POLYPUBLIE

Optimisation adaptative de la topologie de lattices produits par fabrication additive

Antonin Paquette-Rufiange

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

Date	2017
Type	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis Mémoire de maîtrise/Master's thesis
URL de PolyPublie PolyPublie URL	https://publications.polymtl.ca/2744/
Conditions d'utilisation Terms of use	© Tous droits réservés / All rights reserved
Référence Citation	Paquette-Rufiange, A. (2017). Optimisation adaptative de la topologie de lattices produits par fabrication additive [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/2744/

Détails de la thèse
Thesis details

Directeurs de recherche Advisors	Serge Prudhomme, & Marc Laforest
Programme Program	Maîtrise recherche en mathématiques appliquées

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal
https://publications.polymtl.ca

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

OPTIMISATION ADAPTATIVE DE LA TOPOLOGIE DE LATTICES PRODUITS PAR FABRICATION ADDITIVE

ANTONIN PAQUETTE-RUFIANGE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)
AOÛT 2017

© Antonin Paquette-Rufiange, 2017.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

OPTIMISATION ADAPTATIVE DE LA TOPOLOGIE DE LATTICES PRODUITS PAR FABRICATION ADDITIVE

présenté par : PAQUETTE-RUFIANGE Antonin
en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. SAUCIER Antoine, Ph. D., président
M. PRUDHOMME Serge, Ph. D., membre et directeur de recherche
M. LAFOREST Marc, Ph. D., membre et codirecteur de recherche
M. GOSSELIN Frédérick, Doctorat, membre

DÉDICACE

À ma compagne et amie Luce,
à feu Pierrette Chartrand Rufiange et à feu Maurice Rufiange

REMERCIEMENTS

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur de recherche M. Serge Prudhomme et mon codirecteur de recherche M. Marc Laforest pour leur soutien et leurs enseignements tout au long de mon parcours. Je suis particulièrement reconnaissant de leur dévouement à toujours me pousser à chercher la qualité et la rigueur dans mon travail. Je tiens aussi à remercier la contribution de mon collègue Kenan Kergrene qui m'a aidé dans la réalisation de ce projet.

J'aimerais souligner l'apport significatif de M. Donatien N'Dri qui m'a guidé et conseillé dans mes tâches d'enseignement. Je veux aussi remercier mes collègues Yann-Meing Law-Kam Cio, Damien Tageddine et Daniel Lévesque pour nos discussions sur l'analyse numérique. Je remercie aussi les professeurs Antoine Saucier et Frédérick Gosselin d'avoir accepté d'être membres de mon jury. Je tiens aussi à souligner le soutien financier du Fonds de recherche Nature et technologies qui m'a permis de me concentrer sur mon projet de maîtrise.

Finalement, je veux remercier mon amie et compagne Luce qui m'a soutenu et enduré inlassablement ces dernières années. J'ai finalement une pensée pour mes parents et mes sœurs.

RÉSUMÉ

Ce mémoire présente une méthode permettant l'optimisation topologique de lattices produits par fabrication additive. La procédure proposée consiste à résoudre des problèmes d'optimisation de forme où l'on cherche à trouver l'emplacement optimal des membrures composant le lattice afin de minimiser son énergie de déformation. À chaque fois que ce problème est résolu, on ajoute de nouvelles membrures au lattice selon des méthodes d'adaptation de maillages et l'on répète le processus jusqu'à l'atteinte d'un critère d'arrêt prédéfini par l'utilisateur. On emploie le solveur IPOPT utilisant la méthode des points intérieurs afin de résoudre les problèmes d'optimisation de forme et l'on décrit la physique des lattices à l'aide de modèles unidimensionnels de l'élasticité linéaire. On observe que l'utilisation du modèle barre pour décrire le lattice n'est pas approprié lorsqu'il est employé au sein de l'optimisation topologique. On remarque que l'application de la procédure d'optimisation topologique permet bel et bien d'indentifier les régions du lattice où la densité doit être plus importante et les membrures bien orientées afin de réduire son énergie de déformation. Nous démontrons finalement sur des exemples numériques en deux dimensions que l'optimisation topologique engendre la création de lattices non-structurés dont le volume est grandement diminué par rapport à un lattice structuré possédant la même énergie de déformation.

ABSTRACT

We present an adaptive procedure to optimize the topology of lattice produced by additive manufacturing. This method consists of successively solving a shape optimization problem on lattices containing an increasing number of trusses. Each shape optimization problem find the best location of the trusses inside the lattice such that its energy of deformation is reduced. To solve these optimization problems, we use the interior-point solver IPOPT and we describe the truss with unidimensional models of liner elasticity. We show that the application of the topology optimization produce lighter parts when a local refinement is employed and that the use of the model bar is not recommended. We also show that the topology optimization procedure create lattice where the density and the orientation are precisely defined such that the energy of deformation is reduced. Finally, we demonstrate on numerical examples in two dimensions that the proposed method allows for the creation of unstructured lattices with significant reduced volume compared to their structured counterparts.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE iii

REMERCIEMENTS iv

RÉSUMÉ v

ABSTRACT vi

TABLE DES MATIÈRES vii

LISTE DES TABLEAUX ix

LISTE DES FIGURES x

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS xiii

CHAPITRE 1 INTRODUCTION 1
1.1 Fabrication additive 2
1.1.1 Technologies de fabrication additive 2
1.1.2 Contraintes de fabrication des méthodes de type Powder Based Fusion 4
1.2 Optimisation topologique 5
1.2.1 Solid Isotropic Material Penalization 5
1.2.2 Ground Structure Method 7
1.3 Objectifs de recherche 9
1.4 Plan du mémoire 11

CHAPITRE 2 MODÈLES UNIDIMENSIONNELS D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE . . 12
2.1 Élasticité linéaire 12
2.2 Structure de type lattice 13
2.3 Modèle barre 15
2.4 Modèle d'Euler-Bernoulli 21
2.5 Modèle de Timoshenko 24
2.6 Adimensionnalisation 29

CHAPITRE 3 OPTIMISATION DE FORME DE LATTICES 31
3.1 Problème d'optimisation et solveur IPOPT 32

3.1.1 Méthode des points intérieurs 33
3.1.2 Description de l'algorithme du solveur IPOPT 34
3.2 Formulation du problème d'optimisation de forme 35
3.2.1 Calcul du gradient et du hessien du problème d'optimisation de forme 36
3.3 Contraintes géométriques 38
3.3.1 Contrainte sur les frontières 41
3.3.2 Contrainte sur la qualité du maillage 44
3.3.3 Contrainte d'orientation 46
3.4 Résultats numériques 47
3.5 Autres formulations du problème d'optimisation de forme 48

CHAPITRE 4 OPTIMISATION TOPOLOGIQUE DE LATTICES 50
4.1 Procédure adaptative d'optimisation topologique 50
4.1.1 Indicateur de raffinement 51
4.1.2 Algorithmes de raffinement de la bissection 52
4.1.3 Algorithmes de raffinement de la division régulière 52
4.2 Choix de la borne inférieure de la contrainte de qualité de maillage 55
4.3 Indépendance du lattice initial 57
4.4 Comparaison des différents modèles unidimensionnels d'élasticité linéaire . . 58
4.5 Comparaison des méthodes de raffinement 60
4.6 Pertinence de l'optimisation adaptative de la topologie de lattices 63

CHAPITRE 5 CONCLUSION 67
5.1 Futurs travaux 68

RÉFÉRENCES 70

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1 Comparaison de l'énergie de déformation pour le problème d'optimisation de forme avec et sans contraintes sur la frontière 42
Tableau 4.1 Comparaison de volume pour le Problème 1 65
Tableau 4.2 Comparaison de volume pour le Problème 2 65

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 Pièce originale (gauche), lattice structuré (centre) et lattice non-strucutré (droite) 1
Figure 1.2 Décomposition d'une pièce en couches 2
Figure 1.3 Utilisation de supports lors de l'emploi de techniques de type FDM . 3
Figure 1.4 Poudre non-fondue supportant les couches supérieures lors de l'emploi de techniques de type SLS ou EBM 4
Figure 1.5 Choix des paramètres d'optimisation pour la méthode SIMP 6
Figure 1.6 Résultats du problème de la Figure 1.5 ($p = 1$ à gauche, $p = 3$ au centre et $p = 3$ avec l'emploi d'un filtre à droite) 7
Figure 1.7 Choix des paramètres d'optimisation pour la méthode GSM 7
Figure 2.1 Description du domaine Ω et des forces appliquées 12
Figure 2.2 Description d'un lattice L 13
Figure 2.3 Forces appliquées sur une barre de longueur H 15
Figure 2.4 Exemple d'une structure unidimensionnelle composée de 2 barres . . 18
Figure 2.5 Exemple d'une structure bidimensionnelle composée de 3 barres . . . 19
Figure 2.6 Exemple de structures bidimensionnelles instables (à gauche) et de structures stables (à droite) sous les hypothèses du modèle barre . . . 20
Figure 2.7 Forces appliquées au domaine pour le modèle Euler-Bernoulli 21
Figure 2.8 Déformations d'une membrure pour le modèle Timoshenko 25
Figure 3.1 Schéma de la méthode *discrétiser puis optimiser* 31
Figure 3.2 Lattice simple et son chargement en dimension 2 39
Figure 3.3 Fonctionnelle énergie $\mathcal{E}$ pour le modèle barre (gauche), d'Euler-Bernoulli (centre) et de Timoshenko (droite) 39
Figure 3.4 Courbes de niveau de la fonctionnelle énergie, approximations initiales en mauve et solutions en vert avec le modèle d'Euler-Bernoulli 40
Figure 3.5 Solutions du problème d'optimisation de forme du problème de la Figure 3.2 avec le modèle d'Euler-Bernoulli 40
Figure 3.6 Lattice initial (à gauche) et lattice optimisé (à droite) pour le modèle d'Euler-Bernoulli 41
Figure 3.7 Lattice initial (à gauche) et lattice optimisé (à droite) avec la contrainte sur les frontières pour le modèle d'Euler-Bernoulli 42

Figure 3.8 Problème d'optimisation de forme avec son chargement (à gauche) et courbes de niveaux de l'énergie de déformation avec la modèle d'Euler-Bernoulli (à droite) 43
Figure 3.9 Lattice original (en haut à gauche), lattice avec membrures et nœuds surperposés (en haut à droite), lattice avec membrures superposées (en bas à droite) et lattice avec nœud absent (en bas à gauche) 43
Figure 3.10 Applications linéaires et affines liant le triangle simplexe κ_S, le triangle équilatéral κ_E et le triangle κ (figure adaptée de [14, Figure 2]) 45
Figure 3.11 Triangles et mesures de qualité associées 46
Figure 3.12 Définition du cas test 1 (gauche) et définition du cas test 2 (droite) . 47
Figure 3.13 Lattice initial (gauche) et lattice optimisé (droite) pour le cas test 1 . 48
Figure 3.14 Lattice initial (gauche) et lattice optimisé (droite) pour le cas test 2 . 48
Figure 4.1 Illustration de la méthode de raffinement de la bissection 52
Figure 4.2 Illustration de la méthode de raffinement de la bissection 53
Figure 4.3 Illustration de l'optimisation topologique avec la méthode de bissection pour $\gamma = 0.5$ sur le Problème 1 (rangée du haut) et sur le Problème 2 (rangée du bas) 55
Figure 4.4 Énergie de déformation pour le problème 1 selon différentes bornes inférieures pour la qualité du maillage obtenue par la méthode de la bissection avec $\gamma = 0.5$ 56
Figure 4.5 Dixième itération de l'optimisation topologique du Problème 1 par la méthode de la bissection pour $\gamma = 0.5$ avec une borne inférieure sur la qualité de maillage de 0.3 (gauche), de 0.5 (centre) et de 0.7 (droite) . 56
Figure 4.6 Lattice initialisant la procédure d'optimisation topologique pour le Problème 1 (lattice #1 à gauche, lattice #2 au centre et lattice #3 à droite) 57
Figure 4.7 Énergie de déformation selon le volume (gauche) et nombre d'itérations selon le nombre de nœuds (droite) pour le Problème 1 avec la méthode de la division régulière et $\gamma = 0.5$ pour différents choix de lattice initial 58
Figure 4.8 Lattices obtenus après 12 itérations de la procédure d'optimisation topologique pour le modèle barre (première rangée), pour le modèle d'Euler-Bernoulli (deuxième rangée) et pour le modèle Timoshenko (troisième rangée) avec la méthode de la bissection pour $\gamma = 0.5$ . . . 59
Figure 4.9 Énergie de déformation pour le Problème 1 (gauche) et pour le Problème 2 (droite) 60
Figure 4.10 Nombre d'itérations effectuées pour chaque étape d'optimisation de forme pour le Problème 1 (gauche) et pour le Problème 2 (droite) . . 60

Figure 4.11 Évolution de l'énergie selon les méthodes de raffinement pour le Problème 1 (gauche) et pour le Problème 2 (droite) 61
Figure 4.12 Évolution du nombre d'itérations pour chaque étape d'optimisation de forme pour le cas test 1 (gauche) et pour le test 2 (droite) 62
Figure 4.13 Énergie de déformation du Problème 1 avec le modèle d'Euler-Bernoulli avec la méthode de la bissection pour différentes valeurs de γ 62
Figure 4.14 Nombre d'itérations effectuées à chaque résolution du problème d'optimisation de forme du Problème 1 avec le modèle d'Euler-Bernoulli avec la méthode de la bissection pour différentes valeurs de γ 63
Figure 4.15 Comparaison de l'énergie de déformation pour le Problème 1 (gauche) et pour le Problème 2 (droite) 64
Figure 4.16 Comparaison du nombre d'itérations pour chaque problème d'optimisation de forme pour le cas test 1 (gauche) et pour le cas test 2 (droite) 66

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

Abbréviations

CAD	Conception assistée par ordinateur
EBM	Electron Beam Melting
EDP	Équation différentielle partielle
FDM	Fused Deposition Method
GSM	Ground Structure Method
SIMP	Solid Isotropic Material Penalization
SLS	Selective Laser Sintering

Symbole

α, ψ, θ	Angle de rotation par rapport à x, y et z respectivement
β	Borne
ε	Tenseur de déformations
$\mathcal{E}$	Énergie de déformation
$\mathcal{J}$	Énergie du système
ι	Quantité d'intérêt pour la SIMP
κ	Triangle
Φ	Rotation des nœuds
λ	Multiplicateur de Lagrange
μ	Paramètre de la méthode des points intérieurs
ρ	Densité
σ	Tenseur de contraintes
ν	Coefficient de Poisson
τ	Critère de raffinement
γ	Paramètres de raffinement
ω	Quantité d'intérêt
A	Aire d'une membrure
B	Application linéaire du triangle simplexe au triangle équilatéral
c_e	Contrainte d'égalité
c_i	Contrainte d'inégalité
c_f	Contrainte sur les frontières

c_κ	Contrainte de qualité sur les triangles
c_n	Contrainte sur les degrés de liberté
c_O	Contrainte d'orientation
C	Tenseur de rigidité
D	Application affine du triangle simplexe au triangle κ
e	Relation d'équilibre
E	Module de Young
f	Force volumétrique
F	Force résultante
g	Fonctionnelle objective
G	Application affine du triangle équilatéral au triangle κ
H	Longueur d'une membrure
I	Moment d'inertie
K	Tétraèdre
$\bar{K}$	Matrice de rigidité
K_c	Facteur de correction du modèle Timoshenko
L	Lattice
$\mathcal{L}$	Lagrangien
M	Moment de force ou nombre de membrures composant un lattice
N	Nombre de noeuds composant le lattice
$\mathcal{N}$	Nombre de degré de libertés
P	Noeuds du lattice
r	Rayon d'une membrure
R et $\bar{R}$	Matrice de rotation
s	Variable d'écart
T	Membrure du lattice
u	Champ de déplacement
U	Champ de déplacement aux nœuds du lattice
V	Volume
W	Travail externe

Espace et ensemble

$\mathcal{D}$	Espace de design pour les nœuds d'un lattice
$\mathfrak{L}$	Ensemble des lattices réalisables
$\mathbb{R}$	Espace des réels

$\mathcal{U}$	Espace des déformations

Indices

x, y, z	Coordonnées cartésiennes du référentiel global
ξ, η, ζ	Coordonnées cartésiennes du référentiel local
B	Relatif au modèle barre
car	Grandeur physique caractéristique
E	Relatif au modèle d'Euler-Bernoulli
F	Relatif à la norme de Frobenius
l	Inférieur
opt	Optimal
T	Relatif au modèle de Timoshenko
$\mathcal{T}$	Connectivité fixe
u	Supérieur

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Les avancées récentes des technologies de fabrication additive permettent aujourd'hui le développement de solutions nouvelles à des problèmes du domaine médical et aéronautique. En effet, des pièces adoptant des configurations géométriques complexes issues de matériaux des plus divers peuvent maintenant être créées à l'aide de ces technologies. Parmi ces pièces, on dénotent les lattices, ces structures en forme de treillis qui possèdent de bonnes propriétés mécaniques tout en limitant leur masse. Ces deux caractéristiques combinées des lattices suscitent l'intérêt de l'industrie aéronautique et automobile, car la réduction de la masse d'un avion ou d'une voiture entraîne des économies sur la consommation de carburant.

La liberté de design qu'offre la fabrication additive permet la distribution précise de la matière au sein d'une pièce. Pour un lattice, la matière se retrouve sur les diverses membrures qui le composent (voir la figure 1.1). Toutefois la distribution de ces membrures repose sur le choix du concepteur. L'approche majoritairement employée consiste à concevoir la pièce solide sur un logiciel de conception assistée par ordinateur (CAD), puis à peupler de membrures cette pièce de manière structurée et conforme (Figure 1.1 au centre), voir par exemple [11, 23]. Ce choix de design de lattice, bien que pratique, ne prend pas en compte l'application pour laquelle le lattice est dédié. Par exemple, lors de la conception d'une pièce mécanique, il s'avère judicieux de densifier le lattice aux endroits où les contraintes sont importantes et de limiter l'apport de matière dans les régions les moins sollicitées. Le lattice devient alors non-structuré (Figure 1.1 à droite).

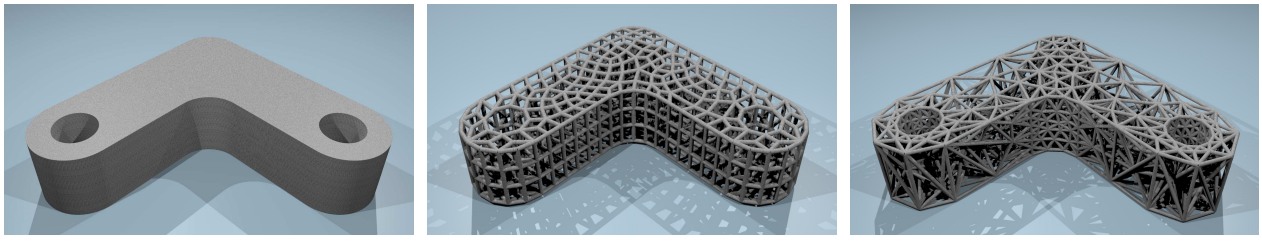


Figure 1.1 Pièce originale (gauche), lattice structuré (centre) et lattice non-strucutré (droite)

Le problème étudié dans le cadre de ce projet de maîtrise est donc celui du design de lattices produit par fabrication additive. On s'intéresse plus particulièrement à remplacer une pièce pleine par un lattice possédant la même enveloppe externe et respectant les mêmes contraintes techniques. On regarde donc en premier lieu les possibilités de design qu'offre la fabrication

additive ainsi que les limitations inhérentes aux différentes technologies disponibles. Par la suite, une revue est effectuée des différentes techniques d'optimisation topologique afin d'analyser le potentiel de chacune de ces méthodes quant à la conception de lattices.

1.1 Fabrication additive

L'ensemble des techniques de fabrication additive repose sur l'ajout progressif de matière, que ce soit de la céramique, du plastique ou du métal, afin de créer une pièce donnée. Ces techniques se placent donc en opposition face aux méthodes conventionnelles d'usinage telles que le découpage, le fraisage, le perçage ou le tournage, qui consistent à soustraire de la matière d'une pièce brute.

En fabrication additive, l'ajout de matière s'effectue couche par couche, c'est-à-dire que la pièce à fabriquer est subdivisée en tranches (voir la Figure 1.2). La machine de fabrication additive crée alors la première couche de la pièce, puis ajoute de la matière pour créer la deuxième couche et ainsi de suite jusqu'à ce que la pièce soit entièrement fabriquée.

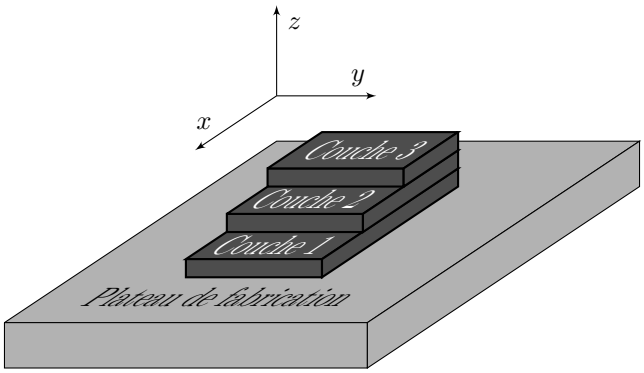


Figure 1.2 Décomposition d'une pièce en couches

1.1.1 Technologies de fabrication additive

De multiples technologies basées sur le principe précédemment décrit ont vu le jour au fil des années. Une revue complète de ces différentes technologies est présentée en [15]. Parmi ces technologies, on note celles entrant dans la catégorie Fused Deposition Modelling (FDM). Cette méthode consiste à déplacer une buse contenant le matériau à l'état liquide (le plus communément du plastique) dans le plan $x - y$ afin de déposer la première couche de matériau. Par la suite, cette buse est légèrement rehaussée selon l'axe z, puis la deuxième couche de matériau est déposée par dessus la précédente. Cette technologie est celle employée dans

la majorité des imprimantes 3D offertes au grand public. La FDM est toutefois loin d'être adaptée à la création de lattices. En effet, les membrures composant le lattice peuvent posséder un angle faible avec le plan $x - y$, ce qui pose un problème, car la buse doit déposer la matière sur des couches inférieures qui sont ici inexistantes (voir la Figure 1.3). Ce type d'imprimante contourne donc le problème en créant un support vertical afin de soutenir ces composantes. Toutefois, pour la création d'un lattice, cet ajout de matière est totalement superflu et diminue donc considérablement l'attractivité du lattice généré.

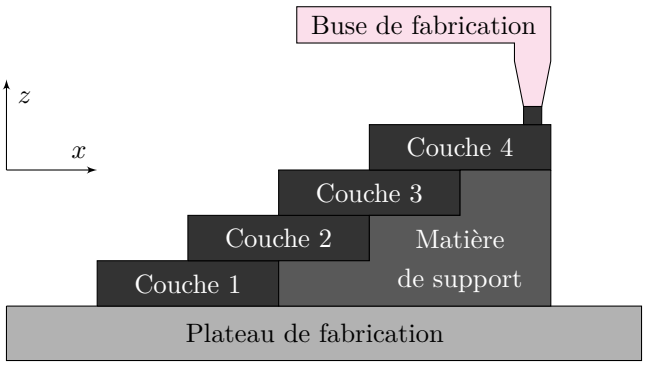


Figure 1.3 Utilisation de supports lors de l'emploi de techniques de type FDM

Les technologies ne présentant pas ce désavantage sont celles de type Powder Bed Fusion. Contrairement à la FDM, la pièce n'est pas créée par l'ajout de matière issue d'une buse, mais de la fusion d'une poudre (métallique ou céramique) reposant sur une plateforme. Une source d'énergie, soit un laser pour la méthode Selective Laser Sintering (SLS), soit un faisceau d'électrons pour la méthode Electron Beam Melting (EBM), est déplacée précisément sur ce lit de poudre afin de créer le motif de la première couche de la pièce. Par la suite, la plateforme sur laquelle repose le lit de poudre est abaissée, puis une mince couche de poudre est ajoutée à l'aide de rouleaux. Une fois cet ajout effectué, le procédé est répété afin de créer les couches suivantes jusqu'à complétion de la pièce.

Puisque chaque couche de la pièce est créée en ayant comme support le lit de poudre issu de la création des couches précédentes (voir la Figure 1.4), la création de membrures possédant un angle faible avec le plan $x - y$ ne nécessite pas l'ajout de supports incorporés à la pièce. On effectue donc l'hypothèse suivante en ce qui a trait à la fabrication du lattice.

Hypothèse H1. On suppose que le lattice est fabriqué par une méthode de type Powder Bed Fusion, soit la SLS ou la EBM.

Ces méthodes, bien que permettant une grande liberté dans le design d'une pièce, ne sont pas exemptes de contraintes de fabrication.

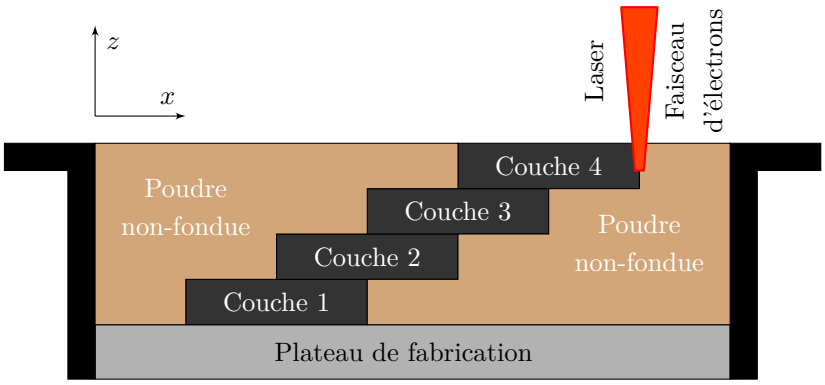


Figure 1.4 Poudre non-fondue supportant les couches supérieures lors de l'emploi de techniques de type SLS ou EBM

1.1.2 Contraintes de fabrication des méthodes de type Powder Based Fusion

Des recherches récentes s'attardent à caractériser l'impact des méthodes SLS et EBM dans la création de lattices. En effet, le procédé de fusion de poudres métalliques ou céramiques induit de nombreuses contraintes thermiques et mécaniques lors de la fabrication d'une pièce. L'article [37] montre tout d'abord que le lattice issu du processus de conception et celui fabriqué peuvent localement diverger tout dépendant de la topologie locale des cellules composant la pièce. En effet, on constate une rupture de certaines membrures et l'adhésion prononcée de poudres partiellement fusionnée sur d'autres membrures. Les auteurs étudient aussi l'impact de l'orientation des membrures selon le plan $x-y$ lors de la fabrication. On note que lorsque cet angle est inférieur à 35°, la membrure présente de fortes déformations. Ces déformations, telles que mentionnées dans [10], engendrent une diminution non-négligeable des propriétés mécaniques de ces membrures.

