POLYPUBLIE
Polytechnique Montréal

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Titre: Title:	Analyse dynamique des systèmes de plaques en intéraction avec un fluide et applications
Auteurs: Authors:	Youcef Kerboua, Aouni A. Lakis, Marc Thomas, & Luc Marcouiller
Date:	2006
Type:	Rapport / Report
Référence: Citation:	Kerboua, Y., Lakis, A. A., Thomas, M., & Marcouiller, L. (2006). Analyse dynamique des systèmes de plaques en intéraction avec un fluide et applications. (Rapport technique n° EPM-RT-2006-01). https://publications.polymtl.ca/3149/

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: PolyPublie URL:	https://publications.polymtl.ca/3149/
Version:	Version officielle de l'éditeur / Published version
Conditions d'utilisation: Terms of Use:	Tous droits réservés / All rights reserved

Document publié chez l'éditeur officiel
Document issued by the official publisher

Institution:	École Polytechnique de Montréal
Numéro de rapport: Report number:	EPM-RT-2006-01
URL officiel: Official URL:	
Mention légale: Legal notice:	

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal

https://publications.polymtl.ca

EPM–RT–2001-01

ANALYSE DYNAMIQUE DES SYSTÈMES DE PLAQUES EN INTERACTION AVEC UN FLUIDE ET APPLICATIONS

Y. Kerboua, A.A. Lakis, M. Thomas et L. Marcouiller
Département de Génie mécanique
École Polytechnique de Montréal

Mars 2006

Poly

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

EPM-RT-2006-01

ANALYSE DYNAMIQUE DES SYSTÈMES DE PLAQUES EN INTERACTION AVEC UN FLUIDE ET APPLICATIONS

Y. Kerboua[1], A.A. Lakis[2], M. Thomas[2] et L. Marcouiller[3]
[1]Département de génie mécanique, École polyteochnique de Montréal
C.P. 6079, succ. Centre ville, Montréal (Québec) H3C 3A7
[2]Département de génie mécanique, École de technologie supérieure
1100, Notre-Dame Ouest, Montréal (Québec) CANADA H3C 1K3
[3]Institut de recherchye d'Hydro Québec, Carennes, Québec

Mars 2006

©2006
Y.Kerboua[1], A.A.Lakis[1], M. Thomas[2] et L. Marcouiller[3]
Tous droits réservés

Dépôt légal :
Bibliothèque nationale du Québec, 2006
Bibliothèque nationale du Canada, 2006

EPM-RT-2006-01
Analyse dynamique des systèmes de plaques en interaction avec un fluide et application

par : Y.Kerboua[1], A.A.Lakis[1], M. Thomas[2] et L. Marcouiller[3]
[1] Département de génie mécanique, École Polytechnique de Montréal
[2] Département de génie mécanique, École de technologie supérieure
[3] Institut de recherche d'Hydro Québec

Toute reproduction de ce document à des fins d'étude personnelle ou de recherche est autorisée à la condition que la citation ci-dessus y soit mentionnée.

Tout autre usage doit faire l'objet d'une autorisation écrite des auteurs. Les demandes peuvent être adressées directement aux auteurs (consulter le bottin sur le site http://www.polymtl.ca/) ou par l'entremise de la Bibliothèque :

École Polytechnique de Montréal
Bibliothèque – Service de fourniture de documents
Case postale 6079, Succursale «Centre-Ville»
Montréal (Québec)
Canada H3C 3A7

Téléphone : (514) 340-4846
Télécopie : (514) 340-4026
Courrier électronique : biblio.sfd@courriel.polymtl.ca

Ce rapport technique peut-être repéré par auteur et par titre dans le catalogue de la Bibliothèque : http://www.polymtl.ca/biblio/catalogue/

RÉSUMÉ

La présence de fluide au voisinage d'une structure induit une chute de fréquence très importante causée par l'échange de l'énergie cinétique entre le fluide et la structure.

Nous développons dans cet article un modèle numérique (fluide-structure) pour étudier le comportement dynamique des plaques parallèles ou radiales submergées dans le fluide. Le but ultime est de pouvoir modéliser les aubes d'une turbine hydraulique ou celles d'un turboréacteur soumises à un écoulement.

Nous utilisons dans ce travail un élément fini plan qui tient compte simultanément des effets de membrane et de flexion. Les matrices de masse et de rigidité sont calculées par intégration exacte en se basant sur la théorie classique des plaques et en utilisant la méthode des éléments finis.

Des applications de ce modèle ont été élaborées pour des réservoirs cylindriques ou parallélépipédiques remplis de liquide.

Les fonctions de déplacements proviennent, en général, de la solution exacte des équations d'équilibre du système (solide-fluide).

La transformation des coordonnées à un repère global commun est nécessaire, afin de pouvoir assembler les matrices élémentaires et d'écrire les équations globales d'équilibre dynamique.

L'élément fini solide-fluide tient compte de la pression de fluide appliquée sur la plaque en utilisant l'équation de Bernoulli à l'interface fluide-solide et l'équation différentielle gouvernant le potentiel de vitesse. La condition d'imperméabilité assure un accouplement complet entre le fluide et la structure.

Les résultats obtenus permettent de conclure que les fréquences calculées par cette méthode sont en accord avec celles obtenues par d'autres chercheurs. Les effets de différentes conditions aux limites de la structure et du fluide ont été explorés dans ce travail.

1. INTRODUCTION

Les systèmes composés de plaques parallèles, les réservoirs cylindriques ou rectangulaires ainsi que les aubes de turbines sont tous des structures de type coque. Elles ont un champ d'application large dans plusieurs domaines de l'industrie moderne et stratégique, tels que l'aérospatial, le domaine nucléaire, la marine et l'industrie pétrolière. Souvent ces structures travaillent en interaction avec un fluide au repos ou en écoulement, cela influe d'une façon considérable sur leur comportement dynamique.

Les premiers travaux dans le domaine d'interaction fluide-structure ont été développés au dix-neuvième siècle par Rayleigh [12] et Lamb [1]. Ces travaux constituent la théorie de base du comportement d'un fluide à l'intérieur d'une coque cylindrique ou sphérique. Dans les années soixante, Berry et Reissner [2] ont étudié le comportement d'une coque cylindrique remplie de fluide sous pression. Lindholm et al. [3] ont étudié les vibrations d'une coque cylindrique partiellement remplie de liquide. Coale et Nagano [4] ont calculé les modes axisymétriques d'une coque cylindrique jointe à une coque hémisphérique, les deux remplies de liquide. Lakis et Paidoussis [5] ont développé un élément fini hybride circonférentiel basé sur la théorie classique des coques pour l'analyse du comportement dynamique d'un réservoir cylindrique vertical partiellement rempli de liquide. Néagu et Lakis [6] ont étudié le même problème [5] en tenant compte de l'effet de la surface libre du fluide. Jain [7] a étudié les vibrations d'une coque cylindrique orthotrope partiellement remplie de liquide incompressible en tenant compte du cisaillement transversal et de l'inertie de rotation. Amabili et Dalpiaz [8] ont développé une solution analytique pour la modélisation des coques cylindriques horizontales partiellement remplies de liquide incluant des tests expérimentaux. L'effet de surface libre parallèle à l'axe du cylindre horizontal a aussi été étudié par Amabili [9]. Selmane et Lakis [42] ont développé un autre élément fini hybride longitudinal pour l'analyse des coques cylindriques horizontales fermées ou ouvertes totalement ou partiellement remplies de liquide. Le même élément [42] a été utilisé par Bursuc et Lakis [41] pour étudier l'effet de la surface libre lorsque le réservoir cylindrique, horizontal, est partiellement rempli de liquide. Mistry et Menezes [10] ont utilisé la méthode des éléments finis pour modéliser une coque cylindrique remplie de liquide. L'élément de paroi est axisymétrique à deux nœuds et celui du liquide est axisymétrique à huit nœuds. Yamaki et al. [11] ont étudié la coque cylindrique partiellement remplie de liquide encastrée aux deux côtés.

Les plaques circulaires et rectangulaires en interaction avec le fluide ont fait l'objet d'un grand nombre de travaux depuis le début du vingtième siècle [12]. Les effets des conditions aux limites, de la surface libre et du niveau du fluide ainsi que du comportement en membrane ont été étudiés, en se basant sur des méthodes analytiques, expérimentales ou numériques [12-30]. Une recherche bibliographique détaillée a été présentée lors du développement de l'élément fluide-solide des plaques en interaction avec le fluide au repos [45].

L'interaction entre le fluide et la structure ne se réduit pas à un échange de l'énergie cinétique à l'interface solide-fluide, mais le fluide peut transporter cette énergie à une autre paroi élastique. Dans ce contexte, Jeong et al. [31] ont étudié analytiquement le comportement dynamique de deux plaques circulaires identiques et parallèles couplées avec le mouvement d'un fluide idéal et incompressible en utilisant la méthode de Rayleigh. Les deux plaques élastiques forment la base et le haut d'un cylindre rigide rempli de liquide. Les modes de vibration en phase et en antiphase ont été considérés. Des résultats précis ont été obtenus pour les modes en phase alors que pour les modes de vibration des deux plaques en antiphase les résultats étaient insatisfaisants sauf le mode m=0. Afin d'améliorer les fréquences des modes de vibrations latérales en antiphase Jeong [32] a étudié le même problème [31], mais cette fois en utilisant l'expansion des séries finies de Fourrier-Bessel avec la méthode de Rayleigh-Ritz. Les résultats obtenus sont très satisfaisants. L'influence de la hauteur de fluide entre les deux plaques sur le comportement dynamique a été étudiée. Il a été conclu que lorsque la hauteur de fluide entre les deux plaques augmente, les fréquences en phase diminuent et les fréquences en antiphase augmentent.

Jeong et al. [33] ont étudié le cas de deux plaques rectangulaires, identiques et parallèles, couplées avec le mouvement de fluide, les deux plaques sont encastrées aux parois rigides d'un conteneur entourant le fluide idéal incompressible et supportant les deux plaques encastrées sur les quatre côtés. Les modes de vibration transversale en phase et en antiphase ont été considérés. Chaque mode en phase est une combinaison de modes de poutre dans l'air et chaque mode en antiphase est approché par des polynômes satisfaisant les conditions aux limites de la plaque et de la conservation de masse de fluide. Les fréquences naturelles de couplage ont été obtenues en utilisant la méthode de Rayleigh.

Kim et Lee [34] ont analysé le comportement hydroélastique d'un réservoir rectangulaire découvert (topless) totalement rempli d'eau en se basant sur la formulation MSC/NASTRAN DMAP. Les fréquences de ballottement de fluide ont été calculées en supposant que le réservoir

est totalement rigide. Seulement les deux premières fréquences pour le mode en phase et en antiphase de réservoir en interaction avec le fluide ont été calculées analytiquement.

Bauer [38] a étudié le comportement hydroélastique d'un réservoir rectangulaire totalement ou partiellement rempli de liquide, lorsque ce dernier est composé de parois latéraux rigides et d'une base élastique en tenant compte de l'effet de surface libre, et lorsque le réservoir est composé de parois latérales et d'une plaque de base rigides avec la plaque supérieure élastique et en contact avec la surface libre de fluide.

Cheng et Zhou 2000 [35] ont calculé les fréquences naturelles d'une plaque formant la base d'un réservoir rectangulaire découvert (topless) rempli de liquide. L'effet de la surface libre de fluide n'a pas été considéré. La solution analytique a été basée sur la méthode de Ritz pour l'analyse du système fluide-structure. Le cas où la plaque est une partie intégrante du fond rigide de réservoir a été considéré, cela permet d'étudier le cas de plaques en contact avec un domaine de fluide infini.

Le cas de la plaque circulaire composant la base d'un réservoir cylindrique rigide rempli de fluide a été étudié par Cheng et Zhou 2002 [36]. L'effet de la surface libre a été considéré. Après avoir calculer la solution exacte de potentiel de vitesse, la méthode de Galerkin a été utilisée pour calculer les fréquences d'interaction fluide-structure.

Mitra et Sinhamahapatra [37] ont étudié le couplage de ballottement linéaire de liquide dans un conteneur élastique. Ils ont calculé les fréquences de ballottement de fluide en considérant le réservoir rigide et ensuite ils ont étudié la réponse forcée du système solide-fluide. Ils ont utilisé des éléments finis bidimensionnels pour le fluide et des éléments unidimensionnels pour le réservoir en employant l'approche de Galerkin avec des résidus pondérés.

Nous comptons dans ce travail utiliser un élément fini fluide-solide pour l'analyse du comportement dynamique de structures en interaction avec le fluide. L'élément est en quelque sorte une extension de l'élément fini fluide-solide déjà utilisé par Kerboua et al. [45] pour l'analyse des plaques. Il nous permettra de calculer les hautes et les basses fréquences du système avec précision et de tenir compte de toutes les conditions aux limites agissant sur le système (fluide- structure). Des applications de ce modèle ont été élaborées pour des séries de plaques parallèles ou radiales submergées dans le fluide aussi pour des réservoirs cylindriques ou parallélépipédiques remplis de liquide.

2. ÉLÉMENT FINI SOLIDE

Au repère local X, Y, Z, l'élément fini utilisé dans ce travail est représenté à la figure 1. C'est une portion de surface plane rectangulaire ayant une épaisseur h et quatre nœuds (i, j, k, l), chaque nœud possède cinq degrés de liberté.

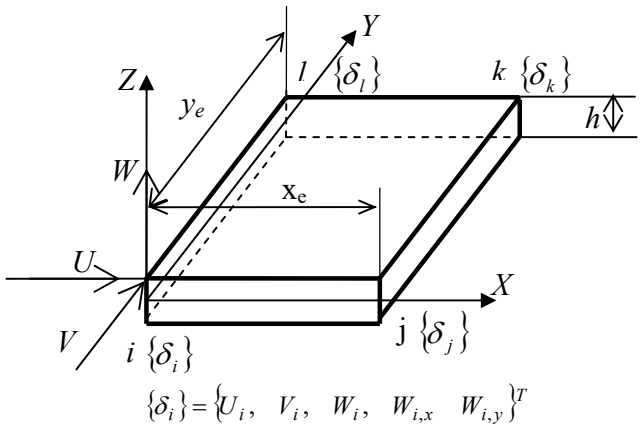


Figure 1. Géométrie de l'élément fini et vecteur nodal de déplacements au repère local *X, Y, Z.*

Lors du développement de l'élément fini fluide-solide de plaque [45], nous avons justifié l'approximation de champ de déplacement transversal par la fonction exponentielle et des déplacements de membranes par des polynômes bilinéaires [43].

