PolyPublie
Polytechnique Montréal

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Titre: Title:	Tomographie par induction magnétique : une formulation par équation intégrale volumique
Auteur: Author:	Louis Philippe De Tillieux
Date:	2018
Type:	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis
Référence: Citation:	De Tillieux, L. P. (2018). Tomographie par induction magnétique : une formulation par équation intégrale volumique [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/3129/

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: PolyPublie URL:	https://publications.polymtl.ca/3129/
Directeurs de recherche: Advisors:	Yves Goussard
Programme: Program:	génie électrique

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal

https://publications.polymtl.ca

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

TOMOGRAPHIE PAR INDUCTION MAGNÉTIQUE : UNE FORMULATION PAR ÉQUATION INTÉGRALE VOLUMIQUE

LOUIS PHILIPPE DE TILLIEUX
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)
AVRIL 2018

© Louis Philippe De Tillieux, 2018.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

TOMOGRAPHIE PAR INDUCTION MAGNÉTIQUE : UNE FORMULATION PAR ÉQUATION INTÉGRALE VOLUMIQUE

présenté par : DE TILLIEUX Louis Philippe
en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. LAURIN Jean-Jacques, Ph.D., président
M. GOUSSARD Yves, Ph.D., membre et directeur de recherche
M. MÉNARD David, Ph.D., membre

REMERCIEMENTS

Je souhaite d'abord remercier mon directeur de recherche, Yves Goussard, pour son soutient constant au cours des deux dernières années et pour m'avoir fait profiter de sa riche expérience en recherche, ce projet n'aurait pas été possible sans lui. Je veux aussi remercier Corentin Friedrich, un étudiant au doctorat du groupe, qui m'a beaucoup guidé et appris durant les premiers mois. Les professeurs David Ménard et Jean-Jacques Laurin ont également contribué au projet par leur expertise. Leur jugement critique et leurs conseils ont été utiles à mon cheminement. Ce projet de recherche m'a également permis de découvrir la Chine, un pays riche en culture et en gens merveilleux. Je suis reconnaissant envers l'organisme Mitacs et son personnel qui a soutenu ce programme d'échange académique via le programme Globalink et au professeur Meisong Tong de m'avoir accueilli dans son équipe à Shanghai. En plus des bienfaits du point de vue académique, ce programme m'a permis de créer de nouveaux contacts et de considérer mon projet sous une perspective différente. Finalement, je n'aurais pu accomplir ce projet sans le soutient de ma famille, de mes amis et de Sophie qui m'ont toujours soutenu et encouragé.

RÉSUMÉ

La tomographie par induction magnétique (TIM) est une technique d'imagerie qui cherche à reconstruire une carte des propriétés électriques passives d'un objet. Ses principaux domaines d'application sont le contrôle non-destructif, le sondage géologique et l'imagerie biomédicale. Des projets de recherche récents ont démontré que la tomographie par induction magnétique biomédicale est applicable, par exemple, à la détection d'accidents cérébraux vasculaires, à la mesure inductive de la conductivité de plaies et à l'imagerie pulmonaire. En comparaison avec les autres techniques d'imagerie biomédicale, la TIM a l'avantage d'utiliser un champ non-ionisant, de ne pas nécessiter de contact direct avec les tissus et d'être très peu dispendieuse, ne nécessitant essentiellement qu'une bobine d'induction et une de mesure. À cause de la simplicité du matériel nécessaire et de son très faible coût d'utilisation, le développement de systèmes de TIM performants a le potentiel de grandement améliorer la détection des pathologies mentionnées précédemment en permettant à davantage de gens de bénéficier d'une technologie d'imagerie biomédicale. Ces aspects techniques la rendent particulièrement profitable aux populations en régions rurales où l'accès à des hôpitaux possédant des appareils d'imagerie plus sophistiqués est difficile.

Les principaux inconvénients de la TIM sont sa faible résolution (par exemple par rapport à l'IRM), son champ diffusé très faible et son coût de calcul très élevé pour la reconstruction d'images. Il a été montré que la faible résolution n'est pas problématique pour certaines applications telles que la détection d'accidents cérébraux vasculaires. Dans les dernières années, le développement de capteurs ultrasensibles, par exemple les capteurs à magnéto-impédance géante, a permis la détection de variations très faibles du champ magnétique, ce qui permet de traiter le problème du faible champ diffusé. Le dernier aspect, le coût de calcul élevé pour la reconstruction d'images, est celui traité dans ce projet.

Puisque la TIM opère à basse fréquence (de quelques kHz à quelques dizaines de MHz), le patron de diffraction est plus complexe à évaluer que pour d'autres méthodes d'imagerie, par exemple la tomographie par rayons X. Pour évaluer le champ magnétique diffusé par l'objet d'intérêt aux détecteurs, les équations de Maxwell qui décrivent l'interaction des ondes électromagnétiques avec la matière, doivent être résolues. Des solutions analytiques au problème de diffusion existent pour des géométries très simples, par exemple pour une sphère illuminée par une onde plane, mais pour des géométrie plus complexes des méthodes numériques doivent être utilisées afin de trouver une solution approximative. L'état de l'art des méthodes numériques consiste soit à utiliser des approximations pour réduire la complexité des équa-

tions, soit à utiliser des formulations basées sur les équations différentielle ou sur les intégrales surfaciques. Les méthodes approximatives incluent les approximations dites «quasi-statique», «de faible conductivité» ou une combinaison des deux. Elles permettent de réduire l'équation d'onde, qui est complexe à résoudre, en une équation plus simple. Ceci permet de grandement diminuer le coût de calcul, mais se fait au détriment de la justesse des résultats. De plus, les méthodes approximatives ne sont valides que pour une gamme restreinte de paramètres, particulièrement dans la gamme inférieure (kHz) des fréquences d'intérêt de la TIM. Ceci est problématique pour les applications biomédicales puisque la fréquence d'intérêt est généralement dans l'ordre des MHz. Les méthodes différentielles incluent la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis. Les deux méthodes ont été appliquées avec succès au problème de TIM biomédicale. Toutefois, les principaux désavantages de ces méthodes sont qu'elles nécessitent la discrétisation d'un domaine beaucoup plus grand que l'objet et l'implémentation de conditions frontières d'absorption. La discrétisation d'un domaine de beaucoup plus grande taille que celui d'intérêt implique la résolution d'un beaucoup plus grand nombre d'inconnues, ce qui mène généralement à un coût de calcul très élevé. Les méthodes par intégrales surfaciques ont, quant à elles, principalement été appliquées pour le contrôle non-destructif. Pour des métaux, le courant induit est presque exclusivement concentré dans la surface de l'objet. L'intérieur du domaine apporte donc peu d'information additionnelle, ce qui rend les modèles surfaciques particulièrement attrayant. Ces méthodes ne sont toutefois pas applicables pour une vaste gamme de conductivités et de fréquences à cause du mauvais conditionnement du noyau de leurs intégrales.

Les tissus biologiques dans la gamme de fréquence de la TIM peuvent être considérés comme des objets pénétrables et l'équation intégrale volumique (EIV) est donc applicable à la modélisation du problème de diffusion électromagnétique. Puisqu'elle résout directement l'équation d'onde, l'EIV est plus précise que les méthodes approximatives. De plus, puisque les conditions de radiation sont automatiquement satisfaites, il n'est pas nécessaire de discrétiser un domaine plus grand que celui d'intérêt. Ceci implique la résolution d'un nombre d'inconnues beaucoup plus faible que pour les formulations différentielles. L'EIVs est une équation intégrale du second type, ses matrices sont donc généralement bien conditionnées. Ceci la rend applicable à une plus vaste gamme de conductivités et de fréquences que les méthodes basées sur les intégrales surfaciques. L'EIV est couramment utilisée à des fréquences plus élevées, par exemple en tomographie micro-ondes. Toutefois, pour les basses fréquences utilisées en TIM, les valeurs des propriétés diélectriques des tissus biologiques sont très élevées. Ces valeurs élevées entraînent une détérioration du conditionnement de certaines matrices et des stratégies particulières doivent être utilisées pour traiter ce problème.

La question de recherche à laquelle ce projet tente de répondre est : «Est-il possible d'utiliser

un modèle basé sur l'équation intégrale volumique en tomographie par induction magnétique biomédicale ?» Pour répondre à cette question, trois objectifs doivent être atteints. La première partie consiste à adapter un modèle basé sur l'EIV pour la tomographie micro-ondes préalablement développé dans le groupe et à mettre en évidence les difficultés posées par la TIM. Des modifications à ce modèle sont apportées afin de résoudre ces problèmes, ce qui mène au modèle par fonctions de Green inhomogènes (GI). La seconde étape du projet est d'appliquer le modèle GI proposé à la reconstruction d'images. Dans cette partie, différents aspects sont considérés afin de limiter le coût de calcul, par exemple les méthodes Bloc et le préconditionnement. Finalement, la dernière étape consiste à quantifier les limites du modèle. Ces limites incluent par exemple le niveau de bruit tolérable, le nombre minimal de mesures nécessaires, la taille minimale de discrétisation, etc. Ces caractéristiques du modèle sont comparées aux modèles de l'état de l'art afin de conclure sur l'intérêt de la méthode proposée.

Les résultats obtenus peuvent être séparés en trois parties. La première partie concerne la validité du modèle direct en fonction des paramètres du problème. Les principaux résultats sont que les paramètres affectant le plus l'erreur relative du modèle numérique sont la taille de discrétisation et la valeur de contraste. Puisque le contraste diélectrique des tissus augmente considérablement lorsque la fréquence diminue, le modèle devient inadéquat pour des fréquences inférieurs au MHz. Toutefois, pour un exemple réaliste à 10 MHz, l'erreur relative du modèle direct par rapport à la solution analytique par la théorie de Mie est d'environ 3 %, ce qui se compare aux autres résultats dans la littérature. La deuxième partie des résultats concerne l'application du modèle GI à la reconstruction d'images en TIM biomédicale. On y voit que le modèle GI permet d'améliorer la convergence par rapport au modèle EIV, tant du modèle direct que du problème inverse. Le principal facteur affectant la vitesse de convergence du problème inverse est les valeurs des propriétés diélectriques de l'objet. Pour un objet réaliste, des limites de reconstruction sont établies en terme de rapport signal sur bruit, de nombre de mesures, de fréquence, de taille et de position de la perturbation à détecter. À l'exception de la limite en fréquence, qui empêche des reconstructions adéquates dans l'ordre du kHZ, les autres limites se comparent à celles présentées dans la littérature. Finalement, puisque le problème abordé par ce projet est le coût de calcul pour la reconstruction d'images en TIM, le coût de calcul est évalué et comparé à celui d'un modèle basé sur la méthode des éléments finis. On y voit que l'amélioration à la convergence apportée par le modèle GI permet d'avoir une complexité comparable aux éléments finis. La réduction du nombre d'inconnues permet ainsi une nette amélioration au coût de calcul.

Bref, ce projet démontre qu'un modèle basé sur l'EIV peut effectivement être appliqué à la TIM biomédicale, tant pour modéliser le phénomène de diffusion magnétique que pour le

problème de reconstruction d'images. L'amélioration au coût de calcul apportée par le modèle GI offre une alternative intéressante pour la reconstruction d'images en TIM biomédicale.

Cette contribution à la réduction du coût de calcul pour la reconstruction d'images en TIM biomédicale permet de rapprocher la technologie d'une application clinique, ce qui permettra d'améliorer le taux de détection de certaines pathologies telles que les accidents cérébraux vasculaires.

ABSTRACT

Magnetic induction tomography (MIT) is a biomedical imaging method that aims to reconstruct the passive electrical properties of an object. The main areas of applications are non-destructive evaluation, geological surveys and biomedical imaging. Recent research has shown that biomedical MIT is applicable for example to stroke detection, inductive measurement of wound conductivity and lung imaging. In comparison with other imaging methods, MIT has the benefits of using a non-ionizing field, of being contactless and of being very cheap, basically requiring only an inducing and a measuring coil. Because of the simplicity of its apparatus and its low operating cost, the development of efficient MIT systems could greatly increase the detection of the aforementioned pathologies by allowing more people to have access to a biomedical imaging system. These technical aspects make this imaging technique especially useful to rural populations, where the access to hospitals with sophisticated apparatus is not available.

The main drawbacks of MIT are its low resolution (e.g. compared to MRI), it's weak scattered field and the high computation cost implied in image reconstruction from the magnetic field data. It was shown that the low resolution still allows the detection of certain pathologies such as ischemic strokes. In the last years, the development of very sensitive magnetic field sensors, such as giant magnetoimpendance sensors, has allowed the detection of very small perturbations in the magnetic field. The last issue, the high computation cost in image reconstruction, is the one being tackled by this project.

Because of the low frequency range of MIT, the diffraction pattern is more complex than other imaging methods such as X-ray tomography. In order to evaluate the scattered magnetic field at the sensors, one has to solve the Maxwell equations, which describe the interaction between electromagnetic waves and matter. Analytical solutions exist for very simple cases, such as a sphere under a plane wave illumination. For more complex geometries, numerical methods must be employed to find an approximate solution to the problem. State of the art numerical methods either apply approximations in order to reduce the complexity of the equations, or use differential methods or surface integrals. Approximate methods include either the "quasi-static" approximation, the "low conductivity" approximation or a combination of both. This allows for a reduction of the full wave equation, which is complex to solve, to a simpler case such as a Poisson equation. This greatly reduces the computation cost, but it is done at the expense of numerical accuracy. Furthermore, these approximations are only valid over a restricted range of parameters, especially for the lower frequency range (kHz). These

approximations are not valid in MIT's higher frequency range (MHz), which is of interest for biomedical applications. Differential methods include the finite difference and finite element methods. They have been successfully applied to model the physics of MIT. Their main drawbacks are that they require the discretization of a domain much larger than the one of interest and the implementation of absorbing boundary conditions. The discretization of a larger domain implies that there are much more unknowns to solve, which yields a higher computation cost. Methods based on surface integrals have yielded interesting results in non-destructive evaluation applications since, for metals, the eddy currents are mainly concentrated in the surface of the object. Attempting to reconstruct the interior of the object is of little to no value. However, these methods are not applicable to a wide range of conductivities and frequencies because of the bad conditioning of their integral kernels.

Biological tissues in the MIT frequency range may be considered as penetrable objects and volume integral equations (VIEs) may therefore be applied to model the electromagnetic scattering problem. Because they directly solve the wave equation, VIEs are more precise than approximate methods. Their formulation automatically satisfies the radiation conditions, so there is no need to discretize a domain larger than the one of interest. Additionally, VIEs are integral equations of the second kind, so their matrices are generally well conditioned, which makes them applicable to a wider range of conductivities and frequencies than methods based on surface integrals. The VIE is commonly applied at higher frequencies, for example in microwave tomography. For MIT's lower frequencies, biological tissues have a very high dielectric contrast. This phenomena leads to issues regarding the conditioning of certain operators and particular strategies must be employed to tackle this issue.

The research question that this work attempts to answer is: "Is it possible to use a volume integral equation formulation in biomedical magnetic induction tomography?" To answer this question, three objectives must be attained. Firstly, a code using the VIE to model the scattered electric field in microwave tomography that has previsouly been developed in the research group is adapted to compute the scattered magnetic field. The issues posed by MIT are stated. Modifications to the original model are made in order to cope with these issues, which leads to a model based on inhomogeneous Green's (IG) functions. Secondly, this model is applied to image reconstruction. At this stage, several aspects are considered in order to reduce the computation cost. Numerical techniques such as Block algorithms and preconditioning are considered. Thirdly, the model's limits are quantified. These limits include, for example, the tolerable noise level, the minimal number of sources and sensors required, the size and position of detectable perturbations, etc. These aspects are compared to state of the art numerical models in order to conclude on the proposed method.

The results may be divided into three separate parts. The first part concerns the validity of the forward model as a function of the various problem parameters. The highlights are that the main parameters that affect the relative error of the numerical model are the discretization size and the contrast values. Because the contrast increases considerably as the frequency decreases, this means that the forward model becomes inadequate for frequencies lower than the MHz region. However, a realistic example at 10 MHz showed that the relative error was about 3 % in comparison with the analytical Mie scattering theory. This value is comparable to the one found for other models in the litterature. The second part of the results shows that the IG model is adequate to solve the inverse problem of image reconstruction. It is shown that the IG model improves the convergence both of the forward model and the inverse solver. The low frequency high contrast breakdown phenomena and the sensitivity difference in the real and imaginary parts of the contrast do not considerably influence the convergence of the inverse solver. For a realistic object, limits concerning the signal to noise ratio, the required number of measurements, the frequency limit and the minimal size and position of the perturbation to detect are stated. With exception of the incapacity to reconstruct objects in the kHz region, the other limits compare well with current state of the art models. Finaly, since the problem tackled by this project is the computation cost of image reconstruction in MIT, the complexity of the IG model is compared with the finite element method's. It is shown that the improvement to the convergence offered by the IG model leads to a complexity comparable to the finite element method. Furthermore, since the number of unknowns is greatly reduced, this yields to a clear improvement in calculation cost.

To sum up, this project demonstrates that a model based on the VIE can effectively be applied both to the forward model, which consists of computing the scattered magnetic field, as well as image reconstruction problem. Since the relative error of the forward model and the reconstruction limits compare well with current state of the art models and because the computation cost is considerably improved, the IG model offers an interesting alternative for image reconstruction in biomedical MIT.

As discussed previously, MIT is a recent imaging method that could have a considerable impact on reducing the costs and increasing the availability of medical detection of certain pathologies such as ischemic strokes. Its simple design makes it easily portable and it could therefore become an essential biomedical imaging apparatus in rural areas where access to more sophisticated apparatus is not available. By reducing the computation cost, this project aims to bring MIT closer a clinical application.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS iii

RÉSUMÉ iv

ABSTRACT viii

TABLE DES MATIÈRES xi

LISTE DES TABLEAUX xv

LISTE DES FIGURES xvi

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS xviii

LISTE DES ANNEXES xix

CHAPITRE 1 INTRODUCTION 1
1.1 Concepts de base 1
1.1.1 Principes physiques 1
1.1.2 Modèle direct et problème inverse 2
1.1.3 Applications 4
1.1.4 Avantages et inconvénients 5
1.2 Éléments de la problématique 6
1.2.1 Limitations des modèles directs actuellement utilisés 7
1.2.2 Approche par équation intégrale volumique 8
1.2.3 Problème inverse 9
1.3 Objectifs de recherche 10
1.4 Plan du mémoire 10

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE 12
2.1 État de l'art des modèles directs 12
2.1.1 Approximations 12
2.1.2 Modèles directs par formulation différentielle 15
2.1.3 Modèles directs par intégrales surfaciques 17
2.2 Modèle direct par équation intégrale volumique 19
2.2.1 Avantages et inconvénients 19

2.2.2 Limites connues de l'EIV 19
2.2.3 Solutions au problème de contraste élevé dans l'EIV 23
2.3 Problème inverse 24
2.3.1 Critère 24
2.3.2 Régularisation 25
2.3.3 Choix de l'algorithme 28
2.4 Stratégies d'optimisation du temps de calcul 31
2.4.1 Transformée de Fourier rapide 31
2.4.2 Méthodes Bloc 32
2.4.3 Préconditionnement 33
2.5 Conclusion 35

CHAPITRE 3 THÉORIE 37
3.1 Modèle EIV 38
3.1.1 Équations continues 38
3.1.2 Équations discrétisées 43
3.1.3 Traitement de la singularité 46
3.1.4 Problèmes de l'EIV pour la TIM 46
3.2 Propagation dans un milieu inhomogène 49
3.2.1 Modèle ELOG 50
3.2.2 Modèle GI 52
3.2.3 Conclusion 54
3.3 Problème inverse 54
3.3.1 Critère 54
3.3.2 Régularisation 55
3.3.3 Choix de l'algorithme 56
3.3.4 Calcul du gradient 57
3.3.5 Choix du préconditionneur 58
3.4 Choix du modèle direct 65
3.4.1 Coût de calcul du problème direct 65
3.4.2 Convergence des modèles 67
3.5 Conclusion 68

CHAPITRE 4 RÉSULTATS ET DISCUSSION 69
4.1 Méthodologie 69
4.1.1 Description des tests 69
4.1.2 Domaines de simulation 70

4.2 Validation des modèles directs 74
4.2.1 Théorie de Mie 75
4.2.2 Caractérisation de l'erreur du modèle direct 76
4.3 Modèle inverse 81
4.3.1 Effet du modèle direct 82
4.3.2 Rupture à basse fréquence et aux forts contrastes 85
4.3.3 Forte variation de sensibilité des inconnues 92
4.3.4 Conclusion 98
4.4 Limites du modèle GI 99
4.4.1 Reconstructions réalistes 99
4.4.2 Rapport signal sur bruit 101
4.4.3 Fréquence 103
4.4.4 Nombre de mesures 107
4.4.5 Taille et position de la perturbation 108
4.5 Réduction du temps de calcul 111
4.5.1 Approche par blocs 111
4.5.2 Préconditionnement 112
4.5.3 Séparation des inconnues en deux groupes 116
4.6 Comparaison du modèle aux modèles de l'état de l'art 116
4.6.1 Complexité MEF et EIV 117
4.6.2 Évaluation du temps de calcul 119
4.6.3 Regard critique des limites du modèle 120
4.6.4 Taille et position de la perturbation 122
4.7 Conclusion 123

CHAPITRE 5 CONCLUSION 124
5.1 Synthèse des travaux 124
5.1.1 Intérêt de l'EIV en TIM biomédicale 124
5.1.2 Propagation dans un milieu inhomogène 124
5.1.3 Validation du modèle direct 125
5.1.4 Résolution du problème inverse 125
5.2 Limitations de la solution proposée 126
5.2.1 Limitation du modèle direct 126
5.2.2 Limitations du problème inverse 127
5.2.3 Limitation en coût de calcul 128
5.3 Améliorations futures 128

5.3.1 Parallélisation 128
5.3.2 MLFMA 129
5.3.3 Critère bilinéaire 129
5.3.4 Régularisation 129
5.3.5 Données réelles et évaluation du milieu de propagation 130

RÉFÉRENCES 131

ANNEXES 143

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1 : Fonctions de régularisation 27
Tableau 3.1 : Systèmes à résoudre et conditionnement 66

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : Schéma 2D d'un montage tomographique 2
Figure 1.2 : Étapes de résolution du problème inverse 4
Figure 2.1 : Ratio $\epsilon\omega/\sigma$ en fonction de la fréquence pour la matière blanche 13
Figure 2.2 : Profondeur de peau de la matière blanche en fonction de la fréquence . . 20
Figure 2.3 : Longueur d'onde effective dans la matière blanche en fonction de la fréquence 21
Figure 3.1 : Conditionnement et nombre d'itération en fonction du contraste 49
Figure 3.2 : Décomposition du domaine pour le modèle ELOG 50
Figure 3.3 : Relation entre les opérateurs du modèle ELOG 51
Figure 3.4 : Valeurs singulières du Hessien 62
Figure 3.5 : Valeurs singulières de Gx 64
Figure 4.1 : Domaines de simulation 73
Figure 4.2 : Comparaison EIV-Mie 76
Figure 4.3 : Effet de la discrétisation 77
Figure 4.4 : Lien entre la fréquence, le contraste et l'erreur 78
Figure 4.5 : Erreur en fonction de la fréquence 79
Figure 4.6 : Effet de la tolérance 80
Figure 4.7 : Comparaison EIV-GI-ELOG 81
Figure 4.8 : Comparaison inverse EIV-ELOG-GI 82
Figure 4.9 : Reconstruction EIV-ELOG-GI 84
Figure 4.10 : Validation EIV-QS 89
Figure 4.11 : Reconstruction en fonction du contraste 91
Figure 4.12 : Tranche centrale et valeurs singulières du Jacobien 94
Figure 4.13 : Validation du modèle découplé 96
Figure 4.14 : Reconstructions par le modèle découplé 97
Figure 4.15 : Reconstruction d'un domaine réaliste 100
Figure 4.16 : Limite de RSB pour la reconstruction 102
Figure 4.17 : Limites de taille et de position sur la reconstruction 104
Figure 4.18 : Limites de résolution de contraste 106
Figure 4.19 : Limites du RCI pour la reconstruction 108
Figure 4.20 : Limites de profondeur de la perturbation 109
Figure 4.21 : Limites de taille de la perturbation 110
Figure 4.22 : Comparaison BiCGstab et Bloc-BiCGstab 112
Figure 4.23 : Effet du préconditionnement par MIF 114

Figure 4.24 : Reconstruction avec et sans MIF 115
Figure 4.25 : Comparaison de la complexité 118
Figure 4.26 : Effet du modèle sur BiCGstab 118
Figure 4.27 : Reconstruction en minimisant le coût de calcul 120

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

EIV	Équation intégrale volumique
TIM	Tomographie par induction magnétique
TIE	Tomographie d'impédance électrique
LFHC	Faible fréquence et contraste élevée (*Low frequency high contrast*)
ELOG	Encastrement linéaire via l'opérateur de Green
GI	Green inhomogène
L-BFGS	Algorithme à mémoire limitée Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
BiCGstab	Méthode du gradient biconjugué stabilisée
MdM	Méthode des moments
MIF	Matrice d'Information de Fisher
RSB	Rapport signal sur bruit
QS	Quasi-statique
LCS	Liquide cérébro-spinal
FFT	Transformée de Fourier rapide
MEF	Méthode des éléments finis

LISTE DES ANNEXES

Annexe A Calcul du gradient et du Hessien 143

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

L'objectif de ce chapitre est d'expliquer l'intérêt d'appliquer une formulation par équation intégrale volumique (EIV) au problème de tomographie par induction magnétique (TIM). Pour ce faire, les concepts physiques à la base de la TIM, le problème inverse et les différents domaines d'applications sont d'abord introduits. Les différentes méthodes numériques qui constituent l'état de l'art pour modéliser le phénomène d'induction magnétique sont ensuite brièvement comparées afin de démontrer l'intérêt d'un modèle numérique basé sur l'EIV. Puis, les objectifs de recherche et le plan du mémoire sont présentés.

1.1 Concepts de base

1.1.1 Principes physiques

Le terme «tomographie» décrit une famille de méthodes qui permettent d'imager les structures internes d'un objet. La tomographie peut être faite à partir de champs «durs», tels que les rayons X ou les rayons gammas, qui sont ionisants et qui suivent un patron de diffraction rectiligne, ou à partir de champs «faibles». Les méthodes par champs faibles, telles que la tomographie d'impédance électrique, micro-ondes ou par induction magnétique, ont l'avantage d'être non-ionisantes mais la diffusion de l'onde est plus complexe à modéliser [1]. La plus grande complexité du phénomène de diffusion requiert des modèles numériques plus sophistiqués, ce qui mène à plusieurs difficultés numériques lors de la reconstruction d'images.

La tomographie par induction magnétique (TIM) est donc une méthode d'imagerie à champ faible qui a pour but de reconstruire les propriétés électriques passive d'un objet, soit la conductivité, la permittivité et la perméabilité. Un courant alternatif est envoyé dans des bobines qui sont placées autour de l'objet d'intérêt. Ce courant génère un champ magnétique alternatif noté «champ incident». En TIM, la fréquence du champ incident varie de quelques kHz à quelques dizaines de MHz. Ce champ magnétique alternatif interagit avec le domaine d'intérêt en générant des courants de Foucault à l'intérieur de celui-ci. Ces courants générés dans le domaine d'intérêt induisent à leur tour un second champ magnétique, de plus faible amplitude, noté «champ diffusé». Les courants de Foucault induits dans l'objet ainsi que le champ diffusé dépendent des propriétés électriques passives du domaine d'intérêt. À partir de mesures de champ magnétique à des détecteurs situés à l'extérieur du domaine d'intérêt, il est possible de reconstruire une carte des propriétés électriques du domaine d'intérêt. Un schéma 2D d'un montage tomographique est représenté à la figure 1.1.

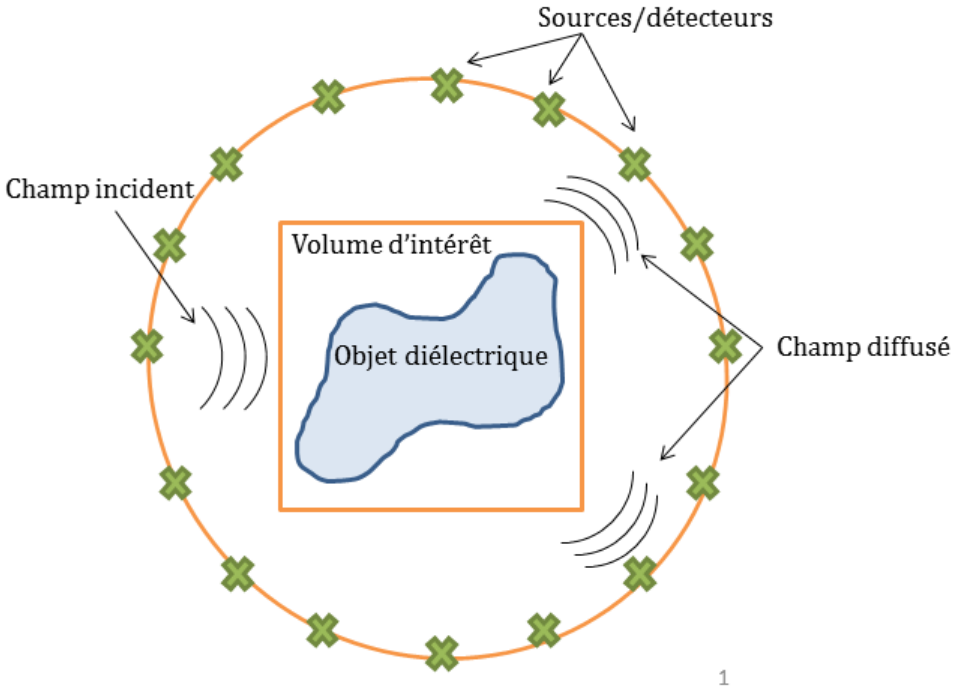


Figure 1.1 Schéma 2D d'un montage tomographique.

1.1.2 Modèle direct et problème inverse

Les termes «modèle direct» et «problème inverse» seront couramment utilisés dans ce texte. Il convient de les introduire correctement. L'interaction des ondes électromagnétiques avec la matière est décrite par les équations de Maxwell. À partir de ces équations, il est possible d'obtenir un modèle qui permet de calculer le champ magnétique diffusé aux détecteurs en connaissant *a priori* le champ incident et les propriétés électriques de l'objet. Il existe des solutions analytiques pour calculer le champ magnétique diffusé pour certains cas simples. Par exemple la théorie de Mie décrit le champ diffusé par une sphère ou un cylindre illuminé par une onde plane. Par contre, pour des géométries plus complexes tels que les tissus biologiques, il est nécessaire d'utiliser des modèles numérique plus complexes pour approximer le champ diffusé. Le modèle qui relie le champ incident et les propriétés diélectriques du domaine d'intérêt au champ diffusé est nommé «modèle direct».

Dans un contexte d'imagerie, les seules informations disponibles sont le champ incident et le champ diffusé. Les propriétés électriques et la forme de l'objet dans le volume d'intérêt sont les inconnues qu'on chercher à déterminer. Le problème inverse est donc de reconstruire une carte des propriétés diélectriques à partir du champ incident et du champ diffusé. Le modèle

direct et le problème inverse peuvent donc être résumés par :

$$\text{Modèle direct : } \boldsymbol{H}^{scat} = f_{direct}(\boldsymbol{e}^0, \boldsymbol{X}) \tag{1.1}$$

$$\text{Problème inverse : } \boldsymbol{X} = f_{inverse}(\boldsymbol{e}^0, \boldsymbol{H}^{scat}) \tag{1.2}$$

où $\boldsymbol{H}^{scat}$ est le champ magnétique diffusé aux détecteurs, $\boldsymbol{e}^0$ est le champ incident au domaine de simulation et $\boldsymbol{X}$ représente les valeurs de contraste diélectrique de l'objet. Le contraste diélectrique dépend de la permittivité et de la conductivité de l'objet par rapport aux propriétés du milieu de propagation, sa définition est donnée à l'équation 3.37. Le problème inverse est un problème complexe à résoudre. Il est mal posé au sens d'Hadamard [2] puisque l'unicité de la solution n'est pas garantie et que la solution n'est pas stable en raison du mauvais conditionnement des opérateurs. La figure 1.2 représente la relation entre le modèle direct et le problème inverse. Pour résoudre le problème inverse, l'approche la plus couramment utilisée est de le formuler comme un problème d'optimisation. On cherche ainsi à minimiser un critère qui représente la différence entre les données mesurées aux détecteurs et les données calculées à partir du modèle direct pour une certaine estimation du contraste. Différents algorithmes peuvent être appliqués à la résolution du problème de minimisation. Une revue des principaux est faite au chapitre 3. Le principe de base de chacun de ces algorithmes est le même, c'est-à-dire qu'on part d'une estimation $\boldsymbol{X}^*$ du contraste, on évalue le champ magnétique qui serait diffusé par cet objet, puis on raffine l'estimation du contraste jusqu'à atteindre un certain seuil.

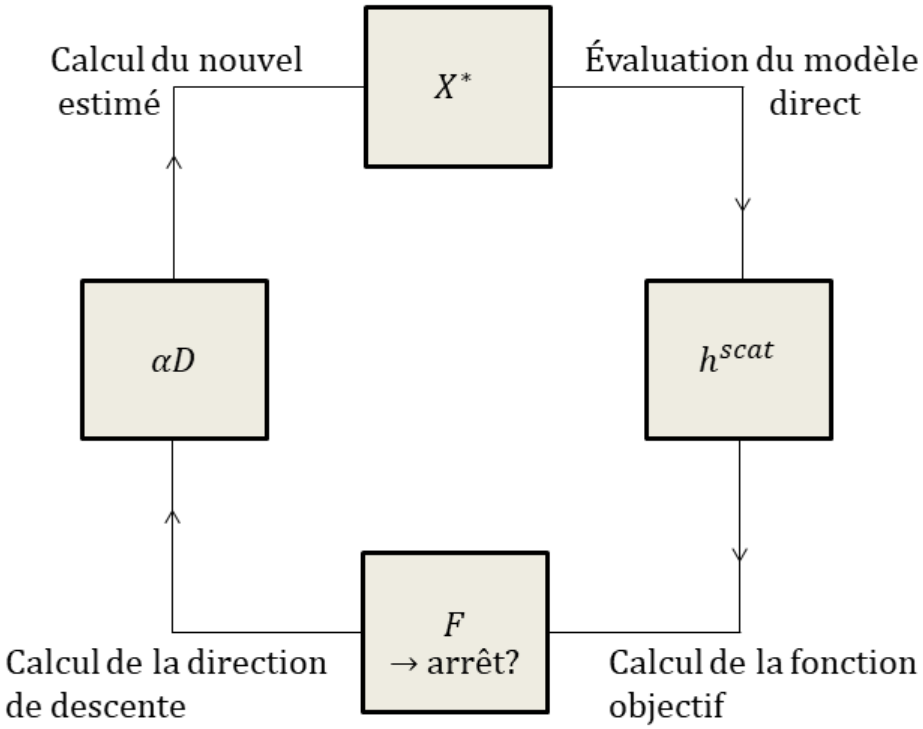


Figure 1.2 Étapes de résolution du problème inverse.

1.1.3 Applications

Les applications de la TIM peuvent être divisées en trois principales catégories : l'évaluation non-destructive (la détection de défauts), le sondage géologique et l'imagerie biomédicale. Chacune de ces applications implique une différente gamme de propriétés diélectriques et de dimensions, les méthodes numériques pour les traiter vont donc également varier. L'objectif de ce mémoire est d'aborder le problème de reconstruction d'images en TIM biomédicale. La première mention de TIM biomédicale a été faite en 1993 par Zeibak et Saunders au cours d'une expérience dans laquelle des objets métalliques étaient imagés dans une solution saline à 2 MHz [3]. Des travaux plus récents ont montré que la TIM est applicable à la détection d'oedèmes cérébraux, la mesure par induction de la conductivité de plaies et l'imagerie pulmonaire [1]. Ces trois applications biomédicales font intervenir des paramètres semblables. Une méthode numérique développée pour une de ces applications devrait donc également être applicable aux autres. Le cas le plus traité dans la littérature est la détection d'oedèmes cérébraux [4, 5] et c'est également celui considéré ici. Les oedèmes cérébraux représentent une des pathologies les plus mortelles au monde [6]. Il existe différents types d'oedèmes. Par

exemple, l'hémorragie cérébrale aigue spontannée est un saignement survenant dans le cerveau en absence de traumatisme. Le taux de mortalité après 30 jours approche les 50% et seulement 20% des patients récupèrent de façon significative après six mois [7]. Une détection plus rapide permet un traitement plus précoce, ce qui améliore grandement les chances de guérison. Des techniques d'imagerie permettant de détecter ce type d'oedème existent déjà, par exemple la tomodensitométrie, l'imagerie par résonance magnétique et la tomographie par émission de positron. Malgré leur efficacité, ces outils sont toutefois très chers et ne sont pas toujours disponibles, particulièrement dans des régions éloignées ou des régions à ressources économiques limitées [8]. L'objectif de la TIM est donc d'offrir un outil portatif et à faibles coûts qui permettrait à un médecin de poser un diagnostique dans une région où l'utilisation des méthodes d'imagerie mentionnées précédemment n'est pas possible [1]. Il est à noter que, malgré le fait que le dispositif d'imagerie ait besoin d'être portable (les sources et les récepteurs du champ électromagnétique), l'algorithme de reconstruction d'images peut être appliqué à distance, par exemple en se basant sur le transfert de données des téléphones cellulaires [9].

1.1.4 Avantages et inconvénients

La TIM offre donc de clairs avantages en ce qui a trait aux coûts et à la portabilité par rapport aux autres types d'imagerie mentionnés. La méthode qui se rapproche le plus de la TIM est la tomographie d'impédance électrique (TIE), qui est également une méthode d'imagerie électrique à champ faible. La principale différence entre ces deux méthodes est que la TIE utilise des électrodes placées directement sur les tissus imagés afin d'envoyer un courant électrique dans les tissus pour reconstruire la carte des propriétés diélectriques passives du milieu. La TIM offre trois avantages par rapport à la TIE. Premièrement, elle ne nécessite pas de contact direct avec le tissu. En TIE, l'interface élecrode-peau est mal définie et les méthodes de reconstruction d'image dépendent de façon critique de la connaissance exacte de la localisation des électrodes [10]. Deuxièmement, la TIM est sensible à la perméabilité. Malgré le fait que la perméabilité relative des tissus biologiques soit négligeable, certaines expériences ont utilisé cette propriété en incluant des traceurs ferromagnétiques afin de mieux cibler une zone d'intérêt [11]. Un troisième avantage est que la TIM est également applicable aux métaux, qui sont des objets très conducteurs, ce qui rend la technologie intéressante pour d'autres applications telles que le contrôle non-destructif.

Les principaux défis de la TIM sont le couplage capacitif entre les sources et les détecteurs, la faible amplitude du champ diffusé et le coût de calcul élevé des algorithmes de reconstruction d'image. Les deux premiers problèmes sont d'ordre technique et de récents développements

ont permis de les traiter. Par exemple, le problème de couplage peut être traité en utilisant des gradiomètres planaires pour annuler la composante du champ incident. En effet, les gradiomètres ont l'avantage de pouvoir être ajustés pour donner un signal minimum de l'objet de référence, tout en augmentant la sensibilité aux perturbations locales dans le volume d'intérêt [12]. De plus, de récents développements dans les capteurs de champ magnétique ultrasensibles permettent maintenant de résoudre le problème de faible amplitude du champ magnétique diffusé [13]. Le dernier aspect, le coût de calcul élevé des algorithmes de reconstruction d'images a été peu traité dans la littérature et c'est le problème abordé par ce projet de recherche.

1.2 Éléments de la problématique

Le but de ce projet est donc d'étudier un modèle basé sur l'EIV avec comme objectif de réduire le coût de calcul de la reconstruction d'images en TIM, mais sans en compromettre la qualité. Pour reconstruire un milieu d'intérêt, le problème inverse doit être résolu. Le coût de calcul du problème inverse dépend fortement du choix du modèle direct. En effet, puisque le problème inverse est résolu de manière itérative, il est crucial que le modèle direct soit précis et rapide afin d'envisager des applications réalistes impliquant un grand nombre d'inconnues. Un modèle direct basé sur une formulation par EIV présente plusieurs avantages par rapport aux méthodes numériques actuellement utilisées.

L'approche par EIV présente toutefois quelques difficultés lors de son application à la résolution du problème inverse en TIM. En effet, puisque dans cette gamme de fréquences les tissus biologiques présentent un très fort contraste par rapport à l'air, certaines matrices présentent un mauvais conditionnement. Ce mauvais conditionnement entraîne une convergence très lente des solveurs itératifs, tant lors de la résolution du problème direct que du problème inverse. Cette convergence lente implique un coût de calcul plus élevé, ce qui rend une méthode numérique basée sur l'EIV peu attrayante. À première vue, il pourrait sembler attrayant d'utiliser un milieu d'immersion pour diminuer les valeurs de contraste, mais cette stratégie n'est pas couramment utilisée en TIM pour deux raisons. D'abord, le signal lié à la perturbation qu'on souhaite détecter est extrêmement faible et l'utiliser d'un liquide d'immersion diminuerait encore davantage son amplitude relative par rapport au milieu de référence. De plus, certaines applications, par exemple la détection d'oedèmes cérébraux, posent des difficultés pratiques.

Pour aborder ce problème de convergence lié au mauvais conditionnement découlant des valeurs de contrastes diélectriques élevées, ce projet propose une modification à l'EIV standard en se basant sur la théorie des fonctions de Green. Les limites du modèle proposé sont ca-

ractérisées et différentes stratégies d'optimisation du temps de calcul sont appliquées afin de permettre une comparaison adéquate avec les modèles constituant l'état de l'art en TIM.

1.2.1 Limitations des modèles directs actuellement utilisés

Les modèles directs actuellement utilisés dans la littérature peuvent être divisés en trois catégories : les méthodes approximatives, différentielles et par intégrales surfaciques. Elles présentent chacune certains points positifs, mais souffrent aussi de certains inconvénients qui peuvent être améliorés à partir d'un modèle basé sur l'EIV.

Méthodes approximatives

Les méthodes approximatives sont celles qui utilisent l'approximation quasi-statique, l'approximation de faible conductivité ou une combinaison des deux [14]. Ces approximations permettent de simplifier l'équation d'onde en une équation de Poisson. Ceci diminue considérablement le coût de calcul du problème direct, mais aux dépens de la précision des résultats. L'équation simplifiée est ensuite résolue par une méthode numérique telle que les éléments finis ou les éléments frontières. Ces approximations ne s'appliquent que lorsque la fréquence ou la conductivité sont considérées assez faibles pour négliger certains termes. Il sera montré plus loin que ces conditions sont très contraignantes dans le cadre de la TIM biomédicale.

Méthodes différentielles

Des méthodes différentielles ont été appliquées pour résoudre l'équation d'onde complète à l'aide de la méthode des éléments finis et des différences finies [15, 16]. La méthode des éléments finis est actuellement la plus utilisée pour la modélisation de courants de Foucault dans les tissus biologiques. Les principaux désavantages de ces deux méthodes sont qu'elles requièrent la discrétisation d'un domaine beaucoup plus grand que le domaine d'intérêt afin de s'assurer de respecter les conditions frontières, elles ont de moins bonnes propriétés d'échelle que les méthodes intégrales et requièrent l'implémentation de conditions frontières d'absorption [17]. De plus, la littérature fait mention d'un temps de calcul problématique. Par exemple, dans [18], une modélisation adéquate par éléments finis du modèle direct prend jusqu'à 64 heures.

Méthodes par intégrales surfaciques

Jusqu'à maintenant, la seule méthode intégrale qui a été appliquée au problème de TIM est la méthode d'éléments frontières [19]. Cette méthode est particulièrement intéressante pour

les applications industrielles telles que l'évaluation non-destructive de métaux. Puisque les métaux ont une conductivité très élevée, la profondeur de peau est très faible. Les courants de Foucault se concentrent donc sur la surface de l'objet. La méthode d'éléments frontières ne requiert que la discrétisation de l'interface et est donc particulièrement adaptée aux problèmes où le domaine d'intérêt se situe à l'interface, tandis que l'information à l'intérieur du domaine apporte peu d'information supplémentaire utile à la résolution du problème [20]. Ces méthodes ne sont toutefois pas valides pour une vaste gamme de fréquences à cause du mauvais conditionnement du noyau de leurs intégrales [21].

1.2.2 Approche par équation intégrale volumique

Avantages

L'EIV est une formulation couramment utilisée pour des problèmes à plus haute fréquence, par exemple en tomographie micro-ondes [22]. Dans la gamme des fréquences d'intérêt en TIM, les tissus biologiques peuvent être considérés comme des objets pénétrables et l'EIV peut donc être utilisée pour modéliser le problème d'induction magnétique. L'EIV est une équation intégrale de deuxième type, les matrices associées sont donc généralement bien conditionnées et moins sujettes au problème de conditionnement que les approches par intégrales surfaciques [23]. L'EIV offre des avantages considérables par rapport aux approches actuellement utilisées pour modéliser le problème direct en TIM. Puisqu'elles résolvent l'équation d'onde complète, elles sont plus exactes et elles s'appliquent à une plus vaste gamme de fréquences et de conductivité que les méthodes approximatives. Par rapport aux méthodes différentielles, leur principal avantage est que les conditions de radiation sont automatiquement satisfaites. Ceci permet de grandement réduire la taille du domaine de simulation et, conséquemment, le nombre d'inconnues à résoudre. Un nombre plus faible d'inconnues a généralement un effet favorable sur le coût de calcul et offre une convergence plus rapide vers la solution. De plus, puisque les méthodes par intégrales volumiques ne souffrent pas du même problème de conditionnement que les formulations par intégrales surfaciques, elles s'appliquent à une plus vaste gamme de paramètres.

Inconvénients

Malgré ces avantages de l'EIV par rapport aux formulations approximatives, différentielles et surfaciques, certaines limitations sont à considérer. La plus importante concerne la rupture des équations à basse fréquence et pour des objets fortement contrastés (connu sous le nom de «LFHC breakdown» pour *low frequency high contrast*). Ce problème de l'EIV provient du

découplage entre le champ magnétique et le champ électrique à basse fréquence. Ce découplage se manifeste par un déséquilibre entre les parties solénoïdales et irrotationnelles de la densité de courant puisqu'il existe un facteur quadratique en fréquence entre ces deux parties. À cause de la précision machine finie, lorsqu'un terme est négligé par rapport à l'autre, la physique du problème n'est plus adéquatement représentée et le phénomène de rupture à basse fréquence survient. Pour surmonter ce problème, on se base généralement sur le principe de décomposition d'Helmholtz [24]. Pour les formulations surfaciques dans la gamme de fréquence d'intérêt en TIM, la rupture survient lorsque la discrétisation est de la taille du micromètre [25]. Toutefois, puisque la taille de la discrétisation des domaines qu'on cherche à imager est de l'ordre du millimètre, on ne s'attend pas à observer ce phénomène de rupture pour l'application considérée.

L'EIV peut également souffrir d'un mauvais conditionnement lorsque les valeurs de contraste diélectrique sont trop élevées, c'est-à-dire lorsque la permittivité ou la conductivité de l'objet est beaucoup plus grande que celles du fond. Ceci est particulièrement problématique en TIM biomédicale puisque les tissus biologiques peuvent, par exemple, avoir une permittivité relative allant jusqu'à 10^7 dans la gamme de fréquence d'intérêt de la TIM (allant du kHZ aux dizaines de MHz) [26]. Pour des problèmes réalistes de grande taille, des solveurs itératifs doivent être utilisés. Si les matrices sont mal conditionnées, la convergence peut être très lente. Ceci peut limiter l'applicabilité d'un modèle basé sur l'EIV dans le cadre de problèmes réalistes de grande taille en TIM [27].

De plus, malgré le fait que les formulations intégrales permettent la discrétisation d'un domaine beaucoup plus petit que les formulation différentielles, les matrices obtenues après la discrétisation des équations sont pleines, tandis que les matrices obtenues à partir de formulations différentielles sont creuses. Les stratégies numériques exploitant la structure creuse des matrices obtenues par une formulation différentielle ne peuvent donc pas être appliquées. Il existe d'autres types de méthodes pour accélérer la résolution des systèmes d'équations découlant de l'EIV, par exemple en exploitant la structure bloc-Toeplitz de certaines matrices [22].

1.2.3 Problème inverse

Le problème inverse présente certaines caractéristiques qui peuvent devenir problématiques, notamment le coût de calcul élevé. Le coût de calcul des algorithmes itératifs utilisés pour résoudre le problème inverse dépendent premièrement du nombre d'itérations nécessaires pour converger et, deuxièmement, du coût de calcul de chacune de ces itération. De plus, le problème inverse est un problème mal posé au sens d'Hadamard puisque l'unicité de la

solution n'est pas garantie et que le problème est très sensible au bruit [2].

Les caractéristiques du problème inverse dépendent fortement du choix de modèle direct. D'abord, plus chaque évaluation du modèle direct est lourde à calculer, plus le coût de calcul total augmente. De plus, la convergence du solveur inverse est liée au spectre des valeurs singulières du Hessien de la fonction objectif. Puisque le Hessien de la fonction objectif dépend du modèle direct, le choix du modèle direct peut donc influer fortement sur la vitesse de convergence de la résolution du problème inverse.

1.3 Objectifs de recherche

Les objectifs de ce projet de recherche sont résumés en trois points :

1. Développement et validation d'un modèle direct basé sur l'EIV : À partir des limitations connues de l'EIV, développer un modèle numérique qui permet de traiter les forts contrastes des tissus biologiques en TIM. Le modèle sera validé en le comparant à une solution analytique connue et l'erreur sera caractérisée en fonction des différents paramètres du modèle direct.
2. Résolution du problème inverse : le modèle direct proposé sera ensuite appliqué à la reconstruction de milieux biologiques. Lors de cette étape, le choix du critère, de la régularisation et de l'algorithme d'optimisation seront justifiés. Une attention particulière sera portée à la minimisation du coût de calcul.
3. Détermination des limites de la méthode : à partir d'un domaine réaliste, les limites d'applicabilité de la méthode seront énoncées. Ces limites sont par exemple : la fréquence, les valeurs de permittivité et de conductivité, la résolution spatiale, le ratio signal sur bruit, le nombre d'inconnues, etc. Ces limites permettront également de proposer des paramètres pour une validation expérimentale. Les limites et le coût de calcul seront comparés aux autres modèles numériques proposés dans la littérature afin de conclure sur l'intérêt de la méthode.

1.4 Plan du mémoire

Le chapitre 2 présente la revue de littérature sur la tomographie par induction magnétique biomédicale et sur la formulation par équation intégrale volumique. Les trois modèles actuellement utilisés en TIM y sont présentés, soit les méthodes approximatives, différentielles et par intégrales surfaciques. Les avantages, inconvénients et limites de la formulation par EIV par rapport à ces trois formulations sont ensuite présentés. Les principaux algorithmes

utilisés pour la résolution du problème inverse et les stratégies d'optimisation du temps de calcul sont également introduits.

Le chapitre 3 détaille le modèle direct basé sur l'EIV. Les limitations de ce modèle ainsi que deux formulations alternatives qui permettent de les surmonter sont présentées : la formulation ELOG (encastrement linéaire par l'opérateur de Green) et la formulation GI (fonctions de Green inhomogènes). Le problème inverse est clairement défini et les différents aspects relatifs à sa résolution sont présentés, notamment le choix du critère, de la régularisation, de l'algorithme, du gradient et du préconditionneur. Les trois modèles (EIV standard, ELOG et GI) sont comparés afin de choisir le plus adéquat dans le cadre de la TIM biomédicale.

Le chapitre 4 présente les résultats obtenus avec l'approche proposée. Le domaine de simulation est d'abord décrit et comparé avec ceux de la littérature. L'erreur du modèle direct est caractérisée en fonction des différents paramètres (la discrétisation spatiale, la fréquence, les valeurs diélectriques, la tolérance du solveur itératif...). L'effet du modèle direct sur la convergence du problème inverse et différents aspects liés à la convergence sont analysés. Les limites de reconstruction (par exemple en terme de rapport signal sur bruit, de fréquence, de nombre de mesures et de position et taille de perturbation) sont établies numériquement. Ces résultats sont mis en perspective par rapport à ceux obtenus par d'autres méthodes numériques dans la littérature.

Au chapitre 5, une synthèse du projet est faite. L'intérêt et les limites de la méthode proposée y sont résumés et différentes perspectives de recherche sont proposées afin d'améliorer un modèle basé sur l'EIV.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

Ce chapitre est divisé en quatre sections. Dans la première section, l'état de l'art des méthodes numériques employées pour résoudre le problème direct de courants de Foucault est brièvement présenté. Les avantages et les inconvénients de chacune de ces méthodes numériques sont énoncés. La seconde section démontre l'intérêt d'un modèle numérique basé sur l'EIV en mettant en évidence les avantages du modèle. Les limites d'applicabilité du modèle et ses inconvénients sont également présentés. Des solutions sont proposées afin d'aborder les problèmes mentionnés. La troisième partie présente les principales options offertes dans la littérature pour résoudre le problème inverse : le critère à minimiser, la régularisation et les algorithmes de minimisation disponibles. La quatrième partie présente certaines stratégies d'optimisation du temps de calcul applicables à un modèle numérique basé sur l'EIV.

