

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

**Schémas de valorisation économique de grands ensembles de chauffe-eau
électriques coordonnés par un agrégateur au sein d'un réseau intelligent**

MARIE PIED

Département de génie électrique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*

Génie électrique

Août 2019

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

**Schémas de valorisation économique de grands ensembles de chauffe-eau
électriques coordonnés par un agrégateur au sein d'un réseau intelligent**

présenté par **Marie PIED**

en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

Guchuan ZHU, président

Roland MALHAMÉ, membre et directeur de recherche

Miguel ANJOS, membre et codirecteur de recherche

Hanane DAGDOUGUI, membre

DÉDICACE

*Aux Princesses,
Pour les rires, le partage et le soutien ...*

REMERCIEMENTS

Je souhaite tout d'abord remercier mes directeurs de recherche Roland P.Malhamé et Miguel F.Anjos pour leurs conseils, remarques et leur confiance. Malgré la distance et le décalage horaire sur la deuxième partie de la maîtrise, merci d'avoir répondu rapidement à mes interrogations et demandes de relecture et retour. Et enfin, merci de m'avoir permis de découvrir le monde de la recherche et de me spécialiser dans le domaine de l'efficacité énergétique et la gestion de la charge, des thèmes qui me tiennent particulièrement à cœur.

Merci aux membres du jury Guchuan Zhu et Hanane Dagdougui d'avoir pris le temps de lire ce mémoire, ainsi que pour leurs commentaires et révisions.

Un grand merci à mes collègues et amis du GERAD, Florian Pedroli, Ludovic Salomon, Mathieu Besançon, Pierre Yves Bouchet, Julien Coté Massicotte, Christian Bingame, Ilaria Salerno, Vinicius Neves Motta, Liza Kuznetsova, Eloise Edom et tous les autres pour les discussions nombreuses et variées lors de la pause repas, les conseils et commentaires sur ma recherche et pour tous les moments mémorables que l'on a partagés ensemble.

Je tiens à remercier particulièrement Liza Kuznetsova et Valérie Provost pour leurs conseils et surtout d'avoir été des exemples féminins de réussite dans les sciences et le génie pour moi. Merci de me montrer que c'est possible d'être une femme en science, et de réussir sa vie professionnelle et personnelle!

Je remercie aussi le GERAD de m'avoir accordé une bourse qui a permis de financer une partie de ma recherche et de permettre aux étudiants d'avoir accès à un environnement de recherche très riche. Je remercie également le NSERC Energy Storage Technology Network (NESTNet) d'avoir financé l'autre partie de ma recherche.

Et enfin, merci à ma famille et mes amies proches de l'autre côté de l'Atlantique pour leurs soutiens constant malgré la distance.

RÉSUMÉ

Pour augmenter la part des énergies renouvelables dans le mix énergétique, des solutions de gestion de la charge sont nécessaires pour équilibrer la variabilité apportée par ces sources d'énergies tel que le vent et le soleil. Les chauffe-eaux ou chauffe-espaces peuvent être considérés comme des moyens de stockage, et ont un fort potentiel pour fournir de la flexibilité aux réseaux électriques. La coordination de telles charges n'est pas évidente de par leur présence en très grand nombre dans le réseau et leur faible impact individuel sur la courbe de consommation électrique. La théorie des jeux à champ moyen a permis de s'attaquer à ce problème, car elle consiste en l'analyse des jeux avec un nombre important de joueurs.

Dans cette maîtrise, un agrégateur de chauffe-eaux est considéré dans le but de formuler un produit de flexibilité pour le marché de l'électricité respectant le confort des participants et minimisant les oscillations post-contrôle.

Les chauffe-eaux sont modélisés par un réservoir à plusieurs couches et l'agrégateur utilise un contrôle à champ moyen pour coordonner le groupe. La détermination de la trajectoire de température collective du champ moyen est faite grâce à un algorithme de recherche d'un quasi point fixe basé sur un problème d'optimisation.

Ensuite, un problème d'optimisation linéaire est utilisé pour déterminer le plan de température cible du contrôleur à champ moyen afin de trouver la flexibilité maximum. Une contrainte de respect d'un intervalle acceptable autour d'une consommation de base (i.e avec des chauffe-eaux soumis au contrôle thermostatique habituel) pour les oscillations post-contrôle de l'agrégateur est ajoutée au problème.

Finalement, on conclura sur une possible viabilité d'un tel agrégateur de chauffe-eaux par une analyse économique en utilisant les produits de gestion de la charge déjà présents sur le marché (en Ontario par exemple).

Les tests numériques permettent d'observer les différences entre les produits répondant à différents intervalles limites d'oscillations, à différents temps initiaux ou longueur d'évènements de flexibilité. Ils semblent aussi indiquer que de tels produits de flexibilité sont possibles et sont viables sur un marché de la gestion de la charge.

ABSTRACT

Increasing the contribution of intermittent renewable energy, such as solar and wind, into the energy mix, is challenging due to their high variability. Load management solutions are necessary and can be achieved effectively with demand response. Seeing thermostatic loads such as space heaters or water heaters, as thermal energy storage is a promising solution.

Different types of thermal load controls have been considered in the past. One challenge that has been identified is that thermostatic loads are present in large numbers in the grid and so their coordination to achieve a generation-load balancing is not easy. Mean field game theory is really useful to tackle this challenge since it permits to formulate a decentralized control, and thus limit communication flows. In mean field games, players determine their optimal strategy with respect to the group evolution and not any particular player.

A mean field controller for a multi-layer electric water heater model is considered in this thesis to provide load flexibility into the grid. Then it is used to map the offer a water heater aggregator could present on the electricity market, while maintaining users comfort and minimizing post-control oscillation of the power demand.

The determination of a collective mean temperature trajectory for a group of electric water heaters is achieved by means of a near fixed point algorithm. This algorithm uses an optimization problem on a family of potential mean trajectories that are candidate near Nash equilibria of the mean field game problem.

Then, a scheduler of target temperatures over a time horizon is formulated to determine the possible flexibility product under the setup chosen. This scheduler is defined with a linear program where a rebound constraint is added to ensure that post-control oscillations stay in an acceptable range around the base power demand.

Using already existing demand response products for industrial consumers for example, we will assess the viability of this new player in the electricity market. We are going to discuss the possible incentives that can be redistributed to participating consumers and the bid that the aggregator could offer on the electricity auction market.

Numerical simulations with different sets of parameters permit to observe their influence on the resulting flexibility product. They suggest that an aggregator of water-heaters can provide viable and useful offer in the electricity market.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vi
TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES TABLEAUX	ix
LISTE DES FIGURES	x
LISTE DES SIGLES, ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS	xi
LISTE DES ANNEXES	xii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Définitions et concepts de base	1
1.1.1 Qu'est ce que la gestion de la charge?	2
1.1.2 Qu'est ce qu'un agrégateur?	3
1.2 Éléments de la problématique	3
1.2.1 Potentiel de flexibilité de la charge avec les chauffe-eaux	3
1.2.2 Question de recherche	4
1.3 Plan du mémoire	4
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE	5
2.1 Modèles des chauffe-eaux	5
2.2 Le contrôle optimal	8
2.3 Le théorie des jeux à champs moyens	9
2.4 Contrôle thermostatique des chauffe-eaux	10
2.5 Contrôle à champs moyen	12
2.5.1 Contrôle optimal - Application de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) stochastique	12
2.5.2 Équation de Kolmogorov de densités de probabilités	16

2.5.3	Système de point fixe du contrôle à champs moyen	17
2.6	Récompense économique	18
CHAPITRE 3	DÉMARCHE ADOPTÉE	20
CHAPITRE 4	ARTICLE 1 : FLEXIBILITY PRODUCT FOR WATER HEATER AGGREGATORS ON ELECTRICITY MARKETS	22
4.1	Introduction	24
4.2	Water Heater model	25
4.3	Control Strategy	26
4.4	Near Fixed Point Algorithm	28
4.5	Flexibility product	31
4.5.1	Scheduler	31
4.5.2	Simulator	34
4.5.3	Updater	34
4.5.4	Convergence Test	35
4.6	Case Study	35
4.7	Conclusion	38
CHAPITRE 5	DISCUSSION GÉNÉRALE	40
5.1	Discussion sur l'algorithme de calcul de l'offre de flexibilité	40
5.2	Discussion sur l'analyse économique	42
CHAPITRE 6	CONCLUSION	47
6.1	Synthèse des travaux	47
6.2	Limitations de la solution proposée	47
6.3	Améliorations futures	48
RÉFÉRENCES	49
ANNEXES	52

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1	Prix Time of Use (TOU) en Ontario	3
Tableau 2.1	Paramètres du chauffe-eau	5
Table 4.1	Comparison of four optimization solvers	30
Table 4.2	Parameters Value for simulations	36
Table 4.3	Profit results for different cases	39
Table 4.4	Results of the profitability study	39
Tableau 5.1	Offres de flexibilité fournies dans le Cas n°1	44
Tableau 5.2	Résultat de l'étude de rentabilité pour le Cas 1	44
Tableau 5.3	Offres de flexibilité fournies dans le Cas n°2	45
Tableau 5.4	Résultat de l'étude de rentabilité pour le Cas n°2	45

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Schémas Smart Grid - http://osg.polymtl.ca/	2
Figure 2.1	Modèle de chauffe-eaux multicouches	5
Figure 2.2	Evolution de la température moyenne de chaque chauffe-eau sous un contrôle thermostatique	11
Figure 3.1	Séparation des consommations électrique de base pour 500 maisons	20
Figure 3.2	Contrôle à champs moyen actif entre 8h et 10 h et une température cible de 57°C	21
Figure 4.1	Water heater model	26
Figure 4.2	Definition of the goals depending on time intervals	32
Figure 4.3	Description of the algorithm to implement the rebound constraint	32
Figure 4.4	Case 1.a - Decrease of the power demand	37
Figure 4.5	Case 1.b - Increase of the power demand	37
Figure 5.1	Évolution des statistiques de la chaîne de Markov sur une journée	40
Figure 5.2	Contrôle du groupe de chauffe-eaux avec 14h dans l'intervalle de contrôle	41
Figure 5.3	Contrôle du groupe de chauffe-eaux avec 6h dans l'intervalle de contrôle	41
Figure 5.4	Offre de flexibilité avec une oscillation bénéfique	42

LISTE DES SIGLES, ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS

$\frac{\partial h(x, t)}{\partial x}$	Le vecteur colonne gradient de la fonction h par rapport à $x \in \mathbb{R}^n$, i.e $(\frac{\partial h(x, t)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h(x, t)}{\partial x_n})^T$.
$\ u\ _R^2$	vaut $u^T R u$ pour $u \in \mathbb{R}^n$ et R définie positive
$\mathbb{1}_X$	La fonction indicatrice de l'ensemble X
TOU	Time of Use
HJB	Hamilton-Jacobi-Bellman
FP	Fokker-Plank
TLOU	Time-and-Level-of-Use
IESO	Independent Electricity System Operator

LISTE DES ANNEXES

Annexe A	Calcul des termes de l'équation de HJB stochastique du contrôle à champs moyen	52
----------	--	----

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Les gouvernements se tournent actuellement vers des politiques de transition énergétique qui occasionnent une plus grande pénétration des sources d'énergies renouvelables intermittentes dans les réseaux électriques [1]. Cependant, ces sources d'énergie présentent de nouveaux défis liés à l'instabilité qu'elles peuvent causer dans le réseau. En effet, leur production est difficile à contrôler et leur capacité est variable au cours de la journée. De ce fait, le réseau n'est en mesure d'intégrer qu'une capacité limitée de ces sources d'énergie, car il doit pouvoir compenser leur variabilité pour assurer l'équilibre entre la demande et la production. Ceci est actuellement réalisé grâce à une réserve tournante assurée par de la génération à coût marginal de production beaucoup plus élevée lorsque les énergies renouvelables ne produisent pas suffisamment, constituer par exemple de centrales au gaz. Lorsqu'au contraire, la production des énergies renouvelables excède la demande, il faut réduire leur production et alors on perd de l'énergie utile si l'on avait été capable de la consommer. Le stockage de l'énergie se présente alors comme la solution la plus prometteuse pour pouvoir utiliser au maximum les énergies renouvelables intermittentes et limiter l'utilisation des générations d'appoint. Le stockage de l'énergie peut prendre différentes formes et il est réalisé par des programmes de gestion de la charge. Afin de pouvoir mettre en place ce genre de programme, il est nécessaire que le réseau électrique évolue vers ce que l'on appelle un *Smart Grid*, dont un schéma possible peut être vu en Figure 1.1. Les *Smart Grids* sont des réseaux où la production est décentralisée, elle n'a plus lieu seulement dans de grands centres de production, mais aussi chez les particuliers par exemple. Ce sont aussi des réseaux où les communications sont à double sens entre les consommateurs et les opérateurs de réseaux. Ces changements dans le réseau électrique permettent de mettre en place des programmes de gestion de la charge. En effet, ils permettent un échange d'informations entre les opérateurs de réseaux et les consommateurs, ces derniers pouvant alors répondre aux requêtes de modulation de la charge des opérateurs de réseaux.

1.1 Définitions et concepts de base

Dans cette section, les concepts de base nécessaire à la compréhension du mémoire et de la recherche sont définis. En particulier, nous définissons ce que nous entendons par *gestion de la charge* et par *un agrégateur de charge*.

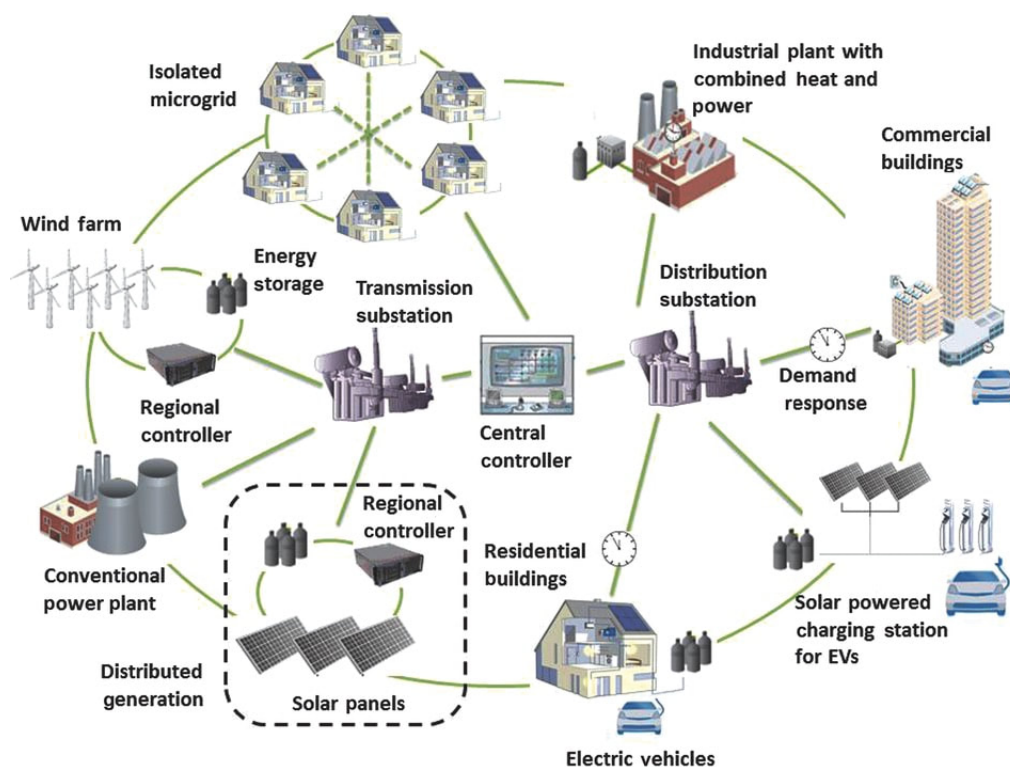


Figure 1.1 Schémas Smart Grid - <http://osg.polymtl.ca/>

1.1.1 Qu'est ce que la gestion de la charge ?

La gestion de la charge peut prendre différentes formes. La première consiste à inciter les consommateurs à modifier leur consommation électrique pour couper des pics de consommation ou combler des creux par exemple. Cela peut être fait grâce à l'envoi de requêtes de modification de la consommation avec en contrepartie des récompenses monétaires ou l'utilisation d'un prix variable de l'électricité au cours de la journée, avec des prix plus chers pendant les pics et moins chers pendant les creux. Cela incite les consommateurs à déplacer leur consommation. Ce genre de tarification s'appelle le Time of Use (TOU) et elle est actuellement utilisée dans de nombreux pays et provinces telles que l'Ontario. La tarification utilisée en Ontario peut être vue dans le tableau 1.1. La deuxième forme de gestion de la charge consiste à contrôler directement les charges résidentielles (et industrielles) présentant une certaine flexibilité, en vue de compenser les sévères fluctuations de génération apportées par les nouvelles sources d'énergie. Ce contrôle est alors exercé avec l'accord du consommateur par une entité extérieure que l'on définira dans la sous-section suivante. De nombreuses études ont été réalisées pour quantifier le potentiel de la gestion de la charge dans l'optique d'une réduction des pics de consommation et le déplacement de la charge dans les périodes creuses comme dans [2, 3]. Des projets pilotes comme le projet PowerShift Atlantic [4] ont permis de démontrer, en pratique,

que la gestion de la charge possède un réel potentiel pour réduire les pics de consommation et lisser la courbe de demande. Ils ont aussi permis de montrer que les retombées économiques sont conséquentes. Il y a aussi des programmes de gestion de la charge qui sont déjà en place, en particulier pour les industries comme en Ontario [5] ou au Québec [6].