De plus, les technologies de type Powder Based Fusion possèdent une résolution fixe découlant de la source de chaleur employée. Cette résolution définit la plus petite composante pouvant être créée par la machine de fabrication additive. Dans [37], les auteurs étudient aussi la précision géométrique de différentes structures et constatent que l'intégrité des structures ne peut être assurée lorsque les dimensions caractéristiques sont inférieures à 0.15 mm. Les travaux [20] dressent quant à eux un ensemble de règles guidant le design de pièces issues de technologies de type SLS. Parmi ces règles, on dénote celles spécifiant que des cylindres doivent posséder un diamètre minimal de 0.5 mm et que leur angle avec le plan de fabrication $x-y$ doit être minimalement de 30°. Finalement, les travaux [32] étudient l'impact de paramètres régissant la source de chaleur, tels sa vitesse de passage et le motif de balayage. En analysant les erreurs géométriques pour divers cas tests, ils observent que les structures

possédant un faible angle avec le plan de fabrication possèdent de grandes erreurs géométriques. De plus, ils observent que scanner le lit de poudre de manière linéaire plutôt que concentrique améliore significativement la résolution géométrique des pièces créées au détriment d'une plus grande porosité.

À la lumière de ces résultats, on pose l'hypothèse suivante en ce qui à trait à l'impact de la méthode de fabrication sur le lattice créé.

Hypothèse H2. On suppose que les membrures doivent posséder un diamètre minimal de 0.5mm. On néglige toutefois en première approximation l'impact de l'orientation de ces membrures sur les propriétés physiques. De plus, on néglige l'impact des déformations géométriques des membrures induites par le procédé SLS ou EBM sur ces même propriétés physiques.

1.2 Optimisation topologique

Maintenant que les méthodes de fabrication de lattices ont été introduites et les hypothèses H1 et H2 posées, on regarde de plus près le problème de conception de ces mêmes lattices. Ce problème de design consiste en l'obtention d'une topologie respectant les divers requis techniques pour une pièce donnée. Ces requis peuvent entre autres limiter la masse d'une pièce tout en imposant des restrictions sur les déformations et contraintes que la pièce peut subir. Ce problème de recherche d'une géométrie optimale a été très étudié dans le domaine du génie civil. En effet, on a vite chercher à optimiser des structures en treillis tels des ponts, des pylônes et autres structures, afin de réduire la quantité de matière utilisée tout en assurant le respect des devis techniques. Diverses méthodes d'optimisation topologiques ont donc été développées au fil des années afin d'adresser ce type de problème. La section qui suit présente quelques unes de ces méthodes.

1.2.1 Solid Isotropic Material Penalization

La méthode de la Solid Isotropic Material Penalization, abrégée SIMP, permet d'optimiser l'emplacement de la matière au sein d'un domaine fixe. Cette méthode fut introduite dans les travaux [7] et repose essentiellement sur la création d'une relation continue entre la densité $\rho \in [0, 1]$ d'un matériau et ses propriétés physiques ι (tenseur de rigidité ou conductivité thermique par exemple). Pour une revue plus exhaustive de la méthode SIMP, le lecteur peut se référer à [31]. Les travaux [8] étudient différents choix de relations et analysent leurs

interprétations physiques. La relation la plus souvent employée s'écrit sous cette forme :

$$\iota(\rho) = \rho^p \iota_0.$$

On note ici ι le coefficient d'intérêt, soit le module de Young pour un problème d'élasticité linéaire, soit la conductivité thermique pour un problème de transfert de chaleur. Le terme ι_0 représente la valeur nominale de ce coefficient et p est une constante. Le choix des paramètres d'optimisation consiste donc à attribuer une valeur de ρ à chaque élément issu d'une discrétisation par la méthode des éléments finis (voir la Figure 1.5)

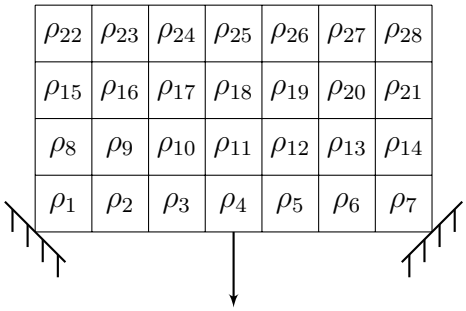


Figure 1.5 Choix des paramètres d'optimisation pour la méthode SIMP

Le problème d'optimisation consistant à minimiser l'énergie de déformation $\mathcal{E}$ d'une structure s'écrit alors ainsi :

$$\min_{U,\rho_i} \mathcal{E}(U,\rho_i) \qquad \text{tel que} \qquad \begin{cases} e(U,\rho_i) = 0 \\ 0 \leq \rho \leq 1 \quad i = 1,\ldots,N \end{cases}. \tag{1.1}$$

On note ici U le champ de déplacement et $e(U,\rho_i)$ la relation d'équilibre [7]. Les auteurs de l'article [3] présentent une implémentation de la méthode SIMP sur MatLab. À titre d'exemple, on résout alors à l'aide de ce code le problème présenté à la Figure 1.5 pour différents paramètres p.

On constate en analysant la Figure 1.6 que l'allure générale des solutions obtenues adoptent la forme d'une arche. Toutefois, des différences notables sont à remarquer entre les 3 résultats. Pour $p = 1$, on constate l'apparition de structures en forme de damier, ce qui n'a pas de sens physiquement, puisque la matière n'est pas reliée à la structure. Ce phénomène de damier s'estompe significativement en employant $p = 3$ sans toutefois disparaître totalement. Afin de remédier à ce phénomène, on emploie des filtres tels que le démontre la solution de droite de la Figure 1.6. L'ajout d'un filtre fait toutefois apparaître des zones de densité intermédiaire ($\rho_i \in]0,1[$). La référence [8] fournit une interprétation physique à ces régions

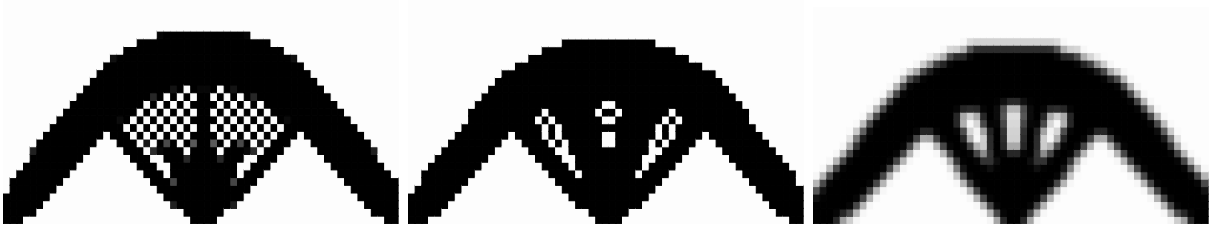


Figure 1.6 Résultats du problème de la Figure 1.5 ($p = 1$ à gauche, $p = 3$ au centre et $p = 3$ avec l'emploi d'un filtre à droite)

de densité intermédiaire.

On constate donc que cette méthode est dépendante des choix de p et du filtre. De plus, cette méthode n'est pas adaptée à l'optimisation topologique de lattices, car l'apparition de membrures nécessite une discrétisation très fine du domaine. Cela augmente donc considérablement le coût en calcul de cette méthode. Une alternative possible à ce problème est alors de remplir de membrures les zones de densité intermédiaire, ce que réalise la compagnie Altair, avec son logiciel OptiStruct [9]. Cet ajout de lattices relève toutefois d'une certaine heuristique quant à la configuration que l'on leur donne.

1.2.2 Ground Structure Method

On regarde maintenant une méthode d'optimisation topologique utilisée en génie civil qui s'intéresse directement à une structure formée de treillis, soit la Ground Structure Method, abrégée GSM. Cette méthode consiste à peupler préalablement un domaine d'une grande quantité de nœuds P_i et de les relier ensemble par des membrures M_i [17, 38]. La Figure 1.7 montre la structure à l'étude avec ce type d'optimisation.

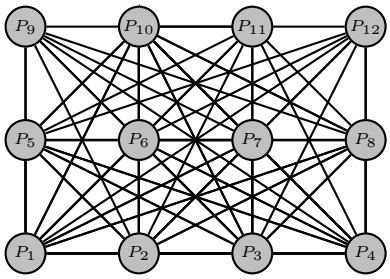


Figure 1.7 Choix des paramètres d'optimisation pour la méthode GSM

Les paramètres d'optimisation du problème consistent, pour la GSM, en les différentes aires A_i de ces membrures.

$$\min_{U,A_i} \mathcal{E}(U, A_i) \qquad \text{tel que} \qquad \begin{cases} e(U, A_i) = 0 \\ A_i \geq 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Lorsqu'une des membrures possède une aire nulle, la relation d'équilibre e dégénère (voir Chapitre 2). Plusieurs travaux contournent ce problème en définissant le problème d'optimisation (1.2) sous sa forme plastique (voir [2, 17, 38]). Avec cette nouvelle formulation, les paramètres A_i peuvent prendre des valeurs nulles, ce qui indique que cette méthode permet la suppression de membrures lorsque celles-ci n'apportent pas de rigidité à la structure. Il est important de noter qu'étant donné que la position des nœuds ne consistent pas en des paramètres d'optimisation, il est nécessaire de peupler initialement la pièce d'une quantité considérable de nœuds afin d'agrandir l'espace solution. On constate toutefois que le nombre de paramètres A_i augmente très vite avec le nombre de nœuds. Par exemple, une structure en 2 dimensions composée d'une grille de 10×10 nœuds possède 4950 membrures, alors qu'une grille de 100×100 nœuds possède plus de 49 millions de membrures. Bien que le problème (1.2) soit dans la plupart du temps linéaire, comparativement au problème (1.1) (pour $p \neq 1$), le nombre élevé de paramètres d'optimisation rend cette méthode moins attrayante.

Afin de remédier à ce problème, les auteurs des références [16, 17] présentent des méthodes consistant à résoudre le problème (1.2) sur une grille grossière. Ils rajoutent ensuite de nouveaux nœuds et de nouvelles membrures et résolvent à nouveau le problème (1.2). Le processus est répété jusqu'à ce qu'un certain critère d'arrêt soit atteint. Des travaux ont été réalisés afin d'étendre cette méthode au cas où l'on souhaite prendre en compte le coût de fabrication [4] ou le flambement [13, 39].

Un des inconvénients de la GSM est le fait que l'espace solution du problème d'optimisation est restreint car les nœuds auxquels sont liées les membrures sont fixes. Afin d'élargir cet espace solution, les références [13, 17] se basent sur les travaux présentés en [2] afin d'incorporer la position des nœuds P_i comme paramètres d'optimisation. Le problème d'optimisation devient alors :

$$\min_{U,A_i,P_i} \mathcal{E}(U, A_i, P_j) \qquad \text{tel que} \qquad \begin{cases} e(U, A_i, P_i) = 0 \\ A_i \geq 0 \\ P_j \in \Omega \end{cases} . \tag{1.3}$$

On note ici Ω le domaine dans lequel les nœuds peuvent se déplacer. Le problème (1.3) est généralement linéaire par rapport à A_i, mais ne l'est pas par rapport à la position des nœuds P_i. Les travaux présentés en [2] permettent encore une fois de reformuler ce problème à condi-

tion qu'on modélise les membrures avec le modèle barre (voir la Section 2.3). Étant donné qu'on veut optimiser la topologie d'un lattice tout en respectant certains requis techniques concernant ses propriétés physiques, il s'avère a priori peu judicieux de restreindre notre étude à un seul modèle unidimensionnel d'élasticité linéaire.

Finalement, les articles [10, 33] étudient directement le problème (1.3). Ce dernier article est même dédié à l'optimisation topologique de lattices produits par fabrication additive. Leurs lattices produits possèdent toutefois très peu de degrés de liberté, ce qui résulte en des lattices relativement grossiers.

1.3 Objectifs de recherche

Maintenant qu'une brève revue de la littérature sur la fabrication additive et l'optimisation est terminée, définissons les objectifs du projet du présent mémoire. L'objectif premier de cette recherche est de développer une méthodologie permettant la conception de lattices sous diverses contraintes de design. Plus précisément, ce mémoire étudie le problème d'optimisation topologique du lattice soumis à des chargements mécaniques permettant la minimisation de son énergie de déformation. Ce choix de fonctionnelle objective se justifie par le fait que cette quantité donne de l'information quant aux déformations et aux contraintes que subie une pièce mécanique. Entre autres, l'énergie de déformation donne une mesure du travail externe effectué sur un système. Finalement, l'équilibre d'un système est atteint lorsque le champ de déplacement u permet de minimiser l'énergie d'un système mécanique, énergie contenant notamment celle de déformation.

On cherche donc le lattice $L_{opt} \in \mathfrak{L}$, où $\mathfrak{L}$ représente l'ensemble des lattices réalisables avec une géométrie externe donnée et $\mathcal{E}$ l'énergie de déformation, tel que :

$$L_{opt} = \underset{L \in \mathfrak{L}}{\operatorname{argmin}} \ \mathcal{E}(L). \tag{1.4}$$

Le second objectif du projet est de vérifier si une procédure adaptative permet d'obtenir une meilleure configuration topologique du lattice. On entend, par procédure adaptative, l'ajout progressif au sein du lattice de matière et la recherche d'une topologie optimale à chacun de ces ajouts. En effet, le problème d'optimisation topologique d'intérêt s'apparente à (1.3), il est donc non-linéaire. En ajoutant successivement de la matière à chaque fois que le problème d'optimisation est résolu, on espère obtenir une meilleure configuration du lattice que si l'on avait directement étudié le problème possédant un grand nombre de paramètres.

Cette adaptation devait initialement être aussi étendue aux modèles d'élasticité linéaire étudiés en les classant de manière hiérarchique. Plus précisément, on souhaite trouver un critère, une mesure permettant d'indiquer lorsqu'il est préférable d'adapter le modèle plutôt que d'adapter le lattice en ajoutant de la matière. De plus amples travaux concernant cette adaptation sont toutefois nécessaires, c'est pourquoi ils ne sont pas présentés dans le mémoire.

La méthodologie de design développée doit présenter les caractéristiques suivantes :

1. Ne pas dépendre de modèles décrivant la physique d'un lattice ;
2. Les paramètres de design doivent être indépendants de la physique ;
3. Nécessiter des coûts modérés en ressources informatiques ;
4. Pouvoir prendre en compte des contraintes de design de nature mécanique et géométrique ;
5. Reposer sur le moins d'heuristiques possibles.

La première caractéristique permet de contourner un des désavantages majeurs de la GSM qui ne considère qu'un seul modèle physique décrivant un treillis. Tel que mentionné précédemment, il semble peu judicieux a priori de se restreindre au seul modèle barre pour décrire un lattice. La deuxième caractéristique permet quant à elle de dissocier clairement la méthode proposée de celle de la SIMP. En effet, les paramètres de design ρ de la SIMP influencent directement les propriétés physiques du matériau. Ces deux premières caractéristiques permettent, entre autres, de séparer clairement la partie modélisation du lattice de la partie optimisation topologique. Finalement, la quatrième caractéristique est énoncée dans l'optique que la méthode développée doit être assez versatile et flexible pour pouvoir traiter différents problèmes d'optimisation topologique. À notre connaissance, une méthode présentant ces caractéristiques n'a pas encore été développée.

Afin d'atteindre cet objectif, on se base sur les articles [10, 33] afin de définir et résoudre le problème d'optimisation topologique. De plus, afin de créer la procédure adaptative, on s'inspire librement des idées présentées dans [16, 17]. Finalement, on exploite les différentes méthodes et théories du domaine de l'optimisation sous contraintes d'équilibre [18] ainsi que du domaine de la génération et de l'adaptation de maillages [21, 27, 34].

1.4 Plan du mémoire

Le mémoire présente tout d'abord au Chapitre 2 les différents modèles unidimensionnels de l'élasticité linéaire permettant de décrire le comportement mécanique d'un lattice. Une hiérarchie de modèles constituée du modèle barre, du modèle d'Euler-Bernoulli et du modèle de Timoshenko décrivent, avec une complexité croissante, la déformation d'un lattice sujet à des chargements sur la frontière.

Le Chapitre 3 est consacré au problème d'optimisation de forme. Le problème d'optimisation est tout d'abord formellement posé dans le contexte de l'optimisation sous contraintes d'équilibre, puis la méthode des points intérieurs est brièvement introduite. Des résultats préliminaires démontrent la nécessité d'ajouter des contraintes géométriques au problème d'optimisation. Ces contraintes et leurs impacts sur les solutions obtenues sont présentés à la fin de ce chapitre.

Le Chapitre 4 expose la procédure adaptative employée afin de résoudre le problème (1.4). Cette procédure consiste à rajouter successivement de la matière au sein du lattice. On y aborde les sujets de raffinement de maillages issu du domaine des éléments finis entre autres. Ce chapitre se termine par la présentation de résultats numériques sur divers cas tests permettant d'analyser la performance et la pertinence de cette méthode de design adaptative. Le mémoire se conclut par une discussion sur les améliorations possibles de la méthode présentée ainsi que ses limitations.

CHAPITRE 2 MODÈLES UNIDIMENSIONNELS D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

Ce chapitre présente les différents modèles unidimensionnels de l'élasticité linéaire qui sont employés afin de décrire le comportement mécanique des lattices. La fonctionnelle énergie en élasticité linéaire est tout d'abord décrite ainsi que son extension au domaine d'intérêt, un lattice. On présente ensuite chacun des modèles unidimensionnels employés.

2.1 Élasticité linéaire

On définit un système mécanique par un domaine Ω soumis à un ensemble de forces volumétriques f_i ainsi que par sa frontière Γ, laquelle est soumise à des forces de traction t_i. Les composantes du tenseur C d'ordre 4 sont données en fonction du module de Young E et du coefficient de Poisson ν. Le module de Young E est le ratio entre les contraintes et les déformations axiales tandis que le coefficient de Poisson ν est le rapport entre les déformations transversales et axiales lorsqu'un matériau est soumis à de la traction ou de la compression [6]. Il est important de noter que les indices i, j, k et l sont utilisés dans le contexte de la notation d'Einstein et qu'ils peuvent indiquer l'orientation x, y ou z.

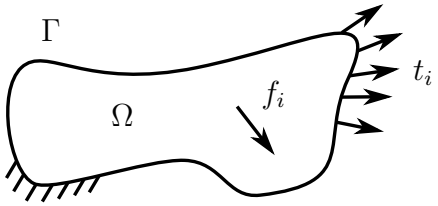


Figure 2.1 Description du domaine Ω et des forces appliquées

On définit l'énergie de déformation de ce système mécanique par la fonctionnelle $\mathcal{E}(u)$ en notant u le déplacement, $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i}\right)$ le tenseur d'ordre 2 des déformations et $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ le tenseur d'ordre 2 des contraintes :

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(u)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_\Omega C_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u)\varepsilon_{ij}(u)\,\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

On introduit ensuite le travail externe $W(u)$ effectué sur ce système :

$$W(u) = \int_\Omega f_i u_i\,\mathrm{d}x + \int_\Gamma t_i u_i\,\mathrm{d}s. \tag{2.2}$$

L'énergie du système $\mathcal{J}(u)$ se définit alors par :

$$\mathcal{J}(u) = \mathcal{E}(u) - W(u) = \int_\Omega \frac{1}{2} C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} - f_i u_i \,\mathrm{d}x - \int_\Gamma t_i u_i \,\mathrm{d}s. \tag{2.3}$$

Maintenant que la fonctionnelle énergie a été posée pour un domaine quelconque, analysons comment elle s'applique à une structure de type lattice.

2.2 Structure de type lattice

On définit un lattice $L \in \mathfrak{L}$ de dimension n_d comme étant l'union de M membrures disjointes T_m. La position et l'orientation de ces membrures sont définies par les N nœuds disjoints P_n. Un exemple de lattice est représenté à la Figure 2.2. On définit ∂L comme étant l'enveloppe externe du lattice.

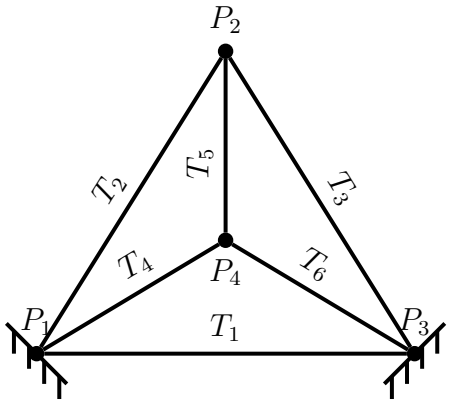


Figure 2.2 Description d'un lattice L

La fonctionnelle énergie $\mathcal{J}(u)$ (2.3) peut alors se réécrire de la manière suivante :

$$\mathcal{J}(u) = \sum_{m=1}^{M} \int_{T_m} \frac{1}{2} C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} - f_i u_i \,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{N} \int_{P_n} \frac{1}{2} C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} - f_i u_i \,\mathrm{d}x - \int_{\partial L} t_i u_i \,\mathrm{d}s. \tag{2.4}$$

On pose les hypothèses suivantes quant au système mécanique défini par le lattice.

Hypothèse H3. Le lattice L est formé d'un matériau isotrope. Ceci implique que le tenseur

de rigidité C d'ordre 4 possède 4 valeurs distinctes :

$$C_{ijkl} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)}(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) = \begin{cases} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \text{si } i=j=k=l \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \text{si } i=j, k=l, i\neq k \\ \frac{E}{2(1+\nu)} & \text{si } i=k,\ j=l,\ i\neq j \\ & \text{ou si } i=l,\ j=k,\ i\neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Hypothèse H4. On suppose que les nœuds P sont de mesure nulle. Tel que mentionné précédemment, le rôle de ces nœuds ne consiste qu'à positionner et orienter les membrures T_m dans l'espace. On note donc $P_n \in \mathbb{R}^{n_d}$.

$$\mathcal{J}(u) = \sum_{m=1}^{M} \int_{T_m} \frac{1}{2} C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} - f_i u_i \,\mathrm{d}x - \int_{\partial L} t_i u_i \,\mathrm{d}s \tag{2.5}$$

Hypothèse H5. Les forces volumétriques (entre autres la gravité) sont considérées négligeables. La fonctionnelle énergie peut donc encore une fois se simplifier comme suit :

$$\mathcal{J}(u) = \sum_{m=1}^{M} \int_{T_m} \frac{1}{2} C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} \,\mathrm{d}x - \int_{\partial L} t_i u_i \,\mathrm{d}s. \tag{2.6}$$

On pose l'hypothèse suivante quant à la physique décrivant la déformation mécanique des membrures du lattice.

Hypothèse H6. On décrit chaque membrure T_m séparément à l'aide de modèles unidimensionnels de l'élasticité linéaire. Ces modèles sont respectivement le modèle barre, le modèle d'Euler-Bernoulli et le modèle de Timoshenko. Chacun de ces modèles considèrent le coefficient de Poisson nul, ce qui implique que le tenseur de rigidité C se réduit à :

$$C_{ijkl} = \begin{cases} E & \text{si } i=j=k=l \\ 0 & \text{si } i=j, k=l, i\neq k \\ \frac{E}{2} & \text{si } i=k,\ j=l,\ i\neq j \text{ ou si } i=l,\ j=k,\ i\neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Finalement, on pose l'hypothèse qui suit concernant la géométrie des membrures composant le lattice.

Hypothèse H7. On suppose aussi que ces membrures sont de forme cylindrique de rayon r constant sur toute leur longueur. L'orientation de ces membrures est définie par la matrice de rotation $R(\alpha, \psi) \in SO(3)$, où α représente l'angle par rapport à l'axe z, alors que ψ représente l'angle par rapport à l'axe y. À l'aide de cette matrice de rotation, on définit un système de coordonnées (ξ, η, ζ) propre à chaque membrure T_m. Prenons par exemple le champ de déplacements $u(x, y, z)$ que l'on veut décrire selon le référentiel de la m-ième membrure :

$$R(\alpha_m, \psi_m)\, u(x, y, z) = R_y(\psi_m) R_z(\alpha_m)\, u(x, y, z) = u(\xi, \eta, \zeta). \tag{2.7}$$

On calcule les matrices $R_z(\alpha_m)$ et $R_y(\psi_m)$ de cette manière :

$$R_z(\alpha_m) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_m) & \sin(\alpha_m) & 0 \\ -\sin(\alpha_m) & \cos(\alpha_m) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_y(\psi_m) = \begin{bmatrix} \cos(\psi_m) & 0 & -\sin(\psi_m) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\psi_m) & 0 & \cos(\psi_m) \end{bmatrix}.$$

Il est important de noter que ce choix de matrice de rotation est arbitraire. On aurait aussi pu choisir l'application $R(\alpha, \theta)$ ou l'application $R(\psi, \theta)$, où θ représente la rotation par rapport à x.

Ces deux dernières hypothèses permettent de simplifier significativement l'analyse des déformations mécaniques. Les trois prochaines sections sont consacrées à la description de ces modèles unidimensionnels ainsi qu'à la formulation de l'énergie (2.6) pour chacun de ces modèles. La présentation de ces sections est librement inspirée de [26].

2.3 Modèle barre

Le premier modèle décrit la déformation élastique d'une membrure T_m soumise uniquement à des forces axiales (voir la Figure 2.3). Cette membrure ne subit alors que de la tension ou de la compression.

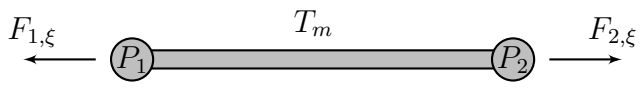


Figure 2.3 Forces appliquées sur une barre de longueur H

Ce modèle très simple repose sur l'hypothèse suivante :

Hypothèse HB1. Le champ de déplacements u pour le modèle barre est tel que $u(\xi,\eta,\zeta) = [u_\xi(\xi), 0, 0]^T$ avec $u_\xi(\xi) \in V$.

