

Titre: Étude numérique de l'influence du champ magnétique auto-induit dans les arcs électriques de disjoncteurs
Title:

Auteur: Hervé Pellegrin
Author:

Date: 1995

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Pellegrin, H. (1995). Étude numérique de l'influence du champ magnétique auto-induit dans les arcs électriques de disjoncteurs [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/31851/>
Citation:

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/31851/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Jean-Yves Trépanier
Advisors:

Programme: Non spécifié
Program:

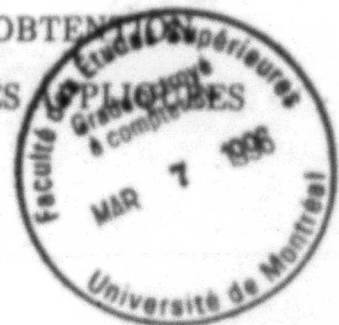
UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉTUDE NUMÉRIQUE DE L' INFLUENCE
DU CHAMP MAGNÉTIQUE AUTO-INDUIT DANS LES ARCS
ÉLECTRIQUES DE DISJONCTEURS

PELLEGRIN HERVÉ
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENIR
DU DIPLOME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES
(GÉNIE MÉCANIQUE)

OCTOBRE 1995



©Hervé Pellegrin, 1995.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Ce mémoire intitulé:

ÉTUDE NUMÉRIQUE DE L'INFLUENCE
DU CHAMP MAGNÉTIQUE AUTO-INDUIT DANS LES ARCS
ÉLECTRIQUES DE DISJONCTEURS

présenté par: Pellegrin Hervé

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès Sciences Appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. VASSEUR Patrick, Ph.D., président

M. TRÉPANIÉRIE Jean-Yves, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. CAMARERO Ricardo, Ph.D., membre

À mes parents, Bernard et Edith,
à mes frères et à ma soeur Anne,
pour leur amour, leur amitié, leur tendresse.

"Science sans conscience n'est que ruine de l'âme", comme disait Rabelais.

Remerciements

Je désire remercier en premier lieu Jean Yves Trépanier, Directeur de recherche, pour sa gentillesse, sa disponibilité, son support et la confiance qu'il m'a témoigné en m'offrant l'opportunité de réaliser cette maîtrise.

Je tiens aussi à remercier Ricardo Camarero pour avoir présenté l'essentiel de cette thèse au "11th International Conference on Gas Discharges and Their Applications" au Japon en septembre dernier, ainsi que Stéphane Halé et mes parents pour avoir pris le temps de lire ce mémoire et de m'en souligner les points les plus obscurs

Je voudrais aussi mentionner Jean-Pierre Petit, Directeur au CNRS à Marseille pour m'avoir initié à la Magnétohydrodynamique.

Merci également à Marcelo Reggio et Xudong Zhang pour leurs judicieux conseils, ainsi que les étudiants du bureau: Samir Rida, André Hess, Marie-Isabelle, François Beaumont, Katia, Pascal, François Côté, Stéphane Rouillon.

Finalement, je tiens à remercier ma mère et mon père, Anne, Jérôme, Pascal et Philippe pour leur support, leur patience et leur tendresse. Je voudrais également

mentionner que le support technique de mon père m'a été très précieux. Grâce à ses quinze années d'expérience dans l'appareillage de coupure moyenne et haute tension, il a pu m'aider à éclaircir certains points nébuleux dans ce domaine.

Résumé

La simulation numérique de l'interaction arc-fluide dans les disjoncteurs haute tension a fait des progrès extraordinaires ces dix dernières années. Confrontées à des coûts de recherche et de développement de plus en plus élevés, les industries concernées réduisent le nombre d'essais expérimentaux et se tournent vers des modèles numériques pour simuler ces mêmes essais. Cependant, à cause de la complexité du phénomène arc-fluide et du temps de calcul élevé, la modélisation numérique se limite à reproduire les principaux phénomènes physiques. Par exemple, la compressibilité de l'écoulement, la radiation et les phénomènes électromagnétiques.

Ces dernières années, de grand progrès ont été réalisés dans ce domaine de recherche. Zhang et al. [1] ont développé un modèle basé sur la forme axisymétrique des équations d'Euler. Un terme source qui tient compte de l'effet Joule et de la radiation a été rajouté dans l'équation d'énergie. Leur modèle d'arc et de radiation est capable de résoudre l'aspect bidimensionnel du champ électrique ainsi que n'importe quelle forme complexe d'arc électrique.

Ce mémoire présente l'effet du champ magnétique auto-induit dans les arcs de type disjoncteur traversés par des courants électriques élevés. Cette étude a été

motivée par les résultats expérimentaux obtenus par Jones et al. [2] sur ce type d'arc en mesurant devant la cathode le surplus de pression pour des courants allant de 20 à 100 kA. Leurs mesures indiquent que l'effet de la compression magnétique n'est pas négligeable à fort courant devant la cathode.

Ainsi le but de ce mémoire est de présenter un schéma numérique basé sur les volumes finis capables de calculer le champ magnétique auto-induit. Une fois la distribution du champ magnétique trouvée, les forces de Lorentz sont calculées et intégrées dans le terme source des équations du mouvement. Ce modèle est validé à partir d'une colonne de plasma unidimensionnelle. Les calculs numériques ont été réalisés sur la géométrie de Jones et al. [2] dans laquelle la simulation d'un arc traversé par un courant alternatif de 32 kA est effectuée.

L'analyse des résultats a démontré que les forces de Lorentz jouent un rôle essentiel sur la géométrie de l'arc. L'effet constricteur de ces forces stabilise la structure de l'arc devant la cathode. Ces calculs ont également mis en évidence un phénomène numérique que nous avons nommé "l'effet bulle". L'origine de ce phénomène reste encore nébuleux. Le calcul de l'arc révèle que cet effet est très prononcé lorsque les forces de Lorentz sont absentes du modèle d'arc.

Abstract

The study of circuit-breaker arc flow interaction using computational fluid dynamics (CFD) has made extensive progress in this past decade. Confronted with increasing cost related factors, the concerned industries are reducing experimental circuit-breaker investigation and are turning to CFD for the simulation of cold and plasma flows. However, due to the complex nature associated to arc-flow physics and the associated computing time, the development of a CFD approach is limited to the modelization of the main physical features of the arc-flow interaction. This includes the flow of compressible gas, the radiation transport and the electromagnetic interactions.

Extensive development in this area of research has been done in the last years. A perfect gas arc-flow model [1] based on the axisymmetric Euler equations for compressible flow including an energy source term which takes into account ohmic heating and radiation transport has been developed. The arc and radiation model can handle 2-D electric field effects and complicated arc shapes.

In the present thesis, investigation concerning the effect of the self-induced magnetic pressure on the flow field are presented. The motivation for this study is given

by the experimental results of Jones et al. [2] on high current high pressure arcs where the self-induced magnetic pressure was measured on the cathode tip for currents ranging from 20 to 100 kA. Their measurements indicate that the self-induced magnetic pressure is not negligible in high current arc.

Hence the purpose of this paper is to present a finite volume numerical scheme that solves the self-induced magnetic field which is purely azimuthal. Once the magnetic field is calculated, the Lorentz force is computed and included in the momentum equation source term. The model has been validated on a cylindrical plasma column. Computation results of a 32 kA AC current arc is presented for Jones et al.'s [2] geometry.

Analysis of these results show that these forces play an essential role on the arc geometry. Their constricting effect have a stabilising role on the arc structure in front of the cathode. These computation have also highlighted a numerical phenomena which we have called the "bubble effect". The origin of this phenomena is not well understood. The "bubble effect" destroys the arc structure. Arc calculation using the Lorentz forces have shown to minimise the appearance of these bubbles and thus helped maintained a coherent arc structure.

Table des matières

Dédicace	iv
Remerciements	v
Résumé	vii
Abstract	ix
Liste des figures	xv
Liste des annexes	xxi
Liste des annexes	xxi
Introduction	1
Chapitre 1	
Pourquoi calculer le champ magnétique auto-induit ?	9
1.1 Qu'est-ce un arc électrique ?	10
1.2 Les différents-types d'arcs	10
1.2.1 Arcs dans le vide	11
1.2.2 Arcs électriques haute pression	12
1.3 Quand calculer le champ magnétique auto-induit dans les arcs électriques de type disjoncteur ?	14
1.3.1 Arcs électriques à courants faibles ($I < 10kA$)	16
1.3.2 Arcs à courants élevés ($I > 10kA$)	16

1.4	Modélisation numérique de l'arc électrique	17
Chapitre 2		
	La Magnétohydrodynamique appliquée aux disjoncteurs	20
2.1	Équations d'Euler	22
2.1.1	Forme adimensionnelle	24
2.2	Équations de Maxwell	25
2.2.1	Équation du champ magnétique auto-induit	29
2.2.2	Conditions frontières du champ magnétique	30
2.2.2.1	Continuité de la composante normale de \vec{B}	30
2.2.2.2	Continuité de la composante tangentielle de \vec{H}	33
2.2.2.3	Valeur de l'intensité du champ magnétique à l'infini	35
2.2.2.4	Solution analytique du champ magnétique	38
2.2.3	Modèle de conduction électrique utilisé	39
2.2.4	Conditions frontières du potentiel électrique	40
2.2.4.1	Continuité de la composante normale de \vec{J}	40
2.2.4.2	Continuité de la composante tangentielle de \vec{E}	41
2.2.5	Couplage faible entre \vec{U} et \vec{B} : convection magnétique négligée	43
2.2.6	Autres méthodes de calcul du champ magnétique	44
2.3	Calcul de la force de Lorentz	46
2.3.1	Effet "Z-Pinch"	47
2.3.2	Effet de la force de Lorentz dans un arc de type disjoncteur	48
Chapitre 3		
	Résolution des équations de la Magnétohydrodynamique	50
3.1	Résolution des équations d'Euler	50
3.1.1	Discrétisation des équations d'Euler	50

3.1.2	Schéma de ROE	51
3.1.3	Calcul du terme source S	54
3.1.3.1	Effet Joule	54
3.1.3.2	Modèle de radiation	55
3.2	Résolution des équations de Maxwell	58
3.2.1	Discretisation de l'équation de Laplace	58
3.2.2	Discretisation de l'équation de Poisson	64
3.3	Technique de résolution de l'équation de Laplace et de Poisson	66
3.3.1	Propriétés des matrices A_e et A_m	66
3.3.2	Stockage des matrices A_e et A_m par la méthode CRS	71
3.3.3	Résolution des matrices A_e et A_m par la méthode du gradient conjugué	71
 Chapitre 4		
	Résultats et discussion	72
4.1	Validation des équations de diffusion	72
4.1.1	Equation de Laplace	72
4.1.1.1	Champ et potentiel électrique entre deux électrodes coaxiales	73
4.1.1.2	Champ et potentiel électrique entre deux électrodes axisymétriques et parallèles.	77
4.1.2	Equation de Poisson	83
4.1.2.1	Champ magnétique dans une colonne de plasma uni- dimensionnelle	83
4.1.2.2	Symétrie du champ magnétique produit par une décharge entre deux électrodes coaxiales	87

4.2	Cas test Hermann (1974)	90
4.2.1	Description de l'expérience de Hermann et al.	90
4.2.2	Validation de la pression sur l'axe de symétrie	93
4.3	Cas test Jones (1982)	100
4.3.1	Description de l'arc de Jones et al. (1982)	101
4.3.2	Conclusions de l'expérience de Jones et al.	103
4.3.3	Validation de la pression devant la cathode	105
4.3.4	Effets des forces de Lorentz sur les caractéristiques de l'arc	108
4.4	Convection magnétique négligeable	109
	Conclusion	145
	Références	147
	Annexes	153

Liste des figures

2.1	Volume englobant deux régions à perméabilité magnétique différente.	31
2.2	Continuité normale de la densité magnétique.	33
2.3	Courbe fermée passant par deux régions à perméabilité magnétique différente.	34
2.4	Continuité tangentielle du champ magnétique	35
2.5	Valeurs frontières de l'intensité du champ magnétique pour un arc de géométrie complexe.	36
2.6	Valeurs frontières de l'intensité du champ magnétique pour un arc concentrique	37
2.7	Valeur frontière de l'intensité du champ magnétique pour un arc plein cylindrique	37
2.8	Colonne de plasma unidimensionnelle	38
2.9	Continuité normale de la densité de courant.	41
2.10	Continuité tangentielle du champ électrique	42
2.11	Condition frontière du potentiel électrique	43
2.12	Action de la force de Lorentz dans un arc de type disjoncteur . . .	49
3.1	Subdivision de l'arc pour le calcul de la radiation.	56

3.2	Stockage du potentiel électrique ϕ aux sommets de chaque cellule primaire.	60
3.3	Illustration d'une cellule primaire et secondaire en coordonnées cylindriques.	60
3.4	Maillage de départ pour la construction des matrices A_e et A_m . . .	68
3.5	Représentation de la matrice A_e symétrique et définie positive. . .	69
3.6	Représentation de la matrice A_m symétrique et définie positive. . .	70
4.1	Conditions frontières appliquées sur ϕ entre deux électrodes coaxiales.	74
4.2	Maillage utilisé pour ϕ entre deux électrodes coaxiales.	74
4.3	Comparaison entre les valeurs numériques et analytiques de ϕ et E_y entre deux électrodes coaxiales.	75
4.4	Erreur relative sur ϕ et E_y entre deux électrodes coaxiales.	75
4.5	Densité de courant J_r entre deux électrodes coaxiales.	76
4.6	Equipotentielle entre deux électrodes coaxiales.	76
4.7	Conditions frontières sur ϕ entre deux électrodes axisymétriques. .	78
4.8	Maillage utilisé pour ϕ entre deux électrodes axisymétriques. . . .	79
4.9	Comparaison entre les valeurs numériques et analytiques de ϕ et E_x entre deux électrodes axisymétriques.	79
4.10	Erreur relative sur ϕ entre deux électrodes axisymétriques.	80
4.11	Erreur relative sur E_x entre deux électrodes axisymétriques.	80
4.12	Equipotentielle entre deux électrodes axisymétriques séparées par un milieu de conductivité électrique homogène.	81
4.13	Equipotentielle entre deux électrodes axisymétriques séparées par un milieu de conductivité électrique non-homogène.	81

4.14	Densité de courant entre deux électrodes axisymétriques séparées par un milieu de conductivité électrique non-homogène.	82
4.15	Conditions frontières appliquées sur H_θ entre deux électrodes axisymétriques.	84
4.16	Comparaison entre les valeurs numériques et analytiques de H_θ entre deux électrodes axisymétriques.	85
4.17	Erreur relative sur H_θ entre deux électrodes axisymétriques.	85
4.18	Isolignes de H_θ entre deux électrodes axisymétriques.	86
4.19	Conditions frontières appliquées sur H_θ autour des électrodes coaxiales.	88
4.20	Maillage à l'intérieur et à l'extérieur des électrodes coaxiales	88
4.21	Symétrie de H_θ avec condition de Neumann.	89
4.22	Symétrie de H_θ avec condition de Dirichlet.	89
4.23	Géométrie de la tuyère Hermann	95
4.24	Conditions frontières appliquées aux fluides, au potentiel électrique et au champ magnétique.	95
4.25	Maillage utilisé pour le calcul de l'arc de Hermann et al.	96
4.26	Validation de la pression dans l'arc de Hermann et al.	96
4.27	Champ magnétique dans l'arc de Hermann et al.	97
4.28	Distribution de la force de Lorentz dans l'arc de Hermann et al.	98
4.29	Force de Lorentz dans la région du point de stagnation dans l'arc de Hermann et al.	98
4.30	Isoligne de température dans l'arc de Hermann et al. sans MHD.	99
4.31	Isoligne de température dans l'arc de Hermann et al. avec MHD.	99
4.32	Géométrie de la tuyère Jones.	112

4.33 Conditions frontières appliquées aux fluides, au potentiel électrique et au champ magnétique.	113
4.34 Maillage utilisé pour le calcul de l'arc de Jones et al.	114
4.35 Validation de la pression devant la cathode dans l'arc de Jones et al.	115
4.36 Autres mesures de pression disponible pour d'autres niveaux d'ampérage (Jones et al. 1982).	116
4.37 Oscillogramme de pression donnant le courant, le voltage et la pression dans le cas d'une décharge dans l'air; $I = 33.5kA$, $P_m =$ pression magnétique, $p =$ pression dans le plenum.	117
4.38 Distribution de la pression et du champ magnétique dans la région inter-électrodes; $t = 1.5ms$ et $I \approx 20kA$	118
4.39 Distribution de la pression et du champ magnétique dans la région inter-électrodes; $t = 1.8ms$ et $I \approx 23kA$	119
4.40 Distribution de la pression et du champ magnétique dans la région inter-électrodes; $t = 2.2ms$ et $I \approx 26.5kA$	120
4.41 Distribution de la pression et du champ magnétique dans la région inter-électrodes; $t = 2.4ms$ et $I \approx 28kA$	121
4.42 Distribution de la pression et du champ magnétique dans la région inter-électrodes; $t = 2.7ms$ et $I \approx 30kA$	122
4.43 Distribution de la pression et du champ magnétique dans la région inter-électrodes; $t = 3.6ms$ et $I \approx 32kA$	123
4.44 Distribution de la pression et du champ magnétique dans la région inter-électrodes; $t = 4.3ms$ et $I \approx 30kA$	124
4.45 Distribution de la pression et du champ magnétique dans la région inter-électrodes; $t = 4.7ms$ et $I \approx 28kA$	125

4.46	Distribution de la pression et du champ magnétique dans la région inter-électrodes; $t = 4.9ms$ et $I \approx 26.5kA$	126
4.47	Distribution de la pression et du champ magnétique dans la région inter-électrodes; $t = 5.3ms$ et $I \approx 23kA$	127
4.48	Distribution de la pression et du champ magnétique dans la région inter-électrodes; $t = 5.6ms$ et $I \approx 20kA$	128
4.49	Puissance de l'arc avec et sans force de Lorentz.	129
4.50	Distribution de la température avec et sans MHD dans la région inter-électrodes; $t = 1.5ms$ et $I \approx 20kA$	130
4.51	Distribution de la température avec et sans MHD dans la région inter-électrodes; $t = 1.8ms$ et $I \approx 23kA$	131
4.52	Distribution de la température avec et sans MHD dans la région inter-électrodes; $t = 2.2ms$ et $I \approx 26.5kA$	132
4.53	Distribution de la température avec et sans MHD dans la région inter-électrodes; $t = 2.4ms$ et $I \approx 28kA$	133
4.54	Distribution de la température avec et sans MHD dans la région inter-électrodes; $t = 2.7ms$ et $I \approx 30kA$	134
4.55	Distribution de la température avec et sans MHD dans la région inter-électrodes; $t = 3.6ms$ et $I \approx 32kA$	135
4.56	Distribution de la température avec et sans MHD dans la région inter-électrodes; $t = 4.3ms$ et $I \approx 30kA$	136
4.57	Distribution de la température avec et sans MHD dans la région inter-électrodes; $t = 4.7ms$ et $I \approx 28kA$	137
4.58	Distribution de la température avec et sans MHD dans la région inter-électrodes; $t = 4.9ms$ et $I \approx 26.5kA$	138

4.59	Distribution de la température avec et sans MHD dans la région inter- électrodes; $t = 5.3ms$ et $I \approx 23kA$	139
4.60	Distribution de la température avec et sans MHD dans la région inter- électrodes; $t = 5.6ms$ et $I \approx 20kA$	140
4.61	Historique des différents nombres de Reynolds magnétiques, Rm_1 , Rm_2 et Rm	141
4.62	Historique des valeurs maximales de la densité de courant J_{ohmi} et la convection magnétique J_{conv}	141
4.63	Illustration des lignes de courant entre les électrodes et mise en évidence d'une région chaude en aval de l'anode.	142
4.64	Intensité de la densité de courant ohmique à 2000 A.	143
4.65	Intensité de la convection magnétique à 2000 A.	144

Liste des annexes

A	Méthode du gradient conjugué	153
A.1	Méthode du gradient conjugué	154
A.1.1	Méthode du gradient	154
A.1.2	Méthode du gradient conjugué	156
A.1.3	Préconditionnement	156
A.1.4	Algorithme et programmation	158

Introduction

L'interruption d'un courant électrique constitue un problème majeur de technologie à cause de la complexité du phénomène. Jusqu'à présent le seul moyen utilisé de comprendre ce phénomène reposait essentiellement sur l'expérimentation et le savoir-faire.

Néanmoins, ces quinze dernières années est venue se rajouter à la liste des solutions de compréhension de l'arc électrique, la modélisation numérique. Le progrès apporté par la rapidité de calcul des ordinateurs a ouvert une autre voie possible dans l'étude de ce phénomène. En effet, les ingénieurs et les chercheurs sont capables de modéliser et simuler le phénomène d'arc électrique en se servant d'outils informatiques très puissants et de techniques numériques les plus récentes. Par exemple, le logiciel MC3, qui est le fruit d'un développement fait par le groupe MIAO de l'École Polytechnique de Montréal et GEC ALSTHOM TD [3], permet de calculer à la fois le soufflage dans la chambre du disjoncteur, le champ électrique créé par le rétablissement de tension et le critère de claquage $\frac{E}{N}$.

En outre, la version la plus récente de ce logiciel comporte maintenant un modèle d'arc 2D capable de calculer les caractéristiques et les performances d'un

arc électrique de type disjoncteur.

Ce mémoire a comme objectif d'exploiter ce nouvel outil en intégrant à ce modèle d'arc un phénomène physique jusqu'à présent négligé dans ce type d'arc: l'effet du champ magnétique auto-induit. Cependant, il est nécessaire avant tout de présenter la fonction de l'arc électrique dans l'appareillages de coupure.

Rôle de l'organe de coupure

Lorsque un réseau électrique subit une surcharge en courant, il est important de pouvoir intervenir le plus rapidement possible dans le but de protéger les équipements du réseau. Les disjoncteurs sont des appareils électromécaniques ayant pour but l'interruption d'un courant électrique alternatif ou continu. Il se positionne entre la source de courant et l'équipement à protéger de façon à couper le courant traversant le réseau en cas de surcharge. La technique d'interruption de courant est appelée à répondre à un grand éventail d'applications industrielles et à donner naissance à toute une famille d'appareillage de coupure.

Définition d'un contacteur et historique du disjoncteur

Le contacteur est un organe de coupure qui fonctionne à partir d'ordre donné par un contact extérieur. Le disjoncteur est un contacteur qui est associé à un organe de protection qui, lorsqu'il fait défaut, est déclenché automatiquement et fait ouvrir

le contacteur au-delà du seuil pour lequel il a été réglé.

L'évolution du disjoncteur moyenne et haute tension a connu de grands progrès ces quarante dernières années et se résume en deux points. D'une part, l'apparition du SF6 dans les années 50 comme agent d'isolation et d'extinction d'arc. Grâce à ses excellentes propriétés chimiques, diélectriques et thermiques, le SF6 a remplacé l'huile et l'air. D'autre part, la réduction des éléments de coupure et l'augmentation de la compacité de l'ensemble de l'appareillage disjoncteur ont connu une nette amélioration pour des performances équivalentes avec la mise en service des disjoncteurs auto-pneumatiques et plus récemment des disjoncteurs à expansion thermique.

Deux phases d'extinctions dans les disjoncteurs

Le principe de fonctionnement du disjoncteur consiste à séparer deux électrodes par lesquelles passent le courant électrique du réseau. Une fois la surcharge détectée, les électrodes se séparent et un arc électrique se forme. Le courant électrique continue à passer en se frayant un passage dans une colonne de plasma. En soufflant un gaz haute pression sur l'arc électrique, celui-ci peut être éteint. Une fois l'arc éteint, le gaz refroidissant entre les deux électrodes, retrouve sa rigidité diélectrique. L'extinction de l'arc est réalisable lorsque le courant du réseau passe par zéro. A cet instant, la colonne de plasma se refroidit rapidement et la résistance de l'arc augmente rapidement. Si le gaz ne retrouve pas assez rapidement sa rigidité diélectrique, le réarmorage de l'arc survient du fait de l'apparition de la tension de rétablissement aux bornes des deux électrodes. En résumé, le disjoncteur doit être conçu pour répondre à deux critères essentiels: extinction de l'arc et résistance au réarmorage

de l'arc après extinction.

Notre intérêt sur l'étude des disjoncteurs portera sur la première phase d'extinction. Comme il a été mentionné, cette phase est caractérisée par la formation d'un arc électrique dans lequel des courants de haut ampérage sont rencontrés et peuvent atteindre jusqu'à 70 kA en pratique. Pour ces arcs électriques, les effets du champ magnétique auto-induit sont méconnus et le résultat de cette recherche permettra de répondre aux questions suivantes:

- Est-ce que la modélisation des arcs électriques de type disjoncteur doit inclure les forces de Lorentz ?
- A partir de quel niveau de courant ces forces deviennent-elles importantes ?
- Quelles sont les caractéristiques de l'arc qui sont les plus affectées par les forces de Lorentz ?

Expériences d'Oersted (1820) et de Lorentz (1880)

Afin d'introduire la notion de compression magnétique dans les arcs électriques à fort courant de type disjoncteur, il est nécessaire de reprendre la description d'expériences faites le siècle dernier mettant en évidence le champ magnétique auto-induit par un courant électrique et la force de Lorentz résultant du couplage entre ce courant électrique et le champ magnétique auto-induit.

En 1820, Oersted met en évidence au moyen d'une boussole au voisinage d'un conducteur parcouru par un courant I , un champ magnétique H dont les lignes de

force sont des cercles contenus dans un plan perpendiculaire au courant et centrés sur le conducteur. Le champ est proportionnel à l'intensité du courant électrique qui le traverse et inversement proportionnel à la distance le séparant de la surface du conducteur.

En 1880 Lorentz effectua une expérience à l'aide de deux fils rectilignes et parallèles suspendus verticalement. Les extrémités inférieures des deux fils baignent dans un liquide électriquement conducteur (mercure) et les extrémités supérieures sont fixées librement de façon à permettre leur rotation dans le plan formé par les deux tiges. Lorsqu'un courant est appliqué aux deux tiges deux phénomènes sont observés: deux courants rectilignes, parallèles et de même sens, attirent les deux tiges l'une vers l'autre et deux courants de sens contraire les repoussent. Lorentz met en évidence un champ de force proportionnelle au courant électrique et au champ magnétique induit. Le champ de force agissant sur la première tige est créé grâce à l'interaction de son courant électrique avec le champ magnétique de la deuxième tige et réciproquement.

L'expérience décrite précédemment soulève un problème dans le cas d'une tige isolée parcourue par un courant électrique: pourquoi la tige n'est-elle pas affectée par son propre champ magnétique? La réponse à cette question permet d'introduire la notion de compression magnétique dans les arcs électriques. En fait, dans le cas d'une tige métallique, l'effet du champ magnétique auto-induit ne peut pas se faire ressentir car les forces induites dirigées radialement vers l'axe de symétrie de la tige ne sont pas assez grandes pour comprimer un métal.

Mais imaginons que le milieu conducteur que représente la tige devienne un matériau facilement compressible. Si la force de Lorentz est assez grande, elle com-

primera radialement la tige. Par conséquent, si un courant suffisamment grand traverse un plasma, les forces de Lorentz créées dans la colonne de plasma peuvent avoir une influence sur celle-ci.

Expérience de Maecker (1954)

Les premières recherches qui mettent en évidence les effets du champ magnétique auto-induit sont celles de Maecker [4]. Motivé par les observations de [5] et [6] sur les arcs électriques du type "free burning arc", Maecker montre que les jets de plasma observés sont dus aux forces de Lorentz créées par l'interaction du champ magnétique auto-induit avec la densité de courant.

Il étudie l'intensité de l'accélération de ces jets pour des courants allant de 0 à 30 ampères et conclut qu'ils ont lieu devant les deux électrodes, zone à interaction maximale entre le champ magnétique auto-induit et la densité de courant.

Au Chapitre 1, nous présenterons deux études expérimentales qui concernent l'effet du champ magnétique sur des arcs haute pression stabilisés par convection axiale, donc de type disjoncteur. Le dernier des deux travaux constituera le pilier de cette recherche.

Structure du mémoire

Etant donné le coût élevé associé à une méthode d'analyse de type expérimental, il est préférable de se tourner vers l'outil informatique afin de comprendre l'effet

du champ magnétique auto-induit. Cette recherche est donc consacrée à la mise en oeuvre d'un résolveur numérique permettant de calculer le champ magnétique auto-induit dans un arc électrique de type disjoncteur. Le présent mémoire est composé de quatre parties.

Le premier chapitre est consacré à donner une description détaillée des différents types d'arc électrique pour montrer dans quel contexte se situe l'arc électrique de type disjoncteur et les raisons qui amènent à étudier l'effet du champ magnétique auto-induit dans ce type d'arc. Ensuite, nous donnons les modèles numériques existants pour la modélisation des arcs de type disjoncteur et une description du modèle d'arc utilisé dans ce mémoire. Ainsi à partir de ce chapitre, la formulation du problème est faite.

Le deuxième chapitre présente les approximations apportées à notre modèle d'arc, entre autre celles sur les équations du mouvement et celles sur les équations de Maxwell. Nous présentons l'équation du champ magnétique auto-induit basée sur une formulation empruntée à la Magnétohydrodynamique et les conditions frontières appliquées sur la densité de courant et le champ magnétique. Finalement, nous donnons une explication qualitative de l'effet des forces de Lorentz sur la colonne de plasma, en outre l'effet "Z-pinch".

Le troisième chapitre présente le schéma numérique employé. La densité de courant électrique est calculée en résolvant l'équation de Laplace pour le potentiel électrique. Le champ magnétique est calculé en résolvant l'équation de Poisson pour la composante azimutale du champ magnétique. Ces équations seront calculées implicitement et discrétisées par la méthode des volumes finis sur un maillage triangulaire. Nous présentons aussi le solveur utilisé pour la résolution des équations

d'Euler et leur discrétisation sur un maillage non-structuré.

Enfin le chapitre 4 présente la validation du schéma ainsi que des résultats numériques comparés à des résultats expérimentaux. Deux arcs de type disjoncteur sont étudiés, un arc CC à faible courant et un arc CA à fort courant.

Chapitre 1

Pourquoi calculer le champ magnétique auto-induit ?

Afin d'étudier l'effet du champ magnétique auto-induit dans les arcs de type disjoncteur, il faut situer ce type d'arc dans l'ensemble des arcs existants. En premier lieu, nous donnons une définition générale des arcs électriques accompagnée d'une classification basée sur la pression dans laquelle l'arc évolue. La démarche suivante consiste à introduire le type d'arc électrique étudié, c.a.d. les arcs de type disjoncteur et les raisons qui poussent à étudier l'effet du champ magnétique auto-induit dans ce type d'arc. A partir de la classification, nous identifions à quelle famille l'arc de type disjoncteur appartient. Pour finir, nous donnons une revue des méthodes numériques utilisées dans la modélisation numérique des arcs de type disjoncteur.

1.1 Qu'est-ce un arc électrique ?

Lucien Siffroi [7] définit l'arc électrique de la manière suivante:

“La colonne d'arc est donc un plasma non homogène où les courants électroniques et ioniques circulent, en sens inverse, dans un espace d'autant moins résistant que la température est élevée. On peut l'assimiler à un corps conducteur cylindrique chauffé par effet Joule et dissipant l'énergie par conduction calorifique et rayonnement”.

1.2 Les différents types d'arcs

L'arc électrique est composé de trois régions, celles délimitées respectivement par la cathode et l'anode et celle occupée par le plasma constituant la colonne de la décharge. L'arc électrique se distingue des autres types de décharge électrique dans la mesure où certaines régions de l'arc sont traversées par des densités de courant élevées. Le plasma constituant la colonne de la décharge peut être, soit de type collisionnel, soit de type non-collisionnel. Dans un plasma collisionnel, les températures des différentes espèces atteignent une valeur commune, ce qui n'est pas le cas pour un plasma non-collisionnel. Par conséquent, ces deux types de plasmas définissent deux cas possibles de décharge électrique; les arcs électriques brûlants à haute pression ($p > 1 \text{ atm}$) dont le plasma est de type collisionnel et les arcs électriques évoluant dans le vide dont le plasma est de type non-collisionnel.

L'arc électrique tire son énergie du courant électrique dissipé par effet Joule. La vitesse à laquelle cette énergie est introduite dans l'arc définit si l'arc est de

haute puissance ou de basse puissance. Plus la dissipation Joule est grande et plus nombreux sont les processus physiques qui évacuent cette puissance. A haute puissance, la radiation devient le mécanisme de transport d'énergie le plus important [8].

D'autres phénomènes prennent de l'importance lorsque la puissance de l'arc est élevée, entre autre les impuretés provenant de la fonte des électrodes et de l'ablation de l'enceinte. Selon le type d'impureté, la radiation peut être énormément affectée [9, 10]. Un autre phénomène important est celui du champ magnétique auto-induit. D'après Jones et al. [2] ce phénomène a une influence sur la colonne lorsque le courant traversant l'arc dépasse $10kA$.

1.2.1 Arcs dans le vide

Les propriétés physiques de ce type d'arc électrique sont fortement influencées par la cathode qui fournit les espèces chargées, les espèces neutres et les micro-particules provenant de la fonte des électrodes. Ces émanations prennent naissance à partir de tâches localisées sur la cathode. Les études expérimentales ont montré que la formation et le comportement de ces tâches dépendaient du matériau constituant la cathode et du courant de la décharge.

Pour de faible courant ($I < 1000A$), le plasma entre les deux électrodes est de type non-collisionnel et seule la cathode joue un rôle actif dans la production de particules. Pour des courants plus élevés, le plasma est complètement ionisé, de type collisionnel mais n'est pas en équilibre thermodynamique local ($T_{ion} \neq T_{electron}$). Si le courant de la décharge est assez élevé, l'anode devient également une source de

de production d'espèces chargées (ions positifs) et de microparticules.

Dans ce contexte, les équations de conservation pour les arcs haute pression ne sont pas valides pour les arcs basse pression. A cause de la complexité des phénomènes cathodiques, il est difficile de construire un modèle théorique décrivant avec satisfaction les décharges dans le vide [11].

1.2.2 Arcs électriques haute pression

Le comportement des arcs électriques haute pression dépend directement des propriétés physiques de la colonne de plasma qui la constitue [11]. Les électrodes ont un effet moins important car en pratique la longueur de la décharge est toujours plus grande que le diamètre des électrodes.

L'arc électrique de haute pression peut être divisé en deux catégories:

- arc axisymétrique,
- arc soufflé par un écoulement et un champ magnétique d'origine externe.

En général la disposition du soufflage dans la deuxième catégorie d'arc est orthogonale à l'axe de symétrie.

Dans le cas des arcs axisymétriques, le confinement est dans certains cas imposé par des parois latérales, dans quel cas le comportement de ces arcs est dicté par les processus d'échange thermique dans la direction radiale (ce type d'arc est connu sous le nom de "Wall-stabilised arc").

Un autre type d'arc axisymétrique est celui qui brûle librement sans contraintes additionnelles ("free burning arc"). La distribution de la température dans ces arcs est déterminée par l'intensité du courant, la convection naturelle et le pompage électromagnétique provenant du champ magnétique auto-induit.

En imposant un gradient de pression dans la direction axiale, il est également possible de confiner l'arc. Par opposition aux arcs confinés par parois, ce type d'arc est connu sous le nom de "axial convection-stabilised arc". C'est dans ce type d'arc que nous étudierons les effets du champ magnétique auto-induit.

Dans le cas des colonnes de plasma haute pression, l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local doit être discutée. Quand les conditions de microréversibilité des processus énergétiques élémentaires sont satisfaites, le système est en équilibre thermodynamique. Plus l'on s'écarte de l'ET complet, plus le nombre d'informations à fournir pour caractériser le système augmente. Dans le cas de l'équilibre thermodynamique local, il existe un flux net de particules et l'énergie va être dirigée dans une direction privilégiée; par exemple, un plasma où il existe un gradient de température (le cas de la décharge électrique). Une diminution locale de l'énergie du système implique que la microréversibilité ne peut être complétée. Cependant, si cette perte locale d'énergie est faible par rapport à l'énergie totale et si des mécanismes de compensation sont présents, la relaxation du système se fait assez rapidement de façon à pouvoir utiliser une seule température et une pression pour caractériser le système.

Par conséquent, les équations qui décrivent le plasma sont celles dérivées de la thermodynamique, ainsi il est possible d'appliquer le modèle du continuum au fluide étudié. Les propriétés thermodynamiques des arcs haute pression sont obtenues à partir des équations de conservation pour les fluides compressibles et visqueux dans

lesquelles on a ajouté les effets des forces de Lorentz, le transport de la radiation et la puissance introduite par effet Joule.

Les équations générales décrivant un plasma de type collisionnel et partiellement ionisé peuvent être simplifiées et appliquées aux arcs haute pression [12].

1.3 Quand calculer le champ magnétique auto-induit dans les arcs électriques de type disjoncteur ?

Le type de décharge que nous allons étudier opère en courant alternatif de basse fréquence. Les électrodes sont en contact avec une colonne de plasma confinée par un gaz en expansion dans une tuyère. Le champ électrique entre les deux électrodes accélère les électrons et les ions pour entretenir ce plasma. Ce dernier s'est formé dans une étape transitoire, par un processus dit d'avalanche (ou de disruption) qui prend naissance lors de la séparation des électrodes.

Lorsqu' un ensemble de particules de même charge électrique traverse un milieu conducteur, un champ magnétique est induit le long de la trajectoire de ces particules. A l'échelle microscopique, ce champ magnétique auto-induit agit sur leur trajectoire. A l'échelle macroscopique, une force dite de Lorentz, directement proportionnel à la densité de courant traversant le plasma et au champ magnétique auto-induit, agit sur le plasma de la décharge.

Dans la plupart des études numériques et analytiques faites sur les décharges

électriques de type disjoncteur, l'effet du champ magnétique auto-induit sur le plasma est négligeable car les forces d'inertie du fluide sont plus importantes que les forces de Lorentz induites dans le plasma.

Néanmoins dans le cas des décharges électriques opérant à des courants élevés ($I > 10kA$), il n'existe pas d'étude numérique démontrant que les forces de Lorentz sont encore négligeables devant les forces d'inertie du fluide. Les mesures expérimentales [2] ont mis en évidence un phénomène de surpression devant la cathode pour des arcs électriques opérant à des courants élevés mais rien n'indique que ce phénomène est entièrement dû aux forces de Lorentz. Il se pourrait qu'une partie de cette surpression provienne de l'aspect transitoire des expériences.

Par conséquent, l'effet du champ magnétique auto-induit n'est pas encore bien compris mais il est certain que ces résultats expérimentaux soulèvent une question fondamentale pour la modélisation des décharges électriques à ampérage élevé de type disjoncteur : est-ce que toute modélisation doit inclure l'effet du champ magnétique auto-induit ? Si oui, quels effets ont les forces de Lorentz sur les caractéristiques et performances de ce type d'arc ? Entre autres,

- la pression devant l'anode et la cathode,
- le rayon de l'arc devant la cathode,
- la distribution de la température et de la vitesse dans la colonne de plasma,
- la différence de potentiel entre les deux électrodes.

1.3.1 Arcs électriques à courants faibles ($I < 10kA$)

Perkins et al. [13] ont étudié la constante de temps de désionisation du SF_6 sur un arc électrique soufflé pour des courants électriques continus d'intensités différentes. Ils remarquent que la constante de temps de désionisation diminue avec l'augmentation du courant. Cette constante est inférieure dans le cas d'un courant de $1000A$ à celle dans le cas d'un courant de $350A$, ce qui est contraire aux résultats attendus. Perkins et al [13] lient ce phénomène à l'effet des forces de Lorentz dans la colonne de plasma. Ces forces possèdent une composante radiale qui agit en compression dans la colonne de plasma et une composante axiale qui agit en force propulsive de la cathode vers l'anode. Lorsque le courant est interrompu, le surplus de pression autour de la cathode provenant de la compression radiale des forces de Lorentz accélère le plasma radialement et aide ainsi à l'éloignement du gaz chaud de la cathode. Cette expansion forcée permet au gaz chaud de couvrir une plus grande distance. Perkins et al. concluent que ce mécanisme est responsable en partie de la diminution de la température du gaz, affectant ainsi la constante de temps de désionisation.

1.3.2 Arcs à courants élevés ($I > 10kA$)

Le travail de Jones et al. [2] est une extension du travail de Perkins et al. [13]. Jones et al. effectuent des mesures de pression au point de stagnation devant la cathode afin de déterminer l'effet du champ magnétique auto-induit pour des intensités de courant allant de 20 à 100 kA. Les résultats montrent qu'à courant élevé, les effets observés sont différents des résultats avancés par la théorie.

Perkins et al. [13] avaient réussi à reproduire les mesures de surpression magnétique avec un modèle analytique. Jones et al. [2] constatent que ce modèle analytique n'est plus valable lorsque le courant dépasse 20 kA. Le modèle analytique surestime la pression magnétique mesurée et cet écart est d'autant plus important que le courant est élevé. En plus, un phénomène d'hystérésis est observé sur la pression mesurée. Plus l'intensité du courant est grande et plus l'hystérésis est prononcé. Jones et al. essayent d'expliquer cette différence en proposant deux scénarios. Tout d'abord, à courant élevé il se forme une zone moins conductrice au coeur de l'arc devant la cathode. Un modèle analytique démontre que la réduction maximale de la section conductrice amène seulement une baisse de 50% de la pression. Or les mesures montrent que cet écart peut atteindre plus de 90%. En s'appuyant sur les observations effectuées par d'autres chercheurs, c.a.d. le phénomène de rotation d'arc pour des courants élevés, Jones et al. [2] postulent que la rotation de l'arc autour de l'axe de symétrie s'oppose à l'effet de la compression magnétique en baissant la pression devant l'anode.