Tableau 1.1 Prix TOU en Ontario

Heures de la journées	7a.m to 11a.m	11a.m to 5p.m	5p.m to 7p.m	7p.m to 7a.m
Prix ¢/kWh	13.2 (on-peak)	9.4 (mid-peak)	13.2 (on-peak)	6.5 (off-peak)

1.1.2 Qu'est ce qu'un agrégateur ?

Pour envisager des programmes de gestion de la charge pour les particuliers, un nouvel acteur dans le marché de l'énergie doit être introduit : l'agrégateur. En effet, une maison individuelle a peu d'impact sur l'équilibre du réseau, mais en agrégeant un groupe de maisons, leur charge commune aura, elle, un impact non négligeable. L'agrégateur est l'entité extérieure mentionnée dans la sous-section précédente qui exercera le contrôle sur les charges flexibles. [7] et [8] spécifient le rôle des agrégateurs dans le réseau : fournir une offre de flexibilité au gestionnaire du réseau électrique et permettre au consommateur participant d'avoir une récompense sur sa participation. Ce sont ces deux aspects que l'on traitera dans ce mémoire dans le cas d'un agrégateur de chauffe-eaux. Cependant, l'apparition de ce nouvel acteur dans le marché de l'électricité nécessite un nouveau cadre et des changements dans les politiques pour que les agrégateurs puissent se développer et remplir leur rôle correctement, comme le montrent [9] et [10]. En effet, actuellement le marché de l'électricité classique [11] ne prend pas en compte ce nouvel acteur. Il est donc nécessaire de penser un modèle d'affaires viable pour l'agrégateur pour qu'il puisse s'intégrer au marché de l'électricité.

1.2 Éléments de la problématique

1.2.1 Potentiel de flexibilité de la charge avec les chauffe-eaux

La gestion de la charge peut être réalisée avec de nombreuses charges résidentielles : batterie de stockage, chauffe-eau, chauffe-espace, air conditionné... L'exploitation des capacités de stockage des chauffe-eaux présente l'avantage qu'ils sont déjà distribués abondamment sur l'ensemble du réseau. Ils présentent donc un intérêt d'agrégation important pour des programmes de gestion de la charge. Cependant, il existe de nombreux défis liés à l'utilisation des chauffe-eaux

dans ce type de programme. Le projet SMARTDesc [12] a permis d'explorer les possibilités de l'utilisation des chauffe-eaux pour la gestion de la charge. Ce projet a permis de développer un système de contrôle hiérarchisé permettant de gérer la charge des chauffe-eaux en utilisant la technique des jeux à champ moyen [13],[14].

1.2.2 Question de recherche

Les chauffe-eaux possédant un potentiel non négligeable de flexibilité ; ils sont des candidats pour des programmes de gestion de la charge utilisant le stockage d'énergie thermique. Dans la littérature, peu de recherche essayent d'adresser la problématique du type d'offre qui pourrait être formulée par de tels agrégateurs sur le marché de l'électricité. Dans cette maîtrise, nous nous sommes appliqués à formuler l'offre technique et économique qu'un agrégateur de chauffe-eaux pourrait proposer tout en conservant le confort des participants et en minimisant les oscillations de la courbe de consommation lors du retour au fonctionnement classique des chauffe-eaux.

1.3 Plan du mémoire

Ce mémoire est organisé de la façon suivante. Le chapitre 2 présente une revue de littérature expliquant le modèle de chauffe-eaux utilisé, la théorie du contrôle optimal, la théorie des jeux à champ moyen, le fonctionnement de base des chauffe-eaux et le contrôle que l'agrégateur leur appliquera. Ce chapitre se terminera par une revue des techniques de récompenses économiques présentées dans la littérature. Le chapitre 3 expose la démarche adoptée lors de cette maîtrise. Le chapitre 4 est composé d'un article soumis à *IEEE Transaction on Smart Grid* qui présente les deux contributions de cette maîtrise et les résultats obtenus. Le chapitre 5 comporte une discussion générale de l'étude et des résultats complémentaires. Enfin, le chapitre 6 conclut le travail réalisé dans cette maîtrise et présente des pistes de travaux futurs.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

Cette section présente une revue de littérature concernant les outils utilisés pour formuler une offre de flexibilité pour un agrégateur de chauffe-eaux. Tout d'abord, le modèle des chauffe-eaux est développé puis la théorie du contrôle optimal ainsi que la théorie des jeux à champ moyen sont exposées. Ensuite, les deux types de contrôle appliqués aux chauffe-eaux dans cette maîtrise sont explicités. Enfin, une revue de différentes récompenses économiques possibles est réalisée.

2.1 Modèles des chauffe-eaux

Dans ce travail, on modélise les chauffe-eaux comme un réservoir formé de n couches de volume identique ayant une température uniforme dans une même couche, utilisée dans [14]. Cette modélisation permet de tenir compte de la stratification des températures qui a lieu dans un chauffe-eau. Un schéma correspondant à cette situation est présenté sur la Figure 2.1 et les paramètres des chauffe-eaux sont détaillés dans le Tableau 2.1.

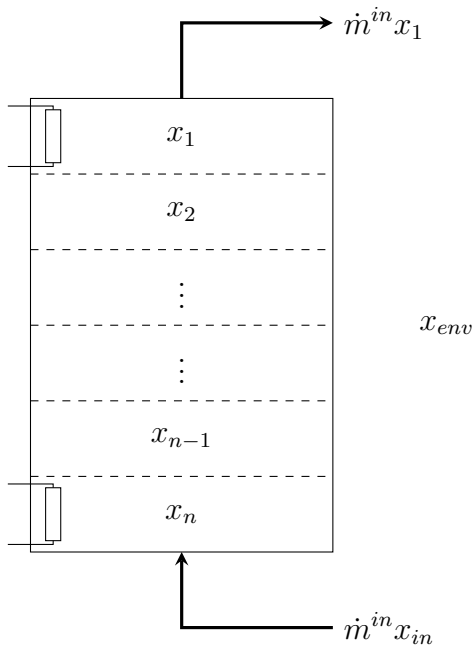


Figure 2.1 Modèle de chauffe-eaux multi-couches

Tableau 2.1 Paramètres du chauffe-eau

x_l	Température de la couche l
\bar{u}_l	Énergie apportée par l'élément chauffant de la couche l
\dot{m}^{in}	Le flux d'extraction d'eau
\dot{Q}_l	Présence d'un élément chauffant dans la couche l
x_{env}	Température du milieu environnant
x_{in}	Température de l'eau entrante
x^{low}	Température basse de confort
x^{high}	Température haute de confort
M_l	Masse de fluide dans la couche l
A_l	Surface latérale de la couche l
C_{pf}	Chaleur spécifique du fluide
U	Coefficient de perte entre le réservoir et le fluide
\dot{V}_j^{mix}	flux sortant pour chaque type d'extraction j

Les équations de dynamique des températures de chacune des couches peuvent être obtenues grâce à un bilan énergétique sur chacune d'elles. En effet, la variation d'énergie dans une

couche est égale aux pertes énergétiques entre les parois de la strate et le milieu environnant auxquelles on ajoute l'énergie extraite de la couche lors d'un tirage d'eau et l'énergie apportée par l'élément chauffant sur cette strate. Les équations sont donc les suivantes :

$$M_l C_{pf} \frac{dx_{l,t}}{dt} = U A_l (x_{env} - x_{l,t}) + \dot{Q}_l \bar{u}_{l,t} + \dot{m}_t^{in} C_{pf} (x_{(l+1),t} - x_{l,t}) \quad , \quad l \neq n \quad (2.1a)$$

$$M_l C_{pf} \frac{dx_{l,t}}{dt} = U A_l (x_{env} - x_{l,t}) + \dot{Q}_l \bar{u}_{l,t} + \dot{m}_t^{in} C_{pf} (x_{in,t} - x_{l,t}) \quad , \quad l = n \quad (2.1b)$$

Le flux d'extraction d'eau \dot{m}_t^{in} , au temps t , est modélisé par un processus aléatoire dont les taux d'extraction et de transition évoluent selon une chaîne de Markov à temps continu. Les états de cette chaîne de Markov sont à valeur dans $\Theta = \{1, 2, \dots, p\}$ et le générateur infinitésimal de la chaîne est noté $L_t = (L_{q,k})_{q \in \Theta, k \in \Theta}$, comme introduit dans [15]. Ce générateur est considéré constant par morceaux sur l'horizon de temps. Chaque état j de la chaîne correspond à un évènement d'extraction d'eau (pas d'extraction, une douche, une machine à laver...) et est associé à un flux d'eau sortant \dot{V}_j^{mix} . On a alors : $\dot{m}_t^{in}(\theta_t) = \dot{V}_{\theta_t}^{mix}$. Comme représenté sur la Figure 2.1, il y a seulement deux éléments chauffants donc :

$$\dot{Q}_l = \begin{cases} 1 & \text{si } l \in \{1, n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.2)$$

Le système d'équations (2.1) peut être réécrit sous la forme d'une équation matricielle linéaire de la manière suivante avec $x_t = (x_{1,t}, \dots, x_{n,t})^T$ le vecteur de température, $\bar{u}_t = (\bar{u}_{1,t}, \dots, \bar{u}_{n,t})^T$ le vecteur d'apport en énergie des éléments chauffants :

$$\frac{dx_t}{dt} = A(\theta_t)x_t + B\bar{u}_t + \bar{c}(\theta_t) \quad (2.3)$$

où :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\dot{Q}_1}{M_1 C_{pf}} & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\dot{Q}_n}{M_n C_{pf}} \end{pmatrix} \quad \bar{c}(\theta_t) = \begin{pmatrix} \frac{A_1 U}{M_1 C_{pf}} x_{env} \\ \vdots \\ \frac{A_{n-1} U}{M_{n-1} C_{pf}} x_{env} \\ \frac{A_n U x_{env} + \dot{m}_t^{in}(\theta_t) C_{pf} x_{in}}{M_n C_{pf}} \end{pmatrix}$$

$$A(\theta_t) = \begin{pmatrix} -\frac{A_1 U + \dot{m}_t^{in}(\theta_t) C_{pf}}{M_1 C_{pf}} & \frac{\dot{m}_t^{in}(\theta_t)}{M_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & -\frac{A_n U + \dot{m}_t^{in}(\theta_t) C_{pf}}{M_n C_{pf}} \end{pmatrix}$$

Dans la stratégie de contrôle optimal développée dans la section 2.5, afin de respecter le confort des utilisateurs des chauffe-eaux, il n'est pas souhaitable de pénaliser l'effort du chauffe-eau à maintenir sa température initiale, mais plutôt de pénaliser l'effort de dévier de cette température initiale. L'effort de rester à la température initiale est donc donné gratuitement dans la formulation du coût du contrôle optimal considéré. Il est alors nécessaire de séparer le terme de contrôle \bar{u}_t en deux termes correspondant à l'effort de maintien à la température initiale et l'effort pour aller vers la température cible.

$$\bar{u}_{l,t} = u_{l,t} + u_{l,t}^{free}, \quad \forall l \in \{1, \dots, n\} \quad (2.4)$$

avec :

$$u_{l,t}^{free} = 0, \quad \forall l \in \{1, \dots, n-1\} \quad (2.5a)$$

$$u_{n,t}^{free} = \sum_{l=1}^n U A_l (x_{l,0} - x_{env}) + E \left(\sum_{\theta_t \in \Theta} \zeta_{\theta_t, \infty} \dot{m}_t^{in}(\theta_t) C_{pf} (x_{1,t} - x_{in,t}) \right) \quad (2.5b)$$

où $\zeta_{\theta_t, \infty}$ est la probabilité stationnaire d'être dans l'état θ_t de la chaîne de Markov régissant le phénomène d'extraction d'eau ; $\zeta_{\infty} = [\zeta_{1, \infty}, \dots, \zeta_{p, \infty}]$ étant solution de
$$\begin{cases} \zeta_{\infty} L = 0 \\ \sum_{j \in \Theta} \zeta_{j, \infty} = 1 \end{cases} .$$

L'équation (2.3) peut alors être réécrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dx_t}{dt} &= A(\theta_t) x_t + B u_t + \bar{c}(\theta_t) + B u_t^{free} \\ \Leftrightarrow \frac{dx_t}{dt} &= A(\theta_t) x_t + B u_t + c(\theta_t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

avec :

$$c(\theta_t) = \bar{c}(\theta_t) + Bu_t^{free} \quad (2.7)$$

2.2 Le contrôle optimal

Les problèmes de contrôle optimal consistent à déterminer la commande d'un système dont le but est de minimiser ou maximiser un critère, une fonction *coût*. Ils sont très présents dans la vie quotidienne comme dans la question de comment arriver à destination le plus rapidement possible pour un piéton par exemple. La théorie du contrôle optimal comporte deux volets : le principe du minimum de Pontryagin et l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) qui dérive du principe de la programmation dynamique. On se concentrera dans la suite sur cette dernière formulation. Ces deux volets ont été développés indépendamment, mais quasiment simultanément dans les années 1950 par Lev Pontryagin et ses collaborateurs pour l'un et par Richard Bellman pour l'autre. On va ici exposer le plus simplement possible les éléments de la théorie qui seront utiles pour la compréhension de la théorie de jeux à champs moyens et le contrôle des chauffe-eaux par le contrôle à champs moyens. Cependant, plus de détails sur la théorie du contrôle optimal peuvent être trouvés dans [16].

Le problème général de contrôle optimal se présente sous la forme suivante avec $t \in \mathbb{R}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ qui représente l'état du système et $u(t) \in \mathbb{R}^m$ qui représente la commande :

- Un système dynamique en temps continu :
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
- Une fonction coût :
$$J(x, u(t), t) = h(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau$$

La fonction coût ne dépend que de $x(t)$ et $u(t)$, t , t_f et les fonctions h et g étant donnés. Le problème de commande optimal consiste donc à trouver u^* et x^* tels que :

$$\begin{cases} u^* & = \underset{u}{\operatorname{argmin}} J(x_0, u, t_0) \\ \dot{x}^*(t) & = f(x^*(t), u^*(t), t) \\ x^*(t_0) & = x_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Nous allons développer dans la suite la résolution du problème de contrôle optimal par l'équation de HJB. Cette équation repose sur le principe de la programmation dynamique.

Notons : $J^*(x, t) = \min_u \left\{ h(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \mid x(t) = x \right\}$ le coût optimal à partir de n'importe quel x intermédiaire à un temps $t \in [t_0, t_f]$.

L'équation de HJB est alors la suivante :

$$\frac{\partial J^*}{\partial t}(x, t) + \min_u \left[g(x, u, t) + f(x, u, t)^T \frac{\partial J^*}{\partial x}(x, t) \right] = 0 \quad (2.9a)$$

$$u^* = \operatorname{argmin}_u \left[g(x, u, t) + f(x, u, t)^T \frac{\partial J^*}{\partial x}(x, t) \right] \quad (2.9b)$$

$$J^*(x, t_f) = J(t_f, u^*, x(t_f)) \quad (2.9c)$$

Cette équation est résolue à reculons en partant du temps final, selon le principe de la programmation dynamique.

Dans le cadre de cette maîtrise nous aurons besoin d'une équation de HJB légèrement modifiée. En effet, certains paramètres de la dynamique que nous utiliserons seront régis par une chaîne de Markov à temps continu. Ce cas particulier a été développé dans [17].

Le problème général modifié considéré est le suivant avec $t \in \mathbb{R}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ qui représente l'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ qui représente la commande et $\theta(t)$ qui représente la chaîne de Markov à valeur dans $\Theta = \{1, \dots, p\}$ et de générateur infinitésimal $L_t = (L_{q,k})_{q \in \Theta, k \in \Theta}$:

- Un système dynamique en temps continu :
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \theta(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
- Une fonction coût :
$$J(x, u, t, j) = E \left[h(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \mid \theta_t = j \right]$$
- $$J^*(x, t, j) = \min_u \{J(x, u, t, j)\}$$

Et l'équation de HJB stochastique avec un processus de Markov est pour tout $j \in \Theta$:

$$\min_u \left[\frac{\partial J^*}{\partial t}(x, t, j) + g(x, u, t) + f(x, u, j, t)^T \frac{\partial J^*}{\partial x}(x, t, j) + \sum_{k \in \Theta} L_{j,k} J^*(x, t, k) \right] = 0 \quad (2.10a)$$

$$u_j^* = \operatorname{argmin}_u \left[g(x, u, t) + f(x, u, j, t)^T \frac{\partial J^*}{\partial x}(x, t, j) \right] \quad (2.10b)$$

$$J^*(x, t_f, j) = J(t_f, u_j^*, x(t_f), j) \quad (2.10c)$$

2.3 Le théorie des jeux à champs moyens

La théorie des jeux a été introduite au début du 20^{ème} siècle, mais s'est vraiment développée à partir de 1944 avec l'ouvrage de Von Neumann et Morgenstern [18]. Cette théorie s'intéresse aux interactions et choix des individus en tenant compte du fait qu'ils sont conscients de ces interactions. Le but de chaque individu est de maximiser sa fonction utilité en prenant en

compte ce que les autres peuvent faire.

Un des concepts majeurs de la théorie des jeux est l'équilibre de Nash. Cet équilibre a été formellement décrit en 1951 par John Nash dans [19]. Un équilibre de Nash est un équilibre du jeu pour lequel aucun joueur n'a d'intérêt à dévier unilatéralement de sa stratégie d'équilibre. Dans le cas de jeux dynamiques, l'équilibre de Nash est décrit par un ensemble d'équations de HJB. Le nombre d'équations nécessaire dépend du nombre d'agents prenant part au jeu, une équation correspondant à la réponse optimale d'un agent aux stratégies des autres agents. Lorsque le nombre d'agents prenant part au jeu augmente, le nombre d'équations augmente aussi, ce qui rend le jeu de plus en plus difficile à résoudre.

La théorie des jeux à champs moyens se pose alors comme une possible solution à ce problème. La théorie des jeux à champs moyens a été développée indépendamment par Lasry et Lions dans [20, 21, 22] et par Huang, Caines et Malhamé dans [23, 24, 25], mais avec des approches assez différentes. On se basera ici sur l'approche développée par Huang, Caines et Malhamé. Cette théorie repose sur l'observation que dans certaines situations, lorsqu'il y a suffisamment d'agents, les décisions d'un agent isolé n'ont que peu d'impact sur les autres agents, ils interagissent via leur comportement agrégé, appelé *champ moyen*. On peut alors décrire l'équilibre de Nash par un système couplé d'une équation de HJB, pour décrire la réponse optimale d'un agent générique en réponse au champ moyen, et une équation de Fokker-Plank (FP) qui décrit la propagation du champ moyen quand les agents mettent en œuvre la réponse optimale. Afin d'assurer une cohérence, il faut alors que la trajectoire du champ moyen soit répliquable par les agents réagissant optimalement à cette dernière, et donc qu'elle soit un point fixe de ce système d'équations. Le point fixe de ce système couplé d'équation de HJB-FP constitue alors un équilibre de Nash approximatif [24, 25].

