PolyPublie
Polytechnique Montréal

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Titre: Title:	Comparaison de résolutions elliptiques entre la méthode des frontières immergées et la méthode des volumes finis
Auteur: Author:	Yann Scheiffer
Date:	2018
Type:	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis
Référence: Citation:	Scheiffer, Y. (2018). Comparaison de résolutions elliptiques entre la méthode des frontières immergées et la méthode des volumes finis [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/3774/

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: PolyPublie URL:	https://publications.polymtl.ca/3774/
Directeurs de recherche: Advisors:	Jean-Yves Trépanier, & Ricardo Camarero
Programme: Program:	Génie mécanique

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal

https://publications.polymtl.ca

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

COMPARAISON DE RÉSOLUTIONS ELLIPTIQUES ENTRE LA MÉTHODE DES FRONTIÈRES IMMERGÉES ET LA MÉTHODE DES VOLUMES FINIS

YANN SCHEIFFER
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)
DÉCEMBRE 2018

© Yann Scheiffer, 2018.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

COMPARAISON DE RÉSOLUTIONS ELLIPTIQUES ENTRE LA MÉTHODE DES FRONTIÈRES IMMERGÉES ET LA MÉTHODE DES VOLUMES FINIS

présenté par : SCHEIFFER Yann
en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. REGGIO Marcelo, Ph. D., président
M. TRÉPANIER Jean-Yves, Ph. D., membre et directeur de recherche
M. CAMARERO Ricardo, Ph. D., membre et codirecteur de recherche
M. GUIBAULT François, Ph. D., membre

DÉDICACE

À mon père...

REMERCIEMENTS

Je remercie mon directeur de recherche Jean-Yves Trépanier pour son soutient, son aide et la confiance qu'il m'a accordée. Ses conseils et son expérience m'ont permis de mener à bien ma recherche avec assurance et confiance. Je lui suis reconnaissant pour sa disponibilité, son écoute.

Je remercie mon co-directeur Ricardo Camarero pour son expertise et son expérience dans le domaine de la géométrie informatique. Je le remercie pour m'avoir transmis son savoir et de sa passion pour les maillages.

Je remercie l'ensemble du personnel du département de génie mécanique pour leur disponibilité et leur efficacité.

Je souhaite remercier ma famille et mes amis pour leur soutient lors des moments difficiles.

RÉSUMÉ

La simulation des disjoncteurs haute-tension est une tâche complexe à cause du couplage de plusieurs phénomènes physiques (transfert thermique, écoulement fluide multi-espèces, ablation) et du mouvement des frontières du domaine de calculs. Le partenariat entre l'école Polytechnique et la compagnie General Electric a permis la mise au point d'un logiciel de calcul (MC^3) pour simuler le comportement d'un arc électrique dans la chambre d'un disjoncteur. La modélisation des divers phénomènes intervenant dans l'opération d'un disjoncteur est basée sur des schémas de volumes finis sur un maillage de triangles d'une centaine de milliers d'éléments. Le couplage de ces physiques ainsi que la quantité de données relative au maillage engendrent un coût important en temps pour la résolution. La mobilité de certaines pièces lors de l'extinction de l'arc est pris en compte dans la résolution par un maillage mobile de la géométrie, et un calcul transitoire occasionnant des coûts supplémentaires, ainsi que l'interpolation des solutions entre deux étapes de temps du calcul. De nouvelles techniques de modélisation basées sur des maillages cartésiens émergent, comme les méthodes des frontières immergées, présentant le potentiel de réduire le temps de calcul. Dans l'objectif d'améliorer l'efficacité de l'outil MC^3, la méthode des frontières immergées sera étudiée.

Ce mémoire a pour objectif de tester la mise en œuvre de la méthode des frontières immergées ainsi que sa robustesse en comparaison avec un maillage hybride. Les données, les algorithmes et les résultats de simulations permettront de diriger les travaux futurs ainsi que la portabilité des méthodes pour la modernisation de MC^3.

Une rapide introduction sur le fonctionnement et les physiques qui entrent en jeu dans la résolution des disjoncteurs haute-tension est donnée. Une description du logiciel MC^3 et un énoncé de la problématique en lien avec l'utilisation d'un maillage de triangles est faite pour mettre en évidence la relation temps-données et les enjeux reliés à ce type de maillage.

Dans une revue de la littérature, une comparaison entre les grilles cartésiennes et les maillages ajustés à la géométrie est faite. Les avantages et les inconvénients de ces deux structures sont exposés pour chacun des types de maillage. Enfin une brève introduction sur la méthode des frontières immergées est présentée et le choix de la technique est discuté.

Dans le chapitre Méthodes Numériques, on rappelle de manière générale les méthodes numériques Finite Volume Method (FVM) sur maillage cartésien et triangle. La méthode des frontières immergées avec la technique des cellules fantômes est détaillée, et une formulation FVM pour l'équation de Laplace pour la méthode des frontières immergées et pour les maillages non-structurés est mise en œuvre.

Dans le chapitre Algorithmes et Structures de Données, on présente les différentes structures de données relatives à la géométrie, aux différents maillages et une partie des algorithmes du point de vue machine. Les algorithmes pour la génération d'un maillage hybride sont présentés. Les limites de la méthode des frontières immergées et celles des maillages hybrides sont exposées.

Dans le chapitre Comparaison des Solutions Elliptiques, un problème transfert de chaleur est simulé. La validation du code de calcul est faite en prenant deux solutions analytiques en 2D et axisymétrique. Puis un cas de transfert thermique entre deux électrodes axisymétriques est simulé, et comparé entre les deux méthodes. Finalement un tableau récapitulatif exposant les avantages et inconvénients de chacune des méthodes est présenté.

ABSTRACT

The simulation of the high voltage circuit breaker is a complex task due to the coupling of several physical phenomena (heat transfer, plasma flows, ablations) and the motion of the domain boundary. The partnership between Polytechnique and General Electric has led to a development of a software (MC^3) to compute the behavior of an electric arc inside of a circuit breaker. The modeling and the simulation of the phenomena taking place inside a circuit breaker is based on a finite volume schemes discretizised on a triangular mesh with over a hundred thousand elements. The coupling of these physics and the amount of mesh data lead to a high computation time. The motion of parts of the boundaries during the opening is taken into account by a moving mesh, adding additional computations for the transient solution and interpolation of the solution between successive time steps. New modeling methods based on Cartesian grids, such as the Immersed Boundary Method, have the potential to reduce the computation time. With the objective to enhance the MC^3 tool, the immersed boundary method is studied.

The aim of this work is to test the Immersed Boundary Method and its robustness in comparison with an hybrid mesh. Data structure, algorithms and simulation results show the way for future developments and the portability of the method in order to modernize MC^3.

A short introduction on the functioning and the physics which take place in the operation of a circuit breaker is given. A review of triangular mesh structures is made to highlight the relation between computation time and memory requirements, as well as the challenges associated with these meshes.

In a literature review, a comparison between Cartesian and body-fitted meshes is given. Pros and cons of the two mesh structures is given. Finally, a short introduction on the Immersed Boundary Method and the choice of this technique is discussed.

In the chapter Numerical Methods, the general formulation of the FVM numerical scheme on Cartesian and triangular meshes is reviewed. The algorithm of the Immersed Boundary Method with the ghost cell technique is detailed. Last, the FVM formulation is applied to the Laplace equation both for immersed boundary and unstructured meshes.

In the chapter Algorithms and Data Structure, the different data structures for the geometry, for each type of mesh and the algorithms are given. The algorithm to generate an Hybrid-Mesh is developed. Finally, the limits of the immersed boundary method and hybrid mesh are given.

In the chapter Comparison of Elliptic Solutions, a heat transfer problem is computed. The validation is made using plane and axisymmetric analytic solutions. Finally, a heat transfer between two axisymmetric electrodes is computed with both methods and compared. Finally, a critical analysis of the potential of these methods is presented.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE iii

REMERCIEMENTS iv

RÉSUMÉ v

ABSTRACT vii

TABLE DES MATIÈRES ix

LISTE DES TABLEAUX xii

LISTE DES FIGURES xiii

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS xvi

CHAPITRE 1 INTRODUCTION 1
1.1 Éléments de la problématique 1
1.1.1 Le disjoncteur haute tension 1
1.1.2 Le maillage triangle 4
1.2 Objectifs de recherche 6
1.3 Plan du mémoire 6

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE 8
2.1 Architecture des maillages 8
2.1.1 La grille cartésienne 8
2.1.2 Calculs des flux 8
2.1.3 Le maillage conforme à la géométrie 11
2.2 L'approche des frontières immergées 12
2.2.1 Les différentes techniques de l'Immersed Boundary Method (IBM) . . 12
2.2.2 L'approche Discrète - Comparaison des techniques 13
2.2.3 Choix de la technique IBM 15
2.3 Le maillage hybride 16
2.3.1 Maillage hybride 16
2.3.2 Maillage universel 17
2.4 Résumé des approches choisies 19

CHAPITRE 3 MÉTHODES NUMÉRIQUES 20
3.1 Méthodologie générale 20
3.2 Vue d'ensemble du développement des schémas numériques 20
3.3 Volume finis - Application aux termes diffusifs bidimensionnels 22
3.3.1 Maillage tructuré cartésien 23
3.3.2 Maillage non-structuré 24
3.4 Frontières immergées - Cellules fantômes 26
3.4.1 Relation entre la frontière et la grille 26
3.4.2 Construction des cellules fantômes 27
3.4.3 Développement Immersed Boundary Method 30
3.5 Maillages ajustés 32
3.5.1 Relation entre la frontière et le maillage 32
3.5.2 Identification des arêtes de frontières 33
3.5.3 Développement Non-Structuré 33
3.6 Techniques d'interpolations 34
3.6.1 Interpolation bilinéaire 34
3.6.2 Interpolation bilinéaire dans l'espace de référence 35
3.6.3 Interpolation Inverse Distance Weighting 36
3.7 Reconstruction des flux aux parois 36

CHAPITRE 4 ALGORITHMES ET STRUCTURES DE DONNÉES 38
4.1 Génération de la structure de donnée 38
4.1.1 Représentation de la géométrie 38
4.1.2 Structure du maillage Immersed Boundary Method 41
4.1.3 Structure du maillage Hybrid-Mesh (HM)-Cartésien/Triangle (CT) . 44
4.1.4 Structure du maillage HM-Cartésien Déformé (CD) 47
4.1.5 Vue globale des schémas testés 48
4.2 Algorithmes 50
4.2.1 Point dans un polygone 50
4.2.2 Adaptation de maillage HM-CT 51
4.2.3 Adaptation de maillage HM-CD 55
4.3 Limites 57
4.3.1 Limite de l'Immersed Boundary Method 57
4.3.2 Limite du maillage cartésien hybride 62

CHAPITRE 5 COMPARAISON DES SOLUTIONS ELLIPTIQUES SUR UN MAILLAGE CARTESIEN ET SUR UN MAILLAGE AJUSTÉ À LA FRONTIÈRE 64

5.1 Validation 64
5.1.1 Énoncé 64
5.1.2 Cas 1 - Double cylindres concentriques 65
5.1.3 Cas 2 - Double sphères concentriques 73
5.2 Application aux disjoncteurs 77
5.2.1 Électrodes axisymétriques 77
5.3 Analyses 80
5.4 Synthèse des travaux 81
5.4.1 Algorithme 82
5.4.2 Structure de données 82
5.4.3 Calculs 83

CHAPITRE 6 CONCLUSION 84
6.1 Limitations de la solution proposée 85
6.2 Améliorations futures 85

RÉFÉRENCES 87

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1 Famille d'Immersed Boundary Method 13
Tableau 3.1 Vue d'ensemble de la formulation du schéma volume finis 21
Tableau 4.1 Structure du fichier de la géométrie 39
Tableau 4.2 Structure du maillage cartésien 43
Tableau 4.3 Structure du maillage hybride 45
Tableau 4.4 Structure des données pour l'Hybrid-Mesh 45
Tableau 4.5 Structure de la classe *Point* 46
Tableau 4.6 Structure de la classe *Line* 46
Tableau 4.7 Structure de la classe *Cell* 46
Tableau 4.8 Structure du maillage hybride cartésien déformé 48
Tableau 4.9 Cas de figure 57
Tableau 5.1 Comparaison des méthodes IBM et HM 81

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Description d'un disjoncteur haute-tension	2
Figure 1.2	Rétablissement de la tension aux bornes d'un disjoncteur électrique	3
Figure 1.3	Description des phénomènes dans un disjoncteur haute-tension	4
Figure 1.4	Exemple de maillage type sur une géométrie disjoncteur	5
Figure 2.1	Calcul d'un flux entre P et A au travers d'une surface	9
Figure 2.2	Maillage cartésien non-uniforme sur une géométrie qui ne présente que des côtés verticaux et horizontaux	9
Figure 2.3	Maillage cartésien conforme à la géométrie (Liseikin, 1999)	10
Figure 2.4	Maillage quadtree ou block (Peron and Benoit, 2013)	11
Figure 2.5	Maillage triangle conforme à la géométrie (Shewchuk, 2002)	11
Figure 2.6	Volume de contrôle avec la déclinaison merge-cell (Bai et al., 2010)	14
Figure 2.7	Modélisation de la frontière par la technique des Ghost-Cell (Mittal et al., 2008)	15
Figure 2.8	Maillage hybride composé d'une partie curviligne et une partie non-structurée autour d'un profil d'aile (Dussin et al., 2009)	16
Figure 2.9	Maillage hybride cartésien et triangle autour du sigle AIAA (Luo et al., 2010)	17
Figure 2.10	Maillage universel autour d'une géométrie double cylindre	17
Figure 2.11	Paramétrisation de la géométrie sur le maillage existant (Rangarajan and Lew, 2012)	18
Figure 3.1	Discrétisation d'un volume ∂V en une surface discrète	23
Figure 3.2	Molécule de calcul pour un maillage cartésien	24
Figure 3.3	Molécule de calcul pour un maillage non-structuré	24
Figure 3.4	Correction de la non-orthogonalité	25
Figure 3.5	Frontière immergée dans une grille cartésienne	26
Figure 3.6	Pixélisation de la face immergée	27
Figure 3.7	Construction du point image	28
Figure 3.8	Patrons d'interpolations du point image	29
Figure 3.9	Construction du point image	30
Figure 4.1	Représentation topologique de la géométrie	38
Figure 4.2	Ré-échantillonnage uniforme de la géométrie	41
Figure 4.3	Adressage des cellules et leurs voisins	42

Figure 4.4 Vue d'ensemble du code de calcul pour l'Immersed Boundary Method et l'Hybrid-Mesh pour la résolution d'équations elliptiques 49
Figure 4.5 Test d'un point à l'intérieur d'un polygone 50
Figure 4.6 Maillage hybride autour d'un profil type NACA0012 52
Figure 4.7 Construction d'un triangle (prev_{pos}, curr_{pos}, next_{pos}) à la position de l'angle minimum $\alpha(\widehat{PCN})$ 54
Figure 4.8 Critère de validité d'un triangle 55
Figure 4.9 Récupération des nœuds les plus proches 56
Figure 4.10 Projection d'un troisième nœud d'une cellule pour s'ajuster à la géométrie 56
Figure 4.11 Contact d'arc dans un disjoncteur haute tension 58
Figure 4.12 Cas de figure de la plaque plane 58
Figure 4.13 Plaque plane décalée vers le haut 59
Figure 4.14 Le point image est en dehors de la zone d'étude 59
Figure 4.15 Cas de figure du bord de fuite 60
Figure 4.16 Maillage surfacique d'une sphère 61
Figure 4.17 Cas de figure du maillage ouvert 62
Figure 4.18 Cas de figure d'une génération d'une arête très petite 63
Figure 5.1 Description du cas test des cylindres concentriques 65
Figure 5.2 Maillages types 66
Figure 5.3 Solutions pour $N_x = 512$ 68
Figure 5.4 Profil de température pour $N_x = 512$ 68
Figure 5.5 Ordre de convergence pour un raffinement double 69
Figure 5.6 Reconstruction des flux aux parois 69
Figure 5.7 Erreur de reconstruction des flux aux parois 70
Figure 5.8 Temps de calculs 70
Figure 5.9 Complexité algorithmique pour la construction du maillage HM-CT . 71
Figure 5.10 Complexité algorithmique pour la résolution IBM et HM-CT 72
Figure 5.11 Description du cas test des sphères concentriques 73
Figure 5.12 Solutions pour $N_x = 512$ 74
Figure 5.13 Profil de température pour $N_x = 512$ 75
Figure 5.14 Ordre de convergence pour un raffinement double 75
Figure 5.15 Reconstruction des flux aux parois 76
Figure 5.16 Erreur de reconstruction des flux aux parois 76
Figure 5.17 Description du cas test des électrodes ellipsoïdales 77
Figure 5.18 Maillages types 78
Figure 5.19 Solution pour un transfert thermique d'une électrode à l'autre 79

Figure 5.20 Graphique des solutions 79
Figure 5.21 Erreur entre les solutions numériques sur une ligne de coupe à $y = 0.25$ 80
Figure 5.22 Reconstruction des flux aux parois 80

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

IBM	Immersed Boundary Method
IDW	Inverse Distance Weighting
FVM	Finite Volume Method
EDP	Equation aux Dérivées Partielles
BF	Body-Fitted
HB	Hybrid-Mesh
CG	Computational Geometry
BRep	Boundary Representation
PIP	Point in polygon
LSRG	Least Square Reconstruction Gradient
GC	Ghost Cells
CT	Cartésien/Triangle
CD	Cartésien Déformé
UM	Universal-Mesh

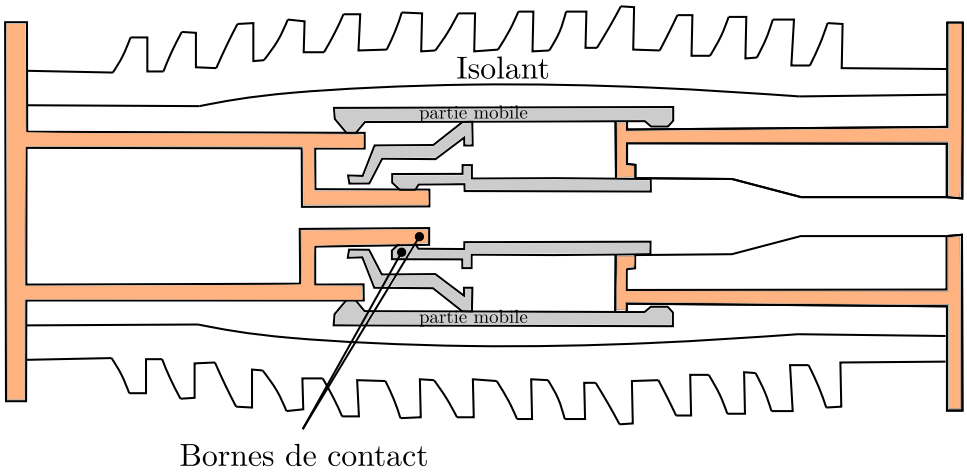
CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Ce projet s'inscrit dans une collaboration avec une entreprise de conception et de fabrication de matériel de transport d'énergie électrique. L'école Polytechnique possède une expertise reconnue dans la modélisation et la simulation numérique des écoulements et de l'arc électrique dans les disjoncteurs haute-tension. Le projet vise à explorer des technologies numériques qui ont le potentiel de fournir une base au développement d'une nouvelle génération d'outils de modélisation et de simulation pour ces appareils.

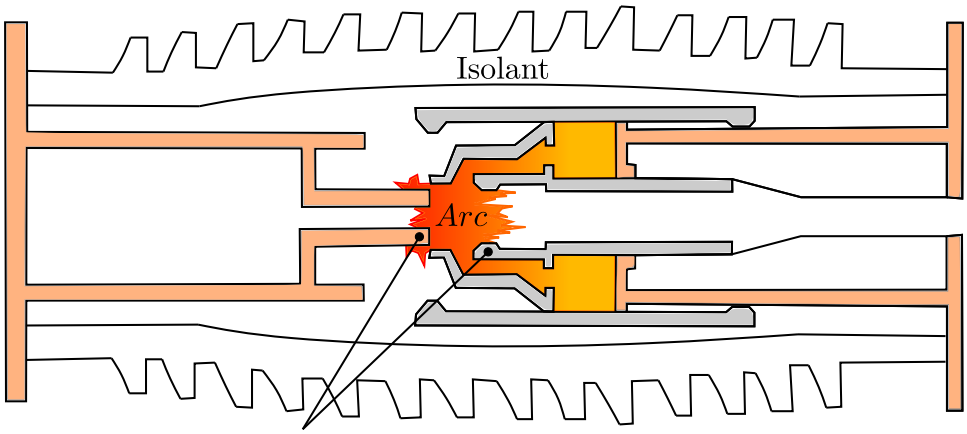
1.1 Éléments de la problématique

1.1.1 Le disjoncteur haute tension

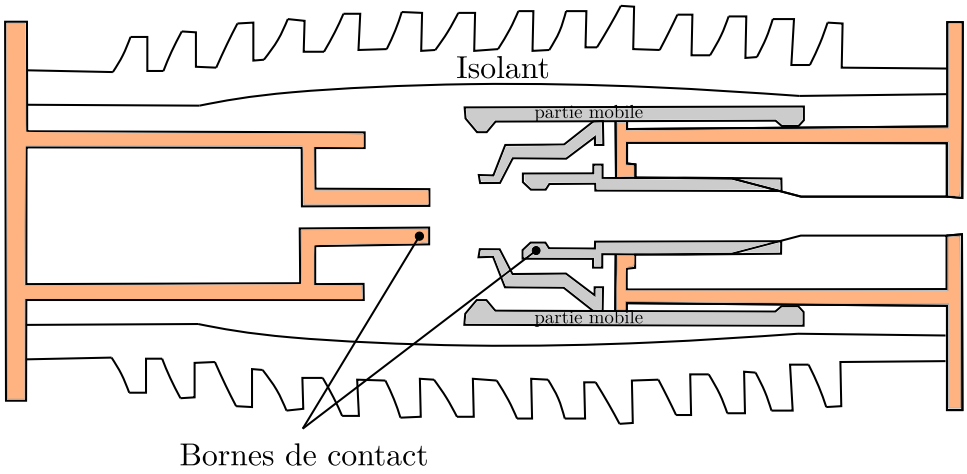
Le disjoncteur haute-tension est un appareil appartenant aux réseaux électriques de grandes et moyennes puissances. Ce dispositif est un élément placé en second de tout circuit électrique, en arrière du sectionneur (appareil servant à isoler un réseau hors charge). Sa fonction est d'ouvrir un réseau en charge lorsqu'un court-circuit est détecté. Un court-circuit se caractérise par une augmentation brutale du niveau de courant. Dépendant du circuit, ces courants de court-circuit peuvent atteindre des milliers d'ampères et le rôle du disjoncteur est de couper ce courant rapidement pour protéger le réseau.



(a) Configuration d'un disjoncteur en fonctionnement. Contacts fermés



(b) Configuration du disjoncteur en ouverture. Formation d'un arc électrique aux bornes contacts d'arc



(c) Configuration d'un disjoncteur ouvert. Arc électrique éteint, circuit électrique ouvert et protégé

Figure 1.1 Description d'un disjoncteur haute-tension

La figure 1.1 est une représentation simplifiée d'un disjoncteur et décrit les étapes lors de l'ouverture de l'appareil.

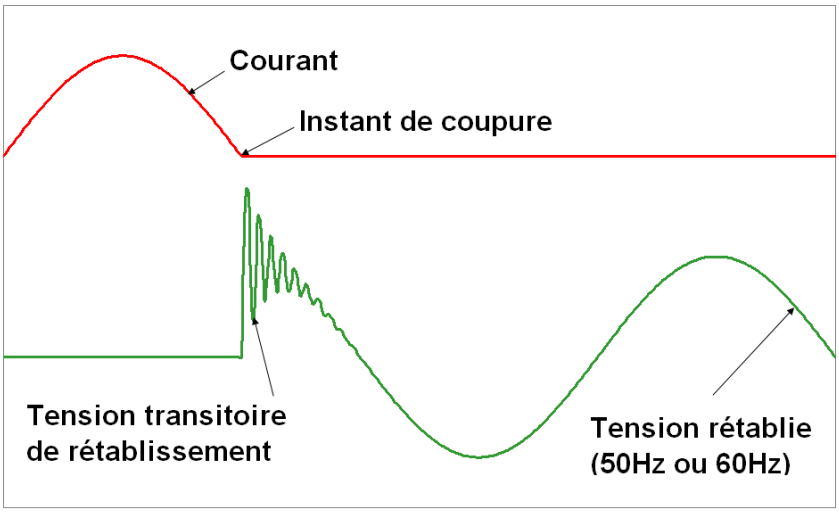


Figure 1.2 Rétablissement de la tension aux bornes d'un disjoncteur électrique

Fonctionnement

Le disjoncteur est un appareil cylindrique qui renferme un gaz diélectrique. Lorsqu'un court-circuit est détecté, le disjoncteur procède à l'ouverture des contacts. Lors de l'ouverture, un arc électrique se forme aux bornes d'ouverture de l'appareil. Un court-circuit est dit *complètement éteint* lorsque la tension du réseau se retrouve aux bornes de l'appareil et que le courant est nul (voir fig. 1.2). Le temps d'ouverture d'un tel mécanisme est de l'ordre de l'inverse de la fréquence du réseau. Durant ce temps d'ouverture, le gaz initialement au repos est chauffé par l'arc, puis on observe une montée en pression dans l'enceinte du disjoncteur. Une chambre de pression est remplie par le gaz chaud et, lors du passage du courant par zéro, l'écoulement est inversé pour *souffler l'arc* et permettre son extinction.

Enjeux

La prévision du comportement de l'arc dans un tel appareil est une nécessité tant en terme technologique qu'en terme économique. Les matériaux, les gaz, ainsi que les dimensions doivent être soigneusement choisis. Les normes environnementales dictent de plus en plus le choix du gaz contenu dans l'enceinte du disjoncteur pour, en cas de fuite, minimiser l'impact sur l'environnement. Dans ce contexte actuel, tous les fabricants visent à remplacer le gaz SF_6, actuellement le plus répandu, par un autre produit moins nocif pour l'environnement. Les mélanges de CO_2 sont les plus prometteurs en ce moment (Robin-Jouan et al., 2017). D'autre part, les expérimentations représentent un coût financier important pour les orga-

nismes de développement et bien souvent, l'appareil ne peut pas être réutilisé pour plusieurs essais. L'importance de la modélisation et de la simulation est donc crucial.

1.1.2 Le maillage triangle

La simulation d'un arc requiert des solveurs pour les différentes physiques présentes à l'ouverture, tel qu'illustré à la figure 1.3.

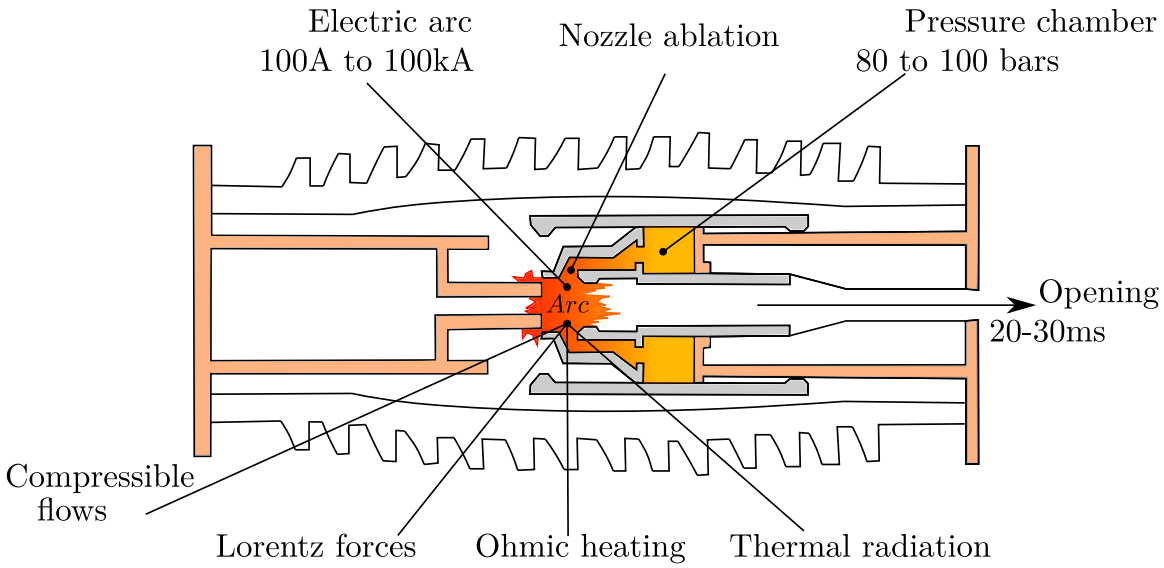


Figure 1.3 Description des phénomènes dans un disjoncteur haute-tension

La modélisation de ce système multiphysique comprend le couplage des diverses physiques qui rend difficile la mise en place d'algorithmes performants. L'outil de simulation actuel MC^3 est un logiciel pour le calcul des arc électriques développé par l'École Polytechnique, basé sur la résolution des équations instationnaires d'Euler compressibles (Trépanier et al., 1991), couplé avec les champs électriques (Robin-Jouan and Yousfi, 2007), l'ablation des parois (Godin et al., 2000), le transfert thermique par radiation (Melot et al., 2012) et la résolution d'écoulements multi-espèces (Martin et al., 2004; Arabi et al., 2018). La résolution numérique utilise actuellement la méthode FVM avec un maillage non-structuré de triangle. On estime que la complexité algorithmique de l'outil actuel MC^3, avec l'adaptation du maillage et une géométrie mobile, est en $\mathcal{O}(n^2)$ (où n est le nombre de cellules) (Pernaudat, 2017). Le temps de calcul pour une géométrie typique, telle qu'illustrée à la figure 1.4, peut atteindre plusieurs semaines. Il a été identifié que pour un maillage fixe, l'outil MC^3 peux atteindre une complexité algorithmique en $\mathcal{O}(n\ log(n))$ (Pernaudat, 2017). Le remaillage de la géométrie

mobile a un fort impact sur le temps de calcul global de la solution de l'arc. La fig. 1.4 donne un aperçu de la zone mobile et la complexité du raffinement local.

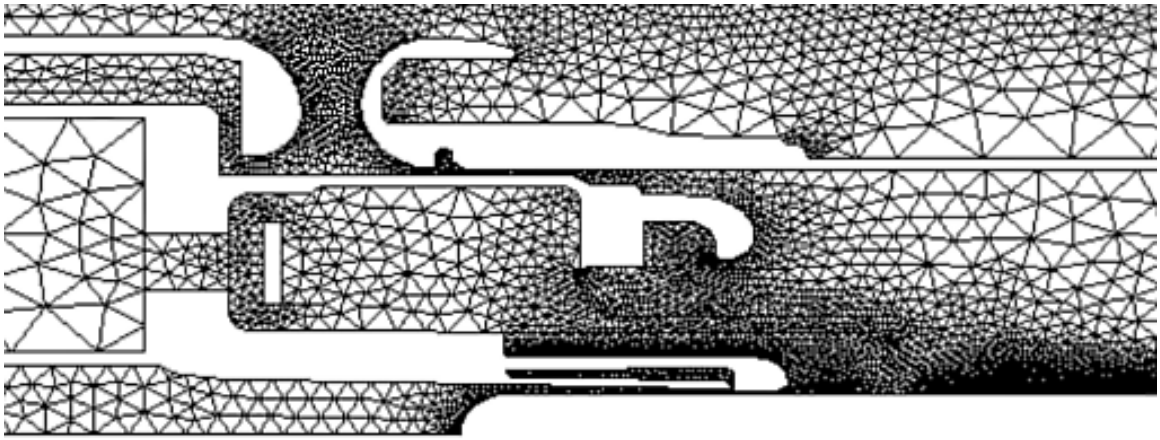


Figure 1.4 Exemple de maillage type sur une géométrie disjoncteur

Le maillage traditionnel de triangles, en mode adaptatif, n'est pas continu en mémoire. Les accès aux nœuds, cellules et aux arêtes ne sont pas direct. De plus, lorsque la géométrie est mobile, une interpolation de la solution de l'itération précédente est nécessaire. Malgré les évolutions des techniques de générations de maillages, grâce à de nouveaux algorithmes et une meilleure gestion des ressources informatiques, le modèle de mémoire n'est pas compatible avec celles des ordinateurs. Des modèles de couplages 2D/3D (Pernaudat, 2017) ont été développés pour introduire le 3D avec des maillages cartésiens en révolutions pour certaines parties du disjoncteur. Il apparait clairement que l'accès à une résolution 3D n'est pas actuellement envisageable, à cause de l'architecture du maillage.

