PolyPublie
Polytechnique Montréal

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Titre: Title:	Étude de conditions limites de sortie pour la méthode des éléments finis
Auteur: Author:	Théophile Raux
Date:	2017
Type:	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis
Référence: Citation:	Raux, T. (2017). Étude de conditions limites de sortie pour la méthode des éléments finis [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/2575/

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: PolyPublie URL:	https://publications.polymtl.ca/2575/
Directeurs de recherche: Advisors:	André Garon, & Dominique Pelletier
Programme: Program:	Génie aérospatial

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal

https://publications.polymtl.ca

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉTUDE DE CONDITIONS LIMITES DE SORTIE POUR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

THÉOPHILE RAUX
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE AÉROSPATIAL)
MAI 2017

© Théophile Raux, 2017.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

ÉTUDE DE CONDITIONS LIMITES DE SORTIE POUR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

présenté par : RAUX Théophile
en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. CAMARERO Ricardo, Ph. D., président
M. GARON André, Ph. D., membre et directeur de recherche
M. PELLETIER Dominique, Ph. D., membre et codirecteur de recherche
M. GUIBAULT François, Ph. D., membre

DÉDICACE

Cass-dédi à toutes mes PLS

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à tous ceux et celles qui ont contribué à l'écriture de ce mémoire et au bon déroulement de cette maîtrise.

En premier lieu, je remercie André Garon, mon directeur de recherche, pour ses précieux conseils sur les méthodes spectrales, son aide inestimable à l'élaboration des conditions limites et le temps qu'il a bien voulu me consacrer. J'ai découvert grâce à lui le monde merveilleux de la mécanique des fluides numériques. Il a su m'éclairer de ses blagues matinales malgré un bureau sans fenêtre.

Ma gratitude s'adresse également à mon codirecteur de recherche Dominique Pelletier pour son soutien et respectivement au président et membre du jury Ricardo Camarero et François Guibault.

Je ne peux omettre l'aide reçue à maintes reprises par l'actionnaire de Tecplot Jérôme Vétel et de tous les professeurs qui m'ont apporté les connaissances nécessaires à la compréhension du sujet.

Merci à ma famille et mes amis pour leur soutien continu, bien qu'aucun n'ait jamais réellement compris ce sur quoi j'ai travaillé pendant un an et demi. Je pense surtout aux prodiges Arthur, Sonia, Caro, Mehdi, Bilal et aux génies Maxime, Romain, Quentin et Niklas. Une pensée particulière à Pauline pour sa présence inconditionnelle.

RÉSUMÉ

La résolution numérique des équations de Navier-Stokes nécessite l'utilisation d'un domaine de calcul discrétisé. Quelque soit la méthode de détermination des champs de vitesse et de pression du fluide, l'augmentation du nombre de Reynolds implique un agrandissement indubitable de la taille du domaine. Ce qui revient à accroître la durée de la simulation ainsi que la demande en ressources informatiques. Au contraire, dans le cas où la taille du domaine de calcul est petite, les frontières influenceront l'écoulement interne et pollueront le signal et les données de la simulation.

Nous présentons une famille de conditions limites diffusives de sortie utile lors de simulations numériques d'écoulements fluides incompressibles sur des domaines sévèrement tronqués. La forme générale de ces conditions limites assure la stabilité des calculs et la précision des résultats, même lorsque l'écoulement provoque des tourbilons importants et des reflux de fluide à la frontière de sortie.

Le code numérique employé pour traiter ce genre de cas est basé sur un schéma implicite fortement couplé et sur la méthode des éléments spectraux. La discrétisation temporelle est bâtie sur une heuristique adaptative en pas de temps et en ordre. Ce logiciel est interne à l'École Polytechnique de Montréal et en continuel développement. Le projet de ce mémoire est de mettre en œuvre la famille de conditions limites et d'analyser les résultats de simulations à haut nombre de Reynolds d'un écoulement autour d'un cylindre carré en repère absolu et en repère relatif en translation.

Dans un premier temps, nous vérifions et validons le code complet pour ensuite optimiser le choix des valeurs des paramètres de configuration. Puis, nous introduisons la théorie énergétique derrière les conditions limites diffusives et les implémentons numériquement. Nous effectuons alors de nombreux tests en repère absolu à divers nombres de Reynolds et sur différentes longueurs de domaine afin de comparer les résultats avec des valeurs provenant de la littérature. Finalement, nous simulons le phénomène des vibrations induites par vortex (VIV) autour d'un cylindre carré à $Re = 500$ sur un domaine sévèrement tronqué. L'analyse poussée de l'influence des conditions limites de sortie sur un tel phénomène amène à la conclusion suivante. Quelque soit la condition limite choisie, si la longueur du domaine est trop faible, alors les mouvements longitudinaux du solide seront forcément limités. En revanche, une légère perte en précision est acceptable face aux gains en temps et en ressources obtenus par la réduction de la taille du domaine de calcul et par l'imposition de conditions limites de sortie.

ABSTRACT

When numerically analyzing the Navier-Stokes equations and the von Kármán streets, the typical approach is to compute the velocity and pressure fields on huge domains. Indeed the vortices generated by the obstacle last and dissipate only far downstream. But a vast geometry involves a mesh containing hundreds of thousands of nodes, thus resulting in both time- and resource-consuming simulations.

We present a generalized form of outflow boundary conditions for simulating incompressible flows on severely truncated domains. It ensures the energy stability of the system, even when strong vortices cross the outflow boundary.

Our numerical algorithm used for treating such situations is based on the spectral element method implemented implicitely. The adaptative time discretization speeds up the data processing by choosing heuristically its time step size and its order. This software is the property of the École Polytechnique de Montréal and is in continuous development. Our goal is to implement the outflow boundary conditions and to analyze the simulations of fluid flows past a square cylinder at high Renolds numbers on a short geometry.

After verifying and validating the software through simple examples, we introduce the boundary conditions. We simulate incompressible fluid flows around a square cylinder to evaluate the robustness and accuracy of these conditions. Finally, we solve fluid-structure problems and study the vortex-induced vibrations (VIV) phenomenon at $Re = 500$ on severely truncated domains. We show that the open boundary conditions and the numerical algorithm developed herein produce stable simulations in such simulations. But the user must find a balance between savings in time and computational resources and a slight loss of precision.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE iii

REMERCIEMENTS iv

RÉSUMÉ v

ABSTRACT vi

TABLE DES MATIÈRES vii

LISTE DES TABLEAUX x

LISTE DES FIGURES xi

LISTE DES SIGLES ET ABBRÉVIATIONS xiv

LISTE DES ANNEXES xvii

CHAPITRE 1 INTRODUCTION 1

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE 3
2.1 Schémas de résolution et conditions limites 3
2.2 Interaction fluide-structure 7
2.3 Écoulement bidimensionnel autour d'un cylindre carré 8
2.4 Objectifs 9

CHAPITRE 3 MISE EN ŒUVRE NUMÉRIQUE DES ÉLÉMENTS FINIS ET SPECTRAUX 10
3.1 Équations de Navier-Stokes 10
3.1.1 Formes fortes 10
3.1.2 Conditions limites 11
3.1.3 Forme faible 11
3.2 Éléments finis 13
3.2.1 Méthode de Galerkin 13
3.2.2 Maillage et élément de référence 15
3.2.3 Polynômes d'interpolation 16

3.2.4 Intégration numérique 18
3.3 Problème instationnaire 19
3.4 Problème non-linéaire 21
3.4.1 Méthode de Newton 21
3.4.2 Optimisations 22
3.5 Éléments spectraux 23
3.5.1 Améliorations de la méthode des éléments finis 23
3.5.2 Méthode des éléments spectraux 24
3.6 Mise en œuvre numérique 25
3.6.1 Entrées 25
3.6.2 Cœur du code 26
3.6.3 Sorties et post-traitement 27

CHAPITRE 4 VÉRIFICATION ET VALIDATION DU CODE 29
4.1 Méthodologie 29
4.2 Vérification de la discrétisation spatiale 29
4.3 Vérification de la discrétisation temporelle 33
4.3.1 Configuration de Qian 33
4.3.2 Configuration de Pasquetti 36
4.3.3 Effet du ratio de blocage 41

CHAPITRE 5 CONDITIONS LIMITES DIFFUSIVES 44
5.1 Stabilité de la simulation et condition limite naturelle : un exemple 44
5.2 Stabilité de la simulation et condition limite naturelle : théorie 47
5.2.1 Équation de conservation de l'énergie mécanique 47
5.3 Modélisation des conditions limites diffusives 51
5.3.1 Commentaires sur l'art antérieur 54
5.4 Conditions limites diffusives en référentiel inertiel 55
5.4.1 Solutions manufacturées 55
5.4.2 Écoulement autour d'un cylindre carré 56
5.5 Généralisation aux VIV en référentiel accéléré 69
5.5.1 Interactions fluide-structure 70
5.5.2 Modélisation numérique 73
5.5.3 Étude VIV sur un cylindre carré 76

CHAPITRE 6 CONCLUSION 87
6.1 Synthèse des travaux 87

6.2 Améliorations futures 88

RÉFÉRENCES 89

ANNEXES 95

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1 Solutions manufacturées. Expressions des champs de vitesses et de pression pour les deux solutions 31

Tableau 5.1 Conditions limites de Dong et Shen (2015) pour les pseudo-tractions ($\tilde{\boldsymbol{\tau}}$) et les tractions ($\boldsymbol{\tau}$) 53

Tableau 5.2 Paramètres d'écoulement à $Re = 100$ pour toutes les géométries : coefficient de traînée C_d, coefficient de portance r.m.s. C_L et nombre de Strouhal St. Comparaison des résultats obtenus avec $\mathrm{NS_D} + \Lambda(0, 1)$ et ceux de Dong *et al.* (2014) 60

Tableau 5.3 Robustesse des différentes combinaisons de conditions limites $\Lambda(\alpha, \beta)$ et des équations de Navier-Stokes. Stabilité en fonction du pas de temps Δt fixé et de la tolérance ε imposée. Valeurs respectives de la tolérance moyenne $\overline{\varepsilon}$ et du pas de temps moyen $\overline{\Delta t}$ 62

Tableau 5.4 Paramètres d'écoulement à $Re = 1000$ pour les quatre domaines de calcul : coefficient de traînée C_d, coefficient de portance r.m.s. C_L et nombre de Strouhal. Combinaison $\mathrm{NS_D} + \Lambda(0, 1)$. Comparaison avec les résultats de Dong *et al.* (2014) 63

Tableau 5.5 Paramètres d'écoulement à $Re = 1000$ pour toutes les combinaisons d'équations fluide et de modèles de condition limite sur la géométrie courte $L_x = 5D$: C_d, C_L et St 66

Tableau 5.6 Paramètres d'écoulement à $Re = 10,000$ et pour deux longueurs de domaine : C_d et C_L. Combinaison $\mathrm{NS_D} + \Lambda(0, 1)$ 68

Tableau 5.7 Nombres adimensionnels 72

Tableau 5.8 Positions moyennes du cylindre selon $\boldsymbol{i'}$ en fonction de la longueur du sillage L_x et de la condition limite de sortie 83

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 Géométrie et maillage usuellement utilisés pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes, zoom sur le maillage sévèrement tronqué 4

Figure 2.2 Trajectoires d'un cylindre carré en VIV avec les ratios de cisaillement de l'écoulement $k = 0, 0.05$ et 0.1 à $Re = 160$ et à des vitesses réduites variées. Tiré de Sun *et al.* (2017) 9

Figure 3.1 Transformation linéaire sur un quadrangle avec $n_D^K = 9$ 16

Figure 3.2 Élément de référence de Taylor-Hood (P_2P_1) 17

Figure 3.3 Procédure de calcul et fonctionnement d'EF6, tiré de Wasselet (2016) 28

Figure 4.1 Géométrie et maillage, de 16 éléments quadratiques ici (raffinement $h/4$) 30

Figure 4.2 Solution transcendante $u(x, y) = \dfrac{\sin(20x + 20y)}{10} + xy$ 31

Figure 4.3 Normes H^1 et L^2 de l'erreur en vitesse $\varepsilon(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{ex}$ pour la solution polynomiale, sur le domaine incliné de $\theta = \pi/6$ 32

Figure 4.4 Normes H^1 et L^2 de l'erreur en vitesse $\varepsilon(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{ex}$ pour la solution transcendante, sur le domaine droit $\theta = 0$ 32

Figure 4.5 Domaine long de calcul et conditions limites pour le cylindre circulaire. 1880 éléments quadratiques 34

Figure 4.6 Domaine long. Contours de la vorticité à $t = 6 : Re = 1000$ 35

Figure 4.7 Domaine long. Distribution de la vorticité à la surface du cylindre à $t = 6 : Re = 1000$ 35

Figure 4.8 Domaine long. Coefficient de traînée : $Re = 1000$ 37

Figure 4.9 Domaine long. Contours de la vorticité à $t = 6 : Re = 3000$ 37

Figure 4.10 Domaine long. Distribution de la vorticité à la surface du cylindre à $t = 6 : Re = 3000$ 38

Figure 4.11 Domaine long . Coefficient de traînée : $Re = 3000$ 38

Figure 4.12 Domaine court de calcul et conditions limites pour le cylindre circulaire avec 356 éléments spectraux 39

Figure 4.13 Domaine long. Contours de la vorticité à $t = 6 : Re = 1000$ 40

Figure 4.14 Domaine court. Distribution de la vorticité à la surface du cylindre à $t = 6 : Re = 1000$ 40

Figure 4.15 Domaine court. Coefficient de traînée : $Re = 1000$ 42

Figure 4.16 Maillages avec différents ratios de blocage et longueurs de sillage. (noir) $L_x = 60D, L_y = 20D$. (rouge) $L_x = 12D, L_y = 20D$. (bleu) $L_x = 12D, L_y = 3.2D$ 42

Figure 4.17 Distribution de la vorticité à la surface du cylindre en fonction du domaine de calcul à $t = 6 : Re = 1000$ 43
Figure 5.1 Maillage et contours de la vorticité avec condition limite de traction nulle en sortie 46
Figure 5.2 Description générale d'un domaine de calcul et de ses frontières . . . 50
Figure 5.3 Fonction scalaire $S(x, \delta)$ avec $\delta = \frac{1}{20}$ 52
Figure 5.4 Contours de la vitesse selon $\boldsymbol{e_x}$ et lignes de courant de l'écoulement de Kovasnay 56
Figure 5.5 Erreur $L^2 - u$ calculée sur les quatre domaines en fonction du degré d'interpolation, de la forme des équations de Navier-Stokes et de la condition limite imposée à la sortie 57
Figure 5.6 Géométries et maillages 59
Figure 5.7 Comparaison des profils de traînée le long de la ligne centrale $y = 0$ pour différentes longueurs de domaine 61
Figure 5.8 Séquence temporelle des champs de vecteurs et de la vorticité à $Re = 1000$ illustrant la décharge des tourbillons à travers la frontière de sortie calculée par la condition limite $\Lambda(1, 0)$. Dans l'ordre de lecture : $t = 1.20$, $t = 1.51$, $t = 1.82$, $t = 2.12$, $t = 2.43$, $t = 2.73$, $t = 3.04$, $t = 3.35$ 64
Figure 5.9 Séquence temporelle des champs de vecteurs et de la vorticité à $Re = 1000$ illustrant la décharge des tourbillons à travers la frontière de sortie calculée par la condition limite $\Lambda(0, 1)$. Dans l'ordre de lecture : $t = 1.20$, $t = 1.51$, $t = 1.82$, $t = 2.12$, $t = 2.43$, $t = 2.73$, $t = 3.04$, $t = 3.35$ 65
Figure 5.10 Géométries et maillages pour $Re = 10,000$ 67
Figure 5.11 Historique des forces de traînée et de portance sur le cylindre 68
Figure 5.12 Vorticité et champ de vitesses obtenus sur le domaine $L_x = 6D$ à $Re = 10,000$ avec la combinaison $\mathrm{NS_D} + \Lambda(0, 1)$ 69
Figure 5.13 Comparaison des résultats entre la condition limite $\Pi(0, 1)$ imposée à la frontière de sortie et pas de condition limite $\Pi(0, 0)$ à $Re = 100$ sur le domaine court $L_x = 5D$ 79
Figure 5.14 Comparaison des résultats entre les domaines $L_x = 5D$ et $L_x = 10D$ $Re = 100$ avec la condition $\Pi(0, 1)$ imposée à la sortie 79
Figure 5.15 Contours de la vorticité et champs de vitesses instantanés pour les VIV d'un cylindre carré à $Re = 100$ et pour la condition limite $\Pi(0, 1)$ sur le domaine $L_x = 10D$. Le point noir indique la position du cylindre sur la trajectoire XY. Lecture dans l'ordre lexicographique 80

Figure 5.16 Historique des forces de traînée F_x et de portance F_y à $Re = 500$ pour les domaines $L_x = 5D$ et $L_x = 10D$ 81
Figure 5.17 Trajectoires et positions moyennes des cylindres carrés à $Re = 500$ pour les domaines $L_x = 5D$ et $L_x = 10D$ 82
Figure 5.18 Contours de la vorticité et champs de vitesses instantanés pour les VIV d'un cylindre carré à $Re = 500$ et pour la condition limite $\Pi(0, 1)$ sur le domaine $L_x = 10D$. Le point noir indique la position du cylindre sur la trajectoire XY. Lecture dans l'ordre lexicographique 84
Figure 5.19 Densité de probabilité des forces de traînée F_x et tracé des moyennes et médianes à $Re = 500$. (haut) $L_x = 5D$. (bas) $L_x = 10D$. (gauche) $\Pi(0, 1)$. (droite) $\Pi(0, 2)$ 85

LISTE DES SIGLES ET ABBRÉVIATIONS

Acronymes

BDF	Backward differentiation formula
DDL	Degré De Liberté
FEM	Finite Element Method
FFT	Fast Fourier Transform
GLL	Gauss-Legendre-Lobatto
RMS	Root Mean Square
NS_D	Navier-Stokes Divergence
NS_L	Navier-Stokes Laplacien
SEM	Spectral Element Method
SVV	Spectral Vanishing Viscosity
VIV	Vibrations Induites par Vortex

Éléments finis et spectraux

$\boldsymbol{x} = (x, y, z)$	Coordonnées spatiales
t	Temps
$\boldsymbol{u}, p$	Champ des vitesses et de pression
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur des contraintes ou tenseur de Cauchy
$\boldsymbol{S}$	Tenseur des déformations de l'écoulement
$\mathbf{I}$	Tenseur identité
$\boldsymbol{f}$	Forces volumiques exercées sur l'écoulement
ρ	Masse volumique
μ	Viscosité dynamique
Ω	Domaine de calcul
Γ_D	Bord avec imposition de conditions de Dirichlet
Γ_N	Bord du domaine avec imposition de conditions de Neumann
L^2,H^1	Espaces de Hilbert
$\boldsymbol{V}, \boldsymbol{Q}$	Espaces des champs de vitesse et de pression
$\boldsymbol{\varphi}, q$	Fonctions tests des champs de vitesse et de pression
$\boldsymbol{\tau}$	Tractions
$\boldsymbol{n}$	Normale au bord
$\boldsymbol{u}_h, p_h$	Champ des vitesses et de pression discrétisés

$\boldsymbol{V}, \boldsymbol{Q}$	Espaces discrets des champs de vitesse et de pression
ψ_i, ϕ_i	Fonctions d'interpolation des champs de vitesse et de pression
n, m	Nombre de fonctions d'interpolations en vitesse et en pression
$\boldsymbol{U}, \boldsymbol{P}$	Vecteurs vitesse et pression
$\boldsymbol{M}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{F}$	Matrices de masse, des termes visqueux, de convections, de divergence et des forces extérieures
$\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$	Coordonnées sur l'élément de référence
$K, \hat{K}$	Domaines élémentaires et de référence
T^K	Transformation géométrique
L_i	Polynôme de Lagrange
w_i	Poids d'intégration

Vérification et validation

D	Longueur caractéristique
L_x	Longueur du sillage
L_y	Demi-largeur du domaine
Re	Nombre de Reynolds
C_d	Coefficient de traînée moyen
C_L	Coefficient de portance r.m.s.
St	Nombre de Strouhal
Ω_z	Champ de vorticité
U_0	Vitesse de référence

Conditions limites diffusives et VIV

Γ_e	Frontière d'entrée
Γ_s	Frontière de sortie
$\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}$	Tangente et normale au bord
$\boldsymbol{\sigma}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$	Tenseur des contraintes et des pseudo-contraintes
$\boldsymbol{\tau}, \tilde{\boldsymbol{\tau}}$	Tractions et pseudo-tractions
Δt	Pas de temps de la discrétisation temporelle
ε	Tolérance d'intégraiton temporelle de la méthode adaptative
$\Lambda(\alpha, \beta)$	Famille de conditions limites de sortie en repère inertiel
$\Pi(\alpha, \beta)$	Famille de conditions limites de sortie en repère accéléré
R_0, R_1	Repères inertiel et accéléré
$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$	Vecteurs unitaires des coordonnées

$.'$	Variable exprimée dans le repère inertiel
$\boldsymbol{x_c}$	Vecteur position du solide dans le repère absolu
m_c	Masse du cylindre
M_a	Masse ajoutée
k	Raideur du ressort
$\boldsymbol{F_f}$	Forces fluides exercées sur le solide
$\boldsymbol{F_r}$	Forces de rappel exercée sur le solide
$\boldsymbol{\sigma_c}$	Tenseur des constraintes ajouté du terme inertiel
$\hat{p}$	Champ de pression ajouté du terme inertiel
$\hat{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{f}}$	Forces fluides ajoutées du terme inertiel exercées sur le solide
U_r	Vitesse réduite
r_m	Ratio de masse

LISTE DES ANNEXES

Annexe A CADRE FONCTIONNEL 95

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Les conditions limites de sortie constituent une spécificité de l'étude numérique des écoulements fluides à laquelle se sont intéressés de nombreux chercheurs depuis plus de cinquante ans. Cette spécificité se manifeste par l'introduction de vitesses ou de forces à imposer sur la frontière en aval d'un écoulement fluide incompressible. Dans l'expérience réelle, l'écoulement autour d'un *riser* pétrolier ou d'un pont se produit sur un vaste domaine fluide que nous pouvons considérer comme infini. Or, les simulations numériques d'écoulements fluides ne peuvent être calculées que sur un domaine borné et fini.