Grâce aux hypothèses H3, H6 et HB1, les tenseurs de déformation et de contraintes se simplifient considérablement :

$$\varepsilon_B = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_B = \begin{bmatrix} E\,\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Avec ces déformations et contraintes, la fonctionnelle énergie (2.6) se réduit alors à la fonctionnelle $\mathcal{J}_B(u_\xi(\xi))$ suivante (si l'on ne considère que l'énergie pour la membrure T_m) :

$$\mathcal{J}_B(u_\xi(\xi)) = \int_{T_m} \frac{E}{2} \left(\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\right)^2 \mathrm{d}\xi - \int_{\partial T_m} t_\xi(\xi,\eta,\zeta) u_\xi(\xi)\,\mathrm{d}s.$$

Étant donné que le module de Young E est constant sur tout le domaine et que $u_\xi(\xi)$ ne dépend que de ξ, on peut transformer l'intégrale sur toute la membrure en une intégrale unidimensionnelle. De plus, on note que les forces de tractions t_ξ ne sont présentes qu'aux extrémités des membrures (voir la Figure 2.3). On peut donc simplifier l'intégrale de surface en écrivant $\int_{\partial T_m} t_\xi(\xi,\eta,\zeta)u_\xi(\xi)\,\mathrm{d}s = F_\xi(0)u_\xi(0) + F_\xi(H)u_\xi(H)$ (on note $F_\xi(\xi)$ la force résultante et H la longueur de la membrure). La fonctionnelle énergie se réduit ainsi à :

$$\mathcal{J}_B(u_\xi(\xi)) = \int_0^H \frac{EA}{2} \left(\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\right)^2 \mathrm{d}\xi - \left(F_\xi(0)u_\xi(0) + F_\xi(H)u_\xi(H)\right). \tag{2.9}$$

L'énergie de déformation $\mathcal{J}_B(u_\xi(\xi))$ du modèle barre et le travail $W_B(u_\xi(\xi))$ associés sont :

$$\mathcal{E}_B(u_\xi(\xi)) = \int_0^H \frac{EA}{2} \left(\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\right)^2 \mathrm{d}\xi, \tag{2.10}$$

$$W_B(u_\xi(\xi)) = F_\xi(0)u_\xi(0) + F_\xi(H)u_\xi(H) \tag{2.11}$$

En calculant la première variation de (2.9), on obtient la forme variationnelle (l'espace $V \subset H^1([0,H])$).

$$\int_0^H EA \frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(\xi) \frac{\mathrm{d}v_\xi}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi - F_\xi(0)v_\xi(0) - F_\xi(H)v_\xi(H) = 0 \qquad \forall\, v_\xi(\xi) \in V$$

On effectuant une intégration par parties, on obtient la forme variationnelle suivante :

$$-\int_0^H EA\frac{\mathrm{d}^2 u_\xi}{\mathrm{d}\xi^2}(\xi)v_\xi(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \left(EA\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(H) - F_\xi(H)\right)v_\xi(H) - \left(EA\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(0) + F_\xi(0)\right)v_\xi(0) = 0 \qquad \forall\, v_\xi(\xi) \in V.$$

On peut appliquer le lemme fondamental du calcul des variations [5, p.278] afin d'obtenir le problème aux conditions limites suivant (on note $F_{j,\xi}$ la force appliquée au nœud P_j selon la direction ξ) :

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(EA\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\right) = 0 \qquad \xi \in]0, H[, \tag{2.12a}$$

$$-EA\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(0) = F_{1,\xi}, \qquad EA\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(H) = F_{2,\xi}. \tag{2.12b}$$

On note que les conditions (2.12b) sont des conditions naturelles. La solution analytique de (2.12) est naturellement un polynôme de degré 1. On écrit cette solution en utilisant les interpolants de Lagrange avec comme points les nœuds d'attache de la membrure. On note $U_{j,\xi}$ le déplacement selon ξ du nœud P_j.

$$u_\xi(\xi) = U_{1,\xi}\frac{H-\xi}{H} + U_{2,\xi}\frac{\xi}{H} \tag{2.13}$$

Afin de déterminer les variables $U_{j,\xi}$, on impose les conditions frontières du problème étudié. Supposons que des conditions naturelles sont imposées aux deux extrémités d'une barre, le système d'équation à résoudre est :

$$\frac{AE}{H}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{1,\xi} \\ U_{2,\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1,\xi} \\ F_{2,\xi} \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

Puisque la matrice est de rang 1, ce système possède une infinité de solutions si $F_{1,\xi} = -F_{2,\xi}$, ce qui est cohérent, puisque pour une solution $u_\xi(\xi)$ donné, $u_\xi(\xi) + c$ est aussi une solution. Si $F_{1,\xi} \neq -F_{2,\xi}$, alors le système ne possède aucune solution car la membrure n'est plus alors en équilibre statique. Au moins une condition essentielle doit être imposée à l'une des frontières (en $x = 0$ ou en $x = H$) afin qu'une solution existe et soit unique. Ces conditions frontières essentielles sont imposées en fixant directement les valeurs de $U_{i,\xi}$ correspondantes. Regardons de plus près l'exemple de la Figure 2.4 où 2 barres de dimensions différentes sont étirées.

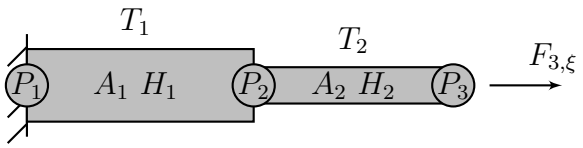


Figure 2.4 Exemple d'une structure unidimensionnelle composée de 2 barres

Le système d'équations pour la première barre est (en imposant une condition essentielle en $x = 0$) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{A_1E}{H_1} & \frac{A_1E}{H_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,\xi} \\ U_{2,\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{2,\xi} \end{bmatrix}.$$

Pour la seconde barre, on constate que la force de traction appliquée en P_2 doit être de même magnitude, mais de sens opposée à $F_{2,\xi}$, puisque la force résultante appliquée à ce nœuds est nulle. On obtient donc ce système d'équations pour la deuxième barre.

$$\begin{bmatrix} \frac{A_2E}{H_2} & -\frac{A_2E}{H_2} \\ -\frac{A_2E}{H_2} & \frac{A_2E}{H_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{2,\xi} \\ U_{3,\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_{2,\xi} \\ F_{3,\xi} \end{bmatrix}$$

En combinant ces deux systèmes, on obtient le système d'équations global suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{A_1E}{H_1} & \frac{A_1E}{H_1} + \frac{A_2E}{H_2} & -\frac{A_2E}{H_2} \\ 0 & -\frac{A_2E}{H_2} & \frac{A_2E}{H_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,\xi} \\ U_{2,\xi} \\ U_{3,\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{3,\xi} \end{bmatrix}.$$

Ce système n'est pas singulier et une solution unique existe. On emploie ensuite (2.13) afin de décrire localement le déplacement d'une membrure et on utilise (2.10) pour calculer l'énergie de déformation de ces barres. On regarde maintenant les problèmes similaire pour une structure bidimensionnelle ou tridimensionnelle dont des exemples sont présentés aux Figures 2.5 et 2.6.

La résolution de problèmes bidimensionnels ou tridimensionnels nécessite l'ajout d'une deuxième hypothèse en ce qui à trait au modèle barre.

Hypothèse HB2. Les nœuds P_n sont modélisés comme des rotules. Le champ de déplacements doit donc être continu aux nœuds P_n.

Pour les problèmes de structures bidimensionnelles ou tridimensionnelles, les variables sont à la fois les déplacements horizontaux $U_{j,x}$, mais aussi les déplacements $U_{j,y}$ selon l'axe vertical

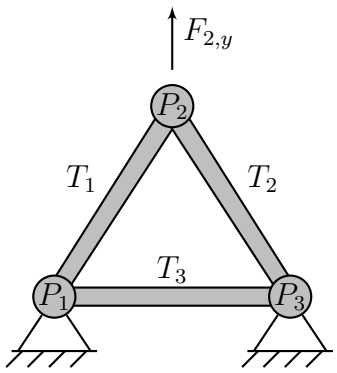


Figure 2.5 Exemple d'une structure bidimensionnelle composée de 3 barres

et $U_{j,z}$ selon l'axe z. On constate toutefois que les systèmes d'équations précédents sont écrits selon le référentiel de la membrure, les équations considèrent alors les déplacements $u(\xi, \eta, \zeta)$ plutôt que les déplacements $u(x, y, z)$ selon le référentiel global. On réécrit donc les systèmes d'équations afin qu'ils dépendent seulement des déplacements globaux, ce qui permet d'imposer facilement la contrainte de continuité de u aux nœuds. On emploie donc la relation (2.7) afin de mettre en lien les déplacements $u(\xi, \eta, \zeta)$ selon l'axe de la membrure et les déplacement $u(x, y, z)$ selon le référentiel global. On utilise aussi cette relation afin de transformer les tractions dans les divers référentiels. Afin d'alléger les équations, on note $\bar{R}_m$ la matrice de rotation de la membrure T_m, U le vecteur de déplacement des nœuds et F le vecteur de forces. On note aussi $\bar{K}_m$ la matrice de rigidité permettant de lier le déplacement U des nœuds aux forces appliquées à l'aide, entre autres, de la relation (2.14).

$$\bar{K}_m = \begin{bmatrix} \frac{A_m E_m}{H_m} & 0 & -\frac{A_m E_m}{H_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A_m E_m}{H_m} & 0 & \frac{A_m E_m}{H_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{R}_m = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$U = [U_{1,x}, U_{1,y}, U_{2,x}, U_{2,y}]^T \quad \text{et} \quad \bar{U} = [U_{1,\xi}, U_{1,\eta}, U_{2,\xi}, U_{2,\eta}]^T$$

$$F = [F_{1,x}, F_{1,y}, F_{2,x}, F_{2,y}]^T \quad \text{et} \quad \bar{F} = [F_{1,\xi}, 0, F_{2,\xi}, 0]^T$$

Le système d'équations (2.14) s'écrit pour la membrure T_m, en fonction des déplacements U, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \bar{K}_m \bar{U} &= \bar{F}, \\ \bar{K}_m \bar{R}_m U &= \bar{R}_m F, \\ \bar{R}_m^T \bar{K}_m \bar{R}_m U &= F. \end{aligned} \tag{2.15}$$

On assemble donc de même manière que pour l'exemple illustré à la Figure 2.4 le système d'équations correspondant à la géométrie et aux conditions frontières d'un problème en 2D ou 3D. Il est important de noter que l'existence et l'unicité des solutions pour les modèles barres dépendent fortement de la configuration de la structure et des conditions frontières imposées. La Figure 2.6 illustre quelques structures possédant ou ne possédant pas de solutions uniques.

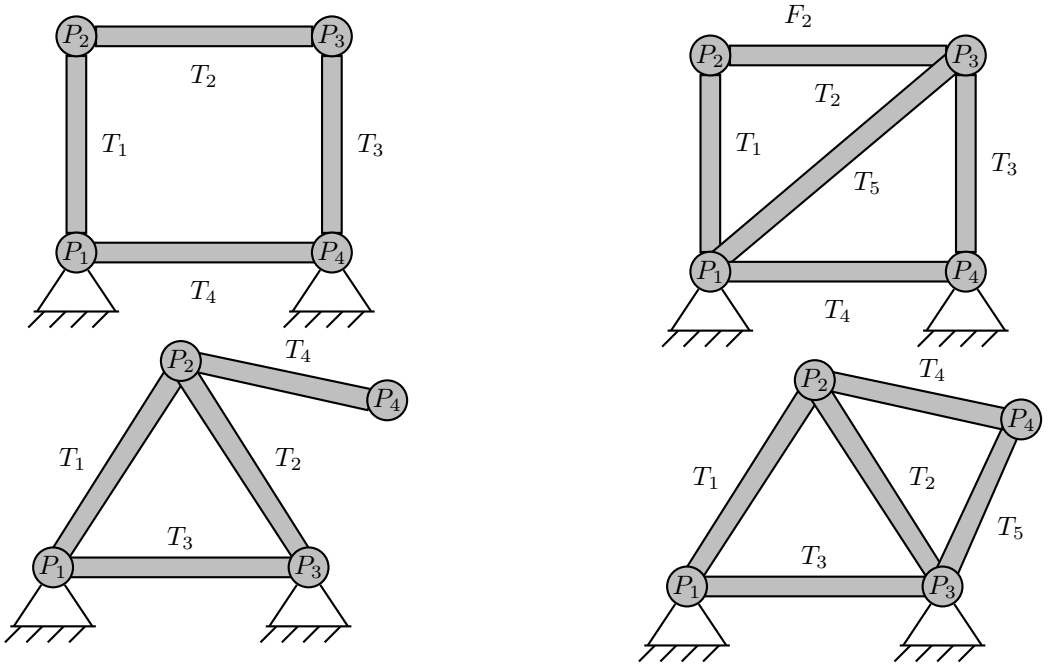


Figure 2.6 Exemple de structures bidimensionnelles instables (à gauche) et de structures stables (à droite) sous les hypothèses du modèle barre

Les travaux [29] présentent une manière simple de vérifier à priori si le système d'équations que l'on obtient est singulier ou non. Les auteurs analysent le nombre de degrés de liberté que chaque membrure possède et le nombre de contraintes imposées par les conditions frontières et les nœuds P_n. Ils obtiennent donc la formule simple suivante où $\mathcal{N}$ est le nombre total de degrés de liberté, $\mathcal{N}_m$ le nombre de degrés de libertés de la m-ième membrure et c_n, le nombre de contraintes imposées :

$$\mathcal{N} = \sum_{m=1}^{M} \mathcal{N}_m - \sum_{n=1}^{N} c_n. \tag{2.16}$$

Si le terme $\mathcal{N} \leq 0$, alors la structure ne possède pas de degré de liberté, ce qui implique qu'il existe une solution unique au problème de déformation élastique issu du modèle barre. Ce critère est donc systématiquement vérifié pour chaque structure étudiée. Le lecteur peut se référer à [29] afin d'obtenir une description précise des termes $\mathcal{N}_m$ et c_n.

Maintenant que la démarche permettant l'emploi du modèle barre dans la description des déformations d'un lattice a été explicitée, appliquons cette même démarche systématique pour le modèle d'Euler-Bernoulli.

2.4 Modèle d'Euler-Bernoulli

Le modèle d'Euler-Bernoulli permet de prendre en compte la flexion d'une poutre soumise à des moments et à des forces tangentielles, en plus de la compression et de la tension du modèle barre. Ce modèle pose l'hypothèse suivante en ce qui concerne les déformations d'une membrure.

Hypothèse HE1. On suppose que le champ de déplacement $u(\xi, \eta, \zeta)$ s'écrit de la manière suivante : $u(\xi, \eta, \zeta) = [u_\xi(\xi) - \eta \frac{\mathrm{d}u_\eta}{\mathrm{d}\xi}(\xi), u_\eta(\xi), 0]^T$ avec $u_\xi(\xi) \in V$ et $u_\eta(\xi) \in W$.

Ce champ de déplacements indique, entre autres, qu'une section transversale de la membrure doit rester perpendiculaire par rapport à sa fibre neutre située au centroïde de la section (voir la Figure 2.7). On note $M_{j,\xi}$ le moment de force appliqué au nœud P_j selon l'axe ξ (à ne pas confondre avec M, le nombre de membrures).

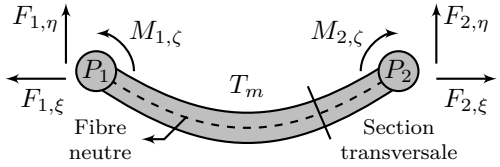


Figure 2.7 Forces appliquées au domaine pour le modèle Euler-Bernoulli

Grâce aux hypothèses H3, H6 et HE1, les tenseurs des déformations et des contraintes se simplifient encore une fois considérablement.

$$\varepsilon_E = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(\xi) - \eta \frac{\mathrm{d}^2 u_\eta}{\mathrm{d}\xi^2}(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_E = \begin{bmatrix} E\left(\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(\xi) - \eta \frac{\mathrm{d}^2 u_\eta}{\mathrm{d}\xi^2}(\xi)\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

On peut alors décrire la fonctionnelle énergie de chacune des membrures pour le modèle

d'Euler-Bernoulli.

$$\mathcal{J}_E(u_\xi(\xi),u_\eta(\xi)) = \int_{T_m} \frac{E}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\right)^2 - \eta E\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\frac{\mathrm{d}^2u_\eta}{\mathrm{d}\xi^2}(\xi) + \frac{\eta^2 E}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2u_\eta}{\mathrm{d}\xi^2}(\xi)\right)^2 \mathrm{d}\xi$$
$$- \int_{\partial T_m} t_\xi(\xi,\eta,\zeta)u_\xi(\xi) - \eta t_\eta(\xi,\eta,\zeta)\frac{\mathrm{d}u_\eta}{\mathrm{d}\xi}(\xi) + t_\eta(\xi,\eta,\zeta)u_\eta(\xi)\,\mathrm{d}s$$

Encore une fois, de nombreux termes de la fonctionnelle énergie se simplifient. On remarque que le deuxième terme de l'intégrale de volume est nul puisque η représente la distance au centroïde de la section. Le troisième terme de l'intégrale de volume fait apparaitre le moment d'inertie I_ζ. Finalement, pour l'intégrale de surface, on note la présence de la force résultante sur les extrémités F_η ainsi que le moment résultant M_ζ. On obtient donc :

$$\mathcal{J}_E(u_\xi(\xi),u_\eta(\xi)) = \int_0^H \frac{EA}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\right)^2 + \frac{EI_\zeta}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2u_\eta}{\mathrm{d}\xi^2}(\xi)\right)^2 \mathrm{d}\xi - F_\xi(0)u_\xi(0) - M_\zeta(0)\frac{\mathrm{d}u_\eta}{\mathrm{d}\xi}(0)$$
$$-F_\eta(0)u_\eta(0) - F_\xi(H)u_\xi(H) - M_\zeta(H)\frac{\mathrm{d}u_\eta}{\mathrm{d}\xi}(H) - F_\eta(H)u_\eta(H). \tag{2.18}$$

L'énergie de déformation $\mathcal{E}_E(u_\xi(\xi),u_\eta(\xi))$ et le travail $W_E(u_\xi(\xi),u_\eta(\xi))$ sont donnés par :

$$\mathcal{E}_E(u_\xi(\xi),u_\eta(\xi)) = \int_0^H \frac{EA}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\right)^2 + \frac{EI_\zeta}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2u_\eta}{\mathrm{d}\xi^2}(\xi)\right)^2 \mathrm{d}\xi, \tag{2.19}$$
$$W_E(u_\xi(\xi),u_\eta(\xi)) = F_\xi(0)u_\xi(0) + M_\zeta(0)\frac{\mathrm{d}u_\eta}{\mathrm{d}\xi}(0) + F_\eta(0)u_\eta(0)$$
$$+F_\xi(H)u_\xi(H) + M_\zeta(H)\frac{\mathrm{d}u_\eta}{\mathrm{d}\xi}(H) + F_\eta(H)u_\eta(H). \tag{2.20}$$

En calculant la première variation de (2.18), on obtient les formes variationnelles suivantes (l'espace $W \subset H^2([0,H])$) :

$$\int_0^H EA\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\frac{\mathrm{d}v_\xi}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\mathrm{d}\xi - F_\xi(0)v_\xi(0) - F_\xi(H)v_\xi(H) = 0 \qquad \forall\, v_\xi(\xi) \in V$$
$$\int_0^H EI_\zeta\frac{\mathrm{d}^2u_\eta}{\mathrm{d}\xi^2}(\xi)\frac{\mathrm{d}^2v_\eta}{\mathrm{d}\xi^2}(\xi)\,\mathrm{d}\xi - M_\zeta(0)\frac{\mathrm{d}v_\eta}{\mathrm{d}\xi}(0) - F_\eta(0)v_\eta(0)$$
$$-M_\zeta(H)\frac{\mathrm{d}v_\eta}{\mathrm{d}\xi}(H) - F_\eta(H)v_\eta(H) = 0 \qquad \forall\, v_\eta(\xi) \in W. \tag{2.21}$$

On effectue deux intégrations par parties sur la forme variationnelle (2.21) afin d'obtenir :

$$\begin{aligned}\int_0^H \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\left(EI_\zeta \frac{\mathrm{d}^2 u_\eta}{\mathrm{d}\xi^2}\right) v_\eta(\xi) + \left(EI_\zeta \frac{\mathrm{d}^2 u_\eta}{\mathrm{d}\xi^2}(H) - M_\zeta(H)\right) \frac{\mathrm{d}v_\eta}{\mathrm{d}\xi}(H) \\ - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(EI_\zeta \frac{\mathrm{d}^2 u_\eta}{\mathrm{d}\xi^2}\right)(H) + F_\eta(H)\right) v_\eta(H) - \left(EI_\zeta \frac{\mathrm{d}^2 u_\eta}{\mathrm{d}\xi^2}(0) + M_\zeta(0)\right) \frac{\mathrm{d}v_\eta}{\mathrm{d}\xi}(0) \\ + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(EI_\zeta \frac{\mathrm{d}^2 u_\eta}{\mathrm{d}\xi^2}\right)(0) - F_\eta(0)\right) v_\eta(0) = 0 \qquad \forall\, v_\eta(\xi) \in W.\end{aligned}$$

On applique encore une fois le lemme fondamental du calcul des variations afin d'obtenir le système découplé suivant :

$$\begin{aligned} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(EA\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\right) = 0 \qquad \xi \in]0, H[\\ -EA\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(0) = F_{1,\xi} \qquad EA\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(H) = F_{2,\xi}\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\left(EI_\zeta \frac{\mathrm{d}^2 u_\eta(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2}\right) = 0 \qquad \xi \in]0, H[, \tag{2.22a}$$

$$-EI_\zeta \frac{\mathrm{d}^2 u_\eta}{\mathrm{d}\xi^2}(0) = M_{1,\zeta}, \qquad EI_\zeta \frac{\mathrm{d}^2 u_\eta}{\mathrm{d}\xi^2}(H) = M_{2,\zeta}, \tag{2.22b}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(EI_\zeta \frac{\mathrm{d}^2 u_\eta}{\mathrm{d}\xi^2}\right)(0) = F_{1,\eta} \qquad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(EI_\zeta \frac{\mathrm{d}^2 u_\eta}{\mathrm{d}\xi^2}\right)(H) = F_{2,\eta}. \tag{2.22c}$$

Puisque le système d'EDP est découplé, la solution $u_\xi(\xi)$ reste la même. Pour ce qui est de la solution $u_\eta(\xi)$, on constate qu'elle consiste en un polynôme de degré 3. On emploie donc les interpolants cubiques d'Hermite afin de décrire cette solution. Le choix de ces interpolants se justifie par la deuxième hypothèse que l'on pose dans le cadre du modèle d'Euler-Bernoulli.

Hypothèse HE2. On suppose que les nœuds P_n sont des joints soudés.

Cette dernière hypothèse implique que les champs de déplacement u_x, u_y et u_z sont continus en ces nœuds et que les champs de rotation φ_x, φ_y et φ_ζ le sont aussi. Pour le modèle d'Euler-Bernoulli, on note que la rotation $\varphi_\zeta(\xi) = \frac{\mathrm{d}u_\eta}{\mathrm{d}\xi}(\xi)$, ce qui permet d'écrire la solution avec l'interpolant d'Hermite (pour un problème en 2D). On note $\Phi_{j,\xi}$ la rotation du nœud P_j

selon l'axe ξ.

$$u_\eta(\xi) = U_{1,\eta}\frac{(H-\xi)^2(H+2\xi)}{H^3} + \Phi_{1,\zeta}\frac{\xi(H-\xi)^2}{H^2} + U_{2,\eta}\frac{\xi^2(3H-2\xi)}{H^3} + \Phi_{2,\zeta}\frac{\xi^2(\xi-H)^2}{H^2} \tag{2.23}$$

Les inconnues $U_{1,\eta}$, $\Phi_{1,\zeta}$, $U_{2,\eta}$ et $\Phi_{2,\zeta}$ sont déterminées en imposant les diverses conditions frontières relatives au problème étudié, de la même manière que pour le modèle barre. On regarde de plus près le système obtenu en imposant les conditions naturelles aux deux extrémités de la membrure.

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{H} & 0 & 0 & -\frac{AE}{H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_\zeta}{H^3} & \frac{6EI_\zeta}{H^2} & 0 & -\frac{12EI_\zeta}{H^3} & \frac{6EI_\zeta}{H^2} \\ 0 & \frac{6EI_\zeta}{H^2} & \frac{4EI_\zeta}{H} & 0 & -\frac{6EI_\zeta}{H^2} & \frac{2EI_\zeta}{H} \\ -\frac{AE}{H} & 0 & 0 & \frac{AE}{H} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_\zeta}{H^3} & -\frac{6EI_\zeta}{H^2} & 0 & \frac{12EI_\zeta}{H^3} & -\frac{6EI_\zeta}{H^2} \\ 0 & \frac{6EI_\zeta}{H^2} & \frac{2EI_\zeta}{H} & 0 & -\frac{6EI_\zeta}{H^2} & \frac{4EI_\zeta}{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,\xi} \\ U_{1,\eta} \\ \Phi_{1,\zeta} \\ U_{2,\xi} \\ U_{2,\eta} \\ \Phi_{2,\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1,\xi} \\ F_{1,\eta} \\ M_{1,\zeta} \\ F_{2,\xi} \\ F_{2,\eta} \\ M_{2,\zeta} \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

On remarque que la matrice n'est que de rang 3, ce qui implique qu'il faut fixer au moins une condition essentielle sur $u_\xi(\xi)$ et $u_\eta(\xi)$ ainsi qu'une autre condition essentielle sur $u_\eta(\xi)$ ou $\varphi_\zeta(\xi)$. La procédure d'assemblage du système d'équations pour des structures composées de plusieurs membrures dans l'espace s'effectue de la même manière que pour le modèle barre. L'analyse de l'existence et de l'unicité d'une solution lorsqu'on étudie des structures bidimensionnelles ou tridimensionnelles est grandement simplifiée lorsque l'on emploie le modèle d'Euler-Bernoulli comparativement au modèle barre. En effet, l'utilisation de l'hypothèse HE2 dans (2.16) fait en sorte qu'un problème de déformation avec le modèle d'Euler-Bernoulli est bien posé si l'on fixe qu'en un seul nœud P_n les déplacements $U_{n,\xi}, U_{n,\eta}$ et la rotation $\Phi_{n,\zeta}$.

2.5 Modèle de Timoshenko

Le modèle de Timoshenko permet de prendre en compte la flexion, comme pour le modèle d'Euler-Bernoulli, mais il incorpore toutefois les contraintes de cisaillement. Ces contraintes de cisaillement sont issues des forces tangentielles appliquées à une membrure. Ce modèle découple donc le déplacement vertical de la rotation de la membrure. Cela se traduit par l'hypothèse suivante :

Hypothèse HT1. On suppose que le champ de déplacements est donné par $u(\xi,\eta,\zeta) = [u_\xi(\xi) - y\varphi_\zeta(\xi), u_\eta(\xi), 0]^T$.

Il est important de noter ici que $\varphi_\zeta(\xi) \neq \frac{\mathrm{d}u_\eta}{\mathrm{d}\xi}(\xi)$, mais que cette fonction représente tout de même la rotation par rapport à l'axe ζ. La Figure 2.8 montre une membrure soumise aux hypothèses de déformations de ce modèle.

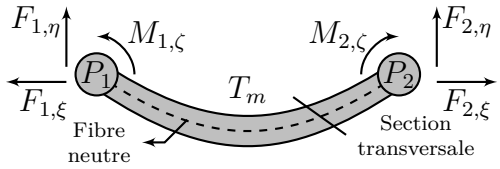


Figure 2.8 Déformations d'une membrure pour le modèle Timoshenko

On constate donc que ce champ de déplacement n'impose plus qu'une section transversale soit perpendiculaire à la fibre neutre. On pose aussi la même hypothèse concernant les noeuds que pour le modèle d'Euler-Bernoulli.

