

**Titre:** Vitesse critique induite par un écoulement potentiel sur un système de plaques  
Title:

**Auteurs:** Youcef Kerboua, Aouni Lakis, Marc Thomas, & Luc Marcouiller  
Authors:

**Date:** 2006

**Type:** Rapport / Report

**Référence:** Kerboua, Y., Lakis, A., Thomas, M., & Marcouiller, L. (2006). Vitesse critique induite par un écoulement potentiel sur un système de plaques (Rapport technique n° EPM-RT-2006-05). <https://publications.polymtl.ca/3152/>  
Citation:

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/3152/>  
PolyPublie URL:

**Version:** Version officielle de l'éditeur / Published version

**Conditions d'utilisation:** Tous droits réservés / All rights reserved  
Terms of Use:

 **Document publié chez l'éditeur officiel**  
Document issued by the official publisher

**Institution:** École Polytechnique de Montréal

**Numéro de rapport:** EPM-RT-2006-05  
Report number:

**URL officiel:**  
Official URL:

**Mention légale:**  
Legal notice:

**EPM-RT-2006-05**

**VITESSE CRITIQUE INDUITE PAR UN ÉCOULEMENT  
POTENTIEL SUR UN SYSTÈME DE PLAQUES**

Y. Kerboua, A.A. Lakis, M. Thomas et L. Marcouiller  
Département de Génie mécanique  
École Polytechnique de Montréal  
École de technologie Supérieure  
Institut de recherche d'Hydro Québec

**Mai 2006**

Poly



EPM-RT-2006-05

**VITESSE CRITIQUE INDUITE PAR UN  
ÉCOULEMENT POTENTIEL SUR  
UN SYSTÈME DE PLAQUES**

**Y. Kerboua<sup>1</sup>, A.A. Lakis<sup>2</sup>, M. Thomas<sup>2</sup> et L. Marcouiller<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Département de génie mécanique, École polytechnique de Montréal  
C.P. 6079, succ. Centre ville, Montréal (Québec) H3C 3A7

<sup>2</sup>Département de génie mécanique, École de technologie supérieure  
1100, Notre-Dame Ouest, Montréal (Québec) CANADA H3C 1K3

<sup>3</sup>Institut de recherche d'Hydro Québec, Carences, Québec

Mai 2006

---

©2006

Y.Kerboua<sup>1</sup>, A.A.Lakis<sup>1</sup>, M. Thomas<sup>2</sup> et L. Marcouiller<sup>3</sup>  
Tous droits réservés

Dépôt légal :

Bibliothèque nationale du Québec, 2006  
Bibliothèque nationale du Canada, 2006

EPM-RT-2006-05

Vitesse critique induite par un écoulement potentiel sur un système de plaques

par : Y.Kerboua<sup>1</sup>, A.A.Lakis<sup>1</sup>, M. Thomas<sup>2</sup> et L. Marcouiller<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Département de génie mécanique, École Polytechnique de Montréal

<sup>2</sup> Département de génie mécanique, École de technologie supérieure

<sup>3</sup> Institut de recherche d'Hydro Québec

Toute reproduction de ce document à des fins d'étude personnelle ou de recherche est autorisée à la condition que la citation ci-dessus y soit mentionnée.

Tout autre usage doit faire l'objet d'une autorisation écrite des auteurs. Les demandes peuvent être adressées directement aux auteurs (consulter le bottin sur le site <http://www.polymtl.ca/>) ou par l'entremise de la Bibliothèque :

École Polytechnique de Montréal  
Bibliothèque – Service de fourniture de documents  
Case postale 6079, Succursale «Centre-Ville»  
Montréal (Québec)  
Canada H3C 3A7

Téléphone : (514) 340-4846  
Télécopie : (514) 340-4026  
Courrier électronique : [biblio.sfd@courriel.polymtl.ca](mailto:biblio.sfd@courriel.polymtl.ca)

---

Ce rapport technique peut être repéré par auteur et par titre dans le catalogue de la Bibliothèque : <http://www.polymtl.ca/biblio/catalogue/>

## RÉSUMÉ

Les structures élastiques soumises à l'effet d'un écoulement subissent des changements considérables dans leur comportement dynamique et peuvent perdre leur stabilité.

Nous développons dans ce travail un élément fini fluide-solide nous permettant de modéliser des plaques et des systèmes de plaques ayant des conditions aux limites quelconques soumises aux efforts induits par le passage d'un écoulement potentiel de fluide.

Il s'agit d'une méthode hybride combinant la méthode des éléments finis avec la théorie classique des plaques minces. Le champ de déplacements de membrane est approché par des polynômes bilinéaires et le déplacement transversal par une fonction exponentielle, ayant la forme générale de la solution exacte des équations d'équilibre.

La pression du fluide sur la structure est exprimée en fonction de l'inertie du fluide, de la force de Coriolis et de la force centrifuge, écrites respectivement en terme d'accélération, de vitesse et de déplacement transversaux. L'équation de Bernoulli à l'interface fluide-solide et l'équation différentielle gouvernant le potentiel de vitesse sont utilisées. La condition d'imperméabilité assure un couplage complet entre le fluide et la structure.

La matrice de masse et la matrice de rigidité sont calculées par intégrations exactes en se basant sur la méthode des éléments finis.

Les résultats obtenus s'accordent bien avec des modèles analytiques existants.

## 1. Introduction

Les systèmes composés de plaques soumises aux efforts induits par un écoulement de fluide sont souvent utilisés dans les industries contemporaines telles que les centrales nucléaires et l'aérospatial. Ces industries exigent dans la plupart des cas des grandes vitesses d'écoulement du fluide et des épaisseurs de plaques faibles. Si les deux derniers paramètres sont rassemblés avec une longueur excessive de la plaque, la structure devient très vulnérable à l'instabilité.

Les systèmes ETR (engineering test reactor) ont suscité les premiers travaux traitant l'effet d'un écoulement de fluide sur une plaque. Ces systèmes sont composés d'un empilement de plaques parallèles équidistantes, entre lesquelles s'écoule un fluide de refroidissement.

Miller 1960 [1] a été le premier qui a présenté une analyse théorique pour prévoir la vitesse d'écoulement du fluide à laquelle les systèmes ETR s'écroulent (déstabilisent). Il s'est basé sur l'application de l'équilibre neutre, c'est-à-dire, qu'il a balancé les forces de pression causées par l'écoulement du fluide avec les forces de rappels élastiques de la plaque pour différentes conditions aux limites. Il a dérivé une relation exprimant la vitesse critique pour les cas les plus répandus dans les systèmes ETR.

Rosemberg et Youngdhal 1962 [2] ont formulé un modèle dynamique décrivant le mouvement de la plaque et du fluide dans un système d'assemblage de plaques. Ils ont solutionné le problème à valeur propre résultant et ils ont obtenu les vitesses critiques de Miller.

Groninger et Kana 1963 [3] ont fait une étude expérimentale d'un système de trois plaques. Le modèle expérimental a prouvé qu'à de grandes vitesses les plaques voisines vibrent selon le mode antiphase en ouvrant et en fermant alternativement le canal entre les plaques. Ils ont détecté une instabilité dynamique violente "Flutter" de la plaque à une vitesse égale à 1.9 fois la vitesse de Miller. Le "flutter" était une onde qui naît en aval de la plaque et qui se déplace en

amont dans le sens de l'écoulement. Aucune vibration n'a été détectée au dessous de la vitesse d'instabilité dynamique "flutter".

Ishii 1965 [4] a observé deux instabilités de type "flutter" : la première sous forme de vibration à grandes fréquences et à faibles amplitudes et la seconde à grandes amplitudes et à faibles fréquences. Il a expliqué ça par le fait que la chute de pression le long de la plaque a un effet déstabilisant.

Miller [1] et Rosemberg et Youngdhal [2] se sont basés sur les mêmes hypothèses dans leur travaux, ils ont linéarisé la chute de pression en utilisant une approximation du premier ordre et en négligeant des termes d'ordre élevé. Wambsganss 1967 [5] a considéré les termes du second ordre de la pression et il a dérivé une nouvelle expression de la vitesse critique.

Dowell 1967 [6] a examiné la stabilité d'une plaque en utilisant la théorie non linéaire des plaques et il a gardé le potentiel de fluide linéaire. Il a montré qu'il y a une divergence à une certaine vitesse, mais pas d'instabilité dynamique après la divergence.

Smissaert 1968 [7] a étudié la stabilité d'un système MTR de plaques planes dans un travail divisé en une partie expérimentale et une partie analytique. Les tests expérimentaux montrent que pour des vitesses de fluide faibles, la plaque se déforme comme si elle était soumise à une pression statique, cette déformation change le long de la plaque vu la redistribution de la vitesse causée par la déformation. Pour des vitesses trop élevées, des vibrations à grandes amplitudes ont été observées, ces amplitudes n'apparaissent pas à des vitesses inférieures à la vitesse de Miller, cette instabilité dynamique commence en amont puis voyage le long de la plaque dans la direction de l'écoulement.

Smissaert 1968 [8] a développé un modèle analytique d'interaction pour un système de plaques parallèles ayant des dimensions infinies, cela permet de faire une étude bidimensionnelle du problème de fluide et de la plaque. Leur travail a montré que le système d'assemblage de



plaque est caractérisé par deux vitesses, la vitesse de Miller et celle d'instabilité dynamique "Flutter". Ils ont conclu que le système peut subir plusieurs types d'instabilité. L'instabilité de classe "A" survenant à la vitesse de Miller cause une déflexion de la plaque sous forme d'onde de longueur infinie. L'instabilité de type "B" génère des ondes à faibles amplitudes traversant la plaque dans le sens d'écoulement, le seuil de vitesse de cette instabilité est faible, cette instabilité n'est pas très dangereuse. Lorsqu'on atteint la vitesse d'instabilité dynamique "Flutter", un couplage d'instabilité de type "B" et de "Flutter" naît en amont, ce couplage génère une onde à grande amplitude se déplaçant dans le sens de l'écoulement. La vitesse de "flutter" est presque le double de la vitesse de Miller. Dans ce cas, la plaque vibre avec une onde ayant la longueur égale de trois et demi à cinq fois la largeur de la plaque. Selon les expériences, il a été constaté que le "flutter" n'est pas forcément destructif s'il est de courte durée. Par contre, s'il persiste, il devient un problème de fatigue.

Weaver et Unny 1970 [9] ont étudié l'effet d'un écoulement de fluide lourd incompressible au-dessus d'une plaque de longueur finie et de largeur infinie, simplement supportée sur les deux côtés perpendiculaires à l'écoulement. Ils ont examiné la variation des fréquences naturelles de vibration en fonction de la vitesse d'écoulement du fluide. Pour un rapport de masse donné, ils ont mentionné que la zone de stabilité neutre est suivie par une zone d'instabilité statique. Après cette étape, la plaque revient dans un petit intervalle à la stabilité neutre suivi par l'instabilité dynamique.

Gislason 1971 [10] a fait une étude expérimentale sur la plaque rectangulaire soumise à un écoulement de fluide, il a trouvé qu'il n'y a pas de vibration de "flutter" pour une plaque ayant le rapport de dimensions "chord-to-span" égale à deux, même si la vitesse d'écoulement dépasse deux fois la vitesse de Miller.

Kornecki et al. 1976 [11] ont étudié l'instabilité statique et dynamique d'une plaque de longueur finie et de largeur infinie endossée par un mur rigide et soumise à l'effet d'un écoulement potentiel de fluide. Les plaques étudiées sont simplement supportées (SFSF) ou encastrées (CFCF) en aval et en amont. Le cas d'une plaque encastrée libre (CFFF) a aussi été étudié analytiquement et expérimentalement. Les résultats obtenus montrent que la plaque perd sa stabilité par divergence (instabilité statique), si elle est supportée en amont et en aval (SFSF, CFCF). Par contre, si elle est encastrée libre (CFFF), elle perd sa stabilité par "flutter". Une étude expérimentale a été faite pour la plaque encastrée libre.

Holmes 1977 [12] a étudié le problème de la coque cylindrique et de plaque soumises à un écoulement de fluide en tenant compte de la non-linéarité et de l'amortissement. Il a reconstruit les équations différentielles de mouvement en se basant sur la théorie de Galerkin et la troncature modale. L'approche générale est illustrée en analysant un système de tube ou de plaque de deux degrés de liberté. Il a discuté certaines omissions commises par les modèles d'interaction fluide-solide linéaires. Les résultats obtenus s'accordent bien avec ceux de Dowell 1967 [6].