Il semble donc que la taille du domaine soit un facteur limitant de la résolution numérique d'écoulements fluides. Mais en réduire simplement la dimension peut compromettre la stabilité du calcul et la précision des résultat.

Les conditions limites de sortie doivent être construites de manière à satisfaire les critères suivants :

— assurer la stabilité de la résolution du système d'équations ;
— ne pas perturber la réponse dynamique du système ;
— minimiser la taille du maillage et donc du système d'équations.

Par exemple, lors de l'étude des vibrations induites par relâchers tourbillonaires à haut nombre de Reynolds, la démarche usuelle est de discrétiser un énorme volume de calcul. Cela évite aux frontières du domaine d'interagir avec l'écoulement et de perturber les valeurs des champs internes de vitesse et de pression. De plus, une analyse bidimensionnelle simple montre que la distance entre la source des relâchers tourbillonaires et la frontière de sortie doit augmenter avec le nombre de Reynolds afin de préserver la précision des résultats. En effet, la condition limite à traction nulle, généralement imposée à la frontière de sortie, ne diffuse pas assez les tourbillons la traversant. Or, seuls les mouvements du solide immergé et les forces qui s'exercent sur celui-ci revêtent un intérêt lors de l'analyse de ces vibrations induites ; et comme ces valeurs s'obtiennent sur les nœuds autour de l'obstacle, alors il est nécessaire de maximiser les ressources dans la zone autour du solide. Nous avons alors recours à l'introduction de conditions limites de sortie, qui permettent de concentrer la géométrie à proximité du solide.

Comment mettre en œuvre une condition limite de sortie diffusive sur un domaine sévèrement tronqué qui influence peu les paramètres de l'écoulement amont ? Comment la modéliser de manière à réduire les coûts de calculs puis à améliorer la robustesse des simulations et la précision des résultats ? Et ce à la fois pour des simulations réalisées dans un repère inertiel

ou accéléré.

Pour répondre à ces questions et supporter les développements théoriques de ce mémoire, nous faisons usage du logiciel d'éléments finis EF6 élaboré à l'École Polytechnique de Montréal. Basé sur la méthode des éléments spectraux, il résout numériquement des écoulements fluides incompressibles, stationnaires ou temporels, sur un maillage fixe. Bien que de nouvelles fonctionnalités, pour l'étude en repère accéléré ou la détermination des forces par la méthode des réactions, aient été ajoutées dernièrement, le code est toujours en développement et nécessite des phases de vérification, de validation et d'optimisation afin de s'assurer de la véracité des résultats futurs.

Nous détaillons dans le chapitre 2 l'état de l'art actuel concernant les méthodes de résolution numérique d'écoulements fluide ainsi que les conditions limites.

Le chapitre 3 amorce le développement mathématique global de la méthode des éléments finis et de sa variante spectrale. Nous expliquons également la discrétisation temporelle d'un problème instationnaire. Enfin, la mise en œuvre numérique telle que codée dans EF6 est abordée afin d'aider le lecteur à comprendre les configurations des simulations ultérieures.

Le chapitre 4 décrit les phases de vérification et de validation qui posent les fondations du code et des simulations futures.

Finalement, le chapitre 5 présente la théorie des conditions limites de sortie à travers une étude énergétique. Leur modélisation est validée par des écoulements bidimensionnels afin de passer à l'application aux VIV en référentiel accéléré. Les cadres théorique et numérique de ce phénomène sont également brièvement présentés afin d'analyser les simulations autour d'un cylindre carré mobile en interaction fluide-structure sur un domaine tronqué.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

Les équations de Navier-Stokes, qui régissent le mouvement des fluides visqueux, peuvent s'écrire selon différentes formulations dont la solution numérique peut être déterminée grâce à différentes méthodes : différences finies, volumes finis, éléments finis, etc.

Il existe également divers types d'écoulement qui peuvent traverser une frontière telles que les jets, les sillages, les couches limites, *etc.* Il semble alors évident que diverses conditions limites de sortie existent ; et qu'il en reste énormément à développer. L'étude proposée s'inscrit dans les travaux de Bruneau *et al.* (1994), Dong *et al.* (2014) et Dong et Shen (2015) qui ont établi une famille de conditions limites diffusives sur des domaines sévèrement tronqués. Bruneau *et al.* (1994) étudie l'écoulement dans un canal et anticipe celui autour d'un obstacle, repris vingt ans plus tard par Dong *et al.* (2014).

2.1 Schémas de résolution et conditions limites

Gresho (1991) définit clairement les différentes formulations fortes des équations de Navier-Stokes incompressibles et discute des problèmes qu'elles posent à la fois sur un domaine continu et sur une géométrie discrète. Il existe notamment diverses formes d'écriture du terme visqueux non-linéaire. Dong et Shen (2015) assied leur résolution numérique sur la forme conventionnelle ou de Laplace, définie aux équations (3.1a)-(3.1b). Cette forme, notée $\mathrm{NS_L}$, est la plus simple à mettre en œuvre numériquement et peut générer des conditions limites utiles. Le code numérique EF6 de l'École Polytechnique de Montréal quant à lui est basé sur la forme divergente, définie aux équations (3.2a)-(3.2b)et notée $\mathrm{NS_D}$. Plus générale et fondamentale, cette écriture est usuellement appliquée à la méthode des éléments finis, car elle conserve le moment quand discrétisé, et permet le développement de conditions limites naturelles. Plus rares, les formes antisymétrique et rotationelle proposent des formes alternatives du terme visqueux, notées respectivement $\frac{1}{2}[\nabla \cdot (\boldsymbol{uu}) + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u}]$ et $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}$, avec $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \wedge \boldsymbol{u}$ la vorticité du fluide (Gresho, 1991).

Lors de l'analyse numérique des allées de von Kármán en aval d'un obstacle, l'approche typique est de calculer les champs de vitesse et de pression sur de grands domaines. Une vaste géométrie implique forcément un maillage contenant des centaines de milliers de nœuds pour obtenir des simulations réalistes (*c.f.* fig. 2.1). Cependant, l'objectif principal de telles simulations est l'obtention des valeurs des paramètres globaux de l'écoulement tels que les coefficients de traînée et de portance, qui sont obtenus sur les nœuds autour de l'obstacle.

Afin de réduire les ressources mémoire et les temps de calcul, il est indispensable de réduire la taille du domaine de calcul. Mais simuler sur des domaines courts pollue inévitablement l'écoulement amont, car l'absence d'une condition limite de sortie, *i.e.* l'usuelle condition limite de Neumann ou condition limite à traction nulle, perturbe significativement le signal en ne dissipant pas assez les tourbillons. D'où la nécessité d'introduire une condition limite à imposer sur la frontière de sortie.

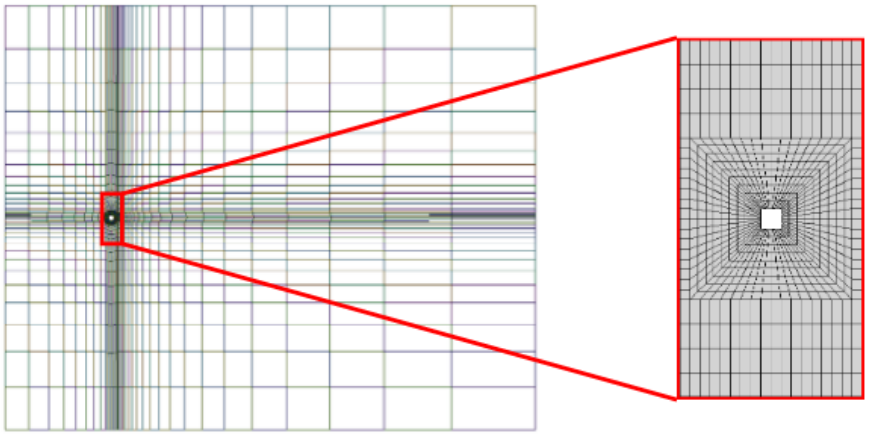


Figure 2.1 Géométrie et maillage usuellement utilisés pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes, zoom sur le maillage sévèrement tronqué

Le livre de Arrow *et al.* (1958) et l'article de Fortin et Glowinski (1982) abordent en premier la question de la résolution numérique des problèmes linéaires et non-linéaires. Cette résolution est effectuée par l'évaluation des équations aux dérivées partielles en écoulement incompressible. Les méthodes des volumes finis (Eymard *et al.*, 2000), des éléments finis (Cuvelier *et al.*, 1986) et des éléments spectraux (Deville *et al.*, 2002) sont des discrétisations spatiales inhérentes à la résolution numérique des équations de Navier-Stokes. Ensuite, l'évaluation des solutions approchées satisfaisant la condition d'incompressibilité opère *via* différents schémas, le plus connu étant celui de correction en pression établit par Chorin (1968) et plus tard amélioré par Goda (1979). De la même manière que la méthode de correction en vitesse (Guermond et Shen, 2003), ce schéma requiert deux sous-étapes de calcul, en découplant les opérateurs de vitesse et de pression, pour déterminer la solution à un pas de temps. Ces stratégies produisent des solutions approchées aux coûts de calcul moindres au détriment de la stabilité et de la précision. Guermond *et al.* (2006) résume parfaitement toutes les conditions de stabilité ainsi que les taux de convergence des différents schémas. Au contraire, la formulation mixte utilisée dans EF6 permet d'employer, par exemple, une résolution numérique qui autorise des ordres d'intégration temporelle plus élevés, aux dépens d'une mise en œuvre plus complexe.

Malgré cela, la stabilité numérique des écoulements fluides ne dépend pas uniquement du schéma de résolution. Dans de nombreux cas, il faut également gérer les conditions limites à appliquer sur une partie du bord du domaine.

Une recherche approfondie de la littérature permet d'exposer quatre classes de conditions limites de sortie : Dirichlet, à traction nulle (Neumann), convective et non réflective. Les conditions de Dirichlet et à traction nulle sont les plus fréquemment utilisées, car elles sont faciles à mettre en œuvre avec la méthode des éléments finis. Cependant, la première nécessite la connaissance *a priori* du profil de vitesses à la frontière ; et la deuxième requiert un grand domaine de calcul afin de limiter les erreurs numériques. Les conditions limites convectives (de Robin) permettent de *tirer* par convection sur la solution à la frontière. Dans le cadre des écoulements fluides, cette condition est utilisée pour surmonter les limitations de celles imposées par Dirichlet et Neumann avec l'aide d'équations d'advection au permier ordre (Halpern et Schatzman, 1989). Les conditions limites non réflectives sont mises en œuvre dans la résolution d'équations d'ondes et d'écoulements fluides afin d'éviter la réflection d'ondes à l'intérieur du domaine de calcul. Ainsi, la solution calculée sur un domaine réduit s'approche correctement de celle obtenue sur un domaine infini.

Tsynkov (1998) et Sani et Gresho (1994) identifient et dressent une liste des nombreuses conditions limites qui existent dans la littérature. En mécanique des fluides, l'approche usuelle est l'imposition de la condition de Neumann à traction nulle $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$, analysée par Taylor *et al.* (1985). Elle est particulièrement facile à mettre en œuvre avec la méthode des éléments finis et efficace pour simuler des écoulements laminaires à bas nombre de Reynolds.

Ol'Shanskii et Staroverov (2000) proposent une condition limite convective fondée sur l'équation d'advection au premier ordre explicitée par Halpern et Schatzman (1989) et sur la méthode de *scaling* de Hagstrom (1991). Cette condition s'applique particulièrement bien aux différences finies en écoulement incompressible.

Les conditions non réflectives existent sous de nombreux autres noms tels que absorbantes, ouvertes, de radiation ou dissipatives. Orlanski (1976) développe en premier lieu une condition limite simple et efficace applicable à des problèmes hyperboliques non-bornés. Cette condition est reprise puis appliquée aux écoulements fluides par Xu et Lin (2000) sous la forme $\partial_t \boldsymbol{u} + U_\infty \cdot \nabla \boldsymbol{u} = 0$, avec U_∞ une vitesse constante.

Plus tard, Jin et Braza (1993) transposent la condition limite absorbante d'Engquist et Majda (1977), initialement construite pour la simulation numérique d'ondes, aux équations de Navier-Stokes incompressibles en volumes finis et ont prouvé son efficacité et sa stabilité lors de la réduction de la taille du domaine.

Bruneau *et al.* (1994) établissent un an plus tard une famille de conditions limites de sortie de type Neumann en incompressible pour $\mathrm{NS_L}$ et $\mathrm{NS_D}$. Les tractions à imposer à la frontière s'écrivent

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \frac{1}{2}\Theta(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v_0}) + \frac{1}{2}\Theta((\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v_0})\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{f} \tag{2.1a}$$

$$\boldsymbol{\tau}_2 = \frac{1}{2}\Theta((\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v_0})\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f} \tag{2.1b}$$

$$\boldsymbol{\tau}_3 = \frac{1}{2}\Theta(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v_0}) + \boldsymbol{f} \tag{2.1c}$$

$$\boldsymbol{\tau}_4 = \frac{1}{2}\Theta((\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v_0})\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v_0}) + \boldsymbol{f} \tag{2.1d}$$

Avec l'ajout d'une vitesse de référence $\boldsymbol{v_0}$, les auteurs parviennent à un problème bien posé et en prouvent la robustesse. Dans ces relations, le limiteur $\Theta(a) = \frac{1}{2}(|a|-a)$ ne conserve que la fraction négative de la condition limite, *i.e.* lorsque l'écoulement est entrant à travers la frontière de sortie ($\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} \leq 0$ par exemple). La condition limite dissipe alors l'énergie cinétique à l'intérieur du domaine ; sinon elle s'assimile à la condition de traction nulle. Parmi toutes les conditions présentées, ils étudient plus particulièrement $\boldsymbol{\tau}_3$ qui se trouve être plus diffusive lors de la traversée de tourbillons à la frontière en aval d'un cylindre circulaire. L'existence, la régularité et leur caractère bien-posé sont vérifiés dans un article publié deux ans plus tard (Bruneau et Fabrie, 1996).

Miyauchi *et al.* (1996) élaborent des conditions d'entrée et de sortie en vitesse et pression pour des jets turbulents selon la méthode des différences finies, dont la stabilité et la robustesse ont été vérifiées par Craske et van Reeuwijk (2013).

À la suite des travaux de Bruneau *et al.* (1994), Dong *et al.* (2014) exposent une nouvelle condition limite de sortie, qui s'avère robuste et précise lorsque associée à $\mathrm{NS_L}$. La preuve mathématique de cette condition précède de nombreuses simulations numériques sur des domaines sévèrement tronqués et pour une large plage de nombres de Reynolds. Elle se note

$$\boldsymbol{\tau}_5 = \frac{1}{2}S_0(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})|\boldsymbol{u}|^2\boldsymbol{n} + \boldsymbol{f}, \tag{2.2}$$

où $S_0(a) = \dfrac{1}{2}\left(1-\tanh\left(\dfrac{a}{\delta}\right)\right)$ est une fonction échelon lissée équivalente à la au limiteur $\Theta(a)$. Cette condition évite la croissance incontrôlée d'afflux d'énergie cinétique, à l'intérieur du domaine de calcul, par la frontière de sortie, et donc la divergence des calculs. Elle n'a été vérifiée que pour la seule formulation $\mathrm{NS_L}$.

Un an plus tard, Dong (2015) améliore cette condition en ajoutant un terme inertiel, qui génère des écoulements fluides quantitativement plus lisses et stables. La mise en œuvre de

la condition limite est également améliorée, dans le cadre de leur discrétisation du système matriciel par le schéma de correction en vitesse. Finalement, la dernière contribution sur ces conditions limites en date de Dong et Shen (2015) présente six conditions limites provenant de combinaisons linéaires des tractions précédemment établies par les équations (2.1a)-(2.1d) et (2.2) et en vérifie la robustesse pour la forme Laplacienne des équations de Navier-Stokes

$$\boldsymbol{\tau}_6 = S_0(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\left[(\theta+\alpha_2)\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2\boldsymbol{n} + (1-\theta+\alpha_1)\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{u}\right] + \boldsymbol{f}, \tag{2.3}$$

avec $0 \leq \theta \leq 1$, $\alpha_1 \geq 0$ et $\alpha_2 \geq 0$.

2.2 Interaction fluide-structure

L'interaction fluide-structure est l'étude de l'influence de l'écoulement d'un fluide sur un solide mobile ou déformable. Strouhal (1878) puis von Kármán et Rubach (1912) abordent dès la fin du XX$^{\text{ème}}$ siècle le sujet des relâchers tourbillonaires en aval d'un obstacle mais l'analyse poussée des interactions fluide-structure commence réellement avec le travail de Bishop et Hassan (1964). Ils publient les résultats du mouvement d'un cylindre circulaire libre de se déplacer dans la direction transverse à l'écoulement. S'en suivent alors une multitude de recherches sur le sujet qui tentent de décrire la nature et de prédire les caractéristiques des vibrations induites par vortex de corps non-profilés (Feng, 1968; Parkinson, 1974; Bearman, 1984; Chen, 1987; Blevins, 1990; Govardhan et Williamson, 2000; De Langre, 2001; Sarpkaya, 2004; Naudascher et Rockwell, 2012) pour n'en citer qu'une partie.

