-loop poles will also move well inside  $D_0$ , hence far from its border. This ensures that, in the next step,  $D_1 \subset D_0$ . This is what Algorithm 2 does (see below).

**Remark 5.3.4.** *The main search directions can be possibly enriched with other search directions as in direct search methods (Higham, 1993; Kolda et al., 2003). Another alternative would be to consider the local gradient as the unique search direction and to use Lemma 5.2.6. One could presume that the farther from the boundary of the component, the better and so increase the iteration count.*

**Example 5.3.5.** *The same system and constraints as in Example 5.2.5 are considered with  $(k_1^0, k_2^0) \in [-10, 10] \times [-10, 10]$ . Figure 5.7 illustrates the algorithm behaviour with the starting point  $(k_1, k_2) = (3, 2.5)$ .*

### 5.3.3 Example

We consider here the synthesis of a PI controller for the following unstable system

$$P(s) = \frac{(s+5)}{(s^2 - s + 9)} \quad (5.13)$$

We aim at placing the closed-loop poles inside the target region  $\Omega_t = \Omega(-2, \pi/4, 12)$ . The feedback configuration is illustrated in Fig. 5.8. Table 5.1 contains the open-loop poles and Fig. 5.9 shows their position in the complex plane as well as the target region  $\Omega_t$ .

**Algorithm 1.** Algorithm for pole confinement in target subregion

- 0. Initialization.** Choose a fixed control architecture with tunable gains  $\{K_j : j = 1 \dots p\}$  stacked in a vector  $\mathbf{K} \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$  and  $\Omega_t = \Omega(\alpha_t, \theta_t, \omega_t)$  a target region.  
Set  $\mathbf{K}^0$  an initial choice of gains.  
Set the counter  $k \leftarrow 0$ .
- 1. Test of pole confinement.**  
Compute the eigenvalues of  $A_{cl}(\mathbf{K}^k)$ ,  $\Lambda_k = \{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots\}$ . If  $\Lambda_k \subset \Omega_t$  then **Stop**.
- 2. Determination of a new  $D_k$ -stability region.**  
If  $A_{cl}(\mathbf{K}^k)$  is unstable, then  $D_k = \Omega_t \vee \Gamma_{\Lambda_k}$   
Else  $D_k = \Omega_t \vee \Omega_{\Lambda_k}$ .
- 3. Choice of a new stabilizing gain vector w.r.t.  $D_k$ .**  
Apply Algorithm 2 to find a new vector  $\mathbf{K}^{k+1}$  with  $\Omega = D_k$  and  $\mathbf{K} = \mathbf{K}^k$  (by definition of  $D_k$ ,  $\nu_{D_k}(A_{cl}(\mathbf{K}^k)) = 0$ .)
- 4. Stopping criteria.**  
If  $\|\mathbf{K}^k - \mathbf{K}^{k+1}\| \leq \epsilon_K(1 + \|\mathbf{K}^k\|)$  (with  $\epsilon_K$  arbitrary small positive value) then **Stop**  
Else set  $k \leftarrow k + 1$  and go back to **Step 1**.

**Algorithm 2.** Algorithm to find a new vector gain inside active component

- 0. Initialization.**  
Let  $D_0$  and  $\mathbf{K}^0$  such that  $\nu_{D_0}(\mathbf{K}^0) = 0$  and  $n$  the maximum desired number of main loop iterations. Set the counter  $m \leftarrow 0$ .
- 1. Main loop.**  
While  $m \leq n$   
  For  $i$  from 1 to  $p$   
    – Fix all the gains  $K_j$  of  $\mathbf{K}$  to their current values but  $K_i$ .  
    – The guardian map  $\nu_{D_0}(\mathbf{K})$  depends now only on  $K_i$ .  
    – Using Lemma 5.2.6, find the largest stability interval  $]\underline{K}_i, \overline{K}_i[$  containing  $K_i^m$ .  
    – Set  $K_i^{m+1} \leftarrow (\underline{K}_i + \overline{K}_i)/2$ .  
  End  
  A new gain vector  $\mathbf{K}^{m+1}$  is then obtained.  
  – If  $\|\mathbf{K}^m - \mathbf{K}^{m+1}\| \leq \epsilon_K(1 + \|\mathbf{K}^m\|)$  (with  $\epsilon_K$  arbitrary small positive value) then **Stop**  
  – Else set  $m \leftarrow m + 1$ .  
End

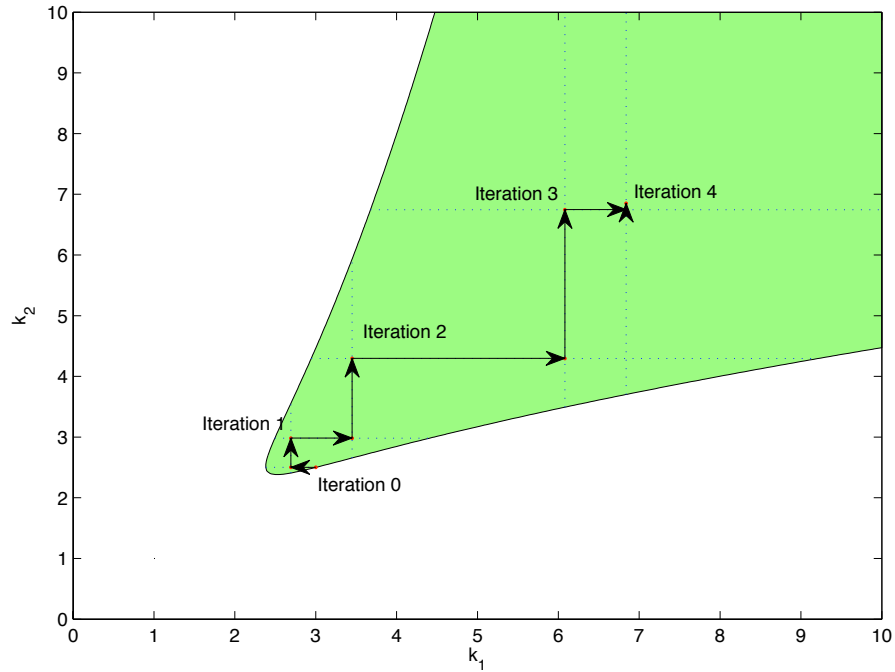


Figure 5.7 Search algorithm illustration

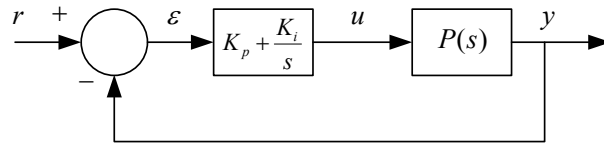


Figure 5.8 Feedback configuration

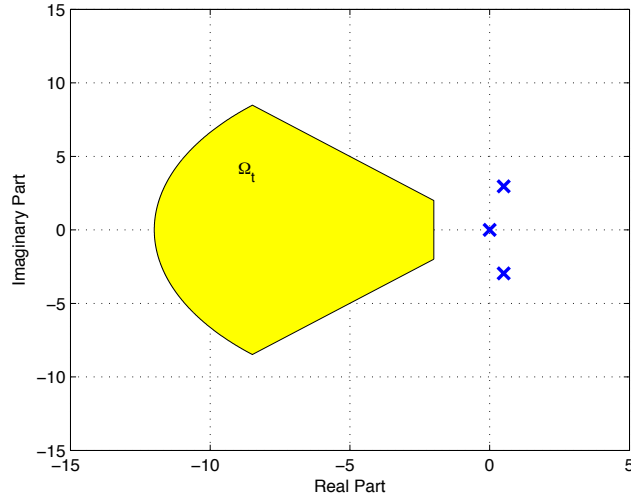
Tableau 5.1 Open-loop poles

	Poles	Damping	Pulsation
$\lambda_1$	$= 0$	$-1$	$0$
$\lambda_{2,3}$	$= 0.5 \pm 2.96i$	$-0.1666$	$3$

The closed-loop state matrix is :

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5K_i & -(9 + K_i + 5K_p) & -(K_p - 1) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

and the corresponding guardian maps (see Eqs.(5.3)-(5.6)) are used to guard the successive

Figure 5.9 Region  $\Omega_t$  and open-loop poles

regions  $D_k$ .

Table 5.2 summarizes the different iterations of our algorithm. For example, at iteration 0, the initial gain couple is  $(K_p^0, K_i^0) = (0, 0)$  and the closed-loop poles are the open-loop ones. The region  $D_0 = \Omega_t \vee \Gamma_{\Lambda_0} = \Gamma(0.5, 12.5)$  is consequently defined according to Algorithm 1 (Fig. 5.10.a). At iteration 1, guardian maps corresponding to the region  $D_0$  (Fig. 5.10.b) is drawn and a new couple  $(K_p^1, K_i^1) = (14.04, 48.74)$  is chosen inside a stable component using Algorithm 2. The new closed-loop poles define a new region  $D_1 = \Omega_t \vee \Omega_{\Lambda_1} = \Omega(-2, 1.016, 12) \subset D_0$ . At iteration 2, Algorithm 2 sets a new couple  $(K_p^2, K_i^2) = (18.97, 66.01)$  inside the component drawn for  $D_1$  and so on until eventually reaching the region  $\Omega_t$ . Figures 5.10.{a-c-e} show the successive regions  $D_k$  and the closed-loop poles before ( $\times$ ) and after ( $+$ ) the application of Algorithm 2. Figures 5.10.{b-d-f} illustrate the plots of the corresponding guardian maps as well as the initial ( $\times$ ) and final ( $+$ ) couples chosen in each component using Algorithm 2.

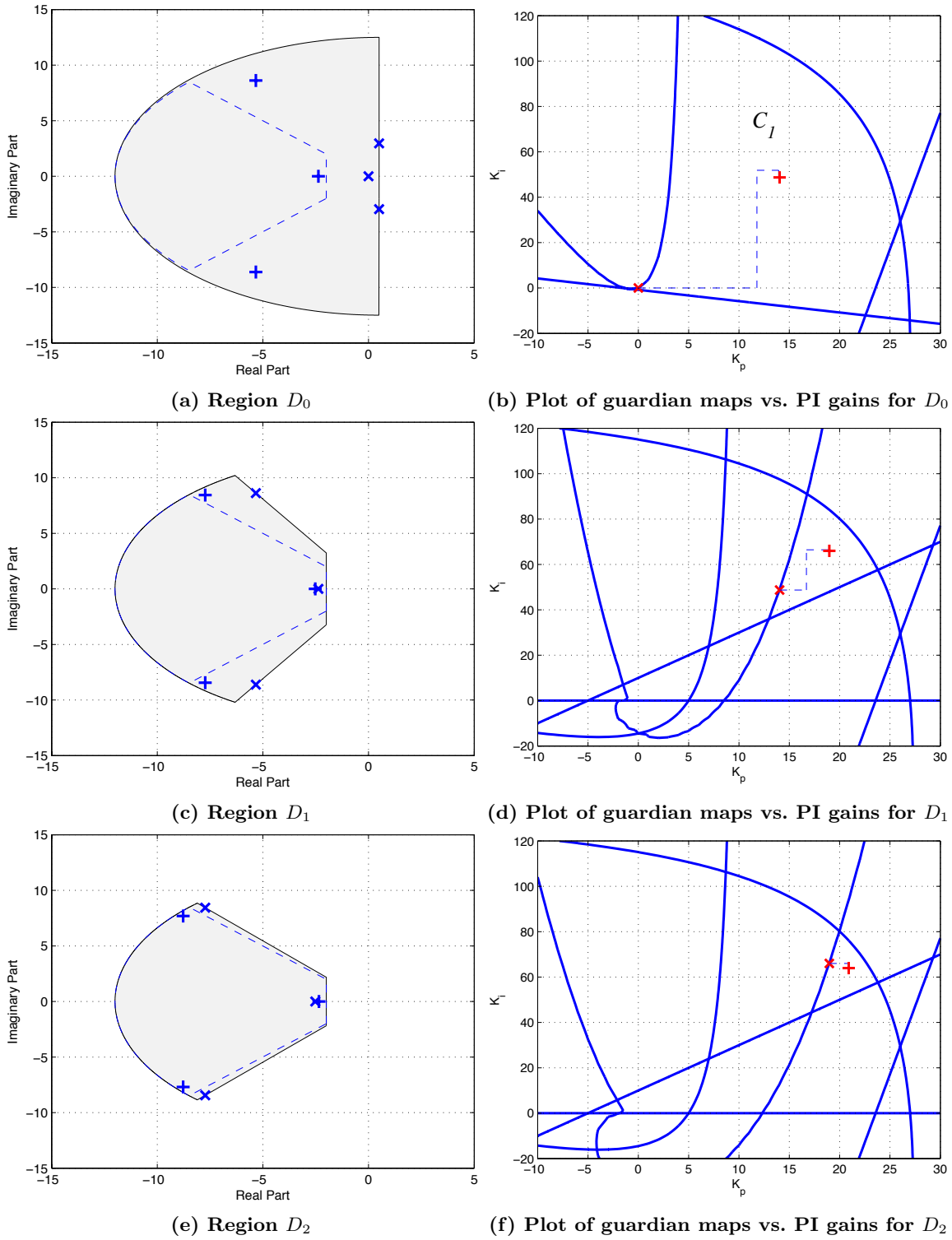
Figure 5.10 Guardian map plot for the successive regions  $D_k$

Tableau 5.2 Iterations of the algorithm

#k	$(K_p^k, K_i^k)$	Closed-loop Poles	Damping	Pulsation	$D_k$
0	(0, 0)	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_{2,3} = 0.5 \pm 2.96i$	$-1$ $-0.1666$	$1$ $3$	$D_0 = \Gamma(0.5, 12.5)$
1	(14.04, 48.74)	$\lambda_1 = -2.3751$ $\lambda_{2,3} = -5.3321 \pm 8.6127i$	$1$ $0.5264$	$2.3751$ $10.1297$	$D_1 = \Omega(-2, 1.016, 12)$
2	(18.97, 66.01)	$\lambda_1 = -2.5209$ $\lambda_{2,3} = -7.7273 \pm 8.4391i$	$1$ $0.6753$	$2.5209$ $11.4425$	$D_2 = \Omega(-2, 0.829, 12)$
3	(20.90, 63.95)	$\lambda_1 = -2.3466$ $\lambda_{2,3} = -8.7769 \pm 7.6957i$	$1$ $0.7519$	$2.3466$ $11.6730$	$D_3 = \Omega_t$

## 5.4 Flight Controller Problem

In this section, we describe the *Bombardier Inc.'s Challenger 604* aircraft longitudinal control problem. After a short description of the open-loop model, the controller architectures and the requirements, also known as handling qualities, are presented.

### 5.4.1 Open-loop model description

#### Short-period model

For design purposes, only the short-period motion is considered as we are mainly interested in controlling the short term response of the aircraft<sup>1</sup> :

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_w & U_0 & Z_\epsilon \\ M_w & M_q & M_\epsilon \\ E_w & E_q & E_\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \\ \epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_e} \\ E_{\delta_e} \end{bmatrix} \delta_e. \quad (5.15)$$

At trimmed level flight, the dimensional coefficients  $Z_w$ ,  $Z_\epsilon$ ,  $M_w$ ,  $M_q$ ,  $M_\epsilon$ ,  $E_w$ ,  $E_q$ ,  $E_\epsilon$ ,  $Z_{\delta_e}$ ,  $M_{\delta_e}$  and  $E_{\delta_e}$  depend mainly on Mach number and altitude. The state variable  $\epsilon$  denotes the tail downwash angle. The downwash is experienced by a horizontal tail placed in the flow behind the wing. This vortex diminishes the incidence angle of the tail by an angle  $\epsilon$ . The available measurements are pitch rate  $q$  and normal acceleration  $n_z$  :

$$\begin{bmatrix} q \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{Z}_w & \tilde{Z}_q & \tilde{Z}_\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \\ \epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{Z}_{\delta_e} \end{bmatrix} \delta_e \quad (5.16)$$

---

1. Phugoid mode is truncated as usually done in flight control design.



where

$$n_z = (\dot{w} - U_0 q - l_x \dot{q})/g \quad (5.17)$$

so  $\tilde{Z}_w$ ,  $\tilde{Z}_q$ ,  $\tilde{Z}_\epsilon$  and  $\tilde{Z}_{\delta_\epsilon}$  can be deduced from the other coefficients. We will consider 20 flight conditions at different altitudes and Mach numbers as illustrated in Fig.5.11.

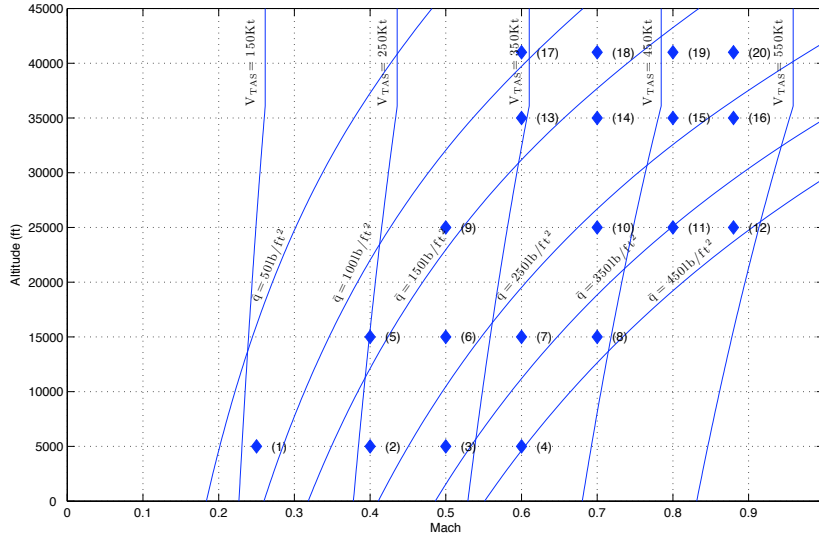


Figure 5.11 Flight envelope

Figure 5.12 illustrates the open-loop short period pole dispersion over the flight envelope. The solid line indicates flight conditions with the same altitude. By a simple observation, we can conclude that with increasing altitude, damping diminishes and with increasing Mach, natural pulsation increases too.

### Actuator and IRU sensors

Due to the presence of delays in the actuator dynamics, the actuator model is a  $15^{th}$  order transfer function where the time delays are Pade approximations. In the  $[0; 20]$  (rad/s) bandwidth however, the actuator is practically a first order filter. Similarly, both IRU sensors are modelled by  $15^{th}$  order transfer functions because of delays.

### Open-loop reduction

Because of a high order open-loop transfer function which includes those of the actuator, the aircraft and the sensors, several order reduction methods (frequency reduction, modal truncation, balanced reduction, Hankel approximation) have been tested, and a mix of these methods has been used. First, the open-loop is simplified by gathering all the different time delays coming from actuator and sensors, and by applying a Pade approximation on the resulting single delay. The

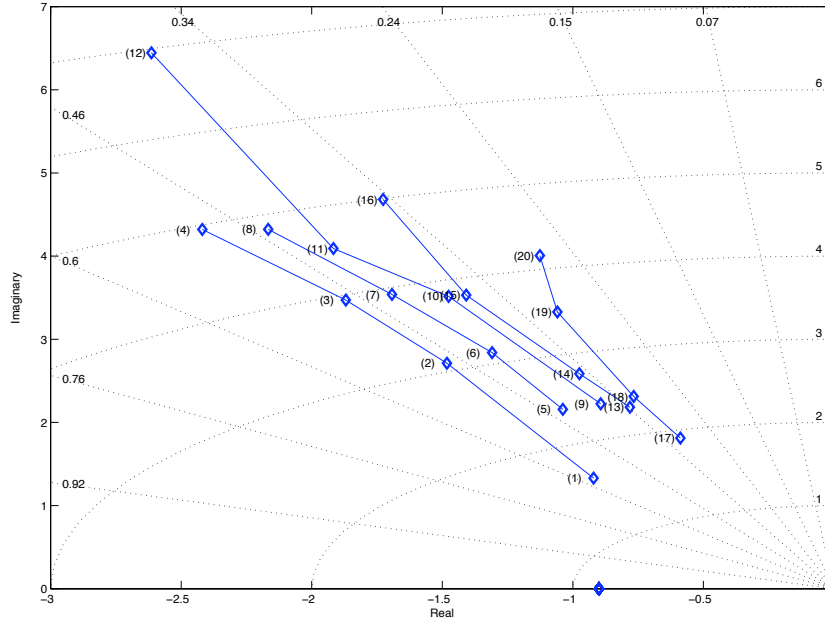


Figure 5.12 Open-loop short period pole dispersion

system order is thus lowered from a 35<sup>th</sup> to a 16<sup>th</sup> order. The reduced system is then obtained by balancing the system with MATLAB<sup>®</sup> function `balreal` and by reducing the state vector using singular perturbation methods with the `modred` function. Obviously we seek a reduced open-loop with an order as low as possible while ensuring that the design on the low order model will still give good results on the high order model. After several tests, a satisfactory 8<sup>th</sup> order reduced model is obtained. The corresponding open-loop state-space model is then denoted as :

$$\dot{X} = AX + B\delta_c \quad (5.18)$$

$$q = C_q X \quad (5.19)$$

$$n_z = C_{n_z} X \quad (5.20)$$

### 5.4.2 Controller architectures

Figures 5.13 and 5.14 show two different longitudinal flight controller architectures to track pitch rate commands, respectively known as pitch rate control and  $C^*$  control systems. Both architectures consist of a stability augmentation system (SAS) and a control augmentation system (CAS) as is usually done in classical flight control design.

#### Pitch rate control

In the case of the pitch rate control system (Figure 5.13), the variable parameters are the SAS gains,  $K_q$  and  $K_{n_z}$ , the PI gains,  $K_p$  and  $K_i$ , and the feedforward gain  $K_{ff}$ . The noise and washout

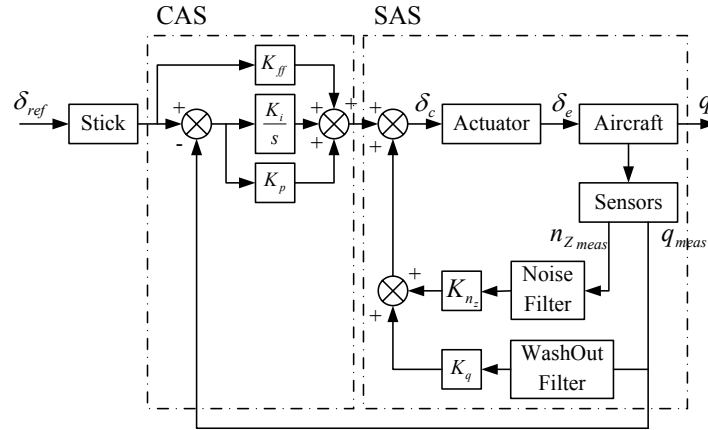
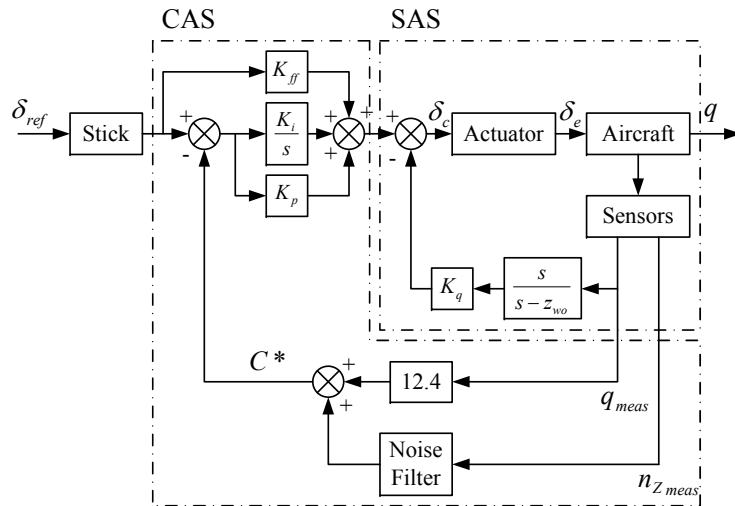


Figure 5.13 Pitch rate control system

Figure 5.14  $C^*$  control system

filters are fixed first order filters. In this case, the problem can be viewed as a static output feedback problem. By adding the two filter states and the integrator state to the open-loop state vector, the closed-loop state-space model is then :

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{x}_q \\ \dot{x}_{n_z} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A + (K_q - K_p)BC_q & -K_qB & K_{n_z}B & K_iB \\ 0.9C_q & -0.9 & 0 & 0 \\ 10C_{n_z} & 0 & -10 & 0 \\ -C_q & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{cl}} \begin{bmatrix} X \\ x_q \\ x_{n_z} \\ x_i \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} (K_p + K_{ff})B \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_{cl}} \delta_{ref} \quad (5.21)$$

$$q = \underbrace{\begin{bmatrix} C_q & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_{cl}} \begin{bmatrix} X \\ x_q \\ x_{n_z} \\ x_i \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

where  $x_i$  denotes the integrator state,  $x_{n_z}$  the noise filter state on  $n_z$  and  $x_q$  the washout filter state. The controller gain matrix is denoted by

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} K_q & K_{n_z} & K_p & K_i & K_{ff} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

### $C^*$ control

The  $C^*$  control system (Figure 5.14) uses a mixed output, the so-called  $C^*$ , which is a combination of the load factor  $n_z$  and the pitch rate  $q$  :

$$C^* = n_z + 12.4q \quad (5.24)$$

The 12.4 factor is set so that at a mild velocity, called cross-over velocity ( $V_0 = 400$  ft/s), the pilot is equally sensitive to the normal acceleration and the pitch rate (Field, 1993). Several aircraft in current operation use  $C^*$  type controllers (F-16, F-18, A320-340). Nowadays, the term  $C^*$  controller designates any controller which feedbacks normal acceleration, pitch rate and other quantities in any ratio. The SAS variable parameters are the gain  $K_q$  and the washout filter pole  $z_{wo}$ . Unlike the former architecture, the CAS outer loop consists of the feedback of the  $C^*$  output instead of  $q$ ; nevertheless the structure remains the same with the PI controller ( $K_p$  and  $K_i$ ) and the feedforward gain  $K_{ff}$ . The closed-loop model is then :

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{x}_q \\ \dot{x}_{n_z} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A + (K_q - 12.4K_p)BC_q & -K_qB & -K_pB & K_iB \\ -z_{wo}C_q & z_{wo} & 0 & 0 \\ 4C_{n_z} & 0 & -4 & 0 \\ -12.4C_q & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{cl}} \begin{bmatrix} X \\ x_q \\ x_{n_z} \\ x_i \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} (K_p + K_{ff})B \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_{cl}} \delta_{ref} \quad (5.25)$$

$$q = \underbrace{\begin{bmatrix} C_q & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_{cl}} \begin{bmatrix} X \\ x_q \\ x_{n_z} \\ x_i \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

The controller gain matrix is denoted by

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} K_q & z_{wo} & K_p & K_i & K_{ff} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

### 5.4.3 Handling quality constraints

The overall performance objective is to track pitch rate commands with predicted Level 1 handling qualities and desired time domain response behavior. The handling quality criteria considered in this article are short period mode damping ratio  $\zeta_{sp}$ , settling time ST, Gibson's dropback  $Drb$  (Gibson, 1997), gain margin  $M_G$  and phase margin  $M_\varphi$  of the CAS loop. The boundaries of these criteria are defined by military standards (US Department of Defense, 1997). Even though handling qualities are primarily defined for military aircraft, they are usually applied to commercial aircraft with slight modifications derived from the manufacturer's experience. Table 5.3 summarizes the considered handling quality boundaries. More handling qualities may be taken into account like frequential criteria i.e pitch attitude bandwidth  $\omega_{BW_\theta}$  and phase delay  $\tau_p$  (Hodgkinson, 1999).

Tableau 5.3 Handling Quality Boundaries

HQs	Level 1	Good Level 1
$\zeta_{sp}$	$0.35 < \zeta_{sp} < 1.35$	$0.7 < \zeta_{sp} < 1.35$
ST	$ST(2\%) \leq 3 \text{ (s)}$	$ST(1\%) \leq 3 \text{ (s)}$
$Drb$	$-0.2 \leq Drb \leq 0.5$	$0.0 \leq Drb \leq 0.3$
$M_G$	$> 6 \text{ (dB)}$	
$M_\varphi$	$> 45 \text{ (}^\circ\text{)}$	

## 5.5 Controller design method

A design method that meets handling qualities (Table 5.3) is shown. The damping, settling time and dropback constraints are guaranteed *a priori* in the synthesis phase while gain and phase margins are checked *a posteriori*.

### 5.5.1 Closed-loop pole confinement

In order to apply the pole confinement Algorithm 1, one has to first define the target region  $\Omega_t = \Omega(\alpha, \theta, \omega)$ . The damping and settling time constraints (Table 5.3) are cast in terms of pole location constraint. If we aim to satisfy good level 1 handling qualities, pole dampings must be greater than 0.7 (i.e  $\theta = \cos^{-1}(0.7)$ ) and pole real parts less than  $\alpha = -5/3^2$ . Nevertheless the washout filter pole and the system zeros limit the pole displacements and so the real part constraint can be hard to fulfill. The requirement is then loosened to  $\alpha = -0.9$ ; the settling time can still be satisfied as a slow stable pole sufficiently close to a zero hardly affects the time response. Moreover,

2. 1% settling time is approximated here by  $5/(\zeta\omega)$

the damping constraint is adequate for low frequency dominant pole but too stringent for high frequency poles (those coming from the actuator for example); the damping constraint is thus set to  $\zeta = 0.6$ , i.e.  $\theta = \cos^{-1}(0.6)$ . No limitation is imposed on the pole's natural frequency  $\omega$ . The target region is finally set to  $\Omega_t = \Omega(-0.9, \cos^{-1}(0.6))$  (Fig. 5.15).

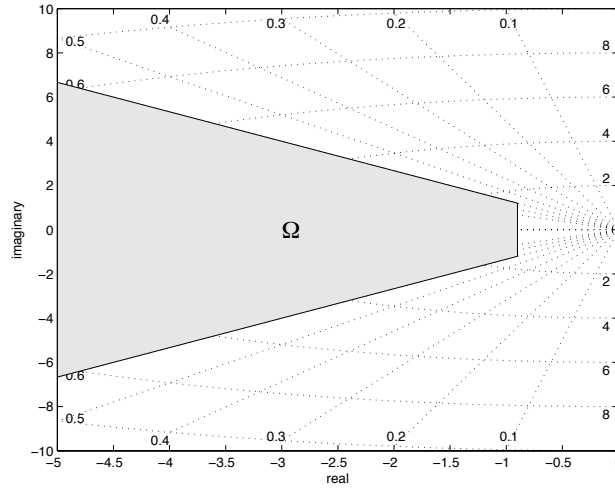


Figure 5.15 Target zone  $\Omega$

The guardian map corresponding to  $\Omega_t$  is :

$$\nu_{\Omega_t}(A_{cl}) = \nu_m(A_{cl})\nu_d(A_{cl}) \quad (5.28)$$

with  $A_{cl}$  the closed-loop state matrix defined in Eqs (5.21) or (5.25) and

- for stability margin

$$\nu_m(A_{cl}) = \det(A_{cl} \odot I - \alpha I \odot I) \det(A_{cl} - \alpha I) \quad (5.29)$$

- for damping cone<sup>3</sup>

$$\nu_d(A_{cl}) = \det(A_{cl}^2 \odot I + (1 - 2\zeta^2)A_{cl} \odot A_{cl}) \det(A_{cl}) \quad (5.30)$$

As  $A_{cl}$  depends on  $\mathbf{K}_1$  (pitch rate control) or  $\mathbf{K}_2$  ( $C^*$  control), the guardian map is actually a function of the gains. The feedforward gain  $K_{ff}$  has no influence on the matrix  $A_{cl}$ ; thus it does not appear in the guardian map.

- For the pitch rate control

$$\nu_{\Omega_t}(A_{cl}(\mathbf{K}_1)) = \nu_{\Omega_t}(\mathbf{K}_1) = \nu_{\Omega_t}(K_q, K_{n_z}, K_p, K_i) \quad (5.31)$$

---

3.  $\zeta = \cos\theta$

- For the  $C^*$  control

$$\nu_{\Omega_t}(A_{cl}(\mathbf{K}_2)) = \nu_{\Omega_t}(\mathbf{K}_2) = \nu_{\Omega_t}(K_q, z_{wo}, K_p, K_i) \quad (5.32)$$

Given  $\Omega_t$  and the closed-loop matrix  $A_{cl}$ , one can apply Algorithm 1 to try to find a set of gains that place the closed-loop poles inside  $\Omega_t$ .

### 5.5.2 Dropback adjustment

It was shown in (Saussié *et al.*, 2006b) that Gibson's dropback can simply be expressed analytically in terms of transfer function coefficients or state-model matrices, and thus in terms of the controller gains. The resulting formulae remains valid as long as the settling time is satisfactory (i.e. in the set limits). If we denote :

$$\frac{q}{\delta_{ref}} = \frac{s^m + \dots + a_1 s + a_0}{s^n + \dots + b_1 s + b_0} = C (sI - A)^{-1} B \quad (5.33)$$

Then the dropback is given by :

$$\frac{Drb}{q_{ss}} = \frac{a_1}{a_0} - \frac{b_1}{b_0} = \frac{CA^{-2}B}{CA^{-1}B} \quad (5.34)$$

The proof can be found in (Saussié, 2004). By applying Formula (5.34) on state-space models [Eqs.(5.21)-(5.22) and Eqs.(5.25)-(5.26)] and some classic matrix manipulations, one can prove that the dropback can be explicitly written as :

- Pitch rate controller

$$\frac{Drb}{q_{ss}} = \frac{K_{ff}}{K_i} + \frac{1 + K_{n_z} C_{n_z} A^{-1} B}{K_i C_q A^{-1} B} \quad (5.35)$$

- $C^*$  controller

$$\frac{Drb}{q_{ss}} = \frac{K_{ff}}{K_i} + \frac{1}{K_i (12.4C_q + C_{n_z}) A^{-1} B} + \frac{C_q A^{-2} B}{C_q A^{-1} B} - \frac{(12.4C_q + C_{n_z}) A^{-2} B - \frac{1}{4} C_{n_z} A^{-1} B}{(12.4C_q + C_{n_z}) A^{-1} B} \quad (5.36)$$

In both cases, the proportional gain  $K_p$  has no influence on the dropback value. The same conclusion can be made for the gain  $K_q$  and the pole  $z_{wo}$  related to the washout filter feedback. Moreover, as the gain  $K_{ff}$  has no influence on the closed-loop pole location, it will be dedicated to tune exactly the dropback value after tuning the other gains with the pole confinement algorithm.

### 5.5.3 Design procedure

The synthesis procedure can be summarized as :

1. Handling qualities (damping and settling time) are translated into target region  $\Omega_t$
2. Pole confinement in  $\Omega_t$  is done with Algorithm 1 by tuning closed-loop gains, depending on controller architecture.

3. Feedforward gain  $K_{ff}$  is chosen to set Gibson's dropback (to zero for instance) with Eqs (5.35) or (5.36) depending on the architecture.
4. Gain and phase margins of the CAS loop are checked *a posteriori*. If they are not satisfactory, they can be improved by adjusting gains within the limits of the guardian map component defined by  $\nu_{\Omega_t} = 0$

#### 5.5.4 Design example

For an application example of our procedure, we consider the flight condition #12 with the pitch rate control architecture (Tab.5.4).

Tableau 5.4 Flight Condition #12

Mach Number	Altitude	Dynamic Pressure
0.88	25000ft	426.3psf

The initial vector is set to zero. After 4 iterations, the algorithm finds satisfactory gains. As before, if we define  $D_k = \Omega_t \vee \Omega_{\Lambda_k} = \Omega(\alpha_k, \theta_k)$  at iteration  $k$ , Table 5.5 shows the successive regions  $D_k$  computed by our algorithm.

Tableau 5.5 Evolution of  $D_k$

Iteration k	$\zeta_k$	$\theta_k$	$\alpha_k$
0	0	$\pi/2$	0
1	0.237	1.331	-0.9
2	0.399	1.160	-0.9
3	0.549	0.989	-0.9
4	0.6	0.927	-0.9

Table 5.6 shows the final pole placement which is inside the target region  $\Omega_t$  and Figure 5.16 shows the different pole location iterations to reach this result. The gain  $K_{ff}$  is adjusted to provide a dropback value of 0 thanks to Eq. (5.35) :

$$K_{ff} = \frac{Drb}{q_{ss}} K_i - \frac{1 + K_{n_z} C_{n_z} A^{-1} B}{C_q A^{-1} B} = -\frac{1 + K_{n_z} C_{n_z} A^{-1} B}{C_q A^{-1} B} \quad (5.37)$$

Fig. 5.17 finally illustrates the pitch rate  $q$  response to a stick input for every iterated gains. The 2% settling time is about 2.41 s, which is reasonable, and even if the overshoot is 25%, it is suitable<sup>4</sup>. Indeed, the reader has to keep in mind that Gain and phase margins are calculated on the CAS

4. Satisfying a null or positive dropback means larger overshoots.



loop by opening the loop right before the PI controller :  $M_G = 6.46$  dB and  $M_\varphi = 53.75^\circ$ . Thus no further ajustement is needed.

Tableau 5.6 Pole placement on flight condition #12 - Pitch rate control

Open loop poles		Final closed loop poles
$\begin{cases} 0 \\ -0.9 \\ -2.61 \pm 6.44i \quad (\zeta = 0.376) \\ -15.2 \end{cases}$	$\Rightarrow$	$\begin{cases} -1.06 \\ -1.66 \pm 1.41i \quad (\zeta = 0.761) \\ -3.94 \pm 4.66i \quad (\zeta = 0.645) \end{cases}$

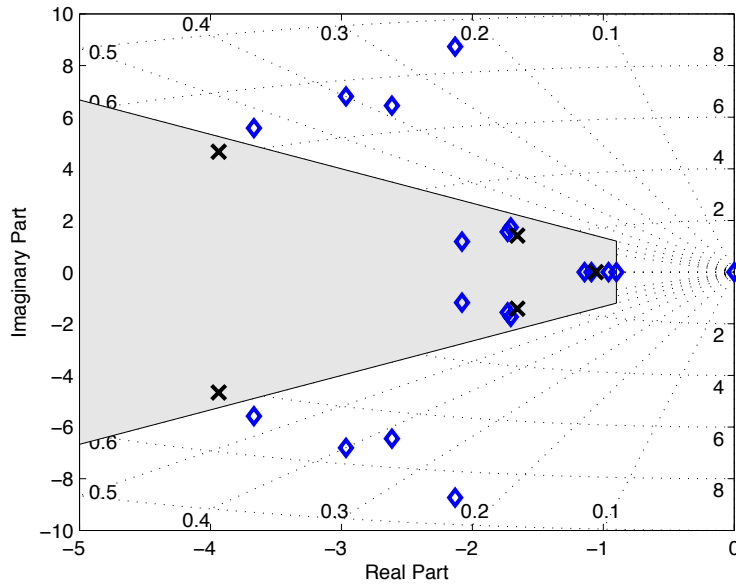


Figure 5.16 Pole iterations on flight condition #12 - Pitch rate control

## 5.6 Results on the 20 flight conditions

The application of our procedure on the 20 different flight conditions (Fig. 5.11) using both architectures yields the following results.

### 5.6.1 Pitch rate control

Fig. 5.18 illustrates the pole placement for all 20 flight conditions. The damping constraint ( $\zeta > 0.6$ ) is satisfied for each flight condition as for the real part requirement ( $\text{Re}(\lambda) < -0.9$ ). Figure 5.19 shows the time-responses to a 5 second unit stick input in  $q$ . Except for Case 17, for which

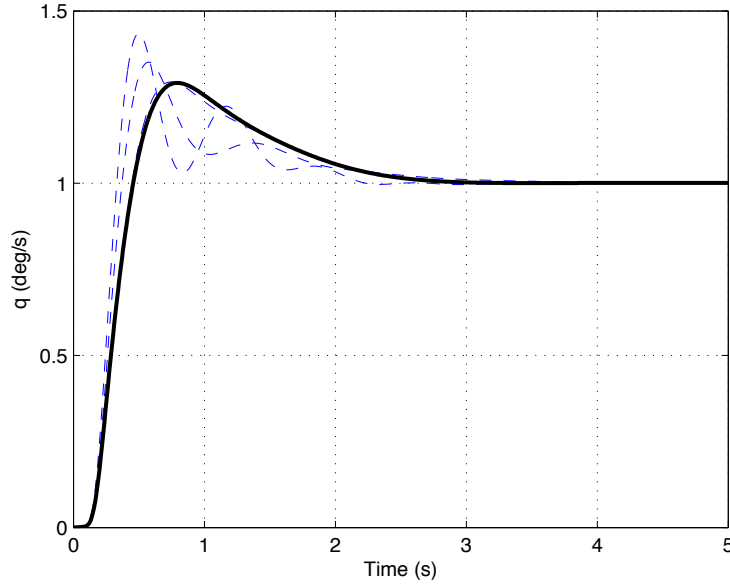


Figure 5.17 Time response iterations on flight condition #12 - Pitch rate control

the settling time is greater ( $ST = 4.79$  s), other time-responses are satisfactory. Even if Level 1 time-response requirement is not always satisfied i.e.  $2\%ST < 3$  s , the constraint should be considered more as an indication of the desired time-response without being a hard constraint. Considering  $\theta$  responses, the dropback tuning to 0 on every case ensures that after the transition period, the system behaves like a pure integrator. Even if overshoots can vary from 10% to 25% depending on the flight condition, it is a necessary evil as positive value of dropback cannot be attained without overshoot in the  $q$  time-response.

Table 5.7 summarizes the results for the 20 flight conditions. Even if there is actually only one short period mode in open-loop (physically described and identified), more complex poles can appear in closed-loop due to the dynamics of the controller and those of the actuator. Therefore, we denote by  $\zeta_{sp1}$  and  $\zeta_{sp2}$ , the damping ratio of the complex poles which lay in the short period bandwidth (between 1 rad/s and 5 rad/s for the problem at stake). As seen in the pole configuration map of Fig. 5.18, Table 5.7 confirms that the dominant closed-loop poles satisfy the damping requirement criteria. For all flight conditions, the dropback value is 0 as intended by fixing the gain  $K_{ff}$ . The 2% settling time are around 3 seconds (except for case 17 as mentioned before). The gain and phase margins of the system (CAS loop) are fulfilled.

In the case of flight condition 17, no gain changes could lead to drastic improvements. After analysis, a low frequency zero limits the reachable performance.

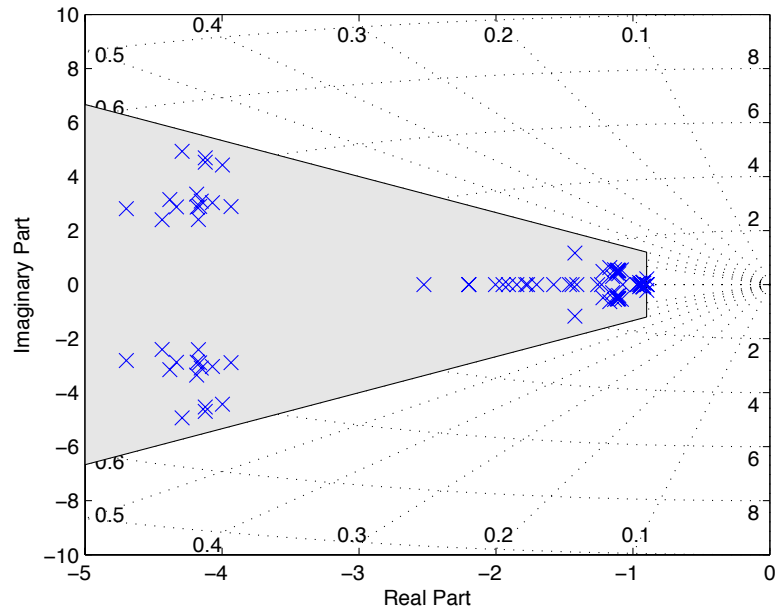


Figure 5.18 Closed-loop poles for pitch rate control

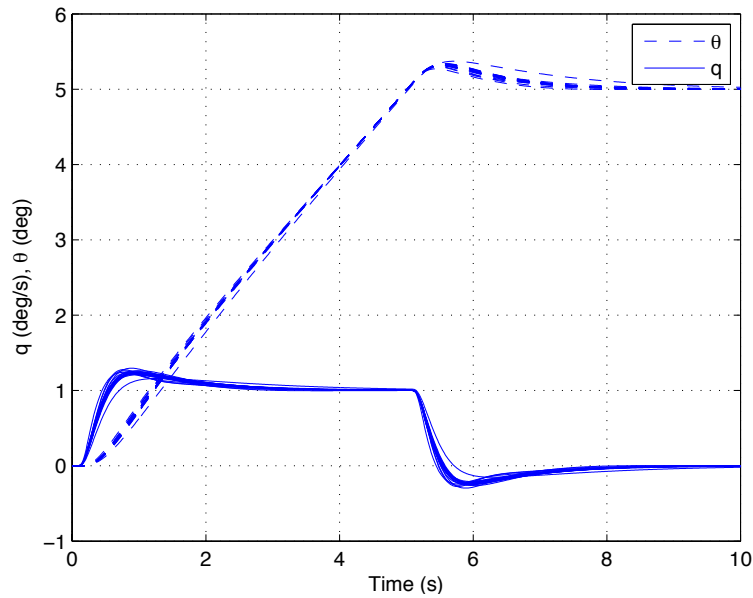


Figure 5.19 Time responses for pitch rate control

### 5.6.2 $C^*$ control

The procedure is now applied on the  $C^*$  architecture which feeds back the  $C^*$  output. The pole placement is illustrated in Fig. 5.20. As one can see, the damping constraint ( $\zeta > 0.6$ ) is satisfied for each flight condition, but this is not the case for the real part requirement (cases 9, 13, 17 &

Tableau 5.7 Handling quality results for pitch rate control

Case	$\zeta_{sp1}$	$\zeta_{sp2}$	$Drb$	ST(2%)	$M_G(\text{dB})$	$M_\varphi(^{\circ})$
1	0.99	0.87	0	3.32	12.73	63.72
2	0.92	0.89	0	3.29	11.31	57.61
3	0.90	0.85	0	3.37	8.79	56.32
4	0.89	0.81	0	3.36	7.27	54.30
5	0.99	0.91	0	3.08	16.8	70.11
6	0.93	0.91	0	3.44	8.99	55.72
7	0.89	0.83	0	3.45	7.96	53.88
8	0.90	0.80	0	3.37	7.12	54.26
9	0.97	0.65	0	3.86	10.71	58.96
10	0.90	0.82	0	3.43	7.83	53.30
11	0.90	0.80	0	3.34	7.55	55.51
12	0.76	0.65	0	2.41	6.57	53.96
13	0.99	0.67	0	3.28	12.29	73.14
14	0.99	0.87	0	2.82	15.21	71.42
15	0.90	0.80	0	3.37	8.45	55.18
16	0.86	0.78	0	3.39	7.63	58.09
17	0.99	0.88	0	4.79	13.56	63.99
18	0.99	0.67	0	3.18	12.73	76.34
19	0.03	0.86	0	3.43	7.81	54.35
20	0.95	0.82	0	3.24	7.33	56.16

18 ). Initially, the algorithm could manage to place all the poles inside the target region  $\Omega_t$  but time-responses exhibited a non desirable non minimum phase behavior. By loosening the real part constraint, this could be improved for the cases 9, 13 and 18 but as before, the case 17 remained problematic.

Figure 5.21 illustrates the  $C^*$  output time responses to a unit step stick.  $C^*$  output is usually associated with a  $C^*$  criterion that consists in ensuring that the time response lies inside a time history envelope initially derived from military aircraft tests (see (Field, 1993) and references therein).

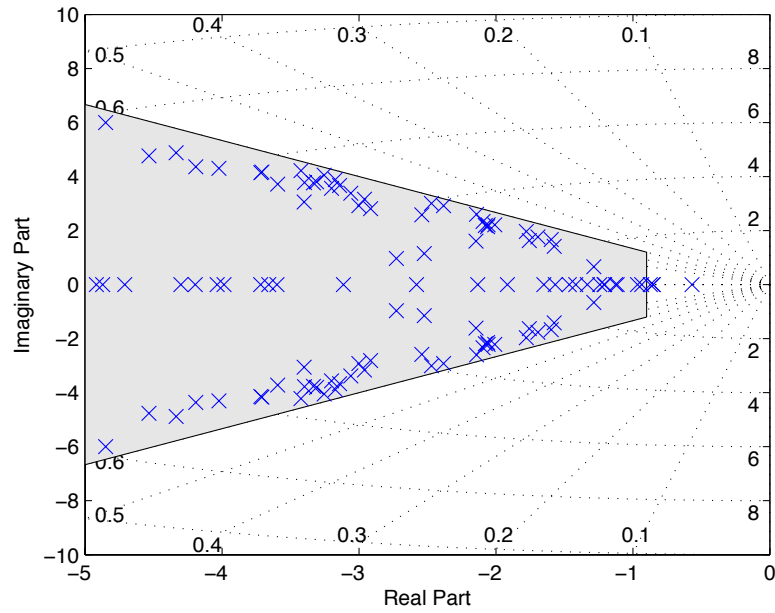


Figure 5.20 Closed-loop poles for  $C^*$  control

The time responses lie reasonably well inside the time history envelope; one could argue that some of them are slightly violating the lower boundary but one should consider that for a civil aircraft, the requirements are not as stringent as those of military aircraft.

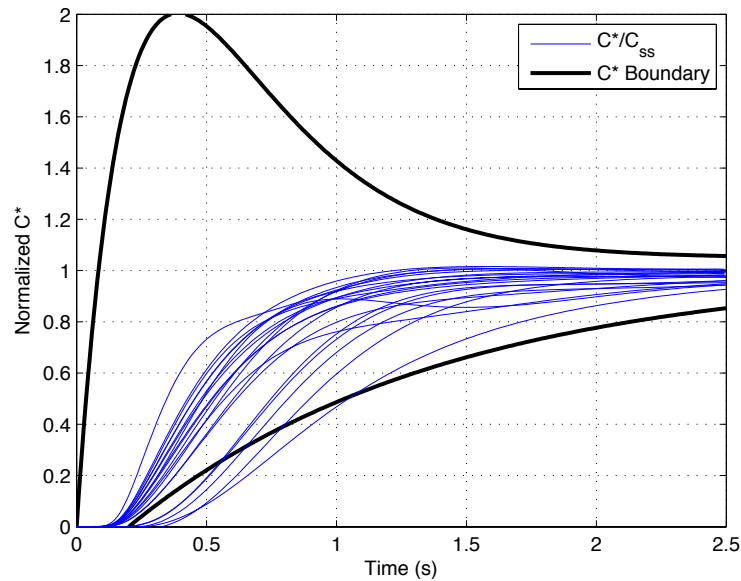


Figure 5.21  $C^*$  output time responses

Figure 5.22 shows the normalized time-responses to a 5 second unit stick input in  $q$ . If they are still satisfactory, one could notice that, unlike the pitch rate control responses, overshoots can easily reach 70%. In light of (Gibson, 1999), this does not basically represent a major issue. Again dropback value was adjusted to 0 with the gain  $K_{ff}$ .

