

**Titre:** Étude d'un critère de décollement lagrangien sur des écoulements instationnaires complexes  
Title: instationnaries complexes

**Auteur:** Gaël Simon  
Author:

**Date:** 2019

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Simon, G. (2019). Étude d'un critère de décollement lagrangien sur des écoulements instationnaires complexes [Master's thesis, Polytechnique Montréal].  
Citation: PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/3914/>

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/3914/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Jérôme Vétel  
Advisors:

**Programme:** Génie mécanique  
Program:

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**

affiliée à l'Université de Montréal

**Étude d'un critère de décollement lagrangien sur des écoulements  
instationnaires complexes**

**GAËL SIMON**

Département de génie mécanique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*  
Génie mécanique

Mai 2019

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**  
affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

**Étude d'un critère de décollement lagrangien sur des écoulements  
instationnaires complexes**

présenté par **Gaël SIMON**  
en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*  
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

Jean-Yves TRÉPANIER, président  
Jérôme VÉTEL, membre et directeur de recherche  
André GARON, membre

## DÉDICACE

*À tous mes professeurs  
tout au long de mon parcours,  
et à mes parents pour leur soutien  
durant toutes ces années.*

## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier vivement mon Directeur de recherche Monsieur Jérôme Vétel qui m'a été d'un grand soutien de par son appui scientifique mais aussi humain. Il a su guider mes réflexions et mes pistes de recherche tout au long de la réalisation de cette maîtrise très enrichissante et à l'avant-garde de la recherche actuelle sur le décollement. Je suis très heureux et fier d'avoir pu faire partie de son équipe et son écoute, sa disponibilité et ses judicieux conseils m'ont beaucoup aidé. De surcroît, grâce à lui, j'ai pu obtenir un financement et cela m'a permis de travailler sereinement dans des conditions optimales.

Je remercie également Jean-Yves Trépanier et André Garon pour avoir accepté de participer à mon jury de maîtrise, ainsi qu'à Éric Laurendeau pour avoir assisté à ma présentation en l'absence d'André Garon.

En ce qui concerne l'aspect académique, ma gratitude va vers mon école d'ingénieur l'INSA de Lyon sans laquelle ce double-diplôme n'aurait pas été possible, ainsi que l'école POLYTECHNIQUE de Montréal qui m'a accueilli dans un cadre d'exception. Merci à tous mes professeurs, à qui je dédie ce mémoire, pour la richesse et la qualité de leur enseignement et pour m'avoir donné, au fil des ans, la motivation et les outils nécessaires à la réussite de mes études.

J'exprime aussi toute ma reconnaissance au programme Génie par simulation (GPS) pour ses ateliers de formation et séminaires, ainsi que pour son précieux soutien financier.

Un merci tout particulier à Félix, Danika et Pascal, étudiants du professeur André Garon, pour m'avoir fourni les bases de données de l'écoulement autour du cylindre et de l'ellipse réalisées à l'aide du code éléments finis développé par leurs soins.

À mes collègues et amis du Laboratoire de dynamique des fluides LADYF qui ont su m'apporter une aide morale et amicale durant tous ces mois.

Enfin, un immense merci à mes parents, restés Outre-Atlantique, pour leur affection, leur soutien inconditionnel et leurs encouragements sans limites tout au long de ces années. Grâce à eux j'ai réalisé des études qui me remplissent de bonheur et qui vont m'entraîner vers un avenir professionnel que j'ai vraiment choisi.

## RÉSUMÉ

Ce mémoire porte sur l'étude de la prédiction et de la détection du décollement de la couche limite dans les écoulements, ce qui représente un enjeu majeur dans de nombreux domaines du génie tel qu'en aéronautique ou en aérodynamique. Ainsi, depuis les travaux pionniers de Prandtl en 1904, de nombreuses études se sont attelées à la réalisation de critères permettant la détection du point de décollement. Cependant la grande majorité de ces critères souffre d'un domaine d'application plus ou moins restreint à certains types d'écoulements et demande souvent des hypothèses préalables.

De ce constat, la présente étude s'intéresse à la validation d'un critère récent basé sur la théorie de la formation de pics matériels lors d'un décollement établie par Serra *et al.* (2018). Ce critère a pour caractéristique d'être objectif, c'est-à-dire indépendant du référentiel d'observation, mais aussi universel, c'est-à-dire applicable à tous types d'écoulements bidimensionnels : stationnaires ou instationnaires, compressibles ou incompressibles, avec des parois fixes ou mobiles. En effet, ce critère repose sur la détection du profil du décollement comme étant la crête du champ de variation de courbure de lignes matérielles initialement parallèles à la paroi puis advectées en temps.

Cette méthode de détection adaptée dans un programme Matlab est appliquée à plusieurs écoulements de complexité croissante. Ainsi, la validation du critère est d'abord effectuée sur des décollements sur parois planes avec par exemple le cas de la bulle de décollement turbulente et le jet impactant, puis dans un second temps sur des décollements sur parois courbes, pouvant être mobiles, avec l'écoulement autour d'un cylindre libre de translater, d'une ellipse sur pivot décentré et d'un profil NACA 0012 incliné.

Cette étude a pu montrer que la théorie de Serra *et al.* (2018) était capable de capturer la naissance de la formation de pics matériels sans aucune hypothèse préalable sur le type d'écoulement ou le type de décollement. De ce fait ce critère s'est avéré satisfaisant sur des écoulements stationnaires ou instationnaires pour la détection de décollement pouvant se faire aussi bien sur paroi que hors paroi. De plus, plusieurs observations intéressantes sur le décollement ont pu être faites, comme par exemple lors de la transition d'un décollement sur paroi vers un décollement hors paroi, de la fusion entre plusieurs pics de particules initialement distincts ou encore sur la détection d'empreintes de décollement que d'autres méthodes sont incapables de prédire.

En somme, cette théorie, en plus d'être apte à capturer la zone du décollement sur une surface, permet également d'en capturer l'apparition et l'évolution sur un faible nombre de pas de

temps pour des écoulements pouvant être parfois fortement instationnaires, là où les autres méthodes se focalisent principalement sur des résultats asymptotiques. Il pourrait donc être envisagé que cette méthode soit à terme également utile dans le domaine du contrôle de l'écoulement et donc du décollement.

## ABSTRACT

We study the phenomenon of separation of the boundary layer in several flows. Flow separation is indeed central in a lot of engineering problems such as in airfoils or in internal flows and that's why there has been an abundant literature on that subject since the pioneering work of Prandtl (1904) on two-dimensional steady flows. However, even if all those studies are focused on the prediction and the detection of flow separation, it appears that they mostly suffer from some disadvantages. Firstly because those criteria are based on asymptotic methods that often need *a priori* assumptions, and secondly because these methods could be difficult to apply to all different flow types.

Thus, this work is intended to study and analyze a recent frame-invariant theory of material spike formation in flow separation developed by Serra *et al.* (2018). This theory is based on the exact curvature evolution of near-wall material lines initially parallel to a no-slip boundary. It is effective also over short-time intervals and can identify both fixed and moving flow separations. Finally, that method is designed to be universal, i.e. applicable to all flows: steady or unsteady, compressible or incompressible, with fixed or moving boundaries.

This detection method has been programmed in a Matlab code in order to test it in various complex flows such as a turbulent separation bubble, an impinging jet, and flows around a freely moving cylinder, a freely rotating ellipse and an angled NACA 0012 airfoils profile. In short, the criterion has been tested on both plane and curved walls but also moving ones.

The criterion of Serra *et al.* (2018) shows his ability to detect material spikes on all different flow types without *a priori* assumptions. Indeed, whether the flow was steady or unsteady, this method has been able to capture flow separation that can be on- or off-wall. It has then allowed us to uncover some new phenomena thanks to the analysis of the material spike birth and time evolution. For example, we have observed the transition from on-wall to off-wall separation or the merger of initially distinct spikes. Moreover, we have even been able to detect separation profiles that remain hidden to previous approaches.

Finally, these results permit to identify the way flow separation arises, interacts, and merges in sometimes highly transient flows over a short-time interval which was obviously not possible with former asymptotic methods. Thus, we can imagine that this method could be used in the future in flow control field.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	viii
LISTE DES FIGURES . . . . .	x
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . .	xv
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xvi
 CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 Définitions et concepts de base . . . . .	1
1.2 Problématique et objectifs de recherche . . . . .	4
1.3 Plan du mémoire . . . . .	5
 CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE . . . . .	6
2.1 Méthodes eulériennes . . . . .	6
2.1.1 Méthodes des points critiques . . . . .	7
2.1.2 Méthode Moore-Rott-Sears (MRS) . . . . .	9
2.2 Méthodes lagrangiennes . . . . .	10
2.2.1 Utilisation d'un repère lagrangien . . . . .	10
2.2.2 Profil de décollement pour des écoulements instationnaires bidimensionnels selon Haller . . . . .	12
2.2.3 Autres méthodes récentes notables . . . . .	14
 CHAPITRE 3 MÉTHODOLOGIE . . . . .	16
3.1 Théorie de la méthode . . . . .	16
3.2 Exemple simple d'application de la méthode . . . . .	18
3.3 Implémentation numérique de la méthode . . . . .	21
3.3.1 Maillage et dérivation en coordonnées curvilignes . . . . .	22

CHAPITRE 4 DÉCOLLEMENT SUR SURFACES PLANES . . . . .	27
4.1 Bulle de décollement . . . . .	27
4.1.1 Définition de l'écoulement . . . . .	27
4.1.2 Bulle de décollement turbulente . . . . .	28
4.2 Jet impactant . . . . .	32
4.2.1 Définition de l'écoulement . . . . .	32
4.2.2 Application du critère . . . . .	33
CHAPITRE 5 DÉCOLLEMENT SUR SURFACES COURBES ET SURFACES MO- BILES . . . . .	40
5.1 Écoulement instationnaire autour d'un cylindre se déplaçant librement . . . . .	42
5.2 Écoulement instationnaire autour d'une ellipse dont la rotation est libre . . . . .	46
5.3 Écoulement autour d'un profil NACA 0012 . . . . .	51
CHAPITRE 6 CONCLUSION . . . . .	59
6.1 Synthèse des travaux . . . . .	59
6.2 Limitations de la solution proposée . . . . .	60
6.3 Améliorations futures . . . . .	60
RÉFÉRENCES . . . . .	62
ANNEXES . . . . .	65

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Profil de vitesse d'une couche limite créée par l'écoulement d'un fluide le long d'une plaque plane (Source : <i>Wikimedia Commons</i> ) . . . . .	1
Figure 1.2	Advection de particules dans un écoulement généré par un cylindre en rotation proche de la paroi ( <i>à gauche</i> ), et un exemple d'une bulle de décollement ( <i>à droite</i> ) avec les vecteurs vitesse $(u(x, y), v(x, y))$ , où $x$ est aligné avec la paroi . . . . .	3
Figure 2.1	Décollement de la couche limite sous l'effet d'un gradient de pression adverse - Profils de vitesse de la couche limite près d'une paroi en amont du décollement, au point de décollement et en aval du décollement, d'après Audier (2012) . . . . .	7
Figure 2.2	Classification du type de point critique en fonction de $p$ et $q$ , d'après Miron (2016) . . . . .	8
Figure 2.3	Représentation d'une ligne matérielle rattachée à la paroi solide ( $y = 0$ ) au point de décollement $x = \gamma$ , d'après Haller (2004) . . . . .	12
Figure 3.1	Évolution temporelle de la courbure le long d'une ligne matérielle $\gamma$ . $R_0$ et $R_1$ sont les rayons de courbure en un point $r(s)$ de la ligne matérielle respectivement pour $t_0$ et un temps futur $T$ , d'après Serra <i>et al.</i> (2018)	17
Figure 3.2	(a) Exemple de lignes de courant dans l'écoulement d'une bulle de décollement laminaire et le champ de variation de courbure lagrangien $\bar{\kappa}_{t_0}^{t_0+T}$ pour $T = 1.6$ (b) et $3.2$ (c). La courbe rouge montre la position initiale de l'empreinte lagrangienne du décollement $\mathcal{B}(0)$ . . . . .	19
Figure 3.3	(a, b) Contours des champs de courbure de la figure 3.2 (b, c) avec un temps d'intégration $T$ plus long pour (c). (d) représente le champ de taux de courbure $\dot{\kappa}_{t_0}$ qui correspond à la dérivée temporelle de $\bar{\kappa}_{t_0}^{t_0+T}$ évaluée en $T = 0$ . Les courbes rouges montrent les positions initiales des empreintes lagrangiennes du décollement $\mathcal{B}(t_0)$ en (a, b et c) et l'empreinte eulérienne $\mathcal{B}_E(t_0)$ en (d) tandis que les courbes bleues montrent les minimums de courbure au voisinage des empreintes de décollement. Les courbes noires représentent le passage de $\bar{\kappa}_{t_0}^{t_0+T}$ (ou $\dot{\kappa}_{t_0}$ pour (d)) à zéro . . . . .	19

Figure 3.4	Empreinte du décollement eulérien $\mathcal{B}_E(t)$ (orange) et les empreintes du décollement lagrangiens $\mathcal{B}(t)$ pour $T = 1.6$ (bleu), $T = 3.2$ (vert) and $T = 4.8$ (rouge). En noir, les lignes matérielles initialement parallèles à la paroi et en jaune le point de décollement de Prandtl . . . . .	20
Figure 3.5	Maillage d'une région elliptique avec contours de la courbure $\gamma$ . . . . .	25
Figure 3.6	Maillage autour d'un profil NACA 0012 (symétrique) avec contours de la courbure $\gamma$ . . . . .	26
Figure 3.7	Vue tridimensionnelle et contours de la courbure $\gamma$ dans la région du bord d'attaque du NACA 0012 . . . . .	26
Figure 4.1	Champ de vorticité pour la bulle de décollement laminaire (a) et turbulente (b) . . . . .	28
Figure 4.2	(a) Champ de variation de courbure $\bar{\kappa}_0^6$ au voisinage du premier décollement ( $x < 3$ ) pour la bulle de décollement turbulente. (b) Contours du champ (a) . . . . .	28
Figure 4.3	Évolution temporelle des empreintes lagrangiennes du décollement $\mathcal{B}(t)$ (en vert) pour $T = 6$ , en noir les lignes matérielles initialement parallèles à la paroi, le tout superposé au champ de vorticité de la bulle de décollement turbulente . . . . .	29
Figure 4.4	(a) Champ de variation de courbure $\bar{\kappa}_0^5$ au voisinage du décollement induit par vortex ( $x \geq 3$ ) pour la bulle de décollement turbulente. (b) Contours du champ (a) . . . . .	30
Figure 4.5	Évolution temporelle des empreintes lagrangiennes du décollement $\mathcal{B}(t)$ (en vert) pour $T = 5$ , en noir les lignes matérielles initialement parallèles à la paroi ; le tout est superposé au champ de vorticité de la bulle de décollement turbulente. Les flèches noires montrent les particules fluides qui sont entraînées par les tourbillons $V_1$ et $V_2$ . . . . .	31
Figure 4.6	(a) Champ du taux de courbure $\dot{\kappa}_{t_0}$ pour le décollement induit par vortex ( $x \geq 3$ ) pour la bulle de décollement turbulente. (b) Contours du champ (a) . . . . .	31
Figure 4.7	Champ de vorticité pour le jet impactant. Le jet est placé en $x = 0$ , qui est un axe de symétrie, et est orienté vers le bas, comme le montre les vecteurs vitesses (en gris). Les points noirs représentent des particules, initialement alignées avec la paroi, advectées jusqu'à un temps arbitraire	33
Figure 4.8	(a) Champ de variation de courbure $\bar{\kappa}_0^1$ au voisinage du premier décollement induit par vortex ( $1 \leq x \leq 2$ ) pour le jet impactant. (b) Contours du champ (a) . . . . .	33

Figure 4.9	Évolution temporelle des empreintes lagrangiennes du décollement $\mathcal{B}(t)$ (en vert) pour $T = 5$ , en noir les lignes matérielles initialement parallèles à la paroi, le tout superposé au champ de vorticité du jet impactant pour le premier décollement induit par vortex . . . . .	34
Figure 4.10	(a) Champ de variation de courbure $\bar{\kappa}_0^1$ au voisinage du second décollement induit par vortex ( $2 \leq x \leq 2.6$ ) pour le jet impactant. (b) Contours du champ (a) . . . . .	35
Figure 4.11	Évolution temporelle des empreintes lagrangiennes du décollement $\mathcal{B}(t)$ (en vert) pour $T = 1$ , en noir les lignes matérielles initialement parallèles à la paroi, le tout superposé au champ de vorticité du jet impactant pour le second décollement induit par vortex . . . . .	35
Figure 4.12	(a) Champ de variation de courbure $\bar{\kappa}_0^2$ au voisinage du second décollement induit par vortex ( $2 \leq x \leq 2.6$ ) pour le jet impactant. (b) Contours du champ (a) . . . . .	36
Figure 4.13	Évolution temporelle des empreintes lagrangiennes du décollement $\mathcal{B}(t)$ (en vert) pour $T = 2$ , en noir les lignes matérielles initialement parallèles à la paroi, le tout superposé au champ de vorticité du jet impactant pour le second décollement induit par vortex . . . . .	37
Figure 4.14	Contours du champ de variation de courbure $\bar{\kappa}_{t_0}^{t_0+T}$ pour $t_0 = 0$ , $T = 6$ (a) et $T = 12$ (b) pour le décollement fixe du jet impactant ( $x \sim 3$ ) . .	37
Figure 4.15	Évolution temporelle des empreintes lagrangiennes du décollement $\mathcal{B}(t)$ (en rouge) pour $T = 6$ , en noir les lignes matérielles initialement parallèles à la paroi ; le tout est superposé aux lignes de courant du jet impactant pour le décollement fixe . . . . .	38
Figure 5.1	Écoulement stationnaire autour d'un cylindre en rotation pour $Re = 50$ et $\Omega = 1$ . (a) Lignes de courant autour du cylindre, (b) contours du champ $\bar{\kappa}_0^2$ et (c) position initiale des empreintes de décollement associées (en rouge) ainsi que le minimum de courbure en bleu. Les figures du bas représentent l'évolution temporelle du champ de variation de courbure $\bar{\kappa}_0^2(x_0)$ avec les lignes matérielles initialement parallèles au cylindre . . . . .	41
Figure 5.2	(a) Champ de variation de courbure lagrangien $\bar{\kappa}_0^1$ autour du cylindre dont les déplacements sont libres. (b) Contours du champ (a) avec les empreintes lagrangiennes du décollement (en rouge) . . . . .	43

Figure 5.3	Advection en temps du champ de variation de courbure de la figure 5.2. Les contours du bleu au rouge représentent les valeurs négatives à positives de $\bar{\kappa}_0^1$ . Les figures sont ici fixes par rapport à un point de référence (référentiel absolu) permettant aussi de suivre le mouvement du cylindre par la ligne noire. Le point vert correspond au point où le cisaillement est nul à la paroi . . . . .	44
Figure 5.4	Advection en temps du champ de variation de courbure de la figure 5.2. Les contours du bleu au rouge représentent les valeurs négatives à positives de $\bar{\kappa}_1^2$ . Les figures sont ici fixes par rapport à un point de référence (référentiel absolu) permettant aussi de suivre le mouvement du cylindre par la ligne noire. Le point vert correspond au point où le cisaillement est nul à la paroi . . . . .	46
Figure 5.5	Angle de rotation $\theta$ (en bas) et vitesse angulaire $\dot{\theta}$ (en haut) en fonction du temps caractérisant les mouvements de rotation de l'ellipse par rapport au pivot décentré . . . . .	47
Figure 5.6	Cas test 1 : champ de variation de courbure lagrangien $\bar{\kappa}_{60}^{60.80}$ initialement parallèles à la paroi (en haut à gauche), puis leur advection en temps. Les contours du bleu à rouge indiquent les valeurs négatives à positives de $\bar{\kappa}_{60}^{60.80}$ . Les points verts correspondent aux points d'annulation du cisaillement à la paroi. L'utilisation d'un repère absolu permet d'illustrer la rotation de l'ellipse . . . . .	48
Figure 5.7	Cas test 2 : champ de variation de courbure lagrangien $\bar{\kappa}_{69.8}^{70.8}$ initialement parallèles à la paroi (en haut à gauche), puis leur advection en temps. Les contours du bleu à rouge indiquent les valeurs négatives à positives de $\bar{\kappa}_{69.8}^{70.8}$ . Les points verts correspondent aux points d'annulation du cisaillement à la paroi. L'utilisation d'un repère absolu permet d'illustrer la rotation de l'ellipse . . . . .	49
Figure 5.8	Exemples supplémentaires du décollement sur une ellipse sur pivot. (a) et (b) montrent le champ $\bar{\kappa}_{t_0}^{t_0+T}$ advecté jusqu'au temps final $t = t_0 + T$ pour deux temps initiaux $t_0$ différents (les valeurs $t_0$ et $T$ sont indiquées sur la figure). Le graphique (c) montre l'advection temporelle de $\bar{\kappa}_{79}^{80.2}$ . Les points verts correspondent aux points d'annulation du cisaillement à la paroi . . . . .	50
Figure 5.9	(a) Domaine et maillage utilisés pour le cas test 1, c correspond à la corde du profil NACA. (b) Zoom de (a) sur le profil . . . . .	51

Figure 5.10	(a) Champ de variation de courbure lagrangien $\bar{\kappa}_0^{0.3}$ pour l'écoulement autour du profil NACA 0012 incliné à $5^\circ$ et $Re = 1000$ (cas test 1). (b) Zoom de (a) . . . . .	52
Figure 5.11	Contours du champ de la figure 5.10 avec la position initiale de l'empreinte lagrangienne du décollement (en rouge) ainsi que le minimum de courbure (en bleu) pour l'écoulement autour du profil NACA 0012 incliné à $5^\circ$ et $Re = 1000$ (cas test 1) . . . . .	52
Figure 5.12	Évolution temporelle de l'empreinte lagrangienne du décollement $\mathcal{B}(t)$ (en rouge) et des lignes matérielles initialement parallèles à la paroi (en noir) pour l'écoulement autour du profil NACA 0012 incliné à $5^\circ$ et $Re = 1000$ (cas test 1) . . . . .	53
Figure 5.13	Évolution temporelle des lignes matérielles initialement parallèles à la paroi pour l'écoulement autour du profil NACA 0012 incliné à $0^\circ$ et $Re = 800000$ (cas test 2) . . . . .	54
Figure 5.14	(a) Champ de variation de courbure lagrangien $\bar{\kappa}_0^{0.005}$ . (b) Contours du champ (a) avec la position initiale de l'empreinte lagrangienne du décollement (en rouge) et le minimum de courbure (en bleu) pour l'écoulement autour du profil NACA 0012 incliné à $8^\circ$ et $Re = 10000$ (cas test 3) . . . . .	54
Figure 5.15	Évolution temporelle de l'empreinte lagrangienne du décollement (en rouge) et en noir des lignes matérielles initialement parallèles à la paroi pour l'écoulement autour du profil NACA 0012 incliné à $8^\circ$ et $Re = 10000$ (cas test 3) . . . . .	55
Figure 5.16	Champ de variation de courbure lagrangien $\bar{\kappa}_0^{0.05}$ pour l'écoulement autour du profil NACA 0012 incliné à $10^\circ$ et $Re = 100000$ (cas test 4) . . . . .	56
Figure 5.17	Évolution temporelle de l'empreinte lagrangienne du décollement (en rouge) et en noir des lignes matérielles initialement parallèles à la paroi pour l'écoulement autour du profil NACA 0012 incliné à $10^\circ$ et $Re = 100000$ (cas test 4) . . . . .	57
Figure 5.18	Évolution temporelle de l'empreinte lagrangienne du décollement (en rouge) et en noir des lignes matérielles initialement parallèles à la paroi pour l'écoulement autour du profil NACA 0012 incliné à $6^\circ$ et $Re = 10000$ (cas test 5) . . . . .	57

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

### Abréviation

LCS	Structure Cohérente Lagrangienne
MRS	Moore-Rott-Sears
SCEO	Structure Cohérente Eulérienne Objective

### Variables usuelles

$c_f$	Coefficient de frottement
$\mu$	Viscosité dynamique
$\nu$	Viscosité cinématique
$Re$	Nombre de Reynolds
$\rho$	Masse volumique
$t$	Variable temporelle
$T$	Temps d'intégration
$\tau_w$	Frottement à la paroi
$\mathbf{u}$	Vecteur vitesse
$u, v, w$	Composantes du champ de vitesse
$\mathbf{x}$	Vecteur position
$x, y, z$	Composantes de la position

### Opérateurs

$\nabla$	Opérateur gradient
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire
$\ \cdot\ $	Norme Euclidienne
$\frac{\partial}{\partial x_i}, \cdot_{x_i}$	Dérivée partielle selon $x_i$
$\cdot^\top$	Transposée

**LISTE DES ANNEXES**

Annexe A	Opérateurs de dérivation en coordonnées curvilignes . . . . .	65
----------	---	----

## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

### 1.1 Définitions et concepts de base

Ce mémoire est consacré à l'étude du décollement de la couche limite dans différents écoulements. La couche limite est la zone de l'écoulement où la vitesse passe de la vitesse extérieure à une vitesse nulle sur une paroi solide, si celle-ci est fixe.

En 1904, Prandtl est le premier à théoriser le fait qu'un effet de friction a pour conséquence que le fluide adjacent à une surface est collé à celle-ci, ce qui représente la condition de non glissement. Cet effet de friction est uniquement présent dans la couche limite qui est une zone très fine proche de la paroi.

On définit en général l'épaisseur de la couche limite telle que :

$$u(\delta(x)) = 0.99 \cdot U_e, \quad (1.1)$$

avec  $U_e$ , la vitesse uniforme de l'écoulement sans obstacle et  $\delta(x)$ , l'épaisseur de la couche limite en fonction de  $x$ , la coordonnée parallèle à la paroi.

Les écoulements peuvent alors être divisés en deux régions distinctes : la couche limite où les effets visqueux sont prédominants et principaux responsables du frottement, et l'écoulement externe où la viscosité peut être négligée dans la plupart des cas, comme schématisé à la figure 1.1.

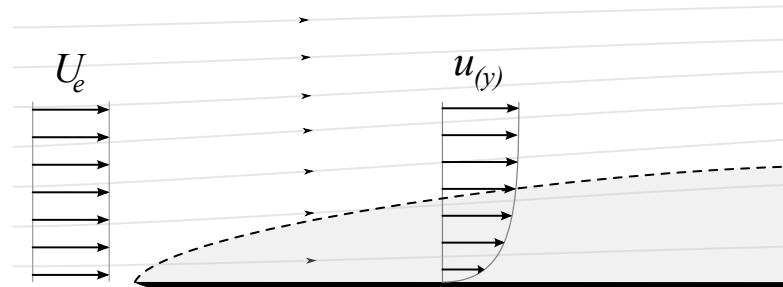


Figure 1.1 Profil de vitesse d'une couche limite créée par l'écoulement d'un fluide le long d'une plaque plane (Source : *Wikimedia Commons*)

Cependant cette dite couche peut se détacher de la paroi. Ce décollement de la couche limite

s'avère être un enjeu majeur en dynamique des fluides puisque ce phénomène affecte le plus souvent négativement plusieurs domaines du génie. Par exemple, la couche limite joue des rôles prédominants dans différents domaines comme en aéronautique, en hydrodynamique, en turbomachines ou encore en météorologie.