Feng (1968) établit expérimentalement le *lock-in*, ou phase d'accrochage des fréquences, qui apparaît lorsque la fréquence des relâchers tourbillonaires s'approche de la fréquence naturelle du solide. Les oscillations du système, considéré comme un masse-ressort, sont alors maximales et peuvent gravement endommager la structure.

Blevins (1990) propose une première classification des phénomènes d'interaction fluide - structure. Il les divise en deux catégories distinctes : les écoulements stationnaires et instationnaires. Les premiers sont subdivisés en fonction de ce qui induit le mouvement solide : l'instabilité ou les tourbillons. Concernant la suite de ce mémoire, nous considérons uniquement les mouvements et vibrations induits par les tourbillons. Naudascher et Rockwell (2012), dont le livre publié originalement en 1993 est révisé 19 ans plus tard, classent les interactions en trois groupes d'excitations : celles induites par des instabilités, celles induites par le mouvement et celles induites par des conditions extérieures. Finalement, De Langre (2001) identifie quantitativement trois phénomènes à l'aide de la vitesse réduite U_r. Ce nombre adimensionnel est défini comme le rapport du temps caractéristique du fluide sur celui du solide ; et selon que

sa valeur est négligeable devant l'unité, très grande devant un ou de l'ordre de un, le fluide est au repos, l'interaction est aéroélastique ou le couplage est fort.

Pour se rendre compte de l'intégralité et de l'immensité du domaine de recherches sur les interactions fluide-structure, il convient de se référer aux ouvrages de Parkinson (1974); Bearman (1984); Chen (1987); Govardhan et Williamson (2000) et Sarpkaya (2004).

2.3 Écoulement bidimensionnel autour d'un cylindre carré

De la même manière que pour le cylindre circulaire, les régimes d'écoulement autour d'un cylindre carré dépendent du nombre de Reynolds. Premièrement, l'écoulement est laminaire et non-séparé en aval de l'obstacle pour un nombre de Reynolds très faible $Re \leq 1$. Ensuite, avec l'augmentation du nombre de Reynolds, l'écoulement se sépare et une paire de tourbillons symétriques se développe derrière le cylindre. Ce phénomène apparaît autour de $Re \approx 3 - 5$ pour un cylindre circulaire (Coutanceau et Bouard, 1977). Plus le nombre de Reynolds augmente, plus la zone de recirculation grossit. Puis, à une valeur critique du nombre de Reynolds Re_c, les tourbillons deviennent instables et se détachent, provoquant l'apparition d'allées de von Kármán. La valeur de Re_c dépend du ratio de blocage, *i.e.* le ratio entre la taille d'un côté du carré et la hauteur du domaine de calcul. Cette valeur fluctue entre 50 et 90 dans la littérature (Okajima, 1982; Sohankar *et al.*, 1998; Breuer *et al.*, 2000). Toujours en augmentant le nombre de Reynolds après Re_c, les relâchers tourbillonaires sont pleinement développés et Davis *et al.* (1984) découvrent que la fréquence de relâcher tourbillonnaire augmente, atteint un maximum puis diminue. En outre, le sillage en aval du cylindre carré devient turbulent et tridimensionnel pour un nombre de Reynolds supérieur à $Re \geq 160$.

La plupart des recherches conduites jusqu'à présent en interaction fluide-structure étudie les vibrations induites d'un cylindre circulaire. D'abord concentrées sur les oscillations perpendiculaires à l'écoulement (Griffin, 1980), les études se sont ensuite élargies à des cylindres à deux degrés de liberté (Wooton *et al.*, 1972; Dahl *et al.*, 2010). À des ratios de masse élevés, Jauvtis et Williamson (2003) démontrent que les simulations bidimensionnelles à deux degrés de liberté sont équivalentes à celle à un seul degré de liberté dans le sens de l'écoulement. Au contraire, Jauvtis et Williamson (2004) constatent, pour des ratios plus faibles, que les solides suivent une trajectoire en forme de huit.

Sen et Mittal (2015) simulent en 2D des écoulements autour de cylindres carrés libres en X et Y pour des nombres de Reynolds faibles $Re \leq 250$ et des ratios de masse variant entre $1 \leq r_m \leq 20$. Ils constatent également des trajectoires en huit pour $r_m = 1$; à des ratio plus élevés, des formes plus complexes se manifestent étant donné la présence combinée des

VIV et du galop. Plus récemment, Sun *et al.* (2017) reproduisent les mêmes simulations avec un écoulement incident cisaillé et obtiennent des trajectoires plus étirées dans la direction de l'écoulement (*c.f.* fig. 2.2). Ils analysent les résultats obtenus pour des vitesses réduites $U_r = U_\infty/(fD)$ comprises entre 3 et 12. Ils considèrent un système masse-ressort sans amortissement..

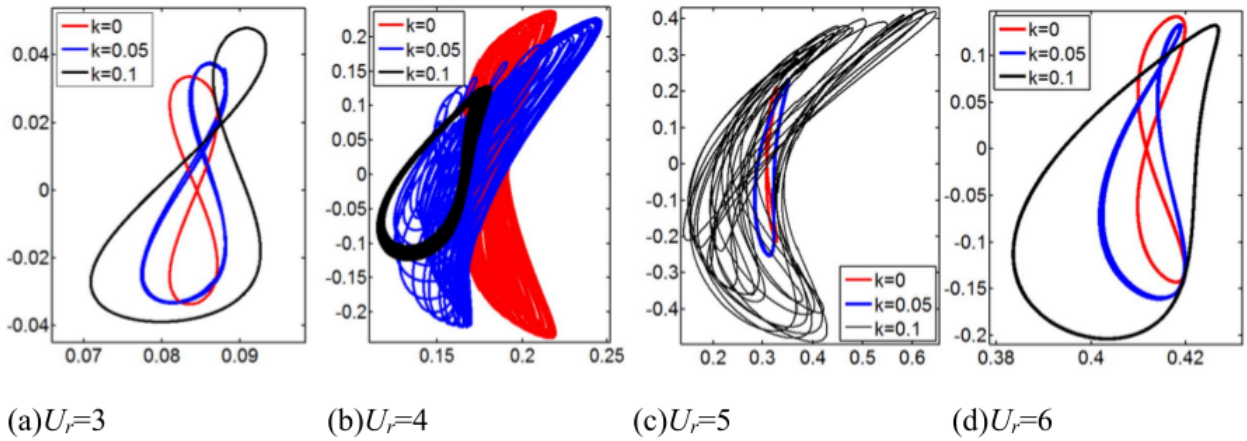


Figure 2.2 Trajectoires d'un cylindre carré en VIV avec les ratios de cisaillement de l'écoulement $k = 0, 0.05$ et 0.1 à $Re = 160$ et à des vitesses réduites variées. Tiré de Sun *et al.* (2017)

2.4 Objectifs

Bruneau *et al.* (1994) ont joué un rôle important dans le développement d'une famille de conditions limites de sortie. Cependant, ils n'ont pas décrit leur mise en œuvre numérique, ni d'analyse quantitative de leur influence sur la solution en fonction de dimension du domaine de calcul. Vingt-et-un ans plus tard, Dong et Shen (2015) proposent de nouvelles conditions limites et en étudient la précision et la robustesse. Cependant, leur étude se limite à la formulation de Laplace $\mathrm{NS_L}$.

Les objectifs de ce mémoire sont :

Objectif 1 Étudier la famille de conditions limites développée par Dong (2015) en repère inertiel ;

Objectif 2 Généraliser les conditions limites au repère accéléré ;

Objectif 3 Appliquer les conditions limites de sortie à l'étude de l'interaction fluide-structure dans un repère accéléré.

CHAPITRE 3 MISE EN ŒUVRE NUMÉRIQUE DES ÉLÉMENTS FINIS ET SPECTRAUX

Nous introduisons dans ce chapitre le raisonnement théorique permettant de résoudre les équations de Navier-Stokes grâce aux méthodes numériques des éléments finis et spectraux. Dans un premier temps nous introduisons les équations en jeu sous leurs différentes formulations ainsi que la méthode de Galerkin. Ensuite, nous considérons les discrétisations spatiales et temporelles nécessaires à la résolution numérique d'écoulements fluides incompressibles. Pour de plus amples informations concernant ces notions, il convient de se référer au manuel de Fortin et Garon (2011). Finalement, nous présentons le logiciel interne au laboratoire LADYF de l'École Polytechnique de Montréal résolvant des problèmes elliptiques selon les techniques décrites ci-après.

3.1 Équations de Navier-Stokes

3.1.1 Formes fortes

Nous nous plaçons dans l'hypothèse d'un fluide newtonien visqueux incompressible. Soient $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ la vitesse du fluide, $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, t)$ la pression et $\boldsymbol{x}$ et t les coordonnées spatiales et temporelles. Les équations qui gouvernent les écoulements fluides incompressibles peuvent s'écrire de différentes manières dans un repère multidimensionnel $\Omega \in \mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3.

Notation 3.1.1 ($\mathbf{NS_L}$) *L'écriture usuelle, connue comme la forme de Laplace, utilise le Laplacien du champ de vitesses*

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \rho(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f} \tag{3.1a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0. \tag{3.1b}$$

Notation 3.1.2 ($\mathbf{NS_D}$) *La littérature cite également la forme divergente, ou de Cauchy, qui utilise la divergence du tenseur des contraintes*

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \rho(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} \tag{3.2a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0. \tag{3.2b}$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ s'exprime en fonction de la pression et de la vitesse

sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mu\boldsymbol{S} = -p\mathbf{I} + \mu(\nabla\boldsymbol{u} + \nabla^t\boldsymbol{u}) \tag{3.3}$$

où $\mathbf{I}$ *est le tenseur identité.*

Ces deux formes sont équivalentes si ρ et μ sont constants. Les forces volumiques qui s'exercent sur le fluide sont rassemblées dans l'écriture de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$.

3.1.2 Conditions limites

Les équations aux limites sont des contraintes imposées sur les valeurs que prennent la solution et dépendent de la nature du système et des variables du problème. Pour les équations de Navier-Stokes, il est nécessaire d'imposer des conditions limites de Dirichlet et de Neumann respectivement sur Γ_D et Γ_N, deux partitions disjointes de la frontière de Ω, $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. Les conditions de Dirichlet imposent la valeur du champ de vitesse

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_D, \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \Gamma_D \tag{3.4}$$

et celles de Neumann imposent les tractions

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\tau_N}, \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \Gamma_N \tag{3.5}$$

où $\boldsymbol{u}_D$ et $\boldsymbol{\tau}_N$ sont la vitesse et la traction imposées sur leur frontière respective et $\boldsymbol{n}$ la normale unitaire à Ω orientée vers l'extérieur. Généralement, lorsqu'aucune condition limite n'est définie sur une partie du bord du domaine, nous imposons la condition limite dite naturelle, ou à traction nulle, telle que $\boldsymbol{\tau_N} = 0$.

3.1.3 Forme faible

Dans la majorité des cas où il n'y a pas d'hypothèse simplificatrice, nous employons une formulation dite faible de ces équations, résolvable numériquement par les méthodes d'éléments finis et spectraux. Il convient d'expliciter quelques notions avant d'écrire la formulation.

Les espaces fonctionnels utilisés ici sont les espaces de Hilbert et de Sobolev définis en Annexe A

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) &= \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \middle| \int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x < \infty \right\} \\ H^1(\Omega) &= \left\{ u \in L^2(\Omega) \middle| \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \right\} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Et leurs normes respectives

$$\begin{aligned} ||u||_{0,\Omega}^2 &= \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x \\ ||u||_{1,\Omega}^2 &= \int_\Omega \left(u^2 + \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right) \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3.7}$$

D'autres espaces de Sobolev, tels que H_0^1 et $H_{\Gamma_0}^1$, existent et sont détaillés en Annexe A.

Notons que nous ne nous référons dans la suite des calculs qu'à la forme $\mathrm{NS_D}$ des équations de Navier-Stokes (éq. (3.2a)-(3.2b)) dans un souci d'allègement des équations.

Dans le cadre des équations de Navier-Stokes, le champ de vitesse $\boldsymbol{u}$ appartient à l'espace de Sobolev $[H^1(\Omega)]^d$, avec d la dimension du problème, et le champ de pression à $L^2(\Omega)$. La formulation variationnelle s'obtient en multipliant l'équation de conservation de la quantité de mouvement (3.2a) par une fonction test $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{V} = (H^1(\Omega))^d$ et en l'intégrant ensuite par parties sur tout le domaine Ω ; puis en multipliant l'équation de continuité (3.2b) par une autre fonction test $q \in \boldsymbol{Q} = L^2(\Omega)$. Les forces volumiques $\boldsymbol{f}$ sont omises pour simplifier les équations.

Nous développons les calculs avec la forme divergence $\mathrm{NS_D}$, qui est plus générale que $\mathrm{NS_L}$.

$$\int_\Omega \boldsymbol{\varphi} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{u} \right) \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\tau} \, \mathrm{d}\Omega \qquad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{V} \tag{3.8a}$$

$$\int_\Omega q (\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}\Omega = 0 \qquad \forall q \in \boldsymbol{Q} \tag{3.8b}$$

En explicitant le tenseur de Cauchy, il vient

$$\int_\Omega \boldsymbol{\varphi} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{u} \right) \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega p \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \mu \boldsymbol{S} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\tau} \, \mathrm{d}\Omega \qquad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{V} \tag{3.9a}$$

$$\int_\Omega q (\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}\Omega = 0 \qquad \forall q \in \boldsymbol{Q} \tag{3.9b}$$

Ces équations constituent la forme faible des équations de Navier-Stokes que nous utilisons dans la suite de l'étude.

Il est également possible d'écrire les équations sous la forme dite variationnelle telle que

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}) + b(\boldsymbol{\varphi}, p) = l(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}) \qquad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{V} \tag{3.10a}$$

$$b(\boldsymbol{u}, q) = 0 \qquad \forall q \in \boldsymbol{Q} \tag{3.10b}$$

où les fonctions suivantes sont introduites $\forall (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}, p, q) \in \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{Q}$

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}) &= \int_\Omega \boldsymbol{\varphi} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{u} \right) \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\Omega \\ b(\boldsymbol{u}, q) &= \int_\Omega q (\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}\Omega \\ l(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}) &= \int_\Gamma \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\tau} \, \mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{3.11}$$

Les applications $l(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$ sont bilinéaires.

3.2 Éléments finis

Dans un premier temps, nous explicitons la méthode de Galerkin qui est un procédé mathématique de discrétisation de problèmes variationnels. Puis, nous introduisons le passage à l'élément de référence, c'est-à-dire la transformation de l'élément réel à l'élément de référence par un changement de variables. Nous présentons dans le même temps différents éléments de référence possibles, sur lesquels la construction des fonctions d'interpolation est envisageable. Finalement, nous expliquons l'intégration numérique, dernière étape de la résolution du système.

3.2.1 Méthode de Galerkin

L'approche de Galerkin est un procédé qui convertit un problème continu en un problème spatialement discret, utilisé dans la résolution numérique d'équations linéaires ou non. Soient $\boldsymbol{u}_h$ et p_h les solutions approchées des équations (3.9a),(3.9b) appartenant aux espaces respectifs $\boldsymbol{V}_h$ et $\boldsymbol{Q}_h$. Notons $(\psi_i)_1^n$ et $(\phi_i)_1^m$ des fonctions linéairement indépendantes de $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{Q}$, formant des bases respectives de $\boldsymbol{V}_h$ et $\boldsymbol{Q}_h$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) \approx \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}, t) &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i(t) \psi_i(\boldsymbol{x}) \quad \in \boldsymbol{V}_h \subset \boldsymbol{V} \\ p(\boldsymbol{x}, t) \approx p_h(\boldsymbol{x}, t) &= \sum_{i=1}^{m} p_i(t) \phi_i(\boldsymbol{x}) \quad \in \boldsymbol{Q}_h \subset \boldsymbol{Q} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Les fonctions $\psi_i \in \boldsymbol{V}_h$ et $\phi_i \in \boldsymbol{Q}_h$ sont appelées les fonctions d'interpolation ou fonctions de Ritz. Il faut déterminer les coefficients $(\boldsymbol{u}_i)_1^n$ et $(p_i)_1^m$ correspondant aux champs de vitesses et de pression discrets. Le problème est alors de dimension finie N et s'écrit :

Trouver $(\boldsymbol{u}_h, p_h)$ tels que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\varphi}_h \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_h}{\partial t} + (\boldsymbol{u}_h \cdot \nabla)\, \boldsymbol{u}_h \right) \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega p_h \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_h \,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \mu \boldsymbol{S}_h \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}_h \,\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \boldsymbol{\varphi}_h \cdot \boldsymbol{\tau} \,\mathrm{d}\Omega \qquad \forall\, \boldsymbol{\varphi}_h \in \boldsymbol{V} \tag{3.13a}$$

$$\int_\Omega q_h (\nabla \cdot \boldsymbol{u}_h) \,\mathrm{d}\Omega = 0 \qquad \forall\, q_h \in \boldsymbol{Q} \tag{3.13b}$$

Nous verrons dans la section suivante comment définir et choisir les fonctions d'interpolation adéquates au problème.

Il faut ensuite construire les fonctions de base $\boldsymbol{\varphi}_h$ et q_h sachant que le système définit ci-dessus est valide pour toute fonction respectivement dans $\boldsymbol{V}_h$ et $\boldsymbol{Q}_h$. Nous pouvons alors les choisir discrétisées telles que $\boldsymbol{\varphi}_h = \bar{\psi}_j$, $\forall j \leq n$ et $q_h = \bar{\phi}_j$, $\forall j \leq m$. La méthode de Rayleigh-Ritz consiste à poser de manière naturelle $\bar{\psi}_j = \psi_j$ et $\bar{\phi}_j = \phi_j$. Dans le cas général où $\bar{\psi}_j \neq \psi_j$ et $\bar{\phi}_j \neq \phi_j$, nous parlons de la méthode de Petrov-Galerkin.

Il est possible d'écrire ce système sous la forme d'un problème matriciel

$$\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{N}(\boldsymbol{U}) - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F} \tag{3.14a}$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{U} = 0 \tag{3.14b}$$

où $\boldsymbol{M}$ est la matrice de masse, $\boldsymbol{U}$ le vecteur solution des vitesses $(u_i)_1^n$, $\boldsymbol{P}$ le vecteur solution de la pression $(p_i)_1^m$, $\boldsymbol{S}\boldsymbol{U}$ la discrétisation des termes visqueux, $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{U})$ la discrétisation des termes non-linéaires convectifs, $-\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}$ la discrétisation du gradient de p et $\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}$ la discrétisation de la divergence de $\boldsymbol{u}$. Le terme de droite $\boldsymbol{F}$ représente toutes les contributions du terme source, de l'intégrale sur le bord et des conditions limites.

La résolution du système d'équations (3.14a),(3.14b) nécessite diverses opérations. Premièrement, le calcul élément par élément amène à une discrétisation du domaine de calcul, appelée maillage. Nous détaillons son rôle dans la section 3.2.2. Deuxièmement, le système est instationnaire par la présence de la dérivée de la vitesse $\dot{\boldsymbol{U}}$, terme qu'il faudra également traiter et discrétiser. Finalement, les équations sont non-linéaires donc il faut introduire une procédure itérative de linéarisation, ce que nous ferons à la section 3.4.