Hypothèse HT2. On suppose que les nœuds P_n sont des joints soudés

Les tenseurs de déformations et de contraintes s'écrivent ainsi :

$$\varepsilon_T = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(\xi) - \eta\frac{\mathrm{d}\varphi_\zeta}{\mathrm{d}\xi}(\xi) & \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u_\eta}{\mathrm{d}\xi}(\xi) - \varphi_\zeta(\xi)\right) & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u_\eta}{\mathrm{d}\xi}(\xi) - \varphi_\zeta(\xi)\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\sigma_T = \begin{bmatrix} E\left(\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(\xi) - \eta\frac{\mathrm{d}\varphi_\zeta}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\right) & \frac{E}{4}\left(\frac{\mathrm{d}u_\eta}{\mathrm{d}\xi}(\xi) - \varphi_\zeta(\xi)\right) & 0 \\ \frac{E}{4}\left(\frac{\mathrm{d}u_\eta}{\mathrm{d}\xi}(\xi) - \varphi_\zeta(\xi)\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

Le tenseur de contrainte permet de confirmer que l'hypothèse HT1 ajoute les contraintes de cisaillement absentes des 2 premiers modèles. Toutefois, cette contrainte de cisaillement reste constante sur l'ensemble d'une section transversale, ce qui n'est pas représentatif de la réalité. On introduit donc un facteur de correction noté K_c qui varie selon la section transversale employée. Étant donné que l'on considère que des membrures sont de forme cylindrique, on emploie $K_c = \frac{9}{10}$ [26, p.159]. Avec ces tenseurs, on calcule l'énergie de déformation du modèle Timoshenko.

$$\mathcal{J}_T(u_\xi(\xi), u_\eta(\xi), \varphi_\zeta(\xi)) = \int_{T_m} \frac{E}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\right)^2 - E\eta\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\frac{\mathrm{d}\varphi_\zeta}{\mathrm{d}\xi}(\xi) + \frac{\eta^2 E}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi_\zeta}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\right)^2$$
$$+\frac{EK_c}{4}\left(\frac{\mathrm{d}u_\eta}{\mathrm{d}\xi}(\xi) - \varphi_\zeta(\xi)\right)^2 \mathrm{d}\xi - \int_{\partial T_m} t_\xi(\xi,\eta,\zeta)u_\xi(\xi) - \eta t_\xi(\xi,\eta,\zeta)\varphi_\zeta(\xi) + t_\eta(\xi,\eta,\zeta)u_\eta(\xi)\,\mathrm{d}s \tag{2.26}$$

En appliquant les mêmes opérations que pour les modèles précédents, on obtient la fonctionnelle énergie simplifiée.

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_T(u_\xi(\xi),u_\eta(\xi),\varphi_\zeta(\xi)) = \int_0^H \frac{EA}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\right)^2 + \frac{EI_\zeta}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi_\zeta}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\right)^2 \\ +\frac{EAK_c}{4}\left(\frac{\mathrm{d}u_\eta}{\mathrm{d}\xi}(\xi)-\varphi_\zeta(\xi)\right)^2 \mathrm{d}\xi - F_\xi(0)u_\xi(0) - M_\zeta(0)\varphi_\zeta(0) \\ -F_\eta(0)u_\eta(0) - F_\xi(H)u_\xi(H) - M_\zeta(H)\varphi_\zeta(H) - F_\eta(H)u_\eta(H)\end{aligned} \tag{2.27}$$

On effectue encore une fois le calcul des premières variations afin d'obtenir les formulations variationnelles.

$$\begin{aligned}\int_0^H EA\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\frac{\mathrm{d}v_\xi}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi - F_\xi(0)v_\xi(0) - F_\xi(H)v_\xi(H) = 0 \qquad \forall\, v_\xi(\xi)\in V \\ \int_0^H \frac{EAK_s}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u_\eta}{\mathrm{d}\xi}(\xi)-\varphi_\zeta(\xi)\right)\frac{\mathrm{d}v_\eta}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi - F_\eta(0)v_\eta(0) - F_\eta(H)v_\eta(H) = 0 \qquad \forall\, v_\eta(\xi)\in V\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}\int_0^H EI_\zeta\frac{\mathrm{d}\varphi_\zeta}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\frac{\mathrm{d}\psi_\zeta}{\mathrm{d}\xi}(\xi) + \frac{EAK_s}{2}\left(\varphi_\zeta(\xi)-\frac{\mathrm{d}u_\eta}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\right)\psi_\zeta(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ -M_\zeta(0)\psi_\zeta(0) - M_\zeta(H)\psi_\zeta(H) = 0 \qquad \forall\,\psi_\zeta(\xi)\in V\end{aligned} \tag{2.29}$$

On intègre par parties (2.28) et (2.29) afin d'obtenir :

$$\begin{aligned}-\int_0^H \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{EAK_s}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u_\eta}{\mathrm{d}\xi}(\xi)-\varphi_\zeta(\xi)\right)\right)v_\eta(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \left(\frac{EAK_s}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u_\eta}{\mathrm{d}\xi}(0)-\varphi_\zeta(0)\right)+F_\eta(0)\right)v_\eta(0) \\ +\left(\frac{EAK_s}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u_\eta}{\mathrm{d}\xi}(H)-\varphi_\zeta(H)\right)-F_\eta(H)\right)v_\eta(H) = 0 \qquad \forall\, v_\eta(\xi)\in V,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^H \left(\frac{EAK_s}{2}\left(\varphi_\zeta(\xi)-\frac{\mathrm{d}u_\eta}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(EI_\zeta\frac{\mathrm{d}\varphi_\zeta}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\right)\right)\psi_\zeta(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ +\left(EI_\zeta\frac{\mathrm{d}\varphi_\zeta}{\mathrm{d}\xi}(H)-M_\zeta(H)\right)\psi_\zeta(H) - \left(EI_\zeta\frac{\mathrm{d}\varphi_\zeta}{\mathrm{d}\xi}(0)+M_\zeta(0)\right)\psi_\zeta(0) = 0 \qquad \forall\,\psi_\zeta(\xi)\in V.\end{aligned}$$

En appliquant le théorème fondamental du calcul des variations, on obtient le système d'équa-

tions différentielles couplées :

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(EA\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\right)=0 \qquad \xi\in]0,H[,$$
$$-EA\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(0)=F_{1,\xi}, \qquad EA\frac{\mathrm{d}u_\xi}{\mathrm{d}\xi}(H)=F_{2,\xi},$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{EAK_s}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u_\eta}{\mathrm{d}\xi}(\xi)-\varphi_\zeta(\xi)\right)\right)=0 \qquad \xi\in]0,H[, \tag{2.30a}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(EI_\zeta\frac{\mathrm{d}\varphi_\zeta}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\right)+\frac{EAK_s}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u_\eta}{\mathrm{d}\xi}(\xi)-\varphi_\zeta(\xi)\right)=0 \qquad \xi\in]0,H[, \tag{2.30b}$$
$$-EI_\zeta\frac{\mathrm{d}\varphi_\zeta}{\mathrm{d}\xi}(0)=M_{1,\zeta}, \qquad EI_\zeta\frac{\mathrm{d}\varphi_\zeta}{\mathrm{d}\xi}(H)=M_{2,\zeta}, \tag{2.30c}$$
$$-\frac{EAK_s}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u_\eta}{\mathrm{d}\xi}(0)-\varphi_\zeta(0)\right)=F_{1,\eta}, \qquad \frac{EAK_s}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u_\eta}{\mathrm{d}\xi}(H)-\varphi_\zeta(H)\right)=F_{2,\eta}. \tag{2.30d}$$

On constate que les équations (2.30a) et (2.30a) peuvent être simplifiées (en mettant aussi en évidence les termes E et I_ζ étant donné qu'ils ne dépendent pas de ξ).

$$\frac{\mathrm{d}^3\varphi_\zeta}{\mathrm{d}\xi^3}(\xi)=0 \qquad \xi\in]0,H[\tag{2.31a}$$
$$\frac{\mathrm{d}u_\eta}{\mathrm{d}\xi}(\xi)=\varphi_\zeta(\xi)-\frac{2I_\zeta}{AK_s}\frac{\mathrm{d}^2\varphi_\zeta}{\mathrm{d}\xi^2}(\xi) \qquad \xi\in]0,H[\tag{2.31b}$$

On remarque clairement la différence entre le modèle Timoshenko et le modèle Bernoulli en analysant les équations (2.30). On remarque aussi que les solutions analytiques $u_\eta(\xi)$ et $\varphi_\zeta(\xi)$ consistent en des polynômes de degré 3 et de degré 2 respectivement :

$$u_\eta(\xi)=a_0+\left(a_1-\frac{2I_z}{K_sA}a_3\right)\xi+\frac{a_2}{2}\xi^2+\frac{a_3}{6}\xi^3, \tag{2.32a}$$
$$\varphi_\zeta(\xi)=a_1+a_2\xi+\frac{a_3}{2}\xi^2. \tag{2.32b}$$

Ce choix des coefficients a_0, a_1, a_2 et a_3 n'est toutefois pas adéquat pour décrire $u_\eta(\xi)$ et $\varphi_\zeta(\xi)$, car on voudrait que les variables correspondent aux déplacements aux extrémités $U_{1,\eta}, U_{2,\eta}$ et les rotations aux extrémités $\Phi_{1,\zeta}, \Phi_{2,\zeta}$. Ce choix de variables permet de contraindre de manière simple la continuité des déplacements et des rotations aux nœuds, car on les suppose rigides (voir l'hypothèse HT2). On écrit alors les variables a_0, a_1, a_2 et a_3 en fonction de $U_{1,\eta}, U_{2,\eta}, \Phi_{1,\zeta}, \Phi_{2,\zeta}$. On applique ensuite les conditions naturelles (2.30c) et (2.30d) afin

d'obtenir le système d'équations suivant :

$$\frac{EAI_\zeta K_s}{H(H^2AK_s+24I_\zeta)}\begin{bmatrix} 12 & 6H & -12 & 6H \\ 6H & \frac{4(H^2AK_s+6I_\zeta)}{AK_s} & -6H & \frac{2(H^2AK_s-12I_\zeta)}{AK_s} \\ -12 & -6H & 12 & -6H \\ 6H & \frac{2(H^2AK_s-12I_\zeta)}{AK_s} & -6H & \frac{4(H^2AK_s+6I_\zeta)}{AK_s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{1,\eta} \\ \Phi_{1,\zeta} \\ U_{2,\eta} \\ \Phi_{2,\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1,\eta} \\ M_{1,\zeta} \\ F_{2,\eta} \\ M_{2,\zeta} \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

On regarde maintenant l'ensemble du problème (2.30) afin d'obtenir le système suivant (on note $\Lambda = \frac{EAI_\zeta K_s}{H(H^2AK_s+24I_\zeta)}$ afin d'alléger les équations) :

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{H} & 0 & 0 & -\frac{AE}{H} & 0 & 0 \\ 0 & 12\Lambda & 6H\Lambda & 0 & -12\Lambda & 6H\Lambda \\ 0 & 6H\Lambda & \frac{4(H^2AK_s+6I_\zeta)}{AK_s}\Lambda & 0 & -6H\Lambda & \frac{2(H^2AK_s-12I_\zeta)}{AK_s}\Lambda \\ -\frac{AE}{H} & 0 & 0 & \frac{AE}{H} & 0 & 0 \\ 0 & -12\Lambda & -6H\Lambda & 0 & 12\Lambda & -6H\Lambda \\ 0 & 6H\Lambda & \frac{2(H^2AK_s-12I_\zeta)}{AK_s}\Lambda & 0 & -6H\Lambda & \frac{4(H^2AK_s+6I_\zeta)}{AK_s}\Lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{1,\xi} \\ U_{1,\eta} \\ \Phi_{1,\zeta} \\ U_{2,\xi} \\ U_{2,\eta} \\ \Phi_{2,\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1,\xi} \\ F_{1,\eta} \\ M_{1,\zeta} \\ F_{2,\xi} \\ F_{2,\eta} \\ M_{2,\zeta} \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

On applique alors la même démarche afin de calculer les déformations que pour le modèle barre et Euler-Bernoulli. Tel que constaté dans le modèle Euler-Bernoulli, l'hypothèse HT2 permet de simplifier grandement l'analyse de stabilité de la structure. On constate encore une fois qu'il suffit de fixer les déplacements et les rotations d'un seul nœud de la structure afin que $\mathcal{N}$ dans l'équation (2.16) soit négatif.

Dans le but d'uniformiser la présentation des différents modèles, on note U les différentes variables discrètes (U et Φ) décrivant le champ de déplacement u . On note que $U \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{N_U}$, où $N_U = n_d N$ pour le modèle barre et $N_U = 3(n_d - 1)N$ pour les modèles d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko. On introduit l'application $e(U)$ (e pour équilibre) qui calcule le résidu des différents modèles présentés précédemment.

$$\begin{aligned} e : \mathcal{U} &\to \mathbb{R}^{N_U} \\ U &\mapsto e(U) \end{aligned}$$

La résolution des différents modèles unidimensionnels d'élasticité linéaire consiste donc à trouver U tel que $e(U) = 0$.

Il est important de mentionner que l'utilisation des modèles barre, d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko afin de modéliser les déformations mécaniques d'un lattice ne représente qu'un

choix simplificateur. En effet, on peut facilement obtenir les solutions analytiques de ces modèles, sous les diverses hypothèses mentionnées dans ce chapitre. Toutefois, rien n'empêche l'emploi de modèles plus complexes tels des modèles d'élasticité linéaire tridimensionnel ou des modèles d'élasticité non-linéaire. D'autres modèles prenant en compte le flambement des membrures ou la résistance des nœuds peuvent être aussi considérées. Finalement, il est à noter que les résultats obtenus dans le cadre de ce mémoire sont issus d'une version adimensionnelle des diverses quantités et équations présentées dans ce chapitre. On présente brièvement la procédure d'adimensionnalisation employée.

2.6 Adimensionnalisation

Dans l'optique de mettre à l'échelle les différents systèmes d'équations présentés, on les transforme afin de les rendre sans unités physiques. Cette étape s'avère importante dans le contexte où la relation d'équilibre $e(U)$ et l'énergie de déformation $\mathcal{E}(U)$ sont des quantités impliquées dans les problèmes d'optimisation décrits dans le prochain chapitre. En effet, il faut s'assurer que la fonctionnelle objective et son gradient soient du même ordre de grandeur que les contraintes et leur matrice jacobienne afin d'assurer le bon fonctionnement du solveur IPOPT.

Afin de rendre adimensionnelles les diverses quantités physiques présentes dans les équations, on définit des grandeurs caractéristiques. Étant donné que les seules unités présentes sont les mètres et les newtons, on choisit comme grandeurs caractéristiques $r_{car} = \max_m r_m$, où r représente le rayon d'un membrure et $F_{car} = \max_n ||F_n||_2$, une mesure de la force maximale appliquée au lattice. On peut donc regarder les systèmes d'équations adimensionnelles en effectuant ces transformations (on note par un tilde les quantités adimensionnelles).

$$\tilde{x} = \frac{x}{r_{car}} \qquad \tilde{\xi} = \frac{\xi}{r_{car}} \qquad \tilde{u} = \frac{u}{r_{car}} \qquad \tilde{r} = \frac{r}{r_{car}}$$

$$\tilde{H} = \frac{H}{r_{car}} \qquad \tilde{A} = \frac{A}{r_{car}^2} \qquad \tilde{I} = \frac{I}{r_{car}^4} \qquad \tilde{F} = \frac{F}{F_{car}}$$

$$\tilde{M} = \frac{M}{F_{car} \cdot r_{car}} \qquad \tilde{E} = \frac{E \cdot r_{car}^2}{F_{car}}$$

Ainsi, au lieu de résoudre sur chaque membrure le système d'équations (2.12) par exemple,

on résout plutôt celui-ci :

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{\xi}}\left(\tilde{E}\tilde{A}\frac{\mathrm{d}\tilde{u}_\xi}{\mathrm{d}\tilde{\xi}}(\tilde{\xi})\right) = 0 \qquad \tilde{\xi} \in]0, \tilde{H}[,$$
$$-\tilde{E}\tilde{A}\frac{\mathrm{d}\tilde{u}_\xi}{\mathrm{d}\tilde{\xi}}(0) = \tilde{F}_{1,\xi}, \qquad \tilde{E}\tilde{A}\frac{\mathrm{d}\tilde{u}_\xi}{\mathrm{d}\tilde{\xi}}(\tilde{H}) = \tilde{F}_{2,\xi}.$$

Maintenant que les trois modèles unidimensionnels d'élasticité linéaire sont décrits, on peut aborder le prochain chapitre qui traite de l'étude du problème d'optimisation de forme d'un lattice pour une topologie fixe.

CHAPITRE 3 OPTIMISATION DE FORME DE LATTICES

Ce Chapitre décrit le problème d'optimisation de forme permettant d'obtenir, à partir d'un lattice initial, un lattice dont la forme a été optimisée. À partir des modèles décrits au chapitre précédent, on désire maintenant résoudre le problème consistant à trouver l'emplacement de la matière au sein du lattice permettant la minimisation d'une certaine fonction objective. Ainsi qu'il a été mentionné dans l'introduction, de nombreuses méthodes ont été proposées afin d'optimiser la topologie de structures composées de treillis tel des ponts, des tours ou des pylônes ([13, 33] entre autres). Certaines de ces méthodes ont même été appliquées à l'optimisation de forme de lattice produit par fabrication additive [10].

Le présent Chapitre porte donc sur l'adaptation de ces méthodes afin de les inscrire dans le contexte plus général de l'optimisation sous contraintes d'équilibre [18]. Ce cadre permet de traiter de manière cohérente l'optimisation peu importe le modèle physique employé. De plus, en adoptant la méthode *discrétiser puis optimiser*, on différencie clairement la partie optimisation de la partie résolution des équations différentielles partielles (voir la figure 3.1). Cela permet d'utiliser le solveur libre IPOPT (Interior Point Optimizer) pour résoudre le problème discret d'optimisation, alors qu'un code développé sous l'environnement MatLab décrit les modèles barre, Euler-Bernoulli et Timoshenko.

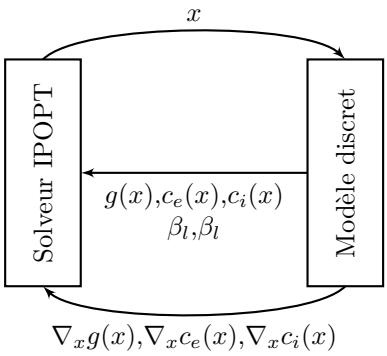


Figure 3.1 Schéma de la méthode *discrétiser puis optimiser*

Ce Chapitre présente tout d'abord la méthode des points intérieurs ainsi que le fonctionnement général du solveur IPOPT. On pose ensuite la formulation du problème d'optimisation de forme du lattice. On décrit par la suite la nature des contraintes géométriques ajoutées au problème d'optimisation. Finalement, le chapitre se conclut par la présentation de quelques résultats numériques de l'optimisation de forme de lattice.

3.1 Problème d'optimisation et solveur IPOPT

Le solveur IPOPT [36] permet de résoudre des problèmes d'optimisation non-linéaire comportant des contraintes d'égalité et d'inégalité ainsi que des bornes. Le choix de solveur se justifie tout d'abord parce qu'il permet de traiter des problèmes dont la fonctionnelle objective ainsi que les contraintes d'égalité et d'inégalité sont non-linéaires. De plus, ce solveur est libre et une interface permet de l'utiliser au sein de l'environnement MatLab [1]. Finalement, le fonctionnement du solveur est décrit en détails dans l'article [36].

Le solveur IPOPT permet de résoudre des problèmes se présentant sous la forme suivante :

$$\min_{\beta_l \leq x \leq \beta_u} g(x) \qquad \text{tel que} \qquad \begin{cases} c_e(x) = 0, & e = 1 \dots N_e \\ c_i(x) \geq 0, & i = 1 \dots N_i \end{cases} .$$

On note les variables d'optimisation x, la fonctionnelle objective $g(x)$, les contraintes d'égalité et d'inégalité $c_e(x)$ et $c_i(x)$ respectivement, et les bornes inférieures β_l et supérieures β_u. Les contraintes d'inégalité peuvent être transformées en contraintes d'égalité en introduisant des variables d'écart (slack variables) s et les bornes peuvent être remaniées.

$$\min_{x,s} g(x) \qquad \text{tel que} \qquad \begin{cases} c_e(x) = 0 & c_i(x) - s = 0 \\ x - \beta_l \geq 0 & \beta_u - x \geq 0 \\ s \geq 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Afin de résoudre ce problème d'optimisation, on introduit le lagrangien :

$$\mathcal{L}(x, s, \lambda_e, \lambda_i, \lambda_l, \lambda_u, \lambda_s) = g(x) - \lambda_e^T c_e(x) - \lambda_i^T (c_i(x) - s) - \lambda_l^T (x - \beta_l) - \lambda_u^T (\beta_u - x) - \lambda_s^T s.$$

On obtient ensuite les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) du problème (3.1) [25].

$$\begin{gathered} \nabla_x \mathcal{L} = \nabla_x g(x) - \nabla_x c_e(x)^T \lambda_e - \nabla_x c_i(x)^T \lambda_i - \lambda_l + \lambda_u = 0 \\ \nabla_s \mathcal{L} = \lambda_i - \lambda_s = 0 \\ \begin{aligned} c_e(x) &= 0 & \lambda_l(x - \beta_l) &= 0 \\ c_i(x) - s &= 0 & \lambda_u(\beta_u - x) &= 0 \\ x - \beta_l &\geq 0 & \lambda_s^T s &= 0 \\ \beta_u - x &\geq 0 & s, \lambda_l, \lambda_u, \lambda_s &\geq 0 \end{aligned} \end{gathered} \tag{3.2}$$

On remarque que la deuxième condition de KKT ainsi que la dernière spécifient que $\lambda_i =$

$\lambda_s \geq 0$. En remplaçant λ_s par λ_i dans (3.2), on obtiendrait les conditions de KKT du problème original (3.1). Ainsi, l'introduction de variables d'écart s n'altère en rien le problème d'optimisation initial (3.1).

3.1.1 Méthode des points intérieurs

La méthode des points intérieurs permet essentiellement d'incorporer les contraintes d'inégalité dans la fonctionnelle objective à l'aide d'une barrière logarithmique [25]. Pour le problème (3.1), on transforme le problème d'optimisation en celui-ci :

$$\begin{aligned} &\min_{x,s}\ g(x) - \mu \ln(x - \beta_l) - \mu \ln(\beta_u - x) - \mu \ln(s), \\ &\text{tel que} \quad \begin{cases} c_e(x) = 0 \\ c_i(x) - s = 0 \end{cases}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Le paramètre μ est choisi arbitrairement petit et est appelé à décroître. En effet, plus celui-ci est grand, plus la pénalisation de la fonctionnelle objective augmente si x est proche des bornes ou si $c_i(x)$ est proche de zéro. En diminuant progressivement la valeur de μ, on permet alors à x de se rapprocher des bornes et de $c_i(x) = 0$.

On définit maintenant le lagrangien $\mathcal{L}(x, s, \lambda_e, \lambda_i)$ du problème d'optimisation (3.3).

$$\mathcal{L}(x, s, \lambda_e, \lambda_i) = g(x) - \mu \ln(x - \beta_l) - \mu \ln(\beta_u - x) - \mu \ln(s) - \lambda_e^T c_e(x) - \lambda_i^T (c_i(x) - s)$$

On pose ensuite les conditions KKT du problème (3.3). Afin de simplifier les notations, on note X= diag(x), S = diag(s), B_l = diag(β_l), B_u = diag(β_u), Λ_i = diag(λ_i) et $\mathbf{e} = [1, 1, \ldots, 1]^T$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L} = \nabla_x g(x) - \mu(X - B_l)^{-1}\mathbf{e} + \mu(B_u - X)^{-1}\mathbf{e} - \nabla_x c_e(x)^T \lambda_e - \nabla_x c_i(x)^T \lambda_i = 0, \\ \nabla_s \mathcal{L} = S\lambda_i - \mu\mathbf{e} = 0, \\ c_e(x) = 0, \\ c_i(x) - s = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

En analysant les conditions de KKT (3.4), on remarque que celles-ci divergent quelques peu des conditions de KKT (3.2). En effet, ni les diverses conditions de complémentarité ni les contraintes d'inégalité n'apparaissent en (3.4) étant donné que celles-ci sont introduites dans la fonctionnelle objective. Toutefois la deuxième condition de KKT de (3.4) $S\lambda_i = \mu\mathbf{e}$

s'avère être une version relaxée de la contrainte de complémentarité $s^T\lambda_i = 0$. Imposer la complémentarité s'avère difficile en pratique, c'est pour cela que l'on emploie ce type de contrainte relaxée provenant de la barrière logarithmique. On peut retrouver les contraintes de complémentarité relaxées associées aux bornes en posant $\lambda_l = \mu(X - B_l)\mathbf{e}$ et $\lambda_u = \mu(B_u - X)\mathbf{e}$. Les conditions de KKT (3.4) deviennent alors :

$$\begin{aligned} &\nabla_x g(x) - \lambda_l + \lambda_u - \nabla_x c_e(x)^T\lambda_e - \nabla_x c_i(x)^T\lambda_i = 0, \\ &\quad S\lambda_i - \mu\mathbf{e} = 0, \qquad\qquad c_e(x) = 0, \\ &\quad (X - B_l)\lambda_l - \mu\mathbf{e} = 0, \qquad c_i(x) - s = 0. \\ &\quad (B_u - X)\lambda_u - \mu\mathbf{e} = 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.1.2 Description de l'algorithme du solveur IPOPT

Le solveur IPOPT applique la méthode des points intérieurs décrite précédemment afin de résoudre le problème d'optimisation. Ce solveur emploie la méthode de recherche linéaire afin d'obtenir, à partir d'une approximation initiale $(x^0, s^0, \lambda_e^0, \lambda_i^0, \lambda_l^0, \lambda_u^0)$, les itérés $(x^k, s^k, \lambda_e^k, \lambda_i^k, \lambda_l^k, \lambda_u^k)$ s'approchant d'un minimum local lorsque $k \to \infty$. Pour ce faire, ces itérés sont calculés ainsi :

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \alpha d_x, & & \\ s^{k+1} &= s^k + \alpha d_s, & \lambda_l^{k+1} &= \lambda_l^k + \alpha_\lambda d_{\lambda_l}, \\ \lambda_e^{k+1} &= \lambda_e^k + \alpha d_{\lambda_e}, & \lambda_u^{k+1} &= \lambda_u^k + \alpha_\lambda d_{\lambda_u}. \\ \lambda_i^{k+1} &= \lambda_i^k + \alpha d_{\lambda_i}, & & \end{aligned} \tag{3.6}$$

On note d les directions de descente et α, α_λ, les longueurs de pas. Afin de déterminer les diverses directions de descente, le solveur IPOPT applique l'algorithme de Newton afin de résoudre le système non-linéaire des conditions de KKT (3.5). Ce système se nomme habituellement le système primal-dual.

$$\begin{bmatrix} \nabla_{xx}\mathcal{L}^k & 0 & -\nabla_x c_e(x^k)^T & -\nabla_x c_i(x^k)^T & -I & I \\ 0 & \Lambda_i^k & 0 & S & 0 & 0 \\ -\nabla_x c_e(x^k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nabla_x c_i(x^k) & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda_l^k & 0 & 0 & 0 & X^k & 0 \\ \Lambda_u^k & 0 & 0 & 0 & 0 & -X^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_s \\ d_{\lambda_e} \\ d_{\lambda_i} \\ d_{\lambda_l} \\ d_{\lambda_u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_x\mathcal{L}^k \\ S^k\lambda_i^k - \mu\mathbf{e} \\ c_e(x^k) \\ c_i(x^k) - s^k \\ (X^k - B_l)\lambda_l^k - \mu\mathbf{e} \\ (B_u - X^k)\lambda_u^k - \mu\mathbf{e} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Ce système n'est toutefois pas résolu directement, de nombreuses substitutions et opérations permettent de réduire la taille de ce système et de le rendre symétrique [36, p.29]. Il reste maintenant à déterminer les longueurs de pas α et α_λ. Ces longueurs de pas sont déterminées à l'aide d'un filtre présenté dans [35]. Ce filtre permet de réduire soit la violation des contraintes ($\|c_e(x^{k+1}), c_i(x^{k+1})\|$), soit la fonctionnelle objective $g(x^{k+1})$, tout en convergeant vers un minimum local réalisable. Une dernière étape consiste à mettre à jour le terme μ de la barrière logarithmique. Différentes techniques peuvent être employées par IPOPT, entre autres la méthode de Fiacco-McCormick qui consiste à trouver un minimum local pour un μ fixe, puis diminuer ce paramètre et répéter la procédure jusqu'à ce qu'une certaine valeur de μ soit atteinte. IPOPT peut aussi employer des méthodes adaptatives pour modifier μ sans qu'un minimum soit nécessairement atteint. Une description détaillée de ces méthodes est présentée dans [24].