Dans ce mémoire on s'intéressera au cas particulier des jeux à champ moyen quadratiques linéaires non collaboratifs, qui a été développée dans [25]. Dans ce cas particulier, la fonction coût a une forme quadratique et une structure d'optimisation non collaborative décentralisée : chaque agent utilise son état individuel et une trajectoire commune. L'équilibre de Nash est alors bien atteint quand le nombre d'agents tend vers l'infini. À ce cas particulier, on sélectionnera un cas encore plus particulier où les agents ont des paramètres régis par des chaînes de Markov [26].

2.4 Contrôle thermostatique des chauffe-eaux

Le fonctionnement classique d'un chauffe-eau électrique se fait avec un contrôle thermostatique. Avec ce type de contrôle, les éléments chauffants d'un chauffe-eau se mettent en fonctionnement

à leur capacité nominale lorsque la température de l'eau, au niveau de l'élément, passe en dessous de la température basse de confort x^{low} , et s'éteint lorsqu'elle passe au-dessus de la température haute de confort x^{high} . Le contrôle u_t à alors le comportement suivant, $\forall l$:

$$u_{l,t} = \begin{cases} P_{heat}^{max} & \text{si } x_{l,t} < x^{low} \\ 0 & \text{si } x_{l,t} > x^{high} \\ u_{l,t-\Delta t} & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.11)$$

De plus, il existe une relation de maître-esclave entre les différents éléments chauffants, car à chaque instant seulement un peut être actif à la fois. Donc c'est toujours celui qui est le plus haut dans le chauffe-eau, i.e l le plus grand, qui aura la priorité et donc : $u_{l,t} = 0$ si $\exists k \geq l / u_{k,t} \neq 0$ sinon $u_{l,t}$ est décrit par (2.11). Sur la Figure 2.2, il est possible d'observer un exemple de l'évolution de la température moyenne de 10 chauffe-eaux sous un contrôle classique thermostatique.

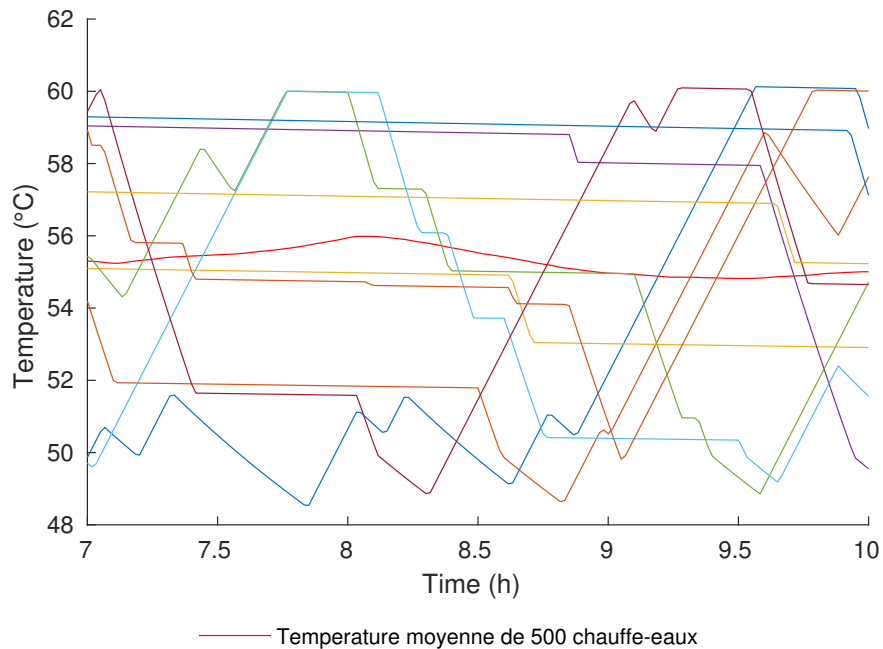


Figure 2.2 Evolution de la température moyenne de chaque chauffe-eau sous un contrôle thermostatique

2.5 Contrôle à champs moyen

Pour fournir de la flexibilité, l'agrégateur de chauffe-eau considéré implémente un contrôle à champs moyen sur les chauffe-eaux. Dans cette maîtrise, on va réutiliser le contrôle développé dans [14]. On considère donc un groupe de N chauffe-eaux identiques, le but du contrôle est alors que la température moyenne du groupe suivent la température cible y décidée par l'agrégateur. Pour chaque chauffe-eaux i on définit la fonction coût suivante :

$$J_i^N(u^i, j) = E \left[\int_0^T \left[\frac{1}{2} (Hx_{i,t} - z)^2 q_t^y + \frac{1}{2} (Hx_{i,t} - Hx_{i,0})^2 q^{x_0} + \frac{1}{2} \|u_{i,t}\|_R^2 \right] dt + \frac{1}{2} (Hx_{i,T} - z)^2 q_T^y + \frac{1}{2} (Hx_{i,T} - Hx_{i,0})^2 q^{x_0} \middle| \theta_0 = j \right] \quad (2.12)$$

avec :

- $q_t^y = \left| \lambda \int_0^t (H\bar{x}_\tau - y) d\tau \right|$
- y la température cible.
- z la direction de changement de température, égale à x^{low} si l'objectif est de décroître la température moyenne du groupe et égale à x^{high} si l'objectif est d'augmenter la température moyenne du groupe.
- $\bar{x}_t = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} x_{i,t}$ est le vecteur de température moyenne sur l'ensemble de chauffe-eaux.
- $H = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$
- R une matrice définie positive.

L'interprétation de cette fonction coût peut être trouvée dans la Section 4.3 de ce mémoire. On détaillera ici les étapes de calcul pour retrouver le contrôle optimal du champ moyen et le système de point fixe correspondant.

2.5.1 Contrôle optimal - Application de l'équation de HJB stochastique

Pour faire le lien avec les notations utilisées dans le système (2.10), dans notre cas on a pour un agent générique d'état de température $x_t \in \mathbb{R}^n$, de contrôle chauffant $u_t \in \mathbb{R}^n$, dans un état $\theta_t = j$ de la chaîne de Markov :

- $f(x, u, \theta_t, t) = A(j)x_t + Bu_t + c(j)$
- $g(x, u, t) = \frac{1}{2} (Hx_t - z)^2 q_t^y + \frac{1}{2} (Hx_t - Hx_0)^2 q^{x_0} + \frac{1}{2} u_t^T R u_t$

De plus on suppose que $J^*(x, t, j)$ est de la forme :

$$J^*(x, t, j) = \frac{1}{2}x_t^T \Pi_t^j x_t + x_t^T s_t^j + \alpha_t^j \quad (2.13)$$

En injectant dans le système (2.10), on obtient le contrôle optimal et le système d'équations vérifié par Π_t^j et s_t^j .

Loi de contrôle d'un agent général :

D'après (2.10b), on a :

$$\begin{aligned} u_{j,t}^* &= \operatorname{argmin} \left(g(x, u, t) + f(x, u, j, t)^T \frac{\partial J^*}{\partial x}(x, t, j) \right) \\ &= \operatorname{argmin} \left(\frac{1}{2}u_t^T R u_t + (A(j)x_t + B u_t + c(j))^T (\Pi_t^j x_t + s_t^j) \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

D'où :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{2}u_t^T R u_t + (A(j)x_t + B u_t + c(j))^T (\Pi_t^j x_t + s_t^j) \right) (u_{j,t}^*) \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{2}u_t^T R u_t + u_t^T B^T \Pi_t^j x_t + u_t^T B^T s_t^j \right) (u_{j,t}^*) \\ \Leftrightarrow 0 &= R u_{j,t}^* + B^T \Pi_t^j x_t + B^T s_t^j \\ \Leftrightarrow u_{j,t}^* &= -R^{-1} B^T (\Pi_t^j x_t + s_t^j) \end{aligned} \quad (2.15)$$

D'où :

$$u_t^* = - \sum_{j \in \Theta} \mathbb{1}_{[\theta_t=j]} R^{-1} B^T (\Pi_t^j x_t + s_t^j) \quad (2.16)$$

Système d'équations vérifiées par Π_t^j et s_t^j :

Π_t^j et s_t^j doivent vérifier (2.10a), en réinjectant $u_{j,t}^*$ que l'on vient de trouver ils doivent vérifier :

$$\frac{\partial J^*}{\partial t}(x, t, j) + g(x, u_{j,t}^*, t) + f(x, u_{j,t}^*, j, t)^T \frac{\partial J^*}{\partial x}(x, t, j) + \sum_{k \in \Theta} L_{j,k} J^*(x, t, k) = 0 \quad (2.17)$$

Les termes de cette équation sont calculés séparément dans l'annexe A. En les réinjectant dans (2.17), et en regroupant les termes, on obtient :

$$0 = x_t^T \left(-\frac{1}{2} \Pi_t^j B R^{-1} B^T \Pi_t^j + \frac{1}{2} q_t^y H^T H + \frac{1}{2} q^{x_0} H^T H + \frac{1}{2} \dot{\Pi}_t^j + \frac{1}{2} \sum_{k \in \Theta} L_{j,k} \Pi_t^k + A(j)^T \Pi_t^j \right) x_t$$

$$\begin{aligned}
& + x_t^T \left(-\frac{1}{2} \Pi_t^j B R^{-1} B^T s_t^j - \frac{1}{2} q^{x_0} H^T H x_0 - \frac{1}{2} q_t^y H^T z + \dot{s}_t^j + \sum_{k \in \Theta} L_{j,k} s_t^k + A(j)^T s_t^j \right) \\
& + \left(-\frac{1}{2} (s_t^j)^T B R^{-1} B^T \Pi_t^j - \frac{1}{2} q^{x_0} x_0^T H^T H - \frac{1}{2} q_t^y H z + c(j)^T \Pi_t^j \right) x_t \\
& - \frac{1}{2} (s_t^j)^T B R^{-1} B^T s_t^j + c(j)^T s_t^j + \frac{1}{2} q_t^y z^2 + \frac{1}{2} q^{x_0} x_0^T H^T H x_0 + \sum_{k \in \Theta} L_{j,k} \alpha_t^k + \dot{\alpha}_t^j \\
= & x_t^T \left(-\frac{1}{2} \Pi_t^j B R^{-1} B^T \Pi_t^j + \frac{1}{2} q_t^y H^T H + \frac{1}{2} q^{x_0} H^T H + \frac{1}{2} \dot{\Pi}_t^j + \frac{1}{2} \sum_{k \in \Theta} L_{j,k} \Pi_t^k \right. \\
& \quad \left. \text{en reformulant sous} \right. \\
& \quad \left. \text{forme symétrique} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} (A(j)^T \Pi_t^j + \Pi_t^j A(j)) \right) x_t \\
& + x_t^T \left(-\frac{1}{2} \Pi_t^j B R^{-1} B^T s_t^j - \frac{1}{2} q^{x_0} H^T H x_0 - \frac{1}{2} q_t^y H^T z + \dot{s}_t^j + \sum_{k \in \Theta} L_{j,k} s_t^k + A(j)^T s_t^j \right) \\
& \quad \left. \text{La transposé d'un scalaire étant lui même} \right. \\
& \quad \left. + x_t^T \left(-\frac{1}{2} (s_t^j)^T B R^{-1} B^T \Pi_t^j - \frac{1}{2} q^{x_0} x_0^T H^T H - \frac{1}{2} q_t^y H z + c(j)^T \Pi_t^j \right)^T \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} (s_t^j)^T B R^{-1} B^T s_t^j + c(j)^T s_t^j + \frac{1}{2} q_t^y z^2 + \frac{1}{2} q^{x_0} x_0^T H^T H x_0 + \sum_{k \in \Theta} L_{j,k} \alpha_t^k + \dot{\alpha}_t^j \right) \\
= & x_t^T \left(-\frac{1}{2} \Pi_t^j B R^{-1} B^T \Pi_t^j + \frac{1}{2} q_t^y H^T H + \frac{1}{2} q^{x_0} H^T H + \frac{1}{2} \dot{\Pi}_t^j + \frac{1}{2} \sum_{k \in \Theta} L_{j,k} \Pi_t^k \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} (A(j)^T \Pi_t^j + \Pi_t^j A(j)) \right) x_t \\
& + x_t^T \left(-\Pi_t^j B R^{-1} B^T s_t^j - q^{x_0} H^T H x_0 - q_t^y H^T z + \dot{s}_t^j + \sum_{k \in \Theta} L_{j,k} s_t^k \right. \\
& \quad \left. + A(j)^T s_t^j + \Pi_t^j c(j) \right) \\
& - \frac{1}{2} (s_t^j)^T B R^{-1} B^T s_t^j + c(j)^T s_t^j + \frac{1}{2} q_t^y z^2 + \frac{1}{2} q^{x_0} x_0^T H^T H x_0 + \sum_{k \in \Theta} L_{j,k} \alpha_t^k + \dot{\alpha}_t^j
\end{aligned} \tag{2.18}$$

On peut alors identifier à zéros chacune des parties quadratiques en x_t , linéaires en x_t et constantes en x_t de l'équation. On obtient alors le système suivant (en ne considérant pas la partie constante en x_t car on n'en a pas besoin pour le calcul de $u_{j,t}^*$) :

$$\dot{\Pi}_t^j = - \left(A(j)^T \Pi_t^j + \Pi_t^j A(j) \right) + \Pi_t^j B R^{-1} B^T \Pi_t^j - (q_t^y + q^{x_0}) H^T H - \sum_{k \in \Theta} L_{j,k} \Pi_t^k \tag{2.19a}$$

$$\dot{s}_t^j = \left(A(j)^T + \Pi_t^j B R^{-1} B^T \right) s_t^j + q^{x_0} H^T H x_0 + q_t^y H^T z - \Pi_t^j c(j) - \sum_{k \in \Theta} L_{j,k} s_t^k \quad (2.19b)$$

Il faut ajouter à ce système les conditions limites avec l'équation (2.10c), ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x_{t_f}^T \Pi_{t_f}^j x_{t_f} + x_{t_f}^T s_{t_f}^j &= \frac{1}{2} (H x_{t_f} - z)^2 q_{t_f}^y + \frac{1}{2} (H x_{t_f} - H x_0)^2 q^{x_0} \\ &= \frac{1}{2} q_{t_f}^y x_{t_f}^T H^T H x_{t_f} - \frac{1}{2} q_{t_f}^y x_{t_f}^T H^T z - \frac{1}{2} q_{t_f}^y H x_{t_f} z + \frac{1}{2} q_{t_f}^y z^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} q^{x_0} x_{t_f}^T H^T H x_{t_f} - \frac{1}{2} q^{x_0} x_{t_f}^T H^T H x_0 - \frac{1}{2} q^{x_0} x_0^T H^T H x_{t_f} \\ &\quad + \frac{1}{2} q^{x_0} x_0^T H^T H x_0 \\ &= x_{t_f}^T \left(\frac{1}{2} q_{t_f}^y H^T H + \frac{1}{2} q^{x_0} H^T H \right) x_{t_f} \\ &\quad + x_{t_f}^T \left(- q_{t_f}^y H^T z - q^{x_0} H^T H x_0 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} q_{t_f}^y z^2 + \frac{1}{2} q^{x_0} x_0^T H^T H x_0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ce qui nous donne en identifiant le système d'équations différentielles et de condition limite suivant :

$$\dot{\Pi}_t^j = - \left(A(j)^T \Pi_t^j + \Pi_t^j A(j) \right) + \Pi_t^j B R^{-1} B^T \Pi_t^j - (q_t^y + q^{x_0}) H^T H - \sum_{k \in \Theta} L_{j,k} \Pi_t^k \quad (2.21a)$$

$$\Pi_{t_f}^j = (q_{t_f}^y + q^{x_0}) H^T H \quad (2.21b)$$

$$\dot{s}_t^j = \left(A(j)^T + \Pi_t^j B R^{-1} B^T \right) s_t^j + q^{x_0} H^T H x_0 + q_t^y H^T z - \Pi_t^j c(j) - \sum_{k \in \Theta} L_{j,k} s_t^k \quad (2.21c)$$

$$s_{t_f}^j = -H^T (q_{t_f}^y z - q^{x_0} H x_0) \quad (2.21d)$$

Ce système permet de calculer le contrôle optimal (2.16) et la loi de rétroaction est spécifique à chaque chauffe-eau, car elle dépend de la température initiale du chauffe-eau considéré (voir (2.21d)-(2.21c)).

Cependant, dans ces équations il reste une inconnue q_t^y . Il faut donc ajouter à ce système des équations qui nous permettront de ne plus avoir aucune inconnue et d'être capables de résoudre ce système afin de trouver le contrôle optimal à appliquer aux chauffe-eaux. On cherche donc des équations qui nous permettront de calculer q_t^y et donc le vecteur de température moyen \bar{x}_t . On va donc partir d'équations de Kolmogorov de densités de probabilités, pour obtenir des équations sur les variables de température dans chacune des densités de probabilité de la

chaîne de Markov. On a alors p équations et \bar{x}_t étant la somme pondérée par la probabilité de chacun des états discrets de la chaîne de ces p vecteurs de température.

2.5.2 Équation de Kolmogorov de densités de probabilités

Plus précisément, considérons :

- $\begin{pmatrix} \bar{x}_t \\ \theta_t \end{pmatrix}$ notre processus markovien hybride (états mixtes continus-discrets) avec $L = (L_{q,k})_{q \in \Theta, k \in \Theta}$ le générateur infinitésimal de la chaîne de Markov qui décrit θ_t .
- $\bar{x}_t^j = E(x_t \mathbb{1}_{[\theta_t=j]})$ et $\bar{x}_t = \sum_{j \in \Theta} \bar{x}_t^j$
- $p_t^j(\mu) d\mu = P\left((\mu < x_t < \mu + d\mu) \cap (\theta_t = j)\right)$

On a alors les observations suivantes :

- $\bar{x}_t^j = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu p_t^j(\mu) d\mu$
- $\zeta_t^j = \int_{-\infty}^{+\infty} p_t^j(\mu) d\mu$

où : $\zeta_t = [\zeta_t^1, \dots, \zeta_t^p]$ est la distribution de probabilité de la chaîne de Markov et évolue selon : $\frac{\partial \zeta_t}{\partial t} = \zeta_t L^T$.