2.1 État de l'art des modèles directs

2.1.1 Approximations

Les premières approches pour modéliser le problème direct de courants de Foucault s'appliquaient à des cas simples ayant une solution analytique. En 1999, Griffiths démontra les possibilités d'appliquer le principe d'induction magnétique à l'imagerie biomédicale en mesurant la perturbation magnétique d'un disque circulaire de faible conductivité placé entre deux bobines [28]. La modélisation de milieux biologiques plus complexes requiert toutefois l'utilisation de méthodes numériques appropriées. Ces méthodes ont d'abord exploité certaines approximations afin de simplifier l'équation d'onde complète et réduire la complexité du calcul. La modélisation électromagnétique de tissus biologiques à basse fréquence exploite deux approximations qui permettent de simplifier l'équation d'onde en une équation de Laplace ou en une équation de Poisson [14]. Ces deux approximations, dites «quasi-statique» et «de faible conductivité» peuvent être appliquées seules ou conjointement. Elles sont valides sous certaines conditions qui seront présentées ici.

Approximation quasi-statique

L'approximation quasi-statique est fréquemment utilisée pour modéliser le problème direct pour la plus basse gamme de fréquences en TIM. Elle consiste à supposer que le courant de conduction est beaucoup plus important que le courant de déplacement dans la loi d'Ampère,

c'est-à-dire que :

$$|\boldsymbol{J}| = |\sigma \boldsymbol{E}| \gg |\epsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}| \approx \epsilon\omega |\boldsymbol{E}| \tag{2.1}$$

et elle est donc applicable lorsque :

$$\frac{\epsilon\omega}{\sigma} \ll 1 \tag{2.2}$$

Les valeurs diélectriques des tissus biologiques dans la gamme de fréquence de la TIM ont été analysées dans [26]. Puisque l'application visée est la détection d'hémorragies cérébrales, on cherche à valider cette approximation pour un tissu représentant adéquatement le cerveau. La matière blanche est une bonne approximation des tissus cérébraux [29, 30]. À la figure 2.1, on voit l'allure du ratio $\epsilon\omega/\sigma$ de la matière blanche en fonction de la fréquence.

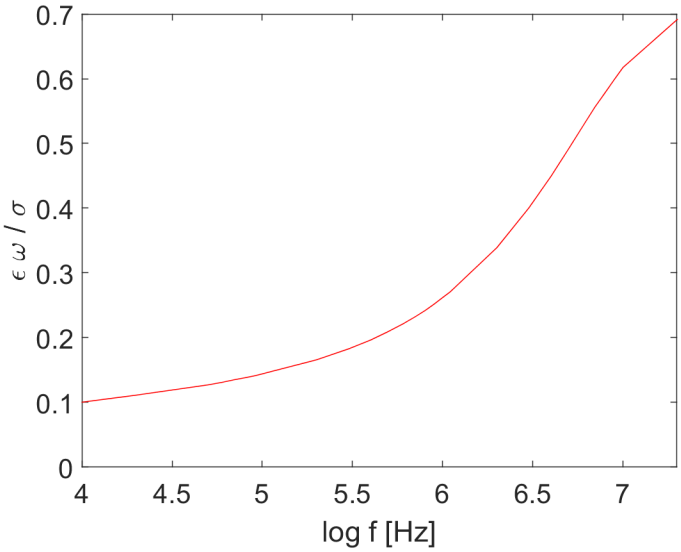


Figure 2.1 Ratio $\epsilon\omega/\sigma$ en fonction de la fréquence pour la matière blanche.

On remarque que, malgré le fait que cette approximation puisse être valide dans les kHz, elle ne l'est clairement pas dans les MHz qui est la gamme de fréquences d'intérêt en TIM biomédicale.

Approximation de faible conductivité

L'approximation de faible conductivité consiste à admettre que les courants de Foucault sont faibles comparés au champ externe. Ceci permet de négliger la dérivée temporelle dans la loi de Faraday et ainsi réduire l'équation d'onde en équation de Poisson. Physiquement, cela revient à supposer que la profondeur de peau est beaucoup plus grande que la taille D de

l'objet :

$$\delta_S = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \gg D \tag{2.3}$$

À titre d'exemple, à 5 kHz la profondeur de peau de la matière blanche est $\delta_S \approx 27.6$ m et à 20 MHz elle est $\delta_S \approx 0.25$ m. On remarque que, comme pour l'approximation quasi-statique, l'approximation de faible conductivité n'est pas applicable dans les MHz, qui sont les fréquences favorisées en TIM biomédicale.

Approximations de Born et de Rytov

Les approximations de Born et de Rytov, contrairement aux approximations précédentes, ne s'appliquent pas aux équations de Maxwell, mais plutôt directement à l'EIV. Elles consistent à linéariser le modèle de façon à s'affranchir de l'inversion matricielle. Une linéarisation permet de considérablement réduire le coût de calcul puisque cette opération est la plus coûteuse lors de l'évaluation du modèle direct basé sur l'EIV. Elles peuvent être appliquées itérativement, ce qui mène par exemple à la méthode de Born itérative [31] et la méthode de Born itérative altérée [32]. L'approximation de Born la plus simple est celle de premier ordre. Elle consiste à supposer que le champ total peut être approximé à partir du champ incident. L'approximation de Rytov est une autre approximation de premier ordre. Le principe consiste à considérer la phase des champs électromagnétiques en les mettant en évidence sous la forme $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = e^{\phi(\boldsymbol{r})}$. En développant les termes d'une manière analogue à l'approximation de Born prolongée, on peut négliger les variations de phase complexe du champ diffusé dans le domaine d'intérêt et ainsi obtenir une équation linéarisé dans laquelle la seule inconnue à reconstruire est le contraste diélectrique [33]. Une des conditions d'applicabilité de l'approximation de Rytov est que l'objet illuminé soit de grande taille et que les variations des propriétés diélectriques soient faibles. Or, en TIM biomédicale, l'objet présente les caractéristiques contraires, c'est-à-dire qu'il est de petite taille par rapport à la longueur d'onde et que le contraste diélectrique est très élevé. De plus, la phase du champ électromagnétique est une information cruciale à la résolution du problème inverse. L'approximation de Rytov n'est donc pas appropriée à la TIM biomédicale. D'autre part, puisque l'approximation de Born s'applique aux objets avec un faible contraste, son application à la TIM biomédicale est inadéquate.

2.1.2 Modèles directs par formulation différentielle

Méthode des différences finies

La méthode des différences finies est la façon la plus simple de traiter les opérateurs de dérivation spatiale dans les équations de Maxwell [34]. La méthode des différences finies se base sur le développement de Taylor. En considérant une faible variation h , on a :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R_1(x) \tag{2.4}$$

où $R_1(x)$ représente les termes d'ordre deux et supérieur. Au premier ordre, on peut donc approximer la dérivée par :

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{2.5}$$

Le même principe peut être généralisé aux dérivées d'ordre supérieur ainsi que pour le cas 3D. Par exemple dans [16], l'approximation de faible conductivité est utilisée pour calculer la densité de courant dans l'objet en utilisant le potentiel scalaire ϕ et le potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{J} = (\sigma + j\omega\epsilon_0\epsilon_r)\boldsymbol{E} \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - j\omega\boldsymbol{A} \tag{2.8}$$

Les inconnues à résoudre sont ici les valeurs du potentiel scalaire en chaque point. Elles sont déterminées en appliquant la loi de Kirchhoff à chaque maille, c'est-à-dire en appliquant successivement les deux équations :

$$\Delta\phi_0 = \sum_{i=1}^{6} \frac{Y_i(\phi_i + e_i)}{Y_i} \tag{2.9}$$

$$\phi_0' = \phi_0 + k\Delta\phi_0 \tag{2.10}$$

où ϕ_0 et ϕ_0' sont les valeurs initiale et actualisée du potentiel scalaire à chaque noeud, Y est l'admittance entre chaque noeud et e le voltage généré qui représente le champ électrique induit.

Malgré le développement conceptuel simple des différences finies, la méthode souffre de certains inconvénients. Premièrement, puisque le domaine de discrétisation est fini, il est nécessaire de traiter les artefacts numériques dus aux réflexions aux limites du domaine. L'approche standard est d'utiliser une solution analytique approximative et de l'appliquer aux limites du

domaine, par exemple par la condition de Mur [35]. Afin de limiter ces artefacts numériques, il est nécessaire de discrétiser un domaine beaucoup plus grand que le domaine d'intérêt. De plus, le problème est très sensible à la taille de discrétisation et une analyse rigoureuse de la convergence est nécessaire afin de s'assurer d'obtenir un modèle numériquement stable [36].

Méthode des éléments finis

L'idée à la base des éléments finis est de diviser un problème complexe en plusieurs problèmes plus simples. Un maillage simple, par exemple avec des éléments tétraédriques, est généralement utilisé pour discrétiser le volume d'intérêt. L'équation de diffusion avec les conditions aux limites appropriées est résolue localement sur chaque élément. Puisque chaque élément dépend de l'interaction avec les éléments voisins, le système matriciel correspondant est à bande diagonale. Cette structure particulière est un des principaux avantages de la méthode des éléments finis puisqu'il existe des méthodes numériques très efficace pour résoudre des systèmes matriciels à bande diagonale. Toutefois, la méthode souffre des mêmes inconvénients que la méthode des différence finies, c'est-à-dire que pour satisfaire la condition de radiation hors du domaine discrétisé, il est nécessaire de résoudre un domaine de beaucoup plus grande taille que l'objet d'intérêt. Il faut également implémenter des conditions aux limites de ce domaine afin d'éviter les artefacts numériques, par exemple en implémentant une condition de radiation [37] ou en combinant la méthode des éléments finis avec une méthode basée sur les intégrales surfaciques [38]. De plus, la précision des résultats dépend fortement de la discrétisation spatiale et la convergence peut être difficile à contrôler [36]. Différentes variations de la méthode ont été appliquées au problème de TIM. Elles utilisent généralement la formulation par potentiel vecteur et potentiel scalaire jumelée à une approximation quasi-statique [39]. Les contributions au potentiel vecteur par les termes provenant de la source $\boldsymbol{J}_s$ et les courants induit dans le milieu conducteur $\boldsymbol{J}_{ind}$ sont séparées. On a donc $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_s + \boldsymbol{A}_r$. Différentes formulations utilisant par exemple la gauge de Coulomb, on encore des formulations sans gauge [40, 41], comme la formulation présentée ici basée sur [39], sont possibles. Dans la région non-conductive, le champ magnétique incident est donné par :

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_s = \boldsymbol{J}_s \tag{2.11}$$

Dans la région conductive on a :

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}_s + \nabla \times \boldsymbol{A}_r \tag{2.12}$$

Ceci permet de déterminer le champ électrique total :

$$\boldsymbol{E} = -j\omega \boldsymbol{A}_s - j\omega \boldsymbol{A}_r \tag{2.13}$$

Le champ magnétique total est donc lié à la somme de la densité de courant source et induite dans le domaine par :

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_{ind} + \boldsymbol{J}_s \tag{2.14}$$

En jumelant ces équations, l'équation finale à résoudre est de forme :

$$\nabla \times (\frac{1}{\mu} \nabla \times \boldsymbol{A}_r) + j\omega \boldsymbol{A}_r = \nabla \times \boldsymbol{H}_s - j\omega\sigma \boldsymbol{A}_s - \nabla \times \frac{1}{\mu} \mu_0 \boldsymbol{H}_s \tag{2.15}$$

En discrétisant le modèle avec des fonctions de base vectorielles $\boldsymbol{N}$ sur les bordures de chaque élément et en appliquant les conditions aux limites, l'équation discrétisée est de forme :

$$\int_{\Omega_e} (\nabla \times \boldsymbol{N} \cdot \frac{1}{\mu} \nabla \times \boldsymbol{A}_r) d\nu + \int_{\Omega_e} j\omega\sigma \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{A}_r d\nu = \int_{\Omega_c} (\nabla \times \boldsymbol{N} \boldsymbol{H}_s) d\nu - \int_{\Omega_c} (\boldsymbol{N} \cdot j\omega\sigma \boldsymbol{A}_s) d\nu - \int_{\Omega_c} (\frac{1}{\mu} \mu_0 \nabla \times \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{H}_s) d\nu \tag{2.16}$$

où Ω_e, Ω_c sont respectivement les régions où les courants de Foucault sont induits et la région où la bobine se situe. La seule inconnue est ici $\boldsymbol{A}_r$, le problème peut être exprimé sous forme matricielle par :

$$\boldsymbol{S} \boldsymbol{A}_r = \boldsymbol{b} \tag{2.17}$$

Le principal intérêt de la méthode des éléments finis est que la matrice $\boldsymbol{S}$ est à bande diagonale. Cette structure particulière vient du fait que l'équation est résolue localement à chaque noeud du maillage et que les noeuds sont uniquement influencés par leurs voisins immédiats. Des algorithme très efficaces permettent de résoudre des système matriciel faisant intervenir des matrices diagonales par bandes, ce qui permet de considérablement réduire le coût de calcul de la méthode par rapport à une formulation impliquant des matrices pleines.

2.1.3 Modèles directs par intégrales surfaciques

Les formulations par intégrales surfaciques en TIM ont surtout été appliquées à l'imagerie de métaux pour le contrôle non-destructif [19, 42]. Plus récemment, la méthode a aussi été appliquée à l'imagerie biomédicale [43]. La méthode offre plusieurs avantages par rapport aux méthodes numériques présentées précédemment qui sont basées sur une formulation différentielle. L'intérêt principal est que seulement la frontière du domaine a besoin d'être discrétisée,

ce qui diminue grandement le nombre d'inconnues à résoudre et les problèmes extérieurs sans frontières sont aussi faciles à résoudre que les problèmes intérieurs grâce aux conditions de radiations qui sont automatiquement satisfaites [20]. De plus, les intégrales surfaciques sont particulièrement utiles pour les problème où le domaine d'intérêt est la surface d'un objet plutôt que l'intérieur de celui-ci. C'est par exemple le cas pour les applications en contrôle non-destructif où les courants induits circulent presque uniquement à la surface de l'objet. Les principaux inconvénients de la méthode sont que, pour un même problème de conditions aux limites, il existe différentes équations intégrales qui peuvent être posées et différentes approximations possibles, ce qui en complique l'application. De plus, le conditionnement des matrices devient rapidement problématique en fonction de la fréquence et de la conductivité, ce qui limite l'applicabilité de la méthode. Par exemple dans [44], un modèle 3D simple est développé. En résolvant les équations de Maxwell et en utilisant la fonction de Green vectorielle, on trouve les équations pour les champs électrique et magnétique :

$$\frac{\Omega_i}{4\pi}\boldsymbol{E}_i = \int_S (j\omega(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B})\phi - (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla\phi - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla\phi)dS - \int_V j\omega\mu\boldsymbol{J}_s\phi d\nu \tag{2.18}$$

$$\frac{\Omega_i}{4\pi}\boldsymbol{B}_i = -\int_S (j\omega\mu(\epsilon - j\sigma/\omega)(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\phi + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B})\nabla\phi)dS + \int_V \mu\boldsymbol{J}_s\times\nabla\phi d\nu + \boldsymbol{B}_0 \tag{2.19}$$

où Ω_i est l'angle solide de la surface S, n le vecteur normal, $\boldsymbol{B}_0$ le champ magnétique incident et ϕ la fonction de Green scalaire donnée par :

$$\phi = \frac{e^{-j\omega\sqrt{\mu(\epsilon - j\sigma/\omega)}\boldsymbol{r}}}{4\pi|\boldsymbol{r}|} \tag{2.20}$$

De la même manière que pour la méthode des éléments finis, le problème est discrétisé en le subdivisant en éléments triangulaires sur la surface et en appliquant les conditions aux limites adéquates sur les champs électrique et magnétique. Le principal intérêt des méthodes par intégrales surfaciques est que les conditions de radiations sont automatiquement satisfaites par les fonctions de Green utilisées pour calculer la propagation du champ en chaque élément. Ceci permet donc de restreindre le domaine d'intérêt simplement à la surface de l'objet, ce qui implique un moins grand nombre d'inconnues que pour les modèles basés sur une formulation différentielle.

2.2 Modèle direct par équation intégrale volumique

2.2.1 Avantages et inconvénients

Dans la gamme de fréquences utilisées en TIM, les tissus biologiques peuvent être considérés comme des objets pénétrables. Une formulation par intégrale volumique peut donc adéquatement modéliser le phénomène d'induction magnétique [21]. L'EIV est une équation de Fredholm du deuxième type, les matrices qui en découlent sont donc généralement mieux conditionnées que les méthodes basées sur les intégrales surfaciques [23]. Leur principal avantage par rapport aux méthodes différentielles est que la condition de radiation est automatiquement satisfaite par les fonctions de Green, ce qui implique que seulement le domaine d'intérêt doit être discrétisé. Ceci permet de considérablement réduire le nombre d'inconnues à résoudre par rapport aux formulations différentielles. Les principales difficultés des modèles basés sur l'EIV sont le traitement des singularités dans le noyau de l'intégrale et l'inversion de matrices pleines, contrairement aux matrices à bande obtenues à partir des modèles basés sur les équations différentielles. Toutefois, certaines méthodes comme la transformée de Fourier rapide en combinaison avec des méthodes itératives telles que le gradient conjugué permettent d'améliorer grandement l'efficacité de la résolution des systèmes matriciels découlant d'une formulation basée sur l'EIV. Dans cette section, les principales limitations des modèles basés sur l'EIV sont présentées et elles sont considérées dans le cadre de la TIM biomédicale. La dérivation de l'EIV à partir des équations de Maxwell et l'implémentation numérique à l'aide de la méthode des moments sont présentées au chapitre 3.

2.2.2 Limites connues de l'EIV

Effet de peau

L'effet de peau est un phénomène observé dans les matériaux conducteurs sous l'effet d'un champ électrique alternatif. Plus le matériau est conducteur, ou plus la fréquence est élevée, plus ce phénomène est important. Dans le cas d'un conducteur électrique parfait, le courant circule complètement sur la surface du conducteur. Le problème causé par l'effet de peau dans le cadre de la TIM est que, si le courant circule presque uniquement sur la surface de l'objet, la discrétisation au centre de l'objet est inutile puisqu'elle n'apporte aucune information supplémentaire à la résolution du problème. Les voxels au centre du domaine d'intérêt auront donc une très faible sensibilité et seront difficilement résolvables. Dans ce cas, il serait préférable d'utiliser une formulation mieux adaptée au problème, par exemple en utilisant un modèle basé sur les intégrales surfaciques.

La profondeur de peau est une valeur qui permet de quantifier l'effet de peau. Elle est définie comme la distance sous la surface du conducteur à laquelle la densité de courant diminue d'un facteur $1/e$ par rapport à la densité de courant à la surface. Dans la gamme de fréquences d'intérêt en TIM, la fréquence est beaucoup plus faible que $1/\rho\epsilon$ où ρ est la résistivité du conducteur, ϵ la permittivité et la profondeur de peau δ_s peut donc être approximée par [45] :

$$\delta_s \approx \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu}} \tag{2.21}$$

La figure 2.2 montre la profondeur de peau de la matière blanche en fonction de la fréquence. On remarque que, même dans le cas limite d'une fréquence à 20 MHz, la profondeur de peau est d'environ 25 cm, ce qui est approximativement de la même taille que l'objet. Ceci confirme l'intérêt d'utiliser une formulation volumique puisque les courants de Foucault circuleront dans tout le domaine. Toutes les valeurs de permittivité et de conductivité utilisées dans ce projet pour modéliser les tissus biologiques sont tirées de [26].

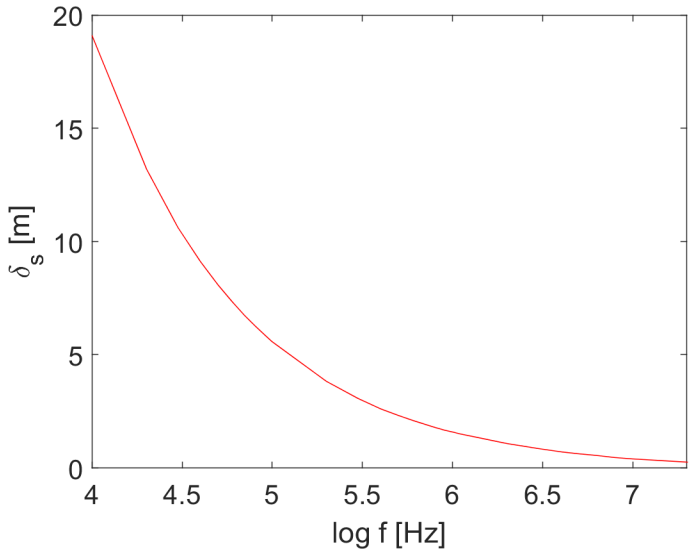


Figure 2.2 Profondeur de peau de la matière blanche en fonction de la fréquence.

Longueur d'onde effective

La longueur d'onde dépend du milieu dans lequel elle se propage. Plus l'indice de réfraction est élevé, plus elle est courte par rapport au cas où l'onde se propage dans le vide. La discrétisation spatiale du problème doit s'assurer d'être beaucoup plus petite que la longueur d'onde effective afin de modéliser effectivement la physique du problème. Une règle courante en ce qui a trait à la discrétisation spatiale pour les méthodes numériques en électromagnétisme

est que la taille des éléments ne devrait pas dépasser $\lambda/20$ où λ est la longueur d'onde dans le milieu [36]. Puisque la TIM opère à basse fréquence, ceci ne semble pas être une limite contraignante à première vue. Toutefois, dans cette gamme de fréquences, les tissus biologiques ont des valeurs de permittivité très élevées. Par exemple, la matière blanche a une permittivité relative de $6.98 \cdot 10^4$ à 1 kHz [26]. Cette forte permittivité implique un indice de réfraction très fort et donc une longueur d'onde effective beaucoup plus courte dans les tissus que dans l'air. L'indice de réfraction complexe $n = \eta + i\kappa$ est relié à la permittivité complexe par :

$$\eta = \sqrt{\frac{|\tilde{\epsilon}_r| + \epsilon_r}{2}} \tag{2.22}$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{|\tilde{\epsilon}_r| - \epsilon_r}{2}} \tag{2.23}$$

où $|\tilde{\epsilon}_r|$ est le module complexe de la permittivité complexe. La longueur d'onde effective est donnée par $\lambda = \lambda_0/\eta$. La figure 2.3 montre la longueur d'onde effective dans la matière blanche en fonction de la fréquence. On voit que, même à 20 MHz, la longueur d'onde est d'environ 1.79 m, ce qui implique une discrétisation minimale de 9 cm. Pour des domaines biologiques, cette condition n'est donc pas limitante.

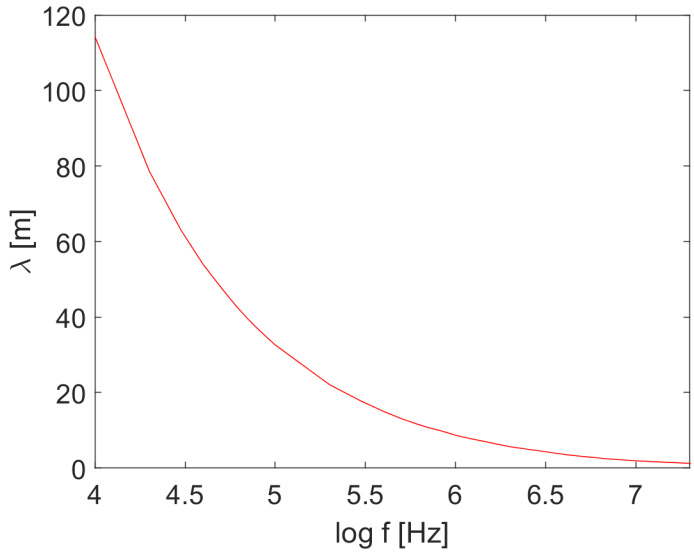


Figure 2.3 Longueur d'onde effective dans la matière blanche en fonction de la fréquence.

Rupture à basse fréquence

Le phénomène de rupture à basse fréquence de l'EIV est un problème numérique qui est dû au découplage du champ électrique et magnétique des équations de Maxwell dans le cas

statique. Lorsque la fréquence est faible, il y a une grande variation d'amplitude entre les parties solénoïdales et irrotationnelles du courant. À cause de la précision machine limitée, lorsque la différence entre les deux termes est trop grande, un des termes est négligé et la physique du problème n'est plus adéquatement représentée [46, 47].

Il est difficile de déterminer exactement la fréquence à laquelle la rupture survient dans l'EIV car celle-ci dépend de plusieurs facteurs (le contraste diélectrique, la résolution spatiale, la précision machine...), mais pour la modélisation de circuits micrométriques à partir de modèles surfaciques en utilisant une précision machine de type *double*, la limite se situe dans les MHz [25]. Pour les intégrales surfaciques, une analyse plus quantitative a permis de conclure que la rupture survient lorsque $\Delta \leq \lambda/1000$ avec une précision de type *single* et $\Delta \leq \lambda/10^8$ avec une précision de type *double*, où Δ est la taille du pas de discrétisation et λ la longueur de l'onde incidente [48]. Concrètement, en appliquant ces limites à la gamme de fréquence en TIM, ceci impliquerait que, avec une précision de type *double*, la taille minimale de discrétisation à 10 MHz serait de 0.3 μm et de 3 mm à 1 kHz. Il est donc possible d'observer ce phénomène de rupture à basse fréquence dans la gamme inférieure des fréquences en TIM. Toutefois, il est à noter que ces valeurs ont été dérivées pour des modèles surfaciques et peuvent être différentes pour une formulation volumique.

Contrastes élevés

Les valeurs des propriétés diélectriques très élevées des tissus biologiques dans la gamme de fréquences de la TIM mènent à un fort contraste, ce qui implique un mauvais conditionnement des matrices, tant pour les formulations surfaciques [49, 50] que pour les formulations volumiques [51, 52]. Dans la littérature, il existe deux familles d'approches pour surmonter ce problème : la première consiste à appliquer un préconditionnement, par exemple le préconditionneur de Calderón [53, 54] et la seconde approche est de reformuler le problème. Le problème des forts contrastes des modèles basés sur une formulation par intégrales surfaciques a souvent été abordé dans la littérature. Plusieurs reformulations ont été proposées pour améliorer le conditionnement, notamment la formulation Poggio-Miller-Chang-Harrington-Wu-Tsai et la formulation Müller [55]. Une autre approche pour les intégrales surfaciques consiste à combiner les formulations surfaciques et intégrales afin d'améliorer le conditionnement [51]. Le problème de conditionnement des formulations volumiques dû aux contrastes élevés a été peu abordé dans la littérature. Le développement de stratégies efficaces pour traiter ce problème est un des objectifs de ce projet.

2.2.3 Solutions au problème de contraste élevé dans l'EIV

L'approche la plus simple pour résoudre le problème de conditionnement de l'EIV se base sur une reformulation des équations. Le problème de conditionnement des matrices vient du fait que les valeurs des propriétés diélectriques des tissus biologiques à basse fréquence sont très élevées par rapport à celles de l'air. Toutefois, en imagerie biomédicale, on cherche généralement à identifier une perturbation inconnue dans un tissu biologique connu. Une stratégie pour aborder ce problème de conditionnement est d'inclure ce tissu biologique sain dans le milieu de propagation. Le milieu de propagation devient alors un milieu de propagation inhomogène contenant à la fois l'air et le tissu biologique sain. La perturbation qu'on cherche à détecter est alors définie par rapport à ce nouveau fond. À titre d'exemple, si on considère un caillot sanguin dans de la matière blanche, cette stratégie permet de passer d'un contraste par rapport à l'air qui a une valeur de l'ordre de 10^3 à des valeurs de contraste de l'ordre de l'unité.

Cette procédure revient donc à faire un changement de variable. Alors que pour le modèle EIV on cherche à reconstruire un contraste $\boldsymbol{X}_1$ défini par rapport à l'air (voir définition de $\boldsymbol{X}$ à l'équation 3.37), la nouvelle inconnue $\boldsymbol{X}_2$ représente le contraste par rapport à un milieu biologique sain. Il est à noter que, même si la nouvelle inconnue $\boldsymbol{X}_2$ mène à des matrices mieux conditionnées, il est encore nécessaire de résoudre le problème de diffusion électromagnétique du tissu biologique avec le contraste connu $\boldsymbol{X}_1$. L'amélioration offerte par cette stratégie apparaît plus clairement en considérant la résolution du problème inverse. Puisqu'on suppose le contraste $\boldsymbol{X}_1$ connu, l'opérateur de diffusion relié à ce milieu peut n'être calculé qu'une seule fois et la matrice peut être stockée. Les itérations du problème direct dépendent donc seulement de $\boldsymbol{X}_2$. Le système matriciel à résoudre est bien mieux conditionné et peut donc être résolu plus rapidement. De plus, il sera montré au chapitre 4 qu'un meilleur conditionnement du modèle direct implique également une meilleure convergence du problème inverse. Les améliorations apportées par cette approche au coût de calcul sont donc double : d'une part le modèle direct est calculé plus rapidement et, d'autre part, il doit être évalué un moins grand nombre de fois puisque la convergence du problème inverse est améliorée.

Dans la littérature, deux méthodes permettant d'effectuer ce changement de variable ont été proposées. La première est le modèle ELOG (encastrement linéaire par l'opérateur de Green). Avec cette méthode, deux domaines de diffusion sont considérés. Nommons V_1 le domaine de propagation inhomogène connu qui inclut le tissu sain et qui est associé au contraste $\boldsymbol{X}_1$ et V_2 le domaine d'intérêt qui est associé au contraste $\boldsymbol{X}_2$ et qui contient la perturbation inconnue qu'on souhaite reconstruire. Ces deux domaines mènent à deux problèmes de diffusion distincts, mais qui sont interdépendants et qui doivent être résolus

simultanément. La théorie des réseaux multiports est utile pour formuler les équations. Cette formulation a souvent été appliquée aux modèles surfaciques [56, 57] afin d'inclure certaines informations dans le milieu de propagation, par exemple en incluant des objets métalliques nécessaires au montage tomographique [58, 59]. Néanmoins, cette stratégie ne semble pas avoir été utilisée dans l'optique d'effectuer un changement de variables pour améliorer le conditionnement des opérateurs.

La seconde méthode pour effectuer ce changement de variable se base sur la théorie des fonctions de Green. Elle consiste à incorporer le milieu connu au milieu de propagation et ainsi considérer un milieu de propagation inhomogène. Une expression analytique existe pour certaines fonctions de Green inhomogène, par exemple pour une sphère ou un cylindre. Cependant, pour des formes plus complexes, la fonction de Green inhomogène doit être approximée numériquement. De même que pour le modèle ELOG, la modèle GI a jusqu'ici principalement été utilisé afin d'inclure des objets métalliques liés à l'instrumentation à l'intérieur du milieu de propagation [60]. Les détails de chacun de ces modèles sont donnés au chapitre 3.

2.3 Problème inverse

Rappelons que le problème inverse en TIM consiste à reconstruire les propriétés diélectriques d'un milieu en connaissant *a priori* le champ incident et le champ magnétique diffusé aux détecteurs. La manière habituelle d'approcher ce problème est de le formuler comme un problème d'optimisation pour lequel on cherche à minimiser la différence entre les mesures aux détecteurs et le champ magnétique diffusé évalué à partir du modèle direct pour une certaine estimation de la distribution des propriétés diélectriques. Pour résoudre ce problème de minimisation, il y a trois points essentiels à déterminer : le critère à minimiser, la régularisation et l'algorithme d'optimisation. Cette section présente une description des principales options utilisées dans la littérature.

2.3.1 Critère

Le critère à minimiser représente l'inadéquation entre les données et l'évaluation du modèle direct pour une certaine estimation du contraste. Deux types de critères sont couramment utilisés en tomographie : le critère non-linéaire [61] et bilinéaire [62]. Chacun présente certains avantages et certains inconvénients. Le critère non-linéaire consiste à relier les équations d'état et des données en une seule équation. Le critère à minimiser est alors de la forme :

$$F^{NL}(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{N_s} |\boldsymbol{y}_i - f_i(\boldsymbol{X})| \tag{2.24}$$

où $\boldsymbol{y}_i$ représente les données de champ magnétique diffusé aux détecteurs pour la source i et $f(\boldsymbol{X})$ est l'évaluation du modèle direct pour une certaine estimation du contraste. Les inconnues à déterminer sont ici les valeurs de contraste à chaque voxel. Le critère bilinéaire s'affranchit de la contrainte d'égalité sur l'équation d'état et l'inclut comme un terme supplémentaire dans l'équation de minimisation :

$$F^{BL}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_{N_s}) = \sum_{i=1}^{N_s} |\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{G}^R \boldsymbol{X} \boldsymbol{e}_i|^2 + \gamma \sum_{i=1}^{N_s} |\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{G}^c \boldsymbol{X} \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_i^0|^2 \tag{2.25}$$

où γ est un paramètre à fixer qui définit l'importance qu'on accorde à la contrainte d'égalité des champs totaux. Les matrices $\boldsymbol{G}^c$ et $\boldsymbol{G}^R$ représentent les fonctions de Green reliant les points du domaine respectivement à eux-mêmes et aux détecteurs et les vecteurs $\boldsymbol{e}_i$ et $\boldsymbol{e}_i^0$ représentent respectivement le champs total et le champ incident pour une source i. Plus de détails sur ces opérateurs seront données au chapitre 3. Les inconnues du critère non-linéaire sont donc uniquement les valeurs de contraste à chaque voxel, tandis que celles du critère bilinéaire sont les trois composantes du champ électrique total pour chaque source en plus des valeurs de contrastes à chaque voxel. Le nombre d'inconnues est toutefois considérablement réduit par la formulation non-linéaire. L'avantage de la formulation linéaire est donc qu'elle est plus précise, mais le problème de minimisation est difficile et global. La formulation bilinéaire est moins précise puisqu'une approximation est faite sur le champ total, mais le problème est ainsi scindé en sous-problèmes plus simples. Ceci fait que le coût de calcul de chaque itération du problème inverse à partir du critère non-linéaire est beaucoup plus élevé puisqu'il implique la résolution du système d'équation permettant de déterminer exactement le champ total, mais qu'un moins grand nombre d'itérations est nécessaire.

2.3.2 Régularisation

En pratique, un problème bien posé est un problème pour lequel il existe une solution et où cette solution est unique et robuste au bruit [2]. En plus d'être généralement sous-déterminé, c'est-à-dire qu'il y a un plus grand nombre d'inconnues à résoudre que de données indépendantes, le problème inverse en TIM est mal conditionné, ce qui le rend très sensible au bruit [63]. À cause de l'aspect mal posé du problème, il est nécessaire de régulariser le problème inverse, c'est-à-dire d'inclure de l'information *a priori* sur le domaine d'intérêt. Idéalement, une fonction de régularisation bien choisie permet de rendre le modèle plus robuste au bruit et d'améliorer la convergence du problème inverse.

Types de régularisation

La régularisation s'applique sous la forme d'un terme additif ou multiplicatif au critère. Si on considère par exemple le critère non-linéaire, une régularisation multiplicative mène à une fonction objectif de forme :

$$F(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{N_s} |\boldsymbol{y}_i - f_i(\boldsymbol{X})| \cdot R(\boldsymbol{X}) \tag{2.26}$$

Pour une régularisation additive, la fonction objectif est de forme :

$$F(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{N_s} |\boldsymbol{y}_i - f_i(\boldsymbol{X})| + \lambda R(\boldsymbol{X}) \tag{2.27}$$

où λ est le facteur de régularisation et $R(\boldsymbol{X})$ la fonction de régularisation. Plus le terme λ est élevé, plus l'importance est mise sur l'information *a priori*, au compromis du terme d'inadéquation aux données. Inversement, plus le terme λ est faible, plus l'importance est mise sur l'inadéquation aux données et moins sur l'information *a priori*.

Fonctions de régularisation

Différentes fonctions de régularisation peuvent être utilisées pour régulariser le problème inverse [64]. Le choix de fonction dépend de l'information *a priori* disponible sur le domaine qu'on cherche à reconstruire. La plus habituelle est la régularisation de Tikhonov [65]. Elle mène à un critère de forme :

$$F^{Tikh} = \sum_{i=1}^{N_s} |\boldsymbol{y} - f_i(\boldsymbol{X})|^2 + \lambda |\boldsymbol{X}|^2 \tag{2.28}$$

L'inconvénient majeur de la régularisation de Tikhonov est que, à cause de son comportement quadratique, les grandes valeurs de contraste sont fortement pénalisées. Si le terme de pénalisation s'applique sur la différence de contraste entre chaque voxel plutôt que sur la norme de celle-ci, ce sont alors les grandes variations de contraste qui sont fortement pénalisées. Ceci a pour effet de lisser l'image. Les contours des objets, qui sont représentés par de fortes variations de contraste, deviennent alors peu définis. Différentes fonctions ont été proposées afin d'améliorer la régularisation de Tikhonov. Par exemple, la méthode d'uniformisation de la variance [66] est une méthode intéressante dont le principe est d'appliquer différents niveaux de régularisation en fonction de la variation spatiale de la sensibilité. Toutefois, les fonctions de régularisation les plus habituelles sont celles dites «de préservation de bords», telle que la méthode de variation totale [67] et celles utilisant une fonction de pénalisation de type

L_2L_1 qui s'appliquent bien aux larges structures pour la restauration d'images bruitées. Les méthodes de préservation de bords ont été appliquées dans différents contextes, notamment en TIM [68], mais aussi pour des applications à plus haute fréquence [69]. Elles pénalisent alors un terme t qui représente la différence de contraste entre les voxels selon chaque axe :

$$t(\boldsymbol{X}) = \sum_{n=1}^{N_x-1} \sum_{m=1}^{N_y-1} \sum_{p=1}^{N_z-1} \phi(X_{n+1,m,p} - X_{n,m,p}) + \phi(X_{n,m+1,p} - X_{n,m,p}) + \phi(X_{n,m,p+1} - X_{n,m,p}) \tag{2.29}$$

Différentes fonctions ϕ ont été appliquées efficacement à la régularisation de problèmes inverses d'imagerie, citons notamment les fonctions GM [70], HL [71], HS [72] et hyperbolique [73]. Afin de mieux comprendre l'effet de chacune de ces fonctions, les dérivées première et seconde sont données au tableau 2.1.

Tableau 2.1 Fonctions de régularisation et leurs dérivées première et seconde.

	ϕ	ϕ'	ϕ''
GM	$\frac{t^2}{1+t^2}$	$\frac{2t}{(1+t^2)^2}$	$\frac{2-6t^2}{(x^2+1)^3}$
HL	$\log(1+t^2)$	$\frac{2t}{1+t^2}$	$\frac{-2(t^2-1)}{(t^2+1)^2}$
HS	$2\sqrt{1+t^2}-2$	$\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}$	$\frac{2}{(t^2+1)^{3/2}}$
hyp	$\sqrt{\delta^2+t^2}$	$\frac{t}{\sqrt{\delta+t^2}}$	$\frac{\delta^2}{(\delta^2+t^2)^{3/2}}$

Un aspect important du choix de fonction de régularisation est la convexité. Les fonctions HS et *hyp* sont convexes, tandis que GM et HL ne le sont pas (puisque leurs dérivées secondes ne sont pas toujours égales ou supérieures à zéro). On remarque que les fonctions HS et *hyp* sont très semblables, sauf que la fonction *hyp* requiert l'ajustement d'un terme supplémentaire δ. Les deux fonctions ont un comportement quadratique près de zéro et sont asymptotiquement linéaires. Ce type de fonction est appelé L_2L_1, contrairement par exemple à la fonction de Tikhonov qui est de type L_2. Pour la fonction *hyp*, le paramètre δ permet de définir autour de quelle valeur la transition entre le comportement quadratique et linéaire se produit.

Il est à noter que la régularisation est un champ d'étude actif et que cette section ne se veut qu'une brève introduction de certaines fonctions simples qui sont applicables dans le cadre de la résolution d'un problème inverse en imagerie. D'autres fonctions de régularisation très prometteuses sont offertes dans la littérature, par exemple la fonction d'Huber [74] ou la fonction Gaussienne généralisée [75], mais une étude exhaustive de la régularisation du problème inverse sort du cadre de ce travail.

2.3.3 Choix de l'algorithme

Pour minimiser le critère régularisé, différents algorithmes d'optimisation peuvent être appliqués. Ceux-ci peuvent être divisés en deux catégories : les méthodes stochastiques et les méthodes déterministes. Les méthodes stochastiques ont l'avantage d'être des méthodes d'optimisation globale, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas sujettes à rester prises dans des minimas locaux. Citons par exemple l'algorithme génétique, l'optimisation par colonies de fourmis ou encore l'optimisation par essaims particulaires [33]. Le principal désavantage des méthodes d'optimisation globale est qu'elles requièrent un coût de calcul très élevé, ce qui devient particulièrement problématique dans le cas d'un problème 3D impliquant un grand nombre d'inconnues tel qu'en TIM. Pour de tels problèmes, il est préférable d'utiliser des méthodes déterministes puisqu'elles offrent une vitesse relative plus élevée et un contrôle plus simple de la convergence pour une précision donnée [76]. Les méthodes déterministes sont par contre plus enclines à rester prises dans des minimas locaux, ce qui peut être problématique dans le cas du problème mal posé de la TIM biomédicale. En effet, pour de fortes valeurs de contraste telles que celles des tissus biologiques, le problème inverse est fortement non-linéaire. La solution finale dépend fortement de l'initialisation à cause de la non-convexité du problème. Toutefois, en imagerie biomédicale, les valeurs possibles des propriétés diélectriques des tissus sont connues, il est donc possible d'initialiser près de la solution exacte, ce qui rend la non-convexité et les risques d'être pris dans un minimum local moins problématiques. Différentes méthodes déterministes ont été appliquées aux problèmes inverses en imagerie biomédicale. Quelques-unes de ces méthodes d'optimisation non-linéaires sont présentées ici.

Méthode du gradient

La méthode du gradient consiste à estimer un certain contraste initial $\boldsymbol{X}_0$, puis à raffiner cette estimation itérativement en utilisant une descente du gradient avec une méthode de recherche de ligne [77].

$$\boldsymbol{X}_{k+1} = \boldsymbol{X}_k - \alpha_k \nabla F(\boldsymbol{X}_k) \tag{2.30}$$

où α_k est la taille du pas déterminée par la recherche de ligne à l'itération k et ∇F le gradient de la fonction objectif. Cette méthode n'utilise que le calcul du gradient pour déterminer la direction de descente. Elle a l'avantage d'être rapide à calculer, mais a le désavantage d'avoir besoin d'un grand nombre d'itérations avant de converger.

Méthode de Newton

La méthode du gradient est une méthode de minimisation de premier ordre puisqu'elle n'utilise que le calcul du gradient pour trouver la direction de descente. La méthode de Newton est une méthode deuxième ordre puisqu'elle utilise le Hessien pour trouver la direction de descente. Le contraste est mis à jour de la façon suivante :

$$\boldsymbol{X}_{k+1} = \boldsymbol{X}_k - \frac{1}{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}_k)} \nabla F(\boldsymbol{X}_k) \tag{2.31}$$

où H est la matrice Hessien contenant les dérivées secondes de la fonction objectif :

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

La méthode de Newton est peu applicable en pratique puisque le calcul numérique du Hessien implique $2n^2$ évaluations du modèle direct et le stockage de la matrice ne peut être réalisé que pour un nombre d'inconnues relativement faible, ce qui n'est pas réaliste dans le cas de la tomographie 3D impliquant un grand nombre d'inconnues.

Méthodes du gradient conjugué et de quasi-Newton

La méthode du gradient n'est pas efficace lorsque la forme du critère est une ellipse allongée [77]. En d'autres termes, lorsque certains voxels sont beaucoup plus sensibles que d'autres aux variation de contrastes, les méthodes qui se basent uniquement sur le calcul du gradient à l'itération k convergent lentement. La méthode de Newton converge quant à elle beaucoup plus rapidement, mais le fait qu'elle requiert le calcul de l'inverse de la matrice Hessienne implique un coût de calcul extrêmement élevé à chaque itération et la rend inapplicable lorsque le nombre d'inconnues est trop élevé.

Les méthodes du gradient conjugué sont un bon compromis entre les méthodes du gradient, où chaque itération est rapidement calculée mais où un grand nombre d'itérations est nécessaire, et la méthode de Newton, où un moins grand nombre d'itérations est nécessaire mais où le calcul de chaque itération est très lourd. Cette amélioration peut-être faite par exemple en tenant compte des directions de descente aux itérations précédentes (méthode du gradient conjugué) ou en approximant l'inverse de la matrice Hessienne sans la calculer explicitement (méthode de quasi-Newton). Le principe de base est le même que la méthode du gradient.

À partir d'une certaine estimation du contraste $\boldsymbol{X}_0$, l'écart entre le champ mesuré et calculé est évalué, puis l'estimation est, par exemple avec la méthode du gradient conjugué, mise à jour avec la direction de descente d et la taille de pas α :

$$\boldsymbol{X}_{k+1} = \boldsymbol{X}_k - \alpha_k \boldsymbol{d}_k \tag{2.33}$$

La différence est que la direction de descente est donnée par :

$$\boldsymbol{d}_{k+1} = \boldsymbol{r}_{k+1} + \beta_{k+1} \boldsymbol{d}_k \tag{2.34}$$

où :

$$\boldsymbol{r}_k = -\nabla f(\boldsymbol{X}_k) \tag{2.35}$$

$$\beta_{k+1} = \frac{\boldsymbol{r}_{k+1}^\intercal \boldsymbol{r}_{k+1}}{\boldsymbol{r}_k^\intercal \boldsymbol{r}_k} \tag{2.36}$$

où $\boldsymbol{r}^\intercal$ représente la transposée du vecteur $\boldsymbol{r}$. La nouvelle direction de descente ne dépend donc pas uniquement du calcul du gradient à cette itération, mais aussi des directions de descente aux itérations précédentes. Il est à noter que d'autres méthodes pour calculer le coefficient β existent, telle que la méthode de Polak et Ribbiere.

Les méthodes de type quasi-Newton utilisent quant à elles une approximation du Hessien, ou de son inverse, pour calculer la direction de descente. Parmi les méthodes de type quasi-Newton, la plus utilisée est la méthode BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno). Le contraste est mis à jour selon :

$$\boldsymbol{X}_{k+1} = \boldsymbol{X}_k - \alpha_k \mathcal{H}_k \nabla F(\boldsymbol{X}_k) \tag{2.37}$$

où $\mathcal{H}$ est une approximation de l'inverse du Hessien qui est mis à jour par :

$$\mathcal{H}_{k+1} = \boldsymbol{V}_k^\intercal \mathcal{H}_k \boldsymbol{V}_k + \rho_k \boldsymbol{s}_k \boldsymbol{s}_k^\intercal \tag{2.38}$$

$$\rho_k = \frac{1}{\boldsymbol{y}_k^\intercal \boldsymbol{s}_k} \tag{2.39}$$

$$\boldsymbol{V}_k = \boldsymbol{I} - \rho_k \boldsymbol{y}_k \boldsymbol{s}_k^\intercal \tag{2.40}$$

$$\boldsymbol{s}_k = \boldsymbol{X}_{k+1} - \boldsymbol{X}_k \tag{2.41}$$

$$\boldsymbol{y}_k = \nabla F(\boldsymbol{X}_{k+1}) - \nabla F(\boldsymbol{X}_k) \tag{2.42}$$

Pour la méthode BFGS, l'approximation de l'inverse du Hessien est dense. La manipulation et le stockage de cette matrice est problématique pour des problèmes avec un grand nombre

d'inconnues. Il existe une variante du BFGS, le L-BFGS (*limited-memory BFGS*), qui permet de contourner le problème de mémoire. Le principe est de ne pas stocker tous les vecteurs nécessaires au nouvel estimé de l'inverse du gradient, mais seulement un nombre restreint, généralement entre 3 et 20 [77]. Après chaque itération, ces vecteurs sont mis à jour avec leurs nouvelles valeurs.

2.4 Stratégies d'optimisation du temps de calcul

Puisque le problème abordé par ce projet est le coût de calcul pour la reconstruction d'images en TIM, certaines stratégies de réduction de temps de calcul sont considérées afin de permettre une comparaison plus judicieuse entre le modèle proposé et les modèles existants. Plus la résolution du problème direct est rapide, plus il est acceptable d'effectuer un grand nombre d'itérations du solveur inverse. Ceci permet, à moins de se trouver dans un minimum local, d'obtenir de meilleures reconstructions. Différentes approches sont ici considérées pour diminuer le coût de calcul. La première concerne une résolution efficace du problème direct. Pour ce faire, on considère la transformée de Fourier rapide et l'algorithme Bloc-BiCGstab. La seconde approche consiste à améliorer la convergence du problème inverse. La théorie derrière chacune de ces approches est détaillée dans cette section, tandis que les résultats sont présentés au chapitre 4. Il est à noter qu'il est également possible d'appliquer d'autres méthodes numériques pour réduire le coût de calcul, par exemple le MLFMA (*Multilevel Fast Multipole Algorithm*) [21] et la parallélisation, mais ces méthodes sont hors du cadre de ce travail.

2.4.1 Transformée de Fourier rapide

L'imagerie 3D implique un grand nombre d'inconnues. Par exemple, si on souhaite avoir une résolution de l'ordre du centimètre pour un domaine cubique de 20 cm d'arrête, on doit au minimum discrétiser le domaine en 20x20x20 voxels. Le détail de chaque opérateur sera présenté au chapitre 3, mais en résumé, avec le modèle GI, deux systèmes d'équations doivent être résolus dans la résolution du problème direct, impliquant les matrices $\boldsymbol{\mathcal{L}}_2 = (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{G}_{22}^{ho}\boldsymbol{X}_2)^{-1}$ et $\boldsymbol{\mathcal{L}}_1 = (\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{G}_{11}^{ho}\boldsymbol{X}_1)^{-1}$. Ces matrices sont respectivement de taille $3n_1 \times 3n_1$ et $3n_2 \times 3n_2$ où n_1 et n_2 sont le nombre d'inconnues dans le domaine V_1 (le milieu de propagation inhomogène) et dans le domaine V_2 (le domaine à reconstruire). Une résolution d'un centimètre implique donc des matrices de taille 24000×24000 qui requièrent un espace mémoire d'environ 37 Gbits, ce qui devient rapidement problématique lorsque le nombre d'inconnues augmente.

Une stratégie souvent appliquée sur l'EIV pour contourner cette difficulté est d'exploiter la structure du problème. En effet, la matrice $\mathcal{L}$ implique la discrétisation de la fonction de Green dyadique qui est bloc-Toeplitz. Le produit $\boldsymbol{GX}$ peut être vu comme produit de convolution et un algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT) peut donc être utilisé pour calculer le produit matrice-vecteur de façon plus efficace. On peut stocker uniquement le noyau de convolution de taille $(2N+1)^3$ plutôt que la matrice totale de taille $3N^3 \times 3N^3$ où N est le nombre de voxels par arrête pour un domaine de discrétisation cubique. Cette stratégie est habituelle pour les méthodes basées sur l'EIV [78, 79, 80]. Le produit $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{G}_{11}^{ho}\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{u}$ où $\boldsymbol{u}$ est le terme de droite du système matriciel à résoudre peut être calculé par :

$$\boldsymbol{A} = FFT^{-1}(FFT(\boldsymbol{G}_{11}^{ho})FFT(\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{u})) \tag{2.43}$$

2.4.2 Méthodes Bloc

L'intérêt des méthodes Bloc est de résoudre efficacement plusieurs systèmes matriciels de type $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ qui partagent le même opérateur matriciel $\boldsymbol{A}$. Puisque le modèle direct basé sur l'EIV nécessite la résolution de N_s systèmes avec le même opérateur matriciel (où N_s est le nombre de sources), la structure du problème est particulièrement adaptée aux méthodes Bloc. On peut ainsi profiter de la direction de descente des autres systèmes pour accélérer le calcul. Puisque le coût de calcul d'une itération de l'algorithme Bloc est environ le même que sa version séquentielle, en diminuant le nombre d'itérations nécessaires, on réduit aussi le temps de calcul. De plus, puisque la résolution des systèmes d'équations dans le calcul du critère et du gradient sont indépendants, ils se prêtent particulièrement bien à la parallélisation. Ceci permet théoriquement de diviser le temps de calcul par le nombre de coeurs disponibles. En pratique, le temps de calcul n'est pas exactement divisé par le nombre de coeur, mais cela représente une bonne approximation [81].

L'équivalent Bloc existe pour la plupart des méthodes séquentielles. L'amélioration de la version Bloc par rapport à la version séquentielle varie selon la méthode considérée. Par exemple, il a été rapporté que l'algorithme Bloc-gradient conjugué améliore de 40% le temps de calcul [82]. Une version par Blocs existe aussi pour l'algorithme Bloc-BiCGstab [83].

Une analyse rigoureuse de l'intérêt d'appliquer l'algorithme Bloc-BiCGstab à la tomographie micro-ondes a été faite dans [84]. L'amélioration du nombre d'itération du Bloc-BiCGstab par rapport à sa version séquentielle dépend de plusieurs facteurs tels que le contraste, la fréquence, le nombre de systèmes à résoudre et l'architecture multi-coeur du processeur. On rapporte dans [84] que plus le contraste, la fréquence, le nombre de systèmes à résoudre et le nombre de coeurs augmentent, plus la version Bloc de l'algorithme est efficace par rapport à

la version séquentielle. Par exemple, le fait de passer de 32 à 160 systèmes d'équations ou de doubler le facteur de contraste permet de diminuer le nombre d'itérations de 70% en utilisant la méthode Bloc [81].

Une attention particulière doit être portée à l'initialisation afin d'assurer une résolution efficace avec la version Bloc. En utilisant la même initialisation que pour les méthodes séquentielles, l'algorithme Bloc-BiCGstab peut converger lentement ou ne pas converger du tout. Ceci vient du fait que les vecteurs qui servent à initialiser la solution sont fortement corrélés entre eux puisqu'ils sont liés aux champs incidents et que deux sources situées près l'une de l'autre sont représentées par des champs incidents très semblables. Pour résoudre conjointement les systèmes d'équations par l'algorithme Bloc-BiCGstab, une matrice contenant les différents vecteurs d'initialisation est formée. Une forte corrélation entre ceux-ci implique un mauvais conditionnement de la matrice d'initialisation de la méthode Bloc, ce qui peut entraîner des problèmes de convergence. Afin d'éviter le problème de conditionnement de la matrice d'initialisation, il est nécessaire d'ajouter une composante aléatoire à chaque vecteur d'initialisation de sorte à les décorréler. Cette composante peut prendre la forme d'un bruit Gaussien additif à l'initialisation originale. Le choix de l'amplitude du bruit additif est crucial. Un bruit trop faible ne permet pas de décorréler suffisamment les vecteurs, tandis qu'un bruit trop fort éloigne trop l'initialisation de la solution exacte, ce qui résulte en un plus grand nombre d'itérations avant d'atteindre la convergence. Dans le cadre de la tomographie micro-ondes, un rapport signal sur bruit (RSB) de 50 dB a été jugé optimal pour améliorer le conditionnement sans compromettre la proximité de linitialisation avec la solution finale [84].

