



Titre: Modélisation et commande d'un drone hélicoptère tandem
Title:

Auteur: Frédérick Laliberté
Author:

Date: 2017

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Laliberté, F. (2017). Modélisation et commande d'un drone hélicoptère tandem
Citation: [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.
<https://publications.polymtl.ca/2737/>

 Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/2737/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:** David Saussié
Advisors:

Programme: Génie aérospatial
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÉLISATION ET COMMANDE D'UN DRONE HÉLICOPTÈRE TANDEM

FRÉDÉRICK LALIBERTÉ
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE AÉROSPATIAL)
AOÛT 2017

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

MODÉLISATION ET COMMANDE D'UN DRONE HÉLICOPTÈRE TANDEM

présenté par : LALIBERTÉ Frédéric

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. GOURDEAU Richard, Ph. D., président

M. SAUSSIÉ David Alexandre, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. ACHICHE Sofiane, Ph. D., membre

DÉDICACE

À Catherine

REMERCIEMENTS

Mes remerciements vont d'abord à mon directeur de recherche David Alexandre Saussié. Sa confiance, ses encouragements, sa passion, et son aide m'ont permis de mener à bien le projet qui m'a été confié. Je le remercie de m'avoir offert son support et de s'être rendu aussi disponible pour m'épauler lorsque j'en avais besoin.

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été financés grâce au Conseil de Recherche en Sciences Naturelles et en Génie du Canada (CRSNG), au Fonds Québécois de la Recherche sur la Nature et les Technologies (FQRNT), et à Laflamme Aéro Inc. Ce financement s'est effectué dans le cadre du programme de Bourse en Milieu Pratique (BMP), qui m'a été accordé pour réaliser ce projet fort intéressant. Je remercie ces organismes de m'avoir appuyé et de m'avoir permis de saisir cette opportunité.

Je remercie aussi les partenaires de Laflamme Aéro Inc. qui participent au projet CARIC AUT703_TRL4+, soient NGC Aérospatiale Ltée, RAAS Inc., SINTERS AMERICA Inc., Polytechnique Montréal, et l'ÉTS. Je tiens à remercier particulièrement NGC Aérospatiale Inc. de m'avoir accueillis dans leurs locaux et d'avoir mis à ma disposition leurs ressources matérielles et humaines pour m'appuyer dans mes travaux. Je suis reconnaissant du support offert par David Neveu, qui a été mon superviseur lors de mes séjours chez NGC, et de l'aide apportée par Amr Nagati et Mike Alger en ce qui concerne l'implémentation. Je pense aussi à Sylvain Lemarquand qui s'est rendu disponible afin que les simulations haute fidélité puissent être réalisées.

Je tiens à remercier mes parents et mes amis, qui sont toujours à mes côtés pour m'appuyer et m'encourager. Leur joie et leur bonne humeur sont contagieuses, et je leur en suis très reconnaissant.

Finalement, je veux remercier Catherine, à qui je dédie ce mémoire. Les mots me manquent pour décrire la lumière qu'elle rayonne dans mes moments sombres et l'enthousiasme qu'elle témoigne lors des temps heureux.

Merci encore à tous,
Frédéric

RÉSUMÉ

Depuis une quinzaine d'années, le domaine des drones est en plein essor, soutenu notamment par la recherche universitaire. Les drones prennent généralement la forme d'hélicoptères miniatures, de multicoptères, ou encore d'avions, selon les missions auxquelles ils sont destinés. Or, un intérêt grandissant pour le transport de marchandise se fait sentir pour leur usage commercial et industriel, une tâche que les drones actuels peinent à accomplir. C'est dans ce contexte qu'un projet de recherche et de développement, le projet CARIC AUT703_TRL4+, a vu le jour. Ce projet, regroupant des partenaires industriels et universitaires, a pour objectif de mettre au point un drone de type hélicoptère tandem. Cette configuration offre des avantages reconnus pour le transport de charge utile, incluant sa robustesse aux changements de masse, de centrage et d'inertie.

Le présent mémoire aborde la modélisation et la commande du drone hélicoptère tandem considéré dans le cadre du projet CARIC, soit le LX300. La recherche effectuée a pour objectif de modéliser un hélicoptère tandem, une configuration souvent peu abordée dans la littérature, et de synthétiser un contrôleur à architecture fixe qui stabilise l'appareil sur l'ensemble de son enveloppe de vol tout en étant robuste aux variations causées par la charge utile.

La modélisation du drone est d'abord traitée par une approche classique propre aux hélicoptères ; cependant, une attention particulière est accordée à la modélisation de l'influence d'une charge utile décentrée, de l'interaction aérodynamique entre les deux rotors, et du design spécifique aux rotors de l'aéronef considéré. Une modélisation complète de la dynamique des rotors est réalisée afin de pouvoir simuler les comportements plus fins de ceux-ci, puis une simplification est appliquée afin de permettre l'équilibrage et la linéarisation du système. Cette simplification permet aussi d'obtenir des équations très proches de ce qui est présenté dans la littérature, avec pour différence les particularités apportées par la configuration tandem et l'aspect spécifique des rotors considérés.

Par la suite, les boucles de stabilisation du drone sont synthétisées en assurant qu'elles soient robustes à des variations de masse, d'inertie et de centrage pour toutes les conditions de vol prévues. L'architecture du contrôleur étant imposée par la plateforme embarquée choisie, la méthode $\mathcal{H}_\infty$ structurée avec séquençement de gains est alors privilégiée afin d'atteindre les objectifs de performances et de robustesse. Cette méthode étant sensible aux conditions initiales fournies, une approche en plusieurs étapes est choisie afin d'augmenter progressivement la complexité du problème à résoudre par l'algorithme utilisé. Cette approche permet aussi

de valider les choix de requis effectués avant de les appliquer à la synthèse complète.

Le contrôleur est finalement validé sur le modèle non linéaire complet, puis sur un simulateur haute fidélité pour différents types de manœuvres, selon l'implémentation présentée. Les résultats satisfaisant les requis des partenaires industriels, le contrôleur proposé sera utilisé pour les premiers tests en vol du drone LX300.

ABSTRACT

For the last fifteen years, the drone market has been booming, thanks in part to academic research. Drones can usually be found as miniature helicopters, multicopters, or planes, depending on the tasks they are expected to carry out. A task that today's drones struggle to accomplish is the transport of goods, which is receiving a growing interest from commercial and industrial sectors. It is in this context that the CARIC AUT703_TRL4+ research and development project was born. This project brings together industrial and academic partners in the aim to develop a tandem helicopter drone. This configuration offers recognized advantages for payload transport, including its robustness to weight, balance and inertia changes.

This master's thesis covers the modelling and control of the tandem helicopter drone considered in the framework of the CARIC project, the LX300. The goal of this research is to model a tandem helicopter, a configuration that is often neglected in the literature, and to synthesize a fixed-structure controller that stabilizes the rotorcraft over its entire flight envelope while being robust to the variations caused by the payload.

The modelling of the drone is first realized using a conventional approach for helicopters. However, particular attention is paid to the modelling of the influence of an unbalanced payload, the aerodynamic interaction between the two rotors, and the design specific to the rotors under consideration. The dynamics of the rotors is fully modelled in order to be able to simulate their finer behaviours, then a simplification is applied in order to allow the trimming and the linearization of the system. This simplification leads to equations that are very close to what is currently found in the literature, with the additions brought by the tandem configuration and by the unique rotors under consideration.

The stabilization loops of the drone are then synthesized ensuring robustness to variations in weight, balance and inertia for all the expected flight conditions. Since the controller architecture is imposed by the selected embedded platform, the structured $\mathcal{H}_\infty$ method with gain scheduling is favoured in order to achieve the objectives of performance and robustness. This method being sensitive to the initial conditions, a multi-step approach is used in order to gradually increase the complexity of the problem to be solved. This approach also allows the validation of the selected requirements, before using them for the complete synthesis.

The controller is finally validated on the complete nonlinear model, and then on a high fidelity simulator for different types of manoeuvres, according to the presented implementation. The results meeting the requirements of the industrial partners, the proposed controller will be

used for the first flight tests of the LX300 drone.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	ix
LISTE DES TABLEAUX	xiii
LISTE DES FIGURES	xiv
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xvii
LISTE DES ANNEXES	xviii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Éléments de la problématique	2
1.2 Objectifs de recherche	3
1.3 Plan du mémoire	4
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE	5
2.1 Modélisation	5
2.1.1 Rotor d'hélicoptère	6
2.1.2 Sillons, interférences et effet de sol	7
2.2 Commande	8
2.2.1 Commande linéaire	8
2.2.2 Commande non linéaire par séquençement de gains	10
CHAPITRE 3 MODÉLISATION	12
3.1 Dynamique du corps rigide avec 6 degrés de liberté	12
3.2 Inertie	14
3.2.1 Configuration à vide	16
3.2.2 Configuration à plein (essence)	16

3.2.3	Configuration intermédiaire (essence)	18
3.2.4	Configuration avec charge utile	19
3.3	Dynamiques des rotors	21
3.3.1	Hypothèses de modélisation et axes de référence	22
3.3.2	Forces et moments aérodynamiques	23
3.3.3	Autres forces et moments	29
3.3.4	Mouvements des pales	29
3.3.5	Forces et moments transmis au mât du rotor	30
3.3.6	Simplifications en vue de la linéarisation	30
3.3.7	Coefficients aérodynamiques	32
3.3.8	Effet de sol	32
3.3.9	Forces et moments transmis au corps rigide	33
3.4	Traînée du fuselage	33
3.5	Auto-influences et interférences aérodynamiques	34
3.6	Dynamique des servomoteurs	35
3.6.1	DA26	35
3.6.2	DA26D	36
3.7	Mécanisme de contrôle	38
3.7.1	Relations géométriques entre les angles de servomoteurs et les angles de contrôle	38
3.8	Mixage des commandes	44
3.8.1	Calcul des angles collectifs et cycliques désirés	44
3.8.2	Calcul des angles d'actionneur désirés	45
3.9	Contrôle	45
3.9.1	Architecture du contrôleur PID utilisé	46
3.9.2	Architecture globale des lois de commande	46
3.10	Environnement	49
3.10.1	Masse volumique de l'air	49
3.10.2	Vitesse aérodynamique	49
3.10.3	Vent	49
3.11	Autres sous-systèmes	50
CHAPITRE 4 CONCEPTION		51
4.1	Linéarisation du modèle de l'hélicoptère en vol stationnaire	51
4.2	Synthèse préliminaire	52
4.2.1	Système en boucle ouverte	53

4.2.2	Commande optimale	54
4.2.3	Commande modale par placement de structures propres	57
4.2.4	Contrôleur préliminaire pour la synthèse robuste	60
4.3	Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ structurée pour le vol stationnaire	63
4.3.1	Rappel concernant la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ structurée	63
4.3.2	Requis	65
4.3.3	Pondérations	65
4.3.4	Résultats	70
4.3.5	Analyse	72
4.3.6	Simulation	73
4.4	Linéarisation du modèle de l'hélicoptère sur toute l'enveloppe de vol	73
4.4.1	Enveloppe de vol	74
4.4.2	Équilibrage	74
4.4.3	Linéarisation	76
4.5	Synthèse robuste sur toute l'enveloppe de vol	76
4.5.1	Séquencement des gains et linéarisation du contrôleur	76
4.5.2	Requis	79
4.5.3	Pondérations	80
4.5.4	Résultats	90
CHAPITRE 5	IMPLÉMENTATION	95
5.1	Implémentation du contrôleur sur la plateforme MicroPilot	95
5.1.1	Implémentation des PID	95
5.1.2	Implémentation du mixage des commandes	98
5.2	Calcul des gains implémentés	98
5.3	Procédure de décollage et d'atterrissage	100
CHAPITRE 6	VALIDATION	102
6.1	Simulations du modèle non linéaire (MATLAB/SIMULINK)	102
6.1.1	Simulation du modèle simplifié	103
6.1.2	Simulation du modèle complet	106
6.2	Simulation haute fidélité (HELISIM)	108
CHAPITRE 7	CONCLUSION	111
7.1	Synthèse des travaux	111
7.2	Limitations et améliorations futures des lois de commande proposées	112

RÉFÉRENCES	114
ANNEXES	118

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Valeurs numériques utilisées pour les calculs d'inertie	19
Tableau 3.2	Propriétés du moteur à courant continu des servomoteurs	36
Tableau 3.3	Performances du servomoteur DA26	36
Tableau 3.4	Performances du servomoteur DA26D	37
Tableau 3.5	Mixage des commandes (première étape)	44
Tableau 4.1	Emplacement et configuration de charge utile (vol stationnaire) . . .	52
Tableau 4.2	Temps de réponse à 2% du système en boucle fermée	56
Tableau 4.3	Pôles du système en boucle fermée (commande optimale)	57
Tableau 4.4	Pôles du système en boucle fermée	58
Tableau 4.5	Temps de réponse à 2% du système en boucle fermée	59
Tableau 4.6	Critères imposés	66
Tableau 4.7	Valeurs des W_i	67
Tableau 4.8	Coûts des critères imposés	71
Tableau 4.9	Emplacement et configuration de charge utile	74
Tableau 4.10	Critères imposés (nominal)	81
Tableau 4.11	Critères imposés (non nominal)	81
Tableau 4.12	Valeurs des W_i (nominal)	82
Tableau 4.13	Valeurs des W_i (non nominal)	83
Tableau 4.14	Valeurs des γ , synthèse nominale	91
Tableau 4.15	Valeurs des γ , synthèse complète (nominal)	92
Tableau 4.16	Valeurs des γ , synthèse complète (non nominal)	92
Tableau 5.1	Conversion d'unités	99

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	L'hélicoptère tandem CH-47 Chinook de Boeing	1
Figure 1.2	Le drone hélicoptère tandem LX300 de Laflamme Aéro Inc.	2
Figure 3.1	Repères considérés	12
Figure 3.2	Positions $d_{x,i}$ et $d_{y,i}$ d'un élément i	15
Figure 3.3	Modèle du réservoir	17
Figure 3.4	Inerties selon le niveau d'essence	18
Figure 3.5	Point de référence du fabricant pour les positions de centres de masse (Source : Laflamme Aéro)	19
Figure 3.6	Inertie par rapport à la référence selon la position de la charge utile .	21
Figure 3.7	Rotor utilisé (gracieuseté de Laflamme Aéro)	22
Figure 3.8	Repères, angles et pivots du rotor	23
Figure 3.9	Vue de dessus du rotor arrière	23
Figure 3.10	Vue de dessus du rotor avant	23
Figure 3.11	Profil d'une pale, angles d'intérêt (rotor arrière)	24
Figure 3.12	Profil d'une pale, angles d'intérêt (rotor avant)	24
Figure 3.13	Profil d'une pale, forces aérodynamiques (rotor arrière)	24
Figure 3.14	Profil d'une pale, forces aérodynamiques (rotor avant)	24
Figure 3.15	Angles de battement selon le parcours du bout de pale (et ses harmo- niques)	31
Figure 3.16	Disposition des rotors	35
Figure 3.17	Réponses pour une entrée échelon unitaire du moteur sans charge . .	37
Figure 3.18	Réponses pour une entrée échelon unitaire avec charge nominale	37
Figure 3.19	Réponses pour une entrée échelon unitaire du moteur sans charge . .	38
Figure 3.20	Réponses pour une entrée échelon unitaire avec charge nominale	38
Figure 3.21	Mécanisme de contrôle des pâles - Rotor arrière (Source : Laflamme Aéro)	39
Figure 3.22	Schéma du mécanisme inférieur au plateau cyclique	40
Figure 3.23	Schéma du plan du plateau cyclique - Rotor avant	41
Figure 3.24	Schéma du contrôle des pales par le plateau cyclique	43
Figure 3.25	Architecture du contrôleur PID pour θ (similaire pour ϕ et w)	47
Figure 3.26	Architecture du contrôleur PID pour ψ	47
Figure 3.27	Architecture globale des lois de commandes	48
Figure 4.1	Emplacements considérés pour la charge utile (vol stationnaire) . . .	52

Figure 4.2	Schéma de contrôle	54
Figure 4.3	Réponses temporelles du système en boucle fermée (commande optimale)	56
Figure 4.4	Réponses temporelles des actionneurs du système en boucle fermée (commande optimale)	57
Figure 4.5	Réponses temporelles du système en boucle fermée (commande modale)	58
Figure 4.6	Réponses temporelles des actionneurs du système en boucle fermée (commande modale)	59
Figure 4.7	Réponses temporelles du système linéaire avec contrôleur préliminaire pour les entrées d'intérêt (toutes les configurations)	62
Figure 4.8	Système en boucle fermée (forme standard)	63
Figure 4.9	Diagramme du modèle utilisé pour la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ structurée	66
Figure 4.10	Critères de suivi de consigne	68
Figure 4.11	Critères de marge de stabilité	68
Figure 4.12	Critères des limites des actionneurs	69
Figure 4.13	Critères sur l'influence des dérivées sur les signaux de commande . . .	69
Figure 4.14	Critères sur les limites des dynamiques	70
Figure 4.15	Réponses temporelles des modèles linéarisés pour les entrées d'intérêt (toutes les configurations)	72
Figure 4.16	Réponses temporelles du système non linéaire pour les entrées d'intérêt (toutes les configurations)	73
Figure 4.17	Architecture d'un contrôleur PID (exemple pour θ)	78
Figure 4.18	Diagramme du modèle utilisé pour la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ structurée	82
Figure 4.19	Critères de suivi de consigne (nominal)	84
Figure 4.20	Critères de marge de stabilité (nominal)	85
Figure 4.21	Critères des limites des actionneurs	86
Figure 4.22	Critères sur l'influence des dérivées sur les signaux de commande . . .	87
Figure 4.23	Critères de suivi de consigne (non nominal)	88
Figure 4.24	Critères de marge de stabilité (non nominal)	89
Figure 4.25	Réponses temporelles du système linéaire (toutes les configurations, synthèse complète)	93
Figure 4.26	Gains séquencés retenus (fonction de la vitesse en m/s)	94
Figure 5.1	Architecture désirée d'un contrôleur PID (exemple pour θ)	96
Figure 5.2	Architecture implémentée d'un contrôleur PID (exemple pour θ) . . .	96
Figure 5.3	Exemple d'un séquençement de gain tel qu'implémenté par la plate- forme utilisée	97

Figure 6.1	Réponses temporelles du système non linéaire simplifié (toutes les configurations)	104
Figure 6.2	Réponses temporelles du système non linéaire simplifié (toutes les configurations) - Vue agrandie du vol de croisière	105
Figure 6.3	Exemple de réponses temporelles du système non linéaire simplifié (toutes les configurations) sans considération des termes couplés cachés - Vue agrandie du vol de croisière	105
Figure 6.4	Réponses temporelles du système non linéaire complet (configuration nominale seulement)	107
Figure 6.5	Réponses temporelles du système non linéaire sur simulateur haute fidélité (toutes configurations avec essence)	109
Figure 6.6	Réponses temporelles du système non linéaire sur simulateur haute fidélité (toutes configurations avec essence) - Vue agrandie du vol de croisière	110

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

UAV	<i>Unmanned aerial vehicle</i> - Véhicule aérien sans pilote)
SAS	<i>Stability augmentation system</i> - Système d'augmentation de la stabilité
CAS	<i>Control augmentation system</i> - Système d'augmentation du contrôle
ISA	<i>International Standard Atmosphere</i> - Atmosphère standard international
OACI	Organisation de l'Aviation Civile Internationale
LQR	<i>Linear-quadratic regulator</i> - Régulateur linéaire quadratique
LFT	<i>Linear fractional transformation</i> - Transformation linéaire fractionnaire
LTI	<i>Linear time-invariant</i> - Linéaire invariant dans le temps
LPV	<i>Linear parameter-varying</i> - Linéaire à paramètres variants

LISTE DES ANNEXES

Annexe A	Tests d'identification des servomoteurs	118
Annexe B	Développement de la dynamique de battement	132
Annexe C	Utilisation de sysune	137
Annexe D	Approches d'implémentation sur la plateforme MicroPilot	153

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

L'essor du domaine des véhicules aériens sans pilote (*Unmanned Aerial Vehicle* - UAV), ou «drones», des dernières années est attribuable, entre autres, à l'apport du milieu académique. En effet, les nouveaux designs de UAV, tous avec leurs propres défis et particularités, offrent des problèmes stimulant pour les chercheurs, qui leur trouvent des solutions innovatrices. Les drones prennent généralement la forme d'hélicoptères miniatures, de multicoptères, ou encore d'avions, selon les missions qui sont considérées. Par exemple, le faible coût et la manœuvrabilité des multicoptères les rendent intéressants dans l'industrie du cinéma pour la prise de vue aérienne. Or, un intérêt grandissant pour le transport de marchandises se fait sentir pour leur usage commercial et industriel, une tâche que les drones actuels peinent à accomplir. En effet, les multicoptères sont généralement petits afin de rendre leur coût abordable, et les drones plus volumineux ont tendance à utiliser des designs d'hélicoptère sensibles à la masse et au centrage de leur charge utile. Pour éventuellement résoudre ce problème, il faut regarder du côté des hélicoptères en configuration tandem tel le CH-47 Chinook de Boeing (Fig. 1.1). La configuration tandem consiste à utiliser deux rotors de même taille et tournant en sens opposé, ce qui élimine le besoin d'un rotor de queue. Cela permet, entre autres, de compenser le décentrage d'une charge utile et de pouvoir transporter des masses plus importantes.



Figure 1.1 L'hélicoptère tandem CH-47 Chinook de Boeing

Source: www.boeing.com/defense/ch-47-chinook/

C'est dans ce contexte que le projet CARIC AUT703_TRL4+ vise à mettre au point un drone hélicoptère de type tandem et de taille intermédiaire, le LX300, fabriqué par Laflamme Aéro Inc. (Fig. 1.2). Outre Laflamme Aéro Inc., ce projet fait intervenir les partenaires in-

dustriels NGC Aérospatiale Inc., RAAS Inc. et SINTERS AMERICA Inc., et les partenaires académiques Polytechnique Montréal et l'École de Technologie Supérieure. Polytechnique Montréal est alors en charge de concevoir les lois de commande bas niveau permettant d'assurer la stabilité de l'appareil.



Figure 1.2 Le drone hélicoptère tandem LX300 de Laflamme Aéro Inc.

Source: www.laflamme.aero/products/lx300/

1.1 Éléments de la problématique

La plupart des aéronefs sont intrinsèquement difficiles à contrôler par un pilote seul. Ceci est particulièrement vrai pour les hélicoptères qui sont très sensibles aux perturbations environnantes; ceci rend par exemple le vol stationnaire difficile à maintenir. C'est pourquoi les hélicoptères modernes possèdent des systèmes d'augmentation de la stabilité (SAS) ou du contrôle (CAS) afin d'aider le pilote dans sa tâche. Avec l'introduction du «*fly-by wire*», les systèmes SAS et CAS sont généralement incorporés dans un ordinateur modifiant les commandes que le pilote envoie aux gouvernes de l'appareil. Cet ordinateur prend en compte les données des capteurs et, en suivant les lois de commande implantées, peut ensuite s'opposer à tout mouvement indésirable de l'appareil sans intervention du pilote. Un exemple serait le SAS envoyant une commande aux gouvernes pour s'opposer à une rafale de vent, sans que le pilote ait besoin d'agir afin de maintenir une position ou suivre une certaine trajectoire. Un tel système permet de diminuer considérablement la charge de travail du pilote, lui permettant de voler plus longtemps et dans des conditions qui peuvent ne pas être idéales.

Les lois de commande de l'ordinateur embarqué peuvent généralement être séparées en plusieurs niveaux : les lois de commande bas niveau qui dictent les signaux à envoyer aux gouvernes (pour un SAS/CAS), et les lois de commande de plus haut niveau qui gèrent

généralement les suivis de trajectoires issues de données de navigation (pour un autopilote¹).

Le besoin de lois de commande performantes se voit accru pour les hélicoptères sans pilote. En effet, la réaction d'un utilisateur utilisant une manette est plus lente, puisqu'il ne peut percevoir physiquement les accélérations subies par l'aéronef. De plus, ces hélicoptères sont généralement plus petits et donc plus sensibles aux perturbations atmosphériques, ce qui serait encore plus exigeant pour l'utilisateur.

1.2 Objectifs de recherche

L'objectif principal de recherche est de concevoir les lois de commande bas niveau pour un drone hélicoptère tandem.

Les objectifs secondaires sont alors :

- modéliser un hélicoptère tandem ;
- concevoir un contrôleur à architecture fixe robuste aux variations de masse, de centrage et d'inertie.

L'hélicoptère tandem doit d'abord être modélisé afin de pouvoir concevoir les lois de commande. Ce type d'hélicoptère a des particularités qui doivent être prises en compte, comme l'interférence aérodynamique entre ses rotors et la flexibilité quant à la disposition de sa charge utile. De plus, l'aéronef considéré possède un rotor non standard² qu'il faut modéliser à l'aide d'outils théoriques, au lieu de simplement utiliser les relations empiriques disponibles dans la littérature.

Par la suite, un contrôleur à architecture fixe doit être conçu pour l'appareil, qui est un système hautement non linéaire. En effet, la plateforme d'autopilotage sur laquelle le contrôleur doit être implémenté possède une architecture imbriquée³. Ce type de conception est le sujet de nombreuses recherches (voir Chapitre 2). Par ailleurs, le contrôleur conçu doit pouvoir être robuste vis-à-vis des variations de masse, de centrage et d'inertie ; un des avantages attendus des hélicoptères tandems est leur plus grande flexibilité face à la disposition de la charge utile selon leur axe longitudinal.

1. Un système utilisant des lois de commandes haut niveau peut être surnommé «autopilote» puisqu'il remplace effectivement la tâche de commande du pilote ; de telles lois de commande traitent les données de navigation (vitesse, position, trajectoire) et transmettent les commandes de manche et de pédales nécessaires pour corriger la trajectoire de l'appareil.

2. Les rotors du LX300 sont en instance de brevet.

3. La plateforme utilisée permet de modifier l'architecture imbriquée, mais les modifications possibles sont limitées.

1.3 Plan du mémoire

Ce mémoire commence par présenter la modélisation réalisée afin de pouvoir concevoir les lois de commande et les valider. Le Chapitre 3 détaille cette modélisation en considérant les dynamiques d'intérêt pour le vol d'un hélicoptère tandem, comme l'interférence aérodynamique entre les rotors et l'effet de la vitesse sur les forces générées par les rotors. Les mécanismes de commande, reliant les servomoteurs aux pales des rotors, sont aussi inclus afin de pouvoir prévoir les limites physiques qu'ils imposent sur l'appareil. Une simplification de cette modélisation de fidélité moyenne est réalisée afin d'avoir un modèle plus facile à compenser et à linéariser lors de la conception.

La conception des lois de commande bas niveau est ensuite traitée au Chapitre 4. L'approche par séquençement de gains et la méthode $\mathcal{H}_\infty$ structurée sont utilisées pour réaliser le réglage des gains. Étant donné la nature de la méthode $\mathcal{H}_\infty$ structurée, la conception est réalisée en plusieurs étapes successives ; chaque étape utilise le résultat de l'étape précédente comme réglage initial. La première étape consiste à synthétiser un contrôleur pour le vol stationnaire en utilisant des méthodes classiques, comme les commandes optimale et modale. Un contrôleur robuste pour le vol stationnaire est ensuite conçu avant de passer aux cas de vol de croisière. Cette conception tient compte des limites de la plateforme sur laquelle le contrôleur doit être implémenté, ainsi que celles du mécanisme de contrôle des pales.

Le Chapitre 5 détaille l'implémentation du contrôleur robuste trouvé lors de la conception. Cette implémentation inclut les modifications à apporter à la structure du contrôleur imbriquée dans la plateforme et la programmation de la logique de mixage. Étant donné l'impact important des lois de commande sur les procédures de décollage et d'atterrissage, elles sont présentées en détail.

La validation est présentée au Chapitre 6. Cette validation consiste à vérifier que les gains trouvés pour le contrôleur permettent d'avoir un appareil stable. Une première phase de simulation à basse fidélité est faite sur le modèle simplifié de l'hélicoptère. Il s'agit de vérifier que le contrôleur trouvé fonctionne bel et bien lorsque les dynamiques non linéaires sont considérées. La seconde phase de simulation est effectuée à l'aide du modèle non linéaire complet de fidélité moyenne afin d'identifier les possibles comportements indésirables qui seraient à corriger. La dernière phase de simulation a lieu sur le simulateur haute fidélité, fourni par un partenaire industriel, afin de pouvoir approuver le contrôleur pour l'utilisation lors des premiers tests en vol de l'appareil.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

Cette section présente la revue de littérature qui se limitera aux sujets centraux du projet, soit la modélisation d'un hélicoptère tandem et la commande d'un tel système.

Ce chapitre commence par discuter des particularités des hélicoptères tandem. Une attention particulière est donnée aux travaux concernant la dynamique des rotors, un élément central pour tout hélicoptère. Les sujets complexes des phénomènes d'interférences aérodynamiques, de sillons et d'effet de sol sont abordés brièvement.

La seconde partie de la revue de littérature concerne la commande. Nous abordons dans un premier temps les techniques de commande linéaire dont la commande optimale, la commande modale, et la commande robuste. La dynamique d'un hélicoptère étant fortement non linéaire, un contrôleur linéaire est insuffisant pour assurer la stabilité et la performance. Le séquençement de gains (*gain scheduling*) est alors présenté comme solution à ce problème.

2.1 Modélisation

La modélisation mathématique de l'hélicoptère est un sujet qui a reçu beaucoup d'attention. En effet, plusieurs livres existent afin d'introduire le sujet (Dreier (2007), Seddon and Newman (2011)) et pour couvrir des sujets plus avancés (Leishman (2006), Padfield (2007)), dont les hélicoptères tandems. La tâche de bâtir un modèle pouvant simuler un hélicoptère s'en voit facilitée; par exemple, le livre de Dreier (2007) introduit les concepts de base de la simulation des véhicules à voilure tournante. L'approche utilisée par cet ouvrage est modulaire et présente le développement des équations dynamiques à implémenter. Ceci rend possible l'amélioration du simulateur obtenu en considérant les travaux allant plus en profondeur, comme ceux présentés par Leishman (2006) en ce qui concerne les différents types d'articulation et de configuration des rotors.

Or, les hélicoptères tandems ne sont généralement traités qu'en marge dans ce genre d'ouvrages. Bien que modéliser un hélicoptère avec deux rotors principaux puisse donner quelques idées de base, une compréhension de sa dynamique unique est nécessaire. Les particularités à considérer lors de la modélisation et du contrôle d'un hélicoptère de type tandem sont :

- la faible contrôlabilité directionnelle en vol stationnaire (Prouty (1985));
- la faible stabilité directionnelle en vol de croisière (Prouty (1985));
- la susceptibilité de l'appareil aux vibrations structurelles due à la torsion et à la flèche du fuselage (Prouty (1985), Watkinson (2003), et Tapscott (1958));

- le rôle limité des cycliques longitudinaux, qui sont généralement utilisés qu'en vol de croisière pour diminuer les battements (*flapping*) et les traînées excessifs des pâles et pour maintenir le fuselage à l'horizontale (Watkinson (2003));
- la perte de contrôle possible en lacet lors de manœuvres agressives (Watkinson (2003));
- la nécessité d'augmenter le pas collectif arrière lorsque l'appareil ralentit en raison d'un moment cambrant déstabilisant (Newman (1994), et Tapscott (1958); Tapscott and Amer (1956));
- le besoin de commander plus de roulis lors d'un virage en raison du roulis opposé induit lors d'une commande en lacet (Newman (1994));
- la nécessité de compenser en lacet lorsque le centre de masse n'est pas centré entre les deux rotors, puisque les pas collectifs des rotors ne sont plus égaux (Watkinson (2003)).

De plus, les dynamiques longitudinale et latérale particulières de l'hélicoptère tandem ont été identifiées et modélisées grâce aux travaux de plusieurs chercheurs, notamment Bramwell (1960a,b) (et plus récemment Lawler et al. (2006)). Les travaux de Bramwell ont servi d'assise pour les chercheurs s'intéressant aux hélicoptères tandem (incluant ceux de la NACA, puis de la NASA). Weber et al. (1984), l'un d'entre eux, présente un modèle mathématique complet de l'hélicoptère tandem Chinook, qui est utilisé comme base pour le design de l'hélicoptère étudié.

Ces travaux, en plus de la considération des particularités mentionnées, devraient permettre d'obtenir une modélisation satisfaisante d'un hélicoptère tandem.

2.1.1 Rotor d'hélicoptère

La partie la plus complexe d'un modèle d'hélicoptère est son rotor. En effet, la dynamique des rotors a été le sujet de beaucoup de recherche étant donné son rôle central dans le vol des hélicoptères.

Pour la modélisation aux fins de contrôle, les travaux de la NASA ¹ (Chen (1979), Talbot et al. (1982)) ont jeté les bases du calcul des forces générées par un rotor d'hélicoptère (du moins, en Amérique du Nord). Notamment, l'expression de la poussée d'un rotor, soit la composante verticale de la moyenne des forces aérodynamiques générées par l'ensemble des pales, y est détaillée, en plus des autres forces et moments générés. L'expression de cette poussée permet aussi la modélisation de la dynamique d'apport du rotor (qui est discuté à la sous-section 2.1.2).

1. Seulement deux sources sont nommées ici, mais même ces travaux se basent sur d'autres provenant de la NASA (ou de la NACA) avant de mentionner des chercheurs comme Bramwell.

Malgré le peu de recherche sur les hélicoptères tandems, il est possible de réutiliser les résultats des travaux sur les hélicoptères classiques (voir les livres de Leishman (2006), et de Dreier (2007)) en tenant compte des différences introduites par la présence de deux rotors. En réutilisant la démarche de Dreier pour retrouver les équations présentées par Talbot et Chen, il est possible d'inclure les particularités du rotor considéré et l'interférence entre les rotors. Une telle approche donne des résultats semblables à ceux trouvés par Weber et al. (1984) pour le Chinook.

2.1.2 Sillons, interférences et effet de sol

La vitesse induite d'un rotor a une influence notable sur la poussée qu'il génère. La caractérisation de la dynamique de cette vitesse a été le sujet d'étude de plusieurs chercheurs, les plus connus étant Pitt (1980); Pitt and Peters (1980). Les notions de ratio d'apport et ratio d'avancement sont utilisées afin d'établir la relation entre la vitesse de l'appareil, la poussée du rotor et la vitesse induite. De plus, la vitesse induite varie le long de la pale et selon l'azimut de la pale; comme discuté par Chen (1989), la distribution de la vitesse induite a des effets sur les forces aérodynamiques et peut être ajoutée au modèle pour en augmenter la fidélité.

La vitesse induite est aussi influencée par la présence du sol. En effet, le phénomène communément appelé «effet de sol» consiste en la diminution de l'ampleur des tourbillons marginaux trouvés en bout de surfaces profilées (aile ou pale de rotor), ce qui diminue significativement la vitesse induite générée par la surface profilée sans affecter la portance produite. Les travaux de Cheeseman and Bennett (1955) sont souvent utilisés pour la modélisation de ce phénomène (Bramwell (1960a), Leishman (2006), Padfield (2007)) aux fins de contrôle².

L'interférence aérodynamique entre les différents composants d'un aéronef peut être modélisée comme un vent relatif, vue par une surface aérodynamique, causé par une autre surface aérodynamique (Dreier (2007)). Bien que ce modèle d'interférence assez simple suffit pour modéliser l'effet du sillon des rotors sur le fuselage, Weber et al. (1984) caractérise plus en détail l'interférence aérodynamique entre deux rotors d'un hélicoptère tandem dont les parcours s'entrecroisent (comme le Chinook, en l'occurrence). Il est à rappeler que l'aéronef considéré emprunte cette caractéristique du Chinook afin de faciliter le développement du drone.

2. Une approche utilisant la modélisation de vortex permet d'obtenir une modélisation plus précise. Cette approche est utile pour l'étude de l'aérodynamisme autour des rotors, mais les gains en précision ne justifient pas la lourdeur de cette approche pour le contrôle.

2.2 Commande

Le domaine de la commande est vaste et ne sera pas couvert dans son entièreté ; seules les méthodes utilisées dans le Chapitre 4 sont couvertes dans cette revue de littérature. Les commandes linéaires présentées sont les commandes optimale, modale et robuste, tandis que seul le séquençement de gains le sera pour ce qui est des commandes non linéaires.

2.2.1 Commande linéaire

Les commandes linéaires examinées considèrent des systèmes linéaires et invariants dans le temps (LTI), qui peuvent être représentés par un modèle d'état de la forme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}$$

où $\mathbf{x}$ est le vecteur des états du système, $\mathbf{u}$ est le vecteur des commandes, $\mathbf{y}$ est le vecteur des sorties, et les matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ caractérisent le système. La commande optimale sera d'abord présentée, suivie de la commande modale. Les méthodes $\mathcal{H}_\infty$ et $\mathcal{H}_\infty$ structurée seront ensuite abordées comme commandes robustes.

L'approche de la commande optimale est de trouver un contrôleur qui permet de minimiser une fonction coût (Zhou et al. (1996)). Lorsque le système est linéaire et que la fonction coût est quadratique, la solution est appelée «commande linéaire quadratique» ou «*Linear-Quadratic Regulator*» (LQR) en anglais. La fonction coût pour une commande LQR prend généralement la forme

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} + \mathbf{x}^T \mathbf{N} \mathbf{u} dt$$

où $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{N}$ sont des matrices de pondération à régler. Le gain $\mathbf{K}$, tel que $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$ minimise le coût $\mathcal{J}$, peut alors être trouvé en résolvant une équation de Riccati (Zhou et al. (1996)). Cette approche a l'avantage de pouvoir utiliser de manière optimale les actionneurs en allant chercher de bonnes performances, à condition de bien choisir les pondérations.

La commande modale considérée utilise une approche différente, soit le placement de valeurs propres, et de vecteurs propres dans le cas multi-entrées. Lorsque plusieurs entrées et sorties sont considérées, le placement de pôles peut avoir une infinité de solutions possibles en raison du couplage possible entre les entrées et sorties. En utilisant le concept de vecteurs propres, il est possible d'identifier différents modes dynamiques aux valeurs propres (pôles)

du système. En choisissant les vecteurs propres, il est possible de venir influencer les différents modes. Cette approche est aussi appelée «placement de structures propres» (*eigenstructure assignment*, voir Andry et al. (1983)) pour venir souligner le choix des valeurs propres et de leurs vecteurs propres associés. Le problème à résoudre consiste à trouver un gain permettant d'obtenir les pôles désirés du système en boucle fermée en stimulant les modes voulus. Ce problème peut être résolu de différentes manières (Kautsky et al. (1985), Magni (2012)), exploitant les possibilités concernant le choix des vecteurs propres. La commande modale peut être particulièrement efficace pour assurer de bons découplages entre les entrées et sorties d'un système multivariable.

L'approche par commande robuste utilise généralement la méthode $\mathcal{H}_\infty$ (Zhou et al. (1996)). Celle-ci utilise la notion de norme $\mathcal{H}_\infty$ dans sa fonction coût à minimiser. La norme $\mathcal{H}_\infty$ est définie comme

$$\| \mathbf{T}(s) \|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(\mathbf{T}(j\omega))$$

où $\bar{\sigma}$ est la valeur singulière maximale de la matrice $\mathbf{T}(j\omega)$. Lors d'une synthèse robuste, la matrice $\mathbf{T}$ contient les fonctions de transfert d'intérêts qui sont pondérées en utilisant des gabarits fréquentiels et temporels. Ces gabarits sont alors choisis pour refléter les performances désirées. Cette méthode permet de concevoir un contrôleur capable de stabiliser un modèle avec paramètres incertains et d'assurer des performances minimales, même dans le pire des cas. Le principal inconvénient de cette méthode est que le contrôleur est généralement d'un ordre plus élevé que le système qu'il tente d'asservir.

Afin de pallier ce problème et d'élargir l'utilité de la méthode $\mathcal{H}_\infty$, la méthode $\mathcal{H}_\infty$ structurée a été développée pour permettre de concevoir un contrôleur avec une architecture fixée *a priori* (Apkarian and Noll (2006)). En effet, cette approche utilise le même principe que la méthode $\mathcal{H}_\infty$, mais considère que seuls certains paramètres sont réglables dans le contrôleur à architecture fixe. Le problème d'optimisation est complexifié et est généralement résolu de manière sous-optimale avec des algorithmes d'optimisation non lisse, où la valeur de coût trouvée est légèrement supérieure à la valeur optimale ; le minimum trouvé n'est pas garanti d'être le minimum global de la fonction à optimiser. Plusieurs itérations, chacune utilisant des conditions initiales différentes, doivent être réalisées pour tenter d'obtenir un minimum local plus petit, donc plus près du minimum global et du coût optimal. La résolution des problèmes de forme $\mathcal{H}_\infty$ structurée est facilitée par l'implémentation de l'algorithme mentionné dans le logiciel MATLAB (Gahinet and Apkarian (2011, 2013), Apkarian et al. (2014, 2015)) sous la commande `systune`.

2.2.2 Commande non linéaire par séquençement de gains

La commande des systèmes non linéaires est beaucoup plus complexe que celle des systèmes linéaires. Plusieurs méthodes de synthèse de contrôleurs non linéaires existent, mais requièrent généralement une connaissance précise du modèle et ne sont généralement pas aussi systématiques que les méthodes de synthèse de contrôleurs linéaires.

Comme le système considéré est assez complexe, les méthodes demandant une connaissance très précise du système seront évitées au profit de méthodes tentant de ramener la synthèse dans le domaine linéaire pour pouvoir utiliser la grande variété d'outils disponibles pour les modèles linéaires. En effet, la linéarisation d'un système non linéaire est généralement privilégiée pour cette raison. Or, il se trouve qu'en utilisant plusieurs points de linéarisation, un contrôleur linéaire peut être conçu pour chaque point. Un contrôle non linéaire gérant le système en entier est ensuite réalisé en passant d'un contrôleur linéaire à un autre. Une telle approche est appelée séquençement de gains (Rugh and Shamma (2000)). Un exemple de séquençement de gains est de linéariser le système pour plusieurs vitesses et de concevoir des contrôleurs linéaires avec la même architecture pour chaque modèle linéarisé. Un contrôleur non linéaire est obtenu en faisant varier les gains de l'architecture fixe en fonction de la vitesse, obtenant ainsi les contrôleurs conçus aux vitesses associées.

Un des désavantages du séquençement de gains mentionné par Rugh and Shamma (2000) est la présence possible de termes couplés et cachés. Une solution souvent utilisée est d'éviter que de tels termes ne surviennent en modifiant la manière dont le contrôleur est séquencé. Or, Lhachemi et al. (2016) ont proposé de tenir compte des termes couplés cachés dans la synthèse du contrôleur avec gains séquencés au lieu de tenter de les éviter. Cette approche donne de bons résultats pour l'exemple du tangage d'un missile en utilisant une synthèse modale par placement de structures propres.

En matière de commande robuste, Saussié et al. (2013) ont proposé une approche de synthèse de contrôleur avec séquençement des gains en utilisant la méthode $\mathcal{H}_\infty$ structurée. Cette approche exploite les capacités de synthèse multi-objectifs et multi-modèles de l'implémentation réalisée par Gahinet et Apkarian. Effectivement, la méthode $\mathcal{H}_\infty$ structurée est très appropriée pour la synthèse d'un contrôleur avec séquençement de gains grâce à sa capacité de régler les paramètres d'un contrôleur à architecture fixe pour différents points d'opération. Comme démontré par Saussié et al. (2013), tous ces réglages peuvent être réalisés en une seule fois et en considérant différents objectifs de synthèse pour les différents points d'opérations.

À la lumière de ces récents travaux, les lois de commandes de bas niveau du drone hélicoptère

tandem seront réalisées à l'aide d'une synthèse $\mathcal{H}_\infty$ structurée avec gains séquencés, incluant les termes couplés générés par le séquençement. La fonction **sysune** sera utilisée pour en faire la résolution.

CHAPITRE 3 MODÉLISATION

Le présent chapitre traite de la modélisation du drone hélicoptère tandem. Les sections qui suivent abordent chacune une sous-partie spécifique du système, comme par exemple la dynamique du corps rigide, la modélisation de l'inertie, la dynamique des rotors, l'interférence aérodynamique, le mécanisme de contrôle, et le contrôleur.

Deux modèles seront établis : un modèle réduit pour effectuer la synthèse du contrôleur et un modèle complet pour valider celui-ci. Les simplifications apportées sur le modèle réduit sont décrites dans les sections des modules touchés par celles-ci (notamment les rotors et les servomoteurs).

3.1 Dynamique du corps rigide avec 6 degrés de liberté

L'hélicoptère tandem est représenté par un corps rigide à 6 degrés de liberté. Étant donné la vitesse des dynamiques étudiées, l'hypothèse de Terre plate et immobile est utilisée afin de simplifier les calculs. Afin de bien représenter les variables d'état nécessaires pour décrire la dynamique d'un tel système, deux repères sont considérés (Fig. 3.1) :

- le repère inertiel $\mathcal{O}$ qui est au sol¹ et suit la convention «North-East-Down» (axe x pointant vers le Nord, axe y vers l'Est et axe z vers le bas) ;
- le repère du corps $\mathcal{B}$ qui est centré à un point de référence² (axe x pointant vers l'avant du véhicule, axe z vers le bas et axe y complétant le repère direct).

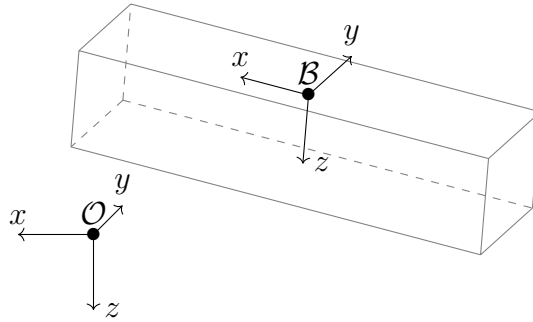


Figure 3.1 Repères considérés

Pour exprimer les équations dynamiques, les 12 états suivants sont considérés :

- $\mathbf{p} = [p_N \ p_E \ p_D]^\top$ est la position de l'origine de $\mathcal{B}$ par rapport à l'origine de $\mathcal{O}$;

1. Ce repère peut être considéré inertiel grâce à l'hypothèse de la Terre plate et immobile.
 2. Le centre de masse de l'hélicoptère à vide est considéré comme le point de référence.

- $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^\top$ est la vitesse en translation du repère $\mathcal{B}$;
- $\Phi = (\phi, \theta, \psi)$ sont les angles d'Euler entre $\mathcal{O}$ et $\mathcal{B}$;
- $\omega = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}^\top$ est la vitesse angulaire du repère $\mathcal{B}$ par rapport au repère $\mathcal{O}$.

Les vecteurs $\mathbf{V}$ et ω sont exprimés dans le repère $\mathcal{B}$, et la position $\mathbf{p}$ est exprimée dans le repère $\mathcal{O}$.

La dynamique du corps rigide peut alors être représentée par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{R}_{\mathcal{B}/\mathcal{O}}(\Phi)\mathbf{V} \\ \dot{\Phi} &= \mathbf{H}^{-1}(\Phi)\omega \\ \dot{\mathbf{V}} &= \frac{1}{m} \sum \mathbf{F} + \mathbf{R}_{\mathcal{O}/\mathcal{B}}(\Phi)\mathbf{g} - \omega \times (\mathbf{V} + \omega \times \Delta\mathbf{r}) - \dot{\omega} \times \Delta\mathbf{r} \\ \dot{\omega} &= (\mathbf{J}_b - \Delta\mathbf{J})^{-1} \left(\sum \mathbf{M} - \omega \times (\mathbf{J}_b - \Delta\mathbf{J}) \omega \right)\end{aligned}$$

où

- $\mathbf{R}_{\mathcal{B}/\mathcal{O}}$ est la matrice de rotation de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{O}$ et est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\mathcal{B}/\mathcal{O}} &= \mathbf{R}_{\mathcal{O}/\mathcal{B}}^\top = \mathbf{R}_x^\top(\phi)\mathbf{R}_y^\top(\theta)\mathbf{R}_z^\top(\psi) \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix};\end{aligned}$$

- $\mathbf{H}$ est la matrice de transformation des vitesses angulaires (de $\dot{\Phi}$ à ω) et est donnée par

$$\mathbf{H}(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix};$$

- m est la masse totale de l'appareil (incluant essence et charge utile) ;
- $\mathbf{F}$ et $\mathbf{M}$ sont les forces et les moments externes appliqués au corps rigide (excluant la gravité) et sont exprimés dans le repère $\mathcal{B}$;
- $\mathbf{g} = [0, 0, g]^\top$ est l'accélération gravitationnelle ;
- $\Delta\mathbf{r} = [\Delta x \ \Delta y \ \Delta z]^\top$ est le déplacement du centre de masse depuis l'origine du repère $\mathcal{B}$;
- $\mathbf{J}_b$ est la matrice d'inertie de l'appareil (autour de l'origine $\mathcal{B}$, incluant essence et charge utile) ;
- $\Delta\mathbf{J} = m \left(\Delta\mathbf{r}^\top \Delta\mathbf{r} \mathbf{I}_3 - \Delta\mathbf{r} \Delta\mathbf{r}^\top \right)$ est l'influence de $\Delta\mathbf{r}$ sur l'inertie (voir la Section 3.2) ;
- $\times$ représente le produit vectoriel.

En pratique, pour le contrôle de bas niveau, la variation de masse causée par la consommation d'essence est considérée comme suffisamment lente pour que ces équations soient valides.

3.2 Inertie

Le calcul des inerties est d'abord détaillé dans le cas de la configuration à vide (pas d'essence ou de charge utile). Vient ensuite le cas d'un remplissage intermédiaire et complet du réservoir, et enfin l'effet de l'ajout d'une charge utile.

L'inertie d'un objet, dans le sens entendu dans ce document, est caractérisée par le tenseur d'inertie obtenu du moment cinétique. Le moment cinétique $\mathbf{L}_O$ d'un objet par rapport à un point de référence O peut être défini comme

$$\mathbf{L}_O = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

où $\mathbf{r}_i = \overrightarrow{OM_i}$ est la position d'un élément (M_i) de l'objet par rapport au point de référence O , et $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ est la quantité de mouvement d'un élément de l'objet (de masse m_i et de vitesse $\mathbf{v}_i$). Or, il est possible de réécrire le moment cinétique en utilisant la vitesse angulaire, ce qui donne

$$\mathbf{L}_O = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}$$

où $\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur de rotation (dont le module est la vitesse de rotation et la direction désigne l'axe de rotation), et $\mathbf{J}$ le tenseur d'inertie. Le tenseur d'inertie d'un objet calculé par rapport à son centre de masse s'exprime comme

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}$$

où les termes diagonaux sont les second moments de masse de l'objet autour des axes de référence x , y , et z , et où les autres termes sont appelé produits d'inertie (qui servent à tenir compte des cas où $\mathbf{L}_O$ et $\boldsymbol{\omega}$ ne sont pas colinéaires). Ces termes sont calculés de la manière suivante :

$$J_{xx} = \sum m_i (d_{y,i}^2 + d_{z,i}^2)$$

$$J_{xy} = \sum m_i d_{x,i} d_{y,i}$$

où $d_{x,i}$ est la position de l'élément i à l'axe x , telle qu'illustrée à la figure 3.2. Les valeurs

de $d_{x,i}$ peuvent donc être négatives, ce qui peut causer certains produits d'inertie à être nuls dans le cas où l'objet considéré présente une symétrie quelconque.

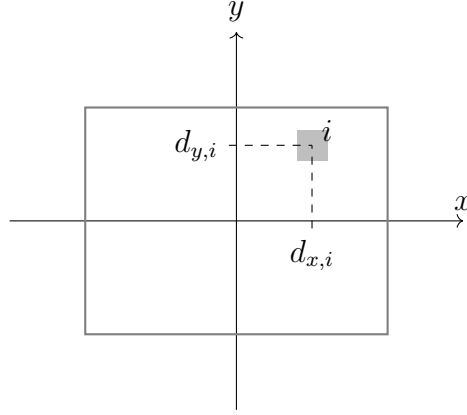


Figure 3.2 Positions $d_{x,i}$ et $d_{y,i}$ d'un élément i

Pour calculer l'inertie relativement complexe de l'hélicoptère, les deux équations suivantes sont utilisées :

$$\mathbf{J}_{(a+b)/R} = \mathbf{J}_{a/R} + \mathbf{J}_{b/R} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{J}_{a/R} = \mathbf{J}_a + m_a[(\mathbf{d}_{a/R}^T \mathbf{d}_{a/R})\mathbf{I}_3 - \mathbf{d}_{a/R} \mathbf{d}_{a/R}^T] \quad (3.2)$$

où $\mathbf{J}_{a/R}$ est l'inertie d'un objet a par rapport au point de référence R , $\mathbf{J}_{(a+b)/R}$ est l'inertie totale d'un système composé des objets a et b par rapport au point R , $\mathbf{J}_a$ est l'inertie de l'objet a par rapport à son propre centre de gravité (calculé grâce aux équations du tenseur d'inertie décrites précédemment), $\mathbf{I}_3$ est la matrice identité, m_a est la masse de l'objet a et $\mathbf{d}_{a/R}$ est le vecteur de distance du centre de gravité de l'objet a au point R . L'équation 3.1 découle du fait que la définition de l'inertie est une somme d'éléments, et l'équation 3.2 est le théorème des axes parallèles (ou théorème de Huygens) dans son expression matricielle. Ce théorème permet de calculer l'inertie d'un objet par rapport à un axe voulu lorsque l'inertie de l'objet par rapport à un axe passant par son centre de gravité, parallèle à celui voulu, est connue. Comme l'équation 3.2 est simplement un ajout d'un terme pour «corriger» l'inertie, il pourrait être utile de réécrire ce théorème de la manière suivante :

$$\mathbf{J}_{a/R} = \mathbf{J}_a + \Delta \mathbf{J}_{a/R} \quad (3.3)$$

$$\Delta \mathbf{J}_{a/R} = m_a[(\mathbf{d}_{a/R}^T \mathbf{d}_{a/R})\mathbf{I}_3 - \mathbf{d}_{a/R} \mathbf{d}_{a/R}^T] \quad (3.4)$$

Les équations 3.1, 3.3 et 3.4 seront utilisées pour calculer l'impact de l'ajout d'essence et de

charge utile sur l'inertie de l'appareil.

