

Titre: Les valeurs pratiques des propriétés mécaniques des roches
Title:

Auteurs: Denis Gill, Robert Corthésy, & Maria-Helena Leite
Authors:

Date: 2003

Type: Rapport / Report

Référence: Gill, D., Corthésy, R., & Leite, M.-H. (2003). Les valeurs pratiques des propriétés mécaniques des roches. (Rapport technique n° EPM-RT-2003-05).
Citation: <https://publications.polymtl.ca/2607/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/2607/>
PolyPublie URL:

Version: Version officielle de l'éditeur / Published version

Conditions d'utilisation: Tous droits réservés / All rights reserved
Terms of Use:

 **Document publié chez l'éditeur officiel**
Document issued by the official publisher

Institution: École Polytechnique de Montréal

Numéro de rapport: EPM-RT-2003-05
Report number:

URL officiel:
Official URL:

Mention légale:
Legal notice:

EPM-RT-2003-05

**LES VALEURS PRATIQUES DES PROPRIÉTÉS
MÉCANIQUES DES ROCHES**

Denis E. Gill, Robert Corthésy, Maria Helena Leite
Département des génies civil, géologique et des mines
École Polytechnique de Montréal

Mai 2003

Poly

EMP-RT-2003-05

**LES VALEURS PRATIQUES DES PROPRIÉTÉS
MÉCANIQUES DES ROCHES**

**Denis E. Gill
Robert Corthésy
Maria Helena Leite**

**Département des génie civil, géologique et des mines
École Polytechnique de Montréal**

Mai 2003

©2003
Denis E. Gill, Robert Cothésy
Maria Helena Leite,
Tous droits réservés

Dépôt légal :
Bibliothèque nationale du Québec, 2003
Bibliothèque nationale du Canada, 2003

EPM-RT-2003-05
Les valeurs pratiques des propriétés mécaniques des roches
par : Denis E. Gill, Robert Cothésy et Maria Helena Leite
Département des génies civil, géologique et des mines
École Polytechnique de Montréal

Toute reproduction de ce document à des fins d'étude personnelle ou de recherche est autorisée à la condition que la citation ci-dessus y soit mentionnée.

Tout autre usage doit faire l'objet d'une autorisation écrite des auteurs. Les demandes peuvent être adressées directement aux auteurs (consulter le bottin sur le site <http://www.polymtl.ca/>) ou par l'entremise de la Bibliothèque :

École Polytechnique de Montréal
Bibliothèque – Service de fourniture de documents
Case postale 6079, Succursale «Centre-Ville»
Montréal (Québec)
Canada H3C 3A7

Téléphone : (514) 340-4846
Télécopie : (514) 340-4026
Courrier électronique : biblio.sfd@polymtl.ca

Pour se procurer une copie de ce rapport, s'adresser à la Bibliothèque de l'École Polytechnique.

Prix : 25.00\$ (sujet à changement sans préavis)
Régler par chèque ou mandat-poste au nom de l'École Polytechnique de Montréal.

Toute commande doit être accompagnée d'un paiement sauf en cas d'entente préalable avec des établissements d'enseignement, des sociétés et des organismes canadiens.

Table des matières

Table des matières	3
Liste des tableaux.....	5
Liste des notations et des symboles	7
Sommaire	10
1- Introduction	11
1.1- Mise en situation.....	11
1.2- Définitions	12
1.3- La cause de la dispersion des résultats d'essais.....	13
1.3.1- La microstructure des roches.....	13
1.3.2- L'acceptation ou le rejet d'un résultat	13
1.4- L'objectif du document	13
2- La théorie des petits échantillons	15
2.1- La différence avec la théorie classique de l'échantillonnage	15
2.2- Les équations fondamentales.....	15
2.3- Les hypothèses de départ.....	17
3- La théorie des petits échantillons et les propriétés mécaniques des roches	18
3.1- Généralités.....	18
3.1.1- La justification.....	18
3.1.2- La terminologie utilisée.....	20
3.2- Le nombre minimal d'éprouvettes dans un groupe	20
3.2.1- Les bornes de la moyenne vraie d'une propriété mécanique	20
3.2.2- L'indice de précision atteint avec un groupe d'éprouvettes.....	22
3.2.3- Les valeurs suggérées de l'indice de précision.....	23
3.2.4- La relation entre le nombre d'éprouvettes dans un groupe et l'indice de précision.....	25
4- L'optimisation du nombre d'éprouvettes dans un groupe.....	28
4.1- L'algorithme d'optimisation.....	28
4.1.1- La première technique de solution de l'équation 16 est utilisée	28
4.1.2- La deuxième technique de solution de l'équation 16 est utilisée	31
4.2- Exemples d'optimisation	32
4.3- Simulations	39
4.4- Calculs de l'indice de précision ou de l'intervalle de confiance <i>a posteriori</i>	41
5- Discussion.....	44
5.1- Les normes ASTM	44
5.2- La norme B.I.M.R. de l'essai de compression uniaxiale.....	46
5.3- Les normes de CANMET	47

5.4- Gill (1963)	48
5.5- Yamagushi (1970)	48
5.6- La portion de l'écart type observé qui découle uniquement de l'hétérogénéité des roches	49
5.7- La conséquence de la répartition normale des valeurs de la propriété dans la population	51
6- La valeur pratique d'une propriété mécanique	52
6.1- L'intervalle de l'écart type vrai	52
6.2- La valeur pratique d'une propriété mécanique résistante	53
6.2.1- La recherche de la stabilité	53
6.2.2- La recherche de l'instabilité	57
6.3- Valeur pratique d'une déformabilité	58
6.4- Calcul d'une probabilité globale de rupture ou de non rupture d'une valeur donnée d'une propriété mécanique d'une roche	60
7- Conclusion	63
Références	64
ANNEXE A	67
Normes d'essais en laboratoire publiées	67
ANNEXE B	74
Tableaux des fonctions de densité de probabilités normales de Student	74
et du chi carré	74
ANNEXE C	77
Tableaux donnant les valeurs de l'indice de précision en fonction du nombre d'éprouvettes dans le groupe et du coefficient de variation	77
ANNEXE D	90
Modules de calcul du nombre d'éprouvettes dans un groupe, de l'indice de précision et des constantes A et B définissant les bornes de l'intervalle de l'écart type vrai	90
D1.1- Le chiffrier	91
D2.1- Le chiffrier	93
D2.2- Utilisation	94
D3.1- Le chiffrier	94
D3.2- Utilisation	95

Liste des tableaux

Tableau 3.1.1 - Essais de propriétés mécaniques effectués par Yamaguchi (1970).....	19
Tableau 3.2.3 – Valeurs suggérées de l'indice de précision pour un intervalle de confiance de 95%.....	24
Tableau 3.2.4 – Nombre d'essais à effectuer (nombre d'éprouvettes dans un groupe) pour atteindre un indice de précision fixé, étant donné un intervalle de confiance de 95%.....	27
Tableau 4.2A – Présentation résumée de la suite de l'exemple 4.2A.....	32
Tableau 4.2B – Présentation résumée de la suite de l'exemple 4.2B.....	33
Tableau 4.2C – Présentation résumée de la suite de l'exemple 4.2C.....	35
Tableau 4.2D – Présentation résumée de la suite de l'exemple 4.2D.....	37
Tableau 4.2E – Présentation résumée de la suite de l'exemple 4.2 ^E	38
Tableau 4.2F – Présentation résumée de la suite de l'exemple 4.2F.....	39
Tableau 4.3A – Données utilisées avec les trois ensembles de simulations effectuées.....	40
Tableau 4.3B – Optimisation du nombre d'éprouvettes dans un groupe, les résistances en compression uniaxiale étant générées à l'aide de la méthode Monte Carlo.....	42
Tableau 5.1A – Coefficients de confiance suggérés par la norme E122-00 pour établir le nombre d'éprouvettes dans un groupe à l'aide de l'équation 23.....	45
Tableau 5.1B – Nombre d'essais à effectuer (nombre d'éprouvettes dans un groupe) pour atteindre un indice de précision fixé, étant donné un intervalle de confiance de 95%, selon les normes ASTM.....	46
Tableau 5.2 – Nombre d'essais à effectuer (nombre d'éprouvettes dans un groupe) pour atteindre un indice de précision de 1,50 avec un intervalle de confiance de 95% selon le B.I.M.R.	47
Tableau 5.3 – Nombre d'essais à effectuer (nombre d'éprouvettes dans un groupe) selon le CANMET.....	48
Tableau 6.1 – Valeurs des constantes A et B de l'équation 36 pour un intervalle de confiance de 95%.....	53
Tableau 6.2.1 – Calculs effectués à l'aide de l'équation 37 et des résultats des simulations (voir les tableaux 4.3A et 4.3B) en postulant une probabilité de non rupture de 85%.	55
Table de distribution de Student.....	75
Table de distribution du Chi ²	76
Tableau C1A – Relation entre le nombre d'éprouvettes dans le groupe, l'indice de précision et le coefficient de variation (de 1 à 9%) pour un intervalle de confiance de 95%.	78

Tableau C1B – Relation entre le nombre d'éprouvettes dans le groupe, l'indice de précision et le coefficient de variation (de 10 à 18%) pour un intervalle de confiance de 95%. .79	.79
Tableau C1C – Relation entre le nombre d'éprouvettes dans le groupe, l'indice de précision et le coefficient de variation (de 19 à 27%) pour un intervalle de confiance de 95%. .80	.80
Tableau C1D – Relation entre le nombre d'éprouvettes dans le groupe, l'indice de précision et le coefficient de variation (de 28 à 36%) pour un intervalle de confiance de 95%. .81	.81
Tableau C2A – Relation entre le nombre d'éprouvettes dans le groupe, l'indice de précision et le coefficient de variation (de 1 à 9%) pour un intervalle de confiance de 98%.8282
Tableau C2B – Relation entre le nombre d'éprouvettes dans le groupe, l'indice de précision et le coefficient de variation (de 10 à 18%) pour un intervalle de confiance de 98%. .83	.83
Tableau C2C – Relation entre le nombre d'éprouvettes dans le groupe, l'indice de précision et le coefficient de variation (de 19 à 27%) pour un intervalle de confiance de 98%. .84	.84
Tableau C2D – Relation entre le nombre d'éprouvettes dans le groupe, l'indice de précision et le coefficient de variation (de 28 à 36%) pour un intervalle de confiance de 98%. .85	.85
Tableau C3A – Relation entre le nombre d'éprouvettes dans le groupe, l'indice de précision et le coefficient de variation (de 1 à 9%) pour un intervalle de confiance de 99%.8686
Tableau C3B – Relation entre le nombre d'éprouvettes dans le groupe, l'indice de précision et le coefficient de variation (de 10 à 18%) pour un intervalle de confiance de 99%. .87	.87
Tableau C3C – Relation entre le nombre d'éprouvettes dans le groupe, l'indice de précision et le coefficient de variation (de 19 à 27%) pour un intervalle de confiance de 99%. .88	.88
Tableau C3D – Relation entre le nombre d'éprouvettes dans le groupe, l'indice de précision et le coefficient de variation (de 28 à 36%) pour un intervalle de confiance de 99%. .89	.89

Liste des notations et des symboles

A : constante définissant la borne inférieure de l'écart type vrai;

B : constante définissant la borne supérieure de l'écart type vrai;

C_o : résistance en compression uniaxiale;

cv_h : coefficient de variation dû à l'hétérogénéité des roches;

cv_{ob} : coefficient de variation observé;

cv_{obs} : coefficient de variation supposé aux différentes étapes de l'algorithme d'optimisation;

d : diamètre d'une éprouvette;

E_{Co} : erreur expérimentale relative sur la résistance en compression uniaxiale;

E_d : erreur expérimentale relative sur la mesure du diamètre de l'éprouvette;

E_e : erreur expérimentale relative;

E_p : erreur expérimentale relative sur la mesure de la charge de rupture de l'éprouvette en compression uniaxiale;

e_e : écart type dû aux erreurs expérimentales;

e_n : écart type dû à l'hétérogénéité des roches;

e_{ob} : écart type observé d'une propriété mécanique;

e_{vr} : écart type vrai d'une propriété mécanique;

f : erreur relative maximale sur la moyenne vraie;

h : coefficient de confiance selon l'inégalité de Tchebychev;

IC : intervalle de confiance;

k : nombre de caractères qui doivent être estimés sur les éléments de la population;

N : nombre d'éléments dans un échantillon; nombre minimal d'éprouvettes dans un groupe;

N_i : nombre d'éprouvettes dans un groupe aux différentes étapes de l'algorithme d'optimisation du nombre d'éprouvettes dans un groupe, $i = 1, 2, 3, \dots$;

n_{ASTM} : coefficient de confiance suggéré par ASTM servant à calculer le nombre minimal d'éprouvettes dans un groupe;

n_{Pr} : coefficient de probabilité déduit de la fonction de densité de probabilité normale;

n_{β} : coefficient de confiance déduit de la fonction de densité de probabilité normale;

P : charge à la rupture d'une éprouvette en compression uniaxiale;

PG : probabilité globale;

P_r : probabilité;

PM_{ob} : propriété mécanique moyenne observée;

PM_{vr} : propriété mécanique moyenne vraie;

p : indice de précision;

p_c : indice de précision fixé au début de l'algorithme d'optimisation du nombre minimal d'éprouvettes dans un groupe;

R : erreur absolue maximale admissible sur la détermination de la moyenne vraie;

s : écart type d'un échantillon;

t_{β} : coefficient de confiance déduit de la fonction de densité de probabilité de student;

VPD_i : borne inférieure de la valeur pratique d'une propriété mécanique de déformabilité;

VPD_s : borne supérieure de la valeur pratique d'une propriété mécanique de déformabilité;

$VPR_s(P_r)$: valeur pratique d'une propriété mécanique résistante assurant la stabilité à une probabilité P_r près;

$VPR_i(P_r)$: valeur pratique d'une propriété mécanique résistante assurant l'instabilité à une probabilité P_r près;

X_i : valeur du caractère observé sur les éléments d'un échantillon, $i = 1, 2, 3, \dots, N$;

\bar{X} : moyenne arithmétique du caractère observé sur les éléments d'un échantillon;

β : paramètre découlant l'intervalle de confiance;

Δ_d : erreur absolue maximale sur la mesure du diamètre de l'éprouvette;

μ : moyenne arithmétique du caractère observé sur les éléments de la population;

v : nombre de degrés de liberté;

χ^2_{β} : coefficient de confiance déduit de la fonction de densité de probabilité du chi carré;

$\chi^2_{(1-\beta)}$: coefficient de confiance déduit de la fonction de densité de probabilité du chi carré;

σ : écart type du caractère observé sur les éléments de la population;

σ_e : écart type estimé du caractère observé sur les éléments de la population;

$\sum_{i=1}^N$: sommation des N termes indicés i;

Sommaire

Le présent document propose une procédure rigoureuse conduisant à la détermination de la valeur des propriétés mécaniques des roches qui peut être utilisée lors de la conception d'ouvrages au rocher.

Après une très brève présentation de la théorie classique de l'échantillonnage et de la théorie des petits échantillons, les auteurs justifient l'utilisation de cette dernière dans le cas des propriétés mécaniques des roches. Puis, ils établissent la relation qui en découle entre le nombre d'éprouvettes dans un groupe constituant un échantillon, le coefficient de variation observé suite aux essais effectués sur les éprouvettes du groupe, l'indice de précision fixé et l'intervalle de confiance recherché.

Un algorithme d'optimisation du nombre d'éprouvettes dans un groupe est ensuite proposé. Cet algorithme original conduit, à coup sûr, au nombre minimal qui assure que l'indice de précision fixé est atteint tout en respectant l'intervalle de confiance recherché. L'adéquation de l'algorithme est démontrée par une série d'exemples ainsi que par plusieurs simulations faisant appel à la technique de Monte Carlo pour la génération des valeurs des propriétés mécaniques utilisées. Une des conclusions qui se dégage des exemples et des simulations est que, toute chose étant égale, le nombre minimal d'éprouvettes dans un groupe varie, pour un même essai et pour un même type de roche.

Cette conclusion étant tirée, les auteurs présentent une discussion portant principalement sur le nombre d'éprouvettes que les normes existantes recommandent de tester et montrent que ces dernières manquent de rigueur, menant parfois à une évaluation erronée des valeurs des propriétés mécaniques des roches.

Le document propose ensuite une procédure de calcul d'une valeur pratique pour les propriétés mécaniques résistantes et pour les propriétés mécaniques de déformabilité. La procédure suggérée, dans le cas des propriétés mécaniques résistantes, permet incorporer à la valeur pratique la probabilité de rupture ou de non rupture que l'ingénieur désire considérer. Quant à la procédure conduisant à l'établissement d'une valeur pratique pour les propriétés de déformabilité, elle permet à l'ingénieur d'établir des bornes inférieure et supérieure de déformabilité qu'il est en mesure d'incorporer à ses notes de calculs.

Une revue relativement exhaustive des normes d'essais en laboratoire publiées à ce jour constitue une des annexes du document. Ces dernières comportent aussi des modules de calcul propres au contenu du document qui font appel au logiciel MSEXCEL.

1- Introduction

1.1- Mise en situation

De nos jours, les besoins de la société croissent rapidement dans presque tous les domaines. La satisfaction de ces besoins requiert de plus en plus de matières premières et force la réalisation d'un plus grand nombre de travaux d'ingénierie divers. Ceci entraîne, entre autres, un accroissement de travaux d'excavation et de construction au rocher et nécessite, de plus en plus fréquemment, l'expertise d'ingénieurs civils, d'ingénieurs en géologie, de géologues, d'ingénieurs des mines et d'ingénieurs pétroliers.

La réalisation de tels projets comporte toujours une phase d'essais en laboratoire afin de déterminer les propriétés des roches constituant les portions de massifs rocheux impliquées. Les laboratoires d'essais sont donc de plus en plus sollicités. On y commande principalement des essais en compression uniaxiale, avec ou sans mesure des déformations, des essais de compression triaxiale à diverses pressions de confinement, des essais de traction uniaxiale, des essais de cisaillement direct sur plan structural ainsi que divers essais indirects comme l'essai brésilien, l'essai de double poinçonnement, l'essai de dureté Schmidt, l'essai de dureté Shore, etc.

Dès que l'on réfère à des essais en laboratoire, on en vient inévitablement à rechercher des normes d'essais. La littérature technique présente toute une panoplie de telles normes (voir l'annexe A). Même si un technicien de laboratoire compétent exécute une série d'un même essai sur un même type de roche, en suivant scrupuleusement la meilleure norme publiée pour cet essai, il constate néanmoins, à coup sûr, que les résultats obtenus s'étalent sur une plage assez grande. Ce phénomène est observé chaque fois que des essais sont effectués, même dans les meilleures conditions possibles.

Cette dispersion des résultats d'essais en laboratoire sur les roches a été traitée de différentes manières au fil des ans. Certains rejettent simplement les résultats qui s'éloignent trop de la moyenne de l'ensemble des résultats. Pour les auteurs du présent document, les raisons qui peuvent amener l'ingénieur à rejeter un résultat n'ont rien à voir avec ce résultat (voir la section 1.3). D'autres considèrent, et ceci depuis quelques décennies déjà, les propriétés de roches comme étant des variables aléatoires. Parmi ces derniers, il y a ceux qui recommandent, pour tenir compte de ce fait, d'exécuter un nombre minimal fixe d'essais et il y a ceux qui ont proposé des façons plus rigoureuses de procéder (voir, par exemple, Gill, 1963; Protodyakonov, 1960, 1969; Yamaguchi, 1970). Les auteurs du document sont d'avis que ces toutes procédures sont souvent discutables et toujours incomplètes. Il est donc impératif d'y apporter des compléments et des correctifs.

On est souvent tenté, pour contrer les effets de la dispersion des résultats, de procéder à un grand nombre d'essais. L'accroissement du nombre d'essais peut réduire la dispersion, mais la limite vers laquelle elle tend, si elle diminue, demeure toujours importante. D'autre part, étant donné le coût élevé du prélèvement des échantillons et des essais, il est important de ne commander que le nombre d'essais nécessaire pour atteindre les objectifs de

précision requis pour réaliser sécuritairement le projet. Bien plus, il n'y a parfois des raisons autres que l'économie pour réduire le nombre d'essais à un minimum. Ainsi, il peut se présenter des cas où la récupération des carottes de forage est difficile au point que le nombre de fragments pouvant servir à la préparation des éprouvettes est limité. Pincus (1989) cite, comme autres raisons, les contraintes de temps, la rareté de personnel compétent ainsi que la logistique.

1.2- Définitions

Dans le but de faciliter la présentation et la compréhension de la suite du document, les auteurs proposent immédiatement les définitions qui suivent (Herget, 1977; Gill, 1977; Gill, 1985).

Roche : matériau consolidé de la croûte terrestre.

Massif rocheux : amas de roche comportant des éléments de structure géologique tels que les stratifications, les diaclases, les cisaillements, etc.

Zone : portion d'un emplacement d'un projet d'ingénierie à l'intérieur de laquelle il est prévu un comportement mécanique caractéristique du massif rocheux à cause de la nature de la roche et de la structure géologique qu'on y trouve.

Échantillon : ensemble de morceaux (blocs, fragments, débris, segments de carottes de forage, etc.) de roche prélevés en différents points d'une zone dont les dimensions permettent de préparer le nombre requis d'éprouvettes.

Éprouvette : cylindre ou prisme de roche obtenu par forage, sciage et/ou meulage d'un des morceaux de roche constituant l'échantillon et qui peut être soumis tel quel à des essais en laboratoire.

Groupe d'éprouvettes : ensemble d'éprouvettes provenant d'une même zone, similaires à l'œil nu au point de vue dimensions, pétrographie et contenu en éléments structuraux (nature et caractéristiques géométriques), soumises à un même essai.

Programme d'essais en laboratoire : ensemble des essais en laboratoire effectués afin de déterminer les propriétés mécaniques de la roche des zones d'un emplacement de projet dans le but de procéder à une conception.

Valeur pratique d'une propriété mécanique d'une roche : valeur d'une propriété mécanique d'une roche calculée à partir de l'ensemble des résultats obtenus pour un groupe d'éprouvettes et utilisée lors d'une conception.

1.3- La cause de la dispersion des résultats d'essais

1.3.1- La microstructure des roches

Les éprouvettes d'un groupe soumises à un essai donné en laboratoire doivent apparaître plus ou moins identiques à l'œil nu. Malgré une telle similitude apparente, ces éprouvettes renferment néanmoins des défauts structuraux de diverses dimensions, allant jusqu'à l'échelle microscopique. C'est la microstructure. De tels défauts interviennent directement dans les processus de déformation, de glissement et de rupture. Ils comportent des caractéristiques qui leur sont propres et leur influence au cours des divers processus qui prennent place dans les éprouvettes lors des essais diffère selon les cas. Ils concourent alors de façon très marquée à la dispersion des résultats.

Il faut donc admettre que c'est la nature même des roches qui engendre la dispersion des résultats d'essais en laboratoire exécutés sur un groupe d'éprouvettes. C'est une manifestation de leur hétérogénéité. Cette dernière, qui résulte d'abord de leur histoire géologique, peut être accrue par un endommagement qui se produit éventuellement durant le prélèvement de l'échantillon, son transport et la préparation des éprouvettes. Resserrer les normes d'essais pourrait entraîner une diminution de l'erreur expérimentale mais n'aurait que des effets négligeables sur la dispersion (voir section 5.6).

1.3.2- L'acceptation ou le rejet d'un résultat

Les auteurs de l'article sont d'avis que la seule raison qui peut justifier le rejet d'un résultat d'essai doit s'appuyer sur des arguments découlant de l'examen des fragments des éprouvettes testées lorsque soumises à des essais destructifs. L'apparence similaire à l'œil nu des éprouvettes d'un groupe doit entraîner la production d'une fragmentation similaire des éprouvettes à la rupture. Advenant qu'une éprouvette produise des fragments dont l'apparence ne cadre pas avec l'allure des fragments produits par la majorité des éprouvettes du groupe, le résultat correspondant à cette éprouvette pourrait alors être rejeté (Gill, 1977).