3.2.2 Maillage et élément de référence

Un maillage est une grille structurée ou non composée d'éléments et de nœuds. Chaque élément peut être de longueur, surface ou volume variable selon la dimension utilisée. De plus, nous identifions sur chaque élément n_G nœuds géométriques qui correspondent aux bornes ou sommets de l'élément et définissent localement la géométrie de l'élément. Nous posons également n_I nœuds d'interpolation où les variables du système d'équation seront calculées. Finalement, à chaque nœud géométrique sont associés un ou plusieurs degrés de liberté en fonction du nombre de variables primaires du système. Notons n_D le nombre total de degrés de libertés qui est donc le nombre d'inconnues. Certains degrés de liberté sont fixes car imposés par les conditions limites de Dirichlet, nous les écrivons n_F. Le vecteur $\boldsymbol{U}$ possède alors une partie connue par les conditions limites et $n_D - n_F$ inconnues à calculer.

Le domaine de calcul est discrétisé par le maillage et les équations complexes sont décomposées en une multitude d'équations facilement résolvables selon la méthode de Ritz. La méthode des éléments finis consiste ensuite à choisir un élément de référence sur lequel seront calculées toutes les opérations nécessaires à l'évaluation de la solution. Ainsi, chaque élément physique K du maillage est relié à l'élément de référence $\hat{K}$ par la transformation géométrique suivante :

$$\begin{array}{ccc} \text{Élément physique } K & & \text{Élément de référence } \hat{K} \\ & \overset{(T^K)^{-1}}{\rightleftharpoons} & \\ \boldsymbol{x} = [x, y, z] & \underset{T^K}{} & \boldsymbol{\xi} = [\xi, \eta, \zeta] \end{array}$$

Notons que la transformation est nécessairement inversible et que l'élément considéré est composé de n_G^K nœuds géométriques et n_D^K degrés de liberté. Nous définissons alors sur cet élément de référence une formulation variationnelle élémentaire puis une base d'interpolants. Nous obtenons ainsi le système élémentaire de dimension $n_D^K \times n_D^K$ constitué des matrices et vecteurs élémentaires. Ensuite, à l'aide du jacobien de la transformation géométrique, toutes les équations sont renvoyées aux éléments physiques. Finalement, étant donné que le problème est normalisé, il est possible d'utiliser une intégration numérique sur l'élément $\hat{K}$ applicable sur des intervalles normalisés.

Concernant la forme des éléments, notons qu'il est aisé de concevoir un maillage 1D, constitué de segments de droites où uniquement la taille des éléments varie. Dans les dimensions supérieures, il est nécessaire de s'intéresser à différentes formes d'éléments dont la taille des arêtes, la surface, le volume ou encore le nombre de côtés peuvent varier. Nous pouvons citer les triangles et quadrangles en 2D et les tétraèdres et hexaèdres en 3D sur lesquels sont inter-

polés géométriquement les éléments. Nous détaillons dans la figure 3.1 un passage à l'élément de référence quadratique contenant 9 degrés de liberté.

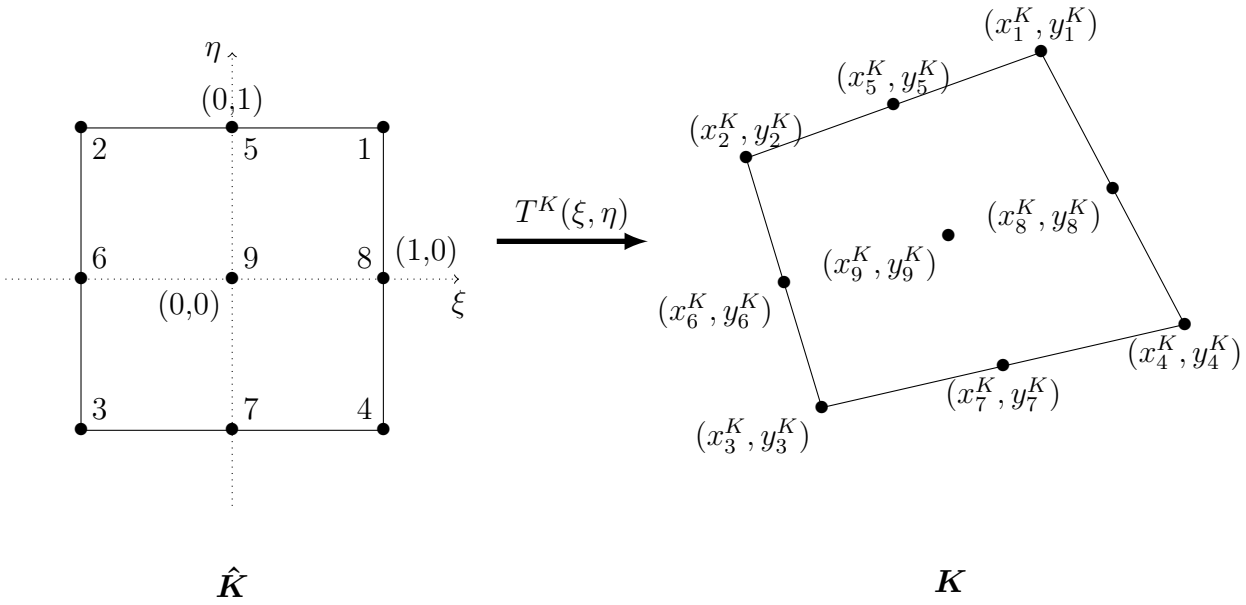


Figure 3.1 Transformation linéaire sur un quadrangle avec $n_D^K = 9$

Nous choisissons et utilisons dans la suite de cette étude des quadrangles pour discrétiser la géométrie.

Nous devons maintenant nous pencher sur le choix des polynômes d'interpolation à définir sur l'élément de référence et leur condition d'admissibilité.

3.2.3 Polynômes d'interpolation

Dans cette section, nous traitons dans un premier temps les éléments admissibles pour des applications bidimensionnelles. Deux groupes se distinguent généralement pour le type d'élément étudié ici : les éléments à pression continue de Taylor-Hood (Taylor et Hood, 1973) et ceux à pression discontinue de Crouzeix-Raviart (Crouzeix et Raviart, 1973).

Dans les éléments de Taylor-Hood notés P_2P_1, la vitesse est approchée par un polynôme quadratique et la pression par un polynôme linéaire, voir figure 3.2.

En revanche, la méthode développée par Crouzeix-Raviart est caractérisée par une pression discontinue sur les frontières de l'élément. La vitesse est généralement approchée par des polynômes de degré 2 et enrichie d'une fonction dite bulle de degré 3 associée à un nœud placé au barycentre de l'élément. Le nombre de degrés de liberté en pression discontinue est

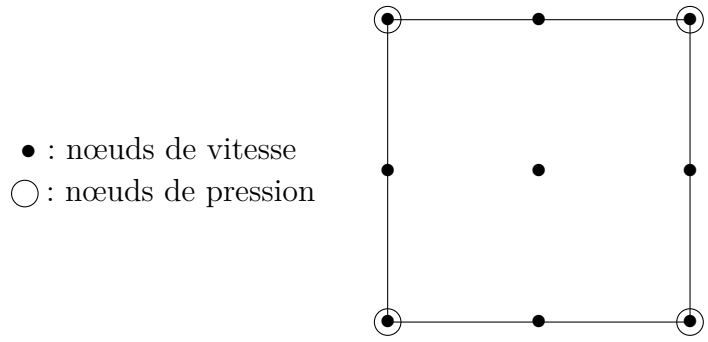


Figure 3.2 Élément de référence de Taylor-Hood (P_2P_1)

donc plus important qu'en pression continue et l'intégration numérique s'en trouve également impactée. À titre informatif, ils sont généralement notés $P_2^+P_1$ sur un élément triangulaire et $Q_2^+P_1$ sur un quadrilatère (*c.f.* Fortin et Garon (2011)).

Ces deux familles d'éléments vérifient la condition de stabilité de Brezzi-Babuska (Brezzi, 1974; Babuska *et al.*, 1981), ou *inf-sup*, assurant ainsi l'existence et l'unicité de la solution. Pour cela, nous devons montrer qu'il existe une constante β telle que la forme bilinéaire b vérifie :

$$\inf_{q_h \in \boldsymbol{Q_h}} \sup_{\boldsymbol{\varphi_h} \in \boldsymbol{V_h}} \frac{b(\boldsymbol{\varphi_h}, q_h)}{\|q_h\|_{0,\Omega} \|\boldsymbol{\varphi_h}\|_{1,\Omega}} \geq \beta > 0 \tag{3.15}$$

Nous utilisons dans la suite de l'étude uniquement les couples de polynômes vitesse-pression de type Taylor-Hood P_kP_{k-1}, définis de la même manière que les P_2P_1 ci-dessus.

Ensuite, il faut construire une famille de fonctions permettant d'interpoler les champs de vitesse et de pression sur ces éléments géométriques. La méthode des éléments finis utilise typiquement l'interpolation Lagrangienne à cet effet. Celle-ci est définie par une base de fonctions polynomiales $L_i(\xi)$ de degré maximal m

$$L_i(\xi) = \prod_{j \neq i}^{m} \frac{\xi - \xi_i}{\xi_j - \xi_i} \tag{3.16}$$

qui prend une valeur unitaire aux points de collocation $\boldsymbol{\xi}_j$ et s'annule ailleurs

$$L_i(\boldsymbol{\xi}_j) = \delta_{ij} \qquad \forall\, i, j \leq n_G^K \tag{3.17}$$

Avec cette définition en tête, il est possible de donner une signification physique à la transformation géométrique T^K et aux champs de vitesse $\boldsymbol{u}_h$ et p_h du système (3.12). En effet, à

chaque nœud de calcul $\boldsymbol{x}_i^K$ correspond un nœud d'interpolation $\boldsymbol{\xi}_i$ sur l'élément de référence, donc la transformation géométrique devient

$$T^K(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n_G^K} \boldsymbol{x}_i^K L_i(\boldsymbol{\xi}) \tag{3.18}$$

De plus, les fonctions d'interpolation précédemment nommées ψ_i et ϕ_i, respectivement des champs de vitesses et de pression, sont également des polynômes de Lagrange

$$\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i(t) L_i(\boldsymbol{\xi}) \tag{3.19}$$

$$p_h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{m} p_i(t) L_i(\boldsymbol{\xi}) \tag{3.20}$$

où $\boldsymbol{u}_i(t)$ et $p_i(t)$ représentent les valeurs des champs interpolés aux points de collocation. La solution peut maintenant être interpolée sur l'élément de référence en fonction du nombre de degrés de liberté imposés par Taylor-Hood. Puis nous pouvons obtenir les valeurs de la solution en tout point du domaine grâce à la transformation géométrique.

3.2.4 Intégration numérique

Toutes les fonctions nécessaires à la résolution du système principal sont maintenant connues, il reste à en déterminer les coefficients. Le calcul de ces derniers nécessite le recours à l'intégration numérique, qui calcule exactement ou approche une intégrale à l'aide d'une somme pondérée de points d'intégration. Son but est d'obtenir la meilleure estimation numérique de l'intégrale d'une fonction $f(\xi)$ en choisissant les abscisses des N points d'intégration ξ_i et poids w_i sur lesquels est évaluée la fonction

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{N} w_i f(\xi_i) \tag{3.21}$$

Nous présentons ici deux quadratures pour une fonction unidimensionnelle : celle de Gauss-Legendre et celle de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL). L'intégration dans les dimensions supérieures ne présente pas de difficulté particulière à l'exception de l'augmentation du nombre de points d'intégration.

À titre informatif, les polynômes de Legendre $P_N(\xi)$ sont définis de la manière suivante

$$P_N(\xi) = \frac{1}{2^N N!} \frac{d^N}{d\xi^N} [(\xi^2 - 1)!] \tag{3.22}$$

De plus, la quadrature définie sur N points calcule exactement l'intégrale uniquement pour des polynômes P_N en deçà d'un certain degré propre à la quadrature. Il convient donc d'introduire une erreur d'intégration E_N qui sera évaluée pour les deux méthodes présentées

$$E_N = \int_{-1}^{1} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi - \sum_{i=1}^{N} w_i f(\xi_i) \tag{3.23}$$

Quadrature de Gauss-Legendre La théorie de la quadrature de Gauss stipule que les abscisses des points d'intégration d'une quadrature à N points sont exactement les racines des polynômes de Legendre. Cette quadrature est optimale, car calcule exactement tous les polynômes jusqu'à un degré $2N - 1$.

Quadrature de Gauss-Lobatto-Legendre Cette méthode est une quadrature de Gauss dont les abscisses des points aux bords de l'intervalle sont fixés et inclus dans le total des N points d'intégration. Il reste donc $N - 2$ abscisses libres à fixer. Celles-ci sont symétriques par rapport à l'origine sur l'intervalle $[-1; 1]$ et sont les racines du polynôme de Legendre P'_{N-1}, de degré $2N - 3$.

Cette quadrature est moins efficace que la quadrature de Gauss-Legendre, car elle intègre un polynôme de degré moindre pour un même nombre de points d'intégration. Elle présente cependant des avantages majeurs dont l'efficacité est prouvée dans le développement de la méthode des éléments spectraux.

3.3 Problème instationnaire

Nous nous sommes intéressés jusqu'alors à la résolution d'un problème stationnaire ; or, le système (3.14a)-(3.14b) contient un terme temporel. Son approximation fait l'objet de nombreuses études et est obtenue à partir de la valeur du champ de vitesse aux instants précédents. De nombreux schémas de discrétisation et d'intégration existent et traitent de cette dépendance temporelle. En général, nous distinguons les méthodes implicites des méthodes explicites et les méthodes à un pas (*one-step*) de celles à pas multiples (*multi-step*). Par exemple, dans la plupart des équations différentielles ordinaires numériques, la dérivée temporelle est remplacée par la discrétisation

$$\dot{\boldsymbol{U}} = \frac{\boldsymbol{U}^k - \boldsymbol{U}^{k-1}}{\Delta t} \tag{3.24}$$

où k est le temps de résolution et $k-1$ l'instant précédent. Une méthode est explicite si le terme $\boldsymbol{SU}$ est uniquement dépendant de l'instant $k-1$. Dès qu'il prend en compte le terme suivant k, la méthode est implicite.

Méthodes à un pas Parmi les nombreuses méthodes à une étape résolvant le système matriciel, nous pouvons citer le θ-schéma. Par simplicité, nous négligeons le terme non-linéaire tel que

$$\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{SU} - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F} \tag{3.25a}$$

$$\boldsymbol{BU} = 0 \tag{3.25b}$$

et le θ-schéma s'écrit

$$\boldsymbol{M}\frac{\boldsymbol{U}^k - \boldsymbol{U}^{k-1}}{\Delta t} + \theta(\boldsymbol{SU}^k - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}^k) + (1-\theta)(\boldsymbol{SU}^{k-1} - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}^{k-1}) = \theta\boldsymbol{F}^k + (1-\theta)\boldsymbol{F}^{k-1} \tag{3.26a}$$

$$\boldsymbol{BU}^k = 0. \tag{3.26b}$$

Les valeurs usuelles de θ sont 0, 1 et 1/2 pour les méthodes respectives d'Euler explicite, Euler implicite et de Crank-Nicholson. Il est important de noter que nous écartons les schémas explicites car, dans le cas où la convection possède un rôle dominant, ils sont conditionnellement stables et le choix du pas de temps est réduit. Tandis que les méthodes implicites sont inconditionnellement stables jusqu'à l'ordre 2 et la précision en temps est supérieure.

Méthodes à pas multiples Ces méthodes calculent la dérivée temporelle du champ de vitesse en utilisant les valeurs de plusieurs pas de temps précédemment calculés, augmentant ainsi la précision de l'approximation. Nous pouvons citer les méthodes d'Adam-Bashforth, d'Adam-Moulton et BDF (*Backward Differentiation Formula*). Nous partons du champ de vitesse

$$\sum_{l=0}^{s} \alpha_l \boldsymbol{U}^{k+l} = \beta f(t^{k+s}, \boldsymbol{U}^{k+s})\Delta t \tag{3.27}$$

pour une méthode d'ordre s, où les coefficients α_l et β sont choisis en fonction de la méthode utilisée.

La méthode BDF est inconditionnellement stable pour les ordres $s = 1$ et 2 (respectivement les schémas d'Euler implicite et de Gear) et inconditionnellement instable dès que $s > 6$. Utiliser des ordres supérieurs à BDF_2 permet notamment d'approcher la solution exacte avec une meilleure précision et apporte un gain en performance. Celui-ci est d'autant plus

important avec l'utilisation de méthodes adaptatives en ordre et en pas de temps (Hay *et al.*, 2015a,b).

3.4 Problème non-linéaire

3.4.1 Méthode de Newton

Le traitement du terme non linéaire convectif du système (3.14a)-(3.14b) nécessite l'introduction d'une procédure itérative, qui peut se résumer à

```
estimation initiale des champs de vitesse et de pression;
while solution n'a pas convergé do
    linéariser les équations non-linéaires basée sur la solution précédente ;
    résoudre le système linéarisé;
end
```

Algorithme 1 : Algorithme de Newton

Dans un premier temps, nous condensons le système matriciel (3.14a)-(3.14b) en un problème réduit

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}) \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{G} \tag{3.28}$$

où $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X})$ est la matrice globale et non-linéaire, $\boldsymbol{X}$ le vecteur à déterminer et $\boldsymbol{G}$ le terme de droite intégrant les termes aux bords, les termes sources et les variations temporelles.

Dans un second temps, nous introduisons le résidu de la solution

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}) = -\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}) \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{G} \tag{3.29}$$

et son seuil de tolérance ε_R fixé heuristiquement. Lorsque $||\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})|| < \varepsilon_R$, nous considérons que la solution a convergé.

Supposons que la solution $\boldsymbol{X^k}$ au temps précédent k ait été calculée. Au pas de temps suivant, nous perturbons cette solution d'une valeur $\boldsymbol{\delta X}$ telle que $\boldsymbol{X^{k+1}} = \boldsymbol{X^k} + \boldsymbol{\delta X}$, qui doit vérifier

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X^{k+1}}) = \boldsymbol{0}. \tag{3.30}$$

Le développement en série de Taylor à l'ordre 1 donne

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X^{k+1}}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X^k}) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{X}) \cdot \boldsymbol{\delta X} + \mathcal{O}(\boldsymbol{\delta X}^2) \tag{3.31}$$

où $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{X}) = \dfrac{\partial \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X^k})}{\partial \boldsymbol{X}}$ est la matrice Jacobienne de $\boldsymbol{R}$. En combinant les équations (3.30) et

(3.31), nous obtenons :

$$-\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X^k}) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{X}) \cdot \boldsymbol{\delta X}. \tag{3.32}$$

Au pas de temps k, nous calculons le résidu et la matrice Jacobienne à partir des itérations actuelle et précédente. Puis $\boldsymbol{\delta X}$ s'obtient généralement directement par une décomposition LU. Il est ainsi possible de converger vers une solution à partir d'une solution $\boldsymbol{X_0}$ du système initial et de déduire la valeur de $\boldsymbol{X^{k+1}} = \boldsymbol{X^k} + \boldsymbol{\delta X}$.

Notons que la solution a convergé lorsque les critères suivants sont respectés

$$||\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X^k})|| \leq \varepsilon_R \tag{3.33a}$$

$$||\boldsymbol{\delta X}|| \leq \varepsilon_X \tag{3.33b}$$

avec ε_R et ε_X les seuils de tolérance en résidu et en correction choisis par l'utilisateur.