Pour chaque $j \in \Theta$ on a donc l'équation de Kolmogorov suivante, développée dans [15], avec u_j^* défini dans l'équation (2.15) :

$$\frac{\partial p_t^j(\mu)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mu}(f(\mu, u_j^*, j, t)p_t^j(\mu)) + \sum L_{k,j} p_t^k(\mu) \quad (2.22)$$

En multipliant par μ et en intégrant par rapport à μ de $-\infty$ à $+\infty$ on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \mu \frac{\partial p_t^j}{\partial t} d\mu = - \int_{-\infty}^{+\infty} \mu \frac{\partial}{\partial \mu}(f(\mu, u_j^*, j, t)p_t^j(\mu)) d\mu + \int_{-\infty}^{+\infty} \mu \sum L_{k,j} p_t^k(\mu) d\mu \\ \Leftrightarrow & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial(\mu p_t^j)}{\partial t} d\mu = - \int_{-\infty}^{+\infty} \mu \frac{\partial}{\partial \mu}(f(\mu, u_j^*, j, t)p_t^j(\mu)) d\mu + \sum L_{k,j} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu p_t^k(\mu) d\mu \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mu p_t^j d\mu \right) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \mu \frac{\partial}{\partial \mu}(f(\mu, u_j^*, j, t)p_t^j(\mu)) d\mu + \sum L_{k,j} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu p_t^k(\mu) d\mu \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial}{\partial t}(\bar{x}_t^j) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \mu \frac{\partial}{\partial \mu}(f(\mu, u_j^*, j, t)p_t^j(\mu)) d\mu + \sum L_{k,j} \bar{x}_t^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & \frac{\partial}{\partial t}(\bar{x}_t^j) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu, u_j^*, j) p_t^j(\mu) d\mu + \sum L_{k,j} \bar{x}_t^k, \text{ par intégration par partie} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\partial}{\partial t}(\bar{x}_t^j) = \int_{-\infty}^{+\infty} (A(j)\mu + B(-BR^{-1}B^T(\Pi_t^j\mu + s_t^j)) + c(j)) p_t^j(\mu) d\mu + \sum L_{k,j} \bar{x}_t^k \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\partial}{\partial t}(\bar{x}_t^j) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A(j)\mu p_t^j(\mu) - BR^{-1}B^T \Pi_t^j \mu p_t^j(\mu) - BR^{-1}B^T s_t^j p_t^j(\mu) \right. \\
& \left. + c(j) p_t^j(\mu) \right) d\mu + \sum L_{k,j} \bar{x}_t^k \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\partial}{\partial t}(\bar{x}_t^j) = A(j) \int_{-\infty}^{+\infty} \mu p_t^j(\mu) d\mu - BR^{-1}B^T \Pi_t^j \int_{-\infty}^{+\infty} \mu p_t^j(\mu) d\mu \\
& - BR^{-1}B^T s_t^j \int_{-\infty}^{+\infty} p_t^j(\mu) d\mu + c(j) \int_{-\infty}^{+\infty} p_t^j(\mu) d\mu + \sum L_{k,j} \bar{x}_t^k \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\partial}{\partial t}(\bar{x}_t^j) = A(j)\bar{x}_t^j - BR^{-1}B^T \Pi_t^j \bar{x}_t^j - BR^{-1}B^T s_t^j \zeta_t^j + c(j)\zeta_t^j + \sum L_{k,j} \bar{x}_t^k \quad (2.23)
\end{aligned}$$

On obtient donc l'équation suivante $\forall j \in \Theta$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{x}_t^j) = (A(j) - BR^{-1}B^T \Pi_t^j) \bar{x}_t^j - BR^{-1}B^T s_t^j \zeta_t^j + c(j)\zeta_t^j + \sum L_{k,j} \bar{x}_t^k \quad (2.24)$$

2.5.3 Système de point fixe du contrôle à champs moyen

Le système (2.21) appliqué à un agent générique, dont la température initiale est la température moyenne du groupe de chauffe-eaux considéré (\bar{x}_0), est alors complété pour obtenir le système (2.25). On considère un tel agent général, car le groupe de chauffe-eaux doit reproduire q_t^y collectivement d'après le principe de champ moyen.

$$\dot{\Pi}_t^j = - \left(A(j)^T \Pi_t^j + \Pi_t^j A(j) \right) + \Pi_t^j BR^{-1}B^T \Pi_t^j - (q_t^y + q^{x_0}) H^T H - \sum_{k \in \Theta} L_{j,k} \Pi_t^k \quad (2.25a)$$

$$\Pi_{t_f}^j = (q_{t_f}^y + q^{x_0}) H^T H \quad (2.25b)$$

$$\dot{s}_t^j = \left(A(j)^T + \Pi_t^j BR^{-1}B^T \right) s_t^j + q^{x_0} H^T H \bar{x}_0 + q_t^y H^T z - \Pi_t^j c(j) - \sum_{k \in \Theta} L_{j,k} s_t^k \quad (2.25c)$$

$$s_{t_f}^j = -H^T (q_{t_f}^y z - q^{x_0} H x_0) \quad (2.25d)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{x}_t^j) = (A(j) - BR^{-1}B^T \Pi_t^j) \bar{x}_t^j - BR^{-1}B^T s_t^j \zeta_t^j + c(j)\zeta_t^j + \sum L_{k,j} \bar{x}_t^k \quad (2.25e)$$

$$\bar{x}_t = \sum_{j \in \Theta} \bar{x}_t^j \quad (2.25f)$$

$$q_t^y = \left| \lambda \int_0^t (H\bar{x}_\tau - y) d\tau \right| \quad (2.25g)$$

$$\frac{\partial \zeta_t}{\partial t} = \zeta_t L^T \quad (2.25h)$$

Le contrôle à champs moyen fonctionne alors de la manière suivante pour une température cible y :

1. L'agrégateur résout le système (2.25), i.e trouve le point fixe \bar{x}_t du système avec une estimation de la température initiale moyenne du groupe. La technique utilisée pour trouver ce point fixe sera développée dans la section 4.4.
2. L'agrégateur envoie le q_t^y à l'ensemble des chauffe-eaux individuels. Pour minimiser les communication, l'agrégateur pourrait aussi envoyer seulement le vecteur de températures initiales moyennes et l'ensemble des calculs serait fait localement.
3. Chaque chauffe-eau résout individuellement le système (2.21) et applique le contrôle (2.16) qui en résulte.
4. Régulièrement, mais à des instants aléatoires pour limiter la bande passante requise, chaque chauffe-eau envoie son état de température à l'agrégateur.

2.6 Récompense économique

Le deuxième aspect à considérer lors que l'on étudie l'offre d'un agrégateur concerne les récompenses économiques que les participants au programme pourraient recevoir. Il existe deux types de récompenses possibles lors d'un programme de gestion de la charge. Le premier est basé sur des prix variables au cours de la journée comme le TOU mentionné dans l'introduction ou encore le Time-and-Level-of-Use (TLOU) introduit dans [27]. Ces prix variables permettent de réduire le prix payé par un consommateur si une partie de sa consommation est déplacée vers une période de la journée où l'électricité coûte moins cher. Le deuxième type de récompense économique est basé sur la possibilité pour l'agrégateur de reverser une certaine somme d'argent aux consommateurs participants. La question de combien et comment définir cette rétribution se pose alors. Plusieurs techniques ont déjà été étudiées et envisagées. Par exemple dans [28], les auteurs modélisent un programme de gestion de la charge par un jeu avec plusieurs agents qui représente les consommateurs participants au programme. Lors de ce jeu, les consommateurs gagnent des coupons de loterie quand ils répondent aux requêtes de changement de leur consommation envoyées par l'agrégateur. À la fin de chaque jeu, qui peut être la fin de la journée par exemple, la loterie a lieu et certains consommateurs reçoivent alors une certaine somme en récompense. Dans [29], les auteurs,

quant à eux, considèrent une autre façon de rétribuer les consommateurs participants. En effet, ils définissent un surplus de coordination qui correspond aux économies faites lors de la coordination des charges par l'agrégateur. L'agrégateur reverse alors la moitié de ce surplus aux consommateurs. Les récompenses peuvent donc être très variées.

CHAPITRE 3 DÉMARCHE ADOPTÉE

Ce mémoire a pour but de présenter le produit de flexibilité que nous avons développé pour un agrégateur de chauffe-eaux. L'agrégateur utilise pour cela un contrôleur à champs moyen pour accroître ou décroître la consommation des chauffe-eaux sur une période fixée. Pour cela, une méthode permettant de résoudre le système (2.25), régissant ce contrôle, ainsi que l'algorithme permettant de déterminer la stratégie optimale de l'agrégateur sur la période considérée sont exposés dans l'article du chapitre 4.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à la consommation électrique de 500 maisons. La consommation de base considérée est obtenue à partir des données publiques du 30 janvier 2019 de L'Independent Electricity System Operator (IESO) de l'Ontario [30]. On peut alors la séparer en une demande contrôlable qui correspond à la consommation électrique des chauffe-eaux et une demande non contrôlable. La demande contrôlable est obtenue en simulant sur une journée les 500 chauffe-eaux selon une simulation de Monte-Carlo. La séparation est illustrée sur la Figure 3.1. Tous nos résultats seront comparés à cette demande de base.

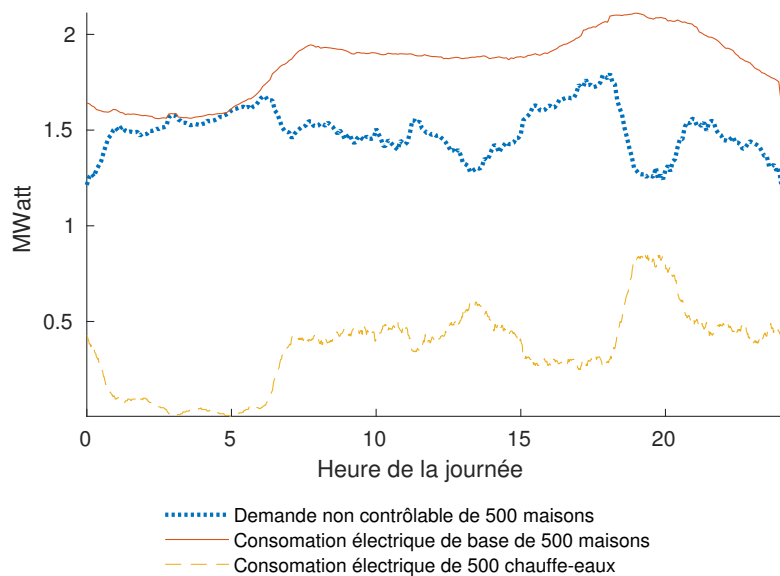


Figure 3.1 Séparation des consommations électrique de base pour 500 maisons

La méthode proposée pour résoudre le système (2.25) est une extension du travail réalisé dans [31]. Elle repose sur la résolution d'un problème d'optimisation trouvant la trajectoire la plus proche d'un point fixe parmi une famille de trajectoires. Différents solveurs ont été comparés ;

les résultats pouvant être trouvés dans l'article.

Pour déterminer la stratégie optimale, un problème d'optimisation basé sur la modélisation du groupe de chauffe-eaux, comme un chauffe-eau agrégé qui en serait la somme, est utilisé. Comme on peut l'observer sur la Figure 3.2, lors du retour au contrôle thermostatique classique des chauffe-eaux des oscillations autour de la consommation de base des chauffe-eaux, à 10 h sur la figure, peuvent être observées. Ce comportement étant problématique pour le gestionnaire du réseau (la production devant suivre la courbe de demande), nous avons incorporé au problème d'optimisation une contrainte pour que ces oscillations restent dans un intervalle acceptable autour de la consommation de base. La prise en compte de cette contrainte est décrite dans l'article.

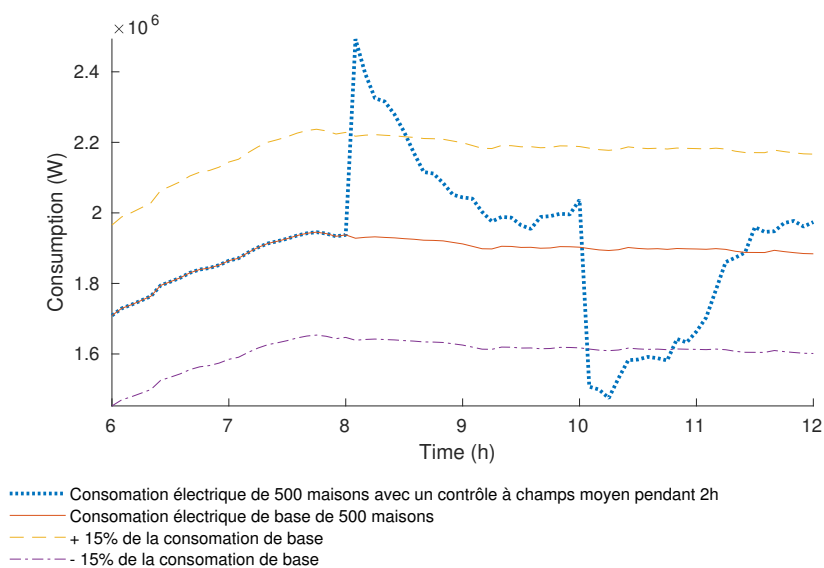


Figure 3.2 Contrôle à champs moyen actif entre 8h et 10 h et une température cible de 57°C

L'article se conclut sur quelques résultats obtenus. Des résultats complémentaires et une discussion sur ceux-ci sont ajoutés dans le chapitre 5.

Le mémoire se termine ensuite sur une conclusion et des pistes d'amélioration et de travaux futurs.

CHAPITRE 4 ARTICLE 1 : FLEXIBILITY PRODUCT FOR WATER HEATER AGGREGATORS ON ELECTRICITY MARKETS

FLEXIBILITY PRODUCT FOR WATER HEATER AGGREGATORS ON ELECTRICITY MARKETS

Marie Pied, Miguel F. Anjos *Senior Member, IEEE*, and Roland P. Malhamé *Senior
Member, IEEE*,

Manuscript submitted to *IEEE Transactions on Smart Grid*

Abstract

Intermittent renewable energy, such as solar and wind, brings uncertainty into the grid. To increase their contribution into the energy mix, load management solutions are necessary to correct the resulting typical mismatches between generation and demand. This can be achieved rather effectively with thermostatic loads such as space heaters or water heaters by considering them as means of storage. This article proposes a mean field game-based controller to provide load flexibility into the grid using a multi-layer water heater model. A uniform local state feedback law is used to track the temperature trajectory specified by an aggregator for the group of controlled devices. The law is computed via a near fixed-point algorithm. A scheduling problem for the desired mean water heater target temperatures over a time horizon is formulated to find the maximum flexibility available from the group of loads while maintaining the typical post-control load oscillations within predefined bounds over a fixed time period. The solution of the scheduling problem is obtained by solving a linear optimization problem with upper and lower bounds on the power drawn by the group to converge to an acceptable mean temperature schedule.

Index Terms - Smart Grid - Mean Field games - Optimal Control - Thermal storage

Nomenclature

Parameters

$x_{l,t}$	Temperature of layer l at time t
$\bar{u}_{l,t}$	Energy input by heating at layer l at time t
\dot{m}_t^{in}	Rate of water extraction at time t
\dot{Q}_l	Presence/absence of a heating element in layer l
x_{env}	Temperature of the surroundings

x_{in}	Inlet fluid temperature
x^{low}	Lower comfort temperature
x^{high}	Upper comfort temperature
M_l	Fluid mass in layer l
A_l	Lateral surface of layer l
C_{pf}	Specific heat of the fluid
U	Loss coefficient between tank and surroundings
\dot{V}_j^{mix}	Flow for extraction of type j
N_{wh}	Number of water heater considered
Δ_t	Time discretization step
T_{start}	Time at which control of water heaters starts
T_{end}	Time at which control of water heaters stops
T_1	Time separating in two the control horizon, on each separate interval the objective is slightly different. See Figure 4.2 for details.
d_t	Uncontrolled demand at time t
p_t^b	Base aggregate water heater power demand at time t
x_{mix}	Temperature desired by the customer
\dot{V}_j^{mix}	Rate of extraction for events of type j
$\zeta_{j,\infty}(t)$	Quasi steady-state probability of state j of the water extraction Markov Chain associated to the infinitesimal generator L_t defined by $\begin{cases} \zeta_{\infty}(t)L_t = 0 \\ \sum_{j \in \Theta} \zeta_{j,\infty}(t) = 1 \end{cases}$
ρ	Water density
V	Water heater volume
A	Water heater surface area
$C_{direction}$	Indicator for increase (+1) or decrease (-1) in power consumption
$r_{rebound}$	The acceptable range for the post-control rebound
c_d	a integer coefficient for the bisection alike method.

Decision variables

e_t	Energy stored in the water heaters at time t
φ_t	Energy to inject in the water heaters at time t

4.1 Introduction

MANY jurisdictions have adopted energy transition policies that focus on increasing the use of intermittent renewable energy sources in the electricity mix. However, a massive introduction of such sources brings new challenges linked to the instability they can potentially bring to the electricity grid because their power generation is highly variable during the day. To increase the integration of power produced by these sources, it is essential to have sufficient means to ensure the balance between generation and demand. This balance is often achieved by high marginal cost generation such as gas-fired plants (when renewable power is insufficient) or by curtailing renewable generation (when too much of it is available). Load management is thus a promising means to support greater integration of renewables.

Load management or demand response consists in controlling flexible loads to compensate for the fluctuation of generation. Much research has been done to quantify the demand response potential for peak reduction and load shifting, see e.g. [2, 3]. Projects such as PowerShift Atlantic [4] have demonstrated that this is both technically possible and economically promising. Industrial customers can already participate in demand response programs in Ontario [5].

In order to make residential load management programs possible, a new entity needs to enter into play: the aggregator. Indeed, on its own, a residential building or house has only a negligible impact on the balance of the grid, but when aggregated, the group can have a significant impact. The role of the aggregator is thus to offer a flexibility product on the electricity market while incentivizing consumer participation [7, 8]. In particular, residential customers can participate via the energy storage potential of various devices such as batteries, water heaters, and space-heaters. However, few studies address the important question of the nature of the offers that aggregators of residential loads can reasonably bid in markets [32].

This paper proposes a flexibility product that a water heater aggregator could offer. Water heaters have significant potential because they are already present in large numbers in many residential contexts. However, to achieve this, the aggregator needs a control strategy for the consumption of large numbers of water heaters, and this large-scale coordination involves various challenges. The recent SMARTDesc project [12] explored the possibility of using water heaters for load management and developed a decentralized control architecture to manage them using a relatively recent theoretical development, namely mean field game theory [13, 14].