Maintenant que la méthode de résolution d'un problème d'optimisation général par le solveur IPOPT a été décrite, définissons le problème d'optimisation de forme d'un lattice.

3.2 Formulation du problème d'optimisation de forme

Le problème d'optimisation de forme qu'on veut résoudre est le suivant : Pour une connectivité fixe (nombre de nœuds et de membrures fixé), quel est l'emplacement optimal des nœuds P composant le lattice L pour que l'énergie de déformation $\mathcal{E}(L)$ soit minimisée ? On restreint donc la recherche d'un lattice optimal pour une connectivité fixe $\mathcal{T}$. On note l'ensemble des lattices possédant la connectivité $\mathcal{T}$ par $\mathfrak{L}_\mathcal{T} \subset \mathfrak{L}$.

$$L_{opt,\mathcal{T}} = \underset{L \in \mathfrak{L}_\mathcal{T} \subset \mathfrak{L}}{\operatorname{argmin}} \ \mathcal{E}(L) \tag{3.8}$$

Ce choix de recherche d'un lattice optimal $L_{opt,\mathcal{T}} \in \mathfrak{L}_\mathcal{T}$ se justifie par le fait qu'on veut traduire le problème (1.4) en un problème d'optimisation de dimension finie. On note donc les variables de contrôle $P \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n_d \times N}$, où N représente le nombre de nœuds composant le lattice et n_d sa dimension géométrique. Aussi, on note les variables d'état $U \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{N_U}$, le champ de déplacement du lattice L. Le problème d'optimisation de forme (3.8) se traduit donc ainsi :

$$\min_{U \in \mathcal{U}, P \in \mathcal{D}} \mathcal{E}(U, P) \qquad \text{tel que} \qquad e(U, P) = 0.$$

La contrainte $e(U, P) : \mathcal{U} \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}^{N_U}$ provient de la relation d'équilibre décrite par l'un des modèles présentés au chapitre précédent. De la description de ces modèles, on sait que pour

un $P \in \mathcal{D}$ donné, il existe un unique U satisfaisant $e(U, P) = 0$. Il est important de noter la dépendance de la fonctionnelle objective $\mathcal{E}$ et de la contrainte e par rapport à P, puisque la position des nœuds définit directement le lattice L.

Ce problème d'optimisation sous contraintes peut être transformé en un problème sans contraintes que l'on nomme problème réduit. En effet, étant donné la structure et la nature de la contrainte ($\forall P \in \mathcal{D}$, $\exists\,! \, U \in \mathcal{U}$ tel que $e(U, P) = 0$), on peut définir l'application suivante :

$$\begin{aligned} A :& \mathcal{D} \to \mathcal{U} \\ & P \mapsto \bar{U} \end{aligned} \qquad \text{tel que } e(\bar{U}, P) = e(A(P), P) = 0$$

À l'aide de cette application, on pose la fonctionnelle objective $\hat{\mathcal{E}}(P) = \mathcal{E}(A(P), P)$. On obtient donc le problème d'optimisation sans contrainte où la dépendance par rapport à la variable d'état U n'apparait plus :

$$\min_{P \in \mathcal{D}} \quad \hat{\mathcal{E}}(P) \tag{3.9}$$

Le choix du solveur d'optimisation IPOPT utilisant la méthode des points intérieurs peut sembler peu judicieux à ce stade-ci, étant donné l'absence de contraintes et de bornes. Néanmoins, les résultats présentés en section 3.3 démontrent que l'ajout de contraintes géométriques s'avère nécessaire afin que le problème d'optimisation soit bien posé.

3.2.1 Calcul du gradient et du hessien du problème d'optimisation de forme

La résolution du problème d'optimisation (3.9) requiert, tel que décrit dans la section 3.1.2, le calcul du gradient $\nabla_P \mathcal{L}$ et du hessien $\nabla_{PP} \mathcal{L}$ du lagrangien. Étant donné que (3.9) ne possède aucune contrainte ni borne, $\nabla_P \mathcal{L}$ et $\nabla_{PP} \mathcal{L}$ se réduisent respectivement à $\nabla_P \hat{\mathcal{E}}(P)$ et $\nabla_{PP} \hat{\mathcal{E}}(P)$. Toutefois, la définition explicite de $A(P)$ est inconnue, il est alors impossible de calculer analytiquement ce gradient et ce hessien.

La méthode des différences finies peut alors être employée afin d'approximer le gradient ainsi que le hessien. Toutefois le coût de cette méthode est prohibitif. En effet, si l'on emploie une différence centrée d'ordre 2 pour approximer les dérivées premières, il faudrait résoudre le problème $e(U, P + h\delta P) = 0$ et $e(U, P - h\delta P) = 0$ avec $\delta P = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n_d \times N}$. Cela indique que pour un lattice de dimension n_d comportant N nœuds de contrôle P, il faudrait résoudre $2n_d \times N$ fois la relation d'équilibre pour effectuer le calcul des directions de descente à une itération k donnée. De plus, calculer la solution U satisfaisant $e(U, P) = 0$ implique la résolution d'un système d'équations linéaires (pour les modèles étudiés) dont le coût est

$\mathcal{O}(N_U)^3$ pour des méthodes directes. Ainsi, le coût de l'évaluation de $\nabla_P \hat{\mathcal{E}}(P^k)$ est $\mathcal{O}(N)^4$. On constate donc clairement que l'emploi de différences finies pour évaluer les dérivées n'est pas une méthode appropriée à l'optimisation sous contraintes d'équilibre.

Une autre approche doit être adoptée afin de calculer $\nabla_P \hat{\mathcal{E}}$. On emploie le problème adjoint afin de calculer l'information sur les dérivées. On note les dérivées directionnelles partielles ∂ et totale D :

$$\partial_U \mathcal{E}(U,P)(\tilde{U}) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{E}(U+t\tilde{U},P) - \mathcal{E}(U,P)}{t},$$
$$D_P \hat{\mathcal{E}}(P)(\tilde{P}) = \lim_{t\to 0} \frac{\hat{\mathcal{E}}(P+t\tilde{P}) - \hat{\mathcal{E}}(P)}{t}.$$

On applique alors la dérivée en chaîne afin d'évaluer $D_P \hat{\mathcal{E}}(P)(\tilde{P})$.

$$D_P \hat{\mathcal{E}}(P)(\tilde{P}) = D_P \mathcal{E}(A(P),P)(\tilde{P}) = \partial_U \mathcal{E}(A(P),P) D_P A(P)(\tilde{P}) + \partial_P \mathcal{E}(A(P),P)(\tilde{P})$$

On utilise le produit dual afin d'obtenir une expression de $D_P \hat{\mathcal{E}}(P)$.

$$\begin{aligned}\left\langle D_P \hat{\mathcal{E}}(P)\,,\,\tilde{P}\right\rangle &= \left\langle \partial_U \mathcal{E}(A(P),P)\,,\, D_P A(P)(\tilde{P})\right\rangle_{\mathcal{U}^*\times\mathcal{U}} + \left\langle \partial_P \mathcal{E}(A(P),P)\,,\,\tilde{P}\right\rangle_{\mathcal{D}^*\times\mathcal{D}} \\ &= \left\langle D_P A(P)^*\, \partial_U \mathcal{E}(A(P),P)\,,\,\tilde{P}\right\rangle_{\mathcal{D}^*\times\mathcal{D}} + \left\langle \partial_P \mathcal{E}(A(P),P)\,,\,\tilde{P}\right\rangle_{\mathcal{D}^*\times\mathcal{D}}\end{aligned}$$

Ce qui implique : $$D_P \hat{\mathcal{E}}(P) = D_P A(P)^*\, \partial_U \mathcal{E}(A(P),P) + \partial_P \mathcal{E}(A(P),P). \tag{3.10}$$

On a maintenant à notre disposition une évaluation analytique de la dérivée de la fonctionnelle énergie par rapport à la position des nœuds P. Toutefois, tel que mentionné précédemment, l'application A n'est pas connue, on ne peut donc pas calculer $D_P A(P)^*$. On peut néanmoins contourner ce problème en utilisant le théorème de la fonction implicite [18, p.52] qui permet d'obtenir la relation suivante :

$$D_P A(P) = -\partial_U e(U,P)^{-1}\, \partial_P e(U,P). \tag{3.11}$$

On calcule ensuite son opérateur dual :

$$D_P A(P)^* = -\partial_P e(U,P)^*\, \partial_U e(U,P)^{-*}. \tag{3.12}$$

En combinant les équations (3.10) et (3.12), on obtient une évaluation de $D_P \hat{\mathcal{E}}$ ne faisant pas

intervenir A.

$$D_P\hat{\mathcal{E}} = -\partial_P e(U,P)^* \, \partial_U e(U,P)^{-*} \, \partial_U \mathcal{E}(A(P),P) + \partial_P \mathcal{E}(A(P),P) \tag{3.13}$$

On pose alors le problème adjoint où $q \in \mathcal{U}^*$:

$$\partial_U e(U,P)^* q = \partial_U \mathcal{E}(A(P),P). \tag{3.14}$$

La démarche pour obtenir $D_P\hat{\mathcal{E}}$ procède comme suit :

1. Résoudre $\partial_U e(U,P)^* q = -\partial_U \mathcal{E}(A(P),P)$;
2. Calculer $D_P\hat{\mathcal{E}} = \partial_P e(U,P)^* \, q + \partial_P \mathcal{E}(A(P),P)$.

On constate qu'en utilisant l'adjoint, on obtient l'expression exacte de la dérivée de la fonctionnelle énergie pour un coût $\mathcal{O}(N_U)^3$, ou encore de $\mathcal{O}(N)^3$, ce qui est un ordre de moins qu'en utilisant la méthode des différences finies. De plus, l'utilisation du problème adjoint n'entraîne pas d'approximation du gradient de la fonctionnelle objective. Pour le calcul du hessien de la fonctionnelle objective, on utilise une approximation de type BFGS [25, Chapitre 6].

3.3 Contraintes géométriques

Maintenant que le problème d'optimisation de forme est posé et que la démarche de résolution a été décrite, regardons de plus près comment se comporte la fonctionnelle objective $\mathcal{E}$ sur quelques exemples simples.

Regardons tout d'abord la géométrie ainsi que le chargement de la Figure 3.2. Pour ce problème, on fixe la longueur de la pièce à $0.1\,\mathrm{m}$, le rayon des membrures à $r = 0.01\,\mathrm{m}$, la magnitude de la force appliquée à $F = 1\,\mathrm{N}$ et le module de Young à $E = 1000\,\mathrm{N/m^2}$.

Pour le problème de la Figure 3.2, la position du noeud central constitue la seule variable de contrôle du problème d'optimisation de forme. On fait donc varier la position du nœud central afin d'obtenir le profil d'énergie présenté à la Figure 3.3 pour les différents modèles d'élasticité linéaire. Il est important de noter que les résultats présentés sont en quantités adimensionnelles.

On constate clairement que la fonctionnelle énergie n'est pas convexe. En effet, pour le modèle d'Euler-Bernoulli, celle-ci possède 6 minimums locaux ainsi que 5 points-selle. On vérifie le fonctionnement du solveur IPOPT en choisissant différentes approximations initiales du

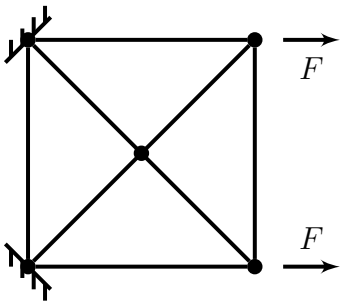


Figure 3.2 Lattice simple et son chargement en dimension 2

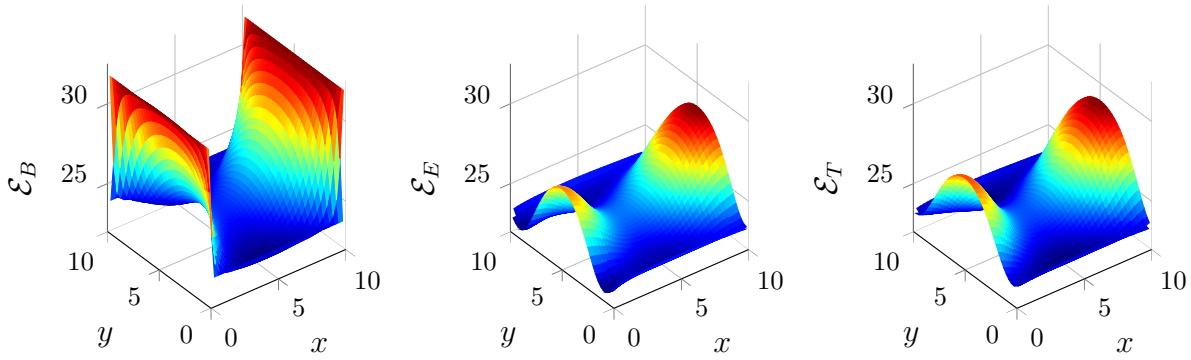


Figure 3.3 Fonctionnelle énergie $\mathcal{E}$ pour le modèle barre (gauche), d'Euler-Bernoulli (centre) et de Timoshenko (droite)

problème d'optimisation de forme représentées en mauve à la Figure 3.4 (toujours avec le modèle d'Euler-Bernoulli).

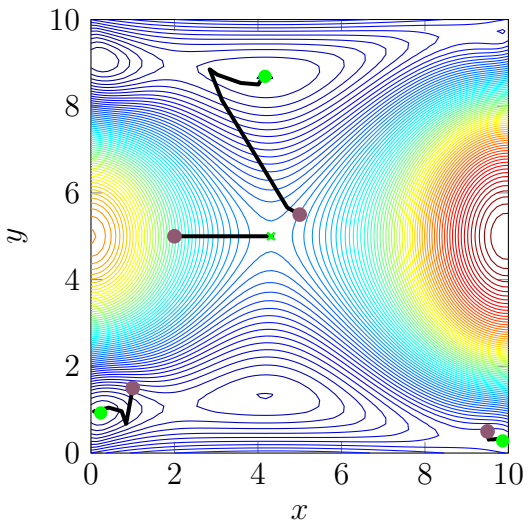


Figure 3.4 Courbes de niveau de la fonctionnelle énergie, approximations initiales en mauve et solutions en vert avec le modèle d'Euler-Bernoulli

On constate que le solveur réussit bien à converger vers les minimums locaux. Il est important de noter que le solveur ne peux distinguer un minimum global d'un minimum local. En effet, seulement les solutions à gauche du graphique sont des minimums globaux. De plus, le solveur peut aussi s'arrêter a priori sur un point-selle (qui est aussi un point stationnaire), mais ce résultat est extrêmement difficile à obtenir en pratique. En effet, il faut soit donner une approximation initiale qui est directement un point-selle ou fournir une approximation initiale directement sur un axe de symétrie. Les trois géométries optimales obtenues pour ce problème sont présentées à la Figure 3.5.

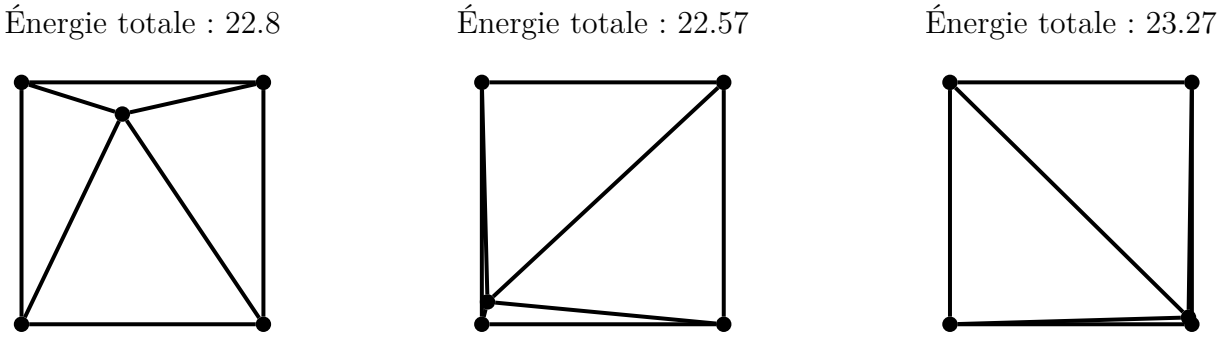


Figure 3.5 Solutions du problème d'optimisation de forme du problème de la Figure 3.2 avec le modèle d'Euler-Bernoulli

Ces trois configurations sont obtenues lorsque l'emplacement du nœud intérieur correspond à un minimum local (satisfaisant les conditions de KKT) de l'énergie de déformation. Le lattice possédant l'énergie de déformation la plus faible est celui du centre dont le nœud intérieur s'est déplacé vers un des nœuds fixés. Ce problème étudié est relativement simple, car il ne possède que 2 variables de contrôle (les coordonnées x et y du nœud central). On s'attarde alors à des problèmes d'optimisation de forme plus complexes.

3.3.1 Contrainte sur les frontières

On regarde maintenant le problème d'optimisation de forme un peu plus complexe présenté à la Figure 3.6 pour lequel 3 nœuds supérieurs constituent les paramètres de design. Pour ce problème, on fixe la largeur de la pièce à 0.2 m, sa hauteur à 0.1 m, le rayon des membrures à $r = 0.01\,\mathrm{m}$, la magnitude de la force appliquée à $F = 1\,\mathrm{N}$ et le module de Young à $E = 1000\,\mathrm{N/m^2}$.

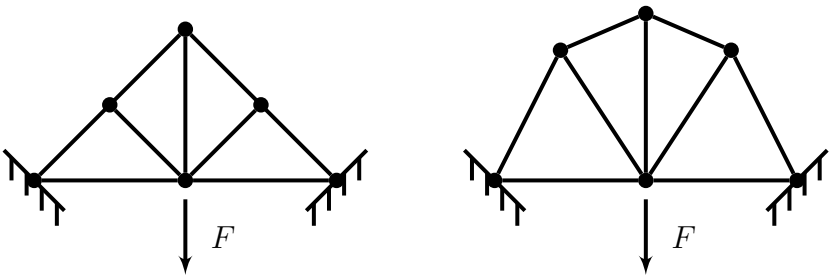


Figure 3.6 Lattice initial (à gauche) et lattice optimisé (à droite) pour le modèle d'Euler-Bernoulli

On observe que le lattice optimisé a pris de l'expansion par rapport à l'approximation initiale. Si l'on désire effectuer l'optimisation de forme d'une pièce mécanique embarquée dans un avion ou une automobile par exemple, les contraintes spatiales peuvent être importantes. Afin de résoudre ce problème, on décrit explicitement la frontière de la pièce par $c_f(P) = 0$. On ajoute ainsi cette contrainte au problème d'optimisation (3.9) afin de forcer les nœuds situés sur l'enveloppe externe de la pièce à rester sur la frontière.

$$\min_{P \in \mathcal{D}} \hat{\mathcal{E}}(P) \qquad \text{tel que} \qquad c_f(P) = 0$$

On reprend alors le problème présenté à la Figure 3.6 avec cette nouvelle contrainte pour analyser son influence sur la solution obtenue. On constate que l'ajout de la contrainte $c_f(P) = 0$ change significativement le lattice optimal obtenu (voir la Figure 3.7). On compare au Ta-

bleau 3.1 l'énergie de déformation de la solution contrainte avec celle non-contrainte et la réduction d'énergie par rapport au lattice initial.

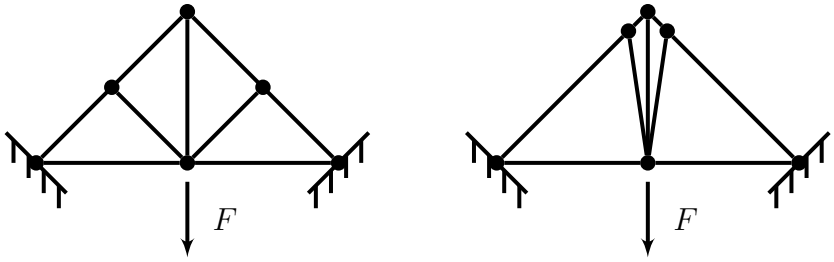


Figure 3.7 Lattice initial (à gauche) et lattice optimisé (à droite) avec la contrainte sur les frontières pour le modèle d'Euler-Bernoulli

Tableau 3.1 Comparaison de l'énergie de déformation pour le problème d'optimisation de forme avec et sans contraintes sur la frontière

	Lattice inital	Lattice optimisé	Lattice optimisé avec $c_f(P) = 0$
Énergie de déformation	28.01	19.61 (-29.99%)	23.72 (-15.32%)

On constate grâce au Tableau 3.1 que l'ajout de la contrainte sur la frontière fait en sorte que la solution possède une énergie de déformation plus grande comparativement à celle sans contrainte. Ce résultat est attendu, étant donné que l'on restreint maintenant l'espace $\mathcal{D}$ aux solutions respectant $h_f(P) = 0$. Outre l'expansion des frontières du lattice, l'analyse des solutions de la Figure 3.5 et de la Figure 3.7 laisse entrevoir que les variables de contrôle P peuvent s'approcher les unes des autres. On vérifie avec le cas test présenté à la Figure 3.8 si 2 nœuds P peuvent éventuellement coïncider. Pour ce cas test, on fixe la largeur de la pièce à 0.1 m, sa hauteur à 0.075 m, le rayon des membrures à $r = 0.01$ m, la magnitude de la force appliquée à $F = 1$ N et le module de Young à $E = 1000\,\mathrm{N/m^2}$, et l'on considère la position du nœud intérieur comme variable de contrôle du problème.

On observe que l'emplacement optimal du nœud contrôle se situe exactement au nœud où l'on applique la force F (aux coordonnées adimensionnelles $(x, y) = (5, 7.5)$). Si l'empilement de nœuds se produit pour un problème aussi simple que celui présenté à la Figure 3.8, il est tout à fait raisonnable de supposer que ce phénomène peut se reproduire pour l'optimisation de forme de lattices plus denses. Cet empilement de nœuds est problématique puisque cela entraine la superposition de membrures, ce qui n'est physiquement pas possible. De plus, l'empilement des nœuds n'est pas le seul phénomène menant à des aberrations géométriques

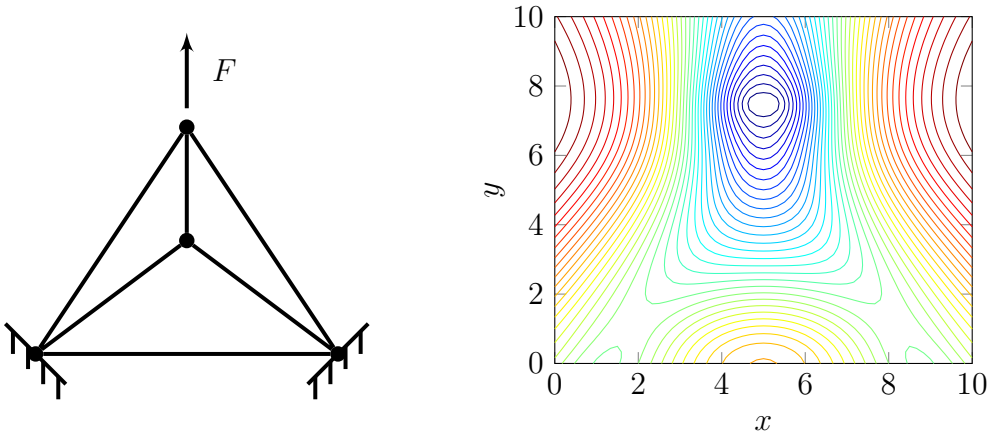


Figure 3.8 Problème d'optimisation de forme avec son chargement (à gauche) et courbes de niveaux de l'énergie de déformation avec la modèle d'Euler-Bernoulli (à droite)

au sein d'un lattice. En effet, comme l'illustre la Figure 3.9, des incohérences géométriques apparaissent aussi quand un nœud se retrouve exactement sur une membrure, ou si une membrure en croise une autre sans qu'un nœud soit présent.

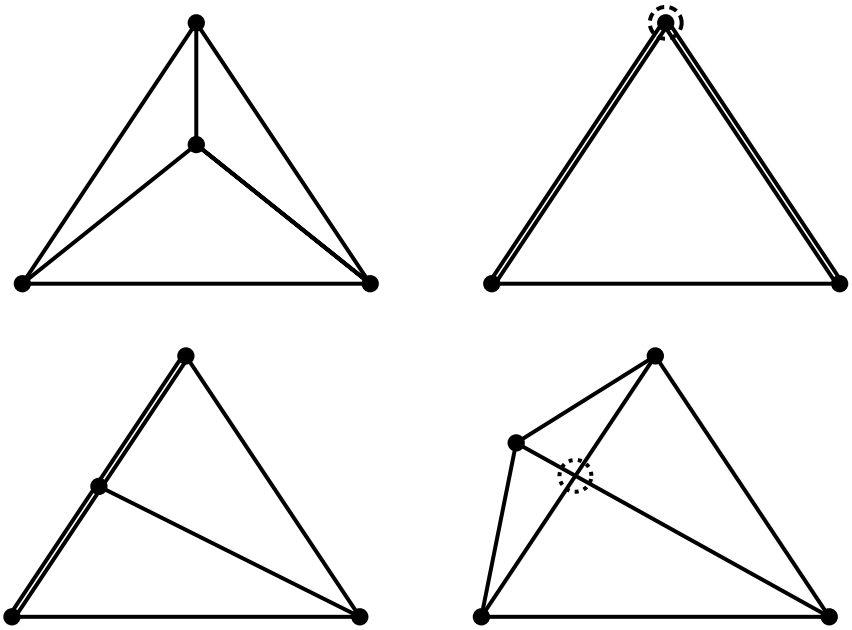


Figure 3.9 Lattice original (en haut à gauche), lattice avec membrures et nœuds surperposés (en haut à droite), lattice avec membrures superposées (en bas à droite) et lattice avec nœud absent (en bas à gauche)

Ces trois types d'incohérences géométriques présentées ici ne doivent pas se retrouver dans

la configuration finale du lattice. Il faut donc contraindre la géométrie du lattice afin d'éviter ces aberrations. On pose alors l'hypothèse suivante qui simplifie grandement le traitement de ces contraintes géométriques :

Hypothèse H8. On suppose que les membrures T et les nœuds P composant le lattice sont organisés en triangles κ pour un lattice bidimensionnel et en tétraèdres K pour un lattice tridimensionnel.

Cette hypothèse permet d'utiliser les notions de qualité de maillages [14, 22, 28] présentes par exemple dans la méthode des éléments finis. De plus, H8 permet d'utiliser les notions de raffinement et d'adaptation de maillages exposées au chapitre suivant.