3.2.1 Configuration à vide

Les informations concernant le système à vide sont données par Laflamme Aéro. Celles-ci incluent la masse de l'appareil à vide (m_v), la position du centre de masse de l'appareil à vide ($\mathbf{R}_{cm,v}$), et le tenseur d'inertie de l'appareil à vide par rapport à son centre de masse à vide ($\mathbf{J}_v$). Les valeurs numériques de ces paramètres sont données au tableau 3.1.

Les capteurs de l'appareil utilise le centre de masse pour cette configuration comme point de référence³ et sert donc d'origine pour le repère $\mathcal{B}$.

3.2.2 Configuration à plein (essence)

Propriétés du réservoir

Certaines informations concernant le réservoir sont données par Laflamme Aéro Inc., soit sa masse (m_e) et la position de son centre de masse ($\mathbf{R}_{cm,e}$) lorsqu'il est plein.

Comme l'inertie du réservoir n'est pas donnée, celle-ci doit être calculée. Malheureusement, les dimensions du réservoir ne sont pas disponibles au moment de réaliser la modélisation, donc celles-ci sont approximées par un cube de 0.5 m de côté, comme illustré à la figure 3.3. L'inertie du réservoir plein est alors

$$\mathbf{J}_e = \begin{bmatrix} \frac{m_e}{12} (w_e^2 + h_e^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_e}{12} (d_e^2 + h_e^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_e}{12} (w_e^2 + d_e^2) \end{bmatrix}$$

où $w_e = h_e = d_e = 0.5$ sont les dimensions du réservoir (supposé cubique).

Les valeurs numériques des paramètres présentés ici sont données au tableau 3.1.

Influence du réservoir sur le système

En utilisant les propriétés du réservoir, il est possible de calculer l'effet qu'a celui-ci sur le centre de gravité et l'inertie de l'hélicoptère.

3. Un point de référence est nécessaire comme les capteurs ne se déplaceront pas. Ce point a été choisi, car les dimensions du réservoir d'essence sont inconnues ; la configuration à vide est donc la seule configuration connue avec certitude. Il est à noter que le point de référence peut être changé sans que les équations présentées dans ce document aient besoin d'être modifiées.

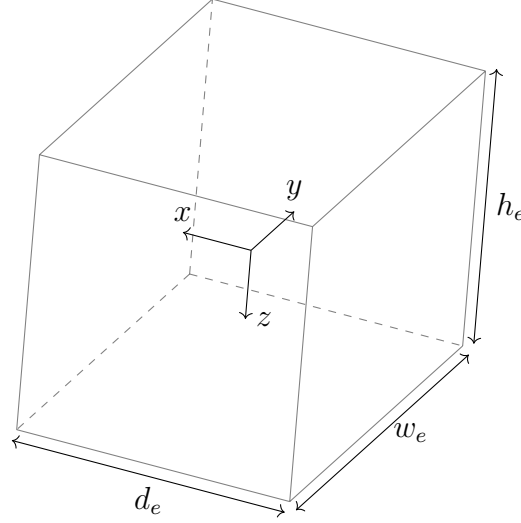


Figure 3.3 Modèle du réservoir

En effet, le changement de la position du centre de gravité est donné par

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{1}{m}(m_v \mathbf{R}_{cm,v} + m_e \mathbf{R}_{cm,e})$$

où $m = m_v + m_e$ est la masse totale.

L'inertie de l'hélicoptère plein d'essence par rapport à son (nouveau) centre de gravité est alors

$$\mathbf{J}_b = \mathbf{J}_{v/b} + \mathbf{J}_{e/b}$$

$$\mathbf{J}_{v/b} = \mathbf{J}_v + \Delta \mathbf{J}_{v/b}, \quad \Delta \mathbf{J}_{v/b} = m_v[(\mathbf{d}_{v/b}^T \mathbf{d}_{v/b}) \mathbf{I}_3 - \mathbf{d}_{v/b} \mathbf{d}_{v/b}^T], \quad \mathbf{d}_{v/b} = \mathbf{R}_{cm,v} - \mathbf{R}_{cm,b}$$

$$\mathbf{J}_{e/b} = \mathbf{J}_e + \Delta \mathbf{J}_{e/b}, \quad \Delta \mathbf{J}_{e/b} = m_e[(\mathbf{d}_{e/b}^T \mathbf{d}_{e/b}) \mathbf{I}_3 - \mathbf{d}_{e/b} \mathbf{d}_{e/b}^T], \quad \mathbf{d}_{e/b} = \mathbf{R}_{cm,e} - \mathbf{R}_{cm,b}$$

où $\mathbf{J}_b$ est l'inertie totale de l'hélicoptère par rapport à l'origine du repère $\mathcal{B}$ et l'indice b représente l'origine du repère $\mathcal{B}$. À noter qu'ici, $\mathbf{d}_{v/b}$ et $\Delta \mathbf{J}_{v/b}$ sont nuls en raison du choix de référence. Le même calcul peut être fait en choisissant un autre point de référence, comme le nouveau centre de masse du système (où $\mathbf{R}_{cm,b}$ serait remplacée par $\mathbf{R}_{cm}$).

3.2.3 Configuration intermédiaire (essence)

Soit $n_e \in [0, 1]$ le niveau d'essence dans le réservoir. Les propriétés discutées à la section précédente deviennent alors

$$m_i = m_e n_e, \quad \mathbf{R}_{cm,i} = \mathbf{R}_{cm,e} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(n_e-1)h_e}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \frac{m_e(n_e)}{12} (w_e^2 + (h_e(n_e))^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_e(n_e)}{12} (d_e^2 + (h_e(n_e))^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_e(n_e)}{12} (d_e^2 + w_e^2) \end{bmatrix}$$

La figure 3.4 illustre l'influence du niveau d'essence sur les inerties du système par rapport à son centre de gravité et par rapport au point de référence d'après les valeurs présentées au tableau 3.1. Les positions des centres de masse sont données par rapport à un point de référence utilisé par le fabricant (voir la figure 3.5), selon les axes du référentiel $\mathcal{B}$.

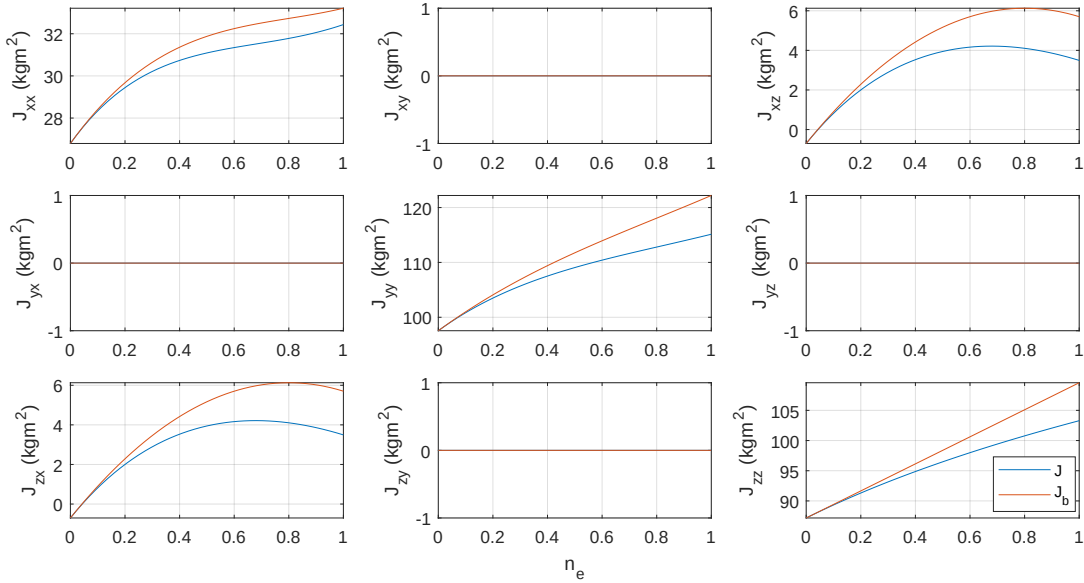


Figure 3.4 Inerties selon le niveau d'essence

Tableau 3.1 Valeurs numériques utilisées pour les calculs d'inertie

Hélicoptère à vide			Réservoir plein		
m_v	190 kg		m_e	100 kg	
$\mathbf{R}_{cm,v}$	$\begin{bmatrix} -1.473 \\ 0 \\ -0.87 \end{bmatrix}$ m		$\mathbf{R}_{cm,e}$	$\begin{bmatrix} -1.9 \\ 0 \\ -1.02 \end{bmatrix}$ m	
$\mathbf{J}_v$	$\begin{bmatrix} 26.794040 & 0 & 0.703500 \\ 0 & 97.549842 & 0 \\ 0.703500 & 0 & 87.175984 \end{bmatrix}$ kgm ²		$\mathbf{J}_e$	$\begin{bmatrix} 4.1667 & 0 & 0 \\ 0 & 4.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 4.1667 \end{bmatrix}$ kgm ²	

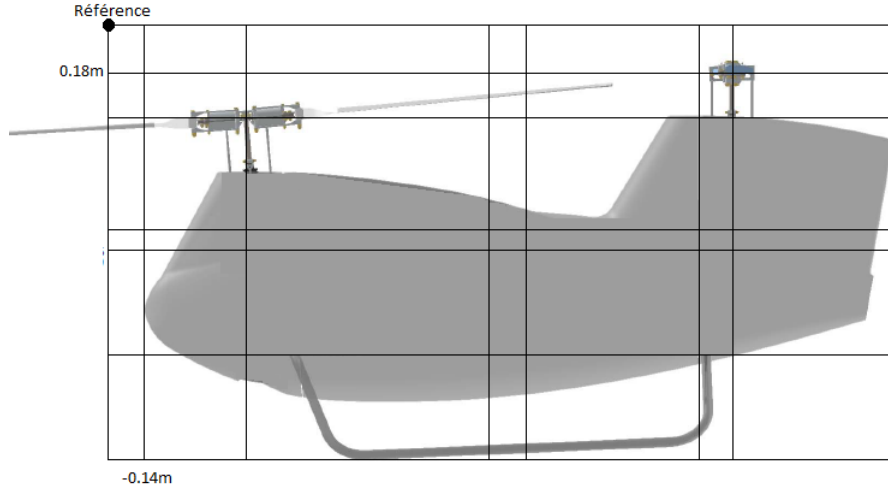


Figure 3.5 Point de référence du fabricant pour les positions de centres de masse (Source : Laflamme Aéro)

3.2.4 Configuration avec charge utile

Propriétés de la charge utile

La charge utile considérée est un parallélépipède rectangulaire de dimension quelconque (largeur w_c , hauteur h_c , profondeur d_c) ayant une masse volumique uniforme et une masse donnée (m_c). Comme la charge est un parallélépipède rectangulaire, son inertie est

$$\mathbf{J}_c = \begin{bmatrix} \frac{m_c}{12} (w_c^2 + h_c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_c}{12} (d_c^2 + h_c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_c}{12} (d_c^2 + w_c^2) \end{bmatrix}$$

La position du centre de masse de la charge utile est représentée par

$$\mathbf{R}_{cm,c} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix}$$

Influence de la charge utile sur le système

Le système complet considéré est l'hélicoptère à vide, ce qui évite de dépendre de l'hypothèse utilisée pour le modèle du réservoir. Il est à noter que la même démarche peut être suivie en remplaçant le système par n'importe quelle autre configuration, y compris une configuration avec une autre charge utile.

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{1}{m}(m_v \mathbf{R}_{cm,v} + m_c \mathbf{R}_{cm,c})$$

où $m = m_v + m_c$.

$$\mathbf{J}_b = \mathbf{J}_{v/b} + \mathbf{J}_{c/b}$$

$$\mathbf{J}_{v/b} = \mathbf{J}_v + \Delta \mathbf{J}_{v/b}, \quad \Delta \mathbf{J}_{v/b} = m_v[(\mathbf{d}_{v/b}^T \mathbf{d}_{v/b}) \mathbf{I}_3 - \mathbf{d}_{v/b} \mathbf{d}_{v/b}^T], \quad \mathbf{d}_{v/b} = \mathbf{R}_{cm,v} - \mathbf{R}_{cm,b}$$

$$\mathbf{J}_{c/b} = \mathbf{J}_c + \Delta \mathbf{J}_{c/b}, \quad \Delta \mathbf{J}_{c/b} = m_c[(\mathbf{d}_{c/b}^T \mathbf{d}_{c/b}) \mathbf{I}_3 - \mathbf{d}_{c/b} \mathbf{d}_{c/b}^T], \quad \mathbf{d}_{c/b} = \mathbf{R}_{cm,c} - \mathbf{R}_{cm,b}$$

où

$$\Delta \mathbf{J}_{c/b} = \begin{bmatrix} m_c((z_c - z_b)^2 + y_c^2) & -m_c y_c(x_c - x_b) & -m_c(z_c - z_b)(x_c - x_b) \\ -m_c y_c(x_c - x_b) & m_c((z_c - z_b)^2 + (x_c - x_b)^2) & -m_c y_c(z_c - z_b) \\ -m_c(z_c - z_b)(x_c - x_b) & -m_c y_c(z_c - z_b) & m_c(y_c^2 + (x_c - x_b)^2) \end{bmatrix}$$

La figure 3.6 illustre l'influence de la position de la charge utile sur l'inertie par rapport à la référence du système. Il est à noter que pour cette figure, un cube de 0.01 m de côté et de 1 kg de masse a été utilisé comme charge utile, et que la position de la charge (x_c, y_c, z_c) est donnée par rapport à la référence. Les plus grandes variations d'inertie se trouvent visiblement aux positions les plus éloignées de la référence, soient les extrémités de la soute de l'appareil.

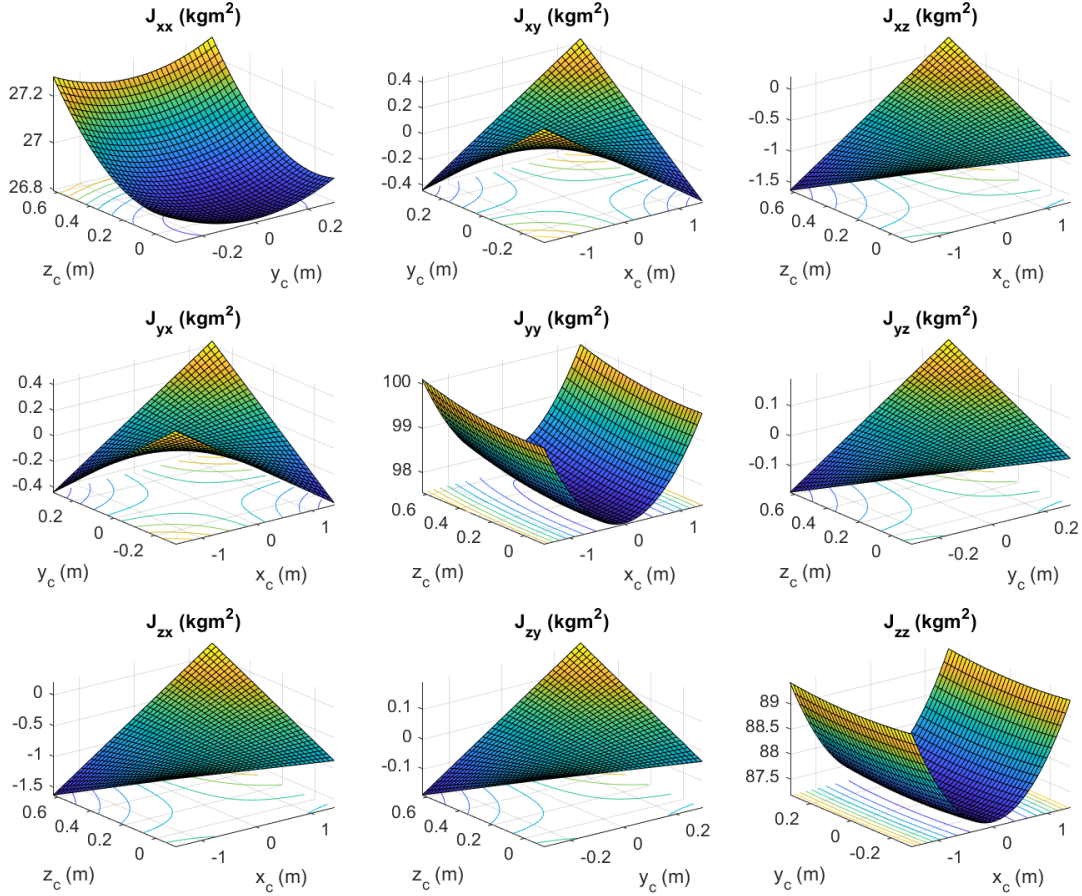


Figure 3.6 Inertie par rapport à la référence selon la position de la charge utile

3.3 Dynamiques des rotors

La dynamique des rotors provient d'équations tirées de Ren et al. (2012), provenant de Talbot et al. (1982), de Dreier (2007), et de Leishman (2006). Il est à noter que les rotors de l'hélicoptère étudié comportent deux pales suspendues (*underslung*), basculantes (*tethering*) grâce à un pivot central, et comporte deux pivots virtuels (grâce à une région flexible de la pale) pour permettre un battement conique (*coning*). Cette configuration est similaire à celle du rotor principal de l'hélicoptère Robinson R22 dans sa fonctionnalité. Le mécanisme du rotor est présenté à la figure 3.7, où les pivots sont indiqués, ainsi que la bascule. La chambre cylindrique est fixée à la bascule, entraînant la pale par son attache. La pale (et son attache) est cependant libre de tourner autour de son axe longitudinal (changement de pas θ_β) et autour du pivot secondaire (battement).

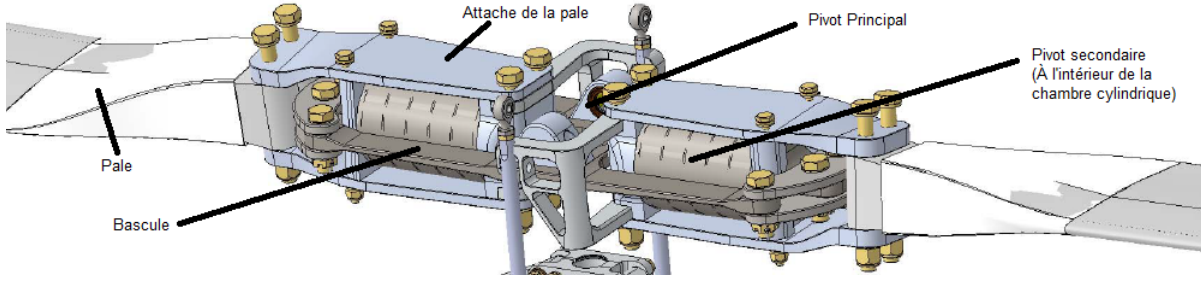


Figure 3.7 Rotor utilisé (gracieuseté de Laflamme Aéro)

3.3.1 Hypothèses de modélisation et axes de référence

Les hypothèses suivantes sont utilisées pour la modélisation des rotors :

- les pales sont considérées rigides ;
- la partie flexible des pales est assimilée à un pivot secondaire avec un ressort en torsion.

Le rotor est donc constitué de 3 parties rigides avec 3 pivots, tel qu'illustré à la figure 3.8.

Plusieurs référentiels sont utilisés afin de calculer les forces et moments générés par les rotors :

- $\mathcal{H}$ est le référentiel du centre du rotor (*hub*), attaché à l'arbre (ne tourne donc pas avec les pales). Tel qu'illustré aux figures 3.9 et 3.10, l'axe z de ce référentiel pointe vers le bas en suivant l'arbre du rotor, l'axe x pointe vers l'avant de l'hélicoptère, et l'axe y complète le repère direct ;
- $\mathcal{R}$ est le référentiel du centre du rotor, attaché aux pales (tournant donc avec celles-ci). Tel qu'illustré aux figures 3.8, 3.9 et 3.10, l'axe x de ce référentiel pointe vers l'extérieur de la pale, l'axe z pointe vers le bas en suivant l'arbre du moteur et l'axe y complète le repère direct. Ce référentiel est donc $\mathcal{H}$ après une rotation de ψ_β ;
- $\mathcal{P}$ est le référentiel de l'élément de pale. Tel qu'illustré aux figures 3.8 à 3.14, l'axe x pointe vers l'extérieur de la pale (en suivant celle-ci), l'axe y suit la corde de la pale lorsque celle-ci est à l'horizontale ($\theta_\beta = 0$), et l'axe z complète le référentiel en pointant vers le bas. Ce référentiel est donc $\mathcal{R}$ après une rotation de β ;
- $\mathcal{A}$ est le référentiel aérodynamique de l'élément de pale. Tel qu'illustré aux figures 3.13 et 3.14, l'axe x pointe vers l'extérieur de la pale (en suivant celle-ci), l'axe y suit le vent relatif de la pale et l'axe z complète le repère. Ce référentiel est $\mathcal{P}$ après une rotation de ϕ_β .

Ces référentiels sont liés par la rotation des pales (ψ_β), le battement des pales (β) et l'angle d'apport de la pale (ϕ_β).

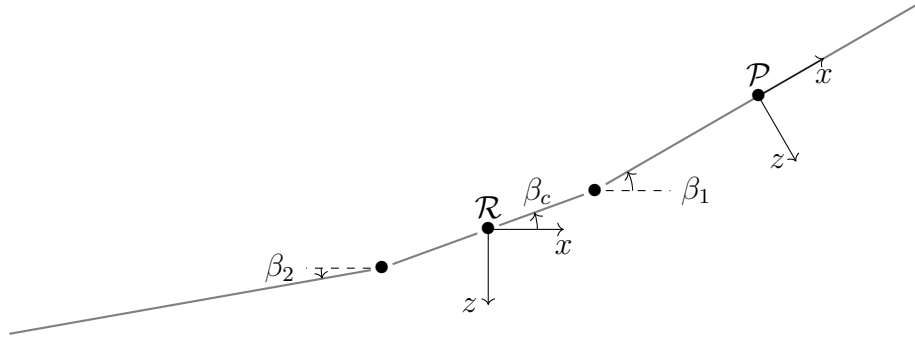


Figure 3.8 Repères, angles et pivots du rotor

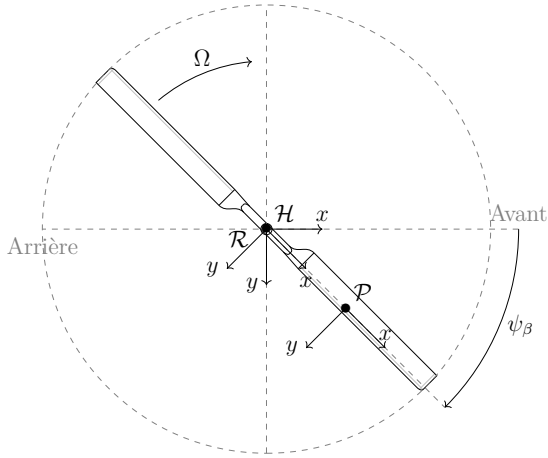


Figure 3.9 Vue de dessus du rotor arrière

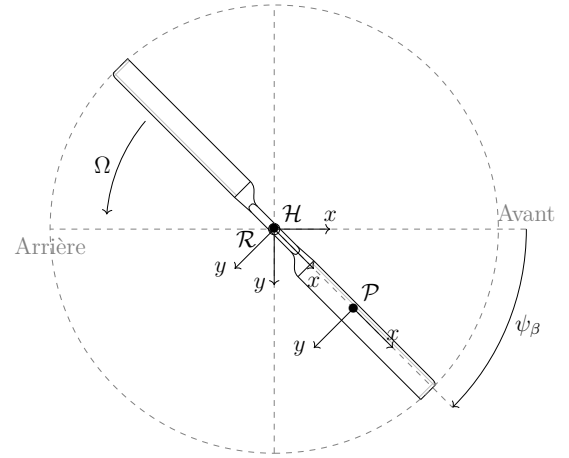


Figure 3.10 Vue de dessus du rotor avant

3.3.2 Forces et moments aérodynamiques

Les forces et les moments influençant le plus la dynamique des rotors sont les forces et les moments aérodynamiques. Afin de calculer ceux-ci, une approche par éléments de pale (*Blade Element Theory*) est utilisée. Les forces de portance et de traînée pour chaque élément (voir figures 3.13 et 3.14) sont décrites par les relations suivantes :

$$dL = \frac{1}{2} \rho dS ||V_a||^2 C_l \approx \frac{1}{2} \rho dS ||V_a||^2 a \alpha_\beta$$

$$dD = \frac{1}{2} \rho dS ||V_a||^2 C_d \approx \frac{1}{2} \rho dS ||V_a||^2 \bar{C}_D$$

$$||V_a|| = \sqrt{V_{a,x}^2 + V_{a,y}^2 + V_{a,z}^2} \approx \sqrt{V_{a,y}^2 + V_{a,z}^2}$$

où

— $dS = cRdx$ est une partie de la surface portante (avec la corde c , le rayon R , la

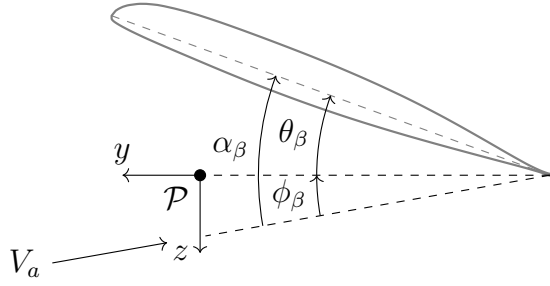


Figure 3.11 Profil d'une pale, angles d'intérêt (rotor arrière)

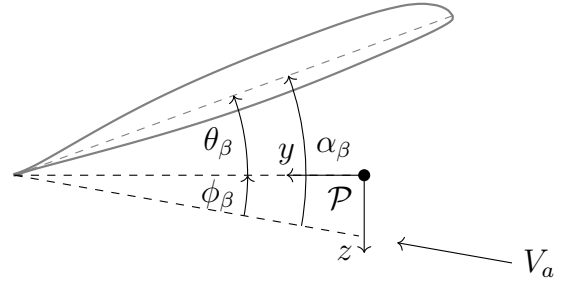


Figure 3.12 Profil d'une pale, angles d'intérêt (rotor avant)

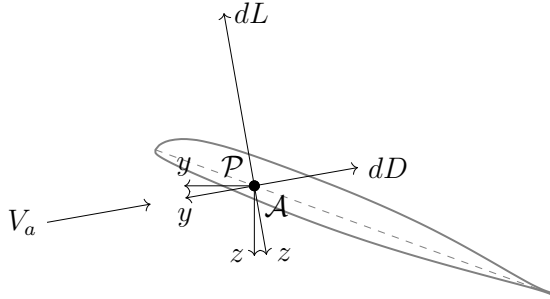


Figure 3.13 Profil d'une pale, forces aérodynamiques (rotor arrière)

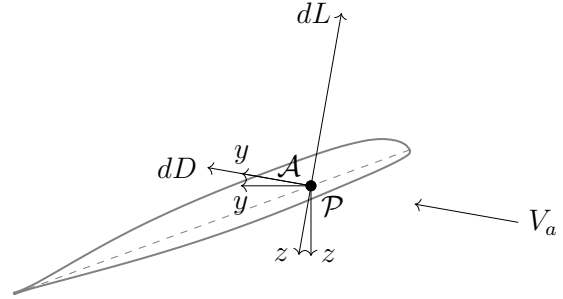


Figure 3.14 Profil d'une pale, forces aérodynamiques (rotor avant)

position sur la pale x ($x = 0$ à la racine et $x = 1$ au bout de la pale) et la largeur d'un élément de pale dx ;

- ρ est la densité de l'air ;
- V_a est la vitesse aérodynamique de la pale⁴ ;
- C_l et C_d sont les coefficients aérodynamiques de portance et de traînée, respectivement ;
- α est l'angle d'attaque de la pale ;
- a est le coefficient de portance linéique de la pale ;
- $\bar{C}_D$ est le coefficient de traînée moyen.

Ces forces sont données dans le repère aérodynamique de l'élément de pale considéré (soit $\mathcal{A}$). La vitesse aérodynamique de la pale est donnée par

$$V_a = R_y(\beta)R_z(\psi_\beta)[u_a, v_a, w_a]^\top + \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\Omega}_a \times \mathbf{r}$$

4. Cette vitesse aérodynamique inclut la vitesse de rotation du rotor, ce qui rend la vitesse radiale (selon l'axe X de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{A}$) négligeable.

où

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} (x - e)R \cos(\beta) + eR \cos(\beta_c) \\ 0 \\ -((x - e)R \sin(\beta) + eR \sin(\beta_c)) \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} -((x - e)R \sin(\beta)\dot{\beta} + eR \sin(\beta_c)\dot{\beta}_c) \\ 0 \\ -((x - e)R \cos(\beta)\dot{\beta} + eR \cos(\beta_c)\dot{\beta}_c) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_a = [p_a, q_a, r_a + \Omega]^\top$$

- e est la distance du pivot secondaire au centre du rotor (pivot principal) ;
- $[u_a, v_a, w_a]^\top$ est la vitesse aérodynamique du rotor ;
- $[p_a, q_a, r_a]^\top$ est la vitesse angulaire aérodynamique du rotor ;
- β_c est l'angle de battement de la partie centrale du rotor ;
- Ω est la vitesse de rotation de la pale (voir Figures 3.9 et 3.10 pour le sens) ;
- $R_y(\beta)$ est la matrice de rotation autour de l'axe y de la pale et d'angle β ;
- $R_z(\psi_\beta)$ est la matrice de rotation autour de l'axe z du rotor et d'angle ψ_β ;
- ψ_β est l'azimut de la pale.

Les vitesses aérodynamiques en translations u_a, v_a, w_a et en rotation p_a, q_a, r_a sont données par

$$\begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ w_a \\ p_a \\ q_a \\ r_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ p_i \\ q_i \\ r_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_w \\ v_w \\ w_w \\ p_w \\ q_w \\ r_w \end{bmatrix}$$

où l'indice a indique la vitesse aérodynamique, l'indice i indique la vitesse inertielle (vitesse de l'objet considéré dans l'espace), et w indique la vitesse du vent relatif (*wake* ou *wind*), ce qui inclut le vent, les sillons des surfaces aérodynamiques et les vitesses induites (générant de la traînée).

L'angle d'attaque est, quant à lui, donné par

$$\alpha_\beta = \theta_\beta + \phi_\beta$$

$$\theta_\beta = \theta_0 + \theta_T x + \theta_{1c} \cos(\psi_\beta) + \theta_{1s} \sin(\psi_\beta)$$

$$\phi_\beta = \tan^{-1} \left(\frac{V_{a,z}}{V_{a,y}} \right)$$

où θ_β est le pas de la pale et ϕ_β est l'angle d'apport de la pale. Il est à noter que ces 3 angles seront considérés positifs dans le sens où ils sont mesurés aux figures 3.13 et 3.14.

Pour obtenir ces forces dans le repère de la pale $\mathcal{R}^5$, la transformation (rotations) suivante est requise :

$$\begin{bmatrix} dF_{a,x} \\ dF_{a,y} \\ dF_{a,z} \end{bmatrix} = R_y^\top(\beta) R_x^\top(\pm\phi_\beta) \begin{bmatrix} 0 \\ \mp dD \\ -dL \end{bmatrix}$$

où les signes de dD et ϕ_β sont déterminés par le sens de rotation du rotor (voir Figures 3.9 à 3.14).

On obtient donc le moment aérodynamique⁶ :

$$d\mathbf{M}_a = \mathbf{r}_s \times d\mathbf{F}_a \Rightarrow \begin{cases} dM_{a,x} = R((x-e)\sin(\beta) + e\sin(\beta_c)) dF_{a,y} \\ dM_{a,y} = -R(x-e)\sin(\beta) dF_{a,x} - R(x-e)\cos(\beta) dF_{a,z} \\ dM_{a,z} = R((x-e)\cos(\beta) + e\cos(\beta_c)) dF_{a,y} \end{cases}$$

où $\mathbf{r}_s$ est le vecteur position sur la pale à partir du pivot d'intérêt (chaque composante du moment est reprise par un pivot différent, d'où l'inclusion ou non de e et β_c dans les équations).

La force et le moment aérodynamiques totaux peuvent alors être obtenus en intégrant les éléments de pale :

$$\mathbf{F}_a = \int_{x=0}^{x=B_T} d\mathbf{F}_a \quad \mathbf{M}_a = \int_{x=0}^{x=B_T} d\mathbf{M}_a$$

L'intégration n'est pas réalisée sur la pale entière ; le facteur des pertes en bout de pale B_T (*tip loss factor*) est utilisé afin de tenir compte de l'effet des tourbillons marginaux.

Vitesse induite du rotor

La portance créée par le rotor génère une vitesse induite qui influence cette même portance. En effet, cette vitesse induite influence la vitesse aérodynamique des pales qui intervient dans les calculs de forces aérodynamiques et de dynamique de battement. Cette relation hautement non linéaire rend difficile le calcul des forces aérodynamiques. Afin de faciliter le calcul, les équations pourraient être simplifiées pour trouver une relation plus simple ou d'autres approches théoriques (autre que l'approche par éléments de pale) pourraient dégager une autre relation. Deux approches (présentées dans Dreier (2007)) sont utilisées, soient une approche dynamique et une approche par dichotomie. L'approche dynamique sera privilégiée pour le modèle complet étant donné ses avantages, tandis que l'approche par dichotomie sera utilisée pour le modèle simplifié puisqu'elle facilite la compensation et la linéarisation et que

5. Le repère utilisé pour calculer ces forces est le repère aérodynamique de la pale $\mathcal{A}$

6. La composant en y de ce moment est calculé autour du pivot secondaire, d'où l'absence de β_c .

le besoin de précision y est moindre (en raison des hypothèses simplificatrices utilisées).

L'approche dynamique se base sur la théorie de la quantité de mouvement des éléments de pale (*Blade Element Momentum Theory*), où la relation suivante a été dégagée

$$F_{a,z} = -2\rho \parallel \mathbf{V}_a \parallel (\pi R^2) w_{w,induite}$$

Comme décrit dans Dreier (2007) (en se basant sur les travaux de Pitt and Peters (1980), Pitt (1980)), il est possible d'ajouter un terme de perturbation faisant intervenir la dérivée de la vitesse induite. En utilisant une sphère d'air entraînée par le rotor, il est possible de calculer l'accélération de la sphère, et par le fait même la dérivée de la vitesse induite, et de trouver la relation suivante

$$\dot{w}_{w,induite} = - \mid \Omega \mid R \frac{F_{a,z} + 2\rho \parallel \mathbf{V}_a \parallel (\pi R^2) w_{w,induite}}{4/3\rho\pi(0.8R)^3}$$

L'approche par dichotomie utilise l'existence de deux relations distinctes (mais équivalentes), soient la relation se basant sur la théorie de la quantité de mouvement des éléments de pale et la relation se basant sur la théorie des éléments de pale. La première relation a été donnée ci-haut et la seconde est issue du calcul des forces aérodynamiques discuté plus tôt. L'approche par dichotomie estime la vitesse induite pour effectuer les calculs des forces aérodynamiques (deuxième relation), et utilise la première relation

$$F_{a,z} = -2\rho \parallel \mathbf{V}_a \parallel (\pi R^2) w_{w,induite} \Rightarrow w_{w,induite} = -\frac{F_{a,z}}{2\rho \parallel \mathbf{V}_a \parallel (\pi R^2)}$$

à titre de vérification pour raffiner l'estimation lors de l'itération suivante. Le processus itératif prend fin lorsque l'erreur entre l'estimation et la vérification est en deçà du seuil de tolérance. Cette approche est privilégiée pour le modèle simplifié du rotor étant donnée l'hypothèse quasi-statique utilisée et l'utilisation de la moyenne des force lors d'une révolution (voir la sous-section 3.3.6).

Il est à noter que les deux approches utilisent la théorie de la quantité de mouvement des éléments de pale, qui suppose une vitesse induite uniforme. Afin de ne pas diminuer la fidélité des modèles, une correction est apportée aux modèles du rotor et est discutée dans la sous-section suivante.

Non-uniformité de la portance et de la vitesse induite

La portance (et sa vitesse induite) n'étant pas uniforme durant toute la révolution d'une pale, certains effets supplémentaires peuvent être pris en compte pour augmenter la fidélité du modèle.

Premièrement, le taux d'avancement (μ) de l'hélicoptère durant le vol de croisière vient influencer le ratio d'apport (λ) du rotor. En effet, la pale avançante a une vitesse aérodynamique plus grande que la pale reculante, causant la pale avançante à générer plus de portance et une plus grande vitesse induite (et vice-versa pour la pale reculante). À cela s'ajoute l'influence de l'angle du sillon du rotor (*wake angle*) sur le rotor (angle causé par le taux d'avancement). Pour le modèle complet, seul l'influence de ce phénomène sur la vitesse induite est manquante. Pour palier à ce problème, la vitesse induite dynamique (d'après les travaux de Pitt and Peters (1980), Pitt (1980) et leurs prédécesseurs (voir Leishman (2006) et Chen (1989))) peut être développée jusqu'à sa première harmonique (en négligeant les autres), soit :

$$w_w(\psi_\beta) = w_{w,0} - w_{w,x} \cos(\psi_\beta) - w_{w,y} \sin(\psi_\beta) = \bar{w}_w (1 - k_c \cos(\psi_\beta) - k_s \sin(\psi_\beta))$$

où $w_w(\psi_\beta)$ est la vitesse induite de la pale, $\bar{w}_w$ est la valeur moyenne de la vitesse induite lors d'une révolution, et k_x et k_y sont les facteurs pondérant les variations de la vitesse induite selon l'azimut ψ_β de la pale. Plusieurs valeurs de ces facteurs ont été proposées (voir Leishman (2006) et Chen (1989)) et les valeurs de Pitt & Peters⁷ sont retenues ici puisqu'elles sont les plus récentes parmi les plus représentatives de la distribution (Leishman (2006)). Ces valeurs sont :

$$k_x = \frac{15\pi}{35} \tan\left(\frac{\chi_x}{2}\right) \quad k_y = \frac{15\pi}{35} \tan\left(\frac{\chi_y}{2}\right)$$

où

$$\chi_x = \tan^{-1}\left(\frac{u_a}{-w_a}\right) \quad \chi_y = \tan^{-1}\left(\frac{v_a}{-w_a}\right)$$

sont les angles du sillon du rotor (dans le plan x - z et y - z du repère $\mathcal{H}$ respectivement). Avec cette expression de la vitesse induite, il est possible d'utiliser la valeur moyenne de la vitesse induite $\bar{w}_w$ dans l'équation de la dérivée de la vitesse induite moyenne et d'utiliser la valeur locale $w_w(\psi_\beta)$ dans le calcul des forces aérodynamiques.

Deuxièmement, un angle d'attaque trop élevé de la pale peut entraîner un décrochage du

7. Les valeurs présentées ici ont été adaptées des valeurs des sources. Les sources utilisent directement les valeurs normalisées de taux d'avancement ($\mu = \sqrt{u_a^2 + v_a^2}/(\Omega_a R) \approx u_a/(\Omega_a R)$) et de ratio d'apport ($\lambda = w_a/(\Omega_a R)$). Cette nomenclature n'a pas été utilisé, puisqu'elle nécessite l'ajout d'un angle de glissement ($\beta_w = \tan^{-1}(v_a/\sqrt{u_a^2 + v_a^2})$) pour tenir compte de la vitesse latérale dans les calculs des forces aérodynamiques (complexifiant les calculs situés à l'Annexe B).

bout de la pale, venant influencer les performances à haute vitesse de l'appareil. Pour le modèle complet, la portance générée par un élément de pale est réduite à 0 pour tout angle d'attaque (local) supérieur à 15° (ou inférieur à -15°). L'effet du décrochage partiel des pales a été négligé dans le modèle simplifié étant donné les vitesses considérées.

3.3.3 Autres forces et moments

Les autres forces et moments exercés sur le rotor sont issus des forces inertielles (causées par l'utilisation d'un repère non inertiel) et des moments élastiques générés par les pivots virtuels secondaires (région flexible des pales). L'expression de ces forces et de ces moments est donnée à l'Annexe B.

3.3.4 Mouvements des pales

Les mouvements engendrés par les forces et moments exercés sur les pales sont 3 rotations autour des axes de la pale permises par les différents pivots présents.

Le mouvement autour de l'axe x de la pale est simplement l'articulation de changement du pas de la pale (*feathering*), représenté par θ_β . Ce mouvement est donc le mouvement contrôlé par le mécanisme de commande. La dynamique y étant associée est considérée très rapide et les moments générés par la pale sont repris comme une charge sur les servomoteurs.

Le mouvement autour de l'axe z est appelé l'articulation de traînée (*lead-lag*). Ce mouvement est considéré négligeable, puisque les rotors de l'hélicoptère étudié comportent deux pales suspendues (*underslung*) dont l'avantage de design est de minimiser ce mouvement et que ce mouvement est bloqué par le rotor à l'implanture de la pale. Les moments autour de l'axe z exercés sur la pale sont repris par le rotor et transmis au fuselage, tout comme l'ensemble des forces (puisque les translations sont toutes bloquées par le rotor).

Le mouvement autour de l'axe y de la pale est appelé le battement de la pale (*flapping*), et est représenté par β . Ce mouvement et sa dynamique influencent grandement les forces et moments générés par les pales.

La dynamique de battement des pales est donnée en détail à l'Annexe B. Les équations s'y trouvant ont été implémentées dans un modèle à moyenne fidélité.

3.3.5 Forces et moments transmis au mât du rotor

Les forces et les moments transmis au mât du rotor par les pales (forces aérodynamiques) sont donnés par

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\mathcal{H}} &= R_z^\top(\psi_\beta) (\Sigma \mathbf{F}_{\mathcal{R}}) \\ \mathbf{M}_{\mathcal{H}} &= R_z^\top(\psi_\beta) \left(\Sigma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{\mathcal{R},z} \end{bmatrix} \right)\end{aligned}$$

où $\Sigma \mathbf{F}_{\mathcal{R}}$ est la somme des forces dans le repère $\mathcal{R}$ (donc $\mathbf{F}_a$ additionnée des forces inertielles), et où $\Sigma M_{\mathcal{R},z}$ est la somme des moments autour de l'axe z . Seuls les moments autour de l'axe z ont été pris en compte, puisque les moments autour des axes x et y (du repère $\mathcal{R}$) sont repris par les pivots de battement et par les servomoteurs (moments autour du pivot du pas des pales).

3.3.6 Simplifications en vue de la linéarisation

Afin de pouvoir linéariser le système, la moyenne des forces et des moments pour une révolution doit être calculée et utilisée. Pour permettre le calcul de cette moyenne, il est nécessaire d'explicitier la dépendance à ψ_β de tous les termes périodiques. À cette fin, les équations des forces et des moments, ainsi que celles de la dynamique de battement, sont d'abord simplifiées en utilisant l'hypothèse quasi statique ($\ddot{\beta} \approx 0, \dot{\beta} \approx 0$) et l'approximation des petits angles ($\sin(\beta) \approx \beta, \cos(\beta) \approx 1, \beta^2 \approx 0$). Le calcul des forces, des moments et de la dynamique de battement peut alors être simplifié en utilisant le plan du parcours du bout de pale (*tip path plane*, TPP) pour définir les angles de battements. Tel qu'illustré à la figure 3.15, l'hypothèse quasi-statique permet de définir la relation suivante

$$\beta(\psi_\beta) \approx \beta_0 - \beta_{1c} \cos(\psi_\beta) + \beta_{1s} \sin(\psi_\beta)$$

où β_0 est l'harmonique d'ordre 0 de l'angle de battement, β_{1c} et β_{1s} sont les harmoniques d'ordre 1 de l'angle de battement, et où les harmoniques d'ordres supérieurs ont été négligés. Il se trouve qu'en pratique, ces harmoniques ont effectivement une amplitude très faible⁸ et apparaissent comme une faible oscillation du TPP et ont très peu d'effet sur la stabilité et les performances des hélicoptères, surtout pour les rotors avec bascule (Leishman (2006)) comme ceux du LX300. Les angles β_{1c} et β_{1s} sont donc mesurés en prenant l'angle du TPP par rapport à l'horizontale. Il est à noter que l'utilisation du TPP tel que présentée vient

8. Bien que leurs amplitudes soient faibles, ces harmoniques ne sont pas négligeables pour l'étude de vibrations structurelles de l'appareil.

négliger la distance e des pivots secondaires. En ayant simplifié la dynamique de battement de

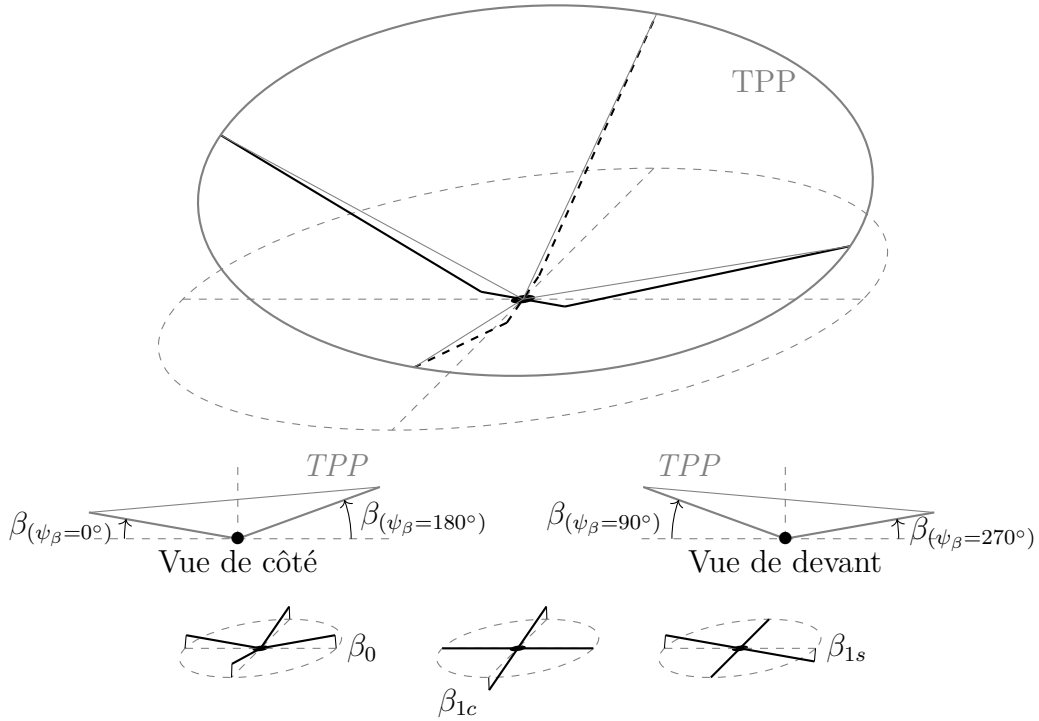


Figure 3.15 Angles de battement selon le parcours du bout de pale (et ses harmoniques)

cette manière⁹, il est maintenant possible de calculer la moyenne des forces et des moments lors d'une révolution :

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\psi_\beta) d\psi_\beta \quad \bar{\mathbf{M}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{M}(\psi_\beta) d\psi_\beta$$

Les outils symboliques¹⁰ SYMPY et NUMPY ont été utilisés pour effectuer les manipulations nécessaires à la simplification de la dynamique des rotors en utilisant les hypothèses et approximations considérées, et en prenant la moyenne des forces et moments pour une révolution. Les équations obtenues sont en accord avec la littérature¹¹ (Dreier (2007), Ren et al. (2012), Talbot et al. (1982)).

9. L'hypothèse quasi-statique permet de réduire la dynamique de battement à sa première harmonique en ψ_β et l'hypothèse des petits angles vient linéariser les dépendances à β des forces et des moments, ce qui permet la résolution analytique de l'intégrale présentée.

10. Ces outils ont été utilisés en raison des routines de simplification des termes trigonométrique.

11. Pour le rotor avant qui tourne dans le sens habituel pour les hélicoptères classiques avec rotor de queue.

3.3.7 Coefficients aérodynamiques

Coefficient de portance linéique

Le coefficient de portance linéique (a) peut être approximé par la formule suivante :

$$a \approx \frac{2\pi}{1 + \frac{2}{AR}} = 5.7446$$

où $AR = (2R)^2/(c2R) = 2R/c$ est l'allongement (*aspect ratio*). Cette valeur théorique a été utilisée initialement pour obtenir les premiers résultats préliminaires.

Le coefficient de portance linéique a ensuite été calculé à partir des données brutes de coefficient de portance (C_L) en suivant ces étapes :

- interpolation cubique afin de combler les trous dans les données obtenues¹² ;
- seconde interpolation cubique afin d'obtenir une grille de données de 1 à 10 degrés pour les nombres de Mach associés à la vitesse nominale de chaque élément profilé de pale ($Ma = f(\Omega r)$) ;
- intégration numérique de la contribution de chaque élément profilé de la pale au coefficient de portance total pour chaque valeur de α considérée. Le résultat de cette intégration est ensuite divisé par le rayon total de la pale pour obtenir le coefficient de portance de toute la pale pour différents angles ;
- régression linéaire par rapport à α afin d'obtenir le coefficient de portance linéique.

Le coefficient de portance linéique ainsi obtenu¹³ est $a = 5.7058$.

Coefficient de traînée

Le coefficient de traînée a été approximé à partir des courbes du profilé utilisé (moyenne de chaque courbe dans la plage de vitesses nominales). La valeur de $C_{d0} = 0.0117$ a été obtenue, ce qui est près de la valeur typique de 0.01 retrouvée dans la littérature.

3.3.8 Effet de sol

À basse altitude, la traînée induite se voit diminuée grâce à la proximité du sol qui empêche la formation normale de tourbillons marginaux (tourbillon d'air en bout d'aile ou de pale). Ce phénomène est communément appelé «effet de sol». Pour représenter cette diminution,

12. Seuls les angles d'attaque compris entre 1 et 10 degrés inclusivement ont été considérés comme les données brutes étaient incomplètes pour plusieurs nombres de Mach.

13. La seconde interpolation a été faite pour 1000 valeurs d'angles et 1000 valeurs de nombre de Mach afin d'obtenir un résultat relativement fidèle. L'intégration numérique a donc été réalisée sur des bandes d'un millièmme de longueur profilée (3/4 de rayon).

Cheeseman and Bennett (1955) et Leishman (2006) considèrent que la vitesse verticale du flux d'air poussé par le rotor doit être nulle au contact du sol, ce qui signifie que le sol renvoie une pression égale à la pression reçue. Cette pression renvoyée par le sol est approximée par $\frac{Aw_{w,OGE}}{16\pi(p_D)^2}$ selon la théorie de la dynamique des fluides, ce qui permet d'en déduire que la vitesse du flux d'air se voit réduite d'environ $\left(\frac{R}{4p_D}\right)^2$. Cependant, cette diminution se voit affectée par l'angle du sillon d'un facteur de $\frac{1}{1+(\mu/\lambda)^2}$ (où le ratio μ/λ est la tangente de l'angle du sillon). En tenant cette diminution de vitesse en compte, la vitesse induite du rotor à l'intérieur de l'effet de sol est alors

$$w_{w,IGE} = w_{w,OGE} \left(1 - \frac{(R/4p_D)^2}{1 + (\mu/\lambda)^2} \right)$$

où $w_{w,IGE}$ est la vitesse induite à l'intérieur de l'effet de sol, et $w_{w,OGE}$ la vitesse induite à l'extérieur de l'effet de sol.

3.3.9 Forces et moments transmis au corps rigide

Les forces et les moments transmis au fuselage par les rotors sont

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{FR} &= \begin{bmatrix} \cos 5^\circ & 0 & -\sin 5^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 5^\circ & 0 & \cos 5^\circ \end{bmatrix} \mathbf{F}_{\mathcal{H},FR} \\ \mathbf{F}_{AR} &= \mathbf{F}_{\mathcal{H},AR} \\ \mathbf{M}_{FR} &= \mathbf{d}_{cm/FR} \times \mathbf{F}_{FR} + \begin{bmatrix} \cos 5^\circ & 0 & -\sin 5^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 5^\circ & 0 & \cos 5^\circ \end{bmatrix} \mathbf{M}_{\mathcal{H},FR} \\ \mathbf{M}_{AR} &= \mathbf{d}_{cm/AR} \times \mathbf{F}_{AR} + \mathbf{M}_{\mathcal{H},AR} \end{aligned}$$

où l'indice FR désigne le rotor avant, l'indice AR désigne le rotor arrière, et $\mathbf{d}_{cm/FR}$ et $\mathbf{d}_{cm/AR}$ désignent les distances du rotor avant et arrière par rapport au centre de masse.