Malgré que le passage d'une méthode séquentielle à une méthode de type Bloc offre des avantages considérables quant à la diminution du temps de calcul, cette amélioration dépend fortement des paramètres du problème. Puisque les valeurs de contraste sont élevées en TIM et que le nombre de systèmes à résoudre est comparable, on s'attend également à des améliorations au temps de calcul pour l'algorithm Bloc-BiCGstab par rapport à sa version séquentielle. Il est toutefois essentiel de valider cette affirmation, ce qui est fait au chapitre 4.

2.4.3 Préconditionnement

De manière générale, le préconditionnement consiste à transformer un système d'équations en un système équivalent avec de meilleures propriétés. La matrice utilisée pour effectuer cette transformation est appelée «préconditionneur». La vitesse de convergence des algorithmes itératifs utilisés pour résoudre des systèmes d'équations est liée au conditionnement des ma-

trices, et donc à leurs spectres de valeurs singulières. Plus les valeurs singulières des matrices convergent autour de 1, meilleur sera le conditionnement et plus l'algorithme itératif convergera rapidement. Le préconditionnement peut être appliqué de différentes façons, soit par un préconditionneur à gauche :

$$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{2.44}$$

par un préconditionneur à droite :

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{y} \tag{2.45}$$

ou par un préconditionneur mixte :

$$\boldsymbol{M}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}_2^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{M}_1^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} = M_2^{-1}\boldsymbol{y} \tag{2.46}$$

L'objectif du préconditionneur est d'estimer l'inverse de la matrice opérateur de sorte à en réduire l'étendue spectrale des valeurs singulières. Par exemple dans le cas d'un préconditionneur à gauche, on voudrait que $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$. Toutefois, calculer exactement l'inverse de $\boldsymbol{A}$ revient à résoudre le système matriciel ; on souhaite donc obtenir une approximation de l'inverse avec un moindre coût de calcul qu'il est nécessaire pour résoudre exactement le système d'équations. Un bon préconditionneur présente donc deux caractéristiques : il est simple à calculer et il améliore les propriétés des matrices. Ces deux caractéristiques sont en compétition, c'est-à-dire que plus le préconditionneur est simple à calculer, moins il est efficace pour améliorer les propriétés spectrales du problème. À l'inverse, un préconditionneur très efficace demande généralement un coût de calcul très élevé. Un compromis doit donc être fait entre ces deux propriétés. Un aspect important qui peut justifier l'utilisation d'un préconditionneur plus lourd à calculer est le nombre d'itérations pendant lesquelles il peut être appliqué efficacement sans avoir besoin d'être réévalué.

Il existe deux classes de méthodes pour obtenir un préconditionneur. La première est d'utiliser un préconditionneur spécifique au problème. Cette classe de méthodes peut mener à des préconditionneurs très efficaces, mais elle requiert la connaissance de différentes caractéristiques du problème posé, par exemple les équations continues à la base du système matriciel, le domaine d'intégration, les conditions frontières et le type de discrétisation [85]. Les approches spécifiques ne sont pas toujours désirables, par exemple lorsque ces informations ne sont pas disponibles ou sont connues de façon inexacte. L'autre classe de méthodes est plus générale et se base uniquement sur la structure algébrique des matrices. Ces méthodes sont plus versatiles et peuvent s'appliquer à une vaste gamme de problèmes. Elles constituent un domaine de recherche très actif [85].

Dans la littérature, différents préconditionneurs ont été appliqués aux problèmes de diffusion électromagnétique. Certains s'appliquent sur le modèle direct afin d'améliorer les propriétés de la matrice opérateur et ainsi permettre une résolution plus rapide du modèle direct. Les préconditionneurs de ce type les plus habituels se basent sur le principe de décomposition LU ou utilisent la structure «sparse» des matrices obtenues à partir d'un modèle différentiel. Ces préconditionneurs ont été appliqués par exemple à la tomographie micro-ondes [86], à la tomographie par émission de positrons [87] et à la tomographie par induction magnétique [88]. La deuxième catégorie de préconditionneurs sont ceux qui cherchent à réduire l'étendue spectrale du Hessien, de façon à améliorer la vitesse de convergence du solveur inverse. Pour ce faire, des préconditionneurs diagonaux peuvent offrir des améliorations à la vitesse de convergence, mais ils ne représentent souvent pas la meilleure option possible car ils ignorent les termes hors-diagonale du Hessien de la fonction objectif qui représentent la corrélation entre les pixels [87]. Pour les problèmes qui sont approximativement invariants en translation tels que la tomographie par émission de positrons [87], des préconditionneurs circulaires ont été efficacement appliqués [89]. Il est également possible d'appliquer successivement ces deux types de préconditionneurs sous la forme d'un préconditionneur à gauche et d'un préconditionneur à droite de façon à accélérer d'une part la résolution du problème direct et d'autre part à améliorer la convergence du problème inverse [90].

2.5 Conclusion

Pour résumer, ce chapitre a permis de présenter l'état de l'art des modèles directs. On a vu pourquoi certaines approximations permettant de simplifier le problème ne sont pas applicables au problème de TIM biomédicale. Les modèles par différences finies, éléments finis et intégrales surfaciques ont été brièvement présentés et les avantages d'une formulation par EIV par rapport à chacune des ces méthodes ont été énoncés.

Certains problèmes numériques qui affligent l'EIV ont été présentés. On a vu, par exemple, que le phénomène de rupture à basse fréquence, l'effet de peau et la longueur d'onde effective, ne sont pas problématiques en TIM biomédicale, mais que le fort contraste des tissus biologiques mène à des problèmes de conditionnement et de convergence. L'aspect le plus problématique d'un modèle basé sur l'EIV est le fort contraste des tissus biologiques dans cette gamme de fréquence car il mène à un mauvais conditionnement des matrices. Deux méthodes ont été présentées pour aborder ce problème : les modèles ELOG et GI.

Ensuite, différents aspects relatifs à la résolution du problème inverse ont été présentés : le choix du critère, de la régularisation et de l'algorithme de résolution. Le critère prend couramment deux formes, soit la forme non-linéaire ou bilinéaire. La régularisation peut être

additive ou multiplicative et différentes fonctions de régularisation existent afin d'inclure de l'information *a priori* sur le domaine à reconstruire. Finalement, parmi les algorithmes d'optimisation déterministes les plus adéquats pour un problème 3D de grande taille, certains ont été présentés tels que les méthode du gradient, de Newton et de quasi-Newton. La justification du choix de chacun de ces aspects de la résolution du problème inverse en TIM est faite au chapitre 3.

Certaines techniques pour améliorer le temps de calcul ont également été présentées, notamment la transformée de Fourier rapide, les méthodes Bloc et le préconditionnement. Il est évident que la FFT permet des améliorations considérables en temps et en mémoire puisque la structure du problème de TIM est la même que pour d'autres applications où les améliorations de la FFT ont été démontrées. Toutefois, l'intérêt des méthodes Bloc et du préconditionnement reste à démontrer dans le cadre de la TIM. Ceci est présenté au chapitre 4.

CHAPITRE 3 THÉORIE

Le chapitre 2 a présenté différentes méthodes numériques qui permettent de modéliser la physique de l'induction magnétique dans un tissu biologique. L'intérêt d'un modèle numérique basé sur l'EIV par rapport aux autres méthodes a été présenté, c'est-à-dire qu'il permet de résoudre sur un domaine de simulation de beaucoup plus petite taille sans compromettre la qualité des résultats ni restreindre l'applicabilité de la méthode à une certaine gamme de fréquences ou de propriétés diélectriques. Cette réduction de la taille du domaine permet de réduire le nombre d'inconnues. Puisque le coût de calcul est lié, entre autres, au nombre d'inconnues, le modèle a le potentiel de diminuer le coût de calcul à la fois du modèle direct et du problème inverse.

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les concepts nécessaires à l'application d'un modèle basé sur l'EIV à la TIM biomédicale. Ces concepts peuvent être séparés en deux parties qui sont interreliées : le modèle direct et le problème inverse. La section 3.1 présente le développement mathématique de l'EIV. Ceci permet de mettre en évidence le problème des forts contrastes en TIM biomédicale. La section 3.2 développe les modèles ELOG et GI qui permettent de traiter ce problème. La section 3.3 justifie ensuite les différents choix relatifs à la résolution du problème inverse, c'est-à-dire le choix du critère, de la régularisation, de l'algorithme d'optimisation et du préconditionneur parmi les options présentées au chapitre 2. Puis, à la section 3.4, en considérant à la fois l'évaluation du modèle direct et la résolution du problème inverse, le choix du modèle le plus adapté à la TIM biomédicale est justifié.

Il est à noter que plusieurs sections de ce chapitre ne sont qu'un rappel de la théorie présenté ailleurs. Par exemple, le développement mathématique du modèle EIV est bien connu et il est simplement donné ici afin de mettre en évidence les problèmes liés à son application dans le cadre de la TIM. Le critère, la régularisation, l'algorithme de minimisation et le préconditionneur choisis sont aussi fréquemment appliqués pour d'autres applications, par exemple en tomographie micro-ondes et en tomographie d'impédance électrique. Les aspects innovants de ce projet sont donc de mettre en évidence le problème de l'EIV dans le cadre de la TIM biomédicale, la proposition de solutions à ce problème (à partir des modèles GI et ELOG) et la résolution du problème inverse à partir de ce modèle numérique. La dérivation du modèle ELOG pour un modèle basé uniquement sur les intégrales volumiques semble aussi être une contribution innovante puisqu'aucun tel développement n'a été recensé dans la littérature. Les modèles ELOG et GI ont souvent été appliqués dans le but de réduire la taille du domaine de simulation en incluant par exemple certains instruments au milieu de

propagation, mais jamais dans le but d'améliorer les propriétés matricielles du problème de reconstruction d'images en TIM.

3.1 Modèle EIV

Cette section présente la dérivation de l'équation intégrale volumique. Il est important d'en rappeler le développement ici afin de : 1) comprendre les sources d'erreur numériques du modèle, 2) identifier les sources potentielles de problèmes liés à la vitesse de convergence et 3) comprendre le développement des modèles alternatifs ELOG et GI.

3.1.1 Équations continues

Équations de Maxwell

Les équations de Maxwell décrivent l'interaction des ondes électromagnétiques avec la matière et constituent le point de départ de tout modèle numérique. Elles peuvent être traitées en régime temporel ou harmonique. Le régime temporel est plus fréquemment utilisé pour les phénomènes transitoires. Dans le cas de la TIM, puisque la source émet à une fréquence fixe, il est préférable de se placer en régime harmonique. On considère alors que l'onde a une fréquence angulaire ω constante et que les parties spatiales et temporelles de l'onde sont indépendantes :

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})e^{-j\omega t} \tag{3.1}$$

Ceci permet d'écrire les équations de Maxwell sous forme différentielle :

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = j\omega \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \tag{3.2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = -j\omega \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \tag{3.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r}) \tag{3.4}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{3.5}$$

Les conditions aux limites à respecter à l'interface entre un milieu 1 et un milieu 2 sont :

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0 \tag{3.6}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \rho_s \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{J}_s \tag{3.8}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) = 0 \tag{3.9}$$

où ρ_s est la densité surfacique de charge à l'interface et $\boldsymbol{J}_s$ la densité surfacique de courant à l'interface. Les équations constitutives qui relient localement $\boldsymbol{D}$ à $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ à $\boldsymbol{H}$ sont, pour un milieu linéaire :

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \overline{\epsilon}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{3.10}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \overline{\mu}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \tag{3.11}$$

Seulement les matériaux isotropes sont considérés ici, les tenseurs $\overline{\epsilon}$ et $\overline{\mu}$ qui expriment la dépendance de ces propriétés selon les axes du matériau deviennent donc des scalaires définis par $\mu(\boldsymbol{r}) = \mu_0\mu_r(\boldsymbol{r})$ et $\epsilon(\boldsymbol{r}) = \epsilon_0\epsilon_r(\boldsymbol{r})$. Ils représentent respectivement la perméabilité et la permittivité du milieu au point $\boldsymbol{r}$. Puisqu'on s'intéresse ici aux tissus biologiques, on ne considère que les matériaux diamagnétiques et paramagnétiques. Si l'on souhaite également traiter les matériaux ferri et ferromagnétiques, on doit ajouter une partie complexe à la perméabilité pour inclure les pertes d'origine magnétique.

Équation d'Helmholtz

Le champ total mesuré aux détecteurs est la somme du champ source et du champ diffusé par l'objet. On a donc :

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^0 + \boldsymbol{H}^{scat} \tag{3.12}$$

où $\boldsymbol{H}^0$ est le champ magnétique incident, $\boldsymbol{H}^{scat}$ le champ diffusé par l'objet et $\boldsymbol{H}$ le champ total. Afin de déterminer la relation entre le champ induit et le champ total, on part de l'équation d'Helmholtz. En prenant le rotationnel de 3.2 et en insérant 3.3 dans 3.2, on trouve :

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \omega^2\mu\epsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = j\omega\mu\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \tag{3.13}$$

On peut développer cette équation à partir des propriétés $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\nabla^2\boldsymbol{E} + \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{E}$ et $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\varrho}{\epsilon} = \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{J}}{j\omega\epsilon}$. On a ainsi :

$$\nabla^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + k_b^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -j\omega\mu[\boldsymbol{I} + \frac{\nabla\nabla\cdot}{k_b^2}]\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \tag{3.14}$$

où k_b est le nombre d'onde du milieu de propagation. La solution fait intervenir la solution de Green vectorielle puisque la solution de Green est solution de [91] :

$$(\nabla^2 + k_b^2)g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{3.15}$$

où $\boldsymbol{r}$ est le point où le champ est évalué et $\boldsymbol{r'}$ la position de la source. Pour une symétrie sphérique, la fonction de Green est de forme :

$$g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) = \frac{Ce^{jk_b|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} + \frac{De^{-jk_b|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} \tag{3.16}$$

où $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|$. Puisqu'il n'y a pas de sources à l'infini, on laisse tomber le terme d'exponentielle négative :

$$g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) = \frac{Ce^{jk_b|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} \tag{3.17}$$

Afin de déterminer le facteur C, on insère 3.17 dans 3.15.

$$\int_{\delta V} \nabla \cdot \nabla \frac{Ce^{jk_b|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} dV + \int_{\delta V} k^2 \frac{Ce^{jk_b|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} dV = -1 \tag{3.18}$$

On a donc :

$$g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) = \frac{e^{jk_b|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} \tag{3.19}$$

Cette dernière équation est l'équation de Green scalaire. Puisqu'on traite un cas vectoriel, la fonction de Green dyadique doit être utilisée, le détail de son développement est disponible dans [92]. Elle est une solution de :

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) - k_b^2 \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) = \boldsymbol{I}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}) \tag{3.20}$$

et est donnée par :

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) = \left(\boldsymbol{I} + \frac{1}{k_b^2}\nabla\nabla\right) g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) \tag{3.21}$$

Le terme $\nabla\nabla g$ représente le gradient du gradient de la fonction de Green scalaire. Ce terme peut donc être représenté à partir des dérivées partielles de g par :

$$\nabla\nabla g = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

Si on revient à 3.14, la solution de l'équation d'Helmholtz peut donc être exprimée par :

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = j\omega\mu \int_V \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}) \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r'}) d\nu' \tag{3.23}$$

Principe des volumes équivalents

Pour exprimer la densité de courant au point $\boldsymbol{r}'$, le principe des volumes équivalents est utilisé [33]. À partir des équations de Maxwell sous forme intégrale et en considérant l'objet comme une discontinuité du milieu de propagation, on a, pour un milieu isotrope :

$$\oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{l} = j\omega \int_S \mu(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} ds \tag{3.24}$$

$$\oint_C \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{l} = -j\omega \int_S \epsilon(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} ds + \int_S \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} ds \tag{3.25}$$

L'équation 3.25 peut être reformulée en introduisant la permittivité complexe définie par :

$$\tilde{\epsilon}(\boldsymbol{r}) = \epsilon_0 \epsilon_r(\boldsymbol{r}) + \frac{j\sigma(\boldsymbol{r})}{\omega} \tag{3.26}$$

Ceci permet de réécrire la seconde équation par :

$$\oint_C \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{l} = -j\omega \int_S \tilde{\epsilon}(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} ds \tag{3.27}$$

De la même façon, le champ incident peut être exprimé par :

$$\oint_C \boldsymbol{E}^0(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{l} = j\omega \int_S \mu_b \boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} ds \tag{3.28}$$

$$\oint_C \boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{l} = -j\omega \int_S \tilde{\epsilon}_b \boldsymbol{E}^0(\boldsymbol{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} ds \tag{3.29}$$

$\tilde{\epsilon}_b$ et μ_b sont la permittivité complexe et la perméabilité du milieu de propagation (b pour *background*). Dans le cas qui nous intéresse, le montage (les sources, les détecteurs et le volume d'intérêt) se trouve dans l'air, les valeurs de $\tilde{\epsilon}_b$ et μ_b sont donc égales à ϵ_0 et μ_0. En soustrayant les équations 3.28 et 3.29 de 3.24 et 3.27, on a :

$$\oint_C [\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}^0(\boldsymbol{r})] \cdot d\boldsymbol{l} = j\omega \int_S [\mu(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) - \mu_b \boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{r})] \cdot \hat{\boldsymbol{n}} ds \tag{3.30}$$

$$\oint_C [\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{r})] \cdot d\boldsymbol{l} = -j\omega \int_S [\tilde{\epsilon}(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \tilde{\epsilon}_b \boldsymbol{E}^0(\boldsymbol{r})] \cdot \hat{\boldsymbol{n}} ds \tag{3.31}$$

Le champ diffusé peut être exprimé comme la différence entre le champ total et le champ incident. Par exemple, pour le champ électrique on a :

$$\boldsymbol{E}^{scat} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^0 \tag{3.32}$$

On peut donc définir les équations précédentes à partir du champ diffusé :

$$\oint_C \boldsymbol{E}^{scat}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{l} = j\omega \int_S [\mu(\boldsymbol{r})\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) - \mu_b[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{H}^{scat}(\boldsymbol{r})]] \cdot \hat{\boldsymbol{n}} ds \tag{3.33}$$

$$\oint_C \boldsymbol{H}^{scat}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{l} = -j\omega \int_S [\tilde{\epsilon}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \tilde{\epsilon}_b[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{E}^{scat}(\boldsymbol{r})]] \cdot \hat{\boldsymbol{n}} ds \tag{3.34}$$

En introduisant les sources équivalentes :

$$\boldsymbol{M}_{eq}(\boldsymbol{r}) = j\omega[\mu(\boldsymbol{r}) - \mu_b]\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \tag{3.35}$$

$$\boldsymbol{J}_{eq}(\boldsymbol{r}) = j\omega[\tilde{\epsilon}(\boldsymbol{r}) - \tilde{\epsilon}_b]\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{3.36}$$

Selon le principe des volumes équivalents, le champ induit par un objet réel équivaut à une densité de courant ou un moment magnétique qui radie dans l'espace libre. À partir des contrastes électrique et magnétique définis par :

$$X^E(\boldsymbol{r}) = \frac{\tilde{\epsilon}(\boldsymbol{r}) - \tilde{\epsilon}_b}{\tilde{\epsilon}_b} \tag{3.37}$$

$$X^H(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu(\boldsymbol{r}) - \mu_b}{\mu_b} \tag{3.38}$$

on peut ainsi exprimer les champs diffusés $\boldsymbol{H}^{scat}$ et $\boldsymbol{E}^{scat}$:

$$\boldsymbol{E}^{scat}(\boldsymbol{r}) = k_b^2 \int_V \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot [X^E(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]d\boldsymbol{r}' + j\omega\mu_b \nabla \times \int_V g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')X^H(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' \tag{3.39}$$

$$\boldsymbol{H}^{scat}(\boldsymbol{r}) = k_b^2 \int_V \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot [X^H(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]d\boldsymbol{r}' - j\omega\tilde{\epsilon}_b \nabla \times \int_V g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')X^E(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' \tag{3.40}$$

On peut maintenant poser les équations qui relient les champs incidents aux champs totaux par $\boldsymbol{E}^{scat} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^0$:

$$\boldsymbol{E}^0(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - k_b^2 \int_V \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot [X^E(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')]d\boldsymbol{r}' - j\omega\mu_b \nabla \times \int_V g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')X^H(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' \tag{3.41}$$

$$\boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) - k_b^2 \int_V \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot [X^H(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')]d\boldsymbol{r}' + j\omega\tilde{\epsilon}_b \nabla \times \int_V g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')X^E(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' \tag{3.42}$$

Le rotationnel peut être exprimé par le gradient à partir de l'identité [93] :

$$\nabla \times (\boldsymbol{J}g) = g\nabla \times \boldsymbol{J} - \boldsymbol{J} \times \nabla g \tag{3.43}$$

Puisque $\boldsymbol{J}$ ne dépend que de $\boldsymbol{r}'$, on a :

$$\nabla \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') = 0 \tag{3.44}$$

Et puisque :

$$\nabla g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\nabla' g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \tag{3.45}$$

On peut donc exprimer les équations intégrales précédentes sous la forme :

$$\boldsymbol{E}^0(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - k_b^2 \int_V \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot [X^E(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')] d\boldsymbol{r}' - j\omega\mu_b \nabla \times \int_V g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') X^H(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}') d\boldsymbol{r}' \tag{3.46}$$

$$\boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) - k_b^2 \int_V \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \cdot [X^H(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')] d\boldsymbol{r}' + j\omega\tilde{\epsilon}_b \int_V X^E(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') \times (\nabla' g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') d\boldsymbol{r}' \tag{3.47}$$

On rappelle que les champs incidents $(\boldsymbol{E}^0, \boldsymbol{H}^0)$ représentent les champs causés par les sources dans le milieu de propagation homogène, tandis que les champs totaux $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$ représentent les champs réels dans le domaine d'intérêt. Ces équations sont à la base du modèle EIV mentionné dans le reste de ce texte. Elles sont bien connues et elles sont appliquées dans plusieurs domaines, tant dans le cadre de problèmes inverses en imagerie (par exemple en tomographie micro-ondes) que pour des modèles directs (par exemple en diffusion électromagnétique pour le développement d'antennes).

3.1.2 Équations discrétisées

Les équations intégrales précédentes peuvent être discrétisées par la méthode des moments (MdM), c'est-à-dire en approximant le contraste et les champs par une somme finie de fonctions de bases. Un aspect important de la MdM est le choix de la fonction de base. Les fonctions de base les plus utilisées pour modéliser le problème direct de courants de Foucault sont les RWG (Rao-Wilton-Glisson) ou SWG (Schauert-Wilton-Glisson) [94]. Toutefois, les fonctions SWG sont définies sur une paire d'éléments tétrahédriques et elles requièrent donc une connaissance explicite de l'objet et de ses frontières. Dans le cadre du problème inverse d'imagerie, cette information n'est pas disponible. Il est donc préférable d'utiliser une fonction pulse comme fonction de base et une fonction de Dirac comme fonction poids, une méthode qui est aussi nommée «point matching». Ceci facilite la mise en oeuvre et permet d'utiliser une maille non-conforme [95]. La fonction de base est :

$$f_n(\boldsymbol{r}_t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \boldsymbol{r}_t \in V \\ 0 & \text{si } \boldsymbol{r}_t \notin V \end{cases} \tag{3.48}$$

où V est le domaine d'intégration des équations intégrales dans les équations 3.46 et 3.47. À partir de cette fonction de base, on peut exprimer les contrastes diélectriques et les champs discrétisés par :

$$X^{E,H} = \sum_{n=1}^{N} X_n^{E,H} f_n(\boldsymbol{r}_t) \tag{3.49}$$

$$\boldsymbol{E} = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{E}_n f_n(\boldsymbol{r}_t) \tag{3.50}$$

$$\boldsymbol{H} = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{H}_n f_n(\boldsymbol{r}_t) \tag{3.51}$$

Ceci permet de transformer les équations continues précédentes en une forme discrétisée où le champ évalué en m points est exprimé par la sommation de n points du domaine d'intégration :

$$\boldsymbol{E}^0{}_m(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_m(\boldsymbol{r}) - k_b^2 \Delta V \sum_n X_n^E \boldsymbol{E}_n \int \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')d\nu' - j\omega\mu_b \Delta V \sum_n X_n^H \boldsymbol{H}_n \times \int \nabla' g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')d\nu' \tag{3.52}$$

$$\boldsymbol{H}^0{}_m(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{r}) - k_b^2 \Delta V \sum_n X_n^H \boldsymbol{H}_n \int \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')d\nu' + j\omega\tilde{\epsilon}_b \Delta V \sum_n X_n^E \boldsymbol{E}_n \times \int \nabla' g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')d\nu' \tag{3.53}$$

où ΔV est le volume d'un voxel. En considérant la source de courant comme ponctuelle au centre du voxel, on peut la convoluer avec un delta de Dirac et ainsi l'inclure dans la sommation. On trouve donc à chaque point $m \in V_m$ du domaine :

$$\boldsymbol{E}^0{}_m(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_m(\boldsymbol{r}) - k_b^2 \Delta V \sum_n X_n^E \boldsymbol{E}_n \boldsymbol{G}_{nm} - j\omega\mu_b \Delta V \sum_n X_n^H \boldsymbol{H}_n \times \nabla' g_{nm} \tag{3.54}$$

$$\boldsymbol{H}^0{}_m(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{r}) - k_b^2 \Delta V \sum_n X_n^H \boldsymbol{H}_n \boldsymbol{G}_{nm} + j\omega\tilde{\epsilon}_b \Delta V \sum_n X_n^E \boldsymbol{E}_n \times \nabla' g_{nm} \tag{3.55}$$

où $m = 1, ..., N$. En développant par exemple l'équation précédente pour le champ électrique sous forme matricielle et en posant $a = k_b^2 \Delta V, b = j\omega\mu_b \Delta V, c = j\omega\tilde{\epsilon}_b \Delta V$, on trouve pour chaque composante du champ un système matriciel de forme :

$$\begin{bmatrix} E_1^0 \\ \vdots \\ E_M^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_M \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{N1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{1M} & \cdots & G_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^E & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & X_N^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_N \end{bmatrix}$$
$$- b \begin{bmatrix} X_1^H & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & X_N^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \nabla' g_1 \\ \cdots \\ \nabla' g_N \end{bmatrix} \tag{3.56}$$

où M est le nombre points sur lesquels le champ est évalué et N le nombre de voxels dans le domaine d'intégration. L'équation discrétisée fait intervenir des vecteurs de taille $3N$ et des matrices de taille $3N \times 3M$ pour tenir compte des composantes en x, y et z des champs. Le problème peut être exprimeé de façon plus compacte en posant $\boldsymbol{X}$ la matrice diagonale contenant les valeurs de contraste sur chaque voxel, $\boldsymbol{G}^c$ la matrice pleine contenant les fonctions de Green, $\boldsymbol{G}^R$ l'opérateur de propagation du champ électrique dans le domaine d'intérêt en champ magnétique aux détecteurs représentant $(-\nabla' g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'})\times)$ et les vecteurs de champ total $\boldsymbol{e}$ et incident $\boldsymbol{e}^0$ contenant les composantes en x, y et z du champ en tout point du domaine :

$$\boldsymbol{e}^0 = \boldsymbol{e} - a\boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X}^E\boldsymbol{e} - b\boldsymbol{G}^R\boldsymbol{X}^H\boldsymbol{h} \tag{3.57}$$

$$\boldsymbol{h}^0 = \boldsymbol{h} - a\boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X}^H\boldsymbol{h} + c\boldsymbol{G}^R\boldsymbol{X}^E\boldsymbol{e} \tag{3.58}$$

qu'on peut aussi exprimer exprimer sous forme :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}^0 \\ \boldsymbol{h}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} - a\boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X}^E & -b\boldsymbol{X}^H\boldsymbol{G}^R \\ c\boldsymbol{X}^E\boldsymbol{G}^R & \boldsymbol{I} - a\boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X}^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{h} \end{bmatrix} \tag{3.59}$$

Le cas particulier qui nous intéresse est celui où l'on cherche le champ magnétique en connaissant le champ incident électrique ou magnétique pour des objets avec un contraste électrique non-nul et un contraste magnétique nul. Ceci revient donc à calculer :

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}^0 - c\boldsymbol{G}^R\boldsymbol{X}^E\boldsymbol{e} \tag{3.60}$$

qu'on nomme *équation des données*. $\boldsymbol{e}$ est trouvée à partir de l'*équation d'état* qui est donnée, pour un champ électrique incident $\boldsymbol{e}^0$ ou magnétique incident $\boldsymbol{h}^0$ (c'est-à-dire les champs en absence de contraste), par :

$$\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{I} - a\boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X}^E)^{-1}\boldsymbol{e}^0 \tag{3.61}$$

$$\boldsymbol{e} = (c\boldsymbol{G}^R\boldsymbol{X}^E)^{-1}\boldsymbol{h}^0 \tag{3.62}$$

L'équation d'état et l'équation des données forment ensemble le modèle EIV qui relie le champ incident (électrique ou magnétique) au champ magnétique diffusé aux détecteurs. Par exemple, si le champ électrique incident est connu, on définit cette fonction f_{EIV} par :

$$f_{EIV}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{h}^{scat} = -c\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^R[(\boldsymbol{I} - a\boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{e}^0] \tag{3.63}$$

Une attention particulière doit être apporté à la matrice $\boldsymbol{G}^c$ puisqu'il existe une singularité dans la fonction de Green.

3.1.3 Traitement de la singularité

En discrétisant les équations intégrales volumiques, on s'aperçoit qu'il existe une singularité en $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$ dans la fonction de Green. Différentes approches existent pour aborder ce problème, les principales ont été proposées par van Bladel [96] et Abubakar [97]. La première méthode consiste à appliquer directement les dérivées spatiales sur la fonction de Green puis à traiter l'hypersingularité dans la dérivée, tandis que la seconde méthode consiste à d'abord affaiblir la fonction de Green en utilisant sa moyenne sphérique, puis à calculer numériquement les dérivés par différences finies [98]. La fonction de green scalaire est alors donnée par :

$$g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \begin{cases} \frac{(1-0.5jk_b\Delta x)e^{0.5jk_b\Delta x}-1}{1/6\pi k_b^2\Delta x^3}, \text{si } \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' \\ \frac{e^{ik_bR}}{4\pi R}, \text{si } \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}' \end{cases} \tag{3.64}$$

À cause de sa simplicité de mise en oeuvre et des résultats convaincants de la méthode présentés dans [98], la seconde méthode est choisie, c'est-à-dire que la singularité est traitée dans la fonction scalaire et l'opérateur de différences finies est ensuite appliqué.

3.1.4 Problèmes de l'EIV pour la TIM

On a vu au chapitre 2 que l'EIV est limitée par certains facteurs, par exemple l'effet de peau qui, à haute fréquence, peut concentrer les courants de Foucault à la surface de l'objet et rendre un modèle volumique inadéquat ou la longueur d'onde effective qui peut exiger une discrétisation trop fine pour les limites en mémoire de l'ordinateur. Il a également été présenté que, dans la gamme des fréquences d'intérêt en TIM, ces facteurs ne sont pas limitants. Toutefois, le phénomène de rupture à basse fréquence et aux forts contrastes (*LFHC breakdown* pour «low frequency high contrast») est quant à lui susceptible d'affecter le modèle puisque la TIM biomédicale présente justement ces deux caractéristiques. Les détails du *LFHC breakdown* et des méthodes habituelles pour l'aborder sont présentées ici.

Faibles fréquences

Même si la littérature ne fait pas état de l'application de l'EIV au problème inverse en TIM, l'EIV a souvent été appliquée à la modélisation de la diffusion électromagnétique à basse fréquence. Il est connu que, à très basse fréquence, l'EIV ne peut pas être utilisée à cause de problèmes d'ordre numérique [24, 25]. Il est alors préférable d'utiliser les approximations statiques ou quasi-statiques plutôt que de résoudre l'équation d'onde complète. Toutefois, dans la gamme des fréquences utilisées en TIM, les approximations statiques ou quasi-statiques

ne sont généralement pas valides et l'EIV commence à être aux prises avec des problèmes d'ordre numérique.

Les problèmes numériques qui affligent l'EIV à basse fréquence peuvent entraîner une convergence lente. Il a été montré que cette convergence lente est due au très large espace nul de l'opérateur $\nabla \times \nabla \times$ à basse fréquence [99]. Une autre façon de considérer le phénomène de rupture à basse fréquence de l'EIV présentée dans [23] est de décomposer la densité de courant en sa partie solénoïdale et en sa partie irrotationnelle :

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_{sol} + \boldsymbol{J}_{irr} \tag{3.65}$$

Cette décomposition du courant est aussi nommée une décomposition d'Helmholtz. La partie solénoïdale est celle sans divergence qui produit principalement le champ magnétique à basse fréquence, tandis que la partie irrotationnelle est celle qui produit principalement le champ électrique à basse fréquence. À $\omega \to 0$, on a $|\boldsymbol{J}_{irr}| \ll |\boldsymbol{J}_{sol}|$. Ce phénomène est également observable dans l'opérateur $\mathcal{L}$ de l'EIV :

$$\mathcal{L}\boldsymbol{J} = j\omega\mu \int g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')d\nu' + \frac{1}{j\omega\epsilon}\nabla\nabla \int g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')d\nu' \tag{3.66}$$

En utilisant la notation de potentiel vecteur et potentiel scalaire, on remarque que le premier terme est celui du potentiel vecteur qui représente l'induction générée par le champ magnétique alternatif. Le deuxième terme est celui du potentiel scalaire qui est responsable du champ électrique produit par les charges dans le système. Le premier terme a une dépendance en ω et le deuxième en ω^{-1}, ce qui explique qu'à basse fréquence le premier devienne négligeable devant le deuxième. Toutefois, les deux termes sont physiquement importants et le fait d'en négliger un mène au phénomène de rupture à basse fréquence de l'EIV. De plus, à basse fréquence, les valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{L}$ oscillent entre des valeurs très grandes lorsque $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_{irr}$ et des valeurs très faibles lorsque $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_{sol}$. Ceci explique le mauvais conditionnement de cet opérateur et, conséquemment, la convergence lente des algorithmes itératifs.

Différentes stratégies existent pour aborder ce problème. La stratégie la plus habituelle se base sur le principe de décomposition d'Helmholtz [24]. L'idée est d'utiliser deux ensembles de fonctions de base et d'appliquer une normalisation fréquentielle sur un des ensembles afin d'éliminer le déséquilibre. La base «loop-tree» permet d'accomplir cela. Les éléments de la base loop ($\boldsymbol{J}_L$) sont sans divergence, tandis que les membres de la base tree ($\boldsymbol{J}_C$) sont

irrotationnels. La densité de courant est ainsi exprimée comme une somme des deux bases :

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_L^{\dagger}\boldsymbol{I}_L + \boldsymbol{J}_C^{\dagger}\boldsymbol{I}_C \tag{3.67}$$

où $\boldsymbol{I}_L$ et $\boldsymbol{I}_C$ sont les inconnues qu'on cherche à déterminer. À partir de cette base et de l'EIV, on peut former un système matriciel de forme :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_{LL} & \boldsymbol{Z}_{LC} \\ \boldsymbol{Z}_{CL} & \boldsymbol{Z}_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_L \\ \boldsymbol{I}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_L \\ \boldsymbol{V}_C \end{bmatrix} \tag{3.68}$$

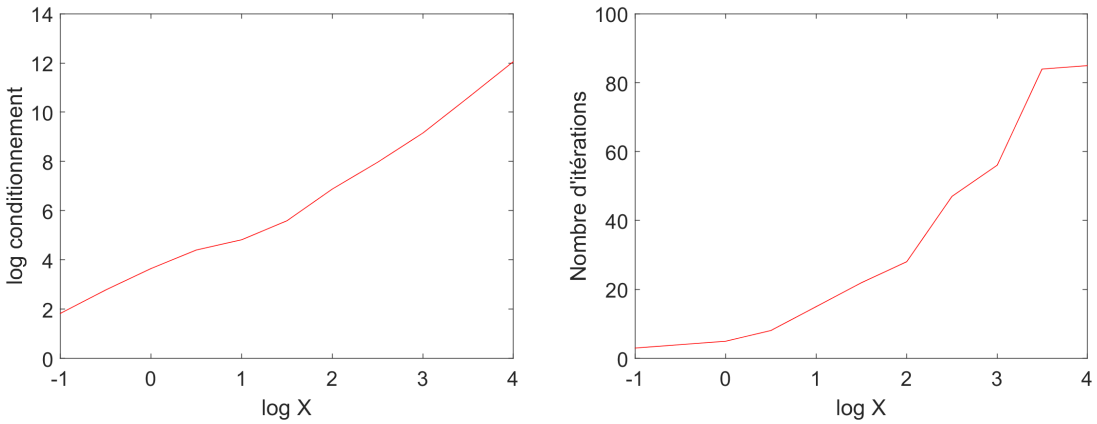
où $\boldsymbol{V}_L =< \boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{E}^0(\boldsymbol{r}) >$ et les matrices $\boldsymbol{Z}_{LC} = i\omega\mu < \boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{r}), g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'), \boldsymbol{J}_L^{\dagger}(\boldsymbol{r}) >$. La dernière étape consiste à appliquer la normalisation fréquentielle au système matriciel :

$$\begin{bmatrix} \omega^{-1}\boldsymbol{Z}_{LL} & \boldsymbol{Z}_{LC} \\ \boldsymbol{Z}_{CL} & \boldsymbol{Z}_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_L \\ \omega^{-1}\boldsymbol{I}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^{-1}\boldsymbol{V}_L \\ \boldsymbol{V}_C \end{bmatrix} \tag{3.69}$$

Cette décomposition d'Helmholtz permet donc d'isoler le facteur d'échelle fréquentiel en différents blocs et une normalisation est appliquée sur ces blocs. Cette formulation a été appliquée aux intégrales surfaciques. Toutefois, l'extension de la méthode à la diffusion électromagnétique de milieux pénétrables n'est pas triviale [100].

Forts contrastes

L'opération la plus coûteuse dans l'évaluation du modèle direct par EIV est l'inversion matricielle dans l'équation d'état qui implique une matrice de grande taille. Pour inverser des matrices de grandes tailles, des méthodes itératives doivent être appliquées. Ces méthodes requièrent de fixer l'estimation de départ et la tolérance sur la précision. Toutefois, les valeurs de contraste des tissus biologiques par rapport à l'air sont très élevées dans la gamme de fréquences de la TIM , ce qui rend la matrice $\boldsymbol{\mathcal{L}} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X})$ mal conditionnée. De plus, puisqu'une hausse de contraste implique une détérioration du conditionnement de l'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, la convergence de l'algorithme BiCGstab est conséquemment plus lente. La figure 3.1a montre l'effet du contraste sur le conditionnement de l'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ tandis que la figure 3.1b montre l'influence du contraste sur le nombre d'itérations nécessaires à l'algorithme BiCGstab pour atteindre une tolérance de 10^{-6}.



(a) Conditionnement (b) Nombre d'itérations

Figure 3.1 Conditionnement de l'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ et nombre d'itérations de l'algorithme BiCG-stab pour atteindre une tolérance de 10^{-6} en fonction du contraste.

Ce problème de forts contraste n'est pas seulement problématique pour l'évaluation du modèle direct, mais aussi si on considère la résolution du problème inverse. Il sera montré au chapitre 4 que la détérioration du conditionnement due à la hausse du contraste implique aussi une convergence plus lente lors de la résolution du problème inverse. On a vu que deux approches peuvent être utilisées pour aborder ce problème : un préconditionnement ou une reformulation des équations. La seconde approche est ici considérée.

3.2 Propagation dans un milieu inhomogène

Une méthode pour améliorer le conditionnement de l'opérateur de diffusion qui permet de calculer le champ total dans le domaine d'intérêt est d'effectuer un changement de variables. Puisqu'en imagerie biomédicale, on cherche à imager une perturbation dans un tissu sain dont les propriétés diélectriques sont connues, ce fond peut être inclus dans le milieu de propagation. La nouvelle inconnue à reconstruire devient ainsi le contraste $\boldsymbol{X}_2$ par rapport à ce fond inhomogène incluant le tissu sain. Il sera montré plus loin que l'amélioration au conditionnement permet d'améliorer à la fois la convergence du modèle direct et du problème inverse. Pour effectuer ce changement de variables, deux modèles basées sur l'EIV sont considérées : les modèles ELOG et GI.

3.2.1 Modèle ELOG

Une première manière d'effectuer ce changement de variables est de se baser sur le principe de décomposition de domaine par encastrement linéaire via l'opérateur de Green (ELOG). Le principe de décomposer un domaine en plusieurs sous-domaines interagissant entre eux par un système multiport est nommé «diakoptique» [101]. Dans le cadre de la TIM, l'idée est de diviser le problème de diffusion en deux sous-problèmes : le premier décrivant l'interaction forte entre l'air et le fond diélectrique connu et le second l'interaction faible entre la perturbation dans le milieu et le fond diélectrique connu, tel que représenté à la figure 3.2. Dans le cadre de la résolution du problème inverse, la partie qui requiert le calcul de l'interaction forte entre l'air et le tissu sain n'a qu'à être calculée une fois et la matrice de diffusion peut être stockée. La partie qui décrit l'interaction faible de la perturbation avec le tissu sain doit être recalculée à chaque itération. Toutefois, grâce au changement de variables, le conditionnement de la nouvelle matrice de diffusion est nettement amélioré et la convergence est beaucoup plus rapide. Le développement du modèle ELOG à partir d'équations intégrales surfaciques est présenté dans [101]. Un développement analogue pour les équations intégrales volumiques est présenté ici.

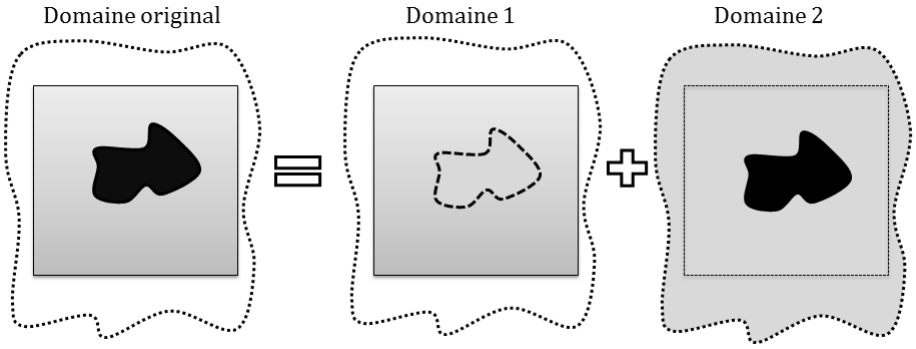


Figure 3.2 Décomposition du domaine pour le modèle ELOG.

Le modèle ELOG se base également sur le principe des volumes équivalents. Le champ magnétique diffusé aux détecteurs est ainsi considéré comme la somme du champ diffusé par le tissu sain et du champ diffusé par la perturbation qu'on cherche à détecter. Toutefois, puisque le champ diffusé par l'un des domaines contribue au champ incident de l'autre domaine, les deux problèmes de diffusion ne sont pas indépendants. Leur interdépendance peut être décrite en utilisant la théorie des ports [57]. Cette stratégie a déjà été appliquée à des modèles basés sur les intégrales surfaciques [56, 57, 102]. Le modèle ELOG a aussi déjà été dérivé pour une combinaison d'intégrales surfaciques et volumiques [101], mais ne semble

jamais avoir été appliqué à un modèle basé uniquement sur l'EIV.

L'objectif est de développer un opérateur de diffusion $\boldsymbol{J}$ qui relie les champs incidents aux champs totaux dans chaque sous-domaine. On note V_1 le sous-domaine représentant le milieu de propagation inhomogène qui inclut le tissu biologique sain dans l'air et V_2 le domaine d'intérêt qui inclut la perturbation qu'on souhaite détecter.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 \\ \boldsymbol{J}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{11} & \boldsymbol{J}_{12} \\ \boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{J}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^0 \\ \boldsymbol{e}_2^0 \end{bmatrix} \tag{3.70}$$

En considérant par exemple un champ incident au domaine V_1, il existe deux contributions au champ incident : celui provenant de la source et celui provenant de la diffusion du domaine V_2. Cette boucle de rétroaction des champs diffusés est représentée à la figure 3.3.

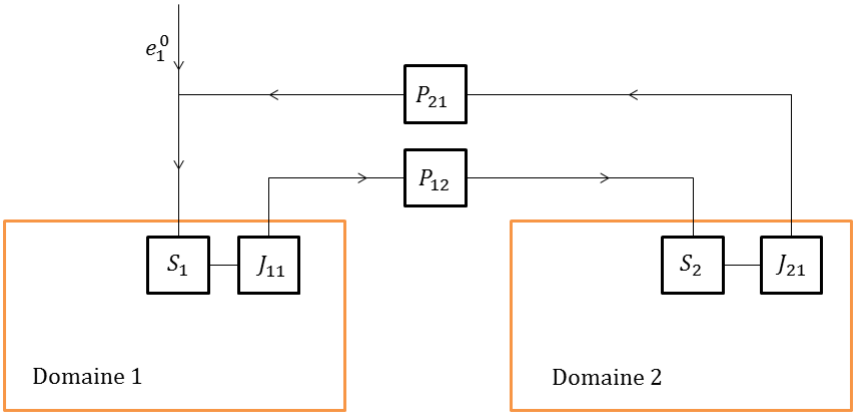


Figure 3.3 Relation entre les opérateurs du modèle ELOG pour un champ incident au domaine V_1.

$\boldsymbol{P}_{ij}$ est l'opérateur de propagation qui relie la densité de courant dans le domaine i au champ incident dans le domaine j et $\boldsymbol{S}_i$ l'opérateur de diffusion qui relie le champ incident à la densité de courant totale dans le domaine i. De façon analogue, la relation entre chaque opérateur peut être définie pour un champ incident le domaine V_2. Les opérateurs de propagation et de diffusion sont définis par :

$$\boldsymbol{P}_{ij} = \boldsymbol{G}_{ij}^c \tag{3.71}$$

$$\boldsymbol{S}_i = \boldsymbol{X}_i(\boldsymbol{I}_i - \boldsymbol{G}_{ii}\boldsymbol{X}_i)^{-1} \tag{3.72}$$

À partir de la figure 3.3, la relation entre les composantes de $\boldsymbol{J}$ peut être exprimée :

$$\boldsymbol{J}_{11} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{J}_{21} \tag{3.73}$$

$$\boldsymbol{J}_{21} = \boldsymbol{S}_2 \boldsymbol{P}_{12} \boldsymbol{J}_{11} \tag{3.74}$$

Par le principe de réciprocité, $\boldsymbol{J}_{22}$ et $\boldsymbol{J}_{21}$ sont déterminés de façon analogue. La matrice totale $\boldsymbol{J}$ est donc donnée par :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{11} & \boldsymbol{J}_{12} \\ \boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{J}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_1 \boldsymbol{P}_{21} \boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{S}_1 \boldsymbol{P}_{21} \boldsymbol{J}_{22} \\ \boldsymbol{S}_2 \boldsymbol{P}_{12} \boldsymbol{J}_{11} & \boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{S}_2 \boldsymbol{P}_{12} \boldsymbol{J}_{12} \end{bmatrix} \tag{3.75}$$

En définissant l'opérateur de réflexion $\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{P}_{ji} \boldsymbol{S}_j \boldsymbol{P}_{ij}$ et en isolant $\boldsymbol{J}$, on trouve :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{11} & \boldsymbol{J}_{12} \\ \boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{J}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{S}_1 \boldsymbol{R}_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{S}_2 \boldsymbol{R}_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_1 & \boldsymbol{S}_1 \boldsymbol{P}_{21} \boldsymbol{S}_2 \\ \boldsymbol{S}_2 \boldsymbol{P}_{12} \boldsymbol{S}_1 & \boldsymbol{S}_2 \end{bmatrix} \tag{3.76}$$

On peut ainsi trouver les champs totaux sur chaque domaine et calculer le champ diffusé aux détecteurs en appliquant l'opérateur $\boldsymbol{G}^R$ sur les densités de courants dans chaque domaine, ce qui mène à un modèle direct qui dépend uniquement de $\boldsymbol{X}_2$:

$$f_{ELOG}(\boldsymbol{X}_2) = \boldsymbol{G}^R{}_1 \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{G}^R{}_2 \boldsymbol{J}_2 \tag{3.77}$$

où $\boldsymbol{J}_1$ et $\boldsymbol{J}_2$ sont donnés à l'équation 3.70. La discrétisation des équations continues peut être faite par MdM, de la même façon que pour le modèle EIV.

3.2.2 Modèle GI

Le modèle ELOG permet de faire un changement de variables et ainsi d'améliorer le conditionnement des systèmes matriciels qui doivent être résolus à chaque itération du problème inverse. Toutefois, le modèle ELOG implique la résolution de plusieurs systèmes matriciels et il implique donc un coût de calcul très élevé. Une autre approche, basée sur la théorie des fonctions de Green, permet d'atteindre le même objectif mais tout en limitant le coût de calcul nécessaire. Elle consiste à considérer le fond comme inhomogène, comprenant à la fois le milieu de propagation initial et le milieu diélectrique connu. Une fonction de propagation inhomogène peut être calculée pour ce milieu inhomogène. Une solution analytique de la fonction de Green inhomogène (GI) est disponible pour certaines géométries simples, par exemple pour des sphères multicouches [103, 104] et pour des cylindres [105]. Par contre, pour des formes plus complexes telles que celle des tissus biologiques, des méthodes numériques sont nécessaires afin d'obtenir une solution approximative [33]. Le modèle GI a déjà été appliqué à la tomographie micro-ondes [60, 106]. Il est à noter que le calcul des fonctions de Green inhomogènes est étroitement lié à la méthode de Born distordue pour laquelle les champs totaux et les fonctions de Greens inhomogènes sont obtenues à partir de linéarisation

successive du champ total et des fonctions de Green homogènes [107].

Comme pour le modèle ELOG, on sépare le domaine en un domaine incluant le tissu sain V_1 et un domaine inconnu V_2 qui contient la perturbation qu'on souhaite détecter. Le contraste total peut donc être vu comme une combinaison des contrastes $\boldsymbol{X}_1$ et $\boldsymbol{X}_2$ où $X_1 = \tilde{\sigma}_1/\tilde{\sigma}_{air} - 1$ et $X_2 = \tilde{\sigma}_2/\tilde{\sigma}_1 - 1$. À partir le principe de superposition, le champ total peut être considéré comme la somme du champ diffusé par les milieux V_1 et V_2 :

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}^0 + k_b^2 \int_{V_1} \boldsymbol{G}_{11}^{ho}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') X_1(\boldsymbol{r}') \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') d\boldsymbol{r}' + k_b^2 \int_{V_2} \boldsymbol{G}^{in}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') X_2(\boldsymbol{r}') \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') d\boldsymbol{r}' \tag{3.78}$$

Puisque le domaine V_1 est connu, on pose le champ total dû a la diffusion dans ce domaine par $\boldsymbol{E}_1$:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}) + k_b^2 \int_{V_2} \boldsymbol{G}^{in}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') X_2(\boldsymbol{r}') \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') d\nu' \tag{3.79}$$

Cette dernière équation permet de trouver le champ total dans le domaine 1. La matrice $\boldsymbol{G}^{in}$ représente la propagation dans le milieu inhomogène (le domaine 1). Cette matrice est donnée par [92] :

$$\boldsymbol{G}^{in}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \boldsymbol{G}_{12}^{ho}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') + k_b^2 \int_{V_1} X_1(\boldsymbol{r}'') \boldsymbol{G}^{in}(\boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}') \boldsymbol{G}_{11}^{ho}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'') d\nu'' \tag{3.80}$$

Après une discrétisation par MdM avec des deltas de Dirac comme fonctions de base, on obtient le modèle GI :

$$f_{GI}(\boldsymbol{X}_2) = \boldsymbol{G}^R \boldsymbol{X}_1 (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{G}^{in} \boldsymbol{X}_2 \boldsymbol{e}_2) \tag{3.81}$$

où les champs $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ et la matrice de Green inhomogène sont donnés par :

$$\boldsymbol{e}_1 = (\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{G}_{11}^{ho} \boldsymbol{X}_1)^{-1} \boldsymbol{e}_0 \tag{3.82}$$

$$\boldsymbol{e}_2 = (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{G}_{22}^{ho} \boldsymbol{X}_2)^{-1} \boldsymbol{e}_{1|2} \tag{3.83}$$

$$\boldsymbol{G}^{in} = (\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{G}_{11}^{ho} \boldsymbol{X}_1)^{-1} \boldsymbol{G}_{12}^{ho} \tag{3.84}$$

Ces quatre dernières équations forment ensemble le modèle GI. On note que trois systèmes matriciels doivent être résolus plutôt qu'un seul pour le modèle EIV, le coût de calcul du modèle direct est donc plus élevé. Toutefois, il faut remarquer que les systèmes matriciels permettant de déterminer $\boldsymbol{G}^{in}$ et $\boldsymbol{e}_1$ dépendent uniquement des propriétés du fond inhomogène. Dans le cadre de la résolution du problème inverse, seulement que $\boldsymbol{e}_2$ devra être réévalué à chaque itération, tandis que les autres ne devront être évalué qu'une fois et la matrice résultante pourra être enregistrée.