L'effet de l'amortissement structural a été étudié par Higuichi et Dowell 1992 [13], la structure considérée était une plaque libre-libre. Les résultats obtenus montrent l'existence de deux vitesses de divergence (statique et dynamique) qui sont légèrement différentes du cas où on néglige l'amortissement structural.

Davis et Kim 1991 [14] ont développé un modèle fluide-solide pour prédire l'instabilité statique et dynamique déjà observées dans les systèmes de plaques parallèles. Ils ont étudié le cas d'une plaque simplement supportée ou encastrée aux murs latéraux d'un canal soumise à l'effet d'un écoulement de fluide des deux côtés. Ils ont conclu que la divergence statique survient à une vitesse d'écoulement égale à  $(1.1 U_{\text{Miller}})$  et l'instabilité dynamique aura lieu au delà d'une vitesse égale à deux fois celle de Miller.

Guo et Paidoussis 2000 [15] ont fait une étude analytique de la stabilité d'une plaque soumise à un écoulement de fluide dans un canal. Ils ont traité la plaque comme une structure unidimensionnelle et le fluide a été modélisé par des équations bidimensionnelles. Ils ont employé la méthode de Galerkin pour résoudre les équations de la plaque et la technique de transformée de Fourier pour obtenir la pression induite par l'écoulement potentiel. Des plaques ayant des conditions aux limites variées ont été étudiées. Ils ont conclu que la divergence et l'instabilité dynamique de modes couplés (coupled mode flutter) peut arriver à des plaques ayant n'importe quelle condition aux limites, alors que l'instabilité dynamique d'un seul mode (single mode flutter) peut avoir lieu seulement si la plaque a des conditions aux limites non symétriques en amont et en aval.

Guo et Paidoussis 2000 [16] ont aussi étudié la stabilité d'un système composé d'un assemblage de plaques parallèles, en considérant la plaque une structure bidimensionnelle et le potentiel de fluide une fonction tridimensionnelle. Ils ont mentionné deux types d'instabilité : le "single mode divergence" qui survient généralement au premier mode et les modes d'instabilité dynamique couplés "coupled mode flutter". Ce type d'instabilité concerne généralement les modes adjacents. Ils ont conclu aussi que les fréquences à une vitesse donnée diminuent lorsque : a) le rapport  $c_1$  de (longueur/largeur) la plaque augmente, b) le rapport  $c_2$  (hauteur du canal/largeur de la plaque) diminue et c) lorsque le rapport de masse diminue. Ils ont conclu que l'amortissement a un effet faible sur les fréquences et la vitesse critique, mais il change le comportement de postdivergence et des modes couplés dynamiquement instables "coupled modes flutter".

Ce sujet a fait l'objet d'un grand nombre de travaux, certainement moins que les travaux consacrés pour l'analyse du comportement d'une plaque soumise à un écoulement supersonique.

Mais malgré ça, il est clair que le sujet est loin d'être maîtrisé, vu le nombre de résultats contradictoires existants.

Dans ce travail, nous allons développer un élément fini fluide-solide pour étudier le comportement dynamique d'une plaque rectangulaire ou d'un système de plaque soumis aux efforts induits par un écoulement potentiel.

## 2. Élément fini solide

L'élément fini de plaque solide que nous allons utiliser dans ce travail a déjà servi pour l'étude du comportement dynamique d'une plaque sans fluide [17]. Il a été validé et comparé avec d'autres travaux, il a éprouvé une grande précision et une convergence très rapide.

Comme il est représenté à la figure 1, l'élément fini solide est une portion de surface plane rectangulaire ayant une épaisseur  $h$  et quatre nœuds (i, j, k, l), chaque nœud possède six degrés de liberté.

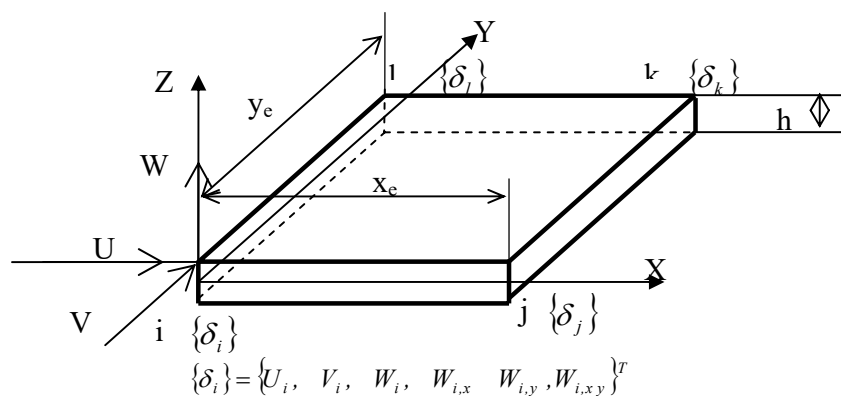


Figure 1. Géométrie de l'élément fini et vecteur nodal de déplacements.

L'approximation de champ de déplacement transversal par la fonction exponentielle et des déplacements de membranes par des polynômes bilinéaires [19] a été justifiée lors du développement de l'élément fini fluide-solide de plaque [17].

Le champ de déplacements dans le plan X, Y est exprimé par :

$$U(x, y, t) = C_1 + C_2 \frac{x}{A} + C_3 \frac{y}{B} + C_4 \frac{xy}{AB} \quad (1.a)$$

$$V(x, y, t) = C_5 + C_6 \frac{x}{A} + C_7 \frac{y}{B} + C_8 \frac{xy}{AB} \quad (1.b)$$

$U$  et  $V$  sont les déplacements de la surface moyenne dans le plan de la plaque selon les axes X et Y respectivement ;

$A$  est la longueur de la structure selon l'axe X ;

$B$  est la longueur de la structure selon l'axe Y.

Le champ de déplacement transversal de la surface moyenne provient de la solution des équations de flexion de la plaque :

$$W(x, y, t) = \sum_{j=9}^{24} C_j e^{i\pi \left( \frac{x}{A} + \frac{y}{B} \right)} e^{i\omega t} \quad (1.c)$$

où :

$W$  est le champ de déplacement transversal de la surface moyenne ;

$\omega$  est la fréquence naturelle de vibration de la plaque en rad/sec ;

$i$  est le nombre complexe  $i^2 = -1$ ;

les  $C_i$  sont des constantes inconnues.

Pour l'élément à vide, nous développons l'équation (1.c) en série de Taylor, comme suit :

$$W(x, y, t) = C_9 + C_{10} \frac{x}{A} + C_{11} \frac{y}{B} + C_{12} \frac{x^2}{2A^2} + C_{13} \frac{xy}{AB} + C_{14} \frac{y^2}{2B^2} + C_{15} \frac{x^3}{6A^3} + C_{16} \frac{x^2y}{2A^2B} + C_{17} \frac{xy^2}{2AB^2} + C_{18} \frac{y^3}{6B^3} + C_{19} \frac{x^3y}{6A^3B} + C_{20} \frac{x^2y^2}{4A^2B^2} + C_{21} \frac{xy^3}{6AB^3} + C_{22} \frac{x^3y^2}{12A^3B^2} + C_{23} \frac{x^2y^3}{12A^2B^3} + C_{24} \frac{x^3y^3}{36A^3B^3} \quad (2)$$

Sous forme matricielle, le champ de déplacements peut être écrit :

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = [R]\{C\} \quad (3)$$

où :

$[R]$  est une matrice (3x24) donnée à l'appendice A;

$\{C\}$  est le vecteur de constantes inconnues.

Les constantes du vecteur  $\{C\}$  peuvent être exprimées en fonction des vingt-quatre degrés de liberté de l'élément fini (voir appendice B) et en les remplaçant dans l'équation (3), le champ de déplacements devient :

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = [R][A]^{-1} \{\mathcal{D}\}^e = [N]\{\mathcal{D}\}^e \quad (4)$$

où :

$[A]^{-1}$  est une matrice (24x24) définie à l'appendice A ;

$\{\delta\}^e$  est le vecteur élémentaire de déplacements donné à l'appendice A ;

$[N]$  est une matrice (3x24) contenant les fonctions de formes du champ de déplacements.

En substituant les déplacements de l'équation (4) dans le vecteur de déformations défini à l'appendice B, nous obtenons le vecteur de déformations en fonction des déplacements nodaux de l'élément fini.

$$\{\varepsilon\} = [Q][A]^{-1} \{\delta\}^e \quad (5)$$

$[Q]$  est une matrice (6x24) listée à l'appendice A.

Pour un matériau anisotrope, le champ de contraintes est lié au champ de déformation par la relation suivante :

$$\{\sigma\} = [P]\{\varepsilon\} \quad (6)$$

où :

$[P]$  est la matrice d'élasticité (6x6) liant le vecteur de contraintes au vecteur de déformations, elle est définie à l'appendice B pour un matériau isotrope.

En utilisant les équations (4), (5) et (6), les matrices de rigidité et de masse (24x24) d'un élément fini peuvent être exprimées respectivement par:

$$[k]^e = [[A]^{-1}]^T \left( \int_0^{y_e} \int_0^{x_e} [Q]^T [P] [Q] dx dy \right) [A]^{-1} \quad (7)$$

$$[m]^e = \rho_s h [[A]^{-1}]^T \left( \int_0^{y_e} \int_0^{x_e} [R]^T [R] dx dy \right) [A]^{-1} \quad (8)$$

où :

$\rho_s$  est la densité de la structure solide;

$x_e$  et  $y_e$  sont les dimensions d'un élément selon les coordonnées X et Y, respectivement (voir figure 1).

### 3. Interaction fluide-solide

L'objectif de notre travail est de modéliser un élément fini fluide-solide qui tient compte des efforts induits par le passage d'un écoulement potentiel de fluide sur et/ou sous la plaque, quelles que soient les conditions aux limites.

La pression de fluide est souvent exprimée en fonction de l'accélération, de la vitesse et du déplacement de la plaque. Ces trois parties de la pression de fluide sont appelées respectivement l'effet de l'inertie, l'effet de force de Coriolis et l'effet de la force centrifuge [21]. Elles seront combinées avec les matrices de masses, d'amortissements (éventuellement) et de rigidités de la structure solide. Le système gouvernant ce comportement est de la forme:

$$[[M_s] - [M_f]] \{\ddot{\delta}_T\} + [[C_s] - [C_f]] \{\dot{\delta}_T\} + [[K_s] - [K_f]] \{\delta_T\} = \{F\} \quad (9)$$

$[M_s]$ ,  $[C_s]$  et  $[K_s]$  sont les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité globales de la plaque solide, respectivement;

$[M_f]$  est la matrice de masse globale représentant l'effet des forces d'inertie du fluide ;



$[C_f]$  est la matrice d'amortissement globale, représentant l'effet des forces de Coriolis ;

$[K_f]$  est la matrice de rigidité globale représentant l'effet des forces centrifuges ;

$\{F\}$  est le vecteur de charge extérieure ;

$\{\delta_T\}$  est le vecteur de déplacements global.

Nous calculons d'abord les matrices ajoutées virtuelles au niveau élémentaire puis par les techniques d'assemblage habituelles nous construisons les matrices globales de l'équation (9).

### 3.1. Élément fini fluide-solide

Nous assumons un écoulement de fluide à potentiel de vitesse, incompressible, non visqueux, des vibrations linéaires et une vitesse moyenne constante de l'écoulement.

Le potentiel de vitesse satisfait l'équation de Laplace suivante :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2U_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + U_x^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \quad (10)$$

où :

$\phi$  est le potentiel de vitesse ;

$c$  est la vitesse du son dans le fluide ;

$U_x$  est la vitesse moyenne de l'écoulement du fluide.

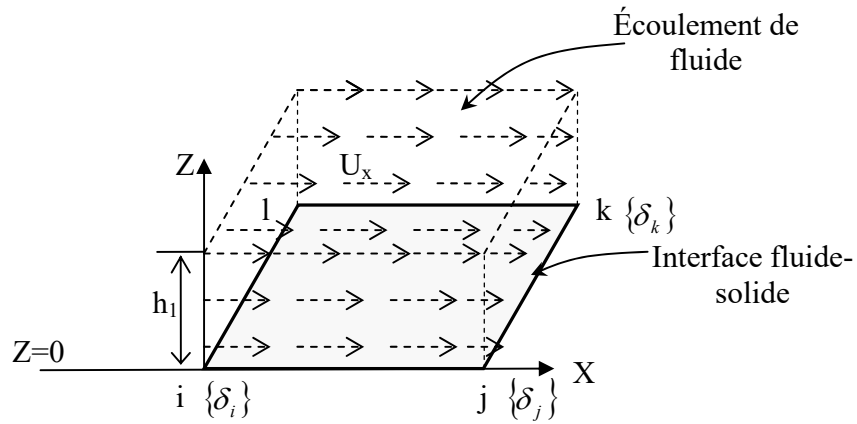


Figure 2 : Élément fini solide-fluide au repère X, Y, Z.