3.4 Traînée du fuselage

La traînée du fuselage joue un rôle important en vol de croisière et est calculée grâce à l'équation suivante :

$$D_f = -\frac{1}{2}\rho \mathbf{V}_{a,f}^2 A_{d,f} C_{d,f}$$

où $\mathbf{V}_{a,f}$ est la vitesse aérodynamique du fuselage, $A_{d,f}$ est l'aire touchée par le vent relatif, et $C_{d,f}$ est le coefficient aérodynamique de traînée. En utilisant 3 coefficients de traînée selon les

3 axes du fuselage, les 3 composantes de la force de traînée du fuselage peuvent être calculées en utilisant les composantes de la vitesse aérodynamique correspondantes.

3.5 Auto-influences et interférences aérodynamiques

L'auto-influence aérodynamique est ici associée à la force et au moment aérodynamiques par un corps. En effet, les forces et les moments aérodynamiques (comme la traînée) génèrent un sillon (*wake*) dans la masse d'air rencontrée par une surface ; ce sillon est caractérisé par :

$$\mathbf{V}_w = \frac{-1}{2\rho|\mathbf{V}_a|} [A_a] \begin{bmatrix} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{M}_a \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{V}_w$ est la vitesse induite¹⁴ générée, $[A_a]$ une matrice des surfaces équivalentes affectées par les forces et moments aérodynamiques, et $\mathbf{F}_a, \mathbf{M}_a$ les forces et les moments aérodynamiques agissant sur le corps considéré, respectivement. La matrice $[A_a]$ peut être approximée par une matrice diagonale dont les termes sont $1/(\pi L_{ref}^2)$ pour les composantes linéaires et $1/(\pi L_{ref}^4)$ pour les composantes angulaires, où L_{ref} est une longueur de référence (généralement la plus grande demi-longueur selon un axe qui permet d'obtenir un disque couvrant toute la surface visible).

L'interférence aérodynamique survient lorsqu'une surface se trouve dans le sillon d'une surface aérodynamique. Par exemple, la présence du fuselage dans le flux d'air poussé par les rotors constitue de l'interférence aérodynamique. Cette interférence est généralement une forme de traînée (comme dans l'exemple mentionné). Cependant, l'hélicoptère tandem voit un autre type d'interférence aérodynamique plus important, soit l'interférence aérodynamique entre ses deux rotors. La figure 3.16 illustre la disposition des rotors pour le LX300 (et le Chinook), où l'on remarque que les parcours des pales des rotors se chevauchent. Ce chevauchement vient augmenter l'interférence aérodynamique entre les rotors en vol stationnaire. De plus, lors du vol de croisière, le rotor arrière se retrouve généralement dans le sillon du rotor avant, augmentant considérablement l'interférence aérodynamique pour le rotor arrière. L'interférence aérodynamique est calculée grâce à l'équation suivante

$$\mathbf{V}_{w,x \rightarrow y} = \frac{A'_y}{A_y} \mathbf{V}_{w,x} \quad \mathbf{V}_{w,y} = \mathbf{V}_{w,x \rightarrow y} + \mathbf{V}_{w,y \rightarrow y}$$

où $\frac{A'_y}{A_y}$ est le ratio entre la surface dans le sillon et la surface totale considérée, les indices x et y désignent les objets considérés (donc $x \rightarrow y$ désigne l'interférence de x sur y , et $y \rightarrow y$ serait

14. Cette vitesse inclut les composantes angulaires.

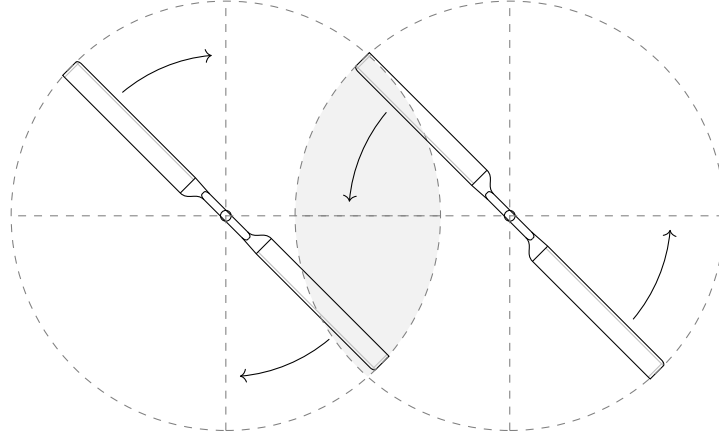


Figure 3.16 Disposition des rotors

l'auto-influence de y). Le ratio des surfaces est calculé au préalable en fonction de l'angle des sillons $\chi = \tan^{-1} \left(\frac{u_a}{-w_a} \right)$ des rotors et est implémenté sous forme de matrice, comme pour le calcul des auto-influences. Les vitesses induites totales à utiliser dans les calculs dynamiques sont donc la somme des vitesses induites par les différents objets, incluant l'auto-influence et les interférences.

3.6 Dynamique des servomoteurs

Le modèle non linéaire des servomoteurs a été implémenté dans le modèle non linéaire, mais son approximation par une fonction de transfert du deuxième ordre sera utilisée lors de la linéarisation¹⁵.

Les lignes qui suivent détaillent les caractéristiques des servomoteurs.

3.6.1 DA26

Des tests d'identification ont été réalisés sur l'actionneur DA26 (voir Annexe A.1) et ont permis d'obtenir ses caractéristiques. Cet actionneur comporte un contrôleur discret échantillonné à 625 Hz de type PD et un système mécanique assimilable à un moteur à courant continu. Le contrôleur discret a comme gains $K_D=0.02$ (dérivé) et $K_P=18.725$ (proportionnel) et la constante du filtre est 625 (fréquence du contrôleur). La tension maximale de commande est de 28 V.

15. Cette approximation est nécessaire, car les outils de linéarisation (SIMULINK) ne supportent pas très bien les délais introduits par le modèle non linéaire (qui comporte un contrôleur discret); il est possible que l'outil linéarise les servomoteurs comme des gains nuls, dépendamment du point d'opération choisi.

Les propriétés du moteur à courant continu sont présentées au tableau 3.2.

Tableau 3.2 Propriétés du moteur à courant continu des servomoteurs

Propriété	Symbole	Valeur
Résistance	R	13.4087 Ω
Inductance	L	0.95 mH
Constante du moteur	K_V	4.8006 Nm/A
Inertie de l'arbre	J_M	13200 kg.mm ²
Coefficient de friction visqueuse	μ_v	0.128 Nm/(rad/s)
Constante de friction statique	μ_s	0.07735
Butées	$\theta_{\max}/\theta_{\min}$	± 50 deg

Avec ces caractéristiques, les performances de cet actionneur sont données au tableau 3.3.

Tableau 3.3 Performances du servomoteur DA26

Performance	Sans charge	Charge nominale de 2.7 Nm
Temps de réponse à 2%	0.0808 s	0.0515 s
Erreur en régime permanent	0%	0% (+ Erreur de biais)
Erreur de biais (<i>Offset</i>)	0°	0.415°
Position maximale	± 50 deg	± 50 deg
Amortissement	0.2779	0.3122 ¹⁶
Retard	0.0016 s ¹⁷	0.0024 s

Les figures 3.17 et 3.18 illustrent les réponses temporelles de l'actionneur sans charge et avec une charge nominale, respectivement. On y remarque qu'il y a moins d'oscillations dans le cas avec charge nominale, ce qui est causé par la friction statique causée par la charge. Ceci explique aussi le temps de réponse plus court observé (voir tableau 3.3).

3.6.2 DA26D

Des tests d'identification ont été réalisés sur l'actionneur DA26D (voir Annexe A.2) et ont permis d'obtenir ses caractéristiques. Cet actionneur comporte deux contrôleurs identiques à celui de l'actionneur DA26 et un système mécanique assimilable à deux moteurs identiques à celui de l'actionneur DA26 reliés par une transmission mécanique. La transmission mécanique introduit un léger amortissement lorsque les moteurs ne sont pas synchronisés (p. ex. lorsqu'un moteur tombe en panne).

Les performances de cet actionneur sont données au tableau 3.4.

16. Cet amortissement a été calculé à partir du dépassement enregistré.

17. Il est à noter que ce retard correspond au taux d'échantillonnage du contrôleur.

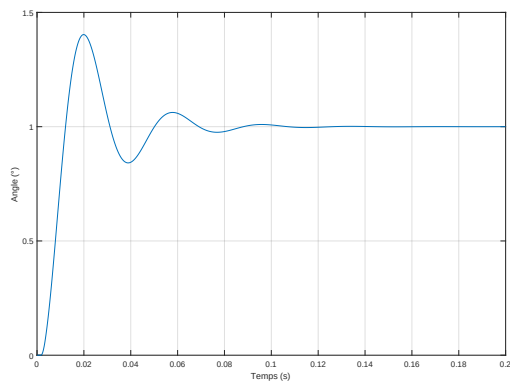


Figure 3.17 Réponses pour une entrée échelon unitaire du moteur sans charge

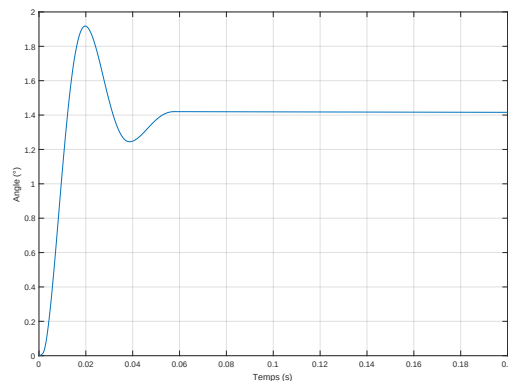


Figure 3.18 Réponses pour une entrée échelon unitaire avec charge nominale

Tableau 3.4 Performances du servomoteur DA26D

Performance	Sans charge	Charge nominale de 5 Nm
Temps de réponse à 2%	0.0808 s	0.0509 s
Erreur en régime permanent	0%	0% (+ Erreur de biais)
Erreur de biais (<i>Offset</i>)	0°	0.385°
Position maximale	±50 deg	±50 deg
Amortissement	0.2779	0.3106 ¹⁸
Retard	0.0016 s	0.0016 s

Les figures 3.19 et 3.20 illustrent les réponses temporelles de l'actionneur sans charge et avec une charge nominale, respectivement. Il est à noter que les performances à vide (sans charge) des deux actionneurs sont identiques.

18. Cet amortissement a été calculé à partir du dépassement enregistré.

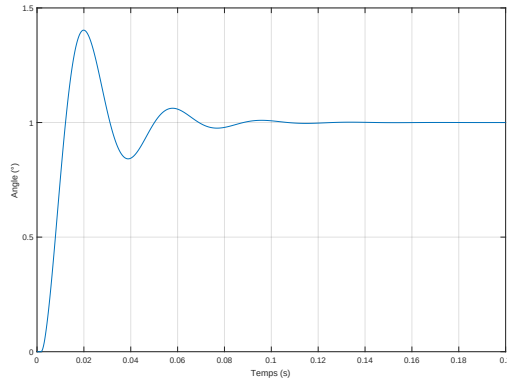


Figure 3.19 Réponses pour une entrée échelon unitaire du moteur sans charge

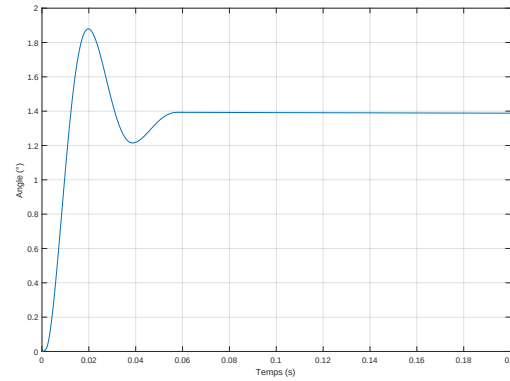


Figure 3.20 Réponses pour une entrée échelon unitaire avec charge nominale

3.7 Mécanisme de contrôle

Le mécanisme de contrôle relie les servomoteurs aux pas des pales à travers deux séries de biellettes et d'un plateau cyclique. Les relations géométriques caractérisant ce mécanisme ont été implémentées dans le simulateur.

La cinématique des rotors, qui permettent de réaliser les calculs décrits dans les lignes qui suivent, a été fournie par le fabricant. La compréhension de ces calculs est requise afin de bien modéliser cette cinématique lors de la synthèse des lois de commande.

3.7.1 Relations géométriques entre les angles de servomoteurs et les angles de contrôle

Les angles de contrôle (collectif, cyclique longitudinal et cyclique latéral) sont réalisés à l'aide d'un plateau cyclique (*swashplate*) et de deux séries de biellettes (inférieures et supérieures au plateau cyclique) actionnées par trois servomoteurs. La figure 3.21 présente cette structure.

L'effet du braquage des servomoteurs est simplement calculé à l'aide des relations géométriques entre les différents composants mécaniques du système ; le calcul se sépare facilement en trois : l'effet des servomoteurs sur les biellettes inférieures, l'effet des biellettes inférieures sur le plateau cyclique et l'effet du plateau cyclique sur les pâles (d'où sont déduits les angles effectifs de contrôle).

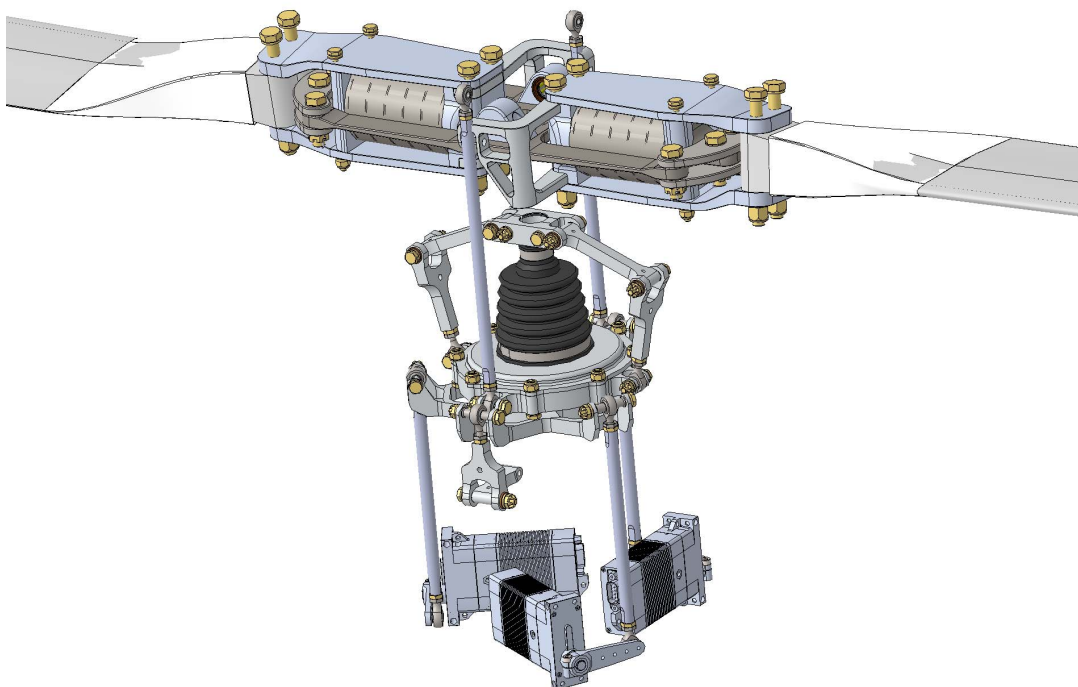


Figure 3.21 Mécanisme de contrôle des pâles - Rotor arrière (Source : Laflamme Aéro)

Effet des servomoteurs sur les biellettes inférieures

La figure 3.22 illustre la géométrie entre l'angle d'un servomoteur et le déplacement de sa biellette associée.

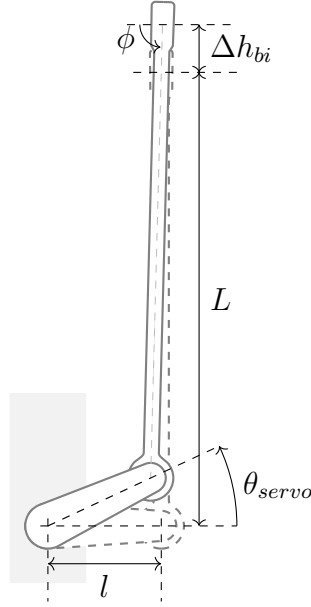


Figure 3.22 Schéma du mécanisme inférieur au plateau cyclique

Il est alors possible d'en dégager la relation suivante

$$\Delta h_{bi} = l \sin \theta_{servo} + L \sin \phi - L$$

où

$$L \cos \phi = l - l \cos \theta_{servo}$$

et où Δh_{bi} est le déplacement de la biellette inférieure transmis au plateau cyclique. Il est à noter que pour de petits angles des servomoteurs, $\phi \approx 90^\circ$ et $\Delta h_{bi} \approx l \sin \theta_{servo} \approx l \theta_{servo}$. Ces simplifications seront utilisées lors du calcul du mixage (*mixing*) à implémenter pour déterminer les angles de servomoteurs désirés, puisque les angles seront généralement inférieurs à 15° ¹⁹.

Effet des biellettes inférieures sur le plateau cyclique

La figure 3.23 illustre l'influence des biellettes inférieures sur le plateau cyclique. Les biellettes

19. Information fournie et prévue par le fabricant.

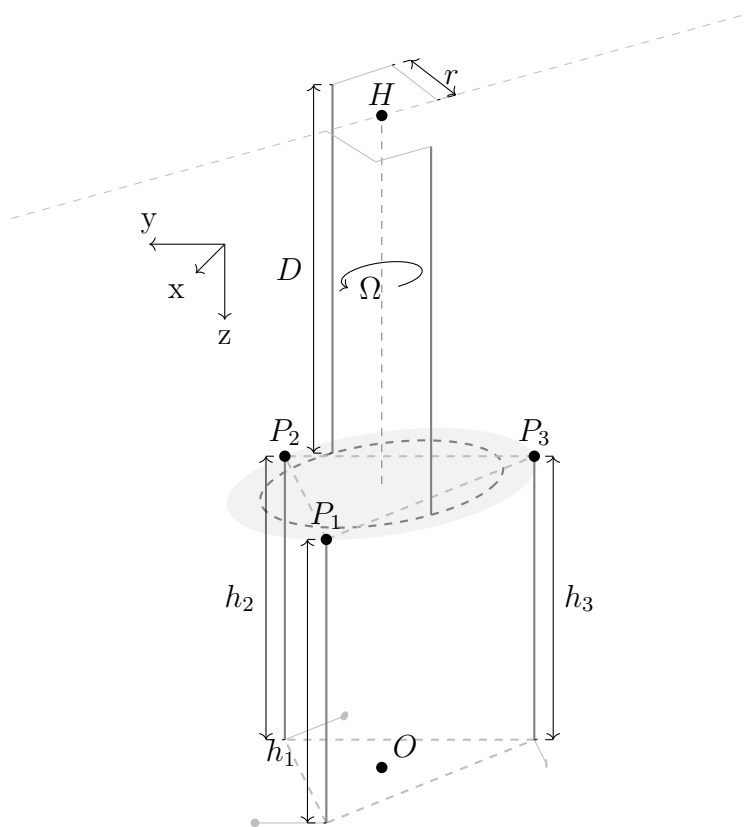


Figure 3.23 Schéma du plan du plateau cyclique - Rotor avant

supérieures y sont aussi illustrées pour faciliter la compréhension du rôle du plateau cyclique. Les hauteurs indiquées sont données par

$$h_{1,2,3} = L + \Delta h_{bs}|_{1,2,3}$$

et D est la hauteur des biellettes supérieures.

Tel qu'illustré à la figure 3.23, la partie supérieure du plateau cyclique, les biellettes supérieures (qui y sont attachées), et les pales du rotor tournent toutes à une vitesse angulaire Ω ; tandis que la partie inférieure du plateau cyclique, les biellettes inférieures et les servomoteurs sont fixes. Le déplacement vertical des biellettes inférieures vient modifier l'orientation (et la position) du plateau cyclique dans l'espace. Ce changement d'orientation (et de position) vient influencer la position des biellettes supérieures (plus de détails à la sous-section 3.7.1 qui suit).

L'équation du plan du plateau cyclique dans l'espace est donnée par

$$Plan := \{\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot P\} \equiv \{ax + by + cz + d = 0\}$$

où P est un point du plan, et

$$\vec{n} = [a \ b \ c]' \quad \vec{n} \cdot P = -d \quad \vec{x} = [x \ y \ z]'$$

La valeur du vecteur normal $\vec{n}$ est calculée à partir des 3 points d'attache des biellettes inférieures (P_1, P_2, P_3) en utilisant la propriété suivante²⁰ :

$$\vec{n} = \overrightarrow{P_1 P_2} \times \overrightarrow{P_1 P_3}$$

Les points d'attache des biellettes ont des composantes constantes selon les axes x et y et leur composantes z est directement leur Δh_{bi} associée.

Effet du plateau cyclique sur les pâles

La figure 3.24 illustre l'influence du plateau cyclique sur les pales. En effet, la relation est la suivante :

$$\Delta h_{bs} = r \sin(\alpha) \rightarrow \alpha = \sin^{-1} \left(\frac{\Delta h_{bs}}{r} \right)$$

20. Note : $\overrightarrow{P_1 P_2} = P_2 - P_1$ est un vecteur reliant les points P_1 et P_2 faisant donc partie du plan

où α est le pas de la pale, r le bras de levier de la biellette supérieure liée au plateau cyclique (ainsi que la distance du point d'attache de la biellette au plateau cyclique par rapport au centre de celui-ci), et Δh_{bs} le déplacement des biellettes supérieures. Le déplacement Δh_{bs} est calculé en prenant la composante z du point d'attache de la biellette supérieure au plateau cyclique, soit :

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot P_{bs} &\Rightarrow z = -\frac{ax + by + d}{c} = -\frac{a(r \cos(\psi_\beta)) + b(r \sin(\psi_\beta)) + d}{c} \\ &\Rightarrow \Delta h_{bs} = \frac{a(r \cos(\psi_\beta)) + b(r \sin(\psi_\beta)) + d}{c}\end{aligned}$$

où $\Delta h_{bs} = -z$ est le déplacement de la biellette supérieure, et la composante z du point d'attache de la biellette dans l'espace fait partie du plan du plateau cyclique.

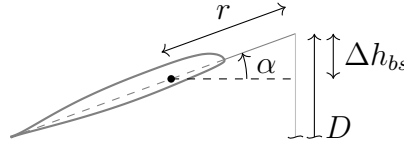


Figure 3.24 Schéma du contrôle des pales par le plateau cyclique

Il suffit donc de calculer le déplacement des biellettes supérieures aux 4 positions d'intérêt ($\psi_b = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$) en utilisant l'équation du plan du plateau cyclique. Ce déplacement se traduit par un angle de pale (tel qu'illustré à la figure 3.24), d'où il est possible de retrouver les angles²¹ de contrôle par les relations suivantes :

$$\alpha_1 = \theta_c - \theta_{1s}$$

$$\alpha_2 = \theta_c - \theta_{1c}$$

$$\alpha_3 = \theta_c + \theta_{1s}$$

$$\alpha_4 = \theta_c + \theta_{1c}$$

ou encore

$$\theta_c = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3) = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_4)$$

$$\theta_{1s} = \alpha_3 - \theta_c = \theta_c - \alpha_1$$

$$\theta_{1c} = \alpha_4 - \theta_c = \theta_c - \alpha_2$$

21. Les relations données sont valides pour le rotor étudié (rotor avant) ; le sens des angles cycliques dans ces relations changent selon le sens de rotation.

où θ_c est le collectif, θ_{1s} le cyclique longitudinal, θ_{1c} le cyclique latéral et $\alpha_{1,2,3,4}$ les pas des pales pour $\psi_b = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ respectivement. Ces relations entre l'angle des pales et les angles de contrôle tiennent compte du déphasage de 90° en ψ_β introduit par l'angle du lien entre les biellettes supérieures et les pales (*pitch horn*). Or, la précession gyroscopique introduit un déphasage de 90° en ψ_β entre le changement du pas des pales et leur effet sur le battement de la pale (donc entre θ_β et β). En ayant le déphasage causé par le lien de la pale avec le mécanisme de contrôle, le plan de la trajectoire du bout des pales (*tip path plane*, TPP) se trouve à être parallèle au plan du plateau cyclique (simplifiant ainsi les calculs). Incliner le plateau cyclique dans un sens vient donc changer l'orientation de la force résultante du rotor dans le même sens.

3.8 Mixage des commandes

Le mixage des commandes s'effectue en deux étapes, soit le mixage des commandes pour obtenir les pas collectifs et cycliques désirés, et le mixage mécanique de ces pas pour obtenir les angles des servomoteurs.

3.8.1 Calcul des angles collectifs et cycliques désirés

Les commandes utilisées sont inspirées des commandes d'un pilote à bord d'un hélicoptère. En effet, les commandes d'un pilote sont : le manche cyclique contrôlant le roulis et le tangage, les pédales contrôlant le lacet et le levier collectif contrôlant la vitesse verticale. Comme les commandes disponibles agissent sur 4 degrés de liberté, le premier mixage des commandes sert à découpler les commandes selon les mouvements désirés (soient roulis, tangage, lacet et déplacement vertical). Le tableau 3.5 présente le mixage considéré.

Tableau 3.5 Mixage des commandes (première étape)

Commande		Influence	
		directe	indirecte
Collectifs	$(\theta_{c,FR}, \theta_{c,AR})$	Vitesse verticale	Altitude
Collectifs différentiels	$(\theta_{c,FR}, -\theta_{c,AR})$	Tangage	Vitesse longitudinale
Cycliques latéraux	$(\theta_{1c,FR}, \theta_{1c,AR})$	Roulis	Vitesse latérale
Cycliques lat. différentiels	$(\theta_{1c,FR}, -\theta_{1c,AR})$	Lacet	Direction, cap
Cycliques longitudinaux	$(\theta_{1s,FR}, \theta_{1s,AR})$	Tangage	Angle longitudinal

Il est à noter que les pas cycliques longitudinaux et les pas collectifs (différentiels) influencent tous les deux le même degré de liberté (tangage). Comme les pas collectifs différentiels ont une dynamique plus rapide, les pas cycliques longitudinaux serviront à la compensation

en tangage. Cela permet d’assurer un angle longitudinal faible ou nul (parallèle au sol) et de diminuer la sollicitation des pas collectifs à l’équilibre. Cette stratégie de mixage des commandes est la même que celle utilisée par les hélicoptères tandem Chinook.

3.8.2 Calcul des angles d’actionneur désirés

Afin d’obtenir les angles des servomoteurs requis pour obtenir les angles de commande (collectif, cyclique longitudinal et cyclique latéral) désirés, la procédure présentée précédemment (voir Section 3.7) peut être accomplie à l’inverse, soit :

- calculer l’angle des pales à partir des angles de commande ;
- calculer l’équation du plan du plateau cyclique dans l’espace ;
- calculer la variation en hauteur des points d’attache des biellettes inférieures ;
- calculer les angles des servomoteurs requis pour obtenir les variations en hauteur requises.

Malheureusement, certaines relations font appel à des fonctions trigonométriques inverses qui rendent le calcul plus complexe. Il est à noter qu’en négligeant les termes dépendants de L dans les équations entre l’angle du servomoteur et le déplacement de sa biellette (voir 3.7.1), les calculs sont largement simplifiés. Cette approximation introduit cependant entre 2 et 3% d’erreur lorsque le servomoteur tend vers sa valeur de déplacement maximal. Bien que les servomoteurs aient la capacité de se déplacer à l’intérieur d’un intervalle de plus de 90° , ils ne seront normalement utilisés qu’à l’intérieur de 15° autour de la position initiale. L’approximation effectuée devrait donc être valide sans introduire d’erreurs lors d’une utilisation normale. Il est aussi à noter que ce calcul des angles de servomoteurs est sujet à changement s’il ne convient pas à la lumière des tests en vol.

Le mixage total (incluant les deux étapes) est implémenté sur la plateforme d’autopilote à l’aide du logiciel *XTENDER^{MP}*. Ce logiciel est fourni par MicroPilot afin de pouvoir accéder aux fonctionnements internes de la plateforme. Cela permet d’ajouter une fonction de mixage, codé en C, qui est responsable de déterminer les valeurs à envoyer aux servomoteurs à partir des sorties des PID.

3.9 Contrôle

Le contrôle (lois de commande bas niveau) est effectué à l’aide des boucles de commande fournies par la plateforme d’autopilote de MicroPilot, dont l’architecture de base a été légèrement modifiée et augmentée. En effet, les 4 boucles de base (voir la sous-section 5.1.1)

sont modifiées et une compensation des pas cycliques longitudinaux (et des 4 boucles) est ajoutée.

Le réglage des gains des boucles est réalisé lors de la synthèse du contrôleur en utilisant la méthode $\mathcal{H}_\infty$ structurée. Le réglage des boucles personnalisées a été réalisé pour différentes configurations de charge utile et de niveaux d'essence pour différentes vitesses (dont le vol stationnaire et le vol de croisière).

3.9.1 Architecture du contrôleur PID utilisé

Les 4 contrôleurs PID utilisés sont des versions modifiées de ceux implémentés dans Micro-Pilot. Le détail de leur implémentation se trouve à la Section 5.1.1. Les figures 3.25 et 3.26 présente l'architecture de ces boucles, où G est le système (regroupant toutes les dynamiques de l'hélicoptère, ainsi que le mixage des commandes), K_p , K_i et K_d sont les gains des actions proportionnelle, intégrale et dérivée respectivement, C est une compensation ajoutée, et L est l'ensemble des modifications apportées au signal par la plateforme (saturations et limiteur de pente). L'ensemble du contrôleur PID est indiqué grâce au cadre pointillé et l'ensemble des éléments touchés par le séquençement en vitesse est indiqué par la couleur grise.

L'architecture pour les PID régulant ϕ , θ et w utilise la mesure de la variable d'état plutôt que l'erreur de celle-ci avec la commande. Ce choix fait en sorte que l'élément proportionnel du contrôleur agit comme un régulateur, tout comme l'élément dérivateur, ramenant la variable à 0. Cette régulation facilite le retour à l'équilibre de l'appareil et diminue grandement le dépassement lorsqu'une commande est donnée.

Le contrôleur pour ψ diffère des autres par l'utilisation de l'erreur comme entrée pour l'élément proportionnel du contrôle. Ce choix a été effectué en raison de la singularité possible lorsque l'hélicoptère fait un tour complet (transition entre 180° et -180°) et puisqu'aucun avantage n'est obtenu en régulant ψ pour une valeur nulle, comme l'équilibre de l'appareil peut être atteint pour n'importe quelle valeur de ψ .

3.9.2 Architecture globale des lois de commande

L'architecture globale des lois de commande regroupe les 4 PID mentionnés (pour ϕ , θ , ψ et w) et les mixages des commandes. Cette architecture est présentée à la figure 3.27. L'utilisation des cycliques longitudinaux θ_{1s} comme compensation (*trim*) y est inclus, tout comme l'influence du séquençement (en gris) en vitesse.

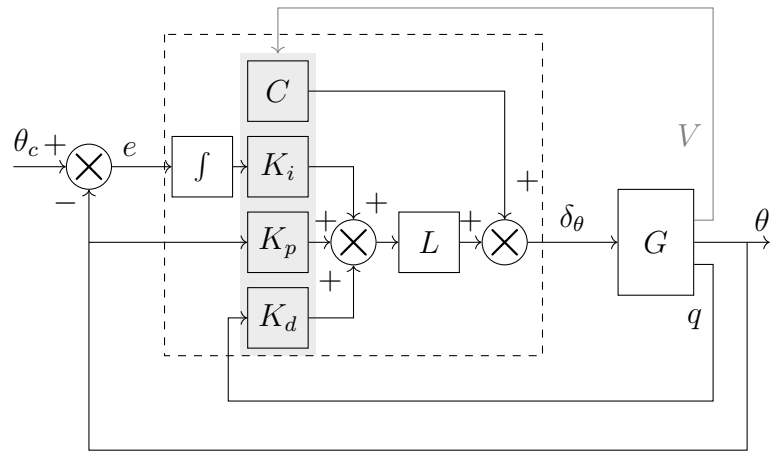


Figure 3.25 Architecture du contrôleur PID pour θ (similaire pour ϕ et w)

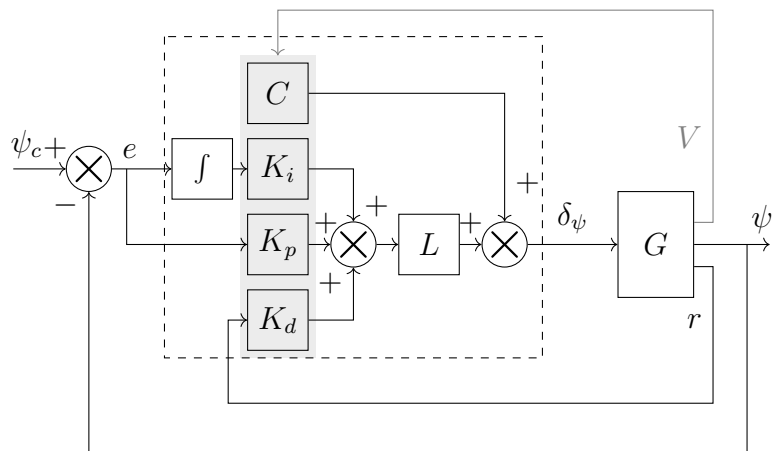


Figure 3.26 Architecture du contrôleur PID pour ψ

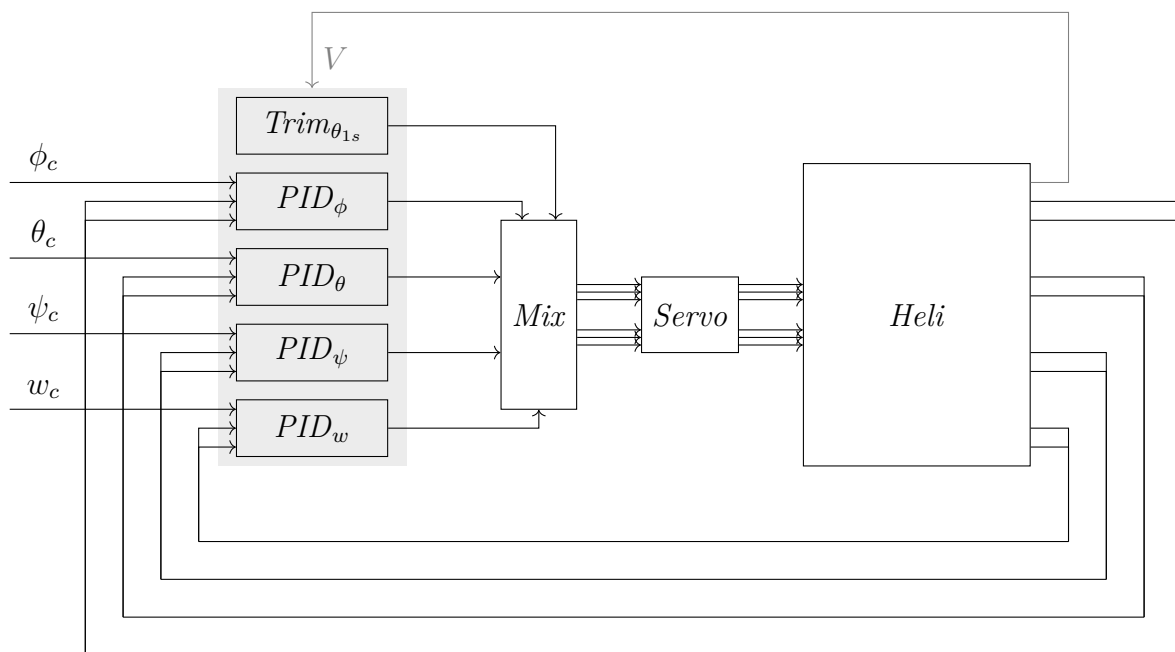


Figure 3.27 Architecture globale des lois de commandes

3.10 Environnement

La modélisation de l'environnement de l'hélicoptère n'inclut que la masse volumique de l'air, la vitesse aérodynamique (telle que mesurée par un tube de Pitot) et le vent.

3.10.1 Masse volumique de l'air

Le modèle d'évolution de la masse volumique de l'air est issu du modèle *International Standard Atmosphere* - Atmosphère standard internationale (ISA) (adopté par l'Organisation de l'Aviation Civile Internationale (OACI)). Cette modélisation est :

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^k$$

avec

$$T = T_0 - 0.0065(h - h_0) \quad k = \frac{g_0}{0.0065R} - 1$$

où ρ est la masse volumique, T la température, h l'altitude géopotentielle de pression au dessus du niveau moyen de la mer, R la constante des gaz pour l'air, g est l'accélération gravitationnelle, et l'indice 0 indique la valeur à l'altitude de 0 m.

Ce modèle n'est valide que dans la troposphère (jusqu'à 11000 m), ce qui est suffisant étant donné l'altitude maximale du LX300.

3.10.2 Vitesse aérodynamique

Cette vitesse est simplement un nombre scalaire utilisé lors du contrôle aux fins de séquençage des gains. Cette vitesse (V_{as}) est donnée par

$$V_{as} = \| \mathbf{V} - \mathbf{V}_{wind} \|$$

où $\mathbf{V} = [u, v, w]^T$ est la vitesse de l'hélicoptère dans son repère ($\mathcal{B}$) et $\mathbf{V}_{wind}$ est la vitesse du vent.

3.10.3 Vent

Le vent est implémenté comme un vecteur à 6 composantes (3 linéaires et 3 angulaires), bien que les deux composantes linéaires parallèles au sol soient principalement utilisées. Ce vecteur influence la dynamique des rotors (voir Section 3.3), la traînée du fuselage (voir Section 3.4), et la vitesse aérodynamique mesurée.

3.11 Autres sous-systèmes

Tous les autres systèmes (comme la navigation) ne seront pas présentés dans ce mémoire. Le simulateur SIMULINK inclut des modules vides prévus pour ceux-ci afin de faciliter leur implémentation future.

CHAPITRE 4 CONCEPTION

La conception du contrôleur est réalisée en plusieurs étapes. Pour commencer, le modèle en boucle ouverte de l'hélicoptère est linéarisé autour de plusieurs points d'opération, définis par rapport à la vitesse de l'hélicoptère, de la quantité d'essence à son bord, et de la configuration de sa charge utile. Ensuite, une synthèse préliminaire du contrôleur pour le vol stationnaire est réalisée à l'aide des méthodes optimale (LQR) et modale (placement de structures propres). La synthèse robuste ($\mathcal{H}_\infty$ structurée) est alors réalisée sur le vol stationnaire en utilisant les réglages précédents comme point de départ (afin d'assurer une convergence rapide de l'algorithme). Finalement, la synthèse robuste est effectuée à nouveau en incluant toutes les conditions de vol et le séquençement des gains du contrôleur par rapport à la vitesse.

Durant ce chapitre, les mêmes contrôleurs seront envoyées au système en boucle fermée afin de permettre une comparaison des différents contrôleurs trouvés pour le vol stationnaire. Les commandes de référence considérées sont :

- en ϕ , un échelon de 10° , puis de -10° après 20 s ;
- en θ , un échelon de 10° , puis de -10° après 15 s ;
- en ψ , un échelon de 45° ;
- en w , un échelon de 3 m/s.

Les commandes en ϕ et θ représentent des angles relativement grands pour des opérations normales ; ces valeurs correspondent aux valeurs maximales que l'on souhaite commander. Elles permettront d'évaluer les signaux de commande générés.

4.1 Linéarisation du modèle de l'hélicoptère en vol stationnaire

Le système¹ est équilibré (*trimmed*) en vol stationnaire pour des configurations variées de quantité d'essence et de charge utile, puis linéarisé pour fournir un ensemble de modèles linéaires qui doivent être contrôlés par un contrôleur unique. Le tableau 4.1 présente les emplacements de charge utile étudiés² et les 10 configurations utilisées durant cette conception (qui utilise aucune, une, ou tous les emplacements considérés). La figure 4.1 illustre ces emplacements par rapport au repère $\mathcal{B}$. Chaque objet de charge utile est modélisé par un cube

1. Le modèle non linéaire utilisé pour cette première linéarisation est une version réduite du modèle simplifié. Comme seul le vol stationnaire est considéré, des simplifications supplémentaires sont introduites pour alléger les calculs lors de la synthèse préliminaire (p. ex. $\mu = 0$, la traînée est négligée, et l'interférence aérodynamique est omise).

2. Ces emplacements sont donnés relativement au point de référence (origine du repère $\mathcal{B}$) et représentent des points extrêmes de la zone où la charge utile peut être placée.

de 1 dm^3 de 11.25 kg (similaire à du plomb), qui représente 3.75% de la masse totale (30% si tous les objets sont utilisés) pour un hélicoptère rempli d'essence (donc un hélicoptère de masse maximale de 300 kg , ou moins lorsqu'il n'y a pas de charge utile). Les 30 modèles considérés sont une combinaison des 10 configurations de charge utile et de 3 configurations de niveau d'essence (réservoir vide, à moitié et plein). L'essence a été implémentée comme une charge utile supplémentaire occupant un volume cubique de hauteur variable³ centré à $\Delta \mathbf{r}_{\text{fuel}} = [-0.427, 0, 0.15]^\top$.

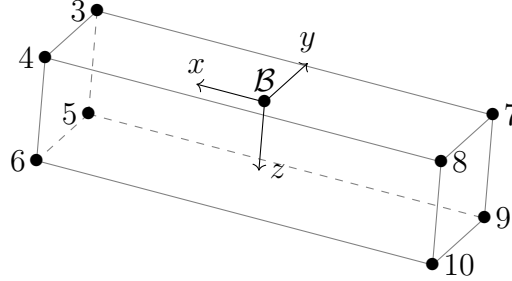


Figure 4.1 Emplacements considérés pour la charge utile (vol stationnaire)

Tableau 4.1 Emplacement et configuration de charge utile (vol stationnaire)

Configuration	Emplacement		
	$\Delta x \text{ (m)}$	$\Delta y \text{ (m)}$	$\Delta z \text{ (m)}$
1	—(Aucun)—		
2	—(Tous)—		
3	1.427	0.3	-0.12
4	1.427	-0.3	-0.12
5	1.427	0.3	0.63
6	1.427	-0.3	0.63
7	-1.473	0.3	-0.12
8	-1.473	-0.3	-0.12
9	-1.473	0.3	0.63
10	-1.473	-0.3	0.63

4.2 Synthèse préliminaire

La synthèse préliminaire consiste à trouver un premier réglage du contrôleur qui répond aux critères de performance pour le modèle nominal (cas sans charge utile et sans essence). Ce

3. Une masse volumique de 0.8 g/cm^3 a été utilisée pour le kérosène, donnant un cube de 5 dm de côté.

réglage sera utilisé lors de la synthèse robuste comme point de départ afin de faciliter la convergence de l'algorithme d'optimisation.

L'équilibre du système est trouvé en résolvant le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_e &= \mathbf{0} = \mathbf{R}_{\mathcal{B}/\mathcal{O}}(\Phi_e) \mathbf{V}_e \\ \dot{\Phi}_e &= \mathbf{0} = \mathbf{H}^{-1}(\Phi_e) \boldsymbol{\omega}_e \\ \dot{\mathbf{V}}_e &= \mathbf{0} = \frac{1}{m} \sum \mathbf{F}(\boldsymbol{\delta}_e) + \mathbf{R}_{\mathcal{O}/\mathcal{B}}(\Phi_e) \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega}_e \times (\mathbf{V}_e + \boldsymbol{\omega}_e \times \Delta \mathbf{r}) - \dot{\boldsymbol{\omega}}_e \times \Delta \mathbf{r} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_e &= \mathbf{0} = (\mathbf{J}_b - \Delta \mathbf{J})^{-1} \left(\sum \mathbf{M}(\boldsymbol{\delta}_e) - \boldsymbol{\omega}_e \times (\mathbf{J}_b - \Delta \mathbf{J}) \boldsymbol{\omega}_e \right)\end{aligned}$$

où l'indice e indique la valeur à l'équilibre, $\mathbf{0} = [0, 0, 0]^\top$, et

$$\boldsymbol{\delta}_e = [\delta_{FWD, \theta_0, e}, \delta_{FWD, \theta_{1s}, e}, \delta_{FWD, \theta_{1c}, e}, \delta_{AFT, \theta_0, e}, \delta_{AFT, \theta_{1s}, e}, \delta_{AFT, \theta_{1c}, e}]^\top$$

avec $\delta_{FWD, \theta_{1s}} = \delta_{AFT, \theta_{1s}} = 0$ en raison du choix de contrôle expliqué à la Section 3.8.

Étant donné les simplifications possibles en vol stationnaire, l'outil symbolique de MATLAB (SYMBOLIC TOOLBOX) peut facilement résoudre ce système d'équations. Le système équilibré est ensuite linéarisé en utilisant la fonction `linmod` du même logiciel.

4.2.1 Système en boucle ouverte

Le système nominal linéarisé en vol stationnaire est donné par le modèle d'état suivant :

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{y} &= \mathbf{C} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{D} \Delta \mathbf{u}\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{x} &= [\Delta \phi, \Delta \theta, \Delta \psi, \Delta w, \Delta p, \Delta q, \Delta r]^\top & \Delta \mathbf{u} &= [\Delta \delta_{FWD, \theta_0}, \Delta \delta_{FWD, \theta_{1c}}, \Delta \delta_{AFT, \theta_0}, \Delta \delta_{AFT, \theta_{1c}}]^\top \\ \Delta \mathbf{y} &= [\Delta \phi, \Delta \theta, \Delta \psi, \Delta w, \Delta p, \Delta q, \Delta r]^\top\end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -36.5242 & -0.0950 & -36.8603 & 0.0255 \\ -0.6090 & -0.8749 & 0.0490 & 2.3970 \\ 63.6423 & 0.5871 & -67.4860 & 0.0469 \\ 1.9491 & -0.4877 & -1.9635 & -1.0165 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{I}_{7 \times 7} \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}_{7 \times 4}$$

où $\delta_{0,FWD}$, $\delta_{1c,FWD}$, $\delta_{0,AFT}$ et $\delta_{1c,AFT}$ sont les pas collectif avant, cyclique latéral avant, collectif arrière et cyclique latéral arrière, respectivement. À noter que $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e$, $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_e$, et $\Delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_e$ sont les écarts par rapport à l'équilibre du vecteur d'état, du vecteur de commande, et du vecteur de sortie, respectivement.

Ce modèle linéaire est une version réduite du modèle obtenu à l'aide de la fonction `linmod` ; ce dernier est d'ordre 12, mais des considérations physiques permettent de réduire celui-ci à la dynamique de rotation et de vitesse verticale. L'accélération verticale n'est pas utilisée comme mesure lors de cette synthèse préliminaire en raison de sa trop grande sensibilité aux variations de masse, de centrage et d'inertie. De plus, ce modèle d'état n'inclut pas la dynamique des servomoteurs (puisque les algorithmes de synthèse sont plus performants lorsque le système est plus simple), ni le mixage des commandes. En l'absence de la dynamique rapide des servomoteurs, tous les pôles du système en boucle ouverte sont à l'origine.

4.2.2 Commande optimale

L'approche par commande optimale utilise un retour d'état et inclut des intégrateurs sur les erreurs afin d'assurer la précision (voir figure 4.2). Le modèle d'état est donc augmenté pour

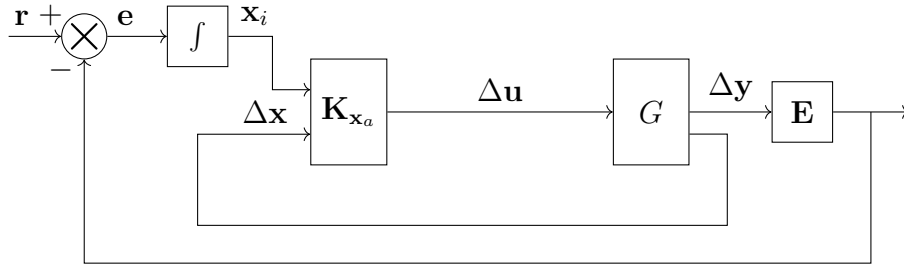


Figure 4.2 Schéma de contrôle

tenir compte de ces intégrateurs, soit

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\mathbf{x}}_a &= \mathbf{A}_a \Delta \mathbf{x}_a + \mathbf{B}_a \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{y}_a &= \mathbf{C}_a \Delta \mathbf{x}_a + \mathbf{D}_a \Delta \mathbf{u}\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{y}_a &= [\Delta \phi, \Delta \theta, \Delta \psi, \Delta w, \Delta p, \Delta q, \Delta r, \Delta x_{i,\phi}, \Delta x_{i,\theta}, \Delta x_{i,\psi}, \Delta x_{i,w}]^\top \\ \Delta \mathbf{x}_a &= [\Delta \phi, \Delta \theta, \Delta \psi, \Delta w, \Delta p, \Delta q, \Delta r, \Delta x_{i,\phi}, \Delta x_{i,\theta}, \Delta x_{i,\psi}, \Delta x_{i,w}]^\top \\ \Delta \mathbf{u} &= [\Delta \delta_{0,FWD}, \Delta \delta_{1c,FWD}, \Delta \delta_{0,AFT}, \Delta \delta_{1c,AFT}]^\top \\ \mathbf{A}_a &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_{7 \times 4} \\ -\mathbf{E}\mathbf{C} & \mathbf{0}_{4 \times 4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ -\mathbf{E}\mathbf{D} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0}_{7 \times 4} \\ \mathbf{0}_{4 \times 7} & \mathbf{1}_{4 \times 4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{0}_{4 \times 4} \end{bmatrix} \\ \mathbf{E} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Comme visible à la figure 4.2, la commande optimale considérée est de la forme

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{K}_{\mathbf{x}_a} \Delta \mathbf{x}_a$$

où $\mathbf{K}_{\mathbf{x}_a}$ est une matrice minimisant la fonction coût choisie.

La fonction coût utilisée est la suivante :

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \Delta \mathbf{y}_a^\top \mathbf{Q} \Delta \mathbf{y}_a + \Delta \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \Delta \mathbf{u} dt$$

où le jeu de pondérations choisi est

$$\mathbf{Q} = \text{diag}([0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]) \quad \mathbf{R} = \text{diag}([100, 100, 100, 100])$$

La pondération $\mathbf{Q}$ a été choisie ainsi afin d'accorder une importance égale à toutes les sorties des intégrateurs, et la pondération $\mathbf{R}$ a été choisie afin d'avoir des signaux d'actionneurs dans les limites à respecter⁴ et avec une importance égale. En ayant des pondérations ne favorisant pas une sortie ou un actionneur plutôt que d'autres, on tente de conserver la dynamique naturelle de l'appareil pour éviter l'utilisation de gains élevés.

4. Le facteur 100 a été obtenu après avoir constaté qu'un facteur de 1 ou de 10 ne permettait pas de respecter les limites des actionneurs.

Les réponses temporelles obtenues sont présentées à la figure 4.3, en utilisant les commandes de référence mentionnées au début du chapitre. Le découplage et l'amortissement pourraient être améliorés, mais les réponses restent stables et donnent une bonne idée des temps de réponse atteignables (voir tableau 4.2). La figure 4.4 présente les réponses temporelles des pas commandés. Une plus grande sollicitation des pas cycliques semble requise pour effectuer les mouvements associés (longitudinaux et latéraux) ; cela explique pourquoi la dynamique latérale est plus lente en boucle fermée. L'avantage de l'utilisation de la commande différentielle des pas collectifs pour contrôler le tangage devient apparent, puisque cette dynamique est plus rapide.

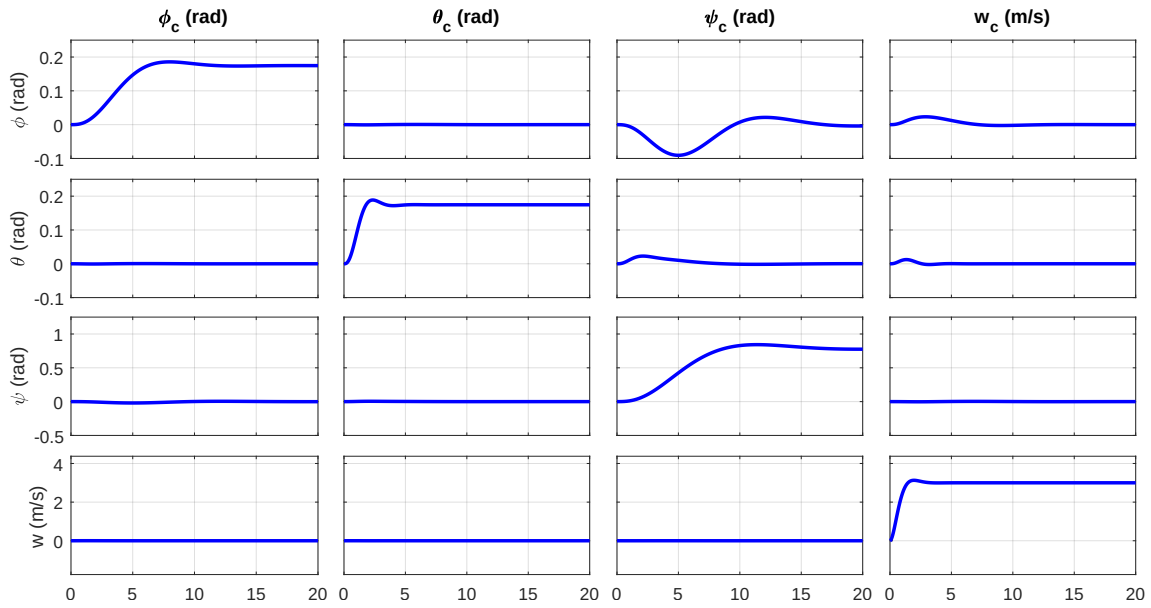


Figure 4.3 Réponses temporelles du système en boucle fermée (commande optimale)

Tableau 4.2 Temps de réponse à 2% du système en boucle fermée

Sortie	Temps de réponse (s)
ϕ	10.5
θ	3.15
ψ	15.3
w	2.62

Le tableau 4.3 présente les pôles obtenus qui seront utilisés comme point de départ pour la commande modale. Les modes associés ont été déduits d'après les réponses temporelles obtenues.

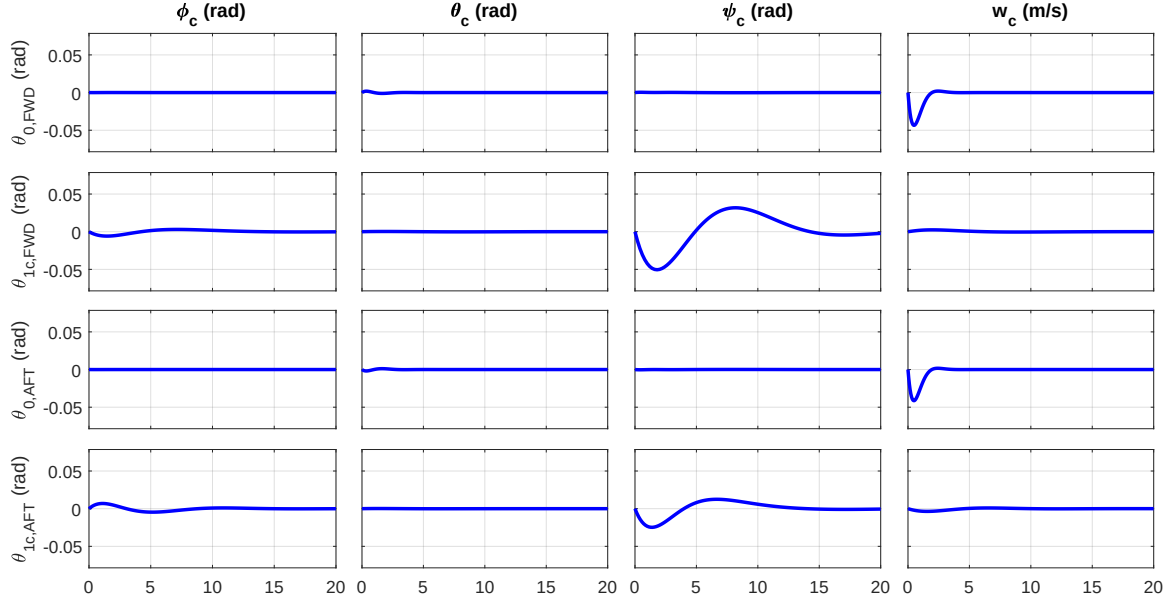


Figure 4.4 Réponses temporelles des actionneurs du système en boucle fermée (commande optimale)

Tableau 4.3 Pôles du système en boucle fermée (commande optimale)

Pôle	Amortissement	Fréquence (rad/s)	Mode
$-0.21 \pm 0.37i$	0.50	0.43	<i>Lacet</i>
-0.43	1	0.43	<i>Lacet (Intégrateur)</i>
$-0.32 \pm 0.56i$	0.50	0.65	<i>Roulis</i>
-0.65	1	0.65	<i>Roulis (Intégrateur)</i>
$-1.05 \pm 1.82i$	0.50	2.10	<i>Tangage</i>
-2.10	1	2.10	<i>Tangage (Intégrateur)</i>
$-1.61 \pm 1.61i$	0.707	2.28	<i>Vitesse verticale</i> <i>(dégénéré avec intégrateur)</i>

4.2.3 Commande modale par placement de structures propres

L'approche par commande modale utilise une architecture similaire à celle de la commande optimale ; le modèle augmenté présenté précédemment reste inchangé, mais un retour de sortie avec intégrateurs est utilisé au lieu d'un retour d'état, ce qui donne une commande de la forme suivante :

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{K}_{y_a} \Delta \mathbf{y}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_y & -\mathbf{K}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{y} \\ \Delta \mathbf{x}_i \end{bmatrix}$$

La commande modale vise à placer les pôles du système en boucle fermée, et à assurer ensuite

un certain découplage des dynamiques : les pôles associés à un mouvement (roulis, tangage, lacet, vitesse verticale) ne doivent pas faire partie des fonctions de transfert des autres (incluant leur intégrateur et leur dérivée). De plus, les pôles obtenus lors de la synthèse optimale sont repris en conservant leur fréquence naturelle, mais en modifiant leur amortissement à 0.707. L'exception à cette procédure est la vitesse verticale, où 2 pôles réels ont été imposés (un à la fréquence naturelle et l'autre au 2/3 de celle-ci). Les pôles des autres intégrateurs ont été imposés à la valeur réelle des paires complexes. Les pôles ainsi placés sont présentés au tableau 4.4 et les réponses temporelles obtenues sont présentées aux figures 4.5 et 4.6. Il y est observé que le découplage et l'amortissement désirés sont atteints.

Tableau 4.4 Pôles du système en boucle fermée

Pôle	Amortissement	Mode
-0.30	1	<i>Lacet (Intégrateur)</i>
$-0.30 \pm 0.30i$	0.707	<i>Lacet</i>
-0.46	1	<i>Roulis (Intégrateur)</i>
$-0.46 \pm 0.46i$	0.707	<i>Roulis</i>
-1.49	1	<i>Tangage (Intégrateur)</i>
-1.52	1	<i>Vitesse verticale (Intégrateur)</i>
$-1.49 \pm 1.49i$	0.707	<i>Tangage</i>
-2.28	1	<i>Vitesse verticale</i>

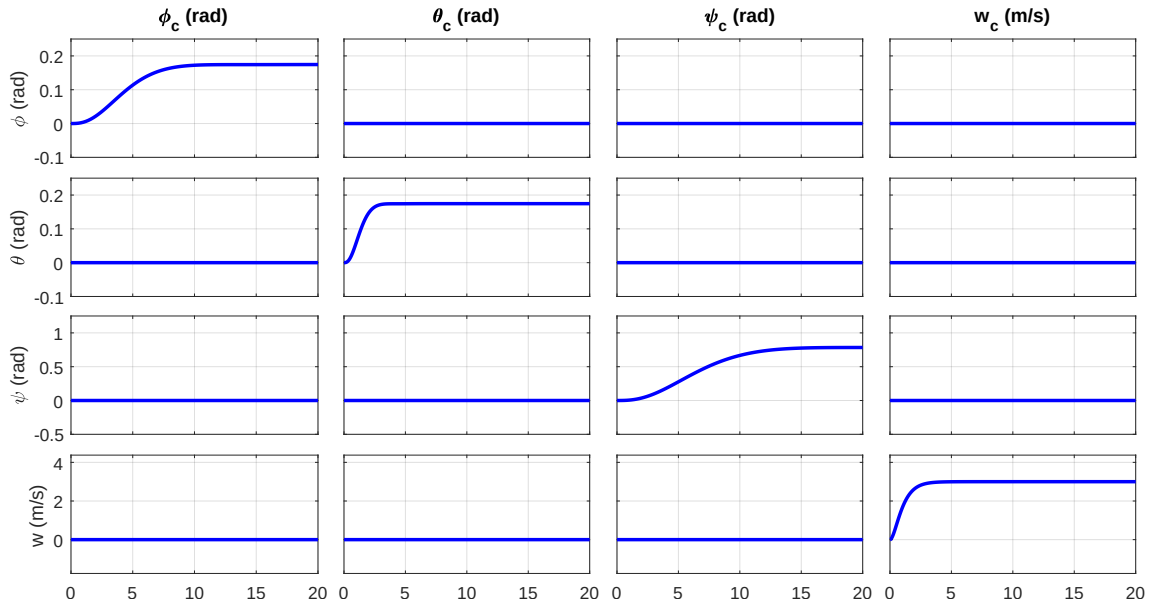


Figure 4.5 Réponses temporelles du système en boucle fermée (commande modale)

Les temps de réponse obtenus sont présentés au tableau 4.5. On remarque que ces temps de réponse sont légèrement plus courts⁵ que ceux obtenus lors de la commande optimale grâce à l'amortissement exigé. Ces temps de réponse représenteront les performances idéales que l'on souhaiterait atteindre lors de la synthèse robuste.

Tableau 4.5 Temps de réponse à 2% du système en boucle fermée

Sortie	Temps de réponse (s)
ϕ	9.44
θ	2.9
ψ	14.2
w	3.26

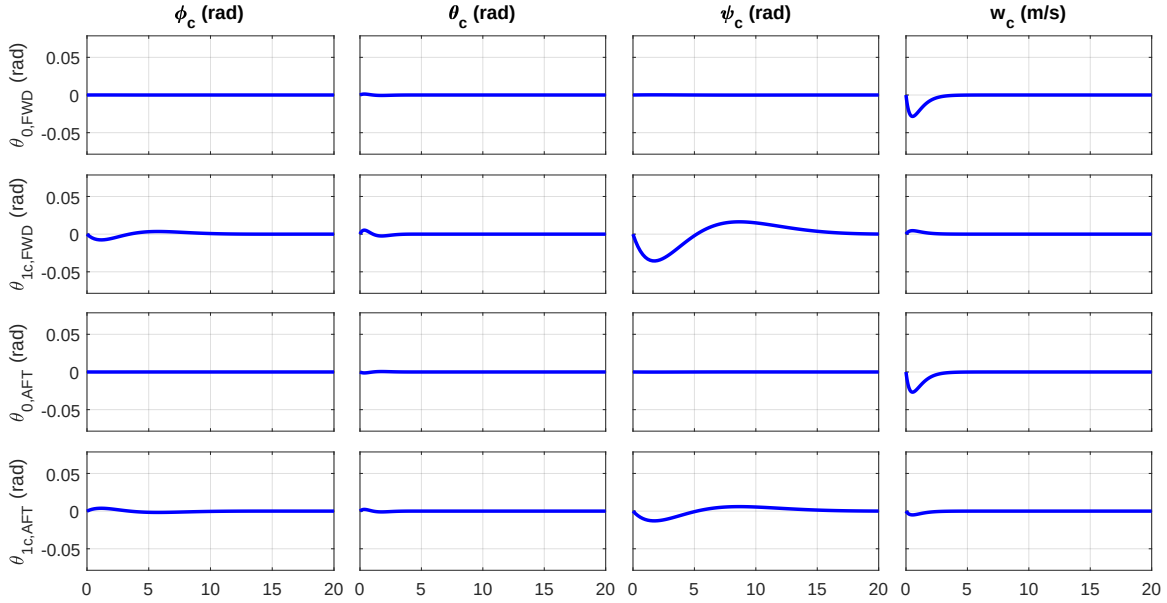


Figure 4.6 Réponses temporelles des actionneurs du système en boucle fermée (commande modale)

La figure 4.6 illustre les sollicitations des pas collectifs et cycliques latéraux. On observe que ces sollicitations sont moins importantes que dans lors de la commande optimale ; ceci est attribuable aux modifications apportées aux pôles, comme le meilleur amortissement imposé.

5. Sauf pour la vitesse verticale, étant donné l'exigence supplémentaire de pôles réels.

Les gains obtenus pour cette commande modale sont les suivants :

$$\mathbf{K}_y = \begin{bmatrix} 0.0024 & 0.066 & 0.0024 & -0.0533 & 0.0039 & 0.0333 & 0.006 \\ -0.4033 & 0.2795 & -0.418 & 0.0086 & -0.6635 & 0.1411 & -1.0366 \\ -0.0012 & -0.0661 & -0.0014 & -0.0502 & -0.0019 & -0.0333 & -0.0036 \\ 0.2002 & 0.1201 & -0.1519 & -0.0094 & 0.3294 & 0.0606 & -0.3768 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} 0.0005 & 0.049 & 0.0004 & -0.0486 \\ -0.0919 & 0.2076 & -0.0632 & 0.0079 \\ -0.0003 & -0.0491 & -0.0002 & -0.0457 \\ 0.0456 & 0.0892 & -0.023 & -0.0085 \end{bmatrix}$$

Ces gains seront utilisés pour définir le point de départ de la synthèse par commande robuste.

4.2.4 Contrôleur préliminaire pour la synthèse robuste

Les gains du retour de sortie obtenus ne peuvent être utilisés directement, puisqu'ils ne respectent pas la structure du contrôleur telle qu'implémentée sur la plateforme d'autopilotage de MicroPilot. L'architecture du contrôleur de MicroPilot peut être représentée sous la forme suivante :

$$\Delta \mathbf{u}_c =$$

$$\begin{bmatrix} -K_{p,roll} - K_{i,roll}/s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_{p,pitch} - K_{i,pitch}/s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_{p,yaw} - K_{i,yaw}/s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{p,w} - K_{i,w}/s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{d,roll} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{i,roll}/s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{d,pitch} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{i,pitch}/s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{d,yaw} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{i,yaw}/s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{d,w} & 0 & 0 & 0 & K_{i,w}/s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{y}_c \\ \Delta \mathbf{r} \end{bmatrix}$$

où

$$\Delta \mathbf{y}_c = [\Delta \phi, \Delta \theta, \Delta \psi, \Delta u, \Delta v, \Delta w, \Delta p, \Delta q, \Delta r, \Delta \ddot{x}, \Delta \ddot{y}, \Delta \ddot{z}]^\top \quad \Delta \mathbf{r} = [\Delta \phi_c, \Delta \theta_c, \Delta \psi_c, \Delta w_c]^\top$$

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{B}_{mix} \Delta \mathbf{u}_c$$

Il faut donc régler les gains du contrôleur et le mixage $\mathbf{B}_{mix}$ afin de reproduire le retour de

sortie obtenu précédemment. Cependant, comme le contrôleur de la plateforme d'autopilotage utilise l'erreur au lieu du vecteur $\mathbf{r}$ directement (comme les gains de retour de sortie), l'architecture des contrôleurs PID est modifiée afin d'éliminer la différence (voir Annexe D).

En procédant par identification des réponses temporelles des deux contrôleurs (retour de sortie et contrôleur de la plateforme), il a été déduit que :

$$\Delta \mathbf{u} = -\mathbf{K}_{y_a} \Delta \mathbf{y}_a \approx -\mathbf{B}_{mix} \Delta \mathbf{u}_c$$

avec

$$\mathbf{B}_{mix} = \begin{bmatrix} 0.0061 & 1 & 0.0187 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4.1699 & -3.0370 & 0.8593 \\ -0.0031 & -1.0004 & -0.0114 & -1.2867 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5690 & 1.8164 & -1 & 0.1085 \end{bmatrix}$$

$\Delta \mathbf{u}_c =$

$$\begin{bmatrix} -0.0845/s - 0.3708 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0491/s - 0.0661 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0216/s - 0.1427 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0412/s - 0.0453 \\ -0.6100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0845/s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0491/s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3538 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0216/s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0412/s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{y}_c \\ \Delta \mathbf{r} \end{bmatrix}$$

Motivation pour la commande robuste

La synthèse par commande robuste est utilisée afin de pallier les problèmes de robustesse d'un contrôleur conçu avec d'autres approches de commande. En effet, les approches précédentes ne tiennent pas compte de critères de robustesse et ne se soucient que de la stabilité et de la performance pour le modèle nominal. Un exemple de robustesse requise pour le LX300 est d'être robuste vis-à-vis des différentes configurations de charge utile, puisqu'il est attendu qu'un hélicoptère de type tandem le soit. La figure 4.7 présente les réponses temporelles du modèle linéarisé de l'hélicoptère pour les différentes configurations. Bien que le contrôleur soit performant pour les modèles proches du modèle nominal, les cas à pleine charge utile

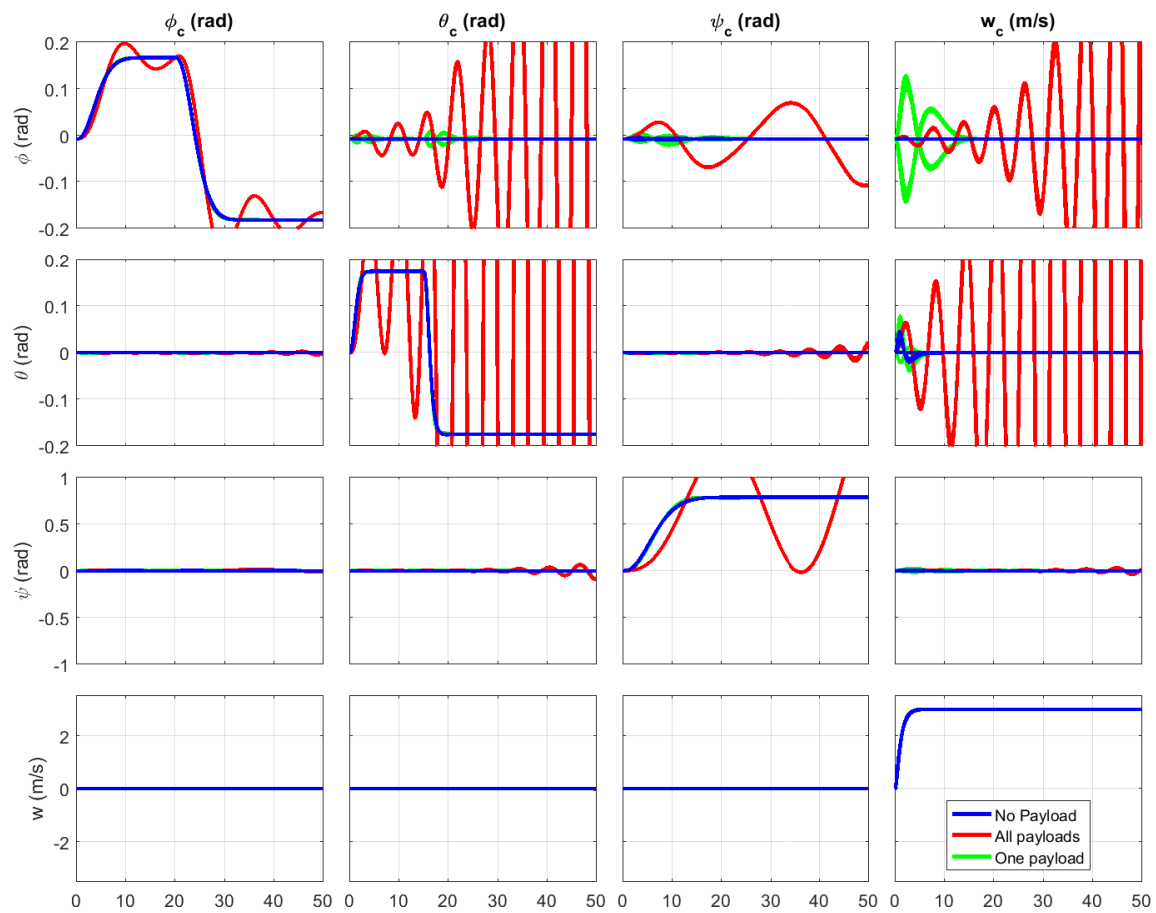


Figure 4.7 Réponses temporelles du système linéaire avec contrôleur préliminaire pour les entrées d'intérêt (toutes les configurations)

deviennent instables. Un contrôleur robuste conçu à l'aide de la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ structurée peut potentiellement régler ce problème.

4.3 Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ structurée pour le vol stationnaire

La synthèse robuste du contrôle utilise la méthode $\mathcal{H}_\infty$ structurée, qui est d'abord rappelée. Les requis utilisés lors de la synthèse et les pondérations équivalentes sont ensuite présentés. Les résultats de la synthèse robuste et une analyse suivent, avant de procéder à une simulation sur le système non linéaire.

4.3.1 Rappel concernant la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ structurée

Le présent rappel se base sur les travaux de Lhachemi (2013).

Les synthèses robustes utilisant la méthode $\mathcal{H}_\infty$ se basent généralement sur le formalisme de la forme standard. Cette représentation consiste à augmenter le système en y ajoutant des filtres de pondération. Ces pondérations sont choisies en fonction des requis retenus pour la synthèse. La figure 4.8 présente le système augmenté sous la forme standard ($\mathbf{P}$), avec l'ajout du contrôleur ($\mathbf{K}$), où

- $\mathbf{u}$ est le vecteur de commandes (entrées endogènes) ;
- $\mathbf{y}$ est le vecteur de mesures (sorties endogènes) ;
- $\mathbf{w}$ est le vecteur de consignes et de perturbations (entrées exogènes) ;
- $\mathbf{z}$ est le vecteur de sorties régulées (sorties exogènes).

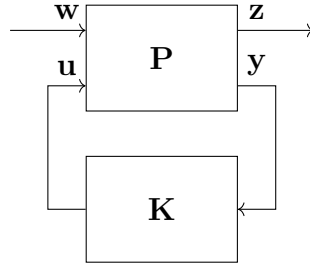


Figure 4.8 Système en boucle fermée (forme standard)

Le système augmenté peut s'exprimer de la façon suivante,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y}$$

La fonction de transfert reliant $\mathbf{w}$ et $\mathbf{z}$ peut alors être exprimée sous la forme d'une transfor-

mation linéaire fractionnaire (*Linear fractional transformation*, LFT) inférieure, soit

$$\mathbf{T}_{wz}(s) = \mathbf{F}_l(\mathbf{P}(s), \mathbf{K}(s)) = P_{11} + P_{12}\mathbf{K}(\mathbf{I} - P_{22}\mathbf{K})^{-1}P_{21}$$

Le problème $\mathcal{H}_\infty$ (optimal) à résoudre est alors de trouver un contrôleur $\mathbf{K}$ stabilisant le système et minimisant la norme $\mathcal{H}_\infty$ de la fonction de transfert reliant les entrées et sorties exogènes. La norme $\mathcal{H}_\infty$ est définie par

$$\|\mathbf{T}_{wz}(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(\mathbf{T}_{wz}(j\omega))$$

où $\bar{\sigma}$ est la valeur singulière maximale de la matrice $\mathbf{T}_{wz}(j\omega)$.

La résolution classique du problème $\mathcal{H}_\infty$ donne un contrôleur d'ordre élevé (Doyle et al. (1989), Safonov et al. (1989)), soit au moins l'ordre du système augmenté (qui inclut les gabarits fréquentiels). Un tel contrôleur n'est généralement pas implémentable et requiert donc une réduction pour pouvoir être utilisé en pratique, modifiant ses performances.

Afin de pallier ces inconvénients, la méthode $\mathcal{H}_\infty$ structurée a été mise au point. Cette méthode consiste à fixer la structure du contrôleur et à ajuster les paramètres de celui-ci pour minimiser la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système bouclé.

Le problème $\mathcal{H}_\infty$ structuré à résoudre est donc de trouver un vecteur de paramètres qui permet au contrôleur de stabiliser le système et de minimiser la norme $\mathcal{H}_\infty$ des fonctions de transfert reliant les entrées et sorties exogènes d'intérêt. Ce problème est plus complexe à résoudre que le problème $\mathcal{H}_\infty$ classique et mène souvent à l'utilisation de méthodes d'optimisation non lisse utilisant une approche itérative. Une telle méthode mène alors à la résolution sous-optimale du problème, soit chercher un vecteur de paramètres ρ tel que

$$\gamma_{opt} \leq \|\mathbf{T}_{wz}(\mathbf{P}, \mathbf{K}(\rho))\|_\infty \leq \gamma_{opt} + \epsilon$$

avec ϵ le plus petit possible et où $\gamma_{opt} = \min_{\rho} \|\mathbf{T}_{wz}(\mathbf{P}, \mathbf{K}(\rho))\|_\infty$ est le «coût» de la solution optimale. Cette résolution permet aussi de ne considérer que les fonctions de transfert d'intérêt, contrairement à la méthode $\mathcal{H}_\infty$ classique.

L'approche $\mathcal{H}_\infty$ structurée a été implémentée sous MATLAB dans la fonction **sys tune**. Celle-ci a la capacité de régler un contrôleur à architecture fixe en considérant plusieurs modèles et plusieurs objectifs à la fois.

4.3.2 Requis

Les requis considérés pour cette synthèse sont :

- un bon suivi de consigne, soit aucune erreur en régime permanent et un dépassement maximal de 20% ;
- des marges de stabilités de 5 dB et de 40° à l'entrée et à la sortie du système dynamique ;
- le respect des limites des actionneurs ;
- des dynamiques⁶ de l'ordre de 3 Hz (soit 18.85 rad/s) pour assurer un bon échantillonnage ;
- une influence faible des retours en p, q, r et $\ddot{z}$ pour éviter de faire osciller violemment les servomoteurs.

Le choix de 3 Hz comme fréquence de coupure f_c a été fait selon l'équation suivante :

$$f_c = \frac{f_s}{10}$$

où f_s est la fréquence d'échantillonnage (30 Hz) de la plateforme d'autopilotage utilisée. Le facteur 10 a été choisi pour assurer un bon échantillonnage (un minimum de 2 est requis en vertu du critère de Nyquist). Le requis pour l'influence des dérivées (p, q, r et $\ddot{z}$) sur les signaux de commande a été ajouté, car des oscillations indésirables avaient lieu lors des premières validations temporelles. En considérant ces requis et les performances obtenues durant la synthèse préliminaire, les critères fournis à l'algorithme de **sys tune** sont tels que présentés au tableau 4.6. Ce tableau indique aussi les objectifs de réglage⁷ (**TuningGoal**) et les paramètres respectifs utilisés pour chaque critère.

4.3.3 Pondérations

Le diagramme de synthèse $\mathcal{H}_\infty$ pour les critères du tableau 4.6 est donné à la figure 4.9, où C désigne le contrôleur et G le système. Les critères, tels qu'implémentés par **sys tune**, prennent alors les formes suivantes :

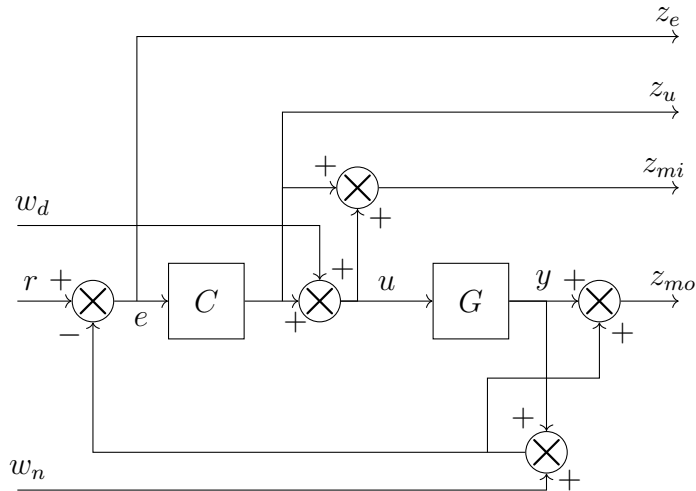
- Suivi de consigne : $\|W_C T_{r \rightarrow z_e}\|_\infty$
- Marges (entrée) : $\|W_{MI} T_{w_d \rightarrow z_{mi}}\|_\infty$
- Marges (sortie) : $\|W_{MO} T_{w_n \rightarrow z_{mo}}\|_\infty$
- Limite des actionneurs : $\|W_A T_{w_d \rightarrow z_u}\|_\infty$
- Influence sur la commande : $\|W_I T_{w_n \rightarrow z_u}\|_\infty$

6. La dynamique des servomoteurs est considérée assez rapide pour être ignorée pour ce requis.

7. Voir l'Annexe C pour plus d'informations au sujet des type d'objectif de réglage.

Tableau 4.6 Critères imposés

Suivi de consigne		Tuning goal : Tracking	
Sortie	Temps de réponse (s)	Erreur	Dépassement (%)
ϕ	8	0	20
θ	5	0	20
ψ	15	0	20
w	6	0	20
Marges		Tuning goal : Margins	
Emplacement	Gain (dB)	Phase (°)	
Entrée du système	5	40	
Sortie du système	5	40	
Limite des actionneurs		Tuning goal : MaxLoopGain	
Emplacement	Gain (de boucle) maximal	Fréquence (rad/s)	
Entrée du système	10	18.85	
Influence sur la commande		Tuning goal : Gain	
Dérivée	Gain maximal		
p, q, r	9		
$\ddot{z}$	1		
Limite dynamique		Tuning goal : Poles	
Pôles	Fréquence maximale (rad/s)		
Tous (boucle fermée)	18.85		

Figure 4.9 Diagramme du modèle utilisé pour la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ structurée

où les W_i sont les pondérations sur les fonctions de transfert considérées. Celles-ci sont généralement des matrices diagonales qui appliquent des gabarits fréquentiels donnés sur une sortie à la fois. Les valeurs de ces pondérations⁸ sont données au tableau 4.7.

Tableau 4.7 Valeurs des W_i

Suivi de consigne	
Sortie	W_C
ϕ	$\frac{s + 2/8}{0.2s}$
θ	$\frac{s + 2/5}{0.2s}$
ψ	$\frac{s + 2/15}{0.2s}$
w	$\frac{s + 2/6}{0.2s}$
Marges	
Emplacement	W_M
Entrée du système (W_{MI})	0.364
Sortie du système (W_{MO})	0.364
Limite des actionneurs	
Emplacement	W_A
Entrée du système	$\frac{s}{188.5}$
Influence sur la commande	
Dérivée	W_I
p, q, r	$\frac{1}{9}$
$\ddot{z}$	1

Les figures 4.10 à 4.14 présentent les régions acceptables (en blanc) des différents critères dans le domaine fréquentiel.

L'objectif de cette synthèse est d'obtenir les meilleurs temps de réponse (idéalement ceux obtenus lors de la synthèse préliminaire) tout en respectant chacun des autres critères. Les critères de suivi sont donc considérés comme souples (*soft*) par l'algorithme de **sys tune**, et tous les autres critères sont des contraintes dures (*hard*) pour l'algorithme. Comme l'algorithme de synthèse est basé sur des techniques d'optimisation non lisse, la convergence se fera généralement vers un minimum local (plutôt que global). Il faut donc lancer l'algorithme

8. Ces valeurs ont été déduites de différentes informations fournies dans la documentation de **sys tune**. Voir l'Annexe C pour plus d'informations.

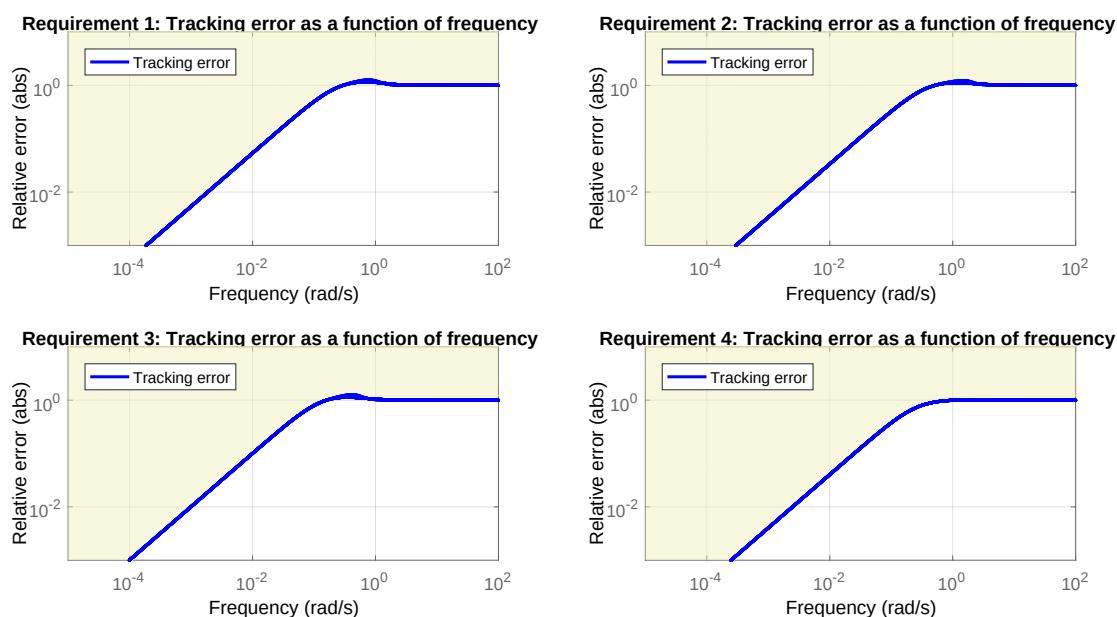


Figure 4.10 Critères de suivi de consigne

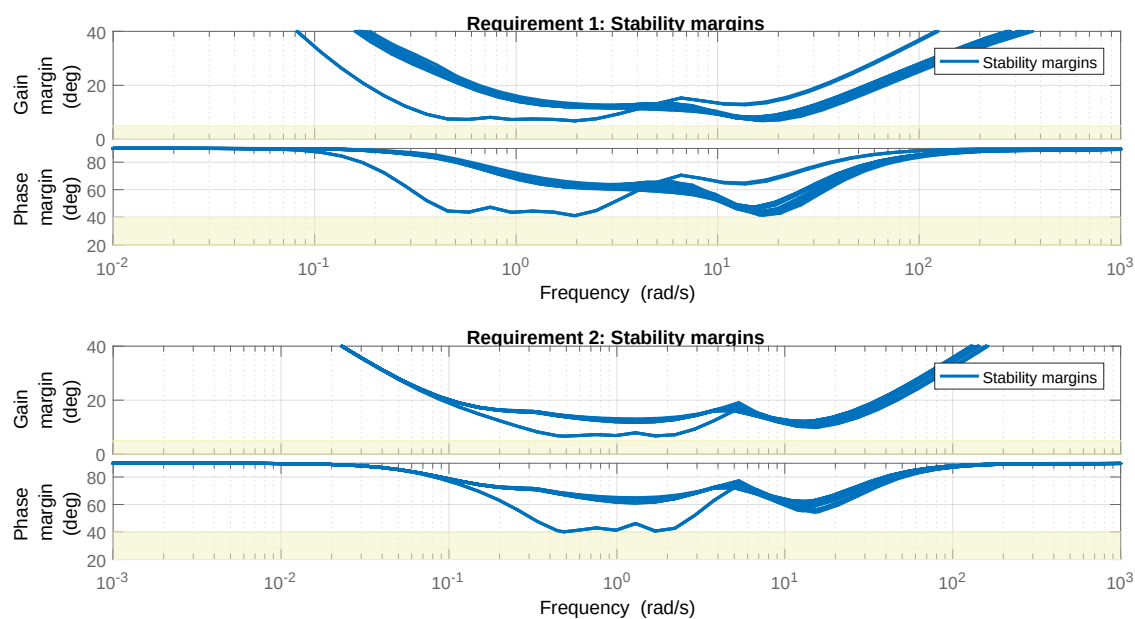


Figure 4.11 Critères de marge de stabilité

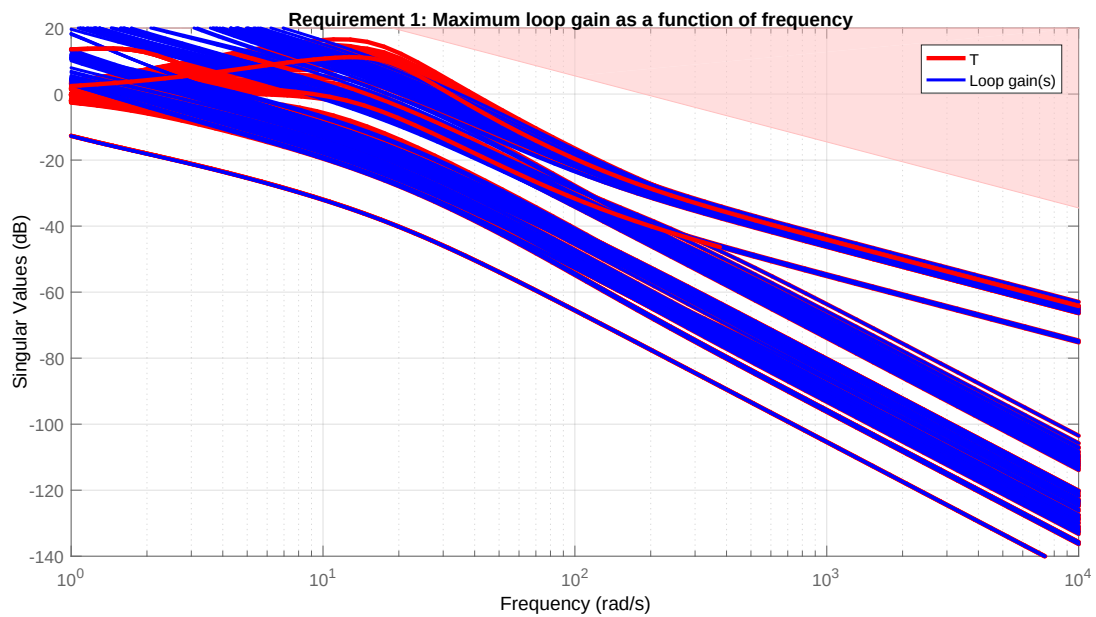


Figure 4.12 Critères des limites des actionneurs

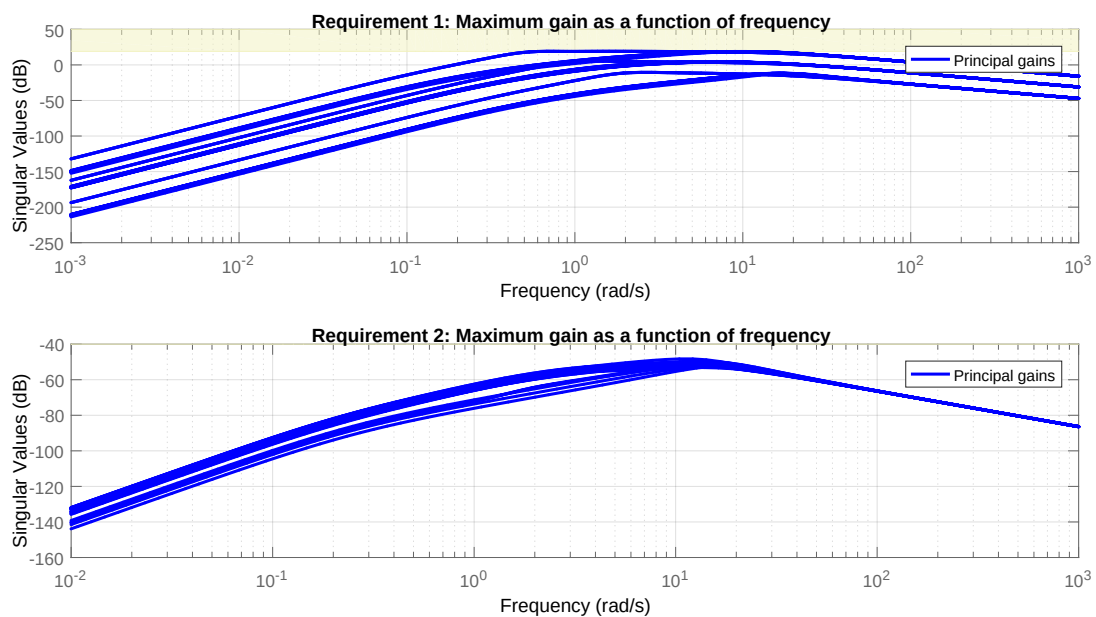


Figure 4.13 Critères sur l'influence des dérivées sur les signaux de commande

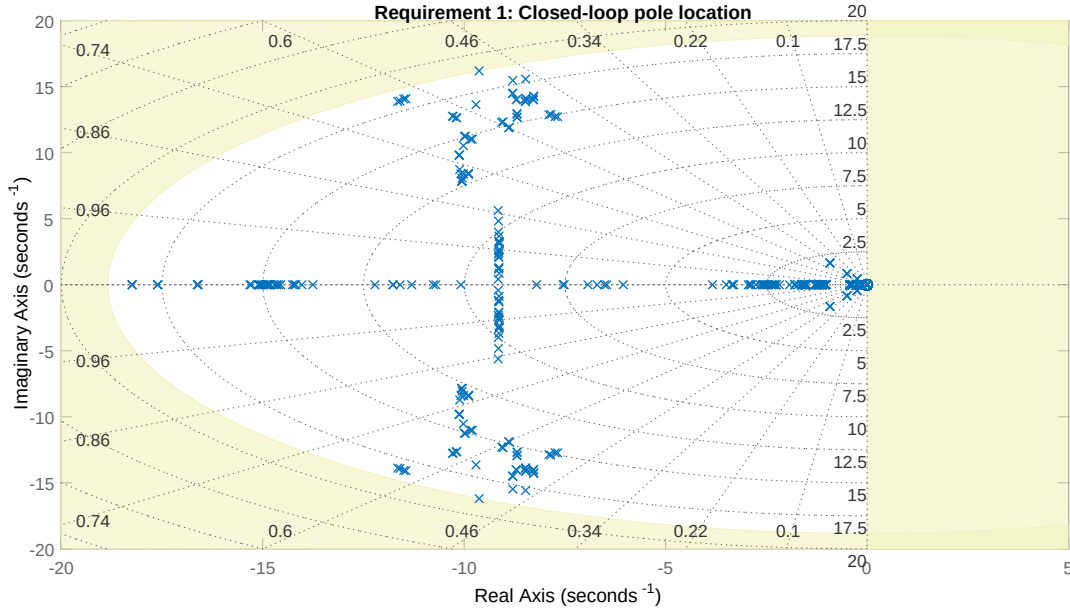


Figure 4.14 Critères sur les limites des dynamiques

à plusieurs reprises, avec des conditions initiales différentes, afin d'augmenter les chances de trouver un meilleur réglage. La première itération utilise le contrôleur préliminaire comme condition initiale, afin d'aider la convergence de l'algorithme vers un réglage acceptable. Il se trouve qu'avec une bonne initialisation, la première itération donne souvent les meilleurs résultats.

4.3.4 Résultats

Le coût⁹ (γ) de chaque critère obtenu après la synthèse robuste¹⁰ est présentée au tableau 4.8, et les figures 4.10 à 4.14 en présente une visualisation graphique. Il est à noter que ces valeurs sont normalisées; le coût du critère est de 1, donc un γ inférieur à 1 indique que le requis est surpassé, et un γ supérieur à 1 indique que le critère n'a pas été atteint.

Ces valeurs de coût indiquent donc que les contraintes ont été respectées ($\gamma \leq 1$) et que les critères de suivi sont proches des objectifs spécifiés (les coûts sont seulement 12% supérieur dans le pire des cas considérés). On remarque aussi que le coût de l'influence de $\ddot{z}$ est très

9. Les algorithmes d'optimisation tentent de trouver la meilleure valeur d'une fonction. Lorsque l'algorithme minimise la fonction, celle est appelée «fonction coût». La valeur trouvée est donc ici appelée «coût».

10. Le temps de calcul pour cette synthèse a été de 345 s pour la première itération (avec initialisation) et de 2139 s pour 6 itérations (dont 5 avec initialisation aléatoire) en utilisant MATLAB 2016a sur un ordinateur avec Windows 7, un processeur Intel i7-4790 quad-core à 3.60GHz, et une mémoire vive de 16GB.

Tableau 4.8 Coûts des critères imposés

Suivi de trajectoire	
Sortie	γ
ϕ	1.1211
θ	1.1211
ψ	1.1211
w	1.0514
Marges	
Emplacement	γ
Entrée du système	1.0000
Sortie du système	1.0000
Limite des actionneurs	
Emplacement	γ
Entrée du système	0.4738
Influence sur la commande	
Dérivée	γ
p, q, r	1.0000
$\ddot{z}$	0.0046
Limite dynamique	
Pôles	γ
Tous (boucle fermée)	1.0000

bas, indiquant que ce réglage du contrôleur utilise peu cette mesure. Ce choix semble confirmer l'hypothèse utilisée lors de la synthèse préliminaire, soit que la mesure de l'accélération verticale est sensible aux variations du centre de masse (voir l'impact de $\Delta \mathbf{r}$ sur $\dot{\mathbf{V}}$ dans la sous-section 3.1) et n'est donc pas aussi fiable que les autres mesures à disposition. L'algorithme a été lancé 6 fois et le contrôleur le plus performant a été trouvé proche du réglage préliminaire, ce qui valide que l'initialisation utilisée était relativement proche des cibles de performance et de robustesse.

À titre d'information et aux fins de comparaison (voir Section 4.2.4), le contrôleur réglé avec les gains obtenus pendant la synthèse robuste est :

$$\Delta \mathbf{u}_c =$$

$$\begin{bmatrix} -0.3083/s - 1.659 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.07589/s - 0.2553 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1311/s - 1.323 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3017/s - 0.1436 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1.774 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3083/s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1557 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.07589/s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.607 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1311/s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.001303 & 0 & 0 & 0 & 0.3017/s \end{bmatrix}$$

4.3.5 Analyse

Le contrôleur avec le nouveau réglage a été testé sur les différents modèles linéarisés du système. Les réponses temporelles des modèles linéarisés sont présentées à la figure 4.15.

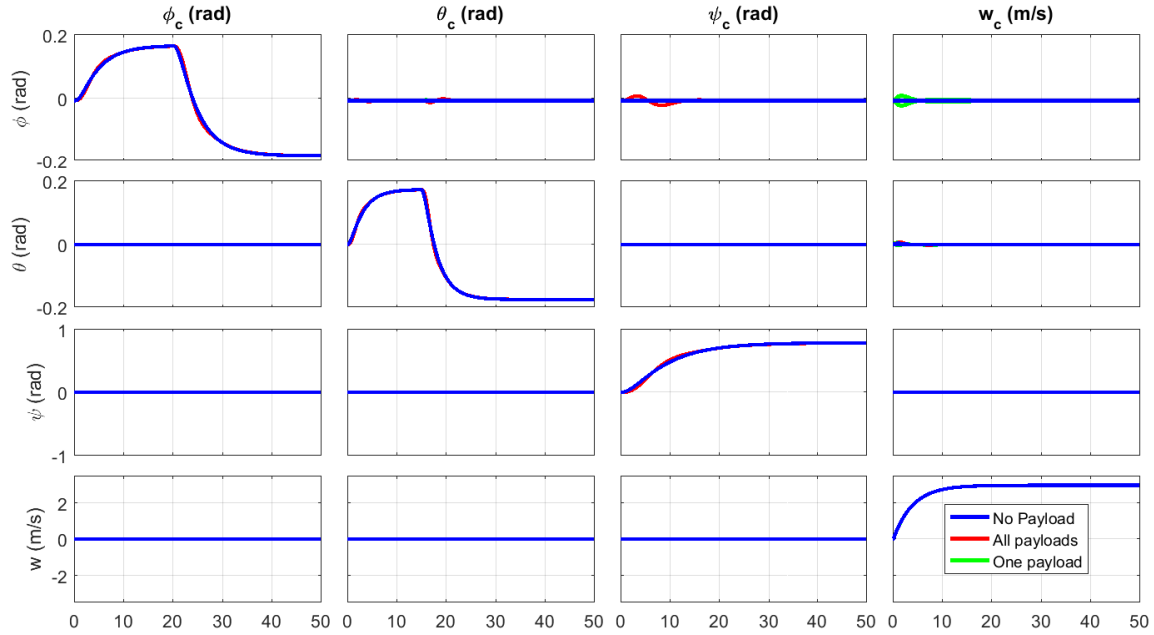


Figure 4.15 Réponses temporelles des modèles linéarisés pour les entrées d'intérêt (toutes les configurations)

Ces réponses temporelles confirment que les objectifs de suivi de consigne sont remplis pour toutes les configurations étudiées. De plus, la dégradation des performances causée par une charge utile décentrée est une petite perturbation en roulis lorsqu'une commande est envoyée à la vitesse verticale, et la dégradation causée par la configuration ayant toutes les charges considérées est une perturbation mineure en roulis pour des commandes en tangage et en lacet.

4.3.6 Simulation

La dernière validation du contrôleur pour le vol stationnaire consiste à simuler les dynamiques non linéaires de l'hélicoptère tandem en utilisant le contrôleur robuste. De plus, le contrôleur est simulé sous sa forme discrète échantillonné à 30 Hz afin de vérifier que les servomoteurs n'ont pas de problèmes d'oscillations indésirables.

La figure 4.16 présente les résultats de simulation. Ces résultats montrent que le contrôleur,

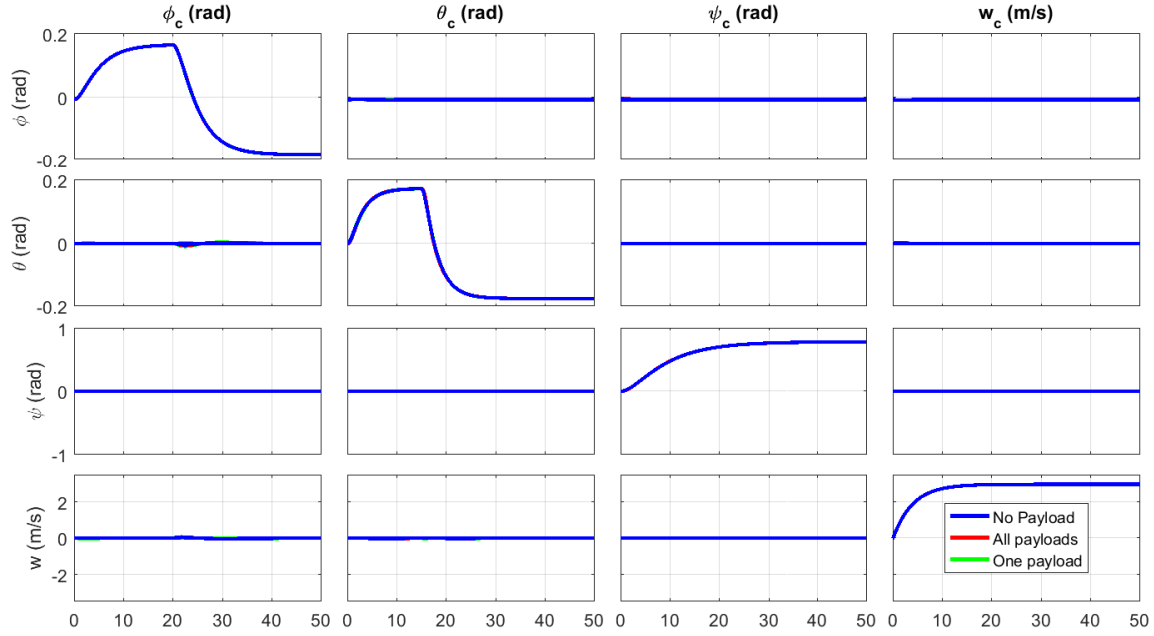


Figure 4.16 Réponses temporelles du système non linéaire pour les entrées d'intérêt (toutes les configurations)

avec le réglage robuste trouvé, permet d'atteindre les performances attendues pour tous les modèles considérés. En effet, les réponses temporelles concordent avec celles obtenues durant les simulations linéaires et aucune oscillation indésirable ne survient. De plus, les légères perturbations en roulis observées dans les réponses linéaires sont négligeables pour le modèle non linéaire. Cela est attribué à l'effet dissipant de l'erreur d'approximation du mixage mécanique.

4.4 Linéarisation du modèle de l'hélicoptère sur toute l'enveloppe de vol

Le modèle de l'hélicoptère est repris à nouveau afin d'obtenir des modèles linéaires pour toutes les vitesses considérées dans l'enveloppe de vol, mais sans les simplifications permises lors du

vol stationnaire. Les servomoteurs sont exclus du modèle afin de simplifier l'équilibrage. Le modèle inclut la traînée, les interférences aérodynamiques, et le modèle simplifié du rotor. Après la présentation de l'enveloppe de vol considérée, une description sommaire du procédé d'équilibrage est disponible, suivie de celle de la linéarisation proprement dite.

4.4.1 Enveloppe de vol

L'enveloppe de vol considérée inclut les dix configurations de charge utile et trois configurations d'essence utilisées pour le vol stationnaire, mais aussi huit vitesses pour la synthèse. Cette enveloppe englobe donc 240 points d'opérations. Étant donné l'impact du décentrage de la charge utile, des valeurs plus réalistes ont été choisies pour cette synthèse robuste (voir le tableau 4.9). Les vitesses choisies pour la synthèse vont de 0 m/s jusqu'à 56 m/s par intervalles de 8 m/s. Ce choix inclut la vitesse de vol stationnaire (0 m/s), la vitesse nominale de croisière (32 m/s) et se rend près de la vitesse maximale permise (58 m/s).