Il est important pour l'outil MC^3 de progresser vers la simulation 3D. En effet, pour certaines parties de l'appareil, dans les échappements et les volumes thermiques, la géométrie n'est pas axisymmétrique. De plus, des travaux sur la turbulence de l'arc mettent en évidence le caractère 3D lors de la phase d'extinction (Seeger, 2015). De nouvelles méthodes prometteuses sur maillage cartésien comme la méthode des frontières immergées offrent la possibilité d'améliorer la performances des algorithmes. La méthode des frontières immergées permet entre autre l'économie d'une structure de maillage, et de tâches annexes tel que le remaillage, ou des calculs de corrections pour le schéma numérique. Le maillage cartésien laisse présager l'extension vers les applications 3D.

1.2 Objectifs de recherche

Le but de la présente recherche est d'explorer une nouvelle méthode utilisant l'approche IBM et une approche hybride, avec les objectifs spécifiques suivants :

① de développer trois méthodes
   — une méthode de frontières immergées (IBM).
   — une méthode sur un maillage hybride (mixte cartésien/triangle).
   — une méthode sur un maillage hybride (cartésien déformé).

② d'évaluer les mises en œuvre (structure de données, temps de calculs), et comparer la précision, la convergence pour l'équation de diffusion (Laplace).

Pour des raisons de complexité de la géométrie du disjoncteur et du couplage des physiques, l'étude se portera uniquement sur l'équation de Laplace et des géométries non complexes. La validation est faite avec deux cas analytiques appliqués sur un problème de transfert de chaleur plan (cylindres concentriques) et axisymétrique (sphères concentriques). Ensuite, ce modèle de transfert de chaleur est simulé sur une géométrie simplifiée d'une chambre de disjoncteur entre deux électrodes. Les solutions numériques IBM et hybrides sont comparées et validées à l'aide du logiciel ANSYS Fluent.

1.3 Plan du mémoire

Après une revue de littérature présentée au Chapitre 2, ce mémoire s'articule autour de trois thèmes majeurs,

Les méthodes numériques qui présentent la méthode IBM et son implémentation numérique par un schéma FVM appliqués aux maillages cartésiens et hybrides. Cette étape permet de faire le point sur le schéma numérique FVM et sa formulation générale pour les termes diffusifs. De sa formulation générale, une formulation spécifique IBM est greffée.

L'implémentation et les structures de données qui introduit une première comparaison globale des structures de l'information de la géométrie et des maillages. Ce chapitre donne un aperçu de la complexité de la mise en œuvre des algorithmes. Une étude préliminaire dresse une liste des limites et cas de figures soulevés par chacune des méthodes.

La comparaison de solutions numériques qui présente de manière quantitative la capacité des méthodes proposées à résoudre un problème elliptique sur des géométries simples. Une comparaison de l'ordre de convergence, de la précision et du temps de calculs donne une

appréciation globale de chacune des méthodes à partir d'un cas analytique. Enfin une étude sur une géométrie simplifiée de disjoncteur sera menée.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

2.1 Architecture des maillages

2.1.1 La grille cartésienne

Parmi les maillages cartésiens, il faut distinguer au moins deux catégories

- **La grille cartésienne** est un domaine rectangulaire (ou parallélépipédique), dont le pas dans toutes les directions (e_x, e_y, e_z) est constant.
- **Le maillage cartésien** en revanche lui peut être un domaine défini par plusieurs côtés horizontaux et verticaux (ex. élargissement brusque), et dont le pas peut être variable (octree, maillage non-uniforme) .

La grille cartésienne est le maillage le plus simple et le plus rapide à générer. Son caractère structuré, ainsi que son nombre de cellules fixes lui vaut sa renommée tant sur le plan informatique que mathématique. Plusieurs applications utilisent ce type de grilles comme le milieu de la métrologie (Lundquist, 2010), la biomécanique (Peskin, 1972), ou encore la recherche marine (Changhong and Cheng, 2016).

En effet, sa structure informatique est idéale. Une boucle *for* ou *while* permet de se déplacer d'une cellule à une autre où l'indice de la boucle est une cellule. La connectivité est déduite par des relations mathématiques de bases (additions/soustractions...). On peut atteindre n'importe quelle cellule depuis l'indice courant et en déduire son identifiant sans utiliser d'algorithmes de localisation. De plus, la dimension connue de la grille permet de savoir exactement la quantité d'espace allouée (contrairement aux allocations dynamiques). Il en découle une utilisation optimale de la mémoire.

2.1.2 Calculs des flux

D'un point de vue mathématique, l'ensemble des transferts de masse, de quantité de mouvement et d'énergie sont évalués au travers de surfaces de contrôles. Ces bilans s'expriment mathématiquement de manière générale par

$$\int_{\partial\Omega} \overrightarrow{Q}.\overrightarrow{n}\,dS \tag{2.1}$$

où $\overrightarrow{Q} = Q_x\overrightarrow{e_x}+Q_y\overrightarrow{e_y}+Q_z\overrightarrow{e_z}$ représente une quantité transportée, et/ou diffusés dans l'espace. $\overrightarrow{n} = n_x\overrightarrow{e_x} + n_y\overrightarrow{e_y} + n_z\overrightarrow{e_z}$ est la normale sortante en tout point de la surface $\partial\Omega$.

Par construction géométrique, la cellule cartésienne est celle qui offre la meilleur précision. Le critère d'orthogonalité est respecté dans toutes les directions de l'espace. Le transfert entre le point P et son voisin A au travers de la surface vaut toujours $\overrightarrow{Q}.\overrightarrow{n} = Q$.

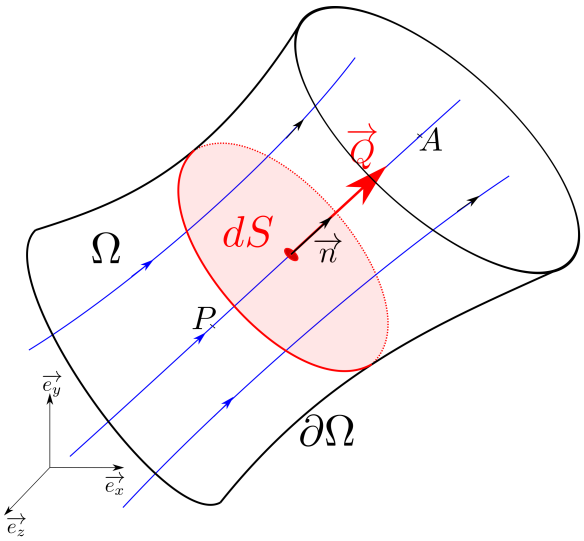


Figure 2.1 Calcul d'un flux entre P et A au travers d'une surface

En revanche, la grille cartésienne, et le maillage cartésien non-uniforme ne s'utilise que lorsque le domaine d'étude présente des côtés horizontaux et verticaux. La figure 2.2, extraite de Mitsoulis and Huilgol (2004), montre un exemple de maillage pour le cas d'un élargissement brusque.

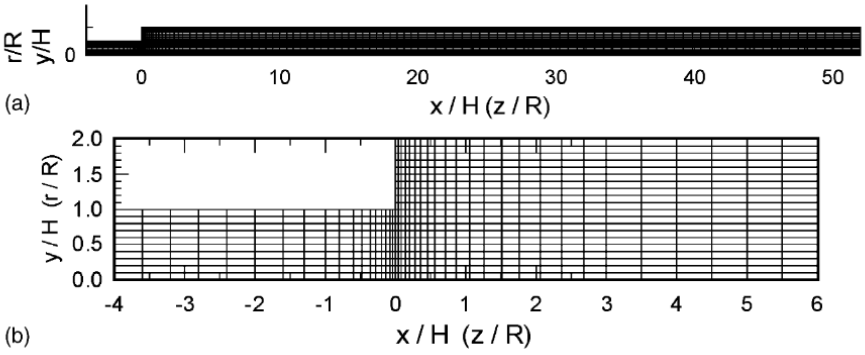


Figure 2.2 Maillage cartésien non-uniforme sur une géométrie qui ne présente que des côtés verticaux et horizontaux

Cependant, dans de nombreuses applications, les géométries sont dites complexes et ne présentent pas ce type de côtés. Les maillages cartésiens conformes issus d'une transformation sont parfois utilisés mais ne représentent pas la majorité. La figure 2.3 est un maillage cartésien conforme à la géométrie.

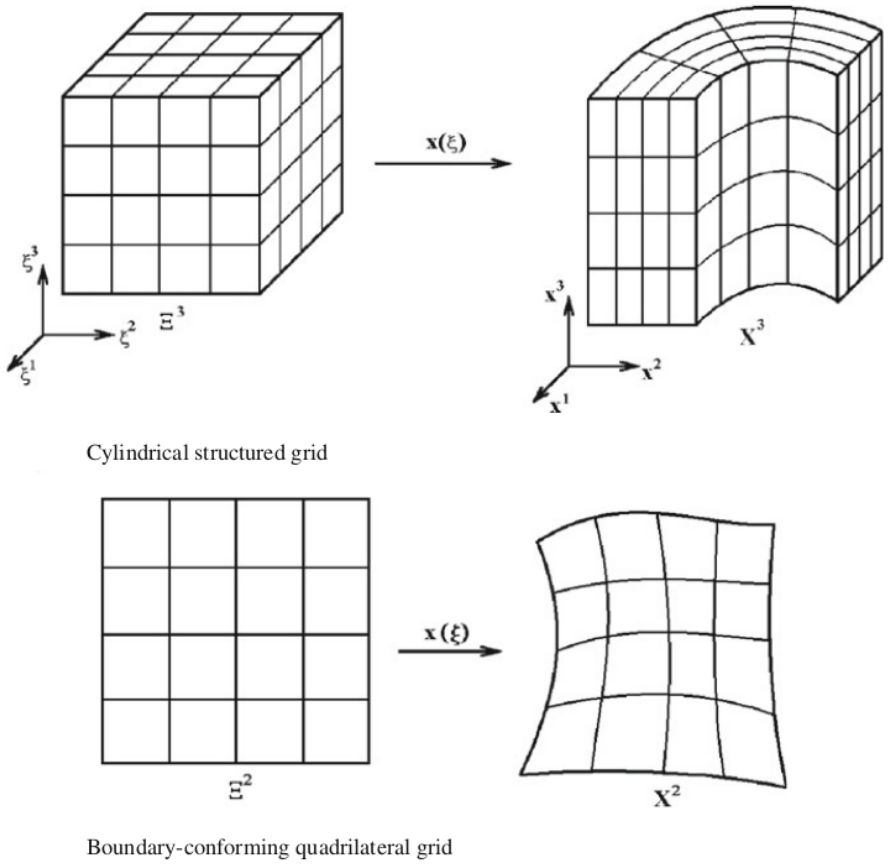


Figure 2.3 Maillage cartésien conforme à la géométrie (Liseikin, 1999)

Un exemple de maillage quadtree (ou octree en 3D) est donné dans la figure 2.4. Le maillage quadtree, ou parfois appelé *maillage block* en raison de maillages superposés, a de meilleurs capacités pour approximer une frontière. Le maillage quadtree ou non-uniforme, peut s'utiliser avec une méthode IBM, mais on perd alors l'intérêt qu'offre la grille cartésienne en terme de repérage, et de génération.

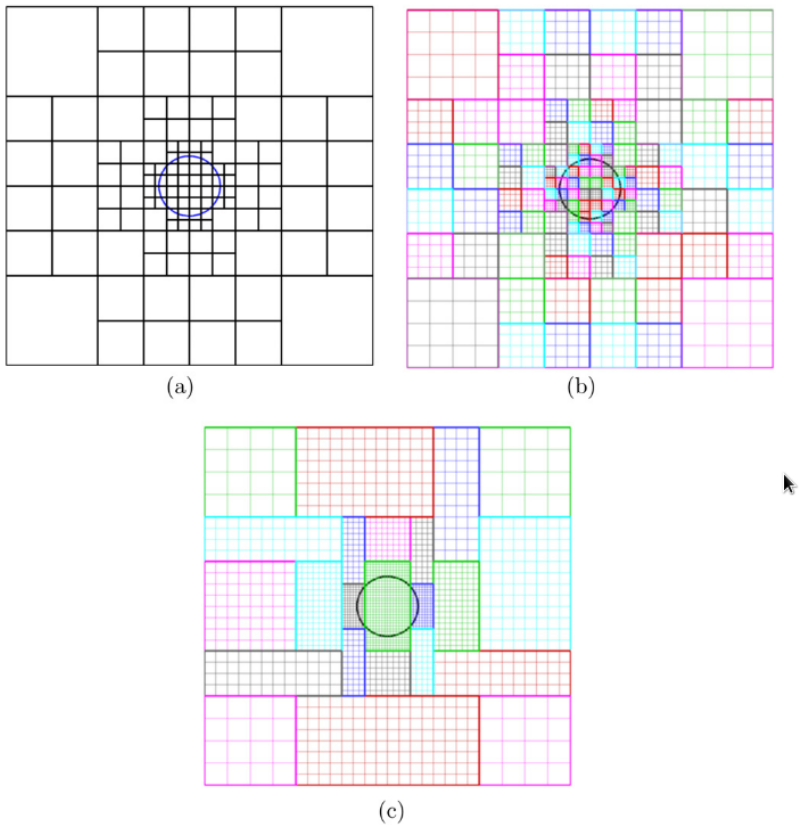


Figure 2.4 Maillage quadtree ou block (Peron and Benoit, 2013)

2.1.3 Le maillage conforme à la géométrie

Le maillage conforme à la géométrie, ou Body-Fitted (BF), est le maillage le plus répandu de nos jours. Parmi lequel, on retrouve particulièrement et souvent le maillage triangle ou tétraèdre en 3D (voir fig. 2.5).

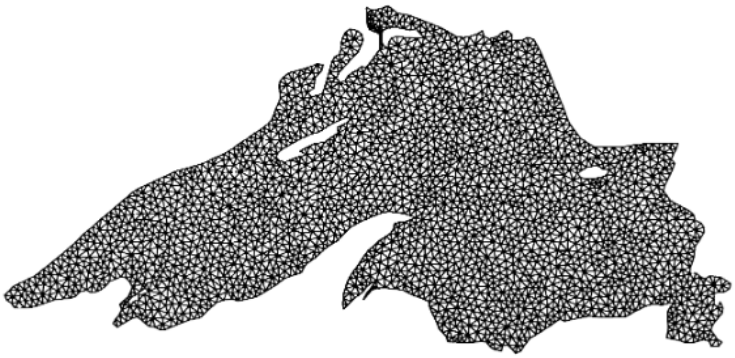


Figure 2.5 Maillage triangle conforme à la géométrie (Shewchuk, 2002)

On dispose d'un grand nombre de techniques pour la génération de tels maillages, comme les méthodes de Delaunay, d'avance de front (Mavriplis, 1995) ou divide-and-conquer (Cignoni et al., 1998). Ce type de maillage dit non-structuré, nécessite de stocker la connectivité.

La création d'une telle structure de données requière des structures de données prédéfinies, telle que Winged-edge (Baumgart, 1972), Half-edge (Muller and Preparata, 1978), ou encore Quad-edge meshes (Guibas and Stolfi, 1985). Toutes ces structures ont pour but de créer une connectivité, parfois à double sens (nœuds $\rightleftharpoons$ cellule $\rightleftharpoons$ arêtes $\rightleftharpoons$ nœuds). L'accumulation de boucles imbriquées dégradent de manière considérable la vitesse de génération de la connectivité. De plus, l'implémentation (ou le remplissage) de ces structures ne sont pas triviales et requièrent des connaissances approfondies du point de vue machine et langage de programmation pour en optimiser la performance.

Hormis la structure de données conséquente reliée à l'architecture, les maillages non-structurés sont hautement non-orthogonaux. Ce taux de non-orthogonalité peut se traduire en temps, car la correction des flux peut forcer le choix d'une résolution explicite (Jasak, 1996), car certains calculs requièrent des valeurs de primitives pour être corrigés.

Toutefois, la robustesse de ces maillages et leurs capacités à traiter une grande variété de géométries prévaut sur le temps de calcul. Mais, l'extension de ces techniques pour des applications 3D demeure coûteuse, à cause des quantités de données et la complexité de la connectivité. Également, même si, la connectivité ou la quantité des données n'est pas un facteur déterminant, le temps de simulation peut s'avérer contraignant.

2.2 L'approche des frontières immergées

La méthode des frontières immergées, ou IBM, développée par le mathématicien Peskin (1972), constitue une nouvelle méthodologie, pour le cas des frontières mobiles (ou déformables), basée sur l'utilisation d'une grille cartésienne. Récemment, des travaux en mécanique des fluides ont été développés pour adapter la méthodologie aux écoulements incompressibles (Gilmanov and Acharya, 2008) et aux écoulements compressibles (Sambasivan and UdayKumar, 2009) et pour traiter le cas des frontières mobiles (Yang and Balaras, 2006).

2.2.1 Les différentes techniques de l'IBM

Comme la frontière n'est pas explicitement représentée, contrairement aux approches de maillages conformes, on doit recourir à diverses techniques pour la prendre en compte. Le tableau 2.1 donne un aperçu de ces différentes techniques existantes dans la grande famille des méthodes IBM.

Tableau 2.1 Famille d'Immersed Boundary Method

Continuous forcing	**Discrete Forcing**
- Source term method	- Cut-cell method
	- Ghost cell method

Continuous forcing est une famille d'IBM qui modélise la frontière en ajoutant un terme source dans les équations de mouvement. On agit directement sur les équations continues. Cette approche est la plupart du temps utilisée en mécanique des solides (interaction fluide/structure) pour simuler une paroi mobile d'un corps. Cette méthode est celle utilisé par Peskin (1972) pour simuler la déformation de l'aorte.

Dans cette approche, Mittal and Iaccarino (2005) différencient les corps élastiques et les corps rigides. Les frontières sont simulées par des lois de la mécanique classique, telle que les lois de Hooke (corps élastiques) ou les lois de déformations (ex. lois de déformations des ressorts pour corps rigides) sous la forme de termes sources continus ajoutés aux équations.

Cette approche n'est pas retenue dans ce travail de recherche. Les techniques proposées sont trop restreintes à la mécanique des solides (corps déformables ou rigides). La modélisation des diverses physiques (voir fig. 1.3) n'est pas traitée par cette approche.

Discrete forcing est la famille d'IBM qui modifie les équations discrètes. C'est-à-dire que la présence d'une frontière est prise en compte au travers d'un terme corrigé dans le schéma numérique. Pour la plupart des écoulements, de nombreux schémas FVM sont connus et l'effort se porte donc principalement à modifier des termes pour modifier ces schémas existants.

Dans cette approche, Mittal and Iaccarino (2005) présente deux méthodes ; la méthode Ghost-Cell et la méthode Cut-Cell. L'approche discrète est considérée car étant basée sur une discrétisation du type FVM, on y retrouve l'ensemble des schémas numériques pour la mécanique des fluides qui sont utilisés pour le calcul des primitives au sein du disjoncteur.

2.2.2 L'approche Discrète - Comparaison des techniques

Cut-Cell

La technique des Cut-Cell consiste à découper les cellules intersectées par la géométrie pour créer localement un maillage ajusté à la géométrie. Plusieurs techniques découlent ensuite. Certaines, utilisent la cellule découpée tel quel, et calculent les flux sur chaque nouvelle face (Ingram et al., 2003). D'autres, agglomèrent les cellules découpées (merged-cells) pour former des volumes de contrôles plus grands afin d'éviter de calculer des flux sur une cellule découpée

qui pourrait tendre vers zéro (Chung, 2006). Une illustration de ces déclinaisons est montrée à la figure 2.6.

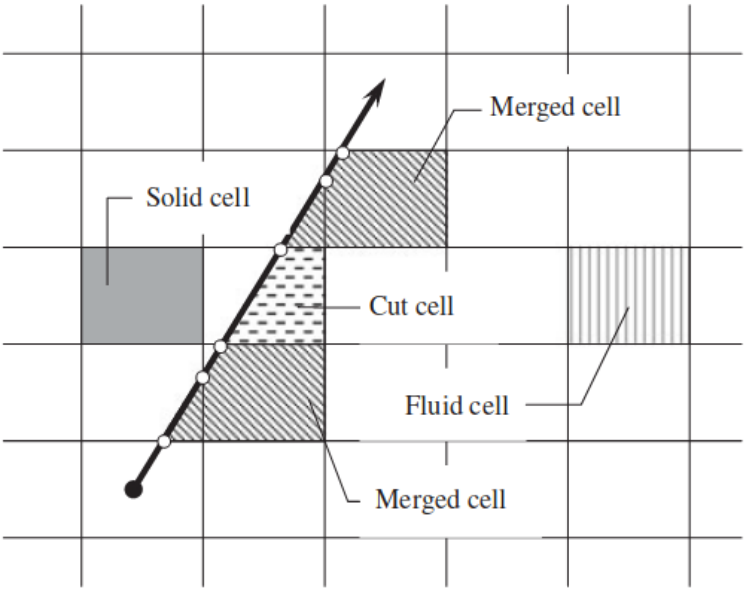


Figure 2.6 Volume de contrôle avec la déclinaison merge-cell (Bai et al., 2010)

Le principal avantage de la technique des Cut-Cell est le respect de toutes les lois de conservations. En effet, comme chaque cellule est découpée en prenant la frontière en compte, on applique de manière directe les conditions aux limites. Les différentes déclinaisons (merge-cells ou non) concernent la stabilité lors de l'intégration en temps. Joindre les cellules permet de faire disparaitre les petites cellules (Ingram et al., 2003) qui causent souvent des problèmes.

Ghost-Cell

La technique des Ghost-Cells ne modifie pas les volumes de contrôles de la grille. Les conditions limites sont imposées par la modification de la valeur contenue dans les cellules qui intersectent la frontière. L'effort se concentre essentiellement sur la modification du schéma FVM, au contraire des Cut-Cells où l'effort est porté sur la reconstruction des volumes de contrôles.

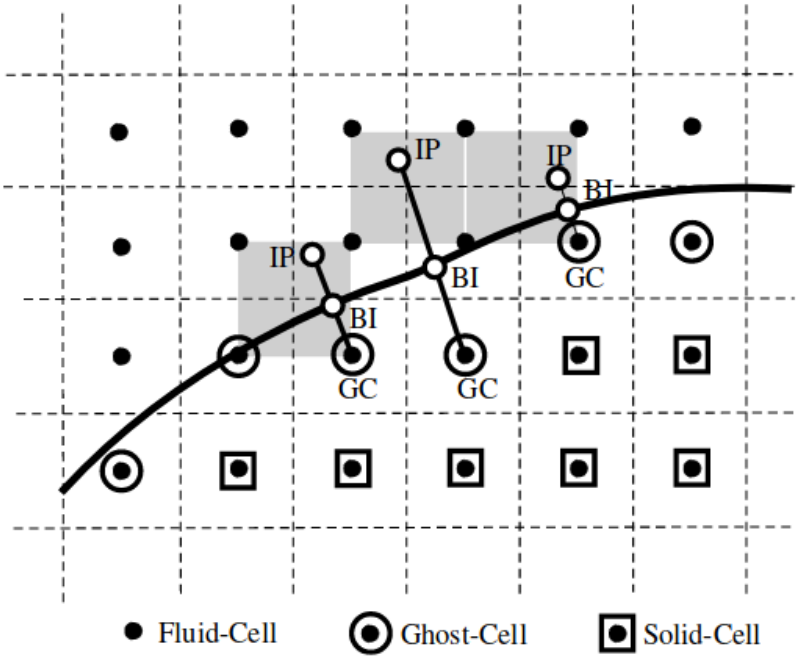


Figure 2.7 Modélisation de la frontière par la technique des Ghost-Cell (Mittal et al., 2008)

Cette technique néanmoins introduit une source d'erreur pouvant résulter d'une non conservation des propriétés proches des parois puisque l'imposition des conditions limites est approximatif.

2.2.3 Choix de la technique IBM

Une revue critique de littérature montre que la méthode des Cut-cell a une tendance à développer des instabilités (Puscas and Monasse, 2015) lorsque des petites cellules sont formées lors de la découpe des cellules. D'autres problèmes apparaissent aussi lorsqu'il s'agit de construire les volumes de contrôles pour les molécules de calculs. L'extension 3D n'est pas triviale du fait que des cellules polyédrales se forment lors du découpage (Mittal and Iaccarino, 2005). Par conséquent la technique des cellules fantômes sera retenue.

La technique des Ghost-Cells semble être la mieux adaptée au développement d'un solveur 3D, puisque la grille n'est pas modifiée. L'application des différents types de conditions limites est basée sur la création d'une cellule (ou d'un centroide) fantôme. Néanmoins, l'application des conditions limites n'est pas triviale et requiert des algorithmes lourds de Computational Geometry (CG).

2.3 Le maillage hybride

2.3.1 Maillage hybride

Le maillage hybride est un assemblage de plusieurs types de mailles. Ce maillage, par exemple, est utilisé pour des problèmes de couches limites, ou pour renforcer la conservation aux parois (Miao and Ho, 2006). Proche de la frontière, on utilise souvent un maillage curviligne issu d'une transformation spatiale, et un maillage non-structuré pour le reste du domaine.

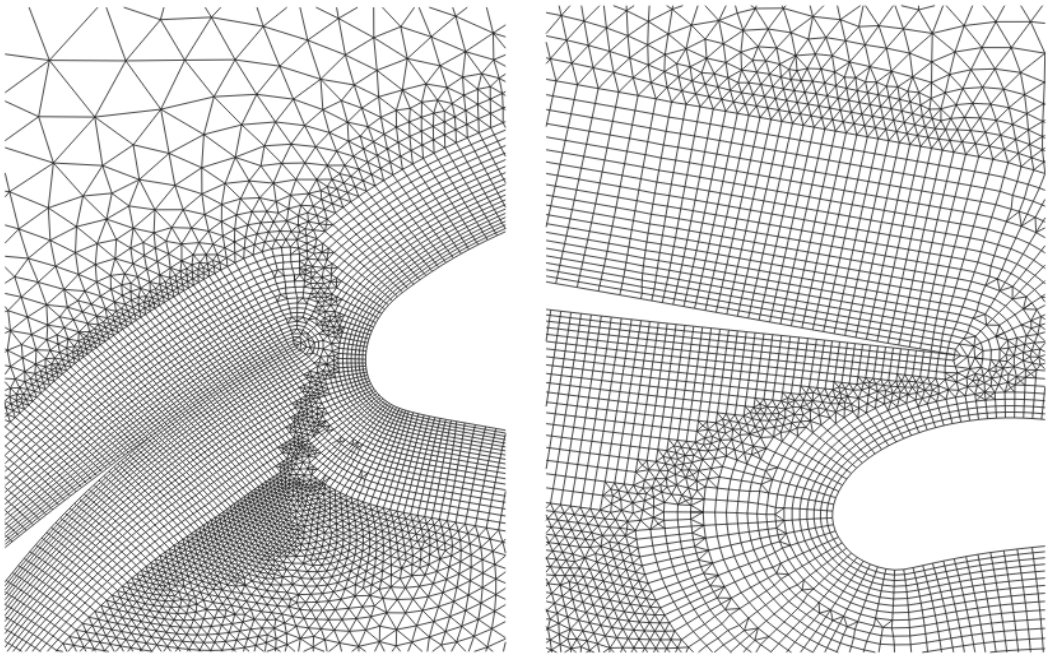


Figure 2.8 Maillage hybride composé d'une partie curviligne et une partie non-structurée autour d'un profil d'aile (Dussin et al., 2009)

La fig. 2.8 montre un maillage autour d'un profil d'aile. Un maillage curviligne structuré est construit autour du profil puis connecté avec un maillage non-structuré de triangles au reste du domaine. Le maillage curviligne autour du profil permet d'avoir une meilleure qualité de mailles pour le calcul des couches limites. L'effort ici, au contraire de l'IBM, est porté sur la génération du maillage et la connectivité.

On retrouve souvent ce type de maillage lors de l'étude des profils d'ailes. Mais le maillage curviligne ne permet pas de gérer les transitions avec autant de régularité qu'un maillage triangle. C'est pourquoi, pour avoir un meilleur aspect entre les couches cartésiennes et triangles, on inverse la génération.

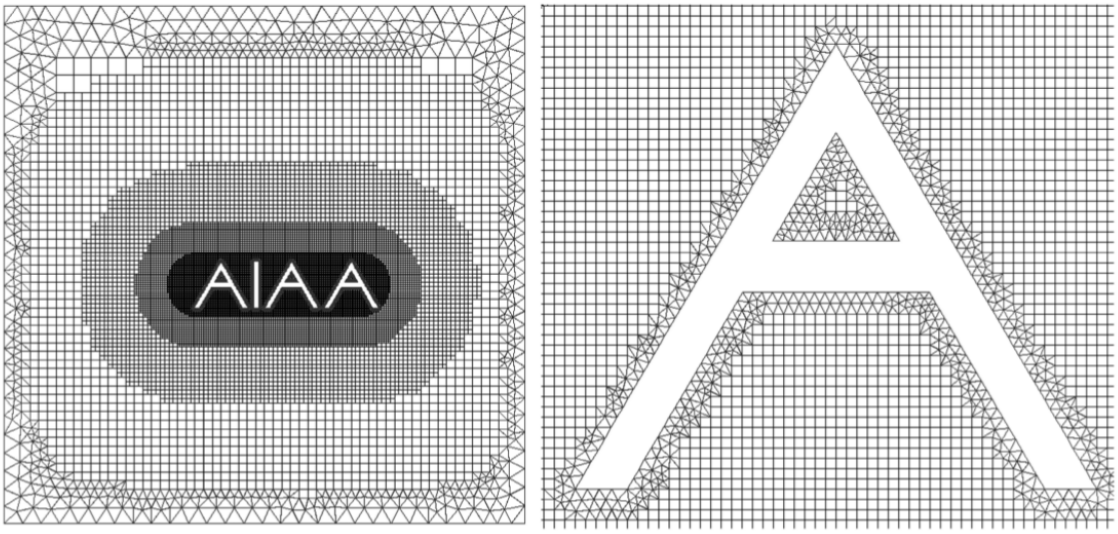


Figure 2.9 Maillage hybride cartésien et triangle autour du sigle AIAA (Luo et al., 2010)

La figure 2.9 présente un HM-CT. Comme le montre la figure, la transition entre le cartésien et la géométrie est plus lisse. Ce type de maillage est plus contrôlable par l'utilisateur, puisque les couches de triangles peuvent être raffinées plus facilement .

2.3.2 Maillage universel

Un autre type de maillage, appelé Universal-Mesh (UM) (Gawlik et al., 2015; Rangarajan et al., 2015), moins répandu, utilise une adaptation d'un maillage existant à la géométrie. L'adaptation se fait en plaçant les nœuds des cellules les plus proches sur la frontière. La figure 2.10, montre la déformation d'un maillage cartésien à une géométrie du type double cylindres.