3.4.2 Optimisations

Le calcul analytique de la matrice Jacobienne $\boldsymbol{J}$ n'est usuellement pas envisageable lors de la résolution de systèmes complexes, *e.g.* pour des problèmes comprenant des dizaines voire centaines de milliers de degrés de libertés. Pour pallier ce problème, nous utilisons une méthode numérique basée sur la méthode des différences finies, après avoir perturbé un à un les termes du résidu. Les dérivées partielles s'obtiennent par le calcul de

$$J_{ij} = \frac{R_i(X_j + \delta X_j) - R_i(X_j)}{\delta X_j} \tag{3.34}$$

De plus, la méthode de Newton fait appel à la décomposition LU en plus de l'inversion de la matrice Jacobienne afin de résoudre le système (3.32). Cette étape est très coûteuse en ressources, en espace mémoire et en temps de calcul. Il est ainsi commun d'utiliser la méthode de Newton dite modifiée où la matrice Jacobienne n'est pas calculée à chaque itération. Ainsi, selon l'heuristique mise en œuvre, le programme peut choisir de reprendre la factorisation la plus récente pour résoudre le système si le résidu n'a pas augmenté, au lieu de forcer la refactorisation à chaque étape. Cette méthode suppose alors l'introduction d'un seuil de tolérance ε_{BDF} sur le résidu et la correction. Celui-ci gérera heuristiquement la nécessité d'une refactorisation de la matrice : si les différences du résidu et de la correction entre deux itérations sont inférieures à la tolérance fixée, le code forcera une factorisation complète de la matrice afin d'obtenir un résidu et une correction plus satisfaisants. Sinon, l'ancienne factorisation calculée sera réutilisée. Cette approche permet une réduction considérable des

coûts de calculs au détriment d'une légère perte en précision.

3.5 Éléments spectraux

La méthode des éléments spectraux (SEM, pour *Spectral Element Method*) est une famille de schémas d'approximation dérivée de la méthode des éléments finis (FEM, pour *Finite Element Method*) et basée sur la méthode de Galerkin. Les points communs des deux méthodes sont nombreux tels que l'utilisation d'une base de fonctions d'interpolation de Lagrange, d'une quadrature de Gauss ou encore des éléments de Taylor-Hood.

Nous proposons tout d'abord d'expliciter les différentes versions des éléments finis ainsi que leurs spécificités. Ensuite, nous détaillons les particularités propres aux éléments spectraux et ses avantages.

3.5.1 Améliorations de la méthode des éléments finis

Supposons un problème elliptique discrétisé spatialement sur un maillage grossier, interpolé par une base Lagrangienne de faible degré – interpolation quadratique en vitesse et linéaire en pression (soit P_2P_1) – et intégré numériquement par la quadrature de Gauss-Legendre. Cette résolution est typique de la méthode des éléments finis. Nous exposons ici deux versions différentes de cette méthode pour améliorer la précision et l'exactitude des résultats. Elles sont nommées h-FEM et p-FEM, où h et p font respectivement référence à la taille des éléments du maillage et le degré d'interpolation des polynômes.

***h*-FEM** La manière la plus évidente est de raffiner le maillage, donc de diminuer la taille de tous les éléments géométriques et d'augmenter leur nombre. Cette technique permet une augmentation du taux de convergence d'ordre $\mathcal{O}(h^2)$ au maximum pour l'interpolation quadratique en vitesse. La résolution précise d'un problème nécessite ainsi un maillage extrêmement fin et un nombre considérable d'éléments. Or, la taille du système matriciel augmente avec la taille du maillage, par conséquent la complexification de la résolution et les coûts de calcul s'en trouvent fortement impactés.

***p*-FEM** La seconde technique contraste le paragraphe précédent en fixant le nombre d'éléments du maillage et le changement dans la technique de discrétisation est introduit par une augmentation du degré des interpolants $p \to \infty$. La convergence est spectrale car l'erreur numérique décroît plus rapidement que n'importe quelle puissance de $1/p$ (Pozrikidis, 2005). Cependant, cette méthode est rarement utilisée telle quelle car l'augmentation trop

importante du degré des interpolants mène à l'apparition de fortes oscillations aux bords de l'élément pour des points de collocation uniformément répartis. Runge a prouvé que ce phénomène altère profondément la précision des résultats. Babuska *et al.* (1981) présentent une interprétation de cette p-version utilisant une base polynomiale hiérarchique et démontrent que le taux de convergence est généralement bien supérieur à la h-version pour un même nombre de degrés de liberté.

***hp*-FEM** La combinaison des deux techniques de raffinement précédentes s'obtient simultanément en raffinant le maillage et en augmentant le degré des interpolants. À cet égard, cette optimisation utilise la méthode d'adaptation du maillage, qui ajuste le nombre d'éléments et en déforme adéquatement la structure afin d'approcher au mieux les phénomènes physiques et de réduire les coûts de calculs.

3.5.2 Méthode des éléments spectraux

La spécificité de cette méthode réside dans la dépendance rigoureuse entre les polynômes orthogonaux et la quadrature de Gauss. Dans les versions h- et p-FEM, l'orthogonalité est uniquement due au non-recouvrement des fonctions locales ; tandis qu'elle est reliée à la fois à la nature topologique et au caractère analytique des fonctions de base (Deville *et al.*, 2002) pour la SEM. Les deux cas numériques décrits dans la suite calculent l'interpolation de Lagrange sur la base nodale de la quadrature de Gauss-Lobatto mais diffèrent sur le choix des polynômes.

Patera (1984) propose en premier l'utilisation des polynômes de Chebyshev pour leur association avec les transformations de Fourier rapides. Les résultats produisent les taux de convergence exponentiels attendus de la méthode des éléments spectraux. Cependant, l'évaluation des matrices requiert le calcul analytique des quadratures qui s'avère une technique fastidieuse et lourde.

Rønquist et Patera (1987) mettent en œuvre une procédure plus directe utilisant les polynômes de Legendre sur la grille de la quadrature de Gauss-Lobatto-Legendre. Dans ce cas-ci, les points d'intégration ne sont plus répartis uniformément et bornent le phénomène de Runge aux bords. Les points d'intégration et d'interpolation sont situés aux mêmes coordonnées amenant à une orthogonalité discrète par la quadrature GLL. Sans rentrer dans les détails, la matrice masse devient diagonale et son inversion s'en retrouve simplifiée.

Le développement de la méthode des éléments spectraux s'est concentré sur l'amélioration de la méthode des éléments finis afin d'augmenter la précision des résultats numériques en gardant un même nombre de degrés de libertés. L'objectif est atteint par l'augmentation

du degré des polynômes et par le changement des polynômes utilisés ainsi que leur base nodale. Le conditionnement de la matrice s'en trouve amélioré et le taux de convergence devient spectral. Finalement, les coûts de calculs et l'espace mémoire sont réduits pour une même précision. Notons tout de même que les méthodes spectrales souffrent de certains inconvénients majeurs tels que leur difficulté à mettre en œuvre numériquement ainsi que le coût de calcul par degré de liberté.

3.6 Mise en œuvre numérique

Suite à la théorie de la méthode des éléments finis et spectraux expliquée brièvement dans les sections précédentes, de nombreux chercheurs et ingénieurs ont écrit et codé des logiciels résolvant des problèmes aérothermiques. Sous la direction du professeur André Garon, l'équipe du LADYF de l'École Polytechnique de Montréal a mis en œuvre un logiciel interne en C++, basé sur le solveur d'Intel MKL PARDISO. Il résout et simule des problèmes multi-dimensionnels thermiques et fluides, aussi bien stationnaires que temporels. Nous détaillons dans un premier temps les entrées et paramètres d'une simulation, puis la méthode de résolution du logiciel EF6. Enfin, nous expliquons comment il est possible de visualiser la simulation calculée et d'en retirer des informations mathématiques telles que des normes, des forces ou des moyennes. Le tout est résumé dans la figure 3.3.

Moulin (2016) a réalisé une parallélisation imbriquée à deux niveaux, optimisant le code *via* l'interface de programmation OpenMP. Grâce à une meilleure utilisation du nombre de *threads* et de l'*hyperthreading*, les gains en temps d'exécution atteignent jusqu'à 25% dans les cas les plus complexes : en 3D et avec un degré d'interpolation élevé. L'auteur avertit tout de même l'utilisateur d'une manipulation abusive de la parallélisation, qui peut être néfaste lorsque le nombre de *threads* est supérieur au nombre d'éléments par *couleur* du maillage.

3.6.1 Entrées

Un maillage fixe généré à l'aide du logiciel *open-source* Gmsh (Geuzaine et Remacle, 2009) définit le type d'éléments choisis, le nombre de nœuds de calculs ainsi que les frontières physiques du domaine. L'extension `.mesh` utilisée par Gmsh n'est pas lisible telle quelle par le logiciel EF6 d'où l'introduction d'un utilitaire de traduction. Ce dernier renumérote les nœuds géométriques par élément car Gmsh et EF6 ne lisent pas de la même manière les éléments géométriques.

La définition des paramètres se fait en amont dans un fichier `.eqs` ; celui-ci est divisé en groupes de configuration. L'utilisateur explicite alors le maillage utilisé, fixe les tolérances en

correction, en résidu et en factorisation pour le solveur MKL PARDISO, décide de la méthode de résolution temporelle ou stationnaire, précise des formes faibles nécessaires à la résolution, indique les conditions limites aux frontières et peut imposer des calculs en post-traitement. Nous reviendrons sur les différents paramètres plus tard.

Le programme est divisé en trois exécutables *S*, *T* et *G*. Les deux premiers résolvent respectivement les problèmes stationnaires et transitoires. Le dernier est un traducteur utilisé pour visualiser les champs de vitesse, de pression et de température dans le logiciel Tecplot.

3.6.2 Cœur du code

En fonction du degré des interpolants, de l'ordre d'intégration et du nombre de degrés de liberté choisis, le programme mobilise les ressources mémoire nécessaires. S'en suit alors l'initialisation du solveur MKL PARDISO qui organise le système matriciel. Ce solveur externe développé originellement en *open-source* (Petra *et al.*, 2014a,b) a été adapté à la librairie d'Intel MKL par la suite, et c'est cette version qu'emploie le code EF6. Afin de connaître l'emplacement des termes non-nuls de la matrice non-linéaire globale $\boldsymbol{A}$, le solveur la factorise symboliquement sans connaître la valeur de ses termes. Cela est possible en connaissant la connectivité des éléments, l'agencement des équations et la répartition des degrés de liberté. Cette étape est réalisée une seule fois et allégera les nombreux calculs numériques inscrits dans la boucle suivante.

L'étape de résolution numérique commence alors et peut comprendre des centaines voire des milliers de passages dans la boucle. Supposons une simulation stationnaire où la boucle de temps disparaît. Le programme calcule dans un premier temps le résidu élémentaire de la matrice, qui est ensuite calculée soit directement soit *via* le résidu. Le solveur MKL PARDISO construit le système matriciel et le factorise numériquement afin de procéder à la décomposition LU, c'est-à-dire sous la forme $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$, avec $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{U}$ deux matrices triangulaires respectivement inférieure et supérieure. Cela engendre la résolution du système complet par MKL PARDISO et finit l'itération de factorisation.

L'itération est validée et le programme peut passer au calcul de post-traitement, si les normes des vecteurs résidu et correction vérifient les tolérances respectives. Dans le cas contraire, la méthode de Newton est recommencée en partant des valeurs précédemment calculées ; et ainsi de suite jusqu'à ce que leurs valeurs soient acceptées. La tolérance de factorisation entre alors en jeu et est généralement quelques ordres de grandeur plus faible que les tolérances de résidu et de correction. Lors du calcul d'une nouvelle itération, les normes des vecteurs résidu et correction sont comparées aux valeurs à l'itération précédente. Si la différence est inférieure à la tolérance imposée, le programme oblige la refactorisation numérique de la matrice globale.

Sinon, la décomposition effectuée à l'itération précédente est à nouveau utilisée et les termes de la matrice élémentaire ne sont pas recalculés.

Dans le cas d'une simulation temporelle, le programme utilise une résolution adaptative en ordre et en pas de temps (Hay *et al.*, 2015a,b). L'adaptation *hp* en temps s'effectue sur le choix de l'ordre p de la méthode BDF (généralement compris entre 1 et 4) ainsi que sur la taille du pas de temps h. À chaque étape de temps, la boucle d'itérations définie précédemment est réalisée. Si la valeur de la norme de l'erreur est insuffisante, l'étape est relancée à un pas de temps plus faible et l'algorithme de Newton est effectué à nouveau intégralement. Au contraire, si l'erreur est convenable, le programme calcule l'erreur temporelle et le pas de temps pour chaque ordre BDF. La méthode *hp* choisit alors l'ordre de la méthode BDF et le pas de temps associé en fonction de la valeur de l'erreur par rapport à la tolérance de discrétisation temporelle définie dans le fichier de configuration.

La résolution temporelle s'arrête lorsque le temps atteint ou dépasse le temps final imposé par l'utilisateur. Notons qu'il est également possible d'imposer un pas de temps et un ordre fixes.

3.6.3 Sorties et post-traitement

La résolution est terminée, par conséquent les structures de données sont supprimées et la mémoire allouée est libérée.

Le programme rend également disponible la possibilité de sauvegarder certaines données au cours de la simulation. En effet, selon les paramètres imposés dans le fichier d'entrée, le programme peut écrire les vecteurs solutions pour chaque pas de temps, pour un nombre sélectionné de pas de temps ou encore pour uniquement le dernier pas de temps. Ces fichiers peuvent alors être traduits grâce à l'exécutable G et manipulés dans Tecplot. De plus, des méthodes de post-traitement telles que le calcul de normes, de forces par la méthode des réactions (Wasselet, 2016) ou encore de la valeur du champ de solution à un certain point du domaine sont applicables. Celles-ci sont réalisées à chaque pas de temps et les résultats sont inscrits dans un fichier séparé. Notons qu'il est également possible de réutiliser un fichier de vecteurs solutions sorti par EF6 comme entrée d'une nouvelle simulation. Cela est possible à condition que le maillage soit le même et que le nombre de degrés de liberté soit identique.

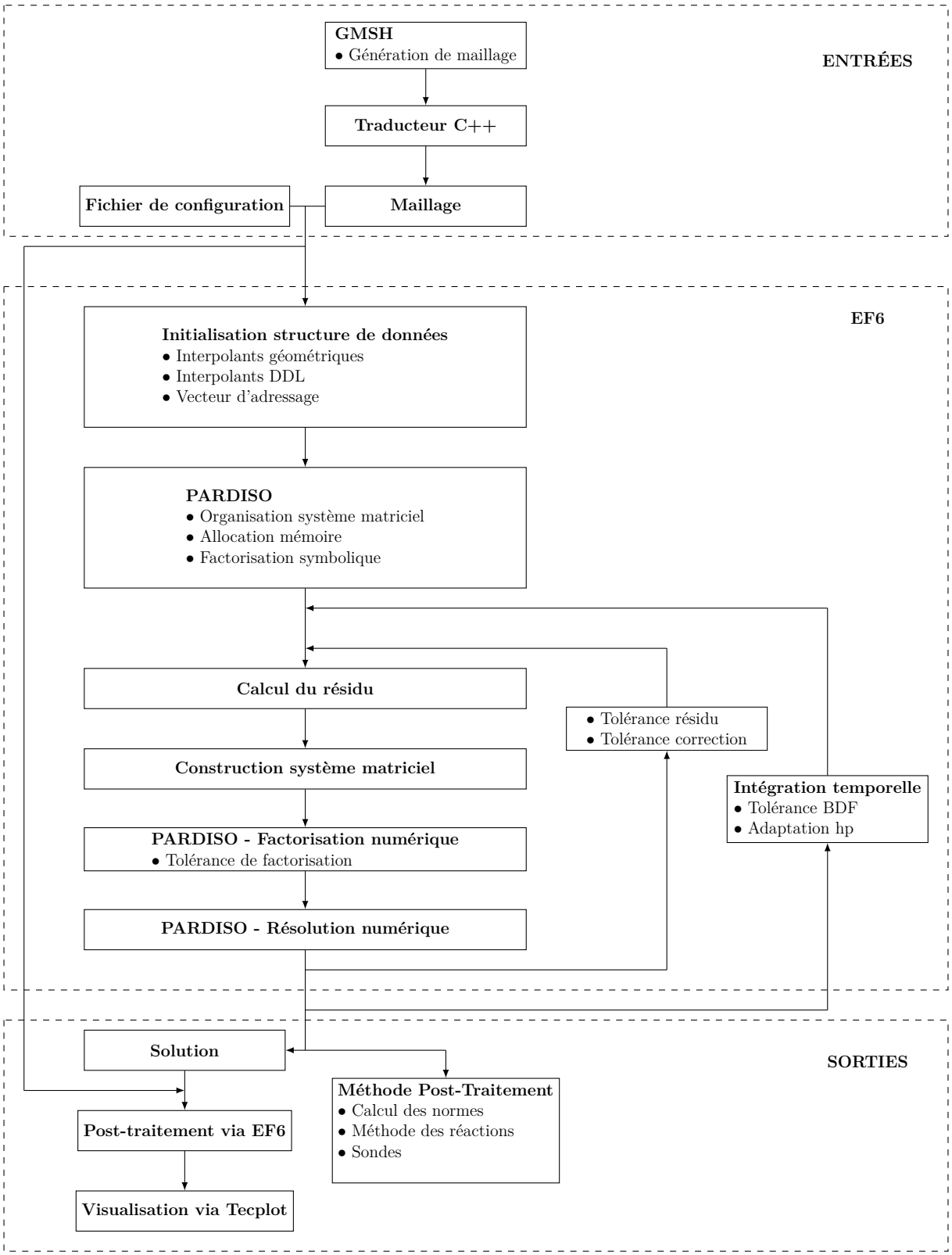


Figure 3.3 Procédure de calcul et fonctionnement d'EF6, tiré de Wasselet (2016)

CHAPITRE 4 VÉRIFICATION ET VALIDATION DU CODE

4.1 Méthodologie

L'étape de vérification et validation d'un code numérique, qu'il soit scientifique ou commercial, est cruciale dans le développement de celui-ci. C'est le moyen primaire pour attester de la précision et de la fiabilité des résultats dudit code, et ainsi assurer la véracité des résultats futurs. Il est nécessaire que l'utilisateur se pose les deux problématiques suivantes :

— Le code résout-il bien les équations demandées ?
— Le code résout-il les bonnes équations ?

Dans un premier temps, la vérification confirmera que l'implémentation numérique du modèle théorique a été effectuée correctement. Si non, elle permettra l'amélioration du code à travers la correction d'erreurs de programmation ou du changement de méthode de résolution. Ensuite, la validation insistera sur la physique du logiciel, à savoir si les résultats numériques produits concordent avec ceux tirés d'expériences antérieures. Notons que les résultats obtenus numériquement par un code vérifié et validé peuvent également servir de référence.

Afin de vérifier la bonne mise en œuvre de la discrétisation spatiale, nous présentons dans un premier temps la méthode des solutions manufacturées en stationnaire sur une géométrie simple. Ensuite, les résultats obtenus par Qian et Vezza (2001) et Xu et Pasquetti (2004) sont reproduits à haut nombre de Reynolds sur différentes tailles de domaines afin d'étudier l'effet des conditions limites de sortie et de vérifier l'implémentation de la discrétisation temporelle.

Les étudiants précédant ce mémoire ont déjà effectué et participé à la vérification et la validation du code EF6 à travers d'autres exemples. La méthode de vérification et validation est cependant un processus continu et chacun (Moulin, 2016; Wasselet, 2016) vérifie une portion différente du code. En se basant sur les études précédentes, nous vérifions que les fonctionnalités de celui-ci sont toujours opérationnelles et mettons l'emphase sur la vérification de la discrétisation temporelle.