Table 5.8 summarizes the results for the 20 flight conditions. Damping ratios are all Level 1 and 2% settling times are slightly better compared to the pitch rate control. Except for case 17, they are all under 3 seconds. The gain and phase margins of the system (CAS loop) are again all fulfilled and very good, showing the robustness of the single-loop feedback.

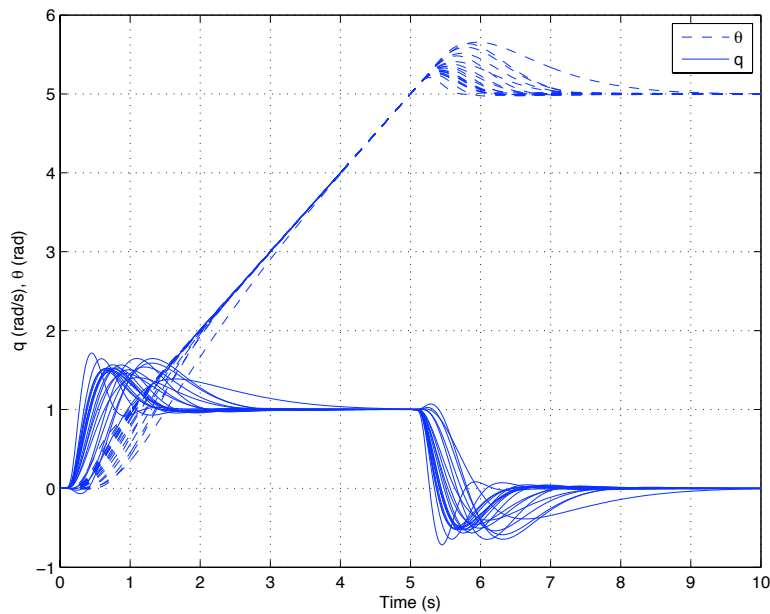


Figure 5.22 Pitch rate time responses for  $C^*$  control

All of these results were obtained for flight conditions covering the entire flight envelope. When designing well-known flight controllers in a classical scheme, one has to use intensively SISO techniques like root locus or Bode diagram to gradually adjust the gains for each flight condition; this gain tuning is then a time-consuming process. On the opposite, our procedure managed to handle automatically both architectures on many different flight conditions in a reasonable time with few adjustments while guaranteeing *a priori* specific handling qualities.

## 5.7 Conclusion

This article presents a guardian-map based design methodology to adjust the gains of two fixed architecture controllers for the longitudinal flight of a business aircraft. First, part of handling qualities are translated into a target region of the complex plane and an algorithm based upon

Tableau 5.8 Handling quality results for  $C^*$  control

<b>Case</b>	$\zeta_{sp_1}$	$\zeta_{sp_2}$	$Drb$	ST(2%)	$M_G(\text{dB})$	$M_\varphi(^{\circ})$
1	0.69	0.69	0	2.50	11.75	53.57
2	0.69	0.66	0	2.01	14.18	66.84
3	0.69	0.69	0	2.14	15.81	72.43
4	0.71	0.70	0	1.36	16.59	69.86
5	0.63	0.62	0	1.90	10.01	51.96
6	0.67	0.65	0	2.69	13.91	70.09
7	0.68	0.68	0	2.20	16.21	73.15
8	0.72	0.69	0	1.34	16.34	69.99
9	0.60	0.60	0	2.55	13.92	70.89
10	0.66	0.66	0	2.23	15.66	74.3
11	0.70	0.68	0	1.91	16.75	71.64
12	0.62	0.64	0	1.52	21.23	75.93
13	0.73	0.66	0	2.73	14.44	68.76
14	0.67	0.65	0	2.69	13.11	69.88
15	0.68	0.66	0	2.28	16.90	74.06
16	0.66	0.66	0	1.64	16.3	74.40
17	0.88	0.74	0	4.36	18.06	77.45
18	0.74	0.67	0	2.75	15.48	71.56
19	0.63	0.63	0	2.30	14.27	78.76
20	0.63	0.63	0	1.96	13.41	79.42

guardian maps places the poles inside the region. Other handling quality, namely dropback is exactly tuned using a theoretical formula and remaining handling qualities are checked *a posteriori*. In spite of the stringent fixed architecture constraint, our procedure manages to find satisfying gains through the entire flight envelope.

## CHAPITRE 6

### ARTICLE 2 : GAIN SCHEDULING WITH GUARDIAN MAPS FOR LONGITUDINAL FLIGHT CONTROL

Nous nous intéressons à présent à l'extension des algorithmes précédents au problème de séquençement de gains. L'idée des composantes de stabilité demeure essentielle et à la base de notre façon de procéder. Pour le problème de séquençement, il s'agit de faire varier de façon continue (ou pas) les gains de notre correcteur dépendamment du point de fonctionnement où l'on se trouve.

Nous proposons dans l'**article 2** une méthode basée sur les applications gardiennes pour séquencer les gains de notre loi de commande par rapport au nombre de Mach et à l'altitude. Nous partons de l'hypothèse que nous avons un premier correcteur synthétisé en un point de vol et satisfaisant les contraintes. Il s'agit donc de faire varier les gains de ce contrôleur pour qu'il soit efficace en d'autres points de vol. Contrairement aux méthodes de séquençement classiques (Leith et Leithead, 2000; Rugh et Shamma, 2000) où l'utilisateur doit synthétiser des correcteurs en plusieurs points de vol, notre algorithme nous permet de nous affranchir de cet inconvénient. En effet, la méthode alterne automatiquement entre analyse de robustesse d'un correcteur donné et synthèse d'un nouveau correcteur à la limite de stabilité du précédent jusqu'à recouvrir tout le domaine d'évolution. L'utilisateur obtient ainsi un ensemble de correcteurs générés automatiquement dont les domaines de stabilité conjoints recouvrent tout le domaine d'évolution.

Cet article a fait l'objet d'un article préliminaire (Saussié *et al.*, 2008b) présenté à la conférence *AIAA Guidance, Navigation and Control 2008* et portant sur l'exemple classique du missile de Reichert (Reichert, 1992). Le banc d'essai du missile a fourni une quantité importante d'articles où les différents auteurs ont mis en pratique leur propre approche de séquençement de contrôleurs, ce qui a constitué une base intéressante de comparaison en termes d'approche méthodique, de structures de correction et de résultats. La différence majeure réside dans le fait que l'algorithme présenté dans (Saussié *et al.*, 2008b) ne garantit pas la stabilité tout au long du processus pour un système à deux paramètres. Ce défaut a été gommé dans l'**article 2** en proposant un corollaire au Théorème 4.3.2.



# Gain Scheduling with Guardian Maps for Longitudinal Flight Control

D. Saussié, O. Akhrif, C. Bérard and L. Saydy

*Article soumis à Journal of Guidance, Control and Dynamics*

## Abstract

A new approach to gain-scheduling of linear controllers is proposed and applied to a longitudinal flight control problem. Traditionally, gain scheduling is done *a posteriori* by the interpolation of controller gains designed for several operating points or conditions. The method proposed here is based on guardian maps and does not require as many linear controller synthesis as there are design points. Rather, it extends the performance of an initial single controller carried out on an arbitrary operating point to the entire domain while ensuring generalized stability all along the process. The method, which uses a given fixed architecture controller, is successfully applied on the longitudinal flight control of a business jet aircraft.

## 6.1 Introduction

Among nonlinear control methods, gain-scheduling is one of the most used ones (Rugh et Shamma, 2000; Leith et Leithead, 2000) and efforts have been made recently to put forth a unified framework for it (Fromion et Scorletti, 2003). There are mainly two approaches to designing gain-scheduled controllers :

- The first approach consists in designing a set of linear controllers corresponding to given set of linearized models around equilibrium points (Rugh, 1991; Lawrence et Rugh, 1995; Shamma et Athans, 1990) which are then interpolated versus scheduling variables which may be exogenous and/or endogenous. Interpolation can however become a challenging question when dynamic compensators are considered (Stilwell et Rugh, 2000; Clément et Duc, 2001), and implementation problems can occur (Lawrence et Rugh, 1995; Leith *et al.*, 1998; Mehendale et Grigoriadis, 2004).
- The second approach ensures *a priori* global stability of the closed-loop system and is based on Linear Parameter-Varying (LPV) techniques (Packard, 1994; Apkarian et Gahinet, 1995). The controllers are directly obtained in an LPV form and so, no *a posteriori* interpolation is needed. Control problems are formulated as Linear Matrix Inequalities (LMI) optimization problems (Boyd *et al.*, 1994; Gahinet *et al.*, 1994; Prempain et Postlethwaite, 2008). Unfortunately, this approach can be rather conservative especially when the operating domain becomes large and may lead to non-feasible optimization problems.

The method proposed here lies somewhere in between these two categories and seeks to avoid their respective disadvantages while preserving their benefits. Unlike classic gain-scheduling for

which the design has to be carried out, *a priori*, over many equilibrium points, our method only needs one initial controller from which the procedure automatically deduces controllers that satisfy the stability and performance requirements for other trim points until the entire operating domain is covered. Unlike LPV methods, our method has the advantage that a fixed architecture controller is considered. The final product is a set of automatically generated controllers whose combined robust performance regions cover the entire evolution domain. Thereafter, these controllers can be easily interpolated w.r.t. scheduling variables as they all have the same structure, or implemented directly in look-up tables. The performance constraints considered here are of the generalized stability type, that is, eigenvalue or pole confinement within specific subsets of the complex plane. These are handled by guardian maps (Saydy *et al.*, 1990) which provide indications both on the allowable gain regions (i.e. the gain regions within which the system's generalized stability is fulfilled) and on the controller robustness versus varying parameters.

A preliminary application was performed on a missile benchmark problem (Saussié *et al.*, 2008b) and gave promising results compared to former articles (Reichert, 1992; Shamma et Cloutier, 1992, 1993; Nichols *et al.*, 1993; White *et al.*, 1994; Wu *et al.*, 1995; Schumacher et Khargonekar, 1998; Biannic et Apkarian, 1999; Tan *et al.*, 2000; Döll *et al.*, 2001; Wu *et al.*, 2002; Bruyere *et al.*, 2006). But unlike the method in (Saussié *et al.*, 2008b), the one presented here ensures stability and performance all along the process. A new application to the longitudinal flight control of an aircraft (*Challenger 604*) is also presented. Traditionnally, flight controllers use simple controller structures derived from the wide experience acquired by flight control engineers ; they have indeed a well studied and understood architecture (Stevens et Lewis, 2003) and work well in many practical applications. The present article builds on the work initiated in (Saydy *et al.*, 2000) and (Saussié *et al.*, 2003, 2006b) . It proposes to conserve the original architecture provided by the manufacturer and to automatically schedule the gains with scheduling variables such as Mach number  $M$  and altitude  $h$  in order to satisfy given handling qualities ; this remains one of the most important objectives in flight control design (Mitchell *et al.*, 2004) and several criteria (US Department of Defense, 1997) may be used to this effect. A flight controller must ideally satisfy these handling qualities (Hodgkinson, 1999; Gibson, 1999) over the entire flight domain. The longitudinal handling qualities concern mainly the short-period dynamics of the aircraft ; some of them can be cast in terms of eigenvalue confinement and zero location (mainly for Gibson's dropack (Gibson, 1999)). A first controller satisfying the handling qualities at stake is provided for a given flight condition and the goal is to extend its performance to the rest of the flight envelope by scheduling its gains w.r.t flight condition parameters (Mach and altitude).

The paper is organized as follows. A brief overview of guardian maps is proposed in Section 1. Next, two algorithms are proposed to extend the performance of an initial controller to the whole operating domain, and thus yield a scheduled controller. In Section 3, the aircraft model of a *Bombardier Inc. Challenger 604* is introduced as well as the handling qualities of interest. Finally Section 4 is devoted to the application of our technique to the design of a scheduled flight controller for the longitudinal motion of the plane.

## 6.2 Guardian Maps : a brief review

The guardian map approach was introduced by Saydy et al. (Saydy *et al.*, 1990) as a unifying tool for the study of generalized stability of parameterized families of matrices or polynomials. Here, generalized stability means confinement of matrix eigenvalues or polynomial zeros to general open subsets of the complex plane and includes the open left half-plane and the unit circle as special cases. Some of the basic concepts are introduced.

### 6.2.1 Guardian Maps

Basically, guardian maps are scalar valued maps defined on the set of  $n \times n$  real matrices (or  $n^{\text{th}}$ -order polynomials) that take non-zero values on the set of  $\Omega$ -stable matrices (or polynomials) and vanish on its boundary. The description below will focus on families of matrices with the understanding that it applies to polynomials as well. We are hence interested in stability sets of the form :

$$S(\Omega) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \sigma(A) \subset \Omega\} \quad (6.1)$$

where  $\Omega$  is an open subset of the complex plane of interest, and  $\sigma(A)$  denotes the set consisting of the eigenvalues of  $A$ . Such sets  $S(\Omega)$  will be referred to as *generalized stability sets*, and thus represent the set of all matrices which are stable relative to  $\Omega$ , i.e. which have all their eigenvalues in  $\Omega$ .

**Définition 6.2.1.** Let  $\nu$  map  $\mathbb{R}^{n \times n}$  into  $\mathbb{C}$ . We say that  $\nu$  guards  $S(\Omega)$  if for all  $A \in \overline{S(\Omega)}$ , the following equivalence holds :

$$\nu(A) = 0 \Leftrightarrow A \in \overline{S(\Omega)} \quad (6.2)$$

Here  $\overline{S}$  denotes closure of the set  $S$ . The map is said to be polynomial if it is a polynomial function of the entries of its argument.

**Example 6.2.2.** Some guardian maps are given for classical regions (Fig. 6.1).

- Hurwitz Stability : for  $\Omega = \mathring{\mathbb{C}}_-$ , a guardian map is

$$\nu_H(A) = \det(A \odot I) \det(A) \quad (6.3)$$

where  $\odot$  denotes the bialternate product (Stephanos, 1900).

- Stability margin : the open  $\alpha$ -shifted half-plane region has a corresponding guardian map

$$\nu_m(A) = \det(A \odot I - \alpha I \odot I) \det(A - \alpha I) \quad (6.4)$$

- The conic sector with inner angle  $2\theta$  has a corresponding guardian map given by

$$\nu_d(A) = \det(A^2 \odot I + (1 - 2\zeta^2)A \odot A) \det(A) \quad (6.5)$$

where  $\zeta \triangleq \cos \theta$  denotes the limiting damping ratio.

- *Schur stability* : for the circle of radius  $\omega > 0$ , a corresponding guardian map is

$$\nu_p(A) = \det(A \odot A - \omega^2 I \odot I) \det(A^2 - \omega^2 I) \quad (6.6)$$

A systematic way of constructing guardian maps for various  $\Omega$  regions can be found in Saydy et al. (Saydy et al., 1990).

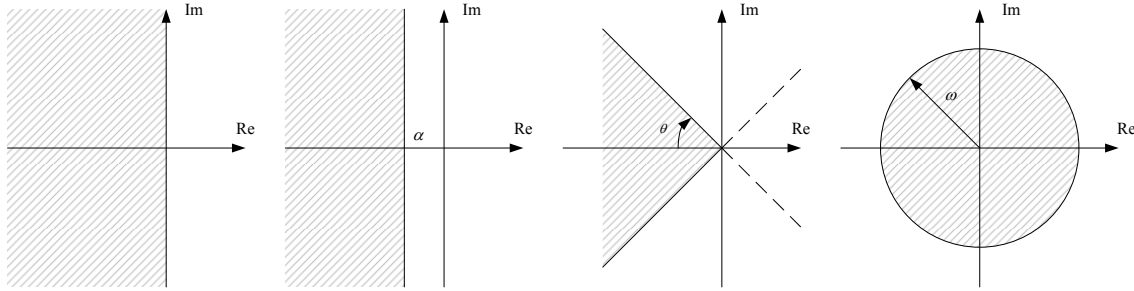


Figure 6.1 Regions for Example 6.2.2

### 6.2.2 Stabilizing gain characterization

Let  $\{A(r) : r \in U \subset \mathbb{R}^k\}$  be a continuous family of  $n \times n$  matrices which depend on the (usually) uncertain parameter vector  $r := (r_1, \dots, r_k)$  where each entry lies in a given range for which only the bounds are known, say  $r \in U \subset \mathbb{R}^k$ .

**Theorem 6.2.3.** *Let  $S(\Omega)$  be guarded by the map  $\nu_\Omega$ . The family  $\{A(r) : r \in U\}$  is stable relative to  $\Omega$  if and only if*

- (i) *it is nominally stable, i.e.  $A(r_0) \in S(\Omega)$  for some  $r_0 \in U$  ; and,*
- (ii)  *$\forall r \in U$ ,  $\nu_\Omega(A(r^0))\nu_\Omega(A(r)) > 0$ . i.e.  $\nu_\Omega(A(r))$  does not vanish in  $U$ .*

**Corollary 6.2.4.** *Let  $S(\Omega)$  be guarded by the map  $\nu$  and consider the family  $\{A(r) : r \in U\}$ . Then  $C$  defined by :*

$$C = \{r \in \mathbb{R}^k : \nu_\Omega(A(r)) = 0\} \quad (6.7)$$

*divides the parameter space  $\mathbb{R}^k$  into components  $C_i$  that are either stable or unstable relative to  $\Omega$ . To see which situation prevails for a given component  $C_i$ , one only has to test  $A(r)$  for any one point in  $C_i$ .*

**Example 6.2.5.** *Suppose that the closed-loop poles of a given system are specified by the polynomial :*

$$p(s) = s^3 + k_1 s^2 + k_2 s + 1 \quad (6.8)$$

where  $k_1, k_2$  denote some controller gains. If the damping region  $\zeta > 0.7$  is the one considered (Fig. 6.2), then one obtains (e.g. by applying Eq. (6.5) to the companion matrix corresponding to  $p$ ) :

$$\nu_{\Omega}(p) = 2k_2^3 - k_1^2 k_2^2 - 4k_1 k_2 + 2k_1^3 + 1 \quad (6.9)$$

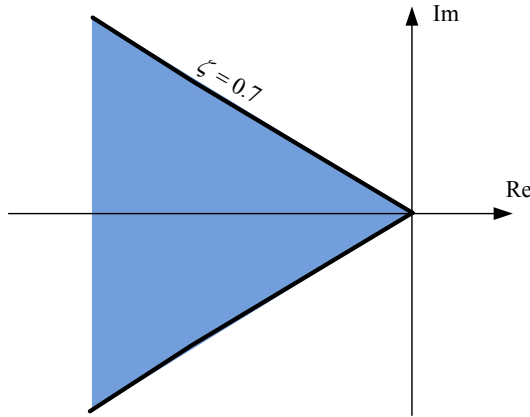


Figure 6.2 Stability region  $\Omega$

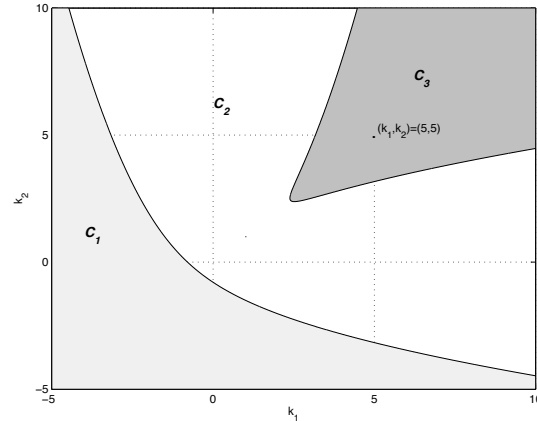


Figure 6.3 Set  $C_3$  of all gains ensuring  $\Omega$ -stability

Setting this quantity to 0 yields the 3 components in the parameter space  $(k_1, k_2)$  of Fig. 6.3. It can be verified that the set of all gains  $(k_1, k_2)$  which place all the closed-loop poles within the damping zone above is the component  $C_3$ . Any other choice of the gains outside of  $C_3$  yields closed-loop poles outside the damping conic region. We arrive to this conclusion simply by testing  $\Omega$ -stability of  $p(s)$  for any three pairs  $(k_1, k_2)$  in  $C_1$ ,  $C_2$  and  $C_3$  respectively.

### 6.2.3 Robust stability

For the application at hand, the model is given as linearized state-space models for several operating points which depend on two parameters, namely Mach number  $M$  and altitude  $h$ . Consequently, we consider here the stability of one and two-parameter families of real matrices relative to a domain  $\Omega$  for which  $S(\Omega)$  is endowed with a polynomial guardian map  $\nu_{\Omega}$ .

#### ◆ One-parameter family stability test

In the following, we consider single-parameter polynomial matrices of the form :

$$A(r) = A_0 + rA_1 + \dots + r^k A_k \quad (6.10)$$

with  $A_i$  given constant matrices and such that  $A(r_0)$  is  $\Omega$ -stable. The corresponding guardian map  $\nu_{\Omega}(A(r))$  is a polynomial in  $r$ . We seek to find the largest open stability interval w.r.t.  $\Omega$

around  $r_0$ . Let

$$\begin{aligned} r^- &\doteq \sup \{r < r_0 : \nu_\Omega(A(r)) = 0\} \text{ (or } -\infty \text{ if none exists)} \\ r^+ &\doteq \inf \{r > r_0 : \nu_\Omega(A(r)) = 0\} \text{ (or } +\infty \text{ if none exists)} \end{aligned}$$

be the maximal perturbation bounds for nonsingularity of matrices around  $r = r_0$ .

**Lemma 6.2.6.** *Let  $A(r) = A_0 + rA_1 + \dots + r^k A_k$  be a polynomial matrix in the uncertain parameter  $r$  real with given constant matrices  $A_i$  such that  $A(r_0)$  is stable w.r.t.  $\Omega$  and let  $S(\Omega)$  be guarded by a map  $\nu_\Omega$ . Then  $A(r)$  is stable relative to  $\Omega$  for all  $r \in (r^-, r^+)$ . Furthermore, this interval is the largest one containing  $r_0$ .*

#### ◆ Two-parameter family stability test

In this section, we consider stability of two-parameter families of real matrices (or polynomials) relative to a domain  $\Omega$  for which  $S(\Omega)$  is endowed with a polyhomic guardian map  $\nu_\Omega$ . We will study polynomial matrices of the form

$$A(r_1, r_2) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l r_1^i r_2^j A_{ij} \quad (6.11)$$

with  $r_1$  and  $r_2$  real parameters. The theorem by Saydy *et al.* (1990) gives necessary and sufficient conditions for the stability of  $A(r_1, r_2)$  over a specific rectangle-shaped domain  $(r_1, r_2) \in [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2]$ . We state here a novel corollary which is used to find the largest stable open rectangle with a fixed side as will be explained next.

Let  $r^0 \triangleq (r_1^0, r_2^0)$  be a nominal parameter vector such that  $A(r_1^0, r_2^0)$  is  $\Omega$ -stable. By freezing one of the parameters, say  $r_2 = r_2^0$ , one can easily compute the largest (open) interval containing  $r_1^0$ ,  $I_{\max}(r_2^0) \triangleq (r_1^-, r_1^+)$ , such that  $\forall r_1 \in I_{\max}(r_2^0)$ ,  $A(r_1, r_2^0) \in S(\Omega)$  (Lemma 6.2.6). Similarly, for  $r_1 = r_1^0$  fixed, one can obtain the largest (open) interval containing  $r_2^0$ ,  $I_{\max}(r_1^0) \triangleq (r_2^-, r_2^+)$  such that  $\forall r_2 \in I_{\max}(r_1^0)$ ,  $A(r_1^0, r_2) \in S(\Omega)$ . When both parameters vary, it is of course not true in general that the family is  $\Omega$ -stable within  $I_{\max}(r_2^0) \times I_{\max}(r_1^0)$  (see Fig. 6.4 for an illustration).

Therefore, given a nominal parameter vector  $r^0 \triangleq (r_1^0, r_2^0)$  and fixed side  $[\alpha_1, \beta_1] \subset I_{\max}(r_2^0)$  containing  $r_1^0$ , we seek to find the largest open interval  $(\alpha_2^*, \beta_2^*)$  such that

$$\forall (r_1, r_2) \in [\alpha_1, \beta_1] \times (\alpha_2^*, \beta_2^*), A(r_1, r_2) \in S(\Omega). \quad (6.12)$$

as illustrated in Fig. 6.5. Naturally, one can choose  $[\alpha_2, \beta_2] \subset I_{\max}(r_1^0)$  and seek the largest open interval  $(\alpha_1^*, \beta_1^*)$  such that

$$\forall (r_1, r_2) \in (\alpha_1^*, \beta_1^*) \times [\alpha_2, \beta_2], A(r_1, r_2) \in S(\Omega). \quad (6.13)$$

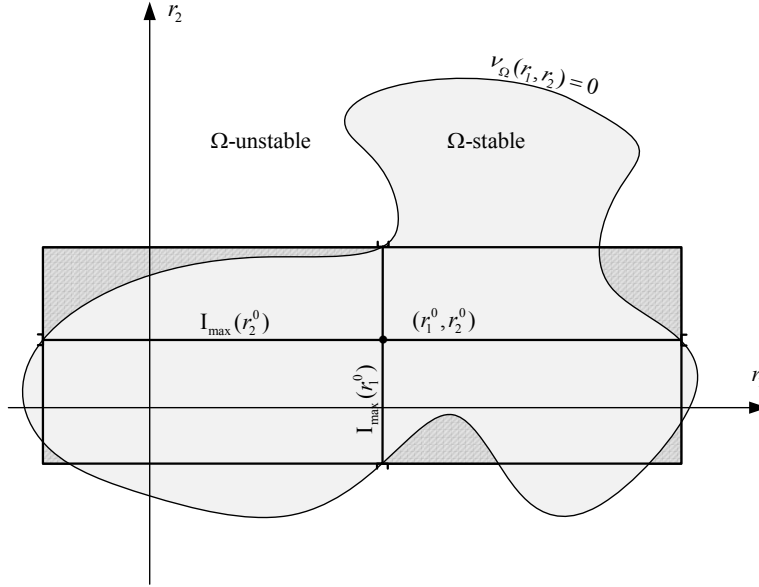
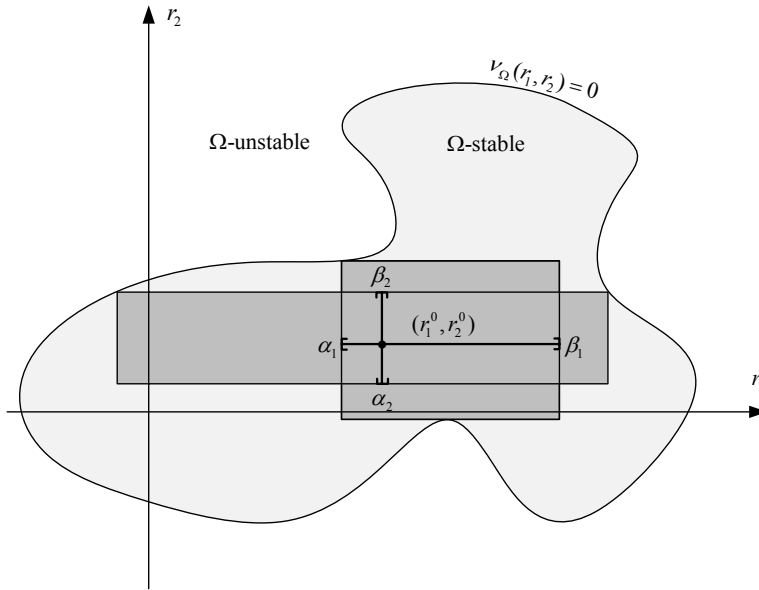
Figure 6.4 Instability of  $I_{\max}(r_2^0) \times I_{\max}(r_1^0)$ 

Figure 6.5 Largest stable rectangle with a fixed side

Before stating the corollary which enables statements such as the one in (Eq.6.12) or in (Eq.6.13), we introduce some notations. Let

$$\nu_1(r_2) \triangleq p_{[r_2]}(\alpha_1)p_{[r_2]}(\beta_1) \quad (6.14)$$

and

$$\nu_2(r_2) \triangleq \det B(p_{[r_2]}, p'_{[r_2]}). \quad (6.15)$$

where, for each  $r_2$ ,  $p_{[r_2]}(r_1) \triangleq \nu_\Omega(A(r_1, r_2))$  denotes the univariate polynomial in  $r_1$ , the coefficients of which are themselves polynomials in  $r_2$ ,  $p'_{[r_2]}$  denotes its derivative w.r.t.  $r_1$  and  $B(a, b)$  designates the Bezoutian of two polynomials  $a$  and  $b$  (Lancaster et Tismenetsky, 1985).

**Corollary 6.2.7.** *Let  $A(r_1^0, r_2^0) \in S(\Omega)$  and let  $\nu_\Omega$  be a guardian map for  $S(\Omega)$ . Choose  $[\alpha_1, \beta_1] \subset I_{\max}(r_2^0)$ . Define*

*$\underline{r}_2$  = largest root of  $\nu_1(r_2)$  strictly less than  $r_2^0$  (set to  $-\infty$  if no such root exists)*

*$\bar{r}_2$  = smallest root of  $\nu_1(r_2)$  strictly larger than  $r_2^0$  (set to  $+\infty$  if no such root exists)*

*Define also*

*$\alpha_2^*$  = largest root  $\mu$  of  $\nu_2(r_2)$ ,  $\underline{r}_2 \leq \mu < r_2^0$ , for which  $p_{[\mu]}(r_1)$  has a root in  $[\alpha_1, \beta_1]$  (set to  $\underline{r}_2$  if none exists)*

*$\beta_2^*$  = smallest root  $\mu$  of  $\nu_2(r_2)$ ,  $r_2^0 < \mu \leq \bar{r}_2$ , for which  $p_{[\mu]}(r_1)$  has a root in  $[\alpha_1, \beta_1]$  (set to  $\bar{r}_2$  if none exists)*

*Thus  $(\alpha_2^*, \beta_2^*)$  is the largest open interval such that*

$$\forall (r_1, r_2) \in [\alpha_1, \beta_1] \times (\alpha_2^*, \beta_2^*), A(r_1, r_2) \in S(\Omega) \quad (6.16)$$

*Démonstration.* First, let  $[\alpha_2, \beta_2] \subset (\alpha_2^*, \beta_2^*)$ . We first prove that the family  $A(r_1, r_2)$  is stable on  $[\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2]$ , i.e.  $\nu_\Omega(r_1, r_2) = p_{[r_2]}(r_1)$  does not vanish for any  $(r_1, r_2) \in [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2]$ .

According to Theorem by Saydy *et al.* (1990),  $A(r_1, r_2)$  is stable for all  $(r_1, r_2) \in [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2]$  if and only if  $U_{cr}^1 = \emptyset$  and the univariate polynomials  $p_{\alpha_2}$  and  $p_{[\beta_2]}$ ,  $r_2 \in U_{cr}^2$  have no zeros in  $[\alpha_1, \beta_1]$  where

$$U_{cr}^1 := \{r_2 \in [\alpha_2, \beta_2] : \nu_1(r_2) = 0\} \quad (6.17)$$

and

$$U_{cr}^2 := \{r_2 \in [\alpha_2, \beta_2] : \nu_2(r_2) = 0\}. \quad (6.18)$$

According to the definitions of  $\underline{r}_2$ ,  $\bar{r}_2$ ,  $\alpha_2^*$  and  $\beta_2^*$ , we have  $\underline{r}_2 \leq \alpha_2^* < \alpha_2 \leq \beta_2 < \beta_2^* \leq \bar{r}_2$ . Consequently, it follows by construction that  $U_{cr}^1 = \emptyset$  as  $\underline{r}_2$  and  $\bar{r}_2$  are respectively the largest ( $< r_2^0$ ) and the smallest ( $> r_2^0$ ) root of  $\nu_1(r_2)$ . Similarly,  $p_{\alpha_2}$  and  $p_{[\beta_2]}$ ,  $r_2 \in U_{cr}^2$  have no zeros in  $[\alpha_1, \beta_1]$  for indeed  $\alpha_2^*$  and  $\beta_2^*$  are respectively the largest ( $< r_2^0$ ) and the smallest ( $> r_2^0$ ) root of  $\nu_1(r_2)$  for which such a property holds. This proves  $\Omega$ -stability of  $A(r_1, r_2)$  for all  $[\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2]$  with  $\alpha_2^* < \alpha_2 \leq \beta_2 < \beta_2^*$ .

By definition,  $\alpha_2^*$  and  $\beta_2^*$  are either  $\infty$  ( $-\infty$  and  $+\infty$ , resp.) or are such that either  $A(r_1, \alpha_2^*)$ , or  $A(r_1, \beta_2^*)$  is  $\Omega$ -unstable for some value of  $r_1 \in [\alpha_1, \beta_1]$ . Therefore, any choice of  $\alpha_2 \leq \alpha_2^*$  or  $\beta_2 \geq \beta_2^*$  would lead, with same proof, to the instability of  $A(r_1, r_2)$  over  $[\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2]$ .



Consequently,  $(\alpha_2^*, \beta_2^*)$  is the largest open interval such that

$$\forall (r_1, r_2) \in [\alpha_1, \beta_1] \times (\alpha_2^*, \beta_2^*), A(r_1, r_2) \in S(\Omega) \quad (6.19)$$

□

**Example 6.2.8.** To illustrate the above, let the closed-loop poles of a given system be specified by the uncertain polynomial :

$$d(s) = s^3 + s^2 + s + r_1^2 + r_2^2 \quad (6.20)$$

where  $r_1$  and  $r_2$  denote uncertain parameters with nominal values  $r_1^0 = r_2^0 = 0.5$ . If the open left half-plane  $\Omega = \mathring{\mathbb{C}}_-$  is the stability region considered, then a guardian map<sup>1</sup> is :

$$\nu_\Omega(r_1, r_2) = (r_1^2 + r_2^2)(1 - r_1^2 - r_2^2) \quad (6.21)$$

By setting  $\nu_\Omega$  to 0, we easily see that the stable component is the interior of the unit disk except the origin (light grey region in Fig. 6.6).

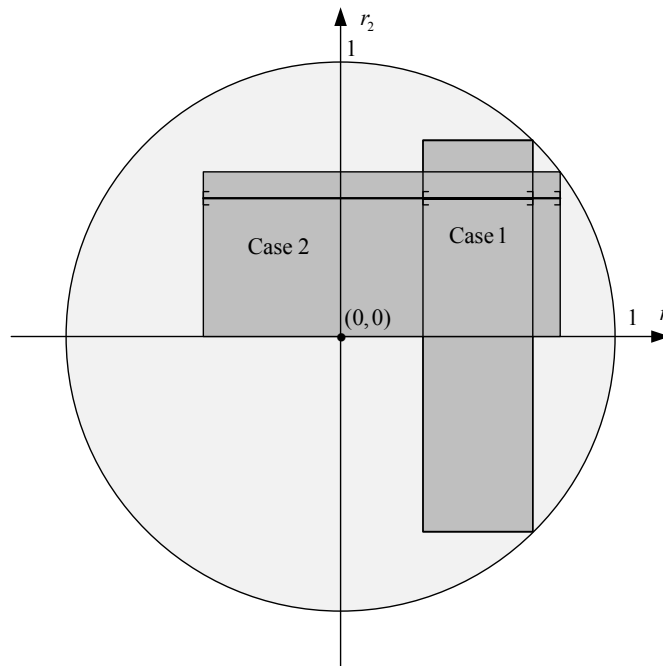


Figure 6.6 Example

---

1. Using Eq. (6.3) and the companion matrix corresponding to  $d$ .

We have :

$$p_{[r_2]}(r_1) = -r_1^4 + (1 - 2r_2^2)r_1^2 + r_2^2 - r_2^4 \quad (6.22)$$

$$p'_{[r_2]}(r_1) = -4r_1^3 + (2 - 4r_2^2)r_1 \quad (6.23)$$

and the corresponding Bezoutian matrix is

$$B(p_{r_2}, p'_{r_2}) = \begin{bmatrix} 0 & 4r_2^2 - 4r_2^4 & 0 & -2r_2^2 + 6r_2^4 - 4r_2^6 \\ -2 + 4r_2^2 & 0 & 2 - 4r_2^2 + 4r_2^4 & 0 \\ 0 & 2 - 4r_2^2 & 0 & 4r_2^2 - 4r_2^4 \\ 4 & 0 & -2 + 4r_2^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

which yields

$$\nu_2(r_2) = \det B(p_{[r_2]}, p'_{[r_2]}) = 16r_2^2(r_2^2 - 1) \quad (6.25)$$

Letting  $(r_1^0, r_2^0) = (0.5, 0.5)$  yields  $I_{\max}(r_2^0) \approx (-0.866, 0.866)$ . If we choose for instance  $[0.3, 0.7] \subset I_{\max}(r_2^0)$ , we obtain

$$\nu_1(r_2) \triangleq p_{[r_2]}(0.3)p_{[r_2]}(0.7) = (r_2^4 - 0.82r_2^2 - 0.0819)(r_2^4 - 0.02r_2^2 - 0.2499), \quad (6.26)$$

the real roots of which are  $\{-0.9539, -0.7141, 0.7141, 0.9539\}$ . Therefore  $\underline{r}_2 = -0.7141$  and  $\bar{r}_2 = 0.7141$ . The roots of  $\nu_2(r_2)$  are  $\{-1, 0, 1\}$ . Since none of the polynomials,  $p_{[0]}(r_1)$  and  $p_{[1]}(r_1)$ , has a root in  $[0.3, 0.7]$ , we conclude, according to Corollary 6.2.7, that  $(-0.7141, 0.7141)$  is the largest open interval such that

$$\forall (r_1, r_2) \in [0.3, 0.7] \times (-0.7141, 0.7141), d(s) \in S(\Omega). \quad (6.27)$$

If instead we choose the interval  $[-0.5, 0.8] \subset I_{\max}(r_2^0)$ , we obtain

$$\nu_1(r_2) \triangleq p_{[r_2]}(-0.5)p_{[r_2]}(0.8) = (r_2^4 - 0.5r_2^2 - 0.1875)(r_2^4 + 0.28r_2^2 - 0.2304) \quad (6.28)$$

with roots  $\{-0.866, -0.6, 0.6, 0.866\}$ . In this case,  $\underline{r}_2 = -0.6$  and  $\bar{r}_2 = 0.6$ . The roots of  $\nu_2(r_2)$  are  $\{-1, 0, 1\}$  and  $p_{[0]}(r_1)$  has a root (namely 0) in  $[-0.5, 0.8]$ . Therefore, according to Corollary 6.2.7,  $(0, 0.6)$  is the largest open interval such that

$$\forall (r_1, r_2) \in [-0.5, 0.8] \times (0, 0.6), d(s) \in S(\Omega) \quad (6.29)$$

### 6.3 Gain-scheduling procedure

In typical gain-scheduling techniques, LTI controllers have to be designed on different linearized models; controller interpolation is done *a posteriori*, or switching laws are implemented between the various controllers. In the interpolation approach case, even if the controllers designed on each operating point fulfill the requirements locally, there is no guarantee that between the synthesis

points stability is retained, especially if the designer did not take enough synthesis points (Rugh, 1991; Leith *et al.*, 1998). Moreover, depending on controller complexity, interpolation problems may arise. For example, in the case of  $H_\infty$  control or  $\mu$ -synthesis, an initial order reduction phase is often required on each LTI controller in order to ensure that all the controllers have the same order and structure (Nichols *et al.*, 1993). In the switching approach case, the designed controllers must cover the entire domain and again the number of synthesis points is crucial. So the three major issues are : the number of synthesis points, the controller structure and the stability and performance satisfaction on the entire domain (Leith et Leithead, 2000; Rugh et Shamma, 2000) . Our method proposes to address these issues.

The basic idea is as follows. Let  $\mathbf{K}^0$  an initial fixed-structure controller be designed for a particular trim condition. This controller naturally presents some robust performance margins w.r.t. trim variables, i.e. it will no longer ensure performance for a limit trim condition. By adjusting  $\mathbf{K}^0$  (using a search algorithm presented later), we obtain a new controller  $\mathbf{K}^1$  having its own robust performance margins. By taking another worst-case condition where  $\mathbf{K}^1$  fails, another controller  $\mathbf{K}^2$  is designed and so on till covering the entire operating domain.

In what follows, two gain-scheduling algorithms are introduced, one for the single parameter case (one scheduling variable) and one for the two-parameter case (two scheduling variables). In virtue of Lemma 6.2.6 and Corollary 6.2.7, generalized stability will be ensured all along the procedure. The algorithms automatically produce a set of controllers whose combined robust performance regions cover the entire operating domain. They will prove efficient in the longitudinal motion control problem as only two parameters, Mach number and altitude, are involved.

### 6.3.1 Single-parameter gain-scheduling algorithm

The first algorithm proposed is applied in the case of a system with one single parameter  $r$ . Let  $\Omega$  be the region of eigenvalue confinement of interest and  $\nu_\Omega$  be a corresponding guardian map. Let  $A(r, \mathbf{K})$  denote the closed-loop state space matrix with  $\mathbf{K} = [K_i]$  the gain vector. With a slight abuse in notation, we denote  $\nu_\Omega(r, \mathbf{K}) := \nu_\Omega(A(r, \mathbf{K}))$ . If  $A(r, \mathbf{K})$  depends polynomially on the parameters and the boundary of  $\Omega$  is also defined polynomially, then  $\nu_\Omega(r, \mathbf{K})$  is a multivariable polynomial as well. We seek to find  $\mathbf{K}$  (scheduled w.r.t.  $r$ ) that stabilizes the system for  $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$ .

For an initial parameter value  $r_0 = r_{\min}$ , let  $\mathbf{K}^0$  be a nominal choice of stabilizing gains, that is, such that the eigenvalues of  $A(r_0, \mathbf{K}^0)$  are inside  $\Omega$ . With  $\mathbf{K} = \mathbf{K}^0$ , we apply Lemma 6.2.6 to find the largest stability interval  $[\underline{r}_0, \bar{r}_0[$ . Thus the vector  $\mathbf{K}^0$  stabilizes the system for any parameter  $r$  in  $[\underline{r}_0, \bar{r}_0[$ . If  $\bar{r}_0 = +\infty$  or  $\bar{r}_0 > r_{\max}$ , one can stop as  $\mathbf{K}^0$  ensures stability  $\forall r \in [r_{\min}, r_{\max}]$ . Moreover, we have  $\nu_\Omega(\underline{r}_0, \mathbf{K}^0) = \nu_\Omega(\bar{r}_0, \mathbf{K}^0) = 0$  if  $\underline{r}_0$  and  $\bar{r}_0$  happen to be finite.

If  $\bar{r}_0 \leq r_{\max}$ , we proceed as follows. Fix  $r_1 = \bar{r}_0$ . The equation  $\nu_\Omega(r_1, \mathbf{K}) = 0$  defines new

components in the space of gain parameters that are either stable or unstable (Corollary 6.2.4). By definition of  $\bar{r}_0$ ,  $\nu_\Omega(\bar{r}_0, \mathbf{K}^0) = 0$  and  $\mathbf{K}^0$  lies on the boundary of a stable component. In (Saussié *et al.*, 2010), an algorithm<sup>2</sup> was developed to search inside a component in order to find a new vector  $\mathbf{K}^1$  which places closed-loop poles strictly inside  $\Omega$ . This new choice leads to a new stability interval  $[\underline{r}_1, \bar{r}_1[$  with  $\bar{r}_0 \in ]\underline{r}_1, \bar{r}_1[$ . The same steps are repeated till possibly covering all values of parameter  $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$ .

If the algorithm succeeds, it yields a sequence of controllers  $\{\mathbf{K}^0, \dots, \mathbf{K}^i, \dots, \mathbf{K}^n\}$  satisfying all the criteria on the corresponding intervals  $\{[r_{\min}, \bar{r}_0[, \dots, ]\underline{r}_i, \bar{r}_i[, \dots, ]\underline{r}_n, r_{\max}]\}$ . Moreover, the entire parameter range  $[r_{\min}, r_{\max}]$  is covered since by construction  $\underline{r}_{i+1} < \bar{r}_i$ . The user is then free to exploit this set of controllers depending on the way they will be implemented : look-up tables, switching controllers or interpolation of the data to name a few.

**Remark 6.3.1.** *Going “rightward” from  $r_{\min}$  to  $r_{\max}$  is an arbitrary choice and one can adapt the algorithm to make it work “leftward”. This leads to different results in general.*

**Example 6.3.2.** *The following simple example illustrates the procedure for the synthesis of a one-parameter fixed structure scheduled controller, namely a PD controller. The system at stake is described by a second order one-parameter transfer function :*

$$F(s, a) = \frac{1}{s^2 + 0.2a(a - 10)s + a^2} \quad (6.30)$$

where the parameter  $a \in [0, 10]$ . Our objective is to design a scheduled PD controller (Fig. 6.7)  $C(s) = K_p(a) + K_d(a)s$  that places the closed-loop poles inside the region  $\Omega$  defined by Figure 6.8 where open-loop poles (unstable) are indicated for some values of  $a$ .

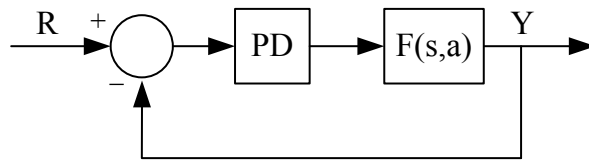


Figure 6.7 Feedback configuration

*The closed-loop corresponding state-space matrix is given by :*

$$A(a, K_p, K_d) = A_0 + A_1 a + A_2 a^2 \quad (6.31)$$

---

2. Dans l'article original, une appendice présente cet algorithme, baptisé *Algorithm 2* dans l'**article 1**. Nous y ferons référence sous le nom *search algorithm*.

**Algorithm 1.** Single parameter gain-scheduling algorithm

**Step 0 : Initialization**

Let  $\Omega$  be a region of the complex plane and  $\nu_\Omega$  a corresponding guardian map,  $A(r, \mathbf{K})$  a closed-loop matrix depending polynomially on the single parameter  $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$  and the gain vector  $\mathbf{K} = [K_j] \in \mathbb{R}^p$ . Obtain a controller  $\mathbf{K}^0$  designed for the nominal case  $r_0 = r_{\min}$  ensures nominal stability relative to  $\Omega$ . Set  $n \leftarrow 0$ .

Using Lemma 6.2.6 on  $A(r, \mathbf{K}^0)$ , find the largest stability interval  $]\underline{r}_0, \bar{r}_0[$  containing  $r_0$ .

**If**  $\bar{r}_0 > r_{\max}$  **then Stop** **else** set the counter  $n \leftarrow n + 1$ .

**Step n.1 : Synthesis phase**

Find a new gain vector  $\mathbf{K}^n$  inside a component defined by  $\nu_\Omega(\bar{r}_{n-1}, \mathbf{K}) = 0$  using search algorithm with initial vector  $\mathbf{K}^{n-1}$ .

**Step n.2 : Robustness analysis**

Using Lemma 6.2.6 on  $A(r, \mathbf{K}^n)$ , find the largest stability interval  $]\underline{r}_n, \bar{r}_n[$  containing  $\bar{r}_{n-1}$ .

**If**  $\bar{r}_n > r_{\max}$  **then** go to **Final Step** **or Stop** **else** set the counter  $n \leftarrow n + 1$  and go to **Step n.1**.

**Final Step : Interpolation**

**If** an interpolation  $\mathbf{K} = \mathbf{K}(r)$  is sought, use Lemma 6.2.6 to check if stability is preserved  $\forall r \in [r_{\min}, r_{\max}]$ .

with

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -0.2 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

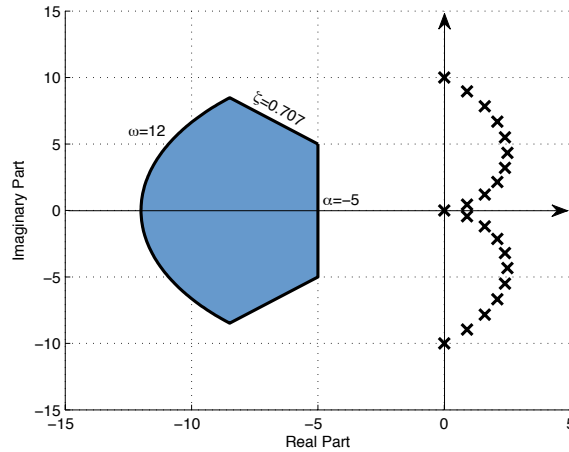


Figure 6.8 General stability target region and open-loop poles

A corresponding guardian map  $\nu_\Omega$  is :

$$\nu_\Omega(A) = \nu_m(A)\nu_p(A)\nu_d(A) = \nu_\Omega(a, K_p, K_d) \quad (6.33)$$

with, by applying Eqs (6.4)-(6.6),

$$\nu_m(A) = \frac{1}{2} (10 - K_d + 2a - 0.2a^2) (K_p + 10a - 5K_d + 25) \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned} \nu_p(A) &= (a^2 + K_p - 144) (144 - 24a + K_p + 3.4a^2 + 12K_d) \dots \\ &\dots (144 + 24a + K_p - 1.4a^2 - 12K_d) \end{aligned} \quad (6.35)$$

$$\nu_d(A) = \frac{1}{2} \left( (K_d + 0.2a^2 - 2a)^2 - 2a^2 - 2K_p \right) (a^2 + K_p) \quad (6.36)$$

For a fixed value  $a = a_0$ , Corollary 6.2.4 states that vanishing  $\nu_\Omega(a_0, K_p, K_d)$  divides the gain parameter space  $\mathbb{R}^2$  into components that are either stable or unstable relative to  $\Omega$ . One can then obtain the admissible gain regions ensuring that all closed-loop poles are inside the target region  $\Omega$  (see Fig. 6.9 where shaded areas are  $\Omega$ -stable). For the  $a = 0$  and  $a = 10$  cases, the intersection is empty implying that there exists no single PD controller satisfying the constraints for both extreme values. Scheduling the controller gains is therefore necessary.

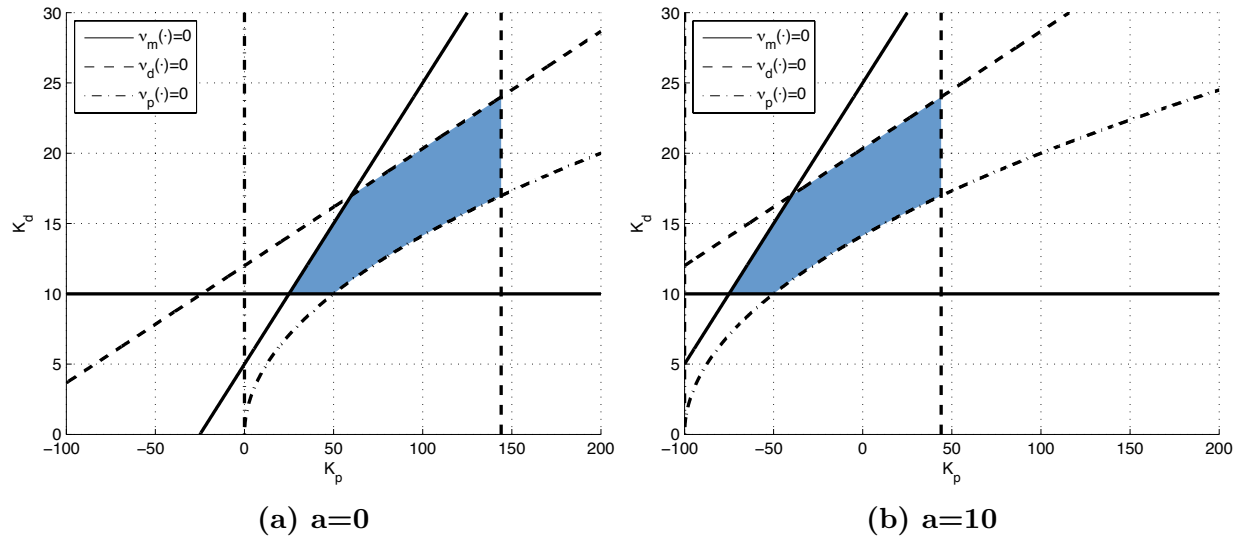


Figure 6.9 Stabilizing gain regions for different values of  $a = \{0, 10\}$

**Step 0 :** A first controller  $(K_p^0, K_d^0) = (106.3, 17.7)$  is designed for  $a = 0$  which satisfies the constraints with closed-loop poles  $-8.85 \pm 5.29j$  ( $\zeta = 0.858, \omega_n = 10.3$ ). The application of Lemma 6.2.6 yields that this controller is robust for  $a \in ]-1.447, 1.778[$ .