3.2.3 Conclusion

À partir du problème de conditionnement dans le modèle EIV démontré précédemment, deux modèles alternatifs ont été détaillés ici, les modèles ELOG et GI. Les trois modèles directs qui seront étudiés sont donc :

$$f_{EIV}(\boldsymbol{X}) = -c\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^R[(\boldsymbol{I} - a\boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{e}^0] \tag{3.85}$$

$$f_{ELOG}(\boldsymbol{X}_2) = \boldsymbol{G}^R{}_1\boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{G}^R{}_2\boldsymbol{J}_2 \tag{3.86}$$

$$f_{GI}(\boldsymbol{X}_2) = \boldsymbol{G}^R\boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{G}^{in}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{e}_2) \tag{3.87}$$

On voit que l'inconnue du modèle EIV est le contraste $\boldsymbol{X}$ qui est défini par rapport à l'air, tandis que pour les modèles ELOG et GI, il s'agit du contraste $\boldsymbol{X}_2$ qui est défini par rapport au milieu de propagation inhomogène incluant le tissu sain. Ceci permet d'améliorer le conditionnement des systèmes matriciels qui doivent être résolus à chaque itération du problème inverse. On souhaite maintenant décrire plus clairement l'effet de ces reformulations sur la résolution du problème inverse de reconstruction d'images en TIM biomédicale.

3.3 Problème inverse

Il a été montré au chapitre 2 que le problème inverse peut être vu comme un problème d'optimisation pour lequel on cherche à minimiser l'inadéquation entre les mesures de champ magnétique aux détecteurs et l'évaluation du champ magnétique diffusé pour une certaine estimation du contraste à partir du modèle direct. Les trois principaux aspects relatifs à la résolution du problème inverse ont été introduits : le critère, la régularisation et l'algorithme de minimisation. Pour chacun, différentes options sont possibles, mais certaines sont plus appropriées que d'autres dans le cadre de la TIM biomédicale. Il est à noter que ces trois aspects sont interconnectés et que le choix de ces éléments doit être fait de manière cohérente. À titre d'exemple, les critères bilinéaires mènent généralement à des méthodes de type d'inversion de sources et jumelées à une régularisation multiplicative, tandis qu'un critère non-linéaire est généralement associé à d'autres algorithmes de reconstruction et fonctions de régularisation.

3.3.1 Critère

Les critères bilinéaire et non-linéaire ont été appliqués efficacement au problème inverse de tomographie. Le critère non-linéaire a l'avantage de résoudre un nombre d'inconnues beaucoup plus faible puisque, avec cette formulation, les seules inconnues sont les valeurs de contraste

sur chaque voxel. Le principal inconvénient du critère non-linaire est que le coût de calcul de chaque itération du problème inverse requiert la résolution explicite du modèle direct, et donc l'inversion de la matrice $\boldsymbol{\mathcal{L}}$. Le critère bilinéaire consiste à relâcher la contrainte d'égalité sur les champs totaux dans le domaine. Ceci permet de ne pas avoir à évaluer le modèle direct à chaque itération, mais le nombre d'inconnues est considérablement plus élevé. En effet, en plus des valeurs de contraste à chaque voxel, les trois composantes du champ électrique total à chaque voxel doivent être déterminées. Pour un domaine discrétisé en n voxels avec N_s champs incidents, la formulation non-linéaire a donc n inconnues à résoudre, tandis que la formulation bilinéaire en a $(N_s + 1) \times n$.

À cause de ces caractéristiques, la formulation bilinéaire est fréquemment employée en tomographie 2D puisque le nombre d'inconnues est moins élevé qu'en 3D, ce qui permet de converger en un nombre raisonnable d'itérations [108]. Le critère bilinéaire mène par exemple aux méthodes du gradient modifié (MGM) et l'inversion de source de contraste (CSI). Toutefois, puisque l'application envisagée ici est la tomographie 3D de tissus biologiques, le nombre d'inconnues à résoudre est très élevé si on souhaite obtenir une résolution spatiale acceptable. Le critère non-linéaire est donc le plus adapté.

3.3.2 Régularisation

Type de régularisation

La régularisation peut prendre la forme d'un terme additif ou d'un terme multiplicatif à la fonction objectif à minimiser. La régularisation multiplicative s'applique efficacement aux objets diélectriques avec un contraste relativement faible [109]. Toutefois, il a été montré que ce type de régularisation n'est pas efficace pour des objets fortement contrastés [110]. Puisqu'en TIM biomédicale, les propriétés diélectriques des tissus sont très élevées, une régularisation additive est préférable.

Fonction de régularisation

Cinq fonctions de régularisation usuelles ont été présentées au chapitre 2 : $Tikh$, GM, HL, HS et hyp. La régularisation de Tikhonov n'est pas idéale pour inclure l'information *a priori* des tissus biologiques puisqu'elle pénalise fortement les grandes variations de contraste, ce qui a pour effet de lisser l'image. Les fonctions de préservation de bords sont mieux adaptées. Un aspect important du choix de fonction de régularisation est la convexité. Il est préférable d'utiliser des fonctions convexes car, lorsque le terme d'inadéquation aux données est aussi convexe, elles permettent d'assurer l'unicité du minimum. À cause de sa propriété de préser-

vation de contours, de sa convexité et de son meilleur contrôle sur la reconstruction grâce à l'hyperparamètre δ, la fonction *hyp* est retenue.

La détermination des paramètres de régularisation λ et δ est un problème complexe à résoudre. L'approche la plus habituelle est de les déterminer empiriquement [64]. Il est à noter qu'il existe également des approches automatiques, par exemple la méthode de validation croisée [111], mais ces méthodes sont hors du cadre de ce travail.

3.3.3 Choix de l'algorithme

Il existe deux catégories de méthodes pour résoudre le problème de minimisation posé par la reconstruction d'images en TIM : les méthode stochastiques et déterministes. Les méthodes déterministes sont préférables dans le cas de la TIM à cause de leur coût de calcul plus faible, leur vitesse relative plus élevée et leur contrôle plus simple de la convergence. Différents types de méthodes déterministes ont été présentés au chapitre 2. Les méthodes du gradient ne sont pas adéquates pour un critère avec une forme d'ellipse allongée. Or, comme il sera présenté au chapitre 4, le domaine d'intérêt peut justement présenter de grandes variations de sensibilité. Ceci est dû à l'effet de peau qui tend à concentrer les courants de Foucault à la surface de l'objet. Les voxels en périphérie seront beaucoup plus sensibles que ceux dans la région centrale de l'objet. De plus, puisqu'on travaille avec un domaine 3D de grande taille, un très grand nombre d'inconnues est nécessaire afin d'obtenir une résolution adéquate. Ceci rend la méthode de Newton inapplicable puisque le coût de calcul nécessaire à former exactement la matrice Hessienne et à calculer son inverse est trop élevé. Une méthode de type quasi-Newton est donc choisie puisqu'elle permet d'approximer la matrice Hessienne à partir du calcul du gradient plutôt que de l'évaluer directement. Ceci permet d'aborder à la fois le problème de grande variation de sensibilité dans le domaine d'intérêt ainsi que le coût de calcul prohibitif lié à l'inversion du Hessien. Un autre avantage de la méthode est qu'elle n'est pas aussi sensible dans la recherche de ligne que la méthode de Newton [112]. Le choix final de l'algorithme est le L-BFGS, qui est une des méthodes de type quasi-Newton les plus couramment utilisées. L'algorithme BFGS a démontré une excellente performance pour l'optimisation de fonctions non lisses et la version L-BFGS (pour *limited-memory BFGS*) permet de considérablement réduire l'espace mémoire nécessaire [77], ce qui est particulièrement intéressant dans le cadre du problème considéré.

3.3.4 Calcul du gradient

Gradient de la fonction objectif

L'algorithme L-BFGS requiert le calcul gradient de la fonction objectif afin d'approximer l'inverse du Hessien et ainsi déterminer la direction de descente. La fonction objectif est une fonction complexe multivariables. Le concept de dérivé de Fréchet doit alors être utilisé pour calculer le gradient. Une approche standard pour calculer la dérivé de Fréchet est de considérer une faible perturbation à la fonction objectif et d'utiliser un développement au premier ordre [61]. En effet, à partir du théorème de Taylor, on a :

$$f(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\delta_X}) = f(\boldsymbol{X}) + \nabla f(\boldsymbol{X})\boldsymbol{\delta_X} + \mathcal{O}(|\boldsymbol{\delta_X}|^2) \tag{3.88}$$

À partir de cette équation, le gradient peut être calculé mathématique par un développement de premier ordre. Puisqu'on considère un critère des moindres carrés, le gradient de la fonction objectif est de forme :

$$\nabla_{\boldsymbol{X}} F = -\sum_{i}^{N_s} \boldsymbol{J}_i^{\dagger}(\boldsymbol{y}_i - f_i(\boldsymbol{X})) \tag{3.89}$$

Le développement du Jacobien pour les modèles directs EIV, ELOG et GI est présenté en annexe. Pour une source, le Jacobien du modèle EIV est donné par :

$$\boldsymbol{J}_{EIV}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{G}^R(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X})^{-T}\,\mathbf{diag}\,\{\boldsymbol{e}\} \tag{3.90}$$

La modèle ELOG mène quant à elle au Jacobien suivant :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}_{ELOG}(\boldsymbol{X}_2) = \boldsymbol{m}_1(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{G}^c_{22} + \boldsymbol{I}_2)\,\mathbf{diag}\left\{\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{P}_{12}(\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{P}_{12})^{-1}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{e}_1^0\right\} - \\ \boldsymbol{m}_1\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{G}^c_{22})\,\mathbf{diag}\left\{\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{e}_2^0 + \boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{e}_2^0\right\} + \\ \boldsymbol{m}_2(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{G}^c_{22})\,\mathbf{diag}\left\{(\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{m}_2\boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{L}_2^{-1})\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{e}_1^0\right\} + \\ \boldsymbol{m}_2(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{G}^c_{22})\,\mathbf{diag}\left\{\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{m}_2\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{e}_2^0 + \boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{e}_2^0\right\}\end{aligned} \tag{3.91}$$

Pour le modèle GI, le Jacobien est :

$$\boldsymbol{J}_{GI}(\boldsymbol{X}_2) = \boldsymbol{G}^R\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{G}^{in}_{12}(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{G}^c_{22})\,\mathbf{diag}\left\{\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{e}_{12}\right\} \tag{3.92}$$

Les gradients des fonctions de régularisation peuvent être calculés de la même façon que celui de la fonction objectif, c'est-à-dire en utilisant le concept de dérivée de Fréchet [69]. Les dérivés des fonctions de régularisation sont données à la table 2.1.

3.3.5 Choix du préconditionneur

Rappelons que le problème abordé par ce projet est le coût de calcul élevé pour la reconstruction d'images en TIM. Le coût de calcul dépend de deux facteurs : premièrement du temps de calcul d'une évaluation du modèle direct et du gradient et, deuxièmement, du nombre d'itérations nécessaires à la résolution du problème inverse. Le but du préconditionneur est ici d'améliorer la convergence du problème inverse. Puisque toutes les informations relatives à la formation des matrices impliquées (les équations continues, les conditions frontières, le domaine d'intégration...) sont connues, il est préférable d'utiliser un préconditionneur spécifique plutôt qu'un algébrique. Dans cette section, le Hessien de la fonction objectif sera d'abord analysé afin de justifier l'intérêt d'utiliser un préconditionneur. Puis, il sera montré qu'une approximation de bas rang n'est pas applicable au problème afin de d'obtenir rapidement une approximation du Hessien. Finalement, la théorie de la matrice d'information de Fisher sera présentée puisqu'elle semble être la solution la plus adéquate au problème considéré.

Hessien de la fonction objectif

Le problème de reconstruction d'images en TIM a été formulé sous la forme d'un problème d'optimisation. Le critère à minimiser est celui des moindres carrés, pour lequel on cherche à minimiser l'inadéquation aux données, représentée par le vecteur $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{X})$, tandis que la fonction de régularsation est représentée par $R(\boldsymbol{X})$. L'étendue spectrale du Hessien est liée à la vitesse de convergence. Une stratégie de préconditionnement efficace vise donc à en réduire l'étendue spectrale [113]. Afin de vérifier que le Hessien de la fonction objectif ne présente pas de structure exploitable, il convient d'en faire le développement. La fonction objectif qu'on cherche à minimiser est celle des moindres carrés :

$$f(\boldsymbol{X}) = 0.5 \sum_{i}^{N_s} \sum_{j}^{N_d} r_{ij}^2(\boldsymbol{X}) \tag{3.93}$$

où r_{ij} est le résidu (l'inadéquation aux données) pour la source i et le détecteur j. Pour une source i, on peut former un vecteur contenant les résidus à chaque détecteur :

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{X}) = (r_1(\boldsymbol{X}), r_2(\boldsymbol{X}), ..., r_{N_d(\boldsymbol{X})})^\intercal \tag{3.94}$$

La fonction objectif peut ainsi être réécrite sous la forme $F(\boldsymbol{X}) = 0.5 \sum_i^{N_s} |\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{X})|_2^2$. Le Jacobien est la matrice de tous les $\nabla r_j(\boldsymbol{X})$:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} \nabla r_1(\boldsymbol{X})^\intercal \\ \nabla r_2(\boldsymbol{X})^\intercal \\ \vdots \\ \nabla r_{N_d}(\boldsymbol{X})^\intercal \end{bmatrix} \tag{3.95}$$

On peut ainsi exprimer le gradient et le Hessien de la fonction objectif à partir du Jacobien :

$$\nabla F(\boldsymbol{X}) = \sum_i^{N_s} \sum_j^{N_d} r_{ij}(\boldsymbol{X}) \nabla r_{ij}(\boldsymbol{X}) = \sum_i^{N_s} \boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{X})^\intercal \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{X}) \tag{3.96}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 F(\boldsymbol{X}) &= \sum_i^{N_s} \sum_j^{N_d} \nabla r_{ij}(\boldsymbol{X}) \nabla r_{ij}(\boldsymbol{X})^\intercal + \sum_i^{N_s} \sum_j^{N_d} r_{ij}(\boldsymbol{X}) \nabla^2 r_{ij}(\boldsymbol{X}) \\ &= \sum_i^{N_s} \boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{X})^\intercal \boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{X}) + \sum_i^{N_s} \sum_j^{N_d} r_{ij}(\boldsymbol{X}) \nabla^2 r_{ij}(\boldsymbol{X}) \end{aligned} \tag{3.97}$$

Rappelons que le Jacobien peut être approximé par un développement de premier ordre :

$$\boldsymbol{J} \approx \frac{F(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\delta}) - F(\boldsymbol{X})}{\boldsymbol{\delta}} \tag{3.98}$$

Par exemple pour le modèle EIV, en appliquant le Lemme d'inversion matricielle et en négligeant les termes d'ordres supérieurs, on a :

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{X}) \approx \boldsymbol{G}^R (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{G}) \operatorname{\mathbf{diag}} \{\boldsymbol{e}\} \tag{3.99}$$

où la transposée peut être simplifiée par :

$$\boldsymbol{J}^\intercal(\boldsymbol{X}) \approx \operatorname{\mathbf{diag}} \{\boldsymbol{e}\} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{G}^{R\intercal} \tag{3.100}$$

La principale difficulté est maintenant de calculer le terme $\nabla^2 r_j$. Le développement est donné en annexe et ce terme est définit par :

$$\nabla^2 r_j(\boldsymbol{X}) = \operatorname{\mathbf{diag}} \{\boldsymbol{e}\} \boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1} \boldsymbol{G} \operatorname{\mathbf{diag}} \left\{ \boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1} \boldsymbol{G}_j^{R\intercal} \right\} + \boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1} \boldsymbol{G} \operatorname{\mathbf{diag}} \{\boldsymbol{e}\} \boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1} \boldsymbol{G} \operatorname{\mathbf{diag}} \left\{ \boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1} \boldsymbol{G}_j^{R\intercal} \right\} \tag{3.101}$$

Ceci permet d'obtenir le Hessien de la fonction objectif à partir de :

$$\nabla^2 F(\boldsymbol{X}) \approx \boldsymbol{J}(\boldsymbol{X})^\intercal \boldsymbol{J}(\boldsymbol{X}) + \sum_j^{N_d} r_j(\boldsymbol{X}) \nabla^2 r_j(\boldsymbol{X}) \tag{3.102}$$

On doit également inclure le Hessien de la fonction de régularisation dans le calcul du Hessien de la fonction objectif. La fonction de régularisation est une fonction scalaire donnée par :

$$R(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} R_i(\boldsymbol{X}) \tag{3.103}$$

Son gradient est donc sous la forme :

$$R'(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \frac{\partial R_i}{\partial X_1} \\ \frac{\partial R_i}{\partial X_2} \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{3.104}$$

Son Hessien est de forme :

$$R''(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 R_i}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 R_i}{\partial X_1 \partial X_2} & \cdots \\ \frac{\partial^2 R_i}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 R_i}{\partial X_2^2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{3.105}$$

Les éléments de la fonction de régularisation sont donnés par :

$$R_i(\boldsymbol{X}) = \sqrt{\delta^2 + u_i^2} \tag{3.106}$$

avec :

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{X} \tag{3.107}$$

où $\boldsymbol{D}$ est la matrice des différences premières. Pour obtenir le gradient, considérons par exemple la dérivé de la fonction de régularisation par rapport à X_2, qui représente le contraste diélectrique sur le deuxième voxel du domaine. Dans la fonction de régularisation, deux termes dépendent de X_2 : $R_2 = \sqrt{\delta^2 + (X_2 - X_1)^2}$ et $R_3 = \sqrt{\delta^2 + (X_3 - X_2)^2}$. Les dérivées sont données par :

$$\frac{\partial R_2}{\partial X_2} = \frac{u_2}{\sqrt{\delta^2 + u_2^2}} \tag{3.108}$$

$$\frac{\partial R_3}{\partial X_2} = \frac{-u_3}{\sqrt{\delta^2 + u_3^2}} \tag{3.109}$$

En faisant un développement analogue pour les autres voxels du domaine, on trouve :

$$\nabla R(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 - J_2 \\ J_3 - J_2 \\ J_4 - J_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \boldsymbol{DJ} \tag{3.110}$$

où $J_i = u_i/\sqrt{\delta^2 + u_i^2}$. Pour le calcul du Hessien, trois termes du gradient dépendent de X_2, soit R_1', R_2' et R_3'. Ces trois termes dépendent de J_2 et J_3 dont les dérivées sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2}{\partial X_2} &= \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + (X_2 - X_1)^2}} - \frac{(X_2 - X_1)(2X_2 - 2X_1)}{2(\delta^2 + (X_2 - X_1)^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + u_2^2}} - \frac{u_2^2}{(\delta^2 + u_2^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\delta^2}{(\delta^2 + u_2^2)^{3/2}} \end{aligned} \tag{3.111}$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial X_2} = -\frac{\delta^2}{(\delta^2 + u_3^2)^{3/2}} \tag{3.112}$$

La colonne de dérivée par rapport à X_2 du Hessien est donc :

$$\frac{\partial^2 R}{\partial X_2^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial J_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial J_2}{\partial X_2} \\ \frac{\partial J_3}{\partial X_2} \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial J_2}{\partial X_2} \\ \frac{\partial J_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial J_4}{\partial X_2} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ H_2 \\ -H_3 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_2 \\ -H_3 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{3.113}$$

où $H_i = \delta^2/(\delta^2 + u_i)^{3/2}$. En développant de façon analogue les autres dérivées, on trouve que la matrice Hessienne est de forme :

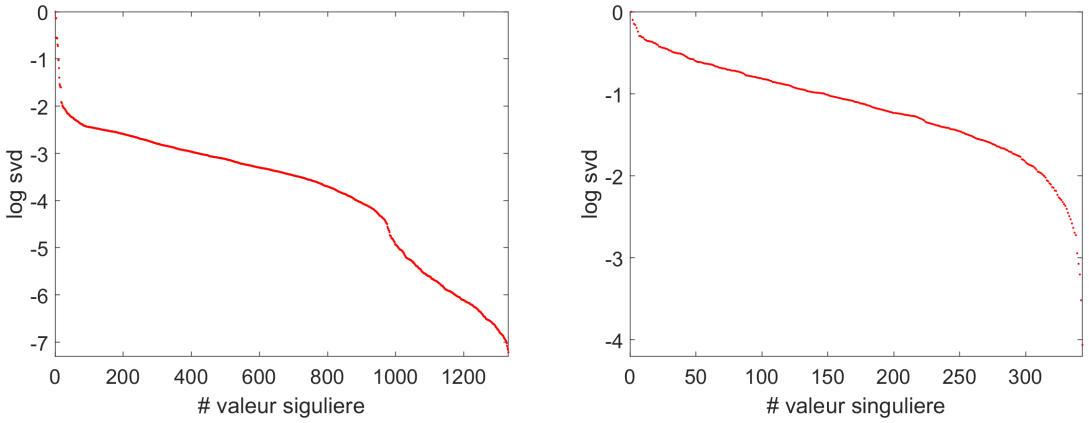
$$R'' = \begin{bmatrix} H_1 + H_2 & -H_2 & 0 & \cdots \\ -H_2 & H_2 + H_3 & -H_3 & \cdots \\ 0 & -H_3 & H_3 + H_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{3.114}$$

Elle peut être exprimée de manière plus compacte par :

$$\nabla^2 R = \boldsymbol{D}\,\mathbf{diag}\,\{\boldsymbol{h}\} + \boldsymbol{D}^\intercal\,\mathbf{diag}\,\{\boldsymbol{h}_d\} \tag{3.115}$$

où $\boldsymbol{h}_d$ est le vecteur $\boldsymbol{h}$ décalé d'une position. La matrice de Green a une structure bloc Toeplitz (la structure des blocs est Toeplitz et l'intérieur de ceux-ci l'est également). Quoique l'inverse d'une matrice circulante soit aussi circulante, l'inverse d'une matrice Toeplitz ne l'est pas. Le Hessien n'a donc aucune structure qui peut être exploitée pour préconditionner le problème, les mêmes méthodes qu'en tomographie par émission de positrons ou par rayons X, qui exploitent la structure des matrices, ne sont donc pas applicables.

Le Hessien de la fonction objectif à partir du modèle GI est obtenu de façon analogue. Son développement y est fait en annexe. Il est maintenant possible de former les matrices Hessiennes à partir des modèles EIV et GI afin de comparer le spectre des valeurs propres du Hessien à partir de chacun des modèles. La figure 3.4 montre le spectre des valeurs singulières du Hessien à partir du modèle EIV et du modèle GI. L'objet utilisé est le même que l'objet B décrit au chapitre 4, mais avec une discrétisation deux fois moins fine (la résolution est de 2 cm), ce qui permet de réduire le coût de calcul et de mémoire nécessaire à former explicitement la matrice Hessienne. On remarque que, outre la réduction du nombre d'inconnues du modèle GI (réflété par le plus petit nombre de valeurs singulières), le modèle GI permet également de réduire l'étendue spectrale de plus de trois ordres de grandeur. Ceci se réflète dans l'amélioration à la convergence du problème inverse et donne une justification additionnelle de l'intérêt de la méthode proposée.



(a) EIV (b) GI

Figure 3.4 Valeurs singulières du Hessien pour les modèles EIV et GI à l'initialisation.

On voit que le modèle GI réduit l'étendue spectrale du Hessien, mais que celle-ci est tout de même très large. Ceci démontre le mauvais conditionnement du problème et l'intérêt d'utiliser un préconditionneur afin de réduire l'étendue spectrale du Hessien. Il a également

été observé que la convergence du problème inverse est très lente, ce qui peut sérieusement limiter l'application de la méthode à des problèmes réalistes de grande taille. Il serait donc particulièrement pertinent de préconditionner le problème afin d'obtenir une convergence plus rapide.

Approximation de bas rang

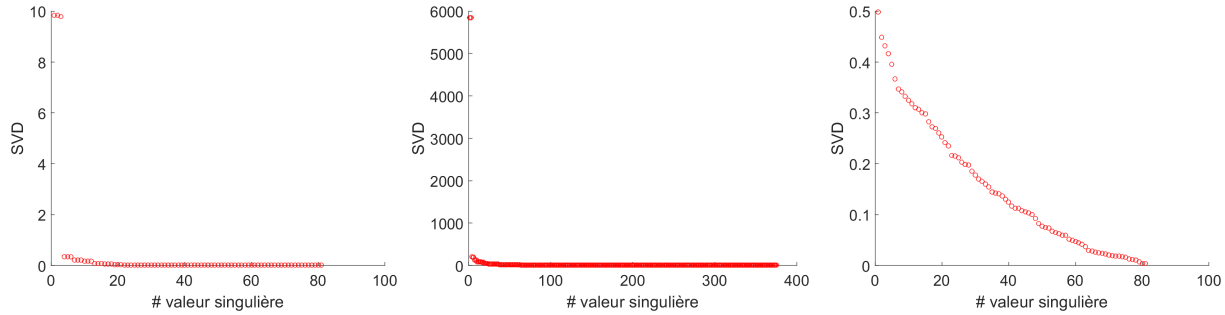
La principale difficulté dans le calcul du Hessien exact est de calculer les termes $\boldsymbol{\mathcal{L}}_2^{-1}\boldsymbol{G}_2$ et $\boldsymbol{\mathcal{L}}_1^{-1}\boldsymbol{G}_1$ qui apparaissent dans le terme du Jacobien et dans le terme $\nabla^2 R$ puisqu'on travaille avec un problème 3D qui implique des matrices de grande taille. On pourrait réduire considérablement le coût de calcul en effectuant une approximation de bas rang. Si les valeurs singulières de la matrice à inverser sont majoritairement très faibles à l'exception de quelques-unes, l'approximation de bas rang peut être adéquate. Dans notre cas, un effectue d'abord une décomposition SVD de l'opérateur $\boldsymbol{GX}$:

$$[\boldsymbol{U}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{V}] = \text{svd}(\boldsymbol{GX}) \tag{3.116}$$

Puis, à partir de l'identité de Woodbury, on a :

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{GX})^{-1} &= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{V})^{-1} \\ &= \boldsymbol{I} - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{S}^{-1} + \boldsymbol{V}\boldsymbol{U})^{-1}\boldsymbol{V}\end{aligned} \tag{3.117}$$

Le principe est ici de sélectionner les k premières valeurs singulières les plus importantes. Ceci permet de réduire la dimensionalité du problème. On sélectionne alors les k premières colonnes de U, lignes et colonnes de S et lignes de V. Les matrices à inverser deviennent alors de taille $k \times k$. Plus k est faible, plus l'inversion est rapide à calculer, mais moins le résultat est exact. Toutefois, malgré le fait qu'avec les valeurs de contraste exactes le problème présente une distribution des valeurs singulières qui se prête bien à l'approximation de bas rang, ces valeurs exactes ne sont pas connues *a priori* lors de de la résolution du problème inverse. En initialisant avec des valeurs aléatoires (ce qui permet d'assurer la meilleure convergence lorsqu'une régularisation est appliquée), le spectre des valeurs propres de l'opérateur GI est de forme linéaire. Toutes les valeurs singulières sont alors essentielles à la résolution du problème et l'approximation de bas rang ne permet pas de réduire la dimensionnalité du problème.



(a) $\boldsymbol{X}_1$ (b) $\boldsymbol{X}_2$ (c) $\boldsymbol{X}_{aléatoire}$

Figure 3.5 Valeurs singulières de l'opérateur $\boldsymbol{GX}$ pour $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ et $\boldsymbol{X}_{aléatoire}$.

Matrice d'information de Fisher

Puisqu'on souhaite obtenir à moindres coûts une approximation du Hessien ou de son inverse et qu'une approximation de bas rang n'est pas possible, une autre méthode doit être considérée. La matrice d'information de Fisher (MIF) est un préconditionneur efficace qui a déjà été appliqué au problème de tomographie micro-ondes [114] et de tomographie d'impédance électrique [115]. Le principe de la MIF est d'approximer la valeur moyenne du Hessien. La MIF permet de réduire l'étendue du spectre des valeurs propres du Hessien et ainsi d'en améliorer le conditionnement. De cette façon, on s'attend à améliorer le taux de convergence de la méthode de type quasi-Newton utilisée pour résoudre le problème inverse [113].

Dans le cadre de la TIM, le terme $R\nabla^2 R$ est à son maximum à l'initialisation et, s'il y a convergence, ce terme diminue à chaque itération puisqu'il dépend de l'inadéquation aux données. Or, même à l'initialisation, le terme $\boldsymbol{J}^\intercal\boldsymbol{J}$ est deux ordre de grandeurs plus grand que le terme $R\nabla^2 R$. On peut donc adéquatement approximer la matrice Hessienne simplement à partir du premier terme. Cette approximation mène à un préconditionnement nommé la matrice d'information de Fisher (MIF).

Si on considère que le bruit est un bruit blanc gaussien non-corrélé, l'opérateur intégral de la MIF est donné par :

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'') = 2Re \sum_n \sum_m \sum_q \frac{\tau}{R_n(\frac{q}{\tau})} \frac{\partial E^*_{mnq}}{\partial \nu_i} \frac{\partial E_{mnq}}{\partial \xi_i} \tag{3.118}$$

où ∂ représente la dérivé de Fréchet, R la variance du bruit mesuré, n représente les sources, m les détecteurs, q les fréquences et ν, ξ représentent la permittivité ϵ ou la conductivité σ.

La matrice d'information de Fisher est donnée par :

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{\epsilon\epsilon} & \boldsymbol{I}_{\epsilon\sigma} \\ \boldsymbol{I}_{\sigma\epsilon} & \boldsymbol{I}_{\sigma\sigma} \end{bmatrix} \tag{3.119}$$

Pour préconditioner le problème, on effectue donc une mise à l'échelle des inconnues (sc pour «scaling») :

$$X^{sc}(\boldsymbol{r}) = X(\boldsymbol{r})\sqrt{\boldsymbol{I}_{\theta b}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')} \tag{3.120}$$

où θb représente le fond connu. Le gradient mis à l'échelle de la fonction objectif F devient donc :

$$\nabla^{sc} F = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{I}_{\theta b}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r})}} \nabla F \tag{3.121}$$

La MIF semble être un préconditionneur intéressant afin d'améliorer la convergence du problème inverse. La MIF est toutefois une approximation du Hessien puisque les termes hors-diagonale ainsi que le terme de dérivée seconde de la fonction objectif sont négligés. De plus, puisque le Jacobien doit être formé explicitement, le coût de calcul demeure relativement élevé. Ce coût de calcul élevé peut toutefois être justifiable si le préconditionneur améliore la convergence pour un grand nombre d'itérations. L'effet de la MIF sur la convergence du problème inverse sera présenté au chapitre 4.

3.4 Choix du modèle direct

Rappelons que le coût de calcul pour la reconstruction d'images en tomographie par induction magnétique dépend de deux aspects : le coût de calcul du modèle direct et le nombre d'itérations du problème inverse nécessaires pour converger vers la solution. Ces deux aspects peuvent être améliorés par différentes méthodes numériques qui seront présentées au chapitre 4. Toutefois, l'aspect le plus important qui affecte autant le coût de calcul du problème direct que la convergence du problème inverse est le choix du modèle. Ce chapitre a présenté les modèles EIV, ELOG et GI qui sont tous les trois basés sur l'équation intégrale volumique. Cette section démontre pourquoi le modèle GI est le plus adapté des trois dans le cadre de la TIM biomédicale.

3.4.1 Coût de calcul du problème direct

Le coût de calcul du problème direct dépend principalement de deux facteurs : le nombre de systèmes matriciels à résoudre et le nombre d'itérations nécessaires pour résoudre chacun de ces systèmes. Le nombre d'itérations est étroitement lié au conditionnement. En incluant

le milieu de référence au fond homogène de manière à obtenir un milieu de propagation inhomogène tel que pour les modèles ELOG et GI, le conditionnement des opérateurs de diffusion a été grandement amélioré. Les systèmes matriciels sont ainsi résolus beaucoup plus rapidement.

Malgré une amélioration au conditionnement, le modèle ELOG implique la résolution d'un beaucoup plus grand nombre de systèmes matriciels que le modèle EIV. Le modèle GI ne requière quant à lui que la résolution de deux systèmes pour le calcul du critère et deux pour le calcul du gradient. Toutefois, deux de ces systèmes matriciels ne dépendent que du contraste dans le fond connu. Ils peuvent être calculés une fois et être stockés. Ceci implique que le nombre de systèmes à résoudre à chaque itération du problème inverse est le même que pour le modèle GI que pour le modèle EIV. Par contre, pour le modèle GI, le conditionnement des systèmes à résoudre est nettement amélioré. Grâce à l'amélioration au conditionnement par rapport au modèle EIV et du moins grand nombre de systèmes à résoudre que pour le modèle ELOG, le modèle GI semble être le plus adéquat pour la résolution de problèmes réalistes en TIM biomédicale.

L'intérêt des modèles ELOG et GI est d'obtenir un meilleur conditionnement du système matriciel à résoudre à chaque itération du problème inverse. On a vu que les systèmes matriciels impliquant le contraste du fond connu $\boldsymbol{X}_1$ peuvent être stockés et n'ont donc pas besoin d'être recalculés à chaque itération. Pour chaque modèle, l'inversion peut être calculée en résolvant un système matriciel de forme $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Pour le modèle EIV, la matrice $\boldsymbol{A}$ est représentée par $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{GX})$, pour le modèle GI elle est $(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{G}_{22}\boldsymbol{X}_2)$ et pour le modèle ELOG, elles sont $(\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{R}_1)$, $(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{R}_2)$ et $(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{G}_{22}\boldsymbol{X}_2)$. Pour la sphère de matière blanche avec un caillot sanguin, le conditionnement de la matrice $\boldsymbol{A}$ de chaque modèle est présenté au tableau 3.1. Ici, m représente les inversions imbriquées dans des inversions, c'est-à-dire $\boldsymbol{S}_2$ dans $(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{R}_2)$ et $\boldsymbol{R}_1$ dans $(\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{R}_1)$.

Tableau 3.1 Nombre de systèmes à résoudre à chaque itération du problème inverse et conditionnement des matrices systèmes.

	EIV	ELOG	GI
Critère	1	1+2m	1
Gradient	1	2+8m	1
Conditionnement de $\boldsymbol{A}$	$4.23 \cdot 10^3$	4.35 ; 13.96 ; 55.07 ;4.35	4.35

On voit que le conditionnement des matrices à inverser à chaque itération du problème inverse est grandement amélioré, ce qui implique un moins grand nombre d'itérations et une meilleure

convergence des algorithmes itératifs. La résolution du modèle direct à chaque itération du problème inverse est accélérée. L'amélioration du conditionnement du problème direct mène également à une meilleure convergence du problème inverse. Il sera montré au chapitre 4 que l'amélioration du conditionnement du modèle direct mène aussi à une meilleure convergence du solveur inverse.

Principe de réciprocité de Lorentz

Il est à noter que le nombre de systèmes matriciels à résoudre ne dépend pas nécessairement uniquement du nombre de sources. Il est possible, par la formulation de l'état adjoint ou le principe de réciprocité de Lorentz, d'obtenir un nombre différent de systèmes à résoudre. Dans [81], l'impact de ces deux principes sur le nombre de systèmes à résoudre est présenté. On y conclut que la formulation de l'état adjoint n'est pas un outil aussi efficace que le principe de réciprocité de Lorentz. Le théorème de réciprocité de Lorentz affirme que la relation entre une source harmonique et son point de mesure demeure la même si on échange ces deux points. Donc, avec N_d détecteurs et N_s sources, ceci permet donc de reformuler le problème de manière à avoir N_d ou N_s systèmes à résoudre, dépendamment lequel de ces deux nombres est le plus faible. Concrètement, pour des montages tomographiques, trois cas se posent :

- Si $N_s < N_d$, on n'applique pas le théorème de réciprocité, le calcul du critère nécessite N_s résolutions et le gradient $2N_s$.
- Si $N_s > N_d$, on applique le théorème de réciprocité de façon à inverser les sources et les récepteurs, le calcul du critère nécessite N_d résolutions et le gradient $2N_d$
- Si $N_s = N_d$, appliquer ou ne pas appliquer le théorème de réciprocité revient au même, dans les deux cas on a $N_d = N_s$ systèmes à résoudre pour le calcul du critère et $2N_d = 2N_s$ systèmes pour le calcul du gradient.

3.4.2 Convergence des modèles

La manière habituelle de résoudre le problème inverse a été présentée, c'est-à-dire en le formulant comme un problème d'optimisation pour lequel on cherche à minimiser la norme L_2 du vecteur de différences entre le champ magnétique mesuré et celui calculé pour une certaine estimation des propriétés diélectriques du domaine. L'algorithme appliqué à ce problème de minimisation est le L-BFGS qui est de type quasi-Newton. La convergence d'un algorithme de ce type est liée au spectre des valeurs singulières du Hessien de la fonction objectif qu'on cherche à minimiser.

Il apparaît donc clairement que le choix du modèle direct a un effet sur la distribution des valeurs singulières du Hessien. Plus cette distribution est étendue, plus la vitesse de conver-

gence est lente. La distribution des valeurs singulières est étroitement liée au conditionnement des opérateurs. Or, en effectuant un changement de variable des inconnues à reconstruire, de $\boldsymbol{X}_1$ (le contraste diélectrique par rapport à l'air) à $\boldsymbol{X}_2$ (le contraste diélectrique par rapport au tissu biologique sain), les modèles ELOG et GI ont permis de considérablement améliorer le conditionnement des opérateurs. On s'attend à ce que cette amélioration au conditionnement des opérateurs du problème direct mène également à un meilleur conditionnement du Hessien de la fonction objectif, donc à une distribution moins étendue des valeurs singulières et ainsi à une convergence plus rapide de l'algorithme de résolution du problème inverse. Il sera montré au chapitre 4 que cette supposition est valide.

3.5 Conclusion

Pour résumer, ce chapitre a permis de présenter les équations à la base de l'EIV standard de façon a mettre en évidence les problèmes numériques qui affligent son application à la TIM biomédicale. Deux méthodes numériques permettant d'aborder ce problème ont été présentées : les modèles ELOG et GI. Dans la littérature, ces deux méthodes ont été appliquées dans le but d'inclure des objets diffuseurs dans le milieu de propagation de façon à obtenir un milieu inhomogène. Par contre, elles n'ont encore jamais été appliquées dans le but d'améliorer le conditionnement matriciels des opérateurs du modèle direct.

Ensuite, parmi les différentes options présentées au chapitre 3 quant à la résolution du problème inverse, le choix du critère, de la régularisation, de l'algorithme de résolution et du préconditionneur ont été justifiés. Les différents aspects à considérer quant au choix de modèle direct ont aussi été introduits, ce qui permettra de caractériser chacun des modèles au chapitre suivant.

CHAPITRE 4 RÉSULTATS ET DISCUSSION

L'objectif du présent chapitre est de caractériser la méthode proposée, c'est-à-dire l'application à la tomographie par induction magnétique biomédicale d'un modèle numérique basé sur une formulation par intégrale volumique. La méthodologie sera d'abord introduite, puis le modèle sera caractérisé sur quatre aspects : l'erreur du modèle direct, la convergence du problème inverse, les limites de reconstruction et l'intérêt des stratégies de réduction de temps de calcul. Ces différentes étapes permettront de conclure sur l'intérêt de la méthode proposée en comparant ses caractéristiques à celles des autres modèles numériques présentés dans la littérature.

4.1 Méthodologie

Les différents tests qui seront effectués afin de qualifier le modèle sont d'abord énoncés. Puis, les domaines de simulations sur lesquels ces tests sont effectués seront présentés. Il est à noter que la méthodologie et les résultats obtenus ne sont en aucun cas exhaustifs. Puisqu'un très grand nombre de paramètres ont un effet sur les résultats, l'approche préférée est ici de décrire qualitativement l'effet de chacun des paramètres plutôt que d'étudier de manière très approfondie l'impact de chacun. De plus, pour effectuer ces tests, des domaines de simulation très simples ont été volontairement choisis en se basant sur ceux utilisés dans la littérature. Un très grand nombre de tests ont été effectués sur des domaines variés, mais par soucis de concision, un nombre restreint de résultats sont présentés dans ce chapitre. Les résultats qui sont présentés sont toutefois représentatifs. Les différentes conclusions présentées ici peuvent donc être étendues à des domaines de simulation différents.

4.1.1 Description des tests

La première étape de caractérisation du modèle numérique est la validation du modèle direct. Pour ce faire, le champ magnétique diffusé obtenu à partir du modèle numérique basé sur l'EIV est comparé au champ magnétique diffusé calculé à partir d'une méthode analytique. Tel que mentionné précédemment, certains cas très simples, par exemple une sphère illuminée par une onde plane, possèdent une solution analytique. À cause des approximations introduites dans le modèle numérique, plusieurs facteurs peuvent influencer l'erreur du modèle, par exemple par la taille de discrétisation, les valeurs de contraste, la fréquence et la tolérance du solveur itératif du modèle direct.

Deuxièmement, la convergence du problème inverse est étudiée. Différents aspects peuvent avoir un effet sur la convergence. Le plus critique est sans doute le choix du modèle direct. La convergence du problème inverse à partir des différents modèles directs présentés précédemment est comparée. Le coût de calcul de chaque modèle est également comparé afin de justifier le choix du modèle le plus approprié. Le phénomène de rupture à basse fréquence et aux forts contrastes (LFHC breakdown) ainsi que la sensibilité sont également étudiés.

Troisièmement, les différentes limites de reconstruction de la méthode proposée sont posées. Ces limites concernent le niveau tolérable de bruit, la fréquence, les valeurs de contraste, le nombre de mesures nécessaires, la taille minimale et la profondeur maximale des perturbations qu'on peut reconstruire. La principale difficulté avec la caractérisation de ces limites est que tous ces paramètres sont interdépendants. Par exemple, plus le nombre de mesures est faible, plus le niveau de bruit tolérable diminue. Un autre exemple est que plus la fréquence augmente, plus la résolution spatiale s'améliore, mais moins les voxels au centre du domaine sont sensibles à cause de l'effet de peau. Afin de traiter l'interdépendance des paramètres, le même domaine de simulation de référence est utilisé pour chaque test et les paramètres sont variés un à un.

Finalement, trois méthodes de réduction du temps de calcul sont considérées : les méthodes Bloc, le préconditionnement par la matrice d'information de Fisher et la séparation des inconnues en deux groupes.

4.1.2 Domaines de simulation

Dans la littérature

Dans cette section, on s'intéresse à reconstruire un objet réaliste qui représente approximativement une tête humaine avec un caillot sanguin. Le terme «réaliste» est vague et peut décrire différents niveaux de complexité du domaine de simulation. Afin de faire un choix éclairé de domaine réaliste sur lequel la méthode proposée sera évaluée, une courte revue de littérature des domaines de simulation utilisés en TIM est d'abord présentée.

La complexité des domaines de simulation pour la reconstruction d'images en tomographie par induction magnétique peut varier énormément. Par exemple, pour modéliser la tête, certains modèles peuvent utiliser une sphère de quelques voxels constituée d'un seul matériau alors que d'autres utilisent une forme complexe comprenant des dizaines de tissus. Par exemple dans [5], une forme complexe semblable à une tête avec 12 tissus est utilisée comme domaine de simulation pour le problème direct, tandis que dans, [116], un domaine avec 10 tissus est utilisé. Ces domaines de simulation sont parmi les plus complexes dans la

littérature de la TIM, mais ne sont utilisés que pour étudier le modèle direct. En revanche, lorsqu'il est question de résoudre le problème inverse, des modèles beaucoup plus simples sont généralement utilisés. Un domaine typique est une sphère avec des propriétés diélectriques uniformes qui se trouve dans l'air et à l'intérieur de laquelle on cherche à détecter une perturbation. Par exemple, dans [117], la méthode de Gauss-Newton est utilisée pour reconstruire une perturbation de 1 S/m dans un fond homogène de 0.2 S/m. D'autres approches, par exemples par la méthode de Levenberg Marquardt [29] et par réseaux de neurones [118] ont été utilisées sur des domaines semblables. Dans [30], le liquide cérébro-spinal est ajouté à une sphère de matière blanche afin de modéliser plus adéquatement la tête. Dans [119, 120], des domaines à deux matériaux sont utilisés pour résoudre le problème direct par éléments finis et par intégration finie dans [121]. Une technique d'imagerie différentielle est appliquée sur un domaine à deux tissus dans [122, 123].

Le niveau de bruit appliqué aux données dans les simulations en TIM varie généralement entre des RSB de 80 dB et 35 dB. Les modèles les plus robuste dans la littérature permettent d'obtenir des reconstructions adéquates avec un bruit Gaussien de 2% (environ 35 dB). Par exemple dans [117], un modèle direct par éléments finis et un modèle inverse de Gauss-Newton avec une régularisation de Tikhonov permettent une telle robustesse. Toutefois, de récentes améliorations dans l'instrumentation ont permis de réduire le bruit jusqu'à 0.03% (environ 70 dB) [124]. Il est donc souhaitable que le modèle basé sur le modèle GI arrive à reconstruire des domaines biologiques avec des données bruitées jusqu'à 35 dB afin de se comparer aux modèles de l'état de l'art, mais il est avant tout essentiel qu'il arrive au minimum à reconstruire des domaines à 70 dB afin d'être applicable à des montages expérimentaux. Donc, à moins d'une mention contraire, un bruit blanc Gaussien de 70 dB est appliqué sur les mesures de champ magnétique aux détecteurs. Ceci permet également d'éviter le crime inverse qui consiste à utiliser exactement le même modèle pour simuler les données et reconstruire le domaine d'intérêt.

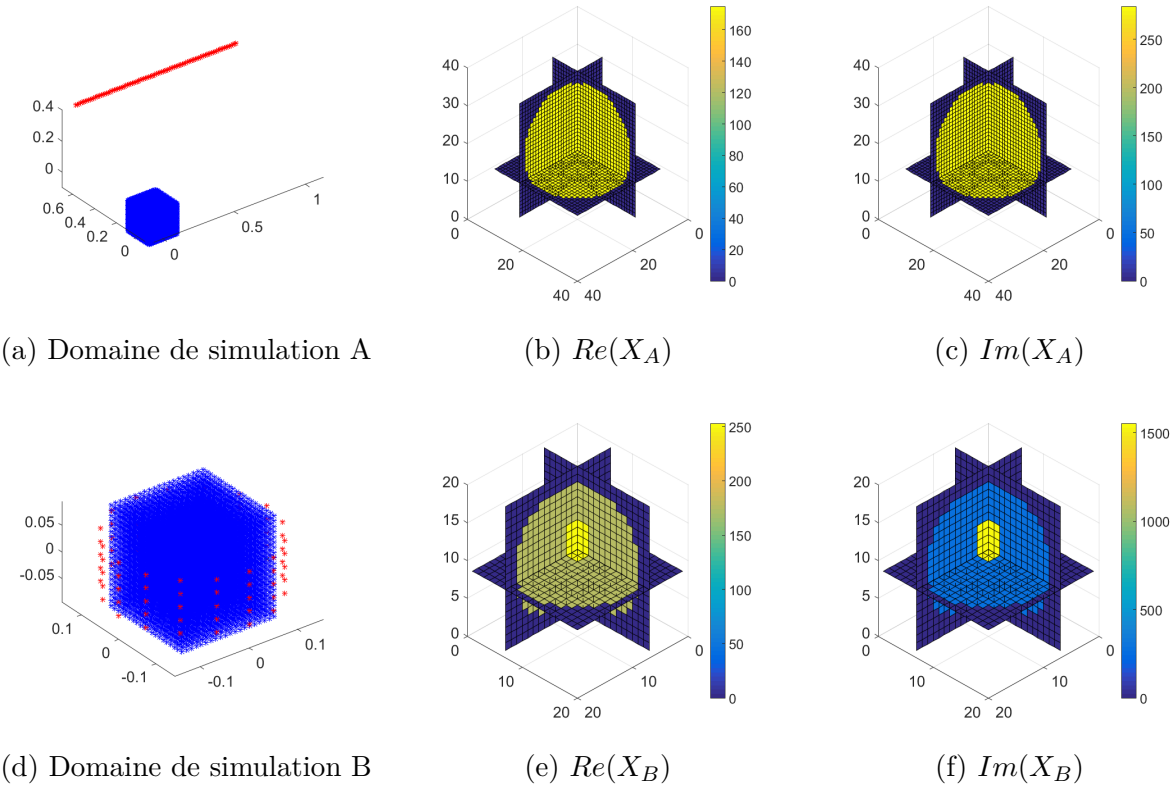
Choix des domaines

Les sections qui suivent font intervenir trois différents types de simulations. Certains paramètres sont partagés pour les trois types de problèmes. Pour chacun, le domaine de simulation est un cube de 20 cm d'arête avec les propriétés diélectriques de l'air. À l'intérieur de ce cube se trouve une sphère de 9 cm de rayon avec les propriétés diélectriques de la matière blanche, de façon à approximer grossièrement une tête humaine. La fréquence de l'onde incidente est de 10 MHz et la tolérance de l'algorithme du solveur itératif dans le modèle direct (BiCGstab) est fixée à 10^{-6}. Le domaine de simulation est discrétisé en $n = N^3$ voxels cubiques.

— Objet A : La première section caractérise l'erreur du modèle direct en fonctions des différents paramètres du problème (par exemple la discrétisation et les valeurs de contraste). L'erreur est définie par rapport à une solution analytique obtenue par la théorie de Mie. Puisqu'une solution analytique n'est disponible que pour certains cas très simples, le premier domaine de simulation correspond à une sphère diélectrique illuminée par une onde plane polarisée en x. Afin de bien visualiser le champ diffusé, les 100 détecteurs sont placés uniformément sur une ligne entre $x = 0.25$ m et $x = 1.125$ m avec $y = 0.4$ m et $z = 0.7$ m. Puisque seulement le modèle direct est évalué, on utilise une discrétisation assez fine, soit 29791 voxels cubiques ($N = 31$).

— Objet B : La section caractérisant les limites du modèle implique la résolution du problème inverse. Pour cette section, une perturbation représentant un oedème cérébral, avec 75% des propriétés diélectriques du sang et 25 % les propriétés de la matière blanche [18], est ajoutée en $x = [-6, -2]$, $y = [-6, -2], z = [-2, 2]$ cm. Le domaine complet est discrétisé en $20 \times 20 \times 20$ voxels cubiques tandis que le domaine d'intérêt est discrétisé en $12 \times 12 \times 4$ voxels cubiques. Il y a 16×5 sources et détecteurs placés sur des cercles de 15.2 cm de rayon en $z = \{-5, -2.5, 0, 2.5, 5\}$ cm de sorte à avoir un problème surdéterminé. Un bruit Gaussien de 70 dB est ajouté au champ magnétique aux détecteurs de sorte à éviter le crime inverse. Les sources sont des dipôles magnétiques orientés en z (voir sous-section 4.1.2 pour les détails).

— Le reste des simulations sont celles où l'on cherche à caractériser le modèle GI, mais pour lesquelles il est difficile ou impossible d'obtenir une discrétisation aussi fine en raison du coût de calcul très élevée d'un des opérateurs, par exemple lorsqu'on souhaite former la matrice Jacobienne ou Hessienne de la fonction objectif. Chacun de ces cas est particulier et les différents domaines de simulation utilisés seront décrits au cas par cas.



(a) Domaine de simulation A (b) $Re(X_A)$ (c) $Im(X_A)$

(d) Domaine de simulation B (e) $Re(X_B)$ (f) $Im(X_B)$

Figure 4.1 Domaines de simulation et valeurs réelles et imaginaires du contraste pour les objets A et B. En bleu, la position des points de calcul et, en rouge, la position des détecteurs.

Source

La source utilisée pour émettre un champ magnétique à basse fréquence peut prendre différentes formes. Il s'agit souvent d'une bobine avec un coeur ferromagnétique qui permet d'augmenter l'amplitude du champ incident. Il est possible d'obtenir une solution numérique de la distribution de courant dans la source en la discrétisant et en résolvant le domaine discrétisée par exemple par la méthode des éléments finis. Toutefois, puisque l'objectif de ce projet est d'améliorer le temps de calcul en diminuant le nombre d'inconnues à résoudre, cette approche n'est pas suggérée. Il a été montré que cette source peut être adéquatement approximée par un dipôle magnétique [125]. Les sources utilisées pour les simulations sont donc des dipôles magnétiques orientés en z qui oscillent à une fréquence de 10 MHz. À partir de l'EIV, on sait que les champs électrique et magnétique générés par un dipôle magnétique

sont donnés par :

$$\boldsymbol{E} = \int \nabla \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}') \cdot g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') d\nu' \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{H} = j\omega\epsilon_b \int \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') d\nu' \tag{4.2}$$

En définissant le moment magnétique par ses composantes cartésiennes $\boldsymbol{M} = (m_x, m_y, m_z)$, on peut développer l'expression du champ électrique :

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = j\omega\mu[(m_z\partial_y g(\boldsymbol{r}) - m_y\partial_z g(\boldsymbol{r}))\hat{x} + (m_x\partial_z g(\boldsymbol{r}) - m_z\partial_x g(\boldsymbol{r}))\hat{y} + (m_y\partial_x g(\boldsymbol{r}) - m_x\partial_y g(\boldsymbol{r}))\hat{z}] \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) =& [m_x(k^2 + \partial_x^2)g(\boldsymbol{r}) + m_y\partial_1\partial_2 g(\boldsymbol{r}) + m_z\partial_x\partial_z g(\boldsymbol{r})]\hat{x} \\ &+ [m_x\partial_x\partial_y g(\boldsymbol{r}) + M_y(k^2 + \partial_y^2)g(\boldsymbol{r}) + m_z\partial_y\partial_z g(\boldsymbol{r})]\hat{y} \\ &+ [m_x\partial_x\partial_z g(\boldsymbol{r}) + m_y\partial_z\partial_y g(\boldsymbol{r}) + m_z(k^2 + \partial_z^2)g(\boldsymbol{r})]\hat{z} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Puisque les sources sont situées à l'extérieur du domaine de simulation, il n'est pas nécessaire de traiter la singularité en $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$ et les dérivées de la fonction de Green scalaire peuvent être obtenues analytiquement. Pour ν et ϵ représentent les axes x, y ou z et $\delta_{\nu\epsilon} = 1$ si $\nu = \epsilon$ et 0 sinon, les dérivées première et seconde sont données par :

$$\partial_\nu g(\boldsymbol{r}) = \frac{jk\nu}{|\boldsymbol{r}|} g(\boldsymbol{r}) \tag{4.5}$$

$$\partial_{\nu,\epsilon}^2 g(\boldsymbol{r}) = (\frac{3\nu\epsilon}{|\boldsymbol{r}|^4} - \frac{3jk\nu\epsilon}{|\boldsymbol{r}|^3} - \frac{k^2\nu\epsilon + \delta_{\nu\epsilon}}{|\boldsymbol{r}|^2} + \frac{\delta_{\nu\epsilon}jk}{|\boldsymbol{r}|})g(\boldsymbol{r}) \tag{4.6}$$

Le développement de ces dérivées permet d'évaluer le champ incident à chaque point du domaine de simulation.

4.2 Validation des modèles directs

La Méthode des Moments utilisée pour discrétiser l'EIV est une méthode numérique qui fait plusieurs approximations afin d'obtenir une solution approximative. Une de ces approximations concerne la discrétisation spatiale. En discrétisant un domaine continu en voxels cubiques, on suppose que la permittivité et la conductivité sont constantes par voxel et que la source de courant est ponctuelle en son centre. Ce principe est vrai si on divise le domaine en un nombre infini de voxels, mais à cause des limites numériques, il est nécessaire de se restreindre à une discrétisation relativement grossière du domaine, d'où le caractère approximatif de la solution ainsi obtenue. Cette approximation affecte aussi la comparaison

avec la solution analytique puisque celle-ci est calculée pour une sphère parfaite, tandis que le modèle numérique représente une sphère discrétisée par des voxels cubiques. Les erreurs d'arrondi et la tolérance des algorithmes itératifs sont d'autres sources d'erreurs numériques. Les erreurs d'arrondi proviennent de la précision machine limitée des calculs numériques, ce qui peut être une source importante d'erreurs, par exemple dans le cas où des opérations sur deux valeurs avec des ordres de grandeurs très différents sont effectuées. Ceci mène par exemple au phénomène de rupture à basse fréquence (voir section 3.1.4). De plus, puisque les systèmes à résoudre sont de très grande taille, ils doivent être résolus par des méthodes itératives telles que la méthode du gradient conjugué. Il est important de définir une tolérance sur la précision de ces méthodes de façon à limiter le temps de calcul sans compromettre la justesse des résultats.

4.2.1 Théorie de Mie

La théorie de Mie, développée en 1908 par Gustav Mie, permet de décrire le phénomène de diffusion électromagnétisme d'une onde plane par une particule sphérique. La solution est exprimée sous la forme d'une série infinie d'harmoniques sphériques. On entend par «solution analytique» qu'il est possible de calculer analytiquement la solution, mais puisque le calcul des coefficients de diffusion implique l'évaluation de certaines fonctions telles que celles de Riccati-Bessel et des dérivés qui sont très lourdes à résoudre, elles sont évaluées numériquement. De nombreux codes basés sur la théorie de Mie sont disponibles en différents langages de programmation. Puisque les simulations de ce projet sont effectués sous Matlab, le code retenu est celui présenté dans [126].

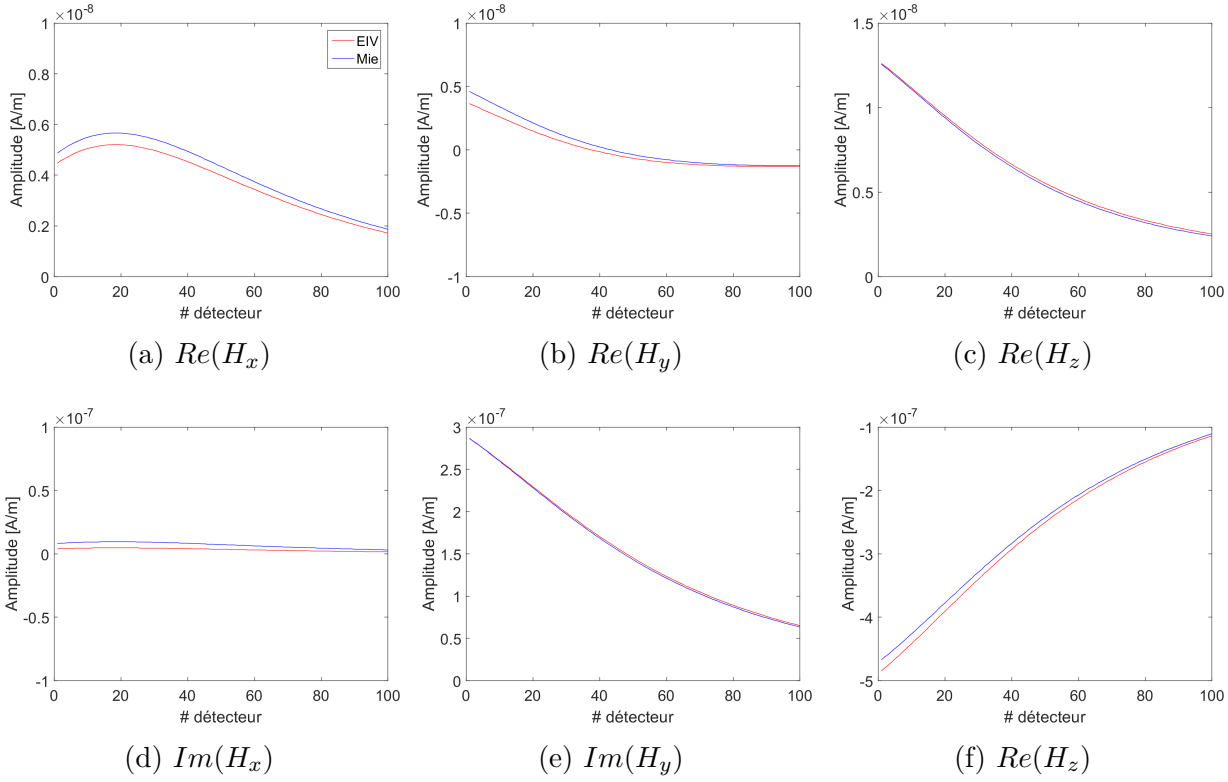
Afin de valider le modèle numérique proposé dans la gamme de fréquences d'intérêt pour des contrastes diélectriques semblables à ceux de tissus biologiques, on se place dans le cas simple d'une sphère diélectrique illuminée par une onde plane. Le modèle GI sans perturbation dans le domaine d'intérêt (lorsque $\boldsymbol{X}_2 = 0$) est équivalent au modèle EIV. Afin de caractériser l'erreur du modèle, on utilise l'erreur relative définie par :

$$Err = \sum_{n}^{N_d} \sum_{m}^{N_s} \frac{|\boldsymbol{H}_{nm}^{Mie} - \boldsymbol{H}_{nm}^{Num}|}{|\boldsymbol{H}_{nm}^{Mie}|} \tag{4.7}$$

où N_d et N_s sont respectivement le nombre de détecteurs et de sources.

4.2.2 Caractérisation de l'erreur du modèle direct

À partir de l'objet A, les composantes en x, y et z des parties réelles et imaginaires du champ magnétique diffracté à chaque détecteur sont représentées à la figure 4.2 pour la solution par l'EIV et par la théorie de Mie.



(a) $Re(H_x)$ (b) $Re(H_y)$ (c) $Re(H_z)$

(d) $Im(H_x)$ (e) $Im(H_y)$ (f) $Re(H_z)$

Figure 4.2 Champ magnétique diffusé calculé par le modèle EIV et par la théorie de Mie.

Une bonne concordance entre les deux solutions est observée. Les légères différences sont expliquées par la discrétisation relativement grossière. Différents paramètres peuvent affecter l'erreur relative du modèle direct, notamment le nombre de voxels, la valeur du contraste, la fréquence et la tolérance de l'algorithme itératif. Cette section décrit l'erreur relative en fonction de ces paramètres.

Erreur en fonction du nombre de voxels

La discrétisation du domaine continue en un nombre discret de voxels cubiques est la principale source d'erreurs du modèle numérique. On s'attend à ce que plus le nombre de voxels utilisés pour discrétiser le domaine augmente, plus les valeurs de la solution numérique se

rapprochent de la solution analytique. On remarque en effet à la figure 4.3 que l'erreur relative diminue plus le nombre de voxels augmente. Avec $N = 51$ l'erreur relative est d'environ 3%.

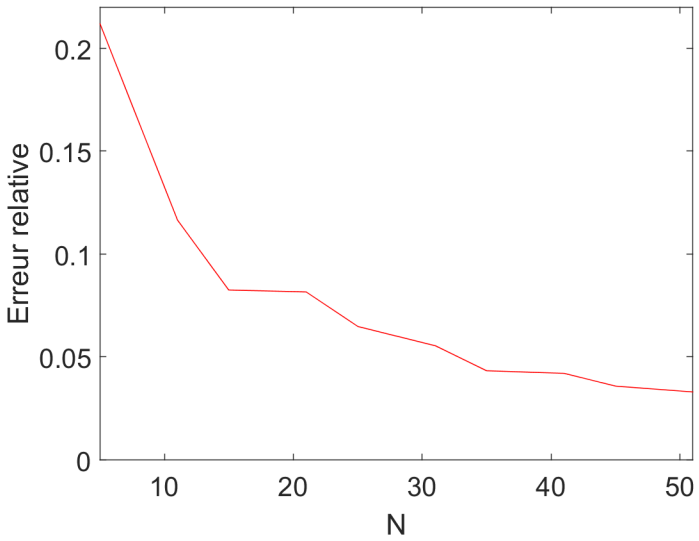
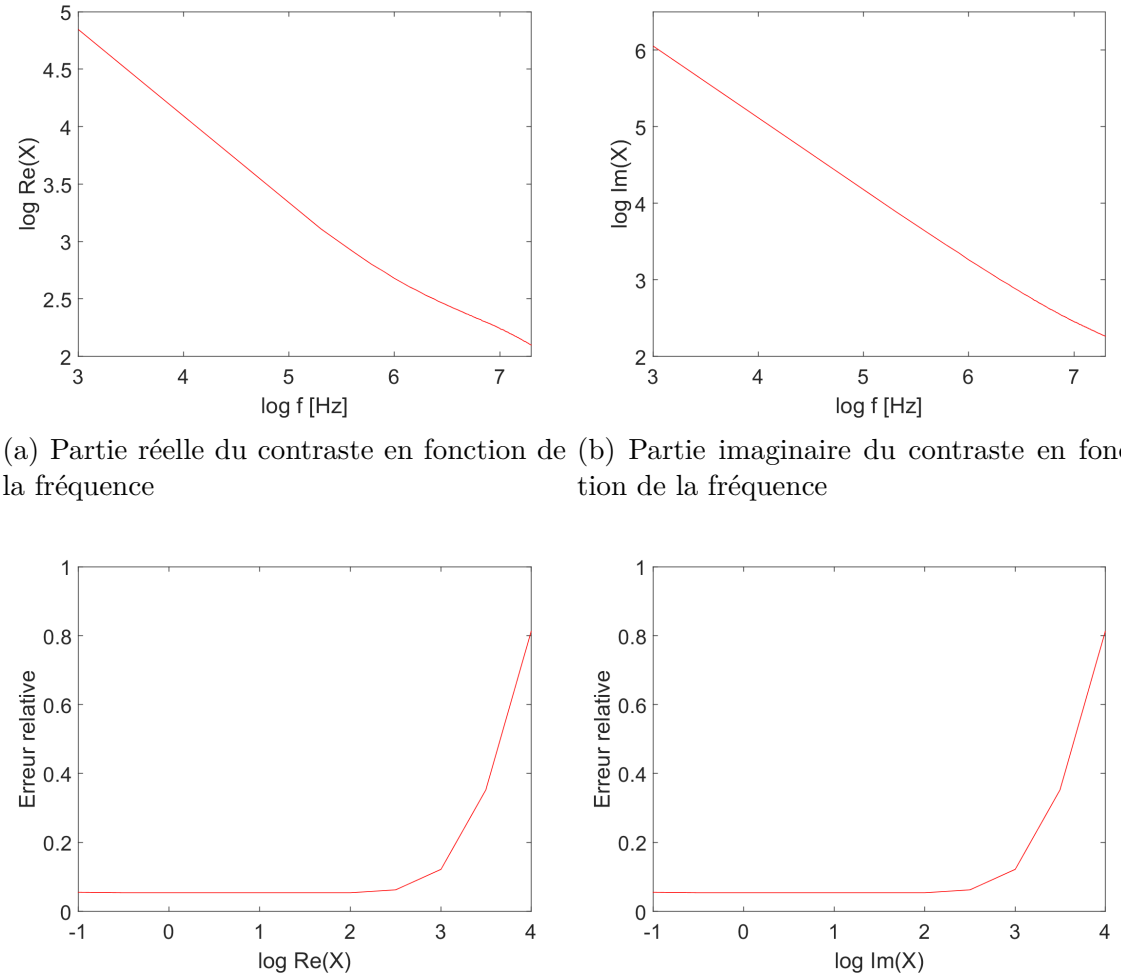


Figure 4.3 Erreur relative en fonction du nombre N de voxels par arrête.

Erreur en fonction du contraste

Le contraste diélectrique des tissus biologiques varie en fonction de la fréquence. Les figures 4.4a et 4.4b montrent les parties réelle et imaginaire du contraste de la matière blanche par rapport à l'air en fonction de la fréquence pour toute la gamme des fréquences d'intérêt en TIM. On remarque une très grande différence, les valeurs variant de plus de trois ordres de grandeur pour les cas limites. Les valeurs de contraste affectent le modèle numérique puisque plus le contraste est élevé, plus l'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ est mal conditionné. Ceci peut donc être une source considérable d'erreur numérique. On voit aux figures 4.4c et 4.4d que pour des valeurs de contrastes inférieures à 10^3, l'erreur relative est peu affectée. Toutefois, pour de plus grandes valeurs, l'erreur relative augmente rapidement.



(a) Partie réelle du contraste en fonction de la fréquence

(b) Partie imaginaire du contraste en fonction de la fréquence

(c) Erreur relative en fonction de la partie réelle du contraste

(d) Erreur relative en fonction de la partie imaginaire du contraste

Figure 4.4 Lien entre la fréquence, le contraste et l'erreur relative.

Erreur en fonction de la fréquence

On a vu que la fréquence affecte les valeurs de contraste, ce qui a une conséquence sur le conditionnement de l'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ et sur l'erreur relative de la solution. Le contraste commence à avoir un effet sur l'erreur à partir de 10^3, ce qui correspond environ à une fréquence de 1 MHz dans le cas de la matière blanche. Ceci donne une justification additionnelle du choix des plus hautes fréquences (dans les MHz) pour les application en TIM biomédicale. Toutefois, la fréquence n'affecte pas seulement le contraste. Elle apparaît également à différents endroits dans l'EIV, par exemple dans la constante de propagation k_b et dans la fonction de Green vectorielle. On s'intéresse maintenant à vérifier si, pour un contraste diélectrique

fixe, la fréquence a un effet sur l'erreur relative de la solution.

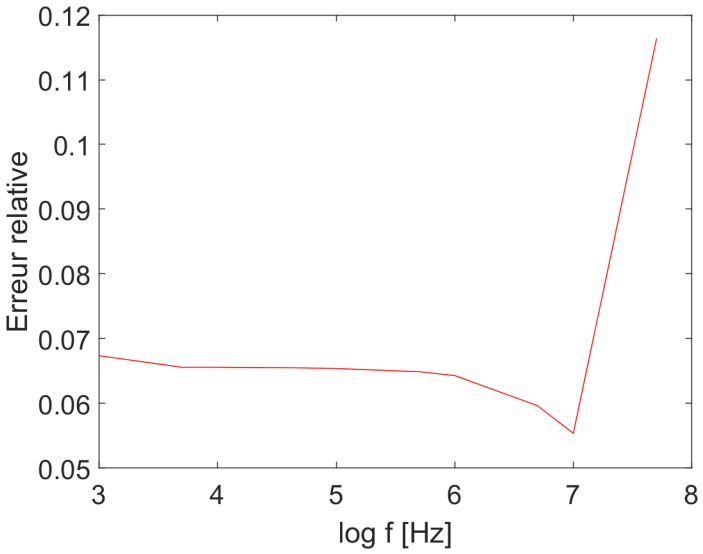
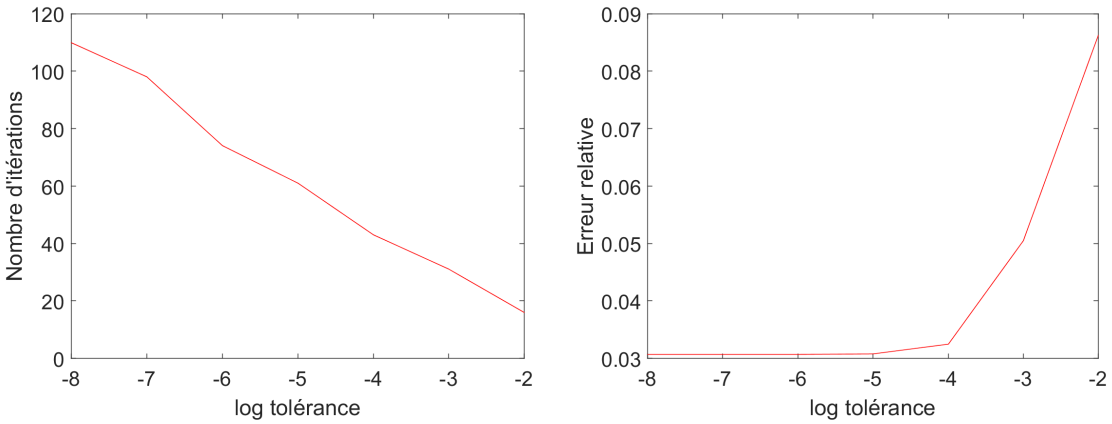


Figure 4.5 Erreur relative en fonction de la fréquence pour un contraste fixe.

À la figure 4.5, les valeurs des propriétés diélectriques ont été fixées à $\epsilon_r = 176, \sigma = 0.158$ S/m, soit celles de la matière blanche à 10 MHz. Ces valeurs ont été choisis parce qu'une fréquence de 10 MHz est typique pour les montages expérimentaux en TIM biomédical. On remarque que l'erreur relative varie très peu jusqu'à 10 MHz, atteignant un minimum local à ce point, puis qu'elle augmente rapidement pour de plus hautes fréquences. La variation de l'erreur est donc négligeable dans la gamme des fréquences d'intérêt en TIM, particulièrement si on considère l'influence des autres paramètres tels que le nombre de discrétisation et les valeurs du contraste diélectrique.

Erreur en fonction de la tolérance

La résolution du problème direct implique la résolution du système linéaire $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}\boldsymbol{e}^0$, qui est de taille $3n \times 3n$ où $n = N^3$ est le nombre total de voxels dans le domaine et N le nombre de voxels par arrête. Par exemple en choisissant $N = 40$, le système est de taille 192000×192000. À cause des limites de mémoire, un algorithme itératif, le BiCGstab, est utilisé pour résoudre ce système matriciel. Une tolérance sur la précision de cette méthode itérative est fixée de façon à limiter le temps de calcul, mais sans compromettre la qualité des résultats. À la figure 4.6, on voit à gauche le nombre d'itérations nécessaires à l'algorithme BiCGstab afin d'atteindre la tolérance donnée. À droite, l'erreur relative d'une composante $\mathrm{Re}(H_z)$ est affichée en fonction de la tolérance.



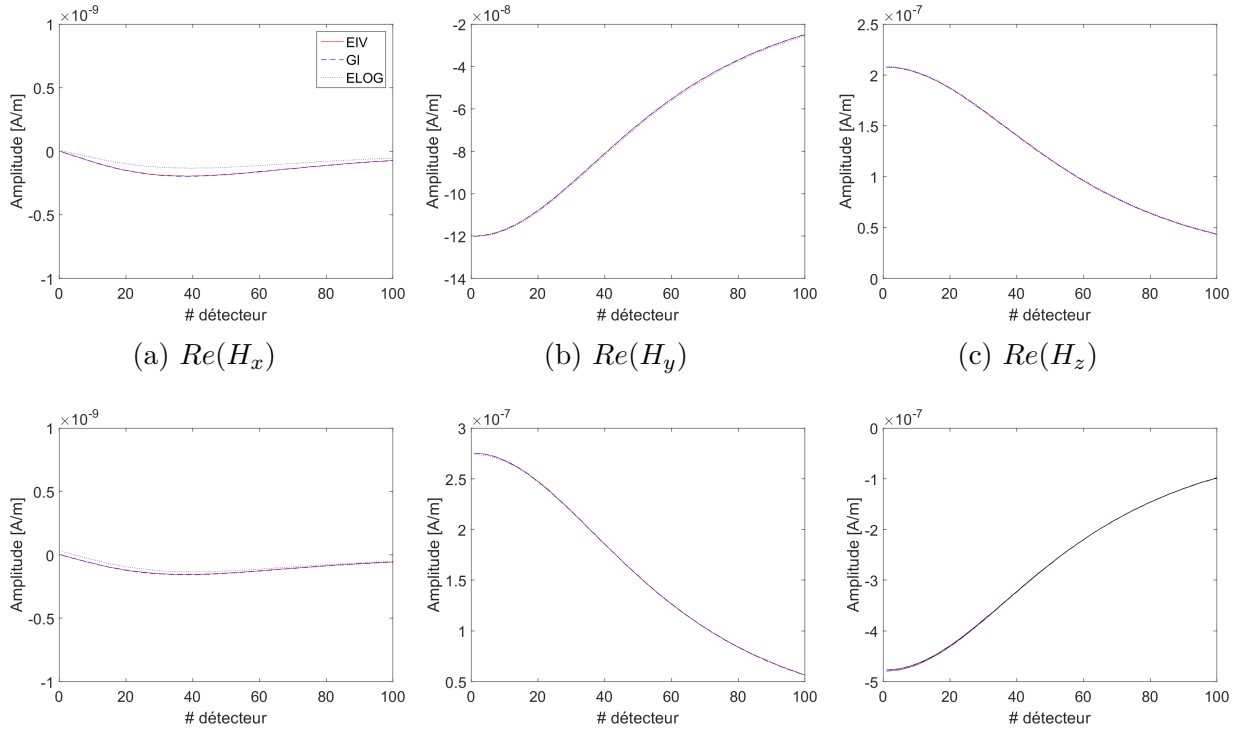
(a) Itérations en fonction de la tolérance (b) Erreur relative en fonction de la tolérance

Figure 4.6 Effet de la tolérance sur le nombre d'itérations de l'algorithme BiCGstab et sur l'erreur relative de la solution.

On remarque que le nombre d'itérations augmente de façon linéaire avec le log de la tolérance spécifiée. Il est donc important de ne pas imposer une tolérance trop élevée afin de limiter le coût de calcul. On voit que l'erreur relative varie très peu jusqu'à 10^{-5}, puis qu'elle augmente rapidement par la suite. Afin de s'assurer de ne pas introduire des erreurs numérique qui peuvent facilement être évitées à cette étape du calcul, mais tout en limitant le coût de calcul, la tolérance est fixée à 10^{-6}.

Validation des modèles GI et ELOG

Les modèles GI et ELOG ne peuvent pas être directement validés par la théorie de Mie puisque, si on considère simplement une sphère diélectrique sans perturbation à l'intérieur, le contraste $\boldsymbol{X}_2$ est nul et les deux modèles deviennent équivalents au modèle EIV. Toutefois, puisque le modèle EIV a été caractérisé par rapport à la solution analytique de Mie, on peut maintenant se servir de ce modèle pour modéliser des objets plus complexes qui ne possèdent pas de solution analytique. Afin de valider les modèles GI et ELOG, on utilise l'objet B, qui représente une tête avec un oedème en périphérie. Afin de mieux visualiser le champ magnétique diffusé, la source et les détecteurs sont placées dans la configuration de l'objet A. Les composantes du champ magnétique diffusé obtenues par les modèles EIV, GI et ELOG sont représentées à la figure 4.7. Les résultats du modèle GI correspondent presque exactement à ceux du modèle EIV, avec une erreur relative maximale de 0.06%. L'erreur relative maximale du modèle ELOG est quant à elle de 3%.



(a) $Re(H_x)$ (b) $Re(H_y)$ (c) $Re(H_z)$

(d) $Im(H_x)$ (e) $Im(H_y)$ (f) $Im(H_z)$

Figure 4.7 Champ magnétique diffusé par l'objet B calculé par les modèles EIV, GI et ELOG.

En résumé, le modèle EIV a d'abord été validé pour un cas simple par rapport à une solution analytique. L'erreur a été caractérisée en fonction des différents paramètres. Puis, les modèles ELOG et GI ont été validés à partir du modèle EIV pour un cas plus complexe qui ne possède pas de solution analytique. Ceci permet de s'assurer que le modèle proposé représente adéquatement la physique du problème. Toutefois, même si chacun des modèles représente bien le phénomène de diffusion électromagnétique, chacun présente des caractéristiques différentes qui le rendent plus ou moins intéressant pour la résolution du problème inverse.

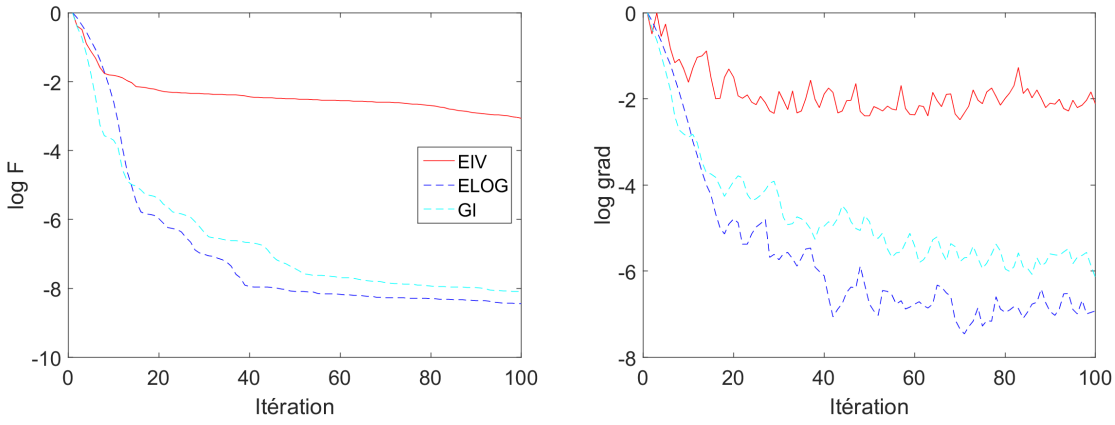
4.3 Modèle inverse

Trois modèles directs basés sur une formulation par intégrale volumique ont été présentés et validés pour des paramètres typiques en TIM biomédicale. On souhaite maintenant caractériser l'application de ces modèles à la résolution du problème inverse. Différents aspects pouvant influencer la convergence du problème inverse sont étudiés. Premièrement, l'influence du modèle direct sur la convergence et le coût de calcul est présentée. Deuxièmement, le phénomène de rupture aux basses fréquences et aux forts contrastes, qui est connu pour perturber

l'EIV, est analysé dans le cadre des paramètres de la TIM biomédicale. Finalement, la sensibilité est étudiée afin de déterminer si la forte variation de sensibilité des inconnues affecte la convergence du problème inverse.

4.3.1 Effet du modèle direct

On sait que la convergence du problème inverse dépend du spectre des valeurs singulières du Hessien de la fonction objectif. Puisque les modèles GI et ELOG représentent un changement de variables qui permet d'améliorer le conditionnement des opérateurs, on s'attend à ce que la convergence du problème inverse soit améliorée par rapport à l'EIV standard. La figure 4.8 montre la convergence de la fonction objectif et la norme du gradient au cours des itérations du problème inverse à partir de chaque modèle. L'objet utilisé est un cube d'air discrétisé en $n = 7^3$ à l'intérieur duquel se trouve un cube de matière blanche ($X =$) de 5 voxels d'arrête. Ce problème très simple est choisi afin de limiter le temps de calcul qui est très élevé pour le modèle ELOG.

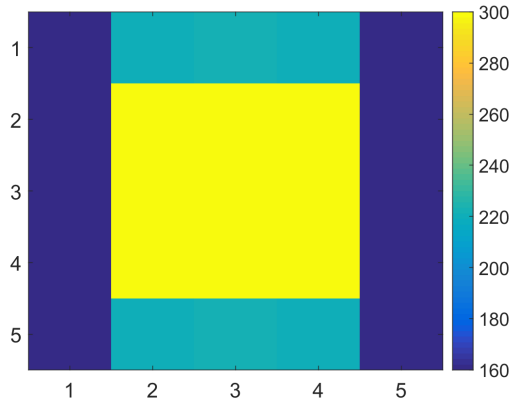


(a) Fonction objectif (b) Norme du gradient

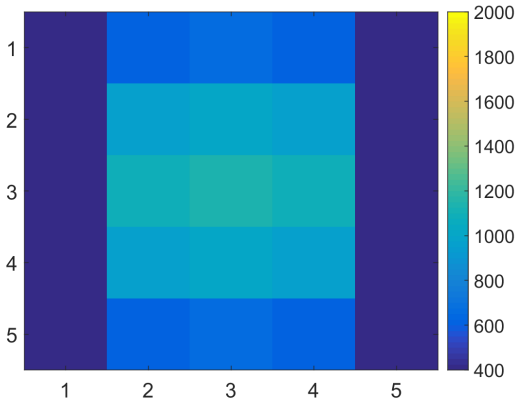
Figure 4.8 Valeur de la fonction objectif et norme du gradient au cours des itérations du problème inverse pour les modèles EIV, ELOG et GI.

On remarque que la convergence du problème inverse est beaucoup plus rapide pour les modèles ELOG et GI que pour l'EIV standard. Le modèle ELOG montre une convergence légèrement plus rapide que le modèle GI. La tranche centrale des reconstructions à partir de chaque méthode après 100 itérations de l'algorithme L-BFGS est représentée à la figure 4.9. Puisque chaque modèle fait intervenir des grandeurs différentes, les paramètres de régularisation devraient être modifiés pour chacun des modèles. Toutefois, en utilisant des paramètres

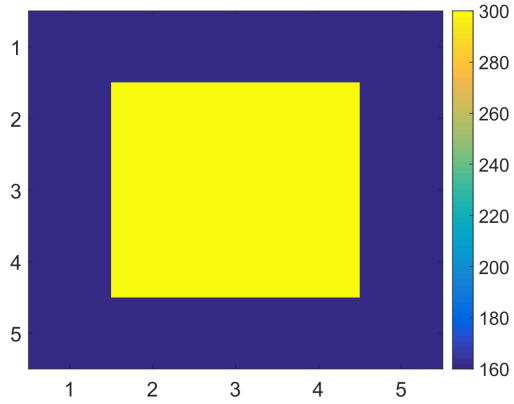
de régularisation différents pour chaque modèle, la comparaison de la convergence deviendrait inadéquate car chaque modèle serait affectée différemment par sa régularisation. Pour permettre une comparaison adéquate, on considère un problème sans bruit et sans régularisation. Ceci représente le «crime inverse», c'est-à-dire d'utiliser le même modèle pour générer les données et résoudre le problème inverse, mais se placer dans cette situation peut tout de même être justifié dans certains cas [127], comme celui qui nous intéresse ici.



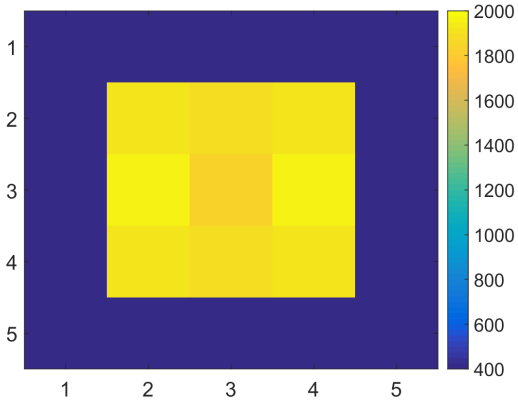
(a) $Re(X_{fin,EIV}), z = 3$



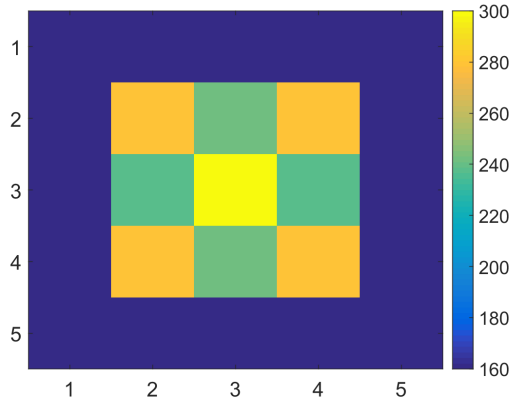
(b) $Im(X_{fin,EIV}), z = 3$



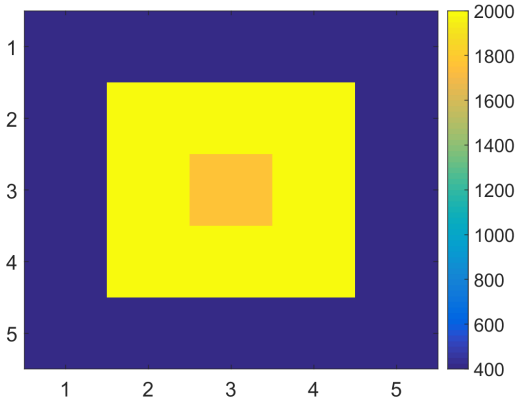
(c) $Re(X_{fin,ELOG}), z = 3$



(d) $Im(X_{finELOG}), z = 3$



(e) $Re(X_{fin,GI}), z = 3$



(f) $Im(X_{fin,GI}), z = 3$

Figure 4.9 Parties réelle imaginaire du contraste de la tranche centrale de l'objet exact et des reconstructions à partir des modèles EIV, ELOG et GI après 100 itérations du solveur inverse.

L'état de la reconstruction du domaine à partir des différents modèles représente bien l'allure de la convergence de la fonction objectif, c'est-à-dire que les reconstructions à partir des modèles ELOG et GI sont beaucoup plus près de la solution exacte, tandis que la reconstruction par EIV est de moins bonne qualité après le même nombre d'itérations. Le modèle ELOG offre une convergence légèrement meilleure que celle du modèle GI. Toutefois, le coût de calcul par itération beaucoup plus élevé que le modèle GI ne justifie pas cette légère amélioration à la convergence. Le modèle GI est donc le plus adapté au problème inverse en TIM biomédicale en raison de :

— La convergence rapide de l'algorithme de résolution itératif du modèle direct due à l'amélioration au conditionnement des matrices ;
— La réduction du nombre d'inconnues, ce qui permet de cibler une zone particulière lors de la résolution du problème inverse. Les systèmes d'équations liés au milieu de propagation inhomogène n'ont besoin d'être résolus qu'une seule fois et les solutions peuvent ensuite être stockées lors de la résolution du problème inverse ;
— La convergence plus rapide du problème inverse, qui est améliorée grâce aux deux points précédents (l'amélioration du conditionnement des matrices et la diminution du nombre d'inconnues).

4.3.2 Rupture à basse fréquence et aux forts contrastes

Au chapitre 3, il a été expliqué que le phénomène de rupture à basse fréquence affecte les équations volumiques intégrales en raison du large espace nul de l'opérateur de diffusion. Le phénomène de rupture aux forts contrastes est particulièrement problématique dans le cadre de la TIM puisque les tissus biologiques ont des contrastes très élevés. Ces deux phénomènes sont souvent traités conjointement sous le sigle du «Low Frequency High Contrast Breakdown», mais les sources d'erreurs numériques sont en fait distinctes et sont donc abordées séparément ici.

En se basant sur la littérature, on a vu que la fréquence ne devrait pas être problématique puisque, pour des applications biomédicales, la résolution spatiale est de l'ordre du centimètre. On a aussi vu à la figure 4.5 que l'erreur relative n'augmente pas pour les valeurs plus faibles de la gamme de fréquences d'intérêt en TIM. Or, même si le modèle direct demeure adéquat aux plus faibles fréquences, il se peut que la dégradation du conditionnement des opérateurs ait un effet sur la vitesse de convergence du problème inverse. Dans cette section, il sera démontré que, malgré le fait que la sensibilité et la rupture à basse fréquences sont des phénomènes importants à considérer qui peuvent affecter la convergence, les forts contrastes sont le principale facteur influençant la vitesse de convergence du problème inverse.

Rupture à basses fréquences

On a vu que le phénomène de rupture à basse fréquence est causé par un déséquilibre entre les parties solénoïdale et irrotationnelle de la densité de courant et que la stratégie la plus habituelle pour traiter ce problème est d'effectuer une décomposition d'Helmholtz de façon à normaliser ces deux termes. Toutefois, l'extension de la méthode à une formulation volumique n'est pas triviale. Afin d'étudier l'influence de ce phénomène sur la convergence du problème inverse, le modèle quasi-statique (QS) est étudié.

L'approximation quasi-statique a été présentée à la section 2.1. Elle permet de simplifier l'EIV en une équation de Poisson en s'affranchissant du courant de déplacement et en ne considérant que le courant de conduction. Puisque le déséquilibre entre ces deux composantes du courant est à la base du phénomène de rupture à basse fréquence de l'EIV, le modèle quasi-statique ne souffre donc pas du phénomène de rupture à basse fréquence. Si la convergence du problème inverse basé sur le modèle QS est grandement améliorée, on en conclura que le phénomène de rupture à basse fréquence a un effet important sur la convergence du modèle GI.

Le modèle direct QS est ici développé à partir des équations de Maxwell et il est appliqué à la reconstruction d'images dans le cadre de la TIM. L'approximation quasi-statique consiste à négliger la dérivée temporelle du champ électrique dans l'équation de Faraday, les approximations sont donc :

$$\nabla \times \boldsymbol{H} \approx \boldsymbol{J} \tag{4.8}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} \approx 0 \tag{4.9}$$

Les équations de Maxwell en régime harmonique deviennent ainsi :

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = j\omega\mu\boldsymbol{H} \tag{4.10}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{4.11}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{4.12}$$

$$\nabla \cdot \mu_0\boldsymbol{H} = 0 \tag{4.13}$$

En appliquant le rotationnel sur la loi de Faraday, on a :

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla \times j\omega\mu\boldsymbol{H} \tag{4.14}$$

En remplaçant le terme de droite par la loi d'Ampère et en appliquant l'identité $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = -\nabla^2\boldsymbol{A} + \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{A}$, on a :

$$-\nabla^2\boldsymbol{E} + \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{E} = j\omega\mu\boldsymbol{J} \tag{4.15}$$

À cause de 4.12, on néglige le terme $\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{E}$:

$$\nabla^2\boldsymbol{E} = j\omega\mu\boldsymbol{J} \tag{4.16}$$

De la même façon que pour l'EIV, la solution de cette équation peut être résolue par une fonction de Green. Dans ce cas, la fonction de Green quasi-statique est :

$$g_{QS}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{4.17}$$

En utilisant le principe des volumes équivalents, c'est-à-dire en appliquant les conditions frontières sur chaque voxel, on trouve que le champ électrique diffusé est donné par :

$$\boldsymbol{E}^{scat}(\boldsymbol{r}) = k_b^2\int_V g_{QS}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')d\nu' \tag{4.18}$$

Après une discrétisation par la méthode des moments, les équations d'état et des données sont exprimées par :

$$\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{I} - k_b^2\boldsymbol{g}_{QS}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{e}^0 \tag{4.19}$$

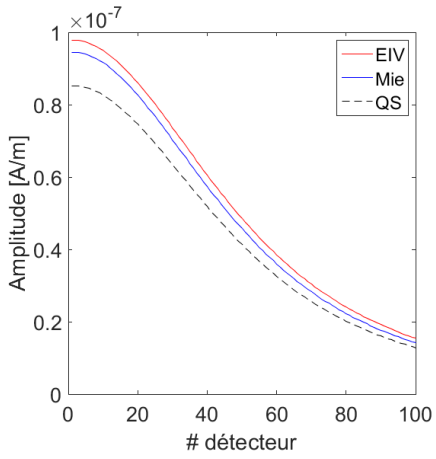
$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}^0 - j\omega\mu\epsilon_b\boldsymbol{X}\boldsymbol{g}^R\boldsymbol{e} \tag{4.20}$$

La singularité en $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ est traitée de la même façon que dans l'EIV standard, c'est-à-dire en calculant la moyenne sphérique du vecteur potentiel [97]. On trouve ainsi :

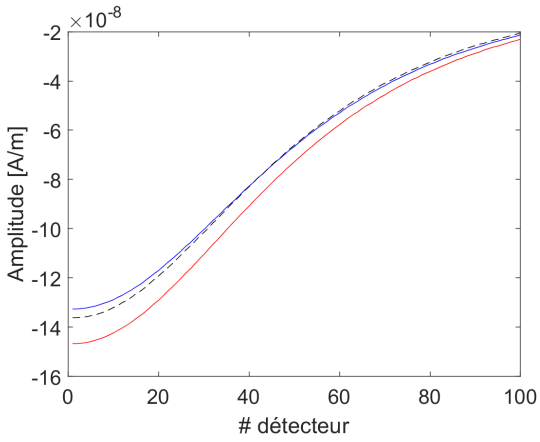
$$g_{QS} = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\Delta x}, \text{si } \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}' \\ \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}, \text{si } \boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}' \end{cases} \tag{4.21}$$

À partir de l'objet A, on peut d'abord valider le modèle direct par QS. On sait que la condition de validité du modèle QS est que $\epsilon\omega/\sigma \ll 1$. Afin de remplir cette condition, on fixe la permittivité relative de l'objet à 1, en ne considérant que la conductivité de la matière blanche. On voit aux figures 4.10a et 4.10b que les champs magnétiques diffusés calculés à partir des modèles EIV, Mie et QS concordent bien. Puis, pour étudier la convergence du problème inverse à partir du modèle QS, on se place dans un cas simple (un cube discrétisé en 7^3 voxels avec une perturbation de $X=1$ sur les trois premiers voxels de chaque axe). On remarque aux figures 4.10c et 4.10d que, pour un même nombre d'itérations, l'état de la reconstruction à partir du modèle QS est très semblable au modèle EIV. Il est à noter que, en raison de la reformulation des équations, les paramètres de régularisation ont du être adaptés ($\lambda = 10^{-2}$ pour QS et $\lambda = 10^{-8}$ pour EIV). Aux figures 4.10e et 4.10f, on voit

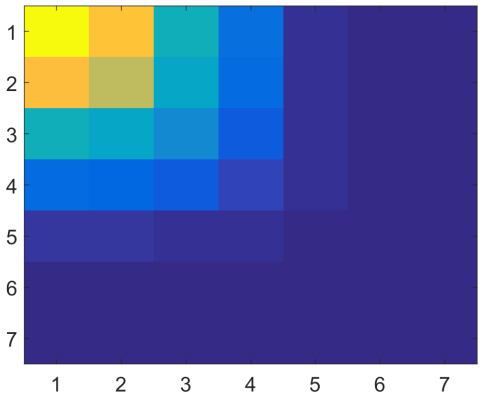
que la décroissance de la fonction objectif et de la norme du gradient normalisés pour les deux modèles ont la même allure. Il est également important de mentionner que le gradient de la fonction objectif du modèle QS a la même forme que pour le modèle EIV. Les seules modifications dans la mise en oeuvre sont que la fonction de Green vectorielle est remplacée par la fonction de Green quasi-statique et que le contraste est exprimé par la variation de conductivité.



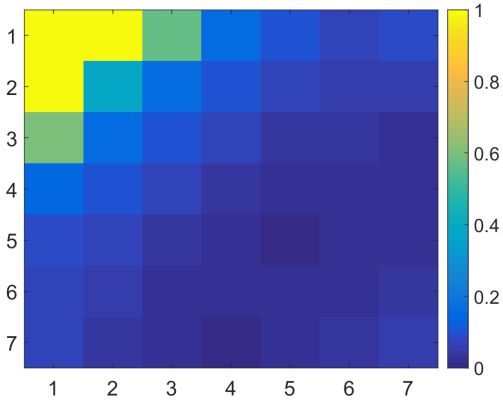
(a) $Im(H_y)$



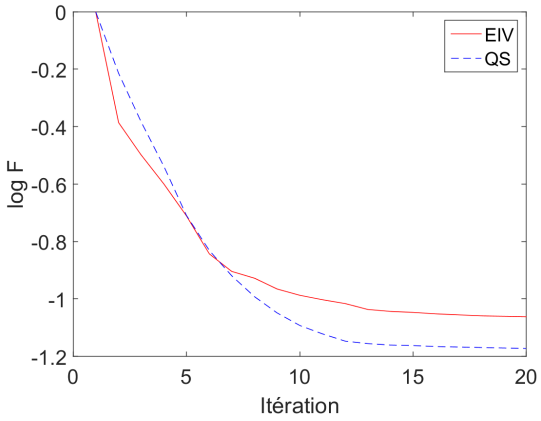
(b) $Im(H_z)$



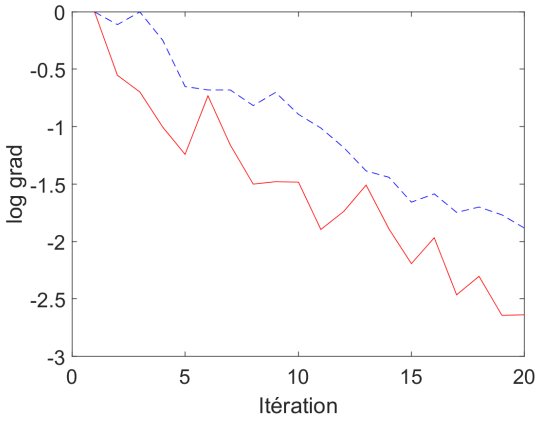
(c) $Im(X_{fin,EIV}), z = 3$



(d) $X_{fin,QS}, z = 3$



(e) Fonction objectif



(f) Norme du gradient

Figure 4.10 Validation du modèle direct, tranche centrale du domaine reconstruit et convergence de la foction objectif et de la norme du gradient pour les modèles EIV et QS.

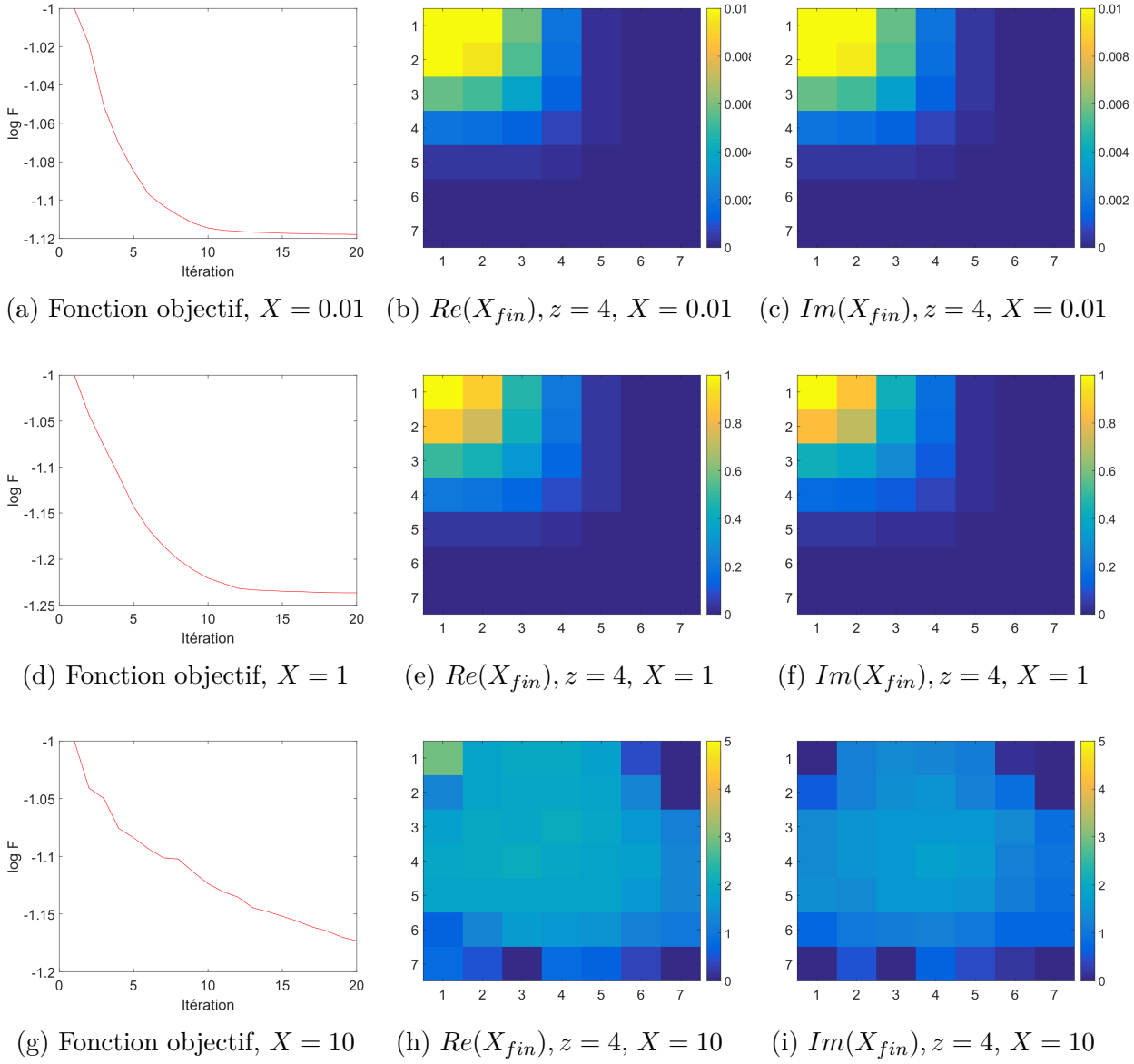
La convergence lente du modèle QS confirme que le phénomène de rupture à basse fréquence n'est pas le principal responsable de la lente convergence du problème inverse. En effet, puisque ce modèle ne considère que le courant de conduction, les différences numériques entre termes de l'opérateur $\mathcal{L}$ qui mènent au problème de conditionnement ne sont pas présentes. Si le phénomène de rupture à basse fréquence de l'EIV était la principal cause de la convergence lente, le modèle QS devrait présenter une nette amélioration à la convergence, ce qui n'est pas le cas ici.

Rupture aux forts contrastes

Rappelons que l'un des intérêts d'utiliser l'EIV plutôt qu'un modèle basé sur les intégrales surfaciques est que celles-ci sont des équations de Fredholm du deuxième type et que leurs matrices sont généralement mieux conditionnées [23]. Toutefois, malgré cette amélioration, le conditionnement dépend tout de même des propriétés diélectriques du milieu. À basse fréquence, le contraste diélectrique des tissus biologiques peut être très élevé, la permittivité pouvant atteindre des valeurs de $10^7\epsilon_0$ [26]. Ce fort contraste nuit au conditionnement des matrices et peut mener à la rupture du modèle [51].

On a vu à la figure 3.1 qu'une hausse du contraste entraîne une détérioration du conditionnement et une convergence plus lente de l'algorithme BiCGstab utilisé pour résoudre le système matriciel dans le modèle direct. Il a également été expliqué que la convergence de la méthode de type quasi-Newton utilisée pour la résolution du problème inverse est affectée par le conditionnement des opérateurs du modèle direct puisque la convergence dépend de l'étendue spectrale des valeurs singulières du Hessien de la fonction objectif. Afin de valider l'effet des valeurs de contraste sur la convergence du modèle inverse, un objet simple est utilisé. Il s'agit d'un domaine cubique discrétisé en 7^3 voxels cubiques avec une perturbation sur les trois premiers voxels de chaque axe. Les valeurs de contraste de la perturbation sont augmentées progressivement. À la figure 4.11, on voit que la méthode fonctionne bien pour des contrastes faibles (de $X = 0.01$ à $X = 1$), mais que pour des valeurs de contraste de $X = 10$, le problème inverse ne converge plus. Puisque les valeurs de contraste sont différentes pour chaque exemple, les paramètres de régularisation doivent aussi être adaptés en conséquence. La valeur de δ a été fixée à 5 % de la valeur de la variation de contraste qu'on souhaite mesurer (par exemple $\delta = 0.05$ pour $X = 1$). Plus le contraste augmente plus le paramètre λ doit être augmenté afin de garantir la convergence, les valeurs sont ici respectivement de $10^{-10}, 10^{-8}$ et 10^{-7}. De plus, en raison de la détérioration du conditionnement, le temps de calcul de chaque itération du problème inverse a augmenté en fonction des valeurs de contraste. Les temps de reconstruction pour les 20 itérations ont été respectivement de

89, 219 et 630 secondes. Il est également à noter que dans chaque cas l'initialisation a été faite avec des valeurs aléatoire sur chaque voxel du même ordre de grandeur que les valeurs de contraste de la perturbation qu'on souhaitait détecter. Le modèle GI est utilisé avec un fond homogène qui possède les propriétés diélectriques de l'air, ce qui devient équivalent au modèle EIV.



(a) Fonction objectif, $X = 0.01$ (b) $Re(X_{fin}), z = 4,\ X = 0.01$ (c) $Im(X_{fin}), z = 4,\ X = 0.01$

(d) Fonction objectif, $X = 1$ (e) $Re(X_{fin}), z = 4,\ X = 1$ (f) $Im(X_{fin}), z = 4,\ X = 1$

(g) Fonction objectif, $X = 10$ (h) $Re(X_{fin}), z = 4,\ X = 10$ (i) $Im(X_{fin}), z = 4,\ X = 10$

Figure 4.11 Fonction objectif et parties réelle et imaginaire de la tranche centrale du domaine reconstruit en fonction des valeurs de contraste.

Ceci démontre que la convergence du problème inverse dépend fortement des valeurs de contraste. Deux méthodes existent pour améliorer le conditionnement des matrices : une re-

formulation du problème [49] ou l'application d'un préconditionneur [128]. Ces deux méthodes sont considérées ici, d'une part par les modèles ELOG et GI qui sont une reformulation du problème et, d'autre part, par le préconditionnement par la matrice d'information de Fisher, qui est décrite à la section 3.3.5.

4.3.3 Forte variation de sensibilité des inconnues

Un autre phénomène qui peut avoir un effet sur la vitesse de convergence du problème inverse est la forte variation de sensibilité des inconnues à reconstruire. En effet, si les valeurs de contraste de certains voxels ont un effet négligeable sur le champ magnétique diffusé, il peut être très difficile de correctement les évaluer, ce qui mène à une convergence très lente de l'algorithme. Dans cette section, la sensibilité du modèle est analysée et on valide que la grande variation de sensibilité des inconnues n'est pas le principal facteur influençant la vitesse de convergence.

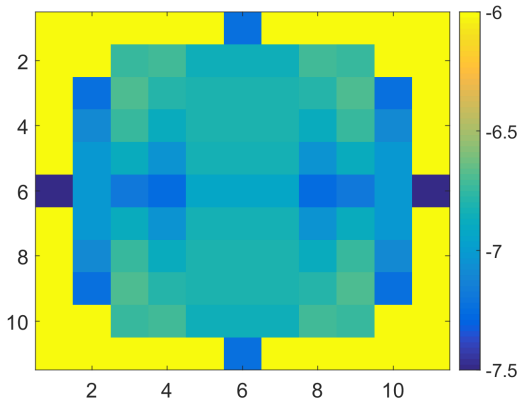
L'étude de la sensibilité d'un modèle mathématique est une étape cruciale de tout problème d'ingénierie. En effet, puisque la valeur des paramètres n'est connue que de façon imprécise, il est essentiel de déterminer l'influence de sa variation sur la solution du problème.

La sensibilité décrit l'effet de la variation d'un paramètre sur la solution. Une faible sensibilité implique donc qu'une forte variation d'un paramètre affecte peu la solution finale. À l'inverse, une forte sensibilité implique qu'une faible variation d'un paramètre entraîne une grande variation de la solution. Dans le contexte de la TIM, les paramètres d'intérêt sont les propriétés diélectriques de chaque voxel du volume d'intérêt. Idéalement, on souhaiterait avoir une sensibilité homogène dans le milieu d'intérêt, de sorte que la variation des propriétés diélectriques de chaque voxel ait un effet semblable sur le champ magnétique diffusé aux détecteurs.

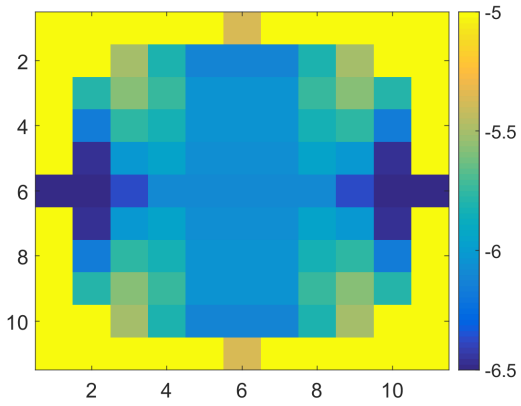
L'analyse de la sensibilité est un sujet d'intérêt en TIM [129, 130]. L'effet de peau permet de se représenter approximativement une carte de la sensibilité. En effet, sous l'effet d'un champ alternatif, la densité de courant d'un objet conducteur tend à se concentrer vers la surface. Plus la conductivité ou la fréquence est élevée, plus les courants de Foucault sont concentrés à la surface de l'objet. Conséquemment, si les courants induits dans l'objet sont concentrés en périphérie, cette région sera particulièrement sensible aux variation des propriétés diélectriques tandis que de grandes variation des propriétés diélectriques au centre de l'objet n'auront qu'un effet négligeable sur le champ magnétique mesuré.

Afin d'analyser la sensibilité du modèle direct, la matrice Jacobienne est formée (les détails du calcul du Jacobien sont donnés en annexe). Aux figures 4.12a et 4.12b, la carte de sensibilité

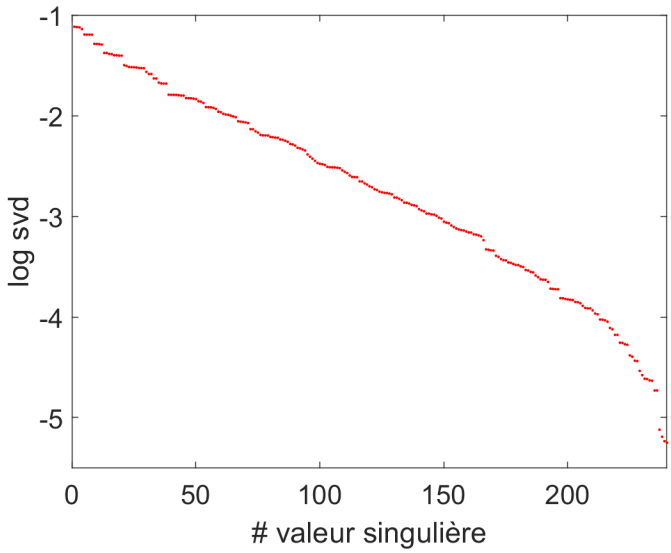
pour la tranche centrale d'une sphère de matière blanche dans l'air pour une source et un détecteur de part et d'autre de l'objet est représentée. L'objet est une sphère de matière blanche discrétisée en $n = 11^3$ voxels. La discrétisation est relativement grossière en raison du coût de calcul élevé nécessaire à former explicitement la matrice Jacobienne. On note que les voxels de l'objet qui sont les plus près du détecteur ou de la source sont plus sensibles que ceux les plus éloignés (à droite et à gauche dans la tranche centrale). De plus, l'effet de peau est clairement visible, c'est-à-dire que les voxels au centre de la sphère sont moins sensibles aux variation de contraste que ceux à la surface. On remarque également que les voxels dans l'air sont plus sensibles que ceux dans la matière blanche, ce qui montre qu'il est plus facile de déterminer les contours de l'objet que de déterminer les valeurs exactes du contraste à l'intérieur de celui-ci. Les valeurs de sensibilité varient entre $10^{-6.6}$ et $10^{-7.6}$ pour la partie réelle du contraste et entre 10^{-7} et $10^{-5.5}$ pour la partie imaginaire. Il est à noter que c'est cette caractéristique du problème (la grande variation de sensibilité) qui a justifié le choix d'une méthode de type quasi-Newton plutôt qu'une méthode du gradient comme algorithme de résolution du problème inverse puisque ces méthodes sont plus adaptées aux critères qui ont une forme elliptique, c'est-à-dire où les inconnues ont une sensibilité différente. À la figure 4.12, le spectre des valeurs singulières du Jacobien est affiché. La décroissance approximativement linéaire des valeurs singulières est une preuve additionnelle du caractère mal posé du problème [131].



(a) $\log(Re(J)), z = 6$



(b) $\log(Im(J)), z = 6$



(c) Spectre des valeurs singulières du Jacobien

Figure 4.12 Tranche centrale et valeurs singulières du Jacobien.

Il est à noter que le problème précédent représente un système parfait, sans bruit ou erreurs de mesures et que, malgré cela, l'écart entre les plus petites et les plus grandes valeurs singulières est très élevé. D'après le critère de Picard discret, qui permet de s'assurer qu'on obtient une bonne solution régularisée on sait que les petites valeurs singulières, généralement affectées par le bruit, peuvent nuire ou empêcher une reconstruction adéquate du milieu imagé [131]. La manière la plus habituelle de traiter ce problème est d'ajouter une fonction de régularisation. L'effet de la régularisation est analysé à la section 4.4.2 et son importance y est démontrée.

On voit donc qu'il existe une grande différence d'amplitude entre la sensibilité de la partie

réelle et imaginaire du contraste (d'environ 10^{-5} à $10^{-7.5}$). Afin de vérifier l'effet que cela a sur la vitesse de convergence du problème inverse, un modèle présentant une meilleure distribution de sensibilité est analysé. Si la convergence est nettement améliorée par ce nouveau modèle, cela démontrera que la forte variation de sensibilité des inconnues a un effet considérable sur la vitesse de convergence du problème inverse.

Découplage des inconnues pour réduire l'étendue de la sensibilité

En TIM, la partie imaginaire du champ magnétique diffusé dépend principalement des valeurs de conductivité, tandis que la partie réelle dépend principalement des valeurs de permittivité. À cause de ces caractéristiques, il est courant de n'utiliser que la partie imaginaire du champ magnétique pour reconstruire une carte de la conductivité du milieu d'intérêt. On forme ainsi un modèle direct $f_{Im}(\sigma)$ qui permet de réduire la différence de sensibilité des inconnues à reconstruire. En effet, puisque le modèle complet considère les parties réelles et imaginaires, la sensibilité des inconnues à reconstruire varie donc de $10^{-7.5}$ à 10^{-5}. Ce modèle découplé ne considère que la variation de conductivité, la sensibilité varie d'un ordre de grandeur de moins, soit entre $10^{-6.5}$ et 10^{-5}. Si la vitesse de convergence dépend en effet de la grande variation de sensibilité entre les inconnues, une nette amélioration de la convergence devrait être observée puisque ce modèle découplé diminue d'un ordre de grandeur la différence de sensibilité des inconnues. Le nouveau terme de contraste est défini par $\tau = \sigma(\boldsymbol{r}) - \sigma_b$. En négligeant la variation de permittivité, on passe de $\boldsymbol{X}$ à τ par $\boldsymbol{X} = -j\omega\mu_b\tau/k_b^2$. Par exemple pour le modèle EIV, l'équation d'état discrétisée devient :

$$\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{I} + j\omega\mu_b \boldsymbol{G}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{e})^{-1}\boldsymbol{e}_0 \tag{4.22}$$

et l'équation des données est :

$$\boldsymbol{h}^{scat} = -\boldsymbol{G}^R\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{e} \tag{4.23}$$

Pour la résolution du problème inverse, le gradient doit aussi être adapté. Il devient :

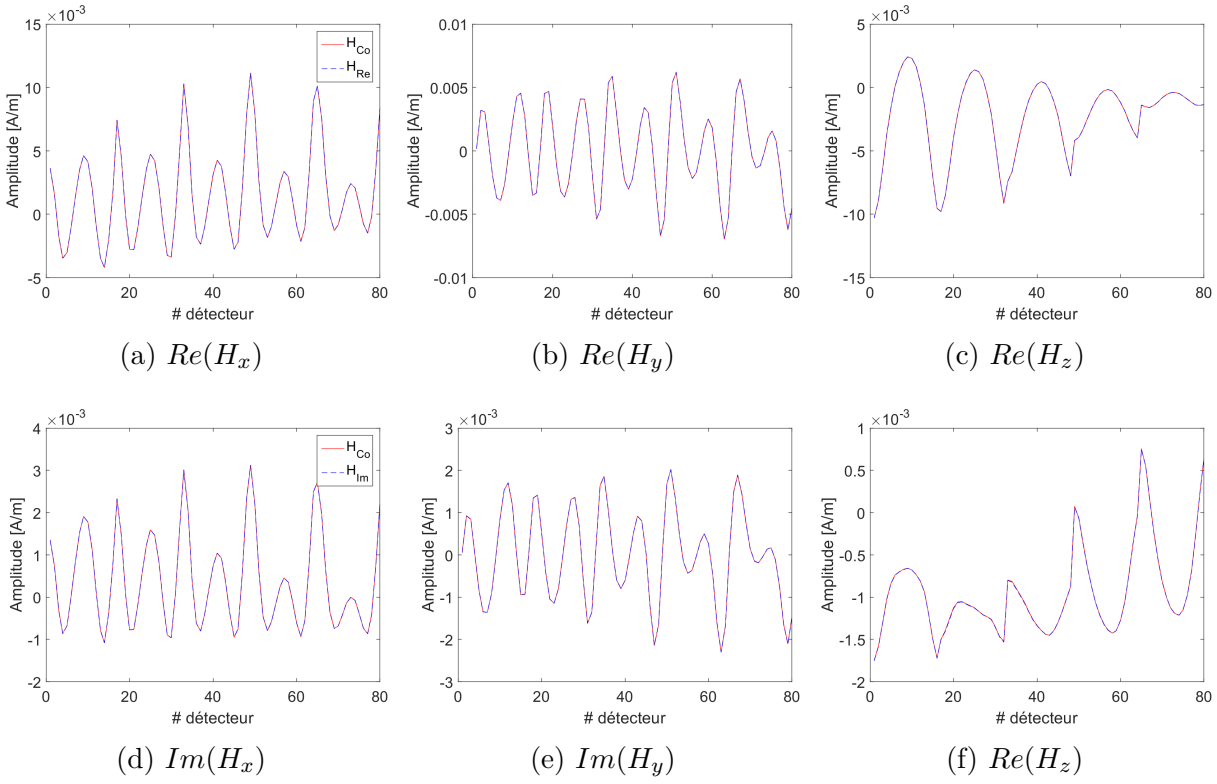
$$\text{grad} = -\sum_i \boldsymbol{J}^\dagger \text{Im}(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{f}_{simp,i}(\boldsymbol{\tau})) \tag{4.24}$$

où la transposée du Jacobien est donnée par :

$$\boldsymbol{J}^\dagger = \mathbf{diag}\{\boldsymbol{e}\}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{\tau})^{-1}\boldsymbol{G}^{R\dagger} \tag{4.25}$$

Les mêmes substitutions sont faites au modèle GI. Il est également possible de découpler le problème en reliant la permittivité à la partie réelle du champ magnétique diffusé. Deux mo-

dèles directs $f_{Im}(\sigma)$ et $f_{Re}(\epsilon)$ sont ainsi formés et les gradients de leurs fonctions objectifs sont développés. À la figure 4.13, on observe une excellente concordance entre les deux modèles pour l'évaluation du modèle direct à partir de l'objet B. Au haut, on voit les composantes de la partie réelle du champ magnétique à partir du modèle complexe et à partir du modèle $f_{Re}(\epsilon)$, tandis qu'au bas on voit les composantes de la partie imaginaire du modèle complexe comparée au modèle $f_{Im}(\sigma)$. L'erreur relative de chaque composantes est inférieure à 10^{-5}.

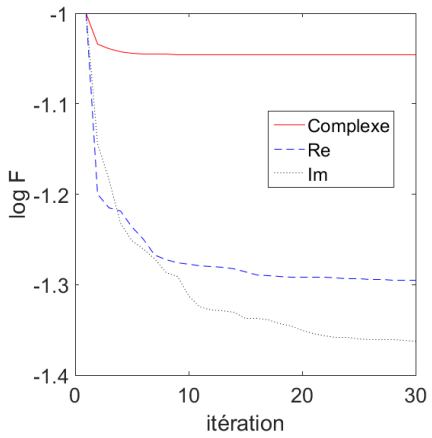


(a) $Re(H_x)$ (b) $Re(H_y)$ (c) $Re(H_z)$

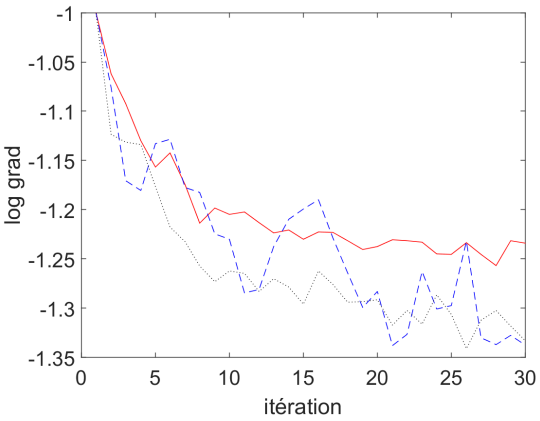
(d) $Im(H_x)$ (e) $Im(H_y)$ (f) $Re(H_z)$

Figure 4.13 Champ magnétique diffusé par l'objet B calculé par les modèles GI (complexe), $f_{Im}(\sigma)$ et $f_{Re}(\epsilon)$.

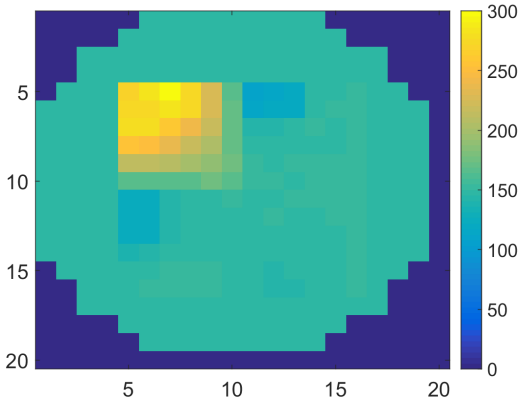
La figure 4.14 montre la reconstruction du domaine d'intérêt à partir de chacun des modèles. On voit la convergence de la fonction objectif et la norme du gradient en fonction du nombre d'itérations. Les valeurs ont été normalisées afin de permettre une comparaison adéquate. On voit la tranche centrale des parties réelle et imaginaire de l'objet reconstruit à partir du modèle complexe qui reconstruit simultanément les parties réelle et imaginaire. On voit la même tranche centrale du domaine reconstruit à partir des modèles $f_{Re}(\epsilon)$ et $f_{Im}(\sigma)$.



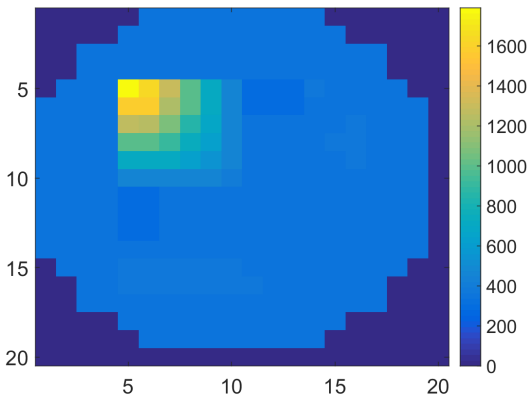
(a) Fonction objectif



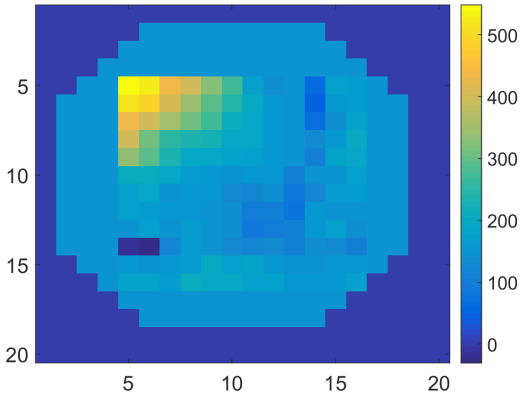
(b) Norme du gradient



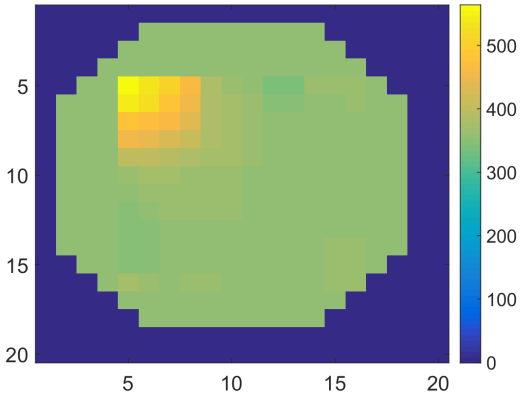
(c) $Re(X_{fin,GI}), z = 10$



(d) $Im(X_{fin,GI}), z = 10$



(e) $X_{fin,Re}, z = 10$



(f) $X_{fin,Im}, z = 10$

Figure 4.14 Reconstruction par GI, par $f_{Im}(\sigma)$ et par $f_{Re}(\epsilon)$.

On observe que la norme du gradient décroît légèrement plus rapidement pour les modèles $f_{Im}(\sigma)$ et $f_{Re}(\epsilon)$ que pour le modèle complexe. Cette amélioration à la convergence peut être expliquée par le fait que le nombre d'inconnues à résoudre est diminué de moitié. Toutefois, cette légère amélioration à la convergence est négligeable par rapport l'amélioration obtenue en diminuant les valeurs du contraste. La variation de sensibilité dans les inconnues ne semble donc pas être le principal facteur affectant la vitesse de convergence.

4.3.4 Conclusion

En résumé, cette section a étudié différents aspects qui peuvent affecter la convergence du problème inverse, notamment le choix du modèle direct, le phénomène de rupture à basse fréquence et aux forts contrastes et la variation de sensibilité des inconnues. On a vu que les modèles ELOG et GI permettent de faire un changement de variable où la nouvelle inconnue à reconstruire est de plusieurs ordres de grandeur plus faible. Ceci mène à un meilleur conditionnement de l'opérateur de diffusion et le système matriciel est donc résolu plus rapidement à chaque itération. La formulation du modèle ELOG mène toutefois à un grand nombre de systèmes matriciels qui doivent être résolus à chaque itération du problème inverse, contrairement au modèle GI qui présente le même nombre de systèmes à résoudre que le modèle EIV. En se plaçant dans un cas où l'approximation quasi-statique est valide, la convergence du modèle QS a été comparée au modèle EIV. Puisque le modèle QS ne présente pas d'amélioration considérable à la convergence, on en conclut que le phénomène de rupture à basse fréquence ne semble pas grandement affecter la convergence du modèle. Toutefois, en variant l'amplitude du contraste de la perturbation à reconstruire, on a vu qu'il devient rapidement très difficile d'obtenir une reconstruction adéquate. La convergence devient plus lente et la régularisation doit être de plus en plus forte pour de ne pas converger vers un minimum local. Finalement, un modèle découplé reliant la conductivité à la partie imaginaire du champ magnétique a été développé. Puisque les seules inconnues de ce modèle sont les valeurs de conductivité, il existe une moins grande variation de sensibilité dans les inconnues à reconstruire que pour le modèle EIV standard. En comparant la convergence du modèle simplifié à celle du modèle complexe, on a observé que la convergence n'est pas améliorée de façon considérable. Le principal facteur affectant la vitesse de convergence du problème inverse semble donc être les valeurs de contraste élevées associées aux tissus biologiques dans la gamme de fréquence de la TIM.

4.4 Limites du modèle GI

Le modèle proposé pour la reconstruction d'images en TIM est limité par plusieurs facteurs. Ces limites peuvent être divisées en deux catégories : celles qui concernent le modèle direct et celles qui concernent le problème inverse. Les sources d'erreurs du modèle direct sont la taille de la discrétisation, la tolérance de l'algorithme itératif pour résoudre les systèmes matriciels et les erreurs d'arrondis dus à la précision machine limitée. L'effet de ces paramètres a été détaillé à la section 4.2.

Le second type de limites concerne la résolution du problème inverse. Puisque le problème inverse est mal-posé au sens d'Hadamard, une attention particulière doit être apportée à sa résolution. Premièrement, les données réelles ne sont pas parfaites, elles ont un certain niveau de bruit qui peut être défini par le rapport signal sur bruit (RSB). Deuxièmement, on a vu que le conditionnement du problème peut devenir problématique et qu'il est relié à la fréquence de la source et aux valeurs de contraste du milieu d'intérêt. Troisièmement, pour des applications réalistes, le problème inverse est généralement sous-déterminé, c'est-à-dire que le nombre d'inconnues est plus grand que le nombre de mesures indépendantes. Finalement, on a vu que la sensibilité des voxels varie de quelques ordres de grandeur à l'intérieur du domaine d'intérêt. Une large perturbation en périphérie engendrera une plus grande variation au champ magnétique qu'une petite perturbation au centre du domaine. La taille et la position des perturbations est donc aussi un facteur limitant dans la reconstruction d'images.

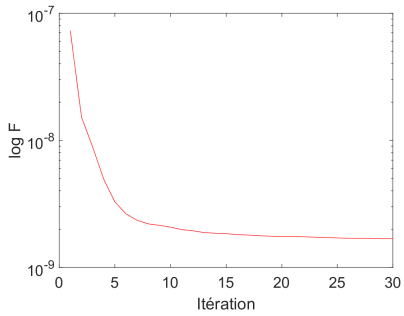
Il convient de noter que ces différents paramètres sont interdépendants et qu'il est donc impossible de donner une valeur limite fixe qui s'applique à tous les scénarios possibles. Par exemple, plus le signal provenant de la perturbation est important, plus le système supportera un RSB faible. De même, plus le ratio connues sur inconnues est important, plus il sera possible de reconstruire de petites perturbations avec un faible RSB. Des détails sur l'influence de chaque paramètre sont donnés dans les sections suivantes.

4.4.1 Reconstructions réalistes

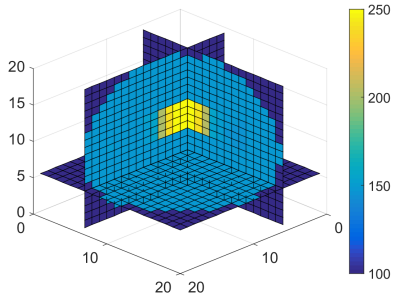
L'objectif de ce mémoire n'est pas de proposer un domaine de simulation le plus représentatif possible du corps humain, mais plutôt de démontrer l'intérêt et l'applicabilité de l'EIV dans le cadre de la TIM. Dans ce contexte, un domaine de simulation simple, à l'instar de [117, 29, 118], est également considéré, soit l'objet B décrit à la section 4.1.2.

Un second objet, ayant les mêmes caractéristiques que l'objet B, mais qui inclut aussi une couche de liquide cérébro-spinal à l'intérieur de la sphère de matière blanche est considéré

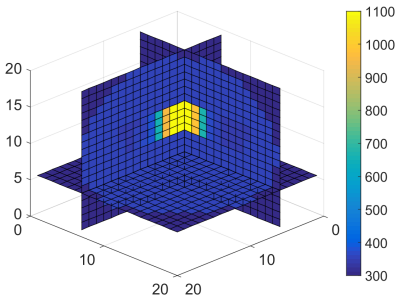
[30]. L'intérêt d'inclure une couche de liquide cérébro-spinal est que cette matière est celle qui présente la plus forte conductivité dans la tête. Puisque cette couche se trouve relativement près de la surface, elle peut avoir un effet considérable sur la distribution des courants de Foucault. Les figures 4.15a, 4.15b et 4.15c montrent la convergence de la fonction objectif et de la norme du gradient ainsi que les parties réelle et imaginaire du domaine reconstruit après 30 itérations du solveur inverse pour l'objet B sans la couche de liquide cérébro-spinal (LCS), tandis que les figures 4.15d, 4.15e et 4.15f présentent les résultats avec cette couche. On remarque que les deux reconstructions sont adéquates et que l'ajout de la couche de liquide cérébro-spinal n'empêche pas la détection de la perturbation.



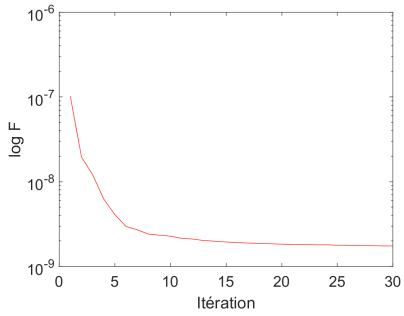
(a) Fonction objectif sans LCS



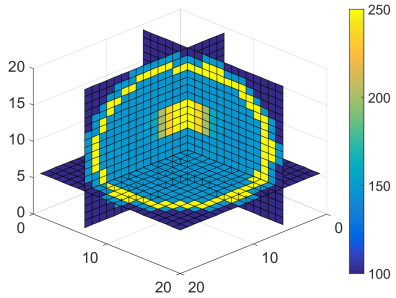
(b) $Re(X_{fin})$ sans LCS



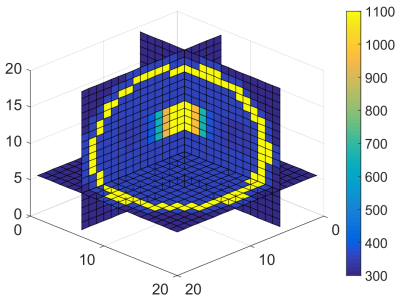
(c) $Im(X_{fin})$ sans LCS



(d) Fonction objectif avec LCS



(e) $Re(X_{fin})$ avec LCS



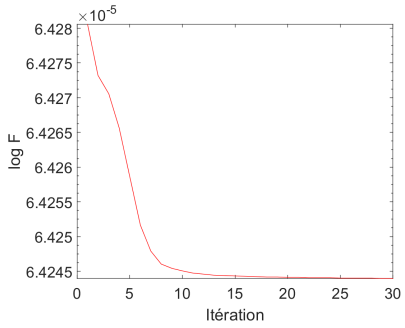
(f) $Im(X_{fin})$ avec LCS

Figure 4.15 Reconstruction d'un caillot sanguin dans une sphère de matière blanche avec et sans une couche de liquide cérébro-spinal.

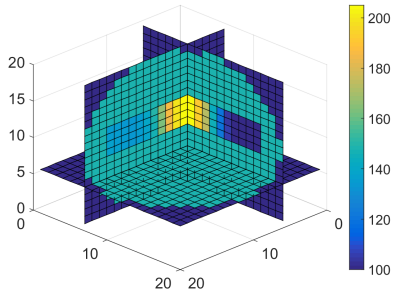
Il est à noter qu'une régularisation a été appliquée aux problèmes précédents. Des paramètres de $\lambda = 10^{-11}$ et $\delta = 0.05$ ont été déterminés empiriquement. Pour le reste des simulations, à moins de mention contraire, les paramètres de régularisation resteront les mêmes.

4.4.2 Rapport signal sur bruit

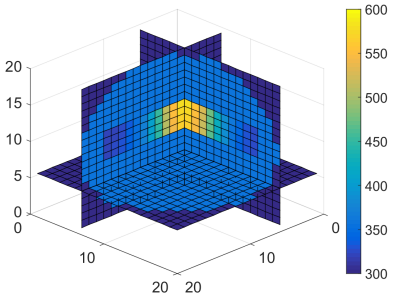
À cause du caractère mal posé du problème, une faible variation des données peut mener à une grande variation dans la reconstruction du domaine d'intérêt. On s'attend donc à ce que le problème soit très sensible au bruit. On a vu qu'avec un RSB de 70 dB, on arrive tout de même à identifier correctement la perturbation de sang dans la sphère de matière blanche. On cherche maintenant à définir la limite à laquelle le rapport signal sur bruit est trop élevé pour permettre une reconstruction adéquate de la perturbation qu'on cherche à détecter. La figure 4.16 montre l'état de la reconstruction avec un RSB de 40 dB et avec un RSB de 30 dB. À 40dB, on arrive à adéquatement reconstruire la perturbation dans le milieu d'intérêt, tandis qu'elle est très difficilement détectable à 30 dB. La limite de RSB semble donc se situer entre 30 et 40 dB. Il est à noter que, puisque le paramètre de régularisation λ dépend du niveau de bruit, il a dû être augmenté à $\lambda = 10^{-10}$ pour l'exemple à 40 dB et à 10^{-9} pour l'exemple à 30 dB afin de ne pas converger vers un minimum local. On remarque que la régularisation a l'effet de lisser la perturbation dans les directions x et y, mais pas en z puisque le volume d'intérêt est ici restreint aux 4 tranches centrales en z.



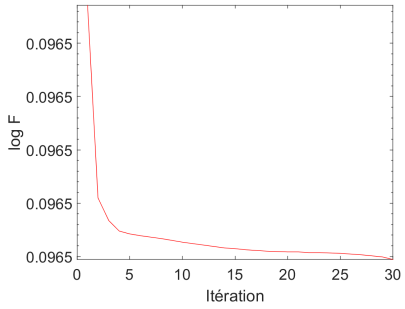
(a) Fonction objectif, RSB=40 dB



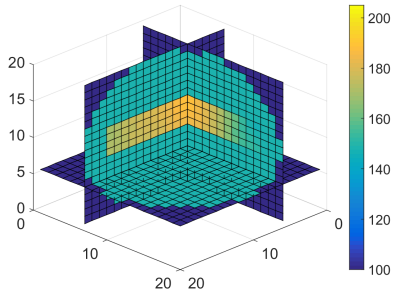
(b) $Re(X_{fin})$, RSB=40 dB



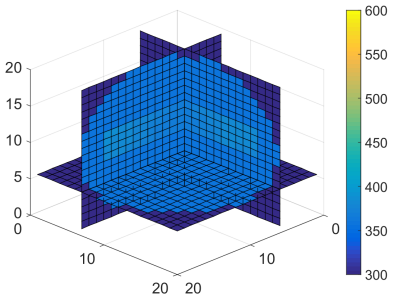
(c) $Im(X_{fin})$, RSB=40 dB



(d) Fonction objectif, RSB=30 dB



(e) $Re(X_{fin})$, RSB=30 dB



(f) $Im(X_{fin})$, RSB=30 dB

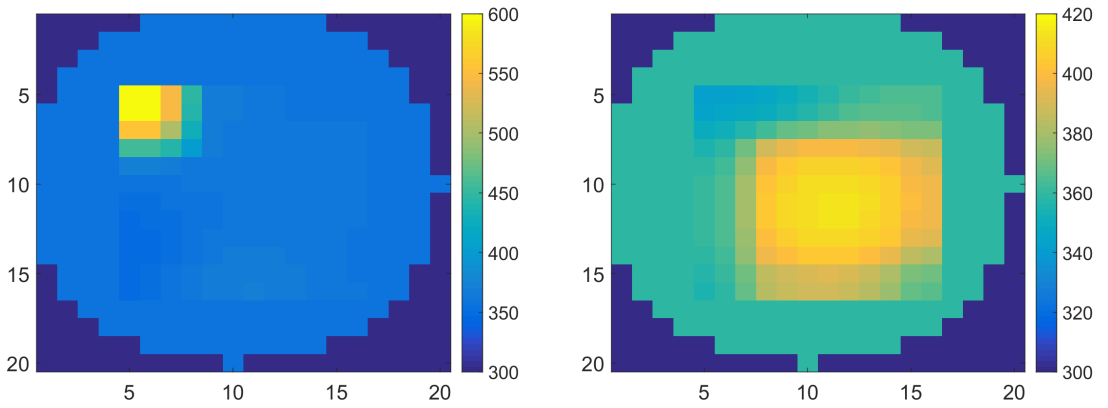
Figure 4.16 Convergence de la fonction objectif et parties réelles et imaginaire du domaine reconstruit après 30 itérations pour RSB=40 dB et RSB=30 dB à $f = 10$ MHz.

Il a été montré à la section précédente que les valeurs singulières du Jacobien décroissent de façon linéaire, ce qui démontre le caractère mal posé. Une régularisation du problème est essentielle afin d'assurer la convergence. Parmi les différentes fonctions de régularisation présentées au chapitre 2, le choix s'est porté sur la fonction hyperbolique. Cette fonction nécessite la détermination de deux termes : premièrement le terme λ qui définit son importance par rapport au critère et deuxièmement l'hyperparamètre δ qui définit le point autour duquel le comportement de la fonction de régularisation passe de quadratique à linéaire. Il est important de choisir judicieusement ces deux paramètres car ils ont un effet crucial sur la reconstruction. Par exemple, avec un terme λ trop faible, on risque de converger vers un minimum local. Avec un hyperparamètre δ trop faible ou trop fort, la régularisation a pour effet de trop lisser l'image, ce qui équivaut à une régularisation de Tikhonov. Un terme δ adéquat a pour effet de créer un domaine lisse par morceaux, c'est-à-dire que les petites variations sont fortement pénalisées tandis que les plus grandes sont permises. La valeur de δ est généralement fixée entre 1 et 10% des variations de contraste qu'on souhaite préserver.

4.4.3 Fréquence

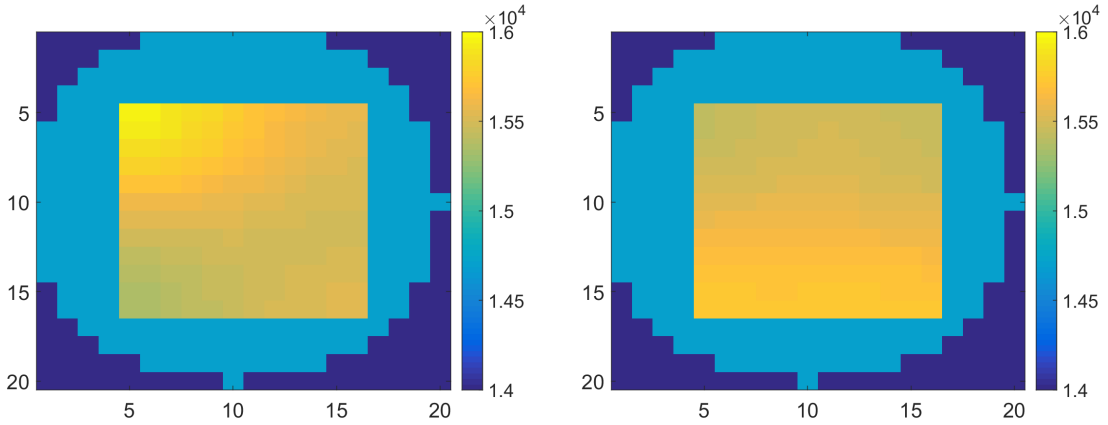
La fréquence a plusieurs effets sur le modèle, notamment sur la profondeur de peau, la différence de contraste entre les tissus, la résolution et le conditionnement. Plus la fréquence est élevée, meilleure seront la résolution et le conditionnement, mais au détriment de la profondeur de peau et de la différence de contraste entre les tissus. Il convient d'étudier l'effet de la fréquence sur ces paramètres. Théoriquement, une fréquence élevé concentre les courants induits à la surface de l'objet et améliore la sensibilité dans cette région, tandis qu'une fréquence plus faible permet une plus grande pénétration dans les tissus. Un choix judicieux de la fréquence permettrait d'optimiser certaines applications. Par exemple, une fréquence plus élevée pourrait être souhaitable pour détecter une perturbation de plus petite taille près de la surface de la tête, tandis qu'une fréquence plus faible pourrait être souhaitable pour détecter une perturbation plus large au centre du domaine.

Toutefois, à cause de la nature des équations du modèle EIV, le conditionnement se détériore rapidement lorsque la fréquence diminue puisque les valeurs des propriétés diélectriques augmentent. En pratique, il est donc très difficile, voire impossible, de reconstruire des perturbations dans le bas de la gamme des fréquences d'intérêt à partir de ce modèle. On voit en effet à la figure 4.17 qu'à 10 MHz on détecte bien la petite perturbation en périphérie, tandis que celle au centre est plus difficilement distinguable. Toutefois, à cause de la dégradation du conditionnement, aucune de ces deux perturbations n'apparaît clairement à 100 kHz.



(a) $Im(X_{fin}), z = 10, f = 10$ MHz, petite perturbation en surface

(b) $Im(X_{fin}), z = 10, f = 10$ MHz, large perturbation en profondeur



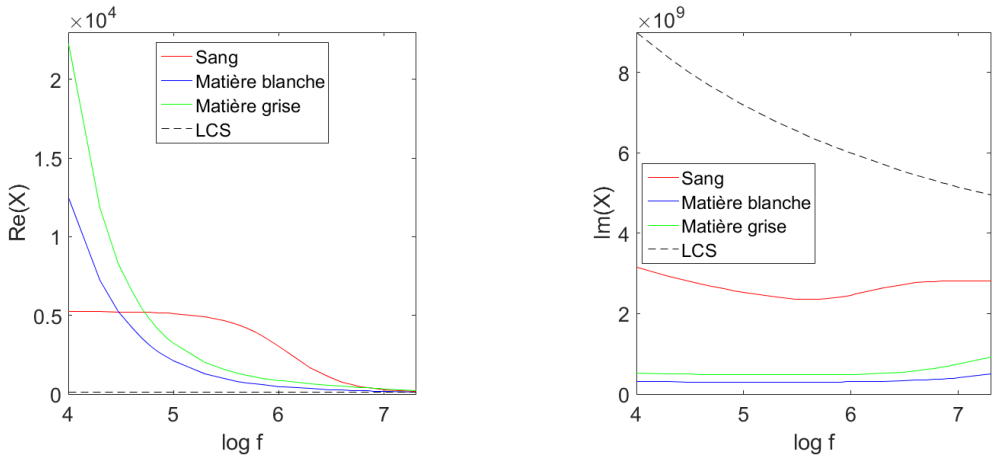
(c) $Im(X_{fin}), z = 10, f = 100$ kHz, petite perturbation en surface

(d) $Im(X_{fin}), z = 10, f = 100$ kHz, large perturbation en profondeur

Figure 4.17 Reconstruction pour une petite perturbation en périphérie et une large perturbation au centre à des fréquences de 10 MHz et de 100 kHz.

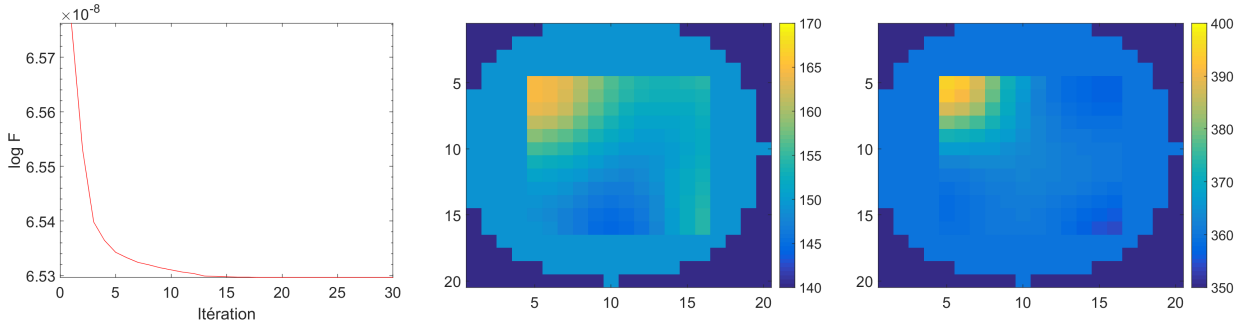
Outre l'effet de peau, un autre désavantage d'utiliser les plus hautes fréquences (dans les MHz) est que la différence de contraste entre les différents tissus est plus faible qu'à basse fréquence. On s'intéresse maintenant à caractériser la limite de résolution du contraste, c'est-à-dire à définir quels tissus il est possible de différencier lors de la résolution du problème inverse. Les quatre tissus présentant les propriétés diélectriques les plus représentatives de la tête sont la matière blanche, la matière grise, le liquide cérébro-spinal (LCS) et le sang. Il est à noter que les propriétés diélectriques de ces tissus varient en fonction de la fréquence et que, par conséquent, la capacité à différencier ces tissus va varier en fonction de la fréquence d'intérêt. Les figures 4.18a et 4.18b montrent les parties réelles et imaginaires du contraste

de ces quatre tissus en fonction de la fréquence. La limite de résolution de contraste ne semble pas être problématique pour le modèle GI. En effet, à la figure 4.18, on voit qu'on arrive à adéquatement reconstruire une perturbation qui représente une variation de 10 % des propriétés diélectriques de la matière blanche, tandis qu'une perturbation de 1 % n'est pas adéquatement reconstruite. Cette capacité à détecter une variation de 10 % des propriétés diélectriques est amplement suffisante pour distinguer les principaux tissus. Par exemple, la permittivité relative et la conductivité de la matière blanche à 10 MHz sont respectivement de 176 et 0.158 S/m, tandis que celles du sang sont de 280 et 1.1 S/m, ce qui représente des variations respectives de 37 % et 85 %. La différence est d'environ 45 % entre les propriétés diélectriques de la matière blanche et de la matière grise.



(a) Partie réelle du contraste par rapport à l'air de différents tissus

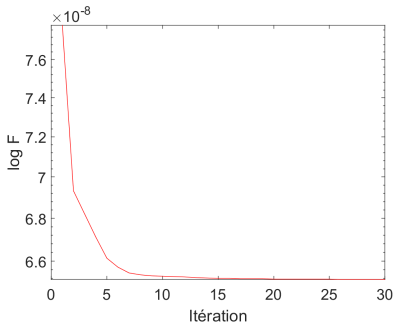
(b) Partie imaginaire du contraste par rapport à l'air de différents tissus



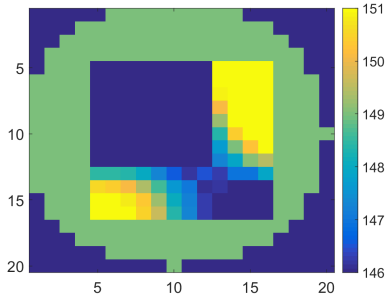
(c) Fonction objectif, pert=10%

(d) $Re(X_{fin})$, pert=10%

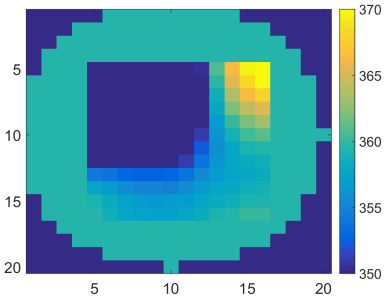
(e) $Im(X_{fin})$, pert=10%



(f) Fonction objectif, pert=1%



(g) $Re(X_{fin})$, pert=1%



(h) $Im(X_{fin})$, pert=1%

Figure 4.18 Contraste diélectrique de différents tissus en fonction de la fréquence, fonctions objectif et tranche $z = 10$ des reconstructions pour des perturbations de 10% et 1%.

En résumé, le choix de la meilleure fréquence en TIM biomédicale est sujet à discussion. Plus la fréquence est basse, plus la différence entre les propriétés diélectriques du sang et des tissus cérébraux est élevée, ce qui offre un meilleur contraste. De plus, en travaillant

à basse fréquence, l'onde électromagnétique pénètre plus profondément dans les tissus, ce qui permet d'améliorer la sensibilité des régions plus centrales. Toutefois, plus la fréquence augmente, plus les variations dans le phase dues à la perturbation sont fortes, ce qui contribue à augmenter la sensibilité. Par contre, en augmentant la fréquence, l'effet de peau apparaît progressivement, ce qui concentre les courants de Foucault dans les régions en périphérie et qui diminue donc la sensibilité de la région centrale. Une haute fréquence favorise donc une meilleure résolution. Le lien entre la résolution et la fréquence n'est pas simple à établir, il faut passer par la fonction d'étalement de point et son développement est hors du cadre de ce travail [132]. La majorité des auteurs ont conclu qu'une fréquence optimale semble se trouver aux alentours de 10 à 20 MHz [5, 117]. De plus, en ce qui concerne le modèle GI proposé dans ce projet, on a vu qu'il est très difficile, voire impossible de reconstruire des perturbation en travaillant à basse fréquence en raison de la dégradation du conditionnement des opérateurs.

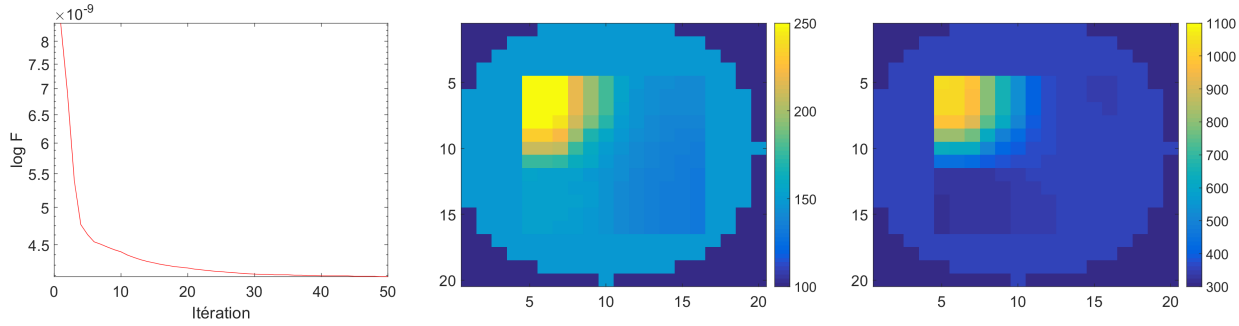
4.4.4 Nombre de mesures

Le problème inverse en tomographie est généralement un problème sous-déterminé, c'est-à-dire que le nombre d'inconnues à reconstruire est plus grand que le nombre de mesures indépendantes. L'évaluation du nombre de mesures indépendantes est un sujet complexe. Rappelons que les inconnues du problème sont les valeurs du contraste diélectrique sur chaque voxel, tandis que les valeurs connues sont les mesures du champ magnétique aux détecteurs pour chaque source. On a donc $N_d \cdot N_s$ connues complexes et n inconnues complexes, où N_d est le nombre de détecteurs, N_s le nombre de sources et n le nombre de voxels dans le domaine d'intérêt.

La question de réduire le nombre de mesures est particulièrement intéressante dans l'optique de diminuer le coût de calcul. En effet, avec la méthode numérique employée, le problème direct doit être résolu itérativement pour chaque source. Le nombre de récepteurs joue également un rôle dans la taille des systèmes matriciels, notamment pour la fonction de Green $\boldsymbol{G}^R$. Diminuer le nombre de sources et détecteurs permet donc de considérablement accélérer le temps de calcul lors de la résolution du problème inverse en diminuant le nombre de systèmes matriciels à résoudre et en réduisant la taille des matrices. De plus, on a vu à la section 3.4.1 que, grâce au principe de réciprocité de Lorentz, le problème peut être formulé tant en fonction des sources qu'en fonction des détecteurs. Ceci permet de réduire encore davantage le nombre de systèmes matriciels à résoudre en choisissant d'exprimer le problème en fonction du nombre le plus petit entre N_s et N_d.

Réduire le nombre de sources et de détecteurs permet donc de grandement diminuer le coût de calcul, tant dans le calcul du critère que celui du gradient. Toutefois, plus un problème

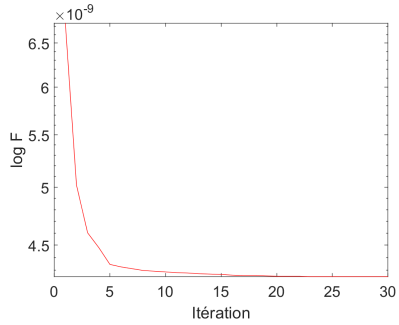
est sous-déterminé, plus on peut s'attendre à ce que la convergence du problème inverse soit lente et plus la régularisation joue un rôle important. À la figure 4.19, on voit qu'on arrive à adéquatement reconstruire la perturbation avec 18 sources et 18 détecteurs (distribués uniformément sur trois plans en $z = \{-1, 0, 1\}$ cm), tandis que la reconstruction n'est plus détectable avec 12 sources et 12 détecteurs. Puisque dans le premier cas le nombre de voxels inconnus est de $12 \times 12 \times 4 = 576$ et que le nombre de mesures est de $18^2 = 324$, la limite de ratio connues sur inconnues semble se situer aux alentours de 50 % pour le domaine de simulation considéré.



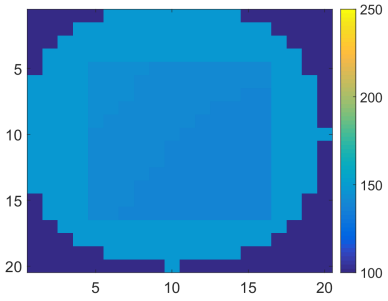
(a) Fonction objectif, $N_d = N_s = 18$

(b) $Re(X_{fin}), z = 10$, $N_d = N_s = 18$

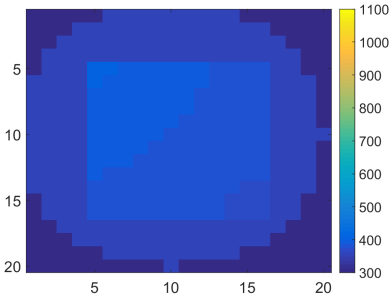
(c) $Im(X_{fin}), z = 10$, $N_d = N_s = 18$



(d) Fonction objectif, $N_d = N_s = 12$



(e) $Re(X_{fin}), z = 10$, $N_d = N_s = 18$



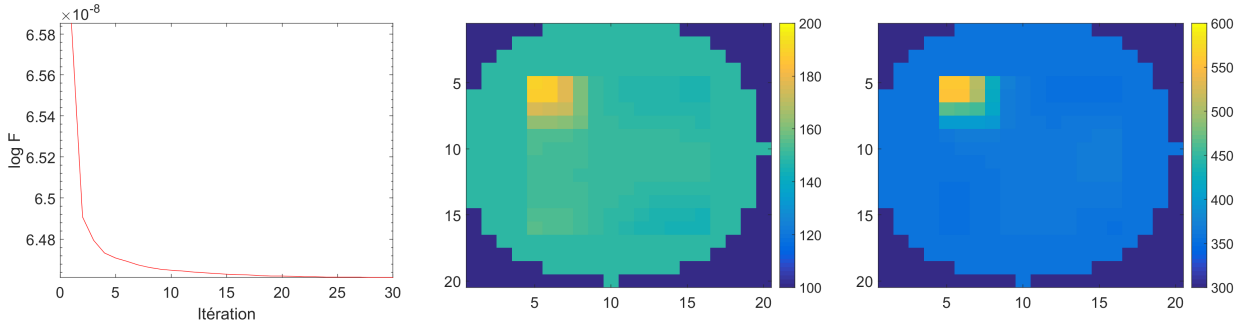
(f) $Im(X_{fin}), z = 10$, $N_d = N_s = 12$

Figure 4.19 Fonction objectif et reconstructions pour différents nombres de mesures.