1.4 Modélisation numérique de l'arc électrique

Jusqu'à présent, nous avons montré que les phénomènes physiques dans les arcs électriques de type disjoncteur sont variés et complexes. Les tentatives initiales de résoudre ce problème ont été principalement concentrées sur des modèles quasi 1-D. Ils sont basés sur des approximations de type couche limite [14, 15, 16, 17], où l'écoulement à l'extérieur de l'arc est basé sur un modèle 1-D.

Plus récemment, un petit nombre de chercheurs ont essayé d'améliorer la simula-

tion de l'interaction arc-fluide en utilisant de meilleurs modèles physiques basés sur les équations de conservation [18, 19, 20, 21, 22, 23]. La simulation de ce phénomène dans des géométries complexes incluant la chambre de compression, le mouvement des électrodes et les tuyères apparaissent petit à petit [24, 25, 20]. Cependant, la plupart de ces méthodes utilisent, soit des suppositions sur la géométrie de l'arc, soit un modèle quasi 1-D inspiré sur une analyse de type couche limite. Zhang et al. [26] et Trépanier et al. [27] ont développé un modèle 2-D pour calculer l'interaction arc-fluide sans utiliser d'hypothèses préalables sur la géométrie de l'arc. Leur modèle d'arc et de radiation peut servir à calculer la distribution de la densité de courant pour des arcs de géométrie complexe. La solution des équations de conservation est calculée à l'aide d'une technique de volumes finis sur un maillage non-structuré [28].

A haute température, le calcul de l'interaction arc-fluide doit utiliser un modèle gaz réel. En effet, des études comparatives ont démontré que les prédictions des caractéristiques de l'arc (rayon et température de l'arc) en gaz réel diffèrent de celles en gaz parfait. Cependant, ces études révèlent que la distribution de pression dans l'arc est quasi-indépendante du modèle de gaz utilisé.

Parmi tous ces modèles de disjoncteurs, aucun ne tient compte de l'effet du champ magnétique auto-induit sur les caractéristiques et les performances de l'arc de type disjoncteur. La raison pour laquelle cet effet a été négligé dans la modélisation est due au fait que ces arcs font partie de la famille des arcs opérant à faible intensité de courant. Néanmoins, à la section 1.3.2 nous montrons que des études expérimentales confirment que l'effet du champ magnétique auto-induit devient non négligeable dans les arcs de type disjoncteur opérant à ampérage élevé. Par conséquent, toute modélisation numérique d'arc électrique devant oeuvrer dans ces

conditions ne peut plus ignorer l'influence du champ magnétique auto-induit. La littérature n'offre pas d'étude numérique permettant d'éclaircir ce problème.

Ce mémoire propose d'étudier l'effet du champ magnétique auto-induit à courant élevé à l'aide de simulations numériques. Le calcul du champ magnétique est inclus dans le modèle d'arc existant et les forces de Lorentz sont intégrées dans les équations du mouvement. Ce mémoire propose également une formulation nouvelle sur l'équation du champ magnétique. La validation du nouveau modèle d'arc est effectuée à l'aide de cas tests analytiques et de deux cas tests expérimentaux.

Chapitre 2

La Magnétohydrodynamique appliquée aux disjoncteurs

La MHD est la discipline qui traite l'interaction entre le champ magnétique \vec{B} et le champ de vitesse \vec{U} dans un fluide électriquement conducteur. Le déplacement d'un corps solide, électriquement conducteur, à travers un champ magnétique affecte les charges libres de ce corps. L'électromagnétisme est la science qui donne la relation quantitative de cet effet. Lorsqu'un fluide non-conducteur traverse un champ magnétique, celui-ci n'est pas affecté par le champ magnétique et les équations de la mécanique des fluides suffisent à décrire le mouvement du fluide. Cependant dans le cas où le fluide est conducteur, le champ magnétique et le champ de vitesse sont couplés et il faut introduire un formalisme plus général permettant de donner une description plus exacte de ces deux quantités.

Le couplage entre le champ de vitesse \vec{U} et le champ magnétique \vec{B} peut être

soit fort ou faible. Il est faible lorsque l'un des deux champs affecte l'autre sans être lui-même modifié. Il est fort lorsque les deux champs diffèrent largement de ce qu'ils devraient être lorsque calculés indépendamment. Dans ces conditions, des phénomènes extraordinaires peuvent être observés, entre autre, l'effet dynamo et l'effet de l'expulsion du champ magnétique [29]. Un des phénomènes physiques les plus intéressants à observer est la propagation d'ondes d'Alfven [30], complètement différentes des ondes électromagnétique (ondes n'existant plus si les courants de déplacement sont faibles) et ondes acoustiques (ondes n'existant plus si le fluide est incompressible). L'existence des ondes d'Alfven dépend de l'intensité du couplage entre le champ de vitesse \vec{U} et le champ magnétique \vec{B} [30]. Si le couplage est faible, ces ondes dégènèrent rapidement. Dans le cas des arcs de type disjoncteur, le champ de vitesse dans la colonne de plasma influence très peu les lignes de champ magnétique. Le couplage est donc faible. Cependant, le champ magnétique a une influence non négligeable sur le champ de vitesse dans la colonne de plasma, particulièrement devant la cathode.

Cette influence a lieu via la force de Lorentz, fonction de la densité de courant \vec{J} et du champ magnétique \vec{B} ,

$$\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} \quad (2.1)$$

Celle-ci agit seulement dans la colonne de plasma. D'après Hoyaux [31], l'inclusion de cette expression dans le calcul des arcs haute pression peut être considérée comme une correction d'ordre supérieur. Grâce à l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local, les espèces neutres et chargées dans les arcs haute pression

sont tellement proches les unes des autres que l'action du champ de force obéit à l'expression de la force de Lorentz [31]. Plus précisément, imaginons une région du plasma affectée par un gradient de pression. Le champ magnétique empêche la diffusion des particules chargées vers les régions à plus basse pression. Par contre, le champ magnétique ne peut pas empêcher les espèces neutres de diffuser. Mais le plasma étant en équilibre thermodynamique local, le surplus d'espèces neutres situées dans les régions à pression en hausse subissent une ionisation rapide et le surplus d'espèces chargées situées dans les régions à pression en baisse subissent une recombinaison. Ceci a pour effet de compenser la diffusion des espèces neutres. Par conséquent, les espèces neutres ne sont pas vraiment confinées mais tout se passe comme si elles l'étaient. Tout ceci permet de conclure que l'équation 2.1 dans le terme source des équations du mouvement est valide.

2.1 Équations d'Euler

Des études numériques et expérimentales ont démontré que les phénomènes visqueux et de conduction thermique sont secondaires dans l'interaction arc-fluide de type disjoncteur [32, 33, 34, 27]. La convection naturelle est également négligeable dans ce type d'interaction car la convection forcée domine le régime de l'écoulement. En éliminant tous les termes liés aux phénomènes visqueux et aux forces d'Archimède, il reste les équations d'Euler avec les termes représentant la force de Lorentz, l'effet Joule et l'effet de la radiation. Pour un écoulement 2-D axisymétrique, ces équations s'écrivent

$$\mathbf{U}_t + \nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{S}, \quad (2.2)$$

où \mathbf{U} est le vecteur des variables conservatives, \mathbf{F} la matrice du flux et \mathbf{S} le vecteur contenant les termes sources et les termes dûs à la formulation des équations dans un repère axisymétrique de coordonnées (y, θ, x) . En détail,

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \\ \rho e \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_x \\ \frac{P}{y} + F_y \\ S_e \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u_x & \rho u_y \\ \rho u_x u_x + P & \rho u_y u_x \\ \rho u_x u_y & \rho u_y u_y + P \\ \rho u_x e + u_x P & \rho u_y e + u_y P \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

où, ρ est la densité, $\vec{\mathbf{u}} = (u_x, u_y)^T$ la vitesse du fluide, F_x et F_y les composantes axiales et radiales de la force de Lorentz, e l'énergie spécifique du fluide, P la pression, S_e le terme source d'énergie comprenant la dissipation Joule et la radiation [35]. Le système d'équations 2.2 est complété par l'équation d'état $P = p(\rho, i)$, où $i = e - \frac{1}{2} \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}}$ est l'énergie interne du système. Pour un gaz parfait, $p(\rho, i) = (\gamma - 1)\rho i$. Dans le cas d'un gaz en équilibre thermodynamique local, la fonction $p(\rho, i)$ peut être obtenue en lissant les données de Frost et Liebermann [36] pour le SF_6 et de Yos [37] pour l'azote.

L'équation 2.2 peut être écrite sous sa forme intégrale utile à la formulation des volumes finis,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{U} dv + \oint_{\partial V} \vec{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F} ds = \int_V \mathbf{S} dv, \quad (2.4)$$

où $\vec{n} = (n_x, n_y)^T$ est le vecteur normal à la frontière fermée ∂V délimitant le volume de contrôle V .

2.1.1 Forme adimensionnelle

L'adimensionnement des équations d'Euler ne fait apparaître aucun nombre sans dimension. Une solution de ces équations génèrent une infinité de solutions dans le domaine dimensionnel. Dans notre cas, les termes source dans l'équation d'énergie et du mouvement dépendent de l'échelle du phénomène étudié. Par conséquent, ces termes doivent être adimensionnés par des valeurs de référence provenant de l'adimensionnement des équations d'Euler.

Définissons les valeurs de référence spécifiques à la physique des arcs électriques de type disjoncteur,

- P_0 la pression totale en amont ou initiale dans la chambre,
- T_0 la température totale en amont ou initiale dans la chambre,
- L_0 la longueur caractéristique,
- t_0 le temps caractéristique,
- $U_0 = \left(\frac{P_0}{\rho_0}\right)^{0.5} = \frac{L_0}{t_0}$ la vitesse caractéristique.

A partir de ces valeurs, les variables adimensionnelles sont

$$P^* = \frac{P}{P_0}, T^* = \frac{T}{T_0}, \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, V^* = \frac{V}{U_0}, e^* = \frac{e}{P_0}$$

En introduisant ce changement de variables dans 2.2, nous obtenons la forme adimensionnelle de \mathbf{U} , le vecteur des variables conservatives \mathbf{F} , la matrice du flux et \mathbf{S} , le vecteur contenant les termes source,

$$\mathbf{U}^* = \begin{pmatrix} \rho^* \\ \rho^* u_x^* \\ \rho^* u_y^* \\ \rho^* e^* \end{pmatrix}, \mathbf{S}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ F_x \frac{L_0}{P_0} \\ \frac{P^*}{y^*} + F_y \frac{L_0}{P_0} \\ S_e \frac{L_0}{P_0 U_0} \end{pmatrix}, \mathbf{F}^* = \begin{pmatrix} \rho^* u_x^* & \rho^* u_y^* \\ \rho^* u_x^* u_x^* + P^* & \rho^* u_y^* u_x^* \\ \rho^* u_x^* u_y^* & \rho^* u_y^* u_y^* + P^* \\ \rho^* u_x^* e^* + u_x^* P^* & \rho^* u_y^* e^* + u_y^* P^* \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Par conséquent, l'analyse dimensionnelle des équations d'Euler indique que $\frac{L_0}{P_0}$ et $\frac{L_0}{P_0 U_0}$ sont respectivement les facteurs multiplicatifs des composantes de la force de Lorentz et du terme source S_e . Ces deux facteurs permettent l'adimensionnement complet du vecteur \mathbf{S} .

2.2 Équations de Maxwell

Dans cette section, nous exposons le modèle théorique qui est utilisé pour calculer, dans un arc de type disjoncteur, d'une part la densité du champ magnétique auto-induit $\vec{\mathbf{B}}$ et d'autre part la densité de courant $\vec{\mathbf{J}}$.

Les phénomènes électromagnétiques sont décrits par un système d'équations con-

nues sous le nom d'équations de Maxwell. Ce système d'équations génèrent cinq inconnues vectorielles et une inconnue scalaire, celles-ci sont

- l'intensité du champ électrique \vec{E} (Volt m^{-1}),
- l'intensité du champ magnétique \vec{H} (Ampère m^{-1}),
- la densité du flux électrique \vec{D} (Coulomb m^{-2}),
- la densité du flux magnétique \vec{B} (Tesla),
- la densité de courant électrique \vec{J} (Ampère m^{-2}),
- la densité de charge électrique q (Coulomb m^{-3}).

Sous forme différentielle, les équations de Maxwell sont

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = q, \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.8)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.9)$$

A ces équations s'ajoutent les équations phénoménologiques exprimant \vec{D} et \vec{H} en fonction de \vec{E} et \vec{B} ,

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (2.10)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (2.11)$$

décrivant les propriétés macroscopiques du milieu étudié en terme de permittivité électrique ϵ et de perméabilité magnétique μ . Pour les gaz à haute température, la perméabilité magnétique du gaz est pratiquement égale à sa valeur dans le vide [38] ($\mu_0 = 4\pi * 10^{-7}$ Henry m^{-1}). Dans le cas d'un milieu électriquement conducteur de densité de charge q constante dans le temps, la densité de courant \vec{J} doit vérifier la conservation de la charge

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (2.12)$$

Si \vec{J} suit la loi d'Ohm simplifiée

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (2.13)$$

où σ est la conductivité électrique, il y a ambiguïté entre les équations 2.7 et 2.12 car le champ électrique doit satisfaire simultanément

$$\nabla \cdot \sigma \vec{E} = 0, \quad (2.14)$$

$$\nabla \cdot \epsilon \vec{E} = q \quad (2.15)$$

En fait, lorsque le milieu est conducteur, l'équation 2.14 donne la solution du champ électrique \vec{E} et la densité de charge est ensuite calculée à partir de l'équation 2.15. Cependant, dans un milieu non-conducteur, l'équation 2.14 est toujours satisfaite ($\vec{J} = 0$) et l'équation 2.15 donne la solution du champ électrique \vec{E} .

Dans le cas des arcs de type disjoncteur, les variations de 60 Hz sont très lentes pour les équations de Maxwell dans un fluide où les phénomènes électriques en jeu se mettent plus rapidement à l'équilibre [39]. Ainsi, les phénomènes dus aux variations temporelles peuvent être négligés, entre autre

- les courants de déplacement $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0,$

- la variation du champ magnétique $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

Par conséquent, les équations de Maxwell à résoudre peuvent être simplifiées

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.16)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0, \quad (2.17)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (2.18)$$

La densité de courant \vec{J} est résolue dans les électrodes et l'arc électrique à partir des équations 2.12 et 2.17. Ensuite, l'intensité du champ magnétique \vec{H} est résolue en tout point de l'espace à partir des équations 2.16 et 2.18.

La connaissance de la densité de courant \vec{J} permet de déterminer l'intensité du champ magnétique \vec{H} . Nous verrons respectivement aux sections 2.2.2 et 2.2.3 que l'équation 2.16 est automatiquement satisfaite dans notre problème et que l'équation 2.17 est implicitement incluse dans l'équation 2.12 (le champ électrique dérive d'un potentiel). Par conséquent, dans un arc de type disjoncteur, la solution des équations de Maxwell se résume à déterminer deux champs vectoriels, l'intensité du champ électrique \vec{E} et l'intensité du champ magnétique auto-induit \vec{H} . De ces deux champs

vectoriels se déduisent les inconnues \vec{D} , \vec{B} , \vec{J} et q à l'aide des relations 2.10, 2.11, 2.12 et 2.15.

2.2.1 Équation du champ magnétique auto-induit

En prenant le rotationnel de l'équation 2.18, nous obtenons

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} = \nabla \times \vec{J} \quad (2.19)$$

Cette dernière équation constitue une forme particulière de l'équation d'induction magnétique généralisée [30]. Dans le cas d'un champ vectoriel dont la seule composante est azimutale et dépendante des coordonnées axiales et radiales seulement, la divergence de ce champ est automatiquement nulle ($\nabla \cdot \vec{H} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$). Par conséquent, l'équation 2.19 devient

$$-\nabla^2 \vec{H} = \nabla \times \vec{J} \quad (2.20)$$

La projection de cette équation vectorielle dans la direction radiale et axiale du repère cylindrique donne un résultat nul. Dans la direction azimutale, la projection donne l'équation différentielle suivante

$$-\frac{1}{y} \frac{\partial H_\theta}{\partial y} - \frac{\partial^2 H_\theta}{\partial^2 y} - \frac{\partial^2 H_\theta}{\partial^2 x} + \frac{H_\theta}{y^2} = \nabla \cdot (\vec{J} \times \vec{\theta}) + \frac{J_x}{y} \quad (2.21)$$

En utilisant le développement suivant

$$\nabla \cdot \nabla H_\theta = \frac{1}{y} \frac{\partial H_\theta}{\partial y} + \frac{\partial^2 H_\theta}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 H_\theta}{\partial^2 x}, \quad (2.22)$$

l'équation 2.21 est réécrite d'une manière plus compacte

$$-\nabla \cdot \nabla H_\theta + \frac{H_\theta}{y^2} = \nabla \cdot (\vec{\mathbf{J}} \times \vec{\theta}) + \frac{J_x}{y} \quad (2.23)$$

En intégrant l'équation 2.23 sur un volume arbitraire Γ et en appliquant le théorème de la divergence, nous obtenons la forme intégrale de l'équation 2.23

$$\int_\Gamma \frac{H_\theta}{y^2} dv - \oint_{\partial\Gamma} \nabla H_\theta \cdot \vec{\mathbf{n}} ds = \int_\Gamma \frac{J_x}{y} dv + \oint_{\partial\Gamma} \vec{\mathbf{J}} \times \vec{\theta} \cdot \vec{\mathbf{n}} ds \quad (2.24)$$

où $\vec{\mathbf{n}} = (n_x, n_y)^T$ est le vecteur normal à la frontière fermée $\partial\Gamma$ délimitant le volume de contrôle Γ . Cette dernière expression constitue l'équation pour la composante H_θ que l'on devra résoudre dans le cas des arcs de type disjoncteur.

2.2.2 Conditions frontières du champ magnétique

2.2.2.1 Continuité de la composante normale de $\vec{\mathbf{B}}$

Avant d'aborder la valeur de l'intensité du champ magnétique à l'infini, nous présentons les conditions frontières que doit satisfaire la densité magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ à

l'interface de deux milieux de perméabilités magnétiques différentes μ_1 et μ_2 . En se basant sur les différentes formes d'arcs possibles, trois situations présentent les conditions frontières magnétiques pouvant être appliquées.

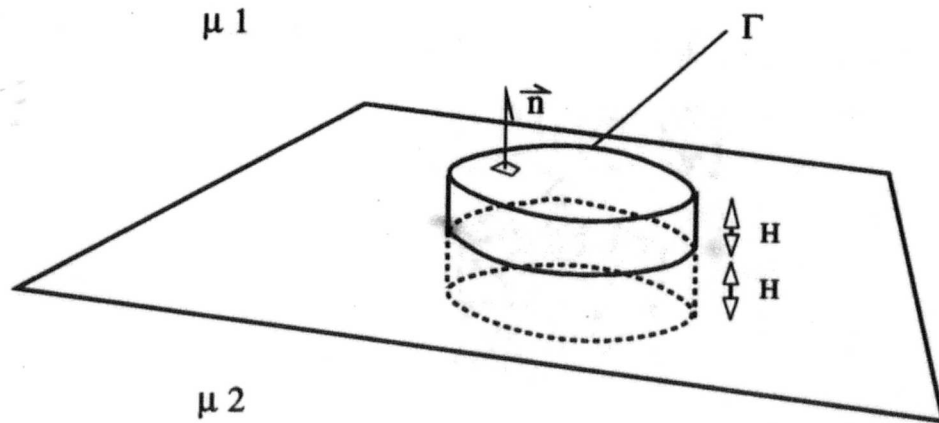


Figure 2.1: Volume englobant deux régions à perméabilité magnétique différente.

Intégrons l'équation 2.16 sur le volume Γ présenté à la figure 2.1,

$$\int_{\Gamma} \nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} dv = 0 \quad (2.25)$$

En appliquant le théorème de la divergence, nous obtenons

$$\oint_{\partial\Gamma} \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{n}} ds = 0 \quad (2.26)$$

En divisant la surface $\partial\Gamma$ en deux surfaces $\partial\Gamma_1$ et $\partial\Gamma_2$ tel que $\partial\Gamma_1 \cup \partial\Gamma_2 = \partial\Gamma$, la relation 2.26 devient

$$\oint_{\partial\Gamma_1} \vec{\mathbf{B}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_1 ds_1 + \oint_{\partial\Gamma_2} \vec{\mathbf{B}}_2 \cdot \vec{\mathbf{n}}_2 ds_2 = 0 \quad (2.27)$$

Lorsque H tend vers 0, $\partial\Gamma_1 = \partial\Gamma_2$ et l'intégrale de surface se simplifie

$$\oint_{\partial\Gamma} (\vec{\mathbf{B}}_1 - \vec{\mathbf{B}}_2) \cdot \vec{\mathbf{n}} ds = 0 \quad (2.28)$$

Par conséquent à l'interface des deux régions,

$$(\vec{\mathbf{B}}_1 - \vec{\mathbf{B}}_2) \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0. \quad (2.29)$$

Comme $\vec{\mathbf{n}}$ est maintenant normal à l'interface

$$B_{1\parallel} = B_{2\parallel} \quad (2.30)$$

La composante normale de la densité magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ est continue à l'interface. Ceci est illustré à la figure 2.2.

Dans notre problème, le champ magnétique auto-induit est purement azimutal et les composantes $B_{1\parallel}$ et $B_{2\parallel}$ sont nulles. Par conséquent, la condition 2.30 est automatiquement satisfaite.

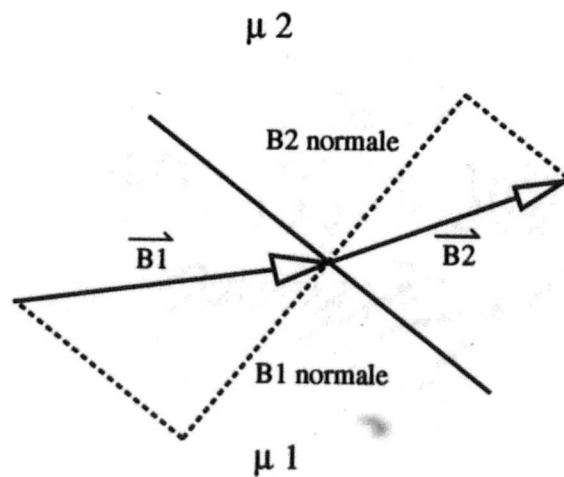


Figure 2.2: Continuité normale de la densité magnétique.

2.2.2.2 Continuité de la composante tangentielle de \vec{H}

Projetons l'équation 2.18 dans la direction du vecteur unitaire \vec{n} , après intégration nous obtenons

$$\oint_{\partial\Gamma} \nabla \times \vec{H} \cdot \vec{n} ds = \oint_{\partial\Gamma} \vec{J} \cdot \vec{n} ds, \quad (2.31)$$

En appliquant le théorème de Stokes sur un parcours fermé C au membre de gauche et le théorème de la divergence au membre de droite, la relation 2.31 donne

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} \nabla \cdot \vec{J} ds \quad (2.32)$$

De la conservation de la charge 2.12, le membre de droite de l'équation 2.32 a

disparu. En segmentant le parcours C par les points ABCD représentés sur la figure 2.3, la relation 2.32 devient

$$\oint_{AB} \vec{H}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \oint_{CD} \vec{H}_2 \cdot d\vec{r}_2 = 0 \quad (2.33)$$

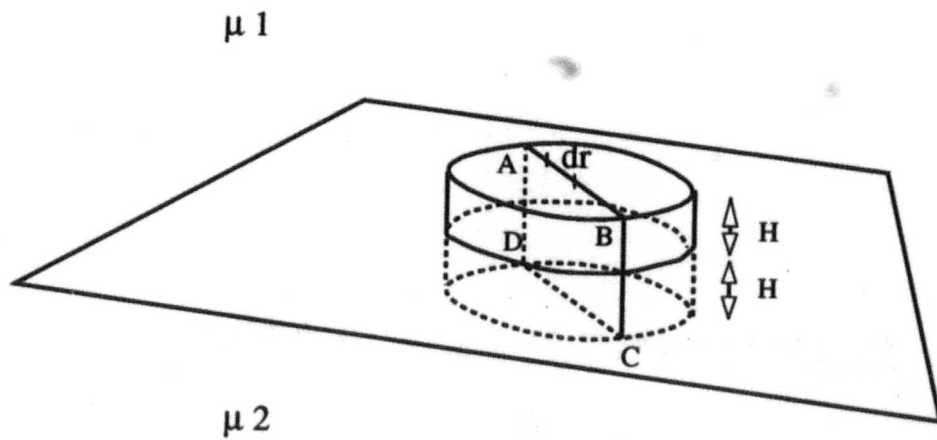


Figure 2.3: Courbe fermée passant par deux régions à perméabilité magnétique différente.

Lorsque H tend vers 0, $AB = BC$ et l'intégrale de contour se simplifie

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot \vec{r} = 0 \quad (2.34)$$

Par conséquent, comme \vec{r} est tangentiel à l'interface des deux régions

$$H_{1\perp} = H_{2\perp} \quad (2.35)$$

La composante tangentielle de l'intensité du champ magnétique est continue à l'interface. Ceci est illustré à la figure 2.4.

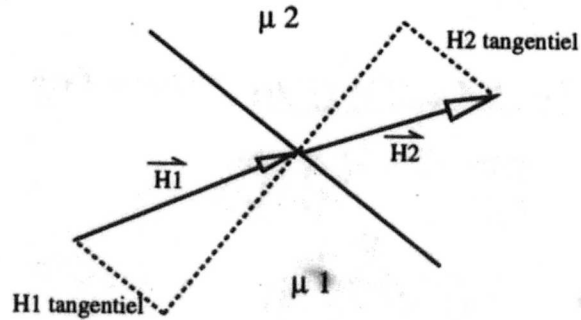


Figure 2.4: Continuité tangentielle du champ magnétique

Ce résultat est important car le champ magnétique étant purement azimutal, il est toujours tangentiel aux interfaces des régions caractérisant notre problème. Cette condition nous oriente sur le choix d'une discrétisation pour l'intensité du champ magnétique \vec{H} . Ce choix est explicité au Chapitre 3.

2.2.2.3 Valeur de l'intensité du champ magnétique à l'infini

A l'infini H_θ est nul. Dans le cas où la géométrie de l'arc est complexe, le domaine de calcul doit être pris le plus grand possible afin d'approcher la condition frontière de l'intensité du champ magnétique à l'infini. La figure 2.5 illustre les conditions frontières imposées sur H_θ pour un arc de géométrie complexe,

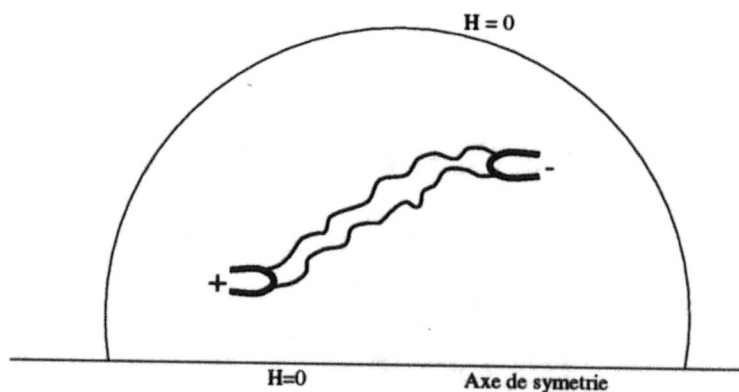


Figure 2.5: Valeurs frontières de l'intensité du champ magnétique pour un arc de géométrie complexe.

Cependant, proche des frontières électriques, si la densité de courant \vec{J} traversant l'arc et les électrodes possèdent une composante purement axiale, la variation du champ magnétique dans cette direction est faible. Une condition Neumann est imposée sur H_θ pour un arc satisfaisant ces conditions. La figure 2.6 illustre les conditions frontières imposées sur H_θ pour un arc géométrique concentrique.

Dans le cas particulier où l'arc est confiné autour de l'axe de symétrie, il est possible d'assimiler les électrodes et l'arc à une colonne de plasma unidimensionnelle. Cette approximation permet d'appliquer une solution analytique à la frontière perpendiculaire à la direction radiale et le domaine de calcul peut être encore diminué. Cette solution est explicitée à la section suivante. La figure 2.7 illustre les conditions frontières imposées sur H_θ pour un arc plein cylindrique.

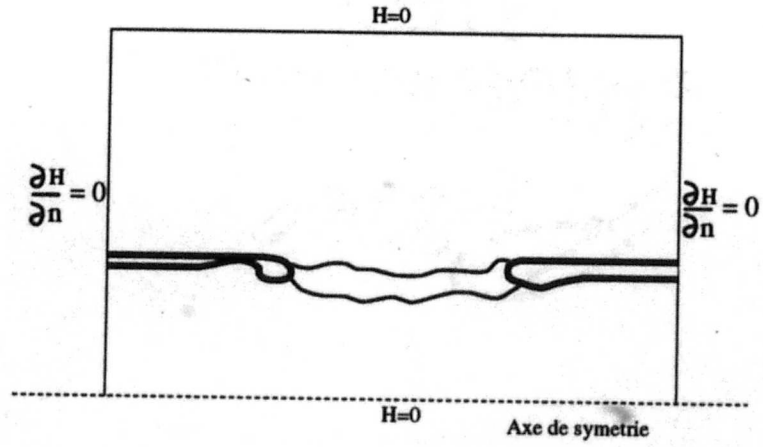


Figure 2.6: Valeurs frontières de l'intensité du champ magnétique pour un arc concentrique

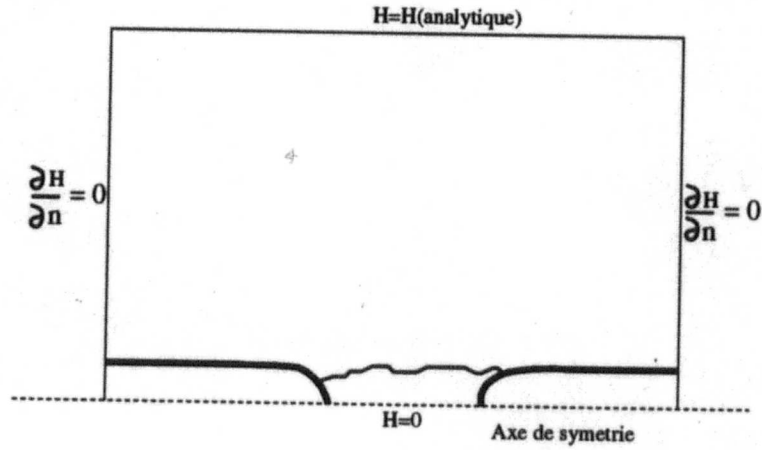


Figure 2.7: Valeur frontière de l'intensité du champ magnétique pour un arc plein cylindrique

2.2.2.4 Solution analytique du champ magnétique

Soit une colonne de plasma de longueur infinie et de conductivité électrique σ constante traversée par une densité de courant uniforme J_x .

En appliquant l'équation 2.18, on obtient

$$\frac{1}{y} \frac{\partial(yH_\theta)}{\partial y} = J_x, \quad (2.36)$$

La solution analytique à ce problème est

$$H_\theta = \frac{J_x y}{2} \text{ pour } y \in [0, R[\quad (2.37)$$

$$H_\theta = \frac{J_x R^2}{2y} \text{ pour } y \in [R, \infty) \quad (2.38)$$

où R est le rayon de colonne de plasma.

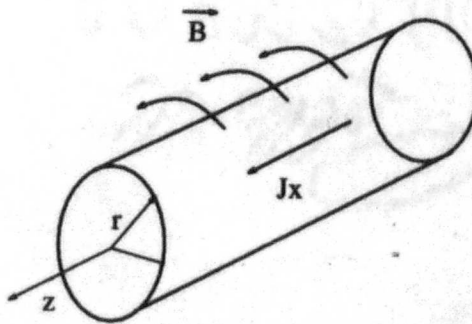


Figure 2.8: Colonne de plasma unidimensionnelle

2.2.3 Modèle de conduction électrique utilisé

D'après [11], la conduction électrique dans un arc haute pression suit la loi d'Ohm simplifiée suivante

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (2.39)$$

où la densité de courant \vec{J} est proportionnelle en tout point de la colonne de plasma au champ électrique \vec{E} et à la conductivité électrique σ (fonction de la température et de la pression du fluide [37]). Cette loi peut être exprimée en terme de potentiel électrique. De l'équation 2.17, le champ électrique \vec{E} est irrotationnel et dérive d'un potentiel électrique ϕ tel que

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad (2.40)$$

En terme de potentiel électrique, la loi d'Ohm donne

$$\vec{J} = -\sigma \nabla\phi \quad (2.41)$$

En remplaçant cette expression dans l'équation de la conservation de la charge 2.12, on obtient l'équation de Laplace pour le potentiel électrique

$$\nabla \cdot \sigma \nabla\phi = 0 \quad (2.42)$$

En intégrant cette équation sur un volume de contrôle Γ et appliquant le théorème de la divergence, la relation précédente devient

$$\oint_{\partial\Gamma} \sigma \nabla \phi \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (2.43)$$

Cette équation est résolue pour le potentiel électrique. La connaissance des conditions frontières de la densité de courant \vec{J} permettra de déterminer les conditions frontières du potentiel électrique.

2.2.4 Conditions frontières du potentiel électrique

L'arc et les électrodes constituent un milieu conducteur. Les conditions frontières de la densité de courant \vec{J} et du champ électrique \vec{E} à l'interface des différents milieux conducteurs sont déterminées à partir des équations 2.12 et 2.17. En procédant à une démarche analogue à celle utilisée pour la densité du champ magnétique \vec{B} et de l'intensité du champ magnétique \vec{H} , il est possible de déterminer ces conditions frontières.

2.2.4.1 Continuité de la composante normale de \vec{J}

En se basant sur le résultat obtenu pour \vec{B} , nous déduisons que la composante normale de \vec{J} est continue à l'interface de deux milieux à conductivité électrique différentes. Ainsi nous obtenons

$$J_{1\parallel} = J_{2\parallel} \quad (2.44)$$

En utilisant la loi d'Ohm, cette expression devient

$$\sigma_1 E_{1\parallel} = \sigma_2 E_{2\parallel} \quad (2.45)$$

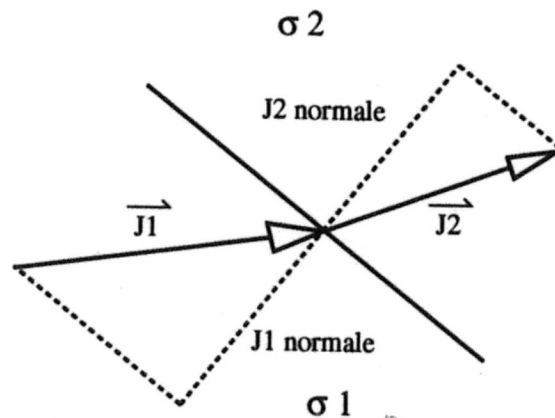


Figure 2.9: Continuité normale de la densité de courant.

2.2.4.2 Continuité de la composante tangentielle de \vec{E}

La condition 2.45 est importante car dans le cas où un des deux milieux possède une conductivité électrique nulle, la composante normale à l'interface des deux milieux est nulle ($E_{1\parallel} = E_{2\parallel} = 0$). A partir de la relation 2.41, il s'en suit que

$$\nabla\phi_1 \cdot \vec{n} = \nabla\phi_2 \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.46)$$

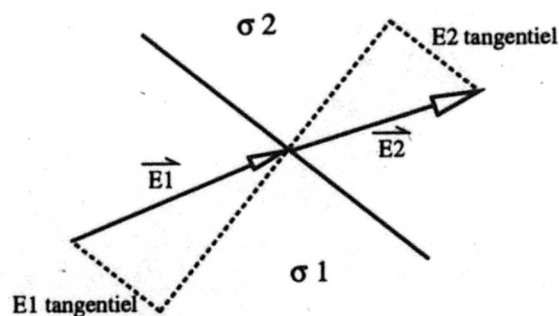


Figure 2.10: Continuité tangentielle du champ électrique

où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à l'interface.

Par conséquent, on applique la condition de Neumann sur le potentiel électrique lorsqu'un des deux milieux a une conductivité électrique nulle, soit

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (2.47)$$

La condition de Dirichlet est appliquée aux électrodes. Les conditions frontières sur le potentiel sont présentées à la figure 2.11.

La condition frontière appliquée sur ϕ sur l'axe de symétrie est de type Neumann car la composante normale du champ électrique à cet endroit est nulle.

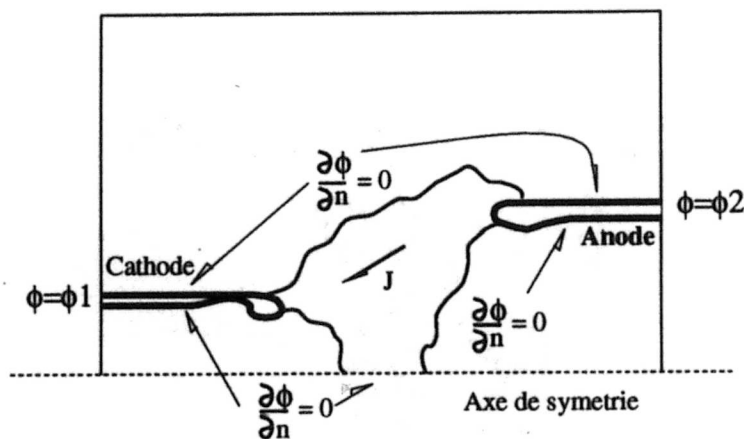


Figure 2.11: Condition frontière du potentiel électrique

2.2.5 Couplage faible entre \vec{U} et \vec{B} : convection magnétique négligée

La loi d'Ohm présentée à la section 2.2.3 ne tient pas compte de la convection magnétique car celle-ci est négligeable dans le cas d'un arc de type disjoncteur [11]. Cependant, ce type d'arc subit un soufflage important et la vitesse est particulièrement élevée dans la colonne de plasma (5000ms^{-1} [8]). A titre de vérification, nous accompagnons notre étude de trois critères mesurant l'importance de la convection magnétique. Le terme de convection magnétique suit la relation suivante

$$\vec{J}_{conv} = \sigma \vec{V} \times \vec{B} \quad (2.48)$$

Définissons le nombre de Reynolds magnétique global

$$R_m = \frac{\int_V \frac{J_{conv}}{J_{ohmi}} dv}{\int_V dv} \quad (2.49)$$

où $J_{ohmi} = |\sigma \vec{E}|$ et $J_{conv} = |\sigma \vec{V} \times \vec{B}|$ et V le volume de la région du fluide où la conductivité électrique est non nulle.

Définissons également les nombres de Reynolds magnétiques locaux suivants

$$R_{m1} = \frac{J_{conv}}{J_{ohmimax}} \quad (2.50)$$

et

$$R_{m2} = \frac{J_{convmax}}{J_{ohmi}} \quad (2.51)$$

Ces trois paramètres permettront d'évaluer l'importance de la convection magnétique.

2.2.6 Autres méthodes de calcul du champ magnétique

La méthode du potentiel vecteur est une autre approche à la résolution de l'équation 2.18. Cette méthode est fréquemment utilisée dans le domaine du génie électrique [40]. Le but de cette présentation est de démontrer les avantages de la formulation de l'équation d'induction magnétique (section 2.2.1) sur cette méthode. Sachant que la densité du champ magnétique \vec{B} satisfait l'équation 2.16, il existe un champ vectoriel \vec{A} tel que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.52)$$

Cependant l'unicité du potentiel vecteur \vec{A} n'est pas satisfaite car si on rajoute au champ \vec{A} un champ vectoriel dérivant d'un potentiel, la relation 2.52 est toujours satisfaite. Par conséquent il faut forcer l'unicité en imposant une contrainte sur \vec{A} . Dans le cas d'un problème électromagnétique stationnaire, la jauge de Coulomb est choisie [40]. Celle-ci est

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.53)$$

En remplaçant la relation 2.52 dans l'équation 2.18, nous obtenons après simplification

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \vec{J} \quad (2.54)$$

Cette équation est analogue à la relation développée dans notre formulation. En appliquant la jauge de Coulomb à l'équation 2.54, nous obtenons

$$-\nabla^2 \vec{A} = \vec{J} \quad (2.55)$$

La projection de l'équation 2.55 dans le système de coordonnées cylindriques donne deux équations à résoudre

$$-\nabla^2 \vec{A}_x = J_x \quad (2.56)$$

$$-\nabla^2 \vec{A}_y = J_y \quad (2.57)$$

La projection de l'équation d'induction magnétique dans le même système de coordonnées donne une seule équation à résoudre

$$-(\nabla^2 \vec{H})_\theta = (\nabla \times \vec{J})_\theta \quad (2.58)$$

Un système à deux équations est plus difficile à résoudre qu'un système à une équation. Par conséquent, notre formulation est plus pratique. Cependant, les avantages de notre formulation restent valides seulement si le champ magnétique reste purement azimutal. Pour des problèmes plus complexes, les deux méthodes sont équivalentes en terme de difficulté de résolution.

2.3 Calcul de la force de Lorentz

La densité de courant \vec{J} est contenue dans le plan (y, O, x) et ses composantes sont seulement fonction des coordonnées x et y . Par conséquent, à partir de l'équation 2.1, on constate que le champ magnétique azimutal dépend des mêmes coordonnées. Ainsi

$$\vec{J} = J_y(x, y) \vec{y} + J_x(x, y) \vec{x}, \quad (2.59)$$

$$\vec{B} = B_\theta(x, y) \vec{\theta} \quad (2.60)$$

En utilisant ces deux relations, les composantes de la force Lorentz sont

$$\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} = -B_\theta(x, y)J_x(x, y) \vec{y} + B_\theta(x, y)J_y(x, y) \vec{x} \quad (2.61)$$

Cette force agit seulement dans la colonne de plasma ($\sigma \neq 0$). Ses composantes sont remplacées dans l'expression du terme source S des équations d'Euler. Dans un arc de type disjoncteur, la composante radiale de la force de Lorentz est plus importante car la densité de courant est principalement orientée dans la direction axiale. L'effet de cette composante sur la colonne de plasma est appelé l'effet "Z-pinch".