**Step 1.1 :** We set  $a = 1.778$  the upper robust stability limit and look for another gain  $(K_p, K_d)$

inside the stable component defined by  $\nu_\Omega(1.778, K_p, K_d) = 0$  (Eq. 6.33). The search algorithm yields the new controller  $(K_p^1, K_d^1) = (103.1, 20.6)$ .

**Step 1.2 :** The PD controller  $(K_p^1, K_d^1)$  is found to be stabilizing w.r.t.  $\Omega$  for  $a \in ]-0.0243, 4.479[$ .

Tableau 6.1 Algorithm steps

Step $i$	$K_p^i$	$K_d^i$	Stability domain $]a_i \bar{a}_i[$
0	106.3	17.7	$] -1.447, 1.778[$
1	103.1	20.6	$] -0.0243, 4.479[$
2	86.2	22.6	$] 1.964, 7.599[$
3	48.6	21.3	$] 3.327, 9.768[$
4	10.9	18.1	$] 5.494, 11.535[$

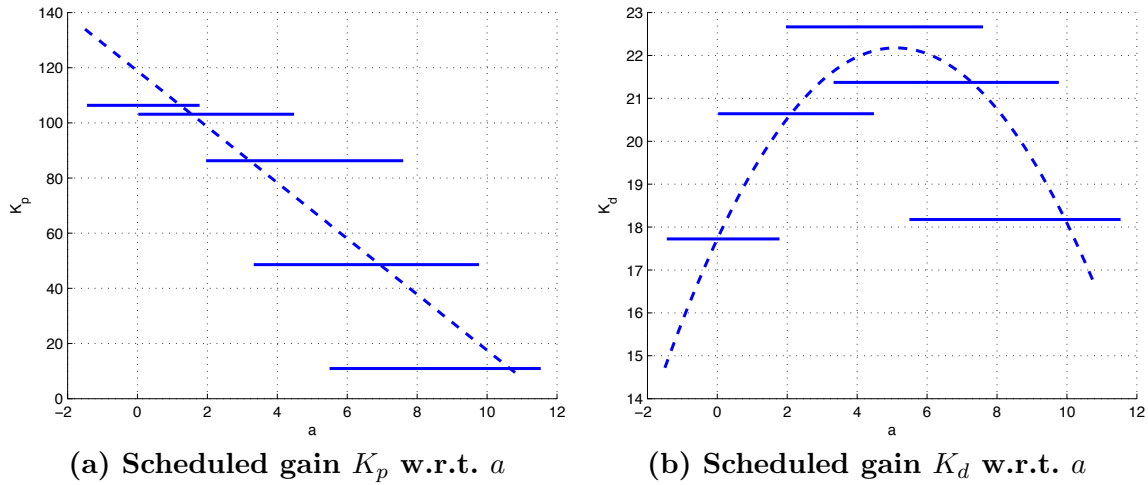


Figure 6.10 Algorithm results and scheduled gains w.r.t.  $a$

Three other iterations lead to the results compiled in Table 6.1. We have a set of 5 controllers whose stability domain union covers the entire range of  $a$ . This sequence of stabilizing controllers can then be exploited to find a polynomial interpolation through the gains  $(K_p^i, K_d^i)$ . The scheduled PD gains w.r.t.  $a$  are those of (Eqs. 6.37-6.38) and are illustrated on Fig. 6.10. Figure 6.11 shows that the closed-loop poles are inside the target region  $\Omega$  for different values of  $a$ . After replacing the gains by their scheduled expressions, one must check that the polynomial  $\nu_\Omega(A) = \nu_\Omega(a)$  does not vanish for any  $a \in [0, 10]$  assessing that the closed-loop poles remain inside the region  $\Omega$ .

$$K_p(a) = -10.12a + 118.78 \quad (6.37)$$

$$K_d(a) = -0.17a^2 + 1.74a + 17.72 \quad (6.38)$$

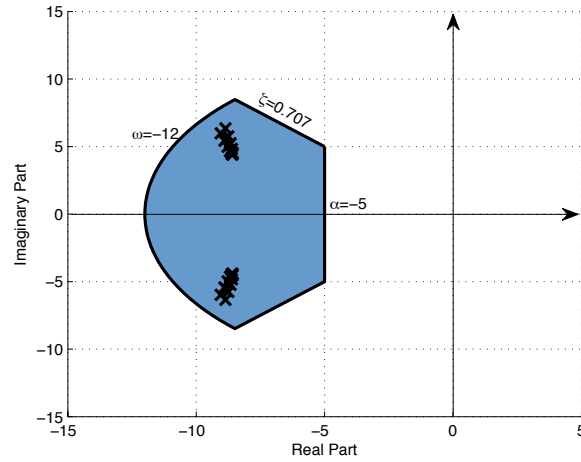


Figure 6.11 Eigenvalue value confinement with the scheduled controller

### 6.3.2 Two-parameter gain-scheduling algorithm

We introduce a new algorithm to handle two-parameter families. Let  $A(r_1, r_2, \mathbf{K})$  denote the closed-loop state space matrix with  $\mathbf{K} = [K_i]$  the gain vector and  $\Omega$  the target stability region. We aim at finding  $\mathbf{K}$  scheduled w.r.t.  $r_1$  and  $r_2$  that stabilizes the system and places the poles within  $\Omega$  for all  $(r_1, r_2) \in [r_{1,\min}, r_{1,\max}] \times [r_{2,\min}, r_{2,\max}]$ . The algorithm is mainly based upon Algorithm 1 and alternates between synthesis of scheduled controllers w.r.t  $r_1$  and robustness analysis of these controllers along  $r_2$ .

The main idea of our algorithm is as follows : for a fixed  $r_2 = r_{2,0} = r_{2,\min}$ , use Algorithm 1 to find a stabilizing scheduled gain  $\mathbf{K}^0(r_1)$  over  $[r_{1,\min}, r_{1,\max}]$  and then use Corollary 6.2.7 to find the largest open interval  $(\underline{r}_{2,0}, \bar{r}_{2,0})$  containing  $r_{2,0}$ . Therefore the scheduled gain  $\mathbf{K}^0(r_1)$  stabilizes the system on  $[r_{1,\min}, r_{1,\max}] \times (\underline{r}_{2,0}, \bar{r}_{2,0})$ . Set  $r_2 = r_{2,1} = \bar{r}_{2,0}$  and find a scheduled gain  $\mathbf{K}^1(r_1)$   $[r_{1,\min}, r_{1,\max}]$ ; it stabilizes the system over  $[r_{1,\min}, r_{1,\max}] \times (\underline{r}_{2,1}, \bar{r}_{2,1})$ . The procedure must be repeated till covering the entire domain. This leads to Algorithm 2 whose first steps are illustrated in Fig. 6.12.

The algorithm yields a sequence of scheduled controllers  $\{\mathbf{K}^0(r_1), \dots, \mathbf{K}^i(r_1), \dots, \mathbf{K}^n(r_1)\}$  stabilizing the system relative to  $\Omega$  on  $[r_{1,\min}, r_{1,\max}] \times \{[r_{2,\min}, \bar{r}_{2,0}], \dots, (\underline{r}_{2,i}, \bar{r}_{2,i}), \dots, (\underline{r}_{2,n}, r_{2,\max}]\}$ . Moreover, the entire parameter range  $[r_{2,\min}, r_{2,\max}]$  is covered since by construction  $\underline{r}_{2,i+1} < \bar{r}_{2,i}$ . The interpolation technique is left to the user.



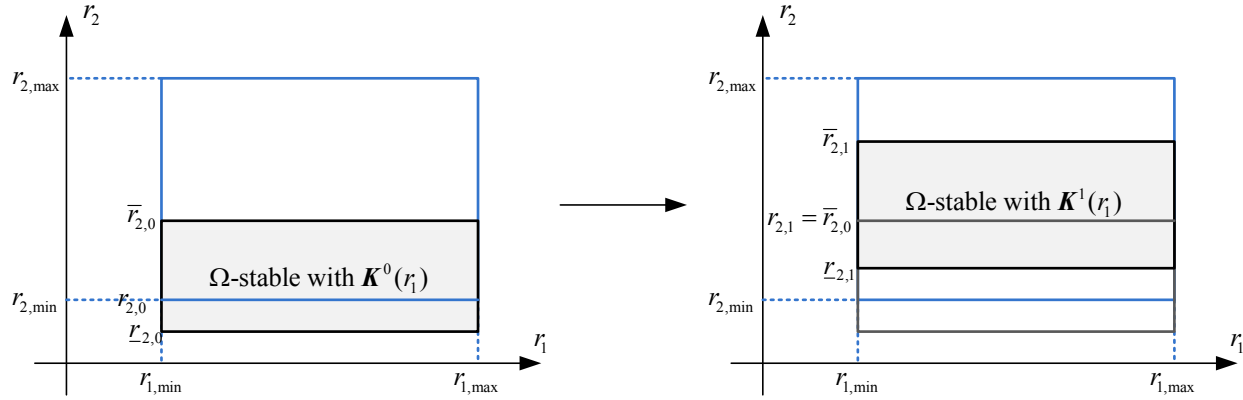


Figure 6.12 Algorithm 2 illustration

**Algorithm 2.** Two parameter gain-scheduling algorithm

**Step 0 : Initialization**

Let  $\Omega$  a region of the complex plane and  $\nu_\Omega$  a corresponding guardian map,  $A(r_1, r_2, \mathbf{K})$  a matrix depending polynomially on the two parameters  $(r_1, r_2) \in [r_{1,\min}, r_{1,\max}] \times [r_{2,\min}, r_{2,\max}] \subset \mathbb{R}^2$  and the gain vector  $\mathbf{K} = [K_j] \in \mathbb{R}^p$ . Let  $\mathbf{K}^0$  such that  $A(r_{1,\min}, r_{2,\min})$  is  $\Omega$ -stable.

Set  $n \leftarrow 0$ ,  $r_{2,0} = r_{2,\min}$

**Step n.1 : Synthesis of a scheduled controller w.r.t.  $r_1$** 

Use Algorithm 6.3.1 to find a scheduled gain vector  $\mathbf{K}^n(r_1)$  with fixed value  $r_2 = r_{2,n}$ . The scheduled controller  $\mathbf{K}^n(r_1)$  ensures nominal stability for  $(r_1, r_2) \in [r_{1,\min}, r_{1,\max}] \times \{r_{2,n}\}$ .

**Step n.2 : Robustness analysis of  $\mathbf{K}^n(r_1)$  along  $r_2$** 

Use Corollary 6.2.7 to find the largest open interval  $(\underline{r}_{2,n}, \bar{r}_{2,n})$  containing  $r_{2,n}$  such that the scheduled gain vector  $\mathbf{K}^n(r_1)$  stabilizes the system  $\forall (r_1, r_2) \in [r_{1,\min}, r_{1,\max}] \times (\underline{r}_{2,n}, \bar{r}_{2,n})$ .

**If**  $\bar{r}_{2,n} > r_{2,\max}$  **then** go to **Final Step** or **Stop** **else** set the counter  $n \leftarrow n + 1$ ,  $r_{2,n} = \bar{r}_{2,n-1}$  and go to **Step n.1**.

**Final Step : Interpolation**

**If** an interpolation  $\mathbf{K} = \mathbf{K}(r_1, r_2)$  is sought, **Then** use Corollary 6.2.7 to check if stability is preserved  $\forall (r_1, r_2) \in [r_{1,\min}, r_{1,\max}] \times [r_{2,\min}, r_{2,\max}]$ .

## 6.4 Flight Controller Problem

In this section, we describe the *Bombardier Inc.'s Challenger 604* aircraft longitudinal control problem. After a short description of the open-loop model and its LPV description, we introduce the retained controller architecture and the requirements, also known as handling qualities. We seek to design a scheduled controller that will be effective on the entire flight envelope.

### 6.4.1 Open-loop LPV description

For design purposes, we consider the short-period equations of motion :

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_w & U_0 & Z_\epsilon \\ M_w & M_q & M_\epsilon \\ E_w & 0 & E_\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \\ \epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_e} \\ 0 \end{bmatrix} \delta_e. \quad (6.39)$$

At trimmed level flight, the dimensional coefficients  $Z_w$ ,  $Z_\epsilon$ ,  $M_w$ ,  $M_q$ ,  $M_\epsilon$ ,  $E_w$ ,  $E_\epsilon$ ,  $Z_{\delta_e}$  and  $M_{\delta_e}$  depend mainly on Mach number  $M$  and altitude  $h$ . The state variable  $\epsilon$  denotes the tail downwash angle. The downwash is experienced by a horizontal tail placed in the flow behind the wing. This vortex diminishes the incidence angle of the tail by an angle  $\epsilon$ . The available measurements are pitch rate  $q$  and normal acceleration  $n_z$  :

$$\begin{bmatrix} q \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{Z}_w & \tilde{Z}_q & \tilde{Z}_\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \\ \epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{Z}_{\delta_e} \end{bmatrix} \delta_e \quad (6.40)$$

where

$$n_z = (\dot{w} - U_0 q - l_x \dot{q})/g \quad (6.41)$$

so  $\tilde{Z}_w$ ,  $\tilde{Z}_q$ ,  $\tilde{Z}_\epsilon$  and  $\tilde{Z}_{\delta_e}$  can be deduced from the other coefficients. Twenty flight conditions at different altitudes and Mach numbers were provided as illustrated in Fig.6.13. An LPV description is then deduced by interpolating the data :

$$\dot{x}_a = A_a(M, h)x_a + B_a(M, h)\delta_e \quad (6.42)$$

$$y = C_a(M, h)x_a + D_a(M, h)\delta_e \quad (6.43)$$

with

$$\begin{aligned} x_a &= [w \quad q \quad \epsilon]^T & y &= [q \quad n_z]^T \\ A_a(M, h) &= \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 A_{ij} M^i h^j & B_a(M, h) &= \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 B_{ij} M^i h^j \\ C_a(M, h) &= \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 C_{ij} M^i h^j & D_a(M, h) &= \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 D_{ij} M^i h^j \end{aligned}$$

Even if we can seek more accurate interpolations, the present one is sufficient for our purpose. In order to diminish interpolation errors, the flight envelope is split into two regions leading to two LPV descriptions : one for low to middle altitudes ( $h \in [5000, 25000 \text{ ft}]$ ) and another one for middle to high altitudes ( $h \in [25000, 41000 \text{ ft}]$ ). This improves the quality of interpolation on a more restricted zone. Special attention is given to the interpolation at the common border  $h = 25000 \text{ ft}$  in order to maintain continuity between the two LPV descriptions. Figure 6.14 shows the short-period

mode poles at different altitudes. In general, natural frequency increases with Mach number and damping ratio diminishes with altitude.

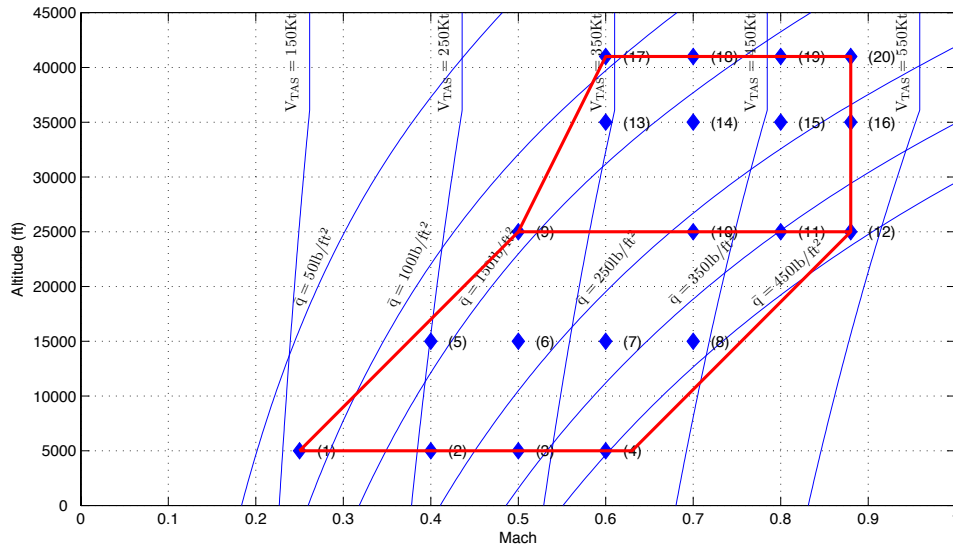


Figure 6.13 Flight envelope

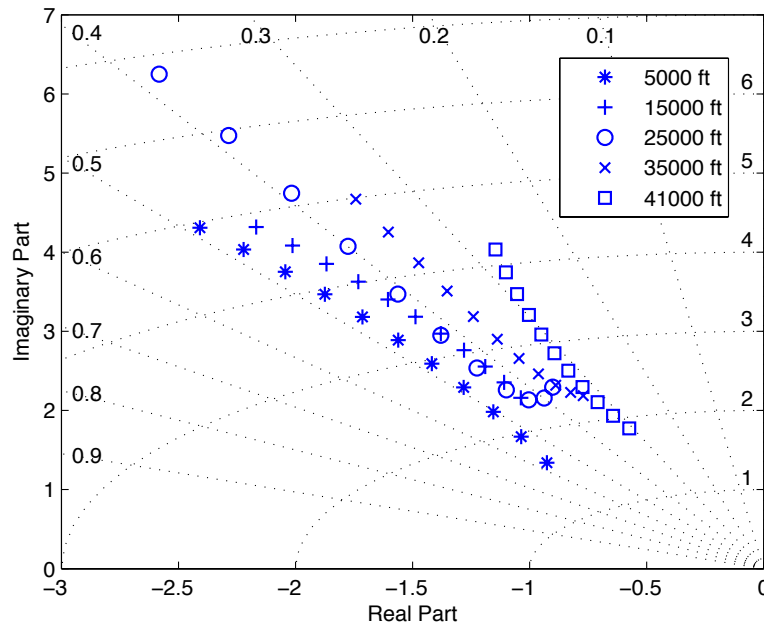


Figure 6.14 Short-period mode evolution within the flight envelope

Due to the presence of multiple delays in the actuator and sensor dynamics, both the actuator and IRU sensors ( $q$  and  $n_z$ ) models are modelled by  $15^{th}$  order transfer function where time delays

are Pade approximations (Fig. 6.15). As the characteristics of both actuator and sensors do not vary with Mach number and altitude, no interpolations w.r.t.  $M$  and  $h$  are needed. After order reduction of these elements and incorporation in the short period model, an 8<sup>th</sup> order LPV description is finally obtained in the form of :

$$\dot{x} = A(M, h)x + B\delta_c \quad (6.44)$$

$$q = C_q x \quad (6.45)$$

$$n_z = C_{n_z}(M, h)x \quad (6.46)$$

where  $x$  is the concatenation of the state vector  $x_a$  and the states of the actuator and sensor dynamic approximations and  $\delta_c$ , the actuator input. Note that the new input and output matrices  $B$  and  $C_q$  are both independent of  $M$  and  $h$ .

### 6.4.2 Controller architecture

Figure 6.15 shows a classic longitudinal flight controller architecture designed to track pitch rate commands<sup>3</sup>. The architecture consists of a stability augmentation system (SAS) and a control augmentation system (CAS).

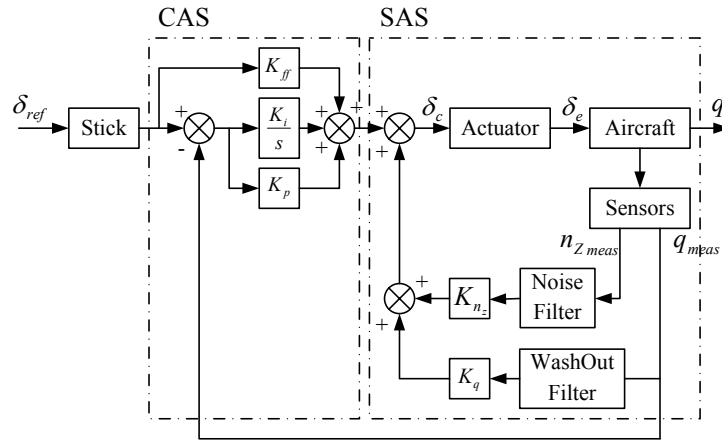


Figure 6.15 Attitude hold control system

The variable parameters are the SAS gains  $K_q$  and  $K_{n_z}$ , the PI gains  $K_p$  and  $K_i$ , and the feedforward gain  $K_{ff}$ . The noise and washout filters are fixed first order filters : a low-pass filter  $10/(s + 10)$  on the  $n_z$  measure and a wash-out filter  $s/(s + 3)$  on the  $q$  channel. By adding the two filter states and the integrator state to the open-loop state vector, the closed-loop state-space model is then :

3. Mainly the short-term dynamics are to be controlled.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_q \\ \dot{x}_{n_z} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A(M, h) + (K_q - K_p)BC_q & -K_qB & K_{n_z}B & K_iB \\ 3C_q & -3 & 0 & 0 \\ 10C_{n_z}(M, h) & 0 & -10 & 0 \\ -C_q & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{cl}} \begin{bmatrix} x \\ x_q \\ x_{n_z} \\ x_i \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} (K_p + K_{ff})B \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_{cl}} \delta_{ref} \quad (6.47)$$

$$q = \underbrace{\begin{bmatrix} C_q & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_{cl}} \begin{bmatrix} x \\ x_q \\ x_{n_z} \\ x_i \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

where  $x_i$  denotes the integrator state,  $x_{n_z}$  the  $n_z$  noise filter state and  $x_q$  the washout filter state. The closed-loop  $A_{cl}$  matrix depends on  $M$ ,  $h$  and the controller gains (except for the feedforward gain  $K_{ff}$ ). The controller gain matrix is denoted by

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_q & K_{n_z} & K_p & K_i & K_{ff} \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

The problem consists therefore in tuning the gain matrix  $\mathbf{K}$  in order to satisfy specific handling qualities.

### 6.4.3 Handling qualities

The overall performance objective is to track pitch rate commands with predicted Level 1 handling qualities and desired time domain response behavior. The handling quality criteria considered in this article are short period mode damping ratio  $\zeta_{sp}$ , settling time ST, Gibson's dropback (Gibson, 1997)  $Drb$ , gain margin  $M_G$  and phase margin  $M_\varphi$  of the CAS loop. The boundaries of these criteria are defined by military standards (US Department of Defense, 1997). Even though handling qualities are primarily defined for military aircraft, they are usually applied to commercial aircraft with slight modifications derived from manufacturer experience. Table 6.2 summarizes the considered handling quality boundaries. More handling qualities may be taken into account like frequential criteria i.e pitch attitude bandwidth  $\omega_{BW_\theta}$  and phase delay  $\tau_p$  (Hodgkinson, 1999).

## 6.5 Controller design

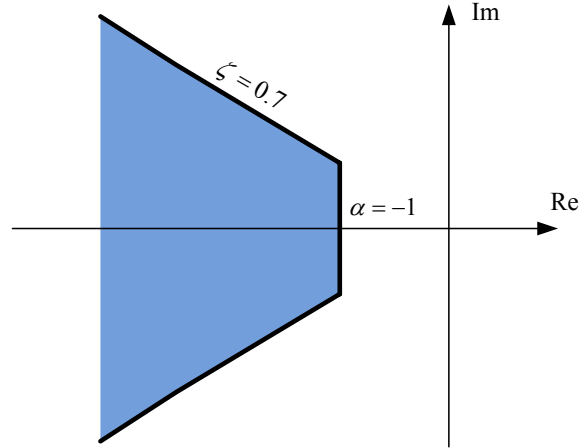
The scheduled controller will be designed in two steps in order to illustrate adequately the one and two-parameter cases. First we will design a controller scheduled w.r.t. the Mach number  $M$  at fixed altitude  $h = 5000$  ft. Then the Mach scheduled controller will be extended to the full flight envelope with varying altitude.

Tableau 6.2 Handling Quality Boundaries

HQs	Level 1	Good Level 1
$\zeta_{sp}$	$0.35 < \zeta_{sp} < 1.35$	$0.7 < \zeta_{sp} < 1.35$
ST	$ST(2\%) \leq 3 \text{ (s)}$	$ST(1\%) \leq 3 \text{ (s)}$
$Drb$	$-0.2 \leq Drb \leq 0.5$	$0.0 \leq Drb \leq 0.3$
$M_G$	$> 6 \text{ (dB)}$	
$M_\varphi$	$> 45 \text{ (}^\circ\text{)}$	

### 6.5.1 Constraints

The time-domain objectives are simply expressed via pole constraints. More precisely, the issue is to maintain low-frequency closed-loop poles inside a target region  $\Omega$  (Fig. 6.16) : the damping condition is set to  $\zeta > 0.7$  and the stability degree must be greater than 1 (i.e.  $\alpha < -1$ ).

Figure 6.16 Target zone  $\Omega$ 

A corresponding guardian map  $\nu_\Omega$  which depends on  $M$ ,  $h$ ,  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_q$  and  $K_{n_z}$  is then built by applying Eqs (6.4)-(6.5) :

$$\nu_\Omega(A_{cl}) = \nu_m(A_{cl})\nu_d(A_{cl}). \quad (6.50)$$

As the gain  $K_{ff}$  has no influence on the closed-loop pole location, it is dedicated to tune exactly the dropback value after tuning the other gains with the gain-scheduling algorithm. In order to have

a null dropback (refer to Saussié *et al.* (Saussié *et al.*, 2010)), one has to take :

$$K_{ff} = -\frac{1 + K_{n_z} C_{n_z}(M, h) A(M, h)^{-1} B}{C_q A(M, h)^{-1} B}. \quad (6.51)$$

### 6.5.2 Scheduled controller w.r.t. $M$ at $h_0 = 5000$ ft

We first use Algorithm 6.3.1 to find a scheduled controller w.r.t.  $M$  at  $h_0 = 5000$  ft.

#### Phase 0 : Initial static controller

As  $K_{ff}$  has no influence on the pole assignment, we first design a static output feedback controller  $\mathbf{K}^{(0)}$  on the flight condition  $(M_0, h_0) = (0.25, 5000)$  (the lowest left corner of the flight envelope) using the technique introduced in (Saussié *et al.*, 2010). Table 6.3 shows the eigenvalue assignment.<sup>4</sup> The gains are  $\mathbf{K}^{(0)} = [-0.0048 \quad 10.29 \quad 0.865 \quad 2.552 \quad 0]$ .

Tableau 6.3 Nominal eigenvalue assignment on  $(M_0, h_0) = (0.25, 5000)$

Open loop poles		Closed loop poles
$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -0.926 \pm 1.34i \ (\xi = 0.569, \omega = 1.63) \\ -3 \\ -8.43 \\ -10 \\ -15.1 \end{array} \right.$	$\Rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{c} -1.69 \pm 0.781i \ (\xi = 0.9, \omega = 1.86) \\ -2.44 \\ -3.85 \\ -5.80 \pm 3.90i \ (\xi = 0.83, \omega = 6.99) \\ -8.52 \end{array} \right.$

#### Phase 1 : Pole confinement

With the knowledge of a first stabilizing controller, we use Algorithm 6.3.1 to find successive controllers that fulfill the pole confinement requirements for  $M \in [0.25, 0.6]$ . As suggested by the algorithm, we alternate between synthesis phases and robustness analysis phases :

1. Synthesis phase :  $M$  is fixed and the guardian map  $\nu_\Omega(A_{cl})$  (Eq. 6.50) depends on the gains  $K_p, K_i, K_{n_z}$  and  $K_q$  where  $A_{cl}$  is of the form  $A_0 + K_p A_1 + K_i A_2 + K_{n_z} A_3 + K_q A_4$ . Starting from  $\mathbf{K}^{(n-1)}$ , which verifies  $\nu_\Omega(A_{cl}) = 0$ , a new gain vector  $\mathbf{K}^{(n)}$  is found inside a stable component defined by  $\nu_\Omega(A_{cl}) = 0$ .
2. Robustness analysis phase : the gain vector  $\mathbf{K}^{(n)}$  is fixed and the guardian map  $\nu_\Omega(A_{cl})$  (Eq. 6.50) depends only on the Mach number  $M$  where  $A_{cl}$  is of the form  $A_0 + M A_1 + M^2 A_2$ . The analysis results in the segment  $(\underline{M}_n, \overline{M}_n)$  on which the controller  $\mathbf{K}^{(n)}$  stabilizes the system.

---

4. Actually there are 11 poles but the high frequency poles are relatively less affected by the controller gains compared to the lower frequency poles.

Figs. 6.17(a)-(d) show the resulting successive gains found with Algorithm 6.3.1. These sequential gains ensure the stability condition on the entire Mach number domain  $[0.25, 0.6]$ . At this point, one can decide to switch between these gains depending on the value of  $M$ , or continuous functions in  $M$  can be sought by interpolating data. The shape of the interpolating functions is free to the user (piecewise linear, polynomials, etc...) In our case, third order polynomial interpolations are obtained with `polytool` Matlab function (—). Figure 6.18 illustrates the closed-loop poles for  $M \in [0.25, 0.6]$  showing that all pole confinement constraints are satisfied.

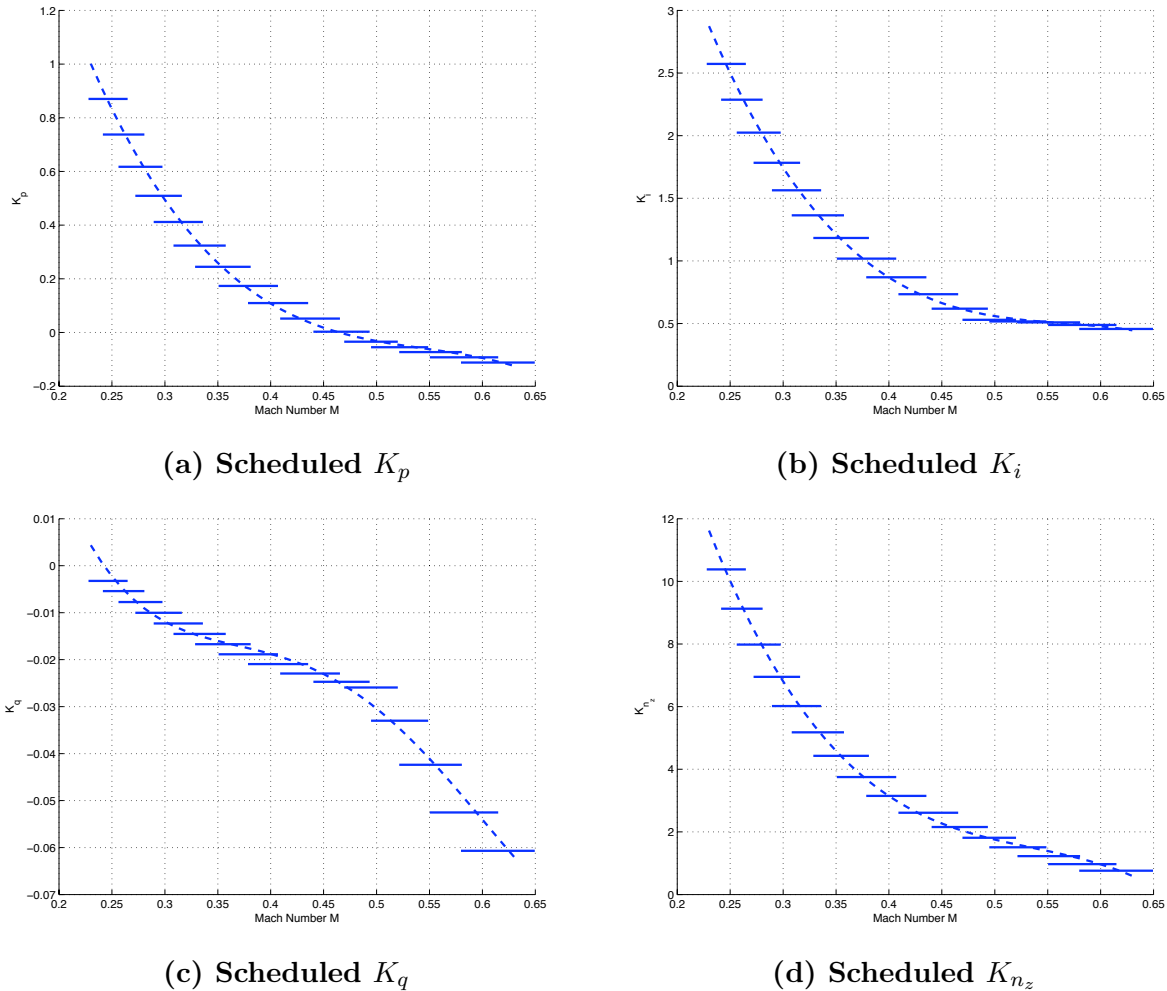


Figure 6.17 Scheduled gains w.r.t.  $M$  at  $h_0 = 5000$  ft

## Phase 2 : Dropback adjustment and time-responses

We obtain  $K_{ff}(M)$  to ensure null dropback by using Eq. (6.51) with  $h = h_0$  and  $M \in [0.25, 0.6]$ . Figure 6.19 shows the time-responses for a 5 second unit-step then a null input for different Mach number values at  $h_0 = 5000$  ft. Settling times remain around 3 seconds and dropback is zero for



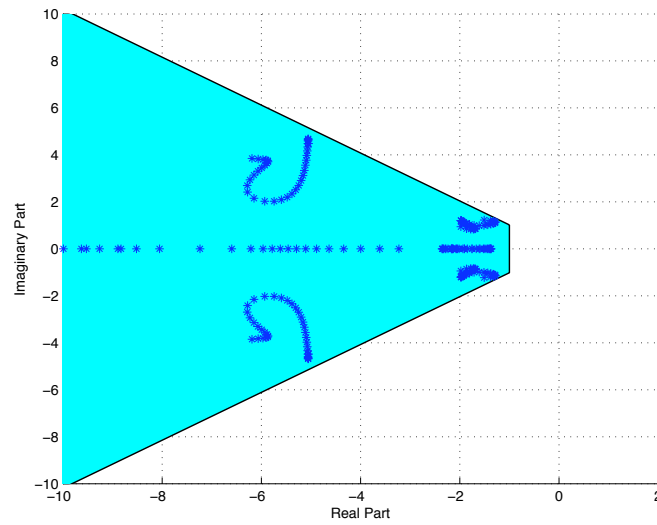


Figure 6.18 Closed-loop pole confinement for  $M \in [0.25 \ 0.6]$  at  $h_0 = 5000$  ft

each value as predicted.

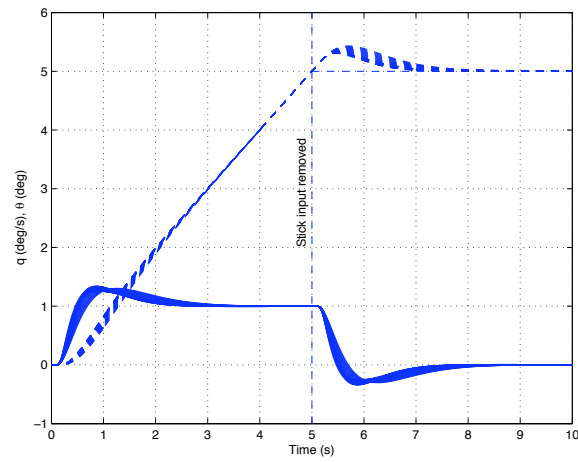


Figure 6.19 Time-responses for  $M \in [0.25 \ 0.6]$  at  $h_0 = 5000$  ft

### 6.5.3 Scheduled controller w.r.t $M$ and $h$

A first scheduled controller w.r.t.  $M$  has been found in the previous section for the lowest altitude  $h = 5000$  ft. It remains now to extend it to the entire flight envelope.

### Phase 1 : Pole confinement

By using Algorithm 6.3.2, we try to find scheduled feedback gains w.r.t.  $M$  and  $h$  that ensure the pole confinement constraints on the entire flight envelope. As before, we alternate between synthesis phases at a fixed altitude and robustness analysis phases.

1. Synthesis phase : Altitude  $h_n$  is fixed and Algorithm 6.3.1 provides a scheduled controller  $\mathbf{K}_n(M)$  w.r.t.  $M$  at altitude  $h = h_n$ .
2. Robustness analysis phase : The scheduled controller  $\mathbf{K}_n(M)$  is stable at  $h_n$  for  $M \in [\underline{M}(h_n), \overline{M}(h_n)]$ .<sup>5</sup> The analysis results in the segment  $]\underline{h}_n, \overline{h}_n[$  such that  $\mathbf{K}_n(M)$  stabilizes the system on the domain  $[\underline{M}(h_n), \overline{M}(h_n)] \times (\underline{h}_n, \overline{h}_n)$  and the next synthesis is made at  $h_{n+1} = \overline{h}_n$ .

Figs. 6.20(a)-(b) show the examples of resulting gain surfaces ( $K_p$  and  $K_i$ ) found with Algorithm 6.3.2. These scheduled gains ensure the stability condition on the entire flight domain. No simple polynomial interpolations were actually sought but instead, gains were implemented in look-up tables with multi-linear interpolation. Such technique is fairly standard and dedicated algorithms are available in the Matlab/Simulink environment. Figure 6.21 illustrates that all closed-loop poles are inside  $\Omega_t$ .

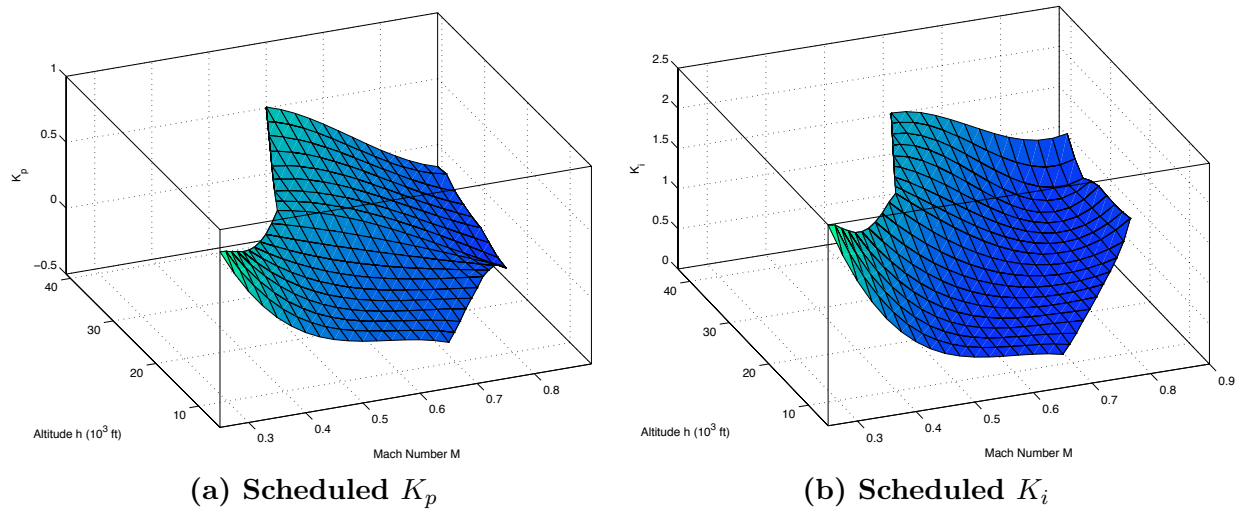


Figure 6.20 Scheduled gains  $K_p$  and  $K_i$  w.r.t.  $M$  and  $h$

### Phase 2 : Droback adjustment, time-responses and robustness margins

Once again we use Eq. (6.51) to obtain a scheduled gain  $K_{ff}(M, h)$  to ensure null dropback on the entire flight envelope. For time simulations, a gridding of the entire flight envelope is considered. Figs. 6.22(a)-(b) show time-responses for a 5 second unit-step entry in  $\delta_{ref}$ . They are satisfying for the entire flight envelope and as predicted, Gibson's dropback is almost null for every configuration.

5. As the flight domain is not rectangular, the low and high Mach number limits are function of the altitude

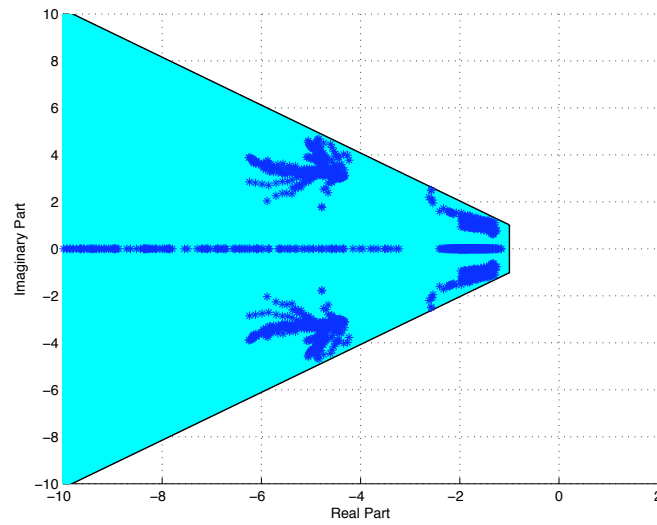


Figure 6.21 Closed-loop pole confinement for full flight envelope

Figs 6.23(a)-(b) illustrate the gain and phase margin levels on the complete flight envelope when the CAS loop is opened. The gain margin requirement ( $> 6$  dB) is largely satisfied for most part of flight envelope. The same applies for the phase margin requirement ( $> 45^\circ$ ) where worst cases have a phase margin above  $42^\circ$ . Thus, even if gain and phase margin requirements were not part of the synthesis, they are mostly fulfilled.

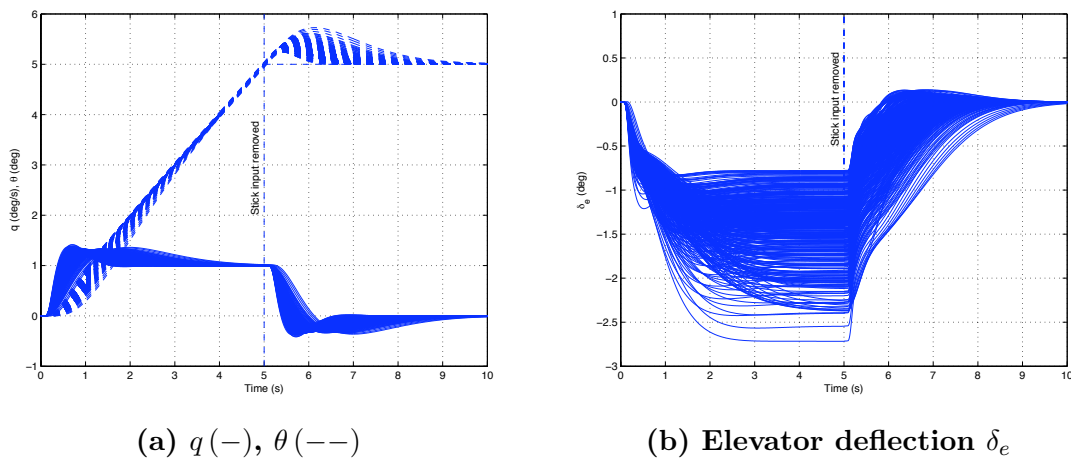
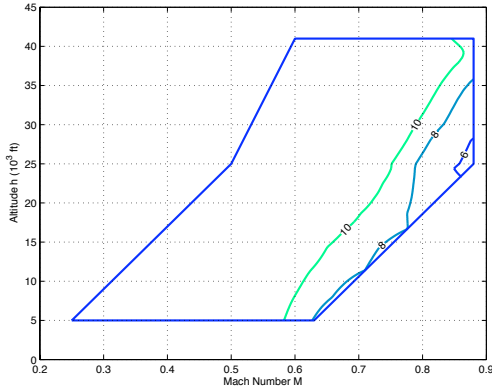
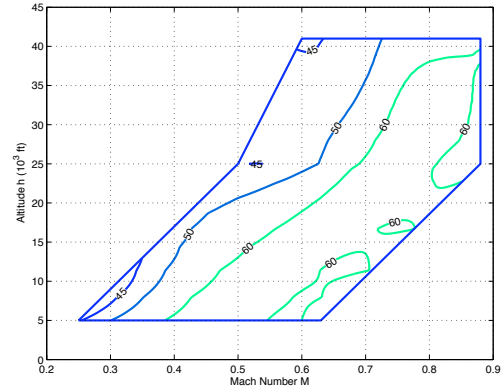


Figure 6.22 Time-responses for full flight envelope



(a) Gain margin



(b) Phase margin

Figure 6.23 Gain and Phase margin for full flight envelope

## 6.6 Conclusion

This article presents a novel technique for scheduling controllers with application to the longitudinal flight of a business aircraft. It applies to systems with one or two parameters. From a single controller designed for one trim condition, the algorithm varies automatically the controller gains to extend its stability property (i.e. essentially pole confinement constraints) to the rest of the parametric domain. Contrary to classic gain-scheduling techniques, there is no need to multiple controller synthesis on several trim conditions as the algorithms deal automatically with that. Moreover, stability is guaranteed all along the process. Last but not the least, the technique can handle any fixed controller architecture. The technique was successfully applied on the control of the longitudinal flight of a *Bombardier Inc. Challenger 604*. Based on a classic control scheme, the flight scheduled controller w.r.t. to altitude and Mach number operates well on the full flight envelope. The pole confinement constraint is satisfied through the entire flight envelope showing the efficiency of the method. Additional criterion, i.e. Gibson's dropback, was handled by a previously stated theoretical formula. Phase and gain margins were checked *a posteriori* and proved to be adequate. In spite of the fixed architecture constraint, our procedure manages to produce an efficient scheduled controller through the entire flight envelope with less computational effort than classic techniques.

Troisième partie

# APPROCHE PAR CONTRÔLE MODAL ROBUSTE

# Préambule

Nous allons maintenant aborder notre seconde approche pour résoudre notre problème. Nous avons jusqu'à présent conservé les architectures de correction imposées par *Bombardier Inc.* ou du moins communément utilisées dans les contrôleurs de vol. Il s'agit alors de s'affranchir de ces architectures pour concevoir de nouveaux types de contrôleur capables de remplir les spécifications imposées. Néanmoins le but demeure le même : trouver des contrôleurs aussi simples que possibles dont les structures se rapprochent des architectures classiques.

Nous conservons ainsi les mêmes mesures qui étaient disponibles précédemment, soient la vitesse de tangage  $q$  et l'accélération verticale  $n_z$ . En revanche, nous sommes libres quant à la forme des retours et de la précommande ainsi que de l'ordre des fonctions de transfert. Il faut de plus que ce contrôleur assure les performances sur tout le domaine de vol (défini en terme de nombre de Mach et d'altitude) et soit aussi robuste à des variations de masse et de centrage de l'appareil. Nous imposons ainsi une première structure à notre correcteur. Comme l'enveloppe de vol décrit un domaine assez large dans lequel le comportement de l'avion peut varier de façon très significative, nous supposons que le contrôleur est séquencé en terme de pression dynamique  $\bar{q}$  et d'altitude  $h$  qui sont des grandeurs facilement mesurables<sup>6</sup>. En revanche, comme la masse et le centrage sont des paramètres moins facilement estimables, nous prenons le parti que le contrôleur devra être robuste face à des variations de ces paramètres.

L'idée est donc dans un premier temps de synthétiser par une méthode moderne un ou des premiers correcteurs remplissant au mieux une majeure partie du cahier des charges en un point de vol donné (Mach et altitude fixés) et qui soient robustes à des variations de masse et centrage. Les méthodes de synthèse robustes comme la synthèse  $H_\infty$  et/ou  $\mu$ -synthèse se prêtent bien à ce genre de choses. Elles ont néanmoins l'inconvénient de fournir des correcteurs d'ordre élevé (au moins du même ordre que l'ordre du modèle de synthèse).

Nous procéderons alors dans un deuxième temps à une réduction de ces contrôleurs. Il est en effet possible d'abaisser par des méthodes classiques de réduction équilibrée les ordres des correcteurs  $\mathcal{H}_\infty$  de façon assez significative sans trop détériorer les performances. En revanche, d'autres méthodes plus élaborées sont nécessaires afin de poursuivre la réduction et atteindre un ordre minimum en dessous duquel les performances du correcteur initial ne sont plus assurées. Nous utiliserons alors la méthode de réduction inspirée des techniques de contrôle modal robuste.

Nous achèverons enfin par le séquençement du correcteur en fonction de la pression dynamique (au lieu du Mach comme fait dans l'**article 2**) et de l'altitude. Même si plusieurs méthodes sont disponibles, nous nous concentrerons sur une méthode d'auto-séquencement issue elle-aussi des tech-

---

6. Nous choisissons d'utiliser la pression dynamique à la place du nombre de Mach.

niques de contrôle modal robuste (Döll *et al.*, 2001). Cette méthode permet de choisir *a priori* une forme de séquençement du contrôleur et non d'effectuer *a posteriori* une interpolation des correcteurs.

Cette partie est scindée de la façon suivante :

- le **chapitre 7** passent en revue les différents éléments théoriques avec leur application propre à notre problème. Les méthodologies et applications y sont longuement décrites permettant une reproduction sur d'autres types d'avion.
- le **chapitre 8** est l'**article 3** présentant l'ensemble de l'approche proposée.

## CHAPITRE 7

### DE LA SYNTHÈSE $H_\infty$ À L'AUTO-SÉQUENCÉMENT D'UN CORRECTEUR RÉDUIT ROBUSTE

Dans ce chapitre, nous allons présenter les différentes étapes pour la conception de notre correcteur séquencé et robuste. Chaque étape est organisée de façon similaire : nous effectuons les rappels théoriques nécessaires suivis de leur application à notre problème. La première étape consiste en une synthèse  $H_\infty$  en différents points de vol ; ces premiers correcteurs doivent satisfaire la plupart des qualités de manœuvrabilités et être robustes à des variations de masse et de centrage. La deuxième étape traite de la réduction de ces correcteurs grâce aux techniques de commande modale robuste. Enfin, la dernière étape sera dédiée au séquençement de ce contrôleur sur l'ensemble de l'enveloppe de vol.

#### 7.1 Première étape : synthèse $H_\infty$

Nous traitons ici l'obtention d'un premier correcteur par une synthèse  $H_\infty$ . L'enveloppe de vol (Fig. 2.9) étant divisée en plusieurs points de vol, nous cherchons à obtenir pour chacun d'eux un correcteur satisfaisant les qualités de manœuvrabilité et qui soit robuste dans une certaine mesure à des variations de masse et centrage. Nous débutons par des rappels théoriques sur la synthèse  $H_\infty$  et poursuivons sur l'application à notre problème après avoir défini un modèle de synthèse.