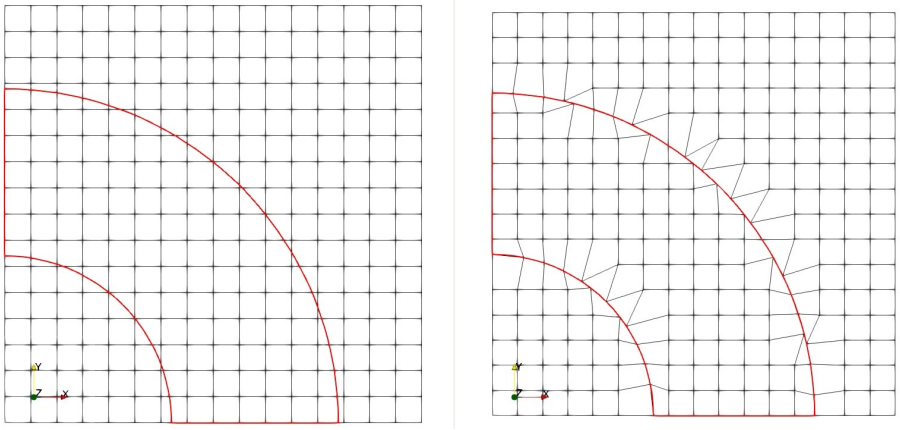
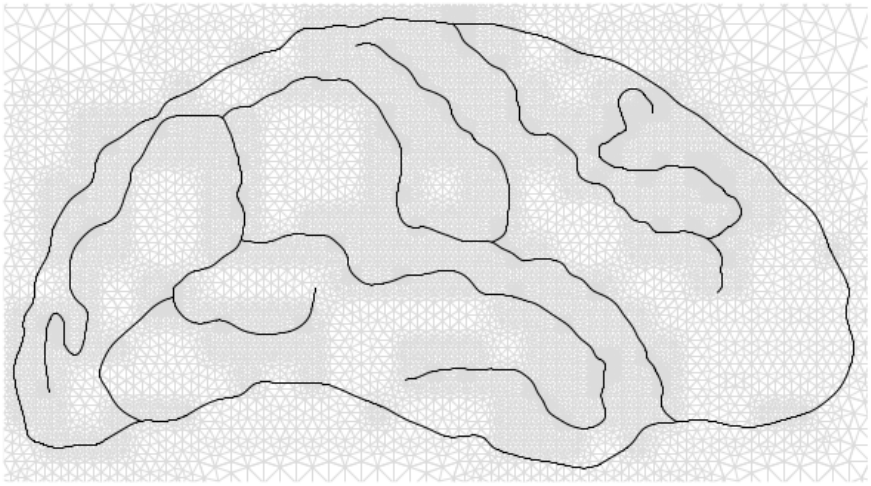
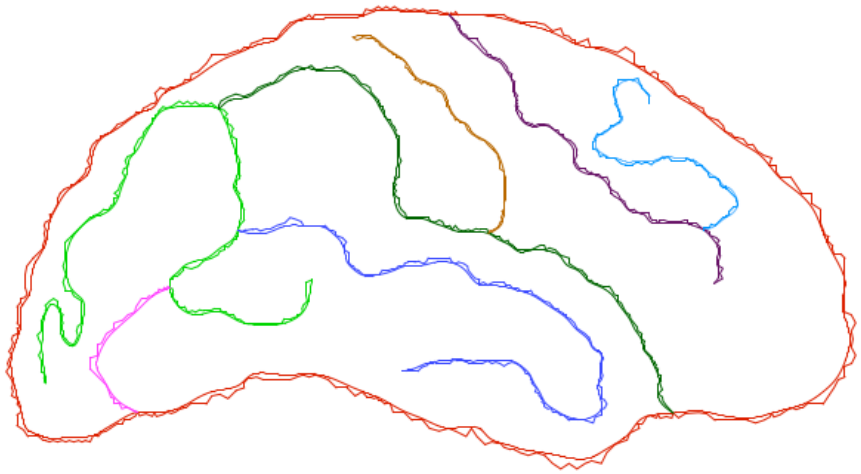


Figure 2.10 Maillage universel autour d'une géométrie double cylindre

à partir d'un maillage quelconque, on peut reconstruire la géométrie en projetant les noeuds sur la frontière. Rangarajan and Lew (2012) propose de trouver un chemin qui approxime la géométrie en suivant les arêtes existantes du maillage. Ensuite, ce chemin représentera la frontière. La figure 2.11 montre une géométrie immergée dans un maillage ainsi que sa reconstruction s'appuyant sur des arêtes du maillage.



(a) A spliced C^2-curve with 8 component curves and 14 corners (8 T-junctions and 6 end points). It is immersed in an acute-angled triangulation that has a vertex coinciding with each corner.



(b) Each component curve is shown here in a different color along with its corresponding set of positive edges. Notice that each one of these sets of positive edges always start and end at the end points of its component curve.

Figure 2.11 Paramétrisation de la géométrie sur le maillage existant (Rangarajan and Lew, 2012)

2.4 Résumé des approches choisies

Dans ce travail, on choisira de comparer la résolution de l'équation de Laplace par la méthode

— IBM qui est le centre du présent travail. Cette étude est une première approche afin d'identifier les points forts et points faibles dans l'ensemble de sa construction (structure de données, mise œuvre du solveur...).

— maillage hybride Cartésien/Triangle dans le but de préserver un maximum de parties cartésiennes. Possédant déjà une grille de l'IBM, la construction du maillage Cartésien/Triangle semble la plus logique. De plus, l'étude sur ce maillage permet une bonne comparaison des structures de données et du solveur.

— maillage hybride Cartésien Déformé est un type de maillage nouveau. Cette approche nous permet de bénéficier du meilleur des deux méthodes précédentes en utilisant la structure implicite de la connectivité et la simplicité de l'application des conditions limites.

Le détail des méthodes numériques, les structures de données relative aux maillages, ainsi que les résultats sont détaillés dans les Chapitres 3, 4, 5.

CHAPITRE 3 MÉTHODES NUMÉRIQUES

3.1 Méthodologie générale

Le disjoncteur est une géométrie trop complexe et le haut niveau de couplage des physiques ne nous permet pas de modéliser l'intégralité des physiques. Dans le cadre de ce travail exploratoire, la présente recherche se focalisera sur la modélisation et la simulation de l'équation de Laplace qui est une équation présente dans beaucoup de physiques comme les équations du champ électrique, les termes de diffusion pour les écoulements de Navier-Stokes compressibles et les transferts de chaleur par conduction dans les matériaux qui constituent le disjoncteur.

L'implémentation de la structure de données de la géométrie, du maillage, du solveur et de l'exportation des résultats a été codée entièrement en C++. Toutes ces parties ont été entièrement implémentées depuis zéro. Ce processus s'inscrit dans un désir de contrôler et d'identifier chaque étape de mise en place des algorithmes qui poseraient un soucis lors de l'implémentation de géométries du type disjoncteur. Ceci fait aussi partie d'un processus de développement personnel par l'apprentissage du C++.

3.2 Vue d'ensemble du développement des schémas numériques

Dans ce chapitre, on distingue, la formulation générale du schéma volume finis sur des maillages cartésiens structurés et non-structurés. A partir de la formulation générale, on explicitera le développement complet pour intégrer l'IBM et le développement complet pour le maillage BF. Le tableau 3.1 donne les axes du présent chapitre. Pour chaque méthode, le choix de la formulation FVM générale et le développement détaillé sont donnés avec les références des sections.

Tableau 3.1 Vue d'ensemble de la formulation du schéma volume finis

Méthode	**Formul. FVM**	**Conditions limites (CL)**	**Reconst. des flux**
IBM	Cartésienne (3.3.1)	Modif. schéma FVM (3.4.3) CL de grille (3.4.3) Interpolations (3.6.1, 3.6.2, 3.6.3)	Flux aux parois (3.7)
HM-Cartésien/Triangle	Non-Structuré (3.3.2)	CL de géométrie (3.5.3) CL de grille (3.4.3) Interpolations (3.6.3)	Flux aux parois (3.7)
HM-Cartésien Déformé	Non-Structuré (3.3.2)	CL de géométrie (3.5.3) CL de grille (3.4.3) Interpolations (3.6.2)	Flux aux parois (3.7)

D'abord on présentera la formulation volumes finis générale pour les maillages structurés et non-structurés. Ensuite, la méthode des frontières immergées sera présentée en détail. Enfin, l'intégration dans le schéma numérique pour les méthodes IBM et HM sera explicitée. Les techniques d'interpolation sont décrites dans une section dédiée parce qu'elles sont partagées par l'ensemble des méthodologie IBM et HM. Finalement, on présente la méthode pour reconstruire les flux aux parois qui sera la même pour toutes les méthodes. La reconstruction sera prise pour chaque points de projections sur la frontière pour l'IBM et aux centres des arêtes pour les maillages HM.

3.3 Volume finis - Application aux termes diffusifs bidimensionnels

Dans cette section, on introduit le schéma volume finis sur grille cartésienne et sur maillage non structuré. On détaillera précisément la discrétisation des termes diffusifs. La discrétisation des termes convectifs n'est pas abordée. On utilise un schéma du type centré aux cellules, où la solution est calculée et stockée au centre des cellules.

L'équation modèle est

$$\Delta\phi = S_{term} \tag{3.1}$$

où Δ est l'opérateur Laplacien qui s'exprime en coordonnée cartésienne. S_{term} est un terme source constant ou une fonction. Il peut aussi s'écrire

$$\Delta\phi = div(\overrightarrow{grad}(\phi)) = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{\nabla}\phi \tag{3.2}$$

qui fait apparaître l'opérateur de divergence qui sera utilisé dans la formulation intégrale de l'éq. 3.1 . Ici la formulation est faite sans terme source ($S_{term} = 0$).

Soit un domaine Ω quelconque, le terme de diffusion s'exprime dans le milieu continu comme

$$\int_{\Omega} \Delta\phi \; dV = 0 \tag{3.3}$$

En utilisant l'équation 3.2, on peut écrire l'équation 3.3 comme

$$\int_{\Omega} \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{\nabla}\phi \; dV = 0 \tag{3.4}$$

Par l'utilisation du théorème de la divergence, il vient

$$\int_{\partial\Omega} \overrightarrow{n}.\overrightarrow{\nabla}\phi \; dA = 0 \tag{3.5}$$

où dA est la surface et $\overrightarrow{n}$ est le vecteur normal sortant unitaire.

L'équation 3.5 se discrétise sur un élément volumique dV quelconque (fig. 3.1) de la manière suivante

$$\int_{\partial\Omega} \overrightarrow{n}.\overrightarrow{\nabla}\phi \; dA \simeq \sum^{i} \overrightarrow{n_i}.\overrightarrow{\nabla}\phi\Delta A_i \tag{3.6}$$

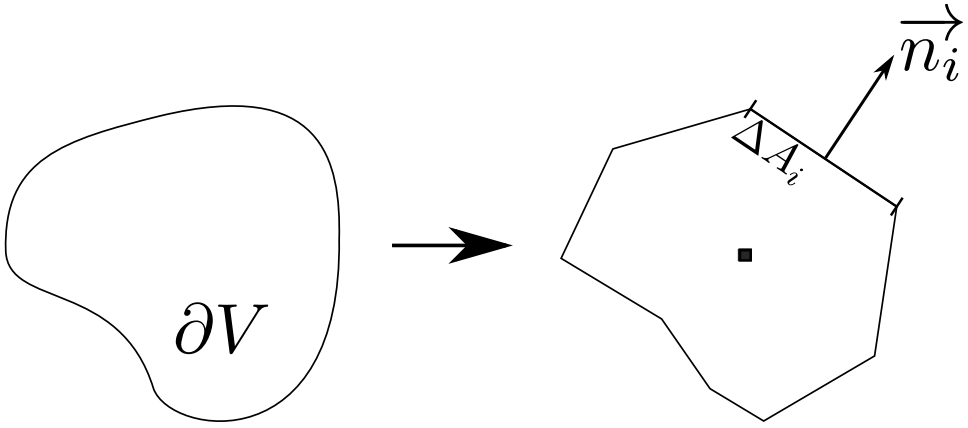


Figure 3.1 Discrétisation d'un volume ∂V en une surface discrète

Il reste donc à exprimer le terme $\overrightarrow{n_i}.\overrightarrow{\nabla}\phi\Delta A_i$ qui dépend du type de mailles utilisées.

3.3.1 Maillage tructuré cartésien

La figure 3.2 illustre la molécule de calcul pour un maillage cartésien qui se compose de la cellule courante P et de ses quatre voisins noté N, S, E, W en référence aux points cardinaux. De même, on note les faces d'échanges n, s, e, w.

De manière générale, le terme $\overrightarrow{\nabla}\phi$ peut s'approximer par une différence finie centrée garantissant au minimum l'ordre 2 du schéma volume finis. Ainsi, le transfert entre une cellule P et sa cellule voisine j au travers de la surface A_i s'écrit

$$\overrightarrow{n_i}.\overrightarrow{\nabla}\phi\Delta A_i = \overrightarrow{n} \; \frac{\phi_j - \phi_P}{\Delta\xi}\Delta A_i \tag{3.7}$$

où ϕ est la propriété physique stockée au centre des cellules P et j, où $j = N, S, E, W$. $\Delta\xi$ est la distance séparant les deux centroides et ΔA_i les faces d'échanges, où $i = n, s, e, w$.

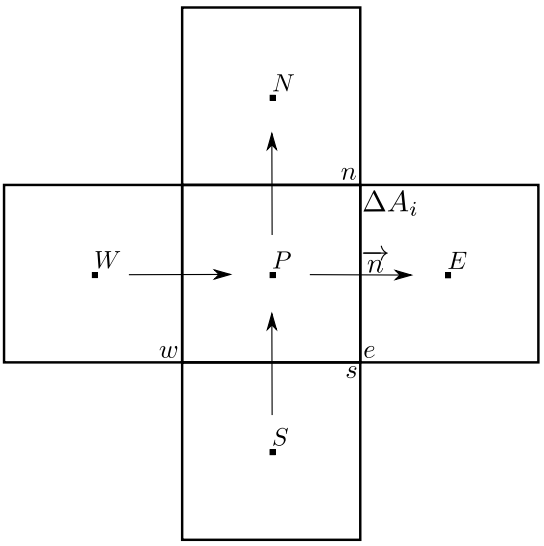


Figure 3.2 Molécule de calcul pour un maillage cartésien

3.3.2 Maillage non-structuré

La discrétisation sur un maillage non-structuré est plus complexe qu'en structuré. Le transfert se fait au travers d'une surface ΔA_i entre la cellule courante P et son voisin j (pour un maillage triangle $j = 1..3$). La figure 3.3 donne la molécule de calcul pour un maillage de triangle.

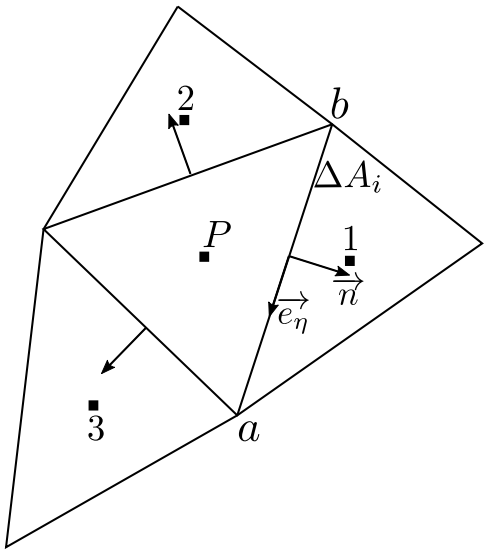


Figure 3.3 Molécule de calcul pour un maillage non-structuré

Cependant, il arrive souvent que le segment Pj ne soit pas normal à la surface ab. Ceci est

induit par la non-orthogonalité du maillage (voir fig. 3.4). Il faut donc ajouter un terme de correction le long de la face pour en tenir compte. Ce terme de correction est appelé *cross-diffusion* par Versteeg and Malalasekera (2007) ou *non-orthogonal correction* selon Jasak (1996). En se référant à la figure 3.4, le terme $\overrightarrow{n_i}.\overrightarrow{\nabla}\phi\Delta A_i$ s'exprime donc

$$\overrightarrow{n_i}.\overrightarrow{\nabla}\phi\Delta A_i = D\frac{\phi_j - \phi_P}{\Delta\xi}\Delta A_i - S\frac{\phi_b - \phi_a}{\Delta\eta}\Delta A_i \tag{3.8}$$

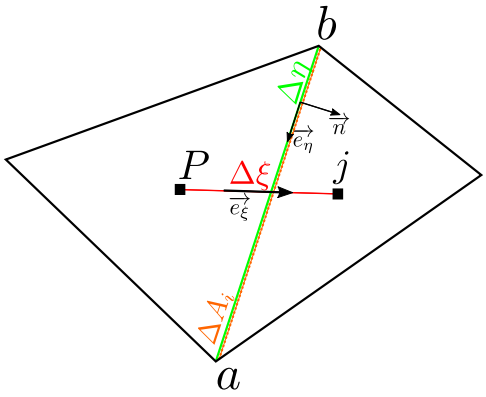


Figure 3.4 Correction de la non-orthogonalité

où le coefficient D est le coefficient pour le flux de la partie normale et S est le coefficient pour le flux de la partie non-orthogonale. ϕ_b et ϕ_a sont les valeurs aux nœuds de l'arête. $\Delta\xi$ est la distance entre les deux centroides. $\Delta\eta$ est la longueur de l'arête ab. Les coefficients sont donnés par

$$\begin{cases} D = \dfrac{\overrightarrow{n_i}.\overrightarrow{n_i}}{\overrightarrow{n_i}.\overrightarrow{e_{\xi i}}} \\ \\ S = \dfrac{\overrightarrow{e_{\xi i}}.\overrightarrow{e_{\eta i}}}{\overrightarrow{n_i}.\overrightarrow{e_{\xi i}}} \end{cases} \tag{3.9}$$

De manière générale, tous les coefficients, les vecteurs et les surfaces d'échanges sont calculés géométriquement à partir du maillage. Ainsi, on a

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_i} = \{\dfrac{y_b - y_a}{\Delta A_i}; -\dfrac{x_b - x_a}{\Delta A_i}\} \\ \overrightarrow{e_{\xi i}} = \{\dfrac{x_j - x_P}{\Delta\xi}; -\dfrac{y_j - y_P}{\Delta\xi}\} \\ \overrightarrow{e_{\eta i}} = \{\dfrac{x_b - x_a}{\Delta A_i}; -\dfrac{y_b - y_a}{\Delta A_i}\} \end{cases} \tag{3.10}$$

À ce stade, tout est connu hormis les valeurs ϕ_b et ϕ_a. Ces dernières doivent être interpolées par l'intermédiaire des centroides environnants. On utilisera la technique Inverse Distance Weighting (IDW) (voir sous-section 3.6.3) pour interpoler la valeur ϕ aux points a et b.

3.4 Frontières immergées - Cellules fantômes

On présente ici, la méthode IBM - cellules fantômes. Cette technique des frontières immergées est basée sur la méthode des volumes finis appliquée sur un maillage cartésien.

3.4.1 Relation entre la frontière et la grille

Soit un domaine rectangulaire Ω maillé par une grille cartésienne régulière (c'est-à-dire $dx = dy$) et soit la face Γ définie par son contour $\partial\Gamma$ (voir fig. 3.5). On appellera le contour $\partial\Gamma$ une frontière, définie par l'ensemble des points qui la compose.

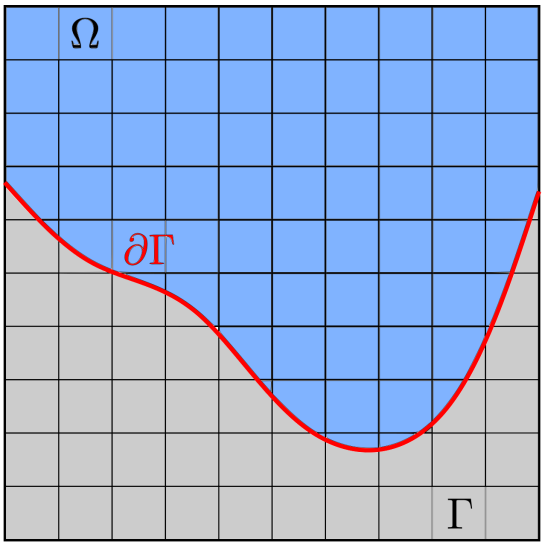


Figure 3.5 Frontière immergée dans une grille cartésienne

Il en résulte l'union d'une grille et d'une frontière sans lien explicite, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune relation directe entre la grille et la frontière. Le lien entre les deux est fait par la définition de zones (voir fig. 3.6). Une zone dite *zone par défaut*, ou zone de fond, est l'ensemble des centres des cellules de la grille. En comparaison avec le maillage conforme à la frontière, ou BF, la notion d'intérieur et d'extérieur n'est pas présente. Dépendamment de l'étude, la zone de fond peut représenter un fluide, un solide ou simplement être exclue de l'étude. Ensuite, lorsqu'on immerge la frontière, l'ensemble des centroides de la grille qui

se trouve à l'intérieur de la face Γ seront notés *zone* F_i, où i représente l'indice de la face immergée.

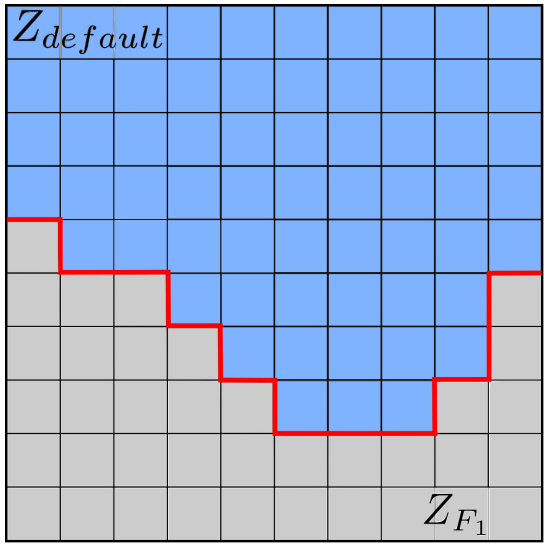


Figure 3.6 Pixélisation de la face immergée

Cette étape est la pixélisation (ou voxelization en 3D) de la face. La face n'est plus représentée par des sommes de boucles externes et internes mais par un ensemble de cellules cartésiennes. Le lien entre la frontière et la grille est maintenant explicite et, défini par des zones. Ces zones sont l'équivalent dans le réel à des milieux fluides/solides.

3.4.2 Construction des cellules fantômes

Lorsqu'on parcourt l'ensemble des cellules de la grille, et en utilisant la molécule de calcul précédente (voir fig. 3.2), si une cellule voisine, appartenant à la molécule de la cellule courante P, n'appartient pas à la même zone, on dit que la cellule est une cellule fantôme notée GC (voir fig. 3.7). Une fois la cellule fantôme identifiée, pour compléter la molécule de calcul, la cellule GC, devra alors contenir une valeur ϕ_{GC} qui dépend de la forme de la frontière.

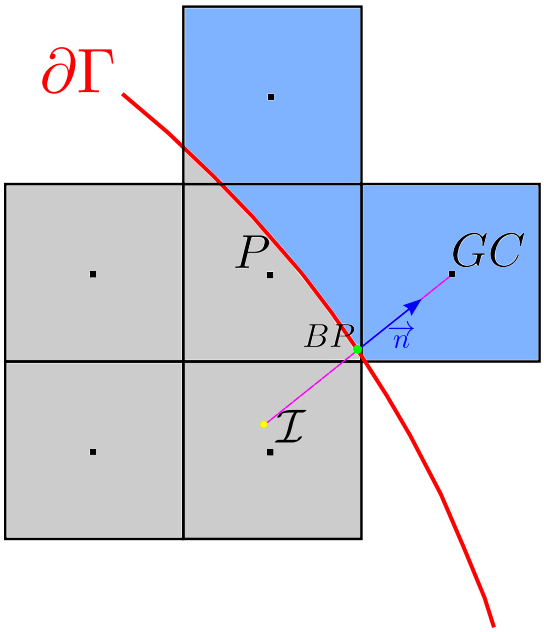


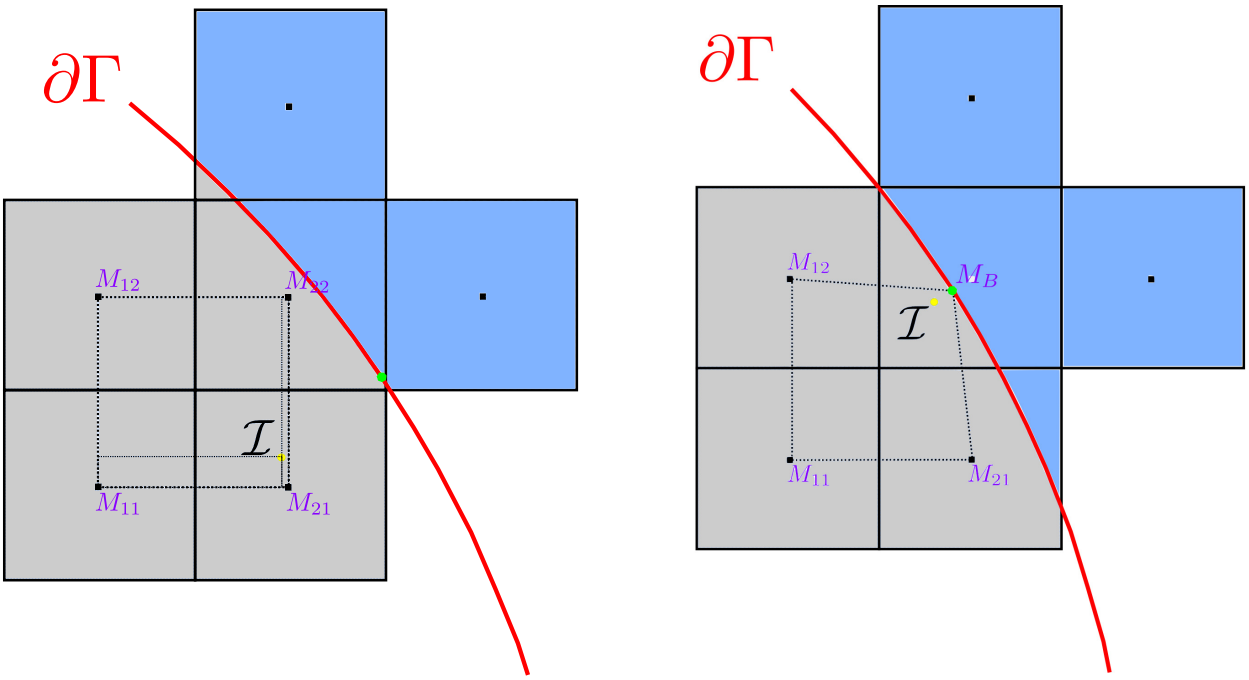
Figure 3.7 Construction du point image

Pour déterminer la valeur ϕ_{GC} de la cellule GC, le centre de la cellule GC est projeté orthogonalement sur la frontière $\partial\Gamma$ au point BP. Puis un point image I est créé par symétrie centrale du point GC. Enfin, la valeur ϕ_I au point image I est interpolée à partir des valeurs ϕ des centres des quatre cellules qui l'entourent, tel que détaillé à la figure 3.8. Finalement, on pose la valeur de la cellule fantôme par les relations suivantes, selon le type de condition limite.

$$\text{Dirichlet} \qquad \phi_{GC} = 2\phi_{BP} - \phi_I \tag{3.11}$$

$$\text{Neumann} \qquad \phi_{GC} = \phi_I - \Delta(X_I - X_{GC})\frac{\partial\phi}{\partial n}|_{BP} \tag{3.12}$$

La figure 3.8 illustre les deux patrons d'interpolation que l'on trouve lors de l'interpolation de la valeur de l'image ϕ_I. Les détails mathématiques pour les différentes méthodes d'interpolation seront présentées à la section 3.6.



(a) Interpolation bilinéaire

(b) Interpolation bilinéaire dans un quadrilatère

Figure 3.8 Patrons d'interpolations du point image

Lorsque les quatre cellules environnantes sont dans la zone correspondante à l'image, on peut calculer une interpolation bilinéaire directement. C'est-à-dire que les coefficient d'interpolation sont déterminés géométriquement à partir des quatre cellules M_{ij} (voir fig.3.8.(a)).

Si le point image I n'est pas entouré de quatre cellules appartenant à la même zone alors le quadrangle non-régulier est mappé dans l'espace de référence $[0; 1]$. Ainsi, les coefficient d'interpolation feront intervenir les fonctions de transfert entre l'espace global et l'espace de référence et, on utilise une interpolation bilinéaire directe dans l'espace de référence (voir fig.3.8.(b)).

Il arrive dans des cas particuliers que le nombre de cellules environnantes ne soient pas égal à quatre. Par exemple, le long des frontières de la grille cartésienne lorsqu'une condition de Neumann est appliquée (voir fig. 3.9).

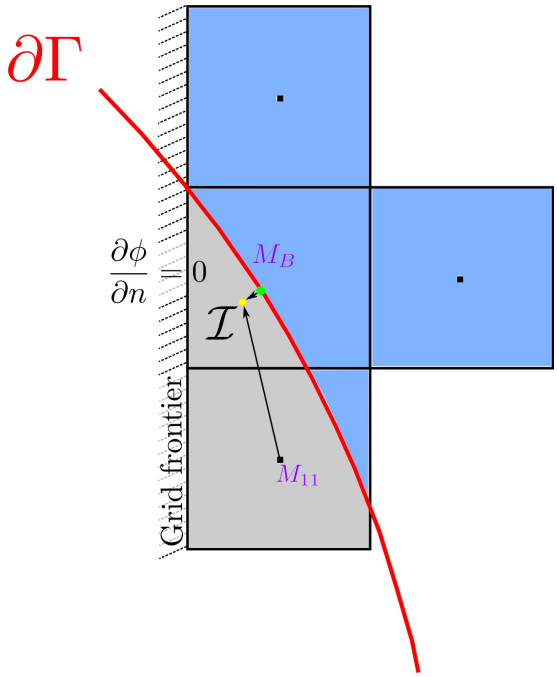


Figure 3.9 Construction du point image

Il est possible dans ce cas d'appliquer une méthode IDW pour déterminer la valeur de l'image I, ou créer des coordonnées fantômes par symétrie des points M_{ij} pour former un quadrangle complet. Dans le cas d'une condition de Dirichlet, il est possible de compléter un quadrangle à partir des cellules, et des milieux des arêtes de bord de la grille.

3.4.3 Développement Immersed Boundary Method

En développant l'éq. 3.5 pour un maillage cartésien, on a

$$\int_{\partial\Omega} \overrightarrow{n}.\overrightarrow{\nabla}\phi \; dA = \frac{\phi_E - \phi_P}{d_{EP}} A_e + \frac{\phi_W - \phi_P}{d_{WP}} A_w + \frac{\phi_N - \phi_P}{d_{NP}} A_n + \frac{\phi_S - \phi_P}{d_{SP}} A_s \tag{3.13}$$

L'éq. 3.13 s'écrit sous la forme

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S \tag{3.14}$$

où $a_P = \sum a_i$ et $a_i = A_i/d_{iP}$ et $i = E, W, N, S$

L'éq. 3.14 est un schéma numérique FVM associé à l'éq. elliptique 3.1.