3.3.2 Contrainte sur la qualité du maillage

De nombreux indicateurs de qualité sont présentés dans [28], notamment ceux faisant intervenir l'angle minimal et maximal d'un triangle composant le maillage. Ces mesures ne sont toutefois pas très utiles à employer puisque ces quantités ne sont pas différentiables par rapport à la position des sommets du triangle ou du tétraèdre. On emploie donc une mesure quantifiant l'écart entre un triangle quelconque et le triangle équilatéral [14, 22].

On définit un triangle κ par le triplet de points $(P_{\kappa_1}, P_{\kappa_2}, P_{\kappa_3}) \in (\mathbb{R}^2)^3$ correspondant à ses sommets. On peut ainsi définir le triangle simplexe $\kappa_S = ((0,0),(1,0),(0,1))$, le triangle équilatéral $\kappa_E = \left((0,0),(1,0),(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})\right)$ ainsi que le triangle dégénéré κ_D possédant un angle tendant vers 0 ou π.

On définit l'application linéaire $B : \kappa_S \to \kappa_E$ (voir la Figure 3.10) par :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

On pose ensuite l'application affine $D : \kappa_S \to \kappa$ telle que :

$$D((0,0)) = P_{\kappa_1}, \qquad D((1,0)) = P_{\kappa_2}, \qquad D((0,1)) = P_{\kappa_3}.$$

L'application D sur le point $P \in \kappa_S$ est défini par $D(P) = D_1 P + D_2$, où D_1 et D_2 correspondent à :

$$D_1 = \begin{bmatrix} P_{\kappa_{2,x}} - P_{\kappa_{1,x}} & P_{\kappa_{3,x}} - P_{\kappa_{1,x}} \\ P_{\kappa_{2,y}} - P_{\kappa_{1,y}} & P_{\kappa_{3,y}} - P_{\kappa_{1,y}} \end{bmatrix}, \qquad D_2 = \begin{bmatrix} P_{\kappa_{1,x}} \\ P_{\kappa_{1,y}} \end{bmatrix}.$$

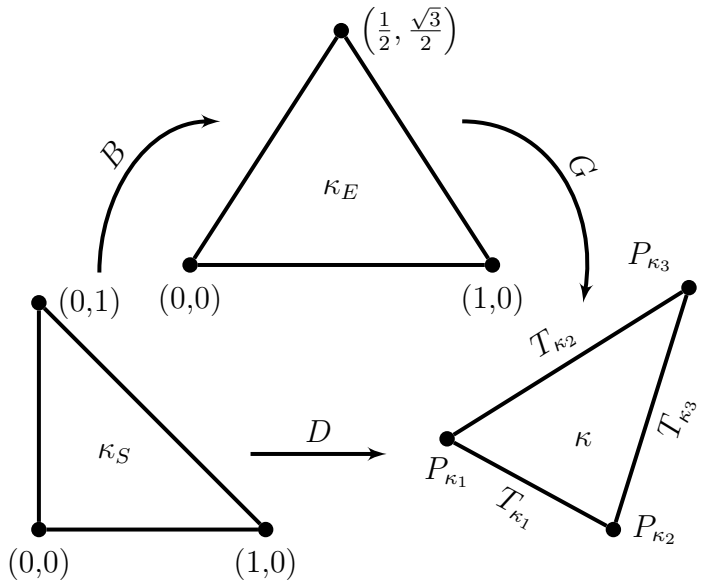


Figure 3.10 Applications linéaires et affines liant le triangle simplexe κ_S, le triangle équilatéral κ_E et le triangle κ (figure adaptée de [14, Figure 2])

On pose finalement l'application affine $G : \kappa_E \to \kappa$. Puisque l'application B est inversible et que $(G \circ B)(P) = D(P)$, on obtient que $G(P) = G_1 P + G_2$, où G_1 et G_2 correspondent à :

$$G_1 = D_1 B^{-1}, \qquad G_2 = D_2 B^{-1}.$$

La partie affine de G n'affecte pas la qualité d'un triangle, on analyse alors seulement G_1. On constate que la matrice G_1 ne dépend seulement que de κ et qu'elle est inversible si les sommets $(P_{\kappa_1}, P_{\kappa_2}, P_{\kappa_3})$ ne sont pas colinéaires.

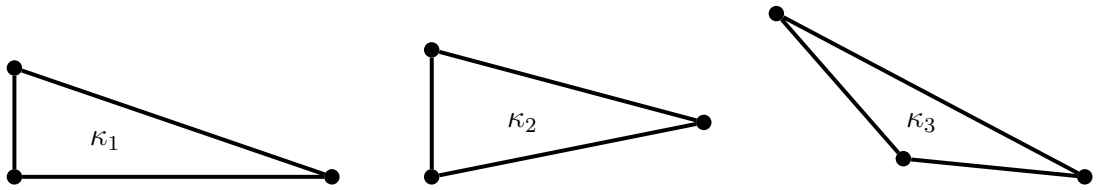
Puisque l'on veut quantifier l'écart entre le triangle équilatéral κ_E et le triangle κ, on calcule le conditionnement de $G_1((P_{\kappa_1}, P_{\kappa_2}, P_{\kappa_3}))$ [28, p.1843]. On emploie la norme de Frobenius afin d'obtenir une quantité différentiable par rapport à P.

$$\mathrm{cond}_F(G_1) = \|G_1\|_F \, \|G_1^{-1}\|_F = \sqrt{\mathrm{Tr}(G_1 G_1^T)\, \mathrm{Tr}(G_1^{-1} G_1^{-T})}$$

Puisque $\|I\|_F \leq \mathrm{cond}_F(G)$ pour toute matrice G, on en déduit que $\mathrm{cond}_F : \kappa \to [2, \infty[$. On décrit finalement la mesure de qualité $c_\kappa : (\mathbb{R}^2)^3 \to]0, 1]$ du triangle κ par :

$$c_\kappa((P_{\kappa_1}, P_{\kappa_2}, P_{\kappa_3})) = \frac{2}{\mathrm{cond}_F(G_1((P_{\kappa_1}, P_{\kappa_2}, P_{\kappa_3})))}. \tag{3.15}$$

On remarque que cette mesure de qualité est invariante vis-à-vis une rotation ou vis-à-vis une mise à l'échelle d'un triangle. De plus, on constate que $c_\kappa(\kappa_E) = 1$, $c_\kappa(\kappa_S) = 0.866$ et que $c_\kappa(\kappa_D) \to 0$. La Figure 3.11 présente différents triangles ainsi que leur qualité respective.



$c_\kappa(\kappa_1) = 0.5314$ $c_\kappa(\kappa_2) = 0.6941$ $c_\kappa(\kappa_3) = 0.4330$

Figure 3.11 Triangles et mesures de qualité associées

Le critère c_κ peut s'étendre aisément à la mesure de qualité d'un tétraèdre qu'on nomme $K = (P_{K_1}, P_{K_2}, P_{K_3}, P_{K_4})$ avec $c_K((P_{K_1}, P_{K_2}, P_{K_3}, P_{K_4})) = 3/\left(\mathrm{cond}_F((P_{K_1}, P_{K_2}, P_{K_3}, P_{K_4}))\right)$. Cette contrainte de qualité de maillages permet d'éviter les aberrations géométriques de superposition des nœuds ainsi que de la superposition de membrures (Figure 3.9 en haut à droite et en bas à gauche). Toutefois, cette contrainte à elle seule ne permet pas d'éviter le croisement de membrures (Figure 3.9 en bas à droite). On ajoute une dernière contrainte géométrique afin de forcer les triangles à garder la même orientation.

3.3.3 Contrainte d'orientation

Afin d'empêcher un croisement de membrures, on contraint l'orientation de tous les triangles. Pour ce faire, on définit la contrainte $c_O(P)$ suivante :

$$c_O(P) = (0, 0, 1) \cdot \left((P_{\kappa_2} - P_{\kappa_1}) \times (P_{\kappa_3} - P_{\kappa_1})\right). \tag{3.16}$$

L'équation (3.16) consiste à calculer la composante selon l'axe z du produit vectoriel des deux vecteurs $(P_{\kappa_2} - P_{\kappa_1})$ et $(P_{\kappa_3} - P_{\kappa_1})$. Pour utiliser cette équation, il s'avère nécessaire d'ajouter la composante en z pour les coordonnées des nœuds P_n. Cette composante prend alors une valeur nulle pour des lattices bidimensionnels. Afin de contraindre les triangles à posséder la même orientation, on contraint $c_O(P) > 0$. Ceci empêche donc les croisements de membrures. Comme pour la contrainte de qualité de maillages, cette contrainte $c_O(P)$ peut aussi être étendue naturellement aux tétraèdres.

Le problème d'optimisation de forme d'un lattice est alors assujetti aux trois contraintes géométriques, $c_f(P)$ pour la frontière, $c_\kappa(P)$ pour la qualité du treillis et $c_O(P)$ pour l'orientation

des triangles.

$$\min_{P\in\mathcal{D}} \quad \hat{\mathcal{E}}(P) \qquad \text{tel que} \quad \begin{cases} c_f(P) = 0 \\ 0.7 \leq c_\kappa(P) \leq 1 \\ c_O(P) > 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

Le choix de la borne inférieure de 0.7 pour la contrainte $c_\kappa(P)$ est expliqué à la section 4.2. La prochaine section présente les deux cas tests étudiés dans ce mémoire ainsi que l'application du problème d'optimisation de forme (3.17) à ceux-ci.

3.4 Résultats numériques

On définit à la Figure 3.12 les cas tests (géométries et chargements associés). Pour ces deux cas tests, on fixe $r = 0.001\,\text{m}$, $F = 1\,\text{N}$, $E = 10^6\,\text{N/m}^2$. De plus, pour le problème 1, les grandeurs de la pièce sont de 0.2 m de hauteur et de largeur, tandis qu'elles sont de 0.1 m de hauteur et 0.2 m de largeur pour le problème 2.

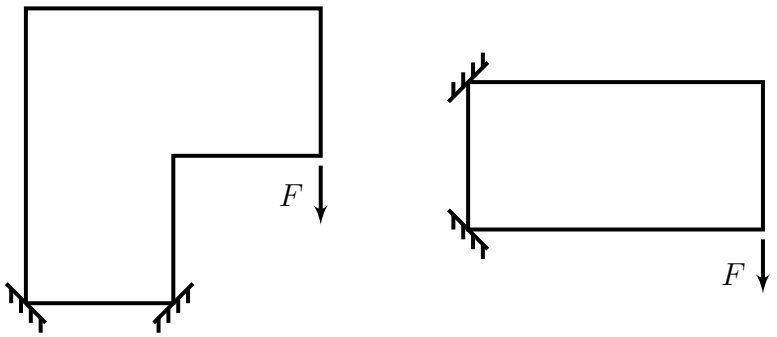


Figure 3.12 Définition du cas test 1 (gauche) et définition du cas test 2 (droite)

On applique la procédure d'optimisation de forme sur le problème 1 avec le modèle d'Euler-Bernoulli en partant d'un lattice initial contenant plusieurs membrures (voir la Figure 3.13).

L'énergie de déformation du lattice initial est de 93.37, alors que l'énergie de déformation du lattice optimisé est de 70.58. On constate une diminution marquée de l'énergie de déformation entre ces deux lattices. Cette diminution de l'énergie se réflète aussi localement, car on observe que les membrures possédant le plus d'énergie dans le lattice initial voient leur énergie réduite dans le lattice optimisé. De plus, on remarque que la résolution de (3.17) modifie significativement la position des nœuds P afin d'obtenir un lattice optimisé qui n'est clairement plus structuré.

On résout maintenant le problème d'optimisation de forme pour le cas test 2 avec encore une fois le modèle Euler-Bernoulli afin de vérifier si les mêmes constats peuvent être effectués.

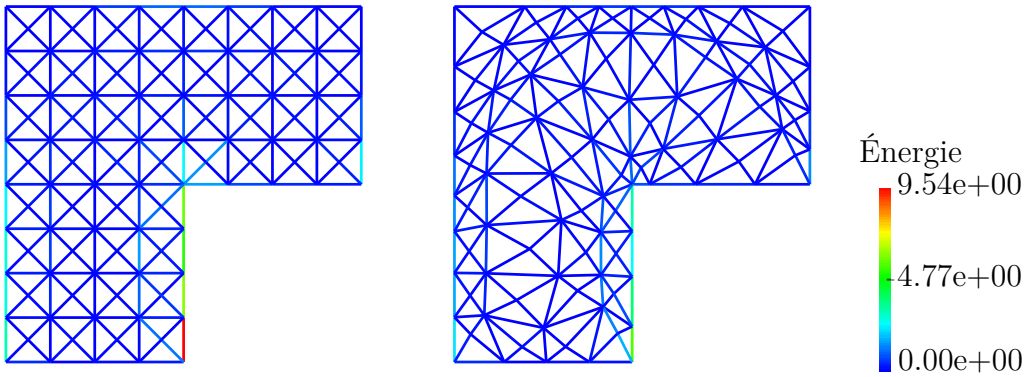


Figure 3.13 Lattice initial (gauche) et lattice optimisé (droite) pour le cas test 1

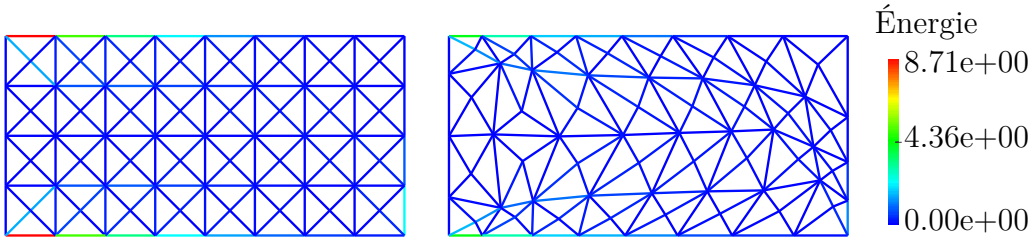


Figure 3.14 Lattice initial (gauche) et lattice optimisé (droite) pour le cas test 2

L'énergie de déformation est passée de 75.10 à 55.84 grâce à l'optimisation de forme. On peut effectuer les mêmes analyses que pour le cas test 1. Ceci indique une certaine indépendance de la résolution du problème d'optimisation de forme par rapport à la géométrie et au chargement du cas test étudié.

3.5 Autres formulations du problème d'optimisation de forme

Le problème traité dans ce chapitre n'est pas le seul pouvant être étudié. En effet, la démarche présentée permet l'étude de problèmes d'optimisation de forme possédant d'autres définitions des paramètres de design, de la fonctionnelle objective ou des contraintes. On peut par exemple ajouter le rayon $R \in \mathbb{R}^M$ des M membrures comme paramètres de design. On peut alors s'intéresser directement à la minimisation du volume $\text{vol}(P)$ de la pièce sous diverses contraintes de design telles que les contraintes maximales $\sigma_m(U, P)$ dans les membrures :

$$\min_{\substack{U \in \mathcal{U}, P \in \mathcal{D} \\ R \in \mathbb{R}^M}} \text{vol}(P, R) \qquad \text{tel que} \qquad \begin{cases} e(U, P, R) = 0 \\ |\sigma_m(U, P, R)| \leq \sigma_{max} \end{cases} .$$

On pourrait aussi minimiser directement la contrainte maximale apparaissant au sein du

lattice :

$$\min_{\substack{U\in\mathcal{U},P\in\mathcal{D}\\R\in\mathbb{R}^M}} \max_m |\sigma_m(U,P,R)| \qquad \text{tel que} \qquad e(U,P,R)=0 \ .$$

La fonctionnelle objective de ce problème n'est toutefois pas différentiable. On peut alors introduire une variable d'écart s pour obtenir un problème d'optimisation dont la fonctionnelle objective et les contraintes sont différentiables :

$$\min_{\substack{U\in\mathcal{U},P\in\mathcal{D}\\R\in\mathbb{R}^M,s\in\mathbb{R}}} s \qquad \text{tel que} \qquad \begin{cases} e(U,P,R)=0 \\ |\sigma_m(U,P,R)| \leq s \quad m=1,\ldots,M \end{cases} .$$

Pour le reste du mémoire, nous nous limitons cependant au problème de minimisation de l'énergie de déformation dont la position des nœuds P est le seul paramètre de design. Le prochain chapitre aborde le problème d'optimisation topologique d'un lattice, c'est-à-dire l'obtention d'un lattice optimal dont la connectivité, le nombre de nœuds et le nombre de membrures ne sont pas fixes.

CHAPITRE 4 OPTIMISATION TOPOLOGIQUE DE LATTICES

Le chapitre précédent ne porte que sur l'obtention d'un lattice de forme optimale pour une connectivité fixe. En effet, l'optimisation de forme ne permet de résoudre le problème (1.4) que sur un ensemble très restreint $\mathfrak{L}_{\mathcal{T}} \subset \mathfrak{L}$. Ce chapitre présente la démarche développée afin d'étendre successivement l'ensemble $\mathfrak{L}_{\mathcal{T}}$ permettant de construire des lattices dont l'énergie de déformation est minimisée. L'approche proposée s'inspire en grande partie des travaux effectués en adaptation de maillages [21, 27, 34].

Ce chapitre débute par la description de la procédure adaptative d'optimisation topologique développée. Par la suite, on analyse le comportement de la procédure pour différentes valeurs de borne inférieure sur la qualité de maillage. Ensuite, on étudie l'indépendance de la méthode face au lattice initial choisi et on étudie l'impact des différents modèles du Chapitre 2 sur la procédure adaptative. Par après, on étudie la performance de plusieurs algorithmes de raffinement sur l'optimisation topologique. Finalement, on démontre les différents avantages de l'approche adaptative proposée comparativement à l'optimisation de forme seule et face à des lattices structurés.

4.1 Procédure adaptative d'optimisation topologique

L'objectif de la procédure adaptative d'optimisation topologique est d'enrichir de manière successive l'ensemble $\mathfrak{L}_{\mathcal{T}}$ afin de pouvoir obtenir une suite de lattices $L_{opt,\mathcal{T}}$ s'approchant de plus en plus de L_{opt}. Pour ce faire, on ajoute de manière adaptative de nouvelles membrures à un lattice à partir de la solution du problème d'optimisation de forme (3.17). Cet ajout de membrures permet de modifier progressivement la connectivité $\mathcal{T}$ du lattice, enrichissant du même coup l'ensemble $\mathfrak{L}_{\mathcal{T}}$ dans lequel est résolu (3.17). L'algorithme consiste donc à résoudre (3.17) sur un lattice grossier L_0, puis à rajouter des nouvelles membrures. Ensuite, on résout (3.17) pour ce nouveau lattice et l'on répète ces étapes jusqu'à ce qu'une certaine énergie de déformation $\mathcal{E}_{tol}$ soit atteinte. L'Algorithme 1 décrit les étapes de la procédure adaptative d'optimisation topologique.

Le chapitre précédent décrit en détails l'étape 1 et 3 de l'Algorithme 1 alors que la présente section explicite de quelle manière l'étape 2 est effectuée. Ainsi qu'il a été mentionné au Chapitre 3, l'hypothèse H8 permet d'employer les notions d'adaptation de maillages [21, 27, 34].

Algorithme 1 : Procédure adaptative d'optimisation topologique

Entrée : Un lattice grossier L_0 et $\mathcal{E}_{tol}$;
1. Résoudre le problème d'optimisation de forme (3.17) pour L_0 afin d'obtenir un lattice optimal $L_{opt,\mathcal{T}}$;
tant que $\mathcal{E}(L_{opt,\mathcal{T}}) > \mathcal{E}_{tol}$ **faire**
  2. Ajouter des nouvelles membrures à $L_{opt,\mathcal{T}}$ pour obtenir L_0;
  3. Résoudre le problème d'optimisation de forme (3.17) pour L_0 afin d'obtenir un lattice optimal $L_{opt,\mathcal{T}}$;
fin

4.1.1 Indicateur de raffinement

La première phase de l'adaptation consiste à identifier les éléments du maillage, les triangles en 2D ou les tétraèdres en 3D, devant être raffinés. Cette étape est réalisée par l'utilisation d'indicateurs de raffinement, lesquels sont habituellement déterminés, du moins pour les méthodes d'adaptation de maillages, à partir de mesures de l'erreur [27]. Le choix d'un indicateur de raffinement repose essentiellement sur l'idée que le raffinement permette une réduction d'une quantité donnée. Puisque le problème d'optimisation topologique cherche à minimiser l'énergie de déformation $\mathcal{E}$, il semble naturel de choisir comme quantité l'énergie de déformation locale d'une membrure T. Toutefois, une membrure T ne constitue pas à elle seule un élément du maillage, on définit alors la quantité ω_κ associé au triangle κ comme suit :

$$\omega_\kappa = \max\left\{\mathcal{E}(T_1^\kappa), \mathcal{E}(T_2^\kappa), \mathcal{E}(T_3^\kappa)\right\}.$$

où T_i^κ, pour $i = 1, 2, 3$, représentent les trois membrures qui forment le triangle κ. En suivant la stratégie du maximum [27, 34], on peut définir l'indicateur de raffinement sur chaque triangle comme :

$$\tau_\kappa = \frac{\omega_\kappa}{\max_\kappa \omega_\kappa},$$

tel que $0 \leq \tau_\kappa \leq 1$. On peut alors marquer les éléments à raffiner comme ceux vérifiant $\tau_\kappa \geq \gamma$ où γ est un paramètre fixé dans l'intervalle $[0, 1]$. Les éléments sélectionnés peuvent alors être raffinés selon diverses approches décrites ci-dessous.

4.1.2 Algorithmes de raffinement de la bissection

Il existe essentiellement deux méthodes de raffinement de maillages triangulaires, la bissection et la division régulière [19, 21, 30]. Des algorithmes de raffinement de maillages composés de tétraèdres sont présentés en [12, 19] et ne sont pas abordés dans ce mémoire. Il est important de noter que plusieurs variantes de ces méthodes existent afin de rendre le maillage conforme. On définit un maillage conforme lorsqu'il est composé seulement de triangles ou de tétraèdres.

La méthode de la bissection consiste essentiellement à couper l'arête la plus longue de tous les triangles marqués. La première étape consiste à ajouter les nouveaux nœuds au maillage existant, au milieu de l'arête la plus longue de tous les triangles marqués. Puisqu'une arête est partagée par deux triangles, le triangle adjacent qui peut initialement ne pas être marqué le devient. Ce nouveau triangle marqué se voit ajouter un nœud sur sa plus longue arête de la même manière que précédemment. La première étape s'arrête lorsqu'il n'y a plus de nouveau nœud à ajouter.

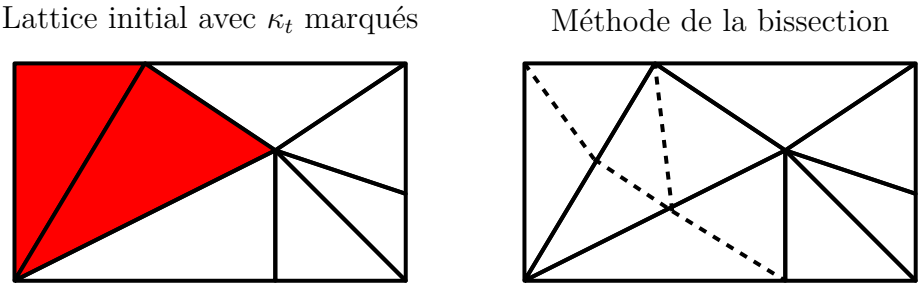


Figure 4.1 Illustration de la méthode de raffinement de la bissection

La deuxième étape consiste à connecter les nouveaux nœuds ajoutés afin d'assurer la conformité du maillage. On ajoute ainsi, pour chaque triangle marqué, une nouvelle arête entre le nœud opposé à l'arête la plus longue et le nœud ajouté sur cette même arête. Tous les autres nœuds ajoutés ne se situant pas sur l'arête la plus longue sont liés au nœud ajouté sur l'arête la plus longue du triangle correspondant. La Figure 4.1 illustre le raffinement de maillage à l'aide de la méthode de bissection, laquelle est décrite explicitement dans l'Algorithme 2.

4.1.3 Algorithmes de raffinement de la division régulière

Pour la deuxième méthode de raffinement, la division régulière, la première étape consiste à ajouter des nœuds au milieu de chacune des arêtes des triangles initialement marqués. On applique alors la même procédure que celle employée dans la méthode de la bissection pour propager entre les éléments la création de nouveaux nœuds.

Algorithme 2 : Méthode de raffinement de la bissection

Entrée : Un lattice L et les triangles κ marqués;
tant que *Des nouveaux nœuds sont ajoutés* **faire**
  1. Ajouter des nœuds au milieu de la plus grande arête des triangles marqués si ce n'est déjà fait;
  2. Marquer les triangles possédant au moins un nouveau nœud sur une arête;
fin
3. Ajouter une arête entre le nœud opposé à la plus grande arête de chaque triangle marqué avec le nœud situé sur cette même plus grande arête;
4. Ajouter des arêtes entre chaque nœud qui n'est pas situé sur la plus longue arête avec le nœud situé sur la plus longue arête;

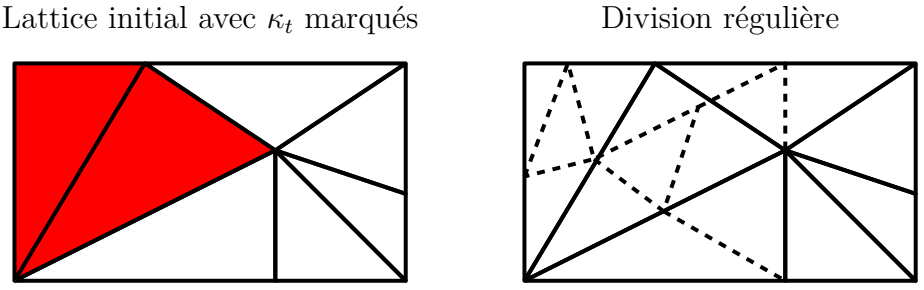


Figure 4.2 Illustration de la méthode de raffinement de la bissection

La deuxième étape consiste encore une fois à construire les arêtes entre les nœuds ajoutés. Si trois nœuds sont ajoutés pour un triangle donné, on les relie ensemble. Si deux nœuds sont ajoutés, on relie le nœud sur l'arête la plus longue au nœud opposé ainsi qu'à l'autre nœud ajouté. Si un seul nœud est ajouté, on le relie au nœud situé à l'opposé de l'arête auquel il appartient (voir la Figure 4.2 et l'Algorithme 3).

Algorithme 3 : Méthode de raffinement de la division régulière

Entrée : Un lattice L et les triangles κ marqués;
1. Ajouter des nœuds au milieu de chacune des arêtes des triangles marqués;
tant que *Des nouveaux nœuds sont ajoutés* **faire**
  2. Ajouter des nœuds au milieu de la plus grande arête des triangles marqués si ce n'est déjà fait;
  3. Marquer les triangles possédant au moins un nouveau nœud sur une arête;
fin
4. Pour chaque triangle possédant un nœud ajouté, relier celui-ci par une arête avec le nœud opposé à l'arête la plus longue;
5. Pour chaque triangle possédant deux nœuds ajoutés, les relier ensemble avec une arête et relier celui situé sur l'arête la plus longue avec le nœud opposé;
6. Pour chaque triangle possédant trois nœuds ajoutés, relier par des arêtes les nouveaux nœuds entre eux;

Dès lors que l'étape 2 de l'algorithme 1 est décrite, on peut appliquer l'optimisation topologique afin d'obtenir une configuration sub-optimale de lattices. La Figure 4.3 présente l'application de cette optimisation topologique aux Problèmes 1 et 2 (voir Figure 3.12) pour la méthode de la bissection avec $\gamma = 0.5$ dans le cas du modèle d'Euler-Bernoulli.