##### 7.1.1 La forme standard

La forme standard permet de représenter à la fois le système à contrôler ainsi que le cahier des charges associé exprimé sous la forme de filtres de pondération. Considérons le système augmenté (incorporant les filtres de pondération)  $P(s)$  formé des 4 transferts multivariables existant entre les entrées  $u$  et  $w$  et les sorties  $y$  et  $z$  où :

- $u$  représente la commande du système
- $w$  représente les entrées exogènes (consignes et/ou perturbations)
- $y$  représente les mesures
- $z$  représente les sorties régulées

On décompose alors  $P(s)$  de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = P(s) \cdot \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix} \quad (7.1)$$



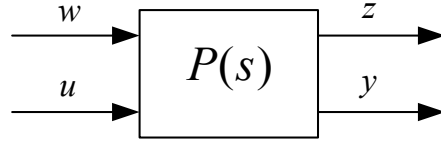
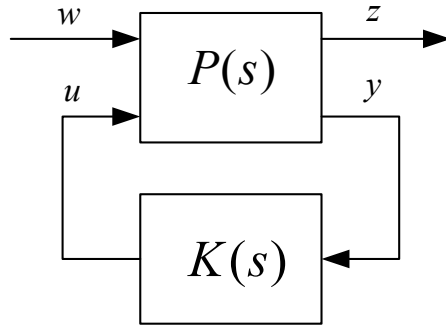


Figure 7.1 Modèle Augmenté

En rebouclant le système par la loi de commande  $U(s) = K(s)Y(s)$ , on obtient le transfert entre les entrées  $w$  et les sorties  $z$ , encore appelé Transformation Fractionnaire Linéaire (LFT) inférieure :

$$G_{zw}(s) = \mathcal{F}_l(P(s), K(s)) = P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(I - P_{22}(s)K(s))^{-1}P_{21}(s) \quad (7.2)$$

Figure 7.2 Problème  $H_\infty$  Standard

### 7.1.2 Le problème $H_\infty$

On définit la norme  $H_\infty$  d'une fonction de transfert asymptotiquement stable  $G(s)$  comme :

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega)) = \sup_{U(s) \neq 0 \in L_2} \frac{\|Y(s)\|_2}{\|U(s)\|_2} \quad (7.3)$$

où la norme  $H_2$  est définie par  $\|G(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Trace}(G^*(j\omega)G(j\omega))d\omega}$ .

De façon générale, le problème  $H_\infty$  est un problème de stabilisation et de rejet des perturbations. On cherche principalement à minimiser l'impact des perturbations  $w$  sur les sorties régulées  $z$ . On cherche ainsi à minimiser la valeur maximale de l'énergie de la sortie sur une entrée d'énergie finie, soit la norme  $H_\infty$ . Le problème  $H_\infty$  optimal est donc celui de la synthèse d'un correcteur  $K(s)$  parmi tous les correcteurs stabilisant le système de manière interne, qui minimise la norme  $H_\infty$  du

transfert  $G_{zw}(s) = \mathcal{F}_l(P(s), K(s))$ .

• **Problème  $H_\infty$  Optimal :**

*Trouver un contrôleur stabilisant  $K(s)$  tel que  $\|\mathcal{F}_l(P(s), K(s))\|_\infty$  soit minimale*

Connaître la norme  $H_\infty$  minimale atteignable, ou encore le gain  $H_\infty$  optimal,  $\gamma_{opt}$ , peut être théoriquement utile car on fixe ainsi une limite aux performances que l'on peut obtenir. Néanmoins, en pratique, on définit le problème  $H_\infty$  sous-optimal où l'on cherche à réduire la norme  $H_\infty$  en dessous d'un seuil positif  $\gamma > \gamma_{opt}$ .

• **Problème  $H_\infty$  Sous-Optimal :**

*Trouver un contrôleur stabilisant  $K(s)$  tels que  $\|\mathcal{F}_l(P(s), K(s))\|_\infty \leq \gamma$*

### 7.1.3 Résolution classique du problème $H_\infty$

Il existe plusieurs méthodes de résolution du problème  $H_\infty$  optimal. Celle proposée par Doyle *et al.* (1989), basée sur une approche modèle d'état semble néanmoins être, à l'heure actuelle, une des mieux adaptées numériquement à la résolution de problèmes de grande taille.

♦ **Représentation du système augmenté**

Introduisons une réalisation minimale du système  $P(s)$  :

$$P(s) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

Cette réalisation est associée à la description interne suivante ( $x$  étant le vecteur d'état du système) :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

On supposera que :

$$D_{12} \in \mathbb{R}^{p_1 \times m_2} \text{ et } D_{21} \in \mathbb{R}^{p_2 \times m_1} \quad (7.6)$$

Avec :

- $m_1$  le nombre d'entrées exogènes
- $p_1$  le nombre de sorties régulées
- $m_2$  le nombre de commandes
- $p_2$  le nombre de mesures

**Remarque :** On retrouve dans le formalisme standard l’expression du système à commander d’entrée  $u$  et de sortie  $y$ . En effet la représentation d’état classique  $(A, B, C, D)$  se retrouve naturellement dans  $(A, B_2, C_2, D_{22})$ .

### ◆ Hypothèses

La résolution du problème, à travers la représentation d’état par la méthode de Doyle *et al.* (1989) n’est possible que sous les cinq hypothèses suivantes :

**(H1)**  $(A, B_2, C_2)$  est stabilisable et détectable. Cette condition est nécessaire et suffisante pour l’existence d’un compensateur qui stabilise de manière interne le système.

**(H2)** Les matrices  $D_{12}$  et  $D_{21}$  sont de rang plein.

**(H3)**  $\text{rang} \left( \begin{bmatrix} j\omega - A & -B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \right) = n + m_2$  et  $\text{rang} \left( \begin{bmatrix} j\omega - A & B_1 \\ -C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \right) = n + p_2$  pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ . Autrement dit,  $P_{12}(s)$  et  $P_{21}(s)$  n’ont pas de zéros sur l’axe des imaginaires.

Ces deux dernières hypothèses sont appelées hypothèses de régularité. Nous ferons aussi les hypothèses simplificatrices suivantes, dites de “normalisation” :

**(H4)**  $D_{12}^T [D_{12} \ C_1] = [I \ 0]$  et  $D_{21} [D_{21}^T \ B_1^T] = [I \ 0]$

**(H5)**  $D_{22} = 0$ .

Afin de satisfaire les hypothèses de **(H4)**, il est nécessaire que  $D_{12}$  n’ait pas plus de colonnes que de lignes et que  $D_{21}$  n’ait pas plus de lignes que de colonnes. Ceci implique donc en pratique que :

$$\begin{aligned} p_1 &\geq m_2 \\ m_1 &\geq p_2 \end{aligned} \tag{7.7}$$

**Remarque :** Gahinet *et al.* (1994) propose une méthode moins restrictive au niveau des hypothèses et basée sur une caractérisation LMI. Les deux hypothèses suivantes sont simplement nécessaires :

**(H1)**  $(A, B_2, C_2)$  est stabilisable et détectable

**(H2)**  $D_{22} = 0$ .

Cependant, du fait de la caractérisation LMI du problème  $H_\infty$ , l’algorithme<sup>1</sup> proposé génère

---

1. Cet algorithme est implanté sous Matlab dans la fonction `hinfli`.

des temps de calculs plus importants pour des systèmes d'ordre élevé.

### ◆ Résolution

On cherche à résoudre le problème  $H_\infty$  dit sous-optimal qui consiste, pour un réel  $\gamma$  donné, à trouver s'il existe un correcteur  $K(s)$  stabilisant le système et vérifiant :

$$\|\mathcal{F}_l(P(s), K(s))\|_\infty \leq \gamma \quad (7.8)$$

Pour cela, on utilise le résultat suivant :

**Théorème 7.1.1.** *Sous les hypothèses (H1)-(H5) précédemment énoncées, il existe un correcteur  $K(s)$  qui stabilise le système de manière interne et assure*

$$\|\mathcal{F}_l(P(s), K(s))\|_\infty \leq \gamma \quad (7.9)$$

*si et seulement si*

1. les équations de Ricatti suivantes admettent respectivement pour solutions  $X_\infty$  et  $Y_\infty$

$$A^T X + X A + X(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X + C_1^T C_1 = 0 \quad (7.10)$$

$$A Y + Y A^T + Y(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y + B_1 B_1^T = 0 \quad (7.11)$$

2. ces solutions vérifient :

$$X_\infty \geq 0 \quad Y_\infty \geq 0 \quad \rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2 \quad (7.12)$$

La recherche du  $\gamma_{opt}$  optimal se fait alors par dichotomie en testant, à chaque itération, l'existence d'une solution  $K(s)$  pour le  $\gamma$  défini. Les algorithmes couramment implantés<sup>2</sup> fournissent une solution appelée correcteur central ; néanmoins il est bon de noter qu'il existe une infinité de solutions au problème sous-optimal pour un  $\gamma > \gamma_{opt}$  fixé et que l'ensemble des correcteurs possibles peut être décrit grâce aux résultats présentés dans (Nakayama *et al.*, 1995).

On construit le correcteur central par le théorème suivant :

**Théorème 7.1.2.** *Supposons (H1)-(H5) satisfaites et soit  $\gamma > \gamma_{opt}$ . Alors le compensateur*

$$K_c(s) = C_K(sI - A_K)^{-1} B_K \quad (7.13)$$

---

2. Nous utiliserons à cet effet la fonction `hinfric` de Matlab.

avec

$$A_K = A + (\gamma^{-2}B_1B_1^T - B_2B_2^T)X_\infty - (I - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1}Y_\infty C_2^T C_2 \quad (7.14)$$

$$B_K = (I - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1}Y_\infty C_2^T \quad (7.15)$$

$$C_K = -B_2^T X_\infty \quad (7.16)$$

stabilise le système de manière interne et satisfait

$$\|\mathcal{F}_l(P(s), K_c(s))\|_\infty < \gamma \quad (7.17)$$

Cette solution particulière du problème  $H_\infty$  sous-optimal est appelé correcteur central.

Le théorème ci-après caractérise tous les correcteurs  $K_\infty(s)$  satisfaisant  $\|\mathcal{F}_l(P(s), K_\infty(s))\|_\infty < \gamma$ .

**Théorème 7.1.3.** (Nakayama et al., 1995) Un correcteur  $K_\infty(s)$  solution du problème  $H_\infty$  sous-optimal en  $\gamma$  est donné par

$$K_\infty(s) = \mathcal{F}_l(K_a(s), \Phi(s)) \quad (7.18)$$

où  $K_a(s)$  est déterminé par :

$$K_a(s) = \left[ \begin{array}{c|cc} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_1 & 0 & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (7.19)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{A} &= A + \gamma^{-2}B_1B_1^T X_\infty + B_2F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2 \\ \hat{B}_1 &= -Z_\infty L_\infty, \quad \hat{B}_2 = Z_\infty B_2 \\ \hat{C}_1 &= F_\infty, \quad \hat{C}_2 = -C_2 \\ \hat{D}_{12} &= I, \quad \hat{D}_{21} = I \\ \hat{F}_\infty &= -B_2^T X_\infty, \quad L_\infty = -Y_\infty C_2^T, \quad Z_\infty = (I - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1} \end{aligned}$$

et où  $\Phi(s)$  désigne un paramètre libre satisfaisant  $\Phi(s) \in \mathcal{RH}_\infty$  et  $\|\Phi(s)\|_\infty < \gamma$ .

Dans le cas où  $\Phi(s) = 0$ , on retrouve le correcteur central  $K_c(s)$  (Fig. 7.3). Cependant on peut envisager d'utiliser le paramètre libre  $\Phi(s)$  pour changer les propriétés de  $K_\infty(s)$ ; en particulier dans le cas où l'on désire un correcteur  $K_\infty(s)$  stable.

#### ◆ Synthèse $H_\infty$ pondérée

Dans la commande modale, une bonne synthèse réside dans le choix des valeurs et des vecteurs propres et dans le cas de la commande optimale, cela commence par un choix adéquat

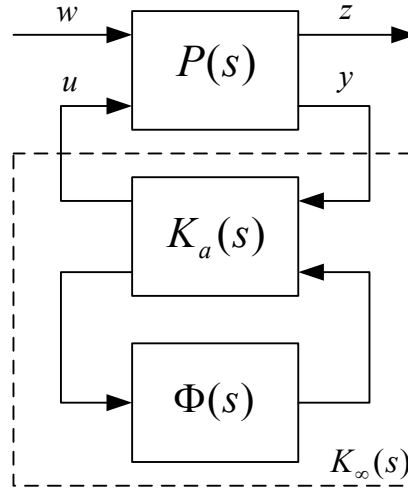


Figure 7.3 Paramétrisation de la solution du problème sous-optimal

des matrices de pondération. Quant à la synthèse  $H_\infty$ , il s'agit de bien choisir des filtres de pondérations entre certaines entrées et certaines sorties afin d'obtenir certaines propriétés en boucle fermée.

**Propriété 7.1.4.** Soit  $H_{E \rightarrow S}(s)$  le transfert multi-variable entre le vecteur d'entrées  $E = [E_i]_{i=1 \dots p}$  et le vecteur de sorties  $S = [S_i]_{i=1 \dots m}$ .

Si  $\|H_{E \rightarrow S}(s)\|_\infty \leq \gamma$  alors  $\forall i \in [1 \dots p]$  et  $\forall j \in [1 \dots m]$ ,  $\|H_{E_i \rightarrow S_j}(s)\|_\infty \leq \gamma$ .

Cette propriété traduit le fait qu'en imposant une borne supérieure  $\gamma$  à la norme  $H_\infty$  du transfert multi-variable entre les entrées exogènes et les sorties régulées, on impose cette borne sur chacun des sous-transferts mono-variables. En considérant la contraposée, on remarque qu'il est important de faire en sorte que des transferts SISO non "utiles" ne contraignent pas l'optimisation de  $\gamma$ . La réciproque de cette propriété n'est pas vraie.

**Propriété 7.1.5.** Soit deux matrices de pondération  $W_E(s)$  et  $W_S(s)$ , respectivement sur les entrées et les sorties du système  $H_{E \rightarrow S}(s)$  définies par :

$$W_E(s) = \begin{bmatrix} W_{E_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & W_{E_p} \end{bmatrix} \text{ et } W_S(s) = \begin{bmatrix} W_{S_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & W_{S_m} \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

Si  $\|W_S(s)H_{E \rightarrow S}(s)W_E(s)\| \leq \gamma$  alors :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \forall i \in [1 \dots p] \text{ et } \forall j \in [1 \dots m], |W_{S_j}(j\omega)H_{E_i \rightarrow S_j}(j\omega)W_{E_i}(j\omega)| \leq \gamma \quad (7.21)$$

Ces pondérations en entrée et en sortie peuvent donc être interprétées comme des gabarits fréquentiels. En effet, on peut réécrire (7.21) sous la forme :

$$|H_{E_i \rightarrow S_j}(j\omega)| \leq \frac{\gamma}{|W_{E_i}(j\omega)W_{S_j}(j\omega)|} \quad (7.22)$$

ce qui permet de définir le produit  $W_{E_i}(s)W_{S_j}(s)$  comme le gabarit fréquentiel imposé sur le transfert SISO  $H_{E_i \rightarrow S_j}(s)$  si  $\gamma = 1$ . (Figure 7.4)

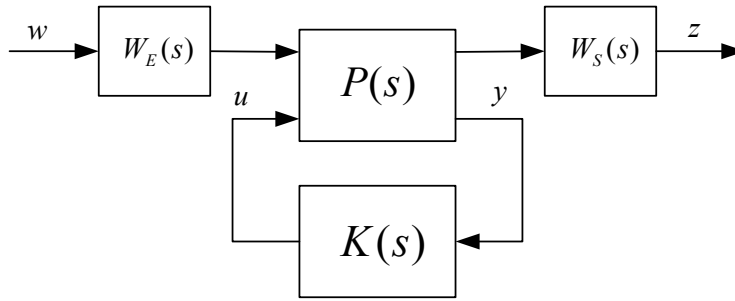


Figure 7.4 Filtres de pondération sur le système augmenté

#### 7.1.4 Application

L'étude qui suit est faite sur la condition de vol 1 située à 5000 ft pour un nombre de Mach de 0.25. Néanmoins, les synthèses  $H_\infty$  ont été répétées sur les 19 autres conditions de vol de l'enveloppe. On essaye de dégager ici l'influence des paramètres de certains filtres afin d'améliorer les performances du correcteur  $H_\infty$ . Dans tous les cas testés, on s'est assuré autant que possible d'obtenir  $\gamma < 1$ .

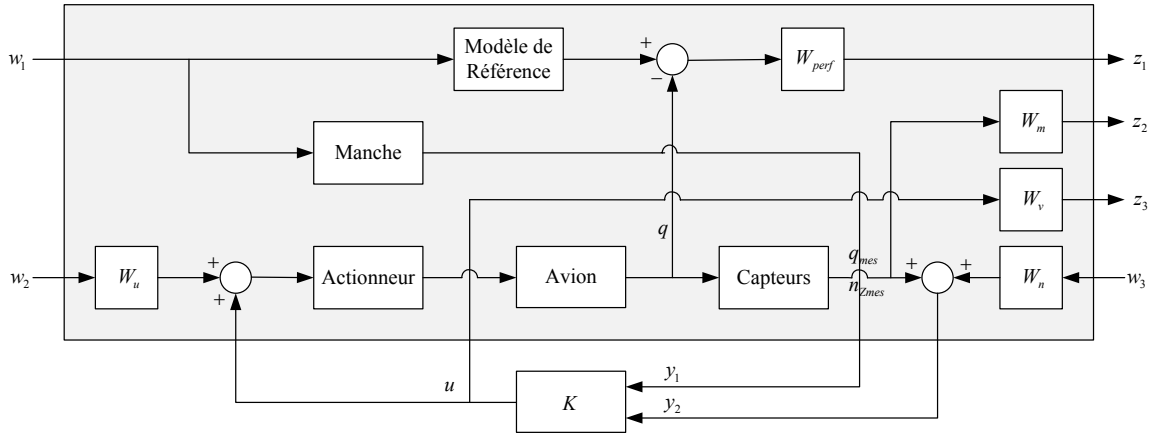
##### ◆ Modèle de synthèse

Le modèle augmenté  $P(s)$  que nous utiliserons pour la synthèse  $H_\infty$  est représenté sur la figure 7.5.

Le modèle de l'avion correspond à la dynamique Short Period ; les dynamiques de l'actionneur, des capteurs et du manche ont été incluses au modèle de synthèse. On cherche à concevoir un contrôleur  $K(s)$  qui assurera un comportement similaire au modèle de référence et ce malgré des perturbations sur les signaux de commande  $u$  et de mesures  $q$  et  $n_z$ . Le tableau 7.1 rassemble la signification des différents signaux. Les différents filtres de pondération sont présentés par la suite.

##### ◆ Filtres de pondération

Nous nous consacrons dans cette section aux filtres de pondération introduits dans le modèle augmenté afin de satisfaire notre cahier des charges.

Figure 7.5 Modèle de synthèse  $H_\infty$ Tableau 7.1 Signaux du modèle augmenté  $P(s)$ 

Signal	Signification
$u$	Signal de commande
$w_1$	Signal de référence
$w_2$	Perturbation sur la commande
$w_3$	Perturbation sur les mesures
$y_1$	Signal du manche
$y_2$	Mesures $q_{mes}$ et $n_{zmes}$
$z_1$	Erreur de poursuite pondérée
$z_2$	Mesures pondérées
$z_3$	Commande pondérée

### • Suivi d'un modèle de référence

Afin de satisfaire une partie des qualités de manœuvrabilité qui sont difficilement exprimables en termes de critères  $H_\infty$ , nous avons choisi d'utiliser dans la synthèse un modèle de référence satisfaisant une partie de notre cahier des charges. La synthèse  $H_\infty$  fournit alors, si possible, un contrôleur assurant que la boucle fermée se comporte de façon similaire à notre modèle de référence sur la bande de fréquences considérée. Grâce à l'analyse effectuée dans le Chapitre 3, on peut construire facilement des modèles de référence satisfaisant toutes les qualités de manœuvrabilité. On utilise en l'occurrence :

$$\frac{q}{\delta_{ref}} = \frac{e^{-0.1s}(0.66s + 1)}{s^2 + 2(0.7)(2.5)s + (2.5)^2} \quad (7.23)$$

On pourrait suivant le point de vol considéré pour la synthèse adapter le modèle de référence, notamment en faisant varier la pulsation propre  $\omega_{sp}$  avec la vitesse. Nous nous contenterons d'un modèle unique, quitte à le modifier si besoin. L'erreur entre le modèle de référence et le système rebouclé sur le correcteur  $K(s)$  est pondérée par un filtre d'ordre 1 :



$$W_{perf}(s) = \frac{w_{ref}}{\tau_{ref}s + 1} \quad (7.24)$$

• **Marges de robustesse**

On peut estimer les marges de stabilité d'un système de différentes manières :

- on ouvre chacune des boucles de retour élémentaires et on calcule les marges de gain  $M_G$  et de phase  $M_\varphi$  classiques pour chaque transfert SISO. Le résultat est plutôt optimiste puisque l'on suppose qu'il n'y a aucune perturbation/incertitude simultanée sur les autres retours. Dans notre cas, nous aurons deux retours, l'un sur  $q$  et l'autre sur  $n_z$  donc des marges propres à calculer pour chacun des retours.
- comme notre système n'a qu'une seule entrée, on peut aussi ouvrir le système au niveau de cette entrée et en calculer les marges correspondantes.
- on peut aussi calculer une marge de module MIMO correspondant à une perturbation s'appliquant simultanément sur toutes les boucles élémentaires. Une interprétation en termes de marges de gain et de phase peut être alors faite. Contrairement aux marges SISO qui peuvent se montrer trop optimistes, la marge MIMO peut, elle, être plutôt pessimiste.

On cherche donc à améliorer les marges de robustesse en  $T$  en entrée ( $\mathcal{F}_{w_2 \rightarrow z_3}$ ) et en sortie ( $\mathcal{F}_{w_3 \rightarrow z_2}$ ); elles font intervenir les fonctions de sensibilité complémentaires, resp.  $T_e = (I - KG)^{-1}KG$  en entrée et  $T_s = (I - GK)^{-1}GK$  en sortie. On prend des pondérations constantes sur la perturbation de la commande  $W_u = 0.5$  et des mesures  $W_n = 0.03I_2$ . Les mesures  $q$  et  $n_z$  sont elles-mêmes pondérées par  $W_m = \text{diag}(0.03, 0.01)$ . Le détail de la pondération  $W_v$  est donné ci-après.

• **Limite d'action du contrôleur**

Nous cherchons à limiter l'action du contrôleur en imposant une contrainte de roll-off sur le transfert  $\mathcal{F}_{w_3 \rightarrow z_3}$ . Nous utiliserons à cet effet une pondération de la forme :

$$W_v(s) = w_z \left( \frac{s/z_{w_z} + 1}{s/p_{w_z} + 1} \right)^2 \quad (7.25)$$

Nous allons jouer essentiellement sur la pondération de l'erreur de suivi de modèle et sur celle de l'amplitude de la commande en laissant les autres pondérations constantes. Toute synthèse  $H_\infty$  nécessite dans un premier temps une bonne connaissance des effets de chaque pondération pour pouvoir obtenir un correcteur donnant satisfaction. Notre but est d'obtenir un correcteur qui assure un bon suivi de modèle sur nos différentes configurations masse/centrage (on tolère néanmoins une légère dégradation sur les cas extrêmes en centrage) et qui présente de bonnes marges de robustesse. De plus, il faut autant que possible limiter la bande passante de notre correcteur.

### ◆ Analyse de la pondération sur l'erreur de suivi de modèle

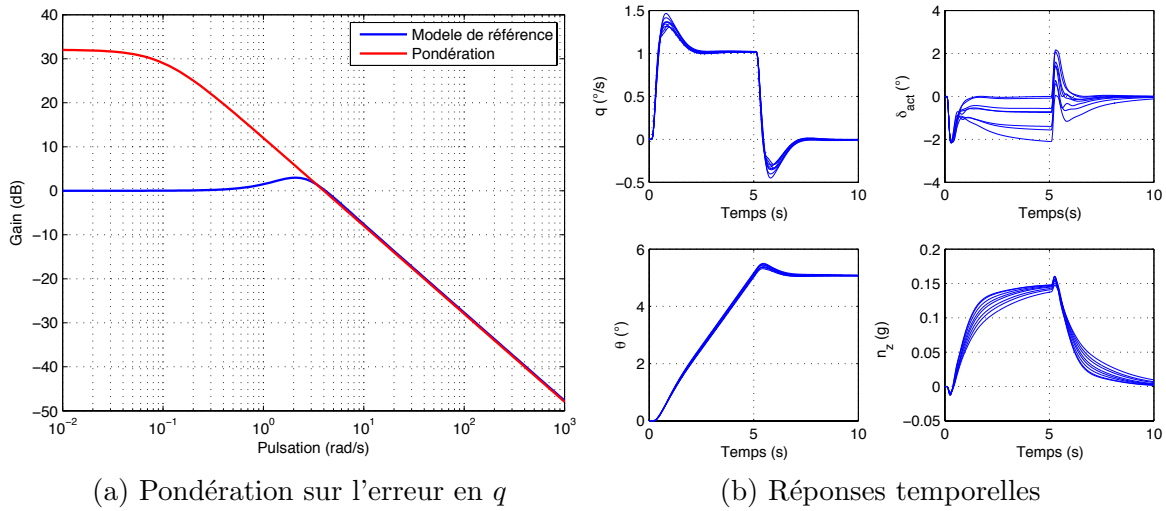
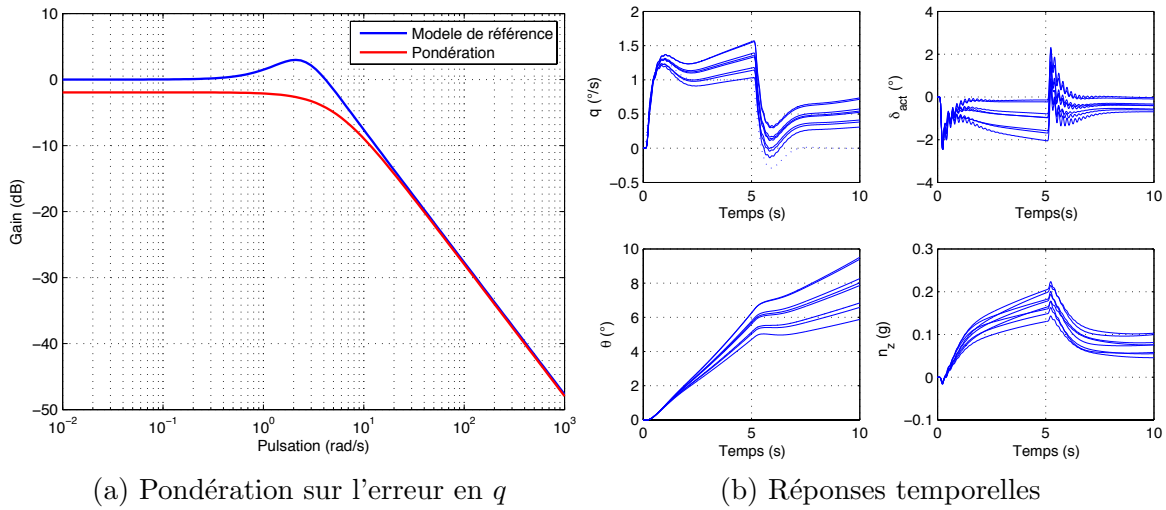
Nous étudions l'influence de la pondération sur l'erreur de suivi de modèle en mettant la pondération sur l'amplitude de la commande à un niveau très bas ( $w_z = 0.0001$ ) afin de ne pas limiter l'action du contrôleur.

- **Cas 1** : On réalise une première synthèse avec  $w_{ref} = 40$  et  $\tau_{ref} = 10$ . La figure 7.6-a montre la réponse fréquentielle de la pondération et du modèle de référence. Les bandes passantes sont prises égales. En choisissant une forte pondération sur l'erreur de suivi aux basses fréquences, nous nous attendons à ce que le système ait le même comportement en boucle fermée que le modèle de référence. La figure 7.6-b montre les réponses temporelles pour les 8 configurations masse/centrage. Il s'agit de l'application d'un échelon unitaire de manche durant 5 secondes et relâché ensuite. Toutes les simulations sont effectuées sur le modèle d'ordre élevé de l'avion. Nous pouvons voir que les réponses sont très similaires et proches. En revanche, cela est significatif d'un correcteur qui a une large bande passante. En effet, une très bonne robustesse paramétrique s'accompagne souvent d'un correcteur à large bande passante.
- **Cas 2** : Pour la seconde synthèse, on choisit  $w_{ref} = 0.8$  et  $\tau_{ref} = 0.2$ . La pondération basse fréquence a été considérablement diminuée (Fig. 7.7-a). Cela s'en ressent au niveau des réponses temporelles (Fig. 7.7-b) où le suivi de modèle n'est plus vraiment assuré. Les réponses ne sont plus précises et si l'on appliquait un échelon plus long, on verrait des temps de réponse augmentés.
- **Cas 3** : Nous effectuons une troisième synthèse en jouant sur la constante de temps de la pondération sur l'erreur de suivi  $w_{ref} = 40$  et  $\tau_{ref} = 150$ . Nous maintenons un gain élevé aux basses fréquences pour pondérer fortement l'erreur de suivi, en revanche nous diminuons la bande passante de la pondération (Fig. 7.8-a). Nous pouvons remarquer que si le suivi de modèle (Fig. 7.8-b) n'est plus aussi bon que sur le cas 1, cela reste tout de même meilleur que sur le cas 2. Les réponses sont relativement plus lentes que celles du cas 1.

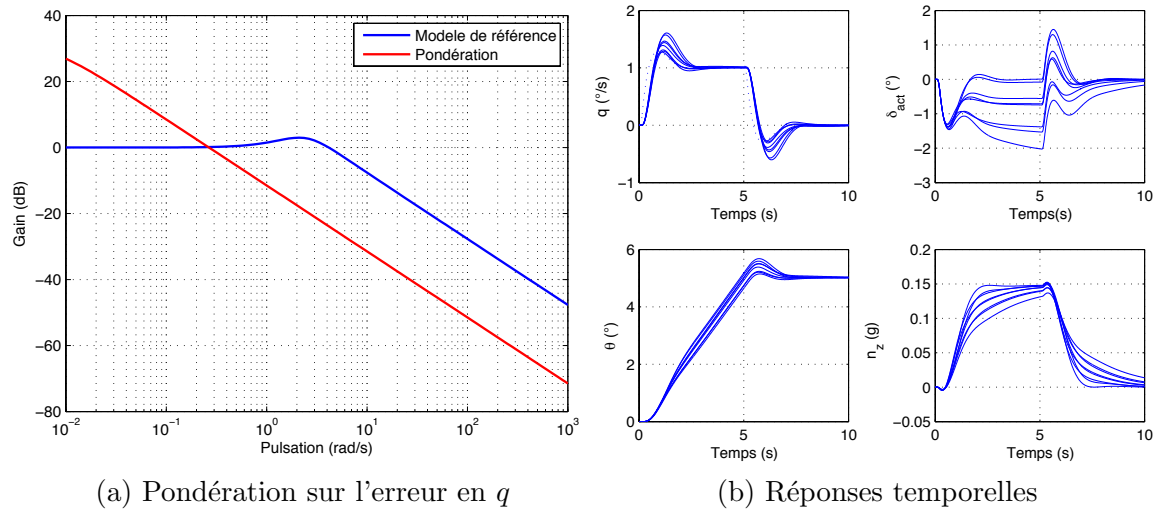
### ◆ Analyse de la pondération sur l'amplitude de la commande

Nous gardons la pondération de l'erreur de suivi de modèle du cas 1 et nous allons chercher grâce à la pondération sur l'amplitude de la commande à diminuer la bande passante du correcteur. Nous testons différents filtres représentés sur la figure 7.9. Les valeurs sont données dans la table 7.2. Nous partons du cas 4 où nous contraignons peu les hautes fréquences jusqu'au cas 6 où l'on cherche à fortement les atténuer ; le cas 5 étant un cas intermédiaire. De plus, nous essayons d'avoir une bande passante de l'ordre de 50 rad/s.

En observant les diagrammes de Bode des retours sur la figure 7.10, l'atténuation aux hautes

Figure 7.6 Synthèse  $H_\infty$  - Cas 1Figure 7.7 Synthèse  $H_\infty$  - Cas 2

fréquences et la diminution de la bande passante sont bien effectives en passant du cas 4 au cas 6. En revanche, cela s'accompagne au niveau des réponses temporelles par une perte de performance sur l'ensemble des configurations (Fig. 7.11). Un calcul des marges de gain et de phase (ouverture de la boucle juste avant l'actionneur) révèle aussi qu'en diminuant la bande passante et en atténuant les hautes fréquences on améliore ces critères. Avec un gain aux hautes fréquences faible, on tolère mieux les dynamiques négligées donc une meilleure robustesse.

Figure 7.8 Synthèse  $H_\infty$  - Cas 3

Pondération	Cas 4	Cas 5	Cas 6
$w_z$	0.1	0.1	0.1
$p_{w_z}$	15	15	15
$z_{w_z}$	50	150	1000

Tableau 7.2 Pondérations des cas 4-5-6

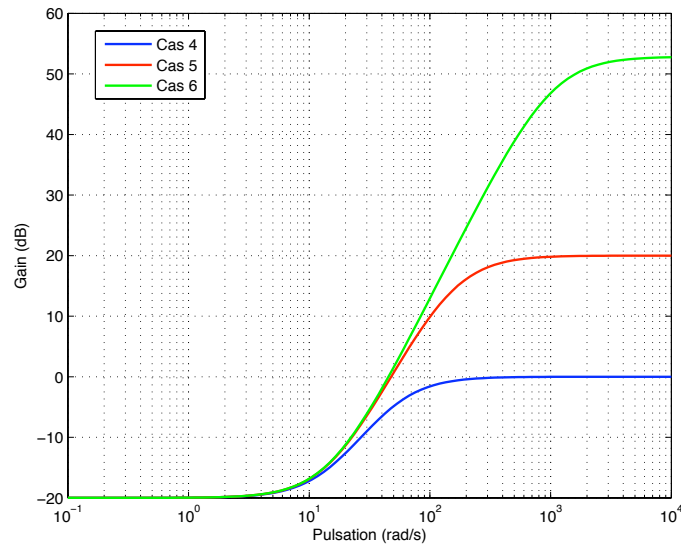
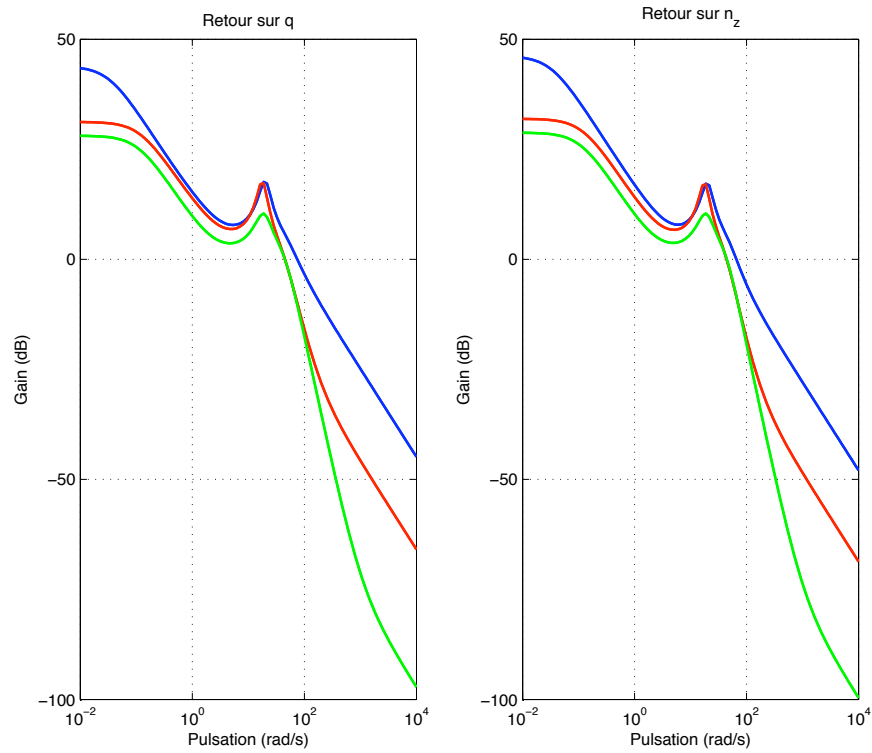


Figure 7.9 Pondérations sur la commande

### 7.1.5 Conclusion sur la synthèse $H_\infty$

La synthèse  $H_\infty$  nous a permis d'obtenir des contrôleurs performants sur les 20 cas de vol et relativement robustes face à des variations de masse et de centrage. De plus, nous avons pu mettre

Figure 7.10 Diagramme de Bode des retours en  $q$  et  $n_z$ 

Modèle	Cas $m/x_{cg}$	$\zeta_{sp1}$	$\omega_{BW_\theta}$	$Drb$	$\tau_p$	$ST$
Modèle 1.1	30 000 /20	0.64	1.5	0.02	0.23	1.69
Modèle 1.2	30 000 /35	0.73	1.64	0.05	0.21	1.94
Modèle 1.3	39 000 /20	0.60	1.4	0.03	0.22	1.78
Modèle 1.4	39 000 /38	0.68	1.52	0.10	0.21	2.78
Modèle 1.5	46 000 /16	0.54	1.32	-0.2	0.2	3.22
Modèle 1.6	46 000 /38	0.66	1.51	0.2	0.21	3.21
Modèle 1.7	32 000 /48	0.72	1.82	0.22	0.25	2.31
Modèle 1.8	39 000 /48	0.66	1.66	0.25	0.24	2.52

Tableau 7.3 Qualités de manœuvrabilité avec le correcteur  $H_\infty$  retenu

en évidence l'influence des paramètres de certains filtres sur l'allure des réponses temporelles et sur la bande passante du correcteur. Ce fut un atout d'autant plus appréciable que cela a permis de régler rapidement les paramètres de synthèse sur les 19 autres cas de vol.

Il va sans dire que l'on observe des différences dans les réponses temporelles dépendamment de la configuration masse/centrage. En effet dans le cas 1, les réponses temporelles étaient assez semblables mais cela signifiait un correcteur avec un fort gain et une large bande passante. Nous avons pris le parti d'être moins exigeants sur l'allure des réponses temporelles afin de diminuer l'action du correcteur. Et si l'on calcule les qualités de manœuvrabilité, elles demeurent acceptables même

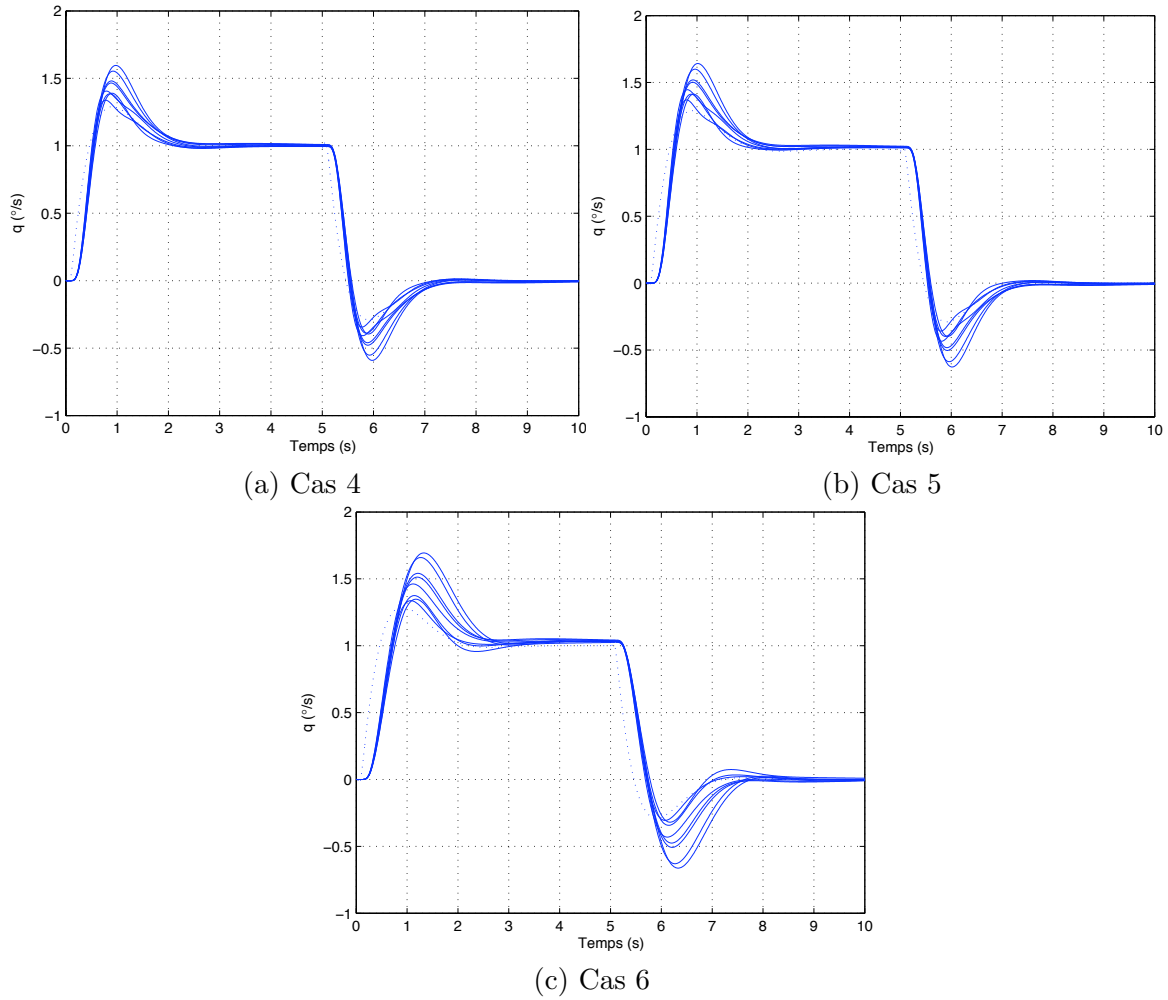


Figure 7.11 Réponses temporelles en  $q$  pour les cas 4-5-6

pour les configurations extrêmes. On peut mentionner d'ailleurs qu'il est courant de séquencer les correcteurs par rapport au centrage de l'appareil, voire même par rapport à la masse<sup>3</sup> évitant ainsi au contrôleur d'être robuste face à ces deux paramètres.

L'ordre des correcteurs est finalement de 23, ce qui est bien évidemment trop élevé pour une implantation pratique. Nous allons donc à présent concentrer nos efforts à réduire ces correcteurs au niveau le plus bas tout en conservant des performances similaires.

---

3. Via des estimations.

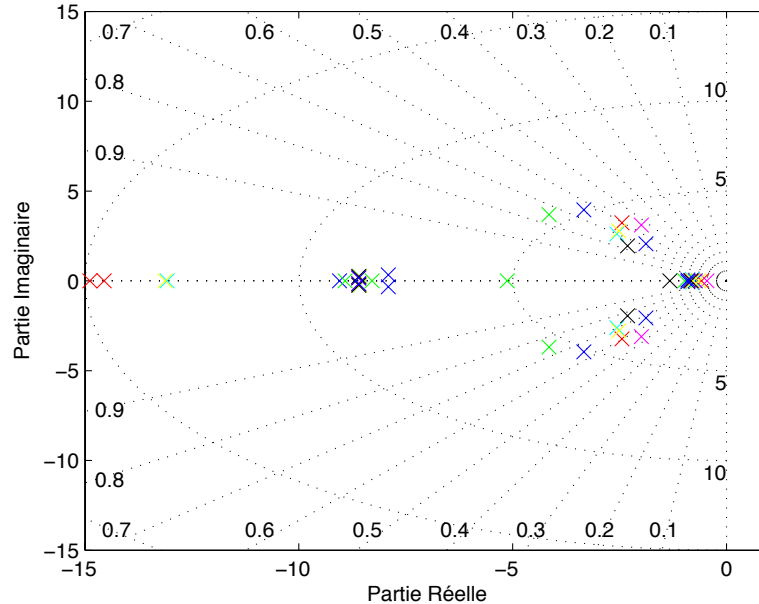


Figure 7.12 Pôles en boucle fermée pour les 8 configurations avec le correcteur  $H_\infty$

## 7.2 Deuxième étape : réduction modale du correcteur $H_\infty$

Forts de correcteurs  $H_\infty$  remplissant notre cahier des charges et relativement robustes à des variations de masse et centrage, nous devons cependant tenter de gommer l'inconvénient majeur qui accompagne toute synthèse  $H_\infty$  : l'ordre du correcteur. Nous avons abordé dans le chapitre 5 la réduction de nos modèles en boucle ouverte afin de faciliter les étapes de synthèses. Il s'agit à présent d'aborder le problème complémentaire, qui est de réduire l'ordre de notre correcteur. Même si les méthodes de réduction sont nombreuses (Obinata et Anderson, 2001), elles sont peu adaptées à la réduction de contrôleurs en gardant à l'esprit la conservation des performances. De plus, elles s'attachent à réduire l'ordre global du correcteur sans se soucier de réduire et structurer chacun des sous-transferts SISO du correcteur.

Nous utiliserons alors une méthode de réduction basée sur la commande modale robuste (Chable, 2003) qui se révèle particulièrement efficace pour abaisser de façon très significative l'ordre de notre correcteur en s'attachant à conserver le comportement modal (placement des pôles dominants). La méthode permet aussi de structurer la correction par la même occasion (réduction différenciée selon le sous-transfert SISO). Nous débuterons classiquement par des rappels théoriques sur la commande modale robuste et leur extension à la réduction de correcteur, pour poursuivre sur l'application de ces techniques à nos correcteurs.

### 7.2.1 Rappels théoriques sur la commande modale robuste

#### ◆ Placement de structure propre par retour de sortie statique

On considère un système LTI représenté sous forme d'état :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (7.26)$$

Avec :

- $x \in \mathbb{R}^n$  : vecteur d'état de dimension  $n$
- $u \in \mathbb{R}^m$  : vecteur de commande de dimension  $m$
- $y \in \mathbb{R}^p$  : vecteur de mesure de dimension  $p$

On veut synthétiser une loi de commande par retour de sortie :

$$u = Ky + He \quad (7.27)$$

Où :

- $K$  : matrice de correction statique
- $H$  : matrice de précommande
- $e$  : nouveau vecteur d'entrée de référence

On obtient alors pour le système en boucle fermée la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BHe + BKy \\ y = Cx + DHe + DKy \end{cases} \quad (7.28)$$

Soit après reformulation :

$$\begin{cases} \dot{x} = \left( A + BK(I - DK)^{-1}C \right) x + \left( BH + BK(I - DK)^{-1}DH \right) e \\ y = (I - DK)^{-1}Cx + (I - DK)^{-1}DHe \end{cases} \quad (7.29)$$

On définit alors pour la suite :

- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de la matrice  $A + BK(I - DK)^{-1}C$
- $v_1, \dots, v_n$  les vecteurs propres à droite correspondant aux  $n$  valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  :

$$\left( A + BK(I - DK)^{-1}C \right) \cdot v_i = \lambda_i \cdot v_i \quad (7.30)$$

- $w_1, \dots, w_n$  les directions d'entrées associées aux  $v_1, \dots, v_n$ , définies par :

$$w_i = K(I - DK)^{-1}C \cdot v_i. \quad (7.31)$$

Le placement de structure propre par retour de sortie est donné par le lemme suivant :



**Lemme 7.2.1.** (Moore, 1976) Le triplet  $T_i = (\lambda_i, v_i, w_i) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$  vérifiant

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_i I & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = 0 \quad (7.32)$$

est placé par le gain statique  $K$  si et seulement si

$$K(Cv_k + Dw_i) = w_i \quad (7.33)$$

On en déduit alors la procédure suivante pour synthétiser un retour de sortie :

**Procédure 7.2.2. Placement de structure propre par retour de sortie**

1. Choisir un ensemble auto-conjugué de  $k (\leq p)$  nombres complexes  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  à placer comme valeurs propres de la boucle fermée.
2. Pour chaque  $\lambda_i$ , choisir une paire de vecteurs  $(v_i, w_i)$  satisfaisant (7.32) avec  $\bar{v}_i = v_j$  pour  $\bar{\lambda}_i = \lambda_j$ .
3. Trouver la (ou une) solution réelle du système

$$K(Cv_i + Dw_i) = w_i, \quad i = 1 \dots k \quad (7.34)$$

permettant de placer les valeurs propres  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  et les vecteurs propres associés  $\{v_1, \dots, v_k\}$ . Dans le cas où le système d'équations est inversible, la solution est donnée par :

$$K = W (CV + DW)^{-1} \quad (7.35)$$

avec  $V = [v_1 \dots v_k]$  et  $W = [w_1 \dots w_k]$ . Dans le cas contraire, on effectuera une résolution au sens des moindres carrés en utilisant la pseudo-inverse de Moore-Penrose<sup>4</sup> :

$$K = W (CV + DW)^\dagger \quad (7.36)$$

**Remarque :** Le choix des vecteurs propres  $v_i$  peuvent se faire selon des considérations de découplage ou de projection orthogonale des vecteurs propres de la boucle ouverte. On pourra se reporter éventuellement à (Magni, 2002).

◆ **Placement de structure propre par retour de sortie dynamique**

Si un correcteur statique permet éventuellement le placement de valeurs et de vecteurs propres, le nombre de degrés de liberté peut s'avérer insuffisant pour satisfaire des contraintes supplémentaires de robustesse par exemple. L'idée est alors d'utiliser des retours dynamiques de sortie qui en plus des placements de structures propres vont permettre de robustifier le contrôleur vis-à-vis de certaines dynamiques négligées ou de variations paramétriques non

---

4.  $A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T$  dans le cas où le nombre de lignes est supérieur au nombre de colonnes.

mesurables. Nous présenterons le placement de structure propre dans le cas d'un retour dynamique de sorties ainsi que son application dans le cas d'une synthèse multi-modèles.

On considère un correcteur dynamique  $K(s)$  dont la représentation d'état est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c u_c \\ y_c = C_c x_c + D_c u_c \end{cases} \quad (7.37)$$

où

$$A_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c} \quad , \quad B_c \in \mathbb{R}^{n_c \times p} \quad (7.38)$$

$$C_c \in \mathbb{R}^{m \times n_c} \quad , \quad D_c \in \mathbb{R}^{m \times p} \quad (7.39)$$

$K(s)$  est alors donné par :

$$K(s) = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c + D_c \quad (7.40)$$

En l'absence de précommande, on a  $u = y_c$  et  $y = u_c$ . Le lemme suivant généralise le placement de structure propre dans le cas d'un retour dynamique. La démonstration complète peut être trouvée dans (Le Gorrec *et al.*, 1998).

