



Titre: Comportement dynamique des plaques rectangulaires submergées
Title:

Auteurs: Youcef Kerboua, Aouni A. Lakis, Marc Thomas, & Luc Marcouiller
Authors:

Date: 2005

Type: Rapport / Report

Référence: Kerboua, Y., Lakis, A. A., Thomas, M., & Marcouiller, L. (2005). Comportement dynamique des plaques rectangulaires submergées. (Rapport technique n° EPM-RT-2005-05). <https://publications.polymtl.ca/3144/>
Citation:

 Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/3144/>
PolyPublie URL:

Version: Version officielle de l'éditeur / Published version

Conditions d'utilisation: Tous droits réservés / All rights reserved
Terms of Use:

 Document publié chez l'éditeur officiel
Document issued by the official publisher

Institution: École Polytechnique de Montréal

Numéro de rapport: EPM-RT-2005-05
Report number:

URL officiel:
Official URL:

Mention légale:
Legal notice:

EPM-RT-2005-05

**COMPOTEMENT DYNAMIQUE DES PLAQUES
RECTANGULAIRES SUBMERGÉES**

Y. Kerboua, A.A. Lakis, M. Thomas et L. Marcouiller
Département de Génie mécanique
École Polytechnique de Montréal

Août 2005

Poly

EMP-RT-2005-05

**COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES PLAQUES
RECTANGULAIRES SUBMERGEES**

Y.Kerboua¹, A.A.Lakis¹, M. Thomas² et L. Marcouiller³

¹ Département de génie mécanique, École Polytechnique de
Montréal

C.P. 6079, succ. Centre Ville Montréal (Québec) H3C 3A7

² Département de génie mécanique, École de technologie
supérieure

1100, Notre-Dame Ouest, Montréal (Québec) CANADA H3C 1K3

³ Institut de recherche d'Hydro Québec, Varennes, Québec

Août 2005

©2005

Y.Kerboua¹, A.A.Lakis¹, M. Thomas² et L. Marcouiller³
Tous droits réservés

Dépôt légal :

Bibliothèque nationale du Québec, 2005
Bibliothèque nationale du Canada, 2005

EPM-RT-2005-05

Comportement dynamique des plaques rectangulaires submergées par : Y.Kerboua¹, A.A.Lakis¹, M. Thomas² et L. Marcouiller³

¹ Département de génie mécanique, École Polytechnique de Montréal

² Département de génie mécanique, École de technologie supérieure

³ Institut de recherche d'Hydro Québec

Toute reproduction de ce document à des fins d'étude personnelle ou de recherche est autorisée à la condition que la citation ci-dessus y soit mentionnée.

Tout autre usage doit faire l'objet d'une autorisation écrite des auteurs. Les demandes peuvent être adressées directement aux auteurs (consulter le bottin sur le site <http://www.polymtl.ca/>) ou par l'entremise de la Bibliothèque :

École Polytechnique de Montréal
Bibliothèque – Service de fourniture de documents
Case postale 6079, Succursale «Centre-Ville»
Montréal (Québec)
Canada H3C 3A7

Téléphone :

(514) 340-4846

Télécopie :

(514) 340-4026

Courrier électronique :

biblio.sfd@courriel.polymtl.ca

Ce rapport technique peut-être repéré par auteur et par titre dans le catalogue de la Bibliothèque : <http://www.polymtl.ca/biblio/catalogue/>

RÉSUMÉ

Le comportement dynamique d'une structure en contact avec un fluide change d'une façon remarquable, une chute de fréquences très importante est constatée, elle est causée par l'échange d'énergie cinétique entre le fluide et la structure.

Nous développons dans ce travail un élément fini (fluide-plaque) nous permettant de modéliser toute structure tridimensionnelle submergée dans un liquide.

Il s'agit d'une méthode hybride combinant la méthode des éléments finis avec la théorie classique des plaques minces. Le champ de déplacements de membrane est approché par des polynômes bilinéaires et le déplacement transversal par une fonction exponentielle, ayant la forme générale de la solution exacte des équations d'équilibre.

La matrice de masse et la matrice de rigidité sont calculées par intégrations exactes en se basant sur la méthode des éléments finis.

La pression de fluide appliquée sur la plaque est calculée en utilisant l'équation de Bernoulli à l'interface fluide solide et l'équation différentielle gouvernant le potentiel de vitesse. La condition d'imperméabilité assure un accouplement complet entre le fluide et la structure.

Les résultats obtenus permettent de conclure que les fréquences calculées par cette méthode sont en accord avec celles obtenues par d'autres chercheurs. Les effets de différentes conditions aux limites de plaque et de fluide ont été explorés dans ce travail.

1. BIBLIOGRAPHIE

Les plaques sont des structures très utilisées dans l'industrie sous-marine, l'aérospatial, le génie civil, le domaine de l'énergie, etc. Tous ces domaines sont stratégiques et économiquement très importants. C'est pour cette raison que les plaques ont fait l'objet d'un très grand nombre de travaux depuis plus d'un siècle. Souvent, dans ces domaines d'applications, les plaques rentrent en contact avec du fluide au repos ou en écoulement. Dans ce cas, les vibrations de la plaque sont transférées au fluide, cela cause une augmentation considérable de l'énergie cinétique du système. Au 18^e siècle, le premier modèle de formulation de l'effet membrane a été fait par Euler, presque un demi-siècle plus tard, Lagrange a mis en œuvre les équations différentielles de vibrations des plaques. Navier a développé une méthode pour calculer les modes de vibrations et les fréquences pour certaines conditions aux limites. Kirchhoff [25] est considéré le fondateur de la théorie moderne des plaques dans laquelle il a considéré en même temps l'effet membrane et l'effet de flexion. Il a conclu que nous pouvons utiliser le travail virtuel pour le calcul des modes et des fréquences. Love [29] a appliqué le travail de Kirchhoff aux plaques épaisses. Leissa a rassemblé dans un livre un grand nombre de travaux concernant les vibrations des plaques sans fluide, de plusieurs chercheurs [30]. Le besoin de l'industrie aéronautique a motivé la recherche dans ce domaine. En 1956, Turner et al. [28] ont utilisé la méthode des éléments finis pour l'analyse des plaques, ce qui a permis d'étudier des problèmes de plaques compliqués. Zienkiewicz [27] a contribué au développement de plusieurs éléments finis. Bogner et al. [26] ont travaillé sur l'élément de plaque en utilisant les fonctions d'interpolation bicubique.

La première tentative de modélisation de comportement hydroélastique d'une plaque a été faite par Lord Rayleigh (1877) [1]. Il a calculé l'augmentation de l'inertie d'un disque rigide

(in an infinite baffle). En 1920, Lamb [2] a calculé le premier mode de flexion d'une plaque circulaire, mince encastrée sur toute la circonférence, en contact avec le fluide et posée dans l'ouverture d'un mur rigide infini. La méthode développée a été basée sur le calcul de l'énergie cinétique du fluide. La fréquence de résonance a été calculée en utilisant la méthode de Rayleigh. Powell et Robert (1923) [3] ont vérifié expérimentalement le travail de Lamb. Ils ont souligné que leurs fréquences sont légèrement supérieures à celles calculées par Lamb. Cet écart a été expliqué plus tard [11] par la différence des conditions aux limites entre les deux travaux. McLachlan [4], Peake et Thurston [5] ont généralisé le travail de Lamb à des plaques circulaires simplement supportées ou libres. Lindholm et al. (1965) [6] ont fait une étude expérimentale concernant les vibrations libres d'une plaque encastrée à un seul côté et submergée dans l'eau. Les résultats ont été comparés à une approche théorique basée sur la théorie des poutres et des plaques minces dans laquelle des facteurs de masses apparentes ont été introduits. Les expériences ont été exécutées dans un réservoir cubique suffisamment large. Les plaques étaient encastrées dans une poutre en I. Le système permettait de faire des tests sur des plaques verticales, horizontales et inclinées à 45 degrés. Une série de quinze plaques en acier ayant différents rapports de dimensions a été utilisée pour faire les tests. Les premières fréquences ont été calculées pour différents niveaux de fluide. Les résultats obtenus montrent que lorsque la plaque est loin de la surface libre d'une distance égale à la moitié de la longueur de la plaque, les fréquences cessent de changer et l'effet de la surface libre devient moins important. Pour une plaque verticale totalement submergée dans l'eau, nous avons le même comportement que celui de la plaque horizontale totalement submergée. Si la plaque verticale est partiellement submergée, Lindholm et al. [6] ont constaté que la chute majeure de fréquence d'une plaque verticale a lieu lorsque la partie submergée est moins que la moitié de la longueur.

Muthuveerapan et al. (1979) [7] ont analysé la plaque encastreee submergee dans le fluide en utilisant des éléments finis ordinaires (Zienkivitch) pour la plaque et des éléments finis tridimensionnels pour le fluide. La fréquence fondamentale obtenue pour des plaques rectangulaires continue à changer même pour des hauteurs de fluide qui dépassent deux fois la longueur de la plaque. Ce résultat n'est pas en parfait accord avec la majorité des travaux. Plusieurs autres travaux ont été faits de la même façon en utilisant des éléments finis ou des super éléments [20].

Montero et al. (1984) [8] ont étudié l'augmentation de l'inertie d'une plaque circulaire dans l'eau. Une méthode permettant l'évaluation de l'effet de fluide sur les fréquences des vibrations asymétriques dont les modes sont connus à vide a été développée.

Fu et Price (1987) [9] ont étudié la réponse dynamique d'une plaque rectangulaire encastreee, totalement ou partiellement submergee dans l'eau, verticale ou horizontale. Il a été assumé que la plaque vibre dans un domaine de fluide semi infini. Les modes de la plaque en contact avec le fluide sont considérés les mêmes que ceux à vide. Une combinaison entre la méthode des éléments finis et des fonctions singulières (singularity distribution panel approach) a été utilisée pour l'analyse de la plaque à vide et pour calculer le coefficient hydrodynamique pour chaque élément en contact avec le fluide, respectivement. Les résultats obtenus s'accordent avec ceux obtenus dans le travail expérimental de Lindholm. La réponse à une force sinusoïdale a été étudiée dans ce travail.

Kwak et Kim (1991) [11] ont étudié l'effet de fluide sur les vibrations libres d'une plaque circulaire en contact avec la surface libre du fluide. Ils ont considéré seulement les vibrations axisymétriques. Leur travail a été stimulé par les contradictions apparentes dans les travaux précédents analytiques ou expérimentaux. Ils ont essayé d'expliquer pourquoi il y a un écart entre les résultats expérimentaux et analytiques en cas de plaques circulaires encastreees. Ils ont

calculé ce qu'on appelle le facteur de masse ajoutée adimensionnelle incrémental (NAVMI). Ce facteur reflète l'augmentation de l'énergie cinétique du système causée par la présence du fluide, il varie en fonction de la géométrie, des propriétés des matériaux et des conditions aux limites. Ils ont supposé que : (i) la longueur d'onde est considérablement faible que le diamètre de la plaque, (ii) le fluide est incompressible, l'écoulement est irrotationnel et inviscide, (iii) la charge dynamique du fluide a un faible effet sur la courbe de déflexion, ce qui veut dire qu'il n'y a pas un changement de l'énergie potentielle du système, (iv) les déplacements de la surface moyenne sont faibles. Le facteur (NAVMI) a été déterminé en utilisant la méthode de Rayleigh. Les modes de vibrations de la plaque en contact avec le fluide sont supposés les mêmes que ceux de la plaque sans fluide. Le facteur (NAVMI) a été calculé pour les modes fondamentaux pour des plaques circulaires libres, encastrées et puis simplement supportées, situées sur la surface libre d'un fluide. Ils ont souligné que les résultats théoriques des travaux précédents (Lamb, McLachlane, Peak) sont valables pour une plaque circulaire en vibrations libres posée dans l'ouverture d'un mur rigide et ayant des dimensions infinies. Cela explique l'écart des résultats obtenus. Seulement dans le cas de la plaque libre, il y a une bonne concordance avec les autres travaux [4].

Kwak (1991) [12] a généralisé son premier travail [11] pour l'analyse des vibrations asymétriques des plaques circulaires. Il a calculé une nouvelle expression de (NAVMI). Ces facteurs peuvent être utilisés pour l'étude du comportement d'une plaque totalement submergée, en les multipliant par deux.

Haddara et Cao (1996) [10] ont présenté une étude expérimentale et analytique de la réponse dynamique d'une plaque submergée dans l'eau. Ils ont discuté l'effet des conditions aux limites et le niveau de liquide en contact avec la plaque. Le facteur de masse ajoutée (FMA) a

été calculé pour différents cas. Ce dernier représente le rapport entre l'énergie cinétique de la structure et celle de fluide.

Pour la première fois, l'étude des vibrations libres d'une membrane circulaire en contact avec la surface libre du fluide a été entreprise par Kwak (1994) [14]. Les mêmes hypothèses que les travaux précédents ont été considérées. Il a trouvé que les facteurs (NAVMI) pour une membrane circulaire sont presque les mêmes que ceux d'une plaque circulaire ayant les mêmes conditions d'appuis.

Afin d'expliquer l'écart existant entre les résultats de Lamb [2] et ceux de Kwak et Kim [11,12], Kwak (1997) [13] a calculé le (NAVMI) pour les mêmes plaques circulaires en contact avec le fluide lorsqu'elles sont placées dans l'ouverture d'un mur rigide infini. Les résultats obtenus coïncident très bien avec celles de Lamb et McLachlan sauf dans le cas de plaque libre placé dans l'ouverture (aperture) d'un mur rigide.

Amabili et al. (1996) [15] ont étudié les vibrations libres d'une plaque circulaire annulaire en contact avec le fluide d'un seul côté, placée dans l'ouverture d'un mur rigide infini. Le facteur (NAVMI) a été obtenu en calculant le rapport des énergies cinétiques de fluide et de la plaque. Des résultats ont été obtenus sans tenir compte de la supposition que les modes de vibrations sont les mêmes à vide et avec fluide, ceci en utilisant la méthode de Rayleigh Ritz. La différence entre les modes avec et sans fluides n'était pas considérable, presque dans tous les cas.

Kwak [16] a étudié les vibrations libres d'une plaque rectangulaire uniforme en contact avec un fluide d'un seul côté. Il a calculé la matrice de masse ajoutée pour le cas où la plaque se repose sur la surface libre du fluide sans mur rigide et pour le cas où la plaque est placée dans l'ouverture d'un mur rigide en contact avec la surface libre du fluide. Les plaques analysées sont simplement supportées ou encastrées sur les quatre côtés. La méthode des éléments aux

frontières (BEM) combinée avec la méthode de Rayleigh Ritz a été utilisée afin de surmonter certaines difficultés de conditions aux limites. Une autre fois les facteurs (NAVMI) calculés sont plus importants lorsque la plaque est placée dans l'ouverture d'un mur rigide que ceux du cas de la plaque se reposant sur la surface libre. Cela est dû au fait que le mur augmente l'énergie cinétique du fluide. Il a été prouvé que les modes de vibrations de la structure en contact avec le fluide changent légèrement pour les plus basses fréquences alors que le changement est considérable pour les fréquences élevées.

Amabili et al (1999). [17] ont étudié l'effet de la surface libre sur le comportement dynamique d'une plaque circulaire. Dans ce type de problèmes avec la présence de la gravité, deux familles d'effet de surfaces libre existent, l'effet 'Sloshing' dû aux oscillations de fluide (ce mode a généralement des fréquences faibles) et l'effet Bulging dû aux vibrations de la structure. Toute l'importance a été donnée au mode Bulging.

Les résultats obtenus montrent que l'effet de la surface libre est important lorsque la plaque est très flexible. C'est-à-dire lorsque les fréquences naturelles de la plaque circulaire sont proches de celles des modes de Sloshing ou de Bulging, ceci a été confirmé plus loin dans nos résultats.

Kwak et Han (2000) [18] ont considéré le même problème que Kwak [12] mais, cette fois, l'intérêt était l'effet de la profondeur du fluide sous la plaque circulaire. Une étude expérimentale dans le même contexte a été faite afin de vérifier les résultats. Les facteurs (NAVMI) expérimentaux et théoriques augmentent rapidement lorsque la profondeur du fluide est très faible. L'effet de fluide peut être négligé lorsque la profondeur du liquide dépasse le rayon de la plaque. Le cas où la plaque circulaire annulaire est placée dans l'ouverture d'un mur rigide a été étudié par Amabili (1996) [19].

Aujourd'hui, un grand nombre d'éléments finis de plaques sans fluide existe, chacun est capable de représenter le comportement de la plaque dans des situations spécifiques mieux que d'autres. Mais, jusqu'à maintenant, il n'y a pas un élément fini qui peut tenir compte de la présence de fluide à ses alentours.

L'objectif de notre travail est de développer un élément fini qui modélise la plaque sans fluide avec une très bonne précision et qui pourra tenir compte de l'effet du fluide sur le comportement dynamique de la plaque submergée ou en contact avec le fluide. Par la suite, il pourra être utilisé à des géométries plus compliquées que la plaque ainsi que pour l'étude de l'effet d'un écoulement potentiel ou turbulent sur une plaque ou des structures pouvant être modélisées par des éléments de plaques.

2. INTRODUCTION

L'idée de base de notre travail provient de l'approche hybride utilisée par Lakis [21-24] pour l'analyse des coques cylindriques ouvertes ou fermées totalement ou partiellement remplies de liquide, ou bien soumises à l'effet d'un écoulement potentiel ou turbulent. Les fonctions de déplacements ont été dérivées de la solution exacte des équations d'équilibre des coques. Un élément circonférentiel a été utilisé pour les coques axisymétriques fermées [21] et un autre élément longitudinal pour l'analyse des coques ouvertes ou fermées [24]. Les deux éléments ont certaines restrictions géométriques.

Nous comptons développer dans ce travail un élément fini de plaque, qui est en quelque sorte une combinaison entre les deux éléments de coques déjà développés qui n'aura pas de restrictions géométriques et qui sera capable de calculer les hautes et les basses fréquences

avec précision et de tenir compte de n'importe lesquelles des conditions aux limites au milieu ou aux bords de la structure.

Nous comptons utiliser cet élément à une série d'applications entre autres les cas suivants :

A- l'analyse des plaques en vibration dans l'air et en contact avec un fluide au repos, soit lorsque la plaque est totalement submergée ou en contact avec le fluide;

B- l'analyse des vibrations des plaques lorsqu'elles sont soumises à un écoulement potentiel de vitesse;

C- l'analyse des vibrations des plaques lorsqu'elles sont soumises à un écoulement turbulent.

Une fois que les trois cas précédents sont étudiés, nous voulons analyser des coques en interaction avec le fluide, en utilisant des éléments de plaques et en faisant les transformations géométriques nécessaires. Nous citons ci-dessous certains cas où nous pouvons utiliser ces éléments :

I- une séries de plaques parallèles souvent rencontrées dans des échangeurs de chaleur;

II- des plaques radiales encastrées sur un axe;

III- des réservoirs ou des conduites rectangulaires en contact avec le fluide au repos ou en écoulement;

IV- aubes de turbines hydrauliques tridimensionnelles et leur réponse à des excitations sinusoïdales ou aléatoires;

V- plaques parallèles en contact avec le fluide au repos et soumises à des excitations sinusoïdales, en tenant compte de l'amortissement;

3. ANALYSE DE LA PLAQUE SANS FLUIDE

Comme il est représenté sur la figure 1, l'élément fini utilisé dans ce travail est une portion de plaque rectangulaire ayant quatre nœuds, chaque nœud possède six degrés de liberté. Nous utilisons la théorie de Sanders [31] pour les coques cylindriques en assumant que le rayon est égal à l'infini, la coordonnée $\theta = y$ et $rd\theta = dy$. Nous préférons la théorie de Sanders puisque, contrairement à d'autres théories, elle a prouvé que toutes les déformations disparaissent pour les faibles mouvements de corps rigide. Les équations d'équilibre tiennent compte de l'effet de membrane et de l'effet de flexion. Les équations de Sanders sont basées sur la première approximation de Love [29] pour les coques minces.