Ainsi, dans le domaine de l'aérodynamique, l'étude du point de décollement de la couche limite dans un écoulement est très importante, comme pour les écoulements autour des profils aérodynamiques et des bâtiments (Cermak, 1976). Le décollement provoque en effet un changement total de l'écoulement qui recircule et devient fortement instationnaire. La prédiction du point de décollement est donc cruciale pour le rendement ou la performance des systèmes mécaniques. En aviation, on observe ainsi une perte de portance due à une trop forte augmentation de l'angle d'attaque d'une aile d'avion appelée le décrochage (Corke et Thomas, 2015). Cela se traduit par le fait que plus le point de décollement est lointain sur le profil considéré, plus sa traînée sera faible et sa portance élevée. Il est, de ce fait, capital de concevoir des surfaces permettant de reculer ce point de décollement. Les alvéoles des balles de golf en sont un très bon exemple. De plus, en ce qui concerne les écoulements confinés, le décollement joue également un rôle important dans les rendements des diffuseurs (Azad, 1996), des turbomachines et des turbines à gaz (Cloos *et al.*, 2017), des compresseurs (Gresh, 2018), des échangeurs de chaleur (Shah et Sekulić, 2003) ou des chambres à combustion (Tianyun *et al.*, 2017). En effet, le décollement produit une augmentation des pertes de charge mais aussi fait apparaître le phénomène de pompage dans les compresseurs. Dans le secteur de l'hydroélectrique, le décollement instationnaire de la couche limite est responsable de la dégradation des performances des turbines (Duquesne *et al.*, 2015), c'est pourquoi l'étude et la compréhension du phénomène de décollement de la couche limite est un enjeu essentiel dans de nombreux domaines industriels. Par conséquent, dans un monde où la recherche du rendement optimal est très présent, l'industrie est de plus en plus en demande de moyens de contrôle et de prédiction du décollement.

Depuis le premier critère de détection du décollement formulé par Prandtl (1904), applicable uniquement aux écoulements stationnaires en deux dimensions, d'importants travaux visant à généraliser l'étude du décollement pour des cas tridimensionnels, et/ou instationnaires ont vu le jour. Ces études peuvent être divisées en deux catégories principales. Une première vise à concevoir le décollement comme une singularité qui apparaîtrait dans les équations de la couche limite, ce qui correspond à une approche eulérienne (Sears et Telionis 1971, 1975). Cependant on a pu observer des décollements sans singularité et des singularités sans décollement (Liu et Wan, 1985). De plus, ces méthodes sont bien souvent difficiles à appliquer et fréquemment dédiées à des écoulements spécifiques. Une seconde catégorie, quant à elle, estime que le décollement correspond à l'éjection de particules matérielles hors de la paroi

(Haller, 2004), et a permis de définir deux types de décollement : le décollement fixe et le décollement mobile. Cette catégorie se conforme à une approche lagrangienne.

Afin de démontrer le potentiel des méthodes lagrangiennes face aux méthodes eulériennes encore très utilisées aujourd’hui, la figure 1.2 (à gauche) montre les lignes de courant dans l’écoulement stationnaire produit par un cylindre en rotation proche d’une paroi horizontale (Klonowska-Prosnak et Prosnak, 2001). Ainsi, en s’intéressant à l’advection des particules de fluides initialement parallèles à la paroi, on observe que la formation du pic matériel apparaît et se développe en amont du point d’annulation du cisaillement à la paroi, qui correspond au point de décollement défini par le critère de Prandtl. D’autre part, en ce qui concerne la bulle de décollement à droite (Ghosh *et al.*, 1998), il n’y a pas de décollement au sens lagrangien alors que l’on observe l’annulation du cisaillement à la paroi. Ainsi, cela montre que l’approche lagrangienne redéfinit la façon d’appréhender le phénomène du décollement et donc permet un changement de perspective sur ce sujet par rapport aux approches traditionnelles.

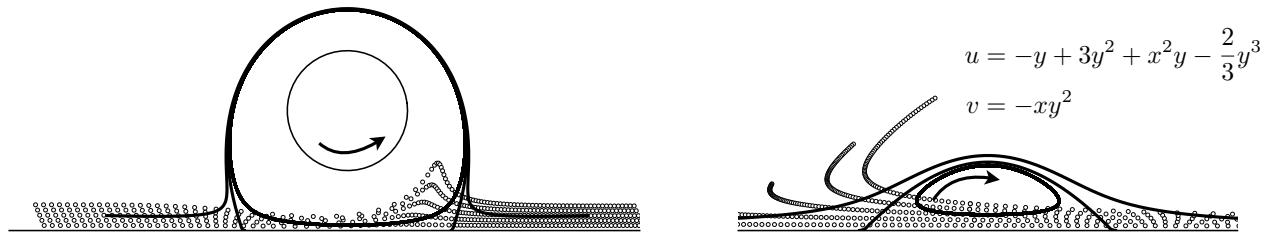


Figure 1.2 Advection de particules dans un écoulement généré par un cylindre en rotation proche de la paroi (*à gauche*), et un exemple d’une bulle de décollement (*à droite*) avec les vecteurs vitesse  $(u(x, y), v(x, y))$ , où  $x$  est aligné avec la paroi

Suite aux éléments présentés précédemment et à d’autres exemples très pertinents dans la littérature, les méthodes lagrangiennes semblent être fortement prometteuses dans le futur de la mécanique des fluides qui est pourtant une science séculaire. En effet, ces méthodes ont donné des résultats originaux et très intéressants, et ont permis de résoudre des problèmes impossibles à appréhender en eulérien. Cependant, ces avancées sont encore peu connues et peu utilisées par la communauté scientifique actuelle.

C’est de la catégorie lagrangienne que provient le critère qui va nous intéresser ici, celui de Serra, Vétel et Haller (2018). La présente étude a pour objectif de présenter les limites de certains critères de décollement connus, mais aussi et surtout, de s’intéresser à la validation d’un nouveau critère de détection du point et de l’empreinte du décollement. Ce critère est effectivement basé sur le champ de courbure de lignes matérielles initialement parallèles à la paroi où le décollement a lieu. Il a pour intérêt majeur d’être un critère objectif, c’est-à-dire

indépendant du référentiel d'observation, mais il se voudrait aussi universel. Cependant, les validations de ce critère sont encore peu nombreuses et principalement sur des cas analytiques et relativement simples.

## 1.2 Problématique et objectifs de recherche

Ce projet de maîtrise suit la continuité de précédents travaux réalisés dans le laboratoire du professeur J. Vétel sur le décollement. Il prolongera un mémoire de S. Crouzat déjà réalisé sur la validation du nouveau critère de détection du décollement de M. Serra. Le présent projet, quant à lui, aura comme difficultés de modéliser numériquement correctement les écoulements parfois complexes nécessaires à la validation du critère. En particulier, l'applicabilité de ce critère à ces écoulements pourrait s'avérer peu aisée à mettre en œuvre. Il existe déjà dans la littérature des cas de validations de ce même critère de décollement, mais appliqués cependant à des écoulements moins complexes.

Cette méthode étant très récente, il est encore nécessaire de la valider notamment sur des écoulements plus complexes à l'aide de simulations numériques. Les cas du décollement sur des profils courbes, ou sur des écoulements complexes instationnaires comme par exemple sur des parois en mouvement n'ont pas encore été réalisés.

L'objectif principal de ce projet de maîtrise consiste à identifier et améliorer la détection du point et du profil de décollement de la couche limite dans certains écoulements parfois complexes autour d'un profil donné grâce à la validation d'un critère qui se veut universel. Afin de réaliser cet objectif général, plusieurs objectifs spécifiques seront réalisés :

- Développer des simulations numériques sur des écoulements relativement complexes (cylindre en rotation, profil d'aile).
- Adapter un programme Matlab permettant la mise en application du critère de détection du décollement. Ainsi, cet outil de post-traitement sera en mesure de détecter, par le biais de ce critère, le point et le profil de décollement pour tout type d'écoulement sur des parois planes mais aussi courbes. Il conviendra dans ce dernier cas d'utiliser un repère curviligne.
- Analyser les résultats obtenus et valider ce nouveau critère de détection d'une empreinte de décollement, fondé notamment sur la formation d'un pic de particules au niveau du décollement.

### 1.3 Plan du mémoire

Ce mémoire débute tout d'abord par une revue de littérature pour avoir une vue d'ensemble sur les avancées de la recherche sur ce sujet, de voir les différentes méthodes qui ont pu être utilisées et ainsi de mettre en perspective ce travail de recherche. Ensuite, la méthodologie sera abordée, en s'intéressant particulièrement sur la théorie de ce critère de décollement mais aussi sur sa mise en œuvre numérique. Il sera alors question des simulations numériques effectuées mais aussi de l'implémentation et l'adaptation du programme Matlab appliquant le critère. Enfin, les deux dernières parties auront pour but l'application du critère à différents écoulements parfois complexes, d'une part sur des surfaces planes, et d'autre part sur des surfaces courbes ou mobiles. Il s'agira alors d'analyser ces résultats et d'en tirer des conclusions sur la validité et la pertinence du critère de Serra *et al.* (2018).

## CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

Depuis le début du xx<sup>e</sup> siècle, de nombreux travaux sur la détection du décollement ont été réalisés afin de mieux prédire et comprendre ce phénomène encore aujourd’hui relativement incompris. Ainsi, la prédition du décollement peut être, comme il a été dit en introduction, répartie en deux catégories : les approches eulériennes qui se concentrent sur les champs de vitesse de l’écoulement, et les approches lagrangiennes, qui s’intéressent, quant à elles, à l’étude des trajectoires des particules.

### 2.1 Méthodes eulériennes

Tout d’abord, une première étude sur le comportement des fluides au contact d’une paroi a été réalisée par Prandtl (1904). Dans cette étude, on distingue notamment deux régions spécifiques dans un écoulement : la couche limite et l’écoulement externe. Prandtl montre alors que le décollement des lignes de courant, dans un écoulement stationnaire en deux dimensions, a lieu au point d’annulation du cisaillement et lorsque son gradient est négatif. Il s’agit du point  $(p, 0)$  tel que :

$$\begin{cases} \tau_w(p) = \mu u_y(p, 0) = 0, \\ \tau'_w(p) = \mu u_{xy}(p, 0) < 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide,  $(x, y)$  sont respectivement les coordonnées normales et orthogonales à la paroi,  $(\cdot)_y := \frac{d}{dy}(\cdot)$  et  $(\cdot)_{xy} := \frac{d^2}{dxdy}(\cdot)$ , le champ de vitesse  $(u(x, y), v(x, y))$  et  $\tau_w$  la contrainte de cisaillement.

Il est ici question d’un des tout premiers critères de décollement qui n’est malheureusement valide que pour des écoulements stationnaires en deux dimensions comme l’ont montré plusieurs études (Rott 1956 ; Moore 1958 ; Sears et Telionis 1971). Par conséquent, de nombreuses autres études, attachées à la recherche de critères ayant un domaine d’application plus large, ont vu le jour.

La figure 2.1 représente les différents profils de vitesse lors du décollement vu par Prandtl. On observe que la présence d’un gradient de pression adverse entraîne une inversion locale du sens de l’écoulement. Le point précis de cette inversion correspond au point de décollement.

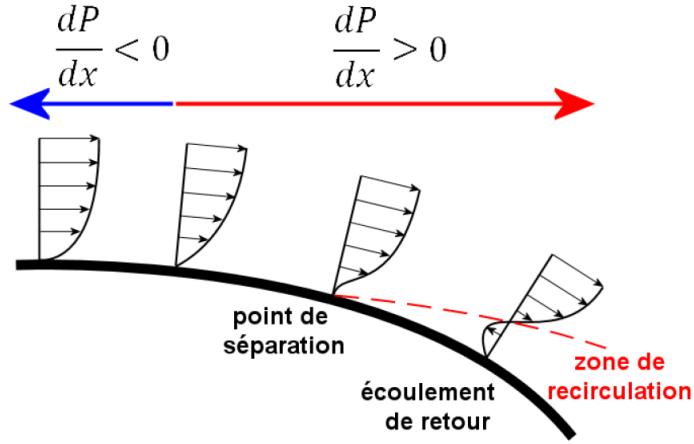


Figure 2.1 Décollement de la couche limite sous l'effet d'un gradient de pression adverse - Profils de vitesse de la couche limite près d'une paroi en amont du décollement, au point de décollement et en aval du décollement, d'après Audier (2012)

### 2.1.1 Méthodes des points critiques

Des critères pour des écoulements en trois dimensions existent, comme les méthodes des points critiques, mais s'appliquent cependant principalement à des écoulements stationnaires ce qui s'avère assez inefficace en instationnaire. En effet, Perry et Fairlie en 1975 ont utilisé les méthodes des plans de phase qui est une technique qui consiste à déterminer graphiquement l'existence de cycles limites. Il s'agit d'une méthode qualitative permettant l'étude des systèmes de dimension deux, et qui est plus particulièrement adaptée aux systèmes non linéaires. On peut ainsi, en se positionnant autour de points critiques, déterminer les principales caractéristiques du système non linéaire.

Pour cela, il convient préalablement de mettre la dite équation différentielle non linéaire sous forme d'un système d'équations couplées du premier ordre tel que :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{H}(\mathbf{x})$$

où  $\dot{\mathbf{x}}$  désigne la dérivée temporelle de  $\mathbf{x}$ .

Puis, en considérant par exemple que l'écoulement est bidimensionnel dans le plan  $(x, y)$ , on obtient les trajectoires suivantes :

$$\dot{x} = P(x, y) \quad \dot{y} = Q(x, y) \quad (2.2)$$

$P$  et  $Q$  étant non linéaires, on peut alors exprimer l'équation (2.2) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x} \quad (2.3)$$

Il est ensuite possible d'obtenir les valeurs propres de la matrice jacobienne  $\mathbf{F}$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . La pente formée par les vecteurs propres ( $m_1$  et  $m_2$ ) au point critique peut être aussi exprimée en fonction des coefficients de  $\mathbf{F}$  et des valeurs propres :

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\frac{1}{2} \left[ p \pm (p^2 - 4q)^{1/2} \right], \\ m_1 &= \frac{\lambda_1 - a}{b} = \frac{c}{\lambda_1 - d} \\ m_2 &= \frac{\lambda_2 - a}{b} = \frac{c}{\lambda_2 - d} \end{aligned} \quad (2.4)$$

On peut alors identifier l'angle des trajectoires émanant d'un point critique (qui correspond à la pente formée par les vecteurs propres  $m_1$  et  $m_2$ ). De plus, on peut classer un point critique à l'aide de deux paramètres fonctions de la matrice jacobienne  $\mathbf{F}$  :  $p = -\text{Tr}(\mathbf{F})$  et  $q = \det(\mathbf{F})$ . Un graphique de cette classification des points critiques est disponible figure 2.2.

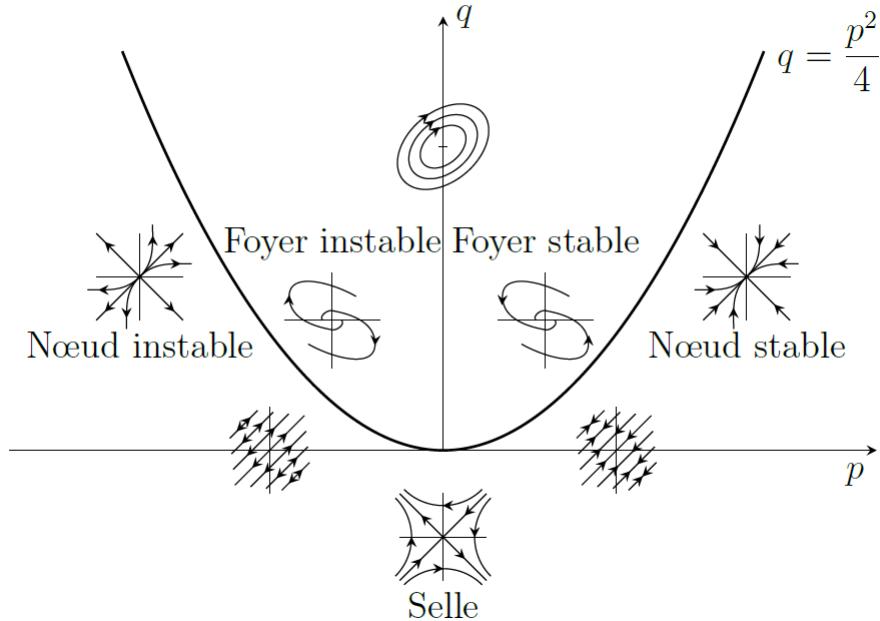


Figure 2.2 Classification du type de point critique en fonction de  $p$  et  $q$ , d'après Miron (2016)

Les points situés en  $q = 0$  sont dit dégénérés, tandis que ceux situés en  $p = 0$  et  $p > 0$  sont des centres et les autres types sont indiqués directement sur la figure 2.2. Ainsi, le

type de point obtenu suite à l'application de la méthode permet de détecter la présence ou non d'un décollement. Par exemple, s'il on a affaire à un décollement alors le point critique doit correspondre à un point de selle. Effectivement, dans les autres cas (nœuds stables et instables), la trajectoire des particules n'ont pas de sens physique, et ne s'éloigne pas de la paroi.

Cette technique a par exemple été appliquée par Perry et Fairlie (1975) pour analyser l'écoulement tridimensionnel sur une surface plane afin d'identifier l'angle formé par le décollement à la paroi.

### 2.1.2 Méthode Moore-Rott-Sears (MRS)

On remarque que bien souvent le critère de Prandtl, qui détermine le point de décollement comme étant la position du cisaillement nul sur la paroi, est également utilisé pour les écoulements instationnaires comme c'est encore le cas chez les aérodynamiciens. Cependant il a été démontré par simulation numérique que l'annulation du cisaillement sur la paroi ne montre pas de manière significative un décollement en cas d'instationnarité dans l'écoulement (Rott 1956 ; Moore 1958 ; Sears et Telionis 1971).

Sears et Telionis (1975) ont établi le critère de Moore-Rott-Sears (MRS) basé également sur la détection de singularités dans les équations de la couche limite. Cette méthode est semblable au critère de Prandtl, mais est étendue aux écoulements instationnaires. Ce critère montre alors que le point de décollement est situé à l'endroit où la contrainte de frottement s'annule dans l'écoulement mais non nécessairement à la paroi et où la vitesse locale longitudinale de l'écoulement est égale à la vitesse du point de décollement.

Soit  $x$  et  $y$  les coordonnées de la couche limite. On définit les coordonnées  $(\chi, \psi)$  par rapport au point de décollement, telles que :

$$\begin{aligned}\chi &= x_0(t) - x, \\ \psi &= y - y_0(t)\end{aligned}$$

où  $(x_0, y_0)$  sont les coordonnées du point de décollement.

Avec  $u_0(\psi, t)$  le profil de vitesse passant par  $x_0$  et  $U_s = \partial x_0 / \partial t$  la vitesse au point de décollement, le critère MRS stipule que :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} U_s & = & u_0(0, t), \\ \frac{\partial u_0(0, t)}{\partial y} & = & 0 \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Cependant le fait qu'il faille connaître au préalable la vitesse du point décollement fait que le critère MRS est quasiment inapplicable en pratique (Williams 1977 ; van Dommelen 1982), bien qu'il soit souvent cité dans la littérature. On pourra aussi noter qu'il est souvent validé seulement qualitativement.

## 2.2 Méthodes lagrangiennes

Tous les critères évoqués précédemment sont néanmoins eulériens, c'est-à-dire basés sur des données du champ de vitesse global de l'écoulement, alors que le décollement est un phénomène lagrangien (Haller, 2004), fondé, quant à lui, sur des visualisations de particules éjectées de la paroi. Il semblerait donc que les approches lagrangiennes soient les plus aptes à la détection du décollement.

Ces méthodes lagrangiennes, qui seront vues par la suite, comportent néanmoins plusieurs inconvénients, d'où le fait que l'on observe un grand nombre d'études utilisant les méthodes eulériennes vues précédemment (Cowley *et al.*, 1990).

Il n'est pas possible d'effectuer des analyses stationnaires puisque par essence la trajectoire des particules est fonction du temps. Enfin, ce type de méthodes est parfois ardu à mettre en œuvre en ce qui concerne par exemple la construction des maillages ou encore la précision nécessaire des données de l'écoulement. Aussi, le nombre de particules parfois élevé qu'il faut advecter peut représenter un coût de calcul important, voire même limitant.

De nos jours, avec les nouvelles puissances de calcul, on observe de plus en plus d'études adoptant des méthodes de détection lagrangiennes, dû aussi au développement des mesures de champs nécessaires au calcul des trajectoires.

### 2.2.1 Utilisation d'un repère lagrangien

Dans les années 80, van Dommelen (1982) et van Dommelen et Shen (1982), sont parvenus à diminuer les coûts de calcul en utilisant un repère lagrangien permettant à la fois le découplage des équations du mouvement tangentiel et normal à la paroi ainsi qu'un passage facilité aux dimensions supérieures. Ces études ont alors permis de révéler le véritable potentiel des méthodes lagrangiennes sur le décollement, notamment dans des écoulements instationnaires. Une synthèse du développement de ce critère est développée ici.

Soit le champ de vitesse en deux dimensions dans le plan (x,y) :

$$\dot{x} = u(x, y, t) \quad \dot{y} = v(x, y, t) \quad (2.6)$$

Les coordonnées d'une particule fluide  $(x(t), y(t))$  au temps initial  $t_0$  s'écrit :

$$\mathbf{x}_0 = (x(x_0, y_0), y(x_0, y_0)) \quad (2.7)$$

On définit ensuite le jacobien de cette transformation tel que :

$$\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \right| = \begin{vmatrix} x_{x_0} & x_{y_0} \\ y_{x_0} & y_{y_0} \end{vmatrix} = x_{x_0}y_{y_0} - y_{x_0}x_{y_0} \quad (2.8)$$

En utilisant la dérivée lagrangienne de  $J$ , il est possible d'établir une expression de l'équation de la continuité :

$$\frac{dJ}{dt} = u_x J + v_y J = J \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.9)$$

De plus, l'équation de la couche limite adimensionnelle dans le repère lagrangien devient, pour un fluide incompressible (i.e.  $J = 1$ ) :

$$u_t = U_t + UU_x + D^2 u \quad (2.10)$$

où  $u_t$  est la dérivée lagrangienne de la vitesse,  $U$  la vitesse de convection de l'écoulement externe et  $D$  l'opérateur de la dérivée eulérienne qui s'écrit en fonction des variables lagagiennes :

$$\frac{d}{dy} = \left( x_{y_0} \frac{\partial}{\partial x_0} - x_{y_0} \frac{\partial}{\partial y_0} \right),$$

L'équation de la couche limite devient :

$$\begin{aligned} u_t = U_t + UU_x + x_{y_0}^2 + u_{y_0 y_0} - 2x_{x_0}x_{y_0}u_{x_0 y_0} + x_{y_0}^2u_{x_0 x_0} - x_{x_0}u_{x_0}x_{y_0 y_0} \\ + (x_{x_0}u_{y_0} + x_{y_0}u_{x_0})x_{x_0 y_0} - x_{y_0}u_{y_0}x_{x_0 x_0} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Cette équation étant à présent découpée de la composante transverse de la vitesse, on peut bien plus facilement la résoudre et identifier la singularité qui correspondra au décollement. En somme, numériquement, le décollement est détecté lors de la résolution de l'équation (2.11) lorsque :

$$\frac{\partial x(x_0, y_0, t)}{\partial x_0} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial x(x_0, y_0, t)}{\partial y_0} = 0 \quad (2.12)$$

Ainsi, ce critère de van Dommelen implique que la formation du pic de particules matérielles provient d'une singularité dans les équations de la couche limite et définit donc le point de décollement comme la position de cette singularité. Cependant des résultats analytiques

montreront que la singularité dans les équations de la couche limite n'a pas de lien direct avec un décollement sur la paroi (Liu et Wan, 1985). Pourtant, cette méthode a tout de même permis de détecter le décollement sur plusieurs écoulements bidimensionnels et tridimensionnels sans avoir à résoudre l'équation de Navier-Stokes (Stern et Paldor 1983 ; Russell et Landahl ; Stuart 1991 ; Childress *et al.* 1989) montrant par ailleurs le potentiel grandissant des méthodes lagrangiennes étant donné que la plupart des méthodes eulériennes restent cantonnées à l'étude d'écoulements bidimensionnels.

Toutes ces méthodes de détection du décollement sont, malgré tout, fondées sur les équations de la couche limite et valides uniquement pour des écoulements à très haut nombre de Reynolds. La méthode suivante s'éloigne, quant à elle, des équations de la couche limite et peut être appliquée quel que soit le type de régime de l'écoulement (laminaire ou turbulent, stationnaire ou instationnaire).

### 2.2.2 Profil de décollement pour des écoulements instationnaires bidimensionnels selon Haller

En 2004, Haller propose une méthode lagrangienne alternative à toutes les autres. Effectivement, il définit le profil décollement comme une ligne matérielle particulière vers laquelle les particules sont attirées parallèlement à la paroi avant d'être éjectées par l'écoulement loin de la paroi.

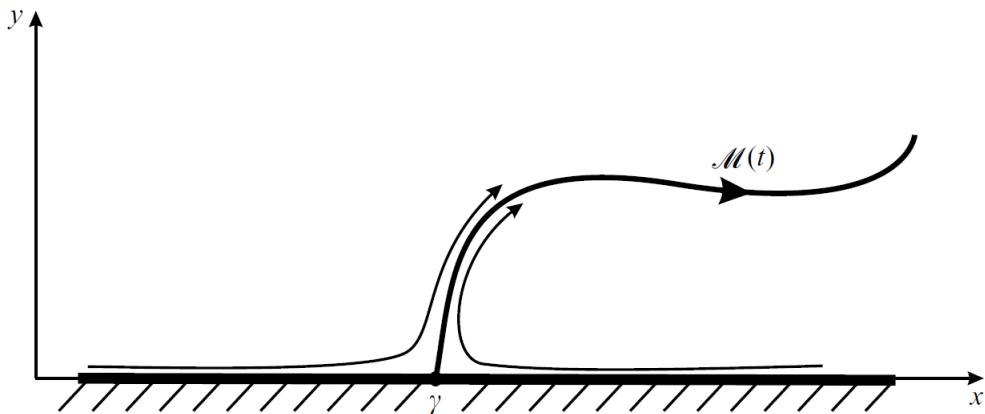


Figure 2.3 Représentation d'une ligne matérielle rattachée à la paroi solide ( $y = 0$ ) au point de décollement  $x = \gamma$ , d'après Haller (2004)

Cette théorie permet la prédiction du point de décollement ainsi que de l'angle de séparation à partir du champ de pression et de la contrainte de frottement le long de la paroi solide pour

des écoulements instationnaires.

La ligne matérielle, notée  $\mathcal{M}(t)$ , est attachée à la paroi au point  $(x, y) = (\gamma, 0)$  comme représenté figure 2.3.

On définit cette ligne matérielle telle que :

$$x = \gamma + yF(y, t) \quad (2.13)$$

où  $F$  est un développement de Taylor autour de  $\gamma$  ayant pour coefficients  $f_i$  :

$$F(y, t) = \sum_{i=0}^n \frac{y^i}{i!} f_i(t) \quad (2.14)$$

Ainsi, on suppose une condition de non-glissement sur la paroi en  $y = 0$ , soit  $u = \dot{x} = 0$  et  $v = \dot{y} = 0$ . Mais aussi et surtout, Haller prend en compte une des propriétés primordiales de  $\mathcal{M}(t)$ . En effet, il s'agit de l'unique ligne matérielle émanant d'un point de la paroi qui ne converge pas vers la paroi en  $t \rightarrow -\infty$ . En fait,  $\mathcal{M}(t)$  est une ligne matérielle séparant deux dynamiques différentes dans l'écoulement. Toutes ces lignes situées de part et d'autre de  $\mathcal{M}(t)$  convergent vers le profil de décollement en temps positif mais elles tendent vers la paroi en temps négatif contrairement à la ligne matérielle  $\mathcal{M}(t)$ .

À l'aide de ces conditions, Haller (2004) énonce des équations décrivant le profil de décollement pour des écoulements compressibles instationnaires.

Ainsi, la pente du décollement correspond à  $f_0(t)$  s'exprime telle que :

$$f_0(t) = f_0(t_0) \frac{\rho(t)}{\rho(t_0)} + \rho(t) \int_{t_0}^t \frac{a(s)}{\rho(s)} ds \quad (2.15)$$

avec la pente initiale :

$$f_0(t_0) = \frac{\rho(t_0) \int_0^T \left[ \frac{b_y(t) - a_x(t)}{\rho(t)} \int_0^t \frac{a(s)}{\rho(s)} ds + b_x(t) \left( \int_0^t \frac{a(s)}{\rho(s)} ds \right)^2 - \frac{a_y(t)}{\rho^2(t)} \right] dt}{\int_0^T \left[ \frac{a_x(t) - b_y(t)}{\rho(t)} - 2b_x(t) \int_0^t \frac{a(s)}{\rho(s)} ds \right] dt} \quad (2.16)$$

où  $a(t)$  et  $b(t)$  sont respectivement  $u_y(\gamma, 0, t)$  et  $v_y(\gamma, 0, t)$  et  $\rho$  la masse volumique du fluide.