On constate qu'à partir d'un lattice très grossier, la procédure d'optimisation topologique est capable de localiser la matière afin de réduire l'énergie de déformation. Comme on l'observe à la Figure 4.3, la matière du lattice est concentrée aux points d'attache ainsi qu'au coin entrant (pour le Problème 1), donc aux endroits où la pièce est la plus sollicitée. De plus, on remarque que l'algorithme ne raffine pas les zones influençant peu l'énergie de déformation, soit les coins supérieurs pour le Problème 1 et entre les deux points d'attache pour le Problème 2.

Afin de pouvoir analyser les résultats des prochaines sections, on compare les lattices obtenus en calculant pour chacun d'eux leur nombre de variables de contrôle ($n_d \cdot N$), une approximation de leur volume (on néglige les intersections des membrures), leur énergie de déformation $\mathcal{E}$ ainsi que le nombre d'itérations effectuées par le solveur IPOPT à chaque fois que le problème d'optimisation de forme (3.17) est résolu.

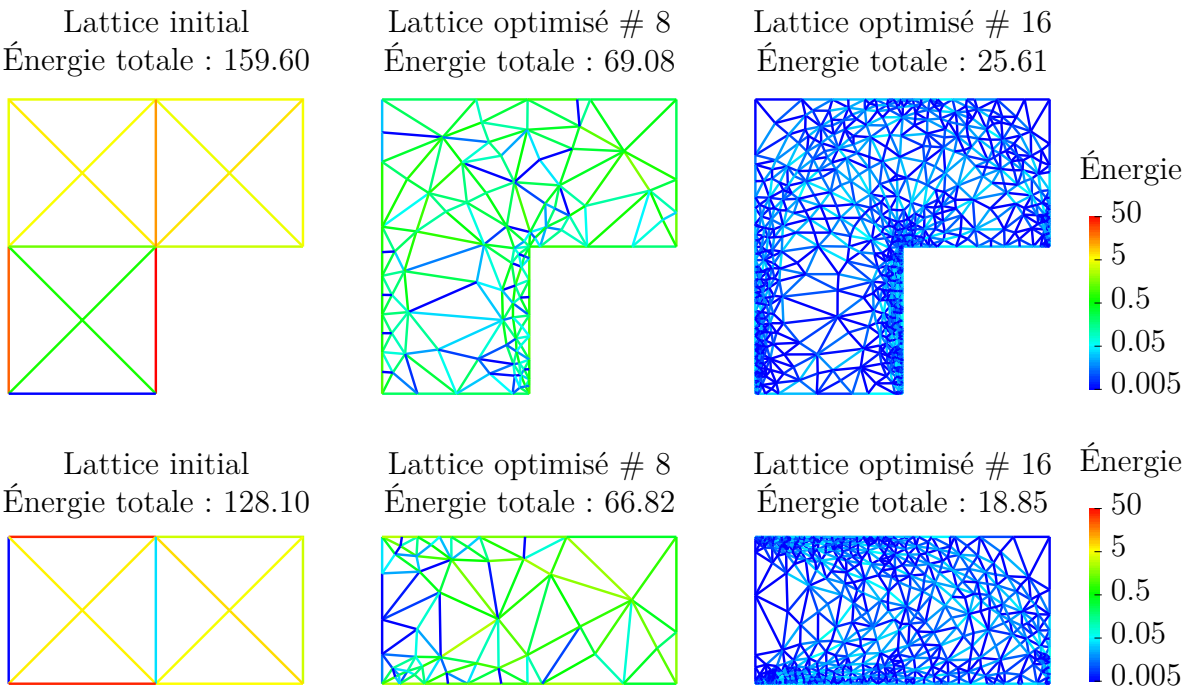


Figure 4.3 Illustration de l'optimisation topologique avec la méthode de bissection pour $\gamma = 0.5$ sur le Problème 1 (rangée du haut) et sur le Problème 2 (rangée du bas)

4.2 Choix de la borne inférieure de la contrainte de qualité de maillage

Les lattices présentés à la section précédente sont obtenus en fixant la borne inférieure de la contrainte de qualité de maillages c_κ à 0.7. Ce choix particulier de borne inférieure est justifié dans ce qui suit. On compare tout d'abord les courbes d'énergie en fonction du volume pour le Problème 1 (voir la Figure 3.12) avec le modèle d'Euler-Bernoulli, la méthode de la bissection et avec $\gamma = 0.5$.

On constate, grâce aux résultats présentés à la Figure 4.4, que plus la borne inférieure de la contrainte de qualité de maillage diminue, plus on obtient des lattices de faible volume pour une même valeur d'énergie de déformation. Ce résultat est cohérent, puisqu'une plus faible valeur de la borne inférieure sur c_κ fait en sorte que les problèmes d'optimisation de forme (3.17) sont moins contraints, permettant ainsi l'obtention de lattices optimaux $L_{opt,\mathcal{T}}$ de plus faible énergie. On vérifie maintenant si la diminution de cette borne inférieure sur la qualité du maillage impacte de manière significative la topologie des lattices obtenus par la méthode proposée.

L'analyse de la Figure 4.5, obtenu après 10 itérations de la procédure d'optimisation topologique, permet en premier lieu d'observer que de plus faibles bornes inférieures sur la contrainte de qualité de maillage engendrent des lattices dont les angles entre les membrures

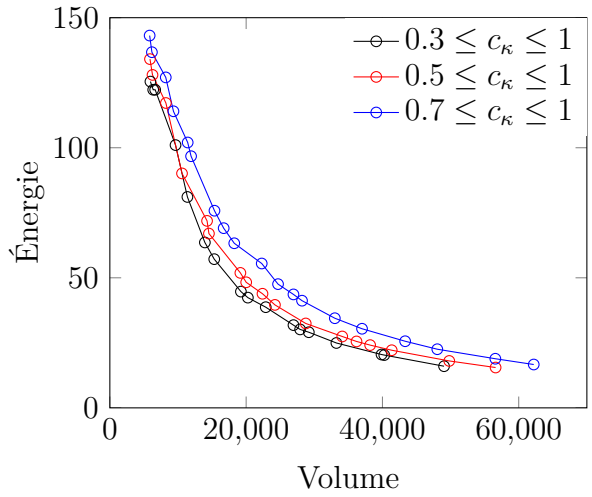


Figure 4.4 Énergie de déformation pour le problème 1 selon différentes bornes inférieures pour la qualité du maillage obtenue par la méthode de la bissection avec $\gamma = 0.5$

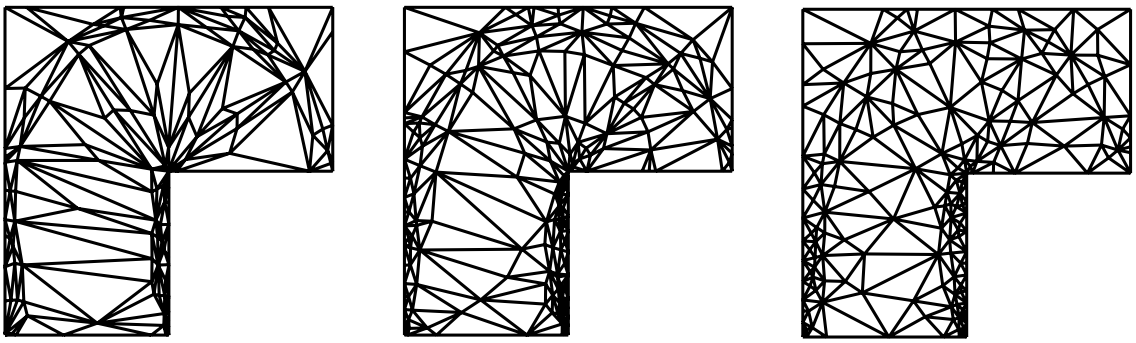


Figure 4.5 Dixième itération de l'optimisation topologique du Problème 1 par la méthode de la bissection pour $\gamma = 0.5$ avec une borne inférieure sur la qualité de maillage de 0.3 (gauche), de 0.5 (centre) et de 0.7 (droite)

sont faibles. Ce résultat est cohérent étant donné qu'une contrainte de qualité de maillage plus faible autorise les membrures à s'organiser en triangles de plus en plus dégénérés. De plus, on remarque que le lattice produit avec $0.3 \leq c_\kappa \leq 1$ possède des membrures de grande taille comparativement, entre autres, au lattice obtenu avec $0.7 \leq c_\kappa \leq 1$. Tel que mentionné en H2, on néglige dans nos modèles les déformations géométriques des membrures ainsi que la dégradation des propriétés mécaniques de celle-ci découlant du procédé de fabrication. Toutefois, il est raisonnable de penser que ces déformations géométriques et la perte de résistance mécanique s'accentuent plus une membrure est longue. C'est pour cette raison que le reste des résultats présentés dans ce chapitre sont obtenus avec une borne inférieure de 0.7 sur la qualité de maillage c_κ afin d'obtenir des lattices possédant peu de grandes membrures.

4.3 Indépendance du lattice initial

On analyse dans la présente section l'impact du choix du lattice initialisant la procédure adaptative d'optimisation topologique. La Figure 4.6 présente trois choix de lattice initial pour le problème 1 (voir la Figure 3.12).

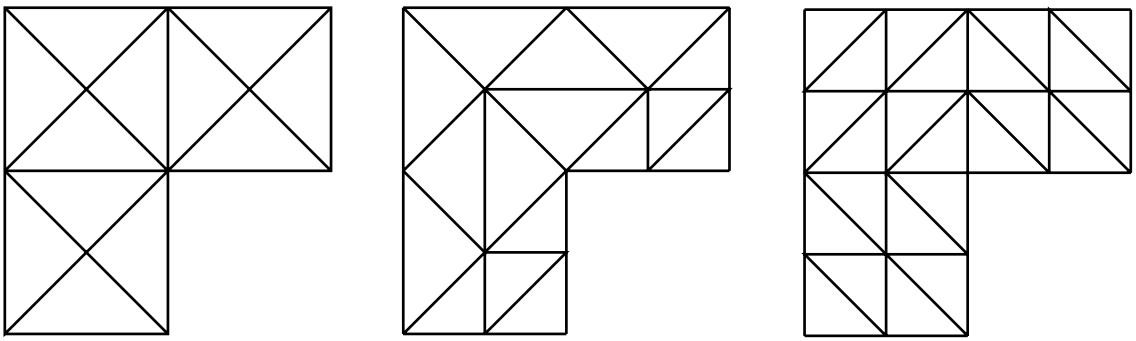


Figure 4.6 Lattice initialisant la procédure d'optimisation topologique pour le Problème 1 (lattice #1 à gauche, lattice #2 au centre et lattice #3 à droite)

On analyse à la Figure 4.7 l'évolution de l'énergie de déformation selon le volume et le nombre d'itérations pour les lattices initiaux de la Figure 4.6 avec la méthode de la division régulière et $\gamma = 0.5$.

On remarque en regardant la Figure 4.7 que l'énergie de déformation varie quelque peu au début de la procédure d'optimisation topologique, tout dépendant du choix de lattice initial. Néanmoins, ces écarts disparaissent après plusieurs itérations de l'optimisation topologique, indiquant que la procédure adaptative proposée est relativement indépendante du choix de lattice initial. Pour ce qui est du nombre d'itérations effectuées à chaque étape d'optimisation de forme, on ne distingue pas de différences notables selon le choix de lattice initial.

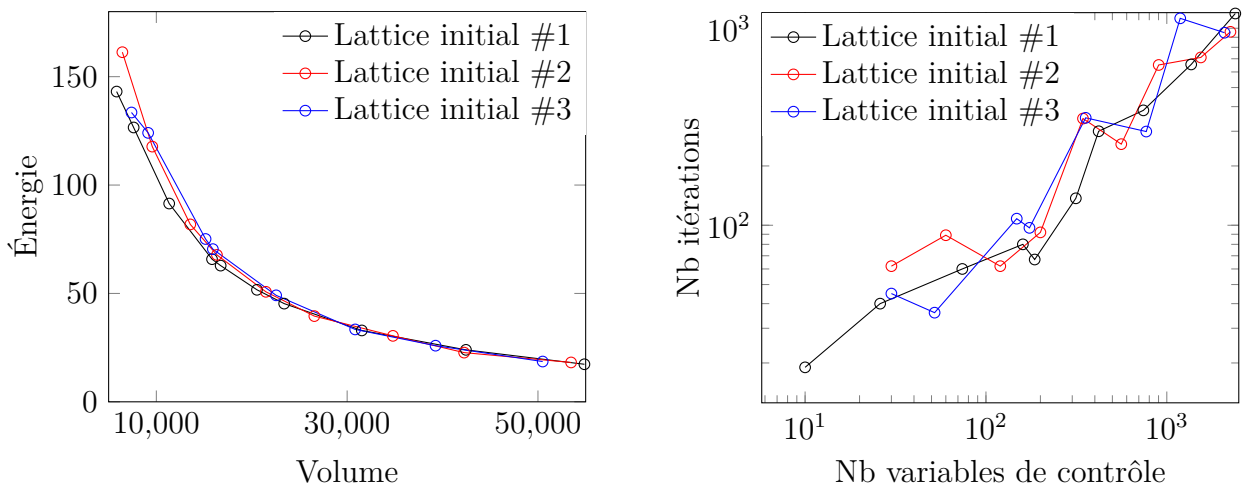


Figure 4.7 Énergie de déformation selon le volume (gauche) et nombre d'itérations selon le nombre de nœuds (droite) pour le Problème 1 avec la méthode de la division régulière et $\gamma = 0.5$ pour différents choix de lattice initial

4.4 Comparaison des différents modèles unidimensionnels d'élasticité linéaire

On applique maintenant l'optimisation topologique aux 2 cas tests (voir la Figure 3.12) avec les différents modèles unidimensionnels d'élasticité linéaire. Les résultats qui suivent sont obtenus avec la méthode de raffinement de bissection avec $\gamma = 0.5$.

On constate à la Figure 4.8 de légères variations entre les lattices obtenus après 12 itérations de la procédure d'optimisation topologique pour les Problèmes 1 et 2 (voir la Figure 3.12). Ces variations semblent plus marquées lorsqu'on compare les lattices obtenus par le modèle barre avec ceux obtenus par les deux autres modèles. Toutefois, puisqu'il est difficile de quantifier et d'analyser ces variations, on compare plutôt les courbes de l'énergie de déformation en fonction du nombre de nœuds.

On constate à la Figure 4.9 que, peu importe le modèle employé, l'énergie de déformation du lattice décroit de manière monotone en fonction du nombre de nœuds. On compare finalement le nombre d'itérations effectuées par le solveur IPOPT à chaque étape d'optimisation de forme à la Figure 4.10. On observe que la résolution de chaque étape d'optimisation de forme avec le modèle barre demande beaucoup plus d'itérations que pour les autres modèles. De plus, pour le Problème 1, le solveur IPOPT ne réussit pas à trouver une solution au problème d'optimisation de (3.17) après quelques étapes de raffinement. Ces constats peuvent s'expliquer par le fait que l'énergie de déformation peut varier brusquement avec le modèle barre si on bouge faiblement les noeuds (voir Figure 3.3). Ces observations, conjuguées au fait que le modèle barre est un modèle très simplificateur du comportement d'une structure,

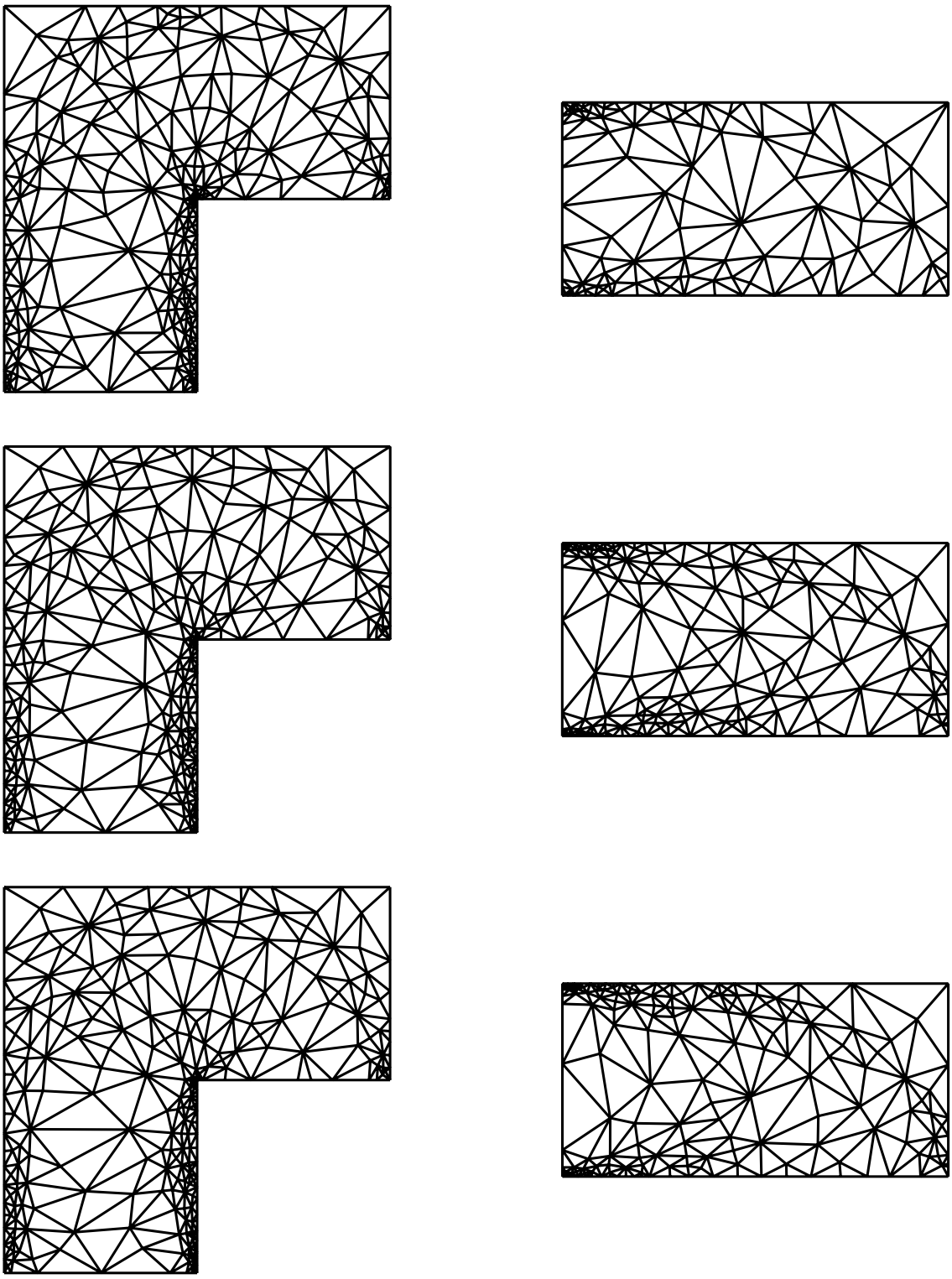


Figure 4.8 Lattices obtenus après 12 itérations de la procédure d'optimisation topologique pour le modèle barre (première rangée), pour le modèle d'Euler-Bernoulli (deuxième rangée) et pour le modèle Timoshenko (troisième rangée) avec la méthode de la bissection pour $\gamma = 0.5$

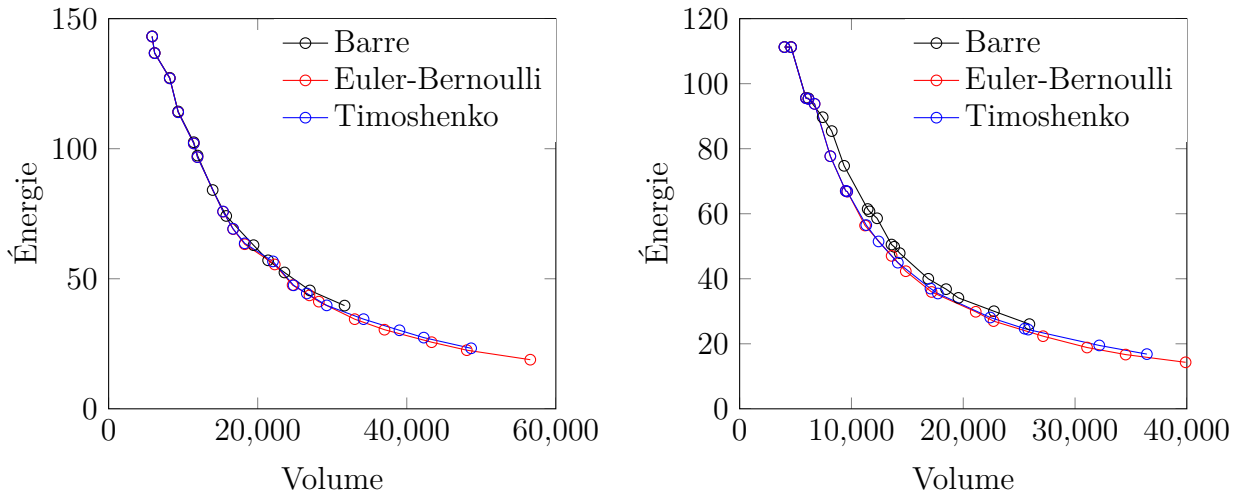


Figure 4.9 Énergie de déformation pour le Problème 1 (gauche) et pour le Problème 2 (droite)

indiquent que ce dernier modèle ne semble pas approprié pour l'optimisation topologique de lattices. Pour ce qui est du modèle de Timoshenko, celui-ci tend à être un peu plus couteux que le modèle d'Euler-Bernoulli pour des problèmes possédant beaucoup de nœuds, c'est pourquoi l'ensemble des résultats qui suivent sont obtenus avec le modèle d'Euler-Bernoulli.

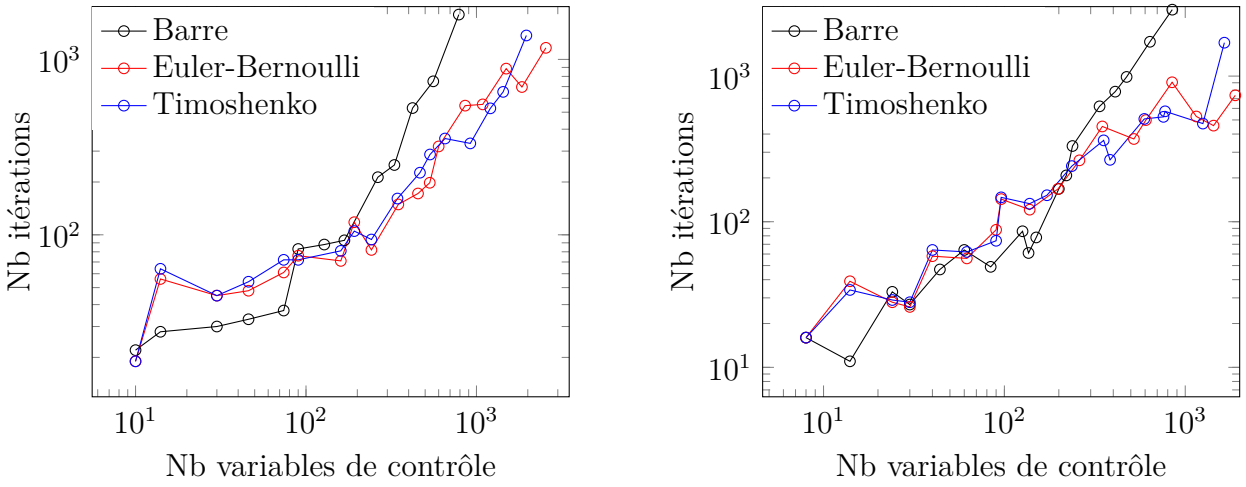


Figure 4.10 Nombre d'itérations effectuées pour chaque étape d'optimisation de forme pour le Problème 1 (gauche) et pour le Problème 2 (droite)

4.5 Comparaison des méthodes de raffinement

On vérifie maintenant si la procédure d'optimisation topologique est dépendante de la manière dont on effectue le raffinement. La Figure 4.11 présente l'évolution de l'énergie de déformation

au fil de la procédure d'optimisation topologique pour différentes méthodes de raffinement.

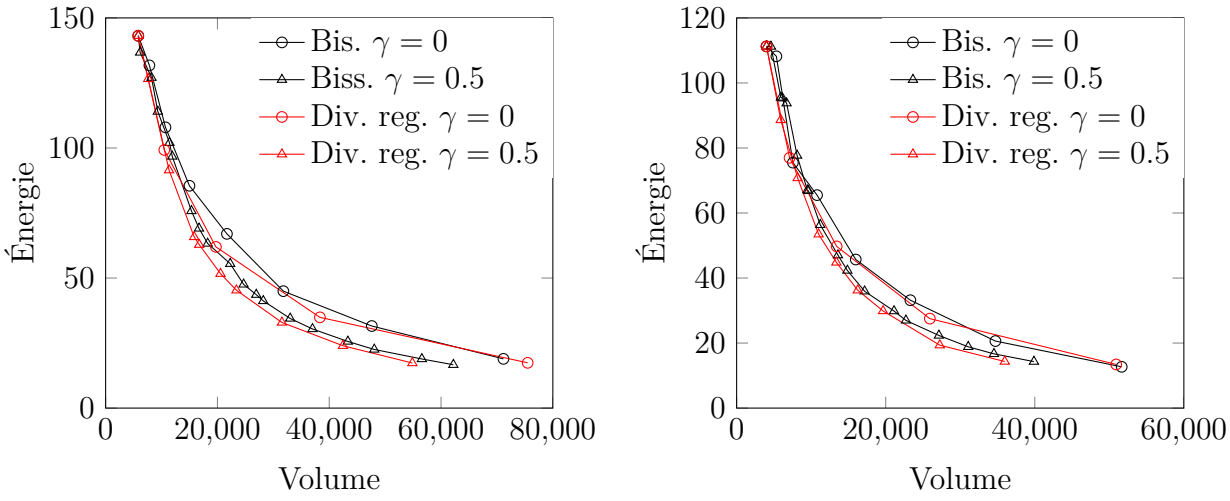


Figure 4.11 Évolution de l'énergie selon les méthodes de raffinement pour le Problème 1 (gauche) et pour le Problème 2 (droite)

Pour une même valeur d'énergie, on observe que le raffinement uniforme ($\gamma = 0$) crée des pièces de volume plus élevé que lorsqu'on utilise un raffinement local ($\gamma = 0.5$). Ce résultat est cohérent, puisque le raffinement local identifie les endroits dans le lattice où l'énergie de déformation est la plus élevée, et raffine seulement ces régions. On constate aussi que pour une même valeur de γ, le procédé d'optimisation topologique n'est pas sensible à la méthode de raffinement utilisée. En effet, les 2 courbes obtenues avec $\gamma = 0$ se superposent de même que les courbes obtenues avec $\gamma = 0.5$.

On étudie ensuite le nombre d'itérations effectuées par IPOPT à chaque étape d'optimisation de forme selon le type de raffinement effectué. La Figure 4.12 présente ces résultats, toujours pour les 2 cas tests.