Mean field game theory is at the intersection of statistical mechanics, game theory and optimization. This theory is devoted to the analysis of games with a large numbers of players

who have negligible individual impact but collectively create a stable mass effect [20, 24]. The corresponding controls have several advantages, including decentralization and communication parsimony. In this paper we adopt the mean field control strategy as it seems ideally suited for the large-scale control problem at hand.

There are two main contributions in this paper. The first one is the extension of a near fixed-point algorithm, first proposed for space-heaters in [31], to the case of water heaters. It is a way of deriving a decentralized control law of individual water heaters that yield an overall behavior consistent with the aggregator's target. The second one is the development of a scheduler that produces mean target temperatures for the group of controlled water heaters, inspired by [13]. These mean target temperatures correspond to the maximum load decrease or increase that the aggregator can offer while preserving customer safety and comfort, and meeting post-control power oscillation amplitude constraints upon restoration of ordinary thermostatic control.

This paper is structured as follows. In Sections 4.2 and 4.3 we summarize the water heaters model and the control used for this work and developed in [14]. Section 4.4 presents the near fixed-point algorithm, and Section 4.5 described the optimization problem to evaluate the possible flexibility offer. Section 4.6 discusses the simulation results obtained for the proposed strategy. Section 4.7 concludes the paper.

4.2 Water Heater model

To describe the dynamics of the temperature of a water heater, we model the tank using n equal volume layers with uniform temperature as shown in Figure 4.1. This model reflects the stratification of temperature in a typical tank.

The thermal dynamics are described by the energy balance in each layer:

$$M_l C_{pf} \frac{dx_{l,t}}{dt} = U A_l (x_{env} - x_{l,t}) + \dot{Q}_l \bar{u}_{l,t} + \dot{m}_t^{in} C_{pf} (x_{(l+1),t} - x_{l,t}), \quad l \neq n \quad (4.1a)$$

$$M_l C_{pf} \frac{dx_{l,t}}{dt} = U A_l (x_{env} - x_{l,t}) + \dot{Q}_l \bar{u}_{l,t} + \dot{m}_t^{in} C_{pf} (x_{in,t} - x_{l,t}), \quad l = n \quad (4.1b)$$

Note that \dot{m}_t^{in} is modeled as a piece-wise constant process with the extraction and transition rate evolving according to a continuous time Markov chain, with states θ_t taking values in $\Theta = \{1, 2, \dots, p\}$, and an infinitesimal generator denoted $L_t = (L_{q,k})_{q \in \Theta, k \in \Theta}$ as introduced in [15]. Each state j corresponds to a type of water event (no event, dishwashing, showering, etc.) and is associated to a specific flow \dot{V}_j^{mix} so that $\dot{m}_t^{in} = \dot{V}_{\theta_t}^{mix}$. Note also that we consider only two heating elements, one at the top of the tank, and one at the bottom. Equations (4.1) can

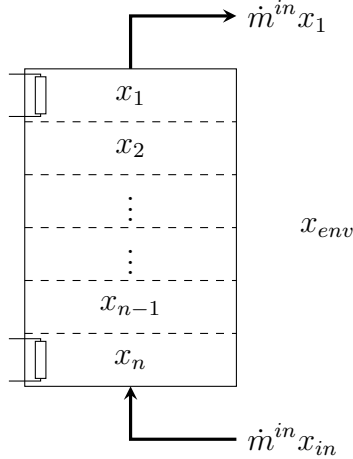


Figure 4.1 Water heater model

be written in linear form for all $l \in \{1, \dots, n\}$ with $x_t = (x_{1,t}, \dots, x_{n,t})^T$, $\bar{u}_t = (\bar{u}_{1,t}, \dots, \bar{u}_{n,t})^T$, and $\bar{A}(\theta_t)$, B , $\bar{c}(\theta_t)$ the matrices resulting from this change of notation. The thermal dynamics thus take the form

$$\frac{dx_t}{dt} = A(\theta_t)x_t + B\bar{u}_t + \bar{c}(\theta_t) \quad (4.2)$$

In the optimal control strategy detailed in Section 4.3, in order to keep the customers comfortable, we do not penalize the effort to maintain the water heater at its temperature at the start of the control horizon, but rather the effort to deviate from it when aiming for a different temperature. The thermal effort to remain on average at the initial temperature is thus obtained for free in our formulation, and the thermal dynamics can be written as

$$\frac{dx_t}{dt} = A(\theta_t)x_t + Bu_t + c(\theta_t) \quad (4.3)$$

where $A(\theta_t)$ and $c(\theta_t)$ are modified from (4.2) to account for the free effort.

4.3 Control Strategy

The control strategy we implement was introduced in [14]. It is based on so called mean field game theory, a theoretical development that occurred in the past 15 years [20, 24]. We consider a homogeneous group of N water heaters, in particular with identical layer structure and water extraction statistics. Their mean temperature is to follow a target temperature of y . As customary in game theory, a cost function is attributed to a generic individual water

heater i as follows:

$$J_i^N(u^i, j, t) = E \left[\int_t^T [(Hx_{i,\tau} - z)^2 q_\tau^y + (Hx_{i,\tau} - Hx_{i,0})^2 q^{x_0} + \|u_{i,\tau}\|_R^2] d\tau | \theta_t = j \right] \\ + E \left[(Hx_{i,T} - z)^2 q_T^y + (Hx_{i,T} - Hx_{i,0})^2 q^{x_0} | \theta_t = j \right] \quad (4.4)$$

where:

- $q_t^y = \left| \lambda \int_0^t (H\bar{x}_\tau - y) d\tau \right|$;
- z is set to x^{low} if the objective is to decrease the mean aggregate temperature, and to x^{high} if the objective is to increase that temperature;
- $\bar{x}_t = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} x_{i,t}$ is the vector of mean temperatures of the water heaters;
- $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ n & n & & n \end{pmatrix}$;
- $\|u_{i,t}\|_R^2 = (u_{i,t})^T R u_{i,t}$.

Let us remark that $x_{i,t}$ and \bar{x}_t are vectors whose dimension is the number of layers in the tank. Thus Hx_t^i is the mean temperature of water heater i .

This formulation of the cost function is unusual in that the cost coefficient q_t^y generating the pressure to go toward z (first term of (4.4)) is an *integral cost* depending on the deviation from the target. This means that the pressure (either to store energy or to decrease energy power consumption) continues to build as long as the mean temperature has not reached the target temperature. This temperature change is partially countered by the second term of (4.4) which penalizes deviations from the agent's initial temperature. Thus, each agent reaches its own specific steady-state with a mean temperature somewhere between the initial temperature and temperature z , while the overall mean temperature for the set of water heaters reaches the target y . This happens while minimizing relative temperature changes in each water heater. Furthermore, those water heaters that can contribute the most are subject to the highest pressure, and contribute accordingly when computing their best response policy. The third term of (4.4), limits the contribution of each water heater to the global effort, in order to favor local customer comfort. The last two terms represent the final cost.

When the number of controlled water heaters is very large, the laws of large numbers dictate that the aggregate mean temperature vector \bar{x}_t converges to a deterministic (yet a priori unknown) trajectory. Because that trajectory no longer depends on the actions of individual agents, (4.4) can be viewed as an isolated agent, leading to a classical optimal tracking problem. Viewed as a tracking problem for a linear quadratic regulator, this problem can be

solved through a system of Riccati equations with variables Π_t^j and offset variables $s_{i,t}^j$ [14]. This system can be used to compute the control we need to apply to each individual agent in order to achieve the common goal of reaching the target temperature. The system depends on the unknown q_t^y and to obtain it, we need to consider that *individuals optimally responding to the assumed q_t^y must collectively produce a mean temperature response \bar{x}_t such it replicates the assumed q_t^y* . When this condition is fulfilled, one can claim that the Nash equilibrium of the game has been reached. The above argument implies that we need to find the fixed point of the following system:

$$q_t^y = \left| \lambda \int_0^t (H\bar{x}_\tau - y) d\tau \right| \quad (4.5a)$$

$$-\frac{d\Pi_t^j}{dt} = \Pi_t^j A^j + A^{jT} \Pi_t^j - \Pi_t^j B R^{-1} B^T \Pi_t^j + \sum_{k \in \Theta} L_{j,k} \Pi_t^k + (q_t^y + q^{x_0}) H^T H, \quad j \in \Theta \quad (4.5b)$$

$$\Pi_T^j = (q_T^y + q^{x_0}) H^T H, \quad j \in \Theta \quad (4.5c)$$

$$-\frac{ds_t^j}{dt} = (A^j - B R^{-1} B^T \Pi_t^j)^T s_t^j + \Pi_t^j c^j - (q_t^y z + q^{x_0} H \bar{x}_0) H^T + \sum_{k \in \Theta} L_{j,k} s_t^k, \quad j \in \Theta \quad (4.5d)$$

$$s_T^j = -(q_T^y z + q^{x_0} H \bar{x}_0) H^T, \quad j \in \Theta \quad (4.5e)$$

$$\frac{d\bar{x}_t^j}{dt} = (A^j - B R^{-1} B^T \Pi_t^j) \bar{x}_t^j + \sum_{k \in \Theta} L_{k,j} \bar{x}_t^k + \zeta_{j,t} c^j - \zeta_{j,t} B R^{-1} B^T s_t^j, \quad j \in \Theta \quad (4.5f)$$

$$\bar{x}_t = \sum_{j \in \Theta} \bar{x}_t^j \quad (4.5g)$$

$$\bar{x}_t^j = E(\mathbb{1}(\theta_t = j) \bar{x}_t), \quad j \in \Theta \quad (4.5h)$$

where $\zeta_t = [\zeta_{1,t}, \dots, \zeta_{p,t}]$ is defined by:

$$\frac{\partial \zeta_t}{\partial t} = \zeta_t L^T \quad (4.5i)$$

Computing the fixed point of (4.5) corresponds to finding the global strategy of the mean field game. Then q_t^y can be used to find the individual control law of each agent. The algorithm used to find the fixed point is described in the next section.

4.4 Near Fixed Point Algorithm

While it is established in [14] that under some technical conditions a fixed points always exists, it may not always be desirable, i.e, associated with a bounded q_t^y as t goes to infinity (or equivalently, a mean water heater temperature which converges to the target y). We instead look for a desirable near fixed-point such that the trajectory converges to y when $t \rightarrow \infty$, which means that the cost coefficient trajectory $q_t^y(\lambda)$ must converge to some q_∞^y satisfying the steady state equation of (4.5) with $\bar{x}_\infty = y$. As the convergence to a fixed point with an

iterative algorithm highly depends on the choice of the integration coefficient λ , we modify our approach relative to [14], inspired by the near fixed point calculations in [31], to rely on the solution of a suitable optimization problem.

Let $\mathcal{S}_\lambda(\bar{x}_t(\lambda))$ be the solution of (4.5) for mean temperature trajectory \bar{x}_t and coefficient λ in the definition of q_t^y . We want to select the trajectory that is closest to a fixed point within a family of mean trajectories $\bar{x}_t(\lambda)$ that possess the correct steady-state behavior. This family, first introduced in [31] for space heaters, is constructed as follows. Let $N_q > n_q > 1$ and $t_0 > 0$. We solve system (4.5) with the cost coefficient

$$q_t^y = \begin{cases} n_q q_\infty^y & \text{if } t \in [0, t_0] \\ q_\infty^y & \text{if } t \geq t_0 \end{cases}$$

to obtain $\bar{x}_{1,t}$ and with

$$q_t^y = \begin{cases} N_q q_\infty^y & \text{if } t \in [0, t_0] \\ q_\infty^y & \text{if } t \geq t_0 \end{cases}$$

to obtain $\bar{x}_{2,t}$. Although they may not be fixed points, these two trajectories satisfy the correct steady-state behavior and constitute the bounds of the family. The associated lambdas are respectively

$$\lambda_1 = \frac{q_\infty^y}{|\int_0^\infty (H\bar{x}_\tau^1 - y)d\tau|} \text{ and } \lambda_2 = \frac{q_\infty^y}{|\int_0^\infty (H\bar{x}_\tau^2 - y)d\tau|}.$$

The family is then defined as

$$\mathcal{F}(f) = \left\{ \bar{x}_t(\lambda) \mid \lambda = \frac{q_\infty^y}{|\int_0^\infty (H\bar{x}(\lambda)_\tau - y)d\tau|}, \bar{x}_t(\lambda) = f\bar{x}_{1,t} + (1-f)\bar{x}_{2,t}, \right. \\ \left. f \in [0, 1], \lambda \in [\min(\lambda_1, \lambda_2), \max(\lambda_1, \lambda_2)] \right\}.$$

Within this family, we select the trajectory that is the closest to a fixed point using the following optimization problem where the optimized variable are on n_q, N_q, t_0 and f :

$$\begin{aligned} \min \quad & a_1 \overbrace{\|\bar{x}_t(\lambda) - \mathcal{S}_\lambda(\bar{x}_t(\lambda))\|_{\mathcal{L}_2}}^{\text{so as to be a fixed point}} + a_2 \overbrace{(\mathcal{S}_\lambda(\bar{x}_t(\lambda))(T) - y)^2}^{\text{convergence to the target}} \\ \text{s.t.} \quad & \bar{x}_{1,t}, \lambda_1, \bar{x}_{2,t}, \lambda_2 \text{ computed as described above} \\ & \bar{x}_t(\lambda) \in \mathcal{F}(f) \\ & N_q \in [1, N_q^{max}] \\ & n_q \in [1, n_q^{max}] \\ & t_0 \in [0, t_0^{max}] \end{aligned}$$

where N_q^{max}, n_q^{max} and t_0^{max} are chosen arbitrarily, (4,2,5) in our study.

The choice of the length of the control horizon T and of n_q and N_q allows us to impose somewhat the speed at which we wish the aggregate control to operate. The resulting optimal trajectory \bar{x}_t can either i) be sent by the aggregator to all water heaters so that they implement locally their optimal control policy, or ii), if local computational capacity allows it, the optimization can be carried out locally by each water heater with only the aggregate mean temperature vector communicated to them at the start of the control horizon.

We tried several solvers in Julia to solve this problem: `BlackBoxOptim.jl` [33] (denoted BBO) with a differential evolution strategy (Adaptive DE/rand/1/bin with radius limited sampling), LBFSGS and Gradient Descent (denoted GD) from the package `Optim.jl` [34], and finally just an iteration of the family by iterating the variables in their scope. We tested them with several initial and target temperatures; a pair of initial and target temperatures is called an instance. We tested the solvers on instances with differences between initial and target temperatures of $\{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$. We used an Intel(R) Core(TM) i7-2600 CPU @ 3.40GHz with 8 processors. The results are reported in Table 4.1.

The *Distance* indicator is computed as the mean of $\|\bar{x}_t(\lambda_{opt}) - \mathcal{S}_{\lambda_{opt}}^\infty(\bar{x}_t(\lambda_{opt}))\|_1$ over all the instances, where $\mathcal{S}_{\lambda_{opt}}^\infty(\bar{x}_t(\lambda_{opt}))$ is the solution of (4.5) after we have iterated several times starting with $\bar{x}_t(\lambda_{opt})$ for \bar{x}_t and λ_{opt} for λ until we converge to a fixed point of the system with a fixed accuracy $\epsilon > \|\bar{x}_t(\lambda_{opt}) - \mathcal{S}_{\lambda_{opt}}(\bar{x}_\tau(\lambda_{opt}))\|_1$. If there is no convergence to a fixed point after a large number of iterations the *distance* indicator will be very large. The *time* indicator is the mean CPU time over all instances.

Table 4.1 Comparison of four optimization solvers

Solver	BBO	LBFSGS	GD	Iteration
Number of unsolved instances (out of 549)	0	15	8	0
Distance	0.0232	0.0294	0.0261	0.0118
Time (s)	33.98	33.23	32.86	70.03

All four methods display good convergence as the *Distance* indicator remains relatively small. Looking at the unsolved instances, the LBFSGS and Gradient Descent methods perform poorly because they failed many times whereas the other two methods solved all the instances. Finally, between BBO and Iteration, we select BBO because it takes half the time on average.

4.5 Flexibility product

In this section we describe how to determine the maximum increase/decrease of power consumption that the aggregator is able to achieve with a given set of water heaters. This information is then used in the approach from Section 4.4 to determine the target temperatures.

We model the set of water heaters as one large aggregated water heater with a unique layer and we compute an energy balance to find the maximum amount of energy that can be injected in this large water heater during a given Δ_t . The stored energy can then be converted into a target temperature for the mean field control using the equation

$$y_t = \frac{e_t}{N_{wh}\rho C_{pf}} + x_L.$$

Two conditions need to be satisfied: i) the water heater power demand must be as close to constant as possible during the control horizon, and ii) the rebound after the horizon must lie within an acceptable range, noted $r_{rebound}$. The rebound is the drop/peak in the power demand after the water heaters revert to the thermostatic mode relative to the demand in the no-control scenario. The different time interval and objectives of our flexibility are summaries in Figure 4.2. To find the maximum achievable flexibility under these two conditions, we developed an algorithm formed of 4 blocks. The first block is a *scheduler* which compute a temperature schedule depending on bounds in the injected energy φ_t , $\varphi^{min} = (\varphi_{T_{start}}^{min}, \varphi_{T_{start}+\Delta_t}^{min}, \dots, \varphi_{T_{end}}^{min})$ and $\varphi^{max} = (\varphi_{T_{start}}^{max}, \varphi_{T_{start}+\Delta_t}^{max}, \dots, \varphi_{T_{end}}^{max})$. Initial values of this vectors are $\varphi_{init}^{min} = (0, 0, \dots, 0)$ and $\varphi_{init}^{max} = (\dot{Q}\Delta_t N_{wh}, \dots, \dot{Q}\Delta_t N_{wh})$. The second block is a *Simulator* which perform a Monte Carlo simulations of N_{wh} water heaters under the temperature schedule just computed, the control described in Section 4.3 and the dynamics described in Section 4.2. The third one is an *Updater* which actualizes the value of the bounds φ^{min} , φ^{max} depending on whether the rebound constraint is satisfy or not. The last one is the *Convergence test* based on the results of which we go back to the first block or we exit the algorithm. The flow chart of the algorithm can be found in Figure 4.3.