Le point de décollement effectif et le point de décollement réel sont également définis. Alors, en notant  $i_t(x) = \int_{t_0}^t \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, s) ds$ , on peut montrer qu'il existe une fonction  $\gamma_{\text{eff}}(t)$ , corres-

pondant au décollement effectif, qui vérifie  $i_t(\gamma_{\text{eff}}(t)) = 0$ .

Le décollement réel est, quant à lui, obtenu tel que :

$$\gamma = \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_{\text{eff}}(t) \quad (2.17)$$

En somme, cette méthode comporte plusieurs avantages par rapport aux méthodes eulériennes présentées précédemment. Par exemple l'indépendance du référentiel utilisées, et cette méthode permet également l'étude du décollement sur un large spectre de nombres de Reynolds (faibles ou forts), que l'écoulement soit stationnaire ou instationnaire.

Finalement, cette méthode plus directe et intuitive que celles énoncées précédemment est remarquable puisqu'elle n'est pas basée sur les équations de la couche limite et ne nécessite pas non plus la connaissance a priori de la vitesse de convection du point de décollement contrairement à la méthode MRS.

Haller caractérisa de plus deux types de décollement : le décollement fixe et le décollement mobile.

Le décollement fixe apparaît lorsque l'écoulement possède une moyenne temporelle bien définie, comme pour les écoulements périodiques ou quasi-périodiques ou alors ceux statistiquement stationnaires. Dans ce cas le point de décollement reste fixe sur la paroi.

Dans le cas contraire, Haller (2004) définit le décollement mobile qui exprime le fait que le point de décollement peut bouger, disparaître et réapparaître sur la paroi.

On observe qu'en pratique, le point de décollement obtenu par cette méthode n'est généralement pas confondu avec le point prédict par le critère de Prandtl (1904).

### 2.2.3 Autres méthodes récentes notables

Puis plus récemment, Miron et Vétel (2015) ont proposé une approche différente du décollement mobile, basée sur les Structures Lagrangiennes Cohérentes (LCSs), impliquant que le point de décollement serait un point selle lagrangien hors paroi. Le profil de décollement est une LCS attractive (Farazmand et Haller, 2012), c'est-à-dire qui attire les particules fluides loin de la paroi. Cependant, l'existence de tels points de décollement hors paroi reste encore incertaine.

En somme, tandis que toutes les approches énoncées ici peuvent sembler radicalement différentes, elles ont pour autant toutes un point commun. Effectivement, elles sont toutes fondées sur des méthodes asymptotiques et donc montrent le profil de décollement comme l'alignement des particules advectées issues de la paroi après un temps infini. Cependant dans le

cadre du contrôle de l'écoulement, le but est de supprimer le décollement à son apparition et non pas de contrôler sa structure asymptotique. Pour cela, il convient de mettre en œuvre une théorie générale qui capture la formation des pics de particules sur un court intervalle de temps et donnant même idéalement une détection exacte avec une limite instantanée.

Ainsi en 2018, Serra *et al.* ont proposé une nouvelle théorie décrivant la formation d'un pic de particules au niveau du décollement, fondée, entre autres, sur l'évolution exacte de la courbure des lignes matérielles à proximité de la paroi. C'est effectivement ce critère qui va être l'objet principal de ce mémoire, et sera détaillé par la suite.

## CHAPITRE 3 MÉTHODOLOGIE

Ce mémoire est principalement consacré à la validation du critère de décollement de Serra *et al.* (2018). Effectivement, le décollement est visualisé dans toutes les expériences en observant l'éjection de particules de la paroi, tout comme Prandtl a pu le faire lui-même dans son procédé expérimental initial. C'est donc pour cela que le décollement peut être décrit comme un phénomène matériel lagrangien où une couche de fluide est éjectée de la paroi. De ce constat, Serra *et al.* (2018) propose d'étudier la formation de pics de particules matérielles induite par le décollement basée sur la variation des champs de courbure de ces lignes matérielles initialement parallèles à la paroi. En pratique, cette théorie fournit des formules explicites qui sont indépendantes du référentiel d'observation en deux dimensions, pour les écoulements compressibles et incompressibles.

Ainsi, dans un premier temps, une présentation de la théorie est nécessaire afin de présenter les formules permettant la capture du profil et du point de décollement sur tout type d'écoulement.

### 3.1 Théorie de la méthode

Il sera ici question d'obtenir une formule explicite décrivant l'évolution temporelle de la courbure le long d'une ligne matérielle  $\gamma$  comme représenté figure 3.1 . On note par  $\mathbf{r} : s \mapsto \mathbf{r}(s), s \in [s_1, s_2] \subset \mathbb{R}$  la paramétrisation d'une courbe matérielle  $\gamma$  à  $t_0$  et  $(\cdot)'$  la dérivée par rapport aux coordonnées curvilignes  $s$ .

La théorie de Serra *et al.* fournit alors la variation exacte de la courbure lagrangienne de  $\gamma$  à partir de sa courbure initiale  $\kappa_0$  à  $\kappa_{t_0}^t$  entre le temps initial  $t_0$  et le temps  $t$  pour tout écoulement dépendant du temps.

Pour le cas d'un écoulement incompressible, on obtient :

$$\kappa_{t_0}^t = \frac{\langle (\nabla^2 F_{t_0}^t(\mathbf{r})\mathbf{r}')\mathbf{r}', \mathcal{R}\nabla F_{t_0}^t(\mathbf{r})\mathbf{r}' \rangle}{\langle \mathbf{r}', \mathcal{C}_{t_0}^t(\mathbf{r})\mathbf{r}' \rangle^{3/2}} + \frac{\kappa_0}{\langle \mathbf{r}', \mathcal{C}_{t_0}^t(\mathbf{r})\mathbf{r}' \rangle^{3/2}}, \quad (3.1)$$

où  $F_{t_0}^t$  est l'application qui à la position d'un point  $\mathbf{x}_0$  du domaine à un temps initial  $t_0$  associe sa position  $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = [x, y]^\top$  au temps  $t$  tel que :

$$F_{t_0}^t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\mathbf{F}_{t_0}^\tau(\mathbf{x}_0), \tau) d\tau, \quad (3.2)$$

$F_{t_0}^t$  est appelé aussi *flow map* en anglais.

On définit aussi  $\mathcal{C}_{t_0}^t = [\nabla F_{t_0}^t]^\top F_{t_0}^t$  le tenseur droit de Cauchy–Green et  $\mathcal{R}$  la matrice de rotation définie par :

$$\mathcal{R} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

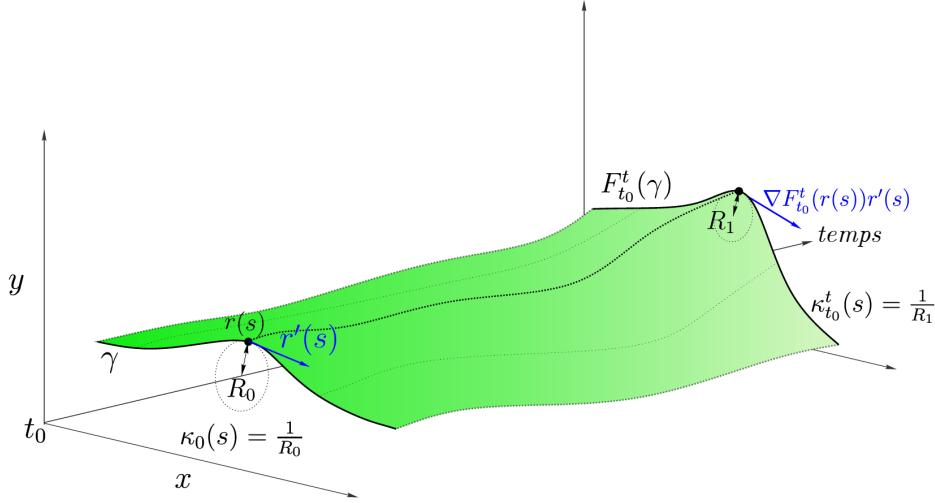


Figure 3.1 Évolution temporelle de la courbure le long d'une ligne matérielle  $\gamma$ .  $R_0$  et  $R_1$  sont les rayons de courbure en un point  $r(s)$  de la ligne matérielle respectivement pour  $t_0$  et un temps futur  $T$ , d'après Serra *et al.* (2018)

Afin de pouvoir extraire l'empreinte du décollement, il est nécessaire de calculer la variation de courbure relative à la courbure initiale des lignes matérielles  $\bar{\kappa}_{t_0}^t := \kappa_{t_0}^t - \kappa_0$  (où les lignes matérielles sont initialement toutes parallèles à la paroi). En somme, l'empreinte du décollement est caractérisée par les points des lignes matérielles au voisinage d'une paroi où la courbure est la plus importante (relativement à la courbure initiale de la paroi) sur un intervalle de temps  $[t_0, t_0 + T]$ .

Ainsi, l'empreinte lagrangienne du pic de décollement, notée  $\mathcal{B}(t)$ , est définie par  $\mathcal{B}(t) \ll \text{les centres théoriques du pic de particules formé sur un intervalle de temps } [t_0, t_0 + T]$ . L'empreinte  $\mathcal{B}(t)$  est donc une ligne matérielle dont la position initiale  $\mathcal{B}(t_0)$  est une crête positive transverse du champ de variation de courbure  $\bar{\kappa}_{t_0}^t \gg$  (Serra *et al.*, 2018).

Aussi, la limite instantanée de l'empreinte du décollement de ce critère peut aussi être calculée

et correspond à l'empreinte eulérienne du décollement  $\mathcal{B}_E(t)$ . On note alors :

$$\dot{\kappa}_{t_0}(s) = \left. \frac{d\kappa_{t_0}^t(s)}{dt} \right|_{t=t_0}. \quad (3.4)$$

Serra *et al.* (2018) fournissent aussi un formule explicite permettant de calculer le taux de courbure :

$$\dot{\kappa}_{t_0} = \langle \mathcal{R}\mathbf{r}', (\nabla \mathcal{S}(\mathbf{r}, t_0)\mathbf{r}')\mathbf{r}' \rangle - \frac{1}{2} \langle \nabla \omega(\mathbf{r}, t_0), \mathbf{r}' \rangle - 3\kappa_0 \langle \mathbf{r}', \mathcal{S}(\mathbf{r}, t_0)\mathbf{r}' \rangle. \quad (3.5)$$

où  $\mathcal{S}$  est le tenseur des taux de déformation et  $\omega$  la vorticité du champ de vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ .

De ce fait, le taux de courbure  $\dot{\kappa}_{t_0}(s)$  de l'équation (3.5) est composé de termes décrivant des phénomènes de rotation et de déformation (allongement). L'empreinte eulérienne du décollement  $\mathcal{B}_E(t)$  est définie de la même manière que  $\mathcal{B}(t)$ , c'est-à-dire comme étant la crête positive du champ de taux de courbure  $\dot{\kappa}_{t_0}$ . Enfin, Serra *et al.* (2018), montrent également que le champ de variation de courbure  $\kappa_{t_0}^t$  et le taux  $\dot{\kappa}_{t_0}$  sont objectifs, c'est-à-dire indépendants du référentiel d'observation et donc indépendant de la translation ou rotation du système de coordonnées, ici relatif aux déplacements des particules proches de la paroi.

### 3.2 Exemple simple d'application de la méthode

Afin d'illustrer les résultats qui peuvent être obtenus à l'aide de cette méthode, un exemple est réalisé pour le cas de la bulle de décollement laminaire (voir les détails de cet écoulement dans le paragraphe 4.1.1 du chapitre 4).

La figure 3.2(a) expose les lignes de courant au voisinage du décollement au niveau de la paroi à  $y = 0$ , tandis que le champ de variation de courbure lagrangien  $\kappa_{t_0}^t$  est affiché sur la figure 3.2(b) pour le temps d'intégration  $T = 1.6$  et un temps initial  $t_0 = 0$ . Ainsi, on observe bien que la courbure du champ atteint un maximum pour tout  $y$ . Ceci permet donc de définir l'empreinte lagrangienne du décollement  $\mathcal{B}(0)$  d'un pic de particules (en rouge sur la figure 3.2(b)) qui correspond à une crête sur le champ  $\bar{\kappa}_{t_0}^{t_0+T}$ . La figure 3.2(c), quant à elle, montre le champ de variation de courbure lagrangien pour un temps d'intégration plus grand ( $T = 3.2$ ). Cela a pour objectif d'obtenir un pic matériel plus prononcé qu'avec un temps d'intégration plus faible. C'est effectivement ce qui est observé en comparant les figures 3.2(b) et (c).

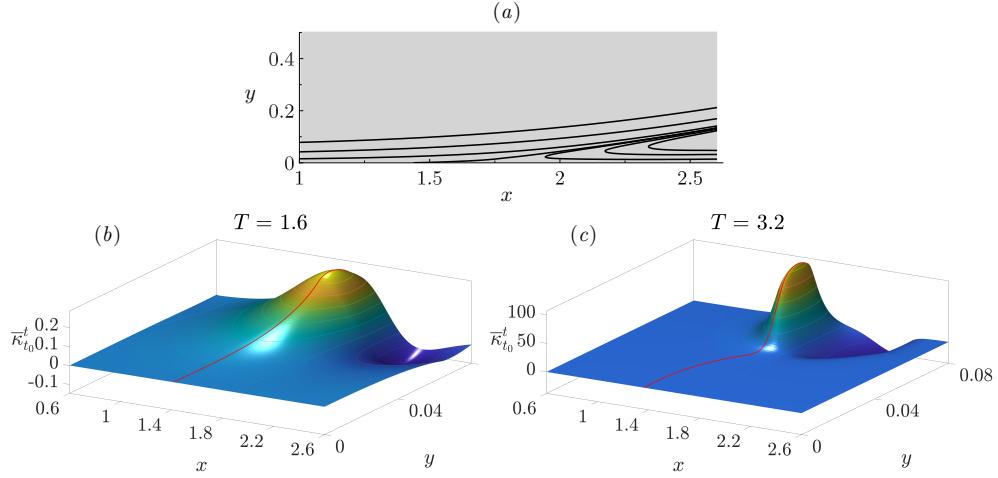


Figure 3.2 (a) Exemple de lignes de courant dans l'écoulement d'une bulle de décollement laminaire et le champ de variation de courbure lagrangien  $\bar{\kappa}_{t_0}^{t_0+T}$  pour  $T = 1.6$  (b) et  $3.2$  (c). La courbe rouge montre la position initiale de l'empreinte lagrangienne du décollement  $\mathcal{B}(0)$

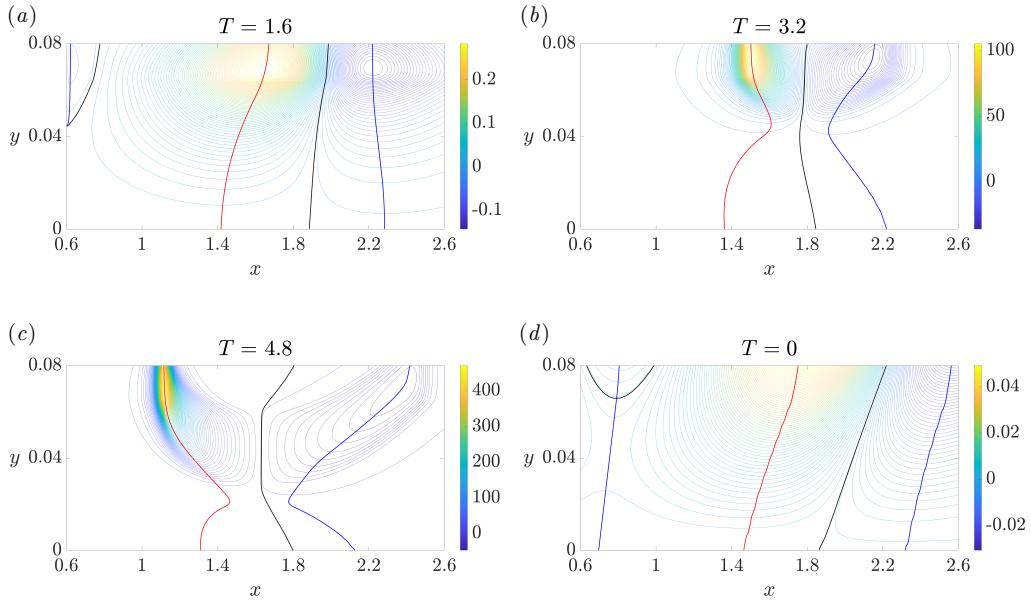


Figure 3.3 (a, b) Contours des champs de courbure de la figure 3.2 (b, c) avec un temps d'intégration  $T$  plus long pour (c). (d) représente le champ de taux de courbure  $\dot{\kappa}_{t_0}$  qui correspond à la dérivée temporelle de  $\bar{\kappa}_{t_0}^{t_0+T}$  évaluée en  $T = 0$ . Les courbes rouges montrent les positions initiales des empreintes lagrangiennes du décollement  $\mathcal{B}(t_0)$  en (a, b et c) et l'empreinte eulérienne  $\mathcal{B}_E(t_0)$  en (d) tandis que les courbes bleues montrent les minimums de courbure au voisinage des empreintes de décollement. Les courbes noires représentent le passage de  $\bar{\kappa}_{t_0}^{t_0+T}$  (ou  $\dot{\kappa}_{t_0}$  pour (d)) à zéro

Les figures 3.3(a, b) représentent les contours des champs de courbure  $\bar{\kappa}_{t_0}^{t_0+T}$  des figures 3.2(b, c), ce qui permet donc de mieux observer la forme de la position initiale de l'empreinte lagrangienne du décollement  $\mathcal{B}(0)$ . La figure 3.3(c) expose ces mêmes résultats pour un temps d'intégration encore plus long. Enfin, la figure 3.3(d) montre les contours pour le champ du taux de courbure  $\dot{\kappa}_{t_0}$  qui équivaut à la dérivée temporelle de  $\bar{\kappa}_{t_0}^{t_0+T}$  évaluée en  $T = 0$ , ce qui correspond à la limite instantanée. Cela permet de tracer la position initiale de l'empreinte eulérienne du décollement  $\mathcal{B}_E(t_0)$ . On peut alors remarquer que les formes des différentes empreintes du décollement (en rouge) sont différentes mais se connectent toutes à la paroi pratiquement au même endroit. En effet, ces points de décollement sont censés être exactement confondus pour des écoulements stationnaires (Serra *et al.*, 2018). Cependant dans ce cas de la bulle de décollement laminaire, l'écoulement est légèrement instationnaire, d'où la légère dépendance temporelle du point de décollement. De plus, on constate que chaque crête est accompagnée par un minimum de courbure, ici en bleu tandis qu'en noir est montré l'annulation des champs.

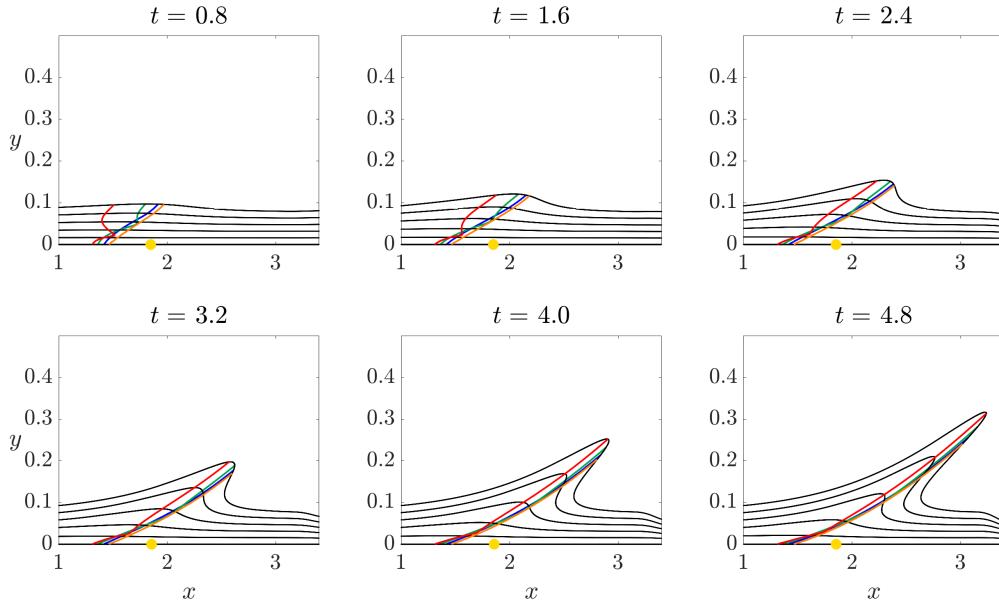


Figure 3.4 Empreinte du décollement eulérien  $\mathcal{B}_E(t)$  (orange) et les empreintes du décollement lagangiens  $\mathcal{B}(t)$  pour  $T = 1.6$  (bleu),  $T = 3.2$  (vert) and  $T = 4.8$  (rouge). En noir, les lignes matérielles initialement parallèles à la paroi et en jaune le point de décollement de Prandtl

La figure 3.4 représente l'évolution dans le temps de toutes les empreintes de décollement de la figure 3.3 avec des lignes matérielles initialement parallèles à la paroi. Le point jaune indique le point d'annulation du frottement pariétal (critère de Prandtl). Il est remarquable que les

points de rattachement à la paroi des empreintes de décollement sont situés en amont du point de Prandtl ce qui est souvent le cas pour les méthodes lagrangiennes (Haller, 2004), et ce même pour des écoulements stationnaires. Aussi, on observe qu'au dernier temps d'advection des lignes matérielles ( $t = 4.8$ ), les empreintes lagrangiennes tendent à se confondre malgré leurs formes initiales différentes. Ainsi, le choix du temps d'intégration ne s'avérerait pas fondamental bien qu'il soit plus intéressant d'utiliser un petit temps d'intégration, ce qui ne pouvait pas être effectué avec les autres méthodes asymptotiques de détection du décollement que l'on n'a pu voir dans la revue de littérature.

### 3.3 Implémentation numérique de la méthode

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la façon dont la méthode a été implémentée dans un programme Matlab. Ainsi, le programme comporte deux algorithmes : un permettant de calculer l'empreinte lagrangienne du décollement  $\mathcal{B}(t)$  et un autre pour l'empreinte eulérienne du décollement  $\mathcal{B}_E(t)$ .

Le premier algorithme prend en entrée un champ de vitesse bidimensionnel autour d'une paroi solide dont la géométrie est paramétrée par  $r(s)$ ,  $s \in [s_1, s_2] \subset \mathbb{R}$  sur un intervalle de temps  $[t_0, t_0 + T]$ . Ce champ de vitesse peut provenir de tout type d'écoulement, laminaire ou turbulent, stationnaire ou instationnaire. De surcroît, le champ de vitesse peut être analytique, issu d'une simulation numérique ou bien d'un procédé expérimental, qui sera ensuite interpolé à l'aide de la fonction Matlab *griddedInterpolant.m*.

Par la suite, il convient d'initialiser les lignes matérielles parallèles à la paroi, paramétrées par  $r_\eta(s)$ ,  $s \in [s_1, s_2]$ ,  $\eta \in [0, \eta_1]$ . De plus, il est nécessaire de calculer les vecteurs normaux pointant vers la paroi de ces lignes définies par  $\mathcal{R}\mathbf{r}'_\eta$ , avec  $\mathbf{r}'_\eta = dr/ds$ , ainsi que le champ de courbure initiale  $\kappa_{0\eta}(s)$ . Dans le cas de la paroi plane le champ initial des vecteurs normaux des lignes matérielles est uniforme et vaut  $\mathbf{r}_\eta(s) = (0, -1)$ .

On fait ensuite advecter dans le temps les lignes matérielles grâce aux champs de vitesse de l'écoulement (pour ce faire on utilise la fonction Matlab *ODE45.m*). On peut alors calculer le champ de variation de courbure des lignes matérielles  $\bar{\kappa}_{t_0}^{t_0+T}$  à l'aide de l'équation (3.1). La fonction *gradient.m* de Matlab pour le calcul du gradient du tenseur de déformation, ainsi que la fonction d'interpolation *interp2.m* sont appliqués dans l'algorithme.

Par la suite, il est nécessaire d'extraire la position initiale de l'empreinte du décollement  $\mathcal{B}(t_0)$  qui correspond à la crête positive du champ de variation de courbure  $\bar{\kappa}_{t_0}^{t_0+T}$ . Pour cela, il faut isoler les niveaux nuls du gradient du champ de courbure.

La formule suivante est donc implémentée sur Matlab à l'aide, entre autres, des fonctions *contour.m*, *interp2.m* et *gradient.m* :

$$\mathcal{B}(t_0) := \begin{cases} \partial_s \bar{\kappa}_{t_0}^{t_0+T}(s, \eta) = 0, & \eta \in (0, \eta_1] \\ \partial_{ss} \bar{\kappa}_{t_0}^{t_0+T}(s, \eta) < 0, & \eta \in (0, \eta_1] \\ \bar{\kappa}_{t_0}^{t_0+T}(s, \eta) > 0, & \eta \in (0, \eta_1] \\ (s_p, \eta), & \eta = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

où  $(s_p, 0)$  correspond au point de décollement lagrangien.

Enfin, les positions suivantes  $\mathcal{B}(t)$  de l'empreinte lagrangienne du décollement pourront être calculées en advectant la ligne formée par  $\mathcal{B}(t_0)$  sous l'influence de  $F_{t_0}^t$ , soit  $\mathcal{B}(t) = F_{t_0}^t(\mathcal{B}(t_0))$ , pour cela la fonction *ODE45.m* de Matlab sera utilisée.

Le second algorithme permet de déterminer l'empreinte eulérienne du décollement  $\mathcal{B}_E(t) = \dot{\mathcal{B}}(t)$ . La méthodologie est très similaire à l'algorithme pour l'empreinte lagrangienne du décollement : initialisation des lignes matérielles parallèles à la paroi, calcul des vecteurs normaux et calcul du champ de courbure initiale  $\kappa_{0\eta}(s)$ . Il faut ensuite calculer le taux de courbure eulérien  $\dot{\kappa}_t(s, \eta) := \dot{\kappa}_t(\mathbf{r}_\eta(s))$  (voir équation 3.5). La position initiale de l'empreinte eulérienne du décollement  $\mathcal{B}_E(0)$  est alors caractérisée comme étant la crête de maximum de courbure positive du champ de taux de courbure  $\dot{\kappa}$ . Elle peut ensuite être advectée comme précédemment pour obtenir  $\mathcal{B}_E(t)$  pour des différents temps.

Pour les parois planes, un repère cartésien est utilisé pour les champs et les taux de courbure. Les vecteurs normaux et le champ de courbure initial sont, dans ce cas, très faciles à obtenir.

Ces deux algorithmes ont initialement été développés par Mattia Serra, et modifiés et adaptés par l'auteur pour traiter les différents cas étudiés dans la suite de ce mémoire. Par contre, pour les parois courbes le rayon de courbure ainsi que les vecteurs normaux ne sont pas triviaux et sont non uniformes dans un repère cartésien. Des coordonnées curvilignes sont donc utilisées pour calculer  $\kappa_0$  et  $\bar{\kappa}_{t_0}^{t_0+T}$ . La prochaine partie est consacrée à ce sujet, qui a été ajouté par l'auteur à l'algorithme original.