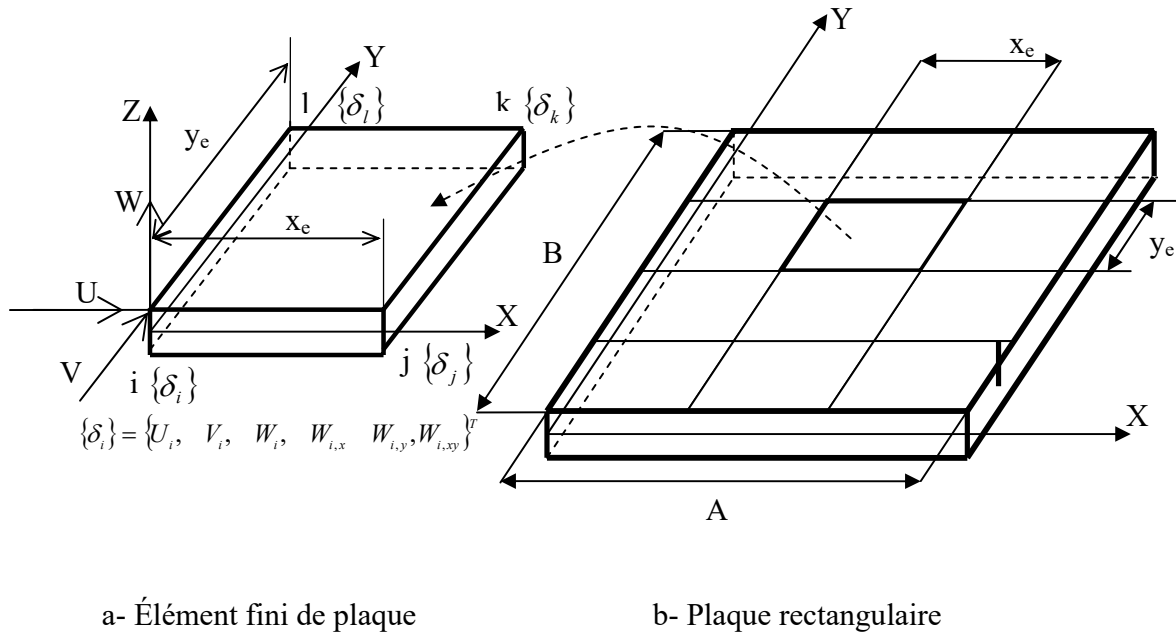


Figure 1. Géométrie et champ de déplacements de l'élément fini de plaque

3.1 Équations d'équilibre et fonctions de déplacements

Plusieurs champs de déplacements ont prouvé qu'ils représentent très bien le comportement d'une plaque solide en cas statique ou dynamique. Mais, malheureusement, ce n'est pas le cas lorsque le même champ doit être utilisé pour modéliser l'interaction de cette plaque avec le fluide.

Les équations d'équilibre d'une plaque en fonction des champs de déplacements de la surface moyenne, selon la théorie de Sanders [31], sont :

$$P_{22} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + P_{21} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + P_{33} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (E1)$$

$$P_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + P_{12} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + P_{33} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (E2)$$

$$P_{44} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} (P_{45} + P_{54} + 2P_{66}) + P_{55} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0 \quad (E3)$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'élément circonférentiel hybride pour l'analyse des coques cylindriques fait par Lakis et Paidoussis [21] ou l'élément longitudinal pour l'analyse des coques ouvertes fait par Lakis et Selmane [24] sont basés sur la solution exacte des équations d'équilibre. Cette caractéristique a permis d'avoir des éléments finis très précis et qui convergent rapidement. Cela nous a incité à penser au développement d'un élément de même type pour les plaques, malheureusement la solution exacte des équations d'équilibre est très difficile dans le cas des plaques. Pour surmonter ce problème, nous représentons les déplacements de membrane par des polynômes bilinéaires [41] et le déplacement transversal

par une fonction exponentielle, puisque le couplage fluide solide se fait dans la plupart des cas par le déplacement transversal de la surface moyenne, car il est le mouvement dominant.

Le champ de déplacements est :

$$U(x, y, t) = C_1 + C_2 \frac{x}{A} + C_3 \frac{y}{B} + C_4 \frac{xy}{AB} \quad (1.a)$$

$$V(x, y, t) = C_5 + C_6 \frac{x}{A} + C_7 \frac{y}{B} + C_8 \frac{xy}{AB} \quad (1.b)$$

La solution exacte de l'équation d'équilibre (E3) de flexion est de la forme générale suivante :

$$W(x, y, t) = \sum_{j=9}^{24} C_j e^{i\pi \left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B} \right)} e^{i\omega t} \quad (1.c)$$

où :

U et V sont les déplacements de la surface moyenne dans le plan de la plaque selon l'axe X et Y respectivement ;

W est le déplacement transversal de la surface moyenne ;

A est la longueur de la plaque selon l'axe X ;

B est la longueur de la plaque selon l'axe Y ;

ω est la fréquence naturelle de vibration de la plaque en rad/sec ;

i est le nombre complexe $i^2 = -1$;

les C_j sont des constantes inconnues.

Pour la plaque sans fluide, nous utilisons l'équation (1.c) développée en série de Taylor [32], comme suit :

$$W(x, y, t) = \sum_{q=0}^3 \frac{A_q}{q!} \left(\frac{x}{A} \right)^q \sum_{p=0}^3 \frac{B_p}{p!} \left(\frac{y}{B} \right)^p \quad (2)$$

où :

$$W(x, y, t) = C_9 + C_{10} \frac{x}{A} + C_{11} \frac{y}{B} + C_{12} \frac{x^2}{2A^2} + C_{13} \frac{xy}{AB} + C_{14} \frac{y^2}{2B^2} + C_{15} \frac{x^3}{6A^3} + C_{16} \frac{x^2 y}{2A^2 B} + C_{17} \frac{xy^2}{2AB^2} + C_{18} \frac{y^3}{6B^3} + C_{19} \frac{x^3 y}{6A^3 B} + C_{20} \frac{x^2 y^2}{4A^2 B^2} + C_{21} \frac{xy^3}{6AB^3} + C_{22} \frac{x^3 y^2}{12A^3 B^2} + C_{23} \frac{x^2 y^3}{12A^2 B^3} + C_{24} \frac{x^3 y^3}{36A^3 B^3} \quad (3)$$

Ici, les A_q , B_q et les C_j sont des constantes inconnues.

Sous forme matricielle, le champ de déplacements peut être écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = [R] \{C\} \quad (4)$$

avec :

$$\{C\} = \{C_1, C_2, \dots, C_{24}\}^T \quad (5)$$

où :

$[R]$ est une matrice (3x24) donnée à l'appendice A ;

$\{C\}$ est le vecteur des constantes inconnues. Ce vecteur des constantes inconnues peut être déterminé en utilisant les vingt-quatre degrés de liberté de l'élément fini quadrilatère représenté sur la figure 1.

Le vecteur de déplacements nœaux est donné par :

$$\{\delta\} = \{\{\delta_i\}, \{\delta_j\}, \{\delta_k\}, \{\delta_l\}\}^T \quad (6)$$

Chaque nœud (i) possède un vecteur nodal de déplacements, composé de:

$$\{\delta_i\} = \{U_i, V_i, W_i, \partial W_i / \partial x, \partial W_i / \partial y, \partial^2 W_i / (\partial x \partial y)\}^T \quad (7)$$

où :

U_i , V_i , sont les déplacements de la surface moyenne dans le plan de la plaque, correspondants au nœud i ;

W_i est la déflexion de la surface moyenne, correspondant au nœud i.

Pour chaque élément, nous avons donc un vecteur de déplacements nodaux, $\{\delta\}$, exprimé par:

$$\{\delta\} = [A]\{C\} \quad (8)$$

L'inverse de la matrice $[A]$ est donnée à l'appendice A.

On peut donc remplacer les constantes inconnues par les vecteurs de déplacements généralisés de l'élément fini quadrilatère. En utilisant la relation suivante :

$$\{C\} = [A]^{-1}\{\delta\} \quad (9)$$

Et en introduisant l'équation (9) dans (7), le champ de déplacement devient:

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = [R][A]^{-1}\{\delta\} = [N]\{\delta\} \quad (10)$$

La matrice $[A]^{-1}$ est donnée à l'appendice (A).

$[N]$ est la matrice (3 x 24) des fonctions de déplacements de l'élément fini.

3.2. Relations cinématiques

Le champ de déformations est lié au champ de déplacements comme suit [31] :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial U / \partial x \\ \partial V / \partial y \\ \partial V / \partial x + \partial U / \partial y \\ -\partial^2 W / \partial x^2 \\ -\partial^2 W / \partial y^2 \\ -2\partial^2 W / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \quad (11)$$

En substituant les déplacements de l'équation (10) dans le vecteur de déformations (11), nous obtiendrons l'expression du vecteur de déformations en fonction des déplacements nodaux.

$$\{\varepsilon\} = [Q][A]^{-1}\{\delta\} = [B]\{\delta\} \quad (12)$$

où :

$[Q]$ est une matrice (6x24) listée à l'appendice (A) ;

$[B]$ est la matrice liant les déformations aux déplacements nodaux.

3.3. Relations constitutantes

Pour une plaque anisotrope, le champ de contraintes est lié au champ de déformation par la relation suivante :

$$\{\sigma\} = [P]\{\varepsilon\} \quad (13)$$

où :

$[P]$ est la matrice d'élasticité (6x6). Pour un matériau isotrope, il n'y a pas de couplage entre l'effet membrane et l'effet de flexion, la matrice d'élasticité se réduit à :

$$\begin{aligned} P_{11} = P_{22} = D \quad P_{44} = P_{55} = K \quad P_{12} = P_{21} = \nu D \quad P_{45} = P_{54} = \nu K \\ P_{33} = (1 - \nu)D/2 \quad P_{66} = (1 - \nu)K/2 \end{aligned} \quad (14)$$

où :

$$K = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad D = \frac{Eh}{1 - \nu^2},$$

E est le Module de Young, ν est le coefficient de Poisson et h est l'épaisseur de la plaque.

En substituant (12) dans (13), nous obtenons l'expression du vecteur de contraintes en fonction des déplacements nodaux.

$$\{\sigma\} = [P][B]\{\delta\} \quad (15)$$

La matrice de masse et la matrice de rigidité d'un élément peuvent être exprimées par:

$$[k]^e = \iint_A [B]^T [P] [B] dA \quad (16)$$

$$[m]^e = \rho_s h \iint_A [N]^T [N] dA \quad (17)$$

où :

dA est une surface élémentaire de l'élément;

ρ_s est la densité de la plaque;

$[N]$, $[B]$ et $[P]$ sont définies dans les équations (10), (12) et (14). En utilisant ces équations

dans (16) et (17), nous obtenons:

$$[k]^e = [A]^{-1} \left[\int_0^{x_e} \int_0^{y_e} [Q]^T [P] [Q] dx dy \right] [A]^{-1} \quad (18)$$

$$[m]^e = \rho_s h [A]^{-1} \left[\int_0^{x_e} \int_0^{y_e} [R]^T [R] dx dy \right] [A]^{-1} \quad (19)$$

où :

x_e et y_e sont les dimensions d'un élément selon les coordonnées X et Y, respectivement.

Ces intégrales ont été calculées en utilisant le logiciel des calculs mathématiques Maple.

4. INTERACTION DE LA PLAQUE AVEC LE FLUIDE

La présence de fluide au voisinage d'une structure change son comportement dynamique. La pression de fluide sur la structure est souvent exprimée en fonction des accélérations, des vitesses et des déplacements. Ces trois parties de la pression de fluide sont appelées respectivement l'effet de l'inertie, l'effet de force de Coriolis et l'effet de la force centrifuge

[21,24]. Ces effets ajoutent aux matrices de masses, d'amortissements et de rigidités de la structure solide des matrices virtuelles.

Le système d'équation global qui tient compte des trois effets est le suivant :

$$[[M_s] - [M_f]]\{\ddot{\delta}_T\} + [C_f]\{\dot{\delta}_T\} + [[K_s] - [K_f]]\{\delta_T\} = \{0\} \quad (20)$$

$[M_s]$ et $[K_s]$ sont les matrices de masse et de rigidité de la plaque sans fluide, respectivement;

$[M_f]$ est la matrice de masse représentant l'effet des forces d'inertie du fluide ;

$[C_f]$ est la matrice d'amortissement, représentant l'effet des forces de Coriolis ;

$[K_f]$ est la matrice de rigidité représentant l'effet des forces centrifuges.

$\{\delta_T\}$ est le vecteur de déplacements global.

Si le fluide est au repos, l'effet des forces de Coriolis et celui des forces centrifuges sont nuls.

Le système de comportement dynamique de la structure est affecté seulement par la présence d'une masse ajoutée représentant l'effet des forces d'inertie.

$$[[M_s] - [M_f]]\{\ddot{\delta}_T\} + [K_s]\{\delta_T\} = \{0\} \quad (21)$$

Nous pouvons donc modéliser le comportement de la plaque submergée ou en contact avec le fluide au repos en calculant la force d'inertie du fluide.

4.1. Élément fini fluide-solide

Pour formuler le problème, nous supposons que : (a) les mouvements de fluide sont faibles, (b) le fluide est incompressible, inviscide et irrotationnel.

L'écoulement potentiel satisfait l'équation de Laplace. Dans un système de coordonnées cartésiennes, cette équation pourra être exprimée comme suit :

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (22)$$

où :

ϕ représente la fonction du potentiel de vitesse.

L'équation de Bernoulli (dans le cas où la vitesse d'écoulement $U=0$) est :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho_f} \right|_{z=0} = 0 \quad (23)$$

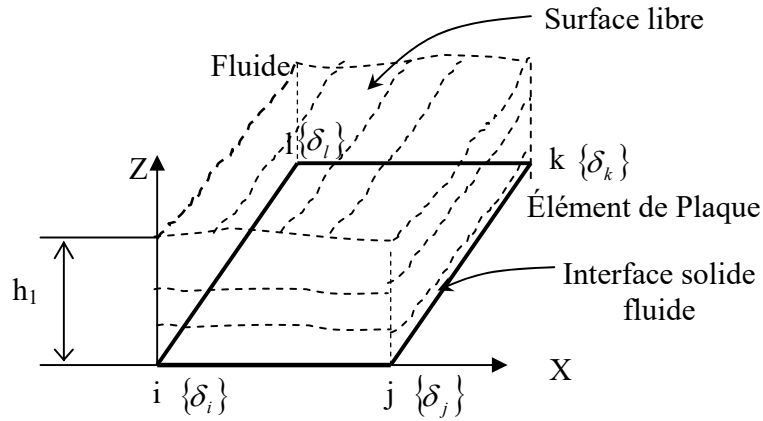


Figure 2 : Élément fini solide-fluide

D'où on peut exprimer la pression à l'interface par :

$$P|_{z=0} = -\rho_f \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=0} \quad (24)$$

Nous assumons que le potentiel de vitesse est donné par la fonction suivante :

$$\phi(x, y, z, t) = F(z)S(x, y, t) \quad (25)$$

À l'interface, la condition d'imperméabilité assurant le contact entre le fluide et le solide pourra s'écrire de la façon suivante :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\partial W}{\partial t} \quad (26)$$

Où :

W est le déplacement transversal de la plaque.

En introduisant l'équation (25) dans (26), on trouve l'expression de $S(x,y,t)$ comme suit :

$$S(x,y,t) = \frac{1}{dF(0)/dz} \frac{\partial W}{\partial t} \quad (27)$$

En substituant l'équation (27) dans (25), l'expression du potentiel devient :

$$\phi(x,y,z,t) = \frac{F(z)}{dF(0)/dz} \frac{\partial W}{\partial t} \quad (28)$$

Les conditions aux limites de fluide sont introduites séparément pour chaque élément, cela nous permet d'étudier des structures partiellement submergées, comme par exemple le cas de la plaque verticale [9], ou des plaques inclinées [6], totalement ou partiellement submergées, et aussi des plaques en contact avec la surface libre d'un fluide [11-19].

En substituant l'équation (28) dans l'équation (22), on obtient l'équation différentielle de second ordre suivante:

$$\frac{d^2 F(z)}{dz^2} - \mu^2 F(z) = 0 \quad (29)$$

avec :

$$\mu = \pi \sqrt{\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2}} \quad (30)$$

La solution de l'équation différentielle (29) nous permet d'avoir la fonction $F(z)$. La solution générale est de la forme suivante :

$$F(z) = A_1 e^{\mu z} + A_2 e^{-\mu z} \quad (31)$$

En substituant (31) dans (28), on obtient l'expression du potentiel suivante :

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{(A_1 e^{\mu z} + A_2 e^{-\mu z})}{dF(0)/dZ} \frac{\partial W}{\partial t} \quad (32)$$

Le potentiel ϕ doit vérifier les conditions aux limites à l'interface solide fluide et aux limites du fluide.

A) Élément plaque fluide avec surface libre

En assumant que les perturbations résultantes du mouvement de fluide à la surface libre sont faibles, nous pouvons appliquer au potentiel de vitesse à la surface libre la condition suivante (figure 3) :

$$\left. \frac{\partial \phi(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=h_1} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (33)$$

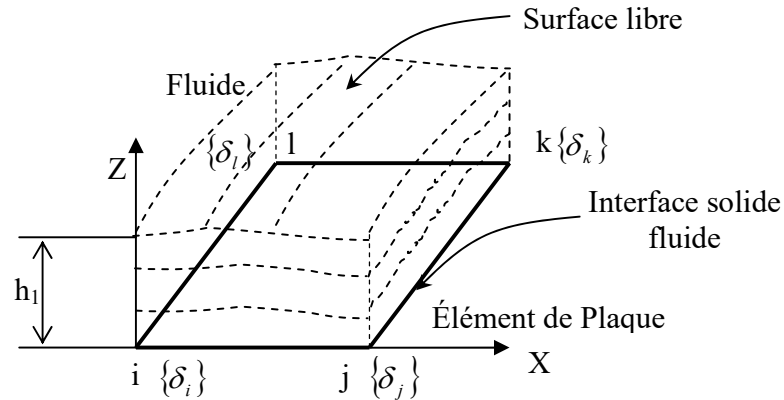


Figure 3: Élément fluide solide ayant une surface libre de fluide à $Z=h_1$

où :

g est l'accélération de la gravité.

En remplaçant l'équation (32) simultanément dans (33) et (26), nous obtenons les constantes A_1 et A_2 . La substitution de ces constantes dans (32) nous permet d'avoir l'expression du potentiel suivante :

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{\mu} \left[\frac{e^{\mu z} + C e^{-\mu(z-2h_1)}}{1 - C e^{2\mu h_1}} \right] \frac{\partial W}{\partial t} \quad (34)$$

avec :

$$C = (g\mu - \omega^2) / (g\mu + \omega^2) \quad (35)$$

Comme il est représenté dans la figure B.1 de l'appendice B, la valeur de C tend asymptotiquement vers -1. Cette approximation est faite pour éviter d'avoir un système de valeurs propres non linéaire.

La pression correspondante à l'interface devient (équation 24) :

$$P = -\frac{\rho_f}{\mu} \left[\frac{1 + C e^{2\mu h_1}}{1 - C e^{2\mu h_1}} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = Z_{f1} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (36)$$

B) Élément plaque fluide avec mur rigide

L'autre condition à la limite de fluide représentée sur la figure 4 adoptée par Lamb et McLachlan [2, 4] connue sous le nom de fréquence nulle est la condition de mur rigide exprimée par :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=h_1} = 0 \quad (37)$$

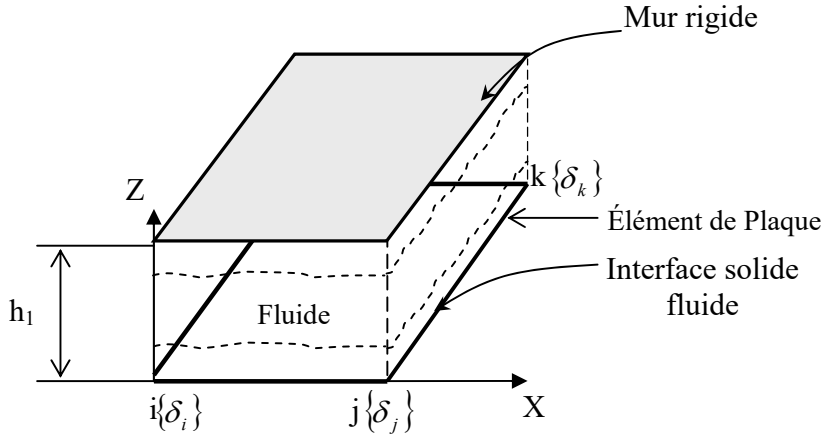


Figure 4: Élément de plaque en contact avec un fluide ayant à la limite un mur rigide

En remplaçant l'équation (32) simultanément dans (37) et (26), nous pouvons calculer les constantes A_1 et A_2 . La substitution de ces constantes dans (32) nous permet d'avoir l'expression suivante du potentiel de vitesse :

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{\mu} \left[\frac{e^{\mu(z-2h_1)} + e^{-\mu z}}{e^{-2\mu h_1} - 1} \right] \frac{\partial W}{\partial t} \quad (38)$$

La pression (24) correspondante à l'interface devient :

$$P = -\frac{\rho_f}{\mu} \left[\frac{e^{-2\mu h_1} + 1}{e^{-2\mu h_1} - 1} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = Z_{f2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (39)$$

C) Élément plaque fluide avec surface libre

La dernière condition à la limite de fluide est représentée sur la figure 5 et est connue sous le nom de la condition de fréquence infinie exprimée par (Fig. 5) :

$$\phi = 0 \quad (40)$$

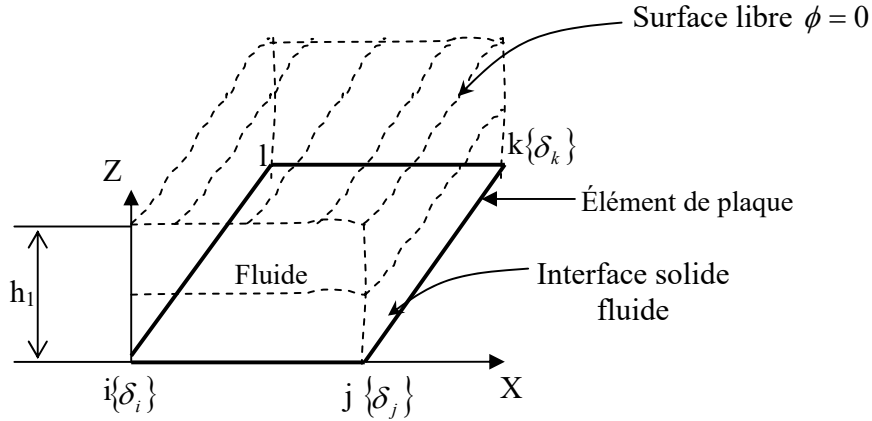


Figure 5 : Élément de plaque en contact avec un fluide ayant à la limite une surface libre avec une pression nulle

En remplaçant l'équation (32) simultanément dans (37) et (26), nous pouvons calculer les constantes A_1 et A_2 , la substitution de ces constantes dans (32) nous permet d'avoir l'expression suivante du potentiel de vitesse :

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{\mu} \left[\frac{e^{\mu z} - e^{-\mu(z-2h_1)}}{1 + e^{2\mu h_1}} \right] \frac{\partial W}{\partial t} \quad (41)$$

La pression (24) correspondante à l'interface devient :

$$P = -\frac{\rho_f}{\mu} \left[\frac{1 - e^{2\mu h_1}}{1 + e^{2\mu h_1}} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = Z_{f3} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (42)$$

Dans le cas où la structure est totalement submergée, la pression totale est la combinaison de pression correspondant aux conditions limites de fluide au-dessus et au-dessous de la plaque.

4.2. Cas étudiés

En pratique, le contact entre la plaque et le fluide se présente de plusieurs façons. Dans chacun des cas, l'expression de la pression appliquée par le fluide sur la plaque est différente. Nous donnons ci-dessous quelques cas pratiques souvent rencontrés:

4.2.1. Élément de plaque totalement submergé (Figure. 6)

Comme il est représenté sur la figure 6, la plaque est soumise à la pression du fluide des deux côtés, donc la pression totale est la somme des deux pressions inférieure et supérieure, calculées en utilisant les équations (36) et (39), respectivement.

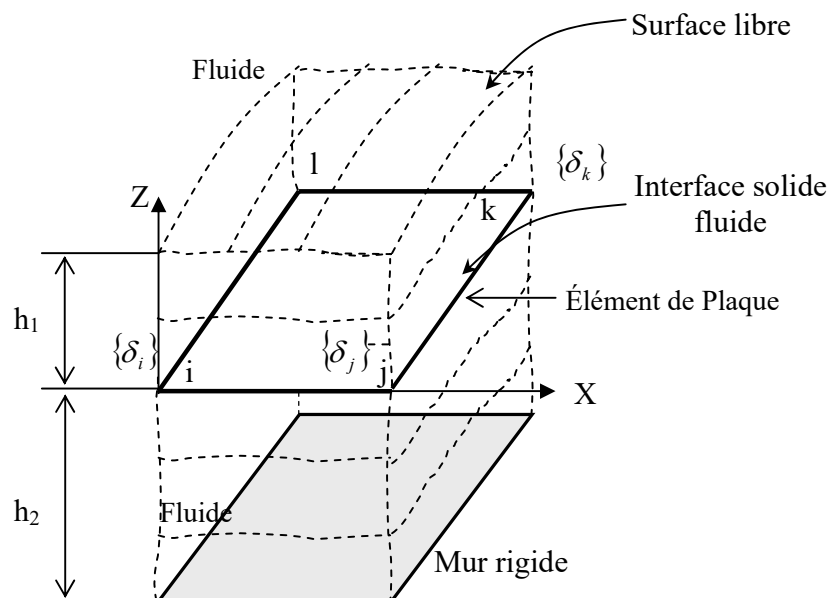


Figure 6: Élément de plaque en contact avec un fluide ayant à la limite supérieure une surface libre et à la limite inférieure un mur rigide

La pression résultante est la somme des deux pressions données par les équations (36) et (39):

$$P = -\frac{\rho_f}{\mu} \left[\frac{I + C_1 e^{2\mu h_1}}{I - C_1 e^{2\mu h_1}} + \frac{e^{-2\mu h_2} + I}{e^{-2\mu h_2} - I} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = Z_{f4} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (43)$$

4.2.2. Élément de plaque submergée dans un fluide limité par deux murs (Figure 7)

Comme nous voyons à la figure 7 la plaque est soumise à la pression du fluide des deux côtés, supérieur et inférieur, la pression résultante est la somme des deux pressions calculées à l'équation (36) pour des hauteurs de fluides h_1 et h_2 :

$$P = -\frac{\rho_f}{\mu} \left[\frac{e^{-2\mu h_1} + I}{e^{-2\mu h_1} - I} + \frac{e^{-2\mu h_2} + I}{e^{-2\mu h_2} - I} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = Z_{f5} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (44)$$

Si h_1 est égale à h_2 , la pression correspondante est le double de la pression calculée à (39) :

$$P = -\frac{2\rho_f}{\mu} \left[\frac{e^{-2\mu h_1} + I}{e^{-2\mu h_1} - I} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = Z_{f5} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (45)$$

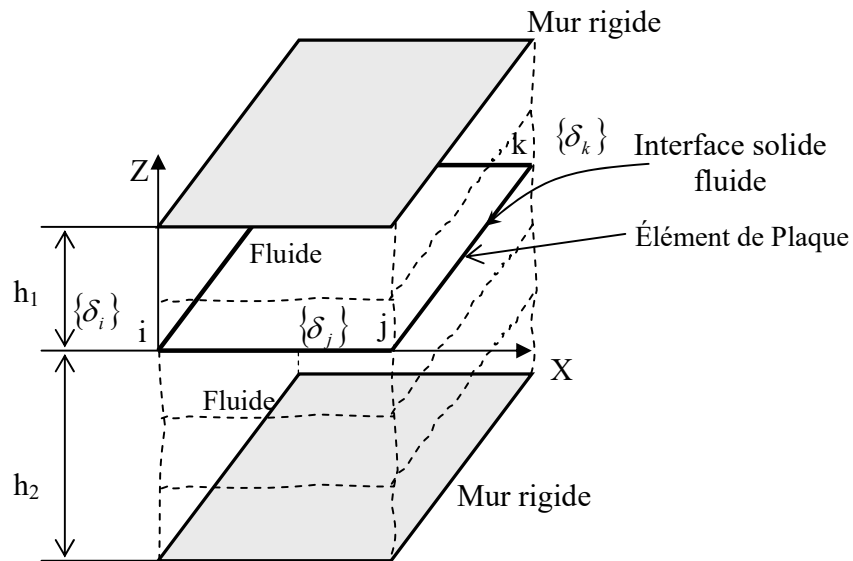


Figure 7: Élément de plaque en contact avec un fluide ayant à la limite supérieure et inférieure un mur rigide

4.2.3. Plaque se reposant sur la surface libre d'un fluide (Figure 8)

Dans ce cas, la plaque est soumise à la pression du fluide situé sous la plaque.

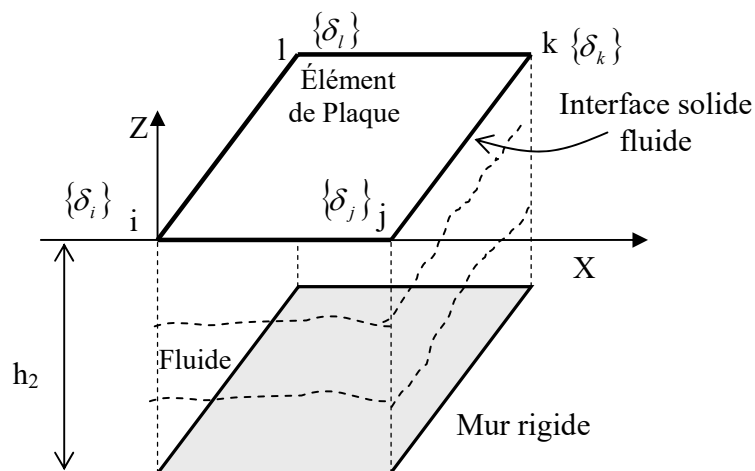


Figure 8: Élément de plaque en contact avec un fluide ayant à la limite inférieure un mur rigide

La pression résultante est calculée à l'équation (36) pour une hauteur h_2 :

$$P = -\frac{\rho_f}{\mu} \left[\frac{e^{-2\mu h_2} + 1}{e^{-2\mu h_2} - 1} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = Z_{f6} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (46)$$

4.2.5. Calcul de la force d'inertie de fluide

Le vecteur de forces induites par le fluide peut être exprimé de la façon suivante :

$$\{F\} = \int_A [N]^T \{P\} dA \quad (47)$$

où :

$[N]$ est la matrice des fonctions de déplacements de l'élément fini provenant de l'équation (10) ;

$\{P\}$ est un vecteur exprimant la pression appliquée par le fluide sur la plaque (équations (36), (39), et (42) à (46)). La pression radiale est la seule composante non nulle.

En remplaçant le déplacement transversal de l'équation (10) dans l'expression de la pression convenable ((36), (39), (42) à (46)), dépendamment du mode de contact de la plaque avec le fluide et des conditions aux limites à $Z = h_1$ et/ou $Z = h_2$, nous obtenons la pression du fluide appliquée sur la plaque suivante :

$$\{P\} = Z_{fi} [R_f] [A]^{-1} \{\ddot{\delta}\} \quad (48)$$

Z_{fi} : dépend du mode de contact entre la plaque et le fluide (plaque totalement submergée, ou plaque se reposant sur la surface libre de fluide (36, 39, 42-46) et des conditions d'interface fluide-plaque.

$[R_f]$, $[A]^{-1}$ et les coefficients Z_{fi} , ($i=1, 2 \dots 6$) sont donnés à l'appendice A.

En remplaçant la pression obtenue dans (48) et la fonction de déplacements de l'équation (10) dans l'équation (47), nous obtenons le vecteur de force suivant :

$$\{F\}^e = Z_{fi} \int_A \left[[A]^{-1} \right]^T [R]^T [R_f] [A]^{-1} dA \{\ddot{\delta}\} \quad (49)$$

Où :

dA est une surface élémentaire de l'élément.

4.2.6. Calcul de $[K_s]$, $[M_s]$ et $[M_f]$

Les plaques sont subdivisées à un ensemble d'éléments finis quadrilatères, le repère local de chaque élément coïncide avec le repère global de la structure. Pour chaque élément, nous avons calculé une matrice de masse et une matrice de rigidité. En utilisant les techniques d'assemblage habituelles des éléments finis [33], nous avons obtenu le système matriciel global suivant :

$$[M_s - M_f] \{\ddot{\delta}_T\} + [K_s] \{\delta_T\} = \{0\} \quad (50)$$

$[M_s]$ est la matrice de masse globale de la plaque ;

$[M_f]$ est la matrice de masse ajoutée globale induite par le fluide ;

$[K_s]$ est la matrice de rigidité de la plaque.

En assumant :

$$\{\delta_T\} = \{\delta_{0T}\} e^{i\omega t} \quad (51)$$

où :

$\{\delta_T\}$ est le vecteur de déplacements global et ω est la fréquence naturelle du système (rad/sec),

$\{\delta_{0T}\}$ est le vecteur global des amplitudes des déplacements pour chaque mode.

En introduisant l'équation (51) dans l'équation (50), on obtient le problème de valeurs propres suivant :

$$Det[[K_s] - \omega^2[M_s - M_f]] = 0 \quad (52)$$

La solution de ce système nous permet d'avoir les fréquences et les modes de vibrations du système (plaque fluide).

5. RÉSULTATS ET DISCUSSION

5.1. Plaque sans fluide

Le premier exemple de calcul est une plaque en acier simplement supportée sur les quatre côtés (fig.9). Ses dimensions et ses propriétés mécaniques sont : module de Young $E=196\text{GPa}$, la masse volumique $\rho=7860\text{kg/m}^3$, l'épaisseur $h=2.54\text{mm}$, le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ et les dimensions $A=609.6\text{mm}$, $B=304.8\text{mm}$.

La variation des cinq premières fréquences en fonction du nombre d'éléments finis est représentée à la figure 10. Un nombre d'éléments minime assure une convergence très rapide pour les basses et les hautes fréquences. Huit éléments finis sont suffisants pour assurer la convergence des deux premiers modes, alors que pour les autres modes, la convergence nécessite au moins 25 éléments. Ce nombre d'éléments est excellent relativement aux autres éléments existants. Dans toutes les applications suivantes à vide ou avec fluide, nous allons utiliser 64 éléments. Ceci nous assurera des résultats indépendants de maillage.

Au tableau 1, nous avons les fréquences obtenues par notre méthode et celles de la méthode analytique de Leissa [38]. Nous avons aussi les résultats obtenus par le logiciel de calcul des

structures ANSYS en utilisant l'élément (Shell63). Nous avons calculé l'erreur relative entre nos résultats et les autres. Nous constatons que l'erreur pour les trois premières fréquences est minime.

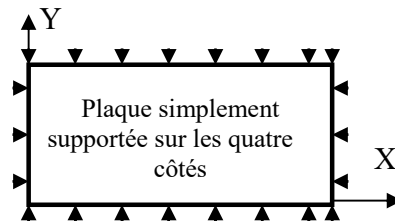


Figure 9 : Plaque simplement supportée sur les quatre côtés

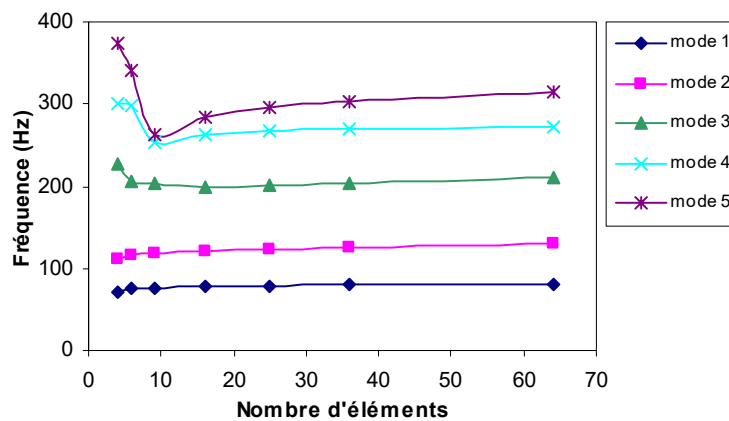


Figure 10 : Fréquences naturelles des cinq premiers modes d'une plaque simplement supportée sur les quatre côtés en fonction du nombre d'éléments finis

Tableau 1 : Fréquences naturelles en (Hz) de la plaque simplement supportée sur les quatre côtés

Mode	Présent élément	ANSYS (shell63 9x18 éléments)	Erreur % Présent élément ANSYS	Analytique solution Leissa [30]	Erreur % Présent élément Leissa [30]
1	82.93	80.99	2.39	83.5	.68
2	133.44	129.33	3.17	133.61	.127
3	213.72	209.86	1.83	217.12	1.56
4	275.27	275.02	0.09	283.9	3.03
5	315.52	322.51	2.16	334	5.53
6	331.41	322.51	2.75	334	.77

Le deuxième exemple est une plaque rectangulaire en acier encastree sur le côté le plus court (Fig. 11). Nous disposons pour cette structure des résultats expérimentaux de Grinsted [35] et les résultats théoriques de Martin [36], ainsi que des résultats obtenus par les logiciels NASTRAN et ANSYS.

Les dimensions de la structure sont les suivantes: $A=70.1\text{mm}$, $B=130\text{mm}$, $h=1.35\text{mm}$. Les quatre premiers modes sont représentés sur la figure 12. (n, m) représentent les modes axiaux selon les axes Y et X. Il est clair du tableau 2 que nos fréquences coïncident très bien avec celles obtenues par d'autres travaux.

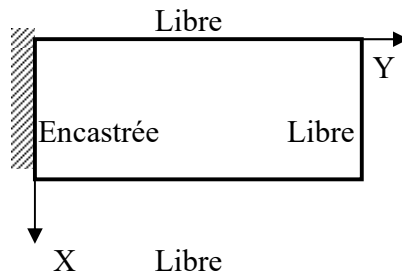


Figure 11 : Plaque encastree sur le cote le plus court

Tableau 2 : Fréquences naturelles en (Hz) de la plaque encastree sur le cote le plus court, (n, m) sont les modes axiaux suivant Y et X respectivement. (Voir figure 12)

(n,m)	Martin [36]	Experimental Grinsted [35]	NASTRAN	ANSYS (Shell 63)	Présent élément
(1,1)	69.5	64	67.6	66.17	66.16
(1,2)	436	405	416.4	412.35	413.05
(1,3)	1220	1120	1151	1155.6	1159.04
(3,1)	1610	1606	1474	1558.2	1557.62
(3,2)	2260	ND	1996	2155.5	2132.17

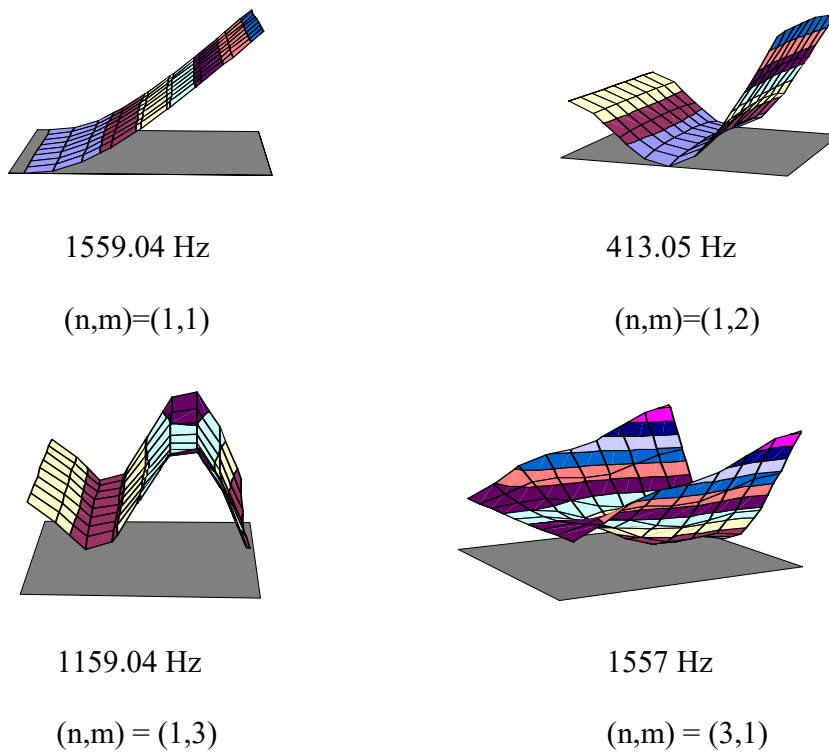


Figure 12 : Premiers mode de vibration de la plaque encastée au côté le plus court

Le troisième exemple est la même plaque étudiée au premier exemple, mais cette fois-ci, la plaque est simplement supportée sur les deux côtés opposés les plus courts (Fig. 13). Les résultats sont listés au tableau 3. Notre méthode montre une très bonne précision.

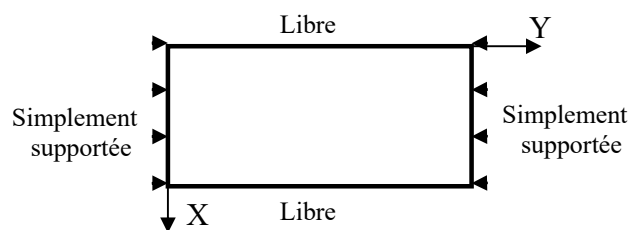


Figure 13 : Plaque simplement supportée sur les deux côtés opposés les plus courts

Tableau 3 : Fréquences naturelles en (Hz) de la plaque simplement supportée sur les deux côtés opposés les plus courts, n et m représentent les modes axiaux selon les axes Y et X respectivement (voir figure 12)

(n,m)	Analytique (Hz) Leissa [30]	ANSYS (9x18) (Hz) Shell63	Présent élément
(1,1)	16.70	15.65	15.67
(2,1)	66.80	63.47	63.61
(3,1)	150.3	143.94	144.34
(1,3)	178.5	173.18	181.54

Le quatrième et le dernier exemple de plaque sans fluide est une plaque carrée en acier encastree à un côté. Cette plaque était parmi la série des plaques étudiées par Lindholm et al. [6]. Les dimensions de la plaque sont $A=B=10m$, et l'épaisseur $h=0.238m$. Les résultats sont listés au tableau 4.

D'après les résultats obtenus, nous pouvons conclure que l'élément représente très bien le comportement dynamique des plaques rectangulaires. Nous pouvons donc passer à la validation de l'élément fini (fluide-solide).

Tableau 4 : Fréquences naturelles en (Hz) de la plaque encastree à un seul côté

Mode	1	2	3	4	5
Forme de mode	Flexion	Torsion	Flexion	Flexion	Torsion
Présent élément	12.929	31.7	79.55	101.121	115.34
Analytique Gorman [37]	12.92	31.21	78.77	101.407	114.10
Lindholm [6]	12.30	30.78	75.46	99.84	110.57
Fu et Price [9]	12.94	31.73	79.80	101.16	115.61

5.2. Interaction plaque fluide

5.2.1. Plaque totalement submergée

Nous disposons de résultats de plusieurs travaux expérimentaux et théoriques pour des plaques ayant des conditions aux limites différentes, en contact avec le fluide ou totalement submergées. Nous allons les utiliser pour vérifier notre élément (fluide-solide) développé ci-dessus.

Le premier cas a été étudié par Haddara et Cao [10]. Nous disposons de résultats expérimentaux et analytiques. La structure étudiée est une plaque en acier rectangulaire simplement supportée sur ses deux côtés les plus courts, totalement submergée dans l'eau (Fig. 14). Les dimensions de la plaque sont : la longueur $B=0.655\text{m}$, la largeur $A=0.20165\text{m}$ et l'épaisseur de la plaque $h=9.36\text{mm}$. Les tests ont été faits dans un réservoir rectangulaire ayant 1.3m de longueur, 0.55m de largeur et une profondeur égale à 0.8m . Les résultats sont listés au tableau 5.

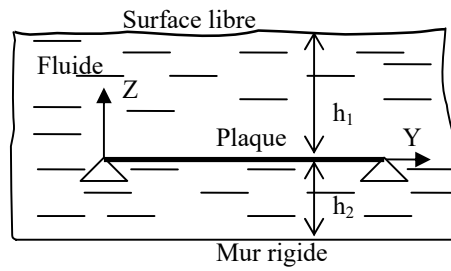


Figure 14 : Plaque simplement supportée sur les deux côtés opposés les plus courts

Le deuxième cas est une plaque encastrée sur les deux côtés les plus courts, totalement submergée dans l'eau (Fig.15). Les dimensions et les propriétés mécaniques sont les mêmes que l'exemple précédent. Nos résultats ainsi que ceux de Haddara et Cao [10] sont rapportés au tableau 6.

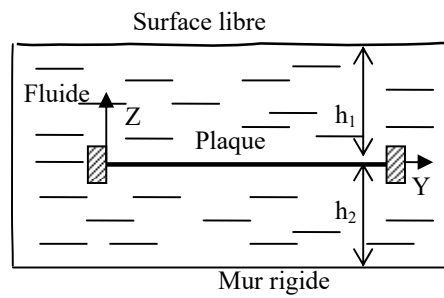


Figure 15 : Plaque encastrée sur les deux côtés opposés les plus courts

Tableau 5 : Fréquences naturelles en (Hz) de la plaque simplement supportée sur deux bords opposés totalement submergée dans l'eau

Mode	Expérimentale (Hz) Haddara et Cao [10]	Analytique (Hz) Haddara et Cao [10]	Présent élément (Hz)
1	28.72	28.71	31.28
2	117.125	122.59	126.40
3	154.51	ND	141.78
4	281.79	296	285.98
5	335.04	ND	304.57

Tableau (6) : Fréquences naturelles en (Hz) de la plaque encastrée sur deux bords opposés totalement submergée dans l'eau

Mode	Expérimentale (Hz) Haddara et Cao [10]	Analytique (Hz) Haddara et Cao [10]	Présent élément (Hz)
1	67.58	67.55	72.7
2	167	ND	168.16
3	179.15	197.73	200.84
4	344.99	ND	359.64
5	385.73	409.60	395.95

Le troisième cas étudié est une plaque submergée, dont nous disposons des résultats expérimentaux de Lindholm et al. [6] et des résultats numériques de Fu et Price [9]. C'est une plaque carrée en acier encastrée sur un seul côté, totalement submergée dans un réservoir (Fig. 16). Les dimensions de la plaque sont : $A=B=10m$ et l'épaisseur $h=0.238m$. Les résultats sont

listés au tableau 7, nous remarquons que nos résultats sont excellents en les comparant avec ceux des autres travaux.

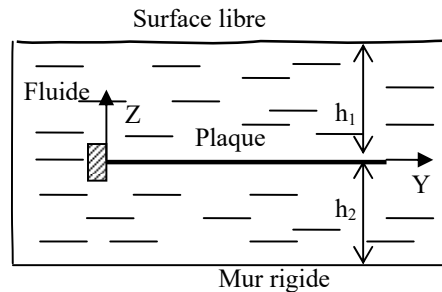


Figure 16 : Plaque carrée encastrée sur un seul côté

Tableau 7 : Fréquences naturelles en (rad/sec) de la plaque carrée encastrée sur un seul totalement submergée dans l'eau

	Sans fluide		Totalement submergée		
	Présent élément	Fu Price [9]	Présent élément	Fu et Price [9]	Expérimental Lindholm [6]
1	12,93	12,94	7,0	7,35	6,56
2	31,69	31,93	17,16	20,19	19,66
3	79,37	79,8	42,98	50,11	45,32

Le quatrième exemple est la plaque rectangulaire encastrée sur les quatre côtés, se reposant sur la surface libre de fluide (Figure 17). Nous disposons pour ce cas de résultats expérimentaux de Kim [38] et de résultats analytiques de Kwak [16]. Ce dernier a étudié aussi le cas où la même plaque est posée dans l'ouverture d'un mur rigide infini en contact avec le fluide. En utilisant les facteurs NAVMI théoriques [16] et expérimentaux, nous avons tracé à

la figure 18 la variation des rapports entre les fréquences fondamentales à vide et avec fluide dans le cas de la plaque sans mur rigide et pour différents rapports de dimensions de la plaque (A/B). Nos résultats coïncident très bien avec les rapports analytiques et expérimentaux.

Nous soulignons aussi que les résultats calculés par notre élément sont très proches du cas de la plaque se reposant sur la surface libre de fluide que du cas de la plaque posée dans l'ouverture d'un mur rigide infini en contact avec le fluide. Cela confirme que nos conditions aux limites sont similaires à celles d'une plaque en contact avec la surface libre sans mur rigide.

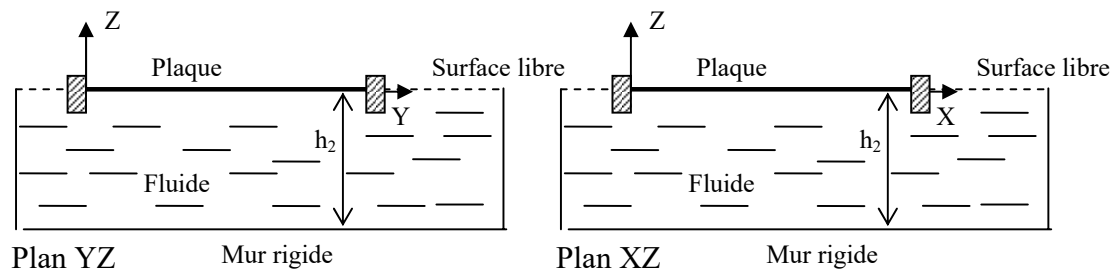


Figure 17 : Plaque encastrée sur les quatre côtés en contact avec le fluide

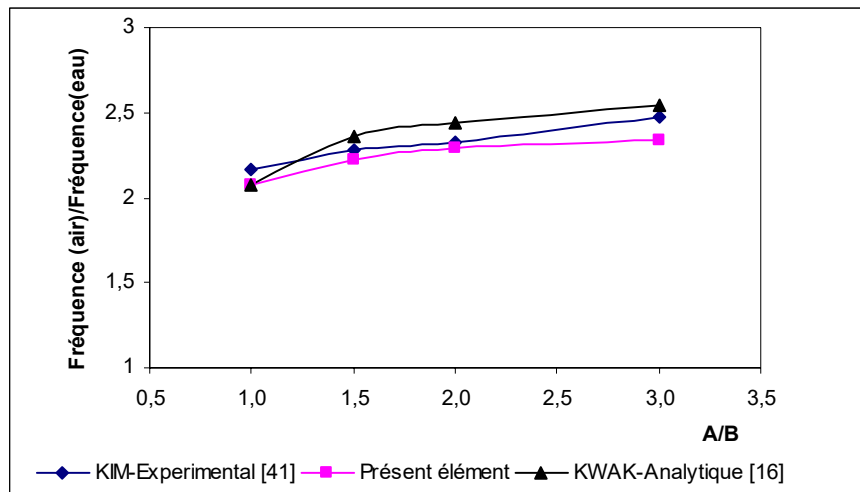


Figure 18 : Rapport entre la première fréquence calculée dans l'air et la première fréquence calculée lorsque la plaque encastree sur les quatre cotés se repose sur la surface libre de fluide pour différents rapports de dimensions de la plaque

5.2.2. Effets des conditions aux limites et du niveau de fluide

Le niveau du fluide sur et/ou sous la plaque ainsi que la condition à la limite de fluide (surface libre ou mur rigide (33), (37) et (40)) influent sur le comportement de la plaque jusqu'à une certaine hauteur de fluide.

Afin d'éclaircir ce phénomène, nous avons calculé la variation des fréquences en fonction de la hauteur du fluide du système fluide structure de deuxième exemple étudié à la section (5.2.1), figure 15. Deux cas ont été élaborés :

- lorsque la plaque est totalement submergée dans l'eau avec une hauteur h_1 de fluide variable et une hauteur h_2 sous la plaque suffisamment grande, de telle sorte qu'elle n'influe pas sur les fréquences de la plaque (figure 6);
- lorsque la plaque est en contact avec le fluide avec h_1 nul et h_2 variable (figure 8).

Nous constatons que dans le cas où la limite du fluide est une surface libre, les fréquences diminuent en augmentant la hauteur du fluide figure 19-b. Lorsque le niveau de fluide atteint 25% de la longueur de la plaque, les fréquences cessent de diminuer. Ce pourcentage s'accorde très bien avec le pourcentage donné par Haddara et Cao [6]. À cette position, la surface libre linéarisée n'a aucune influence.

Dans le cas où la limite du fluide est un mur rigide (figure 19.a), nous constatons que lorsque le niveau du fluide est moins que 20% de la longueur de la plaque, les fréquences diminuent d'une façon brusque. Au-delà de ce pourcentage, les fréquences sont indépendantes du niveau de fluide. Ce comportement a été signalé par d'autres travaux théoriques et expérimentaux [9, 16].

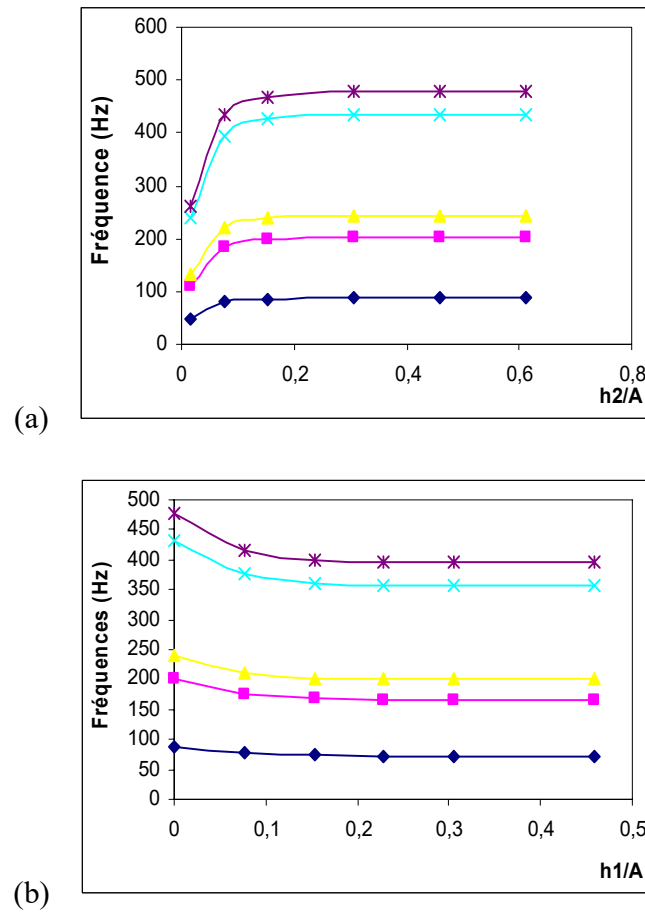


Figure 19 : Variation des fréquences en fonction du niveau du fluide
(a) Plaque flottante ($h_1=0$, h_2 variable), la limite du fluide en bas de la plaque est un mur rigide, (b) plaque submergée (h_1 variable, $h_2 \gg 0$)
(♦) mode 1, (■) mode 2, (▲) mode 3, (x) mode 4, (*) mode 5

Les structures ayant des conditions aux limites différentes ne se comportent pas de la même façon lorsqu'elles sont en contact avec un fluide [11-13,16]. Nous avons étudié ci-haut le changement du comportement de la plaque encadrée sur deux côtés lorsqu'on change le niveau de fluide sur ou sous la plaque. Nous allons étudier, maintenant, le même phénomène pour d'autres plaques ayant des conditions aux limites différentes.

Nous avons pris le troisième exemple étudié à la section (5.2.1) et nous avons calculé les fréquences à différents niveaux de fluide sur la plaque. Cet exemple a été étudié par Fu et

Price [9] et Lindholm [6]. Nous signalons que la hauteur de l'eau sous la plaque est suffisamment grande de telle sorte qu'elle n'influence pas sur le comportement dynamique du système.

D'après la figure 20, nous constatons que les fréquences diminuent en augmentant le niveau de fluide et elles deviennent indépendantes du niveau de fluide lorsque ce dernier atteint 50% de la longueur de la plaque, le même pourcentage a été trouvé par Lindholm et Fu et Price. Nous signalons, à titre d'information, que pour le cas des plaques circulaires, Amabili [19] et Kwak et al. [18] ont conclu que le niveau de fluide auquel les fréquences cessent de changer est égal au rayon de la plaque circulaire.

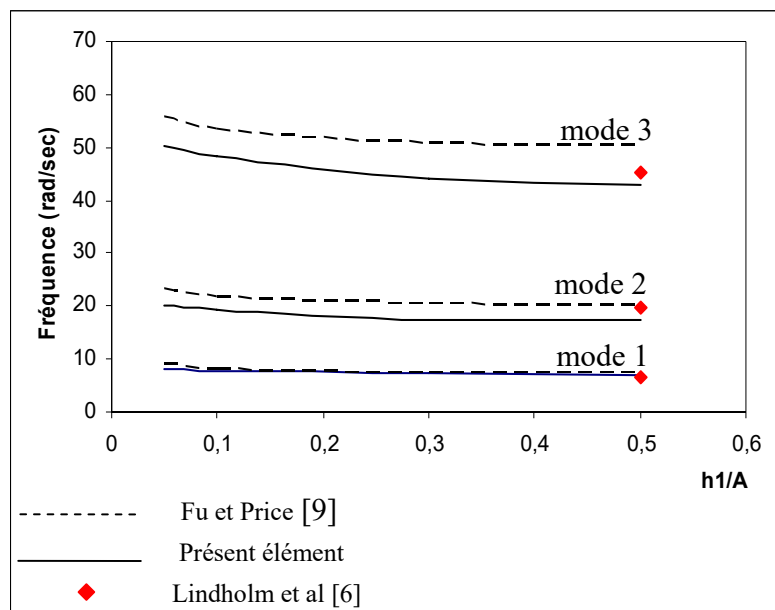


Figure 20 : Variation des fréquences en fonction du niveau de fluide sur la plaque carrée encastrée sur un seul côté en fonction du niveau de fluide

Le niveau de fluide auquel les fréquences cessent de changer varie d'une structure à l'autre. Afin d'expliquer cette ambiguïté, nous avons considéré une plaque ayant une surface

constante égale à $4m^2$. Nous avons changé les conditions aux limites (figures 21.f, 22.f, 23.d) et le rapport entre la longueur et la largeur de la plaque (A/B).

À la figure 21.a-e nous avons tracé la variation des fréquences des cinq premiers modes en fonction du rapport $h_1/\text{longueur}$ de la plaque encastree-libre. Nous constatons que le rapport $h_1/\text{longueur}$ auquel les fréquences cessent de changer atteint son maximum dans le cas de la plaque carrée ($A/B=1$), figure 21.a, ($h_{1\text{limite}}/A=h_{1\text{limite}}/B=0.5$).

Pour le cas de la plaque rectangulaire où $A=4$, et $B=1$ représenté sur la figure 21.c le rapport $h_{1\text{limite}}/A= 0.125$. Le même rapport a été obtenu à la figure 21.d lorsqu'on inverse les dimensions de la plaque, $A=1$, et $B=4$ le rapport $h_{1\text{limite}}/B= 0.125$, malgré que les conditions aux limites de la plaque ne sont pas symétriques par rapport aux axes (X, Y). Sur les figures 21.b et 21.e, deux autres rapports de dimensions de plaque ($A/B=0.64$) et ($A/B=1.56$) respectivement ont été utilisés, la valeur de $h_{1\text{limite}}/\text{longueur}$ trouvée est la même et est égale à 0.3.

Aux figures 22 et 23, nous avons gardé les mêmes plaques et les mêmes rapports de dimensions (A/B) que ceux de la figure 21, mais nous avons changé les conditions aux limites. À la figure 22, nous avons des plaques encastrees sur les deux côtés opposés parallèles à l'axe X et sur la figure 23 nous avons des plaques simplement supportées sur les quatre côtés.

Les figures 24, 25, 26 nous montrent que pour toute valeur de rapport ($h_1/\text{longueur}$) et (A/B), nous obtenons le même rapport des fréquences ($\omega_{h_1}/\omega_{h_{1\text{limite}}}$) quelles que soient les conditions aux rives.

Nous pouvons conclure que, quelles que soient les conditions aux rives (voir figure 27), et dans le cas où $A/B=1$ et $A/B\neq 1$, les fréquences du système fluide solide deviennent constantes pour toutes les valeurs de $h_1/\text{longueur}$ supérieures à 0.5 et 0.35, respectivement.

Cela explique l'écart existant entre Haddara et Cao [10] et Fu et Price [9] concernant la limite de fluide à laquelle les fréquences cessent de changer.

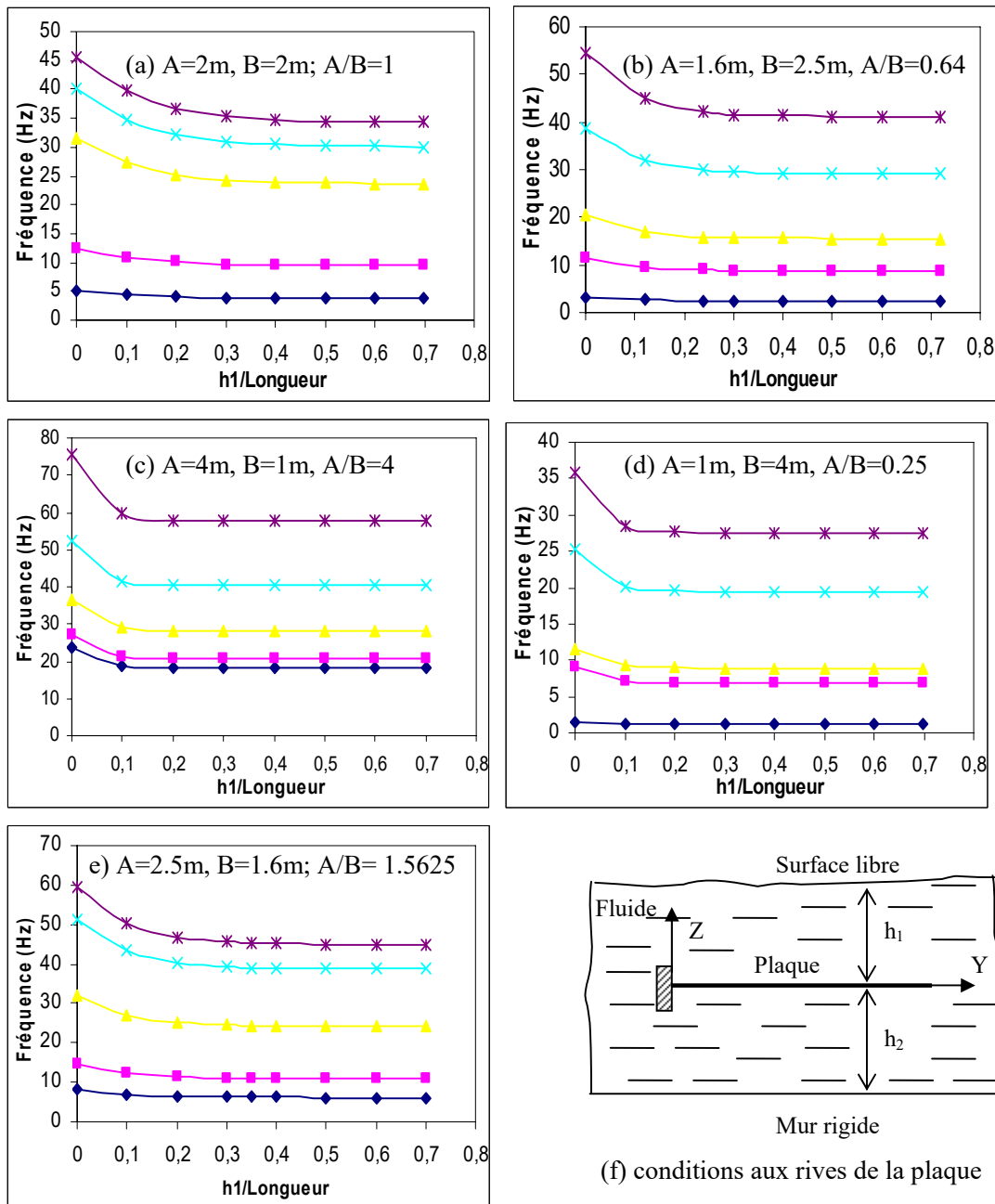


Figure 21 : Variation des fréquences d'une plaque encastree sur un côté parallèle à l'axe Y et libre sur les trois autres en fonction du rapport ($h_1/\text{longueur}$) de la plaque. La plaque est totalement submergée dans le fluide limité par un mur rigide en bas suffisamment éloigné de la plaque et une surface libre en haut à une hauteur h_1 variable (a) $A/B=1$, (b) $A/B=0.64$, (c) $A/B=4$, (d) $A/B=0.25$, (e) $A/B=1.5625$ (♦) mode 1, (■) mode 2, (▲) mode 3, (x) mode 4, (*) mode 5

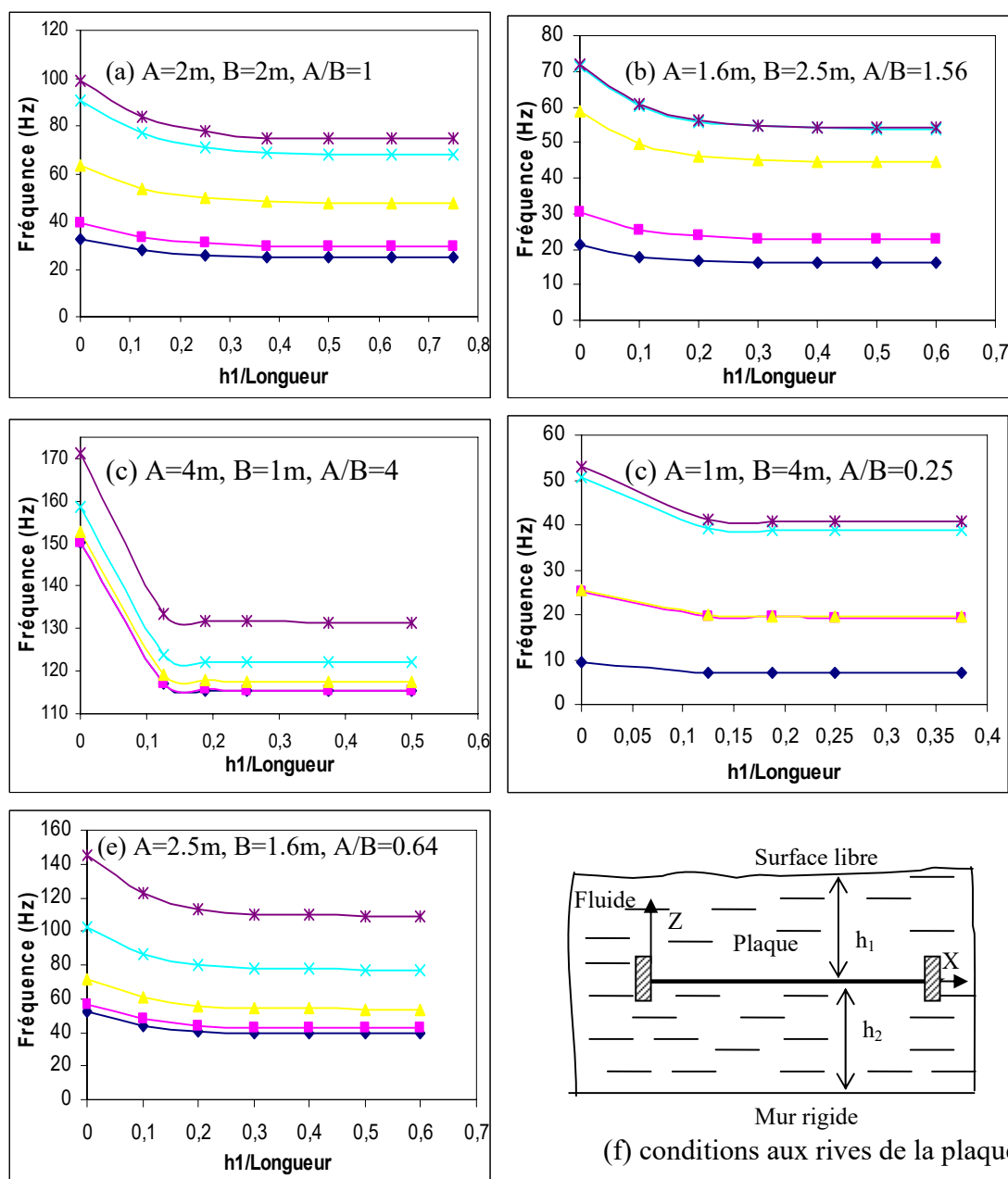
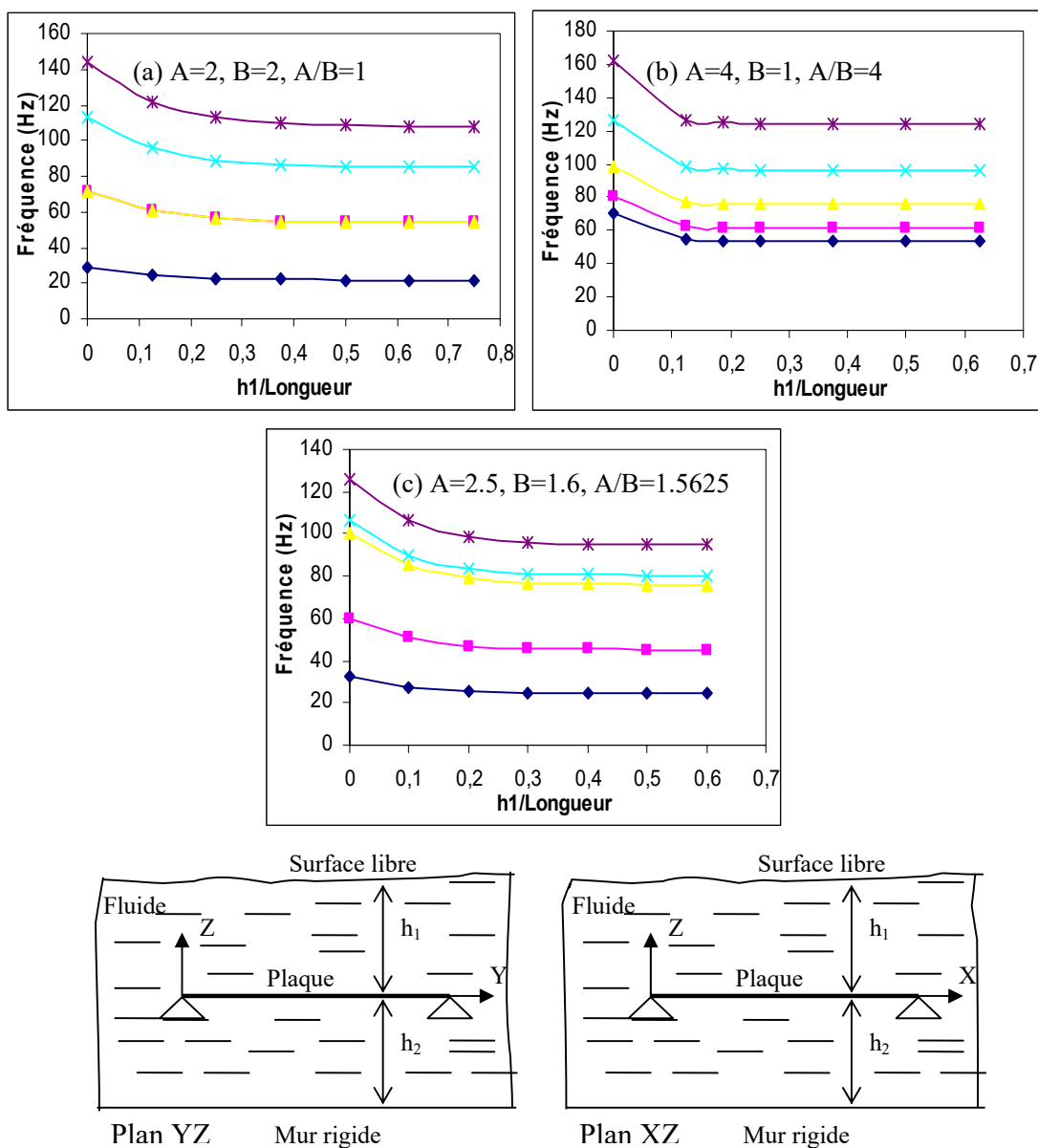


Figure 22 : Variation des fréquences d'une plaque encastree sur les deux côtés les plus courts parallèles à l'axe Y et libre sur les deux autres en fonction du rapport ($h_1/\text{longueur}$) de la plaque. La plaque est totalement submergée dans le fluide limité par un mur rigide en bas suffisamment éloigné de la plaque et une surface libre en haut à une hauteur h_1 variable.

(a) $A/B=1$, (b) $A/B=1.5625$, (c) $A/B=4$, (d) $A/B=0.25$,
 (e) $A/B=0.64$. (♦) mode 1, (■) mode 2, (▲) mode 3, (x) mode 4, (*) mode 5



(d) conditions aux rives de la plaque

Figure 23 : Variation des fréquences d'une plaque simplement supportée sur les quatre côtés en fonction du rapport ($h_1/\text{longueur}$) de la plaque. La plaque est totalement submergée dans le fluide limité par un mur rigide en bas suffisamment éloigné de la plaque et une surface libre en haut de hauteur h_1 variable. (a) $A/B=1$, (b) $A/B=4$, (c) $A/B=1.5625$. (♦) mode 1, (■) mode 2, (▲) mode 3, (x) mode 4, (*) mode 5

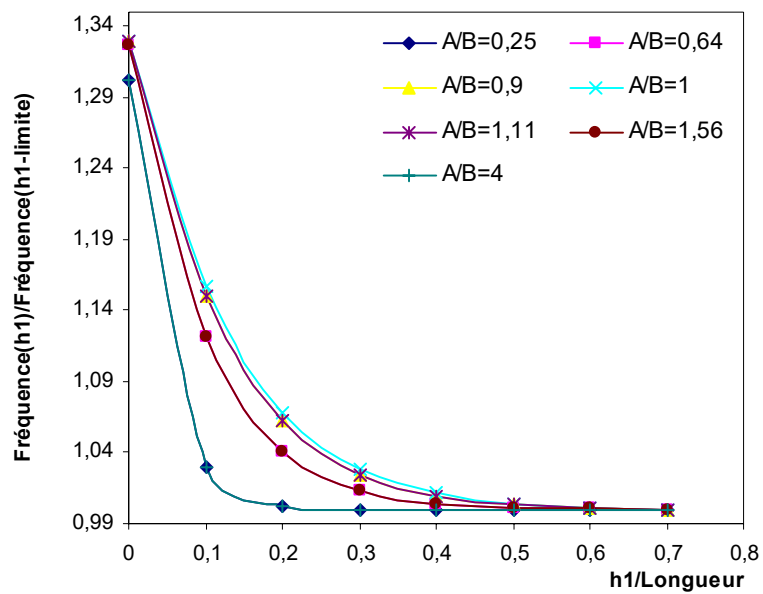


Figure 24 : Variation de rapport de fréquences (fréquence (h_1 -variable)/ fréquence (h_1 -limite)) correspondants au premier mode en fonction du rapport (h_1 /longueur) pour une plaque **encastrée sur un côté parallèle à l'axe Y et libre sur les trois autres** pour différents rapports de dimensions de la plaque (A/B)

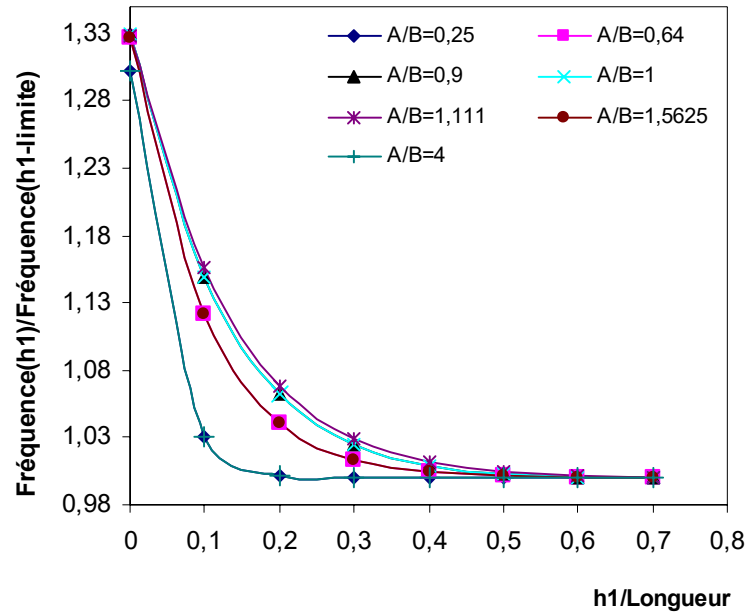


Figure 25 : Variation de rapport de fréquences (fréquence (h1-variable)/ fréquence (h1-limite)) correspondants au premier mode en fonction du rapport (h_1 /longueur) pour une **plaque encastrée sur les deux côtés les plus courts parallèles à l'axe Y et libre sur les deux autres** pour différents rapports de dimensions de la plaque (A/B)

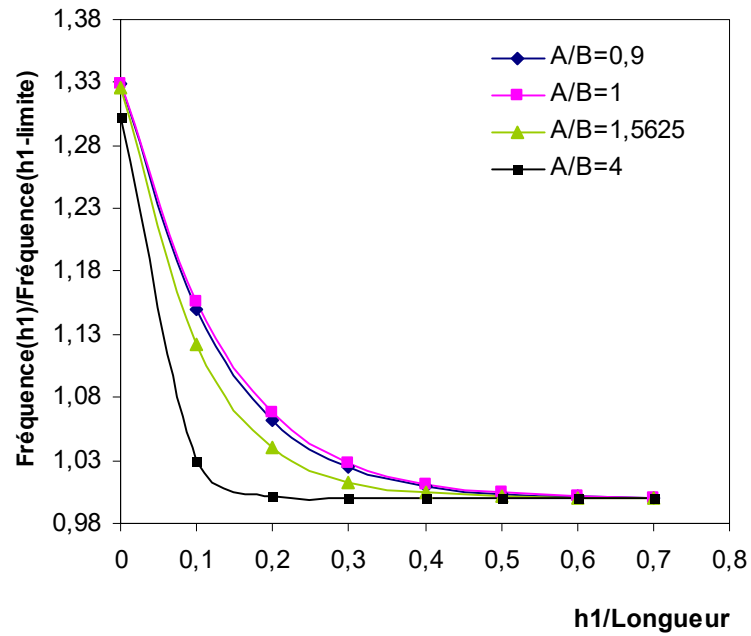


Figure 26 : Variation de rapport de fréquences (fréquence (h1-variable)/ fréquence (h1-limite)) correspondants au premier mode en fonction du rapport ($h_1/\text{longueur}$) pour **une plaque simplement supportée sur les quatre côtés** pour différents rapports de dimensions de la plaque (A/B)

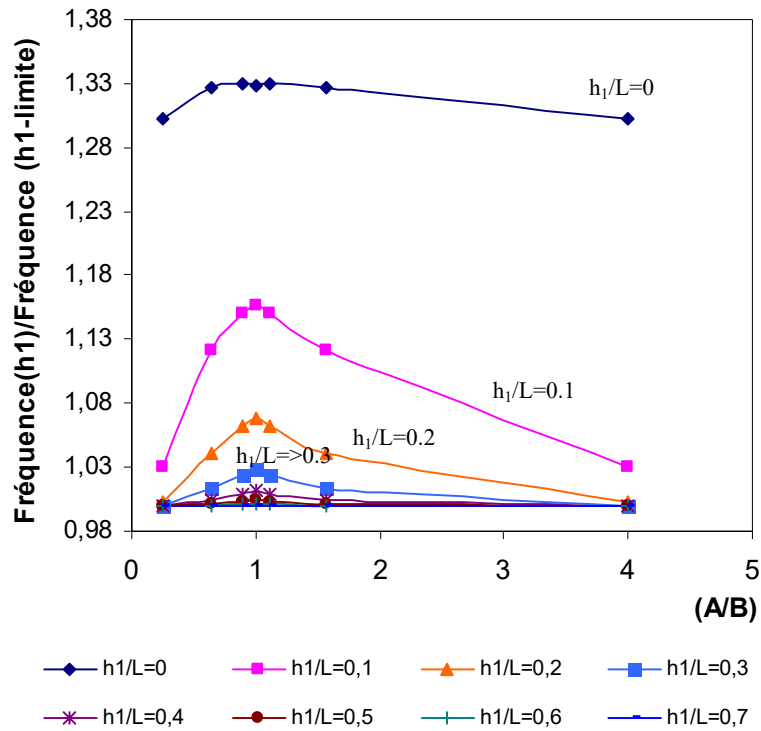
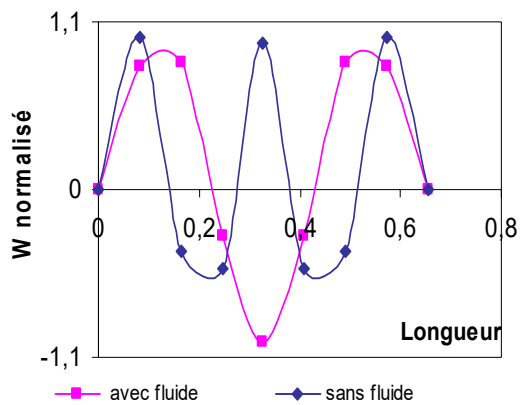


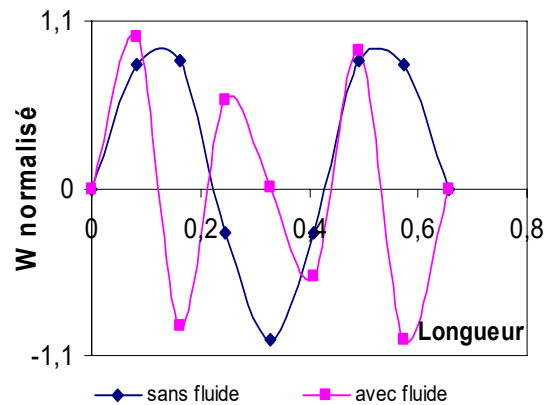
Figure 27 : Variation de rapport de fréquences ($\omega_{h1}/\omega_{h1 \text{ limite}}$) correspondants au premier mode en fonction du rapport de dimensions de la plaque (A/B) pour différents niveaux de remplissage
(Même courbe pour toutes les conditions aux limites)

5.2.3. Changement des modes

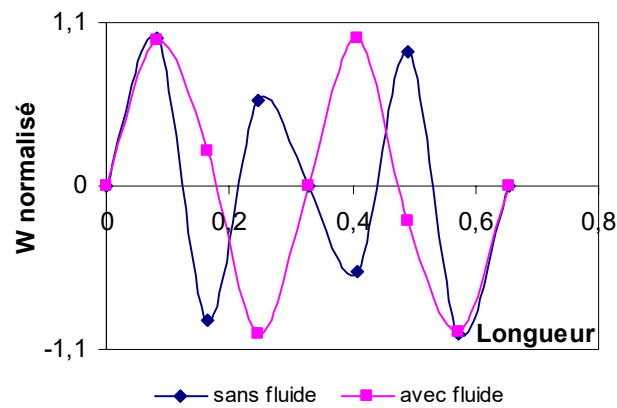
La majorité des travaux suppose que les modes de vibrations de la plaque dans l'air sont les mêmes que dans un liquide. Cette supposition ne fait pas partie de nos hypothèses. Afin de vérifier le degré de validité de cette hypothèse, nous avons tracé les modes de vibrations de la plaque encastree sur ses deux côtés les plus courts, étudiée au deuxième exemple de la section (5.2.1). Nous avons tracé à la figure 28 le déplacement transversal W sur une ligne de longueur entre les deux encastrements afin de mieux visualiser l'écart, puisque les déformées des modes supérieurs sont plus compliquées que celles des premiers modes. On commence à avoir une différence entre les modes de la plaque (avec et sans fluide) à partir du treizième mode. Les premiers modes sont identiques.



Mode 13



Mode 14



Mode 15

Figure 28 : Changement des modes d'une plaque encastree sur les deux bords les plus courts totalement submergée dans le fluide

Sur la figure 29 nous avons tracé le long d'une ligne de longueur les modes supérieurs de déplacement transversal W d'une plaque en aluminium carrée encastree sur un seul côté et ayant les dimensions suivantes : $A=2m$, $B=2m$, module de Young $70GP$, coefficient de Poisson 0.3 et une épaisseur $h=0.05m$. Nous commençons à avoir une différence entre les modes de vibration dans l'air et dans un liquide à partir du dixième mode.

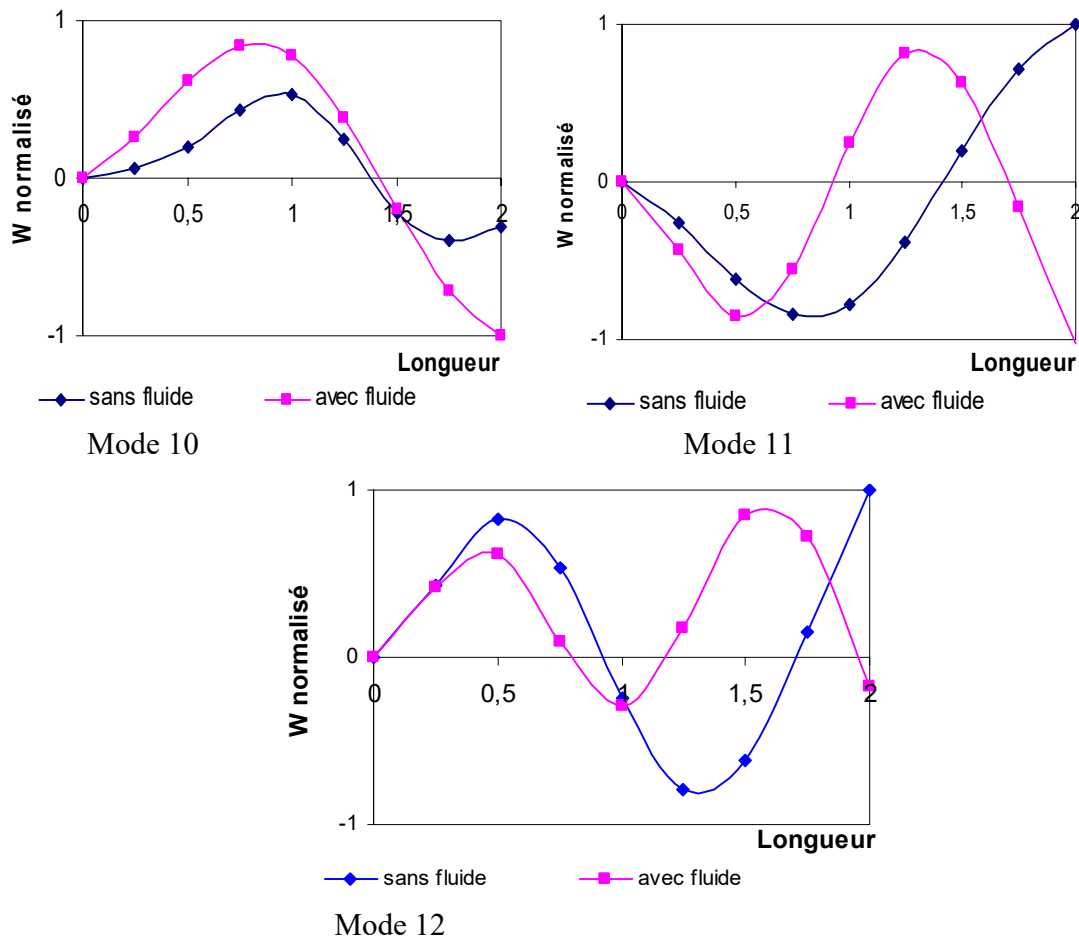


Figure 29 : Changement des modes d'une plaque encastree sur le côté le plus court totalement submergée dans le fluide

6. AUTRES PLAQUES

Nous avons comparé, à l'appendice C, les fréquences adimensionnelles (λ) obtenues en utilisant notre élément fini de plaque, avec les fréquences obtenues par la méthode analytique de Leissa [34], pour une variété de conditions aux limites et pour différents rapports de dimensions de la plaque (A/B). Nous avons calculé aussi pour chaque cas les fréquences adimensionnelles lorsque **la plaque est totalement submergée dans l'eau**.

La fréquence adimensionnelle sans fluide est exprimée par :

$$\lambda = \omega A^2 \sqrt{\frac{\rho h}{K}}$$

avec :

$$K = Eh^3/12(1-\nu^2).$$

ω est la fréquence naturelle de la structure sans fluide.

La fréquence adimensionnelle avec fluide est exprimée par :

$$\lambda_f = \omega_f A^2 \sqrt{\frac{\rho h}{K}}$$

ω_f est la fréquence naturelle de la structure submergée dans le fluide.

Les conditions aux limites suivantes ont été exécutées : **CCCC, CCFF, FFFF, SFFF, CCCF, CFFF, SSSF, SFSF.**

Clamped (U=0, V=0, W=0, W_{,x}=0, W_{,y}=0, W_{,xy}=0);

Simply supported (U=0, V=0, W=0)

Free (U≠0, V≠0, W≠0, W_{,x}≠0, W_{,y}≠0, W_{,xy}≠0).

7. CONCLUSIONS

L'objectif de ce travail est de développer un élément fini capable de prédire le comportement d'une plaque rectangulaire en vibration libre dans l'air ou en contact avec un fluide, soit dans le cas où la plaque se repose sur la surface libre d'un fluide ou bien lorsqu'elle est totalement submergée.

Un élément fini solide a été développé en utilisant un champ de déplacements polynomial pour les déplacements membranaires et pour le déplacement transversal, un champ basé sur de la forme générale de la solution des équations d'équilibre flexionnelles. Les fréquences obtenues

par cet élément à vide sont d'une excellente précision en les comparant avec des solutions analytiques, numériques ou expérimentales.

La pression du fluide est dérivée d'un potentiel de vitesse, elle est exprimée en fonction de l'accélération du déplacement transversal de la plaque. Elle est obtenue en tenant compte de l'effet de surface libre de fluide ou du mur rigide limitant le fluide et de la condition d'imperméabilité à l'interface fluide solide. Les matrices de masses du fluide et du solide ainsi que la rigidité sont obtenues par intégration exacte pour chaque élément.

D'après les résultats obtenus, l'élément fluide solide représente très bien tous les aspects de comportement d'une plaque en interaction avec un fluide déjà mentionné par d'autres travaux numériques, analytiques ou expérimentaux.

Nous soulignons que les conditions aux rives de la plaque influent fortement sur le comportement dynamique de la plaque lorsqu'elle est en interaction avec un fluide. Nous indiquons ici que la hauteur de fluide à laquelle les fréquences cessent de changer dépend du rapport de dimensions de la plaque.

Il a été montré que l'effet de surface peut être négligé lorsque les fréquences dépassent un certain seuil; en dessous de cette limite, nous devons résoudre un problème à valeur propre non linéaire. Les résultats sont en très bon accord avec les résultats obtenus par des méthodes expérimentales ou analytiques.

L'avantage de cette méthode est qu'elle pourra être utilisée pour des plaques rectangulaires anisotropes uniformes ou non uniformes ayant n'importe quelles conditions aux limites internes ou aux périphéries.

Nous avons réussi à modéliser le comportement hydroélastique d'une plaque se reposant sur la surface libre d'un fluide ou totalement submergée à différents niveaux de fluide sur ou/et sous la plaque.

Puisque la pression du fluide est calculée et appliquée séparément à chaque élément, cette propriété nous permet d'étudier des plaques verticales, horizontales et inclinées, totalement ou partiellement submergées, nous pouvons aussi utiliser cet élément à l'analyse de plusieurs autres structures, comme par exemple un cylindre ouvert non uniforme, des plaques parallèles ou des plaques radiales encastrées sur un axe.

RÉFÉRENCES

1- J.W.S. LORD RAYLEIGH, 1945. **Theory of Sound**, New York: Dover, second edition (First edition, 1877).

2- H. LAMB, 1921. *Proceeding of Royal Society*, A98, 205-216. London. **On the vibrations of an elastic plate in contact with water.**

3. J.H. POWELL and J.H.T. ROBERTS, 1923. *Proceedings of the Physical Society London* 35 P170-182. **On the frequency of vibration of circular diaphragms.**

4- N.W. MCLACHLAN, 1932. *Proceedings of the Physical Society*, London: 44, P546-555. **The accession to inertia of flexible discs vibrating in a fluid.**

5- W.H. PEAKE and E.G. THURSTON, 1954. *Journal of the Acoustical Society of America* 26, 166-168. **The lowest resonant frequency of a water loaded circular plate.**

6- U.S. LINNDHOLM, D.D. KANA, W.H. CHU and H.N. ABRAMSON, 1965, *Journal of Ship Research*, P11-22. **Elastic vibration characteristics of cantilever plates in water.**

7- G. MUTUVEERAPPAN, N. GANESAN AND M.A. VELUSWAMI, 1980. *Journal of Sound and Vibration*, V 69, N4, P 612-615. **Influence of fluid added mass on the vibration characteristics of plates under various**

8 F. MONTERO DE ESPINOSA and J.A. GALLEGO-JUAREZ, May 1984, *Journal of Sound and Vibration*, V94, N2, P217-222. **On the resonance frequencies of water-loaded circular plates.**

9- Y. FU and W. G.PRICE, Nov 1987. *Journal of Sound and Vibration*, V118, N3, P495-513 **Interactions between a partially or totally immersed vibrating cantilever plate and the surrounding fluid.**

10- M.R. Haddara, S. Cao, 1996. *Marine Structures*. N9, P913–933. **A study of the dynamic response of submerged rectangular flat plates.**

11- M.K. KWAK AND K.C. KIM, May 1991. *Journal of Sound and Vibration*, V146, N3, P381-389. **Axisymmetric vibration of circular plates in contact with fluid.**

12- M.K. KWAK, June 1991. *Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, V58, N2, P480-483 **Vibration of circular plates in contact with water.**

13- M.K. KWAK, April 1997. *Journal of Sound and Vibration*, V201, N3, P293-303. **Hydroelastic vibration of circular plates.**

14- M.K. KWAK, Dec 1994. *Journal of Sound and Vibration*, V178, N5, P688-690 **Vibration of circular membranes in contact with water.**

15- M. AMABILI, G.FROSALI and M.K. KWAK, April 1996. *Journal of Sound and Vibration* V191, N5, P825-846. **Free vibrations of annular plates coupled with fluids**

16- M.K. KWAK, March 1996. *Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, V63, N1, P110-115. **Hydroelastic vibration of rectangular plates.**

17- M. AMABILI and M.K. KWAK, Sept 1999, *Journal of Sound and Vibration*, V 226, N3, P 407-424. **Vibration of circular plates on a free fluid surface: effect of surface waves.**

18- M.K. KWAK and S.B. HAN, Feb 2000. *Journal of Sound and Vibration*, V230, N1, P171-85. **Effect of fluid depth on the hydroelastic vibration of free-edge circular plate.**

19- M. AMABILI, June 1996, *Journal of Sound and Vibration*, V193, N4, P909-925. **Effect of finite fluid depth on the hydroelastic vibrations of circular and annular plates.**

20- K.R. AGGARWAL, R.SINHASAN and G.K. GROVER, May 1980. **Free vibrations of a rectangular plate submerged in fluid.**

21- A.A. LAKIS and M.P. PAIDOUSSIS, Nov 1971. *Journal of Sound and Vibration*, V19, N1, P1-15. **Free vibration of cylindrical shells partially filled with liquid.**

22- A.A. LAKIS and M.P. PAIDOUSSIS, Feb 1972, *Journal of Mechanical Engineering Science*, V14, N1, P49-71. **Dynamic analysis of axially non-uniform thin cylindrical shells.**

23- A.A. LAKIS and M.P. PAIDOUSSIS, Nov 1972. *Journal of Sound and Vibration*, V25, N1, P1-27. **Prediction of the response of a cylindrical shell to arbitrary or boundary-layer-induced random pressure fields.**

24- A.A. LAKIS and A.SELMANE, 1997. *Journal of Fluids and Structures*, N11, P111–134. **Vibration analysis of anisotropic open cylindrical shells subjected to a flowing fluid.**

25- G. KIRCHHOFF, 1850. *Mathematical Journal* (Crelle's Journal) 40, 51-58. UG berdas Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe.