Le champ de déplacements dans le plan X, Y est donné comme suit :

$$U(x,y,t) = C_1 + C_2 \frac{x}{A} + C_3 \frac{y}{B} + C_4 \frac{xy}{AB} \tag{1.a}$$

$$V(x,y,t) = C_5 + C_6 \frac{x}{A} + C_7 \frac{y}{B} + C_8 \frac{xy}{AB} \tag{1.b}$$

U et *V* sont les déplacements de la surface moyenne dans le plan de la plaque selon l'axe *X* et *Y* respectivement ;

A est la longueur de la structure selon l'axe X ;

B est la longueur de la structure selon l'axe Y.

Le champ de déplacement transversal de la surface moyenne provient de la solution des équations de flexion de la plaque :

$$W(x,y,t)=\sum_{j=9}^{20} C_j e^{i\pi\left(\frac{x}{A}+\frac{y}{B}\right)} e^{i\omega t} \tag{1.c}$$

où :

W est le champ de déplacement transversal de la surface moyenne ;

ω est la fréquence naturelle de vibration de la plaque en rad/sec ;

i est le nombre complexe i^2=-1;

les C_i sont des constantes inconnues.

Pour l'élément à vide, nous développons l`équation (1.c) en série de Taylor , comme suit :

$$\begin{aligned} W(x,y,t) = {} & C_9 + C_{10}\frac{x}{A} + C_{11}\frac{y}{B} + C_{12}\frac{x^2}{A^2} + C_{13}\frac{xy}{AB} + C_{14}\frac{y^2}{B^2} + C_{15}\frac{x^3}{A^3} + C_{16}\frac{x^2 y}{A^2 B} + C_{17}\frac{xy^2}{AB^2} \\ & + C_{18}\frac{y^3}{B^3} + C_{19}\frac{x^3 y}{A^3 B} + C_{20}\frac{xy^3}{AB^3} \end{aligned} \tag{2}$$

Sous forme matricielle, le champ de déplacements peut être écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = [R]\{C\} \tag{3}$$

avec :

$[R]$ est une matrice (3x20) donnée à l`appendice A ;

$\{C\}$ est le vecteur de constantes.

Nous pouvons exprimer ces constantes $\{C\}$ en fonction des vingt degrés de liberté de l'élément fini (voir appendice A.6). En remplaçant le vecteur de constantes dans l'équation (3), le champ de déplacements devient :

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = [R][A]^{-1}\{\delta\}^e \tag{4}$$

où :

$[A]^{-1}$ est une matrice (20x20) définie à l'appendice A.4 ;

$\{\delta\}^e$ est le vecteur élémentaire de déplacements donné à l'appendice A.6.

En substituant les déplacements de l'équation (4) dans le vecteur de déformations défini à l'appendice A.7, nous obtenons le vecteur de déformations en fonction des déplacements nodaux.

$$\{\varepsilon\} = [Q][A]^{-1}\{\delta\}^e \tag{5}$$

$[Q]$ est une matrice (6x20) listée à l'appendice A.3.

Pour un matériau anisotrope, le champ de contraintes est lié au champ de déformation par la relation suivante :

$$\{\sigma\} = [P]\{\varepsilon\} \tag{6}$$

où :

$[P]$ est la matrice d'élasticité (6x6) liant le vecteur de contraintes au vecteur de déformations, elle est définie à l'appendice A.8 pour un matériau isotrope.

En utilisant les équations (4), (5) et (6), la matrice de rigidité (20x20) et la matrice de masse (20x20) d`un élément fini au repère local peuvent être exprimées respectivement par:

$$[k]^e = \left[[A]^{-1}\right]^T \left(\int_0^{y_e}\int_0^{x_e} [Q]^T [P][Q] dxdy \right) [A]^{-1} \tag{7}$$

$$[m]^e = \rho_s h \left[[A]^{-1}\right]^T \left(\int_0^{y_e}\int_0^{x_e} [R]^T [R] dxdy \right) [A]^{-1} \tag{8}$$

où :

ρ_s est la densité de la structure solide;

x_e et y_e sont les dimensions d'un élément selon les coordonnées X et Y respectivement (voir figure 1).

2.1. Transformation au repère global

Comme il est représenté sur la figure 2, chaque élément fini est lié à un repère local X, Y, Z qui ne coïncide pas toujours avec le repère global de la structure $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$. Donc, afin de pouvoir assembler les matrices élémentaires et d'écrire les équations d'équilibre dynamique, nous devons transformer les déplacements de chaque élément à un repère unique et global.

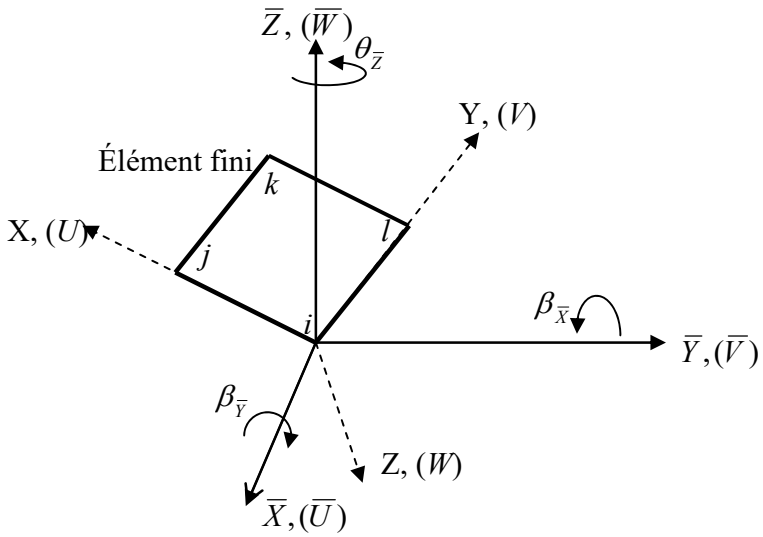


Figure 2. Position du repère local X, Y, Z de l'élément fini par rapport au repère global de la structure $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$.

Pour la consistance des transformations, le vecteur de déplacements à chaque nœud devient :

$$\{\delta_i'\} = \{U_i, V_i, W_i, \partial W_i/\partial x, \partial W_i/\partial y, 0\}^T \tag{9}$$

La relation entre les déplacements nodaux au repère local X, Y, Z et les déplacements nodaux au repère global $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ est exprimée par :

$$\{\delta'_i\} = \begin{bmatrix} cos(X,\overline{X}) & cos(X,\overline{Y}) & cos(X,\overline{Z}) & 0 & 0 & 0 \\ cos(Y,\overline{X}) & cos(Y,\overline{Y}) & cos(Y,\overline{Z}) & 0 & 0 & 0 \\ cos(X,\overline{X}) & cos(Z,\overline{Y}) & cos(Z,\overline{Z}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -cos(Y,\overline{Y}) & -cos(Y,\overline{X}) & -cos(Y,\overline{Z}) \\ 0 & 0 & 0 & cos(X,\overline{Y}) & cos(X,\overline{X}) & cos(X,\overline{Z}) \\ 0 & 0 & 0 & cos(Z,\overline{Y}) & cos(Z,\overline{X}) & cos(Z,\overline{Z}) \end{bmatrix} \{\overline{\delta}_i\} = [T]\{\overline{\delta}_i\} \quad (10)$$

où :

$\cos(X,\overline{Y})$ est le cosinus directeur de l'axe X avec l'axe $\overline{Y}$;

[T] est une matrice (6x6) contenant les cosinus directeurs entre les axes du repère local et ceux du repère global ;

$\{\overline{\delta}_i\}$ est le vecteur nodal de déplacement défini dans le repère global, comme il est représenté sur la figure 2. Ses composantes sont :

$$\{\overline{\delta}_i\} = \{\overline{U}_i, \overline{V}_i, \overline{W}_i, \beta_{i,\overline{x}}, \beta_{i,\overline{y}}, \theta_{i,\overline{Z}}\}^T \quad (11)$$

En appliquant l'équation (10) pour tous les nœuds (i, j, k, l), nous pouvons écrire la relation entre le vecteur élémentaire de déplacements au repère local et le vecteur élémentaire de déplacements au repère global comme suit :

$$\{\delta'\}^e = \begin{bmatrix} [T] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [T] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [T] \end{bmatrix} \{\overline{\delta}\} = [T^e]\{\overline{\delta}\}^e \quad (12)$$

$\{\delta'\}^e$ est le vecteur élémentaire de déplacements au repère local, défini dans l'appendice A.9;

$\{\overline{\delta}\}^e$ est le vecteur élémentaire de déplacements au repère global, défini dans l'appendice A.9 ;

$[T^e]$ est une matrice (24x24), assurant la transformation les déplacements élémentaires entre le repère local et global.

Par conséquent, la matrice de masse et celle de rigidité élémentaires sont exprimées au repère global $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ comme suit :

$$\left[\overline{k}\right]^e = \left[T^e\right]^T \left[k'\right]^e \left[T^e\right] \tag{13}$$

$$\left[\overline{m}\right]^e = \left[T^e\right]^T \left[m'\right]^e \left[T^e\right] \tag{14}$$

avec :

$\left[k'\right]^e$ et $\left[m'\right]^e$ sont les matrices élémentaires de rigidité et de masse, respectivement, dérivées des équations (7) et (8), correspondant au vecteur des degrés de liberté $\left\{\delta_i'\right\}$ (éq. 9) tel qu'il est démontré à l'appendice A.11 ;

$\left[\overline{k}\right]^e$ et $\left[\overline{m}\right]^e$ sont les matrices élémentaires de rigidité et de masse respectivement définies au repère global.

3. ÉLÉMENT FINI SOLIDE-FLUIDE

La pression appliquée par le fluide au repos sur la structure lors du contact peut être exprimée en fonction de l'accélération du système [45]. La présence de fluide augmente l'inertie du système en ajoutant à la masse du solide une masse additionnelle induite par le fluide (Fig 3.).

Le système d'équations exprimant le comportement dynamique du système fluide-solide est :

$$\left[\left[M_s\right] - \left[M_f\right]\right]\left\{\ddot{\overline{\delta}}_T\right\} + \left[K_s\right]\left\{\overline{\delta}_T\right\} = \left\{0\right\} \tag{15}$$

$\left[M_s\right]$ et $\left[K_s\right]$ sont respectivement la matrice de masse et la matrice de rigidité de la structure à vide ;

$\left[M_f\right]$ est la matrice de masse représentant l'effet des forces d'inertie du fluide ;

$\left\{\overline{\delta}_T\right\}$ est le vecteur de déplacements global.

L'élément fini solide-fluide au repère local est représenté à la figure 3. Les conditions aux limites assurent le contact permanent entre le fluide et la structure et permettent de tenir compte du potentiel de l'interface.

Pour formuler le problème d'interaction, nous supposons que les mouvements de fluide sont faibles et que le fluide est incompressible, inviscide et irrotationnel.

L'écoulement potentiel satisfait l'équation de Laplace. Dans un système de coordonnées cartésiennes, cette équation peut être exprimée comme suit :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \tag{16}$$

où :

ϕ est la fonction du potentiel de vitesse.

Lorsque le fluide est au repos, l'équation de Bernoulli à l'interface solide-fluide est :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho_f} \right|_{z=0} = 0 \tag{17}$$

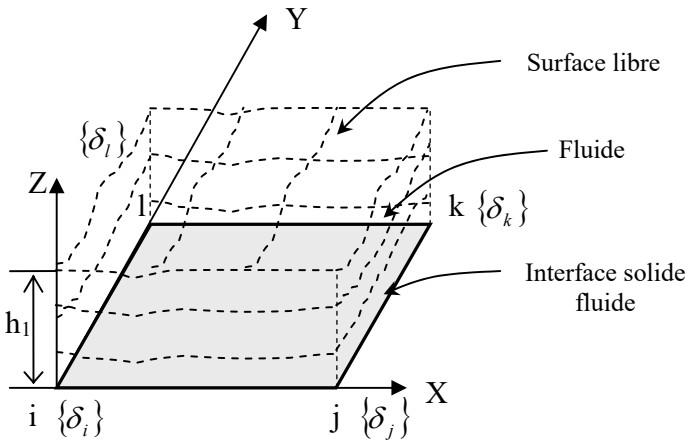


Figure 3 : Élément fini solide-fluide au repère local X, Y, Z.

La pression à l'interface peut être exprimée comme suit :

$$P\big|_{z=0} = -\rho_f \left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{z=0} \tag{18}$$

Nous assumons que le potentiel de vitesse est donné par la fonction suivante :

$$\phi(x, y, z, t) = F(z)S(x, y, t) \tag{19}$$

À l'interface, la condition d'imperméabilité assure le contact permanent entre le fluide et l'élément fini solide et nous pouvons l'exprimer par l'équation suivante :

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{\partial W}{\partial t} \tag{20}$$

où :
W est le déplacement transversal de l'élément fini au repère X, Y, Z.

En utilisant les équations (19) et (20), nous pouvons exprimer la fonction du potentiel comme suit :

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{F(z)}{dF(0)/dz}\frac{\partial W}{\partial t} \tag{21}$$

Afin de déterminer la fonction du potentiel, nous devons calculer la fonction F(z). En substituant l'équation (21) dans l'équation (16), nous obtenons l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^2F(z)}{dz^2} - \mu^2 F(z) = 0 \tag{22}$$

avec :

$$\mu = \pi\sqrt{\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}}$$

La solution de l'équation différentielle (22) nous permet d'obtenir la fonction F(z). La forme générale de la solution est de la forme:

$$\mathrm{F(z)} = \mathrm{A}_1 \mathrm{e}^{\mu z} + \mathrm{A}_2 \mathrm{e}^{-\mu z} \tag{23}$$

En substituant (23) dans (21), nous obtenons l'expression du potentiel de vitesse comme suit :

$$\phi(x,y,z,t) = \frac{\left(\mathrm{A}_1 \mathrm{e}^{\mu z} + \mathrm{A}_2 \mathrm{e}^{-\mu z}\right)}{dF(0)/dZ}\frac{\partial W}{\partial t} \tag{24}$$

Les conditions aux limites de fluide sont introduites séparément pour chaque élément, cela nous permet d'étudier des structures totalement ou partiellement remplies de liquide ainsi que des structures totalement submergées dans un fluide.