4.2 Vérification de la discrétisation spatiale

La méthode des solutions manufacturées consiste à construire une solution à un problème donné afin de vérifier que le code converge vers cette solution (Roache, 1998). En mécanique des fluides numérique, cela consiste à trouver les termes sources correspondant à cette solution puis à les imposer sur les frontières du domaine de calcul ou sur le volume. Il suffit ensuite

de résoudre numériquement le problème puis de déterminer l'erreur entre la solution exacte et les résultats obtenus. La convergence de l'erreur numérique, et plus particulièrement la détermination du taux de convergence, garantira le processus de vérification. Cela permettra d'évaluer le bon fonctionnement, la robustesse et la précision du code.

De plus, nous détaillerons les résultats des méthodes de résolution FEM et SEM dans l'objectif de comparer leurs propriétés.

Nous considérons un écoulement stationnaire dans un domaine simple à $Re = 1$ et à une masse volumique constante unitaire $\rho = 1$. Soit $[0; L] \times [0; L]$ le premier domaine de calcul avec $L = 1$ la longueur caractéristique du carré, composé initialement d'un unique élément quadratique. Nous imposons un angle θ à ce carré, avec $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ comme montré à la figure 4.1. Cela évite d'avoir un système de coordonnées alignées.

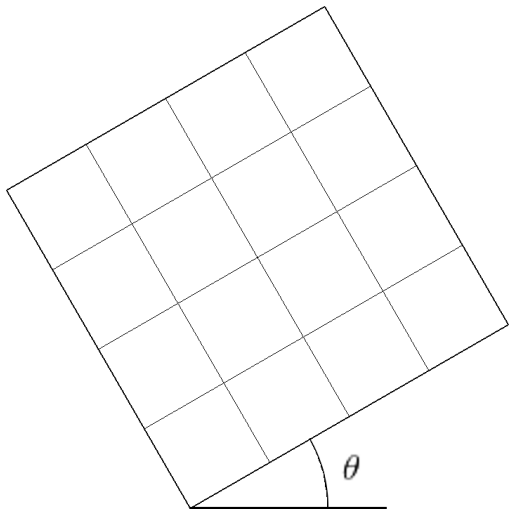


Figure 4.1 Géométrie et maillage, de 16 éléments quadratiques ici (raffinement $h/4$)

Nous définissons à la table 4.1 deux solutions manufacturées construites avec des champs de vitesse et de pression. Les solutions exactes sont relativement complexes et sont définies avec des outils mathématiques différents : des puissances, des fonctions géométriques et des exponentielles.

La solution transcendante est tracée sur le domaine $[0, 1] \times [0, 1]$ dans la Figure 4.2.

L'étude s'appuie sur cinq h-raffinements et donc sur six maillages comprenant de 1 à 1024 éléments. Les interpolations considérées dans la méthode FEM sont uniquement linéaire P_2P_1 et quadratique P_3P_2. La méthode SEM emploie un degré d'interpolation allant jusqu'à $P_{12}P_{11}$.

Les figures 4.3 et 4.4 soulignent parfaitement la différence de comportement des deux méthodes de résolution. La figure 4.3 correspond à la première solution manufacturée calculée

Tableau 4.1 Solutions manufacturées. Expressions des champs de vitesses et de pression pour les deux solutions

Solution	$u =$	$v =$	$p =$
polynomiale	$x^{10} + y^{10}$	$-10x^9y$	$x^{10}y^{10}$
transcendante	$\frac{\sin(20x+20y)}{10} + xy$	$-\frac{\sin(20x+20y)}{10} - \frac{y^2}{2}$	$\exp(x+y-1)$

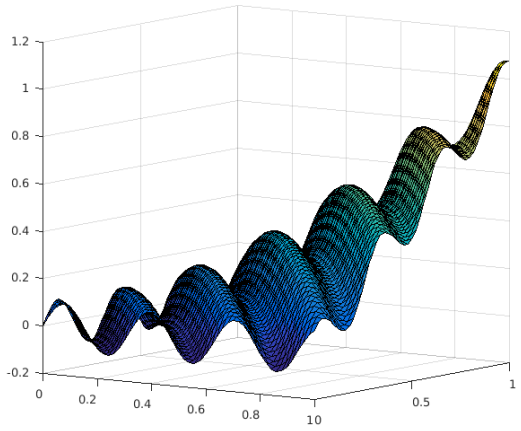


Figure 4.2 Solution transcendante $u(x, y) = \frac{\sin(20x+20y)}{10} + xy$

sur un domaine incliné de $\theta = \pi/6$ et la figure 4.4 à la deuxième solution sur un domaine droit $\theta = 0$. La convergence de la FEM est linéaire sur un graphique $\log - \log$ dont le taux est au plus égal à l'ordre respectif de l'interpolation plus un, alors que la convergence spectrale est exponentielle. Cette observation est en accord avec la théorie exposée par Deville *et al.* (2002) qui exprime l'ordre de l'erreur numérique en vitesse $\varepsilon(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{ex}$ de la méthode des éléments finis

$$||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{ex}||_{H^1} = \mathcal{O}(h^p) \tag{4.1}$$

$$||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{ex}||_{L^2} = \mathcal{O}(h^{p+1}). \tag{4.2}$$

Nous remarquons de plus sur la figure 4.3 (gauche) qu'une erreur numérique de 10^{-2} en norme H^1 est atteignable par 2×10^2 degrés de liberté en spectral alors que la FEM en nécessite plus de 5×10^3, soit un ordre de grandeur de différence. Cette tendance augmente rapidement lorsque l'utilisateur exige une meilleure précision.

Les courbes de la figure 4.4 respectent les mêmes propriétés et la même tendance que celles

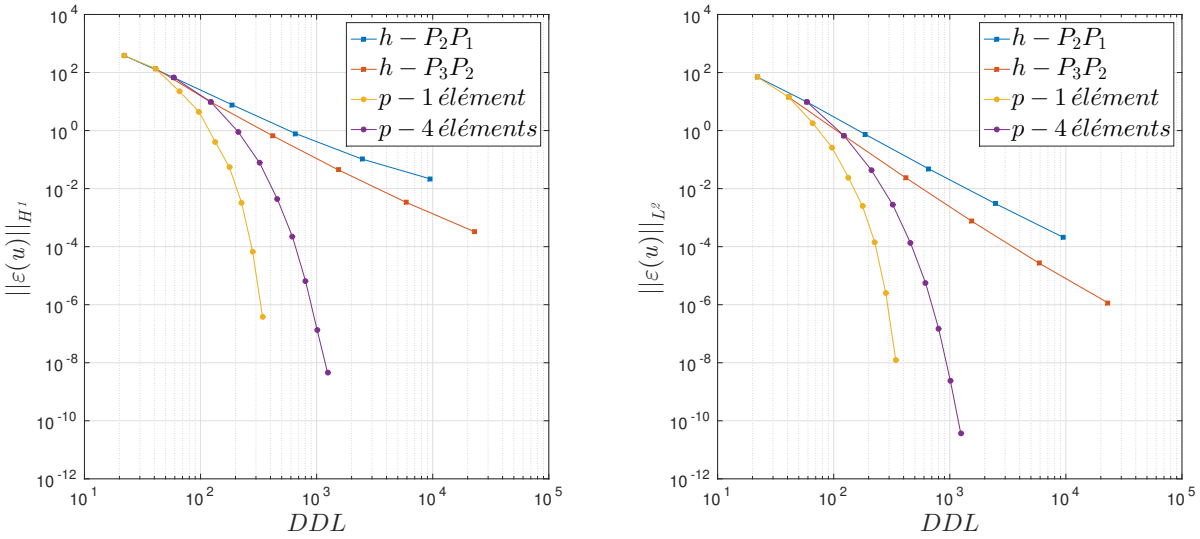


Figure 4.3 Normes H^1 et L^2 de l'erreur en vitesse $\varepsilon(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{ex}$ pour la solution polynomiale, sur le domaine incliné de $\theta = \pi/6$

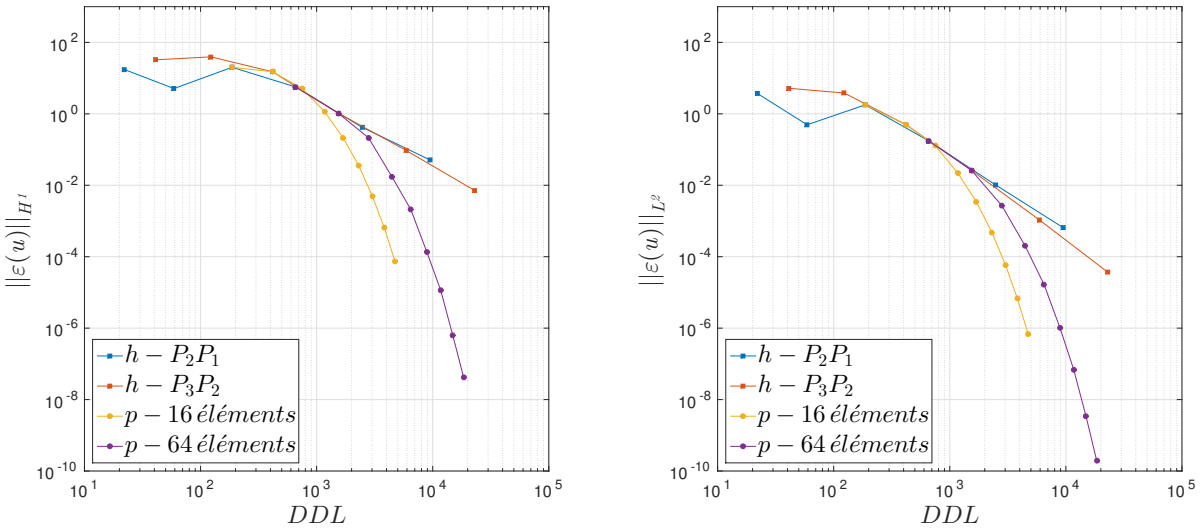


Figure 4.4 Normes H^1 et L^2 de l'erreur en vitesse $\varepsilon(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{ex}$ pour la solution transcendante, sur le domaine droit $\theta = 0$

de la figure précédente. Le changement d'inclinaison du domaine n'a donc aucune influence sur la précision des résultats.

Les résultats observés sur les figures ci-dessus amènent à trois conclusions. Premièrement, la méthode des éléments finis développée dans le code respecte les taux de convergence exprimés dans la littérature. Deuxièmement, l'utilisation de la méthode spectrale est préférable à la méthode classique afin de réduire les coûts de calcul. Finalement, l'inclinaison du domaine de calcul, et *a priori* le développement de domaines compliqués, n'influence pas la robustesse des calculs ni la précision des résultats.

4.3 Vérification de la discrétisation temporelle

Les écoulements à haut nombre de Reynolds sont particulièrement difficiles à calculer numériquement, étant donné leurs caractères chaotique, turbulent et tridimensionnel. Combinés à des éléments spectraux de degré élevé, ces écoulements sont d'autant plus susceptibles de diverger, car les approximations spectrales sont bien moins numériquement diffusives que celles à bas ordre. De plus, la considération uniquement bidimensionelle d'un problème tridimensionnel accentue les possibilités d'erreur, car les vortex 2D sont typiquement plus forts que leurs équivalents 3D (Dong et Karniadakis, 2005).

Xu et Pasquetti (2004) surmontent ces difficultés en appliquant la méthode de stabilisation SVV (*Spectral Vanishing Viscosity*, ou viscosité spectrale évanescante), qui conserve la précision spectrale ; ils se comparent aux résultats de Qian et Vezza (2001) effectués à $Re \geq 1000$ en régime transitoire. De notre côté, nous évaluerons les résultats d'EF6 bruts, sans méthode de stabilisation, dans l'unique but d'évaluer la robustesse du code et la précision des résultats.

Nous effectuons des simulations d'écoulements fluides incompressibles à départ impulsif ; à $t < 0$, les champs de vitesse et de pression sont nuls et pour $t \geq 0$, nous imposons un champ de vitesse non-nul $\boldsymbol{u} = (1, 0)$ à la frontière d'entrée. Ce type d'écoulement est difficile à calculer numériquement. En effet, à $t = 0$, l'écoulement est à divergence non-nulle et le programme, notamment l'intégration temporelle, est mis à l'épreuve durant les premières itérations. De plus, le développement de la couche limite fait apparaître des structures complexes autour du solide que le code doit pouvoir capturer.

4.3.1 Configuration de Qian

Cette première étude se concentre sur la reproduction des tests effectués par Qian et Vezza (2001) à $Re = 1000$ et 3000. L'écoulement en aval d'un cylindre de diamètre D unitaire est étudié sur un immense domaine où les rives sont placées à $L_y = 20D$ de celui-ci et la frontière

aval à $L_x = 60D$, comme l'illustre la figure 4.5. Un écoulement laminaire parallèle à $\boldsymbol{e_x}$ est injecté sur la frontière gauche. Les conditions limites des rives (frontières haut et bas) sont symétriques $v = 0$. La condition limite sans traction est imposée sur la frontière de sortie.

Dans les tests aux nombres de Reynolds 1000 et 3000, nous optons pour une interpolation spectrale P_8P_7 et une méthode temporelle BDF_{1-2} avec un pas de temps fixe $\Delta t = 0.01$. Le maillage comprend 1880 éléments spectraux quadratiques. Le but ici est de valider le démarrage impulsif de la solution à des nombres de Reynolds élevés.

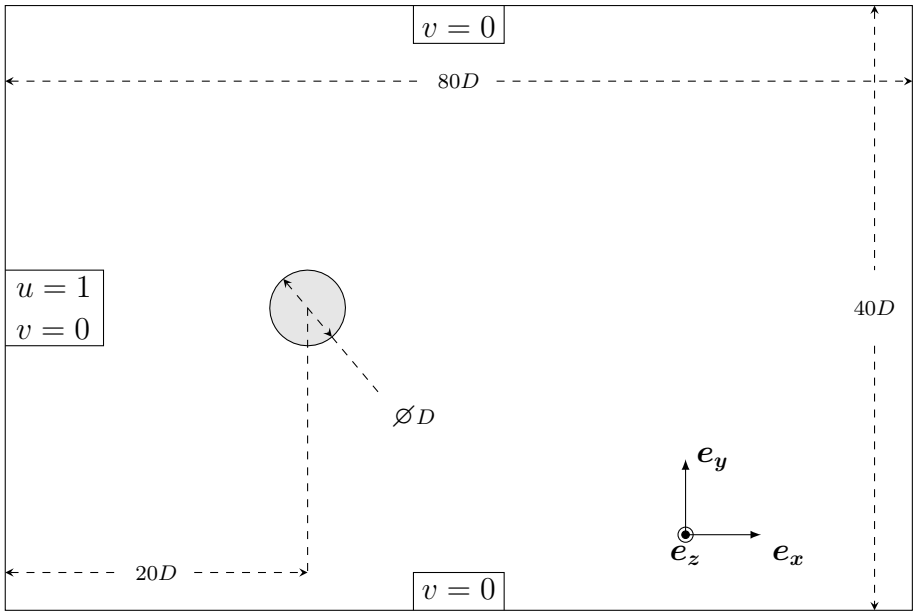


Figure 4.5 Domaine long de calcul et conditions limites pour le cylindre circulaire. 1880 éléments quadratiques

Re=1000 De la même manière que Qian et Vezza (2001) et Xu et Pasquetti (2004), nous traçons les courbes du coefficient de traînée $C_d = \dfrac{2\overline{F_x}}{\rho U^2}$ (où $\overline{F_x}$ est la force de traînée moyenne) en fonction du temps et la distribution de la vorticité Ω_z sur la surface du cylindre en fonction de l'angle θ. Nous arrêtons les calculs au temps $t = 6$ et analysons les résultats. La figure 4.6 montre les contours de la vorticité en aval du cylindre au temps $t = 6$. En association avec la figure suivante 4.7, nous observons l'apparition de deux vortex d'échelles différentes de chaque côté de la ligne centrale $y = 0$. Au milieu du vortex principal se situe un plus petit vortex qui se développe et grossit à $\theta = 135°$. Il est mieux visible par le maximum de vorticité à la figure 4.7. De manière générale, les résultats sur un domaine long avec une méthode de résolution spectrale coïncident avec ceux des auteurs précédents. Notons que les résultats de Xu et Pasquetti (2004) sont obtenus avec des polynômes d'interpolation $P_{16}P_{15}$.

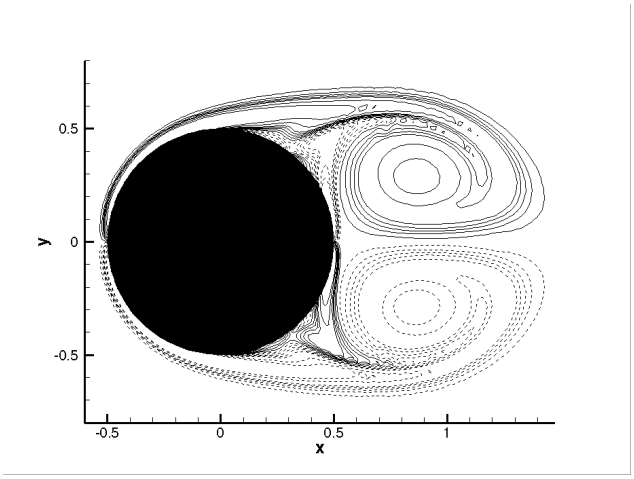


Figure 4.6 Domaine long. Contours de la vorticité à $t = 6$: $Re = 1000$

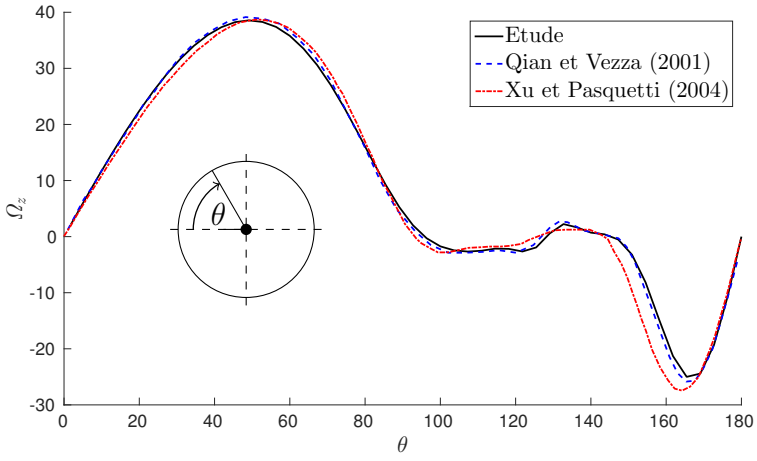


Figure 4.7 Domaine long. Distribution de la vorticité à la surface du cylindre à $t = 6$: $Re = 1000$

Re=3000 De nombreux phénomènes de séparation apparaissent dans les six premières secondes de la simulation, et nous remarquons à $t = 6$, de chaque côté de la ligne centrale sur la figure 4.10, un vortex principal et un vortex secondaire qui induisent une zone tertiaire de vorticité. Ces phénomènes continus de séparation réduisent notamment la traînée à partir de $t = 3.8$ comme l'illustre la figure 4.11. Koumoutsakos et Leonard (1995) réalisent l'analyse complète de l'évolution temporelle de la traînée en fonction de la vorticité. Les tracés de la distribution de la vorticité fig. 4.10 et du coefficient de traînée sont en accord avec les résultats numériques de Qian et Vezza (2001).