26- F.K. BOGNER, 1966. *Proceedings of the Conference on Matrix Method in Structural Mechanics*. Wright-Patterson Air Force Base/Air Force Flight Dynamics Lab. TR-66-80. **The generation of interelement-compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas.**

27- O.C. ZIENKIEWICZ, 1977. *New York: McGraw-Hill; second edition*. **The finite element method.**

28- M.J. TURNER, CLOUGH, R. W. MARTIN and al. 1956 *Journal of Aerosol Science*, N23, P805-823. **Stiffness and deflection analysis of complex structure.**

29- A.E.H. LOVE, 1944. *New York: Dover*. A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity,

30- A.W. LEISSA, 1969 *NASA, SP-160*. **Vibration of plates.**

31- J. L. SANDERS, 1959. *NASA TR-24*. **An improved first approximation theory for thin shell.**

32- E. CHARBONNEAU and A.A. LAKIS, 2001. *Journal of Sound and vibration*, V 242, N3, P427-443. **Semi-analytical shape functions in the finite element analysis of rectangular plates**

33. R.D. COOK, 2002. *John Wiley & Sons, New York*. **Concepts and applications of finite element analysis.**

34- A.W. LEISSA 1973. *Journal of Sound and vibration*, V31, N3, P257-293. **The free vibration of rectangular plates.**

35- B. GRINSTED, 1952. *Proceedings of Institution of Mechanical Engineers*, N166, P309-326. **Nodal pattern analysis**

36- A. I. MARTIN 1956. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, N 9, 94-102. **On the vibration of Cantilever Plate.**

37- D.J. GORMAN, 1982. *Amsterdam: Elsevier*, **Free vibration analysis of rectangular plates.**

- 38-** K.C. KIM, J.S. KIM and H.Y. LEE, 1979. *Journal of the society of naval architects of Korea* V16, N2, P1-7. **An experimental study on the elastic vibration of plates in contact with water**
- 39-** M. AMABILI, A. PASQUALINI, G. DALPIAZ, Dec 1995. *Journal of Sound and Vibration*, V188, N5, P685-699. **Natural frequencies and modes of free-edge circular plates vibrating in vacuum or in contact with liquid.**
- 40-** M. AMABILI and M. K. KWAK, 1996. *Journal of Fluids and Structures*, V10, P743-761. **Free vibration of circular plates coupled with liquids: revising the Lamb problem.**
- 41-** R. SZILARD, 1974. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, **Theory and Analysis of Plate.**
- 42-** O.C. ZIENKIEWICZ, R.L. TAYLOR, 2000. Elsevier (5th Edition) Volume 2, **Finite Element Method**, Solid Mechanics.

APPENDICE A

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{A} & \frac{y}{B} & \frac{xy}{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x}{A} & \frac{y}{B} & \frac{xy}{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x}{A} & \frac{y}{B} & \frac{x^2}{2A^2} & \frac{xy}{AB} & \frac{y^2}{2B^2} & \frac{x^3}{6A^3} & \frac{x^2y}{2AB} & \frac{xy^2}{2AB^2} & \frac{y^3}{6B^3} & \frac{x^3y}{6A^3B} & \frac{x^2y^2}{4A^2B^2} & \frac{xy^3}{6AB^3} & \frac{x^3y^2}{12A^3B^2} & \frac{x^2y^3}{12A^2B^3} & \frac{x^3y^3}{36A^3B^3} \end{bmatrix}$$

$$[R_\gamma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x}{A} & \frac{y}{B} & \frac{x^2}{2A^2} & \frac{xy}{AB} & \frac{y^2}{2B^2} & \frac{x^3}{6A^3} & \frac{x^2y}{2AB} & \frac{xy^2}{2AB^2} & \frac{y^3}{6B^3} & \frac{x^3y}{6A^3B} & \frac{x^2y^2}{4A^2B^2} & \frac{xy^3}{6AB^3} & \frac{x^3y^2}{12A^3B^2} & \frac{x^2y^3}{12A^2B^3} & \frac{x^3y^3}{36A^3B^3} \end{bmatrix}$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{A} & 0 & \frac{y}{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{B} & \frac{x}{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{B} & \frac{x}{AB} & 0 & \frac{1}{A} & 0 & \frac{y}{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{A^2} & 0 & 0 & \frac{x}{A^3} & -\frac{y}{A^2B} & 0 & 0 & -\frac{xy}{A^3B} & -\frac{y^2}{2A^2B^2} & 0 & -\frac{xy^2}{2A^3B^2} & -\frac{y^3}{6A^2B^3} & -\frac{xy^3}{6A^3B^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{B^2} & 0 & 0 & -\frac{x}{AB^2} & -\frac{y}{B^3} & 0 & -\frac{x^2}{2A^2B^2} & -\frac{xy}{AB^3} & -\frac{2A^3B^2}{6A^2B^3} & -\frac{x^2y}{6A^3B^3} & -\frac{x^3y}{6A^4B^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{AB} & 0 & 0 & -\frac{2x}{A^2B} & -\frac{2y}{A^2B} & 0 & -\frac{x^2}{A^3B} & -\frac{2xy}{A^2B^2} & -\frac{y^2}{AB^3} & -\frac{x^2y}{A^3B^2} & -\frac{xy^2}{A^2B^3} & -\frac{x^2y^2}{2A^3B^3} \end{bmatrix}$$

Les éléments non nuls de la matrice A^{-1} sont :

$$A^{-1}(1,1) = 1, A^{-1}(2,1) = A^{-1}(2,7) = -\frac{A}{x_e}, A(3,1) = -A(3,19) = -\frac{B}{y_e}, A^{-1}(4,1) = -A^{-1}(4,7)) = A^{-1}(4,13) = -A^{-1}(4,19) = -\frac{AB}{x_e y_e}$$

$$A^{-1}(5,2) = 1, A^{-1}(6,2) = -A^{-1}(6,8) = -\frac{A}{x_e}, A^{-1}(7,2) = -\frac{B}{y_e}, A^{-1}(7,20) = -\frac{AB}{x_e y_e},$$

$$A^{-1}(8,2) = -A^{-1}(8,8) = A^{-1}(8,14) = A^{-1}(8,14) = -A^{-1}(8,20) = \frac{AB}{x_e}, A^{-1}(9,3) = 1, A^{-1}(10,4) = A, A^{-1}(11,5) = B,$$

$$A^{-1}(12,3) = -A^{-1}(12,9) = -\frac{6A^2}{x_e^2}, A^{-1}(12,4) = 2A^{-1}(12,10) = -4\frac{A^2}{x_e}, A^{-1}(13,6) = A.B, A^{-1}(14,3) = -A^{-1}(14,21) = -12\frac{A^3}{x_e^2},$$

$$A^{-1}(14,5) = A^{-1}(14,3) = 2A^{-1}(14,23) = 2\frac{B^2}{y_e}, A^{-1}(15,3) = -A^{-1}(15,9) = 12\frac{A^3}{x_e^2}, A^{-1}(15,4) = A^{-1}(15,10) = \frac{6A^3}{x_e^2},$$

$$A^{-1}(16,5) = -A^{-1}(16,11) = -6\frac{A^2B}{x_e^2}, A^{-1}(16,6) = A^{-1}(16,12) = -2\frac{A^2B}{x_e}, A^{-1}(17,4) = -A^{-1}(17,22) = -6\frac{AB^2}{y_e^2},$$

$$A^{-1}(17,6) = A^{-1}(17,24) = -\frac{4AB^2}{y_e}, \quad A^{-1}(18,3) = -A^{-1}(18,21) = 12\frac{B^3}{y_e^3}, \quad A^{-1}(18,5) = A^{-1}(18,23) = 6\frac{B^3}{y_e^2}, \quad A^{-1}(19,5) = A^{-1}(19,11) = 12\frac{A^3B}{x_e^3},$$

$$A^{-1}(19,6) = A^{-1}(19,12) = 6\frac{BA^3}{x_e^2}, \quad A^{-1}(20,4) = 2A^{-1}(20,10) = -A^{-1}(20,16) = -A^{-1}(20,22) = 24\frac{B^2A^2}{xy_e^2},$$

$$A^{-1}(20,5) = -\frac{2A^{-1}(20,9)}{3} = -A^{-1}(20,11) = -2A^{-1}(20,17) = 2A^{-1}(20,23) = 24\frac{A^2B^2}{x_e^2y_e},$$

$$A^{-1}(20,6) = 2A^{-1}(20,12) = 4A^{-1}(20,18) = \frac{2}{3}A(20,24) = 16\frac{A^2B^2}{x_e^3y_e}, \quad A^{-1}(21,4) = -A^{-1}(21,22) = 12\frac{AB^3}{y_e^3}, \quad A^{-1}(21,6) = A^{-1}(21,24) = 6\frac{AB^3}{y_e^2},$$

$$A^{-1}(22,3) = -A^{-1}(22,9) = A^{-1}(22,15) = -A^{-1}(22,21) = 72\frac{AB^2}{x_e^3y_e^2}, \quad A^{-1}(22,4) = A^{-1}(22,10) = -A^{-1}(22,16) = -A^{-1}(22,22) = -36\frac{A^3B^3}{x_e^2y_e^2},$$

$$A^{-1}(22,5) = -A^{-1}(22,11) = -2A^{-1}(22,17) = 2A^{-1}(22,23) = -48\frac{A^3B^2}{x_e^3y_e}, \quad A^{-1}(22,6) = A^{-1}(22,12) = 2A^{-1}(22,18) = 2A^{-1}(22,24) = -24\frac{A^3B^2}{x_e^2y_e}$$

$$A^{-1}(23,3) = -A^{-1}(23,9) = A^{-1}(23,15) = A^{-1}(23,21) = 72\frac{A^2B^3}{x_e^3y_e^2}, \quad A^{-1}(23,4) = 2A^{-1}(23,10) = -2A^{-1}(23,16) = -A^{-1}(23,22) = -48\frac{A^2B^3}{x_e^3y_e^3},$$

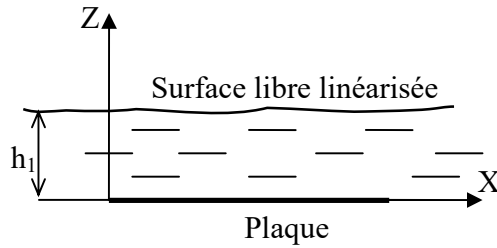
$$A^{-1}(23,5) = -A^{-1}(23,11) = -A^{-1}(23,17) = A^{-1}(23,23) = -36\frac{A^2B^3}{x_e^2y_e^2}, \quad A^{-1}(23,6) = 2A^{-1}(23,12) = 2A^{-1}(23,18) = A^{-1}(23,24) = -24\frac{A^2B^3}{x_e^2y_e^2}$$

$$A^{-1}(24,3) = -A^{-1}(24,9) = A^{-1}(24,15) = -A^{-1}(24,21) = 144\frac{A^3B^3}{x_e^3y_e^3}, \quad A^{-1}(24,4) = A^{-1}(24,10) = -A^{-1}(24,16) = -A^{-1}(24,22) = 72\frac{A^3B^3}{x_e^2y_e^3},$$

$$A^{-1}(24,5) = -A^{-1}(24,11) = -A^{-1}(24,17) = A^{-1}(24,23) = -72\frac{A^3B^3}{x_e^2y_e^2}, \quad A^{-1}(24,6) = A^{-1}(24,12) = A^{-1}(24,18) = A^{-1}(24,24) = 36\frac{A^3B^3}{x_e^2y_e^2}$$

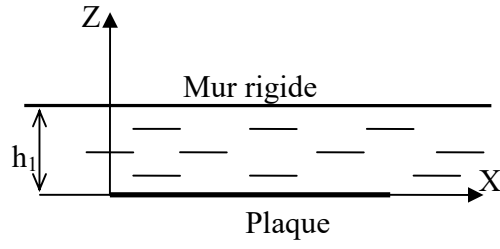
Facteur Z_{fi}

a)



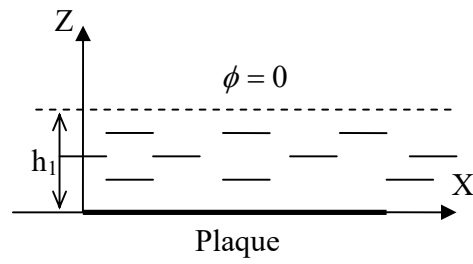
$$Z_{f1} = -\frac{\rho_f}{\mu} \left[\frac{1 - C_l e^{2\mu h_l}}{1 + C_l e^{2\mu h_l}} \right]$$

b)



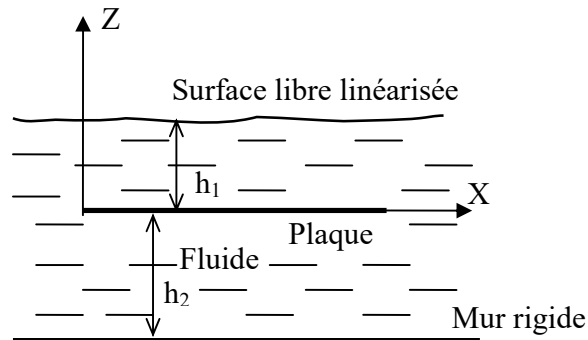
$$Z_{f2} = -\frac{\rho_f}{\mu} \left[\frac{e^{-2\mu h_1} + 1}{e^{-2\mu h_1} - 1} \right]$$

c)



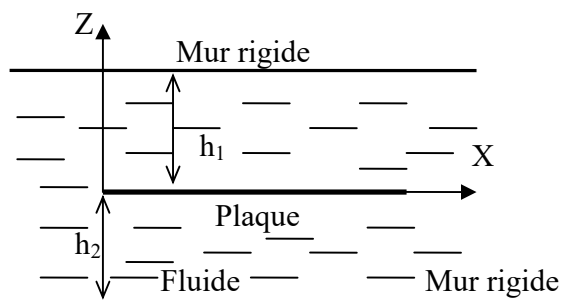
$$Z_{f3} = -\frac{\rho_f}{\mu} \left[\frac{1 + e^{2\mu h_1}}{1 - e^{2\mu h_1}} \right]$$

d)



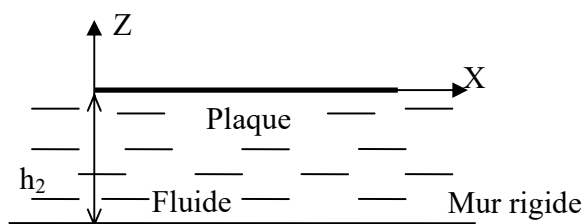
$$Z_{f4} = -\frac{\rho_f}{\mu} \left[\frac{1 + C_l e^{2\mu h_1}}{1 - C_{l4} e^{2\mu h_1}} + \frac{e^{-2\mu h_2} + 1}{e^{-2\mu h_2} - 1} \right]$$

e)



$$Z_{f5} = -\frac{\rho_f}{\mu} \left[\frac{e^{-2\mu h_1} + 1}{e^{-2\mu h_1} - 1} + \frac{e^{-2\mu h_2} + 1}{e^{-2\mu h_2} - 1} \right]$$

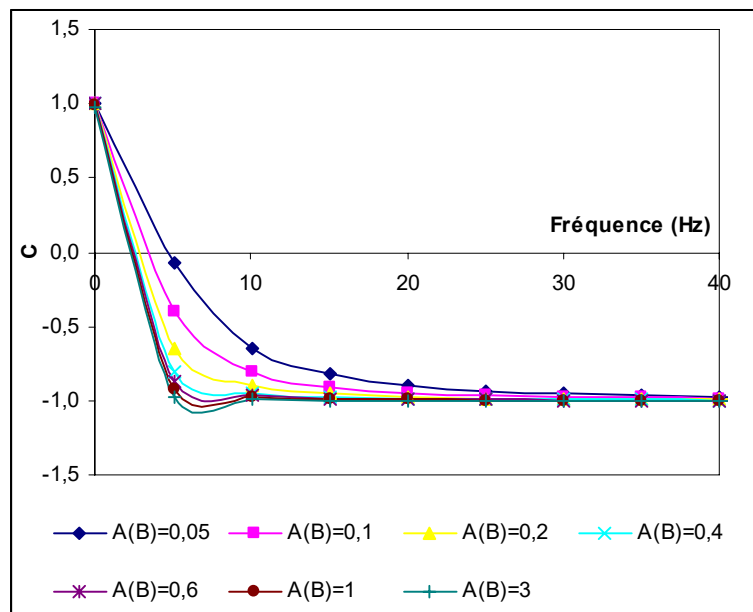
f)



$$Z_{f6} = -\frac{\rho_f}{\mu} \left[\frac{e^{-2\mu h_2} + 1}{e^{-2\mu h_2} - 1} \right]$$

APPENDICE- B

Nous avons tracé sur la figure B.1 la variation du coefficient C en fonction des fréquences (Hz) pour différentes valeurs de dimensions de la plaque (A et B). Nous constatons que plus la valeur de A et B est grande, plus le coefficient C tend vers -1 rapidement. Pour les cas où A et B sont faibles, la fréquence à laquelle le coefficient C tend vers -1 est plus grande, mais en contrepartie nous savons que lorsque les dimensions de la plaque sont faibles, les fréquences sont très grandes. Nous avons vérifié la valeur de C pour tous les exemples cités dans ce travail et pour plusieurs d'autres cas, nous pouvons dire que pour tous les cas pratiques C est égal à (-1).



Variation de C en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de A et B

APPENDICE- C

Comparaison de fréquences adimensionnelles, (λ) , de Leissa [34] avec nos fréquences adimensionnelles, (λ) , dans le cas d'une plaque sans fluide, et nous avons ajouté un (λ_f) correspondant à une plaque submergée de fluide pour différents rapports de dimensions (A/B) .

Nous avons comparé les fréquences adimensionnelles (λ) obtenues en utilisant notre élément fini, avec les fréquences obtenues par la méthode analytique de Leissa, pour une variété de conditions aux limites et pour différents rapports de dimensions de la plaque (A/B) . Nous avons calculé aussi pour chaque cas les fréquences adimensionnelles lorsque la plaque est totalement submergée dans l'eau. Les résultats sont listés aux tableaux (1.C-8.C).

La fréquence adimensionnelle est exprimée par :

$$\lambda = \omega A^2 \sqrt{\frac{\rho h}{K}}$$

avec : $K = Eh^3/12(1-\nu^2)$

ω est la fréquence naturelle de la structure sans fluide.

La fréquence adimensionnelle avec fluide est exprimée par :

$$\lambda_f = \omega_f A^2 \sqrt{\frac{\rho h}{K}}$$

ω_f est la fréquence naturelle de la structure submergée dans le fluide;

n et m représentent les modes axiaux selon les deux directions différentes de la plaque.

Les conditions aux limites suivantes ont été exécutées : **CCCC, CCFF, FFFF, SFFF, CCCF, CFFF, SSSF, SFSF.**

Clamped ($U=0, V=0, W=0, W_{,x}=0, W_{,y}=0, W_{,xy}$).

Simply supported ($U=0, V=0, W=0$).

Free ($U \neq 0, V \neq 0, W \neq 0, W_{,x} \neq 0, W_{,y} \neq 0, W_{,xy} \neq 0$).