**Lemme 7.2.3.** (Magni, 2002) *Le triplet  $T_i = (\lambda_i, v_i, w_i) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$  vérifiant :*

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_i I & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = 0. \quad (7.41)$$

*est placé par le correcteur dynamique  $K(s)$  si et seulement si*

$$K(\lambda_i)(Cv_i + Dw_i) = w_i \quad (7.42)$$

*Si  $\lambda_i$  est complexe, on complète l'égalité 7.42 par sa conjuguée :*

$$K(\bar{\lambda}_i)(C\bar{v}_i + D\bar{w}_i) = \bar{w}_i \quad (7.43)$$

## Résolution

Afin d'appliquer le Lemme 7.2.3, on écrit  $K(s)$  sous la forme d'une matrice de fonctions de transfert :

$$K(s) = \begin{bmatrix} \frac{b_{011} + b_{111}s + \dots + b_{q11}s^q}{a_{011} + a_{111}s + \dots + a_{q11}s^q} & \dots & \frac{b_{01p} + b_{11p}s + \dots + b_{q1p}s^q}{a_{01p} + a_{11p}s + \dots + a_{q1p}s^q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{b_{0m1} + b_{1m1}s + \dots + b_{qm1}s^q}{a_{0m1} + a_{1m1}s + \dots + a_{qm1}s^q} & \dots & \frac{b_{0mp} + b_{1mp}s + \dots + b_{qmp}s^q}{a_{0mp} + a_{1mp}s + \dots + a_{qmp}s^q} \end{bmatrix} \quad (7.44)$$

où le choix de l'ordre des fonctions de transfert est arbitraire et peut être différent d'un transfert à l'autre. Ce correcteur dynamique doit permettre de satisfaire les contraintes linéaires

définies par (7.42) et (7.43). Les dénominateurs des différents transferts sont choisis *a priori*. Cette restriction permet d'utiliser par la suite des contraintes de types égalités et /ou inégalités. Elle permet aussi de minimiser un critère quadratique. Les degrés de libertés sont alors les coefficients des numérateurs  $b_{ijk}$ . On peut structurer les sous-transferts en imposant des différences de degré entre les numérateurs et les dénominateurs ; il suffit pour cela d'ajouter des contraintes linéaires supplémentaires du type  $b_{ijk} = 0$  aux contraintes initiales de placement de valeurs et vecteurs propres. Les coefficients  $a_{ijk}$  sont choisis selon la dynamique que l'on cherche à attribuer au correcteur.

En règle générale, le nombre de degrés de liberté dont on dispose est supérieur au nombre de degrés de liberté requis pour le placement de la structure propre choisie (Chable, 2003). Ainsi on optimise ces degrés de liberté supplémentaires à l'aide d'un critère. On peut chercher à minimiser pour diverses pulsations  $\omega_i$  le gain recherché :

$$J = \sum_i \|K(j\omega_i)\|_F^2 \quad (7.45)$$

ou de minimiser la différence fréquentielle par rapport à un correcteur de référence  $K_{ref}(s)$  :

$$J = \sum_i \|K(j\omega_i) - K_{ref}(j\omega_i)\|_F^2 \quad (7.46)$$

Les dénominateurs étant choisis *a priori*, ceci nous permet par substitution de (7.44) dans (7.42) d'obtenir des contraintes linéaires sur les coefficients  $b_{ijk}$  des numérateurs . En notant  $\Xi$  le vecteur des  $b_{ijk}$  :

$$\Xi = [b_{011} \dots b_{q11} \dots b_{01p} \dots b_{q1p} \dots b_{0m1} \dots b_{qm1} \dots b_{0mp} \dots b_{qmp}] , \quad (7.47)$$

on obtient une contrainte linéaire de type égalité (Magni, 2002) :

$$\Xi A_1 = b_1. \quad (7.48)$$

où les matrices  $A_1$  et  $b_1$  résulte des équations (7.42) et (7.43). Le problème résultant est donc un problème de programmation linéaire quadratique LQP ("Linear Quadratic Programming").

**Proposition 7.2.4.** (Magni, 2002) *Le problème de synthèse de  $K(s)$  satisfaisant l'équation (7.48) et minimisant le critère (7.45) revient à résoudre pour  $\Xi$  un problème LQP de la forme*

$$\begin{aligned} \min \quad & J = \Xi H \Xi^T + 2\Xi C \\ \text{s.c.} \quad & \Xi A_1 = b_1 \end{aligned} \quad (7.49)$$

### Compléments sur la structuration

L'équation (7.48) correspondant au placement de structure propre est une contrainte linéaire. Dans le cas où le nombre de degrés de liberté est suffisant, il est possible de rajouter des contraintes linéaires de type égalité et/ou inégalité sans changer la nature de notre problème LQP. On obtient un nouveau problème LQP de la forme :

$$\begin{aligned}
 \min \quad & J = \Xi H \Xi^T + 2\Xi C \\
 \text{s.c.} \quad & \Xi A_1 = b_1 \\
 & \Xi A'_1 = b'_1 \\
 & \Xi A_2 \leq b_2
 \end{aligned} \tag{7.50}$$

Nous distinguerons deux classes de contraintes linéaires :

- **Première classe de contraintes.** Cette classe concerne les (in)égalités portant directement sur les composantes de  $\Xi$ . On peut :
  - annuler certains éléments de  $\Xi$  et les contraintes sont alors du type  $b_{ijk} = 0$ . On peut dès lors annuler complètement un retour sur une entrée donnée en annulant tous les coefficients correspondants.
  - imposer des différences de degrés sur les sous-transferts afin d'assurer un rejet à hautes fréquences ("roll-off") et la robustesse face aux dynamiques négligées au-delà de la bande passante utile.
  - imposer le gain statique d'un transfert en contraignant le rapport  $b_{0ij}/a_{0ij}$ .
  - imposer certains gains de retour à un scalaire, ou d'imposer le signe ou l'amplitude maximale de ces mêmes gains.
  - fixer certaines parties du numérateur pour imposer une structure de filtre.
- **Seconde classe de contraintes.** Cette seconde classe correspond aux inégalités mettant en œuvre des contraintes sur la norme des gains. Si l'on utilise directement la définition de la norme, on aboutit à un ensemble de contraintes non-linéaires. On remplace alors ces inégalités sur les normes par une formulation implicite. Par exemple, on peut remplacer  $\|K_{(i,j)}(j\omega_i) - K_{ref(i,j)}(j\omega_i)\| < \alpha$  par des relations du type<sup>5</sup> :

$$\begin{aligned}
 -\alpha &< \Re(K_{(i,j)}(j\omega_i) - K_{ref(i,j)}(j\omega_i)) < \alpha \\
 -\alpha &< \Im(K_{(i,j)}(j\omega_i) - K_{ref(i,j)}(j\omega_i)) < \alpha
 \end{aligned} \tag{7.51}$$

La traduction de ce type de contraintes en termes d'inégalités  $\Xi A_2 \leq b_2$  ne pose en soi aucun problème. Il suffit de considérer que seuls les coefficients  $b_{ijk}$  ne sont pas fixés et qu'ils sont réels. Les inégalités sont identifiées après multiplication par les dénominateurs. Ces contraintes permettent de mieux contrôler en certaines pulsations la distance entre le

---

5. Bien évidemment, il n'y a pas équivalence.

correcteur synthétisé et le correcteur de référence.

Voici à présent la procédure de synthèse

### Procédure 7.2.5. Placement de structure propre par retour dynamique

1. *Choix de la dynamique du correcteur. Ce choix est effectué a priori. Il peut être basé sur les performances temporelles et fréquentielles d'un correcteur initial synthétisé par une méthode quelconque. La dynamique retenue est un sous-ensemble de pôles du correcteur initial. À cette étape, les coefficients  $a_{ijk}$  de (7.44) sont tous fixés.*
2. *Placement de la structure propre : ces contraintes correspondent aux équations (7.41) et (7.42). On peut imposer des découplages ou faire de la projection de vecteurs propres.*
  - (a) *Choisir les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  où  $k \leq p \times q$ .*
  - (b) *Choisir les vecteurs propres correspondants indépendants  $v_1, \dots, v_k$ .*
  - (c) *Choisir les direction d'entrées  $w_i$  associées aux  $v_i$ .**À ce stade de la procédure, l'équation  $\Xi A_1 = b_1$  est définie.*
3. *Structure du gain : les contraintes relatives à la structure de  $K(s)$  sont définies et concaténées pour donner les contraintes supplémentaires :*

$$\begin{aligned}\Xi A'_1 &= b'_1 \\ \Xi A_2 &\leq b_2\end{aligned}$$

4. *Critère quadratique : un critère de la forme (7.45) ou (7.46) (si l'on dispose d'un correcteur de référence  $K_{ref}(s)$ ) est utilisé. Ce critère doit permettre de fixer les degrés de libertés non utilisés par les contraintes de placement et de structuration. Le choix des pulsations  $\omega_i$  dépend du domaine de fréquences à l'intérieur duquel le correcteur initial agit. Le critère s'écrit sous la forme :*

$$J = \Xi H \Xi^T + 2\Xi c$$

5. *Résolution du problème LQP (7.50) pour  $\Xi$ . On déduit de  $\Xi$  les valeurs des coefficients  $b_{ijk}$  pour déterminer le correcteur  $K(s)$ .*

### ◆ Synthèse multimodèle

Il se peut que dans le cas d'un retour statique ou dynamique, le nombre de degrés de liberté soit plus important que nécessaire. La minimisation du critère quadratique permet alors de traiter ces degrés de libertés supplémentaires. Néanmoins, si l'on cherche à rendre notre correcteur robuste face à des variations paramétriques  $\delta_i$  du système, on peut éventuellement utiliser ces degrés de liberté supplémentaires pour effectuer un placement de structures propres sur un

ou plusieurs autres modèles. On aurait par exemple :

$$\begin{aligned}
 \text{Modèle 1 : } \quad K(\lambda_{11})(C_1 v_{11} + D_1 w_{11}) &= w_{11} \\
 &\vdots \\
 K(\lambda_{k_1 1})(C_1 v_{k_1 1} + D_1 w_{k_1 1}) &= w_{k_1 1} \\
 &\vdots \\
 \text{Modèle h : } \quad K(\lambda_{1h})(C_h v_{1h} + D_h w_{1h}) &= w_{1h} \\
 &\vdots \\
 K(\lambda_{k_h h})(C_h v_{k_h h} + D_h w_{k_h h}) &= w_{k_h h}
 \end{aligned} \tag{7.52}$$

En plaçant la structure propre sur des modèles obtenus pour différentes valeurs des paramètres  $\delta_i$ , on espère ainsi robustifier le correcteur  $K(s)$ . Le choix des modèles peut être guidé par une  $\mu$ -analyse pour faire apparaître les pire-cas, ou une simple carte des pôles en boucle fermée pour différentes configurations permet de mettre en évidence certains modèles problématiques. Une procédure appelé la  $(\mu\text{-Mu})$ -itération (Döll *et al.*, 2001) alterne entre phases de synthèse et phases de  $\mu$ -analyse pour mettre en évidence un (ou des) modèles pire-cas pour lesquels on vient rajouter des contraintes de placement dans les phases de synthèse, tant que des degrés de liberté sont disponibles.

### 7.2.2 Réduction par la structure modale dominante du correcteur

#### ◆ Principe

On suppose que l'on dispose d'un correcteur nominal  $K_{ref}(s)$  performant sur un système MIMO décrit par  $G(s)$ . La méthode proposée cherche à produire un correcteur réduit  $K_{red}(s)$ , aussi performant que possible, par recopie de la structure propre dominante de la boucle fermée nominale. La structure de ce dernier (choix des pôles et intervalles de variation des gains des numérateurs) peut être :

- soit motivée par le cahier des charges, auquel cas on tente de minimiser l'écart de performance boucle fermée entre  $K_{ref}(s)$  et  $K_{red}(s)$
- soit dictée par une optimisation de la structure de  $K_{red}(s)$  (i.e. on réduit au maximum l'ordre de chaque retour) pour un écart de performance admissible.

La méthode de réduction modale a été particulièrement étudiée et développée dans (Chable, 2003). On y trouve notamment les différents outils pour faire une analyse modale du système afin d'en extraire la structure propre dominante. La procédure de réduction modale est la suivante :

#### Procédure 7.2.6. Réduction modale

1. Détermination d'un correcteur initial  $K_{ref}(s)$  pour un modèle  $(A, B, C, D)$ . La méthode est laissée libre à l'utilisateur mais il s'agit d'obtenir un correcteur satisfaisant d'emblée le cahier des charges sans aucune contrainte d'ordre. Dans ce cas, les synthèses  $H_\infty$ ,  $H_2$ ,

mixte  $H_2/H_\infty$ , la  $\mu$ -synthèse ou les correcteurs LQG sont de bons candidats pour obtenir un premier correcteur sans se soucier de son ordre.

2. Analyse modale de la boucle fermée initiale afin d'en extraire la structure propre dominante à l'aide de l'analyse modale et du lieu des racines.

3. Synthèse du correcteur réduit  $K_{\text{red}}(s)$

- Choix de la dynamique du correcteur  $K_{\text{red}}(s)$  : le choix des pôles s'effectue a priori et ils sont choisis parmi les pôles de la structure dominante du correcteur initial mais doivent aussi satisfaire les conditions suivantes :
  - la fréquence des pôles doit être proche de celle des pôles de la boucle fermée que l'on cherche à placer.
  - les pôles correspondent au domaine de fréquence étudié et satisfont les propriétés existantes sur ce domaine (roll-off...)
  - si nécessaire, des pôles basse fréquence sont utilisés pour assurer la précision et ainsi conserver l'effet intégral.

Les coefficients  $a_{ijk}$  sont alors fixés. Notons que le nombre de pôles sélectionnés caractérise l'ordre final du correcteur réduit.

- Placement de la structure propre dominante

(a) Choisir les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ .

(b) Choisir les vecteurs propres correspondants indépendants  $v_1, \dots, v_k$ .

(c) Choisir les direction d'entrées  $w_i$  associées aux  $v_i$ .

À ce stade de la procédure, l'équation  $\Xi A_1 = b_1$  est définie.

- Choix des contraintes supplémentaires sur le correcteur : les contraintes relatives à la structure de  $K(s)$  et/ou sa réponse fréquentielle sont définies et concaténées pour donner les contraintes supplémentaires :

$$\Xi A'_1 = b'_1$$

$$\Xi A_2 \leq b_2$$

- Critère quadratique : un critère de la forme (7.46). Ce critère doit permettre de fixer les degrés de libertés non utilisés par les contraintes de placement et de structuration. Le choix des pulsations  $\omega_i$  dépend du domaine de fréquences à l'intérieur duquel le correcteur initial agit. Le critère s'écrit sous la forme :

$$J = \sum_i \|K_{\text{red}}(j\omega_i) - K_{\text{ref}}(j\omega_i)\|_F^2$$

- Résolution du problème LQP pour  $\Xi$ . On déduit de  $\Xi$  les valeurs des coefficients  $b_{ijk}$  pour déterminer le correcteur  $K_{\text{red}}(s)$

4. Analyse finale de la boucle fermée finale  $F_l(G(s), K_{\text{red}}(s))$ . Les performances de cette nouvelle boucle fermée, d'ordre réduit, sont évaluées :

- dans le domaine temporel, à travers les réponses temporelles et/ou les lieux des racines,
- dans le domaine fréquentiel, à travers les diagrammes de Bode et/ou l'analyse de la valeur singulière,
- dans le domaine paramétrique, à l'aide de la  $\mu$ -analyse.

*Si l'analyse donne satisfaction, on peut éventuellement tenter d'abaisser encore l'ordre du correcteur en reprenant à l'étape 3. Si au contraire, les propriétés ne sont pas recouvertes, plusieurs sources peuvent en être la cause comme par exemple, un choix de l'ordre du correcteur trop petit, un mauvais choix de la structure propre dominante, etc... On reprend éventuellement à l'étape 2 pour re-analyser la structure propre dominante et/ou à l'étape 3 pour augmenter l'ordre du correcteur.*

**Remarque 1 :** Bien évidemment, dans le cas d'un contrôleur qui doit être robuste à des variations paramétriques, on peut, comme dans la synthèse multi-modèle, placer des structures propres sur différents modèles afin d'augmenter la robustesse paramétrique du correcteur réduit  $K_{red}(s)$ .

**Remarque 2 :** Plus il y aura de contraintes, plus l'ordre du correcteur réduit sera élevé. Il est donc préférable que l'utilisateur commence la procédure avec peu de contraintes et un ordre faible, quitte à augmenter progressivement les contraintes et éventuellement l'ordre du correcteur pour recouvrir les propriétés du correcteur initial  $K_{ref}(s)$ .

#### ◆ Développement d'une aide aux choix de l'utilisateur

Il y a trois choix à faire dans l'algorithme précédent : la structure propre à remplacer, les pôles du correcteur réduit, la forme du correcteur réduit. Le dernier choix est à notre sens réglé par le cahier des charges. Si rien n'est précisé, on est dans le cas où l'on cherche à optimiser cette structure, c'est-à-dire à réduire au maximum chacun des sous-transferts. Concernant les pôles des dénominateurs, il est rare que le cahier des charges aborde ce point (hormis le nombre à choisir à travers l'ordre du correcteur réduit). Il faudra donc que l'utilisateur intervienne sur ce point tout comme sur le choix de la structure propre à remplacer. Afin d'aider l'utilisateur sur ces deux points, voici plusieurs méthodes possibles :

- **Choix de la structure propre BF à remplacer** On utilise pour l'analyse de la structure propre en boucle fermée, plusieurs outils développés dans (Magni, 2002) et repris dans (Chiappa, 2003). En particulier, la simulation modale pour l'analyse temporelle des transferts. Cet outil permet de mettre en exergue, sur un signal temporel donné, la contribution des différents modes du système et de les classer ainsi par ordre d'importance. On utilisera également l'analyse des résidus sur la réponse impulsionnelle qui permet de quantifier le niveau de domination des différents modes contenus dans un transfert. Cet outil servira pour sa part dans des analyses de critères plutôt fréquentiels. Pratiqués sur les transferts impliqués dans les principaux critères du cahier des charges, le résultat des analyses fournit



dans les deux cas à l'utilisateur un classement des pôles du système étudié. Il nous sera alors utile de disposer d'un lieu des racines afin de déterminer l'origine des pôles mis en valeur : soit des modes provenant du système à contrôler, soit des modes du correcteur. On pourra alors faire un choix de structures propres à replacer pour que l'on puisse s'attendre *in fine* à retrouver, sur les principaux critères, un comportement similaire entre la boucle fermée par le correcteur nominal  $K_{nom}(s)$  et la boucle fermée par le correcteur réduit  $K_{red}(s)$ .

- **Choix des pôles de  $K_{red}(s)$**

Pour simplifier la tâche tout d'abord, on décide de choisir les pôles du correcteur réduit parmi les pôles du correcteur nominal en considérant que ceux-ci ont été optimisés pour maximiser la performance.

On peut ensuite noter quelques remarques faites dans (Magni, 2002), à propos de la synthèse, mais que l'on peut généraliser à la réduction. Tout d'abord, on choisit des pôles dans la bande passante à contrôler ou à la limite pour réaliser des coupures. Ensuite, dans le cas des modes souples, il ne faut pas hésiter à prendre des pôles mal amortis, et même dans notre cas d'étude où notre système ne présente pas de modes souples, cela reste vrai. Enfin le choix des pôles est important pour la performance mais on dispose de marges de manœuvres (environ 20% dans la pratique selon (Magni, 2002)).

Ces considérations nous permettent de restreindre l'espace des possibilités. Cependant ce dernier peut être encore vaste et il faut encore guider l'utilisateur à défaut d'automatiser totalement la procédure.

Une première analyse peut être menée sur les résidus des pôles du correcteur nominal (même méthode que précédemment appliquée sur  $K_{nom}(s)$ ) afin de déterminer l'importance de chacun dans la construction des transferts SISO du correcteur. Ensuite cette analyse peut également être faite sur la boucle fermée nominale et couplée à un lieu des racines (BO vs BF), pour mettre en avant les pôles du correcteur qui produisent en boucle fermée des modes ayant un fort résidu.

Ces deux méthodes quantifient l'importance des pôles du correcteur nominal dans l'asservissement. On peut également proposer une étude permettant de mesurer l'aptitude des pôles du correcteur à placer les pôles du système à asservir  $G(s)$ . Étant donné un ensemble de pôles choisis pour le dénominateur du correcteur, la méthode se propose de déterminer les gains des numérateurs nécessaires pour déplacer un ensemble de pôles du système tout en conservant les pôles restants dans un espace donné. On pourra alors comparer plusieurs ensembles candidats pour les pôles du correcteur en jugeant que les plus efficaces seront ceux qui nécessitent des niveaux de gains les plus faibles.

### 7.2.3 Application

Nous allons à présent appliquer cette méthode de réduction à nos correcteurs issus de la synthèse  $H_\infty$ . Le but est de réduire au maximum l'ordre des correcteurs tout en maintenant au mieux le niveau de performance original. C'est aussi l'occasion de structurer le correcteur et ce à plusieurs niveaux :

- choix des pôles du correcteur et attribution de ces pôles aux retours adéquats,
- différenciation des degrés pour assurer un certain roll-off,
- réduction de la bande passante.

#### ◆ Analyse initiale

Le correcteur issu de la synthèse  $H_\infty$  est du même ordre que le système augmenté, soit un ordre 23. De plus, on peut y distinguer un transfert de précommande et deux transferts de retour sur les mesures  $q$  et  $n_z$ . On retrouve parmi les pôles du correcteur les pôles de notre modèle de référence, et si l'on regarde les transfert SISO de retour sur  $q$  et  $n_z$  ces pôles sont parfaitement annulés par des zéros, ce qui n'est pas le cas avec le transfert de précommande. C'est une des particularités de la synthèse avec modèle de référence ; on retrouve dans le transfert de précommande notre modèle de référence. Nous allons dans la suite réduire les retours d'une part et réduire la précommande d'autre part.

Une première réduction équilibrée (Annexe A) permet d'abaisser l'ordre des retours de 23 à 12. Si l'on abaisse encore l'ordre des retours avec cette méthode, les réponses temporelles sur les différentes configurations en centrage et masse sont dégradées. Si on applique une réduction balancée sur le transfert de précommande, on peut en revanche abaisser son ordre jusqu'à 5 tout en gardant des performances temporelles similaires au correcteur original.

Nous allons mener une étude modale sur le modèle nominal afin de déterminer la structure modale dominante. Une inspection du lieu des racines (Fig. 7.13) vient compléter cela afin de visualiser comment évoluent les pôles en boucle fermée lors du rebouclage.

#### • Analyse modale de la boucle fermée avec précommande

La figure 7.14 représente l'analyse modale du système en boucle fermée avec la précommande ainsi que les résidus de chacun des pôles. Comme attendu, ce sont les modes du modèle de référence  $-1.77 \pm 1.83i$  et du Short Period "accéléré",  $-3.33 \pm 3.95i$  qui dominent la réponse temporelle. On trouve ensuite les modes  $-7.90 \pm 0.33i$ ,  $-15.73$  et  $-9.04$  qui ont tendance à se compenser dans l'ensemble. Le mode  $-0.731$  provient de l'intégrateur du correcteur.

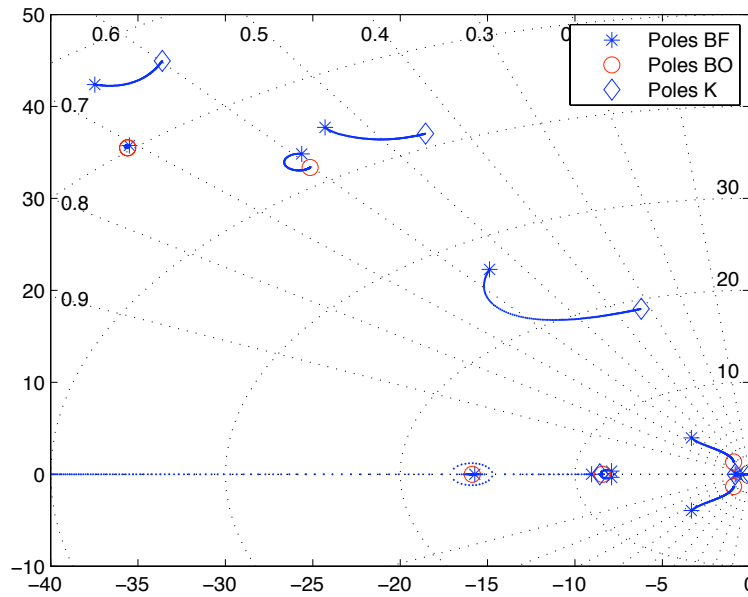


Figure 7.13 Lieux des racines avec le correcteur équilibré

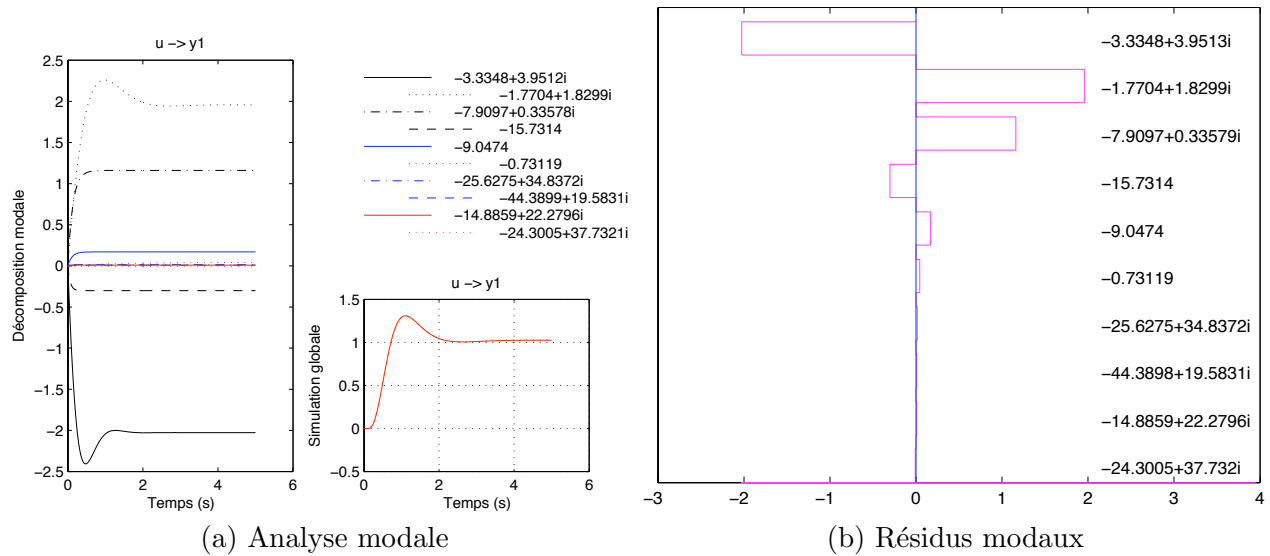


Figure 7.14 Analyse modale avec la précommande

#### • Analyse modale de la boucle fermée sans précommande

Nous procédons à présent à l'analyse modale de la boucle fermée sans la précommande (Fig. 7.15). On retrouve parmi les pôles avec les plus forts résidus ceux évoqués précédemment (à l'exception des pôles de la précommande, puisqu'elle a été ôtée).

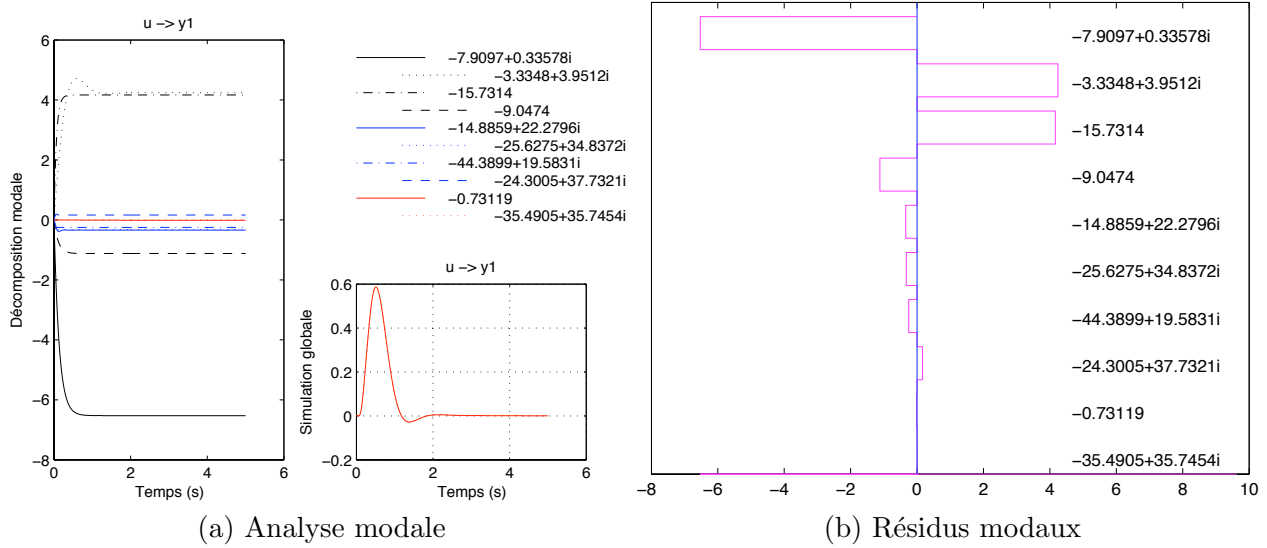


Figure 7.15 Analyse modale sans la précommande

### • Analyse modale du correcteur

On examine à présent les pôles du correcteur ainsi que leur résidu sur les deux transferts de retour afin de mettre en évidence les pôles dominants. On remarque rapidement que le pôle intégrateur est le pôle dominant sur les deux transferts. Ce résultat était assez attendu vu que c'est le pôle permettant d'assurer la précision. On trouve ensuite les pôles  $-0.835$  et  $-6.21 \pm 17.98i$ .

Notre but est de réduire l'ordre du correcteur tout en conservant les performances sur les différentes configurations masse/centrage. De notre étude précédente, il ressort que dans la bande passante considérée ( $< 30$  rad/s) les pôles en boucle fermée d'intérêt sont :

- le pôle issu du mode intégrateur du correcteur,
- les pôles complexes conjugués issus du mode Short Period,
- les pôles complexes conjugués provenant du mode correcteur  $-6.21 \pm 17.98i$ .

Nous choisissons donc de privilégier le placement de ces pôles voire éventuellement de considérer le placement d'autres pôles si ceux-ci s'avèrent insuffisants. En ce qui concerne le choix de l'ordre et des pôles du correcteur, nous commençons par un correcteur d'ordre 4, quitte à augmenter l'ordre par la suite si cela s'avère nécessaire. Le tableau 7.4 rassemble les pôles du correcteur retenus.

### ◆ Réduction et structuration

Nous allons procéder en plusieurs étapes pour la réduction du contrôleur. Dans un premier temps, nous n'imposerons aucune structure particulière à notre correcteur (aucune différence de degré entre les numérateurs et les dénominateurs). Nous différentierons par la suite les

Pôle	Valeur
$\lambda_1$	0
$\lambda_2$	-0.835
$\lambda_3$	$-6.21 \pm 17.98i$

Tableau 7.4 Pôles du correcteur réduit

transferts de retour pour ne garder l'effet intégral que sur le retour en  $q$  et imposerons aussi des différences de degrés afin de remplir des contraintes de roll-off et limiter ainsi la bande passante.

### • Correcteur réduit 1

La structure du premier correcteur réduit est résumée dans le tableau 7.5. Avec un correcteur dynamique d'ordre 4, 2 mesures et aucune différence de degré entre les numérateurs et les dénominateurs, on peut au mieux espérer placer 10 valeurs propres. Nous allons placer les valeurs propres de deux modèles à la fois, soit le modèle nominal 1.1 et le modèle 1.5 correspondant au cas de centrage le plus faible et de masse la plus forte. Le tableau 7.6 résume le placement utilisé. Dans l'esprit de la méthode, on rajoutera si nécessaire des contraintes de placement sur un autre modèle, en relâchant certaines des contraintes du tableau 7.6.

Retour	$q$	$n_z$
Pôles	$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$	$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$
Différence de degré	0	0

Tableau 7.5 Structure du correcteur réduit 1

Modèle	Mode	Pôle BO		Pôles BF
Modèle 1.1	Intégrateur	0	→	-0.74
Modèle 1.1	Short Period	$-0.92 \pm 1.33i$	→	$-3.33 \pm 3.95i$
Modèle 1.1	Correcteur	$-6.21 \pm 17.98i$	→	$-14.88 \pm 22.28i$
Modèle 1.5	Intégrateur	0	→	-0.49
Modèle 1.5	Short Period	$-0.68 \pm 1.31i$	→	$-1.99 \pm 3.10i$
Modèle 1.5	Correcteur	$-6.21 \pm 17.98i$	→	$-13.97 \pm 18.33i$

Tableau 7.6 Contraintes de placement pour la réduction 1

On obtient des réponses temporelles tout à fait similaires au système rebouclé avec le correcteur  $H_\infty$ . Quant aux diagrammes de Bode (Fig. 7.16), le retour sur  $q$  demeure identique à l'original jusqu'à 60 rad/s mais celui sur  $n_z$  diffère dès 20 rad/s. Les marges de gain et de phase en ouvrant la boucle à l'entrée de l'actionneur sont respectivement de 6.68 dB et  $41.81^\circ$  sur le modèle nominal 1.1.

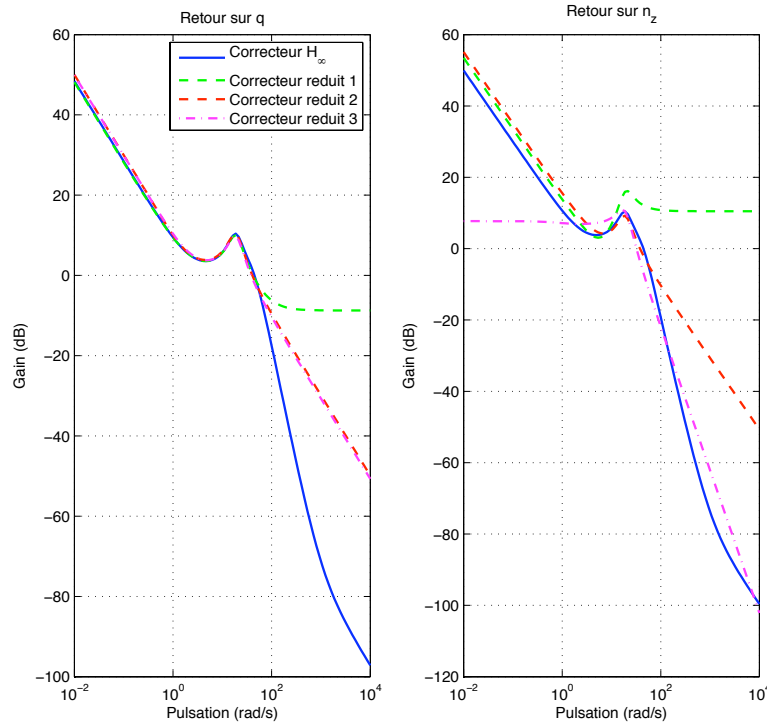


Figure 7.16 Diagramme de Bode des correcteurs

### • Correcteur réduit 2

Fort du résultant précédent qui nous conforte dans l'idée que la réduction à l'ordre 4 paraît suffisante, nous allons à présent essayer d'imposer une contrainte de roll-off sur les transferts afin d'avoir une décroissance de  $-20$  dB/dec aux hautes fréquences. Le tableau 7.7 résume la structure du nouveau correcteur réduit recherché où la décroissance aux hautes fréquences est obtenue avec une différence de degré 1. Nous enlevons ainsi 2 degrés de liberté et nous plaçons seulement 8 valeurs propres. Après essais, la contrainte de placement du mode correcteur sur le modèle 1.1 est retirée (Tableau 7.8).

Retour	$q$	$n_z$
Pôles	$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$	$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$
Différence de degré	1	1

Tableau 7.7 Structure du correcteur réduit 2

On peut voir sur le diagramme de Bode des retours (Figure 7.16) que nous obtenons bien une décroissance de  $-20$  dB/dec aux hautes fréquences tout en conservant un comportement fréquentiel similaire aux basses fréquences. Une fois de plus, les réponses temporelles sont demeurées tout à fait semblables et les marges de gain et de phase sur le modèle nominal 1.1 sont respectivement de 6.44 dB et  $39.50^\circ$ .

Modèle	Mode	Pôle BO		Pôles BF
Modèle 1.1	Intégrateur	0	→	-0.74
Modèle 1.1	Short Period	$-0.92 \pm 1.33i$	→	$-3.33 \pm 3.95i$
Modèle 1.5	Intégrateur	0	→	-0.49
Modèle 1.5	Short Period	$-0.68 \pm 1.31i$	→	$-1.99 \pm 3.10i$
Modèle 1.5	Correcteur	$-6.21 \pm 17.98i$	→	$-13.97 \pm 18.33i$

Tableau 7.8 Contraintes de placement pour la réduction 2

### • Correcteur réduit structuré 3

On achève enfin sur un dernier correcteur réduit sur lequel nous différentierons les pôles attribués à chaque retour tout en imposant des contraintes de roll-off. Nous ne conservons l'action intégrale que sur le retour en  $q$  avec une décroissance de  $-20$  dB/dec aux hautes fréquences et imposons une décroissance de  $-40$  dB/dec sur le retour en  $n_z$  (Tableau 7.9). Avec une telle structure, il n'est possible de placer que 6 valeurs propres au maximum.

En reprenant les valeurs propres placées pour le deuxième correcteur (Tableau 7.8), il n'est pas possible d'obtenir des réponses temporelles satisfaisantes et ce, même en essayant différentes combinaisons. Les réponses sont généralement plus lentes et moins précises pour certaines configurations. On décide alors d'introduire un modèle supplémentaire (Modèle 1.8) qui correspond à un cas de centrage extrême sur lequel on ne remplace que le mode issu de l'intégrateur. On remplace les pôles issus du correcteur sur le modèle 1.1 et on relâche certaines contraintes du modèle 1.5. Le placement recherché est résumé dans le tableau 7.10.

Retour	$q$	$n_z$
Pôles	$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$	$\lambda_2 \lambda_3$
Différence de degré	1	2

Tableau 7.9 Structure du correcteur réduit 3

Modèle	Mode	Pôle BO		Pôles BF
Modèle 1.1	Intégrateur	0	→	-0.74
Modèle 1.1	Correcteur	$-6.21 \pm 17.98i$	→	$-14.88 \pm 22.28i$
Modèle 1.5	Short Period	$-0.68 \pm 1.31i$	→	$-1.99 \pm 3.10i$
Modèle 1.8	Intégrateur	0	→	-0.89

Tableau 7.10 Contraintes de placement pour la réduction 3

Les transferts de retour du correcteur réduit 3 final sont donnés par :

$$q = -\frac{29.2339(s + 15.61)(s + 2.335)(s + 0.886)}{s(s + 0.8335)(s^2 + 12.42s + 362.1)} \quad (7.53)$$

$$n_z = \frac{782.8758(s + 0.9361)}{(s + 0.8335)(s^2 + 12.42s + 362.1)} \quad (7.54)$$

On constate une fois de plus que les réponses temporelles (Fig. 7.17) demeurent fidèles à celles obtenues avec le correcteur  $H_\infty$ . Le diagramme de Bode du correcteur 3 (Fig. 7.16) montre que le retour sur  $q$  est demeuré pratiquement inchangé par rapport à celui du correcteur 2. En revanche, le diagramme en gain du retour sur  $n_z$  montre bien la disparition de l'effet intégral et la décroissance de  $-40$  dB/dec aux hautes fréquences. On peut aussi remarquer que la bande passante a été réduite. Les marges de gain et de phase sur le modèle nominal 1.1 sont respectivement de 6.8 dB et  $42.9^\circ$ , ce qui représente une amélioration par rapport aux marges du correcteur initial. La figure 7.18 montre la position des pôles basses fréquences (on y voit particulièrement ceux du *Short Period*) et comparativement aux pôles originaux (Fig 7.12), on remarque que le placement du mode *Short Period* est relativement bien conservé pour toutes les configurations. Le tableau 7.11 rassemble les valeurs des qualités de manœuvrabilité pour les 8 configurations. Ces valeurs ont été calculées sur le modèle complet de l'avion.

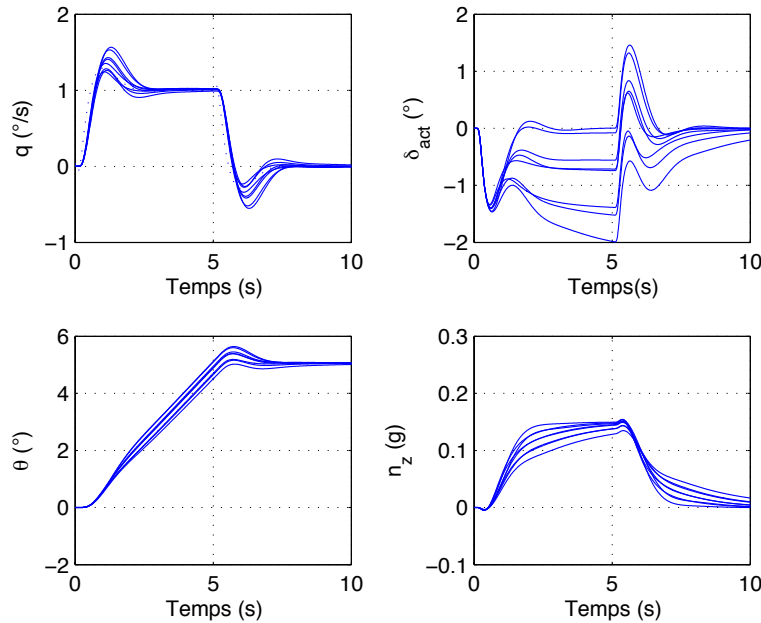


Figure 7.17 Réponses temporelles avec le correcteur réduit 3



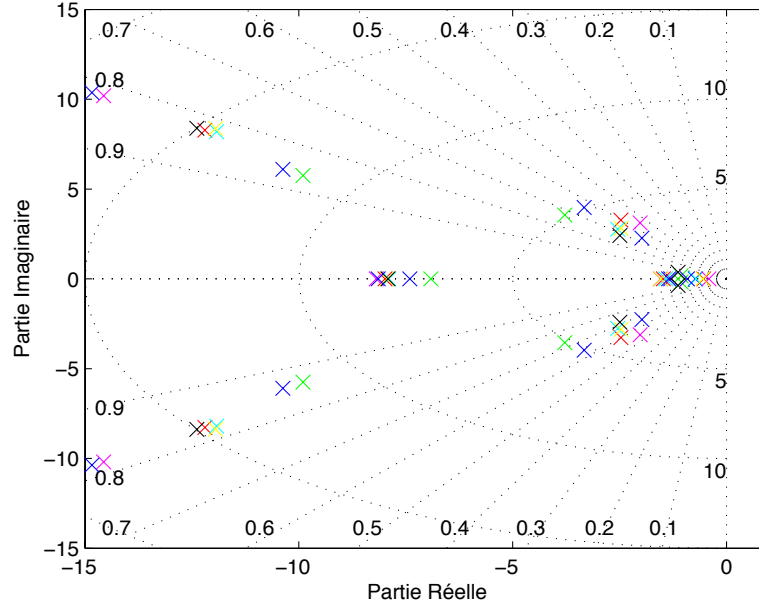


Figure 7.18 Pôles en boucle fermée pour les 8 configurations avec le correcteur réduit 3

Modèle	Cas $m/x_{cg}$	$\zeta_{sp1}$	$\omega_{BW_\theta}$	$Drb$	$\tau_p$	$ST$
Modèle 1.1	30 000 /20	0.65	1.49	-0.04	0.23	2.39
Modèle 1.2	30 000 /35	0.72	1.6	-0.06	0.21	2.94
Modèle 1.3	39 000 /20	0.60	1.42	-0.01	0.22	2.78
Modèle 1.4	39 000 /38	0.68	1.50	0.10	0.21	2.98
Modèle 1.5	46 000 /16	0.54	1.30	-0.2	0.2	3.22
Modèle 1.6	46 000 /38	0.66	1.50	0.18	0.21	3.21
Modèle 1.7	32 000 /48	0.72	1.79	0.22	0.25	2.81
Modèle 1.8	39 000 /48	0.66	1.66	0.19	0.24	2.72

Tableau 7.11 Qualités de manœuvrabilité avec le correcteur réduit 3

## 7.2.4 Conclusion sur la réduction

La réduction modale nous a donc permis de réduire efficacement nos correcteurs issus de la synthèse  $H_\infty$  tout en conservant un niveau de performance similaire. Contrairement aux autres méthodes de réduction, la réduction modale implique une analyse poussée du comportement modal du système en boucle fermée afin d'identifier les structures propres à remplacer avec le correcteur réduit.

Au travers de 3 étapes successives (afin d'illustrer la démarche), il a été possible de réduire le correcteur original  $H_\infty$  d'ordre 23 à un correcteur d'ordre 4 et de le structurer en ne conservant l'action intégrale que sur le retour en  $q$  et en imposant une différence de degré entre numérateur et dénominateur.

Le travail ayant été répété sur tous les cas de vol, une structuration commune s'est dégagée pour les 20 correcteurs, ce qui laisse présager un séquençement des correcteurs plus aisés pour la suite.

### 7.3 Troisième étape : auto-séquencement du correcteur

Dans cette troisième partie, nous allons séquencer nos contrôleurs réduits afin d'obtenir un correcteur séquencé qui assure les performances sur l'ensemble de l'enveloppe de vol. La commande modale robuste a été étendue à l'auto-séquencement des correcteurs en augmentant le nombre de sorties disponibles ; nous nous baserons sur les travaux initiés par (Le Gorrec *et al.*, 1998) et (Döll *et al.*, 2001).

#### 7.3.1 Rappels théoriques

##### ◆ Notations et définitions

Considérons un système LTI constitué de  $n$  états,  $m$  entrées et  $p$  sorties :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\Delta)x + B(\Delta)u \\ y = C(\Delta)x + D(\Delta)u \end{cases} \quad (7.55)$$

Les matrices d'états  $A(\Delta), B(\Delta), C(\Delta), D(\Delta)$  peuvent dépendre de paramètres incertains décrits par la matrice  $\Delta$ . D'un point de vue théorique,  $\Delta$  peut être réelle ou complexe, structurée ou non. Il n'est pas nécessaire pour la suite de disposer d'une formulation explicite de la dépendance des modèles en  $\Delta$  (sous forme LFT par exemple). Une évaluation pour différentes valeurs  $\Delta_j$  de la matrice  $\Delta$  peut suffire, créant ainsi une banque de modèles  $\{M_j = (A_{\Delta_j}, B_{\Delta_j}, C_{\Delta_j}, D_{\Delta_j}), j = 1 \dots k\}$

Imaginons le cas où il existe des paramètres incertains mais mesurables. Nous allons montrer comment il est possible d'utiliser ces mesures supplémentaires dans le cadre d'une synthèse modale. La solution proposée ici est l'auto-séquencement  $K(s, \Delta')$  de retours modaux statiques ou dynamiques par rapport aux paramètres mesurables  $\theta_1, \dots, \theta_g$ . Rappelons juste que la relation selon laquelle un paramètre  $\theta_i \in [\theta_{i,min}, \theta_{i,max}]$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \theta_i &= \theta_{i,c} + s_{\theta_i} \delta_i & \delta_i &\in [-1, 1] \\ \theta_{i,c} &= \frac{\theta_{i,max} + \theta_{i,min}}{2} \\ s_{\theta_i} &= \frac{\theta_{i,max} - \theta_{i,min}}{2} \end{aligned}$$

Les variations  $\delta_1, \dots, \delta_g$  sont stockés dans une matrice  $\Delta'$  où  $g \leq f$  avec  $f$  le nombre total de paramètres incertains de la matrice de perturbations  $\Delta$  du système. On fait apparaître de manière explicite les variations paramétriques  $\Delta'$  dans la formule du correcteur :

$$\begin{aligned}
K(s, \Delta') &= K_0(s) + \sum_{i=1}^{k_1} K_{\delta_1^i}(s) \delta_1^i + \cdots + \sum_{j=1}^{k_g} K_{\delta_g^j}(s) \delta_g^j + \cdots \\
&\quad + \sum_{\substack{i=0 \\ \vdots \\ j=0}}^{\substack{k_1-1 \\ \vdots \\ k_g-1}} K_{\delta_g^j}(s) \delta_1^i \cdots \delta_g^j
\end{aligned} \tag{7.56}$$

Le choix de la formule (7.56) est important, mais non prédominant. Une connaissance physique et une analyse du système en boucle ouverte fournissent généralement une bonne notion de l'influence paramétrique. Par exemple, en aéronautique, il est normal de séquencer les correcteurs par rapport à la vitesse  $V^2$  ou à la pression dynamique  $\bar{q} = \frac{1}{2}\rho V^2$  car tous les coefficients aérodynamiques sont fonction de cette expression. Un premier choix va donc être basé sur les résultats de cette analyse. Les degrés de liberté superflus seront fixés par une minimisation d'un critère de type (7.59). S'il n'y en a pas assez, l'ingénieur s'en rendra compte lors de la synthèse multi-modèle. De plus, la procédure lui fournira des indications sur le nombre de degrés de liberté qu'il faut encore ajouter.

### ◆ Résolution

**Lemme 7.3.1.** *La synthèse d'un correcteur auto-séquence  $K(s, \Delta')$  de la forme (7.56) pour le système  $(A, B, C, D)$  est équivalente à la synthèse selon la Proposition 7.2.4 d'un correcteur dynamique*

$$K(s) = \begin{bmatrix} K_0(s) & K_{\delta_1}(s) & \cdots & K_{\delta_1^{k_1}}(s) & K_{\delta_g}(s) & \cdots & K_{\delta_g^{k_g}}(s) & K_{\delta_1 \dots \delta_g}(s) & \cdots \\ & & & & & & & K_{\delta_1^{k_1-1} \dots \delta_g^{k_g-1}}(s) \end{bmatrix} \tag{7.57}$$

pour le système  $(A, B, C', D')$  dont le nombre de sorties est augmenté en remplaçant les ma-

trices  $C$  et  $D$  par :

$$\begin{bmatrix} C(\Delta) \\ C(\Delta)\delta_1 \\ \vdots \\ C(\Delta)\delta_1^{k_1} \\ C(\Delta)\delta_q \\ \vdots \\ C(\Delta)\delta_q^{k_g} \\ C(\Delta)\delta_1 \cdots \delta_g \\ \vdots \\ C(\Delta)\delta_1^{k_1-1} \cdots \delta_g^{k_g-1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} D(\Delta) \\ D(\Delta)\delta_1 \\ \vdots \\ D(\Delta)\delta_1^{k_1} \\ D(\Delta)\delta_q \\ \vdots \\ D(\Delta)\delta_q^{k_g} \\ D(\Delta)\delta_1 \cdots \delta_g \\ \vdots \\ D(\Delta)\delta_1^{k_1-1} \cdots \delta_g^{k_g-1} \end{bmatrix} \quad (7.58)$$

Les  $K_i(s)$  sont des fonctions de transfert dont les coefficients du numérateur  $b_{ijk,i}$  deviennent les paramètres de synthèse.