4.5.1 Scheduler

The scheduler is an optimization problem, the output of which is a temperature schedule for the mean field controller.

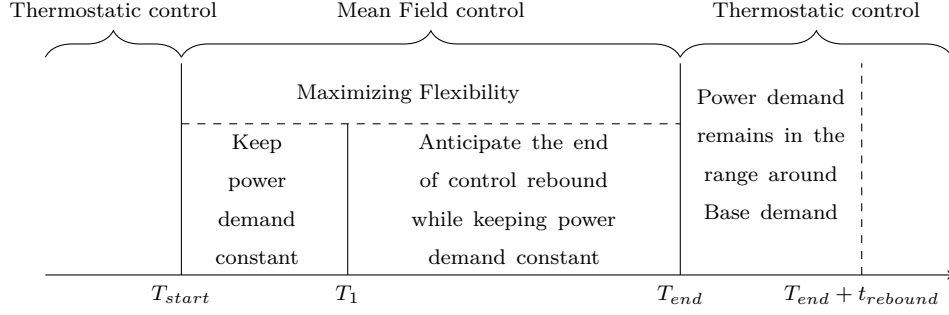


Figure 4.2 Definition of the goals depending on time intervals

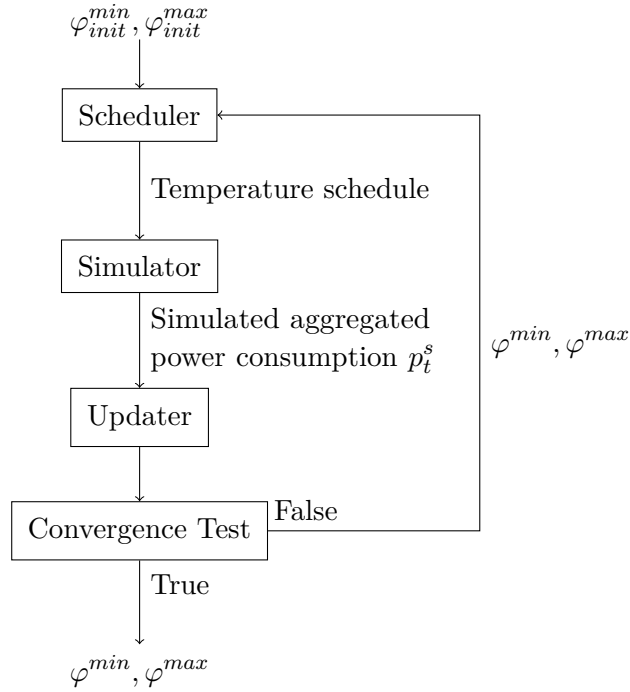


Figure 4.3 Description of the algorithm to implement the rebound constraint

Objective function to be maximized

$$Flexibility(\varphi_t, z_t) = a_1 \sum_{t \in]T_{start}, T_{end}[} C_{direction}(p_t^b - p_t) - a_2 \sum_{t \in]T_{start}, T_1[} z_t - a_3 \sum_{t \in [T_1, T_{end}]} z_t$$

The first term maximizes the increase/decrease in power demand by maximizing the distance from the base power demand to the power demand at optimality, while the second and third terms minimize the change in power demand to keep it close to constant on $]T_{start}, T_1[$ and $[T_1, T_{end}]$.

Constraints

- The residential power consumption at each time step is the sum of the uncontrollable part d_t and the controllable part, namely the amount of energy injected in the water heater:

$$p_t = d_t + \frac{\varphi_t}{\Delta_t}$$

- The change in power consumption z_t must be greater than or equal to $|p_t - p_{t-1}|$:

$$\begin{aligned} z_t &\geq p_t - p_{t-1} \\ z_t &\geq p_{t-1} - p_t \end{aligned}$$

- The energy stored in the water heater at time t is equal to the amount of energy stored at $t - 1$ plus the energy injected minus the losses.

$$\begin{aligned} e_t &= e_{t-1} + \varphi_t - l(e_{t-1}) \\ l(e_t) &= l_c(e_t) + l_e(t) \end{aligned}$$

where :

$$\begin{aligned} l_c(e_t) &= UA \left(\frac{e_t}{C_{pf}\rho V} + N_{wh}(x_{in} - x_{env}) \right) \\ l_e(t) &= \rho C_{pf}(x_{mix} - x_{in})V^{extract}(t) \\ V^{extract}(t) &= \sum_{j \in \Theta} N_{wh}\zeta_{j,\infty}(t)\dot{V}_j^{mix} \Delta_t \end{aligned}$$

$l_c(e_t)$ correspond to the loss from heat transfer by conduction with the environnement and $l_e(t)$ is the energy loss due to the water extraction, $V^{extract}(t)$ representing the expectation over the extraction type of volume of water drawn for the aggregated water heater.

- The energy stored in the water heater is linked to the temperature:

$$\begin{aligned} e_{T_{start}} &= N_{wh}\rho V C_{pf}(x_{init} - x_{in}) \\ e_t &\geq N_{wh}\rho V C_{pf}(x_{low} - x_{in}) \\ e_t &\leq N_{wh}\rho V C_{pf}(x_{high} - x_{in}) \end{aligned}$$

This give us bounds on the energy we are able to store, depending on the initial amount of energy stored.

- The amount of energy that can be injected into the water heater is bounded by φ^{min} and φ^{max} at each time step. $B_{down}(t)$ or $B_{up}(t)$ in (4.6), are active depending on the value of $C_{direction}$ and prevents overshooting/undershooting the initial temperature as we act to decrease/increase the power consumption. φ_t is bounded above/below appropriately:

$$\varphi_t \geq \varphi_t^{min} \quad (4.6a)$$

$$\varphi_t \leq \varphi_t^{max} \quad (4.6b)$$

$$\varphi_t \geq B_{down}(t-1) \quad (4.6c)$$

$$\varphi_t \leq B_{up}(t-1) \quad (4.6d)$$

where :

$$\begin{aligned} B_{down}(t) &= N_{wh}\rho VC_{pf}(C_+x_{low} + C_-x_{init} - x_{in}) - e_t + l_t \\ B_{up}(t) &= N_{wh}\rho VC_{pf}(C_-x_{high} + C_+x_{init} - x_{in}) - e_t + l_t \\ C_+ &= \frac{(1 + C_{direction})}{2} \\ C_- &= \frac{(1 - C_{direction})}{2} \end{aligned}$$

4.5.2 Simulator

The *Simulator* performs the simulation of the N_{wh} water heaters individually under the temperature schedule just computed by the *Scheduler* through a Monte-Carlo simulation on the horizon time $[T_{start} - 2h, T_{end} + t_{rebound}]$. We perform this simulation because the power demand during the post T_{end} rebound phase, needed to evaluate the rebound value, depends on the temperature distribution within the water heaters, and this distribution cannot be obtained from an aggregate single water heater model.

4.5.3 Updater

The *Updater* takes as input the aggregated power demand computed by the *Simulator* p_t^s, p_t^b and $r_{rebound}$.

First, the *Updater* performs a rebound constraint test :

1. If $|p_t^s - p_t^b| \geq r_{rebound}p_t^b$, the rebound constraint is not satisfied
2. If $|p_t^s - p_t^b| \leq r_{rebound}p_t^b$, the rebound constraint is satisfied

Then, it updates the bounds φ_t^{max} and φ_t^{min} using a technique similar to the one used in the bisection method.

— If we are in case 1, the bounds are too permissive. The bounds are updated the following way :

— If $C_{direction} = 1$: $\varphi_{prev}^{max} = \varphi^{max}$ and $\varphi_{T_{end}}^{max} = \frac{(c_d - 1)\varphi_{T_{end}}^{max} + \varphi_{prev, T_{end}}^{min}}{c_d}$

— If $C_{direction} = -1$: $\varphi_{prev}^{min} = \varphi^{min}$ and $\varphi_{T_{end}}^{min} = \frac{\varphi_{prev, T_{end}}^{max} + (c_d - 1)\varphi_{T_{end}}^{min}}{c_d}$

— If we are in case 2, the bounds may not be permissive enough. The bounds are updated the following way :

— If $C_{direction} = 1$: $\varphi_{prev}^{min} = \varphi^{max}$ and $\varphi_{T_{end}}^{max} = \frac{(c_d - 1)\varphi_{T_{end}}^{max} + \varphi_{prev, T_{end}}^{max}}{c_d}$

— If $C_{direction} = -1$: $\varphi_{prev}^{max} = \varphi^{min}$ and $\varphi_{T_{end}}^{min} = \frac{\varphi_{T_{end}}^{min} + (c_d - 1)\varphi_{prev, T_{end}}^{min}}{c_d}$

φ_{prev}^{min} and φ_{prev}^{max} are initialized with φ_{init}^{min} and φ_{init}^{max} .

We can observe that acting on $\varphi_{T_{end}}^{max}, \varphi_{T_{end}}^{min}$ will lead to a corresponding change in the temperature schedule. The last target of the schedule will follow the same trend as $\varphi_{T_{end}}^{max}, \varphi_{T_{end}}^{min}$, when we decrease $\varphi_{T_{end}}^{max}$ it will result in a decrease of the last target temperature for example. Combining this to the last term of the objective function, which imposes that the power consumption remain as constant as possible on $[T_1, T_{end}]$, we will observe in the next section, that the target will gradually increase or decrease on $[T_1, T_{end}]$ to prepare water heaters to shift to thermostatic control and anticipate the post-control rebound.

4.5.4 Convergence Test

We exit the algorithm if $C_+|\varphi_{prev, T_{end}}^{max} - \varphi_{T_{end}}^{max}| + C_-|\varphi_{prev, T_{end}}^{min} - \varphi_{T_{end}}^{min}|$ is small enough or if we reached the maximum permitted number of iterations.

4.6 Case Study

We use in this case study the setup of the SMARTDesc project [12]. We consider 500 identical water heaters with a two-layer tank. The infinitesimal generator L_t of the Markov chain modeling water extraction is piecewise constant every 2h during the day with values taken from [35]. The Markov chain has 2 states $\theta_t \in \{0, 1\}$ that represent the absence or presence of water extraction, and $\dot{m}_t = \dot{V}^{mix}\theta_t$ where $\dot{V}^{mix} = 2.62\ell/\text{min}$ is the extraction flow. The parameters are provided in Table (4.2).

We ran the scheduler described in Section 4.5 with $T_1 = T_{start} + 2h$ and $T_{end} = T_{start} + 4h$, i.e., the water heaters are controlled for 4 hours, maximizing flexibility during the first

Table 4.2 Parameters Value for simulations

\dot{Q}_t	4500 J/s	A	2.55 m^2
x_{env}	25°C	M_t	136.5 kg
x_{in}	15°C	C_{pf}	4190 $J/(kgK)$
x^{low}	50°C	U	28.38 $J/(m^2Kmin)$
x^{high}	60°C	\dot{V}_j^{mix}	2.62 l/min
x_{mix}	38°C	q^{x_0}	8000 h^{-1}
V	273 ℓ	R	$\begin{pmatrix} 0.025 & 0 \\ 0 & 0.025 \end{pmatrix} h^{-1}$

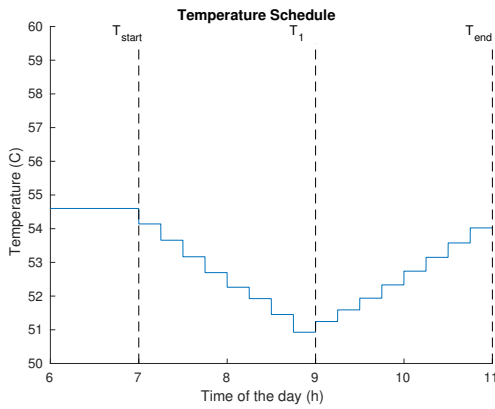
2 h ($C_{direction} = -1$), and anticipating the end of control rebound during the other 2 h ($C_{direction} = -1$). The results are reported in Figure 4.4 and Figure 4.5 respectively.

The total power consumption considered is that of the 500 homes and represents the sum of the uncontrollable demand, d_t , and that of the 500 water heaters simulated independently with distinct initial conditions and extraction trajectories. This corresponds to Monte Carlo simulations of 500 water heaters with the parameters stated above in Table 4.2. The base power demand with which our simulations are compared is the total power consumption of 500 homes. Power demand data is taken from the public demand data report of the Independent Electricity System Operator (IESO) of Ontario [30]. We used the data from January 30, 2019. This data represents the full power demand of Ontario; to obtain the demand of 500 homes we have applied a reduction coefficient, 10^{-4} , to this overall demand to obtain only the power consumption of 500 homes.

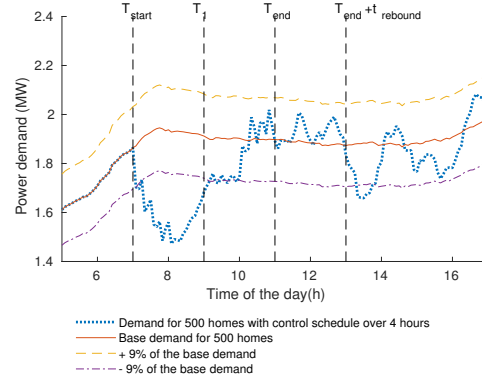
We consider the two following cases :

- Case 1.a : Active control between 7a.m and 11a.m. First a 2 hours period of power reduction relative to base power demand, then 2 hours to anticipate the rebound; after 11a.m mean field control ends and one reverts to the classical thermostatic control of water heaters.
- Case 1.b : Active control between 2p.m and 4p.m. First a 2 hours period of power increase relative to base power demand, then 2 hours to anticipate the rebound; after 6p.m mean field control ends and one reverts to the classical thermostatic control of water heaters.

In Figure 4.4 and Figure 4.5, we display the output of our optimization for the two cases. Results are very similar. Looking at the target temperature schedules (Figure 4.4(a) and 4.5(a)), on the first part of the control period (before T_1) the strategy is to have a target temperature that decreases (resp. increases) up to T_1 . After T_1 the target starts to increase (resp. decrease) again in order to heat (resp. cool) the water heaters gradually to anticipate

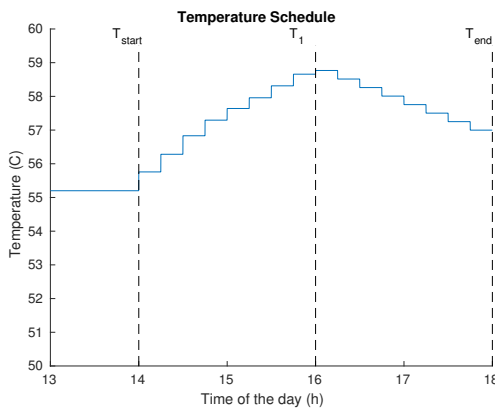


(a) Mean field target schedule temperature

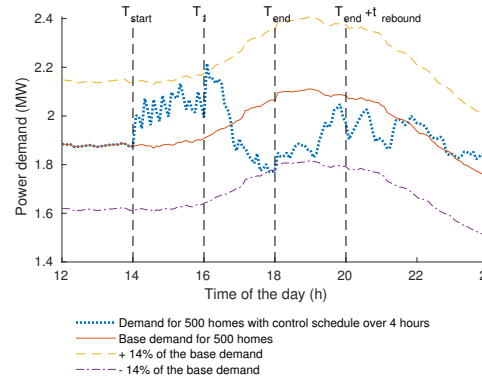


(b) Comparison of baseline power demand and the power demand under the schedule in Figure 4.4(a)

Figure 4.4 Case 1.a - Decrease of the power demand



(a) Mean field target schedule temperature



(b) Comparison of baseline power demand and the power demand under the schedule in Figure 4.5(a)

Figure 4.5 Case 1.b - Increase of the power demand

the rebound and have the distribution of water heaters temperature not too close to the comfort temperatures. In Figure 4.4(b) and 4.5(b), we observe that while achieving the objective of decreasing the power demand (resp. increasing the power demand), the rebound stays within a 9% range (resp. 14% range) of the base power consumption. This rebounds are the minimum we can achieve for the given parameters (T_{start} , T_{end} , $t_{rebound}$, ...).

In case 2, we can see also that in the schedule we reach the upper comfort limit temperature. So if the initial temperature was lower, we anticipate that we could have had more flexibility, as we could have increased the temperature more. An initial phase were we decrease the

temperature of the water heaters, to anticipate our need of flexibility, could then be beneficial. Reciprocal situation can appear while decreasing the power demand.

Economic discussion

To assess the economic viability of such an aggregator we consider the case of Ontario with the Ontario time-of-use (TOU) and the Canadian dollars currency. TOU prices are used to compare how much consumers would have paid in case where no flexibility control is applied on the water heaters, versus that when it is applied [36]. The difference will indicate the minimum financial incentives to be given to participating customers: 0 if they pay less when we apply control on the water heaters, and the net cost of the flexibility action if customers pay more when we apply control. We then need to evaluate how much the aggregator can sell their flexibility on the market. For this we rely on the *Auction clearing price* of the Demand Response Auction in Ontario [30]. In this auction, bidders commit to provide flexibility every business day of a six month period. Given these two quantities, we can evaluate the possible profit for the aggregator for each flexibility product. Results for 1.a and 1.b are summarized in Table 4.3. Then we perform a Net Present Value study for a water heater aggregator. We consider that the initial investment will be a participation to the purchase of new water heaters for the 500 homes, with a cost of 425\$ for a new water heater. Water heaters are said to have a 10 to 15 years lifetime. Then the net cash flows each month will be the profit obtained with the combination of the two flexibility offers 1.a and 1.b every day and we consider a discount rate of 6% per year, or 0.49% per month [37]. Results of this study can be found in Table (4.4). With a participation of 40% from the aggregator, the NPV becomes positive in 4.5 years, and with a 50 %, it is in almost 6 years. This type of investment seems to be profitable with a participation rate below 40 to 50% taking into account the lifetime of a water heater.