Le potentiel ϕ doit vérifier les conditions aux limites à l`interface fluide-solide (Z=0) et à la limite du fluide ($Z=h_1$) pour chaque élément (fig.3). Le mode de contact de la structure avec le fluide peut se présenter de différentes façons. Nous avons déjà développé la solution de l'équation (24) pour le cas où la limite supérieure du fluide est une surface libre ou un mur rigide (voir appendice A.10). Nous allons calculer dans ce travail la solution de l'équation (24) pour le cas de deux parois parallèles ou radiales en interaction avec le fluide.

3.1. Élément fini solide fluide pour des plaques parallèles et radiales

Dans le cas d'un réservoir rectangulaire (Fig. 8 et 10) ainsi que le cas d'une série de plaques parallèles (Fig. 9, 13 et 15) ou radiales (Fig. 14), le fluide interacte à l'intérieur des parois élastiques. Ces dernières peuvent vibrer selon le mode en phase ou selon le mode en antiphase l'une par rapport à l'autre. La condition d'imperméabilité pour chaque élément fini solide–fluide reste la même et est imposée par l'équation (20), tandis que la condition à la limite de fluide ($Z=h_1$) varie selon la nature du mode de vibration. Nous distinguons deux possibilités :

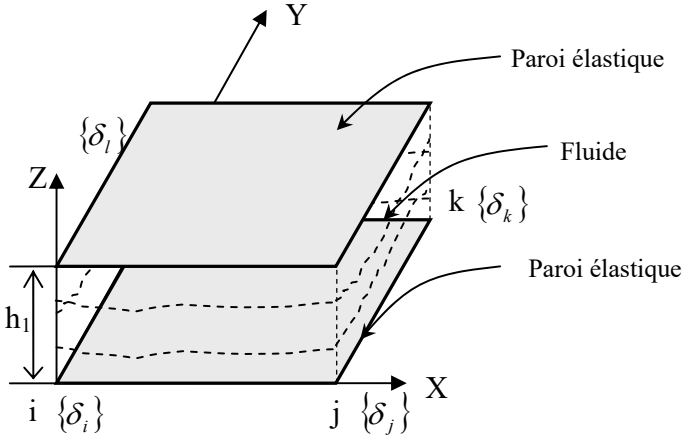


Figure 4. Élément fini solide-fluide (i, j, k, l) au repère local X, Y, Z ayant à la limite $Z=h_1$ une paroi élastique.

3.1.1. Mode de vibration en phase pour des plaques parallèles (radiales)

Dans le cas de vibrations en phase des deux parois (Fig. 4), la condition à la limite de fluide ($Z=h_1$) est donnée par:

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=h_1} = \frac{\partial W}{\partial t} \tag{25}$$

En remplaçant l'équation (24) simultanément dans (20) et (25), nous obtiendrons les constantes A_1 et A_2. La substitution de ces constantes dans (24) nous permet d'avoir l'expression du potentiel suivante :

$$\phi(x,y,z,t) = \frac{1}{\mu}\left[\frac{(1-e^{-\mu h_1})e^{\mu z} + (1-e^{\mu h_1})e^{-\mu z}}{e^{\mu h_1} - e^{\mu h_1}}\right]\frac{\partial W}{\partial t} \tag{26}$$

En substituant la fonction du potentiel (26) dans l'équation (18), la pression à l'interface devient :

$$P = -\frac{\rho_f}{\mu}\left[\frac{2 - e^{-\mu h_1} - e^{\mu h_1}}{e^{\mu h_1} + e^{-\mu h_1}}\right]\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = Z_{f4}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \tag{27}$$

Lorsque les deux parois élastiques sont radiales (Fig. 14), le terme droit des équations (25), (26) et (27) doit être multiplié par l'angle cosinus entre les deux parois.

3.1.2. Mode de vibration en antiphase des plaques parallèles (radiales)

Dans le cas des vibrations en mode antiphase, la condition à la limite de fluide ($Z=h_1$) est donnée par :

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=h_1} = -\frac{\partial W}{\partial t} \tag{28}$$

En remplaçant l'équation (24) simultanément dans (28) et (20), nous pouvons calculer les constantes A_1 et A_2, la substitution de ces constantes dans (24) nous permet d'avoir l'expression suivante du potentiel de vitesse :

$$\phi(x,y,z,t) = \frac{1}{\mu}\left[\frac{(1+e^{\mu h_1})e^{\mu z} + (e^{\mu h_1} + e^{2\mu h_1})e^{-\mu z}}{1 - e^{2\mu h_1}}\right]\frac{\partial W}{\partial t} \tag{29}$$

En substituant la fonction du potentiel (29) dans l'équation (18), la pression à l'interface devient :

$$P = -\frac{\rho_f}{\mu}\left[\frac{1 + 2e^{\mu h_1} + e^{2\mu h_1}}{1 - e^{2\mu h_1}}\right]\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = Z_{f5}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \tag{30}$$

Lorsque les deux parois élastiques sont radiales (Fig. 14), le terme droit des équations (28), (29) et (30) doit être multiplié par l'angle cosinus entre les deux parois.

4. CALCUL DE LA FORCE D'INERTIE DE FLUIDE

Le vecteur de forces induites par le fluide peut être exprimé au repère local X, Y, Z de la façon suivante :

$$\{F\}^e = \int_A [R][A]^{-1}\{P\}dA \tag{31}$$

où :

$\{P\}$ est un vecteur contenant la pression appliquée par le fluide sur l'élément fini.

En remplaçant le déplacement transversal de l'équation (4) dans l'expression de la pression convenable au cas étudié, dépendamment du mode de contact de la plaque avec le fluide et des conditions aux limites à Z= h_1 et/ou Z=h_2, nous obtenons la pression du fluide appliquée sur la plaque comme suit :

$$\{P\} = Z_{fi}[R_f][A]^{-1}\{\ddot{\delta}\}^e \tag{32}$$

Z_{fi} ($i=1,5$), dépend du mode de contact entre la structure et le fluide et des conditions d`interface fluide-structure. L'expression de Z_{fi} est définie à l'appendice A.10 pour i=1 et 3 et aux équations (27) et (30) pour i=4 et 5.

$[R_f]$ matrice (3x20) donnée à l`appendice A.2.

En remplaçant la pression obtenue dans (32) et la fonction de déplacements de l'équation (4) dans l'équation (31), nous obtenons le vecteur élémentaire de forces suivant :

$$\{F\}^e = Z_{fi}\int_A \left[[A]^{-1}\right]^T [R]^T [R_f][A]^{-1} dA\{\ddot{\delta}\}^e = [m_f]^e\{\ddot{\delta}\}^e \tag{33}$$

où :

dA est une surface élémentaire de l'élément.

La force induite par la présence de fluide au voisinage de la structure se présente comme une force d'inertie.

5. CALCUL DE $[K_S]$, $[M_S]$ ET $[M_F]$

La structure est subdivisée à un ensemble d'éléments finis quadrilatères. Pour chaque élément, nous avons calculé une matrice de masse et une matrice de rigidité au repère local.
La transformation des matrices élémentaires à un repère commun global est nécessaire afin de faire l'assemblage par les techniques habituelles de la méthode des éléments finis [49].
Le système matriciel global est exprimé par l'équation (15).
En assumant que :

$$\{\bar{\delta}_T\} = \{\bar{\delta}_{0T}\} e^{i\omega t} \tag{34}$$

où :
$\{\bar{\delta}_T\}$ est le vecteur de déplacements global ;
ω est la fréquence naturelle du système (rad/sec) ;
et $\{\bar{\delta}_{0T}\}$ est le vecteur global des amplitudes des déplacements pour chaque mode.
En introduisant l'équation (34) dans l'équation (15), on obtient le problème de valeurs propres suivant :

$$Det\left[\left[K_s\right] - \omega^2\left[M_s - M_f\right]\right] = 0 \tag{36}$$

La solution de ce système nous permet d'avoir les fréquences et les modes de vibrations de la structure.

6. RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

6.1. Structures à vide

Avant d'utiliser l'élément fini développé dans ce travail au calcul du comportement mécanique de structures en interaction avec le fluide, nous allons d'abord tester sa précision et sa convergence pour les structures à vide suivantes : a) coque cylindrique encastrée aux deux côtés,

b) coque cylindrique ouverte simplement supportée aux quatre cotes et c) un réservoir rectangulaire.

a) Le premier exemple étudié est un cylindre encastré sur les deux côtés circonférentiels, ses propriétés mécaniques et géométriques sont les suivantes : module de Young E=206GPa, coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, rayon R=0.175m, masse volumique ρ=7680 kg/m^3, épaisseur h=1mm et longueur L=0.664m.

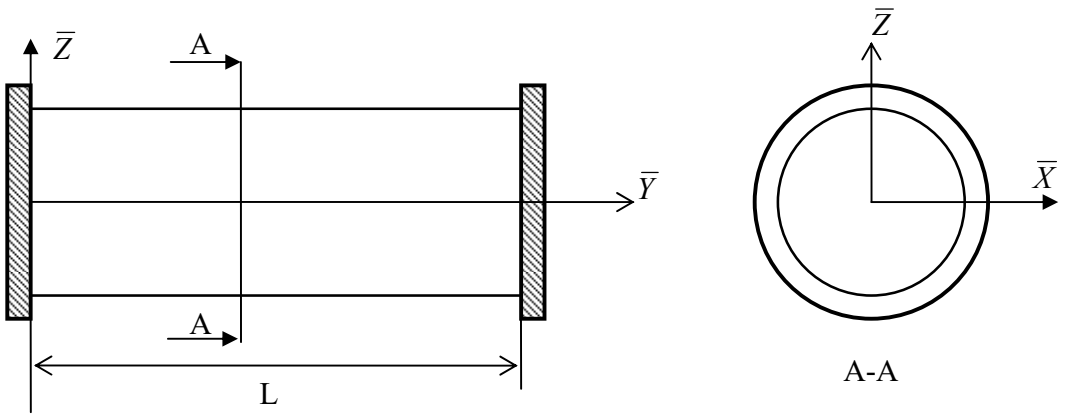


Figure 5. Coque cylindrique encastrée à x=0 et x=L.

Nous disposons pour cette structure des résultats obtenus en utilisant l'élément fini hybride développé par A.A. Lakis [40] et des résultats obtenus par le logiciel ANSYS. Le nombre d'éléments nécessaires pour atteindre la convergence est relativement élevé par rapport au cas de plaques [45], cela est dû au fait que la surface obtenue par les éléments finis doit épouser le plus parfaitement possible la surface cylindrique, c'est-à-dire en plus de l'approche théorique, il y a l'approche géométrique qui doit être satisfaite.

Tableau 1. Fréquences naturelles (Hz) de la coque cylindrique encastrée aux deux côtés (figure 5)

Type d'élément	Notre élément	ANSYS (Shell63)	Lakis [40]
Maillage $(\overline{X},\overline{Y})$ / Fréquence N°	(32x22)	(30x24)	20 éléments Hybrides
1	322	318	319
2	343	340	341
3	385	380	381
4	420	417	418
5	530	528	529

b) La deuxième structure étudiée est une coque cylindrique ouverte en acier, l'angle d'ouverture est de 180 degrés. La coque est simplement supportée sur les quatre côtés (courbes et longitudinaux). Ses dimensions et ses propriétés mécaniques sont : module de Young E=206GPA, coefficient de Poisson $\nu = 0.29$, masse volumique ρ=7812kg/m^3, épaisseur h=0.229mm, longueur 0.234m et rayon R=0.0377m. Nous avons au tableau 2 les résultats obtenus par le logiciel ANSYS ainsi que les résultats obtenus par notre programme. Nous pouvons dire que les résultats sont très satisfaisants.

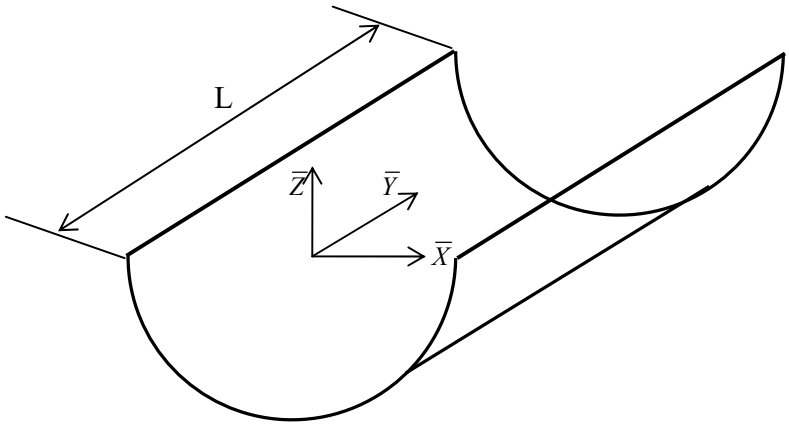


Figure 6. Coque cylindrique mince ouverte à 180 degrés simplement supportée sur les quatre côtés.

Tableau 2. Fréquences naturelles (Hz) d'une coque cylindrique ouverte à 180° simplement supportée sur les quatre côtés (figure 6)

Type d'élément	ANSYS (Shell63)	Notre élément
Maillage $(\overline{X},\overline{Y})$ / Fréquence N°	(26x30)	(24x24)
1	182,6	186,5
2	184,6	188,4
3	329,8	338,1
4	330,8	338,9
5	468,4	470,7
6	474,7	478,2

c) L'élément fini développé dans ce travail peut être utilisé pour l'analyse des coques composées de plaques pliées dans différentes directions. Nous considérons ici un réservoir rectangulaire en aluminium représenté sur la figure 8. Les parois perpendiculaires à l'axe Y sont supposées rigides. Les parois perpendiculaires à l'axe X et la plaque de la base sont élastiques et encastrées sur les côtés aux murs rigides. Le matériau utilisé possède un module de Young E=69GPa, un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ et une masse volumique égale à 2700 kg/m3. Les dimensions sont telles que montrées sur la figure 8.