Tableau 4.9 Emplacement et configuration de charge utile

Configuration	Emplacement		
	Δx (m)	Δy (m)	Δz (m)
1	—(Aucun)—		
2	—(Tous)—		
3	1.427	0.1	-0.12
4	1.427	-0.1	-0.12
5	1.427	0.1	0.63
6	1.427	-0.1	0.63
7	-1.473	0.1	-0.12
8	-1.473	-0.1	-0.12
9	-1.473	0.1	0.63
10	-1.473	-0.1	0.63

4.4.2 Équilibrage

L'équilibrage du modèle non linéaire consiste à trouver une solution au système d'équations suivant :

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \mathbf{R}_{\mathcal{B}/\mathcal{O}}(\Phi_e)\mathbf{V}_e$$

$$\dot{\Phi}_e = \mathbf{0} = \mathbf{H}^{-1}(\Phi_e)\boldsymbol{\omega}_e$$

$$\dot{\mathbf{V}}_e = \mathbf{0} = \frac{1}{m} \sum \mathbf{F}(\delta_e) + \mathbf{R}_{\mathcal{O}/\mathcal{B}}(\Phi_e)\mathbf{g} - \boldsymbol{\omega}_e \times (\mathbf{V}_e + \boldsymbol{\omega}_e \times \Delta \mathbf{r}) - \dot{\boldsymbol{\omega}}_e \times \Delta \mathbf{r}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_e = \mathbf{0} = (\mathbf{J}_b - \Delta \mathbf{J})^{-1} \left(\sum \mathbf{M}(\delta_e) - \boldsymbol{\omega}_e \times (\mathbf{J}_b - \Delta \mathbf{J}) \boldsymbol{\omega}_e \right)$$

où $\mathbf{0} = [0, 0, 0]^\top$, l'indice e indique la valeur à l'équilibre, et

$$\boldsymbol{\delta}_e = [\delta_{FWD,\theta_0,e}, \delta_{FWD,\theta_{1s},e}, \delta_{FWD,\theta_{1c},e}, \delta_{AFT,\theta_0,e}, \delta_{AFT,\theta_{1s},e}, \delta_{AFT,\theta_{1c},e}]^\top$$

Les valeurs de $\delta_{FWD,\theta_{1s},e}$, $\delta_{AFT,\theta_{1s},e}$ et $\mathbf{V}_e$ sont fixées selon le point d'opération autour duquel le système doit être équilibré ; comme discuté lors de la modélisation (voir la sous-section 3.8.1), les pas cycliques longitudinaux sont utilisés comme compensation. La valeur des pas cycliques longitudinaux a été réglée pour être nulle pour des vitesses aérodynamiques assez faibles pour considérer l'appareil en vol stationnaire, et augmente à un taux constant en fonction de la vitesse aérodynamique lorsque l'appareil n'est plus considéré en vol stationnaire. Plusieurs essais ont été réalisés afin de choisir la valeur du taux. Une valeur nulle et un taux permettant d'atteindre la valeur maximale des pas cycliques ont été testées ; dans les deux cas, la stabilité de l'appareil se trouvait diminuée. Des essais sans un taux constant introduisaient des non-linéarités qui diminuaient grandement les performances sur le modèle non linéaire. L'utilisation de la moitié de la valeur maximale des pas cycliques comme taux¹¹ donne le comportement recherché et a été retenu.

Même en utilisant le modèle simplifié des rotors (voir la sous-section 3.3.6), les forces et les moments sont des fonctions non linéaires ayant plusieurs dépendances sur les états du système (voir la section 3.3). Le système d'équations étant trop complexe pour permettre une résolution par outils symboliques, le modèle a été réalisé sous SIMULINK afin de permettre l'utilisation de la fonction `findop`. Cette fonction permet d'utiliser l'algorithme Levenberg-Marquardt¹², qui est une approche itérative par moindres carrés non linéaires (Lourakis (2005)). La base de cet algorithme est d'effectuer une approximation linéaire du système f au voisinage d'un point $\mathbf{p}$ qui regroupe les états du système. Pour une petite variation $\delta_{\mathbf{p}}$ autour du point $\mathbf{p}$, l'approximation suivante est obtenue en utilisant le développement en séries de Taylor :

$$f(\mathbf{p} + \delta_{\mathbf{p}}) \approx f(\mathbf{p}) + \mathbf{J}\delta_{\mathbf{p}}$$

où $\mathbf{J}$ est la Jacobienne $\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}$. Le procédé itératif cherche le $\delta_{\mathbf{p}}$ qui minimise l'erreur d'approximation à chaque itération et met à jour le vecteur $\mathbf{p}$. Au fil des itérations, $\mathbf{p}$ converge vers une solution minimisant l'écart par rapport à l'équilibre. Plus de détails sur l'algorithme sont disponibles dans le bref article de Lourakis (2005), incluant la manière dont le problème de recherche de $\delta_{\mathbf{p}}$ est résolu et amélioré pour accélérer les calculs.

11. Ce taux est inspiré de celui du modèle de Chinook disponible dans le logiciel de simulation haute fidélité utilisé (HELISIM).

12. La fonction `findop` permet aussi d'utiliser d'autres algorithmes, mais Levenberg-Marquardt est celui qui donne les meilleurs résultats pour le système considéré.

Un script a été préparé afin de trouver les valeurs à l'équilibre de l'appareil pour les 240 points d'opération considérés, et de sauvegarder les valeurs de δ_e et de Φ_e pour les besoins de compensation.

4.4.3 Linéarisation

Une fois l'appareil équilibré à un point d'opération, le système est linéarisé à ce point. La linéarisation se fait par perturbations numériques à l'aide de la fonction `linmod`, qui est ajoutée au script d'équilibrage mentionné précédemment. Linéariser immédiatement après l'équilibrage permet d'utiliser les valeurs à l'équilibre des états du système sans avoir besoin d'en garder une copie en mémoire. Cela permet ainsi de réduire le temps nécessaire pour effectuer l'équilibrage et la linéarisation de l'appareil.

4.5 Synthèse robuste sur toute l'enveloppe de vol

Cette nouvelle synthèse robuste se fait à nouveau avec la méthode $\mathcal{H}_\infty$ structurée, mais cette fois sur tous les 240 modèles considérés pour l'enveloppe de vol et en considérant le séquençement des gains du contrôleur. Le séquençement de gains considéré est d'abord présenté, avec la manière dont le contrôleur est linéarisé. Viennent ensuite les présentations du choix des requis, de leur conversion en pondérations, et des résultats de synthèse.

4.5.1 Séquençement des gains et linéarisation du contrôleur

Afin de pouvoir utiliser les techniques applicables aux systèmes linéaires, l'approche par séquençement de gains est choisie, ce qui permet aussi de réutiliser les résultats de la synthèse pour le vol stationnaire. En effet, cette approche permet de considérer plusieurs modèles linéarisés du système et de synthétiser des contrôleurs linéaires pour ceux-ci. Ces contrôleurs linéaires sont ensuite regroupés dans un contrôleur non linéaire dont les gains changent dynamiquement entre les valeurs calculées, selon les points d'opération à proximité des conditions actuelles. Afin d'assurer un séquençement lisse¹³, les gains du contrôleur sont exprimés sous forme de fonctions paramétriques de la vitesse (variable de séquençement), soit

$$K(V) = K_0 + K_1V + K_2V^2$$

13. Un séquençement non lisse peut causer des à-coups, voire des instabilités.

où K_0 , K_1 et K_2 sont les paramètres à régler pour le gain K et où V est la vitesse aérodynamique mesurée. Une relation quadratique¹⁴ a été choisie, puisqu'une relation affine ne suffisait pas pour obtenir les performances minimales désirées pour toute l'enveloppe de vol. En utilisant cette forme paramétrique, il est possible de reformuler le système en boucle fermée sous la forme LFT et d'utiliser les outils valides pour les systèmes LPV. Comme mentionné dans Rugh and Shamma (2000), un système réglé de cette manière est sujet à des termes couplés cachés.

Le problème des termes couplés cachés est réglé en utilisant les travaux de Lhachemi et al. (2016, 2017). En effet, au lieu d'essayer de formuler le système de manière à éviter l'apparition de ces termes, le contrôleur non linéaire avec gains séquencés (voir figure 4.17) est linéarisé dans son entièreté¹⁵ afin de faire ressortir ces termes couplés. La commande non linéaire (p.ex. pour θ) peut alors s'exprimer comme

$$u_\theta(\theta_c, \theta, q, V, x_i) = K_i(V)x_i - K_p(V)\theta - K_d(V)q + C_\theta(V), \quad \dot{x}_i = \theta_c - \theta$$

où

- u_θ est la commande envoyée au mixage ;
- $K_p(V)$, $K_i(V)$ et $K_d(V)$ sont les gains séquencés du PID ;
- θ_c est la consigne en θ ;
- x_i est l'intégrale de l'erreur ;
- $C_\theta(V)$ est le terme de compensation (*trim*) ajouté au PID.

La commande à un point d'équilibre s'exprime alors comme

$$u_{\theta,e}(\theta_{c,e}, \theta_e, q_e, V_e, x_{i,e}) = K_i(V_e)x_{i,e} - K_p(V_e)\theta_e - K_d(V_e)q_e + C_\theta(V_e)$$

où $q_e = 0$, $\dot{u}_{\theta,e} = 0$, et

$$x_{i,e} = \frac{u_{\theta,e}(\theta_{c,e}, \theta_e, q_e, V_e, x_{i,e})}{K_i(V_e)} + \frac{K_p(V_e)}{K_i(V_e)}\theta_e - \frac{C_\theta(V_e)}{K_i(V_e)}$$

En exprimant l'écart par rapport à l'équilibre de chaque variable comme $\Delta x = x - x_e$, l'expression suivante est obtenue :

$$\Delta u_\theta = K_i(V_e)\Delta x_i - K_p(V_e)\Delta\theta - K_d(V_e)\Delta q + \left(\left. \frac{\partial K_i}{\partial V} \right|_{V_e} x_{i,e} - \left. \frac{\partial K_p}{\partial V} \right|_{V_e} \theta_e + \left. \frac{\partial C_\theta}{\partial V} \right|_{V_e} \right) \Delta V$$

14. Étant donné que les forces aérodynamiques dépendent du carré de la vitesse, il était attendu qu'une relation quadratique soit nécessaire ici.

15. Les limites en vitesse et en position (bloc L dans la figure 4.17) sont ignorées dans cette linéarisation, mais sont prises en compte dans les contraintes imposées au système.

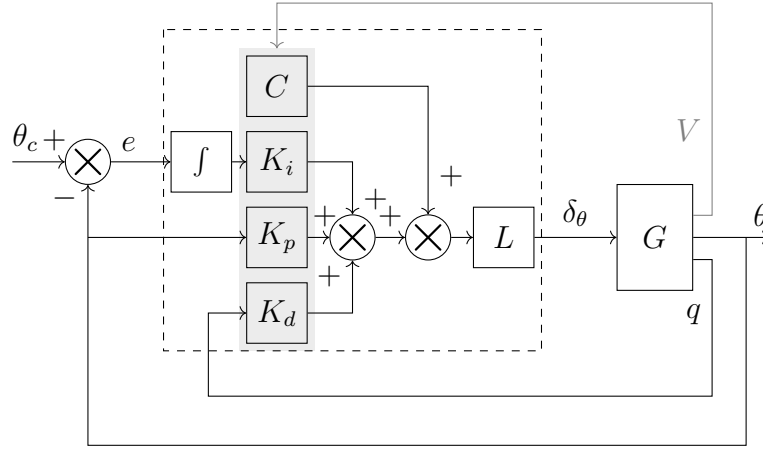


Figure 4.17 Architecture d'un contrôleur PID (exemple pour θ)

$$\Delta \dot{x}_i = \Delta \theta_c - \Delta \theta$$

où les valeurs à l'équilibre sont celles trouvées lors de l'équilibrage (voir section 4.4) et où les dérivées partielles dans le terme de couplage sont connues grâce à l'expression paramétrique des gains séquencés, soit

$$\left. \frac{\partial K}{\partial V} \right|_{V_e} = K_1 + 2K_2 V_e$$

Le contrôleur est donc linéarisé en utilisant cette approche pour les 4 boucles PID, ce qui donne

$$\Delta \delta = \mathbf{B}_{mix} \begin{bmatrix} \Delta u_\phi \\ \Delta u_\theta \\ \Delta u_\psi \\ \Delta u_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left. \frac{\partial T_{\theta_{1s}}}{\partial V} \right|_{V_e} \Delta V$$

où δ est le vecteur des pas de pale désirés, $\mathbf{B}_{mix}$ est la matrice de mixage des commandes, u_ϕ , u_θ , u_ψ et u_w sont les commandes issues des PID, et où $T_{\theta_{1s}}(V)$ est la compensation des pas cycliques longitudinaux.

Cette linéarisation du contrôleur est implémentée sous MATLAB en utilisant la commande **tunableSurface** pour représenter les gains séquencés. Cette commande permet d'évaluer automatiquement les valeurs des gains en fonction des paramètres réglables¹⁶. La commande

16. La commande **tunableSurface** implémente la fonction paramétrique en utilisant le centre du domaine (0 à 58 m/s) comme origine. Les paramètres réglables générés par cette commande ne sont donc pas exactement ceux présentés ici. Cette différence est prise en compte lors de la modélisation du contrôleur linéarisé sous MATLAB.

`connect` est ensuite utilisée pour lier le contrôleur linéarisé autour d'un point d'équilibre avec les modèles linéarisés autour du même point d'équilibre, permettant de régler le contrôleur (unique) pour les différentes configurations de charge utile et d'essence. Afin de simplifier les requis et le respect de l'implémentation, la synthèse est réalisée dans le domaine discret. Les modèles linéarisés sont échantillonnés à 30 Hz à l'aide de la fonction `c2d`, soit la fréquence à laquelle la plateforme d'autopilotage prend ses mesures.

Des contraintes supplémentaires sont imposées lors de l'implémentation du contrôleur en raison des limites de la plateforme d'autopilotage utilisée (voir la sous-section 5.1.1). En effet, seulement 4 valeurs de gains peuvent être fournies à la plateforme, qui est responsable de séquencer les gains par interpolation en fonction de la vitesse aérodynamique mesurée par un tube de Pitot. De plus, il est indésirable que les gains et la compensation varient à de très faibles vitesses (0 à 5 m/s), puisque cela nuit aux performances en vol stationnaire, surtout en considérant que seul le module de la vitesse aérodynamique est connu. Pour pallier ces contraintes, deux solutions sont utilisées. La première est de forcer les dérivées partielles en fonction de la vitesse à zéro pour toute vitesse inférieure à 5 m/s et d'utiliser les valeurs de gains paramétrisés pour $V_e = 5$ m/s pour tout point de design inférieur à 5 m/s. Cela permet de préciser à l'algorithme cette structure particulière. La deuxième solution est d'approximer les fonctions paramétriques des gains par des segments de droite continus (*piecewise linear function*) lors de l'implémentation. Un outil de régression¹⁷ a été utilisé sous MATLAB pour réaliser cette approximation.

4.5.2 Requis

Les requis choisis diffèrent selon les modèles. En effet, deux catégories de configurations, et de vitesses, sont considérées : nominaux et non nominaux. Les modèles nominaux sont les modèles sans charge utile et dont la vitesse ne dépasse pas la vitesse de croisière nominale. Tous les autres modèles sont considérés non nominaux, et leurs requis se verront relâchés. Cette division assure de meilleures performances et marges de stabilité pour les opérations nominales, sans qu'elles soient trop pénalisées lors de la synthèse par l'instabilité des modèles extrêmes. De plus, cette distinction reflète mieux les besoins des partenaires industriels pour les premiers tests en vol.

Les requis considérés¹⁸ pour cette synthèse sont :

- un bon suivi de consigne, soit un temps de réponse de 8 s au plus, une erreur maximale

17. *SLM - Shape Language Modeling* par John D'Errico

18. Ces requis ont été choisis après plusieurs essais sur le simulateur haute fidélité et respectent les attentes des partenaires industriels.

- de 2% en régime permanent, et un dépassement maximal de 20% pour les modèles nominaux (les modèles non nominaux ont un objectif deux fois plus lent, une erreur maximale de 5% et un dépassement maximal de 50%);
- des marges de stabilités de 4dB et 30° à l’entrée et à la sortie du système dynamique pour tous les modèles nominaux (la moitié de ces marges pour les modèles non nominaux);
- le respect des limites des actionneurs;
- une influence faible sur les signaux de commande des retours en ϕ , p , q , r et $\ddot{z}$ pour éviter de faire osciller violemment les servomoteurs.

Les requis ont été changés comparativement au vol stationnaire afin d’obtenir de meilleurs résultats en ce qui concerne les besoins des partenaires industriels. Notamment,

- le requis de suivi de consigne regroupe les requis de performance des quatre variables contrôlées pour améliorer le découplage;
- les marges de stabilité visées ont été relâchées (surtout pour les modèles non nominaux) suite à la difficulté de remplir ce requis¹⁹;
- les limites sur les actionneurs ont été resserrées, comparativement au vol stationnaire, suite à des tests sur le simulateur haute fidélité, et incluent maintenant la limite en vitesse (voir le tableau 4.12 pour l’expression exacte de la pondération de ce requis et la figure 4.21 pour sa représentation graphique);
- la sortie ϕ a été ajoutée aux variables à influence limitée en raison des saturations rapidement atteintes lors de simulations haute fidélité²⁰;
- le requis sur la dynamique de l’appareil n’est plus utilisé, car le contrôleur est considéré discret lors de cette synthèse.

Avec ces requis, les critères fournis à l’algorithme de **sysune** sont tels que présentés aux tableaux 4.10 et 4.11. Ce tableau indique aussi les objectifs de réglage²¹ (**TuningGoal**) et leurs paramètres respectifs utilisés pour chaque critère.

4.5.3 Pondérations

Le diagramme de synthèse $\mathcal{H}_\infty$ pour le vol stationnaire est réutilisé (voir figure 4.18). Les critères, tels qu’implémentés par **sysune**, prennent à nouveau les formes suivantes :

- Suivi de consigne : $\|W_C T_{r \rightarrow z_e}\|_\infty$
- Marges (entrée) : $\|W_{MI} T_{w_d \rightarrow z_{mi}}\|_\infty$

19. Cette difficulté a aussi mené au changement des configurations de la charge utile (voir la section 4.4).

20. Ce requis n’est considéré que pour les fréquences supérieures à 0.1 rad/s en raison de l’action intégrale à l’intérieur de la boucle de ϕ .

21. Voir l’Annexe C pour plus d’informations au sujet des types d’objectif de réglage.

Tableau 4.10 Critères imposés (nominal)

Suivi de consigne		Tuning goal : Tracking	
Sortie	Temps de réponse (s)	Erreur (%)	Dépassement (%)
Toutes	8	2	20
Marges		Tuning goal : Margins	
Emplacement	Gain (dB)	Phase (°)	
Entrée du système	4	30	
Sortie du système	4	30	
Limite des actionneurs		Tuning goal : MaxLoopGain	
Emplacement	Gain (de boucle) maximal	Fréquence (rad/s)	
Entrée du système	9	3.49	
Influence sur la commande		Tuning goal : Gain	
Sortie	Gain maximal		
$\phi, p, q, r, \ddot{z}$	2		

Tableau 4.11 Critères imposés (non nominal)

Suivi de consigne		Tuning goal : Tracking	
Sortie	Temps de réponse (s)	Erreur (%)	Dépassement (%)
Toutes	16	5	50
Marges		Tuning goal : Margins	
Emplacement	Gain (dB)	Phase (°)	
Entrée du système	2	15	
Sortie du système	2	15	
Limite des actionneurs		Tuning goal : MaxLoopGain	
Emplacement	Gain (de boucle) maximal	Fréquence (rad/s)	
Entrée du système	9	3.49	
Influence sur la commande		Tuning goal : Gain	
Sortie	Gain maximal		
$\phi, p, q, r, \ddot{z}$	2		

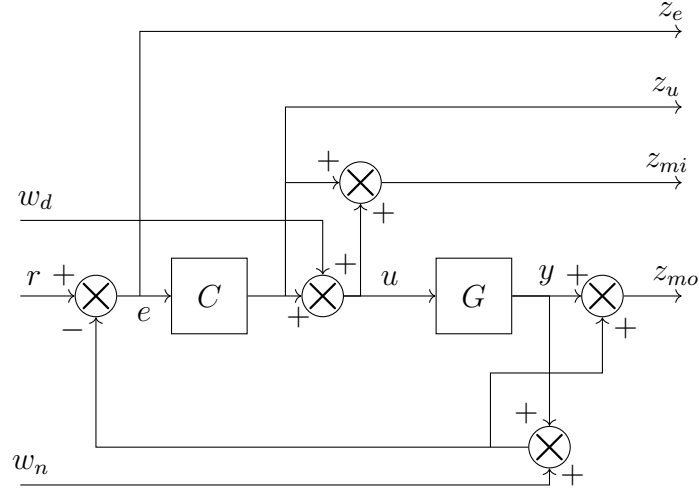


Figure 4.18 Diagramme du modèle utilisé pour la synthèse $\mathcal{H}_\infty$ structurée

- Marges (sortie) : $\|W_{MO}T_{w_n \rightarrow z_{mo}}\|_\infty$
- Limite des actionneurs : $\|W_A T_{w_d \rightarrow z_u}\|_\infty$
- Influence sur la commande : $\|W_I T_{w_n \rightarrow z_u}\|_\infty$

où les W_i sont les pondérations des fonctions de transfert considérées. Ces pondérations sont données²² au tableau 4.12 pour les cas nominaux et au tableau 4.13 pour les cas non nominaux.

Tableau 4.12 Valeurs des W_i (nominal)

Suivi de consigne	
Sortie	W_C
Toutes	$\frac{s+2/8}{0.2s+(0.02)2/8}$
Marges	
Emplacement	W_M
Entrée du système (W_{MI})	0.268
Sortie du système (W_{MO})	0.268
Limite des actionneurs	
Emplacement	W_A
Entrée du système	$\frac{1/9(s+3.49)}{3.49}$
Influence sur la commande	
Sortie	W_I
$\phi, p, q, r, \ddot{z}$	1/2

22. Ces valeurs ont été déduites de différentes informations fournies dans la documentation de **sysune**. Voir l'Annexe C pour plus d'informations.

Tableau 4.13 Valeurs des W_i (non nominal)

Suivi de consigne	
Sortie	W_C
Toutes	$\frac{s+2/16}{0.5s+(0.05)2/16}$
Marges	
Emplacement	W_M
Entrée du système (W_{MI})	0.132
Sortie du système (W_{MO})	0.132
Limite des actionneurs	
Emplacement	W_A
Entrée du système	$\frac{1/9(s+3.49)}{3.49}$
Influence sur la commande	
Sortie	W_I
$\phi, p, q, r, \ddot{z}$	$1/2$

Les figures 4.19 et 4.20 présentent les régions acceptables (en blanc) des différents critères dans le domaine fréquentiel pour les cas nominaux, les figures 4.23 et 4.24 présentent celles pour les cas non nominaux, et les figures 4.21 et 4.22 représentent les requis applicables à tous les cas.

L'objectif de cette synthèse est d'obtenir les meilleurs temps de réponse et marges de stabilité, tout en respectant chacun des autres critères. Les critères de suivi et de marges de stabilité sont alors considérés comme souples (*soft*), et tous les autres critères sont des contraintes dures (*hard*). Comme pour le vol stationnaire, l'algorithme est lancé à plusieurs reprises pour augmenter les chances de trouver un meilleur réglage, en raison des techniques d'optimisation non lisse utilisées. La première itération utilise le contrôleur pour le vol stationnaire trouvé à la section 4.3 comme condition initiale, afin d'aider la convergence de l'algorithme vers un réglage acceptable.

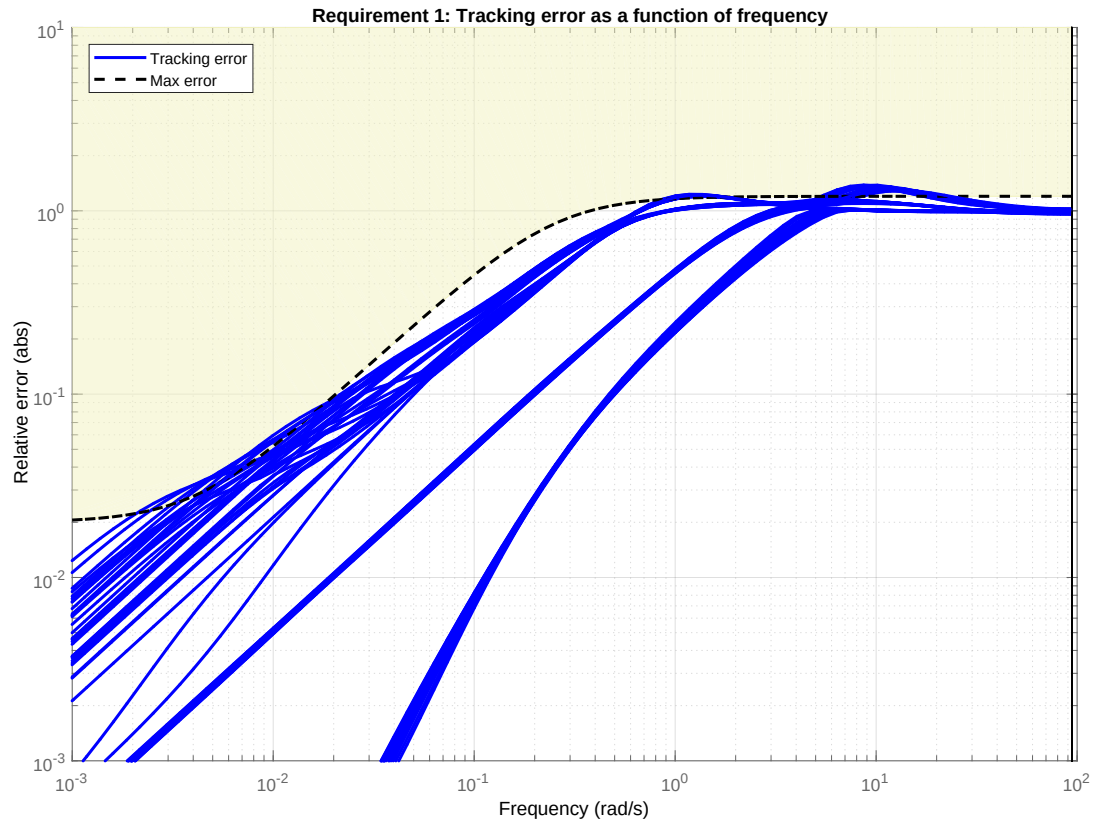


Figure 4.19 Critères de suivi de consigne (nominal)

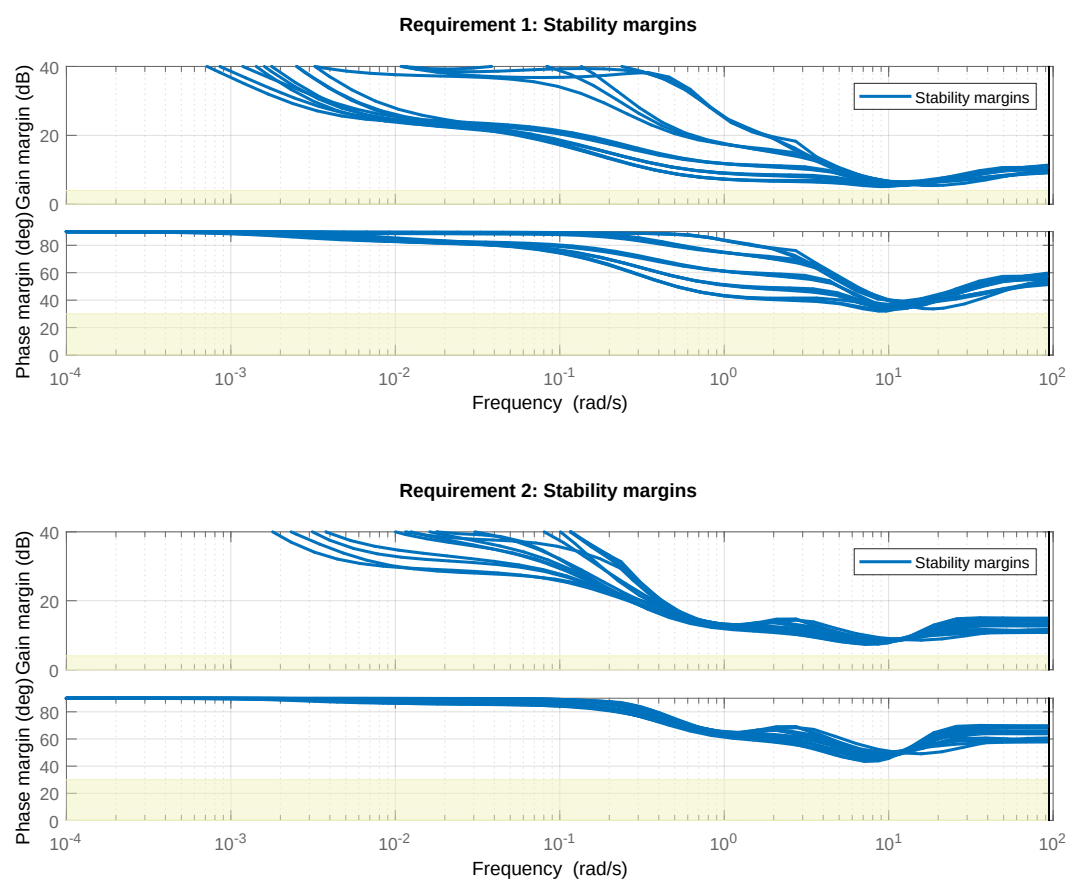


Figure 4.20 Critères de marge de stabilité (nominal)

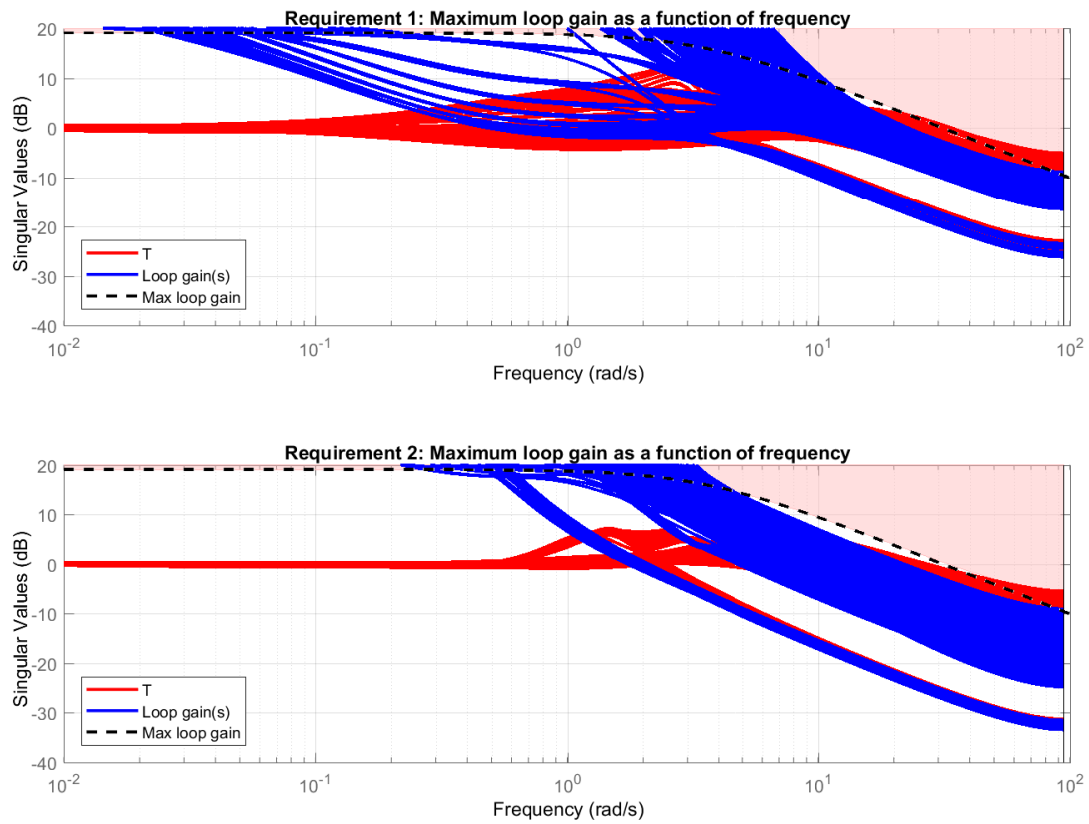


Figure 4.21 Critères des limites des actionneurs

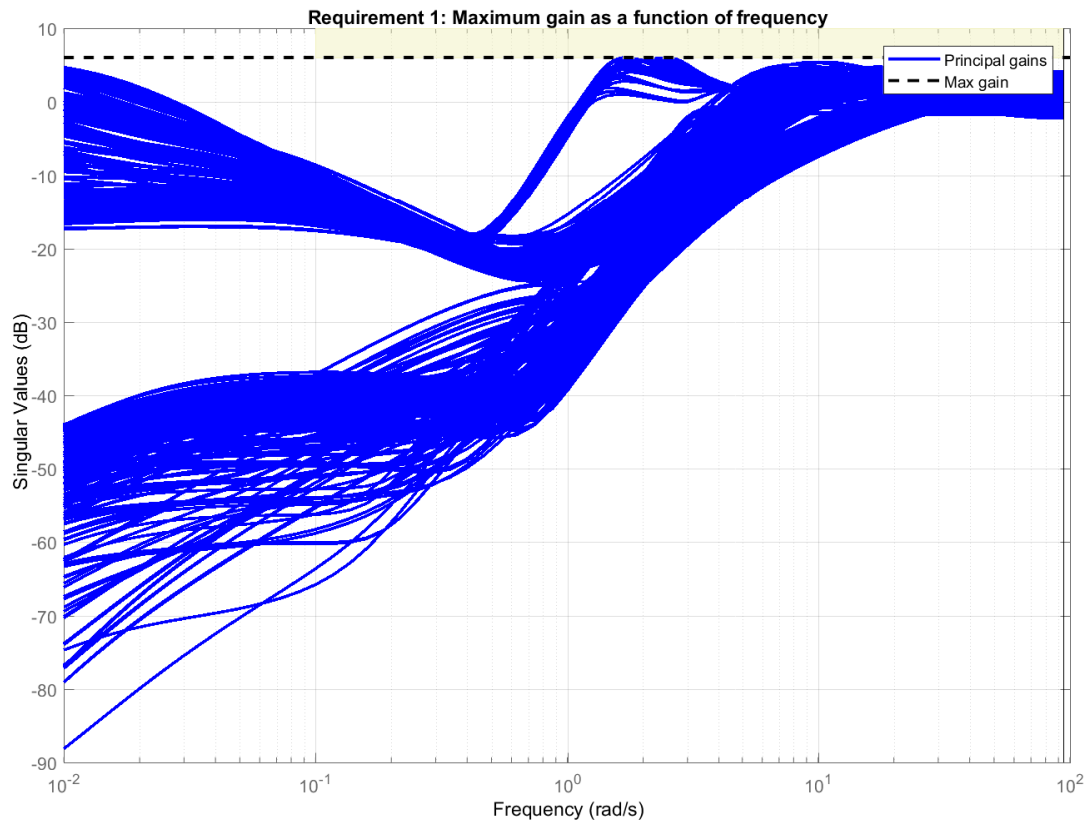


Figure 4.22 Critères sur l'influence des dérivées sur les signaux de commande

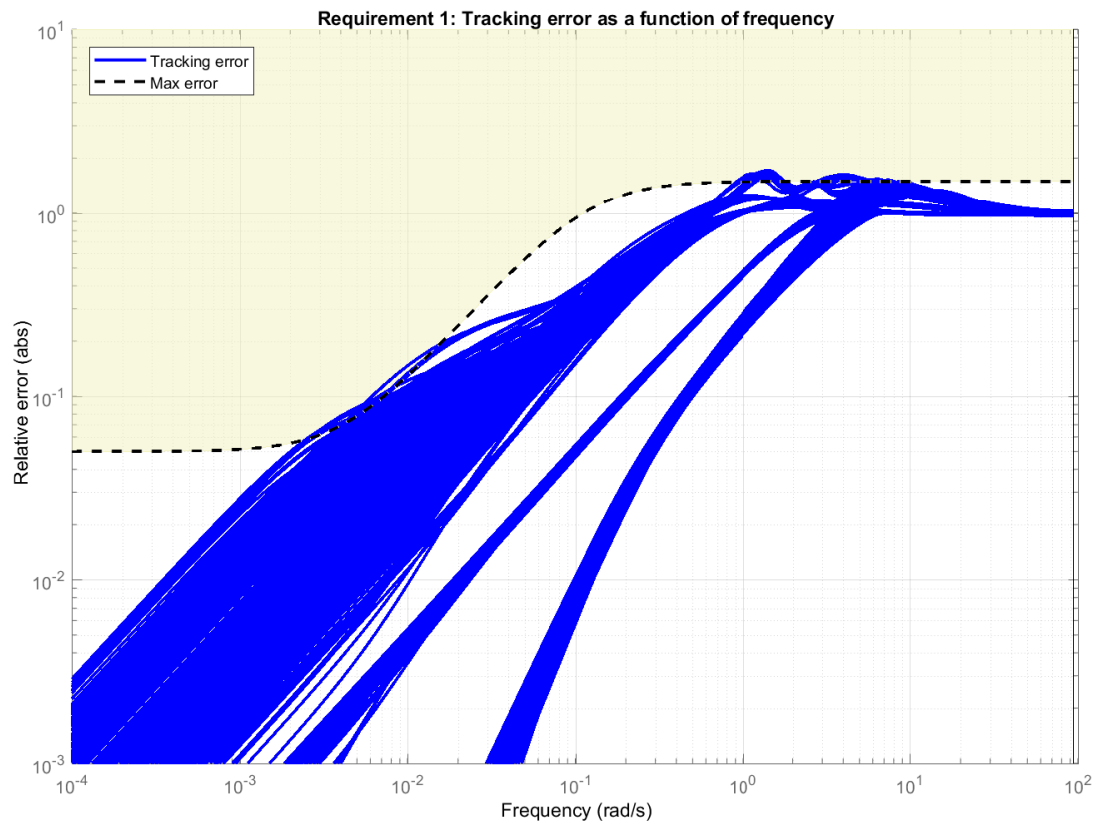


Figure 4.23 Critères de suivi de consigne (non nominal)

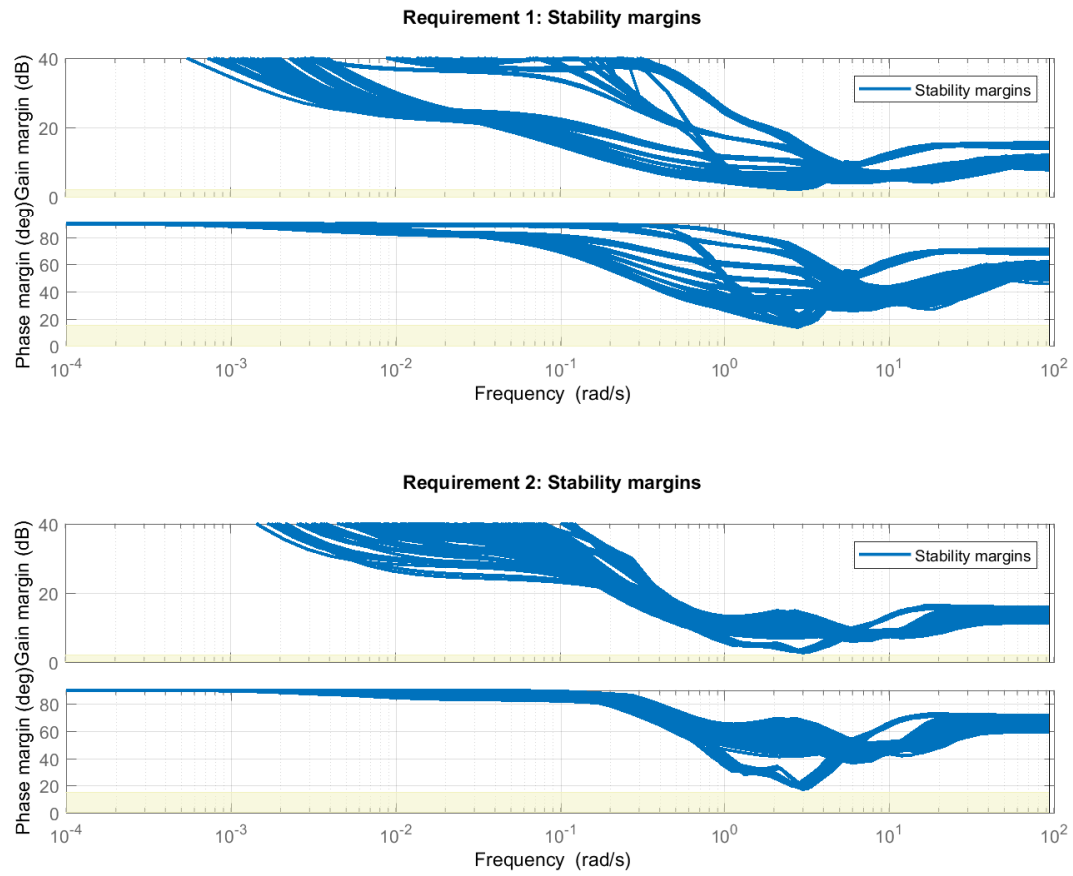


Figure 4.24 Critères de marge de stabilité (non nominal)

4.5.4 Résultats

La synthèse est réalisée en trois étapes, soient :

- synthèse avec les cas nominaux seulement ;
- synthèse avec les cas nominaux et les cas à pleine charge ;
- synthèse complète avec tous les cas considérés.

La première étape²³ a sa matrice de mixage libre d'être modifiée et considère seulement les modèles les plus importants et les plus faciles à régler (modèles nominaux). Les valeurs initiales des gains sont celles trouvées lors de la synthèse pour vol stationnaire et sont donc constantes. Les gains obtenus satisfont tous les requis ; toutes les valeurs de coût γ sont inférieures à 1 (voir tableau 4.14). La matrice trouvée est

$$\mathbf{B}_{mix} = \begin{bmatrix} 0.0293 & 0.5316 & 0.0002 & -0.0095 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2133 & -0.5325 & 0.0539 & 0.0001 \\ 0.0226 & -0.0000 & -0.0221 & -0.0158 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2355 & 0.3486 & -0.0374 & 0.0047 \end{bmatrix}$$

Le réglage de cette matrice avait pour contrainte de ne pas avoir d'éléments plus grands que un. Cela peut expliquer le choix d'avoir des valeurs de mixage plus faibles pour certains éléments afin de favoriser l'influence d'autres entrées. Le jeu de gains séquencés obtenu est utilisé pour l'étape suivante comme point de départ, et la matrice de mixage trouvée est imposée pour le reste de la synthèse.

La deuxième étape²⁴ de synthèse inclut les cas à pleine charge utile. Ces cas ont été identifiés comme les plus problématiques lorsque la synthèse du contrôleur ne les considère pas (voir la sous-section 4.2.4). Cette étape vise à régler les gains en prenant ces cas problématiques en compte et en ne s'attardant qu'à eux, puisque les requis pour les cas nominaux sont déjà satisfaits.

23. Le temps de calcul pour la première synthèse a été de 389 s (6.5 min) pour la première itération (avec initialisation) et de 3290 s (55 min) pour 6 itérations (dont 5 avec initialisation aléatoire) en utilisant MATLAB 2017a sur un ordinateur avec Windows 7, un processeur Intel i7-6500U dual-core à 2.50GHz, et une mémoire vive de 8GB.

24. Le temps de calcul pour la deuxième synthèse a été de 834 s (13.9 min) pour la première itération (avec initialisation) et de 9825 s (2 h et 44 min) pour 6 itérations (dont 5 avec initialisation aléatoire) en utilisant MATLAB 2017a sur un ordinateur avec Windows 7, un processeur Intel i7-6500U dual-core à 2.50GHz, et une mémoire vive de 8GB.

Tableau 4.14 Valeurs des γ , synthèse nominale

Suivi de consigne	
Sortie	γ
Toutes	0.9379
Marges	
Emplacement	γ
Entrée du système (W_{MI})	0.9379
Sortie du système (W_{MO})	0.8352
Limite des actionneurs	
Emplacement	γ
Entrée du système	0.9998
Influence sur la commande	
Sortie	γ
$\phi, p, q, r, \ddot{z}$	0.9998

La troisième étape²⁵ utilise le jeu de gains trouvé à la deuxième étape et le règle en considérant tous les cas possibles. Étant donné le nombre de systèmes linéarisés considérés, il est appréciable d’avoir déjà un jeu de gains satisfaisant pour les cas les plus critiques, ce qui concentre les efforts de calcul²⁶ à améliorer les cas avec des charges utiles débalancées.

Les tableaux 4.15 et 4.16 présentent les coûts (γ) obtenus et les figures 4.19 à 4.22 permettent de vérifier que les résultats sont acceptables lorsque comparés aux requis imposés. La figure 4.25 présente quant à elle les réponses temporelles du système linéarisé pour toutes les conditions de vol pour les entrées suivantes :

- en ϕ , un échelon de 10° ;
- en θ , un échelon de 10° ;
- en ψ , une rampe de $10^\circ/s$ jusqu’à 90° ;
- en w , un échelon de 1 m/s.

Ces entrées ont été choisies après quelques essais sur le simulateur haute fidélité, notamment pour ψ . En effet, les utilisateurs potentiels pourraient vouloir commander de grands angles

25. Le temps de calcul pour la troisième synthèse a été de 22491 s (6h 15min) pour la première itération (avec initialisation) et de 61285 s (17 h et 2 min) pour 6 itérations (dont 5 avec initialisation aléatoire) en utilisant MATLAB 2017a sur un ordinateur avec Windows 7, un processeur Intel i7-6500U dual-core à 2.50GHz, et une mémoire vive de 8GB.

26. L’économie en effort de calcul n’est valide que pour la première itération de l’algorithme. Comme prévu, l’algorithme a été lancé à plusieurs reprises, mais bon nombre de ces itérations ne parviennent pas à trouver un contrôleur stabilisant (bien que ce nombre soit réduit grâce au choix de conserver la matrice de mixage de la première synthèse). Cela souligne l’avantage d’avoir un bon point de départ pour la synthèse. À titre indicatif, une synthèse complète en une seule étape avec sa matrice de mixage libre peut prendre 19 h pour une itération avec le réglage du vol stationnaire comme condition initiale (comparativement à un peu moins de 21 h pour le processus en 3 étapes avec 6 itérations par étape).

de virage qui déstabiliseraient l'appareil, mais considérer ces grands virages donnerait de piètres performances pour les petits changements de cap. La solution la plus simple est d'imposer un limiteur de commande à l'entrée du PID responsable du contrôle de ψ , ce qui a été implémentée dans le simulateur haute fidélité. Les réponses temporelles semblent satisfaisantes, même si un couplage notable est remarqué pour ϕ lorsqu'un angle θ ou ψ est commandé. Un tel couplage n'est pas surprenant en raison des charges utiles débalancées latéralement, et son amplitude reste acceptable.

Tableau 4.15 Valeurs des γ , synthèse complète (nominal)

Suivi de consigne	
Sortie	γ
Toutes	1.1530
Marges	
Emplacement	γ
Entrée du système (W_{MI})	1.0735
Sortie du système (W_{MO})	0.8681
Limite des actionneurs	
Emplacement	γ
Entrée du système	0.9997
Influence sur la commande	
Sortie	γ
$\phi, p, q, r, \ddot{z}$	0.9997

Tableau 4.16 Valeurs des γ , synthèse complète (non nominal)

Suivi de consigne	
Sortie	γ
Toutes	1.1530
Marges	
Emplacement	γ
Entrée du système (W_{MI})	1.1530
Sortie du système (W_{MO})	1.0016
Limite des actionneurs	
Emplacement	γ
Entrée du système	0.9997
Influence sur la commande	
Sortie	γ
$\phi, p, q, r, \ddot{z}$	0.9997

Le jeu de gains retenu à la fin de cette synthèse est présenté à la figure 4.26. Les gains y sont représentés en fonction de la vitesse de l'appareil pour montrer leur séquençement.

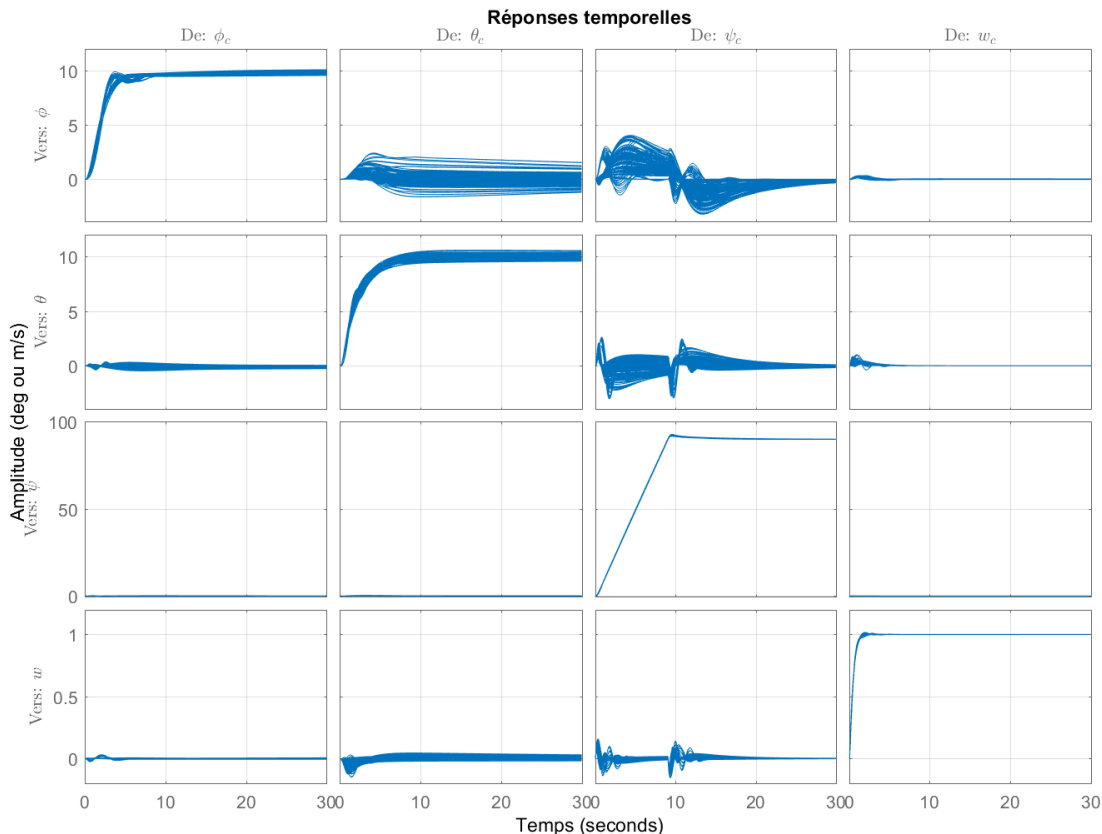


Figure 4.25 Réponses temporelles du système linéaire (toutes les configurations, synthèse complète)

Les gains associés à ψ et w sont plus grands que ceux de ϕ et θ en raison des valeurs des éléments associés à ces entrées dans la matrice de mixage imposée. La courbe continue («Calculé») représente les gains trouvés par l'algorithme, et la courbe pointillée linéaire par morceaux («Approximé») est son approximation. Cette approximation vise à obtenir la plus petite erreur d'approximation possible et est libre de gérer les nœuds²⁷ pour chaque gain. Les nœuds associés aux plus grandes erreurs sont retenus et une seconde approximation est réalisée en fixant les nœuds à ces valeurs. Cela a pour effet d'empêcher d'avoir des erreurs plus grandes que les pires erreurs rencontrées lors de la première approximation, et d'avoir des nœuds identiques pour tous les gains. Cette seconde approximation est illustrée par la courbe pleine linéaire par morceaux («Implémenté») et représente comment les gains sont réellement implémentés.

27. Un nœud est le point où deux segments de droite se rencontrent.

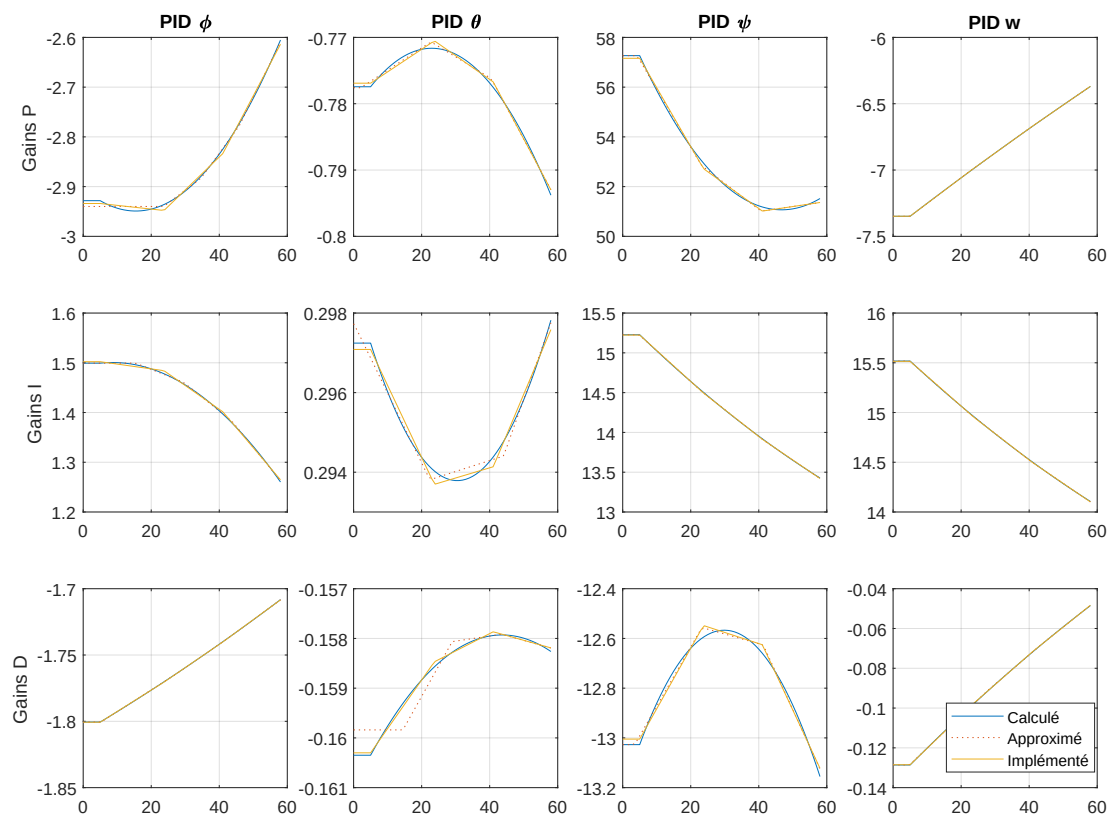


Figure 4.26 Gains séquencés retenus (fonction de la vitesse en m/s)

CHAPITRE 5 IMPLÉMENTATION

La conception étant terminée, les lois de commande bas niveau sont implémentée sur la plateforme d'autopilotage. Cette implémentation touche trois volets, soient : l'implémentation de l'architecture des boucles de commande, le calcul des gains à implémenter, et la procédure de décollage et d'atterrissage.