L'utilisation d'un grand domaine de calcul pour l'étude de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire à haut nombre de Reynolds permet de reproduire exactement les résultats de Qian et Vezza (2001) ; notamment les distributions de la vorticité sur la surface du cylindre et l'historique du coefficient de traînée. De plus, contrairement aux simulations de Xu et Pasquetti (2004) qui divergeaient au temps $t = 1.9$, pour un degré d'interpolation P_6P_5, ou au temps $t = 11.01$, pour $P_{16}P_{15}$, nos calculs sont stables pour un degré supérieur ou égal à 6.

4.3.2 Configuration de Pasquetti

Dans un second temps, nous reproduisons à la figure 4.12 le domaine et le maillage employés par Xu et Pasquetti (2004) dans leur étude sur la stabilisation SVV. Cette étude permettra de comparer la robustesse et la précision en fonction de la taille du domaine de calcul. Ici, les rives ne sont qu'à $L_y = 3.1D$ du cylindre sur lesquelles nous imposons la même condition limite qu'à l'entrée $\boldsymbol{u} = (1, 0)$. Cela suggère alors un écoulement non pas autour d'un cylindre mais à l'intérieur d'un groupement vertical de cylindres circulaires. La sortie est également bien plus proche de l'obstacle à une distance de $L_x = 12D$. Dans nos tests, la sortie est laissée libre (*i.e.* condition à traction nulle) tandis que Xu et Pasquetti (2004) imposent une condition limite de type Orlanski (Orlanski, 1976) $\partial_t \boldsymbol{u} + U_\infty \cdot \nabla \boldsymbol{u} = 0$. Le maillage initial noté h contient 356 quadrangles, légèrement supérieur aux 310 de Xu et Pasquetti (2004), et son raffinement $h/2$ en contient 1424.

De la même manière que Xu et Pasquetti (2004), le nombre de Reynolds est choisi égal à $Re = 1000$. Les simulations sont calculées avec des polynômes d'interpolation de Lagrange P_6P_5 et P_8P_7 pour en estimer la robustesse et l'erreur ; les résultats de Xu et Pasquetti (2004) présentés dans cette section sont obtenus avec des polynômes P_8P_7. La discrétisation temporelle est adaptative en ordre BDF_{1-2} mais à pas de temps fixe $\Delta t = 0.01$. Un écoulement laminaire $\boldsymbol{u} = (1, 0)$ est injecté en entrée et sur les rives à $t \geq 0$. Spécifiquement en sortie, la condition limite de traction nulle $\boldsymbol{\tau} = 0$ est imposée.

Nous effectuons trois tests principaux afin d'étudier le départ impulsif sur le domaine tronqué

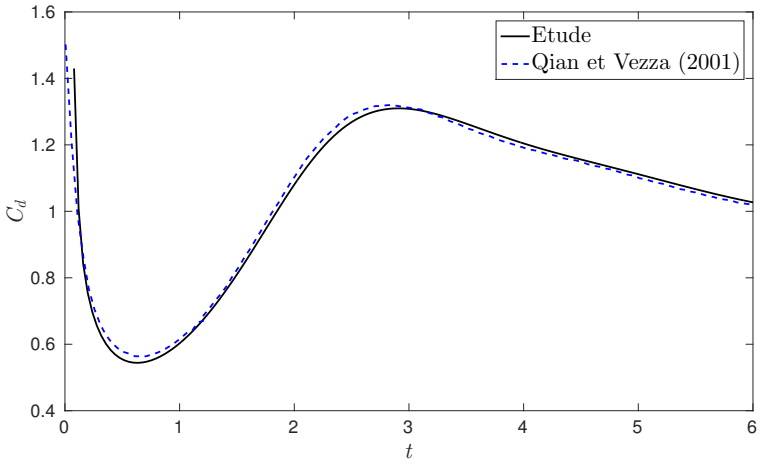


Figure 4.8 Domaine long. Coefficient de traînée : $Re = 1000$

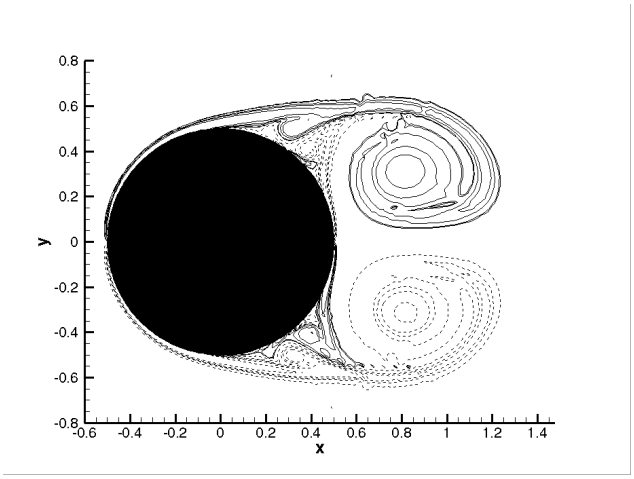


Figure 4.9 Domaine long. Contours de la vorticité à $t = 6$: $Re = 3000$

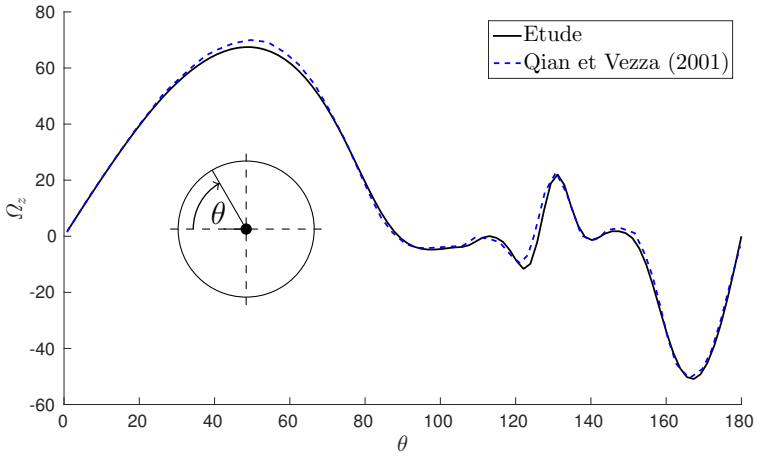


Figure 4.10 Domaine long. Distribution de la vorticité à la surface du cylindre à $t = 6$: $Re = 3000$

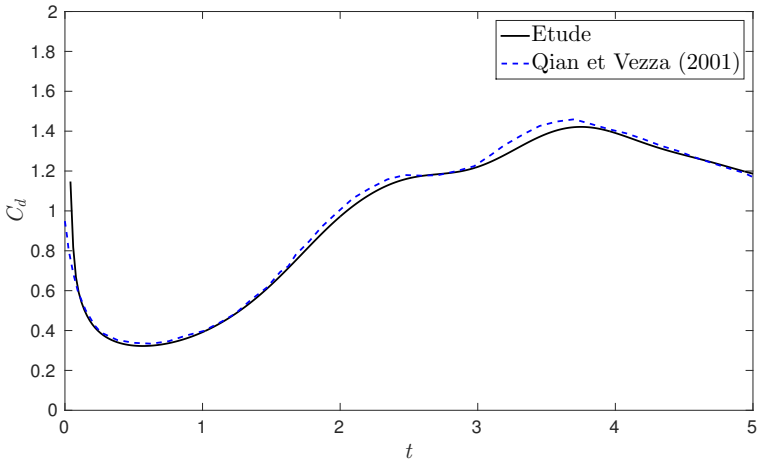


Figure 4.11 Domaine long . Coefficient de traînée : $Re = 3000$

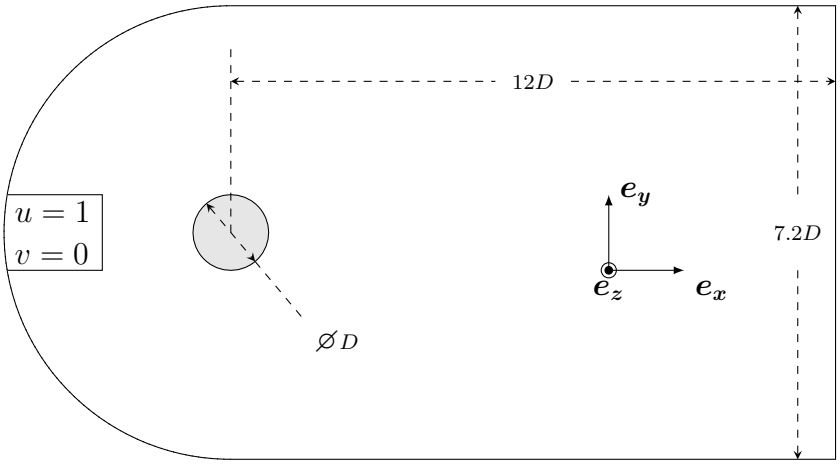


Figure 4.12 Domaine court de calcul et conditions limites pour le cylindre circulaire avec 356 éléments spectraux

de Pasquetti :

— interpolants P_8P_7 avec le maillage initial h,
— interpolants P_8P_7 avec le maillage raffiné $h/2$,
— interpolants P_6P_5 avec le maillage initial h,

avec les buts respectifs de

— reproduire les résultats de Xu et Pasquetti (2004),
— améliorer la précision des résultats en raffinant spatialement,
— estimer la robustesse du code avec des interpolants plus faibles.

Le premier test montre que les contours de la vorticité Ω_z tracés sur la figure 4.13 sont presque identiques à ceux produits par un domaine long (*c.f.* fig. 4.6). De plus, la distribution de la vorticité à la surface du cylindre concorde avec la littérature (Qian et Vezza, 2001; Xu et Pasquetti, 2004) mais ne colle pas parfaitement (*c.f.* fig. 4.14). En effet, la vorticité est plus forte sur l'avant du cylindre ($\theta \leq 90°$) avec un pic déphasé de quelques degrés vers l'arrière du cylindre. Cependant, pour $90° \leq \theta \leq 180°$, la courbe obtenue est en adéquation avec Qian et Vezza (2001). La figure 4.15 illustre l'historique du coefficient de traînée, qui s'avère légèrement supérieur à celui produit par Xu et Pasquetti (2004).

La deuxième simulation produit une distribution de vorticité qui se rapproche de celle de Qian et Vezza (2001). L'historique du coefficient de traînée reste cependant identique à celui produit par la configuration $P_8P_7 - h$.

Les résultats de la troisième simulation importent peu, car ils sont moins précis que les précédents, notamment si nous nous intéressons à la distribution de Ω_z (la courbe garde la même forme mais s'éloigne de la littérature). En effet, il est essentiel de noter que, contrairement

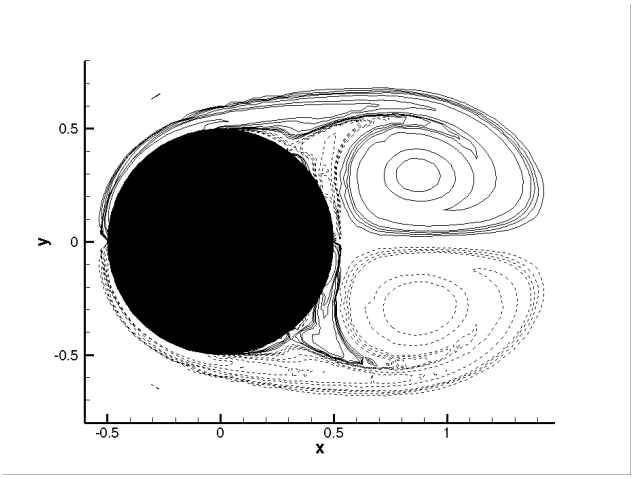


Figure 4.13 Domaine long. Contours de la vorticité à $t = 6$: $Re = 1000$

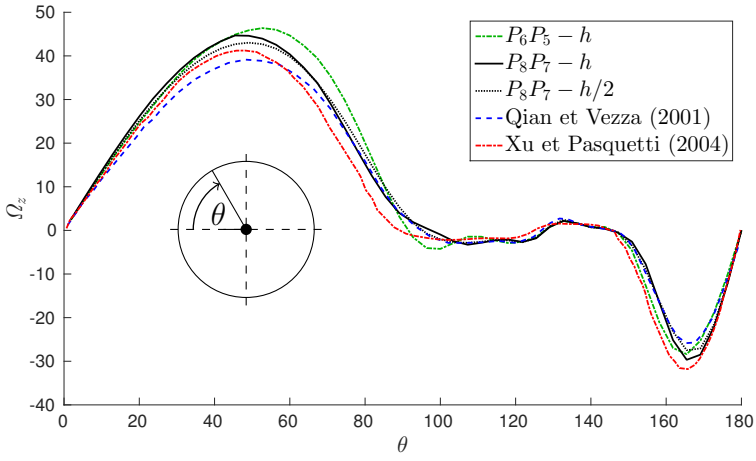


Figure 4.14 Domaine court. Distribution de la vorticité à la surface du cylindre à $t = 6$: $Re = 1000$

à Xu et Pasquetti (2004), nos simulations convergent avec des interpolants P_6P_5, et ce, sans avoir recours à la stabilisation SVV.

Finalement, une étude de raffinement montre que le cas $P_8P_7 - h/2$ est limite : augmenter le degré d'interpolation et/ou le nombre d'éléments spectraux du maillage ne permettent pas d'obtenir de meilleurs résultats. Tandis que les courbes obtenues à la section précédente avec la configuration de Qian étaient en parfait accord avec la littérature. Cette observation indique que la taille et/ou la forme du domaine de calcul semble avoir une influence sur la précision des calculs.

4.3.3 Effet du ratio de blocage

La remarque précédente incite à l'analyse de la taille du domaine, notamment du ratio de blocage. Celui-ci est défini comme le rapport entre le diamètre du cylindre et la hauteur du domaine de calcul. La diminution de ce ratio a pour effet principal d'accélérer la vitesse autour du cylindre, et donc d'augmenter la vorticité à sa surface. Nous étudions ainsi dans cette section la proximité des rives et son effet sur la distribution de la vorticité à la surface de l'obstacle.

Nous considérons deux domaines de calculs qui dérivent de celui présenté à la figure 4.5. La figure 4.16 illustre les maillages tronqués :

— en rouge, la longueur du sillage est réduite pour correspondre à celle de la configuration de Pasquetti $L_x = 12D, L_y = 20D$;
— en bleu, la longueur du sillage et la largeur du domaine sont raccourcies $L_x = 12D, L_y = 3.2D$.

Le premier test, effectué sur le domaine rouge, déterminera l'influence de la proximité de la frontière de sortie, tandis que celui réalisé sur le domaine bleu identifiera l'effet de la diminution du ratio de blocage.

Un rapide regard à la figure 4.17 démontre que ni la longueur ni la largeur du domaine n'affecte la précision des résultats. Pourtant, il semble que le passage de la configuration de Qian (*c.f.* fig. 4.8) à celle de Pasquetti (*c.f.* fig. 4.15) altère légèrement la distribution de la vorticité. Nous pouvons donc spéculer sur la forme du domaine de calcul, et notamment sur la frontière de gauche. Celle-ci est verticale chez Qian et circulaire chez Pasquetti. Bien que les résultats de ce dernier soient probants, il s'avère que l'utilisation d'une frontière courbe sur laquelle est imposée une condition limite de Dirichlet $\boldsymbol{u} = (1, 0)$ ne soit pas optimale.

Ceci dit, l'étape de vérification et validation est terminée et le code répond correctement aux questions exposées au début du chapitre.

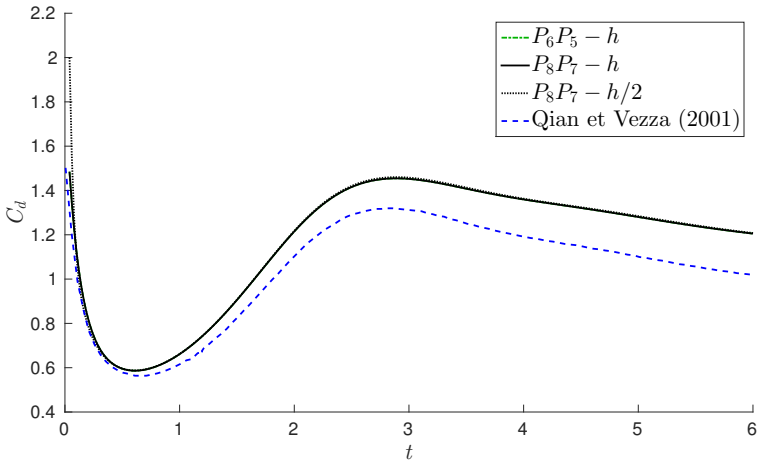


Figure 4.15 Domaine court. Coefficient de traînée : $Re = 1000$

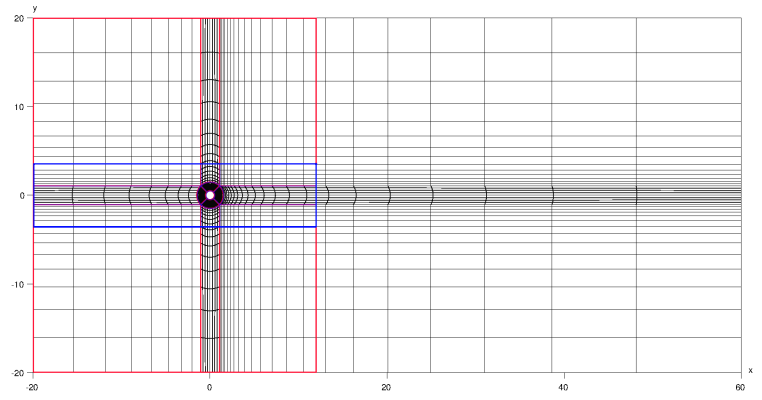


Figure 4.16 Maillages avec différents ratios de blocage et longueurs de sillage. (noir) $L_x = 60D, L_y = 20D$. (rouge) $L_x = 12D, L_y = 20D$. (bleu) $L_x = 12D, L_y = 3.2D$

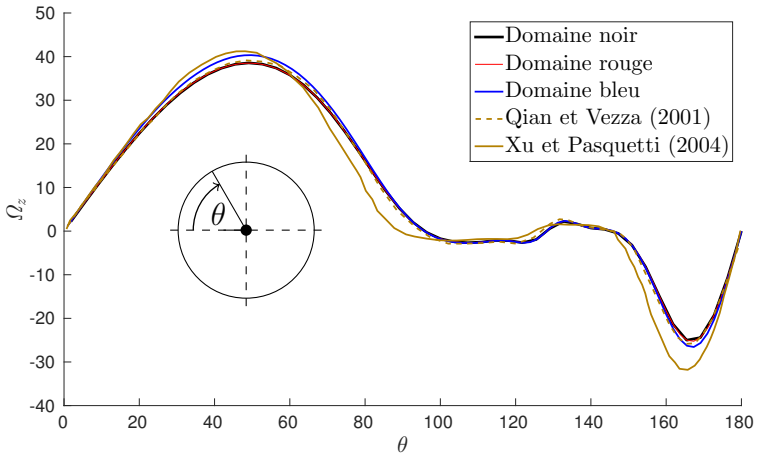


Figure 4.17 Distribution de la vorticité à la surface du cylindre en fonction du domaine de calcul à $t = 6$: $Re = 1000$

CHAPITRE 5 CONDITIONS LIMITES DIFFUSIVES

Définition 5.0.1 (Condition limite diffusive) *En mécanique des fluides numérique, une condition limite diffusive modifie dynamiquement les tractions à la frontière de sortie de l'écoulement pour diffuser artificiellement l'énergie contenue dans les tourbillons, lors de l'étude d'écoulements en aval d'un obstacle. L'intensité des tractions est ajustée pour améliorer la stabilité de la simulation numérique sur une plus grande plage d'opération,* e.g. *pour de plus grandes valeurs du nombre de Reynolds. La condition limite diffusive se veut une alternative efficace à la condition limite usuelle de tractions nulles.*

Ce chapitre présente le développement de conditions limites diffusives sur des domaines sévèrement tronqués. Le domaine d'application concerne la simulation des écoulements incompressibles à haut nombre de de Reynolds dans des référentiels absolu et relatif.