La démonstration de ce résultat peut être trouvée dans (Döll *et al.*, 2001) ainsi que des conseils sur comment choisir les modèles et les structures propres à placer. Le problème de résolution reste un problème de programmation LQP similaire à la Proposition 7.2.4. Les degrés de liberté superflus peuvent être fixés en réduisant l'influence du séquençement par la minimisation de la distance entre le correcteur auto-séquéncé  $K(s, \Delta')$  et sa version initiale non-séquéncée  $K_{ref}(s)$  de la manière suivante :

$$J = \left[ \sum_{i=1}^r \left\| K_0(j\omega_i) - K_{ref}(j\omega_i) \right\|_F^2 + \sum_{i=1}^r \left\| K_{\delta_1}(j\omega_i) \right\|_F^2 + \cdots + \sum_{i=1}^r \left\| K_{\delta_1^{k_1-1} \cdots \delta_g^{k_g-1}}(j\omega_i) \right\|_F^2 \right] \quad (7.59)$$

La structuration de chaque  $K_i(s)$  reste également possible de sorte que seuls les coefficients  $b_{ijk,i}$  concernés soient séquéncés.

#### ◆ Procédure de synthèse

On trouve dans (Döll *et al.*, 2001) une procédure pour le placement de structure propre par retour auto-séquéncé ; nous en présentons ici une version succincte.

##### Procédure 7.3.2. Placement de structure propre par retour auto-séquéncé

1. Détermination d'un correcteur initial pour un modèle  $(A, B, C, D)$  (la méthode est laissée libre à l'utilisateur)
2. Choix d'une formule d'interpolation (7.56). Le nombre de terme  $K_i(s)$  est fixé.
3. Choix de la dynamique des termes  $K_i(s)$ . Leurs dynamiques peuvent être nulles.
4. Augmentation du système par les sorties supplémentaires selon l'équation (7.58) ; on

obtient ainsi le nouveau système  $(A, B, C', D')$ .

5. *Utilisation de la Procédure 7.2.5 pour le placement multi-modèles de structures propres. On superpose les contraintes de placement multimodèle jusqu'à satisfaction du cahier des charges sur l'ensemble du domaine de fonctionnement considéré.*

### 7.3.2 Application

Nous avons dans la section précédente pu réduire nos correcteurs synthétisés en différents points de vol. Nous allons donc chercher à présent à séquencer ce contrôleur à travers toute l'enveloppe de vol. L'enveloppe de vol est définie en termes de nombre de Mach  $M$  et d'altitude  $h$  et ces deux grandeurs sont de bonnes candidates comme variables de séquençement, comme nous avons pu le voir dans le Chapitre 6. Nous allons cependant utiliser la pression dynamique  $\bar{q}$  à la place du nombre de Mach. De part sa dépendance à la vitesse et à la masse volumique de l'air (qui dépend de l'altitude), nous espérons ainsi limiter le nombre de termes de séquençement.

#### ◆ Choix de la structure

Nous avons vu dans la section précédente que l'on pouvait réduire nos correcteurs sur l'ensemble des points de synthèse tout en gardant un niveau de performance comparable au correcteur original  $H_\infty$ . Nous allons dans la suite synthétiser un correcteur séquencé qui s'adaptera à la condition de vol grâce à des variables de séquençement représentatives. Plusieurs choix s'offre à nous quant à la structure du correcteur.

Le premier choix s'opère au niveau de la dynamique du correcteur, soit les dénominateurs. Nous avons le choix de garder des dénominateurs identiques pour tous les termes  $K_\delta(s)$  ou choisir des dénominateurs différents comme dans (Puyou, 2005). Comme on souhaite maintenir un ordre de correcteur aussi bas que possible, les dénominateurs seront choisis identiques.

Ensuite il convient de choisir les pôles des termes  $K_\delta(s)$ . Les correcteurs issus de la synthèse  $H_\infty$  pour différents points de vol n'ont pas forcément les mêmes pôles, ce qui est un des inconvénients majeurs quand il s'agit d'interpoler des correcteurs issus de synthèse  $H_\infty$  ; néanmoins les correcteurs présentent des structures similaires et on peut choisir des pôles communs qui fonctionneront bien lors de la réduction des différents correcteurs. En effet (Magni, 2002) suggère que l'on peut tolérer une variation de 20% dans le choix des pôles du correcteur : des valeurs moyennes sont choisies pour chacun des pôles du correcteur (Table 7.12). Il est à noter que nous avons laissé de côté le pôle basse fréquence du correcteur pour introduire un pôle à  $-20$ . Le mode correcteur  $-10 \pm 25i$  résulte de l'analyse des pôles des correcteurs  $H_\infty$  obtenus sur différentes conditions de vol ; en effet les correcteurs présentent tous ce mode avec un amortissement moyen de 0.35 et une pulsation variant entre 20 et 30 rad/s. Nous en avons pris une valeur moyenne.

Pôle	Valeur
$\lambda_1$	0
$\lambda_2$	$-10 \pm 25i$
$\lambda_3$	-20

Tableau 7.12 Choix des pôles du correcteur séquencé

#### ◆ Synthèse du correcteur initial

Nous allons tout d'abord travailler sur la condition de vol 1 qui sera notre point de départ pour notre correcteur auto-séquencé. La structure du correcteur recherché est donnée dans le tableau 7.13. L'action intégrale n'est appliquée que sur le retour en  $q$  et l'on impose des différences de degré entre les numérateurs et dénominateurs. Le tableau 7.14 résume le placement de pôles effectué

Retour	$q$	$n_z$
Pôles	$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$	$\lambda_2 \lambda_3$
Différence de degré	1	2

Tableau 7.13 Structure du correcteur initial  $K_0(s)$  pour l'auto-séquencement

Modèle	Mode	Pôle BO		Pôles BF
Modèle 1.1	Intégrateur	0	→	-0.74
Modèle 1.1	Correcteur	$-10 \pm 25i$	→	$-14.88 \pm 22.28i$
Modèle 1.5	Short Period	$-0.68 \pm 1.31i$	→	$-1.99 \pm 3.10i$
Modèle 1.8	Intégrateur	0	→	-0.89

Tableau 7.14 Contraintes pour le correcteur initial du séquençement  $K_0(s)$ 

Les réponses temporelles demeurent similaires à celles obtenues avec le correcteur réduit 3 (Fig. 7.17).

#### ◆ Synthèse d'un correcteur auto-séquencé en $\bar{q}$ à altitude constante

Nous allons opérer à l'altitude la plus basse de 5000 ft et séquencer notre correcteur par rapport à la pression dynamique  $\bar{q}$ . À cette altitude, les conditions de vol à considérer sont celles de 1 à 4. Nous choisissons de séquencer classiquement notre correcteur par rapport à la pression dynamique. Un séquençement quadratique est choisi :

$$K(s, \delta\bar{q}) = K_0(s) + \delta\bar{q}K_{\bar{q}}(s) + \delta\bar{q}^2K_{\bar{q}^2}(s) \quad (7.60)$$

La pression dynamique de la condition de vol 1 est la plus faible de toute l'enveloppe de vol (77.1 lb/ft<sup>2</sup>), quant à celle de la condition de vol 4, elle est la plus forte (444.3 lb/ft<sup>2</sup>). La synthèse du correcteur auto-séquencé  $K(s, \delta\bar{q})$  est réalisé en plaçant la structure propre du

système augmenté :

$$\left( A(\Delta), B(\Delta), \begin{bmatrix} C(\Delta) \\ \delta\bar{q}C(\Delta) \\ \delta\bar{q}^2C(\Delta) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D(\Delta) \\ \delta\bar{q}D(\Delta) \\ \delta\bar{q}^2D(\Delta) \end{bmatrix} \right) \quad (7.61)$$

Le correcteur  $K(s, \delta\bar{q})$  est alors calculé sous la forme :

$$K(s, \delta\bar{q}) = \begin{bmatrix} K_0(s) & K_{\bar{q}}(s) & K_{\bar{q}^2}(s) \end{bmatrix} \quad (7.62)$$

On reprend pour  $K_{\bar{q}}(s)$  et  $K_{\bar{q}^2}(s)$  la même structure que  $K_0(s)$  (Tab. 7.13).

### • Synthèse multimodèle

Nous conservons le placement effectué sur le modèle 1 (Tab. 7.14) auquel nous ajoutons des contraintes de placement sur les modèles 3 et 4 (Tab 7.15). Les pôles à replacer sont essentiellement ceux du mode *Short Period* et de l'intégrateur. Les différentes configurations sont choisies suivant l'expérience acquise lors de la réduction des correcteurs  $H_\infty$ . De plus, nous remplaçons un pôle du correcteur sur le modèle 4.1.

Modèle	Mode	Pôle BO		Pôles BF
Modèle 3.1	Short Period	$-1.87 \pm 3.47i$	$\rightarrow$	$-4.23 \pm 6.2i$
Modèle 3.5	Intégrateur	0	$\rightarrow$	-0.72
Modèle 3.7	Intégrateur	0	$\rightarrow$	-1.51
Modèle 3.7	Short Period	$-1.68 \pm 1.46i$	$\rightarrow$	$-3.58 \pm 2.08i$
Modèle 4.1	Intégrateur	0	$\rightarrow$	-1.99
Modèle 4.1	Correcteur	$-10 \pm 25i$	$\rightarrow$	$-11.42 \pm 26.09i$
Modèle 4.5	Intégrateur	0	$\rightarrow$	-0.97
Modèle 4.5	Short Period	$-1.78 \pm 4.11i$	$\rightarrow$	$-3.67 \pm 4.51i$

Tableau 7.15 Contraintes supplémentaires pour le correcteur séquencé en  $\bar{q}$

### • Analyse

Les réponses temporelles des modèles 1 à 4 (pour les 8 configurations) sont représentées sur la figure 7.19. On remarque que l'on conserve un comportement relativement bon sur l'ensemble des modèles à l'image de ce que l'on obtenait avec les correcteurs  $H_\infty$  sur chacun des cas. Bien que les contraintes de placement de pôles n'ont été effectuées que sur les modèles 1, 3 et 4, les réponses temporelles du modèle 2 (et de ses différentes configurations) montre que le comportement désiré est bien conservé.

Sur la carte des pôles de la figure 7.20, on peut remarquer que les pôles basses fréquences ont tous un amortissement supérieur à 0.5 et ce pour toutes les configurations. Les pôles issus de l'intégrateur demeurent inférieurs à -0.5.

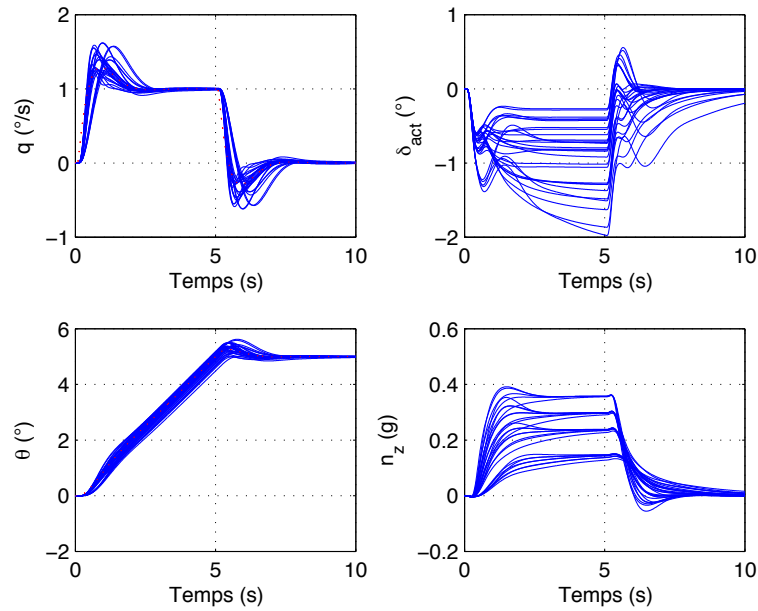


Figure 7.19 Réponses temporelles avec  $K(s, \delta\bar{q})$  pour les modèles 1.x à 4.x

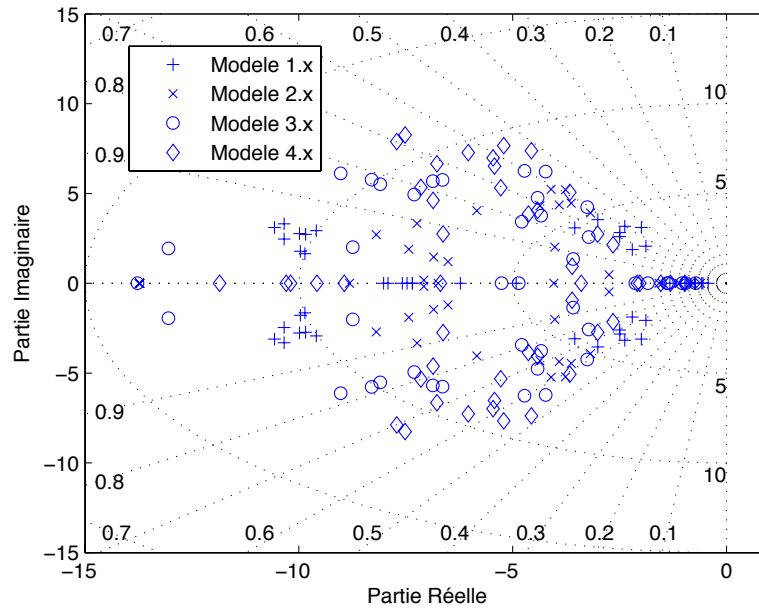


Figure 7.20 Carte des pôles avec  $K(s, \delta\bar{q})$  pour les modèles 1.x à 4.x

En utilisant le modèle paramétré en Mach et altitude du chapitre 5, on se propose de valider l'évolution des pôles en boucle fermée (essentiellement le mode *Short Period*) pour un nombre de Mach allant de 0.25 à 0.6 à l'altitude de 5000 ft. La figure 7.21 montre alors l'évolution des pôles avec notre correcteur séquentiel pour la configuration masse/centrage nominale (Modèles 1.1 à 4.1). Le mode *Short Period* évolue de façon régulière avec une pul-



sation naturelle croissante avec le Mach (ce qui est attendu) et un amortissement compris entre 0.55 et 0.65.

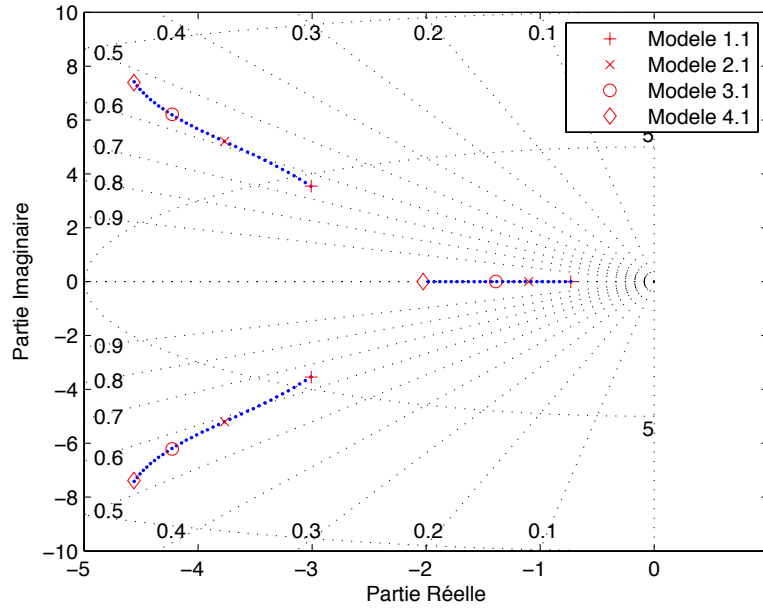


Figure 7.21 Évolution du mode *Short Period* avec  $K(s, \delta \bar{q})$  pour  $M \in [0.25, 0.6]$  et  $h = 5000$  ft (Configuration masse/centrage nominale)

#### ◆ Synthèse d'un correcteur auto-séquenté en $\bar{q}$ et $h$

Si nous traçons les réponses temporelles sur l'ensemble des 160 modèles avec notre correcteur séquenté simplement en  $\bar{q}$ , nous obtenons des réponses temporelles qui, non pas parfaites, nous montrent néanmoins que la pression dynamique était un choix intéressant. La figure 7.22 montre les pôles en boucle fermée sur l'ensemble des 160 modèles lors du rebouclage du système sur le correcteur  $K(s, \delta \bar{q})$ . Si aucune déstabilisation n'est constatée, on peut néanmoins constater que l'amortissement des pôles est globalement moins bon, même s'il demeure supérieur à 0.3 comme exigé par la norme.

En rajoutant des termes supplémentaires en  $\bar{q}^3$  et  $\bar{q}^4$ , nous ne pouvons hélas améliorer cela. Il s'agit donc d'utiliser une variable de séquencement supplémentaire qui permettra de mieux rendre compte du changement d'altitude, en l'occurrence l'altitude  $h$  elle-même.

Nous y sommes allés graduellement en rajoutant des termes supplémentaires séquentés en  $h$ ,  $\bar{q}h$ ,  $h^2$ ... tout en vérifiant sur l'ensemble des 160 modèles la qualité des réponses temporelles et la dispersion des pôles en boucle fermée. Nous nous sommes finalement arrêtés à un séquencement de la forme :

$$K(s, \bar{q}, h) = K_0(s) + \delta \bar{q} K_{\bar{q}}(s) + \delta \bar{q}^2 K_{\bar{q}^2}(s) + \delta h K_h(s) + \delta h^2 K_{h^2}(s) + \delta \bar{q} \delta h K_{\bar{q}h}(s) \quad (7.63)$$

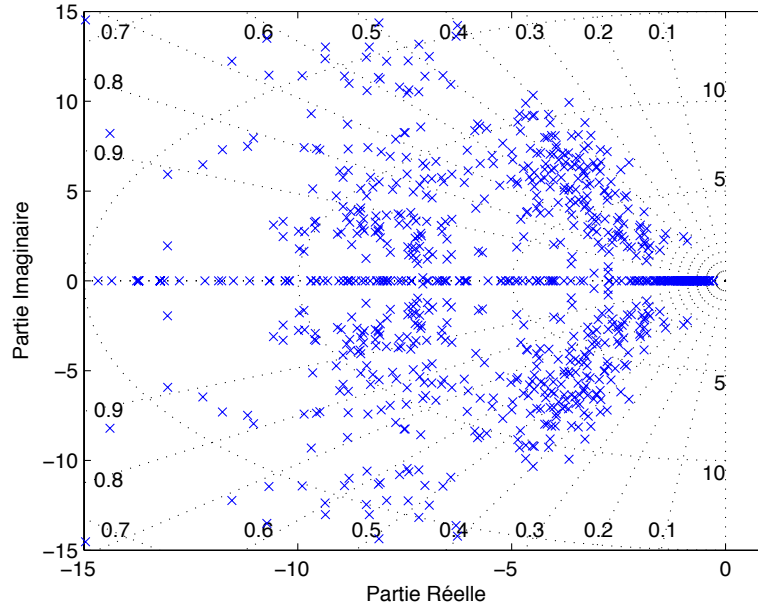


Figure 7.22 Carte des pôles avec  $K(s, \delta\bar{q})$  pour les 160 modèles

La synthèse du correcteur auto-séquenté  $K(s, \delta\bar{q}, \delta h)$  est réalisé en plaçant la structure propre du système augmenté :

$$\left( A(\Delta), B(\Delta), \begin{bmatrix} C(\Delta) \\ \delta\bar{q}C(\Delta) \\ \delta\bar{q}^2C(\Delta) \\ \delta hC(\Delta) \\ \delta h^2C(\Delta) \\ \delta\bar{q}\delta hC(\Delta) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D(\Delta) \\ \delta\bar{q}D(\Delta) \\ \delta\bar{q}^2D(\Delta) \\ \delta hD(\Delta) \\ \delta h^2D(\Delta) \\ \delta\bar{q}\delta hD(\Delta) \end{bmatrix} \right) \quad (7.64)$$

Le correcteur  $K(s, \delta\bar{q}, \delta h)$  est alors calculé sous la forme :

$$K(s, M) = \begin{bmatrix} K_0(s) & K_{\bar{q}}(s) & K_{\bar{q}^2}(s) & K_h(s) & K_{h^2}(s) & K_{\bar{q}h}(s) \end{bmatrix} \quad (7.65)$$

Comme précédemment, les structures de  $K_h(s)$ ,  $K_{h^2}(s)$  et  $K_{\bar{q}h}(s)$  sont celles de la table 7.13. Nous partons du correcteur  $K(s, \delta\bar{q})$  calculé précédemment en gardant les contraintes de placement utilisées.

#### • Synthèse multimodèle

On garde les contraintes précédentes de la table 7.15 auxquelles on rajoute les contraintes de la table 7.16. Les contraintes supplémentaires ont été choisies selon les observations suivantes :

- les pôles les plus mal amortis ( $\zeta < 0.4$ ) issus du rebouclage avec le correcteur  $K(s, \delta\bar{q})$

sont ceux des modèles 16 et 20 situés en haute altitude (35,000 ft et 42,000 ft) pour un nombre de Mach de 0.88.

- on remplace donc les valeurs propres des modèles 16.x et 20.x en utilisant les observations faites sur la réduction des contrôleurs. On sait ainsi sur quelles configurations masse / centrage il est préférable d'opérer le placement de valeurs propres.
- on calcule le correcteur séquencé correspondant et on observe l'emplacement des pôles en boucle fermée. Il s'avère nécessaire de remplacer certains des pôles des modèles 12 et 17 dont les amortissements se sont détériorés.
- on s'arrête au choix de contraintes du tableau 7.16.

Modèle	Mode	Pôle BO		Pôles BF
Modèle 12.1	Short Period	$-2.61 \pm 6.44i$	$\rightarrow$	$-5.52 \pm 7.07i$
Modèle 12.5	Intégrateur	0	$\rightarrow$	-1.25
Modèle 12.5	Short Period	$-1.88 \pm 5.58i$	$\rightarrow$	$-3.91 \pm 5.48i$
Modèle 12.7	Short Period	$-2.37 \pm 3.38i$	$\rightarrow$	$-2.54 \pm 3.82i$
Modèle 16.1	Correcteur	$-10 \pm 25i$	$\rightarrow$	$-10.28 \pm 28.21i$
Modèle 16.5	Intégrateur	0	$\rightarrow$	-0.68
Modèle 16.5	Short Period	$-1.09 \pm 4.14i$	$\rightarrow$	$-3.64 \pm 7.36i$
Modèle 16.7	Short Period	$-1.56 \pm 1.75i$	$\rightarrow$	$-2.44 \pm 2.90i$
Modèle 17.1	Intégrateur	0	$\rightarrow$	-0.52
Modèle 17.1	Short Period	$-0.58 \pm 1.82i$	$\rightarrow$	$-3.86 \pm 7.07i$
Modèle 17.5	Short Period	$-0.428 \pm 1.74i$	$\rightarrow$	$-2.70 \pm 4.58i$
Modèle 17.7	Short Period dégénéré	$-1.03 \& -0.11$	$\rightarrow$	$-3.80 \pm 3.82i$
Modèle 20.1	Intégrateur	0	$\rightarrow$	-0.98
Modèle 20.5	Intégrateur	0	$\rightarrow$	-0.85
Modèle 20.5	Short Period	$-0.72 \pm 3.38i$	$\rightarrow$	$-2.64 \pm 5.44i$
Modèle 20.7	Short Period	$-1.01 \pm 2.27i$	$\rightarrow$	$-1.96 \pm 1.82i$

Tableau 7.16 Contraintes supplémentaires pour le correcteur séquencé en  $\bar{q}$  et  $h$

### • Analyse

La figure 7.23 représente les pôles en boucle fermée des 160 modèles avec le correcteur  $K(s, \delta\bar{q}, \delta h)$ . Les pôles du mode *Short Period* ont pratiquement tous un amortissement plus grand que 0.5 (à quelques exceptions près). Les réponses temporelles de la figure 7.24 montrent que le comportement du système est bon sur l'ensemble des 160 modèles. Le correcteur  $K(s, \delta\bar{q}, \delta h)$  assure donc bien les performances sur l'enveloppe de vol ; il demeure robuste face aux changements de masse et centrage considérés.

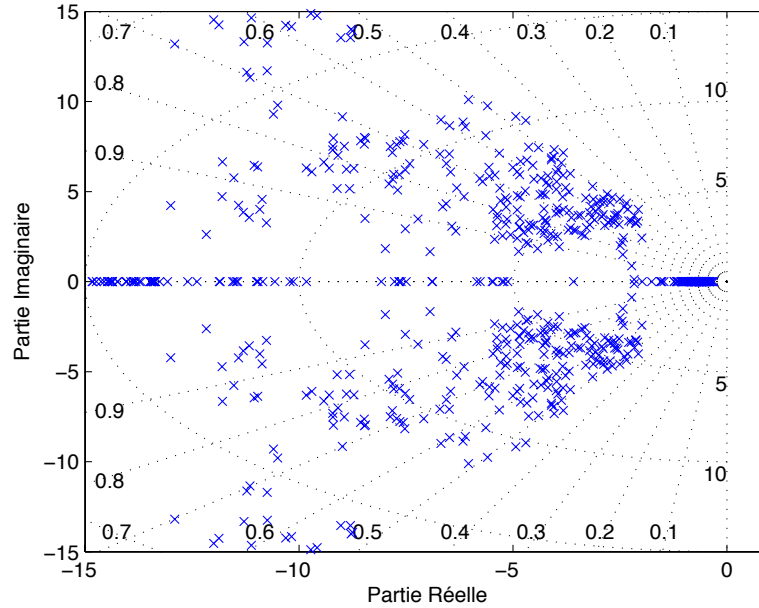


Figure 7.23 Carte des pôles avec  $K(s, \delta\bar{q}, \delta h)$  pour les 160 modèles

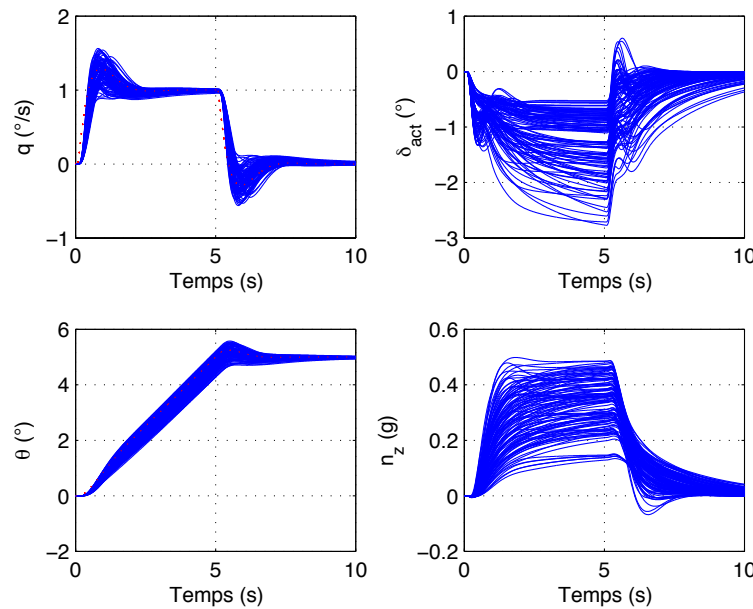


Figure 7.24 Réponses temporelles avec  $K(s, \delta\bar{q}, \delta h)$  pour l'ensemble des 160 modèles

### 7.3.3 Conclusion sur l'auto-séquencement

Bien que le fondement de la méthode d'auto-séquencement soit relativement simple, elle nécessite, comme dans le cas de la réduction modale, une bonne connaissance a priori du système afin de bien identifier les modèles pour lesquels on doit opérer un placement de pôles. Notre tâche fut d'autant plus compliquée que pour chaque point de vol, il y avait 8 configurations différentes

en masse et en centrage pour lesquelles il fallait être robuste, multipliant ainsi les analyses. Néanmoins la phase de réduction modale des correcteurs  $H_\infty$  nous a permis d'identifier les configurations masse/centrage critiques sur lesquelles opérer le placement de valeurs propres ; cela fut utile lors du choix des modèles et des configurations pour l'auto-séquencement. Même si la méthode en elle-même n'offre pas de garanties de stabilité entre les points de synthèse choisis, elle peut être couplée comme dans (Chiappa *et al.*, 1998) à de la  $\mu$ -analyse ou n'importe quel autre outil d'étude de la stabilité pour des systèmes paramétrés. Il y a dans notre cas 4 paramètres (Mach, altitude, masse et centrage) et même avec une formulation LFT de notre système, une  $\mu$ -analyse peut donner des résultats pessimistes. Nous avons vérifié simplement que les réponses temporelles demeuraient adéquates sur l'ensemble des 20 conditions de vol pour chaque configuration masse/centrage. Un tracé de l'ensemble des pôles en boucle fermée permet aussi une première validation.

## 7.4 Conclusion

Nous avons établi dans ce chapitre une démarche complète pour synthétiser un contrôleur du vol longitudinal d'un avion qui soit performant sur l'enveloppe de vol et demeure robuste face à des variations de masse et du centrage.

La synthèse  $H_\infty$  a permis dans un premier temps de trouver des correcteurs en plusieurs points de vol, tels que la boucle fermée se comportait comme un modèle de référence satisfaisant les qualités de manœuvrabilité. Un ajustement des filtres de pondération sur certains transferts a robustifié le correcteur face à des variations de masse et de centrage sans avoir recours explicitement à une  $\mu$ -synthèse. Par la suite, les correcteurs ont pu être efficacement réduits grâce aux techniques de commande modale robuste. Des correcteurs d'ordre 4 structurés ont pu ainsi être obtenus ; les performances des correcteurs  $H_\infty$  ont été relativement bien conservés. Enfin, la réduction modale ayant dégagé des structures communes pour les correcteurs réduits, nous nous sommes orientés vers une technique d'auto-séquencement pour obtenir un correcteur séquencé en pression dynamique  $\bar{q}$  et en altitude  $h$ .

Nous avons pu ainsi synthétiser un contrôleur d'une complexité relativement faible et d'ordre comparable aux correcteurs classiques imposés par le constructeur. La réduction modale et l'auto-séquencement ont montré leur grande efficacité dans la simplification et le séquencement du correcteur final. Il s'est donc avéré possible de partir d'un correcteur quelconque et d'en simplifier la structure à l'extrême tout en conservant les performances du correcteur original.

## CHAPITRE 8

### ARTICLE 3 : ROBUST SCHEDULED CONTROL OF LONGITUDINAL FLIGHT WITH HANDLING QUALITY SATISFACTION

L'**article 3** reprend de façon plus succincte l'ensemble de la démarche exposée dans le **chapitre 7**. Cet article a été précédé d'articles de conférence préliminaires où les différentes techniques ont été mises en œuvre, soit sur notre problème (Saussié *et al.*, 2006a, 2007), soit sur un problème de lanceur spatial (Saussié *et al.*, 2008a).

# Robust Scheduled Control of Longitudinal Flight with Handling Quality Satisfaction

D. Saussié, C. Bérard, O. Akhrif and L. Saydy

*Article soumis à The Aeronautical Journal*

## Abstract

Classic flight control systems are still widely used in industry because of acquired experience and good understanding of their structure. Nevertheless, with more stringent constraints, it becomes difficult to easily fulfill all the criteria with these classic control laws. On the opposite side, modern methods can handle many constraints but fail to produce low order controllers. The methodology proposed here addresses this problem. First, an  $H_\infty$  synthesis is performed in order to get controllers which satisfy handling qualities and are robust w.r.t. mass and center of gravity variations. Then these controllers are reduced and structured by using robust modal control techniques. Finally, a self-scheduling technique allows us to schedule these controllers over the entire flight envelope.

## 8.1 Introduction

The development, integration and flight testing of flight control systems are costly and time-consuming. Modern techniques such as  $H_\infty$  or  $\mu$ -synthesis provide effective and robust controller design techniques but the main problem remains their high order which prevents them from being easily implemented (Hyde, 1996; Tischler, 1996). Classical flight control systems are then still widely used because of their well-studied and understood architecture (Gautrey, 1998). However, they have to deal with stringent performance and robustness requirements over the full flight envelope.

In this paper, we propose a complete methodology to find a controller for the longitudinal flight of a business jet aircraft, namely *Challenger 604*. The methodology is based on techniques that have been proved successful separately. First,  $H_\infty$ -synthesis (Zames, 1981; Doyle *et al.*, 1989) are performed to find high order controllers that satisfy handling quality requirements and have robustness property w.r.t. some parameters. Obviously,  $H_\infty$  controllers cannot be implemented because of their order. They have to be reduced sufficiently without losing performance. If classic reduction methods like the one in (Obinata et Anderson, 2001) often fails to produce very low order controllers, modal reduction (Chable *et al.*, 2003) (inspired by robust modal control (Le Gorrec *et al.*, 1998; Magni, 2002)) usually succeeds in that task. Finally, in order to have a controller efficient and robust on the entire flight envelope, a self-scheduling technique (Döll *et al.*, 2001) is used. Contrary to classic gain-scheduling (Leith et Leithead, 2000; Rugh et Shamma, 2000) where the controllers are interpolated *a posteriori* w.r.t. scheduling variables, the controller interpolation can be chosen *a priori*.

The paper is organized as follows. Some theoretical backgrounds are provided in Section 2 about robust modal control. The aircraft model of *Challenger 604* is presented in Section 3 as well as handling qualities of interest. Section 3 is devoted to the application of our design methodology : first  $H_\infty$  synthesis is performed, then reduction method based on robust modal control is applied to these controllers and finally, scheduling of the controller w.r.t. dynamic pressure  $\bar{q}$  and altitude  $h$  is done.

## 8.2 Robust modal control

### 8.2.1 Notations

Consider a linear time invariant (LTI) system with  $n$  states,  $m$  inputs and  $p$  outputs written in state-space form

$$\dot{x} = A(\Delta)x + B(\Delta)u \quad (8.1)$$

$$y = C(\Delta)x + D(\Delta)u \quad (8.2)$$

where  $x$  is the state vector,  $u$  the input vector,  $y$  the output vector and  $\Delta$  the uncertain parameter matrix. The state-space matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  and  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$  depends on  $\Delta$ . In this paper, we will suppose that we have a bank of models  $\{M_j = (A_j, B_j, C_j, D_j), j = 1 \dots r\}$  obtained for different values  $\Delta = \Delta_j$  of the parameters.

### 8.2.2 Eigenstructure assignment

Proposition 1 from (Le Gorrec, 1998) generalizes the traditional eigenstructure assignment of (Moore, 1976) for the use of dynamic controllers.

**Proposition 8.2.1.** *The triplet  $T_i = (\lambda_i, v_i, w_i) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$  satisfying*

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_i I & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = 0 \quad (8.3)$$

*is assigned by the dynamic gain  $K(s)$  if and only if*

$$K(\lambda_i)(Cv_i + Dw_i) = w_i \quad (8.4)$$

*If the eigenvalue is complex, the equality (8.4) has to be completed by its conjugate :*

$$K(\bar{\lambda}_i)(C\bar{v}_i + D\bar{w}_i) = \bar{w}_i \quad (8.5)$$

The input direction  $w_i$  and right eigenvector  $v_i$  associated with the closed loop eigenvalue  $\lambda_i$  can be fixed by various methods (e.g. decoupling objectives, orthogonal projection of open-loop



eigenvector).

The elementary design procedure associated with this proposition is as follows :

- Choose a set of auto-conjugate closed loop eigenvalues  $\lambda_i$  and determine the closed loop admissible eigenvector space using Eq. (8.3). At this step, the triplets  $T_i = (\lambda_i, v_i, w_i)$  are defined.
- Compute  $K(s)$  satisfying Eq. (8.4). This computation is detailed in the next section for the multi-model modal control but this would apply for the single-model modal control as well.

### 8.2.3 Multi-model modal control

Multi-model eigenstructure assignment (Magni *et al.*, 1998) is done by simultaneously assigning triplets  $T_i$  for several models, which reduces to solve a set of equality constraints of type (8.4). The choice of the models to treat with and the triplets to assign is determined by an analysis of the stability and/or performance robustness. The feedback controller  $K(s)$  is considered here in a transfer matrix form. The purpose of this section is to find a dynamic controller that solves the set of linear constraints of the form (8.3) and (8.4). The transfer matrix of the controller will be composed of  $p \times m$  rational functions at each input/output :

$$K_{ij}(s) = \frac{b_{ijq}s^q + \cdots + b_{ij1}s + b_{ij0}}{a_{ijq}s^q + \cdots + a_{ij1}s + a_{ij0}} \quad (8.6)$$

Common or different denominators  $D_{ij}(s)$  of the matrix  $K(s)$  are fixed *a priori* with a sufficiently high order to realize the desired “roll-off”. Furthermore, its degree must be chosen in order to offer enough numerator coefficients  $b_{ijk}$ , the tuning parameters (degrees of freedom). Generally, this choice offers too many degrees of freedom for the resolution of the equality constraints so that the problem is solved by minimizing a criteria of type  $J = \|K(s) - K_{\text{ref}}(s)\|$  over a certain frequency interval  $\omega_i$  where  $K_{\text{ref}}(s)$  is a reference controller (often a simple gain) synthesized for an initial model  $M_0$ . This reduces to minimizing a quadratic criterion under linear constraints :

**Proposition 8.2.2.** *The problem of computing  $K(s)$  satisfying Equation (8.4) and minimizing criterion  $J$  consists in solving for  $\Xi$  a LQP problem of the form*

$$\min \quad J = \Xi H \Xi^T + 2\Xi c \quad (8.7)$$

$$\text{s.t.} \quad \Xi A_1 = b_1 \quad (8.8)$$

where  $\Xi$  denotes unknown stacked coefficients of the numerators  $b_{ijk}$ .

See (Magni *et al.*, 1998) for the theoretical background and further details, as well for software implementation. The procedure used in the following will be called (Mu- $\mu$ )-iteration.

#### Procedure 8.2.3. (Mu- $\mu$ )-iteration

**Step A.1** — Elaborate a first initial design on a nominal model. All kinds of synthesis methods can be applied at this step ( $H_\infty$  control (Zames, 1981), LQG optimal control (Kalman et al., 1962),  $\mu$ -synthesis (Doyle et al., 1986), etc...). In the case of initial non-modal approaches, look for eigenstructure assignment having the same characteristics as the initial controller.

**Step B.1** — Proceed to a multi-model analysis of the pole map and/or time-responses and/or real  $\mu$ -analysis like proposed in (Packard et Doyle, 1993; Magni et Döll, 1997). If the initial design is satisfactory for all models or all values of uncertainties, then **stop**. Otherwise identify the worst-case model, determine its critical triplet  $T_i$  and continue with **Step B.2**.

**Step B.2** — Improve the behaviour of the worst-case model by replacing the triplet  $T_i$  by  $T_i^*$  respecting the specifications while preserving the properties of all models treated before. Return to **Step B.1**.

**Remark :** See (Magni, 1999) and (Le Gorrec, 1998) for some general rules on multi-model eigenstructure assignment, for example to avoid incompatible assignments we should treat models as “far” as possible from each other in the considered parameter space and/or relax some constraints on models treated before.

This procedure can now be efficiently used for two purposes of interest, namely controller reduction and scheduling.

#### 8.2.4 Modal reduction

We describe here how to combine modal analysis and dynamic eigenstructure assignment to reduce an initial controller while concurrently satisfying the closed loop performances (Chable et al., 2003). The method is based on the fact that the system is entirely defined by its closed loop eigenstructure. First the dominant eigenstructure is extracted using modal analysis. In the second step, the dominant eigenstructure of the system will be assigned using a reduced order controller which has a fixed structure obtained from the first step of the procedure. Frequency criteria will be minimized to optimize the efficiency of the reduction.

##### Procedure 8.2.4. Modal Reduction

**Step 1 — Modal analysis.** For this purpose, modal simulation of the system controlled by the initial feedback is used, i.e. each mode is simulated separately (see (Chiappa et al., 1998) for details). From such a simulation, the contribution of each eigenvalue is evaluated. Only the eigenvalues (and associated eigenvectors) whose contribution is relevant are selected. This subset of eigenvalues/eigenvectors constitutes the dominant eigenstructure of the initial closed-loop system.

**Step 2 — Reduction synthesis**

- Choice of the controller poles : *this choice is made a priori as a subset of the poles of the original controller. The selection is made using the analysis of the dominant eigenvalues obtained at **Step 1**. The poles can be chosen as following :*
  - poles whose frequency is close to re-assigned dominant closed-loop poles.
  - poles corresponding to frequency domain properties (cut off frequency and so on)
  - low frequency poles used to insure precision (integral effect).

*At this stage, the coefficients  $a_{ijk}$  of transfer functions (8.6) are all fixed. Note that in practice, the choice of the controller poles is not of primary importance, provided that the above recommendations are more or less taken into account.*
- Eigenstructure assignment : *the constraints defining the re-assignment of dominant eigenstructure (selected at **Step 1**) are derived; these constraints correspond to Equations (8.3) and (8.4). The number of constraints depends on the desired controller order. The higher the order, the higher the number of constraints to be processed. The equations for eigenstructure assignment are linear constraints. At this stage, using Proposition 8.2.2, Equation  $\Xi A_1 = b_1$  (8.8) is known.*
- Controller structure constraints : *The constraints relative to the gain structure are derived with the previous constraints. So, there is an additional equality constraint and new constraints of the form  $\Xi A'_1 = b'_1$  are added.*
- Criterion : *a quadratic criterion of the form (8.7) where  $K_{\text{ref}}(s)$  is the transfer function of the initial controller is defined. This criterion will eventually fix the degrees of freedom remaining after the above constraints have been taken into account. The choice of the frequencies  $\omega_j$  depends on the frequency domain features of the initial controller. At this stage, using Proposition 8.2.2, the criterion is written in the following form :  $J = \Xi H \Xi^T + 2 \Xi c$*
- Solve the LQP problem for  $\Xi$ , then deduce from  $\Xi$  the values of the coefficients  $b_{ijk}$ .

### **Step 3 — Final analysis**

*Performance can be evaluated in many ways :*

- *in the time domain by means of step response simulations or root loci*
- *in the frequency domain by means of Bode plots or singular value analysis*
- *in the parametric domain by means of  $\mu$  analysis.*

*If some properties are not satisfactory, the procedure of **Step 2** must be repeated till a satisfactory reduced controller is found.*

When dealing with parametric robust controllers, Procedures 8.2.3 and 8.2.4 can be advantageously coupled. As long as degrees of freedom  $b_{ijk}$  are available, multi-model assignment can be performed in order to have a reduced controller robust to some parametric uncertainties. The design procedure for robustness improvement consists of applying the same procedure as in **Step 2**, with a single difference : the eigenstructure assignment constraints are now relative to several models.

### 8.2.5 Self-scheduling control

Classical gain-scheduling is typically done by interpolating *a posteriori* the linear controllers obtained for several models. But, because of structure, the gain-scheduling problem can be difficult to tackle and non-interpolability can occur (Lawrence et Rugh, 1995; Stilwell et Rugh, 2000). Multi-model modal control handles this task by choosing *a priori* the interpolation formula for the controller gain. This choice can be guided by physical constraints, open-loop analysis and previous experiments. For example, let us take a scheduling w.r.t measurable parameters  $(\delta_1, \delta_2)$  and an interpolation formula

$$K_{\text{sched}}(s, \delta_1, \delta_2) = K_0(s) + \delta_1 K_{\delta_1}(s) + \delta_2 K_{\delta_2}(s) + \delta_1 \delta_2 K_{\delta_1 \delta_2}(s) \quad (8.9)$$

The synthesis of this controller can then be tackled using the following Proposition 8.2.5 (Magni, 2002).

**Proposition 8.2.5.** *The determination of such a self-scheduled controller is equivalent to the synthesis of a multi-model modal controller*

$$K_{\text{dyn.eq.}}(s) = \begin{bmatrix} K_0(s) & K_{\delta_1}(s) & K_{\delta_2}(s) & K_{\delta_1 \delta_2}(s) \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

with respect to the augmented system

$$\left[ A(\Delta), B(\Delta), \begin{pmatrix} C(\Delta) \\ \delta_1 C(\Delta) \\ \delta_2 C(\Delta) \\ \delta_1 \delta_2 C(\Delta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D(\Delta) \\ \delta_1 D(\Delta) \\ \delta_2 D(\Delta) \\ \delta_1 \delta_2 D(\Delta) \end{pmatrix} \right] \quad (8.11)$$

Hence, it is sufficient to apply our multi-model design Procedure 8.2.3 on the augmented system (8.11) for the controller  $K_{\text{dyn.eq.}}$  and to extract from it the matrices  $K_0(s)$ ,  $K_{\delta_1}(s)$ ,  $K_{\delta_2}(s)$  and  $K_{\delta_1 \delta_2}(s)$  for the realization of  $K_{\text{sched}}(s, \delta_1, \delta_2)$ . As it can be seen, the problem boils down to increasing the number of outputs of the original system  $(A(\Delta), B(\Delta), C(\Delta), D(\Delta))$  from  $p$  to  $4p$ . The augmentation of the output number offers the additional degrees of freedom necessary for the simultaneous resolution of some linear constraints of type (8.4). For aeronautical and aerospace applications, the reader is referred to (Döll *et al.*, 2001; Constant *et al.*, 2002; Saussié *et al.*, 2008b).

As a conclusion, suppose now that some parameters of  $\Delta$  are measurable and others are not. Using the procedures above, one could then self-schedule the controller w.r.t. the measurable parameters and use dynamic feedbacks to handle robustness w.r.t. non-measurable parameter variations. This will be applied on our problem at stake.

### 8.3 Model and constraints

In this section, we describe the *Challenger 604* aircraft longitudinal motion and the specifications to be fulfilled.

#### 8.3.1 *Challenger 604* aircraft model

For design purposes, we consider the linearized short-period equations of motion.

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_w & U_0 & Z_\epsilon \\ M_w & M_q & M_\epsilon \\ E_w & 0 & E_\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \\ \epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_e} \\ 0 \end{bmatrix} \delta_e. \quad (8.12)$$

where the coefficients  $Z_w$ ,  $Z_\epsilon$ ,  $M_w$ ,  $M_q$ ,  $M_\epsilon$ ,  $E_w$ ,  $E_\epsilon$ ,  $Z_{\delta_e}$  and  $M_{\delta_e}$  are stability derivatives calculated at each considered equilibrium point (Nelson, 1998). The state variable  $\epsilon$  denotes the tail downwash angle.<sup>1</sup> The available measurements are pitch rate  $q$  and normal acceleration  $n_z$  :

$$\begin{bmatrix} q \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{Z}_w & \tilde{Z}_q & \tilde{Z}_\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \\ \epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{Z}_{\delta_e} \end{bmatrix} \delta_e \quad (8.13)$$

where

$$n_z = (\dot{w} - U_0 q - l_x \dot{q})/g \quad (8.14)$$

so  $\tilde{Z}_w$ ,  $\tilde{Z}_q$ ,  $\tilde{Z}_\epsilon$  and  $\tilde{Z}_{\delta_e}$  can be deduced from the other coefficients. Twenty flight conditions and associated linearized models (defined by Mach number  $M$  and altitude  $h$ ) were provided by *Bombardier Inc.* as illustrated in Fig.8.1. Moreover, we consider complete actuator and IRU sensor dynamics such that the original open-loop order is 35 ; after balanced reduction (Obinata et Anderson, 2001), it is reduced to a 16<sup>th</sup> model in order to facilitate the  $H_\infty$  synthesis phase. Nevertheless, the reader must keep in mind that all time-responses will be performed on the original high-order system. Each flight condition is derived in 8 configurations for different masses  $m$  and center of gravity locations  $x_{cg}$  (Tab.8.1).

Tableau 8.1 Grid points for varying  $m$  and  $x_{cg}$

$m$ (lbs) \ $x_{cg}$ (% chord)	16	20	35	38	48
30 000		(1)	(2)		
32 000					(7)
39 000		(3)		(4)	(8)
46 000	(5)			(6)	

1. The downwash is experienced by a horizontal tail placed in the flow behind the wing. This vortex diminishes the incidence angle of the tail by an angle  $\epsilon$ .

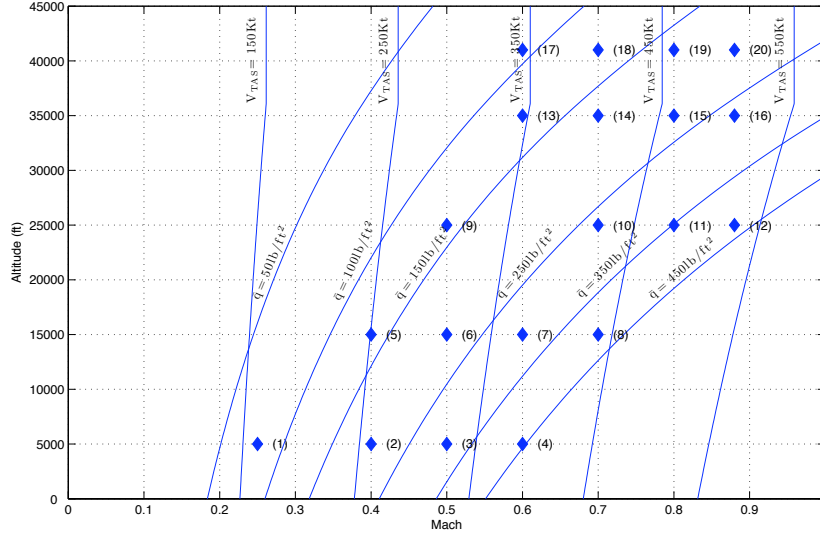


Figure 8.1 Flight envelope

The system can then be rewritten as :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(\Delta)x + B(\Delta)u \\ y &= C(\Delta)x + D(\Delta)u\end{aligned}\tag{8.15}$$

where  $x$  is the state vector,  $y$  the measurement vector and  $u$  the input vector. The state-space matrices  $A(\Delta)$ ,  $B(\Delta)$ ,  $C(\Delta)$ ,  $D(\Delta)$  depend on the parameters  $(M, h, m, x_{cg})$  described by the matrix  $\Delta$ . We actually do not have an explicit formulation of the model in  $\Delta$  but a bank of 160 models  $\{M_j = (A_{\Delta_j}, B_{\Delta_j}, C_{\Delta_j}, D_{\Delta_j}), j = 1 \dots 160\}$  for different values  $\Delta_j$  of the parameters<sup>2</sup>. In the following, we will denote each model as Model  $x.y$  with  $x$  the flight condition number (Fig.8.1) and  $y$  the configuration number (Tab.8.1). One could eventually find an LFT form by interpolating the data (Magni, 2005).

### 8.3.2 Handling quality requirements

The overall performance objective is to track pitch rate commands with predicted Level 1 handling qualities and desired time domain response behavior. The handling quality criteria considered in this article are short period mode damping ratio  $\zeta_{sp}$ , Gibson's dropback  $Drb$ , settling time  $ST$ , pitch attitude bandwidth  $\omega_{BW_\theta}$ , phase delay  $\tau_p$  (Saussié *et al.*, 2006b). The boundaries of these criteria are defined by military standards (US Department of Defense, 1997). Even though handling qualities are primarily defined for military aircraft, they are usually applied to commercial aircraft with slight modifications derived from the manufacturer's experience. Table 8.2 summarizes the

2. 20 flight conditions, each declined in 8 configurations.

handling quality boundaries being considered in the design procedure.