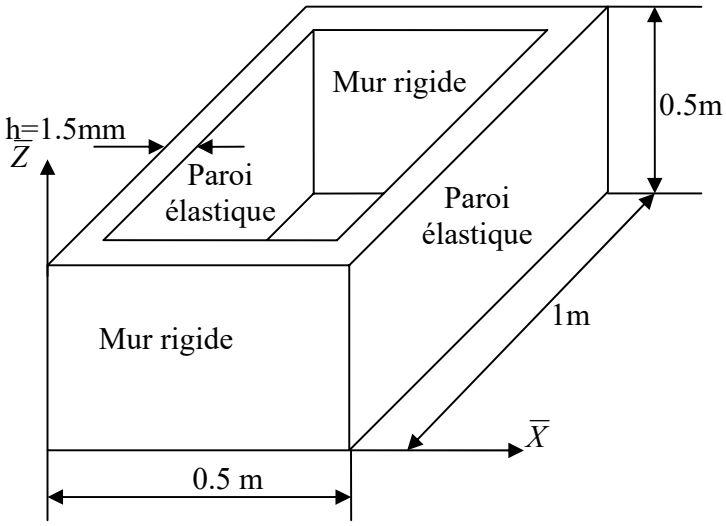


Figure 7. Réservoir rectangulaire avec deux parois rigides.

Tableau 3. Fréquences naturelles (Hz) du réservoir rectangulaire (figure 7)

Type d'élément	ANSYS Shell63		Notre élément				
Maillage $(\overline{Z}, \overline{X}, \overline{Y})$ / Fréquence N°	(6+3)x6	(18+9)x18	(8+4)x4	(8+4)x6	(10+5)x6	(14+7)x10	(16+8)x12)
1	10.382	10,28	10,24	10,25	10,25	10,26	10,26
2	10.778	10,67	10,61	10,63	10,63	10,64	10,64
3	23.920	24,27	23,38	23,73	23,79	24,09	24,15
4	25.077	25,01	25,11	24,98	24,99	24,97	24,96
5	25.288	25,17	25,24	25,14	25,14	25,12	25,12
6	32.397	32,68	31,58	32,04	32,08	32,45	32,52

Le nombre d'éléments finis nécessaires à la convergence pour le réservoir rectangulaire est beaucoup plus faible que ceux des deux premiers exemples (coque cylindrique fermée de la figure 5 et coque cylindrique ouverte de la figure 6), ceci s'explique par le fait que pour le réservoir rectangulaire, nous n'avons pas une approximation géométrique à satisfaire. Nous constatons que nos résultats s'accordent très bien avec les résultats obtenus par ANSYS.

Avec les trois exemples étudiés ci-dessus, il est clair que l'élément fini développé dans ce travail représente très bien le comportement dynamique des coques. D'autres structures sans fluide ont

été étudiées. Les résultats sont très satisfaisants dans tous les cas. Le maillage nécessaire à la convergence varie dépendamment de la géométrie de la structure.
Nous pouvons maintenant passer à la deuxième étape de ce travail qui est l'utilisation de l'élément fini solide-fluide pour étudier des structures en interaction avec le fluide.

6.2. Structures en interaction avec le fluide

La plupart des travaux d'interaction fluide-structure concernent des plaques et des coques cylindriques, sphériques ou coniques. Rares sont les travaux qui modélisent le comportement hydroélastique de structures ayant des formes compliquées.
En utilisant l'élément fini solide-fluide développé ci-dessus, nous allons étudié le comportement hydroélastique : i) de deux plaques parallèles identiques en interaction avec un fluide renfermé par un réservoir rectangulaire, ii) d'une série de plaques d'un échangeur, iii) d'un réservoir rectangulaire découvert, iv) d'une coque cylindrique encastrée, v) d'un modèle simplifié d'aube de turbine, vi) d'une série de plaque encastrées à un mur rigide, vii) d'une série de plaque radiales et viii) d'une série de plaques encastrées à un mur élastique.
i) La première structure est un réservoir rectangulaire rempli d'eau, elle a été étudiée par Jeong et al. [33]. Ses dimensions sont définies à la figure 8, son épaisseur est h=2mm. Les murs latéraux du réservoir sont rigides. La plaque supérieure et la plaque inférieure sont élastiques et elles ont les quatre côtés encastrés aux murs latéraux (Fig. 8). Les plaques élastiques vibrent en présence du fluide en mode en phase et en antiphase. Certains modes de vibration ne sont pas permis afin de ne pas violer la conservation de masse de fluide incompressible. La structure est en aluminium, ses propriétés mécaniques sont : module de Young E=69GPa, masse volumique des plaques ρ=2700 kg/m^3, coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ et densité de l'eau est 1000kg/m^3.

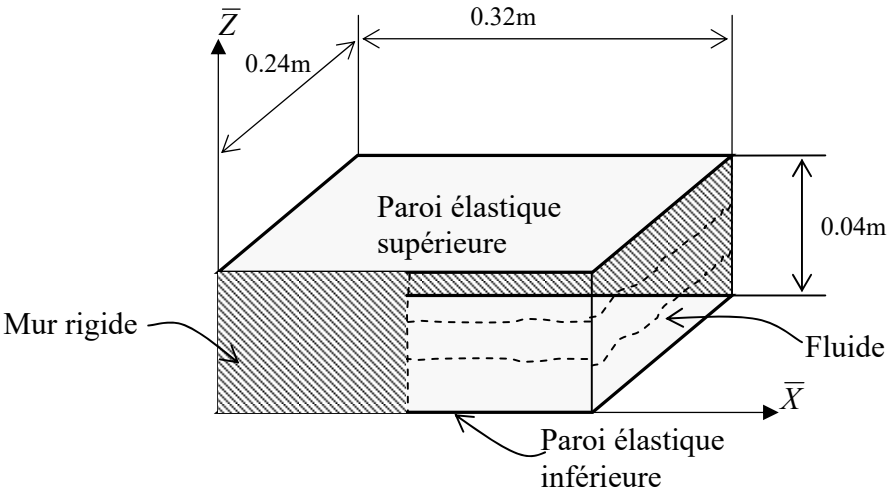


Figure 8. Réservoir rectangulaire rempli d'eau ayant les parois verticales rigides.

Nous constatons au tableau 4 que le pourcentage d'erreur relative entre les fréquences de vibrations à vide calculées par Jeong et al. [33] et celles calculées par notre programme est très faible.

Au tableau 5, nous présentons les fréquences de vibration en phase des deux plaques couplées avec le mouvement de fluide incompressible. Nous constatons que les résultats sont en excellent accord avec ceux de Jeong et al. [33].

Tableau 4. Fréquences de vibrations (Hz) des deux plaques parallèles élastiques du réservoir à vide (Fig. 8)

Modes (n, m)	Jeong et al. [33]	Notre élément	Erreur %
(0,0)	242,60	241,50	0.45
(0,1)	407,50	403,70	0.9
(1,0)	570,80	568,10	0.47
(0,2)	677,60	671,80	0.86
(1,1)	722,30	712,20	1.41
(1,2)	978,20	957,90	2.11
(0,3)	1047,30	1039,00	0.79
(2,0)	1069,90	1066,00	0.36

Tableau 5 : Fréquences de vibrations (Hz) en phase lorsque le réservoir (Fig. 8) est rempli d'eau

Fréquence (n, m)	Jeong et al. [33]	Notre élément
(0,0)	113,30	112,90
(0,1)	192,50	188,70
(1,0)	272,40	265,60
(0,2)	326,50	314,00
(1,1)	348,40	332,90
(1,2)	479,60	447,70
(0,3)	516,10	485,60
(2,0)	525,90	498,20

Au tableau 6, nous avons la fréquence de vibration en mode antiphase (0,1) des deux plaques parallèles couplées avec le fluide incompressible. Seulement la fréquence correspondant au mode (0,1) a été listée puisque sa forme respecte la conservation de masse. Un problème identique a été rencontré par Jeong et al. [31] dans l'analyse de deux plaques circulaires couplées avec fluide.

En ce qui concerne les deux plaques rectangulaires identiques en interaction avec le fluide étudié par Jeong [33], le champ de déplacement des modes en antiphase n'est plus le même que celui des modes en phase. Un autre champ de déplacements a été adopté pour que le mode compense le changement de volume de fluide dans la direction Z.

Donc, pour qu'on puisse calculer les autres modes, nous devons imposer certaines conditions au champ de déplacements pour que la supposition du fluide incompressible soit respectée. Le problème est spécifique aux structures fermées totalement remplies de fluide incompressible.

Tableau 6. Fréquences de vibration (Hz) en antiphase lorsque le réservoir (Fig. 8) est rempli d'eau

Fréquence (n, m)	Jeong et al. [33]	nous
(0,1)	61.2	66,53

ii) Les assemblages de plaques parallèles sont souvent utilisés dans l'industrie. La figure 9 illustre une partie d'un système composé d'une série de plaques minces superposées et ayant chacune deux côtés parallèles encastrés aux murs latéraux. Toutes les plaques ont les mêmes propriétés et elles sont distribuées uniformément.

Guo et Paidoussis [46] ont étudié un système identique soumis à l'effet d'un écoulement de fluide dans les canaux formés par les plaques. Ici nous considérons que les fréquences calculées pour des vitesses d'écoulement nulles. Guo et Paidoussis [46] ont considéré seulement les modes de vibration en antiphase puisqu'ils sont les plus problématiques. Nous disposons de quelques fréquences adimensionnelles $\overline{\omega}$ définies par l'expression suivante:

$$\omega = \frac{l}{b^2}\sqrt{\frac{K}{\rho_s h}}\overline{\omega}$$

avec :

ω : fréquence de vibration en rad/sec.

Les dimensions h_p, b, l sont représentées sur la figure 9. Les paramètres η, ζ, ψ lient les dimensions et les propriétés mécaniques des plaques pour le cas étudié. Elles sont :

$\eta = \rho_s b / \rho_s h = 1$, $\zeta = l/b = 0.5$, $\psi = h_p / b = 0.05$

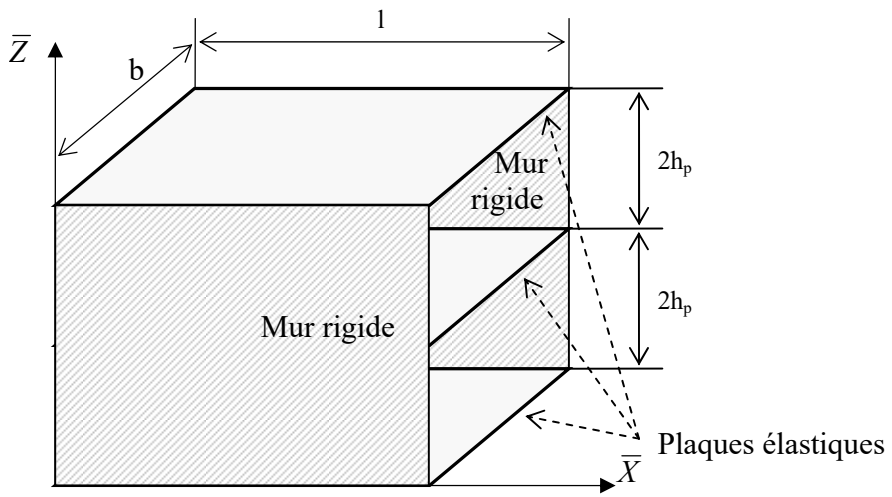


Figure 9. Partie d'une série de plaques parallèles.

Nous avons discrétisé toute la structure à un ensemble d'éléments finis quadrilatères. Tous les degrés de liberté des nœuds appartenant aux murs rigides sont éliminés. Au tableau 7, nous avons les fréquences naturelles du système en interaction avec un fluide au repos calculées en utilisant l'élément fini solide-fluide développé ci-dessus.

La pression appliquée sur la plaque du milieu est la somme des deux pressions supérieure et inférieure calculées au mode de vibration en antiphase des plaques (voir éq. 30). Pour les plaques externes (inférieure ou supérieure), une seule pression s'applique (voir éq. 30). C'est pour cette raison que la résolution du problème d'un ensemble de plaque revient à étudier une seule plaque soumise à la pression calculée au mode de vibration en antiphase des deux côtés.

Tableau 7. Fréquences de vibration adimensionnelles $\overline{\omega}$ pour le mode antiphase de la plaque étudiée par rapport aux deux autres (Fig. 9)

Fréquences adimensionnelles N^{o}	Notre élément	C.Q. Guo et M. Paidoussis [46]
1	16,25	16,57
2	26,47	32,46
3	44,95	48,46

iii) Kim et Lee [34] ont étudié le comportement hydroélastique d'un réservoir rectangulaire découvert (topless) totalement rempli d'eau. Les dimensions et la forme du réservoir sont représentées sur la figure 10. Les plaques perpendiculaires à l'axe Y sont supposées rigides et celles perpendiculaires à X ont les quatre côtés simplement supportés.Le matériau du réservoir a un module de Young égal à 200GPA, un coefficient de Poisson égal à 0.3 et une masse volumique de 7970 kg/m^3. L'épaisseur des parois est 5mm. Le réservoir est totalement rempli d'eau dont la masse volumique est 1000 kg/m^3.

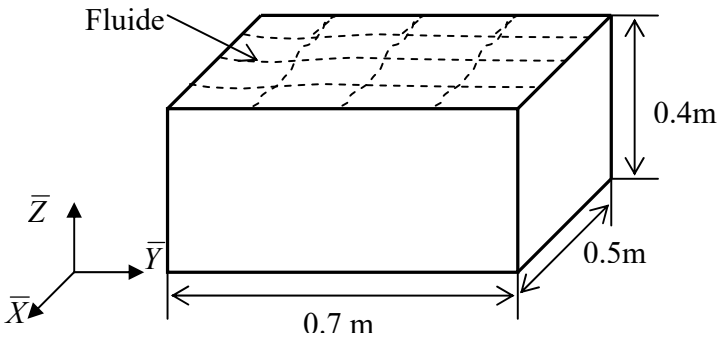


Figure 10. Réservoir rectangulaire découvert rempli d'eau.

Nous avons au tableau 8 les fréquences de réservoir à vide, nos résultats sont plus proches à la solution analytique que ceux obtenus par NASTRAN. Pour le réservoir rempli d'eau, Kim et Lee [34] ont mentionné seulement la première fréquence pour le mode en phase et la première pour le mode en antiphase. Nous constatons au tableau 9 que relativement aux résultats de Kim et Lee [34], la fréquence du mode en phase est plus précise que la fréquence de mode en antiphase. Nous pensons que notre solution est plus exacte puisque lorsque le rapport entre la hauteur du fluide et les dimensions du réservoir (plaques) dépasse une certaine valeur, il n'y a pas de différence entre les fréquences des modes en phase et celles des modes en antiphase.