5.1 Implémentation du contrôleur sur la plateforme MicroPilot

Le contrôleur est implémenté sur la plateforme embarquée en utilisant le logiciel *XTENDER^{MP}*. Ce logiciel de MicroPilot, le fabricant de la plateforme utilisée, permet d'accéder aux fonctionnements internes des boucles de contrôle et de les modifier. Il est donc possible d'adapter les boucles de contrôle intégrées de la plateforme à l'architecture désirée. Cette architecture a été conçue de manière à limiter les changements requis afin de ne pas encombrer le processeur de la plateforme. Il est important de ne pas encombrer le processeur afin d'éviter qu'il ne prenne du retard entre deux échantillons¹.

5.1.1 Implémentation des PID

Les boucles intégrées sont 4 PID en parallèle utilisant les mesures désirées, l'erreur de suivi et l'intégrale temporelle de cette erreur. Or, l'architecture désirée utilise les gains proportionnel et dérivé comme retour d'état, au lieu d'avoir le gain proportionnel multiplier l'erreur de suivi. Les boucles sont donc modifiées afin de retirer le produit de la valeur désirée et du gain proportionnel à chaque PID. Cette opération est illustrée en pointillé à la figure 5.2, afin d'obtenir la fonctionnalité désirée à la figure 5.1. La compensation y est aussi indiquée en pointillé, puisque celle-ci doit aussi être ajoutée à l'aide de code personnalisé. Étant donné que le code personnalisé s'exécute après l'application des limiteurs, l'opération des limiteurs doit être reproduite dans le code personnalisé (indiqué en pointillé).

1. MicroPilot met en garde les utilisateurs de la plateforme que le processeur pourrait ne pas être en mesure de respecter la fréquence d'échantillonnage de 30 Hz s'il y a trop d'opérations à effectuer. La fréquence doit être vérifiée une fois l'implémentation terminée, puisqu'aucun mécanisme n'est en place dans la plateforme pour effectuer cette vérification.

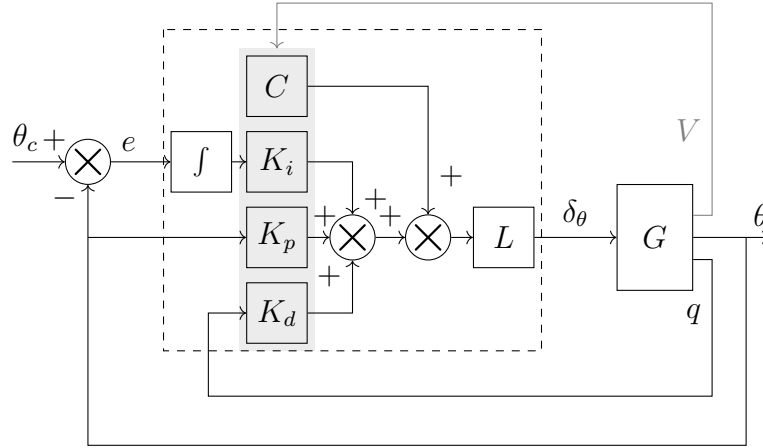


Figure 5.1 Architecture désirée d'un contrôleur PID (exemple pour θ)

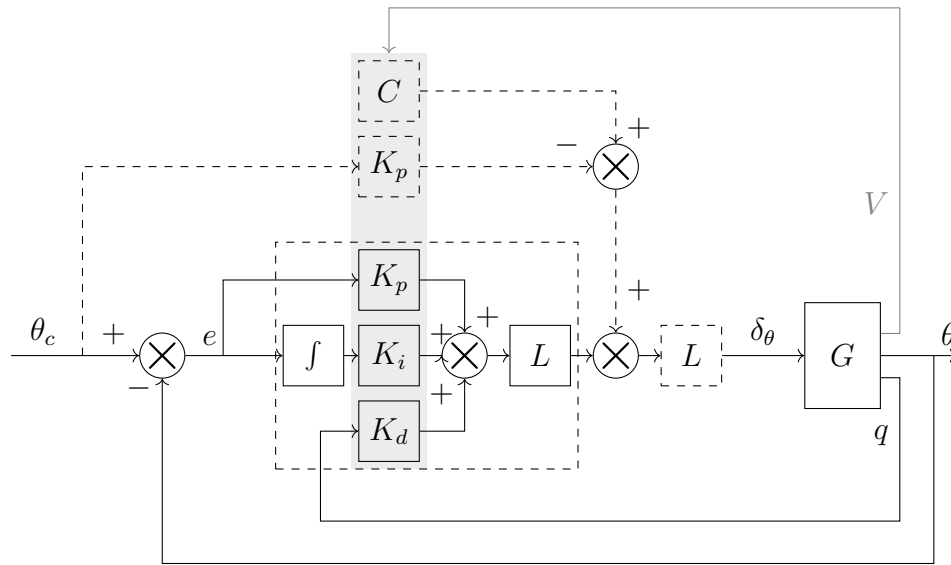


Figure 5.2 Architecture implémentée d'un contrôleur PID (exemple pour θ)

Pour ce faire, les événements² accessibles avec $XTENDER^{MP}$ sont utilisés. Ceux-ci permettent de sauvegarder les gains utilisés par la boucle pour l'itération courante (p. ex. `USER_PID_UPDATE_EL_FROM_PITCH` pour la boucle de θ «*Elevator from Pitch*») et de modifier le résultat d'une boucle (p. ex. `USER_POST_PID_EL_FROM_PITCH` pour la boucle de θ

2. En programmation orientée objet, le concept d'«événement» permet à des fonctions logicielles d'être exécutées au moment précis où une condition a été remplie. Lorsque cette condition est remplie (p. ex. un temps donné, lorsqu'une action précisée est réalisée, etc.), la plateforme lance une alerte associée à la condition (appelé l'«événement»). Cette alerte signale que la condition vient d'avoir lieu, et toutes les fonctions en attente de cet événement reçoivent l'alerte et s'exécutent en conséquence. L'événement est un objet logiciel en soi ; il comporte des propriétés, ce qui permet aux fonctions y réagissant de s'adapter à ces propriétés (p. ex. un événement survient lorsqu'un PID a terminé son calcul et a le résultat du calcul comme propriété).

«*Elevator from Pitch*»). Le bon gain proportionnel, qui sera séquencé en fonction de la vitesse aérodynamique, peut donc être utilisé pendant la correction.

De plus, quatre jeux de gains sont disponibles pour le séquençement des gains ; ces jeux servent de nœuds pour les interpolations linéaires réalisées afin de calculer les gains (voir la figure 5.3). Bien que plus de jeux puissent être implémentés à l’aide de *XTENDER^{MP}* et qu’il soit possible de changer la variable responsable du séquençement³, un tel changement n’est pas envisagé pour le moment afin d’éviter autant que possible d’encombrer la plateforme avec du code personnalisé. Un autre changement possible est l’ajout d’un terme d’action directe (*feedforward*) afin de diminuer le code personnalisé pour chaque boucle PID, mais cette architecture alternative demande d’autres modifications au niveau du décollage et de l’atterrissage (voir l’Annexe D pour plus de détails).

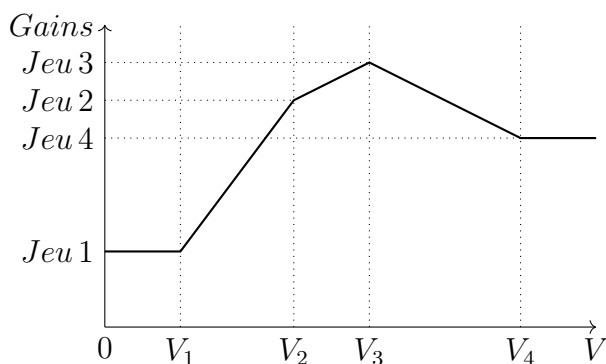


Figure 5.3 Exemple d’un séquençement de gain tel qu’implémenté par la plateforme utilisée

Par la suite, la compensation est ajoutée lors de la modification du résultat de la boucle (p. ex. lors de l’évènement `USER_POST_PID_EL_FROM_PITCH`). Cette compensation permet de diminuer les risques d’accumulations indésirables (*windup*) par les intégrateurs en diminuant leur charge de travail. La valeur de la compensation est issue d’un tableau de référence personnalisable (*User Lookup Table*⁴). Contrairement au séquençement des gains, les tableaux utilisés pour la compensation utilisent 8 valeurs pour réaliser ses interpolations, offrant donc plus de liberté lors des choix des valeurs de compensation. Cependant, l’interpolation de ces tableaux s’effectue après le calcul des boucles PID, ce qui introduit un délai d’une itération dans la mise à jour de la valeur de compensation. Ce délai devrait avoir un impact négligeable grâce à la présence du terme intégral de la boucle.

3. La vitesse mesurée par le tube de pitot (*Airspeed*) est la variable utilisée par défaut. Malheureusement, il est possible que cette mesure soit trop bruitée pour être utilisée comme variable de séquençement. Si tel est le cas, du code *XTENDER^{MP}* peut être utilisé pour prendre une autre variable (ou même plus), comme la vitesse donnée par le module GPS.

4. MicroPilot appelle ces tableaux «*User Table Lookup*» (TLU).

Finalement, les opérations de saturation et de limite de vitesse de variation de la valeur de sortie du PID sont exécutées à la fin du code personnalisé modifiant le résultat des calculs du PID. Ces opérations sont simplement une comparaison de la valeur de sortie avec les limites de saturation, et une comparaison de la variation depuis l'itération précédente avec la variation limite autorisée.

5.1.2 Implémentation du mixage des commandes

Les signaux sortants des PID doivent être mixés pour obtenir les pas collectifs et cycliques désirés, qui eux-mêmes doivent être mixés pour obtenir les angles de servomoteurs à commander. Ces deux mixages⁵ sont implémentés à l'aide de code *XTENDER^{MP}* qui intervient après le calcul des PIDs et juste avant la mise à jour des signaux envoyés aux servomoteurs (soit lors de l'évènement `USER_COMPLETE_SERVO_CONTROL`).

Pour le premier mixage, la matrice de mélange obtenue lors de la synthèse du contrôleur est utilisée directement.

Avant le second mixage, la compensation en pas cycliques longitudinaux est ajoutée aux signaux des pas collectifs et cycliques désirés. Cette compensation, tout comme la compensation des PID, est issue de deux tableaux de référence personnalisables (avec ses avantages et inconvénients discutés à la sous-section 5.1.1).

Pour le second mixage, une approximation linéaire doit être faite afin d'obtenir une deuxième matrice étant donné les limites de l'espace mémoire disponible sur la plateforme. En effet, les fonctions sinusoïdales prennent trop d'espace mémoire une fois compilées, au point d'excéder la limite d'espace de la plateforme. La plage de déplacements des servomoteurs étant considérée petite, l'approximation devrait suffire, mais un séquençement de cette matrice serait possible pour différents points de linéarisation.

Une conversion d'unités doit aussi être faite afin d'assurer de bien mixer les signaux (voir la sous-section suivante).

5.2 Calcul des gains implémentés

Les signaux entrants et sortants des PID imbriqués utilisent des unités «machine» ; étant donnée la nature des microcontrôleurs, MicroPilot a décidé d'implémenter ses signaux à l'aide

5. À la requête des partenaires industriels, une matrice de pré-mixage a été ajoutée avant les deux étapes de mixage présentées. Ce pré-mixage sert à ajuster rapidement les 4 signaux reçus pour le mixage afin d'avoir de la flexibilité lors des premiers tests en vol, si cela s'avérait nécessaire. La matrice de pré-mixage sera accessible aux utilisateurs pour modification en temps réel, contrairement aux deux autres matrices de mixage nécessitant une recompilation du code personnalisé.

de nombres entiers. Ce choix leur permet d'implémenter les opérations mathématiques de base pour qu'ils s'exécutent beaucoup plus rapidement et à coût plus faible. Les inconvénients de ce choix sont le besoin de convertir les signaux, la saturation des nombres en mémoire, et la difficulté d'utiliser des nombres décimaux dans le code personnalisé.

Les unités «machine» des signaux d'intérêt sont présentées au Tableau 5.1, ainsi que les unités dans lequel les gains ont été calculés.

Tableau 5.1 Conversion d'unités

PID	Unités machine	Unités SI	Facteur de conversion (pour les gains)	Unités à la sortie
ϕ	rad $\times 1024$	rad	K_s	rad $\times 1024$
θ	rad $\times 1024$	rad	K_s	rad $\times 1024$
ψ	rad $\times 1024$	rad	K_s	rad $\times 1024$
w	ft/s $\times 8$	m/s	$K_s \times 0.3048 \times 1024/8$	m/s $\times 1024$

Étant données les valeurs des gains à implémenter, une simple conversion en unités du Système International (SI) ne permet pas d'obtenir un gain entier et un arrondissement réduirait certains gains à 0. La solution utilisée pour pallier à ce problème est de multiplier les mesures par 1024 (d'où les unités «machine» pour les angles d'Euler). Pour les mêmes raisons, le même facteur de 1024 est conservé à la sortie du premier mixage. Cependant, les gains doivent aussi être représentés par des nombres entiers. Pour éviter de gonfler davantage les valeurs de sortie en augmentant le facteur⁶ d'échelle, des bits de décalage seront utilisés (le facteur $K_s = 2^b$ dans le tableau, où b est le nombre de bits de décalage). Le nombre de bits de décalage désiré pour un PID peut être réglé à l'aide des champs `pidShiftPa`, `pidShiftIa`, `pidShiftDa`, `pidShiftDDa` (pour les gains P, I, D et d'action directe) de chaque PID (la lettre `a` désignant le séquençement 1 du PID, les autres séquençements⁷ utilisant `b`, `c` et `d`). Ces champs servent à indiquer à la plateforme que le gain visé a été décalé d'un certain nombre de bits afin d'avoir un nombre entier. La plateforme va décaler (dans le sens inverse) de ce nombre de bits le produit du signal de mesure et du gain décalé⁸, ce qui permet de conserver les unités désirées.

6. Utiliser un facteur de 1024 pour les gains donnerait un facteur de 1024^2 pour les valeurs de sortie, ce qui n'est pas implémentable étant donné l'espace mémoire alloué par la plateforme aux gains (16bits).

7. La version actuelle de l'autopilote ne supporte pas les différents bits de décalage. Les bits de séquençements `b`, `c` et `d` seront ignorés et assumés égaux à celui de `a` par la plateforme.

8. Comme seulement des nombres entiers sont utilisés, le produit du gain et du signal de mesure donne un nombre entier beaucoup plus grand. En utilisant le décalage de bits, la valeur du gain est augmentée pour ne pas perdre de précision et celle du produit est diminuée. La perte de bits du produit n'impacte pas la précision comme il s'agit souvent de chiffres non significatifs. Exemple : $10.0301 \times 0.002523 = 0.0253059423$, ce qui donne 0.02531 lorsque les chiffres significatifs sont considérés.

Toutes les valeurs sont divisées par 1024 durant le mixage, puisqu’une conversion en pourcentage de déplacement de servomoteur y est exigée⁹. Cela signifie que les gains des boucles¹⁰ ϕ , θ et ψ sont implémentés sans conversion, avec un décalage d’un nombre de bits pour avoir un minimum de précision, et que les gains de la boucle w sont multipliés d’un facteur de 39 ($0.3048 \times 1024/8$) avant décalage.

5.3 Procédure de décollage et d’atterrissage

La procédure de décollage et d’atterrissage se base sur les procédures imbriquées dans la plateforme d’autopilotage.

La procédure de décollage se déroule comme suit :

- le moteur est démarré manuellement et son régime est augmenté graduellement jusqu’à un niveau bas (réglable) pour vérification¹¹ ;
- ce régime est maintenu pendant quelques secondes le temps que les vérifications soient effectuées par la plateforme, comme valider l’absence d’erreurs au niveau des capteurs ;
- s’il n’y a pas d’erreurs, le régime du moteur est augmenté graduellement jusqu’à sa valeur nominale, mais assez rapidement pour éviter d’exciter la fréquence de résonance de l’appareil¹² ;
- l’appareil quitte éventuellement le sol¹³ ;
- les termes intégraux des boucles PID sont activés et la vitesse verticale désirée est réglée au maximum permis ;
- la procédure de décollage est considérée terminée une seconde après que l’appareil ait quitté le sol, permettant aux valeurs désirées des boucles d’accepter de nouvelles valeurs.

À la fin de la procédure, l’hélicoptère continue à monter jusqu’à l’altitude désirée, hors de l’effet de sol. Il est possible de commander des altitudes dans l’effet de sol, mais la prudence est de mise puisque l’appareil peut perdre de l’altitude rapidement s’il a une vitesse horizontale

9. Le facteur de conversion durant le mélange est $204 (2^{16}/(9\pi/180)/1024)$.

10. Ces conversions ne sont valides que pour l’architecture de PID utilisée. Pour l’architecture alternative utilisant des PIDs personnalisées (voir Annexe D), d’autres valeurs de conversion sont nécessaires puisque ces boucles font intervenir des mesures différentes.

11. Ce niveau «bas» de régime moteur doit être assez faible pour ne pas permettre à l’appareil de décoller et doit aussi être assez faible pour ne pas stimuler la résonance du train d’atterrissage.

12. Le risque de résonance mentionné est causé par le train d’atterrissage flexible (agissant comme un ressort), le rotor (agissant comme une force périodique sur le train d’atterrissage) et le fuselage (agissant comme l’élément inertiel) créant un système masse-ressort forcé (voir Seddon and Newman (2011)).

13. Le régime nominal du rotor devrait être atteint très peu de temps après cet événement. Si le régime nominal, avec la valeur minimale de pas collectifs aux rotors, ne permet pas à l’appareil de décoller, les pas collectifs peuvent être augmentés graduellement sans modifier la procédure (voir l’Annexe D.2 pour plus de détails).

trop rapide dans l'effet de sol.

La procédure d'atterrissage se déroule comme suit :

- l'hélicoptère se dirige vers la position d'atterrissage indiquée sans changer d'altitude ;
- la vitesse verticale désirée est réglée en descente (ce taux est réglable) ;
- la vitesse de descente est réduite lorsque le capteur AGL commence à donner des mesures valides¹⁴ ;
- l'appareil touche le sol ;
- le régime moteur est réduit graduellement à 0.

À la fin de cette procédure, l'hélicoptère est au sol avec le régime moteur le plus bas possible, prêt à être éteint manuellement.

Des détails supplémentaires sur ces procédures, ainsi qu'une alternative dans le cas où les PID personnalisés seraient utilisés, se trouvent à l'Annexe D.2.

Une note importante concernant ces procédures est que le régime moteur et les pas collectifs sont considérés liés par la plateforme ; la plateforme modifie les pas collectifs en fonction du régime moteur, et vice-versa. Ce lien peut causer des effets indésirables, comme une coupe accidentelle du moteur lors d'une descente ou un décollage prématuré. Pour éviter ces effets néfastes, l'implémentation de ce lien vient forcer le moteur à être en régime nominal pour toute la plage de pas collectifs considérés, et vient forcer le pas collectif minimal pour tout régime du moteur qui est inférieur au régime nominal. Plus de détails se trouvent à l'Annexe D.2.

14. Le capteur AGL donne une distance par rapport au sol (contrairement au capteur utilisé en vol qui donne une mesure moins précise et par rapport au niveau de la mer). Cependant, ce capteur donne des mesures très bruitées et inutilisables lorsque l'altitude est trop grande, d'où l'utilisation d'un autre capteur en vol.

CHAPITRE 6 VALIDATION

Ce chapitre présente les simulations effectuées pour valider le contrôleur conçu à l'aide de la synthèse robuste. Le contrôleur est d'abord validé sur le modèle non linéaire simplifié (basse fidélité) réalisé sur SIMULINK. Ensuite, la validation est faite sur le modèle non linéaire complet (moyenne fidélité) qui est, encore une fois, sur SIMULINK. Finalement, pour la validation présentée dans ce mémoire, les résultats de simulation haute fidélité (réalisée à l'aide d'HELISIM) sont présentés. Les essais sur l'hélicoptère et les tests en vol sont en cours au moment de l'écriture de ce mémoire, et n'ont pas pu être inclus dans le présent document. L'objectif de ces simulations est de montrer la capacité de l'appareil d'effectuer les manœuvres suivantes :

1. une translation latérale (en vol stationnaire) ;
2. un virage d'un quart de tour (en vol stationnaire) ;
3. atteinte de la vitesse maximale.

Il est attendu que ces manœuvres soient accomplies dans le respects des limites de l'appareil.

Les manœuvres en vitesse de croisière, telles que les virages coordonnés, ne seront pas testées. L'absence des lois de commande de haut niveau responsables de la coordination des virages rend difficile la validation de ces manœuvres de manière automatique¹.

6.1 Simulations du modèle non linéaire (Matlab/Simulink)

Les deux modèles non linéaires réalisés à l'aide de SIMULINK diffèrent en ce qui a trait à la modélisation des rotors, des interférences aérodynamiques, et des servomoteurs (voir Chapitre 3). Une autre différence réside dans l'inertie du réservoir ; le modèle du réservoir du simulateur haute fidélité diffère de ce qui a été présenté. Afin de permettre une comparaison, ce modèle modifié du réservoir a été implémenté dans le modèle simplifié (basse fidélité), mais pas dans le modèle complet. L'effet de ce changement d'inertie ne semble pas significatif, puisque le modèle modifié donne un peu plus d'inertie à l'appareil, ce qui aide à sa stabilité.

1. Une démonstration réalisée manuellement a été présentée aux partenaires industriels du projet CARIC AUT-703_TRL4+ pour présenter les performances du contrôleur trouvé en vol de croisière. Il est à noter qu'un glissement causant une vitesse latérale supérieure à 10 m/s risque de déstabiliser l'appareil en raison des effets aérodynamiques (non pris en compte) sur les rotors.

6.1.1 Simulation du modèle simplifié

La simulation sur le modèle simplifié cherche à montrer la capacité de l'appareil à réaliser les trois manœuvres considérées. La figure 6.1 montre que cet objectif de validation a été accompli sans atteindre les limites des servomoteurs². Les angles commandés sont indiqués à l'aide de la courbe pointillée noire (avec et sans la saturation en vitesse pour la commande en ψ). Les dix premières secondes de simulation permettent à l'appareil d'atteindre un équilibre en vol stationnaire³ avant que les manœuvres ne débutent.

Manœuvre #1 La translation latérale consiste à commander un grand angle de ϕ d'un côté pour accumuler de la vitesse latérale (10°), puis de commander un grand angle de signe opposé (-10°) pour ramener la vitesse latérale à zéro. Lors de cette manœuvre, un couplage en θ apparaît, notamment lors de la décélération correspondant à un échelon de -20° en ϕ . Ce couplage est acceptable même dans le pire des cas, validant ainsi la capacité de l'appareil à réaliser une translation latérale en vol stationnaire.

Manœuvre #2 Le virage d'un quart de tour en vol stationnaire, soit une commande en ψ de 90° , prend environ 10 s. Cela montre que le contrôle en ψ est en mesure de suivre la commande donnée, qui est limitée à $10^\circ/\text{s}$. Un couplage minime est habituellement observé, sauf dans quelques cas extrêmes où θ est perturbé de quelques degrés. Comme cette perturbation ne semble pas avoir d'impact significatif sur la vitesse V , le couplage en θ est considéré acceptable.

Manœuvre #3 L'accélération de l'appareil consiste à incliner l'appareil vers l'avant, soit une commande en θ de -10° , et de maintenir cet angle. Un premier constat est que l'appareil est en mesure de dépasser la vitesse maximale ciblée (courbe pointillée rouge). Ceci est possiblement causé par les simplifications apportées à ce modèle non linéaire en ce qui a trait aux interférences aérodynamiques. Un deuxième constat est que la réponse temporelle en θ est perturbée durant les 20 premières secondes de l'accélération, soit le temps que θ met à atteindre la valeur commandée. Ce phénomène est facilement expliqué lorsque l'on examine la courbe de V ; la perturbation observée en θ survient au moment où la vitesse dépasse les 5 m/s (courbe pointillée bleue), c'est-à-dire lorsque l'appareil entame sa transition du vol stationnaire au vol de croisière. Cette perturbation est vraisemblablement causée par le fait que toutes les valeurs séquencées (gains et compensations) se mettent subitement à évoluer en fonction de la vitesse. La figure 6.2 présente une vue agrandie des courbes lors de l'accélération. Il y est possible d'apprécier l'absence de perturbations causées par le

2. L'atteinte des limites des servomoteurs est facilement observable lorsqu'elle a lieu, puisqu'elle a tendance à plonger l'appareil dans un cycle limite en raison de l'absence de limiteur d'accumulation (*Anti-windup*).

3. Les angles de ϕ et de θ commandés au temps 0 sont ceux permettant l'équilibre pour le cas nominal.

séquençement des gains et de la compensation, démontrant ainsi l'effet bénéfique d'inclure les termes couplés cachés lors de la synthèse (voir la sous-section 4.5.1). En effet, la figure 6.3 est présentée à titre d'exemple de réponses temporelles lorsque les termes couplés cachés ne sont pas pris en compte lors de la synthèse ; On y remarque l'incapacité de l'appareil à conserver les angles θ et ψ commandés. D'autres perturbations surviennent lorsque la vitesse maximale est dépassée, ce qui est compréhensible étant donné l'arrêt soudain du séquençement des pas cycliques longitudinaux.

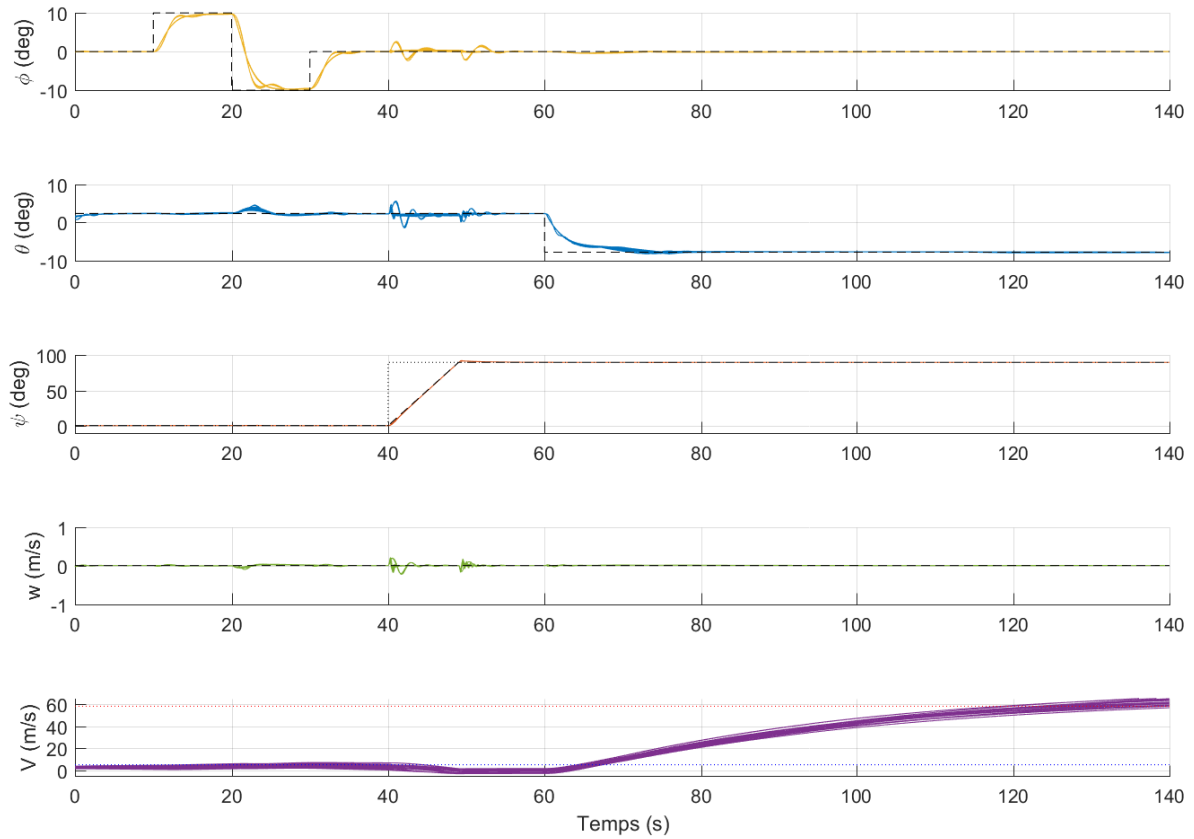


Figure 6.1 Réponses temporelles du système non linéaire simplifié (toutes les configurations)

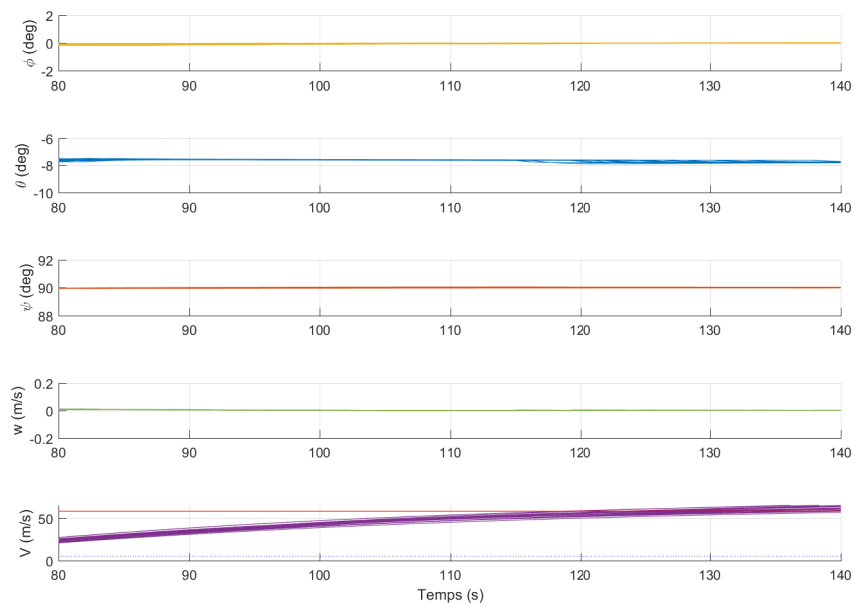


Figure 6.2 Réponses temporelles du système non linéaire simplifié (toutes les configurations)
- Vue agrandie du vol de croisière

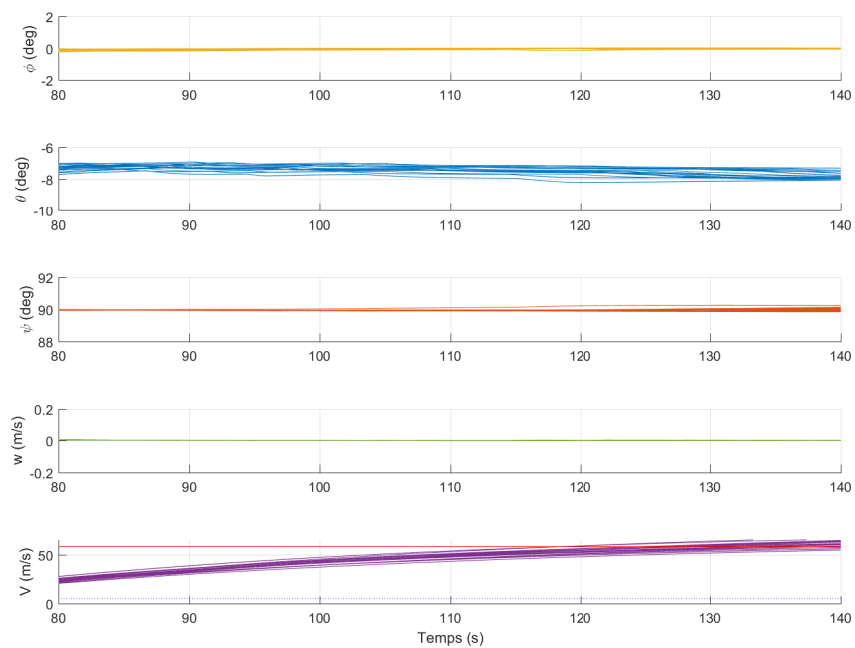


Figure 6.3 Exemple de réponses temporelles du système non linéaire simplifié (toutes les configurations) sans considération des termes couplés cachés - Vue agrandie du vol de croisière

6.1.2 Simulation du modèle complet

La simulation sur le modèle complet ne considère que le modèle nominal en raison du temps requis pour réaliser celle-ci⁴, de certaines instabilités numériques survenant pour certaines configurations⁵, et du peu de différences observées dans les réponses temporelles lorsque comparées avec celles du modèle simplifié.

Les réponses temporelles du système non linéaire complet pour la configuration nominale (sans charge utile, plein d'essence) sont illustrées à la figure 6.4. En n'ayant qu'une seule configuration, il est plus facile de distinguer les erreurs de suivi. Les deux seules différences sont observées en regardant les courbes de θ et de V . En effet, le couplage en θ semble un peu plus prononcé lors de la décélération latérale et la vitesse maximale est atteinte beaucoup plus rapidement. Le couplage en θ et l'accélération plus significative semblent être causés⁶ par le modèle complet du rotor qui estime une poussée légèrement plus grande pour un même pas collectif.

4. SIMULINK met au moins 10 fois plus de temps à réaliser la simulation du modèle complet, que celui du modèle simplifié (qui met au moins une heure). Étant donné que l'ordinateur utilisé peut difficilement accomplir d'autres tâches lorsqu'une simulation est en cours, les simulations ont été réalisées la nuit.

5. Le modèle complet comporte plusieurs boucles algébriques pouvant demander beaucoup d'efforts de calcul au logiciel SIMULINK, qui peut abandonner le calcul automatiquement lorsque trop d'itérations ont été faites sans que les valeurs obtenues soient satisfaisantes. Certaines configurations semblent être sujettes à ce problème plus que d'autres. Cet abandon de calcul met fin à tout script en cours, forçant l'utilisateur à recommencer manuellement l'opération. L'ajout de délais à certains endroits du modèle SIMULINK pourrait régler ce problème, mais n'a pas été effectué.

6. La différence entre les modèles du réservoir n'explique pas ces phénomènes.

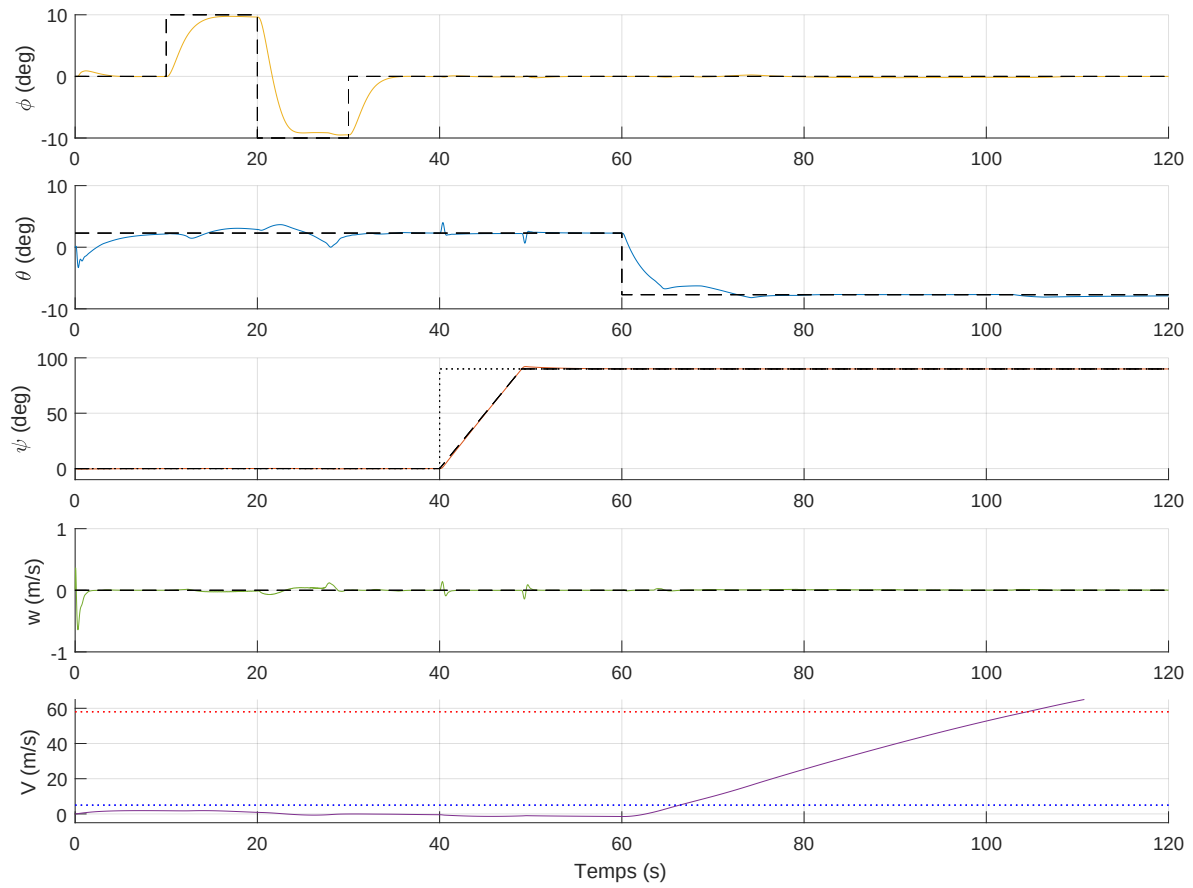


Figure 6.4 Réponses temporelles du système non linéaire complet (configuration nominale seulement)

6.2 Simulation haute fidélité (HeliSim)

La simulation haute fidélité vise à vérifier les résultats précédents, soit que le contrôleur trouvé stabilise le système pour toutes les conditions de vol et permette d'obtenir des performances acceptables pour des manœuvres de base. La manœuvre de translation latérale a été revue pour utiliser une commande en ϕ de $\pm 8^\circ$, au lieu de $\pm 10^\circ$, afin de respecter les limites en vitesses latérales de l'appareil. Le virage à 90° a été omis lors de la simulation présentée ici.

De plus, certaines fonctions n'ont pas encore été implémentées sur le simulateur haute fidélité, notamment la compensation des variables dynamiques et des commandes durant l'initialisation. Cela crée une perturbation initiale où le contrôleur tente de stabiliser l'appareil déséquilibré. Pour la majorité des cas, le contrôleur parvient à stabiliser l'appareil en deçà de dix secondes, mais les configurations sans essence n'ont pas assez d'inertie pour empêcher la perturbation initiale de devenir trop importante. En effet, la perturbation initiale force le contrôleur à saturer les commandes en pas cyclique latéral des rotors, atteignant ainsi les limites des actionneurs⁷. Le réglage des limites des termes intégrateurs (*Anti-windup limits*) pourrait empêcher le phénomène de cycle limite, et l'implémentation de la compensation lors de l'initialisation du simulateur permettrait de bien tester toutes les configurations étudiées.

La figure 6.5 présente les réponses temporelles obtenues pour toutes les configurations de charge utile incluant de l'essence (50% et 100% du niveau d'essence admissible). Les réponses observées sont similaires à celles obtenues précédemment (principalement celles du modèle complet), mis à part la courbe de vitesse V et le comportement de θ . En effet, les couplages en θ lors de commandes en ϕ semblent moins importants sur le simulateur haute fidélité. Cela s'explique par la modélisation plus complète de la traînée du simulateur haute fidélité, qui inclut les coefficients de traînée dépendants des vitesses angulaires. L'absence de perturbation en θ durant l'accélération est quant à elle causée par le fait que l'appareil a déjà franchi la transition du vol stationnaire au vol de croisière (courbe pointillée bleue) avant que l'accélération n'ait été commandée. La dernière différence notable est la vitesse maximale (courbe pointillée rouge) qui n'est jamais dépassée pour une commande en θ de -10° . Cela s'explique encore une fois par la modélisation plus fidèle ; les coefficients aérodynamiques varient dynamiquement en fonction de l'état du système, contrairement aux valeurs constantes utilisées dans les modèles à moyenne et faible fidélités, et les interférences aérodynamiques plus détaillées permettent de bien représenter les limites en vitesses de l'appareil prévues par le fabricant. La figure 6.6 présente une vue agrandie des courbes lors de l'accélération et du

7. Le phénomène de cycle limite, mentionné précédemment, a été observé. Une transition dynamique d'une configuration avec essence vers une configuration sans essence (en modifiant temporairement la consommation d'essence) permet de confirmer que la perturbation initiale est la cause de la saturation et du phénomène de cycle limite associé.

vol à vitesse maximale. L'absence de perturbations sur l'ensemble des courbes vient confirmer l'effet bénéfique de l'addition des termes couplés cachés dans la synthèse ; lors de simulations préliminaires, les contrôleurs où les termes couplés cachés avaient été ignorés présentaient de nombreuses perturbations coïncidant avec chaque nœud d'interpolation du séquençement (similaire à ce qui est observable à la figure 6.3). En plus de ces perturbations, des déviations causées par l'évolution des gains intégraux en fonction de la vitesse provoquaient des dérives en ψ au point où certaines configurations devenaient instables en raison de l'incapacité du contrôleur à s'adapter assez rapidement aux conditions changeantes du vol.

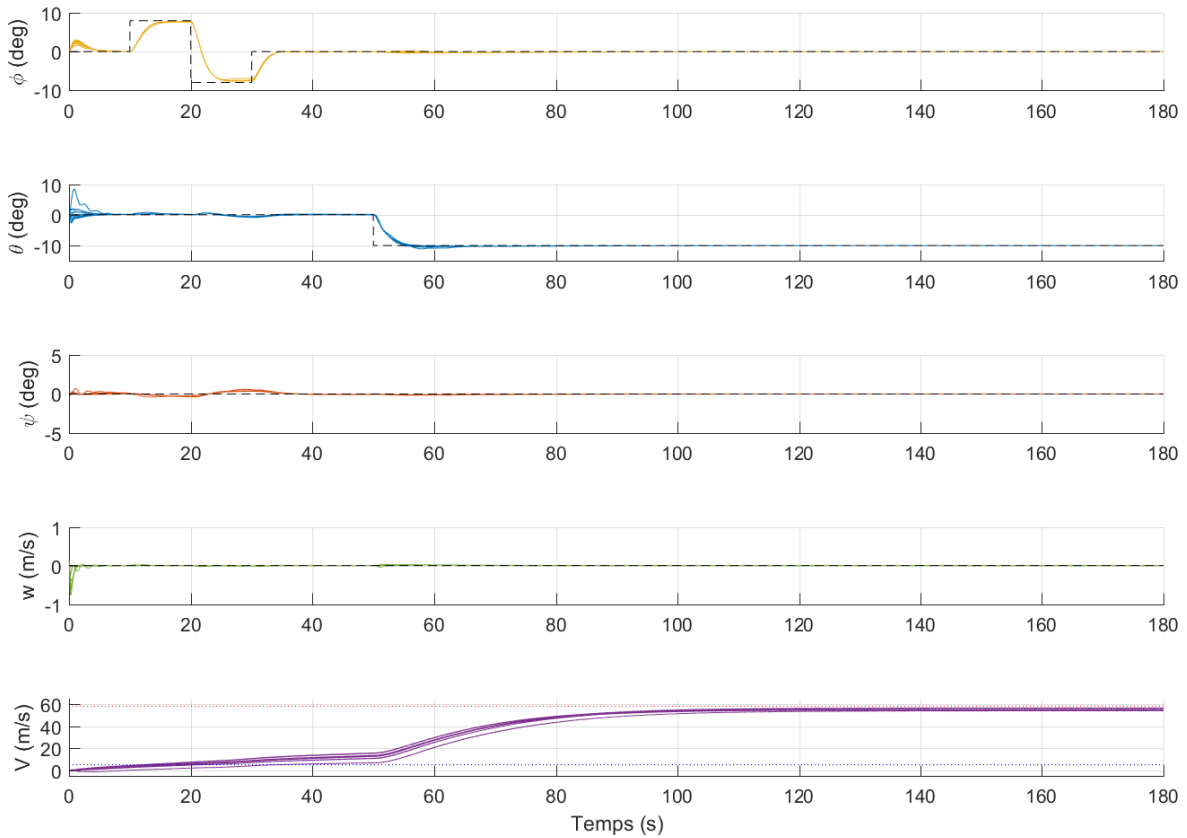


Figure 6.5 Réponses temporelles du système non linéaire sur simulateur haute fidélité (toutes configurations avec essence)

Sommes toutes, le contrôleur est satisfaisant dans la mesure où il assure la stabilité de l'appareil pour les conditions de vol considérées et permet à l'hélicoptère d'atteindre des performances acceptables.

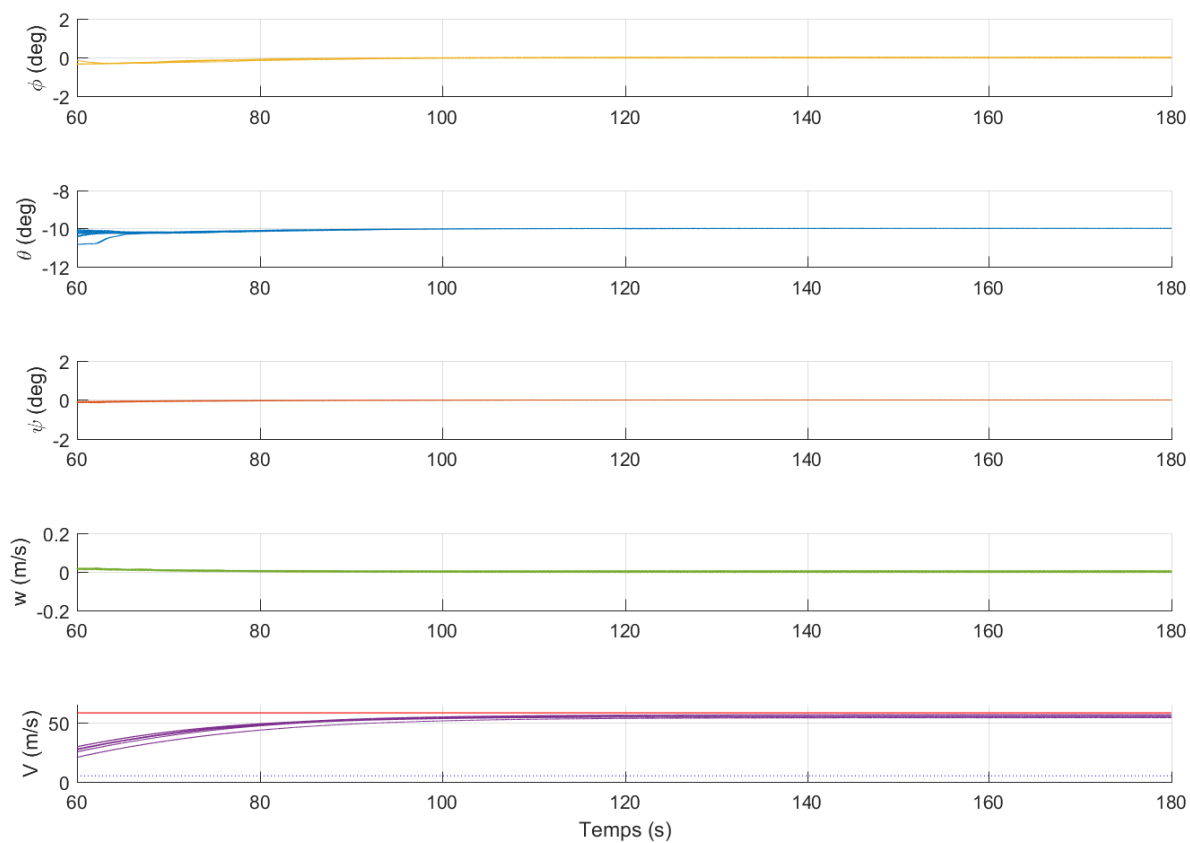


Figure 6.6 Réponses temporelles du système non linéaire sur simulateur haute fidélité (toutes configurations avec essence) - Vue agrandie du vol de croisière

CHAPITRE 7 CONCLUSION

Ce chapitre présente une synthèse des travaux réalisés, ainsi que les limites de la solution proposée et des améliorations à y apporter.

7.1 Synthèse des travaux

L'objectif principal de recherche des travaux présentés était de concevoir les lois de commande bas niveau pour un drone hélicoptère tandem. Ce drone est l'hélicoptère LX300 de Laflamme, dont les essais en vol bénéficieront de l'implémentation du contrôleur conçu. Afin de remplir cet objectif, il était nécessaire de modéliser un hélicoptère tandem et concevoir des lois de commande bas niveau pour en asservir les angles d'assiette et la vitesse verticale. La présentation de ces travaux a donc été divisée selon les thèmes de la modélisation, de la conception, de l'implémentation et de la validation.

L'hélicoptère étudié a été modélisé afin de pouvoir synthétiser les lois de commande bas niveau et afin de valider le contrôleur obtenu. La modélisation inclut, entre autres, la dynamique des rotors uniques, les interférences aérodynamiques, et le mécanisme de commande. Les effets de la charge utile sur la masse, le centrage et l'inertie ont aussi été explicités dans les équations cinématiques. La théorie des éléments de pale et les équations de Lagrange ont été utilisées afin de développer l'expression des forces et des moments générés par les rotors. Le tout a été implémenté sous SIMULINK en deux modèles, l'un complet et l'autre simplifié. Le modèle simplifié voit son modèle de rotor être approximé par l'hypothèse quasi-statique et par l'utilisation de la moyenne des forces et des moments lors d'une révolution. De plus, la dynamique des servomoteurs est assimilée à une fonction de transfert du second ordre et la composante latérale de la vitesse est négligée pour les interférences aérodynamiques. Ce modèle simplifié est beaucoup plus pratique pour réaliser l'équilibrage et la linéarisation nécessaires à la conception des lois de commande.

Les lois de commande ont ensuite été conçues en utilisant le modèle simplifié. Cette conception a été réalisée en plusieurs étapes, en commençant par une synthèse classique pour le vol stationnaire pour finir avec une synthèse robuste pour toute l'enveloppe de vol. La commande optimale de type LQR et la commande modale par placement de pôles ont été utilisées afin d'obtenir un contrôleur aux performances acceptables pour le cas nominal en vol stationnaire.

Ce contrôleur a ensuite servi de réglage initial pour une synthèse robuste, qui est réalisée par la méthode $\mathcal{H}_\infty$ structurée en considérant 30 configurations de charge utile et d'essence pour le vol stationnaire. Par la suite, l'équilibrage des 240 cas considérés pour représenter toute l'enveloppe de vol a été réalisé en utilisant l'algorithme de Levenberg-Marquart afin d'obtenir les informations nécessaires à la linéarisation et les valeurs de compensation. Le contrôleur robuste a été conçu à l'aide de la méthode $\mathcal{H}_\infty$ structurée et du séquençement des gains. Les termes couplés cachés générés par le séquençement ont été inclus lors de la linéarisation du contrôleur, ce qui a permis d'obtenir de meilleures performances et une meilleure stabilité.

Les lois de commande conçues ont alors été implémentées sur la plateforme d'autopilotage utilisée par l'hélicoptère. Les boucles PID intégrées ont été légèrement modifiées afin de correspondre à l'architecture choisie. Les logiques de mixage ont été programmées en prenant en compte l'espace mémoire limitée de la plateforme embarquée. L'impact des modifications sur les procédures de décollage et d'atterrissage a été pris en compte.

Finalement, les lois de commande et leur implémentation ont été validées sur des simulateurs à basse, moyenne et haute fidélités. La stabilité de l'appareil pour les situations nominales a été confirmée et la performance de l'appareil pour des manœuvres de base a été démontrée comme acceptable.

Sommes toutes, les lois de commande réalisées lors de ces travaux devraient convenir pour les premiers tests sur l'hélicoptère et les premiers essais en vol, ce qui permet de conclure que l'objectif principal de recherche a été rempli.

7.2 Limitations et améliorations futures des lois de commande proposées

Les lois de commande bas niveau ont été conçues en l'absence de données de vol, puisqu'elles doivent servir de contrôleur pour les premiers tests en vol du LX300. Les performances atteignables sont donc limitées en raison d'incertitudes concernant les coefficients aérodynamiques, en plus d'augmenter les besoins en termes de marges de stabilité. Étant donné la variété de configurations de charge utile et de la considération du possible décentrage du centre de masse, le contrôleur proposé devrait être suffisamment robuste pour stabiliser l'appareil lors des premiers tests en vol. Les lois de commande pourront ensuite être revues lorsque les données de vol seront disponibles afin d'en améliorer les performances.

Le contrôleur suggéré ne contient que les lois de commande bas niveau ; celles de haut niveau restent donc à être conçues. Celles-ci seront responsables de réguler l'altitude de l'appareil, et

les vitesses latérales et longitudinales. Ces lois de commande de haut niveau sont nécessaires afin de permettre à l'appareil de maintenir une position désirée, de suivre des trajectoires désirées, et d'effectuer des virages coordonnés.