Tableau 8.2 Handling qualities

Handling qualities	Level 1
Short period damping $\zeta_{sp}$	$0.35 < \zeta_{sp}$
$\theta$ -bandwidth $\omega_{BW_\theta}$	$\omega_{BW_\theta} > 1.5$ (rad/s)
Gibson's dropback $Drb$	$-0.2 \leq Drb \leq 0.5$
Phase delay $\tau_p$	$\tau_p < 0.2$ (s)
Settling time $ST$	2% en 3 (s)

#### 8.4 Application to the longitudinal flight control problem

We seek a controller which satisfies the handling quality requirements over the entire flight envelope and is robust to mass  $m$  and center of gravity  $x_{cg}$  variation ; consequently, the controller will be scheduled w.r.t. dynamic pressure  $\bar{q}$  and altitude  $h$  while presenting good parametric robustness w.r.t.  $m$  and  $x_{cg}$ . Moreover its order must be as low as possible. The theoretical background presented in Section 8.2 suggests the methodology we propose now :

- **Step 1** Compute  $H_\infty$  controllers satisfying handling qualities on different flight conditions with good parametric robustness.
- **Step 2** Reduce these controllers with technique exposed in Section 8.2.4. Performance must be preserved and low order controllers with similar structure should be obtained.
- **Step 3** Schedule these reduced controllers with self-scheduling technique presented in Section 8.2.5.

##### 8.4.1 $H_\infty$ synthesis

For a given flight condition, we seek an initial controller that satisfies the handling quality requirements for the 8 configurations.  $H_\infty$  synthesis is a good candidate to obtain such a controller. It was initiated by Zames (1981) and further developed by Doyle (1982).  $H_\infty$  problem is a stabilization and disturbance rejection problem. A controller is sought that will minimize disturbance effects while stabilizing the system. Theoretical aspect can be found in (Zhou et Doyle, 1998) and (Alazard *et al.*, 1999).

Let us consider the augmented system  $P(s)$  (including weight functions or filters) composed by 4 multivariable transfer functions between the inputs  $u$  and  $w$  and the outputs  $y$  and  $z$  where :

- $u$  represents the system command
- $w$  represents exogenous inputs (reference and/or disturbance)

- $y$  represents measurements
- $z$  represents regulated outputs

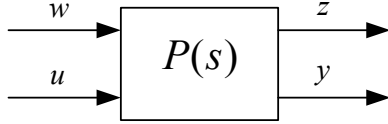
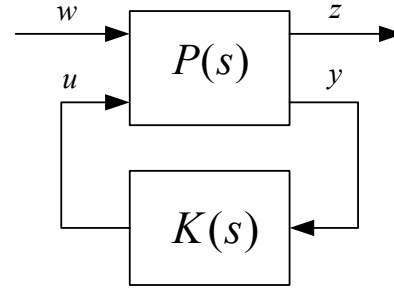


Figure 8.2 Augmented model

Figure 8.3 Standard  $H_\infty$  synthesis

$P(s)$  can be separated in the following way :

$$\begin{bmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix} \quad (8.16)$$

By closing the loop with the control law  $U(s) = K(s)Y(s)$ , one can obtain the transfer between the inputs  $w$  and the outputs  $z$  namely Linear Fractional Transformation (LFT) :

$$\begin{aligned} G_{zw}(s) &= \mathcal{F}_l(P(s), K(s)) \\ &= P_{11} + P_{12}K(s)(I - P_{22}K(s))^{-1}P_{21} \end{aligned} \quad (8.17)$$

The optimal  $H_\infty$  problem is the synthesis of a controller  $K(s)$  among all internally stabilizing controllers that minimizes the  $H_\infty$  norm of  $G_{zw}(s) = \mathcal{F}_l(P(s), K(s))$ . We remind that  $H_\infty$  norm of a transfer function  $G(s)$  is defined as :

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (8.18)$$

#### Optimal $H_\infty$ problem :

*Finding a stabilizing controller  $K(s)$  such as  $\|\mathcal{F}_l(P(s), K(s))\|_\infty$  is minimal*

Knowing the minimal  $H_\infty$  norm can be theoretically useful because a limit can be fixed on the reachable performances. Nevertheless, in a practical way, the suboptimal  $H_\infty$  problem is defined where the  $H_\infty$  is reduced under a positive threshold  $\gamma$ .

#### Suboptimal $H_\infty$ problem :

*Finding a stabilizing controller  $K(s)$  such as  $\|\mathcal{F}_l(P(s), K(s))\|_\infty \leq \gamma$*



Although there are several ways to solve this problem, the method by Doyle *et al.* (1989) will be used as it is based upon a state variable approach. The augmented plant considered for the  $H_\infty$  synthesis is given in Fig.8.4.

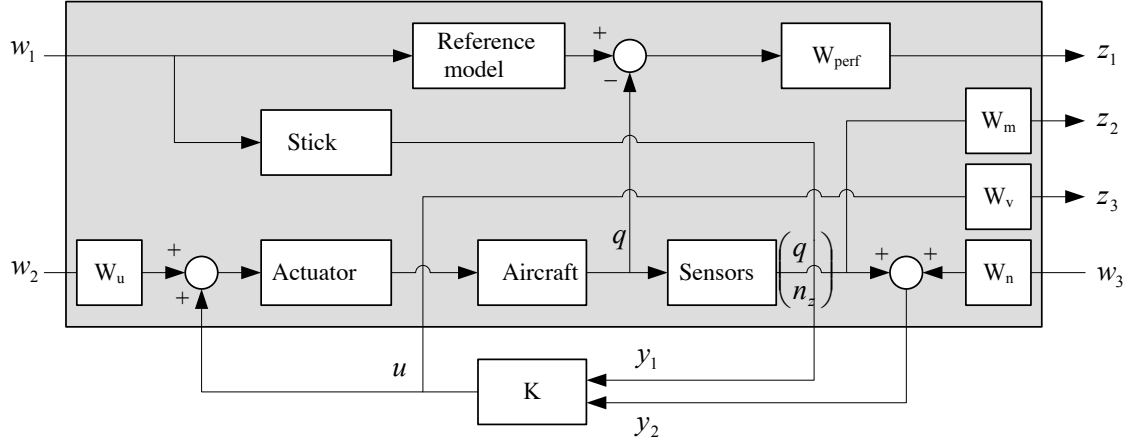


Figure 8.4  $H_\infty$  synthesis diagram

In order to produce an efficient  $H_\infty$  controller, a reference model that satisfies the constraints is chosen :

$$F_{ref}(s) = \frac{e^{-0.1s}(0.66s + 1)}{s^2 + 2(0.7)(2.5)s + (2.5)^2} \quad (8.19)$$

The difference between the reference model output and the aircraft pitch rate  $q$  is weighted by a low-pass filter  $W_{perf}$ .

$$W_{perf} = \frac{40}{10s + 1} \quad (8.20)$$

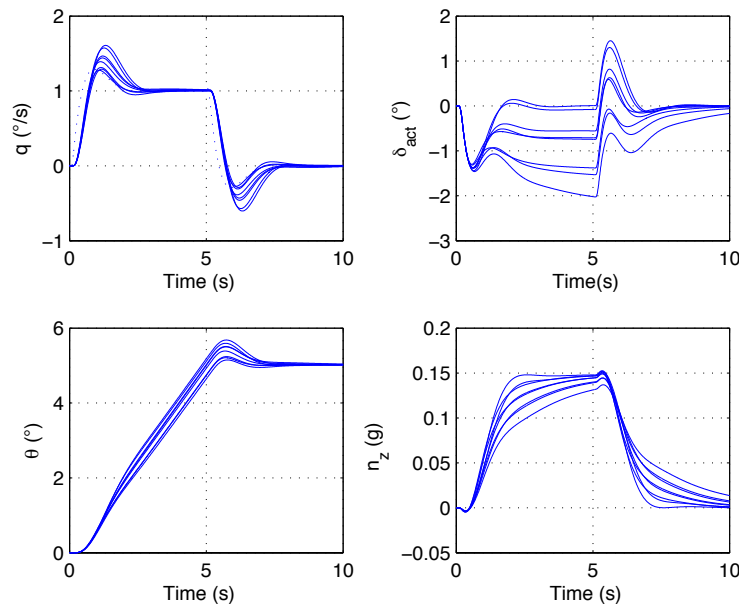
In order to limit controller bandwidth and ensure roll-off constraints, we use a second order filter on the command input :

$$W_v = 0.1 \left( \frac{s/15 + 1}{s/1000 + 1} \right)^2 \quad (8.21)$$

Additional inputs/outputs and associated weightings ( $W_u = 0.5$ ,  $W_n = 0.03I_2$ ,  $W_m = \text{diag}(0.03, 0.01)$ ) are complementary sensitivity functions to improve robustness. These weights and filters have been elected after some trials/errors to shape adequately the time-responses and the characteristics. Finally a 23<sup>th</sup> order controller is obtained which ensures satisfying time-responses for all configurations (Fig.8.5). As indicated by Table 8.3 handling quality constraints are reasonably well satisfied.

#### 8.4.2 Controller reduction using modal multimodel approach

The initial  $H_\infty$  controller order is 23. Before proceeding to the modal analysis, it is sought to reduce in a significant way the order of the controller by using balanced reduction techniques (Obinata

Figure 8.5 Time responses of the  $H_\infty$  controllerTableau 8.3 Handling quality values of the  $H_\infty$  controller

Model	$m/x_{cg}$	$\zeta_{sp1}$	$\omega_{BW_\theta}$	$Drb$	$\tau_p$	$ST$
Model 1.1	30 000 / 20	0.64	1.5	0.02	0.23	1.69
Model 1.2	30 000 / 35	0.73	1.64	0.05	0.21	1.94
Model 1.3	39 000 / 20	0.60	1.4	0.03	0.22	1.78
Model 1.4	39 000 / 38	0.68	1.52	0.10	0.21	2.78
Model 1.5	46 000 / 16	0.54	1.32	-0.2	0.2	3.22
Model 1.6	46 000 / 38	0.66	1.51	0.2	0.21	3.21
Model 1.7	32 000 / 48	0.72	1.82	0.22	0.25	2.31
Model 1.8	39 000 / 48	0.66	1.66	0.25	0.24	2.52

et Anderson, 2001). Moreover, as the controller is a two degree controller, the feedforward part is separated from the feedback part. Again, balanced reduction are performed on each sub-controller. As modal reduction has only interest in the feedback controller, the feedforward controller will remain as it was after the balanced reduction. Fortunately, the feedforward controller order is 5 without any major loss on the temporal, frequency and parametric criteria. One could remark actually that the poles of the feedforward path are the reference model poles and the integrator pole. The feedback controller order is reduced to 12 without any significant performance loss ; if further balanced reduction is performed, there are some significant loss compared to the initial  $H_\infty$  controller. Modal reduction is used to further reduce the controller order if possible.

### ◆ Modal analysis

First a modal analysis is performed to find the dominant poles that must be reassigned and the poles that must be conserved in the feedback controller. It comes that the poles of interest are :

- the integrator pole of the controller,
- the Short Period mode poles,
- the complex poles  $-6.21 \pm 17.98i$  of the controller

After some trials, we finally choose the poles gathered in Tab. 8.4 for our controller.

Pole	Value
$\lambda_1$	0
$\lambda_2$	$-0.835$
$\lambda_3$	$-6.21 \pm 17.98i$

Tableau 8.4 Reduced controller poles

### ◆ First reduction

We first seek a reduced controller with structure in Tab. 8.5. We do not impose any degree difference. Our goal is to check that a 4<sup>th</sup> order controller can be used to preserve the performance of the original  $H_\infty$  controller. The eigenvalue assignment is done on both models 1.1 and 1.5 (Tab. 8.6). Results are not presented as they are exactly similar to  $H_\infty$  controller ones. The reduction is efficient.

Output	$q$	$n_z$
Poles	$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$	$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$
Degree difference	0	0

Tableau 8.5 First reduced controller structure

Model	Mode	Open-loop poles		Closed-loop poles
Model 1.1	Integrator	0	→	$-0.74$
Model 1.1	Short Period	$-0.92 \pm 1.33i$	→	$-3.33 \pm 3.95i$
Model 1.1	Corrector	$-6.21 \pm 17.98i$	→	$-14.88 \pm 22.28i$
Model 1.5	Integrator	0	→	$-0.49$
Model 1.5	Short Period	$-0.68 \pm 1.31i$	→	$-1.99 \pm 3.10i$
Model 1.5	Corrector	$-6.21 \pm 17.98i$	→	$-13.97 \pm 18.33i$

Tableau 8.6 Placement constraints for first reduction

### ◆ Second reduction

After the successful first reduction, we seek to structure our controller. The two feedback path have originally integral action ; we choose to keep the integral effect only on the  $q$  feedback. Moreover, to ensure some “roll-off”, we impose the degrees of the numerators as shown in Tab.

8.7. With fewer degrees of freedom, some constraints of Tab. 8.6 have to be abandoned. But no satisfying reduced controller could then be found. After analysis, a constraint has to be added on Model 1.8 (Tab. 8.8).

Output	$q$	$n_z$
Poles	$\lambda_1\lambda_2\lambda_3$	$\lambda_2\lambda_3$
Degree difference	1	2

Tableau 8.7 Second reduced controller structure

Model	Mode	Open-loop poles		Closed-loop poles
Model 1.1	Integrator	0	$\rightarrow$	-0.74
Model 1.1	Corrector	$-6.21 \pm 17.98i$	$\rightarrow$	$-14.88 \pm 22.28i$
Model 1.5	Short Period	$-0.68 \pm 1.31i$	$\rightarrow$	$-1.99 \pm 3.10i$
Model 1.8	Integrator	0	$\rightarrow$	-0.89

Tableau 8.8 Placement constraints for reduced controller

The reduced controller is then tested on the complete high order model and provides similar results to the original one concerning time responses (Fig. 8.6). Table 8.9 summarizes the handling quality values. They are very close to the ones obtained with the original  $H_\infty$  controller. We finally managed to find a reduced controller that is still satisfactory.

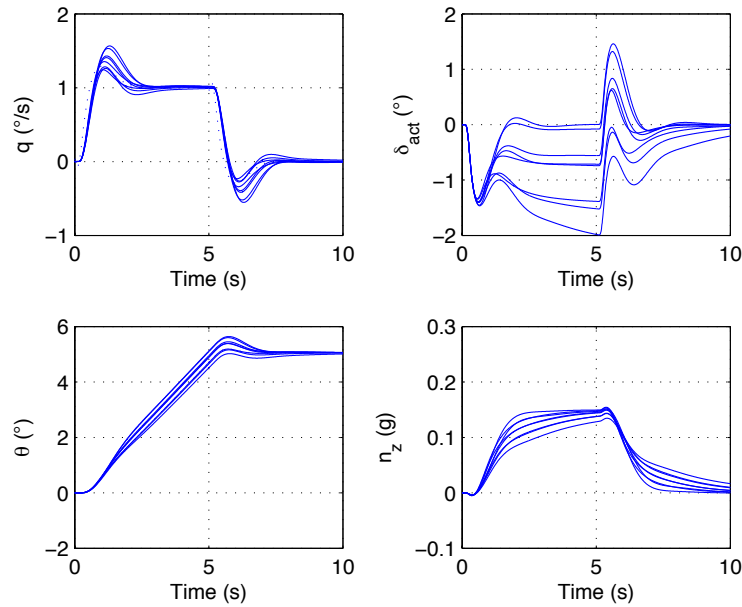


Figure 8.6 Time responses of the final reduced  $H_\infty$  controller

Model	$m/x_{cg}$	$\zeta_{sp1}$	$\omega_{BW_\theta}$	$Drb$	$\tau_p$	$ST$
Model 1.1	30 000 /20	0.65	1.49	-0.04	0.23	2.39
Model 1.2	30 000 /35	0.72	1.6	-0.06	0.21	2.94
Model 1.3	39 000 /20	0.60	1.42	-0.01	0.22	2.78
Model 1.4	39 000 /38	0.68	1.50	0.10	0.21	2.98
Model 1.5	46 000 /16	0.54	1.30	-0.2	0.2	3.22
Model 1.6	46 000 /38	0.66	1.50	0.18	0.21	3.21
Model 1.7	32 000 /48	0.72	1.79	0.22	0.25	2.81
Model 1.8	39 000 /48	0.66	1.66	0.19	0.24	2.72

Tableau 8.9 Handling quality values with the final reduced  $H_\infty$  controller

### 8.4.3 Self-scheduled controller

It remains to apply the self-scheduling technique (Section 8.2.5) to our problem at stake. As the flight envelope is expressed in terms of Mach number  $M$  and altitude  $h$ , these two measures are good candidates to be scheduling parameters. Nevertheless, we propose here to use dynamic pressure  $\bar{q}$  instead of  $M$ <sup>3</sup>. As the flight envelope is relatively large (Fig. 8.1), the design of the self-scheduling controller is made in two steps. We first establish a controller scheduled w.r.t.  $\bar{q}$  at the lowest altitude of 5000 ft, then we extend the controller to the complete flight envelope by adding altitude  $h$  dependency in the controller.

#### ◆ Choice of structure

Our controllers can be reduced efficiently while still keeping good performance properties. Moreover a common structure has been derived. Many choices can be taken for the structure of the transfer functions  $K_\delta(s)$ . In order to maintain an order as low as possible for our controller, all denominators will be chosen equal for every  $K_\delta(s)$ . The  $H_\infty$  controllers do not necessarily have the same poles, which is a major inconvenient when interpolation of these controllers needs to be performed. Nevertheless, a similar structure has been found for the different reduced controllers; consequently, average values of the poles are taken (Tab. 8.10). The low-frequency pole used in the reduction phase is replaced by a pole located at  $-20$  and the complex poles  $-10 \pm 25i$  is an average value of the different corresponding controller poles.

Pole	Value
$\lambda_1$	0
$\lambda_2$	$-10 \pm 25i$
$\lambda_3$	$-20$

Tableau 8.10 Scheduled controller poles

#### ◆ Initial synthesis controller

We first work on the flight condition 1. The controller structure is given in Tab. 8.11 and the

---

3. Calibrated airspeed  $V_c$  could have been another candidate

pole placement constraints are gathered in Tab. 8.12. This initial placement is similar to the one used in the final reduced controller. Time-responses remain similar to the ones obtained with the reduced controller of previous section (Fig. 8.6).

Output	$q$	$n_z$
Poles	$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$	$\lambda_2 \lambda_3$
Degree difference	1	2

Tableau 8.11 Structure of the initial controller for self-scheduling

Model	Mode	Open-loop poles		Closed-loop poles
Model 1.1	Integrator	0	→	-0.74
Model 1.1	Corrector	$-10 \pm 25i$	→	$-14.88 \pm 22.28i$
Model 1.5	Short Period	$-0.68 \pm 1.31i$	→	$-1.99 \pm 3.10i$
Model 1.8	Integrator	0	→	-0.89

Tableau 8.12 Placement constraints for initial controller  $K_0(s)$

◆ **Self-scheduled controller synthesis w.r.t.  $\bar{q}$  at  $h = 5000$  ft**

We first seek a scheduled controller w.r.t.  $\bar{q}$  at the lowest altitude  $h = 5000$  ft. The flight conditions to consider are 1 to 4. A quadratic scheduling is chosen :

$$K(s, \delta\bar{q}) = K_0(s) + \delta\bar{q}K_{\bar{q}}(s) + \delta\bar{q}^2K_{\bar{q}^2}(s) \quad (8.22)$$

The dynamic pressure of flight condition 1 is the lowest of the flight envelope (77.1 lb/ft<sup>2</sup>), whereas flight condition 4 is the highest (444.3 lb/ft<sup>2</sup>). The synthesis of the self-scheduled controller  $K(s, \delta\bar{q})$  is done by placing the eigenstructure of the augmented system :

$$\left( A(\Delta), B(\Delta), \begin{bmatrix} C(\Delta) \\ \delta\bar{q}C(\Delta) \\ \delta\bar{q}^2C(\Delta) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D(\Delta) \\ \delta\bar{q}D(\Delta) \\ \delta\bar{q}^2D(\Delta) \end{bmatrix} \right) \quad (8.23)$$

And the controller  $K(s, \delta\bar{q})$  is calculated in the following way :

$$K(s, \delta\bar{q}) = \begin{bmatrix} K_0(s) & K_{\bar{q}}(s) & K_{\bar{q}^2}(s) \end{bmatrix} \quad (8.24)$$

The same structure is preserved for  $K_{\bar{q}}(s)$  et  $K_{\bar{q}^2}(s)$  (Tab. 8.11).

● **Multimodel synthesis**

We maintain the placement of Model 1 (Tab. 8.12) and add placement constraints on Models 3 & 4 (Tab. 8.13). We essentially place short period and integrator modes. The different configurations are chosen according to the observations made on  $H_\infty$  controller reduction.

Moreover, one controller pole has to be placed on Model 4.1

Model	Mode	Open-loop poles		Closed-loop poles
Model 3.1	Short Period	$-1.87 \pm 3.47i$	$\rightarrow$	$-4.23 \pm 6.2i$
Model 3.5	Integrator	0	$\rightarrow$	-0.72
Model 3.7	Integrator	0	$\rightarrow$	-1.51
Model 3.7	Short Period	$-1.68 \pm 1.46i$	$\rightarrow$	$-3.58 \pm 2.08i$
Model 4.1	Integrator	0	$\rightarrow$	-1.99
Model 4.1	Corrector	$-10 \pm 25i$	$\rightarrow$	$-11.42 \pm 26.09i$
Model 4.5	Integrator	0	$\rightarrow$	-0.97
Model 4.5	Short Period	$-1.78 \pm 4.11i$	$\rightarrow$	$-3.67 \pm 4.51i$

Tableau 8.13 Additionnal constraints for scheduled controller  $K(s, \delta\bar{q})$

### • Analysis

The time-responses of Models 1 to 4 (for the 8 configurations) are illustrated in Fig. 8.7. A good temporal behaviour is preserved, similar to the one observed with  $H_\infty$  controller. Although, placement constraints are only applied on Models 1, 3 & 4, one can see that Model 2 (and its different configurations) exhibits the expected behaviour.

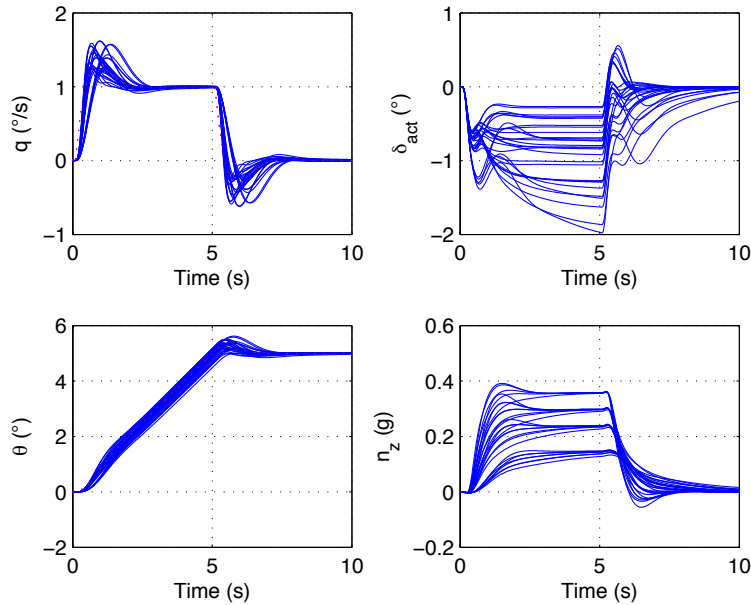


Figure 8.7 Time-responses with  $K(s, \delta\bar{q})$  for Models 1.x à 4.x

On the pole map (Fig. 8.8), all low frequency poles have a damping ratio greater than 0.5; poles issued from the integrator have a real part less than  $-0.5$ .

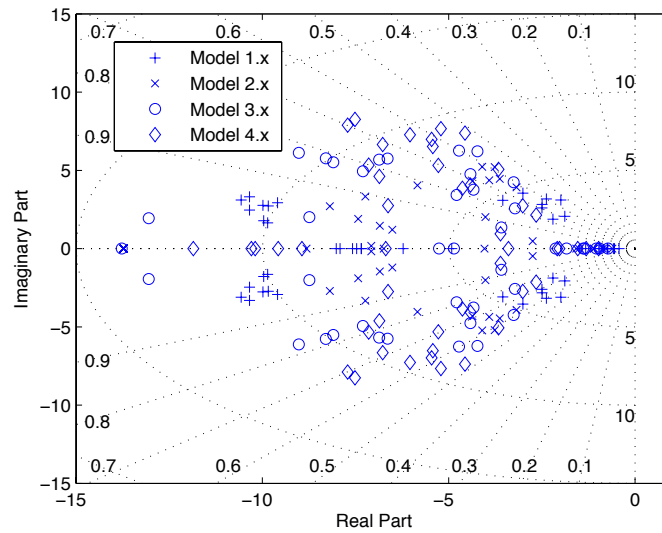


Figure 8.8 Pole map with  $K(s, \delta \bar{q})$  for Models 1.x à 4.x

By using the parametric model in  $M$  and  $h$ , we validate the closed-loop pole evolution (essentially short period mode) for  $M \in [0.25, 0.6]$  and  $h = 5000$  ft. Figure 8.9 shows that for the nominal configuration (Models 1.1 to 4.1), short period mode evolves smoothly with an increasing natural frequency as  $M$  grows and a damping ratio between 0.55 and 0.65.

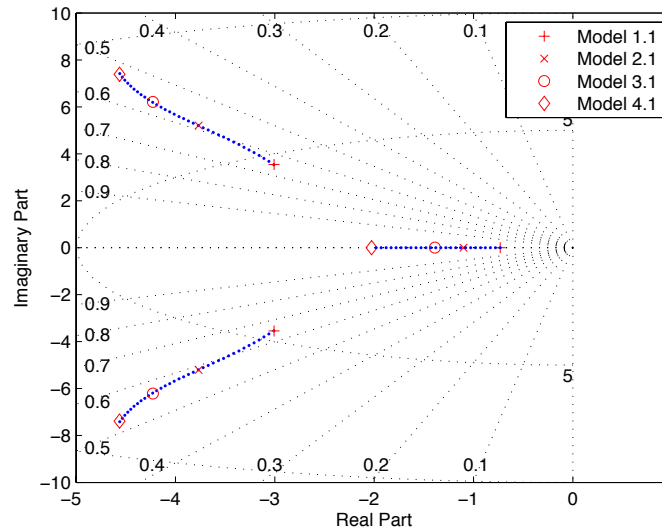


Figure 8.9 Short period mode evolution with  $K(s, \delta \bar{q})$  for  $M \in [0.25, 0.6]$  and  $h = 5000$  ft (Models x.1)



◆ **Scheduled controller w.r.t.  $\bar{q}$  and  $h$**

If we plot the time-responses with controller  $K(s, \bar{q})$  on the set of 160 models, they are not as good as expected. Nevertheless, the system remains stable for all configurations and closed-loop poles have a damping ratio greater than 0.3. Adding new scheduled terms in  $\bar{q}^3$  and  $\bar{q}^4$  do not improve the results, so we decide to use a second scheduling variable  $h$  to take into account the change of altitude. We gradually add terms in  $h$ ,  $\bar{q}h$ ,  $h^2$ ... while checking performance on the entire flight envelope. We finally decide to use a self-scheduled controller of the form :

$$K(s, \bar{q}, h) = K_0(s) + \delta\bar{q}K_{\bar{q}}(s) + \delta\bar{q}^2K_{\bar{q}^2}(s) + \delta hK_h(s) + \delta h^2K_{h^2}(s) + \delta\bar{q}\delta hK_{\bar{q}h}(s) \quad (8.25)$$

The synthesis of the self-scheduled controller  $K(s, \delta\bar{q}, h)$  is done by placing the eigenstructure of the augmented system :

$$\left( A(\Delta), B(\Delta), \begin{bmatrix} C(\Delta) \\ \delta\bar{q}C(\Delta) \\ \delta\bar{q}^2C(\Delta) \\ \delta hC(\Delta) \\ \delta h^2C(\Delta) \\ \delta\bar{q}\delta hC(\Delta) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D(\Delta) \\ \delta\bar{q}D(\Delta) \\ \delta\bar{q}^2D(\Delta) \\ \delta hD(\Delta) \\ \delta h^2D(\Delta) \\ \delta\bar{q}\delta hD(\Delta) \end{bmatrix} \right) \quad (8.26)$$

And the controller  $K(s, \delta\bar{q}, h)$  is calculated in the following way :

$$K(s, M) = \begin{bmatrix} K_0(s) & K_{\bar{q}}(s) & K_{\bar{q}^2}(s) & K_h(s) & K_{h^2}(s) & K_{\bar{q}h}(s) \end{bmatrix} \quad (8.27)$$

As before, the structures of  $K_h(s)$ ,  $K_{h^2}(s)$  et  $K_{\bar{q}h}(s)$  are the one exposed in Table 8.11. We start from the controller  $K(s, \delta\bar{q})$  and keep the placement constraints.

• **Multi-model synthesis**

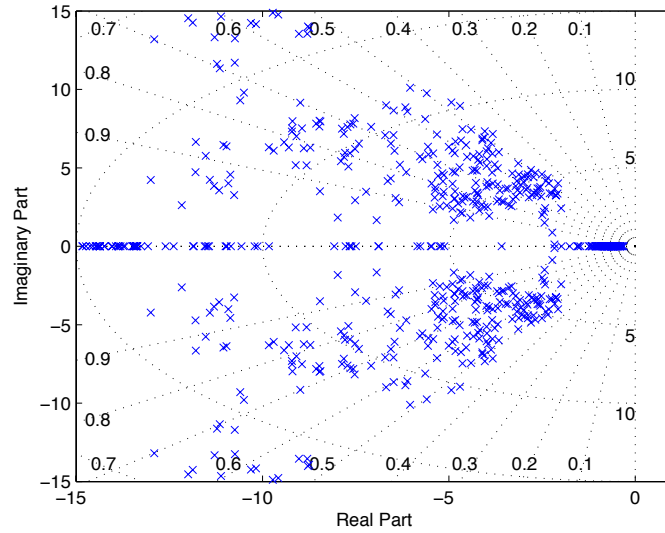
Additional constraints were deduced on the following observations :

- worst damped poles ( $\zeta < 0.4$ ) with  $K(s, \delta\bar{q})$  are those of Models 16 and 20 (high altitudes  $h = 35,000$  ft &  $h = 42,000$  ft and  $M = 0.88$ ).
- thanks to reduction phasis, we know on which Models 16.x and 20.x to operate.
- more constraints must be added on Models 12.x and 17.x
- Table 8.14 gathers the additional constraints.

• **Analysis**

Fig. 8.10 shows the closed-loop poles on the 160 models with controller  $K(s, \delta\bar{q}, \delta h)$ . Short period mode poles have damping ratio greater than 0.5 (with a few exceptions). Time-responses of Fig. 8.11 are all satisfactory on the entire set of models. The self-scheduled controller  $K(s, \delta\bar{q}, \delta h)$  ensures good performance on the entire flight envelope and is robust for the different mass/center of gravity configurations.

Model	Mode	Open-loop poles		Closed-loop poles
Model 12.1	Short Period	$-2.61 \pm 6.44i$	$\rightarrow$	$-5.52 \pm 7.07i$
Model 12.5	Integrator	0	$\rightarrow$	-1.25
Model 12.5	Short Period	$-1.88 \pm 5.58i$	$\rightarrow$	$-3.91 \pm 5.48i$
Model 12.7	Short Period	$-2.37 \pm 3.38i$	$\rightarrow$	$-2.54 \pm 3.82i$
Model 16.1	Corrector	$-10 \pm 25i$	$\rightarrow$	$-10.28 \pm 28.21i$
Model 16.5	Integrator	0	$\rightarrow$	-0.68
Model 16.5	Short Period	$-1.09 \pm 4.14i$	$\rightarrow$	$-3.64 \pm 7.36i$
Model 16.7	Short Period	$-1.56 \pm 1.75i$	$\rightarrow$	$-2.44 \pm 2.90i$
Model 17.1	Integrator	0	$\rightarrow$	-0.52
Model 17.1	Short Period	$-0.58 \pm 1.82i$	$\rightarrow$	$-3.86 \pm 7.07i$
Model 17.5	Short Period	$-0.428 \pm 1.74i$	$\rightarrow$	$-2.70 \pm 4.58i$
Model 17.7	Degenerated Short Period	-1.03 & -0.11	$\rightarrow$	$-3.80 \pm 3.82i$
Model 20.1	Integrator	0	$\rightarrow$	-0.98
Model 20.5	Integrator	0	$\rightarrow$	-0.85
Model 20.5	Short Period	$-0.72 \pm 3.38i$	$\rightarrow$	$-2.64 \pm 5.44i$
Model 20.7	Short Period	$-1.01 \pm 2.27i$	$\rightarrow$	$-1.96 \pm 1.82i$

Tableau 8.14 Additional constraints for  $\bar{q}$  et  $h$ Figure 8.10 Pole map with  $K(s, \delta\bar{q}, \delta h)$  for the 160 models

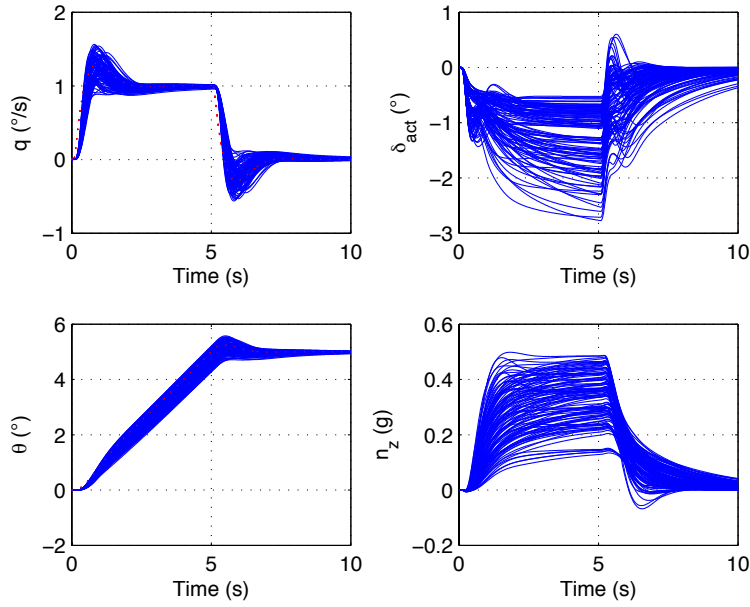


Figure 8.11 Time-responses with  $K(s, \delta\bar{q}, \delta h)$  for the 160 models

## 8.5 Conclusion

A complete design of the longitudinal flight controller of a *Challenger 604* has been carried out. Thanks to a reference model satisfying many handling qualities, effective high order controllers were first designed using  $H_\infty$  synthesis on different flight conditions ; moreover they presented good robustness versus mass and center of gravity variations. Robust modal reduction was then performed on these controllers to lower significantly their order while still preserving performance and to impose a common structure. Finally, a self-scheduling technique allowed us to schedule the gains w.r.t dynamic pressure and altitude over the entire flight envelope. The final product is an efficient 4<sup>th</sup> order scheduled controller which is robust to mass and center of gravity variations and which satisfies most of the handling qualities considered.

## DISCUSSION GÉNÉRALE ET CONCLUSION

### Discussion et Contributions

Le problème central de la thèse a été de concevoir le contrôle du vol longitudinal d'un avion satisfaisant un certain nombre de qualités de manœuvrabilité sur toute l'enveloppe de vol. Ce problème a été abordé de deux façons différentes : une première approche où nous avons dû conserver des architectures de contrôle imposées par *Bombardier Inc.* et une seconde approche où nous avons laissé de côté la contrainte d'architecture fixe mais pour laquelle nous avons cherché un correcteur aussi simple que possible, comparable aux architectures classiquement employées.

Après un premier chapitre consacré à la revue de littérature et aux objectifs de la thèse, nous avons dans la **partie 1** présenté notre problème de contrôle ainsi que les contraintes à satisfaire grâce au contrôleur. Nous avons, dans le **chapitre 2**, décrit et analysé le modèle longitudinal du *Challenger 604* de *Bombardier Inc.*. Une attention particulière a été accordée à la réduction des modèles afin de faciliter par la suite la synthèse de contrôleurs. Une étude de l'évolution de la dynamique longitudinale au travers de l'enveloppe de vol a permis une meilleure appréhension du problème ; l'influence de la masse et du centrage a aussi été mise en évidence.

Le **chapitre 3** consacré à l'étude des qualités de manœuvrabilité a donné lieu aux premières contributions de la thèse. Après avoir passé en revue différents critères à satisfaire , un cahier des charges réaliste a été établi. La première contribution théorique réside dans une étude complète du *Dropback* de Gibson. Plusieurs formulations théoriques du critère permettent à présent de l'exprimer explicitement en fonction des paramètres du système et du correcteur, autorisant ainsi un réglage précis. Ces formulations théoriques s'appliquent aussi bien à une fonction de transfert qu'à un modèle d'état. De plus, l'étude du lien entre dropback et dépassement a permis de confirmer les résultats expérimentaux trouvés dans des ouvrages de référence sur les qualités de manœuvrabilité. Une seconde contribution au niveau des qualités de manœuvrabilité concerne la confrontation des différents critères sur un modèle standard. Il a été mis en évidence le caractère prédominant de certains critères ; satisfaire les contraintes d'amortissement, de dropback et de temps de réponse permet en général de satisfaire les critères fréquentiels qui sont plus difficilement exprimables en terme des gains du contrôleur. Il s'en est aussi dégagé plusieurs guides novateurs pour l'ajustement de ces critères.

La **partie 2** s'est concentrée sur la synthèse de contrôleur à architecture fixe. À travers 2 articles, nous avons démontré l'apport des applications gardiennes dans la synthèse de contrôleur à architecture fixe. Le premier article était consacré à l'élaboration d'algorithmes basés sur les applications gardiennes pour effectuer un placement de pôles dans une région cible du plan complexe.

L'algorithme trouve automatiquement les gains adéquats sans intervention de l'utilisateur. Cette approche a un avantage certain par rapport aux approches utilisées dans les lois de commande classiques ; on conserve l'architecture imposée en évitant la synthèse successive des différentes boucles par des techniques classiques comme le lieu des racines ou le diagramme de Bode. On a ainsi un gain de temps et un meilleur résultat puisque tous les gains sont réglés en même temps<sup>4</sup>. L'algorithme a démontré son efficacité sur deux lois de commande communément utilisées dans l'industrie et ce, sur 20 conditions de vol représentatives de toute l'enveloppe de vol. Enfin le deuxième article est une contribution aux techniques de séquençement de contrôleurs. À partir d'un modèle LPV de notre système et d'un contrôleur synthétisé en un point de vol, l'algorithme développé se charge de déterminer automatiquement les gains adéquats pour tout l'ensemble d'évolution des paramètres de l'enveloppe de vol. On s'affranchit ainsi de la synthèse de contrôleurs en plusieurs points d'équilibre et de leur séquençement *a posteriori*. On conserve aussi la structure imposée et la stabilité du système est assurée tout au long du processus.

Dans la **partie 3**, nous nous sommes affranchis des architectures de contrôle imposées pour concevoir un contrôleur séquencé sur l'enveloppe de vol et qui demeure robuste face à des variations de masse et de centrage. La contribution se veut essentiellement applicative et méthodologique. De notre étude sur les qualités de manœuvrabilités, nous avons extrait des modèles de référence remplissant tous les critères. Une synthèse  $H_\infty$  avec appariement de modèle nous a donc fournis dans un premier temps des correcteurs sur l'ensemble des 20 conditions de vol. Lors de la synthèse, une attention particulière a été portée au fait que ces correcteurs demeurent relativement robustes face à la masse et au centrage. Afin d'avoir des correcteurs facilement implantables, il a donc été nécessaire de les réduire. À l'aide des méthodes de réduction modale qui s'attachent à conserver les propriétés de la boucle fermée, nous sommes parvenus à une réduction à l'ordre 4 qui s'est avérée suffisante pour bien conserver les performances des correcteurs  $H_\infty$ . Qui plus est, la grande versatilité de la méthode, nous a permis d'obtenir des correcteurs réduits ayant des structures similaires sur tous les points de vol, laissant présager un séquençement du correcteur plus facile. La dernière étape a été réalisée grâce aux techniques d'auto-séquencement dérivées du contrôle modale robuste. Bien que la méthode ne garantisse pas *a priori* la stabilité entre les points de synthèse, une analyse *a posteriori* a montré la régularité du comportement sur l'enveloppe de vol. Nous avons au final un correcteur d'ordre 4, séquencé en pression dynamique et altitude, dont la complexité est comparable aux architectures classiques utilisées dans la **partie 2**. Un bénéfice apporté par cette démarche a été la considération de la robustesse face aux variations de masse et centrage, ce qui n'a pas été envisagé dans la partie précédente. Le troisième article est venu reprendre l'ensemble de cette démarche.

## Perspectives

Il reste beaucoup à faire pour une meilleure compréhension des qualités de manœuvrabilité. Nous n'avons traité qu'une infime partie d'un vaste problème qui suscite toujours un grand intérêt

---

4. On évite ainsi les essais/erreurs inhérents aux techniques classiques quand plusieurs boucles sont en jeu.

de la communauté. À la manière du travail effectué sur le dropout, il faudrait pouvoir développer des formules théoriques pour les autres critères et ce, pour des systèmes de n'importe quel ordre afin de les inclure plus facilement dans une synthèse.

Les algorithmes basés sur les applications gardiennes ont démontré une certaine efficacité pour la synthèse de contrôleur d'architecture fixe. Si nous nous sommes contentés dans un premier temps du placement de pôles dans une région du plan complexe, il serait intéressant de le jumeler à une minimisation d'un critère  $H_\infty$  ou de considérer explicitement des contraintes de marge de gain et de phase. De plus les algorithmes peuvent encore être améliorés, notamment au niveau du choix des gains à l'intérieur d'une composante ; on pourrait par exemple enrichir les directions de recherche par un calcul de gradient. Il faudrait ainsi considérer la synthèse de contrôleurs robustes : synthétiser par exemple un contrôleur qui assure le confinement de pôles dans une région du plan complexe sur plusieurs modèles à la fois. De plus la méthode de séquençement n'est pour l'instant effective que sur des systèmes LPV avec un ou deux paramètres ; il faudrait éventuellement la généraliser pour plusieurs paramètres. De plus cette approche a été appliquée sur un modèle d'avion ainsi que sur un missile ; il serait dès lors intéressant de l'utiliser sur d'autres types de systèmes.

Même si l'auto-séquençement s'est montré efficace sur notre problématique, il aurait été intéressant d'appliquer aussi la méthode de synthèse de correcteurs LFT développée dans (Magni et Chable, 2002; Magni *et al.*, 2006; Gaulocher *et al.*, 2007). Tenir compte de la robustesse dans une telle synthèse rend la mise en œuvre particulièrement difficile et il reste encore de la recherche à effectuer dans cette direction.

## RÉFÉRENCES

- (1974). Federal aviation regulations (FAR) part 25 : Airworthiness standards : Transport category airplanes. Rapport technique, Federal Aviation Administration (FAA).
- (1974). Joint aviation requirements (JAR) - 25 : large aeroplanes. Rapport technique, Joint Aviation Authorities.
- ACKERMANN, J. (1993). *Robust control : systems with uncertain physical parameters*. London, U.K. : Springer-Verlag.
- ADAMS, R. J., BUFFINGTON, J. M., SPARKS, A. G. et BANDA, S. S. (1995). *Robust multivariable flight control*. New York : Springer.
- AKHRIF, O., SAAD, M., DE LA FONTAINE, J., ZHU, G., ABI-ELIAS, R. et ABDOUNE, M. (1998). Design of practical flight control systems for commercial aircraft using modern control techniques. Rapport technique CRD 215465-98.
- ALAZARD, D., CUMER, C., APKARIAN, P., GAUVRIT, M. et FERRERES, G. (1999). *Robustesse et commande optimale*. Toulouse, France : Cepadues-Editions.
- AMATO, F., COSENTINO, C., IERVOLINO, R. et CINIGLIO, U. (2003). Robust  $H_\infty$  control of a fly-by-wire aircraft :an LFT approach. *CCA 2003. Proceedings of 2003 IEEE Conference on Control Applications*. IEEE, vol. 1, 200–205.
- AMATO, F., MATTEI, M., SCALA, S. et VERDE, L. (2000). Robust flight control design for the HIRM based on linear quadratic control. *Aerospace Science and Technology*, 4, 423–438.
- ANDERSON, B. D. O., BOSE, N. K. et JURY, E. I. (1975). Output feedback stabilization and related problems solution via decision methods. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20, 53–66.
- ANDERSON, B. D. O. et MOORE, J. B. (1990). *Optimal control : linear quadratic methods*. Englewood, NJ : Prentice-Hall.
- AOUF, N., BOULET, B. et BOTEZ, R. (2002). A gain scheduling approach for a flexible aircraft. *Proceedings of the American Control Conference*. 44439–4442.
- APKARIAN, P. et GAHINET, P. (1995). A convex characterization of gain scheduling  $H_\infty$  controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40, 853–864.
- APKARIAN, P. et NOLL, D. (2006). Controller design via nonsmooth multi-directional search. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 44, 1923–1949.
- APKARIAN, P., NOLL, D. et TUAN, H. D. (2003). Fixed-order  $H_\infty$  control design via a partially augmented lagrangian method. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13, 1137–1148.
- APKARIAN, P. et TUAN, H. D. (2000). Parameterized LMIs in control theory. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38, 1241–1264.

- ASELTINE, J. A., MANCINIE, A. R. et SARTUNE, C. W. (1958). A survey of adaptive control systems. *IRE Transactions on Automatic Control*, 3, 102–108.
- ASHKENAS, I. L. (1984). Twenty-five years of handling qualities research. *AIAA Journal of Aircraft*, 21, 289–301.
- ÅSTRÖM, K. J. (1983). Theory and applications of adaptive control - a survey. *Automatica*, 19, 471–486.
- AVANZINI, G. et GALEANI, S. (2005). Robust antiwindup for manual flight control of an unstable aircraft. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 28, 1275–1282.
- BALAS, G. F. (2003). Flight control law design : an industry perspective. *European Journal of Control*, 9, 207–226.
- BARKANA, I. (2005). Classical and simple adaptive control for nonminimum phase autopilot design. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 28, 631–638.
- BARMISH, B. R. (1994). *New tools for robustness of linear systems*. New York : Macmillan.
- BASU, S., POLLACK, R. et ROY, M. F. (1994). On the combinatorial and algebraic complexity of quantifier elimination. IEEE, éditeur, *Proc. 35th Symp. on Foundations of Computer Science*. 623–641.
- BECKER, G., PACKARD, A., PHILBRICK, D. et BALAS, G. F. (1993). Control of a parametrically dependant linear systems : a single Lyapunov approach. *Procedures of Amercian Control Conference*. 2795–2799.
- BERNSTEIN, D. S. (1992). Some open problems in matrix theory arising in linear systems and control. *Linear Algebra and its Applications*, 162-164, 409–432.
- BIANNIC, J. M. et APKARIAN, P. (1999). Missile autopilot via a modified lpv synthesis technique. *Aerospace Sciences and Technologies*, 3, 153–160.
- BIANNIC, J. M., APKARIAN, P. et GARRARD, W. L. (1997). Parameter varying control of a high-performance aircraft. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 20, 225–231.
- BIHRLE, W. (1966). A handling qualities theory for precise flight path control. Rapport technique AFFDL-TR-65-198, Air Force Flight Dynamics Laboratory. WPAFB, Ohio.
- BLIGHT, J. D., DAILEY, R. L. et GANGSAAS, D. (1994). Pratical control law design for aircraft using multivariable techniques. *International Journal of Control*, 59, 93–117.
- BLONDEL, V., GEVERS, M. et LINDQUIST, A. (1995). Survey on the state of systems and control. *European Journal of Control*, 1, 5–23.
- BLONDEL, V. et TSITSIKLIS, J. (1997). NP-hardness of some linear control design problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 35, 2118–2127.
- BOIFFIER, J. L. (1998). *The dynamics of flight : the equations*. New York : Wiley.
- BOIFFIER, J. L. (2000). *Notes de cours de dynamique de vol*. Supaero.



- BOMPART, V., APKARIAN, P. et NOLL, D. (2007). Non-smooth techniques for stabilizing linear systems. *2007 American Control Conference New York, NY, USA*. IEEE, 1245–1250.
- BOULET, B., FRANCIS, B. A., HUGHES, P. C. et HONG, T. (2001).  $\mu$ -synthesis for a large flexible space structure experimental testbed. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 24, 967–977.
- BOYD, S., GHAOUI, L. E., FERON, E. et BALAKRISHAN, V. (1994). Linear matrix inequalities in system and control theory. *SIAM studies in applied mathematics*, 15.
- BRUYERE, L., TSOURDOS, A. et WHITE, B. A. (2006). Polynomial approach for design and robust analysis of lateral missile control. *International Journal of Systems Science*, 37, 585–597.
- BRUZELIUS, F. et BREITHOLTZ, C. (2001). Gain scheduling via affine linear parameter-varying systems and  $\mathcal{H}_\infty$  synthesis. *Proceedings of the 40<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*.
- BRUZELIUS, F., PETTERSSON, S. et BREITHOLTZ, C. (2004). Linear parameter-varying descriptions of nonlinear systems. *Proceedings of the American Control Conference, Boston, MA*. vol. 2, 1374–1379.
- BURKE, J. V., HENRION, D., LEWIS, A. S. et OVERTON, M. L. (2006). HIFOO - a Matlab package for fixed-order controller design and  $H_\infty$  optimization. *Proc. 5th IFAC Symposium on Robust Control Design, Toulouse, France*.
- BURKE, J. V., LEWIS, A. S. et OVERTON, M. L. (2002a). Approximating subdifferentials by random sampling of gradients. *Mathematics of Operations Research*, 27, 567–584.
- BURKE, J. V., LEWIS, A. S. et OVERTON, M. L. (2002b). Two numerical methods for optimizing matrix stability. *Linear Algebra and its Applications*, 351-352, 117–145.
- BURKE, J. V., LEWIS, A. S. et OVERTON, M. L. (2005). A robust gradient sampling algorithm for nonsmooth, nonconvex optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 15, 751–779.
- BURKE, J. V. et OVERTON, M. L. (1994). Differential properties of the spectral abscissa and the spectral radius for analytic matrix-valued mappings. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications*, 23, 467–488.
- BURKE, J. V. et OVERTON, M. L. (2001). Variational analysis of non-lipschitz spectral functions. *Mathematical Programming*, 90, 317–351.
- BUSCHEK, H. et CALISE, A. J. (1997). Aerospace control system design with robust fixed order compensators. *Aerospace Science and Technology*, 1, 391–404.
- CAMERON, N., THOMSON, D. G. et MURRAY-SMITH, D. J. (2003). Pilot modelling and inverse simulation for initial handling qualities assessment. *Aeronautical Journal*, 107, 511–520.
- CASELLA, F. et LOVERA, M. (2008). LPV/LFT modelling and identification : overview, synergies and a case study. *Proceedings of the 2008 IEEE Int. Symposium on Computer-Aided*. 852–857.
- CHABLE, S. (2003). *Vers des correcteurs réduits et robustes aux variations paramétriques*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace.