Tableau 8. Fréquences de vibrations (Hz) de réservoir vide (Fig. 10)

Fréquence N^{o}	Analytique [34]	NASTRAN [34]	Notre élément
1	98.7	102.5	97.79
2	171	180.6	168.62
3	293.1	330.4	287.50
4	322.0	390.6	318.16

Tableau 9. Fréquences de vibration (Hz) du réservoir rempli de liquide (Fig. 10)

Mode	En phase	En antiphase
Kim et Lee [34]	49.8	42.2
Notre élément	50,74	49,93

iv) Nous avons étudié le comportement dynamique de trois coques cylindriques encastrées sur les deux côtés (Fig. 11) ayant des dimensions différentes.

Pour chaque coque cylindrique, nous avons calculé les fréquences de vibration d'abord lorsque la coque est vide puis lorsqu'elle est totalement remplie d'eau, en utilisant l'élément fini hybride développé par A.A.Lakis et al. [40] et bien sûr en utilisant l'élément fini solide-fluide développé dans ce travail.

Les propriétés mécaniques pour les trois cas sont les suivantes : module de Young E=206GPa, masse volumique du matériau ρ=7680 kg/m^3 et coefficient de Poisson $\nu = 0.3$.

Les fréquences obtenues sont listées aux tableaux 10, 11, 12. Les résultats obtenus s'accordent bien avec ceux calculés par l'élément fini hybride [40].

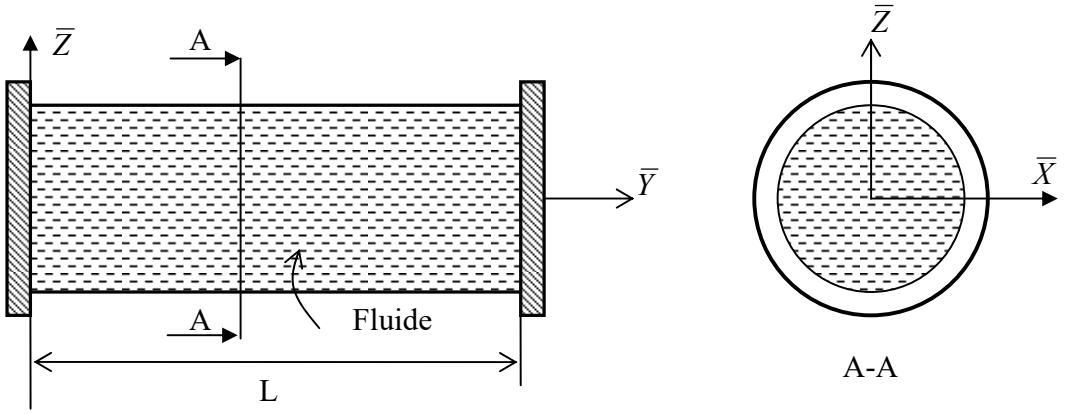


Figure 11. Coque cylindrique encastrée à x=0 et x=L, remplie d'eau.

Tableau10. Fréquences de vibrations (Hz) d'une coque cylindrique encastrée sur les deux côtés à vide et totalement remplie d'eau, (L=0.644m, R=0.175m, h= 1mm) (Fig. 11)

méthode	Notre élément		A.A. Lakis [40]		Erreur %
Fréquence N°	À vide	Remplie d'eau	À vide	Remplie d'eau	
1	322,3	137.9	319,2	138,6	0.005
2	343,4	146.20	341,1	152,8	0.043
3	384,6	165,9	381,5	158,3	0.048
4	419,7	178.00	418,4	201,9	0.118
5	529,9	224,40	529,4	205,3	0.093
6	549,8	234,3	542,6	256,9	0.087

Tableau11. Fréquences de vibrations (Hz) d'une coque cylindrique encastrée sur les deux côtés à vide et totalement remplie d'eau (L=0.9, R=0.25m, h=2mm) (Fig. 11)

méthode	Notre élément		A.A. Lakis [40]		Erreur
Fréquence N°	À vide	Remplie d'eau	À vide	Remplie d'eau	
1	277,00	135,00	273,74	135,85	-0.006
2	304,90	149,90	301,53	138,79	0.080
3	318,70	154,60	316,20	166,85	0.073
4	404,20	195,60	402,14	177,67	0.100
5	426,00	212,90	423,71	223,26	-0.0464
6	470,30	228,30	461,15	245,66	0.070

Tableau12. Fréquences de vibrations (Hz) d'une coque cylindrique encastrée sur les deux côtés à vide et totalement remplie d'eau (L=0.9, R=0.25m, h= 1mm) (fig.11)

méthode	Notre élément		A.A. Lakis [40]		Erreur
Fréquence N°	À vide	Remplie d'eau	À vide	Remplie d'eau	
1	202.90	74.10	198.62	79.73	-0.071
2	218.90	80.39	214.34	80.16	0.003
3	224.20	81.63	220.47	93.95	-0.131
4	270.2	98.20	266.69	96.41	0.019
5	285	105.60	280.77	119.90	-0.119
6	332.50	120.70	328.64	129.76	-0.070

v) Nous avons calculé le comportement dynamique du système montré à la figure 12. Il s'agit d'un modèle simplifié de deux ailettes. La structure (oiseau) se compose de deux plaques en aluminium soudées à un massif fait du même matériau. Le module de Young de l'aluminium est E=72 GPa, sa masse volumique ρ=2720 kg/m^3 et son coefficient de Poisson ν= 0.3. Les dimensions de la structure sont montrées sur la figure 12. L'épaisseur des deux plaques est 3.2mm.

Cette structure a fait l'objet d'un travail expérimental [47], les essais ont été effectués en premier lieu dans l'air dans des conditions libre-libre, un système de suspension a été conçu pour assurer ces conditions aux limites. Cette structure a aussi été étudiée au laboratoire de l'IREQ (Institut de recherche d'Hydro Québec).

Nous avons calculé les fréquences de vibration à vide de la structure en utilisant l'élément fini développé ci-haut tout en adaptant le programme à considérer l'épaisseur variable d'un élément à l'autre. Les résultats obtenus sont listés au tableau 13. Nous constatons que nos résultats sont très précis et s'accordent mieux avec les résultats obtenus par le logiciel ANSYS.

La mesure expérimentale des fréquences a été effectuée aussi dans l'eau stagnante en submergeant la structure dans un réservoir d'eau rectangulaire découvert (la limite supérieure de fluide est une surface libre et la limite inférieure est un contact avec un mur rigide). La hauteur de l'eau est de 37.5 cm. Les résultats obtenus sont aussi rapportés au tableau 13. Il est important de

noter qu'au delà de cette hauteur de fluide, les fréquences de la structure ne changent pas lorsqu'on augmente le niveau de fluide sur la plaque [45].

Nous avons calculé les fréquences de vibrations de la même structure totalement submergée dans l'eau tout en satisfaisant les mêmes conditions aux limites imposées durant les tests expérimentaux. La pression d'eau appliquée sur les parois est la somme de la pression appliquée par le fluide se trouvant sur la structure exprimée par l'équation (A.10.1-2) à l'appendice A.10.1 et la pression sous fluide se trouvant sous la structure exprimée par l'équation (A.10-2-2) à l'appendice A.10.2. Les résultats obtenus sont rapportés au tableau 13 et ils sont en bon accord avec les résultats expérimentaux.

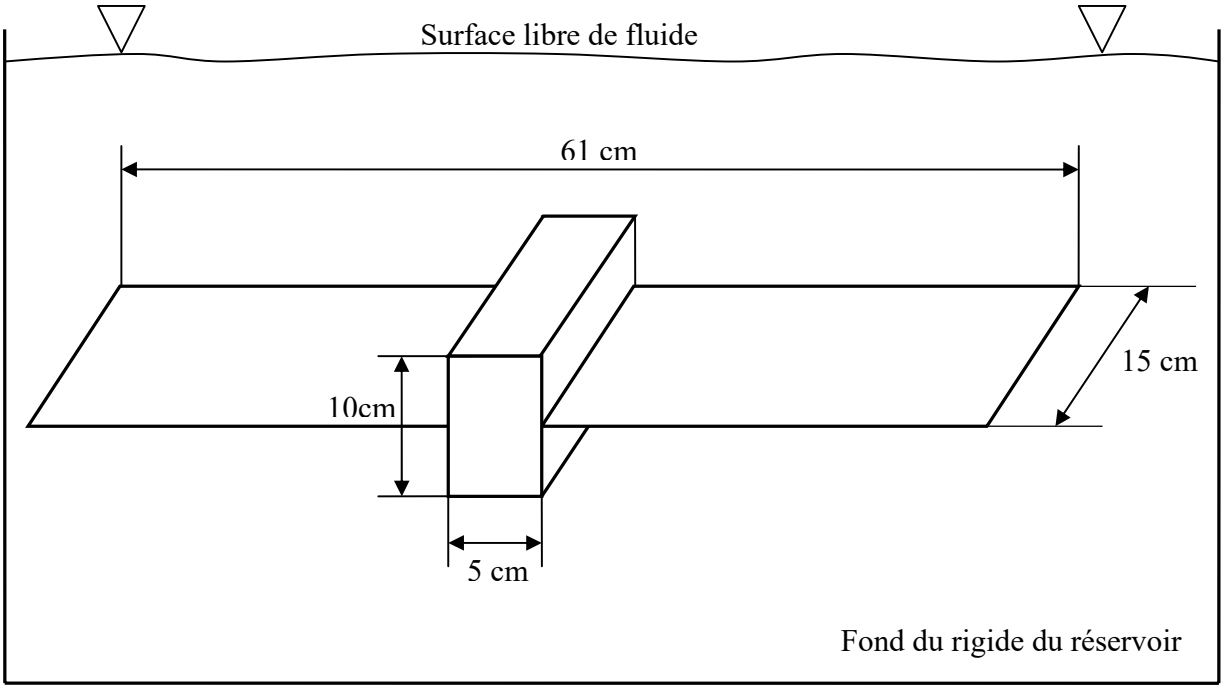


Figure 12. Modèle simplifié de deux ailettes (structure oiseau).

Tableau13. Fréquences de vibrations (Hz) du modèle simplifié des deux aubes (structure oiseau) (Fig. 12)

Fréquence N	Vibrations sans fluide			Structure totalement submergée dans l'eau	
	ANSYS ETS [47]	Expérimentales ETS [47]	Notre élément	Expérimentales ETS [47]	Notre élément
1	38,005	38	38,02	16,9	18,30
2	115,86	106	118,89	42	48,21
3	133,28	137	141,32	ND	52,88
4	159,18	ND	157,25	79	82,13
5	216,41	218	224,32	95	98,10
6	357,15	317	349,75	151	159,51
7	437,46	ND	463,90	ND	164,33
8	ND	393	471,88	206	207,78
9	ND	ND	618,10	265	247,95

vi) Nous rencontrons dans la pratique des structures composées d'un ensemble de plaques parallèles ou radiales identiques en interaction avec le fluide. Si la hauteur de fluide entre les plaques est faible, le fluide transporte l'énergie cinétique d'une paroi à l'autre.

Nous avons étudié le cas de trois plaques parallèles encastrées à un mur rigide comme il est représenté à la figure 13. Le module de Young du matériau utilisé est E= 69 MPa, sa masse volumique ρ=2700 kg/m^3 et son coefficient de Poisson ν = 0.3. Les dimensions de la structure sont montrées à la figure 13, l'épaisseur des plaques est 2mm.

Lorsque le système est submergé dans un grand réservoir, chaque plaque subit une pression supérieure et une pression inférieure causées respectivement par le fluide se trouvant en haut et en bas de la plaque. En plus, les plaques vibrent entre elles selon des modes en phase ou en antiphase. Pour chaque mode, nous avons une pression de fluide distincte. Nous présentons au tableau 14 les pressions appliquées correspondantes à chaque cas.

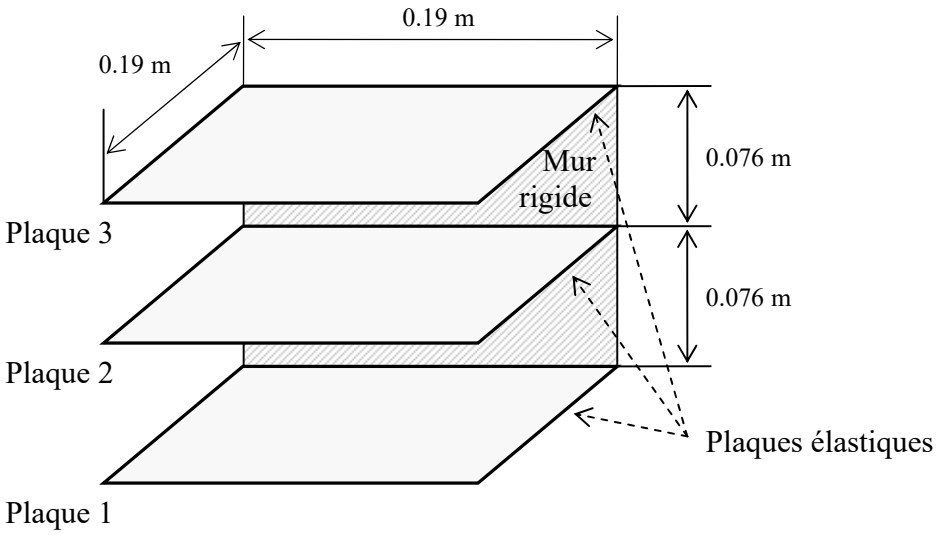


Figure 13 Série de plaques parallèles encastrées à un mur rigide, totalement submergées dans l'eau.

Tableau 14. Numéro d'équation exprimant la pression pour chaque mode de vibration des plaques submergées (Fig. 13)

Modes de vibrations	Plaque 1		Plaque 2		Plaque 3	
	Pression supérieure	Pression inférieure	Pression supérieure	Pression inférieure	Pression supérieure	Pression inférieure
Trois plaques en phase	(27)	(A.10.2-2)	(27)	(27)	(A.10.1-2)	(27)
Plaque (2) en antiphase avec (1) et (3)	(30)	(A.10.2-2)	(30)	(30)	(A.10.1-2)	(30)
Plaque (2) en antiphase avec (3) et en phase avec (1)	(27)	(A.10.2-2)	(30)	(27)	(A.10.1-2)	(30)

On distingue trois modes de vibration du système, parmi plusieurs combinaisons possibles, le reste des cas ne sont que des répétitions de l'un des trois modes.