Quant aux essais non destructifs, la discrimination s'exerce au moment du choix des morceaux de roche servant à la préparation des éprouvettes. Les résultats que donnent ces éprouvettes doivent être tous acceptés sans exception sauf s'il y a mauvaise procédure d'essai.

1.4- L'objectif du document

À la suite de ce qui précède, il se pose alors tout au moins trois questions lors de la réalisation d'un programme d'essais en laboratoire :

Combien d'essais d'un même type faut-il exécuter sur une roche donnée?

Comment doit-on traiter les résultats obtenus suite à ces essais?

Quelle valeur de la propriété mécanique de la roche doit-on considérer lors de la conception de l'ouvrage?

Le présent document a pour objectif principal de répondre avec le maximum de rigueur à ces questions. Les procédures présentées à titre de réponses découlent de ce qui est identifié comme étant la théorie exacte de l'échantillonnage ou la théorie des petits échantillons dans les ouvrages de statistiques (voir, par exemple, Spiegel, 1961).

2- La théorie des petits échantillons

2.1- La différence avec la théorie classique de l'échantillonnage

La théorie de l'échantillonnage consiste dans l'étude des relations qui existent entre une population et les échantillons tirés de cette population. Plus précisément, elle permet, entre autres, d'estimer les caractères des éléments d'une population à partir de la mesure de ces mêmes caractères sur les éléments d'un échantillon.

Si on ajoute à l'estimation des caractères d'une population à partir des caractères d'un échantillon l'aspect précision à l'aide de la théorie de probabilité, cette estimation devient l'inférence statistique. L'inférence statistique classique fait intervenir les probabilités de la loi normale.

Traditionnellement, la détermination des limites de confiance de l'estimation de la valeur moyenne d'un caractère quelconque d'une population, implique la connaissance de l'écart type de ce caractère dans la population. Or cet écart type est inconnu et c'est l'écart type de l'échantillon qui est habituellement utilisé dans les calculs. Il a été prouvé que cette façon de procéder est une approximation acceptable lorsque le nombre d'observations du caractère des éléments constituant l'échantillon est supérieur à 30. Toutefois, si cette dernière condition n'est pas vérifiée (il est vu plus loin que c'est généralement le cas pour ce qui a trait aux propriétés mécaniques de la roche d'une zone), cette façon de faire devient alors une approximation qui est de moins en moins acceptable au fur et à mesure que le nombre d'éléments dans l'échantillon diminue. Il faut faire alors appel à la théorie exacte de l'échantillonnage, connue aussi sous le nom de théorie des petits échantillons. Le contenu de la suite de cette section peut être retrouvé dans Spiegel (1961) ou tout autre ouvrage traitant de statistiques et de probabilités.

2.2- Les équations fondamentales

Posons d'abord l'expression mathématique de la moyenne arithmétique, \bar{X} , d'un échantillon

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^N \frac{X_i}{N} \quad (1)$$

où X_i sont les observations d'un caractère faites sur les éléments de l'échantillon et N est le nombre d'éléments. L'écart type, s , qui est la façon de mesurer la dispersion des valeurs de ce caractère autour de la moyenne arithmétique qui sera utilisée dans le présent document, s'obtient de

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N-1}} \quad (2)$$

D'après la théorie des petits échantillons, la moyenne arithmétique d'un caractère donné de la population, μ , est comprise dans l'intervalle

$$\bar{X} - t_{\beta} \frac{s}{\sqrt{N-1}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\beta} \frac{s}{\sqrt{N-1}} \quad (3)$$

où t_{β} est le coefficient de confiance déduit de la fonction de densité de probabilité de Student, β découlant de l'intervalle de confiance.

Quant à l'écart type de la population, σ , il est compris dans l'intervalle

$$\frac{s^2 N}{\chi_{\beta}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{s^2 N}{\chi_{(1-\beta)}^2} \quad (4)$$

où χ_{β}^2 et $\chi_{(1-\beta)}^2$ sont les coefficient de confiance déduits de la fonction de densité de probabilité du chi carré, β découlant de l'intervalle de confiance.

L'utilisation des tableaux des fonctions de densité de probabilités de student (voir tableau B2) et du chi carré (voir tableau B3), reproduits à l'annexe B, implique la connaissance du nombre de degrés de liberté de l'échantillon, v . Il se définit comme suit

$$v = N - k \quad (5)$$

où k est le nombre de caractères de la population qui doivent être estimés à l'aide des équations 3 ou 4. En conséquence, on a $k = 1$. D'où

$$v = N - 1 \quad (6)$$

D'autre part, l'utilisation des tableaux B2 et B3 de l'annexe B nécessite la connaissance de β que l'on pourrait montré être relié à l'intervalle de confiance IC comme suit

$$\beta = 0,5(1,0 + IC/100,0) \quad (7)$$

Prenons, à titre d'exemple, un intervalle de confiance de 95%. C'est l'intervalle de confiance le plus souvent utilisé. D'après l'équation 7, le coefficient de confiance que l'on doit considérer est alors $t_{0,975}$. L'équation 3 devient

$$\bar{X} - t_{0,975} \frac{s}{\sqrt{N-1}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{0,975} \frac{s}{\sqrt{N-1}}$$

Quant à l'intervalle de l'écart type de la population, si l'intervalle de confiance est fixé à 95%, les coefficients de confiance sont $\chi^2_{0,975}$ et $\chi^2_{0,025}$ respectivement. L'équation 4 s'écrit alors

$$\frac{s^2 N}{\chi^2_{0,975}} \leq \sigma^2 \leq \frac{s^2 N}{\chi^2_{0,025}}$$

2.3- Les hypothèses de départ

Les aspects de la théorie des petits échantillons présentés dans cette section impliquent que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

les modalités d'échantillonnage doivent être telles que tous les éléments de la population aient la même probabilité d'être incorporés dans l'échantillon;

le nombre d'éléments dans la population est infini;

les éléments constituant l'échantillon sont indépendants;

les valeurs du caractère observé doivent être réparties dans la population suivant la fonction de densité de probabilité normale.

3- La théorie des petits échantillons et les propriétés mécaniques des roches

3.1- Généralités

3.1.1- La justification

Il est postulé, dans le présent document, qu'une zone, telle que définie à la section 1.2, constitue une population en terme de la théorie de l'échantillonnage. Il en découle que les résultats d'essais de propriétés mécaniques exécutés sur un groupe d'éprouvettes (voir la définition à la section 1.2) représentent les observations d'un caractère de cette population.

Il est reconnu, depuis fort longtemps, qu'il est extrêmement difficile de faire en sorte, lors de l'échantillonnage d'un gisement dans le but d'en connaître des teneurs, de procéder de façon à ce que tous les éléments de la population aient la même probabilité d'être choisis dans l'échantillon étant donné un accès limité dans les meilleures conditions (Murard, 1960). On doit admettre que la situation est identique pour ce qui a trait au prélèvement d'un échantillon dans le but de procéder à des essais mécaniques en laboratoire sur la roche d'une zone. Il est donc vivement souhaitable que les prélèvements se fassent à l'aide de trous de forage avec carottage afin d'aller au-delà des parois et de bien répartir les points de prélèvement aussi uniformément que possible dans la portion de la zone qui sera affectée par l'ouvrage.

Par ailleurs, même si l'échantillonnage d'une zone se fait sans remplacement des éléments prélevés, les dimensions des prélèvements relativement aux dimensions de la portion de la zone sous investigation permettent de supposer que la population est quasi infinie.

Les auteurs du présent document reconnaissent que les propriétés mécaniques des roches présentent souvent des caractéristiques de variables aléatoires régionalisées (voir, par exemple, Petrorius, 1980; Lapointe, 1981; Ouellet et Gill, 1987; Pumjan et Young, 1999; Hsu et Nelson, 1999). Conséquemment, lors de l'échantillonnage d'une zone, il aurait lieu de tenir compte, dans ces cas, de la distance qui sépare les points de prélèvement afin de s'assurer qu'il n'y a pas de corrélation entre les résultats des essais. Toutefois, le nombre de points d'échantillonnage nécessaire pour arriver à établir la distance minimale pour laquelle il n'existe plus de corrélation (portée du variogramme; voir, par exemple, Journel et Huijbregts, 1978) est tel qu'il est encore aujourd'hui généralement impensable d'adopter cette approche dans les travaux d'ingénierie. Le fait que les auteurs suggèrent de répartir les points d'échantillonnage le mieux possible dans la portion de la zone affectée constitue un pis-aller. En effet, étant donné le faible nombre d'éléments habituellement considérés dans un échantillon, la distance entre les points d'échantillonnage est alors maximale. Retenons que si la distance entre les points de prélèvement est inférieure à la distance minimale fixée par la portée du variogramme, l'écart type de l'échantillon est inférieur à celui qu'on obtiendrait si cette distance était respectée.

Ouellet et Gill (1987) ont démontré qu'il est possible d'étudier la régionalisation des propriétés mécaniques des roches et de déterminer, s'il y a lieu, la portée des variogrammes à l'aide d'essais mécaniques index, ces derniers étant beaucoup moins coûteux que les essais conventionnels. Une telle approche pourrait économiquement permettre de tenir compte de la régionalisation et des travaux en ce sens méritent d'être poursuivis.

Plusieurs auteurs ont fait la preuve que la répartition des résultats d'essais de propriétés mécaniques des roches répond de façon satisfaisante à la loi normale. Citons d'abord Gill (1963) dont les tests de normalité faits sur des groupes différents de 73, 50 et 35 éprouvettes de norite (gabbro à hyperstène) de Sudbury (Canada) ont établi qu'il était à 90% probable et plus que la répartition des résistances en compression uniaxiale répondait à la loi normale. Bernaix (1967) rapporte que la répartition des résultats de 578 essais de compression uniaxiale effectués sur un gneiss à foliation régulière et cohérente répondait à une fonction de densité de probabilité normale, la démonstration ayant été faite à l'aide de la droite de Henry. Les éprouvettes de ces essais ont été préparées à partir du prélèvement M III 5 fait sur la rive droite du site du barrage de Malpasset (France). Voulant faire la démonstration de l'appartenance de façon plus systématique que ses prédécesseurs, Yamaguchi (1970) a procédé à l'ensemble des essais rapportés au tableau 3.1.1. Le tuf montrant une anisotropie, les résultats obtenus des éprouvettes qui ont été prélevées suivant trois directions orthogonales identifiées A, B et C ont été traités séparément. La démonstration de l'appartenance des résultats à des fonctions de densité de probabilité normales a été faite à l'aide de la droite d'Henry.

Tableau 3.1.1 - Essais de propriétés mécaniques effectués par Yamaguchi (1970)

Type de roche	Nombre d'essais	
	Essais brésiliens	Essais de compression uniaxiale
Granite Inada (Japon)	113	161
Andésite Shinkomatsu (Japon)	160	99
Tuf A Aoishi (Japon)	76	54
Tuf B Aoishi (Japon)	43	53
Tuf C Aoishi (Japon)	46	53

Le sujet du présent document a aussi été abordé sous le jour des statistiques des valeurs extrêmes (voir, par exemple, Yegulalp et Wane, 1968; Park, 1979). Toutefois, les auteurs sont d'avis que la théorie des petits échantillons constitue une approche plus simple et fournit des résultats tout à fait acceptables.

La dispersion des résultats d'essais mécaniques en laboratoire n'est pas uniquement un phénomène propre aux roches. On le retrouve avec les divers matériaux produits dans l'industrie métallurgique (voir, par exemple, Neugebauer, 1978), avec les matériaux composites (voir, par exemple, Park, 1979), avec les céramiques (voir, par exemple, Amin et Hartline, 1987), avec les sols (voir, par exemple, Réthati, 1988) pour n'énumérer que ces matériaux.

Les auteurs du document sont conscients que l'incertitude sur la connaissance des propriétés mécaniques des roches lors d'une conception d'un ouvrage dans un massif rocheux n'est pas la seule source d'incertitude. Il s'y trouve d'autres sources reliées, entre autres, à la connaissance des contraintes préalables dans le massif rocheux (voir, par exemple, Gray et Toews, 1967; Gray et Toews, 1973; Gray et Toews, 1974; Walker et al., 1990), à l'extrapolation des propriétés mécaniques des roches aux massifs rocheux (voir, par exemple, Pinto da Cunha, 1993a; Pinto da Cunha, 1993b) et aux méthodes de conception (voir, par exemple, Cambou, 1977).

3.1.2- La terminologie utilisée

En plus des définitions déjà posées (voir la section 1.2), il y a celles qui suivent et qui sont utilisées dans la suite du document.

Moyenne observée : moyenne arithmétique des valeurs du caractère mesurées sur les éprouvettes du groupe (moyenne arithmétique de l'échantillon).

Moyenne vraie : moyenne arithmétique des valeurs du caractère pour la zone échantillonnée (moyenne arithmétique de la population).

Écart type observé : écart type des valeurs du caractère mesurées sur les éprouvettes du groupe (écart type de l'échantillon).

Écart type vrai : écart type du caractère pour la zone échantillonnée (écart type de la population).

Coefficient de variation : écart type exprimé en pourcentage de la moyenne.

Coefficient de variation observé : coefficient de variation pour le groupe d'éprouvettes.

Indice de précision : rapport entre les bornes supérieure et inférieure de l'intervalle de la moyenne vraie lorsqu'elle est estimée à partir du groupe d'éprouvettes.

3.2- Le nombre minimal d'éprouvettes dans un groupe

3.2.1- Les bornes de la moyenne vraie d'une propriété mécanique

Posons que PM_{vr} est la propriété mécanique moyenne vraie d'une zone et PM_{ob} est la propriété mécanique moyenne observée suite à des essais sur un groupe d'éprouvettes. L'équation 3 peut être réécrite comme suit

$$PM_{ob} - t_{\beta} \frac{e_{ob}}{\sqrt{N-1}} \leq PM_{vr} \leq PM_{ob} + t_{\beta} \frac{e_{ob}}{\sqrt{N-1}} \quad (8)$$

où e_{ob} est l'écart type observé, N est le nombre d'éprouvettes dans le groupe et t_{β} est le coefficient de confiance. L'équation 8 définit les bornes de la moyenne vraie à partir de la moyenne observée pour un intervalle de confiance donné.

Exemple 3.2.1A – Un groupe de 10 éprouvettes d'une roche donnée a été soumis à des essais de compression uniaxiale. La moyenne observée est 123,7 MPa et l'écart type observé, 26,5 MPa. On demande de définir les bornes de la moyenne vraie pour un intervalle de confiance de 95%.

Le nombre de degrés de liberté s'obtient de l'équation 6

$$v = 10 - 1 = 9$$

L'équation 7 donne

$$\beta = 0,5(1,0 + 95,0/100,0) = 0,975$$

Le coefficient de confiance, t_{β} , doit être déduit du tableau B2 de l'annexe B. Pour $\beta = 0,975$ et $v = 9$, on y lit 2,26.

L'équation 8 s'écrit alors

$$123,7 - 2,26 \frac{26,5}{\sqrt{10-1}} \leq PM_{vr} \leq 123,7 + 2,26 \frac{26,5}{\sqrt{10-1}}$$

d'où

$$103,7 \text{ MPa} \leq PM_{vr} \leq 143,7 \text{ MPa}$$

Il est donc à 95% probable que la moyenne vraie de la résistance en compression uniaxiale de la roche en cause soit comprise entre 103,7 et 143,7 MPa.

Exemple 3.2.1B – On demande de calculer la valeur minimale probable de la moyenne vraie pour les données de l'exemple 3.2.1A, en acceptant un intervalle de confiance de 99%.

Le nombre de degrés de liberté demeure 9.

L'équation 7 donne

$$\beta = 0,5(1,0 + 99,0/100,0) = 0,995$$

Le coefficient de confiance obtenu du tableau B2 de l'annexe B, pour $\beta = 0,995$ et $v = 9$, est 3,25. L'équation 8 permet d'écrire

$$123,7 - 3,25 \frac{26,5}{\sqrt{10-1}} \leq PM_{vr} \leq 123,7 + 3,25 \frac{26,5}{\sqrt{10-1}}$$

La valeur minimale est donnée par le membre de gauche, soit 95,0 MPa. Il est donc 99% probable que la moyenne vraie de la résistance en compression uniaxiale de la roche en cause soit égale ou supérieure à 95,0 MPa.

3.2.2- L'indice de précision atteint avec un groupe d'éprouvettes

L'indice de précision p , tel que défini à la section 3.1, s'écrit, à la lumière de l'équation 8

$$p = \frac{PM_{ob} + t_{\beta} \frac{e_{ob}}{\sqrt{N-1}}}{PM_{ob} - t_{\beta} \frac{e_{ob}}{\sqrt{N-1}}} \quad (9)$$

Il est avantageux sur le plan pratique d'introduire cette notion dans la définition de l'intervalle de la moyenne vraie. En combinant les équations 8 et 9, on obtient

$$\left(\frac{2}{p+1} \right) PM_{ob} \leq PM_{vr} \leq \left(\frac{2p}{p+1} \right) PM_{ob} \quad (10)$$

L'examen de l'équation 10 montre que plus l'indice de précision est petit, plus l'intervalle de la moyenne vraie est aussi petit. À la limite, la moyenne observée devient identique à la moyenne vraie lorsque l'indice de précision tend vers l'unité. Comme il est vu plus loin, il faut alors réaliser un nombre d'essais qui tend, à la limite, vers l'infini.

L'examen de l'équation 9 permet de constater que l'indice de précision est fonction du coefficient de confiance et du nombre d'éprouvettes dans le groupe. Pour conserver un indice de précision donné lorsque l'on veut accroître l'intervalle de confiance, il faut augmenter le nombre d'éprouvettes dans le groupe.

Exemple 3.2.2A – On demande de déterminer l'indice de précision qui a été atteint avec le groupe de 10 éprouvettes de l'exemple 3.2.1A.

La valeur de l'indice de précision peut s'obtenir évidemment de la définition même, c'est-à-dire de l'équation 9. Les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle de la moyenne vraie ont été calculées à l'exemple 3.2.1A. Elles sont 103,7 MPa et 143,7 MPa respectivement. L'équation 9 mène à

$$p = \frac{143,7}{103,7} = 1,386$$

Exemple 3.2.2B – Des essais de traction effectués sur un groupe de 6 éprouvettes d'une roche donnée ont mené à une moyenne arithmétique de 14,9 MPa et un écart type de 2,93 MPa. On demande de déterminer l'indice de précision atteint si l'intervalle de confiance recherché est 90%.

Le nombre de degrés de liberté s'obtient de l'équation 6

$$v = 6 - 1 = 5$$

De l'équation 7 on trouve

$$\beta = 0,5(1,0 + 90,0/100,0) = 0,950$$

Le coefficient de confiance du tableau B2 de l'annexe B, pour $v = 5$ et $\beta = 0,950$ est $t_\beta = 2,02$. L'équation 9 donne

$$p = \frac{14,9 + 2,02 \frac{2,93}{\sqrt{6-1}}}{14,9 - 2,02 \frac{2,93}{\sqrt{6-1}}} = 1,433$$

3.2.3- Les valeurs suggérées de l'indice de précision

Afin d'illustrer ce qu'implique une valeur donnée de l'indice de précision en termes plus pratiques, posons

$$f = \frac{p-1}{p+1} \tag{11}$$

et combinons cette dernière équation à l'équation 10 après avoir divisé ses deux membres par PM_{ob} . On a alors

$$\frac{PM_{vr}}{PM_{ob}} = 1 \pm f \tag{12}$$

où f devient l'erreur relative maximale sur la moyenne vraie. Donc, fixer l'indice de précision revient à fixer l'erreur relative maximale admissible sur la détermination de la moyenne vraie. L'erreur relative sur la moyenne vraie observée suite à des essais sur les éprouvettes d'un groupe sera généralement inférieure à la valeur maximale.

Protodyakonov (1960, 1969), de même que Vutukuri et al. (1974) recommandent de considérer des groupes d'éprouvettes qui assurent que $p \leq 1,50$. Les auteurs du présent

document sont d'accord avec cette suggestion pour ce qui a trait aux travaux d'ingénierie de routine effectués dans les mines si l'intervalle de confiance recherché est 95%.

Toutefois, pour les travaux miniers particuliers (puits, recettes, etc., c'est-à-dire les ouvrages qui ont une certaine permanence) ou les travaux publics courants, les auteurs suggèrent de maintenir un intervalle de confiance de 95% et de s'assurer que $p \leq 1,35$.

Pour des travaux d'ingénierie exceptionnels, impliquant la sécurité du grand public, de même que pour fins de recherche, les auteurs recommandent d'atteindre $p \leq 1,20$, tout en maintenant l'intervalle de confiance à 95%.

À la lumière de l'équation 11, on constate qu'un indice de précision de 1,50 entraîne une erreur relative maximale de 20,0% sur la moyenne vraie alors qu'un indice de précision de 1,35 entraîne une erreur relative maximale de 14,9% sur la moyenne vraie. Quant à l'indice de précision de 1,20 recommandée pour les cas exceptionnels, il mène à une erreur relative maximale de 9,1% sur la moyenne vraie.

Le tableau 3.2.3 résume les valeurs de l'indice de précision que suggèrent les auteurs en fonction de la nature des excavations conçues.

Tableau 3.2.3 – Valeurs suggérées de l'indice de précision pour un intervalle de confiance de 95%.

Nature des excavations	Indice de précision	Erreur relative maximale (%)
Excavations minières temporaires	1,50	20,0
Excavations minières permanentes et travaux publics courants	1,35	14,9
Travaux publics exceptionnels et travaux de recherche	1,20	9,1

Exemple 3.2.3 – On demande de calculer l'erreur relative maximale sur la résistance en compression uniaxiale moyenne vraie de la zone de laquelle le groupe d'éprouvettes de l'exemple 3.2.1A provient.

L'indice de précision que le groupe d'éprouvettes a permis d'atteindre a été calculé à l'exemple 3.2.2A, soit 1,386. On obtient de l'équation 10

$$f = \frac{1,386 - 1}{1,386 + 1} = 0,162$$

L'erreur relative maximale est donc 16,2%, c'est-à-dire que l'erreur relative sur la détermination de la moyenne vraie sera inférieure ou égale à cette valeur maximale, au moins 19 fois sur 20.

3.2.4- La relation entre le nombre d'éprouvettes dans un groupe et l'indice de précision

Les membres de gauche des équations 8 et 10 permettent d'écrire

$$\left(\frac{2}{p+1}\right) PM_{ob} = PM_{ob} - t_{\beta} \frac{e_{ob}}{\sqrt{N-1}} \quad (13)$$

ou encore

$$\frac{2}{p+1} = 1 - t_{\beta} \frac{cv_{ob}}{100\sqrt{N-1}} \quad (14)$$

où cv_{ob} est le coefficient de variation observé qui a été défini comme étant

$$cv_{ob} = \frac{100 e_{ob}}{PM_{ob}} \quad (15)$$

L'équation 14 donne, en explicitant N

$$N = \left[\left(\frac{p+1}{p-1} \right) t_{\beta} \frac{cv_{ob}}{100} \right]^2 + 1 \quad (16)$$

Cette équation pourrait être obtenue aussi en considérant les membres de droite des équations 8 et 10.

L'équation 16 permet d'établir le nombre d'éprouvettes que doit contenir un groupe pour atteindre l'indice de précision fixé étant donné un intervalle de confiance. Remarquons que ce nombre est aussi fonction du coefficient de variation observé. Puisque, d'une part, le nombre d'éprouvettes dans un groupe doit être un nombre entier et que d'autre part, les résultats obtenus avec ce groupe doivent assurer que l'indice de précision soit égal ou inférieur à celui fixé, le nombre donné par l'équation 16 doit toujours être arrondi à l'entier supérieur.