2.3.1 Effet "Z-Pinch"

L'effet "Z-Pinch" est obtenu à partir d'un modèle unidimensionnel d'une décharge électrique dans un plasma à géométrie cylindrique. La densité du champ magnétique B_θ est induite par une densité de courant constante J_x . L'équation décrivant l'équilibre de la pression dans la direction radiale est

$$\frac{d}{dy} \left(p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 y} = 0 \quad (2.62)$$

Les deux termes dans la parenthèse représentent la pression particulière et la pression magnétique. En remplaçant l'expression 2.37 dans l'équation 2.62, la distribution analytique de la pression est

$$\Delta P_{cathode} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^2} \left[1 - \left(\frac{y}{R} \right)^2 \right] \quad (2.63)$$

où R est le rayon de l'arc.

2.3.2 Effet de la force de Lorentz dans un arc de type disjoncteur

Dans le cas des arcs de type disjoncteur, la force de Lorentz a un effet axiale sur l'arc également.

En écrivant les équations du mouvement du fluide sous forme vectorielle,

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \vec{J} \times \vec{B}, \quad (2.64)$$

il est possible de visualiser l'effet de la force de Lorentz sur la colonne de plasma. La figure 2.12 illustre le pompage du fluide dans la colonne de plasma devant la cathode qui est dû à l'effet du champ magnétique auto-induit.

La composante axiale de la force de Lorentz a pour effet d'accélérer le plasma de la cathode vers l'anode. Cette observation est vraie si la densité de courant a l'orientation donnée par la figure 2.12. La polarité des électrodes n'a aucune influence sur l'action de cette force. Par conséquent, l'effet de la force de Lorentz en courant continu est le même qu'en courant alternatif.

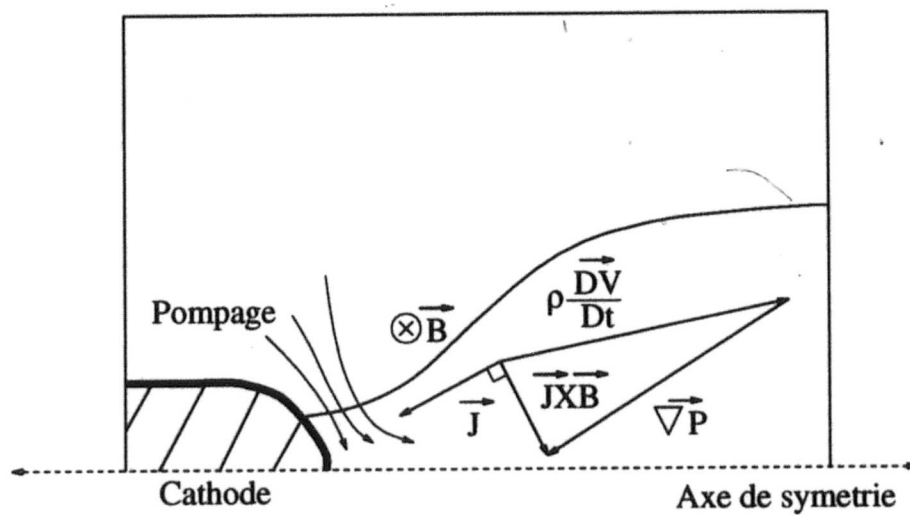


Figure 2.12: Action de la force de Lorentz dans un arc de type disjoncteur

Chapitre 3

Résolution des équations de la Magnétohydrodynamique

3.1 Résolution des équations d'Euler

3.1.1 Discrétisation des équations d'Euler

La simulation numérique est réalisée à partir d'une technique de volumes finis qui utilise une version Euler-Lagrange du schéma de ROE qui est un approximateur au problème de Riemann [28]. La discrétisation du domaine de calcul est réalisée à partir d'éléments non-structurés triangulaires. L'information des variables conservatives est stockée par élément.

En mécanique des fluides, le problème de Riemann apparaît lorsque une discontinuité se forme entre deux états homogènes. Dans notre cas, les côtés des triangles

représentent ces discontinuités et constituent le problème de Riemann.

3.1.2 Schéma de ROE

Au Chapitre 2, nous avons dérivé la forme intégrale des équations d'Euler, celle-ci est

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{U} dv + \oint_{\partial V} (\mathbf{F}_r n_r + \mathbf{F}_x n_x) ds = \int_V \mathbf{S} dv, \quad (3.1)$$

où $\vec{\mathbf{n}} = (n_r, n_x)^T$ est le vecteur unitaire normal à la frontière fermée ∂V délimitant le volume V .

Les schémas numériques utilisant les volumes finis diffèrent les uns des autres suivant la façon dont le flux $\mathbf{F} = \mathbf{F}_r n_r + \mathbf{F}_x n_x$ est évalué à l'interface de chaque élément. Un des schémas les plus utilisés pour la résolution des écoulements compressibles est celui de Roe [41]. L'idée centrale derrière cette méthode est d'introduire un état moyen $\tilde{\mathbf{A}}$ qui approxime le Jacobien $A = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}$ sur l'interface de chaque élément. La matrice moyenne $\tilde{\mathbf{A}}$ peut être approximée par

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathcal{D}} \tilde{\mathbf{Q}}^{-1},$$

où dans le cas d'un problème bidimensionnel, $\tilde{\mathcal{D}} = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_4)$. Soit en détaillant,

$$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{u}_n + \tilde{c}, \quad \tilde{\lambda}_2 = \tilde{u}_n, \quad \tilde{\lambda}_3 = \tilde{u}_n, \quad \tilde{\lambda}_4 = \tilde{u}_n - \tilde{c},$$

sont les quatre valeurs propres de la matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ et $\tilde{\mathbf{Q}}$ formée par les quatre vecteurs propres indépendants correspondants que l'on peut choisir de la manière suivante

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = \left(1, \tilde{u}_x + \tilde{c}n_x, \tilde{u}_y + \tilde{c}n_y, \tilde{H} + \tilde{c}\tilde{u}_n \right),$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_2 = \left(1, \tilde{u}_x, \tilde{u}_y, \tilde{H} - \frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho}} - \frac{\tilde{\rho}\tilde{P}_i}{\tilde{P}_i} \right),$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_3 = \left(0, n_y, -n_x, \tilde{u}_x n_y - \tilde{u}_y n_x \right),$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_4 = \left(1, \tilde{u}_x - \tilde{c}n_x, \tilde{u}_y - \tilde{c}n_y, \tilde{H} - \tilde{c}\tilde{u}_n \right),$$

où, c est la vitesse du son, $u_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$ est la vitesse normale à l'interface et H l'enthalpie totale. Les valeurs moyennes sont évaluées à partir de l'état gauche et droit de l'interface de l'élément et sont données par

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\rho_L \rho_R}, \quad \tilde{v} = \frac{\sqrt{\rho_L} v_L + \sqrt{\rho_R} v_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}},$$

$$v = u_x, u_y, i, H,$$

$$\tilde{P} = \tilde{\rho} \left[\tilde{H} - \tilde{i} - \frac{1}{2}(\tilde{u}_x^2 + \tilde{u}_y^2) \right], \quad \tilde{c}^2 = \tilde{P}_\rho + \frac{\tilde{P}\tilde{P}_i}{\tilde{\rho}^2}.$$

Roe a démontré que l'utilisation de cette moyenne permet au solveur de représenter de façon exacte les équations de Rankine-Hugoniot au travers d'un choc. Les deux dérivées $\tilde{P}_\rho = \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \rho}$ et $\tilde{P}_i = \frac{\partial \tilde{P}}{\partial i}$ sont données dans le cas d'un gaz parfait par l'équation d'état, c.a.d. $\tilde{P}_\rho = (\gamma - 1)\tilde{i}$, et $\tilde{P}_i = (\gamma - 1)\tilde{\rho}$. Dans ce cas, le quatrième terme dans $\tilde{\mathbf{e}}_2$ et la vitesse du son peuvent être simplifiés dans les formules suivantes

$$\begin{aligned}\tilde{H} - \frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho}} - \frac{\tilde{\rho}\tilde{P}_\rho}{\tilde{P}_i} &= \frac{1}{2}(\tilde{u}_x^2 + \tilde{u}_y^2), \\ \tilde{c}^2 &= (\gamma - 1)\left[\tilde{H} - \frac{1}{2}(\tilde{u}_x^2 + \tilde{u}_y^2)\right]\end{aligned}\quad (3.2)$$

Le flux sur n'importe quelle interface, où G et D représentent respectivement l'état gauche et droit à l'interface, est calculé en utilisant la relation suivante

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_R + \mathbf{F}_L) - \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{Q}}|\tilde{\mathcal{D}}|\tilde{\mathbf{Q}}^{-1}(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)\quad (3.3)$$

et les propriétés conservatives \mathbf{U} sont avancées explicitement dans le temps au niveau temporel suivant $(n + 1)$ par

$$\mathbf{U}_p^{n+1} = \mathbf{U}_p^n - \frac{\Delta t}{V} \sum_{k=1}^{N_{\text{nodes}}} \mathbf{F}_k^n L_k + \Delta t \mathbf{S}_p^n, \quad (3.4)$$

où L_k est la longueur de la k ième interface au volume V .

La méthode choisit pour évaluer les états gauches et droits à une interface donnée détermine l'ordre du schéma. Une approximation linéaire donne un schéma d'ordre 2 [42].

3.1.3 Calcul du terme source S

L'arc influence l'écoulement dans la décharge de deux manières: l'effet Joule et les mécanismes de transport de la radiation. Selon plusieurs auteurs [43, 28, 18], ces deux effets sur l'arc sont approximés par un terme source comportant deux parties

$$S_e = S_{ohm} - U_{net} \quad (3.5)$$

Ce terme d'énergie est incorporé explicitement dans la formulation axisymétrique des équations d'Euler. Un modèle bidimensionnel est présenté à la section suivante.

3.1.3.1 Effet Joule

D'après Sutton [30], l'énergie électromagnétique est introduite dans l'arc au taux suivant

$$S_{em} = \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{J}} \quad (3.6)$$

dans le cas où la loi d'Ohm est $\vec{\mathbf{J}} = \sigma \vec{\mathbf{E}}$, l'énergie électromagnétique apparaît seulement sous forme de dissipation Joule

$$S_{ohm} = \sigma |\vec{\mathbf{E}}|^2, \quad (3.7)$$

où $\sigma = \sigma(T, P)$ est la conductivité électrique qui est calculée à partir de Frost et al. [36] dans le cas du SF_6 et de Yos et al. [37] dans le cas de l'azote.

3.1.3.2 Modèle de radiation

Le transport de la radiation dans les arcs de type disjoncteur est principalement localisé dans les régions les plus chaudes du plasma où un échange intensif de radiation a lieu. Le calcul complet du transport radiatif demanderait une intégration compliquée du flux radiatif incident sur tous les points du domaine. Dans le cas des arcs électriques de type disjoncteur à géométrie cylindrique, la plupart des auteurs approximent la radiation dans l'arc en utilisant les coefficients moyens d'émission introduits par Liebermann et Lowke [44]. Ces coefficients représentent la quantité nette de radiations sortant d'un arc cylindrique isotherme et isobare de rayon R . Ceux-ci sont exprimés en fonction des variables thermodynamiques et du rayon de l'arc $U(T, P, R)$.

Ces coefficients ont été utilisés avec succès pour des modèles d'arcs quasi-1D [43, 28, 19], dans lesquels l'arc est subdivisé en sous-domaine dans la direction axiale suivant les lignes données par un maillage structuré. A chaque position axiale, le modèle d'arc est seulement fonction du rayon local de l'arc et ses propriétés radiatives sont obtenues en utilisant les coefficients nets d'émission. Dans le cas des maillages non-structurés, cette subdivision naturelle ne peut plus être appliquée et une approche différente doit être utilisée.

Le deuxième problème associé à l'utilisation d'un maillage non-structuré et au calcul d'arc de géométrie complexe est celui de la définition de la couche de réabsorption.

Par exemple, le modèle proposé en [43] calcule le taux de réabsorption à partir de la distance radiale à l'axe de symétrie, tandis que [18] utilise une réabsorption complète à la première cellule à l'extérieur de l'arc. Ces méthodes sont satisfaisantes pour un maillage structuré et aligné avec les axes (x,y) de la base cylindrique mais impliquent des suppositions sur la géométrie de l'arc. Leur analyse a amené à la formulation d'un modèle qui dépend fortement de la température et faiblement du rayon de l'arc.

Dans le cas d'un arc de géométrie complexe, Zhang et al. [35] propose de subdiviser l'arc électrique en des contours définis par les iso-lignes du potentiel électrique ϕ . Ce choix est plus naturel car ces iso-lignes sont orthogonales à la densité de courant \vec{J} . Cette subdivision est illustrée à la figure 3.1.

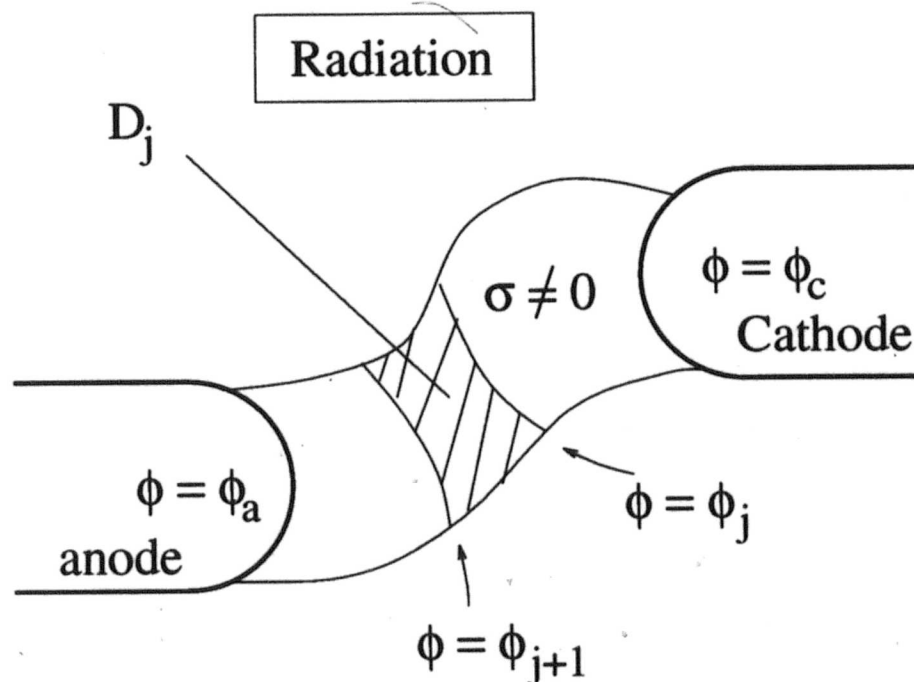


Figure 3.1: Subdivision de l'arc pour le calcul de la radiation.

Ce nouveau modèle fait intervenir le calcul de la radiation totale comme une fonction du potentiel électrique ϕ et de la température T

$$U_{net} = -k_1 U_e + k_2 U_a \quad (3.8)$$

Dans cette formule, $U_e = U(T, P, 0)$ et U_a sont les propriétés locales représentant respectivement l'émission et l'absorption de la radiation, avec $U_a = \frac{1}{T}$ dans la partie centrale de l'arc ($T \geq T_{arc}$) et $U_a = \frac{1}{T_1}$ dans la couche de réabsorption ($T_{arc} > T \geq T_1$). $T_1 (= 3600K)$ est une température critique au dessus de laquelle les effets de la radiation et de la dissipation ohmique sont considérées, et T_{arc} est la température fonction de ϕ et exprimée plus bas. Pour évaluer les deux coefficients k_1 et k_2 , [35] définissent des paramètres moyens au niveau de chaque subdivision de l'arc. Ainsi dans la j_{ieme} subdivision du sous-domaine D_j , la température de l'arc T_{arc} et la pression de l'arc P_{arc} sont définies par leur valeur moyenne

$$T_{arc,j} = \frac{1}{V_j} \int_{D_j} T dv, \quad P_{arc,j} = \frac{1}{V_j} \int_{D_j} P dv,$$

où V_j est le volume de D_j . R_{arc} est défini comme étant le rayon d'un arc cylindrique isobare et isotherme à une température T_{arc} et une pression P_{arc} , qui émettrait la même quantité d'énergie W_j que l'arc en situation réelle,

$$R_{arc,j} = \left(\frac{W_j}{\pi L_j U_j} \right)^{1/2},$$

où

$$\begin{aligned} U_j &= U(T_{arc_j}, P_{arc_j}, 0), \\ L_j &= \Delta\phi_j / \left(\frac{1}{V_j} \int_{D_j} |\nabla\phi| dv \right), \\ W_j &= \int_{D_j} U_e dv, \end{aligned}$$

avec L_j étant l'épaisseur de l'arc. Il s'en suit que la radiation moyenne émise par l'arc dans le sous-domaine D_j est donné par

$$U_{jm} = U(T_{arc_j}, P_{arc_j}, R_{arc_j}).$$

Les coefficients k_1 et k_2 sont alors évalués comme des constantes dans chaque sous-domaine

$$\begin{aligned} k_{1j} &= U_{jm} / U_j, \\ k_{2j} &= \beta k_{1j} \left(\int_{D_j} U_e dv \right) / \left(\int_{D_j} U_a dv \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ici le paramètre β est utilisé pour tenir compte des pertes radiatives à la frontière de l'arc et des études expérimentales les estiment entre 5% à 20% [45, 46].

3.2 Résolution des équations de Maxwell

3.2.1 Discrétisation de l'équation de Laplace

Au chapitre 2, nous avons montré que la résolution des équations de Maxwell passe d'abord par le calcul de l'équation de la conservation de la charge 2.42. Sous forme intégrale et écrite en terme de potentiel électrique, celle-ci est

$$\oint_{\partial\Gamma} \sigma \nabla \phi \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (3.10)$$

Le calcul du potentiel électrique permet de connaître la densité de courant \vec{J} dans l'arc électrique et les électrodes. A partir de \vec{J} , il est possible de déterminer le terme de dissipation Joule dans le terme source de l'équation d'énergie

$$S_{ohm} = \sigma | \vec{E}^2 | \quad (3.11)$$

Afin d'assurer la cohérence entre la discrétisation des variables conservatives et du terme source S_{ohm} , \vec{J} et σ doivent être constants par élément. Par conséquent, le potentiel électrique doit être une fonction d'ordre supérieur, c.a.d. au moins linéaire par élément.

Le choix du stockage de ϕ dépend du type de conditions frontières imposées sur \vec{J} et \vec{E} . Comme le côté d'un élément est utilisé pour approximer une frontière, le potentiel électrique est stocké aux noeuds.

L'évaluation de l'intégrale de surface 3.10 se fait sur le covolume de l'élément. Celui-ci est défini en traçant des droites reliant le centre de gravité de chaque triangle avec les points moyens des côtés opposés de ces cellules tel qu'illustré à la figure 3.3.

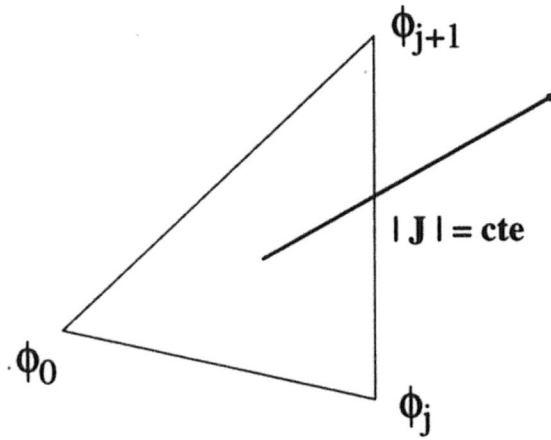


Figure 3.2: Stockage du potentiel électrique ϕ aux sommets de chaque cellule primaire.

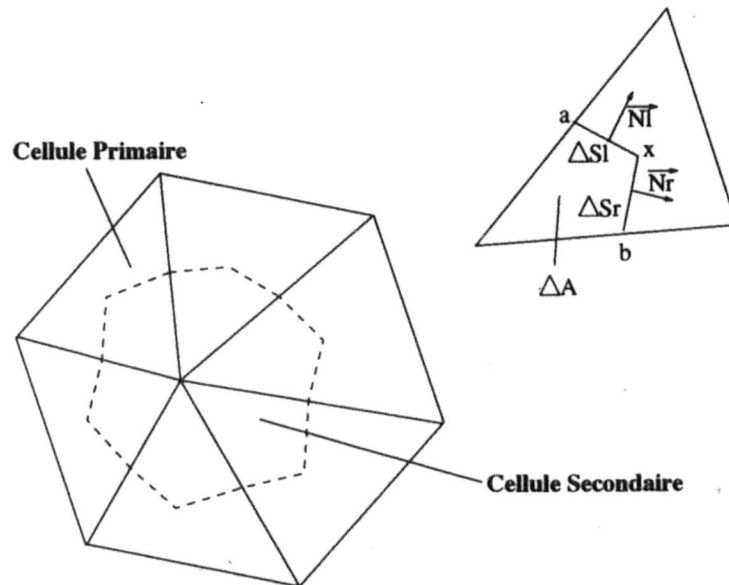


Figure 3.3: Illustration d'une cellule primaire et secondaire en coordonnées cylindriques.

En coordonnées cylindriques, la surface de la cellule secondaire est une coupe du volume Γ générée dans la direction azimutale. Pour un élément triangulaire, le polynôme d'interpolation à trois noeuds est

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (3.12)$$

A partir des valeurs aux noeuds les trois coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont exprimés de la manière suivante

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2\Omega} [a_0 \phi_0 + a_j \phi_j + a_{j+1} \phi_{j+1}] \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2\Omega} [b_0 \phi_0 + b_j \phi_j + b_{j+1} \phi_{j+1}] \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2\Omega} [c_0 \phi_0 + c_j \phi_j + c_{j+1} \phi_{j+1}] \end{aligned} \quad (3.13)$$

où Ω est la surface du triangle définie par

$$\Omega = \frac{1}{2} [(x_0 x_j - x_j x_0) + (x_{j+1} y_0 - x_0 y_{j+1}) + (x_j y_{j+1} - x_{j+1} y_j)]$$

En remplaçant les coefficients α dans la fonction d'interpolation, nous obtenons après factorisation, la forme classique [47]

$$\phi = N_0 \phi_0 + N_j \phi_j + N_{j+1} \phi_{j+1} \quad (3.14)$$

avec

$$N_0 = \frac{1}{2A} [a_0 + b_0 x + c_0 y]$$

$$a_0 = x_j y_{j+1} - x_{j+1} y_j,$$

$$b_0 = y_j - y_{j+1},$$

$$c_0 = x_{j+1} - x_j;$$

$$N_j = \frac{1}{2A} [a_j + b_j x + c_j y]$$

$$a_j = x_{j+1} y_0 - y_{j+1} x_0,$$

$$b_j = y_{j+1} - y_0,$$

$$c_j = x_0 - x_{j+1};$$

$$N_{j+1} = \frac{1}{2A} [a_{j+1} + b_{j+1} x + c_{j+1} y]$$

$$a_{j+1} = x_0 y_j - x_j y_0,$$

$$b_{j+1} = y_0 - y_j,$$

$$c_{j+1} = x_j - x_0$$

La surface $\partial\Gamma$ délimite le volume Γ de la cellule secondaire. La discrétisation de l'intégrale de surface 3.10 sur $\partial\Gamma$ donne

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{voisins}}} [(\phi_0 \nabla N_0 + \phi_j \nabla N_j + \phi_{j+1} \nabla N_{j+1}) \cdot \vec{\Delta S}]_i = 0 \quad (3.15)$$

avec

$$\Delta \vec{S} = \vec{n}_L \Delta S_L + \vec{n}_R \Delta S_R \quad (3.16)$$

où $N_{voisins}$ est le nombre de triangles voisins aux noeuds 0, \vec{n}_L et \vec{n}_R les vecteurs unitaires respectivement normaux aux longueurs discrètes ΔS_L et ΔS_R (voir figure 3.3).

En détail, pour chaque triangle voisin

$$\vec{n}_L = [(y_b - y_x)\vec{x} + (x_x - y_b)\vec{y}] \quad (3.17)$$

$$\vec{n}_R = [(y_x - y_c)\vec{x} + (x_c - y_x)\vec{y}] \quad (3.18)$$

$$\Delta S_L = y_x \quad (3.19)$$

$$\Delta S_R = y_x \quad (3.20)$$

Par conséquent, pour chaque noeud du domaine appartenant au milieu électriquement conducteur, l'équation suivante est construite

$$a_{deb}\phi_{deb} + \dots + a_0\phi_0 + \dots + a_{fin}\phi_{fin} = 0 \quad (3.21)$$

Ce qui donne la matrice du système algébrique A_e du potentiel électrique

$$A_e \vec{\phi} = \vec{B}_e \quad (3.22)$$

Lorsque le noeud repose sur une frontière avec condition de Dirichlet, il n'est pas inclu dans la construction de l'équation. Pour des noeuds voisins de type Dirichlet, la valeur correspondante connue est envoyée du côté du terme source \vec{B}_e . Pour un noeud de type Neumann, la condition sur ϕ est naturellement satisfaite.

3.2.2 Discrétisation de l'équation de Poisson

L'intensité du champ magnétique \vec{H} peut être obtenue en utilisant la même technique de discrétisation que pour le potentiel électrique. Cette technique est appliquée à la forme intégrale de l'équation d'induction magnétique développée au Chapitre 2.

$$\int_{\Gamma} \frac{H_{\theta}}{y^2} dv - \oint_{\partial\Gamma} \nabla H_{\theta} \cdot \vec{n} ds = \int_{\Gamma} \frac{J_x}{y} dv + \oint_{\partial\Gamma} \vec{J} \times \vec{\theta} \cdot \vec{n} ds \quad (3.23)$$

Etant donné que H_{θ} est continu à l'interface de deux régions de perméabilité magnétique différente, H_{θ} doit être stocké aux noeuds de chaque triangle. La représentation de H_{θ} dans un élément est choisie linéaire et la discrétisation de la deuxième intégrale est identique à celle développée pour le potentiel électrique,

$$- \oint_{\partial\Gamma} \nabla H_{\theta} \cdot \vec{n} ds \approx - \sum_{i=1}^{N_{\text{voisins}}} [(H_0 \nabla N_0 + H_j \nabla N_j + H_{j+1} \nabla N_{j+1}) \cdot \vec{\Delta S}]_i$$

Les troisième et quatrième intégrales se discrétisent très facilement car $|\vec{J}|$ est constant par élément. Ainsi

$$\int_{\Gamma} \frac{J_x}{y} dv \approx \sum_{i=1}^{N_{\text{voisins}}} [\sigma E_x \Delta A]_i, \quad (3.24)$$

$$\oint_{\partial\Gamma} \vec{J} \times \vec{\theta} \cdot \vec{n} ds \approx \sum_{i=1}^{N_{\text{voisins}}} [\sigma (-E_x \vec{y} + E_y \vec{x}) \cdot \vec{\Delta S}]_i \quad (3.25)$$

où ΔA_i représente l'intersection de la surface primaire i avec la surface secondaire

(voir figure 2.3). La discrétisation de la première intégrale est plus complexe car H_θ est linéaire par élément. Sous forme discrète, cette intégrale donne

$$\int_{\Gamma} \frac{H_\theta}{y^2} dv \approx \sum_{i=1}^{N_{\text{voisins}}} [H_0 \oint_{\Delta A} \frac{N_0}{y} dy dx + H_j \oint_{\Delta A} \frac{N_j}{y} dy dx + H_{j+1} \oint_{\Delta A} \frac{N_{j+1}}{y} dy dx]; \quad (3.26)$$

Les intégrales de surface qui apparaissent dans cette expression sont résolues par une technique d'intégration de Gauss. La forme finale de 3.26 est

$$\int_{\Gamma} \frac{H_\theta}{y^2} dv \approx \sum_{i=1}^{N_{\text{voisins}}} [H_0 \theta_1 + H_j \theta_2 + H_{j+1} \theta_3]; \quad (3.27)$$

affectée des coefficients suivants

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \sum_{n=1}^p [w f_1(\epsilon, \eta) \text{Jaco}(\epsilon, \eta)]_n, \\ \theta_2 &= \sum_{n=1}^p [w f_2(\epsilon, \eta) \text{Jaco}(\epsilon, \eta)]_n, \\ \theta_3 &= \sum_{n=1}^p [w f_3(\epsilon, \eta) \text{Jaco}(\epsilon, \eta)]_n, \end{aligned}$$

où p est le nombre de points d'intégration de Gauss sur la surface ΔA_i , $(f_1, f_2, f_3)_n$ les images respectives de $(\frac{N_0}{y}, \frac{N_j}{y}, \frac{N_{j+1}}{y})_i$ par la transformée Jacobienne Jaco_n et w_n le poids d'un point d'intégration de Gauss.

Finalement, la forme discrète de l'équation d'induction magnétique est

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{N_{\text{voisins}}} [H_0(\theta_1 + \nabla N_0 \cdot \Delta \vec{\mathbf{S}}) + \\
 & \quad H_j(\theta_2 + \nabla N_j \cdot \Delta \vec{\mathbf{S}}) + \\
 & \quad H_{j+1}(\theta_3 + \nabla N_{j+1} \cdot \Delta \vec{\mathbf{S}})]_i = \\
 & \sum_{i=1}^{N_{\text{voisins}}} [\sigma(E_x \Delta A + (-E_x \vec{\mathbf{y}} + E_y \vec{\mathbf{x}}) \cdot \Delta \vec{\mathbf{S}})]_i
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Le système algébrique de l'intensité du champ magnétique est obtenu de la même façon que celui du potentiel électrique

$$A_m \vec{\mathbf{H}}_\theta = \vec{\mathbf{B}}_m, \tag{3.29}$$

où $\vec{\mathbf{B}}_m$ contient le terme source provenant de la troisième et quatrième intégrales et des termes Dirichlet.

3.3 Technique de résolution de l'équation de Laplace et de Poisson

3.3.1 Propriétés des matrices A_e et A_m

Les équations de Poisson et de Laplace représentent chacune un problème d'équilibre. Dans ce type de problème l'information se propage également dans toutes les directions. Sur le plan numérique, cette propriété physique demande à ce que l'influence

mutuelle entre deux cellules secondaires soit identique. Par conséquent, à partir de la discrétisation des équations de Laplace et de Poisson, la construction des matrices A_e et A_m doit générer deux matrices symétriques et définies positives.

Afin de démontrer que les matrices construites par notre discrétisation respectent bien les conditions ci-dessus, nous donnons respectivement les représentations graphiques des matrices A_e et A_m aux figures 3.5 et 3.6. En partant d'un maillage non-structuré quelconque (figure 3.4), les matrices A_e et A_m sont construites. La condition de Neumann est imposée sur les frontières verticales et la condition Dirichlet sur les frontières horizontales.

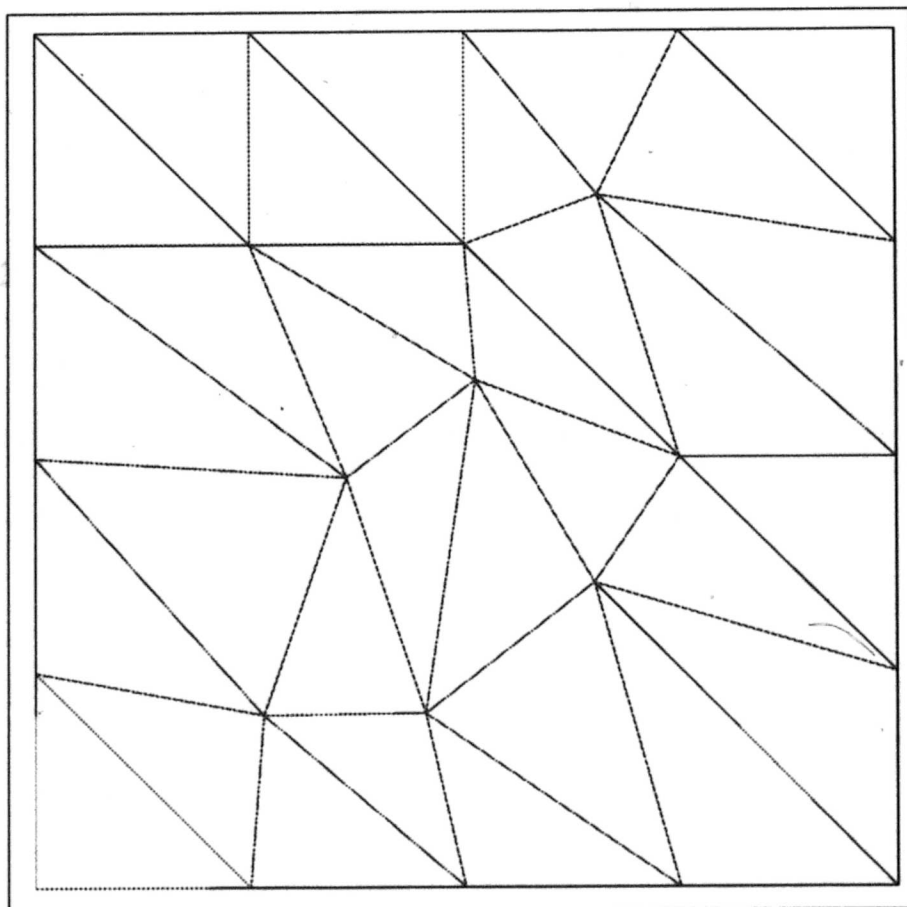


Figure 3.4: Maillage de départ pour la construction des matrices A_e et A_m .

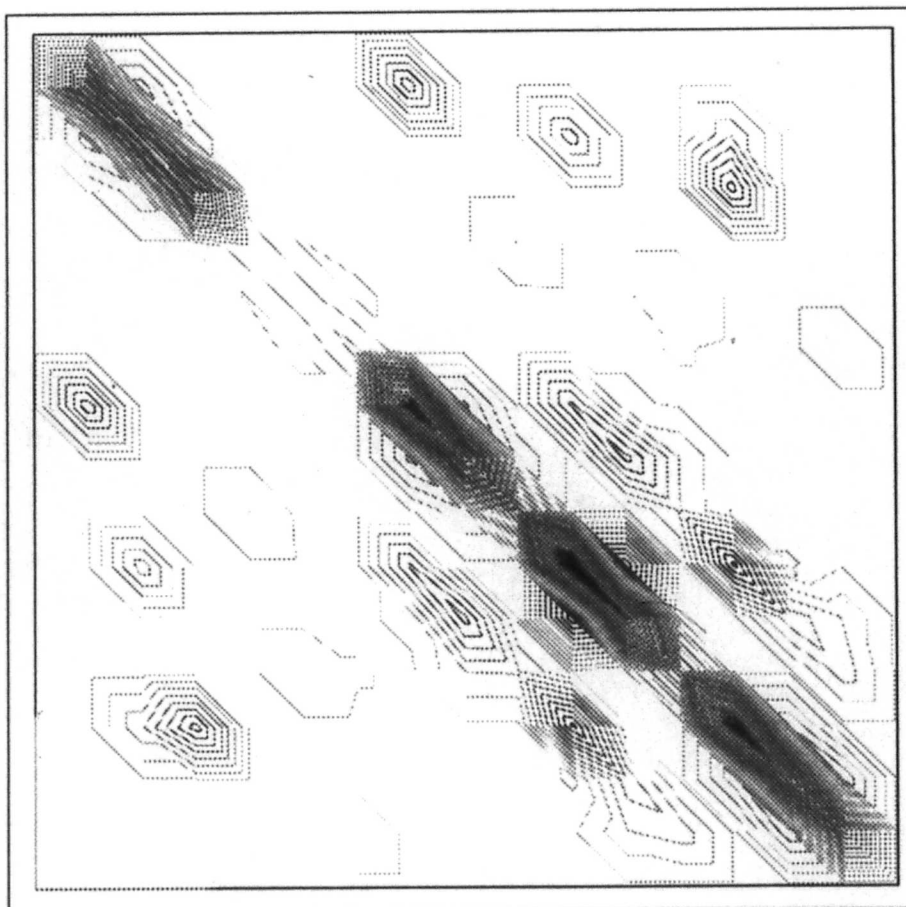


Figure 3.5: Représentation de la matrice A_e symétrique et définie positive.

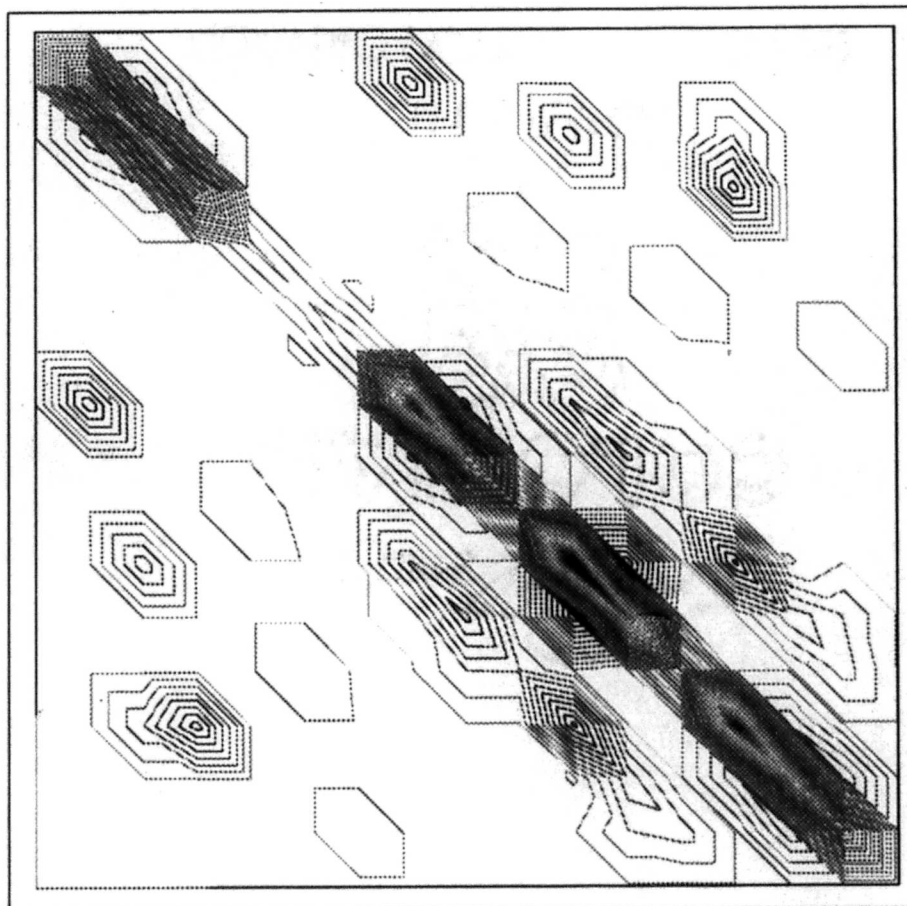


Figure 3.6: Représentation de la matrice A_m symétrique et définie positive.

3.3.2 Stockage des matrices A_e et A_m par la méthode CRS

Lorsqu'un système algébrique est de grande taille, il est important de trouver un moyen de stocker les valeurs non nulles de la matrice afin d'optimiser l'espace mémoire et de réduire les opérations inutiles associées à la résolution du système algébrique. La technique employée dans ce mémoire pour représenter les matrices A_e et A_m est la technique CRS ("Compressed Row Storage"). Elle permet le stockage des éléments non nuls de la matrice à l'aide de trois vecteurs. Le premier vecteur VAL contient tous les coefficients non nuls de la matrice et celui-ci est rempli en balayant rangée par rangée de gauche à droite la matrice. Le deuxième vecteur COLIND contient les indices de colonne de chaque coefficient contenu dans le vecteur VAL. Le troisième vecteur ROWPTR donne la position dans le vecteur COLIND du début à la fin.

3.3.3 Résolution des matrices A_e et A_m par la méthode du gradient conjugué

Les deux matrices A_e et A_m sont résolues par la méthode du gradient conjugué. Cette méthode est exposée en annexe.

Chapitre 4

Résultats et discussion

4.1 Validation des équations de diffusion

Notre solveur est capable de calculer le potentiel, le champ électrique et le champ magnétique dans deux systèmes de coordonnées: cartésiens et cylindriques. Ce calcul s'effectue dans les régions à conductivité électrique non-nulle, dans le cas du potentiel et du champ électrique, et en tout point dans le cas du champ magnétique.

4.1.1 Equation de Laplace

Dans le cas du potentiel et champ électrique, les cas tests sont effectués sur deux problèmes différents:

- Deux électrodes planes, parallèles et axisymétriques, soumises à une différence de potentiel U , séparées par une région de conductivité électrique non-homogène

σ_1 et σ_2 . Cette colonne électriquement conductrice est délimitée par une région de conductivité électrique nulle.

- Deux électrodes coaxiales, soumises à une différence de potentiel U , séparées par une région de conductivité électrique homogène σ et délimitée latéralement par une région de conductivité électrique nulle.

4.1.1.1 Champ et potentiel électrique entre deux électrodes coaxiales

Chaque câble coaxial représente une électrode portée respectivement à un potentiel ϕ_a et ϕ_c . Le milieu entre les deux câbles est électriquement conducteur sur une longueur finie. Ce cas test vérifie également si la condition de Neumann appliquée aux potentiels électriques sur les deux frontières latérales est obtenu automatiquement par le solveur. La décharge est donc radiale et il existe une solution analytique à ce problème.

La figure 4.1 montre les conditions frontières appliquées sur ϕ et la valeur de la conductivité électrique entre les deux électrodes coaxiales. La figure 4.2 montre le maillage utilisé pour ce cas test.