4.4.5 Taille et position de la perturbation

À la section 4.3.3, en analysant le Jacobien du système, on a vu que la sensibilité de chaque voxel à l'intérieur du domaine d'intérêt n'est pas la même, elle peut varier de quelques ordres de grandeur. Ce phénomène est expliqué par l'effet de peau, c'est-à-dire que les courants de Foucault ont tendance à se concentrer à la surface de l'objet conducteur. Ceci implique qu'une variation des propriétés diélectriques à la périphérie du domaine d'intérêt engendre une plus

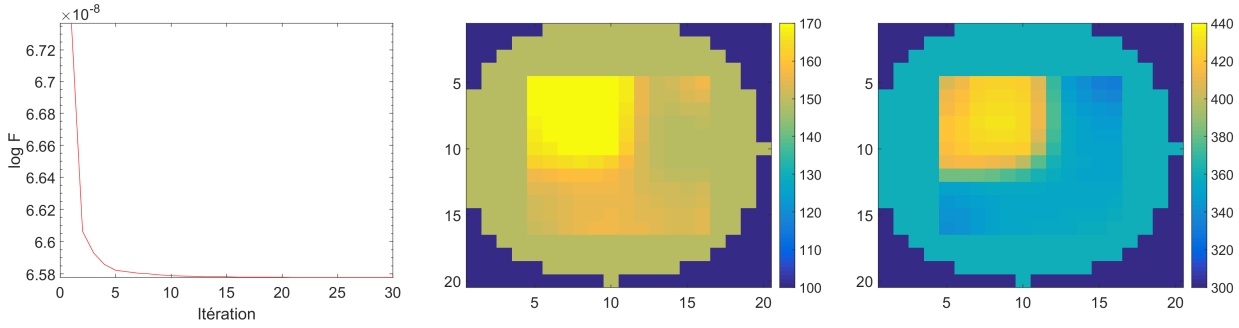
grande variation dans le champ magnétique diffusé que le ferait une même perturbation dans la région centrale de l'objet. On s'attend donc à ce qu'il soit plus facile de reconstruire un domaine avec une perturbation en périphérie qu'au centre. De même, plus la perturbation est de petite taille, moins la variation du champ magnétique est importante. Une plus petite perturbation est donc plus difficilement détectable. On s'intéresse maintenant à caractériser les tailles et les positions des perturbations qu'il est possible de reconstruire avec le modèle GI. À la figure 4.20, on voit la reconstruction de perturbations de 8 voxels et 27 voxels cubiques à différentes profondeurs et à la figure 4.21 on voit la reconstruction d'une perturbation de différentes taille près de la surface de la sphère. Les positions exactes des perturbations sont données en fonction des numéros de voxels.



(a) Fonction objectif, $x_{pert} = [5,6], y_{pert} = [5,6], z_{pert} = [9,10]$

(b) $Re(X_{fin}), z = 10$, $x_{pert} = [5,6], y_{pert} = [5,6], z_{pert} = [9,10]$

(c) $Im(X_{fin}), z = 10$, $x_{pert} = [5,6], y_{pert} = [5,6], z_{pert} = [9,10]$



(d) Fonction objectif, $x_{pert} = [7,9], y_{pert} = [7,9], z_{pert} = [8,10]$

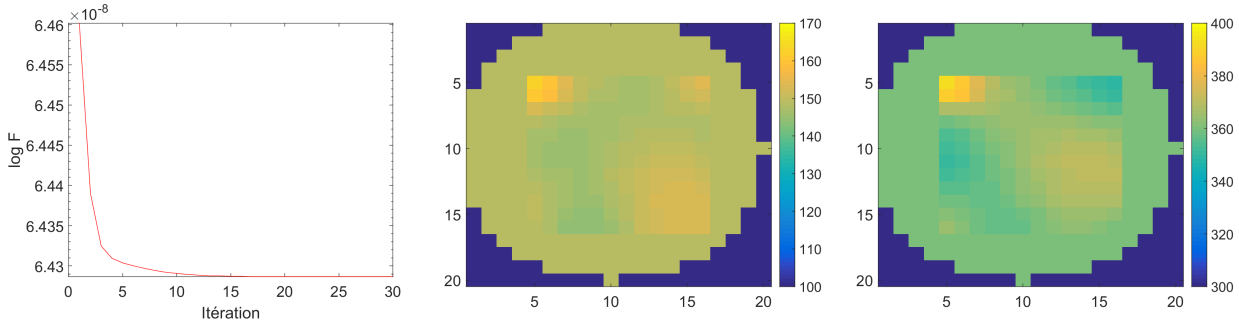
(e) $Re(X_{fin}), z = 10$, $x_{pert} = [7,9], y_{pert} = [7,9], z_{pert} = [8,10]$

(f) $Im(X_{fin}), z = 10$, $x_{pert} = [7,9], y_{pert} = [7,9], z_{pert} = [8,10]$

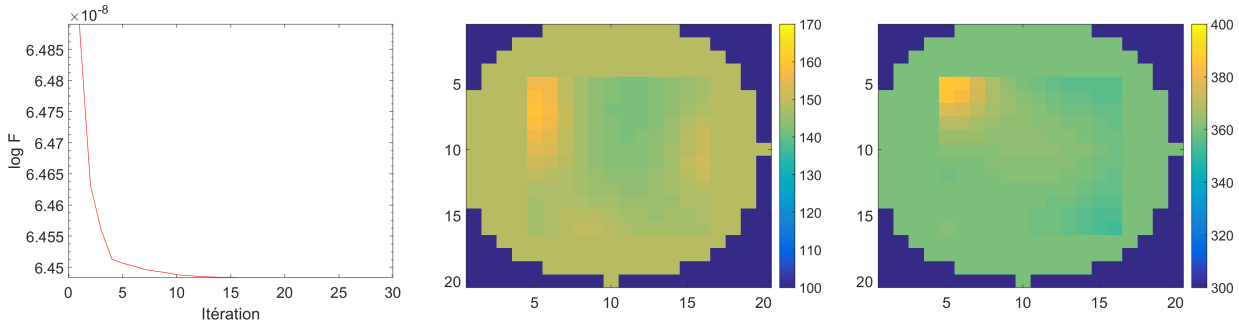
Figure 4.20 Reconstruction d'une perturbation à différentes profondeurs.

On remarque à la figure 4.20 que la première perturbation de 8 cm^3 à une profondeur de 4.2 cm est très bien détectée, tandis que la seconde reconstruction de la perturbation de 27 cm^3 à une profondeur de 7.1 cm est de moins bonne qualité. Pour la seconde, on voit en effet

qu'il y a une perturbation dans le domaine, mais les contours sont mal définis et les valeurs de contrastes sont considérablement sous-évaluées. Il est difficile de déterminer une limite exacte quant à la profondeur à laquelle il est possible de détecter une perturbation car cette valeur dépend de plusieurs paramètres dont : le nombre de mesures, le niveau de bruit, la fréquence utilisée et la taille de la perturbation. Avec les paramètres du montage de l'objet B (un problème surdéterminé avec un RSB de 70 dB), cette limite semble se situer autour de 7 cm pour une perturbation ayant un volume de 8 cm^3.



(a) Fonction objectif, profondeur=4.24 cm (b) $Re(X_{fin}), z = 10$, profondeur=4.24 cm (c) $Im(X_{fin}), z = 10$, profondeur=4.24 cm



(d) Fonction objectif, profondeur=4.65 cm (e) $Re(X_{fin}), z = 10$, profondeur=4.65 cm (f) $Im(X_{fin}), z = 10$, profondeur=4.65 cm

Figure 4.21 Reconstruction d'une perturbation de 1 cm^3.

À la figure 4.21, on voit que la limite de la taille de la perturbation n'est pas le facteur le plus problématique puisqu'on arrive à correctement identifier une perturbation de 1 cm^3 si celle-ci se trouve assez près de la surface. Toutefois, la reconstruction commence à se dégrader lorsque cette même perturbation se trouve plus en profondeur. Par exemple à la figure 4.21, la partie réelle du contraste est moins bien définie lorsque la perturbation se trouve à 4.65 cm de profondeur. À partir d'une profondeur de 7 cm, il a été impossible de reconstruire adéquatement la perturbation.

4.5 Réduction du temps de calcul

Rappelons que deux approches sont considérées pour réduire le temps de calcul. La première est de réduire le coût de calcul du problème direct. Une résolution efficace du problème direct est essentiel car il est nécessaire d'évaluer le modèle direct à N_s (ou N_d si le principe de réciprocité est utilisé) reprises à chaque itération du problème inverse. La transformée de Fourier rapide (FFT) et l'algorithme Bloc-BiCGstab sont deux méthodes qui ont déjà été appliquées à l'EIV, par exemple dans le cadre de la tomographie micro-ondes et qui sont considérées ici. La FFT est communément appliquée à l'EIV et ses avantages par rapport au calcul par produit matriciel standard sont bien connus [22]. L'algorithme Bloc-BiCGstab n'a toutefois encore jamais été appliqué à la TIM et son impact sur le coût de calcul de la résolution du problème direct est une des contributions de ce projet. La deuxième approche utilisée pour réduire le coût de calcul est d'accélérer la convergence du problème inverse en améliorant les propriétés du système matriciel. L'impact d'un préconditionnement par la matrice d'information de Fisher (MIF) sur la convergence du problème inverse est également étudié dans cette section.

4.5.1 Approche par blocs

On cherche maintenant à vérifier si une méthode Bloc permet de diminuer le nombre d'itérations avant de converger vers le seuil de convergence fixé. Rappelons que, pour le modèle direct avec une formulation par fonction de Green inhomogène, deux systèmes d'équations doivent être résolus à chaque itération du problème inverse. Le premier pour le calcul du critère et le second pour le calcul du gradient :

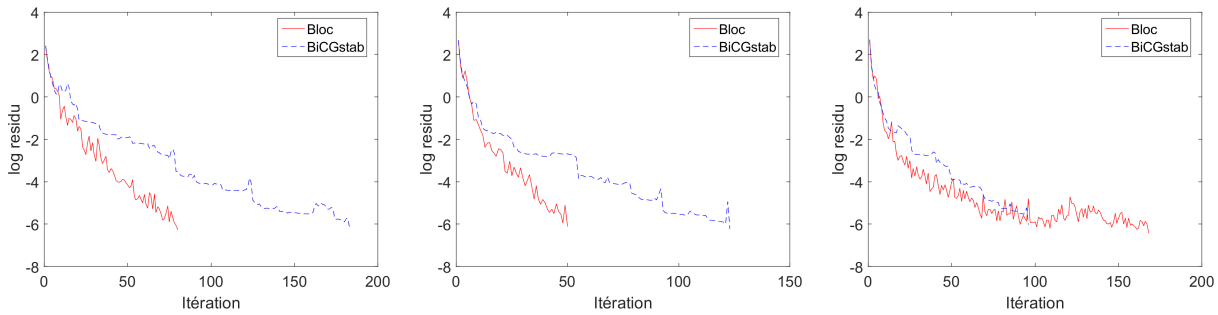
$$\boldsymbol{e}_2 = (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{G}_{22}^{ho}\boldsymbol{X}_2)^{-1}\boldsymbol{e}_1 \tag{4.26}$$

$$\text{grad} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{L}_2^{-1\dagger}\overline{\boldsymbol{X}_2}\boldsymbol{G}_{12}^{ho\dagger}\boldsymbol{L}_1^{-1\dagger}\overline{\boldsymbol{X}_1}\boldsymbol{G}^{R\dagger}\Delta + \boldsymbol{B} \tag{4.27}$$

où la définition des matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ peut être retrouvée au chapitre 3. On remarque que ces deux systèmes d'équations sont de forme $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ où la matrice $\boldsymbol{A}$ est $\boldsymbol{L}_2^{-1}$ et où $\boldsymbol{b}$ dépend de la source considérée. La structure du problème est donc adaptée à la résolution par une méthode de type Bloc puisqu'on peut profiter de la direction de descente des autres systèmes pour accélérer le calcul.

À la figure 4.22, l'objet B est utilisé afin de comparer la convergence de la version Bloc et de la version séquentielle de l'algorithme BiCGstab. On y voit la convergence du résidu lors de la résolution du système matriciel de la fonction objectif et le gradient avec une décorrélation

des vecteurs d'initialisation de 60 dB. On remarque une nette amélioration de la convergence. Pour la fonction objectif, environ 80 itérations sont nécessaires avant d'atteindre une tolérance de 10^{-6} comparé à plus de 180 itérations pour la version séquentielle. L'amélioration à la convergence pour le calcul du gradient est tout aussi considérable, avec 50 itérations pour la version Bloc comparé à plus de 120 pour la version séquentielle. Pour le troisième exemple, aucune décorrélation n'a été ajoutée aux vecteurs d'initialisation et on voit que la version Bloc converge plus lentement que la version séquentielle pour le calcul du gradient. Le calcul de la fonction objectif sans décorrélation n'a pas convergé et n'est pas montré ici. Ceci démontre l'importance de choisir judicieusement la décorrélation des vecteurs initialisation afin d'éviter le problème de conditionnement de la matrice d'initialisation présenté au chapitre 3.



(a) Résidu calcul objectif, décorrélation=60 dB

(b) Résidu calcul gradient, décorrélation=60 dB

(c) Résidu calcul gradient, décorrélation=0 dB

Figure 4.22 Comparaison du résidu au cours des itérations pour la résolution des systèmes d'équations pour le critère et le gradient par BiCGstab et Bloc-BiCGstab avec et sans décorrélation.

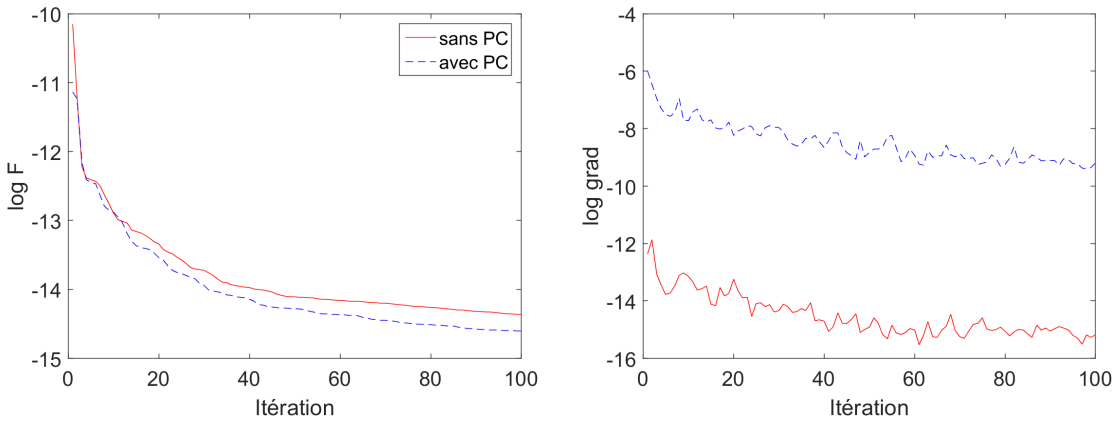
Pour cet exemple, la version Bloc permet une diminution du nombre d'itérations de plus de 55 %, tant pour le calcul du critère que pour le calcul du gradient. Cette amélioration démontre l'intérêt de l'algorithme Bloc-BiCGstab au problème de TIM biomédicale, mais une analyse plus détaillée est nécessaire afin de déterminer l'influence de chaque paramètre (le contraste, la fréquence, le nombre de systèmes et l'architecture multi-coeurs) sur la convergence de l'algorithme. Cette analyse plus détaillée est toutefois hors du cadre de ce travail.

4.5.2 Préconditionnement

Il a été montré à la section 3.3.5 que le modèle GI mène à une amélioration de l'étendue spectrale de la matrice Hessienne par rapport au modèle EIV, ce qui se reflète par une amélioration à la convergence du problème inverse. Toutefois, même avec l'amélioration apportée

par le modèle GI, l'étendue spectrale du Hessien demeure très large. On a vu à la section 3.3.5 que l'objectif d'un préconditionneur est justemment d'effectuer un changement de variables afin de réduire l'étendue spectrale des valeurs singulières du Hessien. Ceci permet théoriquement d'améliorer la vitesse de convergence d'une méthode de type quasi-Newton. Il a aussi été montré que le terme $\boldsymbol{J}^\intercal\boldsymbol{J}$ est le terme dominant dans le Hessien de la fonction objectif et que négliger le terme $\nabla^2 R$ revient à préconditionner par la matrice d'information de Fisher.

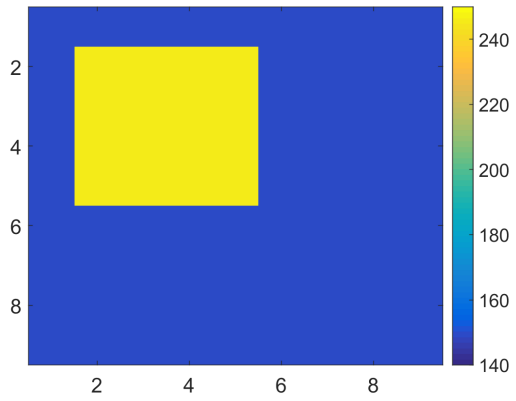
On s'intéresse maintenant à évaluer l'efficacité de préconditionner le problème par la MIF. Pour évaluer l'intérêt d'un préconditionneur, deux critères doivent être considérés : le coût de calcul pour le former et l'amélioration qu'il apporte à la convergence du problème inverse. Or, la matrice d'information de Fisher requiert un coût de calcul très élevé. Ce coût de calcul peut toutefois être justifiable si le même préconditionneur peut être appliqué à plusieurs itérations du problème inverse. Afin de vérifier l'intérêt de la MIF, on compare la convergence du problème inverse avec et sans préconditionnement. Le calcul du préconditionneur est très lourd et demande un espace mémoire considérable puisqu'il requiert l'inversion du produit des Jacobiens $\boldsymbol{J}^\intercal\boldsymbol{J}$. Un domaine de simulation avec moins d'inconnues est utilisé afin de réduire le temps de calcul. Le domaine considéré est un cube de matière blanche avec $N_1 = 9$ et le domaine d'intérêt est discrétisé avec $N_2 = 7$ où la perturbation est un cube de 4 voxels d'arrête. À la figure 4.23 on peut voir la convergence de la fonction objectif et de la norme du gradient en fonction des itérations avec et sans préconditionnement. On remarque une grande différence entre la décroissance de la fonction objectif après la première itération et les itérations suivantes. La première offre une nette amélioration, mais cette amélioration diminue aux itérations subséquentes. Ceci démontre que le préconditionneur considéré n'est pas efficace pour un très grand nombre d'itérations et que, idéalement, il devrait être recalculé à chaque itération. En raison de son coût de calcul très élevé, ceci n'est toutefois pas souhaitable. Donc, malgré la légère amélioration à la convergence, le préconditionnement par la MIF n'offre pas une réduction du coût de calcul pour le domaine considéré.



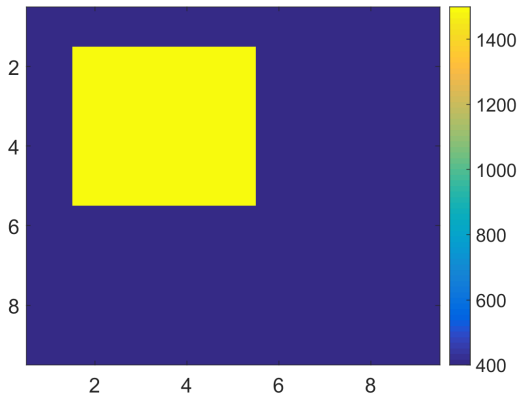
(a) Fonction objectif (b) Norme du gradient

Figure 4.23 Fonction objectif et norme du gradient avec et sans préconditionnement par la MIF

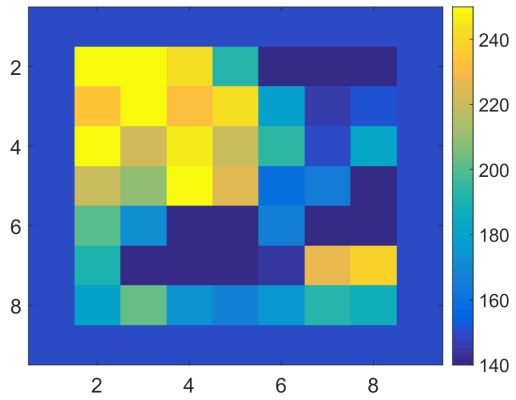
La figure 4.24 montre la tranche centrale des parties réelle et imaginaire du contraste exact et reconstruit avec et sans préconditionnement. On voit que le domaine reconstruit avec préconditionnement se rapproche plus de l'objet exact que celui reconstruit sans préconditionnement, tant pour la partie réelle que pour la partie imaginaire.



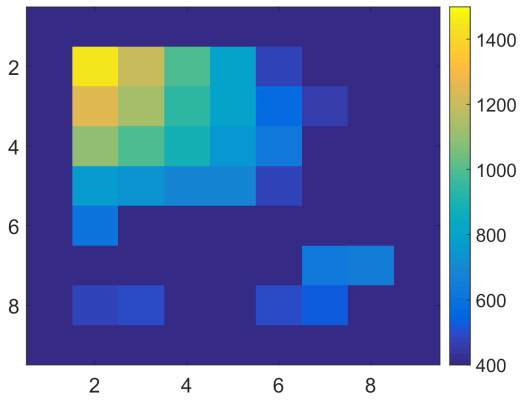
(a) $Re(X_{exa}), z = 5$



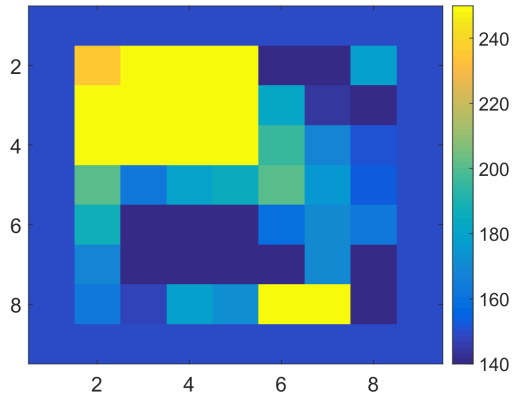
(b) $Im(X_{exa}), z = 5$



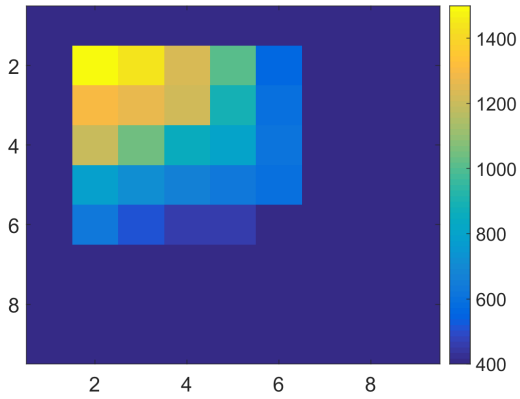
(c) $Re(X_{fin}), z = 5$ sans PC



(d) $Im(X_{fin}), z = 5$ sans PC



(e) $Re(X_{fin}), z = 5$ avec PC



(f) $Im(X_{fin}), z = 5$ avec PC

Figure 4.24 Reconstructions avec et sans préconditionnement par la MIF.

4.5.3 Séparation des inconnues en deux groupes

Il a été montré à la section 4.3.3 que la partie réelle et imaginaire du contraste ont une sensibilité différente qui varie d'environ un ordre de grandeur, la partie imaginaire étant la plus sensible aux variations de contraste. On a vu à la section 4.3.3 que cette différence de sensibilité n'est pas problématique pour la résolution du problème inverse. En TIM, la variable qui affecte principalement la partie réelle du champ magnétique est la permittivité, tandis que la conductivité affecte principalement la partie imaginaire. La plupart des modèles numériques en TIM ne reconstruisent d'ailleurs que la carte de la conductivité à partir des mesures de phase du champ magnétique diffusé. On s'intéresse à savoir si un modèle reconstruisant indépendamment les inconnues réelles et imaginaires permet d'améliorer la convergence du modèle inverse et ainsi réduire davantage le coût de calcul.

Les modèles directs qui permettent de découpler les inconnues ont été présentés à la section 4.3.3. On a vu à la figure 4.13 que, avec l'objet B, le champ diffusé calculé à partir des modèles découplés à une erreur relative de moins de 10^{-5} par rapport au modèle complexe. La figure 4.14 a présenté la résolution du problème inverse à partir de chacun des modèles. Le découplage des inconnues reélles et imaginaires dans la résolution du problème inverse permet de résoudre deux problèmes de plus petite taille (ayant chacun la moitié moins d'inconnues) plutôt qu'un seul de plus grande taille. On voit que, puisque la décroissance de la norme du gradient est environ la même pour chacun des modèles. Le fait de séparer les inconnues en deux groupes distincts ne permet pas de réduire le coût de calcul de manière considérable. Cette stratégie peut toutefois être efficace si toute l'information du champ magnétique diffusé n'est pas disponible, par exemple dans le cas où seulement la phase du champ magnétique est mesurée.

4.6 Comparaison du modèle aux modèles de l'état de l'art

Rappelons que le problème abordé par ce projet de recherche est le coût de calcul élevé pour la reconstruction d'images en tomographie par induction magnétique. La méthode numérique qui constitue l'état de l'art pour modéliser le phénomène d'induction magnétique est la méthode des éléments finis. Cette méthode numérique se base sur une formulation différentielle des équations de Maxwell et un de ses inconvénients concerne le traitement des conditions aux limites. En effet, comme il a été présenté au chapitre 2, il est nécessaire de discrétiser un domaine de simulation beaucoup plus grand que le domaine d'intérêt afin d'éviter les artefacts numériques. Ceci a pour effet de considérablement augmenter le nombre d'inconnues à reconstruire. Puisque le coût de calcul de la résolution du problème inverse est étroitement lié

au nombre d'inconnues à résoudre, ceci a pour effet de rapidement augmenter les ressources informatiques nécessaires à la résolution.

Avec un modèle basé sur l'équation intégrale volumique, les conditions aux limites sont automatiquement satisfaites par les fonctions de Green utilisées pour résoudre l'équation d'onde. Ceci permet de discrétiser seulement le domaine d'intérêt, sans avoir à se soucier d'artefacts numériques à ses limites. Le nombre d'inconnues à résoudre est donc considérablement réduit, ce qui permet théoriquement de diminuer le coût de calcul de la résolution du problème inverse. Toutefois, on a vu qu'une implémentation naïve de l'EIV au problème inverse en TIM n'est pas adéquate. À cause des forts contrastes diélectriques des tissus biologiques à basse fréquence, le système matriciel à résoudre devient mal conditionné, ce qui implique une mauvaise convergence tant lors de l'évaluation du modèle direct que lors de la résolution du problème inverse. Le modèle GI, qui incorpore de l'information connue *a priori* sur le milieu de propagation permet de reformuler le problème par rapport à un nouveau contraste, ce qui permet de résoudre ces problèmes de convergence.

L'objectif de cette section est d'évaluer l'intérêt du modèle proposé. D'abord, le coût de calcul du modèle GI est comparé à un modèle basé sur les éléments finis. À partir des limites définies à la section précédente et des stratégies d'optimisation de temps de calcul minimal, une estimation du temps de calcul pour la reconstruction d'un domaine réaliste est offerte et cette estimation est comparée à celles présentées dans la littérature pour des modèles basés sur les éléments finis.

4.6.1 Complexité MEF et EIV

La complexité peut être vue de différentes façons, par exemple en termes de coût de calcul ou en termes d'espace mémoire. La complexité en coût de calcul fait référence au nombre d'opérations nécessaires pour résoudre le problème en fonction du nombre de variables. La complexité des différents modèles directs utilisés dans le cadre de la diffusion électromagnétique a été étudiée dans la littérature [36]. Il est connu que, en utilisant des méthodes de type gradient conjugué (dont le BiCGstab fait partie), la complexité des modèles basés sur la méthode des éléments finis est $\mathcal{O}(x^4)$ et celle de l'EIV est $\mathcal{O}(x^{3+3\alpha}\log x)$ où x est le nombre d'éléments (voxels). La valeur de α peut varier entre 0 et 1. Elle dépend des propriétés du diffuseur (par exemple sa taille et ses propriétés diélectriques). Le nombre d'itérations de la méthode du gradient conjugué est égal à x^α. À la figure 4.25, on voit que pour le même nombre d'éléments, une méthode basée sur l'EIV se compare en coût de calcul à la MEF à partir de $\alpha = 0.3$.

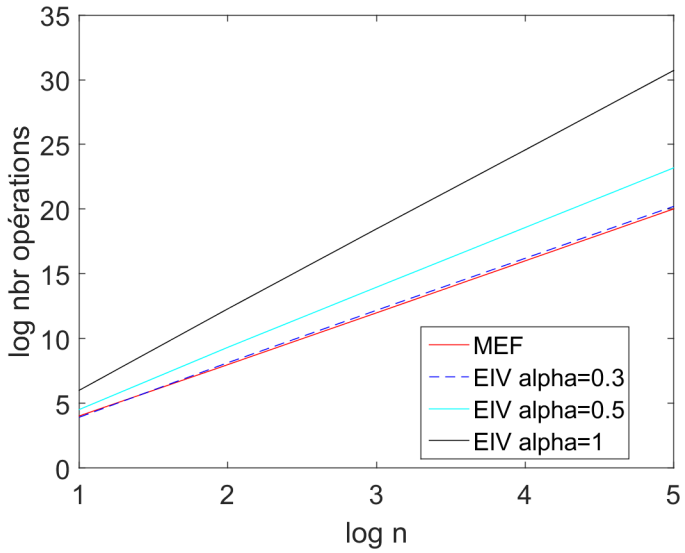
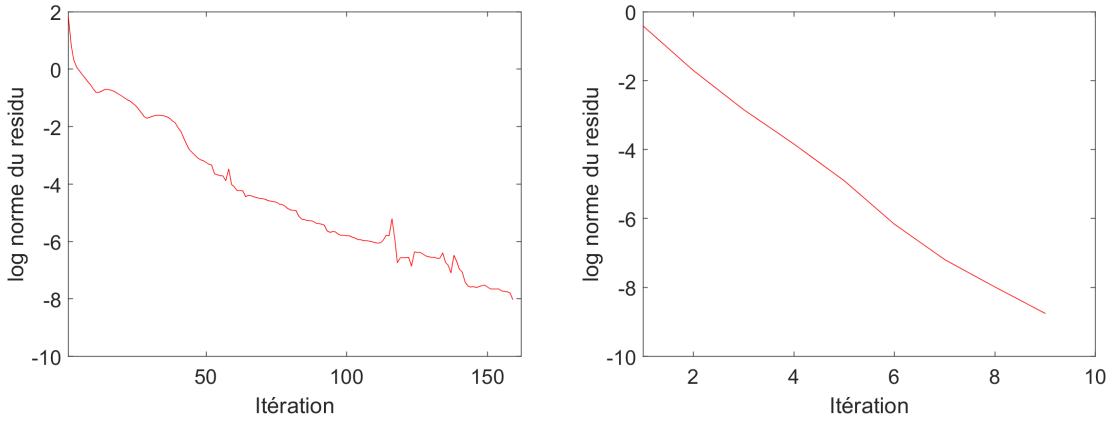


Figure 4.25 Logarithme du nombre d'opération en fonction du logarithme du nombre de voxels pour la MEF et pour l'EIV avec différentes valeurs de α.

Cette observation est particulièrement intéressante si on considère le modèle GI car, grâce au changement de variables, l'algorithme BiCGstab qui résout le système matriciel dans l'évaluation du modèle direct converge beaucoup plus rapidement que pour le modèle EIV. À la figure 4.26 on voit la convergence de l'algorithme à partir du modèle EIV standard représenté par le champ $\boldsymbol{e}_1$ et du modèle GI représenté par le champ $\boldsymbol{e}_2$.



(a) EIV (b) GI

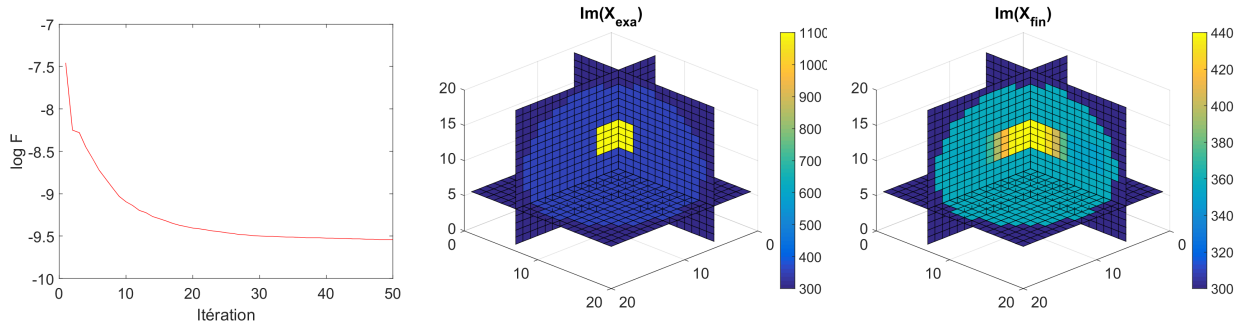
Figure 4.26 Convergence de l'algorithme BiCGstab pour la résolution du système matriciel avec le modèle EIV et le modèle GI pour l'objet B.

Le nombre exact d'itérations varie en fonction de la source considérée, mais les valeurs oscillent autour de 150 pour le modèle EIV et 8 pour le modèle GI avant d'atteindre une tolérance de 10^{-6}. Toutefois, on note que le nombre d'inconnues est plus élevé pour le modèle EIV ($x = 8000$) que pour le modèle GI ($x = 576$), ceci mène à des facteurs de $\alpha_1 = 0.55$ et $\alpha_2 = 0.32$. Comme mentionné précédemment, on voit que le changement de variables permet effectivement d'améliorer la convergence du solveur itératif dans le modèle direct.

Il est à noter que, malgré cette amélioration, le coût de calcul du modèle GI est tout de même plus élevé que le modèle EIV puisque plusieurs systèmes matriciels doivent être résolus, notamment afin de déterminer $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{G}^{in}$ et $\boldsymbol{e}_2$. Toutefois, si on considère la résolution du problème inverse, le vecteur $\boldsymbol{e}_1$ et la matrice $\boldsymbol{G}^{in}$ ne dépendent que du milieu de propagation connu et peuvent donc être évalués une seule fois et enregistrés. Il n'y a donc que le système matriciel impliquant le calcul de $\boldsymbol{e}_2$ doit être évalué à chaque itération. Dans le cadre du problème inverse, le coût de calcul est donc considérablement réduit et la valeur de $\alpha_2 = 0.32$ rend la complexité du modèle GI comparable à la MEF. De plus, puisque le modèle GI réduit considérablement le nombre d'inconnues en restreignant le domaine d'intérêt à une zone précise à l'intérieur du tissu biologique par rapport à la MEF qui nécessite de discrétiser un domaine beaucoup plus grand que l'objet diffuseur afin d'éviter les artefacts numériques aux frontières, le modèle proposé permet une diminution considérable du coût de calcul.

4.6.2 Évaluation du temps de calcul

À partir des limites définies aux section précédentes, on souhaite choisir les paramètres qui minimisent le temps de calcul tout en obtenant une reconstruction de bonne qualité. De cette façon, une estimation du temps de calcul pour la reconstruction d'un domaine réaliste peut être posée. Le facteur qui affecte le plus le coût de calcul est le nombre et la taille des systèmes matriciels à résoudre. En diminuant le nombre de sources et de détecteurs au minimum (trois plans de six sources et détecteurs), on vient ainsi considérablement diminuer le coût de calcul par rapport au montage considéré pour l'objet B. Toutefois, en diminuant le nombre de mesures, la convergence du problème inverse est plus lente. Un seuil empirique de 50 itérations a été jugé optimal afin d'obtenir une reconstruction de bonne qualité tout en limitant le temps de calcul. Le temps de calcul pour les 50 itérations de la résolution du problème inverse a été de 29 minutes sur un processeur Intel Core i7-5960X à 3 GHz et avec 66 GB de RAM. À la figure 4.27, on voit l'allure de la fonction objectif et l'état de la reconstruction avec les paramètres décrits ici.



(a) Fonction objectif (b) $Im(X_{exa})$ (c) $Im(X_{fin})$

Figure 4.27 Fonction objectif et partie imaginaire de l'objet exact et de l'objet reconstruit en minimisant le coût de calcul.

Le temps de reconstruction dépend fortement du nombre d'inconnues puisque la complexité de l'évaluation du modèle direct augmente en $\mathcal{O}(x^{3+3\alpha}\log x)$ où x est le nombre de voxels et $\alpha \approx 0.3$. De plus, il est à noter que l'évaluation du temps de calcul n'inclut pas la génération des données, ni la formation des opérateurs relatifs au milieu de propagation inhomogène. Cette valeur est comparable à celles publiées dans la littérature pour des modèles basés sur la MEF. Dans [117], on rapporte que pour un domaine avec 2875 inconnues, le temps de calcul de chaque inversion non-linéaire est de 53 minutes. Dans [18], le temps de calcul du modèle direct pour un domaine discrétisé plus finement (avec environ 82000 éléments) est évalué à 4 heures pour une source. De par sa formulation qui restreint le domaine de discrétisation à une région d'intérêt à l'intérieur du tissu sondé, la formulation GI permet de réduire le nombre d'inconues. Cette réduction du nombre d'inconnues permet donc effectivement de réduire le temps de calcul et offre donc une amélioration potentielle par rapport à la MEF. Puisque la résolution du problème inverse à partir d'un modèle basé sur la MEF sort du cadre de ce travail, une comparaison plus qualitative du temps de calcul des deux méthodes sort du cadre de ce travail.

4.6.3 Regard critique des limites du modèle

Tel que mentionné précédemment, les limites de reconstruction d'un modèle numérique sont difficiles à définir puisqu'il existe un grand nombre de facteur qui les influence et ces facteurs sont interdépendants. Par exemple, plus la perturbation est de petite taille, moins le niveau de bruit tolérable est élevé, plus le nombre de mesures nécessaires est important et plus il est difficile de la détecter au centre du domaine. De plus, puisque les domaines de simulations utilisés pour tester les modèles numériques varient dans la littérature, une comparaison juste

est difficilement réalisable. Dans cette section, certaines limitations provenant de la littérature sont citées et ces limitations sont comparées à celles établies pour le modèle GI.

Rapport signal sur bruit

À la section 4.1.2 on a vu que le bruit appliqué aux données générées par le modèle direct prend généralement la forme d'un bruit Gaussien. Un RSB de 70 dB est considéré comme faible, tandis qu'un bruit de 35 dB est considéré très fort. D'ailleurs, dans [132], un RSB de 44 dB est utilisé pour discriminer différentes méthodes de reconstruction. De manière générale, un RSB réaliste pour la génération de données artificielles semble se situer autour de 40 dB [30, 120, 123]. Dans cette optique, le modèle GI proposé se compare bien aux autres modèles de la littérature puisqu'on arrive à correctement reconstruire une perturbation avec des données ayant un RSB de 40 dB, tandis que la reconstruction devient problématique à partir de 30 dB. Cette limite est très encourageant puisque de récents progrès dans l'instrumentation ont permis de réduire les valeurs expérimentales de RSB jusqu'à 70 dB [124].

Fréquence

Les modèles numériques basés sur la MEF ne semblent pas souffrir du même problème de conditionnement lié à l'augmentation des valeurs de contraste à basse fréquence. Malgré le fait que la fréquence idéale afin d'obtenir un bon RSB et une bonne résolution spatiale semble se situer autour de 10 MHz [117, 29, 5], certains auteurs préfèrent travailler à plus basse fréquence, par exemple autour de 100 kHz [118, 123] afin d'obtenir une plus grande différence de contraste entre les différents tissus. Le modèle GI n'est pas applicable aux plus basses fréquences, d'une part parce que le modèle direct présente une plus grande erreur relative pour les forts contrastes et, d'autre part, parce que la perturbation devient difficilement détectable lors de la résolution du problème inverse.

La résolution du contraste, c'est-à-dire la capacité à distinguer deux tissus avec des propriétés similaires, est très satisfaisante pour le modèle GI. On arrive à distinguer clairement des tissus avec une variation des propriétés diélectriques de 10 %. La MEF permet également une bonne résolution de contraste. En effet, certaines publications se sont intéressées à développer des modèles numériques plus représentatifs de la tête, par exemple en incluant 10 tissus avec une structure anatomique réaliste [116], dont certains tissus présentent des propriétés diélectriques semblables.

Nombre de mesures

Le nombre de mesures nécessaires à la reconstruction d'images en TIM dépend d'un grand nombre de paramètres, par exemple le niveau de bruit des données, le nombre d'inconnues à déterminer et la taille et la position de la perturbation à détecter. Le nombre de mesures utilisées pour résoudre le problème inverse varie grandement dans la littérature. Une convention est de se placer dans un cas tel que le problème est sous-déterminé, c'est-à-dire que le nombre d'inconnues est plus élevé que le nombre de mesures indépendantes. L'évaluation du nombre de mesures indépendantes est également un problème complexe puisque les mesures obtenues pour chaque combinaison source-détecteur n'est pas nécessairement complètement indépendante des autres combinaisons, particulièrement pour des problèmes où un grand nombre de sources et détecteurs est utilisé. Un cas classique est présenté dans [30] où 2816 données sont utilisées pour déterminer 9012 inconnues. Pour l'objet B, on a vu qu'on arrive à déterminer de façon adéquate les 576 inconnues complexes en limitant le nombre de sources et de détecteurs à 18, ce qui donne 324 points de mesure. On se trouve donc dans le cas d'un problème sous-déterminé et, dans cette optique, le modèle GI se compare aussi aux modèles par la MEF présentés dans la littérature.

4.6.4 Taille et position de la perturbation

De même que pour les autres limites, la taille et la position des perturbations qu'il est possible de détecter est difficile à comparer car elles dépendent de plusieurs autres paramètres (le nombre de mesures, le niveau de bruit...). Dans le cadre de la validation d'un modèle numérique pour la reconstruction d'images, les articles publiés utilisent généralement une perturbation assez large qui se situe en périphérie du domaine d'intérêt. Par exemple dans [132], le diamètre de la perturbation est 20 % du diamètre du domaine, tandis que dans [117] elle est de 26 % du diamètre du domaine. La capacité du modèle GI à détecter une perturbation de 1 cm de diamètre dans une sphère de 18 cm de diamètre est donc particulièrement intéressante. Toutefois, on a vu que la taille minimale de la perturbation dépend fortement de sa position dans la sphère de matière blanche. Par exemple, un cube de 4 cm d'arête au centre du domaine est difficilement visible. Ceci semble dû à la plus faible concentration de courants de Foucault au centre du domaine et pourrait théoriquement être amélioré en diminuant la fréquence. Toutefois, on a vu que la diminution de fréquence implique une dégradation du conditionnement, ce qui rend la reconstruction d'images plus délicate. La difficulté du modèle GI à traiter les problèmes aux plus basses fréquence est donc son principal inconvénient par rapport aux modèles basés sur les éléments finis.

4.7 Conclusion

En résumé, ce chapitre a permis de valider l'intérêt du modèle GI présenté au chapitre 3. À partir des domaines de simulations présentés dans la littérature, le choix de deux objets, l'un pour l'étude du modèle direct et l'autre pour le problème inverse, a été justifié. Le modèle direct a été validé et l'erreur en fonction de différents paramètres a été caractérisée à l'aide d'une solution analytique. Certains aspects pouvant affecter la convergence du problème inverse ont été analysés, notamment le choix du modèle direct, le phénomène de rupture à basse fréquence et aux forts contrastes ainsi que la différence de sensibilité des inconnues. À partir d'un exemple réaliste, différentes limites ont été établies quant au niveau de bruit tolérable, l'effet de la fréquence, le nombre de mesures nécessaires et la taille minimale et la profondeur maximale des perturbations détectables. Trois méthodes pour diminuer le temps de calcul ont été étudiées, notamment la méthode Bloc-BiCGstab, le préconditionnement et la séparation des inconnues en deux groupes. Finalement, à partir de ces résultats, le modèle GI a été comparé aux résultats publiés dans la littérature à partir de la MEF qui constitue l'état de l'art pour la modéliser le phénomène de diffusion électromagnétique en TIM biomédicale.

Les faits saillants de ce chapitre sont que le modèle direct permet d'adéquatement modéliser le phénomène de diffusion électromagnétique avec des paramètres typiques de la TIM, l'erreur relative par rapport à la théorie de Mie atteignant 3 % pour une discrétisation assez fine. Les principaux paramètres numériques affectant la précision de la solution sont la taille de discrétisation et les valeurs de contraste électrique. En ce qui a trait à la résolution du problème inverse, le principal aspect qui affecte sa convergence est le phénomène de rupture aux forts contraste, ce qui donne un argument supplémentaire à l'intérêt du modèle GI proposé. Les limites de reconstruction du modèle se comparent bien à celles publiées dans la littérature à partir de modèles basés sur la méthode des éléments finis à l'exception de la fréquence minimale, ce qui ne semble toutefois pas être problématique pour des applications biomédicales qui ont avantage à être à plus haute fréquence. Parmi les stratégies de réduction de temps de calcul étudiées, l'algorithme bloc-BiCGstab semble le plus prometteur, permettant de réduire le nombre d'itérations de plus de 55 % pour l'exemple considéré.

CHAPITRE 5 CONCLUSION

5.1 Synthèse des travaux

5.1.1 Intérêt de l'EIV en TIM biomédicale

Au chapitre 1, les principes de bases de la TIM biomédicale ainsi que les problèmes limitant son application clinique ont été présentés. On a vu qu'un de ces problèmes concerne le coût de calcul très élevé et que la méthode numérique la plus utilisée, la méthode des éléments finis, souffre de certains inconvénients, dont le principal est que, pour satisfaire les conditions de radiation et éviter les artefacts numériques aux limites du domaine, un domaine beaucoup plus grand que le domaine d'intérêt doit être discrétisé. Or, puisque le coût de calcul du problème inverse dépend fortement du nombre d'éléments de discrétisation, il devient particulièrement intéressant d'appliquer un modèle basé sur l'EIV puisque les conditions de radiation sont automatiquement satisfaites et que seul le domaine d'intérêt a besoin d'être discrétisé. Les objectifs de ce projet de recherche étaient donc de :

1. Développer et valider un modèle direct basé sur l'EIV dans le cadre de la TIM biomédicale.
2. Résoudre le problème inverse à partir du modèle proposé.
3. Caractériser les limites de la méthodes et les comparer aux modèles numériques qui constituent l'état de l'art.

Dans ce chapitre, les principaux aspects innovants relatifs à chacun de ces objectifs sont rappelés.

5.1.2 Propagation dans un milieu inhomogène

Au chapitre 3, en développant le modèle direct basé sur l'EIV standard, on a vu que son application à la TIM biomédicale est problématique puisque les tissus biologiques présentent un contraste diélectrique très fort par rapport à l'air. Ceci mène à un mauvais conditionnement de l'opérateur de propagation, à une convergence très lente de l'algorithme itératif utilisé pour résoudre le système matriciel et à un coût de calcul très élevé. Afin de surmonter ce problème, un changement de variable a été effectué où la nouvelle inconnue représente le contraste diélectrique par rapport à un tissu sain. Ceci a permis de considérablement réduire les valeurs de contraste et ainsi d'améliorer le conditionnement, la convergence et le coût de calcul. Pour effectuer ce changement de variable, deux modèles (ELOG et GI) ont

été considérés. Ces deux modèles avaient auparavant été appliqués dans le but d'incorporer certaines informations au milieu de propagation, par exemple des objets métalliques liés à l'instrumentation, mais jamais dans le but d'améliorer le conditionnement de l'opérateur de propagation. De plus, le modèle ELOG n'avait été appliqué qu'à des modèles par intégrales surfaciques. Sa dérivation à un modèle purement basé sur une formulation par intégrales volumiques est une des contributions de ce travail. Toutefois, une analyse du coût de calcul de chacun de ces modèles a démontré que le coût de calcul du modèle GI se compare au modèle EIV, tandis que celui du modèle ELOG est beaucoup plus élevé.

5.1.3 Validation du modèle direct

Afin de valider le modèle direct, on s'est placé dans un cas simple pour lequel une solution analytique est disponible. En effet, le champ magnétique diffusé par une sphère diélectrique illuminée par une onde plane peut être calculée par la théorie de Mie. À partir de cette solution analytique, l'erreur relative du modèle direct basé sur l'EIV a été caractérisée en fonction des différents paramètres (la taille de discrétisation, le contraste diélectrique, la fréquence et la tolérance). On a vu que la taille de discrétisation et le contraste sont les paramètres qui affectent le plus l'erreur relative de la solution. Puis, à partir de l'EIV standard, les modèles ELOG et GI ont été validés sur un objet plus réaliste, c'est-à-dire une sphère ayant les propriétés de la matière blanche dans laquelle se trouve un caillot sanguin, ce qui approxime une tête humaine.

5.1.4 Résolution du problème inverse

Le problème inverse, qui consiste à reconstruire une carte des propriétés diélectrique du milieu d'intérêt en fonction des mesures de champs magnétique aux détecteurs, a été présenté en détail. Les différents choix de critère à minimiser, de fonction de régularisation et d'algorithme d'optimisation ont été présentés au chapitre 2. Le choix d'un critère non-linéaire, d'une régularisation additive de type L_2L_1 et d'un algorithme de type quasi-Newton ont été justifiés au chapitre 3. Puis, au chapitre 4, différents aspects pouvant affecter la vitesse de convergence ont été analysés, notamment l'effet du modèle direct, le phénomène de rupture à basse fréquence aux forts contrastes et la différence de sensibilité. On a vu que la reformulation du problème grâce au modèle GI permet effectivement d'améliorer la convergence, tant du modèle direct que du problème inverse.

5.2 Limitations de la solution proposée

Rappelons que le problème abordé par ce projet était le coût de calcul très élevé en reconstruction d'images en TIM biomédicale. L'objectif de ce projet était d'étudier l'intérêt d'un modèle basé sur une formulation intégrale volumique puisque cette formulation offre plusieurs avantages par rapport aux modèles de l'état de l'art. On a vu que le modèle proposé permet d'adéquatement modéliser la diffusion électromagnétique et qu'il permet aussi de reconstruire des domaines biologiques représentant approximativement une tête avec un caillot sanguin. Malgré cette capacité à modéliser le phénomène de diffusion et à reconstruire un domaine simple, certaines limitations subsistent. Elles concernent le modèle direct, le problème inverse et les limites numériques.

5.2.1 Limitation du modèle direct

La validité du modèle direct dépend de plusieurs paramètres, le plus important étant le nombre de voxels utilisés pour discrétiser le domaine. Pour un domaine cubique avec $n = N^3$ voxels, on a vu que l'erreur relative diminue considérablement en discrétisant plus finement. Par exemple, avec $N = 20$, l'erreur relative était d'environ 8%, puis elle diminue à 5% avec $N = 30$ et à 3% avec $N = 51$. L'objet B utilisé pour étudier la résolution du modèle inverse a été discrétisé avec $N = 20$, l'erreur relative lors de l'évaluation du modèle direct était donc considérablement élevée. Cette discrétisation a été choisie puisque l'objectif était d'étudier l'effet des différents paramètres sur le modèle GI et qu'un grand nombre de reconstructions différentes ont dû être effectuées dans un temps relativement restreint. Toutefois, dans l'optique d'une application réelle, une discrétisation plus fine devrait être choisie, idéalement avec $N = 51$. Ceci permet de restreindre l'erreur relative des données à un niveau acceptable.

Il a également été montré que la tolérance de l'algorithme itératif dans le modèle direct et la fréquence ont un effet négligeable sur l'erreur relative du modèle direct. Toutefois, la fréquence a un effet important sur les valeurs de contrastes. Plus le contraste augmente, plus le conditionnement de l'opérateur de diffusion se dégrade, ce qui fait augmenter l'erreur relative du modèle direct. Par exemple, avec $X = 10^2$, l'erreur relative est de 5 %, mais elle augmente à 12 % pour $X = 10^3$. Ceci est problématique pour des applications biomédicales puisque le contraste de la matière blanche est d'environ 10^2 à 20 MHz, mais il augmente à environ 10^3 lorsque la fréquence diminue à 1 MHz. Ceci rend un modèle basé sur l'EIV inapplicable dans la plus basse gamme de fréquences utilisées en TIM. Cet aspect du modèle GI est le plus problématique, en particulier puisque la MEF ne semble pas souffrir du même problème et est couramment appliquée à la modélisation du problème de diffusion électromagnétique à

plus basse fréquence. Toutefois, pour l'application considérée, soit l'imagerie biomédicale, la fréquence d'intérêt qui permet la plus grande sensibilité est autour de la dizaine de MHz. Or, le modèle GI est efficace dans cette région et offre donc une alternative efficace à la MEF.

5.2.2 Limitations du problème inverse

La résolution du problème inverse dépend aussi de plusieurs paramètres. Le rapport signal sur bruit, la fréquence, le nombre de mesures, la taille et la position de la perturbation à détecter sont des facteurs qui ont un effet significatif sur la qualité de l'image reconstruite. Il a été expliqué que tous ces paramètres sont interdépendants et qu'il est donc difficile de poser des limites claires à partir desquelles la reconstruction devient impossible. Dans ce contexte, un objet de référence a été considéré et les limites ont été définies en variant un à un chacun des paramètres. De cette façon, on a vu que la limite du rapport signal sur bruit se trouve entre 30 et 40 dB, qu'il est très difficile de détecter une perturbation pour une fréquence plus faible que les MHz, qu'un ratio du nombre de mesures sur nombre d'inconnues d'environ 0.5 est nécessaire et certaines limites ont pu être déterminées quant à la taille minimale et la profondeur maximale d'une perturbation détectable.