- CHABLE, S., MATHIEU, S. et CHIAPPA, C. (2003). Design and optimization of restricted complexity controller : A modal approach for reduced-order controllers. *European Journal of Control*, **9**, 39–47.
- CHIAPPA, C. (2003). La commande modale robuste : théorie et application. rapport de hdr. Rapport technique.
- CHIAPPA, C., MAGNI, J. F., DÖLL, C. et LE GORREC, Y. (1998). Improvement of the robustness of an aircraft autopilot designed by an  $h_\infty$  technique. *Procedures of the CESA'98 Conference*. 1016–1020.
- CLÉMENT, B. et DUC, G. (2001). An interpolation method for gain-scheduling. *40th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, vol. 2, 1310–1315.
- CONSTANT, G., CHABLE, S., CHIAPPA, C. et DÖLL, C. (2002). Robustification of an  $H_2$  autopilot for flexible aircraft by self scheduling based on multi model eigenstructure assignment. *International Council of Aeronautical Sciences*. 542.1–542.9.
- COOK, M. V. (1997). *Flight dynamics principles*. London : Arnold ; New York : Wiley.
- COOPER, G. E. et HARPER, R. P. (1969). The use of pilot rating in the evaluation of aircraft handling qualities. Rapport technique NASA TN D-5153.
- CRIDER, L. D. (2004). Control of commercial aircraft with vertical tail loss. *AIAA 4th Aviation Technology, Integration and Operations (ATIO) Forum, Chicago, IL*. 1–11.
- DARDENNE, I. (1998). *Développement de méthodologies pour la synthèse de lois de commande d'un avion de transport souple*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace.
- DÖLL, C. (2001). *La robustesse des lois de commande pour des structures flexibles en aéronautique et en espace*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace.
- DÖLL, C., LE GORREC, Y., FERRERES, G. et MAGNI, J. F. (2001). A robust self-scheduled missile autopilot : Design by multi-model eigenstructure assignment. *Control Engineering Practice*, **9**, 1067–1078.
- DOYLE, J. C. (1982). Analysis of feedback systems with structured uncertainty. *IEE Proceedings, Part D*. IEE, vol. 129, 242–250.
- DOYLE, J. C., GLOVER, K., KHARGONEKAR, P. P. et FRANCIS, B. A. (1989). State-space solutions to standard  $h_2$  and  $H_\infty$  control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **34**, 831–847.
- DOYLE, J. C., LENZ, K. et PACKARD, A. (1986). Design examples using  $\mu$ -synthesis : Space shuttle lateral axis fcs during reentry. *25<sup>rd</sup> IEEE Conference on Decision and Control, Athens, Greece*. 2218–2223.
- ENNS, D., BUGAJSKI, D., HENDRICK, R. et STEIN, G. (1994). Dynamic inversion : an evolving methodology for flight control design. *International Journal of Control*, **59**, 71–79.
- ETKIN, B. (1972). *Dynamics of atmospheric flight*. New York : Wiley.

- FALEIRO, L. F. (1998). *Application of eigenstructure assignment to the design of flight control systems*. Ph.d. thesis, Loughborough University.
- FARES, B. et APKARIAN, P. A. (2001). An augmented lagrangian method for a class of LMI-constrained problems in robust control. *International Journal of Control*, 74, 348–360.
- FARINEAU, J. (1989). Lateral electric flight control laws of the A320 based upon eigenstructure assignment techniques. *Proceedings of the AIAA GNC Conference*.
- FARINEAU, J. et LETRON, X. (1990). Qualités de vol latéral d'un avion de transport civil équipé de commandes de vol électriques. expérience de l'airbus A320. *AGARD Symposium on flying qualities, AGARD Conference Proceedings*.
- FAVRE, C. (1994). Fly-by-wire for commercial aircraft : the airbus experience. *International Journal of Control*, 59, 139–157.
- FIELD, E. (1993). The application of a  $C^*$  flight control law to large civil transport aircraft. Rapport technique No 9303.
- FIELDING, C. et MOORHOUSE, D. J. (1998). Progress report on agard working group 23 flight control law design - best practices. *AIAA Atmospheric flight mechanics conference and exhibit, Boston, MA*. 793–801.
- FRENCH, M. A. (1995). *Comparative analysis of modern longitudinal handling qualities criteria*. Mémoire de maîtrise, Cranfield University.
- FROMION, V. et SCORLETTI, G. (2003). A theoretical framework for gain scheduling. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13, 951–982.
- FU, M. et LUO, Z. Q. (1997). Computational complexity of a problem arising in fixed order output feedback design. *Systems & Control Letters*, 30, 209–215.
- GAHINET, P., NEMIROVSKI, A. J. L. et CHILALI, M. (1994). *LMI control toolbox*. The MathWorks, Inc.
- GAULOCHER, S., KNAUF, A. et FEUERSÄNGER (2007). Self-scheduled controller design for relative motion control of a satellite formation. *IMSM-IMAACA Multiconference*.
- GAUTREY, J. E. (1998). *Flying qualities and flight control system design for a fly-by-wire transport aircraft*. Ph.d. thesis, Cranfield University, College of Aeronautics.
- GAUTREY, J. E. et COOK, M. V. (1998). A generic control anticipation parameter for aircraft handling qualities evaluation. *Aeronautical Journal*, 102, 151–159.
- GEROMEL, J. C., DE SOUZA, C. C. et SKELTON, R. E. (1998). Static output feedback controllers : stability and convexity. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43, 120–125.
- GIBSON, J. C. (1982). Piloted handling qualities design criteria for high order flight control systems. Rapport technique CP-333, AGARD.
- GIBSON, J. C. (1997). *The definition, understanding and design of aircraft handling qualities*. Delft, Netherlands : Delft University Press.

- GIBSON, J. C. (1999). *Development of a methodology for excellence in handling qualities design for fly by wire aircraft*. Delft, Netherlands : Delft University Press.
- GLOVER, K. (1984). All optimal hankel-norm approximation of linear multivariable systems and their  $l_\infty$  error bounds. *International Journal of Control*, 39, 1115–1193.
- GRIGORIADIS, K. M. et SKELTON, R. E. (1996). Low-order control design for LMI problems using alternating projection methods. *Automatica*, 32, 1117–1125.
- GUTMAN, S. et JURY, E. (1981). A general theory for matrix root-clustering in subregions of the complex plane. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26, 853–863.
- HENRION, D. (2007). Solving static output feedback problems by direct search optimization. IEEE, éditeur, *Proceedings of the 2006 IEEE Conference on Computer Aided Control Systems Design, CACSD*. 1534–1537.
- HENRION, D., LÖFBERG, J., KOČVARA, M. et STINGL, M. (2005). Solving polynomial static output feedback problems with PENBMI. *Proc. 44th IEEE Conference Decision and Ctrl. Eur. Ctrl. Conf. CDC-ECC'05*. IEEE, 7581–7586.
- HENTABLI, K. (2005). *Conception de lois de pilotage robustes et séquençement de gains par l'approche des systèmes linéaires à paramètres variants*. Ph.d. thesis, École de Technologie Supérieure.
- HENTABLI, K., SAYDY, L. et AKHRIF, O. (2003). Robust flight control design with handling qualities incorporation via low order model matching. *Fourth International Conference on Control and Automation*. IEEE, 193–197.
- HESS, R. A. (2009). Pilot-centered handling qualities assessment for flight control design. *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit, Chicago, IL*.
- HIGHAM, J. N. (1993). Optimization by direct search in matrix computations. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 14, 317–333.
- HODGKINSON, J. (1999). *Aircraft handling qualities*. Reston, Va : American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc. ; Oxford, United Kingdom : Blackwell Science Ltd.
- HODGKINSON, J. (2005). History of low-order equivalent systems for aircraft flying qualities. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 28, 577–583.
- HOUPIS, C. H. (1999). *Quantitative feedback theory : fundamentals and applications*. New York : Marcel Dekker.
- HOUPIS, C. H., SATING, R. R., RASMUSSEN, S. et SHELDON, S. (1994). Quantitative feedback theory technique and applications. *International Journal of Control*, 59, 39–70.
- HYDE, R. A. (1996).  *$H_\infty$  aerospace control design - a VSTOL flight application*. New York : Springer.
- HYDE, R. A. et GLOVER, K. (1993). The application of scheduled  $\mathcal{H}_\infty$  controllers to a VSTOL aircraft. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38, 1021–1039.
- ISIDORI, A. (1995). *Nonlinear control systems*. Berlin : Springer, troisième édition.

- ITO, D., GEORGIE, J., VALASEK, J. et WARD, D. (2002). *Reentry vehicle flight controls design guidelines : dynamic inversion*. Thèse de doctorat, Texas A&M University, Texas, USA.
- IWASAKI, T. et SKELTON, R. E. (1995). Parametrization of all stabilizing controller via quadratic lyapunov functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 85, 291–307.
- KALMAN, R. E. (1958). Design of a self optimizing control system. *Transaction of the ASME*, 80, 468–478.
- KALMAN, R. E., HO, Y. C. et NARENDRA, K. S. (1962). Controllability of linear dynamic systems. *Contributions to Differential Equations*, 1.
- KAMINER, I., PASCOAL, A. M., KHARGONEKAR, P. P. et COLEMAN, E. (1995). A velocity algorithm for the implementation of gain-scheduled controllers. *Automatica*, 31, 1185–1191.
- KANNAN, N. et SEETHARAMA, B. (2005). Longitudinal  $H_\infty$  stability augmentation system for a thrust-vectorred unmanned aircraft. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 28, 1240–1250.
- KELLETT, M. G. (1991). *Continuous scheduling of H-infinity controllers for a MS760 Paris aircraft*, Hammond, P. H. *Robust control system using H-infinity and related methods*. 197–223.
- KIENITZ, K. H. et GRÜBEL, G. (1998). Multiobjective target feedback loop / loop transfer recovery (TFL/LTR) design with application to aircraft lateral control in high incidence regime. *Aerospace Science and Technology*, 2, 515–523.
- KIMURA, H. (1978). On pole assignment by output feedback. *International Journal of Control*, 11–22.
- KOLDA, T., LEWIS, R. et TORCZON, V. (2003). Optimization by direct search : new perspectives on some classical and modern methods. *SIAM Review*, 45, 385–482.
- KUBICA, F. (1995). *Conception de lois de commande pour un avion souple*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace.
- KUO, B. C. et GOLNARAGHI, F. (2010). *Automatic Control Systems*. Wiley, 9th édition.
- LANCASTER, P. et TISMENETSKY, M. (1985). *The Theory of Matrices*. Academic Press.
- LAWRENCE, D. A. et RUGH, W. J. (1995). Gain scheduling dynamic linear controllers for a nonlinear plant. *Automatica*, 31, 381–390.
- LE GORREC, Y. (1998). *Commande modal robuste et synthèse de gains autoséquentiels. Approche multimodèle*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace.
- LE GORREC, Y., MAGNI, J. F., DÖLL, C. et CHIAPPA, C. (1998). A modal multimodel control design approach applied to aircraft autopilot design. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 21, 77–83.
- LEACOCK, G. R. et THOMSON, D. G. (2001). A technique for predicting pilot model parameters using inverse simulation. *Aeronautical Journal*, 105, 97–.

- LEE, H. P., REIMAN, S. E., DILLON, C. H. et YOUSSEF, H. M. (2007). Robust nonlinear dynamic inversion control for a hypersonic cruise vehicle. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, South Carolina*.
- LEIBFRITZ, F. (2003). Compl<sub>e</sub>ib : constrained matrix optimization problem library - a collection of test examples for nonlinear semidefinite programs, control system design and related problems. Rapport technique, Department of Mathematics, University of Trier, Germany.
- LEITH, D. J. et LEITHEAD, W. E. (2000). Survey of gain-scheduling analysis and design. *International Journal of Control*, 73, 1001–1025.
- LEITH, D. J., LEITHEAD, W. E., LAWRENCE, D. A. et RUGH, W. J. (1998). Comments on gain scheduling dynamic linear controllers for a non linear plant. *Automatica*, 34, 1041–1043.
- LEONESSA, A., HADDAD, W. M. et CHELLABOINA, V. (1988). Nonlinear system stabilization via stability-based switching. *Proceedings of the 37<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control, Tampa, FL*. 2983–2996.
- LIÉNARD, A. et CHIPART, H. (1914). Sur le signe de la partie réelle des racines d’une équation algébrique. *J. Math. Pures Appl.*, 19, 291–346.
- LIU, G. P. et PATTON, R. J. (1998). *Eigenstructure assignment for control system design*. New York, NY : John Wiley & Sons, Inc.
- LU, B., WU, F. et KIM, S. (2005). Linear parameter-varying antiwindup compensation for enhanced flight control performance. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 28, 494–505.
- LUO, W., CHU, Y. C. et LING, K. V. (2005).  $h_\infty$  inverse optimal attitude-tracking control of rigid aircraft. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 28, 481–493.
- MAGNI, J. F. (1999). Multimodel eigenstructure assignment in flight control design. *Aerospace Sciences and Technologies*, 3, 141–151.
- MAGNI, J. F. (2002). *Robust Modal Control with a Toolbox for use with Matlab*. Kluwer Academic/Plenum Publishers.
- MAGNI, J. F. (2005). User manuel of the linear fractional representation toolbox, version 2.0. Technical report, CERT - DCSD.
- MAGNI, J. F., BENNANI, S. et TERLOUW, J. C. (1997). *Robust flight control : a design challenge*. Springer Verlag, Lecture notes in control and information sciences 224.
- MAGNI, J. F. et CHABLE, S. (2002). Feedback design in LFT form. *Proceedings of the 4<sup>th</sup> Asian Control Conference*.
- MAGNI, J. F. et DÖLL, C. (1997). A new lower bound of the mixed structured singular value. *Proc. 2nd Asian Control Conference, Seoul, South Korea*. vol. I, 847–850.
- MAGNI, J. F., KNAUF, A. et DÖLL, C. (2006). Practical implementation of LFT-scheduled feedback gains. *Asian Control Conference, Bali, Indonesia*.

- MAGNI, J. F., LE GORREC, Y. et CHIAPPA, C. (1998). A multimodel-based approach to robust and self-scheduled control design. *37th IEEE Conference on Decision and Control, Tampa, Florida*. IEEE, 3009–3014.
- MANNCHEN, T., BATES, D. G. et POSTLETHWAITE, I. (2002). Modeling and computing worst-case uncertainty combinations for flight control systems analysis. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 25, 1029–1039.
- MATTEI, M. et SCORDAMAGLIA, V. (2008). A full envelope small commercial aircraft flight control design using multivariable proportion-integral control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 16.
- MCCUISH, A. (1994). Development and flight experience of the control laws in the experimental aircraft programme. *International Journal of Control*, 59, 183–198.
- MCLEAN, D. (1990). *Automatic flight control systems*. New York ; Toronto : Prentice Hall.
- MCRUER, D. T., ASHKENAS, I. L. et GRAHAM, D. (1973). *Aircraft dynamics and automatic control*. Princeton, N.J. : Princeton University Press.
- MCRUER, D. T. et KRENDEL, E. S. (1974). Mathematical models of human pilot behaviour. Rapport technique AG-188, AGARD.
- MEHENDALE, C. S. et GRIGORIADIS, K. M. (2004). A new approach to lpv gain-scheduling design and implementation. *43<sup>rd</sup> IEEE Conference on Decision and Control, Atlantis, Paradise Island, Bahamas*.
- MENGALI, G. (2000). The use of fuzzy logic in adaptive flight control systems. *Aeronautical Journal*, 104, 31–37.
- MITCHELL, D. G., DOMAN, D. B., KEY, D. L., KLYDE, D. H., LEGGETT, D. B., MOORHOUSE, D. J., MASON, D. H., RANEY, D. L. et SCHMIDT, D. K. (2004). Evolution, revolution, and challenges of handling qualities. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 27, 12–28.
- MITCHELL, D. G. et HOH, R. H. (2000). Development of methods and devices to predict and prevent pilot-induced oscillations. Rapport technique AFRL-VA-WP-TR-2000-3046, U.S. Air Force Research Lab.
- MITCHELL, D. G., HOH, R. H., APONSO, B. L. et KLYDE, D. H. (1994). Proposed incorporation of mission-oriented flying qualities into MIL-STD-1797A (USAF). Rapport technique WL-TR-94-3162.
- MOOIJ, H. (1985). *Criteria for low-speed longitudinal handling qualities of transport aircraft with closed-loop flight control systems*. Martinus Nijhoff Publishers for the NLR.
- MOORE, B. C. (1976). On the flexibility offered by state feedback in multivariable system beyond closed loop eigenvalue assignment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21, 659–692.
- MOORE, B. C. (1981). Principal component analysis in linear systems : controllability, observability and model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26, 17–32.

- MUKHERJEE, J. S. et PIEPER, J. K. (Paper 2000-3944, 2000). Adaptive LQR gain scheduling applied to an experimental ohs aircraft. *AIAA Gudiance, Navigation and Control Conference and Exhibiy, Denver, CO*.
- NAKAYAMA, T., OHMORI, H., SANO, A. et ITO, H. (1995). A design of  $\mathcal{H}_\infty$  stable controller. *Proceedings of the European Control Conference*.
- NELSON, R. C. (1998). *Flight stability and automatic control*. Boston, Mass. : WCB/Mc GrawHill, seconde édition.
- NICHOLS, R. A., REICHERT, R. T. et RUGH, W. J. (1993). Gain scheduling for  $H_\infty$  controllers : A flight control example. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1, 69–79.
- NOLL, D., TORKI, M. et APKARIAN, P. (2004). Partially augmented lagrangian method for matrix inequality constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 15, 161–184.
- OBINATA, G. et ANDERSON, B. D. O. (2001). *Model reduction for control system design*. New York : Springer.
- OSBORNE, R. C., ADAMS, R. J., HSU, C. S. et BANDA, S. S. (1994). Reduced-order H-infinity compensator design for an aircraft control problem. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 17, 341–345.
- PACKARD, A. (1994). Gain scheduling via linear fractional transformations. *Systems & Control Letters*, 22, 79–92.
- PACKARD, A. et DOYLE, J. C. (1993). The complex structured singular value. *Automatica*, 29, 71–109.
- PALLET, E. H. J. et COYLE, S. (1993). *Automatic flight control*. Oxford : Blackwell Scientific Publications, quatrième édition.
- PAPAGEORGIOU, C. et GLOVER, K. (2005). Robustness analysis of nonlinear flight controllers. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 28, 639–648.
- PATEL, Y. et SMITH, P. R. (1998). Translational motion control of vertical takeoff aircraft using non linear dynamic inversion. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 21, 179–182.
- PELLANDE, P. C. (2001). *Commande de systèmes instationnaires - Séquencement de compensateurs et commandes LPV*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace.
- PIOU, J. E. et SOBEL, K. M. (1995). Robust multirate eigenstructure assignment with flight control application. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 18, 539–546.
- PRATT, R. W. (2000). *Flight control systems : practical issues in design and implementation*. Stevenage, UK : Institution of Electrical Engineers.
- PREMPAIN, E. et POSTLETHWAITE, I. (2008).  $\mathcal{L}$  and  $\mathcal{H}_2$  performance analysis and gain-scheduling synthesis for parameter-dependent systems. *Automatica*, 44, 2081–2089.
- PUYOU, G. (2005). *Conception multi-objectifs de lois de pilotage pour un avion de transport civil*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace.



- PUYOU, G., CHIAPPA, C., FERRERES, G. et MÉNARD, P. (2004). A multiobjective method for flight control law design. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, Providence, RI*. 1–11.
- REICHERT, R. T. (1992). Dynamic scheduling of modern-robust-control autopilot designs for missiles. *IEEE Control Systems Magazine*, 12, 35–42.
- REINER, J., BALAS, G. J. et GARRARD, W. L. (1995). Robust dynamic inversion for control of highly maneuverable aircraft. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 18.
- REINER, J., BALAS, G. J. et GARRARD, W. L. (1996). Flight control design using robust dynamic inversion and time-scale separation. *Automatica*, 32, 1493–1504.
- REYNOLDS, O. R., PACHTER, M. et HOUPIS, C. H. (1996). Full envelope flight control system design using quantitative feedback theory. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 19, 23–29.
- RUGH, W. J. (1991). Analytical framework for gain scheduling. *IEEE Control Systems Magazine*, 11, 79–84.
- RUGH, W. J. et SHAMMA, J. S. (2000). Research on gain-scheduling. *Automatica*, 36, 1401–1425.
- SAUSSIÉ, D. (2004). *Méthodologie pour le contrôle longitudinal d'un avion avec contraintes de qualités de manœuvrabilité*. M.sc. thesis, Université de Montréal, École Polytechnique de Montréal.
- SAUSSIÉ, D., AKHRIF, O., SAYDY, L. et CHIAPPA, C. (2006a). Self-scheduling robust pitch rate control based on multi-model eigenstructure assignment and guardian maps robustness assessment. *5<sup>th</sup> IFAC Symposium on Robust Control Design*.
- SAUSSIÉ, D., BALDESI, G., DÖLL, C. et BÉRARD, C. (2008a). Self-scheduling controller for a launcher in atmospheric ascent. *Proceedings of the 17<sup>th</sup> IFAC World Congress, Seoul, Korea*.
- SAUSSIÉ, D., BÉRARD, C., SAYDY, L. et AKHRIF, O. (2007). Robust control of longitudinal flight with handling qualities constraints. *Conference on Systems and Control, Marrakech, Morocco*.
- SAUSSIÉ, D., SAYDY, L. et AKHRIF, O. (2003). Flight control design with robustness and handling qualities requirements. *CCECE 2003 - Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*. IEEE, vol. 3, 1749–1752.
- SAUSSIÉ, D., SAYDY, L. et AKHRIF, O. (2006b). Longitudinal flight control design with handling quality requirements. *The Aeronautical Journal*, 110, 627–637.
- SAUSSIÉ, D., SAYDY, L. et AKHRIF, O. (2008b). Gain scheduling control design for a pitch-axis missile autopilot. *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, Honolulu*.
- SAUSSIÉ, D., SAYDY, L. et AKHRIF, O. (2010). Pitch rate control with guardian map based algorithm. *18th Mediterranean Conference on Control and Automation, 23-25 June 2010, Marrakech, Morocco*.
- SAYDY, L., AKHRIF, O. et ZHU, G. (2000). Handling quality characterization of flight system controller gains. *ICECS 2000. 7th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems*. IEEE, vol. 2, 721–724.

- SAYDY, L., TITS, A. et ABED, E. (1990). Guardian maps and the generalized stability of parametrized families of matrices and polynomials. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 3, 345–371.
- SCHUMACHER, C. et KHARGONEKAR, P. P. (1998). Missile autopilot designs using  $h_\infty$  control with gain scheduling and dynamic inversion. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 21, 234–243.
- SHAMMA, J. S. et ATHANS, M. (1990). Analysis of gain-scheduled control for nonlinear plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35, 898–907.
- SHAMMA, J. S. et ATHANS, M. (1991). Guaranteed properties of gain scheduled control for linear parameters-varying plants. *Automatica*, 27, 559–564.
- SHAMMA, J. S. et CLOUTIER, J. R. (1992). A linear parameter-varying approach to gain scheduled missile autopilot design. *Proceedings of the American Control Conference, Chicago, IL*. vol. 2, 1317–1321.
- SHAMMA, J. S. et CLOUTIER, J. R. (1993). Gain-scheduled missile autopilot design using linear parameter varying transformations. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 16, 256–263.
- SHANKS, G. T., FIELDING, C., ANDREWS, S. J. et HYDE, R. A. (1994). Flight control and handling research with the vaac harrier aircraft. *International Journal of Control*, 59, 291–319.
- SHARMA, M. et CALISE, A. J. (2005). Neural-network augmentation of existing linear controllers. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 28, 12–19.
- SHARUZ, S. et BEHTASH, S. (1992). Design of controllers for linear parameter-varying systems by gain scheduling technique. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 168, 195–217.
- SHMUL, M., EERENTHAL, E. et ATTAR, M. (1994). Lavi flight control system. *International Journal of Control*, 59, 159–182.
- SOBEL, K. M. et SHAPIRO, E. Y. (1985). Application of eigenstructure assignment to lateral translation and yaw pointing flight control. *23<sup>rd</sup> IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada*. 1423–1428.
- SPILLMAN, M. (2000). Robust longitudinal flight control design using linear parameters-varying feedback. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 23, 101–108.
- SRICHANDER, R. (1993). Aircraft controller synthesis by solving a nonconvex optimization problem. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 18, 382–384.
- STEPHANOS, C. (1990). Sur une extension du calcul des substitutions linéaires. *J. Math. Pures Appl.*, 5, 73–128.
- STEVENS, B. L. et LEWIS, F. L. (2003). *Aircraft control and simulation*. Hoboken, NJ : Wiley, seconde édition.
- STILWELL, D. J. (2001). State-space interpolation for a gain-scheduled autopilot. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 24, 460–465.

- STILWELL, D. J. et RUGH, W. J. (1998). Interpolation methods for gain scheduling. *37th IEEE Conference on Decision and Control, Tampa, Florida*. IEEE, vol. 3, 3003–3008.
- STILWELL, D. J. et RUGH, W. J. (1999). Interpolation of observer state feedback controllers for gain scheduling. *Automatica*, 44, 1225–1229.
- STILWELL, D. J. et RUGH, W. J. (2000). Stability preserving interpolation methods for the synthesis of gain-scheduled controllers. *Automatica*, 33, 1263–1271.
- SURESH, S., OMKAR, S. N., MANI, V. et SUNDARARAJAN, N. (2005). Nonlinear adaptive neural controller for unstable aircraft. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 28, 1103–1111.
- SYRMOS, V. L., ABDALLAH, C. T., DORATO, P. et GRIGORIADIS, K. (1997). Static output feedback : a survey. *Automatica*, 33, 125–137.
- SZÁSZI, I., MARCOS, A., BALAS, G. J. et BOKOR, J. (2005). Linear parameter-varying detection filter design for Boeing 747-100/200 aircraft. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 28, 461–470.
- TAN, W., PACKARD, A. et BALAS, G. (2000). Quasi-lpv modeling and lpv control of a generic missile. *Proceedings of the American Control Conference, Chicago, IL*. vol. 5, 3692–3696.
- TANTALE, M. (2006). *Adaptive dynamic inversion control of nonlinear systems subject to control saturation constraints*. Thèse de doctorat, Texas A&M University, Texas, USA.
- TISCHLER, M. B. (1996). *Advances in aircraft flight control*. London : Taylor & Francis.
- TISCHLER, M. B., BLANKEN, C. L., CHEUNG, K. K., SWEI, S. S. M., SAHASRABUDHE, V. et FAYNBERG, A. (2005). Modernized control laws for uh-60 black hawk optimization and flight-test results. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 28, 964–978.
- TISCHLER, M. B., LEE, J. A. et COLBOURNE, J. D. (2002). Comparison of flight control system design methods using the conduit design tool. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 25, 482–493.
- TOKUTAKE, H. et ITOH, E. (2002). Flight controller design taking account of control anticipation parameter. IEEE, éditeur, *SICE 2002. Proceedings of the 41st SICE Annual Conference*. vol. 3, 1826–1829.
- TOKUTAKE, H., SATO, M. et SATOH, A. (2005). Robust flight controller design that takes into account handling quality. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 28, 71–77.
- US DEPARTMENT OF DEFENSE (1990). Flying qualities of piloted aircraft. MIL-STD-1797A, Washington D.C. : Government Printing Office.
- US DEPARTMENT OF DEFENSE (1997). Flying qualities of piloted aircraft. MIL-HDBK-1797A, Washington D.C. : Government Printing Office.
- WEI, K. (1990). Stabilization of a linear plant via a stable compensator having no real unstable zeros. *Systems & Control Letters*, 15, 259–264.

- WHITAKER, H. P., YAMRON, J. et KEZER, A. (1958). Design of model reference adaptive control systems for aircraft. Rapport technique Report R-164, Instrumentation Laboratory, M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts.
- WHITE, D. P., WOZNIAK, J. G. et LAWRENCE, D. A. (1994). Missile autopilot design using a gain scheduling technique. IEEE, éditeur, *Proceedings of the Annual Southeastern Symposium on System Theory, Athens, OH*. 606–610.
- WU, F., PACKARD, A. et BALAS, G. F. (1995). Lpv control design for pitch-axis missile autopilots. *Proceedings of the 34<sup>th</sup> Conference on Decision and Control, New Orleans , LA*.
- WU, F., PACKARD, A. et BALAS, G. J. (2002). Systematic gain-scheduling control design : a missile autopilot example. *Asian Journal of Control*, 4, 341–347.
- WU, F., YANG, X. H., PACKARD, A. et BECKER, G. (1996). Induced  $L_2$ -norm control for LPV systems with bounded parameter variations rates. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6, 983–988.
- YOULA, D., BONGIORNO, J. et LU, C. (1974). Single-loop feedback stabilization of linear multivariable dynamical systems. *Automatica*.
- ZAMES, G. (1981). Feedback and optimal sensitivity : Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26, 301–320.
- ZHOU, K. et DOYLE, J. C. (1998). *Essentials of robust control*. Upper Saddle River, N.J. : Prentice Hall.
- ZHOU, K., DOYLE, J. C. et GLOVER, K. (1996). *Robust and optimal control*. Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall.
- ZHU, G., AKHRIF, O., SAYDY, L. et HENTABLI, K. (2000). Robustness augmentation of fixed structure flight control systems via  $\mu$ . AIAA paper 2000-4366.

## ANNEXE A

### RÉDUCTION DE MODÈLES

#### A.1 Gramiens et réalisation équilibrée

Le gramien de commandabilité  $W_c$  et le gramien d'observabilité  $W_o$  d'un système asymptotiquement stable, de réalisation minimale  $(A, B, C, D)$  sont les solutions uniques des équations de Lyapunov suivantes :

$$AW_c + W_c A^T + BB^T = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$A^T W_o + W_o A + C^T C = 0 \quad (\text{A.2})$$

Les gramiens dépendent de la base dans laquelle ils sont exprimés. Ainsi pour ne pas privilégier la commandabilité ou l'observabilité, on peut choisir de les représenter dans une base dite équilibrée.

**Définition A.1.1.** *Une réalisation minimale  $(A, B, C, D)$  est dite équilibrée (balanced realization) si et seulement si :*

$$W_c = W_o = \Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}. \quad (\text{avec } \sigma_i = \sqrt{\lambda_i(W_c W_o)}) \quad (\text{A.3})$$

Les  $\sigma_i$  sont appelées les *valeurs singulières de Hankel* et sont des mesures de la commandabilité et de l'observabilité. Elles sont en général classées dans l'ordre décroissant :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_i \geq \dots \geq \sigma_n \quad (\text{A.4})$$

Le problème est alors de déterminer une matrice de passage  $T$  telle que les gramiens soient égaux et diagonaux dans la nouvelle base. Pour un changement de base  $x = T\bar{x}$ , les gramiens deviennent :

$$\bar{W}_c = T^{-1} W_c (T^{-1})^T \quad (\text{A.5})$$

$$\bar{W}_o = T^T W_o T \quad (\text{A.6})$$

Une telle matrice  $T$  doit satisfaire :

$$\bar{W}_c = \bar{W}_o = T^{-1} W_c (T^{-1})^T = T^T W_o T = \Sigma \quad (\text{A.7})$$

La matrice  $W_c$  étant symétrique définie positive, on peut effectuer une factorisation de Cholesky telle que  $W_c = LL^T$  avec  $L$  matrice triangulaire inférieure. On peut ensuite effectuer la décomposition en valeurs singulières de  $L^T W_o L = U \Sigma^2 U^T$  où  $\Sigma^2$  est une matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs propres de  $L^T W_o L$  et  $U$  est la matrice des vecteurs propres associés. On peut alors en

déduire  $T$  vérifiant (A.7) :

$$T = LU\Sigma^{-1/2} \quad (\text{A.8})$$

La fonction Matlab `balreal` permet d'obtenir une réalisation équilibrée du système ainsi que la matrice de passage  $T$ . Si le système  $(A, B, C, D)$  n'est pas stable, on isole la partie stable du système, on en cherche une réalisation équilibrée et on vient ensuite la rajouter à la partie instable du système Obinata et Anderson (2001).

## A.2 Réduction équilibrée

Initiée par Moore Moore (1981), la réduction équilibrée est la méthode la plus couramment utilisée. Elle consiste à réduire le modèle en tronquant les valeurs singulières négligeables de la représentation équilibrée du système. Comme ces valeurs singulières représentent une mesure jointe de la commandabilité et de l'observabilité, on élimine les états les moins commandables et observables. On utilise la norme  $H_\infty$  comme mesure de la distance entre le système à réduire  $G(s)$ , et le système réduit  $G_r(s)$ , soit :

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \quad (\text{A.9})$$

avec  $\|G(s)\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}(G(j\omega))$ .

Le problème est donc maintenant de trouver une approximation stable  $G_r(s)$  d'ordre  $r$  pour le système stable  $G(s)$  d'ordre  $n$ , tel que  $r < n$  et qui garantirait  $\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq \gamma$  avec  $\gamma$  un seuil donné.

**Theorem A.2.1.** *Soit  $G(s) \in \mathcal{RH}_\infty$  donnée par*

$$G(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right] \quad (\text{A.10})$$

où  $(A, B, C, D)$  est une réalisation équilibrée avec  $A_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ , et dont le gramien est donné par  $\Sigma = \text{diag} \{\Sigma_1, \Sigma_2\}$  avec

$$\Sigma_1 = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\} \quad (\text{A.11})$$

$$\Sigma_2 = \{\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \dots, \sigma_n\} \quad (\text{A.12})$$

et

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \sigma_{r+1} \geq \dots \geq \sigma_n \quad (\text{A.13})$$

où  $\sigma_i$  est la  $i$ ème valeur singulière de Hankel. Alors, le modèle réduit  $G_r(s)$  d'ordre  $r$  et de représentation d'état équilibrée :

$$G_r(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right] \quad (\text{A.14})$$

obtenu par troncature est asymptotiquement stable. D'autre part :

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i \quad (\text{A.15})$$

et cette borne est atteinte si  $r = n - 1$ , i.e.,

$$\|G(s) - G_{n-1}(s)\|_\infty = 2\sigma_n \quad (\text{A.16})$$

Cette méthode d'obtention d'un modèle réduit est appelée *réduction* ou *troncature équilibrée*. Ce modèle réduit sera une bonne approximation du système initial si par exemple  $\sigma_r \gg \sigma_{r+1}$ . Si le système  $G(s)$  est instable, on ne procède à la réduction équilibrée que sur la partie stable du système.

### A.3 Approximation de la norme de Hankel

Cette méthode est quasiment identique à celle de la réduction équilibrée, sauf qu'elle est basée sur la minimisation de la norme de Hankel de l'erreur entre le modèle complet et le modèle réduit. Glover Glover (1984) a montré que l'erreur de ce problème d'approximation est bornée selon la norme  $H_\infty$  par :

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq \sum_{i=r+1}^n \sigma_i \quad (\text{A.17})$$

Même si cette méthode est caractérisée par une borne supérieure deux fois inférieure à celle de la réduction équilibrée, elle peut mener à un gain réduit non nul aux hautes fréquences dans le cas d'un système alors que la réduction équilibrée fournit un gain nul à l'infini.

### A.4 Réduction par les perturbations singulières

Tronquer les états faiblement commandables/observables de la réalisation équilibrée mènent en général à une bonne approximation dans le domaine fréquentiel. Néanmoins en utilisant cette méthode, les gains statiques peuvent différer entre le modèle réduit et le modèle original. La méthode de réduction par les perturbations singulières permet d'enlever ces états tout en garantissant que les gains statiques restent inchangés. Néanmoins la majoration de  $\|G(s) - G_r(s)\|_\infty$  n'est plus garantie.

La méthode des perturbations singulières s'applique habituellement sur des systèmes qui présentent une grande séparation spectrale parmi les valeurs propres du système ; ce sont généralement des systèmes à deux échelles avec une dynamique rapide d'un bord et une dynamique lente de l'autre. On peut penser par exemple à un moteur où la partie électrique constituerait la dynamique rapide et la partie mécanique, la dynamique lente. Cela peut être aussi le cas des systèmes flexibles où les modes souples peuvent être relativement bien séparés des modes rigides.

Soit le système :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \epsilon \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u, \quad (\text{A.18})$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Du. \quad (\text{A.19})$$

Si le système se met naturellement sous cette forme, le changement de base de la réalisation équilibrée n'est pas nécessaire. En revanche, en partant d'une réalisation équilibrée, on rassemblerait dans  $x_1$  les états à conserver et dans  $x_2$  ceux à enlever. Si l'on considère que  $\epsilon$  tend vers 0 (ou que le vecteur dérivé  $\dot{x}_2$  est nul), on remplace le vecteur  $x_2$  par son expression en fonction de  $x_1$  et  $u$ . Ceci mène alors au modèle réduit suivant  $G_r(s)$  :

$$G_r(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}}{C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21}} & \frac{B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2}{D - C_2A_{22}^{-1}B_2} \end{array} \right] \quad (\text{A.20})$$

À comparer au modèle réduit obtenu par la réduction équilibrée :

$$G_r(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{A_{11}}{C_1} & \frac{B_1}{D} \end{array} \right] \quad (\text{A.21})$$



## ANNEXE B

### DÉTAILS DES CALCULS POUR LES QUALITÉS DE MANŒUVRABILITÉ

La présente annexe rassemble les calculs préparatoires effectués pour obtenir certains des résultats présentés dans les chapitres consacrés aux qualités de manœuvrabilité.

#### B.1 Calcul du dépassement pour un deuxième ordre avec zéro

On développe ici le calcul du dépassement d'un système d'ordre 2 avec zéro :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega^2(1 + Ts)}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} \quad (\text{B.1})$$

- 1<sup>er</sup> cas :  $0 < \zeta < 1$

Pour une entrée  $U(s)$  en échelon unitaire,

$$Y(s) = \frac{\omega^2 Ts + \omega^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s - \omega^2 T + 2\zeta\omega}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} \quad (\text{B.2})$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{(s + \zeta\omega) + \frac{\zeta - \omega T}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\omega\sqrt{1 - \zeta^2}}{(s + \zeta\omega)^2 + \omega^2(1 - \zeta^2)} \quad (\text{B.3})$$

En prenant l'inverse de Laplace, on obtient alors :

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega t} \left( \cos \omega\sqrt{1 - \zeta^2}t + \frac{\zeta - \omega T}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega\sqrt{1 - \zeta^2}t \right) \quad (\text{B.4})$$

Le maximum de cette fonction se trouve parmi les points où la dérivée s'annule :

$$\dot{y}(t) = e^{-\zeta\omega t} \left( \omega^2 T \cos \omega\sqrt{1 - \zeta^2}t + \frac{\omega(1 - \zeta\omega T)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega\sqrt{1 - \zeta^2}t \right) \quad (\text{B.5})$$

Soit à résoudre :

$$\omega^2 T \cos \omega\sqrt{1 - \zeta^2}t + \frac{\omega(1 - \zeta\omega T)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega\sqrt{1 - \zeta^2}t = 0 \quad (\text{B.6})$$

On peut écrire l'équation (B.6) sous la forme :

$$\cos(\omega\sqrt{1 - \zeta^2}t - \phi) = 0 \quad (\text{B.7})$$

où, en supposant<sup>1</sup>  $T > 0$

$$\phi = \arctan \frac{1 - \zeta\omega T}{\omega T \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (\text{B.8})$$

Les solutions de cette équation sont pour  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$t_n = \frac{\frac{(2n+1)\pi}{2} + \phi}{\omega \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (\text{B.9})$$

Comme  $\phi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ , la plus petite solution positive est obtenue pour  $n = 0$ , soit pour

$$t_0 = \frac{\frac{\pi}{2} + \phi}{\omega \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (\text{B.10})$$

et le maximum atteint est alors :

$$y(t_0) = 1 - e^{-\frac{\zeta\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \left( \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) + \frac{\zeta - \omega T}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) \right) \quad (\text{B.11})$$

$$y(t_0) = 1 + e^{-\frac{\zeta\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \left( \sin(\phi) - \frac{\zeta - \omega T}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos(\phi) \right) \quad (\text{B.12})$$

$$y(t_0) = 1 + e^{-\frac{\zeta\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \left( \sqrt{1 - 2\zeta\omega T + \omega^2 T^2} \right) \quad (\text{B.13})$$

où  $1 - 2\zeta\omega T + \omega^2 T^2 > 0$ .<sup>2</sup> On peut voir ainsi qu'il y a toujours un dépassement et que ce dépassement vaut :

$$D = e^{-\frac{\zeta\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \left( \sqrt{1 - 2\zeta\omega T + \omega^2 T^2} \right) \quad (\text{B.14})$$

- 2<sup>e</sup> cas :  $\zeta > 1$

---

1. On ne veut pas un système à déphasage non minimal.  
 2. On a supposé  $T, \omega > 0$  et  $0 < \zeta < 1$

Pour une entrée  $U(s)$  en échelon unitaire,

$$Y(s) = \frac{\omega^2 T s + \omega^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)} \quad (\text{B.15})$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s - \omega^2 T + 2\zeta\omega}{(s + \zeta\omega + \omega\sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega - \omega\sqrt{\zeta^2 - 1})} \quad (\text{B.16})$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{\frac{-\omega\sqrt{\zeta^2 - 1} - \omega^2 T + \zeta\omega}{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}}}{s + \zeta\omega + \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}} - \frac{\frac{\omega\sqrt{\zeta^2 - 1} - \omega^2 T + \zeta\omega}{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}}}{s + \zeta\omega - \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (\text{B.17})$$

$$(\text{B.18})$$

En prenant l'inverse de Laplace, on obtient alors :

$$y(t) = 1 + \left( \frac{-\omega\sqrt{\zeta^2 - 1} - \omega^2 T + \zeta\omega}{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}} \right) e^{(-\zeta\omega - \omega\sqrt{\zeta^2 - 1})t} - \left( \frac{\omega\sqrt{\zeta^2 - 1} - \omega^2 T + \zeta\omega}{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}} \right) e^{(-\zeta\omega + \omega\sqrt{\zeta^2 - 1})t} \quad (\text{B.19})$$

On cherche le maximum de cette fonction, qui se trouve parmi les points où s'annule la dérivée :

$$\dot{y}(t) = - \left( \frac{\omega^2 T(-\zeta\omega - \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}) + \omega^2}{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}} \right) e^{(-\zeta\omega - \omega\sqrt{\zeta^2 - 1})t} + \left( \frac{\omega^2 T(-\zeta\omega + \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}) + \omega^2}{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}} \right) e^{(-\zeta\omega + \omega\sqrt{\zeta^2 - 1})t} \quad (\text{B.20})$$

Soit à résoudre :

$$(1 - \zeta\omega T - \omega T\sqrt{\zeta^2 - 1})e^{-\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}t} - (1 - \zeta\omega T + \omega T\sqrt{\zeta^2 - 1})e^{\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}t} = 0 \quad (\text{B.21})$$

On peut écrire l'équation (B.21) sous la forme :

$$e^{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}t} = \frac{1 + T(-\zeta\omega - \omega\sqrt{\zeta^2 - 1})}{1 + T(-\zeta\omega + \omega\sqrt{\zeta^2 - 1})} \quad (\text{B.22})$$

En supposant que le membre de droite est plus grand que 1, l'unique solution positive est <sup>3</sup> :

$$t_{pic} = \frac{1}{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}} \ln \frac{1 + T(-\zeta\omega - \omega\sqrt{\zeta^2 - 1})}{1 + T(-\zeta\omega + \omega\sqrt{\zeta^2 - 1})} \quad (\text{B.23})$$

---

3. Pour cela, il faut avoir  $1 + T(-\zeta\omega + \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}) < 0$

Après simplifications, le maximum atteint est :

$$y(t_{pic}) = 1 + \left( \frac{1 + T(-\zeta\omega - \omega\sqrt{\zeta^2 - 1})}{1 + T(-\zeta\omega + \omega\sqrt{\zeta^2 - 1})} \right)^{-\frac{\zeta}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}} \left( \sqrt{1 - 2\zeta\omega T + \omega^2 T^2} \right) \quad (\text{B.24})$$

où  $1 - 2\zeta\omega T + \omega^2 T^2 > 0$ .<sup>4</sup> Le dépassement vaut alors :

$$D = \left( \frac{1 + T(-\zeta\omega - \omega\sqrt{\zeta^2 - 1})}{1 + T(-\zeta\omega + \omega\sqrt{\zeta^2 - 1})} \right)^{-\frac{\zeta}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}} \left( \sqrt{1 - 2\zeta\omega T + \omega^2 T^2} \right) \quad (\text{B.25})$$

- 3<sup>e</sup> cas :  $\zeta = 1$

Pour le cas limite  $\zeta = 1$ , on peut supposer la continuité des formules établies et voir quelle est la valeur limite pour chacune quand  $\zeta$  tend vers 1. Mais il est encore plus simple de reprendre le cheminement précédent. Pour une entrée  $U(s)$  en échelon unitaire,

$$Y(s) = \frac{\omega^2 T s + \omega^2}{s(s + \omega)^2} = \frac{1}{s} + \frac{\omega^2 T - \omega}{(s + \omega)^2} - \frac{1}{s + \omega} \quad (\text{B.26})$$

D'où,

$$y(t) = 1 + (\omega^2 T - \omega)t e^{-\omega t} - e^{-\omega t} \quad (\text{B.27})$$

On en déduit alors que :

$$\dot{y}(t) = (\omega^2 T - (\omega^3 T - \omega^2)t) e^{-\omega t} \quad (\text{B.28})$$

On cherche les valeurs qui annulent la dérivée. Soit à résoudre :

$$\omega^2 T - (\omega^3 T - \omega^2)t = 0 \quad (\text{B.29})$$

L'unique solution est<sup>5</sup> :

$$t_{pic} = \frac{T}{\omega T - 1} \quad (\text{B.30})$$

Après simplifications, le maximum atteint est :

$$y(t_{pic}) = 1 + (\omega T - 1)e^{-\frac{\omega T}{\omega T - 1}} \quad (\text{B.31})$$

Le dépassement vaut alors :

$$D = (\omega T - 1)e^{-\frac{\omega T}{\omega T - 1}} \quad (\text{B.32})$$

---

4. Ce qui est déjà vérifié puisque le membre de droite de l'équation (B.22) est supposé plus grand que 1 et  $1 - 2\zeta\omega T + \omega^2 T^2 = (1 + T(-\zeta\omega - \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}))(1 + T(-\zeta\omega + \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}))$

5. En supposant  $\omega T > 1$

## B.2 Formule pour les bandes passantes

Nous rappelons que :

$$F(s) = \frac{q}{\delta_{ref}} = \frac{\omega_{sp}^2(1 + T_\theta s)e^{-\tau s}}{s^2 + 2\zeta_{sp}\omega_{sp}s + \omega_{sp}^2} \quad (\text{B.33})$$

et

$$G(s) = \frac{\theta}{\delta_{ref}} = \frac{\omega_{sp}^2(1 + T_\theta s)e^{-\tau s}}{s(s^2 + 2\zeta_{sp}\omega_{sp}s + \omega_{sp}^2)} \quad (\text{B.34})$$

Nous effectuons les calculs sur la phase du système  $F(s)$ .

$$F(j\omega) = \frac{\omega_{sp}^2(1 + T_\theta(j\omega))e^{-\tau(j\omega)}}{(j\omega)^2 + 2\zeta_{sp}\omega_{sp}(j\omega) + \omega_{sp}^2} \quad (\text{B.35})$$

$$\angle F(j\omega) = \arctan(T_\theta\omega) - \tau\omega - \arctan\left(\frac{2\zeta_{sp}\omega_{sp}\omega}{\omega_{sp}^2 - \omega^2}\right) \quad \text{si } \omega \leq \omega_{sp} \quad (\text{B.36})$$

$$= \arctan(T_\theta\omega) - \tau\omega + \arctan\left(\frac{2\zeta_{sp}\omega_{sp}\omega}{\omega^2 - \omega_{sp}^2}\right) - 180^\circ \quad \text{si } \omega \geq \omega_{sp} \quad (\text{B.37})$$

Ou encore, écrite d'une autre manière :

$$F(j\omega) = \frac{e^{-\tau(j\omega)}(1 + (T_\theta\omega)j)(\omega_{sp}^2 - \omega^2 - (2\zeta_{sp}\omega_{sp}\omega)j)\omega_{sp}^2}{(\omega_{sp}^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_{sp}\omega_{sp}\omega)^2} \quad (\text{B.38})$$

$$\angle F(j\omega) = -\tau\omega + \angle((1 + T_\theta\omega j)(\omega_{sp}^2 - \omega^2 - 2\zeta_{sp}\omega_{sp}\omega j)) \quad (\text{B.39})$$

$$= -\tau\omega + \angle((\omega_{sp}^2 - \omega^2 + 2\zeta_{sp}T_\theta\omega_{sp}\omega^2) + ((\omega_{sp}^2 - \omega^2)T_\theta\omega - 2\zeta_{sp}\omega_{sp}\omega)j) \quad (\text{B.40})$$

La phase du système  $F(s)$  sans retard pur peut varier entre  $-180^\circ$  et  $+90^\circ$  suivant les valeurs (positives) des paramètres. Pour une phase comprise entre  $-90^\circ$  et  $+90^\circ$ , l'angle est alors donné par :

$$\arctan\left(\frac{(\omega_{sp}^2 - \omega^2)T_\theta\omega - 2\zeta_{sp}\omega_{sp}\omega}{\omega_{sp}^2 - \omega^2 + 2\zeta_{sp}T_\theta\omega_{sp}\omega^2}\right) \quad (\text{B.41})$$

en supposant  $\omega_{sp}^2 - \omega^2 + 2\zeta_{sp}T_\theta\omega_{sp}\omega^2 \geq 0$ . Et dans le cas où le système peut déphaser en deçà de  $-90^\circ$  :

$$- \pi + \arctan\left(\frac{(\omega_{sp}^2 - \omega^2)T_\theta\omega - 2\zeta_{sp}\omega_{sp}\omega}{\omega_{sp}^2 - \omega^2 + 2\zeta_{sp}T_\theta\omega_{sp}\omega^2}\right) \quad (\text{B.42})$$

avec  $\omega_{sp}^2 - \omega^2 + 2\zeta_{sp}T_\theta\omega_{sp}\omega^2 \leq 0$ .

Comme les phases d'intérêt de  $F(s)$  sont  $-45^\circ$  et  $-90^\circ$ , l'angle de phase  $\varphi$  est alors donné par :

$$\angle F(j\omega) = \varphi = -\tau\omega + \arctan\left(\frac{(\omega_{sp}^2 - \omega^2)T_\theta\omega - 2\zeta_{sp}\omega_{sp}\omega}{\omega_{sp}^2 - \omega^2 + 2\zeta_{sp}T_\theta\omega_{sp}\omega^2}\right) \quad (\text{B.43})$$

Soit :

$$\tan(\varphi + \tau\omega) = \frac{(\omega_{sp}^2 - \omega^2)T_\theta\omega - 2\zeta_{sp}\omega_{sp}\omega}{\omega_{sp}^2 - \omega^2 + 2\zeta_{sp}T_\theta\omega_{sp}\omega^2} \quad (\text{B.44})$$

Ce qui nous conduit à :

$$T_\theta\omega^3 + \tan(\varphi + \tau\omega)(2\zeta_{sp}T_\theta\omega_{sp} - 1)\omega^2 + (2\zeta_{sp}\omega_{sp} - T_\theta\omega_{sp}^2)\omega + \omega_{sp}^2 \tan(\varphi + \tau\omega) = 0 \quad (\text{B.45})$$