4.7 Conclusion

In this paper, we have proposed a flexibility product for a water heater aggregator. The control strategy used for the water heaters is a mean field approach that is suited for controlling large scale groups. We have adapted a recently developed strategy [31] for solving the mean field control problem for space-heaters to the case of water heaters. More precisely, we used an optimization approach to find a trajectory for the water heaters to follow as an approximate, but guaranteed to meet target, mean field control strategy. Then, to assess the possible flexibility that the group of water-heaters could provide during a fixed interval, we used a linear program that works as a target scheduler for the mean field controller. The output is a schedule that permits to maximize the flexibility provided. To incorporate an additional

Table 4.3 Profit results for different cases

Case number	Duration	Percentage of rebound	Flexibility provided (kW)	Profit (CAD)
1.a	4	9%	212	49.7
1.b	4	14%	44	10.3

Table 4.4 Results of the profitability study

Discount rate	Participation (%)	Profitability time (month)	NPV(10 y)	NPV(15 y)
0.49%	100	177	-49 196\$	2 992 \$
0.49%	50	70	57 053 \$	109 242 \$
0.49%	40	54	78 303 \$	130 492 \$
0.49%	30	39	99 553 \$	151 742 \$
0.49%	0	0	163 303 \$	215 492 \$

constraint that ensures that the rebound, at the end of the control period, in the power consumption remain limited compared to the base power consumption, a bisection like method algorithm has been added to iterate the scheduler and find eligible schedules.

In future work, it would be interesting to consider some stochastic optimization for the scheduler to take into account the uncertainty on both the production of renewable sources and on the water extraction, to have a more robust schedule. It could also be of interest to develop a specific solver to compute the near fixed point using the form of the optimization problem to achieve greater efficiency. Also, more detailed economic modelling could give more accurate information on the profitability of such aggregator.

CHAPITRE 5 DISCUSSION GÉNÉRALE

5.1 Discussion sur l'algorithme de calcul de l'offre de flexibilité

Dans la partie 4.6, la partie *Case Study* de l'article, il est mentionné que le générateur infinitésimal de la chaîne de markov modélisant l'extraction d'eau est considéré constant par morceaux sur des intervalles de 2h. Les valeurs de la statistique de cette chaîne de markov sont extraites de [35]. Sur la figure 5.1, on peut observer l'évolution du taux d'extraction, du temps moyen d'un tirage d'eau et du temps moyen entre deux tirage d'eau.

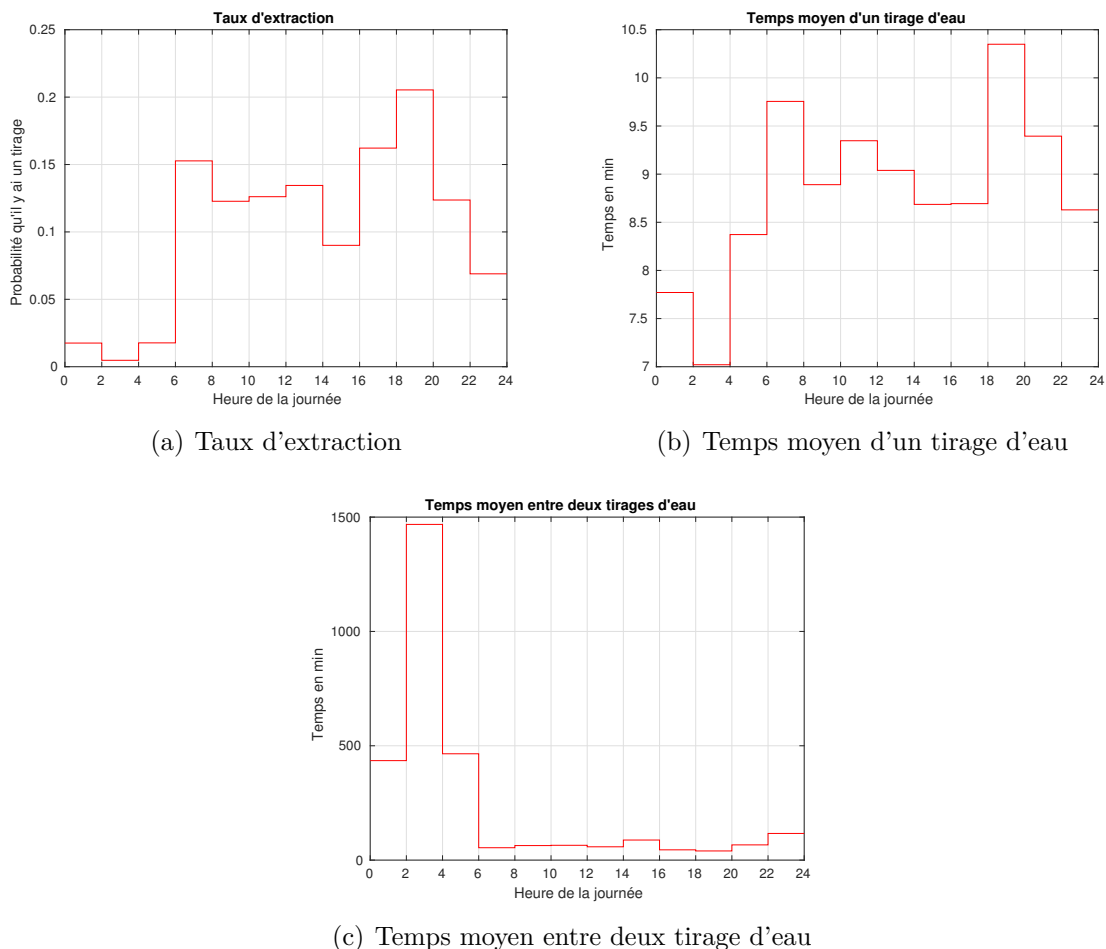


Figure 5.1 Évolution des statistiques de la chaîne de Markov sur une journée

Cette hypothèse de générateur de la chaîne constant par morceaux pose certains problèmes dans la simulation, en particulier à 6 h où le taux d'extraction augmente significativement ou à 14 h où le taux d'extraction diminue significativement. On peut l'observer sur la Figure 5.2

et la Figure 5.3. A 14h, sur la Figure 5.2, on observe lorsque l'on contrôle, une baisse non voulue dans la demande de puissance a lieu et est dûe au changement brutal des statistiques de la chaîne de Markov. On observe un comportement similaire lorsque l'on contrôle les chauffe-eaux à 6h, la puissance électrique augmente brusquement. Ces effets indésirable sont dûs au fait que pour simplifier la simulation et le calcul des températures cibles, dans (2.25) on utilise ζ_{∞}^j à la place de ζ_t^j . Il peut aussi être lié au fait que, il vaudrait mieux considérer un générateur complètement variable en fonction du temps plutôt que de le découper en valeurs constantes par morceaux.

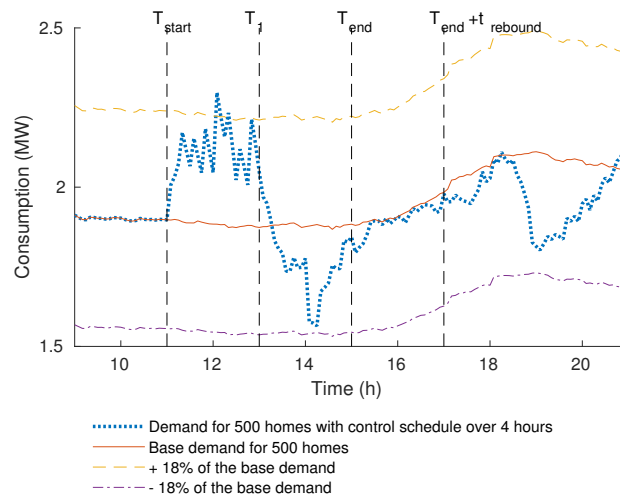


Figure 5.2 Contrôle du groupe de chauffe-eaux avec 14h dans l'intervalle de contrôle

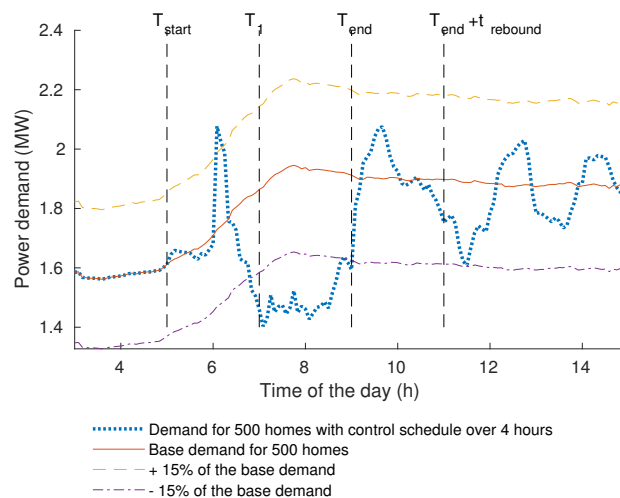


Figure 5.3 Contrôle du groupe de chauffe-eaux avec 6h dans l'intervalle de contrôle

Une des contraintes majeures considérée dans cette maîtrise est que les oscillations post-contrôle doivent rester dans un intervalle acceptable. Cependant on observe, comme sur la Figure 5.4, que les oscillations post contrôle peuvent être bénéfiques, car elles peuvent coïncider avec un moment où il serait intéressant pour l’opérateur de réseaux d’augmenter ou diminuer la consommation. En effet, sur la Figure 5.4, on obtient une oscillation désirable après la période de contrôle car elle résulte en une diminution de la puissance électrique au moment du pic de consommation du soir.

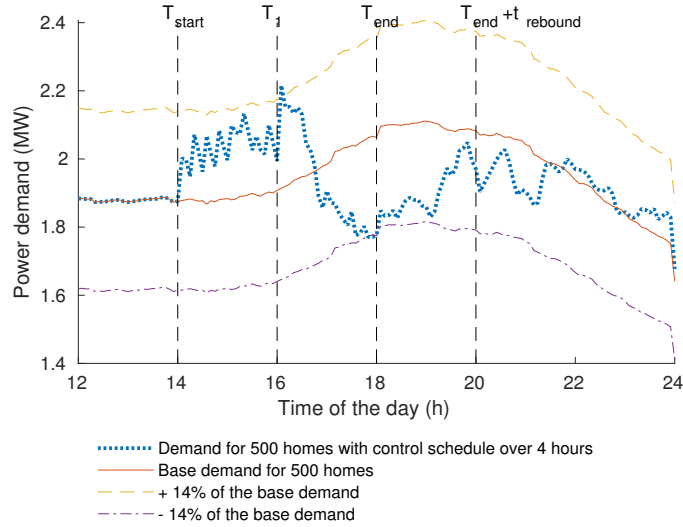


Figure 5.4 Offre de flexibilité avec une oscillation bénéfique

5.2 Discussion sur l’analyse économique

Dans cette maîtrise, une approximation du profit réalisé pour un produit spécifique par l’agrégateur de chauffe-eaux est obtenue par la formule (5.1) comme mentionnée dans l’article en section 4.6.

$$Profit = \underbrace{C_{eq} \times P_{dev}}_{\text{Facturation du produit}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{N_{wh}} \min(0, C_i^{control} - C_i^{base})}_{\text{Récompense aux consommateurs}} \quad (5.1)$$

Où :

- C_{eq} est le prix d’équilibre du marché de gestion de la charge en Ontario [30] (égale à 234\$/MW dans notre cas), en \$/MW

- P_{dev} est la déviation moyenne de la puissance électrique fournie par l'agrégateur, en MW .
- C_i^{base} est le prix payé par le client i pour l'électricité si l'agrégateur n'agissait pas, en \$.
- $C_i^{control}$ est le prix payé par le client i pour l'électricité lorsque l'agrégateur applique un contrôle, en \$.

La récompense envisagée lors de l'analyse économique de l'offre de flexibilité réalisée à la section 4.6 est très simplifiée. Pour une approche plus approfondie de la viabilité du produit sur le marché de l'électricité, il serait intéressant de la remplacer par un mécanisme plus compliqué qui pourrait inciter plus les consommateurs à participer au programme. Le prix de vente du produit de flexibilité par l'agrégateur considéré est aussi simple et approximatif. L'utilisation de C_{eq} comme prix de vente du produit de flexibilité fournit une première approximation. Une étude plus poussée du marché par la théorie des jeux par exemple pourrait permettre d'avoir une idée plus précise de ce que pourrait être ce prix de vente dans notre cas. En effet, pour le marché de l'Ontario, les agrégateurs s'engagent à fournir une diminution de la charge sur la période de pic chaque jour pendant 6 mois. Le produit présenté dans ce mémoire a plus pour vocation d'être polyvalent sur plusieurs périodes de la journée ainsi qu'en augmentation ou diminution de charge. Il est de fait assez différent de ce qui est considéré dans le marché de gestion de la charge en l'Ontario.

En plus de ce calcul de profit qui donne une première indication de viabilité, une étude de rentabilité de l'investissement d'un agrégateur de chauffe-eau a été menée grâce à un calcul de sa valeur actuelle nette. On va ici redétailler les hypothèses de calcul spécifiées dans l'article et compléter l'analyse.

Pour ce calcul, nous supposons que le financement initial, noté I , de l'agrégateur correspond à une participation de l'agrégateur pour l'achat d'un chauffe-eau neuf pour les 500 maisons concernées. Cette participation est égale à un pourcentage de 425 \$ qui correspond au prix d'achat d'un chauffe-eau de capacité 270 L. On considère que l'agrégateur fournira deux offres de flexibilité par jour, une en augmentation de charge et une en diminution de charge, et le profit de chacune des offres est obtenu par l'équation (5.1). La somme de ces profits sur le mois i donne le flux F_i de trésorerie pour le mois i . Enfin, on considère un taux d'actualisation, noté a , de 6% par an [37], soit 0.49% par mois. La valeur actuelle nette au mois T se calcule alors par la formule de l'équation (5.2). La durée de vie d'un chauffe-eau étant de 10 à 15 ans, l'étude de rentabilité est réalisée sur cette période, c'est à dire sur une période 120 à 150 mois.

$$VAN(T) = \sum_{t=0}^T \frac{F_t}{(1+a)^t} - I \quad (5.2)$$

Le premier T tel que $VAN(T)$ est positif est désigné dans les tableaux 5.2 et 5.4 comme le temps de rentabilité. À partir de ce temps-là, il devient rentable d'investir.

Cas n°1 :

On considère ici une première combinaison de 2 offres de flexibilité dont les caractéristiques sont spécifiées dans le tableau 5.1. Les résultats de l'analyse de rentabilité pour différents pourcentages de participation de l'agrégateur sont donnés dans le tableau 5.2. On remarque que si l'agrégateur rembourse intégralement les frais engagés pour le changement des chauffe-eau des 500 maisons, la valeur actuelle nette de l'investissement est encore négative après 10 ans. Elle ne devient positive qu'au bout de 133 mois c'est-à-dire un peu plus de 11 ans. La durée de vie d'un chauffe-eau étant comprise entre 10 ans et 15 ans, un tel investissement ne peut donc pas être considéré comme rentable. Cependant, lorsque l'on considère un pourcentage de remboursement plus faible, 50% du prix de remplacement par exemple, on obtient une valeur actuelle nette qui devient positive au bout de 56 mois soit environ 4 ans et demi. Dans ce cas-là, l'investissement devient intéressant et rentable ; au bout de dix ans le projet aura une valeur de 91 646\$. Avec des taux de financement de remplacements de chauffe-eau plus faibles, l'investissement devient rentable plus tôt et la valeur après 10 ans sera plus importante, mais les consommateurs risquent d'être moins enclins à participer au programme.

Tableau 5.1 Offres de flexibilité fournies dans le Cas n°1

Direction	T_{start}	Durée	T_1	$t_{rebound}$	Percentage of rebound	Flexibility provided (kW)	Profit (CAD)
Augmentation	1 a.m	4	3 a.m	2	13%	74	17.27
Diminution	6 p.m	4	8 p.m	2	14%	237	55.44

Tableau 5.2 Résultat de l'étude de rentabilité pour le Cas 1

Taux d'actualisation	Participation de à l'achat (%)	Temps de rentabilité (en mois)	VAN(10 ans)	VAN(15 ans)
0.49%	100	133	-14 603 \$	48 641 \$
0.49%	50	56	91 646 \$	154 891 \$
0.49%	40	44	112 896 \$	176 141 \$
0.49%	30	32	134 146 \$	197 391 \$
0.49%	0	0	197 896 \$	261 141 \$

Cas n°2 :

Dans cette deuxième combinaison, les offres fournissent moins de profit pour l'agrégateur, comme on peut le voir dans le tableau 5.3. Les résultats de l'analyse de rentabilité de ce deuxième cas sont donnés dans le tableau 5.4. Pour le cas où l'agrégateur prend l'intégralité du prix de remplacement des chauffe-eaux à sa charge, la valeur actuelle nette reste négative sur quasiment les 15 ans ; elle ne devient positive qu'au bout de 14.75 ans. Un tel investissement est donc non rentable et ne devrait pas être envisagé. Pour une participation à hauteur de 50% du prix de remplacement, l'investissement est rentable au bout de 70 mois soit quasiment 6 ans. Des participations à des pourcentages plus faibles permettent de réduire encore cette date de rentabilité.

Tableau 5.3 Offres de flexibilité fournies dans le Cas n°2

Direction	T_{start}	Durée	T_1	$t_{rebound}$	Percentage of rebound	Flexibility provided (kW)	Profit (CAD)
Augmentation	2 p.m	4	4 p.m	2	14%	44	10.3
Diminution	7 a.m	4	9 a.m	2	9%	212	49.7

Tableau 5.4 Résultat de l'étude de rentabilité pour le Cas n°2

Taux d'actualisation	Participation de à l'achat (%)	Temps de rentabilité (en mois)	VAN(10 ans)	VAN(15 ans)
0.49%	100	177	-49 196\$	2 992 \$
0.49%	50	70	57 053 \$	109 242 \$
0.49%	40	54	78 303 \$	130 492 \$
0.49%	30	39	99 553 \$	151 742 \$
0.49%	0	0	163 303 \$	215 492 \$

Comparaison

En comparant, les résultats du Cas n°2 avec ceux du Cas n°1, on observe bien que la rentabilité dépend beaucoup des offres qui sont acceptées par l'opérateur de réseaux, car ces offres influencent le profit mensuel de l'agrégateur. On peut cependant conclure qu'un investissement inférieur à 50 % du prix d'achat des 500 chauffe-eaux semble plutôt rentable sur la durée de vie d'un chauffe-eau. Pour conclure plus précisément sur la rentabilité et sur la hauteur de participation de l'agrégateur à l'achat de nouveau chauffe-eau, il faudrait réaliser une étude plus poussée de rentabilité en estimant le profit en pondérant les différentes offres de flexibilité possibles par exemple. Une étude qualitative du taux de participation

au programme en fonction des taux de récompenses pour les consommateurs pourrait aussi apporter des informations complémentaires pour conclure.