Ces limites ont été comparées à celles citées dans la littérature pour des modèles basés sur la MEF, qui constituent l'état de l'art des modèles numériques actuellement utilisés en TIM biomédicale. La capacité à détecter une perturbation de 1 cm^3, à résoudre un problème sous-déterminé et à correctement détecter une perturbation avec des données bruitées avec 40 dB de RSB rendent le modèle GI comparable aux modèles basés sur la MEF. Le principal inconvénient du modèle proposé concerne l'effet de la fréquence sur le modèle. En effet, on a vu lors de l'analyse de modèle direct que, à basse fréquence, les valeurs du contraste augmentent rapidement, ce qui a un effet défavorable sur le conditionnement et sur l'erreur relative de la solution. En analysant le problème inverse, on a vu qu'il est de plus très difficile, voire impossible dans certains cas, de reconstruire correctement le domaine d'intérêt lorsque la fréquence est trop faible. Parmi les différentes approches considérées pour réduire le temps de calcul, l'approche par Bloc a été particulièrement efficace. Elle a en effet permis de réduire le nombre d'itérations de la résolution du système matriciel dans le calcul de la fonction objectif et du gradient de plus de 55 % par rapport à la version séquentielle de l'algorithme BiCGstab. De plus, puisque l'efficacité de la version Bloc s'améliore avec le nombre d'inconnues, on s'attend à ce qu'une application réaliste avec un plus grand nombre de voxels permette une amélioration encore plus importante. Le préconditionnement par la matrice d'information de Fisher a permis une légère amélioration à la convergence du problème inverse. Toutefois, cette légère amélioration ne justifie pas le coût de calcul très élevé nécessaire à former explicitement la

matrice Jacobienne nécessaire au calcul du préconditionneur. La séparation des inconnues en leur partie réelle et imaginaire permet effectivement de résoudre deux problèmes avec la moitié moins d'inconnues. Cette stratégie peut être intéressante dans le cadre de reconstructions de domaines avec une discrétisation plus fine. Mais, avec le nombre d'inconnues considéré, elle n'offre pas un avantage considérable sur le temps de calcul de la reconstruction.

5.2.3 Limitation en coût de calcul

Au chapitre 4, la complexité de la méthode proposée à été comparée à celle de la MEF. On a vu que l'efficacité dépend d'un paramètre α lié au nombre d'itérations de l'algorithme BiCGstab. Ce paramètres α est très élevé pour le modèle EIV standard, mais est considérablement réduit avec le modèle GI, ce qui rend la complexité du modèle comparable à un modèle basé sur la MEF. De plus, en considérant les améliorations apportées par la version Bloc de l'algorithme, le nombre d'itérations est encore plus réduit, ce qui rend la complexité du modèle GI meilleure que celle de la MEF. D'autre part, le principal avantage des modèles par intégrales volumiques est de diminuer la taille du domaine à discrétiser. Puisque la complexité est la même mais que le nombre d'inconnues est considérablement réduit, le coût de calcul du modèle GI est donc très avantageux dans le cadre de la TIM biomédicale.

5.3 Améliorations futures

5.3.1 Parallélisation

L'architecture multi-coeurs des ordinateurs a mené au développement de la parallélisation. La parallélisation consiste à séparer un calcul lourd en plusieurs problèmes plus simples qui sont envoyés sur les différents coeurs. Plusieurs opérations présentées dans ce projet peuvent être parallélisées et ainsi résolues plus rapidement, par exemple la multiplication matricielle, l'inversion matricielle et la transformée de Fourier rapide [81]. De plus, avec la formulation basée sur l'EIV, on doit résoudre N_s (ou N_d systèmes si on utilise le principe de l'état adjoint) qui sont indépendants les uns des autres et qui peuvent donc être facilement parallélisés sur différents coeurs [133]. Dans le cadre de la tomographie micro-ondes, une approche a été développée afin de paralléliser l'algorithme Bloc-BiCGstab et ainsi accélérer encore davantage la résolution des systèmes matriciels découlant du problème direct [81]. La parallélisation de l'algorithme Bloc-BiCGstab n'a pas été étudiée dans le cadre de la TIM biomédicale, mais il est très probable qu'elle permette également une amélioration considérable au temps de calcul.

5.3.2 MLFMA

Le MLFMA (*Multilevel Fast Multipole Algorithm*) est un algorithme comparable à la FFT puisqu'il permet de réduire le coût de calcul et l'espace mémoire nécessaires à effectuer un produit matrice-vecteur. Avec une méthode itérative telle que celle utilisée dans ce projet, le MLFMA permet de réduire la complexité en coût de calcul à $\mathcal{O}(x\log(x))$ et à $\mathcal{O}(x^2)$ en espace mémoire où x est le nombre d'inconnues. Le principe de la méthode est de calculer le produit matrice-vecteur par une succession d'agrégations, de translations et de désagrégations pour les interactions non-singulières éloignées entre les points de sources et les points de calcul du champ dans les fonctions de Green. Le MLFMA a été appliqué de façon efficace à la modélisation de diffusion électromagnétique d'objets conducteurs à basse fréquence, dans des conditions très semblables à celles de la TIM biomédicale [21]. Il est donc très vraisemblable que son application au problème inverse en TIM permette aussi de réduire le coût de calcul.

5.3.3 Critère bilinéaire

Le critère bilinéaire a été présenté au chapitre 2. Il n'a pas été considéré dans le cadre de la résolution du problème inverse à partir du modèle EIV puisqu'il est connu qu'il est inadéquat pour des objets fortement contrastés [110] tels que ceux considérés en TIM biomédicale. Toutefois, avec la reformulation du problème offerte par le modèle GI, les nouvelles valeurs de contrastes sont considérablement réduites (de la centaine ou du millier à l'unité). Il pourrait donc être intéressant d'étudier des méthodes telles que CSI (*Contrast Source Inversion*) et MGM (*Modified Gradient Method*) qui sont basées sur un critère bilinéaire dans le cadre du modèle GI.

5.3.4 Régularisation

La régularisation est un champ d'étude actif et différentes façon existent afin d'inclure de l'information *a priori* sur le domaine d'intérêt. Certaines de ces fonctions de régularisation, par exemple la méthode d'uniformisation de la variance, ont été présentées au chapitre 2. Le choix de la fonction s'est arrêté sur la fonction hyperbolique, mais une étude plus approfondie de l'effet des différentes fonctions pourrait permettre d'obtenir un modèle plus robuste au bruit ou qui permet de converger en moins d'itérations. De plus, on a vu que la régularisation choisie mène souvent à une sous-évaluation des valeurs de contraste à reconstruire. Ceci pourrait être amélioré par une fonction de régularisation plus appropriée.

5.3.5 Données réelles et évaluation du milieu de propagation

Finalement, pour certaines méthodes d'imagerie, une base de données sur les mesures de champ électrique diffusé en fonction de différents objets diélectriques est disponible (par exemple la base de l'Institut Fresnel en tomographie micro-ondes). Toutefois, aucune base de données semblable n'est disponible en TIM biomédicale. Ce projet a démontré l'intérêt du modèle GI à partir de données simulées qui ont été validées avec une solution analytique, mais des travaux futurs devraient comparer les valeurs du modèle direct à des données réelles et l'algorithme de reconstruction devrait être testé sur celles-ci.

RÉFÉRENCES

[1] H-Y Wei and Manuchehr Soleimani. Electromagnetic tomography for medical and industrial applications : Challenges and opportunities [point of view]. *Proceedings of the IEEE*, 101(3) :559–565, 2013.

[2] Jérôme Idier et al. Approche bayésienne pour les problèmes inverses. *Hermès, Paris*, 3, 2001.

[3] S Al-Zeibak and NH Saunders. A feasibility study of in vivo electromagnetic imaging. *Physics in medicine and biology*, 38(1) :151, 1993.

[4] Robert Merwa, Karl Hollaus, Oszkar Biró, and Hermann Scharfetter. Detection of brain oedema using magnetic induction tomography : a feasibility study of the likely sensitivity and detectability. *Physiological measurement*, 25(1) :347, 2004.

[5] M Zolgharni, PD Ledger, DW Armitage, DS Holder, and H Griffiths. Imaging cerebral haemorrhage with magnetic induction tomography : numerical modelling. *Physiological measurement*, 30(6) :S187, 2009.

[6] JA Caceres and JN Goldstein. Intracranial hemorrhage. *Emergency medicine clinics of North America*, 30(3) :771–94, 2012.

[7] KR Wagner and JP Broderick. Hemorrhagic stroke : pathophysiological mechanisms and neuroprotective treatments. *Neuroprotection*, 20 :471, 2001.

[8] Yair Granot, Antoni Ivorra, and Boris Rubinsky. A new concept for medical imaging centered on cellular phone technology. *Plos one*, 3(4) :e2075, 2008.

[9] César A González, Gaddi Blumrosen, and Boris Rubinsky. Remote monitoring of internal bleeding based on magnetic induction and cellular phone technology : A potential application in poor regions in méxico. *Computación y Sistemas*, 14(2), 2010.

[10] MSB Mansor, Z Zakaria, I Balkhis, RA Rahim, MFA Sahib, YM Yunos, S Sahlan, S Bunyamin, KH Abas, MHI Ishak, et al. Magnetic induction tomography : A brief review. *Jurnal Teknologi*, 73(3), 2015.

[11] M Forsman. Intragastric movement assessment by measuring magnetic field decay of magnetised tracer particles in a solid meal. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 38(2) :169–174, 2000.

[12] Javier Rosell, Roberto Casanas, and Hermann Scharfetter. Sensitivity maps and system requirements for magnetic induction tomography using a planar gradiometer. *Physiological measurement*, 22(1) :121, 2001.

[13] Christophe Dolabdjian and David Ménard. Giant magneto-impedance (gmi) magnetometers. In *High Sensitivity Magnetometers*, pages 103–126. Springer, 2017.

[14] Sergey N Makarov, Gregory M Noetscher, and Ara Nazarian. *Low-Frequency Electromagnetic Modeling for Electrical and Biological Systems Using MATLAB*. John Wiley & Sons, 2015.

[15] Karl Hollaus, Christian Magele, Robert Merwa, and Hermann Scharfetter. Numerical simulation of the eddy current problem in magnetic induction tomography for biomedical applications by edge elements. *IEEE Transactions on Magnetics*, 40(2) :623–626, 2004.

[16] A Morris, H Griffiths, and W Gough. A numerical model for magnetic induction tomographic measurements in biological tissues. *Physiological measurement*, 22(1) :113, 2001.

[17] WC Chew, IT Chiang, CP Davis, A Hesford, MK Li, Y Liu, ZG Qian, M Saville, L Sun, MS Tong, et al. Integral equation solvers for real world applications-some challenge problems. In *Antennas and Propagation Society International Symposium 2006, IEEE*, pages 91–94. IEEE, 2006.

[18] M Zolgharni, PD Ledger, and H Griffiths. Forward modelling of magnetic induction tomography : a sensitivity study for detecting haemorrhagic cerebral stroke. *Medical & biological engineering & computing*, 47(12) :1301, 2009.

[19] MH Pham and AJ Peyton. A model for the forward problem in magnetic induction tomography using boundary integral equations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 44(10) :2262–2267, 2008.

[20] Martin Costabel. Principles of boundary element methods. *Computer Physics Reports*, 6(1-6) :243–274, 1987.

[21] Mei Song Tong, Jie Zhang, Peng Cheng Wang, and Jian Zhang. Electromagnetic analysis for conductive media based on volume integral equations. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 62(12) :6228–6235, 2014.

[22] Aria Abubakar and Peter M van den Berg. Iterative forward and inverse algorithms based on domain integral equations for three-dimensional electric and magnetic objects. *Journal of computational physics*, 195(1) :236–262, 2004.

[23] Weng Cho Chew, Mei Song Tong, and Bin Hu. Integral equation methods for electromagnetic and elastic waves. *Synthesis Lectures on Computational Electromagnetics*, 3(1) :1–241, 2008.

[24] Jun-Sheng Zhao and Weng Cho Chew. Integral equation solution of maxwell's equations from zero frequency to microwave frequencies. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 48(10) :1635–1645, 2000.

[25] Jianfang Zhu, Saad Omar, and Dan Jiao. Solution to the electric field integral equation at arbitrarily low frequencies. 2012.

[26] S Gabriel, RW Lau, and Camelia Gabriel. The dielectric properties of biological tissues : Ii. measurements in the frequency range 10 hz to 20 ghz. *Physics in medicine and biology*, 41(11) :2251, 1996.

[27] Andrew F Peterson. Analysis of heterogeneous electromagnetic scatterers : research progress of the past decade. *Proceedings of the IEEE*, 79(10) :1431–1441, 1991.

[28] H Griffiths, WR Stewart, and W Gough. Magnetic induction tomography : a measuring system for biological tissues. *Annals Of The New York Academy Of Sciences*, 873(1) :335–345, 1999.

[29] Bachir Dekdouk, Christos Ktistis, David W Armitage, and Anthony J Peyton. Absolute imaging of low conductivity material distributions using nonlinear reconstruction methods in magnetic induction tomography. *Progress In Electromagnetics Research*, 155 :1–18, 2016.

[30] B Dekdouk, C Ktistis, W Yin, DW Armitage, and AJ Peyton. The application of a priori structural information based regularization in image reconstruction in magnetic induction tomography. In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 224, page 012048. IOP Publishing, 2010.

[31] David Ireland, Konstanty Bialkowski, and Amin Abbosh. Microwave imaging for brain stroke detection using born iterative method. *IET Microwaves, Antennas & Propagation*, 7(11) :909–915, 2013.

[32] Weng Cho Chew and Yi-Ming Wang. Reconstruction of two-dimensional permittivity distribution using the distorted born iterative method. *IEEE transactions on medical imaging*, 9(2) :218–225, 1990.

[33] Matteo Pastorino. *Microwave imaging*, volume 208. John Wiley & Sons, 2010.

[34] Kane Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Transactions on antennas and propagation*, 14(3) :302–307, 1966.

[35] Gerrit Mur. Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations. *IEEE transactions on Electromagnetic Compatibility*, (4) :377–382, 1981.

[36] F Michael Kahnert. Numerical methods in electromagnetic scattering theory. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 79 :775–824, 2003.

[37] R Mittra and O Ramahi. Absorbing boundary conditions for the direct solution of partial differential equations arising in electromagnetic scattering problems. *Progress In Electromagnetics Research*, 2 :133–173, 1990.

[38] John L Volakis, Arindam Chatterjee, and Leo C Kempel. *Finite element method electromagnetics : antennas, microwave circuits, and scattering applications*, volume 6. John Wiley & Sons, 1998.

[39] Lu Ma, Robert Banasiak, and Manuchehr Soleimani. Magnetic induction tomography with high performance gpu implementation. *Progress In Electromagnetics Research B*, 65 :49–63, 2016.

[40] Oszkár Bíró. Edge element formulations of eddy current problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 169(3-4) :391–405, 1999.

[41] Oszkar Biro and Kurt Preis. An edge finite element eddy current formulation using a reduced magnetic and a current vector potential. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(5) :3128–3130, 2000.

[42] Jiansheng Yuan and Amulf Kost. A three-component boundary element algorithm for three-dimensional eddy current calculation. *IEEE transactions on magnetics*, 30(5) :3028–3031, 1994.

[43] S Engleder and O Steinbach. Boundary integral formulations for the forward problem in magnetic induction tomography. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 34(9) :1144–1156, 2011.

[44] H Tsuboi and T Misaki. Three-dimensional analysis of eddy current distributions by the boundary element method using vector variables. *IEEE Transactions on Magnetics*, 23(5) :3044–3046, 1987.

[45] André Vander Vorst, Arye Rosen, and Youji Kotsuka. *RF/microwave interaction with biological tissues*, volume 181. John Wiley & Sons, 2006.

[46] Felipe Vico, Zydrunas Gimbutas, Leslie Greengard, and Miguel Ferrando-Bataller. Overcoming low-frequency breakdown of the magnetic field integral equation. *IEEE transactions on antennas and propagation*, 61(3) :1285–1290, 2013.

[47] Jianfang Zhu, Saad Omar, Wenwen Chai, and Dan Jiao. A rigorous solution to the low-frequency breakdown in the electric field integral equation. In *Antennas and Propagation (APSURSI), 2011 IEEE International Symposium on*, pages 3214–3217. IEEE, 2011.

[48] Zhi Guo Qian and Weng Cho Chew. A quantitative study on the low frequency breakdown of efie. *Microwave and Optical Technology Letters*, 50(5) :1159–1162, 2008.

[49] Xin Qi, Zaiping Nie, and Xiaofeng Que. Efficient analysis of em scattering from 3d high-contrast dielectric objects. In *Antennas and Propagation (APSURSI), 2016 IEEE International Symposium on*, pages 1577–1578. IEEE, 2016.

[50] Sadeed Bin Sayed, Hüseyin Arda Ülkü, and Hakan Ba$\boldsymbol{u}$gc$\imath$. A stable marching on-in-time scheme for solving the time-domain electric field volume integral equation on high-contrast scatterers. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 63(7) :3098–3110, 2015.

[51] Luis J Gomez, Abdulkadir C Yücel, and Eric Michielssen. Low-frequency stable internally combined volume-surface integral equation for high-contrast scatterers. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 14 :1423–1426, 2015.

[52] Luis J Gomez, Abdulkadir C Yucel, and Eric Michielssen. The icvsie : A general purpose integral equation method for bio-electromagnetic analysis. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 2017.

[53] Kristof Cools, Francesco P Andriulli, Femke Olyslager, and Eric Michielssen. Time domain calderón identities and their application to the integral equation analysis of scattering by pec objects part i : Preconditioning. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 57(8) :2352–2364, 2009.

[54] Matthew B Stephanson and Jin-Fa Lee. Preconditioned electric field integral equation using calderon identities and dual loop/star basis functions. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 57(4) :1274–1279, 2009.

[55] Pasi Yla-Oijala and Matti Taskinen. Improving conditioning of electromagnetic surface integral equations using normalized field quantities. *IEEE transactions on antennas and propagation*, 55(1) :178–185, 2007.

[56] Vito Lancellotti, Bastiaan P de Hon, and Antonius G Tijhuis. Scattering from large 3-d piecewise homogeneous bodies through linear embedding via green's operators and arnoldi basis functions. *Progress In Electromagnetics Research*, 103 :305–322, 2010.

[57] AM Van de Water, BP De Hon, MC Van Beurden, AG Tijhuis, and P De Maagt. Linear embedding via green's operators : A modeling technique for finite electromagnetic band-gap structures. *Physical Review E*, 72(5) :056704, 2005.

[58] Ann Franchois and AG Tijhuis. A quasi-newton reconstruction algorithm for a complex microwave imaging scanner environment. *Radio Science*, 38(2), 2003.

[59] Peter M van den Berg and Jacob T Fokkema. Removal of undesired wavefields related to the casing of a microwave scanner. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 51(1) :187–192, 2003.

[60] Alvaro Diaz-Bolado, Paul-Andre Barriere, and Jean-Jacques Laurin. Study of microwave tomography measurement setup configurations for breast cancer detection based on breast compression. *International Journal of Antennas and Propagation*, 2013, 2013.

[61] Ann Franchois and Christian Pichot. Microwave imaging-complex permittivity reconstruction with a levenberg-marquardt method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 45(2) :203–215, 1997.

[62] Peter M Van Den Berg and Ralph E Kleinman. A contrast source inversion method. *Inverse problems*, 13(6) :1607, 1997.

[63] R Casanova, A Silva, and AR Borges. A quantitative algorithm for parameter estimation in magnetic induction tomography. *Measurement Science and Technology*, 15(7) :1412, 2004.

[64] Alexey Voronov. Regularization in microwave tomography. 2007.

[65] Andrei Nikolaevich Tikhonov, Vasili Yakovlevich Arsenin, and Fritz John. *Solutions of ill-posed problems*, volume 14. Winston Washington, DC, 1977.

[66] Claude Cohen-Bacrie, Yves Goussard, and Robert Guardo. Regularized reconstruction in electrical impedance tomography using a variance uniformization constraint. *IEEE transactions on medical imaging*, 16(5) :562–571, 1997.

[67] David Strong and Tony Chan. Edge-preserving and scale-dependent properties of total variation regularization. *Inverse problems*, 19(6) :S165, 2003.

[68] R Casanova, A Silva, and AR Borges. Mit image reconstruction based on edge-preserving regularization. *Physiological measurement*, 25(1) :195, 2004.

[69] Hiromi Yoshida, Toshiyuki Tanaka, and Takashi Takenaka. Optimization approach with edge-preserving regularization to time domain 1d inverse scattering. *Electronics and Communications in Japan (Part II : Electronics)*, 84(10) :1–8, 2001.

[70] Stuart Ganan and D McClure. Bayesian image analysis : An application to single photon emission tomography. In *Proceedings of American Statistical Association*, pages 12–18, 1985.

[71] Peter J Green. Bayesian reconstructions from emission tomography data using a modified em algorithm. *IEEE transactions on medical imaging*, 9(1) :84–93, 1990.

[72] Pierre Charbonnier, Laure Blanc-Feraud, Gilles Aubert, and Michel Barlaud. Two deterministic half-quadratic regularization algorithms for computed imaging. In *Image*

Processing, 1994. Proceedings. ICIP-94., IEEE International Conference, volume 2, pages 168–172. IEEE, 1994.

[73] Paul-AndrÉ BarriÈre, Jean-Jacques Laurin, and Yves Goussard. Mapping of equivalent currents on high-speed digital printed circuit boards based on near-field measurements. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 51(3) :649–658, 2009.

[74] Abdel Douiri, Martin Schweiger, Jason Riley, and Simon Arridge. Local diffusion regularization method for optical tomography reconstruction by using robust statistics. *Optics letters*, 30(18) :2439–2441, 2005.

[75] Charles Bouman and Ken Sauer. A generalized gaussian image model for edge-preserving map estimation. *IEEE Transactions on image processing*, 2(3) :296–310, 1993.

[76] Matteo Pastorino. Stochastic optimization methods applied to microwave imaging : A review. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 55(3) :538–548, 2007.

[77] Stephen J Wright and Jorge Nocedal. Numerical optimization. *Springer Science*, 35(67-68) :7, 1999.

[78] T Sarkar, Ercument Arvas, and S Rao. Application of fft and the conjugate gradient method for the solution of electromagnetic radiation from electrically large and small conducting bodies. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 34(5) :635–640, 1986.

[79] Peter Zwamborn and Peter M Van Den Berg. The three dimensional weak form of the conjugate gradient fft method for solving scattering problems. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 40(9) :1757–1766, 1992.

[80] Hong Gan and Weng Cho Chew. A discrete bcg-fft algorithm for solving 3d inhomogeneous scatterer problems. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 9(10) :1339–1357, 1995.

[81] Corentin Friedrich. *Méthodes de Reconstruction en Tomographie de diffraction 3-D*. PhD thesis, École Polytechnique de Montréal, 2016.

[82] Dianne P O'Leary. The block conjugate gradient algorithm and related methods. *Linear algebra and its applications*, 29 :293–322, 1980.

[83] A El Guennouni, K Jbilou, and H Sadok. A block version of bicgstab for linear systems with multiple right-hand sides. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 16(129-142) :2, 2003.

[84] Corentin Friedrich, Sébastien Bourguignon, Jérôme Idier, and Yves Goussard. Reconstruction of 3-d microwave images based on a block-bicgstab algorithm. In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 657, page 012014. IOP Publishing, 2015.

[85] Michele Benzi. Preconditioning techniques for large linear systems : a survey. *Journal of computational Physics*, 182(2) :418–477, 2002.

[86] Sven Nordebo, Andreas Fhager, Mats Gustafsson, and Börje Nilsson. A green's function approach to fisher information analysis and preconditioning in microwave tomography. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 18(8) :1043–1063, 2010.

[87] Jeffrey A Fessler and Scott D Booth. Conjugate-gradient preconditioning methods for shift-variant pet image reconstruction. *IEEE transactions on image processing*, 8(5) :688–699, 1999.

[88] Michael Kolmbauer and Ulrich Langer. A robust preconditioned minres solver for distributed time-periodic eddy current optimal control problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 34(6) :B785–B809, 2012.

[89] Tony F Chan. An optimal circulant preconditioner for toeplitz systems. *SIAM journal on scientific and statistical computing*, 9(4) :766–771, 1988.

[90] Daniela Calvetti, Debra McGivney, and Erkki Somersalo. Left and right preconditioning for electrical impedance tomography with structural information. *Inverse Problems*, 28(5) :055015, 2012.

[91] Weng Cho Chew. *Waves and fields in inhomogeneous media*, volume 522. IEEE press New York, 1995.

[92] Chen-To Tai. *Dyadic Green functions in electromagnetic theory*. Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), 1994.

[93] Constantine A Balanis. *Advanced engineering electromagnetics*. John Wiley & Sons, 1999.

[94] Wei Cai and Tiejun Yu. Fast calculations of dyadic green's functions for electromagnetic scattering in a multilayered medium. *Journal of computational Physics*, 165(1) :1–21, 2000.

[95] MS Tong, WT Sheng, ZY Zhu, Z Xu, JH Zhou, and XF Yin. Reconstruction of three-dimensional dielectric objects through integral equation method. In *Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI), 2012 IEEE*, pages 1–2. IEEE, 2012.

[96] Jean Van Bladel and J Van Bladel. *Singular electromagnetic fields and sources*. Clarendon Press Oxford, 1991.

[97] Aria Abubakar. Three-dimensional nonlinear inversion of electrical conductivity. 2000.

[98] Jack Richmond. Scattering by a dielectric cylinder of arbitrary cross section shape. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 13(3) :334–341, 1965.

[99] Zhi Guo Qian and Weng Cho Chew. An augmented electric field integral equation for low frequency electromagnetic analysis. In *Antennas and Propagation Society International Symposium, 2008. AP-S 2008. IEEE*, pages 1–4. IEEE, 2008.

[100] Siyuan Y Chen, Weng Cho Chew, Jiming M Song, and Jun-Sheng Zhao. Analysis of low frequency scattering from penetrable scatterers. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 39(4) :726–735, 2001.

[101] V Lancellotti and AG Tijhuis. Extended linear embedding via green's operators for analyzing wave scattering from anisotropic bodies. *International Journal of Antennas and Propagation*, 2014, 2014.

[102] Vito Lancellotti, Bastiaan P de Hon, and Anton G Tijhuis. An eigencurrent approach to the analysis of electrically large 3-d structures using linear embedding via green's operators. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 57(11) :3575–3585, 2009.

[103] Arya Fallahi and Benedikt Oswald. On the computation of electromagnetic dyadic green's function in spherically multilayered media. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 59(6) :1433–1440, 2011.

[104] Le-Wei Li, Xiao-Kang Kang, Mook-Seng Leong, Pang-Shyan Kooi, and Tat-Soon Yeo. Electromagnetic dyadic green's functions for multilayered spheroidal structures. i : Formulation. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 49(3) :532–541, 2001.

[105] Le-Wei Li, Hock-Guan Wee, and Mook-Seng Leong. Dyadic green's functions inside/outside a dielectric elliptical cylinder : Theory and application. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 51(3) :564–574, 2003.

[106] Tolga Ulas Gürbüz, Birol Aslanyürek, Ali Yapar, Hulya Sahintürk, and Ibrahim Akduman. A nonlinear microwave breast cancer imaging approach through realistic body–breast modeling. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 62(5) :2596–2605, 2014.

[107] Robert Frans Remis and PM Van den Berg. On the equivalence of the newton-kantorovich and distorted born methods. *Inverse Problems*, 16(1) :L1, 2000.

[108] Aria Abubakar, Peter M van den Berg, and Tarek M Habashy. Application of the multiplicative regularized contrast source inversion method on tm-and te-polarized experimental fresnel data. *Inverse Problems*, 21(6) :S5, 2005.

[109] Peter M van den Berg, Aria Abubakar, and Jacob T Fokkema. Multiplicative regularization for contrast profile inversion. *Radio Science*, 38(2), 2003.

[110] Paul-André Barrière, Jérôme Idier, Jean-Jacques Laurin, and Yves Goussard. Contrast source inversion method applied to relatively high contrast objects. *Inverse Problems*, 27(7) :075012, 2011.

[111] Gene H Golub, Michael Heath, and Grace Wahba. Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. *Technometrics*, 21(2) :215–223, 1979.

[112] Dimitri P Bertsekas. *Nonlinear programming*. Athena scientific Belmont, 1999.

[113] Sven Nordebo, Andreas Fhager, Mats Gustafsson, and Mikael Persson. A systematic approach to robust preconditioning for gradient-based inverse scattering algorithms. *Inverse Problems*, 24(2) :025027, 2008.

[114] Sven Nordebo, Mats Gustafsson, and Börje Nilsson. Fisher information analysis for two-dimensional microwave tomography. *Inverse Problems*, 23(3) :859, 2007.

[115] Sven Nordebo, Richard Bayford, Bengt Bengtsson, Andreas Fhager, Mats Gustafsson, Parham Hashemzadeh, Börje Nilsson, Thomas Rylander, and Therese Sjöden. Fisher information analysis and preconditioning in electrical impedance tomography. In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 224, page 012057. IOP Publishing, 2010.

[116] Ziyi Zhang, Peiguo Liu, Dongming Zhou, and Liang Ding. An improved 10-tissue human head model with real anatomical structure and hexahedral discretization feature in magnetic induction measurement simulation. *Computer Assisted Surgery*, 21(sup1) :148–153, 2016.

[117] Manuchehr Soleimani and William RB Lionheart. Absolute conductivity reconstruction in magnetic induction tomography using a nonlinear method. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 25(12) :1521–1530, 2006.

[118] Ryszard Palka, Stanislaw Gratkowski, Piotor Baniukiewicz, Mieczyslaw Komorowski, and Kreysztof Stawicki. Inverse problems in magnetic induction tomography of low conductivity materials. *Intelligent Computer Techniques in Applied Electromagnetics*, pages 163–170, 2008.

[119] Yuyan Chen, Xu Wang, Dan Yang, and Yi Lv. The influence of conductivity perturbations on mit sensitivity field. In *Computer Science and Automation Engineering (CSAE), 2011 IEEE International Conference on*, volume 1, pages 722–725. IEEE, 2011.

[120] Min Han and Yuyan Xue. Application of expectation maximization algorithm in magnetic induction tomography. *Biomedical Engineering Letters*, 5(3) :221–228, 2015.

[121] Nuno B Bras, Raúl C Martins, AC Serra, and A Lopes Ribeiro. A fast forward problem solver for the reconstruction of biological maps in magnetic induction tomography. *IEEE transactions on magnetics*, 46(5) :1193–1202, 2010.

[122] HERMANN Scharfetter, Patricia Brunner, and Robert Merwa. Magnetic induction tomography : Single-step solution of the 3-d inverse problem for differential image reconstruction. *International Journal of Information and Systems Sciences*, 2(4) :585–606, 2006.

[123] Robert Merwa, Karl Hollaus, Patricia Brunner, and Hermann Scharfetter. Solution of the inverse problem of magnetic induction tomography (mit). *Physiological Measurement*, 26(2) :S241, 2005.

[124] S Watson, RJ Williams, W Gough, and H Griffiths. A magnetic induction tomography system for samples with conductivities below 10 s m- 1. *Measurement Science and Technology*, 19(4) :045501, 2008.

[125] Lotfi Kesraoui. *Étude d'un système de tomographie par induction magnétique à base de magnétoimpédance géante*. PhD thesis, École Polytechnique de Montréal, 2015.

[126] Jan-Patrick Schäfer. *Implementierung und Anwendung analytischer und numerischer Verfahren zur Lösung der Maxwellgleichungen für die Untersuchung der Lichtausbreitung in biologischem Gewebe*. PhD thesis, Universität Ulm. Fakultät für Naturwissenschaften, 2011.

[127] Armand Wirgin. The inverse crime. *arXiv preprint math-ph/0401050*, 2004.

[128] Grigorios P Zouros and Neil V Budko. Transverse electric scattering on inhomogeneous objects : Spectrum of integral operator and preconditioning. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 34(3) :B226–B246, 2012.

[129] WRB Lionheart, Manuchehr Soleimani, and AJ Peyton. Sensitivity analysis in 3d magnetic induction tomography (mit). In *Proc. 3rd World Congr. Industrial Process Tomography*, pages 239–244, 2003.

[130] Hermann Scharfetter, Pere Riu, Marcos Populo, and Javier Rosell. Sensitivity maps for low-contrast perturbations within conducting background in magnetic induction tomography. *Physiological measurement*, 23(1) :195, 2002.

[131] Manuchehr Soleimani, William RB Lionheart, Antony J Peyton, Xiandong Ma, and Stuart R Higson. A three-dimensional inverse finite-element method applied to experimental eddy-current imaging data. *IEEE Transactions on Magnetics*, 42(5) :1560–1567, 2006.

[132] Hermann Scharfetter, Karl Hollaus, Javier Rosell-Ferrer, and Robert Merwa. Single-step 3-d image reconstruction in magnetic induction tomography : Theoretical limits of spatial resolution and contrast to noise ratio. *Annals of biomedical engineering*, 34(11) :1786–1798, 2006.

[133] Aria Abubakar, Tarek M Habashy, Guangdong Pan, and Mao-Kun Li. Application of the multiplicative regularized gauss–newton algorithm for three-dimensional microwave imaging. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 60(5) :2431–2441, 2012.

ANNEXE A Calcul du gradient et du Hessien

Gradient

Pour résoudre le problème inverse, une méthode de type quasi-Newton a été jugée préférable au chapitre 3. Pour calculer la direction de descente, le calcul du gradient est nécessaire. Celui-ci peut être fait à partir d'un développement de premier ordre.

$$\nabla f(\boldsymbol{X}) \approx \frac{f(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\delta_X}) - f(\boldsymbol{X})}{\boldsymbol{\delta_X}} \tag{A.1}$$

Le lemme d'inversion matricielle est également utile pour mettre en évidence la dérivée.

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1} - \mathcal{O}(|\boldsymbol{\delta_X}|^3) \tag{A.2}$$

Cette section détaillera le calcul du gradient pour les trois modèles directs considérés, soit les modèles EVI, ELOG et GI. Puisqu'un critère de moindres carrés est choisi comme fonction objectif à minimiser, la fonction objectif est de forme :

$$F(\boldsymbol{X}) = 0.5\sum_{i=1}^{N_s} |\boldsymbol{y}_i - f(\boldsymbol{X})| \tag{A.3}$$

Le gradient de cette fonction est donc de forme :

$$\nabla_{\boldsymbol{X}} F = -\boldsymbol{J}^{\dagger}(\boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{X})) \tag{A.4}$$

Modèle EVI

Rappelons que le modèle direct par EIV est donné par :

$$f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{h}^0 - c\boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^R[(\boldsymbol{I} - a\boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{e}^0] \tag{A.5}$$

La matrice Jacobienne peut donc être évaluée en considérant un développement au premier ordre.

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\delta_X}) &= \boldsymbol{G}^R(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\delta_X})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^c(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\delta_X}))^{-1}\boldsymbol{e}^0 \\ &= \boldsymbol{G}^R(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\delta_X})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X} - \boldsymbol{G}^c\boldsymbol{\delta_X})^{-1}\boldsymbol{e}^0 \end{aligned} \tag{A.6}$$

En utilisant le lemme d'inversion avec $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X})$ et $\boldsymbol{B} = (-\boldsymbol{G}^c\boldsymbol{\delta_X})$ et en laissant tomber les termes d'ordre 2 et supérieurs, on trouve :

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\delta_X}) &\approx \boldsymbol{G}^R(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\delta_X})((\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X})^{-1} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{G}^c\boldsymbol{\delta_X})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X})^{-1})\boldsymbol{e}^0 \\ &\approx \boldsymbol{G}^R\boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{e}^0 + \boldsymbol{G}^R\boldsymbol{\delta_X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{e}^0 + \boldsymbol{G}^R\boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^c\boldsymbol{\delta_X})^{-1} \\ &\cdot (\boldsymbol{G}^c\boldsymbol{\delta_X})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{e}^0 + \boldsymbol{G}^R\boldsymbol{\delta_X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{G}^c\boldsymbol{\delta_X})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{e}^0 \\ &= f(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{G}^R\,\mathbf{diag}\,\{\boldsymbol{e}\}\,\boldsymbol{\delta_X} + \boldsymbol{G}^R\boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{G}^c\,\mathbf{diag}\,\{\boldsymbol{e}\}\,\boldsymbol{\delta_X} + \mathcal{O}(|\boldsymbol{\delta_X}|^2) \end{aligned} \tag{A.7}$$

En utilisant l'équation la différence finie de premier ordre, on trouve donc :

$$\begin{aligned} \nabla f(\boldsymbol{X}) &\approx \boldsymbol{G}^R\,\mathbf{diag}\,\{\boldsymbol{e}\} + \boldsymbol{G}^R\boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{G}^c\,\mathbf{diag}\,\{\boldsymbol{e}\} \\ &\approx \boldsymbol{G}^R(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{G}^c)\,\mathbf{diag}\,\{\boldsymbol{e}\} \end{aligned} \tag{A.8}$$

En utilisant les identités suivantes :

$$\boldsymbol{I} + \boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{G}^c = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^c)^{-1} \tag{A.9}$$

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{G}^c = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X})^\intercal \tag{A.10}$$

On peut simplifier l'équation (A.8) à :

$$\nabla f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{G}^R(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X})^{-\intercal}\,\mathbf{diag}\,\{\boldsymbol{e}\} \tag{A.11}$$

Modèle ELOG

Pour le modèle ELOG ne dépend plus du contraste de l'objet par rapport à l'air, mais plutôt du contraste de la perturbation par rapport au milieu biologique connu, $\boldsymbol{X}_2$. La matrice Jacobienne doit donc être évaluée en calculant la dérivé de chaque composante par rapport à la nouvelle variation de contraste définie par rapport au tissu sain (le fond inhomogène) :

$$\boldsymbol{J} = \nabla_{\boldsymbol{X}_2}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_2) \tag{A.12}$$

Le modèle direct peut être sous-divisé en deux problèmes, soit les problèmes $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ qui consistent à calculer les champs diffusés provenant respectivement des domaines 1 et 2. Le modèle direct peut donc être exprimé sous la forme :

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \tag{A.13}$$

où :

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{G}_{r1}^{0}(\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{e}_1^0 + \boldsymbol{m}_1\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{e}_2^0) \tag{A.14}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{G}_{r2}^{0}(\boldsymbol{m}_2\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{e}_1^0 + \boldsymbol{m}_2\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{e}_2^0) \tag{A.15}$$

avec :

$$\boldsymbol{m}_1 = (\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{R}_1)^{-1} \tag{A.16}$$

$$\boldsymbol{m}_2 = (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{R}_2)^{-1} \tag{A.17}$$

On peut ainsi diviser le calcul du gradient en quatre parties où $\boldsymbol{A}_1$ et $\boldsymbol{A}_2$ sont les termes de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}_1$ et $\boldsymbol{B}_2$ les termes de $\boldsymbol{B}$. Le gradient par rapport à $\boldsymbol{X}_2$ de chacun de ces sous-problèmes peut être évalué à partir d'un développement limité comme dans le cas précédent.

Gradient de $\boldsymbol{A}_1$

On a :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_1 &= \boldsymbol{m}_1\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{e}_1^0 \\ &= (\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}(\boldsymbol{X}_2(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{G}_{22}^{c}\boldsymbol{X}_2)^{-1})\boldsymbol{P}_{12})^{-1}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{e}_1^0\end{aligned} \tag{A.18}$$

On a donc :

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}) = (\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}((\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{G}_{22}^{c}(\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}))^{-1})\boldsymbol{P}_{12})^{-1}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{e}_1^0 \tag{A.19}$$

En appliquant le lemme d'inversion :

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}) = (\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}(\boldsymbol{X}_2(\boldsymbol{L}_2^{-1}+\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{G}_{22}^{c}\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}_2^{-1})+\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{L}_2^{-1}+\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{G}_{22}^{c}\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}_2^{-1}))\boldsymbol{P}_{12})^{-1}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{e}_1^0 \tag{A.20}$$

En négligeant les termes d'ordre 2 et supérieurs, on trouve :

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}) = (\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{P}_{12} - \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}(\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_1^{-1}\boldsymbol{G}_{22}^{c} + \boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{P}_{12})^{-1}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{e}_1^0 \tag{A.21}$$

En appliquant de nouveau le lemme d'inversion :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}) = (\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{P}_{12})^{-1} + (\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{P}_{12})^{-1} \\ (\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}(\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{G}_{22}^{c} + \boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{P}_{12}(\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{P}_{12}))\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{e}_1^0\end{aligned} \tag{A.22}$$

Ce qui permet de trouver le Jacobien :

$$\nabla_{\boldsymbol{X}_2}\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{m}_1(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{G}_{22}^{c} + \boldsymbol{I}_2)\,\mathbf{diag}\left\{\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{P}_{12}(\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{P}_{12})^{-1}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{e}_1^0\right\} \tag{A.23}$$

Gradient de $\boldsymbol{A}_2$

On a :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_2 &= \boldsymbol{m}_1\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{e}_2^0 \\ &= (\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{X}_2(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{G}_{22}^c\boldsymbol{X}_2)^{-1}\boldsymbol{P}_{12})^{-1}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{X}_2(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{G}_{22}^c\boldsymbol{X}_2)^{-1}\boldsymbol{e}_2^0\end{aligned} \tag{A.24}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}) = (\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}(\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{G}_{22}^c(\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}))^{-1}\boldsymbol{P}_{12})^{-1} \\ \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}(\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{G}_{22}^c(\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}))^{-1}\boldsymbol{e}_2^0\end{aligned} \tag{A.25}$$

En appliquant le lemme d'inversion :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}) = (\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}(\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{L}_2^{-1} - \boldsymbol{L}_2^{-1}(-\boldsymbol{G}_{22}^c\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}})\boldsymbol{L}_2^{-1})\boldsymbol{P}_{12})^{-1} \\ \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}(\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{L}_2^{-1} - \boldsymbol{L}_2^{-1}(-\boldsymbol{G}_{22}^c\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}})\boldsymbol{L}_2^{-1})\boldsymbol{e}_2^0\end{aligned} \tag{A.26}$$

En négligeant les termes d'ordre ${\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}}^2$, on trouve :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}) = (\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{P}_{12} - \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{G}_{22}^c)\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}_2^{-1})\boldsymbol{P}_{12})^{-1} \\ \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}(\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1} + (\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{G}_{22}^c)\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}_2^{-1})\boldsymbol{e}_2^0\end{aligned} \tag{A.27}$$

En appliquant de nouveau le lemme d'inversion :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}) = (\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{P}_{12})^{-1} + (\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{P}_{12})^{-1} \\ (\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{G}_{22}^c)\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{P}_{12})(\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{P}_{12})^{-1}) \\ (\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{e}_2^0 + \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{G}_{22}^c)\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{e}_2^0)\end{aligned} \tag{A.28}$$

En négligeant les termes d'ordre supérieurs :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}) = (\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{P}_{12})^{-1}(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{e}_2^0) + \\ (\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{P}_{12})^{-1}(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{G}_{22}^c)\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{P}_{12}) \\ (\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{P}_{12})^{-1}(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{e}_2^0) + \\ (\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{P}_{12})^{-1}(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{G}_{22}^c)\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{e}_2^0)\end{aligned} \tag{A.29}$$

Ce qui permet de trouver le Jacobien :

$$\nabla_{\boldsymbol{X}_2}\boldsymbol{A}_2 = -\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{G}_{22}^c)\,\mathbf{diag}\left\{\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{e}_2^0 + \boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{e}_2^0\right\} \tag{A.30}$$

Gradient de $\boldsymbol{B}_1$

On a :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_1 &= (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{R}_2)^{-1}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{e}_1^0 \\ &= (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{X}_2(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{G}_{22}^c\boldsymbol{X}_2)^{-1}\boldsymbol{R}_2)^{-1}\boldsymbol{X}_2(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{G}_{22}^c\boldsymbol{X}_2)^{-1}\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{e}_1^0\end{aligned} \tag{A.31}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}) = (\boldsymbol{I}_2 - (\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{G}_{22}^c(\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}))^{-1}\boldsymbol{R}_2)^{-1} \\ (\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{G}_{22}^c(\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}))^{-1}\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{e}_1^0\end{aligned} \tag{A.32}$$

En appliquant le lemme d'inversion :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}) = (\boldsymbol{I}_2 - (\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{L}_2^{-1} + \boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{G}_{22}^c\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}_2^{-1})\boldsymbol{R}_2)^{-1} \\ (\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1} + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}_2^{-1} + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{G}_{22}^c\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}_2^{-1})\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{e}_1^0\end{aligned} \tag{A.33}$$

En négligeant les termes d'ordre ${\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}}^2$, on trouve :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}) = (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{R}_2 - (\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{G}_{22}^c)\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{R}_2)^{-1}(\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}+ \\ (\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{G}_{22}^c)\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}_2^{-1})\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{e}_1^0\end{aligned} \tag{A.34}$$

En appliquant de nouveau le lemme d'inversion :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}) = ((\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{R}_2)^{-1} + (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{R}_2)^{-1}((\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{G}_{22}^c)\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{R}_2) \\ (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{R}_2)^{-1})(\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1} + (\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{G}_{22}^c)\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}_2^{-1})\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{e}_1^0\end{aligned} \tag{A.35}$$

Ce qui permet de trouver le Jacobien :

$$\nabla_{\boldsymbol{X}_2}\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{m}_2(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{G}_{22}^c)\,\mathbf{diag}\left\{(\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{m}_2\boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{L}_2^{-1})\boldsymbol{P}_{12}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{e}_1^0\right\} \tag{A.36}$$

Gradient de $\boldsymbol{B}_2$

On a :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_2 &= \boldsymbol{m}_2\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{e}_2^0 \\ &= (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{X}_2(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{G}_{22}^c\boldsymbol{X}_2)^{-1}\boldsymbol{R}_2)^{-1}\boldsymbol{X}_2(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{G}_{22}^c\boldsymbol{X}_2)^{-1}\boldsymbol{e}_2^0\end{aligned} \tag{A.37}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}) = (\boldsymbol{I}_2 - (\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{G}^c_{22}(\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}))^{-1}\boldsymbol{R}_2)^{-1} \\ (\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{G}^c_{22}(\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}))^{-1}\boldsymbol{e}_2^0\end{aligned} \tag{A.38}$$

En appliquant le lemme d'inversion :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}) = (\boldsymbol{I}_2 - (\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{L}_2^{-1} + \boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{G}^c_{22}\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}_2^{-1})\boldsymbol{R}_2)^{-1} \\ (\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{L}_2^{-1} + \boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{G}^c_{22}\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}_2^{-1})\boldsymbol{e}_2^0\end{aligned} \tag{A.39}$$

En négligeant les termes d'ordre ${\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}}^2$, on trouve :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}) = (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{R}_2 - (\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{G}^c_{22})\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{R}_2)^{-1} \\ (\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1} + (\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{G}^c_{22})\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}_2^{-1})\boldsymbol{e}_2^0\end{aligned} \tag{A.40}$$

En appliquant de nouveau le lemme d'inversion :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}) = ((\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{R}_2)^{-1} + (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{R}_2)^{-1} \\ (\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{G}^c_{22})\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{R}_2)) \\ (\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1} + (\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{G}^c_{22})\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{L}_2^{-1})\boldsymbol{e}_2^0\end{aligned} \tag{A.41}$$

Ce qui permet de trouver le Jacobien :

$$\nabla_{\boldsymbol{X}_2}\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{m}_2(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{G}^c_{22})\,\mathbf{diag}\left\{\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{m}_2\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{e}_2^0 + \boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{e}_2^0\right\} \tag{A.42}$$

Modèle GI

Comme pour le modèle ELOG, le gradient est calculé par rapport à $\boldsymbol{X}_2$ plutôt que $\boldsymbol{X}_1$. Rappellons que le modèle direct est donné par :

$$f(\boldsymbol{X}_2) = \boldsymbol{G}^R\boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{G}^{in}\boldsymbol{X}_2(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{G}^{ho}_{22}\boldsymbol{X}_2)^{-1}\boldsymbol{e}_{1|2}) \tag{A.43}$$

Le Jacobien est obtenu encore une fois à partir du développement limité et du Lemme d'inversion :

$$f(\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{G}^R\boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{G}^{in}(\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{\delta})(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{G}^{ho}_{22}(\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{\delta}))^{-1}\boldsymbol{e}_{1|2} \tag{A.44}$$

En appliquant le Lemme d'inversion :

$$f(\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{G}^R\boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{G}^{in}(\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{\delta})((\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{G}_{22}^{ho}\boldsymbol{X}_2)^{-1}+(\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{G}_{22}^{ho}\boldsymbol{X}_2)^{-1}(\boldsymbol{G}_{22}^{ho}\boldsymbol{\delta})(\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{G}_{22}^{ho}\boldsymbol{X}_2)^{-1})\boldsymbol{e}_{1|2} \tag{A.45}$$

En négligeant les termes d'ordre supérieurs, on trouve le jacobien :

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{G}^R\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{G}^{in}(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{G}_{22}^{ho})\,\mathbf{diag}\left\{\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{e}_{1|2}\right\} \tag{A.46}$$

Implémentation

Puisqu'on préfère résoudre des systèmes $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ plutôt que de calculer directement les inverses, on applique la transposée du Jacobien à chaque sous-matrice pour faire le calcul. On a donc :

$$\boldsymbol{J}^\dagger = \mathbf{diag}\left\{\overline{\boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{e}_{1|2}}\right\}(\boldsymbol{I}_2 + \overline{\boldsymbol{G}_{22}^{ho}}\boldsymbol{L}_2^{-1\dagger}\overline{\boldsymbol{X}_2})\boldsymbol{G}_{12}^{ho\dagger}\boldsymbol{L}_1^{-1\dagger}\overline{\boldsymbol{X}_1}\boldsymbol{G}^{R\dagger}\Delta \tag{A.47}$$

Pour calculer les conjuguées complexes des matrices L, on se sert de l'identité :

$$\boldsymbol{L}_1^{-1\dagger}\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_1 + \overline{\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{L}_1^{-1}\boldsymbol{G}_{11}^{ho}}\boldsymbol{b}_1 \tag{A.48}$$

Calcul du Hessien

Rappelons que le Hessien de la fonction objectif est donné par :

$$\nabla^2 F(\boldsymbol{X}_2) = \sum_i^{N_s}\boldsymbol{J}^\intercal\boldsymbol{J} + \sum_i^{N_s}\sum_j^{N_d}\boldsymbol{r}\nabla^2\boldsymbol{r} \tag{A.49}$$

Le calcul du Jacobien $\boldsymbol{J}$ est donné à l'annexe A. La principale difficulté est maintenant de calculer le terme $\nabla^2 r_j$. Il y a deux façons de calculer ce terme. La première est de calculer directement les dérivés matricielles en se servant des identités :

$$\partial(\boldsymbol{XY}) = (\partial\boldsymbol{X})\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{X}(\partial\boldsymbol{Y}) \tag{A.50}$$

$$\partial(\boldsymbol{X}^{-1}) = -\boldsymbol{X}^{-1}(\partial\boldsymbol{X})\boldsymbol{X}^{-1} \tag{A.51}$$

La deuxième façon consiste à ajouter une perturbation au système. Le Jacobien et le Hessien sont donnés par :

$$f(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\delta}) \approx f(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{J}^\intercal\boldsymbol{\delta} + 1/2\boldsymbol{\delta}^\intercal\boldsymbol{H}\boldsymbol{\delta} \tag{A.52}$$

Il faut alors utiliser une série de Taylor de la fonction d'inversion pour isoler la perturbation :

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1} - ... \tag{A.53}$$

Les deux méthodes sont équivalentes et mènent au même résultat. Les détails de la seconde sont donnés ici. À partir du modèle EIV et puisque $\nabla^2 \boldsymbol{r} = \nabla^2 f$, on a donc :

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\delta}) &= \boldsymbol{G}^R(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\delta})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^c\boldsymbol{X} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{\delta})^{-1}\boldsymbol{e}^0 \\ &= \boldsymbol{G}^R(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\delta})(\boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1} + \boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}\boldsymbol{G}^c\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1} - \boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}\boldsymbol{G}^c\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}\boldsymbol{G}^c\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1})\boldsymbol{e}^0 \\ &= \boldsymbol{G}^R\boldsymbol{X}\boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}\boldsymbol{e}^0 + \boldsymbol{G}^R\boldsymbol{X}\boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}\boldsymbol{G}^c\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}\boldsymbol{e}^0 + \boldsymbol{G}^R\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}\boldsymbol{e}^0 - \\ &\qquad \boldsymbol{G}^R\boldsymbol{X}\boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}\boldsymbol{G}^c\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}\boldsymbol{G}^c\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}\boldsymbol{e}^0 + \boldsymbol{G}^R\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}\boldsymbol{G}^c\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}\boldsymbol{e}^0 \end{aligned} \tag{A.54}$$

Le premier terme correspond à F, les termes 2 et 3 à J et les termes 4 et 5 à $\boldsymbol{H}$. Puisque la multiplication par le vecteur perturbation $\boldsymbol{\delta}$ a l'effet de transformer le vecteur qui suit en une matrice diagonale, on peut donc exprimer le Hessien du modèle direct EIV par :

$$\nabla^2 f = -2\,\mathbf{diag}\left\{\boldsymbol{G}^R + \boldsymbol{G}^R\boldsymbol{X}\boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}\boldsymbol{G}\right\}\boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}\boldsymbol{G}\,\mathbf{diag}\left\{\boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}\boldsymbol{e}^0\right\} \tag{A.55}$$

De la même façon, le Hessien du modèle direct GI est donné par :

$$\nabla^2 f = -2\,\mathbf{diag}\left\{\boldsymbol{G}^J + \boldsymbol{G}^J\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{\mathcal{L}}_2^{-1}\boldsymbol{G}_2\right\}\boldsymbol{\mathcal{L}}_2^{-1}\boldsymbol{G}_2\,\mathbf{diag}\left\{\boldsymbol{\mathcal{L}}_2^{-1}\boldsymbol{e}_{1|2}\right\} \tag{A.56}$$

où $\boldsymbol{G}^J = \boldsymbol{G}^R\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{G}^{in}$. À partir de ces résultats, le hessien de la fonction objectif peut donc être exprimé par :

$$\boldsymbol{H} = \sum_i^{N_s} \boldsymbol{J}^\intercal\boldsymbol{J} + \sum_i^{N_s}\sum_j^{N_d} \boldsymbol{r}\nabla^2\boldsymbol{r} \tag{A.57}$$