Le tableau 3.2.4 a été constitué à l'aide de cette équation, en acceptant un intervalle de confiance de 95%. Il couvre la plage de coefficients de variation usuellement rencontrés lors de la détermination des propriétés mécaniques des roches ainsi que la plage des indices de précision habituellement recherchés par l'ingénieur (voir la section 3.2.3).

La solution de l'équation 16, conduisant au nombre N d'éprouvettes dans un groupe, n'est pas évidente même si l'indice de précision est fixé et que le coefficient de variation est supposé connu. En effet, le coefficient de confiance t_{β} est fonction du nombre de degrés de liberté qui dépend du nombre N. Même s'il y a un lien mathématique entre le nombre de degrés de liberté et le nombre d'éprouvettes dans un groupe (voir l'équation 6), l'unique façon d'établir la valeur du coefficient de confiance correspondant à ce nombre de degrés de liberté implique une intégration numérique de la fonction de densité de probabilité de student. C'est pourquoi les coefficients de confiance sont toujours tabulés (voir le tableau B2 de l'annexe B).

La première technique de solution de l'équation 16 qui est proposée dans le présent document consiste d'abord à réécrire cette dernière de façon à expliciter l'indice de précision :

$$p = \frac{100\sqrt{N-1} + t_{\beta}cv_{ob}}{100\sqrt{N-1} - t_{\beta}cv_{ob}} \quad (17)$$

Puis, en utilisant cette équation et en supposant un coefficient de variation, il faut calculer la valeur que prend l'indice de précision en faisant croître le nombre d'éprouvettes dans le groupe, les valeurs du paramètre de confiance s'obtenant du tableau B2 de l'annexe B en considérant l'intervalle de confiance recherché. Il vient éventuellement un nombre d'éprouvettes N qui assure que l'indice de précision est égal ou inférieur à une valeur fixée, pour le coefficient de variation supposé. C'est de cette façon que les tableaux de l'annexe C ont été produits.

L'annexe D propose une deuxième technique de solution pour l'équation 16. Le premier module présenté dans cette annexe utilise le solveur du logiciel MSEXCEL. Le lecteur trouvera à cette annexe tous les renseignements nécessaires pour pouvoir déterminer, à l'aide de ce logiciel, le nombre d'éprouvettes dans un groupe, étant donné un intervalle de confiance, un indice de précision et un coefficient de variation.

**Tableau 3.2.4 – Nombre d’essais à effectuer (nombre d’éprouvettes dans un groupe)
pour atteindre un indice de précision fixé, étant donné un intervalle
de confiance de 95%.**

cv _{ob} (%)	p ≤					
	1,6	1,5	1,4	1,35	1,3	1,2
35	13	16	21	25	31	61
30	10	12	16	19	24	46
25	8	10	12	15	18	33
20	6	7	9	11	13	22
15	5	6	7	8	9	14
10	4	4	5	5	6	8
5	3	3	3	4	4	5

4- L'optimisation du nombre d'éprouvettes dans un groupe

La section 1.1 rapporte diverses raisons montrant qu'il est important d'essayer d'optimiser le nombre d'éprouvettes que doit contenir un groupe. Puisque, d'une part, ce nombre est fonction du coefficient de variation observé et que ce dernier est *a priori* inconnu et que, d'autre part, ce nombre est fonction du coefficient de confiance qui est aussi *a priori* inconnu parce qu'il est fonction du nombre d'éprouvettes dans le groupe, il faut donc procéder par itérations. Les lignes qui suivent proposent un algorithme d'optimisation à cette fin (Gill, 1977). La mise en œuvre de l'algorithme demande que l'on dispose au départ d'un échantillon qui permette la préparation de toutes les éprouvettes d'essais requises.

4.1- L'algorithme d'optimisation

4.1.1- La première technique de solution de l'équation 16 est utilisée

Pour la mise en œuvre de cet algorithme lorsque la première technique de solution de l'équation 16 est utilisée, l'auteur présente, à l'annexe C, les tableaux C1A à C1D (intervalle de confiance de 95%), C2A à C2D (intervalle de confiance de 98%) et C3A à C3D (intervalle de confiance de 99%) qui font le lien entre le nombre d'éprouvettes dans le groupe, l'indice de précision et le coefficient de variation pour un intervalle de confiance donné.

La dernière étape de l'algorithme a pour objet de s'assurer, d'une part, que sa mise en œuvre a été bien faite. L'indice de précision calculé à cette étape avec l'équation 16 devrait normalement confirmer l'atteinte de l'objectif. Toutefois, il arrive parfois, qu'à cette étape, on constate que la valeur de l'indice de précision calculée soit légèrement supérieure à la valeur fixée initialement. Ce fait découle non pas d'erreur dans l'application de l'algorithme mais des arrondis à l'entier inférieur qui y sont suggérés (voir l'équation 18) étant donné que les tableaux de l'annexe C ne comporte que des valeurs entières des coefficients de variation. Cette vérification a donc aussi pour objet, d'autre part, de détecter les effets négatifs de ces arrondis. Ils évitent le plus souvent un dépassement du nombre minimum d'éprouvettes lors de l'utilisation de l'algorithme.

1^{ère} étape : Fixez l'intervalle de confiance recherché. Soit IC cet intervalle. Le paramètre β qui découle de cet intervalle s'obtient de l'équation 7.

2^{ème} étape : Choisissez la valeur de l'indice de précision qui doit être atteinte. Soit p_c l'indice choisi.

3^{ème} étape : Supposez un premier coefficient de variation. Soit cv_{obs} le coefficient choisi.

Pour éviter de procéder à un nombre d'essais de résistance plus grand que nécessite l'indice de précision fixé, ce coefficient de variation doit être de l'ordre de 10% quand p_c est 1,50,

de l'ordre de 7% quand p_c est 1,35 et de l'ordre de 5% quand p_c est 1,2. Dans le cas d'essais de déformabilité, réduisez le coefficient de moitié.

4^{ème} étape : Déterminez un premier nombre d'éprouvettes dans le groupe en utilisant le tableau approprié de l'annexe C. Soit N_1 ce nombre.

5^{ème} étape : Effectuez les N_1 essais et calculez la moyenne arithmétique, l'écart type et le coefficient de variation. Soit cv_{ob} ce coefficient de variation.

6^{ème} étape : Comparez le cv_{ob} au cv_{obs} . Si le premier est égal ou inférieur au dernier, passez à la dernière étape.

Si le premier est supérieur au dernier, calculez alors un nouveau cv_{obs} comme suit, arrondi à l'entier inférieur

$$cv_{obs} = 0,5 (cv_{obs\ ancien} + cv_{ob}) \quad (18)$$

Si ce nouveau coefficient de variation supposé est égal à l'ancien, passer à la dernière étape. Autrement, poursuivez.

7^{ème} étape : Déterminez, en utilisant le tableau approprié de l'annexe C, le nombre d'éprouvettes pour le nouveau cv_{obs} . Soit N_2 ce nombre.

Si $N_2 = N_1$, il est possible que N_1 soit le nombre minimal d'éprouvettes. Passez à la dernière étape.

Si $N_2 > N_1$, poursuivez.

8^{ème} étape : Effectuez ($N_2 - N_1$) essais supplémentaires. Calculez la moyenne, l'écart type et le coefficient de variation du groupe de N_2 éprouvettes. Soit cv_{ob} ce coefficient de variation.

9^{ème} étape : Comparez le cv_{ob} de la 8^{ème} étape au vc_{obs} calculé à la 6^{ème} étape. Si le premier est égal ou inférieur au dernier, passez à la dernière étape.

Si le premier est supérieur au dernier, calculez un nouveau cv_{obs} , arrondi à l'entier inférieur, en utilisant l'équation 18 de la 6^{ème} étape.

Si ce nouveau coefficient de variation supposé est égal à l'ancien, passez à la dernière étape. Autrement, poursuivez.

10^{ème} étape : Déterminez, en utilisant le tableau approprié de l'annexe C, le nombre d'éprouvettes pour le nouveau cv_{obs} . Soit N_3 ce nombre.

Si $N_3 = N_2$, il est possible que N_2 soit le nombre minimal d'éprouvettes. Passez à la dernière étape.

Si $N_3 > N_2$, poursuivez.

11^{ème} étape : Effectuez $(N_3 - N_2)$ essais supplémentaires. Calculez la moyenne arithmétique, l'écart type et le coefficient de variation du groupe de N_3 éprouvettes. Soit cv_{ob} ce coefficient.

12^{ème} étape : Comparez le cv_{ob} calculé à la 11^{ème} étape au cv_{obs} calculé à la 9^{ème} étape. Si le premier est égal ou inférieur au dernier, passez à la dernière étape.

Si le premier est supérieur au dernier, calculez un nouveau cv_{obs} , arrondi à l'entier inférieur, en utilisant l'équation 18 de la 6^{ème} étape.

Si ce nouveau coefficient de variation supposé est égal à l'ancien, passez à la dernière étape. Autrement, poursuivez.

13^{ème} étape : Déterminez, en utilisant le tableau approprié de l'annexe C, le nombre d'éprouvettes pour le nouveau cv_{obs} . Soit N_4 ce nombre.

Si $N_4 = N_3$, il est possible que N_3 soit le nombre minimal d'éprouvettes. Passez à la dernière étape.

Si $N_4 > N_3$, poursuivez.

En poursuivant toujours de la même façon, il vient un temps où il faut passer à la dernière étape

Dernière étape : En guise de vérification, procédez au calcul de l'indice de précision à l'aide de l'équation 17 en utilisant le nombre d'éprouvettes N déterminé avec l'algorithme à ce stade-ci, le dernier coefficient de variation calculé cv_{ob} et l'intervalle de confiance IC pour déterminer le coefficient de confiance t_p , β étant déterminé par l'équation 7.

Si $p \leq p_c$, l'objectif est atteint.

Si $p > p_c$, il faut retourner à l'avant dernière étape franchie, ajouter une éprouvette supplémentaire au groupe et poursuivre. Selon le résultat d'essai de cette éprouvette, il se peut qu'il y ait plus d'un cycle à compléter.

Remarque – Bien que cette situation soit rare, il peut néanmoins arriver, quand le coefficient de variation est grand et/ou lorsque l'indice de précision fixé est petit et/ou encore lorsque l'intervalle de confiance recherché est élevé, que le nombre d'éprouvettes minimal dans le groupe dépasse 30. Or les tableaux de l'annexe C, que l'algorithme d'optimisation suggère d'utiliser, s'arrêtent à 30 éprouvettes.

Il a déjà été écrit que dans les conditions qui font que le nombre d'éprouvettes minimal dans un groupe dépasse 30, l'utilisation de la théorie classique de l'échantillonnage constitue une approximation acceptable. Les coefficients de confiance peuvent alors être

déduits de la fonction de densité de probabilités normale. Par conséquent, l'équation 16 devient

$$N = \left[\left(\frac{p+1}{p-1} \right) n_{\beta} \frac{cv_{obs}}{100} \right]^2 + 1 \quad (19)$$

où n_{β} est le coefficient de confiance s'obtenant de la fonction de densité de probabilités normale (voir le tableau B1 à l'annexe B – il est indépendant du nombre de degrés de liberté), β étant relié à l'intervalle de confiance par l'équation 7. Le coefficient de variation cv_{obs} qui doit être utilisé est le nouveau coefficient de variation supposé dans l'algorithme.

Si une des conditions pour passer à la dernière étape est vérifiée, le calcul de l'indice de précision se fait alors à l'aide de l'équation suivante, déduite de l'équation 19,

$$p = \frac{100\sqrt{N-1} + n_{\beta}cv_{ob}}{100\sqrt{N-1} - n_{\beta}cv_{ob}} \quad (20)$$

Si le résultat obtenu avec l'équation 20 démontre que l'indice de précision visé n'est pas atteint, il faut ajouter 3 éprouvettes au groupe, les soumettre à l'essai, et poursuivre l'application de l'algorithme.

4.1.2- La deuxième technique de solution de l'équation 16 est utilisée

La deuxième technique de solution de l'équation 16 fait appel au premier module de calcul présenté à l'annexe D, module qui fait intervenir le solveur du logiciel MSEXCEL.

Les étapes de l'algorithme sont les mêmes sauf :

qu'il n'y pas lieu d'arrondir le coefficient de variation supposé;
 que les nombres d'éprouvettes sont déterminés à l'aide du premier module de l'annexe D;
 qu'à la dernière étape, le calcul de l'indice de précision se fait à l'aide du deuxième module de l'annexe D. L'ajout de 1 éprouvette supplémentaire, lorsque requis, tient toujours;
 que l'exception du cas lorsque le nombre d'éprouvettes dans le groupe devient supérieur à 30 ne tient plus lorsque les modules de l'annexe D sont utilisés. On doit poursuivre comme si ce nombre est inférieur à 30. L'ajout de 3 éprouvettes supplémentaires, lorsque nécessaire, tient toujours.

4.2- Exemples d'optimisation

Exemple 4.2A – On demande de déterminer, en utilisant l'algorithme d'optimisation et les tableaux de l'annexe C, le nombre minimal d'essais de compression uniaxiale qu'il faut effectuer sur la norite de Sudbury (Canada) pour assurer un indice de précision égal ou inférieur à 1,35, l'intervalle de confiance recherché étant 95%. Les valeurs des résistances en compression uniaxiale considérées dans le présent exemple sont celles générées lors de la simulation N1 de la section 4.3.

Les données de l'exemple imposent

$$\beta = 0,5(1,0 + 95,0/100,0) = 0,975 \text{ (1}^{\text{ère}} \text{ étape, équation 7)}$$

$$p_c = 1,35 \text{ (2}^{\text{ème}} \text{ étape).}$$

On choisit $cv_{obs} = 7\%$ (3^{ème} étape).

La suite de l'exemple est présentée en résumé au tableau 4.2A. L'examen de ce tableau montre qu'il a fallu passer à la dernière étape après la 18^{ème} car le cv_{obs} supposé à cette étape avait la même valeur que celui de la 15^{ème} étape.

Tableau 4.2A – Présentation résumée de la suite de l'exemple 4.2A

Étape	p_c	cv_{obs} (%)	N	C_o (MPa)	PM_{ob} (MPa)	e_{ob} (MPa)	cv_{ob} (%)
4	1,35	7	4				
5				310,4; 214,8; 210,9; 233,6	242,4	46,4	19,1
6		13					
7	1,35	13	7				
8				179,7; 202,9; 187,6	220,0	43,7	19,8
9		16					
10	1,35	16	8				
11				145,7	210,7	48,2	22,9
12		19					
13	1,35	19	10				
14				242,6; 276,2	220,4	47,9	21,7
15		20					
16	1,35	20	11				
17				213,0	219,7	45,5	20,7
18		20					
Dern.	1,342						

Le tableau B2 de l'annexe B donne, pour 10 degrés de liberté, $t_\beta = 2,23$ puisqu'il a déjà été établi à la 1^{ère} étape que $\beta = 0,975$. On obtient de l'équation 17

$$p = \frac{100\sqrt{11-1} + 2,23 \times 20,7}{100\sqrt{11-1} - 2,23 \times 20,7} = 1,342$$

d'où $p < p_c$. La vérification est positive. L'objectif est atteint. Le nombre minimal d'éprouvettes dans le groupe est 11. On pourrait démontrer que l'indice de précision qui aurait été atteint si seulement dix essais avaient été exécutés, est 1,393 qui est supérieur au 1,35 choisi à la 2^{ème} étape de l'application de l'algorithme.

Exemple 4.2B – On demande de déterminer, en utilisant l'algorithme d'optimisation et les tableaux de l'annexe C, le nombre minimal d'essais de compression uniaxiale qu'il faut effectuer sur le gneiss de Malpasset (France) pour assurer un indice de précision égal ou inférieur à 1,50, l'intervalle de confiance recherché étant 95%. Les valeurs des résistances en compression uniaxiale considérées dans le présent exemple sont celles générées lors de la simulation GN3 de la section 4.3.

Les données de l'exemple imposent

$$\beta = 0,5(1,0 + 95,0/100,0) = 0,975 \text{ (1^{ère} étape, équation 7)}$$

$$p_c = 1,50 \text{ (2^{ème} étape).}$$

On choisit $cv_{obs} = 10\%$ (3^{ème} étape).

La suite de l'exemple est présentée en résumé au tableau 4.2B.

Tableau 4.2B – Présentation résumée de la suite de l'exemple 4.2B

Étape	p_c	cv_{obs} (%)	N	C_o (MPa)	PM_{ob} (MPa)	e_{ob} (MPa)	cv_{ob} (%)
4	1,50	10	4				
5				51,3; 52,4; 61,1; 74,1	59,7	10,5	17,6
6		13					
7	1,50	13	5				
8				39,7	55,7	12,8	22,9
9		17					
10	1,50	17	6				
11				51,4	55,0	116	29,0
12		19					
13	1,50	19	7				
14				57,2	55,3	10,6	19,2
15		19					
Dern.	1,474						

L'examen de ce tableau montre qu'il a fallu passer à la dernière étape après la 15^{ème} car le cv_{obs} supposé à cette étape avait la même valeur que celui de la 12^{ème} étape.

Le tableau B2 de l'annexe B donne, pour 6 degrés de liberté, $t_\beta = 2,45$ puisque qu'il a déjà été établi à la 1^{ère} étape que $\beta = 0,975$. L'équation 17 conduit à

$$p = \frac{100\sqrt{7-1} + 2,45 \times 19,2}{100\sqrt{7-1} - 2,45 \times 19,2} = 1,474$$

d'où $p < p_c$. La vérification est positive. L'objectif est atteint. Le nombre minimal d'éprouvettes dans le groupe est 7. On pourrait démontrer que l'indice de précision qui aurait été atteint si seulement six essais avaient été exécutés, est 1,638 qui est supérieur au 1,50 choisi à la 2^{ème} étape.

Exemple 4.2C – On demande de déterminer, en utilisant l'algorithme d'optimisation et les tableaux de l'annexe C, le nombre minimal d'essais de compression uniaxiale qu'il faut effectuer sur le granite Inada (Japon) pour assurer un indice de précision égal ou inférieur à 1,20, l'intervalle de confiance recherché étant 95%. Les valeurs des résistances en compression uniaxiale considérées dans le présent exemple sont celles générées lors de la simulation G8 de la section 4.3.

Les données de l'exemple imposent

$$\beta = 0,5(1,0 + 95,0/100,0) = 0,975 \text{ (1^{ère} étape – équation 7)}$$

$$p_c = 1,20 \text{ (2^{ème} étape).}$$

On choisit $cv_{obs} = 5\%$ (3^{ème} étape).

La suite de l'exemple est présentée en résumé au tableau 4.3C. Ce tableau montre qu'à la 12^{ème} étape, le nouveau cv_{obs} est égal à l'ancien cv_{obs} . Il faut passer à la dernière étape dont l'objet est la vérification de l'indice de précision. Le tableau B2 de l'annexe B donne, pour 11 degrés de liberté, $t_\beta = 2,20$ puisque qu'il a déjà été établi à la 1^{ère} étape que $\beta = 0,975$. L'équation 17 mène à

$$p = \frac{100\sqrt{12-1} + 2,20 \times 14,7}{100\sqrt{12-1} - 2,20 \times 14,7} = 1,216$$

d'où $p > p_c$. La vérification est négative. Il faut ajouter une éprouvette de plus au groupe et poursuivre.

À la 16^{ème} étape, le nombre d'éprouvettes que stipule le tableau C1B est le même que le groupe compte déjà. Il faut retourner à la dernière étape et procéder à nouveau à la vérification. Le tableau B2 de l'annexe B donne, pour 12 degrés de liberté, $t_\beta = 2,18$ puisque qu'il a déjà été établi à la 1^{ère} étape que $\beta = 0,975$. On obtient de l'équation 17

$$p = \frac{100\sqrt{13-1} + 2,18 \times 15,5}{100\sqrt{13-1} - 2,18 \times 15,5} = 1,215$$

d'où $p > p_c$. La vérification est encore négative. Il faut ajouter une éprouvette au groupe et poursuivre.

Tableau 4.2C – Présentation résumée de la suite de l'exemple 4.2C

Étape	p_c	cv_{obs} (%)	N	C_o (MPa)	PM_{ob} (MPa)	ϵ_{ob} (MPa)	cv_{ob} (%)
4	1,20	5	5				
5				137,5; 192,5; 174,0; 206,1; 175,0	177,0	25,8	14,6
6		9					
7	1,20	9	7				
8				127,5; 200,1	173,2	30,4	17,5
9		13					
10	1,20	13	12				
11				152,5; 170,9; 166,5; 154,9; 146,4	167,0	24,5	14,7
12		13					
Dern.	1,216						
13			13				
14				132,1	164,3	25,4	15,5
15		14					
16	1,200	14	13				
Dern.	1,215						
17			14				
18				175,7	165,1	24,6	14,9
19		14					
Dern.	1,196						

À la 19^{ème} étape, le nouveau cv_{obs} est égal à l'ancien cv_{obs} . Il faut passer une troisième fois à la dernière étape et vérifier à nouveau l'indice de précision. Le tableau B2 de l'annexe B donne, pour 13 degrés de liberté, $t_\beta = 2,16$ puisque qu'il a déjà été établi à la 1^{ère} étape que $\beta = 0,975$. L'équation 17 conduit à

$$p = \frac{100\sqrt{14-1} + 2,16 \times 14,9}{100\sqrt{14-1} - 2,16 \times 14,9} = 1,196$$

d'où $p < p_c$. La vérification est cette fois positive. L'objectif est atteint. Le nombre minimal d'éprouvettes dans le groupe est 14.

Exemple 4.2D - On demande de déterminer, en utilisant l'algorithme d'optimisation et les tableaux de l'annexe C, le nombre minimal d'éprouvettes que doit compter un groupe

d'une roche donnée soumis à des essais de compression diamétrale. L'indice de précision qui doit être atteint est 1,20 et l'intervalle de confiance recherché étant 95%. Les résistances en tension de cet exemple ont été générées à l'aide de la technique de Monte Carlo. Les caractéristiques de la population sont 17,3 MPa comme moyenne arithmétique et 5,70 MPa comme écart type.

Les données de l'exemple imposent

$$\beta = 0,5(1,0 + 95,0/100,0) = 0,975 \text{ (1}^{\text{ère}} \text{ étape, équation 7)}$$

$$p_c = 1,20 \text{ (2}^{\text{ème}} \text{ étape).}$$

On choisit $cv_{\text{obs}} = 5\%$ (3^{ème} étape).

La suite de l'exemple est présentée en résumé au tableau 4.2D. Lors de cette optimisation, rendu à la 10^{ème} étape, on constate à partir du tableau C1C qu'il faut un groupe comportant plus de 30 éprouvettes pour atteindre 1,20 si le coefficient de variation est 24%. Il faut faire appel à l'équation 19 pour poursuivre l'optimisation.

D'après le tableau B1 de l'annexe B, le coefficient de confiance à utiliser dans cette équation est 1,960. On obtient

$$N = \left[\left(\frac{1,20+1}{1,20-1} \right) 1,960 \frac{24}{100} \right]^2 + 1 = 30$$

À la 13^{ème} étape, il faut revenir à l'équation 19 qui donne cette fois

$$N = \left[\left(\frac{1,20+1}{1,20-1} \right) 1,960 \frac{28}{100} \right]^2 + 1 = 38$$

À la 16^{ème} étape, il utilise encore une fois l'équation 19 qui donne :

$$N = \left[\left(\frac{1,20+1}{1,20-1} \right) 1,960 \frac{32}{100} \right]^2 + 1 = 49$$

À la 18^{ème} étape, le nouveau cv_{obs} est identique à l'ancien, calculé à la 15^{ème} étape. Il faut passer à la dernière étape et calculer l'indice de précision à l'aide de l'équation 20, soit

$$p = \frac{100\sqrt{49-1} + 1,960 \times 33,8}{100\sqrt{49-1} - 1,960 \times 33,8} = 1,211$$

On a donc $p > p_c$. L'indice de précision visé n'est pas atteint. Tel que stipulé dans l'algorithme, lorsque $N > 30$, il faut ajouter 3 éprouvettes supplémentaires au groupe (19^{ème} étape).