Finalement, une attention particulière doit être donnée aux commandes de décélération. En raison des propriétés des hélicoptères tandem, une décélération rapide peut causer le rotor arrière à se retrouver dans le sillon du rotor avant, générant un grand moment cambrant qui déstabilise l'appareil. Ce phénomène est très connu pour les hélicoptères tandems et des limites devraient être imposées en ce qui a trait aux commandes envoyées au contrôleur conçu.

RÉFÉRENCES

- A. Andry, E. Shapiro, et J. Chung, “Eigenstructure assignment for linear systems”, *IEEE transactions on aerospace and electronic systems*, no. 5, pp. 711–729, 1983. En ligne : http://users.isy.liu.se/en/rt/johans/files/articles/andry_etal_83.pdf
- P. Apkarian et D. Noll, “Nonsmooth h_{∞} synthesis”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 1, pp. 71–86, 2006.
- P. Apkarian, P. Gahinet, et C. Buhr, “Multi-model, multi-objective tuning of fixed-structure controllers”, dans *2014 European Control Conference (ECC)*. IEEE Publ. Piscataway, NJ, 2014, pp. 856–861. En ligne : <http://pierre.apkarian.free.fr/papers/MultiModReq.pdf>
- P. Apkarian, M. N. Dao, et D. Noll, “Parametric robust structured control design”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 60, no. 7, pp. 1857–1869, 2015. En ligne : <https://arxiv.org/pdf/1405.4202.pdf>
- A. Bramwell, “The lateral stability and control of the tandem-rotor helicopter”, ARC, Rapp. tech., 1960, r. & M. No. 3223. En ligne : <http://naca.central.cranfield.ac.uk/reports/arc/rm/3223.pdf>
- , “The longitudinal stability and control of the tandem-rotor helicopter”, ARC, Rapp. tech., 1960, r. & M. No. 3223. En ligne : <http://naca.central.cranfield.ac.uk/reports/arc/rm/3223.pdf>
- I. Cheeseman et W. Bennett, “The effect of ground on a helicopter rotor in forward flight”, 1955.
- R. T. Chen, “A simplified rotor system mathematical model for piloted flight dynamics simulation”, NASA, Rapp. tech., 1979.
- , “A survey of nonuniform inflow models for rotorcraft flight dynamics and control applications”, 1989. En ligne : <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19900006622.pdf>
- J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, et B. A. Francis, “State-space solutions to standard h_2 and h_{∞} control problems”, *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 34, no. 8, pp. 831–847, 1989.

M. E. Dreier, *Introduction to helicopter and tiltrotor simulation*. AIAA (American Institute of Aeronautics & Ast, 2007.

P. Gahinet et P. Apkarian, “Structured H_∞ synthesis in MATLAB”, *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 44, no. 1, pp. 1435–1440, jan 2011. DOI : 10.3182/20110828-6-it-1002.00708. En ligne : <http://dx.doi.org/10.3182/20110828-6-IT-1002.00708>

—, “Automated tuning of gain-scheduled control systems”, dans *52nd IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, 2013, pp. 2740–2745. En ligne : http://pierre.apkarian.free.fr/papers/GainScheduling_cdc2013.pdf

J. Kautsky, N. K. Nichols, et P. Van Dooren, “Robust pole assignment in linear state feedback”, *International Journal of control*, vol. 41, no. 5, pp. 1129–1155, 1985.

M. Lawler, C. Ivler, M. Tischler, et Y. Shtessel, “System identification of the longitudinal/heave dynamics for a tandem-rotor helicopter including higher-order dynamics”, dans *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit*. American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), aug 2006. DOI : 10.2514/6.2006-6147. En ligne : http://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/41141767/CH47FsysID3.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1497462193&Signature=h0qrH0KqD4MR0AYLUPXL%2BSR1MQI%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DSystem_Identification_of_the_Longitudina.pdf

G. J. Leishman, *Principles of helicopter aerodynamics*. Cambridge university press, 2006.

H. Lhachemi, D. Saussié, et G. Zhu, “Explicit hidden coupling terms handling in gain-scheduling control design via eigenstructure assignment”, *Control Engineering Practice*, vol. 58, pp. 1 – 11, 2017. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2016.09.005>. En ligne : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0967066116301964>

H. Lhachemi, “Synthèse et validation d’un système de commandes de vol robuste et auto-séquenté”, Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, 2013.

H. Lhachemi, D. Saussié, et G. Zhu, “Handling hidden coupling terms in gain-scheduling control design : Application to a pitch-axis missile autopilot”, dans *AIAA guidance, navigation, and control conference*, 2016, p. 0365. DOI : 10.2514/6.2016-0365

M. I. Lourakis, “A brief description of the levenberg-marquardt algorithm implemented by levmar”, *Foundation of Research and Technology*, vol. 4, no. 1, 2005.

- J.-F. Magni, *Robust Modal Control with a Toolbox for Use with MATLAB®*. Springer Science & Business Media, 2012.
- S. Newman, *Foundations of helicopter flight*. Elsevier, 1994.
- G. D. Padfield, *Helicopter flight dynamics*. John Wiley & Sons, 2007.
- D. M. Pitt, “Rotor dynamic inflow derivatives and time constants from various inflow models.” DTIC Document, Rapp. tech., 1980.
- D. M. Pitt et D. A. Peters, “Theoretical prediction of dynamic-inflow derivatives”, 1980.
- R. Prouty, *Helicopter Aerodynamics*, série Rotor & Wing International. PJS Publications, 1985.
- B. Ren, S. S. Ge, C. Chen, C.-H. Fua, et T. H. Lee, *Modeling, Control and Coordination of Helicopter Systems*. Springer Science + Business Media, 2012. DOI : 10.1007/978-1-4614-1563-3. En ligne : <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-1563-3>
- W. J. Rugh et J. S. Shamma, “Research on gain scheduling”, *Automatica*, vol. 36, no. 10, pp. 1401–1425, 2000. DOI : 10.1016/S0005-1098(00)00058-3
- M. G. Safonov, D. Limebeer, et R. Chiang, “Simplifying the h_∞ theory via loop-shifting, matrix-pencil and descriptor concepts”, *International Journal of Control*, vol. 50, no. 6, pp. 2467–2488, 1989.
- D. Saussié, Q. Barbes, et C. Bérard, “Self-scheduled and structured H_∞ synthesis : A launch vehicle application.” dans *ACC*, 2013, pp. 1590–1595.
- J. M. Seddon et S. Newman, *Basic helicopter aerodynamics*. John Wiley & Sons, 2011, vol. 40.
- P. D. Talbot, B. E. Tinling, W. A. Decker, et R. T. Chen, “A mathematical model of a single main rotor helicopter for piloted simulation”, NASA, Rapp. tech., 1982.
- R. J. Tapscott, “Some static longitudinal stability characteristics of an overlapped-type tandem-rotor helicopter at low airspeeds”, 1958. En ligne : <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19930085171.pdf>

R. J. Tapscott et K. B. Amer, “Studies of the speed stability of a tandem helicopter in forward flight”, 1956. En ligne : <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19930092261.pdf>

J. Watkinson, *Art of the Helicopter*. Butterworth-Heinemann, 2003.

J. M. Weber, T. Y. Liu, et W. Chung, “A mathematical simulation model of the ch-47b helicopter, volume 2”, 1984. En ligne : <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19850001726.pdf>

K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover *et al.*, *Robust and optimal control*. Prentice hall New Jersey, 1996, vol. 40. En ligne : <http://tocs.ulb.tu-darmstadt.de/109091736.pdf>

ANNEXE A Tests d'identification des servomoteurs

A.1 DA26

A.1.1 Identification du contrôleur

Après une inspection sommaire du schéma SIMULINK, le contrôleur intégré a été déterminé comme étant un contrôleur discret échantillonné à 625 Hz. Afin d'identifier ce contrôleur, une copie du diagramme en entier a été effectuée et le bloc de contrôle a été remplacé par un sous-système à déterminer. Les sorties des 2 systèmes (original et avec contrôleur à déterminer) sont envoyées dans des sorties Scope pour analyse.

Hypothèse de départ :

Il a été supposé que le contrôleur est un simple PID dont l'action dérivée est filtrée, soit de la forme suivante :

$$K_P + K_I \frac{T_s}{z-1} + K_D \frac{N}{1 + N \frac{T_s}{z-1}}$$

où K_P , K_I et K_D sont les gains proportionnel, intégral et dérivé, $T_s = 1/f_s = 0.0016$ est la période d'échantillonnage, N est la constante du filtre passe-bas, et z est le nombre complexe issu de la transformée en z .

Test 1 :

- Charge à vide
- Entrée rampe unitaire
- Réglage du gain proportionnel

La rampe unitaire permet d'avoir une valeur constante en régime permanent comme sortie du contrôleur. Le gain proportionnel peut alors être déterminé.

Il est à noter que cela implique qu'il n'y a pas de gain intégral dans ce contrôleur.

Gain trouvé : $K_P=18.75$ ($K_I=0$)

Test 2 :

- Charge à vide
- Entrée échelon unitaire

- Réglage du gain différentiel

L'échelon unitaire permet de voir l'influence de l'effet dérivée (amortissement). La constante du filtre a été supposée égale à la fréquence du contrôleur. Le test 1 a été refait pour adapter la valeur du gain proportionnel à la présence du dérivateur filtré.

Gain trouvé : $K_D=0.02$ (et $K_P=18.725$)

Test 3 :

- Charge à vide
- Entrée échelon très élevée (180°)
- Réglage de la saturation

Les limites du contrôleur sont vérifiées. Il se trouve que le contrôleur est saturé à 28V.

Test 4 :

- Charge constante (0.1, 0.5, 1, 2.7, 5 Nm)
- Entrée sinusoïdale (1, 15, 25, 50° à 5 Hz et 15° à 1, 2, 5, 10, 15, 25, 50, 75, 100 Hz)
- Vérifier qu'il n'y a pas d'autres effets

Les deux systèmes semblent se comporter de manière identique.

A.1.2 Identification du bloc mécanique

Afin d'identifier le bloc mécanique, une copie du diagramme en entier a été effectuée et le bloc mécanique a été remplacé par un sous-système à déterminer. Les sorties des 2 systèmes (original et avec système mécanique à déterminer) sont envoyées dans des sorties Scope pour analyse.

Hypothèse de départ :

Il a été supposé que le système mécanique est un moteur à courant continu dont les équations dynamiques sont les suivantes :

$$J \frac{d\omega}{dt} + b\omega = T_e + (T_{load})$$

$$T_e = K_t i$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V - K_e \omega$$

où ω est la vitesse de rotation, T_{load} est le moment appliqué en charge au moteur, V est la tension appliquée au moteur (provenant du contrôleur) et i est le courant circulant dans la bobine du moteur. Étant donné que les unités SI sont utilisées, il se trouve que $K_e = K_t = K$.

Test 1 :

- Charge à vide
- Entrée échelon unitaire et échelon maximal (28 V)
- Réglage des paramètres L, R et K
- Identifier la saturation en position

Pour ce test, l'entrée est appliquée directement au bloc mécanique sous forme de tension (V) et seulement la partie électrique est analysée. Pour ce faire, la sortie de vitesse du bloc mécanique réel est utilisée pour la force contre-électromotrice ($K_e\omega$). Le courant (en valeur absolue) est comparé à la sortie courant (i) du bloc réel.

On note que pour une entrée échelon unitaire, le gain en régime permanent est $\left| \frac{1}{R}(1 - K\omega_{real}) \right|$ (où ω_{real} est en radians) et le temps de montée est $\frac{L}{R} \log(9)$. Pour un échelon maximal (soit la saturation du contrôleur à 28V), le gain en régime permanent devient $\frac{28}{R}$ (la position est alors saturée, d'où la simplification pour vitesse nulle).

Paramètres trouvés : $R = 13.4087$, $K = 4.8006$, $L = 0.00095$, saturation en position 50°

Test 2 :

- Charge à vide
- Entrée échelon unitaire et échelon maximal (28 V)
- Réglage des paramètres J et b

Le même schéma est utilisé, mais on s'intéresse à présent à comparer les sorties de vitesse. Pour un échelon unitaire, le gain en régime permanent (en radians) est $\frac{K}{R*b+K^2}$. Comme L est petit, on peut approximer le temps de réponse à 2% par $4\frac{J*R}{R*b+K^2}$.

Paramètres trouvés : $b = 0.128$, $J = 0.0132$

Test 3 :

- Charge unitaire
- Entrée nulle
- Vérifier qu'il n'y a pas d'autres effets

On reprend le schéma en n'utilisant que les entrées et sorties du bloc mécanique pour vérifier

qu'il n'y a pas d'autres effets introduits par le couple de charge.

Un effet non modélisé a été repéré ; la réponse a un effet amortissant supplémentaire. Or, il se trouve que la friction statique avait été négligée dans le modèle de base. Cette friction peut être exprimée de la manière suivante $-sign(\omega)\mu|T_{load}|$. On trouve alors que $\mu = 0.07735$.

Test 4 :

- Charge constante (0.1, 0.5, 1, 2.7, 5, -0.1, -1, -2.7, -5 Nm)
- Entrée sinusoïdale (1, 15, 25, 50° à 5 Hz et 15° à 1, 2, 5, 10, 15, 25, 50, 75, 100 Hz)
- Vérifier qu'il n'y a pas d'autres effets

Les deux systèmes semblent se comporter de manière identique.

Test 5 :

- Charge sinusoïdale (0.1, 0.5, 1, 2.7, 5 Nm à 1 Hz et 2.7 Nm à 5, 10, 25 Hz)
- Entrée sinusoïdale (15, 50° à 5 Hz et 15° à 5, 10, 15, 25, 100 Hz)
- Vérifier qu'il n'y a pas d'autres effets

Les deux systèmes semblent se comporter de manière identique.

A.1.3 Test final :

- Charge sinusoïdale (0.1, 0.5, 1, 2.7, 5 Nm à 1 Hz et 2.7 Nm à 5, 10, 25 Hz)
- Entrée sinusoïdale (15, 50° à 5 Hz et 15° à 5, 10, 15, 25, 100 Hz)
- Vérifier qu'il n'y a pas d'autres effets

Le contrôleur et le bloc mécanique modélisé sont bouclés ensemble en utilisant les mêmes entrées que le contrôleur et le bloc mécanique réels (bouclés) et les sorties des systèmes sont comparées pour une vérification finale de l'ensemble du système.

Les figures suivantes illustrent les réponses obtenues pour différentes charges et entrées. Il est à noter que les réponses semblent identiques dans tous les cas sauf en saturation ; les effets rencontrés lorsque le moteur frappe une butée n'ont pas été modélisés, mais sont de courtes durées et sont donc considérés négligeables.

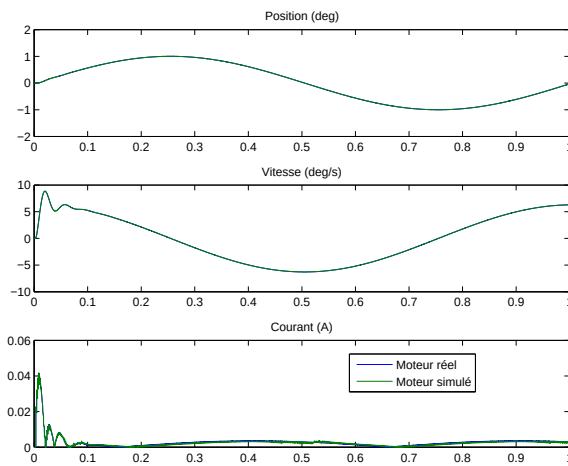


Figure A.1 Réponses pour une entrée de 1° à 1 Hz sans charge

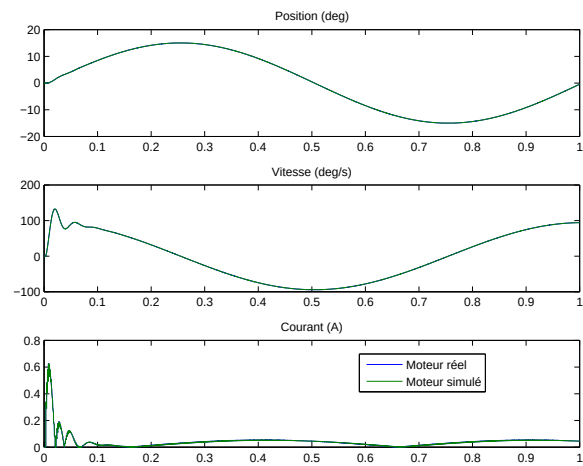


Figure A.2 Réponses pour une entrée de 15° à 1 Hz sans charge

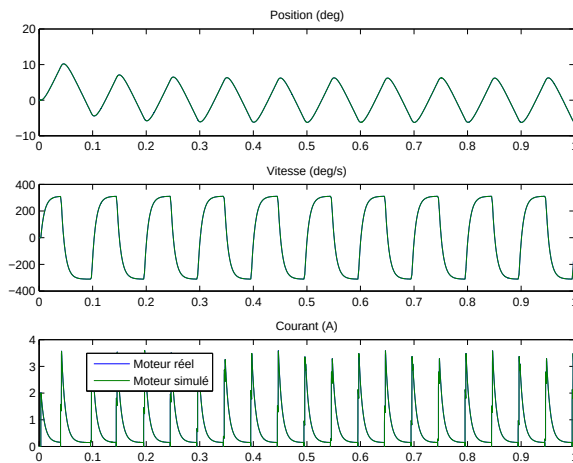


Figure A.3 Réponses pour une entrée de 15° à 10 Hz sans charge

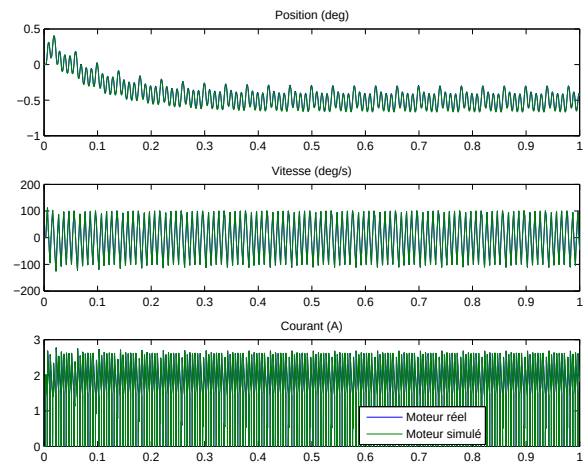


Figure A.4 Réponses pour une entrée de 15° à 100 Hz sans charge

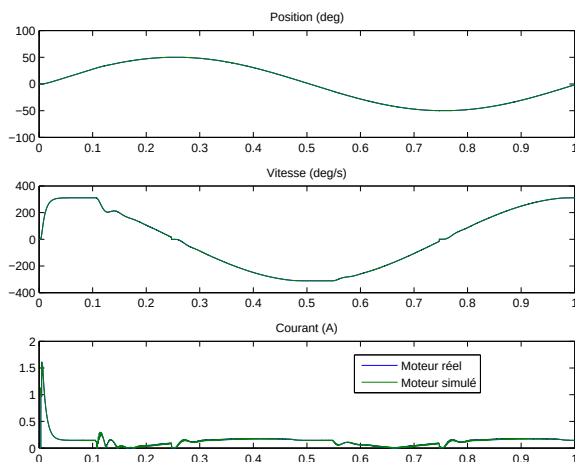


Figure A.5 Réponses pour une entrée de 50° à 1 Hz sans charge

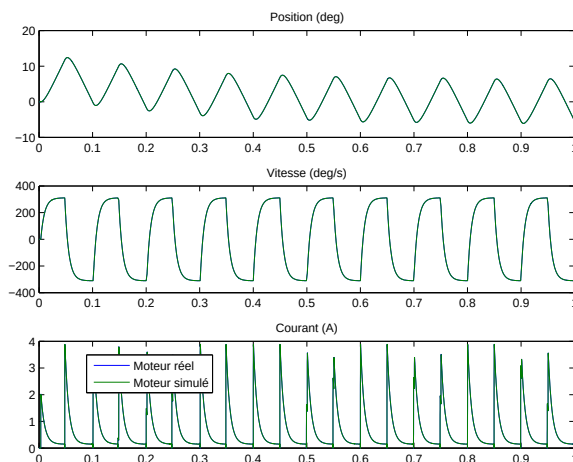


Figure A.6 Réponses pour une entrée de 50° à 10 Hz sans charge

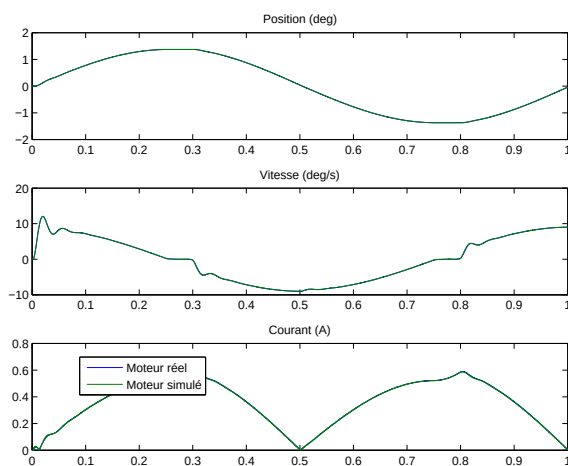


Figure A.7 Réponses pour une charge (nominale) de 2.7 Nm à 1 Hz et une entrée de 1° à 1 Hz

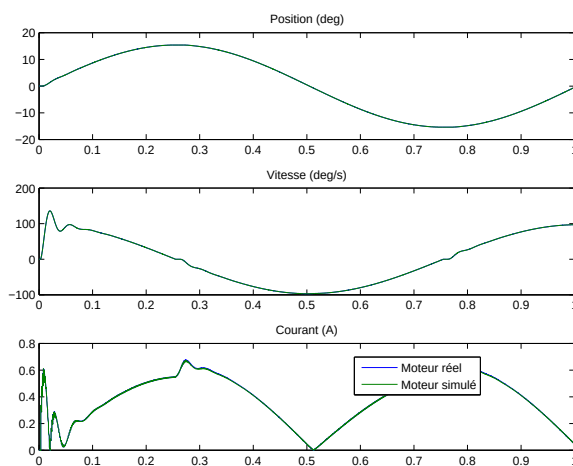


Figure A.8 Réponses pour une charge (nominale) de 2.7 Nm à 1 Hz et une entrée de 15° à 1 Hz

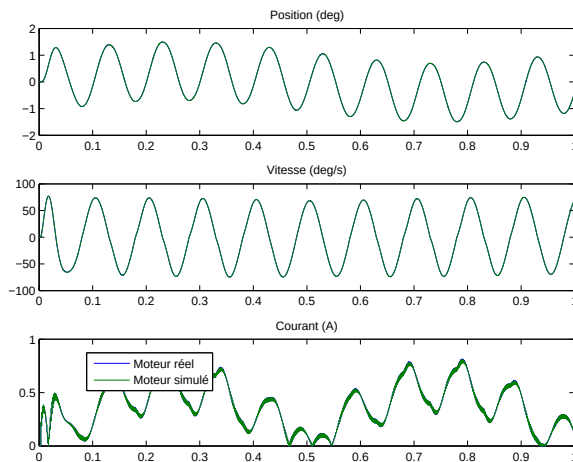


Figure A.9 Réponses pour une charge (nominale) de 2.7 Nm à 1 Hz et une entrée de 1° à 10 Hz

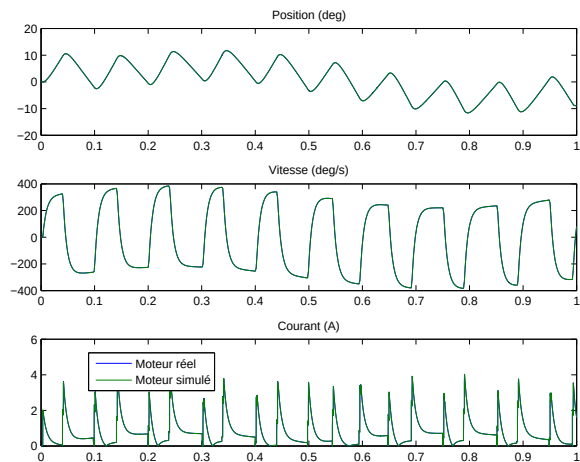


Figure A.10 Réponses pour une charge (nominale) de 2.7 Nm à 1 Hz et une entrée de 15° à 10 Hz

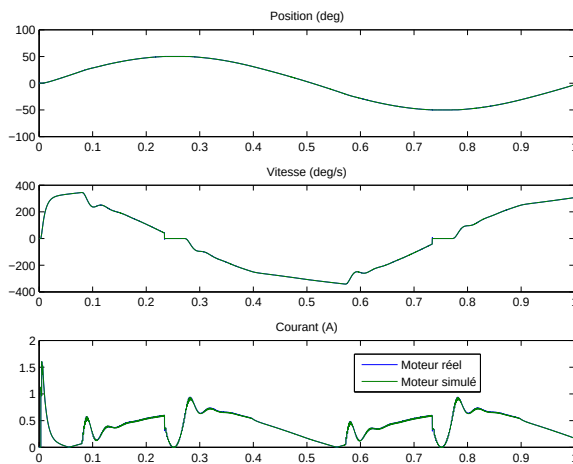


Figure A.11 Réponses pour une charge (nominale) de 2.7 Nm à 1 Hz et une entrée de 50° à 1 Hz

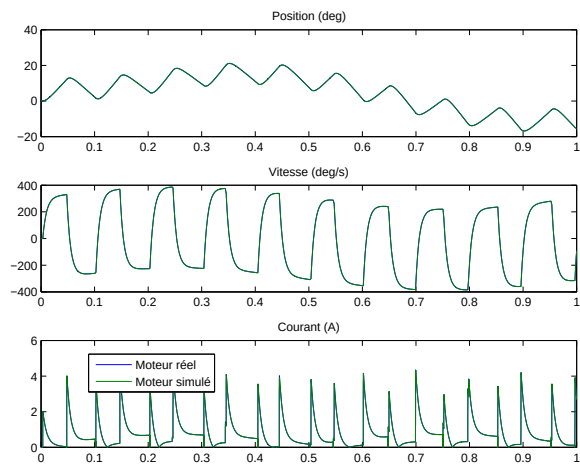


Figure A.12 Réponses pour une charge (nominale) de 2.7 Nm à 1 Hz et une entrée de 50° à 10 Hz

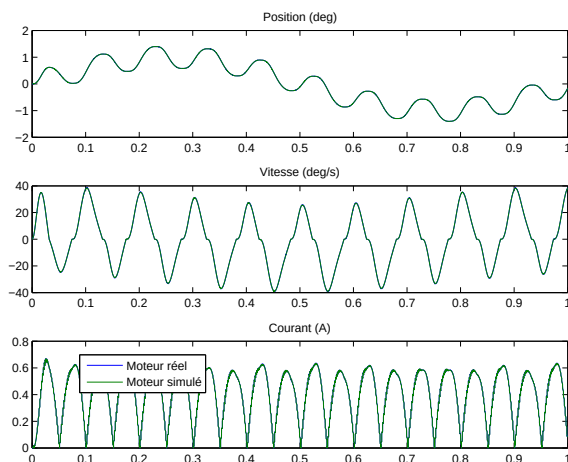


Figure A.13 Réponses pour une charge (nominale) de 2.7 Nm à 10 Hz et une entrée de 1° à 1 Hz

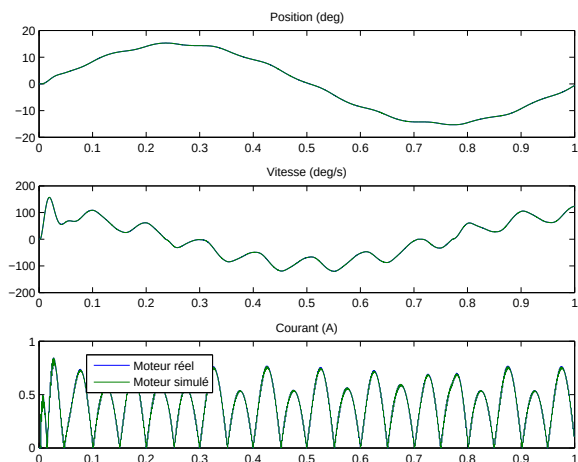


Figure A.14 Réponses pour une charge (nominale) de 2.7 Nm à 10 Hz et une entrée de 15° à 1 Hz

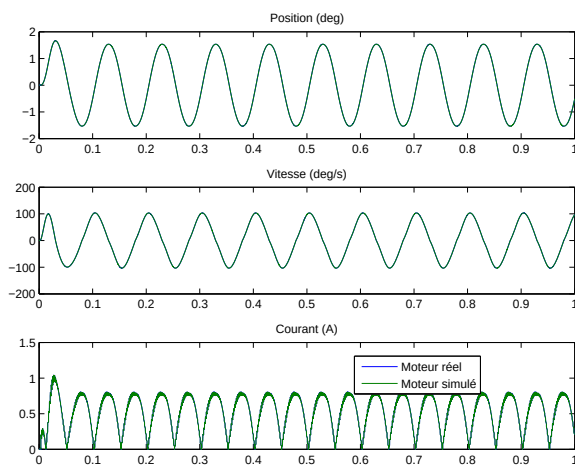


Figure A.15 Réponses pour une charge (nominale) de 2.7 Nm à 10 Hz et une entrée de 1° à 10 Hz

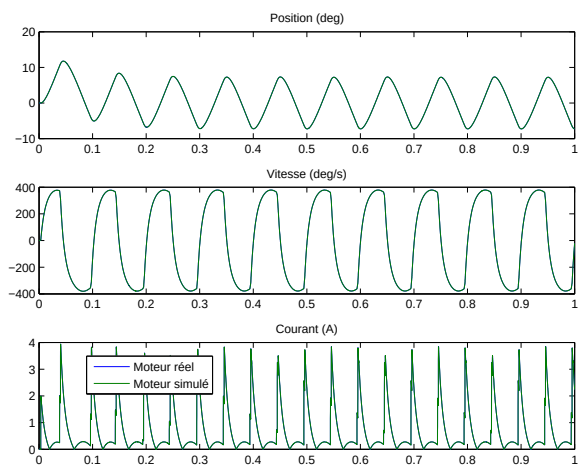


Figure A.16 Réponses pour une charge (nominale) de 2.7 Nm à 10 Hz et une entrée de 15° à 10 Hz

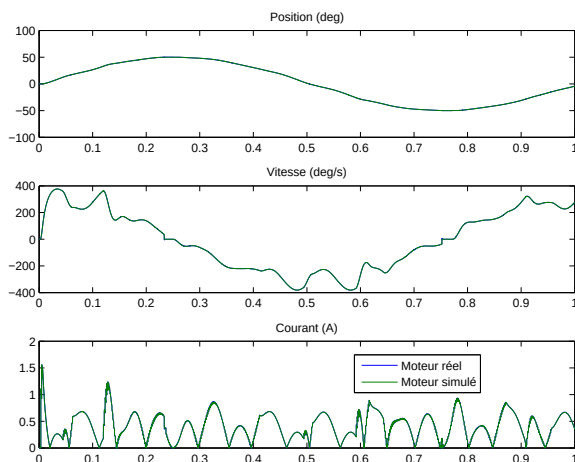


Figure A.17 Réponses pour une charge (nominale) de 2.7 Nm à 10 Hz et une entrée de 50° à 1 Hz

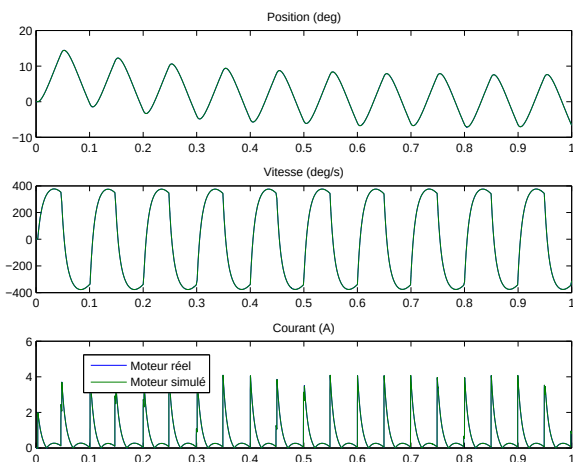


Figure A.18 Réponses pour une charge (nominale) de 2.7 Nm à 10 Hz et une entrée de 50° à 10 Hz

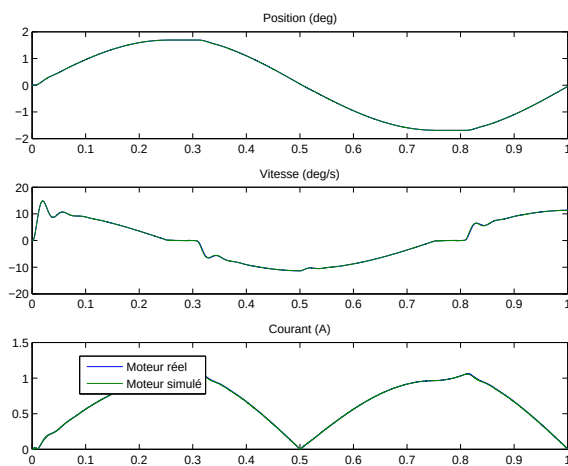


Figure A.19 Réponses pour une charge (maximale) de 5 Nm à 1 Hz et une entrée de 1° à 1 Hz

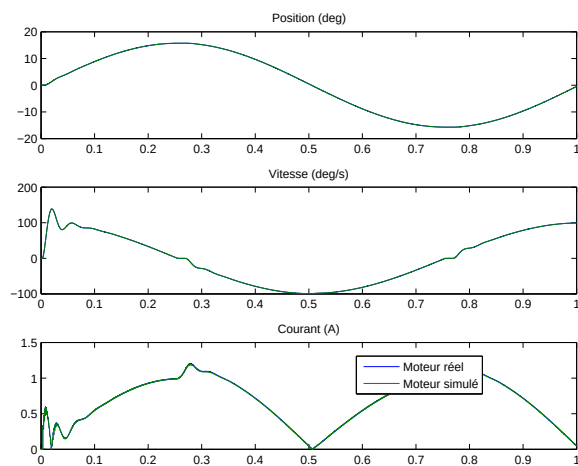


Figure A.20 Réponses pour une charge (maximale) de 5 Nm à 1 Hz et une entrée de 15° à 1 Hz

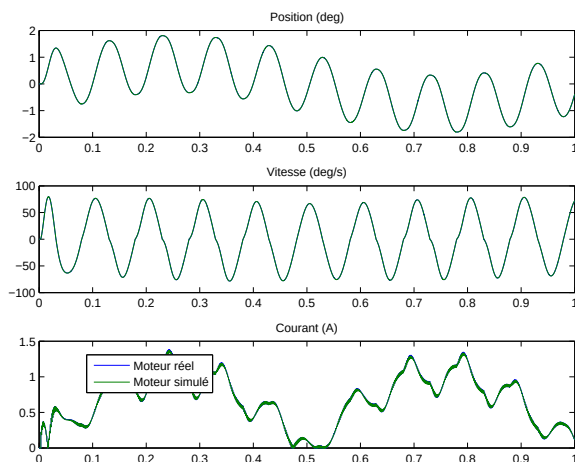


Figure A.21 Réponses pour une charge (maximale) de 5 Nm à 1 Hz et une entrée de 1° à 10 Hz

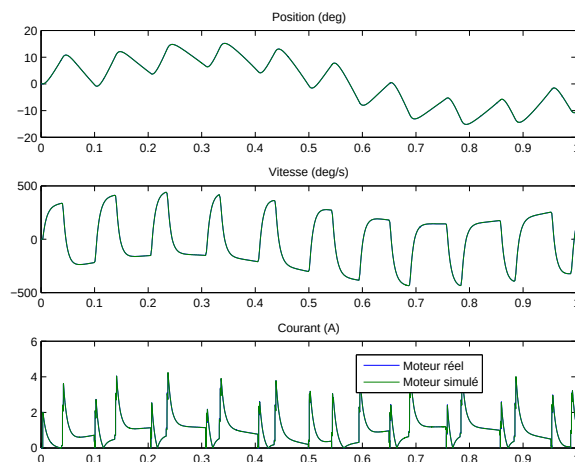


Figure A.22 Réponses pour une charge (maximale) de 5 Nm à 1 Hz et une entrée de 15° à 10 Hz

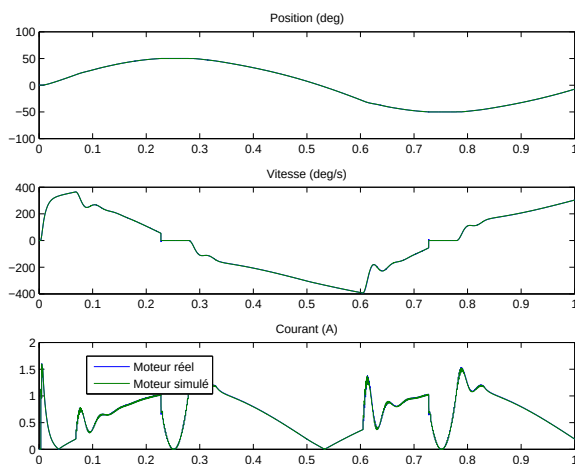


Figure A.23 Réponses pour une charge (maximale) de 5 Nm à 1 Hz et une entrée de 50° à 1 Hz

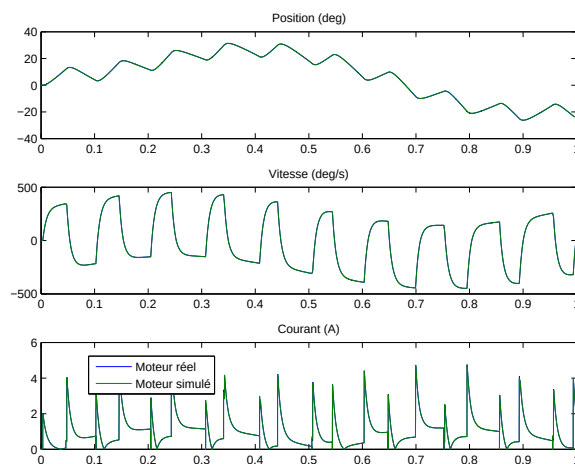


Figure A.24 Réponses pour une charge (maximale) de 5 Nm à 1 Hz et une entrée de 50° à 10 Hz

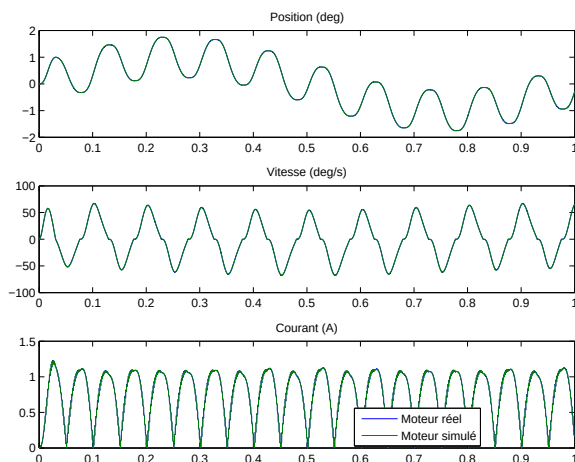


Figure A.25 Réponses pour une charge (maximale) de 5 Nm à 10 Hz et une entrée de 1° à 1 Hz

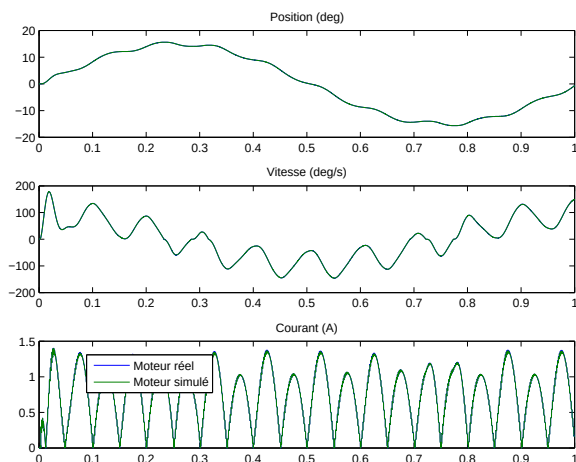


Figure A.26 Réponses pour une charge (maximale) de 5 Nm à 10 Hz et une entrée de 15° à 1 Hz

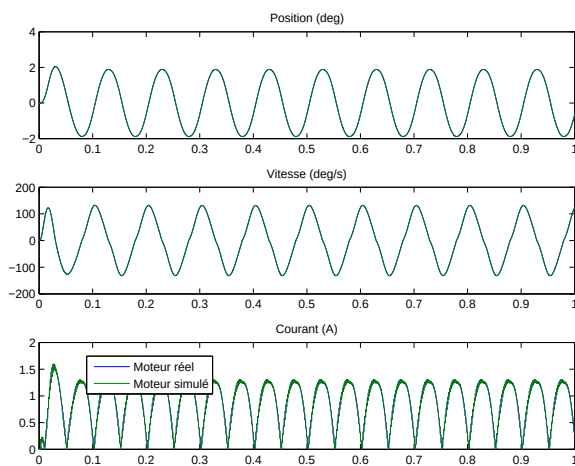


Figure A.27 Réponses pour une charge (maximale) de 5 Nm à 10 Hz et une entrée de 1° à 10 Hz

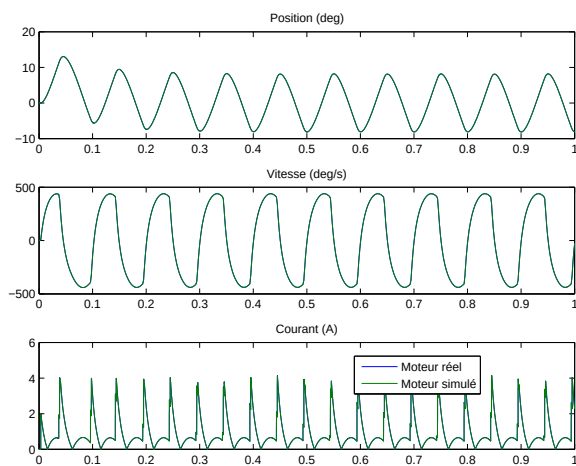


Figure A.28 Réponses pour une charge (maximale) de 5 Nm à 10 Hz et une entrée de 15° à 10 Hz

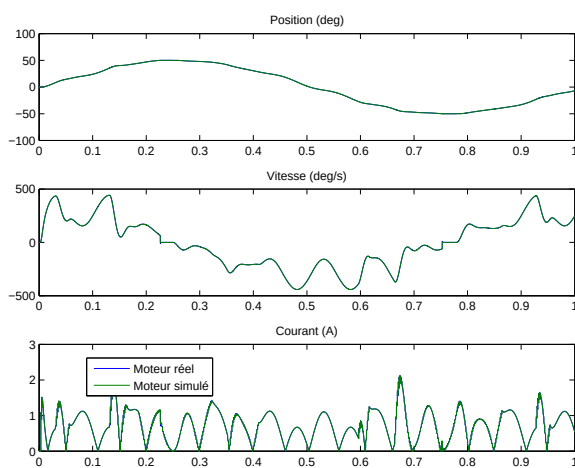


Figure A.29 Réponses pour une charge (maximale) de 5 Nm à 10 Hz et une entrée de 50° à 1 Hz

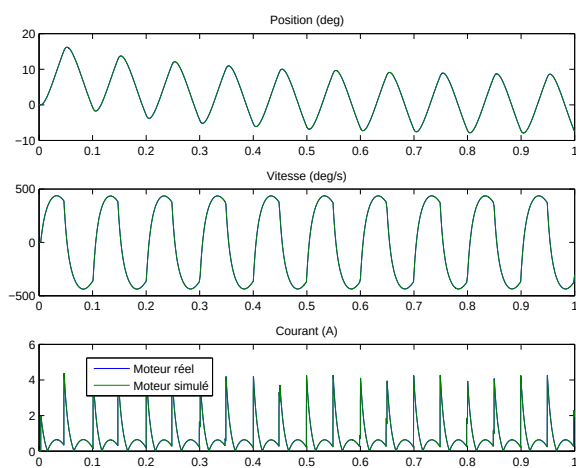


Figure A.30 Réponses pour une charge (maximale) de 5 Nm à 10 Hz et une entrée de 50° à 10 Hz

A.2 DA26D

A.2.1 Identification des contrôleurs

Le schéma SIMULINK de cet actionneur comporte deux contrôleurs identiques et un mécanisme comportant 2 moteurs.

Hypothèse de départ :

Les deux contrôleurs sont aussi identiques au contrôleur du DA26.

Test 4 (voir A.1.1) :

En effectuant ce test et en comparant les résultats, il devient évident qu'il s'agit bien du même contrôleur.

A.2.2 Identification du bloc mécanique

Comme pour l'actionneur DA26, un bloc mécanique à déterminer remplace le bloc mécanique connu dans une copie du système complet.

Hypothèse de départ :

Le bloc mécanique de DA26D est composé de deux blocs mécaniques DA26 contribuant tous deux au couple moteur ($T_e = T_{e,1} + T_{e,2}$) et ayant la même position de sortie ($\theta = \theta_1 = \theta_2$ et $\omega = \omega_1 = \omega_2$). L'inertie (J) est doublée pour tenir compte de la présence des deux moteurs.

Test 5 (voir A.1.2) :

L'hypothèse semble vérifiée, le bloc original et le bloc simulé ont les mêmes réponses.

Test 6 :

- Charge à vide
- Entrée échelon unitaire pour le moteur 1
- Entrée nulle pour le moteur 2

Afin de vérifier le comportement lorsqu'un des moteurs est défectueux, un des moteurs ne reçoit pas de signal, forçant l'autre à fournir l'effort nécessaire. Or, il se trouve qu'un effet amortissant supplémentaire est manquant dans le bloc simulé. Cela s'explique par de la

friction introduite dans le mécanisme de transmission entre les deux moteurs lorsque les deux moteurs ne sont pas synchronisés.

Un terme de friction dépendant de la différence de la tension aux moteurs est ajouté ($-\mu_t|V_1 - V_2|$).

Test 7 :

- Charge constante (0, 0.1, 0.5, 1, 5 Nm)
- Entrée échelon constant (1, 15, 25, 50°) pour le moteur 1
- Entrée nulle pour le moteur 2
- Réglage du paramètre μ_t

Il a été remarqué que lorsque la charge augmente, l'effet amortissant diminue. Une approximation a été réalisée est le terme de friction est maintenant $-\mu_t \max(|V_1 - V_2| - |T_{load}|, 0)$. Ce terme représente le fait que plus la charge est grande, plus cette friction diminue jusqu'au point de devenir négligeable.

La valeur du paramètre μ_t est alors de 0.06.

Test 8 :

- Charge sinusoïdale (0.1, 0.5, 1, 2.7, 5 Nm à 1 Hz et 2.7 Nm à 5, 10, 25 Hz)
- Entrée sinusoïdale (15, 50° à 5 Hz et 15° à 5, 10, 15, 25, 100 Hz) pour le moteur 1
- Entrée nulle pour le moteur 2
- Vérifier qu'il n'y a pas d'autres effets

Les deux réponses ne sont pas parfaitement identiques, mais sont suffisamment semblable pour toutes fins utiles. La différence provient vraisemblablement de l'approximation du terme de friction lorsque les moteurs ne sont pas synchronisés.

A.2.3 Test final :

- Charge sinusoïdale (0.1, 0.5, 1, 2.7, 5 Nm à 1 Hz et 2.7 Nm à 5, 10, 25 Hz)
- Entrée sinusoïdale (15, 50° à 5 Hz et 15° à 5, 10, 15, 25, 100 Hz)
- Vérifier qu'il n'y a pas d'autres effets

Le contrôleur et le bloc mécanique modélisé sont bouclés ensemble en utilisant les mêmes entrées que le contrôleur et le bloc mécanique réels (bouclés) et les sorties des systèmes sont comparées pour une vérification finale de l'ensemble du système.

ANNEXE B Développement de la dynamique de battement

La dynamique complète de battement est exprimée en modélisant le rotor avec tous ses pivots (primaire et secondaires), afin de tenir compte de tous les degrés de liberté présents. Le système comporte alors 3 parties (voir Fig.B.1), soit les deux parties profilées et la partie centrale.

Ce modèle partage des similarités avec le modèle classique du double pendule, ce qui motive l'utilisation de la même approche de résolution, soit l'approche lagrangienne.

Les coordonnées généralisées utilisées sont :

- β_1 et $\dot{\beta}_1$, l'angle (et sa vitesse) de la première pôle
- β_2 et $\dot{\beta}_2$, l'angle (et sa vitesse) de la deuxième pôle
- β_c et $\dot{\beta}_c$, l'angle (et sa vitesse) de la partie centrale

L'énergie cinétique du système est alors définie de la manière suivante

$$K = K_1 + K_2 + K_c$$

où

$$K_i = \frac{1}{2}I_i\dot{\beta}_i^2 + \frac{1}{2}m_iV_i^2, \quad i \in \{1, 2, c\}$$

et où I_i est l'inertie de la partie autour de son centre de masse, m_i est la masse de la partie, et V_i est la vitesse (en translation) du centre de masse de la partie. Cette dernière est obtenue

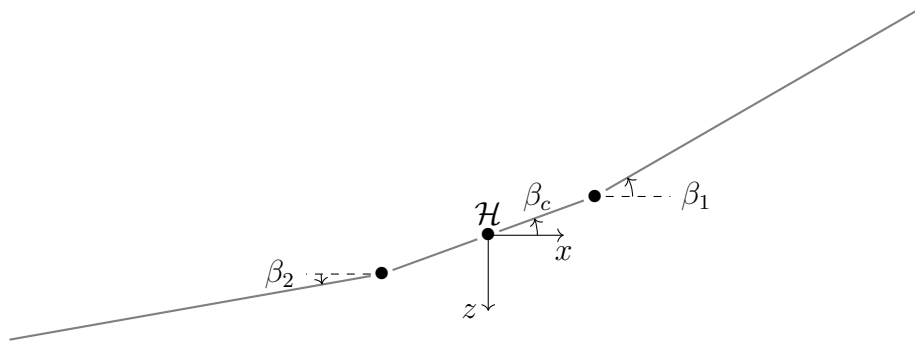


Figure B.1 Repère, angles et pivots du rotor

de la manière suivante

$$\begin{aligned}
 V_1 &= d\dot{\beta}_c \hat{e}_{\beta_c} + \frac{l}{2} \dot{\beta}_1 \hat{e}_{\beta_1} & \Rightarrow V_1^2 &= d^2 \dot{\beta}_c^2 + \frac{l^2}{4} \dot{\beta}_1^2 + dl \dot{\beta}_c \dot{\beta}_1 \cos(\beta_1 - \beta_c) \\
 V_2 &= d\dot{\beta}_c \hat{e}_{\beta_c} + \frac{l}{2} \dot{\beta}_2 \hat{e}_{\beta_2} & \Rightarrow V_2^2 &= d^2 \dot{\beta}_c^2 + \frac{l^2}{4} \dot{\beta}_2^2 + dl \dot{\beta}_c \dot{\beta}_2 \cos(\beta_2 - \beta_c) \\
 V_c &= 0 & \Rightarrow V_c^2 &= 0
 \end{aligned}$$

La vitesse de la partie du centre est nulle, car le pivot du rotor (bloquant les translations) est situé au centre de masse de la partie centrale¹.

L'énergie potentielle du système est, quant à elle, définie de la manière suivante

$$P = P_1 + P_2 + P_c$$

où

$$\begin{aligned}
 P_1 &= m_1 g \left(d \sin(\beta_c) + \frac{l}{2} \sin(\beta_1) \right) \\
 P_2 &= -m_2 g \left(d \sin(\beta_c) + \frac{l}{2} \sin(\beta_2) \right) \\
 P_c &= 0
 \end{aligned}$$

Les forces et moments (non conservateurs) exercés sur les pales sont

- Force aérodynamique, $\mathbf{F}_a$, provenant de l'effet de l'écoulement d'air sur la partie profilée de la pale ;
- Forces inertielles (Accélérations de l'appareil, Force de Coriolis, Force Centrifuge et Force d'Euler), $\mathbf{F}_I$, provenant des dérivées du repère non inertiel de la pale ;
- Moment élastique, M_k , provenant de la rigidité des pales qui est assimilé par un ressort angulaire aux pivots secondaires (virtuels).

L'expression des forces aérodynamiques (et des moments qu'elles génèrent) a été présentée dans le corps du texte et ne sera pas présentée ici.

Les moments élastiques provenant du ressort virtuel des pivots secondaires sont donnés par

$$M_{k,1} = -K_\beta (\beta_1 - \beta_c - \beta_p)$$

$$M_{k,2} = -K_\beta (\beta_2 - \beta_c + \beta_p)$$

où β_p est l'angle de pré battement conique (*pre-coning angle*).

1. Le léger décalage entre le pivot et le centre de masse causé par les pales suspendu (*underslung blades*) est considéré négligeable.

Les forces inertielles des parties du rotor ont la forme suivante :

$$\mathbf{F}_I = -m \left\{ [\ddot{\mathbf{r}}_H] + [2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}] + [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] + [\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}] \right\}$$

où $\mathbf{r}$ est la position d'un point par rapport à l'origine du repère de la pale, $\mathbf{r}_O$ est la position de l'origine du repère de la pale par rapport au centre de masse de l'appareil, $\boldsymbol{\Omega} = [p_H, q_H, r_H]^\top = T_H[p, q, r]^\top + [0, 0, \Omega]^\top$ est la vitesse de rotation du repère de la pale (par rapport à un repère inertiel), et m est la masse de la pale.

