POLYPUBLIE
Polytechnique Montréal

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Titre: Title:	Nouveaux estimateurs pour l'optimisation des systèmes automatisés de négociation d'options
Auteur: Author:	Gabriel Laprise
Date:	2018
Type:	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis
Référence: Citation:	Laprise, G. (2018). Nouveaux estimateurs pour l'optimisation des systèmes automatisés de négociation d'options [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/3260/

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: PolyPublie URL:	https://publications.polymtl.ca/3260/
Directeurs de recherche: Advisors:	Richard Labib
Programme: Program:	Maîtrise recherche en mathématiques appliquées

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal

https://publications.polymtl.ca

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

NOUVEAUX ESTIMATEURS POUR L'OPTIMISATION DES SYSTÈMES AUTOMATISÉS DE NÉGOCIATION D'OPTIONS

GABRIEL LAPRISE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)
AOÛT 2018

© Gabriel Laprise, 2018.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

NOUVEAUX ESTIMATEURS POUR L'OPTIMISATION DES SYSTÈMES AUTOMATISÉS DE NÉGOCIATION D'OPTIONS

présenté par : LAPRISE Gabriel
en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. LE DIGABEL Sébastien, Ph. D., président
M. LABIB Richard, Ph. D., membre et directeur de recherche
M. ADJENGUE Luc-Désiré, Ph. D., membre

REMERCIEMENTS

Je voudrais d'abord remercier mon directeur de recherche, Richard Labib. Ce projet de recherche n'aurait jamais vu le jour sans la confiance qu'il m'a accordée dès la première fois que nous nous sommes rencontrés à la fin de mes études au baccalauréat en génie logiciel. Il a su me donner les bons conseils et assez de liberté pour que je puisse pleinement réaliser ma vision. À travers mon cheminement, il m'a également donné plusieurs opportunités d'approfondir mes connaissances et mon expérience, notamment avec deux projets recherche en industrie et de multiples mandats de chargé de travaux dirigés en probabilités et statistique.

Tout au long du déroulement de ma maîtrise, ma famille et mes amis m'ont apporté un soutien essentiel. Merci à mes parents, Brigitte et Martin, pour m'avoir soutenu financièrement au baccalauréat et moralement pendant ma maîtrise. Vous m'avez toujours enseigné à ne pas accepter la médiocrité et à aller jusqu'au bout pour réaliser mes ambitions.

Finalement, je veux remercier ma partenaire, Nadya, qui a constamment été à mes côtés pendant les moments de doute et pendant les moments de réussite. Même si j'ai été complètement absorbé par mon travail au cours de certaines périodes, sa compréhension et son attention m'ont permis de garder le nord. Pour cela, je la remercie sincèrement.

RÉSUMÉ

Les options sont des produits financiers modernes permettant une approche stratégique à l'investissement. Les possibilités qui s'offrent à l'investisseur avec l'utilisation de ces produits sont vastes. Certains investisseurs les utilisent de manière subjective pour prendre position dans le marché et d'autres développent des stratégies plus systématiques afin d'enrichir leur portefeuille. L'objectif de ce mémoire est d'améliorer le rendement composé annuellement, ajusté au risque, des systèmes automatisés de négociation d'options comparativement aux méthodes usuelles. Deux contributions principales ont été faites pour y arriver. Premièrement, nous avons développé un estimateur de la moyenne de gain, conditionnelle à un ensemble d'information, d'une stratégie quelconque d'options. Deuxièmement, nous avons formulé un nouveau problème d'optimisation à variables discrètes pour la sélection des paramètres des stratégies. De plus, nous avons utilisé un algorithme de résolution avec des propriétés de convergence. Une contribution secondaire a été le développement d'un algorithme pour la liquidation des stratégies exploitant un ensemble d'information.

Les performances de notre système ont été simulées en utilisant des données historiques et un ensemble d'information standard. Les résultats de ces simulations montrent que notre système mène à des rendements supérieurs aux systèmes usuels avec un niveau de risque comparable, dans certains cas. Les meilleurs résultats sont obtenus lorsque l'on utilise seulement des options sur indice. Les simulations utilisant des options sur action et indice mènent à des rendements moins élevés. De plus, notre algorithme de liquidation permet de réduire le risque du système en gardant un rendement relativement stable.

Le mémoire se déroulera comme suit. Nous allons débuter en introduisant tous les concepts importants reliés à la négociation d'options et aux marchés financiers. Ensuite, nous ferons une revue de littérature exhaustive des systèmes de négociation automatiques d'options existants. Nous discuterons des lacunes de ces systèmes ainsi que des liens avec le nôtre. Puis, nous effectuerons le développement théorique des éléments de notre système de négociation. Finalement, nous expliquerons comment nous avons mis en place et simulé notre système et nous présenterons les résultats.

ABSTRACT

Option trading has grown in popularity over the last few decades. These financial products can be used to create a vast array of different trading strategies. A lot of investors use options to take positions, in financial markets, expressing their opinion. Other investors develop systematic methods of investing using options. The aim of this master's thesis is to improve the annually compounded return, adjusted to risk, of systematic option trading systems compared to common option trading methods. To achieve this goal, two main contributions were made. First, we developed an estimator of the mean, conditional to an information set, of the gain of any option strategy. Second, we formulated a new discrete optimisation problem for the selection of strategy parameters and solved it using a converging algorithm. We also developed an algorithm based on our estimator to liquidate existing positions.

The performance of our automated trading system was simulated using a historical dataset and a common information set. Results show that the annually compounded return of our system is higher than common methods, with similar risk characteristics, in certain situations. Simulations that only included index options produced the best results, while those including stock options had a lesser performance. Furthermore, our results suggest that the use of an algorithm for liquidation of existing positions tends to reduce the risk while keeping similar returns.

This master's thesis will be divided in four sections. In the first section, we will introduce every necessary concept relating to option trading and financial markets. The second section will present an exhaustive literature review of existing methods in automated option trading. We will concurrently analyze the existing literature and outline the difference between existing systems and ours. In the third section, we will lay out the mathematics behind our system. In the last section, we will detail the way in which the theoretical system was implemented and display the results of the simulations.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS iii

RÉSUMÉ iv

ABSTRACT v

TABLE DES MATIÈRES vi

LISTE DES TABLEAUX ix

LISTE DES FIGURES xi

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS xii

LISTE DES ANNEXES xiv

CHAPITRE 1 INTRODUCTION 1
1.1 Les marchés financiers 1
1.1.1 Qu'est-ce qu'un marché financier ? 1
1.1.2 Structure d'une bourse 1
1.2 Les options 5
1.2.1 Options sur action 5
1.2.2 Options sur indice boursier 7
1.2.3 Stratégies de négociation d'options 9
1.2.4 Le prix d'une option 15
1.2.5 La volatilité implicite 19
1.2.6 Les lettres grecques 19
1.3 Synthèse 20
1.4 Plan et objectif du mémoire 21

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE 22
2.1 Les branches principales 22
2.2 Méthodes naïves 22
2.2.1 Options sur indice boursier 23
2.2.2 Options sur action 25
2.3 Distribution du sous-jacent 27

2.3.1 Premier moment (espérance) . . . 27
2.3.2 Deuxième moment (variance) . . . 28
2.3.3 Moments supérieurs et quantiles . . . 31
2.4 Distribution conjointe de plusieurs sous-jacents . . . 32
2.4.1 Corrélations . . . 32
2.4.2 Dispersion . . . 32
2.5 Volatilité implicite . . . 33
2.5.1 Prédiction de la VI . . . 33
2.5.2 Événements . . . 35
2.6 Sélection par critères . . . 36
2.6.1 Critères de base . . . 36
2.6.2 Optimisation d'un portefeuille d'options . . . 38

CHAPITRE 3 LE SYSTÈME DE NÉGOCIATION AUTOMATISÉ . . . 41
3.1 Aperçu du système . . . 41
3.1.1 Structure . . . 41
3.1.2 Module de décisions . . . 42
3.2 Définitions préliminaires . . . 45
3.2.1 Monde extérieur . . . 45
3.2.2 Système . . . 48
3.3 Moyenne de gain . . . 50
3.3.1 Stochasticité du prix des sous-jacents . . . 51
3.3.2 Stochasticité du prix des options . . . 56
3.3.3 Moyenne de gain d'une position . . . 58
3.3.4 Positions multiples . . . 61
3.4 Sélection des nouvelles positions . . . 63
3.4.1 Lien avec la littérature . . . 63
3.4.2 Espace d'optimisation . . . 64
3.4.3 Fonction objectif . . . 65
3.4.4 Fonctions de contraintes . . . 66
3.4.5 Problème d'optimisation . . . 73
3.4.6 Algorithme de résolution . . . 74
3.5 Sélection des positions à liquider . . . 75

CHAPITRE 4 MISE EN OEUVRE, DONNÉES ET RÉSULTATS . . . 76
4.1 Sommaire . . . 76
4.2 Données . . . 76

4.2.1 Ensemble des sous-jacents actifs 76
4.2.2 Options 77
4.2.3 Prix de règlement 78
4.2.4 Taux d'intérêt 78
4.2.5 Ensemble d'information 79
4.3 Ajustement et évaluation de $\hat{m}_a$ et $\hat{m}_v$ 80
4.3.1 Paramètres et ajustement de $\hat{F}^{-1}_{R_{i;t_1;t_2-t_1}|\cdot}$ 80
4.3.2 Ajustement et évaluation de $\hat{VI}_{a,t,i}$ et $\hat{VI}_{v,t,i}$ 80
4.3.3 Évaluation de $\hat{m}_a$ et $\hat{m}_v$ 84
4.4 Simulations de négociation 86
4.4.1 Logiciel de simulation 87
4.4.2 Configurations des simulations 87
4.4.3 Simulations de la matrice $\mathbf{L}_t$ 89
4.4.4 Spécificités de l'algorithme *MADS* 90
4.4.5 Stratégies comparatives 93
4.4.6 Métriques d'évaluation 94
4.4.7 Résultats des simulations et discussion 95

CHAPITRE 5 CONCLUSION 105

RÉFÉRENCES 107

ANNEXES 119

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1 Définition des quatre types d'ordres de base alloués à la bourse. 2
Tableau 1.2 Carnet d'ordres de l'option ABC. 3
Tableau 1.3 Carnet d'ordres de l'option ABC après l'arrivée d'un ordre d'achat au marché de 1000 options. 4
Tableau 1.4 Carnet d'ordres de l'option ABC après l'arrivée d'un ordre de vente au marché de 1000 options. 4
Tableau 1.5 Carnet d'ordres de l'option ABC après l'arrivée d'un ordre d'achat à cours limité de 1000 options ayant une limite de 100,00 $. 5
Tableau 1.6 Carnet d'ordres de l'option ABC après l'arrivée d'un ordre de vente à cours limité de 1000 options ayant une limite de 99,50 $. 5
Tableau 1.7 Prix des options sur l'action de Microsoft, expirant le 19 février 2010, le 29 janvier 2010. 8
Tableau 1.8 Effets de l'augmentation des facteurs sur le prix des différents types d'options. 16
Tableau 1.9 Définition des lettres grecques pour une option d'achat et de vente (Hull, 2012). 19
Tableau 3.1 Prix du sous-jacent ABC à différentes périodes. 42
Tableau 3.2 Prix courant des options, expirants à $t = 30$, du sous-jacent ABC à différentes périodes. 43
Tableau 3.3 Métriques de risque associées aux fonctions de contraintes du problème de sélection. 72
Tableau 3.4 Définition des fonctions de contraintes. 72
Tableau 4.1 Éléments de l'ensemble des sous-jacents actifs utilisé pour la mise en place du système. 77
Tableau 4.2 Statistiques descriptives de l'échantillon de prix des sous-jacents actifs. 77
Tableau 4.3 Taille des échantillons de prix historiques d'options pour chaque sous-jacent actif. 78
Tableau 4.4 Quartiles, maximum et minimum de la VH (voir la section 4.2.4) avec $\ell = 60$, $\ell = 90$ et $\ell = 120$, pour tous les sous-jacents actifs. 79
Tableau 4.5 Effectif de la valeur du degré optimal (d_o) obtenu lors de la procédure d'ajustement de $\hat{VI}_{a,t,i}$ et $\hat{VI}_{v,t,i}$, pour chacun des sous-jacents actifs. 81
Tableau 4.6 R^2 des estimateurs $\hat{m}_a$ et $\hat{m}_v$ pour tous les sous-jacents actifs. 85

Tableau 4.7 Valeurs des contraintes de risque utilisées au problème d'optimisation 3.59 dans les simulations sans liquidations. 88
Tableau 4.8 Résultats de la procédure de sélection de la taille des fenêtres des estimateurs 4.2 et 4.3. 90
Tableau 4.9 Stratégies comparatives utilisées pour évaluer la performance du système de négociation. 93
Tableau 4.10 Métriques utilisées pour évaluer les performances des simulations de négociation et les comparer avec celles des stratégies comparatives. . 94
Tableau 4.11 Métriques d'évaluation des simulations de négociation, sans liquidations, incluant seulement les indices comme sous-jacents. 98
Tableau 4.12 Métriques d'évaluation des simulations de négociation, sans liquidations, incluant les indices et les actions comme sous-jacents. 101
Tableau 4.13 Métriques d'évaluation des simulations de négociation, avec liquidations, et des stratégies comparatives sur la même période. 104

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 Définition des différents types d'options. 6
Figure 1.2 Fonctions G_{AOA},G_{VOA},G_{AOV} et G_{VOV} où $k = K$, $p = P$ et $n = 1$. . . 11
Figure 1.3 Fonctions G_{APC} et G_{VPC} où $k = K$, $p = P$ et $n = 1$. 13
Figure 1.4 Synthèse du processus d'investissement. 20
Figure 3.1 Système de négociation automatisé. 41
Figure 4.1 R^2 calculés à partir de l'échantillon de test, 2004-2014, des estimateurs $\hat{VI}_{a,t,i}$ et $\hat{VI}_{v,t,i}$ pour chacun des sous-jacents actifs. 82
Figure 4.2 Moyenne et écart-type échantillonnal des résidus absolus des estimateurs $\hat{VI}_{a,t,i}$ et $\hat{VI}_{v,t,i}$, pour tous les sous-jacents actifs, en fonction de l'année, du temps avant l'expiration et du niveau de monnaie. 83
Figure 4.3 Moyenne échantillonnale du gain des estimateurs $\hat{m}_a$ et $\hat{m}_v$ à l'échéance, catégorisés par observations positives et négatives. 86
Figure 4.4 Résultats des simulations de négociation pour la sélection de taille du *Poll*. 92
Figure 4.5 Évolution de VN_t pour les stratégies comparatives. 96
Figure 4.6 Évolution de la valeur nette du système pour les simulations sans liquidations incluant seulement les indices comme sous-jacents. 97
Figure 4.7 Évolution de la valeur nette du système pour les simulations sans liquidations incluant les indices et les actions comme sous-jacents. . . . 100
Figure 4.8 Évolution de la valeur nette du système pour les simulations avec liquidations. 102
Figure B.1 *Yield* annualisé des *US 4-week T-Bill* pendant la période 2003-2014. . 126

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

AOA	Achat d'une option d'achat
AOD	Achat d'une option double
AOV	Achat d'une option de vente
APC	Achat d'une position combinée
AR	*Autoregressive*
ASE	*Athens Stock Exchange*
Ask	Meilleure offre de vente
ASX200	*Australian Securities Index*
Bid	Meilleure demande d'achat
BSM	*Black-Scholes-Merton*
CBOE	*Chicago Board of Options Exchange*
DAX	*Deutscher Aktienindex*
EH	Écart haussier
FCM	*Fractal classification machine*
FTSE 100	*Financial Times Stock Exchange* 100 *Index*
GARCH	*Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*
HSI	*Hang Seng Index*
IBEX 35	*Índice Bursátil Español* 35
KOPSI	*Korea Composite Stock Price Index*
LEAPS	*Long term equity anticipation security*
MLD	*Multiple linear discriminant*
MM	*Markov Model*
NASDAQ 100	*National Association of Securities Dealers Automated Quotations* 100
NDS	Symbole du prix de règlement des options NDX
NDX	Symbole des options sur l'indice NASDAQ 100
Nikkei 225	Index de la bourse japonaise
NN	*Nearest neighbour*
NOMAD	*Nonlinear Optimization by Mesh Adaptive Direct Search*
NYSE	*New York Stock Exchange*
Prix courant	Moyenne entre le *bid* et l'*Ask*
Prix juste	De l'anglais *fair price*
RLB	Régression logistique baysienne
RLS	Symbole du prix de règlement des options RUT

RN	Réseau de neurones
RNR	Réseau de neurones récurrent
RUT	Symbole des options sur l'indice *Russell* 2000
SET	Symbole du prix de règlement des options SPX
SONFSN	*Self organizing neural fuzzy semantic network*
S&P 100	*Standard & Poor's* 100
S&P 500	*Standard & Poor's* 500
SPX	Symbole des options sur l'indice S&P 500
SVI	Surface de volatilité implicite
SVM	*Support vector machine*
TAEIX	*Taiwan Capitalizaiton Weighted Index*
USD/DM	Taux de change entre le *deutschemark* allemand et le dollar américain
USD/EUR	Taux de change entre l'euro et le dollar américain
USD/GBP	Taux de change entre la livre sterling et le dollar américain
USD/JPY	Taux de change entre le yen japonais et le dollar américain
VaR	*Value at risk*
VI	Volatilité implicite
VIX	*S&P 500 Volatility Index*
VH	Volatilité historique
VMMM	*Variable memory length Markov model*
VOA	Vente d'une option d'achat
VOD	Vente d'une option double
VOV	Vente d'une option de vente
VPC	Vente d'une position combinée

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE A PREUVES 119
ANNEXE B DONNÉES 126

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

1.1 Les marchés financiers

1.1.1 Qu'est-ce qu'un marché financier ?

Le but fondamental d'un marché financier est de jumeler acheteurs et vendeurs d'un ou plusieurs produits financiers. Il existe deux types de marchés : les bourses et les marchés de gré à gré. Dans ce mémoire, nous étudierons les options des produits financiers échangés sur une bourse.

Une bourse est une organisation qui facilite les transactions entre les participants. Elle le fait en mettant sur pied une infrastructure et des normes de négociation pour chaque produit. Il existe trois principaux types de participants : les investisseurs, les courtiers et les animateurs de marché. Les investisseurs prennent des décisions d'investissement et les envoient à un courtier. Le courtier est un intermédiaire entre les investisseurs et le plancher de la bourse. Il est un exécutant et profite des frais qu'il facture à l'investisseur. Généralement, le courtier va communiquer avec les animateurs de marché sur le plancher de la bourse. Ceux-ci agissent comme fournisseurs de liquidité. Ils ne doivent pas cesser d'afficher une demande d'achat et une offre de vente pendant les heures d'ouverture. La prochaine section mettra en lumière cette affirmation. Historiquement, les négociations s'effectuaient verbalement sur le plancher de la bourse. Cependant, les bourses modernes sont devenues majoritairement électroniques (Johnson, 2010).

Les marchés de gré à gré ne sont pas gérés par un organisme central. Un marché de gré à gré est constitué de participants professionnels tels que des institutions financières ou gouvernementales. Les participants négocient par téléphone. Pour finaliser leurs transactions, ils utilisent un système électronique reliant leurs institutions. Puisque les produits financiers étudiés dans ce mémoire sont échangés sur une bourse, nous n'irons pas plus loin dans l'explication du fonctionnement d'un marché de gré à gré.

1.1.2 Structure d'une bourse

La compréhension du fonctionnement d'une bourse sera importante à travers le développement de ce mémoire, car celui-ci porte sur un nouveau système de négociation d'options. Dans cette section, divers exemples seront présentés pour illustrer la mécanique du marché.

Considérons une bourse hypothétique où s'échange l'option ABC[1]. Supposons qu'un investisseur désire l'acheter ; il contacte alors son courtier. Celui-ci doit ensuite décider quel type d'ordre d'achat il va envoyer sur le plancher. Il existe deux types d'ordres d'achat : au marché et à cours limité. D'une part, si le courtier envoie un ordre d'achat au marché, l'investisseur achètera une option au plus petit prix disponible, au moment de l'arrivée de l'ordre, sur le plancher de la bourse. Cet ordre sera assurément exécuté, mais le prix est incertain. D'autre part, si le courtier envoie un ordre d'achat à cours limité, l'investisseur achètera une option ABC en payant au plus le prix limite spécifié dans l'ordre. Cette limite est choisie par le créateur de l'ordre, le courtier dans ce cas-ci. Un ordre limite ne sera pas assurément exécuté, mais le prix auquel il sera exécuté est certain. Les mêmes principes s'appliquent dans le cas d'un ordre de vente, à la seule différence que pour un ordre de vente à cours limité, la limite spécifiée est une borne inférieure de prix. Dans l'exemple précédent, le courtier envoie un ordre avec une quantité d'une seule option, mais il aurait pu spécifier n'importe quelle quantité. Les types d'ordres et leurs effets sont résumés au tableau 1.1.

Tableau 1.1 Définition des quatre types d'ordres de base alloués à la bourse.

	Type	
	Au marché	*À cours limité de l \$*
Achat *de* n_a options	Achat de n_a options à la plus petite offre disponible	Achat de n_a options à un maximum de l \$/option
Vente *de* n_v options	Vente de n_v options à la plus grande demande disponible	Vente de n_v options à un minimum de l \$/option

Dans la mise en situation précédente, la bourse hypothétique opère sur le principe de bourse à la criée. Le plancher est constitué d'un groupe de personnes qui négocient face à face. L'environnement étant souvent bruyant, les négociateurs doivent crier, d'où le nom bourse à la criée. Aujourd'hui, les bourses sont électroniques, tel que mentionné dans la section 1.1.1. Celles-ci emploient une méthode systématique pour exécuter les ordres entrants tout en satisfaisant les conditions de chacun des ordres. Quoiqu'il existe des variations dans le fonc-

1. Les options ont une définition très spécifique. L'exemple est simplifié pour la compréhension du lecteur. Nous reviendrons sur la définition d'une option dans la prochaine section.

tionnement des bourses électroniques, elles emploient toutes un objet central appelé le carnet d'ordres. Un carnet d'ordres hypothétique de l'option ABC est donné au tableau 1.2. Ce carnet nous informe de tous les ordres à cours limité qui ont été envoyés à la bourse et qui n'ont pas encore été exécutés, mais qui sont toujours actifs. La colonne de gauche nous renseigne sur les ordres d'achat et celle de droite sur les ordres de vente. Par exemple, la première ligne de la colonne de gauche nous indique qu'il y a trois ordres d'achat à cours limité avec une limite de 99,65 $. Ces ordres totalisent une demande de 1000 options. Les lignes de la colonne de gauche sont en ordre décroissant de prix et les lignes de la colonne de droite sont en ordre croissant de prix. Ainsi, le prix de la première ligne de la colonne de gauche est la meilleure demande d'achat et le prix de la première ligne de la colonne de droite est la meilleure offre de vente. Le terme *bid* est utilisé pour nommer la meilleure demande d'achat et le terme *ask* est utilisé pour nommer la meilleure offre de vente. On considère que la moyenne entre le *bid* et l'*ask* est le prix courant de l'option.

Tableau 1.2 Carnet d'ordres de l'option ABC.

Demande d'achat			**Offre de vente**		
Nb. d'ordres	Quantité totale	Prix limite	Prix limite	Quantité totale	Nb. d'ordres
3	1000	99,65 $	100,10 $	500	4
4	2000	99,55 $	100,50 $	1500	10
3	750	99,45 $	100,60 $	500	1
7	5000	99,20 $	100,75 $	2000	11
2	1350	99,10 $	100,85 $	3500	9
5	2500	99,00 $	100,99 $	2250	6

Les effets de divers ordres sur le carnet d'ordres du tableau 1.2 sont illustrés aux tableaux 1.3, 1.4, 1.5 et 1.6. Quatre ordres sont étudiés :

1. Ordre d'achat de 1000 options au marché
2. Ordre de vente de 1000 options au marché
3. Ordre d'achat de 1000 options à cours limité avec une limite de 100,00 $
4. Ordre de vente de 1000 options à cours limité avec une limite de 99,50 $

Les tableaux 1.3 et 1.4 montrent le carnet après l'arrivée de l'ordre d'achat au marché et de l'ordre de vente au marché, respectivement. On voit que l'ordre d'achat a été jumelé avec la meilleure offre de vente disponible : 100,10 $. Cependant, comme il n'y avait que 500 options disponibles à ce prix, les 500 options additionnelles ont été achetées à 100,50 $, le second

meilleur prix disponible. On remarque que le nombre d'ordres au prix limite de 100,50 $ est passé de 10 à 8. Ceci indique que deux ordres de vente ont été remplis lorsque les 500 options furent achetées à 100,50 $. L'ordre de vente au marché a été jumelé avec la meilleure offre d'achat : 99,65 $. Dans ce cas-ci, il y avait un nombre suffisant d'options en vente pour compléter l'ordre totalement.

Tableau 1.3 Carnet d'ordres de l'option ABC après l'arrivée d'un ordre d'achat au marché de 1000 options.

Demande d'achat			**Offre de vente**		
Nb. d'ordres	Quantité totale	Prix limite	Prix limite	Quantité totale	Nb. d'ordres
3	1000	99,65 $	100,50 $	1000	8
4	2000	99,55 $	100,60 $	500	1
3	750	99,45 $	100,75 $	2000	11
7	5000	99,20 $	100,85 $	3500	9
2	1350	99,10 $	100,99 $	2250	6
5	2500	99,00 $			

Tableau 1.4 Carnet d'ordres de l'option ABC après l'arrivée d'un ordre de vente au marché de 1000 options.

Demande d'achat			**Offre de vente**		
Nb. d'ordres	Quantité totale	Prix limite	Prix limite	Quantité totale	Nb. d'ordres
4	2000	99,55 $	100,10 $	500	4
3	750	99,45 $	100,50 $	1500	10
7	5000	99,20 $	100,60 $	500	1
2	1350	99,10 $	100,75 $	2000	11
5	2500	99,00 $	100,85 $	3500	9
			100,99 $	2250	6

Les tableaux 1.4 et 1.5 exhibent le carnet d'ordres après l'arrivée des ordres à cours limité. L'ordre d'achat à cours limité n'a pas été exécuté à son arrivée, car la meilleure offre de vente était de 100,10 $ et la limite spécifiée par l'ordre était de 100,00 $. Conséquemment, l'ordre d'achat est ajouté au carnet d'ordres. L'ordre de vente à cours limité a été exécuté immédiatement, puisque la limite spécifiée était de 99,50 $ et il y avait une demande pour 1000 options à 99,65 $.

Tableau 1.5 Carnet d'ordres de l'option ABC après l'arrivée d'un ordre d'achat à cours limité de 1000 options ayant une limite de 100,00 $.

Demande d'achat			**Offre de vente**		
Nb. d'ordres	Quantité totale	Prix limite	Prix limite	Quantité totale	Nb. d'ordres
1	1000	100,00 $	100,10 $	500	4
3	1000	99,65 $	100,50 $	1500	10
4	2000	99,55 $	100,60 $	500	1
3	750	99,45 $	100,75 $	2000	11
7	5000	99,20 $	100,85 $	3500	9
2	1350	99,10 $	100,99 $	2250	6
5	2500	99,00 $			

Tableau 1.6 Carnet d'ordres de l'option ABC après l'arrivée d'un ordre de vente à cours limité de 1000 options ayant une limite de 99,50 $.

Demande d'achat			**Offre de vente**		
Nb. d'ordres	Quantité totale	Prix limite	Prix limite	Quantité totale	Nb. d'ordres
4	2000	99,55 $	100,10 $	500	4
3	750	99,45 $	100,50 $	1500	10
7	5000	99,20 $	100,60 $	500	1
2	1350	99,10 $	100,75 $	2000	11
5	2500	99,00 $	100,85 $	3500	9
			100,99 $	2250	6

1.2 Les options

1.2.1 Options sur action

Une option est un produit financier qui se transige sur une bourse[2]. La plus grosse bourse d'options au monde est le *Chicago Board Options Exchange* (CBOE) (Hull, 2012). Une option est un produit dérivé, car elle est reliée à une valeur financière que l'on nomme le sous-jacent. Le sous-jacent le plus commun est l'action d'une certaine compagnie, mais ce pourrait être n'importe quel produit financier. Dans ce mémoire, le système de négociation fera usage d'options sur actions, d'où l'importance de la compréhension de leur fonctionnement.

Une option d'achat est un contrat. Celui-ci donne le droit, mais pas l'obligation, à son détenteur, d'acheter un nombre d'unités du sous-jacent à un prix fixe, que l'on nomme le prix

2. Certaines options sont échangées sur un marché de gré à gré. Nous en ferons mention dans la revue de littérature. Cependant, elles ne seront pas utilisées dans notre système.

d'exercice. Le prix d'exercice et le nombre d'unités ont été établis à la création du contrat. Ce dernier est créé par un individu appelé le signataire et est valide jusqu'à une date préétablie nommée la date d'expiration. Dans le cas de l'option d'achat, si le détenteur exerce l'option, c'est le signataire qui devra lui vendre le sous-jacent. Une option de vente est identique à l'option d'achat, sauf qu'elle donne le droit de vendre. Une option peut être européenne ou américaine. Une option européenne ne peut être exercée qu'au jour d'expiration, alors qu'une option américaine peut être exercée à tout moment jusqu'au jour d'expiration. Cette terminologie n'est pas reliée à la région géographique où l'option est échangée. Une option américaine peut être échangée en Asie, par exemple. La figure 1.1 fait une synthèse des définitions des différents types d'options.

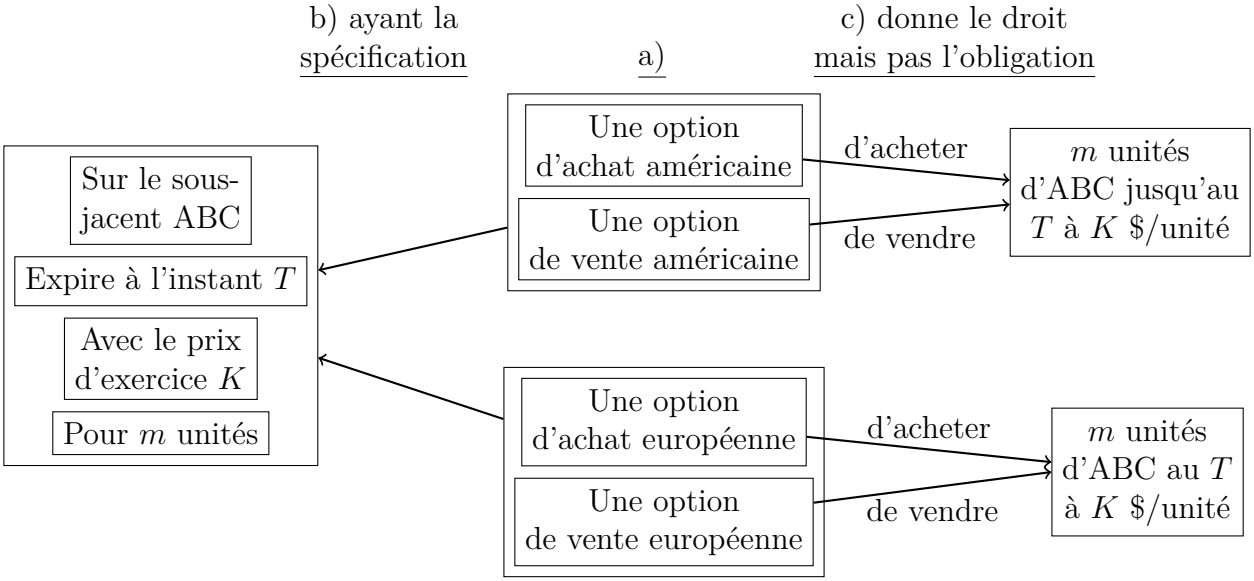


Figure 1.1 Définition des différents types d'options.

À la section 1.1.2, nous avons considéré une option nommée ABC. En réalité, l'option aurait dû être spécifiée selon les paramètres décrits précédemment et chaque spécification d'option est traitée comme un produit distinct. Le montant d'argent payé pour une option est appelé la prime. Les bourses d'options mettent en place un ensemble de règles sur les valeurs admises pour les paramètres de spécification des options. Par conséquent, il existe un nombre fini et dénombrable de spécifications d'options disponibles. Une pratique commune est de fixer le nombre d'unités livrables à $m = 100$ pour chaque option, d'allouer seulement des options américaines, de restreindre les dates d'expiration au 3^e vendredi de chaque mois et d'allouer un ensemble fini de prix d'exercice. Lorsqu'une spécification d'option est expirée, toutes les options ayant cette spécification et qui n'ont pas été exercées sont effacées. Le carnet d'ordres

qui y est associé est également effacé. De nouvelles spécifications sont mises en circulation périodiquement, selon les règles de la bourse.

Prenons pour exemple les options sur l'action de Microsoft. Le 29 janvier 2010, l'action de Microsoft valait 28,18 $. Le tableau 1.7 montre la meilleure demande d'achat (*bid*) et la meilleure offre de vente (*ask*), pour chaque spécification d'options disponibles le 29 janvier 2010. Seules les options venant à échéance le 19 février 2010 sont affichées. L'unité des prix est le $/action. Chaque option est associée à 100 actions. On doit donc multiplier les prix par 100 pour obtenir les prix effectifs. Le contenu du tableau 1.7 est appelé la chaîne des options. Elle est regroupée par type d'options (achat ou vente) et par prix d'exercice. Les options d'achat dont le prix d'exercice est inférieur au prix courant de l'action sont dites dans la monnaie. Elles peuvent être exercées à profit, car si l'option est exercée, on achète 100 actions de Microsoft à un prix inférieur à celui du marché. On peut immédiatement vendre les 100 actions pour réaliser un profit. De même, les options de vente dont le prix d'exercice est supérieur au prix courant de l'action sont dites dans la monnaie. En effet, le détenteur peut d'abord acheter 100 actions sur le marché et les vendre au créateur de l'option à un prix supérieur. Les options dans la monnaie sont mises en évidence au tableau 1.7 par l'encadrement en pointillé. Des options sont dites hors de la monnaie lorsque leur exercice immédiat ne se solde pas par un profit. Une option d'achat est hors de la monnaie si son prix d'exercice est supérieur au prix courant de l'action, alors qu'une option de vente est hors de la monnaie si son prix d'exercice est inférieur au prix courant de l'action. Une option est dite à la monnaie si son prix d'exercice est égal au prix courant du sous-jacent.

1.2.2 Options sur indice boursier

Le système de négociation automatique développé dans ce mémoire utilisera des options sur indice boursier. Celles-ci sont particulières, car un indice ne peut être acheté ou vendu. Un indice se réfère à un indicateur de l'économie d'un pays. Il est obtenu en calculant la moyenne pondérée de la capitalisation boursière des compagnies le composant. Trois indices seront utilisés dans notre système : le S&P 500, le NASDAQ 100 et le *Russell* 2000 [3]. Ceux-ci réfèrent à l'économie américaine et sont reliés à l'économie générale, au secteur de la technologie et aux compagnies de petite taille, respectivement. Le chiffre qui leur est rattaché correspond au nombre de compagnies incluses dans l'indice.

Comme les indices ne sont pas explicitement négociables, les bourses ont créé des options

3. Les acronymes sont les suivants : *Standard and Poor's* 500 et *National Association of Securities Dealers Automated Quotation* 100.

Tableau 1.7 Prix des options sur l'action de Microsoft, expirant le 19 février 2010, le 29 janvier 2010. Les options encadrées sont dans la monnaie.

Options d'achat			**Options de vente**		
Prix d'exercice	*Bid*	*Ask*	*Bid*	*Ask*	Prix d'exercice
25	3,15 $	3,25 $	0,07 $	0,09 $	25
26	2,2 $	2,3 $	0,15 $	0,17 $	26
27	1,38 $	1,44 $	0,33 $	0,37 $	27
28	0,75 $	0,79 $	0,74 $	0,75 $	28
29	0,36 $	0,37 $	1,31 $	1,39 $	29
30	0,16 $	0,19 $	2,13 $	2,22 $	30
31	0,08 $	0,09 $	3,05 $	3,1 $	31
32	0,03 $	0,04 $	3,95 $	4,15 $	32
33	0,01 $	0,03 $	4,95 $	5,05 $	33
34	0,01 $	0,02 $	5,95 $	6,1 $	34
35	0,00 $	0,01 $	6,95 $	7,1 $	35
36	0,00 $	0,02 $	7,85 $	8,1 $	36

dites réglées en trésorerie. Ces options sont européennes. Lors de l'exercice d'une option, le signataire livre des dollars au détenteur de l'option en cas de profit et ne livre rien en cas de perte. Pour une option d'achat réglée en trésorerie, le montant livré à l'exercice est égal au profit qui aurait été réalisé en achetant l'indice au prix d'exercice et en le vendant au prix courant, le jour de l'expiration. Pour une option de vente réglée en trésorerie, le montant livré à l'exercice est égal au profit réalisé en achetant l'indice à sa valeur courante et en le vendant au signataire de l'option au prix d'exercice.

Les options sur indice les plus échangées sont celles du S&P 500. Elles sont échangées exclusivement au CBOE et portent communément le nom d'options SPX (CBOE, 2016). À l'expiration des options, le CBOE publie une valeur sous le symbole SET qui est précise à deux décimales. Cette valeur est utilisée pour calculer les valeurs des montants devant être livrés par les signataires d'options. Par exemple, supposons qu'un participant possède une option d'achat sur le S&P 500 expirant en janvier 2015 avec un prix d'exercice de 1900$. La valeur SET publiée par le CBOE, pour les options mensuelles expirant en janvier 2015, est $1989,68$\$. Le signataire aurait dû livrer $100(1989,68 - 1900)$\$ = 8968 \$ au titulaire de

l'option. Si le prix d'exercice avait été au-dessus de la valeur SET, le signataire de l'option n'aurait rien livré au titulaire. La même logique s'applique pour une option de vente, mais le prix de l'indice doit être en dessous de la valeur courante du S&P 500 pour que le titulaire de l'option se fasse livrer un montant par le signataire. Les indices NASDAQ 100 et *Russell* 2000 possèdent également des chaînes d'options. Elles sont regroupées sous les noms NDX et RUT, respectivement. Les valeurs publiées par le CBOE pour leur règlement sont nommées NDS et RLS.

1.2.3 Stratégies de négociation d'options

Jusqu'à présent, nous avons étudié les bases du marché et la définition des différents types d'options qui seront utilisées dans notre système de négociation. Maintenant, nous verrons comment les options peuvent être utilisées pour créer des stratégies de négociation. Ces concepts sont cruciaux pour la compréhension de notre système de négociation.

Stratégies de base

Il existe quatre stratégies de base en négociation d'options (Cohen, 2005), énumérées ci-dessous.

1. L'achat d'une option d'achat (AOA)
2. La vente d'une option d'achat (VOA)
3. L'achat d'une option de vente (AOV)
4. La vente d'une option de vente (VOV)

Lorsqu'une option d'achat est achetée, l'investisseur parie sur la montée du prix du sous-jacent. Deux scénarios sont possibles. Premièrement, le prix du sous-jacent peut monter au-dessus du prix d'exercice. Dans ce cas, l'option peut être exercée à profit. Le profit serait égal à la différence entre le prix courant et le prix d'exercice, moins la prime [4]. Deuxièmement, le prix du sous-jacent peut ne jamais monter au-dessus du prix d'exercice. L'option n'étant pas exercée, la perte est égale à la prime. Le gain à l'exercice de la stratégie AOA est donné par la fonction suivante :

$$G_{AOA}(x,k,p,n) = \begin{cases} -np & \text{si } x < k \\ n(x-(k+p)) & \text{si } x \geqslant k \end{cases} \tag{1.1}$$

4. La prime est le prix payé pour une option.

où x est le prix du sous-jacent à l'échéance, k est le prix d'exercice de l'option, p est la prime et n le nombre d'options achetées. Le gain est donné en \$ par unité du sous-jacent.

Pour être en mesure d'acheter une option avec une certaine spécification, des options de ce type doivent d'abord être créées. La bourse n'est pas responsable de créer les options. Chaque participant peut décider de créer une option [5]. Ainsi, le nombre d'options en circulation dépend de l'offre et de la demande. Une stratégie de vente d'option d'achat consiste à créer une option d'achat puis à la vendre. Une fois que l'investisseur a vendu l'option, il doit remplir son engagement si le titulaire le désire [6]. Dans le cas où le titulaire n'exerce jamais son droit, le vendeur garde la prime. Sinon, il doit aller acheter le sous-jacent au prix courant et le vendre au titulaire au prix d'exercice de l'option. Le gain à l'exercice de la stratégie VOA est donné par la fonction

$$G_{VOA}(x,k,p,n) = \begin{cases} np & \text{si } x < k \\ n((k+p)-x) & \text{si } x \geqslant k \end{cases} \tag{1.2}$$

où les variables ont la même définition que pour la fonction 1.1.

L'achat d'une option de vente est une stratégie qui profite de la baisse du prix du sous-jacent. Admettons que le prix du sous-jacent est supérieur au prix d'exercice de l'option ; dans ce cas elle pourra être exercée à profit. Dans le cas contraire, l'acheteur de l'option perd la prime payée. La fonction de gain dépend des mêmes facteurs que celle des autres stratégies et est donnée par

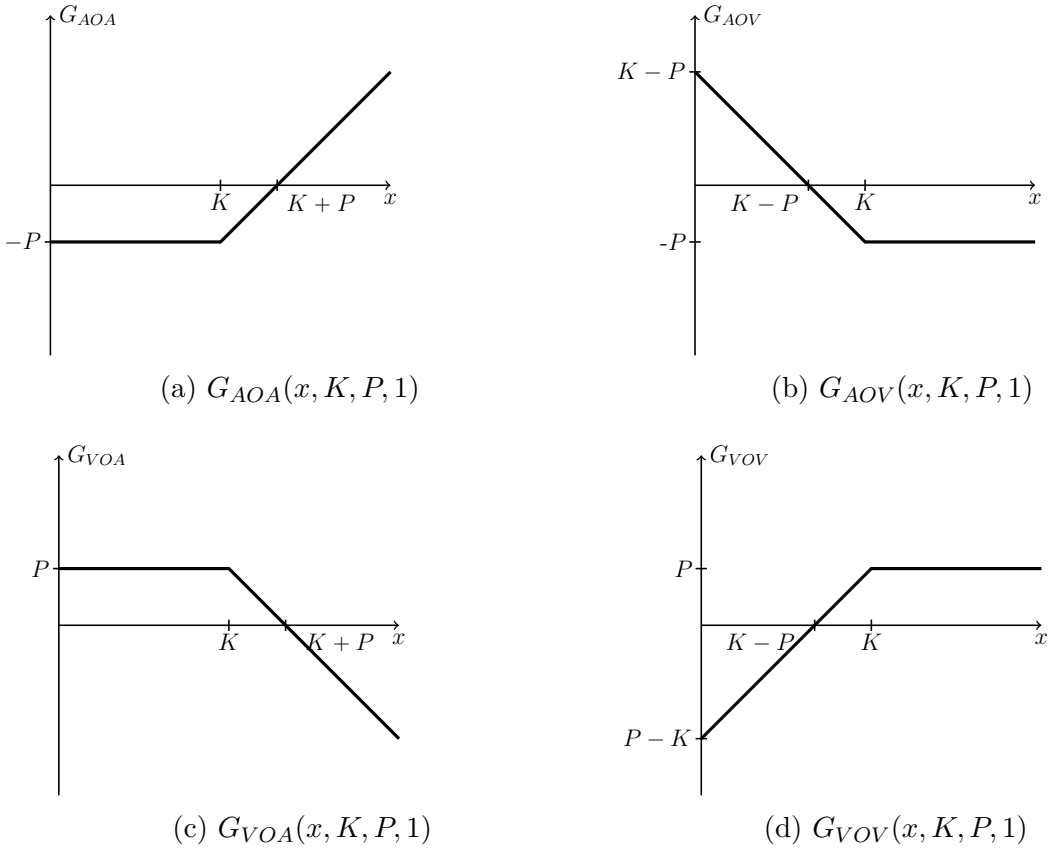
$$G_{AOV}(x,k,p,n) = \begin{cases} n((k-p)-x) & \text{si } x < k \\ -np & \text{si } x \geqslant k \end{cases}. \tag{1.3}$$

On peut également parier sur la montée du prix du sous-jacent en effectuant la vente d'une option de vente. Dans le cas où le prix du sous-jacent reste supérieur au prix d'exercice de l'option, elle n'est pas exercée, réalisant un profit égal à la prime reçue. Si elle est exercée, la différence entre le prix d'exercice et le prix courant, moins la prime, est perdue. La définition de la fonction de gain d'une VOV est donnée par

$$G_{VOV}(x,k,p,n) = \begin{cases} n(x-(k-p)) & \text{si } x < k \\ np & \text{si } x \geqslant k \end{cases}. \tag{1.4}$$

5. Certaines conditions s'appliquent à la création d'une option ; nous y reviendrons dans la section sur les marges.

6. Dans ce cas-ci, l'investisseur est appelé le signataire de l'option.



(a) $G_{AOA}(x, K, P, 1)$ (b) $G_{AOV}(x, K, P, 1)$

(c) $G_{VOA}(x, K, P, 1)$ (d) $G_{VOV}(x, K, P, 1)$

Figure 1.2 Fonctions G_{AOA},G_{VOA},G_{AOV} et G_{VOV} où $k = K$, $p = P$ et $n = 1$.

Les fonctions de gain des quatre stratégies de base sont tracées à la figure 1.2. Les paramètres p, k et n ont été fixés à P, K et 1 respectivement. Ainsi, le gain devient seulement fonction du prix du sous-jacent à l'exercice. Plusieurs éléments importants sont illustrés dans la figure 1.2. Premièrement, $G_{AOA} = -G_{VOA}$ et $G_{AOV} = -G_{VOV}$, car les courbes sont symétriques. L'achat et la vente d'un même type d'option sont deux stratégies opposées. Deuxièmement, nous voyons que les stratégies d'achat sont à profit illimité/risque limité et que les stratégies de vente sont à profit limité/risque illimité [7].

Lors de la description des stratégies de base, nous avons toujours considéré le gain à l'échéance de l'option. Cependant, dans la pratique, les options peuvent être simplement liquidées au lieu d'être exercées. Par exemple, lors de l'achat d'une option, celle-ci peut être vendue sur le marché. Le gain est alors la différence entre le prix de vente et d'achat. Ceci est également vrai pour une stratégie de vente d'option. Pour liquider, il suffit d'acheter une autre option

7. En réalité, la stratégie VOV possède un risque limité, mais il est très grand par rapport au profit maximal.

avec la même spécification que celle vendue. Encore une fois, le gain est la différence entre le prix de vente et d'achat. La seule différence est que la vente s'effectue avant l'achat. Nous utiliserons les principes de liquidation dans le système de négociation.

Combinaisons de stratégies

En combinant les stratégies de base, on peut créer une panoplie de stratégies. Il existe un grand nombre de stratégies utilisées en pratique. Dans le cadre de ce mémoire, nous aborderons un nombre limité de stratégies. Une liste exhaustive est donnée par Cohen (2005). Voici les deux stratégies qui seront abordées :

1. Achat d'une position combinée (APC)
2. Vente d'une position combinée (VPC)

L'achat d'une position combinée est constituée de l'achat d'une option d'achat et l'achat d'une option de vente. Les deux options doivent avoir la même date d'expiration, le même sous-jacent et le prix d'exercice de l'option de vente doit être inférieur à celui de l'option d'achat. Typiquement, les deux options achetées seront hors de la monnaie. Pour réaliser un profit, le prix du sous-jacent doit être au-dessus du prix d'exercice de l'option d'achat ou en dessous du prix d'exercice de l'option de vente. Tout comme pour les stratégies de base, le gain d'une position est une fonction : du prix du sous-jacent (x) et du nombre d'options achetées ou vendues (n). Cependant, la stratégie possède deux prix d'exercices, celui de l'option d'achat (k_a) et de l'option de vente (k_v). De plus, la prime payée (p) est égale à la somme de la prime payée pour chacune des options. Le gain de l'APC est égal à la fonction

$$G_{APC}(x, k_a, k_v, p, n) = \begin{cases} G_{AOV}(x, k_v, p, n) & \text{si } x < k_v \\ -np & \text{si } k_v \leqslant x \leqslant k_a \\ G_{AOA}(x, k_a, p, n) & \text{si } x > k_a \end{cases}. \tag{1.5}$$

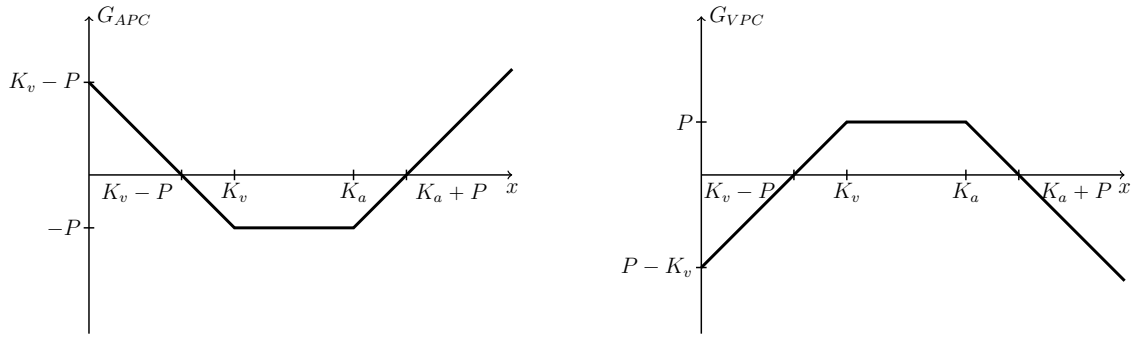
L'opposé de l'APC est la vente d'une position combinée. Au lieu d'acheter les deux options, on les vend. La VPC est profitable lorsque le prix du sous-jacent reste dans l'intervalle formé par les prix d'exercice des deux options. Ceci est observable dans la définition de la fonction de gain de la VPC :

$$G_{VPC}(x, k_a, k_v, p, n) = \begin{cases} G_{VOV}(x, k_v, p, n) & \text{si } x < k_v \\ np & \text{si } k_v \leqslant x \leqslant k_a \\ G_{VOA}(x, k_a, p, n) & \text{si } x > k_a \end{cases}. \tag{1.6}$$

En effet, on voit que G_{VPC} est positif lorsque le prix du sous-jacent est entre k_v et k_a. Les fonctions de gain de ces deux stratégies sont tracées à la figure 1.3, où $k_a = K_a$, $k_v = K_v$, $k = K$, $p = P$ et $n = 1$.

Cas particulier

Lorsque $k_v = k_a$ la position combinée est appelée une option double. On désigne l'achat et la vente d'une option double par les acronymes : AOD et VOD. Typiquement, on choisit k_v et k_a pour qu'ils soient égaux au prix courant du sous-jacent. Ceci est communément appelé une option double à la monnaie.



(a) $G_{APC}(x, K_a, K_v, P, 1)$ (b) $G_{VPC}(x, K_a, K_v, P, 1)$

Figure 1.3 Fonctions G_{APC} et G_{VPC} où $k = K$, $p = P$ et $n = 1$.

Jusqu'ici les explications sont plutôt descriptives. Il n'est pas évident de déterminer quand ces stratégies devraient être appliquées, avec quels paramètres et avec quelle quantité. Une des innovations de notre modèle est de construire un estimateur de la moyenne du gain d'une stratégie quelconque d'options, conditionnelle à un ensemble d'information. Celle-ci permet d'anticiper le profit qui sera obtenu selon les conditions du marché. Cela règle seulement une partie du problème global d'investissement, car les choix doivent être faits en considérant le risque encouru et les stratégies actives dans le portefeuille lors de la prise de décision. Nous reviendrons sur ces éléments en détail dans les chapitres 2 et 3.

Marges

Lors de l'achat d'une option, on investit le montant payé pour l'option. La marge nécessaire est égale au montant investi. Si l'on effectue la vente de la même option, on crée une option. Cette création est impossible sans allouer un montant collatéral. Ce montant n'est pas débité du compte, mais il ne peut être alloué sur une autre position. Le courtier utilise un ensemble

de règles pour déterminer la marge nécessaire. La marge requise pour la vente d'une option d'achat (M_{VOA}) est égale au maximum des trois fonctions suivantes (TD Ameritrade, 2016) :

$$M_{VOA_{20\%}}(x,k,p,n) = \frac{nx}{5} - \max((k-x)n, 0) + np, \tag{1.7}$$

$$M_{VOA_{10\%}}(x,k,p,n) = \frac{nx}{10} + np \tag{1.8}$$

et

$$M_{VOA_{50\%}}(x,k,p,n) = \frac{n}{2} + np. \tag{1.9}$$

On note que ces fonctions donnent la marge en \$/unité. Donc, si l'option a un nombre d'unités livrables égal à 100, il faut multiplier la marge par 100. La vente d'une option de vente nécessite une marge (M_{VOV}) égale au maximum des trois fonctions suivantes (TD Ameritrade, 2016) :

$$M_{VOV_{20\%}}(x,k,p,n) = \frac{nx}{5} - \max((x-k)n, 0) + np, \tag{1.10}$$

$$M_{VOV_{10\%}}(x,k,p,n) = \frac{kn}{10} + np \tag{1.11}$$

et

$$M_{VOV_{50\%}}(x,k,p,n) = \frac{n}{2} + np. \tag{1.12}$$

Finalement, la marge nécessaire pour la vente d'une position combinée est donnée par la fonction

$$M_{VPC}(x,k_a,k_v,p_a,p_v,n) = \max(M_{VOA}(x,k_a,p_a,n), M_{VOV}(x,k_v,p_v,n)) + np_{min} \tag{1.13}$$

où p_a est la prime collectée pour l'option d'achat, p_v la prime collectée pour l'option de vente et p_{min} la prime collectée pour l'option dont la marge individuelle est la plus petite (TD Ameritrade, 2016). Il est important de noter que dans la définition des marges, la variable x changera de valeur à travers le temps. Ainsi, la marge changera également à travers le temps. Donc, il se pourrait que la marge augmente et dépasse la quantité de capital disponible dans le compte de courtage. Dans ce cas, le courtier demandera à l'investisseur d'ajouter du capital supplémentaire dans son compte, sans quoi les positions seront liquidées. Ceci est appelé un

appel de marge. Le calcul des marges sera nécessaire dans notre étude pour obtenir le retour sur l'investissement du système de négociation, entre autres.

1.2.4 Le prix d'une option

Dans cette section, nous développerons plusieurs éléments importants. Premièrement, nous discuterons des facteurs majeurs qui influencent le prix d'une option. Deuxièmement, nous ferons la démarche pour obtenir le modèle de *Black-Scholes-Merton* (BSM) (Black et Scholes, 1973). Le modèle de BSM nous aidera à obtenir une quantité appelée la volatilité implicite (VI). Celle-ci fera partie intégrante de notre estimateur de la moyenne du gain des stratégies d'options.

Facteurs affectant le prix d'une option

Dans la théorie classique, il existe cinq facteurs affectant le prix d'une option [8] (Hull, 2012) :

1. Le prix courant du sous-jacent (S_0)
2. Le prix d'exercice de l'option (K)
3. Le temps restant avant l'expiration ($\tau = T - t$)
4. La volatilité du prix du sous-jacent (σ)
5. Le taux d'intérêt (r)

Nous savons que le prix du sous-jacent et le prix d'exercice affectent le prix d'une option. Une option d'achat profite de la montée du prix du sous-jacent, alors que l'achat d'une option de vente profite de la baisse du prix du sous-jacent. Dans les deux cas, le profit est proportionnel à la différence entre le prix du sous-jacent et le prix d'exercice. Le temps restant avant l'expiration d'une option affecte également son prix. Plus il reste de temps avant l'expiration d'une option, plus la chance qu'elle soit dans la monnaie à l'expiration augmente. Le créateur de l'option, à plus longue échéance, exigera donc une plus grande prime.

La volatilité du prix du sous-jacent est l'écart-type de celui-ci, un processus stochastique. Le prix d'une option d'achat augmentera lorsque la volatilité augmente, puisque la probabilité que le prix du sous-jacent passe au-dessus du prix d'exercice augmente avec la volatilité. De même, le prix d'une option de vente s'accroîtra avec la volatilité. Dans la théorie économique classique, on fait l'hypothèse que la croissance des actions augmente avec le taux d'intérêt en

8. Habituellement, on inclut un 6^e facteur : les dividendes. Cependant, nous ne l'inclurons pas à des fins de simplification.

Tableau 1.8 Effets de l'augmentation des facteurs sur le prix des différents types d'options. Le symbole " ?" indique une relation incertaine (Hull, 2012).

Facteur	**Option d'achat européenne**	**Option de vente européenne**	**Option d'achat américaine**	**Option de vente américaine**
Prix du sous-jacent	+	−	+	−
Prix d'exercice	−	+	−	+
Temps avant expiration	?	?	+	+
Volatilité	+	+	+	+
Taux d'intérêt	+	−	+	−

vigueur. Ainsi, une augmentation du taux d'intérêt devrait faire augmenter la volatilité, ce qui fera augmenter le prix des options. Le tableau 1.8 résume l'effet de l'augmentation des paramètres sur le prix des différents types d'options.

Le modèle de *Black-Scholes-Merton*

Le modèle de BSM (Black et Scholes, 1973) est centré sur la notion du prix juste, de l'anglais *fair price*, d'une option. Celui-ci est défini comme le prix pour lequel les acheteurs et les vendeurs ont une espérance de gain nulle. Pour quantifier ceci, supposons que l'on connait le prix du sous-jacent à l'expiration (S_T). Dans ce cas, le prix juste d'une option est égal au gain qui sera réalisé à l'expiration. La fonction du prix juste d'une option d'achat au temps présent est alors donnée par

$$C_0 = \max((S_T - K), 0) \tag{1.14}$$

et celle pour une option de vente par

$$P_0 = \max((K - S_T), 0). \tag{1.15}$$

En pratique, on ne connait pas la valeur de S_T au temps présent. Donc, le modèle suppose que le prix du sous-jacent suit un processus stochastique. Ceci implique que S_T est une variable aléatoire et que le prix juste de l'option d'achat est égal à la fonction

$$C_0 = e^{-r\tau} E[\max((S_T - K), 0)] \tag{1.16}$$

et celui de l'option de vente égal à

$$P_0 = e^{-r\tau} E[\max((K - S_T), 0)]. \tag{1.17}$$

Le facteur $e^{-r\tau}$ est ajouté devant l'espérance pour tenir compte de l'inflation (Hull, 2012). Considérons maintenant le processus stochastique X_t défini par

$$dX_t = \alpha(X_t, t)dt + \beta(X_t, t)dZ_t \tag{1.18}$$

où dZ_t est la différentielle d'un mouvement brownien standard et α et β sont deux fonctions réelles. X_t est un processus de diffusion avec dérive de Itô (Itō, 1951). Le modèle de BSM suppose que S_t est un processus de ce type et est défini par :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dZ_t. \tag{1.19}$$

On cherche une solution aux équations 1.16 et 1.17 de la forme $C(S_t, t)$ et $P(S_t, t)$. Pour y arriver, Black et Scholes (1973) ont fait les hypothèses additionnelles suivantes :

1. La vente à découvert du sous-jacent est possible.
2. Il n'y a pas de commissions ou de taxes. Le sous-jacent est infiniment divisible.
3. Il n'y a pas de dividende sur le sous-jacent.
4. Il n'est pas possible d'obtenir un rendement certain supérieur au taux d'intérêt.
5. Le temps est continu.
6. Le taux d'intérêt est constant.
7. La volatilité est constante.

Le lemme de Itō (Itō, 1951) stipule que pour le processus stochastique 1.18, un processus de diffusion avec dérive de Itō, et une fonction $f(x, t)$, $f(X_t, t)$ est également un processus de diffusion avec dérive de Itō et $df_t = (\frac{\partial f_t}{\partial X_t}\alpha + \frac{\partial f_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_t}{\partial X_t^2}\beta^2)dt + \frac{\partial f_t}{\partial X_t}\beta dZ_t$.

Grâce à cela, on peut affirmer que :

$$dC_t = \Big(\frac{\partial C_t}{\partial S_t} r S_t + \frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\Big)dt + \frac{\partial C_t}{\partial S_t}\sigma S_t dZ_t. \tag{1.20}$$

Ensuite, on utilise une astuce pour résoudre l'équation différentielle ci-dessus. On crée un portefeuille de manière à éliminer la composante stochastique dZ_t. Puis, selon l'hypothèse 4,

on déduit que le rendement de ce portefeuille doit être égal au taux d'intérêt. Pour créer un tel portefeuille, on vend une option d'achat et on achète un nombre d'unités du sous-jacent égal à $\frac{\partial C}{\partial S_t}$. Le coût de ce portefeuille (Π_C) est donné par

$$\Pi_C = -C_t + \frac{\partial C_t}{\partial S_t} S_t \tag{1.21}$$

et le gain instantané est donné par

$$d\Pi_C = -dC_t + \frac{\partial C_t}{\partial S_t} dS_t. \tag{1.22}$$

En substituant l'équation 1.19 et 1.20 dans l'équation 1.22 on obtient :

$$d\Pi_{C_t} = \Big(-\frac{\partial C_t}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 \Big) dt. \tag{1.23}$$

Cette équation ne contient pas le terme dZ_t. Le risque est éliminé. En utilisant l'hypothèse 4, on déduit l'égalité suivante :

$$d\Pi_C = r\Pi_C dt. \tag{1.24}$$

En substituant les équations 1.21 et 1.22 dans l'équation 1.24, on obtient l'équation différentielle de BSM :

$$\frac{\partial C_t}{\partial t} + rS_t\frac{\partial C_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} = rC_t. \tag{1.25}$$

On obtient une équation identique pour P_t. Cependant, la solution de l'équation différentielle est différente pour C_t et P_t, car les contraintes utilisées ne sont pas les mêmes. Les contraintes sont : $C(S_T, T) = \max((S_T - K), 0)$ et $P(S_T, T) = \max((K - S_T), 0)$. Pour résoudre les équations différentielles, Black et Scholes (1973) procèdent par substitution. Ils obtiennent la solution suivante :

$$f_c(S_t, t, T, K, \sigma, r) = S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \tag{1.26}$$

et

$$f_p(S_t, t, T, K, \sigma, r) = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1) \tag{1.27}$$

où

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{1.28}$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \tag{1.29}$$

On obtient les prix justes au temps présent en évaluant $f_c(S_0, t, T, K, \sigma, r)$ et $f_p(S_0, t, T, K, \sigma, r)$.

1.2.5 La volatilité implicite

Dans le modèle de BSM, seule la volatilité n'est pas directement observable. Cependant, nous pouvons observer le prix courant de l'option. Si l'on suppose que le marché est juste et que toutes les hypothèses de BSM sont vérifiées, on peut déterminer pour quelle valeur de σ les équations de BSM sont égales au prix courant. La volatilité obtenue est appelée la volatilité implicite. Elle représente le consensus du marché sur la volatilité future. Il est important de noter que la VI n'est pas constante à travers les prix d'exercice et les dates d'expiration. Nous utiliserons ces quantités pour construire notre estimateur de la moyenne de gain des stratégies d'options.

1.2.6 Les lettres grecques

Tableau 1.9 Définition des lettres grecques pour une option d'achat et de vente (Hull, 2012). Les équations sont obtenues à partir du modèle de BSM.

Lettre grecque	**Définition**	**Option d'achat**	**Option de vente**
Delta	$\frac{\partial f}{\partial S_t}$	$\Phi(d_1)$	$\Phi(d_1) - 1$
Gamma	$\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}$	$\frac{\phi(d_1)}{S_t\sigma\sqrt{T-t}}$	$\frac{\phi(d_1)}{S_t\sigma\sqrt{T-t}}$
Thêta	$\frac{\partial f}{\partial t}$	$\frac{-S_t\phi(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}}$ $-rKe^{-r(T-t)}\phi(d_2)$	$\frac{-S_t\phi(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}}$ $+rKe^{-r(T-t)}\phi(-d_2)$
Vega [9]	$\frac{\partial f}{\partial \sigma}$	$S_t\sqrt{T-t}\phi(d_1)$	$S_t\sqrt{T-t}\phi(d_1)$

Le modèle de BSM nous permet également de calculer la sensibilité du prix des options aux variations des paramètres. Ceci est rendu possible en calculant les dérivées partielles des fonctions du modèle BSM. Les praticiens les appellent les lettres grecques. Les plus

9. Évidemment, Vega n'est pas une lettre de l'alphabet grec. Cependant, l'industrie a accepté ce nom et c'est celui-ci que nous allons utiliser dans le reste du mémoire.

fréquemment utilisées sont énumérées au tableau 1.9. Généralement, on veut qu'un ensemble d'options sur le même sous-jacent ait un Delta global nul. Celui-ci est obtenu en faisant la somme des Deltas individuels. Ce genre de position est dite Delta neutre. Un autre élément important est que le Thêta d'une option est toujours négatif : les options perdent de la valeur lorsque le temps avance. De plus, le Vega d'une option est positif et le Gamma est positif. Nous réutiliserons ces éléments dans la revue de littérature.

1.3 Synthèse

Une synthèse du processus d'investissement est faite à la figure 1.4. L'ordre des étapes du processus est mis en évidence par des nombres et les participants y sont identifiés par les rectangles à coins ronds. Le processus peut être résumé en trois étapes principales. En premier lieu, l'animateur de marché ajoute des ordres à cours limité au carnet d'ordres. En second lieu, l'investisseur fait un choix de nouvelles positions et envoie les ordres correspondants au courtier. Finalement, le courtier envoie les ordres à la bourse qui les ajoute au carnet d'ordres. Lorsque les ordres sont remplis, la bourse envoie une confirmation au courtier qui l'achemine à l'investisseur.

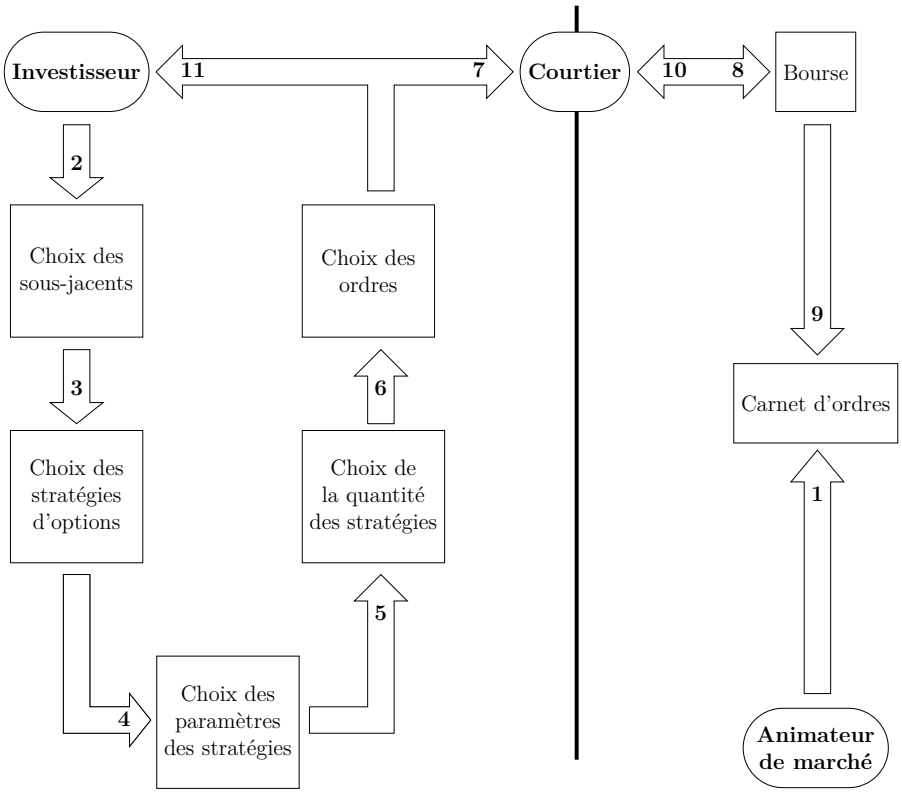


Figure 1.4 Synthèse du processus d'investissement.

1.4 Plan et objectif du mémoire

L'objectif de ce mémoire est d'améliorer le rendement composé annuellement, ajusté au risque, des systèmes automatisés de négociation d'options comparativement aux méthodes usuelles de négociation. Le prochain chapitre mettra en lumière certaines lacunes de ces systèmes. Cependant, nous allons immédiatement formuler quelques remarques importantes.

Premièrement, la majorité des méthodes s'arrêtent à la modélisation d'un seul moment de la distribution des fluctuations du prix des sous-jacents, comme la moyenne ou la variance. Cela contraint le système à utiliser une stratégie d'options pariant uniquement sur le moment modélisé. Pour définir un cadre plus général, certains systèmes modélisent la distribution complète et l'utilise pour estimer l'espérance de gain d'une stratégie d'options. Cependant, leurs méthodes d'estimation ne permettent pas d'obtenir l'espérance de gain conditionnelle à la valeur d'un ensemble d'information. Deuxièmement, le choix du moment de liquidation des stratégies est négligé. Troisièmement, les méthodes faisant une gestion adéquate du risque n'admettent pas plusieurs éléments importants notamment la considération de l'interaction entre les paramètres des stratégies et leur taille et la considération du portefeuille courant.

En réaction à ces lacunes, et dans le but d'atteindre notre objectif, ce mémoire apportera deux contributions principales. D'une part, nous allons développer un estimateur de la moyenne du gain, conditionnelle à un ensemble d'information, d'une stratégie quelconque d'options. Nous obtiendrons cet estimateur à l'aide de régressions quantiles et d'un estimateur de la volatilité implicite. D'autre part, nous formulerons un problème d'optimisation discret palliant les lacunes précédemment citées. La fonction objectif de ce problème sera définie à partir de notre estimateur de la moyenne de gain. Comme nous n'avons pas accès au gradient de cette fonction, et des fonctions de contraintes, nous utiliserons un algorithme de résolution sans dérivées possédant des propriétés de convergence pour le résoudre dans un temps raisonnable.

Le reste du mémoire sera organisé comme suit : le chapitre 2 fera une revue de la littérature sur les méthodes de négociation. Le chapitre 3 formera le cœur du mémoire où nous développerons les éléments mathématiques permettant la construction de notre système de négociation. Au chapitre 4, nous détaillerons la méthodologie utilisée pour simuler des négociations avec notre système, les données utilisées et les résultats obtenus. Finalement, nos conclusions seront données au chapitre 5.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

2.1 Les branches principales

La littérature sur les options est divisée en trois branches principales : descriptive, théorique et pratique. La première est composée d'ouvrages éducatifs visant à expliquer au lecteur le fonctionnement des options et du marché des options. Dans la branche théorique, on cherche à développer des modèles analytiques pour le prix juste d'une option en faisant des hypothèses sur le processus suivi par le sous-jacent (James, 2003; Gatheral, 2011). On y fait également l'hypothèse que le prix courant des options est juste. Donc, on évalue les modèles en comparant leurs prédictions aux prix courants. La logique derrière cette approche est héritée de la théorie de la rationalité des participants. Celle-ci veut que les participants ne prennent que des décisions rationnelles visant à maximiser leur profit en minimisant leur risque (Neumann, 1944; Markowitz, 1952). Si cela est vrai, toute l'information disponible devrait être absorbée correctement par le marché et les prix courants convergeront vers les prix justes. Ce phénomène est appelé l'efficacité du marché (Fama, 1970).

La recherche pratique estime la profitabilité de méthodes de négociation d'options à l'aide de données historiques. Implicitement, ces études font l'hypothèse que le marché n'est pas complètement rationnel, car dans le cas contraire, il serait difficile d'obtenir des profits. Cette hypothèse penche plutôt vers la théorie économique des comportements, qui veut que les participants prennent parfois des décisions irrationnelles à cause du manque d'information, de leurs émotions et des pressions sociales (Le Bon, 1896; Kahneman et Tversky, 1979). Ce mémoire fait une contribution à la littérature pratique. Nous ferons maintenant une revue exhaustive de celle-ci.

2.2 Méthodes naïves

L'approche la plus intuitive pour négocier des options est l'application d'une stratégie d'options à fréquence fixe ; par jour, par semaine ou par mois. Le prix d'exercice est également fixé, relativement au prix courant du sous-jacent, et un cycle d'expiration est fixé. Les positions peuvent être liquidées à fréquence fixe ou être conservées jusqu'à l'expiration. Les données utilisées sont presque toujours les prix de fermeture journaliers des options. Cette approche est naïve, car la prise de décision ne dépend d'aucune variable. Plusieurs études de ce type ont pour but premier d'évaluer des modèles théoriques, mais elles rapportent également des résultats de simulation. Le retour sur l'investissement moyen ou le profit moyen est rapporté.

2.2.1 Options sur indice boursier

Les produits les plus étudiés dans la littérature naïve sont les options sur l'indice S&P 500. On étudie les options mensuelles ; expirant le 3^e vendredi de chaque mois avec des échantillons compris dans la période allant de 1980 à 2002. La période subséquente a moins fait l'objet d'études de ce type et les options SPX n'existaient pas dans la période précédente. Il est important de noter que l'indice S&P 500 a augmenté de valeur durant la période d'étude et qu'un *crash* s'est produit en 1987.

Une première observation importante est que les stratégies d'achat avec Delta neutre obtiennent des profits significativement négatifs, alors que le modèle de BSM fait l'hypothèse que le rendement de ces stratégies devrait être égal au taux d'intérêt. La simulation de Coval (2001) montre que le retour sur l'investissement moyen de l'AOD à la monnaie avec les options SPX, à fréquence journalière et hebdomadaire, est significativement négatif. Dans une étude subséquente, Bakshi et Kapadia (2003) montrent que l'AOA et l'AOV, à chaque fin de mois, et neutralisée à chaque jour jusqu'à l'expiration, résulte en des pertes. Carverhill et al. (2002) créent des positions Delta neutre en faisant l'AOV hors de la monnaie et la VOA hors de la monnaie. Leur application naïve résulte en des pertes significatives. Tout cela implique que les stratégies opposées devraient être positives, tel que montré par Coval (2001). Une expérience effectuée par Driessen et Maenhout (2004) montre également qu'un investisseur peut réaliser des profits à partir de la VOD à la monnaie. La même observation est faite sur l'indice NASDAQ 100 par Simon (2007) où la VOD à la monnaie et la VPC, avec Delta neutre et hors de la monnaie, amènent à des profits significativement positifs avec un taux de succès supérieur à 70 %.

La littérature suggère également que l'AOA résulte en un retour sur l'investissement moyen significativement positif pour toutes les catégories de prix d'exercice. De plus, il croît lorsque le prix d'exercice augmente. Ce résultat est anticipé par le modèle théorique de l'espérance de rendement développé par Coval (2001) et il fait cette observation empiriquement. Le même résultat est obtenu par la simulation de Driessen et Maenhout (2013). Un résultat plus surprenant est la magnitude des pertes obtenues en faisant l'AOV hors de la monnaie. Cela fut préalablement observé par Coval (2001), dont le modèle théorique prédisait une perte bien moindre. On en déduit qu'il serait possible d'obtenir des profits significatifs en faisant la VOV hors de la monnaie. En effet, les stratégies de VOV, simulées par Driessen et Maenhout (2013), résultent en des profits significatifs. Bondarenko (2014) étudie ce phénomène plus en détails. On fait l'hypothèse que ces profits anormaux sont dus au fait que l'échantillon contient un biais à la hausse. On simule alors la stratégie en y ajoutant de faux *crash*s similaires à celui de 1987. Il trouve que $1,33$ *crash*s par année auraient dû se produire pour

qu'une telle stratégie ne soit pas profitable. Ceci renforce l'idée que ce type de stratégie est profitable à long terme. Une expérience similaire, effectuée par Jackwerth (2000), arrive aux mêmes conclusions.

Les méthodes naïves sur les indices boursiers internationaux sont pareillement étudiées. Les options sur l'indice *Financial Times Stock Exchange* 100 (FTSE 100) d'Angleterre, sont étudiées par Liu (2007). Il trouve que l'AOV, combinée à la VOA, Delta neutre, génère des profits négatifs. Driessen et Maenhout (2013) trouvent que l'AOA hors de la monnaie, d'options du FTSE 100, engendre un rendement positif et l'AOV un rendement négatif. L'indice allemand *Deutscher Aktienindex* (DAX) fait l'objet de l'étude de Goltz et Lai (2009). L'AOD à la monnaie résulte en des gains négatifs. Les options sur l'indice chinois *Hang Seng Index* (HSI) sont étudiées par Chan et al. (2004). L'AOV n'est pas profitable, alors que l'AOA l'est. Jusqu'ici, les résultats sur le marché international correspondent au marché américain. Cependant, les options sur l'indice japonais *Nihon Keizai Shinbun* 225 (Nikkei 225) ont un comportement différent. Coval (2001) et Driessen et Maenhout (2013) trouvent que l'AOV est profitable, mais que l'AOA ne l'est pas, ce qui est contraire aux résultats précédents. Cependant, Coval (2001) trouve que l'AOD génère des pertes, comme sur les autres marchés.

Une critique des études précédentes est la méthode utilisée pour calculer le retour sur l'investissement des stratégies de vente. Lorsqu'une option est achetée, le montant à investir est égal à la prime payée. Cependant, lorsqu'elle est vendue, le montant est égal à une marge différente de la prime payée (voir la section 1.2.3). Or, les études calculent le retour sur l'investissement moyen des stratégies de vente en prenant l'opposé du rendement moyen des stratégies d'achat. Ce problème est spécifiquement étudié par Santa-Clara et Saretto (2009) et Berkovich et Shachmurove (2011). Ceux-ci reproduisent les stratégies de VOV avec les options SPX en utilisant des marges réalistes. Ils trouvent que les rendements sont grandement réduits, mais qu'ils sont toujours positifs.

Pour un praticien, le fait le plus important qui émane des résultats précédents est qu'il peut générer un gain en faisant : l'AOA hors de la monnaie, la VOV hors de la monnaie et la VOD/VPC. Cette stratégie est la plus intéressante, car elle est Delta neutre. Donc, elle ne dépend pas des fluctuations du prix du sous-jacent [1]. Cette source de profit est nommée la prime de volatilité, car la stratégie en question est exposée aux fluctuations de la VI, qui est généralement plus élevée que la volatilité réalisée subséquente (Bollen et Whaley, 2004; Eraker, 2009). Une explication de l'existence de cette prime de volatilité est avancée par Bollen et Whaley (2004) : les options de vente sont soumises à une pression d'achat. Ils le

1. Ceci n'est vrai que de manière instantanée. Pour qu'une position reste Delta neutre, il faut la réajuster jusqu'à l'expiration.

démontrent avec des données empiriques. La pression vient des gestionnaires de fonds qui veulent acheter de l'assurance pour leur portefeuille. Cela est cohérent avec les résultats des méthodes naïves. La même pression est observée pour l'indice HSI par Chan et al. (2004). De plus, Ait-Sahalia et al. (2001) utilisent une méthode pour extraire une densité de probabilité à partir du prix des options SPX et montrent que cette densité sous-estime la probabilité des fluctuations négatives et surestime la probabilité des fluctuations positives élevées, concordant avec les profits de la VOV et l'AOV.

Le segment théorique de la littérature tente d'expliquer les différences entre le comportement prédit et observé avec l'ajout d'une composante de discontinuité dans la spécification du processus stochastique (Coval, 2001; Bakshi et Kapadia, 2003; Driessen et Maenhout, 2013; Jones, 2006; Broadie et al., 2009). On critique également le fait que la volatilité n'est pas réellement constante. On ajoute une définition stochastique de la volatilité, avec réversion vers la moyenne (Coval, 2001; Jones, 2006; Eraker, 2009). L'ajout de ces éléments théoriques rend les comportements observés plus cohérents avec les modèles, mais il reste toujours une différence significative. Ceci indique que l'ajout de ces éléments améliore le réalisme de l'hypothèse faite pour le processus suivi par le prix du sous-jacent.

Suite aux résultats obtenus dans la littérature, nous avons décidé d'opter pour un portefeuille de VPC hors de la monnaie dans les options sur indice, car la majorité des études trouvent que l'application naïve de cette stratégie est profitable. Elle permet également d'obtenir un haut taux de succès. Même si l'AOA est généralement profitable, nous n'utiliserons pas directement cette stratégie, puisqu'elle ne possède pas un Delta neutre. À des fins de simplification, nous n'introduirons pas la volatilité stochastique et la composante de discontinuité dans notre modèle de risque.

2.2.2 Options sur action

Les options sur actions américaines furent échangées sur un marché de gré à gré avant l'arrivée de la première bourse d'options en 1973 (CBOE, 2017). Les études précédant cette date font usage d'ensembles de données très hétérogènes et de taille limitée. Ceux-ci sont compris de transactions et non de prix courants. Les données couvrent la période allant de 1946 à 1969. On calcule les moyennes de profit à partir des transactions de chaque type. Les conclusions qui en émanent sont assez contradictoires. L'AOA semble ne pas être profitable. C'est la conclusion de Boness (1964), Puglisi (1972) et Erickson (1973). Par contre, Kruizenga (1964) et Zieg (1970) concluent l'inverse.

L'AOV est trouvée non profitable par Kruizenga (1964), Boness (1964), Puglisi (1972) et Erickson (1973). Or, Zieg (1970) observe l'inverse. Si la tendance est que l'achat d'options

mène à des pertes, leur vente devrait être profitable. En effet, la VOV est trouvée profitable par la majorité des études (Katz, 1962; Jackson, 1964; Boness, 1964). Seul Puglisi (1972) conclut l'inverse. Les résultats pour la VOA sont plus divisés : Katz (1962) et Jackson (1964) trouvent qu'elle est profitable, alors que Boness (1964) et Erickson (1973) concluent qu'elle ne l'est pas. De plus, Gup (1966) trouve que la vente d'options est plus profitable que l'achat d'options. Finalement, les résultats pour l'AOD et la VOD sont divisés : Boness (1964) trouve que l'AOD est profitable, mais pas Erickson (1973). La VOD est trouvée profitable par Boness (1964), mais pas par Katz (1962) et Erickson (1973).

Un problème avec les études précédentes est que les options n'ont pas été catégorisées selon leur prix d'exercice. Avec l'avènement des bourses d'options, cette catégorisation est devenue possible. Une étude d'envergure a été effectuée par Ni (2008) pour les options d'achat sur la totalité des actions américaines, sur la période allant de 1996 à 2008. Les données sont constituées des prix courants. Il classifie les options comme étant dans de la monnaie, à la monnaie et hors de la monnaie. Les résultats montrent qu'en moyenne l'AOA dans la monnaie et à la monnaie est profitable. Ceci est vrai lorsque la totalité des données est utilisée et lorsque l'échantillon est réduit aux 200 plus grandes compagnies. Cependant, l'AOA hors de la monnaie n'est pas profitable en moyenne. Lorsque l'*ask* est utilisée au lieu du prix courant, l'AOA n'est pas profitable pour toutes les catégories. De plus, lorsque le *bid* est utilisé, l'AOA dans la monnaie et à la monnaie est profitable, mais pas l'AOA hors de la monnaie. Ceci indique que la VOA hors de la monnaie est profitable même avec le pire prix possible.

Dans la section précédente, nous avons conclu que l'AOA sur indice était profitable. Or, pour les actions, l'inverse semble vrai, du moins pour les options hors de la monnaie. Dans une autre étude, Bollen et Whaley (2004) montrent que la VI calculée à partir des options, d'achat et de vente, hors de la monnaie surestime la volatilité réalisée subséquente, indiquant que les options sont surévaluées. Ils montrent également que ces options subissent une pression d'achat importante. Selon eux, cette demande vient des investisseurs individuels qui cherchent à effectuer un pari avec une faible possibilité de multiplier leur investissement. En effet, Boyer et Vorkink (2014) décrivent cette caractéristique comme *lottery like* et la quantifient comme le coefficient d'asymétrie. Ils montrent que les options ayant cette caractéristique attirent les investisseurs individuels et sont généralement surévaluées.

Les études portant sur les options de produits alternatifs arrivent à des conclusions mixtes. Chaput (1999) étudie les options sur le taux de change du dollar américain et de l'euro (USD/EUR) et trouve que l'AOA et la VOV est profitable, ainsi que la VOD/VPC. Simon (2010) étudie les options sur les bons du Trésor américain et trouve que la VOD/VPC est profitable avec un haut taux de succès. Finalement, Brittain et al. (2011) effectuent une étude

portant sur les options des contrats à terme de bovins. Ils trouvent que la VOD/VPC est profitable pour les bovins d'élevage, mais pas pour le bovin sauvage.

Les résultats précédents justifient l'utilisation d'un portefeuille de VPC avec les options sur action américaine. En effet, la VOA d'options hors de la monnaie et la VOV hors de la monnaie semblent profitables.

2.3 Distribution du sous-jacent

2.3.1 Premier moment (espérance)

Les stratégies d'options de base peuvent être utilisées pour parier sur la direction des fluctuations futures du sous-jacent. L'AOA et la VOV profitent d'une hausse du prix du sous-jacent, alors que l'AOV et la VOA profitent d'une baisse. Les stratégies d'achat ont l'avantage d'avoir un effet de levier, donnant la possibilité à l'investisseur de réaliser de grands retours sur l'investissement. Cependant, leur probabilité de profit est faible, spécialement pour les options hors de la monnaie. Les stratégies de vente ont l'atout d'avoir une grande probabilité de profit, mais leur rendement est plus mince à cause des marges requises.

Pour mettre en place ce type de stratégie, un modèle prédictif de l'espérance de la fluctuation du prix du sous-jacent peut être utilisé. La structure d'un réseau de neurones (RN) se basant sur les actualités financières est définie par Addison (1991). Un modèle de classification est développé par Bain et al. (2009). On veut classifier les options hors de la monnaie qui expireront dans la monnaie. Des facteurs reliés au volume d'options négociées sont intégrés dans le modèle. Un *support vector machine* (SVM) et une régression logistique baysienne (RLB), avec divers algorithmes d'optimisation, sont construits. On n'utilise que des options d'achat hors de la monnaie. On achète celles qui sont classifiées comme dans la monnaie à expiration. Malgré des rendements variant entre 46 % et 136 %, le taux d'options correctement identifées est seulement de 25 %. L'achat d'écarts haussiers (EH) à la monnaie est fait à chaque mois sur les actions composant l'indice *Dow Jones* par Heinemann et Han (2008). Cette stratégie profite d'une hausse du prix du sous-jacent. L'auteur trouve que des gains négatifs sont obtenus pour la majorité des actions. Cependant, il considère que les options sont vendues au *bid* et achetées au *ask*.

Un modèle linéaire est ajusté par Simmons (2012) pour les fluctuations futures de l'indice *Australian Securities Index* (ASX200). Les variables explicatives sont les fluctuations passées de l'indice ASX200 et S&P 500. L'AOA et l'AOV sont faites selon les prédictions. Malgré une performance médiocre du modèle de 52 %, des profits supérieurs à l'indice sont obtenus. Un modèle basé sur un arbre de décision est mis en place par Matsumura et Kawamoto

(2013). Des indicateurs techniques (voir Thawornwong (2003)) sont utilisés comme facteurs. Le modèle permet de faire un choix parmi les quatre stratégies de base. Celui-ci est ajusté à l'aide d'un algorithme génétique. Des options sur l'indice Nikkei 225 sont utilisées pour faire une simulation. Les auteurs trouvent que le modèle offre un meilleur rendement que l'indice, mais le taux de succès de la prédiction des directions n'est pas rapporté. Finalement, Vejendla et Enke (2013) font l'achat d'écarts haussiers dans les options sur actions américaines. Les profits sont positifs lorsque l'indice est en hausse.

Le désavantage majeur de ce type de méthodes est que leur taux de succès est généralement faible : moins de 60 %. De plus, elles dépendent de modèles de prédiction de la direction des fluctuations dont la performance est très controversée (Timmermann, 2008). C'est pour cela que nous n'allons pas employer ce type de méthode dans notre système.

2.3.2 Deuxième moment (variance)

En utilisant une combinaison d'options, il est possible d'effectuer un pari sur le 2^e moment de la distribution des fluctuations du prix du sous-jacent. La méthode la plus commune est d'utiliser une position combinée, avec Delta neutre. Ainsi, seuls le Thêta et le Vega ne sont pas nuls. Comme nous l'avons vu dans l'introduction, Vega est la sensibilité de la position à la volatilité. Le plus souvent, une option double à la monnaie est utilisée. Celle-ci est un cas particulier d'une position combinée. Il s'agit ensuite de faire une prédiction de la volatilité future et de déterminer si l'option double devrait être achetée ou vendue. Une vaste littérature sur la prédiction de la volatilité existe (Poon et Granger, 2003). Un fait essentiel sur le comportement de la volatilité est la présence d'une forte auto-corrélation (Granger et al., 2000). De ce fait, la plupart des modèles utilisent la variance passée pour prédire la variance future. Ces modèles font partie d'une famille appelée *autoregressive* (AR), dont le plus connu est le modèle *generalized autoregressive conditional heteroskedasticity* (GARCH) (Tsay, 2005).

Une première série d'études, employant une prédiction du deuxième moment, utilisent des options sur les actions américaines. Avec un ensemble de données prédatant la création du CBOE, Klemkosky (1971) trouve que l'achat d'options double à la monnaie est profitable lorsque la volatilité du sous-jacent est en hausse. Un modèle de prédiction de la volatilité, basé sur la volatilité antérieure, est utilisé par Cohen et al. (1972). La volatilité est ensuite insérée dans le modèle de BSM pour évaluer le prix juste des options. Lorsque l'option est sous-évaluée, elle est achetée et elle est vendue dans le cas contraire. Cette méthode sera fréquemment utilisée par les études subséquentes. En utilisant un ensemble de données allant de 1966 à 1969, composé seulement d'options d'achat, ils trouvent que cette stratégie est

profitable. Cependant, lorsque les coûts de transaction sont considérés, les profits ne sont plus significatifs. Une conclusion similaire est obtenue par Galai (1977) qui répète essentiellement la même méthodologie, avec des données de 1973, la première année d'opération du CBOE. Le modèle de BSM est employé par Trippi (1977) pour évaluer la VI de chacune des options de chaque action et obtenir la VI moyenne. Cette valeur est utilisée comme estimateur de la volatilité future et chaque option est réévaluée avec BSM. Les options sous-évaluées sont achetées et vice-versa. Il trouve que des profits significatifs seraient obtenus en incluant les coûts de transaction.

Une deuxième série d'études portent sur les options d'indice, plus spécifiquement sur celles des indices S&P 500 et S&P 100 [2]. Le modèle GARCH est ajusté par Noh et al. (1994) pour l'indice S&P 500. La prédiction de volatilité est utilisée conjointement avec le modèle de BSM pour acheter ou vendre des options doubles à la monnaie, à chaque jour, de 1986 à 1991. Ils trouvent que cette stratégie est profitable en incluant les coûts de transaction. Les options sur l'indice S&P 100 sont étudiées par Fleming (1999), pendant la période allant de 1988 à 1993. Comme il trouve que la VI surestime généralement la volatilité réalisée subséquente, il effectue seulement la VOD à la monnaie. Il neutralise constamment le Delta de la position jusqu'à l'expiration. Il observe que cette stratégie est profitable, mais ne l'est plus après avoir considéré les coûts de transaction. Une estimation de la volatilité du S&P 500, basée sur l'estimation d'une fonction de densité, est obtenue par Balyeat (2002). Lorsque la VI d'une option est supérieure à son estimation, elle est vendue et vice-versa. En utilisant un ensemble de données allant de 1992 à 1993, il trouve que cette stratégie est profitable.

Une stratégie hybride est développée par Enke et Amornwattana (2008). Une prédiction conjointe du premier et du deuxième moment est faite avec un réseau de neurones. Une stratégie pariant à la fois sur la direction et la volatilité est mise en place. À l'aide d'un ensemble de données des options SPX allant de 2002 à 2004, ils observent que cette stratégie est profitable et a une valeur ajoutée par rapport à une stratégie utilisant seulement le deuxième moment. Un modèle linéaire incluant la volatilité passée et la VI est employé par Chan et al. (2009a) pour faire l'achat et la vente d'options doubles à la monnaie dans le S&P 500. Les profits sont significatifs, mais ne le sont plus après avoir considéré les frais de transaction. Un modèle de *nearest neighbour* (NN) est ajusté pour prédire la volatilité du S&P 100 par Andrada-Félix et al. (2016). Lorsque la prédiction est supérieure à l'indice de VI, une option double à la monnaie est achetée et vice-versa. Les profits sont significatifs et supérieurs à ceux des modèles de la famille AR.

Les indices internationaux sont également étudiés. Le modèle GARCH, combiné à la VI,

2. L'acronyme signifie : *Standard and Poor's* 100.

est appliqué à l'indice Toronto 35, par Doidge et Wei (1998), pour la négociation d'options doubles à la monnaie. Les profits sont négatifs après la considération des coûts de transaction. Des modèles de la famille AR sont appliqués à l'indice DAX par Schmitt et Kaehler (1996). Les profits sont positifs. L'indice FTSE 100 est étudié par Laws (2000). Une combinaison de GARCH et de la VI y est appliquée pour la négociation d'options doubles. Les profits sont positifs. Corredor et al. (2002) appliquent un modèle de la famille AR pour négocier les options de l'indice espagnol *Índice Bursátil Español* (IBEX35). En utilisant BSM, ils déterminent si les options sont sur-évaluées ou sous-évaluées. Ils trouvent que la VOV est profitable, mais pas la VOA. Les cas où les options sont achetées sont très rares. Ces mêmes modèles sont utilisés par Maris et al. (2007) pour prédire la direction des fluctuations de la volatilité de l'indice grec *Athens Stock Exchange* (ASE). Lorsqu'une hausse est prévue, une option double à la monnaie est achetée, sinon elle est vendue. Ceci est généralement profitable. Des variables reliées au sentiment sont intégrées dans les modèles de la famille AR par Sheu et Wei (2011), pour négocier des options doubles à la monnaie sur l'indice taiwanais *Taiwan Capitalization Weighted Index* (TAIEX). Ils trouvent que l'intégration de ces variables augmente la profitabilité.

Les options sur d'autres produits font également l'objet d'études de ce type. Guo (2000) utilise le modèle GARCH pour négocier des options sur le taux de change entre le dollar américain et le *Deustche Mark* (USD/DM). Il trouve que la négociation d'options doubles à la monnaie n'est pas profitable après la considération des coûts de transaction. Les options sur le taux de change du dollar américain avec le yen japonais (USD/JPY) et la livre sterling (USD/GBP) sont étudiées par Dunis et Huang (2002). Un modèle GARCH et un RN y sont appliqués. Les profits sont positifs après la considération des coûts de transaction. Une méthodologie de classification est appliquée par Anselmo et al. (2008) pour la négociation des options sur le taux de change USD/EUR. On classifie les périodes de haute volatilité. L'AOA est effectuée lorsqu'une telle période est anticipée. La classification est faite avec un SVM. Les profits sont positifs. Les options sur les contrats à terme de soja, de maïs et de blé sont étudiées par Simon (2002) et Urcola et Irwin (2011). La volatilité est modélisée par un modèle GARCH et la négociation classique d'option double est effectuée. Les deux études trouvent que les profits sont négatifs.

Globalement, les méthodes basées sur le 2^e moment sont profitables. Par contre, leur application est assez primitive au sens qu'elle ne considère pas plusieurs sous-jacents et des métriques de risque appropriées. Les résultats nous indiquent également qu'il est possible d'utiliser la volatilité passée pour prédire la volatilité subséquente et en retirer des profits. Ainsi, nous utilisons cette variable dans l'implémentation de notre système de négociation.

2.3.3 Moments supérieurs et quantiles

En utilisant une combinaison d'options, il est possible de parier sur le 3^e et le 4^e moment de la distribution du prix du sous-jacent. Une méthodologie est développée par Ait-Sahalia et al. (2001) pour extraire la distribution implicite du prix des options SPX. La distribution est estimée à l'aide de données historiques. On utilise la différence entre le coefficient d'aplatissement et d'asymétrie des deux distributions pour engendrer des positions. Une certaine combinaison d'options est utilisée pour parier sur le coefficient d'asymétrie et sur le coefficient d'aplatissement. En faisant une simulation, l'auteur trouve que les deux stratégies sont profitables, mais celle pariant sur le 4^e moment est la plus profitable. Les options sur les actions américaines sont étudiées par Murray (2012). Il définit trois combinaisons d'options permettant de parier sur le coefficient d'asymétrie. Il utilise également une méthode pour extraire le coefficient d'asymétrie implicite des options (voir Bakshi et al. (2003)). Il classifie ensuite la profitabilité moyenne des stratégies en fonction du coefficient d'asymétrie implicite à l'entrée. Il trouve une relation négative.

Les quantiles de la distribution font l'objet de l'étude effectuée par Cenesizoglu et Timmermann (2008). Le but premier est de faire une prédiction des quantiles conditionnels avec une régression quantile. Une méthodologie simple de négociation d'option y est ensuite appliquée. On compare certains quantiles obtenus à partir de leur modèle avec ceux obtenus à partir du VIX [3]. Pour les options d'achat, on utilise le 90^e et le 95^e quantile, et pour les options de vente, on utilise le 5^e et le 10^e quantile. Dans les quantiles à droite, lorsque l'estimation obtenue à partir du VIX est supérieure à celle obtenue à partir de leur modèle, on fait la VOA de l'option correspondante et vice-versa. On fait la même chose dans les quantiles à gauche mais avec des options de vente. Les auteurs trouvent que ces stratégies génèrent des profits significativement positifs. Or, les tests statistiques pour la VOV ne sont pas concluants.

Quoique les stratégies exploitant les moments supérieurs soient intéressantes, nous ne les utiliserons pas dans notre système pour garder une certaine simplicité. Cependant, la méthode d'estimation des quantiles de Cenesizoglu et Timmermann (2008) sera reprise, en partie, pour développer notre estimateur de la moyenne de gain des stratégies d'options.

3. Le *volatility index* (VIX) est un indice, basé sur un portefeuille d'options SPX, qui estime la volatilité future du S&P 500.

2.4 Distribution conjointe de plusieurs sous-jacents

2.4.1 Corrélations

La distribution conjointe de deux sous-jacents peut être exploitée à l'aide d'options. La relation entre la volatilité de l'indice S&P 500 et S&P 100 est étudiée par Poon et Pope (2000). On parie sur la différence entre ces deux valeurs. L'hypothèse de base étant qu'elle devrait être plus ou moins égale, on veut parier sur le fait que la différence reviendra à la normale lorsque celle-ci est trop grande. Pour ce faire, on vend une option d'achat à la monnaie dans l'indice dont la volatilité est trop élevée et on achète un option de vente dans la monnaie dans l'indice dont la volatilité est trop faible. En utilisant un ensemble de données allant de 1989 à 1993, ils trouvent que cette stratégie est profitable après les coûts de transaction. Une stratégie très similaire est employée par Ammann et Herriger (2002), sauf qu'ils utilisent les options NDX et celles sur l'indice composite du *New York Stock Exchange* (NYSE) de 1995 à 2000. Ils trouvent également que ces stratégies sont profitables, mais ne le sont pas toujours lorsque les coûts de transaction sont considérés.

Un modèle prédictif de la corrélation entre des paires de taux de change est construit par Chong (2004). On y modélise la corrélation entre deux paires intermédiaires pour négocier la paire complète. Par exemple, on modélise le taux de change du yen japonais et du *deustchemark* (JPY/DM) avec la corrélation des paires JPY/USD et USD/DM. En obtenant un modèle de la corrélation entre JPY/USD et USD/DM, on peut obtenir la variance du taux JPY/DM. Puis, on utilise une méthode classique de négociation du deuxième moment. En utilisant un ensemble de données du prix des options sur les taux JPY/DM et GBP/DM, allant de 1993 à 1999, Chong (2004) trouve que cette stratégie n'est pas profitable après la considération des coûts de transaction.

La modélisation des corrélations entre des sous-jacents ne sera pas utilisée dans notre estimation du calcul de l'espérance de profit. Par contre, nous l'utiliserons dans notre modèle de calcul de risque.

2.4.2 Dispersion

La méthode de négociation par dispersion est basée sur l'idée que la VI d'un indice doit être égale à la VI du portefeuille d'actions le composant. La VI de l'indice est facile à obtenir. Pour obtenir la VI du portefeuille d'actions, il faut avoir la VI des actions individuelles et la matrice des covariances. La VI des actions est disponible, mais l'on doit faire une estimation de la matrice. Lorsqu'il y a une grande différence entre la VI estimée du portefeuille et celle de l'indice, on vend la VI surévaluée et on achète la VI sous-évaluée. Normalement, on vend

la VI de l'indice et on achète la VI des actions individuelles. Cela est fait par l'AOD ou la VOD à la monnaie. Ce type de négociation est décrite par Nelken (2006).

Une étude préliminaire est effectuée par Marshall (2009) sur les options SPX et celles des actions le composant de 2005 à 2007. Il arrive à la conclusion qu'un nombre important d'opportunités de profit est présent. Une simulation plus réaliste est effectuée par Driessen et al. (2009) sur l'indice S&P 100 de 1996 à 2003. Ils trouvent que cette stratégie est profitable en incluant les coûts de transaction. La stratégie est également simulée par Vainberg (2010), mais il utilise un produit appelé un contrat de variance. Celui-ci est écrit sur l'indice S&P 500 et les actions le composant. Avec des données de 1996 à 2004, il trouve que cette stratégie est profitable.

Dû à sa complexité d'exécution, nous ne reprendrons pas ce type de méthodologie.

2.5 Volatilité implicite

Plusieurs études s'intéressent à la modélisation de la VI. Si l'on croit que la VI augmentera, on peut en profiter en faisant l'AOD à la monnaie ou la VOD si l'on croit l'inverse. La VI est relativement prédictible, car elle suit un processus avec retour vers la moyenne (Bali et Demirtas, 2008). On peut également modéliser ce que l'on appelle la surface de VI (SVI). Il s'agit de la VI de l'ensemble des options disponibles à travers les dates d'expiration et des prix d'exercice. Certaines études considèrent la VI en fonction des dates d'expiration seulement.

2.5.1 Prédiction de la VI

La volatilité implicite de l'indice S&P 100 est modélisée par Harvey et Whaley (1992), de 1985 à 1989. On veut prédire le mouvement de la VI des options à la monnaie à une fréquence journalière. Un modèle linéaire est ajusté en utilisant les fluctuations passées de la VI et de l'indice. Lorsqu'une hausse est prévue, on fait la VOA à la monnaie, neutralisée avec l'indice et vice-versa. Après la considération des coûts de transaction, les auteurs trouvent que cette stratégie n'est pas profitable. Une stratégie similaire est mise en place par Chan et al. (2009b), de 1996 à 2004, avec les options SPX. Ils ajoutent la volatilité passée comme facteur dans le modèle et utilisent des options doubles au lieu d'options couvertes. Ils trouvent que les profits sont positifs. Une stratégie similaire est mise en place par Ahoniemi (2006) avec les options SPX de 2003 à 2004. Il trouve que les profits sont positifs. Les options sur actions américaines sont étudiées par Saretto (2006), de 1996 à 2005. Il crée un modèle général pour prédire la direction de la VI de toutes les actions. Il utilise la VI passée et la volatilité réalisée

passée comme variables. En faisant l'AOD ou la VOD à la monnaie, selon la prédiction du modèle, il obtient des profits significatifs et robustes aux coûts de transaction.

Jusqu'ici, toutes les études ont fait usage d'options à court terme. Il existe également des options à long terme : *long term equity anticipation equity* (LEAPS). Celles-ci expirent dans un an ou plus. Les travaux de Stein (1989) et Poteshman (2001) ont montré que lorsque le VI des options à court terme augmente, il y a un délai avant que celle des options LEAPS progresse. Cette propriété est modélisée et exploitée par Cao et al. (2005). En utilisant les options SPX de 1993 à 1994, ils ajustent un modèle prédictif de la différence entre les options à court et long terme. Ils achètent les options à long terme lorsqu'ils anticipent qu'elles apprécieront en valeur et vice-versa. Ceci n'est pas profitable en considérant les coûts de transaction. Dans une autre étude, Le (2012) achète des options SPX à long terme au début de l'année et fait la vente des options à court terme à chaque mois, avec le même prix d'exercice, jusqu'à la fin de l'année, de 1996 à 2007. Il trouve que cela est profitable. Wang (2013) montre que la différence entre la VI des options SPX à court terme et celle à long terme prédit la direction future de la VI à court terme. Il achète et vend des options doubles à la monnaie selon cette prédiction et montre que cette stratégie est profitable, de 1996 à 2009. Une stratégie similaire est mise en place par Vasquez (2010) avec les options sur les actions américaines de 1996 à 2007. Il obtient également des profits positifs.

Au lieu de se limiter seulement aux options à la monnaie, Goncalves et Guidolin (2006) modélisent la SVI des options SPX de 1992 à 1996. Un modèle paramétrique est ajusté pour la surface complète. À chaque jour, ils utilisent le modèle pour identifier les options dont la VI augmentera et celles dont la VI diminuera. Ils achètent les options dont la VI augmentera et vice-versa. De plus, ils neutralisent le Delta de chaque option pour isoler le Vega. Après la considération des coûts de transaction, la stratégie n'est pas profitable. Une stratégie semblable est simulée par Bernales et Guidolin (2014) pour les options sur actions américaines de 1996 à 2006. Ils trouvent également que la stratégie n'est pas profitable après l'intégration des coûts de transaction. Les options sur plusieurs taux de change avec l'euro sont étudiées par Chalamandaris et Tsekrekos (2014). Ils implémentent spécifiquement la méthodologie de Goncalves et Guidolin (2006) et arrivent à la même conclusion sur ce marché. Un modèle semi-paramétrique basé sur les arbres de régression est ajusté par Audrino et Colangelo (2009) pour faire la prédiction de la SVI. En utilisant les options sur l'indice S&P 100 et les options sur les actions le constituant, ils trouvent que les stratégies sont profitables. Cependant, la valeur ajoutée du modèle est mince.

La volatilité implicite des indices boursiers internationaux est pareillement étudiée. L'indice DAX et FTSE 100 est étudié par Tinù et al. (2001) de 1991 à 1998. Cette étude a la parti-

cularité de modéliser la VI en discrétisant les valeurs en deux catégories et quatre catégories. Une série de modèles est utilisée : modèle de Markov (MM), *variable memory length Markov model* (VMMM) et *fractal classification machine* (FCM). En les comparant avec des modèles continus, ils trouvent que la discrétisation mène à de meilleures performances, mais seulement avec deux catégories. La stratégie est profitable. L'étude est reproduite par Schittenkop et al. (2000) avec les options du DAX et ils arrivent à la même conclusion. Tino et al. (2001) font une étude similaire avec un réseau de neurones récurrent (RNR) utilisant deux catégories. Ce modèle n'améliore pas les résultats. L'indice IBEX35 est étudié par Corredor et al. (2002). Un modèle linéaire est ajusté pour prédire la direction de la VI. Les profits sont positifs. La VI de l'indice HSI est modélisé par Cheng (2010) de 2000 à 2006. La stratégie de négociation est profitable. La VI du même indice est modélisée par Tung et Quek (2011). Cependant, ils utilisent un modèle appelé *self-organizing neural fuzzy semantic network* (SONFSN). En simulant une stratégie de 2002 à 2006, ils trouvent qu'elle est profitable. La VI de l'indice coréen (KOPSI) est modélisé par Ahn et al. (2012) avec un RN et ils y ajoutent les lettres grecques comme facteurs. Ils rapportent une bonne performance statistique de la prédiction, mais ne simulent pas de stratégies. Un modèle prédictif de la VI des bons du Trésor britannique est modélisé par Brooks et Oozeer (2002) de 1986 à 1995. Ils trouvent que la stratégie de base est profitable.

Dans notre système de négociation, nous n'utiliserons pas de prédictions de la direction des fluctuations de la VI pour prendre des décisions. Cependant, nous utiliserons une modélisation de la SVI similaire à Goncalves et Guidolin (2006) pour construire notre estimateur de la moyenne de gain.

2.5.2 Événements

Au lieu de modéliser directement la VI, un série d'études mettent en place une stratégie basée sur des événements relatifs à celle-ci. Généralement, il s'agit d'un événement tel qu'une hausse anormale de la VI ou un événement relié à une annonce. Ces annonces peuvent être reliées à un événement économique ou aux résultats trimestriels d'une entreprise. On veut toujours parier sur la direction de la VI en faisant l'hypothèse que le marché surestime ou sous-estime la volatilité engendrée par un certain événement.

Une série d'annonces économiques est étudiée par Monroe (1992) de 1984 à 1985. L'auteur anticipe que le marché sous-estime la volatilité à la veille des annonces. En utilisant les options sur les bons du Trésor américain, il parie sur une montée de la VI à la veille des annonces. En général, cette stratégie est profitable, mais les profits disparaissent après la considération des coûts de transaction. Les événements de VI des options d'achat sur l'indice

S&P 100 sont utilisés par Will (2007) pour mettre en place une stratégie de 1998 à 2006. Lorsque la VI augmente d'un facteur anormal par rapport à la moyenne historique, on fait la VOD à la monnaie. Il cherche à exploiter la propriété de retour vers la moyenne de la VI. La stratégie est profitable et plus avantageuse que celle d'un groupe de contrôle. La VOD à la monnaie des options sur l'action de Google est simulée par Tan et Bing (2014). La stratégie est profitable, mais les résultats sont limités, car il n'y a qu'une seule observation. Dans sa thèse de doctorat, Mao (2015) étudie l'effet des sommets de *tweet*s sur la VI de l'action des compagnies américaines. Il observe que ces sommets sont corrélés avec une hausse de la VI. De 2013 à 2014, il simule une stratégie de VOV lorsqu'un tel événement se produit. Il le fait sur l'ensemble des actions américaines incluses dans l'indice S&P 500. Il trouve que cette stratégie est profitable.

Les stratégies basées sur les événements de VI sont plutôt ad hoc. Elles ne se prêtent pas bien à notre système de négociation. De plus, les résultats obtenus dans la littérature sont médiocres. Ainsi, nous n'inclurons pas les éléments de ce type de stratégies dans notre système de négociation.

2.6 Sélection par critères

2.6.1 Critères de base

Les familles de méthodologies vues jusqu'ici ne considèrent pas divers éléments cruciaux pour l'application réaliste d'un système de négociation automatique d'options. En pratique, un investisseur est continuellement en possession d'un portefeuille d'options et pondère le capital alloué à chaque élément du portefeuille différemment. Les modèles précédents allouent généralement la totalité de leur capital à une seule position. Le choix judicieux d'un **ensemble** de stratégies, d'un **ensemble** de sous-jacents et d'une méthodologie d'allocation du capital est nécessaire pour obtenir un système efficace en pratique (Izraylevich et Tsudikman, 2010, 2012). De plus, il faut définir une méthodologie de liquidation des positions. Toutes ces décisions peuvent être prises sur la base de critères. La définition des critères dépend de ce que nous cherchons à optimiser. Le rendement du portefeuille est une quantité naturelle à optimiser. On veut également contrôler le risque.

L'espérance de profit, ou de rendement, du portefeuille est un critère fréquemment utilisé dans la littérature. Comme l'espérance est un opérateur linéaire, il se prête bien à un portefeuille, car celui-ci est représenté par une combinaison linéaire. Bracken (1968) développe un critère de décision d'achat d'option basé sur l'espérance de profit. On achète une option lorsque l'espérance est positive. Il applique également ce critère à la liquidation : lorsque l'espérance

de profit à expiration est inférieure au profit courant, on liquide la position. Tersine et Cross (1976) optent pour une méthode similaire, mais ils cherchent à fournir un cadre applicable. Puisque les ordinateurs n'étaient pas accessibles facilement à cette époque, ils forment un modèle discret de la distribution future du sous-jacent dont les probabilités peuvent être estimées facilement à l'aide de courbes. Puglisi (1972) utilise un critère de sélection connexe, mais il conditionne sur un ensemble d'information. Il classifie les options à l'aide d'un modèle *multiple linear discriminant* (MLD) sur 20 variables fondamentales. Un ensemble de données d'options sur actions américaines est utilisé pour montrer que cette méthodologie améliore la probabilité de succès et la moyenne des profits. Chen et Leung (2003) ajustent un modèle linéaire pour prédire le profit d'une AOD/VOD à la monnaie dans les options sur les contrats à terme de diverses devises. Lorsque l'espérance est positive, ils font l'AOD à la monnaie et la VOD lorsqu'elle est négative. Ils comparent les performances de la stratégie avec une stratégie de négociation classique du 2^e moment. Une amélioration nette est observée. Izraylevich et Tsudikman (2010) utilisent l'espérance de profit calculée à partir d'une loi normale et d'une densité empirique. Ils observent une corrélation entre les critères et le profit réalisé dans les options sur actions américaines.

Au lieu de travailler avec l'espérance brute de profit, nous pouvons travailler avec l'espérance d'une transformation. Dans la littérature financière, la transformation porte le nom de fonction d'utilité. Celle-ci permet de pénaliser pour la grandeur du risque encouru, entre autres. La fonction la plus courante étant une pénalisation du profit par la variance du portefeuille. Un coefficient est attaché à cette variance et est appelé le taux d'aversion au risque. D'autres transformations, telles que la fonction de puissance, permettent de pénaliser pour les moments supérieurs. On cherche un coefficient d'asymétrie positif et un faible coefficient d'aplatissement. Le développement de critères basés sur des fonctions d'utilité pour la sélection de stratégies d'options fait l'objet de l'ouvrage de Malkiel et Quandt (1969). Ils vulgarisent ces concepts et montrent comment les fonctions d'utilité peuvent être intégrées dans un cadre simple de prise de décision.

Un autre type de critères utilisés pour la sélection de stratégies est une transformation de la volatilité historique et implicite. Bakshi et Kapadia (2003) conditionnent les gains de l'AOA d'options SPX Delta neutre sur la volatilité historique et observent une relation linéaire positive entre les profits moyens et celle-ci. Simon (2007) observe que les gains moyens de la VPC des options sur indices américains augmentent lorsque la différence entre la VI et l'estimation de la volatilité par un modèle standard augmente. Simon (2010) observe la même chose avec des options sur les bons du Trésor américain. Une étude portant uniquement sur ces critères a été faite par Goyal et Saretto (2009) avec des options sur les actions américaines allant de 1996 à 2006. Les rendements moyens de l'AOA Delta neutre et de l'AOD à la

monnaie sont catégorisés par la différence entre la volatilité historique et la VI. Un lien linéaire positif est observé. De plus, Cao et Han (2010) et Do et al. (2016) arrivent aux mêmes conclusions sur le marché américain et australien respectivement.

Une métrique de risque très commune dans la littérature est appelée *value at risk* (VaR). Typiquement, elle est égale au 5^e quantile de la distribution du prix futur du portefeuille. Elle donne une évaluation d'un scénario catastrophe. Plusieurs études ont développé des méthodologies d'estimation de cette valeur pour des portefeuilles d'options (Alexander et al., 2006; Chen et Lu, 2009; Chen et Yu, 2013; Wang et al., 2017). On veut minimiser ce critère. On peut également développer des critères basés sur la probabilité de profit d'une position (Izraylevich et Tsudikman, 2010).

2.6.2 Optimisation d'un portefeuille d'options

L'optimisation de portefeuille est une discipline de la finance où le but est de trouver le schéma d'allocation optimal du capital à un ensemble de valeurs préalablement choisies. Généralement, la solution du problème d'optimisation est un vecteur de nombres réels compris entre 0 et 1 et dont la somme est égale à 1. La majorité de la littérature porte sur les portefeuilles d'actions et de produits similaires. Un plus petit segment de littérature porte sur les portefeuilles d'options. Des adaptations sont nécessaires, car il existe une complexité dans la sélection des paramètres des stratégies qui n'existe pas dans les produits classiques.

Un problème d'optimisation discret est posé par Mehta (1982). Il s'intéresse à un portefeuille de l'achat d'une seule position combinée. La solution est le prix d'exercice des deux options et la quantité d'option d'achat et d'options de vente, donc quatre variables au total. Le critère à optimiser est l'espérance de profit, calculée à partir d'une loi normale. Il ajoute une contrainte de budget. Il ne fait pas d'étude empirique, mais suggère d'utiliser une relaxation linéaire et un algorithme basé sur le plan sécant pour résoudre le problème. Tanaka et al. (1992) créent un modèle pour la VPC optimale. Ils séparent le processus en deux problèmes d'optimisation. Dans le premier, ils cherchent à maximiser l'espérance de profit pour sélectionner les prix d'exercice. Dans le second, ils maximisent la probabilité de profit pour sélectionner les quantités d'options d'achat et de vente. Ils utilisent une loi normale pour les calculs d'espérance et de probabilité. Les problèmes sont résolus analytiquement.

Une série d'études adoptent une méthode où l'on permet la vente ou l'achat d'un ensemble d'options pour un seul sous-jacent avec une seule date d'expiration. Papahristodoulou (2004) se base sur l'idée de Rendleman (1995) et crée un problème d'optimisation linéaire dont la fonction objectif est la somme des espérances individuelles de chacune des positions allouées. La solution du problème sera un vecteur représentant la taille optimale de chaque position.

L'espérance de profit est calculée comme la différence entre la valeur théorique de l'option, selon le modèle BSM, et la valeur du marché. On ajoute une contrainte de budget. On pose également une contrainte pour que les lettres grecques soient nulles. Il démontre la performance du modèle avec des options sur l'action de Ericsson. Gao (2009) reprend le modèle en relaxant les contraintes sur les lettres grecques. Il utilise des inégalités au lieu d'égalités.

La méthode classique d'optimisation d'une fonction d'utilité, dont la solution est un vecteur de pondération, fait l'objet de l'étude de Jones (2006). À l'aide de son modèle non linéaire, il calcule l'espérance de rendement d'un portefeuille d'options avec une spécification fixe. Il calcule également la variance du portefeuille à l'aide de son modèle et optimise le rapport entre l'espérance de profit et la variance. Il trouve que son modèle, utilisé avec les options SPX, offre de meilleurs rendements qu'une stratégie de vente naïve. Un modèle avec seulement une spécification d'option est défini par Branger et al. (2008). Ils cherchent à optimiser une fonction d'utilité qui pénalise pour les moments supérieurs. L'espérance de cette fonction d'utilité est calculée en faisant des hypothèses sur le processus stochastique du sous-jacent et des options. Les options ont la même date d'expiration et le même sous-jacent. Un rebalancement à période fixe proposé par l'auteur améliore la performance du système. Faias et Santa-Clara (2017) utilisent la même fonction d'utilité, mais ils proposent une méthode de simulation de type *bootstrap* avec des données antérieures. Ils allouent deux options hors de la monnaie et deux options à la monnaie avec une spécification fixe. Ils montrent que leur modèle permet de contrôler la statistique des troisième et quatrième moments des profits réalisés avec des données sur les options SPX.

L'optimisation dite à plusieurs stades, ou *multi stage*, est proposée par Blomvall et Lindberg (2003) et Schyns et al. (2010) pour négocier des options. On considère l'optimisation à chaque branche d'un arbre de scénario. Chaque niveau de l'arbre représente une unité de temps et les feuilles de l'arbre sont à l'expiration des options. Un scénario est une valeur possible du sous-jacent à cet instant. On obtient l'arbre à l'aide de données historiques. L'optimisation à plusieurs niveaux permet de prendre en considération les événements se produisant entre la mise en place de la position et l'expiration. On veut maximiser la valeur d'une fonction d'utilité. On alloue un nombre fixe d'options avec la même date d'expiration et le même sous-jacent. De plus, Schyns et al. (2010) ajoutent une contrainte de type VaR qui doit être respectée à chaque niveau de l'arbre.

Jusqu'ici, les méthodes s'en tiennent à un seul sous-jacent. Or, un portefeuille réaliste contiendra plusieurs sous-jacents. Dans une série de deux livres, Izraylevich et Tsudikman (2010,2012) érigent un cadre pour la négociation automatique d'options. Leur méthode est basée sur l'op-

timisation de critères. La plupart des critères qui y sont mentionnés dans la première partie (Izraylevich et Tsudikman, 2010) ont été couverts par la littérature. Dans la deuxième partie, ils proposent un modèle plus complet où l'on utilise un portefeuille de VPC. Contrairement aux études précédentes, ils utilisent une multitude de sous-jacents. Toutes les options doivent avoir la même date d'expiration. Leur critère principal est l'espérance de rendement dont le calcul est basé sur une loi lognormale. Ils sélectionnent les prix d'exercice en optimisant le critère pour chacune des positions combinées, individuellement, puis ils déterminent la pondération du capital alloué à chacune des positions combinées. Une première stratégie est d'allouer le capital de manière proportionnelle à l'espérance de rendement. La deuxième est d'utiliser une fonction d'utilité qui tient compte de la relation entre les sous-jacents. La fonction d'utilité est l'espérance de rendement du portefeuille, divisée par le Delta du portefeuille. Comme ils considèrent des actions américaines, ils ramènent le Delta du portefeuille au Delta de l'indice S&P 500. Pour ce faire, ils doivent obtenir les couples de corrélations des actions avec l'indice. Une troisième méthode est l'utilisation d'optimisation multicritère. Ceci permet de maximiser l'espérance de profit tout en minimisant certains critères de risque comme la VaR et une probabilité de perte. Les auteurs ne donnent pas de méthodologie concrète pour estimer ces valeurs qui dépendent de la distribution conjointe des sous-jacents. L'optimisation multicritère est faite à l'aide d'une méthode de convolution ou par une méthode de Pareto.

Les décisions prises par notre système de négociation seront basées sur la résolution d'un problème d'optimisation. La fonction objectif de ce problème sera définie avec notre estimateur de la moyenne de gain. Cela nous permettra d'exploiter un ensemble de variables explicatives. Certaines études développent une méthode pour exploiter un ensemble d'information (Puglisi, 1972; Chen et Leung, 2003). Cependant, elles se limitent à une stratégie fixe et à la modélisation du gain à l'expiration. Notre estimateur de la moyenne de gain nous permettra d'estimer l'espérance de gain à toutes les périodes jusqu'à l'expiration, pour une stratégie quelconque d'options sur un même sous-jacent.

Nous reprendrons l'idée, avancée par Mehta (1982), Tanaka et al. (1992), Izraylevich et Tsudikman (2010,2012), d'intégrer le choix des paramètres des stratégies d'options dans notre problème d'optimisation. Cependant, nous développerons une formulation du problème d'optimisation qui permet d'utiliser plusieurs sous-jacents et plusieurs dates d'expiration. Pour cela, nous allons construire une série de fonctions de contraintes associées à des métriques de risque adaptées aux portefeuilles d'options, entre autres. Celles-ci tiendront compte des positions courantes du système. Finalement, nous développerons un algorithme de liquidation des positions, à l'aide de notre estimateur de la moyenne de gain. Il se différencie de celui de Bracken (1968) par la considération des périodes intermédiaires.

CHAPITRE 3 LE SYSTÈME DE NÉGOCIATION AUTOMATISÉ

3.1 Aperçu du système

3.1.1 Structure

Notre système de négociation d'options automatisé est schématisé à la figure 3.1. La ligne y représente la frontière entre le système et le monde extérieur. Ce dernier est constitué de sources d'information et de la bourse. L'information utilisée par le système est choisie par l'utilisateur. Il existe potentiellement une infinité de variables possibles. Par exemple : des variables macro-économiques, des variables reliées au sentiment du marché, des variables sur la production minière d'un pays, etc.

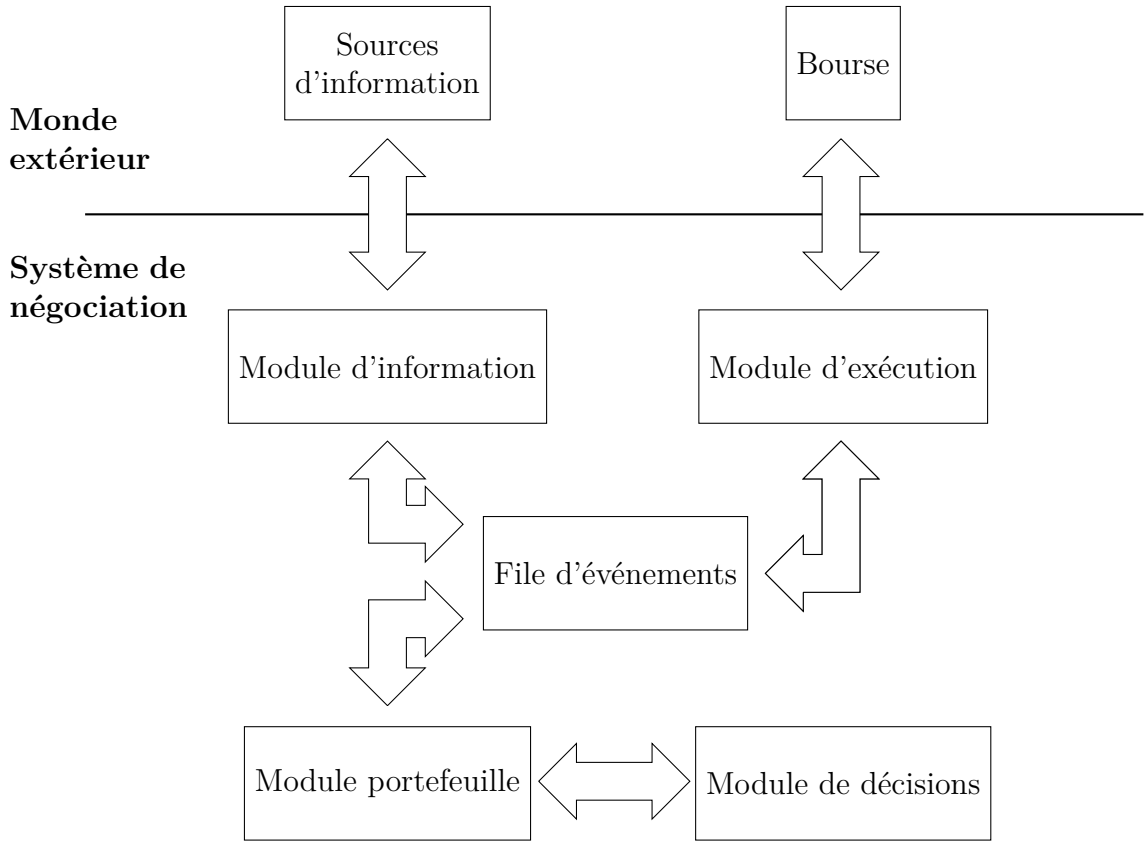


Figure 3.1 Système de négociation automatisé.

Deux modules sont construits pour interagir avec le monde extérieur ; un module d'information et un module d'exécution. Le premier permet au système de recueillir l'information nécessaire à la prise de décisions et l'évaluation des actifs. Le deuxième permet d'envoyer

des ordres à la bourse, ainsi que de recevoir les confirmations d'exécutions. À l'interne, les modules communiquent à l'aide d'une file d'événements. Le module portefeuille est le module principal. Celui-ci détient la logique des actifs : des options et du capital. Le module portefeuille s'occupe de faire les requêtes initiales d'information et d'exécution, celles-ci sont envoyées à la file d'événements. Les événements sont ensuite traités par les modules correspondants. Pour initier les requêtes, le module portefeuille se sert du module de décisions. Comme son nom l'indique, ce dernier sert à la prise de décisions d'investissement. Il constitue le cœur de ce mémoire. La mise en place du reste du système est un problème informatique et ne sera pas détaillée davantage.

3.1.2 Module de décisions

Le système décrit précédemment doit prendre des décisions à une fréquence fixe. Cette dernière peut varier et doit être choisie par l'architecte du système. Deux décisions principales doivent être prises :

1. Quelles nouvelles positions devraient être initiées et avec quelle quantité ?
2. Quelles positions du portefeuille devraient être liquidées ?

Pour illustrer comment cette prise de décision se joue en réalité, nous allons utiliser des exemples concrets. Tout d'abord, on suppose l'existence d'un sous-jacent ABC. Le prix de celui-ci, à différentes périodes, est donné au tableau 3.1 où le temps est exprimé en jours.

Tableau 3.1 Prix du sous-jacent ABC à différentes périodes.

	$t = 0$	$t = 10$	$t = 20$	$t = 30$
Prix courant	50 $	60 $	55 $	53 $

Ensuite, on suppose qu'il existe 6 options sur le sous-jacent ABC et qu'elles expirent toutes à $t = 30$. De ces 6 options, 3 sont des options d'achat. Les prix d'exercice sont de 45 $, 50 $ et 55 $. Les 3 autres options sont des options de vente avec les mêmes prix d'exercice. De plus, les options sont européennes et pour 100 unités du sous-jacent (voir la figure 1.1). Le prix courant de ces options à $t = 0$, $t = 10$ et $t = 20$ est donné au tableau 3.2. On considère 3 exemples où un investisseur possède 10 000 $ à l'instant $t = 0$.

Exemple 3.1 - À $t = 0$, l'investisseur prend la décision d'acheter 40 options d'achat avec un prix d'exercice de 50 $. Un investisseur averti sait qu'il fait un bon choix si le prix du sous-jacent augmente par la suite. Comme on peut le voir au tableau 3.2, le prix de cette

Tableau 3.2 Prix courant des options, expirants à $t = 30$, du sous-jacent ABC à différentes périodes. Les colonnes identifiées par A correspondent aux options d'achat et celles identifiées par V aux options de vente.

Prix d'exercice	$t = 0$		$t = 10$		$t = 20$	
	A	V	A	V	A	V
45 $	5,23 $	0,09 $	15,12 $	0,01 $	10,06 $	0,01 $
50 $	1,53 $	1,33 $	10,14 $	0,01 $	5,07 $	0,01 $
55 $	0,18 $	4,96 $	5,24 $	0,09 $	0,94 $	0,86 $

option à $t = 0$ est de 1,53 $. Donc, ces options coûteront $40 \times 100 \times 1,53\ \$ = 6\ 120\ \$$ à l'investisseur. Le facteur 100 dans l'équation précédente est ajouté parce que les options sont écrites pour 100 unités du sous-jacent et les prix sont affichés par unité (voir la section 1.2.2). Après cet achat, il reste 3 880 $ à l'investisseur. À la période $t = 10$, l'option vaut 10,14 $. Ainsi, le portefeuille de l'investisseur vaut maintenant $3\ 880\ \$ + 40 \times 100 \times 10,14\ \$ = 44\ 440\ \$$. L'investisseur a maintenant le choix de liquider sa position à profit ou d'attendre. Regardons ce qui se passe lorsque l'investisseur décide d'attendre. À $t = 20$, son portefeuille vaut $3880\ \$ + 40 \times 100 \times 5,07\ \$ = 24\ 160\ \$$. À $t = 30$, soit l'instant où ses options expirent, les options sont dans la monnaie. En toute logique, il exerce ses options et réalise un profit de $40 \times 100(53 - 50)\ \$ = 12\ 000\ \$$. Au final, il détient $3\ 880\ \$ + 12\ 000\ \$ = 15\ 880\ \$$. Si l'investisseur avait connu l'avenir, il aurait liquidé sa position à la période $t = 10$. On remarque que le prix du sous-jacent a augmenté de la période $t = 0$ à la période $t = 10$ et a diminué par la suite. C'est ce qui explique pourquoi la valeur du portefeuille était maximale à $t = 10$.

Exemple 3.2 - L'investisseur décide d'effectuer la vente de 10 options d'achat avec un prix d'exercice de 55 $ à la période $t = 0$. Cette stratégie fonctionnera très bien si le prix du sous-jacent diminue après l'achat, mais sera profitable à l'expiration tant que le prix du sous-jacent est inférieur à 55 $. Après la vente des options, il collecte $10 \times 100 \times 0,18\ \$ = 180\ \$$. Il possède maintenant un total de 10 180 $. Par contre, il doit maintenir une marge de $M_{\text{VOA}}(50; 55; 0,18; 10) \times 100\ \$ = 5\ 180\ \$$ (voir la section 1.2.3). Cela veut dire que la quantité de capital qu'il possède ne doit pas devenir inférieure à 5 180 $. De plus, la marge est une fonction du prix du sous-jacent ABC, ce qui implique qu'elle changera à travers le temps. Pour liquider une stratégie de vente d'option, il faudra acheter une option avec la même spécification que celle vendue. Ainsi, pour liquider sa position, il faudra que l'investisseur achète 10 options d'achat avec un prix d'exercice de 55 $. Donc, pour calculer la valeur du

portefeuille aux périodes subséquentes, il faut soustraire la valeur courante des options au capital détenu à cette période. À la période $t = 10$, le portefeuille de l'investisseur vaut $10180\$ - 10 \times 100 \times 5,24\ \$ = 4\ 940\ \$$. L'investisseur peut décider de liquider sa position et réaliser une perte ou attendre en espérant que sa fortune s'améliore. De plus, on remarque que sa marge est maintenant de $M_{\text{VOA}}(60, 55, 0.18, 10) \times 100\ \$ = 12\ 180\ \$$, alors qu'il possède seulement 10 180 \$. Son courtier pourrait le forcer à liquider sa position ou à ajouter du capital additionnel. À des fins de simplification, on suppose que son courtier ne le force pas à faire cela et que l'investisseur décide de ne pas liquider sa position. À $t = 20$, son portefeuille vaut $10\ 180\ \$ - 10 \times 100 \times 0,94\ \$ = 9\ 240\ \$$. Finalement, à l'expiration, comme l'option est hors de la monnaie, le détenteur des options qu'il a vendues ne les exerce pas. L'investisseur détient 10 180 \$, sans obligation de maintenir une marge, et réalise ainsi un profit de 180 \$.

Exemple 3.3 - Au temps $t = 0$, l'investisseur ne fait rien. À $t = 10$, il décide d'effectuer la vente de 5 positions combinées (voir la section 1.2.3). La vente d'une position combinée est constituée de la vente d'une option d'achat et de la vente d'une option de vente, expirant à la même date. L'investisseur sélectionne l'option d'achat avec un prix d'exercice de 55 \$ et l'option de vente avec un prix d'exercice de 45\$. Après avoir réalisé la VPC, il collecte $5 \times 100 \times (5,24 + 0,01)\ \$ = 2\ 625\ \$$. La marge requise est de $M_{\text{VPC}}(60; 55; 45; 5,24; 0,01; 5) \times 100\ \$ = 8\ 625\ \$$ (voir la section 1.2.3). Ainsi, après la vente, il a un pouvoir d'achat restant de $(10\ 000 + 2\ 625)\ \$ - 8\ 625\ \$ = 4\ 000\ \$$. Le pouvoir d'achat est égal à la quantité de capital qu'il pourrait allouer à de nouvelles positions en respectant ses obligations. À l'instant $t = 20$, le portefeuille vaut $12\ 625\ \$ - 5 \times 100 \times (0,94 + 0,01)\ \$ = 12\ 150\ \$$. De plus, la marge est égale à $M_{\text{VPC}}(55; 55; 45; 5,24; 0,01; 5) \times 100\ \$ = 8\ 125\ \$$ et son pouvoir d'achat à $12\ 625\ \$ - 8\ 125\ \$ = 4\ 500\ \$$. De ce fait, à l'expiration, les deux options de la position combinée sont hors de la monnaie. Ainsi, tout le capital collecté à la vente est conservé par l'investisseur et il réalise un profit de 2 625 \$.

Nous avons vu dans les exemples précédents que les choix de l'investisseur affectent grandement ses performances. Le présent chapitre propose une méthodologie originale pour prendre ces décisions de manière systématique. Dans un premier temps, nous allons définir une série d'éléments importants pour les notations dans la section 3.2. Ces définitions sont reliées à des éléments du monde extérieur et du système de négociation. Dans un deuxième temps, dans la section 3.3, nous allons développer un estimateur de la moyenne du gain, conditionnelle à la valeur d'un ensemble d'information, d'une stratégie quelconque d'options sur un même sous-jacent. Cet estimateur constitue l'une des deux contributions principales de ce mémoire. On l'obtiendra grâce à des régressions quantiles et à une estimation de la surface de volatilité

implicite.[1] Nous réutiliserons cet estimateur à la section 3.4 pour définir la fonction objectif d'un problème d'optimisation et à la section 3.5 pour construire un algorithme de liquidation des options. Dans un troisième et dernier temps, nous allons formuler un problème d'optimisation à variables discrètes dans la section 3.4. La formulation de ce problème d'optimisation (i.e. : l'espace d'optimisation, la fonction objectif et les contraintes) et l'algorithme utilisé pour le résoudre constituent la deuxième contribution principale de ce mémoire. L'algorithme en lui-même n'est pas nouveau. Par contre, la somme de tous ces éléments constitue une innovation dans le domaine des systèmes automatisés de négociation d'options. Celle-ci règle plusieurs problèmes de la littérature. Dans le section 3.4, tout ceci sera mis en évidence pour le lecteur.

3.2 Définitions préliminaires

3.2.1 Monde extérieur

Définition 3.1 ***L'univers des sous-jacents*** *est un ensemble* $\mathbb{U}$ *dont les éléments sont les produits financiers auxquels sont attachées des options.*

Définition 3.2 ***L'ensemble des sous-jacents actifs****, noté* J *où* $J \subseteq \mathbb{U}$*, est l'ensemble des sous-jacents utilisés par le système de négociation d'options.*

L'ensemble J doit être sélectionné lors de la mise en place du système et les éléments de cet ensemble ne changent pas à travers le temps. Il existe une certaine subjectivité dans la sélection des éléments de J. Nous y reviendrons au chapitre 4.

Définition 3.3 *Le* ***prix d'un sous-jacent actif*** *est un processus stochastique à temps et états continus* $S_{t,i}$ *où* $1 \leqslant i \leqslant |J|$*,* $t \geqslant 0$ *et* $S_{t,i} > 0$*.*

Dans la définition précédente, et à travers ce chapitre, l'opérateur $|\cdot|$ est utilisé pour dénoté la cardinalité d'un ensemble.

Définition 3.4 *Une* ***variable explicative*** *est un processus stochastique à temps continu et états continus.*

Définition 3.5 ***L'ensemble d'information*** *, noté* $\mathcal{I}_t$ *où* $t \geqslant 0$*, est un ensemble fini de variables explicatives.*

1. Nous avons parlé de la surface de volatilité implicite à la section 2.5.1. Nous reviendrons sur celle-ci à la section 3.3.2.

Tout comme pour l'ensemble des sous-jacents actifs, la sélection des éléments de $\mathcal{I}_t$ est subjective. Nous reviendrons sur la sélection des éléments de cet ensemble au chapitre 4.

Définition 3.6 *Les* ***prix d'exercice disponibles*** *pour les options d'achat/de vente d'un sous-jacent au temps t sont les prix d'exercice des options d'achat/de vente que la bourse alloue à cet instant pour ce sous-jacent. Ces prix constituent les éléments des ensembles notés $KA_{t,i}$ et $KV_{t,i}$ respectivement, où $1 \leqslant i \leqslant |J|$ et $t \geqslant 0$. Les éléments de ces deux ensembles sont listés en ordre croissant.*

Définition 3.7 *Les* ***dates d'expiration disponibles*** *pour les options d'un sous-jacent au temps t sont les dates d'expiration des options d'achat/de vente que la bourse alloue à cet instant pour ce sous-jacent. Ces dates constituent les éléments de l'ensemble noté $T_{t,i}$ où $1 \leqslant i \leqslant |J|$ et $t \geqslant 0$. Les éléments de cet ensemble sont listés en ordre croissant et sont toujours strictement supérieurs à t.*

Exemple 3.4 - L'ensemble des sous-jacents actifs est donné par $J = \{A, B\}$. On remarque que $j_1 = A$ et $j_2 = B$. À l'instant $t = 0$, la bourse alloue les prix d'exercice 5 \$ et 10 \$ pour les options d'achat et de vente du sous-jacent A. Au même instant, elle alloue les prix d'exercice 20 \$ et 25 \$ pour les options d'achat et de vente du sous-jacent B. De plus, elle alloue les dates d'expiration 30 et 60 pour les deux sous-jacents à $t = 0$. Ainsi, on peut dire que $\mathrm{KA}_{0,1} = \mathrm{KV}_{0,1} = \{5, 10\}$, $\mathrm{KA}_{0,2} = \mathrm{KV}_{0,2} = \{20, 25\}$ et $\mathrm{T}_{0,1} = \mathrm{T}_{0,2} = \{30, 60\}$.

Il important d'apporter une précision additionnelle par rapport aux deux définitions précédentes. Les prix d'exercice et les dates d'expiration sont des nombres réels strictement positifs.

Définition 3.8 *Les* ***spécifications disponibles*** *pour les options d'achat/de vente d'un sous-jacent au temps t sont les spécifications d'options échangeables à cet instant sur la bourse. Celles-ci sont formées d'un prix d'exercice et d'une date d'expiration et constituent les éléments des ensembles notés $OA_{t,i}$ et $OV_{t,i}$ où $1 \leqslant i \leqslant |J|$ et $t \geqslant 0$.*

Exemple 3.5 - L'ensemble des sous-jacents actifs est donné par $J = \{A, B, C\}$. À l'instant $t = 0$, la bourse alloue un ensemble d'options d'achat et de vente sur ces sous-jacents. Sur le sous-jacent A, seule une option d'achat avec un prix d'exercice de 10 \$, expirant à $t = 60$, est allouée. Sur le sous-jacent B, les options d'achat avec un prix d'exercice de 100 \$ et 150 \$, expirant à $t = 30$, sont allouées. L'option de vente expirant à $t = 30$, avec un prix d'exercice de 150 \$, est également allouée. Seule l'option d'achat avec un prix d'exercice

de 1 000 $ et expirant à $t = 60$ est allouée sur le sous-jacent C. Ainsi, on peut dire que $\mathrm{OA}_{0,1} = \{\{10, 60\}\}$, $\mathrm{OV}_{0,1} = \varnothing$, $\mathrm{OA}_{0,2} = \{\{100, 30\}, \{150, 30\}\}$, $\mathrm{OV}_{0,2} = \{\{150, 30\}\}$, $\mathrm{OA}_{0,3} = \{\{1000, 60\}\}$ et $\mathrm{OV}_{0,3} = \varnothing$.

On peut davantage clarifier la définition 3.8 en disant que $\mathrm{OA}_{t,i} \subseteq \{\mathrm{KA}_{t,i} \times \mathrm{T}_{t,i}\}$ et $\mathrm{OV}_{t,i} \subseteq \{\mathrm{KV}_{t,i} \times \mathrm{T}_{t,i}\}$ où $\times$ représente le produit cartésien de deux ensembles. [2] On voit qu'il ne s'agit pas d'une égalité. En effet, il est possible, par exemple, qu'un prix d'exercice soit disponible sur les options d'achat d'un sous-jacent à une certaine date d'expiration, mais pas à une autre.

Maintenant, on définit les deux fonctions suivantes :

$$\Theta A_{t,i}(k, \tau) : \mathrm{OA}_{t,i} \longmapsto \mathbb{R}_+^* \tag{3.1}$$

et

$$\Theta V_{t,i}(k, \tau) : \mathrm{OV}_{t,i} \longmapsto \mathbb{R}_+^* \tag{3.2}$$

où $t \geqslant 0$ et $1 \leqslant i \leqslant |J|$. Ceux deux fonctions sont égales au prix courant, à l'instant t, de l'option d'achat/de vente pour le sous-jacent indexé par i, avec le prix d'exercice k et expirant à l'instant τ.

Exemple 3.6 - Dans cet exemple nous réutiliserons la prémisse des exemples 3.1, 3.2 et 3.3. Celle-ci est essentiellement décrite par les tableaux 3.1 et 3.2. On se rappelle que dans cette mise en situation, il existe un seul sous-jacent actif, soit le sous-jacent ABC, et que toutes les options qui y sont attachées expirent à $t = 30$. Le tableau 3.2 donne le prix courant de ces options à différentes périodes. En se fiant à ce tableau, on peut dire que $\Theta A_{0,1}(50, 30) = 1,53$, $\Theta A_{10,1}(50, 30) = 10,14$, $\Theta V_{0,1}(55, 30) = 0,18$, $\Theta V_{20,1}(55, 30) = 0,86$ et que $\Theta A_{0,1}(50, 60)$ n'est pas définie, entre autres.

Plusieurs remarques par rapport aux fonctions 3.1 et 3.2 peuvent être faites. Premièrement, pour une spécification d'option et un sous-jacent fixe, les fonctions 3.1 et 3.2 sont des processus stochastiques à temps et états continus. Par contre, ces processus ne démarrent pas au temps 0, mais bien à l'instant où la spécification est allouée pour la première fois par la bourse. Deuxièmement, même s'il est possible d'évaluer ces fonctions au temps présent, il n'est pas possible d'obtenir une formulation analytique exacte de celles-ci. En effet, d'un point de vue plus abstrait, la valeur de ces fonctions est déterminée par la somme des actions de tous les participants du marché. Pour évaluer ces fonctions, il faut faire une requête à la bourse qui

2. L'opérateur $\times$ sera réutilisé à travers ce chapitre pour représenter le produit cartésien de deux ensembles.

nous retournera le prix courant d'une spécification en particulier à l'instant t. Finalement, la fonction objectif et les fonctions de contrainte qui seront définies à la section 3.4 sont obtenues à partir d'une composition des fonctions 3.1 et 3.2. Ainsi, nous ne pourrons pas obtenir le gradient de la fonction objectif et des fonctions de contrainte.

3.2.2 Système

Définition 3.9 *La réalisation d'une stratégie de base d'option (voir section 1.2.3) est appelée une* ***position****. Plus précisément, une position est un ensemble de six éléments, noté avec les indices entre parenthèses pour faciliter la compréhension ; l'indice du sous-jacent (j), le prix d'exercice (k), la date d'expiration (τ), la date d'exécution (e), le prix d'exécution (θ) et la quantité (n). Lorsqu'une position est la réalisation de l'AOA ou de la VOA on dit que c'est une position sur option d'achat. De même, lorsqu'une position est la réalisation de l'AOV ou de la VOV on dit que c'est une position sur option de vente.*

Exemple 3.7 - On suppose que l'ensemble des sous-jacents actifs est donné par $J = \{A, B, C\}$. On suppose également qu'à $t = 0$ la bourse alloue une option d'achat avec un prix d'exercice de 5 \$, expirant à $t = 30$, sur le sous-jacent B. De plus, on sait qu'à $t = 0$ le prix courant de cette option est de $1,5$ \$. Si l'on décide d'acheter cinq options avec cette spécification à $t = 0$, on crée une position, P, sur option d'achat telle que $\mathrm{P} = \{2; 5; 30; 0; 1,5; 5\}$. Selon la définition 3.9, on peut référer aux éléments de P tels que $p_j = 2$, $p_k = 5$, $p_\tau = 30$, $p_e = 0$, $p_\theta = 1,5$ et $p_n = 5$. Si l'on avait effectué la vente des options, alors $\mathrm{P} = \{2; 5; 30; 0; 1,5; -5\}$. Dans ce cas, p_θ correspond au montant collecté et non au montant payé. L'idée est exactement la même pour les options de vente, à la seule différence que l'on parlerait d'une position sur option de vente.

Plusieurs précisions additionnelles peuvent être apportées. Premièrement, l'indice du sous-jacent doit être compris entre 1 et la cardinalité de l'ensemble des sous-jacents actifs. Le prix d'exercice, la date d'expiration, la date d'exécution et le prix d'exécution sont des nombres réels strictements positifs et la quantité de la position doit être un entier relatif non nul. Deuxièmement, comme nous l'avons vu dans l'exemple précédent, lorsque la quantité d'une position est positive il s'agit de la réalisation d'une stratégie d'achat et lorsque la quantité est négative il s'agit de la réalisation d'une stratégie de vente. Troisièmement, la date d'exécution d'une position correspond au moment où la position a été initiée. De ce fait, pour une position sur option d'achat, P, on peut dire que $\Theta A_{p_e,p_j}(p_k, p_\tau) = p_\theta$. De plus, pour une position sur option de vente, P, on peut dire que $\Theta V_{p_e,p_j}(p_k, p_\tau) = p_\theta$.

Définition 3.10 *Une **position multiple** est formée par la mise en place d'une ou plusieurs positions. Plus précisément, une position est un ensemble de deux éléments. Le premier élément est un ensemble de positions sur option d'achat. Le deuxième élément est un ensemble de positions sur option de vente. Pour simplifier la notation, on utilise l'indice (a) pour le premier élément et (v) pour le deuxième. De plus, chaque position de la position multiple doit contenir des options sur un même sous-jacent.*

Exemple 3.8 - On suppose que l'ensemble des sous-jacents actifs est donné par $J = \{A, B, C\}$. On suppose également qu'à $t = 0$ la bourse alloue une option d'achat avec un prix d'exercice de 10 \$ et une option de vente avec un prix d'exercice de 5 \$ sur le sous-jacent B et que les deux options expirent à $t = 30$. De plus, on suppose que le prix courant de l'option d'achat est de 1 \$ et celui de l'option de vente est de 2 \$. Si l'on fait la VPC, avec une quantité de 10, à $t = 0$, en utilisant ces deux options, nous créerons une position multiple. On note cette position par P et, selon la définition 3.10, on peut référer au premier élément de cet ensemble par p_a et au deuxième élément par p_v. Dans cette situation, on peut dire que $p_a = \{\{2, 10, 30, 0, 1, -10\}\}$, $p_v = \{\{2, 5, 30, 0, 2, -10\}\}$ et $\mathrm{P} = \{p_a, p_v\}$. Si l'on veut obtenir les éléments de la première position sur option d'achat, par exemple, on trouve que $p_{a;1;j} = 2$, $p_{a;1;k} = 10$, $p_{a;1;\tau} = 30$, $p_{a;1;e} = 0$, $p_{a;1;\theta} = 1$ et $p_{a;1;n} = -10$.

On remarque qu'une position multiple généralise la notion de position. En effet, on peut dire qu'une position multiple est une position, mais on ne peut pas dire qu'une position est une position multiple. Par exemple, soit la position sur option d'achat suivante $\mathrm{P}_1 = \{2; 5; 30; 0; 1, 5; -5\}$. Nous pourrions définir une position multiple équivalente $\mathrm{P}'_1 = \{p_a, p_v\}$ où $p_a = \{\{2; 5; 30; 0; 1, 5; -5\}\}$ et $p_v = \varnothing$. Maintenant, soit la position multiple suivante $\mathrm{P}_2 = \{p_a, p_v\}$ où $p_a = \{\{2; 5; 30; 0; 1, 5; -5\}\}$ et $p_v = \{\{2; 10; 30; 0; 2; -5\}\}\}$. Il n'est pas possible d'obtenir une position équivalente à la position multiple P_2.

Définition 3.11 *Le **portefeuille du système** au temps t est l'ensemble de positions multiples qui ont été initiées avant t avec des options qui ne sont pas venues à échéance et n'ont pas été liquidées à t. On note cet ensemble par PR_t où $t \geqslant 0$.*

Définition 3.12 *Le **capital du système** au temps t est le montant d'argent détenu par le système à cet instant. On le dénote par CP_t où $t \geqslant 0$.*

Définition 3.13 *La **valeur nette du système** au temps t est le capital qui serait disponible après la liquidation du portefeuille à cet instant. On la dénote par VN_t où $t \geqslant 0$.*

Définition 3.14 *La **marge du système** au temps t est la marge requise pour maintenir le portefeuille. Celle-ci doit toujours être inférieure au capital du système au temps t. La marge du système à cet instant est obtenue en faisant la somme de la marge requise pour chacun des éléments du portefeuille. On dénote cette marge par M_t où $t \geqslant 0$.*

Définition 3.15 *Le **pouvoir d'achat du système** au temps t est le montant qui peut être investi tout en respectant la marge requise du portefeuille à cet instant. On le dénote par PA_t. De plus, $PA_t = CP_t - M_t$ où CP_t est le capital du système à l'instant t et M_t est la marge du système à l'instant t.*

Dans l'exemple suivant, on utilise la prémisse des exemples 3.1, 3.2 et 3.3 pour illustrer les cinq dernières définitions.

Exemple 3.9 - À $t = 0$, l'investisseur décide d'acheter une option de vente avec un prix d'exercice de 55 \$. Il lui en coûte $1 \times 100 \times 4,96$ \$ = 496 \$. La position ainsi créée est appelée P_1 où $P_1 = \{1; 55; 30; 0; 4,96; 1\}$. Après cette transaction, à $t = 1$; $\mathrm{CP}_1 = 9\ 504$ \$, $\mathrm{PR}_1 = \{\{\{P_1\}, \varnothing\}\}$, $\mathrm{M}_1 = 0$ et $\mathrm{PA}_1 = \mathrm{CP}_1 - \mathrm{M}_1 = 9\ 504$ \$. On ne peut pas obtenir la valeur nette du système à $t = 1$, car on ne connait pas le prix des options à cette période. Par contre, on peut dire que $\mathrm{VN}_{10} = 9\ 504\ \$ + 1 \times 100 \times 0,09\ \$ = 9\ 513$ \$. À la période $t = 10$, l'investisseur décide de faire une VPC, avec une quantité de 2, en utilisant l'option d'achat de 55 \$ et l'option de vente de 45 \$. Il fait également une seconde VPC, avec une quantité de 1, en utilisant l'option d'achat et l'option de vente ayant un prix d'exercice de 50 \$. Deux positions multiples sont ainsi créées, P_2 et P_3, telles que $P_2 = \{\{\{1; 55; 30; 10; 5,24; -2\}\}, \{\{1; 45; 30; 10; 0,01; -2\}\}\}$ et $P_3 = \{\{\{1; 50; 30; 10; 10,14; -1\}\}, \{\{1; 50; 30; 10; 0,01; -1\}\}\}$. Avec ces deux VPC, un total de $2 \times 100 \times (5,24 + 0,01)$ \$ + $1 \times 100 \times (10,14 + 0,01)$ \$ = 2 065 \$ a été collecté. Donc, après ces transactions, à $t = 11$; $\mathrm{CP}_{11} = 9\ 504$ \$ + 2 065 \$ = 11 569 \$ et $\mathrm{PR}_{11} = \{\{\{P_1\}, \varnothing\}, P_2, P_3\}$. De plus, à $t = 20$; $M_{20} = 0\$ + M_{VPC}(55; 55; 45; 5,24; 0,01; 2) \times 100\ \$ + M_{VPC}(55; 50; 50; 10,14; 0,01; 1) \times 100\ \$ = 5\ 365$ \$, $\mathrm{PA}_{20} = 11\ 569\ \$ - 5\ 365\ \$ = 6\ 204$ \$ et $\mathrm{VN}_{20} = 11\ 569\ \$ + 1 \times 100 \times 0,86\ \$ - 2 \times 100 \times (0,94 + 0,01)\ \$ - 1 \times 100 \times (5,07 + 0,01)\ \$ = 10\ 957$ \$.

3.3 Moyenne de gain

Dans cette section, nous établirons un des deux développements principaux de ce mémoire. Nous obtiendrons un estimateur de la moyenne du gain, conditionnelle à la valeur de $\mathcal{I}_t$, d'une position multiple quelconque. Dans un premier temps, nous obtiendrons un estimateur de la fonction de quantiles, conditionnelle à la valeur de $\mathcal{I}_t$, à de multiples horizons, du prix

des sous-jacents. Celui-ci sera construit à l'aide d'une série de régressions quantiles. Dans un deuxième temps, nous définirons une approximation de la fonction de la surface de volatilité implicite. Dans un troisième temps, nous utiliserons les deux développements précédents pour construire un estimateur de la moyenne de gain d'une position sur option d'achat et sur option de vente. Finalement, nous utiliserons les estimateurs de la moyenne du gain d'une position pour construire l'estimateur de la moyenne du gain d'une position multiple.

3.3.1 Stochasticité du prix des sous-jacents

Commençons par considérer la fonction suivante

$$F_{S_{t_2,i}|\cdot}(s_2; t_2|s_1, \mathbf{x}; t_1) = P[S_{t_2,i} \leqslant s_2 | S_{t_1,i} = s_1, \mathcal{I}_{t_1} = \mathbf{x}] \tag{3.3}$$

où $P[\cdot|\cdot]$ représente une probabilité conditionnelle, $t_2 > t_1 \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant |J|$, $\mathbf{x} \in (\mathbb{R})^{|\mathcal{I}_t|}$, $s_1 \in \mathbb{R}_+^*$, $s_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et «,» dénote l'intersection de deux ensembles.[3] La fonction $F_{S_{t_2,i}|\cdot}$ est la fonction de répartition, conditionnelle à l'événement $\{S_{t_1,i} = s_1 \cap \mathcal{I}_{t_1} = \mathbf{x}\}$, du prix du sous-jacent indexé par i, au temps t_2. À la fin de cette sous-section, nous allons obtenir un estimateur de la fonction $F^{-1}_{S_{t_2,i}|\cdot}$, la fonction inverse de $F_{S_{t_2,i}|\cdot}$. $F^{-1}_{S_{t_2,i}|\cdot}$ est égale à la fonction de quantiles du prix du sous-jacent indexé par i au temps t_2, conditionnelle à la valeur de $\mathcal{I}_{t_1}$. Pour obtenir cet estimateur, nous allons d'abord exprimer la fonction 3.3 différemment.

Soit le processus stochastique suivant

$$R_{i;t;\Delta} = \frac{S_{t+\Delta,i} - S_{t,i}}{S_{t,i}} \tag{3.4}$$

où $\Delta > 0$, $t \geqslant 0$ et $1 \leqslant i \leqslant |J|$. Il peut être vu comme la fluctuation future du prix du sous-jacent indexé par i sur l'horizon Δ à l'instant t.

En posant $\Delta = t_2 - t_1$ et $t = t_1$, on obtient

$$S_{t_2,i} = R_{i;t_1;t_2-t_1} S_{t_1,i} + S_{t_1,i}. \tag{3.5}$$

En substituant l'équation 3.5 dans l'équation 3.3 on obtient

$$F_{S_{t_2,i}|\cdot}(s_2; t_2|s_1, \mathbf{x}; t_1) = P[R_{i;t_1;t_2-t_1} S_{t_1,i} + S_{t_1,i} \leqslant s_2 | S_{t_1,i} = s_1, \mathcal{I}_{t_1} = \mathbf{x}]. \tag{3.6}$$

3. Ici, et dans le reste du mémoire, $(\mathbb{R})^n$ dénote la n^e puissance de $\mathbb{R}$.

Puis, grâce à la condition, on peut réécrire l'équation précédente comme

$$F_{S_{t_2,i}|\cdot}(s_2;t_2|s_1,\mathbf{x};t_1) = P[R_{i;t_1;t_2-t_1}s_1 + s_1 \leqslant s_2|\mathcal{I}_{t_1} = \mathbf{x}]. \tag{3.7}$$

Ensuite, en réarrangeant l'inégalité on obtient

$$\begin{aligned} F_{S_{t_2,i}|\cdot}(s_2;t_2|s_1,\mathbf{x};t_1) &= P\Big[R_{i;t_1;t_2-t_1} \leqslant \frac{s_2-s_1}{s_1}\Big|\mathcal{I}_{t_1} = \mathbf{x}\Big] \\ &= F_{R_{i;t_1;t_2-t_1}|\cdot}\Big(\frac{s_2-s_1}{s_1};t_2\Big|\mathbf{x};t_1\Big) \end{aligned} \tag{3.8}$$

où $F_{R_{i;t_1;t_2-t_1}|\cdot}$ est la fonction de répartition de $R_{i;t_1;t_2-t_1}$, conditionnelle à l'événement $\{\mathcal{I}_{t_1} = \mathbf{x}\}$. Maintenant, soit les relations suivantes

$$\alpha_1 = F_{S_{t_2,i}|\cdot}(s_2;t_2|s_1,\mathbf{x};t_1) \Leftrightarrow s_2 = F^{-1}_{S_{t_2,i}|\cdot}(\alpha_1;t_2|s_1,\mathbf{x};t_1) \tag{3.9}$$

et

$$\alpha_2 = F_{R_{i;t_1;t_2-t_1}|\cdot}\Big(\frac{s_2-s_1}{s_1};t_2\Big|\mathbf{x};t_1\Big) \Leftrightarrow \frac{s_2-s_1}{s_1} = F^{-1}_{R_{i;t_1;t_2-t_1}|\cdot}(\alpha_2;t_2|\mathbf{x};t_1) \tag{3.10}$$

où α_1 et $\alpha_2 \in [0,1]$. On peut dire que $\alpha_1 = \alpha_2$ avec l'équation 3.8. Ainsi, on crée la variable α telle que $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$. Puis, en réarrangeant l'équation à droite de la relation 3.10, on obtient

$$s_2 = F^{-1}_{R_{i;t_1;t_2-t_1}|\cdot}(\alpha;t_2|\mathbf{x};t_1)s_1 + s_1. \tag{3.11}$$

Ensuite, avec la relation 3.9 et le fait que $\alpha = \alpha_1$ on obtient

$$F^{-1}_{S_{t_2,i}|\cdot}(\alpha;t_2|s_1,\mathbf{x};t_1) = F^{-1}_{R_{i;t_1;t_2-t_1}|\cdot}(\alpha;t_2|\mathbf{x};t_1)s_1 + s_1. \tag{3.12}$$

L'avantage de la formulation précédente est qu'il suffit d'obtenir un estimateur de $F^{-1}_{R_{i;t_1;t_2-t_1}|\cdot}$ pour obtenir un estimateur de $F^{-1}_{S_{t_2,i}|\cdot}$ et la fonction $F^{-1}_{R_{i;t_1;t_2-t_1}|\cdot}$ ne dépend pas de s_1.

Nous allons maintenant obtenir un estimateur de la fonction $F^{-1}_{R_{i;t_1;t_2-t_1}|\cdot}$ à l'aide de régressions quantiles. Une régression quantile est similaire à une régression linéaire classique. La différence entre les deux est la fonction d'erreur utilisée dans le problème d'optimisation. Celle-ci permet d'obtenir une régression pour un quantile spécifique. Cette idée a été introduite par Koenker et

Bassett Jr (1978). En obtenant une régression pour une série de quantiles, on peut approximer la fonction de quantiles conditionnelle. Dans notre cas, $F^{-1}_{R_{i;t_1;t_2-t_1|\cdot}}$ dépend également de t_2-t_1. Ainsi, nous devrons résoudre le problème d'optimisation pour un ensemble fini d'horizons.

Hypothèse 3.1 *La fonction* $F^{-1}_{R_{i;t_1;t_2-t_1|\cdot}}(\alpha;t_2|\mathbf{x};t_1)$ *est de la forme* $F^{-1}_{R_{i;t_1;t_2-t_1|\cdot}}(\alpha;t_2|\mathbf{x};t_1) = \boldsymbol{\beta}^{\top}_{i,t_2-t_1,\alpha}[1,\mathbf{x}^{\top}]^{\top}$ *où* $\boldsymbol{\beta}_i : \{\mathbb{R}^*_+ \times [0,1]\} \longmapsto (\mathbb{R})^{|\mathcal{I}_t|+1}$. *On remarque que* $\boldsymbol{\beta}_i$ *dépend seulement de* $t_2 - t_1$ *et* α *et non de* t_1 *ou* t_2.

En s'assurant que l'hypothèse 3.1 est raisonnable, pour un ensemble d'information donné, on peut estimer la valeur de $\boldsymbol{\beta}_{i,t_2-t_1,\alpha}$ pour une valeur fixe de i, $t_2 - t_1$ et de α, en utilisant la méthode de Koenker et Bassett Jr (1978).

On commence par définir la fonction suivante

$$\rho_\alpha(u) = (\alpha - I(u < 0))u \tag{3.13}$$

où I est la fonction indicatrice, $\alpha \in [0,1]$ et $u \in \mathbb{R}$. Puis, on définit le vecteur $\mathbf{y}_{i,\Delta}$, un vecteur d'observations, de taille $N \times 1$, de la variable aléatoire $R_{i;t;\Delta}$ et la matrice $\mathbf{X}$, une matrice d'observations de la valeur de $\mathcal{I}_t$, de taille $N \times (|\mathcal{I}_t| + 1)$. [4] La première colonne de $\mathbf{X}$ est un vecteur de taille $N \times 1$ dont chaque élément est égal à 1. Selon la méthode de Koenker et Bassett Jr (1978), on définit le problème d'optimisation

$$\min_{\hat{\boldsymbol{\beta}}_{i,\Delta,\alpha} \in (\mathbb{R})^{|\mathcal{I}_t|+1}} \sum_{j=1}^{N} \rho_\alpha(y_{i,\Delta,j} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\top}_{i,\Delta,\alpha}\mathbf{x}_j) \tag{3.14}$$

où $y_{i,\Delta;n}$ est le n^e élément du vecteur $\mathbf{y}_{i,\Delta}$ et $\mathbf{x}_n$ est la n^e ligne de la matrice $\mathbf{X}$. On dénote la solution de ce problème d'optimisation par $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*_{i,\Delta,\alpha}$. Koenker et Bassett Jr (1978) observent que lorsque la matrice $\mathbf{X}$ contient un vecteur colonne constant, ce qui est le cas, approximativement αN éléments de $\mathbf{y}_{i,\Delta}$ se trouvent en dessous de l'hyperplan formé par la solution du problème 3.14 et $(1-\alpha)N$ au-dessus. Cette propriété est analogue à celle des quantiles.

Koenker et Bassett Jr (1978) montrent comment il est possible de reformuler le problème 3.14 en un problème d'optimisation linéaire.

Commençons par faire le changement de variables suivant :

$$e_j = y_{i,\Delta,j} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\top}_{i,\Delta,\alpha}\mathbf{x}_j. \tag{3.15}$$

4. N est un constante entière strictement positive. Elle est égale au nombre d'observations de $R_{i;t;t_2-t_1}$.

On définit ensuite les variables u_j et v_j telles que $u_j = \max\{e_j, 0\}$ et $v_j = \max\{-e_j, 0\}$. On peut voir que $e_j = y_j - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{i,\Delta,\alpha}^{\top}\mathbf{x}_j = u_j - v_j$ et $\rho_\alpha(y_{i,\Delta,j} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{i,\Delta,\alpha}^{\top}\mathbf{x}_j) = \alpha u_j + (1-\alpha)v_j$. En définissant les vecteurs $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_N]^{\top}$ et $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_N]^{\top}$, on obtient l'équation :

$$\sum_{j=1}^{N} \rho_\alpha(y_{i,\Delta,j} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{i,\Delta,\alpha}^{\top}\mathbf{x}_j) = (\alpha\mathbf{1}_N)^{\top}\mathbf{u} + ((1-\alpha)\mathbf{1}_N)^{\top}\mathbf{v} \tag{3.16}$$

où $\mathbf{1}_N$ est un vecteur de taille $N \times 1$ dont chaque élément est égal à 1. Puis, on peut réécrire le problème d'optimisation 3.14 comme suit

$$\begin{aligned} \min_{(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{i,\Delta,\alpha}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (\mathbb{R})^{2N+(|\mathcal{I}_t|+1)}} \quad & (\alpha\mathbf{1}_N)^{\top}\mathbf{u} + ((1-\alpha)\mathbf{1}_N)^{\top}\mathbf{v} \\ \text{tel que} \quad & \mathbf{y}_{i,\Delta} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{i,\Delta,\alpha} = \mathbf{u} - \mathbf{v} \\ & \mathbf{u} \geqslant \mathbf{0}_N \\ & \mathbf{v} \geqslant \mathbf{0}_N \end{aligned} \tag{3.17}$$

où $\mathbf{0}_N$ est un vecteur de 0 de taille $N \times 1$. Cependant, le problème n'est pas sous forme standard. On définit le vecteur de coeffcients $\mathbf{c} = [\mathbf{0}_{|\mathcal{I}_t|+1}^{\top}, (\alpha\mathbf{1}_N)^{\top}, ((1-\alpha)\mathbf{1}_N)^{\top}]^{\top}$, le vecteur de paramètres $\hat{\boldsymbol{\beta}}'_{i,\Delta,\alpha} = [\hat{\boldsymbol{\beta}}_{i,\Delta,\alpha}^{\top}, \mathbf{u}^{\top}, \mathbf{v}^{\top}]^{\top}$ et la matrice d'observations augmentée $\mathbf{X}' = [\mathbf{X}\ \mathbf{I}_N\ -\mathbf{I}_N]$, où $\mathbf{I}_N$ est la matrice identité de taille N. Puis, on obtient

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\boldsymbol{\beta}}'_{i,\Delta,\alpha} \in (\mathbb{R})^{2N+(|\mathcal{I}_t|+1)}} \quad & \mathbf{c}^{\top}\hat{\boldsymbol{\beta}}'_{i,\Delta,\alpha} \\ \text{tel que} \quad & \mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\beta}}'_{i,\Delta,\alpha} = \mathbf{y}_{i,\Delta} \\ & \mathbf{u} \geqslant \mathbf{0}_N \\ & \mathbf{v} \geqslant \mathbf{0}_N \end{aligned} \tag{3.18}$$

un problème d'optimisation linéaire sous forme standard équivalent au problème 3.14.

Il faut maintenant définir un ensemble fini de couples $\{\alpha, \Delta\}$, pour lesquels le problème 3.18 doit être résolu. Premièrement, comme $\alpha \in [0, 1]$, on divise l'intervalle $[0, 1]$ en η_1 parties égales. On obtient ainsi un ensemble $\boldsymbol{\alpha}$ tel que $\alpha_i = \frac{i}{\eta_1}$ et $|\boldsymbol{\alpha}| = \eta_1 - 1$. Le choix de la valeur de η_1 est laissé à la discrétion de la personne mettant en place le système. Nous y reviendrons au chapitre 4. Deuxièmement, on choisit les valeurs de Δ comme les nombres entiers allant de 1 à η_2. On obtient l'ensemble $\boldsymbol{\Delta}$ tel que $\Delta_i = i$ et $|\boldsymbol{\Delta}| = \eta_2$. Comme nous le verrons au chapitre 4, la valeur de η_2 sera choisie selon les dates d'expiration qui sont généralement disponibles à la bourse. Finalement, on obtient l'ensemble de couples $\{\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\Delta}\}$ tel que $|\{\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\Delta}\}| = (\eta_1 - 1)\eta_2$.

Pour une certaine valeur de i, le problème 3.18 devra être résolu pour chaque élément de $\{\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\Delta}\}$. Ainsi, nous devrons résoudre le problème 3.18 un total de $|J|(\eta_1 - 1)\eta_2$ fois. Pour une valeur fixe de i et de Δ, on obtient une matrice de solutions de taille de $(\eta_1 - 1) \times (|\mathcal{I}_t| + 1)$. La fonction

$$\mathbf{B}_i(\Delta) = \begin{cases} \left[\hat{\boldsymbol{\beta}}^*_{i,\lceil\Delta\rceil,\frac{1}{\eta_1}} \dots \hat{\boldsymbol{\beta}}^*_{i,\lceil\Delta\rceil,\frac{\eta_1-1}{\eta_1}}\right]^\top & \text{si } 0 < \Delta < \eta_2 \\ \left[\hat{\boldsymbol{\beta}}^*_{i,\eta_2,\frac{1}{\eta_1}} \dots \hat{\boldsymbol{\beta}}^*_{i,\eta_2,\frac{\eta_1-1}{\eta_1}}\right]^\top & \text{si } \Delta \geqslant \eta_2 \end{cases} \tag{3.19}$$

est égale à cette matrice pour une valeur donnée de Δ et de i où $\Delta > 0$, $1 \leqslant i \leqslant |J|$, $\lceil\cdot\rceil$ est la fonction plafond et $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*_{i,\Delta,\alpha}$ est la solution du problème d'optimisation 3.14. [5] Pour clarifier tout ceci, on considère l'exemple suivant.

Exemple 3.10 - Supposons que l'ensemble des sous-jacents actifs est donné par $J = \{A\}$ et que $|\mathcal{I}_t| = 1$. On pose $\eta_1 = 4$ et $\eta_2 = 2$. Ainsi, $\boldsymbol{\alpha} = \{0,25; 0,5; 0,75\}$ et $\boldsymbol{\Delta} = \{1, 2\}$. On suppose que les solutions, du problème d'optimisation 3.14, sont données par $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*_{1;1;0,25} = [0,25; 1,5]^\top$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*_{1;1;0,5} = [0,3; 2,5]^\top$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*_{1;1;0,75} = [0,35; 3,5]^\top$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*_{1;2;0,25} = [0,45; 3]^\top$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*_{1;2;0,5} = [0,5; 4]^\top$ et $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*_{1;2;0,75} = [0,6; 5]^\top$. Alors, on peut dire que

$$\mathbf{B}_1(0,5) = \mathbf{B}_1(1) = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,3 & 0,35 \\ 1,5 & 2,5 & 3,5 \end{bmatrix}^\top \text{ et } \mathbf{B}_1(2) = \mathbf{B}_1(2,5) = \begin{bmatrix} 0,45 & 0,5 & 0,6 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}^\top.$$

En utilisant la fonction $\mathbf{B}_i$ on définit la fonction suivante

$$\mathbf{q}_i(\Delta, \mathbf{x}) = \mathbf{B}_i(\Delta)[1, \mathbf{x}^\top]^\top \tag{3.20}$$

où $\Delta > 0$, $1 \leqslant i \leqslant |J|$ et $\mathbf{x} \in (\mathbb{R})^{|\mathcal{I}_t|}$. Lorsque $\Delta = t_2 - t_1$, celle-ci est égale à un vecteur dont chaque élément correspond à un quantile de $R_{i;t_1;t_2-t_1}$, conditionnel à $\{\mathcal{I}_{t_1} = \mathbf{x}\}$. Plus précisément, le k^e élément de $\mathbf{q}_i(t_2 - t_1, \mathbf{x})$, noté $q_i(t_2 - t_1, \mathbf{x})_k$, est approximativement égal à $F^{-1}_{R_{i;t_1;t_2-t_1}|\cdot}(k/\eta_1; t_2|\mathbf{x}; t_1)$.

Exemple 3.11 - Soit la situation décrite à l'exemple 3.10. À $t_1 = 0$, si l'on désire obtenir une approximation du 25^e quantile, conditionnel à $\mathbf{x} = [2, 5]^\top$, de $R_{1;t_1;t_2-t_1}$, avec $t_2 = 2$, on doit d'abord évaluer $\mathbf{q}_1(2, [2, 5]^\top)$. On obtient

5. En pratique, nous devons résoudre le problème 3.18 pour obtenir ces solutions. Celui-ci est équivalent au problème 3.14. Cependant, on doit omettre les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ dans le vecteur agumenté $\hat{\boldsymbol{\beta}}'_{i,\Delta,\alpha}$.

$$\mathbf{q}_1(2,[2,5]^\top) = \begin{bmatrix} 0,45 & 3 \\ 0,5 & 4 \\ 0,6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,95 \\ 10,5 \\ 13,1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, on peut dire que $F^{-1}_{R_{1;0;2}|\cdot}(0,25;2|[2,5]^\top;0) \approx q_1(2;[2,5]^\top)_{0,25(4)} = 7,95$.
En utilisant la fonction 3.20, on obtient l'estimateur de la fonction $F^{-1}_{R_{i;t_1;t_2-t_1}|\cdot}$:

$$\hat{F}^{-1}_{R_{i;t_1;t_2-t_1}|\cdot}(\alpha;t_2|\mathbf{x};t_1) = \begin{cases} q_i(t_2-t_1,\mathbf{x})_{\lceil \alpha\eta_1 \rceil} & \text{si } 0 < \alpha \leqslant \frac{\eta_1-1}{\eta_1} \\ -1 & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}. \tag{3.21}$$

On remarque que la fonction $\hat{F}^{-1}_{R_{i;t_1;t_2-t_1}|\cdot}$ n'est pas définie lorsque $\alpha > \frac{\eta_1-1}{\eta_1}$. Comme il s'agit d'un estimateur de la fonction $F^{-1}_{R_{i;t_1;t_2-t_1}|\cdot}$, et que celle-ci tend vers l'infini quand $\alpha = 1$, nous avons choisi de ne pas définir l'estimateur pour toutes les valeurs de α. Finalement, en substituant l'équation 3.21 dans l'équation 3.12 on obtient un estimateur de $F^{-1}_{S_{t_2,i}|\cdot}(\alpha;t_2|s_1,\mathbf{x};t_1)$:

$$\boxed{\hat{F}^{-1}_{S_{t_2,i}|\cdot}(\alpha;t_2|s_1,\mathbf{x};t_1) = \hat{F}^{-1}_{R_{i;t_1;t_2-t_1}|\cdot}(\alpha;t_2|\mathbf{x};t_1)s_1 + s_1}. \tag{3.22}$$

3.3.2 Stochasticité du prix des options

Dans cette sous-section, nous allons d'abord définir formellement la volatilité implicite. Ensuite, nous allons définir un estimateur de la surface de volatilité implicite qui sera utilisé dans la prochaine sous-section.

Définition 3.16 *Soit une option d'achat pour le sous-jacent indexé par i, avec le prix d'exercice k et expirant à l'instant τ. La **volatilité implicite** de cette option, à l'instant t, notée $VI_{a,t,i,k,\tau}$, est la valeur pour laquelle l'équation $\Theta A_{t,i}(k,\tau) = f_c(S_{t,i},t,\tau,k,VI_{a,t,i,k,\tau},r)$ est respectée. Dans l'équation précédente, $\Theta A_{t,i}$ est la fonction* 3.1*, f_c est la fonction* 1.26*, $t \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant |J|$ *et r est le taux d'intérêt. Pour une option de vente de même spécification, la volatilité implicite, notée $VI_{v,t,i,k,\tau}$, est la valeur pour laquelle l'équation $\Theta V_{t,i}(k,\tau) = f_p(S_{t,i},t,\tau,k,VI_{v,t,i,k,\tau},r)$ est respectée où $\Theta V_{t,i}$ est la fonction* 3.2 *et f_p est la fonction* 1.27*.*

On fait deux remarques importantes par rapport à la définition 3.16. Premièrement, la volatilité implicite doit être srictement positive. Deuxièmement, il n'est pas nécessaire de la

définir à partir du modèle de BSM (les fonctions f_c et f_p sont celles du modèle de BSM). Nous avons choisi de le faire, car BSM possède une solution analytique.

Lorsque que t est égal l'instant présent, on connait le prix courant de l'option et le prix courant du sous-jacent. Ainsi, il est possible d'approximer la volatilité implicite.

Exemple 3.12 - Soit une option d'achat sur le sous-jacent indexé par 1, avec un prix d'exercice de 100 \$ et expirant à $t = \frac{20}{365}$. On suppose que le taux d'intérêt est égal à $0,05$, que l'on se trouve au temps $t = \frac{5}{365}$, que $\Theta A_{\frac{5}{365},1}(100, \frac{20}{365}) = 0,44$ et que $S_{\frac{5}{365},1} = 90$. Dans ce cas, la volatilité implicite est égale à $0,42$, car $0,44 = f_c(90; \frac{5}{365}; \frac{20}{365}; 100; 0,42; 0,05)$. En pratique, nous aurions pu approximer cette valeur en trouvant la solution du problème d'optimisation $\min_v (0,44 - f_c(90; \frac{5}{365}; \frac{20}{365}; 100; v; 0,05))^2$ sous la contrainte $v > 0$.

Maintenant, on peut se demander : comment peut-on estimer la VI d'une option si l'on ne connait pas son prix ? Il s'avère que si l'on connait son prix d'exercice, le temps restant avant son expiration et le prix de son sous-jacent, la VI de l'option est relativement prévisible. Au chapitre 2, nous avons mentionné plusieurs études qui ont modélisé ce que l'on appelle la surface de volatilité implicite. (Goncalves et Guidolin, 2006; Audrino et Colangelo, 2009; Bernales et Guidolin, 2014; Chalamandaris et Tsekrekos, 2014). Celle-ci est en fait un estimateur de la VI qui se base sur le prix d'exercice, le temps restant avant l'expiration et le prix du sous-jacent. Nous réutiliserons des estimateurs semblables à ceux de Goncalves et Guidolin (2006). La différence étant que les nôtres seront des fonctions polynômiales de degré d. On définit l'estimateur de la VI d'une option d'achat, à l'instant t, pour le sous-jacent indexé par i, avec le prix d'exercice k et expirant à l'instant τ comme

$$\boxed{\hat{\mathrm{VI}}_{a,t,i}(s,k,\tau) = \max\left[\hat{\mathrm{VI}}^*_{a,t,i}(s,k,\tau), \epsilon\right]} \tag{3.23}$$

où $\epsilon > 0$, s est le prix du sous-jacent et

$$\hat{\mathrm{VI}}^*_{a,t,i}(s,k,\tau) = \hat{\beta}_{a,i,0} + \sum_{l=1}^{d} \hat{\beta}_{ka,i,l}\Big(\frac{k-s}{s}\Big)^l + \sum_{m=1}^{d} \hat{\beta}_{ta,i,m}(\tau - t)^m + \sum_{n=1}^{d-1}\sum_{x=1}^{d-n} \hat{\beta}_{kta,i,n,x}\Big(\frac{k-s}{s}\Big)^n (\tau - t)^x.$$

L'estimateur de la VI d'une option de vente, avec la même spécification, est définit comme

$$\boxed{\hat{\mathrm{VI}}_{v,t,i}(s,k,\tau) = \max\left[\hat{\mathrm{VI}}^*_{v,t,i}(s,k,\tau), \epsilon\right]} \tag{3.24}$$

où $\epsilon > 0$, s est le prix du sous-jacent et

$$\hat{\mathrm{VI}}^{*}_{v,t,i}(s,k,\tau) = \hat{\beta}_{v,i,0} + \sum_{l=1}^{d} \hat{\beta}_{kv,i,l}\Big(\frac{k-s}{s}\Big)^{l} + \sum_{m=1}^{d} \hat{\beta}_{tv,i,m}(\tau - t)^{m} + \sum_{n=1}^{d-1}\sum_{x=1}^{d-n} \hat{\beta}_{ktv,i,n,x}\Big(\frac{k-s}{s}\Big)^{n}(\tau - t)^{x}.$$

Les estimateurs 3.23 et 3.24 sont formulés de cette manière pour s'assurer qu'ils soient toujours strictement positifs. Dans la définition des fonctions $\hat{\mathrm{VI}}^{*}_{a,t,i}$ et $\hat{\mathrm{VI}}^{*}_{v,t,i}$, d est le degré du polynôme tel que $d \in \mathbb{N}^{*}$. Le degré doit être choisi lors de la mise en place du système. Ce degré pourrait varier en fonction du temps. Cependant, nous avons choisi de le garder constant par simplicité. La valeur de ϵ doit également être choisie lors de la mise en place du système. De plus, pour ajuster les estimateurs 3.23 et 3.24, on ajuste les fonctions $\hat{\mathrm{VI}}^{*}_{a,t,i}$ et $\hat{\mathrm{VI}}^{*}_{v,t,i}$ avec une méthode de régression. Pour y arriver, on doit obtenir une série d'observations de la VI en utilisant une méthode sembable à celle décrite à l'exemple 3.12. Nous reviendrons sur le choix de d/ϵ et sur la méthode de régression au chapitre 4.

3.3.3 Moyenne de gain d'une position

En utilisant les éléments développés précédemment, nous allons être en mesure de construire un estimateur de la moyenne de gain d'une position sur option d'achat et de vente, conditionnelle à la valeur de l'ensemble d'information. Ceci constitue une nouveauté dans la littérature sur la négociation automatique d'options. Par la suite, nous pourrons utiliser ces estimateurs pour obtenir un estimateur de la moyenne de gain d'une position multiple.

Position sur option d'achat

On commence par définir le gain d'une position sur option d'achat

$$\mathrm{G}_{a,t}(\mathrm{P}) = \begin{cases} G_{AOA}(S_{\mathrm{p}_\tau,\mathrm{p}_j}, \mathrm{p}_k, \mathrm{p}_\theta, \mathrm{p}_n) & \text{si } t \geqslant \mathrm{p}_\tau \\ \mathrm{p}_n(\Theta A_{t,\mathrm{p}_j}(\mathrm{p}_k, \mathrm{p}_\tau) - \mathrm{p}_\theta) & \text{si } \mathrm{p}_e \leqslant t < \mathrm{p}_\tau \end{cases} \tag{3.25}$$

un processus stochastique à temps et états continus où G_{AOA} est la fonction 1.1, ΘA la fonction 3.1, P est une position sur option d'achat (voir la définition 3.9) et les p sont les éléments de P tel que : p_j est l'indice du sous-jacent, p_k le prix d'exercice, p_τ la date d'expiration, p_e la date d'exécution, p_θ le prix d'exécution et p_n la quantité. On cherche à estimer la moyenne de gain de $\mathrm{G}_{a,t}$. Cette fonction est donnée par

$$m_a(t_1, t_2|\mathbf{x}, \mathrm{P}, s_1) = E[\mathrm{G}_{a,t_2}(\mathrm{P})|\mathcal{I}_{t_1} = \mathbf{x}, S_{t_1,\mathrm{p}_j} = s_1] \tag{3.26}$$

où $t_2 > t_1 \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in (\mathbb{R})^{|\mathcal{I}_{t_1}|}$ et $s_1 \in \mathbb{R}_+^*$. Pour clarifier la procédure d'obtention de l'estimateur de m_a, on considère l'exemple 3.13.

Exemple 3.13 - Soit une variable aléatoire X telle que $X \sim N(0,1)$. On pose une constante $\eta = 4$. On peut estimer $E[X]$ en utilisant une discrétisation de X en $\eta - 1$ parties. On voit que $E[X] \approx \sum_{i=1}^{\eta-1} F_X^{-1}(i/\eta) P[F_X^{-1}((i-1)/\eta) \leqslant X \leqslant F_X^{-1}(i/\eta)]$. Par construction, $P[F_X^{-1}((i-1)/\eta) \leqslant X \leqslant F_X^{-1}(i/\eta)] = \frac{1}{\eta}$. Donc, en sachant que $F^{-1}(0,25) = -0,674$, $F^{-1}(0,5) = 0$ et $F^{-1}(0,75) = 0,674$, on trouve $E[X] \approx (-0,674)0,25 + (0)0,25 + (0,674)0,25 = 0$. Évidemment, la précision augmente avec la valeur de η.

À l'aide de la méthode décrite dans l'exemple précédent on obtient une expression approximative de m_a. Pour ce faire, on considère le cas où $t_2 \geqslant \mathrm{p}_\tau$ et ensuite celui où $\mathrm{p}_e < t_2 < \mathrm{p}_\tau$.

Cas $t_2 \geqslant \mathrm{p}_\tau$

En prenant la définition de $m_a(t_1, t_2|\mathbf{x}, \mathrm{P}, s_1)$ on obtient

$$\begin{aligned} m_a(t_1,t_2|\mathbf{x},\mathrm{P},s_1) &= E[G_{AOA}(S_{\mathrm{p}_\tau,\mathrm{p}_j},\mathrm{p}_k,\mathrm{p}_\theta,\mathrm{p}_n)|\mathcal{I}_{t_1}=\mathbf{x}, S_{t_1,\mathrm{p}_j}=s_1] \\ &\simeq \sum_{l=1}^{\eta_1-1} G_{AOA}\Big(\hat{F}^{-1}_{S_{t_2,\mathrm{p}_j}|\cdot}(l/\eta_1;\mathrm{p}_\tau|s_1,\mathbf{x};t_1),\mathrm{p}_k,\mathrm{p}_\theta,\mathrm{p}_n\Big)\frac{1}{\eta_1} \\ &= f_{\mathrm{ea}}(t_1,t_2,\mathbf{x},\mathrm{P},s_1) \end{aligned} \tag{3.27}$$

où η_1 est un entier strictement positif défini à la section 3.3 (voir l'exemple 3.10), $\hat{F}^{-1}_{S_{t_2,\mathrm{p}_j}|\cdot}$ est l'estimateur 3.22 et f_{ea} est une fonction définie pour simplifier la notation.

Cas $\mathrm{p}_e < t_2 < \mathrm{p}_\tau$

Encore une fois, en utilisant la définition de m_a on obtient

$$\begin{aligned} m_a(t_1,t_2|\mathbf{x},\mathrm{P},s_1) &= E[\mathrm{p}_n(\Theta A_{t_2,\mathrm{p}_j}(\mathrm{p}_k,\mathrm{p}_\tau)-\mathrm{p}_\theta)|\mathcal{I}_{t_1}=\mathbf{x},S_{t_1,\mathrm{p}_j}=s_1] \\ &= \mathrm{p}_n E[f_c(S_{t_2,\mathrm{p}_j},t_2,\mathrm{p}_\tau,\mathrm{p}_k,\mathrm{VI}_{a,t_2,\mathrm{p}_j,\mathrm{p}_k,\mathrm{p}_\tau},r)|\mathcal{I}_{t_1}=\mathbf{x},S_{t_1,\mathrm{p}_j}=s_1]-\mathrm{p}_n\mathrm{p}_\theta \\ &\simeq \mathrm{p}_n E[f_c(S_{t_2,\mathrm{p}_j},t_2,\mathrm{p}_\tau,\mathrm{p}_k,\hat{\mathrm{VI}}_{a,t_2,\mathrm{p}_j}(S_{t_2,\mathrm{p}_j},\mathrm{p}_k,\mathrm{p}_\tau),r)|\mathcal{I}_{t_1}=\mathbf{x},S_{t_1,\mathrm{p}_j}=s_1]-\mathrm{p}_n\mathrm{p}_\theta \\ &\simeq \mathrm{p}_n \sum_{l=1}^{\eta_1-1} f_c\Big(\hat{F}^{-1}_{S_{t_2,\mathrm{p}_j}|\cdot}(l/\eta_1;t_2|s_1,\mathbf{x};t_1),t_2,\mathrm{p}_\tau,\mathrm{p}_k, \\ &\qquad\qquad \hat{\mathrm{VI}}_{a,t_2,\mathrm{p}_j}\Big(\hat{F}^{-1}_{S_{t_2,\mathrm{p}_j}|\cdot}(l/\eta_1;t_2|s_1,\mathbf{x};t_1),\mathrm{p}_k,\mathrm{p}_\tau\Big),r\Big)\frac{1}{\eta_1}-\mathrm{p}_n\mathrm{p}_\theta \\ &= f_{\mathrm{ia}}(t_1,t_2,\mathbf{x},\mathrm{P},s_1) \end{aligned} \tag{3.28}$$

où $\hat{\mathrm{VI}}_{a,t_2,i}$ est l'estimateur 3.23, f_c est la fonction 1.26, r une constante égale au taux d'intérêt et f_{ia} une fonction définie pour simplifier la notation.

Finalement, on obtient une expression de l'estimateur de la fonction 3.26

$$\boxed{\hat{m}_a(t_1,t_2|\mathbf{x},\mathrm{P},s_1)=\begin{cases} f_{\mathrm{ea}}(t_1,t_2,\mathbf{x},\mathrm{P},s_1) & \text{si } t_2 \geqslant \mathrm{p}_\tau \\ f_{\mathrm{ia}}(t_1,t_2,\mathbf{x},\mathrm{P},s_1) & \text{si } \mathrm{p}_e < t_2 < \mathrm{p}_\tau \end{cases}}. \tag{3.29}$$

Position sur option de vente

La procédure pour obtenir un estimateur de la moyenne de gain d'une position sur option de vente est identique à celle pour une position sur option d'achat. Ainsi, nous allons faire un développement abrégé pour celui-ci. On commence par définir le gain d'une position sur une option de vente

$$\mathrm{G}_{v,t}(\mathrm{P})=\begin{cases} G_{AOV}(S_{\mathrm{p}_\tau,\mathrm{p}_j},\mathrm{p}_k,\mathrm{p}_\theta,\mathrm{p}_n) & \text{si } t \geqslant \mathrm{p}_\tau \\ \mathrm{p}_n(\Theta V_{t,\mathrm{p}_j}(\mathrm{p}_k,\mathrm{p}_\tau)-\mathrm{p}_\theta) & \text{si } \mathrm{p}_e \leqslant t < \mathrm{p}_\tau \end{cases} \tag{3.30}$$

un processus stochastique à temps et états continus où P est une position sur une option de vente (voir la définition 3.9), G_{AOV} est la fonction 1.3, ΘV est la fonction 3.2 et le reste des variables a la même définition que pour le processus stochastique 3.25. La moyenne de gain d'une position sur une option de vente est donnée par

$$m_v(t_1,t_2|\mathbf{x},\mathrm{P},s_1)=E[\mathrm{G}_{v,t_2}(\mathrm{P})|\mathcal{I}_{t_1}=\mathbf{x},S_{t_1,\mathrm{p}_j}=s_1]. \tag{3.31}$$

Tout comme pour le développement de l'estimateur de la fonction m_a on considère d'abord le cas où $t_2 \geqslant \mathrm{p}_\tau$ et ensuite celui où $\mathrm{p}_e < t_2 < \mathrm{p}_\tau$.

Cas $t_2 \geqslant \mathrm{p}_\tau$

On obtient

$$\begin{aligned} m_v(t_1,t_2|\mathbf{x},\mathrm{P},s_1) &\simeq \sum_{l=1}^{\eta_1-1} G_{AOV}\Big(\hat{F}^{-1}_{S_{t_2,\mathrm{p}_j}|\cdot}(l/\eta_1;\mathrm{p}_\tau|s_1,\mathbf{x};t_1),\mathrm{p}_k,\mathrm{p}_\theta,\mathrm{p}_n\Big)\frac{1}{\eta_1} \\ &= f_{\mathrm{ev}}(t_1,t_2,\mathbf{x},\mathrm{P},s_1) \end{aligned} \tag{3.32}$$

où f_{ev} est une fonction utilisée pour simplifier la notation.

Cas $\mathrm{p}_e < t_2 < \mathrm{p}_\tau$

Ici on trouve

$$\begin{aligned} m_v(t_1, t_2|\mathbf{x}, \mathrm{P}, s_1) &\simeq \mathrm{p}_n \sum_{l=1}^{\eta_1 - 1} f_p\Big(\hat{F}^{-1}_{S_{t_2,\mathrm{p}_j|\cdot}}(l/\eta_1; t_2|s_1, \mathbf{x}; t_1), t_2, \mathrm{p}_\tau, \mathrm{p}_k, \\ &\qquad \hat{\mathrm{VI}}_{v,t_2,\mathrm{p}_j}(\hat{F}^{-1}_{S_{t_2,\mathrm{p}_j|\cdot}}(l/\eta_1; t_2|s_1, \mathbf{x}; t_1), \mathrm{p}_k, \mathrm{p}_\tau), r\Big)\frac{1}{\eta_1} - \mathrm{p}_n \mathrm{p}_\theta \\ &= f_{\mathrm{iv}}(t_1, t_2, \mathbf{x}, \mathrm{P}, s_1) \end{aligned} \tag{3.33}$$

où f_p est la fonction 1.27, $\hat{\mathrm{VI}}_{v,t_2,i}$ est l'estimateur 3.24 et f_{iv} est une fonction définie pour simplifier la notation.

Finalement, on obtient l'estimateur de m_v

$$\boxed{\hat{m}_v(t_1, t_2|\mathbf{x}, \mathrm{P}, s_1) = \begin{cases} f_{\mathrm{ev}}(t_1, t_2, \mathbf{x}, \mathrm{P}, s_1) & \text{si } t_2 \geqslant \mathrm{p}_\tau \\ f_{\mathrm{iv}}(t_1, t_2, \mathbf{x}, \mathrm{P}, s_1) & \text{si } \mathrm{p}_e < t_2 < \mathrm{p}_\tau \end{cases}}. \tag{3.34}$$

3.3.4 Positions multiples

Nous allons maintenant obtenir le dernier développemment important de la section 3.3 : l'estimateur de la moyenne de gain d'une position multiple. Le gain d'une position multiple est défini par

$$\mathrm{G}_{p,t}(\mathrm{P}) = \sum_{a \in \mathrm{p}_a} \mathrm{G}_{a,t}(a) + \sum_{v \in \mathrm{p}_v} \mathrm{G}_{v,t}(v) \tag{3.35}$$

un processus stochastique à temps et états continus où P est une position multiple et p_a et p_v sont les deux éléments de P (voir la définition 3.10). L'élément p_a est un ensemble de positions sur option d'achat et l'élément p_v est un ensemble de positions sur option de vente. De plus, $\mathrm{G}_{a,t}$ est le processus stochastique 3.25 et $\mathrm{G}_{v,t}$ est le processus stochastique 3.30.

La moyenne de gain d'une position multiple est donnée par

$$m_p(t_1, t_2|\mathbf{x}, \mathrm{P}, s_1) = E[\mathrm{G}_{p,t_2}(\mathrm{P})|\mathcal{I}_{t_1} = \mathbf{x}, S_{t_1,\mathrm{p}_{a;1;\mathrm{j}}} = s_1] \tag{3.36}$$

où $\mathrm{p}_{a;1;\mathrm{j}}$ est l'indice du sous-jacent de la première position de p_a. Comme toutes les positions composant une position multiple ont le même sous-jacent (voir définition 3.10), on pourrait

utiliser l'indice de n'importe quel élément de p_a ou p_v pour référer au sous-jacent de la position multiple P.

Selon la définition de G_{p,t_2}, on obtient :

$$\begin{aligned} m_p(t_1,t_2|\mathbf{x},\mathrm{P},s_1) &= E\left[\sum_{a\in \mathrm{p}_a}\mathrm{G}_{a,t_2}(a)+\sum_{v\in \mathrm{p}_v}\mathrm{G}_{v,t_2}(v)\middle|\mathcal{I}_{t_1}=\mathbf{x},S_{t_1,\mathrm{p}_{a;1;\mathrm{j}}}=s_1\right] \\ &= E\left[\sum_{a\in \mathrm{p}_a}\mathrm{G}_{a,t_2}(a)\middle|\mathcal{I}_{t_1}=\mathbf{x},S_{t_1,\mathrm{p}_{a;1;\mathrm{j}}}=s_1\right] \\ &\qquad + E\left[\sum_{v\in \mathrm{p}_v}\mathrm{G}_{v,t_2}(v)\middle|\mathcal{I}_{t_1}=\mathbf{x},S_{t_1,\mathrm{p}_{a;1;\mathrm{j}}}=s_1\right] \\ &= \sum_{a\in \mathrm{p}_a}E[\mathrm{G}_{a,t_2}(a)|\mathcal{I}_{t_1}=\mathbf{x},S_{t_1,\mathrm{p}_{a;1;\mathrm{j}}}=s_1] \\ &\qquad + \sum_{v\in \mathrm{p}_v}E[\mathrm{G}_{v,t_2}(v)|\mathcal{I}_{t_1}=\mathbf{x},S_{t_1,\mathrm{p}_{a;1;\mathrm{j}}}=s_1] \\ &= \sum_{a\in \mathrm{p}_a}m_a(t_1,t_2|\mathbf{x},a,s_1)+\sum_{v\in \mathrm{p}_v}m_v(t_1,t_2|\mathbf{x},v,s_1) \end{aligned} \tag{3.37}$$

.

Finalement, on trouve l'estimateur de m_p

$$\boxed{\hat{m}_p(t_1,t_2|\mathbf{x},\mathrm{P},s_1)=\sum_{a\in \mathrm{p}_a}\hat{m}_a(t_1,t_2|\mathbf{x},a,s_1)+\sum_{v\in \mathrm{p}_v}\hat{m}_v(t_1,t_2|\mathbf{x},v,s_1)}. \tag{3.38}$$

Cas particulier

Comme nous l'avons mentionné au chapitre 2, notre système fera l'usage exclusif de VPC. Ainsi, on définit la fonction suivante :

$$m_{pc}(t_1,t_2|\mathbf{x},\mathrm{A},\mathrm{V},s_1)=m_p(t_1,t_2|\mathbf{x},\{\{\mathrm{A}\},\{\mathrm{V}\}\},s_1) \tag{3.39}$$

un cas particulier de m_p où A est une position sur option d'achat et V est une position sur une option de vente (voir la définition 3.9). Ensuite, on obtient son estimateur

$$\boxed{\hat{m}_{pc}(t_1,t_2|\mathbf{x},\mathrm{A},\mathrm{V},s_1)=\hat{m}_p(t_1,t_2|\mathbf{x},\{\{\mathrm{A}\},\{\mathrm{V}\}\},s_1)}. \tag{3.40}$$

3.4 Sélection des nouvelles positions

Dans cette section, nous présenterons la deuxième contribution principale de ce mémoire. Il s'agit de la formulation d'un nouveau problème d'optimisation à variables discrètes pour la sélection des positions d'un portefeuille d'options. Nous allons d'abord expliciter les différences entre notre problème d'optimisation et ceux retrouvés dans la littérature. Ensuite, nous allons définir l'espace d'optimisation, la fonction objectif et les contraintes. Finalement, nous allons définir le problème d'optimisation et l'algorithme pour le résoudre

3.4.1 Lien avec la littérature

Le système de négociation choisit les nouvelles positions à mettre en place à l'instant t en trouvant la solution d'un problème d'optimisation. Cette approche est courante dans la littérature sur les systèmes de négociation d'option. Cependant, il existe trois différences majeures entre le problème d'optimisation qui sera défini dans ce chapitre et ceux retrouvés dans la littérature : l'espace d'optimisation, la fonction objectif et les contraintes.

L'espace d'optimisation usuel pour un portefeuille de n options est $[0, 1]^n$ où n est un entier strictement positif. On cherche la fraction du capital total qui doit être alloué à chaque option. Une autre approche est d'intégrer le choix des options dans le problème d'optimisation. C'est l'approche de Mehta (1982) et Tanaka et al. (1992). Leur système utilise seulement des positions combinées. Une position combinée possède quatre paramètres : le prix d'exercice de l'option d'achat/ de vente, la date d'expiration et la quantité. Ils ne considèrent que des options sur un seul sous-jacent avec la même date d'expiration. Izraylevich et Tsudikman (2010) proposent une approche avec plusieurs sous-jacents. Ils font le choix des options individuellement pour chaque sous-jacent et trouvent la solution d'un problème usuel pour la quantité. Nous allons utiliser un seul problème d'optimisation pour trouver les paramètres de VPC sur un ensemble de sous-jacents avec différentes dates d'expiration. Ainsi, nous utiliserons un espace d'optimisation à $4|J|$ dimensions.

Dans une formulation usuelle, la fonction objectif est égale à l'espérance de rendement des nouvelles positions. Celle-ci est calculée à partir d'une hypothèse classique telle que celle faite par BSM (voir la section 1.2.4). Notre fonction objectif sera formulée à l'aide de l'estimateur 3.40. Cela nous permet d'obtenir l'espérance de rendement conditionnelle à un ensemble d'information.

Les contraintes du problème d'optimisation varient grandement à travers les formulations usuelles de la littérature. Généralement, on intègre une contrainte de budget et une seule contrainte de risque. Le risque est calculé sans tenir compte des positions du portefeuille. De

plus, les métriques de risque ne sont pas construites pour tenir compte de l'interaction entre la valeur des paramètres des stratégies sur divers sous-jacents. Nos fonctions de contraintes permettront cela.

3.4.2 Espace d'optimisation

Notre système de négociation automatisé fait usage exclusif de stratégies de VPC (voir la section 1.2.3). Nous avons sélectionné cette stratégie car son application naïve est profitable (voir la section 2.2). Une position combinée, sur un sous-jacent, est constituée de trois paramètres : le prix d'exercice de l'option d'achat, le prix d'exercice de l'option de vente et la date d'expiration. Il faut également choisir la quantité d'options vendues. Comme il y a $|J|$ sous-jacents actifs, l'espace d'optimisation possède $4|J|$ dimensions. Ainsi, on définit les vecteurs $\mathbf{a} \in \left\{ \times_{i=1}^{|J|} \mathrm{KA}_{t,i} \right\}$, $\mathbf{v} \in \left\{ \times_{i=1}^{|J|} \mathrm{KV}_{t,i} \right\}$, $\mathbf{e} \in \left\{ \times_{i=1}^{|J|} \mathrm{T}_{t,i} \right\}$ et $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{|J|} \backslash \{\mathbf{0}_{|J|}\}$.[6] L'élément a_i du vecteur $\mathbf{a}$ est égal au prix d'exercice de l'option d'achat du sous-jacent indexé par i. De même, l'élément v_i du vecteur $\mathbf{v}$ est égal au prix d'exercice de l'option de vente du sous-jacent indexé par i. L'élément e_i du vecteur $\mathbf{e}$ est égal à la date d'expiration des deux options du sous-jacent indexé par i. Finalement, l'élément n_i du vecteur $\mathbf{n}$ est la taille de la VPC faite sur le sous-jacent indexé par i.

Exemple 3.14 - L'ensemble des sous-jacents actifs est donné par $J = \{A, B\}$. À l'instant $t = 0$, les prix d'exercice et les dates d'expiration disponibles (voir les définitions 3.6 et 3.7) sont donnés par : $\mathrm{KA}_{0,1} = \mathrm{KV}_{0,1} = \{25, 50, 100\}$, $\mathrm{KA}_{0,2} = \mathrm{KV}_{0,2} = \{5, 10, 30\}$ et $\mathrm{T}_{0,1} = \mathrm{T}_{0,2} = \{30, 60\}$. On suppose que la solution du problème de sélection est donnée par $\mathbf{a} = [100, 10]^\top$, $\mathbf{v} = [25, 5]^\top$, $\mathbf{e} = [60, 30]^\top$ et $\mathbf{n} = [10, 20]^\top$. Dans ce cas, on fait une VPC, sur le sous-jacent A, avec une quantité de 10, en sélectionnant l'option d'achat expirant à $t = 60$ avec un prix d'exercice de 100 $ et l'option de vente avec un prix d'exercice de 25 $ expirant également à $t = 60$. Puis, sur le sous-jacent B, on fait une VPC, avec une quantité de 20, en utilisant l'option d'achat avec un prix d'exercice de 10 $ et l'option de vente avec un prix d'exerice de 5 $, toutes deux expirant à $t = 30$.

Dans le problème d'optimisation qui sera explicité à la section 3.4.5, l'espace d'optimisation n'est pas formé des vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{e}$, car ces vecteurs appartiennent à un espace qui n'est pas bien structuré. En effet, comme on le voit à l'exemple 3.14, les prix d'exercice ne sont pas définis à intervalles réguliers. Ainsi, on définit les vecteurs de nombres entiers strictement positifs $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ où $1 \leqslant x_{t,i} \leqslant |\mathrm{KA}_{t,i}|$, $1 \leqslant y_{t,i} \leqslant |\mathrm{KV}_{t,i}|$ et $1 \leqslant z_{t,i} \leqslant |\mathrm{T}_{t,i}|$. Puis, on fait correspondre ces vecteurs aux vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{e}$ à l'aide de la fonction suivante

6. Pour être plus rigoureux, il faudrait écrire $\mathbf{a}_t$, $\mathbf{v}_t$, $\mathbf{e}_t$. Cependant, nous laisserons tomber l'indice pour alléger la notation.

$$\boldsymbol{\psi}_t(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = [\mathrm{KA}_{t,1;x_1},\ldots,\mathrm{KA}_{t,|J|;x_{|J|}},\mathrm{KV}_{t,1;y_1},\ldots,\mathrm{KV}_{t,|J|;y_{|J|}},\mathrm{T}_{t,1;z_1},\ldots,\mathrm{T}_{t,|J|;z_{|J|}}]^\top \quad (3.41)$$

où $\mathrm{KA}_{t,i;k}$ est le k^e élément de l'ensemble $\mathrm{KA}_{t,i}$, $\mathrm{KV}_{t,i;k}$ est le k^e élément de l'ensemble $\mathrm{KV}_{t,i}$ et $\mathrm{T}_{t,i;k}$ est le k^e élément de l'ensemble $\mathrm{T}_{t,i}$. Pour clarifier cela, on considère l'exemple suivant.

Exemple 3.15 - Soit la même situation qu'à l'exemple 3.14. Si la solution du problème de sélection est donnée par $\mathbf{x} = [3,2]^\top$,$\mathbf{y} = [1,1]^\top$, $\mathbf{z} = [2,1]^\top$, alors on trouve que la solution, exprimée dans l'espace des $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{e}$, est donnée par $\boldsymbol{\psi}_0(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = [100,10,25,5,60,30]^\top$.

Dans la formulation de notre problème d'optimisation, nous utilisons directement le vecteur $\mathbf{n}$, mais nous utiliserons les vecteurs $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$. Ainsi, l'espace d'optimisation sera égal à $\mathbb{Z}^{4|J|}$ et nous ajouterons des contraintes pour respecter la définition des vecteurs $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$. Cependant, notre fonction objectif et nos fonctions de contraintes auront les paramètres $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{e}$ et $\mathbf{n}$. Il suffira d'utiliser la fonction $\boldsymbol{\psi}_t$ pour les exprimer selon les paramètres $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$.

3.4.3 Fonction objectif

Pour le système de négociation, l'objectif est de maximiser le rendement annuel moyen. Ainsi, notre fonction objectif approxime l'espérance de rendement par unité de temps, lorsque les positions sont conservées jusqu'à l'expiration. Nous définirons d'abord la fonction d'espérance de gain et la fonction de marge. Puis, nous obtiendrons la fonction objectif avec ces deux fonctions.

Avec l'estimateur 3.40, on obtient la fonction d'approximation de l'espérance de gain de la sélection

$$\begin{aligned} f_{t,e}(\mathbf{a},\mathbf{v},\mathbf{e},\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^{|J|} \hat{m}_{pc}(t,\max(\mathbf{e})|\mathbf{x},\{i,a_i,e_i,t,\Theta A_{t,i}(a_i,e_i),-n_i\}, \\ \{i,v_i,e_i,t,\Theta V_{t,i}(v_i,e_i),-n_i\},S_{t,i}) \end{aligned} \quad (3.42)$$

où $\hat{m}_{pc}$ est l'estimateur 3.40, ΘA est la fonction 3.1, ΘV est la fonction 3.2, $S_{t,i}$ le prix du sous-jacent indexé par i et $\mathbf{x}$ est la valeur de l'ensemble d'information. On remarque que la quantité $(-n_i)$ est négative. En effet, comme il s'agit d'une stratégie de vente, il faut que la quantité soit négative (voir l'exemple 3.7). Pour obtenir une approximation de l'espérance de rendement, il faudra diviser $f_{t,e}$ par la marge requise. On obtient la fonction de marge de la sélection

$$M_{t,p}(\mathbf{a},\mathbf{v},\mathbf{e},\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^{|J|} M_{VPC}(S_{t,i}, a_i, v_i, \Theta A_{t,i}(a_i,e_i), \Theta V_{t,i}(v_i,e_i), e_i, n_i) \tag{3.43}$$

où M_{VPC} est la fonction 1.13. Avant d'obtenir la fonction objectif, on souligne le fait que l'on doit payer une commission pour chaque option transigée. Par exemple, si la commission est de 1 \$/option il en coûtera 2 \$ pour faire la VPC avec une quantité de 1, puisqu'une VPC est constituée de deux options. Dans la fonction objectif, on utilise la constante φ pour dénoter la commission par option.

Finalement, on obtient la fonction objectif

$$\boxed{f_{t,o}(\mathbf{a},\mathbf{v},\mathbf{e},\mathbf{n}) = \frac{f_{t,e}(\mathbf{a},\mathbf{v},\mathbf{e},\mathbf{n}) - 2\sum_{i=1}^{|J|}\varphi n_i}{M_{t,p}(\mathbf{a},\mathbf{v},\mathbf{e},\mathbf{n})(\max(\mathbf{e}) - t)}} \tag{3.44}$$

où $f_{t,e}$ est la fonction 3.42, $M_{t,p}$ est la fonction 3.43 et φ est la commission par option. On remarque que le terme au dénominateur possède le facteur $(\max(\mathbf{e}) - t)$. Celui-ci nous permet d'obtenir le rendement par unité de temps et ainsi tenir compte des différentes dates d'expiration de manière cohérente. De plus, le dénominateur ne peut pas être égal à 0, car la marge ($M_{t,p}$) sera toujours strictement positive (voir la section 1.2.3 et la définition 3.14) et $\max(\mathbf{e}) > t$ puisque toutes les options disponibles à l'instant t expirent dans le futur.

3.4.4 Fonctions de contraintes

Le but de cette sous-section est d'obtenir une expression des fonctions de contraintes. Les contraintes sont reliées à des mesures de risque. Nos mesures de risque ont la particularité de tenir compte du portefeuille du système (voir la définition 3.11), entre autres. Pour définir nos métriques de risque, on utilise une variable aléatoire appelée le gain du portefeuille à l'expiration. On mesure le risque à l'aide de moments d'une transformation de cette variable aléatoire et de la probabilité d'événements définie à partir de cette variable aléatoire. Le gain du portefeuille est une transformation d'un vecteur aléatoire appelé le vecteur d'expirations. Ainsi, on commence par définir et étudier la distribution du vecteur d'expirations. Ensuite, on définit le gain du portefeuille. Finalement, on définit les fonctions de contraintes.

Vecteur d'expirations

Définition 3.17 *Le **vecteur d'expirations**, à l'instant t, est un vecteur aléatoire $\mathbf{S}_t^*$ dont les éléments sont égaux aux prix des sous-jacents aux dates d'expiration disponibles. Ainsi,* $|\mathbf{S}_t^*| = \sum_{i=1}^{|J|} |T_{t,i}|$.

L'expression exacte de $\mathbf{S}_t^*$ est donnée par

$$\mathbf{S}_t^* = [S_{T_{t,1;1},1}, \ldots, S_{T_{t,1;|T_{t,1}|},1}, \ldots, S_{T_{t,|J|;1},|J|}, \ldots, S_{T_{t,|J|;|T_{t,|J|}|},|J|}]^\top \tag{3.45}$$

où $S_{t,i}$ est le prix du sous-jacent indexé par i, $T_{t,i}$ sont les dates d'expiration disponibles au temps t pour le sous-jacent indexé par i et $T_{t,i;k}$ est le k^e élément de l'ensemble $T_{t,i}$. On considère l'exemple suivant pour clarifier la définition 3.17.

Exemple 3.16 - L'ensemble des sous-jacents actifs est donné par $J = \{A, B, C\}$. À l'instant $t = 0$, les dates d'expiration disponibles sont données par $\mathrm{T}_{0,1} = \mathrm{T}_{0,2} = \{30, 60\}$ et $\mathrm{T}_{0,3} = \{30, 60, 120\}$. Alors, le vecteur d'expiration, à $t = 0$, est donné par $\mathbf{S}_0^* = [S_{30,1}, S_{60,1}, S_{30,2}, S_{60,2}, S_{30,3}, S_{60,3}, S_{120,3}]^\top$.

On désire connaître la distribution du vecteur aléatoire $\mathbf{S}_t^*$. On commence par l'exprimer en fonction de deux autres vecteurs. Le premier est donné par

$$\mathbf{S}_t = [\underbrace{S_{t,1}, \ldots, S_{t,1}}_{|T_{t,1}|}, \ldots, \underbrace{S_{t,|J|}, \ldots, S_{t,|J|}}_{|T_{t,|J|}|}]^\top \tag{3.46}$$

où $S_{t,i}$ est le prix du sous-jacent indexé par i à l'instant t. Le deuxième est donné par

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_t = \mathbf{ln}(\mathbf{S}_t^*) - \mathbf{ln}(\mathbf{S}_t) \tag{3.47}$$

où **ln** est la fonction du logarithme naturel pour un vecteur. On travaille avec $\boldsymbol{\mathcal{L}}_t$, car cela nous permettra d'exprimer nos métriques en fonction de la valeur de $\mathbf{S}_t$.

Exemple 3.17 - Soit la même situation qu'à l'exemple 3.16. Alors, $\mathbf{S}_0 = [S_{0,1}, S_{0,1}, S_{0,2}, S_{0,2}, S_{0,3}, S_{0,3}, S_{0,3}]^\top$ et $\boldsymbol{\mathcal{L}}_0 = \left[\ln(\frac{S_{30,1}}{S_{0,1}}), \ln(\frac{S_{60,1}}{S_{0,1}}), \ln(\frac{S_{30,2}}{S_{0,2}}), \ln(\frac{S_{60,2}}{S_{0,2}}), \ln(\frac{S_{30,3}}{S_{0,3}}), \ln(\frac{S_{60,3}}{S_{0,3}}), \ln(\frac{S_{120,3}}{S_{0,3}})\right]^\top$.
On peut facilement déduire que

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_t = \mathbf{ln}(\mathbf{S}_t^*) - \mathbf{ln}(\mathbf{S}_t) \Longleftrightarrow \mathbf{S}_t^* = \mathbf{S}_t \odot \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\mathcal{L}}_t} \tag{3.48}$$

où $\odot$ est l'opérateur de la multiplication, par élément, de deux vecteurs et $\boldsymbol{e}$ est la fonction

exponentielle pour un vecteur. On peut voir que $\mathbf{S}_t^*$ est une fonction de $\mathbf{S}_t$ et $\boldsymbol{\mathcal{L}}_t$. Pour faciliter les notations qui suivront, on définit trois fonctions. La première est donnée par

$$\nu_{t;i,\tau} = \{x \in \{1, ..., |\mathbf{S}_t^*|\} | S_{t;x}^* = S_{\tau,i}\} \tag{3.49}$$

où $S_{t;x}^*$ est le x^e élément de $\mathbf{S}_t^*$, $i \in \{1, \ldots, |J|\}$ et $\tau > 0$. La deuxième est donnée par

$$\omega_{t;k} = \{x \in \{1, ..., |J|\} | S_{\tau,x} = S_{t;k}^* \text{ où } \tau > t\} \tag{3.50}$$

et la dernière par

$$\delta_{t;k} = \{x \in \mathbb{R}_+^* | S_{x,i} = S_{t;k}^* \text{ où } i \in \{1, ..., |J|\}\}. \tag{3.51}$$

Exemple 3.18 - Soit la même situation qu'aux exemples 3.17 et 3.16. Alors, on peut dire que $\nu_{0;3,30} = 5$, $\omega_{0;5} = 3$ et $\delta_{0;5} = 30$. On peut également dire que $\nu_{0;1,60} = 2$, $\omega_{0;2} = 1$ et $\delta_{0;2} = 60$. De plus, $\nu_{0;6,30} = \varnothing$, $\omega_{0;100} = \varnothing$ et $\delta_{0;100} = \varnothing$.

Maintenant, on pose une hypothèse pour déterminer la distribution de $\boldsymbol{\mathcal{L}}_t$. Celle-ci est raisonnable et utilisée dans la littérature (James, 2003; Hull, 2012).

Hypothèse 3.2 *Soit les processus stochastiques* $Z_{t,i} = \sum_{l=1}^{|J|} \sigma_{i,l} W_{t,l}$ *où les* $W_{t,i}$ *sont des mouvements browniens standards indépendants* $\forall i \in \{1, \ldots, |J|\}$, $\sigma_{i,j} \in \mathbb{R}$ $\forall (i,j)$ *et* $\sum_{l=1}^{|J|} \sigma_{i,l}^2 = 1$ $\forall i$. *La différentielle du prix des sous-jacents,* $S_{t,i}$, *est donnée par* $dS_{t,i} = \mu_i S_{t,i} dt + \sigma_i S_{t,i} dZ_{t,i}$ *où* $\mu_i \in \mathbb{R}$ *et* $\sigma_i \in \mathbb{R}_+^*$ $\forall i \in \{1, \ldots, |J|\}$.

Proposition 3.1 *Le vecteur aléatoire* $\boldsymbol{\mathcal{L}}_t$ *est distribué selon une loi multinormale.*

Preuve La preuve complète est donnée à l'annexe A.2 ■

On sait que la fonction de densité conjointe d'un vecteur aléatoire distribué selon une loi multinormale est complètement déterminée par le vecteur de moyennes ($\boldsymbol{\mu}_t$) et la matrice des covariances ($\boldsymbol{\Sigma}_t$) (voir Lefebvre (2015) p.283). On considère les trois propositions suivantes pour trouver l'expression de $\boldsymbol{\mu}_t$ et $\boldsymbol{\Sigma}_t$.

Proposition 3.2 $\ln(S_{t+\tau,i}) - \ln(S_{t,i}) \sim N\left(\left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)\tau, \sigma_i^2 \tau\right)$ *où* $\tau > 0$ *et* $S_{t,i}$ *est le prix du sous-jacent indexé par* i *à l'instant* t. *Cela implique que* $\frac{S_{t+\tau,i}}{S_{t,i}}$ *suit une loi lognormale.*

Preuve La preuve complète est donnée à l'annexe A.3 ■

Proposition 3.3 *COV*$[\ln(S_{t+\tau_1,i}) - \ln(S_{t,i}), \ln(S_{t+\tau_2,i}) - \ln(S_{t,i})] = \sigma_i^2 \min(\tau_1, \tau_2)$ *où* $\tau_1 > 0$,$\tau_2 > 0$ *et* $S_{t,i}$ *est le prix du sous-jacent indexé par* i *à l'instant* t.

Preuve La preuve complète est donnée à l'annexe A.4 ■

Proposition 3.4 *COV*$[\ln(S_{t+\tau_1,i}) - \ln(S_{t,i}), \ln(S_{t+\tau_2,j}) - \ln(S_{t,j})] = \sigma_i \sigma_j \sum_{k=1}^{|J|} \sigma_{i,k}\sigma_{j,k} \min(\tau_1, \tau_2)$ *où* $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, $i \neq j$ *et* $S_{t,i}$ *est le prix du sous-jacent indexé par* i *à l'instant* t.

Preuve La preuve complète est donnée à l'annexe A.5 ■

Expression de $\boldsymbol{\mu}_t$

On sait que $\boldsymbol{\mu}_t$ est le vecteur de moyenne de $\boldsymbol{\mathcal{L}}_t$. Avec la propostion 3.2 et la définition de $\boldsymbol{\mathcal{L}}_t$, on peut affirmer que

$$\begin{aligned} \mu_{t;k} &= E[\mathcal{L}_{t;k}] \\ &= E\Big[\ \ln(S_{\delta_{t;k},\omega_{t;k}}) - \ln(S_{t,\omega_{t;k}})\Big] \\ &= E\Big[N\Big(\Big(\mu_{\omega_{t;k}} - \frac{\sigma^2_{\omega_{t;k}}}{2}\Big)(\delta_{t;k} - t), \sigma^2_{\omega_{t;k}}(\delta_{t;k} - t)\Big)\Big] \\ &= \Big(\mu_{\omega_{t;k}} - \frac{\sigma^2_{\omega_{t;k}}}{2}\Big)(\delta_{t;k} - t) \end{aligned} \tag{3.52}$$

où $1 \leqslant k \leqslant |\boldsymbol{\mathcal{L}}_t|$, $\mu_{t;k}$ est le k^e élément de $\boldsymbol{\mu}_t$, $\mathcal{L}_{t;k}$ est le k^e élément de $\boldsymbol{\mathcal{L}}_t$,$\omega_{t;k}$ est la fonction 3.50 et $\delta_{t;k}$ la fonction 3.51.

Expression de $\boldsymbol{\Sigma}_t$

On sait que $\boldsymbol{\Sigma}_t$ est la matrice des covariances de $\boldsymbol{\mathcal{L}}_t$. On la définit en deux parties. Premièrement, on s'intéresse au cas où un élément de $\boldsymbol{\Sigma}_t$ correspond à la covariance de deux éléments de $\boldsymbol{\mathcal{L}}_t$ qui proviennent du même sous-jacent. Pour un élément $\Sigma_{t;k,l}$, cette situation correspond au cas où $\omega_{t;k} = \omega_{t;l}$. Lorsque cette équation est respectée, l'expression de $\Sigma_{t;k,l}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \Sigma_{t;k,l} &= \mathrm{COV}[\mathcal{L}_{t;k}, \mathcal{L}_{t;l}] \\ &= \mathrm{COV}\Big[\ \ln(S_{\delta_{t;k},\omega_{t;k}}) - \ln(S_{t,\omega_{t;k}}), \ln(S_{\delta_{t;l},\omega_{t;l}}) - \ln(S_{t,\omega_{t;l}})\Big] \\ &= \sigma^2_{\omega_{t;k}} \min(\delta_{t;k} - t, \delta_{t;l} - t) \end{aligned} \tag{3.53}$$

où $1 \leqslant k \leqslant |\boldsymbol{\mathcal{L}}_t|$, $1 \leqslant l \leqslant |\boldsymbol{\mathcal{L}}_t|$ et $\Sigma_{t;k,l}$ est l'élément de la k^e ligne et la l^e colonne de Σ_t. L'équation 3.53 est obtenue en utilisant la proposition 3.3. On considère maintenant le cas où $\omega_{t;k} \neq \omega_{t;l}$. Dans ce cas, à l'aide de la proposition 3.4, on obtient

$$\boxed{\begin{aligned}\Sigma_{t;k,l} &= \mathrm{COV}[\mathcal{L}_{t;k}, \mathcal{L}_{t;l}] \\ &= \mathrm{COV}\Big[\ln(S_{\delta_{t;k},\omega_{t;k}}) - \ln(S_{t,\omega_{t;k}}), \ln(S_{\delta_{t;l},\omega_{t;l}}) - \ln(S_{t,\omega_{t;l}})\Big] \\ &= \sigma_{\omega_{t;k}}\sigma_{\omega_{t;l}} \sum_{m=1}^{|J|} \sigma_{\omega_{t;k},m}\sigma_{\omega_{t;l},m} \min(\delta_{t;k} - t, \delta_{t;l} - t)\end{aligned}}. \tag{3.54}$$

Gain du portefeuille

Définition 3.18 *Le **gain du portefeuille** est une variable aléatoire GP_t qui est égale à la somme des gains des positions lorsqu'elles sont toutes venues à échéance. Plus précisément, il s'agit des positions du portefeuille à l'instant t et des positions sélectionnées à l'instant t.*

Pour obtenir une expression de GP_t, on définit deux variables aléatoires intermédiaires. La première est la somme des gains des positions du portefeuille. Son expression est donnée par

$$\begin{aligned}\mathrm{GP}_{t,1}(\mathrm{PR}_t, \mathbf{S}_t^*) = \sum_{\{p_a,p_v\}\in \mathrm{PR}_t} \Bigg[&\sum_{a\in p_a} G_{AOA}\Big(S^*_{t;(\nu_{t;a_j,a_\tau})}, a_k, a_\theta, a_n\Big) + \\ &\sum_{v\in p_v} G_{AOV}\Big(S^*_{t;(\nu_{t;v_j,v_\tau})}, v_k, v_\theta, v_n\Big)\Bigg]\end{aligned} \tag{3.55}$$

où PR_t est le portefeuille à l'instant t (voir la définition 3.11), $\mathbf{S}_t^*$ est le vecteur d'expirations (voir la définition 3.17), ν_t est la fonction 3.49, $S^*_{t;k}$ est le k^e élément de $\mathbf{S}_t^*$, G_{AOA} est la fonction 1.1 et G_{AOV} est la fonction 1.3.

La deuxième variable aléatoire intermédiaire est la somme des gains des positions sélectionnées à l'instant t. Son expression est donnée par

$$\mathrm{GP}_{t,2}(\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{S}_t^*) = \sum_{i=1}^{|J|} G_{VPC}\Big(S^*_{t;(\nu_{t;i,e_i})}, a_i, v_i, \Theta A_{t,i}(a_i, e_i) + \Theta V_{t,i}(v_i, e_i), n_i\Big). \tag{3.56}$$

où G_{VPC} est la fonction 1.6, ΘA est la fonction 3.1 et ΘV la fonction 3.2. Les vecteurs $\mathbf{a}$,$\mathbf{v}$,$\mathbf{e}$ et $\mathbf{n}$ sont définis dans la section 3.4.2.

L'expression du gain du portefeuille est donnée par la somme de $\mathrm{GP}_{t,1}$ et $\mathrm{GP}_{t,2}$. Celle-ci est donnée par

$$\boxed{\mathrm{GP}_t(\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathrm{PR}_t, \mathbf{S}_t^*) = \mathrm{GP}_{t,1}(\mathrm{PR}_t, \mathbf{S}_t^*) + \mathrm{GP}_{t,2}(\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{S}_t^*)}. \tag{3.57}$$

On sait que $\mathbf{S}_t^*$ est une fonction de $\mathbf{S}_t$ et $\boldsymbol{\mathcal{L}}_t$ (voir la relation 3.48). Ainsi, on exprimera GP_t comme $\mathrm{GP}_t(\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathrm{PR}_t, \mathbf{S}_t, \boldsymbol{\mathcal{L}}_t)$.

Simulation

Définition 3.19 *La* ***matrice d'observations du vecteur*** $\boldsymbol{\mathcal{L}}_t$ *au temps* t*, notée* $\mathbf{L}_t$ *où* $t \geqslant 0$*, est une matrice de taille* $N \times |\boldsymbol{\mathcal{L}}_t|$ *dont chaque ligne* $\mathbf{l}_t \overset{i.i.d.}{\sim} N(\boldsymbol{\mu}_t, \boldsymbol{\Sigma}_t)$ *où* $N \in \mathbb{N}^*$.

On utilise la matrice $\mathbf{L}_t$ pour définir nos fonctions de contraintes. En pratique, on obtient une réalisation de la matrice $\mathbf{L}_t$ en utilisant une simulation par ordinateur. On simule une réalisation du vecteur $\boldsymbol{\mathcal{L}}_t$, N fois. Pour ce faire, il faut définir un estimateur de $\boldsymbol{\mu}_t$ et de $\boldsymbol{\Sigma}_t$. Ils sont dénotés par $\hat{\boldsymbol{\mu}}_t$ et $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_t$. Nous reviendrons sur le choix de N et l'expression de $\hat{\boldsymbol{\mu}}_t$ et $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_t$ au chapitre 4.

Métriques de risque

Cette sous-section constitue la dernière étape avant d'obtenir la définition de nos fonctions de contraintes. Ces fonctions servent à s'assurer que le risque encouru par la sélection est acceptable. Le risque se manifeste sous diverses formes, par exemple, la probabilité que le gain du portefeuille (définition 3.18) soit positif. Le risque s'élève lorsque cette probabilité diminue. Il existe potentiellement une infinité de mesures du risque. La particularité de nos mesures est qu'elles sont exprimées comme une fonction du choix des paramètres des stratégies d'options et du portefeuille.

Nos fonctions de contrainte estiment des quantités théoriques pour mesurer le risque. Celles-ci sont définies au tableau 3.3 et une description qualitative en est donnée. Ces métriques ont été choisies pour couvrir plusieurs dimensions du risque. Notamment, le probabilité de profit et la probabilité d'une grande perte. Également, elles ont été choisies pour être relativement interprétables par un humain averti. Ainsi, celui-ci pourra transmettre au système le niveau de risque qui lui acceptable et le système tentera de maximiser le rendement selon ces contraintes.

Tableau 3.3 Métriques de risque associées aux fonctions de contrainte du problème de sélection. Dans les équations : GP_t est le gain du portefeuille (définition 3.18), VN_t est la valeur nette du portefeuille (définition 3.13), $\mathbf{S}_t$ est le vecteur 3.46, $\mathbf{s}$ est la valeur de $\mathbf{S}_t$ observée à t et $d \in \mathbb{R}$. La notation de GP_t est abrégée, on devrait écrire $\mathrm{GP}_t(\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathrm{PR}_t, \mathbf{S}_t, \boldsymbol{\mathcal{L}}_t)$.

Métrique de risque	**Description**
$P[\mathrm{GP}_t > 0 \vert \mathbf{S}_t = \mathbf{s}]$	Probabilité de profit
$P[\mathrm{GP}_t/\mathrm{VN}_t < -d \vert \mathbf{S}_t = \mathbf{s}]$	Probabilité d'un rendement de $-d$
$\sqrt{\mathrm{VAR}[\mathrm{GP}_t/\mathrm{VN}_t \vert \mathbf{S}_t = \mathbf{s}]}$	Écart-type du rendement
$\frac{E[(\mathrm{GP}_t/\mathrm{VN}_t - E[\mathrm{GP}_t/\mathrm{VN}_t \vert \mathbf{S}_t=\mathbf{s}])^4 \vert \mathbf{S}_t=\mathbf{s}]}{(\mathrm{VAR}[\mathrm{GP}_t/\mathrm{VN}_t \vert \mathbf{S}_t=\mathbf{s}])^2}$	Coefficient d'aplatissement du rendement

Expression des fonctions de contraintes

Les expressions de nos fonctions de contraintes sont données au tableau 3.4. Ces fonctions estiment toutes une métrique de risque. La métrique de risque qu'elles estiment est donnée par la ligne correspondante du tableau 3.3. Les expressions des fonctions proviennent des estimateurs échantillonnaux de la variance, du coefficient d'aplatissement et de la probabilité d'un événement.

Tableau 3.4 Définition des fonctions de contraintes. Chaque fonction correspond à une métrique de risque du tableau 3.3. Dans les définitions : $\mathbf{l}_{t,i}$ est la i^e ligne de $\mathbf{L}_t$ (définition 3.19), N est le nombre de lignes de $\mathbf{L}_t$, I est la fonction indicatrice, PR_t est le portefeuille du système (définition 3.11), les vecteurs $\mathbf{a}$,$\mathbf{v}$,$\mathbf{e}$ et $\mathbf{n}$ sont définis à la section 3.4.2 et le reste des variables a la même définition qu'au tableau 3.3.

Fonction	**Définition**
$g_{t,1}(\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{e}, \mathbf{n})$	$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I(\mathrm{GP}_t(\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathrm{PR}_t, \mathbf{s}, \mathbf{l}_{t,i}) > 0)$
$g_{t,2}(\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{e}, \mathbf{n})$	$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I(\mathrm{GP}_t(\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathrm{PR}_t, \mathbf{s}, \mathbf{l}_{t,i})/\mathrm{VN}_t < -d)$
$g_{t,3}(\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{e}, \mathbf{n})$	$\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\mathrm{GP}_t(\mathbf{a},\mathbf{v},\mathbf{e},\mathbf{n},\mathrm{PR}_t,\mathbf{s},\mathbf{l}_{t,i})}{\mathrm{VN}_t} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{GP}_t(\mathbf{a},\mathbf{v},\mathbf{e},\mathbf{n},\mathrm{PR}_t,\mathbf{s},\mathbf{l}_{t,i})}{\mathrm{VN}_t}\right)^2}$
$g_{t,4}(\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{e}, \mathbf{n})$	$\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\mathrm{GP}_t(\mathbf{a},\mathbf{v},\mathbf{e},\mathbf{n},\mathrm{PR}_t,\mathbf{s},\mathbf{l}_{t,i})}{\mathrm{VN}_t} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{GP}_t(\mathbf{a},\mathbf{v},\mathbf{e},\mathbf{n},\mathrm{PR}_t,\mathbf{s},\mathbf{l}_{t,i})}{\mathrm{VN}_t}\right)^4}{g_{t,3}^4(\mathbf{a},\mathbf{v},\mathbf{e},\mathbf{n})}$

On définit le vecteur des fonctions de contraintes pour faciliter la notation

$$\mathbf{g}_t(\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{e}, \mathbf{n}) = [1 - g_{t,1}, g_{t,2}, g_{t,3}, g_{t,4}]^\top. \tag{3.58}$$

3.4.5 Problème d'optimisation

À une fréquence fixe, le système de négociation doit sélectionner un ensemble de nouvelles positions à mettre en place. Comme nous l'avons mentionné précédemment, cette sélection se fait sur la base de la résolution d'un problème d'optimisation. Celui-ci est donné par

$$
\begin{aligned}
&\min_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{n})\in\mathbb{Z}^{4|J|}} \quad -f_{t,o}(\boldsymbol{\psi}_t(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}),\mathbf{n}) \\
&\text{tel que} \\
&\qquad\qquad \mathbf{g}_t(\boldsymbol{\psi}_t(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}),\mathbf{n}) - \mathbf{c} \leqslant \mathbf{0} \\
&\qquad\qquad \lambda_1 \mathrm{PA}_t \leqslant M_{t,p}(\boldsymbol{\psi}_t(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}),\mathbf{n}) \leqslant \lambda_2 \mathrm{PA}_t \\
&\qquad\qquad 1 \leqslant x_i \leqslant |\mathrm{KA}_{t,i}| \ \forall i \in \{1,\ldots,|J|\} \\
&\qquad\qquad 1 \leqslant y_i \leqslant |\mathrm{KV}_{t,i}| \ \forall i \in \{1,\ldots,|J|\} \\
&\qquad\qquad 1 \leqslant z_i \leqslant |\mathrm{T}_{t,i}| \ \forall i \in \{1,\ldots,|J|\} \\
&\qquad\qquad n_i \geqslant 0 \ \forall i \in \{1,\ldots,|J|\}
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

où $f_{t,o}$ est la fonction 3.44, $\boldsymbol{\psi}_t$ est la fonction 3.41, $\mathbf{g}_t$ est la fonction 3.58, $M_{t,p}$ la fonction 3.43, $\mathbf{c}$ est un vecteur constant tel que $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^4$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, PA_t est le pouvoir d'achat (voir la définition 3.15) et les vecteurs $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ sont définis à la section 3.4.2. De plus, $\mathrm{KA}_{t,i}/\mathrm{KV}_{t,i}$ sont les prix d'exercices disponibles pour les options d'achat/de vente du sous-jacent indexé par i (voir la définition 3.6), à l'instant t, et $\mathrm{T}_{t,i}$ sont les dates d'expiration disponibles pour le sous-jacent indexé par i (voir la définition 3.7), au temps t. On considère l'exemple suivant pour mieux comprendre comment ce problème se pose en situation réelle.

Exemple 3.19 - Soit le problème d'optimisation 3.59 avec $\mathbf{c} = [0,1; 0,01; 0,25; 3]^\top$, $d = 0,5$, $\lambda_1 = 0,10$ et $\lambda_1 = 0,25$.[7] La solution de ce problème correspond à la sélection qui minimise l'opposé du rendement (i.e. maximise le rendement) et pour laquelle la probabilité de gain du portefeuille est supérieure à 90 %, la probabilité d'un rendement inférieur à -50 % est inférieure à 1 %, la variance du rendement est inférieure à 25 % et le coefficient d'aplatissement est inférieur à 3. De plus, la marge requise pour la sélection doit être inférieure à 25 % du pouvoir d'achat et supérieure à 10 % du pouvoir d'achat.

Comme nous l'avons mentionné à la section 3.2, la solution du problème d'optimisation 3.59 doit être transformée pour obtenir les paramètres exacts des stratégies de VPC. On se réfère à l'exemple 3.15 pour plus de clarifications.

7. Voir la deuxième ligne du tableau 3.3 pour la définition de d.

3.4.6 Algorithme de résolution

Dans la littérature sur les options, il existe deux approches principales pour résoudre les problèmes d'optimisation : l'utilisation d'une méthode basée sur le gradient et l'utilisation d'une heuristique. La vaste majorité des études formulent un problème d'optimisation linéaire ou quadratique et utilisent un algorithme classique pour le résoudre. L'avantage de cette approche est la rapidité de la résolution. Cependant, le cadre est très rigide et ne permet pas de créer des estimateurs flexibles de l'espérance de rendement et du risque. Les études optant pour des estimateurs plus flexibles sont relativement silencieuses par rapport à l'algorithme d'optimisation utilisé. Typiquement, on utilise une méthode heuristique. Pour nous différencier de la littérature, nous utiliserons une méthode qui possède des propriétés de convergence : *mesh adaptative direct search* (MADS).

Plusieurs remarques importantes par rapport au problème 3.59 doivent être faites. Premièrement, il s'agit d'un problème d'optimisation à variables discrètes. Deuxièmement, nous ne pouvons pas obtenir le gradient de $f_{t,o}$ et de $\mathbf{g}_t$. En effet, comme ce sont des fonctions à variables discrètes, le gradient n'est pas défini. De plus, comme nous l'avons mentionné à la section 3.2, $f_{t,o}$ et $\mathbf{g}_t$ sont des compositions des fonctions $\Theta A_{t,i}$ et $\Theta V_{t,i}$. Or, il est impossible d'obtenir une expression analytique de ces fonctions. Troisièmement, il est difficile de trouver un élément de l'ensemble solution du problème d'optimisation 3.59. Autrement dit, il est difficile de trouver un point qui respecte les contraintes du problème. Cela est d'autant plus difficile lorsque le portefeuille du système contient beaucoup de positions. Ainsi, nous avons besoin d'une méthode de gestion des contraintes qui ne nécessite pas un point initial admissible.

En sachant tout cela, nous avons décidé d'utiliser l'algorithme MADS, car celui-ci possède des propriétés de convergence démontrées par Audet et Dennis Jr (2006). Il existe plusieurs mises en œuvre de cet algorithme (Audet et Dennis Jr, 2006; Abramson et al., 2009; Van Dyke et Asaki, 2013). Celles-ci se basent sur deux structures importantes appelées la *Mesh* et le *Poll*. Le cœur de l'algorithme provient de la définition du *Poll*. Celle-ci est basée sur un ensemble de vecteurs qui doivent respecter des propriétés théoriques. C'est ce qui assure la convergence. Une avancée récente permet de considérer des variables discrètes (Audet et al., 2018). C'est cette mise en œuvre que nous utiliserons. De plus, nous utiliserons la méthode à barrière progressive (Audet et Dennis Jr, 2009) pour gérer les contraintes, car celle-ci ne nécessite pas un point initial admissible.

3.5 Sélection des positions à liquider

Dans la section précédente nous avons défini un problème d'optimisation qui doit être résolu pour choisir les nouvelles positions à mettre en place. Le deuxième choix important qui doit être fait est celui de la liquidation des positions. À chaque période, il est possible de liquider les positions. On se réfère aux exemples 3.1, 3.2 et 3.3 pour plus de détails. Nous utiliserons la moyenne de gain d'une position multiple pour définir un algorithme qui prend ces décisions. Premièrement on définit la fonction

$$\xi_t(\mathrm{P}, \mathbf{x}) = \max_{t_2} \frac{\hat{m}_p(t, t_2 | \mathrm{P}, \mathbf{x}, S_{t,\mathrm{p}_{a;1;j}})}{t_2 - \mathrm{p}_{a;1;e}} \tag{3.60}$$

où P est une position multiple (définition 3.10), $\mathbf{x} \in (\mathbb{R})^{|\mathcal{I}_t|}$, $\hat{m}_p$ est la fonction 3.38, $S_{t,i}$ est le prix du sous-jacent actif indexé par i au temps t (voir la définition 3.3), $\mathrm{p}_{a;1;\tau}$ est la date d'expiration de la première position sur option d'achat de P, $\mathrm{p}_{a;1;e}$ est la date d'exécution de la première position sur option d'achat de P, $\mathrm{p}_{a;1;j}$ est l'indice du sous-jacent de la première position sur option d'achat de P, $p_{a;1;e} \leqslant t < p_{a;1;\tau}$ et $t < t_2 \leqslant p_{a;1;\tau}$. Avec la fonction $\xi_t(\mathrm{P}, \mathbf{x})$ on pose la condition

$$\frac{\mathrm{G}_{p,t}(\mathrm{P})}{t - \mathrm{p}_{a;1;e}} \geqslant \gamma \xi_t(\mathrm{P}, \mathbf{x}) \tag{3.61}$$

où $\mathrm{G}_{p,t}$ est le gain d'une position multiple au temps t (définit en 3.38) et $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$. Cette condition est appliquée dans le cas où $\mathrm{G}_{p,t}(\mathrm{P}) > 0$. γ est choisi par l'utilisateur. Nous y reviendrons au chapitre 4. Lorsque $\mathrm{G}_{p,t}(\mathrm{P}) \leqslant 0$ on applique la condition

$$\xi_t(\mathrm{P}, \mathbf{x}) \leqslant 0. \tag{3.62}$$

Finalement, on obtient l'algorithme de liquidation.

Algorithme de liquidation

À l'instant t,

1. **Pour chaque** position multiple P du portefeuille PR_t
2. **Si** $\mathrm{G}_{p,t}(\mathrm{P}) > 0$ et 3.61 est vérifiée **alors** liquider P
3. **Sinon si** $\mathrm{G}_{p,t}(\mathrm{P}) > 0$ et 3.61 n'est pas vérifiée **alors** ne pas liquider P
4. **Sinon si** $\mathrm{G}_{p,t}(\mathrm{P}) \leqslant 0$ et 3.62 est vérifiée **alors** liquider P
5. **Sinon si** $\mathrm{G}_{p,t}(\mathrm{P}) \leqslant 0$ et 3.62 n'est pas vérifiée **alors** ne pas liquider P

CHAPITRE 4 MISE EN OEUVRE, DONNÉES ET RÉSULTATS

4.1 Sommaire

Pour mettre en œuvre le système développé au chapitre précédent, on doit faire un nombre de choix. Notamment, l'ensemble de données à utiliser pour ajuster les modèles, les éléments de l'ensemble des sous-jacents actifs, les éléments de l'ensemble d'information et les paramètres du modèle de risque. Dans le présent chapitre, nous allons détailler tous les choix qui ont été effectués pour mettre en place notre système de négociation automatisé, ainsi que les expériences et l'analyse qui soutiennent ces choix. Ensuite, nous effectuerons des simulations de négociation à l'aide de données historiques pour comparer le rendement de notre système avec plusieurs stratégies usuelles.

4.2 Données

4.2.1 Ensemble des sous-jacents actifs

Les éléments de l'ensemble des sous-jacents actifs utilisé pour la mise en œuvre sont énumérés au tableau 4.1. Nous avons sélectionné des indices et des actions. Les sous-jacents couvrent plusieurs secteurs de l'économie américaine. Plusieurs contraintes ont été appliquées à la sélection. Premièrement, un sous-jacent doit être en existence depuis au moins 1993. [1] Deuxièmement, le volume annuel des options associées à un sous-jacent doit être supérieur à 1 million. [2] Troisièmement, aucun *split* ne doit avoir été effectué sur un sous-jacent pendant la période de 2003 à 2014. [3]

Les données sur le prix historique des indices ont été obtenues sur finance.yahoo.com et celles des actions sur quandl.com. L'échantillon contient les prix de fermeture journaliers des sous-jacents. La période couverte est spécifique à chaque sous-jacent (voir le tableau 4.1). Des statistiques descriptives sur les fluctuations, mensuelles et annuelles, du prix des sous-jacents

1. Cette contrainte sert à contrôler la taille des échantillons de prix historiques **des sous-jacents**. L'année 1993 a été choisie car elle permet d'obtenir un minimum de 10 ans d'observations précédant la période couverte par notre échantillon de **prix d'options**.

2. Le volume annuel d'un produit financier est le nombre d'unités échangées dans l'année. Dans notre cas, il s'agit de l'année 2014, la dernière année de notre échantillon de prix d'options. Il est préférable qu'il soit possible d'investir un montant considérable de capital dans notre système. Pour ce faire, il faut que le volume d'options négociées soit élevé.

3. Un *split* est une procédure selon laquelle une compagnie réduit (ou augmente) le prix de son action en changeant le nombre d'actions en circulation. Seule l'action MSFT contrevient à cette règle. Un split a été effectué en février 2003. Cette contrainte facilite la mise en œuvre du système. Elle évite de devoir gérer l'ajustement des profits.

Tableau 4.1 Éléments de l'ensemble des sous-jacents actifs utilisé pour la mise en place du système. La colonne échantillon désigne la période couverte par l'échantillon de prix historique du sous-jacent.

Symbole	**Sous-jacent**	**Type**	**Période**
SPX	Indice S&P 500	Indice	1950-2015
RUT	Indice Russell 2000	Indice	1987-2015
NDX	Indice NASDAQ-100	Indice	1985-2015
WMT	Wal-Mart Stores Inc.	Action	1972-2015
XOM	Exxon Mobil Corp	Action	1970-2015
PFE	Pfizer	Action	1972-2015
GE	General Electric Co	Action	1962-2015
MSFT	Microsoft Corp	Action	1986-2015
INTC	Intel Corp	Action	1980-2015
X	United States Steel Corp	Action	1991-2015

sont données au tableau 4.2. La moyenne échantillonale ($\hat{\mu}$), l'écart-type échantillonnal ($\hat{\sigma}$) et la proportion de fluctuation positive ($\hat{p}$) sont rapportés pour chaque sous-jacent.

Tableau 4.2 Statistiques descriptives de l'échantillon de prix des sous-jacents actifs. Les symboles $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ et $\hat{p}$ correspondent à la moyenne, l'écart-type et la proportion d'observation positive des fluctuations du prix par année (a) et par mois (m).

	SPX	**RUT**	**NDX**	**WMT**	**XOM**	**PFE**	**GE**	**MSFT**	**INTC**	**X**
$\hat{\mu}_a$	0,09	0,1	0,17	0,25	0,11	0,14	0,11	0,31	0,22	0,19
$\hat{\sigma}_a$	0,16	0,18	0,32	0,44	0,17	0,28	0,25	0,44	0,46	0,77
$\hat{p}_a$	0,73	0,7	0,84	0,78	0,77	0,71	0,67	0,74	0,68	0,54
$\hat{\mu}_m$	0,01	0,01	0,01	0,02	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,01
$\hat{\sigma}_m$	0,04	0,06	0,07	0,09	0,05	0,07	0,07	0,1	0,11	0,15
$\hat{p}_m$	0,6	0,62	0,6	0,6	0,56	0,57	0,53	0,61	0,57	0,51

4.2.2 Options

Les prix historiques des options associées aux sous-jacents actifs ont été obtenus sur quotemedia.com. L'échantillon couvre la période de 2003 à 2014. Celui-ci contient le *bid* et l'*ask* (voir la section 1.1.2) des options à la fin de chaque jour ouvrable. La taille de l'échantillon, pour chaque sous-jacent actif, est rapportée au tableau 4.3. La première ligne du tableau correspond aux options d'achat et la deuxième ligne aux options de vente.

Tableau 4.3 Taille des échantillons de prix historiques d'options pour chaque sous-jacent actif. La variable N_a est égale au nombre d'options d'achat dans l'échantillon et N_v au nombre d'options de vente dans l'échantillon.

	SPX	**RUT**	**NDX**	**WMT**	**XOM**	**PFE**	**GE**	**MSFT**	**INTC**	**X**
N_a	789579	495584	655856	132174	128510	154978	159144	189204	152141	185314
N_v	1057277	607745	687565	133544	135839	152653	160233	191265	151120	185935

Une procédure en six étapes a été appliquée aux données pour retirer les observations indésirables.

1. Seules les options mensuelles et expirant dans moins de 130 jours ont été retenues. [4]
2. Une inspection graphique de l'*ask* des options a été faite pour identifier les prix erronés.
3. Toutes les options ayant un *ask* égal à 0 ont été retirées de l'échantillon.
4. Toutes les options dont la valeur intrinsèque était supérieure au prix de l'*ask* ont été retirées de l'échantillon. [5]
5. Toutes les options dont la VI était supérieure à 10^3 ont été retirées. [6]
6. Toutes les options possédant un Delta (voir le tableau 1.9) égal à 1, -1 ou 0 ont été retirées de l'échantillon.

4.2.3 Prix de règlement

Les prix de règlement des options sur indice (voir la section 1.2.2) proviennent de cboe.com. Ceux-ci couvrent la période de 2003 à 2016 et sont associés aux options mensuelles des indices SPX, RUT et NDX.

4.2.4 Taux d'intérêt

Le taux d'intérêt est nécessaire pour calculer le VI à partir du modèle de BSM (voir les sections 1.2.4 et 1.2.5). Pour mesurer le taux d'intérêt, on utilise le *yield* des bons du Trésor américain à court terme (4 *week T-bill*). Les données sont à fréquence journalière et couvrent

4. Les options mensuelles expirant dans moins de trois mois sont les plus couramment échangées.

5. La valeur intrinsèque d'une option est égale au profit qui serait réalisé par l'exercice immédiat de l'option.

6. Comme la VI est obtenue à partir de la résolution d'un problème d'optimisation, les options pour lesquelles aucune solution admissible n'a été trouvée ont été retirées. Nous reviendrons sur la calcul de la VI à la section 4.3.2.

la période allant de 2003 à 2014. Celles-ci ont été obtenues à partir de fred.stlouisfed.org. On peut voir l'évolution du taux d'intérêt dans le temps à la figure B.1 dans l'annexe B.1.

4.2.5 Ensemble d'information

L'ensemble d'information (voir la définition 3.4) utilisé pour mettre en place notre système contient la volatilité historique (VH). La définition précise de celle-ci est donnée par

$$\mathrm{VH}_{t,i}(\ell) = \sqrt{\frac{1}{\ell-1}\sum_{k=1}^{\ell}\left[\frac{S_{(t-k)+1,i}-S_{t-k,i}}{S_{t-k,i}} - \frac{1}{\ell}\sum_{k=1}^{\ell}\frac{S_{(t-k)+1,i}-S_{t-k,i}}{S_{t-k,i}}\right]^2 365} \tag{4.1}$$

où $1 \leqslant i \leqslant |J|$, $t > 0$, $\ell > 0$ et $S_{t,i}$ est le prix du sous-jacent indexé par i à l'instant t (voir la définition 3.3). $\mathrm{VH}_{t,i}(\ell)$ est égale à l'écart-type annualisé des fluctuations journalières du sous-jacent indexé par i. La VH dépend du paramètre ℓ qui correspond à la taille de la fenêtre, mesurée en jours, utilisée pour le calcul. Nous avons utilisé trois tailles : 60 jours, 90 jours et 120 jours. Ainsi, trois variables différentes sont créées. Au lieu d'intégrer ces trois variables dans un même ensemble d'information, on crée trois ensembles d'information différents. Des estimateurs des fonctions m_a et m_v (voir la section 3.3.3) ont été ajustés pour chaque ensemble d'information. Des statistiques descriptives sur la valeur historique de la VH, pour chacun des sous-jacents actifs, sont rapportées au tableau 4.4.

Tableau 4.4 Quartiles, maximum et minimum de la VH (voir la section 4.2.4) avec $\ell = 60$, $\ell = 90$ et $\ell = 120$, pour tous les sous-jacents actifs.

	SPX	**RUT**	**NDX**	**WMT**	**XOM**	**PFE**	**GE**	**MSFT**	**INTC**	**X**
Min	0,04	0,05	0,07	0,09	0,11	0,07	0,09	0,1	0,13	0,21
Q25	0,11	0,13	0,18	0,23	0,19	0,24	0,2	0,26	0,32	0,41
Q50	0,14	0,19	0,22	0,31	0,23	0,31	0,24	0,36	0,44	0,5
Q75	0,19	0,24	0,32	0,4	0,29	0,37	0,31	0,45	0,54	0,61
Max	0,97	1,05	1,08	1,07	1,32	0,94	1,23	1,54	1,49	2,01

La VH a été sélectionnée comme variable explicative pour deux raisons. Premièrement, elle permet de maximiser la taille de l'échantillon de test de nos estimateurs $\hat{m}_a$ et $\hat{m}_v$.[7] Deuxièmement, la revue de littérature nous a révélé que la VH possède une forte auto-corrélation (Granger et al., 2000) et peut être utilisée dans des stratégies de base pour réaliser des profits (Cohen et al., 1972; Galai, 1977; Noh et al., 1994; Schmitt et Kaehler, 1996; Laws, 2000).

7. Comme la VH est calculée avec le prix des sous-jacents il est possible d'ajuster nos estimateurs avec des données précédant la période couverte par l'échantillon de prix des options.

4.3 Ajustement et évaluation de $\hat{m}_a$ et $\hat{m}_v$

On rappelle que notre système de négociation est centré sur la résolution du problème d'optimisation 3.59. La fonction objectif de ce problème est définie à l'aide de l'estimateur $\hat{m}_{pc}$ (voir la section 3.3.4). Ce dernier est défini à l'aide des estimateurs $\hat{m}_a$ et $\hat{m}_v$ (voir la section 3.3.3). Dans la présente sous-section, nous expliquerons la méthodologie d'évaluation des estimateurs $\hat{m}_a/\hat{m}_v$ et en présenterons les résultats. Nous débuterons par l'explication de la méthode d'ajustement des modèles $\hat{F}^{-1}_{R_{i;t_1;t_2-t_1}|\cdot}$, $\hat{VI}_{a,t,i}$ et $\hat{VI}_{v,t,i}$ puisque $\hat{m}_a$ et $\hat{m}_v$ en dépendent (voir les section 3.3.1 et 3.3.2).

4.3.1 Paramètres et ajustement de $\hat{F}^{-1}_{R_{i;t_1;t_2-t_1}|\cdot}$

Pour ajuster l'estimateur $\hat{F}^{-1}_{R_{i;t_1;t_2-t_1}|\cdot}$ on doit d'abord sélectionner la valeur des paramètres η_1 et η_2 (voir l'exemple 3.10). Ceux-ci correspondent essentiellement au nombre de quantiles utilisés dans l'estimation de la fonction de quantiles et à l'horizon de prédiction maximal en jours. [8] Nous avons posé $\eta_1 = 101$ et $\eta_2 = 130$. [9] Ainsi, nous avons dû effectuer $130 \times (101-1) = 13\,000$ régressions quantiles pour chaque sous-jacent actif. [10]

Comme nous l'avons dit à la section 3.3.1, on doit résoudre le problème d'optimisation linéaire 3.18 pour obtenir les paramètres de nos régressions quantiles. Pour ce faire, nous avons utilisé la librarie PuLP écrite avec le language Python. Celle-ci fournit une interface permettant d'utiliser le solveur GLPK. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, $\hat{F}^{-1}_{R_{i;t_1;t_2-t_1}|\cdot}$ estime la fonction de quantiles de la fluctuation du prix du sous-jacent indexé par i sur l'horizon $t_2 - t_1$ (voir l'équation 3.4). Pour obtenir des observations de ces fluctuations, à différents horizons, nous avons utilisé tous les prix historiques disponibles avant l'année 2003, pour chaque sous-jacent. [11]

4.3.2 Ajustement et évaluation de $\hat{VI}_{a,t,i}$ et $\hat{VI}_{v,t,i}$

Les fonctions $\hat{VI}_{a,t,i}$ et $\hat{VI}_{v,t,i}$ modélisent la volatilité implicite (voir la section 3.3.2). Pour obtenir la VI d'une option, on doit résoudre un problème d'optimisation (voir l'exemple 3.12). La VI de chaque option de notre échantillon a été obtenue avec la librairie *vollib* écrite en

8. Pour être plus précis, on devrait dire qu'il y aura $\eta_1 - 1$ quantiles.

9. Nous avons sélectionné un horizon maximal de 130 jours ($\eta_2 = 130$) car pour la majorité des sous-jacents seules des options venant à échéance dans les trois prochains mois seront allouées.

10. En réalité, comme nous devons ajuster un estimateur $\hat{F}^{-1}_{R_{i;t_1;t_2-t_1}|\cdot}$ pour chaque valeur de ℓ (voir la section 4.1.4) nous avons dû effectuer $13\,000 \times 3 = 39\,000$ régressions quantiles pour chaque sous-jacent actif.

11. Plus précisement, on obtient 130 séries d'observations pour chaque sous-jacent, soit une pour chaque horizon.

Python. Celle-ci se base sur la méthode de Jäckel (2015) pour résoudre le problème d'optimisation.

Pour ajuster les modèles $\hat{VI}_{a,t,i}$ et $\hat{VI}_{v,t,i}$ on doit estimer la valeur des paramètres $\hat{\beta}$. On doit également sélectionner la valeur de d, qui correspond au degré du polynôme (voir les fonctions 3.23 et 3.24). Pour ce faire, nous avons utilisé la procédure suivante. Pour chaque sous-jacent on sélectionne les options ayant un niveau de monnaie entre -1 et 1. [12] Ensuite, pour chaque année, en démarrant avec l'année 2004, on ajuste les modèles $\hat{VI}_{a,t,i}$ et $\hat{VI}_{v,t,i}$ pour les valeurs de d allant de 1 à 10, avec la méthode des moindres carrés, en utilisant les données précédant l'année courante. [13] Puis, on sélectionne la valeur de d qui maximise le R^2 calculé avec l'échantillon d'entraînement. On réfère à la valeur optimale par d_o. Ensuite, on effectue une prédiction de la VI pour chaque option de l'année courante, soit l'échantillon de test. On répète cette procédure à chaque année jusqu'à l'année 2014. Dans les estimateurs $\hat{VI}_{a,t,i}$ et $\hat{VI}_{v,t,i}$, nous avons posé $\epsilon = 0,01$.

Le tableau 4.5 rapporte l'effectif des valeurs du degré optimal (d_o) obtenu lors de la procédure d'ajustement des estimateurs $\hat{VI}_{a,t,i}$ et $\hat{VI}_{v,t,i}$ pour chacun des sous-jacents. Seules des valeurs de 5 et 6 ont été obtenues. On observe qu'à travers les sous-jacents, un polynôme du 6^e degré est le plus fréquemment optimal. Pour cette raison, nous avons fixé le degré à $d = 6$ dans le modèle $\hat{VI}_{a,t,i}$ et $\hat{VI}_{v,t,i}$ lors des simulations de négociation.

Tableau 4.5 Effectif de la valeur du degré optimal (d_o) obtenu lors de la procédure d'ajustement de $\hat{VI}_{a,t,i}$ et $\hat{VI}_{v,t,i}$, pour chacun des sous-jacents actifs.

	SPX	**NDX**	**RUT**	**WMT**	**XOM**	**PFE**	**GE**	**MSFT**	**INTC**	**X**
$d_o = 5$	1	4	1	2	2	0	0	0	0	0
$d_o = 6$	10	7	10	9	9	11	11	11	11	11
Partie A : $\hat{VI}_{a,t,i}$										
$d_o = 5$	0	5	2	1	2	0	0	0	0	0
$d_o = 6$	11	6	9	10	9	11	11	11	11	11
Partie B : $\hat{VI}_{v,t,i}$										

On évalue les modèles en calculant le R^2 des prédictions, pour chaque sous-jacent actif, à partir de l'échantillon de test. Les R^2 sont rapportés à la figure 4.1. On remarque que les

12. Le niveau de monnaie est une traduction de l'anglais *moneyness*. Plus précisément, le niveau de monnaie d'une option avec un prix d'exercice K, sur le sous-jacent indexé par i à l'instant t est donné par $\frac{K-S_{t,i}}{S_{t,i}}$ où $S_{t,i}$ est le prix du sous-jacent indexé par i à l'instant t.

13. On démarre avec l'année 2004 puisque notre échantillon de prix d'options couvre la période 2003-2014. Ainsi, on s'assure d'avoir au moins un an de données pour ajuster le modèle.

R^2 sont relativement élevés. Ce résultat n'est pas surprenant, puisque les R^2 rapportés dans la littérature sont également élevés. On observe qu'il ne semble pas y avoir une différence systématique entre les performances des estimateurs $\hat{VI}_{a,t,i}$ et $\hat{VI}_{v,t,i}$.

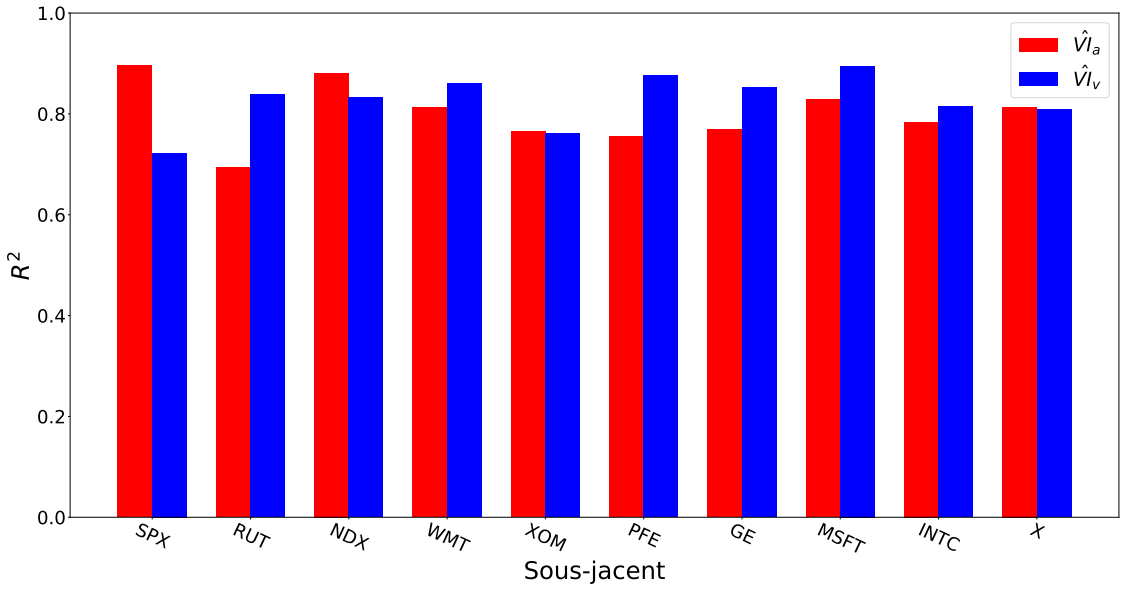


Figure 4.1 R^2 calculés à partir de l'échantillon de test, 2004-2014, des estimateurs $\hat{VI}_{a,t,i}$ et $\hat{VI}_{v,t,i}$ pour chacun des sous-jacents actifs.

Pour raffiner notre analyse, nous avons également effectué une analyse des résidus en combinant les prédictions de chacun des sous-jacents actifs. On rapporte la moyenne et l'écart-type de l'erreur absolue en fonction de l'année, du temps avant l'expiration de l'option et du niveau de monnaie de l'option. [14] Les résultats sont rapportés à la figure 4.2. On fait plusieurs observations. Premièrement, l'écart-type de l'erreur s'élève à l'année 2008. Ceci est cohérent, puisqu'une crise s'est produite dans le marché américain durant cette année. Deuxièmement, l'erreur semble augmenter lorsque l'option est près de l'échéance et lorsque le niveau de monnaie est à un extrême. Troisièmement, l'erreur s'élève pour le modèle $\hat{VI}_{a,t,i}$ lorsque l'expiration s'approche de 130 jours. Les résultats précédents nous indiquent que malgré la bonne performance globale des modèles, il est préférable de ne pas les utiliser avec des valeurs extrêmes de paramètres. Cela sera pris en considération à la section 4.4.

14. Comme le niveau de monnaie est une variable continue (voir la note 12 à la page précédente), nous avons créé 100 catégories, pour les niveaux de monnaie uniquement, et avons rapporté la moyenne du niveau de monnaie dans chaque catégorie.

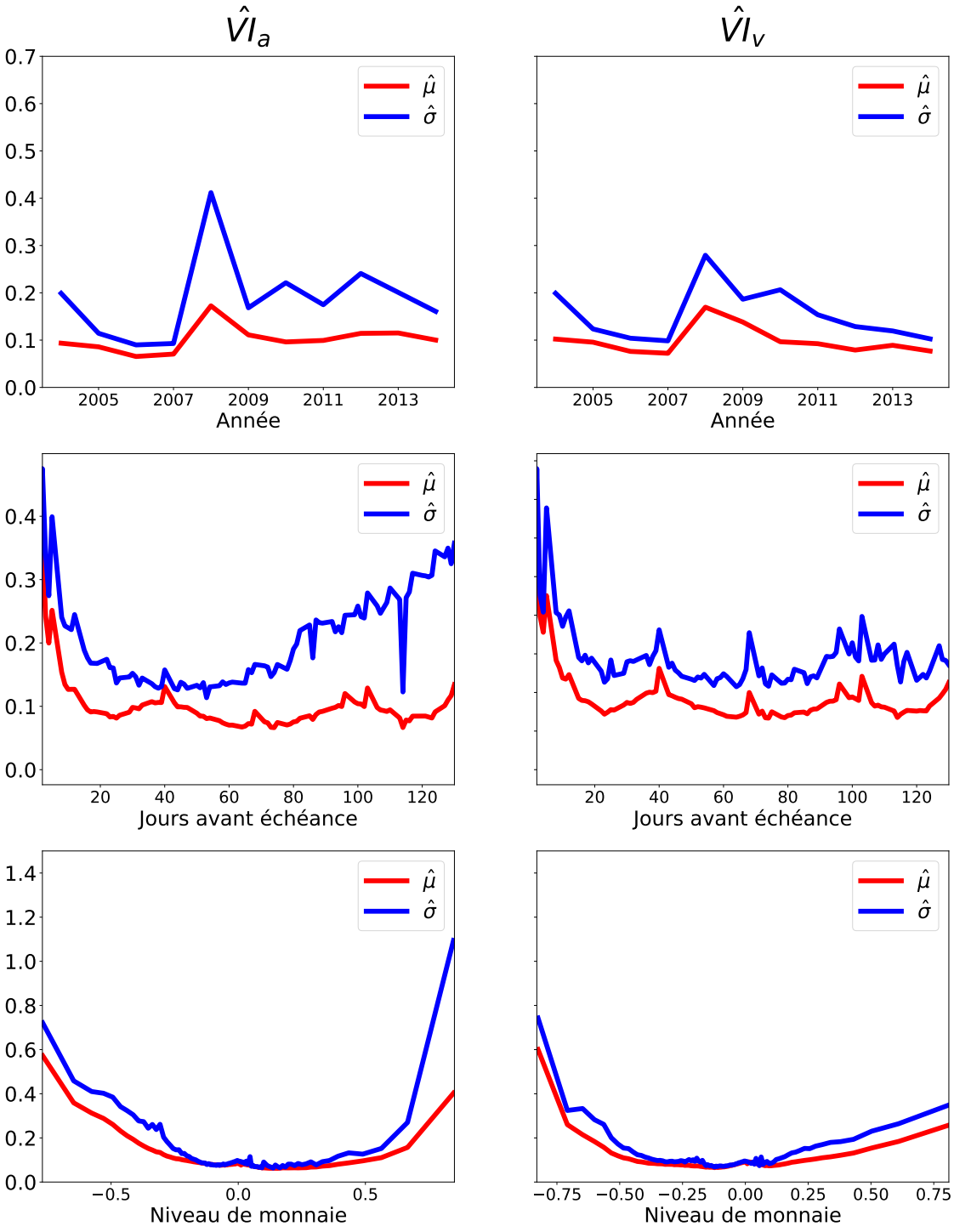


Figure 4.2 Moyenne et écart-type échantillonnal des résidus absolus des estimateurs $\hat{VI}_{a,t,i}$ et $\hat{VI}_{v,t,i}$, pour tous les sous-jacents actifs, en fonction de l'année, du temps avant l'expiration et du niveau de monnaie.

4.3.3 Évaluation de $\hat{m}_a$ et $\hat{m}_v$

On se rappelle que les estimateurs $\hat{m}_a$ et $\hat{m}_v$ sont les fonctions de moyenne de gain de positions sur option d'achat et de vente, respectivement (voir la section 3.3.3). Dans cette sous-section, nous allons expliquer la méthodologie utilisée pour effectuer leur évaluation statistique et en présenter les résultats.

Pour évaluer les estimateurs $\hat{m}_a$ et $\hat{m}_v$ on effectue la procédure suivante. Pour chaque sous-jacent actif, et à chaque jour, on sélectionne l'ensemble des options de notre échantillon. Pour chaque option, on calcule le profit qui aurait été réalisé, à l'échéance, si on l'avait achetée au prix courant. De plus, on évalue l'estimateur $\hat{m}_a$, pour les options d'achat, et l'estimateur $\hat{m}_v$, pour les options de vente, à l'instant de l'expiration de l'option. Ce faisant, on obtient un ensemble de couples dont le premier élément est la valeur de l'estimateur, évalué à l'instant de l'échéance, et le deuxième élément est le profit qui aurait été réalisé. Pour calculer le profit à l'échéance des options sur indice nous avons utilisé les prix de règlement (voir la section 4.2.2) alors que nous avons utilisé le prix de fermeture du sous-jacent, le jour de l'échéance, pour calculer le profit des options sur action. [15]

Après avoir obtenu un ensemble de couples, on ordonne ceux-ci en fonction de la valeur du premier élément ; la valeur de l'estimateur. Ensuite, on place chaque couple de manière à ce qu'il y en ait n par catégorie. Puis, pour chaque catégorie, on calcule la moyenne du premier et du deuxième élément des couples lui appartenant. Cela nous fournit une nouvelle série de couples. Finalement, on applique une régression linéaire à cette nouvelle série et on calcule le R^2. Par exemple, si l'on avait la série de couples $(-3,-4),(-1,-2),(0,-1),(1,2),(3,4),(5,6)$ avec $n=2$, nous devrions créer trois catégories et l'on obtiendrait une nouvelle série formée des couples $(-2,-3)$,$(0,5;0,5)$ et $(4,5)$. Nous avons évalué nos estimateurs avec $n=10$, $n=100$ et $n=1000$, pour chaque sous-jacent actif. Les résultats sont rapportés au tableau 4.6.

On soulève plusieurs points à partir des résultats. Premièrement, on remarque que les R^2 augmentent avec la valeur de n. Ceci est tout à fait logique puisque les moyennes de chaque catégorie sont calculées avec un nombre d'observations égal à n. Deuxièmement, on voit que le R^2 des estimateurs pour les options sur indice (SPX,RUT et NDX) est relativement élevé pour chacun des sous-jacents, alors que les résultats pour les options sur actions sont plutôt mitigés. Troisièmement, on remarque que le R^2 a tendance à augmenter avec la valeur de ℓ pour les options sur indice. Cette tendance n'est pas maintenue pour les autres sous-jacents.

15. Nous faisons implicitement l'hypothèse que les options sur action ne seront jamais exercées avant l'échéance. Ceci est une hypothèse réaliste, puisque le prix d'une option est toujours supérieur au profit qui pourrait être réalisé par l'exercice immédiat de l'option. Ainsi, il est préférable de vendre l'option, sauf dans certaines situations lorsqu'un dividende est attendu (voir Merton (1973)).

Tableau 4.6 R^2 des estimateurs $\hat{m}_a$ et $\hat{m}_v$ pour tous les sous-jacents actifs. Les R^2 ont été obtenus selon la méthodologie décrite à la section 4.3.3.

	$\hat{\mathbf{m}}_a$									$\hat{\mathbf{m}}_v$								
n	**10**			**100**			**1000**			**10**			**100**			**1000**		
ℓ	**60**	**90**	**120**	**60**	**90**	**120**	**60**	**90**	**120**	**60**	**90**	**120**	**60**	**90**	**120**	**60**	**90**	**120**
SPX	0,18	0,2	0,24	0,51	0,56	0,65	0,78	0,82	0,89	0,28	0,28	0,3	0,67	0,68	0,72	0,81	0,83	0,86
RUT	0,24	0,24	0,25	0,63	0,64	0,64	0,82	0,82	0,82	0,32	0,31	0,3	0,76	0,75	0,73	0,93	0,94	0,93
NDX	0,3	0,3	0,31	0,64	0,64	0,65	0,73	0,73	0,75	0,57	0,57	0,56	0,9	0,9	0,91	0,97	0,97	0,97
WMT	0,06	0,04	0,05	0,26	0,22	0,27	0,5	0,43	0,6	0,2	0,2	0,21	0,66	0,67	0,68	0,87	0,9	0,89
XOM	0,02	0,0	0,0	0,07	0,01	0,0	0,15	0,04	0,0	0,35	0,32	0,29	0,68	0,61	0,56	0,88	0,84	0,82
PFE	0,77	0,77	0,76	0,91	0,91	0,9	0,93	0,92	0,92	0,17	0,17	0,18	0,54	0,58	0,59	0,74	0,79	0,84
GE	0,04	0,05	0,06	0,17	0,24	0,27	0,3	0,38	0,4	0,0	0,0	0,0	0,02	0,0	0,0	0,03	0,01	0,01
MSFT	0,14	0,14	0,14	0,5	0,49	0,49	0,82	0,77	0,82	0,24	0,25	0,26	0,7	0,7	0,71	0,9	0,89	0,89
INTC	0,06	0,06	0,05	0,3	0,29	0,27	0,53	0,51	0,49	0,04	0,03	0,03	0,18	0,18	0,16	0,32	0,33	0,32
X	0,0	0,04	0,19	0,0	0,08	0,42	0,01	0,09	0,52	0,39	0,28	0,05	0,53	0,4	0,08	0,58	0,49	0,1

Le R^2 nous informe sur la force du lien linéaire entre le profit réalisé et la valeur de notre estimateur. Ainsi, selon les résultats que nous avons obtenus, on s'attend à ce qu'un système utilisant seulement des indices réussisse mieux qu'un système utilisant la totalité des sous-jacents. Une autre dimension de la performance des estimateurs $\hat{m}_a$ et $\hat{m}_v$ est le biais. Pour l'évaluer, nous avons séparé les options en deux catégories ; celles dont la valeur de l'estimateur est positive et celles dont la valeur est négative. Ensuite, nous avons calculé la moyenne du profit réalisé dans chacune des catégories et ce, pour chaque sous-jacent. Les résultats sont rapportés à la figure 4.3.

Dans la figure 4.3, les graphiques de la première ligne correspondent aux catégories positives et ceux de la deuxième ligne aux catégories négatives. Ainsi, dans un cas parfait, toutes les barres des graphiques de la première ligne devraient se trouver au-dessus des abscisses et les barres des graphiques de la deuxième ligne devraient se trouver en dessous de l'axe des abscisses. Pour l'estimateur $\hat{m}_a$ (colonne de gauche) on voit que cette propriété est respectée dans presque tous les cas. Seul le sous-jacent X ne respecte pas cette propriété. Cela n'est pas surprenant vu la performance médiocre rapportée pour ce sous-jacent au tableau 4.6. On remarque également que pour les sous-jacents SPX et RUT le gain moyen est positif pour $\ell = 60$ lorsque l'on s'attend à une valeur négative. Or, la valeur devient négative pour $\ell = 90$ et $\ell = 120$. Ceci est cohérent avec les résultats du tableau 4.6. Pour l'estimateur $\hat{m}_v$ (colonne de droite) on voit qu'il y a un biais à la hausse. C'est-à-dire que l'estimateur tend à surestimer l'espérance de profit. En effet, les moyennes sont presque toujours négatives même dans les cas où on s'attend à ce qu'elles soient positives. Par contre, on voit que la moyenne des catégories positives (ligne du haut) est supérieure à celle des catégories négatives (ligne du bas), ce qui est cohérent.

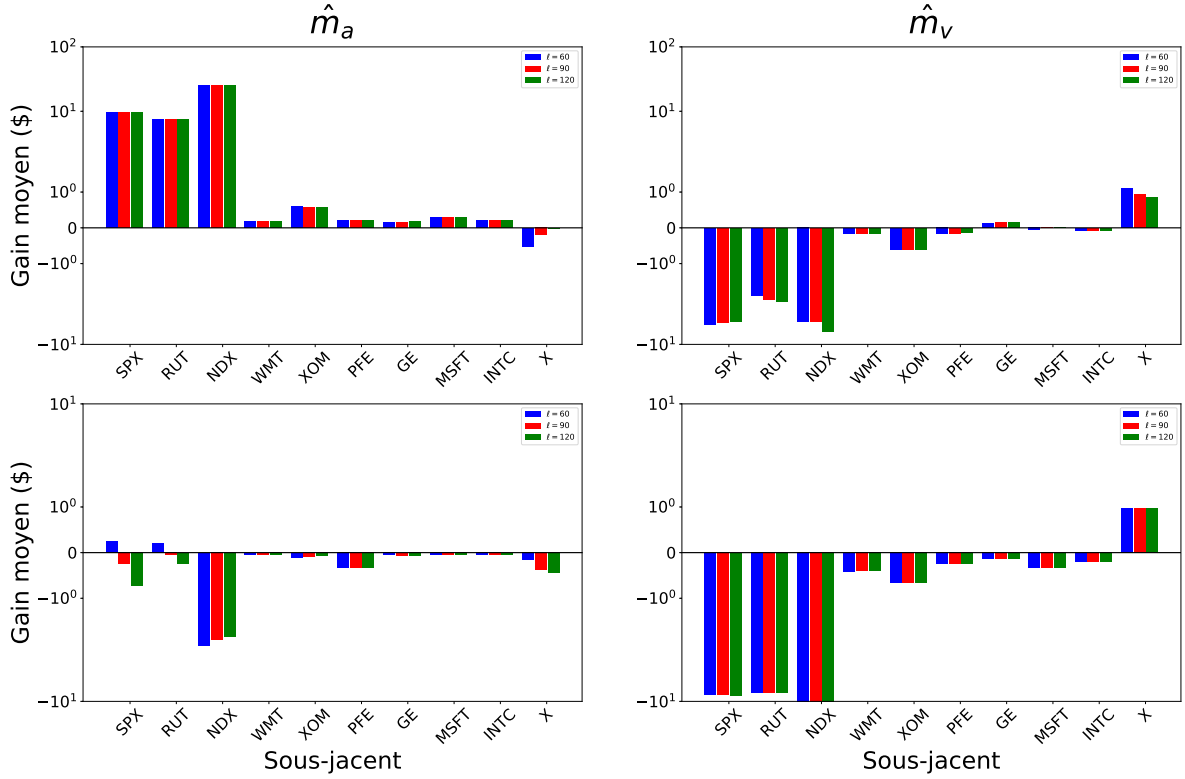


Figure 4.3 Moyenne échantillonnale du gain des estimateurs $\hat{m}_a$ et $\hat{m}_v$ à l'échéance, catégorisés par observations positives et négatives. Les graphiques de la première ligne de la figure correspondent à la catégorie positive et les graphiques de la seconde ligne correspondent à la catégorie négative.

En somme, les estimateurs $\hat{m}_a$ et $\hat{m}_v$ ont une bonne performance statistique pour les options sur indice et une performance plus mitigée pour les options actions. De plus, les estimateurs tendent à être biaisés pour les options de vente. Cela devrait transparaître dans nos résultats de simulation. Nous y reviendrons dans la prochaine section.

4.4 Simulations de négociation

Nous arrivons maintenant à la partie la plus importante de ce chapitre. On y présente les résultats de simulation de notre système. Nous débuterons en faisant un sommaire du logiciel utilisé pour effectuer les simulations. Ensuite, nous discuterons des différents paramètres qui ont été utilisés pour effectuer les simulations. Puis, nous parlerons des simulations de la matrice $\mathbf{L}_t$ (voir la page 71) ainsi que des spécificités de l'algorithme MADS. Par la suite, nous énumérerons les stratégies comparatives utilisées et parlerons des métriques d'évaluation. Finalement, nous présenterons les résultats et en ferons l'analyse.

4.4.1 Logiciel de simulation

Le système de négociation présenté à la figure 3.1 a été mis en place avec le langage Python. Celui-ci fait l'usage de données historiques et n'est donc pas relié à la bourse en temps réel. Notre mise en œuvre nous a permis d'obtenir des simulations réalistes. C'est-à-dire qu'elle nous permet d'inclure les coûts de transaction et de respecter les marges lors des simulations de l'envoi des ordres. Le système nous permet également d'obtenir l'historique de la valeur nette, de la marge, du pouvoir d'achat et de chaque transaction effectuée. De plus, il nous permet de simuler la liquidation des positions.

4.4.2 Configurations des simulations

Plusieurs paramètres doivent être spécifiés lors d'une simulation avec notre système. Notamment, le capital de départ, la période de simulation, les bornes des contraintes du problème d'optimisation 3.59, la fréquence à laquelle les nouvelles positions sont mises en place et le prix des commissions. De plus, on peut choisir d'effectuer la liquidation des positions avec notre algorithme (voir la section 3.5) ou de les conserver systématiquement jusqu'à l'expiration.

Nous avons effectué un ensemble de simulations qui diffèrent par la valeur des bornes des contraintes du problème 3.59, par les sous-jacents utilisés et par l'absence ou la présence de liquidations. Les simulations ont été séparées en deux grandes catégories ; celles qui effectuent des liquidations et celles qui ne le font pas.

Simulations sans liquidations

Les simulations sans liquidations ont été séparées en deux parties ; celles dont les indices sont les seuls sous-jacents utilisés par le système et celles où les actions et les indices sont utilisés. [16] Dans les deux cas, le système opère à fréquence hebdomadaire pendant la période de 2003 à 2014. [17] Un montant de départ de 1 M \$ et des coûts de transaction de 1,25\$/option sont utilisés. Également, on pose $\lambda_1 = 0,15$ et $\lambda_2 = 0,25$ dans le problème d'optimisation 3.59. [18] De plus, on alloue seulement les options hors de la monnaie, dont le temps restant avant l'échéance se situe entre 5 et 130 jours et ayant un niveau de monnaie entre $-0,5$ et $0,5$. [19]

16. Nous avons effectué cette séparation pour observer l'effet de la qualité des estimateurs $\hat{m}_a$ et $\hat{m}_v$ sur les résultats des simulations (voir les remarques finales de la section 4.3.3).

17. Le problème d'optimisation 3.59 est résolu à chaque vendredi. Lorsqu'un vendredi est un jour férié, il est ignoré. De plus, comme il y a eu un *split* (voir la section 4.2.1) sur MSFT en février 2003, les simulations incluant les options sur action démarrent en mars 2003.

18. Cela signifie que la marge requise pour les nouvelles positions initiées ne doit pas excéder 25 % du pouvoir d'achat et ne doit pas être inférieur à 15 % du pouvoir d'achat à l'instant de l'ouverture.

19. Voir la note 12 de la page 81 pour la définition du niveau de monnaie.

Tableau 4.7 Valeurs des contraintes de risque utilisées au problème d'optimisation 3.59 dans les simulations sans liquidations.

Métrique de risque	**Niveau 1**	**Niveau 2**	**Niveau 3**
Probabilité de profit	70 %	80 %	90 %
Probabilité d'un rendement de -10 %	1 %	5 %	10 %
Écart-type du rendement	$2,5$ %	5 %	10 %
Coefficient d'aplatissement du rendement	5	10	15

Nous avons effectué un ensemble de simulations, avec divers paramètres de risque (voir le tableau 3.3), pour évaluer la performance de notre système dans différentes situations. Pour chacune des métriques de risque, on fixe trois niveaux. Ces niveaux sont donnés au tableau 4.7. On effectue trois simulations pour chacun des ces niveaux, soit une avec chacune des valeurs de ℓ (voir la section 4.2.5). Cela est effectué pour la série de simulations utilisant uniquement les indices et celle utilisant les actions et les indices. Ainsi, nous avons effectué un total de $2 \times 3 \times 12 = 72$ simulations sans liquidations. Pour une simulation donnée, les bornes du problème d'optimisation 3.59 qui ne sont pas associées à la métrique de risque courante sont fixées à l'infini. [20]

Simulations avec liquidations

Les simulations avec liquidations sont similaires à celles sans liquidations à quelques différences près. Premièrement, on effectue seulement les simulations en utilisant les indices comme sous-jacents en démarrant à l'année 2004. Deuxièmement, à chaque jour ouvrable on effectue l'algorithme de la section 3.5 pour déterminer quels éléments du portefeuille devraient être liquidés. Dans le cas où des positions sont liquidées, on réalloue le capital qui a été libéré en trouvant la solution du problème 3.59. Lorsque l'algorithme de liquidation est utilisé, il faut spécifier la valeur du paramètre γ (voir l'équation 3.61). Nous avons effectué une simulation pour les valeurs de $\gamma \in \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$. Finalement, nous avons seulement utilisé une probabilité de profit de 70 % et 90 % en fixant les autres bornes à l'infini. Tout comme pour les simulations sans liquidations, nous avons effectué une simulation pour chaque valeur de ℓ (voir la section 4.2.5). Ainsi, nous avons effectué $3 \times 3 \times 2 = 18$ simulations avec liquidations.

20. En fait, cela est vrai seulement pour les simulations associées à la probabilité de profit. Pour les autres simulations, la probabilité de profit est toujours fixée à un minimum de 70 % et les autres contraintes sont fixées à l'infini.

4.4.3 Simulations de la matrice $\mathbf{L}_t$

Les fonctions de contraintes du problème d'optimisation 3.59 nécessitent d'obtenir une observation de la matrice $\mathbf{L}_t$ (voir la définition 3.18). Pour y arriver, nous avons défini des estimateurs $\hat{\boldsymbol{\mu}}_t$ et $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_t$ (voir la page 69) et une méthode de simulation par ordinateur.

Estimateurs $\hat{\boldsymbol{\mu}}_t$ et $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_t$

Nous avons posé $\hat{\boldsymbol{\mu}}_t = \mathbf{0}$ où $\mathbf{0}$ est le vecteur nul de taille égale au vecteur $\boldsymbol{\mu}_t$. Nous avons repris le même estimateur que Izraylevich et Tsudikman (2010).

On utilise les données antérieures des prix des sous-jacents pour construire l'estimateur $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_t$. Pour les éléments de la matrice $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_t$ qui estiment la covariance des fluctuations du prix d'un seul sous-jacent à deux horizons différents on doit obtenir une expression approximative de σ_i^2 où $1 \leqslant i \leqslant |J|$ (voir l'hypothèse 3.2 et l'équation 3.53). Nous avons utilisé

$$\hat{\sigma_i}^2(w) = \frac{1}{w-1} \sum_{k=1}^{w} \left[\ln\left(\frac{S_{t-k+1,i}}{S_{t-k,i}}\right) - \frac{1}{w} \sum_{l=1}^{w} \ln\left(\frac{S_{t-k+1,i}}{S_{t-k,i}}\right) \right]^2 \tag{4.2}$$

où w est la taille d'une fenêtre d'observations en jours et $S_{t,i}$ est le prix du sous-jacent indexé par i à l'instant t (voir la définition 3.3). Pour les éléments de la matrice $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_t$ qui estiment la covariance des fluctuations de deux sous-jacents différents, on doit estimer la quantité $\sum_{m=1}^{|J|} \sigma_{i,m}\sigma_{j,m}$ (voir l'équation 3.54). On peut facilement montrer que celle-ci est égale au coefficient de corrélation entre $\ln(\frac{S_{t+\Delta,i}}{S_{t,i}})$ et $\ln(\frac{S_{t+\Delta,j}}{S_{t,j}})$ où $\Delta > 0$. De ce fait, on utilise l'estimateur empirique de la corrélation $\hat{\rho}_{i,j}(w)$

$$\hat{\rho}_{i,j}(w) = \frac{\left(\ln\left(\frac{S_{t-k+1,i}}{S_{t-k,i}}\right) - \frac{1}{w}\sum_{l=1}^{w} \ln\left(\frac{S_{t-k+1,i}}{S_{t-k,i}}\right)\right)\left(\ln\left(\frac{S_{t-k+1,j}}{S_{t-k,j}}\right) - \frac{1}{w}\sum_{l=1}^{w} \ln\left(\frac{S_{t-k+1,j}}{S_{t-k,j}}\right)\right)}{\sqrt{\hat{\sigma_i}^2(w)\hat{\sigma_j}^2(w)}} \tag{4.3}$$

où w est la taille d'une fenêtre d'observations en jours. Pour sélectionner la valeur de w des estimateurs 4.2 et 4.3 nous avons évalué la performance des estimateurs pour toutes les valeurs de $w \in \{1, \ldots, 500\}$. La valeur de w qui minimise l'erreur quadratique moyenne est retenue.[21] L'erreur est calculée avec la statistique réalisée subséquemment sur les deux prochains mois. On utilise les données précédant l'année 2003. Les résultats sont rapportés au tableau 4.8.

21. Lorsque la fonction d'erreur est strictement décroissante, on sélectionne le w pour lequel la réduction de l'erreur à la prochaine valeur de w est inférieure à $\frac{1}{2}$ %.

Tableau 4.8 Résultats de la procédure de sélection de la taille des fenêtres des estimateurs 4.2 et 4.3. Les éléments du tableau surlignés en gris correspondent à l'estimateur 4.2 et les autres à l'estimateur 4.3. De plus, les nombres entre parenthèses sont égaux à l'erreur quadratique moyenne.

	SPX	**NDX**	**RUT**	**WMT**	**XOM**	**PFE**	**GE**	**MSFT**	**INTC**	**X**
SPX	27 (1,5e-5)	46 (1,2e-2)	91 (1,1e-2)	69 (2,8e-2)	59 (2,8e-2)	57 (3,9e-2)	51 (2,2e-2)	85 (2,6e-2)	60 (3,4e-2)	73 (5,2e-2)
NDX	-	33 (4,4e-5)	63 (9,2e-3)	46 (3,8e-2)	62 (5,1e-2)	52 (4,9e-2)	59 (4,0e-2)	44 (1,7e-2)	44 (2,8e-2)	44 (6,3e-2)
RUT	-	-	31 (1,6e-5)	81 (2,9e-2)	52 (5,0e-2)	51 (4,6e-2)	90 (3,6e-2)	52 (2,8e-2)	68 (4,2e-2)	73 (4,7e-2)
WMT	-	-	-	33 (3,7e-5)	77 (4,2e-2)	72 (4,5e-2)	66 (3,7e-2)	45 (4,1e-2)	80 (4,6e-2)	56 (6,0e-2)
XOM	-	-	-	-	35 (2,9e-5)	49 (4.6e-2)	52 (4.3e-2)	92 (3.5e-2)	64 (5,4e-2)	66 (4,2e-2)
PFE	-	-	-	-	-	41 (3,2e-5)	66 (4,0e-2)	51 (5,0e-2)	65 (5,2e-2)	59 (5,9e-2)
GE	-	-	-	-	-	-	39 (2,3e-5)	89 (4,1e-2)	67 (4,2e-2)	65 (5,3e-2)
MSFT	-	-	-	-	-	-	-	41 (5,4e-5)	86 (3,5e-2)	96 (4,7e-2)
INTC	-	-	-	-	-	-	-	-	48 (9,0e-5)	58 (4,9e-2)
X	-	-	-	-	-	-	-	-	-	93 (2,6e-5)

Simulation par ordinateur

Pour simuler les éléments de la matrice $\mathbf{L}_t$, nous avons utilisé la librarie Numpy écrite en Python. Plus précisément, nous avons utilisé la fonction *multivariate normal*. Celle-ci permet d'obtenir des observations indépendantes d'un vecteur distribué selon une loi multinormale avec un vecteur de moyenne égal à $\hat{\boldsymbol{\mu}}_t$ et une matrice de covariances égale à $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_t$. On simule 10 000 observations.

4.4.4 Spécificités de l'algorithme *MADS*

Tel que nous en avons discuté à la section 3.4.6, on utilise l'agorithme *MADS* pour résoudre le problème d'optimisation 3.59. La mise en place de la librairie *Nonlinear Optimization by Mesh Adaptive Direct Search* (NOMAD) (Le Digabel, 2011) est utilisée dans notre système. Nous avons dû y spécifier un algorithme de sélection du point initial, un critère d'arrêt et une taille initiale du *Poll*. La présente sous-section détaille ces choix et les raisons les motivant.

Point initial

La sélection du point initial a été effectuée de la manière suivante. Premièrement, on sélectionne le prix d'exercice le plus près du prix du sous-jacent, pour l'option d'achat et l'option de vente. Deuxièmement, on choisit la date d'expiration la plus près de l'instant présent. Finalement, on sélectionne une quantité d'une option.

Il est important de noter que l'algorithme décrit précédemment ne garantit pas que le point intial respecte les contraintes. Cependant, comme nous en avons parlé à la section 3.4.6, on utilise l'algorithme à barrière progressive pour gérer les contraintes dans NOMAD. Cela nous permet d'utiliser un point initial ne respectant pas les contraintes.

Critère d'arrêt

Le critère d'arrêt de l'algorithme d'optimisation est basé sur le temps. Pour les simulations dont les sous-jacents sont des indices, l'algorithme s'arrête après 60 secondes. Dans le cas des simulations associées aux indices et aux actions, l'algorithme s'arrête après 300 secondes. [22] Comme le problème d'optimisation est résolu à chaque semaine, les simulations prendront au moins $60s \times 52 \times 12 = 37440s$ et $300s \times 52 \times 12 = 187200s$, respectivement. [23] Il est également important de noter que lorsqu'aucune solution admissible n'est trouvée, après l'arrêt de l'algorithme, aucune nouvelle position n'est initiée.

Taille intiale du *Poll*

Pour sélectionner la taille initiale du *Poll* nous avons effectué un ensemble de simulations de négociation avec différentes tailles initiales et avons retenu des métriques d'évaluation. Plus précisément, nous avons utilisé deux métriques. La première est la fréquence à laquelle une taille génère la meilleure solution. La deuxième est la fréquence à laquelle une taille permet d'obtenir une solution admissible. Nous avons utilisé des tailles de *Poll* de 10 %, 25 % et 50 %. [24]

Les simulations de négociation sont essentiellement identiques aux simulations sans liquidations décrites à la section 4.4.2 à la différence qu'elles sont effectuées sur la période de 2003 à 2004. On effectue des simulations avec une probabilité de profit minimum de 70 % et 90 %.

22. On doit allouer plus de temps au solveur lorsque le nombre de dimensions augmente.

23. Ici, on parle des simulations sans liquidations. Pour les simulations avec liquidations, le problème d'optimisation peut être potentiellement résolu à chaque jour. Donc, les temps minimaux seraient de $60s \times 260 \times 11 = 171600s$ et $300s \times 260 \times 11 = 858000s$, respectivement. Il y a 260 jours ouvrables dans une année d'où le facteur 260.

24. Les tailles sont exprimées comme une proportion de l'étendue de l'intervalle admissible pour chaque dimension.

De plus, on fait des simulations en incluant et en omettant les options sur action. Le problème d'optimisation 3.59 est toujours résolu trois fois, à chaque période, soit une fois pour chaque taille de *Poll*. À chaque période, on retient la taille de *Poll* produisant la meilleure solution, soit une victoire. La fréquence de victoire de chaque taille de *Poll* est calculée à la fin des simulations. On effectue également des simulations où le problème n'est résolu qu'une seule fois, à chaque période, avec une taille de *Poll* fixe. On retient la fréquence à laquelle chaque taille de *Poll* intiale produit une solution admissible. Les résultats de toutes ces simulations sont rapportés à la figure 4.4.

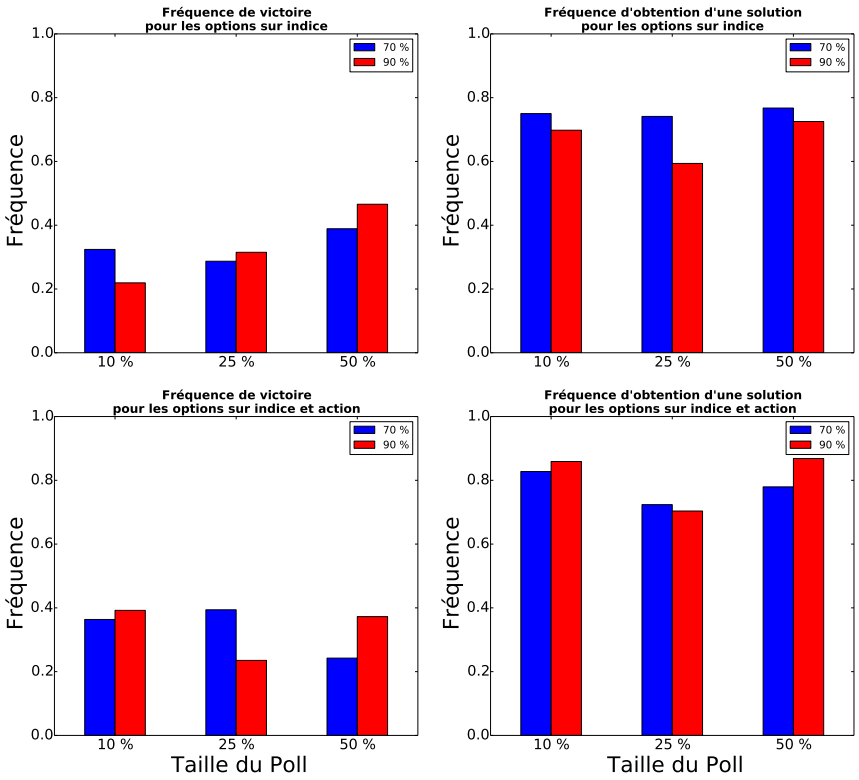


Figure 4.4 Résultats des simulations de négociation pour la sélection de taille du *Poll*.

En analysant les résultats, on se rend compte qu'une taille de 50 % génère la plus grande fréquence de victoires dans la moitié des cas, comparativement à un quart des cas pour les deux autres tailles. De plus, la taille de 50 % produit une solution admissible à la plus grande fréquence dans 75 % des cas. Ce faisant, nous avons utilisé une taille initiale de *Poll* de 50 % dans toutes nos simulations de négociation.

4.4.5 Stratégies comparatives

Nous avons utilisé trois stratégies comparatives dans l'analyse de nos résultats de négociation. Le tableau 4.9 énumère les stratégies utilisées et leurs caractéristiques principales.

Tableau 4.9 Stratégies comparatives utilisées pour évaluer la performance du système de négociation. La proportion correspond au pourcentage maximal qu'une stratégie peut allouer à des positions.

Symbole	Capital initial	Proportion	Description
SPX	$1M$ \$	100 %	Achat de l'indice S&P 500.
Naïve	$1M$ \$	75 %	VPC d'options SPX à fréquence fixe.
BSM	$1M$ \$	75 %	VOD et AOD, à la monnaie, d'options SPX selon une valuation à l'aide du modèle BSM.

La première stratégie comparative est l'indice S&P 500. C'est-à-dire que nous avons simulé un investissement dans cet indice. Cette stratégie est la plus communément utilisée pour évaluer la performance de simulations de négociation.

La deuxième stratégie comparative que nous avons utilisée est une stratégie naïve (voir la section 2.2). En utilisant les options SPX nous avons effectué une VPC à chaque troisième vendredi du mois. Les options sont conservées jusqu'à l'échéance. On choisit toujours la date d'expiration la plus près de l'instant présent. Pour sélectionner le prix d'exercice des options on utilise le Delta (voir le tableau 1.9). On effectue trois séries de simulations associées à des Delta de 5, 10 et 15. Par exemple, pour le Delta de 5, on identifie l'option d'achat dont le Delta est le plus près de 5 et l'option de vente dont le Delta est le plus près de -5. Nous avons retenu la stratégie apportant le meilleur rendement soit celle avec un Delta de 15.

La troisième stratégie comparative est tirée des méthodes de négociation du 2^e moment (voir la section 2.3.2). En utilisant les options SPX on effectue la VOD ou l'AOD à la monnaie, à chaque troisième vendredi du mois. Les options venant à échance dans un mois sont utilisées. La position est conservée jusqu'à l'expiration. Pour déterminer si on effectue la vente ou l'achat, on évalue le prix juste de la position combinée en utilisant le modèle de BSM. Pour ce faire on doit estimer la volatilité future. En utilisant les données du prix de l'indice S&P 500 précédant l'année 2003, nous avons ajusté un modèle linéaire dont la variable indépendante est la volatilité réalisée sur un mois et dont la variable dépendante est la volatilité réalisée dans les 30 derniers jours.

4.4.6 Métriques d'évaluation

Avant de discuter des métriques d'évaluation, nous devons souligner comment celles-ci seront rapportées. Tel que nous en avons parlé à la section 4.4.2, trois simulations sont effectuées pour chaque niveau de risque, soit une pour chaque valeur de ℓ (voir la section 4.2.5). Ainsi, nous avons rapporté les métriques par intervalles. Pour une configuration de risque donnée, et pour une métrique donnée, on crée un intervalle en sélectionnant la plus petite et la plus grande valeur de la métrique obtenue parmi les trois simulations. Ces valeurs forment la borne inférieure et supérieure de l'intervalle, respectivement.

Les métriques d'évaluation utilisée dans l'analyse sont énumérées et décrites au tableau 4.10.

Tableau 4.10 Métriques utilisées pour évaluer les performances des simulations de négociation et les comparer avec celles des stratégies comparatives. Dans les définitions, VN_t est la valeur nette du portefeuille à l'instant t (voir la définition 3.13), T est le dernier instant de la simulation, $\mathrm{F}_t(\Delta) = \frac{\mathrm{VN}_{t+\Delta} - \mathrm{VN}_t}{\mathrm{VN}_t}$ où $\Delta > 0$ et I est la fonction indicatrice.

Symbole	Définition	Description
RCA	$\sqrt[n]{\frac{\mathrm{VN}_T}{\mathrm{VN}_0}} - 1$	Le rendement composé annuellement. Dans la définition, n est le nombre d'années dans l'échantillon, VN_t la valeur nette du portefeuille à l'instant t (voir la définition 3.13) et T est le dernier instant de la simulation.
$\hat{\mu}$	$\frac{1}{\lfloor T/\Delta \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor T/\Delta \rfloor} \mathrm{F}_{k\Delta}(\Delta)$	Statistiques des fluctuations de la valeur nette du portefeuille. Les fluctuations mensuelles et annuelles ont été considérées soit $\Delta = 30$ et $\Delta = 365$. Les statistiques sont égales à la moyenne échantillonnale ($\hat{\mu}$), l'écart-type échantillonnal ($\hat{\sigma}$), le coefficient d'aplatissement échantillonnal ($\hat{\kappa}$) et la proportion de fluctuations positives ($\hat{p}$). Dans les définitions, $\mathrm{F}_t(\Delta) = \frac{\mathrm{VN}_{t+\Delta} - \mathrm{VN}_t}{\mathrm{VN}_t}$ et I est la fonction indicatrice.
$\hat{\sigma}$	$\sqrt{\frac{1}{\lfloor T/\Delta \rfloor - 1} \sum_{k=0}^{\lfloor T/\Delta \rfloor} \left[\mathrm{F}_{k\Delta}(\Delta) - \hat{\mu} \right]^2}$	
$\hat{\kappa}$	$\frac{\frac{1}{\lfloor T/\Delta \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor T/\Delta \rfloor} [\mathrm{F}_{k\Delta}(\Delta) - \hat{\mu}]^4}{\hat{\sigma}^4}$	
$\hat{p}$	$\frac{1}{\lfloor T/\Delta \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor T/\Delta \rfloor} I(\mathrm{F}_{k\Delta}(\Delta) > 0)$	
Δt %	Voir l'exemple 4.1	Ces deux statistiques sont égales à la durée maximale (Δt) et à la magnitude maximale en pourcentage (%) des scénarios défavorables enregistrés dans la simulation. Ces scénarios sont appelés des *drawdowns*. On se réfère à l'exemple 4.1 pour une explication plus précise.
Test d'hypothèse	$H_0 : P[V = 1] = \frac{1}{2}$ $H_1 : P[V = 1] > \frac{1}{2}$	Ce test compare la performance annuelle de la simulation avec la performance d'une stratégie comparative. V est une variable aléatoire distribuée selon une loi de Bernoulli. Une observation de cette variable est faite à chaque année. Celle-ci est égale à 1 si le rendement annuel de la simulation est supérieur à celui de la stratégie comparative, durant cette année, et 0 sinon. On utilise un test sur la proportion d'un échantillon, avec un seuil de 5 %, pour tester l'hypothèse.

Exemple 4.1 - On suppose que la valeur nette d'un portefeuille est de 100 $ à t=0, 150 $ à t=1, 120 $ à t=2, 90 $ à t=3 et 160 $ à t=4. Le temps est mesuré en jours. De l'instant t=1 à t=3, le système a subi ce que l'on nomme un *drawdown*. C'est-à-dire qu'une réduction de la valeur a été enregistrée. Le *drawdown* se termine lorsque la valeur revient au même point qu'au début de la baisse. Dans le *drawdown* précédent, la durée a été de trois jours et la magnitude de $(90/150 - 1) \times 100\ \% = -40\ \%$. Pour une simulation donnée, on évalue ces deux statistiques pour chaque *drawdown* observé dans l'ensemble de la simulation et on conserve la durée maximale et la magnitude minimale.

Les métriques d'évaluation reliées à la moyenne du rendement ont été choisies pour des raisons évidentes. Cependant, il est important de souligner pourquoi les autres ont été choisies. Premièrement, les métriques $\hat{\sigma}$, $\hat{\kappa}$, $\hat{p}$, Δt et % (voir le tableau 4.10) ont été choisies car elles correspondent chacune à une métrique de risque du problème d'optimisation 3.59 (voir le tableau 3.3). En effet, $\hat{\sigma}$ correspond à l'écart-type du rendement, $\hat{\kappa}$ au coefficient d'aplatissement du rendement, $\hat{p}$ à la probabilité de profit et $\Delta t/\%$ à la probabilité d'un rendement de $-d$. On s'attend à un lien linéaire entre les statistiques et la valeur de la borne de la contrainte correspondante dans le problème 3.59. Par exemple, on s'attend à ce que les simulations avec une probabilité de profit de 90 % (voir le tableau 4.7) aient une statistique $\hat{p}$ près de $0,9$ et celles avec une probabilité de profit de 70 % aient une statistique $\hat{p}$ près de $0,7$.

4.4.7 Résultats des simulations et discussion

Simulations sans liquidations

Les métriques d'évaluation des simulations sans liquidations, avec les indices, sont données au tableau 4.11 et l'évolution des valeurs nettes à la figure 4.6. On observe que le RCA de nos simulations augmente avec le niveau de risque alloué, pour une métrique de risque donnée. Ceci est tout à fait cohérent : plus on désire prendre un risque élevé, plus on est récompensé. De plus, on voit qu'il y a un lien positif entre le niveau de risque alloué et la statistique qui lui correspond, surtout pour les statistiques associées à $F(30)$. Plus précisément, la probabilité de profit correspond à $\hat{p}$, l'écart-type à $\hat{\sigma}$, le coefficient d'aplatissement à $\hat{\kappa}$ et la probabilité d'un rendement inférieur à -10 % au *drawdown*.

En comparant la borne inférieure du RCA de nos simulations avec le RCA des stratégies comparatives on se rend compte que, pour une métrique de risque donnée, la simulation allouant le risque maximal réussit mieux que les trois stratégies comparatives. Par contre, l'hypothèse nulle n'est pas rejetée dans tous ces cas. La petite taille de l'échantillon (12 observations de fluctuations annuelles) peut expliquer cela. De plus, on remarque que l'hypothèse est plus

souvent rejetée pour la stratégie BSM que pour la naïve. Cela semble contre-intuitif, puisque la naïve possède un RCA inférieur à celui de la BSM. Or, en visualisant la valeur nette des deux systèmes à la figure 4.5 ont voit que BSM a eu une année spectaluaire en 2008 et le reste des années sont plus médiocres, alors que la naïve est plus constante. D'ailleurs, on peut voir que la proportion de mois profitables est seulement de 53 % pour la BSM, comparativement à 79 % et 65 % pour les deux autres stratégies comparatives.

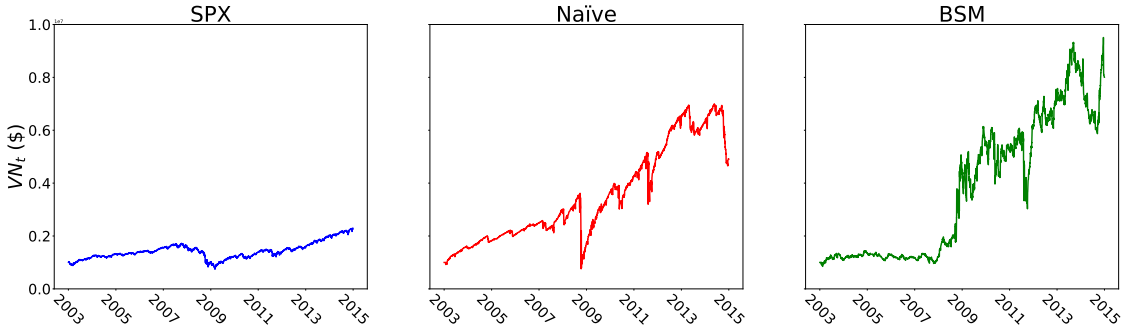


Figure 4.5 Évolution de la valeur nette du système pour les stratégies comparatives.

On constate que notre système apporte une amélioration de performance du RCA par rapport aux stratégies comparatives, dans certains cas. Cependant, notre objectif de recherche mentionne l'ajustement au risque. Il faut donc vérifier que le risque enregistré dans nos simulations supérieures est semblables, ou inférieur, à celui des stratégies comparatives. [25] L'analyse révèle que les métriques de risque de nos stratégies supérieures sont semblables ou meilleures que celles des stratégies usuelles. Premièrement, la proportion d'années profitables se trouve au-dessus de 83 % pour toutes nos stratégies à l'exception d'une. La meilleure stratégie comparative possède précisement cette proportion d'années profitables. Deuxièmement, l'écart-type des fluctuations mensuelles de nos simulations supérieures se situe dans l'intervalle $[0,05; 0,09]$ et celui des fluctuations annuelles dans l'intervalle $[0,23; 0,47]$. Pour les stratégies comparatives, ces intervalles sont égaux à $[0,04; 0,11]$ et $[0,17; 0,72]$, respectivement. Troisièmement, les coefficients d'aplatissement de nos stratégies supérieures, pour les fluctuations mensuelles et annuelles, se trouvent dans les intervalles $[-0,96; 1,16]$ et $[3,1; 19,1]$, comparativement à $[1,35; 6,54]$ et $[2,39; 23,81]$ pour les stratégies usuelles. Finalement, le temps maximal des *drawdowns* de nos stratégies supérieures se trouve dans l'intervalle $[302, 929]$ et les pertes maximales, en pourcentage, dans l'intervalle $[-86, -39]$. Cela se compare aux intervalles $[452, 1997]$ et $[-80, -51]$ pour les stratégies usuelles.

25. On nomme les simulations comme supérieures lorsque la borne inférieure de leur RCA est supérieure au RCA des trois stratégies comparatives.

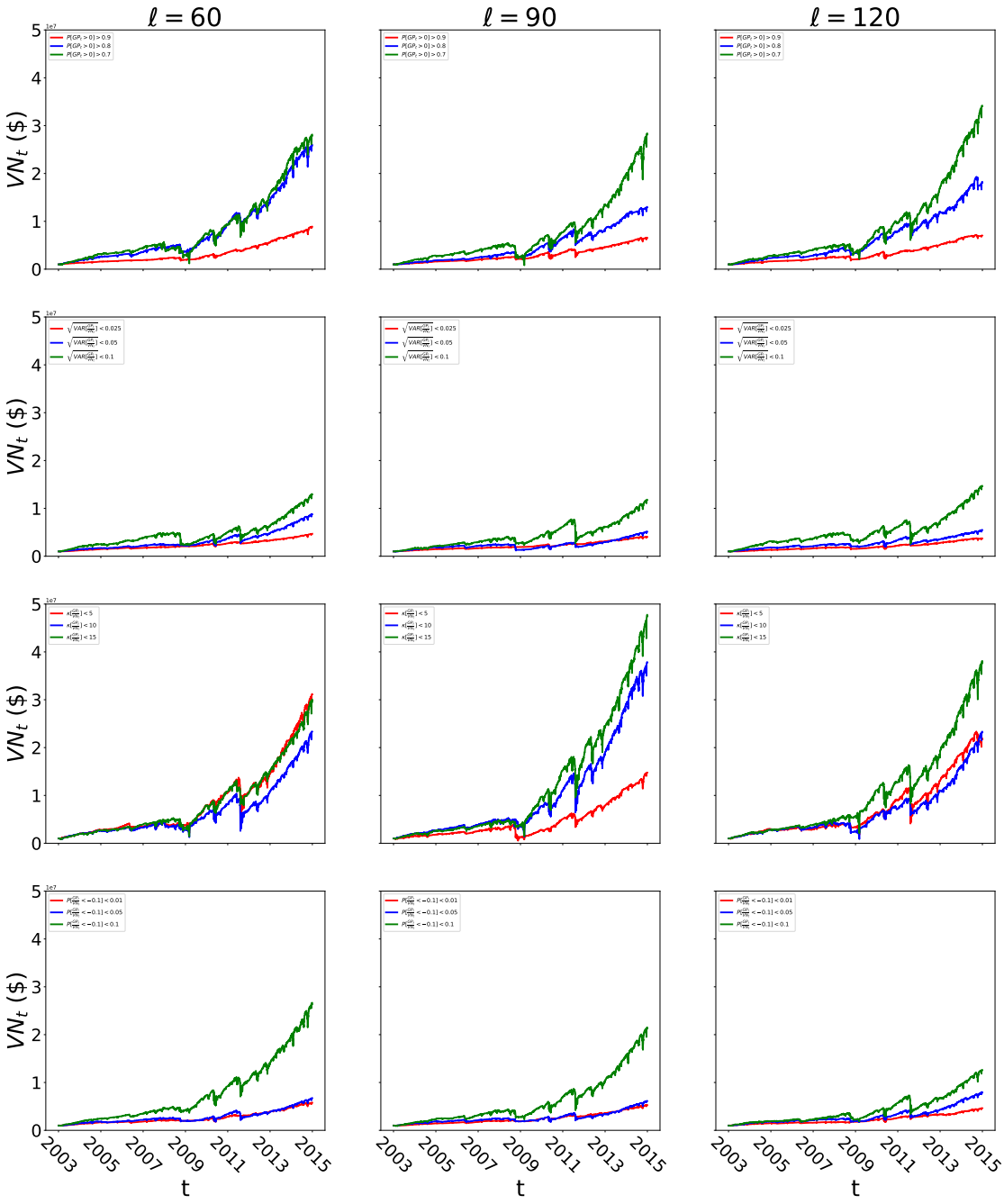


Figure 4.6 Évolution de la valeur nette du système pour les simulations sans liquidations incluant seulement les indices comme sous-jacents. Chaque ligne correspond à une métrique de risque et chaque colonne à une valeur de ℓ (voir la section 4.2.5).

Tableau 4.11 Métriques d'évaluation des simulations de négociation, sans liquidations, incluant seulement les indices comme sous-jacents. La partie du haut correspond aux simulations de négociation et la partie du bas aux stratégies comparatives. Les symboles $*$, † et ‡ indiquent un rejet de l'hypothèse nulle à un seuil de 5 %, pour les stratégies comparatives SPX, Naïve et BSM, respectivement. Le nombre de symboles indique pour combien de simulations l'hypothèse est rejetée, pour un maximum de trois. De plus, l'opérateur K correspond au coefficient d'aplatissement.

	RCA	**F(365)**				**F(30)**				***Drawdown***	
		$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\kappa}$	$\hat{p}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\kappa}$	$\hat{p}$	Δt	%
$\boldsymbol{P[\mathrm{GP}_t > 0] > 0,7}$ $***$ ††† ‡‡‡	[0,32 ; 0,34]	[0,4 ; 0,4]	[0,4 ; 0,46]	[0,35 ; 0,77]	[0,92 ; 0,92]	[0,03 ; 0,03]	[0,07 ; 0,09]	[4,55 ; 15,99]	[0,74 ; 0,76]	[405 , 588]	[-86 , -61]
$\boldsymbol{P[\mathrm{GP}_t > 0] > 0,8}$ $***$ †† ‡‡‡	[0,24 ; 0,31]	[0,26 ; 0,34]	[0,25 ; 0,27]	[0,04 ; 1,16]	[0,92 ; 0,92]	[0,02 ; 0,02]	[0,05 ; 0,06]	[3,1 ; 9,23]	[0,78 ; 0,8]	[312 , 545]	[-54 , -41]
$\boldsymbol{P[\mathrm{GP}_t > 0] > 0,9}$ $**$ ‡‡‡	[0,17 ; 0,2]	[0,18 ; 0,21]	[0,13 ; 0,17]	[0,14 ; 0,93]	[0,92 ; 0,92]	[0,01 ; 0,02]	[0,03 ; 0,04]	[11,42 ; 19,25]	[0,82 ; 0,83]	[383 , 456]	[-42 , -27]
$\boldsymbol{\sqrt{\mathrm{VAR}[\frac{\mathrm{GP}_t}{\mathrm{VN}_t}]} < 0,025}$	[0,12 ; 0,14]	[0,12 ; 0,14]	[0,07 ; 0,1]	[-1,39 ; 1,37]	[0,92 ; 1,0]	[0,01 ; 0,01]	[0,02 ; 0,03]	[12,22 ; 29,08]	[0,78 ; 0,79]	[281 , 552]	[-30 , -22]
$\boldsymbol{\sqrt{\mathrm{VAR}[\frac{\mathrm{GP}_t}{\mathrm{VN}_t}]} < 0,05}$ $***$ ‡‡‡	[0,15 ; 0,2]	[0,17 ; 0,21]	[0,17 ; 0,26]	[-0,82 ; 0,53]	[0,83 ; 0,83]	[0,01 ; 0,02]	[0,04 ; 0,06]	[11,69 ; 20,89]	[0,76 ; 0,8]	[642 , 953]	[-53 , -41]
$\boldsymbol{\sqrt{\mathrm{VAR}[\frac{\mathrm{GP}_t}{\mathrm{VN}_t}]} < 0,1}$ $***$ †† ‡‡‡	[0,23 ; 0,25]	[0,26 ; 0,3]	[0,28 ; 0,35]	[-0,39 ; 0,86]	[0,83 ; 0,83]	[0,02 ; 0,02]	[0,06 ; 0,07]	[6,18 ; 15,52]	[0,74 ; 0,76]	[597 , 929]	[-67 , -54]
$\boldsymbol{\mathrm{K}[\frac{\mathrm{GP}_t}{\mathrm{VN}_t}] < 5}$ $***$ † ‡‡‡	[0,25 ; 0,33]	[0,33 ; 0,38]	[0,35 ; 0,4]	[-0,96 ; 0,8]	[0,75 ; 0,92]	[0,02 ; 0,03]	[0,06 ; 0,08]	[4,15 ; 15,86]	[0,74 ; 0,78]	[520 , 724]	[-87 , -65]
$\boldsymbol{\mathrm{K}[\frac{\mathrm{GP}_t}{\mathrm{VN}_t}] < 10}$ $***$ ††† ‡‡‡	[0,3 ; 0,35]	[0,37 ; 0,4]	[0,37 ; 0,47]	[-0,26 ; 0,25]	[0,83 ; 0,92]	[0,03 ; 0,03]	[0,08 ; 0,09]	[8,05 ; 17,24]	[0,74 ; 0,76]	[385 , 624]	[-82 , -75]
$\boldsymbol{\mathrm{K}[\frac{\mathrm{GP}_t}{\mathrm{VN}_t}] < 15}$ $***$ †† ‡‡‡	[0,33 ; 0,38]	[0,39 ; 0,43]	[0,34 ; 0,43]	[0,71 ; 1,16]	[0,83 ; 1,0]	[0,03 ; 0,03]	[0,08 ; 0,08]	[11,12 ; 19,1]	[0,76 ; 0,78]	[302 , 430]	[-74 , -68]
$\boldsymbol{P[\frac{\mathrm{GP}_t}{\mathrm{VN}_t} < -0,1] < 0,01}$ $*$ ‡	[0,14 ; 0,16]	[0,14 ; 0,16]	[0,08 ; 0,11]	[-1,15 ; -0,36]	[0,92 ; 1,0]	[0,01 ; 0,01]	[0,03 ; 0,03]	[7,01 ; 8,81]	[0,75 ; 0.8]	[361 , 489]	[-33 , -31]
$\boldsymbol{P[\frac{\mathrm{GP}_t}{\mathrm{VN}_t} < -0,1] < 0,05}$ $***$ ‡‡‡	[0,16 ; 0,19]	[0,18 ; 0,21]	[0,2 ; 0,21]	[-0,91 ; -0,3]	[0,83 ; 0,83]	[0,01 ; 0,02]	[0,05 ; 0,05]	[6,51 ; 9,09]	[0,72 ; 0,75]	[522 , 680]	[-49 , -38]
$\boldsymbol{P[\frac{\mathrm{GP}_t}{\mathrm{VN}_t} < -0,1] < 0,10}$ $***$ †† ‡‡‡	[0,23 ; 0,31]	[0,27 ; 0,33]	[0,23 ; 0,3]	[-0,61 ; 0,53]	[0,83 ; 0,92]	[0,02 ; 0,02]	[0,05 ; 0,06]	[3,93 ; 9,81]	[0,74 ; 0,8]	[358 , 662]	[-54 , -39]
SPX	0,07	0,09	0,17	2,61	0,83	0,01	0,04	2,39	0,65	1997	-57
Naïve	0,14	0,19	0,36	1,35	0,75	0,02	0,09	23,81	0,79	452	-80
BSM	0,19	0,3	0,72	6,54	0,67	0,02	0,11	5,65	0,53	1129	-51

Jusqu'ici les résultats sont encourageants. Par contre, il faut garder en tête que la performance statistique des estimateurs $\hat{m}_a$ et $\hat{m}_v$, pour les options sur indice, était élevée (voir la section 4.3.3). La performance pour les options sur action était plus mitigée. Ainsi, on s'attend à ce que les simulations incluant tous les sous-jacents réussissent moins bien. En effet, les métriques d'évaluation des simulations rapportées au tableau 4.12 confirment cette supposition. [26] On voit que pour un même niveau de risque ces simulations réussissent moins bien que celles incluant seulement les indices. Lorsque l'on compare la borne inférieure du RCA des simulations avec le RCA des stratégies comparatives, il n'y aucune de nos simulations qui réussit toujours mieux que toutes les stratégies comparatives. Cela est corroboré par le peu de fois où l'hypothèse nulle est rejetée. Par contre, lorsque l'on utilise la borne supérieure il y a plusieurs situations où les simulations battent les trois stratégies comparatives.

Même si nos simulations incluant tous les sous-jacents ne semblent pas être capables de battre BSM en pire cas, certaines ont une performance comparable à BSM, en offrant un meilleur niveau de risque. Par exemple, la simulation avec $P[\frac{\mathrm{GP}_t}{\mathrm{VN}_t} < -0,1] < 0,05$ a un RCA dans l'intervalle $[0,17; 0,19]$, comparativement à un RCA de $0,19$ pour BSM. Cependant, notre simulation a une proportion d'années profitables égale à 83 %, en pire cas, et une proportion de mois profitables égale à 77 % en pire cas, alors que ces métriques sont égales à 67 % et 53 % pour BSM. Ainsi, un investisseur pourrait raisonnablement décider d'utiliser notre système, avec cette configuration, au lieu de la stratégie BSM.

Une autre remarque importante par rapport aux résultats du tableau 4.6 est que deux simulations ont mené à une faillite du système. [27] Notamment, une simulation avec la configuration $\mathrm{K}[\frac{\mathrm{GP}_t}{\mathrm{VN}_t}] < 10$ et une simulation avec la configuration $\mathrm{K}[\frac{\mathrm{GP}_t}{\mathrm{VN}_t}] < 15$. Comme nous en avons parlé à la section 1.2.3, la vente d'options a un risque illimité. Il s'agit d'un des dangers de celle-ci. D'ailleurs, c'est pour cette raison que nous avons inclus une contrainte sur la probabilité d'un rendement inférieur à -10 %. En effet, les simulations pour lesquelles le maximum alloué, pour cette probabilité, n'était pas fixé à l'infini n'ont jamais fait face à cette situation et leur *drawdown*s sont généralement moins élevés que le reste des simulations. Les stratégies comparatives n'ont pas fait faillite. Par contre, nous avons fixé le maximum de capital qui pouvait être investi à 75 % de la valeur nette du système dans le but d'éviter une faillite dans nos stratégies comparatives (voir la section 4.4.5).

En somme, les résultats soutiennent l'hypothèse que notre système de négociation améliore le RCA, ajusté au risque, des stratégies usuelles de négociation d'options. Évidemment, cela n'est pas toujours le cas. Notamment, lorsque la performance des estimateurs est faible.

26. L'évolution de la valeur nette, dans le temps, de ces simulations est donnée à la figure 4.7.
27. Ces deux simulations ont été exclues du calcul des métriques

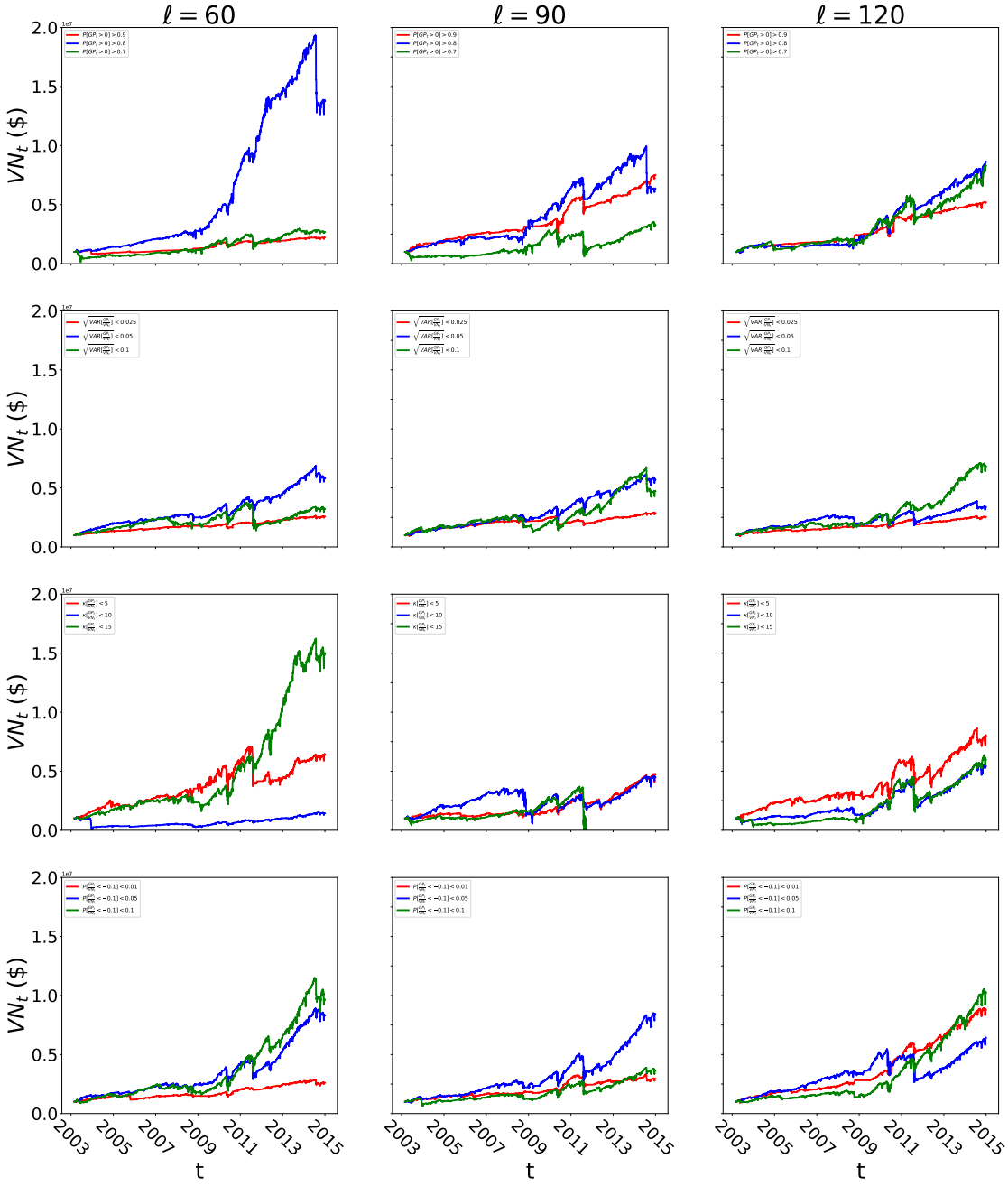


Figure 4.7 Évolution de la valeur nette du système pour les simulations sans liquidations incluant les indices et les actions comme sous-jacents. Chaque ligne correspond à une métrique de risque et chaque colonne à une valeur de ℓ (voir la section 4.2.5).

Tableau 4.12 Métriques d'évaluation des simulations de négociation, sans liquidations, incluant les indices et les actions comme sous-jacents. La partie du haut correspond aux simulations de négociation et la partie du bas aux stratégies comparatives. Deux simulations menant à une faillite ont été omises ; une simulation avec $\mathrm{K}[\frac{\mathrm{GP}_t}{\mathrm{VN}_t}] < 10$ et $\mathrm{K}[\frac{\mathrm{GP}_t}{\mathrm{VN}_t}] < 15$. Les symboles $*$, † et ‡ indiquent un rejet de l'hypothèse nulle à un seuil de 5 %, pour les stratégies comparatives SPX, Naïve et BSM, respectivement. Le nombre de symboles indique pour combien de simulations l'hypothèse est rejetée, pour un maximum de trois. De plus, l'opérateur K correspond au coefficient d'aplatissement.

	RCA	**F(365)**				**F(30)**				***Drawdown***	
		$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\kappa}$	$\hat{p}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\kappa}$	$\hat{p}$	Δt	%
$\boldsymbol{P[\mathrm{GP}_t > 0] > 0,7}$ ‡‡	[0,09 ; 0,19]	[0,12 ; 0,22]	[0,25 ; 0,34]	[-0,97 ; 2,8]	[0,67 ; 0,75]	[0,01 ; 0,02]	[0,06 ; 0,1]	[4,03 ; 5,1]	[0,7 ; 0,74]	[970 , 1765]	[-89 , -43]
$\boldsymbol{P[\mathrm{GP}_t > 0] > 0,8}$ * ‡‡‡	[0,17 ; 0,24]	[0,19 ; 0,27]	[0,21 ; 0,25]	[-0,65 ; 0,9]	[0,83 ; 0,92]	[0,01 ; 0,02]	[0,04 ; 0,06]	[5,13 ; 8,82]	[0,73 ; 0,79]	[218 , 1580]	[-41 , -35]
$\boldsymbol{P[\mathrm{GP}_t > 0] > 0,9}$	[0,07 ; 0,18]	[0,07 ; 0,19]	[0,11 ; 0,16]	[0,0 ; 1,29]	[0,83 ; 1,0]	[0,01 ; 0,02]	[0,04 ; 0,04]	[6,61 ; 29,45]	[0,75 ; 0,8]	[292 , 1544]	[-35 , -29]
$\boldsymbol{\sqrt{\mathrm{VAR}[\frac{\mathrm{GP}_t}{\mathrm{VN}_t}]} < 0,025}$	[0,08 ; 0,09]	[0,08 ; 0,1]	[0,05 ; 0,12]	[-0,78 ; 0,57]	[0,83 ; 1,0]	[0,01 ; 0,01]	[0,02 ; 0,03]	[12,97 ; 37,8]	[0,76 ; 0,78]	[266 , 1335]	[-30 , -20]
$\boldsymbol{\sqrt{\mathrm{VAR}[\frac{\mathrm{GP}_t}{\mathrm{VN}_t}]} < 0,05}$ * ‡‡	[0,11 ; 0,16]	[0,12 ; 0,17]	[0,11 ; 0,18]	[-0,89 ; -0,54]	[0,75 ; 0,92]	[0,01 ; 0,01]	[0,04 ; 0,05]	[10,6 ; 16,73]	[0,75 ; 0,77]	[343 , 877]	[-42 , -36]
$\boldsymbol{\sqrt{\mathrm{VAR}[\frac{\mathrm{GP}_t}{\mathrm{VN}_t}]} < 0,1}$ ** ‡‡	[0,1 ; 0,17]	[0,13 ; 0,19]	[0,17 ; 0,21]	[-0,99 ; 0,79]	[0,75 ; 0,83]	[0,01 ; 0,02]	[0,05 ; 0,07]	[4,14 ; 10,33]	[0,71 ; 0,74]	[692 , 1365]	[-64 , -36]
$\boldsymbol{\mathrm{K}[\frac{\mathrm{GP}_t}{\mathrm{VN}_t}] < 5}$ * ‡‡	[0,14 ; 0,19]	[0,15 ; 0,21]	[0,15 ; 0,23]	[-1,44 ; -0,49]	[0,75 ; 0,83]	[0,01 ; 0,02]	[0,06 ; 0,07]	[4,33 ; 10,9]	[0,73 ; 0,75]	[666 , 1310]	[-48 , -42]
$\boldsymbol{\mathrm{K}[\frac{\mathrm{GP}_t}{\mathrm{VN}_t}] < 10}$ * ‡‡	[0,13 ; 0,15]	[0,19 ; 0,2]	[0,29 ; 0,35]	[-1,1 ; 0,44]	[0,67 ; 0,75]	[0,01 ; 0,02]	[0,07 ; 0,1]	[5,36 ; 17,78]	[0,73 ; 0,73]	[897 , 2197]	[-85 , -62]
$\boldsymbol{\mathrm{K}[\frac{\mathrm{GP}_t}{\mathrm{VN}_t}] < 15}$ ** ‡	[0,16 ; 0,25]	[0,25 ; 0,27]	[0,19 ; 0,44]	[-0,6 ; 0,9]	[0,75 ; 0,92]	[0,02 ; 0,02]	[0,07 ; 0,1]	[3,88 ; 8,84]	[0,7 ; 0,78]	[490 , 2112]	[-75 , -47]
$\boldsymbol{P[\frac{\mathrm{GP}_t}{\mathrm{VN}_t} < -0,1] < 0,01}$ *	[0,08 ; 0,2]	[0,09 ; 0,2]	[0,11 ; 0,14]	[-0,19 ; 1,53]	[0,75 ; 1,0]	[0,01 ; 0,02]	[0,04 ; 0,04]	[7,96 ; 19,64]	[0,71 ; 0,8]	[330 , 1175]	[-34 , -17]
$\boldsymbol{P[\frac{\mathrm{GP}_t}{\mathrm{VN}_t} < -0,1] < 0,05}$ *** ‡‡‡	[0,17 ; 0,19]	[0,19 ; 0,21]	[0,16 ; 0,22]	[-1,22 ; 0,58]	[0,83 ; 0,83]	[0,01 ; 0,02]	[0,05 ; 0,05]	[6,9 ; 24,99]	[0,77 ; 0,79]	[622 , 1397]	[-52 , -42]
$\boldsymbol{P[\frac{\mathrm{GP}_t}{\mathrm{VN}_t} < -0,1] < 0,10}$ * ‡‡	[0,11 ; 0,21]	[0,14 ; 0,24]	[0,22 ; 0,24]	[-0,82 ; 0,36]	[0,75 ; 0,83]	[0,01 ; 0,02]	[0,05 ; 0,07]	[3,24 ; 11,65]	[0,71 ; 0,74]	[660 , 1046]	[-51 , -33]
SPX	0,07	0,09	0,17	2,61	0,83	0,01	0,04	2,39	0,65	1997	-57
Naïve	0,14	0,19	0,36	1,35	0,75	0,02	0,09	23,81	0,79	452	-80
BSM	0,19	0,3	0,72	6,54	0,67	0,02	0,11	5,65	0,53	1129	-51

Simulations avec liquidations

Les résultats des simulations incluant des liquidations sont rapportés au tableau 4.13. [28] Avant d'analyser les résultats, on note que ces simulations ont été effectuées sur la période de 2004 à 2014, contrairement à la période de 2003 à 2014, utilisée pour les simulations sans liquidations. Ainsi, nous avons calculé les métriques d'évaluation des stratégies comparatives en utilisant seulement leur valeur nette sur la période de 2004 à 2014. De plus, nous avons inclus les métriques d'évaluation des stratégies sans liquidations, en utilisant leur valeur nette sur la période de 2004 à 2014, à des fins de comparaison.

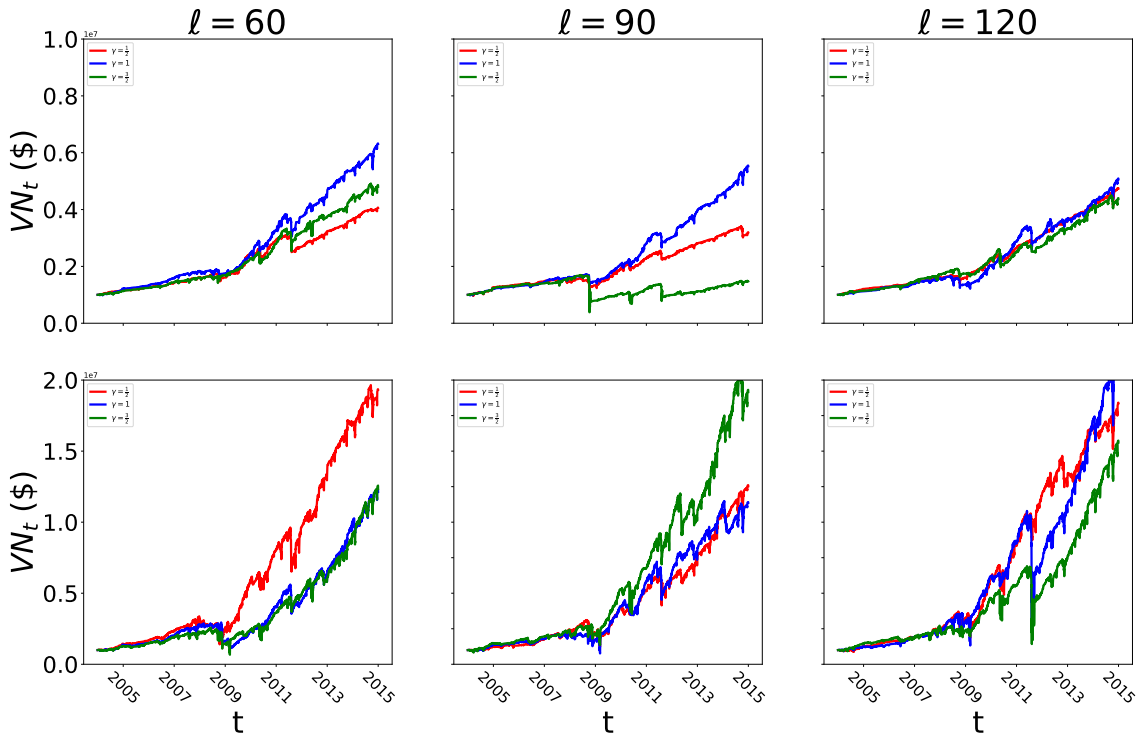


Figure 4.8 Évolution de la valeur nette du système pour les simulations avec liquidations. La première ligne correspond aux simulations avec une probabilité de gain minimum de 90 % et la ligne du bas à une probabilité minimum de 70 %. Chaque ligne correspond à une métrique de risque et chaque colonne à une valeur de ℓ (voir la section 4.2.5).

28. L'évolution de la valeur nette de ces simulations est donnée à figure 4.8.

Avant de comparer les résultats des simulations avec liquidations aux stratégies usuelles, on commence par étudier l'effet de la valeur du paramètre γ (voir la section 3.5) sur les métriques d'évaluation. Pour les simulations avec $P[\mathrm{GP}_t > 0] > 0,7$, on voit que le RCA est relativement stable pour les différentes valeurs de γ et est comparable au RCA des simulations sans liquidations avec $P[\mathrm{GP}_t > 0] > 0,7$. Cependant, on observe une différence au point de vue du risque notamment sur les *drawdowns*. Par exemple, avec $\gamma = \frac{1}{2}$, on voit que le *drawdown* maximal se trouve dans l'intervalle $[-61, -51]$, comparativement à $[-80, -61]$ pour la même stratégie sans liquidations. Une situation similaire est observée pour les simulations avec $P[\mathrm{GP}_t > 0] > 0,9$. En effet, on voit que le RCA des simulations avec liquidations est semblable à celui des simulations sans liquidations, quoique légèrement inférieur. Cependant, le *drawdown* maximal pour les stratégies avec $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\gamma = 1$ est nettement inférieur à celui de la stratégie sans liquidations. En effet, les *drawdown*s maximaux de ces stratégies se situent dans les intervalles $[-27, -20]$ et $[-27, -21]$, comparativement à $[-42, -27]$ pour la même stratégie sans liquidations.

Tout comme pour les résultats des simulations sans liquidations, ce sont les stratégies avec $P[\mathrm{GP}_t > 0] > 0,7$ qui réussissent mieux que les stratégies comparatives, selon le RCA. Cependant, les stratégies avec liquidation permettent de réduire les *drawdowns*. Même si les stratégies avec $P[\mathrm{GP}_t > 0] > 0,9$ ne battent pas les stratégies comparatives du point de vu du RCA, elle sont tout de même intéressantes. Plus spécialement, celle avec $\gamma = \frac{1}{2}$. En effet, le RCA de cette stratégie se trouve dans l'intervalle $[0,11; 0,15]$, ce qui est tout de même supérieur, ou égal, au RCA de SPX et naïve. Or, le *drawdown* de notre simulation se trouve dans l'intervalle $[-27, -20]$, ce qui est nettement inférieur au *drawdown* de -80 et -57 observés pour les stratégies comparatives.

Somme toute, l'algorithme de liquidation des positions permet de réduire les *drawdown*s en maintenant un RCA similaire à celui obtenu sans liquidations.

Tableau 4.13 Métriques d'évaluation des simulations de négociation, avec liquidations, et des stratégies comparatives sur la même période. La partie du haut correspond aux simulations de négociation et la partie du bas aux stratégies comparatives. Les symboles $*$, † et ‡ indiquent un rejet de l'hypothèse nulle à un seuil de 5 %, pour les stratégies comparatives SPX, Naïve et BSM, respectivement. Le nombre de symboles indique pour combien de simulations l'hypothèse est rejetée, pour un maximum de trois. Nous avons également ajouté les métriques d'évaluation des stratégies sans liquidations, sur la même période, à des fins de comparaison.

	RCA	**F(365)**				**F(30)**				***Drawdown***	
		$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\kappa}$	$\hat{p}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\kappa}$	$\hat{p}$	Δt	%
$\boldsymbol{P[\mathrm{GP}_t > 0] > 0,7\ \gamma = \frac{1}{2}}$ $*\,*\ \dagger\ \ddagger\ddagger$	[0,26 ; 0,31]	[0,28 ; 0,35]	[0,2 ; 0,35]	[0,7 ; 2,44]	[0,91 ; 1,0]	[0,02 ; 0,02]	[0,06 ; 0,06]	[2,41 ; 4,38]	[0,7 ; 0,75]	[307 , 534]	[-61 , -51]
$\boldsymbol{P[\mathrm{GP}_t > 0] > 0,7\ \gamma = 1}$ $*\,*\,*\ \ddagger\ddagger$	[0,25 ; 0,32]	[0,29 ; 0,36]	[0,29 ; 0,38]	[0,7 ; 2,63]	[0,91 ; 0,91]	[0,02 ; 0,03]	[0,07 ; 0,07]	[10,65 ; 15,37]	[0,7 ; 0,76]	[511 , 629]	[-74 , -62]
$\boldsymbol{P[\mathrm{GP}_t > 0] > 0,7\ \gamma = \frac{3}{2}}$ $*\,*\,*\ \dagger\ \ddagger\ddagger$	[0,26 ; 0,31]	[0,29 ; 0,35]	[0,26 ; 0,4]	[-0,4 ; 2,51]	[0,82 ; 0,91]	[0,02 ; 0,02]	[0,06 ; 0,07]	[2,98 ; 11,31]	[0,75 ; 0,77]	[335 , 623]	[-80 , -53]
$\boldsymbol{P[\mathrm{GP}_t > 0] > 0,7}$ $*\,*\,*\ \dagger\ \ddagger\ddagger$	[0,27 ; 0,29]	[0,33 ; 0,34]	[0,35 ; 0,44]	[1,82 ; 2,08]	[0,91 ; 0,91]	[0,02 ; 0,02]	[0,07 ; 0,09]	[5,18 ; 16,34]	[0,73 ; 0,75]	[405 , 588]	[-86 , -61]
$\boldsymbol{P[\mathrm{GP}_t > 0] > 0,9\ \gamma = \frac{1}{2}}$ $*$	[0,11 ; 0,15]	[0,12 ; 0,16]	[0,09 ; 0,14]	[0,22 ; 2,13]	[0,82 ; 0,91]	[0,01 ; 0,01]	[0,02 ; 0,03]	[4,09 ; 11,78]	[0,8 ; 0,84]	[259 , 505]	[-27 , -20]
$\boldsymbol{P[\mathrm{GP}_t > 0] > 0,9\ \gamma = 1}$ $*\,*\,*$	[0,16 ; 0,18]	[0,17 ; 0,19]	[0,11 ; 0,16]	[-0,51 ; 0,39]	[0,91 ; 0,91]	[0,01 ; 0,01]	[0,03 ; 0,03]	[3,84 ; 8,18]	[0,8 ; 0,81]	[282 , 434]	[-27 , -21]
$\boldsymbol{P[\mathrm{GP}_t > 0] > 0,9\ \gamma = \frac{3}{2}}$ $*$	[0,04 ; 0,15]	[0,06 ; 0,16]	[0,08 ; 0,21]	[-0,71 ; 1,83]	[0,82 ; 1,0]	[0,01 ; 0,01]	[0,02 ; 0,06]	[2,73 ; 40,68]	[0,79 ; 0,86]	[275 , 2400]	[-78 , -24]
$\boldsymbol{P[\mathrm{GP}_t > 0] > 0,9}$ $*\ \ddagger\ddagger\ddagger$	[0,16 ; 0,19]	[0,17 ; 0,2]	[0,13 ; 0,17]	[0,14 ; 0,88]	[0,91 ; 0,91]	[0,01 ; 0,02]	[0,03 ; 0,04]	[11,35 ; 18,65]	[0,82 ; 0,83]	[383 , 456]	[-42 , -27]
SPX	0,06	0,07	0,17	2,55	0,82	0,01	0,04	2,37	0,64	1997	-57
Naïve	0,11	0,16	0,36	2,0	0,73	0,01	0,09	22,64	0,79	452	-80
BSM	0,2	0,31	0,75	5,6	0,64	0,02	0,12	5,59	0,53	1129	-51

CHAPITRE 5 CONCLUSION

Le but de ce mémoire était d'améliorer le rendement annuellement composé, ajusté au risque, des systèmes automatisés de négociation d'options, par rapport aux méthodes usuelles de négociation. Notre système se différencie de la littérature en permettant d'exploiter un ensemble d'information pour la prise de décision en négociation d'options. Les systèmes existants sont contraints à des hypothèses rigides basées sur des processus stochastiques classiques. La première contribution principale a été la création d'un estimateur de la moyenne de gain d'une stratégie quelconque d'options, conditionnelle à un ensemble d'information. La deuxième contribution principale a été la formulation d'un nouveau problème d'optimisation à variables discrètes pour la sélection des paramètres d'une stratégie d'options. Une contribution secondaire a été la création d'un algorithme de liquidation des positions, exploitant un ensemble d'information. Ces innovations ont été motivées par le manque d'études dans la littérature sur l'exploitation d'un ensemble d'information pour négocier des options, le nombre limité d'études incluant la sélection des paramètres des stratégies d'options dans la fonction objectif et l'insuffisance d'une méthode systématique pour la liquidation des positions, entres autres.

Les résultats des simulations de négociation ont montré que, dans plusieurs cas, notre système réalise un plus grand rendement que les stratégies usuelles avec un niveau de risque comparable ou inférieur. Nous avons également pu observer que l'algorithme de liquidation tend à réduire le risque d'une stratégie en maintenant un rendement stable. Notamment, l'algorithme tend à réduire le *drawdown*. Il était aussi apparent que nos estimateurs de la moyenne de gain réussissent mieux pour les options sur indice que sur action. Cela pourrait s'expliquer par le fait que nous avons utilisé un ensemble d'information limité. Il est fort probable que l'inclusion de nouveaux facteurs améliore la qualité des estimateurs pour les options sur action.

Une des critiques qui pourrait être formulée sur nos résultats est le fait que nous avons utilisé le prix courant des options pour effectuer les simulations. En pratique, il se peut qu'on ne soit pas capable d'exécuter nos ordres au prix courant. Plus précisément, on vend à un prix inférieur au prix courant et on achète à un prix supérieur. Ce phénomène s'appelle le *slippage*. Une autre critique est le fait que nous n'avons pas effectué les simulations avec liquidations en incluant les actions. En effet, comme nous savons que la qualité des estimateurs associés aux options sur actions est moindre, il est fort probable que les résultats de simulations avec liquidations incluant les actions soient moins stables. Finalement, on pourrait se demander si les résultats auraient été les mêmes en utilisant un échantillon couvrant une période différente.

Il est difficile de répondre à cette question avec certitude, car il est toujours possible que le comportement des participants du marché change avec le temps. Cependant, nous nous sommes efforcés d'inclure un cycle économique complet dans notre échantillon, c'est-à-dire d'inclure une récession, et d'inclure un grand nombre d'années ; une décennie complète.

Le système de négociation que nous avons développé dans ce mémoire pourrait être amélioré de plusieurs manières. Premièrement, il pourrait être facilement généralisé pour permettre de sélectionner les paramètres de n'importe quelle stratégie d'options. Deuxièmement, nous pourrions intégrer un modèle de classification permettant de sélectionner les stratégies à employer pour une période donnée, en considérant l'ensemble d'information et le portefeuille du système, à cet instant. Notre système actuel fait uniquement l'usage de VPC. Or, il existe une panoplie d'autres stratégies qui pourraient être utilisées. Troisièmement, on pourrait développer un algorithme de sélection dynamique de la proportion de capital à allouer à la création de nouvelles positions. Quatrièmement, nous pourrions développer un algorithme permettant d'effectuer le déploiement de notre capital de manière plus stratégique, au niveau du temps. En effet, notre système effectue le déploiement de capital à fréquence hebdomadaire. Une idée potentielle serait d'ajouter une contrainte au problème d'optimisation qui quantifie la dépendance entre la somme des gains des positions potentielles et la somme des gains des positions du portefeuille. Cette dépendance ne devrait pas dépasser une valeur critique. Ainsi, on résout le problème d'optimisation à chaque jour et l'on déploie seulement si une solution admissible est obtenue. Cinquièmement, nous pourrions développer une méthode de recherche spécialisée pour l'algorithme *MADS*, dans le but de réduire le temps de résolution de celui-ci. En effet, le temps de résolution de notre système actuel est raisonnable avec peu de sous-jacents ; une minute. Par contre, il serait plus difficile d'utiliser le système en temps réel avec un grand nombre de sous-jacents. Finalement, nous pourrions utiliser un ensemble d'information incluant plus de variables.

En définitive, les résultats de simulation de négociation de notre système ont montré que, pour plusieurs configurations, le rendement annuellement composé était supérieur à celui des stratégies usuelles, pour un niveau de risque comparable, notamment lorsque les options sur indice sont utilisées. Lorsque des options sur action sont incluses dans le système, la performance est comparable aux stratégies usuelles, mais pas nettemment supérieure. On croit que l'ajout de nouvelles variables dans l'ensemble d'information pourrait améliorer ces résultats. Nous avons également observé que la liquidation des positions, selon notre algorithme, tend à réduire le risque du système en gardant un rendement stable.

RÉFÉRENCES

M. A. Abramson, C. Audet, J. E. Dennis Jr, et S. LeDigabel, "Orthomads : A deterministic mads instance with orthogonal directions", *SIAM Journal on Optimization*, vol. 20, no. 2, pp. 948–966, 2009.

E. Addison, "Using news understanding and neural networks in foreign currency options trading", dans *Artificial Intelligence Applications on Wall Street, 1991. Proceedings., First International Conference on.* IEEE, 1991, pp. 319–323.

J. J. Ahn, D. H. Kim, K. J. Oh, et T. Y. Kim, "Applying option greeks to directional forecasting of implied volatility in the options market : An intelligent approach", *Expert Systems with Applications*, vol. 39, no. 10, pp. 9315–9322, 2012.

K. Ahoniemi, "Modeling and forecasting implied volatility : An econometric analysis of the vix index", Helsinki Center of Economic Research, 2006, no. 129.

Y. Ait-Sahalia, Y. Wang, et F. Yared, "Do option markets correctly price the probabilities of movement of the underlying asset ?" *Journal of Econometrics*, vol. 102, no. 1, pp. 67–110, 2001.

S. Alexander, T. F. Coleman, et Y. Li, "Minimizing cvar and var for a portfolio of derivatives", *Journal of Banking & Finance*, vol. 30, no. 2, pp. 583–605, 2006.

M. Ammann et S. Herriger, "Relative implied-volatility arbitrage with index options", *Financial Analysts Journal*, vol. 58, no. 6, pp. 42–55, 2002.

J. Andrada-Félix, F. Fernández-Rodríguez, et A.-M. Fuertes, "Combining nearest neighbor predictions and model-based predictions of realized variance : Does it pay ?" *International Journal of Forecasting*, vol. 32, no. 3, pp. 695–715, 2016.

P. Anselmo, K. Hovsepian, C. Ulibarri, et M. Kozloski, "Automated options trading using machine learning", 2008.

C. Audet, S. LeDigabel, et C. Tribes, "The mesh adaptive direct search algorithm for granular and discrete variables", Les cahiers du GERAD, Rapp. tech. G-2018-16, 2018. En ligne : `http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2018/03/6526.html`

C. Audet et J. E. Dennis Jr, “Mesh adaptive direct search algorithms for constrained optimization”, *SIAM Journal on optimization*, vol. 17, no. 1, pp. 188–217, 2006.

——, “A progressive barrier for derivative-free nonlinear programming”, *SIAM Journal on Optimization*, vol. 20, no. 1, pp. 445–472, 2009.

F. Audrino et D. Colangelo, “Option trading strategies based on semi-parametric implied volatility surface prediction”, University of St. Gallen : Department of Economics, 2009.

A. Bain, P. Tiwaree, et K. Okamoto, “Recognizing informed option trading”, 2009, semanticscholar.org/paper/Recognizing-Informed-Option-Trading-Bain-Tiwaree/8be977ac9319385d2dbbe25c49c1a45ac45c72e6.

G. Bakshi et N. Kapadia, “Delta-hedged gains and the negative market volatility risk premium”, *Review of Financial Studies*, vol. 16, no. 2, pp. 527–566, 2003.

G. Bakshi, N. Kapadia, et D. Madan, “Stock return characteristics, skew laws, and the differential pricing of individual equity options”, *Review of Financial Studies*, vol. 16, no. 1, pp. 101–143, 2003.

T. G. Bali et K. O. Demirtas, “Testing mean reversion in stock market volatility”, *Journal of Futures Markets*, vol. 28, no. 1, 2008.

R. B. Balyeat, “Economic significance of risk premiums in the s&p 500 option market”, *Journal of Futures Markets*, vol. 22, no. 12, pp. 1147–1178, 2002.

E. Berkovich et Y. Shachmurove, “An error of collateral : Why selling spx put options may not be profitable”, *The Journal of Derivatives*, vol. 20, no. 3, pp. 31–42, 2011.

A. Bernales et M. Guidolin, “Can we forecast the implied volatility surface dynamics of equity options ? predictability and economic value tests”, *Journal of Banking & Finance*, vol. 46, pp. 326–342, 2014.

F. Black et M. Scholes, “The pricing of options and corporate liabilities”, *The journal of political economy*, vol. 81, no. 3, pp. 637–654, 1973.

J. Blomvall et P. O. Lindberg, “Back-testing the performance of an actively managed option portfolio at the swedish stock market, 1990–1999”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 27, no. 6, pp. 1099–1112, 2003.

N. P. Bollen et R. E. Whaley, "Does net buying pressure affect the shape of implied volatility functions ?" *The Journal of Finance*, vol. 59, no. 2, pp. 711–753, 2004.

O. Bondarenko, "Why are put options so expensive ?" *Quarterly Journal of Finance*, vol. 4, no. 3, p. 1450015, 2014.

A. J. Boness, *The random character of stock market prices*. MIT Press, 1964, ch. Some evidence on the profitability of trading in put and call options, pp. 475–496.

B. H. Boyer et K. Vorkink, "Stock options as lotteries", *The Journal of Finance*, vol. 69, no. 4, pp. 1485–1527, 2014.

J. Bracken, "Models for call option decisions", *Financial Analysts Journal*, pp. 149–151, 1968.

N. Branger, B. Breuer, et C. Schlag, "Optimal derivative strategies with discrete rebalancing", *The Journal of Derivatives*, vol. 16, no. 2, pp. 67–84, 2008.

L. Brittain, P. Garcia, et S. H. Irwin, "Live and feeder cattle options markets : returns, risk, and volatility forecasting", *Journal of Agricultural and Resource Economics*, pp. 28–47, 2011.

M. Broadie, M. Chernov, et M. Johannes, "Understanding index option returns", *The Review of Financial Studies*, vol. 22, no. 11, pp. 4493–4529, 2009.

C. Brooks et M. C. Oozeer, "Modelling the implied volatility of options on long gilt futures", *Journal of Business Finance & Accounting*, vol. 29, no. 1-2, pp. 111–137, 2002.

C. Cao, H. Li, et F. Yu, "Is investor misreaction economically significant ? evidence from short-and long-term s&p 500 index options", *Journal of Futures Markets*, vol. 25, no. 8, pp. 717–752, 2005.

J. Cao et B. Han, "Cross-section of option returns and stock volatility", Chinese University of Hong Kong, 2010.

A. P. Carverhill, T. H. Cheuk, et S. Dyrting, "The price of the smirk : Returns to delta and vega neutral portfolios of s&p 500 futures options", University of Hong Kong : School of Economics and Finance, 2002, no. 336.

CBOE, "Cboe's 44th anniversy", 2017. En ligne : `cboe.com/blogs/options-hub/2017/04/26/cboe's-44th-anniversary`

CBOE, “SPX Options Product Specifications”, 2016. En ligne : `cboe.com/products/indexopts/spx_spec.aspx`

T. Cenesizoglu et A. G. Timmermann, “Is the distribution of stock returns predictable ?” SSRN Electronic Journal, 2008.

G. Chalamandaris et A. E. Tsekrekos, “Predictability in implied volatility surfaces : evidence from the euro otc fx market”, *The European Journal of Finance*, vol. 20, no. 1, pp. 33–58, 2014.

K. C. Chan, L. T. Cheng, et P. P. Lung, “Net buying pressure, volatility smile, and abnormal profit of hang seng index options”, *Journal of futures markets*, vol. 24, no. 12, pp. 1165–1194, 2004.

W. H. Chan, R. Jha, et M. Kalimipalli, “The economic value of using realized volatility in forecasting future implied volatility”, *Journal of Financial Research*, vol. 32, no. 3, pp. 231–259, 2009.

——, “The economic value of using realized volatility in forecasting future implied volatility”, *Journal of Financial Research*, vol. 32, no. 3, pp. 231–259, 2009.

J. S. Chaput, “An analysis of trading in options on eurodollar futures : Trade types, risks, and profits”, Thèse de doctorat, University of Oklahoma, 1999.

A.-S. Chen et M. T. Leung, “Option straddle trading : Financial performance and economic significance of direct profit forecast and conventional strategies”, *Applied Economics Letters*, vol. 10, no. 8, pp. 493–498, 2003.

R. Chen et J. Lu, “Nonlinear var model of fx options portfolio based on importance sampling technique”, dans *Business Intelligence and Financial Engineering, 2009. BIFE’09. International Conference on.* IEEE, 2009, pp. 386–390.

R. Chen et L. Yu, “A novel nonlinear value-at-risk method for modeling risk of option portfolio with multivariate mixture of normal distributions”, *Economic Modelling*, vol. 35, pp. 796–804, 2013.

X. Cheng, “Three essays on volatility forecasting”, Thèse de doctorat, Hong Kong Baptist University, 2010.

J. Chong, “Options trading profits from correlation forecasts”, *Applied Financial Economics*, vol. 14, no. 15, pp. 1075–1085, 2004.

G. Cohen, *The bible of options strategies : the definitive guide for practical trading strategies*. Pearson Education, 2005.

J. B. Cohen, F. Black, et M. Scholes, "The valuation of option contracts and a test of market efficiency", *The Journal of Finance*, vol. 27, no. 2, pp. 399–417, 1972.

P. Corredor, P. Lechon, et R. Santamaria, "Is it possible to obtain profits using naive volatility models ?" *Journal of Derivatives & Hedge Funds*, vol. 8, no. 1, p. 13, 2002.

T. Coval, Joshua D et Shumway, "Expected option returns", *The journal of Finance*, vol. 56, no. 3, pp. 983–1009, 2001.

B. H. Do, A. Foster, et P. Gray, "The profitability of volatility spread trading on asx equity options", *Journal of Futures Markets*, vol. 36, no. 2, pp. 107–126, 2016.

C. Doidge et J. Z. Wei, "Volatility forecasting and the efficiency of the toronto 35 index options market", *Canadian Journal of Administrative Sciences/Revue Canadienne des Sciences de l'Administration*, vol. 15, no. 1, pp. 28–38, 1998.

J. Driessen et P. J. Maenhout, "A portfolio perspective on option pricing anomalies", dans *AFA 2004 San Diego Meetings*, 2004.

——, "The world price of jump and volatility risk", *Journal of Banking & Finance*, vol. 37, no. 2, pp. 518–536, 2013.

J. Driessen, P. J. Maenhout, et G. Vilkov, "The price of correlation risk : Evidence from equity options", *The Journal of Finance*, vol. 64, no. 3, pp. 1377–1406, 2009.

C. L. Dunis et X. Huang, "Forecasting and trading currency volatility : An application of recurrent neural regression and model combination", *Journal of Forecasting*, vol. 21, no. 5, pp. 317–354, 2002.

D. Enke et S. Amornwattana, "A hybrid derivative trading system based on volatility and return forecasting", *The Engineering Economist*, vol. 53, no. 3, pp. 259–292, 2008.

B. Eraker, "The volatility premium", University of Wisconsin, 2009.

D. A. Erickson, "Put and call options : A theoretical and empirical analysis", Thèse de doctorat, Florida State University, 1973.

J. A. Faias et P. Santa-Clara, “Optimal option portfolio strategies : Deepening the puzzle of index option mispricing”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 52, no. 1, pp. 277–303, 2017.

E. F. Fama, “Efficient capital markets : A review of theory and empirical work”, *The journal of Finance*, vol. 25, no. 2, pp. 383–417, 1970.

J. Fleming, “The economic significance of the forecast bias of s&p 100 index option implied volatility”, *Advances in futures and options research*, vol. 10, pp. 219–252, 1999.

D. Galai, “Tests of market efficiency of the chicago board options exchange”, *The Journal of Business*, vol. 50, no. 2, pp. 167–197, 1977.

P.-W. Gao, “Options strategies with the risk adjustment”, *European Journal of Operational Research*, vol. 192, no. 3, pp. 975–980, 2009.

J. Gatheral, *The volatility surface : a practitioner’s guide*. John Wiley & Sons, 2011.

F. Goltz et W. N. Lai, “Empirical properties of straddle returns”, *The Journal of Derivatives*, vol. 17, no. 1, pp. 38–48, 2009.

S. Goncalves et M. Guidolin, “Predictable dynamics in the s&p 500 index options implied volatility surface”, *The Journal of Business*, vol. 79, no. 3, pp. 1591–1635, 2006.

A. Goyal et A. Saretto, “Cross-section of option returns and volatility”, *Journal of Financial Economics*, vol. 94, no. 2, pp. 310–326, 2009.

C. W. Granger, S. Spear, et Z. Ding, “Stylized facts on the temporal and distributional properties of absolute returns : An update”, dans *Statistics and Finance : An Interface*. World Scientific, 2000, pp. 97–120.

D. Guo, “Dynamic volatility trading strategies in the currency option market”, *Review of Derivatives Research*, vol. 4, no. 2, pp. 133–154, 2000.

B. E. Gup, “The economics of the security option markets.” Thèse de doctorat, University of Cincinnati, 1966.

C. R. Harvey et R. E. Whaley, “Market volatility prediction and the efficiency of the s&p 100 index option market”, *Journal of Financial Economics*, vol. 31, no. 1, pp. 43–73, 1992.

A. Heinemann et K. C. Han, “A bull call spread as a strategy for small investors ?” *Journal of Personal Finance*, vol. 6, no. 2/3, p. 108, 2008.

J. C. Hull, *Options, futures, and other derivatives*, 8e éd. Pearson, 2012.

K. Itō, *On stochastic differential equations*. American Mathematical Soc., 1951, vol. 4.

S. Izraylevich et V. Tsudikman, *Systematic Options Trading : Evaluating, Analyzing, and Profiting from Mispriced Option Opportunities*. FT Press, 2010.

——, *Automated option trading : Create, optimize, and test automated trading systems*. FT Press, 2012.

P. Jäckel, "Let's be rational", Wilmott, 2015. En ligne : `onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/wilm.10395`

J. R. Jackson, "Some speculative strategies in the stock market", Thèse de doctorat, Case Western Reserve University, 1964.

J. C. Jackwerth, "Recovering risk aversion from option prices and realized returns", *Review of Financial Studies*, vol. 13, no. 2, pp. 433–451, 2000.

P. James, *Option theory*. John Wiley & Sons, 2003.

B. Johnson, *Algorithmic Trading & DMA : An introduction to direct access trading strategies*. Myeloma Press London, 2010.

C. S. Jones, "A nonlinear factor analysis of s&p 500 index option returns", *The Journal of Finance*, vol. 61, no. 5, pp. 2325–2363, 2006.

D. Kahneman et A. Tversky, "Prospect theory : An analysis of decision under risk", *Econometrica : Journal of the econometric society*, vol. 42, no. 2, pp. 263–291, 1979.

R. C. Katz, "Profitability of put and call option writing", Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, 1962.

R. C. Klemkosky, "An analysis of a strategy for purchasing straddle options", Thèse de doctorat, Michigan State Universty, 1971.

R. Koenker et G. Bassett Jr, "Regression quantiles", *Econometrica : journal of the Econometric Society*, vol. 46, no. 1, pp. 33–50, 1978.

R. J. Kruizenga, *The random character of stock market prices, MIT Press, Cambridge*, 1964, ch. Profit returns from purchasing puts and calls.

J. Laws, “Forecasting stock market volatility and the application of volatility trading models”, dans *CIBEF Research Paper*, 2000.

M. B. Le, “Evaluating financial theories using practical trading in stock and equity options markets”, Thèse de doctorat, University of Texas, 2012.

G. Le Bon, “The crowd : A study of the popular mind. london : Ernest benn”, *English edition originally published*, 1896.

S. Le Digabel, “Algorithm 909 : NOMAD : Nonlinear optimization with the MADS algorithm”, *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol. 37, no. 4, pp. 1–15, 2011.

M. Lefebvre, *Cours et exercices de probabilités appliquées*, 3e éd. Presses internationales Polytechnique, 2015.

——, *Processus stochastiques appliqués*, 2e éd. Presses internationales Polytechnique, 2014.

X. Liu, “Returns to trading portfolios of ftse 100 index options”, *Applied Financial Economics*, vol. 17, no. 15, pp. 1211–1225, 2007.

B. G. Malkiel et R. E. Quandt, *Strategies and rational decisions in the securities options market*. MIT Press, 1969.

Y. Mao, “Using twitter to analyze stock market and assist stock and options trading”, Thèse de doctorat, University of Connecticut, 2015.

K. Maris, K. Nikolopoulos, K. Giannelos, et V. Assimakopoulos, “Options trading driven by volatility directional accuracy”, *Applied Economics*, vol. 39, no. 2, pp. 253–260, 2007.

H. Markowitz, “Portfolio selection”, *The journal of finance*, vol. 7, no. 1, pp. 77–91, 1952.

C. M. Marshall, “Dispersion trading : Empirical evidence from us options markets”, *Global Finance Journal*, vol. 20, no. 3, pp. 289–301, 2009.

K. Matsumura et M. Kawamoto, “Derivative trade optimizing model utilizing gp based on behavioral finance theory”, *Electronics and Communications in Japan*, vol. 96, no. 4, pp. 15–28, 2013.

R. P. Mehta, “Optimizing returns with stock option strategies : an integer programming approach”, *Computers & Operations Research*, vol. 9, no. 3, pp. 233–242, 1982.

R. C. Merton, “Theory of rational option pricing”, *The Bell Journal of economics and management science*, vol. 4, no. 1, pp. 141–183, 1973.

M. A. Monroe, “The profitability of volatility spreads around information releases”, *Journal of Futures Markets*, vol. 12, no. 1, pp. 1–9, 1992.

S. Murray, “Essays on the options market”, Thèse de doctorat, University of New York, 2012.

I. Nelken, “Variance swap volatility dispersion”, *Derivatives Use, Trading & Regulation*, vol. 11, no. 4, pp. 334–344, 2006.

J. v. Neumann, “von, morgenstern o”, *Theory of games and economic behavior*, vol. 1, 1944.

S. X. Ni, “Stock option returns : A puzzle”, Hong Kong Baptist University, 2008. En ligne : `papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1259703`

J. Noh, R. F. Engle, et A. Kane, “Forecasting volatility and option prices of the s&p 500 index”, *The Journal of Derivatives*, vol. 2, no. 1, pp. 17–30, 1994.

C. Papahristodoulou, “Option strategies with linear programming”, *European Journal of Operational Research*, vol. 157, no. 1, pp. 246–256, 2004.

S.-H. Poon et C. W. Granger, “Forecasting volatility in financial markets : A review”, *Journal of economic literature*, vol. 41, no. 2, pp. 478–539, 2003.

S.-H. Poon et P. Pope, “Trading volatility spreads : a test of index option market efficiency”, *European Financial Management*, vol. 6, no. 2, pp. 235–260, 2000.

A. M. Poteshman, “Underreaction, overreaction, and increasing misreaction to information in the options market”, *The Journal of Finance*, vol. 56, no. 3, pp. 851–876, 2001.

D. J. Puglisi, “An analysis of the purchase of special put and call options : Profitability and selection strategies”, Thèse de doctorat, Indiana University, 1972.

R. J. Rendleman, “An lp approach to option portfolio selection”, *Advances in Futures and Options Research*, vol. 8, pp. 31–52, 1995.

P. Santa-Clara et A. Saretto, “Option strategies : Good deals and margin calls”, *Journal of Financial Markets*, vol. 12, no. 3, pp. 391–417, 2009.

A. A. Saretto, “Three essays in empirical asset pricing”, Thèse de doctorat, University of California, 2006.

C. Schittenkop, P. Tino, et G. Dorffner, “The profitability of trading volatility using real-valued and symbolic models”, dans *Computational Intelligence for Financial Engineering, 2000.(CIFEr) Proceedings of the IEEE/IAFE/INFORMS 2000 Conference on.* IEEE, 2000, pp. 8–11.

C. Schmitt et J. Kaehler, “Delta-neutral volatility trading with intra-day prices : an application to options on the dax”. ZEW Discussion Papers, 1996.

M. Schyns, Y. Crama, et G. Hübner, “Optimal selection of a portfolio of options under value-at-risk constraints : a scenario approach”, *Annals of Operations Research*, vol. 181, no. 1, pp. 683–708, 2010.

H.-J. Sheu et Y.-C. Wei, “Effective options trading strategies based on volatility forecasting recruiting investor sentiment”, *Expert Systems with Applications*, vol. 38, no. 1, pp. 585–596, 2011.

P. R. Simmons, “Using a differential evolutionary algorithm to test the efficient market hypothesis”, *Computational Economics*, vol. 40, no. 4, pp. 377–385, 2012.

D. P. Simon, “Implied volatility forecasts in the grains complex”, *Journal of Futures Markets*, vol. 22, no. 10, pp. 959–981, 2002.

——, “An examination of short qqq option trades”, *Journal of Futures Markets*, vol. 27, no. 8, pp. 739–770, 2007.

——, “Examination of long-term bond ishare option selling strategies”, *Journal of Futures Markets*, vol. 30, no. 5, pp. 465–489, 2010.

J. Stein, “Overreactions in the options market”, *The Journal of Finance*, vol. 44, no. 4, pp. 1011–1023, 1989.

T. K. Tan et B. Bing, “Options strategy for technology companies”, dans *Computer and Information Sciences (ICCOINS), 2014 International Conference on.* IEEE, 2014, pp. 1–6.

H. Tanaka, T. Dohi, H. Fujiwara, S. Osaki, et N. Kaio, “Construction of a decision-support system for a combination of options”, *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 24, no. 1-2, pp. 135–140, 1992.

TD Ameritrade, “Margin Handbook”, 2016. En ligne : `tdameritrade.com/retail-en_us/resources/pdf/AMTD086.pdf`

R. J. Tersine et E. M. Cross, “A scientific decision model for put-and-call options”, *Journal of Business Research*, vol. 4, no. 1, pp. 53–60, 1976.

S. Thawornwong, “Development and analysis of intelligent computation-based stock forecasting and trading systems”, Thèse de doctorat, University of Missouri, 2003.

A. Timmermann, “Elusive return predictability”, *International Journal of Forecasting*, vol. 24, no. 1, pp. 1–18, 2008.

P. Tino, C. Schittenkopf, et G. Dorffner, “Financial volatility trading using recurrent neural networks”, *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 12, no. 4, pp. 865–874, 2001.

P. Tinù, C. Schittenkopf, et G. Dorffner, “Volatility trading via temporal pattern recognition in quantised financial time series”, *Pattern Analysis & Applications*, vol. 4, no. 4, pp. 283–299, 2001.

R. R. Trippi, “Test of option market efficiency using a random-walk valuation model”, *Journal of Economics and Business*, vol. 29, no. 2, pp. 93–98, 1977.

R. S. Tsay, *Analysis of financial time series*. John Wiley & Sons, 2005.

W. L. Tung et C. Quek, “Financial volatility trading using a self-organising neural-fuzzy semantic network and option straddle-based approach”, *Expert Systems with Applications*, vol. 38, no. 5, pp. 4668–4688, 2011.

H. A. Urcola et S. H. Irwin, “Are agricultural options overpriced ?” *Journal of Agricultural and Resource Economics*, vol. 36, no. 1, pp. 63–77, 2011.

G. Vainberg, “The relative pricing of index and equity options”, Thèse de doctorat, McGill University, 2010.

B. Van Dyke et T. J. Asaki, “Using qr decomposition to obtain a new instance of mesh adaptive direct search with uniformly distributed polling directions”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 159, no. 3, pp. 805–821, 2013.

A. Vasquez, “Asset pricing in the stock and options markets”, Thèse de doctorat, McGill University, 2010.

A. Vejendla et D. Enke, “Performance evaluation of neural networks and garch models for forecasting volatility and option strike prices in a bull call spread strategy”, *Journal of Economic Policy and Research*, vol. 8, no. 2, p. 1, 2013.

T. Wang, “Three essays in derivatives, trading and liquidity”, Thèse de doctorat, University of Southern California, 2013.

X. Wang, D. Xie, J. Jiang, X. Wu, et J. He, “Value-at-risk estimation with stochastic interest rate models for option-bond portfolios”, *Finance Research Letters*, vol. 21, pp. 10–20, 2017.

M. Will, “Statistical arbitrage opportunities resulting from volatility errors and option mispricing”, Thèse de doctorat, Anderson University, 2007.

K. C. Zieg, *The Profitability of Stock Options*. Larchmont, N.Y. : Investors Intelligence, 1970.

ANNEXE A PREUVES

Propositions intermédiaires

Proposition A.1 *$Z_{t,i}$ suit un mouvement brownien standard $\forall i \in \{1, \ldots, |J|\}$.*

Preuve

On commence par se rappeler qu'un mouvement brownien standard est un processus stochastique à temps et états continus. Il est dénoté par $W_t : t \geqslant 0$. Par définition, $W_0 = 0$, $W_t \sim N(0, t)$ $\forall t$ et W_t possède des accroissements indépendants et stationnaires (voir Lefebvre (2014) p.234). Maintenant, nous allons montrer que $Z_{t,i}$ possède ces propriétés $\forall i \in \{1, \ldots, |J|\}$.

Premièrement, selon l'hypothèse 3.2, $Z_{t,i} = \sum_{l=1}^{|J|} \sigma_{i,l} W_{t,l}$ $\forall i$. Par hypothèse, on sait que $W_{t,l}$ sont des mouvement browniens standards $\forall l$. Ainsi, $Z_{0,i} = \sum_{l=1}^{|J|} \sigma_{i,l} W_{0,l} = \sum_{l=1}^{|J|} \sigma_{i,l} 0 = 0$ $\forall i$.

Deuxièmement, par l'additivité des lois gaussiennes, on peut dire que $Z_{t,i} \sim N(0, \sum_{l=1}^{|J|} \sigma_{i,l}^2 t)$. Par hypothèse, on sait que $\sum_{l=1}^{|J|} \sigma_{i,l}^2 = 1$ $\forall i \in \{1, \ldots, |J|\}$. Cela implique que $Z_{t,i} \sim N(0, t)$ $\forall i \in \{1, \ldots, |J|\}$.

Troisièment, on peut montrer que les accroissements de $Z_{t,i}$ sont stationnaires. En prenant la définition des accroissements on obtient

$$Z_{t+s,i} - Z_{t,i} = \sum_{l=1}^{|J|} \sigma_{i,l} W_{t+s,l} - \sum_{l=1}^{|J|} \sigma_{i,l} W_{t,l} = \sum_{l=1}^{|J|} \sigma_{i,l} (W_{t+s,l} - W_{t,l})$$

où s est une constante positive. Par l'hypothèse 3.2, on sait que $W_{t+s,l} - W_{t,l} \sim N(0, s)$. Ainsi, $Z_{t+s,i} - Z_{t,i} \sim N(0, \sum_{l=1}^{|J|} \sigma_{i,l}^2 s)$ et puisque $\sum_{l=1}^{|J|} \sigma_{i,l}^2 = 1$ $\forall i \in \{1, \ldots, |J|\}$, par hypothèse, on obtient

$$Z_{t+s,i} - Z_{t,i} \sim N(0, s) \ \forall i \in \{1, \ldots, |J|\}.$$

Cela nous indique que les accroissements de $Z_{t,i}$ sont stationnaires $\forall i$.

Finalement, on peut montrer que les accroissements de $Z_{t,i}$ sont indépendants. On considère deux accroissements : $Z_{t_4,i} - Z_{t_3,i}$ et $Z_{t_2,i} - Z_{t_1,i}$ où $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$. Selon l'hypothèse

3.2, on trouve que $Z_{t_4,i} - Z_{t_3,i} = \sum_{l=1}^{|J|} \sigma_{i,l}(W_{t_4,l} - W_{t_3,l})$ et $Z_{t_2,i} - Z_{t_1,i} = \sum_{l=1}^{|J|} \sigma_{i,l}(W_{t_2,l} - W_{t_1,l})$. Les accroissements d'un processus de Weiner sont indépendants et les processus $W_{t,l}$ sont indépendants $\forall l$. Ainsi, les accroissements $Z_{t_4,i} - Z_{t_3,i}$ et $Z_{t_2,i} - Z_{t_1,i}$ sont égaux à une combinaison linéaire de variables aléatoires indépendantes. Cela implique que $Z_{t_4,i} - Z_{t_3,i}$ et $Z_{t_2,i} - Z_{t_1,i}$ sont indépendants $\forall i$ ■

Proposition A.2 $\ln(S_{t,i}) = \ln(S_{0,i}) + \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)t + \sigma_i Z_{t,i}$ $\forall i \in \{1, \ldots, |J|\}$.

Preuve

On commençe par utiliser la procédure de Hull (2012) pour montrer que $d\ln(S_{t,i}) = \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)dt + \sigma_i dZ_{t,i}$. Puis, on intègre de chaque côté.

Premièrement, on obtient les dérivées partielles de $\ln(S_{t,i})$ par rapport à t et $S_{t,i}$. On trouve $\frac{\partial \ln(S_{t,i})}{\partial S_{t,i}} = \frac{1}{S_{t,i}}$, $\frac{\partial^2 \ln(S_{t,i})}{\partial S_{t,i}^2} = -\frac{1}{S_{t,i}^2}$ et $\frac{\partial \ln(S_{t,i})}{\partial t} = 0$. Ensuite, comme $S_{t,i}$ suit un processus de diffusion avec dérive de Itō par l'hypothèse 3.2, le lemme de Itō (voir la section 1.2.4), nous dit que

$$d\ln(S_{t,i}) = \left(\frac{1}{S_{t,i}}\mu_i S_{t,i} + 0 - \frac{1}{2S_{t,j}^2}(\sigma_i S_{t,i})^2\right)dt + \frac{1}{S_{t,j}}(\sigma_i S_{t,i})dZ_{t,i}.$$

En simplifiant on obtient

$$d\ln(S_{t,i}) = \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)dt + \sigma_i dZ_{t,i}\ .$$

Deuxièmement, en prenant l'intégrale de chaque côté, et en ajoutant la valeur de départ du processus $\ln(S_{t,i})$, soit $\ln(S_{0,i})$, on obtient

$$\begin{aligned}
\ln(S_{t,i}) &= \ln(S_{0,i}) + \int_0^t d\ln(S_{u,i}) \\
&= \ln(S_{0,i}) + \int_0^t \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)dv + \int_0^t \sigma_i dZ_{w,i} \\
&= \ln(S_{0,i}) + \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)t + \sigma_i Z_{t,i} \blacksquare
\end{aligned}$$

Preuve de la proposition 3.1

Tout d'abord, rappelons-nous que l'on dit qu'un vecteur aléatoire, de taille n, suit une loi multinormale lorsqu'il est composé de variables aléatoires, $X_1, \ldots, X_n$, qui peuvent être exprimées comme une combinaison linéaire de variables aléatoires indépendantes $Z_1, \ldots, Z_m$, telles que $Z_m \sim N(0,1) \forall m$. C'est-à-dire, lorsque $X_k = \mu_k + \sum_{j=1}^{m} c_{k,j} Z_j$ pour $k = 1, \ldots, n$ où μ_k est une constante réelle pour tout k et $c_{k,j}$ est une constante réelle $\forall (k,j)$ (voir Lefebvre (2015) p.283).

Les éléments du vecteur $\boldsymbol{\mathcal{L}}_t$ sont tous de la forme $\ln(S_{T_{t,i;k},i}) - \ln(S_{t,i})$ où $1 \leqslant i \leqslant |J|$, $1 \leqslant k \leqslant |T_{t,i}|$ et $T_{t,i}$ sont les dates d'expiration disponibles pour le sous-jacent indexé par i au temps t (voir la définition 3.7).

Pour montrer que le vecteur aléatoire $\boldsymbol{\mathcal{L}}_t$ suit une loi multinormale, on commence par définir la variable $T_{t,\max}$ telle que $T_{t,\max} = \max(T_{t,1;1}, \ldots, T_{t,1;|T_{t,1}|}, \ldots, T_{t,|J|;1}, \ldots, T_{t,|J|;|T_{t,|J|}|})$. Celle-ci correspond à la date d'expiration la plus élevée parmi les dates d'expiration disponibles, de tous les sous-jacents, à l'instant t. On commence par prouver que les éléments de $\boldsymbol{\mathcal{L}}_t$ correspondant à cette date peuvent être exprimés comme une combinaison de variables aléatoires suivant une loi normale centrée réduite. Puis, on fait la même chose pour les autres éléments de $\boldsymbol{\mathcal{L}}_t$.

Cas $\ln(S_{T_{t,\max},i}) - \ln(S_{t,i})$

Avec la proposition A.2, on trouve que

$$\begin{aligned}
\ln(S_{T_{t,\max},i}) - \ln(S_{t,i}) &= \Big(\ln(S_{0,i}) + \Big(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\Big)T_{t,\max} + \sigma_i Z_{T_{t,\max},i}\Big) - \Big(\ln(S_{0,i}) + \Big(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\Big)t + \sigma_i Z_{t,i}\Big) \\
&= \Big(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\Big)(T_{t,\max} - t) + \sigma_i\Big(Z_{T_{t,\max},i} - Z_{t,i}\Big) \\
&= \Big(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\Big)(T_{t,\max} - t) + \sigma_i\Big(\sum_{l=1}^{|J|} \sigma_{i,l} W_{T_{t,\max},l} - \sum_{l=1}^{|J|} \sigma_{i,l} W_{t,l}\Big) \\
&= \Big(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\Big)(T_{t,\max} - t) + \sigma_i\Big(\sum_{l=1}^{|J|} \sigma_{i,l}(W_{T_{t,\max},l} - W_{t,l})\Big) \\
&= \Big(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\Big)(T_{t,\max} - t) + \sum_{l=1}^{|J|}\Big[\sum_{j=t}^{T_{t,\max}-1} \sigma_i \sigma_{i,l}(W_{j+1,l} - W_{j,l}) + \sum_{j=0}^{t-1} 0(W_{j+1,l} - W_{j,l})\Big]
\end{aligned}$$

Dans le deuxième terme de la dernière ligne du développement précédent, chaque terme $(W_{j+1,l} - W_{j,l})$ est distribué selon une loi normale centrée réduite. En effet, selon l'hypothèse 3.2,$W_{j+1,i} - W_{j,i} \sim N(0, (j+1-j)1)$. De plus, comme les accroissements de $W_{t,i}$ sont indépendants, par hypothèse, les termes de la sommation sont indépendants. Comme les pro-

cessus $W_{t,i}$ sont indépendants, notre construction nous fournit $|J| \times T_{t,\max}$ variables aléatoires indépendantes distribuées selon une loi normale centrée réduite.

Cas $\ln(S_{s,i}) - \ln(S_{t,i})$ où $t < s < T_{t,\max}$

En faisant le même développement qu'au dernier cas on obtient

$$\begin{aligned}
\ln(S_{s,i}) - \ln(S_{t,i}) &= \Big(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\Big)(s-t) + \sigma_i\Big(\sum_{l=1}^{|J|}\sigma_{i,l}(W_{s,l} - W_{t,l})\Big) \\
&= \Big(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\Big)(s-t) + \\
&\sum_{l=1}^{|J|}\Big[\sum_{j=s}^{T_{t,\max}-1} 0(W_{j+1,l} - W_{j,l}) + \sum_{j=t}^{s-1}\sigma_i\sigma_{i,l}(W_{j+1,l} - W_{j,l}) + \sum_{j=0}^{t-1} 0(W_{j+1,l} - W_{j,l})\Big]
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut affirmer que $\boldsymbol{\mathcal{L}}_t$ suit une loi multinormale ■

Preuve de la proposition 3.2

Soit un τ une constante telle que $\tau > 0$. En utilisant la proposition A.2 on trouve que

$$\begin{aligned}
\ln(S_{t+\tau,i}) - \ln(S_{t,i}) &= \left(\ln(S_{0,i}) + \Big(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\Big)(t+\tau) + \sigma_i Z_{t+\tau,i}\right) - \left(\ln(S_{0,i}) + \Big(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\Big)t + \sigma_i Z_{t,i}\right) \\
&= \Big(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\Big)\tau + \sigma_i(Z_{t+\tau,i} - Z_{t,i})
\end{aligned}$$

Nous savons que $Z_{t,i}$ suit un mouvement brownien standard pour toutes les valeurs de i (proposition A.1), on en déduit que $\sigma_i(Z_{t+\tau,i} - Z_{t,i}) \sim N(0, \sigma_i^2\tau)\ \forall i$. Finalement, par l'additivité des lois gaussiennes on trouve que

$$\ln(S_{t+\tau,i}) - \ln(S_{t,i}) \sim N\left((\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2})\tau, \sigma_i^2\tau\right) ■$$

Preuve de la proposition 3.3

Dans le but de simplifier la notation, on pose C = COV$[\ln(S_{t+\tau_1,i}) - \ln(S_{t,i}), \ln(S_{t+\tau_2,i}) - \ln(S_{t,i})]$. Également, on remarque que selon la proposition A.2, le processus stochastique $\ln(S_{t,i})$ suit un mouvement brownien avec dérive. Ceci implique que les accroissements de $\ln(S_{t,i})$ sont stationnaires et indépendants (voir Lefebvre (2014) à la page 244).

Soit le cas où $\tau_2 > \tau_1$, en développant C à partir de la définition de la covariance, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{C} &= \mathrm{E}[(\ln(S_{t+\tau_1,i}) - \ln(S_{t,i}))(\ln(S_{t+\tau_2,i}) - \ln(S_{t,i}))] - \mathrm{E}[\ln(S_{t+\tau_1,i}) - \ln(S_{t,i})]\mathrm{E}[\ln(S_{t+\tau_2,i}) - \ln(S_{t,i})] \\
&= \mathrm{E}[(\ln(S_{t+\tau_1,i}) - \ln(S_{t,i}))(\ln(S_{t+\tau_2,i}) - \ln(S_{t,i}))] - \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)^2 \tau_1\tau_2 \\
&= \mathrm{E}[(\ln(S_{t+\tau_1,i}) - \ln(S_{t,i}))(\ln(S_{t+\tau_2,i}) - \ln(S_{t+\tau_1,i}) + \ln(S_{t+\tau_1,i}) - \ln(S_{t,i}))] - \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)^2 \tau_1\tau_2 \\
&= \mathrm{E}[(\ln(S_{t+\tau_1,i}) - \ln(S_{t,i}))^2] + \mathrm{E}[\ln(S_{t+\tau_2,i}) - \ln(S_{t+\tau_1,i})]\mathrm{E}[\ln(S_{t+\tau_1,i}) - \ln(S_{t,i})] - \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)^2 \tau_1\tau_2 \\
&= \mathrm{E}[(\ln(S_{t+\tau_1,i}) - \ln(S_{t,i}))^2] + \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)^2 \tau_1(\tau_2 - \tau_1) - \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)^2 \tau_1\tau_2 \\
&= \mathrm{VAR}[\ln(S_{t+\tau_1,i}) - \ln(S_{t,i})] - (\mathrm{E}[\ln(S_{t+\tau_1,i}) - \ln(S_{t,i})])^2 + \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)^2 \tau_1(\tau_2 - \tau_1) - \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)^2 \tau_1\tau_2 \\
&= \sigma_i^2\tau_1 - \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)^2 \tau_1^2 + \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)^2 \tau_1(\tau_2 - \tau_1) - \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)^2 \tau_1\tau_2 \\
&= \sigma_i^2\tau_1.
\end{aligned}$$

La deuxième, cinquième et septième étape du développement précédent sont obtenues avec la proposition 3.2. De plus, la quatrième étape est obtenue par la fait que les accroissements de $\ln(S_{t,i})$ sont indépendants.

En considérant le cas où $\tau_1 > \tau_2$, on voit facilement que

$$\mathrm{COV}[\ln(S_{t+\tau_1,i}) - \ln(S_{t,i}), \ln(S_{t+\tau_2,i}) - \ln(S_{t,i})] = \sigma_i^2\tau_2.$$

Ainsi, dans le cas général on trouve

$$\mathrm{COV}[\ln(S_{t+\tau_1,i}) - \ln(S_{t,i}), \ln(S_{t+\tau_2,i}) - \ln(S_{t,i})] = \sigma_i^2 \min(\tau_1, \tau_2) \blacksquare$$

Preuve de la proposition 3.4

Pour effectuer cette preuve, on trouve d'abord l'expression de $\mathrm{E}[Z_{t+\tau,i}Z_{t,j}]$ (voir l'hypothèse 3.2) où τ est une constante strictement positive et i et j appartiennent à $\{1,\ldots,|J|\}$.

En développant directement $\mathrm{E}[Z_{t+\tau,i}Z_{t,j}]$ on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[Z_{t+\tau,i}Z_{t,j}] &= \mathrm{E}\Big[\sum_{k=1}^{|J|}\sigma_{i,k}W_{t+\tau,k}\sum_{l=1}^{|J|}\sigma_{j,l}W_{t,l}\Big] \\
&= \sum_{k=1}^{|J|}\sum_{l=1}^{|J|}\mathrm{E}\Big[\sigma_{i,k}\sigma_{j,l}W_{t+\tau,k}W_{t,l}\Big] \\
&= \sum_{k=1}^{|J|}\sum_{l=1}^{|J|}\mathrm{E}\Big[\sigma_{i,k}\sigma_{j,l}(W_{t+\tau,k}-W_{t,k}+W_{t,k})W_{t,l}\Big] \\
&= \sum_{k=1}^{|J|}\sum_{l=1}^{|J|}\sigma_{i,k}\sigma_{j,l}\Big(\mathrm{E}[W_{t,l}]\mathrm{E}[W_{t+\tau,k}-W_{t,k}]+\mathrm{E}[W_{t,k}W_{t,l}]\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{|J|}\sum_{l=1}^{|J|}\sigma_{i,k}\sigma_{j,l}\mathrm{E}[W_{t,k}W_{t,l}] \\
&= \sum_{k=1}^{|J|}\sigma_{i,k}\sigma_{j,k}\mathrm{E}[W_{t,k}^2] \\
&= \sum_{k=1}^{|J|}\sigma_{i,k}\sigma_{j,k}(\mathrm{VAR}[W_{t,k}]-(\mathrm{E}[W_{t,k}])^2) \\
&= \sum_{k=1}^{|J|}\sigma_{i,k}\sigma_{j,k}t.
\end{aligned}$$

La quatrième ligne est obtenue en exploitant le fait que les accroissements de mouvement brownien standard sont indépendants (voir Lefebvre (2014) p.234). Les cinquième et septième ligne découlent du fait que la moyenne d'une mouvement brownien standard est égale à 0, et la variance à t.

Pour simplifier le reste du développement on pose $\mathrm{C} = \mathrm{COV}[\ln(S_{t+\tau_1,i})-\ln(S_{t,i}),\ln(S_{t+\tau_2,j})-\ln(S_{t,j})]$.

Maintenant, soit la situation où $\tau_2 > \tau_1$. En prenant la définition de la covariance on obtient

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C} &= \mathrm{E}[(\ln(S_{t+\tau_1,i}) - \ln(S_{t,i}))(\ln(S_{t+\tau_2,j}) - \ln(S_{t,j}))] - \mathrm{E}[\ln(S_{t+\tau_1,i}) - \ln(S_{t,i})]\mathrm{E}[\ln(S_{t+\tau_2,j}) - \ln(S_{t,j})] \\
&= \mathrm{E}\Big[\Big(\Big(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\Big)\tau_1 + \sigma_i(Z_{t+\tau_1,i} - Z_{t,i})\Big)\Big(\Big(\mu_j - \frac{\sigma_j^2}{2}\Big)\tau_2 + \sigma_j(Z_{t+\tau_2,j} - Z_{t,j})\Big)\Big] \\
&- \Big(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\Big)\Big(\mu_j - \frac{\sigma_j^2}{2}\Big)\tau_1\tau_2 \\
&= \sigma_i\sigma_j(\mathrm{E}[Z_{t+\tau_1,i}Z_{t+\tau_2,j}] - \mathrm{E}[Z_{t+\tau_1,i}Z_{t,j}] - \mathrm{E}[Z_{t+\tau_2,i}Z_{t,j}] + \mathrm{E}[Z_{t,i}Z_{t,j}]) \\
&= \sigma_i\sigma_j \sum_{k=1}^{|J|} \sigma_{i,k}\sigma_{j,k}\tau_1
\end{aligned}
$$

La deuxième ligne est obtenue avec la proposition A.2, la troisième ligne est obtenue en utilisant le fait que la moyenne d'un mouvement brownien standard est égale à 0 et que ses accroissements sont indépendants. Finalement, la quatrième ligne est obtenue avec le fait que $\mathrm{E}[Z_{t+\tau,i}Z_{t,j}] = \sum_{k=1}^{|J|} \sigma_{i,k}\sigma_{j,k}t$ pour tout $\tau > 0$.

En inversant la condition initiale tel que $\tau_2 < \tau_1$, l'équation devient

$$\mathrm{COV}[\ln(S_{t+\tau_1,i}) - \ln(S_{t,i}), \ln(S_{t+\tau_2,j}) - \ln(S_{t,j})] = \sigma_i\sigma_j \sum_{k=1}^{|J|} \sigma_{i,k}\sigma_{j,k}\tau_2.$$

Donc, dans le cas général on obtient

$$\mathrm{COV}[\ln(S_{t+\tau_1,i}) - \ln(S_{t,i}), \ln(S_{t+\tau_2,j}) - \ln(S_{t,j})] = \sigma_i\sigma_j \sum_{k=1}^{|J|} \sigma_{i,k}\sigma_{j,k} \min(\tau_1, \tau_2) \blacksquare$$

ANNEXE B DONNÉES

Données

À la figure B.1 on peut voir l'évolution du *yield* des *US 4-week T-Bill* pendant la période allant de 2003 à 2014.

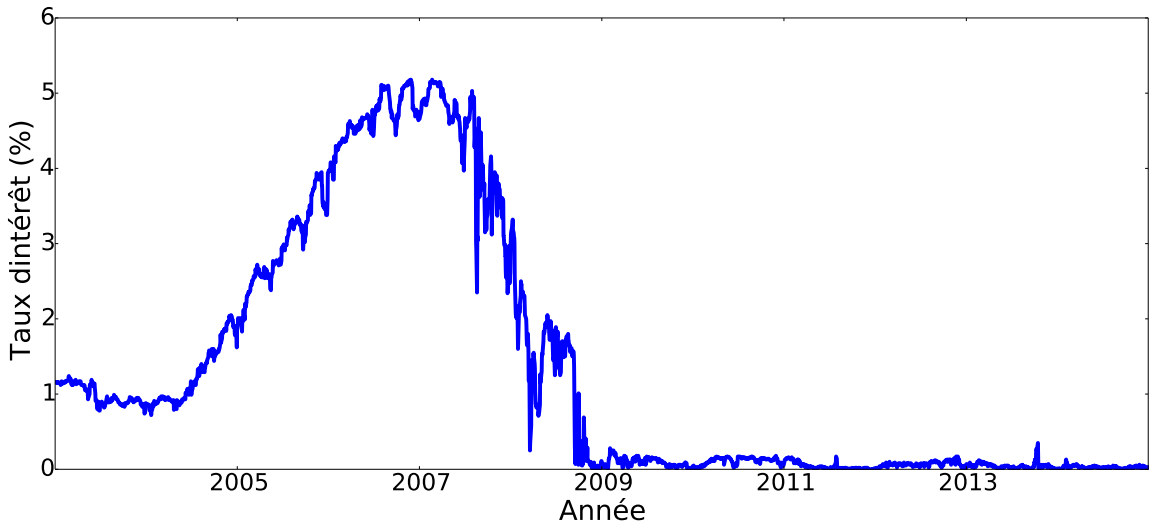


Figure B.1 *Yield* annualisé des *US 4-week T-Bill* pendant la période 2003-2014.