Au tableau 15, nous avons les fréquences de vibrations selon les trois modes distincts du système de plaques, pour le cas à vide et le cas totalement submergé dans un réservoir d'eau ayant des dimensions infinies.

D'après les résultats, nous constatons que le comportement dynamique de ce système peut être étudié en considérant une seule plaque qui vibre en mode antiphase par rapport aux deux autres, puisque ce mode fournit les plus basses fréquences [46].

Tableau 15 Fréquences de vibrations (Hz) de système à trois plaques (Fig. 13)

Fréquence N	Vibration à vide	Les trois plaques submergées vibrent en phase	Plaque (2) en antiphase avec (1) et (3)	Plaque (2) en antiphase avec (3) et en phase avec (1)
1	46,81	12.27	9,7	10.45
2	46,81	12.27	10.45	11.1
3	46,81	13.37	15.67	12.27
4	114,90	30.12	23.80	25.65
5	114,90	30.12	25.65	27.25
6	114,90	32.81	38.46	30.12
7	289,40	75.88	59.98	64.62
8	289,40	75.88	64.62	68.66
9	289,40	82.67	75.65	75.88
10	365,10	95.71	81.5	81.5

vii) Nous avons aussi étudié le comportement d'un système composé de plusieurs plaques radiales ayant chacune un côté soudé à un axe rigide tel que montré sur la figure 14. L'angle entre chaque deux plaques est de 45° degrés. Toutes les plaques ont des dimensions et des propriétés mécaniques identiques. Chaque plaque a une longueur soudée égale à 0.655m, une largeur égale à 0.2016m et une épaisseur de 9.36mm. Le matériau utilisé est l'acier ayant un module de Young E=207GPa, une masse volumique ρ=7850kg/m^3 et un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$.

La particularité de ce système réside dans le fait que le niveau de fluide sur ou sous la même plaque change d'un élément fini à l'autre. Vu la symétrie axiale du système et la répartition uniforme des plaques dans la direction circonférentielle, l'étude du comportement du système revient à étudier une seule plaque qui vibre selon trois modes différents relatifs aux plaques voisines [46]. Les pressions du fluide appliquées sur la plaque 2 correspondantes à chaque mode de vibration sont mentionnées au tableau 16.

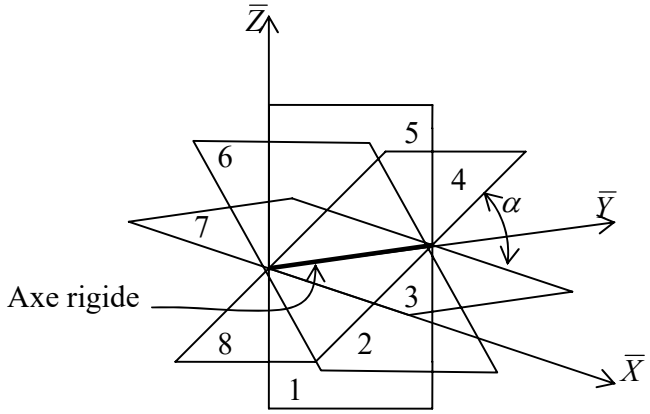


Figure 14. Système composé de n plaques radiales soudées à un axe Y commun.

Tableau 16. Numéro d'équation exprimant la pression pour chaque mode de vibration des plaques radiales submergées (Fig. 14)

Modes de vibrations	Plaque 2	
	Pression supérieure	Pression inférieure
Trois plaques en phase	(27) $\cos\alpha$	(27) $\cos\alpha$
Plaque (2) en antiphase avec (1) et (3)	(30) $\cos\alpha$	(30) $\cos\alpha$
Plaque (2) en antiphase avec (3) et en phase avec (1)	(30) $\cos\alpha$	(27) $\cos\alpha$

Les fréquences de vibrations du système sans fluide et lorsqu'il est totalement submergé dans un réservoir d'eau ayant des dimensions infinies selon les trois modes distincts sont énumérées au tableau 17.

Tableau 17 Fréquences de vibrations (Hz) de système à trois N plaques radiales (Fig. 14)

Fréquence N	Vibration à vide	Les trois plaques vibrent en phase	Plaque (2) en antiphase avec (1) et (3)	Plaque (2) en antiphase avec (3) et en phase avec (1)
1	199,12	139,98	116,42	126,45
2	242,55	170,64	141,64	153,97
3	361,93	255,12	210,68	229,50
4	558,09	394,27	323,56	353,39
5	851,46	602,64	491,68	538,43
6	1243,64	885,08	683,03	772,97
7	1251,09	917,55	699,12	780,63
8	1311,55	957,94	732,21	815,02
9	1440,86	1056,65	785,28	889,27
10	1679,36	1233,79	911,20	1034,15

Il est important de noter que pour le cas d'une série de plaques parallèles ou radiales, nous pouvons réduire l'étude de tout le système à l'étude d'une seule plaque lorsque toutes les plaques ont les mêmes dimensions et les mêmes propriétés mécaniques, la hauteur du fluide est la même entre chaque deux plaques et lorsque l'axe (fig. 14) ou la paroi (fig.10, 13) liant les plaques ensemble est rigide.

viii) Nous avons étudié le comportement dynamique du système représenté sur la figure 15 en supposant que le mur supportant les plaques est élastique et qu'aucune condition de déplacement n'est imposée au système (libre-libre).

Au tableau 18, nous avons les fréquences de vibrations du système à vide calculées par notre programme et par le logiciel ANSYS ainsi que les fréquences de vibrations des trois plaques en phase lorsque le système est totalement submergé dans un réservoir de dimensions infinies. Nous

constatons que les fréquences ne se répètent pas. Donc l'étude de toutes les combinaisons de vibrations possibles s'impose.

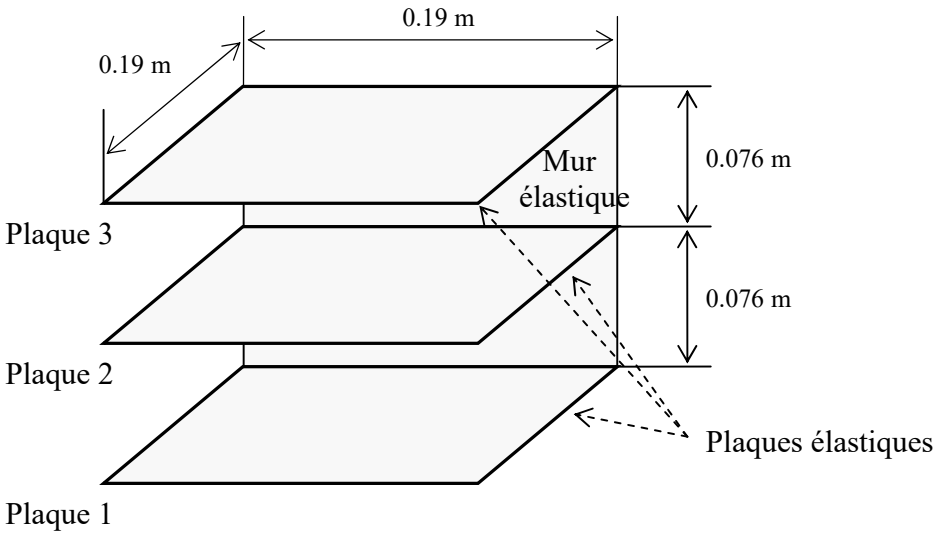


Figure 15 Série de trois plaques parallèles liées l'une à l'autre par un mur élastique, totalement submergées dans l'eau.

Tableau 18. Fréquences de vibrations (Hz) de système à trois plaques parallèles liées entre elles par un mur élastique (Fig. 15)

Fréquence N	Notre élément (vide)	ANSYS (vide)	Les trois plaques en phase (vide)
1	28,71	28,71	7,58
2	37,73	37,739	10.49
3	ND	52,6	ND
4	83,35	84,98	29.59
5	97,74	93,29	54.06
6	105,3	105,26	57.58
7	ND	134	ND
8	147	150	59.6
9	174,7	174,4	68.09
10	186	ND	74.25
11	246,4	245,31	92.17
12	290,7	289,21	92.93
13	317,8	316,09	93.38
14	357,4	358,94	100
15	358,8	360,57	104.7

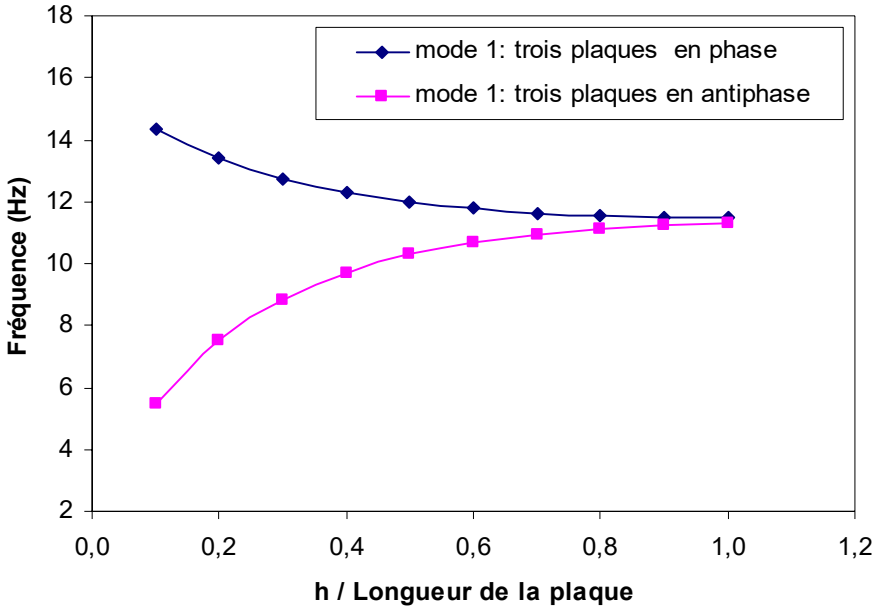
Dans les systèmes composés de plaques parallèles (Fig.9, 13, 15), la hauteur de fluide entre les plaques est un paramètre d'interaction fluide-solide très important.

Nous avons tracé sur la figure 16.a la variation des fréquences en fonction du rapport (hauteur du fluide/longueur de la plaque) pour le système représenté sur la figure 13, lorsque les trois plaques vibrent en phase et en antiphase.

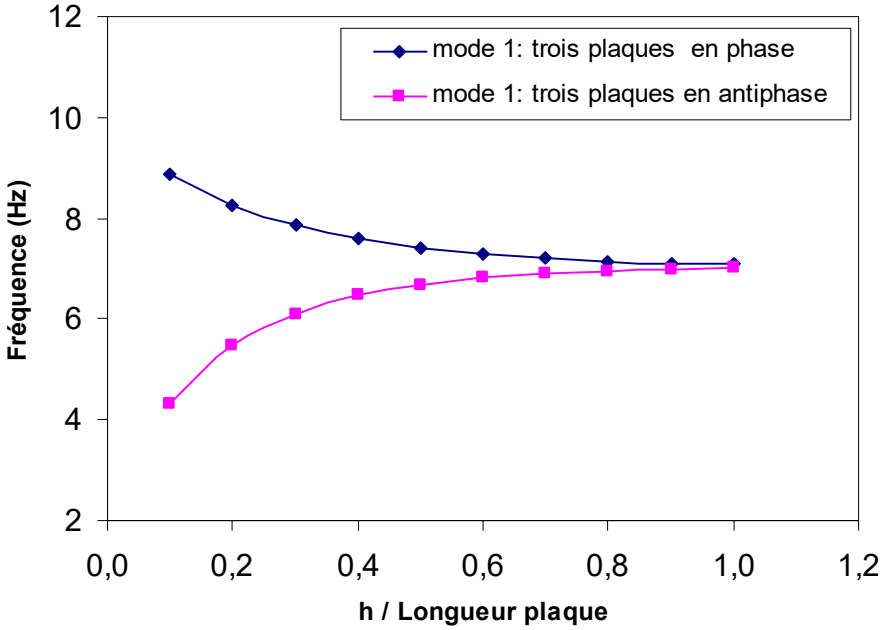
Nous constatons que l'augmentation de la hauteur du fluide cause une diminution des fréquences de modes en phase et une augmentation des fréquences de modes en antiphase. Ce comportement a été souligné par Jeong et al. pour le cas de deux plaques circulaires [32] et celui de deux plaques rectangulaires parallèles [32] en interaction avec le fluide.

Il est aussi important de noter que lorsque la hauteur du fluide est égale à la longueur de la plaque, il n'y a pas de différence entre les modes en phase et les modes en antiphase. Cela signifie que le fluide transporte l'énergie cinétique d'une plaque à l'autre le long d'une distance limitée.

Selon la figure 16.b, le même comportement est aussi valable pour le système de trois plaques attachées à un mur élastique (Fig. 15).



a. Trois plaques encastrées à un mur rigide (Fig. 13)



b. Trois plaques encastrées à un mur élastique (Fig. 15).

Figure 16. Variation des fréquences en fonction de la hauteur du fluide lorsque les plaques parallèles (Fig. 13, 15) vibrent en phase et en antiphase.

Conclusion

Nous avons utilisé ici un élément fini de plaque-fluide pour modéliser des structures submergées ou remplies de fluide. Les matrices de masse et de rigidité sont calculées par intégration exacte pour chaque élément.

La pression du fluide appliquée sur la paroi solide est exprimée en fonction de l'accélération du déplacement transversal de la structure et de la densité du fluide.

Le comportement dynamique (en phase ou en antiphase) du système fluide-structure a été développé. Les cas suivants ont été étudiés : a) deux plaques parallèles, b) 'n' plaques parallèles, c) 'n' plaques radiales, d) réservoir rectangulaire ouvert ou fermé et e) coque cylindrique.

En calculant les fréquences et les modes de vibration à vide de plusieurs structures ayant des géométries différentes, il a été prouvé que l'utilisation des éléments finis de plaques représente très bien le comportement dynamique des coques.

En comparant nos résultats avec ceux des autres travaux numériques, analytiques ou expérimentaux, nous pouvons conclure que l'élément solide-fluide développé représente adéquatement le comportement hydroélastique des structures.

L'avantage principal de cet élément fini est le fait qu'il s'applique au calcul dynamique de structures ayant des épaisseurs variables ainsi que des conditions aux limites fluide-solide quelconques.