Tableau 4.2D – Présentation résumée de la suite de l'exemple 4.2D

Étape	p _c	cv _{obs} (%)	N	T _o (MPa)	PM _{ob} (MPa)	e _{ob} (MPa)	cv _{ob} (%)
4	1,20	5	5				
5				7,34; 18,2; 19,0; 13,3; 11,7	13,9	4,81	34,6
6		19					
7	1,20	19	21				
8				12,1; 17,5; 24,8; 23,9; 20,8; 8,28; 21,3; 17,7; 23,9; 12,0; 20,4; 21,6; 20,4; 21,7; 17,3; 22,8	17,9	5,19	29,0
9		24					
10	1,20	24	30				
11				22,6; 18,5; 25,4; 11,4; 25,0; 9,79; 11,5; 9,26; 8,27	17,3	5,79	33,5
12		28					
13	1,20	28	38				
14				6,49; 11,1; 18,8; 26,2; 10,9; 23,3; 15,8; 17,0	16,6	5,83	35,1
15		32					
16	1,20	32	49				
17				14,5; 20,7; 19,2; 16,9; 15,8; 22,6; 24,0; 13,1; 13,4; 24,3; 31,6	17,3	5,84	33,8
18		32					
Dern.	1,211						
19			52				
20				18,4; 20,7; 11,8	17,3	5,75	33,3
21		32					
Dern.	1,201						

À la 21^{ème} étape, le nouveau cv_{obs} est identique à l'ancien, calculé à la 21^{ème} étape. Il faut passer à la dernière étape et calculer l'indice de précision à l'aide de l'équation 20 c'est-à-dire

$$p = \frac{100\sqrt{52-1} + 1,960 \times 33,3}{100\sqrt{52-1} - 1,960 \times 33,3} = 1,201$$

Donc, à toutes fins pratiques, on a p = p_c, et l'indice de précision visé est atteint. Le nombre minimal d'éprouvettes dans le groupe est 52.

Exemple 4.2E – On demande de reprendre l'exemple 4.2A en utilisant les deux premiers modules de calcul présentés à l'annexe D.

Les données de l'exemple imposent

$$\beta = 0,5(1,0 + 95,0/100,0) = 0,975 \text{ (1}^{\text{ère}} \text{ étape, équation 7)}$$

$$p_c = 1,35 \text{ (2}^{\text{ème}} \text{ étape).}$$

On choisit $cv_{obs} = 7,5\%$ (3^{ème} étape).

La suite de l'exemple est présentée en résumé au tableau 4.2E. Les nombres d'éprouvettes s'obtiennent du premier module de calcul de l'annexe D.

Tableau 4.2E – Présentation résumée de la suite de l'exemple 4.2^E

Étape	p_c	cv_{obs} (%)	N	C_o (MPa)	PM_{ob} (MPa)	e_{ob} (MPa)	cv_{ob} (%)
4	1,35	7,5	4				
5				310,4; 214,8; 210,9; 233,6	242,4	46,4	19,13
6		13,32					
7	1,35	13,32	7				
8				179,7; 202,9; 187,6	220,0	43,7	19,84
9		16,58					
10	1,35	16,58	8				
11				145,7	210,7	48,2	22,88
12		19,72					
13	1,35	19,72	10				
14				242,6; 276,2	220,4	47,9	21,71
15		20,72					
16	1,35	20,72	11				
17				213,0	219,8	45,5	20,69
Dern.	1,341						

L'examen de ce tableau montre qu'il a fallu passer à la dernière étape après la 17^{ème} car le cv_{ob} calculé à cette étape est inférieur au cv_{obs} calculé à la 15^{ème} étape. Le deuxième module de calcul de l'annexe D donne $p = 1,341$.

Donc, $p < p_c$. La vérification est positive. L'objectif est atteint. Le nombre minimal d'éprouvettes dans le groupe est 11.

Exemple 4.2F – On demande de reprendre l'exemple 4.2B en utilisant les deux premiers modules de calcul présentés à l'annexe D.

Les données de l'exemple imposent

$\beta = 0,5(1,0 + 95,0/100,0) = 0,975$ (1^{ère} étape, équation 7)
 $p_c = 1,50$ (2^{ème} étape).

On choisit $cv_{obs} = 10\%$ (3^{ème} étape).

La suite de l'exemple est présentée en résumé au tableau 4.2F. Les nombres d'éprouvettes s'obtiennent du premier module de calcul de l'annexe D.

Tableau 4.2F – Présentation résumée de la suite de l'exemple 4.2F

Étape	p_c	cv_{obs} (%)	N	C_o (MPa)	PM_{ob} (MPa)	e_{ob} (MPa)	cv_{ob} (%)
4	1,50	10	4				
5				51,3; 52,4; 61,1; 74,1	59,7	10,5	17,64
6		13,83					
7	1,50	13,83	5				
8				39,7	55,7	12,8	22,95
9		18,39					
10	1,50	18,39	7				
11				51,4; 57,2	55,3	10,6	19,16
12		18,77					
13	1,50	18,77	7				
Dern.	1,473						

À l'examen de ce tableau, on constate, à la 13^{ème} étape, que le nombre d'éprouvettes dans le groupe est le même qu'à la 10^{ème} étape. Il a donc fallu passer à la dernière étape et procéder à la vérification de l'indice de précision à l'aide du deuxième module de calcul de l'annexe D. On trouve 1,473.

Il s'ensuit que $p < p_c$. La vérification est positive. L'objectif est atteint. Le nombre minimal d'éprouvettes dans le groupe est 7.

4.3- Simulations

Trois ensemble de simulations ont été exécutés afin de tester l'adéquation de l'algorithme d'optimisation du nombre minimal d'éprouvettes dans un groupe et de démontrer que l'atteinte d'un indice de précision donné assure que la moyenne vraie et l'écart type vrai se situent tous les deux à l'intérieur des bornes de l'intervalle associé à cet indice ainsi qu'au nombre d'éprouvettes dans le groupe.

Ces simulations ont été faites à l'aide de la technique Monte Carlo. Les valeurs générées se répartissent suivant une fonction de densité de probabilité normale dont la moyenne et l'écart type sont la moyenne vraie et l'écart type vrai.

Chaque ensemble comprend dix simulations. Ces dernières ont toutes été intégrées à l'algorithme d'optimisation en générant les résultats d'essais requis aux différentes étapes de cette dernière.

Le tableau 4.3A décrit les données utilisées lors des trois ensembles de simulations. Tous trois impliquent des essais de compression uniaxiale dont les résultats ont été empruntés à la littérature. Les auteurs auraient pu choisir tout autre essai et les conclusions auraient été les mêmes. Le choix des indices de précision a été fait de façon à impliquer les valeurs recommandées (voir la section 3.2.3) et aussi de façon à réduire le nombre d'itérations à un minimum lors des simulations. Les coefficients de variation vrais des ensembles GN, N et G étant respectivement 23,8%, 21,8% et 18,7% (calculées à l'aide de l'équation 15, en utilisant les données du tableau 4.3A), les indices de précision choisis furent donc 1,50 pour l'ensemble GN, 1,35 pour l'ensemble N et 1,20 pour l'ensemble G. L'intervalle de confiance a été 95% dans tous les cas. Les résultats de ces simulations sont résumés au tableau 4.3B.

Tableau 4.3A – Données utilisées avec les trois ensembles de simulations effectuées.

Ensemble	Moyenne (MPa)	Écart type (MPa)	Indice de précision	Intervalle de confiance (%)	Sources des données
GN	52,0	12,4	1,50	95	Bernaix (1967)
N	206,4	45,0	1,35	95	Gill (1963)
G	166,2	31,0	1,20	95	Yamaguchi (1970)

Les conclusions qui peuvent être tirées de l'examen des tableaux 4.3A et 4.3B sont les suivantes.

Pour une roche et un type d'essai donnés, le nombre minimal d'éprouvettes dans un groupe varie d'un cas à l'autre, même si l'indice de précision visé et l'intervalle de confiance recherché sont identiques dans tous les cas. Ainsi, pour les dix simulations impliquant le gneiss de Malpasset, ce nombre minimal varie de 5 à 13 pour assurer un indice de précision égal ou inférieur à 1,50 dans tous les cas. Quant aux dix simulations faisant intervenir les propriétés de la norite de Sudbury, le nombre minimal d'éprouvettes dans un groupe varie de 6 à 15 pour assurer un indice de précision égal ou inférieur à 1,35 avec chaque simulation. Pour ce qui a trait aux dix simulations faites en empruntant les propriétés du granite Inada, le nombre minimal d'éprouvettes dans un groupe varie de 7 à 21 pour

garantir un indice de précision égal ou inférieur à 1,20. Donc, fixer un nombre minimal d'éprouvettes dans tous les groupes comme certains auteurs le suggèrent est irréaliste.

Les erreurs relatives observées sur la moyenne vraie sont, dans le cas de toutes les simulations, inférieures aux erreurs relatives maximales découlant de l'indice de précision fixé. Ainsi, les simulations faites en utilisant la résistance en compression uniaxiale du gneiss de Malpasset ont donné des erreurs relatives observées sur la moyenne vraie comprises entre 2,9% et 12,5% alors que l'erreur relative maximale définie par l'indice de précision est 20,0% dans tous les cas. Quant aux simulations impliquant la résistance en compression uniaxiale de la norite de Sudbury, elles ont donné des erreurs relatives observées sur la moyenne vraie variant entre 0,0% et 10,4% alors que l'erreur relative maximale découlant de l'indice de précision est 14,9%. L'erreur relative maximale prédite à partir de l'indice de précision visé lors des simulations faites en utilisant la résistance en compression du granite Idana est 9,9%. Les erreurs relatives observées sur la moyenne vraie se présentent dans la plage 0,7% à 8,6%. Conséquemment, il n'y a pas lieu de se surprendre que la moyenne vraie de la propriété mécanique des trois types de roches se situe bien à l'intérieur de l'intervalle de la moyenne vraie établie à partir des moyennes observées (équation 10).

Les bornes de l'intervalle de l'écart type vrai de la propriété mécanique des trois types de roches qui ont fait l'objet des simulations ont été ajoutées au tableau pour montrer que l'écart type observé, se situe, dans tous les cas, à l'intérieur de l'intervalle (équation 36). On revient sur ce point à la section 6.1 du document.

Les objectifs visés par les simulations sont donc atteints.

4.4- Calculs de l'indice de précision ou de l'intervalle de confiance *a posteriori*

Il est fréquent que l'ingénieur concepteur dispose uniquement de résultats d'essais sans autres renseignements, c'est-à-dire qu'il ne connaît que le nombre d'éprouvettes qui ont été testées, la moyenne arithmétique et l'écart type observés de chaque groupe. Il devrait alors normalement établir pour chaque groupe l'indice de précision pour un intervalle de confiance donné ou encore fixer l'indice de précision et déterminer l'intervalle de confiance correspondant.

Dans le cas où il opte pour la détermination de l'indice de précision pour un intervalle de confiance donné, il doit faire appel à l'équation 17. Il y a eu déjà plusieurs exemples de calcul de l'indice de précision de présentés dans le présent document et les auteurs jugent inutile d'en présenter un autre.

Par ailleurs, l'équation 16 peut être réécrite comme suit

$$t_{\beta} = \frac{100\sqrt{N-1}}{cv_{ob}} \left(\frac{p-1}{p+1} \right) \quad (21)$$

Tableau 4.3B – Optimisation du nombre d'éprouvettes dans un groupe, les résistances en compression uniaxiale étant générées à l'aide de la méthode Monte Carlo.

No simul.	N	p	Moyenne (MPa)	Écart type (MPa)	Coef. de var. (%)	Bornes de la moyenne vraie (MPa)		Bornes de l'écart type vrai (MPa)	
						Inf.	Sup.	Inf.,	Sup.
GN1	5	1,499	57,5	8,3	14,4	46,0	69,0	5,5	26,5
GN2	6	1,482	48,8	8,3	16,9	39,3	58,3	5,6	22,2
GN3	7	1,474	55,3	10,6	19,2	44,7	65,9	7,4	25,2
GN4	10	1,481	47,8	12,3	25,7	38,5	57,0	9,0	23,6
GN5	8	1,495	47,8	10,6	22,2	38,3	57,3	7,6	23,2
GN6	7	1,460	53,5	10,0	18,7	43,5	63,5	7,0	23,8
GN7	13	1,498	48,3	15,3	31,7	38,7	57,9	11,5	26,3
GN8	8	1,449	45,7	9,4	20,6	37,3	54,1	6,7	20,5
GN9	10	1,477	45,5	11,6	25,5	36,7	54,2	8,5	22,3
GN10	8	1,481	56,3	12,2	21,7	45,3	67,2	8,7	26,7
N1	11	1,342	219,8	45,5	20,7	187,7	251,8	33,2	83,7
N2	8	1,338	214,9	34,9	16,2	183,8	246,0	24,8	76,0
N3	15	1,335	219,3	55,1	25,1	187,8	250,8	41,9	89,8
N4	11	1,339	206,3	42,4	20,6	176,4	236,2	31,0	78,1
N5	8	1,345	220,9	36,5	16,5	188,4	253,5	25,9	79,5
N6	8	1,346	214,3	35,4	16,5	182,7	245,9	25,2	77,3
N7	7	1,302	225,0	29,3	13,9	195,4	254,5	20,7	70,3
N8	13	1,330	190,4	42,9	22,5	163,4	217,3	32,2	73,8
N9	6	1,319	207,9	24,9	12,0	179,3	236,5	16,7	67,0
N10	11	1,347	227,9	47,8	21,0	194,3	261,6	34,9	87,9
G1	18	1,198	161,7	28,5	17,6	147,2	176,3	21,9	43,8
G2	12	1,185	179,7	22,9	11,8	164,5	194,8	16,9	40,5
G3	11	1,200	157,3	20,3	12,9	143,0	171,6	14,8	37,4
G4	12	1,185	165,4	21,1	11,8	151,4	179,4	15,6	37,3
G5	7	1,185	180,5	15,3	8,5	165,2	195,8	10,7	36,4
G6	14	1,199	156,5	23,7	15,1	142,3	170,6	17,7	39,5
G7	21	1,199	171,0	33,1	19,4	155,5	186,4	25,8	48,9
G8	14	1,196	165,1	24,6	14,9	150,4	179,9	18,4	41,1
G9	13	1,199	161,8	23,3	14,4	147,2	176,5	17,4	40,0
G10	21	1,193	168,3	31,7	18,8	153,5	183,1	24,7	46,9

L'équation 7 peut aussi être réécrite. Soit

$$IC = 100,0(2\beta - 1) \quad (22)$$

Si l'ingénieur juge qu'il est préférable de fixer l'indice de précision et de déterminer l'intervalle de confiance, il doit d'abord utiliser l'équation 21. Connaissant le coefficient de confiance et le nombre de degrés de liberté, le paramètre β s'obtient alors du tableau B2 de l'annexe B. Ce dernier donne, en faisant usage de l'équation 22, l'intervalle de confiance recherché.

Exemple 4.4 – Onze essais de compression uniaxiale exécutés sur une roche ignée ont donné 219,8 MPa comme moyenne arithmétique et 45,5 MPa comme écart type. On demande de déterminer l'intervalle de confiance qui caractérise ces résultats si l'indice de précision recherché est 1,35.

L'équation 15 donne

$$cv_{ob} = \frac{45,5}{219,8} 100 = 20,7 \%$$

alors que l'équation 21 conduit à

$$t_{\beta} = \frac{100\sqrt{11-1}}{20,7} \left(\frac{1,35-1}{1,35+1} \right) = 2,275$$

En consultant le tableau B2 de l'annexe B, on trouve que $\beta = 0,975$. On obtient alors de l'équation 22

$$IC = 100,0(2 \times 0,975 - 1) = 95,0\%$$

5- Discussion

5.1- Les normes ASTM

Lorsqu'il est question du nombre d'éprouvettes que doit contenir un groupe, les normes D2664-95a, D2936-95, D2938-95, D4406-93, D4543-01 et D5607-95 de American Society for Testing and Materials/ASTM (voir l'annexe A) réfèrent l'utilisateur à la norme E122-00 (ASTM, 2002a; ASTM, 2002b).

La norme E122-00 propose de calculer le nombre d'éprouvettes dans un groupe à l'aide de l'équation suivante

$$N = \left(\frac{n_{ASTM} \sigma_e}{R} \right)^2 \quad (23)$$

et elle en définit les paramètres comme suit : σ_e est une estimation de l'écart type de la population, R est l'erreur absolue maximale admissible entre la moyenne observée et la moyenne vraie et n_{ASTM} est un coefficient fixant la probabilité que l'erreur absolue réelle ne dépasse pas l'erreur absolue recherchée R . La norme recommande de s'en tenir à des intervalles de confiance élevés et suggère de prendre 3,00 comme valeur du coefficient n_{ASTM} .

Suite à ces définitions, l'intervalle de la moyenne vraie peut s'écrire

$$PM_{vr} = PM_{ob} \pm R \quad (24)$$

si l'écart type estimé s'approche de l'écart type observé qui est considéré être aussi l'écart type de la population. En divisant les deux membres de cette équation par PM_{ob} et en comparant le résultat à l'équation 11, on obtient

$$\frac{R}{PM_{ob}} = \frac{p-1}{p+1} \quad (25)$$

L'équation 25 montre le lien qui existe entre l'indice de précision et le paramètre R de l'équation 23. Faire en sorte que R soit petit est équivalent à fixer un petit indice de précision.

Bien que la norme E122-00 recommande de s'en tenir à de faibles probabilités de dépassement et de faire $n_{ASTM} = 3,00$ dans l'équation 23, elle propose le tableau 5.1A dans lequel on offre de choisir une valeur du coefficient de confiance parmi cinq valeurs. Les probabilités présentées dans ce tableau sont celles de dépassement de l'erreur absolue maximale R .

La comparaison des nombres apparaissant dans le tableau 5.1A à ceux du tableau B1 de l'annexe B, mène à la conclusion que les coefficients de confiance montrés sont ceux de la loi normale. De plus, l'équation 23 postule que l'écart type de la population est connue. Par conséquent, American Society for Testing and Materials traite le problème du nombre d'éprouvettes dans un groupe sous le jour de la théorie classique de l'échantillonnage.

D'ailleurs, en combinant les équations 23 et 24, on peut écrire

$$PM_{ob} - n_{ASTM} \frac{\sigma_e}{\sqrt{N}} \leq PM_{vr} \leq PM_{ob} + n_{ASTM} \frac{\sigma_e}{\sqrt{N}} \quad (26)$$

comme expression définissant l'intervalle de la moyenne vraie.

Tableau 5.1A – Coefficients de confiance suggérés par la norme E122-00 pour établir le nombre d'éprouvettes dans un groupe à l'aide de l'équation 23.

n _{ASTM}	Probabilité de dépassement de R
3,00	0,003
2,58	0,010
2,00	0,045
1,96	0,050
1,64	0,100

Pour illustrer les conséquences de ce fait, les auteurs proposent le tableau 5.1B qui présente le nombre d'essais à effectuer conformément aux normes ASTM pour atteindre un indice de précision fixé, étant donné un intervalle de confiance de 95%. La conclusion que permet de tirer la comparaison des tableaux 3.2.3A et 5.1B est qu'il faut qu'un groupe contienne de 2 à 5 éprouvettes de plus pour satisfaire les conditions de la théorie des petits échantillons.

D'autre part, il est bon de faire observer les points suivants en relation avec le nombre minimal d'éprouvettes dans les groupes dans différentes normes ASTM :

la norme D2664, qui se rapporte à l'essai de compression triaxiale et qui fait partie du groupe de normes qui font référence à la norme E122-00, recommande néanmoins de procéder à un minimum de 3 essais pour chacune des contraintes de confinement prévues ou à un minimum d'un essai à 9 contraintes de confinement différentes;

la norme D2936-95 (2000), qui définit la façon d'exécuter les essais de traction axiale et qui fait référence à la norme E122-00, stipule que le nombre d'essais peut dépendre de la disponibilité du matériau mais qu'il est préférable d'exécuter un minimum de 10 essais;

les normes D2938-95, D4406-93, D4543-01 et D5607-95 font référence à la norme E122-00 mais n'ajoutent aucune autre indication quant au nombre minimal d'éprouvettes dans les groupes;

les normes D2845-00, D3148-96, D4341-93, D4405-93, D4525-90(2001), D4644-87(1998) et D3148-96 ne font pas référence à la norme E122-00 et ne fournissent aucun renseignement sur le nombre minimal d'éprouvettes que doit contenir un groupe;

la norme D3967-95a, qui se rapporte à l'essai brésilien et qui ne fait pas référence à la norme E122-00, stipule qu'un groupe doit comprendre au minimum 10 éprouvettes sauf lorsque le coefficient de variation est inférieur à 5%;

les normes D4534-85(2000) et D5335-99 ne font pas référence à la norme E122-00 mais stipulent que le nombre de résultats d'essais rendus disponibles doit être statistiquement suffisant pour atteindre la précision recherchée;

la norme D5873-00, qui se rapporte à l'essai de rebondissement (dureté Schmidt) et qui ne fait pas référence à la norme E122-00, recommande de faire 10 essais par éprouvette, d'en faire la moyenne et de retirer alors du lot les résultats qui s'éloignent de cette moyenne de plus d'une certaine quantité;

la norme D5731-95, qui se rapporte à l'essai de double poinçonnement et qui ne fait pas référence à la norme E122-00, stipule qu'il faut procéder à un minimum de 10 essais et de retirer les 2 résultats les plus élevés et le 2 résultats les moins élevés du groupe avant d'en calculer la moyenne. Cette norme stipule aussi que si le groupe compte moins de 10 éprouvettes testées, il ne faut enlever que les résultats le plus élevé et le moins élevé;

la norme D4611-86(2000), qui se rapporte à la détermination de la chaleur spécifique et qui ne fait pas référence à la norme E122-00, recommande, si l'hétérogénéité est considérée significative, de tester plusieurs éprouvettes.

Tableau 5.1B – Nombre d'essais à effectuer (nombre d'éprouvettes dans un groupe) pour atteindre un indice de précision fixé, étant donné un intervalle de confiance de 95%, selon les normes ASTM.

cv _{ob} (%)	p ≤					
	1,6	1,5	1,4	1,35	1,3	1,2
35	9	12	17	22	28	57
30	7	9	13	16	21	42
25	5	5	9	11	15	30
20	3	4	6	7	9	19
15	2	3	4	4	4	11
10	1	2	2	2	3	5
5	1	1	1	1	1	2

5.2- La norme B.I.M.R. de l'essai de compression uniaxiale

La norme suggérée par le Bureau international de mécanique des roches/B.I.M.R. pour l'essai de compression uniaxiale (voir l'annexe A) propose un tableau définissant le nombre d'éprouvettes que doit contenir un groupe pour atteindre un indice de précision de 1,50. Le tableau 5.2 est une reproduction de ce dernier.

Tableau 5.2 – Nombre d’essais à effectuer (nombre d’éprouvettes dans un groupe) pour atteindre un indice de précision de 1,50 avec un intervalle de confiance de 95% selon le B.I.M.R.

cv _{ob} (%)	N
30	9
25	6
20	4
15	3

L’équation menant aux nombres du tableau 5.2 est la suivante (Protodyakonov, 1969)

$$N = \left[\left(\frac{p+1}{p-1} \right) 2,00 \frac{cv_{ob}}{100} \right]^2 \quad (27)$$

Si l’équation 27 est comparée à l’équation 16, on constate d’abord que le coefficient de l’intervalle de confiance est considéré indépendant du nombre de degrés de liberté. On constate aussi que la définition des bornes de la moyenne vraie fait intervenir N plutôt que N – 1. De plus, le coefficient de confiance introduit dans cette équation pour un intervalle de confiance de 95% est 2,00. Ce coefficient se rapproche de celui de la fonction densité de probabilités normale lorsque l’intervalle de confiance recherché est 95% (1,960, voir le tableau B1 de l’annexe B). Les auteurs sont donc justifiés de prétendre que l’équation 27 découle de la théorie de l’échantillonnage classique plutôt que de la théorie des petits échantillons.