### 3.3.1 Maillage et dérivation en coordonnées curvilignes

On cherche à estimer des dérivées de variables dans un repère curviligne généré par des lignes parallèles à une courbe donnée quelconque. La coordonnée tangente est  $t$ , et  $r$  désigne la coordonnée orthogonale, distance d'un point à la courbe. La courbe, définie par les points

de coordonnées  $(x_s, y_s)$ , est paramétrée par les fonctions  $f$  et  $g$  :

$$\begin{aligned} x_s &= f(t) \\ y_s &= g(t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Les vecteurs unitaires de la base sont  $\mathbf{e}_r$  et  $\mathbf{e}_t$ . Si on désigne par  $(\cdot)'$  la différentiation par rapport à  $t$ , alors  $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r(t)$ , orienté dans la direction opposée à la paroi, s'écrit :

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{(f'^2 + g'^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} g' \\ -f' \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

On génère alors le maillage curviligne par les points de coordonnées  $\mathbf{x} = (x(r, t), y(r, t)) = \mathbf{x}_s(t) + r\mathbf{e}_r(t)$ , soit :

$$\begin{aligned} x &= f(t) + r \frac{g'(t)}{(f'(t)^2 + g'(t)^2)^{1/2}}, \\ y &= g(t) - r \frac{f'(t)}{(f'(t)^2 + g'(t)^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pour obtenir la courbure  $\gamma$  du maillage en un point donné, les grandeurs nécessaires  $(x', x'', y', y'')$  sont déduites de (3.9) par dérivations successives (ce qui nécessite de spécifier les dérivées 1<sup>re</sup>, 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> de  $f$  et  $g$ ).

On désigne par  $s(t)$  l'abscisse curviligne. Les formules suivantes sont obtenues en considérant que  $d/dt = s'd/ds$ . Pour une fonction scalaire  $h$ , on a (voir annexe A) :

$$\nabla h = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial r} \\ \frac{1}{s'} \frac{\partial h}{\partial t} \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

où  $s'^2 = f'^2 + g'^2$ . Le gradient d'un vecteur  $\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_t \mathbf{e}_t$  est donné par (annexe A)

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{s'} \frac{\partial u_r}{\partial t} - \gamma u_t \\ \frac{\partial u_t}{\partial r} & \frac{1}{s'} \frac{\partial u_t}{\partial t} + \gamma u_r \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Si  $\mathbf{u} = \nabla h$ , alors :

$$\nabla \mathbf{u} = \nabla^2 h = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} & \frac{1}{s'} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial r \partial t} - \gamma \frac{\partial h}{\partial t} \right) \\ \text{sym.} & \frac{1}{s'^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \frac{s''}{s'^3} \frac{\partial h}{\partial t} + \gamma \frac{\partial h}{\partial r} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Pour calculer  $\nabla h$  et  $\nabla^2 h$ , on doit donc connaître en chaque point  $s'$ ,  $s''$  et  $\gamma$ .

### Exemple : Coordonnées cylindriques

Dans le cas d'une courbe circulaire de rayon  $R$ ,  $t$  correspond à un angle et en coordonnées cylindriques on a :

$$\begin{aligned} f &= (R+r) \cos t, & g &= (R+r) \sin t, \\ s &= (R+r)t, & s' &= R+r = \frac{1}{\gamma}, & s'' &= 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

ce qui permet de retrouver les formules classiques

$$\nabla h = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial r} \\ \frac{1}{R+r} \frac{\partial h}{\partial t} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{R+r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} - u_t \right) \\ \frac{\partial u_t}{\partial r} & \frac{1}{R+r} \left( \frac{\partial u_t}{\partial t} + u_r \right) \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

### **Ellipse :**

Dans le cas d'une courbe elliptique, on adopte la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t, \end{aligned} \quad (3.15)$$

où  $a$  et  $b$  désignent le grand axe et le petit axe de l'ellipse, respectivement. La figure 3.5 présente le maillage obtenu avec  $a = 1$  et  $b = 0.5$ , pour  $0 < r < 0.1$ . Les contours sont ceux de la courbure  $\gamma$ . On vérifie bien par exemple que la courbure est maximale aux extrémités droite et gauche de l'ellipse.

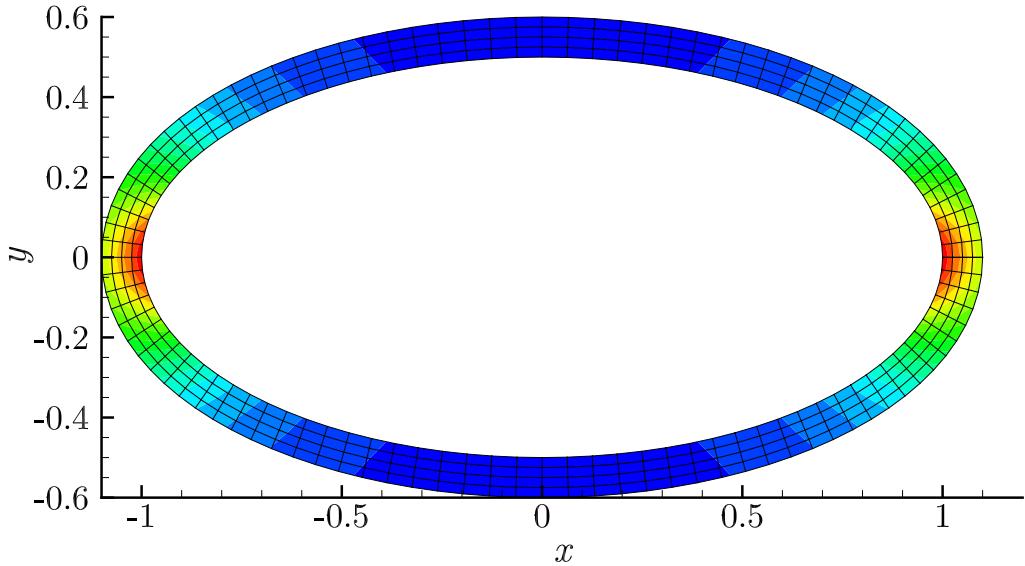


Figure 3.5 Maillage d'une région elliptique avec contours de la courbure  $\gamma$

### Profil NACA :

Le profil NACA 0012 est défini par l'équation suivante :

$$y = a(b\sqrt{x} + cx + dx^2 + ex^3 + fx^4). \quad (3.16)$$

Il est souvent d'usage de resserrer les points du maillage au bord d'attaque de l'aile. Pour ce faire, on utilise généralement une paramétrisation de  $x(t)$  utilisant une fonction trigonométrique. Cependant, la racine de  $x$  présente dans (3.16) fait apparaître un terme en  $1/\sqrt{x}$  dans les dérivées successives de  $y$  puisque l'on utilise  $dy/dt = dy/dx \times dx/dt$ . Cela nécessite alors de traiter différemment le point singulier  $(0, 0)$  en spécifiant directement les valeurs, par exemple en utilisant un développement limité des fonctions.

Une autre façon de faire consiste à s'arranger pour faire disparaître la fonction  $\sqrt{x}$ . La figure 3.6 montre un exemple en prenant tout simplement  $x(t) = t^2$ , qui permet aussi d'augmenter le nombre de noeuds au bord d'attaque. On peut aussi vérifier que la courbure est maximale dans cette région.

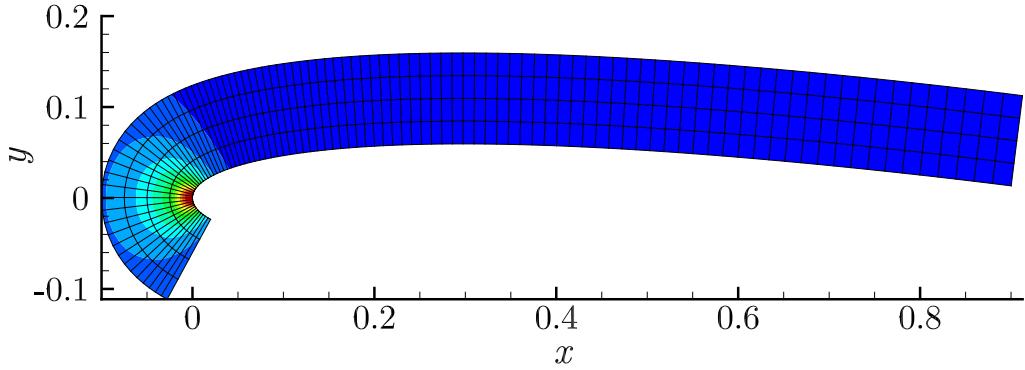


Figure 3.6 Maillage autour d'un profil NACA 0012 (symétrique) avec contours de la courbure  $\gamma$

Remarque : En réalité, la courbure n'est pas exactement maximale au bord d'attaque. La figure 3.7 l'illustre en montrant un zoom de  $\gamma(x, y)$  dans une région resserrée autour du bord d'attaque de l'aile. On peut s'apercevoir que le maximum est situé à  $y \simeq \pm 1.2 \times 10^{-3}$ , soit à environ 2 % de la demi-épaisseur du profil en haut et en bas de l'axe de symétrie.

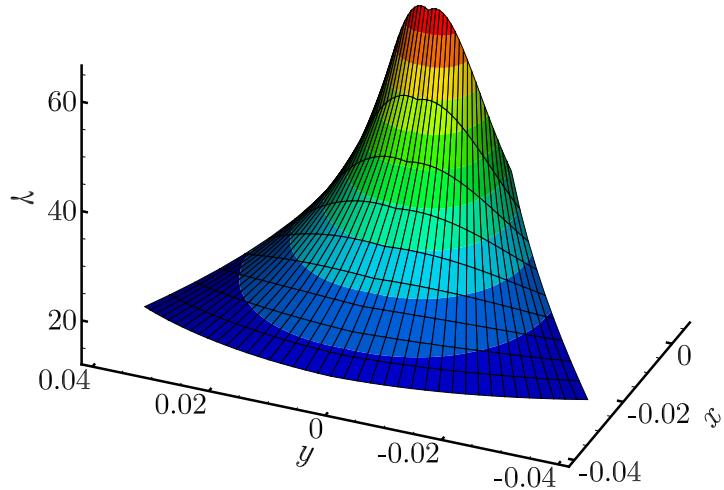


Figure 3.7 Vue tridimensionnelle et contours de la courbure  $\gamma$  dans la région du bord d'attaque du NACA 0012

Ainsi, dans cette partie, nous avons explicité la théorie et sa mise en œuvre numérique dans un programme Matlab. Les prochains chapitres auront donc pour objectifs d'appliquer ce critère à différents exemples dans un souci de validation de cette méthode de détection de décollement lagrangien de Serra *et al.* (2018) se voulant à la fois objective et universelle. Le critère sera ainsi appliqué au décollement sur paroi plane et sur paroi courbe.

## CHAPITRE 4 DÉCOLLEMENT SUR SURFACES PLANES

Dans cette partie, nous discutons de la mise en application du critère de Serra *et al.* sur plusieurs exemples de complexité croissante. Il s'agira cependant ici uniquement de la détection du décollement sur paroi plane. Il est à noter également que certains des cas suivants avaient été traités dans le mémoire de Crouzat (2017), ancien étudiant de J. Vétel, mais ils sont ici réalisés de nouveau et analysés plus profondément.

### 4.1 Bulle de décollement

#### 4.1.1 Définition de l'écoulement

Dans un premier temps, nous allons nous concentrer sur la formation du pic matériel sur l'écoulement en deux dimensions de la bulle de décollement qui a notamment servi dans l'exemple du chapitre précédent (dans son cas laminaire). Le domaine de simulation est  $L_x \times L_y = 8h \times 2h$  où  $h$  correspond à la demi-largeur de la conduite,  $x$  et  $y$  sont les coordonnées adimensionnelles par rapport à  $h$  ( $x$  est dans le sens de l'écoulement et  $y$  est normal à celui-ci). Dans le régime laminaire ou celui turbulent, le décollement est provoqué à la paroi sans glissement en  $y = 0$  par extraction du fluide à la paroi supérieure en  $y = 2$  ce qui a pour conséquence l'apparition d'un gradient de pression adverse. Une condition limite conventionnelle est utilisée afin d'imposer le niveau de pression à la sortie du domaine de calcul. Afin de réaliser cette simulation numérique, la version 2D du code de différences finis **Incompact3d** est utilisée (Laizet et Lamballais, 2009; Laizet et Li, 2011) qui permet de résoudre les équations de Navier-Stokes en incompressible. On peut, par exemple, observer sur la figure 4.1(a) le champ de vorticité pour cet écoulement dont le nombre de Reynolds est  $Re = Uh/\nu = 3200$  où  $U$  est la vitesse moyenne et  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide, avec le profil de vitesse de Blasius en entrée. Deux types de décollements sont alors observables ici. D'abord un décollement quasi-stationnaire autour de  $x \sim 1.5$  qui apparaît suite à la présence d'un gradient de pression adverse : c'est le cas qui a été présenté dans le chapitre précédent. Puis, on peut voir également un décollement induit par vortex qui apparaît suite à l'instabilité créée par le décollement précédent.

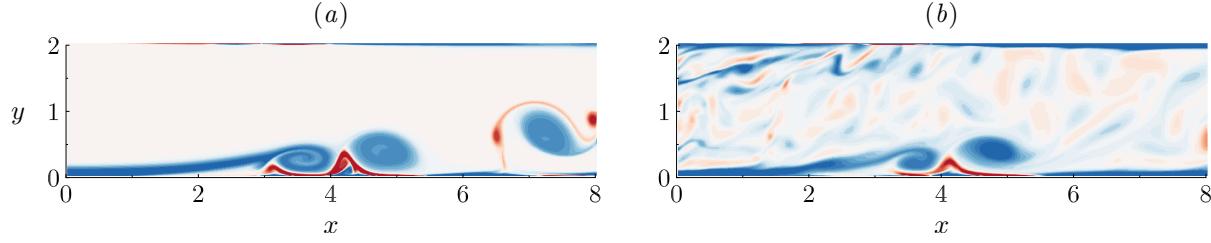


Figure 4.1 Champ de vorticité pour la bulle de décollement laminaire (a) et turbulente (b)

La figure 4.1(b), quant à elle, correspond à un écoulement plus complexe. En effet, dans ce cas, un profil de vitesse turbulent est imposé en entrée du domaine. Pour ce faire, les équations de Navier-Stokes ont été préalablement résolues en 3D avec le code de Simulation Numérique Directe (DNS) `Incompact3d` afin d'avoir un écoulement pleinement développé et périodique dans le sens de l'écoulement. Le nombre de Reynolds est  $Re = Uh/\nu = 5000$ , où  $U$  est la vitesse moyenne et  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide. Ensuite, le profil de vitesse obtenu a été utilisé comme la condition d'entrée dépendante du temps pour le cas 2D de la bulle de décollement. C'est pour cela que l'on considère que cet écoulement 2D représente une bulle de décollement turbulente étant donné son comportement chaotique comme l'atteste la figure 4.1(b).

#### 4.1.2 Bulle de décollement turbulente

Étant donné que le cas de la bulle de décollement laminaire a déjà été étudié dans le chapitre précédent, nous allons ici uniquement nous concentrer sur la bulle de décollement turbulente (figure 4.1(b)).

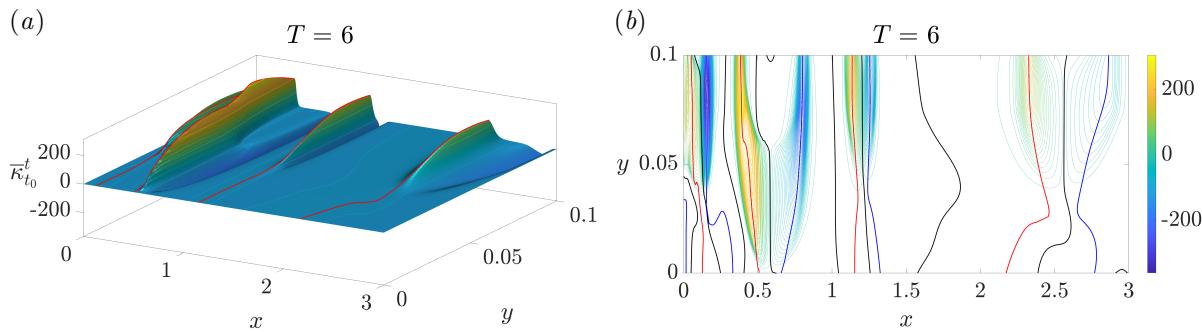


Figure 4.2 (a) Champ de variation de courbure  $\bar{\kappa}_0^6$  au voisinage du premier décollement ( $x < 3$ ) pour la bulle de décollement turbulente. (b) Contours du champ (a)

La figure 4.2(a) représente le champ de variation de courbure  $\bar{\kappa}_0^6$  dans la première partie de l'écoulement ( $x < 3$ ) tandis que la figure 4.2(b) montre les contours du champ correspondant. Ceci permet de bien visualiser les formes des positions initiales des empreintes lagrangiennes du décollement qui dans ce cas sont connectées à la paroi. Bien que l'écoulement soit plus complexe que celui étudié précédemment, chaque empreinte est bien bordée par deux passages à zéro de  $\bar{\kappa}_{t_0}^{t_0+T}$  (lignes noires) et aussi par deux minimums de courbure (lignes bleues) comme cela était le cas pour la bulle de décollement laminaire.

La figure 4.3, quant à elle, montre l'évolution des empreintes lagrangiennes du décollement  $\mathcal{B}(t)$  (en vert) extraite de la figure 4.3 ainsi que les lignes matérielles initialement parallèles à la paroi (en noir), le tout sur fond du champ de vorticité de l'écoulement. On peut alors observer de nouveau que l'apparition d'une empreinte de décollement est liée à l'advection des particules matérielles formant un pic. Enfin, cet écoulement complexe instationnaire possède néanmoins des empreintes de décollement connectés à la paroi en des points distincts, ce qui montre un réseau complexe de décollements induits par une multitude de tourbillons de faibles tailles.

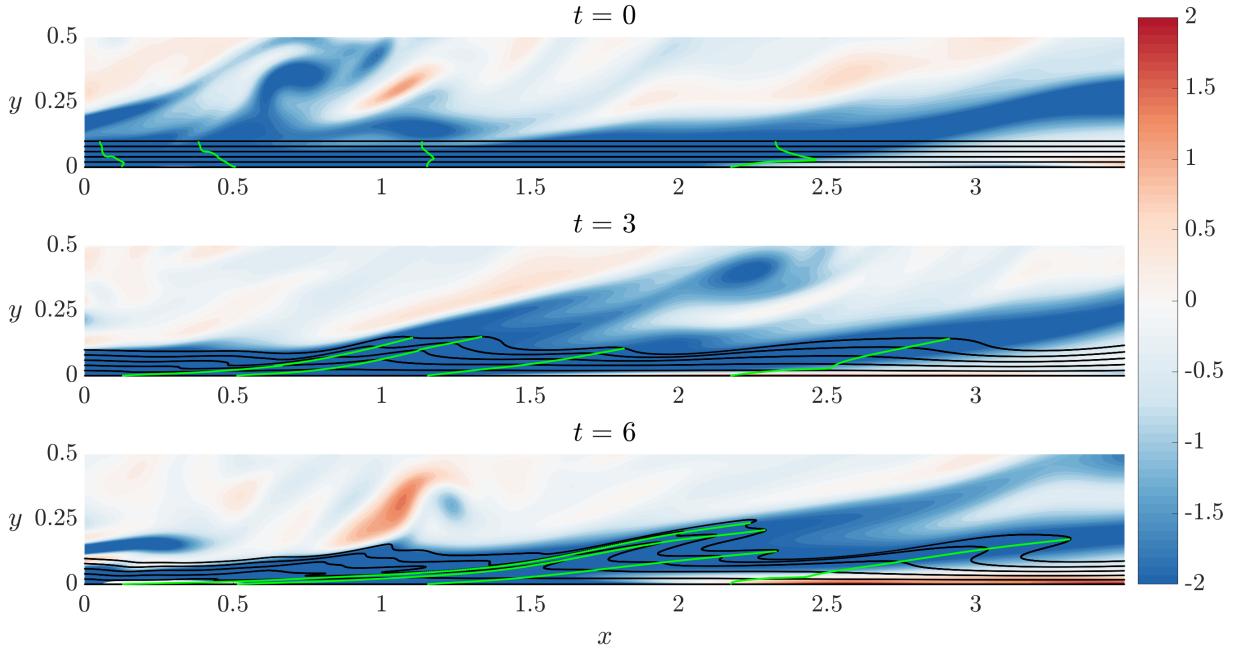


Figure 4.3 Évolution temporelle des empreintes lagrangiennes du décollement  $\mathcal{B}(t)$  (en vert) pour  $T = 6$ , en noir les lignes matérielles initialement parallèles à la paroi, le tout superposé au champ de vorticité de la bulle de décollement turbulente

En ce qui concerne la seconde partie de l'écoulement de la bulle de décollement, qui se trouve en aval pour  $x \geq 3$ , les décollements sont engendrés cette fois-ci par un gros tourbillon dans l'écoulement (cf. figure 4.1). Ainsi, la figure 4.4 permet d'observer le champ de variation de courbure lagrangien  $\bar{\kappa}_0^5$  dans lequel les positions initiales de deux empreintes de décollement connectées à la paroi ont pu être extraites, tandis que la figure 4.5 expose l'advection de ces empreintes du décollement pour plusieurs pas de temps (en vert), sous fond de vorticité de l'écoulement. Les lignes noires, quant à elles, représentent les lignes de particules matérielles initialement parallèles à la paroi. On peut alors voir clairement que les tourbillons  $V_1$  et  $V_2$  sont responsables de la création des pics matériels et donc des décollements comme on peut par exemple le voir pour  $t = 1$ .

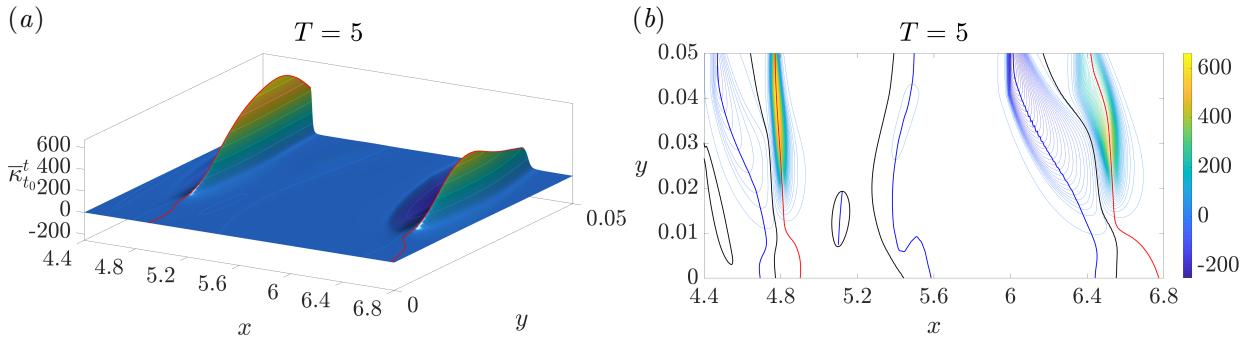


Figure 4.4 (a) Champ de variation de courbure  $\bar{\kappa}_0^5$  au voisinage du décollement induit par vortex ( $x \geq 3$ ) pour la bulle de décollement turbulente. (b) Contours du champ (a)

Aussi, ce qui est remarquable est le fait que le tourbillon  $V_1$  se déplace vers les  $x$  croissants au cours du temps impliquant alors la réduction progressive du second décollement et donc du second pic matériel qui est poussé vers la paroi ( $t \geq 4$ ), avant d'être de nouveau éjecté par  $V_1$ . En conséquence, il apparaît que le premier décollement (en amont) est plus saillant, ce qui se traduit sur le champ de variation de courbure comme une crête plus prononcée, ce qui se voit particulièrement bien sur les champs de courbure lagrangien de la figure 4.4.

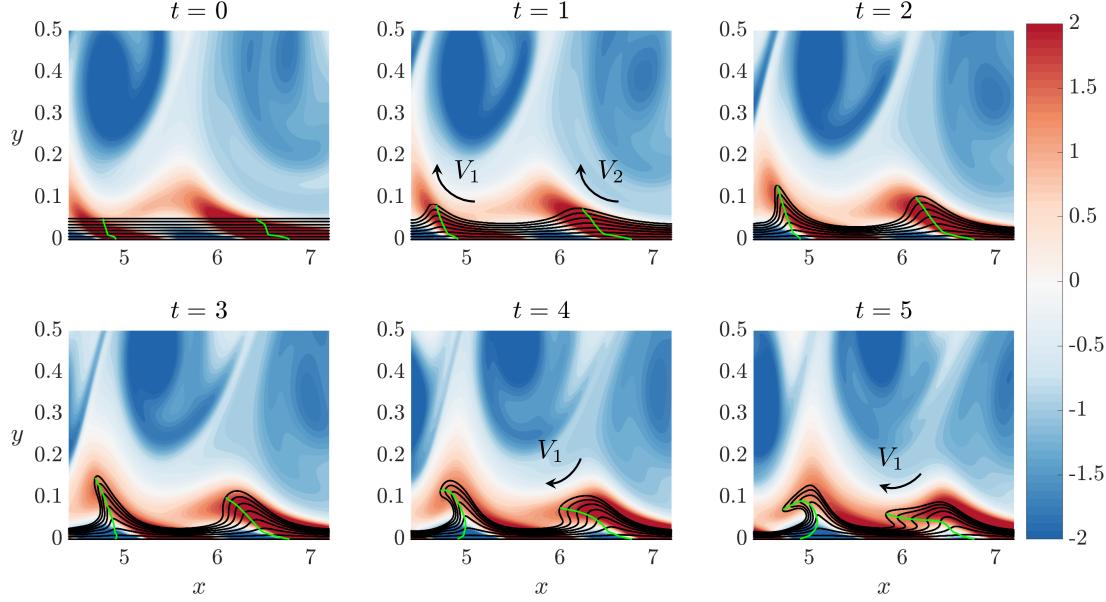


Figure 4.5 Évolution temporelle des empreintes lagrangiennes du décollement  $\mathcal{B}(t)$  (en vert) pour  $T = 5$ , en noir les lignes matérielles initialement parallèles à la paroi ; le tout est superposé au champ de vorticité de la bulle de décollement turbulente. Les flèches noires montrent les particules fluides qui sont entraînées par les tourbillons  $V_1$  et  $V_2$

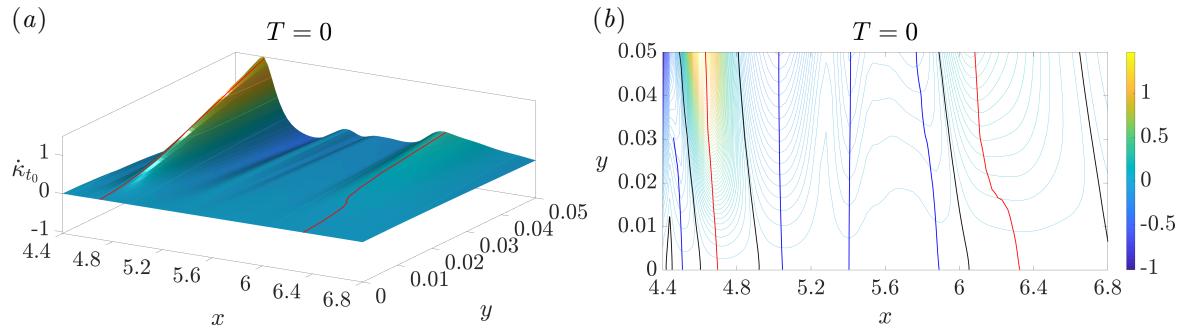


Figure 4.6 (a) Champ du taux de courbure  $\dot{\kappa}_{t_0}$  pour le décollement induit par vortex ( $x \geq 3$ ) pour la bulle de décollement turbulente. (b) Contours du champ (a)

Enfin, la figure 4.6 présente le champ du taux de courbure  $\dot{\kappa}_{t_0}$  (a) et ses contours (b), avec les positions initiales des empreintes eulériennes du décollement. Tout comme pour la figure 4.4, deux empreintes ont pu être extraites qui se situent dans les mêmes régions, cependant force est de constater que leur forme et leur point de raccordement à la paroi ne sont quant à eux pas les mêmes. Cela est cependant normal, car ici les résultats reflètent l'émergence instantanée

tanée des pics de particules. Cependant, étant donné que les lignes de courbures maximales se comportent comme des lignes matérielles attractives, l'intégration en temps fait qu'elles convergent toutes les unes vers les autres en dehors de la paroi.