Les forces généralisées sont alors calculées à l'aide du travail virtuel :

$$\partial W = \sum Q_i \partial \beta_i$$

$$Q_i = \sum \mathbf{F}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \beta_i} + \sum M_{k,j} \frac{\partial \omega_j}{\partial \dot{\beta}_i}$$

$$\mathbf{r}_{I,1} = \begin{bmatrix} d \cos(\beta_c) + r \cos(\beta_1) \\ 0 \\ -(d \sin(\beta_c) + r \sin(\beta_1)) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{I,2} = \begin{bmatrix} -(d \cos(\beta_c) + r \cos(\beta_2)) \\ 0 \\ d \sin(\beta_c) + r \sin(\beta_2) \end{bmatrix}$$

Alors,

$$\mathbf{F}_{I,1} = -m \left\{ [\ddot{\mathbf{r}}_H] + [2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}_{I,1}] + [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{I,1})] + [\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{I,1}] \right\}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_H &= T_H \frac{d}{dt} \left(\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{bmatrix} \right) \\ &= T_H \left\{ \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

La dynamique du système est alors donnée par l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_i} = \frac{\partial W}{\partial \beta_i}$$

où

$$\mathcal{L} = K - P$$

est le Lagrangien.

En appliquant l'équation de Lagrange à β_1 , on a :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}_1} \right) &= \left(I_1 + m_1 \frac{l^2}{4} \right) \ddot{\beta}_1 + \frac{1}{2} m_1 dl \ddot{\beta}_c \cos(\beta_1 - \beta_c) - \frac{1}{2} m_1 dl \dot{\beta}_c (\dot{\beta}_1 - \dot{\beta}_c) \sin(\beta_1 - \beta_c) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_1} &= -\frac{1}{2} m_1 dl \dot{\beta}_c \dot{\beta}_1 \sin(\beta_1 - \beta_c) + m_1 g \frac{l}{2} \cos(\beta_1) \\ \frac{\partial W}{\partial \beta_1} &= Q_1 = M_{a,1} + M_{k,1} + \mathbf{F}_{I,1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{I,1}}{\partial \beta_1}\end{aligned}$$

En appliquant l'équation de Lagrange à β_2 , on a :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}_2} \right) &= \left(I_2 + m_2 \frac{l^2}{4} \right) \ddot{\beta}_2 + \frac{1}{2} m_2 dl \ddot{\beta}_c \cos(\beta_2 - \beta_c) - \frac{1}{2} m_2 dl \dot{\beta}_c (\dot{\beta}_2 - \dot{\beta}_c) \sin(\beta_2 - \beta_c) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_2} &= -\frac{1}{2} m_2 dl \dot{\beta}_c \dot{\beta}_2 \sin(\beta_2 - \beta_c) - m_2 g \frac{l}{2} \cos(\beta_2) \\ \frac{\partial W}{\partial \beta_2} &= Q_2 = M_{a,2} + M_{k,2} + \mathbf{F}_{I,2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{I,2}}{\partial \beta_2}\end{aligned}$$

En appliquant l'équation de Lagrange à β_c , on a :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}_c} \right) &= \left(I_c + (m_1 + m_2) d^2 \right) \ddot{\beta}_c + \frac{1}{2} m_1 dl \ddot{\beta}_1 \cos(\beta_1 - \beta_c) \\ &\quad - \frac{1}{2} m_1 dl \dot{\beta}_1 (\dot{\beta}_1 - \dot{\beta}_c) \sin(\beta_1 - \beta_c) + \frac{1}{2} m_2 dl \ddot{\beta}_2 \cos(\beta_2 - \beta_c) - \frac{1}{2} m_2 dl \dot{\beta}_2 (\dot{\beta}_2 - \dot{\beta}_c) \sin(\beta_2 - \beta_c) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_c} &= \frac{1}{2} m_1 dl \dot{\beta}_c \dot{\beta}_1 \sin(\beta_1 - \beta_c) + \frac{1}{2} m_2 dl \dot{\beta}_c \dot{\beta}_2 \sin(\beta_2 - \beta_c) + (m_1 - m_2) g d \cos(\beta_c) \\ \frac{\partial W}{\partial \beta_c} &= Q_c = -M_{k,1} - M_{k,2} + (\mathbf{F}_{a,1} + \mathbf{F}_{I,1}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{I,1}}{\partial \beta_c} + (\mathbf{F}_{a,2} + \mathbf{F}_{I,2}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{I,2}}{\partial \beta_c}\end{aligned}$$

Il est à noter que la force aérodynamique est une force distribuée dépendante de sa position sur la pale (r) et est calculée à l'aide d'une intégrale. Le produit de cette force avec le terme $\partial \mathbf{r}_{I,i} / \partial \beta_i$ vient ajouter un autre terme (r) à inclure dans l'intégrale, d'où la substitution par $M_{a,i}$.

Quelques simplifications peuvent s'effectuer. En effet, les masses des deux pales sont identiques et l'inertie de celle-ci par rapport au pivot secondaire est connue (I_β). Les trois équations

tions dynamiques (couplées) obtenues sont alors

$$\begin{aligned}
I_\beta \ddot{\beta}_1 + I_{c,1} \ddot{\beta}_c &= \frac{1}{2} m d l \dot{\beta}_c (\dot{\beta}_1 - \dot{\beta}_c) \sin(\beta_1 - \beta_c) - \frac{1}{2} m d l \dot{\beta}_c \dot{\beta}_1 \sin(\beta_1 - \beta_c) \\
&\quad + m g \frac{l}{2} \cos(\beta_1) + M_{a,1} - K_\beta (\beta_1 - \beta_c) \\
&\quad - F_{I,1,x} \frac{l}{2} \sin(\beta_1) - F_{I,1,z} \frac{l}{2} \cos(\beta_1) \\
I_\beta \ddot{\beta}_2 + I_{c,2} \ddot{\beta}_c &= \frac{1}{2} m d l \dot{\beta}_c (\dot{\beta}_2 - \dot{\beta}_c) \sin(\beta_2 - \beta_c) - \frac{1}{2} m d l \dot{\beta}_c \dot{\beta}_2 \sin(\beta_2 - \beta_c) \\
&\quad - m g \frac{l}{2} \cos(\beta_2) + M_{a,2} - K_\beta (\beta_2 - \beta_c) \\
&\quad + F_{I,2,x} \frac{l}{2} \sin(\beta_2) + F_{I,2,z} \frac{l}{2} \cos(\beta_2) \\
I_H \ddot{\beta}_c + I_{c,1} \ddot{\beta}_1 + I_{c,2} \ddot{\beta}_2 &= \frac{1}{2} m d l \dot{\beta}_1 (\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_c) \sin(\beta_1 - \beta_c) + \frac{1}{2} m d l \dot{\beta}_2 (\dot{\beta}_2 + \dot{\beta}_c) \sin(\beta_2 - \beta_c) \\
&\quad + \frac{1}{2} m d l \dot{\beta}_c \dot{\beta}_1 \sin(\beta_1 - \beta_c) + \frac{1}{2} m d l \dot{\beta}_c \dot{\beta}_2 \sin(\beta_2 - \beta_c) \\
&\quad + K_\beta (\beta_1 - \beta_c) + K_\beta (\beta_2 - \beta_c) \\
&\quad - (F_{a,1,x} - F_{a,2,x} + F_{I,1,x} - F_{I,2,x}) \sin(\beta_c) \\
&\quad - (F_{a,1,z} - F_{a,2,z} + F_{I,1,z} - F_{I,2,z}) \cos(\beta_c)
\end{aligned}$$

où

$$I_{c,i} = \frac{1}{2} m d l \cos(\beta_i - \beta_c)$$

$$I_H = I_c + 2 m d^2$$

L'implémentation numérique² de ces équations permet de connaître toutes les valeurs des paramètres ci-dessus à l'exception des trois accélérations $\ddot{\beta}_i$, ce qui rend le système à 3 équations couplées solvable aisément.

2. Par économie de code, l'implémentation du calcul des forces et moments aérodynamiques de la deuxième pale utilise les mêmes expressions que pour la première pale, mais en changeant les signes de $\beta, \dot{\beta}, \sin(\psi_\beta), \cos(\psi_\beta)$ et $M_{a,y}$. Il est aussi à noter que le sens de rotation du rotor est tenu en compte dans le signe de Ω dans les équations ci-haut, mais que des ajustements s'imposent pour le calcul des forces et moments aérodynamiques.

ANNEXE C Utilisation de `systune`

Cette annexe a pour objectif de décrire les fonctionnalités de la fonction `systune` de MATLAB afin de pouvoir l'utiliser à son plein potentiel. Cette fonction utilise des «requis» imposés grâce à la classe d'objets `TuningGoal` et tente de les satisfaire tous à la fois. Il est possible de préciser des requis de type objectif (à optimiser autant que possible) et des requis de type contrainte (à amener sous/au-dessus d'un seuil, sans nécessité d'optimisation). Cette annexe comporte trois sections. La première décrit comment modéliser le système en vue d'utiliser `systune`. La seconde décrit les différents types de requis imposables grâce à la classe `TuningGoal`. La dernière concerne l'application des différents types de requis et présente une comparaison entre ceux-ci en les divisant selon leur applicabilité au suivi de trajectoire ou au rejet de perturbations et de bruits.

C.1 Modélisation

Pour utiliser les différents requis (nécessaire pour utiliser `systune`), les points d'intérêt du système doivent pouvoir être nommés. En effet, les fonctions de construction des requis n'acceptent que des noms (chaînes de caractères) pour désigner les différents points d'intérêt. Les différents points d'intérêt pouvant être donnés en argument aux requis sont :

- Entrée et sortie d'un système (Propriétés `InputName` et `OutputName` du modèle)
- Point d'analyse (Élément `AnalysisPoint` qui doit être inclus dans le modèle)
- Bloc SIMULINK réglable

Afin de pouvoir utiliser `systune`, le modèle fourni à cette fonction doit contenir tous les points d'intérêt précisés dans les requis et doit être l'un des types de modèles de systèmes dynamiques suivants :

- Un modèle d'état généralisé `genss`
- Un modèle SIMULINK interfacé par `slTuner`

Le modèle spécifié doit avoir des éléments réglables et peut contenir des éléments incertains.

Une note concernant les points d'analyse : Les points d'analyse servent à désigner des boucles :

- pour un requis s'appliquant sur une boucle, la fonction de construction du requis ajoute une sortie avant et une entrée après le point d'analyse, et analyse le transfert entre ceux-ci (p. ex., fonction de sensibilité).
- pour n'importe quel requis, sur un système ayant plusieurs boucles, il peut être utile de vouloir ignorer une boucle (p. ex., ignorer la boucle externe pour un requis devant

s'appliquer sur la boucle interne)

Par exemple, la sortie du contrôleur et les rétroactions (lorsqu'il y a plusieurs boucles) sont souvent des points d'analyse.

C.1.1 Construire un modèle d'état généralisé **genss** pour l'utiliser avec **systune**

- **Paramétrer les éléments réglables du système.** Cela peut se faire à l'aide de structures prédéfinies (`TunablePID`, `TunableTF`, `TunableSS`, `TunableGain`) ou à l'aide de structure personnalisée à l'aide de paramètres `realp`.
- Nommer les entrées et sorties des sous-systèmes.
- **Interconnecter les éléments fixes et réglables.** Cela se réalise à l'aide des fonctions `feedback` et `connect`. Utiliser la fonction `AnalysisPoint` pour créer des points d'analyse et les inclure lors des connexions (p. ex., `feedback(G*X1*F,1)` où `X1` est un point d'analyse entre les systèmes `F` et `G`).

L'avantage de cette méthode est qu'un vecteur de modèles d'état peut aussi être fourni à la fonction `systune`.

C.1.2 Construire un modèle **SIMULINK** pour l'interfacer avec **slTuner** et l'utiliser avec **systune**

- **Construire un modèle **SIMULINK**.**
- **Nommer tous les blocs et signaux d'intérêt.**
- **Créer une interface **slTuner**.** La fonction `slTuner` renvoie une interface `slTuner` et prend en argument le nom du modèle **SIMULINK** à interfacer et un vecteur de cellules contenant le nom des blocs réglables (p. ex., le nom des blocs `Gain` ou `PID` devant faire partie du contrôleur).
- **Désigner les points d'analyse.** La fonction `addPoint` sert à ajouter ces points d'analyse et prend en argument l'interface `slTuner` et un vecteur de cellules contenant le nom des signaux d'intérêt. Il est à noter que les entrées et sorties du système doivent être ajoutées ainsi aussi.

L'avantage de cette méthode est qu'il est plus facile de construire les connexions entre les différents sous-systèmes et qu'il est facile de simuler le résultat final par la suite (le simulateur peut directement être utilisé pour créer l'interface), et qu'il est possible d'utiliser les requis prenant le nom d'un bloc **SIMULINK** en argument.

C.2 TuningGoal

Afin de spécifier les objectifs et contraintes de l'optimisation à l'aide de **sys tune**, la librairie **TuningGoal** doit être utilisée. Les différents types d'objectifs sont regroupés dans les cinq catégories suivantes :

- Requis relatifs au domaine temporel
- Requis relatifs au domaine fréquentiel
- Formes de boucle (*loop shapes*) et marges de stabilité
- Passivité
- Dynamiques du système

Il est à noter que ces requis peuvent tous être utilisés comme objectifs (fonction à minimiser) ou comme contraintes (fonction à amener sous 1).

Il est aussi à noter qu'il est possible d'ajouter des changements d'échelle et d'ouvrir des boucles pour la majorité des types de requis. L'ouverture de boucles permet, par exemple, d'ajouter des critères pour des boucles internes en ouvrant les boucles externes.

Pour alléger le texte, lorsqu'une fonction dans le domaine fréquentiel représente «le système», il est sous-entendu qu'il s'agit de la fonction de transfert en boucle fermée entre l'entrée et la sortie spécifiées (possiblement multivariable).

C.2.1 Domaine temporel

Les objectifs exprimables dans le domaine temporel sont :

- **StepTracking** - Suivi de la réponse temporelle d'un système de référence à un échelon de commande
- **StepRejection** - Suivi de la réponse temporelle d'un système de référence à un échelon de perturbation
- **Transient** - Appareillement de la réponse temporelle transitoire d'un système de référence
- **LQG** - Requis sous forme de fonction de coût à optimiser

StepTracking

Ce requis permet de spécifier un objectif de suivi de réponse. Ce requis peut s'exprimer de trois manières :

- Préciser la constante de temps désirée, donc le temps de réponse visé. Le modèle de référence utilisé par l'algorithme sera d'ordre 1.

- Préciser la constante de temps désiré et le pourcentage de dépassement désiré. Le modèle de référence utilisé par l'algorithme sera d'ordre 2, déduisant l'amortissement désiré du dépassement désiré.
- Préciser directement le modèle de référence (peut être multivariable (MIMO))

L'algorithme utilisé pour ce requis consiste à minimiser (ou amener sous 1) la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{\left\| T(s, x) - \frac{1}{s} R \right\|_2}{0.1 \left\| \frac{1}{s} R(s) - I \right\|_2}$$

où x est le vecteur des paramètres réglables, T est le système, R est le modèle de référence, et où le facteur 0.1 est réglable (propriété **RelGap**).

Cette fonction est une mesure de l'erreur d'appareillage entre le système et le modèle de référence. Cette fonction est égale à 1 si la réponse temporelle du système est au plus à 0.1 (ou à une autre valeur si **RelGap** a été changée), soit l'erreur d'appareillage maximal admissible. Cette fonction est égale à zéro si la réponse du système est identique à la réponse du modèle de référence. L'algorithme tend donc à assurer que l'erreur d'appareillage maximale soit respectée et à minimiser l'erreur d'appareillage.

StepRejection

Ce requis permet de spécifier un objectif de rejet de perturbation. Ce requis se distingue de **StepTracking** par ses paramètres spécifiables et sa fonction d'optimisation. Ce requis peut s'exprimer de trois manières :

- Préciser l'amplitude maximale et le temps de réponse désirés. Le modèle de référence utilisé par l'algorithme sera d'ordre 1.
- Préciser l'amplitude maximale, le temps de réponse et l'amortissement désirés. Le modèle de référence utilisé par l'algorithme sera d'ordre 2.
- Préciser directement le modèle de référence (peut être multivariable (MIMO))

L'algorithme utilisé pour ce requis consiste à minimiser (ou amener sous 1) la fonction suivante :

$$f(x) = \left\| \frac{T(s, x)}{R(s)} \right\|_{\infty}$$

où x est le vecteur des paramètres réglables, T est le système, et R est le modèle de référence.

Cette fonction est une mesure de l'amplitude maximale du système relative au modèle de référence. Cette fonction est égale à 1 si la réponse temporelle du système à la perturbation est identique à celle du modèle de référence, ou si le pic d'amplitude du système, son temps de réponse et/ou son amortissement correspondent à celui du modèle de référence (et que

les autres caractéristiques soient meilleures : pic d’amplitude plus petit, réponse plus rapide, amortissement plus grand). Cette fonction est égale à 0 si le système est insensible à la perturbation considérée. L’algorithme tend donc à minimiser l’amplitude et le temps de réponse, et à maximiser l’amortissement, du système suite à une perturbation, donc à minimiser sa sensibilité à la perturbation. Le modèle de référence sert à indiquer l’amplitude maximale, le temps de réponse maximal et l’amortissement minimal admissible.

Transient

Ce requis peut être vu comme une généralisation de **StepTracking**. Ce requis consiste à faire suivre un modèle de référence spécifié pour une entrée spécifiée. L’entrée à spécifier peut être une impulsion (par défaut), un échelon, une rampe ou un signal quelconque (spécifier sous forme de fonction de transfert).

L’algorithme utilisé pour ce requis consiste à minimiser (ou amener sous la valeur de la propriété **RelGap**) la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{\|y(t, x) - y_{ref}(t)\|_2}{\|1 - y_{ref}(t)\|_2}$$

où x est le vecteur des paramètres réglables, y est la réponse du système, y_{ref} est la réponse du modèle de référence, et où $1 - y_{ref}(t)$ désigne la partie transitoire de la réponse du modèle de référence (écart par rapport à la valeur en régime permanent).

Il est à noter qu’étant donné la nature de l’algorithme¹, **sys tune** va émettre une erreur si l’action directe du contrôleur n’a pas pu être annulée (soit si la matrice **D** du contrôleur ne peut être amené à 0 ou si la fonction de transfert du contrôleur ne peut pas être strictement propre).

LQG

Ce requis exprime un objectif (ou contrainte) à l’aide d’une fonction de coût LQG. Cette fonction est de la forme :

$$J = E(z(t)' \mathbf{Q}_z z(t))$$

où $z(t)$ est la réponse temporelle du système à un vecteur de bruit blanc en entrée (dont la matrice de covariance $\mathbf{Q}_w$ est à spécifier), $\mathbf{Q}_z$ est la matrice de pondération à spécifier et $E(.)$ est l’espérance (moyenne d’une variable aléatoire, assimilable à une intégrale pondérée).

1. Cet algorithme utilise l’énergie du signal (norme $\mathcal{H}_2$) qui est infinie si le contrôleur a une action directe non nulle.

Il est à noter que **sysune** va émettre une erreur si l'action directe du contrôleur n'a pas pu être annulée pour les mêmes raisons que lors de l'utilisation de **Transient**.

C.2.2 Domaine fréquentiel

Les objectifs exprimables dans le domaine fréquentiel sont :

- **Gain** - Gain maximal en fonction de la fréquence
- **Variance** - Limite l'amplification de bruit blanc
- **Tracking** - Limite l'erreur de suivi
- **Overshoot** - Limite le dépassement (mais ne l'optimise pas)
- **Rejection** - Facteur d'atténuation minimal d'une perturbation
- **Sensitivity** - Limite la sensibilité aux perturbations
- **WeightedGain** - Filtre de pondération (norme $\mathcal{H}_\infty$)
- **WeightedVariance** - Filtre de pondération (norme $\mathcal{H}_2$)

Gain

Ce requis permet de spécifier une limite maximale aux amplitudes en fonction de la fréquence.

Ce requis peut s'exprimer de deux manières :

- Préciser le gain maximal admissible pour toute fréquence (possibilité de restreindre la bande de fréquence applicable à l'aide de la propriété **Focus**).
- Préciser le profil de gain maximal (en fonction de la fréquence)

Deux exemples d'application seraient :

- d'imposer un gain inférieur à 1 sur toute fréquence pour assurer un rejet de perturbation ;
- d'imposer un profil d'atténuation personnalisé sur une bande de fréquence voulue.

L'algorithme utilisé pour ce requis consiste à minimiser (ou amener sous 1) la fonction suivante :

$$f(x) = \left\| \frac{T(s, x)}{gain_{max}} \right\|_\infty$$

où x est le vecteur des paramètres réglables, T est le système, et où $gain_{max}$ est le gain maximal (ou le profil de gain maximum en fonction de la fréquence).

Cette fonction est une mesure de l'amplitude maximale normalisée du système. Cette fonction est égale à 1 si l'amplitude du système atteint la limite imposée (qui peut varier selon la fréquence) en au moins une fréquence donnée. Cette fonction est égale à zéro si le système a un transfert nul. L'algorithme tend donc à assurer que la limite d'amplitude soit respectée et minimise l'amplitude (normalisée) du système.

Variance

Ce requis permet de spécifier une limite maximale à l'amplification d'un bruit blanc.

L'algorithme utilisé pour ce requis consiste à minimiser (ou amener sous 1) la fonction suivante :

$$f(x) = \left\| \frac{T(s, x)}{\text{amplification}_{max}} \right\|_2$$

où x est le vecteur des paramètres réglables, T est le système, et où $\text{amplification}_{max}$ est l'amplification maximale.

Cette fonction est une mesure normalisée de l'énergie totale de la réponse impulsionnelle du système, qui est une mesure normalisée de l'amplification du bruit. Cette fonction est égale à 1 si l'amplification du bruit par le système atteint la limite imposée. Cette fonction est égale à zéro si la sortie considérée est insensible au bruit considéré. L'algorithme tend donc à minimiser l'amplification du bruit et à assurer que la limite d'amplification soit respectée.

Il est à noter que si le bruit n'est pas blanc, le requis **WeightedVariance** devrait être utilisé.

Tracking

Ce requis permet de spécifier une limite maximale à l'erreur de suivi en fonction de la fréquence. Ce requis peut s'exprimer de deux manières :

- Préciser l'erreur maximale en régime permanent, l'erreur maximale au pic (dépassement) et le temps de réponse maximal
- Préciser le profil de la limite maximale de l'erreur de suivi (en fonction de la fréquence)

L'algorithme utilisé pour ce requis consiste à minimiser (ou amener sous 1) la fonction suivante :

$$f(x) = \left\| \frac{(T(s, x) - I)}{\text{erreur}_{max}} \right\|_{\infty}$$

où x est le vecteur des paramètres réglables, T est le système, et où erreur_{max} est l'erreur maximale (ou le profil de l'erreur maximale en fonction de la fréquence).

Cette fonction est une mesure de l'erreur maximale normalisée du système. Cette fonction est égale à 1 si l'erreur de suivi atteint la limite imposée (qui varie selon la fréquence) en au moins une fréquence donnée. Cette fonction est égale à zéro si le système a un transfert unitaire, donc un suivi parfait (sortie = entrée). L'algorithme tend donc à assurer que la limite d'erreur de suivi soit respectée et minimise l'erreur (normalisée) de suivi du système.

Overshoot

Ce requis permet de limiter le pourcentage de dépassement. L'algorithme utilisé approxime² le dépassement par la norme $\|T(s, x)\|_\infty$ et ne peut assurer un dépassement plus petit que 5%.

Rejection

Ce requis permet de préciser un facteur d'atténuation minimum d'une perturbation donnée. Le facteur d'atténuation est le rapport entre la sensibilité du système en boucle ouverte à la perturbation considérée et la sensibilité du système en boucle fermée à la même perturbation (donc le facteur doit être supérieur à 1 pour avoir une atténuation). L'algorithme minimise le rapport

$$\max_{\omega} \|W_f(j\omega)S(j\omega, x)\|$$

où S est la fonction de sensibilité en boucle fermée du système à la perturbation considérée, et W_f une fonction calculée à partir du facteur d'atténuation minimal imposé. Un rapport de 1 indique que le facteur minimal est atteint et un rapport inférieur à 1 indique que l'atténuation est supérieure à la limite imposée. Le rapport est égal à 0 si le système en boucle fermée est insensible à la perturbation donnée (le facteur d'atténuation est alors infini si le système en boucle ouverte n'est pas insensible à cette perturbation).

Sensitivity

Ce requis permet de spécifier une sensibilité maximale à une perturbation donnée. L'algorithme minimise la fonction suivante :

$$f(x) = \left\| \frac{S(s, x)}{Sensitivity_{max}} \right\|_\infty$$

où x est le vecteur des paramètres réglables, S est la fonction de sensibilité du système à la perturbation donnée, et où $Sensitivity_{max}$ est la sensibilité maximale (peut être fonction de la fréquence). Cette fonction est égale à 1 si la limite de sensibilité est atteinte (mais pas dépassée) et est nulle si le système est insensible à la perturbation.

Ce requis se distingue par son critère absolu, alors que **Rejection** utilise un critère plutôt relatif.

2. Cette norme donne le dépassement exact pour un système du deuxième ordre et n'est qu'une approximation pour les ordres plus élevés.

WeightedGain

Ce requis permet d'utiliser des pondérations fréquentielles en entrée et en sortie pour représenter différents requis sous forme de norme $\mathcal{H}_\infty$ à minimiser.

L'algorithme pour ce requis minimise la norme

$$\|W_o(s)T(s, x)W_i(s)\|_\infty$$

où x est le vecteur des paramètres réglables, T est le système, W_o est la pondération à la sortie, et où W_i est la pondération à l'entrée.

Ce requis permet donc d'utiliser directement des critères de synthèse $\mathcal{H}_\infty$.

WeightedVariance

Ce requis permet d'utiliser des pondérations fréquentielles en entrée et en sortie pour représenter différents requis sous forme de norme $\mathcal{H}_2$ à minimiser.

L'algorithme pour ce requis minimise la norme

$$\|W_o(s)T(s, x)W_i(s)\|_2$$

où x est le vecteur des paramètres réglables, T est le système, W_o est la pondération à la sortie, et où W_i est la pondération à l'entrée.

Comme la norme utiliser permet de minimiser l'énergie du système en réponse à une entrée donnée, il est possible d'utiliser ce requis pour représenter des critères de performance LQG, ou pour représenter des critères de réjection de bruits colorés ou de perturbation non uniforme (comme des rafales).

C.2.3 Formes de boucle et marges de stabilité

Les requis suivants concernent les gains de boucle donnée (contrairement aux requis des deux catégories précédentes qui considèrent les gains de fonctions de transfert données) :

- **MinLoopGain** - Gain minimal (de la boucle) en fonction de la fréquence
- **MaxLoopGain** - Gain maximal (de la boucle) en fonction de la fréquence
- **LoopShape** - Limite la forme de la boucle (assimilable à utiliser **MinLoopGain** pour les basses fréquences en conjonction avec **MaxLoopGain** pour les hautes fréquences)
- **Margins** - Marges de stabilité (gain et phase) minimales

MinLoopGain

Ce requis permet d'imposer une limite inférieure (dépendant de la fréquence) au gain d'une boucle donnée, ou aux valeurs singulières d'une boucle donnée si le système est multivariable. L'algorithme minimise la fonction suivante :

$$||W_s S(s, x)||_\infty$$

où x est le vecteur des paramètres réglables, S est la fonction de sensibilité de la boucle donnée, et où W_s est une pondération calculée à partir de la limite imposée (peut dépendre de la fréquence). Il est à noter que comme la sensibilité de la boucle est inversement proportionnelle au gain de la boucle³, minimiser la sensibilité permet de maximiser le gain de la boucle. La fonction est inférieure à 1 lorsque le gain de la boucle est supérieur à la limite.

En raison des approximations⁴ utilisées par cet algorithme, celui est plus efficace pour des limites imposées aux basses fréquences.

MaxLoopGain

Ce requis permet d'imposer une limite supérieure (dépendant de la fréquence) au gain d'une boucle donnée, ou aux valeurs singulières d'une boucle donnée si le système est multivariable. L'algorithme minimise la fonction suivante :

$$||W_t T(s, x)||_\infty$$

où x est le vecteur des paramètres réglables, T est la fonction de sensibilité complémentaire de la boucle donnée, et où W_t est une pondération calculée à partir de la limite imposée (peut dépendre de la fréquence). Il est à noter que comme la sensibilité complémentaire de la boucle est proportionnelle au gain de la boucle⁵, minimiser la sensibilité complémentaire permet de minimiser le gain de la boucle. La fonction est inférieure à 1 lorsque le gain de la boucle est inférieur à la limite.

En raison des approximations⁶ utilisées par cet algorithme, celui est plus efficace pour des limites imposées aux hautes fréquences.

3. Par définition, $S = \frac{1}{1+L}$ où L est la fonction de transfert en boucle ouverte désignée. L'amplitude de L est ce qui est désigné comme «gain de la boucle».

4. Il est à noter que l'algorithme utilise l'approximation suivante : $|S| \approx 1/|L|$ lorsque $|L| \gg 1$.

5. Par définition, $T = 1 - S = \frac{L}{1+L}$ où L est la fonction de transfert en boucle ouverte désignée. L'amplitude de L est ce qui est désigné comme «gain de la boucle».

6. Il est à noter que l'algorithme utilise l'approximation suivante : $|T| \approx |L|$ lorsque $|L| \ll 1$.

LoopShape

Ce requis permet d'imposer un profil de gain pour une réponse en boucle ouverte en fonction de la fréquence.

Le profil de gain peut être donné à l'aide d'une des manières suivantes :

- Donner directement le profil de gain en fonction de la fréquence (à l'aide de la fonction `frd`) avec ou sans tolérance sur la fréquence de coupure
- Donner la fréquence de coupure désirée, avec ou sans tolérance (le profil voulu sera supposé être assimilable à un intégrateur, soit ω_c/s)

L'algorithme utilise alors l'algorithme de `MinLoopGain` pour les basses fréquences et celui de `MaxLoopGain` pour les hautes fréquences, en calculant les pondérations (W_s et W_t) de chacune en fonction du profil de gain donné et de la tolérance sur la fréquence de coupure (0.1 par défaut). La fonction minimisée est donc :

$$f(x) = \left\| \begin{matrix} W_s S(s, x) \\ W_t T(s, x) \end{matrix} \right\|_{\infty}$$

Les termes «basses fréquences» et «hautes hautes fréquences» sont utilisés relativement à la fréquence de coupure.

Margins

Ce requis permet de spécifier une marge de gain et une marge de phase minimales pour une boucle donnée.

L'algorithme minimise la fonction suivante :

$$\|2\alpha S(s, x) - \alpha I\|_{\infty}$$

où x est le vecteur des paramètres réglables, S est la fonction de sensibilité de la boucle donnée, et où α est un paramètre calculé à partir des marges demandées. La norme utilisée par l'algorithme est en fait l'inverse de la «marge de disque» de stabilité. Ce type de marge sert à regrouper en une seule valeur la marge de gain et la marge de phase, et est notamment utilisé pour représenter les marges de systèmes multivariables. Le paramètre α est en fait

l'équivalent des marges désirées en marge de disque⁷, soit

$$\alpha = \max \left[\frac{GM - 1}{GM + 1}, \tan(PM/2) \right]$$

où GM est la marge de gain minimale désirée (en unités absolues) et PM est la marge de phase minimale désirée (en radians).

C.2.4 Passivité

Les requis relatifs à la passivité sont :

- **Passivity** - Contraint le système à être passif
- **WeightedPassivity** - Contraint le système pondéré à être passif

Un système passif est un système ne pouvant pas générer de l'énergie par lui-même ; un plus grand signal en sortie nécessite forcément un plus grand signal d'entrée. Un système G est dit passif si sa réponse fréquentielle est réelle et positive, donc s'il satisfait la relation suivante :

$$G(j\omega) + G(j\omega)^H > 0$$

Les propriétés intéressantes d'un système passif sont :

- Tout système passif est stable.
- L'inverse d'un système passif est passif.
- L'interconnexion en parallèle de systèmes passifs est passive.
- L'interconnexion en rétroaction de systèmes passifs est passive.

Si un système est passif, l'utilisation d'une loi de commande passive en rétroaction permet d'assurer la stabilité en boucle fermée (même si le système régulé comporte des éléments inconnus ou variables).

Passivity

Ce requis permet d'ajouter une contrainte de passivité sur le système entre les entrées et sorties spécifiées. Il est aussi possible d'ajouter une limite minimale d'excès de passivité par rapport à l'entrée et par rapport à la sortie.

7. La valeur de α peut être vérifiée en calculant la marge de gain de disque $DM = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$ et en utilisant la fonction `dmplot(DM)`. Cette dernière fonction génère un graphique montrant les marges de gain et de phase (en dB et en °) équivalentes.

WeightedPassivity

Ce requis permet d'ajouter une contrainte de passivité sur le système pondéré entre les entrées et sorties spécifiées. Ce requis est sensiblement identique à **Passivity**, excepté qu'il permet d'ajouter des filtres de pondération (fonctions de la fréquence) en entrée et en sortie du système.

C.2.5 Dynamiques du système

Les requis relatifs aux dynamiques du système (c.-à-d. les pôles) sont :

- **Poles** - Restreint les pôles du système en boucle fermée dans le plan complexe
- **ControllerPoles** - Restreint les pôles d'un sous-système réglable dans le plan complexe

Poles

Ce requis permet de définir la région admissible du plan complexe pour les pôles du système en boucle fermée. Cette région admissible est définie selon les critères suivants :

- Fréquence minimale (ou décroissance minimale)
- Fréquence maximale
- Amortissement minimal

ControllerPoles

Ce requis permet de définir la région admissible du plan complexe pour les pôles d'un sous-système réglable. La région admissible est définie de la même manière que pour **Poles**, mais le bloc SIMULINK contraint doit être spécifié (et doit contenir des éléments réglables). Par exemple, un système multivariable comportant 4 contrôleurs PID peut voir un de ses PIDs contraint à l'aide du requis **ControllerPoles**.

C.3 Applications

Les différents types de requis permettent d'imposer diverses contraintes lors de la synthèse avec **sysune**. Deux objectifs de synthèse très communs sont les performances quant au suivi de trajectoires et au rejet de perturbations.

Le tableau C.1 présente les types de requis pouvant être utilisés pour assurer les objectifs (et contraintes) relatifs au suivi de trajectoire.

Tableau C.1 Requis pour le suivi de trajectoire

Requis	Paramètres réglables	Avantages	Algorithme	Application
StepTracking	Temps de réponse, amortissement; modèle de référence, et erreur relative max	Tente de remplir les cibles	Norme $\mathcal{H}_2$	Transfert Entrée/Sortie
Tracking	Temps de réponse, erreur en Régime Permanent, dépassement max; profil d'erreur max	Tente d'excéder les cibles	Norme $\mathcal{H}_\infty$	Transfert Entrée/Sortie
Transient	Modèle de référence, erreur relative max.	Comme StepTracking , mais libre de préciser la forme de l'entrée	Norme $\mathcal{H}_2$	Transfert Entrée/Sortie
LQG	Pondérations, variance du bruit	Optimisation personnalisable	Norme $\mathcal{H}_2$	Transfert Entrée/Sortie
Gain	Gain maximal, gamme de fréquences	Profil fréquentiel personnalisable	Norme $\mathcal{H}_\infty$	Transfert Entrée/Sortie
WeightedGain	Pondérations d'entrée et de sortie	Profil fréquentiel personnalisable	Norme $\mathcal{H}_\infty$	Transfert Entrée/Sortie
WeightedVariance	Pondérations d'entrée et de sortie	Profil fréquentiel personnalisable, possibilité d'exprimer une pondération similaire à un objectif LQG	Norme $\mathcal{H}_2$	Transfert Entrée/Sortie
MinLoopGain	Gain minimal, gamme de fréquences; gain minimal à une fréquence précisée (pour un profil intégral)	Profil fréquentiel personnalisable	Norme $\mathcal{H}_\infty$	Boucle
LoopShape	Profil fréquentiel désiré, tolérance (entre gain min/max); fréquence de coupure désirée (supposant un profil intégral désiré), tolérance	Comme MinLoopGain , mais jumelé avec MaxLoopGain (avec une tolérance entre les 2)	Norme $\mathcal{H}_\infty$	Boucle
Poles	Amortissement min, fréquences min et max	Région personnalisable du plan complexe	N/D	Boucle, système entier

Le tableau C.2 présente les types de requis pouvant être utilisés pour assurer les objectifs (et contraintes) relatifs au rejet de bruits et de perturbations.

Il est à rappeler que les algorithmes basés sur la norme $\mathcal{H}_2$ doivent pouvoir permettre l'élimination de toutes actions directes du contrôleur (entre les entrées et sorties spécifiées) pour pouvoir converger.

Tableau C.2 Requis pour le rejet de bruits et de perturbations

Requis	Paramètres réglables	Avantages	Algorithme	Application
StepRejection	Amplitude maximale, temps de réponse maximal, amortissement minimal; modèle de référence	Tente de rejeter les perturbations mieux que le modèle de référence	Norme $\mathcal{H}_\infty$	Transfert Entrée/Sortie
Gain	Gain maximal, gamme de fréquences	Profil fréquentiel personnalisable	Norme $\mathcal{H}_\infty$	Transfert Entrée/Sortie
Rejection	Facteur d'atténuation minimal, gamme de fréquences	Permet d'imposer une non-dégradation des performances en boucle ouverte	Norme $\mathcal{H}_\infty$	Boucle
Sensitivity	Sensibilité maximale, gamme de fréquences	Limite les gains de la fonction de sensibilité directement (critère absolu)	Norme $\mathcal{H}_\infty$	Boucle
Variance	Limite maximale d'amplification du bruit blanc, variance du bruit blanc	Conçu pour les bruits blancs	Norme $\mathcal{H}_2$	Transfert Entrée/Sortie
WeightedVariance	Pondérations d'entrée et de sortie	Profil fréquentiel personnalisable, peut être utilisé pour rejeter les bruits colorés	Norme $\mathcal{H}_2$	Transfert Entrée/Sortie
WeightedGain	Pondérations d'entrée et de sortie	Profil fréquentiel personnalisable	Norme $\mathcal{H}_\infty$	Transfert Entrée/Sortie
MaxLoopGain	Gain maximal, gamme de fréquences; gain maximal à une fréquence précisée (pour un profil intégral)	Profil fréquentiel personnalisable	Norme $\mathcal{H}_\infty$	Boucle
LoopShape	Profil fréquentiel désiré, tolérance (entre gain min/max); fréquence de coupure désirée (supposant un profil intégral désiré), tolérance	Comme MaxLoopGain , mais jumelé avec MinLoopGain (avec une tolérance entre les 2)	Norme $\mathcal{H}_\infty$	Boucle

ANNEXE D Approches d'implémentation sur la plateforme MicroPilot

D.1 Architecture du contrôleur

L'architecture désirée du contrôleur est présentée à la figure D.1, où K_p , K_i et K_d sont les gains proportionnel, intégral et dérivé, C est la valeur de compensation, L sont les opérations de limite de vitesse et saturation, G est le reste du système (hélicoptère, servomoteurs, mixage), et où le séquençement en vitesse V est indiqué en gris. Afin d'implémenter cette architecture, deux approches sont possibles. Les figures D.2 et D.3 présentent les architectures intégrées et personnalisées. La logique de mixage (*mixing*) et les servomoteurs utilisés restent inchangés pour les deux architectures, ce qui permet de plus facilement faire la transition entre les deux solutions proposées. Il est à noter que l'architecture intégrée nécessite du code *XTENDER^{MP}* afin d'adapter les boucles PID pour permettre l'implémentation du contrôleur robuste synthétisé, dont l'influence est représentée en pointillés. Deux PID personnalisés sont nécessaires pour la boucle d'asservissement de la vitesse verticale (Fig.D.4) en raison des unités divergentes des variables d'entrée (les boucles intégrées gèrent les conversions automatiquement).

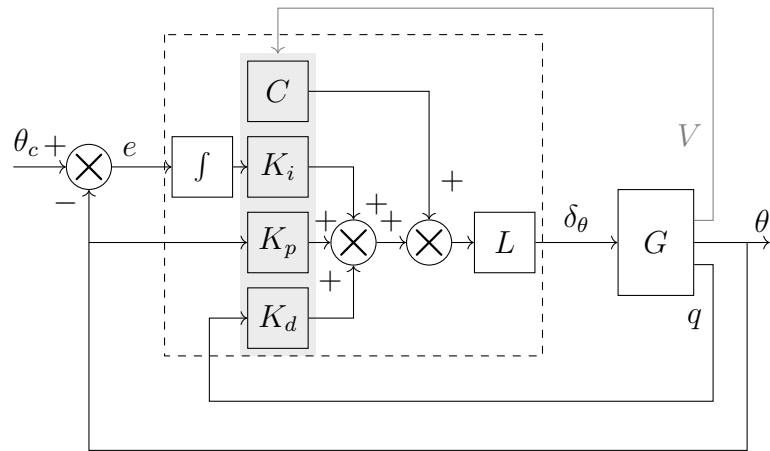


Figure D.1 Architecture désirée d'un contrôleur PID (exemple pour θ)

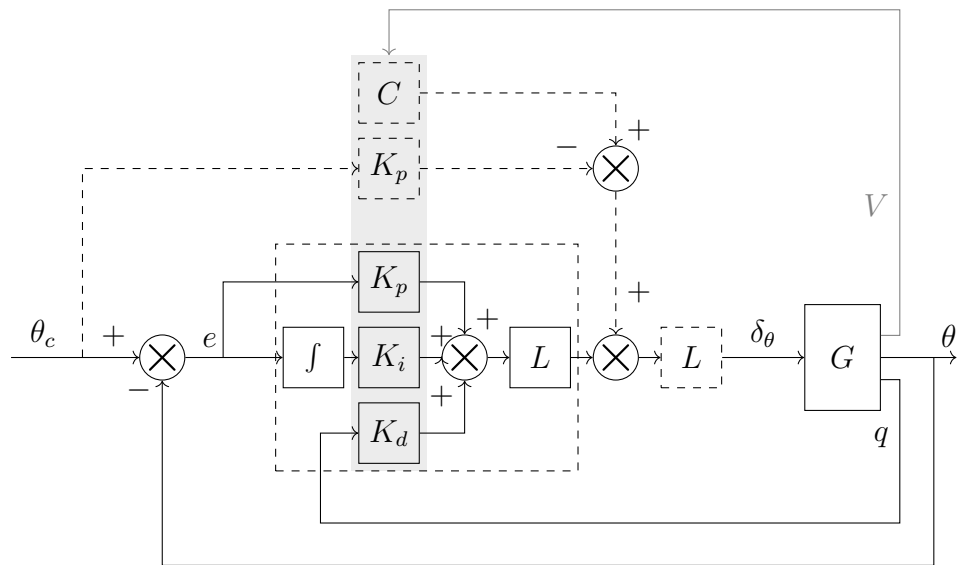


Figure D.2 Architecture d'un contrôleur PID intégré (exemple pour θ)

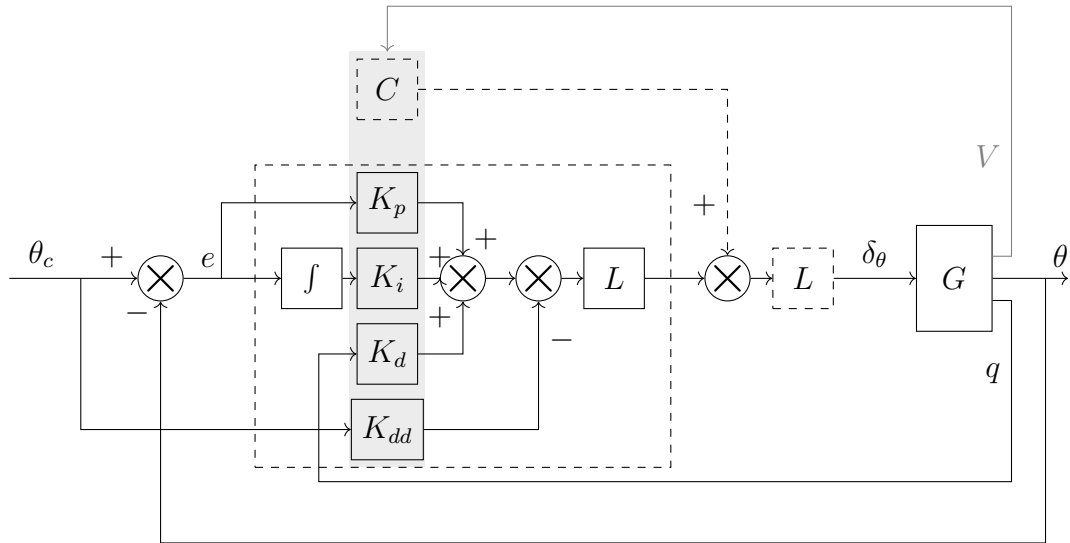


Figure D.3 Architecture d'un contrôleur PID personnalisé (exemple pour θ)

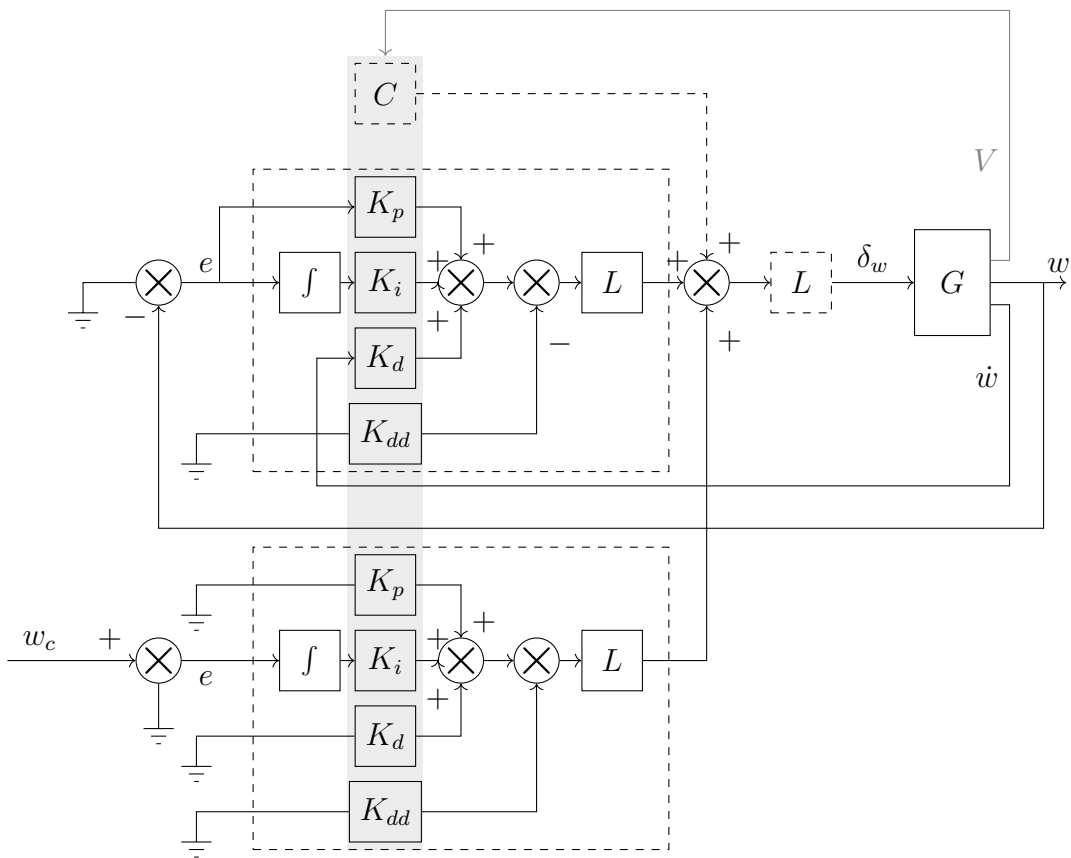


Figure D.4 Architecture du contrôleur PID personnalisé pour w

D.2 Procédures de décollage et d'atterrissage

D.2.1 Procédure imbriquée dans la plateforme MicroPilot

Les tableaux D.1 et D.2 présentent les éléments importants de la procédure de MicroPilot pour le décollage et l'atterrissage d'hélicoptère. Il est à noter que les mots-clés suivants ont été utilisés par souci d'espace :

- Taux [###] : Indique un changement progressif au taux constant spécifié dans le champ (Field ID) ###
- Cnst [###] : Indique que la valeur spécifiée au champ ### est maintenue constante
- Act./Dés. : Indique l'activation ou la désactivation des termes intégraux des boucles PID.
- Si >[###] : Signale que cette étape durera tant que l'altitude sera supérieure au seuil spécifié dans le champ ###

Tableau D.1 Éléments de la procédure de décollage

Phase	TakeOffState [1115]	offGround [1137]	heliThrottle	Intégrateurs	Temps
Initialisation	1	0	0	Dés.	-
Décollage commandé	2	0	0	Dés.	-
Augmentation du régime moteur	3	0	Taux [924]	Dés.	-
Vérification	3	0	Cnst [934]	Dés.	[935] + 3sec
Augmentation du régime moteur	3	0	Taux [980]	Dés.	-
Décollage	0	1	Taux [980]	Act.	1sec
Procédure terminée	0	1	Nominal	Act.	-

Lien entre le régime moteur, les pas collectifs, et la variable `heliThrottle`

La plateforme utilisée est une version adaptée de la plateforme pour des drones à voilure fixe. Cela implique que les variables et la structure de la plateforme restent inchangées et utilisent les termes habituellement réservés aux avions, comme «aileron» et «élevateur». Il est mentionné dans la documentation fournie par le fabricant que les termes des gouvernes d'un avion (*aileron*, *elevator*, *rudder*, et *throttle*) sont utilisés et qu'ils désignent les gouvernes équivalentes pour un hélicoptère (pas cyclique latéral, pas cyclique longitudinal, pas collectif de queue, et pas collectif/régime moteur, respectivement).

Tableau D.2 Éléments de la procédure d’atterrissage

Phase	Circuit State [1112]	offGround [1137]	heli Throttle	Vitesse verticale désirée	Terme intég.	Altitude
En vol	0	1	Nominal	Comport. Normal	Act.	Comport. Normal
Atterrissage commandé	1	1	Nominal	0	Act.	Constante
Vol vers point d’atterrissage	1	1	Nominal	0	Act.	Constante
Descente	2	1	Nominal	Taux [922]	Act.	Si > [954]
Baisse du régime moteur	3	1	Taux [953]	-	Act.	Si > [918]
Baisse rapide du régime moteur	3	1	Taux [981]	-	Act.	Si > 0
Atterrissage	3	0	0	-	Dés.	0
Procédure terminée	4	0	0	-	Dés.	0

Comme un avion utilise son régime moteur (*throttle*) pour gagner de la vitesse verticale, l’utilisation du terme porte à confusion puisque l’hélicoptère a son régime moteur à gérer, mais utilise le pas collectif pour contrôler sa vitesse verticale. Pour pallier cela, MicroPilot a introduit de nouvelles variables :

- **heliThrottle** : sortie de la boucle PID responsable de la vitesse verticale (équivalent de la gouverne responsable de la vitesse verticale) ;
- **ThrottleTLU** : régime désiré du moteur et valeur envoyée au gouverneur du moteur
- **heliCollPitch** : valeur désirée des pas collectifs et valeur envoyée à la logique de mixage des commandes

La variable **heliThrottle** est la variable utilisée pour les équivalences entre les gouvernes d’un avion et celles d’un hélicoptère. Les valeurs des variables **ThrottleTLU** et **heliCollPitch** sont, quant à elles, déduites de **heliThrottle** en utilisant des tableaux de référence personnalisés (appelés « *User Table Lookup* » (TLU) dans la documentation et les interfaces de MicroPilot). Par exemple, la valeur de **ThrottleTLU** est le régime nominal (donc constante) pour toute valeur de **heliThrottle** valide en vol, et **heliThrottle** est à la valeur minimale des pas collectifs lorsque le régime du moteur n’est pas nominal (**heliThrottle** est inférieur au minimum valide en vol, donc l’appareil est au sol en train de décoller ou d’atterrir).

D.2.2 Procédure alternative

La procédure alternative proposée a pour objectif d'utiliser au maximum les ressources de la plateforme MicroPilot afin d'effectuer le décollage et l'atterrissage. Cette procédure consiste donc essentiellement à introduire du code *XTENDER^{MP}* visant à adapter la procédure imbriquée à la configuration de contrôleur personnalisée.

Décollage

Pour le décollage, presque tout est géré par la plateforme automatiquement en utilisant la variable `heliThrottle` comme sortie du PID responsable de la vitesse verticale. L'adaptation à effectuer ne touche que l'activation et la désactivation des termes intégraux des PIDs.

Lorsque l'appareil est au sol (valeur du champ `TakeOffState` [1115] non nulle et valeur du champ `offGround` [1137] nulle), les limites des termes intégrateurs (*Anti-windup limits*) des PID personnalisés sont mises à 1, soit la plus petite valeur non nulle que les limites peuvent prendre (les mettre à 0 les désactive). Cela a pour effet de forcer l'effet des termes intégrateurs à pratiquement 0 sans pour autant causer de l'accumulation (*windup*). Dès que l'appareil décolle (valeur du champ `TakeOffState` [1115] nulle et valeur du champ `offGround` [1137] non nulle), les limites sont remises à leurs valeurs réelles (ce qui active les termes intégraux).

Atterrissage

Comme pour le décollage, l'utilisation de la variable `heliThrottle` comme sortie du PID responsable de la vitesse verticale règle la majorité des problèmes. L'adaptation de l'activation et de la désactivation des termes intégraux doit passer par les variables `CircuitState` [1112] et `offGround` [1137], où les termes sont désactivés lorsque `offGround` est nulle et `CircuitState` est supérieure à 2.