5.3- Les normes de CANMET

Le tableau 5.3, tiré de Gyenge et Ladanyi (1977), rapporte le nombre minimal d’éprouvettes que doit contenir un groupe selon Canada Centre for Mineral and Energy Technology (CANMET). Étant donné que ces nombres ne font aucunement référence aux coefficients de variation, l’indice de précision atteint suite à des essais varie en fonction de la roche ou de la discontinuité testée et du type d’essais effectués, quel que soit l’intervalle de confiance que l’on désire considérer.

Un tel tableau est pour le moins étonnant car Coates et Parsons (1966), qui ont publié les critères expérimentaux d’une classification des roches mise de l’avant par le Mines Branch du Fuels and Mining Practice Division qui est devenu par la suite CANMET, rapportaient qu’il était souhaitable qu’un groupe contienne un minimum de 10 éprouvettes.

Tableau 5.3 – Nombre d’essais à effectuer (nombre d’éprouvettes dans un groupe) selon le CANMET

Essai	Nombre minimal d’éprouvettes dans un groupe
Water content	5
Porosity/density	5
Swelling pressure and swelling strain index	3
Slake-durability	10
Point load strength index	10 (core)/20 (lump)
Uniaxial compressive strength	3
Tensile strength (brazilian test)	10
Elastic modulus and Poisson’s ratio	3
Ultrasonic elastic constants	3
Triaxial compressive strength	3
Residual angle of friction	3
Strength of discontinuity by direct shear test	3
Strength of discontinuity by triaxial test	2
Strength of crushed rock substance	2
Time-dependent properties	15

5.4- Gill (1963)

Gill (1963) a réalisé un programme exhaustif d’essais de compression uniaxiale sur des éprouvettes de norite de Sudbury (Canada). Il a été jugé, à l’époque, que cette norite montre un comportement mécanique typique des roches dures du Bouclier canadien et qu’elle devait être un standard. En se basant sur la théorie classique de l’échantillonnage, Gill a proposé qu’un groupe doit comprendre un minimum de 15 éprouvettes et un maximum de 25. Le critère de décision utilisé par Gill a été un taux de changement de pente spécifique des courbes de l’écart entre la moyenne observée et la moyenne vraie contre le nombre d’éprouvettes dans les groupes. L’intervalle de confiance considéré dans le calcul des écarts était 99,7%. Un tel critère est pour le moins arbitraire, mais représente néanmoins une tentative d’introduire une certaine rigueur dans le domaine.

5.5- Yamagushi (1970)

D’après Yamagushi (1970), un groupe doit compter un minimum de 10 éprouvettes. Il est important, pour lui, d’assurer un écart entre la moyenne vraie et la moyenne observée inférieur à 20% de la moyenne vraie et de maintenir un intervalle de confiance de 95%. Il serait facile de démontrer qu’un écart maximal admissible de 20% et un intervalle de confiance de 95% assure un indice de précision minimal de 1,50.

Notons que certains des résultats que Yamagushi rapporte montrent un écart entre la moyenne vraie et la moyenne observée inférieur à 20% obtenu avec moins de 10 éprouvettes dans le groupe tout en maintenant un intervalle de confiance de 95%, ce qui prouve qu'un groupe peut contenir moins de 10 éprouvettes et assurer les objectifs de prévision recherchés.

5.6- La portion de l'écart type observé qui découle uniquement de l'hétérogénéité des roches

Il a été écrit antérieurement que les erreurs expérimentales ne peuvent pas expliquer la dispersion observée lors d'essais mécaniques en laboratoire sur des groupes d'éprouvettes. Faisons la démonstration de ce fait en référant à l'essai de loin le plus exécuté, soit l'essai de compression uniaxiale, et en nous référant à la norme d'essai la plus fréquemment considérée en Amérique, soit la norme D2938-95 de American Society for Testing and Materials (ASTM, 2002a).

Cette norme accepte, comme l'ont démontré Hoskins et Horino (1968), que l'utilisation d'une articulation sphérique appropriée pallie adéquatement au manque de parallélisme des extrémités des éprouvettes d'essai, manque de parallélisme limité d'ailleurs par la norme. Il n'y a donc pas lieu d'en tenir compte lors du calcul qui est présenté dans les paragraphes suivants.

D'après cette norme, des carottes de forage doivent être utilisées pour la préparation des éprouvettes et elles doivent être de calibre NQ et NX. Le diamètre nominal des carottes de forage NQ est 47,6 mm et celui des carottes de forage NX est 54,0 mm.

La tolérance considérée acceptable par la norme quant à la variation du diamètre des éprouvettes le long de leur hauteur est de 0,50 mm. En supposant que la mesure se réalise à l'aide d'un pied à coulisse qui mesure à 0,025 mm près, l'erreur absolue maximale Δ_d sur la mesure du diamètre est

$$\Delta_d = 0,50 + 0,025 = 0,525 \text{ mm}$$

si on admet que le pire cas se présente quand la mesure du diamètre de l'éprouvette est faite à l'endroit où celui-ci est le plus grand et que la contrainte qui entraîne la rupture de cette dernière est celle qui agit suivant la section droite où le diamètre est le plus petit.

En prenant comme diamètre de l'éprouvette la moyenne des diamètres nominaux NQ et NX, l'erreur relative E_d sur la mesure de ce diamètre est alors

$$E_d = \frac{0,525}{50,8} \times 100 = 1,034\%$$

La résistance en compression uniaxiale a pour expression

$$C_o = \frac{4P}{\pi d^2}$$

où P est la charge à la rupture et d est le diamètre de la section droite de l'éprouvette testée. La théorie des erreurs nous conduit à

$$E_{C_o} = E_p + 2E_d$$

où E_{C_o} est l'erreur relative sur la résistance en compression uniaxiale et E_p est l'erreur relative sur la mesure de la charge à la rupture. En supposant sécuritairement que l'erreur de mesure sur la charge à la rupture est 2%, on peut donc écrire

$$E_{C_o} = 2,000 + 2 \times 1,034 = 4,07 \%$$

Si on accepte, pour les propriétés mécaniques des roches, la proposition faite par Réthati (1988) pour les propriétés mécaniques des sols, on peut écrire que

$$e_h = \sqrt{e_{ob}^2 - e_e^2} \quad (28)$$

où e_h est l'écart type dû à l'hétérogénéité et e_e est l'écart type dû aux erreurs expérimentales. En divisant les deux membres de l'équation 28 par le moyenne observée et en les multipliant par 100, on obtient, en référant à l'équation 15

$$cv_h = \sqrt{cv_{ob}^2 - \frac{e_e^2 \times 10^4}{PM_{ob}^2}} \quad (29)$$

En admettant que les erreurs expérimentales se distribuent au hasard, de part et d'autre des résultats expérimentaux, on pourrait démontrer que la valeur maximale que peut prendre le dernier terme du membre de droite de l'équation 29 est

$$\frac{e_e}{PM_{ob}} = E_e \sqrt{\frac{N}{N-1}} \quad (30)$$

où E_e est l'erreur expérimentale relative.

Considérons la simulation N1 de la section 4.3C. Le coefficient de variation observé lors de cette simulation est 20,69% et le nombre d'éprouvettes dans le groupe est 11.

Les équations 29 et 30 donnent alors

$$cv_h = \sqrt{20,69^2 - 4,07^2 \left(\frac{11}{11-1} \right)} = 20,24\%$$

On doit conclure que la contribution des erreurs expérimentales à la dispersion des résultats d'essais n'est pas très significative.

On pourrait reprendre la démonstration en nous référant à n'importe quel autre essai en laboratoire et à n'importe quelle autre norme. La conclusion serait la même.

Ce qui est identifié comme étant le coefficient de variation dû à l'hétérogénéité de la roche peut inclure, selon le cas, les effets de l'endommagement découlant éventuellement du prélèvement de l'échantillon, de son transport et de la préparation des éprouvettes.

5.7- La conséquence de la répartition normale des valeurs de la propriété dans la population

Si la nature de la fonction de densité de probabilité du caractère observé sur les éléments de la population est postulée être inconnue, il faut faire alors appel à l'inégalité de Tchebychev pour déterminer les bornes de l'intervalle de la moyenne vraie (Réthati, 1988). On peut donc écrire

$$PM_{ob} - h \frac{e_{ob}}{\sqrt{N}} \leq PM_{vr} \leq PM_{ob} + h \frac{e_{ob}}{\sqrt{N}} \quad (31)$$

La valeur du coefficient de confiance, h , s'obtient de l'équation suivante

$$h = \sqrt{\frac{1}{1-IC}} \quad (32)$$

où IC est l'intervalle de confiance.

Ainsi, pour un intervalle de confiance de 95%, l'équation 32 donne $h = 4,472$. Selon la théorie classique de l'échantillonnage, la valeur du coefficient de confiance équivalent est 1,960 alors que selon la théorie des petits échantillons, la valeur du coefficient de confiance dépend du nombre de degrés de liberté. Mais cette dernière est toujours inférieure à la valeur de h et se rapproche de la valeur du coefficient de confiance de la théorie classique de l'échantillonnage au fur et à mesure que N augmente.

Il est donc avantageux d'accepter que le caractère observé sur les éléments de la population réponde à une fonction de densité de probabilité normale. À intervalle de confiance égal, le nombre d'éprouvettes dans un groupe s'en trouve passablement réduit, même si, avec les essais mécaniques sur les roches, on utilise comme il se doit, la théorie des petits échantillons.

6- La valeur pratique d'une propriété mécanique

6.1- L'intervalle de l'écart type vrai

La connaissance de l'intervalle de l'écart type vrai permet de procéder à différents calculs de probabilité touchant la stabilité ou l'instabilité des ouvrages au rocher.

Afin de rendre l'équation 4 plus facile d'utilisation, on peut la réécrire comme suit

$$\frac{e_{ob}^2 N}{\chi_{\beta}^2} \leq e_{vr}^2 \leq \frac{e_{ob}^2 N}{\chi_{(1-\beta)}^2} \quad (33)$$

où e_{ob} est l'écart type observé et e_{vr} est l'écart type vrai. Si on pose

$$A^2 = \frac{N}{\chi_{\beta}^2} \quad (34)$$

et

$$B^2 = \frac{N}{\chi_{(1-\beta)}^2} \quad (35)$$

l'équation 33 prend la forme de

$$Ae_{ob} \leq e_{vr} \leq Be_{ob} \quad (36)$$

Le tableau 6.1 présente les valeurs des constantes A et B pour différents nombres d'éprouvettes dans le groupe et pour un intervalle de confiance de 95%. Le troisième module de calcul de l'annexe D permet d'obtenir ces constantes pour n'importe quel intervalle de confiance.

Les bornes de l'écart type vrai de la résistance en compression uniaxiale des trois types de roches qui ont fait l'objet des simulations qui ont été ajoutées au tableau 4.3B ont été calculées à l'aide de l'équation 36 et des valeurs des constantes A et B du tableau 6.1. Les écarts types observés se situent, dans tous les cas, à l'intérieur des l'intervalles rapportés, démontrant ainsi l'adéquation de la procédure proposée.

Exemple 6.1 – On demande de calculer les bornes de l'écart type vrai qui assurent un intervalle de confiance de 95% pour les données de l'exemple 3.2.1A.

On a, de l'exemple 3.2.1A :

écart type observé : 26,5 MPa;

nombre d'éprouvettes dans le groupe : 10.

On tire, pour $N = 10$, du tableau 6.1 : $A = 0,73$ et $B = 1,92$.

On obtient de l'équation 36

$$0,73 \times 26,5 \leq e_{vr} \leq 1,92 \times 26,5$$

ou encore

$$19,3 \text{ MPa} \leq e_{vr} \leq 50,9 \text{ MPa}$$

Donc, l'écart type vrai est égal ou supérieur à 19,3 MPa et égal ou inférieur à 50,9 MPa.

Tableau 6.1 – Valeurs des constantes A et B de l'équation 36 pour un intervalle de confiance de 95%.

N	A	B	N	A	B
3	0,64	7,70	17	0,77	1,57
4	0,65	4,30	18	0,77	1,54
5	0,67	3,21	19	0,78	1,52
6	0,68	2,69	20	0,78	1,50
7	0,70	2,38	21	0,78	1,48
8	0,71	2,18	22	0,79	1,46
9	0,72	2,03	23	0,79	1,45
10	0,73	1,92	24	0,79	1,43
11	0,73	1,84	25	0,80	1,42
12	0,74	1,77	26	0,80	1,41
13	0,75	1,72	27	0,80	1,40
14	0,75	1,67	28	0,81	1,38
15	0,76	1,63	29	0,81	1,38
16	0,76	1,60	30	0,81	1,37

6.2- La valeur pratique d'une propriété mécanique résistante

6.2.1- La recherche de la stabilité

Considérant que la résistance du matériau d'une structure quelconque ne doit pas être dépassée aux points où les plus grandes contraintes agissent si l'on désire éviter l'instabilité de cette structure, une question se pose alors : Quelle valeur l'ingénieur doit utiliser pour cette propriété mécanique dans ses dimensionnements? Répondre à cette question, quand les propriétés en cause sont considérées comme des variables aléatoires, revient à un calcul statistique. Pour procéder à ce calcul, il faut que l'ingénieur fixe, pour son dimensionnement, la probabilité de stabilité qu'il juge acceptable.

Dans les travaux publics, on doit accepter uniquement de très faibles probabilités d'instabilité, la sécurité publique étant en jeu. En exploitation des mines, étant donné que

seul un personnel formé et expérimenté circule dans les différentes excavations souterraines, l'ingénieur accepte souvent des probabilités d'instabilité plus élevées.

Lorsque la probabilité de stabilité (non rupture) est fixée, le calcul de la valeur de la propriété mécanique à considérer dans les analyses de stabilité, définie comme étant la valeur pratique (voir la section 1.2), se déduit de la moyenne et de l'écart type observés.

On pourrait démontrer que la valeur pratique assurant une probabilité donnée de stabilité a pour expression

$$VPR_s(P_r) = \frac{2}{p+1} PM_{ob} - n_{pr} B e_{ob} \quad (37)$$

où $VPR_s(P_r)$ est la valeur pratique de la propriété mécanique résistante assurant la stabilité pour une probabilité de non rupture P_r , p est l'indice de précision, PM_{ob} est la moyenne observée, n_{pr} est le coefficient de probabilité, B est la constante définissant la borne supérieure de l'écart type vrai calculé à partir de l'écart type observé (voir le tableau 6.1 ou le troisième module de calcul de l'annexe D) et e_{ob} est l'écart type observé.

Le coefficient de probabilité apparaissant dans l'équation 37 se déduit de la loi normale (voir le tableau B1 de l'annexe B).

Dans le but d'illustrer les caractéristiques des résultats que donne l'équation 37, divers calculs ont été effectués en utilisant les données et les résultats des 30 simulations exécutées en relation avec l'algorithme d'optimisation du nombre d'éprouvettes dans un groupe (section 4.3). Les résultats de ces calculs constituent le tableau 6.2.1.

Ce tableau présente, pour chaque simulation, la valeur pratique de non rupture de la propriété mécanique calculée en acceptant une probabilité de 85%, la probabilité *a posteriori* de non rupture, le pourcentage de la moyenne observée que constitue la valeur pratique et le rapport moyenne observée-valeur pratique.

L'examen de ce tableau permet de constater que la valeur pratique calculée se rapproche de plus en plus de la moyenne observée lorsque l'indice de précision fixé diminue. Ceci découle du fait que, d'une part, dans l'équation 37, le facteur multiplicateur $2/(p+1)$ augmente et se rapproche de l'unité lorsque p diminue et que, d'autre part, plus l'indice de précision fixé est petit, plus le nombre d'éprouvettes dans le groupe ayant donné la moyenne observée risque d'être grand et plus la constante B se rapproche de l'unité.

Les résultats présentés dans ce tableau montrent aussi que la probabilité calculée *a posteriori* est dans tous les cas supérieure à la probabilité choisie pour le calcul de la valeur pratique. Cette dernière s'avère donc être une probabilité minimale. En comparant entre elles ces probabilités calculées *a posteriori*, on constate que plus l'indice de précision est élevé, plus cette probabilité s'éloigne de la probabilité choisie pour le calcul, mais aussi plus la valeur pratique calculée représente un faible pourcentage de la moyenne observée.

Tableau 6.2.1 – Calculs effectués à l’aide de l’équation 37 et des résultats des simulations (voir les tableaux 4.3A et 4.3B) en postulant une probabilité de non rupture de 85%.

Simulation	VPR _s	Probabilité a posteriori	VPR _s en % de la moyenne observée	Rapport moyenne observée/VPR _s
GN1	18,4	0,997	32,0	2,82
GN2	16,2	0,998	33,2	3,21
GN3	18,6	0,997	33,6	2,81
GN4	14,1	0,999	29,4	3,70
GN5	14,4	0,999	30,1	3,62
GN6	18,8	0,996	35,2	2,76
GN7	11,4	0,999	23,6	4,56
GN8	16,1	0,998	35,2	3,23
GN9	13,7	0,999	30,0	3,81
GN10	17,8	0,997	31,7	2,92
N1	101,0	0,990	45,9	2,04
N2	105,0	0,988	48,9	1,97
N3	94,8	0,993	43,2	2,18
N4	95,6	0,993	46,3	2,16
N5	106,0	0,987	48,0	1,95
N6	102,7	0,989	48,0	2,01
N7	123,2	0,967	54,8	1,67
N8	87,0	0,996	45,7	2,37
N9	109,9	0,984	52,9	1,88
N10	103,1	0,989	45,2	2,00
G1	101,7	0,981	62,9	1,63
G2	122,5	0,921	68,2	1,36
G3	104,3	0,977	66,3	1,59
G4	112,7	0,958	68,1	1,47
G5	127,5	0,894	70,6	1,30
G6	101,3	0,982	64,7	1,64
G7	104,8	0,976	61,3	1,59
G8	107,8	0,970	65,3	1,54
G9	105,6	0,974	65,3	1,57
G10	104,9	0,976	62,3	1,58

Les rapports moyenne observée-valeur pratique ont été ajoutés au tableau 6.2.1 afin de montrer que la façon de faire préconisée par certains auteurs de diviser la moyenne observée (ou encore la moyenne observée réduite de une ou deux fois l’écart type) par un facteur constant pour obtenir une valeur pratique conduit à une variété de probabilités *a priori* de non rupture, probabilité qui demeure inconnue à l’utilisateur.

Les calculs ayant permis d'obtenir les résultats qui ont fait l'objet du tableau 6.2.1A pourraient être repris pour d'autres probabilités *a priori* de non rupture. On en tirerait les mêmes conclusions et on constaterait que plus cette probabilité de stabilité recherchée est élevée, plus la valeur pratique calculée s'éloigne de la moyenne observée, quel que soit l'indice de précision.

Il ne faut pas perdre de vue que le fait de choisir une probabilité de non rupture n'élimine pas la restriction posée par l'intervalle de confiance propre à la détermination des bornes de la moyenne vraie. Ainsi la probabilité globale de non rupture associée à une valeur pratique de propriété mécanique résistante est

$$PG = P_r IC / 100,0 \quad (38)$$

où P_r est la probabilité de non rupture et IC est l'intervalle de confiance caractérisant les bornes de la moyenne vraie de la propriété.

Les auteurs du document suggèrent de viser une probabilité globale d'au moins 80%. Considérant qu'ils proposent de considérer un intervalle de confiance de 95% lors de la détermination de la propriété, la probabilité de non rupture à introduire dans l'équation 37 est donc 85%. Il est évident que si l'intervalle de confiance recherché lors de la détermination de la propriété est inférieur à 95%, une probabilité globale de 80% peut être maintenue en utilisant une probabilité de non rupture supérieure à 85% dans l'équation 37.

Exemple 6.2.1 – On demande de calculer la valeur pratique de la résistance en compression uniaxiale qui assure une probabilité de 90% de non rupture, 19 fois sur 20, si les résultats obtenus pour un intervalle de confiance de 95%, sont :

le nombre d'essais minimal à effectuer pour assurer un indice de précision égal ou inférieur à 1,50 : 7 essais;
 la moyenne observée : 152,7 MPa;
 l'écart type observé : 28,1 MPa;
 le coefficient de variation : 18,4%.

D'après l'équation 6, le nombre de degrés de liberté est 6. L'équation 7 mène à $\beta = 0,975$. Le tableau B2 de l'annexe B indique que $t_\beta = 2,45$. L'équation 17 donne

$$p = \frac{100\sqrt{7-1} + 2,45 \times 18,4}{100\sqrt{7-1} - 2,45 \times 18,4} = 1,451$$

Pour obtenir la valeur pratique recherchée, il faut de plus :

déterminer le paramètre B à partir du tableau 6.1 ou du troisième module de calcul de l'annexe D : 2,38;
 déterminer le paramètre n_{Pr} à partir du tableau B1 de l'annexe B : 1,282;
 substituer les données appropriées dans l'équation 37.

$$VPR_i(90\%) = \frac{2}{1,451+1} 152,7 - 1,282 \times 2,38 \times 28,1 = 38,9 \text{ MPa}$$

D'après l'équation 38, la probabilité globale de non rupture est

$$PG = 90,0 \times 95,0 / 100,0 = 85,5\%$$

Le calcul de la valeur pratique aurait pu être fait en considérant l'indice de précision visé (1,50) plutôt qu'avec l'indice de précision obtenu (1,451). L'équation 37 aurait donné alors 36,4 MPa.

6.2.2- La recherche de l'instabilité

Il existe des situations dans lesquelles l'ingénieur veut induire l'instabilité. La résistance du matériau de la structure rocheuse doit être alors dépassée en tous les points. Le dimensionnement d'un sous-cavage dans une exploitation par blocs foudroyés est un exemple d'une telle situation. Le tir à l'explosif est un autre exemple dans lequel l'ingénieur veut induire l'instabilité, c'est-à-dire, la rupture.

Lorsque la probabilité d'instabilité (rupture) est fixée, le calcul de la valeur la propriété mécanique à considérer dans les analyses stabilité, définie comme étant la valeur pratique (voir la section 1.2), se déduit de la moyenne et de l'écart type observés, comme dans le cas de la recherche de la stabilité.

On pourrait démontrer que la valeur pratique assurant une probabilité donnée d'instabilité a pour expression

$$VPR_i(P_r) = \frac{2p}{p+1} PM_{ob} + n_{pr} B e_{ob} \quad (39)$$

où $VPR_i(P_r)$ est la valeur pratique de la propriété mécanique résistante assurant l'instabilité pour une probabilité de rupture P_r , p est l'indice de précision, PM_{ob} est la moyenne observée, n_{pr} est le coefficient de probabilité, B est la constante définissant la borne supérieure de l'écart type vrai (voir le tableau 6.1A ou le troisième module de calcul de l'annexe D) et e_{ob} est l'écart type observé.

On pourrait constituer un tableau identique au tableau 6.2.1 à partir de l'équation 39. On en tirerait les mêmes conclusions.

La probabilité globale PG se calcule dans le présent cas de la même façon que pour la valeur pratique de non rupture.

Exemple 6.2.2 – On demande de calculer la valeur pratique de la résistance en compression uniaxiale qui assure une probabilité de 85% de rupture, 19 fois sur 20, si les résultats pour un intervalle de confiance de 95%, sont :

le nombre d'essais minimal à effectuer pour assurer un indice de précision égal ou inférieur à 1,50 : 7 essais;
la moyenne observée : 152,7 MPa;
l'écart type observé : 28,1 MPa;
le coefficient de variation : 18,4%.