## 4.2 Jet impactant

### 4.2.1 Définition de l'écoulement

Le jet impactant, bien qu'il soit d'une géométrie simple, constitue un écoulement assez complexe avec une multitude de types de décollements différents rendant ainsi possible l'étude des décollements instationnaires. De ce fait, une simulation numérique a été effectuée à l'aide du code open source d'éléments finis **FreeFem++** pour résoudre les équations de Navier-Stokes en incompressible (Hecht, 2012). Un nombre de Reynolds  $Re = 1000$ , basé sur le diamètre  $D$  et la vitesse  $U$  du jet, est choisi pour la simulation, dont le champ de vorticité est montré figure 4.7. Ici, le jet est situé en  $x = 0$  et est orienté vers le bas à une distance de  $4D$  de la paroi. On impose un profil vitesse hyperbolique à la sortie du jet (les vecteurs vitesse en gris sur la figure 4.7), et une condition de non-glissement sur les parois haute et basse. Ainsi, on observe trois décollements distincts à la paroi basse. Les deux premiers sont considérés comme des décollements mobiles qui sont supposés ne pas se connecter à la paroi. Le troisième décollement, quant à lui, correspond à un décollement fixe comme cela a pu être montré par Lamarche-Gagnon et Vétel (2018). Ils ont montré que ce décollement fixe est observé dans la zone où les contraintes de cisaillement, moyennées sur une période, s'annulent à la paroi, ce qui est en accord avec les résultats théoriques asymptotiques de Haller (2004) pour les écoulements périodiques. Lamarche-Gagnon et Vétel (2018), ont également pu observer qu'un pic de particules matérielles se formait en amont du décollement fixe comme montré pour le cas de la bulle de décollement laminaire. Cependant, ce cas du jet impactant a uniquement été étudié par des méthodes asymptotiques (Haller, 2004; Miron *et al.*, 2015) et donc en présumant au préalable du caractère du décollement sur ou hors paroi. La méthode de Serra *et al.* (2018) utilisée ici ne présente aucune supposition préalable sur le type de décollement et s'intéresse uniquement à la formation du pic matériel et non du profil asymptotique du décollement, d'où la pertinence de son utilisation pour cet écoulement.

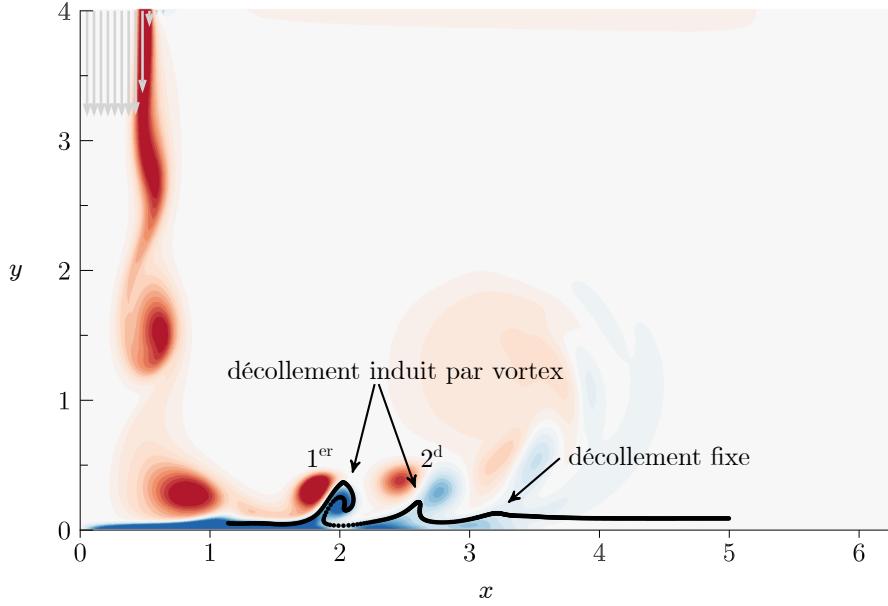


Figure 4.7 Champ de vorticité pour le jet impactant. Le jet est placé en  $x = 0$ , qui est un axe de symétrie, et est orienté vers le bas, comme le montre les vecteurs vitesses (en gris). Les points noirs représentent des particules, initialement alignées avec la paroi, advectées jusqu'à un temps arbitraire

#### 4.2.2 Application du critère

Dans un premier temps, nous allons nous concentrer sur le premier décollement induit par vortex de la figure 4.7. La figure 4.8 expose le champ de variation de courbure lagrangien intégré jusqu'au temps  $T = 1$  (où le temps est adimensionnalisé par  $U$  et  $D$ ). Deux positions initiales d'empreintes lagrangiennes du décollement ont alors pu être extraites.

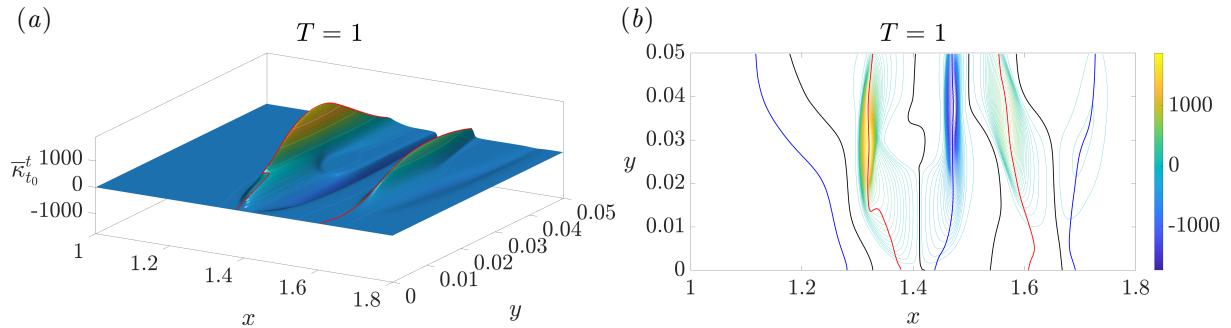


Figure 4.8 (a) Champ de variation de courbure  $\bar{\kappa}_0^1$  au voisinage du premier décollement induit par vortex ( $1 \leq x \leq 2$ ) pour le jet impactant. (b) Contours du champ (a)

La figure 4.9 montre l'évolution en temps de ces deux empreintes du décollement  $\mathcal{B}(t_0)$  avec les lignes matérielles initialement parallèles à la paroi ainsi que le champ de vorticité de l'écoulement. On remarque donc que ce premier décollement est caractérisé par la présence de deux pics de particules qui tendent à se fusionner au cours du temps. Ceci met en lumière le fait qu'un décollement global observé après un long instant peut en réalité naître de l'apparition dans les premiers instants de plusieurs pics matériels distincts. De plus, on constate que ces deux empreintes de décollement se connectent à la paroi, et ce malgré le fait qu'il s'agisse d'un décollement mobile qui, dans des études précédentes, était traité comme un phénomène hors paroi a priori. Or, la méthode de Serra *et al.* (2018), pour sa part, ne considère pas d'hypothèses a priori sur le type de décollement qu'il se fasse sur la paroi ou hors-paroi. Avec cette méthode, le type de décollement est un résultat et non pas une hypothèse pré-requise. Il semblerait donc que lors de l'application des différentes méthodes utilisées dans la littérature, le fait de ne pas trouver de décollement à la paroi ne signifie pas nécessairement qu'un tel phénomène n'existe pas.

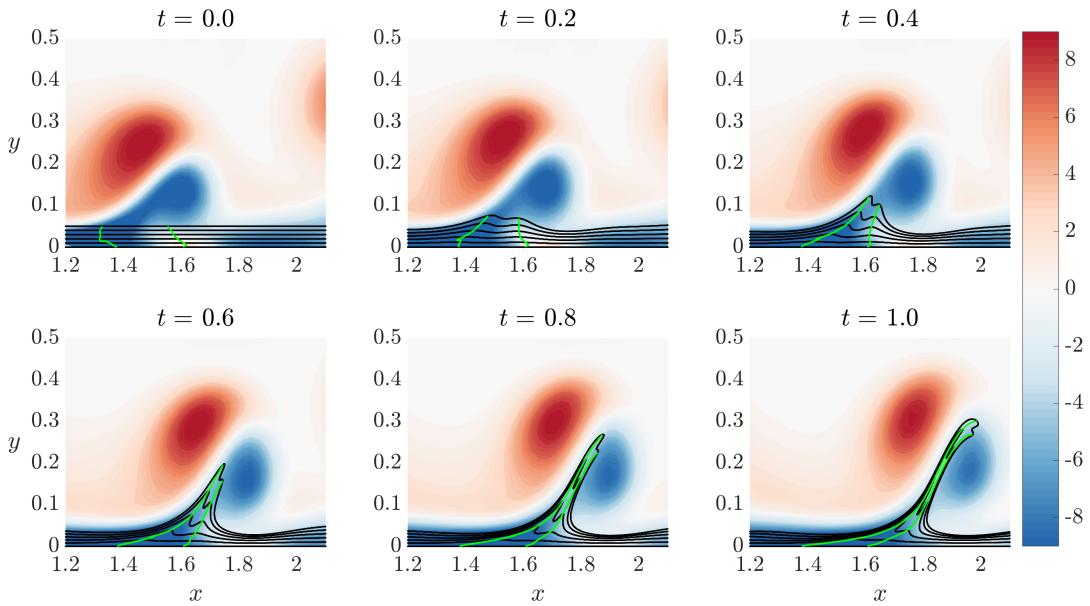


Figure 4.9 Évolution temporelle des empreintes lagrangiennes du décollement  $\mathcal{B}(t)$  (en vert) pour  $T = 5$ , en noir les lignes matérielles initialement parallèles à la paroi, le tout superposé au champ de vorticité du jet impactant pour le premier décollement induit par vortex

De même que pour les figures 4.8 et 4.9, les figures 4.10 et 4.11 représentent la variation du champ de courbure avec les positions initiales des empreintes lagrangiennes du décollement associées ainsi que leur évolution dans le temps pour le cas du second décollement

induit par vortex. Tout comme précédemment, on observe deux empreintes lagrangiennes du décollement connectées à la paroi qui correspondent à un seul décollement à long terme.

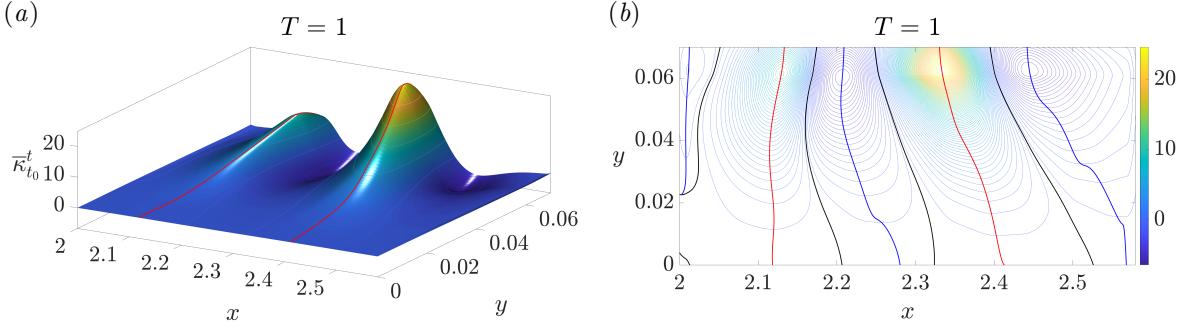


Figure 4.10 (a) Champ de variation de courbure  $\bar{\kappa}_0^1$  au voisinage du second décollement induit par vortex ( $2 \leq x \leq 2.6$ ) pour le jet impactant. (b) Contours du champ (a)

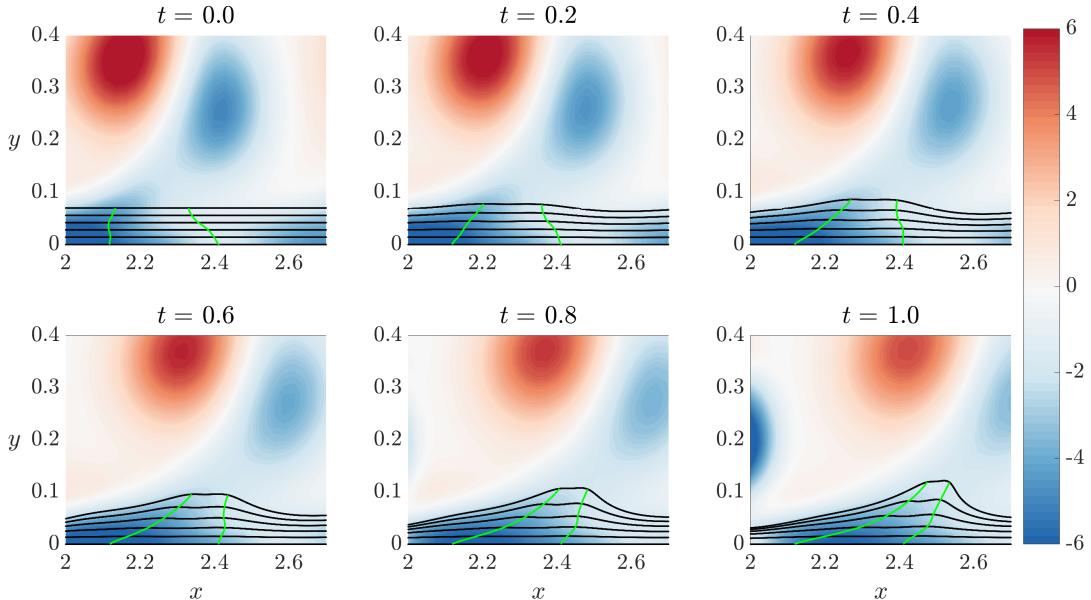


Figure 4.11 Évolution temporelle des empreintes lagrangiennes du décollement  $\mathcal{B}(t)$  (en vert) pour  $T = 1$ , en noir les lignes matérielles initialement parallèles à la paroi, le tout superposé au champ de vorticité du jet impactant pour le second décollement induit par vortex

Cependant, les niveaux de  $\bar{\kappa}_0^1$  sont de deux ordres de grandeur inférieurs par rapport à la figure 4.8, ce qui montre que les pics matériels sont moins prononcés et donc que l'éjection des particules de la paroi est moins fulgurante. Ceci peut notamment s'expliquer par le fait

que, dans ce cas-ci, la trajectoire des tourbillons tend à s'éloigner de la paroi, comme on peut le voir assez clairement sur la figure 4.11 grâce au champ de vorticité.

La figure 4.12 représente le champ de variation de courbure ainsi que les positions initiales des empreintes lagrangiennes du décollement toujours pour le second décollement induit par vortex mais pour un temps d'intégration plus long  $T = 2$ . Ceci permet de révéler plusieurs phénomènes dans cette région de l'écoulement. Tout d'abord, on s'aperçoit ici assez clairement que l'ampleur de la première crête (en amont) sur le champ  $\bar{\kappa}_0^2$  est bien moins importante que la crête en aval, comparativement à ce qu'on l'on pouvait observer sur la figure 4.10. De surcroît, cette fois-ci, cette première empreinte du décollement ne possède pas de point de connexion à la paroi. Cela implique donc que pour un temps d'intégration long, ce pic matériel correspond à un phénomène de décollement hors paroi qui concorde relativement bien avec le fait que dans cette zone de l'écoulement le décollement est dit mobile.

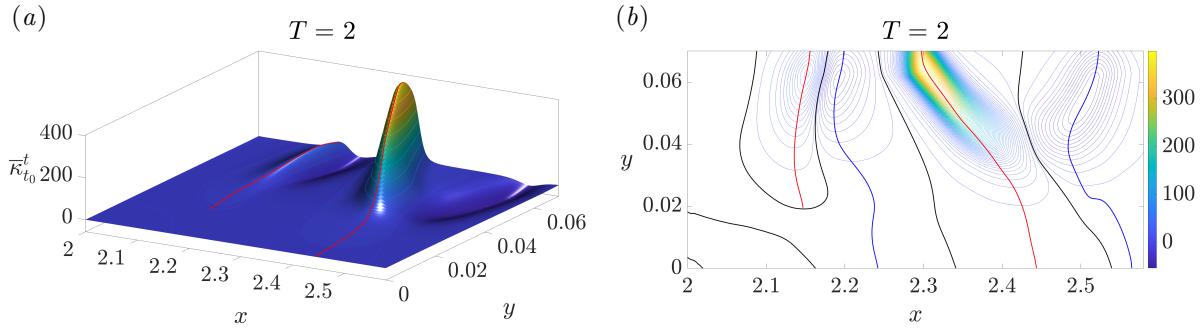


Figure 4.12 (a) Champ de variation de courbure  $\bar{\kappa}_0^2$  au voisinage du second décollement induit par vortex ( $2 \leq x \leq 2.6$ ) pour le jet impactant. (b) Contours du champ (a)

La figure 4.13 montre l'évolution en temps des empreintes lagrangiennes du décollement  $\mathcal{B}(t)$  (en vert), avec les lignes matérielles initialement parallèles à la paroi en noir. Ceci nous permet alors de voir que les tourbillons à l'origine de ce décollement se déportent de plus en plus loin de la paroi, expliquant ainsi le fait que la première empreinte ne s'attache plus à la paroi. En effet, le tourbillon est à tel point éloigné qu'il n'a plus d'influence sur les particules les plus proches de la paroi. Comme on peut le voir sur la figure 4.13, les premières lignes matérielles ne sont plus advectées et restent donc parallèles à la paroi pour tous les pas de temps. Ces résultats sont encore une preuve des avantages de la théorie de Serra *et al.* (2018), qui en plus de distinguer les décollements sur ou hors paroi, permet également de connaître le temps d'intégration exact à partir duquel le décollement considéré change de classe. Cela était impossible avec les théories précédentes.

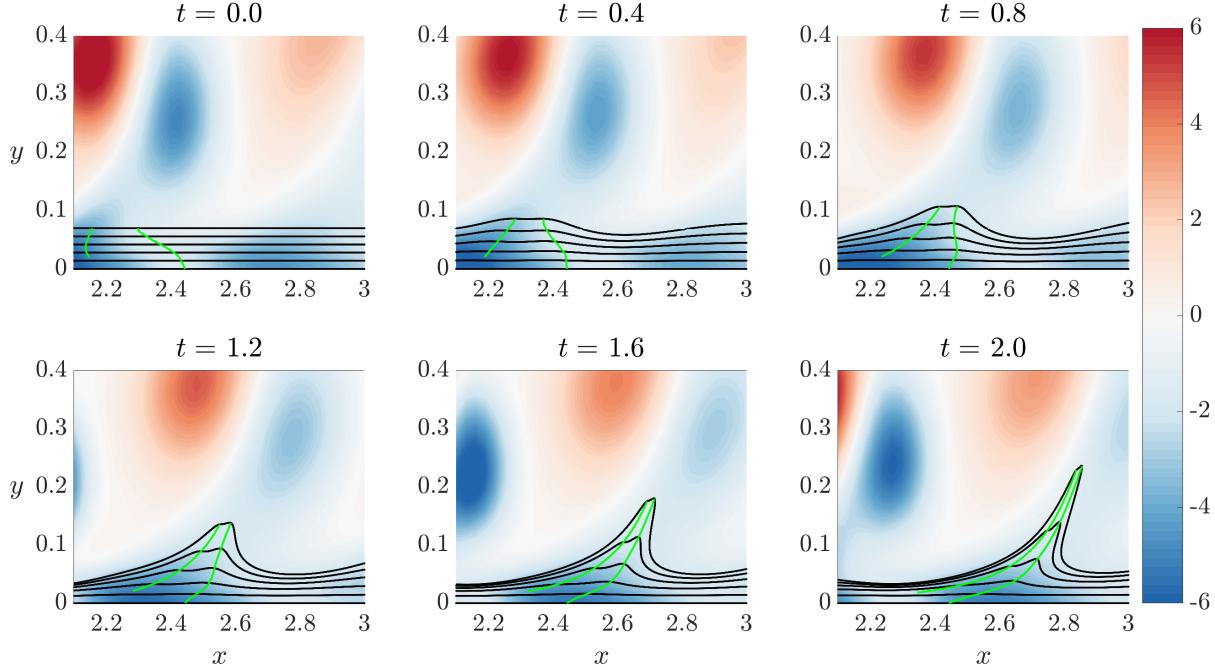


Figure 4.13 Évolution temporelle des empreintes lagrangiennes du décollement  $\mathcal{B}(t)$  (en vert) pour  $T = 2$ , en noir les lignes matérielles initialement parallèles à la paroi, le tout superposé au champ de vorticité du jet impactant pour le second décollement induit par vortex

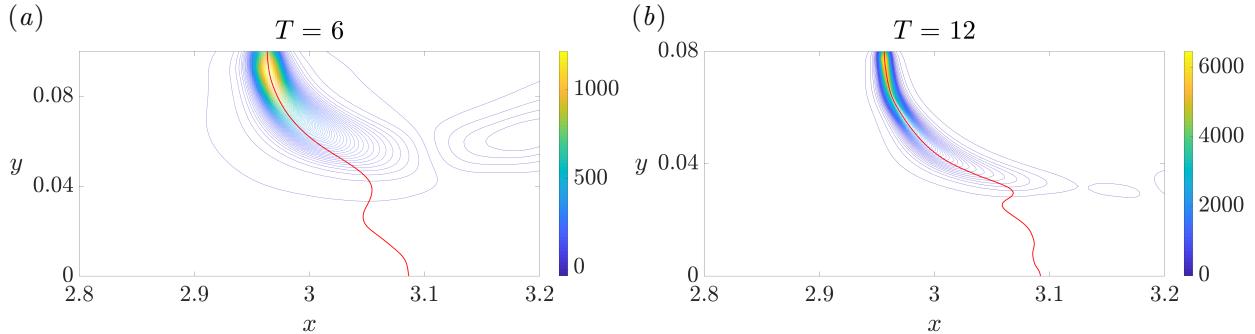


Figure 4.14 Contours du champ de variation de courbure  $\bar{\kappa}_{t_0}^{t_0+T}$  pour  $t_0 = 0$ ,  $T = 6$  (a) et  $T = 12$  (b) pour le décollement fixe du jet impactant ( $x \sim 3$ )

Enfin, les figures 4.14 et 4.15 exposent les résultats obtenus pour le décollement fixe que l'on peut voir sur la figure 4.7. Sur la figure 4.14 sont montrés les contours des champs de variation de courbures lagrangiens pour deux temps d'intégration différents, soit  $\bar{\kappa}_0^6$  et  $\bar{\kappa}_0^{12}$  ainsi que les positions initiales des empreintes lagrangiennes du décollement associées. On peut remarquer ici que quel que soit le temps d'intégration les empreintes du décollement

restent attachées à la paroi contrairement aux deux décollements précédents. Ces points de raccordement à la paroi sont quasiment au même endroit, ce qui vient probablement du fait que dans cette zone l'écoulement n'est que très peu instationnaire. Ceci est bien en accord avec la théorie de Serra *et al.* (2018).

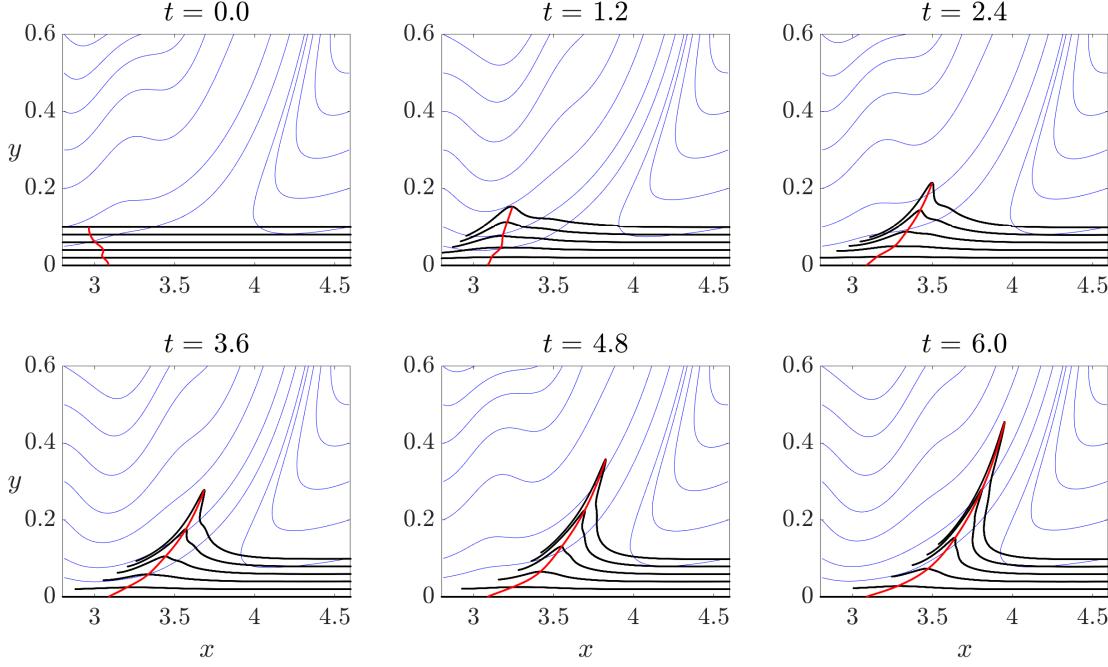


Figure 4.15 Évolution temporelle des empreintes lagrangiennes du décollement  $\mathcal{B}(t)$  (en rouge) pour  $T = 6$ , en noir les lignes matérielles initialement parallèles à la paroi ; le tout est superposé aux lignes de courant du jet impactant pour le décollement fixe

La figure 4.15, montrant l'évolution de l'empreinte du décollement avec les lignes matérielles, confirme de nouveau que  $\mathcal{B}(t)$  correspond à la formation du pic de particules matérielles qui n'est, quant à lui, pas en lien avec les lignes de courant (en bleu) même dans cette zone quasi-stationnaire de l'écoulement. Aussi, on constate que le pic matériel et donc l'empreinte du décollement tendent asymptotiquement vers la variété instable de l'écoulement, soit la ligne de courant émanant de la paroi (au niveau du point de Prandtl), comme cela a pu être observé par Lamarche-Gagnon et Vétel (2018).

Cette partie concernant le décollement sur paroi plane a ainsi permis de mettre en avant les caractéristiques très prometteuses de la théorie de la formation de pics matériels de Serra *et al.* (2018). Elle a pu être appliquée sur des écoulements à dépendance temporelle quelconque pour des écoulements en régime laminaire ou turbulent et a permis la détection en quelques

pas de temps et sans hypothèse a priori de décollements sur la paroi mais aussi hors-paroi, fixe ou mobile.

La prochaine partie va alors se concentrer cette fois-ci sur la validation du critère sur des écoulements autour de parois courbes fixes et mobiles, permettant ainsi de pousser encore d'avantage les limites de cette méthode de détection lagrangienne.

## CHAPITRE 5 DÉCOLLEMENT SUR SURFACES COURBES ET SURFACES MOBILES

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'application de la méthode de Serra *et al.* (2018) sur plusieurs écoulements complexes où le décollement se fait sur des surfaces courbes ou mobiles afin de mettre à l'épreuve ce critère dans des cas encore non testés. Pour ce faire, des coordonnées curvilignes  $(s, \eta)$  sont utilisées au voisinage de la paroi (voir le paragraphe 3.3.1 du chapitre 3). Dans le cas des parois mobiles, il est généralement admis que le décollement se fait hors paroi (Sears et Telionis, 1975), il serait donc intéressant d'observer si cela est bien le cas avec cette méthode qui, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, peut parfois donner des résultats singuliers. Le critère de décollement Moore-Rott-Sears (MRS), par exemple, définit le point de décollement à l'endroit où les contraintes de cisaillement s'annulent dans l'écoulement. Cependant, il a été montré que les conditions du critère MRS ne peuvent pas être satisfaites pour un écoulement produit par un cylindre en rotation et en translation près d'une paroi fixe. Ce critère peut uniquement être utilisé dans le cas de la théorie de la couche limite, soit pour  $Re \rightarrow \infty$ . Une méthode donc compliquée à mettre en œuvre en pratique dû à son caractère asymptotique (pour plus de précisions se référer au paragraphe 2.1.2 du chapitre 2). Afin de palier à ce problème, Miron *et al.* (2015) proposent d'identifier le décollement comme un point selle lagrangien hors paroi dont le profil de décollement serait une LCS attractive. Il est alors nécessaire d'extraire des LCSs attractives et d'identifier le point sur cette ligne matérielle où le taux de contrainte tangentielle est maximum. Cette méthode a été réalisée par Miron *et al.* (2015) dans le cas de l'écoulement stationnaire autour d'un cylindre en rotation. Cependant, cette méthode nécessite d'intégrer un critère sur une longue période temporelle, ce qui la classe dans les méthodes asymptotiques. Pour rappel, on cherche au contraire à étudier le décollement sur un horizon temporel court.

La figure 5.1 présente l'écoulement stationnaire autour d'un cylindre en rotation constante  $\Omega = 1$  dans un écoulement uniforme de nombre de Reynolds  $Re = 50$  (basé sur la vitesse amont et le diamètre  $D$  du cylindre). La figure 5.1(a) représente les lignes de courant situées autour du cylindre, ce qui nous permet d'observer la présence d'un point selle eulérien situé en haut à gauche du cylindre. Ce point fût déjà détecté par Miron *et al.* (2015) comme étant un point particulier d'une LCS attractive. On peut noter ici que les méthodes utilisant les LCS peuvent aussi être utilisées dans le cas d'écoulements instationnaires contrairement aux lignes de courant qui sont reliées aux trajectoires des particules pour un écoulement stationnaire uniquement. La figure 5.1(b) correspond aux contours du champ de variation de courbure

lagrangien  $\bar{\kappa}_0^T$  pour  $T = 2$  où le rouge correspond aux crêtes du champ. La figure 5.1(c) montre les positions initiales des empreintes lagrangiennes du décollement (en rouge) ainsi que le minimum de courbure en bleu, extraits à partir de la figure (b). On peut alors observer que pour cet écoulement, il est question de décollement hors paroi puisque les empreintes ne possèdent pas de points de raccordement avec la paroi, le point de décollement est ici situé à une distance d'environ  $0.03D$  de la paroi. Les figures du bas montrent l'advection matérielle du champ de courbure  $\bar{\kappa}_0^2$  pour  $0 \leq t \leq 2$  avec les lignes matérielles initialement parallèles au cylindre. Encore une fois, les empreintes lagrangiennes du décollement (en rouge) concordent bien avec la formation des pics de particules, tandis que les minimums de courbure (en bleu) se rapportent à un changement brutal de la géométrie du pic. Cette ligne bleue correspond en un sens à la fin du pic, c'est-à-dire à une forme concave (relativement à la paroi considérée) de la ligne matérielle.

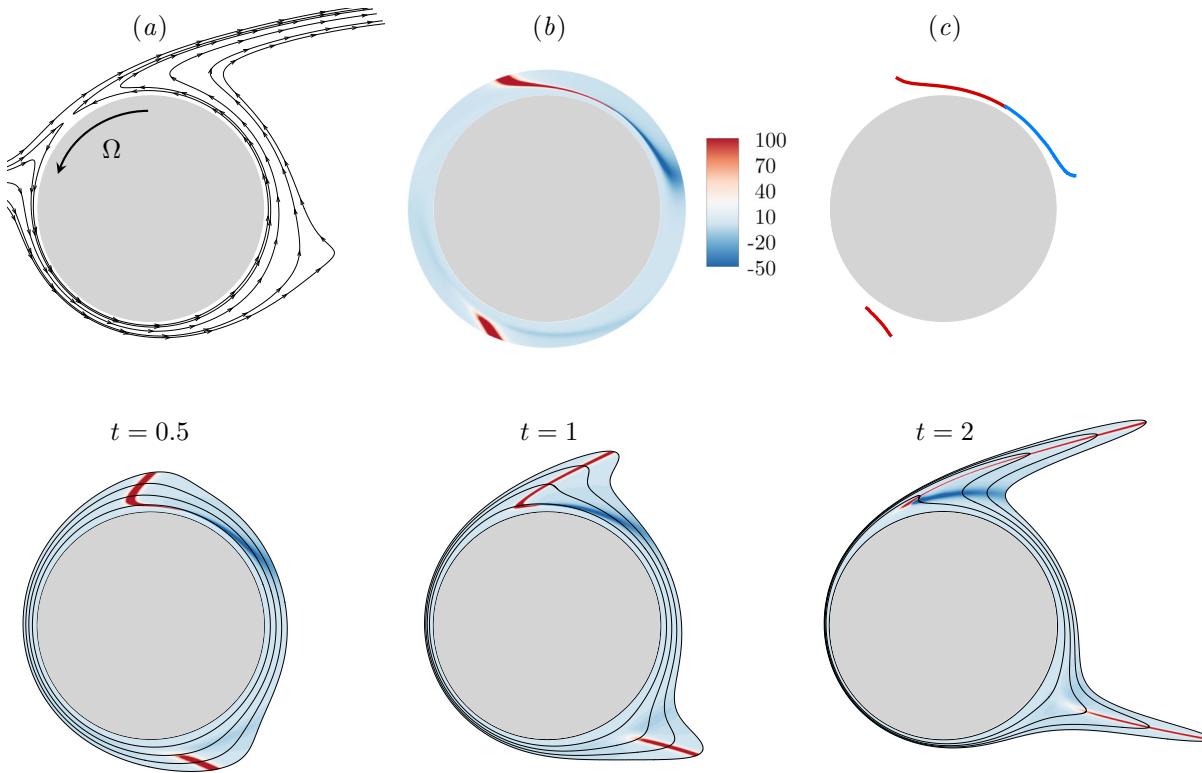


Figure 5.1 Écoulement stationnaire autour d'un cylindre en rotation pour  $Re = 50$  et  $\Omega = 1$ . (a) Lignes de courant autour du cylindre, (b) contours du champ  $\bar{\kappa}_0^2$  et (c) position initiale des empreintes de décollement associées (en rouge) ainsi que le minimum de courbure en bleu. Les figures du bas représentent l'évolution temporelle du champ de variation de courbure  $\bar{\kappa}_0^2(x_0)$  avec les lignes matérielles initialement parallèles au cylindre

Ainsi, la méthode utilisant les LCS attractives appliquée par Miron *et al.* (2015) a effectivement permis de détecter un point selle mais pour un temps d'intégration long, tandis que la méthode de Serra *et al.* (2018) illustrée par la figure 5.1 identifie ce même pic en seulement quelques pas de temps. De plus, il est alors possible d'étudier la naissance et l'évolution d'un tel pic, ce qui montre donc que le décollement peut se former à des endroits différents par rapport à sa position asymptotique, c'est-à-dire à long terme. D'autre part, en ce qui concerne le décollement situé en dessous du cylindre, aucun point selle n'avait été trouvé (méthodes des LCSs) et aussi dans cette région les contraintes de cisaillement ne s'annulent pas (Méthode MRS). Cependant, le champ de variation de courbure  $\bar{\kappa}_0^2$  (figure 5.1(b)) montre une crête assez importante dans la zone sous le cylindre, ce qui signifie qu'une empreinte lagrangienne du décollement a pu être extraite (figure 5.1(c)). On observe alors que cette empreinte du décollement ne possède pas non plus de point de raccordement avec la paroi et correspond aussi à la formation d'un pic de particules aussi important que celui en haut du cylindre. Enfin, ce décollement instationnaire change de position au cours du temps, il commence en amont du cylindre puis suit le mouvement du cylindre en rotation éjectant les particules en aval. Il semblerait donc que malgré l'incapacité des méthodes précédentes à détecter ce décollement sous le cylindre (pas de point selle), la théorie de Serra *et al.* (2018) décèle bien un pic matériel aussi important que pour le décollement de la partie haute. Cela est dû notamment au fait que cette nouvelle méthode ne requiert pas d'hypothèses a priori sur le type de décollement et donc permet de détecter les deux décollements simultanément. Dans la littérature ces deux types de décollements sont traités séparément (par exemple par Elliott *et al.* (1983)). En effet, en haut du cylindre, la paroi bouge dans le sens inverse de l'écoulement, alors qu'en bas, elle bouge dans le même sens, ce qui change quelques hypothèses sur les variables utilisées dans les méthodes asymptotiques. En outre, dans le bas du cylindre, le décollement est difficile à détecter par les méthodes classiques, car il n'y a pas d'écoulement de retour, ni de région de recirculation.

## 5.1 Écoulement instationnaire autour d'un cylindre se déplaçant librement

Nous allons ici nous intéresser à l'écoulement bidimensionnel autour d'un cylindre de diamètre  $D$  fixe en rotation mais libre en translation suivant l'axe  $x$  et l'axe transverse  $y$ . Le nombre de Reynolds est basé sur la vitesse d'entrée stationnaire  $U$  tel que  $Re = UD/\nu = 100$ . Cette simulation dynamique d'interaction fluide-structure a été réalisée par l'équipe du professeur André Garon, à l'aide de leur code d'éléments finis, et gracieusement fournie. Afin d'effectuer la simulation de cet écoulement complexe, les équations de Navier-Stokes ont été résolues simultanément avec une équation du mouvement gouvernant la translation du cylindre, qui

prend en compte la rigidité et l'amortissement de la structure dans les deux directions, ainsi que la force de contact à l'interface solide-fluide. Cela mène à un déplacement du cylindre avec une vitesse et une accélération non-constantes qui permet l'étude du décollement dans un cas complexe. Des simulations similaires sont détaillées dans Gsell *et al.* (2016).

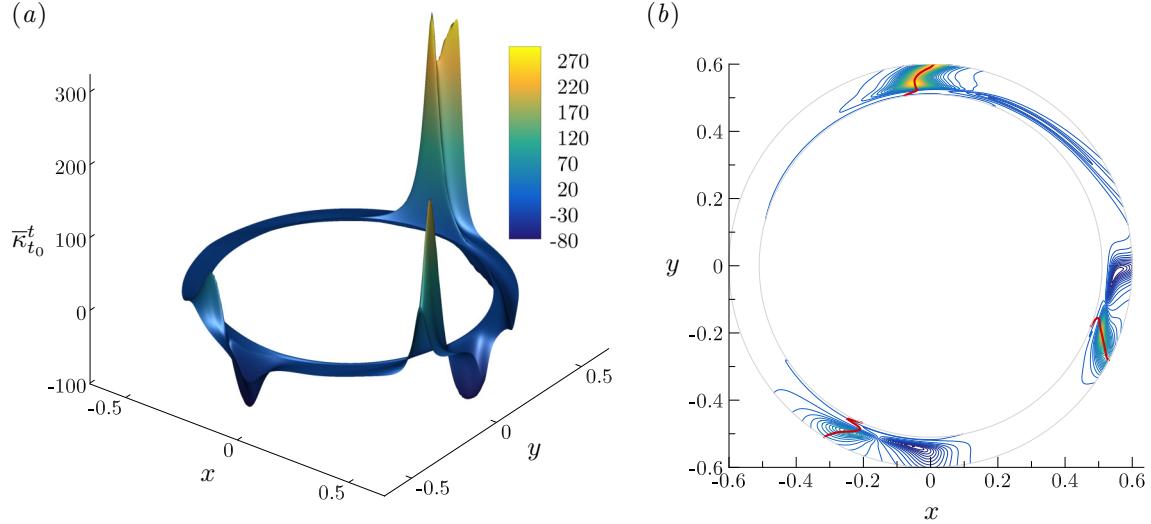


Figure 5.2 (a) Champ de variation de courbure lagrangien  $\bar{\kappa}_0^1$  autour du cylindre dont les déplacements sont libres. (b) Contours du champ (a) avec les empreintes lagrangiennes du décollement (en rouge)

La figure 5.2(a) présente le tracé de la surface du champ de variation de courbure  $\bar{\kappa}_0^1$  par rapport à un repère local qui suit le mouvement du cylindre. On peut noter que le même champ aurait pu être obtenu quel que soit le référentiel, il aurait été simplement translaté ou pivoté suivant le mouvement du cylindre, car le champ  $\bar{\kappa}_{t_0}^{t_0+T}$  est objectif. Aussi sur ce tracé de (a) on peut observer la taille relative des crêtes les unes par rapport aux autres permettant ainsi d'identifier les décollements les plus conséquents. Dans ce cas, on observe qu'il y a trois phénomènes de décollement distincts, celui en haut du cylindre étant le plus important. La figure 5.2(b) montre les empreintes lagrangiennes du décollement qui ont pu être extraites du champ  $\bar{\kappa}_0^1$  du (a). On constate que les trois empreintes émanent de la paroi étant donné qu'elles possèdent toutes un point de raccordement au cylindre.

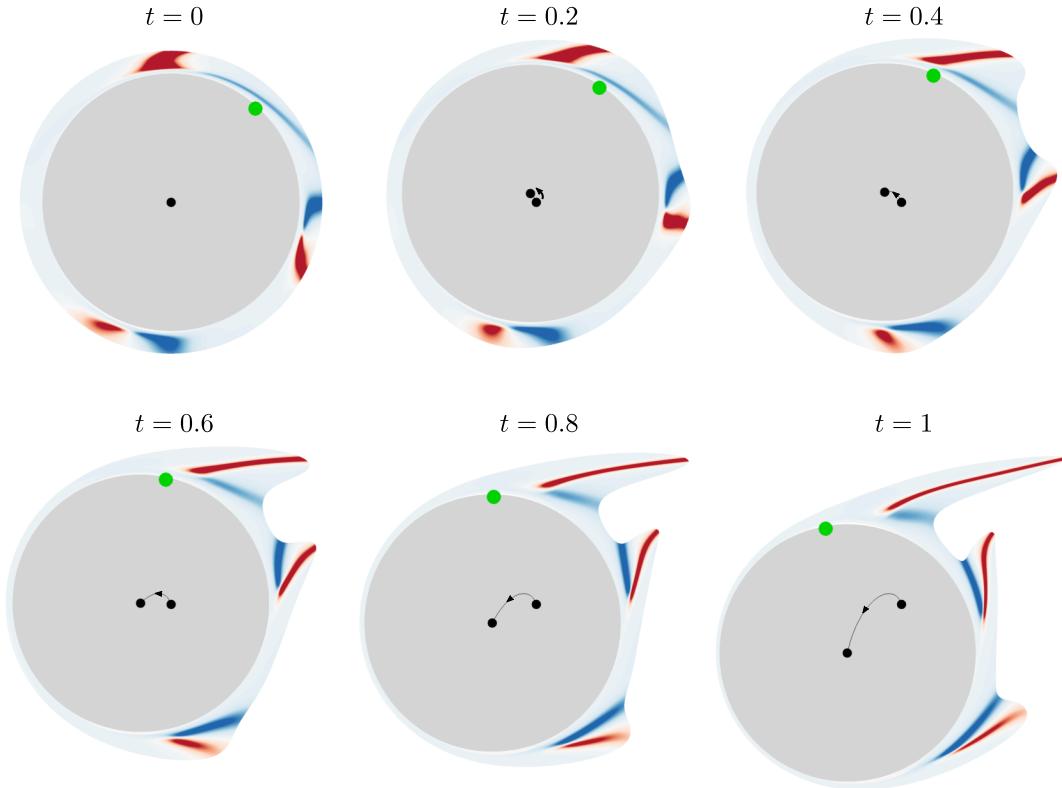


Figure 5.3 Advection en temps du champ de variation de courbure de la figure 5.2. Les contours du bleu au rouge représentent les valeurs négatives à positives de  $\bar{\kappa}_0^1$ . Les figures sont ici fixes par rapport à un point de référence (référentiel absolu) permettant aussi de suivre le mouvement du cylindre par la ligne noire. Le point vert correspond au point où le cisaillement est nul à la paroi

La figure 5.3 représente le champ de variation de courbure  $\bar{\kappa}_0^1$  advecté en temps ce qui permet d'observer plus clairement l'éjection des particules hors du cylindre venant entre autres confirmer le fait que le décollement du haut du cylindre est le plus important comme la hauteur de la crête de la figure 5.2(a) le laissait supposer. Ici, les différents graphiques sont représentés dans un repère absolu, et la trajectoire du cylindre apparaît en noir. Les contours du champ  $\bar{\kappa}_0^1$  montrent les crêtes (en rouge) et les minimums de courbure ou vallées (en bleu). Bien qu'ici les contours des crêtes ne semblent pas se connecter à la paroi, les empreintes de décollement, dont les positions initiales sont données figure 5.2(b), sont bien raccordées à la paroi faisant de ces trois décollements des décollements fixes sur paroi. Le champ de courbure des autres décollements, quant à eux, semble à première vue s'aplatir beaucoup plus en se rapprochant de la paroi. Néanmoins, leurs empreintes de décollement se raccrochent également comme cela avait pu être le cas pour la figure 3.2.

Comme la figure 5.3 peut le montrer, le cylindre commence par monter pour  $0 < t < 0.4$  puis par descendre pour  $0.6 < t < 1$ . En se plaçant dans le repère local fixé au cylindre, l'advection en temps du champ  $\bar{\kappa}_0^1$  confirme la présence de trois phénomènes de décollement lagrangien distincts comme l'attestent les contours rouges qui coïncident parfaitement avec les pics matériels. De plus, les contours bleus représentant le minimum de courbure soulignent les changements brusques de la forme des pics matériels proches de la paroi. Cependant, contrairement à ce que l'on pouvait observer dans le cas des parois planes, il n'y a ici qu'une seule ligne représentant le minimum de courbure (en bleu) dans le voisinage des empreintes de décollement (en rouge). Ceci provient de la forme de la paroi étant donné que les variations de courbure qui permettent d'obtenir ces minimums et maximums sont calculés relativement à la courbure initiale des particules parallèles à la paroi à  $t_0$ . Enfin, le point vert désigne le point de Prandtl, c'est-à-dire la position sur la paroi où les contraintes de cisaillement sont nulles. On remarque d'abord qu'il n'y a qu'un seul point de Prandtl alors que trois empreintes de décollement ont été identifiées. Cela confirme le fait que l'utilisation des lignes de courant pour la détection des points de décollement est inadéquate pour les écoulements instationnaires comme celui-ci. De surcroît, comme pour les cas avec les parois planes étudiés précédemment, le point de Prandtl qui correspond visiblement au pic en haut du cylindre, est en aval du point de raccordement à la paroi de l'empreinte de décollement.

Finalement, la figure 5.4 est semblable à la figure 5.3 mais pour un intervalle de temps différent :  $1 \leq t \leq 2$  pendant lequel le cylindre accélère vers le bas. Au temps initial  $t_0 = 1$ , le champ de variation de courbure  $\bar{\kappa}_1^2$  est affiché, puis ce champ est advecté en temps jusqu'à  $t = 2$ . On constate alors la présence de seulement deux empreintes lagrangiennes du décollement correspondant à deux pics de particules distincts. Cette fois-ci, les deux phénomènes de décollement ont deux points de Prandtl associés (en vert). Contrairement à la figure 5.3, on identifie ici deux décollements au lieu de trois, ce qui peut être expliqué par le fait qu'au temps  $t = 1$  les deux pics matériels secondaires de la figure 5.3 ont fusionné pour former un seul grand pic sur la figure 5.4. Ce phénomène est clairement observable en analysant  $\bar{\kappa}_{t_0}^{t_0+T}$  pour  $0 < t_0 < 1$  (non montré ici).

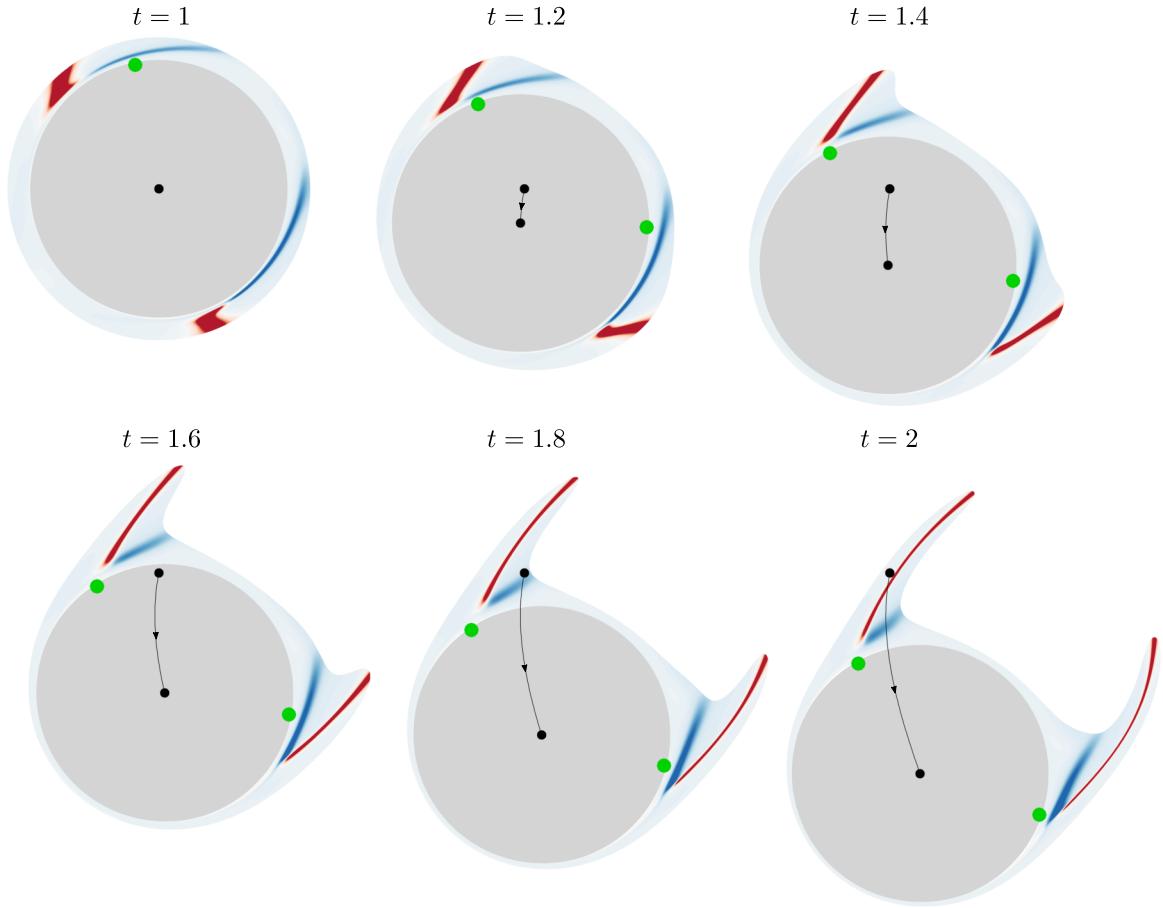


Figure 5.4 Advection en temps du champ de variation de courbure de la figure 5.2. Les contours du bleu au rouge représentent les valeurs négatives à positives de  $\bar{\kappa}_1^2$ . Les figures sont ici fixes par rapport à un point de référence (référentiel absolu) permettant aussi de suivre le mouvement du cylindre par la ligne noire. Le point vert correspond au point où le cisaillement est nul à la paroi

## 5.2 Écoulement instationnaire autour d'une ellipse dont la rotation est libre

Dans cette partie nous allons nous intéresser au cas d'un écoulement bidimensionnel autour d'un cylindre elliptique dont la rotation est libre autour d'un pivot décentré en amont du centre de l'ellipse d'une distance de  $D/4$  sur le grand axe du cylindre. La géométrie de l'ellipse est définie telle que les valeurs du grand et du petit axe sont respectivement  $D = 1$  et  $d = 0.5$ . On note  $U$  la vitesse uniforme en entrée de l'écoulement, dont le nombre de Reynolds vaut  $Re = UD/\nu = 1000$ . Afin de réaliser cette simulation, les équations d'interaction fluide-structure ont dû être résolues de manière similaire au cas du cylindre, cependant ici, l'équation du mouvement considère uniquement un seul degré de liberté, la rotation, et

est résolue avec les équations de Navier-Stokes (au lieu de deux degrés de liberté pour la translation en 2D). Ces équations doivent prendre en compte la rigidité et l'amortissement de la structure pour la torsion, ainsi que le couple au point de pivot résultant des forces de contact sur l'interface solide-fluide. Cette simulation est à nouveau une gracieuseté de l'équipe du professeur André Garon, dont les détails sont similaires à ceux exposés par Weymouth (2014). L'écoulement complexe ici étudié de l'ellipse libre de pivoter est très pertinent pour l'analyse du décollement. En effet, les mouvements de l'ellipse peuvent être périodiques, bistables, chaotiques par intermittence ou complètement chaotiques permettant ainsi d'obtenir un grand éventail de phénomènes de décollement complexes.

La figure 5.5 représente l'angle d'attaque  $\theta$  par rapport à l'axe horizontal ainsi que la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  en fonction du temps. Au temps initial  $t_0 = 0$ , le fluide est au repos et l'axe horizontal est aligné sur le grand axe de l'ellipse. On remarque qu'à partir de  $t = 20$ , l'ellipse commence à osciller, cependant ses mouvements semblent irréguliers, faisant de cet écoulement un cas particulièrement compliqué pour prédire les différents décollements notamment pour les méthodes asymptotiques ou nécessitant un grand temps d'intégration. La méthode de Serra *et al.* (2018) semble donc, quant à elle, très appropriée pour ce genre de cas d'étude comme nous allons le voir.

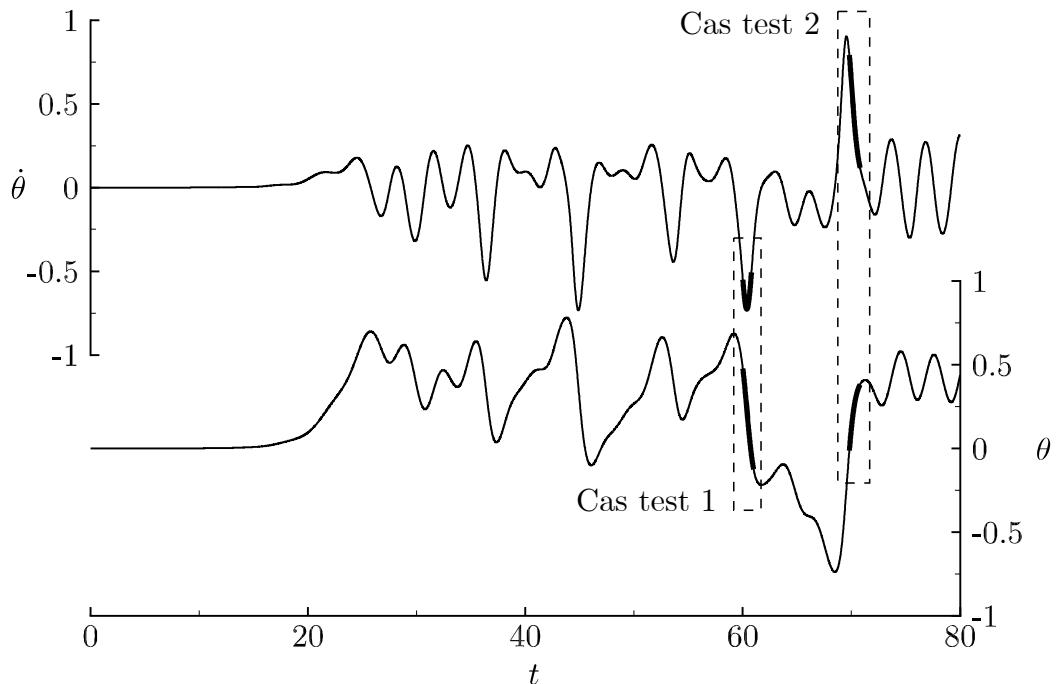


Figure 5.5 Angle de rotation  $\theta$  (en bas) et vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  (en haut) en fonction du temps caractérisant les mouvements de rotation de l'ellipse par rapport au pivot décentré

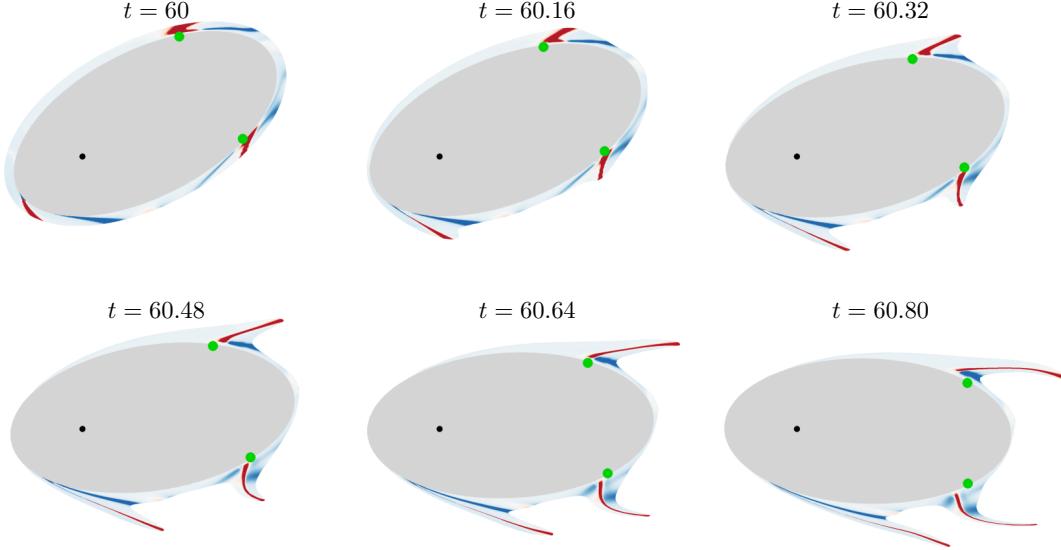


Figure 5.6 Cas test 1 : champ de variation de courbure lagrangien  $\bar{\kappa}_{60}^{60.80}$  initialement parallèles à la paroi (en haut à gauche), puis leur advection en temps. Les contours du bleu à rouge indiquent les valeurs négatives à positives de  $\bar{\kappa}_{60}^{60.80}$ . Les points verts correspondent aux points d'annulation du cisaillement à la paroi. L'utilisation d'un repère absolu permet d'illustrer la rotation de l'ellipse

La figure 5.6 montre le champ de variation de courbure lagrangien  $\bar{\kappa}_{60}^{60.80}$  advecté en temps, illustrant par la même occasion la déformation des lignes matérielles initialement parallèles à la paroi à  $t_0 = 60$ . Il s'agit ici du cas test 1 de la figure 5.5, où l'ellipse effectue une rotation dans le sens horaire avec d'abord une phase d'accélération puis une phase de décélération. La méthode permet ici la détection de trois décollements distincts caractérisés par la présence de trois empreintes du décollement lagrangien (en rouge). De plus, l'advection du champ  $\bar{\kappa}_{60}^{60.80}$  montre de nouveau que ces empreintes correspondent à la formation de trois pics de particules matérielles. On remarque également que, tout comme dans le cas du cylindre en translation de l'exemple précédent, les points de Prandtl sont encore incapables de prédire correctement tous les phénomènes de décollement pour les écoulements instationnaires. Effectivement, dans ce cas-ci, seul deux des trois pics ont été détectés par le critère de Prandtl.

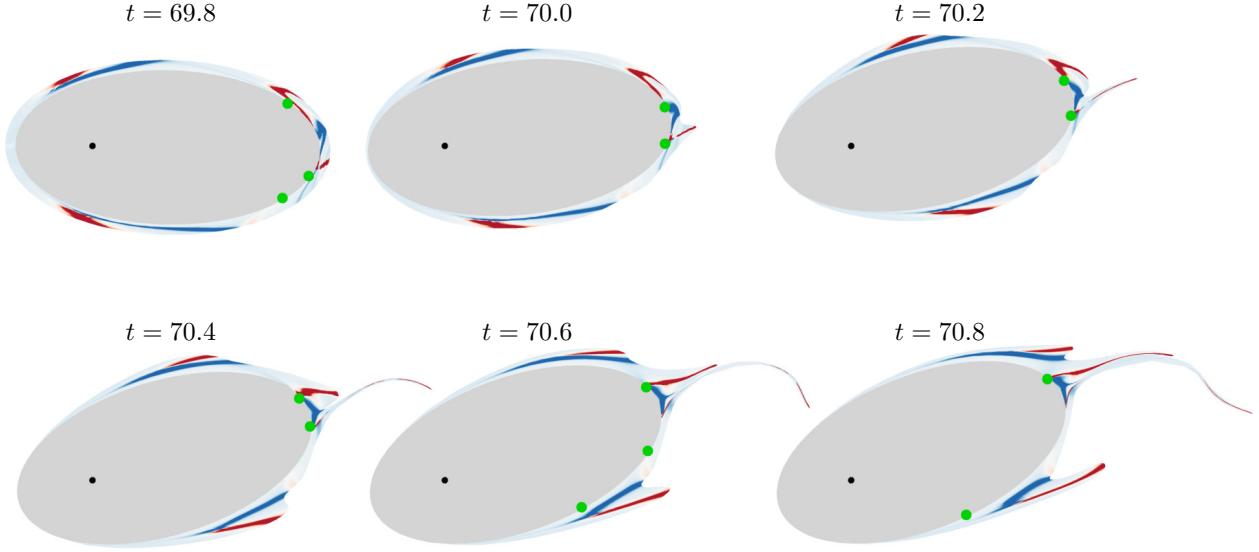


Figure 5.7 Cas test 2 : champ de variation de courbure lagrangien  $\bar{\kappa}_{69.8}^{70.8}$  initialement parallèles à la paroi (en haut à gauche), puis leur advection en temps. Les contours du bleu à rouge indiquent les valeurs négatives à positives de  $\bar{\kappa}_{69.8}^{70.8}$ . Les points verts correspondent aux points d'annulation du cisaillement à la paroi. L'utilisation d'un repère absolu permet d'illustrer la rotation de l'ellipse

La figure 5.7 est similaire à la figure 5.6 mais pour le cas test 2 de la figure 5.5, c'est-à-dire pour  $\bar{\kappa}_{69.8}^{70.8}$ . Dans ce cas, le cylindre pivote dans le sens anti-horaire en décélérant fortement. On constate alors qu'initialement quatre empreintes lagrangiennes du décollement peuvent être extraites de  $\bar{\kappa}_{69.8}^{70.8}$ . Cependant, on remarque qu'au fur et à mesure du temps, les deux empreintes situées à l'arrière de l'ellipse se rapprochent puis finissent par fusionner ( $t = 70.6$ ). De plus, comme nous l'avons vu, les points de Prandtl ont encore des difficultés à identifier tous les décollements. Durant ce laps de temps, on observe entre un et trois points de Prandtl. Cela confirme d'autant plus l'invalidité du critère de Prandtl pour les écoulements instationnaires et donc le fait que les lignes de courant ne sont en rien corrélées avec la formation de pics de particules matérielles.

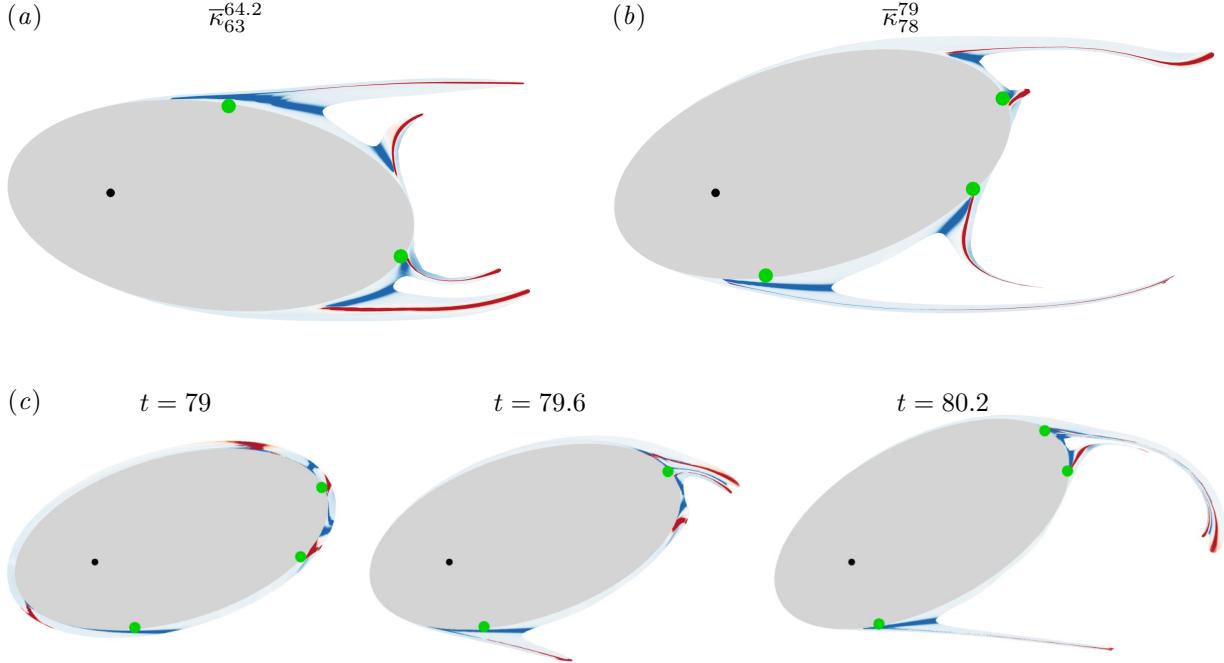


Figure 5.8 Exemples supplémentaires du décollement sur une ellipse sur pivot. (a) et (b) montrent le champ  $\bar{\kappa}_{t_0}^{t_0+T}$  advecté jusqu'au temps final  $t = t_0 + T$  pour deux temps initiaux  $t_0$  différents (les valeurs  $t_0$  et  $T$  sont indiquées sur la figure). Le graphique (c) montre l'advection temporelle de  $\bar{\kappa}_{79}^{80.2}$ . Les points verts correspondent aux points d'annulation du cisaillement à la paroi

Finalement, la figure 5.8 illustre d'autres phénomènes de décollement différents de ceux vus précédemment. Ainsi la figure 5.8(a, b) montre le champ de variation de courbure lagrangien  $\bar{\kappa}_{t_0}^{t_0+T}$  avec les particules matérielles advectées jusqu'au temps final  $t = t_0 + T$ . On observe alors dans les deux cas la présence de quatre empreintes lagrangiennes du décollement correspondant à la formation de quatre pics de particules distincts. Pour le cas (a) l'angle de d'incidence commence par augmenter de  $t = t_0 = 63$  à  $t = 63.7$  puis par diminuer jusqu'à  $t = 64.2$ . C'est pour cela que cet intervalle de temps est pertinent à étudier puisqu'il s'agit d'un changement de sens de rotation de l'ellipse. Enfin, la figure (c) expose le champ de variation de courbure  $\bar{\kappa}_{79}^{80.2}$  avec l'advection des particules initialement parallèles à la paroi pour trois pas de temps différents. On constate donc qu'initialement quatre empreintes lagrangiennes distinctes sont identifiées, puis pour  $79 < t < 79.6$  les deux pics matériels situés sur la partie droite et haute de l'ellipse fusionnent pour ne former qu'un seul pic, puis pour  $79.6 < t < 80.2$  ce nouveau pic fusionne lui-même avec un troisième pic de nouveau sur la droite de l'ellipse. Sur le long terme il semblerait donc qu'il n'y ait en fin de compte que deux phénomènes de décollement distincts. Ce dernier exemple atteste alors de la complexité

du décollement instationnaire qui en un faible nombre de pas de temps peut complètement changer la perception du décollement. Un tel phénomène a cependant pu être capturé par la théorie de la formation des pics matériels de Serra *et al.* (2018), ce qui ne pourrait pas être le cas avec les autres méthodes basées sur un comportement asymptotique de l'écoulement.

### 5.3 Écoulement autour d'un profil NACA 0012

Dans cette partie, il sera question de l'application du critère sur un écoulement bien connu et probablement même élémentaire en aérodynamique. Il s'agit de l'écoulement autour d'un profil NACA symétrique : les NACA 0012. Les profils NACA sont les profils aérodynamiques les plus communément utilisés pour les ailes d'avions. Plusieurs cas tests seront alors étudiés ici pour des angles d'inclinaison et des nombres de Reynolds différents.

Le premier cas test (cas test 1) a été réalisé à l'aide du code open source d'éléments finis Freefem++ permettant la résolution des équations de Navier-Stokes en incompressible dans ce cas. Pour ce faire, un domaine pseudo-infini est utilisé. En entrée est imposée une vitesse uniforme  $U$  et en sortie la pression est imposée égale à la pression hors du domaine. Enfin, sur les parois haute et basse des conditions de parois glissantes sont choisies et sur les parois du profil NACA la vitesse est imposée comme étant nulle. Dans ce cas l'angle d'incidence a été choisi à  $5^\circ$  et le nombre de Reynolds basé sur la corde du profil NACA 0012 et la vitesse d'entrée vaut  $Re = 1000$ . Aucun modèle de turbulence n'est utilisé pour ce cas-ci. La figure 5.9 illustre le domaine ainsi que le maillage utilisés pour le cas test 1, les longueurs sont données en fonction de la corde du profil NACA 0012.

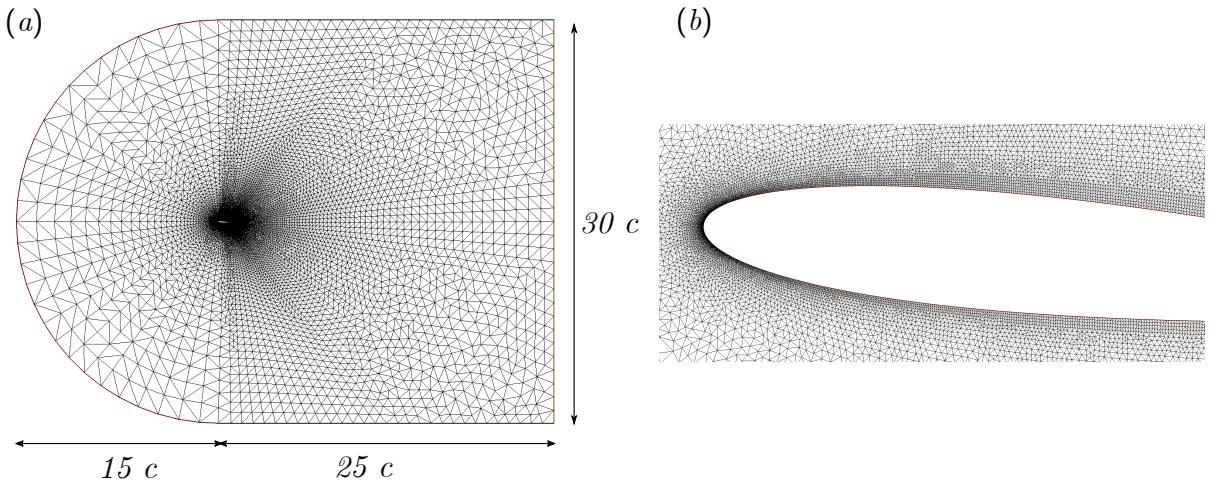


Figure 5.9 (a) Domaine et maillage utilisés pour le cas test 1,  $c$  correspond à la corde du profil NACA. (b) Zoom de (a) sur le profil

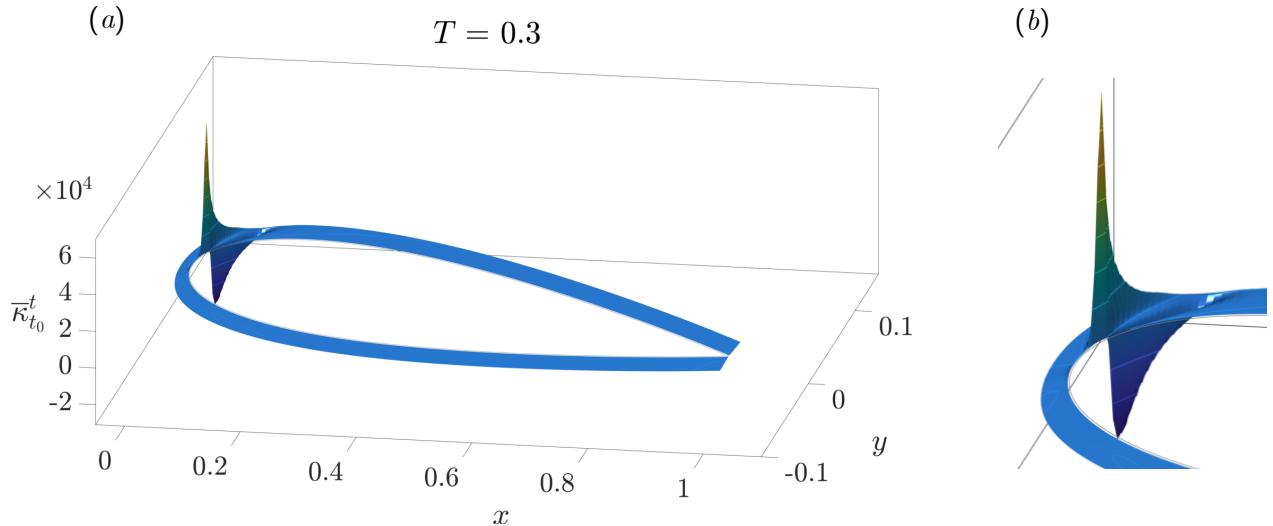


Figure 5.10 (a) Champ de variation de courbure lagrangien  $\bar{\kappa}_0^{0.3}$  pour l'écoulement autour du profil NACA 0012 incliné à  $5^\circ$  et  $Re = 1000$  (cas test 1). (b) Zoom de (a)

La figure 5.10 présente le champ de variation de courbure  $\bar{\kappa}_0^{0.3}$  autour du profil NACA 0012 incliné à  $5^\circ$ . On remarque ici la présence d'une crête ainsi que d'une vallée sur la partie supérieure du profil (l'extrados) proche du bord d'attaque. Cela correspondrait donc à la présence d'un seul phénomène de décollement.

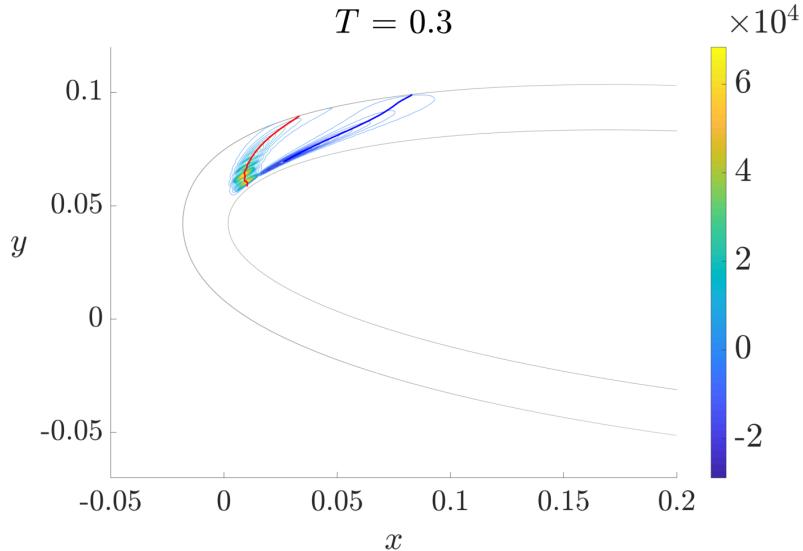


Figure 5.11 Contours du champ de la figure 5.10 avec la position initiale de l'empreinte lagrangienne du décollement (en rouge) ainsi que le minimum de courbure (en bleu) pour l'écoulement autour du profil NACA 0012 incliné à  $5^\circ$  et  $Re = 1000$  (cas test 1)

La figure 5.11 montre les contours du champ de la figure 5.10 ainsi que la position initiale de l'empreinte lagrangienne du décollement et de la zone du minimum de courbure qui ont pu y être extraites. On constate alors qu'effectivement seule une empreinte raccordée à la paroi est présente et se situe très proche du bord d'attaque.

La figure 5.12 illustre l'évolution temporelle de l'empreinte lagrangienne du décollement ainsi que celle des lignes matérielles initialement parallèles à la paroi. On observe alors la formation d'un unique pic de particules coïncidant avec l'empreinte du décollement. L'empreinte commence alors proche du bord d'attaque puis s'étire le long du profil. On peut aussi noter qu'il n'y a ici aucun point de Prandtl pour ce nombre de Reynolds et cet angle d'inclinaison. De plus, comme on pouvait s'y attendre aucun pic de particules et donc aucun décollement n'est présent sur l'intrados du profil.

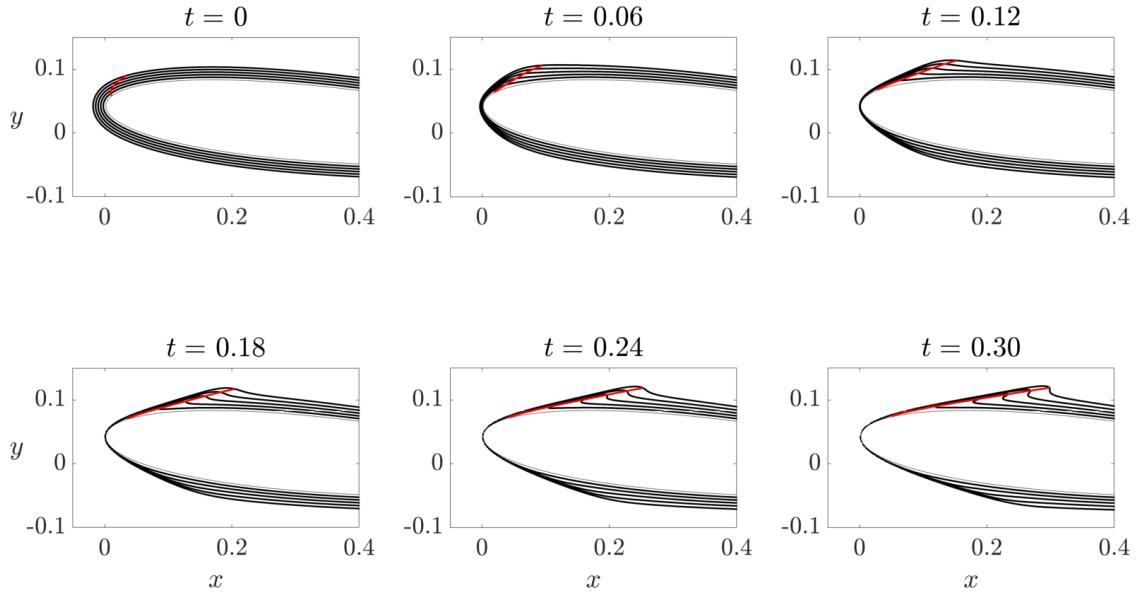


Figure 5.12 Évolution temporelle de l'empreinte lagrangienne du décollement  $\mathcal{B}(t)$  (en rouge) et des lignes matérielles initialement parallèles à la paroi (en noir) pour l'écoulement autour du profil NACA 0012 incliné à  $5^\circ$  et  $Re = 1000$  (cas test 1)

D'autres cas ont également été calculés pour des nombres de Reynolds plus importants afin d'observer si cela avait une incidence sur le comportement du phénomène de décollement sur cet écoulement autour du profil NACA 0012. Pour ce faire, le logiciel commercial en volumes finis Fluent a été utilisé avec le même domaine et les mêmes conditions limites que précédemment mais cette fois en utilisant un modèle de turbulence : le modèle Spalart–Allmaras conçu spécifiquement pour les écoulements autour de profils aérodynamiques (Spalart et Allmaras, 1992). Le maillage n'est cependant pas le même dans ce cas-ci, un maillage structuré a été

utilisé proche paroi tandis que dans le reste du domaine il s'agit d'un maillage non-structuré (non montré ici).

Tout d'abord, un cas pour un nombre de Reynolds  $Re = 800000$  et pour un angle d'incidence de  $0^\circ$  (cas test 2) a été réalisé afin de vérifier qu'aucun pic de particules ne se formerait et que l'évolution temporelle des lignes matérielles serait bel et bien symétriques dans ce cas. C'est effectivement ce qui est observé sur la figure 5.13, pour cet angle d'incidence les lignes matérielles sont plaquées contre la paroi et aucun pic et donc aucune empreinte du décollement n'est ici visible.

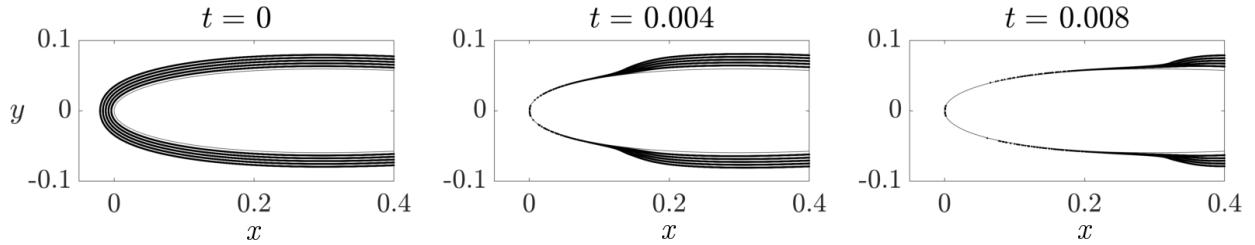


Figure 5.13 Évolution temporelle des lignes matérielles initialement parallèles à la paroi pour l'écoulement autour du profil NACA 0012 incliné à  $0^\circ$  et  $Re = 800000$  (cas test 2)

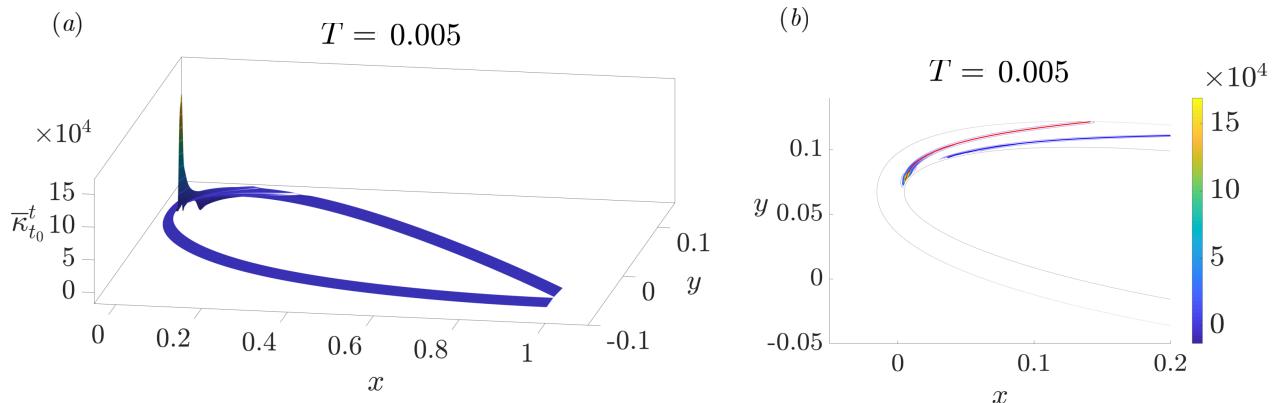


Figure 5.14 (a) Champ de variation de courbure lagrangien  $\bar{\kappa}_0^{0.005}$ . (b) Contours du champ (a) avec la position initiale de l'empreinte lagrangienne du décollement (en rouge) et le minimum de courbure (en bleu) pour l'écoulement autour du profil NACA 0012 incliné à  $8^\circ$  et  $Re = 10000$  (cas test 3)

La figure 5.14(a) illustre le champ de variation de courbure lagrangien pour un temps d'intégration de  $T = 0.005$ , un angle d'inclinaison du profil NACA 0012 de  $8^\circ$ , et  $Re = 10000$  (cas test 3). On constate que, comme pour la figure 5.10, une seule crête est présente, ce

qui permet d'extraire une empreinte lagrangienne du décollement représentée en rouge sur la figure 5.14(b) où les contours du champ  $\bar{\kappa}_0^{0.005}$  sont également représentés. On peut remarquer que comparativement au cas des figures 5.10 et 5.11 du cas test 1, le point du décollement est ici encore plus en amont et pratiquement sur le bord d'attaque du profil. Cela est dû au fait que l'angle d'inclinaison est plus important ce qui induit un décollement plus précoce.

La figure 5.15 montre l'évolution temporelle de l'empreinte du décollement ainsi que celle des lignes matérielles initialement parallèles à la paroi ; on observe ainsi la formation d'un pic de particules sur l'extrados du profil qui coïncide avec l'empreinte du décollement (en rouge). On constate que la forme du pic est assez particulière par rapport à celle de la figure 5.12. Effectivement, l'empreinte lagrangienne du décollement initial (à  $t = 0$ ) est bien plus longue pour ce cas-ci que pour le cas test 1, cependant l'évolution temporelle des lignes matérielles tend à étirer l'empreinte pour le cas test 1 tandis que celle-ci reste sensiblement de la même taille pour le cas test 3. On peut ainsi conclure que, dans ce cas, le décollement se fait d'un seul bloc, c'est-à-dire que même les particules les plus proches de la paroi sont éjectées d'une même intensité que les particules plus éloignées. Cela vient sans doute d'un angle d'inclinaison plus important.

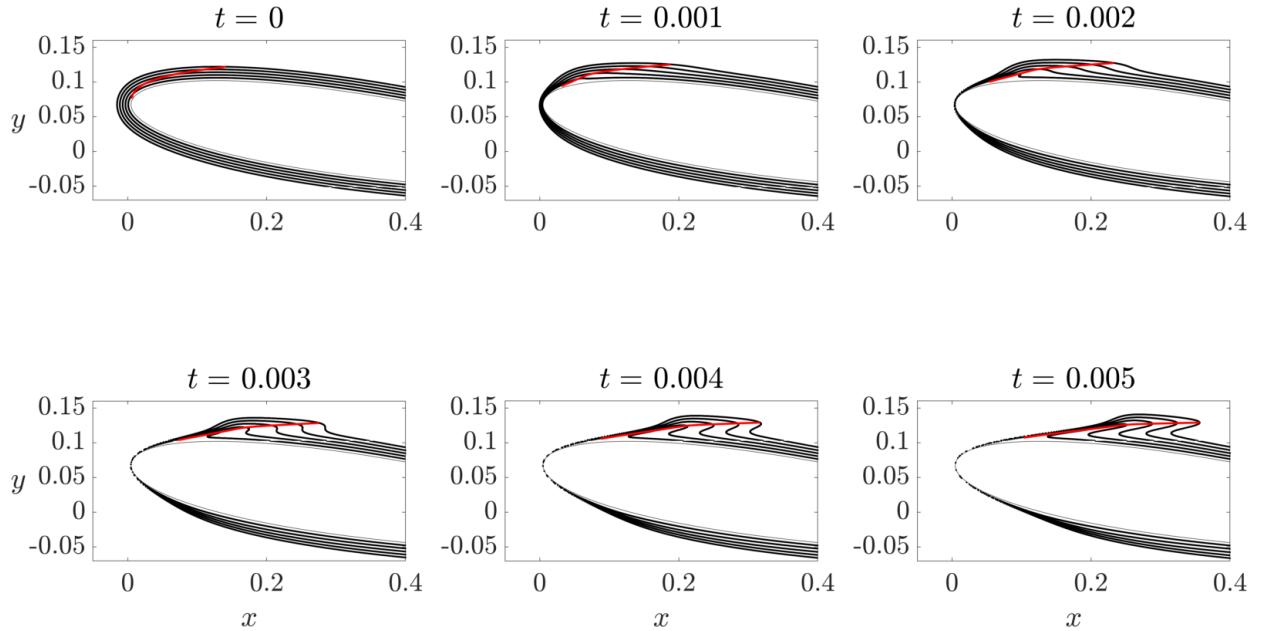


Figure 5.15 Évolution temporelle de l'empreinte lagrangienne du décollement (en rouge) et en noir des lignes matérielles initialement parallèles à la paroi pour l'écoulement autour du profil NACA 0012 incliné à  $8^\circ$  et  $Re = 10000$  (cas test 3)

Il est cependant remarquable que l'angle d'inclinaison n'est pas le seul paramètre régissant le décollement sur cet écoulement, le nombre de Reynolds a aussi un rôle prépondérant dans le phénomène étudié ici. En effet, la figure 5.16 représente le champ de variation de courbure lagrangien au voisinage de l'extrados du profil NACA 0012 avec un angle d'incidence de  $10^\circ$  et un nombre de Reynolds de  $Re = 100000$  (cas test 4). On remarque la présence d'une crête prédominante au niveau du bord d'attaque comme nous l'avons vu dans les cas précédents. On peut noter également la présence d'une seconde crête plus petite, caractérisant peut-être un décollement de plus faible échelle qui ne sera pas visible sur l'évolution temporelle des lignes matérielles de la figure 5.17.

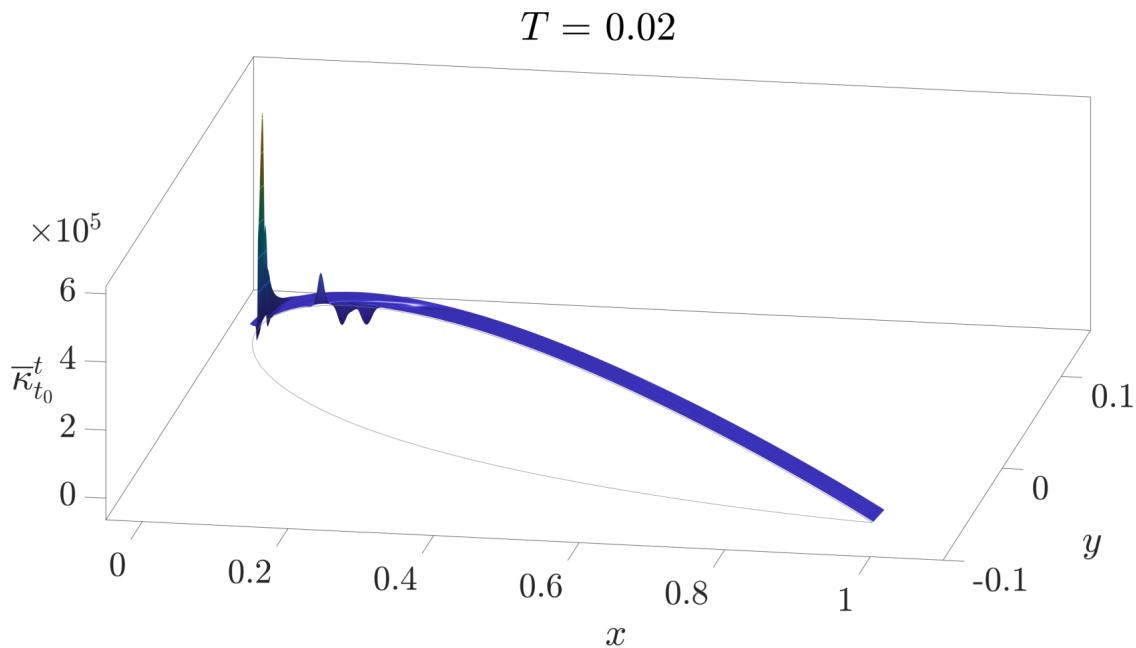


Figure 5.16 Champ de variation de courbure lagrangien  $\bar{\kappa}_0^{0.05}$  pour l'écoulement autour du profil NACA 0012 incliné à  $10^\circ$  et  $Re = 100000$  (cas test 4)

La figure 5.17 donne l'évolution temporelle de l'empreinte lagrangien du décollement et des lignes matérielles. On observe ici que le pic de particules commence au bord d'attaque puis glisse le long de l'extrados. Ainsi, malgré le fait que l'angle d'incidence soit plus grand que pour les cas précédents, les particules ne semblent pas s'éjecter plus vivement qu'auparavant. Cela vient du fait que le nombre de Reynolds est d'un ordre de grandeur supérieur accentuant l'effet Coanda qui entraîne le plaquage des particules sur la paroi.

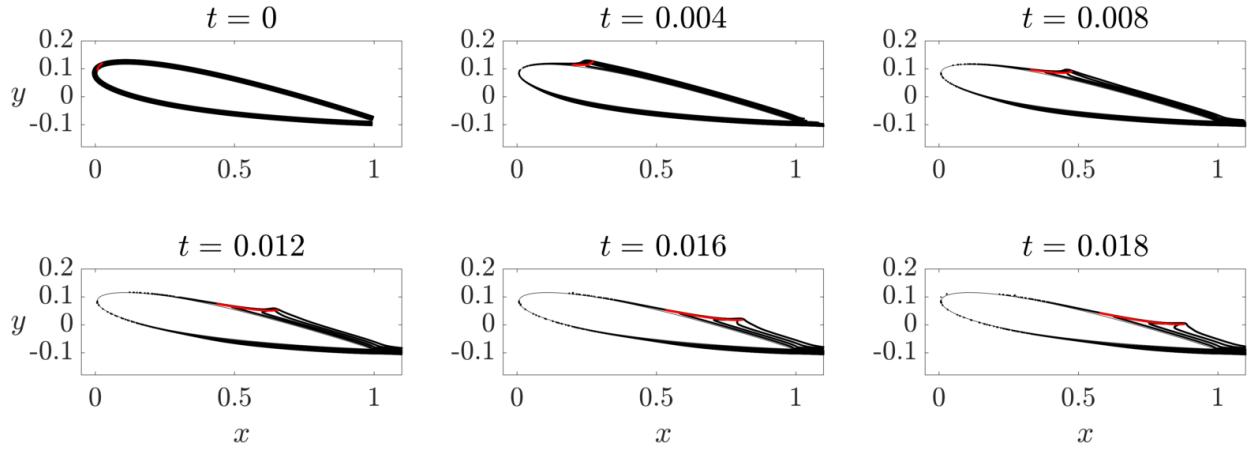


Figure 5.17 Évolution temporelle de l'empreinte lagrangienne du décollement (en rouge) et en noir des lignes matérielles initialement parallèles à la paroi pour l'écoulement autour du profil NACA 0012 incliné à  $10^\circ$  et  $Re = 100000$  (cas test 4)

Enfin, la figure 5.18 montre de nouveau l'évolution de l'empreinte de décollement et des lignes matérielles mais pour un angle d'incidence de  $6^\circ$  et  $Re = 10000$  (cas test 5). On remarque encore la présence d'un seul phénomène de décollement débutant très proche du bord d'attaque et glissant le long de l'extrados au cours du temps.

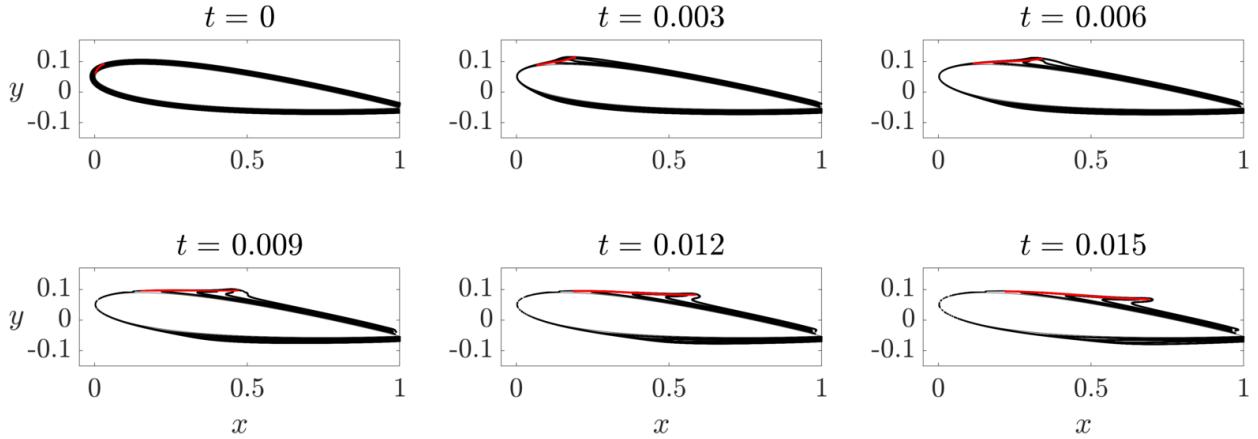


Figure 5.18 Évolution temporelle de l'empreinte lagrangienne du décollement (en rouge) et en noir des lignes matérielles initialement parallèles à la paroi pour l'écoulement autour du profil NACA 0012 incliné à  $6^\circ$  et  $Re = 10000$  (cas test 5)

Comparativement au cas test 3 représenté sur la figure 5.15 dont le nombre de Reynolds est le même ( $Re = 10000$ ), on remarque ici que le pic de particules et donc que le décollement est de bien plus faible intensité et se forme beaucoup plus lentement étant donné les pas de

temps considérés par les deux figures. De plus, le pic et donc le décollement se déplacent bien plus en aval de l'écoulement que pour le cas test 3. Tout cela correspond bien aux résultats attendus pour un angle d'inclinaison plus faible et un même nombre de Reynolds.

Finalement, on peut s'interroger sur le fait que quel que soit le nombre de Reynolds et l'angle d'incidence (hors  $0^\circ$ ), toutes les positions initiales des empreintes lagrangiennes du décollement se situent dans une zone restreinte très proche du bord d'attaque. De surcroît, dans certains des cas étudiés ici, l'éjection des particules hors paroi ne semble pas très importante, et force est de constater qu'à plus long terme les particules semblent se coller à la paroi. Cela est particulièrement visible sur la figure 5.17 du cas test 4. On pourrait alors se demander si les pics formés, et donc les empreintes détectées, ne proviendraient pas plutôt du phénomène impliquant le plaquage des particules sur la paroi plutôt que d'un réel décollement.

## CHAPITRE 6 CONCLUSION

### 6.1 Synthèse des travaux

Cette étude était centrée sur l'analyse et la compréhension du phénomène de décollement. On a ainsi pu voir dans la revue de littérature que de nombreuses méthodes de détection du décollement existaient. Ces critères sont divisés en deux grandes catégories : les méthodes eulériennes et les méthodes lagrangiennes donnant généralement des résultats différents. Ces méthodes sont cependant restreintes dans leurs applications, que cela soit sur le type d'écoulement sur lequel elles s'appliquent que sur le fait qu'elles nécessitent une quantité de données antérieures trop importantes. De plus, ces critères sont bien souvent basés sur des considérations asymptotiques, les rendant parfois peu efficaces ou peu applicables en pratique.

Ainsi, on a pu tester la récente théorie de la formation de pics matériels pendant le décollement développée par Serra *et al.* (2018). Cette méthode est en effet applicable à des écoulements à dépendance temporelle quelconque, qu'ils soient stationnaires ou instationnaires, laminaires ou turbulents. Ce critère, se voulant objectif et universel, a donc été testé et validé sur plusieurs écoulements bidimensionnels de complexité croissante, dans un premier temps sur parois planes puis dans un second temps sur parois courbes fixes et mobiles. Ces écoulements constituaient : la bulle de décollement turbulente, le jet impactant, l'écoulement autour d'un cylindre libre de translater, d'une ellipse libre de pivoter et enfin autour d'un profil NACA 0012 d'angles d'incidence variés. Cette théorie a donc pu détecter des empreintes de décollement lagrangiennes et/ou eulériennes. L'étude a alors démontré que la méthode de Serra *et al.* permettait, contrairement aux méthodes asymptotiques, la détection du décollement sur un très court intervalle de temps, et voire même instantanément, permettant de discerner la naissance du pic de particules et donc du décollement. Cette méthode semble alors très prometteuse pour la surveillance et le contrôle des décollements instationnaires.

Comme nous avons pu le voir, la théorie de la formation de pics matériels a permis l'observation de phénomènes complexes dans la genèse et le développement de plusieurs types de décollements. Cette théorie basée sur les variations de courbure de particules initialement parallèles à la paroi a rendu possible, par exemple, la détection de l'intervalle de temps pendant lequel un décollement sur paroi se transforme en un décollement hors paroi, ou encore le processus de fusion de pics de décollement initialement distincts en un seul et même pic. On a également pu observer que même sur des écoulements simples, les autres critères existants devant supposer au préalable le type de décollement (hors ou sur paroi) avaient souvent du mal à détecter la formation de tous les pics de particules.

En somme, cette méthode a mis en lumière le fait que la façon d'appréhender le décollement sur des écoulements fortement instationnaires gagnerait à être pensée différemment que le concept du classique point de décollement. De plus le critère de Serra *et al.* (2018) s'est avéré efficace sur un grand nombre d'écoulements quelle que soit leur complexité, c'est-à-dire la forme de la paroi, courbe ou plane, mobile ou immobile.

## 6.2 Limitations de la solution proposée

Cependant, bien que très intéressante, cette théorie admet quelques inconvénients, dont le premier concerne la sensibilité de la méthode à la qualité et à la résolution du champ de vitesse de l'écoulement étudié (et ce notamment pour des données expérimentales). En effet, la taille du maillage utilisé peut alors rendre très difficile la détection de crête dans le champ de variation de courbure et donc la détection d'empreinte du décollement. Ainsi, une attention particulière doit être faite sur le choix et la réalisation de la simulation utilisée pour appliquer la méthode.

De plus, comme le cas de l'écoulement autour d'un profil NACA 0012 a pu le laisser entrevoir, il serait intéressant de se demander si la formation d'un pic de particules proche de la paroi est bel et bien toujours une manifestation d'un phénomène de décollement, ou bien si la courbure locale de ces lignes matérielles ne fait pas simplement partie d'une phase initiale de variation des particules dans l'écoulement.

Enfin, il est évident ici que l'étude s'est uniquement appuyée sur les écoulements en deux dimensions. Or, sachant que le décollement est un phénomène qui déclenche souvent de la turbulence dans un écoulement, et que cette même turbulence est un phénomène purement tridimensionnel, il semblerait donc indispensable de garder cet aspect en tête dans l'étude du décollement en 2D dans un monde physique réel tridimensionnel.

## 6.3 Améliorations futures

Il conviendrait alors peut-être de tenter de développer la théorie de la formation de pics matériels pour les écoulements en trois dimensions afin de créer un véritable critère universel de la détection du décollement pour les cas physiques réels.

Une validation sur d'autres écoulements, notamment à haut nombre de Reynolds, et en compressible, pourrait être une étape supplémentaire.

Cependant, à court terme, il serait plus profitable de s'intéresser plus en détail à la topologie du champ de variation de courbure lagrangien afin de pouvoir identifier quelles crêtes seraient

les plus susceptibles d'effectuer une transition sur/hors paroi ou de se fusionner. Enfin, dans un but de rendre ce critère encore plus utile dans le monde du génie, il faudrait aussi explorer l'application de cette méthode de détection dans le domaine du contrôle de l'écoulement. Il serait alors avantageux d'imaginer l'utilisation d'actionneurs sur la paroi liés à un algorithme d'optimisation afin d'altérer l'écoulement sur la paroi et donc de reculer la formation du pic de particules.

## RÉFÉRENCES

- AUDIER, P. (2012). *Etude d'une décharge à barrière diélectrique surfacique. Application au contrôle d'écoulement autour d'un profil d'aile de type NACA 0012.* Thèse de doctorat.
- AZAD, R. S. (1996). Turbulent flow in a conical diffuser : A review. *Exp. Therm. Fluid Sci.*, 13(4):318–337.
- CERMAK, J. E. (1976). Aerodynamics of buildings. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 8:75–106.
- CHILDRESS, S., IERLEY, G., SPIEGEL, E. et YOUNG, W. (1989). Blow-up of unsteady two-dimensional euler and navier-stokes solutions having stagnation-point form. *J. Fluid Mech.*, 203:1–22.
- CLOOS, F.-J., STAPP, D. et PELZ, P. F. (2017). Swirl boundary layer and flow separation at the inlet of a rotating pipe. *J. Fluid Mech.*, 811:350–371.
- CORKE, T. C. et THOMAS, F. O. (2015). Dynamic stall in pitching airfoils : aerodynamic damping and compressibility effects. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 47:479–505.
- COWLEY, S. J., VAN DOMMELEN, L. L. et LAM, S. T. (1990). On the use of Lagrangian variables in descriptions of unsteady boundary-layer separation. *Philos. Trans. R. Soc. A*, 333:343–78.
- CROUZAT, S. (2017). *Étude du décollement lagrangien dans les écoulements bidimensionnels instationnaires.* Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal.
- DUQUESNE, P., MACIEL, Y. et DESCHÈNES, C. (2015). Unsteady flow separation in a turbine diffuser. *Exp. Fluids*, 56:156.
- ELLIOTT, J. W., SMITH, F. T. et COWLEY, S. J. (1983). Breakdown of boundary layers : (i) on moving surfaces ; (ii) in semi-similar unsteady flow ; (iii) in fully unsteady flow. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 25:77–138.
- FARAZMAND, M. et HALLER, G. (2012). Computing Lagrangian coherent structures from their variational theory. *Chaos*, 22:013128.
- GHOSH, S., LEONARD, A. et WIGGINS, S. (1998). Diffusion of a passive scalar from a no-slip boundary into a two-dimensional chaotic advection field. *J. Fluid Mech.*, 372:119–163.
- GRESH, T. (2018). *Compressor Performance : Aerodynamics for the User.* Butterworth-Heinemann, 3 édition.
- GSELL, S., BOURGUET, R. et BRAZA, M. (2016). Two-degree-of-freedom vortex-induced vibrations of a circular cylinder at  $Re = 3900$ . *J. Fluids Struct.*, 67:156–172.

- HALLER, G. (2004). Exact theory of unsteady separation for two-dimensional flows. *J. Fluid Mech.*, 512:257–311.
- HECHT, F. (2012). New development in FreeFem++. *J. Numer. Math.*, 20(3-4):251–265.
- KLONOWSKA-PROSNAK, M. E. et PROSNAK, W. J. (2001). An exact solution to the problem of creeping flow around circular cylinder rotating in presence of translating plane boundary. *Acta Mech.*, 146:115–126.
- LAIZET, S. et LAMBALLAIS, E. (2009). High-order compact schemes for incompressible flows : A simple and efficient method with quasi-spectral accuracy. *J. Comp. Phys.*, 228(16):5989–6015.
- LAIZET, S. et LI, N. (2011). Incompact3d : A powerful tool to tackle turbulence problems with up to  $\mathcal{O}(10^5)$  computational cores. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 67:1735–1757.
- LAMARCHE-GAGNON, M.-E. et VÉTEL, J. (2018). Experimental investigation of unsteady separation in the rotor-oscillator flow. *J. Fluid Mech.*, 844:546–566.
- LIU, C. S. et WAN, Y.-H. (1985). A simple exact solution of the Prandtl boundary layer equations containing a point of separation. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 89(2):177–185.
- MIRON, P. (2016). *Étude du décollement mobile dans les écoulements tourbillonnaires*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal.
- MIRON, P. et VÉTEL, J. (2015). Towards the detection of moving separation in unsteady flows. *J. Fluid Mech.*, 779:819–841.
- MIRON, P., VÉTEL, J. et GARON, A. (2015). On the flow separation in the wake of a fixed and a rotating cylinder. *Chaos*, 25(8):087402.
- MOORE, F. K. (1958). On the separation of unsteady boundary layer. In GÖRTLER, H., éditeur : *Boundary-layer Research*, pages 296–311. Springer.
- PERRY, A. et FAIRLIE, B. (1975). Critical points in flow patterns. In FRENKIEL, F. et MUNN, R., éditeurs : *International Union of Theoretical and Applied Mechanics and International Union of Geodesy and Geophysics*, volume 18 de *Advances in Geophysics*, pages 299–315. Elsevier.
- PRANDTL, L. (1904). Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. *Verh. III, Intern. Math. Kongr. Heidelberg*, 2:484–491.
- ROTT, N. (1956). Unsteady viscous flows in the vicinity of a separation point. *Q. Appl. Maths*, 13:444–451.
- RUSSELL, J. M. et LANDAHL, M. (1984). The evolution of a flat eddy near a wall in an inviscid shear flow. *Phys. Fluids*, 27(3):557–570.

- SEARS, W. et TELIONIS, D. (1971). Unsteady boundary-layer separation. In *Recent research on unsteady boundary layers*, volume 1, pages 404–447. Laval Univ. Press.
- SEARS, W. R. et TELIONIS, D. P. (1975). Boundary-layer separation in unsteady flow. *SIAM J. Appl. Maths*, 28:215–235.
- SERRA, M., VÉTEL, J. et HALLER, G. (2018). Exact theory of material spike formation in flow separation. *J. Fluid Mech.*, 845:51–92.
- SHAH, R. K. et SEKULIĆ, D. P. (2003). *Fundamentals of Heat Exchanger Design*. John Wiley & Sons.
- SPALART, P. et ALLMARAS, S. (1992). A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. In *30th aerospace sciences meeting and exhibit*, page 439.
- STERN, M. E. et PALDOR, N. (1983). Large-amplitude long waves in a shear flow. *Phys. Fluids*, 26(4):906–919.
- STUART, J. (1991). The Lagrangian picture of fluid motion and its implication for flow structures. In *New perspectives in turbulence*, pages 329–348. Springer.
- TIANYUN, G., JIANHAN, L. et MINGBO, S. (2017). Symmetric/asymmetric separation transition in a supersonic combustor with single-side expansion. *Phys. Fluids*, 29(12):126102.
- VAN DOMMELEN, L. L. (1982). Unsteady boundary layer separation.
- VAN DOMMELEN, L. L. et SHEN, S. F. (1982). The genesis of separation. In CEBECI, T., éditeur : *Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows*, pages 293–311. Springer Berlin Heidelberg.
- WEYMOUTH, G. D. (2014). Chaotic rotation of a towed elliptical cylinder. *J. Fluid Mech.*, 743:385–398.
- WILLIAMS, J. (1977). Incompressible boundary-layer separation. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 9(1):113–144.

## ANNEXE A OPÉRATEURS DE DÉRIVATION EN COORDONNÉES CURVILIGNES

### Gradient d'un champ scalaire :

On considère le champ scalaire  $h(\mathbf{x})$  différentiable par rapport aux variables d'espace. Par définition,

$$dh = \nabla h(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \frac{\partial h}{\partial r} dr + \frac{\partial h}{\partial t} dt. \quad (\text{A.1})$$

Dans la base orthonormée  $(\mathbf{e}_r(t), \mathbf{e}_t(t))$ , on a les relations suivantes (formules de Frenet) :

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{ds} = \gamma \mathbf{e}_t \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = -\gamma \mathbf{e}_r, \quad (\text{A.2})$$

où  $\gamma$  est la courbure. Une variation infinitésimale de la position d'un point s'écrit

$$d\mathbf{x} = dr \mathbf{e}_r + ds \mathbf{e}_t. \quad (\text{A.3})$$

En appliquant (A.1), et puisque  $ds = s' dt$ , on obtient

$$\nabla h = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial r} \\ \frac{1}{s'} \frac{\partial h}{\partial t} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

### Gradient d'un champ de vecteurs :

On considère maintenant un champ de vecteurs  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  défini par

$$\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_t \mathbf{e}_t. \quad (\text{A.5})$$

En tenant compte de (A.2), une variation infinitésimale de  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  s'écrit

$$d\mathbf{u} = (du_r - \gamma s' u_t dt) \mathbf{e}_r + (du_t + \gamma s' u_r dt) \mathbf{e}_t, \quad (\text{A.6})$$

$$= \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} dr + \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} - \gamma s' u_t \right) dt \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial u_t}{\partial r} dr + \left( \frac{\partial u_t}{\partial t} + \gamma s' u_r \right) dt \right) \mathbf{e}_t. \quad (\text{A.7})$$

La définition intrinsèque  $d\mathbf{u} = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  du gradient de  $\mathbf{u}$  permet d'écrire, en identifiant terme à terme les expressions :

$$d\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{s'} \frac{\partial u_r}{\partial t} - \gamma u_t \\ \frac{\partial u_t}{\partial r} & \frac{1}{s'} \frac{\partial u_t}{\partial t} + \gamma u_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ s' dt \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$