Prise en compte de la géométrie

Pour une **cellule fantôme** identifiée, par exemple à $j = S$ (voir molécule cartésienne 3.2), le schéma 3.14 s'écrit comme

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_{GC}\phi_{GC} \tag{3.15}$$

En substituant dans l'éq. 3.15 la valeur de la cellule fantôme ϕ_{GC} par son expression, on obtient pour une condition limite de Dirichlet (eq. 3.11)

$$a_P\phi_P = \underbrace{a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N}_{\text{partie du schéma FVM}} + \underbrace{a_{GC}(\underbrace{2\phi_{BP}}_{\text{valeur Dirichlet sur } \partial\Gamma} - \underbrace{\phi_I}_{\text{valeur du point image}})}_{\text{valeur de la cellule fantôme } \phi_{GC}} \tag{3.16}$$

et pour une condition limite de Neumann (éq. 3.12)

$$a_P\phi_P = \underbrace{a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N}_{\text{partie du schéma FVM}} + \underbrace{a_{GC}(\underbrace{\phi_I}_{\text{valeur du point image}} - \underbrace{d_{IGC}\frac{\partial\phi}{\partial n}|_{BP}}_{\text{valeur Neumann sur } \partial\Gamma})}_{\text{valeur de la cellule fantôme } \phi_{GC}} \tag{3.17}$$

En substituant dans l'éq. 3.16 ou l'eq. 3.17 la valeur du point image ϕ_I par son expression interpolée, on obtient pour une condition limite de Dirichlet (eq. 3.11)

$$a_P\phi_P = \underbrace{a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N}_{\text{partie du schéma FVM}} + \underbrace{a_{GC}(\underbrace{2\phi_{BP}}_{\text{valeur Dirichlet sur } \partial\Gamma} - \underbrace{b_0\phi_0 + b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3}_{\text{valeur du point image}})}_{\text{valeur de la cellule fantôme}} \tag{3.18}$$

et pour une condition de limite de Neumann (eq. 3.12)

$$a_P\phi_P = \underbrace{a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N}_{\text{partie du schéma FVM}} + \underbrace{a_{GC}(\underbrace{b_0\phi_0 + b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3}_{\text{valeur du point image}} - \underbrace{d_{IGC}\frac{\partial\phi}{\partial n}|_{BP}}_{\text{valeur Neumann sur } \partial\Gamma})}_{\text{valeur de la cellule fantôme}} \tag{3.19}$$

Les techniques d'interpolations pour déterminer les coefficients pour le calcul de la valeur de l'image ϕ_I sont décrites à la section 3.6.

Application des conditions limites sur la grille

Pour toutes les cellules en frontière du maillage cartésien, on trouve des **cellules sans voisins**. Par exemple, pour une cellule identifiée à $j = S$ (voir molécule de calcul 3.2), qui n'existe pas physiquement, on ne peut pas exprimer directement le schéma FVM (éq. 3.14). Ainsi pour une condition limite de Dirichlet, il faut reprendre le développement depuis l'eq. 3.13 tel que

$$\int_V \Delta\phi dV = \frac{\phi_E - \phi_P}{d_{EP}} A_e + \frac{\phi_W - \phi_P}{d_{WP}} A_w + \frac{\phi_N - \phi_P}{d_{NP}} A_n + \frac{\phi_V - \phi_P}{d_{VP}} A_s \tag{3.20}$$

où ϕ_V est la condition de Dirichlet sur le bord de la grille, et $d_{VP} = d_{SP}/2$

$$a_P\phi_P = \underbrace{a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N}_{\text{partie du schéma FVM}} + \underbrace{2a_V\phi_V}_{\text{valeur Dirichlet au bord de la grille}} \tag{3.21}$$

Pour une condition de Neumann, on retire la discrétisation du gradient de l'éq 3.13, on a donc

$$\int_V \Delta\phi dV = \frac{\phi_E - \phi_P}{d_{EP}} A_e + \frac{\phi_W - \phi_P}{d_{WP}} A_w + \frac{\phi_N - \phi_P}{d_{NP}} A_n + \overrightarrow{n_v}.\overrightarrow{\Delta}\phi_V A_v \tag{3.22}$$

Finalement on obtient

$$a_P\phi_P = \underbrace{a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N}_{\text{partie du schéma FVM}} + \underbrace{\overrightarrow{n_v}.\overrightarrow{\Delta}\phi_V A_v}_{\text{valeur Neumann au bord de la grille}} \tag{3.23}$$

A ce stade, nous avons N inconnues pour N équations. On peut assembler le système linéaire et le résoudre avec un solveur approprié.

3.5 Maillages ajustés

3.5.1 Relation entre la frontière et le maillage

Techniquement, il n'y a pas de relation entre la frontière et le maillage dans le cas des applications avec un maillage BF puisque le maillage représente la géométrie. Dans le cadre de ce projet, la manière de créer le maillage ajusté diffère. En effet, le maillage ajusté est construit à partir d'une géométrie immergée dans une grille à l'instar des méthodes conventionnelles qui à partir d'un ensemble d'arêtes contraintes, génère une triangulation sur l'ensemble du domaine qui est compris entre les arêtes contraintes. Une fois la géométrie détectée, on

construit deux maillages hybrides. L'un produit par une méthode conventionnelle en isolant des contours contraints et en insérant une couche de triangles (HM-CT), et un autre par déformation de la grille (HM-CD).

3.5.2 Identification des arêtes de frontières

L'identification des arêtes frontières est faite de la même manière que pour l'IBM. Une arête frontière est identifiée lorsque la cellule de l'autre bord d'une arête n'appartient pas à la même zone que la cellule courante. On récupère au centre de l'arête qui sépare les cellules, la valeur de la condition limite imposée.

3.5.3 Développement Non-Structuré

Le développement du schéma FVM pour un maillage non-structuré diffère par le nombre de voisins qui ici peut varier, ainsi $j = 0..Nv - 1$. On prendra le cas pour un maillage de triangles $Nv = 3$. l'expression du schéma FVM est

$$a_P\phi_P = a_0\phi_0 + a_1\phi_1 + a_2\phi_2 \tag{3.24}$$

Application des conditions limites

Au contraire de la méthode IBM, l'application des conditions limites se fait de manière directe en prenant la valeur sur la frontière étant donné que le maillage représente la frontière. Ainsi pour une cellule dont le voisin est identifié comme n'appartenant pas à la même zone, ou si le voisin n'existe pas, on peut écrire pour une condition de Dirichlet

$$\int_V \Delta\phi dV = \frac{\phi_0 - \phi_P}{d_{0P}}A_0 + \frac{\phi_1 - \phi_P}{d_{1P}}A_1 + \frac{\phi_V - \phi_P}{d_{VP}}A_3 \tag{3.25}$$

$$a_P\phi_P = \underbrace{a_0\phi_0 + a_1\phi_1}_{\text{partie du schéma FVM}} + \underbrace{2a_V\phi_V}_{\text{valeur Dirichlet au bord de la grille}} \tag{3.26}$$

De même, pour une condition de Neumann

$$a_P\phi_P = \underbrace{a_0\phi_0 + a_1\phi_1}_{\text{partie du schéma FVM}} + \underbrace{\overrightarrow{n_v}.\overrightarrow{\Delta}\phi_V A_v}_{\text{valeur Neumann au bord de la grille}} \tag{3.27}$$

Correction des flux non-orthogonaux

Le schéma 3.24 n'est valide que lorsque le flux au travers de la surface A_i est orthogonal. Dans le cas contraire, il faut corriger le flux. En reprenant le développement depuis l'éq. 3.8,

$$a_P\phi_P = \underbrace{a_0\phi_0 + a_1\phi_1 + a_2\phi_2}_{\text{partie du schéma FVM}} - \underbrace{S(\phi_b - \phi_a)}_{\text{correction du gradient}} \tag{3.28}$$

En substituant les valeurs au nœuds a et b par leurs valeurs interpolées, on obtient

$$a_P\phi_P = \underbrace{a_0\phi_0 + a_1\phi_1 + a_2\phi_2}_{\text{partie du schéma FVM}} - S(\underbrace{\sum b_i\phi_i - \sum c_i\phi_i}_{\text{correction du gradient}}) \tag{3.29}$$

La valeur des nœuds est interpolée depuis le centre des cellules qui entourent a et b. Pour le cas de l'HM-CT, on utilisera la technique d'interpolation IDW (sous-section 3.6.3). Pour l'autre maillage HM-CD, le nombre de voisins est $N_v = 4$. La théorie est la même que pour un maillage de triangles. Pour interpoler les nœuds aux arêtes, on utilisera la technique de l'interpolation bilinéaire dans un espace de référence (sous-section 3.6.2).

3.6 Techniques d'interpolations

3.6.1 Interpolation bilinéaire

La fonction d'interpolation bilinéaire au point image $\phi_I(x, y)$ s'exprime de manière générale comme

$$\phi_I(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \tag{3.30}$$

De même, aux points du quadrilatère régulier, on a $\phi_{M_{ij}} = a_0 + a_1x_{M_{ij}} + a_2y_{M_{ij}} + a_3x_{M_{ij}}y_{M_{ij}}$, où les M_{ij} sont les points du quadrangle (voir fig. 3.8). On obtient un système de quatre équations à quatre inconnues tel que

$$\begin{bmatrix} \phi_{M_{11}} \\ \phi_{M_{21}} \\ \phi_{M_{12}} \\ \phi_{M_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{M_{11}} & y_{M_{11}} & x_{M_{11}}y_{M_{11}} \\ 1 & x_{M_{21}} & y_{M_{21}} & x_{M_{21}}y_{M_{21}} \\ 1 & x_{M_{12}} & y_{M_{12}} & x_{M_{12}}y_{M_{12}} \\ 1 & x_{M_{22}} & y_{M_{22}} & x_{M_{22}}y_{M_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

où les a_i sont les inconnues. Les coefficients a_i sont calculés par inversion du système 3.31.

Seulement, dans notre cas, les $\phi_{M_{ij}}$ sont aussi des inconnues. En combinant, les éq. 3.30, 3.31 on peut exprimer les coefficients d'interpolation en fonction des coordonnées de ϕ_I et des $\phi_{M_{ij}}$ comme

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_{M_{11}} & y_{M_{11}} & x_{M_{11}}y_{M_{11}} \\ 1 & x_{M_{21}} & y_{M_{21}} & x_{M_{21}}y_{M_{21}} \\ 1 & x_{M_{12}} & y_{M_{12}} & x_{M_{12}}y_{M_{12}} \\ 1 & x_{M_{22}} & y_{M_{22}} & x_{M_{22}}y_{M_{22}} \end{bmatrix}^{-1}}_{A^{-1}} \begin{bmatrix} \phi_{M_{11}} \\ \phi_{M_{21}} \\ \phi_{M_{12}} \\ \phi_{M_{22}} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ xy \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

Ainsi l'éq. 3.30 devient

$$\phi_I(x, y) = b_0\phi_0 + b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3 \tag{3.33}$$

où les $b_i = A_{ij}[0\ x\ y\ xy]^T$.

3.6.2 Interpolation bilinéaire dans l'espace de référence

En revanche, l'interpolation bilinéaire précédente n'est valide que si les quatre points entourant le point image forment un quadrangle régulier (ou rectangulaire). Sinon, on ajoute une étape supplémentaire, où l'on transforme le quadrangle dans un espace de référence où il sera possible d'appliquer l'interpolation bilinéaire précédente.

L'expression des fonctions de transformation est généralement donnée par

$$\begin{cases} x = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\xi\eta \\ y = \beta_0 + \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\xi\eta \end{cases} \tag{3.34}$$

De la même manière que pour l'interpolation bilinéaire, on cherche les coefficients α et β. On a donc pour x et y deux systèmes à résoudre tel que

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

Maintenant, les fonctions de transformations sont connues. On doit donc chercher, pour x et y donnés, les valeurs ξ et η dans l'espace de référence. Cette étape est la *transformation*

inverse. On isole ξ dans l'équation pour x, puis on le substitue dans l'équation pour y. Il vient

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{x - \alpha_0 - \alpha_2\eta}{\alpha_1 + \alpha_3\eta} \\ (\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3)\eta^2 + (\alpha_3\beta_0 - \alpha_0\beta_3 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + x\beta_3 - y\alpha_3)\eta + (\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 + x\beta_1 - y\alpha_1) = 0 \end{cases} \tag{3.36}$$

On résoud l'équation du second degré en η tel que $\eta = -b + \sqrt{b^2 - 4ac}/2a$. Finalement, on trouve la valeur de ξ. Il ne reste plus qu'à interpoler bilinéairement dans l'espace $(\xi; \eta)$. On reprend l'éq. 3.33, où maintenant

$$\begin{bmatrix} x_0; y_0 \\ x_1; y_1 \\ x_2; y_2 \\ x_3; y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0; 0 \\ 0; 1 \\ 1; 0 \\ 1; 1 \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

3.6.3 Interpolation Inverse Distance Weighting

Dans le cas de l'interpolation IDW (Gilmanov and Sotiropoulos, 2005; Chaudhuri et al., 2011), on cherche à exprimer la valeur ϕ_I en fonction des valeurs environnantes tel que

$$\begin{cases} \phi_I(x, y) = b_0\phi_0 + b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3 \\ b_i = \dfrac{\dfrac{1}{d_{iI}}}{\sum \dfrac{1}{d_{iI}}} \end{cases} \tag{3.38}$$

où d_{iI} est la distance séparant le centroide i du point interpolé I.

3.7 Reconstruction des flux aux parois

La reconstruction des flux aux parois est opérée par la méthode Least Square Reconstruction Gradient (LSRG). Soit un point P où l'on souhaite déterminer le flux, on exprime par un développement de Taylor, la fonction ϕ au voisinage de P au premier ordre tel que

$$\phi_i = \phi_P + \Delta x \frac{\partial \phi}{\partial x}|_P + \Delta y \frac{\partial \phi}{\partial y}|_P + \circ(\Delta x^2, \Delta y^2) \tag{3.39}$$

Considérant n voisins pour le point P, on peut écrire l'éq. 3.39 sous une forme matricielle comme

$$\begin{bmatrix} \Delta x_0 & \Delta y_0 \\ \Delta x_1 & \Delta y_1 \\ \vdots & \vdots \\ \Delta x_{n-1} & \Delta y_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x}|_P \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}|_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_0 - \phi_P \\ \phi_1 - \phi_P \\ \vdots \\ \phi_{n-1} - \phi_P \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

Ceci mène à un système sur-dimensionné de la forme $MX = p$. Pour résoudre les gradients au point P, on doit redimensionner le système 3.40 sous la forme $AX = b$. Pour ce faire, on multiplie les deux bords par la matrice transposée des coefficients géométriques M^T. Ainsi, on obtient un système $(2 \times n)$, où

$$X = A^{-1}b \tag{3.41}$$

et $A = (M^T M)$ et $b = M^T p$.

Dans le cas de l'IBM, le point P sera le point de projection BP sur la frontière. La distance sera prise entre les centroides au voisinage de BP et le point de projection sur BP. Les valeurs de ϕ_i sont la valeur des centroides au voisinage de BP et ϕ_P sera la valeur de la condition limite au point considéré BP.

Dans le cas des HM, le procédé est le même. Seulement, le point P considéré est le centre des arêtes qui sont sur la frontière.

CHAPITRE 4 ALGORITHMES ET STRUCTURES DE DONNÉES

4.1 Génération de la structure de donnée

4.1.1 Représentation de la géométrie

La géométrie 2D Γ est composée d'une boucle externe, et d'un ensemble de boucles internes (voir fig. 4.1).

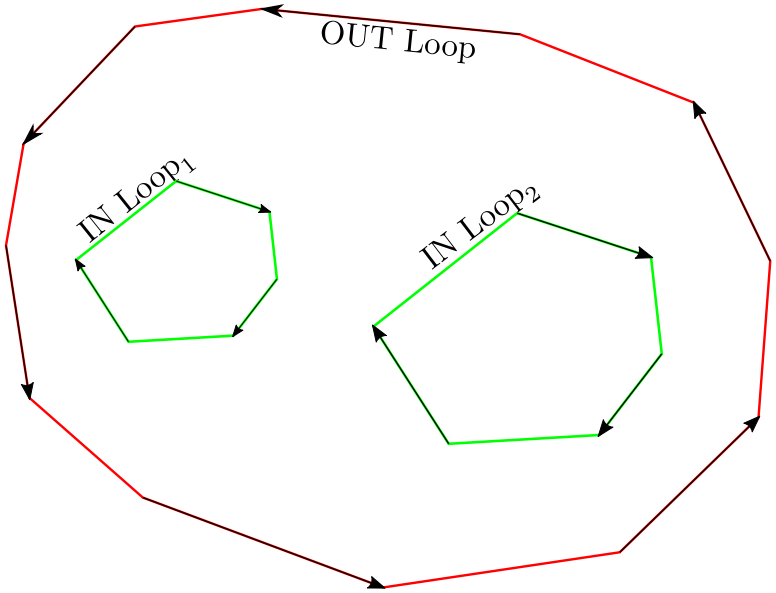


Figure 4.1 Représentation topologique de la géométrie

Chaque boucle est constituée de côtés qui sont construits avec des arêtes rangées dans le sens trigonométrique pour la boucle externe et dans le sens horaire pour les boucles internes. Par les arêtes, on accède aux nœuds de la géométrie. Cette représentation de la géométrie est de type Boundary Representation (BRep) (Requicha and Chan, 1986). Cette représentation permet d'accéder facilement aux conditions limites et de sélectionner les côtés qui présentent un intérêt pour le post-traitement.

Le fichier d'entrée est décrit au tableau 4.1

Tableau 4.1 Structure du fichier de la géométrie

En-tête	number of points n_{point}
	number of loop n_{loop}
	OUT loop n_{side}
	$name_0 : n_{pointperside}\ p_{start}\ p_{end}\ BC_type\ BC_value$
	$\vdots$
	$name_{N-1} : n_{pointperside}\ p_{start}\ p_{end}\ BC_type\ BC_value$
	IN loop$(_i)$ n_{side}
	$name_0 : n_{pointperside}\ p_{start}\ p_{end}\ BC_type\ BC_value$
	$\vdots$
	$name_{N-1} : n_{pointperside}\ p_{start}\ p_{end}\ BC_type\ BC_value$
	$\vdots$
	IN loop$(_{i-1})$ n_{side}
	$name_0 : n_{pointperside}\ p_{start}\ p_{end}\ BC_type\ BC_value$
	$\vdots$
	$name_{N-1} : n_{pointperside}\ p_{start}\ p_{end}\ BC_type\ BC_value$
Points	$x_0 \quad y_0 \quad z_0$
	$x_1 \quad y_1 \quad z_1$
	$\vdots$
	$x_{N-1}\ y_{N-1}\ z_{N-1}$

Généralement cette géométrie, issue d'un modeleur géométrique, ne possède pas toujours un nombre de points élevé. Pour l'IBM et l'HM-CD, cette représentation peut suffire dans la plupart des cas, étant donné que l'on fait des projections sur des segments pour la construction du point image I ou pour positionner les nœuds des cellules intersectées sur la frontière. Pour assurer une triangulation correcte pour l'HM-CT, il est nécessaire de rediscrétiser la géométrie avec des arêtes de l'ordre du pas de la grille dx. Cette étape est décrite ci-dessous.

Ré-échantillonnage de la frontière

On divise la longueur du côté par le pas de la grille. On obtient donc un nouveau nombre de points par côté. On recalcule le nouveau pas dx_{side} pour le côté, à partir duquel on rediscrétise le côté avec un partage uniforme (voir Fig. 4.2). L'algorithme 1 donne les étapes pour la rediscrétisation.

Algorithm 1: Resample geometry

```
Data: coordinates (x, y) of the original boundary
Result: coordinates (x, y) of the resample boundary
for all loop do
    for all side do
        for all edge do
            calculate_side_perimeter(edg_p1, edg_p2);
        end
        new_number_of_point = int(perimeter / grid_step);
        new_step = perimeter / new_number_of_point;
        update_number_of_point_per_side( new_number_of_point );
        update_number_of_edge_per_side( new_number_of_point - 1);
        store_first_point_of_new_side();
        for all new_number_of_point do
            while i < all edge do
                calculate_side_perimeter(edg_p1, edg_p2);
                if perimeter >= k*new_step then
                    compute_parameter_t();
                    compute_new_point();
                end
                update_perimeter();
                i+=1;
            end
        end
    end
end
```

Figure 4.2 Ré-échantillonnage uniforme de la géométrie

Le nouveau point est calculé de la manière suivante par l'éq. 4.1

$$\begin{cases} t = (k\ dxi - old_perimeter)/(perimeter - old_perimeter) \\ x = t(x_{p2} - x_{p1}) + x_{p1} \\ y = t(y_{p2} - y_{p1}) + y_{p1} \end{cases} \tag{4.1}$$

où t est le paramètre le long de la courbe, k est le point courant créé, $old_perimeter$ est le périmètre à $k-1$ et $perimeter$ est le périmètre à k, (x, y) sont les coordonnées du nouveau point, (x_{pi}, y_{pi}) sont les coordonnées des points de l'arête courante.

4.1.2 Structure du maillage Immersed Boundary Method

L'avantage principal lié aux maillages cartésiens est le caractère structuré et le voisinage implicite. Effectivement, ceci implique une économie tant en terme de mémoire, mais aussi en temps, en réduisant l'accès aux données de maillages. La structure des cellules, les coordonnées et le voisinage des nœuds ne nécessitent pas d'être sauvegardés en mémoire.

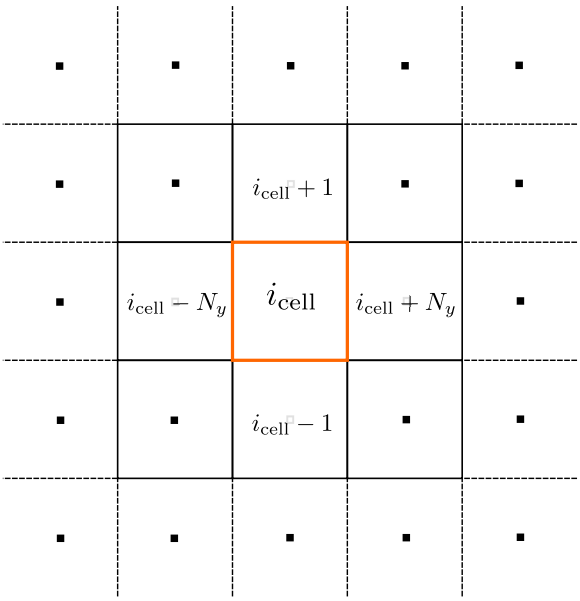


Figure 4.3 Adressage des cellules et leurs voisins

La partie maillage ne contient qu'un tableau définissant l'appartenance des cellules aux zones. L'accès aux cellules, aux coordonnées et au voisinage des nœuds se fait au travers de fonctions que le programme appelle au besoin.

Navigation dans le maillage

On choisi d'ordonner la grille cartésienne par rangées de colonnes (voir Fig. 4.3). Ceci permet de déduire implicitement les voisins. À partir de l'indice i d'une boucle, on retrouve la colonne et la ligne dans le maillage, qui sont données par les relations

$$i_{\text{cell}} = N_y \; i_{\text{Column}} + i_{\text{Row}} \tag{4.2}$$

$$i_{\text{Column}} = \text{int}\left(\frac{i_{\text{cell}}}{N_y}\right) \tag{4.3}$$

$$i_{\text{Row}} = i_{\text{cell}} - N_y \; i_{\text{Column}} \tag{4.4}$$

où N_y est le nombre de cellule dans la direction e_y.

De même, l'accès aux nœuds se fait en remplaçant N_y par $(N_y + 1)$. À partir des relations précédentes, on peut calculer les coordonnées (x, y) de chaque centroide, ou nœuds par les

relations

$$i_{\text{cell}}(x,y) = \text{Grid}_{\text{origine}} + \begin{cases} (\frac{1}{2} + i_{\text{Col}}\ )dx \\ (\frac{1}{2} + i_{\text{Row}})dy \end{cases} \tag{4.5}$$

$$i_{\text{node}}(x,y) = \text{Grid}_{\text{origine}} + \begin{cases} i_{\text{Col}}\ dx \\ i_{\text{Row}}dy \end{cases} \tag{4.6}$$

De plus, en connaissant les coordonnées d'un point (ex. le point image I), on peut le situer dans la grille et déduire l'indice i_{cell} de la cellule qui le contient.

$$i_{\text{cell}} = N_y \underbrace{\text{int}\left(\frac{x}{dx}\right)}_{i_{\text{Column}}} + \underbrace{\text{int}\left(\frac{y}{dy}\right)}_{i_{\text{Row}}}; \tag{4.7}$$

Ensuite, on détermine les cellules environnantes au point I, déduites par l'intermédiaire de *quadrants* pour s'assurer que le point image I appartienne à un quadrangle pour permettre une interpolation.

Structure des données

La méthode pour déterminer les zones des cellules est donnée à la sous-section 4.2.1. La taille du maillage étant fixe, la connectivité étant implicite, le maillage se compose uniquement d'un tableau 1D qui stocke les zones. Le tableau 4.2 donne un aperçu de la structure du maillage.

Tableau 4.2 Structure du maillage cartésien

Mesh_2D_IBM	
+	N_x, N_{x+1} : int
+	N_y, N_{y+1} : int
+	dx : double
+	dy : double
+	zone : int [Array]
f	get_coordinates(**in** i_{cell} : int, **out** x, y : double)
f	get_cell_index(**in** x, y : double, **out** i_{cell} : int)
f	get_connectivity(**in** i_{cell} : int, **out** $i_{\text{cell}}+1, i_{\text{cell}}-1, i_{\text{cell}}+N_y, i_{\text{cell}}-N_y$: int)
[]	point_in_polygon(**in** i_{cell} : int, **out** zone : int)

La structure se résume à trois fonctions de repérage dans l'espace de la grille, et un tableau. Ces informations sont nécessaires et suffisantes pour l'assemblage du système linéaire. Il est évident que l'extension 3D est immédiate par l'ajout de deux sorties à la fonction get_connectivity pour permettre le repérage dans la direction e_z.

4.1.3 Structure du maillage HM-CT

Le principal avantage des maillages non structurés est la robustesse et l'adaptation à toutes les géométries complexes et usuelles. Bien souvent, ce sont les maillages triangulaires qui sont favorisés à l'instar d'autres formes (nombre de nœuds par élément > 4). Son avantage réside aussi dans l'application des conditions limites qui sont directes parce que les éléments reposent sur la frontière. Comme il a été présenté dans le chapitre 1, on crée un maillage hybride composé d'une partie cartésienne et d'une triangulation sur la frontière.

Création du maillage hybride

Dans une première approche, on stockera l'intégralité du maillage hybride. On commence par créer un maillage cartésien que l'on stocke, puis on immerge la frontière et on assigne les zones aux cellules en créant ici une nouvelle zone dite *zone frontière*. Cette zone frontière est la zone que l'on va trianguler. La méthode de triangulation est donnée ci-après dans la sous-section 4.2.2. La triangulation repose sur le maillage cartésien et la frontière, donc les nœuds de la géométrie sont fusionnés avec ceux de la grille. Pour finir, on fusionnera les nouvelles cellules avec les anciennes.

La navigation dans le maillage n'est donc plus implicite. Elle se fait au travers de structures prédéfinies(voir fig. 4.3).

Tableau 4.3 Structure du maillage hybride

Mesh_2D_HMCT	
+	N_x, N_{x+1} : int
+	N_y, N_{y+1} : int
+	dx : double
+	dy : double
+	$Node$: struct{}
+	$Edge$: struct{}
+	$Cell$: struct{}
+	zone : int[Array]
{}	access_struct(**in** get(in arg : (int, double)) : function, **out** var : (int, double))
[]	get_connectivity(**in** i_{cell} : int, **out** connectivity : int[Array])
[]	point_in_polygon(**in** i_{cell} : int, **out** zone : int)

Lorsque toutes les opérations de triangulation sont terminées, les cellules frontières sont désactivées pour ne plus être prises en compte lors de l'assemblage du système linéaire. Les données en mémoire (voir tab. 4.4) se présentent de la manière suivante

Tableau 4.4 Structure des données pour l'Hybrid-Mesh

	Nodes	Edges	Cells
Cartesian Data	x_0 y_0 z_0 x_1 y_1 z_1 ⋮ x_{N-1} y_{N-1} z_{N-1}	n_0 n_1 c_0 $-$ n_1 n_2 c_0 c_{N_y} ⋮ n_{N-1} n_{N-1} c_{N-1} $-$	n_0 n_1 n_2 n_3 n_3 n_2 n_4 n_5 ⋮ n_{N-Ny-2} n_{N-2} n_{N-1} n_{N-N_y-1}
Geometry Data	x_0 y_0 z_0 x_1 y_1 z_1 ⋮ x_{N-1} y_{N-1} z_{N-1}	n_0 n_1 c_0 $-$ n_1 n_2 c_0 c_{N_y} ⋮ n_{N-1} n_{N-1} c_{N-1} $-$	n_0 n_1 n_2 n_3 n_3 n_2 n_4 n_5 ⋮ n_{N-Ny-2} n_{N-2} n_{N-1} n_{N-N_y-1}
Triangulation		n_0 n_1 c_0 $-$ n_1 n_2 c_0 c_{N_y} ⋮ n_{N-1} n_{N-1} c_{N-1} $-$	n_0 n_1 n_2 n_3 n_2 n_4 ⋮ n_{N-Ny-2} n_{N-2} n_{N-1}

Structure des données

L'ensemble des informations du maillage HM-CT est stocké dans des classes *Point*, *Line*, *Cell*. Ces classes sont équivalentes à des modules qu'on appelle depuis n'importe quel autre module. Avec ces modules, on créé les objets *Node*, *Edge*, *Cell* respectivement avec les classes *Point*, *Line*, *Cell* dans le module de maillage (voir les tableaux 4.5, 4.6, 4.7).

Tableau 4.5 Structure de la classe *Point*

Point_2D	
+	x : double[Array]
+	y : double[Array]
+	commonCell : int[Array]
+	commonEdge : int[Array]
[]	get_coordinates(**in** i_{point} : int, **out** x, y : double)
[]	get_common_cell(**in** i_{point} : int, **out** common_cell : int[Array])
[]	get_common_edge(**in** i_{point} : int, **out** common_edge : int[Array])

Tableau 4.6 Structure de la classe *Line*

Line_2D	
+	p_1 : int[Array]
+	p_2 : int[Array]
+	leftCell : int[Array]
+	rightCell : int[Array]
+	boundaryType : int[Array]
+	boundaryValue : double[Array]
[]	get_points(**in** i_{line} : int, **out** p_1, p_2 : int)
[]	get_cells(**in** i_{line} : int, **out** left, right : int)
[]	get_boundary(**in** i_{line} : int, **out** type, value : int, double)

Tableau 4.7 Structure de la classe *Cell*

Cell_2D	
+	n_1, n_2, n_3, n_4 : int[Array]
+	e_1, e_2, e_3, e_4 : int[Array]
[]	get_points(**in** i_{cell} : int, **out** n_1, n_2, n_3, n_4 : int)
[]	get_edges(**in** i_{cell} : int, **out** e_1, e_2, e_3, e_4 : int)

La quantité de données générée par le maillage est conséquente. Les informations sur les nœuds, les cellules et leurs connectivités sont stockées. On accède à des tableaux plutôt que par des relations.

De plus, les cellules issues de la triangulation se trouvent à la fin de la structure de données. Le choix de conserver l'intégralité de la grille cartésienne et d'ajouter les données manquantes (nœuds de la géométrie, cellules de la triangulation...) à la fin, permet de pouvoir effacer rapidement la triangulation. Dans le cas d'une frontière mobile, on économise alors l'étape de regénération de la grille cartésienne.

Par contre, les cellules frontières désactivées créent des sauts lors de la lecture des données. C'est-à-dire que lors du chargement des données en mémoire, la lecture n'est plus continue. Les accès aléatoires aux données ralentissent l'assemblage des systèmes linéaires. Le chargement et le déchargement des données impactent la vitesse de lecture des données qui à terme impacte l'intégralité du temps de calcul.

4.1.4 Structure du maillage HM-CD

Le principal avantage des maillage HM-CD est que la connectivité reste constante du fait que la structure cartésienne est conservée. Les quadrangles générés sont parfois relativement distordus, mais lors de la correction des flux le long des arrêtes, on peut utiliser l'interpolation bilinéaire dans un espace de référence.

Création du maillage hybride

Dans un premier temps, on immerge la géométrie dans la grille cartésienne. Ensuite, on identifie toutes les cellules qui sont intersectées par la géométrie avec l'algorithme Point in polygon (PIP). Enfin, pour chaque cellule intersectée, un ou au plus 3 nœuds sont projetés sur la frontière pour s'ajuster. Le détail de l'algorithme d'adaptation est donné dans la sous-section 4.2.3.

Structure des données

La structure du maillage HM-CD est proche de la structure de l'IBM. À cause de la nature non-structurée des cellules adaptées, il n'est plus possible de se positionner par rapport à l'origine dans le maillage. Un tableau supplémentaire contient les coordonnées des nœuds du maillage et la fonction qui permet d'obtenir l'adresse d'une cellule avec les coordonnées du point est retirée. Une nouvelle fonction pour adapter la grille à la frontière est créée

(adapt_grid()). Cette fonction lit les nœuds dans un tableau, puis les déplace sur la frontière avec l'algorithme 4.2.3. Le tableau 4.8 suivant donne la structure du maillage.

Tableau 4.8 Structure du maillage hybride cartésien déformé

Mesh_2D_HMCD	
+	N_x, N_{x+1} : int
+	N_y, N_{y+1} : int
+	dx : double
+	dy : double
+	zone : int [Array]
+	x : double [Array]
+	y : double [Array]
[]	get_coordinates(**in** i_{cell} : int, **out** x, y : double)
f	get_connectivity(**in** i_{cell} : int, **out** $i_{\text{cell}}+1, i_{\text{cell}}-1, i_{\text{cell}}+N_y, i_{\text{cell}}-N_y$: int)
[]	point_in_polygon(**in** i_{cell} : int, **out** zone : int)
[]	adapt_grid(**in** v_1, v_2, v_3, v_4 : int, **out** $x_{\text{new}}, y_{\text{new}}$: double)

La structure du maillage est dorénavant stockée, mais à la différence du maillage HM-CT, la connectivité demeure constante. Seulement, des cas de figures peuvent contrevenir à l'usage d'une connectivité. Ces cas particuliers sont exposés dans la section Limites 4.3.

4.1.5 Vue globale des schémas testés

Le schéma 4.4 donne un aperçu global du processus et le besoin en algorithme des différentes méthodes. De manière générale, nous avons deux choix pour traiter le problème :

— Soit par une méthode IBM
— Soit par une méthode HM

Dans les deux types de méthodes, il est décidé de fonctionner de la même manière. La frontière est immergée, puis dépendant de la méthode, on construit la structure de données. Dans le présent travail, le maillage HM est créé depuis une grille cartésienne vers l'adaptation de la géométrie. Ce type de génération est l'inverse de ce qui se fait avec les méthodes BF qui consistent à créer un maillage à partir de la géométrie. L' algorithme de définition des zones est commun pour chaque méthode.

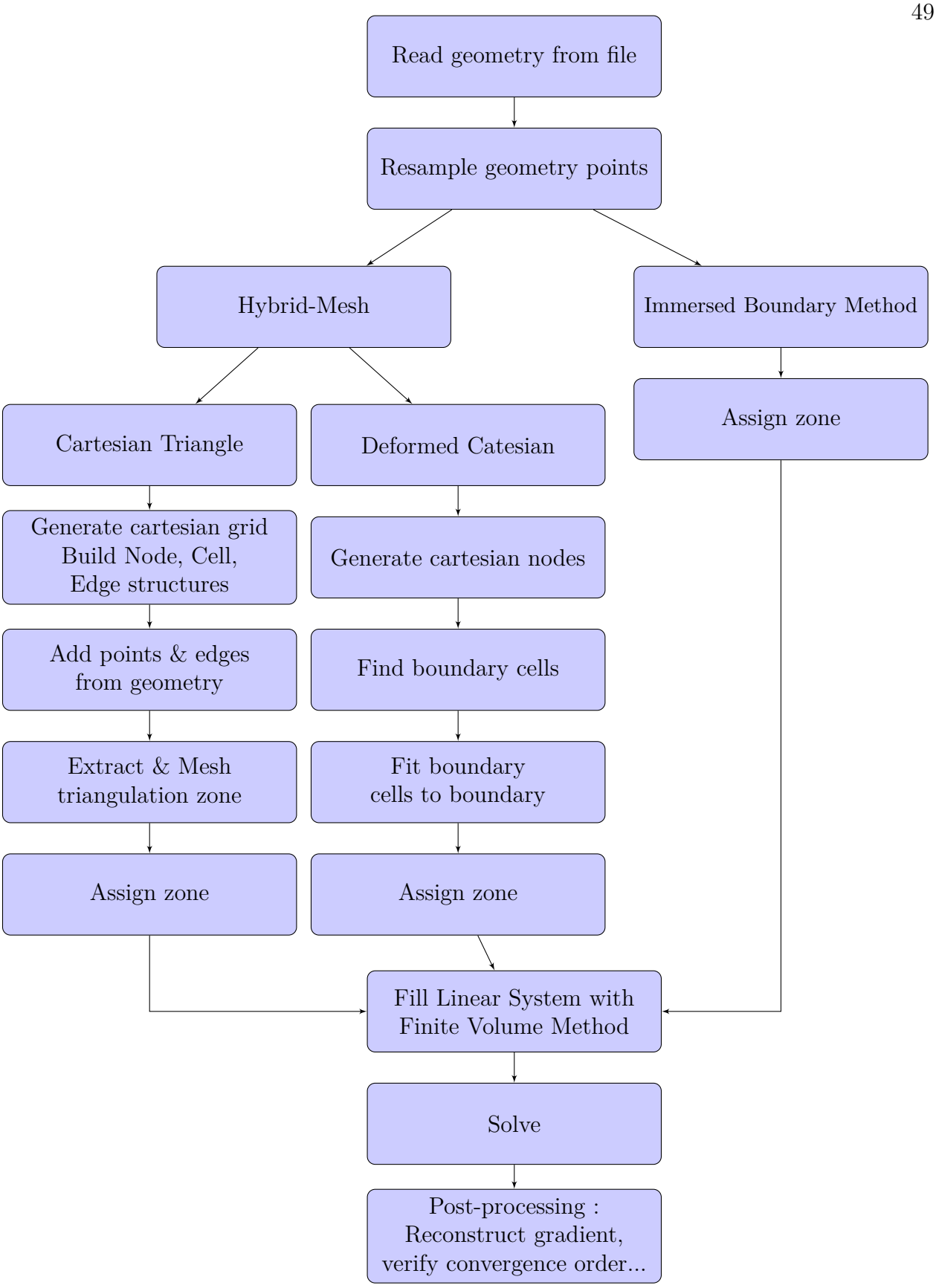


Figure 4.4 Vue d'ensemble du code de calcul pour l'Immersed Boundary Method et l'Hybrid-Mesh pour la résolution d'équations elliptiques

4.2 Algorithmes

4.2.1 Point dans un polygone

Il s'agit ici de définir les zones intérieures ou extérieures à la frontière immergée. Cette étape est importante dans la conception de la structure de données IBM. Il existe plusieurs méthodes pour déterminer si un point est dans un polygone ou non. On présente ici, la méthode la plus simple et la plus largement utilisée, l'algorithme PIP (Alciatore and Miranda, 1995).

Pour un point donné $P(x, y)$, contenu dans l'intervalle $[x_{min}; x_{max}][y_{min}; y_{max}]$ qui sont les minima et maxima des x et y de la géométrie, on tire un faisceau sur la droite (ou la gauche) issu de P. On compare tous les y de la géométrie à la coordonnée y de P. S'il existe un y_i et y_{i+1} de la géométrie qui entoure y de P, alors il y a intersection. Cumulant le nombre d'intersection du faisceau, si le nombre est impair alors le point est dans le polygone, sinon il est en dehors. Pour tous les points en dehors de la boite qui contient la géométrie, il n'est pas nécessaire de les tester.

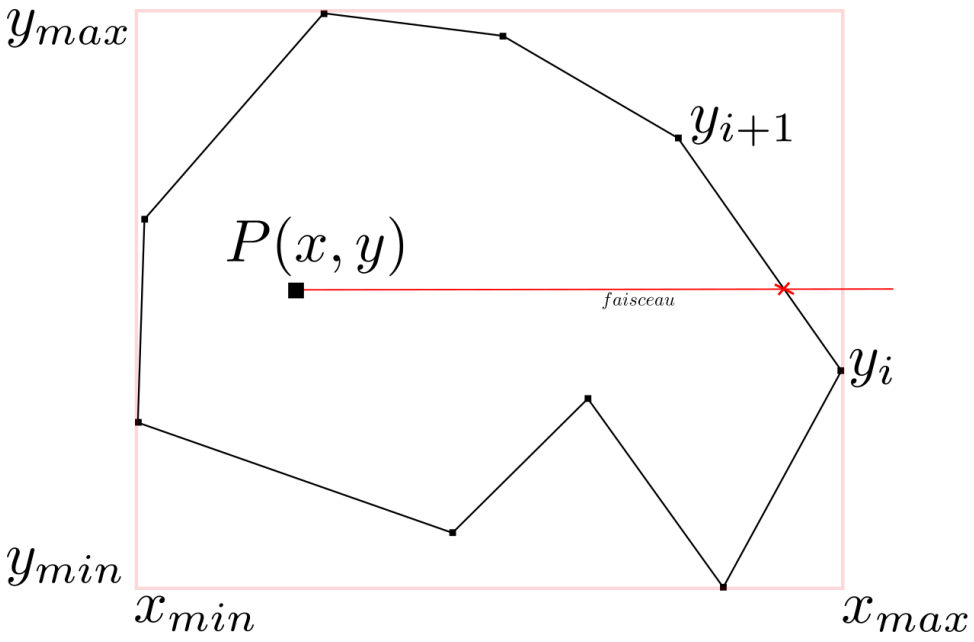


Figure 4.5 Test d'un point à l'intérieur d'un polygone

La fig. 4.5 montre un point contenu dans la boite entourant la géométrie. Le faisceau issu de P et dirigé vers la droite intersecte un des côtés de la géométrie. Pour ce cas, $P(x, y)$ intersecte la géométrie un nombre de fois impair. On attribue donc au point P la zone correspondante au polygone. Pour l'IBM et l'HM, tous les points de la grille cartésienne sont balayés et ceux

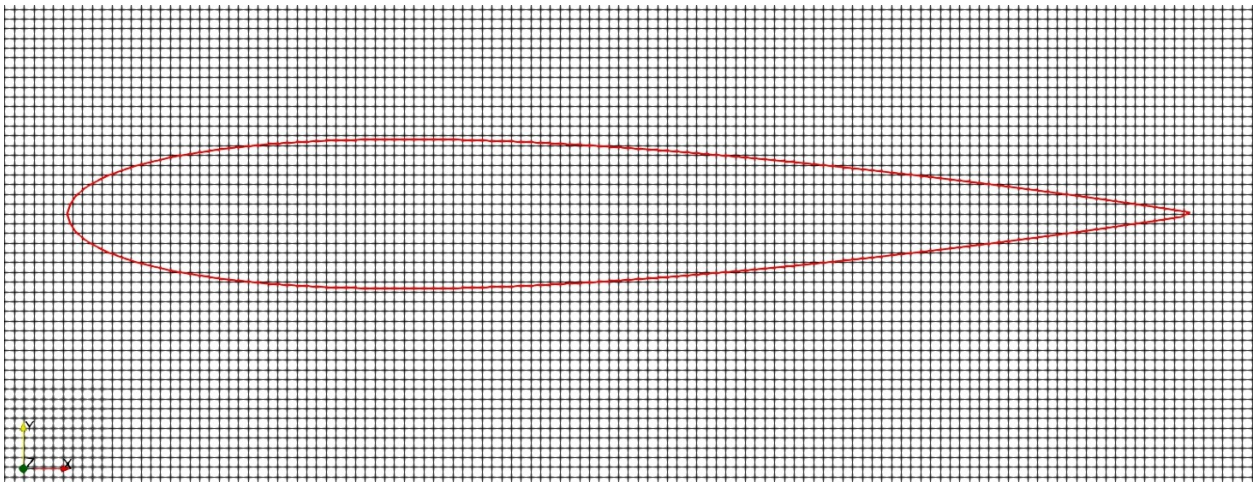
qui se trouvent dans la boite encadrant la géométrie sont testés. Les coûts associés à cet algorithme est en $\mathcal{O}(n^2)$ en 2D et $\mathcal{O}(n^3)$ en 3D.

4.2.2 Adaptation de maillage HM-CT

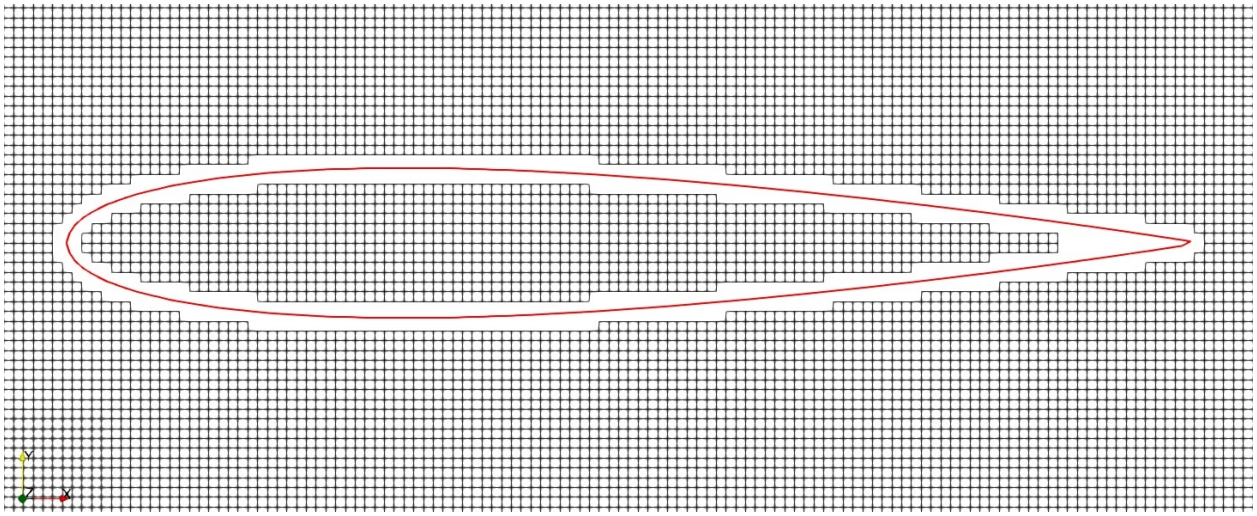
L'Hybrid-Mesh est un maillage constitué d'éléments de différentes formes. Dans le présent travail, on s'intéresse à l'union d'éléments cartésiens et de triangles (voir Fig. 4.6). Une fois la frontière immergée (fig. 4.6(a)), on isole, grâce à l'algorithme PIP, les cellules coupées par la frontière (fig. 4.6(b)), ou *cellules frontières*. On utilise une méthode de triangulation de Delaunay contrainte. Pour ce faire, on extrait le contour cartésien et le contour de la géométrie pour former un contour fermé. Ce contour, dit *front initial*, représentant les arêtes contraintes, c'est-à-dire des arêtes sur lesquelles la triangulation repose et qui ne peuvent être retournées, ou modifiées.

Le maillage final est un assemblage d'une partie cartésienne et d'une partie triangle. La triangulation produite connecte les nœuds de la géométrie avec les nœuds des cellules cartésiennes. C'est pourquoi, on observe sur la figure 4.6(c) des triangle étirés à l'intérieur du bord de fuite. Sur certaines parties de la triangulation, on trouve des cellules triangles qui ont un côté supérieur à dx. En soi, ce maillage est valide pour le calcul en utilisant la partie externe à la géométrie. La partie interne devra être améliorée, par un raffinement en divisant les plus grands côtés des triangles par deux et en reconstruisant une triangulation, suivi d'un lissage. L'étape de raffinement et de lissage peut être reprise au besoin pour améliorer la qualité de la discrétisation.

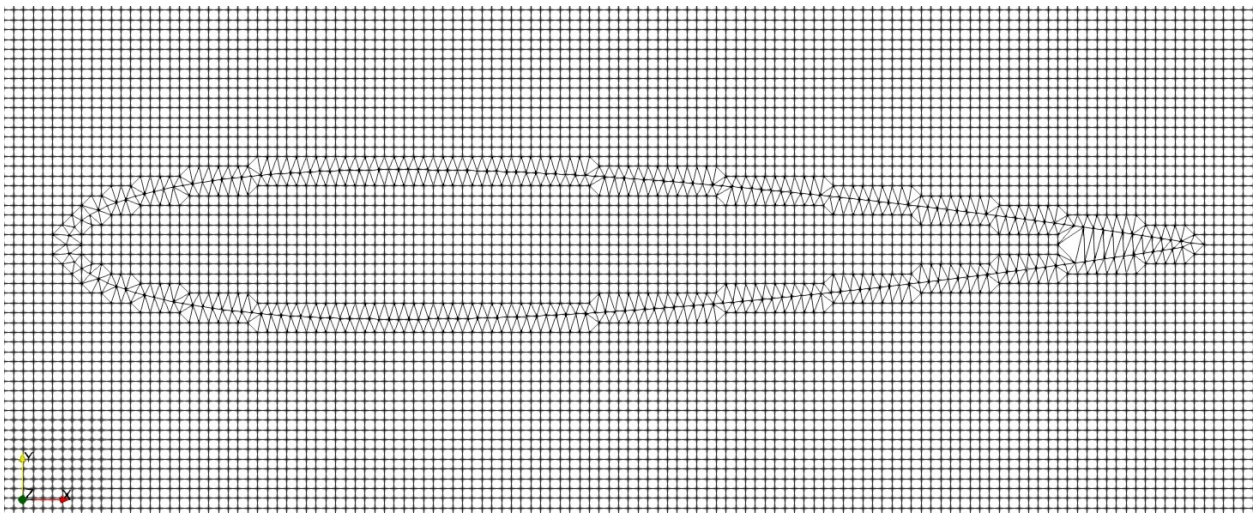
L'algorithme 2 montre les étapes de construction de la triangulation de Delaunay contrainte. Celui-ci repose sur le principe de l'angle le plus petit. Chaque nœud du contour contraint représente une position dans le front. Chaque position associe une position précédente et une position suivante ainsi qu'un angle $\alpha(\widehat{PCN})$, où $P = \text{prev}_{pos}$, $C = \text{curr}_{pos}$, $N = \text{next}_{pos}$ (voir fig. 4.7).



(a) Immersion de la géométrie



(b) Extraction de la zone à mailler



(c) Maillage hybride final

Figure 4.6 Maillage hybride autour d'un profil type NACA0012

Algorithm 2: Constrained Delaunay triangulation

```
Data: constrained contour
Result: constrained Delaunay triangulation
all_pos = set_initial_front() ;
compute_initial_angle() ;
while angle_size > 0 do
    find_min_angle() ;
    found_pos = find_position_in_front() ;
    build_candidate(prev_pos, curr_pos, next_pos) ;
    test_in_circle(all_pos, prev_pos, curr_pos, next_pos) ;
    if is_in_circle == True then
        test_in_triangle(found_pos, prev_pos, curr_pos, next_pos) ;
        if is_in_triangle == True then
            create_edge_in_front(found_pos, curr_pos) ;
            add_edge_in_cartesian_structure(found_pos, curr_pos) ;
        end
        else
            create_triangle(prev_pos, curr_pos, next_pos) ;
            if edge(prev_pos, next_pos) doesn't exist then
                add_edge_in_cartesian_structure(prev_pos, next_pos) ;
                add_triangle_in_cartesian_structure(prev_pos, next_pos) ;
            end
        end
        update_front() ;
        update_angle() ;
    end
    else
        create_triangle(prev_pos, curr_pos, next_pos) ;
        if edge(prev_pos, next_pos) doesn't exist then
            add_edge_in_cartesian_structure(prev_pos, next_pos) ;
            add_triangle_in_cartesian_structure(prev_pos, next_pos) ;
        end
    end
    update_front() ;
    update_angle() ;
end
```

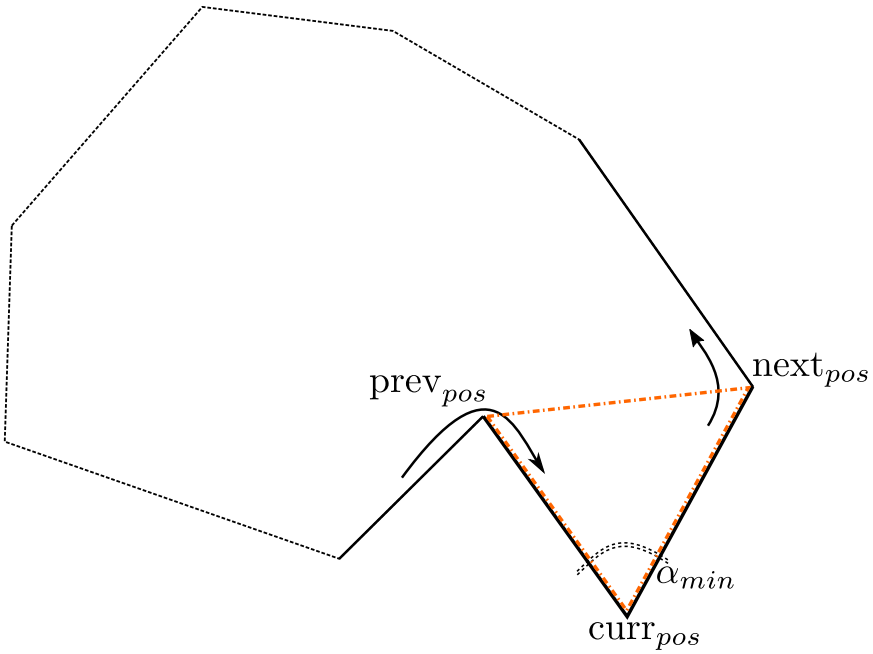
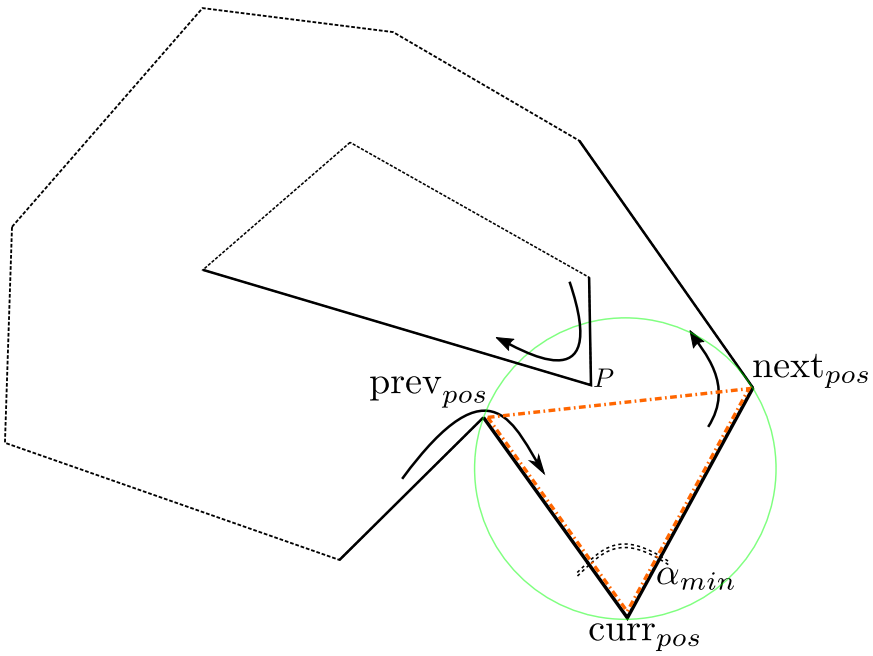
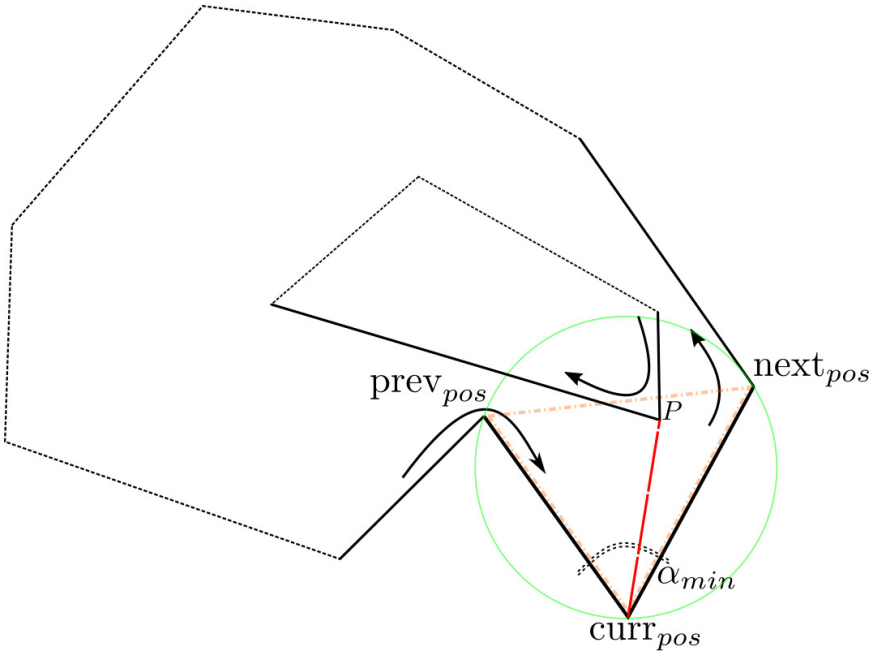


Figure 4.7 Construction d'un triangle (prev$_{pos}$, curr$_{pos}$, next$_{pos}$) à la position de l'angle minimum $\alpha(\widehat{PCN})$

Il existe des cas où, la création d'un triangle n'est pas direct car il y a intersection avec le front, ou une proximité qui engendrerait la création de mauvais triangles. La figure 4.8 illustre ces situations.



a) Test du cercle circonscrit vide



b) Test du point à l'intérieur du triangle

Figure 4.8 Critère de validité d'un triangle

Test du cercle circonscrit vide 4.8.a)

Lorsqu'on créé une triangulation à la manière de Delaunay, le critère de base est le test de la sphère vide. Chacun des cercles circonscrits aux triangles potentiels ne doit contenir aucun autre point du contour contraint. Il est possible de restreindre la triangulation simplement à ce test. C'est-à-dire que si le critère n'est pas vérifié, alors on ne crée pas de triangle mais une diagonale. Dans la plupart des cas, ce test est suffisant mais génère occasionnellement des situations de chevauchement, ou des triangles possiblement étirés.

Test du point à l'intérieur du triangle 4.8.b)

Il est possible d'utiliser un critère plus rigoureux, qui évite la formation de chevauchement. En plus d'avoir détecté un point à l'intérieur du cercle circonscrit, on peut tester si le point appartient au triangle potentiel. Si oui, alors on créer une arête, sinon, on forme le triangle et on continu la triangulation. Parfois, il peut en résulter des triangles très aplatis.

4.2.3 Adaptation de maillage HM-CD

La méthode a des similitude avec le cas précédent. Premièrement, on cherche les cellules intersectées par la frontière. Pour chaque cellule intersectée, on cherche les nœuds à projeter

sur la frontière. Pour cela, on définit une zone autour de la frontière dans le but de récupérer les nœuds les plus proches (voir fig. 4.9)

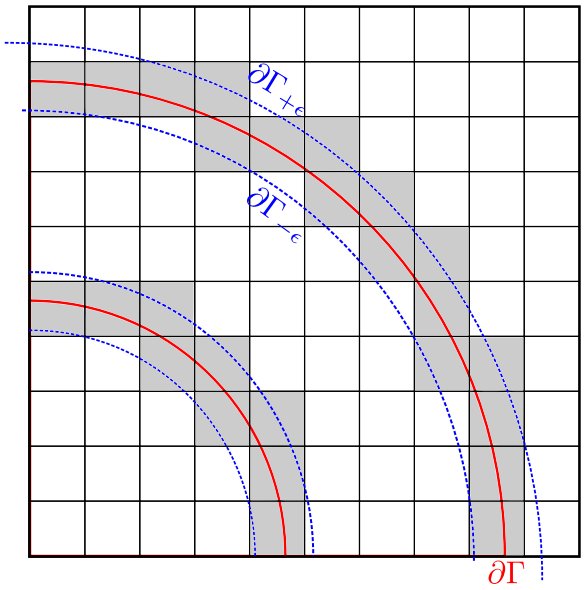


Figure 4.9 Récupération des nœuds les plus proches

Pour certaines situations, deux nœuds opposés sont projetés sur la frontière, alors, on compare la distance à la frontière des deux derniers nœuds restants de la cellule pour déterminer le nœud le plus proche à projeter (voir fig. 4.10).

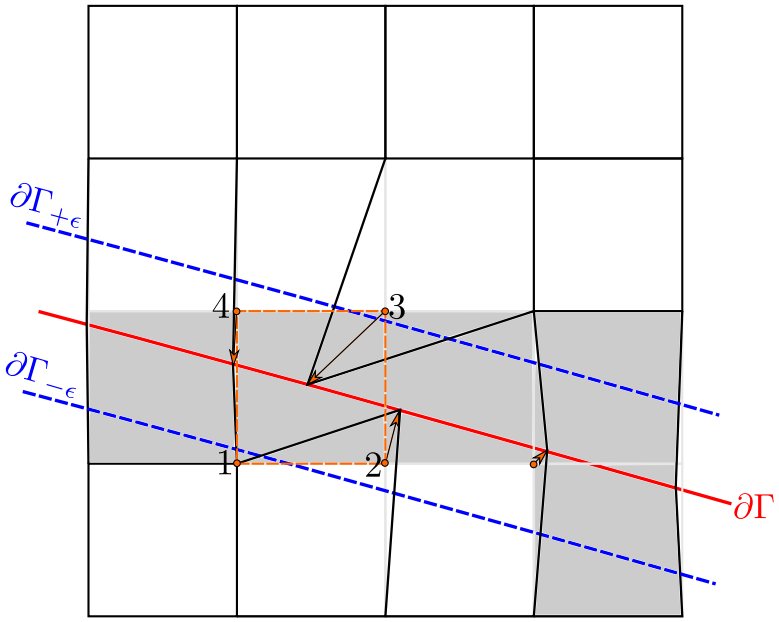


Figure 4.10 Projection d'un troisième nœud d'une cellule pour s'ajuster à la géométrie

Ici, les nœuds 2 et 4 sont opposés et sont projetés lors de la première étape qui consiste à placer les nœuds contenus dans l'enveloppe $\partial\Gamma \pm \epsilon$ sur la géométrie. Lorsque ce cas de figure est détecté, la distance des nœuds 1 et 3 est testée pour connaitre la plus petite. Une fois le test effectué, pour éviter la génération de petites arêtes, le nœud est placé à la moyenne des nœuds opposés. Cette opération est nécessaire pour rendre le maillage valide. L'algorithme étant basé sur les nœuds, et non les arêtes, lorsque deux nœuds opposés sont projetés, les arêtes passant par les deux nœuds projetés et les deux nœuds non projetés ne sont pas ajustées à la géométrie.

La plupart du temps, cet algorithme suffit pour adapter les mailles à la géométrie. Des cas particuliers et non traités par l'algorithme sont données ci-après dans section Limites 4.3.

4.3 Limites

4.3.1 Limite de l'Immersed Boundary Method

Cette section reprend les cas de figure qui posent problème au développement de l'IBM dans la forme étudiée. Certains de ces cas sont connus (Berthelsen and Faltinsen, 2008) mais toujours non résolus.

Le tableau 4.9 donne une liste de cas de figure pour lesquels l'IBM n'est pas assez robuste.

Tableau 4.9 Cas de figure

Géométries à faible épaisseur	Maillage	Géométrie dans l'espace
plaques planes bord de fuites	zone couche limite raffinement local modeleur géométrique 3D	projections multiples projections 3D interpolation 3D algorithme d'inclusion 3D

Géométries à faible épaisseur

On trouve fréquemment dans les géométries complexes, certaines pièces ayant une faible épaisseur. La figure 4.11 présente la partie de contact entre la tige et les lamelles conductrices qui supportent l'arc lors de l'ouverture du disjoncteur. Ces lamelles sont souvent de faible épaisseur (quelques millimètres), ce qui pose problème à la réalisation de l'IBM.