L'analyse des deux graphiques de la Figure 4.12 ne permet pas de distinguer de tendances claires quant à l'impact du paramètre γ ou de la méthode de raffinement sur le nombre d'itérations effectuées. On peut conclure que l'utilisation d'un raffinement localisé ($\gamma = 0.5$) produit des lattices de plus faible volume qu'en utilisant un raffinement uniforme ($\gamma = 0$), et ce, pour un coût similaire. De plus, on peut affirmer que le procédé d'optimisation topologique est invariant face à la méthode de raffinement employée (soit la méthode de la bissection ou la méthode de la division régulière), car l'énergie de déformation et le nombre d'itérations varient de manière similaire durant l'optimisation topologique.

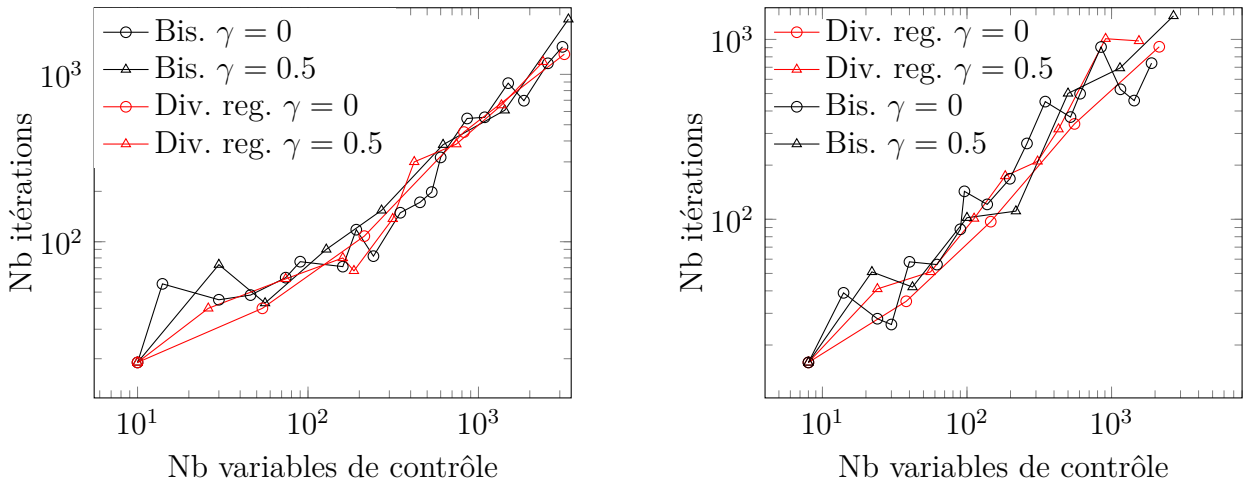


Figure 4.12 Évolution du nombre d'itérations pour chaque étape d'optimisation de forme pour le cas test 1 (gauche) et pour le test 2 (droite)

On analyse maintenant de plus près l'impact du paramètre de raffinement γ sur la procédure d'optimisation topologique. Les résultats précédents démontrent qu'il est préférable d'effectuer un raffinement localisé plutôt qu'un raffinement uniforme, on vérifie alors si le choix de $\gamma = 0.5$ est judicieux. La Figure 4.13 présente l'évolution de l'énergie de déformation du Problème 1 (voir Figure 3.12) pour le modèle d'Euler-Bernoulli avec la méthode de la bissection.

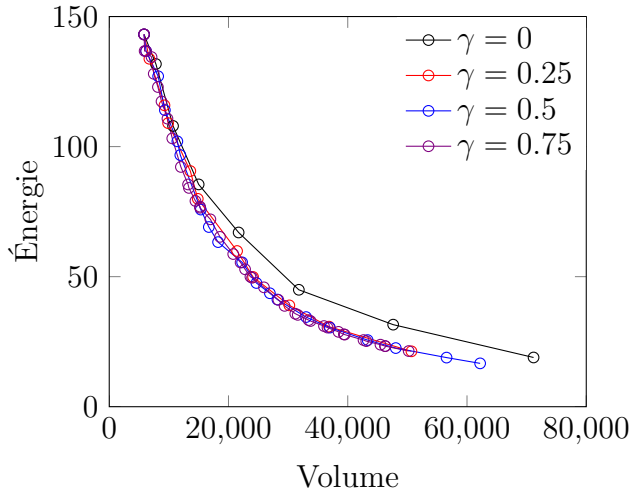


Figure 4.13 Énergie de déformation du Problème 1 avec le modèle d'Euler-Bernoulli avec la méthode de la bissection pour différentes valeurs de γ

On constate que les trois courbes représentant un raffinement localisé ($\gamma = \{0.25, 0.5, 0.75\}$) se superposent. Ceci indique que peu importe si on rajoute beaucoup de membrures ($\gamma = 0.25$)

ou peu de membrures ($\gamma = 0.75$) au cours de l'optimisation topologique, les lattices obtenus par la méthode proposée sont équivalents. On analyse alors le nombre d'itérations effectuées à chaque résolution du problème d'optimisation de forme afin de vérifier si le coût de la méthode est le même pour les différentes valeurs de γ.

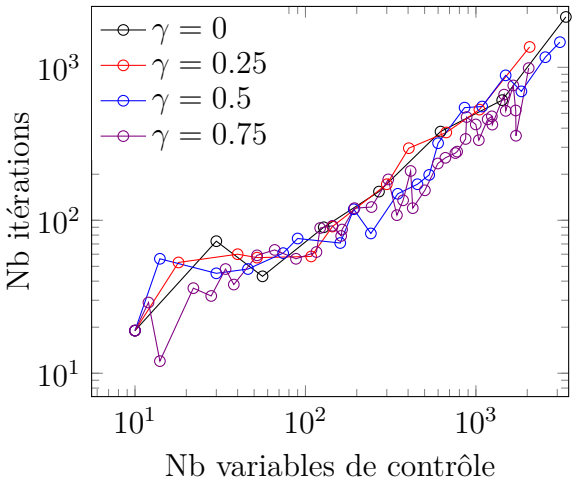


Figure 4.14 Nombre d'itérations effectuées à chaque résolution du problème d'optimisation de forme du Problème 1 avec le modèle d'Euler-Bernoulli avec la méthode de la bissection pour différentes valeurs de γ

La Figure 4.14 démontre que le coût de chaque étape d'optimisation de forme (résoudre le problème (3.17)) est à peu près le même pour toutes les valeurs de γ. On observe toutefois que le nombre de lattices produits avec $\gamma = 0.75$ est beaucoup plus grand qu'avec $\gamma = 0.25$ ou $\gamma = 0$, car on ajoute très peu de membrures à chaque fois que (3.17) est résolu. Pour le reste de ce mémoire, le raffinement localisé est illustré avec $\gamma = 0.5$, qui constitue un compromis entre le nombre de lattices produits par l'optimisation topologique et le temps de calcul de l'ensemble de la procédure.

4.6 Pertinence de l'optimisation adaptative de la topologie de lattices

À présent que le comportement de la procédure adaptative d'optimisation topologique est analysé pour les divers modèles d'élasticité linaire et pour différentes méthodes de raffinement, on regarde les avantages que présente cette méthode. Afin de clarifier les multiples résultats présentés dans cette section, on décrit la signification des diverses courbes :

— Lattices structurés sans optimisation topologique ni optimisation de forme (voir la Figure 3.13 et 3.14 à gauche pour des exemples). Le marqueur de ces résultats est ▫ Lattice structuré.

— Lattices structurés soumis à l'optimisation de forme (voir la Figure 3.13 et 3.14 à droite pour des exemples). Le marqueur de ces résultats est $*$ OPti. forme.
— Lattice soumis à l'optimisation topologique avec raffinement uniforme (—○— Bis. $\gamma = 0$).
— Lattice soumis à l'optimisation topologique avec raffinement local pour $\gamma = 0.5$ (—○— Bis. $\gamma = 0.5$).

On compare donc la méthode adaptative d'optimisation topologique avec un raffinement uniforme ($\gamma = 0$) et local ($\gamma = 0.5$) avec l'optimisation de forme pour un même nombre de nœuds P dans les divers lattices. On affiche aussi les lattices structurés, donc les lattices non optimisés possédant le même nombre de nœuds P que ceux obtenus par raffinement uniforme. Les résultats présentés à la Figure 4.15 sont obtenus avec le modèle d'Euler-Bernoulli et avec la méthode de raffinement de la bissection.

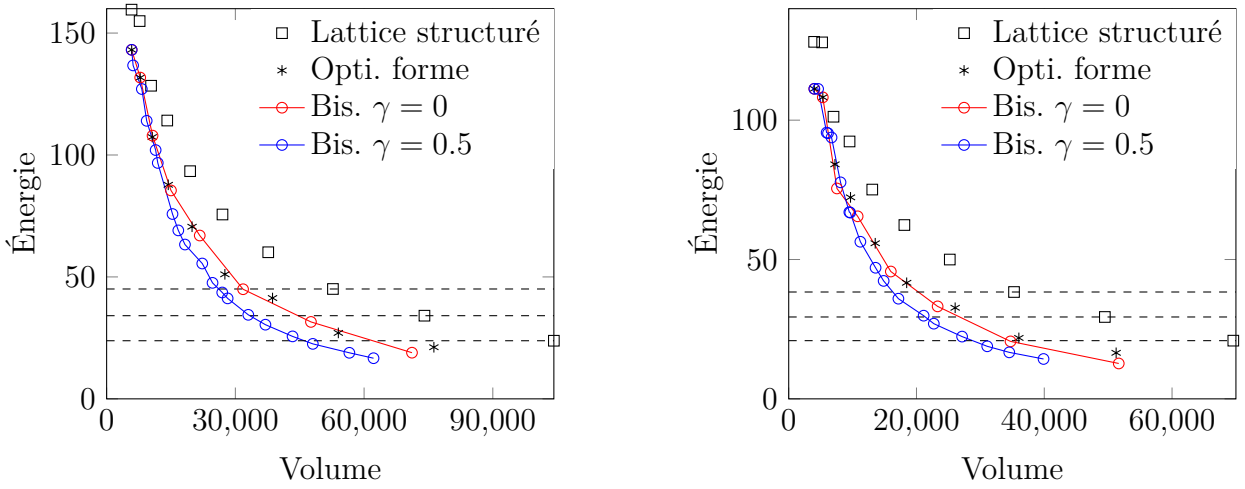


Figure 4.15 Comparaison de l'énergie de déformation pour le Problème 1 (gauche) et pour le Problème 2 (droite)

En analysant la Figure 4.15, on constate clairement que l'utilisation de l'optimisation topologique ou de l'optimisation de forme seule permet de diminuer grandement l'énergie de déformation d'un lattice par rapport à son équivalent structuré. Comme il a été mentionné précédemment, pour une même valeur d'énergie, cette diminution est significative et de plus grande valeur avec le raffinement localisé qu'avec le raffinement uniforme. On remarque aussi que les lattices obtenus par l'optimisation topologique avec raffinement uniforme possèdent une énergie de déformation similaire à celle obtenue par des lattices issus optimisation de forme seule. Le Tableau 4.1 présente les volumes des lattices du Problème 1 pour différentes valeurs d'énergie. On interpole les volumes pour les lattices obtenus avec la méthode adaptative à l'aide d'interpolation linéaire et on affiche la réduction de volume par rapport aux lattices structurés.

Tableau 4.1 Comparaison de volume pour le Problème 1

	Volume pour une énergie de 45.05	Volume pour une énergie de 34.10	Volume pour une énergie de 23.83
Lattice régulier	52742	74068	104 227
Bis $\gamma = 0$	31751 (-39.8%)	44606 (-39.8%)	62015 (-40.5%)
Bis $\gamma = 0.5$	26121 (-50.5%)	33371 (-54.9%)	46072 (-55.8%)

L'analyse du Tableau 4.1 permet de constater que la procédure adaptative présentée dans ce chapitre permet une réduction significative du volume des lattices créés. Cette diminution de volume est d'autant plus significative si on emploie un raffinement localisé ($\gamma = 0.5$). Aussi, la réduction de volume s'accentue plus l'énergie de déformation du lattice est faible. On regarde maintenant si on obtient des résultats similaires pour le Problème 2.

Tableau 4.2 Comparaison de volume pour le Problème 2

	Volume pour une énergie de 38.34	Volume pour une énergie de 29.38	Volume pour une énergie de 20.88
Lattice régulier	35266	49483	69589
Bis $\gamma = 0$	20286 (-42.5%)	26760 (-45.9%)	34477 (-50.5%)
Bis $\gamma = 0.5$	16300 (-53.8%)	21377 (-56.8%)	28784 (-58.6%)

L'analyse du Tableau 4.2 révèle les mêmes tendances dans la réduction de volumes que pour le Problème 1. Il est encore une fois préférable d'employer une méthode de raffinement local puisqu'elle engendre de plus grandes réductions de volumes. On constate, comme pour le Problème 1, que cette réduction est plus grande au fur et à mesure que l'énergie du lattice décroit. On analyse maintenant à la Figure 4.16 le nombre d'itérations effectués afin de voir si la méthode adaptative d'optimisation topologique permet d'atteindre une solution avec un coût plus faible. Il est important de noter qu'étant donné que les lattices structurés ne sont pas obtenus ni par l'optimisation de forme ni par l'optimisation topologique, leur création n'implique aucun coût.

L'analyse de la Figure 4.16 ne permet pas de conclure quelle méthode engendre le moins d'itérations lors de la résolution du problème d'optimisation de forme. Ainsi, puisque le coût de chacune de ces méthodes est sensiblement le même, l'optimisation topologique avec raffinement localisé est la méthode à privilégier, car elle permet la création de lattices de volume plus faible.

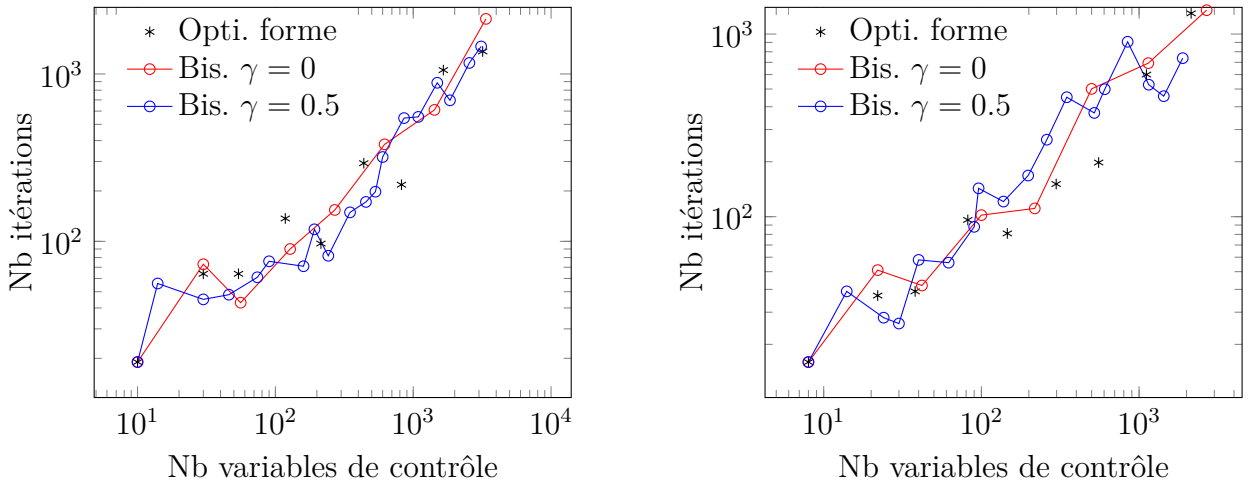


Figure 4.16 Comparaison du nombre d'itérations pour chaque problème d'optimisation de forme pour le cas test 1 (gauche) et pour le cas test 2 (droite)

CHAPITRE 5 CONCLUSION

La méthodologie adaptative d'optimisation topologique présentée dans ce mémoire permet d'atteindre les objectifs fixés du projet de maîtrise. En effet, cette procédure permet d'obtenir des approximations successives $L_{opt,\mathcal{T}}$ du lattice optimal L_{opt} solutionnant (1.4).

Cette méthode repose tout d'abord sur la description de la physique d'un lattice à l'aide de modèles d'élasticité linéaire présentés au Chapitre 2. On y présente de manière cohérente les différents modèles unidimensionnels simplifiant la description des déformations d'un lattice soumis à des chargements mécaniques.

On présente ensuite au Chapitre 3 le problème d'optimisation de forme consistant à obtenir un lattice $L_{opt,\mathcal{T}}$ comme solution du problème (3.17). Ce problème d'optimisation de forme consiste à minimiser l'énergie de déformation d'un lattice pour une connectivité fixe. Les résultats préliminaires démontrent l'importance d'ajouter des contraintes géométriques au problème d'optimisation de forme, notamment des contraintes sur la frontière ainsi que des contraintes sur la qualité des maillages. On introduit ensuite les deux problèmes tests étudiés dans le cadre de cette maîtrise et on applique l'optimisation de forme à ces mêmes problèmes. On observe que la résolution du problème d'optimisation de forme permet bel et bien une réduction de l'énergie de déformation d'un lattice lorsqu'on optimise la position de ses nœuds.

Le Chapitre 4 est dédié à la description et à l'étude de la procédure adaptative d'optimisation topologique de lattice. On expose tout d'abord l'algorithme adaptatif consistant, à partir d'un lattice possédant peu de membrures, à résoudre le problème d'optimisation de forme (3.17) sur ce lattice afin d'obtenir $L_{opt,\mathcal{T}}$. On rajoute ensuite de nouvelles membrures à $L_{opt,\mathcal{T}}$ et l'on résout une nouvelle fois le problème d'optimisation sur ce nouveau lattice. On répète ces étapes jusqu'à l'atteinte d'un certain critère d'arrêt. Dès lors que l'idée générale de l'adaptation est présentée, on décrit les diverses méthodes de raffinement permettant d'ajouter de la matière au sein du lattice.

On analyse ensuite en détails le comportement de la procédure adaptative d'optimisation topologique en fonction de divers paramètres. On observe en premier lieu que l'énergie de déformation des lattices obtenus par l'optimisation topologique ne dépend pas du choix du lattice initial. On analyse ensuite l'impact de l'utilisation des différents modèles unidimensionnels dans la procédure d'optimisation topologique. On remarque que le modèle barre ne

semble pas le plus approprié afin d'optimiser la topologie d'un lattice, étant donné que le solveur IPOPT doit effectuer un nombre considérablement plus élevé d'itérations pour résoudre la succession de problèmes (3.17) que pour les deux autres modèles. De plus, ce modèle décrit de manière très grossière la physique d'un lattice. Quant aux deux autres modèles, celui d'Euler-Bernoulli semble engendrer un peu moins d'itérations lors de la résolution des problèmes d'optimisation de forme que pour le modèle de Timoshenko. On compare ensuite les diverses méthodes de raffinement et l'on observe que l'emploi d'un raffinement localisé ($\gamma = 0.5$) produit des lattices de volume plus faible que lorsqu'on raffine de manière uniforme ($\gamma = 0$). L'évolution de l'énergie selon le volume des lattices est aussi indépendante du paramètre γ, tant que celui-ci n'est pas nul. On constate aussi que la méthode de raffinement, soit la bissection ou la division régulière, a peu d'impact sur la procédure d'optimisation topologique.

Finalement, on compare les lattices issus de la procédure adaptative proposée à des lattices structurés. On note que pour une même valeur d'énergie de déformation, l'optimisation topologique avec raffinement uniforme permet une réduction de volume de 40 à 50% par rapport au volume d'un lattice structuré. Cette réduction s'élève jusqu'à 60% lorsqu'on emploie un raffinement localisé. Ces résultats indiquent que la procédure développée dans ce mémoire permet l'obtention de topologies de lattices dont le volume est grandement diminué par rapport à des lattices structurés.

5.1 Futurs travaux

Ce projet de maîtrise ne représente qu'une étape exploratrice du problème de design de lattices. En effet, une prochaine étape consiste à appliquer la méthode proposée à l'optimisation topologique de lattices tridimensionnels. Ensuite, d'autres formulations du problème d'optimisation de forme peuvent être explorées, telles que mentionnées dans la Section 3.5. Entre autres, l'ajout des rayons de membrures comme paramètres de design peut étendre le champ de possibilité de l'optimisation topologique. Ainsi que mentionné au Chapitre 1, l'adaptation des modèles décrivant la physique à l'intérieur de la procédure d'optimisation topologique doit faire l'objet de plus amples recherches.

De manière plus générale, la méthode proposée simplifie grandement la physique d'un lattice et néglige les contraintes de fabrication. Des travaux supplémentaires doivent être effectués afin d'incorporer ces contraintes additionnelles, notamment l'orientation des membrures par rapport au plan de fabrication, dans le problème d'optimisation topologique. On peut aussi

enrichir le problème d'optimisation topologique en prenant compte de l'incertitude des chargements et des procédés de fabrication. De plus, on peut prendre en compte d'autres aspects mécaniques d'un lattice, comme la résistance mécanique de ses noeuds, ses modes vibratoires ou sa résistance au flambement. Ces travaux doivent aussi s'accompagner de validation effectuée à l'aide d'essais expérimentaux afin de s'assurer que la procédure d'optimisation topologique engendre des lattices manufacturables dont les divers requis de design sont respectés.

RÉFÉRENCES

[1] Opti toolbox - a free matlab toolbox for optimization, 2016.

[2] W. Achtziger. On simultaneous optimization of truss geometry and topology. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 33(4) :285–304, 2007.

[3] E. Andreassen, A. Clausen, M. Schevenels, B. S. Lazarov, and O. Sigmund. Efficient topology optimization in matlab using 88 lines of code. *Struct. Multidiscip. Optim.*, 43(1) :1–16, jan 2011.

[4] A. Asadpoure, J. K. Guest, and L. Valdevit. Incorporating fabrication cost into topology optimization of discrete structures and lattices. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 51(2) :385–396, 2015.

[5] K. Atkinson and H. Weimin. *Theoretical Numerical Analysis*. Springer New York, 2009.

[6] A. Bazergui, T. Bui-Quoc, A. Biron, G. McIntyre, and C. Laberge. *Résistance des matériaux*. Presses internationales Polytechnique, 2002.

[7] M. P. Bendsøe. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural optimization*, 1(4) :193–202, 1989.

[8] M. P. Bendsøe and O. Sigmund. Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of Applied Mechanics*, 69(9) :635–654, 1999.

[9] M. Bogomolny, M. Zhou, U. Schramm, and R. Fleury. Advanced structural optimization for additive manufacturing, 2015.

[10] O. Cansizoglu, O. L. Harrysson, H. A. West II, D. R. Cormier, and T. Mahale. Applications of structural optimization in direct metal fabrication. *Rapid Prototyping Journal*, 14 :114 – 122, 2008.

[11] C. Chu, G. Graf, and D. W. Rosen. Design for additive manufacturing of cellular structures. *Computer-Aided Design and Applications*, 5(5) :686–696, 2008.

[12] H. L. De Cougny and M. S. Shephard. Parallel refinement and coarsening of tetrahedral meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(7) :1101–1125, 1999.

[13] B. Descamps. *Optimal shaping of lightweight structures*. PhD thesis, 2013.

[14] L. A. Freitag and P. M. Knupp. Tetrahedral element shape optimization via the jacobian determinant and condition number. In *IMR*, pages 247–258, 1999.

[15] I. Gibson, D. W. Rosen, and B. Stucker. *Additive Manufacturing Technologies*. Springer, 2010.

[16] M. Gilbert and A. Tyas. Layout optimization of large scale pin jointed frames. *Engineering Computations*, 20(8) :1044–1064, 2003.

[17] T. Hagishita and M. Ohsaki. Topology optimization of trusses by growing ground structure method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 37(4) :377–393, 2009.

[18] M. Hinze, R. Pinnau, M. Ulbrich, and S. Ulbrich. *Optimization with PDE Constraints*. Springer, 2009.

[19] M. T. Jones and P. E. Plassmann. Adaptive refinement of unstructured finite-element meshes. *Finite Elements in Analysis and Design*, 25(1) :41 – 60, 1997. Adaptive Meshing, Part 1.

[20] J. Kranz, D. Herzog, and C. Emmelmann. Design guidelines for laser additive manufacturing of lightweight structures in tial6v4. *Journal of Laser Applications*, 27(S1) :S14001, 2015.

[21] W. F. Mitchell. A comparison of adaptive refinement techniques for elliptic problems. *ACM Trans. Math. Softw.*, 15(4) :326–347, dec 1989.

[22] T. Munson. Mesh shape-quality optimization using the inverse mean-ratio metric. *Mathematical programming*, 110(3) :561 – 590, Septembre 2007.

[23] J. Nguyen, S.-I. Park, D. W. Rosen, L. Folgar, and J. Williams. Conformal lattice structure design and fabrication. In *Solid Freeform Fabrication Symposium*, 2012.

[24] J. Nocedal, A. Wachter, and R. A. Waltz. Adaptive barrier update strategies for nonlinear interior methods. *SIAM Journal on Optimization*, 19(4) :1674–1693, 2009.

[25] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer, 2006.

[26] A. Öchsner and M. Merkel. *One-Dimensional Finite Elements - An Introduction to the FE Method*. Springer, 2013.

[27] J. Oden and S. Prudhomme. Goal-oriented error estimation and adaptivity for the finite element method. *Computers & Mathematics with Applications*, 41(5) :735 – 756, 2001.

[28] P. P. Pébay and T. J. Baker. Analysis of triangle quality measures. *Mathematics of Computation*, 72(244) :1817 – 1839, Octobre 2003.

[29] K. S. Rangasami and S. K. Mallick. Degrees of freedom of plane and space frames. *The Structural Engineer*, 44(3), 1966.

[30] M. C. Rivara. Algorithms for refining triangular grids suitable for adaptive and multigrid techniques. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20(4) :745–756, 1984.

[31] G. I. N. Rozvany. A critical review of established methods of structural topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 37(3) :217–237, 2009.

[32] C. Smith, F. Derguti, E. H. Nava, M. Thomas, S. Tammas-Williams, S. Gulizia, D. Fraser, and I. Todd. Dimensional accuracy of electron beam melting (ebm) additive manufacture with regard to weight optimized truss structures. *Journal of Materials Processing Technology*, 229 :128 – 138, 2016.

[33] J. Smith, J. Hodgins, I. Oppenheim, and A. Witkin. Creating models of truss structures with optimization. In *Proceedings of the 29th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, SIGGRAPH '02, pages 295–301, New York, NY, USA, 2002. ACM.

[34] R. Verfürth. A posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 50(1) :67 – 83, 1994.

[35] A. Wachter and L. T. Biegler. Line search filter methods for nonlinear programming : Motivation and global convergence. *SIAM Journal on Optimization*, 16(1) :1–31, Aout 2005.

[36] A. Wachter and L. T. Biegler. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical programming*, 106 :25–57, March 2006.

[37] D. Wang, Y. Yang, R. Liu, D. Xiao, and J. Sun. Study on the designing rules and processability of porous structure based on selective laser melting (slm). *Journal of Materials Processing Technology*, 213(10) :1734 – 1742, 2013.

[38] T. Zegard and G. H. Paulino. Grand — ground structure based topology optimization for arbitrary 2d domains using matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 50(5) :861–882, 2014.

[39] T. Zhao. An implementation of the ground structure method considering buckling and nodal instabilities. Master's thesis, 2014.