TABLEAU (1.C)

A/B=1			
CCCC	λ sans fluide		λ fluide
n-m	Présent élément	Leissa analytique	Présent élément
1-1	35,45	35,99	12,80
2-1	72,03	73,41	26,01
1-2	72,03	73,41	26,01
2-2	103,70	108,27	37,44
3-1	129,41	131,64	46,73
1-3	130,28	132,24	47,04
A/B=0.4			
CCCC	λ sans fluide		λ fluide
n-m	Présent élément	Leissa analytique	Présent élément
1-1	23,31	23,64	7,46
1-2	26,69	27,81	8,54
1-3	33,48	35,44	10,72
1-4	44,21	46,70	14,15
1-5	59,01	61,55	18,89
2-1	62,24	63,1	19,92
A/B=2.5			
CCCC	λ sans fluide		λ fluide
n-m	Présent élément	Leissa analytique	Présent élément
1-1	145,72	147,8	68,67
2-1	166,84	173,85	78,62
3-1	209,31	221,54	98,64
4-1	276,35	291,89	130,23
5-1	368,83	384,71	173,81
1-2	389,04	394,37	183,34

(n, m) représentent les modes axiaux dans les deux directions différentes de la plaque (Voir figure 12).

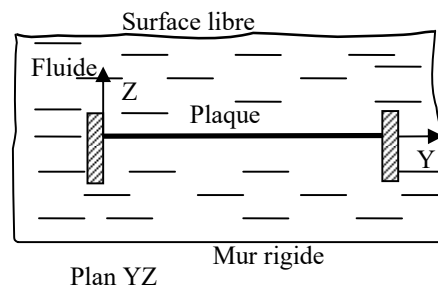
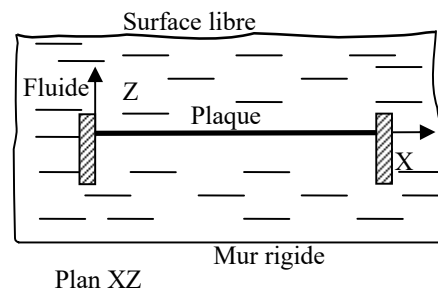


TABLEAU (2.C)

A/B=1			
CCFF	λ sans fluide		λ fluide
n-m	Présent élément	Leissa analytique	Présent élément
1-1	6,92	6,94	2,49
2-1	23,96	24,03	8,65
1-2	26,50	26,68	9,57
2-2	47,23	47,78	17,05
1-3	62,77	63,03	22,66
3-1	65,65	65,83	23,70
A/B=0.4			
CCFF	λ sans fluide		λ fluide
n-m	Présent élément	Leissa analytique	Présent élément
1-1	3,96	3,98	1,26
1-2	7,10	7,15	2,27
1-3	12,99	13,10	4,16
1-4	21,81	21,84	6,98
2-1	22,70	22,89	7,26
2-2	25,96	26,50	8,31
A/B=2.5			
CCFF	λ sans fluide		λ fluide
n-m	Présent élément	Leissa analytique	Présent élément
1-1	24,77	24,91	11,67
2-1	44,38	44,719	20,91
3-1	81,22	81,879	38,27
4-1	136,31	136,52	64,23
1-2	141,89	143,1	66,86
2-2	162,30	165,63	76,48

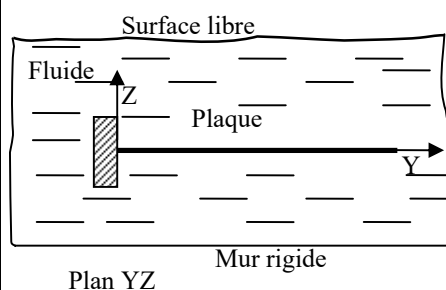
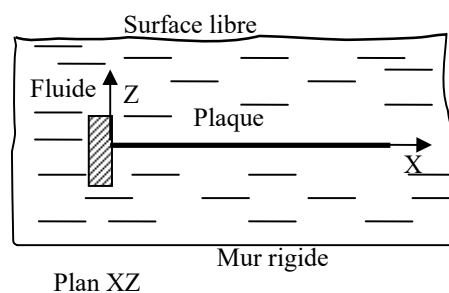


TABLEAU (3.C)

A/B=1			
FFFF	λ sans fluide		λ fluide
n-m	Présent élément	Leissa analytique	Présent élément
2-2	13,48	13,48	4,86
1-3	19,61	19,78	7,08
3-1	24,31	24,43	8,78
3-2	34,79	35,02	12,56
2-3	34,79	35,02	12,56
4-1	61,32	61,52	22,14
A/B=0.4			
FFFF	λ sans fluide		λ fluide
n-m	Présent élément	Leissa analytique	Présent élément
1-3	3,431	3,46	1,616
2-2	5,28	5,28	8,46
1-4	9,56	9,62	10,10
2-3	11,34	11,43	26,99
1-5	18,72	18,79	28,43
2-4	18,94	19,1	49,41
A/B=2.5			
FFFF	λ sans fluide		λ fluide
n-m	Présent élément	Leissa analytique	Présent élément
3-1	21,47	21,64	10,11
2-2	33,01	33,05	15,55
4-1	59,78	60,13	28,17
3-2	70,90	71,48	33,41
5-1	117,04	117,45	55,15
4-2	118,42	119,38	55,80

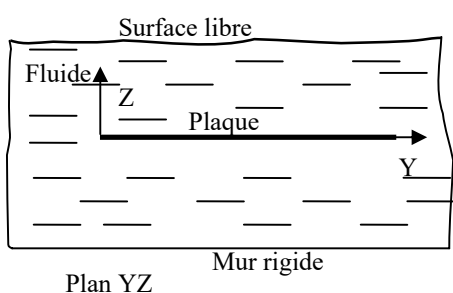
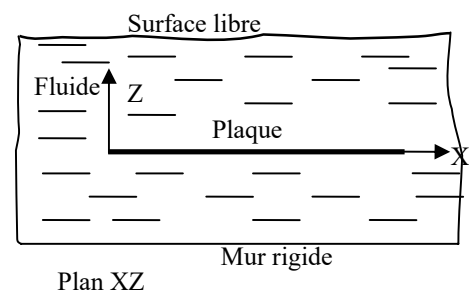
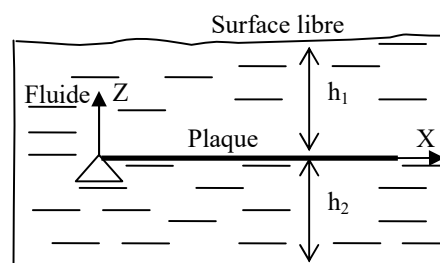


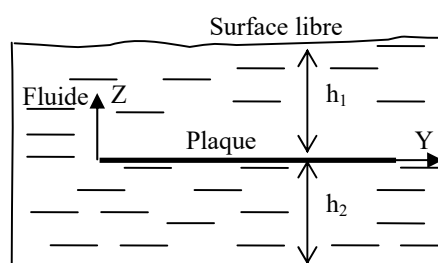
TABLEAU (4.C)

A/B=1			
SFFF	λ sans fluide		λ fluide
n-m	Présent élément	Leissa analytique	Présent élément
1-2	6,64	6,64	2,40
2-1	14,93	15,02	5,39
2-2	25,38	25,49	9,16
1-3	25,98	26,12	9,38
3-1	48,49	48,71	17,51
2-3	50,43	50,84	18,21
A/B=0.4			
SFFF	λ sans fluide		λ fluide
n-m	Présent élément	Leissa analytique	Présent élément
1-2	2,69	2,69	0,86
1-3	6,47	6,50	2,07
1-4	12,58	12,63	4,02
2-1	15,29	15,33	4,89
2-2	17,33	17,51	5,55
1-5	21,57	21,69	6,90
A/B=2.5			
SFFF	λ sans fluide		λ fluide
n-m	Présent élément	Leissa analytique	Présent élément
2-1	14,82	14,93	6,984
1-2	16,23	16,24	7,65
3-1	48,57	48,84	22,89
2-2	51,97	52,08	24,49
3-2	77,52	97,22	45,58
4-1	96,73	102,34	48,10



Mur rigide

Plan XZ

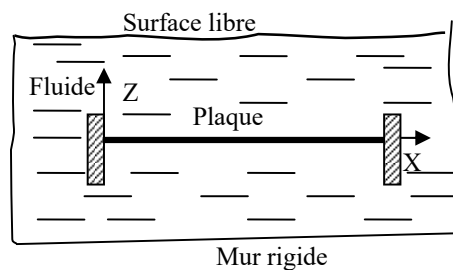


Mur rigide

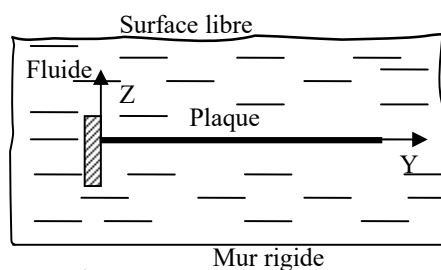
Plan YZ

TABLEAU (5.C)

A/B=1			
CCCF	λ sans fluide		λ fluide
n-m	Présent élément	Leissa analytique	Présent élément
1-1	23,94	24,02	8,64
1-2	39,49	40,03	14,26
2-1	63,40	63,49	22,89
1-3	75,42	76,76	27,23
2-2	79,10	80,71	28,56
2-3	112,38	116,8	40,58
A/B=0.4			
CCCF	λ sans fluide		λ fluide
n-m	Présent élément	Leissa analytique	Présent élément
1-1	22,53	22,57	7,21
1-2	24,12	24,62	7,72
1-3	28,01	29,24	8,96
1-4	35,05	37,05	11,22
1-5	45,77	48,28	14,65
2-1	60,41	61,92	19,34
A/B=2.5			
CCCF	λ sans fluide		λ fluide
n-m	Présent élément	Leissa analytique	Présent élément
1-1	37,41	37,65	17,63
2-1	75,84	76,40	35,74
3-1	134,42	135,15	63,35
1-2	150,52	152,47	70,93
2-2	186,81	193,01	88,03
4-1	213,61	213,74	100,67



Plan XZ



Plan YZ

TABLEAU (6.C)

A/B=1			
CFFF	λ sans fluide		λ fluide
n-m	Présent élément	Leissa analytique	Présent élément
1-1	3,47	3,49	1,25
1-2	8,51	8,524	3,07
2-1	21,35	21,42	7,71
1-3	27,14	27,33	9,80
2-2	30,96	31,11	11,18
2-3	53,82	54,44	19,43
A/B=0.4			
CFFF	λ sans fluide		λ fluide
n-m	Présent élément	Leissa analytique	Présent élément
1-1	3,49	3,51	1,1185
1-2	4,75	4,78	1,52110071
1-3	8,03	8,11	2,57306714
1-4	13,75	13,88	4,40480062
2-1	21,67	21,63	6,9391361
2-2	22,92	23,73	7,34041983
A/B=2.5			
CFFF	λ sans fluide		λ fluide
n-m	Présent élément	Leissa analytique	Présent élément
1-1	3,42	3,45	1,61
1-2	17,97	17,98	8,46
2-1	21,43	21,56	10,10
2-2	49,41	57,45	26,99
3-1	57,27	60,58	28,43
3-2	106,03	106,54	49,41

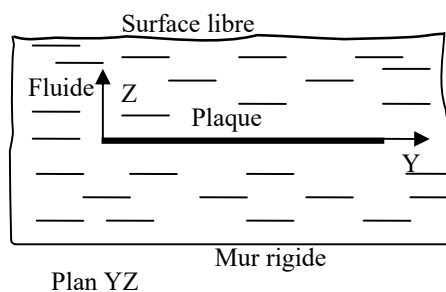
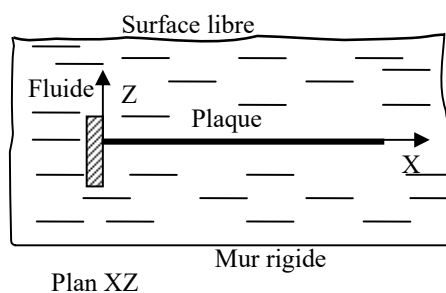
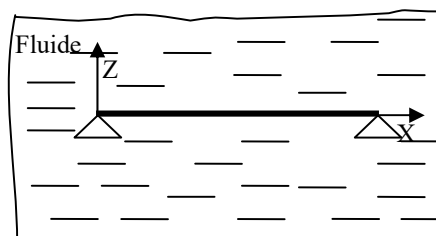


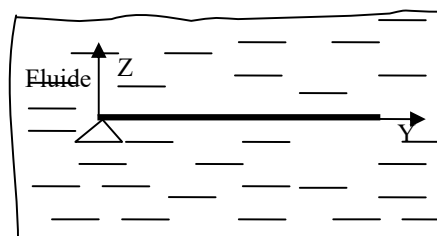
TABLEAU (7.C)

A/B=1			
SSSF	λ sans fluide		λ fluide
n-m	Présent élément	Leissa analytique	Présent élément
1-1	11,68	11,68	4,22
1-2	27,54	27,75	9,94
2-1	41,29	41,19	14,91
2-2	58,24	59,06	21,03
1-3	61,14	61,86	22,08
3-1	90,72	90,29	32,76
A/B=0.4			
SSSF	λ sans fluide		λ fluide
n-m	Présent élément	Leissa analytique	Présent élément
1-1	10,15	10,12	3,25
1-2	12,90	3,057	4,13
1-3	18,42	18,83	5,89
1-4	26,86	27,55	8,59
1-5	38,39	39,33	12,29
2-1	39,75	39,61	12,72
A/B=2.5			
SSSF	λ sans fluide		λ fluide
n-m	Présent élément	Leissa analytique	Présent élément
1-1	18,79	18,8	8,85
2-1	50,54	50,54	23,81
3-1	100,35	100,23	47,29
1-2	109,08	110,22	51,40
2-2	143,96	147,63	67,84
4-1	169,83	169,10	80,03



Mur rigide

Plan XZ

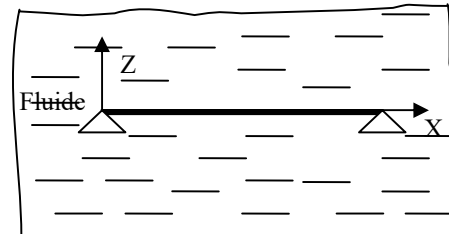


Mur rigide

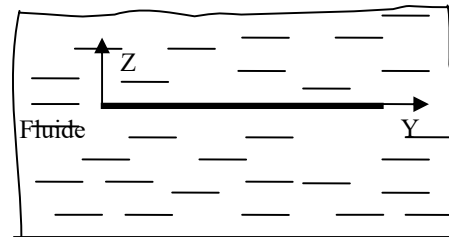
Plan YZ

TABLEAU (8.C)

A/B=1			
SFSF	λ sans fluide		λ fluide
n-m	Présent élément	Leissa analytique	Présent élément
1-1	9,65	9,63	3,48
1-2	16,13	16,13	5,82
1-3	36,44	36,72	13,16
2-1	39,14	38,94	14,13
2-2	46,78	46,73	16,89
2-3	69,73	70,74	25,18
A/B=0.4			
SFSF	λ sans fluide		λ fluide
n-m	Présent élément	Leissa analytique	Présent élément
1-1	9,81	9,76	3,14
1-2	11,05	11,03	3,54
1-3	14,89	15,06	4,76
1-4	21,28	21,70	6,81
1-5	30,49	31,17	9,76
2-1	39,48	39,23	12,64
A/B=2.5			
SFSF	λ sans fluide		λ fluide
n-m	Présent élément	Leissa analytique	Présent élément
1-1	9,49	9,48	4,47
1-2	33,62	33,62	15,84
2-1	38,46	38,36	18,12
2-2	75,17	75,20	35,42
3-1	87,44	86,96	41,21
3-2	127,52	130,35	61,39



Plan XZ
Mur rigide



Plan YZ
Mur rigide

NOMENCLATURE

U, V	: déplacements de la surface moyenne dans le plan de la plaque selon l'axe X et l'axe Y respectivement
W	: déplacement transversal de la surface moyenne
A	: longueur de la plaque selon l'axe X
B	: longueur de la plaque selon l'axe Y
h	: épaisseur de la plaque
U_i, V_i	: déplacements de la surface moyenne selon l'axe X et l'axe Y respectivement, correspondant au nœud i
W_i	: déplacement transversal de la plaque correspondant au nœud i
$W_{i,x}$	: première dérivée de déplacement transversal de la plaque par rapport à X, au nœud i
$W_{i,y}$	: première dérivée de déplacement transversal de la plaque par rapport à Y, au nœud i
$W_{i,xy}$	: dérivée croisée de déplacement transversal de la plaque par rapport à X et Y.
ω	: fréquence de vibration naturelle de la plaque en rad/sec
ω_f	: fréquence de vibration naturelle de la plaque en contact avec le fluide rad/sec
X, Y, Z	: système de coordonnées orthogonal
ρ_s	: densité de la plaque
ρ_f	: densité de fluide
g	: accélération de la gravité
h_1	: niveau de fluide au-dessus de la plaque
h_2	: niveau de fluide au-dessous de la plaque
Z_{fi}	: coefficient de pression appliquée par le fluide sur la plaque
D	: rigidité de membrane, $Eh/(1-\nu^2)$
K	: rigidité de flexion, $Eh^3/12(1-\nu^2)$
i	: nombre complexe $i^2=-1$
C_i	: constantes inconnues, définies par les équations (1) et (3)

ν	: coefficient de Poisson
E	: module de Young
P_{ij}	: coefficients de la matrice d'élasticité du matériau, définis par (14)
x_e	: longueur de l'élément selon l'axe X
y_e	: longueur de l'élément selon l'axe Y
P	: la pression de fluide sur la plaque
$\phi(x, y, z, t)$	: fonction du potentiel de vitesse
n	: numéro de mode de vibration axial selon X
m	: numéro de mode de vibration axial selon Y
λ	: fréquence adimensionnelle de vibration de la plaque sans fluide
λ_f	: fréquence adimensionnelle de vibration de la plaque avec fluide
$[R]$	: matrice (3x24), définie par l'équation (8)
$\{C\}$	: vecteur des constantes inconnues, définie par l'équation (4)
$\{\delta\}$	: vecteur élémentaire des déplacements, défini par l'équation (6)
$[A]$	: matrice (24x24), définie par l'équation (8)
$[N]$	: matrice (3x24) contenant les fonctions des champs de déplacements élémentaire, définie par l'équation (10)
$\{\varepsilon\}$	: vecteur de déformations
$[Q]$	: matrice (6x24), définie par l'équation (12)
$[B]$	: matrice définie par l'équation (12), donnant la relation entre le champ de déformation et le champ de déplacement
$\{\sigma\}$	: vecteur de contraintes
$[P]$	: matrice d'élasticité (6x6)
$[k]^e$	: matrice de rigidité élémentaire (24x24)
$[m]^e$	: matrice de masse élémentaire (24x24)
$\{F\}^e$	: vecteur de force élémentaire
$[M_s]$	: matrice globale de masse
$[K_s]$	: matrice globale de rigidité

$[M_f]$	: matrice globale de masse représentant l'effet de force d'inertie induite par le fluide.
$[C_f]$	: matrice globale d'amortissement, représentant l'effet de force de Coriolis induite par le fluide
$[K_f]$	: matrice de globale rigidité, représentant l'effet de force centrifuge induite par le fluide.
$\{\delta_T\}$	: vecteur de déplacements global
$[R_f]$	: matrice (3,24), définie par l'équation (48)
$\{\delta_{0T}\}$	: vecteur contenant les amplitudes des modes de déplacements

L'École Polytechnique se spécialise dans la formation d'ingénieurs et la recherche en ingénierie depuis 1873



École Polytechnique de Montréal

**École affiliée à l'Université
de Montréal**

Campus de l'Université de Montréal
C.P. 6079, succ. Centre-ville
Montréal (Québec)
Canada H3C 3A7

www.polymtl.ca