Les composantes de vitesse sont liées à la fonction de potentiel par les équations suivantes :

$$V_x = U_x + \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (11.a)$$

$$V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (11.b)$$

$$V_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (11.c)$$

$V_x, V_y, V_z$  sont les composantes de vitesse selon les axes X, Y et Z respectivement ;

$U_x$  est la vitesse moyenne de l'écoulement potentiel.

L'équation de Bernoulli est donnée par :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + \frac{P}{\rho_f} \right|_{z=0} = 0 \quad (12)$$

où :

$P$  est la pression appliquée par le fluide dans la direction transversale ;

$V$  est la résultante des composantes de vitesse du fluide ( $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$ ).

En introduisant les composantes de vitesse de l'équation (11) dans (12) et en négligeant les termes non linéaires, nous pouvons exprimer la pression dynamique à l'interface fluide-solide par l'équation suivante (voir figure 2) :

$$P|_{z=0} = -\rho_f \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + U_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_{z=0} \quad (13)$$

À la figure 2, nous avons représenté un élément fini solide dont la face supérieure est soumise aux efforts induits par le passage d'un écoulement de fluide. À l'interface ( $Z=0$ ), la condition d'imperméabilité assure le contact permanent entre le fluide et la structure, le potentiel, à ce point, est lié au déplacement transversal par l'équation suivante :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = \left( \frac{\partial W}{\partial t} + U_x \frac{\partial W}{\partial x} \right) \quad (14)$$

D'autre part, nous assumons le potentiel de vitesse par la fonction suivante :

$$\phi(x, y, z, t) = F(z)S(x, y, t) \quad (15)$$

où:

$F(z)$  et  $S(x,y,z)$  sont deux fonctions séparées qui doivent être déterminées.

En utilisant les équations (14) et (15), la fonction du potentiel devient :

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{F(z)}{dF(0)/dz} \left( \frac{\partial W}{\partial t} + U_x \frac{\partial W}{\partial x} \right) \quad (16)$$

Selon l'équation (16), la seule inconnue qui reste pour déterminer le potentiel est la fonction  $F(z)$ .

En substituant l'équation (15) dans (10), nous obtenons l'équation différentielle du second ordre suivante:

$$\left[ \frac{1}{c^2} \left( \omega^2 + 2U_x \frac{\pi}{A} \omega + U_x^2 \frac{\pi^2}{A^2} \right) - \mu^2 \right] F(z) + \frac{d^2 F(z)}{dz^2} = 0 \quad (17)$$

avec :

$$\mu = \pi \sqrt{\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2}}$$

Afin d'éviter un problème à valeurs propres non linéaire et puisqu'il s'agit d'un fluide incompressible, nous pouvons assumer que:

$$\left( \omega^2 + 2U_x \frac{\pi}{A} \omega + U_x^2 \frac{\pi^2}{A^2} \right) \ll c^2 \quad (18)$$

Et l'équation différentielle (17) se réduit donc à :

$$\frac{d^2 F(z)}{dz^2} - \mu^2 F(z) = 0 \quad (19)$$

La solution de l'équation différentielle (19) nous permet d'obtenir la fonction  $F(z)$ . La forme générale de la solution de cette équation s'écrit comme suit :

$$F(z) = A_1 e^{\mu z} + A_2 e^{-\mu z} \quad (20)$$

En substituant (20) dans (16), nous obtenons l'expression du potentiel de vitesse :

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{(A_1 e^{\mu z} + A_2 e^{-\mu z})}{dF(0)/dZ} \left( \frac{\partial W}{\partial t} + U_x \frac{\partial W}{\partial x} \right) \quad (21)$$

Les constantes  $A_1$  et  $A_2$  peuvent être déterminées à partir des conditions aux limites du fluide.

À l'interface fluide-solide ( $Z=0$ ), nous avons la condition d'imperméabilité (14) et à l'autre limite du fluide, loin de la plaque ( $Z=h_1$  et/ou  $Z=h_2$ ), nous avons soit, un mur rigide, une hauteur de fluide infinie ou un contact du fluide avec une paroi élastique [15, 16]. Pour chacun de ces cas, il y a une solution distincte.

Ci-dessous nous allons calculer la pression correspondante à chaque condition aux limites de fluide lorsque ce dernier agit sur un seul côté de la plaque. Dans le cas où les deux côtés sont en contact avec le fluide, la pression finale sera la combinaison des deux pressions convenables.

### 3.1.1. Élément fini fluide-solide soumis à un écoulement de fluide de hauteur infinie

Lorsque la hauteur de l'écoulement sur et/ou sous la plaque ( $h_1$  et/ou  $h_2$ ) est très grande (Fig.3), nous assumons que très loin de la plaque le potentiel de vitesse est nul.

$$\begin{aligned} \phi &= 0 \\ z &\rightarrow \pm\infty \end{aligned} \quad (22)$$

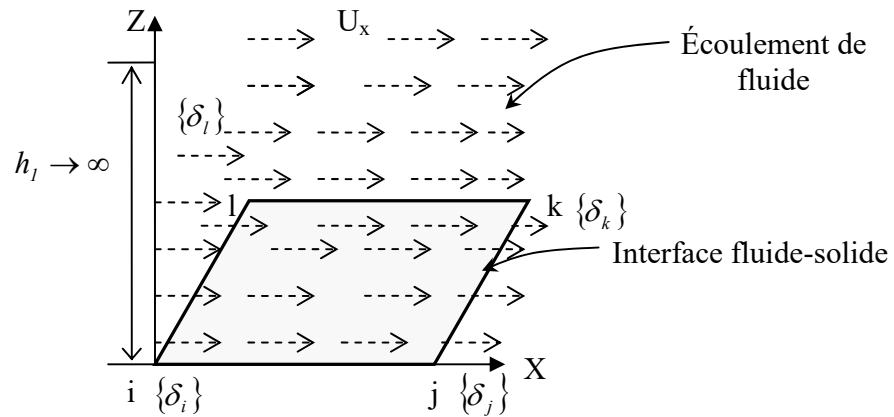


Figure 3 : Élément fini solide-fluide soumis à l'effet d'un écoulement de fluide dont la hauteur est infinie.

En vertu de l'équation (22), la constante  $A_1$  doit être nulle afin de ne pas avoir un potentiel infini.

La condition d'imperméabilité (14) nous permet de calculer la deuxième constante  $A_2$ . L'expression du potentiel devient :

$$\phi(x,y,z,t) = -\frac{F'(0)e^{-\mu z}}{\mu} \left( \frac{\partial W}{\partial t} + U_x \frac{\partial W}{\partial x} \right) \quad (23)$$

En substituant le potentiel de l'équation (23) dans (13), on obtient l'expression de la pression suivante :

$$P = \frac{\rho_f}{\mu} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2U_x \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} + U_x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] \quad (24)$$

ou :

$$P = Z_{f1} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2U_x \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} + U_x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] \quad (25)$$

$Z_{f1}$  est donnée à l'appendice B.

### 3.1.2. Élément fini fluide-solide soumis à un écoulement limité par un mur rigide

Comme il est représenté sur la figure 4, l'écoulement potentiel de fluide passe entre la plaque élastique et un mur rigide. Donc, en plus de la condition d'imperméabilité (14), nous avons à ( $Z=h_1$  et/ou  $Z=h_2$ ) la condition adoptée par Lamb et McLachlan [22, 23], elle est exprimée par :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=h_1(z=h_2)} = 0 \quad (26)$$

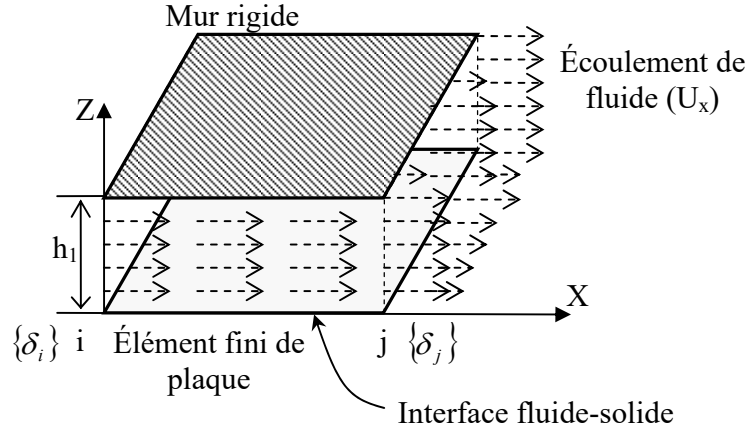


Figure 4 : Élément fini solide-fluide soumis à l'effet d'un écoulement dont la limite supérieure est en contact avec un mur rigide.

Les deux conditions aux limites ci-dessus ((14) et (26)) nous permettent de calculer les constantes  $A_1$  et  $A_2$ . La substitution de ces constantes dans l'équation (21) nous donne l'expression du potentiel suivante :

$$\phi(x,y,z,t) = \frac{F'(0) (e^{-2\mu h_1} e^{t\mu} + e^{-t\mu})}{\mu (e^{-2\mu h_1} - 1)} \left( \frac{\partial W}{\partial t} + U_x \frac{\partial W}{\partial x} \right) \quad (27)$$

En substituant le potentiel de l'équation (27) dans (13), nous obtenons la pression de fluide à l'interface suivante :

$$P = -\frac{\rho_f (e^{-2\mu h_1} + 1)}{\mu (e^{-2\mu h_1} - 1)} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2U_x \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} + U_x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] \quad (28)$$

ou :



$$P = Z_{f2} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2U_x \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} + U_x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] \quad (29)$$

$Z_{f2}$  est donnée à l'appendice B

### 3.1.3. Élément fini fluide-solide en interaction avec une paroi élastique

Lorsque l'écoulement passe entre deux plaques parallèles élastiques (Fig. 5) le fluide interagit à l'intérieur des parois. Ces dernières peuvent vibrer selon le mode en phase ou selon le mode en antiphase l'une par rapport à l'autre. La condition d'imperméabilité pour chaque élément fini solide-fluide reste la même pour les deux cas et est imposée par l'équation (14), tandis que la condition à la limite de fluide ( $Z=h_1$  et/ou  $Z=h_2$ ) varie selon la nature du mode de vibration. Nous distinguons deux possibilités :

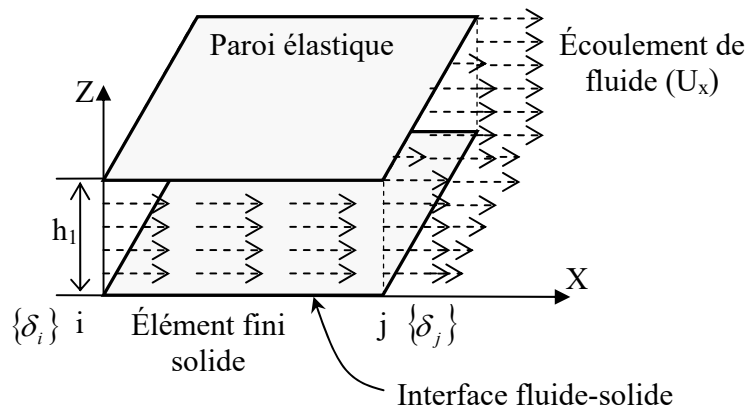


Figure 5 : Figure 4 : Élément fini solide-fluide soumis à l'effet d'un écoulement dont la limite supérieure est plaque élastique.

### 3.1.3.1. Cas de vibrations en phase

Dans le cas de vibrations en phase des deux parois élastiques (Fig. 5), la condition à la limite de fluide ( $Z=h_1$  et/ou  $Z=h_2$ ) est donnée par [24]:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=h_1} = \left( \frac{\partial W}{\partial t} + U_x \frac{\partial W}{\partial x} \right) \quad (30)$$

En remplaçant l'équation (21) simultanément dans (14) et (30), nous pouvons calculer les constantes  $A_1$  et  $A_2$ . La substitution de ces constantes dans (21) nous permet d'avoir l'expression du potentiel suivante :

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{(1 - e^{-\mu h_1}) e^{\mu z} + (1 - e^{\mu h_1}) e^{-\mu z}}{e^{\mu h_1} - e^{-\mu h_1}} \right] \left( \frac{\partial W}{\partial t} + U_x \frac{\partial W}{\partial x} \right) \quad (31)$$

En substituant la fonction du potentiel (31) dans l'équation (13), la pression à l'interface devient :

$$P = -\frac{\rho_f}{\mu} \left( \frac{2 - e^{-\mu h_1} - e^{\mu h_1}}{e^{\mu h_1} + e^{-\mu h_1}} \right) \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2U_x \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} + U_x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] \quad (32)$$

où :

$$P = Z_{f3} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2U_x \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} + U_x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] \quad (33)$$

$Z_{f3}$  est donnée à l'appendice B.

### 3.1.3.1. Cas de vibrations en antiphase

Dans le cas des vibrations en mode antiphase des deux parois élastiques (Fig. 5), la condition à la limite de fluide ( $Z=h_1$  et/ou  $Z=h_2$ ) est donnée par [24] :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=\frac{h_1}{2}} = 0 \quad (34)$$

En remplaçant l'équation (21) simultanément dans (14) et (34), nous pouvons calculer les constantes  $A_1$  et  $A_2$ , la substitution de ces constantes dans (21) nous permet d'avoir l'expression du potentiel de vitesse suivante:

$$\phi(x,y,z,t) = \frac{F'(0)}{\mu} \frac{(e^{-\mu h_1} e^{i\mu z} + e^{-i\mu z})}{(e^{-\mu h_1} - 1)} \left( \frac{\partial W}{\partial t} + U_x \frac{\partial W}{\partial x} \right) \quad (35)$$

En substituant la fonction du potentiel (35) dans l'équation (13), la pression à l'interface devient :

$$P = -\frac{\rho_f (e^{-\mu h_1} + 1)}{\mu (e^{-\mu h_1} - 1)} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2U_x \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} + U_x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] \quad (36)$$

ou :

$$P = Z_{f4} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2U_x \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} + U_x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] \quad (37)$$

$Z_{f4}$  est donnée à l'appendice B.

### 3.2. Matrices de masse, d'amortissement et de rigidité induites par l'écoulement de fluide

Le vecteur de forces élémentaires pour une charge répartie est exprimée par :

$$\{F\}^e = \int_A [N]^T \{P\} dA \quad (38)$$

$\{P\}$  est un vecteur contenant la pression appliquée par le fluide sur l'élément fini solide;

$[N]$  est une matrice (3x24) contenant les fonctions de formes du champ de déplacements.

$dA$  est une surface élémentaire dans un élément fini.

En remplaçant la matrice  $[N]$  de l'équation (4) dans l'équation (38), le vecteur de force élémentaire devient :

$$\{F\}^e = \int_A [[A]^{-1}]^T [R]^T \{P\} dA \quad (39)$$

Nous pouvons écrire les pressions calculées aux équations (25, 29, 33, 37) comme suit :

$$P = Z_{fi} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2U_x \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} + U_x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] \quad (40)$$

où :

$Z_{fi}$  ( $i=1,4$ ), dépend des conditions aux limites du fluide (voir appendice B) ;

$P$  est la pression de fluide normale à la surface de l'élément fini. Les autres composantes du vecteur  $\{P\}$  sont nulles.

En remplaçant le déplacement transversal de l'équation (1.c) dans l'équation (40), l'expression de la pression (39) devient :

$$P = Z_{fi} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2U_x \frac{i\pi}{A} \frac{\partial W}{\partial t} + U_x^2 \frac{i^2 \pi^2}{A^2} W \right] \quad (41)$$

Nous pouvons réécrire l'équation (4) comme suit :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ W \end{Bmatrix} = [R_f][A]^{-1} \{\delta\}^e \quad (42)$$

avec :

$[R_f]$  matrice (3x24) donnée à l'appendice A.

En substituant (42) dans (41), la pression devient :

$$\{P\} = Z_{fi} [R_f][A]^{-1} \left( \{\ddot{\delta}\}^e + 2U_x \frac{i\pi}{A} \{\dot{\delta}\}^e + U_x^2 \frac{i^2 \pi^2}{A^2} \{\delta\}^e \right) \quad (43)$$

En remplaçant la pression obtenue dans (43) et la fonction de déplacements de l'équation (4) dans l'équation (39), nous obtenons le vecteur élémentaire de forces suivant :

$$\{F\}^e = Z_{fi} \left( \int_A [[A]^{-1}]^T [R]^T [R_f][A]^{-1} \{\ddot{\delta}\}^e dA + 2U_x \frac{i\pi}{A} \int_A [[A]^{-1}]^T [R]^T [R_f][A]^{-1} \{\dot{\delta}\}^e dA + U_x^2 \frac{i^2 \pi^2}{A^2} \int_A [[A]^{-1}]^T [R]^T [R_f][A]^{-1} \{\delta\}^e dA \right) \quad (44)$$

Nous constatons que la force induite par l'écoulement de fluide est fonction de l'accélération, de la vitesse et du déplacement de l'élément fini, d'où nous pouvons tirer respectivement les matrices dues aux forces d'inerties, de Coriolis et centrifuge comme suit :

$$[m_f]^e = Z_{fi} \int_A [[A]^{-1}]^T [R]^T [R_f] [A]^{-1} \{\ddot{\delta}\}^e dA \quad (45)$$

$$[c_f]^e = 2U_x Z_{fi} \frac{\pi}{A} \int_A [[A]^{-1}]^T [R]^T [R_f] [A]^{-1} \{\dot{\delta}\}^e dA \quad (46)$$

$$[k_f]^e = U_x^2 Z_{fi} \left(\frac{i\pi}{A}\right)^2 \int_A [[A]^{-1}]^T [R]^T [R_f] [A]^{-1} \{\delta\}^e dA \quad (47)$$

où :

$dA$  est la surface élémentaire de l'élément.

L'équilibre dynamique au niveau élémentaire combine les trois matrices ci-dessus avec celles de l'élément fini-solide, cela nous permet d'écrire le système suivant :

$$[[m]^e - [m_f]^e] \{\ddot{\delta}\}^e - i [c_f]^e \{\dot{\delta}\}^e + [[k]^e - [k_f]^e] \{\delta\}^e = \{0\} \quad (48)$$

#### 4. Problème à valeur propre et vecteurs propres

L'assemblage des matrices de masse, d'amortissement et de rigidité élémentaires nous permet d'avoir le système d'équations (9) représentant le comportement dynamique d'une plaque soumise aux efforts induits par un écoulement de fluide.

Le problème aux valeurs propres est résolu par la méthode de réduction. Le système de l'équation (9) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{\delta}\} \\ \{\dot{\delta}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{\delta}\} \\ \{\delta\} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (49)$$

avec :

$$[M] = [M_s] - [M_f], [C] = [C_f], [K] = [K_s] - [K_f]$$

Le système à valeur propre est donné par :

$$[DD] - A[I] = 0 \quad (50)$$

où :

$$[DD] = \begin{bmatrix} 0 & [I] \\ [K]^{-1}[M] & [K]^{-1}[C] \end{bmatrix};$$

$$A = 1/i\omega^2.$$

$[I]$  est la matrice identité.

Si la vitesse d'écoulement du fluide est nulle, les matrices  $[C_f]$  et  $[K_f]$  deviennent nulles. Par conséquent, le système (50) sera réduit donc (voir [21]):

$$[[K]^{-1}[M]] - A[I] = 0 \quad (51)$$

Les matrices  $[K]$ ,  $[M]$  et  $[C]$  sont des matrices carrées de l'ordre  $NDF(NNODE)-NC$

où :

$NDF$  = nombre de degrés de liberté par nœud ;

$NNODE$  = nombre de nœud dans la structure ;

$NC$  = nombre de degrés de liberté bloqués.

## 5. Résultats et discussions

L'élément fini-solide utilisé dans ce travail a été validé par plusieurs cas de plaques à vide [17]. Les résultats étaient en accord avec ceux calculés par d'autres méthodes analytiques, numériques ou expérimentales. Dans les exemples suivants, nous nous intéressons au comportement dynamique des plaques soumises aux efforts induits par le passage d'un écoulement potentiel.

### 5.1. Plaque soumise à un écoulement potentiel de hauteurs ( $h_1$ et $h_2$ ) infinies

a) Le premier exemple étudié est une plaque encadrée sur les deux côtés parallèles au sens de l'écoulement (Fig. 6). Le fluide passe par le haut et par le bas de la plaque. La hauteur de la couche de fluide est supposée très grande ( $h_1$  et  $h_2$  infinies). La pression appliquée est calculée en utilisant l'équation (25). Puisque la plaque est soumise à l'écoulement par le haut et par le bas, la pression totale est la somme des deux pressions supérieure et inférieure.

Nous définissons ci-dessous le rapport de masse ( $\psi$ ) ainsi que la fréquence ( $\bar{\omega}$ ) et la vitesse adimensionnelle ( $\bar{U}$ ) définies respectivement par les équations suivantes :

$$\psi = \frac{\rho_f B}{\rho_p h} \quad (52)$$

$$\bar{\omega} = B^2 \sqrt{\frac{\rho_s h}{K}} \omega \quad (53)$$

$$\bar{U} = B \sqrt{\frac{\rho_s h}{K}} U_x \quad (54)$$



Les rapports de dimensions et les paramètres adimensionnels de cette structure sont :

$$\psi = 0.93, h_1/A \rightarrow \infty, h_2/A \rightarrow \infty, A/B = 1$$

Nous avons tracé sur la figure (7) la variation de la fréquence ( $\varpi$ ) en fonction de la vitesse moyenne adimensionnelle ( $\bar{U}$ ) de fluide. Nous constatons que plus la vitesse d'écoulement augmente plus la plaque devient de plus en plus vulnérable à l'instabilité statique. Au delà de la vitesse critique, une large déflexion de la plaque est à prévoir [14].

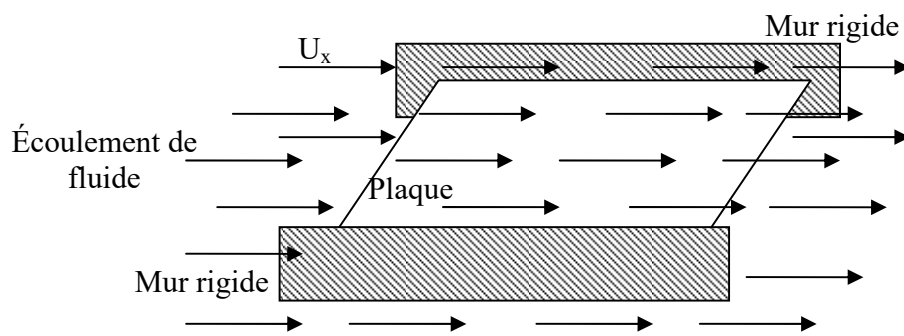


Figure 6. Plaque encastée sur deux côtés, soumise aux efforts induits par un écoulement potentiel.

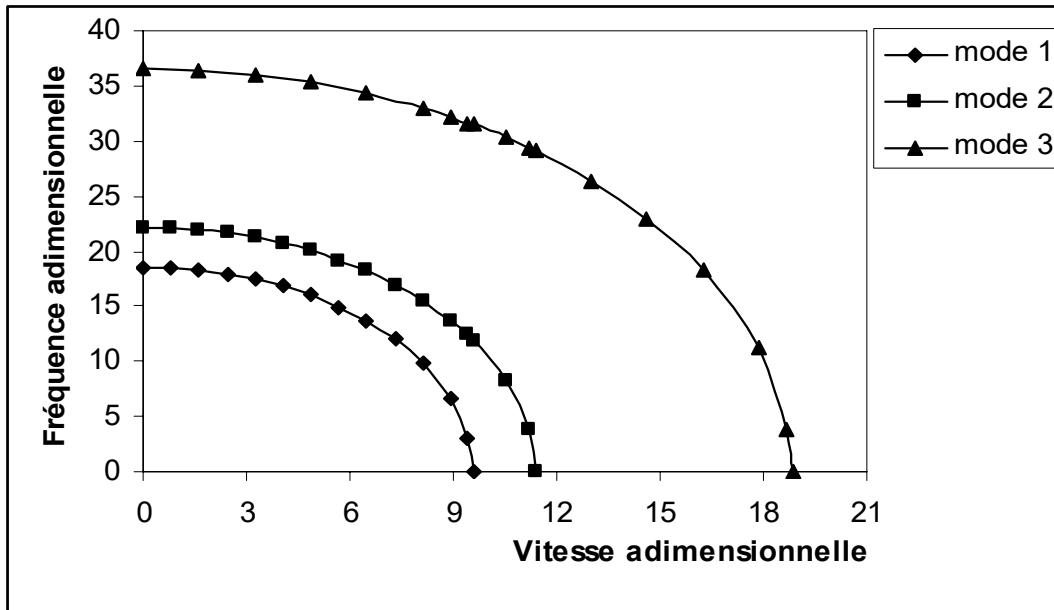


Figure 7. Variation de la fréquence  $\varpi$  en fonction de la vitesse  $\bar{U}$  pour une plaque encadrée sur les deux côtés latéraux soumise aux efforts induits par un écoulement potentiel.

$$\psi = 0.93, h_1/A \rightarrow \infty, h_2/A \rightarrow \infty, A/B = 1$$

b) La deuxième structure est une plaque identique à celle qu'on a étudié ci-haut sauf que cette fois elle est simplement supportée sur les deux côtés parallèles à l'écoulement (Fig. 8). Nous avons représenté sur la figure 9 la variation des fréquences adimensionnelles lorsque la structure est soumise à l'effet de l'écoulement potentiel. Nous constatons que les vitesses critiques pour les trois premiers modes sont inférieures à celles de la plaque encadrée étudiée dans le premier exemple. Nous pouvons conclure que la plaque encadrée est plus stable que la plaque simplement supportée, cela est en accord avec le travail de Kim et Davis [14].

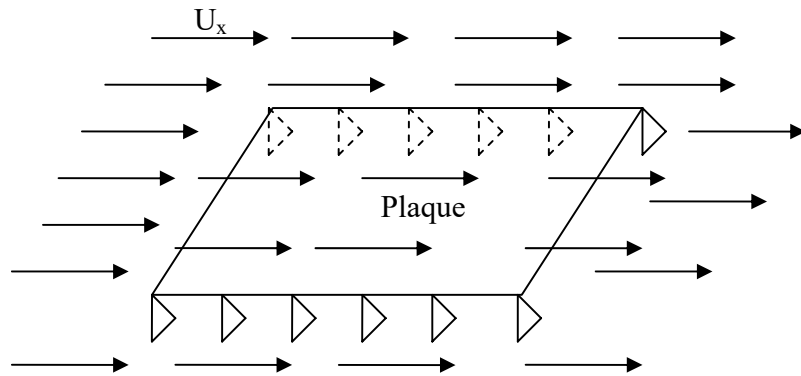


Figure 8. Plaque simplement supportée sur les deux côtés, soumise aux efforts induits par un écoulement potentiel.

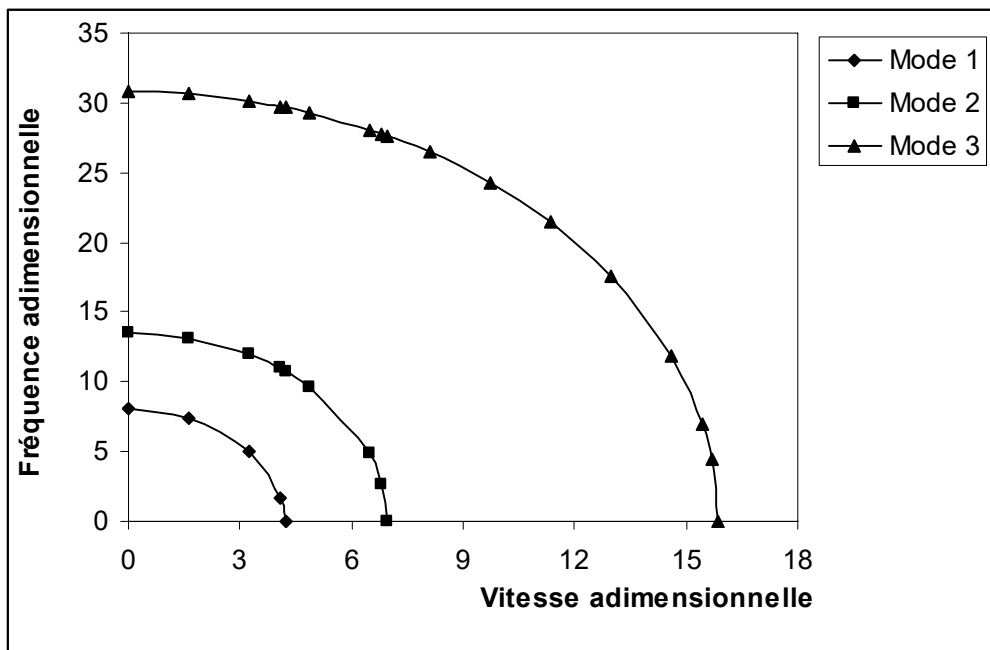


Figure 9. Variation de la fréquence  $\varpi$  en fonction de la vitesse  $\bar{U}$  pour une plaque simplement supportée sur les deux côtés latéraux, soumise aux efforts induits par un écoulement potentiel.

$$\psi = 0.93, h_1/A \rightarrow \infty, h_2/A \rightarrow \infty, A/B = 1$$

c) La plaque encastrée libre et l'une des structures qui travaillent souvent sous l'effet des efforts induits par le passage d'un écoulement de fluide. Nous allons comparer les vitesses critiques de cette plaque avec celles déjà calculées ci-haut (encastrée et simplement supportée sur les deux côtés latéraux, Fig. 6 et Fig. 8). Nous prenons le cas où le fluide passe par le haut et par le bas de la plaque avec une hauteur ( $h_1$  et  $h_2$ ) infinies. Nous présentons au tableau 1 les vitesses critiques adimensionnelles pour chaque cas. Nous pouvons conclure que la plaque encastrée libre est la plus vulnérable à l'instabilité statique.

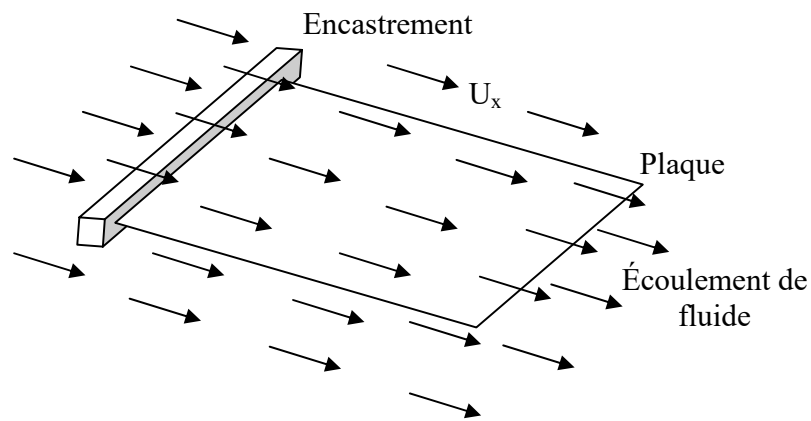


Figure 10. Plaque encastrée libre soumise aux efforts induits par un écoulement potentiel.

Tableau 1. Vitesse critique adimensionnelle ( $\bar{U}$ ) d'une plaque ayant des conditions aux limites variées et les paramètres dimensionnels suivants :  $\psi = 0.93$ ,  $h_1/A \rightarrow \infty$ ,  $h_2/A \rightarrow \infty$ ,  $A/B = 1$

Conditions aux limites	$\bar{U} = B \sqrt{\frac{\rho_s h}{K}} U_x$		
	Mode 1	Mode 2	Mode 3
Plaque encastrée sur les deux côtés latéraux (Fig. 6) (CFCF)	9.58	11.36	18.83
Plaque simplement supportée sur les deux côtés latéraux (Fig. 8) (SFSF)	4.22	6.98	15.83
Plaque encastrée libre <sup>1</sup> (Fig. 10) (FFFC)	1.494	3.73	9.25

1. Les paramètres adimensionnels de la plaque (FFFC) sont :  $\psi = 0.93$ ,  $h_1/A \rightarrow \infty$ ,  $h_2/A \rightarrow \infty$ ,  $A/B = 1$

## 5.2. Système de plaques parallèles

Dans les centrales nucléaires, on rencontre souvent des systèmes composés d'un empilement de plaques élastiques, parallèles et identiques soumises aux efforts induits par l'écoulement de fluide des deux côtés (voir Fig. 11). Lorsque la hauteur du fluide entre les plaques est relativement faible, l'énergie cinétique du solide voyage à travers le fluide d'une plaque à l'autre et le mouvement de vibration des plaques modifie la répartition de la pression et de la vitesse de fluide dans le canal. Donc, le fluide dans les canaux entre simultanément en interaction avec la plaque supérieure et la plaque inférieure.

Les plaques vibrent entre elles selon des modes en phase ou en antiphase. Pour chaque mode, nous avons une pression de fluide distincte.

Il a été prouvé que le comportement dynamique d'un système composé de (n) plaques encastrées à un mur rigide peut être étudié en considérant une seule plaque qui vibre en mode antiphase par rapport aux deux autres plaques se trouvant juste au-dessus et au-dessous d'elle.

Ce mode fournit les plus basses fréquences [18] et risque de causer un blocage de l'écoulement [7]. Groninger et Kane [3] ont montré dans leur travail expérimental qu'à des grandes vitesses, les plaques voisines fléchissent dans le sens opposé en ouvrant et en fermant alternativement le canal d'écoulement.

Miller [1] a dérivé les vitesses critiques "collapse velocity" d'une plaque faisant partie d'un système ETR (engineering test reactor). Pour une plaque encastrée aux deux murs latéraux (Fig. 11), la formule développée est la suivante:

$$U_{Miller} = \sqrt{\frac{15Eh_l h^3}{\rho_f (1-\nu^2) B^4}} \quad (55)$$

où :

$E$  est le module de Young ;

$\rho_f$  est la densité du fluide ;

$h_l$  est la hauteur du fluide entre chaque deux plaques ;

$\nu$  est le coefficient du Poisson ;

$B$  est la largeur de la plaque (perpendiculaire au sens de l'écoulement).

Nous avons considéré une plaque interne du système représenté sur la figure 11 en vibration en mode antiphase par rapport aux deux plaques voisines, exactement comme il a été

supposé dans le travail de Miller [1]. La pression appliquée par le fluide sur la plaque étudiée est deux fois la pression calculée dans l'équation (37).

Nous comparons à la figure 12 les vitesses critiques adimensionnelles obtenues en utilisant notre élément fluide-solide avec celles calculées par la formule de Miller.

Il est clair que pour de faibles hauteurs de fluide, les résultats se concordent très bien alors que pour des hauteurs de fluide plus grandes, l'écart devient de plus en plus large. Nous justifions nos résultats par le fait qu'il a été prouvé qu'au-delà d'une certaine hauteur, l'augmentation de ( $h_1$  ou  $h_2$ ) n'a aucune influence sur le comportement dynamique de la plaque soumise à l'écoulement et nous allons confirmer ça dans les exemples suivants. D'un autre côté, la formule de Miller a été développée pour des systèmes ETR (engineering test reactor) ayant un rapport  $h_1/A$  très faible.

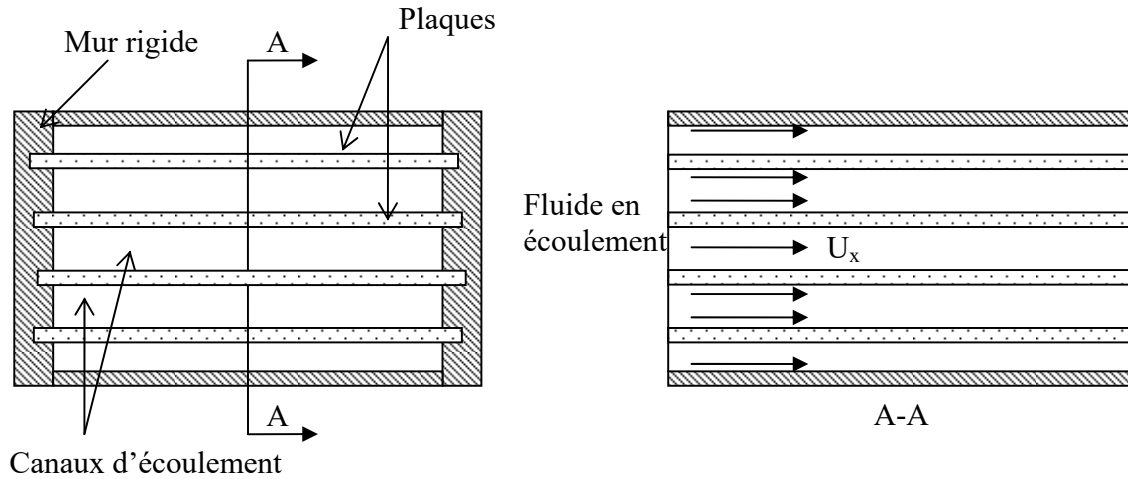


Figure 11. Système de plaque ETR (engineering test reactor) soumise aux efforts induits par un écoulement potentiel.

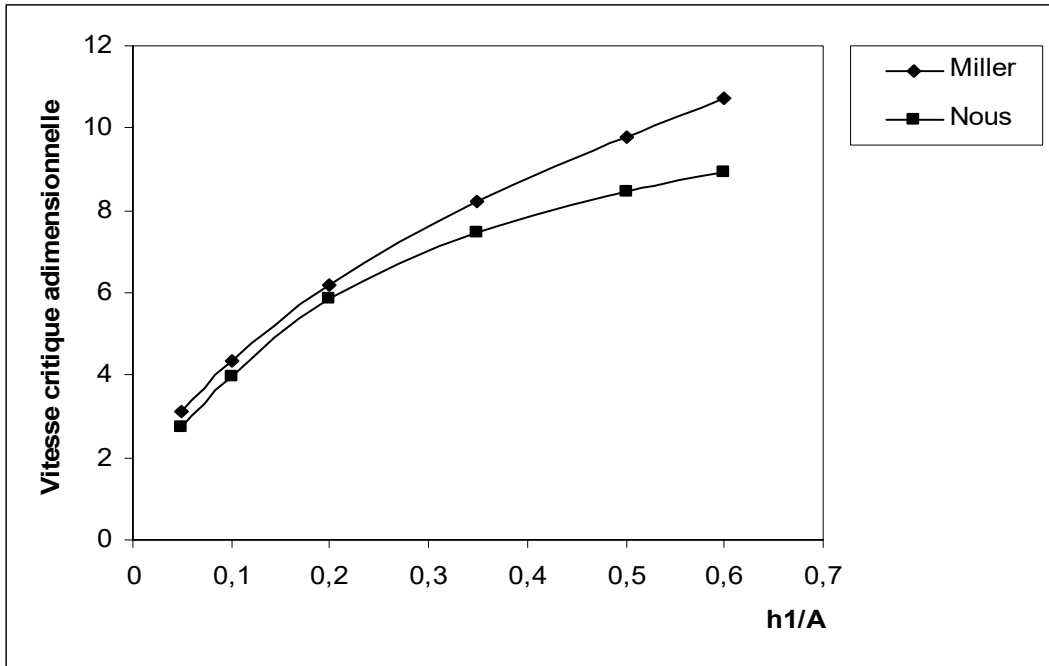


Figure 12. Variation de la vitesse ( $\bar{U}$ ) critique en fonction du rapport ( $h_1/A$ ) pour une plaque encastrée sur les deux côtés latéraux  $\psi = 0.93$ ,  $h_1/A \rightarrow \infty$ ,  $h_2/A \rightarrow \infty$ ,  $A/B = 1$

Miller [1] a dérivé aussi la vitesse critique d'une plaque simplement supportée sur les deux côtés faisant partie d'un système ETR. La relation exprimant cette vitesse critique est :

$$U_{Miller} = \sqrt{\frac{5Eh^3h_1}{2\rho_f B^4(1-\nu^2)}} \quad (56)$$

où :

$E$  est le module de Young ;

$\rho_f$  est la densité du fluide ;

$h_1$  est la hauteur du fluide entre chaque deux plaques ;

$\nu$  est le coefficient du Poisson ;

$B$  est la largeur de la plaque (perpendiculaire au sens de l'écoulement).



Nous avons utilisé l'élément fini solide-fluide développé dans ce travail pour calculer la vitesse critique correspondante au premier mode, lorsque les plaques voisines (supérieure et inférieure) vibrent par rapport à la plaque étudiée selon le mode antiphasé. Les résultats obtenus sont représentés à la figure 13. Nous remarquons que les résultats s'accordent très bien avec ceux de Miller. Nous soulignons que Kim et Davis [14] ont comparé la vitesse critique de Miller avec leur modèle analytique pour la plaque élastiquement restreinte (encastrée ou simplement supportée). Les résultats étaient satisfaisants mais ils sont fournis seulement pour deux valeurs de ( $h_1$ ) hauteur de fluide.

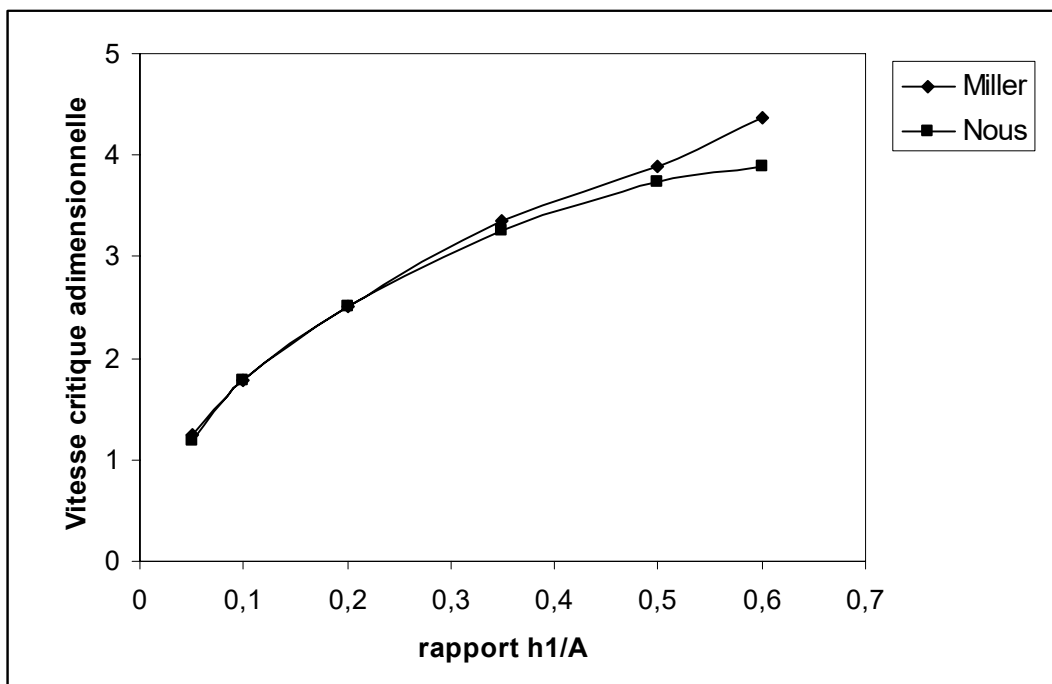


Figure 13. Variation de la vitesse critique en fonction du rapport ( $h_1/A$ ) pour une plaque simplement supportée sur les deux côtés latéraux  $\psi = 0.93$ ,  $h_1/A \rightarrow \infty$ ,  $h_2/A \rightarrow \infty$ ,  $A/B = 1$ .

### 5.3. Hauteur limite de fluide

Dans les deux exemples suivants, nous allons essayer de déterminer la hauteur de fluide limite ( $h_{lim}$ ) au-delà de laquelle l'augmentation de ( $h_1$  et  $h_2$ ) n'influence pas le comportement dynamique du système (fluide-solide).

Nous considérons d'abord le cas de la plaque encastrée sur les deux côtés latéraux placée dans un canal de murs rigides (Fig.14). La pression du fluide appliquée sur la plaque est calculée en utilisant l'équation (29).

Nous varions progressivement la hauteur de fluide ( $h_1$  et  $h_2$ ) et nous calculons le comportement dynamique de la plaque pour chaque valeur de ( $h_1$  et  $h_2$ ). Nous représentons sur la figure 15 la variation de la vitesse critique en fonction du rapport ( $h_1 / A$ ). Nous constatons que pour les deux premiers modes, la vitesse critique adimensionnelle devient constante lorsque ( $h_1$  et  $h_2$ ) est égale à la moitié de la longueur de la plaque.

Par contre, lorsque la plaque fait partie d'un système de plaques parallèles (ETR) en interaction avec le fluide (Fig. 11). La limite de fluide au-delà de laquelle la vitesse critique cesse de changer est égale à la longueur de la plaque (Fig. 16), lorsque la plaque étudiée vibre en mode antiphase par rapport aux plaques voisines.

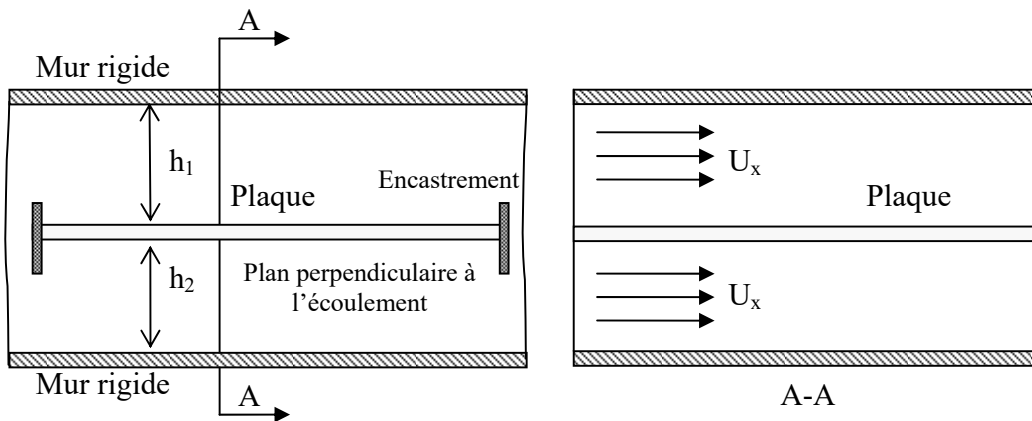


Figure 14. Plaque soumise à un écoulement potentiel limité par deux murs rigides par le haut et par le bas.

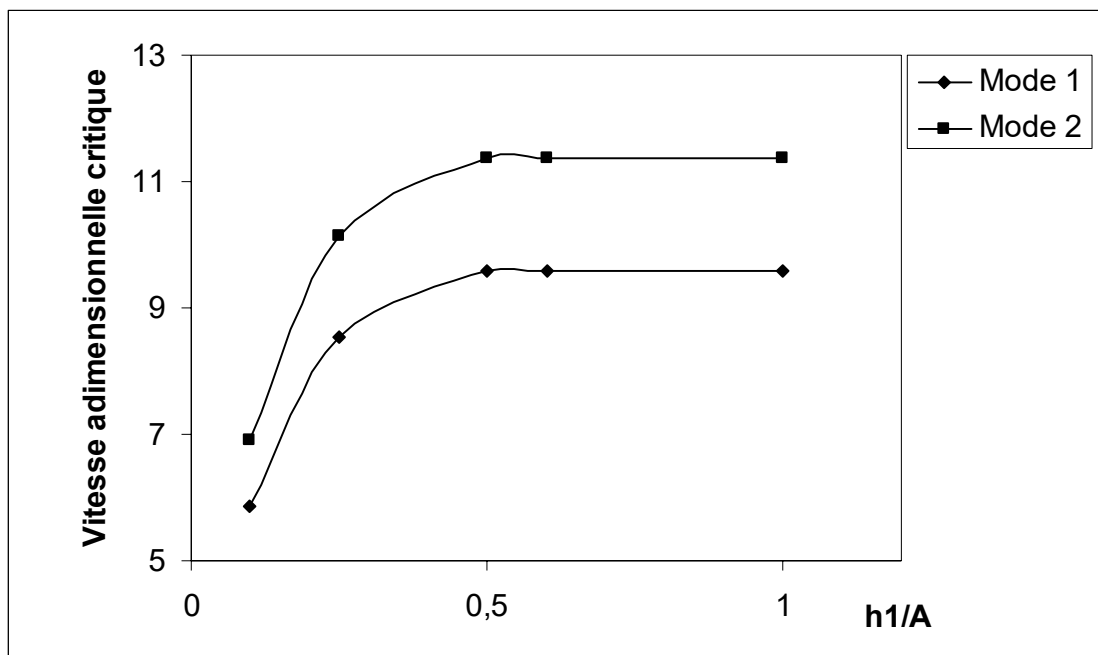


Figure 15. Variation de la vitesse critique d'une plaque encastree sur les deux cotes lateraux placee dans un canal de mur rigide soumise aux efforts induits par un ecoulement potentiel, en fonction du rapport ( $h_1/\text{longueur}$ ).

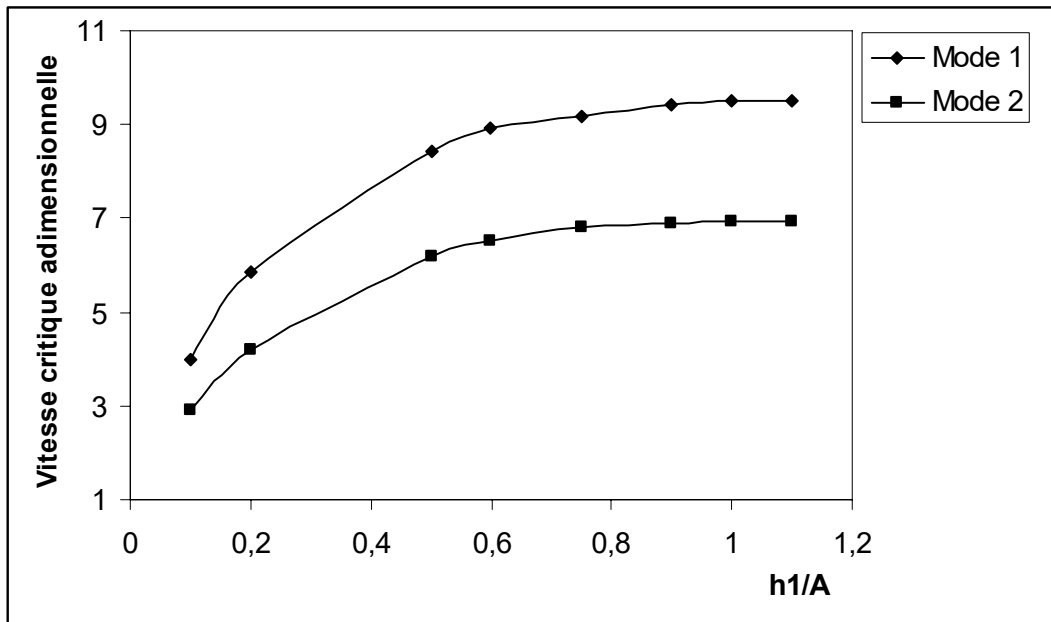


Figure 16. Variation de la vitesse critique d'une plaque faisant partie d'un système ETR soumis aux efforts induits par un écoulement potentiel en fonction du rapport ( $h_1$ /longueur).

## 6. Conclusion

Nous avons développé dans ce travail un élément fini solide-fluide capable de prédire le comportement dynamique d'une plaque soumise à la pression dynamique induite par un écoulement potentiel.

Les déplacements membranaires sont approchés par des fonctions polynomiales et le déplacement transversal par un champ basé sur de la forme générale de la solution des équations d'équilibre flexionnelles. Les matrices de masses, d'amortissements et de rigidités de la plaque solide ainsi que celles induites par le fluide sont calculées par intégration exacte pour chaque élément.

La pression du fluide est dérivée d'un potentiel de vitesse, elle est exprimée en fonction de l'accélération, de vitesse et du déplacement transversal de la plaque, appelées respectivement l'effet de l'inertie, l'effet de force de Coriolis et l'effet de la force centrifuge.

Une variété de plaques ayant des conditions aux limites différentes a été étudiée. Les fréquences de vibration ont été calculées pour chaque vitesse moyenne d'écoulement et pour chaque hauteur de fluide, jusqu'à ce qu'on atteigne la vitesse critique qui est un paramètre très important pour le design.

Nous soulignons que les conditions aux rives, la hauteur du fluide sur la plaque et la hauteur de canal entre deux plaques élastiques voisines influent fortement sur le comportement dynamique de la plaque.

L'avantage de cette méthode est qu'elle pourra être utilisée pour des plaques rectangulaires anisotropes uniformes ou non uniformes ayant n'importe quelle condition aux limites internes ou aux périphéries.

Les vitesses critiques calculées en utilisant notre élément s'accordent bien avec celles obtenues en utilisant les formules analytiques dérivées par Miller, spécialement pour les hauteurs de fluide faibles.

La hauteur de fluide limite au-delà de laquelle l'augmentation de niveau de fluide devient insignifiante au comportement dynamique a été calculée, lorsque les parois voisines sont des plaques élastiques (système de plaque parallèles) ainsi que lorsque la plaque étudiée est placée dans un canal de murs rigides.

L'élément fini solide-fluide développé dans ce travail pourra être adapté à l'étude d'une plaque ou une structure de forme plus complexe soumise à un écoulement turbulent.

## 7. Références

- 1- Miller, D. R., 1960, "**Critical Flow Velocities for Collapse of Reactor Parallel-Plate Fuel Assemblies**", *ASME Journal of engineering of power*, **82**, PP. 83–95.
- 2- Rosenberg, G. S., and Youngdahl, C. K., 1962, "**A Simplified dynamic model for the vibration frequencies and critical coolant Flow velocities for Reactor parallel plate fuel assemblies**", *Nuclear science and engineering* **13**, PP. 91–102.
- 3- Groninger, R. D., and Kane, J. J., 1963, "**Flow induced deflections of parallel flat plates**". *Nuclear science and engineering*. **16**, PP. 218–226 .
- 4- Ishii, T., 1965, "**Aeroelastic instabilities of simply supported panels in subsonic flow**" AIAA paper N 65-772.
- 5- Wambsganss, M. W., 1967, "**Second-order effects as related to critical coolant flow velocities and reactor parallel plate fuel assemblies**", *Nuclear Engineering and design*. , **5**, PP. 268–276.
- 6- Dowell, E. H., 1967, "**Non linear oscillation of a fluttering plate II**" *AIAA J.*, V5 N10 PP. 1856–1862
- 7- Smitsaert, G. E., 1968, "**Static and dynamic hydroelastic instabilities in MTR-type fuel Elements, Part I: Introduction and experimental investigation**". *Nuclear engineering and design*. **7**, PP. 535-546.
- 8- Smitsaert, G. E., 1969, "**Static and dynamic hydro-elastic instabilities in MTR-type fuel elements, part II: theoretical investigation and discussion**", *Nuclear engineering and design*. **9**, PP. 105–122.
- 9- Weaver, D. S., and Unny, T. E., 1970, "**The hydroelastic stability of a flat plate**", *ASME Journal of applied mechanics*, **37**, PP. 823–827.

- 10- Gislason, Jr T 1971. "**Experimental investigation of panel divergence at subsonic speeds**". AIAA journal V9 N11 PP2252-2258
- 11- Kornecki, A., Dowell, E. H., and O'Brien, J., 1976, "**On the aeroelastic instability of two-dimensional panels in uniform incompressible flow**", Journal of sound and vibration. **47**, PP. 163–178.
- 12- Holmes P.J. "**Bifurcations to divergence and flutter in flow-induced oscillations: A finite dimensional analysis**" Journal of sound and vibration 1977 V53 N4 PP471-503
- 13- Higuchi, K., and Dowell, E. H., 1992, "**Effects of Structural Damping on Flutter of Plates with a Follower Force**", AIAA Journal 33 N3 PP820-825
- 14 -Davis, D. C., and Kim, G., 1991, "**Design against hydrodynamic instabilities in flat-plate type fuel element assemblies**", *Transaction, 11th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMiRT)*, PP. 105–109.
- 15- Guo, C. Q., Paidoussis, M. P 2000 "**Stability of rectangular plates with free side-edges in two dimensional inviscid channel flow**" ASME Journal of Applied Mechanics.V67, Issue 1, PP. 171-176
- 16-Guo, C. Q., Paidoussis, M. P., 1999, "**Analysis of Hydroelastic Instabilities of Rectangular Parallel-Plate Assemblies**", ASME Journal of pressure and vessel technology, V 122 PP. 502-508.
- 17- Y. Kerboua ; A.A.Lakis; M. Thomas et L. Marcouiller. "**Comportement dynamique des plaques rectangulaires submergées**". EPM-RT-2005-05
- 18- Y. Kerboua ; A.A.Lakis; M. Thomas et L. Marcouiller. "**Analyse dynamique des systèmes de plaques en interaction avec un fluide et applications**". EPM-RT-2006-01

- 19- R. SZILARD, 1974. "**Theory and Analysis of Plate**". Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall,
- 20- J. L. SANDERS, 1959. "**An improved first approximation theory for thin shell**". *NASA TR- 24*.
- 21- A.A. LAKIS and A.SELMANE, 1997. "**Vibration analysis of anisotropic open cylindrical shells subjected to a flowing fluid**". *Journal of Fluids and Structures*, N11, P111–134.
- 22- N.W. MCLACHLAN, 1932. *Proceedings of the Physical Society*, London: 44, P546-555. "**The accession to inertia of flexible discs vibrating in a fluid**".
- 23- H. LAMB, 1921. "**On the vibrations of an elastic plate in contact with water**", *Proceeding of Royal Society*, A98, 205-216. London.
- 24- Kyeong\_Hoon Jeong. 2003 "**Free vibration of two identical circular plates coupled with bounded fluid**". *Journal of Sound and Vibration*, V260, N4. P653-670



## APPENDICE A.

### A.1. Matrice [R]

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{A} & \frac{y}{B} & \frac{xy}{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x}{A} & \frac{y}{B} & \frac{xy}{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x}{A} & \frac{y}{B} & \frac{x^2}{2A^2} & \frac{xy}{AB} & \frac{y^2}{2B^2} & \frac{x^3}{6A^3} & \frac{x^2y}{2AB} & \frac{xy^2}{2AB^2} & \frac{y^3}{6B^3} & \frac{x^3y}{6A^3B} & \frac{x^2y^2}{4A^2B^2} & \frac{xy^3}{6AB^3} & \frac{x^3y^2}{12A^3B^2} & \frac{x^2y^3}{12A^2B^3} & \frac{x^3y^3}{36A^3B^3} \end{bmatrix}$$

### A.2. Matrice [R<sub>f</sub>]

$$[R_f] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x}{A} & \frac{y}{B} & \frac{x^2}{2A^2} & \frac{xy}{AB} & \frac{y^2}{2B^2} & \frac{x^3}{6A^3} & \frac{x^2y}{2AB} & \frac{xy^2}{2AB^2} & \frac{y^3}{6B^3} & \frac{x^3y}{6A^3B} & \frac{x^2y^2}{4A^2B^2} & \frac{xy^3}{6AB^3} & \frac{x^3y^2}{12A^3B^2} & \frac{x^2y^3}{12A^2B^3} & \frac{x^3y^3}{36A^3B^3} \end{bmatrix}$$

### A.3. Matrice [Q]

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{A} & 0 & \frac{y}{AB} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{B} & \frac{x}{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{B} & \frac{x}{AB} & 0 & \frac{1}{A} & 0 & \frac{y}{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{A^2} & 0 & 0 & \frac{x}{A^3} & -\frac{y}{A^2B} & 0 & 0 & -\frac{xy}{A^3B} & -\frac{y^2}{2A^2B^2} & 0 & -\frac{xy^2}{2A^3B^2} & -\frac{y^3}{6A^2B^3} & -\frac{xy^3}{6A^3B^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{B^2} & 0 & 0 & -\frac{x}{AB^2} & -\frac{y}{B^3} & 0 & -\frac{x^2}{2A^2B^2} & -\frac{xy}{AB^3} & -\frac{x^3}{2A^3B^2} & -\frac{x^2y}{6A^2B^3} & -\frac{x^3y}{6A^3B^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{AB} & 0 & 0 & -\frac{2x}{A^2B} & -\frac{2y}{A^2B} & 0 & -\frac{x^2}{A^3B} & -\frac{2xy}{A^2B^2} & -\frac{y^2}{AB^3} & -\frac{x^2y}{A^3B^2} & -\frac{xy^2}{A^2B^3} & -\frac{x^2y^2}{2A^3B^3} \end{bmatrix}$$

### A.4. Vecteur de déplacement élémentaire $\{\delta\}^e$

$$\{\delta\}^e = \{U_i, V_i, W_i, W_{i,x}, W_{i,y}, W_{i,xy}, U_j, V_j, W_j, W_{j,x}, W_{j,y}, W_{j,xy}, U_k, V_k, W_k, W_{k,x}, W_{k,y}, W_{k,xy}, U_l, V_l, W_l, W_{l,x}, W_{l,y}, W_{l,xy}\}^T$$

### A.5. Matrice [A]<sup>-1</sup>

Les éléments non nuls de la matrice A<sup>-1</sup> sont :

$$A^{-1}(1,1) = 1, A^{-1}(2,1) = A^{-1}(2,7) = -\frac{A}{x_e}, A(3,1) = -A(3,19) = -\frac{B}{y_e}, A^{-1}(4,1) = -A^{-1}(4,7) = A^{-1}(4,13) = -A^{-1}(4,19) = -\frac{AB}{x_e y_e} \quad A^{-1}(5,2) = 1,$$

$$A^{-1}(6,2) = -A^{-1}(6,8) = -\frac{A}{x_e}, A^{-1}(7,2) = -\frac{B}{y_e}, A^{-1}(7,20) = -\frac{AB}{x_e y_e}, A^{-1}(8,2) = -A^{-1}(8,8) = A^{-1}(8,14) = A^{-1}(8,14) = -A^{-1}(8,20) = \frac{AB}{x_e},$$

$$A^{-1}(9,3) = 1, A^{-1}(10,4) = A, A^{-1}(11,5) = B, A^{-1}(12,3) = -A^{-1}(12,9) = -\frac{6A^2}{x_e^2}, A^{-1}(12,4) = 2A^{-1}(12,10) = -4\frac{A^2}{x_e}, A^{-1}(13,6) = A \cdot B,$$

$$A^{-1}(14,3) = -A^{-1}(14,21) = -12\frac{A^3}{x_e^2}, A^{-1}(14,5) = A^{-1}(14,3) = 2A^{-1}(14,23) = 2\frac{B^2}{y_e}, A^{-1}(15,3) = -A^{-1}(15,9) = 12\frac{A^3}{x_e^2},$$

$$A^{-1}(15,4) = A^{-1}(15,10) = \frac{6A^3}{x_e^2}, A^{-1}(16,5) = -A^{-1}(16,11) = -6\frac{A^2 B}{x_e^2 y_e}, A^{-1}(16,6) = A^{-1}(16,12) = -2\frac{A^2 B}{x_e}, A^{-1}(17,4) = -A^{-1}(17,22) = -6\frac{AB^2}{y_e^2},$$

$$A^{-1}(17,6) = A^{-1}(17,24) = -\frac{4AB^2}{y_e}, A^{-1}(18,3) = -A^{-1}(18,21) = 12\frac{B^3}{y_e^2}, A^{-1}(18,5) = A^{-1}(18,23) = 6\frac{B^3}{y_e^2}, A^{-1}(19,5) = A^{-1}(19,11) = 12\frac{A^3 B}{x_e^2},$$

$$A^{-1}(19,6) = A^{-1}(19,12) = 6\frac{BA^3}{x_e^2}, A^{-1}(20,4) = 2A^{-1}(20,10) = -A^{-1}(20,16) = -A^{-1}(20,22) = 24\frac{B^2 A^2}{xy_e^2},$$

$$A^{-1}(20,5) = -\frac{2A^{-1}(20,9)}{3} = -A^{-1}(20,11) = -2A^{-1}(20,17) = 2A^{-1}(20,23) = 24\frac{A^2 B^2}{x_e^2 y_e},$$

$$A^{-1}(20,6) = 2A^{-1}(20,12) = 4A^{-1}(20,18) = \frac{2}{3}A(20,24) = 16\frac{A^2 B^2}{x_e y_e}, A^{-1}(21,4) = -A^{-1}(21,22) = 12\frac{AB^3}{y_e^3}, A^{-1}(21,6) = A^{-1}(21,24) = 6\frac{AB^3}{y_e^2},$$

$$A^{-1}(22,3) = -A^{-1}(22,9) = A^{-1}(22,15) = -A^{-1}(22,21) = 72\frac{AB^2}{x_e^2 y_e^2}, A^{-1}(22,4) = A^{-1}(22,10) = -A^{-1}(22,16) = -A^{-1}(22,22) = -36\frac{A^3 B^3}{x_e^2 y_e^2},$$

$$A^{-1}(22,5) = -A^{-1}(22,11) = -2A^{-1}(22,17) = 2A^{-1}(22,23) = -48\frac{A^3 B^2}{x_e^2 y_e}, A^{-1}(22,6) = A^{-1}(22,12) = 2A^{-1}(22,18) = 2A^{-1}(22,24) = -24\frac{A^3 B^2}{x_e^2 y_e},$$

$$A^{-1}(23,3) = -A^{-1}(23,9) = A^{-1}(23,15) = A^{-1}(23,21) = 72\frac{A^2 B^3}{x_e^2 y_e^2}, A^{-1}(23,4) = 2A^{-1}(23,10) = -2A^{-1}(23,16) = -A^{-1}(23,22) = -48\frac{A^2 B^3}{x_e y_e^3},$$

$$A^{-1}(23,5) = -A^{-1}(23,11) = -A^{-1}(23,17) = A^{-1}(23,23) = -36\frac{A^2 B^3}{x_e^2 y_e^2}, A^{-1}(23,6) = 2A^{-1}(23,12) = 2A^{-1}(23,18) = A^{-1}(23,24) = -24\frac{A^2 B^3}{x_e y_e^2},$$

$$A^{-1}(24,3) = -A^{-1}(24,9) = A^{-1}(24,15) = -A^{-1}(24,21) = 144\frac{A^3 B^3}{x_e^3 y_e^3}, A^{-1}(24,4) = A^{-1}(24,10) = -A^{-1}(24,16) = -A^{-1}(24,22) = 72\frac{A^3 B^3}{x_e^2 y_e^3},$$

$$A^{-1}(24,5) = -A^{-1}(24,11) = -A^{-1}(24,17) = A^{-1}(24,23) = -72\frac{A^3 B^3}{x_e^2 y_e^2}, A^{-1}(24,6) = A^{-1}(24,12) = A^{-1}(24,18) = A^{-1}(24,24) = 36\frac{A^3 B^3}{x_e^2 y_e^2}$$

## APPENDICE B.

### B.1. Calcul du vecteur de constantes $\{C\}$ :

Chaque nœud (i) possède un vecteur de déplacements, exprimé par :

$$\{\delta_i\} = \{U_i, V_i, W_i, \partial W_i / \partial x, \partial W_i / \partial y, \partial^2 W_i / \partial y \partial x\}^T$$

où :

$U_i, V_i$ , sont les déplacements de la surface moyenne dans le plan X, Y, correspondant au nœud i;

$W_i$  est la déflexion de la surface moyenne, correspondant au nœud i.

Le vecteur des déplacements élémentaires est :

$$\{\delta\} = \{\{\delta_i\}^T, \{\delta_j\}^T, \{\delta_k\}^T, \{\delta_l\}^T\}^T$$

De l'équation (3), le vecteur de déplacements  $\{\delta\}$  pour chaque élément s'écrit comme suit :

$$\{\delta\} = [A]\{C\}$$

On peut donc exprimer le vecteur des constantes inconnues en fonction de déplacements nodaux, en utilisant la relation suivante :

$$\{C\} = [A]^{-1}\{\delta\}$$

L'inverse de la matrice  $[A]$  est donnée à l'appendice A.I ci-haut.

La substitution du vecteur des constantes dans le champ de déplacements (3) nous donne :

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = [R][A]^{-1}\{\delta\}$$

### B.2. Champ de déformations

Le champ de déformations est lié au champ de déplacements comme suit [44] :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial U / \partial x \\ \partial V / \partial y \\ \partial V / \partial x + \partial U / \partial y \\ -\partial^2 W / \partial x^2 \\ -\partial^2 W / \partial y^2 \\ -2\partial^2 W / \partial x \partial y \end{pmatrix}$$

### B.3. Matrice d'élasticité P

$[P]$  est la matrice d'élasticité (6x6). Pour un matériau isotrope, il n'y a pas de couplage entre l'effet membrane et l'effet de flexion, la matrice d'élasticité se réduit à :

$$P_{11} = P_{22} = D, P_{44} = P_{55} = K, P_{12} = P_{21} = \nu D, P_{45} = P_{54} = \nu K P_{33} = (1-\nu)D/2, P_{66} = (1-\nu)K/2$$

Avec :

$$K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, D = \frac{Eh}{1-\nu^2},$$

où :

$E$  est le Module de Young,  $\nu$  est le coefficient de Poisson et  $h$  est l'épaisseur de l'élément fini.

### B.4. Coefficients de pression $Z_{fi}$

$$Z_{f1} = \frac{\rho_f}{\mu}$$

$$Z_{f2} = -\frac{\rho_f(e^{-2\mu h_1} + 1)}{\mu(e^{-2\mu h_1} - 1)}$$

$$Z_{f3} = -\frac{\rho_f}{\mu} \left( \frac{2 - e^{-\mu h_1} - e^{\mu h_1}}{e^{\mu h_1} + e^{-\mu h_1}} \right)$$

$$Z_{f4} = -\frac{\rho_f(e^{-\mu h_1} + 1)}{\mu(e^{-\mu h_1} - 1)}$$

## NOMENCLATURE

$U, V$	: déplacements de la surface moyenne dans le plan de la plaque selon l'axe X et l'axe Y respectivement
$W$	: déplacement transversal de la surface moyenne
$A$	: longueur de la plaque selon l'axe X
$B$	: longueur de la plaque selon l'axe Y
$h$	: épaisseur de la plaque
$U_i, V_i$	: déplacements de la surface moyenne selon l'axe X et l'axe Y respectivement, correspondant au nœud i
$W_i$	: déplacement transversal de la plaque correspondant au nœud i
$W_{i,x}$	: première dérivée de déplacement transversal de la plaque par rapport à X, au nœud i
$W_{i,y}$	: première dérivée de déplacement transversal de la plaque par rapport à Y, au nœud i
$W_{i,xy}$	: dérivée croisée de déplacement transversal de la plaque par rapport à X et Y.
$\omega$	: fréquence de vibration de la plaque en rad/sec
$\bar{\omega}$	: fréquence de vibration adimensionnelle
$U_x$	: vitesse moyenne de l'écoulement potentiel
$X, Y, Z$	: système de coordonnées orthogonal
$\rho_s$	: densité de la plaque
$\rho_f$	: densité de fluide
$h_1$	: niveau de fluide au-dessus de la plaque
$h_2$	: niveau de fluide au-dessous de la plaque
$Z_{fi}$	: coefficient de pression appliquée par le fluide sur la plaque
$D$	: rigidité de membrane, $Eh/(1-\nu^2)$
$K$	: rigidité de flexion, $Eh^3/12(1-\nu^2)$
$i$	: nombre complexe $i^2=-1$
$C_i$	: constantes inconnues, définies par les équations (1) (2)
$\nu$	: coefficient de Poisson

$E$	: module de Young
$P_{ij}$	: coefficients de la matrice d'élasticité du matériau $[R]$
$x_e$	: longueur de l'élément selon l'axe X
$y_e$	: longueur de l'élément selon l'axe Y
$P$	: pression de fluide appliquée sur la plaque
$c$	: vitesse de son dans le fluide
$\psi$	: rapport de masse défini dans l'équation (52)
$V$	: vitesse d'écoulement du fluide
$V_x, V_y, V_z$	: composante de la vitesse du fluide selon les axes X, Y et Z respectivement
$\phi(x, y, z, t)$	: fonction du potentiel de vitesse
$[R]$	: matrice (3x24), définie par l'équation (3)
$\{C\}$	: vecteur des constantes inconnues, définie par l'équation (3)
$\{\delta\}^e$	: vecteur élémentaire de déplacements, défini par l'équation (4)
$[A]^{-1}$	: matrice (24x24), définie dans l'appendice A
$[N]$	: matrice (3x24) contenant les fonctions des champs de déplacements élémentaire, définie par l'équation (4)
$\{\varepsilon\}$	: vecteur de déformations défini dans l'appendice B
$[Q]$	: matrice (6x24), définie par l'équation (5)
$\{\sigma\}$	: vecteur de contraintes
$[P]$	: matrice d'élasticité (6x6)
$[m]^e$	: matrice de masse élémentaire (24x24)
$[k]^e$	: matrice de rigidité élémentaire (24x24)
$[m_f]^e$	: matrice de masse fluide élémentaire (24x24)
$[c_f]^e$	: matrice d'amortissement de fluide élémentaire (24x24)
$[k_f]^e$	: matrice de rigidité de fluide élémentaire (24x24)
$\{F\}^e$	: vecteur de force élémentaire
$\{F\}$	: vecteur de force global

- $[M_s]$  : matrice globale de masse
- $[K_s]$  : matrice globale de rigidité
- $[C_s]$  : matrice d'amortissement structural globale
- $[M_f]$  : matrice globale de masse représentant l'effet de force d'inertie induite par le fluide.
- $[C_f]$  : matrice globale d'amortissement, représentant l'effet de force de Coriolis induite par le fluide
- $[K_f]$  : matrice de globale rigidité, représentant l'effet de force centrifuge induite par le fluide.
- $\{\delta_T\}$  : vecteur de déplacements global
- $[R_f]$  : matrice (3,24), définie par l'équation (42)





**L'École Polytechnique se spécialise dans la formation d'ingénieurs et la recherche en ingénierie depuis 1873**



**École Polytechnique de Montréal**

**École affiliée à l'Université  
de Montréal**

Campus de l'Université de Montréal  
C.P. 6079, succ. Centre-ville  
Montréal (Québec)  
Canada H3C 3A7

[www.polymtl.ca](http://www.polymtl.ca)