L'importance majeure dans ce travail était de vérifier l'aptitude de l'élément fini à bien représenter le comportement hydroélastique des structures. Nous comptons l'utiliser dans le futur pour étudier d'autres aspects de comportement de structures en interaction avec le fluide, par exemple les structures ayant des discontinuités de matériau, des structures courbes et tridimensionnelles ainsi que l'effet de la hauteur de fluide lorsque les parois vibrent selon les modes en phase et en antiphase.

7. RÉFÉRENCES

1- H. Lamb 1945 ***Hydrodynamics*** New York Dover Publications sixth edition.

2- J. G. Berry; E. Reissner 1958 **The effect of an internal compressible fluid column on the breathing vibrations of a thin pressurized cylindrical shell.** *Journal of Aerospace Science N 25, P288-294*

3- U. S. Lindholm et D. D. Kana et H. N. Abramson. 1962. **Breathing vibrations of a circular cylindrical shell with an internal liquid.** *Journal of the Aerospace Sciences N 29. P1052*-1059

4- C. W. Coale et M. Nagano 1965 **Axisymmetric modes of an elastic cylindrical-hemispherical tank partially filled with liquid** *AIAA Symposium on Structural Dynamics and Aeroelasticity.*

5- A.A. Lakis et M.P. Paidoussis, 1971. **Free vibration of cylindrical shells partially filled with liquid.** ***Journal of Sound and Vibration*****,** V19, N1, P1-15

6- A.A. Lakis et S. Neagu, 1997. **Free surface effects on the dynamics of cylindrical shells partially filled with liquid.** *Journal of Sound and Vibration*, V207, N2, P175-205.

7- R. K . Jain 1974 **Vibration of fluid filled orthotropic cylindrical shells** *Journal of Sound and Vibration N39, P379-388*

8- M. Amabili et G. Dalpiaz, 1995. **Breathing vibrations of a horizontal circular cylindrical tank shells partially filled with liquid**. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. Journal of Vibration and Acoustics. N117, P187-191.

9- M. Amabili, 1996. **Free vibration of partially filled horizontal cylindrical shells**. *Journal of Sound and Vibration N191, P5 757-5780*

10- J. Mistry et J.C. Menezes, 1995. **Vibration of cylinders partially-filled with liquids.** *Journal of Sound and Vibration*, V117, P 87-93.

11- N. Yamaki; J. Tani et T. Yamaji 1984. **Free vibration of a clamped-camped circular cylindrical shell partially filled with liquid.** *Journal of Sound and Vibration N94, P*531-550.

12- J.W.S. LORD RAYLEIGH, 1945. **Theory of Sound**, *New York: Dover, second edition (First edition, 1877).*

13- H. LAMB, 1921. **On the vibrations of an elastic plate in contact with water.** *Proceeding of Royal Society*, A98, P205-216. London

14. J.H. POWELL and J.H.T. ROBERTS, 1923. **On the frequency of vibration of circular diaphragms.** *Proceedings of the Physical Society London* N35 P170-182.

15- N.W. MCLACHLAN, 1932. **The accession to inertia of flexible discs vibrating in a fluid.** . *Proceedings of the Physical Society*, London: 44, P546-555.

16- W.H. PEAKE and E.G. THURSTON, 1954. **The lowest resonant frequency of a water loaded circular plate.** *Journal of the Acoustical Society of America N26, P166-168.*

17- U.S. LINNDHOLM, D.D. KANA, W.H. CHU and H.N. ABRAMSON, 1965,. **Elastic vibration characteristics of cantilever plates in water**. *Journal of Ship Research*, P11-22

18- G. MUTUVEERAPPAN, N. GANESAN AND M.A. VELUSWAMI, 1980**. Influence of fluid added mass on the vibration characteristics of plates under various.** *Journal of Sound and Vibration,* V69, N4, P 612-615.

19- F. MONTERO DE ESPINOSA and J.A. GALLEGO-JUAREZ, 1984. **On the resonance frequencies of water-loaded circular plates.** *Journal of Sound and Vibration,* V94, N2, P217-222.

20- Y. FU and W. G.PRICE, Nov 1987. **Interactions between a partially or totally immersed vibrating cantilever plate and the surrounding fluid.** *Journal of Sound and Vibration*, V118, N3, P495-513

21- M.R. Haddara, S. Cao, 1996. **A study of the dynamic response of submerged rectangular flat plates.** *Marine Structures.* N9, P913–933.

22- M.K. KWAK AND K.C. KIM, May 1991. **Axisymmetric vibration of circular plates in contact with fluid.***Journal of Sound and Vibration*, V146, N3, P381-389.

23- M.K. KWAK**,** June 1991. **Vibration of circular plates in contact with water.** *Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, V58, N2, P480-483

24- M.K. KWAK, April 1997. *Journal of Sound and Vibration*, V201, N3, P293-303. **Hydroelastic vibration of circular plates.**

25- M.K. KWAK, Dec 1994. *Journal of Sound and Vibration*, V178, N5, P688-690 **Vibration of circular membranes in contact with water.**

26- M. AMABILI, G.FROSALI and M.K. KWAK, 1996.**Free vibrations of annular plates coupled with fluids.** *Journal of Sound and Vibration* V191, N5, P825-846.

27- M.K. KWAK**,** March 1996**. Hydroelastic vibration of rectangular plates.** *Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, V63, N1, P110-115.

28- M. AMABILI and M.K. KWAK, Sept 1999, **Vibration of circular plates on a free fluid surface: effect of surface waves.** *Journal of Sound and Vibration*, V226, N3, P407-424.

29- M.K. KWAK and S.B. HAN, Feb 2000. **Effect of fluid depth on the hydroelastic vibration of free-edge circular plate**. *Journal of Sound and Vibration,* V230, N1, P171-85.

30- M. AMABILI, June 1996. **Effect of finite fluid depth on the hydroelastic vibrations of circular and annular plates.** *Journal of Sound and Vibration*, V193, N4, P909-925.

31- Kyeong_Hoon Jeong Tae-Wan Kim et Keun_Bae Park. **Free vibration analysis of two circular disks coupled with fluid.** PVP-Vol 366. Technologies in Reactor safety, Fluid-Structure interaction, sloshing and Natural Hazard engineering ASME 1998. P157- 164.

32- Kyeong_Hoon Jeong. 2003 **Free vibration of two identical circular plates coupled with bounded fluid.** *Journal of Sound and Vibration*, V260, N4. P653-670

33- Kyeong_Hoon Jeong; Gye-Hyoung Yoo et Seong-Cheol Lee. 2004 **Hydroelastic vibration of two identical rectangular plates.** *Journal of Sound and Vibration*, V272, N3-5, P539-555

34- M.C. Kim et S.S. Lee. 1997. **Hydroelastic analysis of rectangular tank**. The aerospace corporation El Segundo, California 90245

35- Y.K. Cheung et D. Zhou. 2000 **Coupled vibratory characteristics of a rectangular container bottom plate**. *Journal of fluids and structures* V14, P339-357.

36- Y.K. Cheung et D. Zhou 2002. **Hydroelastic vibration of circular container bottom plate using the Galerkin method**. *Journal of fluids and structures* V16(4), P561-580.

37- Santana Mitra et K.P. Sinhamahapatra. 2005 **Coupled slosh dynamics of liquid filled containers using pressure based finite element method**. Exploring innovation in education and research Tainan, 1-5 Mars 2005

38- H.F. Bauer 1980 **Hydroelatic vibrations in rectangular container. International journal of solids and structrures.** V17 P639-652

39- O.C. Zienkiewicz; R.L. Taylor, 2000. **Finite element method Solid mechanics** (5Th Edition) Volume 2

40- A.A. LAKIS and M.P. PAIDOUSSIS, Feb 1972. **Dynamic analysis of axially non-uniform thin cylindrical shells.** *Journal of Mechanical Engineering Science*, V14, N1, P49-71.

41 – G. Bursuc et A.A. Lakis **Effet de la surface libre sur la dynamique des coques cylindriques horizontales partiellement remplies de liquide.** CA2PQ. UP.8 2003 B945

42- A.A. LAKIS and A.SELMANE, 1997. **Vibration analysis of anisotropic open cylindrical shells subjected to a flowing fluid**. *Journal of Fluids and Structures*, N11, P111–134.

43- R. SZILARD, 1974. **Theory and Analysis of Plate** Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall,.

44- J. L. SANDERS, 1959. **An improved first approximation theory for thin shell.** *NASA TR*-24.

45- Y. Kerboua ; A.A.Lakis; M. Thomas et L. Marcouiller. **Comportement dynamique des plaques rectangulaires submergées**. EPM-RT-2005-05

46- Guo, C.Q ; Paidoussis. 2000. M.P. **Analysis of hydroelastic instabilities of rectangular parallel-plate assemblies.** Transactions of the ASME. Journal of Pressure Vessel Technology. N4. V122, P502-508

47- K. Abassi et M. Thomas. **Analyse modale expérimentale d'une structure vibrant dans l'eau.** Ecole de technologie supérieure. Mémoire 2005.

49. R.D. COOK, 2002. *John Wiley & Sons, New York*. **Concepts and applications of finite element analysis.**

APPENDICES

A.1. Matrice R (3x20)

$$[R]=\begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{A} & \frac{y}{B} & \frac{xy}{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x}{A} & \frac{y}{B} & \frac{xy}{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x}{A} & \frac{y}{B} & \frac{x^2}{A^2} & \frac{xy}{AB} & \frac{y^2}{B^2} & \frac{x^3}{A^3} & \frac{x^2y}{A^2B} & \frac{xy^2}{AB^2} & \frac{y^3}{B^3} & \frac{x^3y}{A^3B} & \frac{xy^3}{AB^3} \end{bmatrix}$$

A.2. Matrice R_f (3x20)

$$[R_f]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x}{A} & \frac{y}{B} & \frac{x^2}{A^2} & \frac{xy}{AB} & \frac{y^2}{B^2} & \frac{x^3}{A^3} & \frac{x^2y}{A^2B} & \frac{xy^2}{AB^2} & \frac{y^3}{B^3} & \frac{x^3y}{A^3B} & \frac{xy^3}{AB^3} \end{bmatrix}$$

A.3. Matrice Q (3x20)

$$[Q]=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{A} & 0 & \frac{y}{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{B} & \frac{x}{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{B} & \frac{x}{BA} & 0 & \frac{1}{A} & 0 & \frac{y}{BA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{A^2} & 0 & 0 & -\frac{x}{A^3} & -\frac{y}{BA^2} & 0 & 0 & -\frac{xy}{BA^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{B^2} & 0 & 0 & -\frac{x}{B^2A} & -\frac{y}{B^3} & 0 & -\frac{xy}{AB^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{BA} & 0 & 0 & -\frac{2x}{BA^2} & -\frac{2y}{B^2A} & 0 & -\frac{x^2}{BA^3} & -\frac{y^2}{AB^3} \end{bmatrix}$$

A.4. Matrice A^{-1} (3x20)

$$
[A]^{-1} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{A}{x_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{x_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{B}{y_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{B}{y_e} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{AB}{x_e y_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AB}{x_e y_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AB}{x_e y_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AB}{x_e y_e} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{A}{x_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{x_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{B}{y_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{B}{y_e} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{AB}{x_e y_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AB}{x_e y_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AB}{x_e y_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AB}{x_e y_e} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{-6A^2}{x_e^2} & -\frac{4A^2}{x_e} & 0 & 0 & 0 & \frac{6A^2}{x_e^2} & -\frac{2A^2}{x_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{AB}{x_e y_e} & -\frac{AB}{y_e} & -\frac{AB}{x_e} & 0 & 0 & \frac{AB}{x_e y_e} & 0 & \frac{AB}{x_e} & 0 & 0 & -\frac{AB}{x_e y_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AB}{x_e y_e} & \frac{AB}{x_e y_e} & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6B^2}{y_e^2} & 0 & -\frac{4B^2}{y_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6B^2}{y_e^2} & 0 & -\frac{2B^2}{y_e} \\
0 & 0 & \frac{12A^3}{x_e^3} & \frac{6A^3}{x_e^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12A^3}{x_e^3} & \frac{6A^3}{x_e^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{6BA^2}{x_e^2 y_e} & \frac{4BA^2}{x_e y_e} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6BA^2}{x_e^2 y_e} & \frac{2BA^2}{x_e y_e} & 0 & 0 & 0 & \frac{6BA^2}{x_e^2 y_e} & -\frac{2BA^2}{x_e y_e} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6BA^2}{x_e^2 y_e} & \frac{4BA^2}{x_e y_e} & 0 \\
0 & 0 & \frac{6B^2 A}{x_e y_e^2} & 0 & \frac{4B^2 A}{x_e y_e} & 0 & 0 & -\frac{6B^2 A}{x_e y_e^2} & 0 & -\frac{4B^2 A}{x_e y_e} & 0 & 0 & \frac{6B^2 A}{x_e y_e^2} & 0 & -\frac{2B^2 A}{x_e y_e} & 0 & 0 & -\frac{6B^2 A}{x_e y_e^2} & 0 & \frac{2B^2 A}{x_e y_e} \\
0 & 0 & \frac{12B^3}{y_e^3} & 0 & \frac{6B^3}{y_e^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12B^3}{y_e^3} & 0 & \frac{6B^3}{y_e^3} \\
0 & 0 & -\frac{12BA^3}{x_e y_e} & -\frac{6A^3 B}{x_e^3 y_e} & 0 & 0 & 0 & \frac{12A^3 B}{x_e^3 y_e} & -\frac{6A^3 B}{y_e x_e^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12A^3 B}{x_e^3 y_e} & \frac{6BA^3}{x_e^2 y_e} & 0 & 0 & 0 & \frac{12BA^3}{y_e x_e^3} & \frac{6BA^3}{y_e x_e^2} & 0 \\
0 & 0 & -\frac{12B^3 A}{y_e^3 x_e} & 0 & -\frac{6B^3 A}{x_e y_e^2} & 0 & 0 & \frac{12B^3 A}{x_e y_e^3} & 0 & \frac{6B^3 A}{x_e y_e^3} & 0 & 0 & -\frac{12B^3 A}{x_e y_e^3} & 0 & \frac{6B^3 A}{x_e y_e^3} & 0 & 0 & \frac{12B^3 A}{x_e y_e^3} & 0 & -\frac{6B^3 A}{x_e y_e^3}
\end{bmatrix}
$$

A.5. Équations d'équilibre d'une plaque

Les équations d'équilibre d'une plaque en fonction des champs des déplacements de la surface moyenne, selon la théorie de Sanders [44], sont :

$$P_{22}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + P_{21}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + P_{33}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) = 0 \qquad \text{(E1)}$$

$$P_{11}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + P_{12}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + P_{33}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad \text{(E2)}$$

$$P_{44}\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2}(P_{45} + P_{54} + 2P_{66}) + P_{55}\frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0 \qquad \text{(E3)}$$

A.6. Calcul du vecteur de constantes $\{C\}$:

Chaque nœud (i) possède un vecteur de déplacements, exprimé par :

$$\{\delta_i\} = \{U_i, V_i, W_i, \partial W_i/\partial x, \partial W_i/\partial y\}^T$$

où :

U_i, V_i, sont les déplacements de la surface moyenne dans le plan X, Y, correspondant au nœud i;

W_i est la déflexion de la surface moyenne, correspondant au nœud i.