L'indice de précision obtenu avec les données précédentes a déjà été calculé à l'exemple 6.2.1A et la valeur obtenue est 1,451.

Pour obtenir la valeur pratique recherchée, il faut de plus :

déterminer le paramètre B à partir du tableau 6.1 ou du troisième module de calcul de l'annexe D : 2,38;
déterminer le paramètre n_{pr} à partir du tableau B1 de l'annexe B : 1,036;
substituer les données appropriées dans l'équation 39.

$$VPR_s(85\%) = \frac{2 \times 1,451}{1,451 + 1} 152,7 + 1,036 \times 2,38 \times 28,1 = 250,1 \text{ MPa}$$

D'après l'équation 38, la probabilité globale de rupture est

$$PG = 85,0 \times 95,0 / 100,0 = 80,75\%$$

Le calcul de la valeur pratique aurait pu être fait en considérant l'indice de précision visé (1,50) plutôt qu'avec l'indice de précision obtenu (1,451). La valeur pratique qu'aurait donné l'équation 39 est alors 252,5 MPa.

6.3- Valeur pratique d'une déformabilité

Pour garantir une probabilité donnée de stabilité ou d'instabilité d'une structure rocheuse, il a été admis que les contraintes devaient être inférieures (stabilité) ou supérieure (instabilité) à une valeur déterminée statistiquement à partir des résultats d'essais effectués sur les éprouvettes d'un groupe. Le problème est différent lorsque l'ingénieur s'intéresse à la déformabilité.

Les propriétés mécaniques de déformabilité sont utilisées pour prédire les déformations des structures rocheuses et les déplacements qui en résultent. Le suivi des ouvrages et la prévision des poussées sur les soutènements sont deux exemples d'utilisation des déplacements.

Le déplacement entre deux points d'une structure rocheuse s'obtient de l'intégration des déformations qui se produisent tout le long de la droite qui va d'un point à l'autre. Si ce déplacement est divisé par la distance qui sépare les deux points considérés, on obtient alors la déformation moyenne entre les deux points. D'où il est facile de conclure que la prévision de ce déplacement aurait pu se faire directement en utilisant la déformabilité moyenne du matériau de la structure rocheuse, plutôt que les déformabilités ponctuelles.

Toutefois, en pratique, on ne dispose que d'une moyenne observée des propriétés mécaniques de déformabilité. C'est pourquoi, le présent document propose d'utiliser les bornes de la moyenne vraie comme valeur pratique. Les déplacements prédits avec les bornes inférieure et supérieure de la moyenne vraie de la déformabilité encadrent, à l'intervalle de confiance près, les déplacements qui seraient prédits avec la moyenne vraie.

En admettant la teneur du dernier paragraphe, on peut écrire à partir de l'équation 10

$$VPD_i = \frac{2}{p+1} PM_{ob} \quad (40)$$

et

$$VPD_s = \frac{2p}{p+1} PM_{ob} \quad (41)$$

où VPD_i et VPD_s sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de la valeur pratique de la propriété mécanique de déformabilité.

La probabilité que la valeur pratique de déformabilité se situe à l'intérieur de ces bornes correspond à l'intervalle de confiance qui a été recherché lorsque le nombre minimal d'éprouvettes dans le groupe a été déterminé.

Exemple 6.3 – On demande de calculer les bornes de la valeur pratique du module de Young d'une roche donnée si des essais de compression uniaxiale avec mesure des déformations sur un groupe de 5 éprouvettes ont donné une moyenne de $12,2 \times 10^6$ psi et un écart type de $0,83 \times 10^6$ psi. L'intervalle de confiance recherché est 95%.

L'équation 15 donne comme valeur du coefficient de variation observé

$$cv_{ob} = \frac{0,83}{12,2} \times 100 = 6,8\%$$

D'après l'équation 6, le nombre de degrés de liberté est 4 et selon l'équation 7, $\beta = 0,975$. Le tableau B2 de l'annexe B donne alors 2,78 comme coefficient de confiance. L'indice de précision atteint avec le groupe d'éprouvettes s'obtient de l'équation 17, soit

$$p = \frac{100\sqrt{5-1} + 2,78 \times 6,8}{100\sqrt{5-1} - 2,78 \times 6,8} = 1,209$$

Les équations 40 et 41 donnent

$$VPD_i = \frac{2}{1,209 + 1} 12,2 \times 10^6 = 11,0 \times 10^6 \text{ psi}$$

et

$$VPD_s = \frac{2 \times 1,209}{1,209 + 1} 12,2 \times 10^6 = 13,4 \times 10^6 \text{ psi}$$

La probabilité que ces bornes encadrent la valeur pratique de déformabilité est 95%.

6.4- Calcul d'une probabilité globale de rupture ou de non rupture d'une valeur donnée d'une propriété mécanique d'une roche

Il arrive parfois que l'ingénieur concepteur désire connaître la probabilité de rupture (instabilité) ou de non rupture (stabilité) ou même la probabilité globale correspondante qui caractérise une valeur donnée d'une propriété mécanique d'une roche. Il lui est possible de calculer ces probabilités s'il dispose d'au moins des renseignements suivants à propos de la propriété en cause :

la résistance moyenne observée (PM_{ob});
l'écart type observé (e_{ob});
le nombre d'éprouvettes dans le groupe (N).

La section 4.4 montre comment, à partir de ces données, il est possible d'établir l'indice de précision (p) et l'intervalle de confiance (IC) des bornes de la moyenne vraie à partir de ces renseignements. Si c'est la probabilité ou la probabilité globale de non rupture (stabilité) qui est recherchée, il faut réécrire l'équation 37 comme suit

$$n_{P_r} = \frac{\frac{2}{p+1} PM_{ob} - VPR_s(P_r)}{Be_{ob}} \quad (42)$$

Le coefficient de probabilité calculé à l'aide de l'équation 42 permet de déterminer la probabilité P_r en consultant le tableau B1 de l'annexe B. La probabilité globale s'obtient ensuite de l'équation 38.

Si c'est la probabilité ou la probabilité globale de rupture (instabilité) qui est recherchée, c'est l'équation 39 qu'il faut réécrire de manière à obtenir

$$n_{Pr} = \frac{VPR_i(P_r) - \frac{2p}{p+1} PM_{ob}}{Be_{ob}} \quad (43)$$

Le coefficient de probabilité calculé à l'aide de l'équation 43 permet de déterminer la probabilité P_r en consultant le tableau B1 de l'annexe B. La probabilité globale s'obtient ensuite de l'équation 38.

Exemple 6.4A – Soit les données suivantes :

le nombre d'essais minimal à effectuer pour assurer un indice de précision égal ou inférieur à 1,50 : 7 essais;

intervalle de confiance : 95%;

la moyenne observée : 152,7 MPa;

l'écart type observé : 28,1 MPa;

le coefficient de variation : 18,4%.

On demande calculer la probabilité globale de non rupture (stabilité) qu'assure une résistance de 30,0 MPa.

D'après l'équation 6, le nombre de degrés de liberté est 6. L'équation 7 mène à $\beta = 0,975$. Le tableau B2 de l'annexe B indique que $t_\beta = 2,45$. L'équation 17 donne

$$p = \frac{100\sqrt{7-1} + 2,45 \times 18,4}{100\sqrt{7-1} - 2,45 \times 18,4} = 1,451$$

Pour obtenir la probabilité de non rupture (stabilité), il faut de plus déterminer le paramètre B à partir du tableau 6.1 ou du troisième module de calcul de l'annexe D (2,38) et substituer les données appropriées dans l'équation 42.

$$n_{Pr} = \frac{\frac{2}{1,451+1} 152,7 - 30,0}{2,38 \times 28,1} = 1,415$$

D'après le tableau B1 de l'annexe B, $n_{Pr} = 1,415$ donne $P_r = 92,2\%$. On obtient alors de l'équation 38

$$PG = 95,0 \times 92,2 / 100,0 = 87,6\%$$

Exemple 6.4B – On demande de calculer la probabilité globale de rupture découlant des données de l'exemple 6.4A associé à une résistance de 280,0 MPa.

Étant donné que les calculs préliminaires de l'exemple 6.4A sont toujours valables, l'équation 43 mène à

$$n_{Pr} = \frac{280,0 - \frac{2 \times 1,451}{1 + 1,451} 152,7}{2,38 \times 28,1} = 1,483$$

Pour $n_{Pr} = 1,483$, le tableau B1 de l'annexe B donne $Pr = 93,1\%$. L'équation 38 conduit à

$$PG = 95,0 \times 93,1 / 100,0 = 88,4\%$$

7- Conclusion

Le présent document montre l'importance d'utiliser une approche rigoureuse pour déterminer le nombre minimal d'essais qu'il faut effectuer sur une roche donnée soumise à un même essai (nombre minimal d'éprouvettes dans un groupe) ainsi que pour établir, à partir de ces résultats d'essais, une valeur pratique assurant une probabilité *a priori* de rupture ou de non rupture pouvant servir dans les conceptions.

L'adéquation d'un algorithme d'optimisation du nombre d'éprouvettes dans un groupe a été démontrée à l'aide de simulations. Ces simulations ont aussi démontré spécifiquement que pour une roche et un type d'essai donnés, le nombre minimal d'éprouvettes dans un groupe varie d'un cas à l'autre, même si l'indice de précision visé est le même. Donc, fixer un nombre minimal d'éprouvettes dans tous les groupes et pour toutes les roches comme certains auteurs le suggèrent est irréaliste.

Les résultats des simulations ont montré que les erreurs relatives observées sur la moyenne vraie sont, dans tous les cas, inférieures aux erreurs relatives maximales découlant de l'indice de précision fixé.

Pour ce qui a trait à la procédure de calcul de valeurs pratiques des propriétés mécaniques résistantes, celles qui ont été calculées en utilisant les résultats des simulations se rapprochent de plus en plus de la moyenne observée lorsque l'indice de précision fixé diminue.

Il a aussi été démontré que la probabilité de rupture ou de non rupture calculée *a posteriori* est toujours égale ou supérieure à la probabilité choisie pour le calcul de la valeur pratique d'une propriété mécanique résistante. Cette dernière s'avère donc être une probabilité minimale. Plus l'indice de précision est élevé, plus la probabilité *a posteriori* s'éloigne de la probabilité choisie pour le calcul, mais aussi plus la valeur pratique calculée représente un faible pourcentage de la moyenne observée.

La pratique préconisée par certains auteurs de diviser la moyenne observée (ou encore la moyenne observée réduite de une ou deux fois l'écart type) par un facteur constant pour obtenir une valeur pratique conduit à une variété de probabilités *a priori* de non rupture, probabilités qui demeurent inconnues à l'utilisateur.

Références

Amin, K.E., Hartline, S.D. (1987) : Advanced ceramics. ASTM Standardization News, Vol. 15, No. 10, pp. 50-55.

ASTM (2002a) : Annual book of ASTM standards, Vol. 04.08, Soil and Rock (I). ASTM, 2002, 1672 p.

ASTM (2002b) : Annual book of ASTM standards, Vol. 04.09, Soil and Rock (II). ASTM, 2002, 1480 p.

Bernaix, J. (1967): Etude Géotechnique de la roche de Malpasset. Dunod, Paris, 215 p.

Cambou, B. (1977) : L'incertitude sur les résultats d'un problème de mécanique des sols ou des roches traité par la méthode des éléments finis. Revue Française de Géot., No. 1, pp. 55-64.

Coates, D.F., Parsons, R.C. (1966) : Experimental criteria for classification of rock substances. Int. J. Rock Mech. Min. Sci., Vol. 3, No. 3, pp. 181-189.

Gill, D.E. (1963) : Uniaxial compression as an element in a classification of rocks. M. Eng. Thesis, McGill University, 184 p.

Gill, D.E. (1977) : Notes du cours 6.502, Département de génie minéral, École Polytechnique, Montréal (non publiées).

Gill, D.E. (1985) : Notes du cours 6.502, Département de génie minéral, École Polytechnique, Montréal (non publiées).

Gray, W.M., Toews, N.A. (1967) : Analysis of accuracy in the determination of the ground stress tensor by means of borehole devices. Proc. 9th US Symp. Rock Mech., pp. 45-77.

Gray, W.M., Toews, N.A. (1973) : Analysis of variance applied to data obtained by means of a six element borehole deformation gauge for stress determination. Internal Report 73/103, Department of Mines and Resources, Canada.

Gray, W.M., Toews, N.A. (1974) : Optimisation of the design and use of a triaxial strain cell for stress determination. ASTM STP 554, pp. 116-134.

Gyenge, M. Ladany, B. (1977) : Pit Slope Manual Supplement 3-5 – Sampling and Specimen Preparation. CANMET, Canmet Report 77-29, 30 p.

Herget, G. (1977) : Pit Slope Manual Chapter 2 – Structural Geology. CANMET, Canmet Report 77.41, 123 p.

Hoskins, J.R., Horino, F.G. (1968) : Effect of end conditions on determining compressive strength of rock samples. US Bur. Mines, Rep.Inv. 7171, 32 p.

Hsu, S.C., Nelson, P.P. (1999) : Use of a stochastic approach on site investigation and material characterization. Proc. 37th US Symp. Rock Mech., Vol. 2, pp. 8091-816.

Journel, A.G., Huijbregts, Ch.J. (1978) : Mining Geostatistics. Academic Press, 600 p.

Lapointe, P.R. (1981) : Improved numerical modelling of rock masses through geostatistical characterization. Proc. 22nd US Symp. on Rock Mech., pp. 416-421.

Murard, R. (1960) : Probabilités et statistiques. Document S.I.M. a, Numéro spécial, Revue de l'Industrie minière, 122 p.

Neugebauer, G.H. (1978) : Designing with limited data. Machine Design, Vol. 50, No. 12, pp.76-80.

Ouellet, J., Gill, D.E. (1987): Application des méthodes géostatistiques à l'investigation des massifs rocheux : Une nouvelle approche. Proc. 5th Int. Conf. Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engng., Vol. 2., pp. 686-693.

Park, W.J. (1979): On estimation of sample size for testing composite materials. J. Comp. Mat., Vol. 13, pp. 219-224.

Petrorius, J.P.G. (1980): The estimation of the experimental and basic components of the observed variance of rock strength. Rock Mech. and Rock Engng., Vol. 13, pp. 119-130.

Pincus, H.J. (1989) : Uncertainty in rock-property measurements. ASTM Standardization News, Vol. 17, No. 5, pp. 26-28.

Pinto da Cunha, A. (1993a): Scale effects in engineering – An overview of the Loen Workshop and other recent paper concerning scale effect. Proc. 2nd Workshop on Scale Effect in Rock Masses, Balkema, pp. 3-14.

Pinto da Cunha, A. (1993b): Scale effects in rock masses – A general report on the paper submitted to Lisbon Workshop. Proc. 2nd Workshop on Scale Effect in Rock Masses, Balkema, pp. 27-35.

Protodyakonov, M.M. (1960): Méthodes nouvelles de détermination des propriétés mécaniques des terrains miniers. C.R. Conf. Int. Pressions de Terrains, Paris, pp. 172-181.

Protodyakonov, M.M. (1969): Method of determining the strength of rock under uniaxial compression. Mech. Prop. of Rocks, Acad. Sc. of USSR, Trans. by Israel Prog. Scientific Trans., pp. 1-8.

Pumjan, S., Young, D.S., (1999): Geotechnical site characterisation in localized probabilistic terms. Proc. 37th US Symp. Rock Mech., Vol. 2, pp. 801-808.

Rétháti, L. (1988): Probabilistic Solutions in Geotechnics. Elsevier, 451 p.

Spiegel, M.R. (1961) : Theory and Problems of Statistics. Schaum's Outline Serie, McGraw-Hill, 359 p.

Vutukuri, U.S., Lama, R.D., Saluja, S.S. (1974): Handbook on Mechanical Properties of Rocks: Volume I – Testing Techniques and Results. Trans Tech. Pub., 280 p.

Walker, J.R., Martin, C.D., Dzik, E.J. (1990): Confidence interval for in situ stress measurements. Int. J. Rock Mec. Min. Sci., Vol 27, No. 2,. Pp. 139-141.

Yamaguchi, U. (1970): The number of test-pieces required to determine the strength of rock. Int. J. Rock Mech. Min. Sci., Vol. 7, No. 2, pp. 209-227.

Yegulalp, T.M., Wane, M.T. (1968) : Application of extreme valus statistics to test data. Trans. Soc. Min. Eng., AIME, Vol. 241, pp. 372-376.

ANNEXE A

Normes d'essais en laboratoire publiées

A.1- American Society for Testing and Materials (ASTM)

Cette Société a publié ses premières normes portant sur les propriétés des roches vers 1970. Elle fait depuis des additions et des modifications presque à chaque année. Les normes publiées 2002 sont présentées ci-après.

- Annual book of ASTM standards, Vol. 04.08, Soil and Rock (I). ASTM, 2002, 1672 p.

D653-01: Terminology relating to soil, rock, and contained fluids.

D2113-99: Standard practice for rock core drilling of rock for site investigation.

D2216-99: Standard test method for laboratory determination of water (moisture) content of soil and rock by mass.

D2664-95a: Standard test method for triaxial compressive strength of undrained core specimens without pore pressure measurements.

D2845-00: Standard test method for laboratory determination of pulse velocities and ultrasonic elastic constants of rocks.

D2936-95(2000): Standard test method for direct tensile strength of intact rock core specimens.

D2938-95: Standard test method for unconfined compressive strength of intact rock core specimens.

D3148-96: Standard test method for elastic moduli of intact rock core specimens in uniaxial compression.

D3740-01: Standard practice for minimum requirements for agencies engaged in the testing and/or inspection of soil and rock as used in engineering design and construction.

D3967-95a(2001): Standard test method for splitting tensile strength of intact rock core specimens.

D4341-93(1998): Standard test method for creep of cylindrical hard rock core specimens in uniaxial compression.

D4404-84(1998): Standard test method for determination of pore volume and pore volume distribution of soil and rock by mercury intrusion porosimeter.

D4405-93(1998): Standard test method for creep of cylindrical soft rock core specimens in uniaxial compression.

D4406-93(1998): Standard test method for creep of cylindrical soft rock core specimens in triaxial compression.

D4525-90(2001): Standard test method for permeability of rocks by flowing air.

D4535-85(2000): Standard test method for measurement of thermal expansion of rock using a dilatometer.

D4543-01: Standard practice for preparing rock core specimens and determining dimensional and shape tolerances.

D4611-86(2000): Standard test method for specific heat of rock and soil.

D4612-86(1996): Standard practice for thermal diffusivity of rocks.

D4644-87(1998): Test method for slake durability of shales and similar weak rocks.

D4753-95: Standard specification for evaluating, selecting, and specifying balances and scales for use in soil, rock and construction materials testing.

D4992-94(2001): Standard practice for evaluation of rock to be used for erosion control.

D5079-90(1996): Standard practice for preserving and transporting rock core sample.

D5121-90(2001): Practice for preparation of rock slabs for durability testing.

D5312-92(1997): Standard test method for evaluation of durability of rock for erosion control under freezing and thawing conditions.

D5313-92(1997): Standard test method for evaluation of durability of rock for erosion control under wetting and drying conditions.

D5334-00: Standard test methods for determination of thermal conductivity of soil and soft rock by thermal needle probe procedure.

D5335-99: Standard test method for linear coefficient of thermal expansion of rock using bonded electric resistance strain gages.

D5407-95(2000): Standard test method for elastic moduli of undrained intact rock core specimens in triaxial compression without pore pressure measurement.

D5607-95: Standard test method for performing laboratory direct shear strength tests of rock specimens under constant normal force.

D5731-95: Standard test method for determination of the point load strength index of rock.

- Annual book of ASTM standards, Vol. 04.09, Soil and Rock (II). ASTM, 2002, 1480 p.

D5873-95: Standard test method for determination of rock hardness by rebound method.

D6453-99: Standard guide for format of computerized exchange of soil and rock test data.

A2- Société internationale de mécanique des roches (S.I.M.R. – ISRM)

Les normes dont le titre est suivi d'un astérisque sont également publiées dans "Rock Characterization Testing and Monitoring, E.T. Brown, editor, Pergamon Press, 1981, 211 p."

- ISRM, ed. (1974): Suggested methods for determining shear strength. Document No. 1, Committee on field testing, Commission on Standardization of Laboratory and Field Tests, pp.13-17.

Part 2 – Suggested method for laboratory determination of direct shear strength*

- Hallbauer, D.K., Nieble, C., Bérard, J., Rummel, F., Houghton, A., Broch, E., Szlavin, J. (1978): Suggested method for petrographic description of rocks. Int. J. Rock Mech. Min. Sci., Vol. 15, No. 2, pp. 41-45.

Suggested method for petrographic description of rocks*

- Rummel, F., Van Heerden, W.L. (1978): Suggested methods for determining sound velocity. Int. J. Rock Mech. Min. Sci., Vol. 15, No. 2, pp. 53-60.

Suggested methods for determining sound velocity*

- Atkinson, R.H., Bamford, W.E., Broch, E., Deere, D.U., Franklin, J.A., Nieble, C., Rummel, F., Tarkoy, P.J., Van Duyse, H. (1978): Suggested methods for determining hardness and abrasiveness of rocks. Int. J. Rock Mech. Min. Sci., Vol. 15, No. 3, pp. 89-97.

Part 3 – Suggested method for determination of the Schmidt rebound hardness*

Part 4 – Suggested methods for determination of the Shore scleroscope hardness*

- Bieniawski, Z.T., Hawkes, I. (1978): Suggested methods for determining tensile strength of rock materials. Int. J. Rock Mech. Min. Sci., Vol. 15, No. 3, pp. 99-103.

Part 1 – Suggested method for determining direct tensile strength*

Part 2 – Suggested method for determining indirect tensile strength by the brazil test*

- Bieniawski, Z.T., Bernede, M.J. (coordinators) (1979): Suggested methods for determining the uniaxial compressive strength and deformability of rock materials. Int. J. Rock Mech. Min. Sci., Vol. 16, No. 2, pp. 135-140.

Part 1 – Suggested method for determining the uniaxial compressive strength of rock materials*

Part 2 – Suggested method for determining the deformability of rock material in uniaxial compression*

- Franklin, J.A. (coordinator) (1979): Suggested methods for determining water content, porosity, density, absorption and related properties and swelling and slake-durability index properties. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, Vol. 16, No. 2, pp. 141-156.

Part 2 – Suggested methods for determining swelling and slake-durability index properties*

- Kovari, K. (Coordinator) (1983): Suggested methods for determining the strength of rock materials in triaxial compression (revised version). *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, Vol. 20, No. 6, pp. 283-286.

Suggested methods for determining the strength of rock materials in triaxial compression (revised version)

- Franklin, J.A. (coordinator) (1985): Suggested method for determining point load strength. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, Vol. 22, No. 2, pp. 51-60.

Suggested method for determining point load strength

- Brook, N. (1985): The equivalent core diameter method of size and shape correction in point load testing. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, Vol. 22, No. 2, pp. 61-70.

The equivalent core diameter method of size and shape correction in point load testing.

- Ouchterlony, F. (coordinator) (1988): Suggested methods for determining the fracture toughness of rocks. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, Vol. 25, No. 2, pp. 71-96.

Part 1 – Suggested method for determining fracture toughness using chevron bend specimens

Part 2 – Suggested method for determining fracture toughness using short rod specimens

- Fowell, R.J. (coordinator) (1995): Suggested method for determining mode I fracture toughness using cracked chevron notched Brazilian disk (CCNBD) specimens. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, Vol. 32, No. 1, pp. 57-64.

Suggested method for determining mode I fracture toughness using cracked chevron notched Brazilian disk (CCNBD) specimens.

A3- Bureau international de mécanique des roches (B.I.M.R. – IBRM)

- Protodyakonov, M.M. (1969) : Method of determining the strength of rocks under uniaxial compression. Mechanical Properties of Rocks, Acad. Sci. of USSR, (Transl. Israel Prog. Sci. Transl.), pp.1-8.