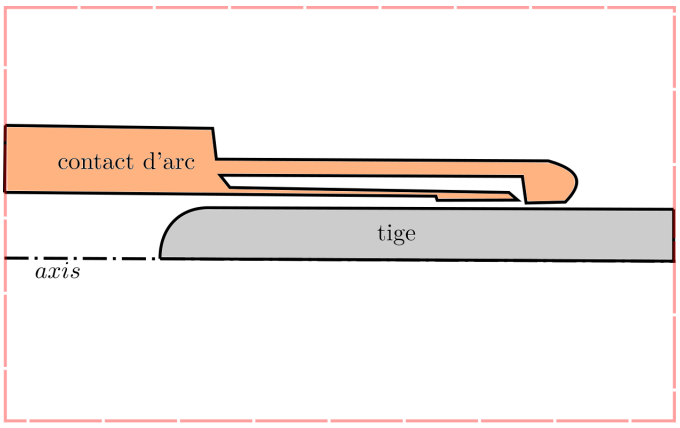


Figure 4.11 Contact d'arc dans un disjoncteur haute tension

En considérant une plaque dans une géométrie quelconque, comme par exemple une tôle mince isolante et qui ne peut pas être exclue de l'étude, et en faisant l'hypothèse que la taille des mailles cartésiennes du maillage ne puissent plus être raffinées, on aurait une situation où $e_{plaque} \ll dx$ (voir fig. 4.12). En adéquation avec l'IBM et les algorithmes, l'étape de maillage ne peut être réalisée. Aucune zone ne peut être définie. Du point de vue du schéma numérique, la plaque n'existe pas parce qu'il n'y a pas d'information au niveau du maillage, permettant d'appliquer une quelconque condition limite.

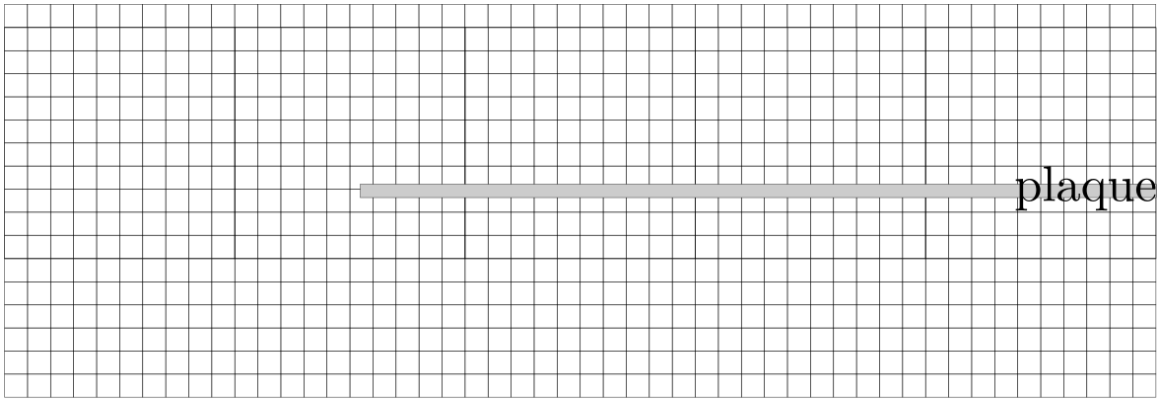


Figure 4.12 Cas de figure de la plaque plane

La figure 4.12 montre un cas particulier. La plaque se situe entre deux cellules, et aucun centroide n'est inclus dans la zone de la plaque.

Dans une autre configuration, la plaque recouvre les centroides de quelques cellules. On peut donc définir une zone (voir fig. 4.13). En continuant, l'étape de maillage réussie, on a maintenant des cellules fantômes qui apparaissent. Considérant un transfert de chaleur dans

la plaque, couplé à l'écoulement autour de la plaque, ce sont les centres des cellules extérieures qui sont projetés sur la frontière pour calculer le transfert thermique dans la plaque. Il en résulte une création du point image I en dehors du milieu étudié (voir fig. 4.14). On ne peut donc faire aucune interpolation, et le schéma numérique ne pourra calculer aucune solution viable.

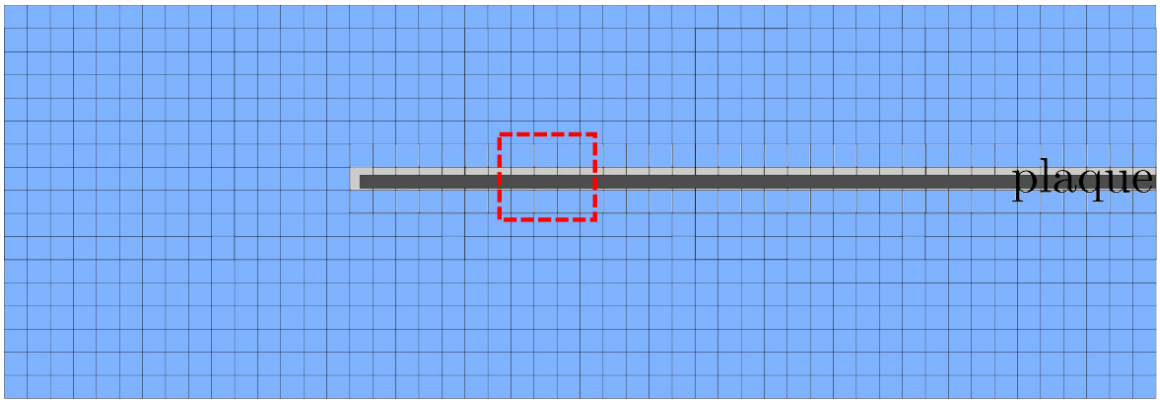


Figure 4.13 Plaque plane décalée vers le haut

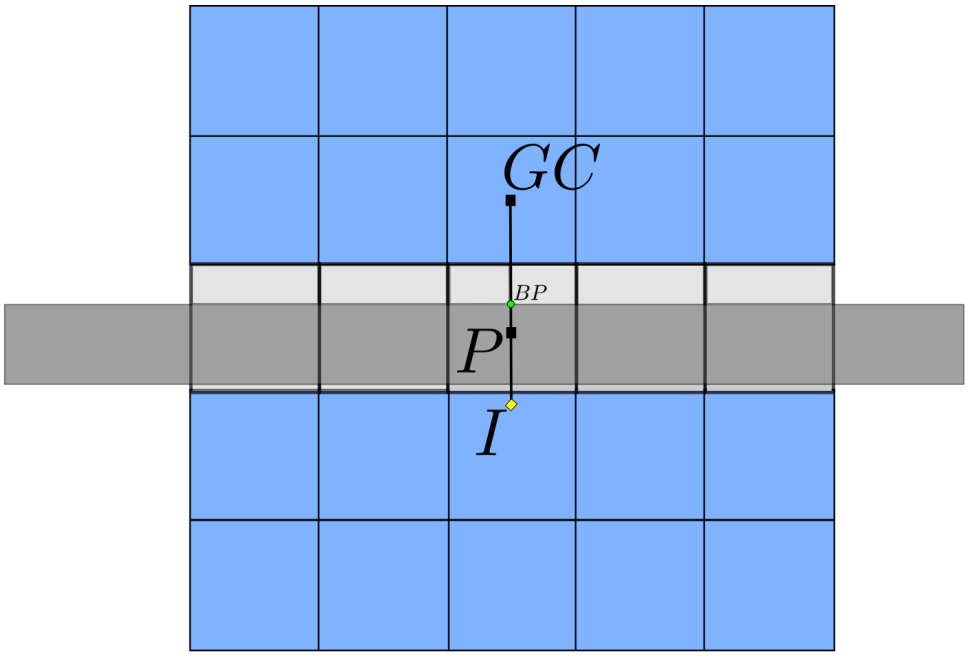


Figure 4.14 Le point image est en dehors de la zone d'étude

Ces situations, bien qu'identifiées, demanderaient de modifier considérablement les algorithmes et les structures de données pour être traitées.

Maillage

Cas du raffinement local On a vu que l'IBM dans sa forme actuelle utilise une grille cartésienne. La dimension est donc fixe et par convention toutes les cellules sont carrées. Un raffinement proche des parois n'est pas possible avec ce type de maillage. Au contraire, avec les maillages HM, il est possible de contrôler la taille des éléments proches des parois et notamment dans la triangulation tout en gardant une taille de maille cartésienne suffisante pour opérer un calcul précisément.

Cas de la gestion de la géométrie 3D Le choix de la définition, surfacique ou volumique, est à définir pour la conception de la géométrie. Un maillage surfacique ou volumique est nécessaire pour la représentation de la géométrie. Le logiciel MC^3 ne gèrent pas ce type de stockage. Les modeleurs géométriques industriels (Catia, Solidworks...) utilisent des modèles de gestions des géométries. Les fichiers (iges, step...) sont des fichiers de géométries compressés de types Open Cascade qui ne peuvent être décompressés que par ces librairies. L'utilisation de tels outils représente un défi. Sinon, un outil de modélisation géométrique devra être développée.

Géométrie dans l'espace

Cas des projections multiples Dans le cas d'un profil d'aile quelconque, on trouve, au bord de fuite, une combinaison de cas de figure d'une géométrie à faible épaisseur et un autre cas de figure relatif à la géométrie dans l'espace. En effet, dans l'espace proche du bord de fuite, à plusieurs choix de projections valides (Mittal et al., 2008) lors de la création des points images (voir fig. 4.15) sont possible.

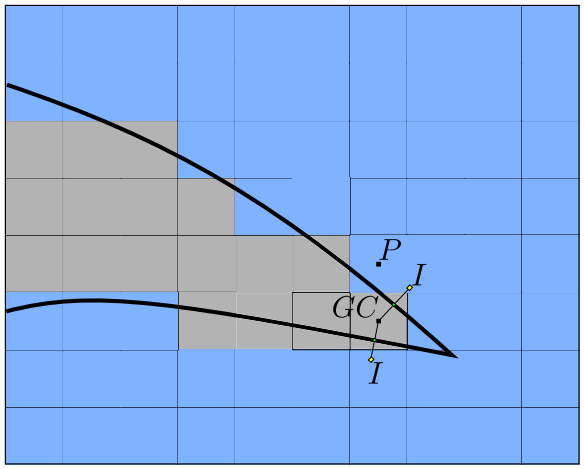


Figure 4.15 Cas de figure du bord de fuite

De plus, on peut clairement noter que le bord de fuite (la pointe) est tronqué par la pixélisation. La taille des mailles sur la figure 4.15 est inadéquate pour la situation, mais un raffinement déplacera le cas de figure de plus en plus vers la pointe du bord de fuite. Concernant le choix de la projection à retenir lorsqu'il en existe plusieurs (ou une infinité si le bord est une portion de cercle) n'est pas trivial. Enfin, le cas du profil d'aile ainsi que celui de la plaque plane nous montre aussi l'inaptitude de l'IBM à traiter des études de couches limites.

Cas des interpolations Les interpolations 3D dans un cube ne posent à priori aucun problème à l'extension 3D. Il s'agit d'utiliser une interpolation bilinéaire, suivie d'une interpolation linéaire dans la dernière direction. Seulement, un quadrangle déformé donnera un héxaèdre non régulier en 3D. Il faudra alors convertir le cube non-régulier en un cube dans un espace de référence. Ces étapes peuvent être consommatrices en temps.

Cas des projections 3D En 2D, les projections se font sur des contours. Alors qu'en 3D, la géométrie n'est plus un contour, mais une surface représentée par un maillage. La figure 4.16 présente le maillage surfacique d'une sphère. Dépendant du raffinement de la géométrie, le temps de la recherche de l'élément sur lequel projeter peut rapidement devenir un facteur de ralentissement. On peut envisager le cas de deux sphères concentriques. Il faudra alors inclure une gestion de l'arbre de la géométrie pour déterminer les projections.

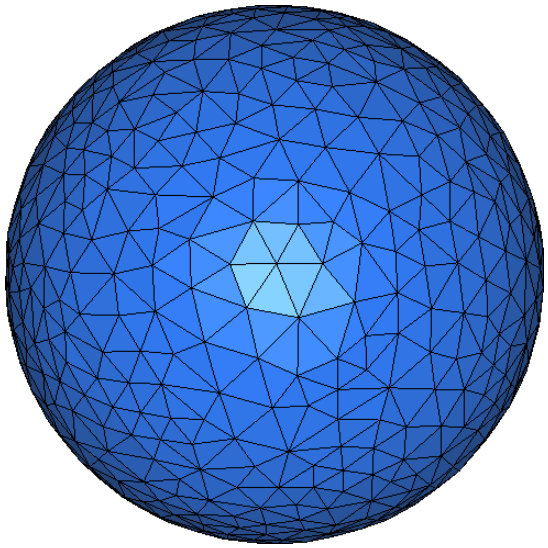


Figure 4.16 Maillage surfacique d'une sphère

4.3.2 Limite du maillage cartésien hybride

L'algorithme proposé présente plusieurs cas de figure qui rendent l'adaptation de maillage non robuste. De plus, l'adaptation aux géométries à faible épaisseur pose un défi pour concevoir un algorithme efficace et robuste.

Cas des géométrie à faible épaisseur

Les géométries à faible épaisseur sont un véritable défi. En reprenant le cas du bord de fuite d'une aile, on remarque lors de la projection des nœuds sur la frontière, qu'il faut dédoubler les nœuds qui sont sujet à avoir plusieurs projections valide pour que le maillage s'adapte correctement. Cette étape n'est pas triviale et introduit possiblement la création d'une nouvelle cellule, qui viendrait casser le fil de la connectivité implicite. De plus, dans ce cas, la cellule nouvellement créée serait triangulaire. En soi, cela ne pose pas de problème particulier, mais cela modifie aussi les boucles de calcul des flux.

Autres cas pathologiques

Maillage ouvert Il arrive dans certaines situations que l'enveloppe qui englobe les nœuds les plus proches à la frontière ne voit pas suffisamment de nœuds. Dans la figure 4.17, la zone autour de la géométrie ne détecte pas les nœuds 2 et 3. Il y a un nœud de la cellule qui est projeté, et la cellule à coté a la même configuration. Étant basé sur les nœuds, il faudrait décider d'un chemin ($4-3-2$ ou $4-1-2$). Seulement, l'algorithme n'est pas en mesure de prévoir le chemin, puisque celui-ci doit aussi s'accorder avec le chemin de la cellule suivante.

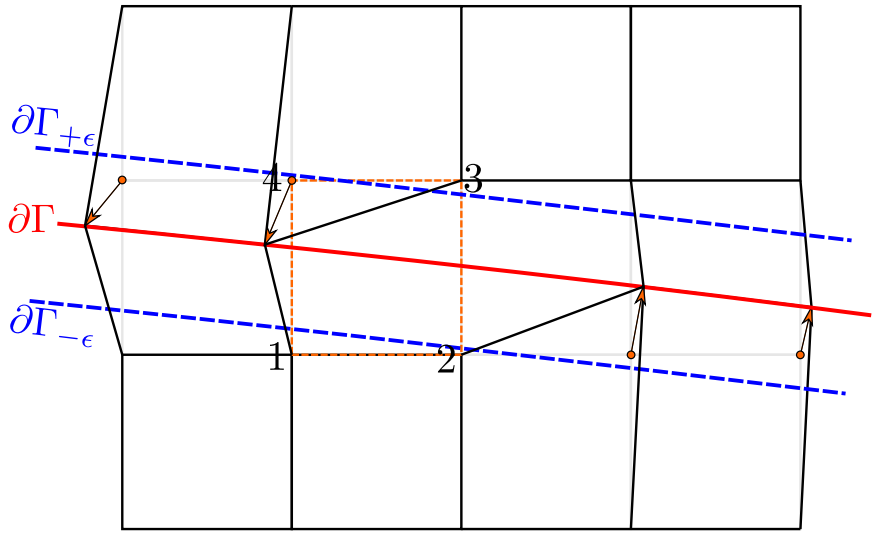


Figure 4.17 Cas de figure du maillage ouvert

L'algorithme proposé n'est pas en mesure de détecter ces cas de figure et de construire le chemin approprié pour projeter les nœuds.

Dégénérescence des cellules ou arêtes A l'inverse du cas de figure précédent, si l'enveloppe est trop large autour de la frontière, trois ou voire les quatre nœuds de la cellule pourrait être projetés. La figure 4.18 donne une illustration d'une dégénérescence ou d'une génération d'une arête très petite.

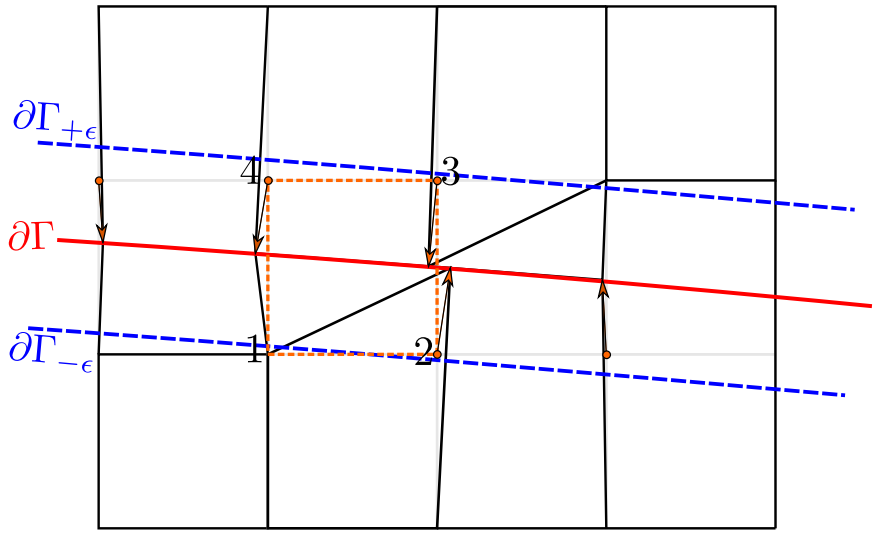


Figure 4.18 Cas de figure d'une génération d'une arête très petite

En soi, l'adaptation du maillage est respectée mais l'arête $2-3$ est très petite et cela peut entrainer des problèmes lors du calcul des flux au passage de cette arête. Pour un cas plus critique, où la géométrie est horizontale et coupe la cellule au centre, les quatre nœuds sont projetés sur la géométrie entrainant une cellule avec un volume nul. Ce cas de figure n'est pas traité par l'algorithme proposé.

CHAPITRE 5 COMPARAISON DES SOLUTIONS ELLIPTIQUES SUR UN MAILLAGE CARTESIEN ET SUR UN MAILLAGE AJUSTÉ À LA FRONTIÈRE

Ce chapitre porte sur la comparaison de résolutions d'équations elliptiques avec un schéma FVM sur un maillage cartésien avec l'IBM et sur un maillage HM. On vérifiera notamment au travers de cas test la capacité des méthodes en terme de précision, vitesse de convergence et vitesse de calculs. On applique la méthodologie IBM et HM au transfert thermique entre deux cylindres concentriques, entre deux sphères concentriques, et sur un cas sans solution analytique. La validation sera faite à l'aide du logiciel de référence ANSYS Fluent.

5.1 Validation

5.1.1 Énoncé

Pour l'ensemble des simulations, l'équation de Laplace (éq. 3.1) est résolue. Soit $T(x, y)$ le champ scalaire de température dans le domaine Ω.

La convergence est estimée par un calcul de la solution sur des grilles successives divisées par ratio de 2, sur une plage de 8 à 256 du nombre de cellules par colonnes. Pour les cas où la solution analytique est connue, la précision est déterminée par la différence relative entre les deux champs, sinon, la solution numérique est comparée à une solution issue du logiciel ANSYS Fluent. Enfin, le temps total est estimé depuis la lecture du fichier de géométrie et jusqu'à la fin de l'écriture des solutions. La mesure du temps n'est pas quantitative (sujet à la technique de programmation, et la gestion de l'information) et n'est donnée qu'à titre indicatif. Le temps étant sensible bien évidemment à la manière de l'implémentation des algorithmes, permet néanmoins de comparer la rapidité des approches IBM et HM. Les flux aux parois sont reconstruits avec la méthode LSRG au premier ordre pour chaque point de projection pour l'IBM et chaque centre d'arête pour l'HM.

5.1.2 Cas 1 - Double cylindres concentriques

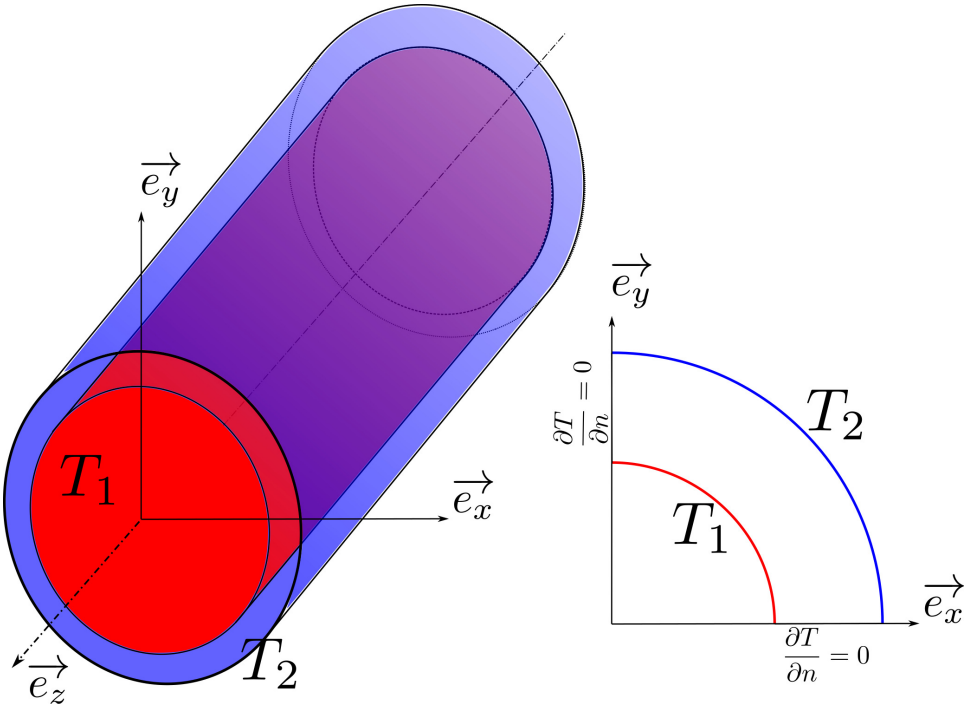


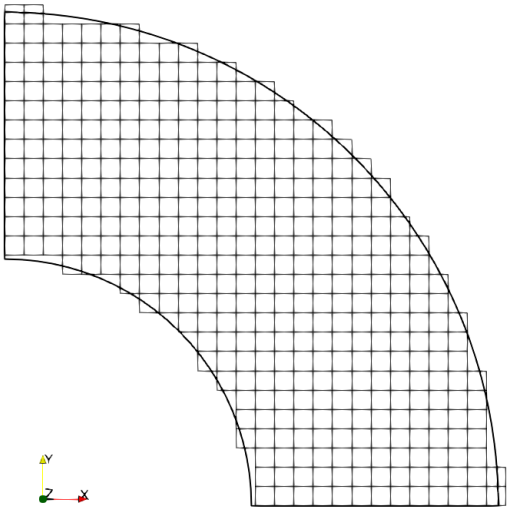
Figure 5.1 Description du cas test des cylindres concentriques

La figure 5.1 donne la description du problème étudié. Deux conditions de Dirichlet sont imposées aux surfaces des deux cylindres. La théorie (Bergman et al., 2011) démontre que pour des cylindres concentriques la solution du champs de température et le flux de chaleur est

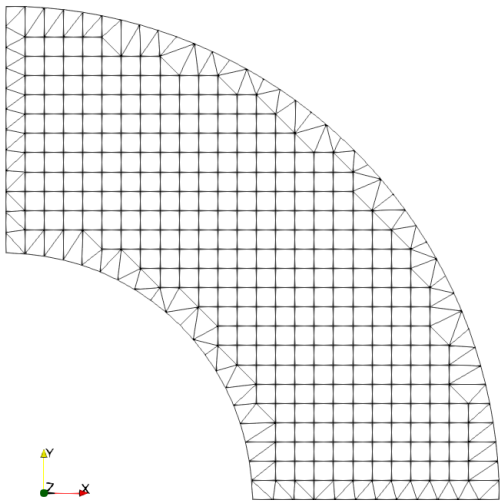
$$T(r) = \frac{T_1 - T_2}{ln(r_1/r_2)} ln(\frac{r}{r_2}) + T_2 \tag{5.1}$$

$$q_r = k\frac{T_1 - T_2}{ln(r_1/r_2)} \tag{5.2}$$

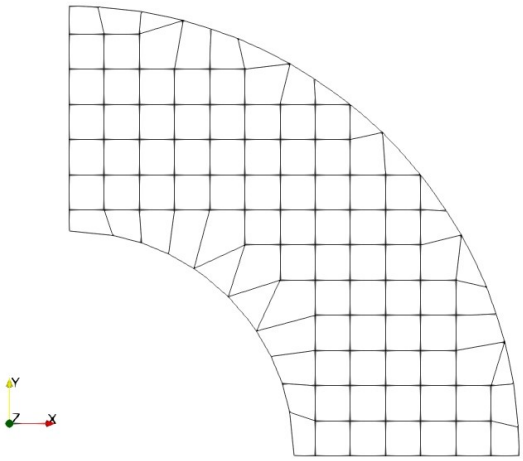
où k est le coefficient de diffusion.



(a) Cartésien



(b) Hybride Cartésien/Triangle



(c) Hybride Cartésien Déformé

Figure 5.2 Maillages types

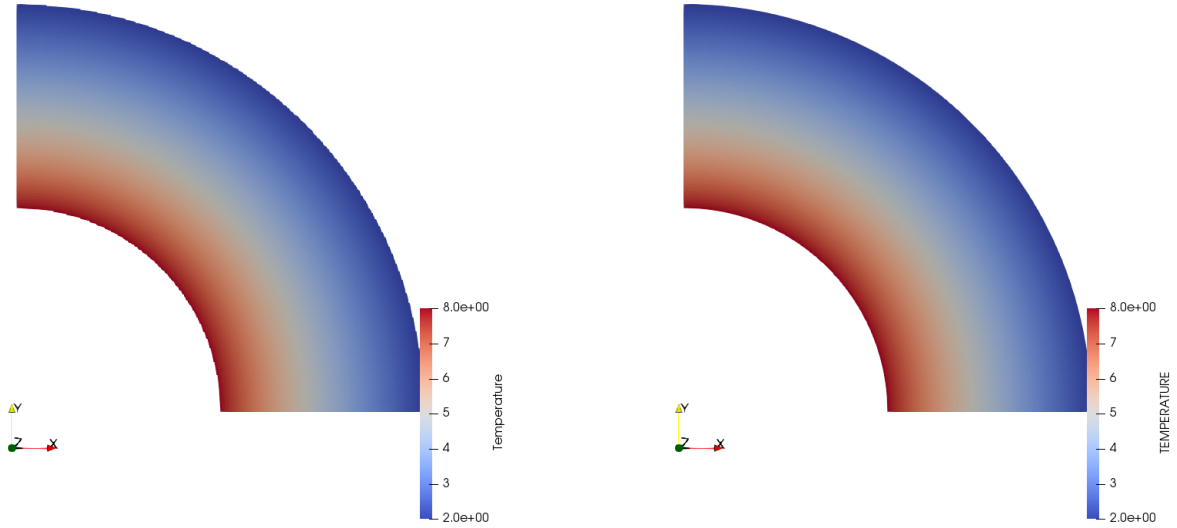
Les maillages utilisés pour calculer le champ de températures sont donnés à titre indicatif à la figure 5.2.

Pour éviter de surcharger, le champ isovaleur (fig.5.3) et la coupe du profil de température (fig.5.4) ne sont donnés qu'une fois pour la méthode HM puisque les résultats sont similaires. Une distinction sera faite pour la convergence (fig.5.5), et la reconstruction des flux (fig.5.6).

La figure 5.3 présente les isovaleurs de la température entre les deux cylindres pour l'IBM et l'HM. On peut voir que la variation de température est comprise entre $8°C$ et $2°C$ pour les deux méthodes, ce qui est conforme aux conditions limites imposées. On fait une coupe à 45° pour tracer le profil de température (voir fig. 5.4) et la comparer à la solution analytique. Pour les deux méthodes, on peut voir que les deux profils des solutions numériques sont superposés à la solution analytique.

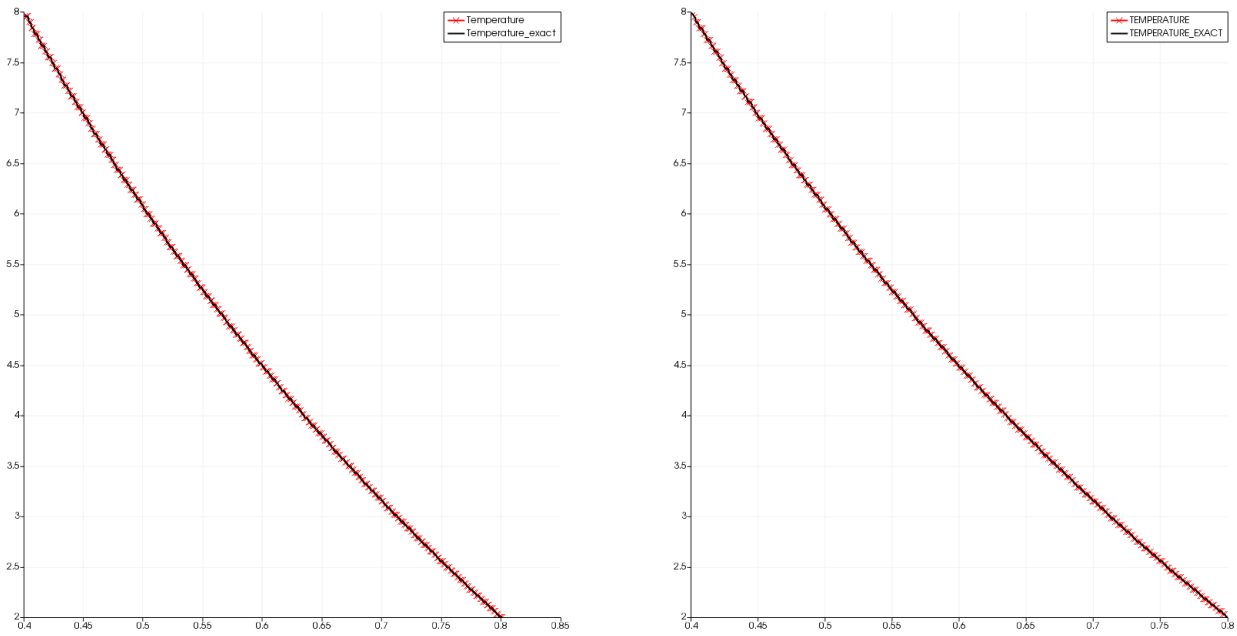
La figure 5.5 présente l'ordre de convergence pour l'IBM et les deux HM. Pour l'IBM, on peut voir que que la méthode converge bien avec la conservation du second ordre. En revanche, pour l'HM-CT, on remarque une perte de l'ordre rapidement ($N_{mailles} > 1000$). Cette dégradation de l'ordre de convergence semble être reliée à la méthode d'interpolation (IDW) utilisée lors de la correction des flux sur la couche de triangles. Pour l'HM-CD, le second ordre est conservé. La méthode de correction des flux par interpolation des noeuds avec une méthode d'interpolation dans un espace de référence fonctionne parfaitement. Ce résultat vient appuyer l'hypothèse qu'une mauvaise méthode d'interpolation est utilisée pour le calcul avec l'HM-CT.

La figure 5.6 montre les flux reconstruits au premier ordre avec une méthode de Least Square Reconstruction Gradient. Pour l'IBM, on ne perçoit aucune différence entre le flux analytique est reconstruit. Au contraire, on peut voir que pour l'HM-CT, une différence entre les flux est visible. Comme en témoigne le tracé de l'erreur relative sur la figure 5.7, on observe que l'erreur engendrée par l'IBM est inférieur à 0.35%, tandis que la reconstruction avec l'HM-CT donne localement des erreurs supérieures à 4.50%. L'erreur moyenne sur la reconstruction des flux engendrée par l'HM-CT est 20× plus élevé que pour l'IBM (2.0% contre 0.1%), ce que l'on peut constater sur le graphique de convergence pour le maillage le plus fin. A l'inverse, les résultats HM-CD sont comparables à ceux de l'IBM avec une erreur relative inférieur à 0.7%.



(a) Solution IBM (b) Solution Hybride

Figure 5.3 Solutions pour $N_x = 512$



(a) Solution IBM vs analytique (b) Solution Hybride vs analytique

Figure 5.4 Profil de température pour $N_x = 512$

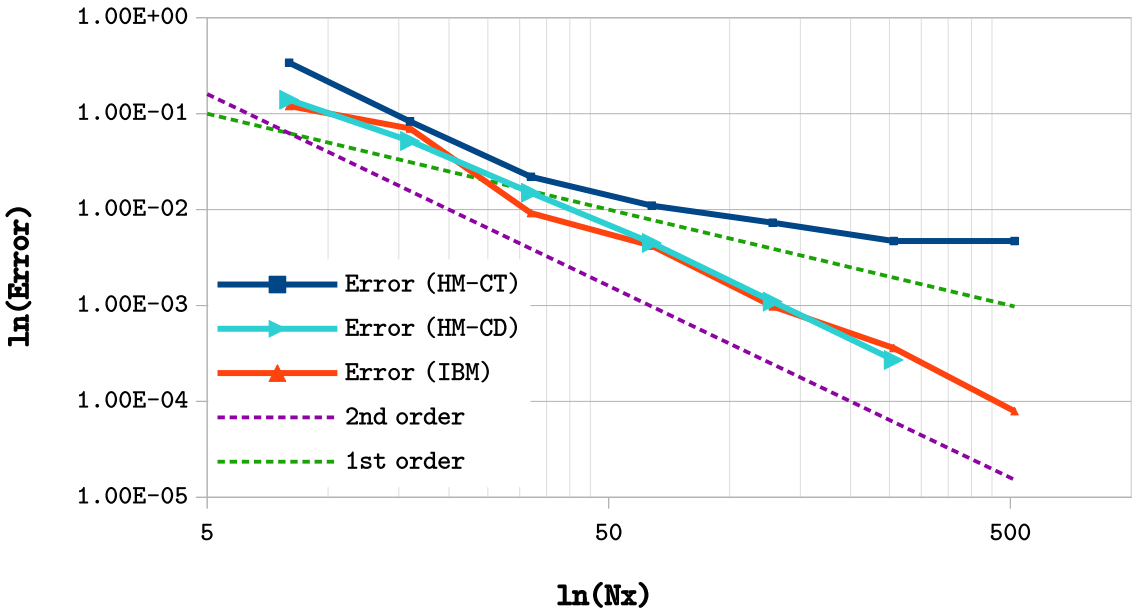
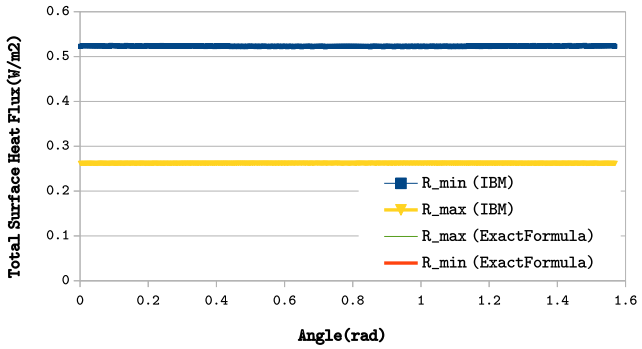
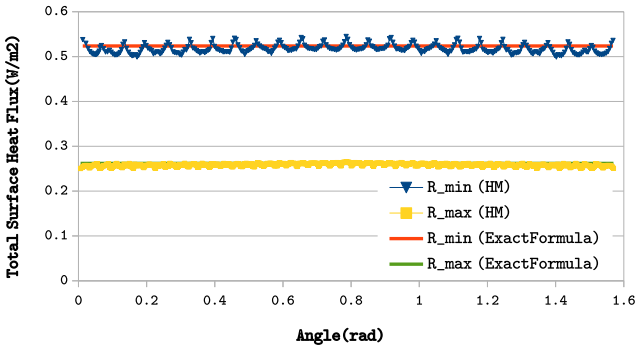


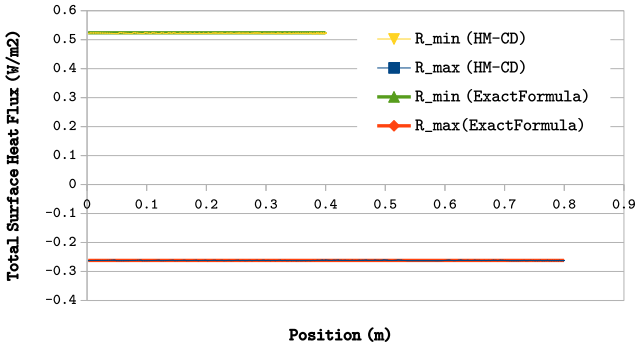
Figure 5.5 Ordre de convergence pour un raffinement double



(a) Solution IBM vs analytique

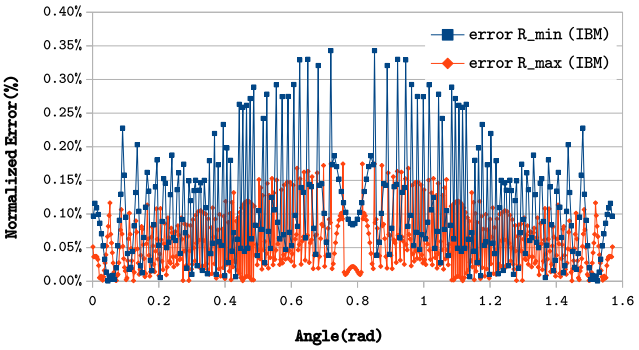


(b) Solution Hybride vs analytique

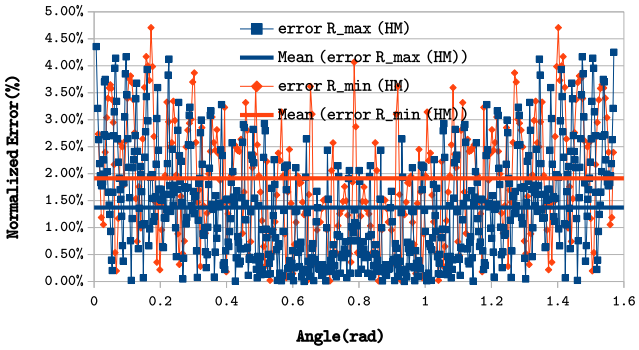


(c) Hybride Cartésien Déformé

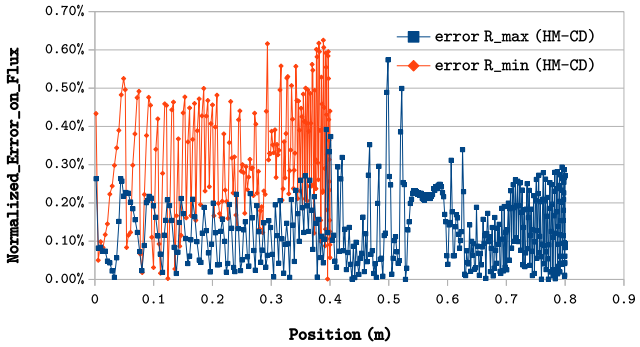
Figure 5.6 Reconstruction des flux aux parois



(a) Solution IBM vs analytique



(b) Solution Hybride CT vs analytique



(c) Solution Hybride CD vs analytique

Figure 5.7 Erreur de reconstruction des flux aux parois

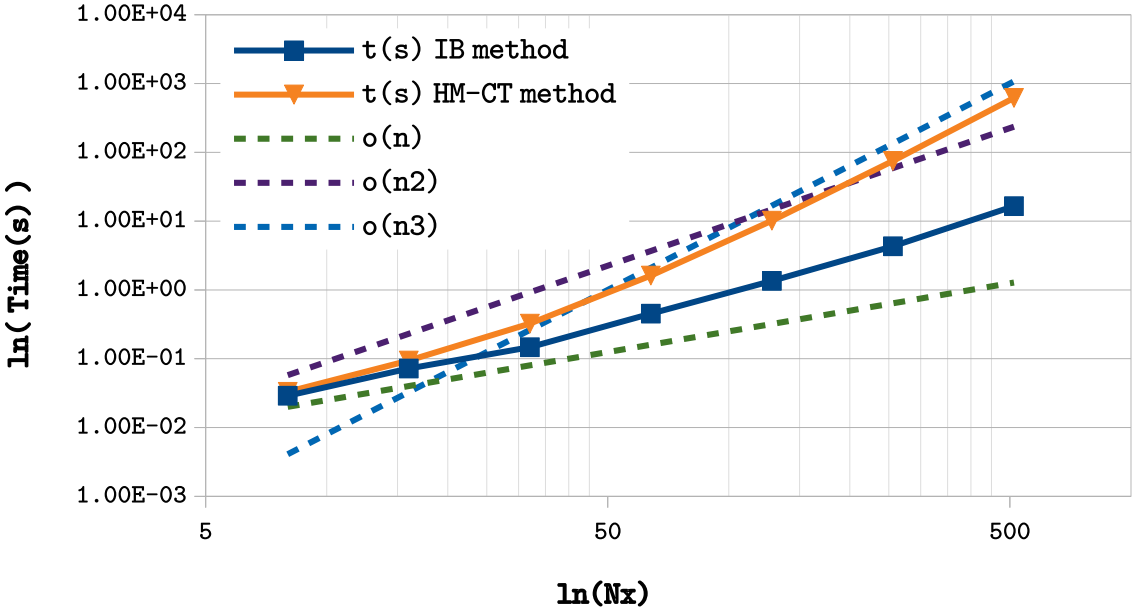


Figure 5.8 Temps de calculs

Le graphique 5.8 donne une comparaison du temps entre les deux méthodes. Le temps est pris avec un timer du début du programme jusqu'à la fin. Il englobe le temps de traitement de la géométrie, la création de la structure de donnée du maillage et enfin le temps de résolution avec l'écriture des données. On constate que pour l'IBM, la complexité tend vers une complexité linéaire, ce qui est bien en accord avec le fait d'utiliser une grille cartésienne. Le temps de calcul ne dépend que du nombre d'éléments. En revanche, comme nous l'avions prévu, le temps de calcul avec un maillage HM-CT n'est plus linéaire, mais tend vers une complexité algorithmique supérieure à $\mathcal{O}(n^2)$. La courbe de temps pour l'HM-CD n'est pas fourni, mais la courbe est similaire à celle de l'IBM.

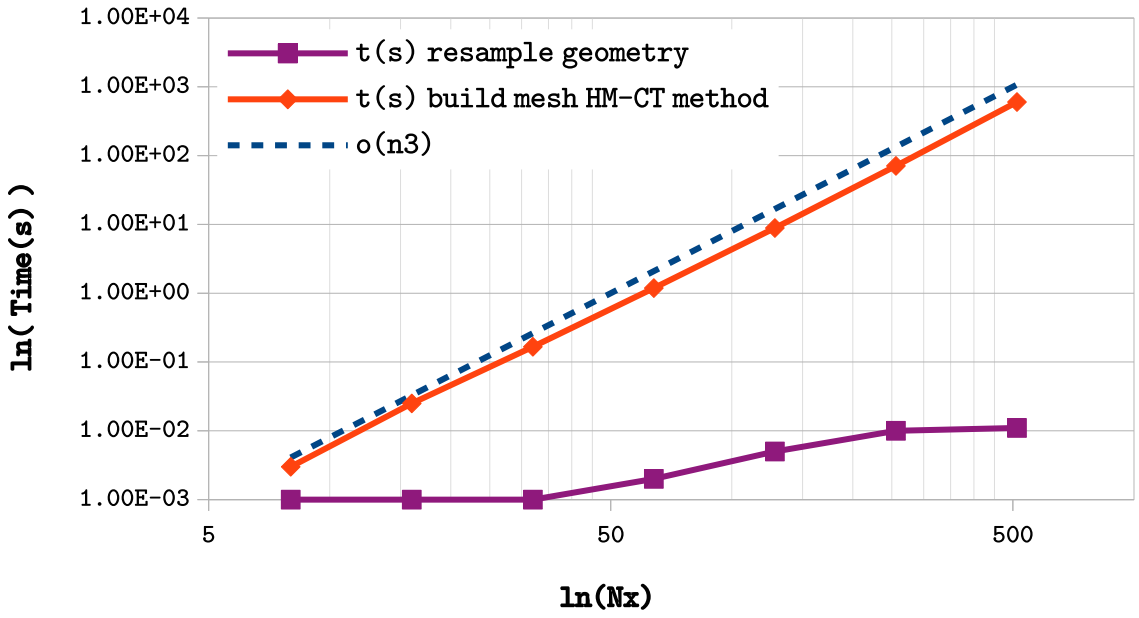


Figure 5.9 Complexité algorithmique pour la construction du maillage HM-CT

La figure 5.9 présente la complexité algorithmique pour le ré-échantillonnage de la géométrie et la construction du maillage hybride cartésien triangle. On peut clairement identifier que la construction du maillage hybride est d'une complexité en $\mathcal{O}(n^3)$. C'est cet algorithme qui implique un temps de calcul qui tend vers une complexité supérieure à $\mathcal{O}(n^2)$, comme il a été identifié à la figure 5.8.

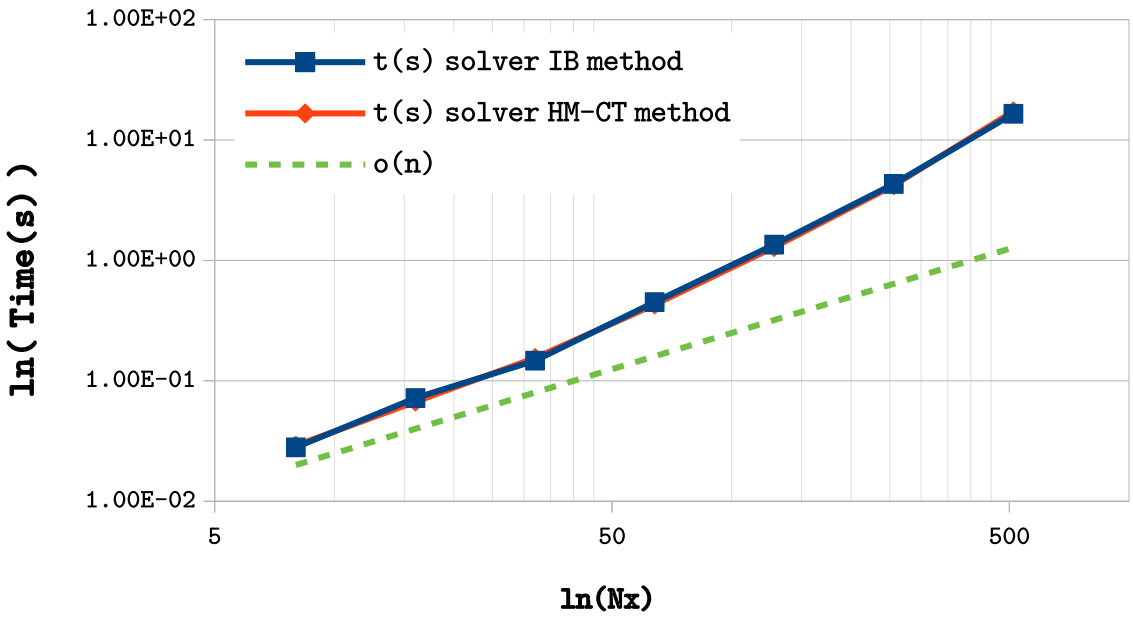


Figure 5.10 Complexité algorithmique pour la résolution IBM et HM-CT

La figure 5.10 présente la complexité algorithmique du solver pour l'IBM et HM-CT. On peut constater que le temps de résolution est rigoureusement identique pour les deux méthodes.

Les figures 5.8, 5.9, 5.10 mettent en valeur que l'algorithme de remaillage cartésien triangle n'est pas efficace.

5.1.3 Cas 2 - Double sphères concentriques

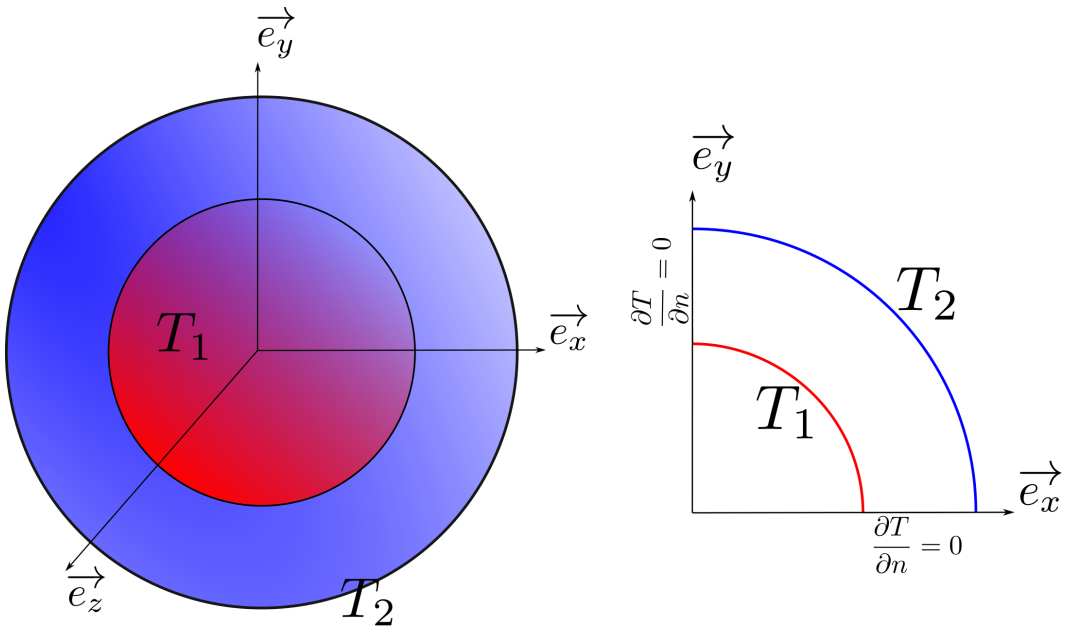


Figure 5.11 Description du cas test des sphères concentriques

La figure 5.11 donne la description du problème étudié. Deux conditions de Dirichlet sont imposées aux surfaces des deux sphères. Bergman et al. (2011) démontre que la solution du champs de température et le flux de chaleur est

$$T(r) = T_1 - (T_1 - T_2)\frac{1 - (r_1/r)}{1 - (r_1/r_2)} \tag{5.3}$$

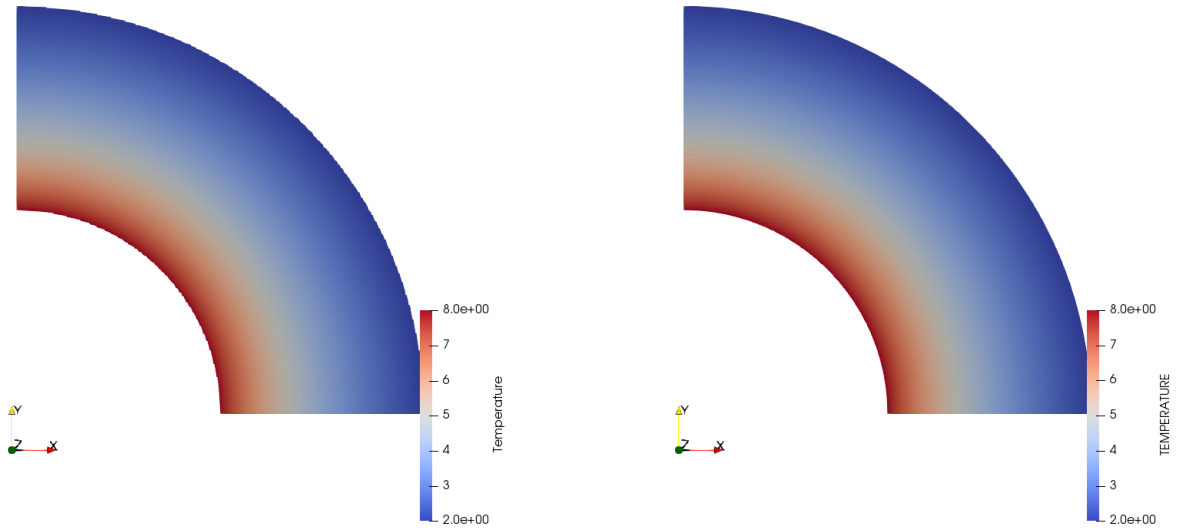
$$q_r = k\frac{T_1 - T_2}{r^2(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})} \tag{5.4}$$

où k est le coefficient de diffusion.

Pour des raisons d'instabilités de construction du maillage HM-CD, les résultats ne sont pas disponibles pour cette méthode.

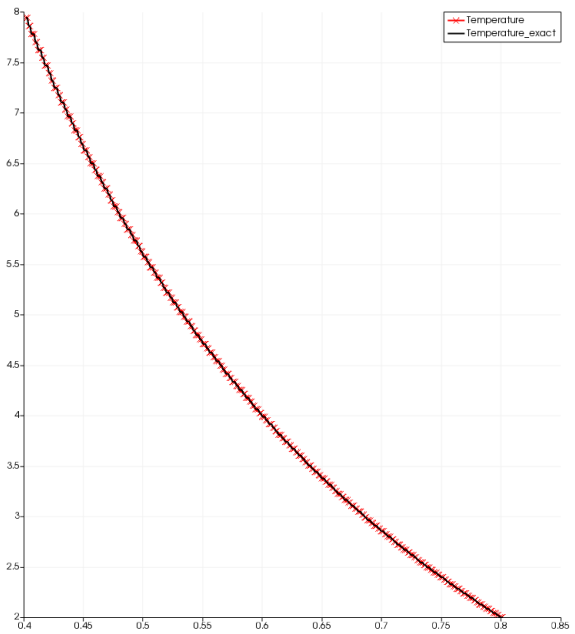
Le maillage utilisé pour le calcul est le même qu'à la figure 5.2. Globalement, on observe les même résultats et tendances que pour le cas précédents. Le calcul est le même, mais diffère simplement d'un facteur de conversion plan vers axisymétrique. La figure 5.12 présente les isovaleurs de la température entre les deux sphères pour l'IBM et l'HM-CT. On peut voir que la variation de température est comprise entre $8°C$ et $2°C$ pour les deux méthodes, ce qui est conforme aux conditions limites imposées. On fait une coupe à 45° pour tracer le profil de

température (voir fig. 5.13) et la comparer à la solution analytique. Pour les deux méthodes, on peut voir que les deux profils des solutions numériques sont superposés à la solution analytique. La figure 5.14 présente l'ordre de convergence pour l'IBM et l'HM-CT. Pour l'IBM, on peut voir que que la méthode converge bien avec la conservation du second ordre. En revanche, pour l'HM-CT, on remarque une perte de l'ordre rapidement ($N_{mailles} > 1000$). Cette dégradation de l'ordre de convergence semble être reliée à la méthode d'interpolation (IDW) utilisée lors de la correction des flux sur la couche de triangles. La figure 5.15 montre les flux reconstruits au premier ordre avec une méthode de Least Square Reconstruction Gradient. Pour l'IBM, on ne perçoit aucune différence entre le flux analytique et reconstruit. Au contraire, on peut voir pour l'HM-CT, une différence entre les flux est de nouveau visible. Comme en témoigne le tracé de l'erreur relative sur la figure 5.16, on observe que l'erreur engendrée par l'IBM est inférieur à 0.35%, tandis que la reconstruction avec l'HM-CT donne localement des erreurs supérieures à 4.50%. L'erreur moyenne sur la reconstruction des flux engendrée par l'HM-CT est 20× plus élevé que pour l'IBM (2.0% contre 0.1%), ce que l'on peut constater sur le graphique de convergence pour le maillage le plus fin.

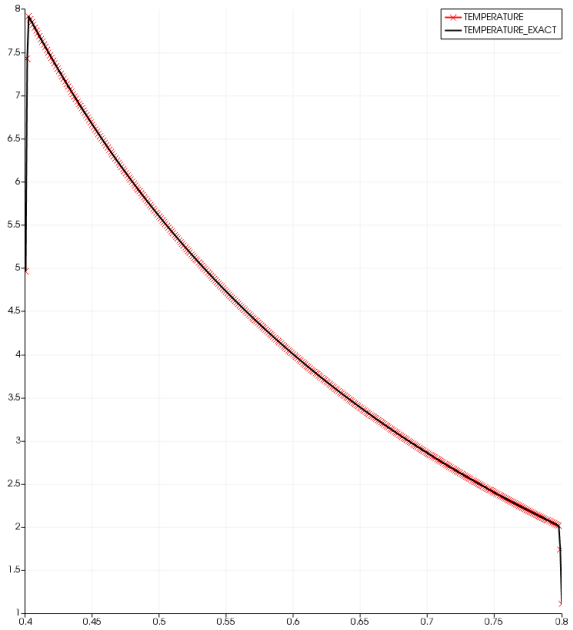


(a) Solution IBM (b) Solution Hybride Cartésien/Triangle

Figure 5.12 Solutions pour $N_x = 512$



(a) Solution IBM vs analytique



(b) Solution Hybride Cartésien/Triangle vs analytique

Figure 5.13 Profil de température pour $N_x = 512$

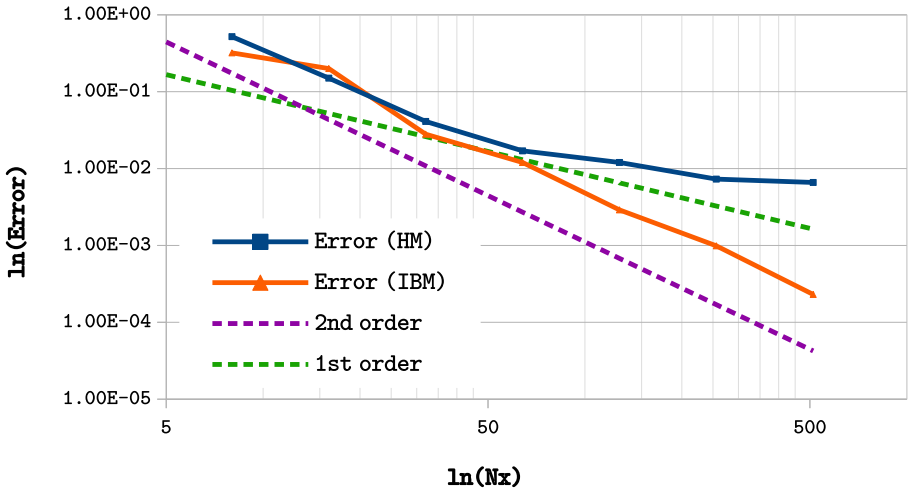
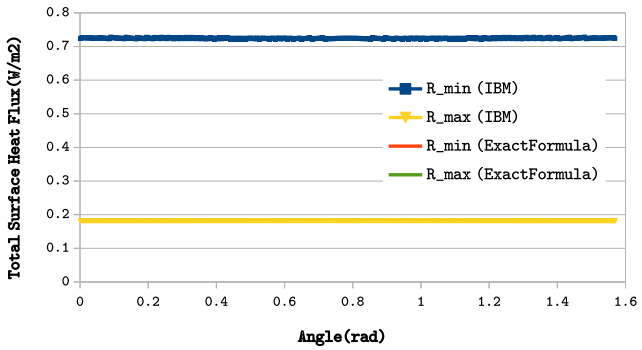
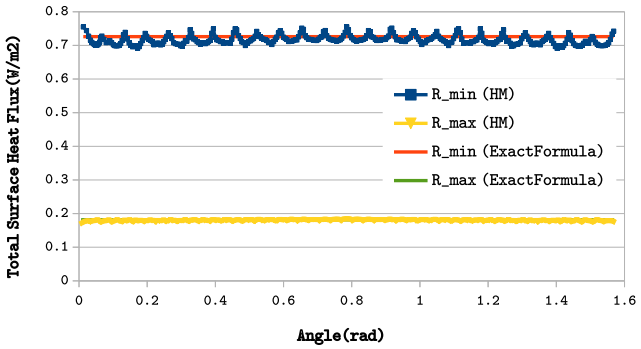


Figure 5.14 Ordre de convergence pour un raffinement double

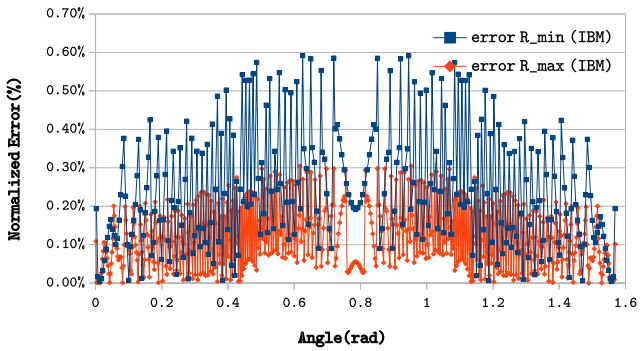


(a) Solution IBM vs analytique

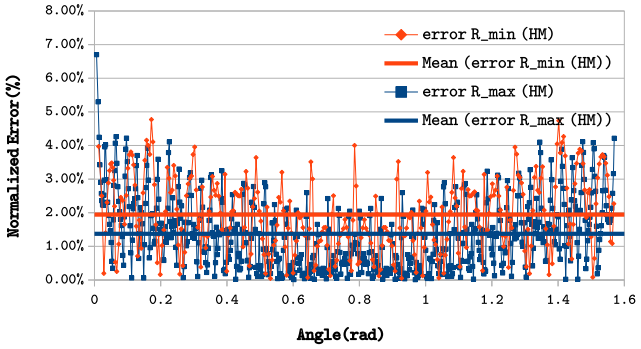


(b) Solution Hybride Cartésien/Triangle vs analytique

Figure 5.15 Reconstruction des flux aux parois



(a) Solution IBM vs analytique



(b) Solution Hybride Cartésien/Triangle vs analytique

Figure 5.16 Erreur de reconstruction des flux aux parois

5.2 Application aux disjoncteurs

5.2.1 Électrodes axisymétriques

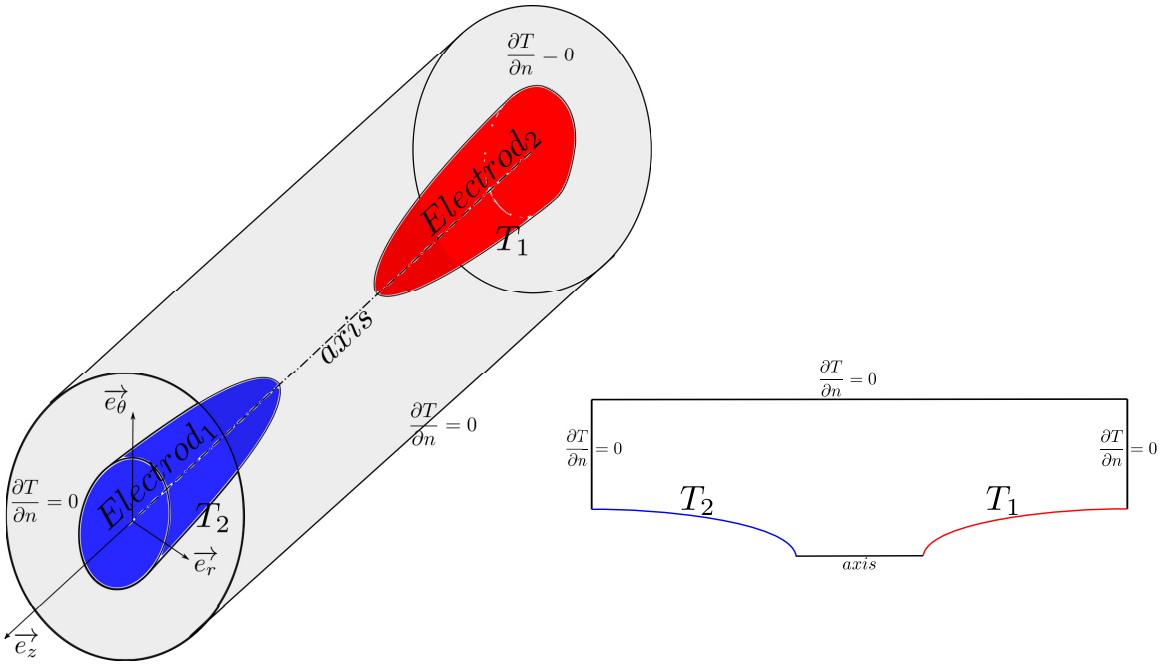
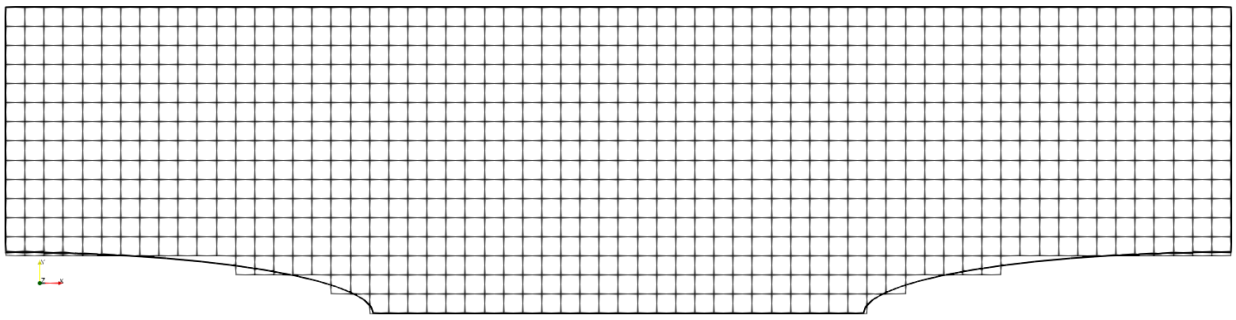


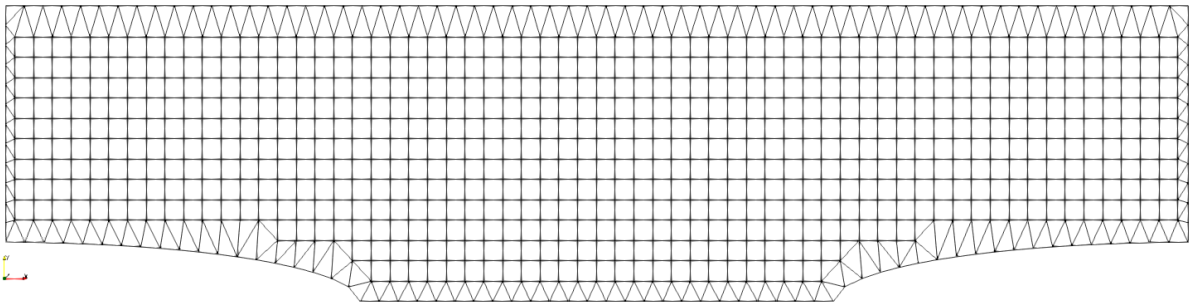
Figure 5.17 Description du cas test des électrodes ellipsoïdales

La figure 5.17 donne une description du problème étudié. La méthodologie de l'IBM et l'HM-CT sont appliqués au cas des deux électrodes axysimétriques. Ce problème est une application d'un transfert de chaleur entre deux électrodes à l'intérieur d'une chambre cylindrique. Pour des raisons de symétrie, on résoud ce problème uniquement en deux dimensions et en appliquant des conditions de Neumann sur l'axe. Les deux maillages sont donnés à la figure 5.18 à titre indicatif. Les solutions numériques sont comparées à l'aide d'une solution générée par le logiciel ANSYS Fluent sur un maillage fin ($\simeq 263K$ mailles) et utilisant une formulation volume finis.

Pour des raisons d'instabilités de construction du maillage HM-CD, les résultats ne sont pas disponibles pour cette méthode.



(a) Maillage IBM



(b) Maillage HM-CT

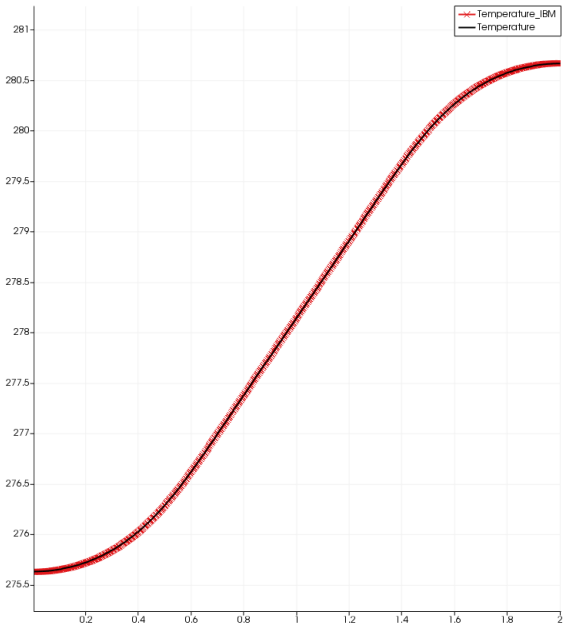
Figure 5.18 Maillages types

La figure 5.19 représente les isovaleurs de la température pour les deux méthodes. Le champ de température est donné en Kelvin. On voit que la variation de température respectent bien les conditions limites imposées. Les deux champs semblent identiques. On fait une coupe en $y = \text{cst}$ au milieu de la géométrie. Le profil de température est donné à la figure 5.20. Le profil de l'IBM est superposé à la solution numérique ANSYS, ainsi que l'HM-CT. La figure 5.21 donne l'erreur entre les solutions numériques IBM, HM et la solution ANSYS. On constate que l'erreur moyenne est identique $(4.00e-3)$. On procède à la reconstruction des flux aux parois des deux électrodes de la même manière que précédemment. Une reconstruction au premier ordre par une méthode de moindres carrés est effectuée. On peut voir à la figure 5.22, que les deux solutions obtenues à partir de l'IBM et l'HM-CT sont superposées à la solution générée par ANSYS. Au regard des deux autres cas, on n'observe pas de différences sur la reconstruction des flux et de l'erreur avec la méthode HM-CT.

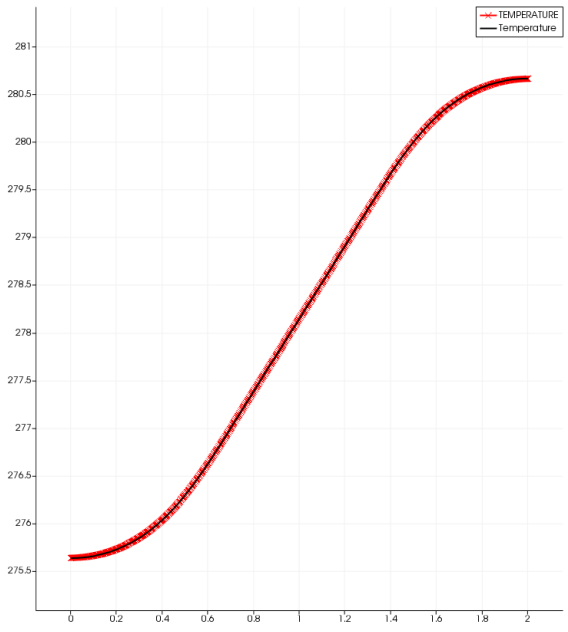
(a) Solution IBM

(b) Solution HM-CT

Figure 5.19 Solution pour un transfert thermique d'une électrode à l'autre

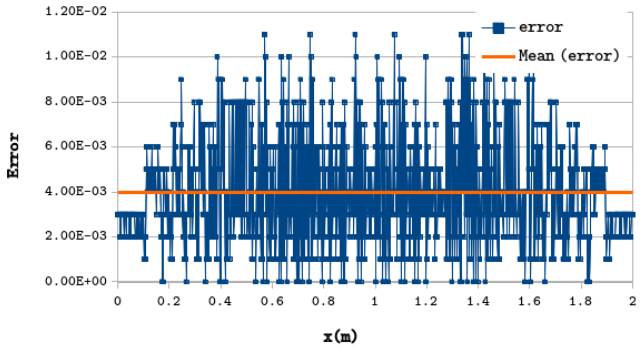


(a) IBM vs ANSYS Fluent

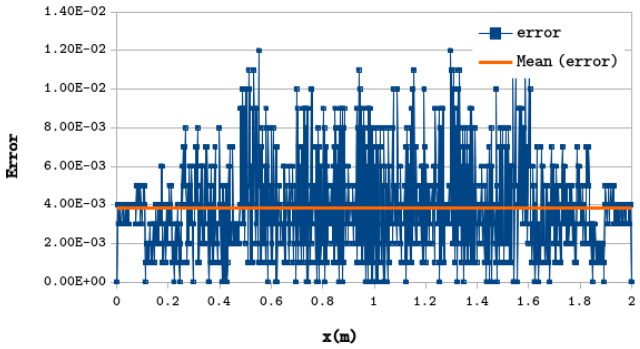


(b) HM vs ANSYS Fluent

Figure 5.20 Graphique des solutions

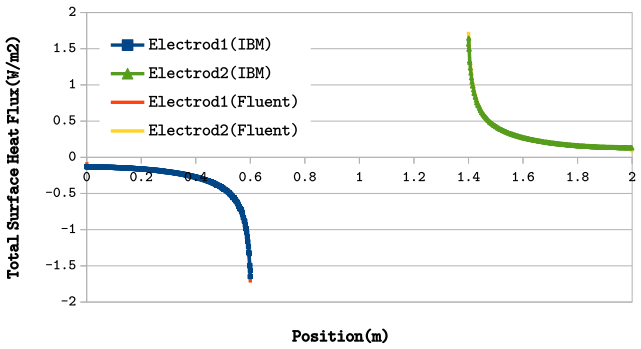


(a) Erreur IBM vs ANSYS Fluent

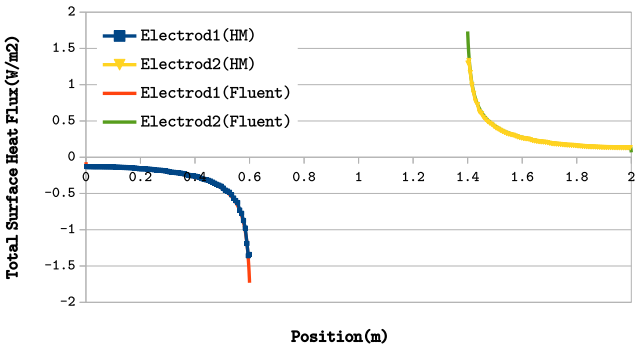


(b) Erreur Hybride vs ANSYS Fluent

Figure 5.21 Erreur entre les solutions numériques sur une ligne de coupe à $y = 0.25$



(a) Solution IBM vs ANSYS Fluent



(b) Solution Hybride vs ANSYS Fluent

Figure 5.22 Reconstruction des flux aux parois

5.3 Analyses

Globalement, les résultats numériques pour l'IBM sont concluants. Le choix des méthodes d'interpolation pour la valeur des points images I (section 3.4.3) sont suffisant pour conserver un ordre deux. De même pour l'HM-CD, le choix de l'interpolation bilinéaire dans un quadrangle de référence fait en sorte que l'on conserve bien le second ordre. Au contraire, la solution de la méthode HM-CT se dégrade rapidement. L'interpolation IDW pour calculer les valeurs ϕ_a et ϕ_b aux nœuds des arêtes, pour corriger les gradients, ne conserve pas l'ordre, et la précision en est affectée.

La méthode de reconstruction des gradients au premier ordre semble bien fonctionner pour les cas IBM et HM-CD. Du fait de la précision moindre de la solution HM-CT, le calcul des gradients en est aussi affecté. Comme on peut l'observer pour chaque méthode, la re-

construction par la méthode des moindres carrés est très oscillante. Pour la méthode IBM et la méthode sur l'HM-CD, l'erreur sur la reconstruction est inférieure à 1%. Pour le cas du HM-CT, certaines amplitudes dépassent 8%, même si la valeur moyenne reste aux alentours des 2% d'erreur.

D'après la discussion au chapitre 4 sur la structure de donnée du maillage, on peut clairement constater que le temps de calcul par la méthode HM-CT est très supérieur au temps de calcul de la méthode IBM ($\simeq 50s$ pour l'IBM contre $\simeq 450s$ pour l'HM-CT, et un nombre de cellules proche de 263K). Ce temps est impacté par toute la création de la grille cartésienne (connectivité, entités cellules, arêtes et nœuds) et du processus de triangulation (extraction de la zone, triangulation, reconstruction du maillage...).

5.4 Synthèse des travaux

Ce mémoire a présenté une comparaison de deux approches basées sur les schémas numériques FVM en deux dimensions. Les méthodes IBM et HM ont été testées sur deux cas analytiques et un cas sans solution analytique. La comparaison se fait sur plusieurs points qui sont résumés dans le tableau 5.1. Les sous-sections suivantes reviennent en détail sur les éléments de ce tableau.

Tableau 5.1 Comparaison des méthodes IBM et HM

Comparaison	**IBM - 2D**	**HM-CT - 2D**	**HM-CD - 2D**
Algorithme			
-Intérieur/extérieur	+++	+++	+++
-Adaptation de maillage	⊘	++	⊘
Structure de données			
-Information maillage	+++	−−	+++
-Solveur	++	++	++
Calculs			
-Géométrie	−−	+++	−−
-Convergence	++	−	++
-Précision	++	−	++
-Temps	+++	−−	N/A

+++ très bon
++ bon
− pas bon
−− à revoir
⊘ aucune possibilité

5.4.1 Algorithme

Intérieur/Extérieur est donné par l'algorithme PIP. Cet algorithme est rapide et facile à mettre en place pour une géométrie 2D. La rapidité de cet algorithme dépend uniquement du nombre de points de la géométrie et du nombre de cellules à tester.

Adaptation de maillage concerne toutes les opérations qui tendent à modifier la topologie du maillage. L'IBM et l'HM-CD tel qu'ils sont présentés dans la littérature supposent l'utilisation d'une grille cartésienne (maillage cartésien régulier), mais ce type de grille ne donne pas la possibilité à l'utilisateur de définir des zones d'intérêts. En revanche, la méthode HM-CT permet de pouvoir accéder à cette option, offrant la possibilité de générer plusieurs couches de triangles et des transitions plus lisses. Le maillage hybride Cartésien/-Triangle permet une plus grande liberté en terme de choix pour la géométrie, en plus de sa robustesse. Pour pouvoir accéder à ce niveau de détails qu'offre l'HM-CT avec les autres méthodes (IBM et HM-CD), il faudrait utiliser des maillages blocks ou octree qui permettent de pouvoir raffiner localement. Malheureusement, l'HM-CT ou l'octree nécessitent des besoins en stockage. On perd alors tout l'intérêt, au point du vue structure de données, de la grille cartésienne.

5.4.2 Structure de données

Information maillage est l'ensemble des données suffisantes et nécessaires pour construire un maillage. On a montré que la structure de données pour l'IBM ne nécessite quasiment aucune donnée. Étant une structure implicite opérée par des fonctions de bases (additions, soustraction...), il n'y a pas de lecture du maillage puisque toutes positions dans la grille peuvent être déduites de leur origine. Pour un processeur, le calcul est bien plus rapide qu'une lecture de mémoire. Au contraire, la structure du maillage hybride Cartésien/Triangle fait appel à des structures de données. Le nombre de lectures en mémoire ralentit le calcul global. De nombreuses boucles de recherche pour la construction de la connectivité non implicite demande un coût considérable en temps. En revanche, l'HM-CD semble offrir un compromis intéressant en terme de données. Seules les coordonnées des nœuds stockés et une connectivité implicite sont suffisant pour cette méthode.

Solveur est la partie qui concerne les opérations d'assemblages du système linéaire. La complexité du solveur est identique. Une fois la structure de données complètée, il ne reste qu'à lire les informations du maillage. Le calcul des coefficients extraits des développements IBM et HM (voir sous-section 3.4.3, 3.5.3) reste une tâche relativement facile. Seulement, le

remplissage du système linéaire peut être ralenti à cause des nombreuses conditions (*if..else*) pour le test des quadrangles pour l'IBM et l'HM-CD. Pour l'HM-CT, le nombre de cellules n'est pas connue à l'avance, ce qui implique de dimensionner un système linéaire souvent 2× plus grand que le nombre de cellule qu'il y a dans la grille.

5.4.3 Calculs

Géométrie représente l'ensemble des géométries que chaque technique peut prendre en compte. On a vu dans le chapitre 4, les limites 4.3 de chacune des méthodes. L'IBM et l'HM-CD sont similaires et ne traitent que très peu de géométries, voir quasiment aucune géométrie complexe. En revanche, l'HM-CT a démontré sa supériorité dans le traitement des géométries complexes (voir profil NACA 4.6.c). Ce point est crucial pour le choix d'une méthode pour la simulation. Mais aucuns calculs n'ont pu être effectués sur des géométries complexes.

Convergence - Précision est la vitesse à laquelle une méthode atteint un critère d'erreur fixé. La précision est l'erreur qu'une méthode génère en comparaison d'une méthode analytique. Pour les deux méthodes IBM et HM-CD on atteint l'ordre minimal fixé par la méthode FVM qui est l'ordre deux. Les techniques d'interpolations bilinéaires ont permis de conserver cet ordre, ce qui n'a pas été le cas pour la méthode l'HM-CT. La précision étant liée à la convergence, le constat est que la méthode sur grille cartésienne donne une erreur plus faible qu'une méthode sur triangles.

Temps traduit la complexité algorithmique des méthodes pour résoudre un calcul en fonction du nombre de mailles. Cette partie est en relation directe avec la structure de données choisie et du type de maillage. On a vu que l'IBM n'utilisait quasiment aucune structure pour fonctionner tandis que l'HM-CT utilisait une connectivité importante entre chaque élément du maillage. Le chargement de ces données a un impact direct sur le temps de calcul comme il a été présenté dans le chapitre 2.

CHAPITRE 6 CONCLUSION

Trois méthodes ont été abordées dans ce travail.

La méthode IBM a démontré que l'utilisation des grilles cartésiennes pour le calcul permet une baisse significative du temps de calcul pour des cas simples de transfert de chaleur, une baisse importante des données de maillages, et une convergence minimale d'ordre 2. En revanche, cette technique soulève d'importantes questions de mise en œuvre. Basée exclusivement sur des interprétations géométriques (projections, intérieur/extérieur...) la complexité des algorithmes représente un défi. Les problèmes de géométrie dans l'espace du point de vue informatique, ou Computational Geometry, sont les plus complexes dans leur mise en œuvre, même pour de simple tâche comme la définition de l'intérieur et l'extérieur d'un polygone.

La méthode HM-CT, dont la conception est un mélange de cellules cartésiennes et triangles a démontré sa robustesse pour la conception de maillage avec une géométrie plus complexe. La robustesse de ce type de maillage a aussi un coût non négligeable. La structure de données engendrée, a un impact direct sur le temps de calcul qui est aujourd'hui un facteur limitant. De plus, la structure des couches de triangles dégrade rapidement les solutions et doit faire appel à des algorithmes de contrôles et d'améliorations de la qualité. Toutes ces surcouches ajoutées ne garantissent pas une convergence minimal à l'ordre 2.

La méthode HM-CD est une voie très peu explorée. C'est un compris entre maillage cartésien et Body-Fitted. Pour des cas simples, ce maillage a démontré qu'il était capable de conserver à la fois une connectivité implicite, et de pouvoir prendre ses conditions limites directement sur la frontière. De plus, la correction des flux fait appel à des interpolations bilinéaires dans un espace de référence qui ont démontré aussi leur capacité d'interpoler précisément les points concernés. Néanmoins, à l'image de l'IBM, ce type de maillage est basé sur des considérations géométriques complexes.

La contrainte d'une résolution implicite de l'équation de Laplace a déterminé le type d'interpolation que nous avons pu employer. Les méthodes d'interpolation décrites dans ce mémoire sont toutes écrites de manière implicite. Seulement, on a vu que pour certaines, et notamment l'IDW, les formules sont facilement formulées pour être implicite, mais si on souhaite obtenir des ordres de convergence plus élevés, il est possible que la méthode de résolution ne soit plus implicite.

6.1 Limitations de la solution proposée

La technique des cellules fantômes ne permet pas de traiter les géométries à faible épaisseur et les géométries complexes. Beaucoup de cas de figure géométriques restent encore non-abordées par la littérature, principalement les cas de figure de projections multiples. Les algorithmes au sujet de la mise en œuvre de l'IBM ne sont pas expliqués en détails. Le cas de la sphère dans un écoulement est souvent repris pour démontrer les capacités de l'IBM, mais d'autres géométries comme un cube, ou une aile d'avion n'ont pratiquement jamais été traités. La géométrie de la sphère enlève beaucoup de cas de figure, comme les géométries à faible épaisseur, la possibilité de trouver de multiples projections valides.

Le maillage hybride Cartésien/Triangle présente de nombreux soucis en terme de temps et de conservation de l'ordre. Les cas de figure soulevés par l'IBM n'existe pas dans ce cas. Mais du fait de la non-orthogonalité des éléments, la mise en place du solveur est aussi complexe que l'IBM. L'application des conditions limites à appliquer en IBM (recherche des projections, construction du point image...) compense l'ajout des calculs supplémentaires pour la correction des flux le long des arêtes sur l'HM.

Le maillage hybride Cartésien Déformé quant à lui souffre des problèmes liées aux géométries à faible épaisseur et d'un manque de robustesse. Le manque de littérature sur ce sujet rend le sujet délicat à explorer. Ces nouveaux maillages restent à développer ainsi que des algorithmes solides pour prévoir l'ensemble des cas des figure est un véritable défi. De plus, les cas limites tendent à faire générer des structures de données pour gérer des cellules supplémentaires lorsque des nœuds se séparent.

6.2 Améliorations futures

Concernant la méthode IBM, de nouveaux algorithmes doivent être étudiés pour voir si la méthode est capable de traiter les géométries plus complexes et plus fines. Néanmoins, une amélioration possible serait de mixer les méthodes IBM cellules fantômes et HM par l'utilisation d'une structure du type octree. Cette amélioration permettrait d'accéder à de nouveaux cas tel que les écoulements du type couche limite. Cela permettrait d'effectuer un raffinement local, le tout en conservant les propriétés de la grille cartésienne. Enfin, il faudrait comparer le temps d'exécution par rapport à une méthode HM cartésien et triangle pour connaitre s'il existe un avantage réel.

En conservant l'idée d'un octree, on pourrait envisager de faire l'étude avec une pixélisation très fine des parois sans appliquer de méthode IBM. C'est-à-dire que la frontiere serait une succession de cellules intersectées. Chaque cellule intersectée représenterait une valeur de

conditions conditions limites à appliquer. Le calcul serait alors cartésien pur. Un schéma FVM cartésien serait utilisé pour le calcul. A l'image des afficheurs de télévision avec des résolutions ultra-fines, le calcul serait effectué de la même manière.

L'HM doit être revu d'un point de vue qualité du maillage. Un raffinement pour tous les triangles qui ont un côté supérieur au dx de la grille, et un lissage permettrait une amélioration. Il est nécessaire de trouver une méthode d'interpolation plus efficace pour l'interpolation des nœuds lorsqu'on doit corriger les flux aux arêtes. Une autre méthode serait de conserver une approche hybride cartésien et cellules Voronoï. Les propriétés des cellules Voronoï sont identiques aux cellules cartésiennes, mais comportent plus de côtés. La difficulté réside dans leur construction. On supprimerait ainsi toutes les interpolations aux nœuds, puisque les flux ne sont plus corrigés.

RÉFÉRENCES

D. Alciatore et R. Miranda, “A winding number and point-in-polygon algorithm”, *Glaxo Virtual Anatomy Project Research Report, Department of Mechanical Engineering, Colorado State University*, 1995.

S. Arabi, J. Trépanier, R. Camarero, P. Robin-Jouan, P. Guivarch, et T. Zhou, “Cfd simulation of multi-component real-gas flows in high voltage circuit breaker chambers”, dans *22nd International Conference on Gas Discharges and their Applications*, 2018.

W. Bai, C. G. Mingham, D. M. Causon, et L. Qian, “Finite volume simulation of viscous free surface waves using the cartesian cut cell approach”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 63, no. 1, pp. 69–95, 2010.

B. G. Baumgart, “Winged edge polyhedron representation”, STANFORD UNIV CA DEPT OF COMPUTER SCIENCE, Rapp. tech., 1972.

T. L. Bergman, F. P. Incropera, D. P. DeWitt, et A. S. Lavine, *Fundamentals of heat and mass transfer*. John Wiley & Sons, 2011.

P. A. Berthelsen et O. M. Faltinsen, “A local directional ghost cell approach for incompressible viscous flow problems with irregular boundaries”, *Journal of computational physics*, vol. 227, no. 9, pp. 4354–4397, 2008.

H. Changhong et L. Cheng, “Development of cartesian grid method for simulation of violent ship-wave interactions”, *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, vol. 28, no. 6, pp. 1003–1010, 2016.

A. Chaudhuri, A. Hadjadj, et A. Chinnayya, “On the use of immersed boundary methods for shock/obstacle interactions”, *Journal of Computational Physics*, vol. 230, no. 5, pp. 1731–1748, 2011.

M.-H. Chung, “Cartesian cut cell approach for simulating incompressible flows with rigid bodies of arbitrary shape”, *Computers & Fluids*, vol. 35, no. 6, pp. 607–623, 2006.

P. Cignoni, C. Montani, et R. Scopigno, “Dewall : A fast divide and conquer delaunay triangulation algorithm in ed”, *Computer-Aided Design*, vol. 30, no. 5, pp. 333–341, 1998.

D. Dussin, M. Fossati, A. Guardone, et L. Vigevano, “Hybrid grid generation for two-dimensional high-reynolds flows”, *Computers & Fluids*, vol. 38, no. 10, pp. 1863–1875, 2009.

E. S. Gawlik, H. Kabaria, et A. J. Lew, “High-order methods for low reynolds number flows around moving obstacles based on universal meshes”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 104, no. 7, pp. 513–538, 2015.

A. Gilmanov et S. Acharya, “A computational strategy for simulating heat transfer and flow past deformable objects”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 51, no. 17-18, pp. 4415–4426, 2008.

A. Gilmanov et F. Sotiropoulos, “A hybrid cartesian/immersed boundary method for simulating flows with 3d, geometrically complex, moving bodies”, *Journal of Computational Physics*, vol. 207, no. 2, pp. 457–492, 2005.

D. Godin, J. Trépanier, M. Reggio, X. Zhang, et R. Camarero, “Modelling and simulation of nozzle ablation in high-voltage circuit-breakers”, *Journal of Physics D : Applied Physics*, vol. 33, no. 20, p. 2583, 2000.

L. Guibas et J. Stolfi, “Primitives for the manipulation of general subdivisions and the computation of voronoi”, *ACM transactions on graphics (TOG)*, vol. 4, no. 2, pp. 74–123, 1985.

D. M. Ingram, D. M. Causon, et C. G. Mingham, “Developments in cartesian cut cell methods”, *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 61, no. 3-6, pp. 561–572, 2003.

H. Jasak, “Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows.” Thèse de doctorat, Imperial College London (University of London), 1996.

V. D. Liseikin, *Grid generation methods*. Springer, 1999, vol. 1.

K. A. Lundquist, “Immersed boundary methods for high-resolution simulation of atmospheric boundary-layer flow over complex terrain”, Thèse de doctorat, UC Berkeley, 2010.

H. Luo, S. Spiegel, et R. Löhner, “Hybrid grid generation method for complex geometries”, *AIAA journal*, vol. 48, no. 11, pp. 2639–2647, 2010.

A. Martin, M. Reggio, et J.-Y. Trépanier, “Solution of multi-species gas flows in circuit-breakers with arc-wall interactions”, dans *XIV International Conference on Gas Discharges and their Applications*, 2004, pp. 33–36.

D. J. Mavriplis, “An advancing front delaunay triangulation algorithm designed for robustness”, *Journal of Computational Physics*, vol. 117, no. 1, pp. 90–101, 1995.

M. Melot, J.-Y. Trépanier, R. Camarero, et E. Petro, “Comparison of numerical models in radiative heat transfer with application to circuit-breaker simulations”, *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 82, no. 12, pp. 2982–2996, 2012.

J.-M. Miao et M.-H. Ho, “Effect of flexure on aerodynamic propulsive efficiency of flapping flexible airfoil”, *Journal of Fluids and Structures*, vol. 22, no. 3, pp. 401–419, 2006.

E. Mitsoulis et R. Huilgol, “Entry flows of bingham plastics in expansions”, *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, vol. 122, no. 1-3, pp. 45–54, 2004.

R. Mittal et G. Iaccarino, “Immersed boundary methods”, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 37, pp. 239–261, 2005.

R. Mittal, H. Dong, M. Bozkurttas, F. Najjar, A. Vargas, et A. von Loebbecke, “A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries”, *Journal of computational physics*, vol. 227, no. 10, pp. 4825–4852, 2008.

D. E. Muller et F. P. Preparata, “Finding the intersection of two convex polyhedra”, *Theoretical Computer Science*, vol. 7, no. 2, pp. 217–236, 1978.

G. Pernaudat, “Une approche multi-physiques et multi-échelles pour l’amélioration de l’efficacité de la modélisation et de la simulation des disjoncteurs haute-tension”, Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, 2017.

S. Peron et C. Benoit, “Automatic off-body overset adaptive cartesian mesh method based on an octree approach”, *Journal of Computational Physics*, vol. 232, no. 1, pp. 153–173, 2013.

C. S. Peskin, “Flow patterns around heart valves : a numerical method”, *Journal of computational physics*, vol. 10, no. 2, pp. 252–271, 1972.

M. A. Puscas et L. Monasse, “A three-dimensional conservative coupling method between an inviscid compressible flow and a moving rigid solid”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 37, no. 6, pp. B884–B909, 2015.

R. Rangarajan et A. J. Lew, “Universal meshes : A new paradigm for computing with nonconforming triangulations”, *arXiv preprint arXiv :1201.4903*, 2012.

R. Rangarajan, M. M. Chiaramonte, M. J. Hunsweck, Y. Shen, et A. J. Lew, "Simulating curvilinear crack propagation in two dimensions with universal meshes", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 102, no. 3-4, pp. 632–670, 2015.

A. Requicha et S. Chan, "Representation of geometric features, tolerances, and attributes in solid modelers based on constructive geometry", *IEEE Journal on Robotics and Automation*, vol. 2, no. 3, pp. 156–166, 1986.

P. Robin-Jouan, K. Bousoltane, Y. Kieffel, J. Trepanier, R. Camarero, S. Arabi, et G. Pernaudat, "Analysis of last development results for high voltage circuit-breakers using new g3 gas", 2017.

P. Robin-Jouan et M. Yousfi, "New breakdown electric field calculation for sf6 high voltage circuit breaker applications", *Plasma Science and Technology*, vol. 9, no. 6, p. 690, 2007.

S. K. Sambasivan et H. UdayKumar, "Ghost fluid method for strong shock interactions part 2 : Immersed solid boundaries", *Aiaa Journal*, vol. 47, no. 12, pp. 2923–2937, 2009.

M. Seeger, "Perspectives on research on high voltage gas circuit breakers", *Plasma Chemistry and Plasma Processing*, vol. 35, no. 3, pp. 527–541, 2015.

J. R. Shewchuk, "Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation", *Computational geometry*, vol. 22, no. 1-3, pp. 21–74, 2002.

J. Trépanier, M. Reggio, H. Zhang, et R. Camarero, "A finite-volume method for the euler equations on arbitrary lagrangian-eulerian grids", *Computers & fluids*, vol. 20, no. 4, pp. 399–409, 1991.

H. K. Versteeg et W. Malalasekera, *An introduction to computational fluid dynamics : the finite volume method*. Pearson Education, 2007.

J. Yang et E. Balaras, "An embedded-boundary formulation for large-eddy simulation of turbulent flows interacting with moving boundaries", *Journal of Computational Physics*, vol. 215, no. 1, pp. 12–40, 2006.