Le vecteur des déplacements élémentaires est :

$$\{\delta\} = \{\{\delta_i\}, \{\delta_j\}, \{\delta_k\}, \{\delta_l\}\}^T$$

De l'équation (4), le vecteur de déplacements $\{\delta\}$ pour chaque élément s'écrit comme suit :

$$\{\delta\} = [A]\{C\}$$

On peut donc exprimer le vecteur des constantes inconnues en fonction de déplacements nodaux, En utilisant la relation suivante :

$$\{C\} = [A]^{-1}\{\delta\}$$

L'inverse de la matrice [A] est donnée à l'appendice A ci-haut.

La substitution du vecteur des constantes dans le champ de déplacements (4) nous donne :

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = [R][A]^{-1}\{\delta\}$$

A.7 Champ de déformations

Le champ de déformations est lié au champ de déplacements comme suit [44] :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial U/\partial x \\ \partial V/\partial y \\ \partial V/\partial x + \partial U/\partial y \\ -\partial^2 W/\partial x^2 \\ -\partial^2 W/\partial y^2 \\ -2\partial^2 W/\partial x \partial y \end{Bmatrix}$$

A.8. Matrice d'élasticité P

$[P]$ est la matrice d'élasticité (6x6). Pour un matériau isotrope, il n'y a pas de couplage entre l'effet membrane et l'effet de flexion, la matrice d'élasticité se réduit à :

$$P_{11} = P_{22} = D,\ P_{44} = P_{55} = K,\ P_{12} = P_{21} = \nu D,\ P_{45} = P_{54} = \nu K P_{33} = (1-\nu)D/2,\ \ P_{66} = (1-\nu)K/2$$

Avec :

$$K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},\ D = \frac{Eh}{1-\nu^2},$$

où :

E est le Module de Young, ν est le coefficient de Poisson et h est l`épaisseur de l'élément fini.

A9. Vecteurs de déplacements élémentaires

a. Vecteur élémentaire de déplacements au repère local $X,\ Y,\ Z$

$$\{\delta'\} = \{U_i, V_i, W_i, W_{i,x}, W_{i,y}, 0, U_j, V_j, W_j, W_{j,x}, W_{j,y}, 0, U_k, V_k, W_k, W_{k,x}, W_{k,y}, 0, U_l, V_l, W_l, W_{l,x}, W_{l,y}, 0\}^T$$

b. Vecteur élémentaire de déplacements au repère global $\overline{X},\ \overline{Y},\ \overline{Z}$

$$\{\overline{\delta}_i\} = \{\overline{U}_i, \overline{V}_i, \overline{W}_i, \beta_{i,\overline{x}}, \beta_{j,\overline{y}}, \theta_{i,\overline{Z}}, \overline{U}_j, \overline{V}_j, \overline{W}_j, \beta_{j,\overline{x}}, \beta_{j,\overline{y}}, \theta_{j,\overline{Z}}, \overline{U}_k, \overline{V}_k, \overline{W}_k, \beta_{k,\overline{x}}, \beta_{k,\overline{y}}, \theta_{k,\overline{Z}}, \overline{U}_l, \overline{V}_l, \overline{W}_l, \beta_{l,\overline{x}}, \beta_{l,\overline{y}}, \theta_{l,\overline{Z}}\}^T$$

A.10.1 Élément fini fluide-solide avec surface libre

En assumant que les perturbations résultant du mouvement de fluide à la surface libre (figure3) sont faibles, nous pouvons appliquer au potentiel de vitesse la condition suivante:

$$\left.\frac{\partial\phi(x,y,z,t)}{\partial z}\right|_{z=h_l} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \qquad \text{(A.10.1-1)}$$

où :

g est l'accélération de la gravité.

En tenant compte de la condition précédente et de la condition d'imperméabilité (20), la pression à l'interface de l'élément est:

$$P = -\frac{\rho_f}{\mu}\left[\frac{1+Ce^{2\mu h_l}}{1-Ce^{2\mu h_l}}\right]\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = Z_{f1}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \qquad \text{(A.10.1-2)}$$

Il a été prouvé [45] que la valeur de C tend asymptotiquement vers -1.

A.10.2. Élément fini fluide solide avec mur rigide

L'autre condition à la limite de fluide représentée sur la figure A-10.2 adoptée par Lamb et McLachlan [13, 15] connue sous le nom de fréquence nulle est la condition de mur rigide exprimée par :

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=h_1} = 0 \qquad \text{(A.10.2-1)}$$

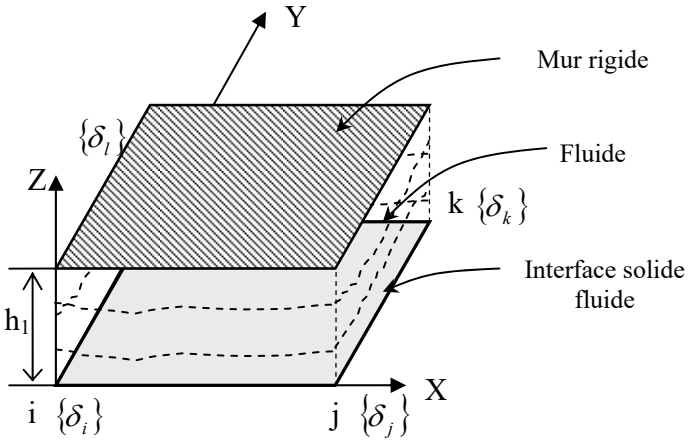


Figure A.10.2 : Élément fini solide-fluide au repère local X, Y, Z ayant à la limite un mur rigide.

En tenant compte de la condition précédente et de la condition d'imperméabilité (20), la pression à l'interface de l'élément est:

$$P = -\frac{\rho_f}{\mu}\left[\frac{e^{-2\mu h_1}+1}{e^{-2\mu h_1}-1}\right]\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = Z_{f2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \qquad \text{(A.10.2-2)}$$

A.10.3. Élément fini fluide-solide avec surface libre ayant un potentiel nul

Une autre condition à la limite de fluide est représentée sur la figure A.10.3 et est connue sous le nom de la condition de fréquence infinie exprimée par :

$$\phi = 0 \qquad \text{(A.10.3-1)}$$

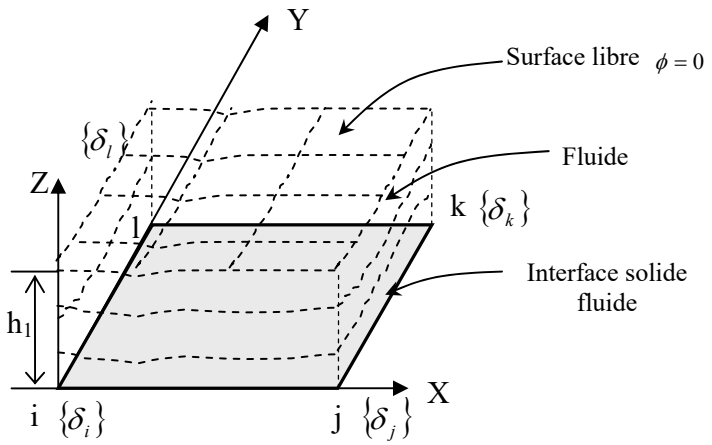


Figure A.10.3 : Élément fini solide-fluide au repère local X, Y, Z ayant à la limite une surface libre avec une pression nulle ($\phi = 0$).

En tenant compte de la condition précédente et de la condition d'imperméabilité (20), la pression à l'interface de l'élément est:

$$P = -\frac{\rho_f}{\mu}\left[\frac{1-e^{2\mu h_1}}{1+e^{2\mu h_1}}\right]\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = Z_{f3}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \qquad \text{(A.10.3-2)}$$

A.11. MATRICES DE MASSE ET DE RIGIDITE AU REPERE LOCAL

$$[k]^e = \begin{bmatrix} [k_{ii}] & [k_{ij}] & [k_{ik}] & [k_{il}] \\ & [k_{jj}] & [k_{jk}] & [k_{jl}] \\ & & [k_{kk}] & [k_{kl}] \\ Sym & & & [k_{ll}] \end{bmatrix}$$

$$[k']^e = \begin{bmatrix} [k_{ii}] & \{0\} & [k_{ij}] & \{0\} & [k_{ik}] & \{0\} & [k_{il}] & \{0\} \\ & 0 & \{0\}^T & 0 & \{0\}^T & 0 & \{0\}^T & 0 \\ & & [k_{jj}] & \{0\} & [k_{jk}] & \{0\} & [k_{jl}] & \{0\} \\ & & & 0 & \{0\}^T & 0 & \{0\}^T & 0 \\ & & & & [k_{kk}] & \{0\} & [k_{kl}] & \{0\} \\ & & & & & 0 & \{0\}^T & 0 \\ & & & & & & [k_{ll}] & \{0\} \\ Sym & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

NOMENCLATURE

X, Y, Z	: repère local défini pour chaque élément fini
$\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$	: repère global défini pour la structure
U, V	: champs de déplacements selon l'axe X et l'axe Y respectivement
W	: champ de déplacement selon l'axe Z
$\overline{U}, \overline{V}$	: champs de déplacements selon l'axe $\overline{X}$ et l'axe $\overline{Y}$ respectivement
$\overline{W}$	: champ de déplacement selon l'axe $\overline{Z}$
U_i, V_i	: déplacements selon l'axe X et l'axe Y respectivement, correspondant au nœud i
W_i	: déplacement selon l'axe Z correspondant au nœud i
$W_{i,x}$	: première dérivée de déplacement transversal par rapport à X, au nœud i
$W_{i,y}$	: première dérivée de déplacement transversal par rapport à Y, au nœud i
$\overline{U}_i, \overline{V}_i$	: déplacements selon l'axe $\overline{X}$ et l'axe $\overline{Y}$ respectivement, correspondant au nœud i
$\overline{W}_i$	: déplacement selon l'axe $\overline{Z}$ correspondant au nœud i
$\beta_{\overline{X}}$	: rotation autour de l'axe $\overline{Y}$, au nœud i
$\beta_{\overline{Y}}$	: rotation autour de l'axe $\overline{X}$, au nœud i
$\theta_{\overline{Z}}$	: rotation autour de l'axe $\overline{Z}$, au nœud i
h	: épaisseur de l'élément fini
ω	: fréquence de vibration naturelle de la plaque en rad/sec
A	: longueur de la structure (plaque) selon l'axe X
B	: longueur de la structure (plaque) selon l'axe Y
ρ_s	: densité de la structure
ρ_f	: densité de fluide
g	: accélération de la gravité
h_1	: niveau de fluide au-dessus de l'élément fini
h_2	: niveau de fluide au-dessous de l'élément fini
Z_{fi}	: coefficient de la pression induite par le fluide
D	: rigidité de membrane, $Eh/(1-\nu^2)$
K	: rigidité de flexion, $Eh^3/12(1-\nu^2)$

i	: nombre complexe $i^2=-1$
ν	: coefficient de Poisson
E	: module de Young
P_{ij}	: cœfficients de la matrice d'élasticité du matériau
x_e	: longueur de l'élément selon l'axe X
y_e	: longueur de l'élément selon l'axe Y
P	: pression de fluide
ϕ(x, y, z,t)	: fonction du potentiel de vitesse
n	: numéro de mode de vibration axial selon X
m	: numéro de mode de vibration axial selon Y
[R]	: matrice (3x20), définie à l'équation (4)
$[R_f]$	: matrice (3x20), donnée à l'équation (32)
$\{C\}$	: vecteur des constantes inconnues, défini par l'équation (5)
$\{\delta\}^e$	: vecteur élémentaire des déplacements au repère local X, Y, Z défini par l'équation (4)
$\{\bar{\delta}\}^e$	: vecteur élémentaire des déplacements au repère global $\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}$ défini par l'équation (12)
$[A]^{-1}$	: matrice (20x20), définie par l'équation (4)
$\{\varepsilon\}$	: vecteur de déformations, défini dans l'équation (5)
$[Q]$	: matrice (6x20), définie par l'équation (5)
$\{\sigma\}$	: vecteur de contraintes
$\{P\}$	: pression de fluide
$[P]$	: matrice d'élasticité (6x6)
$[k]^e$	: matrice de rigidité élémentaire au repère local (20x20)
$[m]^e$	: matrice de masse élémentaire au repère local (20x20)
$[m_f]^e$	: matrice élémentaire de masse induite par les forces d'inertie de fluide au repère local (20x20)

$[\bar{k}]^e$: matrice de rigidité élémentaire au repère global (24x24)

$[\bar{m}]^e$: matrice de masse élémentaire au repère global (24x24)

$\{F\}^e$: vecteur de force élémentaire au repère local

$[M_s]$: matrice globale de masse

$[K_s]$: matrice globale de rigidité

$[M_f]$: matrice globale de masse représentant l'effet de force d'inertie induite par le fluide

$\{\bar{\delta}_T\}$: vecteur de déplacements global

$[R_f]$: matrice (3x20), définie par l'équation (48)

$\{\bar{\delta}_{0T}\}$: vecteur contenant les amplitudes des modes de déplacements

$[T]$: matrice de transformation géométrique liant les déplacements nodaux du repère local à ceux du repère global

$[T]^e$: matrice de transformation géométrique liant les déplacements élémentaires du repère local à ceux du repère global

L'École Polytechnique se spécialise dans la formation d'ingénieurs et la recherche en ingénierie depuis 1873

École Polytechnique de Montréal

École affiliée à l'Université de Montréal

Campus de l'Université de Montréal
C.P. 6079, succ. Centre-ville
Montréal (Québec)
Canada H3C 3A7

www.polymtl.ca

ÉCOLE
POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL