PolyPublie
Polytechnique Montréal

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Titre: Title:	Méthode de Galerkin discontinue pour la discrétisation par Éléments finis des équations de maxwell pour la modélisation de problèmes d'électromagnétisme en basses fréquences
Auteur: Author:	Yann-Meing Law-Kam-Cio
Date:	2018
Type:	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis
Référence: Citation:	Law-Kam-Cio, Y.-M. (2018). Méthode de Galerkin discontinue pour la discrétisation par Éléments finis des équations de maxwell pour la modélisation de problèmes d'électromagnétisme en basses fréquences [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/3111/

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: PolyPublie URL:	https://publications.polymtl.ca/3111/
Directeurs de recherche: Advisors:	Steven Dufour
Programme: Program:	Doctorat en mathématiques de l'ingénieur

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal

https://publications.polymtl.ca

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MÉTHODE DE GALERKIN DISCONTINUE POUR LA DISCRÉTISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DES ÉQUATIONS DE MAXWELL POUR LA MODÉLISATION DE PROBLÈMES D'ÉLECTROMAGNÉTISME EN BASSES FRÉQUENCES

YANN-MEING LAW-KAM-CIO
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR
(MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR)
AVRIL 2018

© Yann-Meing Law-Kam-Cio, 2018.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

MÉTHODE DE GALERKIN DISCONTINUE POUR LA DISCRÉTISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DES ÉQUATIONS DE MAXWELL POUR LA MODÉLISATION DE PROBLÈMES D'ÉLECTROMAGNÉTISME EN BASSES FRÉQUENCES

présentée par : LAW-KAM-CIO Yann-Meing
en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor
a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. PRUDHOMME Serge, Ph. D., président
M. DUFOUR Steven, Ph. D., membre et directeur de recherche
M. MAHSEREDJIAN Jean, Ph. D., membre
M. FORTIN André, Ph. D., membre externe

DÉDICACE

À mes parents et mon frère,

REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord mon directeur de recherche, le professeur Steven Dufour, pour sa supervision et son support tout au long de mon doctorat. J'ai énormément apprécié mon passage dans son laboratoire, les diverses conversations que nous avons eu et la confiance qu'il m'a accordée.

Je tiens aussi à remercier le maître d'enseignement Donatien N'dri pour m'avoir initié au monde de l'enseignement. Ses judicieux conseils m'ont été d'une grande aide pour améliorer mes compétences pédagogiques.

Je remercie le professeur Marc Laforest pour m'avoir initié au domaine de l'analyse numérique au cours de mon baccalauréat. Grâce à nos diverses rencontres, je me suis découvert une véritable passion pour ce domaine.

Je tiens à remercier monsieur Roland Rivard de sa disponibilité, sa vision de l'analyse numérique et ses conseils sur la mise-en-œuvre de la méthode des éléments finis.

Il n'y a pas de mots pour remercier mes parents et mon frère. Votre support tout au long de mes études a été une pièce maîtresse à ma réussite. Je vous en serai toujours reconnaissant ! Je tiens aussi à remercier le professeur Sui Meing Wong pour son support au cours de mes études. Nos différentes conversations avant les entraînements m'ont grandement aidé dans les moments difficiles.

À mes collègues de travail et amis, messieurs Damien Taggedine, Daniel Lévesque, Wissem Maazoun, Kenan Kergrene et Antonin Paquette-Rufiange, je vous remercie pour la dynamique que nous avons eue dans le laboratoire. Nos différents échanges et votre compagnie ont été appréciés.

Je tiens à remercier le professeur Serge Prudhomme d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse, ainsi que les membres du jury, les professeurs Jean Mahseredjian et André Fortin, qui ont accepté d'évaluer ce travail.

Je remercie le Fonds de recherche du Québec - Nature et technologies (FRQNT) de m'avoir accordé le financement nécessaire à l'accomplissement de cette thèse.

RÉSUMÉ

Une discrétisation par éléments finis utilisant la méthode de Galerkin discontinue pour les équations de Maxwell est proposée pour modéliser les problèmes d'électromagnétisme en basses fréquences. L'approximation des équations de Maxwell, dans le régime des basses fréquences, est directement discrétisée avec la méthode de Galerkin discontinue qui a été originellement développée pour les problèmes hyperboliques. On étudie, plus précisément, la modélisation des problèmes sur les supraconducteurs à haute température afin d'évaluer la robustesse de la stratégie numérique proposée. Une analyse dimensionnelle du système d'équations aux dérivées partielles d'ordre un, ainsi qu'un modèle pour les milieux ambiants ayant une conductivité très faible sont aussi proposés. Un problème ayant une solution manufacturée et la propagation d'un front magnétique sont étudiés afin de vérifier la méthodologie numérique proposée. L'induction d'un courant électrique dans un échantillon et dans des câbles électriques supraconducteurs à configuration complexe est étudiée afin de valider le modèle mathématique. De plus, une comparaison sur la capture des forts gradients de la densité de courant et sur la robustesse du schéma de points-fixes est faite entre la stratégie numérique proposée et l'approche numérique populaire au sein de la communauté des ingénieurs électriques en utilisant les problèmes sur les supraconducteurs à haute température.

ABSTRACT

The discretization of Maxwell's equations using the discontinuous Galerkin finite element method is proposed for modeling electromagnetism problems in low-frequency regime. The low-frequency approximation to Maxwell's equations is directly discretized using the discontinuous Galerkin method that was first designed for hyperbolic problems. The modeling of high-temperature superconductors is particularly studied to assess the robustness of the proposed numerical strategy. A dimensional analysis of Maxwell's equations in low-frequency regime is proposed as well as a model for a medium with very low conductivity, such as air medium. A problem with a manufactured solution and the magnetic front problem are used to verify the proposed numerical strategy. The magnetization of superconducting bulks and wires with a complex structure is used to validate the mathematical model. For high-temperature superconductors modeling, the capture of the sharp gradients of the current density and the robustness of the fixed-point method are studied. The proposed approach is also compared with the popular numerical strategy among the electrical engineering community.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE iii

REMERCIEMENTS iv

RÉSUMÉ v

ABSTRACT vi

TABLE DES MATIÈRES vii

LISTE DES TABLEAUX x

LISTE DES FIGURES xi

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS xiv

CHAPITRE 1 INTRODUCTION 1

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE 4
2.1 Classification des équations aux dérivées partielles 4
2.2 Équations de Maxwell 5
2.3 Discrétisation des équations 10
2.3.1 Méthode des différences finies 11
2.3.2 Méthode des éléments finis 13
2.4 Systèmes de Friedrichs 24
2.5 Supraconducteurs à haute température 26

CHAPITRE 3 ORGANISATION DE LA THÈSE SELON LES OBJECTIFS SPÉCIFIQUES 28

CHAPITRE 4 ARTICLE 1 : NUMERICAL MODELING OF HIGH-TEMPERATURE SUPERCONDUCTORS USING THE NODAL DISCONTINUOUS GALERKIN FINITE ELEMENT METHOD 29
4.1 Abstract 29
4.2 Introduction 29
4.3 Maxwell's Equations in the Low-Frequency Regime for HTS modeling 31

4.4 Numerical Methodology 33
4.4.1 The Galerkin Finite Element Method 34
4.4.2 The Discontinuous Galerkin Finite Element Method 36
4.4.3 Divergence-Free Magnetic Field Constraint 42
4.5 Numerical Verifications 43
4.5.1 Problem with a Manufactured Solution 43
4.5.2 The Magnetic Front Problem 43
4.5.3 Magnetization of an HTS Bulk 48
4.6 Conclusion 50

CHAPITRE 5 ARTICLE 2 : NUMERICAL MODELING OF HIGH-TEMPERATURE SUPERCONDUCTORS USING THE DISCONTINUOUS GALERKIN FINITE ELEMENT METHOD WITH THE WHITNEY ELEMENT 53
5.1 Abstract 53
5.2 Introduction 54
5.3 Maxwell's Equations in the Low-Frequency Regime 55
5.3.1 The Governing Equations for Normal Conductors 55
5.3.2 The Governing Equations for High-Temperature Superconductors . . 57
5.4 Non-Dimensionalization 57
5.4.1 The Modeling of a Medium With Very Low Conductivity 59
5.5 Numerical Methodology 61
5.5.1 The Discontinuous Galerkin Finite Element Method 62
5.5.2 The Domain Identification for the Different Models 65
5.6 Numerical Studies 65
5.6.1 Problem with a Manufactured Solution 65
5.6.2 The Magnetic Front Problem 66
5.6.3 Magnetization of a Wire 71
5.7 Conclusion 77

CHAPITRE 6 ARTICLE 3 : NUMERICAL SIMULATION OF THE CALIBRATION FREE METHOD FOR THE ESTIMATION OF THE AC LOSS IN MgB_2 WIRES 80
6.1 Abstract 80
6.2 Introduction 80
6.3 Maxwell's Equations in the Low-Frequency Regime 82
6.3.1 The Governing Equations for Conducting Materials 82
6.3.2 A Model for a Medium with Very Low Conductivity 82
6.3.3 Non-Dimensionalization 83

6.4 Numerical Methodology 84
6.5 Computation of the AC Loss 86
6.6 Numerical Studies : the Magnetization of MgB_2 Wires 87
6.7 Conclusion 93

CHAPITRE 7 DISCUSSION GÉNÉRALE 96

CHAPITRE 8 CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS 99

RÉFÉRENCES 102

LISTE DES TABLEAUX

Table 4.1 Values of t^* for which the convergence of the fixed-point iteration scheme is lost for $t > t^*$, and the largest time-step sizes allowing to reach t^* for both numerical strategies, for the magnetic front problem. 50

Table 5.1 Comparison of the values of t^* for which the convergence of the fixed-point iteration scheme is lost for $t > t^*$, and the largest time-step sizes allowing to reach t^* for various numerical strategies, for the magnetic front problem with $p = 50$. The values for the GFEM and the nodal DG-based strategy are taken from [48]. 69

Table 6.1 Structure and dimensions of the cross-section of wires taken from [42, 79]. 88

Table 6.2 Properties of a MgB_2 superconductor taken from [39]. 88

Table 6.3 Electrical resistivity of niobium. 88

Table 6.4 Electrical resistivity of normal conductors at 30 K. 89

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 Représentation 2D de l'élément de Whitney pour deux éléments K et K^* dont la composante tangentielle des fonctions d'interpolation est continue entre ces éléments. 16

Figure 2.2 Représentation 2D de l'ordre de parcours des éléments du maillage et représentation des éléments intervenant dans le calcul du flux décentré amont de l'élément 3 (éléments gris). 19

Figure 2.3 Représentation unidimensionnelle du saut et de la valeur moyenne de la variable v entre deux éléments K et K^*. 20

Figure 4.1 Convergence plots for the problem with a manufactured solution for linear and quadratic elements. 44

Figure 4.2 Geometry for the magnetic front problem where $h_z = 0.1$ and $r = 1$. 45

Figure 4.3 The x-component of the magnetic field for $p = 10$ at $t = 0.3364$, for the magnetic front problem. The color scale from blue to red is $[-0.35, 0.35]$. 46

Figure 4.4 The z-component of the current density for $p = 10$ at $t = 0.3364$, for the magnetic front problem. The color scale from blue to red is $[-1, 0]$. 46

Figure 4.5 The z-component of the current density $\boldsymbol{J}$ for values of p at $t = 0.16$, for the magnetic front problem. The color scale from blue to red is $[-1, 0]$. 47

Figure 4.6 The z-component of the current density $\boldsymbol{J}$ along the radial axis for values of p at two time steps using the proposed DG-based strategy for the magnetic front problem. 47

Figure 4.7 The z-component of the current density $\boldsymbol{J}$ along the radial axis for values of p at $t = 0.02$, using both numerical strategies, for the magnetic front problem. 49

Figure 4.8 Convergence plot of the divergence of $\boldsymbol{H}_h$ using linear elements at different exponents p and at $t = 0.25$ for the magnetic front problem. . . 49

Figure 4.9 Evolution of the components of $\boldsymbol{H}$ (— : H_x, — :H_y, — : H_z) along the x-axis at various time steps for the magnetization of an HTS bulk. The left column illustrates the numerical results obtained with the $\boldsymbol{H}$ formulation discretized using the GFEM with the Whitney element, and the right column gives the numerical results based on system (4.5) discretized using the DG method with nodal elements. 51

Figure 5.1 Convergence plots for the error of the discrete dependent variables and the error of the divergence of the discrete magnetic field using the DG method with the Whitney element for a problem with a manufactured solution. 67

Figure 5.2 Convergence plot for the condition number of the finite element assembly matrix using the DG method with the Whitney element and the nodal elements for a problem with a manufactured solution. 67

Figure 5.3 The evolution of the z-component of the current density $\boldsymbol{J}$ at various time steps with $p = 10$, $h = 0.05$ and $\Delta t = 0.125 \times 10^{-3}$ for the magnetic front problem. The color scale from blue to red is $[-1, 0]$. . 69

Figure 5.4 The evolution of the z-component of the current density $\boldsymbol{J}$ at various time steps with $p = 50$, $h = 0.05$ and $\Delta t = 0.25 \times 10^{-4}$ for the magnetic front problem. The color scale from blue to red is $[-1, 0]$. 70

Figure 5.5 The evolution of the z-component of the current density $\boldsymbol{J}$ at various time steps with $p = 10$, $h = 0.01$ and $\Delta t = 0.5 \times 10^{-5}$ for the magnetic front problem. The color scale from blue to red is $[-1, 0]$. 70

Figure 5.6 Convergence plot for the error of the divergence of the discrete magnetic field for the DG method using the Whitney element for the magnetic front problem. 71

Figure 5.7 Geometry of the domain for the magnetization of a wire problem where $h_z = 0.5$ mm, $r_{\text{ext}} = 0.75$ mm and $r_{\text{int}} = 0.5$ mm. 72

Figure 5.8 Evolution of the Euclidean norm of the dimensionless magnetic field $\boldsymbol{H}$ at various time steps along the x-axis at $\tilde{y} = 0$ and $\tilde{z} = 0.25$ for the magnetization of an HTS wire. 74

Figure 5.9 The dimensionless magnetic field lines at various time steps at $\tilde{z} = 0.25$ with $h = 0.025$ and $\Delta t = 0.5 \times 10^{-3}$ for the magnetization of an HTS wire. The color scale from blue to red is $[0.003, 0.108]$. The domain of the HTS is delimited by the black circle. 75

Figure 5.10 Evolution of the z-component of the dimensionless current density $\tilde{J}_z$ at various time steps along the x-axis at $\tilde{y} = 0$ and $\tilde{z} = 0.25$ for the magnetization of an HTS wire. 75

Figure 5.11 2D slice of the dimensionless z-component of the current density $\tilde{J}_z$ at various time steps at $\tilde{z} = 0.25$ with $h = 0.025$ and $\Delta t = 0.5 \times 10^{-3}$ for the magnetization of an HTS wire. The color scale from blue to red is $[-0.135, 0.135]$. 76

Figure 5.12 The Euclidean norm of the dimensionless magnetic field $\tilde{\boldsymbol{H}}$ and of the current density $\tilde{\boldsymbol{J}}$ at $\tilde{t} = 14.5$ along the x-axis at $\tilde{y} = 0$ and $\tilde{z} = 0.25$ for the magnetization of a normal conductor. 78

Figure 5.13 The dimensionless magnetic field lines at various time steps at $\tilde{z} = 0.25$ with $h = 0.025$ and $\Delta t = 0.5 \times 10^{-2}$ for the magnetization of a normal conductor wire. The color scale is from blue to red $[0.01, 0.102]$. The domain of the normal conductor is delimited by the black circle. . . . 78

Figure 6.1 Geometry of the domain for the magnetization of an HTS wire, where Ω_1 is the domain of air medium and $\Omega_2 = \Omega_{\text{HTS}} \cup \Omega_{\text{Barrier}} \cup \Omega_{\text{Sheath}}$ is the domain of conducting materials. 87

Figure 6.2 AC loss of a MgB_2-Nb structure at 144 Hz with $h_{\Omega_1} = h_{\Omega_2} = 0.05$ and $\Delta t = 0.25 \times 10^{-3}$ for the magnetization of an HTS wire. The experimental data are taken from [79]. 90

Figure 6.3 AC loss of a MgB_2-Nb structure at 144 Hz and 27 K with $h_{\Omega_1} = 0.05$ for the magnetization of an HTS wire (— : $h_{\Omega_2} = 0.025$ and $\Delta t = 0.1 \times 10^{-3}$, — : $h_{\Omega_2} = 0.05$ and $\Delta t = 0.25 \times 10^{-3}$, — : experimental data). The experimental data are taken from [79]. 90

Figure 6.4 AC loss of a MgB_2-Ti-Cu structure at 30 K and 72 Hz for the magnetization of an HTS wire with $h_{\Omega_1} = 0.025$, $h_{\Omega_2} = 0.05$ and $\Delta t = 0.25 \times 10^{-3}$. 92

Figure 6.5 AC loss of a MgB_2-Nb-GC structure at 30 K and 72 Hz for the magnetization of an HTS wire with $h_{\Omega_1} = 0.025$, $h_{\Omega_2} = 0.05$ and $\Delta t = 0.25 \times 10^{-3}$. 92

Figure 6.6 AC loss of a MgB_2-Nb-MO structure at 30 K and 72 Hz for the magnetization of an HTS wire with $h_{\Omega_1} = 0.025$, $h_{\Omega_2} = 0.05$ and $\Delta t = 0.25 \times 10^{-3}$. 93

Figure 6.7 The geometry of the cross-section in the xy-plan for the magnetization of an HTS wire with a cylindrical void. 94

Figure 6.8 AC loss of a MgB_2-Ti-Cu structure at 72 Hz and 30 K with $\Delta t = 0.25 \times 10^{-3}$, $h_{\Omega_1} = 0.05$ and $h_{\Omega_{\text{Barrier}}} = h_{\Omega_{\text{Sheath}}} = 0.025$ for the magnetization of an HTS wire with a cylindrical void (— : $h_{\Omega_{\text{HTS}}} = h_{\Omega_{\text{Hole}}} = 0.01$, — : $h_{\Omega_{\text{HTS}}} = h_{\Omega_{\text{Hole}}} = 0.025$, — : experimental data). The experimental data are taken from [43]. 94

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

Abréviations

AC	: courant alternatif (« alternating-current »)
BDF	: formule de différence arrière (« backward differentiation formula »)
DG	: méthode de Galerkin discontinue (« discontinuous Galerkin »)
GC	: GlidCop® AL-60
GFEM	: méthode des éléments finis de Galerkin (« Galerkin finite element method »)
HTS	: supraconducteur à haute température (« high-temperature superconductor »)
MO	: Monel® alliage de nickel-cuivre 400
NIP	: pénalisation intérieure non symétrique (« non-symmetric interior penalty »)

Géométrie

Ω	: domaine de définition du problème
Ω_h	: domaine de calcul
Γ	: frontière du domaine
I	: intervalle de temps
K	: élément tétraédrique
∂K	: frontière de l'élément tétraédrique

Espaces

$L^2(\Omega)$	: espace des fonctions de carré intégrable
$P_r(K)$	: espace des polynômes de degré r définis sur K
$\boldsymbol{N}_r(K)$	: espace des fonctions d'interpolation de Nédélec de première espèce

Variables

e : arête d'un élément
h : taille d'un élément
p : paramètre lié à l'exposant de la loi de puissance
J_c : densité de courant critique
E_c : amplitude du champ électrique associé à J_c
ϵ : permittivité électrique
δ_{ke} : delta de Kronecker
ρ : résistivité électrique
ρ_c : densité de charge
σ : conductivité électrique
μ : perméabilité magnétique
$\boldsymbol{n}$: vecteur normal
$\boldsymbol{t}_e$: vecteur tangent à l'arête e
$\boldsymbol{B}$: champ d'induction magnétique
$\boldsymbol{E}$: champ électrique
$\boldsymbol{H}$: champ magnétique
$\boldsymbol{J}$: densité de courant
$\boldsymbol{M}$: aimantation

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Un matériau à l'état supraconducteur offre une résistivité électrique pratiquement nulle. Cet état dépend de la température du matériau, du courant électrique y circulant et de son exposition à un champ magnétique externe. Le matériau doit être refroidi en dessous d'une température critique pour atteindre l'état supraconducteur. De plus, le courant électrique et la grandeur du champ magnétique externe ne doivent pas dépasser une valeur critique.

Les propriétés électriques des supraconducteurs sont intéressantes pour améliorer les performances des composantes électriques dans les réseaux de distribution électrique telles que les transformateurs, les limiteurs de courant ou encore les câbles de transmission électrique. Parmi les types de supraconducteurs, on retrouve les supraconducteurs à haute température. Ceux-ci peuvent avoir une température critique se situant autour de 100 K et peuvent donc être refroidis à l'aide d'azote liquide ou d'oxygène liquide au lieu d'hélium liquide qui est plus coûteux.

Puisque l'état supraconducteur dépend de la température du matériau, le coût d'exploitation d'une composante électrique supraconductrice est relié à la perte de chaleur de cette même composante. Cette perte de chaleur, aussi connue comme l'effet Joule, est calculée à l'aide de la perte de courant alternatif. L'estimation précise de cette quantité d'intérêt est importante pour aider les ingénieurs à concevoir des composantes électriques performantes. L'évaluation de la perte de courant alternatif nécessite de calculer l'intégrale du produit scalaire entre le champ électrique et la densité de courant sur le domaine occupé par les matériaux conducteurs. La modélisation d'une composante électrique d'un réseau de distribution électrique implique l'utilisation des équations de Maxwell.

Les composantes électriques utilisant les supraconducteurs à haute température se situent généralement dans le régime des basses fréquences. Leur modélisation est donc basée sur la condition magnéto-quasistatique qui permet de reformuler les équations de Maxwell, qui sont de nature hyperbolique, en un problème parabolique. Un exemple est donné par la formulation basée sur le champ magnétique, la formulation en $\boldsymbol{H}$. La plupart des études numériques dans la littérature utilisent cette approche pour diverses raisons, telles que la simplicité de mise-en-œuvre.

Le développement de stratégies numériques pour modéliser les composantes électriques utilisant les supraconducteurs à haute température est complexe. À température constante, le conducteur normal est caractérisé par une résistivité électrique constante, alors que le supraconducteur à haute température est caractérisé par une résistivité électrique non linéaire qui

est souvent modélisée par une loi de puissance ou encore par le modèle de Bean. Lorsque la résistivité électrique suit une loi de puissance, la formulation en $\boldsymbol{H}$ est aussi connue comme le p-rotationnel. Le problème du p-rotationnel est un problème parabolique dégénéré et il est reconnu pour développer de forts gradients sur la densité de courant. De plus, le milieu ambiant, qui est généralement de l'air, a une résistivité électrique dont l'ordre de grandeur est beaucoup plus élevé que celui de la résistivité électrique des matériaux conducteurs.

Les forts gradients caractérisant la densité de courant sont difficilement capturés par les méthodologies numériques proposées dans la littérature. La plupart de ces approches numériques souffrent d'oscillations non physiques. De plus, plusieurs d'entre elles sont contraintes de choisir de petits pas de temps afin de garantir la convergence du schéma de points-fixes.

Dans le cadre de cette thèse, l'approche proposée reformulera les équations de Maxwell en utilisant aussi la condition magnéto-quasistatique. Bien que le système d'équations résultant ne puisse pas être qualifié d'hyperbolique, il sera possible d'utiliser les méthodes numériques adaptées au système d'équations hyperbolique. Il est connu que les méthodes numériques permettant de discrétiser les équations hyperboliques peuvent mieux capturer les solutions possédant des discontinuités et de forts gradients.

La méthode des éléments finis de Galerkin discontinue sera choisie puisqu'elle permet l'utilisation de maillages non structurés et elle permet les discontinuités entre les éléments formant le maillage, ce qui simplifie l'étude de problèmes avec des matériaux ayant des propriétés différentes. De plus, la parallélisation de cette méthode est plus facile à mettre en œuvre, car la discrétisation du système d'équations par la méthode de Galerkin discontinue peut se faire élément par élément en parcourant le domaine de calcul et en utilisant une méthode itérative telle que la méthode de Gauss-Seidel.

Un solveur éléments finis tridimensionnel est déjà mis à notre disposition. Il permet l'utilisation de la méthode de Galerkin pour la discrétisation des équations elliptiques et paraboliques, ainsi que l'utilisation de la méthode de Galerkin discontinue pour la discrétisation des équations hyperboliques. Ce solveur a été mis en œuvre pour simuler des problèmes en mécanique des fluides.

L'objectif principal de cette thèse est le développement d'un modèle numérique utilisant la méthode de Galerkin discontinue afin de modéliser les problèmes d'électromagnétisme tridimensionnels en basses fréquences et, plus précisément, sur les supraconducteurs à haute température. Les objectifs spécifiques sont :

i) Reformuler les équations de Maxwell en basses fréquences pour les discrétiser à l'aide de la méthode de Galerkin discontinue ;
ii) Élaborer un modèle du milieu ambiant des matériaux conducteurs ;

iii) Vérifier la formulation de Galerkin discontinue à l'aide de problèmes d'électromagnétisme en basses fréquences ;

iv) Valider le modèle mathématique discrétisé avec la méthodologie numérique proposée à l'aide de problèmes d'électromagnétisme en basses fréquences.

La méthodologie suivante permettra d'atteindre nos objectifs spécifiques :

i) En se basant sur un modèle de relaxation pour modéliser les supraconducteurs à haute température, une formulation des équations de Maxwell permettant l'utilisation des méthodes numériques adaptées aux problèmes hyperboliques sera utilisée. La formulation des équations de Maxwell obtenue sera ensuite discrétisée en utilisant la méthode de Galerkin discontinue ;

ii) En s'inspirant de l'analyse dimensionnelle faite en mécanique des fluides, un modèle du milieu ambiant des matériaux conducteurs, qui est généralement de l'air, sera élaboré. Les équations de ce modèle seront discrétisées en utilisant la méthode de Galerkin discontinue ;

iii) La discrétisation par la méthode de Galerkin discontinue de l'approximation des équations de Maxwell dans le régime des basses fréquences sera vérifiée avec un problème ayant une solution manufacturée, la propagation d'un front magnétique et le problème d'induction d'un courant électrique dans un câble électrique ou dans un échantillon supraconducteur. Le problème ayant une solution manufacturée permettra de vérifier le cas linéaire, i.e. celui des conducteurs normaux. La propagation d'un front magnétique et le problème d'induction d'un courant électrique serviront à vérifier le cas non linéaire, i.e. celui des supraconducteurs à haute température, en se basant sur la solution du modèle de Bean. Le problème d'induction d'un courant électrique dans un câble électrique permettra aussi de vérifier le modèle du milieu ambiant entourant les matériaux conducteurs.

iv) Le modèle mathématique sera validé à l'aide de problèmes d'induction d'un courant électrique dans un câble électrique utilisant le diborure de magnésium (MgB_2) comme supraconducteur à haute température. Ces problèmes considèrent plusieurs agencements de différents matériaux et des données expérimentales sur la perte de courant alternatif sont disponibles dans la littérature.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

2.1 Classification des équations aux dérivées partielles

Les systèmes d'équations aux dérivées partielles sont classés selon l'ordre des dérivées des équations du système et leur structure. On distingue aussi les systèmes linéaires des systèmes non linéaires. Savoir identifier le type des équations aux dérivées partielles est important afin d'utiliser les méthodes numériques appropriées.

Les systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre peuvent s'écrire sous la forme

$$\partial_t \boldsymbol{U} + \sum_{j=1}^{3} A_j \, \partial_{x_j} \boldsymbol{U} + B \, \boldsymbol{U} = \boldsymbol{F}, \tag{2.1}$$

où la fonction vectorielle $\boldsymbol{U}$ dépend de $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et de t, et A_j et B sont des matrices de dimensions $n \times n$. Le système d'équations (2.1) est dit hyperbolique si toutes les combinaisons linéaires des matrices A_j sont diagonalisables et possèdent des valeurs propres réelles. Si les combinaisons linéaires des matrices A_j ne sont pas diagonalisables, le système d'équations (2.1) est dit hyperbolique au sens faible [52]. Pour des matrices à coefficients variables $A_j(\boldsymbol{x}, t)$, la définition du système d'équations hyperbolique doit s'appliquer pour tout $(\boldsymbol{x}, t)$. Pour un système d'équations hyperbolique non linéaire, la définition doit s'appliquer pour tout $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, t)$.

Les équations aux dérivées partielles du second ordre peuvent être exprimées sous la forme

$$a \, \partial_{xx} u + b \, \partial_{xt} u + c \, \partial_{tt} u + f(x, t, u, \partial_x u, \partial_t u) = 0, \tag{2.2}$$

où a, b et c sont des coefficients. Le discriminant

$$d = b^2 - 4 \, a \, c$$

permet de déterminer la nature de l'équation aux dérivées partielles. Si $d > 0$, l'équation (2.2) est dite hyperbolique. Si $d < 0$, l'équation (2.2) est dite elliptique. Si $d = 0$, l'équation (2.2) est dite parabolique. Pour un discriminant à coefficients variables, cette définition doit s'appliquer pour tout (x, t). Par contre, il est possible que la nature de l'équation change en fonction de (x, t). Le cas non linéaire est tout aussi délicat à traiter puisque la nature de l'équation dépendra de la solution. Pour plus de détails, on réfère le lecteur aux livres de Logan [55] et de Griffiths et al. [25].

2.2 Équations de Maxwell

Au XIX$^{\text{e}}$ siècle, Michael Faraday a déduit de ses expériences sur l'induction électromagnétique qu'un champ magnétique, qui varie en temps, induit un champ électrique. Ceci a mené à la forme différentielle de la loi de Faraday,

$$\partial_t \boldsymbol{B} + \nabla \times \boldsymbol{E} = 0, \tag{2.3}$$

où $\boldsymbol{B}$ est le champ d'induction magnétique et $\boldsymbol{E}$ est le champ électrique. La loi de Gauss, sous sa forme différentielle, relie le champ électrique à la densité de charge ρ_c,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\epsilon}\,\rho_c, \tag{2.4}$$

où ϵ est la permittivité électrique. Cette loi stipule que la charge totale à l'intérieur d'une surface fermée peut être mesurée à l'aide du flux électrique la traversant. Sous l'hypothèse magnétostatique $\partial_t \rho_c = 0$, la loi de Biot-Savart relie le champ d'induction magnétique $\boldsymbol{B}$ à la densité de courant $\boldsymbol{J}$,

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \int_{\Omega'} \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \times \boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2}\, d\Omega',$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, Ω' est le volume à l'intérieur duquel le courant passe, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'$ et $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne. La densité de courant $\boldsymbol{J}$ dépend de $\boldsymbol{x}' = (x', y', z')$ et non de $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$. En appliquant l'opérateur divergence à la loi de Biot-Savart et en utilisant l'identité vectorielle $\nabla \cdot (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{J}) - \boldsymbol{J} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{u})$, on obtient que le champ d'induction magnétique est à divergence nulle,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0. \tag{2.5}$$

Sous l'hypothèse magnétostatique, où le champ d'induction magnétique ne dépend pas du temps, la relation entre la densité de courant $\boldsymbol{J}$ et le champ d'induction magnétique $\boldsymbol{B}$ est donnée par la loi d'Ampère

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu\, \boldsymbol{J}, \tag{2.6}$$

où μ est la perméabilité magnétique. Bien qu'il n'existe pas de telle situation en réalité, cette hypothèse est utilisée pour des problèmes ayant de faibles fluctuations en temps [26]. La loi d'Ampère ne s'applique plus dans un cadre plus général. En appliquant la divergence à la loi d'Ampère (2.6), on obtient

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = \mu\, \nabla \cdot \boldsymbol{J}.$$

De l'identité vectorielle $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = 0$, le membre de gauche est donc nul. Par contre, le membre de droite ne l'est pas en général, dans le cas transitoire. James Clerk Maxwell a relevé cette limitation. En combinant l'équation de continuité

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\partial_t \rho_c,$$

qui assure que les charges électriques sont conservées [26], et la loi de Gauss (2.4), l'équation résultante donnée par

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\nabla \cdot (\epsilon\, \partial_t \boldsymbol{E})$$

correspond au terme manquant à la loi d'Ampère (2.6). La loi d'Ampère corrigée par Maxwell est alors

$$\mu\, \epsilon\, \partial_t \boldsymbol{E} - \nabla \times \boldsymbol{B} = -\mu\, \boldsymbol{J}. \tag{2.7}$$

Un champ électrique variant en temps va donc induire un champ d'induction magnétique. Cette équation a été validée par les expériences de Hertz sur les ondes électromagnétiques [26]. En combinant les lois de Faraday (2.3), de Gauss (2.4), d'Ampère corrigée (2.7) et l'équation (2.5), on obtient les équations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \partial_t \boldsymbol{B} + \nabla \times \boldsymbol{E} &= 0; \\ \mu\, \epsilon\, \partial_t \boldsymbol{E} - \nabla \times \boldsymbol{B} &= -\mu\, \boldsymbol{J}; \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} &= \frac{1}{\epsilon}\, \rho_c; \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Bien que les équations de Maxwell semblent surdéterminées à première vue, Jiang et al. [35] ont montré que la contrainte sur la divergence du champ d'induction magnétique $\boldsymbol{B}$ et celle sur le champ électrique $\boldsymbol{E}$ sont nécessaires afin d'obtenir un problème bien posé.

Dans le cas des problèmes d'électromagnétisme en basses fréquences (courants de Foucault), il est possible de simplifier les équations de Maxwell (2.8). Tout d'abord, nous faisons l'hypothèse que $\|\partial_t \boldsymbol{D}\|_2 \ll \|\boldsymbol{J}\|_2$ où $\boldsymbol{D}$ est l'induction électrique.La condition magnéto-quasistatique $\partial_t \boldsymbol{D} \approx 0$ découle de cette hypothèse [13]. Pour un matériau linéaire, la loi de comportement reliant l'induction électrique au champ électrique est donnée par $\boldsymbol{D} = \epsilon\, \boldsymbol{E}$. On retrouve, sous ces hypothèses, la loi d'Ampère (2.6) comme approximation de la loi d'Ampère modifiée (2.7).

Dans la matière, le champ d'induction magnétique $\boldsymbol{B}$ est relié au champ magnétique $\boldsymbol{H}$ et à l'aimantation du matériau $\boldsymbol{M}$, i.e. le moment magnétique par unité de volume, par

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\, (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}). \tag{2.9}$$

Pour un matériau dit linéaire, comme les conducteurs normaux tels le cuivre, l'aimantation est donnée par

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \, \boldsymbol{H},$$

où χ_m est un nombre sans dimension qui dépend du matériau. L'équation (2.9) se simplifie alors à

$$\boldsymbol{B} = \mu \, \boldsymbol{H}, \tag{2.10}$$

où $\mu = \mu_0 \, (1+\chi_m)$ est la perméabilité magnétique du matériau [26]. Les matériaux homogènes ont une perméabilité magnétique μ et une permittivité électrique ϵ qui sont constantes. Les conducteurs normaux seront considérés comme étant des matériaux homogènes.

La densité de courant $\boldsymbol{J}$ est reliée à la conductivité électrique σ du matériau par

$$\boldsymbol{J} = \sigma \, \boldsymbol{F},$$

où $\boldsymbol{F}$ est la force électromagnétique exercée par unité de charge dans notre cas. La force électromagnétique est reliée au champ électrique $\boldsymbol{E}$ et au champ d'induction magnétique $\boldsymbol{B}$ par

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B},$$

où $\boldsymbol{v}$ est la vitesse des charges électriques présentes dans le matériau. Dans le cas des courants de Foucault, c'est la variation du champ d'induction magnétique $\boldsymbol{B}$ dans la loi de Faraday (2.3) qui induit un champ électrique et donc un courant électrique dans le matériau. Le déplacement des charges électriques peut donc être négligé et la loi d'Ohm,

$$\boldsymbol{J} = \sigma \, \boldsymbol{E}, \tag{2.11}$$

est obtenue. La résistivité électrique est donnée par $\rho = \frac{1}{\sigma}$. Un conducteur parfait a donc une résistivité électrique nulle. En appliquant la divergence à l'équation (2.6) et en utilisant la loi d'Ohm (2.11), on obtient

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = \mu \, \sigma \, \nabla \cdot \boldsymbol{E}. \tag{2.12}$$

De l'identité vectorielle $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = 0$ appliquée à l'équation (2.12), on obtient que la divergence du champ électrique est zéro. De la loi de Gauss (2.4), la densité de charge dans le conducteur est aussi zéro. La condition magnéto-quasistatique implique donc qu'on suppose que $\nabla \cdot \boldsymbol{E}$ est près de zéro et qu'on néglige la quantité de charges électriques libres ρ_c dans le matériau. Bien qu'en réalité ce ne soit pas le cas, ces quantités sont négligeables pour les problèmes d'électromagnétisme en basses fréquences qui nous intéressent [26]. Si on utilise l'équation (2.10) avec la première équation du système (2.8), avec la loi d'Ampère

approximée (2.6) et l'équation (2.5), on obtient :

$$\begin{aligned} \mu\,\partial_t \boldsymbol{H} + \nabla \times \boldsymbol{E} &= 0; \\ \nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J}; \\ \mu\,\nabla \cdot \boldsymbol{H} &= 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Si on applique ensuite la loi d'Ohm (2.11) à la deuxième équation du système (2.13), et toujours en considérant la résistivité électrique $\rho = \frac{1}{\sigma}$, la loi d'Ampère approximée (2.6) devient

$$\rho\,\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}.$$

Donc, dans un matériau linéaire et homogène, pour les problèmes d'électromagnétisme en basses fréquences, les équations de Maxwell (2.8) deviennent :

$$\begin{aligned} \mu\,\partial_t \boldsymbol{H} + \nabla \times \boldsymbol{E} &= 0; \\ \rho\,\nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{E}; \\ \mu\,\nabla \cdot \boldsymbol{H} &= 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Le système (2.14) est un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre un. En appliquant la divergence à la loi de Faraday (2.3) et en utilisant l'identité vectorielle $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) = 0$, on obtient

$$\nabla \cdot (\partial_t \boldsymbol{B}) + \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \partial_t (\nabla \cdot \boldsymbol{B}) = 0.$$

Il est donc possible de garantir la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique en choisissant une condition initiale sur le champ magnétique dont la divergence est nulle. Nous pouvons alors considérer seulement les deux premières équations de ce système :

$$\begin{aligned} \mu\,\partial_t \boldsymbol{H} + \nabla \times \boldsymbol{E} &= 0; \\ \rho\,\nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{E}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Le système (2.15) ne peut cependant pas être qualifié de système hyperbolique dû à l'absence d'un terme transitoire associé au champ électrique $\boldsymbol{E}$. Il n'est donc pas possible d'exprimer ce système sous la forme (2.1) et de satisfaire aux critères menant à un système hyperbolique tel que présenté à la section 2.1. Par contre, il est possible de remplacer la deuxième équation du système (2.15) dans la première équation, puis de combiner cette équation à la troisième

équation du système (2.14) afin d'obtenir un problème parabolique :

$$\begin{aligned} \mu\,\partial_t \boldsymbol{H} + \nabla \times (\rho \nabla \times \boldsymbol{H}) &= 0; \\ \mu\,\nabla \cdot \boldsymbol{H} &= 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Les méthodes numériques conçues pour les équations elliptiques et paraboliques peuvent alors être utilisées pour discrétiser le système (2.16). Ce système d'équations est constitué d'une équation parabolique soumise à une contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique $\boldsymbol{H}$. Le système d'équations (2.16) est connu comme « la formulation en $\boldsymbol{H}$ ». Cette formulation en $\boldsymbol{H}$ facilite l'utilisation des logiciels commerciaux, tel que COMSOL Multiphysics®, qui ont été conçus pour discrétiser ce type de problèmes.

Pour une résistivité électrique ρ constante, on a que

$$\rho\,\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} = \rho\,\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{H}) - \rho\,\nabla^2 \boldsymbol{H} = -\rho\,\nabla^2 \boldsymbol{H},$$

de la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique. La première équation du système (2.16) peut alors s'exprimer comme

$$\mu\,\partial_t \boldsymbol{H} - \rho\,\nabla^2 \boldsymbol{H} = 0. \tag{2.17}$$

Encore une fois, l'équation (2.17) permet l'utilisation de solveurs numériques existants pour la discrétisation des équations paraboliques et elliptiques. Pour un domaine Ω dont la frontière $\Gamma = \Gamma_{\mathrm{D}} \cup \Gamma_{\mathrm{N}}$ est telle que $\Gamma_{\mathrm{D}} \neq \varnothing$ et $\Gamma_{\mathrm{D}} \cap \Gamma_{\mathrm{N}} = \varnothing$, les conditions aux frontières du système (2.16) sont données par :

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{G}_1 \quad \text{sur} \quad \Gamma_D \times \mathrm{I}; \tag{2.18}$$

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{G}_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_N \times \mathrm{I}, \tag{2.19}$$

où $\boldsymbol{E} = \rho\,\nabla \times \boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{n}$ est la normale unitaire extérieure de la frontière Γ et $\mathrm{I} = [t_0, t_{\mathrm{f}}]$ est l'intervalle de temps considéré. Pour le système (2.15), les conditions limites (2.18) et (2.19) peuvent être imposées sur toute la frontière Γ.

Pour les problèmes d'électromagnétisme en basses fréquences utilisant des conducteurs normaux à température constante, les simplifications qui mènent au système d'équations (2.17) sont justifiées. Si la température varie ou si le matériau a une résistivité ρ non linéaire, les systèmes d'équations (2.14) ou (2.16) doivent être utilisés. Un exemple typique d'un matériau possédant une résistivité non linéaire est le supraconducteur à haute température. Dans ce

cas, le modèle en loi de puissance [70, 76] est le plus utilisé,

$$\boldsymbol{E} = \frac{E_c}{J_c^p} \|\boldsymbol{J}\|_2^{p-1} \boldsymbol{J}, \tag{2.20}$$

où l'exposant $p > 1$ dépend du supraconducteur considéré et J_c est la densité de courant critique déterminée pour une valeur de l'amplitude du champ électrique E_c. Ce qui justifie le choix de ce modèle ainsi que les différents paramètres de la loi de puissance (2.20) seront donnés à la section 2.5. En considérant la loi d'Ampère approximée (2.6), la loi de puissance (2.20) devient

$$\boldsymbol{E} = \frac{E_c}{J_c^p} \|\nabla \times \boldsymbol{H}\|_2^{p-1} \nabla \times \boldsymbol{H}.$$

Les équations qui modélisent les supraconducteurs à haute température sont donc données par le système d'équations (2.14) où

$$\rho = \frac{E_c}{J_c^p} \|\nabla \times \boldsymbol{H}\|_2^{p-1}. \tag{2.21}$$

La première équation du système (2.16) avec une résistivité électrique non linéaire modélisée par l'équation (2.21) est aussi connue comme le problème p-rotationnel (« p-curl » en anglais). La résistivité électrique non linéaire (2.21) est nulle pour une densité de courant $\boldsymbol{J} = \nabla \times \boldsymbol{H}$ nulle. Dans ce cas, la première équation de la formulation en $\boldsymbol{H}$ (2.16), qui est une équation parabolique non linéaire, deviendra une équation différentielle ordinaire, soit $\mu\, \partial_t \boldsymbol{H} = 0$. L'équation parabolique non linéaire sera qualifiée de dégénérée pour $\boldsymbol{J} = 0$. La nature de l'équation change en ce point. Il est connu que la solution du problème p-rotationnel possède de forts gradients sur la densité de courant $\boldsymbol{J}$ pour un grand exposant p. On y reviendra à la section 2.5. Ce comportement a été observé par Sirois et Grilli [81] dans le cadre d'une étude numérique sur les supraconducteurs à haute température. Ces forts gradients peuvent être difficiles à capturer avec des méthodes numériques conçues pour les problèmes paraboliques. Ces problèmes sont donc intéressants pour évaluer la robustesse des différentes stratégies numériques.

2.3 Discrétisation des équations

Plusieurs méthodes numériques sont utilisées pour discrétiser la formulation en $\boldsymbol{H}$ (2.16) et ses variantes. On peut mentionner les méthodes variationnelles [12, 73, 69], la méthode des différences finies [86, 7, 39, 49], les méthodes intégrales [15, 16, 77, 90] et la méthode des éléments finis [14, 34, 45, 87, 28, 27]. Dans cette section, la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis seront présentées. Ces méthodes sont mieux adaptées pour

étudier des problèmes industriels tels que les différents agencements de matériaux nécessaires à la conception de câbles électriques. Pour une revue plus détaillée, le lecteur est invité à consulter les articles de Grilli [28, 27] et la thèse de Wan [87].

2.3.1 Méthode des différences finies

La méthode des différences finies consiste à approximer les dérivées des équations aux dérivées partielles par des formules de différentiation numérique. Le domaine Ω est discrétisé à l'aide d'une grille d'éléments rectangulaires quasi-uniformes. Un système d'équations algébriques peut alors être assemblé et sa résolution donne une solution approximée du problème. On peut consulter le livre de LeVeque [53] pour avoir une description détaillée de cette méthode de discrétisation.

Sykulski et al. [86] ont discrétisé la formulation en $\boldsymbol{H}$ (2.16) avec la résistivité électrique non linéaire (2.21) en une dimension à l'aide de la méthode des différences finies. Ils ont observé des oscillations parasites sur le champ électrique $\boldsymbol{E}$ pour l'exposant $p = 10$. Ils expliquent ce phénomène par la grande variation de la résistivité électrique ρ. Ils suggèrent d'utiliser la « formulation en $\boldsymbol{E}$ ». Celle-ci est obtenue en appliquant l'opérateur rotationnel à la loi de Faraday (2.3),

$$\nabla \times \partial_t \boldsymbol{B} + \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = 0.$$

En supposant que le champ d'induction magnétique $\boldsymbol{B}$ est suffisamment régulier et en considérant la condition magnéto-quasistatique (cf. p.6), on obtient

$$\mu\, \partial_t(\boldsymbol{J}) + \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = 0.$$

La loi d'Ohm (2.11) permet d'écrire

$$\mu\, \partial_t(\sigma\, \boldsymbol{E}) + \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = 0. \tag{2.22}$$

Dans le cas d'un supraconducteur à haute température, la fonction réciproque de la loi de puissance (2.20) est donnée par

$$\boldsymbol{J} = \begin{cases} \frac{J_c}{E_c^{\frac{1}{p}}} \left\|\boldsymbol{E}\right\|_2^{-1+\frac{1}{p}} \boldsymbol{E} & \text{si } \boldsymbol{E} \neq 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La formulation en $\boldsymbol{E}$ pour un supraconducteur à haute température est donc de la forme de

l'équation (2.22), avec une conductivité non linéaire

$$\sigma(\boldsymbol{E}) = \frac{J_c}{E_c^{\frac{1}{p}}} \left\|\boldsymbol{E}\right\|_2^{-1+\frac{1}{p}}. \tag{2.23}$$

La linéarisation de cette formulation est délicate, car la conductivité non linéaire est infinie si le champ électrique est nul. Les auteurs (cf. [86] pour les détails) ont utilisé la méthode d'Euler explicite pour discrétiser le terme transitoire, ce qui permet d'éviter ce problème après une modification du schéma. Une borne supérieure sur le pas de temps est imposée afin d'assurer la stabilité du schéma. Ils ont pu obtenir la convergence de leur modèle pour l'exposant $p = 21$. Ils concluent que la formulation en $\boldsymbol{E}$ (2.22) est plus robuste que la formulation en $\boldsymbol{H}$ (2.16).

Berger et al. [7] et Kajikawa et al. [39] ont utilisé la méthode des différences finies unidimensionnelle en coordonnées cylindriques pour étudier un filament circulaire composé d'un supraconducteur à haute température. Kajikawa et al. [39] ont étudié le transport d'un courant électrique dans un filament circulaire et ont validé leurs résultats à l'aide de données expérimentales obtenues avec un supraconducteur à haute température constitué de diborure de magnésium (MgB_2). Berger et al. [7] ont étudié la distribution de température dans un filament circulaire pour un problème d'induction d'un courant électrique, mais ils n'ont pas validé leurs résultats.

Law et Laforest [49] ont utilisé un modèle de relaxation afin d'approximer la formulation en $\boldsymbol{H}$. Essentiellement, un modèle de relaxation découple une équation aux dérivées partielles transitoire en plusieurs modèles qui ont chacun un temps caractéristique (« time scale » en anglais). Ce modèle de relaxation dépend d'un paramètre. Lorsque ce paramètre tend vers zéro, le modèle de relaxation devrait tendre vers le problème d'origine. Dans le modèle de relaxation de la première équation de la formulation en $\boldsymbol{H}$ proposé, lorsque le paramètre de relaxation tend vers zéro, ils retrouvent le système d'équations (2.14). Le schéma de Yee [91] a été utilisé pour discrétiser ce modèle de relaxation. Il consiste à discrétiser le champ électrique $\boldsymbol{E}$ et le champ magnétique $\boldsymbol{H}$ sur deux grilles différentes en temps et en espace qui sont décalées (« staggered » en anglais). Dans le cas où le paramètre de relaxation tend vers zéro, la méthodologie numérique consiste à alterner la discrétisation de la première équation et de la deuxième équation du système (2.14). Cette méthodologie a été appliquée dans le cas bidimensionnel pour l'exposant $p = 50$. Une condition sur la taille des pas de temps, similaire à celle obtenue par Sykulski et al. [86], est donnée. La méthodologie proposée élimine les oscillations parasites pour les problèmes étudiés. Il est à préciser qu'au moment du dépôt de cette thèse de doctorat les travaux de Law et Laforest [49] étaient en processus

de révision. Puisque la stratégie numérique que nous proposons est inspirée des conclusions faites dans [49], il nous semble important de mentionner leurs principaux résultats dans la revue de littérature.

Nous avons choisi de ne pas utiliser de discrétisation par différences finies, car elle est difficilement applicable à des géométries complexes et avec des maillages anisotropes, qui sont souvent utilisés pour étudier des problèmes industriels. La méthode des éléments finis ne souffre pas de ces limitations. De plus, la méthode des éléments finis facilite l'imposition des conditions aux frontières.

2.3.2 Méthode des éléments finis

En partant d'une équation aux dérivées partielles, la forme forte, on cherche la solution d'une forme faible associée à cette équation dans un espace fonctionnel approprié. Pour obtenir cette forme faible, l'équation aux dérivées partielles est multipliée par une fonction test appartenant à un espace fonctionnel, qui peut être différent de l'espace fonctionnel où se trouve la solution, puis l'équation obtenue est intégrée sur le domaine Ω. Le théorème de la divergence est ensuite souvent utilisé pour abaisser l'ordre des dérivées. Une version discrète des espaces fonctionnels permet d'obtenir un système d'équations algébriques qui permet de calculer la solution discrète. On peut consulter le livre de Johnson [37] pour avoir une description plus détaillée de cette méthode de discrétisation.

La méthode des éléments finis a été utilisée pour discrétiser des problèmes d'électromagnétisme en basses fréquences [97, 78]. Dans cette section, l'application de la méthode des éléments finis est présentée en se basant sur la formulation en $\boldsymbol{H}$ (2.16) pour ce qui est de la méthode de Galerkin et sur la formulation en $\boldsymbol{E}$ (2.22) pour la méthode de Galerkin discontinue. Bien que les méthodes présentées s'appliquent à des conducteurs normaux, une attention particulière sera portée aux problèmes non linéaires, i.e. aux problèmes de supraconducteurs à haute température, afin d'en évaluer la robustesse (cf. p.10). Pour ce qui est des autres formulations utilisées, un survol des différentes limitations est présenté, toujours pour les problèmes de supraconducteurs à haute température.

Méthode de Galerkin

Soit un domaine Ω et sa frontière Γ. Définissons l'espace des fonctions de carré intégrable au sens de Lebesgue

$$L^2(\Omega) = \{w : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{t.q.} \ \|w\|_{L^2(\Omega)} < \infty\}$$

où

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega w^2 \, d\Omega \right)^{1/2}$$

et dont le produit scalaire associé est

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} \; d\Omega$$

dans Ω. Nous introduirons aussi pour des fonctions définies sur Γ la notation

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle_\Gamma \; = \int_\Gamma \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} \; d\boldsymbol{s}.$$

Pour obtenir la forme faible de la formulation en $\boldsymbol{H}$ (2.16), on considère d'abord

$$(\mu \, \partial_t \boldsymbol{H}, \boldsymbol{\psi})_\Omega + (\nabla \times (\rho \nabla \times \boldsymbol{H}), \boldsymbol{\psi})_\Omega = 0,$$

où $\boldsymbol{\psi}$ est une fonction test. En appliquant ensuite le théorème de la divergence, on obtient que

$$(\mu \, \partial_t \boldsymbol{H}, \boldsymbol{\psi})_\Omega + (\rho \nabla \times \boldsymbol{H}, \nabla \times \boldsymbol{\psi})_\Omega = -\langle \boldsymbol{n} \times (\rho \nabla \times \boldsymbol{H}), \boldsymbol{\psi} \rangle_\Gamma$$

où $\boldsymbol{n}$ est le vecteur normal unitaire extérieur à la frontière Γ. Si on impose des conditions de Dirichlet $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{G}_1$ sur toute la frontière Γ, on n'admet aucune variation sur le produit vectoriel des fonctions tests avec la normale unitaire extérieure de la frontière Γ.

Il est commun de choisir l'espace fonctionnel

$$\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{H} \in H(\mathrm{rot}, \Omega) : \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{G}_1 \;\; \text{sur} \;\; \Gamma\}$$

où

$$H(\mathrm{rot}, \Omega) = \{\boldsymbol{v} \in [L^2(\Omega)]^3 : \nabla \times \boldsymbol{v} \in [L^2(\Omega)]^3\}.$$

L'espace fonctionnel $H(\mathrm{rot}, \Omega)$ est donc préféré à l'espace de Sobolev

$$H^1(\Omega) = \{w \in L^2(\Omega) : \partial_{x_i} w \in L^2(\Omega) \;\; \text{pour} \;\; i = 1, 2, 3\}.$$

On justifiera ce choix lorsque les espaces fonctionnels discrets seront définis. On définit aussi l'espace fonctionnel

$$\boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{v} \in H(\mathrm{rot}, \Omega) : \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma\}.$$

Puisque $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{W}$, nous avons

$$-\langle \boldsymbol{n} \times (\rho \nabla \times \boldsymbol{H}), \boldsymbol{\psi} \rangle_\Gamma \; = \langle \rho \nabla \times \boldsymbol{H}, \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\psi} \rangle_\Gamma \; = 0.$$

Le problème faible associé à la formulation en $\boldsymbol{H}$ s'énonce alors comme suit : trouver $\boldsymbol{H} \in \boldsymbol{V}$ tel que

$$(\mu\, \partial_t \boldsymbol{H}, \boldsymbol{\psi})_\Omega + (\rho \nabla \times \boldsymbol{H}, \nabla \times \boldsymbol{\psi})_\Omega = 0, \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{W}.$$

Il nous reste à définir l'espace fonctionnel $\boldsymbol{V}$ et son sous-espace discret $\boldsymbol{V}_h$.

Supposons maintenant que le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est discrétisé en éléments tétraédriques K. Sur chaque élément, on définit des fonctions d'interpolation qui sont associées à un sous-espace fonctionnel discret $\boldsymbol{V}_h \subset \boldsymbol{V}$. L'espace des polynômes de degré r définis par élément, et dont la continuité est imposée entre les éléments, forme un sous-espace discret de $H^1(\Omega)$. Les éléments nodaux qui associent un degré de liberté à chaque sommet de l'élément en sont un exemple. Dans le cas de l'espace fonctionnel $H(\mathrm{rot}, \Omega)$, les éléments de Nédélec de première espèce forment un sous-espace discret de celui-ci. L'utilisation des éléments de Nédélec, contrairement aux éléments nodaux, permet d'éviter des solutions oscillatoires non physiques pour certains problèmes d'électromagnétisme [18, 36].

L'élément de Nédélec de première espèce d'ordre un, aussi appelé l'élément de Whitney (aussi « edge element » en anglais) est le plus utilisé pour discrétiser les équations de Maxwell. Il y a six fonctions d'interpolation associées à cet élément, données par

$$\boldsymbol{\psi}_e(\boldsymbol{x}) = \phi_i(\boldsymbol{x})\, \nabla \phi_j(\boldsymbol{x}) - \phi_j(\boldsymbol{x})\, \nabla \phi_i(\boldsymbol{x}), \quad \begin{cases} i, j = 1, \ldots, 4; \\ e = 1, \ldots, 6, \end{cases}$$

où $\phi_i(\boldsymbol{x})$ est le polynôme de Lagrange de degré $r = 1$ associé au nœud i de l'élément K et e est l'arête joignant les nœuds i et j. Les éléments de Whitney sont tels que

$$\int_e \boldsymbol{\psi}_k \cdot \boldsymbol{t}_e \; d\ell = \pm\, \delta_{k\,e}, \quad k = 1, \ldots, 6,$$

où e est l'arête considérée, $\boldsymbol{t}_e$ est le vecteur tangent à l'arête e, $\boldsymbol{\psi}_k$ est la fonction d'interpolation associée à l'arête k, et $\delta_{k\,e}$ est le delta de Kronecker. Le signe du delta de Kronecker dépend de l'orientation du vecteur tangent et de la fonction d'interpolation. La continuité de la composante tangentielle des fonctions d'interpolation est garantie lors de l'assemblage du système d'équations algébriques. La figure 2.1 illustre l'élément de Whitney pour deux éléments dont la composante tangentielle des fonctions d'interpolation est continue entre ces éléments.

Afin de mieux comprendre les éléments de Nédélec de première espèce, on définit l'espace

$$\boldsymbol{S}_r(K) = \{\boldsymbol{s} \in [P_r(K)]^3 : \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x} = 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in K\}$$

où $P_r(K)$ est l'espace des polynômes de degré r définis sur l'élément K. Lorsque le vecteur $\boldsymbol{s}$ appartenant à l'espace $\boldsymbol{S}_r(K)$ est évalué en $\boldsymbol{x} \in K$, il a la propriété d'être orthogonal à $\boldsymbol{x}$.

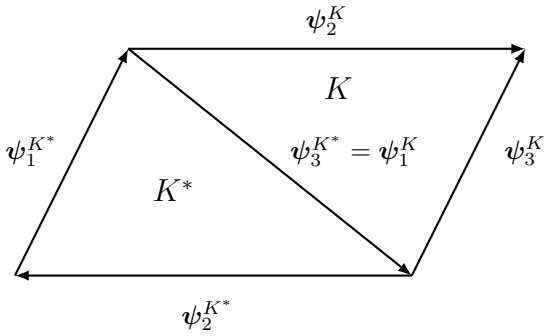


Figure 2.1 Représentation 2D de l'élément de Whitney pour deux éléments K et K^* dont la composante tangentielle des fonctions d'interpolation est continue entre ces éléments.

L'espace des fonctions d'interpolation associées à l'élément de Nédélec de première espèce peut alors être défini comme

$$\boldsymbol{N}_r(K) = [P_{r-1}(K)]^3 \oplus \boldsymbol{S}_r(K). \tag{2.24}$$

L'espace $\boldsymbol{N}_r(K)$ est ainsi formé de la somme directe des fonctions provenant des espaces $[P_{r-1}(K)]^3$ et $\boldsymbol{S}_r(K)$. Pour chaque fonction de l'espace $\boldsymbol{N}_r(K)$, il y a donc une décomposition unique de la forme (2.24), c'est-à-dire $[P_{r-1}(K)]^3 \cap \boldsymbol{S}_r(K) = \varnothing$. Cet espace est de dimension $\frac{1}{2}\, r\,(r+2)\,(r+3)$ [56]. Afin de s'assurer que les fonctions d'interpolation de Nédélec soient dans $H(\mathrm{rot}, \Omega)$, elles doivent avoir une composante tangentielle continue entre les éléments. On peut ainsi définir l'espace fonctionnel discret

$$\boldsymbol{V}_h = \{\boldsymbol{v} \in H(\mathrm{rot}, \Omega) : \boldsymbol{v}|_K \in \boldsymbol{N}_r(K), \quad \forall K \in \Omega\}.$$

Les estimations d'erreur a priori associées à l'opérateur d'interpolation Π_K^r des fonctions de Nédélec de première espèce sont données par :

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{w} - \Pi_K^r\, \boldsymbol{w}\|_{[L^2(K)]^3} &\leq C\, h^r\, |\boldsymbol{w}|_{[H^r(K)]^3}; \\ \|\boldsymbol{w} - \Pi_K^r\, \boldsymbol{w}\|_{H(\mathrm{rot},K)} &\leq C\, h^r\, |\boldsymbol{w}|_{[H^{r+1}(K)]^3}, \end{aligned}$$

où

$$\|\boldsymbol{w}\|_{H(\mathrm{rot},K)} = \left(\|\boldsymbol{w}\|^2_{[L^2(K)]^3} + \|\nabla \times \boldsymbol{w}\|^2_{[L^2(K)]^3}\right)^{1/2},$$

C est une constante positive indépendante de h, h est la taille de l'élément K et $|\boldsymbol{w}|_{[H^r(K)]^3}$ est la semi-norme de $[H^r(K)]^3$ [65]. La thèse de Zaglmayr [94] et le livre de Logg et al. [56] donnent une présentation plus complète des éléments de Nédélec.

Dans le cas où la résistivité électrique ρ est constante, la méthode des éléments finis produit une matrice rotationnelle-rotationnelle singulière lorsque l'élément de Whitney est utilisé [13, 75]. La discrétisation du terme transitoire $\mu\,\partial_t \boldsymbol{H}$ permet alors de rendre la matrice globale inversible. En ce qui concerne la discrétisation du terme transitoire, une approche semi-discrète, qui consiste à utiliser une différence finie afin d'approximer la dérivée temporelle, est utilisée.

La contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique $\mu \nabla \cdot \boldsymbol{H}$ du système (2.16) peut être imposée à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange. Le désavantage de cette approche est l'introduction d'une fonction scalaire, le multiplicateur de Lagrange, qui devient une inconnue du problème [62]. La taille du système discret devient alors plus grande. Comme il a été montré (cf. p.8), il est aussi possible de garantir la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique en choisissant une condition initiale sur le champ magnétique dont la divergence est nulle. Par contre, la divergence de l'approximation du champ magnétique sera toutefois entachée d'une erreur liée à la discrétisation du système d'équations [30].

Pour les problèmes d'électromagnétisme en basses fréquences et plus particulièrement pour les problèmes de supraconducteurs à haute température, plusieurs formulations basées sur une équation parabolique sont utilisées avec une discrétisation éléments-finis. Chacune possède des avantages et des inconvénients. À notre connaissance, seule la formulation en $\boldsymbol{H}$ (2.16) combinée avec la méthode des éléments finis a été utilisée dans le cas de deux problèmes industriels à géométrie complexe en trois dimensions. Zermeno et al. [95] ont étudié les câbles de Roebel. Hu et al. [32] ont étudié la relation entre le courant électrique I et la tension V d'une bobine triangulaire.

La formulation en $\boldsymbol{E}$ (2.22) utilise le champ électrique $\boldsymbol{E}$ comme variable dépendante [34, 41, 40, 58]. Le champ magnétique $\boldsymbol{H}$ doit être calculé a posteriori. La loi de Faraday (2.3) peut être utilisée pour déterminer les conditions aux frontières en fonction du champ magnétique. La linéarisation du problème est délicate due à la conductivité non linéaire $\sigma(\boldsymbol{E})$ (2.23) [76]. La conductivité est infinie pour un champ électrique nul. La non linéarité se trouve dans le terme transitoire. En supposant $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$, il est aussi possible de simplifier l'équation (2.22) en utilisant l'identité vectorielle

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\nabla^2 \boldsymbol{E}.$$

Les formulations $\boldsymbol{A} - V$ et $\boldsymbol{T} - \phi$ utilisent le théorème d'Helmholtz [26] afin d'exprimer le système d'équations (2.14) en termes d'un potentiel-vecteur et d'un scalaire. La formula-

tion $\boldsymbol{A} - V$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mu\,\sigma\,(-\partial_t \boldsymbol{A} - \nabla V) - \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} &= 0; \\ \nabla \cdot (\mu\,\sigma\,(-\partial_t \boldsymbol{A} - \nabla V)) &= 0. \end{aligned}$$

Elle permet d'imposer naturellement la contrainte de divergence nulle du champ d'induction magnétique $\boldsymbol{B}$ [1, 57, 85]. Par contre, l'imposition des conditions aux frontières n'est pas directe, ainsi que le calcul de l'approximation du champ magnétique. Le champ magnétique est calculé en appliquant le rotationnel à l'approximation de $\boldsymbol{A}$. On perd ainsi un ordre de convergence pour l'approximation du champ magnétique. La formulation $\boldsymbol{A} - V$ utilise aussi une conductivité $\sigma(\boldsymbol{A}, V)$ non linéaire. Puisque cette formulation possède deux inconnues, la dimension du système discret est plus grande que pour la formulation en $\boldsymbol{H}$. La formulation $\boldsymbol{T} - \phi$ [2, 85] est donnée par :

$$\begin{aligned} \mu\,\partial_t(\boldsymbol{T} + \nabla\phi) + \nabla \times (\rho \nabla \times \boldsymbol{T}) &= 0; \\ \nabla \cdot (\mu\,(\boldsymbol{T} + \nabla\phi)) &= 0. \end{aligned}$$

Cette formulation utilise une résistivité $\rho(\nabla \times \boldsymbol{T})$ non linéaire. Le champ magnétique doit aussi être calculé a posteriori, mais l'ordre de convergence sur $\boldsymbol{H}$ est le même que celui du potentiel-vecteur $\boldsymbol{T}$ et de $\nabla\phi$. L'imposition des conditions aux frontières n'est pas directe. La dimension du système discret est aussi plus grande que pour la formulation en $\boldsymbol{H}$.

Méthode de Galerkin discontinue

La méthode de Galerkin discontinue a été proposée pour la discrétisation de l'équation de transport du neutron par Reed et Hill [74]. Lesaint et Raviart [51] ont fait l'analyse de cette méthode dans le même contexte. La continuité de la variable discrète entre les éléments n'est pas requise. Le nombre de degrés de liberté total est donc le nombre de degrés de liberté d'un élément multiplié par le nombre d'éléments du maillage. Afin d'éviter l'assemblage de la matrice globale, ainsi que le coût de la résolution du système linéaire résultant avec une méthode directe, on utilise souvent une méthode itérative telle que la méthode de Gauss-Seidel. L'équation est alors discrétisée élément par élément en parcourant le domaine de calcul. Cette méthode a été conçue pour discrétiser les équations aux dérivées partielles hyperboliques. Son application a ensuite été étendue aux problèmes elliptiques et paraboliques. Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter l'ouvrage de Di Pietro et Ern [21].

Afin de faciliter la présentation de la méthode de Galerkin discontinue, l'équation de transport

$$\partial_t w + \boldsymbol{u} \cdot \nabla w = 0, \tag{2.25}$$

où w est la variable dépendante à transporter par le champ vectoriel $\boldsymbol{u}$, est discrétisée. Il s'agit d'une équation hyperbolique.

Soit un élément K du maillage utilisé pour discrétiser Ω. Sa frontière ∂K est divisée en deux parties. La partie de la frontière par laquelle l'information entre dans l'élément K est

$$\partial K^- = \{\boldsymbol{x} \in \partial K : \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) < 0\} \tag{2.26}$$

et la partie par laquelle l'information sort de l'élément K est

$$\partial K^+ = \{\boldsymbol{x} \in \partial K : \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \geq 0\}. \tag{2.27}$$

Les définitions (2.26) et (2.27) seront justifiées plus loin. Pour un champ vectoriel $\boldsymbol{u}$ donné, la nature des équations hyperboliques nous amène à parcourir les éléments du domaine de calcul en suivant les caractéristiques de l'équation, tel qu'illustré à la figure 2.2. Considérons

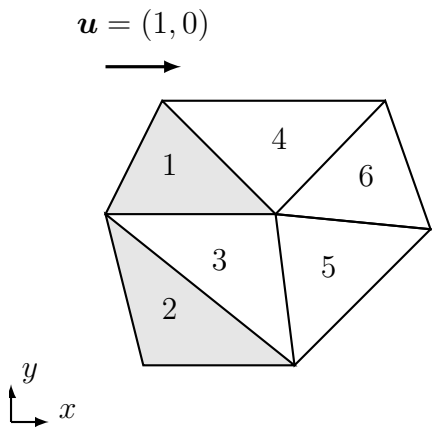


Figure 2.2 Représentation 2D de l'ordre de parcours des éléments du maillage et représentation des éléments intervenant dans le calcul du flux décentré amont de l'élément 3 (éléments gris).

maintenant l'élément K comme l'élément courant. Le saut à la frontière commune s de la variable v entre l'élément courant K et l'élément voisin K^* est défini par $[\![v]\!] = v^+ - v^-$ où v^+ et v^- représentent les valeurs prises par v dans les éléments K et K^* respectivement. La valeur moyenne de la variable v sur s est notée $\{\{v\}\} = \frac{1}{2}(v^+ + v^-)$. La figure 2.3 illustre ces quantités dans le contexte d'un problème unidimensionnel.

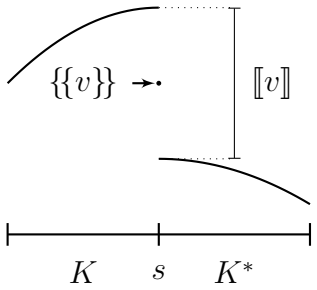


Figure 2.3 Représentation unidimensionnelle du saut et de la valeur moyenne de la variable v entre deux éléments K et K^*.

Afin d'obtenir la forme faible élémentaire discrète de l'équation (2.25), on considère d'abord la forme faible élémentaire

$$(\partial_t w, v)_K + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla w, v)_K = 0,$$

pour tout v choisi dans un espace fonctionnel approprié. On applique ensuite le théorème de la divergence à deux reprises pour obtenir

$$(\partial_t w, v)_K + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla w, v)_K = \langle \boldsymbol{u}\, w - \boldsymbol{u}\, w^-, v \rangle_{\partial K}. \tag{2.28}$$

Afin de permettre l'échange d'information entre les éléments, considérons le flux Φ qui est défini comme étant l'intégrale surfacique

$$\Phi = \int_S w\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\; dS,$$

où $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ est le vecteur normal unitaire extérieur à la surface S et $w\,\boldsymbol{u}$ est un champ vectoriel traversant cette surface. L'intégrale sur la frontière de l'élément ∂K,

$$\langle \boldsymbol{u}\, w_h - \boldsymbol{u}\, w_h^-, v_h \rangle_{\partial K} = \int_{\partial K} (w_h - w_h^-)\, v_h\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\; dS,$$

du membre de droite de la forme faible (2.28), est le flux numérique qui permet l'échange d'information entre les éléments du maillage où w_h est l'approximation discrète de w et v_h est pris dans un espace fonctionnel discret à déterminer. Dans le cas présent, il est naturel de considérer seulement l'information provenant des éléments en amont de l'élément courant K, toujours en suivant les caractéristiques de l'équation (2.25). Ce type de flux numérique se nomme le « flux décentré amont » (« upwind flux » en anglais). Afin de trouver l'expression

du flux décentré amont, on écrit l'équation de transport (2.25) sous la forme

$$\partial_t w + \sum_{i=1}^{3} u_i \, \partial_{x_i} w = 0.$$

On définit ensuite $m = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}$, L'information entrant dans l'élément courant K est constituée des valeurs négatives de m, soit $m^- = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}$ pour $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u} < 0$. On retrouve ainsi l'expression (2.26) et le flux décentré amont est alors donné par

$$\langle \boldsymbol{u}\, w_h - \boldsymbol{u}\, w_h^-, v_h \rangle_{\partial K^-}.$$

Les éléments intervenants dans le calcul du flux décentré amont sont illustrés à la figure 2.2.

L'espace fonctionnel discret associé à la méthode de Galerkin discontinue est constitué des polynômes de degré r construits par élément :

$$D_h = \{ w \in L^2(\Omega) : w|_K \in P_r(K), \quad \forall K \in \Omega \}.$$

Il n'y a aucune restriction sur la continuité de ces polynômes entre les éléments. Le problème faible discret se formule alors comme suit : trouver $w_h \in D_h$ tel que, pour chaque élément K,

$$(\partial_t w_h, v_h)_K + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla w_h, v_h)_K = \langle \boldsymbol{u}\, w_h - \boldsymbol{u}\, w_h^-, v_h \rangle_{\partial K^-}, \quad \forall v_h \in D_h. \tag{2.29}$$

La méthode de Galerkin discontinue a été utilisée par Kameni [41, 40, 58] pour discrétiser la formulation en $\boldsymbol{E}$ dans le cadre de l'étude de problèmes de supraconducteurs à haute température. À notre connaissance, ce sont les seuls travaux qui ont utilisé la méthode de Galerkin discontinue pour ce type de problèmes.

Leur approche consiste d'abord à définir la forme vectorielle de l'espace fonctionnel discret des polynômes de degré r définis par élément, notée $\boldsymbol{D}_h = [D_h]^3$. Ils considèrent ensuite la forme simplifiée de la formulation en $\boldsymbol{E}$ (cf. p.17),

$$\mu \, \partial_t(\sigma \, \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = 0.$$

La méthode de Galerkin discontinue est appliquée à chacune des trois équations paraboliques de ce système en utilisant des éléments nodaux. Bien que la méthode de Galerkin discontinue ait été conçue pour discrétiser les problèmes hyperboliques, on rappelle que son utilisation a été étendue à la discrétisation de problèmes paraboliques et elliptiques [21]. Ces équations sont couplées par la conductivité $\sigma(\boldsymbol{E})$ non linéaire (2.23). L'équation associée à la i^{e} composante

du champ électrique $\boldsymbol{E}$ est alors

$$\mu\,\partial_t(\sigma(\boldsymbol{E})\,E_i) - \nabla^2 E_i = 0.$$

Nous avons vu que la méthode de Galerkin discontinue nécessite la définition d'un flux numérique. Kameni et al. [41] utilisent la méthode de la pénalisation intérieure non symétrique (« Non-symmetric Interior Penalty » (NIP) en anglais) comme flux numérique. Le livre de Di Pietro et Ern [21] donne plus de détails sur ce type de flux numérique pour les équations paraboliques. Le problème faible discret associé à la formulation en $\boldsymbol{E}$ s'énonce alors comme suit : trouver $\boldsymbol{E}_h \in \boldsymbol{D}_h$ tel que, pour chaque élément K,

$$(\mu\,\partial_t(\sigma(\boldsymbol{E}_h)\,\boldsymbol{E}_h), \boldsymbol{\phi}_h)_K + (\nabla \boldsymbol{E}_h, \nabla \boldsymbol{\phi}_h)_K = \langle \{\{\nabla \boldsymbol{E}_h\}\} \cdot \boldsymbol{n}, [\![\boldsymbol{\phi}_h]\!]\rangle_{\partial K} - \langle \theta\,[\![\boldsymbol{E}_h]\!], [\![\boldsymbol{\phi}_h]\!]\rangle_{\partial K}, \quad \forall \boldsymbol{\phi}_h \in \boldsymbol{D}_h,$$

où θ est un paramètre positif et $\boldsymbol{n}$ est la normale unitaire extérieure à la frontière ∂K.

Pour la discrétisation du terme transitoire, une approche semi-implicite est utilisée. On rappelle que le terme transitoire contient la conductivité $\sigma(\boldsymbol{E})$ (2.23) qui est une fonction non linéaire du champ électrique $\boldsymbol{E}$. Par exemple, la première composante du terme $\sigma(\boldsymbol{E}_h)\,\boldsymbol{E}_h$ est donnée par :

$$\sigma(\boldsymbol{E}_h)\,E_{1_h}^{k+1} = \frac{J_c}{\frac{1}{E_c^p}}\,((E_{1_h}^{k+1})^2 + (E_{2_h}^{k})^2 + (E_{3_h}^{k})^2)^{\frac{-p+1}{2p}}\,E_{1_h}^{k+1}$$

où E_h^k et E_h^{k+1} sont respectivement la composante du champ électrique au pas de temps précédent t_k et au pas de temps actuel t_{k+1}. Puisque la conductivité est infinie pour un champ électrique nul, Kameni et al. [41] utilisent la réciproque de la conductivité, $\boldsymbol{E} = \rho\,\boldsymbol{J}$, où la résistivité ρ est donnée par la loi de puissance (2.21). Ils reformulent la forme faible pour que la densité de courant $\boldsymbol{J}$ devienne la nouvelle variable dépendante. Puisque la formulation en $\boldsymbol{E}$ n'utilise pas directement le champ magnétique $\boldsymbol{H}$, la loi de Faraday (2.3) est utilisée pour déterminer, à partir d'un champ magnétique donné, les conditions aux frontières en fonction du champ électrique.

Cette méthodologie a été utilisée en trois dimensions. Kameni et al. [40] ont formulé des conditions aux frontières particulières afin de ne pas avoir à discrétiser l'air autour de l'échantillon supraconducteur. Elles sont difficilement applicables à des géométries complexes que l'on retrouve dans les applications industrielles tels que les câbles électriques composés de plusieurs filaments. Makong et al. [58] ont modélisé le cas des milieux anisotropes. À notre connaissance, cette méthodologie n'a pas été validée avec des données expérimentales. Seules les fonctions d'interpolation nodales ont été utilisées.

La méthodologie proposée par Kameni et al. [41] introduit un terme de pénalisation qui dé-

pend d'un paramètre θ, qui doit être déterminé afin de garantir la continuité des composantes du champ électrique $\boldsymbol{E}$ et du gradient de celles-ci entre les éléments du domaine. De plus, un changement de variable est nécessaire pour éviter une conductivité électrique infinie lors de la linéarisation du problème non linéaire. Les conditions frontières étant généralement données en terme du champ magnétique $\boldsymbol{H}$, l'obtention des conditions limites sur le champ électrique $\boldsymbol{E}$ n'est pas directe.

La formulation en $\boldsymbol{E}$ pourrait être délicate à discrétiser avec la méthode de Galerkin discontinue en utilisant les éléments de Whitney. Nous avons déjà mentionné que les éléments de Whitney, qui permettent d'éviter des solutions oscillatoires non physiques pour certains problèmes d'électromagnétisme, mènent à une matrice rotationnelle-rotationnelle singulière. Ce problème est aussi observé avec la formulation en $\boldsymbol{E}$ et la méthode de Galerkin discontinue.

Il peut sembler surprenant que la plupart des modèles numériques proposés dans la littérature soient basés sur une reformulation des équations de Maxwell (2.8) en basses fréquences en problème parabolique, comme la formulation en $\boldsymbol{H}$ (2.16), plutôt que sur le système d'équations (2.14) qui découle directement des équations de Maxwell. Ceci peut s'expliquer en partie par le fait que le système (2.14) ne peut pas être qualifié d'hyperbolique, car il ne peut pas s'écrire sous la forme du système (2.1). Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer qu'il n'y a pas de terme transitoire associé au champ électrique $\boldsymbol{E}$. La matrice des coefficients du terme transitoire,

$$\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_t \boldsymbol{H} \\ \partial_t \boldsymbol{E} \end{bmatrix},$$

n'est donc pas inversible. On reviendra sur la caractérisation du système d'équations (2.14) à la section 2.4.

Law et Laforest [49] ont récemment proposé une approche qui permet de discrétiser directement le système d'équations (2.14) dans le contexte des différences finies. Il est ici proposé d'utiliser la même approche, mais dans le contexte de la méthode de Galerkin discontinue. Nous pourrons alors profiter des avantages de cette méthode tels l'utilisation de maillages non structurés et la facilité avec laquelle il est possible de la paralléliser. Ceci facilitera l'étude de problèmes industriels à grande échelle.

Nous avons déjà mentionné que la méthode de Galerkin discontinue nécessite un flux numérique. Si nous généralisons la présentation de la page 21 au système d'équations (2.14), qui peut être exprimé sous la forme

$$Q\,\partial_t \boldsymbol{U} + A_1\,\partial_x \boldsymbol{U} + A_2\,\partial_y \boldsymbol{U} + A_3\,\partial_z \boldsymbol{U} + K\,\boldsymbol{U} = 0,$$

où $\boldsymbol{U}^T = [\boldsymbol{H}^T \ \boldsymbol{E}^T]$, on peut trouver un flux numérique similaire au flux décentré amont. Définissons ensuite la matrice $M = \sum_{i=1}^{3} n_i \, A_i$ donnée par

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -n_3 & n_2 \\ 0 & 0 & 0 & n_3 & 0 & -n_1 \\ 0 & 0 & 0 & -n_2 & n_1 & 0 \\ 0 & \rho\, n_3 & -\rho\, n_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\rho\, n_3 & 0 & \rho\, n_1 & 0 & 0 & 0 \\ \rho\, n_2 & -\rho\, n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On obtient la décomposition $M = R\,\Lambda\,R^{-1}$ où R est la matrice contenant les vecteurs propres de M et Λ est la matrice diagonale contenant les valeurs propres de M qui sont 0 et $\pm\sqrt{\rho}$. On décompose aussi la matrice diagonale Λ en $\Lambda = \Lambda^- + \Lambda^+$ où Λ^- et Λ^+ sont des matrices diagonales contenant respectivement les valeurs propres négatives et positives de M. L'information entrant dans l'élément courant K est maintenant constituée des valeurs propres négatives de M et l'expression du flux décentré amont est donnée par $M^- = R\,\Lambda^-\,R^{-1}$. Dans notre cas, la matrice M ne possède qu'une seule valeur propre négative donnée par $-\sqrt{\rho}$. La résistivité électrique ρ est non linéaire dans le cas des supraconducteurs à haute température et fait intervenir le rotationnel du champ magnétique $\boldsymbol{H}$ (cf. équation (2.21)). Par conséquent, la matrice M^- dépend de cette résistivité électrique non linéaire et le flux numérique est donc non linéaire a priori. Ceci peut rendre la linéarisation de la discrétisation du système d'équations (2.14) plus délicate et affecter la convergence des itérations de point fixe associées. On a vu que le flux numérique est une intégrale surfacique. Sa mise en œuvre dans le cas non linéaire est donc plus complexe, surtout dans le cas d'un solveur parallèle. On montrera dans le chapitre 4 comment obtenir un flux numérique similaire au flux décentré amont qui est linéaire et facile à mettre en œuvre.

2.4 Systèmes de Friedrichs

La théorie des systèmes de Friedrichs est utilisée afin de déterminer l'ordre de convergence de la méthodologie numérique proposée pour une résistivité électrique ρ constante. Considérons un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et sa frontière Γ, où d est la dimension en espace. On note le vecteur unitaire normal extérieur à Γ par $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$. Les systèmes de Friedrichs sont des équations aux dérivées partielles linéaires de la forme

$$\sum_{i=1}^{d} A_i \, \partial_{x_i} \boldsymbol{U} + K\,\boldsymbol{U} = \boldsymbol{G},$$

où $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{G}$ sont des vecteurs à m composantes. A_i et K sont des matrices de dimensions $m \times m$. Le problème s'énonce alors comme suit : trouver $\boldsymbol{U} \in [C^1(\Omega)]^m$ tel que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{d} A_i \, \partial_{x_i} \boldsymbol{U} + K \, \boldsymbol{U} = \boldsymbol{G} \qquad & \text{dans} \quad \Omega; \\ (B - M) \, \boldsymbol{U} = 0 \qquad & \text{sur} \quad \Gamma, \end{aligned} \tag{2.30}$$

où la matrice B est définie par les conditions aux frontières et la matrice M est donnée par $\sum_{i=1}^{d} n_i \, A_i$.

Considérons l'espace

$$L^\infty(\Omega) = \{v \, : \, \|v\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty\}$$

où

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{q > 0 \, : \, |v(\boldsymbol{x})| \leq q \quad \text{pour} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \quad \text{presque partout}\}.$$

Supposons que les hypothèses suivantes sont respectées : les matrices A_i sont symétriques, $A_i \in [L^\infty(\Omega)]^{m,m}$ pour $i = 1, \ldots, d$, $K \in [L^\infty(\Omega)]^{m,m}$, $\sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} A_i \in [L^\infty(\Omega)]^{m,m}$, $\boldsymbol{G} \in [L^2(\Omega)]^m$ et :

$$D = K + K^T - \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} A_i - \eta \, I \geq 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega; \tag{2.31}$$

$$B + B^T \geq 0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma; \tag{2.32}$$

$$\ker(M - B) + \ker(M + B) = \mathbb{R}^n \quad \text{sur} \quad \Gamma, \tag{2.33}$$

où $\eta > 0$ et D est une matrice de dimensions $m \times m$. La matrice D doit être semi-définie positive, i.e. $\boldsymbol{x}^T \, D \, \boldsymbol{x} \geq 0$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$. Si ces hypothèses sont satisfaites, Friedrichs a montré que le problème (2.30) admet une solution unique [24].

En utilisant la méthode de Galerkin discontinue avec des éléments nodaux et avec le flux décentré amont pour discrétiser le système de Friedrichs (2.30), il est possible de montrer l'estimation d'erreur a priori

$$\|w - w_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C \, h^{r+1},$$

où $\| \cdot \|_{L^2(\Omega)}$ est la norme L^2, r est le degré du polynôme d'interpolation utilisé et C est une constante positive indépendante de la longueur de l'élément h. Les livres de Johnson [37] et de Di Pietro et Ern [21] donnent une présentation plus complète des systèmes de Friedrichs et de la méthode de Galerkin discontinue appliquée à ces systèmes.

Il est intéressant de constater que la structure du système d'équations (2.14) est similaire à ce que l'on retrouve avec la méthode des éléments finis au sens des moindres-carrés (« least-squares finite element method » en anglais) [10]. En effet, le système d'équations (2.14) peut être interprété comme provenant de la méthode de la réduction de l'ordre appliquée à

la formulation en $\boldsymbol{H}$ (2.16). La discrétisation par la méthode des éléments finis au sens des moindres-carrés considère le champ magnétique $\boldsymbol{H}$ et son flux donné par $\rho \nabla \times \boldsymbol{H}$. L'analogie avec les systèmes de Friedrichs a été préférée, car des résultats généraux sur la discrétisation de ces systèmes avec la méthode de Galerkin discontinue sont à notre disposition pour vérifier la méthodologie numérique proposée. De plus, Di Pietro et Ern [21] présentent en détails la théorie des systèmes de Friedrichs appliquée au problème rotationnel-rotationnel :

$$\mu \boldsymbol{H} + \nabla \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{F};$$
$$\sigma \boldsymbol{E} - \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{G},$$

qui est un bon point de départ pour faire l'analyse du système d'équations (2.14).

2.5 Supraconducteurs à haute température

Comme nous l'avons déjà mentionné, les problèmes de supraconducteurs à haute température sont étudiés afin de vérifier et de valider la méthodologie numérique proposée dans le cas d'une résistivité ρ non linéaire. Des problèmes où on retrouve des conducteurs normaux, où l'utilisation de l'équation (2.17) est valide, seront tout de même brièvement étudiés. Afin de mieux comprendre le comportement des supraconducteurs à haute température, une brève introduction est présentée.

La première observation de la supraconductivité a été faite par Onnes [67] lors de ses recherches sur la liquéfaction de l'hélium. Il observa que la résistivité électrique d'un échantillon de mercure pur était nulle en dessous d'une température critique T_c. L'échantillon de mercure passait d'un état de conducteur normal à un état supraconducteur.

À l'état supraconducteur, un matériau a une résistivité électrique nulle en courant continu. Cet état est aussi caractérisé par des propriétés magnétiques uniques. En effet, un échantillon massif initialement soumis à un champ magnétique externe faible, à une température supérieure à T_c, aura un flux magnétique qui pénètre l'échantillon. Lorsque la température diminue en dessous de T_c, le flux magnétique présent au départ est repoussé hors de l'échantillon. L'échantillon massif aura un comportement diamagnétique parfait avec un champ magnétique induit nul à l'intérieur. Ce phénomène est l'effet Meissner [61].

Le développement d'applications utilisant les supraconducteurs a été limité par les coûts liés au refroidissement de l'échantillon. L'hélium liquide, dont la température de liquéfaction est de 4,2 K, est utilisé pour refroidir les échantillons. La plupart des métaux deviennent supraconducteurs à une température près du zéro absolu. Selon la théorie quantique de la supraconductivité établie par Bardeen, Cooper et Schrieffer (BCS) [4] et sous certaines hypothèses

qui semblaient plausibles à l'époque, les scientifiques pensaient que la supraconductivité ne se manifestait pas au-delà de 30 K [60, 80].

En 1986, la limite du 30 K a été franchie par Bednorz et Müller [6], qui ont observé un état supraconducteur à 38 K. Cette découverte a stimulé la recherche d'un supraconducteur possédant la température critique la plus élevée possible. On a ensuite trouvé que plusieurs céramiques à base d'oxyde de cuivre ont cette propriété, avec une température critique se situant autour de 100 K [80]. Une distinction a alors été faite entre les supraconducteurs à basse température et à haute température. Puisque la température de liquéfaction de l'oxygène et de l'azote sont respectivement de 90 K et 77 K, le refroidissement de l'échantillon devenait beaucoup moins coûteux. Il était alors possible d'utiliser les supraconducteurs à haute température pour le développement d'applications industrielles. Par contre, les supraconducteurs en céramique sont anisotropes et fragiles, ce qui rend leur utilisation difficile.

Pour un conducteur normal, le champ électrique $\boldsymbol{E}$ et la densité de courant $\boldsymbol{J}$ sont liés par la loi d'Ohm (2.11). Dans le cas des supraconducteurs à haute température, la relation entre $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{J}$ n'est pas linéaire. Le modèle en loi de puissance (2.20) [70, 76] est le plus utilisé. Le choix de ce modèle se justifie par la courbe typique $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{J}$ d'un supraconducteur à haute température (cf. figure 14.6 du livre de Sheahen [80]). La densité de courant critique J_c est déterminée pour une valeur de l'amplitude du champ électrique, notée E_c. En pratique, la densité de courant critique est calculée à partir du courant critique I_c :

$$J_c = \frac{I_c}{A},$$

où A est l'aire transversale du fil supraconducteur [54].

Lorsque l'exposant p tend vers l'infini, le modèle de Bean est obtenu [93] :

$$\|\boldsymbol{E}\|_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } \|\boldsymbol{J}\|_2 < J_c; \\ e & \text{si } \|\boldsymbol{J}\|_2 = J_c, \end{cases}$$

où $e \in [0, \infty[$. Des solutions analytiques existent pour des géométries simples, comme pour un filament cylindrique. Ces solutions possèdent des discontinuités sur la densité de courant $\boldsymbol{J}$. Ce modèle permettra de vérifier la méthodologie proposée pour de grandes valeurs de l'exposant p [5].

CHAPITRE 3 ORGANISATION DE LA THÈSE SELON LES OBJECTIFS SPÉCIFIQUES

Les trois prochains chapitres de cette thèse constituent chacun un article. Les articles qui composent les chapitres 4 et 5 ont été soumis respectivement au *SIAM Journal of Scientific Computing* et au *Journal of Computational Physics*. L'article formant le chapitre 6 a été soumis au journal *Superconductor Science and Technology*. La contribution de chacun des articles est séparée selon les cinq objectifs spécifiques comme suit :

i) Les chapitres 4 et 5 élaborent la discrétisation des équations de Maxwell, dans le régime des basses fréquences, en utilisant la méthode de Galerkin discontinue. Le chapitre 4 utilise les éléments nodaux, tandis que le chapitre 5 utilise les éléments de Whitney.

ii) Le chapitre 5 utilise une analyse dimensionnelle sur les équations de Maxwell pour élaborer un modèle du milieu ambiant, dont la conductivité est très faible, des matériaux conducteurs. Dans les chapitres 5 et 6, cette analyse dimensionnelle a aussi été appliquée sur la formulation des équations de Maxwell en basses fréquences utilisée afin de réduire le conditionnement matriciel et les erreurs d'arrondi.

iii) La discrétisation des équations de Maxwell en basses fréquences en utilisant la méthode de Galerkin discontinue est vérifiée dans les chapitres 4 et 5. Une analyse de convergence a été faite avec un problème ayant une solution manufacturée pour les éléments nodaux et les éléments de Whitney. La propagation d'un front magnétique et le problème d'induction d'un courant électrique dans un supraconducteur ont aussi été étudiés. Une comparaison a été faite entre la méthodologie proposée et la formulation en $\boldsymbol{H}$ qui a été discrétisée en utilisant la méthode de Galerkin. Dans le chapitre 5, nous avons également abordé le problème d'induction d'un courant électrique dans un câble électrique en utilisant un conducteur normal et un supraconducteur à haute température.

iv) Au chapitre 6, le modèle mathématique est validé en faisant l'étude de l'induction d'un courant électrique dans les câbles électriques supraconducteurs utilisant le diborure de magnésium (MgB_2). Nous avons étudié la perte de courant alternatif liée à plusieurs agencements de différents matériaux. Les différences entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques sur la perte de courant alternatif ont été justifiées.

CHAPITRE 4 ARTICLE 1 : NUMERICAL MODELING OF HIGH-TEMPERATURE SUPERCONDUCTORS USING THE NODAL DISCONTINUOUS GALERKIN FINITE ELEMENT METHOD

Yann-Meing Law and Steven Dufour

submitted to SIAM Journal of Scientific Computing

4.1 Abstract

A numerical methodology is proposed to discretize a low-frequency approximation to Maxwell's equations using the nodal discontinuous Galerkin finite element method, with an upwind-like numerical flux, for modeling high-temperature superconductors (HTS). The order of convergence of the proposed numerical formulation in the linear case has been derived using the theory of the discontinuous Galerkin finite element method applied on Friedrichs' systems. Optimal orders of convergence are obtained. Numerical studies have been performed to verify the proposed methodology : a problem with a manufactured solution, the nonlinear magnetic front problem, and the magnetization of an HTS bulk. The proposed strategy is compared with the $\boldsymbol{H}$ formulation discretized using the Galerkin finite element method with the Whitney element. It is shown that the proposed methodology can capture sharp gradients of current density with limited spurious oscillations for the magnetic front problem. A remanent magnetic field can be observed for the magnetization of an HTS bulk.

Key words

low-frequency Maxwell's equations, nodal discontinuous Galerkin finite element method, high-temperature superconductors, nonlinear resistivity, power-law model, p-curl problem.

4.2 Introduction

High-temperature superconductors (HTS) are materials that exhibit very low electrical resistivity under specific conditions [80]. The superconducting material must first be cooled under a critical temperature (e.g. approximately 92 K for YBCO and 40 K for MgB_2 [64, 80]), and the electric current and the magnitude of the external magnetic field must not exceed critical values. This makes HTS interesting for designing power system components with enhanced performance such as power-transmission cables, compact high-current cables and fault cur-

rent limiters [28]. A quantity of interest that is important to help design such components is the alternating-current (AC) loss, which is defined as the integral of the inner product of the electric field with the current density over the conducting domain. Heat dissipation, also known as Joule heating, can be computed using the AC loss [89]. Since the superconducting state is obtained below a critical temperature, the design and operation costs of HTS based power system components are related to the AC loss. Therefore, an accurate estimate of the electric field and of the current density is of the foremost importance to accurately compute the AC loss.

HTS modeling involves the discretization of Maxwell's equations, in low-frequency regime, using a power law to model electrical resistivity. Most numerical strategies are based on a modification of Maxwell's equations in order to obtain a parabolic problem expressed with respect to the magnetic field [14], the electric field [86], the magnetic vector potential and a scalar potential [1], or the current vector potential and the magnetic scalar potential [2]. These formulations ease the use of commercial codes. Various discretization methods, such as the finite difference method [49, 86] and the finite element method [14, 41], are used to discretize the parabolic problems.

These parabolic problems are known to develop sharp gradients of the current density for large values of the exponent of the power-law model [59, 81]. These gradients are difficult to capture using the numerical methods designed to discretize parabolic partial differential equations. Moreover, small time-step sizes must be used to guarantee the convergence of the fixed-point iterations used for the linearization of the discrete problem. They make computational costs associated with the study of industrial problems prohibitive. Discretization schemes for hyperbolic systems, such as the discontinuous Galerkin (DG) finite element method, are better suited for capturing such solutions.

The DG finite element method was used to discretize nonlinear Maxwell's equations to study nonlinear optics problems [9, 11, 33]. To our knowledge, only Kameni et al. [40, 41, 58] used the DG finite element method to discretize Maxwell's equations in low-frequency regime for modeling HTS problems. But they still formulate the problem as a parabolic system of partial differential equations with respect to the electric field, also known as the $\boldsymbol{E}$ formulation. They use the non-symmetric interior penalty (NIP) method for the numerical flux, which depends on a positive parameter that needs to be determined. The NIP method enforces the continuity of the discrete dependent variable and its gradient at the interface between elements. Since the boundary conditions are usually given in term of the magnetic field, the imposition of these conditions with the $\boldsymbol{E}$ formulation is not direct.

In this paper, we propose to work directly with a low-frequency approximation to Maxwell's

equations composed of a system of first-order partial differential equations in order to retain the nature of the original problem, similar to what was proposed by Law and Laforest [49] in the context of the finite-difference time-domain method. Using the DG finite element method to discretize this system of equations should allow the modeling of industrial problems with complex geometries. The discontinuous discrete variables will also help capture sharp gradients.

The paper is structured as follows. A low-frequency approximation to Maxwell's equations for modeling HTS problems, which is composed of first-order partial differential equations with a nonlinear electrical resistivity, is first introduced. This formulation is discretized using the DG finite element method with nodal elements, with an upwind-like numerical flux. The order of convergence of the proposed numerical formulation in the linear case is derived using the theory of the DG finite element method applied on Friedrichs' systems. A problem with a manufactured solution, the nonlinear magnetic front problem, and the magnetization of an HTS bulk are studied to verify the proposed methodology. As a basis of comparison, a parabolic formulation based on the magnetic field, known as the $\boldsymbol{H}$ formulation, is also discretized using the Galerkin finite element method (GFEM) with the Whitney element. This numerical strategy is popular in the electrical engineering community. To our knowledge, only this strategy was used for modeling industrial systems with complex geometries in three dimensions [32, 95]. The accurate capturing of the sharp gradients of current density and the robustness of the fixed-point method for linearizing the magnetic front problem are compared using both approaches. Both methodologies are also compared based on the study of the magnetization of an HTS bulk.

4.3 Maxwell's Equations in the Low-Frequency Regime for HTS modeling

Electromagnetic phenomena are modeled using Maxwell's equations :

$$\begin{aligned} \partial_t \boldsymbol{B} + \nabla \times \boldsymbol{E} &= 0; \\ \partial_t \boldsymbol{D} - \nabla \times \boldsymbol{H} &= -\boldsymbol{J}; \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho_c; \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

where $\boldsymbol{B}$ is the magnetic induction field, $\boldsymbol{E}$ is the electric field, $\boldsymbol{D} = \epsilon\, \boldsymbol{E}$ is the electric field displacement, $\boldsymbol{H} = \mu^{-1}\, \boldsymbol{B}$ is the magnetic field, ρ_c is the charge density, ϵ is the electric permittivity, μ is the magnetic permeability and $\boldsymbol{J}$ is the current density. The relation between

the electric field $\boldsymbol{E}$ and the current density $\boldsymbol{J}$ is given by Ohm's law,

$$\boldsymbol{E} = \rho\, \boldsymbol{J}, \tag{4.2}$$

where ρ is the electrical resistivity. Assuming a low-frequency regime, we have $\|\partial_t \boldsymbol{D}\|_2 \ll \|\boldsymbol{J}\|_2$, where $\|\cdot\|_2$ is the Euclidean norm, which leads to the magneto-quasistatic condition $\partial_t \boldsymbol{D} \approx 0$ [13]. The current density is then given by Ampère's law,

$$\boldsymbol{J} = \nabla \times \boldsymbol{H}, \tag{4.3}$$

and Ohm's law (4.2) becomes

$$\boldsymbol{E} = \rho\, \nabla \times \boldsymbol{H}. \tag{4.4}$$

The first equation of system (4.1) with Ohm's law (4.4) and the divergence-free constraint on $\boldsymbol{B}$ gives the system of first-order partial differential equations :

$$\begin{aligned} \partial_t(\mu\, \boldsymbol{H}) + \nabla \times \boldsymbol{E} &= 0; \\ \boldsymbol{E} - \rho\, \nabla \times \boldsymbol{H} &= 0; \\ \nabla \cdot (\mu\, \boldsymbol{H}) &= 0, \end{aligned} \tag{4.5}$$

which are known as Maxwell's equations in the low-frequency regime for conducting materials. By combining the first and second equations of the system of equations (4.5), a parabolic problem expressed with respect to the magnetic field $\boldsymbol{H}$ is obtained :

$$\begin{aligned} \partial_t(\mu\, \boldsymbol{H}) + \nabla \times (\rho\, \nabla \times \boldsymbol{H}) &= 0; \\ \nabla \cdot (\mu\, \boldsymbol{H}) &= 0, \end{aligned} \tag{4.6}$$

which is known as the $\boldsymbol{H}$ formulation. It consists of a parabolic partial differential equation with a divergence-free constraint on $\boldsymbol{H}$.

Let us consider a domain Ω and its boundary Γ. Assuming the boundary $\Gamma = \Gamma_{\mathrm{D}} \cup \Gamma_{\mathrm{N}}$ to be such that $\Gamma_{\mathrm{D}} \neq \varnothing$ and $\Gamma_{\mathrm{D}} \cap \Gamma_{\mathrm{N}} = \varnothing$, the boundary conditions for system (4.6) are given by :

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{G}_1 \quad \text{on} \quad \Gamma_D \times \mathrm{I}; \tag{4.7}$$

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{G}_2 \quad \text{on} \quad \Gamma_N \times \mathrm{I}, \tag{4.8}$$

where $\boldsymbol{E}$ is given by Ohm's law (4.4), $\boldsymbol{n}$ is the outward unit normal to the boundary Γ and $\mathrm{I} = [t_0, t_{\mathrm{f}}]$ is a time interval. The initial condition is given by $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t_0) = \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{x})$. The dependent variables for system (4.5) are both the magnetic field $\boldsymbol{H}$ and the electric field

$\boldsymbol{E}$ and boundary conditions (4.7) and (4.8) can therefore be imposed on all Γ. The initial conditions are given by $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t_0) = \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{x})$ and $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t_0) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x})$.

For high-temperature superconducting materials, the electrical resistivity is modeled using the power law

$$\rho = \frac{E_c}{J_c^p} \|\nabla \times \boldsymbol{H}\|_2^{p-1}, \tag{4.9}$$

where E_c is the amplitude of the electric field for the critical current, J_c is the critical current density and $p > 1$ is a parameter to be identified [70, 76]. The first equation of system (4.6) with the power-law model (4.9) gives

$$\partial_t(\mu \boldsymbol{H}) + \nabla \times \left(\tfrac{E_c}{J_c^p} \|\nabla \times \boldsymbol{H}\|_2^{p-1} \nabla \times \boldsymbol{H} \right) = 0, \tag{4.10}$$

which is also known as the p-curl problem [92]. The nonlinear parabolic equation (4.10) becomes an ordinary differential equation for $\nabla \times \boldsymbol{H} = 0$, i.e. $\partial_t(\mu \boldsymbol{H}) = 0$. The p-curl problem is then degenerated. By taking the limit as $p \to \infty$ in the power-law model (4.9), Bean's model is obtained,

$$\|\boldsymbol{E}\|_2 = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \|\boldsymbol{J}\|_2 < J_c; \\ e & \text{if} \quad \|\boldsymbol{J}\|_2 = J_c, \end{cases} \tag{4.11}$$

where $e \in [0, \infty[$ [93]. For simple geometries, such as a cylinder, analytical solutions with discontinuities on the current density $\boldsymbol{J}$ are known. They will be used to verify numerical strategies for large exponents p.

4.4 Numerical Methodology

As mentioned before, most numerical strategies used to study HTS problems modify the low-frequency approximation to Maxwell's equations (4.5) into a parabolic problem. A popular approach is to discretize the $\boldsymbol{H}$ formulation (4.6) using the Galerkin finite element method (GFEM) with the Whitney element [14]. This approach makes it easier to use existing commercial codes. Kameni et al. [41] use the discontinuous Galerkin (DG) finite element method to discretize the $\boldsymbol{E}$ formulation, still a parabolic problem, with the NIP method for computing the numerical flux. To our knowledge, the DG finite element method was not used to directly discretize the first two equations of system (4.5) for modeling HTS.

4.4.1 The Galerkin Finite Element Method

Since the GFEM is based on the weak form of the partial differential equations, let us consider the space of square integrable functions

$$L^2(\Omega) = \{w : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad \|w\|_{L^2(\Omega)} < \infty\},$$

where the L^2-norm is given by

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega w^2 \, d\Omega \right)^{1/2}$$

and Ω is the domain of definition of the problem. For a vector field in $[L^2(\Omega)]^3$, the L^2-norm is given by

$$\|\boldsymbol{w}\|_{L^2(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{3} \|w_i\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}. \tag{4.12}$$

The inner product in $L^2(\Omega)$ is given by

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} \, d\Omega$$

in Ω. We also introduce the notation

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle_\Gamma = \int_\Gamma \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} \, d\boldsymbol{s}$$

for functions defined on the boundary Γ of Ω. By multiplying the equations to be discretized by a test function $\boldsymbol{\psi}$ that belongs to a functional space $\boldsymbol{W}$, followed by an integration over Ω, the weak form of the first equation of the $\boldsymbol{H}$ formulation (4.6) is obtained :

$$(\partial_t(\mu \boldsymbol{H}), \boldsymbol{\psi})_\Omega + (\nabla \times (\rho \nabla \times \boldsymbol{H}), \boldsymbol{\psi})_\Omega = 0, \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{W}.$$

Using the divergence theorem, the weak form becomes

$$(\partial_t(\mu \boldsymbol{H}), \boldsymbol{\psi})_\Omega + (\rho \nabla \times \boldsymbol{H}, \nabla \times \boldsymbol{\psi})_\Omega = -\langle \boldsymbol{n} \times (\rho \nabla \times \boldsymbol{H}), \boldsymbol{\psi} \rangle_\Gamma, \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{W},$$

where $\boldsymbol{n}$ is the outward unit normal to Γ.

Let us consider the case where we have Dirichlet boundary conditions (4.7) on all Γ. This

leads us to work with

$$\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{H} \in H(\mathrm{curl}, \Omega) : \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{G}_1 \quad \text{on} \quad \Gamma\},$$

where

$$H(\mathrm{curl}, \Omega) = \{\boldsymbol{v} \in [L^2(\Omega)]^3 : \nabla \times \boldsymbol{v} \in [L^2(\Omega)]^3\},$$

and

$$\boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{v} \in H(\mathrm{curl}, \Omega) : \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma\}.$$

We then have that

$$-\langle \boldsymbol{n} \times (\rho \nabla \times \boldsymbol{H}), \boldsymbol{\psi} \rangle_\Gamma = \langle \rho \nabla \times \boldsymbol{H}, \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\psi} \rangle_\Gamma = 0, \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{W}.$$

The weak problem associated with the $\boldsymbol{H}$ formulation is then : find $\boldsymbol{H} \in \boldsymbol{V}$ such that

$$(\partial_t(\mu \boldsymbol{H}), \boldsymbol{\psi})_\Omega + (\rho \nabla \times \boldsymbol{H}, \nabla \times \boldsymbol{\psi})_\Omega = 0, \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{W}. \tag{4.13}$$

Let us now define a discrete functional space $\boldsymbol{V}_h \subset \boldsymbol{V}$ defined on the computational domain Ω_h used to discretize the domain of definition of the problem Ω using tetrahedral elements K. The discrete subspace associated with the Whitney element [56], also known as an edge element to electrical engineers, is a popular discrete subspace of $H(\mathrm{curl}, \Omega)$ for the discretization of the $\boldsymbol{H}$ formulation [36]. It has been used to model HTS problems [96]. Six shape functions are associated with each three-dimensional tetrahedral element K,

$$\boldsymbol{\psi}_e(\boldsymbol{x}) = \phi_i(\boldsymbol{x}) \nabla \phi_j(\boldsymbol{x}) - \phi_j(\boldsymbol{x}) \nabla \phi_i(\boldsymbol{x}), \quad \begin{cases} i, j = 1, \ldots, 4; \\ e = 1, \ldots, 6, \end{cases}$$

where $\phi_i(\boldsymbol{x})$ is the Lagrange polynomial of degree $r = 1$ associated with vertex i of the element, and e is the edge composed of vertices i and j. The Whitney element shape functions are such that

$$\int_e \boldsymbol{\psi}_k \cdot \boldsymbol{t}_e \, d\ell = \pm \, \delta_{ke}, \quad k = 1, \ldots, 6,$$

where e is an edge, $\boldsymbol{t}_e$ is the tangent vector to e, $\boldsymbol{\psi}_k$ is the shape function associated with edge k and δ_{ke} is the Kronecker delta. Moreover, by applying the divergence operator to the Whitney element shape functions, we have

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_e = \phi_i \nabla^2 \phi_j - \phi_j \nabla^2 \phi_i.$$

Since the Lagrange polynomials are linear on each element K, we have $\nabla^2 \phi_i = 0$ for $i = 1, \ldots, 4$ and therefore $\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_e = 0$ for $e = 1, \ldots, 6$. The Whitney element shape functions

are then locally divergence-free. Having globally divergence-free discrete functions $\boldsymbol{\psi}_e$ would necessitate the normal trace $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\psi}_e|_{\partial K}$ to be continuous at the interface between elements, which is not the case in general. The discrete magnetic divergence-free constraint is therefore only satisfied locally on each element [63].

The transient term $\partial_t(\mu\, \boldsymbol{H})$ is discretized using a semi-discrete approach, where the second-order accurate backward-differentiation formula (BDF) scheme is used. The curl-curl matrix, given by the term $(\nabla \times \boldsymbol{\psi}, \nabla \times \boldsymbol{\psi})_\Omega$, is known to be singular with the Whitney element [13, 75]. Time discretization makes the assembly matrix invertible for a small enough time-step size. The discretization of problem (4.13) using the GFEM and the second-order accurate BDF scheme with nonlinear electrical resistivity is linearized using the following fixed-point iteration scheme, for each time step,

$$\mu\,(\boldsymbol{H}_h^{n,k+1}, \boldsymbol{\psi}_h)_\Omega + \tfrac{3\,\Delta t}{2}\,(\rho(\nabla \times \boldsymbol{H}_h^{n,k})\,\nabla \times \boldsymbol{H}_h^{n,k+1}, \nabla \times \boldsymbol{\psi}_h)_\Omega = \tfrac{\mu}{3}\,(4\,\boldsymbol{H}_h^{n-1} - \boldsymbol{H}_h^{n-2}, \boldsymbol{\psi}_h)_\Omega$$

where $\boldsymbol{H}_h^{n,k}$ is the k-th fixed-point iteration of the discrete magnetic field at t_n and $\boldsymbol{\psi}_h$ is a discrete test function.

4.4.2 The Discontinuous Galerkin Finite Element Method

The DG finite element method is used to directly discretize the first two equations of system (4.5). The system of equations is discretized element by element. The continuity of the discrete variable is not enforced across each element. For two elements K and K^* that share a common face, the jump of a variable v across the boundary of these elements is defined as $[\![v]\!] = v^+ - v^-$ where v^+ belongs to element K and v^- belongs to K^*. We then define the space of piecewise polynomials as

$$D_h = \{w \in L^2(\Omega) : w|_K \in P_r(K), \quad \forall K \in \Omega_h\},$$

where $P_r(K)$ is the space of polynomials of degree r defined on K, and $\boldsymbol{D}_h = [D_h]^3$.

Linear Case

Let us consider the system of equations made of the first two equations of system (4.5), with a source term $\boldsymbol{F}$ and a constant electrical resistivity $\rho > 0$. Multiplying the second equation

of system (4.5) by ρ^{-1}, we have

$$\begin{aligned} \partial_t(\mu\,\boldsymbol{H}) + \nabla \times \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{F}; \\ \sigma\,\boldsymbol{E} - \nabla \times \boldsymbol{H} &= 0, \end{aligned} \tag{4.14}$$

where the conductivity $\sigma = \rho^{-1}$. The discrete weak problem associated with system (4.14), defined on each element K, is then given by :

$$\begin{aligned} (\partial_t(\mu\,\boldsymbol{H}_h), \boldsymbol{v}_h)_K + (\nabla \times \boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{v}_h)_K &= (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}_h)_K, \quad && \forall\, \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{D}_h; \\ (\sigma\,\boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{w}_h)_K - (\nabla \times \boldsymbol{H}_h, \boldsymbol{w}_h)_K &= 0, && \forall \boldsymbol{w}_h \in \boldsymbol{D}_h, \end{aligned} \tag{4.15}$$

where $\boldsymbol{H}_h$ is the discrete magnetic field, $\boldsymbol{E}_h$ is the discrete electric field, and $\boldsymbol{v}_h$ and $\boldsymbol{w}_h$ are the associated discrete test functions. Using the divergence theorem twice, we have the additional terms

$$\langle \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_h - \boldsymbol{E}_h^*), \boldsymbol{v}_h \rangle_{\partial K}$$

and

$$-\langle \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_h - \boldsymbol{H}_h^*), \boldsymbol{w}_h \rangle_{\partial K}$$

defined on the boundary ∂K of K in the right-hand side of weak form (4.15). The term

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_h^* \\ \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}_h^* \end{bmatrix}$$

is known as the numerical flux. It allows the exchange of information between the elements over the computational domain. The numerical flux is an approximation of the flux at the interface between the elements which consists of a combination of the degrees of freedom of $\boldsymbol{H}_h$ and $\boldsymbol{E}_h$ in K and K^*. Since system (4.14) is not hyperbolic from the missing transient term in the second equation of this system, an upwind-like numerical flux is used.

To find the expression of this numerical flux, let us first define $\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^T & \boldsymbol{E}^T \end{bmatrix}^T$ and $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}^T & 0^T \end{bmatrix}^T$. We then rewrite system (4.14) as

$$Q\,\partial_t \boldsymbol{U} + A_1\,\partial_x \boldsymbol{U} + A_2\,\partial_y \boldsymbol{U} + A_3\,\partial_z \boldsymbol{U} + K\,\boldsymbol{U} = \boldsymbol{G}. \tag{4.16}$$

We define the matrix

$$M = \sum_{i=1}^{3} n_i\,A_i,$$

where n_i is the i^{th} component of the outward unit normal $\boldsymbol{n}$ to Γ. To find an upwind-like

numerical flux, the matrix M is factorized as

$$M \;=\; R\,\Lambda\,R^{-1},$$

where the matrix Λ contains the eigenvalues of M and the matrix R contains the eigenvectors of M. The matrix Λ can be decomposed as $\Lambda = \Lambda^{+} + \Lambda^{-}$, where the diagonal matrices Λ^{+} and Λ^{-} contain the positive and negative eigenvalues. Considering that the matrix Λ^{-} is responsible for making the information enter the element, and the matrix Λ^{+} is associated with the information leaving the element, the upwind-like numerical flux is chosen in such a way that :

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_h^{*} \\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_h^{*} \end{bmatrix} = -R\,\Lambda^{+}\,R^{-1}\,\boldsymbol{U}_h^{+} - R\,\Lambda^{-}\,R^{-1}\,\boldsymbol{U}_h^{-},$$

where $\boldsymbol{U}_h^{+}$ and $\boldsymbol{U}_h^{-}$ are the discrete dependent variables that belong respectively to K and K^{*}. We also have

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_h - \boldsymbol{E}_h^{*}) \\ -\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_h - \boldsymbol{H}_h^{*}) \end{bmatrix} &= M\,\boldsymbol{U}_h^{+} - R\,\Lambda^{+}\,R^{-1}\,\boldsymbol{U}_h^{+} - R\,\Lambda^{-}\,R^{-1}\,\boldsymbol{U}_h^{-} \\ &= R\,\Lambda^{-}\,R^{-1}\,[\![\boldsymbol{U}_h]\!] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{E}} \\ \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{H}} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

with :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{E}} &= \frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{n}\times[\![\boldsymbol{E}_h]\!] - [\![\boldsymbol{H}_h]\!] + (\boldsymbol{n}\cdot[\![\boldsymbol{H}_h]\!])\,\boldsymbol{n}\Big); \\ \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{H}} &= \frac{1}{2}\Big(-\boldsymbol{n}\times[\![\boldsymbol{H}_h]\!] - [\![\boldsymbol{E}_h]\!] + (\boldsymbol{n}\cdot[\![\boldsymbol{E}_h]\!])\,\boldsymbol{n}\Big) \end{aligned} \tag{4.17}$$

in a similar way to what is done in [21, 30] for the first two equations of Maxwell's equations (4.1). The discrete weak problem is then : for each element K, find $(\boldsymbol{H}_h, \boldsymbol{E}_h) \in \boldsymbol{D}_h \times \boldsymbol{D}_h$ such that :

$$\begin{aligned} (\partial_t(\mu\,\boldsymbol{H}_h), \boldsymbol{v}_h)_K + (\nabla\times\boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{v}_h)_K &= (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}_h)_K + \langle \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{E}}, \boldsymbol{v}_h\rangle_{\partial K}, \quad \forall\, \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{D}_h; \\ (\sigma\,\boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{w}_h)_K - (\nabla\times\boldsymbol{H}_h, \boldsymbol{w}_h)_K &= \langle \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{H}}, \boldsymbol{w}_h\rangle_{\partial K}, \qquad\qquad \forall \boldsymbol{w}_h \in \boldsymbol{D}_h. \end{aligned} \tag{4.18}$$

As with the GFEM based strategy, the transient term $\partial_t(\mu\,\boldsymbol{H})$ is discretized using the second-order accurate implicit BDF scheme.

Order of Convergence. To establish the order of convergence of the DG based strategy for constant conductivity σ and magnetic permeability μ, it will be shown that system (4.14) can be written as a Friedrichs' system for each time step. Let us consider $\sigma \in]0, \infty[$ and

$\mu \in]0, \infty[$ to be constants. Considering the k-order implicit BDF scheme, we have

$$\partial_t \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t_n) \approx \frac{\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \, \boldsymbol{H}^{n-i}(\boldsymbol{x})}{\beta_0 \, \Delta t},$$

where $\boldsymbol{H}^n(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t_n)$, $k = 1, \ldots, 6$, and α_i and β_0 are known coefficients. Using a semi-discrete approach for system (4.14), we obtain an implicit problem for each time step, given by

$$\begin{aligned} \mu \, \frac{\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \, \boldsymbol{H}^{n-i}(\boldsymbol{x})}{\beta_0 \, \Delta t} + \nabla \times \boldsymbol{E}^n(\boldsymbol{x}) = \; & \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t_n); \\ \sigma \, \boldsymbol{E}^n(\boldsymbol{x}) - \nabla \times \boldsymbol{H}^n(\boldsymbol{x}) = \; & 0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Using $\boldsymbol{U}^n = \left[\boldsymbol{H}^n(\boldsymbol{x})^T \;\; \boldsymbol{E}^n(\boldsymbol{x})^T \right]^T$, the system of equations (4.14) becomes

$$A_1 \, \partial_x \boldsymbol{U}^n + A_2 \, \partial_y \boldsymbol{U}^n + A_3 \, \partial_z \boldsymbol{U}^n + \tilde{K} \, \boldsymbol{U}^n = \tilde{\boldsymbol{G}} \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{4.20}$$

where

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \frac{\mu \, \alpha_0}{\beta_0 \, \Delta t} & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

is the modified matrix associated with the terms of order zero and

$$\tilde{\boldsymbol{G}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t_n) - \mu \, \frac{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, \boldsymbol{H}^{n-i}}{\beta_0 \, \Delta t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

is the modified source term. The problem then becomes : for each time step, find $\boldsymbol{U}^n \in [C^1(\Omega)]^m$ such that

$$\begin{aligned} A_1 \, \partial_x \boldsymbol{U}^n + A_2 \, \partial_y \boldsymbol{U}^n + A_3 \, \partial_z \boldsymbol{U}^n + \tilde{K} \, \boldsymbol{U}^n = \; & \tilde{\boldsymbol{G}} \quad \text{in} \quad \Omega; \\ (B - M) \, \boldsymbol{U}^n = \; & 0 \quad \text{on} \quad \Gamma, \end{aligned} \tag{4.21}$$

where $M = \sum_{i=1}^{3} n_i \, A_i$ as previously defined. The boundary field B is defined as

$$B = \begin{bmatrix} 0 & C \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

where $C \, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{x}$ [21]. Let us define the space

$$L^\infty(\Omega) = \{ v \; : \; \|v\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty \}$$

where

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{q > 0 \ : \ |v(x)| \leq q \ \text{ a.e. for } \ x \in \Omega\}.$$

Considering $\tilde{A} = \partial_x A_1 + \partial_y A_2 + \partial_z A_3$, the system of equations (4.21) satisfies the following assumptions for each time step : $A_i = A_i^T$ for $i = 1, 2, 3$; $\tilde{K} \in [L^\infty(\Omega)]^{m,m}$; $A_i \in [L^\infty(\Omega)]^{m,m}$ for $i = 1, 2, 3$; $\tilde{A} \in [L^\infty(\Omega)]^{m,m}$; $\tilde{\boldsymbol{G}} \in [L^2(\Omega)]^m$ and :

$$\begin{aligned} \tilde{K} + \tilde{K}^T - \tilde{A} - \eta\, I \geq 0 \quad &\text{in} \quad \Omega; \\ B + B^T \geq 0 \quad &\text{on} \quad \Gamma; \\ \ker(M - B) + \ker(M + B) = \mathbb{R}^m \quad &\text{on} \quad \Gamma, \end{aligned}$$

where $\eta > 0$ and $m = 6$ in our case. Under these assumptions, according to the theory of Friedrichs' systems [24, 38], problem (4.21) has a unique solution for a sufficiently small Δt and large σ. Moreover, considering the nodal DG method with the upwind-like numerical flux (4.17) to discretize the system of equations (4.19) in space, the order of convergence of the discrete dependent variable in the L^2-norm is $r + 1$ where r is the degree of the polynomials on quasi-uniform meshes (cf. Theorem 7.19 in [21]). This result will be used to verify the proposed numerical methodology for problems with constant conductivity.

A Better Conditioned Formulation Based on the Electrical Resistivity The electrical resistivity ρ is small for a normal conducting material at HTS operating temperatures (around 10^{-10} Ωm for copper at 30 K). Considering that the conductivity $\sigma = \rho^{-1}$, the terms $\partial_t(\mu\, \boldsymbol{H}_h)$, $\nabla \times \boldsymbol{E}_h$ and $\nabla \times \boldsymbol{H}_h$ may then become negligible when compared to the term $\sigma\, \boldsymbol{E}_h$ in discrete problem (4.18). This can lead to an ill-conditioned problem. By Ohm's law (4.2), we have that

$$\sigma\, \boldsymbol{E} - \nabla \times \boldsymbol{H} = 0$$

and

$$\boldsymbol{E} - \rho\, \nabla \times \boldsymbol{H} = 0.$$

Substituting the left-hand side of the second equation of the discrete problem (4.18) by $(\boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{w}_h)_K - (\rho\, \nabla \times \boldsymbol{H}_h, \boldsymbol{w}_h)_K$ gives the better conditioned discrete problem : for each element K, find $(\boldsymbol{H}_h, \boldsymbol{E}_h) \in \boldsymbol{D}_h \times \boldsymbol{D}_h$ such that :

$$\begin{aligned} (\partial_t(\mu\, \boldsymbol{H}_h), \boldsymbol{v}_h)_K + (\nabla \times \boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{v}_h)_K &= (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}_h)_K + \langle \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{E}}, \boldsymbol{v}_h \rangle_{\partial K}, \qquad \forall\, \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{D}_h; \\ (\boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{w}_h)_K - (\rho\, \nabla \times \boldsymbol{H}_h, \boldsymbol{w}_h)_K &= \langle \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{H}}, \boldsymbol{w}_h \rangle_{\partial K}, \qquad \forall \boldsymbol{w}_h \in \boldsymbol{D}_h. \end{aligned} \tag{4.22}$$

The terms $\langle \boldsymbol{F_E}, \boldsymbol{v}_h \rangle_{\partial K}$ and $\langle \boldsymbol{F_H}, \boldsymbol{w}_h \rangle_{\partial K}$ can be seen as penalization terms on the jump of the dependent variables at the interface between the elements. Moreover, it can be shown that the weak formulation (4.22) is equivalent to (4.18) when applied to $\boldsymbol{H} \in [W^{1,1}(\Omega)]^3$ and $\boldsymbol{E} \in [W^{1,1}(\Omega)]^3$, where

$$W^{1,1}(\Omega) = \{v \in L^1(\Omega) : \partial_x v, \partial_y v, \partial_z v \in L^1(\Omega)\}.$$

Let us begin with the weak formulation (4.22). Since $\boldsymbol{H} \in [W^{1,1}(\Omega)]^3$ and $\boldsymbol{E} \in [W^{1,1}(\Omega)]^3$, we have $[\![\boldsymbol{H}]\!] = [\![\boldsymbol{E}]\!] = 0$ for all triangular faces of the domain Ω (c.f. Lemma 1.23 in [21]) and the penalization terms in (4.22) then become

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{F_E}, \boldsymbol{v}_h \rangle_{\partial K} &= \langle \tfrac{1}{2} \left(\boldsymbol{n} \times [\![\boldsymbol{E}]\!] - [\![\boldsymbol{H}]\!] + (\boldsymbol{n} \cdot [\![\boldsymbol{H}]\!]) \, \boldsymbol{n} \right), \boldsymbol{v}_h \rangle_{\partial K} = 0, \qquad \forall \, \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{D}_h; \\ \langle \boldsymbol{F_H}, \boldsymbol{w}_h \rangle_{\partial K} &= \langle \tfrac{1}{2} \left(-\boldsymbol{n} \times [\![\boldsymbol{H}]\!] - [\![\boldsymbol{E}]\!] + (\boldsymbol{n} \cdot [\![\boldsymbol{E}]\!]) \, \boldsymbol{n} \right), \boldsymbol{w}_h \rangle_{\partial K} = 0, \qquad \forall \boldsymbol{w}_h \in \boldsymbol{D}_h. \end{aligned}$$

The weak form of Ohm's law, based on the conductivity σ and on the electrical resistivity ρ, gives

$$(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{w}_h)_K - (\rho \, \nabla \times \boldsymbol{H}, \boldsymbol{w}_h)_K = (\sigma \, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{w}_h)_K - (\nabla \times \boldsymbol{H}, \boldsymbol{w}_h)_K = 0$$

and we then obtain

$$\begin{aligned} (\partial_t (\mu \, \boldsymbol{H}), \boldsymbol{v}_h)_K + (\nabla \times \boldsymbol{E}, \boldsymbol{v}_h)_K &= (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}_h)_K, \qquad \forall \, \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{D}_h; \\ (\sigma \, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{w}_h)_K - (\nabla \times \boldsymbol{H}, \boldsymbol{w}_h)_K &= 0, \qquad \forall \boldsymbol{w}_h \in \boldsymbol{D}_h, \end{aligned}$$

which is (4.18). Following the same procedure but beginning with the weak formulation (4.18), it can be shown that we can recover the weak formulation (4.22).

Nonlinear Case

For HTS, the electrical resistivity is modeled using the power law (4.9). The continuous inverse function of

$$\boldsymbol{E} = \rho(\nabla \times \boldsymbol{H}) \, \nabla \times \boldsymbol{H} = \tfrac{E_c}{J_c^p} \, \|\nabla \times \boldsymbol{H}\|_2^{p-1} \, \nabla \times \boldsymbol{H}$$

is given by

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma(\boldsymbol{E}) \, \boldsymbol{E} = \begin{cases} \frac{J_c}{E_c^{1/p}} \, \|\boldsymbol{E}\|_2^{-1+\frac{1}{p}} \, \boldsymbol{E} & \text{if } \|\boldsymbol{E}\|_2 \neq 0; \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where $\sigma(\boldsymbol{E}) = \frac{J_c}{E_c^{1/p}} \left\|\boldsymbol{E}\right\|_2^{-1+\frac{1}{p}}$ is the nonlinear conductivity, which goes to infinity as $\|\boldsymbol{E}\|_2 \to 0$. As for the linear case, we do not use the weak form (4.18) with the nonlinear conductivity to stay away from any issue when $\|\boldsymbol{E}\|_2 \to 0$, such as ill-conditioned matrix. Since we have

$$\sigma(\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{E} - \nabla \times \boldsymbol{H} = 0 \tag{4.23}$$

and

$$\boldsymbol{E} - \rho(\nabla \times \boldsymbol{H})\,\nabla \times \boldsymbol{H} = 0, \tag{4.24}$$

we should also use the weak problem (4.22) with the nonlinear electrical resistivity. Following the same procedure used for the linear case, it can be shown that the weak formulation (4.22) is equivalent to (4.18) when applied to $\boldsymbol{H} \in [W^{1,1}(\Omega)]^3$ and $\boldsymbol{E} \in [W^{1,1}(\Omega)]^3$. Problem (4.22) discretized using the DG method and the second-order accurate BDF scheme, with the nonlinear electrical resistivity $\rho(\nabla \times \boldsymbol{H})$, is linearized using the following fixed-point iteration scheme, for each time step and for each element K,

$$\begin{aligned}
\mu\,(\boldsymbol{H}_h^{n,k+1}, \boldsymbol{v}_h)_K + \tfrac{3\,\Delta t}{2}\,(\nabla \times \boldsymbol{E}_h^{n,k+1}, \boldsymbol{v}_h)_K =\ & \tfrac{3\,\Delta t}{2}\,(\boldsymbol{F}^n, \boldsymbol{v}_h)_K \\
& + \tfrac{3\,\Delta t}{2}\,\langle \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{E}}^{n,k+1}, \boldsymbol{v}_h\rangle_{\partial K} + \tfrac{\mu}{3}\,(4\,\boldsymbol{H}^{n-1} - \boldsymbol{H}^{n-2}, \boldsymbol{v}_h)_K; \\
(\boldsymbol{E}_h^{n,k+1}, \boldsymbol{w}_h)_K - (\rho(\nabla \times \boldsymbol{H}_h^{n,k})\,\nabla \times \boldsymbol{H}_h^{n,k+1}, \boldsymbol{w}_h)_K =\ & \langle \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{H}}^{n,k+1}, \boldsymbol{w}_h\rangle_{\partial K},
\end{aligned}$$

where $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{E}}^{n,k+1}$ and $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{H}}^{n,k+1}$ is the numerical flux evaluated using the $(k+1)$-th fixed-point iteration approximation of the discrete magnetic field and the discrete electric field at t_n.

4.4.3 Divergence-Free Magnetic Field Constraint

The divergence-free magnetic field constraint is not satisfied explicitly. As in [30], we expected that the order of convergence of the divergence-free constraint to be r where r is the degree of the piecewise polynomials used as shape functions. In order to measure the global divergence, we used the semi-norm $\|\boldsymbol{H}\|_{\star,h}$ as a norm of $\nabla \cdot \boldsymbol{H}$ as proposed in [19]. For a vector field $\boldsymbol{H}$ that is smooth in each element K of the discrete domain, the norm of the divergence of $\boldsymbol{H}$ is given by

$$\|\boldsymbol{H}\|_{\star,h} = \sum_f \int_f |[\![\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n}]\!]|\ ds + \sum_K \int_K |\nabla \cdot \boldsymbol{H}|\ dK, \tag{4.25}$$

where f is the triangular faces of the discrete domain. The norm (4.25) will be used to verify the order of convergence of the divergence of the discrete magnetic field.

4.5 Numerical Verifications

4.5.1 Problem with a Manufactured Solution

In order to verify the order of convergence of the proposed numerical methodology for problems with a constant resistivity ρ, the manufactured solution technique is used. For a magnetic field given by

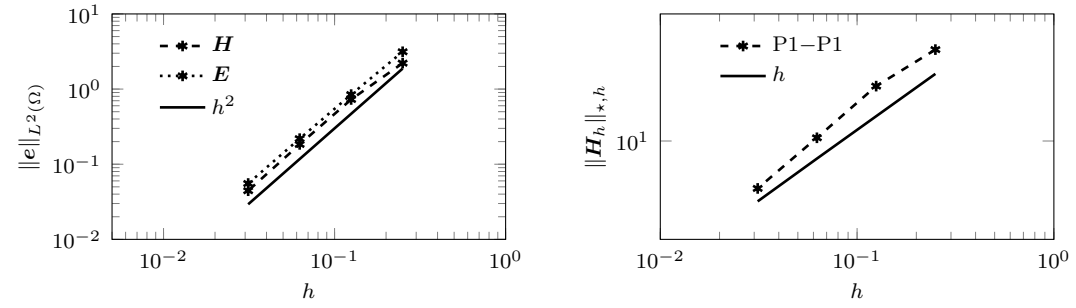
$$\boldsymbol{H} = (\sin(3\,\pi\,(y+z))\,e^{-t},\ \cos(2\,\pi\,(x+z))\,e^{-t},\ \sin(\pi\,(x+y))\,e^{-t}),$$

the corresponding source term $\boldsymbol{F}$ and the electric field $\boldsymbol{E}$ are computed so that $\boldsymbol{H}$ is a solution of system (4.5). The magnetic field $\boldsymbol{H}$ and the electric field $\boldsymbol{E}$ are imposed on all Γ, and the initial conditions are given by $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{x})$ and $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x})$. The magnetic permeability μ and the electrical resistivity ρ are set to 1. The geometry is a unit cube. Quasi-uniform meshes with tetrahedral elements are used. The mesh grid size is denoted by h. The time interval is $\mathrm{I} = [0, 0.1]$ and the time-step size is chosen between 0.0025 and 0.01 in such a way that the error associated with the discretization of time does not influence the error associated with the discretization of space. The fixed-point iterations are considered converged when the Euclidean norm of the residual and of the relative correction of the discrete problem are respectively less than $\delta_r = 10^{-6}$ and $\delta_c = 10^{-5}$. The shape functions for each dependent variable are either linear (P1) or quadratic (P2) polynomials. The combinations of shape functions used for the discretization of $\boldsymbol{H}-\boldsymbol{E}$ are the P1−P1 and the P2−P2 elements.

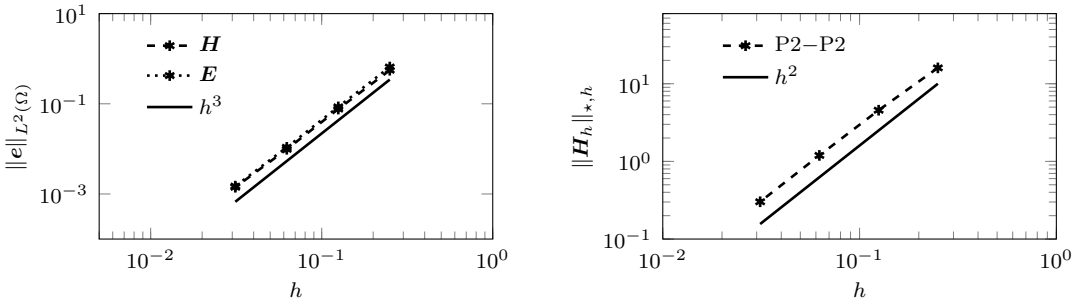
The error on the discrete magnetic field and the discrete electric field is computed using the vectorial L^2-norm (4.12). The convergence plots are shown in Figure 4.1. The order of convergence of $\boldsymbol{H}_h$ and $\boldsymbol{E}_h$ are $r+1$ where r is the degree of the polynomials used as shape functions ($r = 1, 2$ in our case), as expected from the analysis given in subsection 4.4.2 for quasi-uniform meshes. Using the norm $\|\cdot\|_{\star,h}$, we also observed a linear and a second order of convergence of the divergence of the discrete magnetic field for P1−P1 element and for P2−P2 element.

4.5.2 The Magnetic Front Problem

For eddy currents problems, a variation of the magnetic field induces an electric current. As mentioned previously, these problems are nonlinear when the exponent of the power law (4.9) is $p > 1$. No analytic solutions are known for these problems. However, for Bean's model, the magnetic field $\boldsymbol{H}$ and the current density $\boldsymbol{J}$ are known for cylindrical geometries. In



(a) P1−P1



(b) P2−P2

Figure 4.1 Convergence plots for the problem with a manufactured solution for linear and quadratic elements.

cylindrical coordinates, the θ-component of $\boldsymbol{H}$ is a continuous piecewise linear function and the z-component of $\boldsymbol{J}$ is given in terms of a Heaviside step function [5]. Both the magnetic field and the current density penetrate the domain from the outside in. For sufficiently large values of p, the analytic solution of Bean's model is used to verify the proposed numerical methodology and the discretization of the $\boldsymbol{H}$ formulation using the GFEM with the Whitney element for nonlinear electrical resistivity. The magnetic front problem is also used to compare the accuracy of both numerical strategies. The robustness of the fixed-point iteration scheme with respect to the time-step size is also studied for values of the exponent p.

The geometry under study consists in a cylindrical superconductor of radius $r = 1$ and height $h_z = 0.1$, illustrated in Figure 4.2. Larger values of h_z do not influence the observed results. The physical parameters for this study are $\mu = 1$, $E_c = 1$ and $J_c = 1$. Symmetry boundary

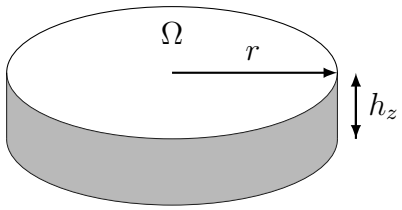


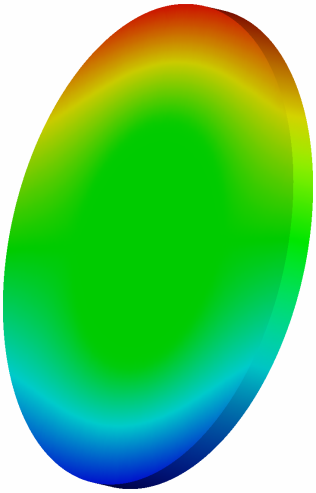
Figure 4.2 Geometry for the magnetic front problem where $h_z = 0.1$ and $r = 1$.

conditions are imposed on the top and bottom of the cylinder. Dirichlet boundary conditions are expressed in cylindrical coordinates to simplify their expression and are given by

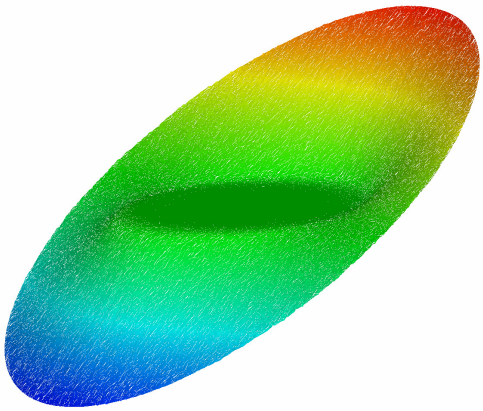
$$\boldsymbol{H}(r = 1, \theta, z, t) = (H_r, H_\theta, H_z) = (0, -t, 0)$$

on the lateral area of the cylinder. The initial conditions are given by $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, 0) = 0$ and $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, 0) = 0$. The unstructured mesh is composed of 1,304,079 elements. The mesh grid size is 0.01. The nodal P1−P1 element is used to discretize the first two equations of system (4.5) with the DG method and the Whitney element is used to discretize the $\boldsymbol{H}$ formulation (4.6) with the GFEM. The tolerances are set to $\delta_r = \delta_c = 10^{-4}$ (c.f. subsection 4.5.1).

Using the proposed DG-based strategy, the x-component of the magnetic field H_x and the z-component of current density J_z are illustrated for $p = 10$ in Figure 4.3 and Figure 4.4. The y-component of $\boldsymbol{H}$ is similar to H_x but with a rotation of 90° around the z-axis. H_z is of the order of 10^{-3}, and therefore not illustrated. As expected, $\boldsymbol{H}$ and $\boldsymbol{J}$ are penetrating the cylinder from the outside in, in the radial direction. The evolution of the z-component of the current density J_z with respect to p is shown in Figure 4.5 and Figure 4.6. When p increases, the variation of current density $\boldsymbol{J}$ is sharper and closer to the solution provided by Bean's model. The proposed numerical methodology captures this sharp gradient with limi-

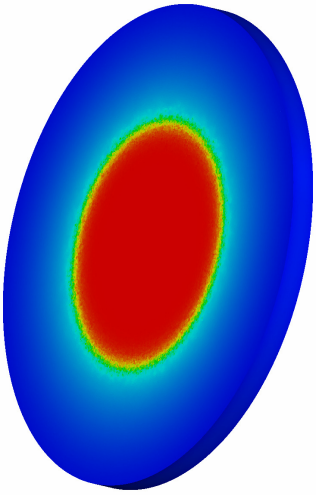


(a) x-component of $\boldsymbol{H}$ in the cylindrical geometry

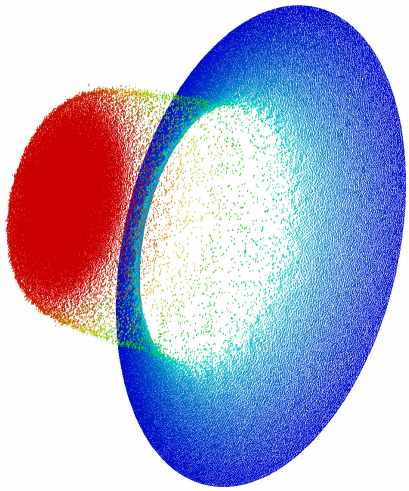


(b) Graph of the x-component of $\boldsymbol{H}$

Figure 4.3 The x-component of the magnetic field for $p = 10$ at $t = 0.3364$, for the magnetic front problem. The color scale from blue to red is $[-0.35, 0.35]$.

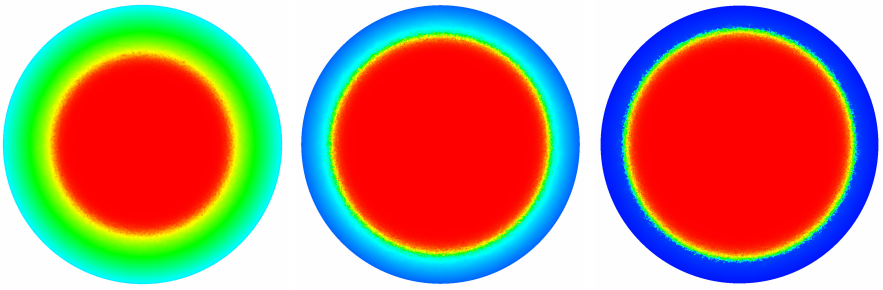


(a) z-component of $\boldsymbol{J}$ in the cylindrical geometry



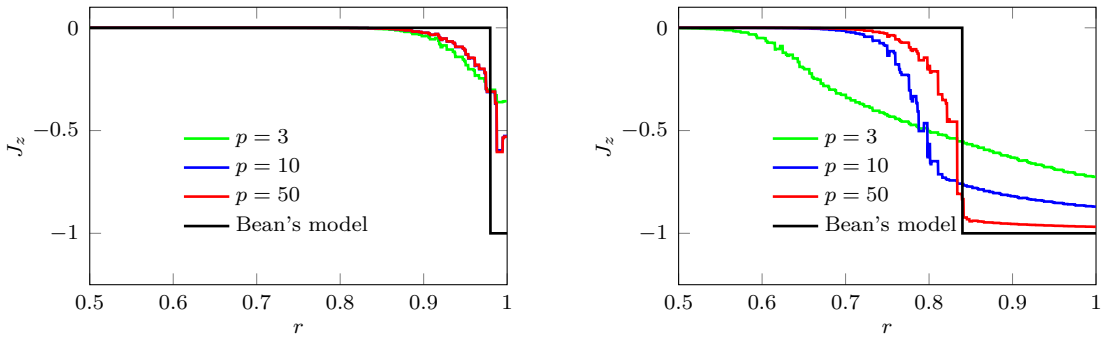
(b) Graph of the z-component of $\boldsymbol{J}$

Figure 4.4 The z-component of the current density for $p = 10$ at $t = 0.3364$, for the magnetic front problem. The color scale from blue to red is $[-1, 0]$.



(a) $p = 3$ (b) $p = 10$ (c) $p = 50$

Figure 4.5 The z-component of the current density $\boldsymbol{J}$ for values of p at $t = 0.16$, for the magnetic front problem. The color scale from blue to red is $[-1, 0]$.



(a) $t = 0.02$ (b) $t = 0.16$

Figure 4.6 The z-component of the current density $\boldsymbol{J}$ along the radial axis for values of p at two time steps using the proposed DG-based strategy for the magnetic front problem.

ted numerically induced oscillations. Figure 4.7 compares the approximations of the current density computed using both numerical strategies at $t = 0.02$. Spurious oscillations can be observed with the $\boldsymbol{H}$ formulation discretized using the GFEM.

Table 4.1 gives the values of t^* for which the convergence of the fixed-point iteration scheme is lost for $t > t^*$, and the largest time-step sizes that would allow us to reach t^*. This is a well-known limitation of numerical codes used for modeling HTS. This makes it difficult to model industrial scale problems. This information was obtained empirically for various values of the exponent p and for both numerical strategies. As the exponent increases, we see that the time-step size must be smaller to reach convergence. It is also observed that a larger time-step size can be used over a longer time interval with the proposed DG-based strategy.

Figure 4.8 illustrates the order of convergence of the divergence of $\boldsymbol{H}_h$ using the norm (4.25). The time-step size used is given in Table 4.1 for each exponent p. The convergence of the discrete divergence-free magnetic field constraint does not guarantee that the approximations converge to the « good » solution. However, we do know that they converge to a divergence-free magnetic field solution.

4.5.3 Magnetization of an HTS Bulk

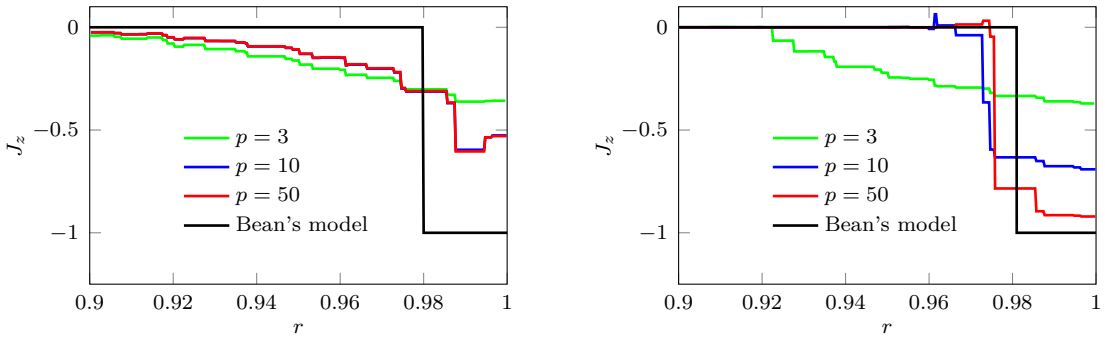
The magnetization of an HTS bulk is a problem similar to the magnetic front problem studied in subsection 4.5.2, i.e. the magnetic field $\boldsymbol{H}$ and the current density $\boldsymbol{J}$ penetrate the bulk from the outside in. But in this case, only the y-component of $\boldsymbol{H}$ varies as a sinusoidal function in time. Both numerical strategies are again compared.

The geometry of the problem is a box of dimensions $1.0 \times 0.5 \times 1.0$. The magnetic field, imposed on all boundaries, is given by

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t) = (0, 0.1 \sin(2\,\pi\, f\, t), 0)$$

where $f = 50$ Hz is the frequency. The MgB_2 HTS used for this study is characterized by the following physical parameters : $\mu = 4\,\pi \times 10^{-7}$ N/A^2, $E_c = 10^{-4}$ V/m, $J_c = 10^8$ A/m^2 and $p = 50$ [39]. The initial conditions are given by $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, 0) = 0$ and $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, 0) = 0$. The unstructured mesh is composed of 127,822 tetrahedral elements and the mesh grid size is 0.025. We again use the P1$-$P1 nodal element combined with the DG method to discretize system (4.5) and the Whitney element with the GFEM to discretize the $\boldsymbol{H}$ formulation (4.6). The time-step size used is 2×10^{-4} for both strategies and the time interval is $\mathrm{I} = [0, 0.02]$, which corresponds to a full period. The tolerances are given by $\delta_r = \delta_c = 10^{-4}$.

Figure 4.9 illustrates the components of the magnetic field at different time steps. The y-



(a) System (4.5) + DG

(b) $\boldsymbol{H}$ formulation + GFEM

Figure 4.7 The z-component of the current density $\boldsymbol{J}$ along the radial axis for values of p at $t = 0.02$, using both numerical strategies, for the magnetic front problem.

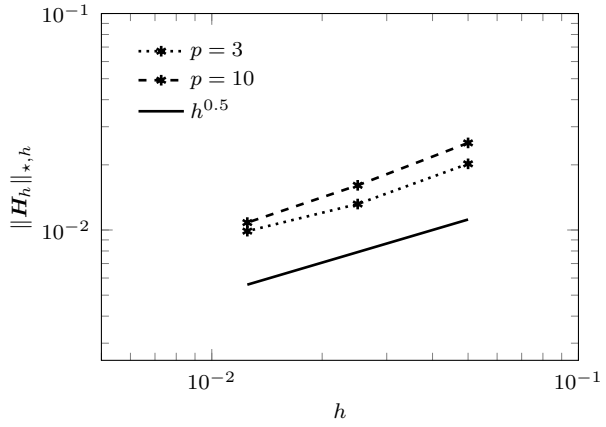


Figure 4.8 Convergence plot of the divergence of $\boldsymbol{H}_h$ using linear elements at different exponents p and at $t = 0.25$ for the magnetic front problem.

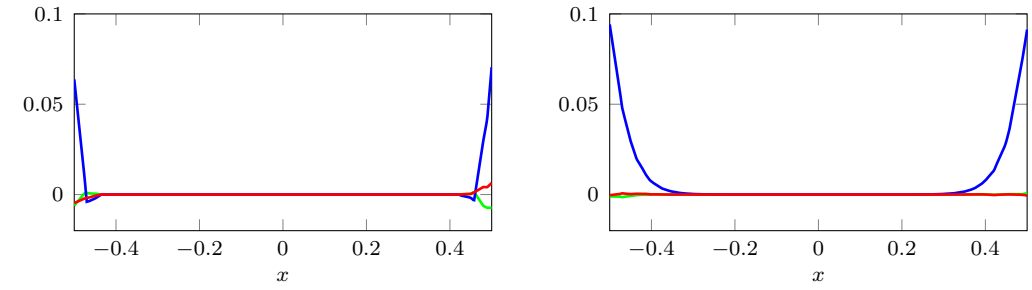
Table 4.1 Values of t^* for which the convergence of the fixed-point iteration scheme is lost for $t > t^*$, and the largest time-step sizes allowing to reach t^* for both numerical strategies, for the magnetic front problem.

FE discretization	Element	Formulation	p	Δt	t^* ($\times 10^{-3}$)
GFEM	Whitney	$\boldsymbol{H}$ formulation (4.6)	3	10^{-5}	71.47
			10	0.5×10^{-5}	36.00
			50	0.25×10^{-5}	19.69
DG	Nodal	System (4.5)	3	10^{-3}	313.00
			10	10^{-4}	336.50
			50	0.5×10^{-4}	163.70

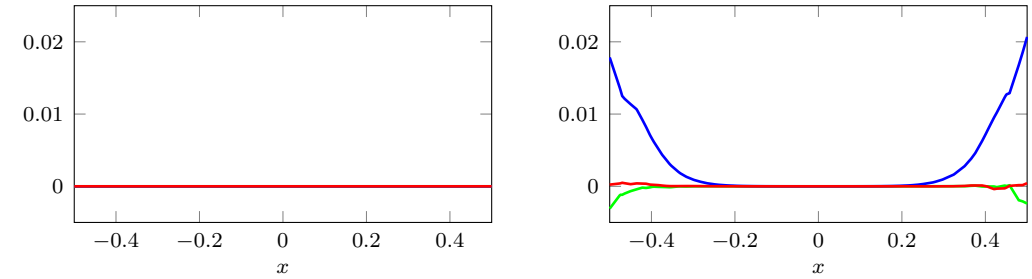
component of $\boldsymbol{H}$ obtained with the DG strategy leads to a partial penetration in the HTS bulk. The z-component of the magnetic field is negligible. With the $\boldsymbol{H}$ formulation, we observe a limited penetration of the magnetic field in the bulk with spurious oscillations. At $t = 0.01$ and $t = 0.02$, which correspond to a half and a full period, the magnetic field obtained from the $\boldsymbol{H}$ formulation is close to zero. For the DG-based formulation (4.22), we observe a remanent magnetic field when the external magnetic field is removed. According to Bean's model, for an external magnetic field given by a hat function in time, a remanent magnetic field should be observed [5]. This suggests that the numerical results based on the proposed DG strategy are in agreement with Bean's model.

4.6 Conclusion

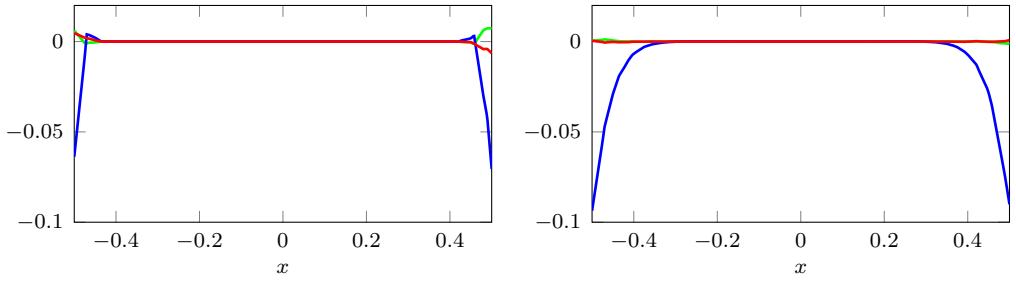
A numerical strategy was proposed to use the discontinuous Galerkin method to discretize a low-frequency approximation to Maxwell's equations composed of first-order partial differential equations, with a nonlinear electrical resistivity, for modeling high-temperature superconductors problems. A nodal discontinuous Galerkin finite element method is proposed to discretize the system of equations (4.5) using an upwind-like numerical flux. The order of convergence of the proposed numerical methodology for constant conductivity and magnetic permeability is established using the theory of the DG method applied on Friedrichs' systems. The order of convergence of the numerical model is then verified using a problem with a known solution. Optimal convergence rates are obtained. The magnetic front problem with a nonlinear electrical resistivity is used to verify the DG-based strategy, and the discretization of the $\boldsymbol{H}$ formulation using the GFEM with the Whitney element. A comparison between the numerical strategies is performed based on the accuracy of the approximations and the robustness of the fixed-point iteration scheme. For the $\boldsymbol{H}$ formulation discretized



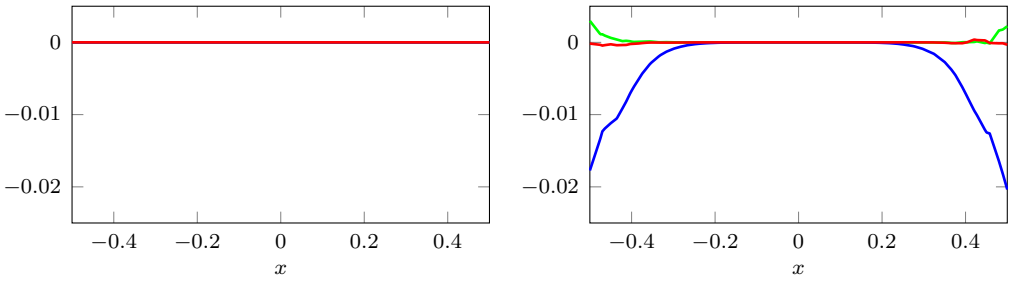
(a) $t = 0.005$



(b) $t = 0.01$



(c) $t = 0.015$



(d) $t = 0.02$

Figure 4.9 Evolution of the components of $\boldsymbol{H}$ (— : H_x, — :H_y, — : H_z) along the x-axis at various time steps for the magnetization of an HTS bulk. The left column illustrates the numerical results obtained with the $\boldsymbol{H}$ formulation discretized using the GFEM with the Whitney element, and the right column gives the numerical results based on system (4.5) discretized using the DG method with nodal elements.

using the GFEM with the Whitney element, spurious oscillations near the sharp gradient of the z-component of the current density $\boldsymbol{J}$ are observed, while for the DG-based strategy, this gradient has been captured with limited numerically induced oscillations. For large values of the exponent p in the power-law model of the electrical resistivity, the time-step size must be smaller to reach convergence of the fixed-point iterations, but it was observed that a larger time-step size can be used over a longer time interval with the DG-based strategy. For the magnetization of an HTS bulk, the numerical results obtained with the proposed DG strategy are in agreement with Bean's model. A remanent magnetic field $\boldsymbol{H}$ is observed when the external magnetic field is removed.

Acknowledgments

The authors are grateful to Professor Marc Laforest for the interesting and helpful conversations. This work was sponsored by the Fonds de recherche du Québec - Nature et technologies (FRQNT).

CHAPITRE 5 ARTICLE 2 : NUMERICAL MODELING OF HIGH-TEMPERATURE SUPERCONDUCTORS USING THE DISCONTINUOUS GALERKIN FINITE ELEMENT METHOD WITH THE WHITNEY ELEMENT

Yann-Meing Law, Damien Taggedine and Steven Dufour

submitted to Journal of Computational Physics

5.1 Abstract

A numerical methodology is proposed to discretize a low-frequency approximation to Maxwell's equations using the discontinuous Galerkin finite element method with the Whitney element for modeling normal conductors and high-temperature superconductors (HTS). A model for a medium with very low conductivity in the vicinity of a conducting material is proposed based on a dimensional analysis. The proposed numerical methodology is verified using a problem with a manufactured solution, the nonlinear magnetic front problem and the magnetization of a wire. The order of convergence of the discrete dependent variables are in agreement with the error estimation associated with the interpolation operator of the Whitney element for a problem with a manufactured solution. An empirically upper bound of the time-step size is proposed to obtain convergence of the fixed-point iterations for problems with sharp gradients of the current density, such as the magnetic front problem. A comparison is also performed with the $\boldsymbol{H}$ formulation discretized using the Galerkin finite element method with the Whitney element. The results suggest that the proposed numerical methodology is more robust. The magnetization of an HTS and of a conductor wire are studied. There is limited spurious oscillations on the current density. For an HTS wire, vortex on the magnetic field, caused by a remanent magnetic field, are observed.

Key words

low-frequency Maxwell's equations, discontinuous Galerkin finite element method, high-temperature superconductors, Whitney element, dimensional analysis, model of air medium.

5.2 Introduction

Superconducting materials are characterized by an electrical resistivity that is close to zero. The superconducting state depends on the temperature of the material, and on the magnitude of the electric current and the external magnetic field [80]. The performance of power system components is assessed using the alternating-current (AC) loss, which is used to compute heat dissipation, also known as Joule heating [89]. Minimizing heat dissipation is important to reduce the operating costs of using high-temperature superconductor (HTS) power system components. The superconducting parts must be kept under a critical temperature (e.g. around 92 K for YBCO [80]). The AC loss, which depends on the electric field and the current density, must therefore be accurately estimated for the design of HTS power system components.

Maxwell's equations in low-frequency regime are used for HTS modeling. The electrical resistivity of an HTS is nonlinear and often follows a power-law model. A popular numerical strategy among the electrical engineering community is to rewrite the low-frequency approximation to Maxwell's equations as a parabolic problem and use the numerical methods developed for these problems [86, 14]. Recently, an approach, where the low-frequency approximation to Maxwell's equations is directly discretized using the discontinuous Galerkin (DG) finite element method, which was initially designed to discretize hyperbolic systems, was proposed [48].

The modeling of a medium with very low conductivity, such as air medium, in the vicinity of a conducting material, is necessary to study power system components, such as transformers or motors. The difference between the order of magnitude of the electrical resistivity of a conducting material and of a medium with very low conductivity makes numerical schemes less robust [22]. Escamez et al. [23] propose to change the electrical resistivity of air medium at a smaller arbitrary value of 10^{-3} Ωm to help the fixed-point iteration scheme to converge. Spurious electric currents are therefore observed in air medium. Stenvall et al. [84] assume that the conductivity of air medium is zero and discretize an elliptic partial differential equation with respect to the magnetic field for modeling air medium around conducting materials. This approach requires the use of the finite element method with cohomology basis functions [46]. Using this approach, no spurious electric currents are observed in air medium.

In this work, we propose a dimensional analysis approach to model a medium with very low conductivity around a conducting material. A non-dimensional form of Maxwell's equations will help analyze the electromagnetic phenomena under study for different operating conditions. It will also help to identify the dominant physics for a given problem. In the context

of a numerical study, it also acts as a natural preconditioner [72]. Although popular in computational fluid dynamics (CFD) and computational electromagnetic community [30], this tool seems to be seldom used by the HTS community. For HTS modeling, Kameni et al. [40] use some form of scaling parameters for the electric field and the current density that can be related to the proposed dimensional analysis. But, they do not provide a complete dimensional analysis nor their motivation for scaling these two vector fields. The low-frequency approximation to Maxwell's equations is discretized using the DG finite element method, but using the Whitney vectorial element, which is part of the family of Nédélec elements of the first kind, instead of nodal elements. The Whitney element guarantees the discrete magnetic field to be locally divergence free [63]. The DG finite element method with the Nédélec elements of the first kind was also used to discretize Maxwell's equations by Chen et al. [18] for radio-frequency cavity problems.

The paper is structured as follows. The equations used to model normal conductors and HTS with their non-dimensional form are first introduced. A model for medium with very low conductivity around a conducting material is proposed. The discretization of the different system of equations is performed using the DG finite element method with the Whitney element. A problem with a manufactured solution is used to verify the proposed DG-based strategy for constant electrical resistivity. For HTS modeling, the proposed numerical methodology is verified using Bean's model solution for large values of the exponent of the power law, which is used to model the electrical resistivity of HTS, for the nonlinear magnetic front problem and the magnetization of a wire. The magnetization of a wire is also used to verify the proposed model for a medium with very low conductivity. A comparison between an HTS and a normal conductor wire is also performed.

5.3 Maxwell's Equations in the Low-Frequency Regime

5.3.1 The Governing Equations for Normal Conductors

Normal conductors are considered as non-superconducting materials. Under the isothermal assumption, their electrical resistivity is constant. The modeling of normal conductors is based on a low-frequency approximation to Maxwell's equations.

Let us first consider Maxwell's equations :

$$\partial_t \boldsymbol{B} + \nabla \times \boldsymbol{E} = 0; \tag{5.1a}$$
$$\partial_t \boldsymbol{D} - \nabla \times \boldsymbol{H} = -\boldsymbol{J}; \tag{5.1b}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0; \tag{5.1c}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_c, \tag{5.1d}$$

where $\boldsymbol{B}$ is the magnetic induction field, $\boldsymbol{J}$ is the current density, $\boldsymbol{E}$ is the electric field, $\boldsymbol{D} = \epsilon\, \boldsymbol{E}$ is the electric field displacement, ϵ is the electric permittivity and ρ_c is the charge density. The magnetic field $\boldsymbol{H}$ is related to $\boldsymbol{B}$ by

$$\boldsymbol{H} = \mu^{-1}\, \boldsymbol{B}, \tag{5.2}$$

where μ is the magnetic permeability. Ohm's law,

$$\boldsymbol{E} = \rho\, \boldsymbol{J}, \tag{5.3}$$

where ρ is the electrical resistivity, gives the relation between $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{J}$. For normal conductors, the conductivity is given by $\sigma = \rho^{-1}$.

In the low-frequency regime, the magneto-quasistatic condition $\partial_t \boldsymbol{D} \approx 0$ [13] gives, from equation (5.1b), Ampère's law

$$\boldsymbol{J} = \nabla \times \boldsymbol{H}. \tag{5.4}$$

Faraday's law (5.1a), the divergence-free magnetic field constraint (5.1c), Ohm's law (5.3) and Ampère's law (5.4) give the low-frequency approximation to Maxwell's equations for conducting materials :

$$\begin{aligned} \partial_t\big(\mu\, \boldsymbol{H}\big) + \nabla \times \boldsymbol{E} &= 0; \\ \boldsymbol{E} - \rho\, \nabla \times \boldsymbol{H} &= 0; \\ \nabla \cdot \big(\mu\, \boldsymbol{H}\big) &= 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

For a domain Ω, the boundary conditions for the system of equations (5.5) are given by :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{G}_1 \quad \text{on} \quad \Gamma \times \mathrm{I}; \\ \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{G}_2 \quad \text{on} \quad \Gamma \times \mathrm{I}, \end{aligned}$$

where $\boldsymbol{n}$ is the outward unit normal to the boundary Γ of Ω and $\mathrm{I} = [t_\mathrm{i}, t_\mathrm{f}]$ is a time interval. The initial conditions are given by the values taken by $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t)$ and $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ for all $\boldsymbol{x} \in \Omega$ at $t = t_\mathrm{i}$.

5.3.2 The Governing Equations for High-Temperature Superconductors

Still under the isothermal assumption, the modeling of HTS is also based on the system of equations (5.5). But, the electrical resistivity now depends on the current density $\boldsymbol{J}$ and follows a power-law model,

$$\rho = \frac{E_c}{J_c^p} \|\boldsymbol{J}\|_2^{p-1}, \tag{5.6}$$

where $\|\cdot\|$ is the Euclidean norm, J_c is the critical current density, E_c is the electric field amplitude at J_c and $p > 1$. Using Ampère's law (5.4) and the power law (5.6), the second equation of system (5.5) becomes

$$\boldsymbol{E} - \frac{E_c}{J_c^p} \|\nabla \times \boldsymbol{H}\|_2^{p-1} \nabla \times \boldsymbol{H} = 0. \tag{5.7}$$

For $p \to \infty$, we obtain Bean's model,

$$\|\boldsymbol{E}\|_2 = \begin{cases} 0 & \text{if } \|\boldsymbol{J}\|_2 < J_c; \\ e & \text{if } \|\boldsymbol{J}\|_2 = J_c, \end{cases} \tag{5.8}$$

where $e \in [0, \infty[$ [93]. Analytical solutions are known for this model, for simple geometries, which are used to verify the proposed numerical methodology for large values of p. The governing equations used in this study for HTS modeling are therefore given by :

$$\begin{aligned} \partial_t\big(\mu\, \boldsymbol{H}\big) + \nabla \times \boldsymbol{E} &= 0; \\ \boldsymbol{E} - \frac{E_c}{J_c^p} \|\nabla \times \boldsymbol{H}\|_2^{p-1} \nabla \times \boldsymbol{H} &= 0; \\ \nabla \cdot \big(\mu\, \boldsymbol{H}\big) &= 0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

5.4 Non-Dimensionalization

As mentioned in the introduction, a medium with a very low conductivity surrounding conducting materials must be modeled for the study of power system components. A large difference between the order of magnitude of the electrical resistivity of conducting materials and of a surrounding medium leads to a loss of convergence of the fixed-point iteration scheme used to linearize the discrete problem. In this section, we introduce a model for a medium with very low conductivity based on a dimensional analysis that can be discretized using the DG finite element method. The dimensional analysis is performed using a conducting wire, surrounded by air medium, as an example.

Considering the quantities of reference t_0, ℓ_0, μ_0, ρ_0, H_0 and E_0, the non-dimensional form

of system of equations (5.5) is given by :

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{\mu_0\, H_0\, \ell_0}{t_0\, E_0}\right) \partial_{\tilde{t}}\big(\tilde{\mu}\, \tilde{\boldsymbol{H}}\big) + \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{E}} &= 0; \\ \tilde{\boldsymbol{E}} - \left(\tfrac{\rho_0\, H_0}{E_0\, \ell_0}\right) \tilde{\rho}\, \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{H}} &= 0; \\ \tilde{\nabla} \cdot \big(\tilde{\mu}\, \tilde{\boldsymbol{H}}\big) &= 0, \end{aligned} \tag{5.10}$$

where quantities with a tide (« ˜ ») are non-dimensional, that is $\tilde{t} = \frac{t}{t_0}$, $\tilde{\ell} = \frac{\ell}{\ell_0}$, $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}$, $\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$, $\tilde{\nabla} = \ell_0\, \nabla$, $\partial_{\tilde{t}} = t_0\, \partial_t$, $\tilde{\boldsymbol{H}} = \frac{\boldsymbol{H}}{H_0}$ and $\tilde{\boldsymbol{E}} = \frac{\boldsymbol{E}}{E_0}$. Let us consider a wire and the following six variables, which can be expressed in four units (meter, kilogram, second and ampere) : the magnetic field $\boldsymbol{H}$, the electric field $\boldsymbol{E}$, the electrical resistivity ρ, the permeability μ, the radius of the wire and the period of the external magnetic field. The non-dimensional form (5.10) is consistent with the Buckingham Π theorem [88] since we obtain two non-dimensional numbers $\Pi_1 = \frac{\mu_0\, H_0\, \ell_0}{t_0\, E_0}$ and $\Pi_2 = \frac{\rho_0\, H_0}{E_0\, \ell_0}$. We are not aware if these numbers have a name.

In order to show the relation between Π_1 and Π_2, and the properties of an electrical conductor, let us consider the resistance of an electrical conductor $R = \frac{\rho\, \ell}{A}$, where ℓ and A are the length and the cross-sectional area of a wire, and its reluctance $S = \frac{\ell}{\mu\, A}$ [8]. The non-dimensionalization of the resistance and the reluctance of the electrical conductor are given by

$$R = \frac{\rho_0}{\ell_0}\, \frac{\tilde{\rho}\, \tilde{\ell}}{\tilde{A}} = \frac{\rho_0}{\ell_0}\, \tilde{R} = R_0\, \tilde{R}$$

and

$$S = \frac{1}{\mu_0\, \ell_0}\, \frac{\tilde{\ell}}{\tilde{\mu}\, \tilde{A}} = \frac{1}{\mu_0\, \ell_0}\, \tilde{S} = S_0\, \tilde{S},$$

with $\tilde{A} = \frac{A}{\ell_0^2}$. The system of equations (5.10) becomes :

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{H_0}{S_0\, t_0\, E_0}\right) \partial_{\tilde{t}}\big(\tilde{\mu}\, \tilde{\boldsymbol{H}}\big) + \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{E}} &= 0; \\ \tilde{\boldsymbol{E}} - \left(\tfrac{R_0\, H_0}{E_0}\right) \tilde{\rho}\, \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{H}} &= 0; \\ \tilde{\nabla} \cdot \big(\tilde{\mu}\, \tilde{\boldsymbol{H}}\big) &= 0. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Combining the first two equations of system (5.11) gives :

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{1}{S_0\, t_0\, R_0}\right) \partial_{\tilde{t}}\big(\tilde{\mu}\, \tilde{\boldsymbol{H}}\big) + \tilde{\nabla} \times \tilde{\rho}\, \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{H}} &= 0; \\ \tilde{\nabla} \cdot \big(\tilde{\mu}\, \tilde{\boldsymbol{H}}\big) &= 0, \end{aligned} \tag{5.12}$$

which is the non-dimensionalized form of the parabolic approximation to system (5.1) in

low-frequency regime, known as the $\boldsymbol{H}$ formulation [14]. The non-dimensional number in the transient term can be expressed as

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{1}{S_0\, t_0\, R_0} = \frac{f_0}{S_0\, R_0},$$

where $f_0 = t_0^{-1}$ is the reference frequency.

For HTS modeling, the non-dimensional form of the nonlinear electrical resistivity (5.6) is given by

$$\rho = \left(\frac{E_c\, H_0^{p-1}}{J_c^p\, \ell_0^{p-1}}\right) \|\tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{H}}\|_2^{p-1}$$

and the non-dimensional form of the system of equations (5.9) is given by :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu_0\, H_0\, \ell_0}{t_0\, E_0}\right) \partial_{\tilde{t}}\big(\tilde{\mu}\, \tilde{\boldsymbol{H}}\big) + \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{E}} &= 0; \\ \tilde{\boldsymbol{E}} - \left(\frac{E_c\, H_0^p}{E_0\, J_c^p\, \ell_0^p}\right) \|\tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{H}}\|_2^{p-1}\, \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{H}} &= 0; \\ \tilde{\nabla} \cdot \big(\tilde{\mu}\, \tilde{\boldsymbol{H}}\big) &= 0. \end{aligned} \tag{5.13}$$

In order to reduce the difference between the order of magnitude of the different terms in the systems of equations (5.10) and (5.13), we choose $E_0 := 1$ V/m, $\mu_0 = \omega$ N/A^2 and $H_0 := \omega^{-1}$ A/m, where ω is a non-dimensional scalar.

5.4.1 The Modeling of a Medium With Very Low Conductivity

In order to show the consequence of the difference between the order of magnitude of the electrical resistivity in air medium and in conducting materials, let us consider a typical wire, with a radius of about one millimeter, surrounded by air medium, where an external magnetic field or an electric current of period of about ten millisecond is imposed. The electrical resistivity ρ of air medium is approximately 10^{14} Ωm [71, 20], while the electrical resistivity for conducting materials is often much smaller than one (e.g. 10^{-10} Ωm for copper and 10^{-8} Ωm for titanium at 30 K [17, 31]). Based on the dimensional analysis, the reference quantities used are $\ell_0 = 10^{-3}$ m, $t_0 = 10^{-2}$ s, $\mu_0 = 4\,\pi \times 10^{-7}$ N/A^2, $\rho_0 = \rho$, $H_0 = (4\,\pi)^{-1} \times 10^7$ A/m and $E_0 = 1$ V/m for a typical wire. For air medium, we have the non-dimensional numbers $\Pi_{1_a} = 0.1$ and $\Pi_{2_a} \approx 10^{23}$. For titanium as conducting material, the non-dimensional numbers are $\Pi_{1_c} = 0.1$ and $\Pi_{2_c} \approx 10$. The difference of order of magnitude between Π_{2_a}, and Π_{1_a}, Π_{1_c} and Π_{2_c} leads to an ill-conditioned discrete problem coming from the non-dimensionalized system (5.10).

Let us now consider the non-dimensionalized form of the $\boldsymbol{H}$ formulation (5.12). We have

$$\frac{\Pi_{1_a}}{\Pi_{2_a}} \approx 10^{-24}$$

for air medium and

$$\frac{\Pi_{1_c}}{\Pi_{2_c}} \approx 10^{-2}$$

for titanium. Depending of the choice of shape functions of the discrete magnetic field, this can lead to an ill-conditioned discrete system for air medium. As an exemple, the choice of the Whitney element shape functions will lead to such a situation since the matrix associated with the discretization of space is singular [75].

For typical HTS wires, we have $E_c \approx 10^{-4}$ V/m and $J_c \approx 10^9$ A/m^2. We therefore choose $\rho_0 = \frac{E_c}{J_c} \approx 10^{-13}$ Ωm. We then have $\Pi_{1_{\text{HTS}}} = 0.1$, $\Pi_{2_{\text{HTS}}} \approx 10^{-4}$ and

$$\frac{\Pi_{1_{\text{HTS}}}}{\Pi_{2_{\text{HTS}}}} \approx 10^3.$$

There is several orders of magnitude between the non-dimensional number Π_{2_a}, and $\Pi_{1_{\text{HTS}}}$ and $\Pi_{2_{\text{HTS}}}$. Therefore, a direct discretization of the system of equations (5.10) and (5.12) is not suited for modeling air medium nor a medium with very low conductivity that is surrounding conducting materials.

For air medium, $\|\boldsymbol{J}\|_2 \approx 10^{-12}$ A/m^2 [20, 44] and the charge density is $\rho_c \approx 10^{-9}$ C/m^3 [47]. We therefore consider $\|\boldsymbol{J}\|_2 = 0$ A/m^2 and $\rho_c = 0$ C/m^3. The system of equations (5.1) becomes :

$$\begin{aligned}
\mu\, \partial_t \boldsymbol{H} + \nabla \times \boldsymbol{E} &= 0;\\
\epsilon\, \partial_t \boldsymbol{E} \ - \nabla \times \boldsymbol{H} &= 0;\\
\nabla \cdot \boldsymbol{H} &= 0;\\
\nabla \cdot \boldsymbol{E} &= 0.
\end{aligned}$$

Considering $\epsilon = \epsilon_0\, \tilde{\epsilon}$, the non-dimensionalization gives :

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{\mu_0\, H_0\, \ell_0}{E_0\, t_0}\right) \tilde{\mu}\, \partial_{\tilde{t}} \tilde{\boldsymbol{H}} + \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{E}} &= 0;\\
\left(\tfrac{\epsilon_0\, E_0\, \ell_0}{t_0\, H_0}\right) \tilde{\epsilon}\, \partial_{\tilde{t}} \tilde{\boldsymbol{E}} \ - \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{H}} &= 0;\\
\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{H}} &= 0;\\
\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{E}} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

In order to assess the order of magnitude of each term in the system of equations (5.14),

let us choose the following quantities of reference : $\mu_0 = 4\,\pi \times 10^{-7}$ N/A^2, $\epsilon_0 = 8 \times 10^{-12}$ C^2/Nm^2 , $H_0 = (4\,\pi)^{-1} \times 10^7$ A/m and $E_0 = 1$ V/m. The non-dimensional numbers found in system (5.14) become

$$\Pi_1 = \frac{\mu_0\, H_0\, \ell_0}{E_0\, t_0} = \frac{\ell_0}{t_0} \tag{5.15}$$

and

$$\Pi_3 = \frac{\epsilon_0\, E_0\, \ell_0}{t_0\, H_0} = \frac{32\,\pi \times 10^{-19}\, \ell_0}{t_0}. \tag{5.16}$$

Considering a wire with the quantities of reference $\ell_0 = 10^{-3}$ m and $t_0 = 10^{-2}$ s, we have $\Pi_1 = 0.1$ and $\Pi_3 \approx 10^{-18}$. Comparing the value of $\Pi_3 \approx 10^{-18}$ of the transient derivative associated with the electric field and the coefficient of $\tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{H}}$, which is equal to 1, in the second equation of system (5.14), we conclude that $\tilde{\epsilon}\, \partial_{\tilde{t}} \tilde{\boldsymbol{E}}$ is therefore negligible. A model for air medium in the vicinity of a conducting wire is then given by :

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{\mu_0\, H_0\, \ell_0}{E_0\, t_0}\right) \tilde{\mu}\, \partial_{\tilde{t}} \tilde{\boldsymbol{H}} + \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{E}} &= 0; \\ \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{H}} &= 0; \\ \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{H}} &= 0; \\ \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{E}} &= 0. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Even if the development has been based on the properties of air medium, it can be generalized to other mediums with very low conductivity as long as the current density $\boldsymbol{J}$ is negligible in the medium and the dimensionless number (5.16) is such that $\Pi_3 \ll 1$.

5.5 Numerical Methodology

A popular numerical strategy in the electrical engineering community consists in formulating Maxwell's equations as a parabolic problem. It was proposed in [48] to directly discretize the low-frequency approximation to Maxwell's equations using the nodal discontinuous Galerkin finite element method. This DG-based strategy is compared to the parabolic formulation based on the magnetic field, also known as the $\boldsymbol{H}$ formulation, discretized using the Galerkin finite element method (GFEM) with the Whitney element. The proposed DG-based strategy better captures sharp gradients of the current density $\boldsymbol{J}$. Moreover, this numerical strategy was also shown to be more robust for large values of p. We now propose a DG-based strategy, but using the Whitney element. For the time discretization, we use a semi-discrete approach. The transient term $\partial_t(\mu\, \boldsymbol{H})$ is discretized using a second-order accurate backward-differentiation formula (BDF), which is unconditionally stable.

5.5.1 The Discontinuous Galerkin Finite Element Method

Let us consider a domain Ω and its boundary Γ. Since the DG FEM is based on the weak form of the system of equations, let us define the space of square integrable functions given by

$$L^2(\Omega) = \{w : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad \|w\|_{L^2(\Omega)} < \infty\},$$

where the L^2-norm is given by

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega w^2 \, d\Omega \right)^{1/2}$$

for scalar function. For a vector field, the L^2-norm is given by

$$\|\boldsymbol{w}\|_{L^2(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{3} \|w_i\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2},$$

where $\boldsymbol{w} \in [L^2(\Omega)]^3$. The inner product in L^2 is given by

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} \, d\Omega$$

in Ω. We also introduce the notation

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle_\Gamma = \int_\Gamma \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} \, d\boldsymbol{s}$$

for functions defined on the boundary Γ. A discrete subspace of $\boldsymbol{D} = [L^2(\Omega)]^3$ is denoted by $\boldsymbol{D}_h$.

Nodal elements were used in [48] and therefore the space of piecewise polynomials, given by

$$D_h = \{w \in L^2(\Omega) : w|_K \in P_r(K), \quad \forall K \in \Omega_h\},$$

where $P_r(K)$ is the space of polynomials of degree r defined on a tetrahedral element K of the computational domain Ω_h, was used and $\boldsymbol{D}_h = [D_h]^3$. For the discretization of the $\boldsymbol{H}$ formulation (5.12) using the Galerkin finite element method (GFEM) for HTS modeling [14, 57], the Whitney element, which belongs to a discrete subspace of

$$H(\text{curl}, \Omega) = \{\boldsymbol{v} \in [L^2(\Omega)]^3 : \nabla \times \boldsymbol{v} \in [L^2(\Omega)]^3\},$$

is often used to enforce the divergence-free magnetic field constraint locally. Since we use

the DG FEM in this work, the continuity of the discrete variable is not enforced across each element of the computational domain. We then have

$$\boldsymbol{D}_h = \{\boldsymbol{w} \in [L^2(\Omega)]^3 : \boldsymbol{w}|_K \in N_1(K), \quad \forall K \in \Omega_h\}$$

where $N_1(K)$ is the Whitney element shape functions space. The expression of the Whitney element shape functions will be later presented.

Using the DG method, the system of equations is discretized element by element on the discrete domain Ω_h. Let us consider an element K with its boundary ∂K. The discrete weak form of the first two equations of system (5.5) are obtained after multiplying them by the discrete test functions $\boldsymbol{v}_h$ and $\boldsymbol{w}_h$, and integrating over K :

$$\begin{aligned} (\partial_t(\mu\,\boldsymbol{H}_h), \boldsymbol{v}_h)_K + (\nabla \times \boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{v}_h)_K = 0, \qquad & \forall\, \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{D}_h; \\ (\boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{w}_h)_K - (\rho\,\nabla \times \boldsymbol{H}_h, \boldsymbol{w}_h)_K = 0, \qquad & \forall \boldsymbol{w}_h \in \boldsymbol{D}_h, \end{aligned} \tag{5.18}$$

where $\boldsymbol{H}_h$ is the discrete magnetic field and $\boldsymbol{E}_h$ is the discrete electric field.

Using the DG method, the flux of the discrete dependent variables at the interface between each element needs to be approximated by a numerical flux. The numerical flux allows for the exchange of information between the elements of the discrete domain. An upwind-like numerical flux developed for the first two equations system (5.5) is used [48]. We define the jump of a variable v across the boundary of two elements K and K^* that share a common face by $[\![v]\!] = v^+ - v^-$ where v^+ belongs to K and v^- belongs to K^*. The problem based on weak form (5.18) is then given by : for each element K, find $(\boldsymbol{H}_h, \boldsymbol{E}_h) \in \boldsymbol{D}_h \times \boldsymbol{D}_h$ such that :

$$\begin{aligned} (\partial_t(\mu\,\boldsymbol{H}_h), \boldsymbol{v}_h)_K + (\nabla \times \boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{v}_h)_K = \langle \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{E}}, \boldsymbol{v}_h \rangle_{\partial K}, \qquad & \forall\, \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{D}_h; \\ (\boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{w}_h)_K - (\rho\,\nabla \times \boldsymbol{H}_h, \boldsymbol{w}_h)_K = \langle \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{H}}, \boldsymbol{w}_h \rangle_{\partial K}, \qquad & \forall \boldsymbol{w}_h \in \boldsymbol{D}_h, \end{aligned} \tag{5.19}$$

with :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{E}} = \; & \frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{n} \times [\![\boldsymbol{E}_h]\!] - [\![\boldsymbol{H}_h]\!] + (\boldsymbol{n} \cdot [\![\boldsymbol{H}_h]\!])\,\boldsymbol{n}\Big); \\ \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{H}} = \; & \frac{1}{2}\Big(-\boldsymbol{n} \times [\![\boldsymbol{H}_h]\!] - [\![\boldsymbol{E}_h]\!] + (\boldsymbol{n} \cdot [\![\boldsymbol{E}_h]\!])\,\boldsymbol{n}\Big). \end{aligned}$$

Let us now present the Whitney element shape functions. For a tetrahedral element K, the Whitney element is composed of six shape functions given by

$$\boldsymbol{\psi}_e(\boldsymbol{x}) = \phi_i(\boldsymbol{x})\,\nabla\phi_j(\boldsymbol{x}) - \phi_j(\boldsymbol{x})\,\nabla\phi_i(\boldsymbol{x}), \quad \begin{cases} i, j = 1, \ldots, 4; \\ e = 1, \ldots, 6, \end{cases}$$

where e is the edge composed of vertices i and j, and $\phi_i(\boldsymbol{x})$ is the linear Lagrange polynomial

associated with vertex i. These shape functions of the Whitney element satisfy

$$\int_e \boldsymbol{\psi}_k \cdot \boldsymbol{t}_e \; d\ell = \pm \, \delta_{ke}, \;\; k = 1, \ldots, 6,$$

where e is an edge, $\boldsymbol{t}_e$ is the tangent vector to e, $\boldsymbol{\psi}_k$ is the shape function associated with edge k and δ_{ke} is the delta function. The *a priori* error estimation of the error associated with the interpolation operator Π_K^1 of the Whitney element is given by

$$\|\boldsymbol{w} - \Pi_K^1 \, \boldsymbol{w}\|_{L^2(K)} \leq C \, h \, |\boldsymbol{w}|_{H^1(K)}, \tag{5.20}$$

where C is a positive constant independent of h, h is the size of element K and $|\boldsymbol{w}|_{H^1(K)}$ is the semi-norm on the Sobolev space $[H^1(K)]^3$ [65]. Error estimate (5.20) will be used to verify the implementation of the Whitney element. The shape functions of the Whitney element for the magnetic field $\boldsymbol{H}$ and the electric field $\boldsymbol{E}$ guarantee that the discrete dependent variables are locally divergence-free as it will be shown. We first apply the divergence operator to the Whitney element shape functions and obtain

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_e = \phi_i \, \nabla^2 \phi_j - \phi_j \, \nabla^2 \phi_i.$$

Since $\phi_i \in P_1(K)$, we have $\nabla^2 \phi_i = 0$ for $i = 1, \ldots, 4$ and $\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_e = 0$ for $e = 1, \ldots, 6$. The global divergence-free constraint would need that the normal component of the discrete dependent variable be continuous at the interface between elements, which is not always the case. Therefore, the discrete dependent variables using the Whitney element are only guaranteed to be locally divergence-free [63].

For a magnetic field $\boldsymbol{H}$ that is smooth in each element K of Ω_h, the global divergence-free constraint can be measured using the semi-norm $\|\boldsymbol{H}\|_{\star,h}$, given by

$$\|\boldsymbol{H}\|_{\star,h} = \sum_f \int_f |[\![\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n}]\!]| \; ds + \sum_K \int_K |\nabla \cdot \boldsymbol{H}| \; dK, \tag{5.21}$$

where f is the triangular faces of the discrete domain. The semi-norm $\|\boldsymbol{H}\|_{\star,h}$ is a norm for $\nabla \cdot \boldsymbol{H}$ [19]. Since the Whitney element is at divergence-free locally, we have $\|\boldsymbol{H}\|_{\star,h} = \sum_f \int_f |[\![\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n}]\!]| \; ds$ and the order of convergence of $\|\boldsymbol{H}\|_{\star,h}$ should therefore be the same as the error associated with the interpolation operator of the Whitney element (5.20).

5.5.2 The Domain Identification for the Different Models

In order to consider a medium with very low conductivity surrounding a conducting material, the discretization of the first two equations of system (5.17) is performed using the DG FEM with the Whitney element on a subdomain of Ω. For the last two equations of system (5.17), it is recalled that the Whitney element enforces locally the divergence-free constraint on the magnetic field $\boldsymbol{H}$ and the electric field $\boldsymbol{E}$. Considering that there is a conducting material Ω_2 and a medium with very low conductivity Ω_1, the domain of definition of the problem Ω is defined as $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ and $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$. To identify each subdomain, the marker function

$$\gamma(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \boldsymbol{x} \in \Omega_1; \\ 1 & \text{if } \boldsymbol{x} \in \Omega_2, \end{cases}$$

is used. In order to avoid interpolating material properties, the discretization of Ω will be such that each element K of the mesh belongs to only one subdomain. It is recalled that the continuity is not enforced across each element using the DG finite element method. The discrete weak problem (5.19) then becomes : for each element K, find $(\boldsymbol{H}_h, \boldsymbol{E}_h) \in \boldsymbol{D}_h \times \boldsymbol{D}_h$ such that :

$$\begin{aligned} &(\partial_t(\mu\, \boldsymbol{H}_h), \boldsymbol{v}_h)_K + (\nabla \times \boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{v}_h)_K = \langle \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{E}}, \boldsymbol{v}_h \rangle_{\partial K}, \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{D}_h; \\ &(\gamma\, \boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{w}_h)_K - (\hat{\rho}\, \nabla \times \boldsymbol{H}_h, \boldsymbol{w}_h)_K = \langle \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{H}}, \boldsymbol{w}_h \rangle_{\partial K}, \quad \forall \boldsymbol{w}_h \in \boldsymbol{D}_h, \end{aligned} \tag{5.22}$$

where

$$\hat{\rho} = \begin{cases} 1 & \text{if } \boldsymbol{x} \in \Omega_1; \\ \rho & \text{if } \boldsymbol{x} \in \Omega_2. \end{cases}$$

The functions $\hat{\rho}$ and γ allow the transition between system (5.17) for a medium with very low conductivity and system (5.5) or (5.9) for conducting materials. In Ω_1, where the conductivity of the surrounding medium is negligible, $\gamma = 0$ and $\hat{\rho} = 1$. We then recover the weak form of the first two equations of system (5.17). A fixed-point iteration scheme is used to linearize problem (5.22).

5.6 Numerical Studies

5.6.1 Problem with a Manufactured Solution

A problem with a manufactured solution is used to verify the order of convergence of the proposed numerical strategy for a constant electrical resistivity. The source term $\boldsymbol{F}$ and the electric field $\boldsymbol{E}$ are chosen so that the magnetic field, given by

$$\boldsymbol{H} = (\sin(3\,\pi\,(y+z))\, e^{-t},\ \cos(2\,\pi\,(x+z))\, e^{-t},\ \sin(\pi\,(x+y))\, e^{-t}),$$

is a solution to the system of equations (5.5). The magnetic field $\boldsymbol{H}$ and the electric field $\boldsymbol{E}$ are imposed on all Γ as boundary conditions, and the initial conditions are $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, 0)$ and $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, 0)$. The magnetic permeability μ and the electrical resistivity ρ are set to 1. The geometry is a unit cube. The mesh is composed of tetrahedral elements. The time interval is $[0, 0.1]$ and the time-step size is $\Delta t = 0.01$. The fixed-point iterations used to linearize the discrete problem are considered converged when the Euclidean norm of the residual and of the relative correction are less than $\delta_r = 10^{-6}$ and $\delta_c = 10^{-5}$ respectively.

The Whitney vectorial element (N1) is used. The combination of the shape functions used to discretize the dependent variables $\boldsymbol{H} - \boldsymbol{E}$ is N1−N1. The error of the discrete dependent variables is computed using the vectorial L^2-norm and the error of the divergence of the discrete magnetic field is computed using the norm $\|\boldsymbol{H}_h\|_{*,h}$ (5.21). The convergence plots are illustrated in Figure 5.1. A linear convergence for the discrete electric field $\boldsymbol{E}_h$ is observed as expected from the error associated with the interpolation operator of the Whitney element (5.20). For the discrete magnetic field $\boldsymbol{H}_h$, the observed order of convergence is 1.5, which is better than expected, but still in agreement with the theory. The convergence order of the divergence of the discrete magnetic field is quadratic, which is also better than expected.

The condition number of the finite element assembly matrix is computed for the DG-based strategy using the Whitney element and the nodal elements. We consider linear (P1) and quadratic (P2) shape functions for the nodal elements. The combinations of shape functions used to discretize the dependent variables $\boldsymbol{H} - \boldsymbol{E}$ are P1−P1, P2−P2 and N1−N1. The condition number of a matrix M is computed using

$$\kappa(M) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}},$$

where $\lambda_{\max}$ and $\lambda_{\min}$ are the largest and the smallest eigenvalue of M. Figure (5.2) illustrates the condition number for various mesh grid sizes. The time-step size is $\Delta t = 0.01$. We observe that the discrete problem is better conditioned using the DG-based strategy with the Whitney element.

5.6.2 The Magnetic Front Problem

Let us consider an HTS cylindrical wire that is exposed to an external magnetic field that varies with time. The variation of the magnetic field induces an electric current, which is known as an eddy current. We recall that for $p \to \infty$, the power-law model (5.7) goes to Bean's model (5.8). Analytical solutions are known for simple geometries. The θ-component

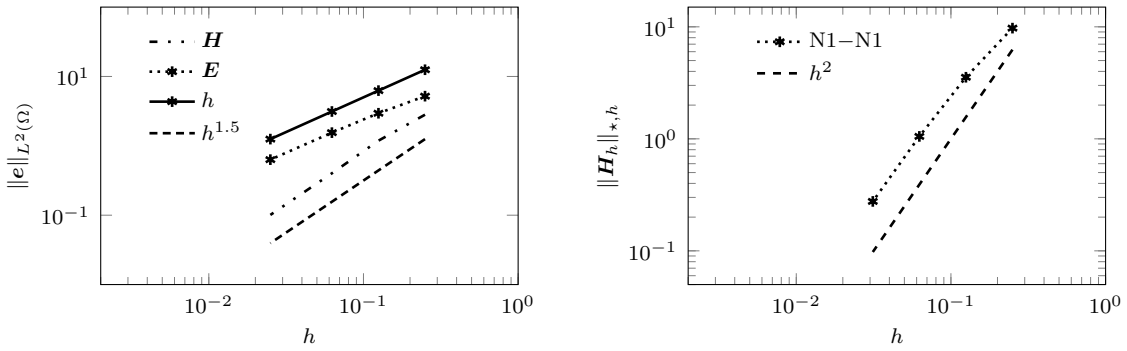


Figure 5.1 Convergence plots for the error of the discrete dependent variables and the error of the divergence of the discrete magnetic field using the DG method with the Whitney element for a problem with a manufactured solution.

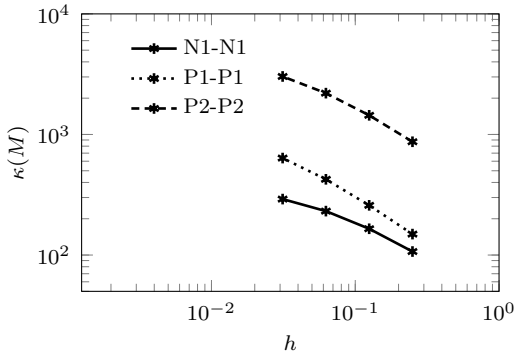


Figure 5.2 Convergence plot for the condition number of the finite element assembly matrix using the DG method with the Whitney element and the nodal elements for a problem with a manufactured solution.

of the magnetic field is given by a piecewise linear continuous function and the z-component of the current density $\boldsymbol{J}$ is given by a step function. Both vector fields penetrate the domain from the outside in.

This problem is used to verify the proposed numerical strategy for HTS modeling. A robust numerical methodology that can accurately capture the sharp gradients of the current density $\boldsymbol{J}$ is a first step toward the accurate estimation of the AC loss for more complex problems, such as the magnetization of an HTS wire.

The magnetic front problem was used to compare the accuracy and the robustness of the $\boldsymbol{H}$ formulation using the Galerkin finite element method with the Whitney element and the DG-based strategy with linear nodal elements [48]. The convergence of the fixed-point iterations is lost with both approaches. But it was observed that the discretization of the system of equations (5.5) using the DG finite element method with linear nodal elements allows larger time steps over longer time intervals. Moreover, the DG-based strategy provides an approximation of the current density $\boldsymbol{J}$ with limited spurious oscillations for larger values of p, when compared with the $\boldsymbol{H}$ formulation discretized using the GFEM with the Whitney element.

The geometry of the problem is a cylinder of radius 1 and height 0.1 in non-dimensional length units. The unstructured mesh is composed of 1,304,079 tetrahedral elements and the mesh grid size is 0.01. Using cylindrical coordinates for simplicity, the magnetic field can be written as

$$\boldsymbol{H}(r = 1, \theta, z, t) = (H_r, H_\theta, H_z) = (0, -t, 0),$$

and is imposed on the lateral area of the cylinder. Symmetry boundary conditions are imposed on the top and bottom of the cylinder. The initial conditions are given by $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, 0) = 0$ and $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, 0) = 0$. The tolerances of the fixed-point iterations are set to $\delta_r = \delta_c = 10^{-4}$.

As observed in [48] for the nodal DG FEM with the P1−P1 element, the convergence of the fixed-point iterations is lost for $t > t^*$ with the DG-based strategy using the Whitney element, but the fixed-point iterations converge over a longer time interval for large values of p. Table 5.1 illustrates the values of t^* and Δt with $p = 50$ for the different approaches. The DG-based strategy using the Whitney element allows the use of a larger time-step size for a longer time interval.

Based on our numerical experiments, we observe that the fixed-point iterations converge when the time-step size is such that

$$\Delta t \leq \frac{h^2}{2\,p\,J_c}. \tag{5.23}$$

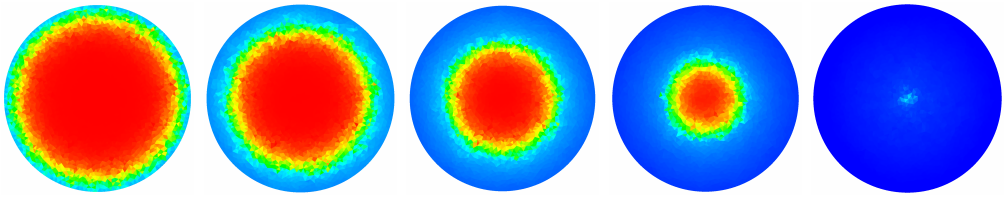
Table 5.1 Comparison of the values of t^* for which the convergence of the fixed-point iteration scheme is lost for $t > t^*$, and the largest time-step sizes allowing to reach t^* for various numerical strategies, for the magnetic front problem with $p = 50$. The values for the GFEM and the nodal DG-based strategy are taken from [48].

FE discretization	Element	Formulation	Δt	t^* ($\times 10^{-3}$)
GFEM	Whitney	$\boldsymbol{H}$ formulation	0.25×10^{-5}	19.69
DG	Nodal (P1−P1)	System (5.9)	0.5×10^{-4}	163.70
DG	Whitney	System (5.9)	10^{-4}	220.10

We can see a similarity between the empirical condition (5.23) and the condition on the time-step size in the context of the finite-difference time-domain (FDTD) schemes [49]. Let us consider the time interval for which there is an incomplete penetration of the current density $\boldsymbol{J}$ in an HTS wire. It is recalled that the current density penetrates the domain from the outside in and it is considered that there is a complete penetration when the front of the current density reaches the center of an HTS wire. We then have $J_c = 1$. The empirical condition (5.23) gives us

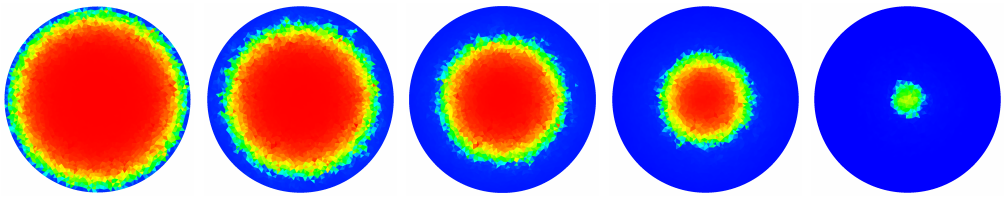
$$\Delta t \leq \frac{h^2}{2\,p}. \tag{5.24}$$

Figure 5.3 and Figure 5.4 illustrate respectively the z-component of the current density $\boldsymbol{J}$ for $p = 10$ and $p = 50$ with a mesh grid size of $h = 0.05$ and a time-step size of $\Delta t = \frac{h^2}{2\,p}$ from empirical condition (5.24). As expected, we observe that the gradient of the current density is sharper for larger values of p. However, there is spurious oscillations around the sharp gradients of the current density. Figure 5.5 illustrates the z-component of the current density for $p = 10$ with $h = 0.01$ and $\Delta t = \frac{h^2}{2\,p}$. As the mesh is refined, we observed that the spurious oscillations diminish and the sharp gradient of the current density $\boldsymbol{J}$ is better captured.



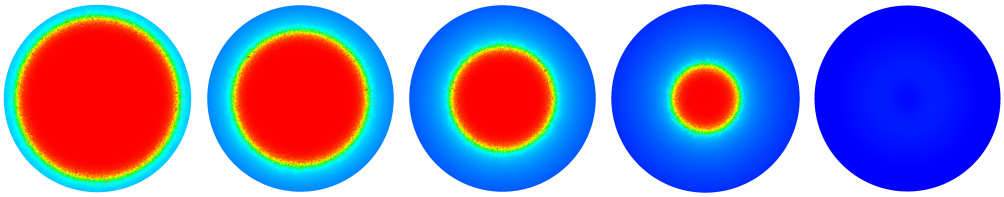
(a) $t = 0.1$ (b) $t = 0.2$ (c) $t = 0.3$ (d) $t = 0.4$ (e) $t = 0.5$

Figure 5.3 The evolution of the z-component of the current density $\boldsymbol{J}$ at various time steps with $p = 10$, $h = 0.05$ and $\Delta t = 0.125 \times 10^{-3}$ for the magnetic front problem. The color scale from blue to red is $[-1, 0]$.



(a) $t = 0.1$ (b) $t = 0.2$ (c) $t = 0.3$ (d) $t = 0.4$ (e) $t = 0.5$

Figure 5.4 The evolution of the z-component of the current density $\boldsymbol{J}$ at various time steps with $p = 50$, $h = 0.05$ and $\Delta t = 0.25 \times 10^{-4}$ for the magnetic front problem. The color scale from blue to red is $[-1, 0]$.



(a) $t = 0.1$ (b) $t = 0.2$ (c) $t = 0.3$ (d) $t = 0.4$ (e) $t = 0.5$

Figure 5.5 The evolution of the z-component of the current density $\boldsymbol{J}$ at various time steps with $p = 10$, $h = 0.01$ and $\Delta t = 0.5 \times 10^{-5}$ for the magnetic front problem. The color scale from blue to red is $[-1, 0]$.

Figure 5.6 illustrates the convergence of the divergence of the discrete magnetic field using the norm $\|\boldsymbol{H}_h\|_{*,h}$ (5.21). The order of convergence of $\nabla \cdot \boldsymbol{H}_h$ is 1.5 for $p = 3$ and $p = 10$. The discrete magnetic field converges to a divergence-free magnetic field solution.

Results based on the discretization of the $\boldsymbol{H}$ formulation using the Galerkin finite element method with the Whitney element were performed using a time-step size respecting the empirical condition (5.24) for $p = 3$ and $p = 10$ [48]. The convergence of the fixed-point iterations is lost before the complete penetration of the current density $\boldsymbol{J}$ in the superconducting wire. This suggests that the DG-based strategies, with the Whitney element or the nodal P1−P1 element, are more robust.

5.6.3 Magnetization of a Wire

The magnetization of a wire consists in exposing a wire to an external magnetic field that varies with respect to time. An electric current is then induced within the wire. This problem is used to verify if the proposed model of a medium with very low conductivity, presented in Section 5.4.1, introduced spurious electric currents in the domain of air medium. We also compare the discrete magnetic field $\boldsymbol{H}_h$ and the discrete current density $\boldsymbol{J}_h = \nabla \times \boldsymbol{H}_h$ in the different wires composed of a normal conductor or an HTS.

The geometry of the domain Ω is a cylinder of radius $r_{\text{ext}} = 0.75$ mm and height $h_z = 0.5$ mm containing another cylinder of radius $r_{\text{int}} = 0.5$ mm, denoted Ω_2 (cf. Figure 5.7). The inner cylinder is the conducting medium and $\Omega_1 = \Omega \backslash \Omega_2$ is the surrounding medium, which is air medium in our case. The properties of the MgB_2 superconductor are characterized by $E_c = 10^{-4}$ V/m, $J_c = 10^8$ A/m^2 and $p = 50$ [39]. The quantities of reference used are $E_0 = 1$ V/m, $\mu_0 = 4\,\pi \times 10^{-7}$ N/A^2, $\rho_0 = \rho$, $H_0 = (4\,\pi)^{-1} \times 10^7$ A/m, $\ell_0 = 10^{-3}$ m and $t_0 = 10^{-3}$ s. We consider copper as the normal conductor and the electrical resistivity is therefore set to $\rho = 10^{-8}$ Ωm. The mesh is composed of 224,265 tetrahedral elements and the mesh grid size is

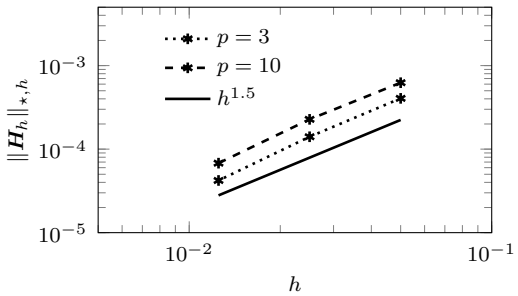


Figure 5.6 Convergence plot for the error of the divergence of the discrete magnetic field for the DG method using the Whitney element for the magnetic front problem.

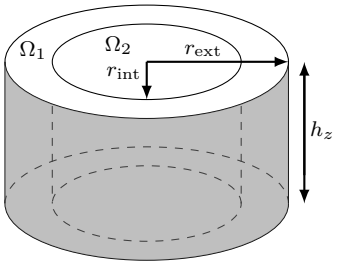


Figure 5.7 Geometry of the domain for the magnetization of a wire problem where $h_z = 0.5$ mm, $r_{\text{ext}} = 0.75$ mm and $r_{\text{int}} = 0.5$ mm.

$h = 0.025$. For the HTS wire, the time-step size used is 0.5×10^{-3}. For the normal conductor wire, the time-step size is set to 0.5×10^{-2}. The tolerances are set to $\delta_r = \delta_c = 10^{-4}$.

An external magnetic field of amplitude 0.1 T with a frequency of 50 Hz on the y-component of the magnetic field H_y is applied. It induces an electric current in the z-direction. The non-dimensional external magnetic field, given by

$$\tilde{\boldsymbol{H}}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{t}) = (0,\ 0.1\ \sin(\pi\, 10^{-1}\, \tilde{t}),\ 0), \tag{5.25}$$

is imposed on the lateral area of the outer cylinder Ω_1. Symmetry boundary conditions are imposed on the top and bottom of the cylinder Ω.

The HTS Wire

The analytic solution provided by Bean's model is used to verify the proposed methodology for large values of p. According to Bean's model, the magnetic field $\boldsymbol{H}$ and the current density $\boldsymbol{J}$ penetrate the wire from the outside in, along the r-axis [5]. The magnetic field and the current density first get smaller as they penetrate further in the wire, until they reach zero. The magnetic field then increases and penetrates further into the wire until the two fronts join at the center of the superconductor. The value of the magnetic field at the center of the wire then gets larger as illustrated in Figure 5.8 (a) and (c). As the amplitude of the external magnetic field decreases, we observe a remanent magnetic field in the wire, as illustrated in Figure 5.8 (b) and (d). Figure 5.9 illustrates the magnetic field lines for the HTS wire. When the external magnetic field changes orientation, a vortex appears in the HTS wire caused by a remanent magnetic field. Figure 5.10 illustrates the dimensionless z-component of the current density J_z at various time steps along the x-axis. J_z penetrates the wire until the two fronts meet. Figure 5.11 illustrates the graph of J_z at $\tilde{z} = 0.25$ when the two fronts form almost a discontinuity at the center of the wire for the first and third quarter of the period

of the external magnetic field. The sharp gradients of J_z is captured with limited spurious oscillations. We also observed that the current density $\boldsymbol{J}$ in air medium is very small.

The Normal Conductor Wire

An analytical expression of the approximation of the magnetic field $\boldsymbol{H}$ and of the current density $\boldsymbol{J}$ over the domain of a normal conductor at a given time is derived. The analytical expression is then used to support the numerical results for a normal conductor.

First, let us suppose a wire of infinite length. We then have

$$\boldsymbol{E} = (0, 0, E_z(x, y, t))$$

and

$$\boldsymbol{H} = (H_x(x, y, t), H_y(x, y, t), 0).$$

The behaviour of a normal conductor wire follows Lenz's law, which claims that the current density $\boldsymbol{J}$, which is induced by a variation of the external magnetic field $\boldsymbol{H}_{\text{ext}}$, will generate a magnetic field that opposes $\boldsymbol{H}_{\text{ext}}$. Based on the external magnetic field (5.25), we define $\boldsymbol{H}_{\text{ext}} = (0, H_{y_{\text{ext}}}, 0)$, where $H_{y_{\text{ext}}} = H_0 \sin(2\,\pi\,t)$, and the induced magnetic field in the conductor is of the form $\boldsymbol{H} = (0, H_y(x, y, t), 0)$. By Faraday's law (5.1a), we have

$$\begin{aligned} \partial_y E_z &= 0; \\ \mu\,\partial_t H_y - \partial_x E_z &= 0. \end{aligned}$$

The first equation $\partial_y E_z = 0$ implies that the electric field depends only on the independent variables x and t. By the divergence-free magnetic field constraint (5.1c), we obtain $\nabla \cdot \boldsymbol{H} = \partial_y H_y = 0$, which implies that the magnetic field also depends only on the independent variables x and t.

Considering the external magnetic field $\boldsymbol{H}_{\text{ext}}$, Faraday's law (5.1a) can be rewritten as

$$\partial_x E_z(x, t) = 2\,\pi\,\mu\,H_0\,\cos(2\,\pi\,t). \tag{5.26}$$

Integrating equation (5.26) over the domain of the normal conductor, we obtain

$$E_z(x, t) = 2\,\pi\,\mu\,H_0\,x\,\cos(2\,\pi\,t) + f(t)$$

where $f(t)$ is a constant of integration with respect to x. By using Ohm's law (5.3), the

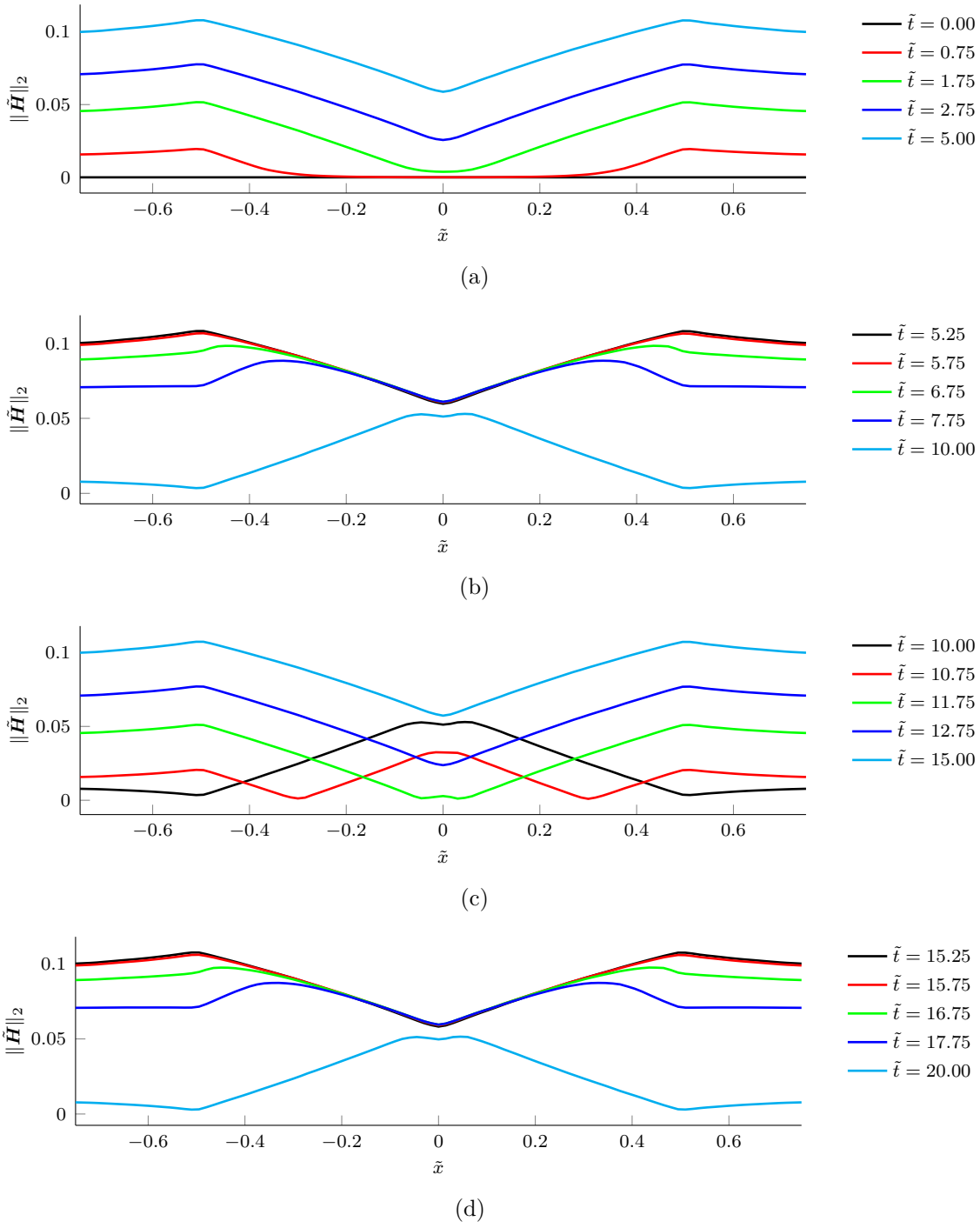
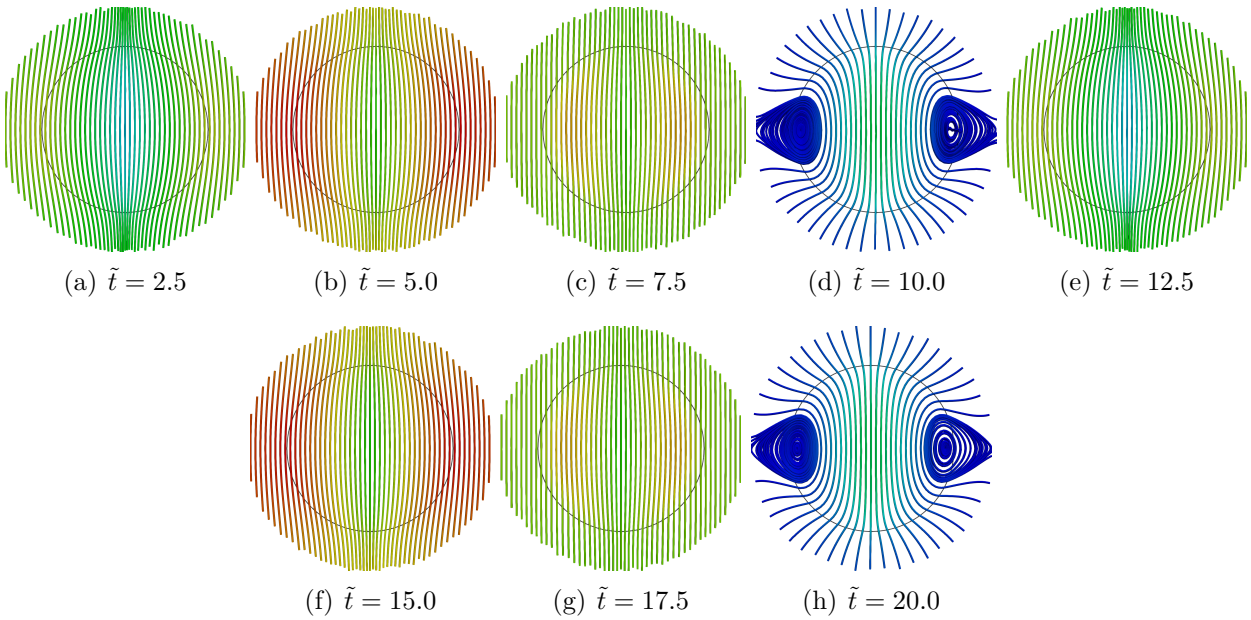


Figure 5.8 Evolution of the Euclidean norm of the dimensionless magnetic field $\boldsymbol{H}$ at various time steps along the x-axis at $\tilde{y} = 0$ and $\tilde{z} = 0.25$ for the magnetization of an HTS wire.



(a) $\tilde{t} = 2.5$ (b) $\tilde{t} = 5.0$ (c) $\tilde{t} = 7.5$ (d) $\tilde{t} = 10.0$ (e) $\tilde{t} = 12.5$

(f) $\tilde{t} = 15.0$ (g) $\tilde{t} = 17.5$ (h) $\tilde{t} = 20.0$

Figure 5.9 The dimensionless magnetic field lines at various time steps at $\tilde{z} = 0.25$ with $h = 0.025$ and $\Delta t = 0.5 \times 10^{-3}$ for the magnetization of an HTS wire. The color scale from blue to red is $[0.003, 0.108]$. The domain of the HTS is delimited by the black circle.

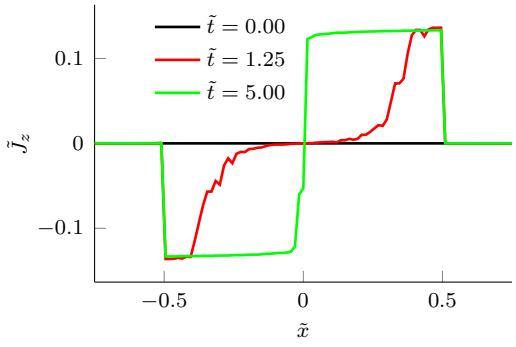
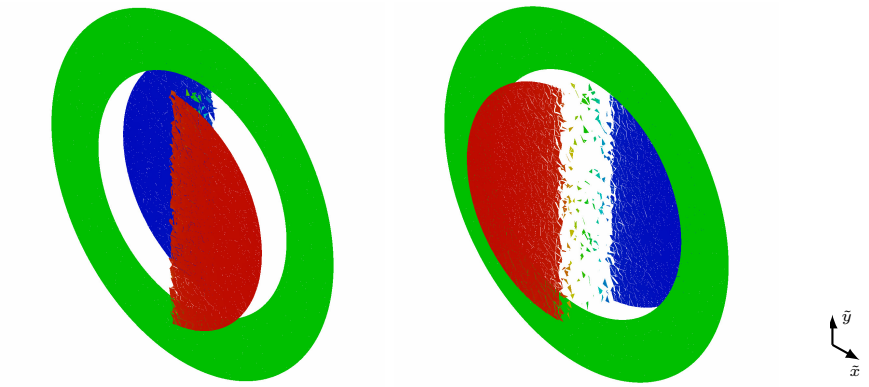


Figure 5.10 Evolution of the z-component of the dimensionless current density $\tilde{J}_z$ at various time steps along the x-axis at $\tilde{y} = 0$ and $\tilde{z} = 0.25$ for the magnetization of an HTS wire.



(a) $\tilde{t} = 5$ (b) $\tilde{t} = 15$

Figure 5.11 2D slice of the dimensionless z-component of the current density $\tilde{J}_z$ at various time steps at $\tilde{z} = 0.25$ with $h = 0.025$ and $\Delta t = 0.5 \times 10^{-3}$ for the magnetization of an HTS wire. The color scale from blue to red is $[-0.135, 0.135]$.

current density is then given by $\boldsymbol{J} = (0, 0, J_z(x,t))$, where

$$J_z(x,t) = \frac{2\,\pi\,\mu\,H_0}{\rho} x \cos(2\,\pi\,t) + \frac{1}{\rho}\,f(t). \tag{5.27}$$

Equation (5.27) is a first-order approximation in the sense that we neglect the electric current generated by the induced magnetic field. By integrating Ampère's law (5.4), given by

$$\partial_x H_y(x,t) = \frac{2\,\pi\,\mu\,H_0}{\rho}\,x\,\cos(2\,\pi\,t) + \frac{1}{\rho}\,f(t), \tag{5.28}$$

over the domain of the conductor, we obtain

$$H_y(x,t) = \frac{\pi\,\mu\,H_0}{\rho}\,x^2\,\cos(2\,\pi\,t) + \frac{1}{\rho}\,x\,f(t) + g(t) \tag{5.29}$$

where $g(t)$ is a constant of integration with respect to x. According to Curie's principle, which claims that the symmetry of the causes are to be found in the effects, the induced magnetic field (effect) should have at least the same symmetries as the external magnetic field (cause). Since the external magnetic field has a symmetry along the yz-plane, the induced magnetic field is such that $H_y(-x,t) = H_y(x,t)$ for all x at an arbitrary fixed time. Consequently, $f(t)$ should be identically zero. In the normal conductor, the magnetic field $\boldsymbol{H}$ and the current density $\boldsymbol{J}$ can then be rewritten as follows,

$$H_y(x,t) = \frac{\pi\,\mu\,H_0}{\rho}\,x^2\,\cos(2\,\pi\,t) + g(t). \tag{5.30}$$

and

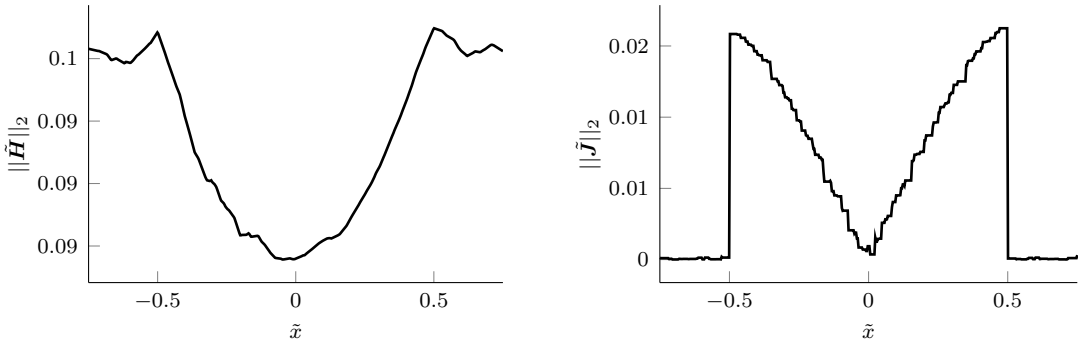
$$J_z(x,t) = \frac{2\,\pi\,\mu\,H_0}{\rho}\,x\,\cos(2\,\pi\,t) \tag{5.31}$$

The Euclidean norm of the magnetic field $\boldsymbol{H}$ should then behave as x^2, up to a multiplicative constant and an additive constant, at a fixed time, as illustrated in Figure 5.12 (a). Figure 5.12 (b) illustrates the graph of the Euclidean norm of the non-dimensional current density $\|\tilde{\boldsymbol{J}}\|_2$, which follows $|\tilde{x}|$ shape as expected. We can also observed spurious current density $\boldsymbol{J}$ in air medium. Even if it is negligible when compared to the current density in the conductor, a finer mesh should diminish it.

Figure 5.13 illustrates the magnetic field lines for the normal conductor wire. When the external magnetic field changes orientation, there is no vortex and no remanent magnetic field in the normal conductor wire.

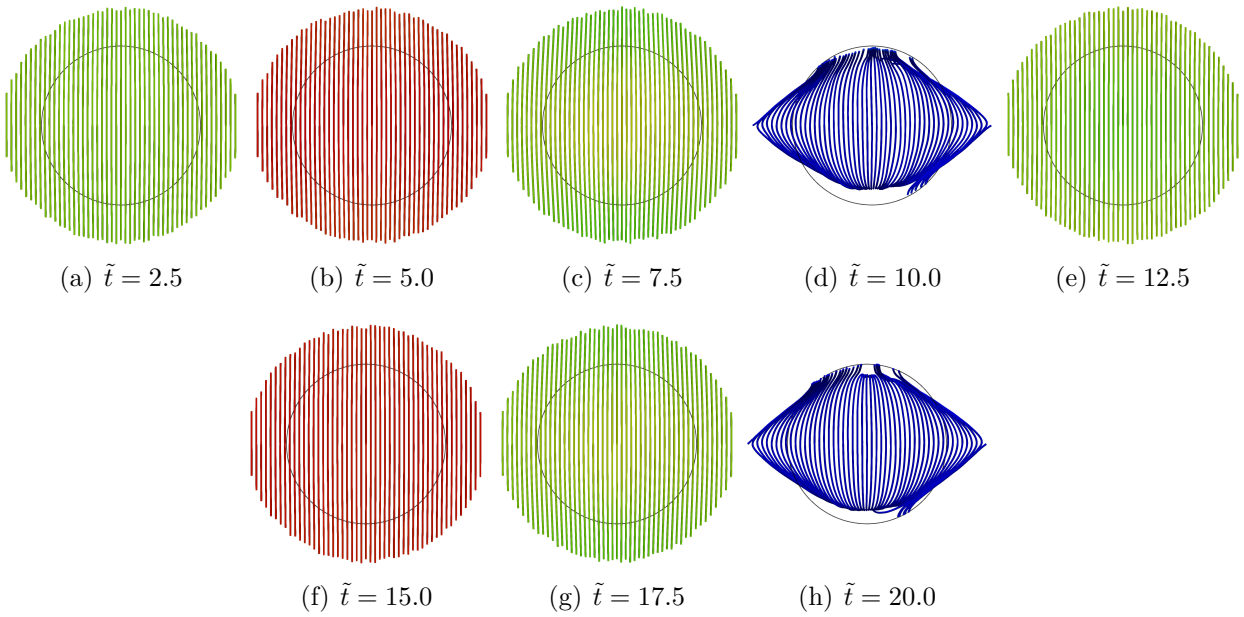
5.7 Conclusion

The discontinuous Galerkin finite element method with the Whitney element was used to discretize a low-frequency approximation to Maxwell's equations for HTS modeling. To consider a medium with very low conductivity in the vicinity of a conducting material, a model that can be discretized by the DG method was proposed. The proposed model of air medium avoids the issues associated with the difference between the order of magnitude of the electrical resistivity of air medium and of conducting materials, such as ill-conditioned problem for the finite element assembly matrix. The numerical strategy for a normal conductor, which has a constant electrical resistivity, was verified with a problem with a manufactured solution. The order of convergence of the discrete magnetic field and the discrete electric field are in agreement with the error estimate of the interpolation operator of the Whitney element. Based on our numerical experiments for the magnetic front problem, an empirical upper bound of the time-step size is proposed to obtain convergence of the fixed-point iterations. The results suggest that the DG-based strategy with the Whitney element is more robust than the discretization of the $\boldsymbol{H}$ formulation using the GFEM with the Whitney element and the nodal DG-based strategy. The magnetization of an HTS and a normal conductor wire, surrounded by air medium, are studied. Bean's model solutions were used to verify the results of an HTS wire for large values of the exponent p in the power-law model of the electrical resistivity. The magnetic field and the current density penetrate the superconductor from the outside in. Remanent magnetic field was also observed and the magnetic field lines illustrate vortex in the HTS wire. For the current density, there is limited spurious oscillations. For a normal conductor wire, our numerical results are supported by an analytical expression of



(a) Dimensionless magnetic field $\tilde{\boldsymbol{H}}$ (b) Dimensionless current density $\tilde{\boldsymbol{J}}$

Figure 5.12 The Euclidean norm of the dimensionless magnetic field $\tilde{\boldsymbol{H}}$ and of the current density $\tilde{\boldsymbol{J}}$ at $\tilde{t} = 14.5$ along the x-axis at $\tilde{y} = 0$ and $\tilde{z} = 0.25$ for the magnetization of a normal conductor.



(a) $\tilde{t} = 2.5$ (b) $\tilde{t} = 5.0$ (c) $\tilde{t} = 7.5$ (d) $\tilde{t} = 10.0$ (e) $\tilde{t} = 12.5$

(f) $\tilde{t} = 15.0$ (g) $\tilde{t} = 17.5$ (h) $\tilde{t} = 20.0$

Figure 5.13 The dimensionless magnetic field lines at various time steps at $\tilde{z} = 0.25$ with $h = 0.025$ and $\Delta t = 0.5 \times 10^{-2}$ for the magnetization of a normal conductor wire. The color scale is from blue to red $[0.01, 0.102]$. The domain of the normal conductor is delimited by the black circle.

the approximation of the magnetic field and of the current density. No vortex is observed in a normal conductor. For both wires, negligible spurious electric currents in air medium are observed.

Acknowledgments

This work was sponsored by the Fonds de recherche du Québec - Nature et technologies (FRQNT).

CHAPITRE 6 ARTICLE 3 : NUMERICAL SIMULATION OF THE CALIBRATION FREE METHOD FOR THE ESTIMATION OF THE AC LOSS IN MgB_2 WIRES

Yann-Meing Law and Steven Dufour

submitted to Superconductor Science and Technology

6.1 Abstract

The AC magnetization loss of various MgB_2 monofilament wires is estimated using numerical simulations of the calibration free method. The barrier, the sheath and the surrounding medium of the superconducting wire are considered in the numerical simulations. The nonlinear electrical resistivity of high-temperature superconductors is modeled by a power law. The approximation of Maxwell's equations in low-frequency regime is directly discretized using the discontinuous Galerkin finite element method with the Whitney element. The non-dimensional form of the system of equations is presented and the non-dimensional numbers are chosen in order to reduce round-off errors and ill-conditioned problems. The influence of the mesh grid size on the contribution of the different conducting materials to the AC loss is also studied. The mesh grid size has to be reduced for either large values of the exponent of the power-law model or small amplitudes of the external magnetic field. The estimated and experimental curves of the AC loss are in agreement, but an offset between the curves is observed. The difference between the numerical results and the experimental data is explained by the used of an idealized geometry and the measuring error of the material properties.

Key words

low-frequency Maxwell's equations, discontinuous Galerkin finite element method, Whitney element, nonlinear electrical resistivity, calibration free method, air medium, MgB_2 wires

6.2 Introduction

In the past decades, the design of high-temperature superconductor (HTS) wires, such as MgB_2 wires and YBCO wires, has been improved to increase the critical electric current that can be transported and to produce longer wires. Superconducting transformers [29] and high-current cables [3] are examples of power system components that use HTS wires. The

operating costs for these superconducting components are related to heat dissipation (Joule heating), which can be computed by the alternating-current (AC) loss [89]. The AC losses can be generated by the AC transport current, which is known as the transport current loss, and by an applied external magnetic field that varies with respect to time, which is known as the magnetization loss.

The magnetization loss includes the hysteresis loss, the eddy current loss and the coupling loss between the filaments [68]. The hysteresis loss depends on the geometry of the superconductor, and is generated by the penetration of the magnetic flux and its movement within the HTS [28]. The eddy current loss is generated in the sheath of the wires [79]. The sheath, the barrier and the twist of the filaments consequently influence the AC loss of an HTS wire. The numerical modeling of HTS wires can therefore be useful to estimate the AC loss of different structures of wires.

Several numerical strategies for HTS modeling are used by the electrical engineering community. Most of them rewrite the low-frequency approximation to Maxwell's equations as a parabolic problem. The parabolic problem with respect to the magnetic field, also known as the $\boldsymbol{H}$ formulation, is commonly used. This formulation can be discretized using the numerical methods designed for parabolic equations, such as the Galerkin finite element method, and ease the use of commercial codes. Another approach uses directly the low-frequency approximation to Maxwell's equations and the system of equations is therefore discretized using numerical methods for hyperbolic systems, such as the discontinuous Galerkin (DG) finite element method [49, 48]. Numerical strategies adapted for hyperbolic systems help to accurately capture the sharp gradient of the current density when large values of the exponent in the power-law model are used. Since the computation of the AC loss is performed using the inner product of the electric field with the current density, numerical methods designed for hyperbolic problems should also help to accurately estimate the AC loss.

In this paper, we use a DG-based strategy proposed by [50] to study the AC magnetization loss of various MgB_2 monofilament wires. The sheath, the barrier and air medium around the wire are also considered in the numerical simulations. The numerically estimated AC loss will be compared with the experimental data of the AC loss obtained with the calibration free method [82].

This work is structured as follows. We first introduce the governing equations for normal conductors, HTS and a medium with very low conductivity, and their non-dimensional form. The discretization of the different systems of equations is performed using the DG method with the Whitney element. The contribution of the different conducting materials to the AC magnetization loss as well as the influence of the mesh grid size on the approximation of the

AC loss are studied for various superconducting wires.

6.3 Maxwell's Equations in the Low-Frequency Regime

6.3.1 The Governing Equations for Conducting Materials

Considering the magneto-quasistatic condition [13], the low-frequency approximation to Maxwell's equations for normal conductors is given by :

$$\begin{aligned} \partial_t\big(\mu\,\boldsymbol{H}\big) + \nabla \times \boldsymbol{E} &= 0; \\ \boldsymbol{E} - \rho\,\nabla \times \boldsymbol{H} &= 0; \\ \nabla \cdot \big(\mu\,\boldsymbol{H}\big) &= 0, \end{aligned} \tag{6.1}$$

where $\boldsymbol{H}$ is the magnetic field, $\boldsymbol{E}$ is the electric field, μ is the magnetic permeability and ρ is the electrical resistivity. The current density is given by Ampère's law

$$\boldsymbol{J} = \nabla \times \boldsymbol{H}.$$

In this work, isothermal operating conditions are assumed. The electrical resistivity is consequently a constant and the second equation of system (6.1) corresponds to Ohm's law. For HTS modeling, the electrical resistivity depends on the current density and follows the power law

$$\rho(\nabla \times \boldsymbol{H}) = \frac{E_c}{J_c^p}\,\|\nabla \times \boldsymbol{H}\|_2^{p-1}, \tag{6.2}$$

where $\|\cdot\|$ is the Euclidean norm, J_c is the critical current density, E_c is the electric field amplitude at J_c and $p > 1$ is a parameter.

Considering a domain Ω, the boundary conditions are given by :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{G}_1 \quad \text{on} \quad \Gamma \times \mathrm{I}; \\ \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{G}_2 \quad \text{on} \quad \Gamma \times \mathrm{I}, \end{aligned}$$

where $\boldsymbol{n}$ is the outward unit normal to the boundary Γ of Ω and $\mathrm{I} = [t_\mathrm{i}, t_\mathrm{f}]$ is a time interval. The initial conditions are given by $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t_\mathrm{i}) = \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{x})$ and $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t_\mathrm{i}) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x})$ for all $\boldsymbol{x} \in \Omega$.

6.3.2 A Model for a Medium with Very Low Conductivity

The electrical resistivity of air medium is several orders of magnitude larger than the electrical resistivity of conducting materials. Maxwell's equations are therefore modified to model air

medium in the vicinity of a conducting material. Based on a dimensional analysis, a model for a medium with very low conductivity, given by :

$$\begin{aligned} \mu\,\partial_t \boldsymbol{H} + \nabla \times \boldsymbol{E} &= 0; \\ \nabla \times \boldsymbol{H} &= 0; \\ \nabla \cdot \boldsymbol{H} &= 0; \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} &= 0, \end{aligned} \tag{6.3}$$

is used [50].

6.3.3 Non-Dimensionalization

Non-dimensional forms of system of equations can give an insight on the physical phenomena under study and can provide a natural preconditioner. This tool is often used in computational fluid dynamics (CFD) and computational electromagnetic community. We will use a non-dimensional form of system (6.1) and (6.3) to balance the order of magnitude of the different terms of the system of equations, and therefore reduce round-off errors and ill-conditioned problems as in [50].

Let us consider the non-dimensional quantities that are denoted by « ˜ » : $\tilde{t} = \frac{t}{t_0}$, $\tilde{\ell} = \frac{\ell}{\ell_0}$, $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}$, $\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$, $\tilde{\nabla} = \ell_0\,\nabla$, $\partial_{\tilde{t}} = t_0\,\partial_t$, $\tilde{\boldsymbol{H}} = \frac{\boldsymbol{H}}{H_0}$ and $\tilde{\boldsymbol{E}} = \frac{\boldsymbol{E}}{E_0}$, where t_0, ℓ_0, μ_0, ρ_0, H_0 and E_0 are the quantities of reference. For normal conductors, the non-dimensional form of system (6.1) is then given by :

$$\begin{aligned} \Pi_1\,\partial_{\tilde{t}}\big(\tilde{\mu}\,\tilde{\boldsymbol{H}}\big) + \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{E}} &= 0; \\ \tilde{\boldsymbol{E}} - \Pi_2\,\tilde{\rho}\,\tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{H}} &= 0; \\ \tilde{\nabla} \cdot \big(\tilde{\mu}\,\tilde{\boldsymbol{H}}\big) &= 0, \end{aligned} \tag{6.4}$$

where $\Pi_1 = \frac{\mu_0\,H_0\,\ell_0}{t_0\,E_0}$ and $\Pi_2 = \frac{\rho_0\,H_0}{E_0\,\ell_0}$ are dimensionless numbers. The electrical resistivity of HTS (6.2) becomes

$$\rho(\tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{H}}) = \left(\frac{E_c\,H_0^{p-1}}{J_c^p\,\ell_0^{p-1}}\right) \|\tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{H}}\|_2^{p-1}$$

and we obtained the following non-dimensional form :

$$\begin{aligned} \Pi_1\,\partial_{\tilde{t}}\big(\tilde{\mu}\,\tilde{\boldsymbol{H}}\big) + \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{E}} &= 0; \\ \tilde{\boldsymbol{E}} - \left(\frac{E_c\,H_0^p}{E_0\,J_c^p\,\ell_0^p}\right) \|\tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{H}}\|_2^{p-1}\,\tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{H}} &= 0; \\ \tilde{\nabla} \cdot \big(\tilde{\mu}\,\tilde{\boldsymbol{H}}\big) &= 0. \end{aligned} \tag{6.5}$$

For a medium with very low conductivity around the conducting materials, the non-dimensional

form of system (6.3) is given by :

$$\begin{aligned} \Pi_1 \, \tilde{\mu} \, \partial_{\tilde{t}} \tilde{\boldsymbol{H}} + \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{E}} &= 0; \\ \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{H}} &= 0; \\ \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{H}} &= 0; \\ \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{E}} &= 0. \end{aligned} \tag{6.6}$$

6.4 Numerical Methodology

Since the discontinuous Galerkin finite element method uses the weak form of the system of equations, let us then define the space of square integrable functions given by

$$L^2(\Omega) = \{w : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad \|w\|_{L^2(\Omega)} < \infty\},$$

where

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega w^2 \, d\Omega \right)^{1/2}$$

is the L^2-norm. The inner product in $L^2(\Omega)$ is

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} \, d\Omega$$

in Ω. We also introduce the notation

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle_\Gamma = \int_\Gamma \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} \; d\boldsymbol{s}$$

for functions defined on the boundary Γ of Ω. Multiplying the two first equations of system (6.1) by a test function and integrating over the domain lead to the weak form :

$$\begin{aligned} (\partial_t(\mu \, \boldsymbol{H}), \boldsymbol{v})_\Omega + (\nabla \times \boldsymbol{E}, \boldsymbol{v})_\Omega &= 0, \qquad && \forall \, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{D}; \\ (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{w})_\Omega - (\rho \, \nabla \times \boldsymbol{H}, \boldsymbol{w})_\Omega &= 0, \qquad && \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{D}, \end{aligned}$$

where $\boldsymbol{D} = [L^2(\Omega)]^3$, and $\boldsymbol{v}$ and $\boldsymbol{w}$ are test functions.

Let us now consider a computational domain of Ω composed of tetrahedral elements K. Using the DG method, the system of equations is discretized element by element. Let us therefore define the jump of a variable v across two elements K and K^* that share a common face by $[\![v]\!] = v^+ - v^-$, where v^+ and v^- belong respectively to K and K^*. The DG method needs a numerical flux to approximate the flux at the interface between the elements of the

computational domain. In this work, we use an upwind-like numerical flux proposed by [48], given by :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F_E} &= \frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{n}\times[\![\boldsymbol{E}_h]\!] - [\![\boldsymbol{H}_h]\!] + (\boldsymbol{n}\cdot[\![\boldsymbol{H}_h]\!])\,\boldsymbol{n}\Big);\\ \boldsymbol{F_H} &= \frac{1}{2}\Big(-\boldsymbol{n}\times[\![\boldsymbol{H}_h]\!] - [\![\boldsymbol{E}_h]\!] + (\boldsymbol{n}\cdot[\![\boldsymbol{E}_h]\!])\,\boldsymbol{n}\Big),\end{aligned}$$

where $\boldsymbol{H}_h$ is the discrete magnetic field and $\boldsymbol{E}_h$ is the discrete electric field. The weak problem is then : for each element K, find $(\boldsymbol{H}_h, \boldsymbol{E}_h) \in \boldsymbol{D}_h \times \boldsymbol{D}_h$ such that :

$$\begin{aligned}(\partial_t(\mu\,\boldsymbol{H}_h), \boldsymbol{v}_h)_K + (\nabla\times\boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{v}_h)_K &= \langle \boldsymbol{F_E}, \boldsymbol{v}_h\rangle_{\partial K}, && \forall\ \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{D}_h;\\ (\boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{w}_h)_K - (\rho\,\nabla\times\boldsymbol{H}_h, \boldsymbol{w}_h)_K &= \langle \boldsymbol{F_H}, \boldsymbol{w}_h\rangle_{\partial K}, && \forall \boldsymbol{w}_h \in \boldsymbol{D}_h,\end{aligned}$$

where $\boldsymbol{D}_h$ is a discrete subspace of $\boldsymbol{D}$, ∂K is the boundary of element K, and $\boldsymbol{v}_h$ and $\boldsymbol{w}_h$ are the discrete test functions.

In order to also consider a medium with very low conductivity, the domain is divided into two subdomains, such that $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ with $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$, where Ω_1 is for the domain of a medium with very low conductivity and Ω_2 is for the domain of conducting materials. Each element K of the mesh belongs to only one subdomain to avoid interpolating material properties. To identify the different subdomains, we introduce the following function

$$\gamma(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \boldsymbol{x} \in \Omega_1;\\ 1 & \text{if } \boldsymbol{x} \in \Omega_2.\end{cases}$$

The weak problem then becomes : for each element K, find $(\boldsymbol{H}_h, \boldsymbol{E}_h) \in \boldsymbol{D}_h \times \boldsymbol{D}_h$ such that :

$$\begin{aligned}(\partial_t(\mu\,\boldsymbol{H}_h), \boldsymbol{v}_h)_K + (\nabla\times\boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{v}_h)_K &= \langle \boldsymbol{F_E}, \boldsymbol{v}_h\rangle_{\partial K}, && \forall\ \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{D}_h;\\ (\gamma\,\boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{w}_h)_K - (\hat{\rho}\,\nabla\times\boldsymbol{H}_h, \boldsymbol{w}_h)_K &= \langle \boldsymbol{F_H}, \boldsymbol{w}_h\rangle_{\partial K}, && \forall \boldsymbol{w}_h \in \boldsymbol{D}_h,\end{aligned}$$

where

$$\hat{\rho}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \boldsymbol{x} \in \Omega_1;\\ \rho & \text{if } \boldsymbol{x} \in \Omega_2.\end{cases}$$

In the domain of air medium Ω_1, we recover the weak form of system (6.3). The Whitney element is used and the divergence-free constraints are therefore only guaranteed locally on each element K. Time discretization is performed using a semi-discrete approach. The implicit second-order accurate backward differentiation formula (BDF) is used to discretize the transient derivative $\partial_t(\mu\,\boldsymbol{H})$. More details of the DG-based strategy can be found in [48, 50].

6.5 Computation of the AC Loss

The AC loss is computed using

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}\, d\Omega = \int_{\Omega} \rho\, \nabla \times \boldsymbol{H} \cdot \nabla \times \boldsymbol{H}\, d\Omega, \tag{6.7}$$

and its non-dimensional form is given by

$$\left(\rho_0\, H_0^2\, l_0\right) \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\rho}\, \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{H}} \cdot \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{H}}\, d\tilde{\Omega}.$$

Considering a wire composed of normal conductors and an HTS, the AC loss is then computed by

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}\, d\Omega = \int_{\Omega_{\mathrm{HTS}}} \frac{E_c}{J_c^p} \left\|\boldsymbol{J}\right\|_2^{p+1} d\Omega + \int_{\Omega_{\mathrm{NC}}} \rho \left\|\boldsymbol{J}\right\|_2^2 d\Omega, \tag{6.8}$$

where Ω_{NC} is for the domain of normal conductors (barrier and sheath). Since the computation of the AC loss involves an integral over the domain, the approximation of the geometry of the wire used in the experimental studies by the idealized geometry used in the numerical simulations introduces an error on the numerically estimated AC loss.

Let us now analyze the expression of the AC loss (6.8) to explain the difference between the numerical results and the experimental data of the AC loss in logarithmic scale. For simplicity, we assume that the wire is only composed of an HTS and a normal conductor, and that the AC loss generated by each component is non-zero. Applying the logarithm to equation (6.8), we obtain

$$\log\left(\int_{\Omega} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}\, d\Omega\right) = \log\left(\int_{\Omega_{\mathrm{HTS}}} \frac{E_c}{J_c^p} \left\|\boldsymbol{J}\right\|_2^{p+1} d\Omega + \int_{\Omega_{\mathrm{NC}}} \rho \left\|\boldsymbol{J}\right\|_2^2 d\Omega\right). \tag{6.9}$$

Assuming the AC loss generated by the HTS is smaller than the AC loss generated by the normal conductor, we have

$$\log\left(\int_{\Omega} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}\, d\Omega\right) = \log\left(\int_{\Omega_{\mathrm{NC}}} \rho \left\|\boldsymbol{J}\right\|_2^2 d\Omega \left(1 + \frac{\int_{\Omega_{\mathrm{HTS}}} \frac{E_c}{J_c^p} \left\|\boldsymbol{J}\right\|_2^{p+1} d\Omega}{\int_{\Omega_{\mathrm{NC}}} \rho \left\|\boldsymbol{J}\right\|_2^2 d\Omega}\right)\right)$$

Using the logarithm properties, the logarithm of the AC loss of the wire is given by

$$\log\left(\int_{\Omega_{\mathrm{NC}}} \left\|\boldsymbol{J}\right\|_2^2 d\Omega\right) + \log(\rho) + \log\left(1 + \frac{E_c \int_{\Omega_{\mathrm{HTS}}} \left\|\boldsymbol{J}\right\|_2^{p+1} d\Omega}{\rho\, J_c^p \int_{\Omega_{\mathrm{NC}}} \left\|\boldsymbol{J}\right\|_2^2 d\Omega}\right). \tag{6.10}$$

Let us now assume that the AC loss generated by the normal conductor is smaller than the

AC loss generated by the HTS. The logarithm of the AC loss in the wire is then given by

$$\log\left(\int_{\Omega_{\mathrm{HTS}}} \|\boldsymbol{J}\|_2^{p+1}\, d\Omega\right) + \log(E_c) - p\,\log(J_c) + \log\left(1 + \frac{\rho\, J_c^p \int_{\Omega_{\mathrm{NC}}} \|\boldsymbol{J}\|_2^2\, d\Omega}{E_c \int_{\Omega_{\mathrm{HTS}}} \|\boldsymbol{J}\|_2^{p+1}\, d\Omega}\right). \tag{6.11}$$

By expressions (6.10) and (6.11), the parameters such as the electrical resistivity ρ, the electric field amplitude E_c, the exponent p and the critical current density J_c influence the offset of the AC loss curve. The slope of the experimental and the numerical curves of the AC loss in logarithm scale will therefore be compared.

6.6 Numerical Studies : the Magnetization of MgB_2 Wires

The geometry is a rectangular wire completely surrounded by air medium, as illustrated in Figure 6.1, to simulate the calibration free method that is used to measure the AC loss [82]. The wire is composed of three materials : the HTS, the barrier and the sheath. The

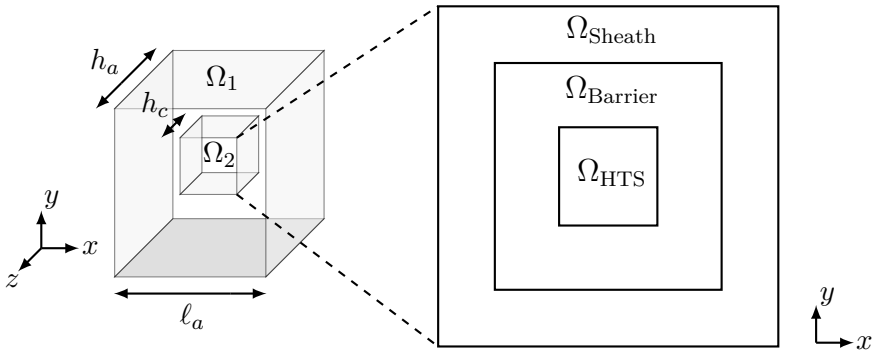


Figure 6.1 Geometry of the domain for the magnetization of an HTS wire, where Ω_1 is the domain of air medium and $\Omega_2 = \Omega_{\mathrm{HTS}} \cup \Omega_{\mathrm{Barrier}} \cup \Omega_{\mathrm{Sheath}}$ is the domain of conducting materials.

rectangular wire of height $h_c = 0.5$ mm is centered at $(0, 0, 0)$. The domain of air medium is a square prism of length ℓ_a and of height $h_a = 1.0$ mm. Different combinations of materials are studied. Table 6.1 summarizes the different structures that compose the wire. The dimensions are taken from the experimental studies of Safran et al. [79] and of Kováč et al. [42, 43]. Unfortunately, the error of the experimental data isn't provided. Table 6.3 and Table 6.4 give the electrical resistivity of normal conductors that are considered in this work. The properties of normal conductors are taken from the Handbook on materials for superconducting machinery [17] and from Ho et al. [31]. For the GlidCop® AL-60 material and the Monel® nickel-copper 400 alloy material, the electrical resistivity has been extrapolated at 30

Table 6.1 Structure and dimensions of the cross-section of wires taken from [42, 79].

Structure*	Dimensions of HTS (mm^2)	Dimensions of barrier (mm^2)	Dimensions of sheath (mm^2)	Dimensions of air medium (mm^2)
MgB_2-Nb	0.698×0.680	1.170×1.140	–	1.500×1.500
MgB_2-Ti-Cu	0.390×0.390	0.631×0.631	1.014×1.014	1.514×1.514
MgB_2-Nb-MO†	0.250×0.250	0.491×0.491	0.874×0.874	1.374×1.374
MgB_2-Nb-GC‡	0.560×0.560	0.801×0.801	1.184×1.184	1.684×1.684

* The order of the structure is HTS-barrier-sheath.
† MO stands for Monel® nickel-copper alloy 400.
‡ GC stands for GlidCop® AL-60.

K using their manufacturing sheets [66, 83]. The properties of a MgB_2 superconductor, given in Table 6.2, are taken from the study of Kajikawa et al. [39]. The critical current density of the superconducting material is computed using

$$J_c = \frac{I_c}{A},$$

where I_c is the critical current and A is the surface area of the cross-section of the superconducting material in the wire. The electric field amplitude E_c at the critical current density J_c is 10^{-4} V/m.

Table 6.2 Properties of a MgB_2 superconductor taken from [39].

temperature (K)	critical current (A)	p
27	177	109
29	131	85
30	107	73
31	86	61

Table 6.3 Electrical resistivity of niobium.

temperature (K)	electrical resistivity (Ωm)
27	0.638×10^{-8}
29	0.683×10^{-8}
30	0.712×10^{-8}
31	0.740×10^{-8}

Table 6.4 Electrical resistivity of normal conductors at 30 K.

conductor	electrical resistivity (Ωm)
Nb	0.712×10^{-8}
Ti	0.253×10^{-7}
Cu	0.830×10^{-10}
GlidCop®	0.100×10^{-8}
Monel®	0.300×10^{-6}

The quantities of reference are : $\ell_0 = 10^{-3}$ m, $t_0 = 10^{-3}$ s, $\mu_0 = 4\,\pi \times 10^{-7}$ N/A^2, $\rho_0 = \rho$, $H_0 = (4\,\pi)^{-1} \times 10^7$ A/m and $E_0 = 1$ V/m. These quantities of reference are chosen to reduce the difference between the order of magnitude of the different terms in the system of equations (6.4), (6.5) and (6.6).

The external magnetic field is given by

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t) = (0, B_A\,\mu^{-1}\,\sin(2\,\pi\,f\,t), 0),$$

where B_A is the amplitude of the magnetic induction field and f is the frequency. The initial conditions are $\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{x}) = 0$ A/m and $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x}) = 0$ V/m. The mesh grid size in Ω_1 and in Ω_2 are given respectively by h_{Ω_1} and h_{Ω_2} in non-dimensional length units. The non-dimensional time-step size is denoted by Δt.

Wires with a MgB_2-Nb structure are first studied. The frequency of the external magnetic field is 144 Hz, and the temperatures are either 27 K, 29 K or 31 K. The mesh grid size in air domain is $h_{\Omega_1} = 0.05$. Figure 6.2 illustrates the AC loss from the experimental data and from the simulations for different temperatures with the mesh grid size in conducting materials $h_{\Omega_2} = 0.025$. As expected (cf. section 6.5), there is an offset between the experimental data and the numerical results of the AC loss. The computed AC loss has roughly the same slope for large amplitudes of the external magnetic field and for high temperatures. But the numerically estimated AC loss curve decreases more rapidly than the experimental one for all the considered temperatures when B_A diminishes. This behaviour can be explained by the mesh grid size. To capture smaller amplitudes of the external magnetic field, the mesh needs to be refined. Figure 6.3 illustrates the AC loss for different mesh grid sizes in the domain of conducting material Ω_2 and the contribution of the different materials to the AC loss at 27 K. As the mesh is refined, both curves share roughly the same slope for a larger interval of B_A and the HTS contribution is increasing. However, we still observe that the computed curve of the AC loss decays more rapidly than the experimental one for smaller values of B_A.

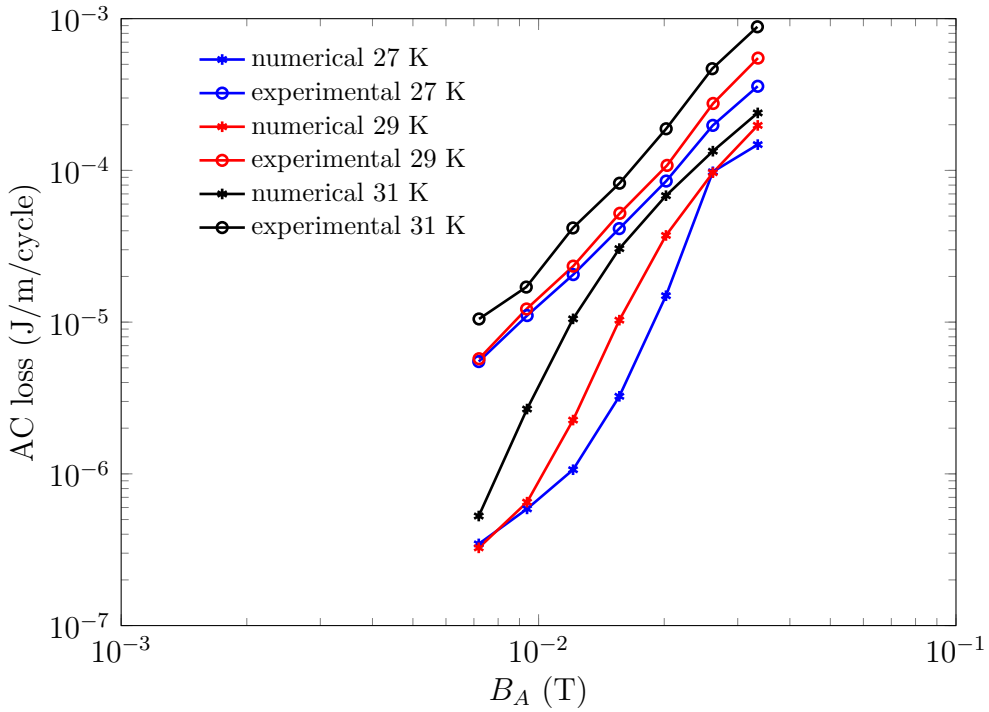
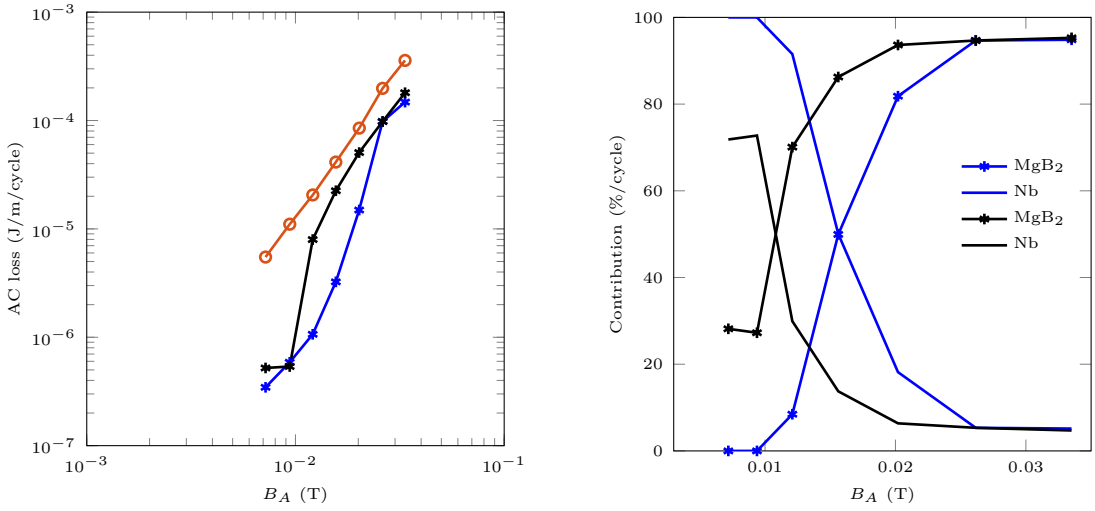


Figure 6.2 AC loss of a MgB_2-Nb structure at 144 Hz with $h_{\Omega_1} = h_{\Omega_2} = 0.05$ and $\Delta t = 0.25 \times 10^{-3}$ for the magnetization of an HTS wire. The experimental data are taken from [79].



(a) AC loss

(b) Contribution of each material

Figure 6.3 AC loss of a MgB_2-Nb structure at 144 Hz and 27 K with $h_{\Omega_1} = 0.05$ for the magnetization of an HTS wire (— : $h_{\Omega_2} = 0.025$ and $\Delta t = 0.1 \times 10^{-3}$, — : $h_{\Omega_2} = 0.05$ and $\Delta t = 0.25 \times 10^{-3}$, — : experimental data). The experimental data are taken from [79].

These results suggest that the mesh grid size is important to accurately assess the influence of the superconductor on the AC loss of the wire.

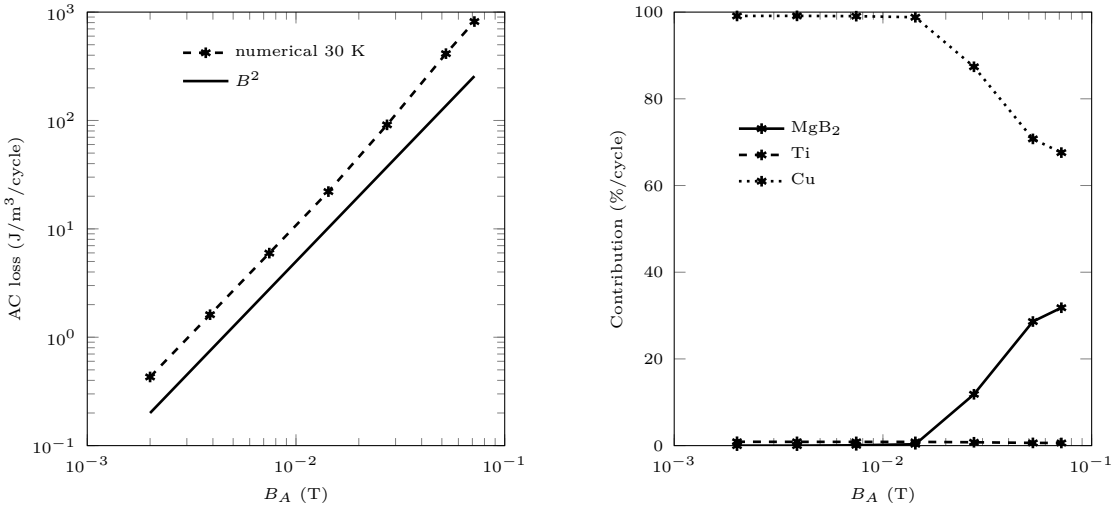
Let us now consider the following structures of wire : MgB_2-Ti-Cu, MgB_2-Nb-MO and MgB_2-Nb-GC. The frequency of the external magnetic field is 72 Hz and the temperature is set to 30 K. The mesh grid size is $h_{\Omega_1} = 0.025$ and $h_{\Omega_2} = 0.05$, and the time-step size is set to $\Delta t = 0.25 \times 10^{-3}$.

Figure 6.4 illustrates the total AC loss and the contribution of each material to the AC loss for a wire with a MgB_2-Ti-Cu structure. It is observed that the curve of the AC loss is proportional to B^2 and that the AC loss is mostly caused by the copper sheath since its contribution is over 60 % (cf. Figure 6.4 (b)). This is in agreement with the experimental studies of Kováč et al. [42, 43]. Highly conductive material, such as copper, has strong eddy currents, which increase the AC loss.

Figure 6.5 illustrates the AC loss of wires with a MgB_2-Nb-GC structure. For a GlidCop® sheath, the curve of the AC loss roughly behaves as B^3. The contribution of the superconductor increases with the amplitude of the external magnetic field up to 90%. When compared to the experimental results of Kováč et al. [42], the numerically estimated AC loss corresponds to a B^3 for a larger interval of B_a. The full penetration of the magnetic field, i.e. when the curve of the AC loss should be proportional to B, is not reached in our simulations. This can be explained by the critical current density of the HTS that is used ($\approx 3.4 \times 10^8$ A/m^2), which is higher than the one estimated by Kováč et al. for the elliptical model ($\approx 3.5 \times 10^7$ A/m^2).

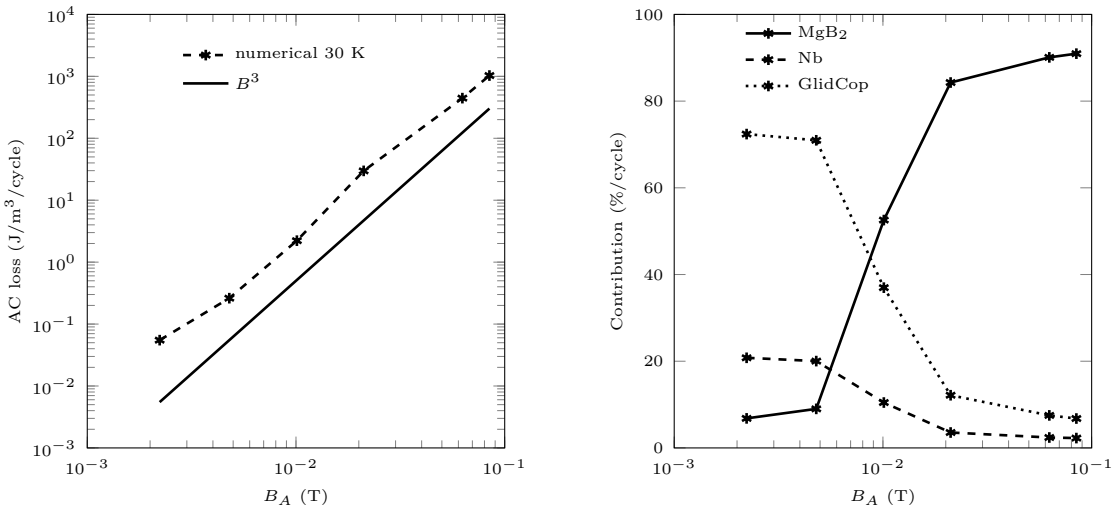
The AC loss for a wire with a MgB_2-Nb-MO structure is illustrated in Figure 6.6. The contribution of the superconductor to the AC loss is also important in this structure, but the AC loss curve is closer to be proportional to B^2, which is in agreement with the experimental study of Kováč et al. [42]. However, Kováč et al. conclude that the dominant loss is caused by the Monel® sheath, but they notice that the contribution of the HTS is visible above 30 K, which is the considered temperature in our case.

Let us now consider a wire with a cylindrical void of radius r_{int}. The experimental data of the AC loss for a wire with a MgB_2-Ti-Cu structure of Kováč et al. are used [43]. The cross-section of this wire is illustrated in Figure 6.7. The parameters are $r_{\text{int}} = 0.221$ mm, $r_{\text{ext}} = 0.291$ mm, $\ell_b = 0.831$ mm and $\ell_c = 1.106$ mm. The dimensions of the domain of air medium are 1.606×1.606 mm^2. The temperature is still 30 K and the frequency is 72 Hz. The computed and the experimental data of the AC loss are illustrated in Figure 6.8 for two different mesh grid sizes in the HTS ($h_{\Omega_{\text{HTS}}}$) and the hole ($h_{\Omega_{\text{Hole}}}$). The experimental and the estimated curves of the AC loss are in agreement for the finer mesh. Surprisingly, for the



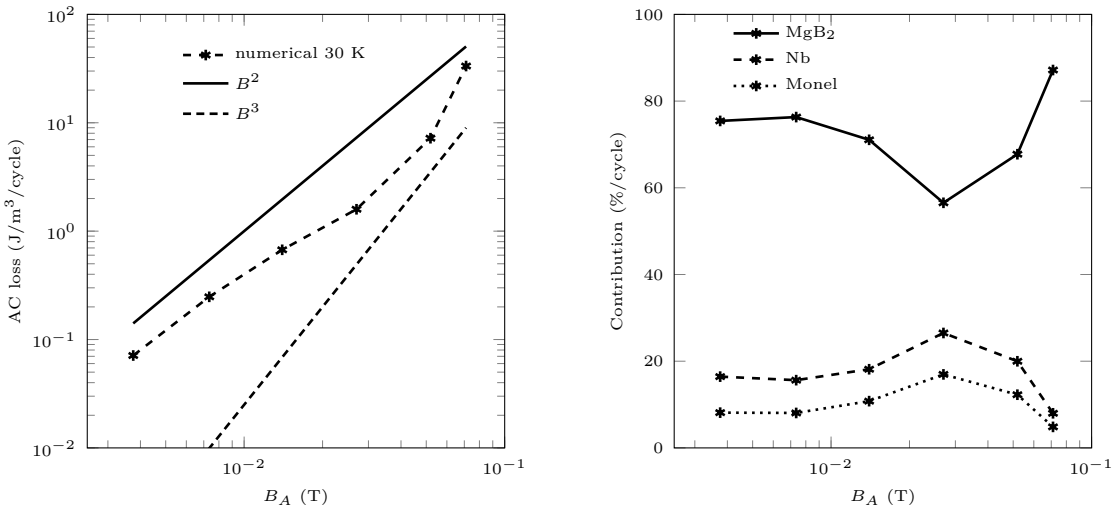
(a) AC loss (b) Contribution of each material

Figure 6.4 AC loss of a MgB_2-Ti-Cu structure at 30 K and 72 Hz for the magnetization of an HTS wire with $h_{\Omega_1} = 0.025$, $h_{\Omega_2} = 0.05$ and $\Delta t = 0.25 \times 10^{-3}$.



(a) AC loss (b) Contribution of each material

Figure 6.5 AC loss of a MgB_2-Nb-GC structure at 30 K and 72 Hz for the magnetization of an HTS wire with $h_{\Omega_1} = 0.025$, $h_{\Omega_2} = 0.05$ and $\Delta t = 0.25 \times 10^{-3}$.



(a) AC loss

(b) Contribution of each material

Figure 6.6 AC loss of a MgB_2-Nb-MO structure at 30 K and 72 Hz for the magnetization of an HTS wire with $h_{\Omega_1} = 0.025$, $h_{\Omega_2} = 0.05$ and $\Delta t = 0.25 \times 10^{-3}$.

coarser mesh, the contribution of the HTS is more important than the contribution of the copper sheath, which is an highly conductive material. These results suggest that a finer mesh is needed to better capture the contribution of the conducting materials in complex geometry. The numerical results also support the analysis of the expression of the AC loss in the sense that there is a small offset for a normal conductor for which the electrical properties are well-known. Moreover, as B_A increases, the contribution of the HTS to the AC loss increases and the offset is larger between the curves.

6.7 Conclusion

We performed simulations of the calibration free method that is used for measuring the AC magnetization loss. A discontinuous Galerkin finite element method based strategy is used to directly discretize a low-frequency approximation to Maxwell's equations. Various geometries and structures of MgB_2 wires are considered as well as air medium surrounding the wires. The contribution to the AC loss of each material is assessed. The numerical results suggest that a mesh with a sufficient small mesh grid size is needed to accurately capture the small amplitudes of the external magnetic field, and the contribution of the HTS and normal conductors to the AC loss. In addition to the discretization error, the offset between the curves might be also explained by the idealized geometry of the wire and by the measuring error in the material properties of the different conducting materials. Finally, the DG-based

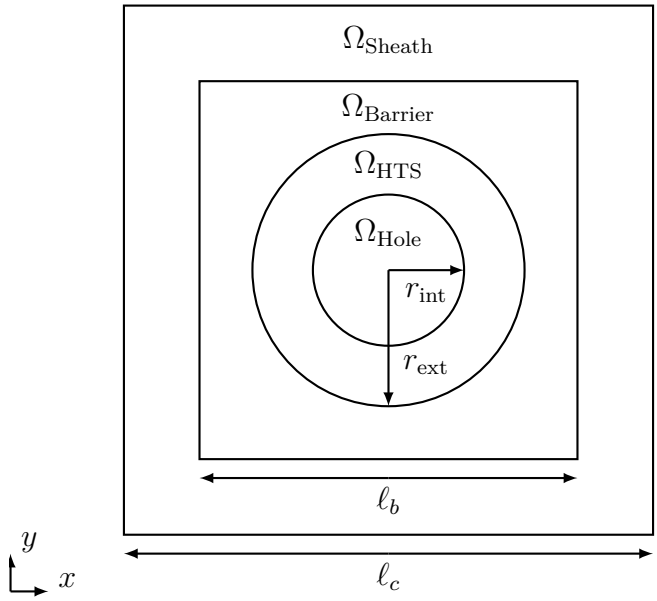
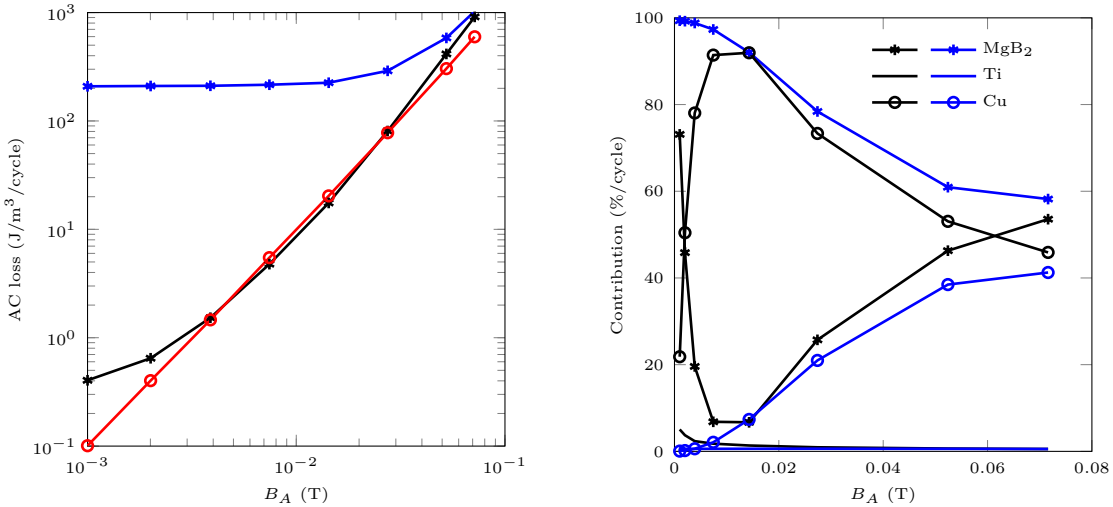


Figure 6.7 The geometry of the cross-section in the xy-plan for the magnetization of an HTS wire with a cylindrical void.



(a) AC loss

(b) Contribution of each material

Figure 6.8 AC loss of a MgB_2-Ti-Cu structure at 72 Hz and 30 K with $\Delta t = 0.25 \times 10^{-3}$, $h_{\Omega_1} = 0.05$ and $h_{\Omega_{\text{Barrier}}} = h_{\Omega_{\text{Sheath}}} = 0.025$ for the magnetization of an HTS wire with a cylindrical void (— : $h_{\Omega_{\text{HTS}}} = h_{\Omega_{\text{Hole}}} = 0.01$, — : $h_{\Omega_{\text{HTS}}} = h_{\Omega_{\text{Hole}}} = 0.025$, — : experimental data). The experimental data are taken from [43].

strategy has shown to accurately estimate the AC magnetization loss of various structures of wire.

Acknowledgments

This work was sponsored by the Fonds de recherche du Québec - Nature et technologies (FRQNT).

Adapted/Translated by permission from Springer Customer Service Centre GmbH : Springer Nature, Journal of Superconductivity and Novel Magnetism, Experimentally determined magnetization AC losses of mono and multifilamentary MgB_2 wires, S. Safran, J. Šouc, F. Gömöry, P. Kovac and A. Gencer, 2012.

CHAPITRE 7 DISCUSSION GÉNÉRALE

Les équations de Maxwell sont de nature hyperbolique. Pour les problèmes d'électromagnétisme en basses fréquences, la condition magnéto-quasistatique est souvent utilisée pour reformuler les équations de Maxwell en un problème parabolique, tel que la formulation en $\boldsymbol{H}$. Dans ce projet de recherche, l'approximation des équations de Maxwell dans le régime des basses fréquences est directement utilisée. Bien que le système d'équations utilisé ne puisse pas être qualifié d'hyperbolique, il est toutefois possible d'utiliser les méthodes numériques développées pour les problèmes hyperboliques. Une discrétisation par éléments finis utilisant la méthode de Galerkin discontinue a été choisie puisqu'elle permet l'utilisation de maillage à géométrie complexe et les discontinuités entre les éléments formant le maillage. L'approximation du flux à l'interface entre les éléments du maillage par un flux numérique est nécessaire pour cette méthode. Un flux numérique similaire au flux décentré amont a été élaboré en utilisant le système d'équations aux dérivées partielles d'ordre un basé sur la loi d'Ohm $\boldsymbol{J} = \sigma\, \boldsymbol{E}$ pour les conducteurs normaux et sur la réciproque de la loi de puissance $\boldsymbol{J} = \sigma(\boldsymbol{E})\, \boldsymbol{E}$ pour les supraconducteurs à haute température. Afin de considérer la résistivité électrique non linéaire $\rho(\boldsymbol{J})$ au lieu de la conductivité non linéaire $\sigma(\boldsymbol{E})$ pour éviter les problèmes associés à une conductivité infinie lorsque le champ électrique est nul, nous avons considéré la forme faible du système d'équations basée sur la résistivité électrique avec le flux numérique similaire au flux décentré en amont.

Dans le cas d'un conducteur normal ayant une résistivité électrique constante, l'approximation des équations de Maxwell dans le régime des basses fréquences correspond à un système de Friedrichs. En considérant une approche semi-discrète et la discrétisation de la dérivée temporelle par une formule de différentiation numérique implicite (BDF), la théorie élaborée pour les systèmes de Friedrichs a été utilisée afin de vérifier la méthodologie numérique proposée dans le cas des éléments nodaux à l'aide d'un problème ayant une solution manufacturée. Les ordres de convergence obtenus pour les variables dépendantes discrètes, i.e. le champ magnétique et le champ électrique, sont en accord avec la théorie sur les systèmes de Friedrichs discrétisés en utilisant la méthode de Galerkin discontinue. De plus, l'ordre de convergence de la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique selon la norme $\|\boldsymbol{H}\|_{\star,h}$ est aussi en accord avec la théorie, i.e. linéaire pour l'élément P1$-$P1 et quadratique pour l'élément P2$-$P2. Afin de renforcer la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique, les éléments de Whitney, qui sont à divergence nulle localement sur un élément du maillage, ont été utilisés. La stratégie basée sur la méthode de Galerkin discontinue en utilisant les éléments de Whitney a aussi été vérifiée en utilisant l'estimation d'erreur a priori

associée à l'opérateur d'interpolation des éléments de Whitney à l'aide d'un problème ayant une solution manufacturée. Nous avons observé un ordre de convergence quadratique de la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique. De plus, un meilleur conditionnement de la matrice globale est aussi observé en utilisant l'approche proposée avec les éléments de Whitney.

Afin d'évaluer la robustesse de la méthodologie numérique proposée, les problèmes d'électromagnétisme portant sur les supraconducteurs à haute température ont été modélisés. Les supraconducteurs à haute température sont caractérisés par une résistivité non linéaire modélisée par une loi de puissance. Il est connu que la densité de courant pour ces problèmes développe de forts gradients qui sont difficiles à capturer pour de grandes valeurs de l'exposant de la loi de puissance. La stratégie basée sur la méthode de Galerkin discontinue proposée a été comparée avec l'approche numérique populaire au sein de la communauté des ingénieurs électriques, i.e. la formulation en $\boldsymbol{H}$ discrétisée en utilisant la méthode de Galerkin avec les éléments de Whitney, pour la propagation d'un front magnétique. L'approche proposée capture mieux les forts gradients de la densité de courant tout en limitant les oscillations parasites. De plus, les stratégies basées sur la méthode de Galerkin discontinue permettent l'utilisation d'un plus grand pas de temps sur un plus grand intervalle de temps. Ces résultats suggèrent que l'approche proposée est plus robuste que la formulation en $\boldsymbol{H}$ discrétisée en utilisant la méthode de Galerkin avec les éléments de Whitney. L'ordre de convergence de la contrainte de divergence nulle sur le champ magnétique a aussi été évalué pour les stratégies basées sur la méthode de Galerkin discontinue. Comme il a été observé dans le cas linéaire avec un problème ayant une solution manufacturée, l'ordre de convergence obtenu (≈ 1.5) avec l'approche de la méthode de Galerkin discontinue utilisant les éléments de Whitney est supérieur à l'ordre de convergence obtenu (≈ 0.5) avec l'élément nodal P1$-$P1.

Le problème d'induction d'un courant électrique dans un échantillon supraconducteur a aussi été utilisé pour comparer les deux méthodologies. Dans le cas de la stratégie basée sur la méthode de Galerkin discontinue, on y observe un champ magnétique rémanent lorsque le champ magnétique externe appliqué change d'orientation, ce qui est en accord avec le modèle de Bean. On rappelle que le modèle en loi de puissance de la résistivité électrique tend vers le modèle de Bean lorsque l'exposant p tend vers l'infini. Pour la formulation en $\boldsymbol{H}$ discrétisée avec la méthode de Galerkin, aucun champ magnétique rémanent n'est observé. Ces résultats suggèrent aussi que l'approche proposée est plus adéquate pour les problèmes impliquant un supraconducteur à haute température.

Afin de considérer le milieu ambiant des composantes électriques dont la conductivité est très faible, un modèle pour ces milieux a été élaboré en se basant sur une analyse dimensionnelle.

De plus, une forme sans dimension du système d'équations aux dérivées partielles d'ordre un est présentée. Les quantités de référence ont été regroupées en deux nombres sans dimensions qui ont été obtenus avec le théorème Π de Buckingham. Les quantités de référence ont été choisies afin de balancer l'ordre de grandeur des différents termes du système d'équations pour réduire le conditionnement matriciel et les erreurs d'arrondi. Ce modèle a été vérifié en utilisant l'induction d'un courant électrique dans un câble électrique supraconducteur et normal. Des courants électriques parasites, qui sont négligeables par rapport au courant électrique induit, ont été observés dans l'air. Pour le câble électrique supraconducteur, on y observe aussi des vortex causés par le champ magnétique rémanent lorsque le champ magnétique externe appliqué change d'orientation. Les vortex du champ magnétique ne sont pas présents dans un câble électrique composé d'un conducteur normal.

Finalement, la méthodologie numérique proposée est validée à l'aide de la simulation de la méthode « calibration free » utilisée pour évaluer la perte de courant alternatif des câbles électriques. Les câbles électriques étudiés sont composés de plusieurs agencements de conducteurs normaux et d'un supraconducteur à haute température, le diborure de magnésium (MgB_2), entourés d'air. La perte de courant alternatif estimée par l'approche numérique proposée est en accord avec les données expérimentales. Nous avons toutefois observé un décalage entre la perte de courant alternatif estimée et les données expérimentales. Ce décalage est expliqué par l'erreur sur les propriétés des matériaux et l'utilisation d'une géométrie idéalisée. Pour des matériaux dont les propriétés électriques sont bien connues, tel que le cuivre, on observe peu de différence entre les courbes de la perte de courant alternatif provenant de la simulation et celles obtenues expérimentalement. L'influence de la taille des éléments du maillage est aussi étudiée. Un maillage fin est nécessaire pour capturer les forts gradients de la densité de courant et, par conséquent, pour obtenir une bonne estimation de la perte de courant alternatif. La contribution de chacune des parties conductrices du câble électrique est aussi influencée par la taille des éléments du maillage. Un maillage plus fin permet de mieux évaluer la contribution des différents conducteurs.

CHAPITRE 8 CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

Une méthodologie numérique utilisant la méthode de Galerkin discontinue afin de modéliser les problèmes tridimensionnels d'électromagnétisme en basses fréquences est proposée. Afin de résumer les travaux effectués dans ce projet de recherche, nous allons conclure sur chacun des objectifs spécifiques que nous nous sommes fixés :

i) Reformuler les équations de Maxwell en basses fréquences et appliquer la méthode de Galerkin discontinue

   L'approximation des équations de Maxwell dans le régime des basses fréquences, qui correspond à un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre un, est utilisée. Cette formulation des équations de Maxwell est ensuite discrétisée en utilisant la méthode de Galerkin discontinue. Un flux numérique similaire au flux décentré amont est élaboré en utilisant le système d'équations basé sur la conductivité. Ce flux numérique est ensuite combiné à la forme faible du système d'équations basé sur la résistivité électrique ;

ii) Élaborer un modèle du milieu ambiant des matériaux conducteurs

   En se basant sur une analyse dimensionnelle, un modèle pour les milieux avec une conductivité très faible entourant les matériaux conducteurs est élaboré. L'induction d'un courant électrique dans un câble électrique entouré d'air est étudiée. Il a été observé que les courants électriques parasites dans l'air sont négligeables par rapport au courant électrique induit dans le câble électrique normal et supraconducteur. De plus, une forme sans dimension des reformulations des équations de Maxwell est proposée et est utilisée afin de réduire les problèmes de conditionnement et les erreurs d'arrondi. Les quantités de référence ont été regroupées en deux nombres sans dimension provenant du théorème Π de Buckingham appliqué à la physique des problèmes d'induction d'un courant électrique dans un câble électrique ;

iii) Vérifier la formulation de Galerkin discontinue avec des problèmes d'électromagnétisme en basses fréquences

   La méthodologie numérique a été vérifiée avec le problème ayant une solution manufacturée, la propagation d'un front magnétique et l'induction d'un courant électrique dans un échantillon conducteur simple. Dans le cas du problème ayant une solution manufacturée qui considère une résistivité électrique constante, les ordres de convergence des approximations des variables dépendantes, ainsi que l'ordre de convergence

de la contrainte de divergence nulle sur l'approximation du champ magnétique sont en accord avec la théorie. En ce qui concerne les supraconducteurs à haute température, la propagation d'un front magnétique, ainsi que l'induction d'un courant électrique dans un câble électrique et dans un échantillon supraconducteur ont été étudiées. Les approximations des variables dépendantes tendent vers la solution du modèle de Bean lorsque l'exposant de la loi de puissance modélisant la résistivité électrique augmente. De plus, la méthodologie numérique proposée se compare favorablement à l'approche populaire dans la communauté des ingénieurs électriques, i.e. la formulation en $\boldsymbol{H}$ discrétisée en utilisant la méthode de Galerkin avec les éléments de Whitney ;

iv) Valider la méthodologie numérique proposée avec des problèmes d'électromagnétisme en basses fréquences

L'approche proposée a été validée en modélisant la méthode « calibration free » utilisée pour évaluer la perte de courant alternatif de câbles électriques. Plusieurs agencements de conducteurs normaux et d'un supraconducteur à haute température, le diborure de magnésium (MgB_2), ont été considérés. La perte de courant alternatif estimée est en accord avec les données expérimentales pour un maillage dont la taille des éléments est suffisamment petit. Un décalage entre les courbes de la perte de courant alternatif expérimentales et celles simulées a toutefois été observé. En plus des erreurs de discrétisation, par une analyse de l'expression de la perte de courant alternatif, la géométrie du câble électrique qui est idéalisée et l'erreur commise sur les propriétés du matériau peuvent contribuer à ce décalage.

La méthodologie numérique proposée est adaptée pour les problèmes d'induction d'un courant électrique dans un conducteur normal et dans un supraconducteur à haute température. Bien que nous sommes encore restreints à utiliser des petits pas de temps, on observe une amélioration par rapport aux approches couramment utilisées par la communauté des ingénieurs électriques. Une stratégie d'adaptation en temps basée sur la perte de courant alternatif est actuellement en développement afin d'améliorer la méthodologie numérique proposée. Il serait aussi intéressant de développer une stratégie d'adaptation en espace-temps en se basant sur les travaux de Wan [87]. Une autre limitation est la difficulté d'imposer un courant électrique pour modéliser les problèmes de transport d'un courant électrique. Une méthode de pénalisation est aussi en développement afin de pouvoir imposer un courant électrique tout en utilisant directement l'approximation des équations de Maxwell en basses fréquences. Enfin, la prochaine étape de ce projet de recherche serait de considérer l'influence de la température. La résistivité électrique des matériaux couplerait l'équation de chaleur et les équations de Maxwell. On pourrait ainsi faire la simulation complète des composantes électriques dans les

réseaux électriques telles que les limiteurs de courant supraconducteurs.

RÉFÉRENCES

[1] N. Amemiya, K. Miyamoto, N. Banno, and O. Tsukamoto. Numerical analysis of AC losses in high T_c superconductors based on E-J characteristics represented with n-value. *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, 7(2) :2110–2113, 1997.

[2] N. Amemiya, S. Murasawa, N. Banno, and K. Miyamoto. Numerical modelings of superconducting wires for AC loss calculations. *Phys. C Supercond. Appl.*, 310(1) :16 – 29, 1998.

[3] A. Ballarino. Development of superconducting links for the large hadron collider machine. *Supercond. Sci. and Technol.*, 27(4) :1–7, 2014.

[4] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, 108(5) :1175–1204, 1957.

[5] C. P. Bean. Magnetization of high-field superconductors. *Rev. Mod. Phys.*, 36(1) :31 – 39, 1964.

[6] J. G. Bednorz and K. A. Müller. Possible high T_c superconductivity in the Ba-La-Cu-O system. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 64(2) :189–193, 1986.

[7] K. Berger, J. Leveque, D. Netter, B. Douine, and A. Rezzoug. AC transport losses calculation in a Bi-2223 current lead using thermal coupling with an analytical formula. *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, 15(2) :1508–1511, 2005.

[8] J. Bird. *Electrical Principles and Technology for Engineering*. Butterworth-Heinemann, 1995.

[9] E. Blank. *The discontinuous Galerkin method for Maxwell's equations : application to bodies of revolution and Kerr-nonlinearities*. PhD thesis, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), 2013.

[10] P. B. Bochev and M. D. Gunzburger. *Least-Squares Finite Element Methods*, volume 166. Springer-Verlag New York, 2009.

[11] V. A. Bokil, Y. Cheng, Y. Jiang, and F. Li. Energy stable discontinuous Galerkin methods for Maxwell's equations in nonlinear optical media. *J. Comput. Phys.*, 350(Supplement C) :420–452, 2017.

[12] A. Bossavit. Numerical modelling of superconductors in three dimensions : a model and a finite element method. *IEEE Trans. Magn.*, 30(5) :3363–3366, 1994.

[13] A. Bossavit. *Computational Electromagnetism : Variational Formulations, Complementarity, Edge elements*. Academic Press, 1998.

[14] R. Brambilla, F. Grilli, and L. Martini. Development of an edge-element model for AC loss computation of high-temperature superconductors. *Supercond. Sci. and Technol.*, 20(1) :16–24, 2006.

[15] E. H. Brandt. Superconductors of finite thickness in a perpendicular magnetic field : Strips and slabs. *Phys. Rev. B*, 54(6) :4246–4264, 1996.

[16] E. H. Brandt. Superconductor disks and cylinders in an axial magnetic field. I. flux penetration and magnetization curves. *Phys. Rev. B*, 58(10) :6506–6522, 1998.

[17] J. Campbell, E. Eldridge, and J. Thompson. *Handbook on materials for superconducting machinery*. DTIC Document, 1974.

[18] J. Chen, Q. H. Liu, M. Chai, and J. A. Mix. A nonspurious 3-D vector discontinuous Galerkin finite-element time-domain method. *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, 20(1) :1–3, 2010.

[19] B. Cockburn, F. Li, and C.-W. Shu. Locally divergence-free discontinuous Galerkin methods for the Maxwell equations. *J. Comput. Phys.*, 194(2) :588–610, 2004.

[20] N. R. Council. *The Earth's Electrical Environment*. The National Academies Press, 1986.

[21] D. A. Di Pietro and A. Ern. *Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods*, volume 69. Springer, 2011.

[22] G. Escamez, F. Sirois, A. Badel, G. Meunier, B. Ramdane, and P. Tixador. Numerical impact of using different–relationships for 3-D simulations of AC losses in MgB_2 superconducting wires. *IEEE Trans. Magn.*, 52(3) :1–4, 2016.

[23] G. Escamez, F. Sirois, M. Tousignant, A. Badel, C. Granger, P. Tixador, and C.-E. Bruzek. Experimental characterization of the constitutive materials of MgB_2 multifilamentary wires for the development of 3D numerical models. *Supercond. Sci. and Technol.*, 30(3) :1–9, 2017.

[24] K. O. Friedrichs. Symmetric positive linear differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 11(3) :333–418, 1958.

[25] D. F. Griffiths, J. W. Dold, and D. J. Silvester. *Essential Partial Differential Equations*. Springer International Publishing, 2015.

[26] D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 1999.

[27] F. Grilli. Numerical modeling of HTS applications. *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, 26(3) :1–8, 2016.

[28] F. Grilli, E. Pardo, A. Stenvall, D. N. Nguyen, W. Yuan, and F. Gomory. Computation of losses in HTS under the action of varying magnetic fields and currents. *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, 24(1) :78–110, 2014.

[29] Y. Hascicek, Y. Akin, T. Baldwin, M. Rindfleisch, J. Yue, M. Sumption, and M. Tomsic. A MgB_2 12.5 kVA superconductor transformer. *Supercond. Sci. and Technol.*, 22(6) :1–7, 2009.

[30] J. Hesthaven and T. Warburton. Nodal high-order methods on unstructured grids : I. Time-domain solution of Maxwell's equations. *J. Comput. Phys.*, 181(1) :186 – 221, 2002.

[31] C. Y. Ho, M. Ackerman, K. Wu, T. Havill, R. Bogaard, R. Matula, S. Oh, and H. James. Electrical resistivity of ten selected binary alloy systems. *J. Phys. Chem. Ref. Data*, 12(2) :183–322, 1983.

[32] D. Hu, M. D. Ainslie, J. P. Rush, J. H. Durrell, J. Zou, M. Raine, and D. Hampshire. DC characterization and 3D modelling of a triangular, epoxy-impregnated high temperature superconducting coil. *Supercond. Sci. and Technol.*, 28(6) :1–8, 2015.

[33] J. Huang and C.-W. Shu. A second-order asymptotic-preserving and positivity-preserving discontinuous Galerkin scheme for the Kerr–Debye model. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 27(3) :546–579, 2017.

[34] E. Janíková and M. Slodička. A robust linearization scheme for nonlinear diffusion in type-II superconductors. *Appl. Math. Model.*, 32(10) :1933–1940, 2008.

[35] B. Jiang, J. Wu, and L. Povinelli. The origin of spurious solutions in computational electromagnetics. *J. Comput. Phys.*, 125(1) :104 – 123, 1996.

[36] J.-M. Jin. *The Finite Element Method in Electromagnetics*. John Wiley & Sons, 2014.

[37] C. Johnson. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press, 1987.

[38] C. Johnson, U. Nävert, and J. Pitkäranta. Finite element methods for linear hyperbolic problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 45(1-3) :285–312, 1984.

[39] K. Kajikawa, T. Kawano, R. Osaka, T. Nakamura, M. Sugano, M. Takahashi, and T. Wakuda. AC losses in monofilamentary MgB_2 round wire carrying alternating transport currents. *Supercond. Sci. and Technol.*, 23(4) :1–6, 2010.

[40] A. Kameni, M. Boubekeur, L. Alloui, F. Bouillault, J. Lambretchs, and C. Geuzaine. A 3-D semi-implicit method for computing the current density in bulk superconductors. *IEEE Trans. Magn.*, 50(2) :377–380, 2014.

[41] A. Kameni, J. Lambrechts, J.-F. Remacle, S. Mezani, F. Bouillault, and C. Geuzaine. Discontinuous Galerkin method for computing induced fields in superconducting materials. *IEEE Trans. Magn.*, 48(2) :591–594, 2012.

[42] P. Kováč, I. Hušek, J. Kováč, T. Melišek, M. Kulich, and L. Kopera. Filamentary MgB_2 wires with low magnetization AC losses. *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, 26(6) :1–5, 2016.

[43] J. Kováč, J. Šouc, P. Kováč, and I. Hušek. AC losses of single-core MgB_2 wires with different metallic sheaths. *Phys. C Supercond. Appl.*, 519 :95 – 99, 2015.

[44] C. A. Kumar, C. Panneerselvam, K. Nair, K. Jeeva, C. Selvaraj, H. J. Jeyakumar, and S. Gurubaran. Measurement of atmospheric air-earth current density from a tropical station using improvised Wilson's plate antenna. *Earth Planets Space*, 61(7) :919–926, 2009.

[45] V. Lahtinen. *Searching for Frontiers in Contemporary Eddy Current Model Based Hysteresis Loss Modelling of Superconductors*. PhD thesis, Tampereen teknillinen yliopisto. Julkaisu-Tampere University of Technology, 2014.

[46] V. Lahtinen, A. Stenvall, F. Sirois, and M. Pellikka. A finite element simulation tool for predicting hysteresis losses in superconductors using an H-oriented formulation with cohomology basis functions. *J. Supercond. Nov. Magn.*, 28(8) :2345–2354, 2015.

[47] P. Laroche. Airborne measurements of electrical atmospheric field produced by convective clouds. *Rev. Phy. Appl.*, 21(12) :809 – 815, 1986.

[48] Y.-M. Law and S. Dufour. Numerical modeling of high-temperature superconductors using the nodal discontinuous Galerkin method. *Submitted to SIAM J. Sci. Comput., #M116455*, 2018.

[49] Y.-M. Law and M. Laforest. A nonlinear relaxation formulation of the p-curl problem modelling high-temperature superconductors : a modified Yee's scheme. *Submitted to J. Comp. Phy., JCOMP-D-17-01544*, 2017.

[50] Y.-M. Law, D. Tageddine, and S. Dufour. Numerical modeling of high-temperature superconductors using the discontinuous Galerkin method with the Whitney element. *Submitted to J. Comp. Phy., JCOMP-D-18-00082*, 2018.

[51] P. Lesaint and P.-A. Raviart. On a finite element method for solving the neutron transport equation. In *Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations*. Academic Press, 1974.

[52] R. J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhäuser, 1992.

[53] R. J. LeVeque. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.

[54] G. Z. Li, Y. Yang, M. A. Susner, M. D. Sumption, and E. W. Collings. Critical current densities and n-values of MgB_2 strands over a wide range of temperatures and fields. *Supercond. Sci. and Technol.*, 25(2) :1–10, 2011.

[55] J. D. Logan. *Applied partial differential equations.* Springer International Publishing, 2014.

[56] A. Logg, K.-A. Mardal, and G. Wells. *Automated solution of differential equations by the finite element method : The FEniCS book*, volume 84. Springer Science & Business Media, 2012.

[57] G. P. Lousberg, M. Ausloos, C. Geuzaine, P. Dular, P. Vanderbemden, and B. Vanderheyden. Numerical simulation of the magnetization of high-temperature superconductors : a 3D finite element method using a single time-step iteration. *Supercond. Sci. and Technol.*, 22(5) :055005, 2009.

[58] L. Makong, A. Kameni, P. Masson, J. Lambrechts, and F. Bouillault. 3-D Modeling of Heterogeneous and Anisotropic Superconducting Media. *IEEE Trans. Magn.*, 52(3) :1–4, 2016.

[59] I. D. Mayergoyz. *Nonlinear Diffusion of Electromagnetic Fields : with Applications to Eddy Currents and Superconductivity.* Academic Press, 1998.

[60] W. L. McMillan. Transition temperature of strong-coupled superconductors. *Phys. Rev.*, 167(2) :331–344, 1968.

[61] W. Meissner and R. Ochsenfeld. Ein neuer effekt bei eintritt der supraleitfähigkeit. *Naturwissenschaften*, 21(44) :787–788, 1933.

[62] P. Monk. *Finite Element Methods for Maxwell's Equations.* Oxford University Press, 2003.

[63] G. Mur. Edge elements, their advantages and their disadvantages. *IEEE Trans. Magn.*, 30(5) :3552–3557, 1994.

[64] J. Nagamatsu, N. Nakagawa, T. Muranaka, Y. Zenitani, and J. Akimitsu. Superconductivity at 39 K in magnesium diboride. *Nature*, 410 :63–64, 2001.

[65] J.-C. Nédélec. Mixed finite elements in $\mathbb{R}^3$. *Numer. Math.*, 35(3) :315–341, 1980.

[66] North American Höganäs High Alloys LLC. *Glidcop® product information*, 5 1992. A.01.03.

[67] H. K. Onnes. On the sudden change in the rate at which the resistance of mercury disappears. *LEIDEN, COMM*, 120b, 122b, 124c, 1911.

[68] M. P. Oomen, J. Rieger, V. Hussennether, and M. Leghissa. AC loss in high-temperature superconducting conductors, cables and windings for power devices. *Supercond. Sci. and Technol.*, 17(5) :S394–S399, 2004.

[69] E. Pardo, F. Gömöry, J. Šouc, and J. M. Ceballos. Current distribution and AC loss for a superconducting rectangular strip with in-phase alternating current and applied field. *Supercond. Sci. and Technol.*, 20(4) :351–364, 2007.

[70] W. Paul, D. Hu, and T. Baumann. Voltage-current characteristic between 10^{-13} V/cm and 10^{-3} V/cm of BSCCO and time decay of the magnetization. *Phys. C Supercond. Appl.*, 185 :2373–2374, 1991.

[71] S. Pawar, P. Murugavel, and D. Lal. Effect of relative humidity and sea level pressure on electrical conductivity of air over Indian ocean. *J. Geophys. Res.*, 114(D2) :1–8, 2009.

[72] D. Pelletier, A. Fortin, and R. Camarero. Are FEM solutions of incompressible flows really incompressible ?(or how simple flows can cause headaches !). *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 9(1) :99–112, 1989.

[73] L. Prigozhin. Analysis of critical-state problems in type-II superconductivity. *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, 7(4) :3866–3873, 1997.

[74] W.-H. Reed and T. R. Hill. Triangular mesh methodsfor the neutron transport equation. *Los Alamos Report LA-UR-73-479*, 1973.

[75] Z. Ren. Influence of the RHS on the convergence behaviour of the curl-curl equation. *IEEE Trans. Magn.*, 32(3) :655–658, 1996.

[76] J. Rhyner. Magnetic properties and AC-losses of superconductors with power law current—voltage characteristics. *Phys. C Supercond. Appl.*, 212(3-4) :292–300, 1993.

[77] J. Rhyner. Calculation of AC losses in HTSC wires with arbitrary current voltage characteristics. *Phys. C Supercond. Appl.*, 310(1) :42–47, 1998.

[78] A. A. Rodriguez and A. Valli. *Eddy Current Approximation of Maxwell Equations*. Springer-Verlag Mailand, 2010.

[79] S. Safran, J. Šouc, F. Gömöry, P. Kovac, and A. Gencer. Experimentally determined magnetization AC losses of mono and multifilamentary MgB_2 wires. *J. Supercond. Nov. Magn.*, 26(5) :1557–1561, 2013.

[80] T. Sheahen. *Introduction to High-Temperature Superconductivity*. Springer US, 1994.

[81] F. Sirois and F. Grilli. Numerical considerations about using finite-element methods to compute AC losses in HTS. *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, 18(3) :1733–1742, 2008.

[82] J. Šouc, F. Gömöry, and M. Vojenčiak. Calibration free method for measurement of the AC magnetization loss. *Supercond. Sci. and Technol.*, 18(5) :592–595, 2005.

[83] Special Metals. *Monel® alloy 400*, 2 2005. SMC-053.

[84] A. Stenvall, V. Lahtinen, and M. Lyly. An H-formulation-based three-dimensional hysteresis loss modelling tool in a simulation including time varying applied field and transport current : the fundamental problem and its solution. *Supercond. Sci. and Technol.*, 27(10) :1–7, 2014.

[85] A. Stenvall and T. Tarhasaari. An eddy current vector potential formulation for estimating hysteresis losses ofsuperconductors with FEM. *Supercond. Sci. and Technol.*, 23(12) :1–13, 2010.

[86] J. Sykulski, R. Stoll, A. Mahdi, and C. Please. Modelling HTC superconductors for AC power loss estimation. *IEEE Trans. Magn.*, 33(2) :1568–1571, 1997.

[87] A. T. S. Wan. *Adaptive Space-Time Finite Element Method in High Temperature Superconductivity*. PhD thesis, École Polytechnique de Montréal, Montréal, 2014.

[88] F. M. White. *Fluid mechanics*. McGraw-Hill, 1979.

[89] S. L. Wipf. AC losses in superconductors. *J. Appl. Phys.*, 39(6) :2538–2538, 1968.

[90] T. Yazawa, J. J. Rabbers, B. T. Hakena, H. H. J. T. Katea, and Y. Yamadab. Numerical calculation of current density distributions in high temperature superconducting tapes with finite thickness in self field and external field. *Phys. C Supercond. Appl.*, 310(1) :36–41, 1998.

[91] K. S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 14(3) :302–307, 1966.

[92] H. M. Yin. Regularity of weak solution to a $p-curl$ system. *Diff. Int. Eqs.*, 19(4) :361–368, 2006.

[93] H.-M. Yin, B. Li, and J. Zou. A degenerate evolution system modeling Bean's critical-state type-II superconductors. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 8(3) :781–794, 2002.

[94] S. Zaglmayr. *High order finite element methods for electromagnetic field computation*. PhD thesis, Johannes Kepler Universität, 2006.

[95] V. M. Zermeno, F. Grilli, and F. Sirois. A full 3D time-dependent electromagnetic model for Roebel cables. *Supercond. Sci. and Technol.*, 26(5) :1–8, 2013.

[96] M. Zhang and T. Coombs. 3D modeling of high-Tc superconductors by finite element software. *Supercond. Sci. and Technol.*, 25(1) :1–7, 2012.

[97] Y. Zhu and A. C. Cangellaris. *Multigrid Finite Element Methods for Electromagnetic Field Modeling*. Wiley-IEEE Press, 2006.