La figure 4.3 montre le calcul obtenu pour le potentiel électrique ϕ et le champ électrique E_r . Ces résultats sont comparés à leurs solutions analytiques respectives. La figure 4.4 montre l'erreur relative obtenue pour ces deux calculs. La figure 4.5 illustre la densité de courant pour ce cas test.

La figure 4.6 présente les équipotentielles entre les deux cylindres concentriques. Ces lignes démontrent que le solveur impose automatiquement la condition de Neu-

mann sur le potentiel électrique ϕ à l'interface de deux régions conductrice et non-conductrice.

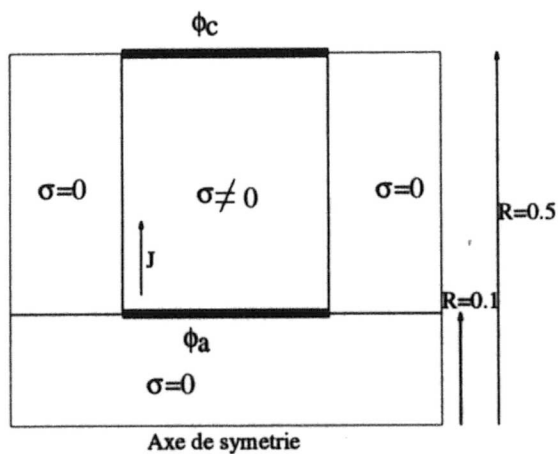


Figure 4.1: Conditions frontières appliquées sur ϕ entre deux électrodes coaxiales.

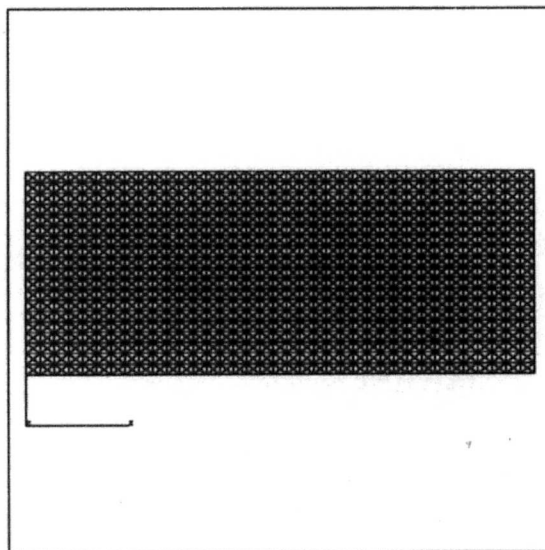


Figure 4.2: Maillage utilisé pour ϕ entre deux électrodes coaxiales.

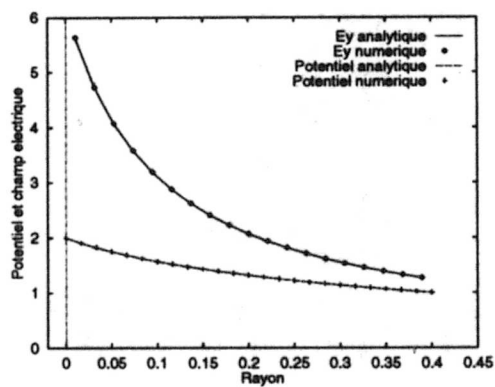


Figure 4.3: Comparaison entre les valeurs numériques et analytiques de ϕ et E_y entre deux électrodes coaxiales.

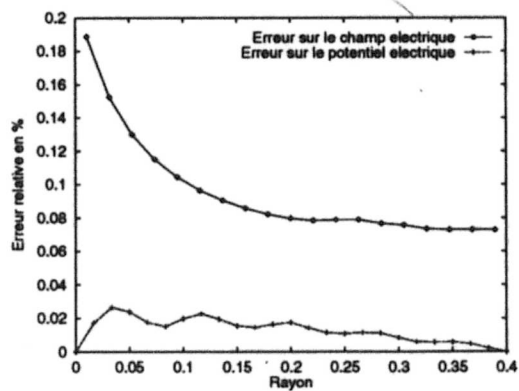


Figure 4.4: Erreur relative sur ϕ et E_y entre deux électrodes coaxiales.

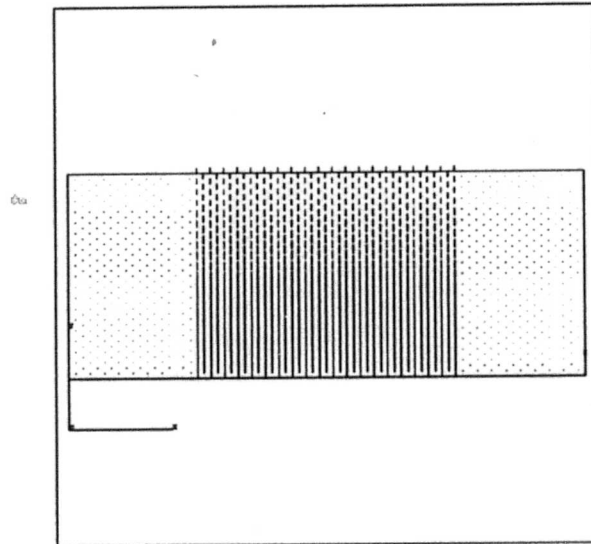


Figure 4.5: Densité de courant J_r entre deux électrodes coaxiales.

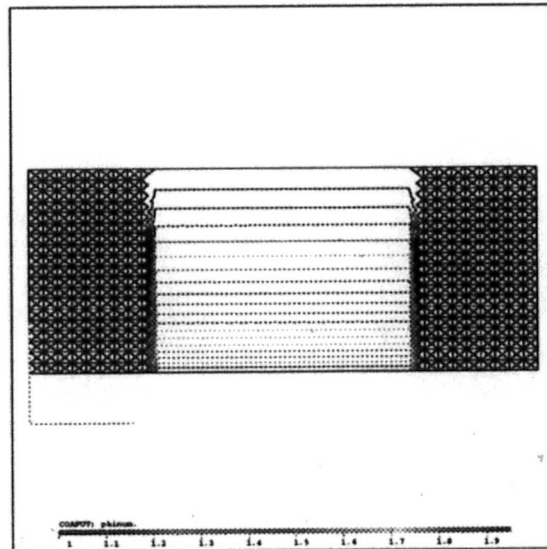


Figure 4.6: Equipotentielle entre deux électrodes coaxiales.

4.1.1.2 Champ et potentiel électrique entre deux électrodes axisymétriques et parallèles.

Chaque électrode est portée respectivement à un potentiel ϕ_a et ϕ_c . La conductivité électrique entre les deux électrodes est non-homogène et elle est choisie de façon à obtenir une densité de courant unitaire de l'anode vers la cathode. Ce choix permet de vérifier si la densité de courant reste uniforme lorsque le courant traverse deux régions en série de conductivité électrique différente. La décharge est donc axiale et il existe une solution analytique à ce problème.

La figure 4.7 montre les conditions frontières appliquées sur ϕ et le choix de la conductivité électrique entre les deux électrodes. La figure 4.8 montre le maillage utilisé pour ce cas test.

La figure 4.9 montre le calcul obtenu pour le potentiel électrique ϕ et le champ électrique E_x . Ces résultats sont comparés à leur solution analytique respective. Les figures 4.10 et 4.11 montrent l'erreur relative obtenue pour ces deux calculs.

Les figure 4.12 et 4.13 montrent les équipotentiels entre les deux électrodes dans le cas d'un milieu de conductivité électrique homogène et non-homogène. Pour un milieu homogène, la conductivité électrique est initialisée partout à 1 dans la colonne. Pour ces deux cas, la densité de courant reste unitaire et uniforme. La figure 4.14 montre la densité de courant pour un milieu de conductivité électrique non-homogène. Cette figure démontre que la continuité normale de la densité de courant est continue à l'interface de deux régions de conductivité électrique différente.

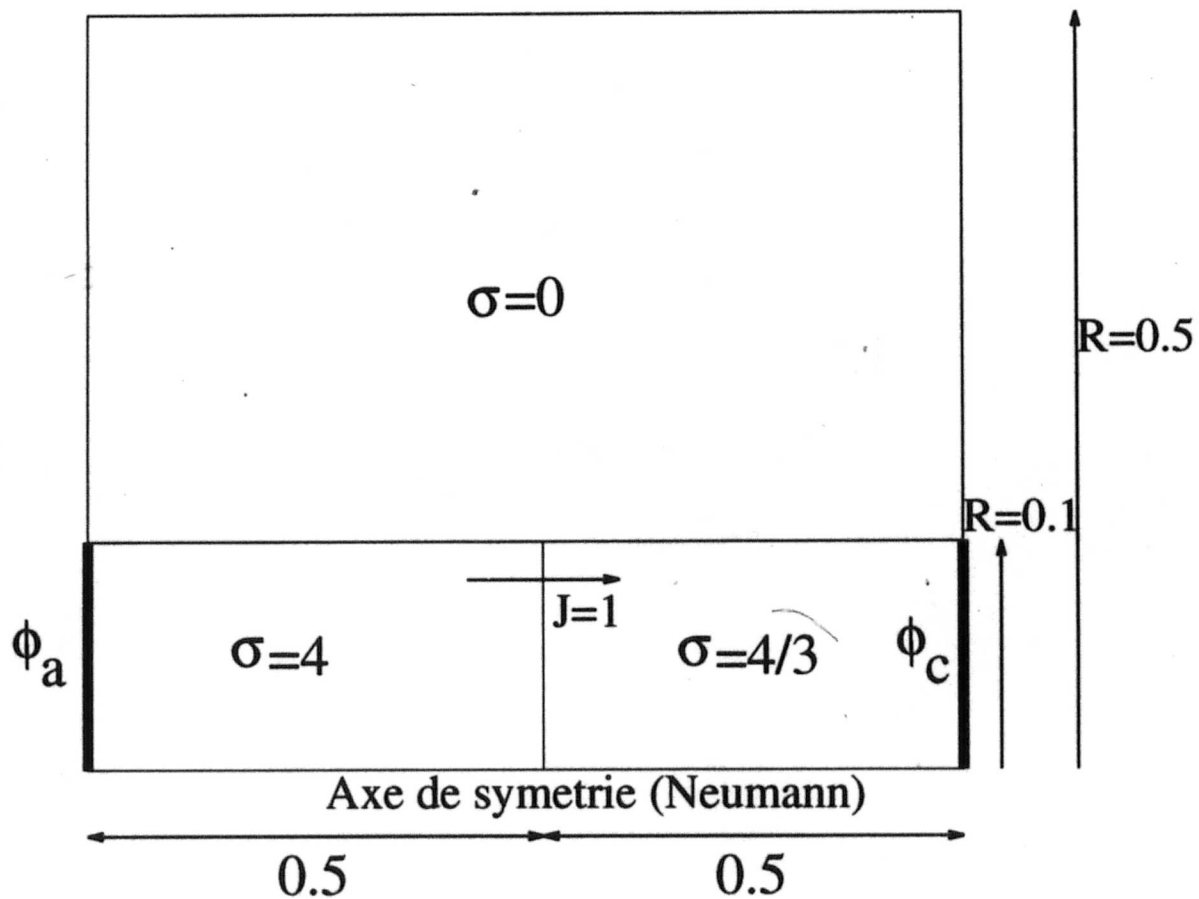


Figure 4.7: Conditions frontières appliquées sur ϕ entre deux électrodes axisymétriques.

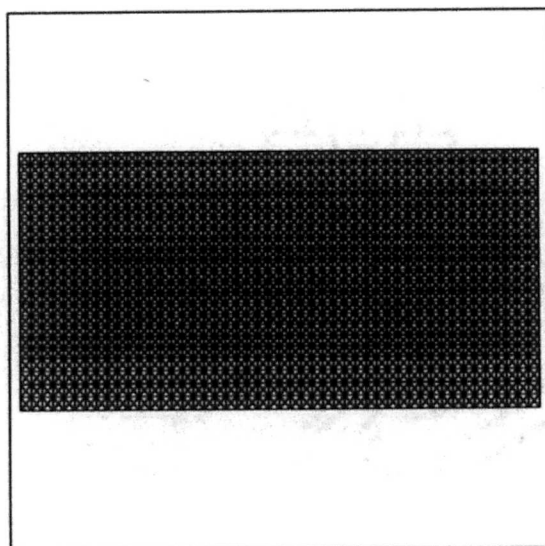


Figure 4.8: Maillage utilisé pour ϕ entre deux électrodes axisymétriques.

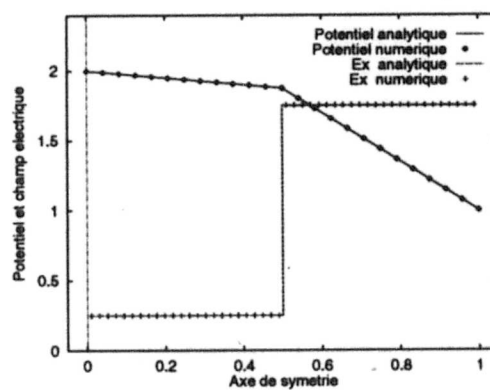


Figure 4.9: Comparaison entre les valeurs numériques et analytiques de ϕ et E_x entre deux électrodes axisymétriques.

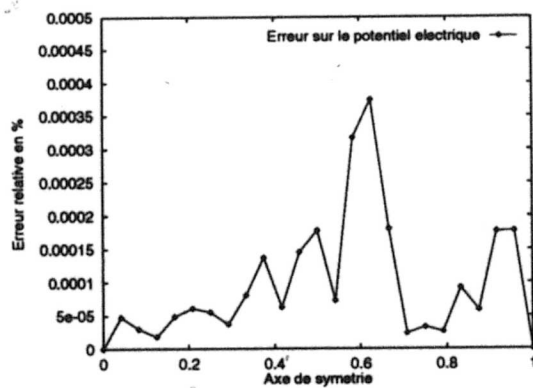


Figure 4.10: Erreur relative sur ϕ entre deux électrodes axisymétriques.

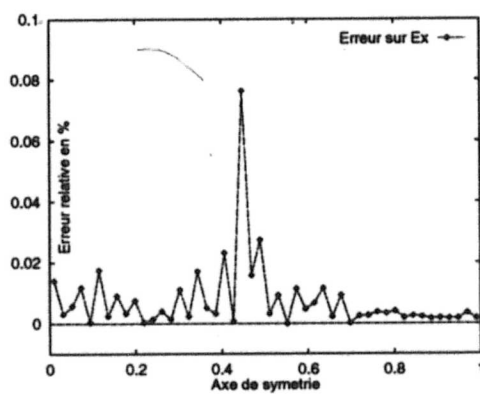


Figure 4.11: Erreur relative sur E_x entre deux électrodes axisymétriques.

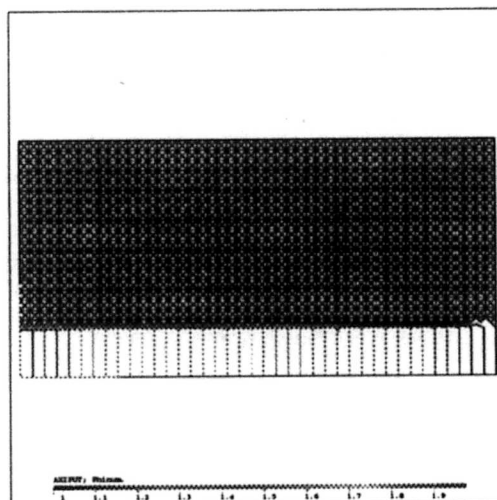


Figure 4.12: Equipotentielle entre deux électrodes axisymétriques séparées par un milieu de conductivité électrique homogène.

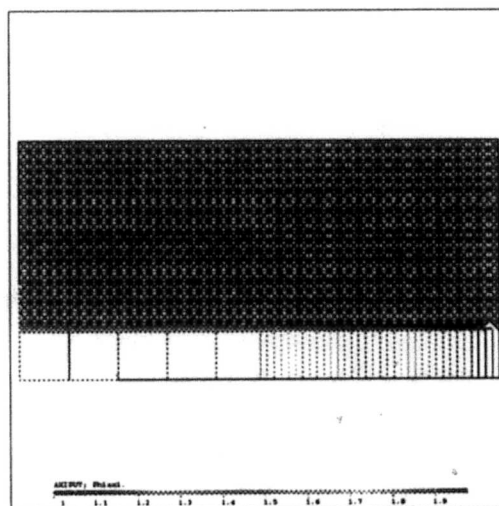


Figure 4.13: Equipotentielle entre deux électrodes axisymétriques séparées par un milieu de conductivité électrique non-homogène.

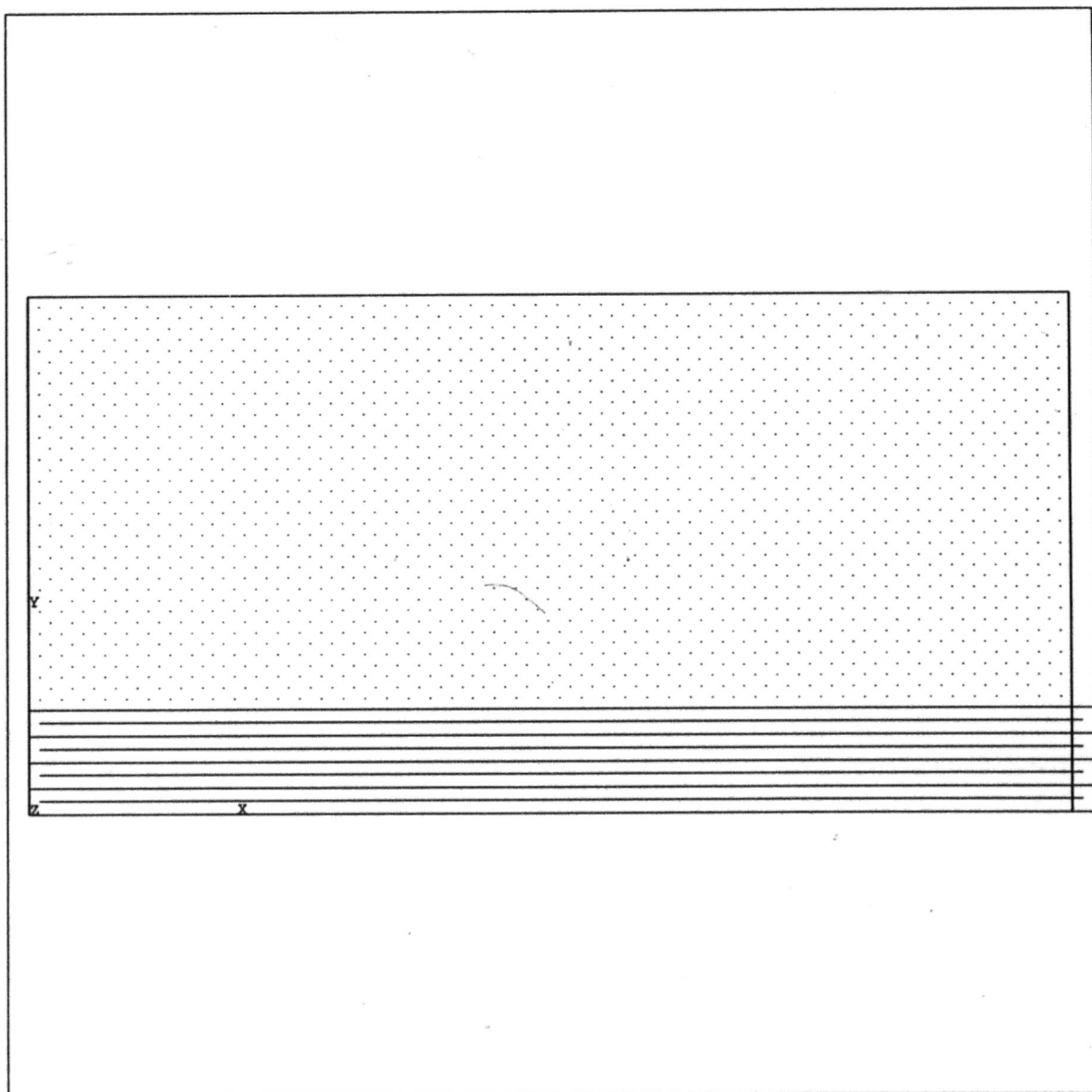


Figure 4.14: Densité de courant entre deux électrodes axisymétriques séparées par un milieu de conductivité électrique non-homogène.

4.1.2 Equation de Poisson

Dans le cas du champ magnétique, les cas tests sont également effectués sur deux problèmes différents:

- Deux disques plans et parallèles, soumis à une différence de potentiel U , séparé par une région de conductivité électrique non-homogène σ_1 et σ_2 , et contenu radialement par une région de conductivité électrique nulle. Ce cas test utilise la densité de courant J_x obtenue à la section 4.1.1.2.

- Deux électrodes coaxiales, soumises à une différence de potentiel U , séparées par une région de conductivité électrique homogène σ .

4.1.2.1 Champ magnétique dans une colonne de plasma unidimensionnelle

La densité de courant J_x unitaire induit un champ magnétique purement azimutal qui dépend de la coordonnée radiale seulement. La solution analytique à ce problème est donnée à la section 2.2.2.4.

La figure 4.15 montre les conditions frontières appliquées sur H_θ et le choix de la conductivité électrique entre les deux électrodes. Le maillage utilisé pour ce cas test est le même que celui utilisé à la section 4.1.1.2.

La figure 4.16 montre le calcul obtenu pour le champ magnétique azimutal. Les résultats sont comparés à la solution analytique du problème. La figure 4.17 montre l'erreur relative obtenue pour ce calcul.

Les figure 4.18 montrent les iso-lignes du champ magnétique azimutal dans le cas d'un milieu de conductivité électrique non-homogène. Le dernier test démontre que le champ magnétique est insensible au changement de conductivité électrique. Ce résultat est normal puisque la densité de courant reste uniforme dans le cas d'un milieu de conductivité électrique non-homogène en série.

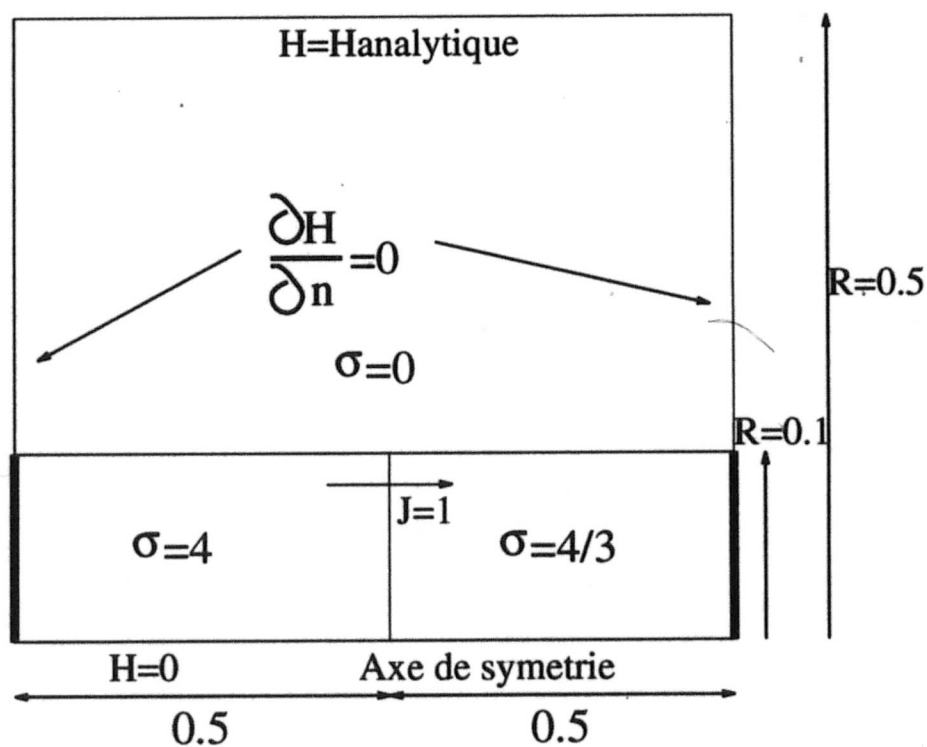


Figure 4.15: Conditions frontières appliquées sur H_θ entre deux électrodes axisymétriques.

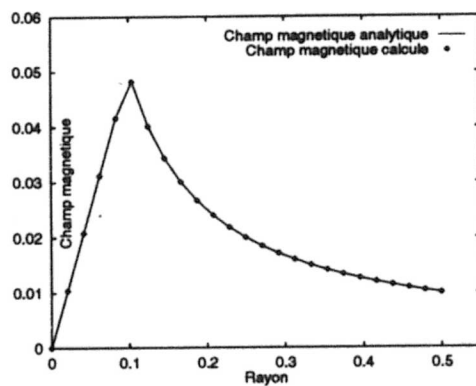


Figure 4.16: Comparaison entre les valeurs numériques et analytiques de H_θ entre deux électrodes axisymétriques.

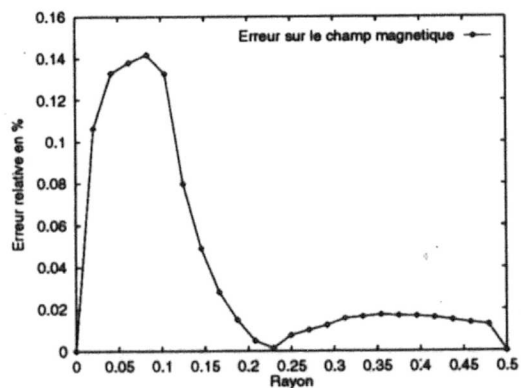


Figure 4.17: Erreur relative sur H_θ entre deux électrodes axisymétriques.

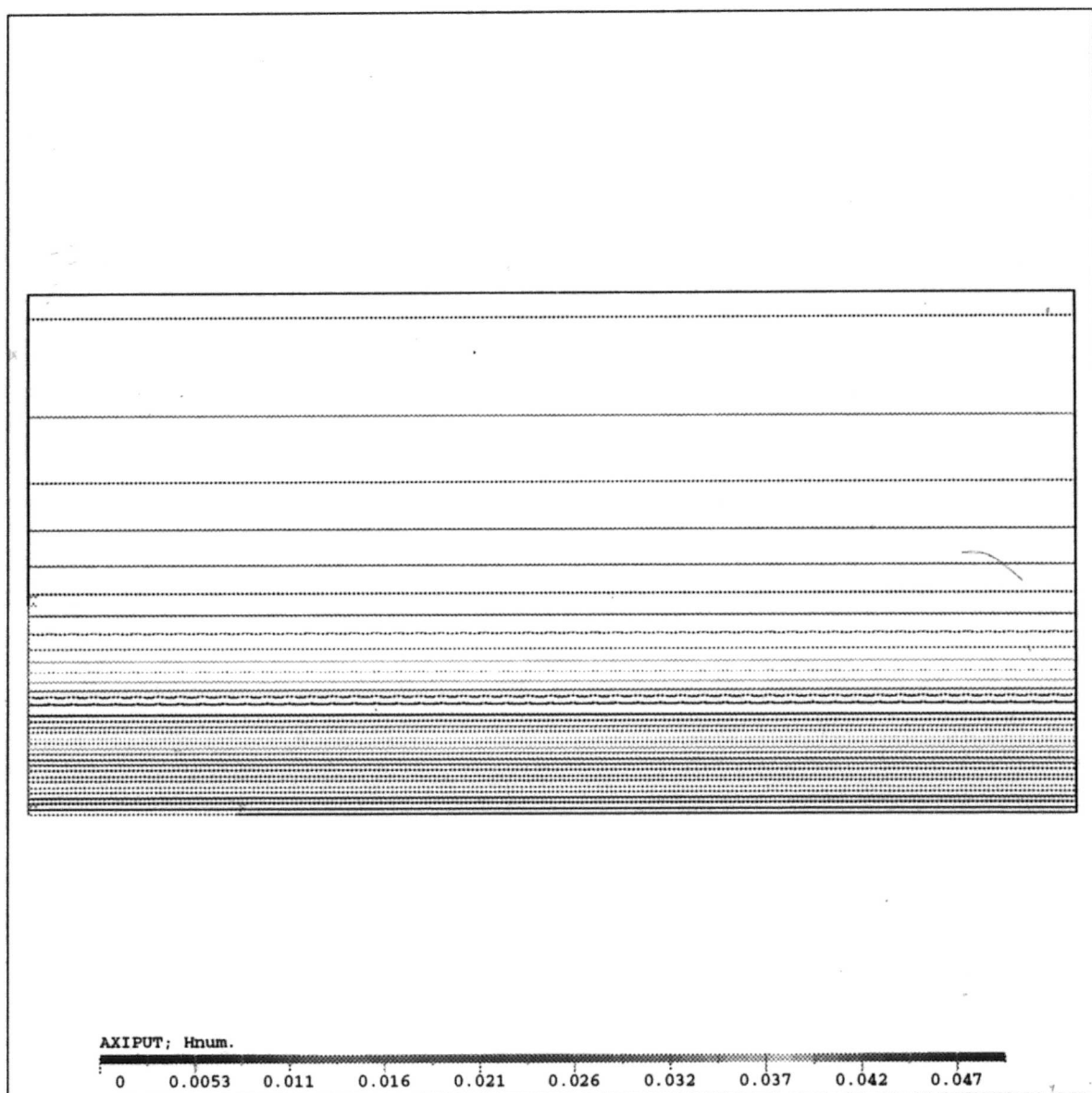


Figure 4.18: Isolignes du champ magnétique H_0 entre deux électrodes axismétriques.

4.1.2.2 Symétrie du champ magnétique produit par une décharge entre deux électrodes coaxiales

Comme à la section 4.1.1.1, chaque câble coaxial représente une électrode portée respectivement à un potentiel ϕ_a et ϕ_c . Le milieu entre les deux câbles est électriquement conducteur sur une longueur finie. Ce cas test n'est pas validé avec une solution analytique mais il vérifie si la symétrie du champ magnétique est respectée dans le cas d'une décharge purement radiale. Ce test donne également l'effet des conditions frontières aux parois latérales sur H_θ (Neumann et Dirichlet) sur les extremums du champ magnétique H_θ .

La figure 4.19 montre les conditions frontières appliquées pour le potentiel électrique ϕ et le champ magnétique H_θ et la figure 4.20 le maillage utilisé dans ce problème.

Les figures 4.21 et 4.22 démontrent que la symétrie des lignes du champ est respectée pour les deux types de frontières imposées. L'échelle sur ces deux figures indiquent également que les extremums sont insensibles à ces changements de conditions frontières. Ce dernier résultat est important dans le cas d'un arc où la condition de Neumann repose sur les parois latérales du domaine.

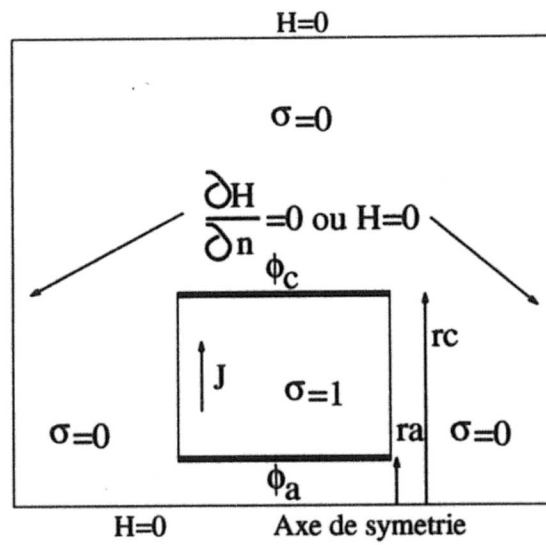


Figure 4.19: Conditions frontières appliquées sur H_θ autour des électrodes coaxiales.

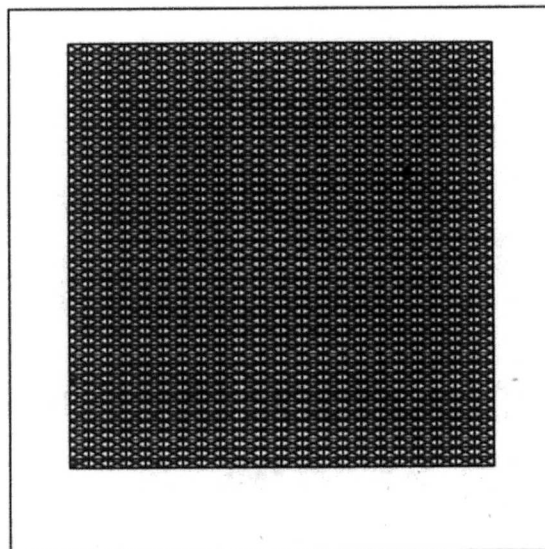


Figure 4.20: Maillage à l'intérieur et à l'extérieur des électrodes coaxiales .

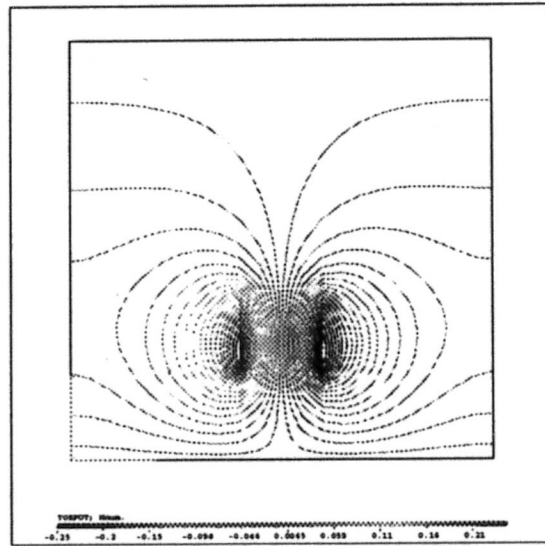


Figure 4.21: Symétrie de H_θ avec condition de Neumann.

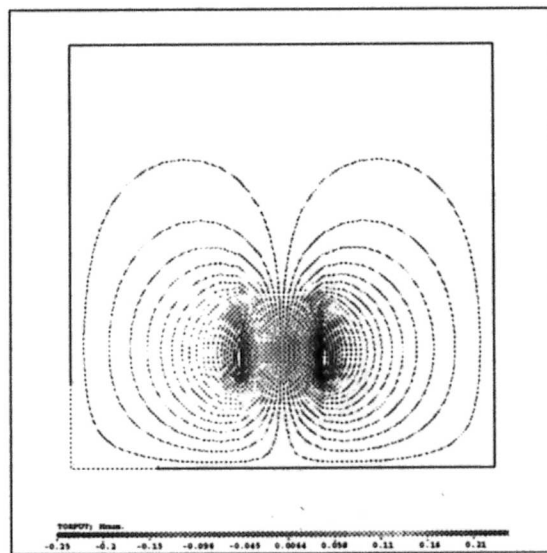


Figure 4.22: Symétrie de H_θ avec condition de Dirichlet.

4.2 Cas test Hermann (1974)

En 1974, Hermann et al. [48] effectuent une expérience dans laquelle ils étudient un arc de 2000 A stabilisé par convection axiale ("Convection Stabilised Arc"). Leur travail est devenu une référence dans la littérature car il a permis de comprendre certains mécanismes qui à l'époque n'étaient pas clairs dans ce type d'arc. Par exemple, les processus qui transportent l'énergie thermique contenue dans l'arc vers les régions extérieures, c.a.d. la radiation, la conduction et la turbulence. Des mesures détaillées sur la température, la vitesse du plasma dans l'arc, la pression et le champ électrique ont été prises sur l'axe de symétrie en partant du point de stagnation.

Trépanier et al. [27] ont effectué une simulation numérique du cas test Hermann en utilisant un modèle gaz parfait et un modèle gaz réel. Les résultats obtenus pour la pression sont identiques dans les deux cas. Par conséquent, l'étude de la compression magnétique dans ce type d'arc peut se limiter à l'utilisation d'un modèle gaz parfait.

Dans le présent mémoire, le même cas test a été calculé en incluant dans le modèle gaz parfait les forces de Lorentz afin d'évaluer leur effet sur la pression dans l'arc. Nous verrons que cet effet est négligeable comme le prédit la théorie.

4.2.1 Description de l'expérience de Hermann et al.

Deux réservoirs d'azote, l'un en amont et l'autre en aval, sont maintenus respectivement à une pression de 23 bar et 1 bar. Une fois libéré, l'azote est accéléré

dans une tuyère supersonique dans laquelle deux électrodes concentriques ont été disposées sur l'axe de symétrie. La pression dans les deux réservoirs permet d'avoir un écoulement stationnaire pendant 10 ms. Pendant cet intervalle de temps l'arc, alimenté par un signal carré, est allumé sur l'axe de symétrie.

Les paramètres de l'expérience sont les suivants:

- Gaz: azote
- Signal carré: $I_{\max}=2000$ A, Période = 5 ms
- Potentiel de l'arc ≈ 1000 V
- Puissance de l'arc ≈ 2 MW
- Longueur de l'arc ≈ 110 mm
- Diamètre du col de la tuyère: 12 mm
- Pression en amont: 23 bar
- Pression à la sortie: 1 bar
- Débit massique ≈ 0.4 kg/s

La Figure 4.23 illustre la géométrie de la tuyère utilisée dans l'expérience.

Le calcul de l'arc de Hermann et al. a été effectué en utilisant un modèle gaz parfait. En premier temps, une solution a été d'obtenue en gaz froid. Une fois le calcul convergé, l'allumage de l'arc entre les deux électrodes est réalisé en chauffant artificiellement le gaz sur l'axe de symétrie. Ensuite l'arc se développe par lui-même

dans la tuyère. La convergence est atteinte lorsque la température dans l'arc se stabilise.

Les conditions frontières pour les équations de la Magnétohydrodynamique sont présentées à la figure 4.24. Celles-ci donnent les conditions appliquées sur le fluide, le potentiel électrique ϕ et le champ magnétique H_θ .

La différence de pression entre les deux réservoirs force l'écoulement dans l'entrée de la tuyère. Les électrodes sont respectivement localisées à l'entrée et à la sortie de la double tuyère. Leur géométrie concentrique permet d'évacuer une partie de l'azote (leur sortie est connectée au réservoir basse pression). Ce type de conception est souvent rencontré dans les disjoncteurs haute-tension [49] car il permet un refroidissement plus efficace du gaz.

Le maillage utilisé pour ce calcul est présenté à la figure 4.25. En se basant sur le rayon d'arc obtenu par Trépanier et al. [27], le maillage a été raffiné dans les régions où la frontière de l'arc est susceptible de se trouver. De plus, dans le présent calcul, les électrodes sont également maillées pour des raisons qui ont été évoquées au Chapitre 2.

Toutes les mesures expérimentales sont données à partir du point de stagnation. Les informations concernant le point de stagnation et la position de l'électrode en amont étaient rares. La position de l'électrode en amont a été déterminée en cherchant à faire coïncider le point de stagnation calculé avec le point de stagnation mesuré expérimentalement. Cet ajustement a été réalisé en écoulement froid.

Pour le calcul d'arc en SF_6 , Liebermann et al. [44] suggèrent de multiplier le coefficient net d'émission par un facteur de quatre. Des calculs utilisant ce facteur

ont donné des résultats en accord avec les mesures expérimentales. Dans le cas de l'azote aucune information n'est évoquée à ce sujet dans la littérature.

Concernant le taux de réabsorption à la frontière de l'arc, des mesures expérimentales effectuées par Zhang et al [43] suggèrent que 83% de la radiation est réabsorbée. Notre étude a tenu compte de cette valeur dans le modèle de radiation.

4.2.2 Validation de la pression sur l'axe de symétrie

La figure 4.26 montre les mesures expérimentales de la pression sur l'axe de symétrie comparées aux calculs numériques sans et avec MHD. Ces résultats suggèrent que les forces de Lorentz à droite du point de stagnation sont négligeables devant les forces d'inertie du fluide puisque la pression dans les deux cas est pratiquement identique.

Cependant, la figure 4.27 montre que le champ magnétique est maximum à -4.5 mm du point de stagnation (localisé au niveau de l'axe vertical de la figure). Par conséquent, la force de Lorentz a peut-être un effet sur la pression à gauche du point de stagnation. Malheureusement aucune donnée expérimentale n'est disponible dans cette région. Par contre, les deux calculs numériques indiquent une différence de pression à gauche du point de stagnation (figure 4.26). On constate une pression plus élevée lorsque les forces de Lorentz sont incluses dans le calcul. Les figures 4.28 et 4.29 viennent appuyer cette observation car elles montrent respectivement la distribution de la force de Lorentz dans toute la tuyère et dans la région proche du point de stagnation. On constate que l'intensité de la force de Lorentz est maximale à gauche de ce point.

Les figures 4.30 et 4.31 donnent les isolignes de température dans les deux cas de calcul. Les résultats sont pratiquement identiques. La force de Lorentz n'a presque aucun effet sur le champ de température. Le calcul des autres caractéristiques de l'arc n'ont pas été montré car, comme pour la température, elles restent inchangées. Par exemple, la différence de potentiel entre les deux électrodes est semblable dans les deux calculs. Par conséquent, la force de Lorentz est négligeable dans l'arc de Hermann et al.

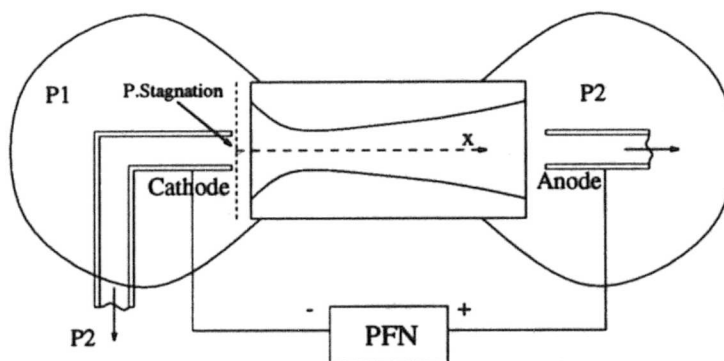


Figure 4.23: Géométrie de la tuyère Hermann

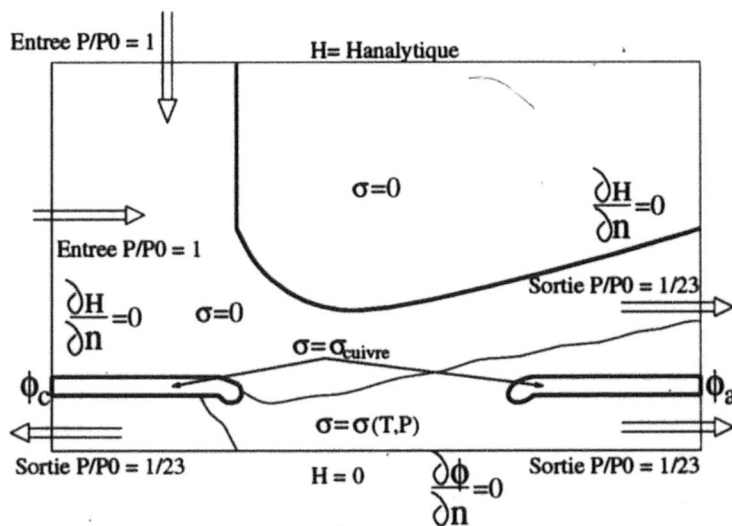


Figure 4.24: Conditions frontières appliquées aux fluides, au potentiel électrique et au champ magnétique.

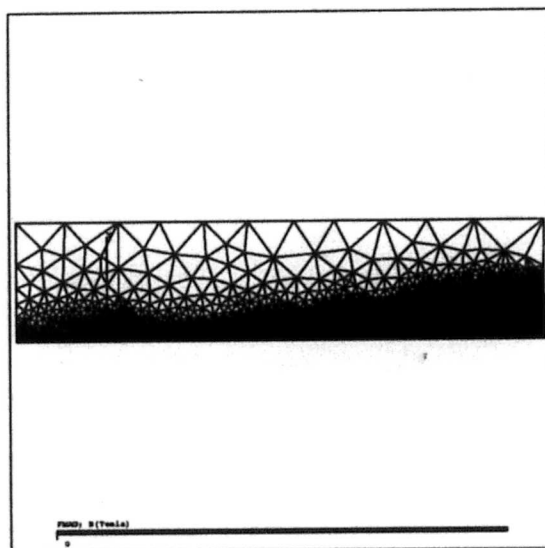


Figure 4.25: Maillage utilisé pour le calcul de l'arc de Hermann et al.

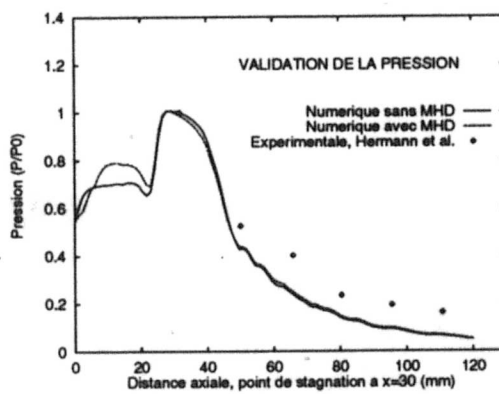


Figure 4.26: Validation de la pression dans l'arc de Hermann et al.

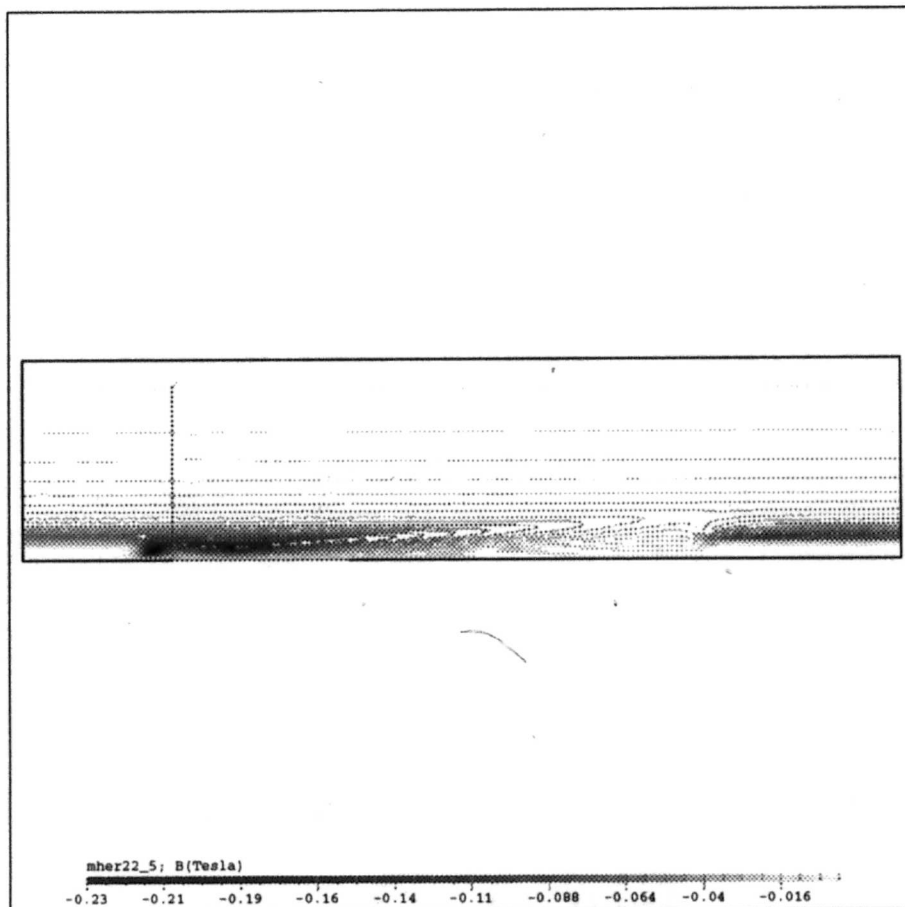


Figure 4.27: Champ magnétique dans l'arc de Hermann et al.

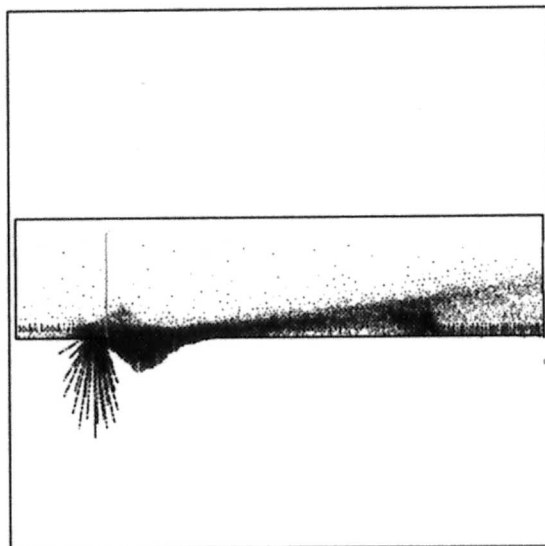


Figure 4.28: Distribution de la force de Lorentz dans l'arc de Hermann et al.

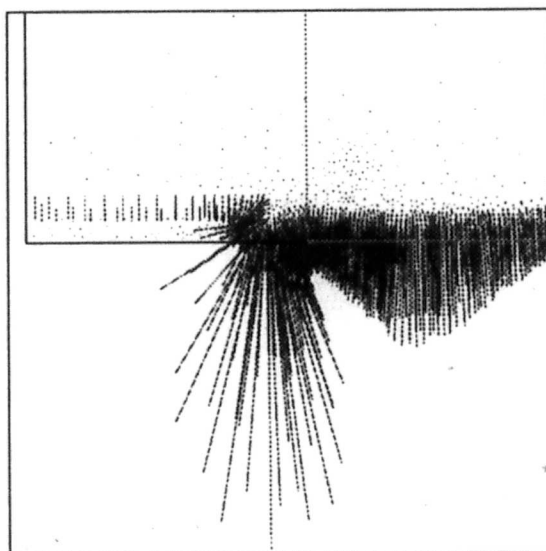


Figure 4.29: Force de Lorentz dans la région du point de stagnation dans l'arc de Hermann et al.

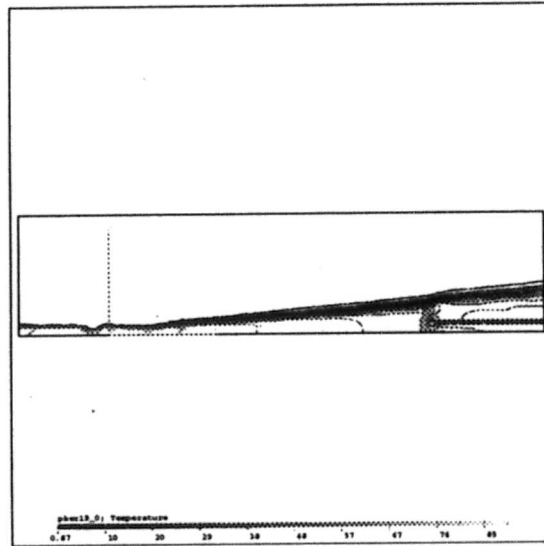


Figure 4.30: Isoligne de température dans l'arc de Hermann et al. sans MHD.

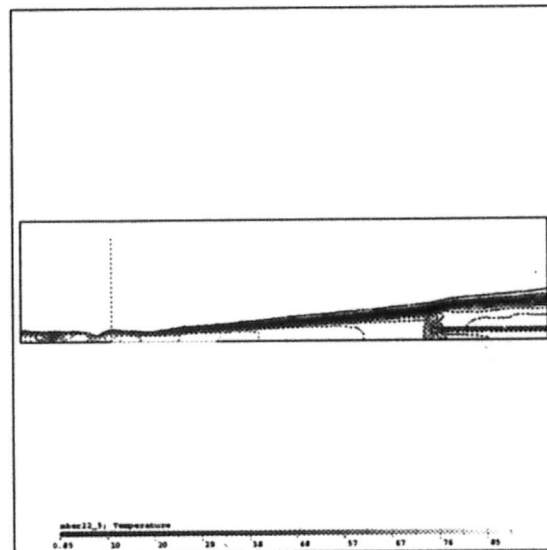


Figure 4.31: Isoligne de température dans l'arc de Hermann et al. avec MHD.

4.3 Cas test Jones (1982)

En 1982, Jones et al. [2] effectuent une série de tests expérimentaux dans lesquels ils étudient l'effet du champ magnétique auto-induit dans les arcs de type disjoncteur traversés par des courants de haut ampérage. Ces expériences constituent la base de notre étude car elles apportent des éléments de validation indispensables à ce mémoire. A partir du même outil de calcul utilisé pour le cas test Hermann et al. [48], la simulation numérique d'un arc transitoire de 32 kA soufflé axialement par du SF_6 est réalisée dans le but de répondre aux questions formulées en introduction en confirmant les mesures expérimentales effectuées par l'équipe de Jones et al. [2].

A partir des résultats numériques, expérimentaux et analytiques, ce mémoire propose une nouvelle explication concernant la baisse inattendue de la pression devant la cathode à courant élevé. En effet, les résultats numériques indiqueraient que des phénomènes transitoires seraient une cause additionnelle à ce phénomène et que l'effet de la rotation de l'arc jouerait un rôle de second plan dans la diminution de la pression devant la cathode.

En comparant les calculs d'arc, avec ou sans MHD, nous déterminons l'effet de la force de Lorentz sur certaines caractéristiques de l'arc. En autres, la distribution de la température dans l'arc, la puissance de l'arc et le rayon de l'arc. Nous verrons que la modélisation numérique des arcs de type disjoncteur à ampérage élevé doit contenir l'effet des forces de Lorentz. Nous mettons également en évidence un phénomène d'origine inconnue que nous appellerons "l'effet bulle". Cet effet a lieu devant la cathode et devient très prononcé si le calcul de l'arc n'inclut pas les forces de Lorentz.

4.3.1 Description de l'arc de Jones et al. (1982)

Deux réservoirs de SF_6 , l'un en amont et l'autre en aval, sont maintenus respectivement à une pression de 7 bar et 1 bar. Une fois libéré, le SF_6 est accéléré dans une tuyère supersonique dans laquelle deux électrodes cylindriques ont été disposées sur l'axe de symétrie. La géométrie de la tuyère et la différence de pression entre les deux réservoirs permettent d'obtenir les conditions soniques au col. Une tige émanant de l'anode est en contact avec la cathode. La décharge électrique est amorcée lorsque cette tige est retirée de l'espace inter-électrode. Un courant de 300 A CC alimente cet arc jusqu'à ce que l'écoulement soit stabilisé. Ensuite une décharge sinusoïdale de 70 Hz est appliquée pendant une demi période. Jones et al. [2] réalisent huit séries de décharges, quatre dans de l'air et quatre dans du SF_6 , dans lesquelles la valeur nominale du courant est de 30 kA, 32 kA, 42 kA et 88 kA pour l'air et de 32 kA, 52 kA, 70 kA et 94 kA pour le SF_6 (voir figure 1.36).

La simulation numérique est seulement effectuée en SF_6 car l'air n'est pas soutenu par notre modèle d'arc. Notre modèle gaz parfait, étant l'approximation la plus grossière de notre modèle, nous a conduit à nous limiter au calcul de l'arc 32 kA. A ampérage plus élevé les phénomènes en gaz réel sont plus importants et la contamination du plasma par les électrodes est plus prononcée [9].

En résumé, les paramètres de l'expérience utilisés dans notre simulation numérique sont:

- gaz: SF_6 ,
- fréquence du signal sinusoïdal: 70 Hz,

- durée du signal: une demi-période,
- valeur nominale du courant: $I_{max} = 32000A$,
- longueur de l'arc: 54 mm,
- diamètre du col de la tuyère: 50 mm,
- pression en amont: 7 bar,
- pression à la sortie: 1 bar.

La figure 4.32 illustre le dispositif expérimental utilisé dans l'expérience de Jones et al. [2].

La stratégie de calcul de cet arc est la même que pour l'arc de Hermann et al. [48]. Après avoir obtenu une solution en gaz froid, l'allumage de l'arc de 300-A est réalisé de la même manière que l'arc de Hermann et al. [48], c.a.d par chauffage artificiel du gaz sur l'axe de symétrie. Une fois le calcul de l'arc convergé, un courant transitoire possédant une valeur maximale de $32kA$ est débuté à 300 A pour la durée d'une demi-période.

Les conditions frontières pour les équations de la magnétohydrodynamique sont présentées à la figure 4.33. Celles-ci donnent les conditions appliquées sur le fluide, le potentiel électrique ϕ et le champ magnétique H_θ . Un maillage de 4953 noeuds utilisé pour ce calcul est présenté à la figure 4.34. Celui-ci a été particulièrement raffiné dans la région de la cathode afin de bien capter l'effet de la compression magnétique dans cette région.

Les informations sur la géométrie de la tuyère de Jones et al. [2] n'étaient

pas complètes et il a fallu chercher les informations manquantes dans des articles antérieurs utilisant le même dispositif expérimental [50, 51].

Concernant la radiation, le coefficient net d'émission a été multiplié par un facteur de quatre [18]. Leclerc et al. [51] estiment que l'arc électrique, dans le cas du SF_6 , perd 8% de la puissance dissipée par effet Joule. Par conséquent, 92% de la radiation est réabsorbée à la frontière de l'arc.

4.3.2 Conclusions de l'expérience de Jones et al.

Avant de discuter de la validation de la pression devant la cathode, nous présentons un résumé des conclusions de Jones et al [2]. Rappelons que l'objectif principal de leur expérience était de rechercher les conditions, plus précisément les niveaux de courant pour lesquels les effets du champ magnétique auto-induit deviennent importants et de découvrir leur nature.

Jones et al. [2] concluent:

“Les mesures de la pression devant la cathode indiquent qu'elles sont inférieures aux niveaux de pression prédit par la théorie”.

Cette inconsistance apparaît au-dessus de $20kA$. Jones et al. [2] postulent que cette réduction de pression serait due au développement de la rotation de la colonne d'arc causé probablement par l'injection de microparticule provenant de l'électrode en amont (cathode). Ils basent leur argumentation sur des observations faites par d'autres chercheurs [2]. Par conséquent, la pression mesurée devant la cathode serait le résultat de deux effets combinés,

$$\Delta P_{cathode} = \Delta P_{magnétique} - \Delta P_{rotation\ d'arc} \quad (4.1)$$

Jones et al. [2] ajoutent également:

“Dans la phase de courant qui suit le passage du courant nominal, le phénomène de rotation d’arc agit sur l’aspect transitoire des arcs de types disjoncteurs. L’importance des effets conventionnels de la compression magnétique diminuerait au fur et à mesure que le courant décroît, quitte à ce que la diminution du rayon d’arc soit plus lente que le courant traversant l’arc”.

Ceci signifie que la densité de courant est plus faible dans la phase qui suit le passage du courant nominal et entraîne une baisse d’intensité dans la force de Lorentz.

A priori, la dernière explication est assez ambiguë car, d’une part elle ne mentionne pas la phase de courant qui précède le passage au courant nominal et d’autre part, elle est en contradiction avec l’oscillogramme donné par Jones et al. [2] à la figure 4.37. Celui-ci indique que la pression devant la cathode décroît moins rapidement après le passage du courant nominal, signifiant que le rayon de l’arc décroît plus rapidement que le courant traversant l’arc. De plus, une fois le courant arrivé à zéro, la pression devant la cathode est plus grande que la pression statique en amont. Cette observation nous ramène au travail de Perkins et al. [13] mentionné au Chapitre 1. Rappelons que Perkins et al. [13] avaient mis en évidence un phénomène de surpression devant la cathode lorsque le courant repassait à zéro. Ils concluaient que ce phénomène était dû à un résidu de l’effet de la compression magnétique.

Par conséquent, l'effet unique de la rotation de l'arc sur la pression devant la cathode est remis en question. A la section suivante les résultats numériques prouveraient que les effets transitoires, négligés dans l'obtention de la solution analytique (équation 4.2), seraient responsables en partie de la chute globale de pression devant la cathode.

4.3.3 Validation de la pression devant la cathode

La stratégie de validation va consister en deux étapes. Premièrement, nous présentons les calculs de pression devant la cathode qui ont été obtenus à partir d'un modèle d'arc sans MHD. Ceci permet de démontrer la faiblesse d'un modèle d'arc opérant à courant élevé qui n'inclut pas les forces de Lorentz. Deuxièmement nous présentons les mêmes calculs obtenus à partir d'un modèle d'arc avec MHD et nous les validons avec les mesures expérimentales effectuées par Jones et al. [2].

La figure 4.35 montre les résultats obtenus pour ces deux calculs. A première vue, le modèle d'arc avec MHD est adéquat pour prédire la pression devant la cathode tandis que le modèle d'arc sans MHD fait preuve d'aucune augmentation de pression. La solution analytique de la distribution radiale de la pression dans le cas d'un arc cylindrique unidimensionnel a été également montrée sur la figure 4.35. Celle-ci est donnée par la relation suivante

$$\Delta P_{cathode} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 r_c^2} \left[1 - \left(\frac{y}{r_c} \right)^2 \right] \quad (4.2)$$

où r_c est le rayon de l'arc devant la cathode (se référer à la section 2.2.2.4).

Jusqu'à $20kA$, la pression calculée avec MHD concorde avec la solution analytique. Ce courant dépassé, la solution numérique suit les résultats expérimentaux. Donc à priori, le postulat de Jones et al. [2] est remis en question car ayant utilisé un modèle d'arc axisymétrique, le phénomène de rotation d'arc ne peut pas être le seul responsable de la différence de pression entre les résultats analytiques et expérimentaux.

Cette constatation vient soutenir l'idée que la négligence de la dérivée particulaire $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt}$ dans l'obtention de la solution analytique 4.2 constitue une erreur grossière dès le départ (voir section 2.2.2.4). Par conséquent, le modèle analytique développé pour un arc cylindrique unidimensionnel ne peut pas être utilisé pour décrire le champ de pression devant la cathode à ampérage élevé et les effets de la rotation d'arc sont doublés par les effets transitoires provenant de la dérivée particulaire du champ de vitesse.

La figure 4.36 présente la pression mesurée devant la cathode pour les quatre essais effectués en SF_6 . Ces essais mettent en évidence un phénomène d'hystérésis qui est d'autant plus prononcé que le courant est élevé. L'origine de ce phénomène est mal compris. Jones et al. [2] n'y apporte aucune explication. Les mesures expérimentales de l'arc de $32kA$ présentent une hystérésis faiblement prononcé dans le sens horaire. Après le passage du courant nominal, le calcul de la pression avec MHD présente la même hystérésis mais beaucoup plus prononcé.

A partir de $20kA$, les résultats numériques de la figure 4.35 montrent également une chute de pression qui correspond à l'apparition de l'effet bulle. Ce phénomène a pour effet de libérer la pression qui commençait à s'accumuler devant la cathode. Dans la section suivante nous détaillons cet effet.

Les résultats de la figure 4.35 révèlent une autre observation intéressante. La pression calculée est plus basse à faible courant que la pression mesurée expérimentalement. Cette constatation débouche sur une remarque très importante. En se basant sur les conclusions de Trépanier et al. [27], le calcul en gaz réel donnerait un rayon d'arc plus petit qu'en gaz parfait. Pour une intensité de courant équivalente, la densité de courant en gaz réel serait plus grande puisque la section effective de l'arc serait plus faible. Ainsi, le champ magnétique auto-induit deviendrait plus intense et la compression magnétique plus grande. Par conséquent, la pression calculée devant la cathode avec un modèle gaz réel utilisant la MHD, devrait donner de meilleurs résultats que ceux obtenus avec la pression calculée avec un modèle gaz parfait.

Afin de montrer l'effet du champ magnétique sur la pression devant la cathode, nous avons illustré aux figures 4.38 à 4.48 onze séquences de calcul d'arc avec MHD prises à des temps différents. Ces figures montrent l'évolution du champ magnétique et de la pression dans la région inter-électrode pour des intensités de courant allant de 20, 23, 26.5, 29, 32, 26.5, 23 à 20 kA. Nous constatons que le champ magnétique proche de la cathode est toujours maximal car la densité de courant l'est aussi dans cette région. Ces figures permettent également de constater l'évolution de la pression devant la cathode. Cette évolution est synchronisée avec celle du champ magnétique. Mentionnons que dans le cas de l'arc sans MHD, cette évolution est complètement absente.

4.3.4 Effets des forces de Lorentz sur les caractéristiques de l'arc

La figure 4.49 montre l'effet des forces de Lorentz sur la puissance électrique de l'arc. Cette puissance est calculée d'après la relation $P = UI$ où U est la différence de potentiel entre les deux électrodes et I le courant traversant l'arc. On constate que les forces de Lorentz n'ont aucun effet sur la puissance électrique de l'arc. Les figures 4.50 à 4.60 montrent l'évolution du champ de température prise aux mêmes séquences que celles utilisées pour la pression et le champ magnétique (voir section précédente). Ces figures montrent respectivement le champ de température calculé sans MHD et avec MHD. Deux renseignements précieux peuvent en être tirés: l'effet des forces de Lorentz sur la distribution de la température et le rôle de ces forces sur la structure de l'arc devant la cathode.

L'effet constricteur de ces forces diminue le diamètre de l'arc devant la cathode et stabilise l'arc à courant élevé. La dissipation Joule devant la cathode est augmentée car la réduction de la section de l'arc augmente la densité de courant. Ainsi l'effet constricteur augmente la température de l'arc devant la cathode. Les figures 4.50 à 4.60 montrent que le rayon de l'arc calculé avec MHD est toujours inférieur au rayon de l'arc calculé sans MHD. Par conséquent, les forces de Lorentz jouent un rôle important dans le maintien de la structure de l'arc à ampérage élevé ($\geq 20kA$) car elles stabilisent la colonne de plasma devant la cathode.

Une autre observation importante concernant ces figures est la formation de bulles devant la cathode. Celles-ci apparaissent à divers degrés dans les deux types d'arcs comparés. Elles sont prononcées dans le cas de l'arc calculé sans MHD (voir

figure 4.58). L'origine de ce phénomène est difficilement explicable. Dans le cas de l'arc avec MHD, elles apparaissent autour de $20kA$ et causent une chute de pression importante devant la cathode (voir figure 4.35). Ce phénomène n'est pas physique car il n'est pas observé expérimentalement. Une des raisons possibles expliquant la formation de bulles est la non uniformité du maillage devant la cathode. Le maillage est de plus en plus grossier lorsque l'on s'éloigne de la cathode. Dans le cas du calcul d'arc sans MHD, le phénomène de bulle est beaucoup plus prononcé et vient détruire la structure de l'arc à ampérage élevé.

Un maillage plus fin permettrait peut être d'éliminer cet effet dans le cas d'un calcul MHD. Cependant dans le cas d'un calcul sans MHD, l'effet bulle persistera car l'absence des forces de Lorentz semble amplifier son effet en détruisant la stabilité de l'arc. Une autre possibilité d'explication de la bulle est reliée au modèle de radiation utilisé. Celui-ci présuppose une forme d'arc à peu près cylindrique et son application lorsque l'arc se déforme trop, est questionnable.

4.4 Convection magnétique négligeable

L'objectif de cette section est d'apporter une vision complémentaire aux phénomènes physiques existant dans les arcs de types disjoncteurs. Au Chapitre 2, la négligence de la convection magnétique dans la loi d'Ohm a permis de découpler les équations d'Euler et les équations de Maxwell. Tout le long de nos calculs, nous nous sommes assurés que cette hypothèse ne soit pas violée en utilisant des paramètres indicatifs définis à la section 2.2.5. Les résultats obtenus sont surprenants et riches en informations.

La figure 4.61 illustre l'historique des différents nombres de Reynolds magnétiques calculés dans l'arc électrique. Rappelons la définition de ces nombres,

$$R_{m1} = \frac{J_{conv}}{J_{ohmimax}},$$

$$R_{m2} = \frac{J_{convmax}}{J_{ohmi}},$$

$$R_m = \frac{\int_V \frac{J_{conv}}{J_{ohmi}} dv}{\int_V dv}$$

La figure 4.61 montre que R_{m1} reste toujours inférieur à 10^{-2} . Cependant R_{m2} atteint une valeur maximale de 80 autour de 9000A. Ceci indique que la convection magnétique domine dans certaines régions de l'arc par un facteur de cent, démentant ainsi l'hypothèse mentionnée plus haut. L'évolution du nombre de Reynolds magnétique globale vient renforcer cette constatation. Aux alentours de 2000A, R_m augmente brutalement à 100. A partir de 6000 A, il rechute entre 1 et 10. Il suit le même chemin de retour mais garde sa valeur de 100 jusqu'à la fin du demi-cycle. Ces observations sont alarmantes car à priori ces résultats indiquent que la convection magnétique ne peut pas être négligée devant la densité courant ohmique.

Cependant les résultats présentés à la figure 4.61 sont trompeurs. La figure 4.62 compare l'évolution de la densité maximale du courant ohmique $J_{ohmimax}$ et de la convection maximale magnétique $J_{convmax}$ obtenue dans l'arc. A notre satisfaction, la densité ohmique est toujours supérieure à la convection magnétique d'au moins un facteur de dix. Ces observations viennent contredire la figure 4.61 et cela permet

de mettre en évidence une constatation intéressante concernant la physique des arcs. Sachant que les lignes de courant émanent de l'anode, plus précisément du bout de celle-ci, la région chaude en aval de l'anode n'est pas traversée par ces lignes de courant, cependant cette région est traversée par les lignes de champ magnétique provenant de l'anode. La figure 4.63, illustre les lignes de courants entre les deux électrodes. Elles prennent naissance au bout de l'anode et se rattache à la cathode. Cette figure illustre également la région chaude en aval de l'anode. Dans la région chaude, J_{conv} est très grand devant J_{ohmi} car le produit de la vitesse, de la conductivité électrique et du champ magnétique est grand dans cette région. Les figures 4.64 et 4.65 montrent respectivement J_{ohmi} et J_{conv} calculés à 2000 A dans l'arc électrique. Ces figures démontrent que la convection magnétique est bien négligeable.

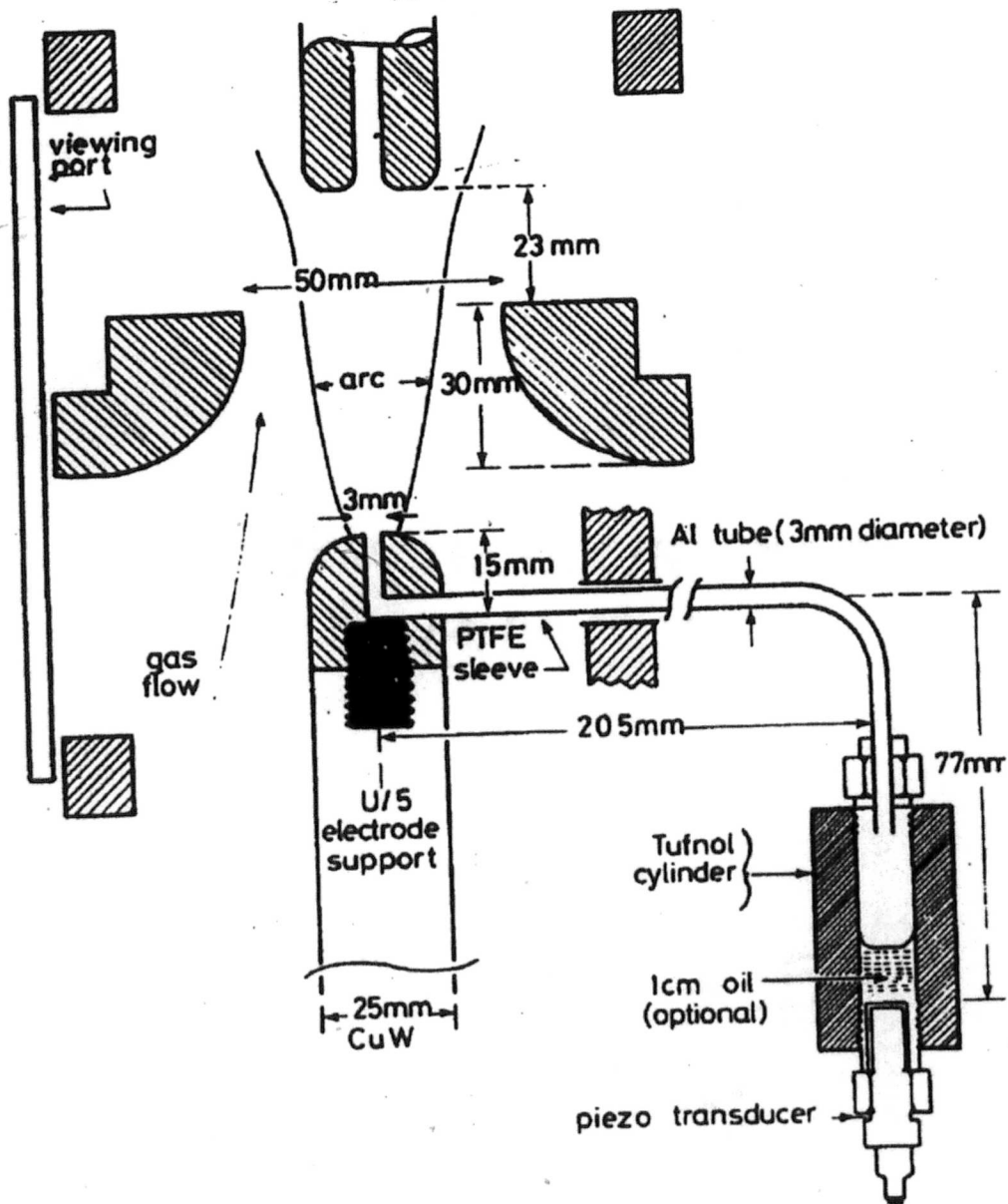


Figure 4.32: Géométrie de la tuyère Jones.

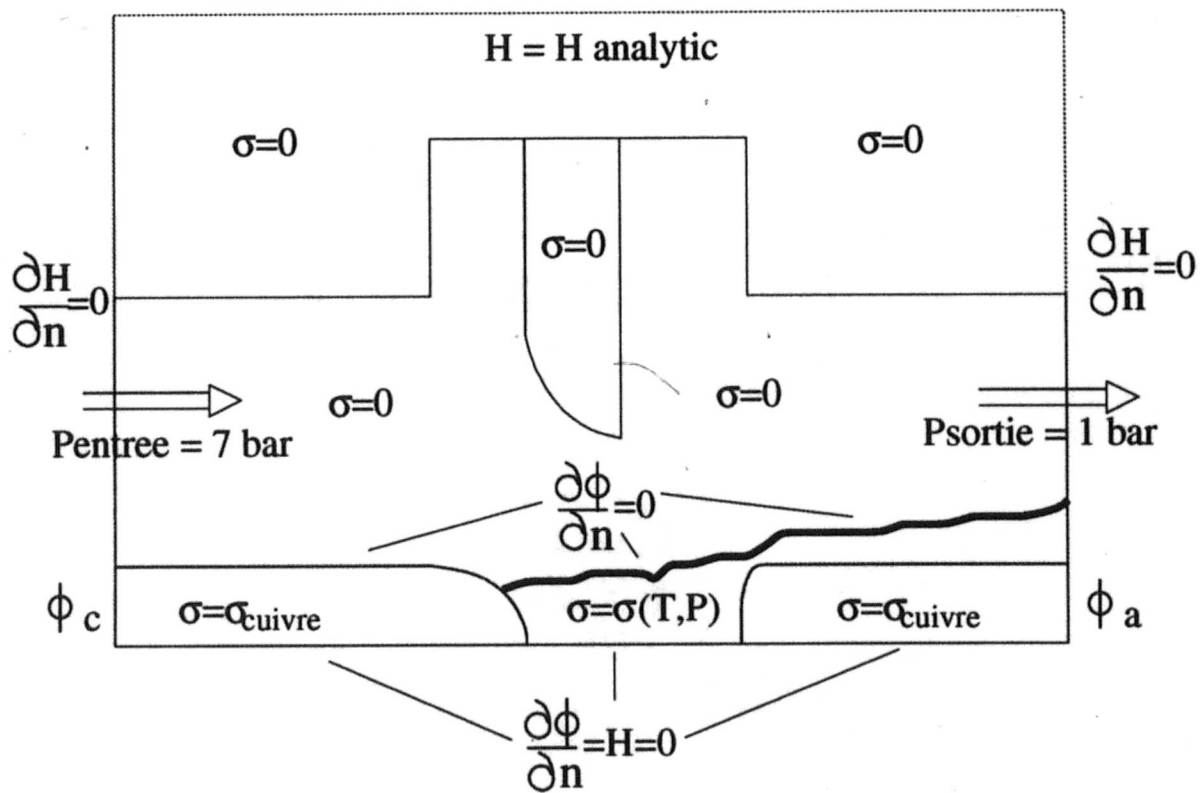


Figure 4.33: Conditions frontières appliquées aux fluides, au potentiel électrique et au champ magnétique.

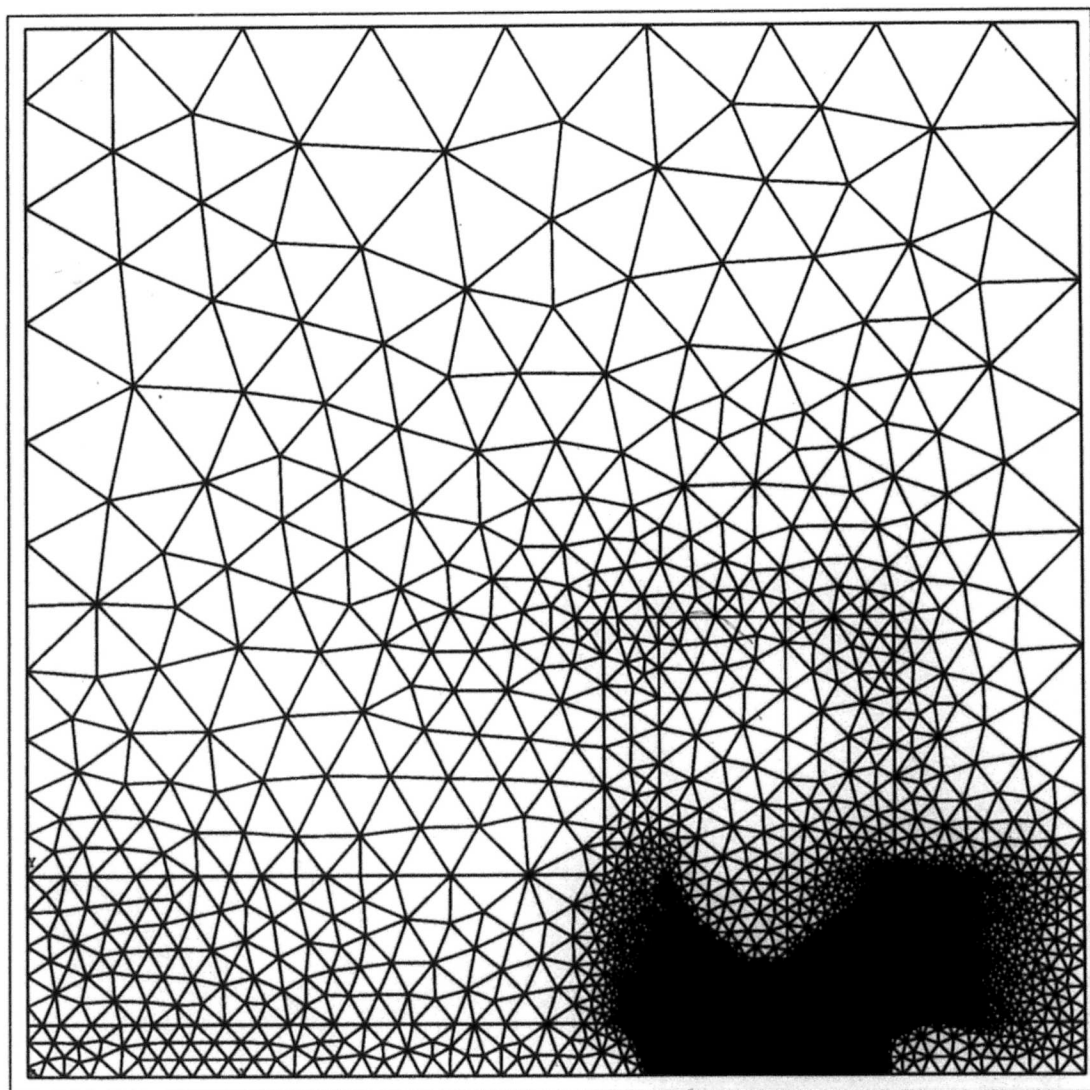


Figure 4.34: Maillage utilisé pour le calcul de l'arc de Jones et al.

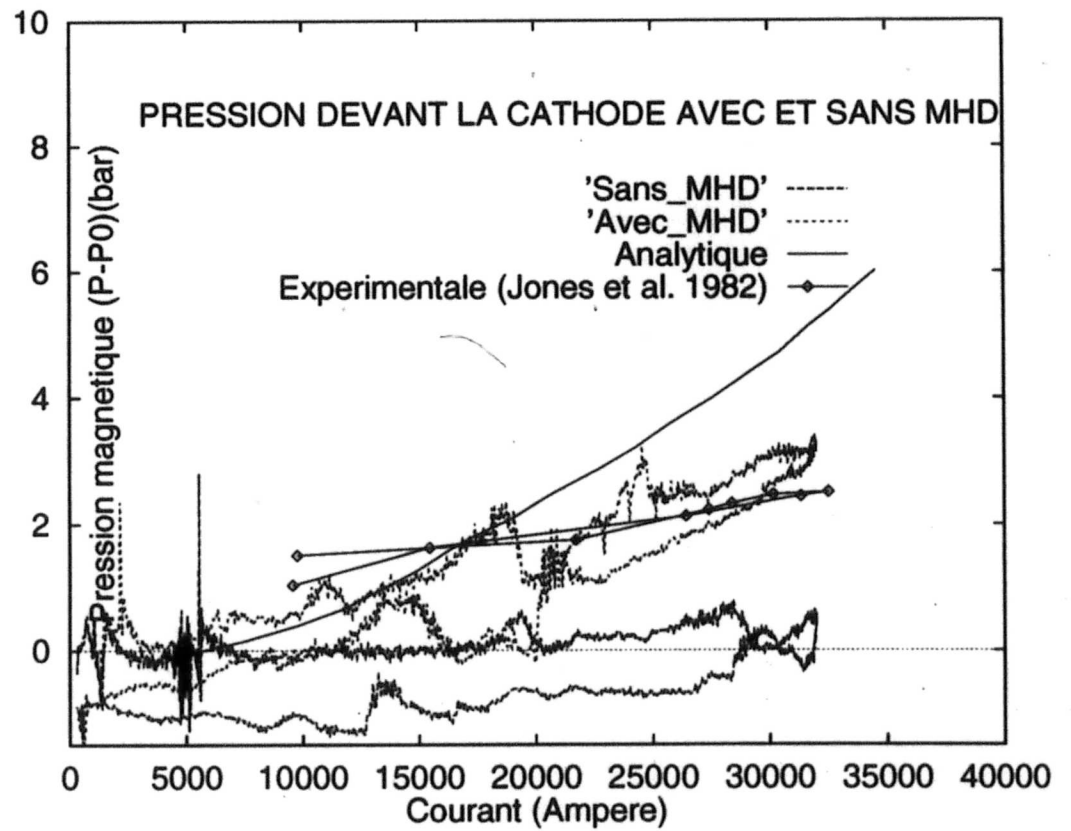


Figure 4.35: Validation de la pression devant la cathode dans l'arc de Jones et al.

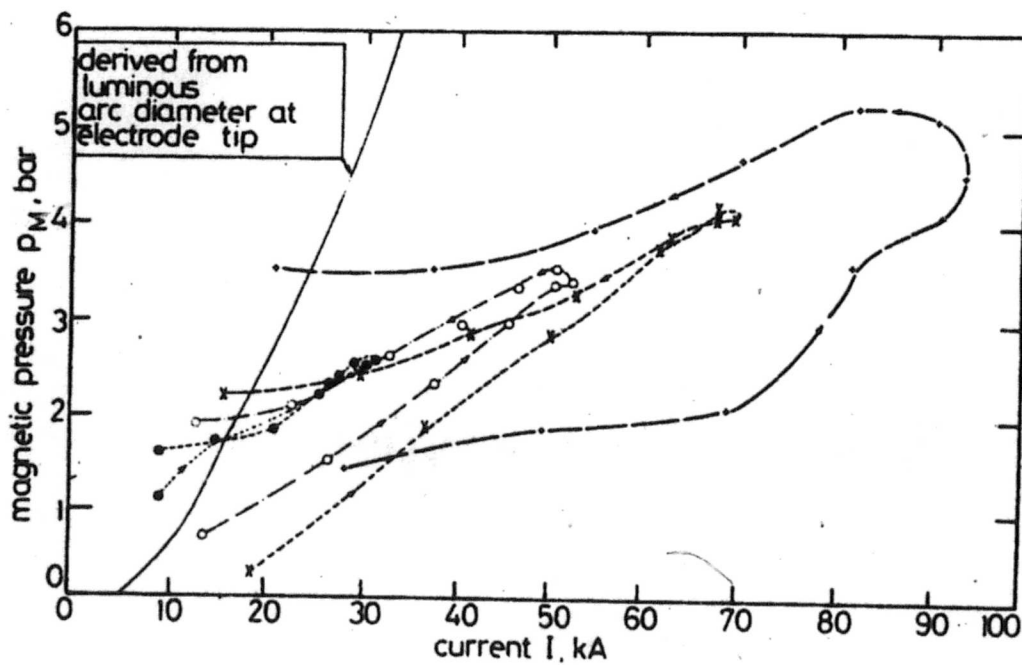


Figure 4.36: Autres mesures de pression disponible pour d'autres niveaux d'ampérage.

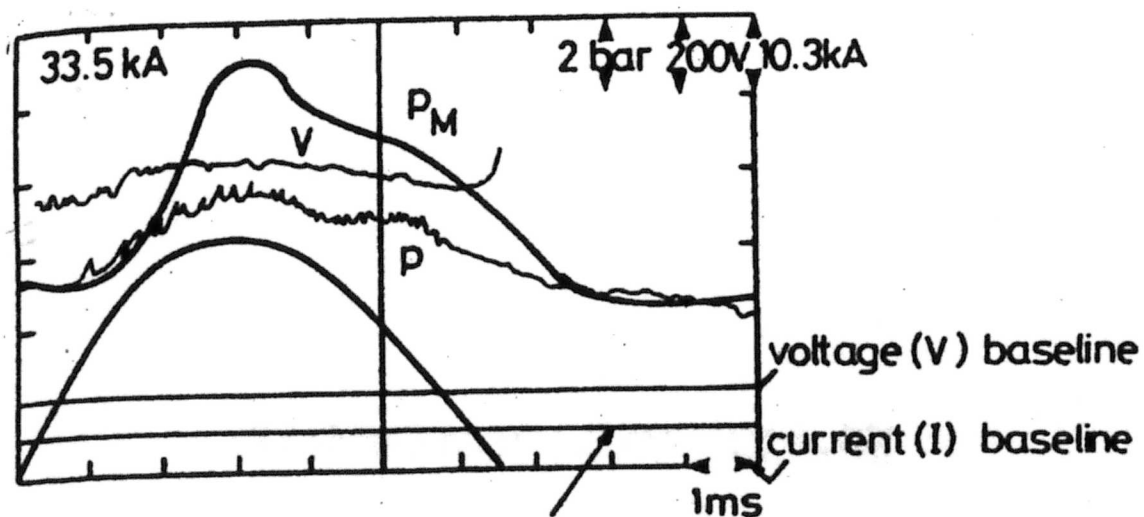


Figure 4.37: Oscillogramme de pression donnant le courant, le voltage et la pression dans le cas d'une décharge dans l'air; $I = 33.5 \text{ kA}$, P_m = pression magnétique, p = pression dans le plenum.

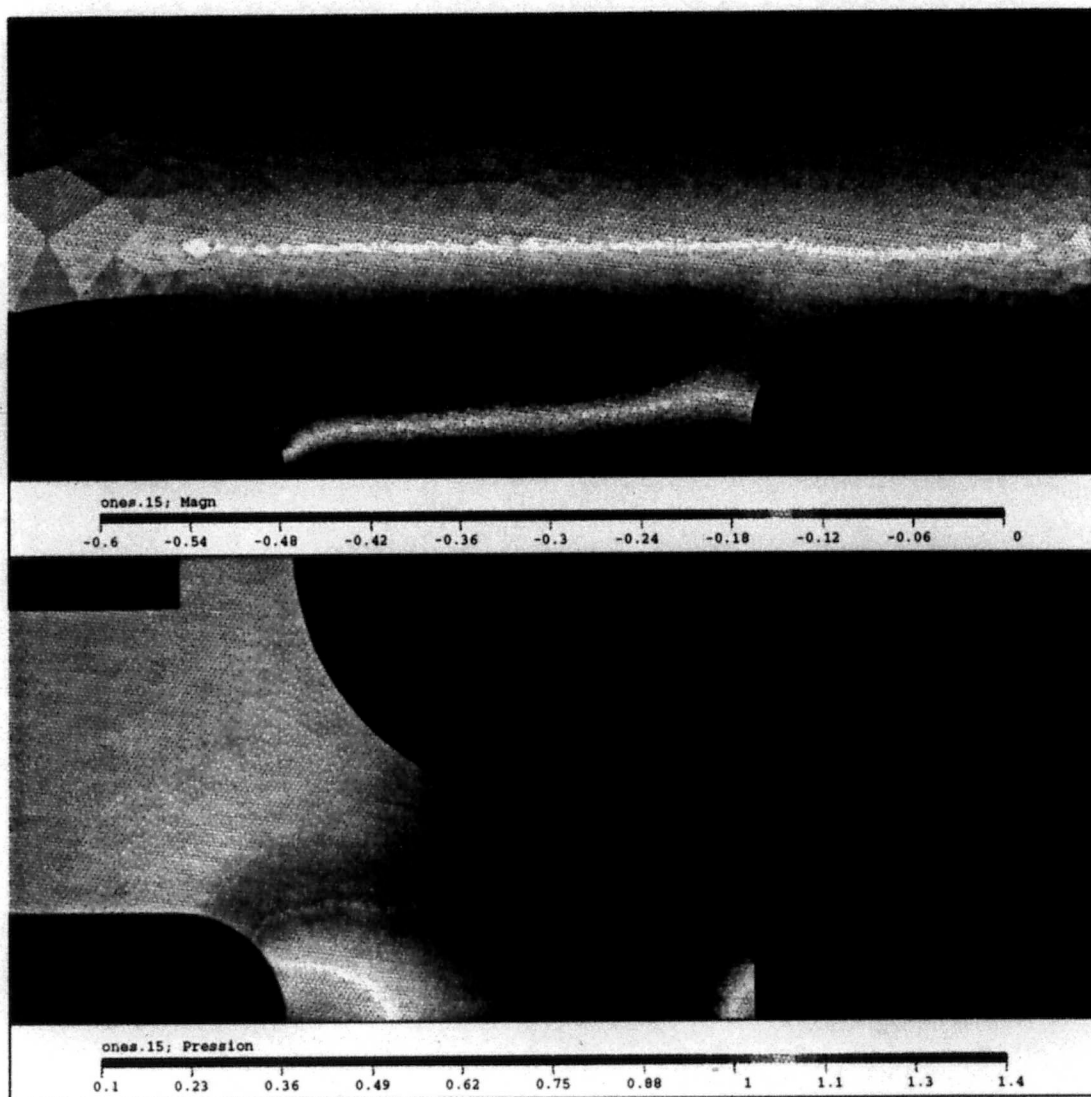


Figure 4.38: Distribution de la pression et du champ magnétique dans la région inter-électrodes; $t = 1.5ms$ et $I \approx 20kA$.

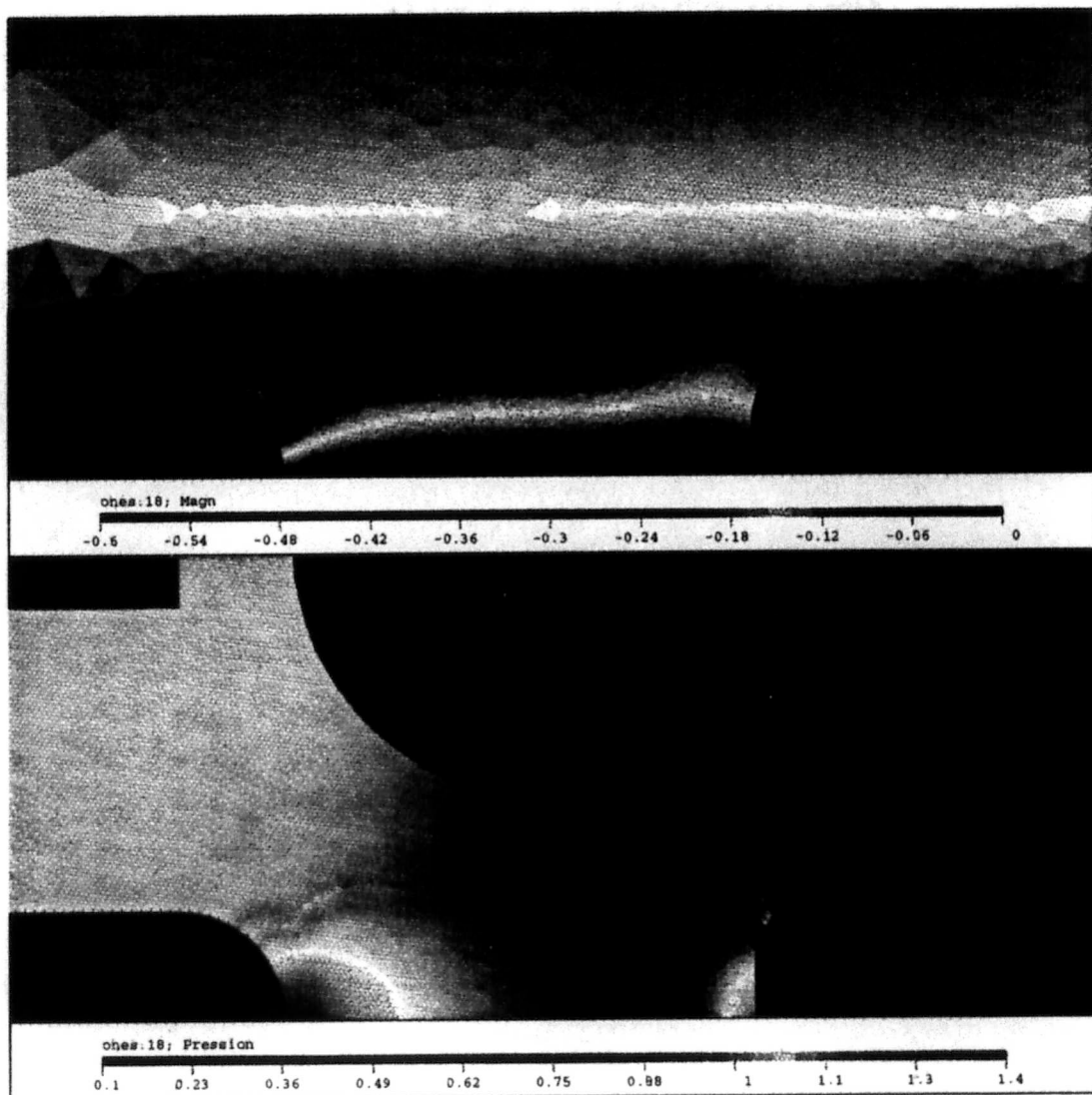


Figure 4.39: Distribution de la pression et du champ magnétique dans la région inter-électrodes; $t = 1.8ms$ et $I \approx 23kA$.

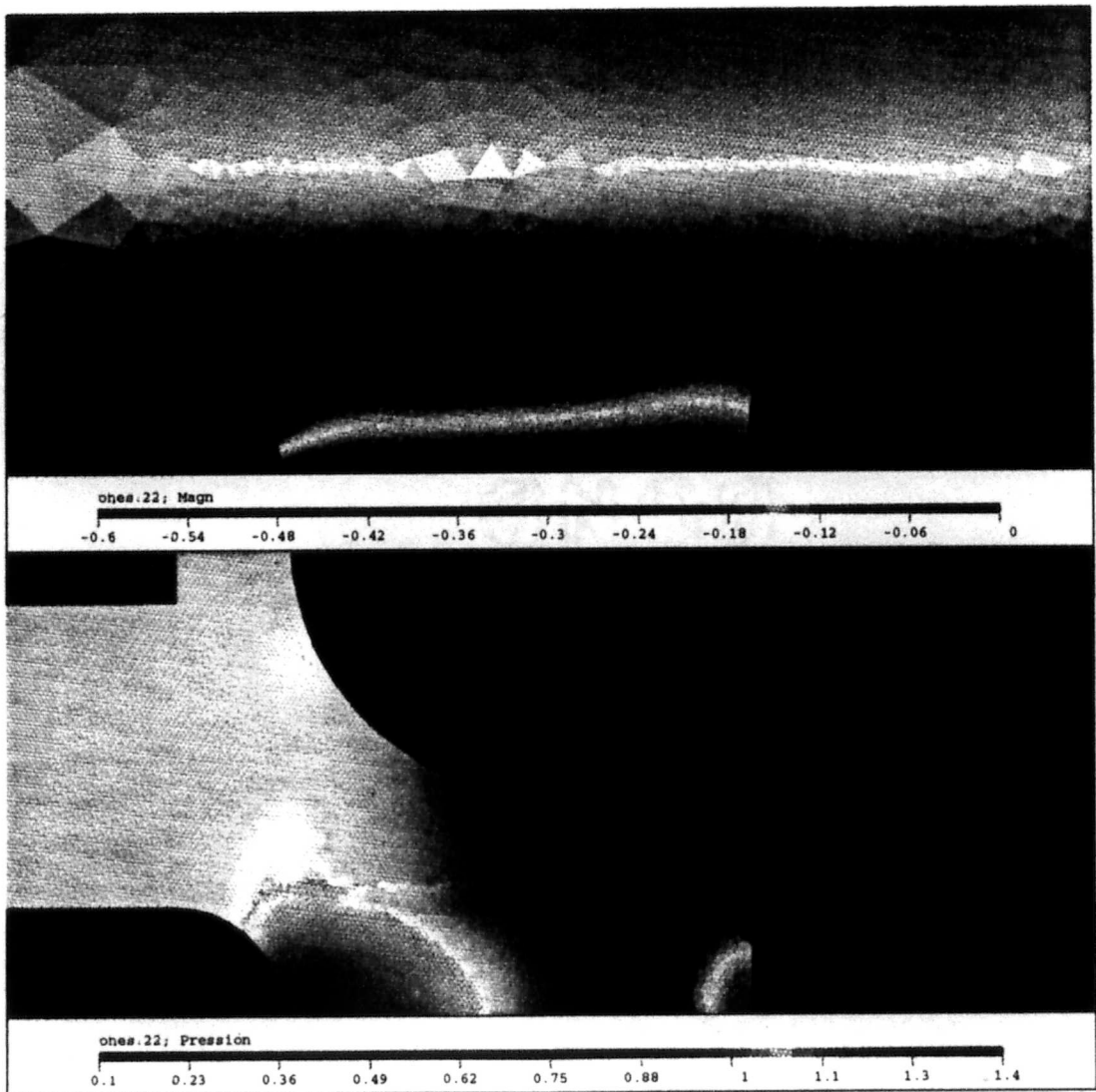


Figure 4.40: Distribution de la pression et du champ magnétique dans la région inter-électrodes; $t = 2.2ms$ et $I \approx 26.5kA$.

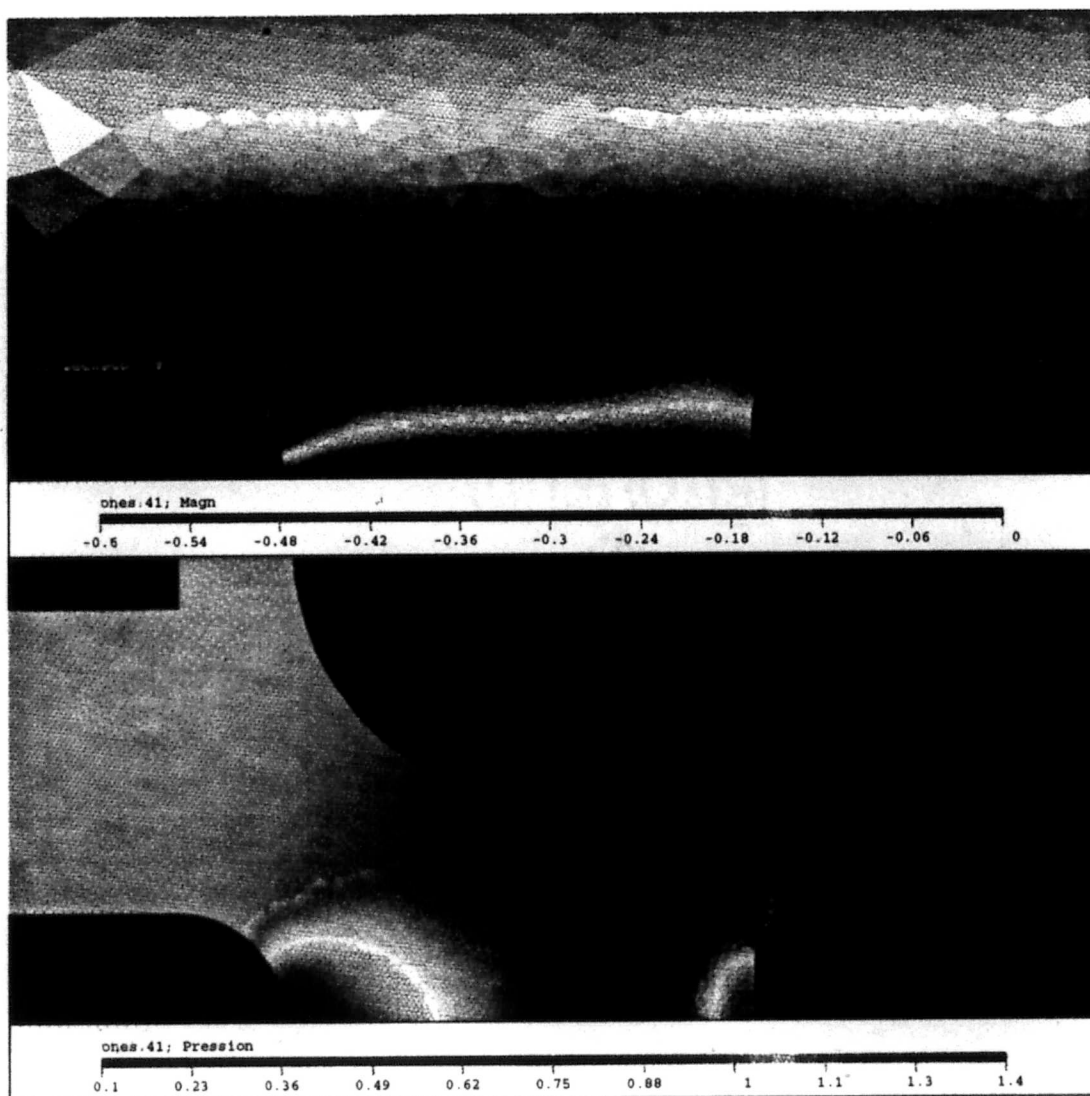


Figure 4.41: Distribution de la pression et du champ magnétique dans la région inter-électrodes; $t = 2.4ms$ et $I \approx 28kA$.

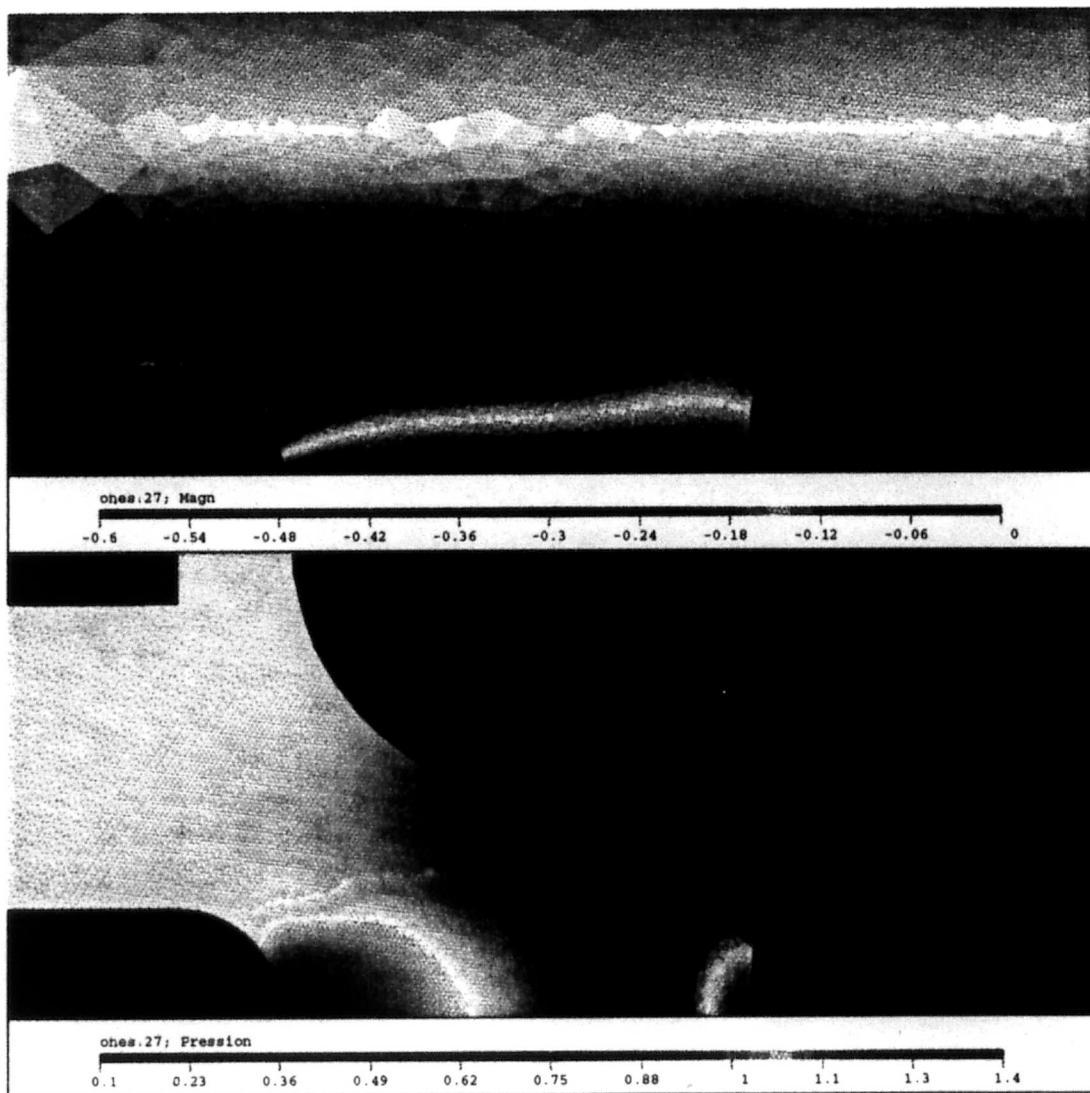


Figure 4.42: Distribution de la pression et du champ magnétique dans la région inter-électrodes; $t = 2.7ms$ et $I \approx 30kA$.

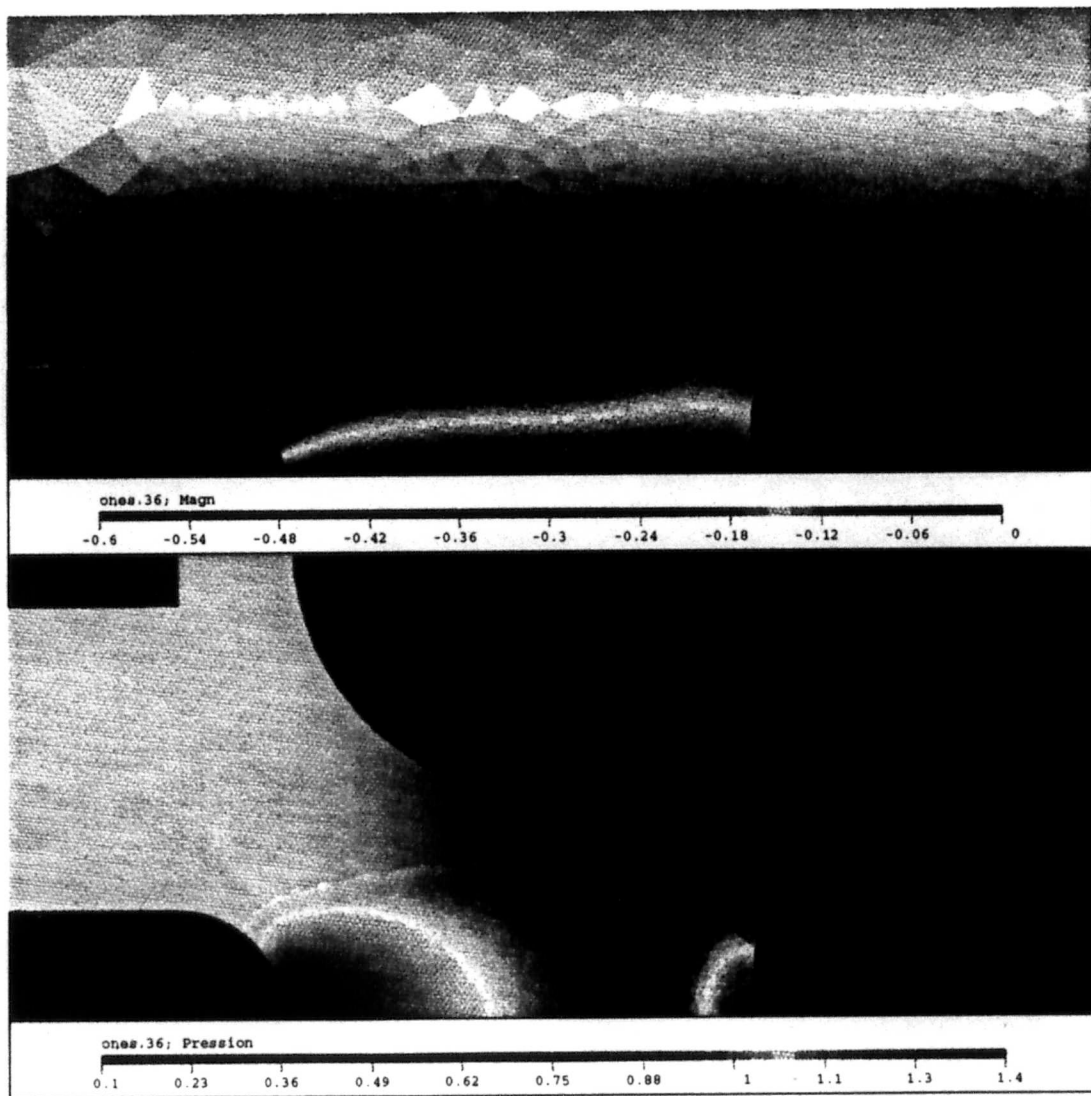


Figure 4.43: Distribution de la pression et du champ magnétique dans la région inter-électrodes; $t = 3.6ms$ et $I \approx 32kA$.

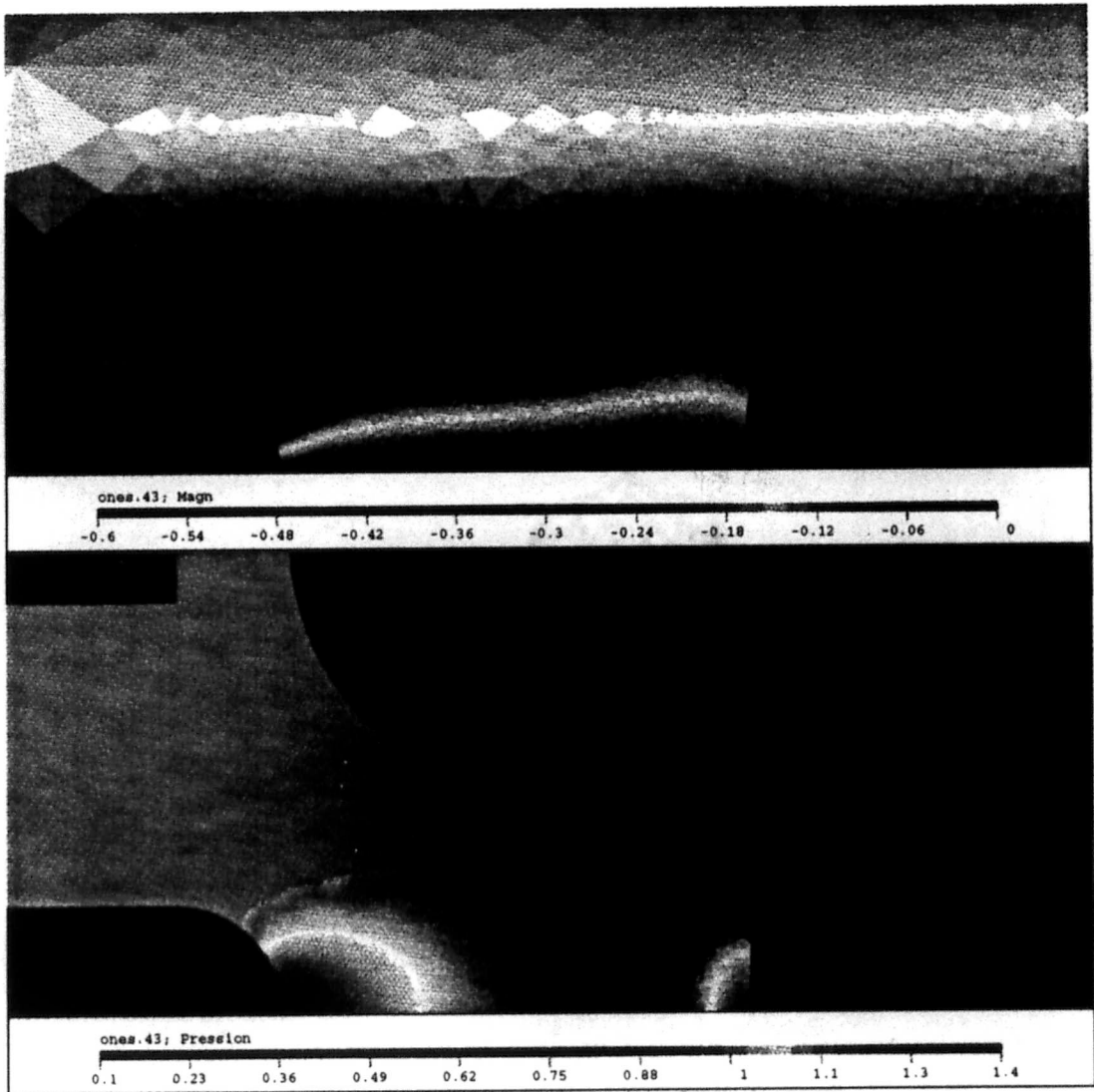


Figure 4.44: Distribution de la pression et du champ magnétique dans la région inter-électrodes; $t = 4.3ms$ et $I \approx 30kA$.

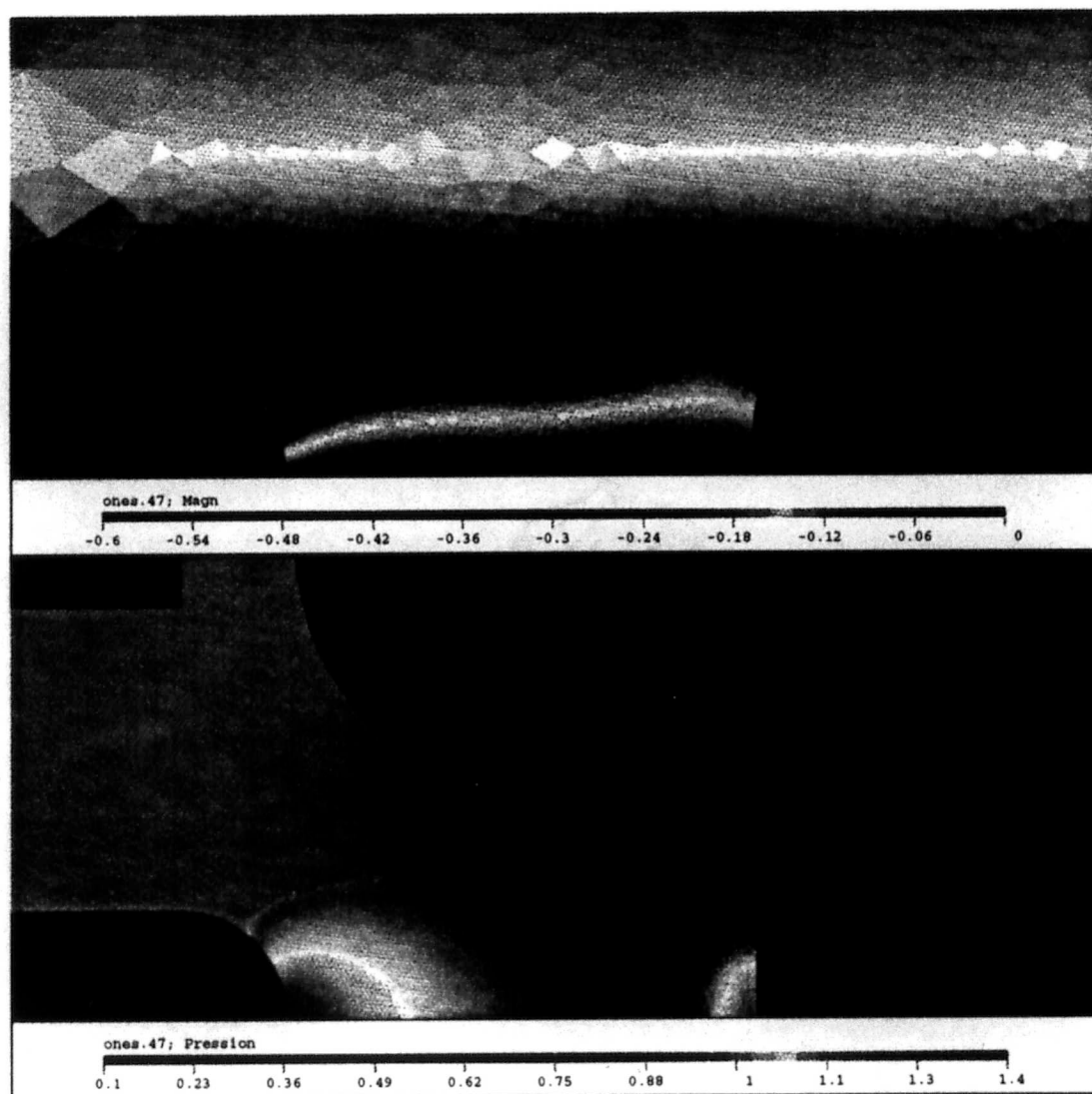


Figure 4.45: Distribution de la pression et du champ magnétique dans la région inter-électrodes; $t = 4.7ms$ et $I \approx 28kA$.

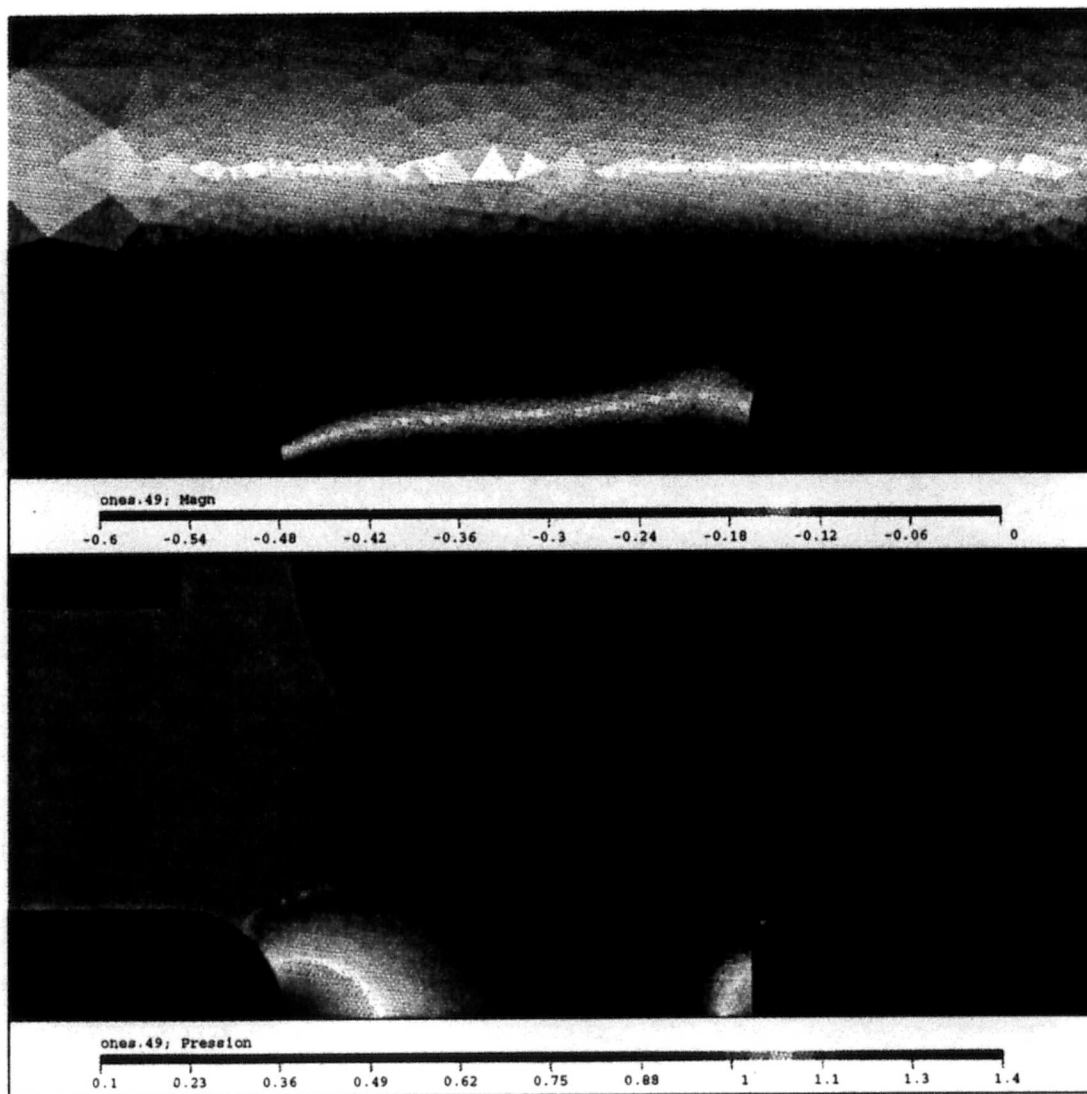


Figure 4.46: Distribution de la pression et du champ magnétique dans la région inter-électrodes; $t = 4.9ms$ et $I \approx 26.5kA$.

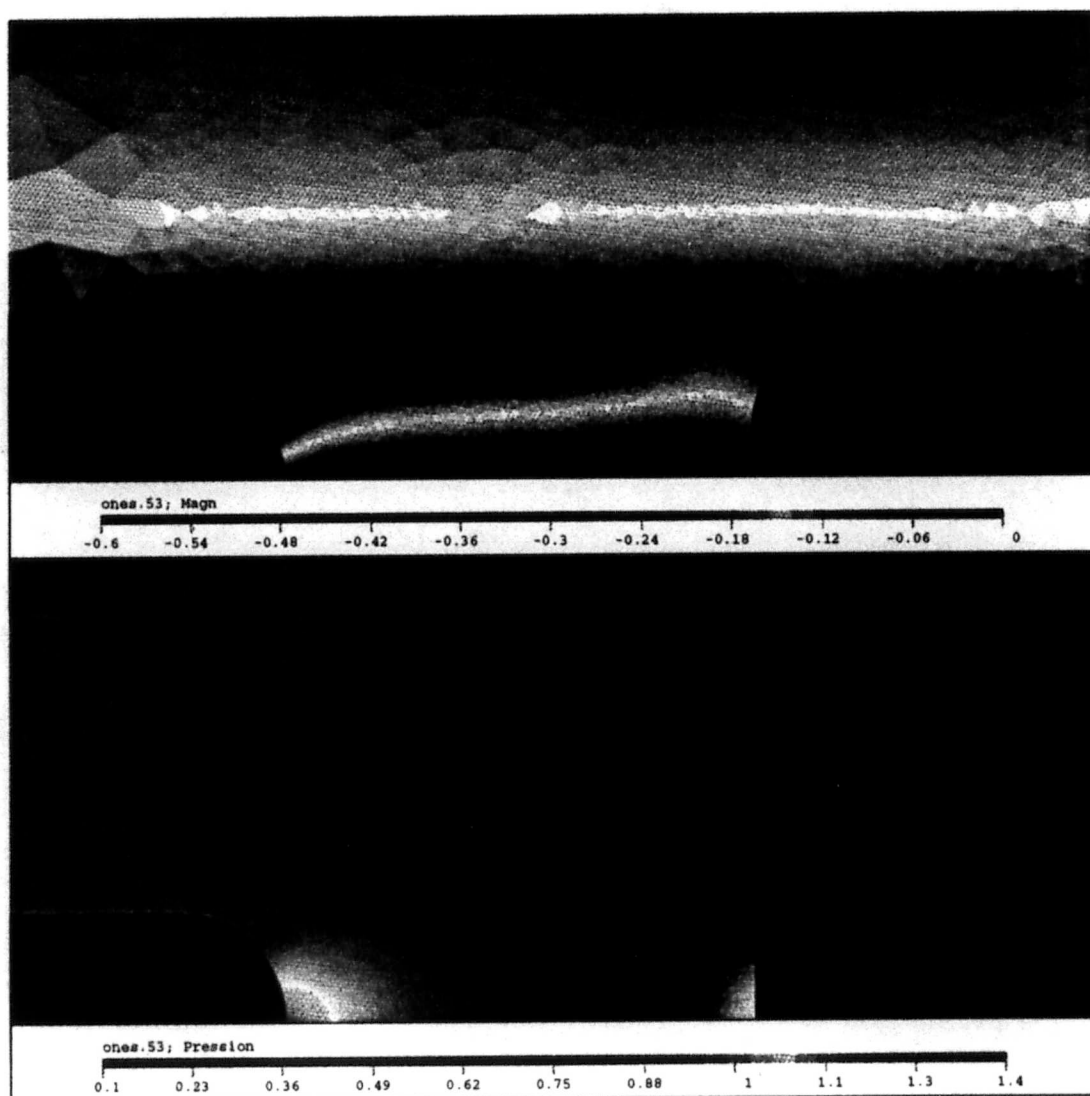


Figure 4.47: Distribution de la pression et du champ magnétique dans la région inter-électrodes; $t = 5.3ms$ et $I \approx 23kA$.

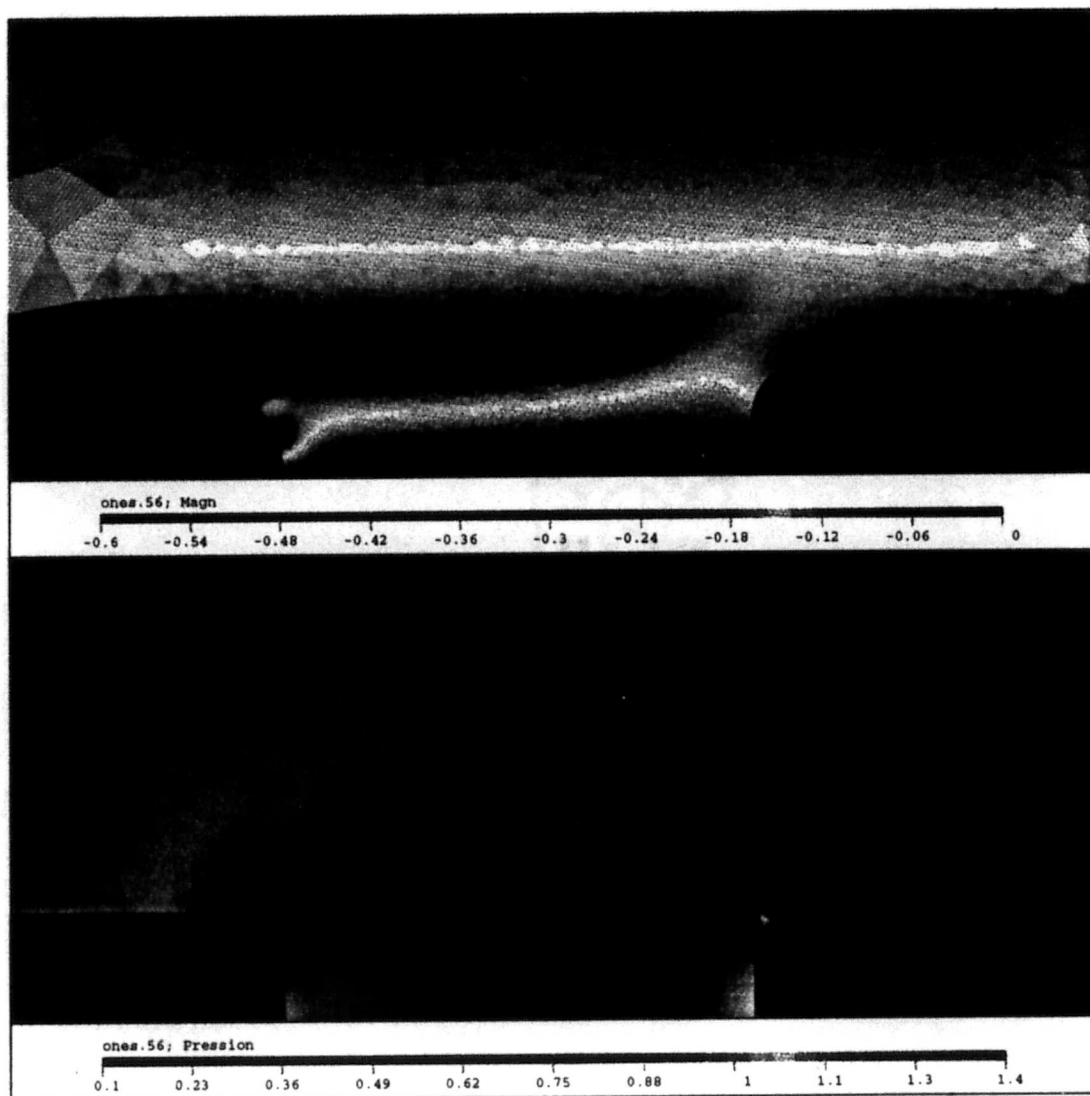


Figure 4.48: Distribution de la pression et du champ magnétique dans la région inter-électrodes; $t = 5.6ms$ et $I \approx 20kA$.

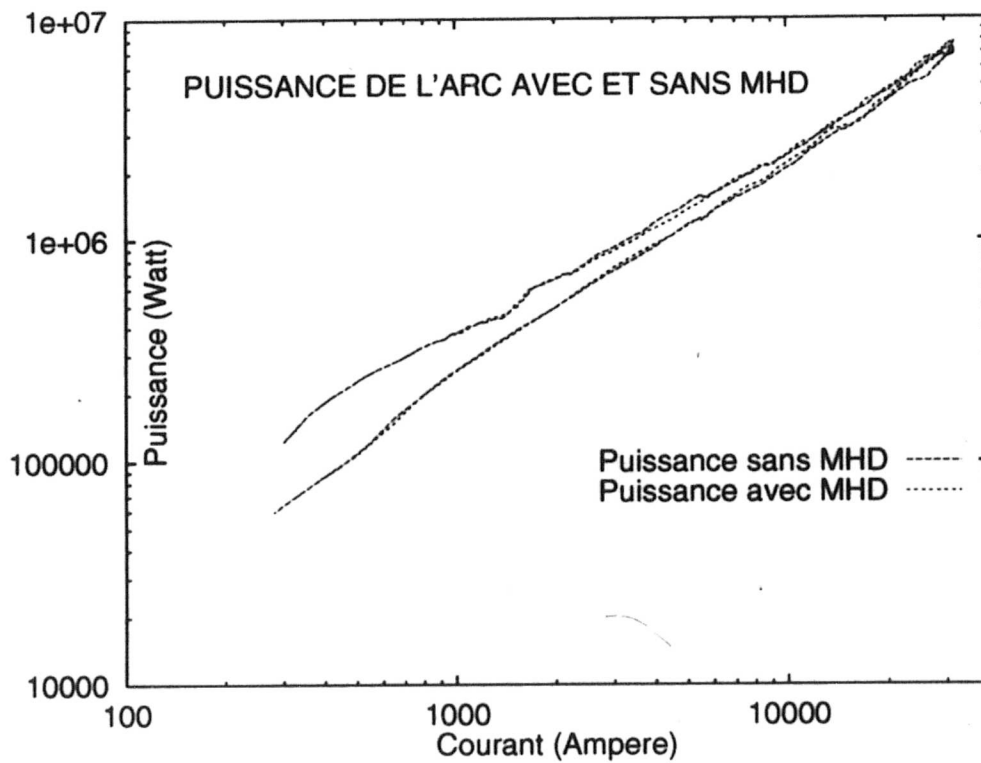


Figure 4.49: Puissance de l'arc avec et sans force de Lorentz.

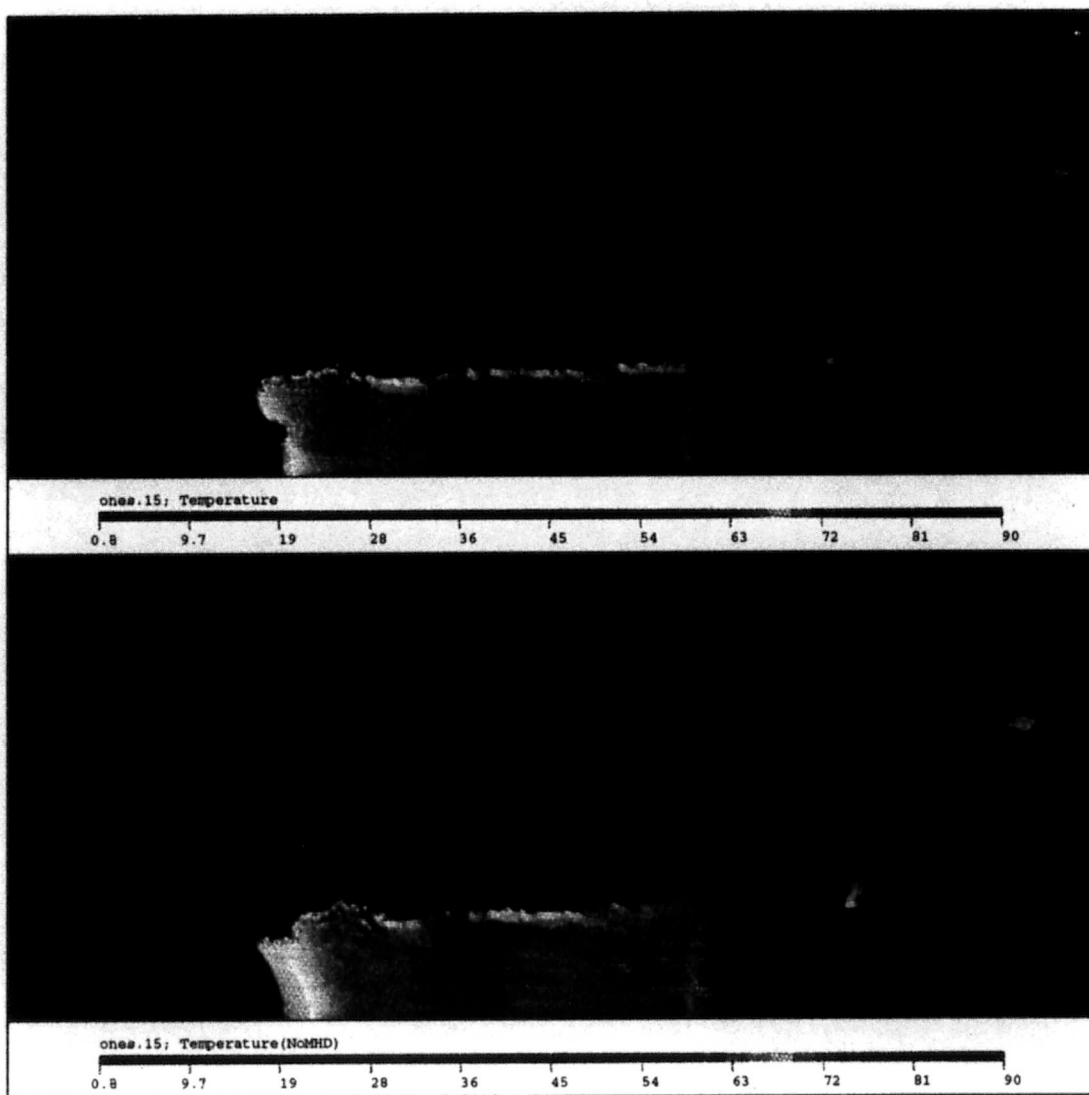


Figure 4.50: Distribution de la température avec et sans MHD dans la région inter-électrodes; $t = 1.5ms$ et $I \approx 20kA$.

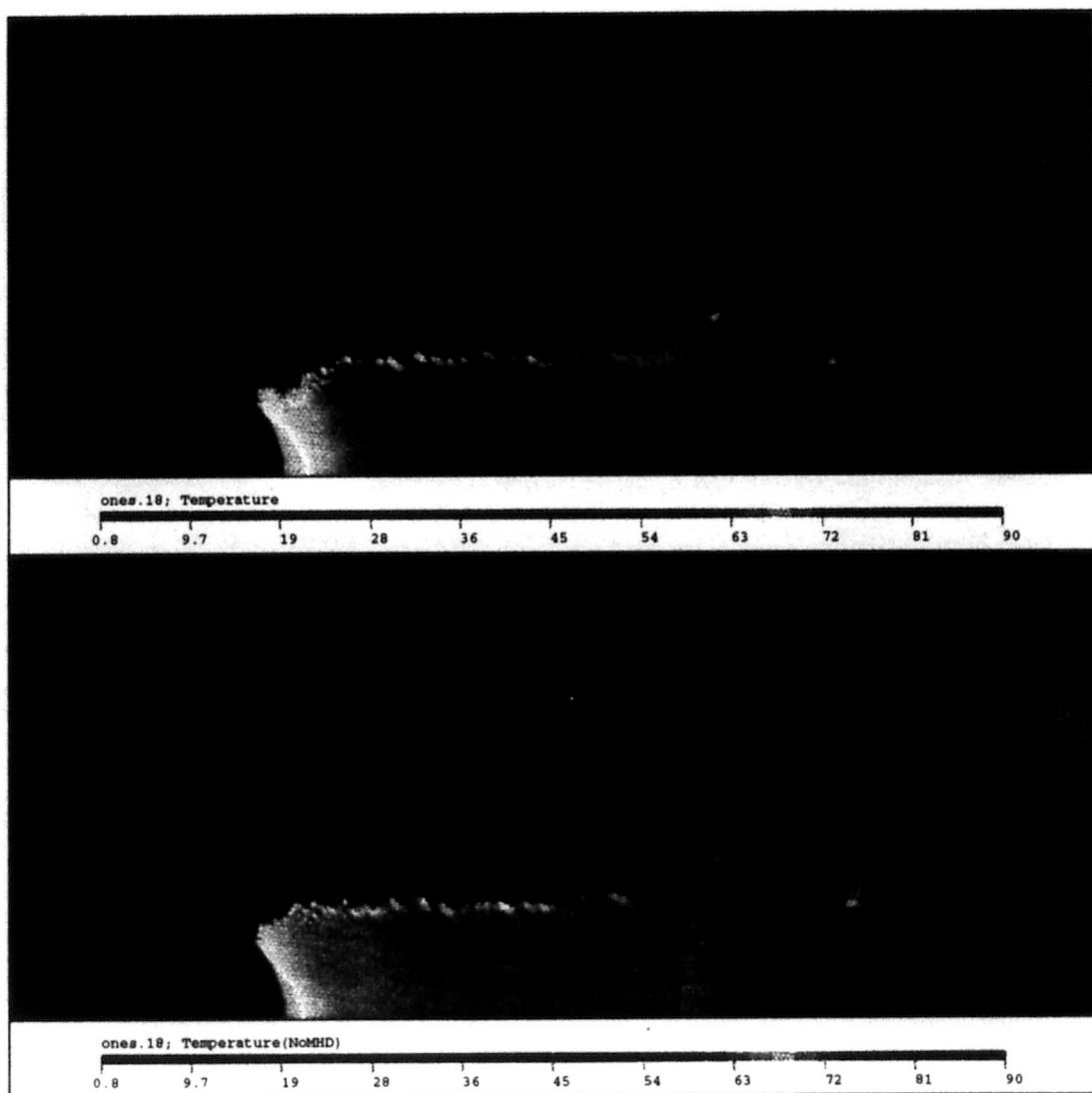


Figure 4.51: Distribution de la température avec et sans MHD dans la région inter-électrodes; $t = 1.8ms$ et $I \approx 23kA$.

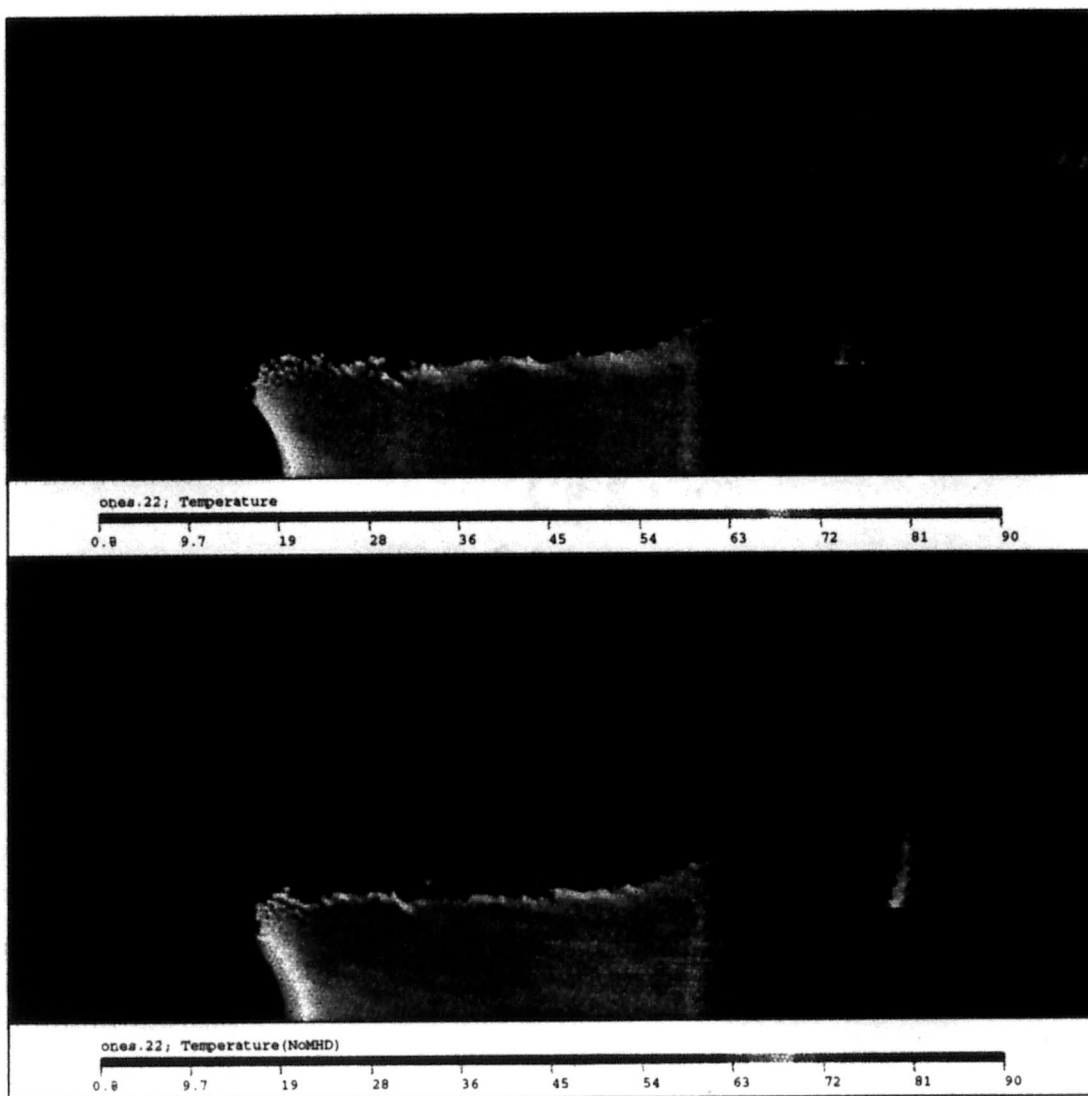


Figure 4.52: Distribution de la température avec et sans MHD dans la région inter-électrodes; $t = 2.2ms$ et $I \approx 26.5kA$.

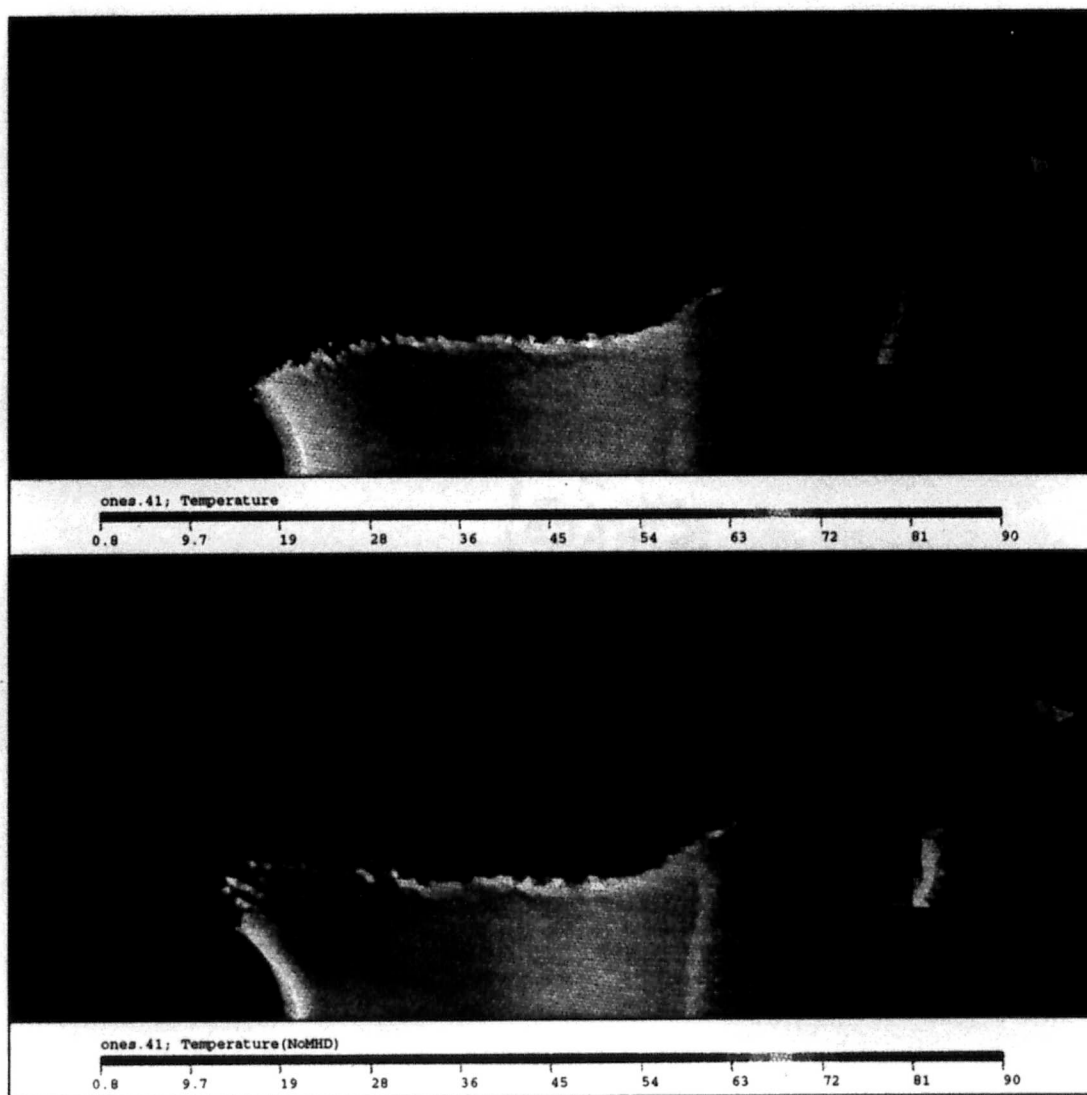


Figure 4.53: Distribution de la température avec et sans MHD dans la région inter-électrodes; $t = 2.4ms$ et $I \approx 28kA$.

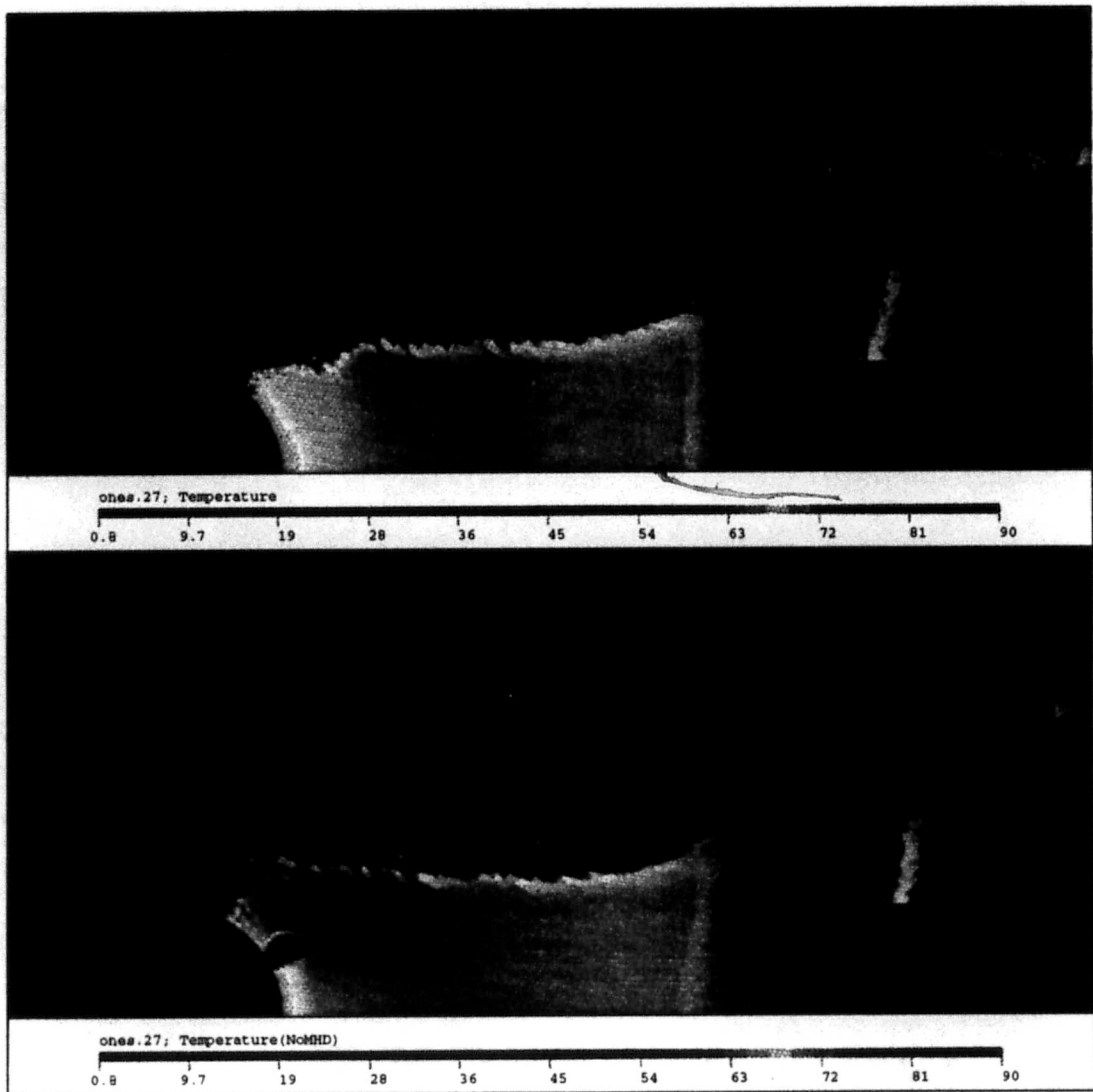


Figure 4.54: Distribution de la température avec et sans MHD dans la région inter-électrodes; $t = 2.7ms$ et $I \approx 30kA$.

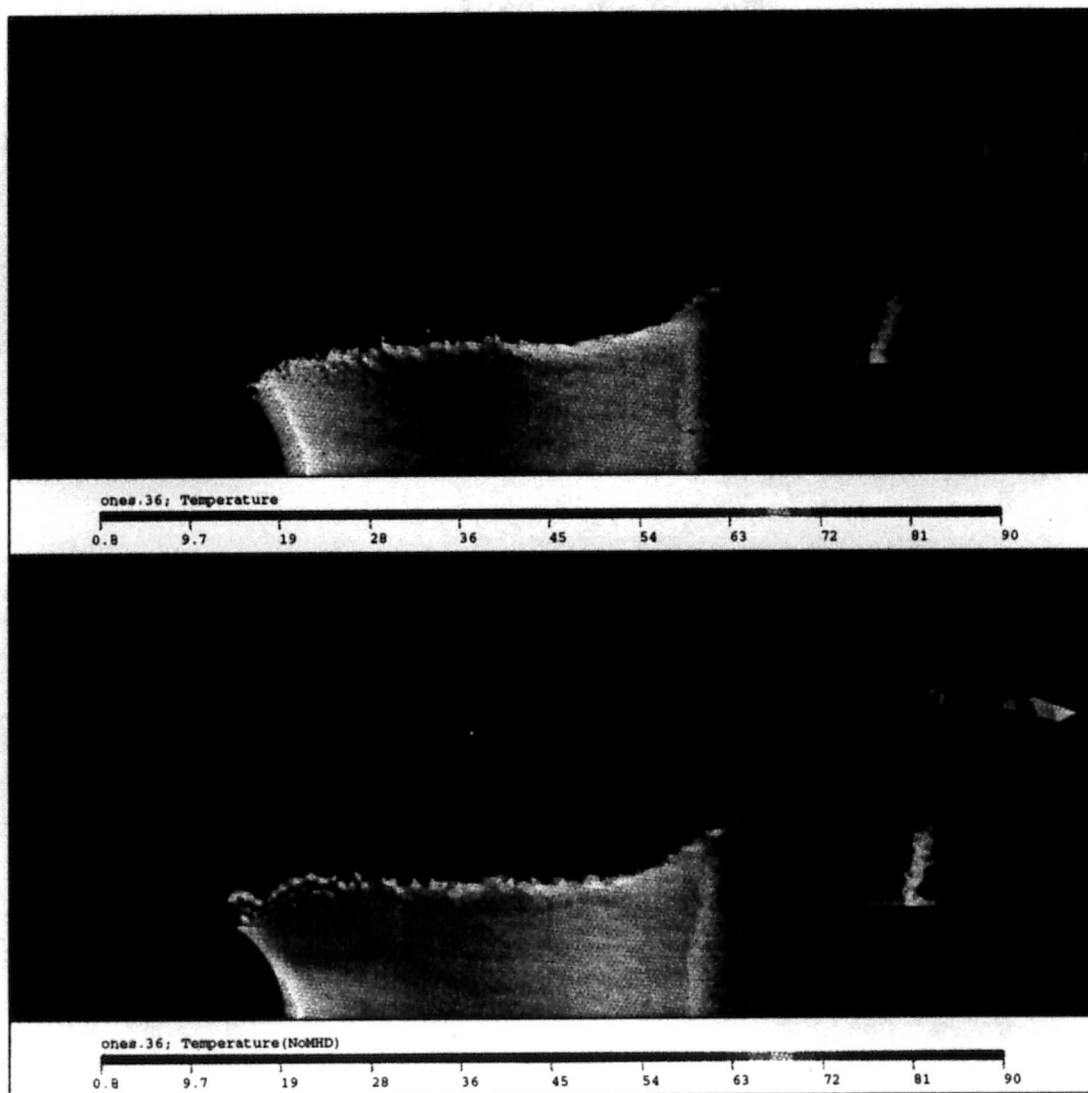


Figure 4.55: Distribution de la température avec et sans MHD dans la région inter-électrodes; $t = 3.6ms$ et $I \approx 32kA$.

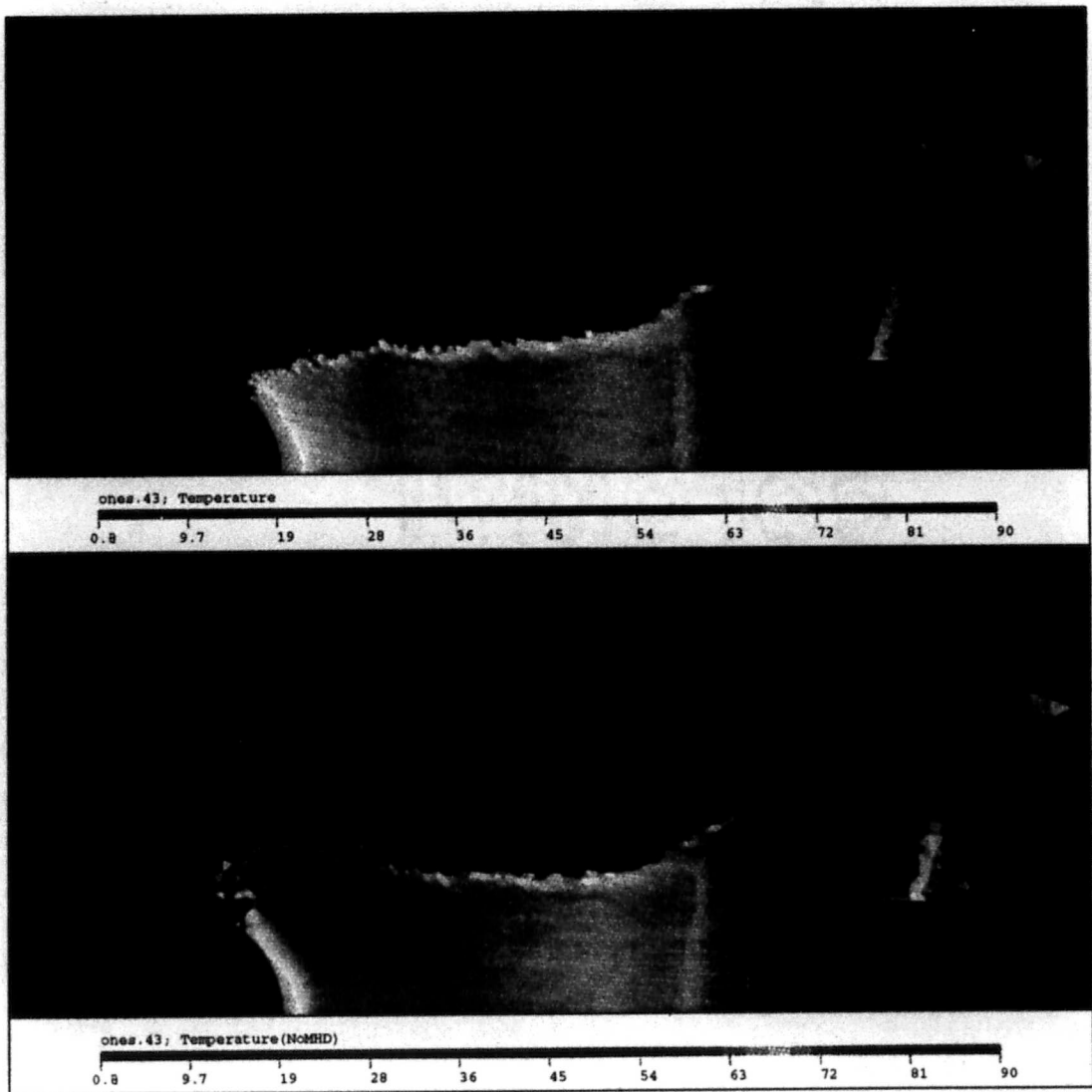


Figure 4.56: Distribution de la température avec et sans MHD dans la région inter-électrodes; $t = 4.3ms$ et $I \approx 30kA$.

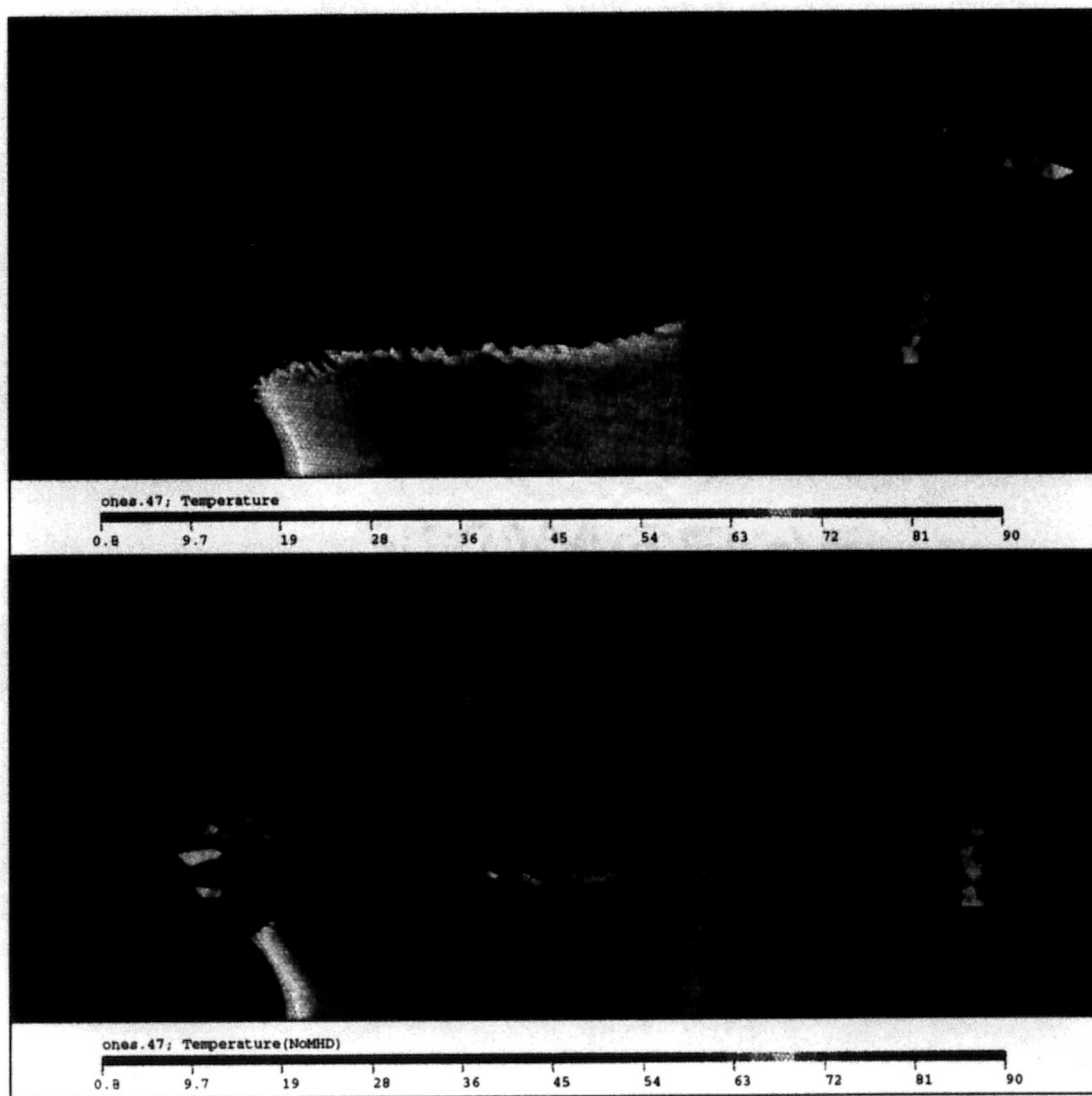


Figure 4.57: Distribution de la température avec et sans MHD dans la région inter-électrodes; $t = 4.7ms$ et $I \approx 28kA$.

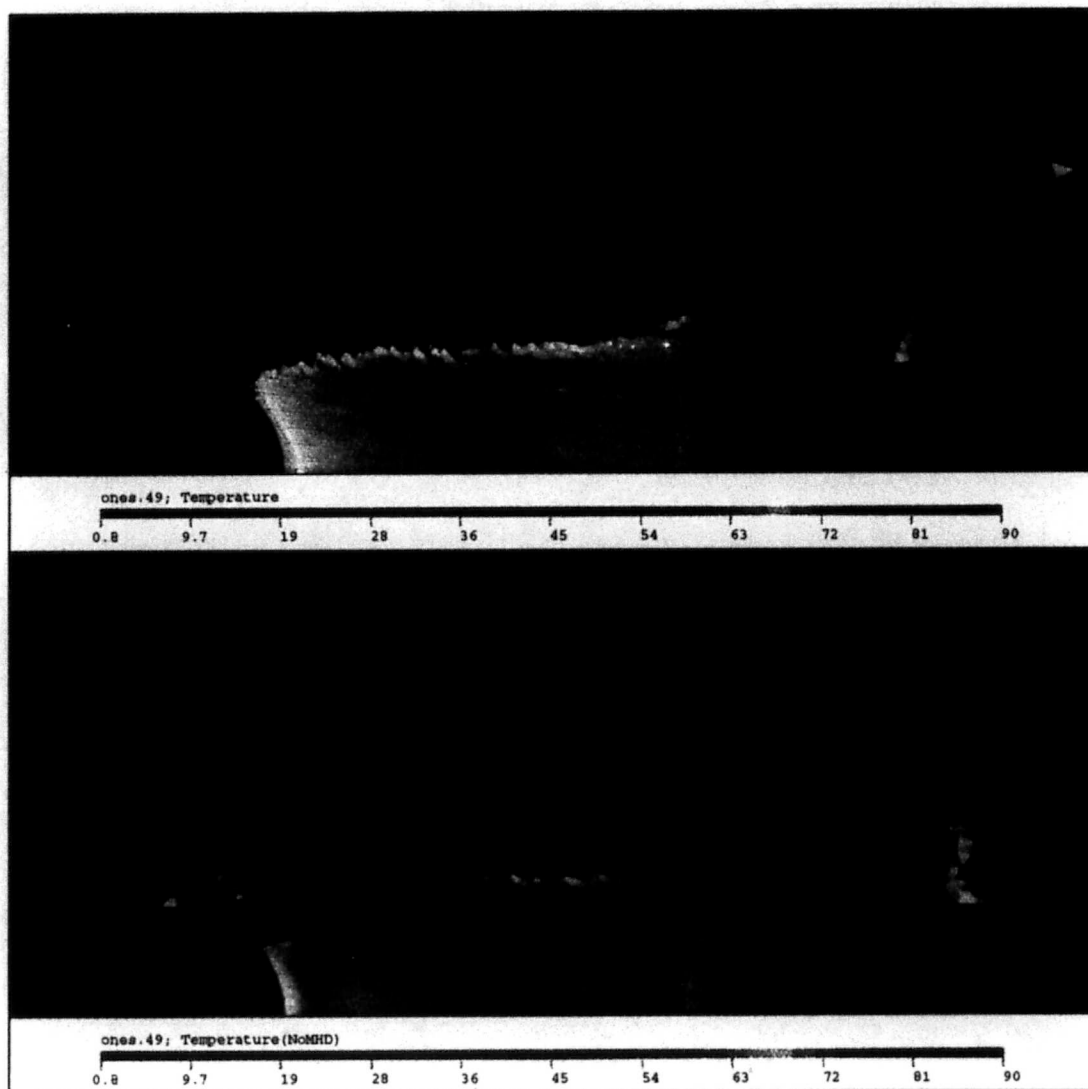


Figure 4.58: Distribution de la température avec et sans MHD dans la région inter-électrodes; $t = 4.9ms$ et $I \approx 26.5kA$.

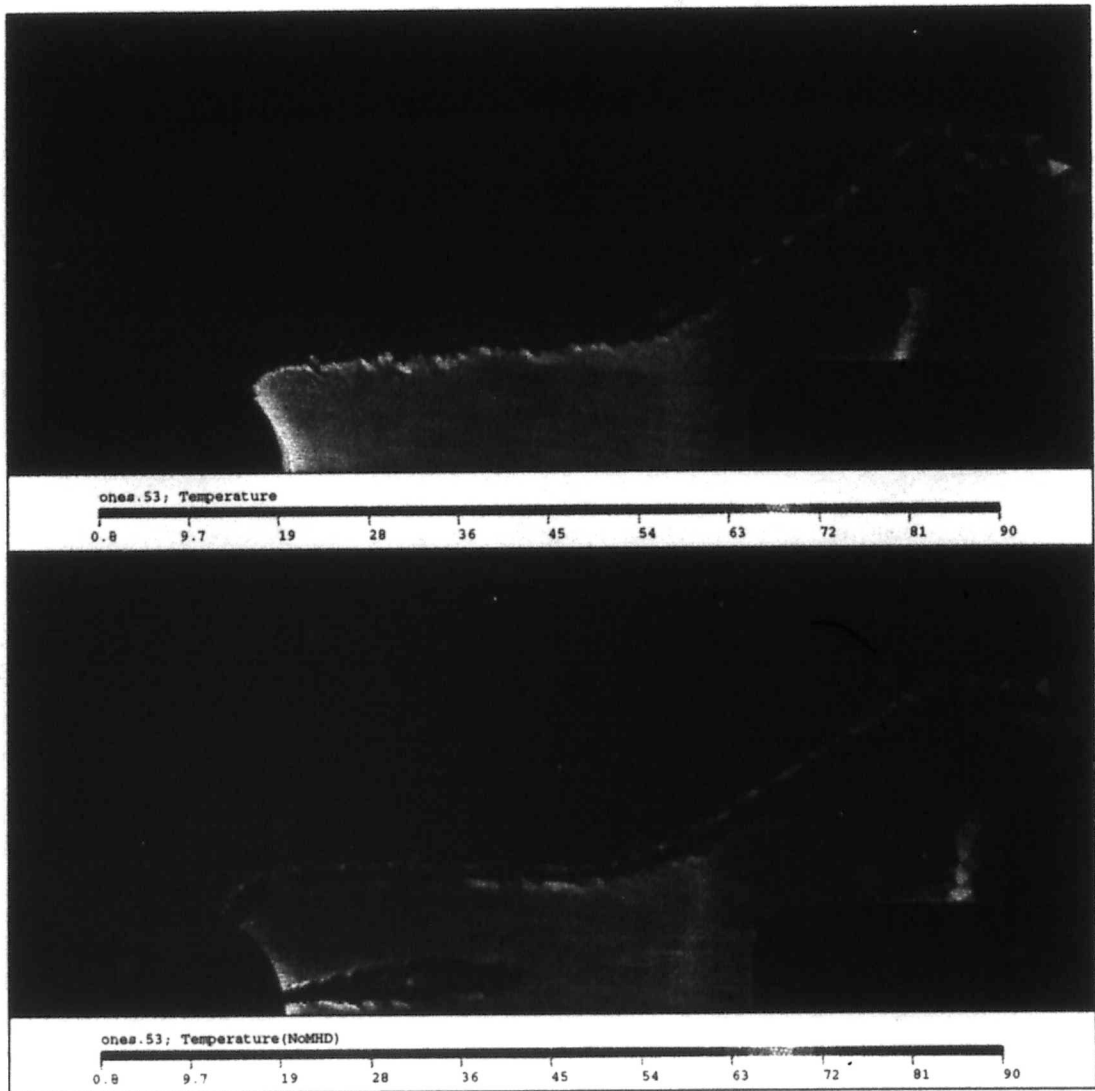


Figure 4.59: Distribution de la température avec et sans MHD dans la région inter-électrodes; $t = 5.3ms$ et $I \approx 23kA$.

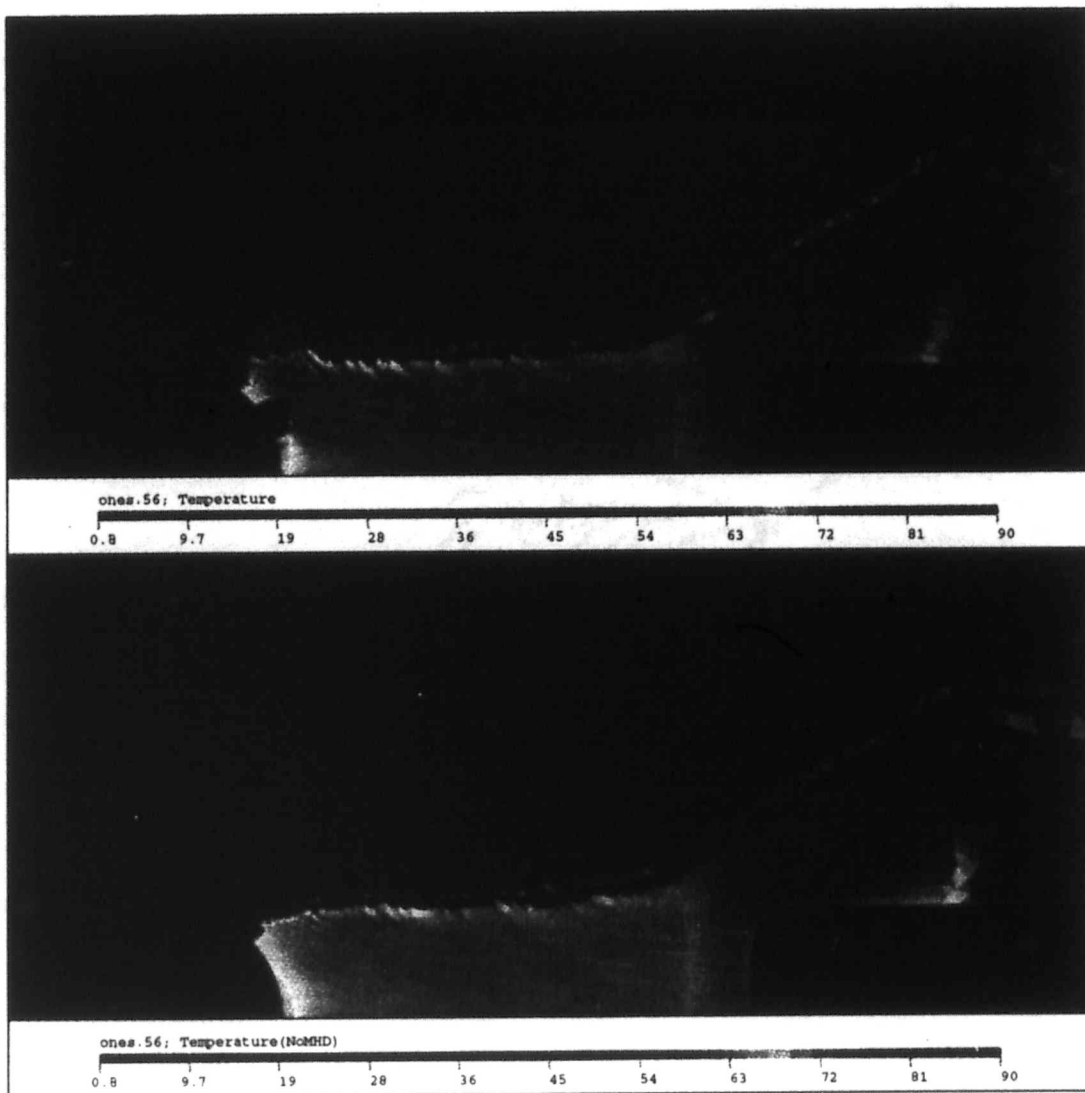


Figure 4.60: Distribution de la température avec et sans MHD dans la région inter-électrodes; $t = 5.6ms$ et $I \approx 20kA$.

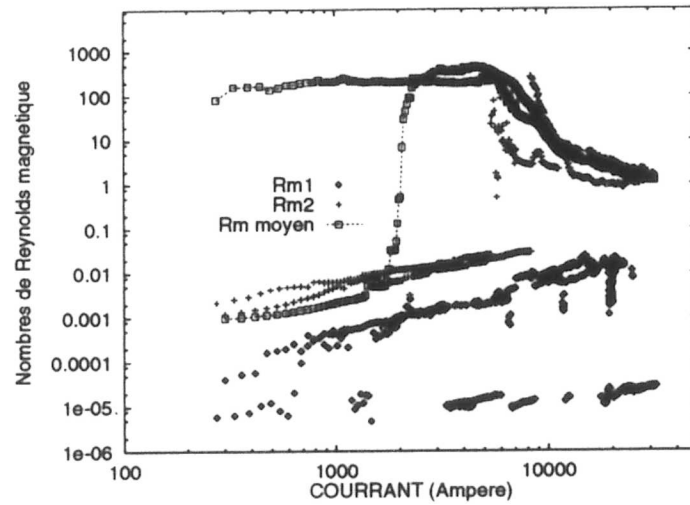


Figure 4.61: Historique des différents nombres de Reynolds magnétiques, Rm_1 , Rm_2 et Rm .

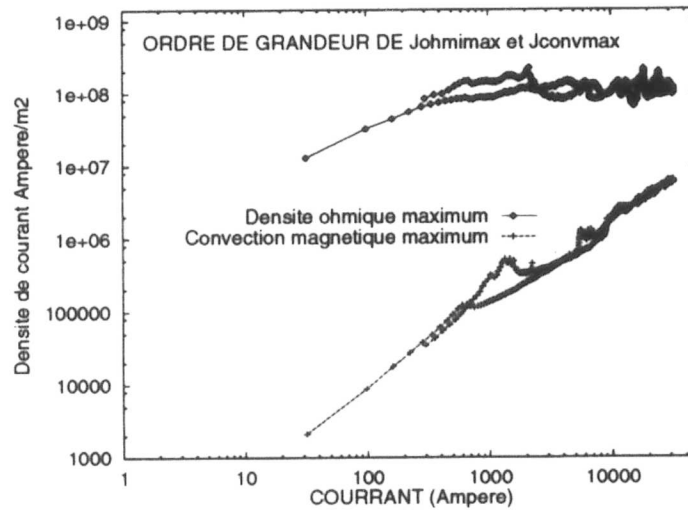


Figure 4.62: Historique des valeurs maximales de la densité de courant J_{ohmi} et la convection magnétique J_{conv} .

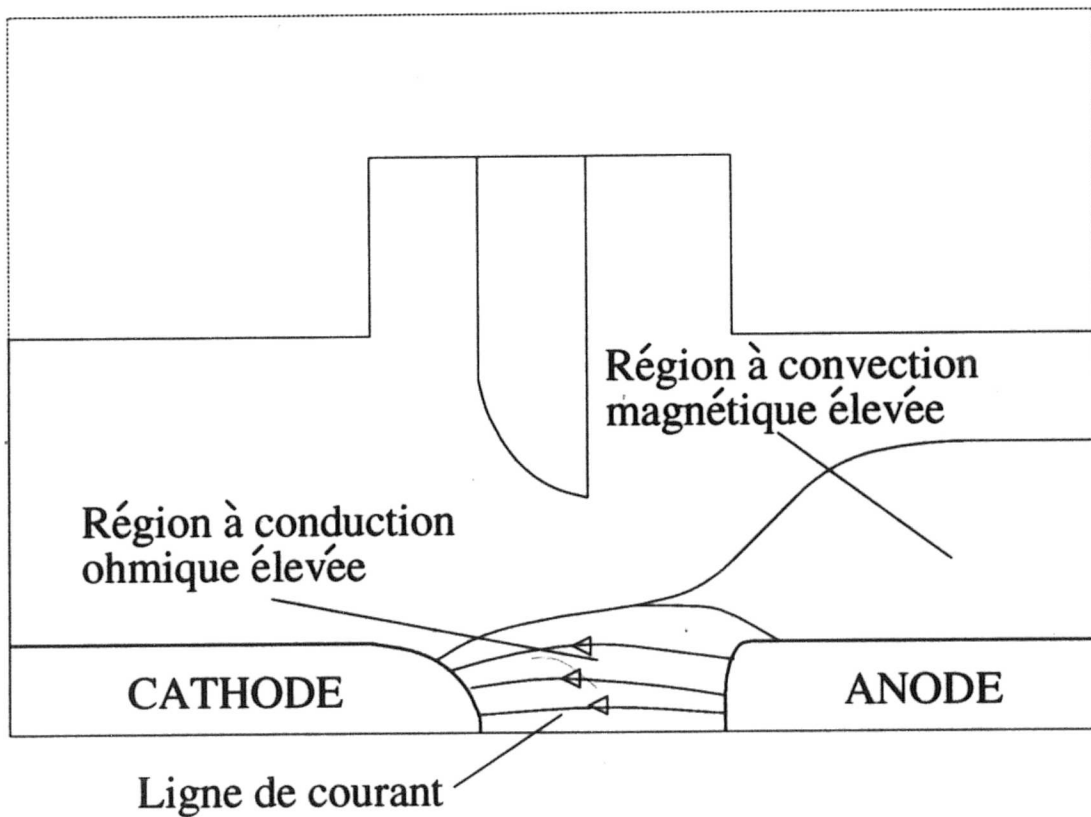


Figure 4.63: Illustration des lignes de courant entre les électrodes et mise en évidence d'une région chaude en aval de l'anode.

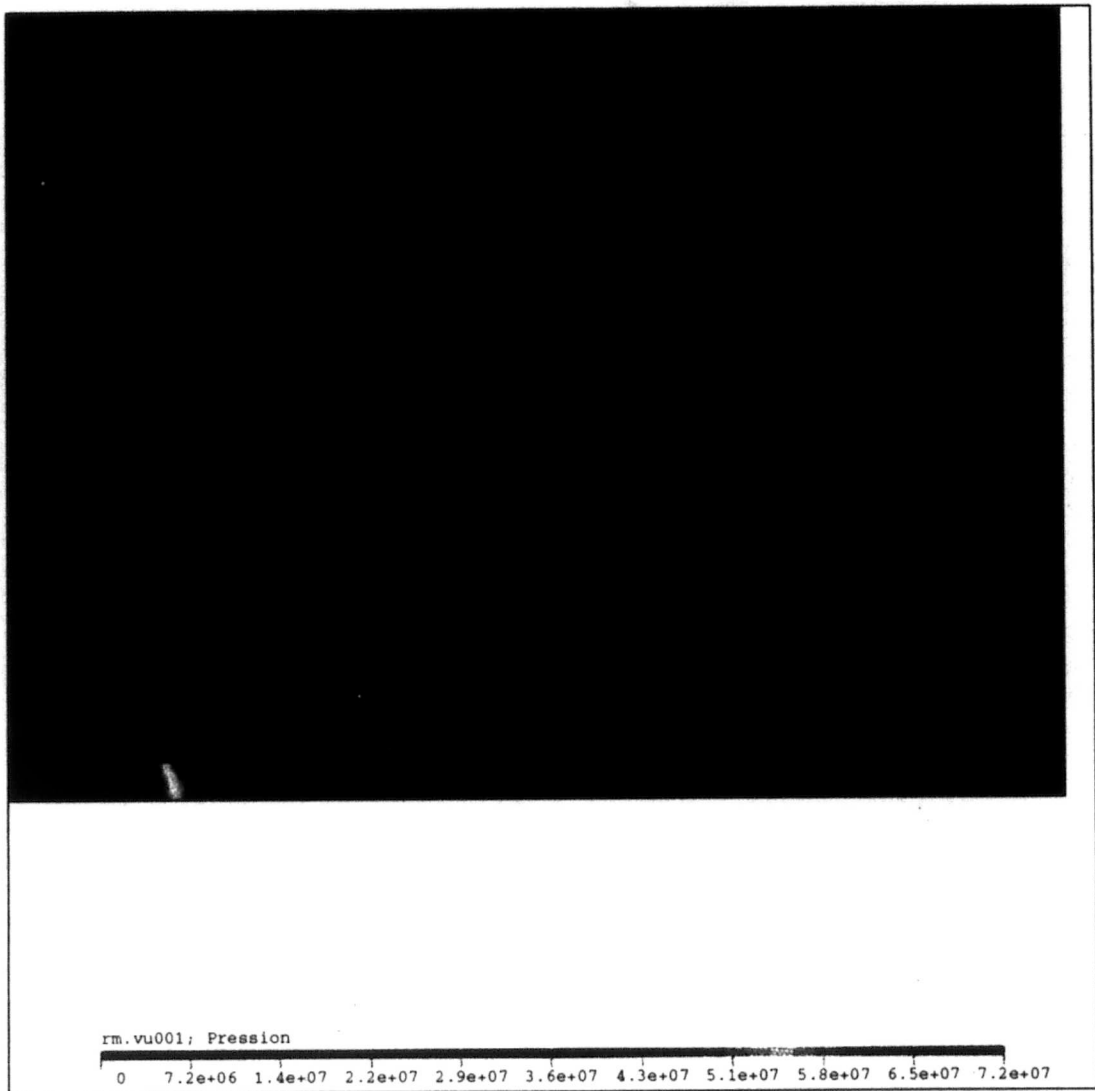


Figure 4.64: Intensité de la densité de courant ohmique à 2000 A.

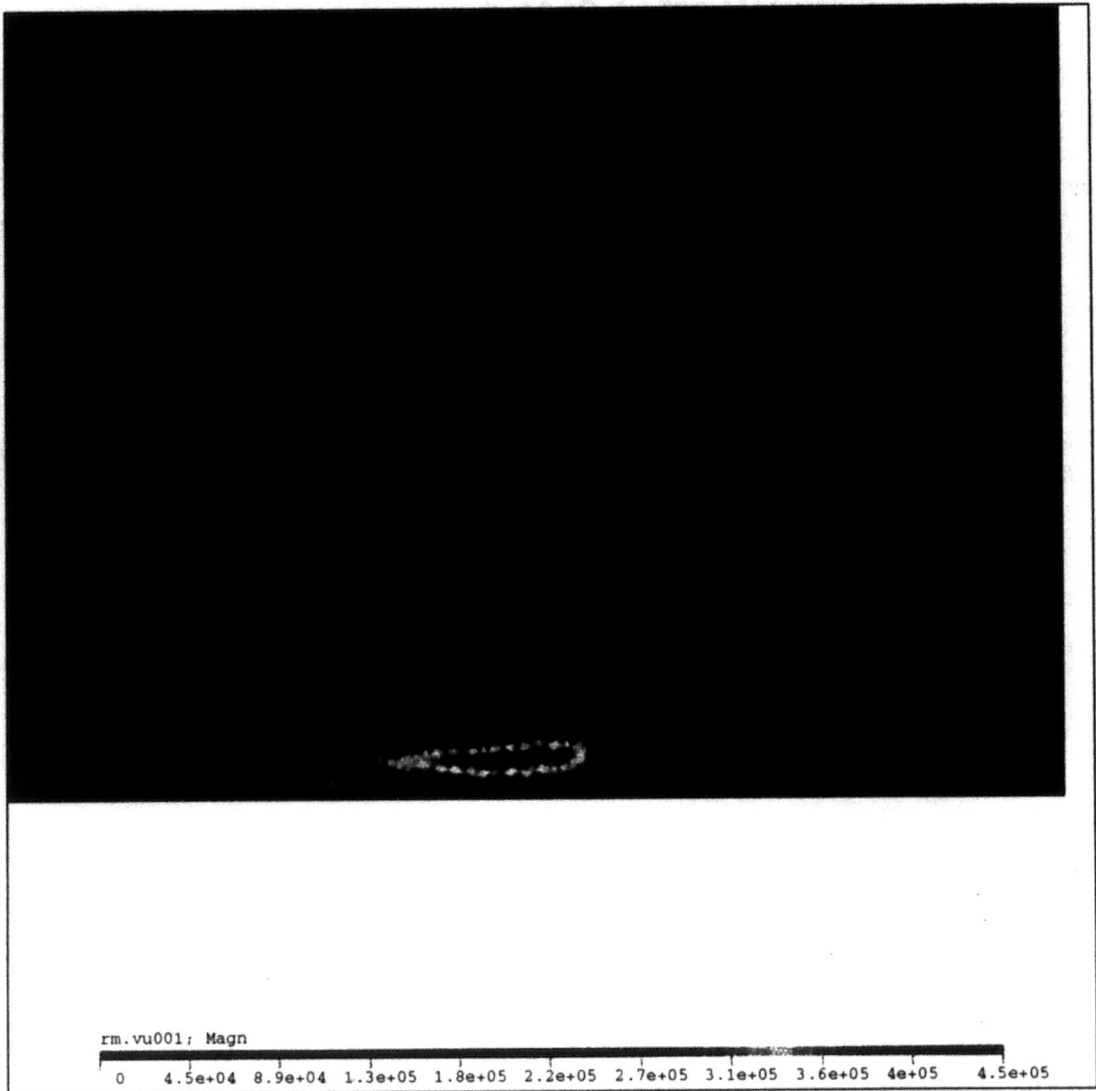


Figure 4.65: Intensité de la convection magnétique à 2000 Å.

Conclusion

Ce mémoire a eu comme objectif de faire l'étude numérique de la compression magnétique dans les arcs de types disjoncteurs. Les résultats obtenus indiquent que les forces de Lorentz y jouent un rôle fondamental pour des valeurs de courant élevé. A partir de $20kA$, l'effet constricteur des forces de Lorentz permet de stabiliser la colonne d'arc. Le resserrement circulaire de l'arc a pour effet d'augmenter la température de l'arc devant la cathode. Par conséquent, l'intégration de ces forces dans un modèle d'arc est indispensable à courant élevé.

Cette étude a également permis de mettre en évidence un phénomène d'origine numérique, l'"effet bulle". Nous avons montré que ce phénomène avait tendance à détruire la solution numérique, particulièrement dans le cas d'un calcul d'arc qui n'inclut pas les forces de Lorentz.

Dans le cas contraire, ce phénomène est beaucoup moins nuisible. Cependant, l'apparition de l'effet bulle a pour effet de libérer la pression qui s'accumule devant la cathode, empêchant ainsi d'obtenir une surpression lorsque le courant repasse à zéro.

D'après Perkins et al. [13] cette surpression jouerait un rôle dans l'extinction

de l'arc après le passage au courant zéro, en diminuant la constante de temps de désionisation du gaz.

Le passage d'un modèle de gaz parfait à un modèle de gaz réel permettra peut être de résoudre ce problème. En effet, nous avons déjà mentionné que le calcul en gaz réel permet d'avoir un arc plus petit et une compression magnétique plus intense. Ces deux effets combinés permettront à l'arc d'évoluer dans des conditions plus stables et ainsi peut être d'éliminer complètement l'effet bulle. Egalement, l'utilisation dans un avenir proche d'un modèle de radiation plus général devrait permettre d'éliminer les doutes quant à la validité du modèle actuel pour des arcs de forme complexe.

Enfin ce mémoire a essayé de clarifier le rôle de la rotation de l'arc à courant plus élevé. Nous avons démontré que ce phénomène est accompagné d'effets transitoires. En ce qui concerne l'impact de ces effets sur l'arc de 32 kA, nous pouvons affirmer que les effets transitoires dominent car les résultats numériques obtenus pour la pression sont proches des résultats expérimentaux.

Seules, des simulations futures à ampérage plus élevé, utilisant un modèle gaz réel, permettront de déterminer avec plus de précisions l'importance relative entre le phénomène de rotation d'arc et les effets transitoires dans le calcul d'arc.

Ainsi, ce mémoire ouvre la voie sur des recherches futures qui permettront de donner plus d'éclaircissement sur le rôle des forces de Lorentz dans la performance des arcs de types disjoncteurs.

Références

- [1] X.D. ZHANG, J.Y. TRÉPANIÉ, and R. CAMARERO. Modelling and computation of arc-flow interaction in circuit-breakers. *accepted for publication in International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 1993.
- [2] G.R. JONES, J.L. LECLERC, and M.R. SMITH. Self magnetic effects in a model gas-blast circuit breaker at very high currents. *IEE PROCEEDINGS*, 129:611–618, 1982.
- [3] GEC Alsthom TD. 35 ans d'évolution des disjoncteurs sf_6 haute tension. Technical report, Revue 1, 1994.
- [4] H. MAECKER. Plasma streams produced self-magnetic compression and its importance for mechanism of high current arcs. *Applied Science Research*, 5(B):231–237, 1954.
- [5] K. LARCHE. *Zeitung Physiks*, 2:638–, 1954.
- [6] J.R. HAYNES. *Physical Review A*, 73:891–, 1948.
- [7] L. SIFFROI. *Le contacteur électromagnétique*. CITEF, 1988.

- [8] W. HERMANN, U. KOGELSCHATZ, K. NIEMEYER, K. RAGALLER, and E. SCHADE. Experimental and theoretical study of a stationary high-current arc in a supersonic nozzle flow. *Applied Physics*, 7:1703-1722, 1974.
- [9] D.C. STRACHAN, D. LIDGATE, and JONES G.R. Radiative energy losses from high-current air-blast arc. *Journal of Applied Physics*, 48, No6:2324-2330, 1977.
- [10] A. GLEIZEZ, H. RAHAL, H. DELACROIX, and P. VAN DOAN. Study of a circuit-breaker arc with self-generated flow: Part I-energy transfer in the high-current phase. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 16(6):606-614, 1988.
- [11] G.R. JONES and M.T.C. FANG. The physics of high power arcs. In 43, editor, *Report Progress in Physics*. 1417-1462, 1980.
- [12] M. MITCHNER and C.H. KRUGER, editors. *Partially Ionised Gases*. New York: Wiley, 1973.
- [13] J.F. PERKINS and L.S. FROST. Magnetic pumping effect on dielectric recovery of blown sf_6 arcs. volume 376-381, 1971.
- [14] P.F. SHAYLER and M.T.C. FANG. Flow near the upstream electrode of gas-blast circuit breakers. *IEE Proceedings, Part C*, 127:26-32, 1980.
- [15] B.W. SWANSON and R.M. ROIDT. Some numerical solutions of the boundary layer equations for an SF_6 arc. *Proc. IEEE*, 59:493-501, 1971.
- [16] M.D. COWLEY. Integral methods of analysing electric arcs: I. formulation. *Journal of Physics, D: Applied Physics*, 7:2218-2231, 1974.

- [17] J.F. SHAEFFER. Swirl arc: A model for swirling, turbulent, radiative arc heater flowfields. *AIAA Journal*, 16(10):1068-1075, 1978.
- [18] R.R. MITCHELL. *Analysis of electric arcs in gas-blast circuit breakers*. PhD thesis, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, PA, 1985.
- [19] J.F. ZHANG and M.T.C. FANG. Dynamic behavior of high-pressure arcs near the flow stagnation point. *IEEE Trans.*, PS-17(3):524-533, June 1989.
- [20] P. SCARPA, B. DAUBY, J. M. DEFISE, W. LEGROS, M. BARRAULT, G. BERNARD, and S. ROWE. Sf_6 auto-expansion circuit breaker design: Numerical and experimental investigations of arc-gas interactions. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 7(1):339-345, January 1992.
- [21] G.W. BUTLER, B.A. KASHIWA, and D.Q. KING. Numerical modeling of arcjet performance. *AIAA Paper 90-1474*, June 1990.
- [22] P. ROSTAND and R.W. MACCORMACK. CFD modeling of an arc-heated jet. *AIAA Paper 90-1475*, June 1990.
- [23] J. CAMBIER. Numerical methods for TVD transport and coupled relaxing processes in gases and plasmas. *AIAA Paper 90-1574*, June 1990.
- [24] M. OKAMOTO, M. ISHIKAWA, K. SUZUKI, and H. IKEDA. Computer simulation of phenomena associated with hot gas in puffer-type gas circuit breaker. *IEEE Transactions on Power delivery*, 6(2):833-839, 1991.
- [25] H.G. THIEL and U. RUTTEN. Modelling of a high current arc as energy source in computational fluid dynamics. In *10th International Conference on Gas Discharges and their Applications (GD92)*, 1992. September 13-18, Swansea, U.K.

- [26] X.D. ZHANG, J.-Y. TRÉPANIÉ, and R. CAMARÉRO. Computation of high-current arc-flow interaction in complex internal configurations. In *The AIAA 31st Aerospace Science Meeting & Exhibit*, 1993. AIAA Paper 93-0819, January 11-14, Reno, USA.
- [27] J.-Y. TRÉPANIÉ, H. PELLEGRIN, X.D. ZHANG, and R. CAMARÉRO. Investigation of a steady 2000 A nitrogen arc in a double flow nozzle. In *AIAA Paper 95-0251*, 1995.
- [28] J.Y. TRÉPANIÉ, M. REGGIO, H. ZHANG, and R. CAMARÉRO. A finite volume method for solving the Euler equations on arbitrary Lagrangian-Eulerian grids. *Computers and Fluids*, 20(4):399-409, 1991.
- [29] R. BERTON. *Magnétohydrodynamique*. Masson, 1991.
- [30] G.W. SUTTON and A. SHERMAN. *Engineering Magnetohydrodynamics*. McGraw-Hill, 1968.
- [31] M.F. HOYAUX. *Arc Physics*. Springer-Verlag New York Inc., 1968.
- [32] X. JIANYUAN and W. QIPING. Spectroscopic investigations for the temperature of nozzle arc in a SF₆ model puffer interrupter. *Proc. ECAAA*, 1989.
- [33] M.T.C. FANG and J.F. ZHANG. The dynamic behavior of nozzle arcs. *IEEE Trans. Plasma Science*, PS-14(4), 1986.
- [34] J.Y. TRÉPANIÉ, M. REGGIO, and R. CAMARÉRO. LTE computation of axisymmetric arc-flow interaction in circuit-breakers. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 19(4):580-589, 1991.

- [35] X.D. ZHANG, J.-Y. TRÉPANIÉ, and R. CAMARERO. Computation of a convection stabilized 1200-A arc in a convergent-divergent nozzle. In *The AIAA 32nd Aerospace Science Meeting & Exhibit*, 1994. AIAA Paper 94-0693, January 10-13, Reno, USA.
- [36] L.S. FROST and R.W. LIEBERMANN. Composition and transport properties of SF₆ and their use in a simplified enthalpy flow model. *Proc. IEEE*, 59(4):474-485, 1971.
- [37] J.M. YOS. Transport properties of nitrogen, hydrogen, oxygen, and air to 30000K. Technical report, Avco Corporation Technical Memorandum RAD-TM-63-7, Contract AF33(616)-7578, Task 73603, 1963.
- [38] S. RAMAKRISHNAN, STOKES A.D., and J.J. LOWKE. An approximate model for high-current free-burning arcs. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 11(3):2267-2280, September 1978.
- [39] Club E.D.F. Arc électrique. *L'arc électrique et ses applications*. Editions du centre national de la recherche scientifique, 1984.
- [40] P.P. SILVESTER and R.L. FERRARI. *Finite Elements For Electrical Engineers*. Cambridge University Press, 1991.
- [41] P.L. ROE. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 43(2):357-372, October 1981.
- [42] T.J. BARTH and D.C. JESPERSON. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. In *AIAA Paper 89-0366*, 1989.

- [43] J.F. ZHANG, M.T.C. FANG, and D.B. NEWLAND. Theoretical investigation of a 2kA DC nitrogen arc in a supersonic nozzle. *Journal of Physics, D: Applied Physics*, 20:368-379, 1987.
- [44] R.W. LIEBERMANN and J.J. LOWKE. Radiation emission coefficients for sulfur hexafluoride arc plasmas. *Quant. Spectros. Radiat. Transfer*, 16:253-264, 1976.
- [45] S.M. EL-KHOLY. *Spectroscopic investigation of current zero arc properties*. PhD thesis, Liverpool University, 1988.
- [46] K.A. ERNST and AL. The energy transport, including emission and absorption, in n_2 -arcs of different radii. *IEEE Trans. Plasma Science*, PS-1(4):3-15, 1973.
- [47] L.J. SERGERLIND. *Applied Finite Element Analysis*. John Wiley Sons, Inc., 1976.
- [48] W. HERMANN, U. KOGELSCHATZ, K. RAGALLER, and E. SCHADE. Investigation of a cylindrical axially blown high pressure arc. *Journal of Physics, D: Applied Physics*, 7:607-619, 1974.
- [49] V.N. MALLER and M.S. NAIDU. *Advances in high voltage insulation and arc interruption in SF₆ and vacuum*. Pergamon Press, 1981.
- [50] M.R. SMITH, J.L. LECLERC, and JONES G.R. The electrical characteristics of gas blast circuit breaker arcs at very high currents. volume PAS-101, N2, 376-381, 1981.
- [51] J.L. LECLERC, M.R. SMITH, and G.R. JONES. Pressure transients in a model gas-blast circuit breaker operating at extra high current levels. In *IEEE TRANSACTIONS ON PLASMA SCIENCE, VOL. PS-8, NO. 4*, 1980.

Annexe A

Méthode du gradient conjugué

A.1 Méthode du gradient conjugué

A.1.1 Méthode du gradient

La méthode du gradient et du gradient conjugué sont des techniques de descente. Elles s'appliquent lorsque la matrice est symétrique et définie positive. L'idée directrice derrière cette méthode est de minimiser la fonctionnelle $K(x)$ suivante

$$K(x) = \vec{x}^T A \vec{x} - 2\vec{x}^T \vec{b} \quad (\text{A.1})$$

Si \vec{x} est la solution du système $A\vec{x} = \vec{b}$ alors \vec{x} sera le vecteur qui réalisera le minimum de la fonctionnelle $K(x)$. Minimiser $K(x)$ revient à calculer pour quel vecteur \vec{x} le gradient de la fonctionnelle $K(x)$ est nul:

$$\nabla K(x) = 2(A\vec{x} - \vec{b}) = -2\vec{r}(\vec{x}), \quad (\text{A.2})$$

où $\vec{r}(\vec{x})$ est le vecteur résidu.

Comme $\vec{r}(\vec{x}) = \vec{b} - A\vec{x} = A\vec{x}^* - A\vec{x}$, on voit bien que le vecteur solution \vec{x}^* permet d'approcher cette minimisation. Notons que $K(x)$ est une forme quadratique qui opère de $\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$.

Définissons une autre fonctionnelle $T(x)$ telle que $T(x)$ est égale à une constante près à $K(x)$, alors minimiser $K(x)$ est équivalent à minimiser $T(x)$. Cette fonctionnelle est de la forme

$$E(x) = K(x) + \vec{x}^* A \vec{x}, \quad (\text{A.3})$$

où \vec{x}^* est la solution du système $A\vec{x} = \vec{b}$.

Afin de minimiser la fonctionnelle $K(x)$, les méthodes de "descentes" sont construites en déterminant à la $k^{\text{ième}}$ itération une direction de descente $\vec{p}_k \neq 0$ et un scalaire α_k de manière à avoir $T(\vec{x}_{k+1}) - T(\vec{x}_k) < 0$. Ceci est équivalent à écrire

$$h(\alpha) = T(\vec{x}_k + \alpha \vec{p}_k) - T(\vec{x}_k) = -2\alpha(\vec{p}_k^T \vec{r}_k) + \alpha^2(\vec{p}_k^T A \vec{p}_k) < 0 \quad (\text{A.4})$$

avec la direction \vec{p}_k fixée et α_k inconnue. En résolvant $h(\alpha) = 0$, on trouve une valeur optimale de α_k qui est

$$\alpha_k = \frac{\vec{p}_k^T \vec{r}_k}{\vec{p}_k^T A \vec{p}_k} \quad (\text{A.5})$$

Par conséquent,

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \frac{\vec{p}_k^T \vec{r}_k}{\vec{p}_k^T A \vec{p}_k} \vec{p}_k \quad (\text{A.6})$$

où $\vec{r}_k = A\vec{x}_k - \vec{b}$

En ce qui concerne la direction du vecteur \vec{p}_k , nous choisirons la direction opposée au gradient ou plus exactement la direction du résidu

$$\vec{p}_k = -\vec{r}_k \quad (\text{A.7})$$

On peut démontrer que la rapidité de la convergence de cette méthode dépend du rapport

$$\frac{Q(A) - 1}{Q(A) + 1} \quad (\text{A.8})$$

où $Q(A)$ est le conditionnement de la matrice A .

A.1.2 Méthode du gradient conjugué

Dans la méthode du gradient, on détermine la valeur optimale de α_k à chaque itération. De la même manière, la méthode du gradient conjugué étend cette idée en cherchant une direction optimale de \vec{p}_k à chaque itération à partir des deux directions orthogonales \vec{r}_k et \vec{p}_{k-1} . Ainsi la direction \vec{p}_k sera obtenue à partir de la relation suivante

$$\vec{p}_k = \vec{r}_k + \beta_k \vec{p}_{k-1} \quad (\text{A.9})$$

$$\text{où } \beta_k = \frac{\vec{r}_k^T A \vec{p}_{k-1}}{\vec{p}_{k-1}^T A \vec{p}_{k-1}}$$

Par conséquent, la technique du gradient conjugué tient compte de l'itération précédente.

A.1.3 Préconditionnement

A la section 3.3.3.1, nous avons vu que la vitesse de convergence dépendait du rapport $\frac{Q(A) - 1}{Q(A) + 1}$. En fait, plus la valeur du conditionnement $Q(A)$ de la matrice est proche de 1 et plus la vitesse de convergence est rapide. Le principe du preconditionnement consiste à remplacer le système $A\vec{x} = \vec{b}$ par un système équivalent $C^{-1}A\vec{x} = C^{-1}\vec{b}$ où la matrice C^{-1} est la plus proche possible de la matrice A^{-1} . Donc en pratique on choisit C^{-1} de façon à avoir le conditionnement $Q(C^{-1}A)$ le plus proche de 1. Par conséquent, il faut construire efficacement la matrice C^{-1} sans trop augmenter le nombre d'opération à effectuer pour la résolution du système. Il est intéressant de montrer que la matrice A du système à résoudre

peut se décomposer de la manière suivante

$$A = L + D + L^T \quad (\text{A.10})$$

où L est triangulaire inférieure et D est diagonale. Au niveau des méthodes itératives classiques, le concept de préconditionnement est introduit de manière suivante

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad (\text{A.11})$$

avec $A = M - N$, d'où $M\vec{x}^{k+1} = N\vec{x}^k + \vec{b}$.

Pour que la méthode converge, il faut que $Q(M^{-1}N) < 1$. Plusieurs auteurs proposent une expression pour M et N , celles-ci sont:

- * $M = D, N = -(L + L^T)$ pour la méthode de Jacobi;
- * $M = D/w, N = (1 - w)/wD - (L + L^T)$ pour la méthode de Jacobi relaxée;
- * $M = D/w + L, N = (1 - w)/wD - L^T$ pour la méthode de SOR (Successive Over Relaxation, $w > 1$);

et celle que nous implantons dans ce mémoire avec le gradient conjugué est

- * $M = (D/w + L)w/(2 - w)D^{-1}(D/w + L)^T, N = M - A$ pour la méthode de SSOR (Symmetric SOR).

A.1.4 Algorithme et programmation

L'algorithme de la méthode du gradient conjugué avec préconditionnement appliqué à A est présenté ci-dessous:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_0 &= \bar{\mathbf{b}} - A\bar{\mathbf{x}}_0 \\ C\bar{\mathbf{p}}_0 &= \bar{\mathbf{r}}_0 \\ \bar{\mathbf{z}}_0 &= \bar{\mathbf{p}}_0\end{aligned}$$

Pour $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{\bar{\mathbf{z}}_k^T \bar{\mathbf{r}}_k}{\bar{\mathbf{p}}_k^T A \bar{\mathbf{p}}_k} \\ \bar{\mathbf{x}}_{k+1} &= \bar{\mathbf{x}}_k + \alpha_k \bar{\mathbf{p}}_k \\ \bar{\mathbf{r}}_{k+1} &= \bar{\mathbf{r}}_k - \alpha_k A \bar{\mathbf{p}}_k \\ C\bar{\mathbf{z}}_{k+1} &= \bar{\mathbf{r}}_{k+1} \\ \beta_{k+1} &= \frac{\bar{\mathbf{z}}_{k+1}^T \bar{\mathbf{r}}_{k+1}}{\bar{\mathbf{z}}_k^T A \bar{\mathbf{r}}_k} \\ \bar{\mathbf{p}}_{k+1} &= \bar{\mathbf{z}}_{k+1} + \beta_{k+1} \bar{\mathbf{p}}_k\end{aligned}$$

On remarque qu'à chaque itération il est nécessaire de résoudre un système $C\bar{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{r}}$. D'après la caractéristique de la matrice C , ce système est facile à résoudre.