International standard on the determination of rock strength under uniaxial compression

- Protodyakonov, M.M. (1969) : Methods of determining the shearing strength of rocks. Mechanical Properties of Rocks, Acad. Sci. of USSR, (Transl. Israel Prog. Sci. Transl.), pp.15-27.

Standard method of determining the shearing strength of rocks

A4- United State Bureau of Mines (USBM)

Les premières normes publiées par l'organisme étaient contenues dans l'ouvrage suivant.

- Obert, L., Windes, S.L., Duvall, W.I (1946) : Standardized tests for determining the physical properties of mine rocks. USBM, Rep. Inv. 3891, 67 p.

Ce dernier a été remplacé par le document dont le titre suit:

- Lewis, W.E., Tandanand, S., editors (1974): Bureau of Mines test procedures for rocks. USBM, Inf. Circ. 8628, 223 p.

Specific weight

Void-to-bulk volume ratio

Volume measurements

Elastic behaviour under uniaxial compression

Elastic behaviour under uniaxial tension

Elastic behaviour in bending

Elastic response to ultrasonic pulse

Elastic response to induced vibration

Elastic response to induced vibration (damping capacity)

Elastic response to induced vibration at elevated temperature

Load-resisting ability under uniaxial compression

Load-resisting ability under uniaxial tension

Load-resisting ability under diametrical loading

Load-resisting ability in bending

Load-resisting ability in bending at elevated temperature

A5- Canadian centre for mineral and energy technology (CANMET)

Les premières normes publiées par cet organisme se trouvent dans:

Hardy, H.R. Jr (1959): Standardized procedures for the determination of the physical properties of mine rock under short-period uniaxial compression. Mines Branch, Dept. of Mines and Tech. Surveys, Canada (maintenant identifié CANMET), Tech. Bull. TB8, 108 p.

Depuis, CANMET a publié les normes qui suivent.

- Gyenge, M., Ladanyi, B. (1977): Pit Slope Manual Supplement 3-5 – Sampling and specimen preparation. CANMET, Canmet Report 77-29, 30 p.

Sampling procedure

Specimen preparation procedure

- Gyenge, M. (1977): Pit Slope Manual Supplement 3-1 – Laboratory Classification Tests. CANMET, Canmet Report 77-25, 31 p.

Determination of water content

Determination of porosity/density

Determination of swelling pressure index

Determination of swelling strain index

Determination of slake-durability index

Determination of uniaxial compressive strength

Determination of point load strength index

Determination of tensile strength (par l'essai brésilien)

- Gyenge, M., Herget, G. (1977): Pit Slope Manual Supplement 3-2 – Laboratory tests for design parameters. CANMET, Canmet Report 77-26, 74 p.

Determination of elastic modulus

Determination of Poisson's ratio

Determination of ultrasonic elastic constants

Determination of triaxial compression strength of the rock substance

Determination of residual angle of friction

Determination of strength properties of rock discontinuities by direct shear test

Determination of strength properties of rock discontinuities by triaxial test

Determination of crushed rock material by triaxial test

Determination of time-dependent properties of the rock substance

ANNEXE B

Tableaux des fonctions de densité de probabilités normales de Student et du chi carré

Table de distribution de Student

	Pr	0.0050	0.0125	0.0250	0.0500	0.1000
Nb. deg. lib.						
1		127.3211	50.9224	25.4519	12.7062	6.3137
2		14.0892	8.8602	6.2054	4.3027	2.9200
3		7.4532	5.3919	4.1765	3.1824	2.3534
4		5.5975	4.3146	3.4954	2.7765	2.1318
5		4.7733	3.8100	3.1634	2.5706	2.0150
6		4.3168	3.5212	2.9687	2.4469	1.9432
7		4.0294	3.3353	2.8412	2.3646	1.8946
8		3.8325	3.2060	2.7515	2.3060	1.8595
9		3.6896	3.1109	2.6850	2.2622	1.8331
10		3.5814	3.0382	2.6338	2.2281	1.8125
11		3.4966	2.9809	2.5931	2.2010	1.7959
12		3.4284	2.9345	2.5600	2.1788	1.7823
13		3.3725	2.8962	2.5326	2.1604	1.7709
14		3.3257	2.8640	2.5096	2.1448	1.7613
15		3.2860	2.8366	2.4899	2.1315	1.7531
16		3.2520	2.8131	2.4729	2.1199	1.7459
17		3.2224	2.7925	2.4581	2.1098	1.7396
18		3.1966	2.7745	2.4450	2.1009	1.7341
19		3.1737	2.7586	2.4334	2.0930	1.7291
20		3.1534	2.7444	2.4231	2.0860	1.7247
21		3.1352	2.7316	2.4138	2.0796	1.7207
22		3.1188	2.7201	2.4055	2.0739	1.7171
23		3.1040	2.7097	2.3979	2.0687	1.7139
24		3.0905	2.7002	2.3910	2.0639	1.7109
25		3.0782	2.6916	2.3846	2.0595	1.7081
26		3.0669	2.6836	2.3788	2.0555	1.7056
27		3.0565	2.6763	2.3734	2.0518	1.7033
28		3.0470	2.6695	2.3685	2.0484	1.7011
29		3.0380	2.6632	2.3638	2.0452	1.6991
30		3.0298	2.6574	2.3596	2.0423	1.6973
40		2.9712	2.6157	2.3289	2.0211	1.6839
60		2.9146	2.5752	2.2990	2.0003	1.6706
120		2.8599	2.5359	2.2699	1.9799	1.6576

Table de distribution du Chi²

	Pr	0.0050	0.0125	0.0250	0.0500	0.1000
Nb. deg. lib.						
1		7.8794	6.2385	5.0239	3.8415	2.7055
2		10.5965	8.7641	7.3778	5.9915	4.6052
3		12.8381	10.8613	9.3484	7.8147	6.2514
4		14.8602	12.7619	11.1433	9.4877	7.7794
5		16.7496	14.5439	12.8325	11.0705	9.2363
6		18.5475	16.2445	14.4494	12.5916	10.6446
7		20.2777	17.8850	16.0128	14.0671	12.0170
8		21.9549	19.4785	17.5345	15.5073	13.3616
9		23.5893	21.0341	19.0228	16.9190	14.6837
10		25.1881	22.5582	20.4832	18.3070	15.9872
11		26.7569	24.0558	21.9200	19.6752	17.2750
12		28.2997	25.5304	23.3367	21.0261	18.5493
13		29.8193	26.9850	24.7356	22.3620	19.8119
14		31.3194	28.4219	26.1189	23.6848	21.0641
15		32.8015	29.8430	27.4884	24.9958	22.3071
16		34.2671	31.2500	28.8453	26.2962	23.5418
17		35.7184	32.6442	30.1910	27.5871	24.7690
18		37.1564	34.0267	31.5264	28.8693	25.9894
19		38.5821	35.3986	32.8523	30.1435	27.2036
20		39.9969	36.7605	34.1696	31.4104	28.4120
21		41.4009	38.1133	35.4789	32.6706	29.6151
22		42.7957	39.4577	36.7807	33.9245	30.8133
23		44.1814	40.7943	38.0756	35.1725	32.0069
24		45.5584	42.1235	39.3641	36.4150	33.1962
25		46.9280	43.4458	40.6465	37.6525	34.3816
26		48.2898	44.7615	41.9231	38.8851	35.5632
27		49.6450	46.0712	43.1945	40.1133	36.7412
28		50.9936	47.3752	44.4608	41.3372	37.9159
29		52.3355	48.6737	45.7223	42.5569	39.0875
30		53.6719	49.9671	46.9792	43.7730	40.2560
40		66.7660	62.6647	59.3417	55.7585	51.8050
60		91.9518	87.1839	83.2977	79.0820	74.3970
120		163.6485	157.3707	152.2113	146.5673	140.2326

ANNEXE C

Tableaux donnant les valeurs de l'indice de précision en fonction du nombre d'éprouvettes dans le groupe et du coefficient de variation

Tableau C1A – Relation entre le nombre d'éprouvettes dans le groupe, l'indice de précision et le coefficient de variation (de 1 à 9%) pour un intervalle de confiance de 95%.

N	Valeurs de l'indice de précision p pour différents coefficients de variation								
	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%
3	1,07	1,13	1,21	1,28	1,36	1,45	1,55	1,65	1,76
4	1,04	1,08	1,12	1,16	1,21	1,25	1,30	1,35	1,40
5	1,03	1,06	1,09	1,12	1,15	1,19	1,22	1,26	1,29
6	1,03	1,05	1,08	1,10	1,13	1,15	1,18	1,21	1,24
7	1,03	1,05	1,07	1,09	1,11	1,13	1,16	1,18	1,20
8	1,02	1,04	1,06	1,08	1,10	1,12	1,14	1,16	1,18
9	1,02	1,04	1,06	1,07	1,09	1,11	1,13	1,14	1,16
10	1,02	1,04	1,05	1,07	1,08	1,10	1,12	1,13	1,15
11	1,02	1,03	1,05	1,06	1,08	1,09	1,11	1,12	1,14
12	1,02	1,03	1,05	1,06	1,07	1,09	1,10	1,12	1,13
13	1,02	1,03	1,04	1,06	1,07	1,08	1,10	1,11	1,13
14	1,02	1,03	1,04	1,05	1,07	1,08	1,09	1,11	1,12
15	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,08	1,09	1,10	1,11
16	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,09	1,10	1,11
17	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,09	1,11
18	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,09	1,10
19	1,01	1,02	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,09	1,10
20	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,10
21	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,09
22	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,09
23	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,09
24	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,09
25	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,07	1,08
26	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,06	1,07	1,08
27	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,05	1,06	1,07	1,08
28	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,05	1,06	1,07	1,08
29	1,01	1,02	1,03	1,04	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08
30	1,01	1,02	1,03	1,04	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08

Tableau C1B – Relation entre le nombre d'éprouvettes dans le groupe, l'indice de précision et le coefficient de variation (de 10 à 18%) pour un intervalle de confiance de 95%.

N	Valeurs de l'indice de précision p pour différents coefficients de variation								
	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%
3	1,88	2,01	2,15	2,31	2,49	2,68	2,90	3,14	3,42
4	1,45	1,51	1,57	1,63	1,70	1,77	1,84	1,91	1,99
5	1,33	1,37	1,41	1,45	1,49	1,53	1,58	1,62	1,67
6	1,26	1,29	1,32	1,36	1,39	1,42	1,46	1,49	1,53
7	1,23	1,25	1,28	1,30	1,33	1,36	1,39	1,41	1,44
8	1,20	1,22	1,24	1,27	1,29	1,31	1,34	1,36	1,39
9	1,18	1,20	1,22	1,24	1,26	1,28	1,31	1,33	1,35
10	1,17	1,19	1,20	1,22	1,24	1,26	1,28	1,30	1,32
11	1,16	1,17	1,19	1,21	1,22	1,24	1,26	1,28	1,30
12	1,15	1,16	1,18	1,19	1,21	1,23	1,24	1,26	1,28
13	1,14	1,15	1,17	1,18	1,20	1,21	1,23	1,24	1,26
14	1,13	1,15	1,16	1,17	1,19	1,20	1,22	1,23	1,25
15	1,13	1,14	1,15	1,17	1,18	1,19	1,21	1,22	1,23
16	1,12	1,13	1,15	1,16	1,17	1,18	1,20	1,21	1,22
17	1,12	1,13	1,14	1,15	1,17	1,18	1,19	1,20	1,22
18	1,11	1,12	1,14	1,15	1,16	1,17	1,18	1,20	1,21
19	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15	1,17	1,18	1,19	1,20
20	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19
21	1,10	1,11	1,12	1,13	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19
22	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15	1,16	1,17	1,18
23	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15	1,16	1,17	1,18
24	1,09	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15	1,16	1,17
25	1,09	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15	1,16	1,17
26	1,09	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14	1,14	1,16	1,17
27	1,09	1,10	1,11	1,12	1,12	1,13	1,14	1,15	1,16
28	1,09	1,10	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15	1,16
29	1,09	1,09	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15	1,15
30	1,08	1,09	1,10	1,11	1,12	1,13	1,13	1,14	1,15

Tableau C1C – Relation entre le nombre d'éprouvettes dans le groupe, l'indice de précision et le coefficient de variation (de 19 à 27%) pour un intervalle de confiance de 95%.

N	Valeurs de l'indice de précision p pour différents coefficients de variation								
	19%	20%	21%	22%	23%	24%	25%	26%	27%
3	3,74	4,11	4,54	5,05	5,66	6,41	7,34	8,55	10,18
4	2,08	2,17	2,26	2,36	2,47	2,58	2,70	2,83	2,97
5	1,72	1,78	1,83	1,89	1,94	2,01	2,07	2,14	2,21
6	1,56	1,60	1,64	1,68	1,72	1,77	1,81	1,86	1,90
7	1,47	1,51	1,54	1,57	1,60	1,64	1,67	1,71	1,74
8	1,41	1,44	1,47	1,49	1,52	1,55	1,58	1,61	1,64
9	1,37	1,40	1,42	1,44	1,47	1,49	1,52	1,54	1,57
10	1,34	1,36	1,38	1,40	1,42	1,45	1,47	1,49	1,52
11	1,31	1,33	1,35	1,37	1,39	1,41	1,43	1,45	1,48
12	1,29	1,31	1,33	1,35	1,37	1,38	1,40	1,42	1,44
13	1,28	1,29	1,31	1,33	1,34	1,36	1,38	1,40	1,41
14	1,26	1,18	1,29	1,31	1,32	1,34	1,36	1,37	1,39
15	1,25	1,26	1,28	1,29	1,31	1,32	1,34	1,35	1,37
16	1,24	1,25	1,27	1,28	1,29	1,31	1,32	1,34	1,35
17	1,23	1,24	1,26	1,27	1,28	1,30	1,31	1,32	1,34
18	1,22	1,23	1,25	1,26	1,27	1,29	1,30	1,31	1,33
19	1,21	1,22	1,24	1,25	1,26	1,27	1,29	1,30	1,31
20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25	1,27	1,28	1,29	1,30
21	1,20	1,21	1,22	1,23	1,25	1,26	1,27	1,28	1,29
22	1,19	1,20	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27	1,28
23	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,28
24	1,18	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,25	1,26	1,27
25	1,18	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26
26	1,17	1,18	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,26
27	1,17	1,18	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25
28	1,17	1,18	1,19	1,20	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24
29	1,16	1,17	1,18	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24
30	1,16	1,17	1,18	1,19	1,20	1,21	1,21	1,22	1,23

Tableau C1D – Relation entre le nombre d'éprouvettes dans le groupe, l'indice de précision et le coefficient de variation (de 28 à 36%) pour un intervalle de confiance de 95%.

N	Valeurs de l'indice de précision p pour différents coefficients de variation								
	28%	29%	30%	31%	32%	33%	34%	35%	36%
3	12,46	15,92	21,78	33,83	73,02	-	-	-	-
4	3,12	3,28	3,46	3,65	3,85	4,08	4,33	4,60	4,90
5	2,28	2,36	2,44	2,52	2,61	2,70	2,80	2,90	3,01
6	1,95	2,00	2,06	2,11	2,17	2,23	2,29	2,35	2,42
7	1,78	1,82	1,86	1,90	1,95	1,99	2,04	2,08	2,13
8	1,67	1,70	1,74	1,77	1,80	1,84	1,88	1,91	1,95
9	1,60	1,63	1,65	1,68	1,71	1,74	1,77	1,81	1,84
10	1,54	1,56	1,59	1,61	1,64	1,67	1,69	1,72	1,75
11	1,50	1,52	1,54	1,56	1,59	1,61	1,64	1,66	1,69
12	1,46	1,48	1,50	1,52	1,54	1,57	1,59	1,61	1,63
13	1,43	1,45	1,47	1,49	1,51	1,53	1,55	1,57	1,59
14	1,41	1,43	1,44	1,46	1,48	1,50	1,52	1,54	1,55
15	1,39	1,40	1,42	1,44	1,45	1,47	1,49	1,51	1,52
16	1,37	1,38	1,40	1,42	1,43	1,45	1,46	1,48	1,50
17	1,35	1,37	1,38	1,40	1,41	1,43	1,44	1,46	1,48
18	1,34	1,35	1,37	1,38	1,40	1,41	1,43	1,44	1,46
19	1,33	1,34	1,35	1,37	1,38	1,40	1,41	1,42	1,44
20	1,32	1,33	1,34	1,35	1,37	1,38	1,39	1,41	1,42
21	1,31	1,32	1,33	1,34	1,36	1,37	1,38	1,40	1,41
22	1,30	1,31	1,32	1,33	1,34	1,36	1,37	1,38	1,40
23	1,29	1,30	1,31	1,32	1,33	1,35	1,36	1,37	1,38
24	1,28	1,29	1,30	1,31	1,32	1,34	1,35	1,36	1,37
25	1,27	1,28	1,29	1,30	1,32	1,33	1,34	1,35	1,36
26	1,27	1,28	1,29	1,30	1,31	1,32	1,33	1,34	1,35
27	1,26	1,27	1,28	1,29	1,30	1,31	1,32	1,33	1,34
28	1,25	1,26	1,27	1,28	1,29	1,30	1,31	1,33	1,34
29	1,25	1,26	1,27	1,28	1,29	1,30	1,31	1,32	1,33
30	1,24	1,25	1,26	1,27	1,28	1,29	1,30	1,31	1,32

Tableau C2A – Relation entre le nombre d'éprouvettes dans le groupe, l'indice de précision et le coefficient de variation (de 1 à 9%) pour un intervalle de confiance de 98%.

N	Valeurs de l'indice de précision p pour différents coefficients de variation								
	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%
3	1,11	1,22	1,35	1,50	1,66	1,84	2,06	2,30	2,60
4	1,06	1,12	1,18	1,24	1,31	1,38	1,45	1,54	1,62
5	1,04	1,08	1,12	1,17	1,21	1,26	1,31	1,36	1,41
6	1,04	1,07	1,10	1,13	1,17	1,20	1,24	1,28	1,32
7	1,03	1,06	1,08	1,11	1,14	1,17	1,20	1,23	1,27
8	1,03	1,05	1,08	1,10	1,13	1,15	1,18	1,20	1,23
9	1,03	1,05	1,07	1,09	1,11	1,14	1,16	1,18	1,21
10	1,02	1,04	1,06	1,08	1,10	1,12	1,15	1,17	1,19
11	1,02	1,04	1,06	1,08	1,10	1,12	1,14	1,16	1,18
12	1,02	1,04	1,06	1,07	1,09	1,11	1,13	1,15	1,16
13	1,02	1,04	1,05	1,07	1,09	1,10	1,12	1,14	1,15
14	1,02	1,03	1,05	1,07	1,08	1,10	1,11	1,13	1,15
15	1,02	1,03	1,05	1,06	1,08	1,09	1,11	1,12	1,14
16	1,02	1,03	1,05	1,06	1,07	1,09	1,10	1,12	1,13
17	1,02	1,03	1,04	1,06	1,07	1,09	1,10	1,11	1,13
18	1,02	1,03	1,04	1,06	1,07	1,08	1,10	1,11	1,12
19	1,02	1,03	1,04	1,05	1,07	1,08	1,09	1,11	1,12
20	1,02	1,03	1,04	1,05	1,07	1,08	1,09	1,10	1,12
21	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,08	1,09	1,10	1,11
22	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,09	1,10	1,11
23	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,09	1,09	1,11
24	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,09	1,10
25	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,09	1,10
26	1,01	1,03	1,04	1,05	1,05	1,07	1,08	1,09	1,10
27	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,07	1,08	1,09	1,10
28	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,09
29	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,09
30	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,09

Tableau C2B – Relation entre le nombre d'éprouvettes dans le groupe, l'indice de précision et le coefficient de variation (de 10 à 18%) pour un intervalle de confiance de 98%.

N	Valeurs de l'indice de précision p pour différents coefficients de variation								
	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%
3	2,94	3,37	3,89	4,56	5,44	6,64	8,41	-	-
4	1,72	1,82	1,92	2,04	2,16	2,30	2,45	2,61	2,79
5	1,47	1,52	1,59	1,65	1,72	1,79	1,86	1,94	2,02
6	1,36	1,40	1,44	1,49	1,54	1,59	1,64	1,69	1,75
7	1,30	1,33	1,37	1,40	1,44	1,48	1,52	1,56	1,60
8	1,26	1,29	1,32	1,35	1,38	1,41	1,45	1,48	1,52
9	1,23	1,26	1,29	1,31	1,34	1,37	1,40	1,43	1,46
10	1,21	1,24	1,26	1,28	1,31	1,33	1,36	1,39	1,41
11	1,20	1,22	1,24	1,26	1,28	1,31	1,33	1,35	1,38
12	1,18	1,20	1,22	1,24	1,26	1,29	1,31	1,33	1,35
13	1,17	1,19	1,21	1,23	1,25	1,27	1,29	1,31	1,33
14	1,16	1,18	1,20	1,22	1,23	1,25	1,27	1,29	1,31
15	1,16	1,17	1,19	1,21	1,22	1,24	1,26	1,28	1,29
16	1,15	1,16	1,18	1,20	1,21	1,23	1,25	1,26	1,28
17	1,14	1,16	1,17	1,19	1,20	1,22	1,24	1,25	1,27
18	1,14	1,15	1,17	1,18	1,20	1,21	1,23	1,24	1,26
19	1,13	1,15	1,16	1,17	1,19	1,20	1,22	1,23	1,25
20	1,13	1,14	1,16	1,17	1,18	1,20	1,21	1,22	1,24
21	1,12	1,14	1,15	1,16	1,18	1,19	1,20	1,22	1,23
22	1,12	1,13	1,15	1,16	1,17	1,18	1,20	1,21	1,22
23	1,12	1,13	1,14	1,15	1,17	1,18	1,19	1,21	1,22
24	1,11	1,13	1,14	1,15	1,16	1,17	1,19	1,20	1,21
25	1,11	1,12	1,13	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19	1,21
26	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15	1,17	1,18	1,19	1,20
27	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15	1,16	1,17	1,19	1,20
28	1,10	1,12	1,13	1,14	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19
29	1,10	1,11	1,12	1,14	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19
30	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15	1,16	1,17	1,18

Tableau C2C – Relation entre le nombre d'éprouvettes dans le groupe, l'indice de précision et le coefficient de variation (de 19 à 27%) pour un intervalle de confiance de 98%.

N	Valeurs de l'indice de précision p pour différents coefficients de variation								
	19%	20%	21%	22%	23%	24%	25%	26%	27%
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	2,99	3,21	3,45	3,73	4,04	4,40	4,81	5,28	5,85
5	2,11	2,20	2,30	2,41	2,52	2,64	2,77	2,91	3,06
6	1,80	1,86	1,93	1,99	2,06	2,13	2,21	2,29	2,37
7	1,65	1,69	1,74	1,79	1,84	1,89	1,95	2,00	2,06
8	1,55	1,59	1,63	1,67	1,71	1,75	1,80	1,84	1,89
9	1,49	1,52	1,55	1,59	1,62	1,66	1,69	1,73	1,77
10	1,44	1,47	1,50	1,53	1,56	1,59	1,62	1,65	1,69
11	1,40	1,43	1,45	1,48	1,51	1,53	1,56	1,59	1,62
12	1,37	1,40	1,42	1,45	1,47	1,50	1,52	1,55	1,57
13	1,35	1,37	1,39	1,42	1,44	1,46	1,48	1,51	1,53
14	1,33	1,35	1,37	1,39	1,41	1,43	1,46	1,48	1,50
15	1,31	1,33	1,35	1,37	1,39	1,41	1,43	1,45	1,47
16	1,30	1,32	1,33	1,35	1,37	1,39	1,41	1,43	1,45
17	1,28	1,30	1,32	1,34	1,35	1,37	1,39	1,41	1,43
18	1,27	1,29	1,31	1,32	1,34	1,36	1,37	1,39	1,41
19	1,26	1,28	1,29	1,31	1,33	1,34	1,36	1,38	1,39
20	1,25	1,27	1,28	1,30	1,31	1,33	1,35	1,36	1,38
21	1,25	1,26	1,27	1,29	1,30	1,32	1,33	1,35	1,37
22	1,24	1,25	1,27	1,28	1,29	1,31	1,32	1,34	1,35
23	1,23	1,24	1,26	1,27	1,29	1,30	1,31	1,33	1,34
24	1,22	1,24	1,25	1,26	1,28	1,29	1,30	1,32	1,33
25	1,22	1,23	1,24	1,26	1,27	1,28	1,30	1,31	1,32
26	1,21	1,23	1,24	1,25	1,26	1,28	1,29	1,30	1,31
27	1,21	1,22	1,23	1,24	1,26	1,27	1,28	1,29	1,31
28	1,20	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27	1,29	1,30
29	1,20	1,21	1,22	1,24	1,25	1,26	1,27	1,28	1,30
30	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27	1,29

Tableau C2D – Relation entre le nombre d'éprouvettes dans le groupe, l'indice de précision et le coefficient de variation (de 28 à 36%) pour un intervalle de confiance de 98%.