CHAPITRE 6 CONCLUSION

6.1 Synthèse des travaux

Dans ce mémoire, nous avons formulé un produit de flexibilité pour un agrégateur de chauffe-eaux. Dans un premier temps, le contrôle à champ moyen a été étudié et une technique de calcul des trajectoires moyennes cibles solution du système de contrôle à champ moyen du groupe de chauffe-eaux a été développée. Elle utilise la formulation d'un problème d'optimisation permettant de sélectionner le meilleur point fixe dans une famille de trajectoires possibles et désirables. Ensuite, un calculateur de l'offre technique de l'agrégateur a été implémenté. Il prend la forme d'un planificateur de trajectoire prenant en compte des contraintes de confort et de limitation d'oscillations post-contrôle. Pour finir, l'aspect économique d'un tel produit a été étudié par le calcul des profits réalisés lors de la vente du produit sur un marché de l'électricité. Cette étude a été approfondie avec une étude de rentabilité d'investissement pour l'agrégateur.

En diminution et augmentation de charge, il est possible d'atteindre des rebonds de l'ordre de 10% avec pour certaines périodes de la journée la possibilité de descendre jusqu'à 6/7%. Les profits dépendent beaucoup du moment de la journée et de la direction de flexibilité. En augmentation de charge, la flexibilité possible est en moyenne de l'ordre de 60 kW ce qui fournit un profit moyen de 15\$. En diminution de charge, la flexibilité atteint une moyenne de 210 kW et donc le profit moyen est de 50\$. Finalement, nous avons vu qu'un tel investissement est rentable si la participation à l'achat des chauffe-eaux n'est pas trop élevée, un maximum de 40 % du prix d'achat.

6.2 Limitations de la solution proposée

Il y a plusieurs limitations à la solution proposée. Tout d'abord dans la première contribution, la limitation majeure est que les solveurs sont plutôt lents à résoudre et à trouver la trajectoire optimale. Pour simuler un planning de température cible, il faut trouver $\frac{T_{end} - T_{start}}{\Delta_t}$ trajectoires. En moyenne, les solveurs étudiés dans cette maîtrise prennent 30 secondes pour trouver une trajectoire. Dans le cas d'un contrôle sur 4h avec un pas de temps de 15min, il faut donc plus de 480 s (8min) pour simuler un planning (il faut aussi rajouter le temps de simulation du comportement après le calcul de la trajectoire). Comme pour trouver un planning acceptable pour le pourcentage de rebond fixé, il peut être nécessaire de simuler plusieurs plannings de trajectoire cible, le temps de calcul nécessaire peut être très long.

Ensuite, dans la deuxième contribution, les charges non contrôlables et de base sont considérées connues et non stochastiques. Ce n'est pas le cas dans la réalité, d'autant plus que le travail de la maîtrise est utile pour l'introduction d'énergies renouvelables intermittentes dans le mix énergétique. Enfin, les modèles de récompense et d'investissement sont des approximations et sont basés sur des hypothèses fortes comme mentionné dans la section 5.2.

6.3 Améliorations futures

Plusieurs améliorations peuvent être envisagées pour surmonter les limitations mentionnées en section 6.2. Tout d'abord, le développement d'un solveur spécifique utilisant la forme du problème de contrôle à champ moyen permettrait de réduire le temps nécessaire à la résolution du système de point fixe via le problème d'optimisation de la section 4.4. Ensuite, il pourrait être intéressant de modifier le modèle d'optimisation du planificateur pour un modèle stochastique afin de prendre en compte les incertitudes liées aux énergies renouvelables intermittentes ainsi qu'améliorer la prise en compte de la chaîne de markov pour s'affranchir des problèmes mentionnés en Section 5.1. Enfin, une étude plus approfondie des récompenses possibles pour les consommateurs et des mécanismes du marché de la flexibilité électrique permettrait d'obtenir des modèles plus précis pour l'étude de rentabilité de l'investissement d'un agrégateur de chauffe-eaux. Il serait aussi intéressant de compléter l'analyse par une étude de rentabilité pour le client, afin d'obtenir le point d'équilibre entre les objectifs des deux parties.

RÉFÉRENCES

- [1] Gouvernement du Québec, “Politique Énergétique du Québec,” 2016, [Accessed : April 2018]. [En ligne]. Disponible : <https://politiqueenergetique.gouv.qc.ca/documentation/>
- [2] A. Mahmood *et al.*, “Energy sharing and management for prosumers in smart grid with integration of storage system,” dans *2017 5th International Istanbul Smart Grid and Cities Congress and Fair (ICSG)*, 2017, p. 153–156.
- [3] S. M. Basnet, H. Aburub et W. Jewell, “Effect of demand response on residential energy efficiency with direct load control and dynamic price control,” dans *2015 IEEE Eindhoven PowerTech*, 2015, p. 1–6.
- [4] PSA, “PowerShift Atlantic Final Report,” 2015.
- [5] IESO, “Demand Response Auction in Ontario,” 2019, [Accessed : February 2019]. [En ligne]. Disponible : <http://www.ieso.ca/en/sector-participants/market-operations/markets-and-related-programs/demand-response-auction>
- [6] Hydro Québec, “Gestion de la demande de puissance par Hydro Québec,” 2018, [Accessed : April 2018]. [En ligne]. Disponible : <http://www.hydroquebec.com/affaires/offres-programmes/gestion-demande-puissance.html>
- [7] L. Gkatzikis, I. Koutsopoulos et T. Salonidis, “The role of aggregators in smart grid demand response markets,” *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 31, n^o. 7, p. 1247–1257, 2013.
- [8] C. Eid *et al.*, “Aggregation of demand side flexibility in a smart grid : A review for european market design,” dans *2015 12th International Conference on the European Energy Market (EEM)*, 2015, p. 1–5.
- [9] E. Koliou *et al.*, “Demand response in liberalized electricity markets : Analysis of aggregated load participation in the german balancing mechanism,” *Energy*, vol. 71, p. 245 – 254, 2014. [En ligne]. Disponible : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360544214004800>
- [10] SEDC, “Explicit demand response in europe – mapping the markets 2017,” 2017. [En ligne]. Disponible : <http://www.smart.eu/explicit-demand-response-in-europe-mapping-the-markets-2017/>
- [11] D. S. Kirschen et G. Strbac, *Fundamentals of Power system economics*. John Wiley & Sons, Ltd, 2004.

- [12] F. Sirois, B. Bourdel et R. P. Malhamé, “Project RENE-034 : managing energy storage capacities dispersed in an electrical grid to reduce the effects of renewable energy source variability,” 2017.
- [13] A. I. Tammam, “Lissage optimal de la charge électrique en présence de sources d’énergies renouvelables via le pilotage de la consommation des chauffe-eau,” Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, 2016.
- [14] A. Kizilkale et R. Malhamé, “Chapter twenty - collective target tracking mean field control for Markovian jump-driven models of electric water heating loads,” dans *Control of Complex Systems*, K. G. Vamvoudakis et S. Jagannathan, édit. Butterworth-Heinemann, 2016, p. 559 – 584.
- [15] R. Malhamé, “A jump-driven Markovian electric load model,” *Advances in Applied Probability*, vol. 22, n^o. 3, p. 564–586, 1990. [En ligne]. Disponible : <http://www.jstor.org/stable/1427458>
- [16] D. P. Bertsekas *et al.*, *Dynamic programming and optimal control*. Athena scientific Belmont, MA, 1995, vol. 1, n^o. 2.
- [17] W. WONHAM, “Random differential equations in control theory,” *Probabilistic Methods in Applied Mathematics*, vol. 2, p. 132–216, 1970.
- [18] O. Morgenstern et J. Von Neumann, *Theory of games and economic behavior*. Princeton university press, 1953.
- [19] J. Nash, “Non-cooperative games,” *Annals of Mathematics*, vol. 54, n^o. 2, p. 286–295, 1951. [En ligne]. Disponible : <http://www.jstor.org/stable/1969529>
- [20] J. Lasry et P. Lions, “Jeux à champ moyen. ii–horizon fini et contrôle optimal,” *Comptes Rendus Mathématique*, vol. 343, n^o. 10, p. 679–684, 2006.
- [21] J.-M. Lasry et P.-L. Lions, “Jeux à champ moyen. i – le cas stationnaire,” *Comptes Rendus Mathématique*, vol. 343, n^o. 9, p. 619 – 625, 2006. [En ligne]. Disponible : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631073X06003682>
- [22] —, “Mean field games,” *Japanese Journal of Mathematics*, vol. 2, n^o. 1, p. 229–260, 2007. [En ligne]. Disponible : <https://doi.org/10.1007/s11537-007-0657-8>
- [23] M. Huang, P. E. Caines et R. P. Malhamé, “Individual and mass behaviour in large population stochastic wireless power control problems : centralized and nash equilibrium solutions,” dans *42nd IEEE International Conference on Decision and Control (IEEE Cat. No. 03CH37475)*, vol. 1. IEEE, 2003, p. 98–103.
- [24] M. Huang *et al.*, “Large population stochastic dynamic games : closed-loop mckean-vlasov systems and the nash certainty equivalence principle,” *Communications in Information & Systems*, vol. 6, n^o. 3, p. 221–252, 2006.

- [25] M. Huang, P. E. Caines et R. P. Malhamé, “Large-population cost-coupled lqg problems with nonuniform agents : individual-mass behavior and decentralized ε -nash equilibria,” *IEEE transactions on automatic control*, vol. 52, n^o. 9, p. 1560–1571, 2007.
- [26] B.-C. Wang et J.-F. Zhang, “Mean field games for large-population multiagent systems with markov jump parameters,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 50, n^o. 4, p. 2308–2334, 2012.
- [27] J. A. Gomez-Herrera et M. F. Anjos, “Optimization-based estimation of power capacity profiles for activity-based residential loads,” *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 104, p. 664 – 672, 2019. [En ligne]. Disponible : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142061517330442>
- [28] J. Li *et al.*, “Energy coupon : A mean field game perspective on demand response in smart grids,” dans *SIGMETRICS*, 2015.
- [29] W. Qi *et al.*, “Sharing demand-side energy resources - a conceptual design,” *Energy*, vol. 135, p. 455 – 465, 2017. [En ligne]. Disponible : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S036054421731143X>
- [30] IESO, “Power Data - Data Directory,” 2019, [Accessed : February 2019]. [En ligne]. Disponible : <http://www.ieso.ca/en/Power-Data/Data-Directory>
- [31] A. C. Kizilkale, R. Salhab et R. P. Malhamé, “An integral control formulation of mean field game based large scale coordination of loads in smart grids,” *Automatica*, vol. 100, p. 312 – 322, 2019.
- [32] A. Mohsenian-Rad *et al.*, “Autonomous demand-side management based on game-theoretic energy consumption scheduling for the future smart grid,” *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 1, n^o. 3, p. 320–331, 2010.
- [33] R. Feldt, “Blackboxoptim.jl,” <https://github.com/robertfeldt/BlackBoxOptim.jl>, 2018.
- [34] P. K. Mogensen et A. N. Riseth, “Optim : A mathematical optimization package for Julia,” *Journal of Open Source Software*, vol. 3, n^o. 24, p. 615, 2018.
- [35] B. Bourdel, “Gestion de stockage d’énergie thermique d’un arc de chauffe-eaux par une commande à champ moyen,” Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, 2016.
- [36] Ontario Hydro, “Ontario TOU prices,” 2019, [Accessed : February 2019]. [En ligne]. Disponible : <http://www.ontario-hydro.com/current-rates>
- [37] Jean-René Tagne Kuelah, “L’évaluation du rendement d’une dépense publique,” 2016, [Accessed : June 2019]. [En ligne]. Disponible : https://www.economie.gouv.qc.ca/fileadmin/content/publications/administratives/rapports/rendement_depense_publique.pdf

**ANNEXE A CALCUL DES TERMES DE L'ÉQUATION DE HJB
STOCHASTIQUE DU CONTRÔLE À CHAMPS MOYEN**

Calcul de $\frac{\partial J^*}{\partial t}(x, t, j)$:

$$\frac{\partial J^*}{\partial t}(x, t, j) = \frac{1}{2}x_t^T \dot{\Pi}_t^j x_t + x_t^T \dot{s}_t^j + \dot{\alpha}_t^j \quad (\text{A.1})$$

Calcul de $\sum_{j \in \Theta} L_{j,k} J^*(x, t, k)$:

$$\sum_{k \in \Theta} L_{j,k} J^*(x, t, k) = \frac{1}{2}x_t^T \left(\sum_{k \in \Theta} L_{j,k} \Pi_t^k \right) x_t + x_t^T \left(\sum_{k \in \Theta} L_{j,k} s_t^k \right) + \sum_{k \in \Theta} L_{j,k} \alpha_t^k \quad (\text{A.2})$$

Calcul de $f(x, u_{j,t}^*, j, t)^T$:

$$\begin{aligned} f(x, u_{j,t}^*, j, t)^T &= \left(A(j)x_t - B \left[R^{-1}B^T(\Pi_t^j x_t + s_t^j) \right] + c(j) \right)^T \\ &= x_t^T A(j)^T - \left(R^{-1}B^T(\Pi_t^j x_t + s_t^j) \right)^T B^T + c(j)^T \\ &= x_t^T A(j)^T - (\Pi_t^j x_t + s_t^j)^T B R^{-1} B^T + c(j)^T \\ &= x_t^T A(j)^T - x_t^T \Pi_t^j B R^{-1} B^T - (s_t^j)^T B R^{-1} B^T + c(j)^T \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Calcul de $\frac{\partial J^*}{\partial x}(x, t, j)$:

$$\frac{\partial J^*}{\partial x}(x, t, j) = \Pi_t^j x_t + s_t^j \quad (\text{A.4})$$

Calcul de $f(x, u_{j,t}^*, j, t)^T \frac{\partial J^*}{\partial x}(x, t, j)$:

$$\begin{aligned} f(x, u_{j,t}^*, j, t)^T \frac{\partial J^*}{\partial x}(x, t, j) &= x_t^T A(j)^T (\Pi_t^j x_t + s_t^j) - x_t^T \Pi_t^j B R^{-1} B^T (\Pi_t^j x_t + s_t^j) \\ &\quad - (s_t^j)^T B R^{-1} B^T (\Pi_t^j x_t + s_t^j) + c(j)^T (\Pi_t^j x_t + s_t^j) \\ &= x_t^T \left(A(j)^T \Pi_t^j - \Pi_t^j B R^{-1} B^T \Pi_t^j \right) x_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + x_t^T \left(A(j)^T s_t^j - \Pi_t^j B R^{-1} B^T s_t^j \right) \\
& - \left((s_t^j)^T B R^{-1} B^T \Pi_t^j + c(j)^T \Pi_t^j \right) x_t \\
& - (s_t^j)^T B R^{-1} B^T s_t^j + c(j)^T s_t^j
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Calcul de $g(x, u_{j,t}^*, t)$:

$$\begin{aligned}
g(x, u_{j,t}^*, t) &= \frac{1}{2} (Hx_t - z)^2 q_t^y + \frac{1}{2} (Hx_t - Hx_0)^2 q^{x_0} + \frac{1}{2} u_t^T R u_t \\
&= \frac{1}{2} q_t^y x_t^T H^T H x_t - \frac{1}{2} q_t^y x_t^T H^T z - \frac{1}{2} q_t^y H x_t z + \frac{1}{2} q_t^y z^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} q^{x_0} x_t^T H^T H x_t - \frac{1}{2} q^{x_0} x_t^T H^T H x_0 - \frac{1}{2} q^{x_0} x_0^T H^T H x_t + \frac{1}{2} q^{x_0} x_0^T H^T H x_0 \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(R^{-1} B^T (\Pi_t^j x + s_t^j) \right)^T R \left(R^{-1} B^T (\Pi_t^j x_t + s_t^j) \right) \\
&= \frac{1}{2} q_t^y x_t^T H^T H x_t - \frac{1}{2} q_t^y x_t^T H^T z - \frac{1}{2} q_t^y H x_t z + \frac{1}{2} q_t^y z^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} q^{x_0} x_t^T H^T H x_t - \frac{1}{2} q^{x_0} x_t^T H^T H x_0 - \frac{1}{2} q^{x_0} x_0^T H^T H x_t + \frac{1}{2} q^{x_0} x_0^T H^T H x_0 \\
&\quad + \frac{1}{2} \left((x_t^T \Pi_t^j + (s_t^j)^T) B R^{-1} \right) R \left(R^{-1} B^T (\Pi_t^j x_t + s_t^j) \right) \\
&= \frac{1}{2} q_t^y x_t^T H^T H x_t - \frac{1}{2} q_t^y x_t^T H^T z - \frac{1}{2} q_t^y H x_t z + \frac{1}{2} q_t^y z^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} q^{x_0} x_t^T H^T H x_t - \frac{1}{2} q^{x_0} x_t^T H^T H x_0 - \frac{1}{2} q^{x_0} x_0^T H^T H x_t + \frac{1}{2} q^{x_0} x_0^T H^T H x_0 \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(x_t^T \Pi_t^j + (s_t^j)^T \right) B R^{-1} B^T \left(\Pi_t^j x_t + s_t^j \right) \\
&= \frac{1}{2} q_t^y x_t^T H^T H x_t - \frac{1}{2} q_t^y x_t^T H^T z - \frac{1}{2} q_t^y H x_t z + \frac{1}{2} q_t^y z^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} q^{x_0} x_t^T H^T H x_t - \frac{1}{2} q^{x_0} x_t^T H^T H x_0 - \frac{1}{2} q^{x_0} x_0^T H^T H x_t + \frac{1}{2} q^{x_0} x_0^T H^T H x_0 \\
&\quad + \frac{1}{2} x_t^T \left(\Pi_t^j B R^{-1} B^T \Pi_t^j \right) x_t + \frac{1}{2} x_t^T \left(\Pi_t^j B R^{-1} B^T s_t^j \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left((s_t^j)^T B R^{-1} B^T \Pi_t^j \right) x_t + \frac{1}{2} (s_t^j)^T B R^{-1} B^T s_t^j
\end{aligned} \tag{A.6}$$