N	Valeurs de l'indice de précision p pour différents coefficients de variation								
	28%	29%	30%	31%	32%	33%	34%	35%	36%
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	6,52	7,34	8,37	9,68	-	-	-	-	-
5	3,22	3,39	3,58	3,78	4,00	4,25	4,52	4,82	5,16
6	2,46	2,55	2,65	2,75	2,86	2,97	3,09	3,22	3,36
7	2,12	2,19	2,25	2,32	2,40	2,47	2,55	2,63	2,72
8	1,94	1,98	2,04	2,09	2,14	2,20	2,26	2,32	2,38
9	1,81	1,85	1,89	1,94	1,98	2,03	2,08	2,12	2,18
10	1,72	1,75	1,79	1,83	1,87	1,90	1,94	1,99	2,03
11	1,65	1,68	1,71	1,75	1,78	1,81	1,85	1,88	1,92
12	1,60	1,63	1,66	1,69	1,72	1,75	1,78	1,81	1,84
13	1,56	1,58	1,61	1,64	1,66	1,69	1,72	1,75	1,78
14	1,52	1,55	1,57	1,60	1,62	1,65	1,67	1,70	1,72
15	1,49	1,51	1,54	1,56	1,58	1,61	1,63	1,65	1,68
16	1,47	1,49	1,51	1,53	1,55	1,57	1,60	1,62	1,64
17	1,45	1,47	1,48	1,50	1,53	1,55	1,57	1,59	1,61
18	1,43	1,45	1,47	1,48	1,50	1,52	1,54	1,56	1,58
19	1,41	1,43	1,44	1,46	1,48	1,50	1,52	1,54	1,56
20	1,39	1,41	1,43	1,45	1,46	1,48	1,50	1,52	1,54
21	1,38	1,40	1,41	1,43	1,45	1,46	1,48	1,50	1,52
22	1,37	1,38	1,40	1,42	1,43	1,45	1,46	1,48	1,50
23	1,36	1,37	1,39	1,40	1,42	1,43	1,45	1,47	1,48
24	1,35	1,36	1,38	1,39	1,41	1,42	1,44	1,45	1,47
25	1,34	1,35	1,36	1,38	1,39	1,41	1,42	1,44	1,45
26	1,33	1,34	1,35	1,37	1,38	1,40	1,41	1,43	1,44
27	1,32	1,33	1,35	1,36	1,37	1,39	1,40	1,42	1,43
28	1,31	1,32	1,34	1,35	1,36	1,38	1,39	1,40	1,42
29	1,31	1,32	1,33	1,35	1,36	1,37	1,39	1,40	1,41
30	1,30	1,31	1,32	1,33	1,35	1,36	1,37	1,39	1,40

Tableau C3A – Relation entre le nombre d'éprouvettes dans le groupe, l'indice de précision et le coefficient de variation (de 1 à 9%) pour un intervalle de confiance de 99%.

N	Valeurs de l'indice de précision p pour différents coefficients de variation								
	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%
3	1,16	1,33	1,54	1,79	2,09	2,46	2,93	3,56	4,43
4	1,07	1,15	1,23	1,32	1,41	1,51	1,62	1,74	1,88
5	1,05	1,10	1,15	1,21	1,26	1,33	1,39	1,46	1,53
6	1,04	1,08	1,12	1,16	1,20	1,25	1,29	1,34	1,39
7	1,04	1,07	1,10	1,13	1,17	1,20	1,24	1,28	1,32
8	1,03	1,06	1,09	1,12	1,15	1,18	1,21	1,24	1,28
9	1,03	1,05	1,08	1,10	1,13	1,16	1,19	1,22	1,24
10	1,03	1,05	1,07	1,10	1,12	1,14	1,17	1,19	1,22
11	1,03	1,05	1,07	1,09	1,11	1,13	1,16	1,18	1,20
12	1,02	1,04	1,06	1,08	1,10	1,12	1,15	1,17	1,19
13	1,02	1,04	1,06	1,08	1,10	1,12	1,14	1,16	1,18
14	1,02	1,04	1,06	1,07	1,09	1,11	1,13	1,15	1,17
15	1,02	1,04	1,05	1,07	1,09	1,11	1,12	1,14	1,16
16	1,02	1,04	1,05	1,07	1,08	1,10	1,12	1,13	1,15
17	1,02	1,03	1,05	1,07	1,08	1,10	1,11	1,13	1,15
18	1,02	1,03	1,05	1,06	1,08	1,09	1,11	1,12	1,14
19	1,02	1,03	1,05	1,06	1,08	1,09	1,10	1,12	1,14
20	1,02	1,03	1,05	1,06	1,07	1,09	1,10	1,12	1,13
21	1,02	1,03	1,04	1,06	1,07	1,08	1,10	1,11	1,13
22	1,02	1,03	1,04	1,06	1,07	1,08	1,10	1,11	1,12
23	1,02	1,03	1,04	1,05	1,07	1,08	1,09	1,11	1,12
24	1,02	1,03	1,04	1,05	1,07	1,08	1,09	1,10	1,12
25	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,08	1,09	1,10	1,11
26	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,09	1,10	1,11
27	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,10	1,11
28	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,09	1,11
29	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,09	1,10
30	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,09	1,10

Tableau C3B – Relation entre le nombre d'éprouvettes dans le groupe, l'indice de précision et le coefficient de variation (de 10 à 18%) pour un intervalle de confiance de 99%.

N	Valeurs de l'indice de précision p pour différents coefficients de variation								
	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%
3	5,70	7,76	-	-	-	-	-	-	-
4	2,02	2,18	2,36	2,57	2,79	3,05	3,35	3,69	4,09
5	1,60	1,68	1,77	1,86	1,95	2,06	2,17	2,29	2,42
6	1,44	1,50	1,56	1,62	1,68	1,75	1,82	1,89	1,97
7	1,36	1,40	1,45	1,50	1,54	1,59	1,64	1,70	1,75
8	1,31	1,35	1,38	1,42	1,46	1,50	1,54	1,59	1,63
9	1,27	1,31	1,34	1,37	1,40	1,44	1,47	1,51	1,55
10	1,25	1,28	1,30	1,33	1,36	1,39	1,42	1,46	1,49
11	1,23	1,34	1,28	1,31	1,34	1,36	1,39	1,42	1,45
12	1,21	1,24	1,26	1,28	1,31	1,33	1,36	1,38	1,41
13	1,20	1,22	1,24	1,26	1,29	1,31	1,33	1,36	1,38
14	1,19	1,21	1,23	1,25	1,27	1,29	1,31	1,34	1,36
15	1,18	1,20	1,22	1,25	1,26	1,28	1,30	1,32	1,34
16	1,17	1,19	1,21	1,22	1,24	1,26	1,28	1,30	1,32
17	1,16	1,18	1,20	1,21	1,23	1,25	1,27	1,29	1,31
18	1,16	1,17	1,19	1,21	1,22	1,24	1,26	1,28	1,29
19	1,15	1,17	1,18	1,20	1,22	1,23	1,25	1,27	1,28
20	1,15	1,16	1,18	1,19	1,21	1,22	1,24	1,26	1,27
21	1,14	1,16	1,17	1,18	1,20	1,22	1,23	1,25	1,26
22	1,14	1,15	1,17	1,18	1,19	1,21	1,22	1,24	1,26
23	1,13	1,15	1,16	1,17	1,19	1,20	1,22	1,23	1,25
24	1,13	1,14	1,16	1,17	1,18	1,20	1,21	1,23	1,24
25	1,13	1,14	1,15	1,17	1,18	1,19	1,21	1,22	1,23
26	1,12	1,14	1,15	1,16	1,17	1,19	1,20	1,21	1,23
27	1,12	1,13	1,15	1,16	1,17	1,18	1,20	1,21	1,22
28	1,12	1,13	1,14	1,15	1,17	1,18	1,19	1,20	1,22
29	1,12	1,13	1,14	1,15	1,16	1,17	1,19	1,20	1,21
30	1,11	1,12	1,14	1,15	1,16	1,17	1,18	1,20	1,21

Tableau C3C – Relation entre le nombre d'éprouvettes dans le groupe, l'indice de précision et le coefficient de variation (de 19 à 27%) pour un intervalle de confiance de 99%.

N	Valeurs de l'indice de précision p pour différents coefficients de variation								
	19%	20%	21%	22%	23%	24%	25%	26%	27%
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	4,57	5,15	5,86	6,75	7,91	9,49	-	-	-
5	2,56	2,71	2,87	3,05	3,25	3,47	3,71	3,98	4,28
6	2,05	2,13	2,22	2,32	2,42	2,53	2,65	2,77	2,90
7	1,81	1,87	1,94	2,00	2,07	2,15	2,22	2,30	2,39
8	1,68	1,72	1,77	1,83	1,88	1,94	1,99	2,05	2,12
9	1,59	1,63	1,67	1,71	1,76	1,80	1,85	1,90	1,95
10	1,52	1,56	1,59	1,63	1,67	1,71	1,75	1,79	1,83
11	1,48	1,52	1,55	1,57	1,60	1,64	1,68	1,71	1,75
12	1,44	1,47	1,50	1,52	1,55	1,59	1,62	1,65	1,68
13	1,41	1,43	1,46	1,49	1,51	1,54	1,57	1,60	1,63
14	1,38	1,41	1,43	1,45	1,48	1,51	1,53	1,56	1,59
15	1,36	1,38	1,41	1,43	1,45	1,48	1,50	1,53	1,55
16	1,34	1,36	1,39	1,41	1,43	1,45	1,48	1,50	1,52
17	1,33	1,35	1,37	1,39	1,41	1,43	1,45	1,47	1,50
18	1,31	1,33	1,35	1,37	1,39	1,41	1,43	1,45	1,47
19	1,30	1,32	1,34	1,36	1,38	1,39	1,41	1,43	1,45
20	1,29	1,31	1,32	1,34	1,36	1,38	1,40	1,42	1,44
21	1,28	1,30	1,31	1,33	1,35	1,36	1,38	1,40	1,42
22	1,27	1,29	1,30	1,32	1,34	1,35	1,37	1,39	1,41
23	1,26	1,28	1,29	1,31	1,33	1,34	1,36	1,38	1,39
24	1,26	1,27	1,29	1,30	1,32	1,33	1,35	1,36	1,38
25	1,25	1,26	1,28	1,29	1,31	1,32	1,34	1,35	1,37
26	1,24	1,26	1,27	1,28	1,30	1,31	1,33	1,34	1,36
27	1,24	1,25	1,26	1,28	1,29	1,31	1,32	1,34	1,35
28	1,23	1,24	1,26	1,27	1,28	1,30	1,31	1,33	1,34
29	1,23	1,24	1,25	1,26	1,28	1,29	1,30	1,32	1,33
30	1,22	1,23	1,25	1,26	1,27	1,29	1,30	1,31	1,33

Tableau C3D – Relation entre le nombre d'éprouvettes dans le groupe, l'indice de précision et le coefficient de variation (de 28 à 36%) pour un intervalle de confiance de 99%.

N	Valeurs de l'indice de précision p pour différents coefficients de variation								
	28%	29%	30%	31%	32%	33%	34%	35%	36%
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	4,62	5,01	5,46	5,97	6,58	7,30	8,18	9,26	-
6	3,04	3,19	3,36	3,54	3,73	3,94	4,17	4,42	4,70
7	2,48	2,57	2,67	2,78	2,89	3,00	3,13	3,26	3,40
8	2,18	2,25	2,32	2,40	2,47	2,55	2,64	2,73	2,82
9	2,00	2,06	2,11	2,17	2,23	2,29	2,36	2,43	2,50
10	1,88	1,92	1,97	2,02	2,07	2,12	2,17	2,23	2,28
11	1,79	1,83	1,87	1,91	1,96	2,00	2,05	2,10	2,15
12	1,72	1,75	1,79	1,82	1,86	1,90	1,94	1,98	2,02
13	1,66	1,69	1,73	1,76	1,79	1,83	1,86	1,90	1,94
14	1,62	1,64	1,67	1,70	1,73	1,77	1,80	1,83	1,86
15	1,58	1,61	1,63	1,66	1,69	1,72	1,75	1,78	1,81
16	1,55	1,57	1,60	1,62	1,65	1,68	1,70	1,73	1,76
17	1,52	1,54	1,57	1,59	1,61	1,64	1,67	1,69	1,72
18	1,50	1,52	1,54	1,56	1,59	1,61	1,63	1,66	1,68
19	1,47	1,50	1,52	1,54	1,56	1,58	1,61	1,63	1,65
20	1,46	1,47	1,50	1,52	1,54	1,56	1,58	1,60	1,62
21	1,44	1,46	1,48	1,50	1,52	1,54	1,56	1,58	1,60
22	1,42	1,44	1,46	1,48	1,50	1,52	1,54	1,56	1,58
23	1,41	1,43	1,45	1,46	1,48	1,50	1,52	1,54	1,56
24	1,40	1,41	1,43	1,45	1,47	1,48	1,50	1,52	1,54
25	1,39	1,40	1,42	1,44	1,45	1,47	1,49	1,51	1,52
26	1,38	1,39	1,41	1,42	1,44	1,46	1,47	1,49	1,51
27	1,37	1,38	1,40	1,41	1,43	1,44	1,46	1,48	1,49
28	1,36	1,37	1,39	1,40	1,42	1,43	1,45	1,46	1,48
29	1,35	1,36	1,38	1,39	1,41	1,42	1,44	1,45	1,47
30	1,34	1,35	1,37	1,38	1,40	1,41	1,43	1,44	1,46

ANNEXE D

Modules de calcul du nombre d'éprouvettes dans un groupe, de l'indice de précision et des constantes A et B définissant les bornes de l'intervalle de l'écart type vrai

D1- PREMIER MODULE – Détermination du nombre d'éprouvettes dans un groupe à l'aide de l'équation 16

Ce module permet de calculer le nombre d'éprouvettes dans un groupe pour un indice de précision fixé, un coefficient de variation supposé et un intervalle de confiance recherché.

D1.1- Le chiffrier

Le tableau suivant illustre le chiffrier qu'il faut construire après avoir lancé le logiciel MSEXCEL.

		D
1	PREMIER MODULE	
2		
3	Calcul du nombre d'éprouvettes dans un groupe	
4		
5	Intrants	
6	Indice de précision	Intrant
7	Coefficient de variation (%)	Intrant
8	Intervalle de confiance (%)	Intrant
9		
10	N estimé	
11	N calculé	Équation D11
12	N estimé – N calculé	Équation D12
13		
14	Student	Équation D14
15		
16	Nombre d'éprouvettes dans le groupe	Équation D16

Les équations du chiffrier sont :

$$D11 = (((D6 + 1,0)/(D6 - 1,0)) * D14 * D7 / 100,0)^2 + 1,0$$

$$D12 = D10 - D11$$

$$D14 = TINV(1,0 - D8 / 100,0; (D10))$$

$$D16 = INT(D10) + 1,0$$

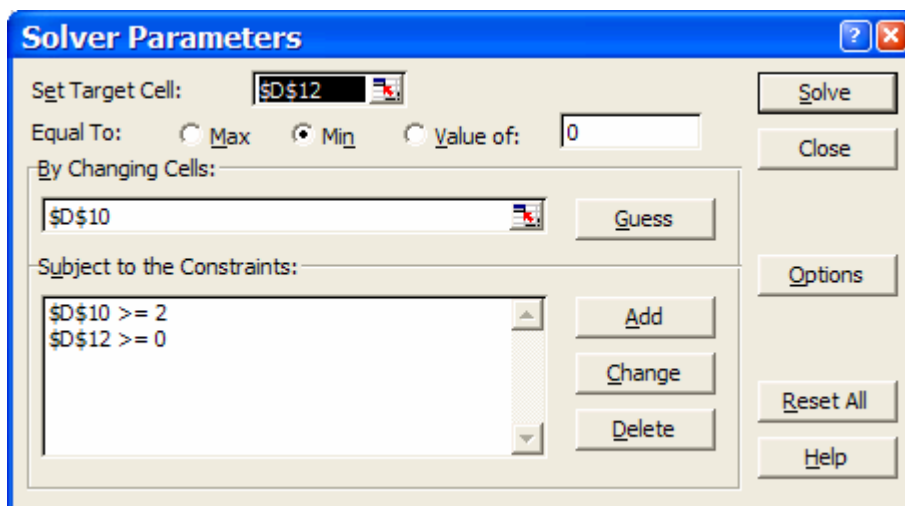
Lors de la première utilisation de ce chiffrier, il faut mettre 2 en D10.

Pour obtenir le nombre d'éprouvettes dans un groupe pour un indice de précision (intrant D5), un coefficient de variation (intrant D6, en %) et un intervalle de confiance donnés

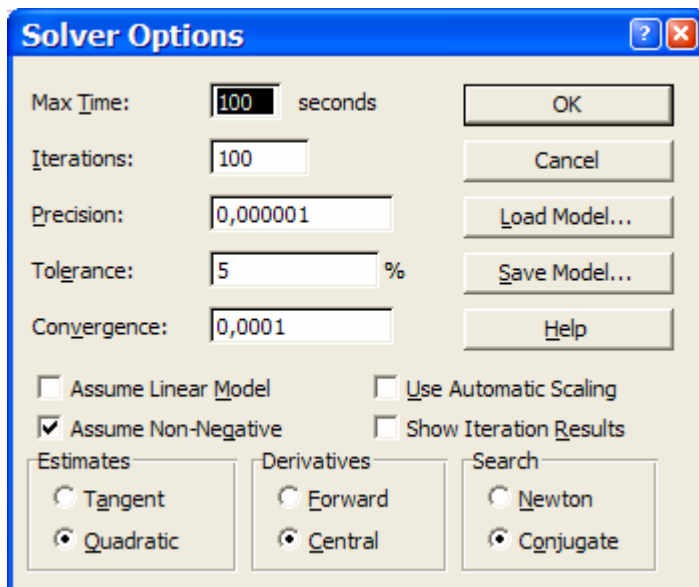
(intrant D7, en %), il faut positionner le curseur sur la cellule B5, cliquer sur OUTILS pour ensuite cliquer sur SOLVEUR.

D1.2- Le solveur

En cliquant sur OUTILS et sur SOLVEUR, la fenêtre suivante apparaît. Elle présente les paramètres qu'il faut y inscrire.



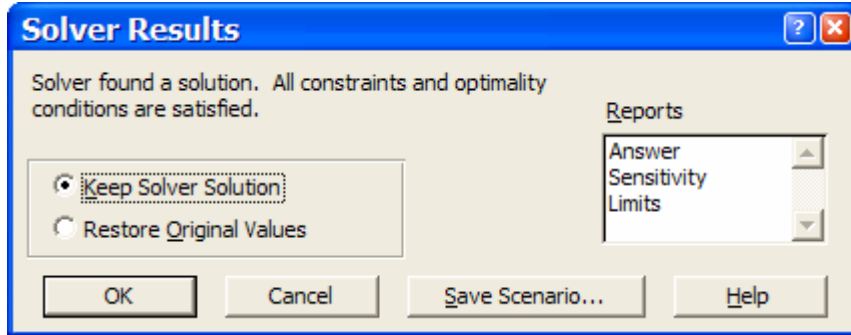
La fenêtre qui suit apparaît en cliquant sur OPTIONS. Ce sont les options par défaut qui y sont montrées.



Lorsque les paramètres et les options du solveur sont bien entrés, cliquez sur RÉSOUDRE.

D1.3- Les résultats du solveur

Voici la fenêtre qui apparaît après avoir cliquer sur résoudre.



Cliquez sur OK. Le nombre de la cellule D16 le nombre d'éprouvettes dans le groupe que vous recherchez.

D2- DEUXIÈME MODULE – Calcul de l'indice de précision à l'aide de l'équation 17

Ce module permet de calculer l'indice de précision étant le nombre d'éprouvettes dans un groupe, le coefficient de variation calculé et l'intervalle de confiance assuré.

D2.1- Le chiffrier

Le tableau suivant illustre le chiffrier qu'il faut construire après avoir lancé le logiciel MSEXCEL.

		D
19	DEUXIÈME MODULE	
20		
21	Calcul de l'indice de précision	
22		
23	Intrants	
24	Nombre d'éprouvettes dans le groupe	Intrant
25	Coefficient de variation (%)	Intrant
26	Intervalle de confiance (%)	Intrant
27		
28	Nombre de degrés de liberté	Équation D28
29		
30	Student	Équation D30
31		
32	Indice de précision	Équation D32

Les équations du chiffrier sont :

$$D28 = D24 - 1,0$$

$$D30 = TINV(1,0 - D26/100,0;(D28))$$

$$D32 = (SQRT(D24 - 1,0) + D30 * D25/100,0)/(SQRT(D24 - 1,0) - D30 * D25/100,0)$$

D2.2- Utilisation

Il suffit d'entrer le nombre d'éprouvettes dans le groupe dans la cellule D24, le coefficient de variation calculé dans la cellule D25 et l'intervalle de confiance assuré dans la cellule D26. L'indice de précision calculé apparaît dans la cellule D32.

D3- TROISIÈME MODULE – Calcul des paramètres A et B de l'équation 36

Ce module permet de calculer la valeur des constantes A et B de l'équation 36 étant donnée le nombre d'éprouvettes dans un groupe et l'intervalle de confiance assuré.

D3.1- Le chiffrier

Le tableau suivant illustre le chiffrier qu'il faut construire après avoir lancé le logiciel MSEXCEL.

		D
35	TROISIÈME MODULE	
36		
37	Calcul des paramètres A et B	
38		
39	Intrants	
40	Nombre d'éprouvettes dans le groupe	Intrant
41	Intervalle de confiance (%)	Intrant
42		
43	Nombre de degrés de liberté	Équation D43
44		
45	Chi-carré A	Équation D45
46		
47	Constante A	Équation D47
48		
49	Chi-carré B	Équation D49
50		
51	Constante B	Équation D51

Les équations du chiffrier sont :

$$D43 = D40 - 1,0$$

$$D45 = CHIINV(0,5 * (1 - D41/100,0); (D43))$$

$$D47 = SQRT(D40 / D45)$$

$$D45 = CHIINV(0,5 * (1 + D41/100,0); (D43))$$

$$D47 = SQRT(D40 / D49)$$

D3.2- Utilisation

Il suffit d'entrer le nombre d'éprouvettes dans le groupe dans la cellule D40 et l'intervalle de confiance assuré dans la cellule D41. La constante A apparaît dans la cellule D47 et la constante B, dans la cellule D51.

L'École Polytechnique se spécialise dans la formation d'ingénieurs et la recherche en ingénierie depuis 1873



École Polytechnique de Montréal

**École affiliée à l'Université
de Montréal**

Campus de l'Université de Montréal
C.P. 6079, succ. Centre-ville
Montréal (Québec)
Canada H3C 3A7

www.polymtl.ca