Nous débutons par expliquer le rôle déterminant des conditions limites diffusives sur la stabilité de la simulation de l'écoulement afin de présenter la théorie aboutissant à leur élaboration. Nous poursuivons par des simulations du relâcher tourbillonnaire en aval d'un cylindre carré, pour évaluer la sensibilité de la stabilité (*i.e.* la robustesse) de la discrétisation des équations de Navier-Stokes aux modèles de conditions limites étudiées.

Nous terminons par la généralisation des conditions limites diffusives du référentiel inertiel au référentiel relatif, pour l'étude de l'interaction fluide-structure. Celles-ci sont ensuite intégrées à la formulation variationnelle monolithique de l'interaction fluide-structure ; la dynamique des fluides y est spécifiquement décrite dans le référentiel accéléré du solide en déplacement rigide (système masse-ressort) dans le milieu fluide. Cette approche s'inscrit dans la continuité des travaux de Moulin (2016) portant sur l'étude numérique des vibrations induites par vortex (VIV) en écoulement incompressible. Nous y développons la théorie de la dynamique des fluides dans un référentiel accéléré. Nous terminons par un exemple 2D pour explorer le potentiel d'application des conditions limites diffusives à la simulation de l'interaction fluide-structure.

5.1 Stabilité de la simulation et condition limite naturelle : un exemple

La mécanique des fluides nous enseigne qu'une allée de tourbillons est causée par la séparation instable d'un écoulement autour de corps peu profilés. Lorsqu'un tourbillon se détache, un écoulement dissymétrique se forme et peut être la cause de vibrations de ce corps. Ainsi, l'intégrité (structurale) du corps est déterminée, entre autres, par la fréquence du relâcher

tourbillonnaire et par l'intensité des forces sur celui-ci. La vraisemblance de ces paramètres est liée de manière intrinsèque à la précision des simulations, à la taille relative du domaine de calcul par rapport au corps, et, en particulier, à la modélisation des efforts (*i.e.* des tractions) lorsque l'allée de tourbillons quitte le domaine de calcul.

De manière générale, la frontière du domaine de calcul est subdivisée en deux ensembles disjoints auxquels sont associés des conditions de Dirichlet sur les vitesses (l'entrée) et des tractions (la sortie). Sur ces frontières, on dispose habituellement avec précision des valeurs des composantes de la vitesse, mais, sauf exception, les valeurs exactes des tractions y sont inconnues. Pour la simulation des écoulements externes, l'usage de *l'hypothèse de tractions nulles* est alors usité. En éléments finis, cette hypothèse correspond à la condition naturelle de la formulation faible des équations de Navier-Stokes. Pour la formulation de Cauchy de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, celle-ci s'écrit $\boldsymbol{\tau} = 0$ (*cf.* déf. 5.2.1). Cette hypothèse est exacte, si l'écoulement est uniforme et la pression constante (nulle), c'est-à-dire loin de l'objet dans le sillage de l'écoulement. Par contre, dans le sillage d'une allée de tourbillons, en position proximale de l'objet, l'utilisation de la condition limite naturelle introduit donc une erreur de modélisation que l'on souhaite atténuer par un choix judicieux de la position relative de la sortie par rapport à celui-ci.

Dans divers problèmes pratiques, l'action conjuguée, à la sortie de tourbillons et de la condition limite naturelle, peut déstabiliser et corrompre de manière irrécupérable la simulation numérique.

Pour mettre en exergue cette problématique, nous avons simulé l'écoulement autour d'un cylindre carré. Nous avons fait ce choix pour simplifier la construction du domaine de calcul et ses maillages d'éléments spectraux. De plus, pour ce cylindre, les tourbillons sont, à nombre de Reynolds égaux, plus énergétiques que pour son équivalent circulaire (Ozgoren (2006)), exacerbant ainsi l'effet des conditions limites sur la stabilité du calcul.

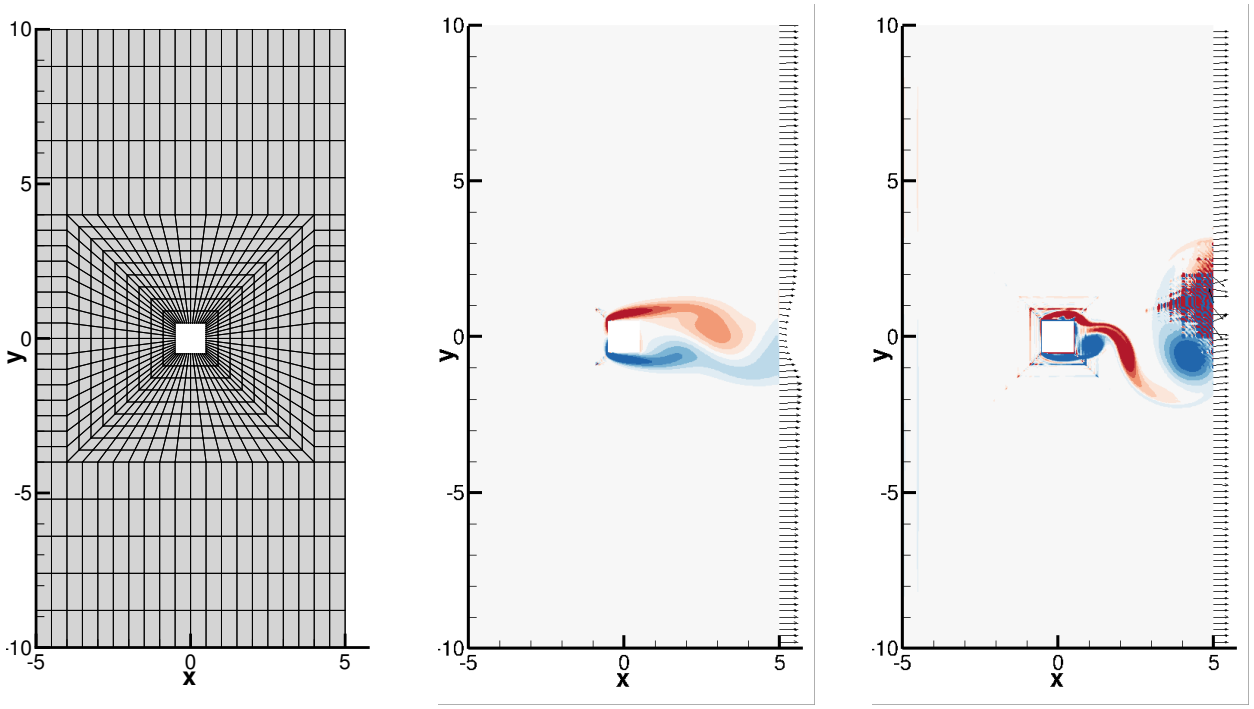
La figure 5.1a représente la géométrie du domaine de calcul de l'exemple, et deux écoulements aux nombres de Reynolds 100 et 1000. À la sortie du domaine, nous imposons la condition limite naturelle. Ces simulations nous permettent d'inférer *ceteris paribus* que la stabilité de la simulation est directement liée à l'orientation de l'écoulement en sortie du domaine. En effet, nous pouvons classer les simulations stables et instables ainsi :

— À bas nombre de Reynolds (figure 5.1b) les allées de tourbillons quittent le domaine de calcul sans déstabiliser la simulation numérique pour toutes les étapes de temps de la simulation. Certes, le passage d'un tourbillon à la sortie perturbe l'orientation de l'écoulement, mais la totalité du champ de vecteurs vitesse demeure orienté vers l'extérieur du domaine de calcul.

— À haut nombre de Reynolds (figure 5.1c) la situation est différente. Les premiers instants de la simulation sont stables jusqu'à l'émission des premiers tourbillons. À l'approche de la sortie par le premier tourbillon, nous constatons que l'intensité de la perturbation est telle qu'une partie du champ de vecteurs vitesse est maintenant orientée vers l'intérieur du domaine de calcul. Le calcul se déstabilise rapidement, et la vorticité et la pression augmentent rapidement dans le voisinage du tourbillon. La procédure d'intégration en temps réagit, mais sans succès, par la réduction du pas de temps et de l'ordre de la discrétisation temporelle. Le calcul diverge alors sans appel.

Cet exemple suggère que la stabilité est liée à l'effet combiné, à la sortie, de la structure de l'écoulement et de la condition limite naturelle. Pour atténuer cet effet, augmenter la dimension du domaine de calcul n'est pas une solution pratique puisque l'intensité et la persistance dans le temps et l'espace des tourbillons augmentent en fonction du nombre de Reynolds.

Nous allons dans la section suivante établir l'origine théorique de l'instabilité lorsque l'écoulement est entrant. Nous en déduirons des alternatives (modèles) à la condition de traction nulle, sans égard à la dimension du domaine de calcul.



(a) Maillage spectral (b) $Re = 100$ (c) $Re = 1000$

Figure 5.1 Maillage et contours de la vorticité avec condition limite de traction nulle en sortie

5.2 Stabilité de la simulation et condition limite naturelle : théorie

De manière générale, un écoulement est inconditionnellement instable si la variation d'énergie (du système) croit sans limite. C'est ce que semble nous révéler l'exemple de la section précédente. En effet :

- En entrée, les vitesses sont imposées, ce qui génère un afflux d'énergie cinétique dans le système circonscrit par les limites (frontières) du domaine de calcul. Cette énergie est dissipée en partie par la viscosité.
- En sortie, les tractions nulles sont imposées. Si le champ de vecteurs vitesse est orientée vers l'extérieur, le rejet et l'afflux d'énergie cinétique sont en équilibres (pour un fluide incompressible) – la pression (énergie potentielle) chute à cause de l'effet de la viscosité. Par contre, si le champ de vecteurs vitesse est orientée (en partie ou totalité) vers l'intérieur, le bilan du rejet et de l'afflux d'énergie cinétique n'est plus à l'équilibre. L'énergie cinétique du système croît et, si cette situation persiste, déstabilise la simulation.

La mise en équation du bilan de l'énergie cinétique s'obtient directement des équations de Navier-Stokes, *i.e.* l'équation de conservation de conservation de l'énergie mécanique. Elle met en relation la variation de l'énergie cinétique du système, les pertes volumiques dues à la viscosité, et les pertes surfaciques dues à l'action des tractions sur les vitesses. L'analyse de cette équation de conservation révèle une *condition suffisante* (*cf.* conjecture 5.2.1) que doivent vérifier les tractions et les vitesses pour assurer la stabilité de la simulation numérique.

5.2.1 Équation de conservation de l'énergie mécanique

Soit Ω un domaine de calcul avec $\partial\Omega = \Gamma_e \cup \Gamma_p \cup \Gamma_s \cup \Gamma_b$ sa frontière (*cf.* fig. 5.2). Les vitesses sont imposées à l'entrée (Γ_e) et sur les parois solides (Γ_p), tandis que les tractions sont imposées à la sortie (Γ_s). Sur la frontière Γ_b la condition limite de symétrie est usuellement utilisée ; cette condition limite impose simultanément $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ et $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n})\, \boldsymbol{n} = 0$, c'est-à-dire vitesse normale et tractions tangentielles nulles. Par la suite, les terminologies *frontière de symétrie* ou *rive* seront utilisées pour nommer la frontière Γ_b.

La formulation de Cauchy des équations de Navier-Stokes (3.2a)-(3.2b) est ici privilégiée pour construire les équations locale et intégrale de la conservation de l'énergie mécanique. Ce choix permet d'établir des relations en fonction de quantités physiques mesurables (les tractions), contrairement à la formulation équivalente basée sur les équations (3.1a)-(3.1b). De plus, la formulation de Cauchy est la seule, à notre avis, qui permet le couplage monolithique de la dynamique des fluides et de la dynamique du solide. Nous ferons donc usage du tenseur de

la loi contrainte-vitesse linéaire

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\,\boldsymbol{I} + \mu\,\boldsymbol{S}$$
$$\boldsymbol{S} = \nabla\boldsymbol{u} + \nabla^t\boldsymbol{u}$$

d'un fluide newtonien incompressible.

Les résultats intermédiaires (lemmes 5.2.1 et 5.2.2) établissent, d'une part, la dérivée particulaire de l'énergie cinétique et, d'autre part, la dissipation locale de l'énergie cinétique en chaleur. La construction de l'équation locale de conservation de l'énergie mécanique (proposition 5.2.1) et sa version intégrale (corollaire 5.2.0.1) s'obtiennent directement de l'application de ces résultats et du théorème de la divergence.

Définition 5.2.1 (Vecteur traction) *Nous désignons par $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$ le vecteur traction à la frontière d'un volume de fluide. Il s'obtient du produit contracté avec la normale $\boldsymbol{n}$, orientée vers l'extérieur du volume, et du tenseur de la loi contrainte-vitesse.*

En éléments finis, la condition limite naturelle correspond alors à

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} = 0$$

Lemme 5.2.1 (Dérivée particulaire de l'énergie cinétique) *Soient ρ et $\boldsymbol{u}$, respectivement la masse volumique et le champ de vecteurs vitesse d'un fluide incompressible, et*

$$\rho\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \rho\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + \rho(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} \tag{5.1}$$

la dérivée particulaire du champ des vitesses. Alors,

$$\boxed{\rho\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}\cdot\boldsymbol{u} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{u^2}{2}\right) + \nabla\cdot\left(\rho\boldsymbol{u}\frac{u^2}{2}\right)} \tag{5.2}$$

avec $u^2 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}$.

Lemme 5.2.2 (Dissipation de l'énergie cinétique) *Soient $\boldsymbol{\sigma}$ la relation contrainte-vitesse d'un fluide newtonien incompressible et $\boldsymbol{u}$ le champ de vecteurs vitesse. Alors,*

$$\boxed{(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\boldsymbol{u} = \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{u}) - \mu\frac{\boldsymbol{S}:\boldsymbol{S}}{2}} \tag{5.3}$$

avec $\boldsymbol{S}:\boldsymbol{S}/2$ la dissipation de l'énergie cinétique en chaleur. Ce terme est strictement positif.

Proposition 5.2.1 (Équation locale de l'énergie mécanique) *Soient le produit scalaire entre l'équation de Cauchy de la conservation de la quantité de mouvement d'un fluide newtonien incompressible et le champ de vecteurs vitesse* $\boldsymbol{u}$

$$\rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} \cdot \boldsymbol{u} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{u}$$

Alors, l'usage des lemmes 5.2.1 et 5.2.2 permet d'écrire l'équation de conservation locale de l'énergie cinétique

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \frac{u^2}{2}\right) = \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{u} - \rho \boldsymbol{u} \frac{u^2}{2}\right) - \mu \frac{\boldsymbol{S} : \boldsymbol{S}}{2}}$$

Corollaire 5.2.0.1 (Équation intégrale de l'énergie mécanique) *Soit l'équation locale de conservation de l'énergie mécanique (proposition 5.2.1) intégrée sur le domaine de calcul* Ω*. Alors, on obtient la formulation intégrale de la conservation de l'énergie mécanique*

$$\boxed{\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \frac{u^2}{2}\right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left((\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{u} - \rho \frac{u^2}{2} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\right) d\Gamma - \int_\Omega \mu \frac{\boldsymbol{S} : \boldsymbol{S}}{2} d\Omega} \tag{5.4}$$

de la transformation de la divergence du champ vectoriel

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{u} - \rho \boldsymbol{u} \frac{u^2}{2}$$

en flux de densité surfacique de puissance

$$\boxed{\mathcal{F}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{u} - \rho \frac{u^2}{2} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}} \tag{5.5}$$

en invoquant le théorème de la divergence et la définition 5.2.1.

Remarque 1 (Bilan global de $\mathcal{F}$) *Le bilan de la densité de puissance surfacique, équation* (5.5)*, sur la frontière* $\partial\Omega$ *se limite aux frontières* Γ_e *et* Γ_s*, l'entrée et la sortie,*

$$\int_{\partial\Omega} \mathcal{F}\, d\Gamma = \int_{\Gamma_e} \mathcal{F}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_s} \mathcal{F}\, d\Gamma$$

puisque $\mathcal{F} = 0$ *sur les frontières* Γ_p *et* Γ_b*.*

En effet, sur Γ_p*, le vecteur vitesse est nul (adhérence du fluide) et, sur* Γ_b*, le vecteur vitesse et le vecteur traction sont, en tout point de la paroi, orthogonaux (*$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{u}$*).*

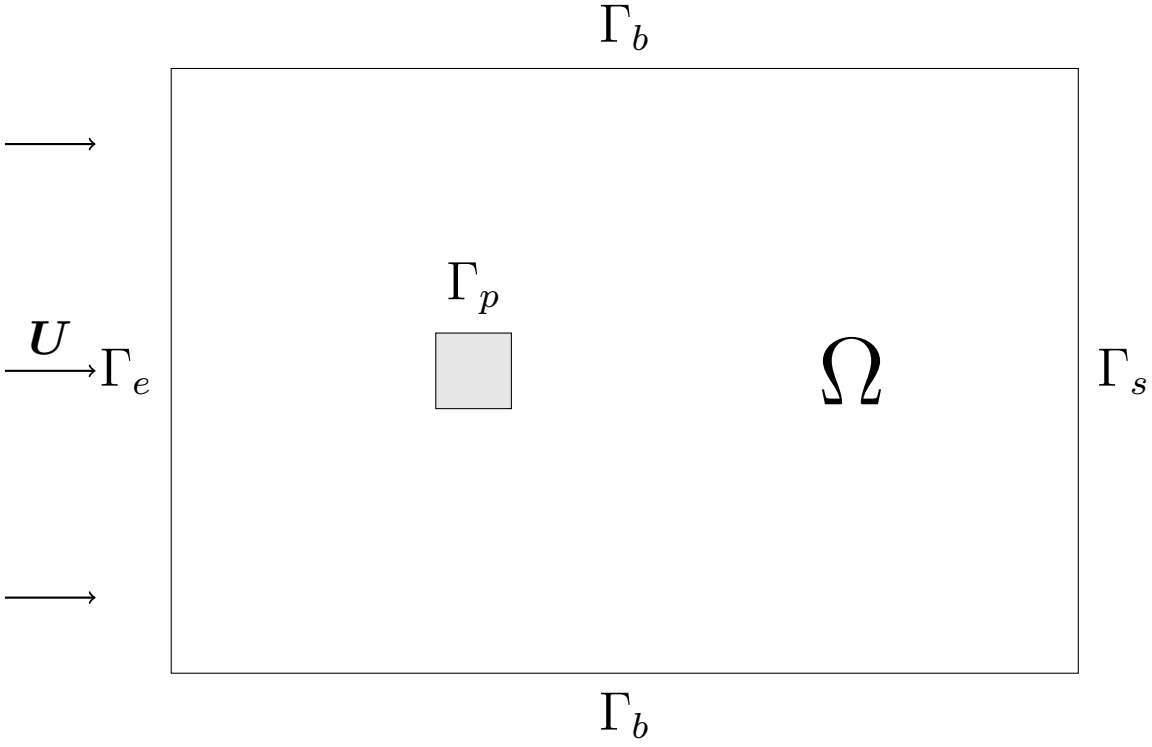


Figure 5.2 Description générale d'un domaine de calcul et de ses frontières

Remarque 2 (Bilan de $\mathcal{F}$ sur Γ_s) *Sur la frontière Γ_e le flux de densité de puissance $\mathcal{F}$ est entièrement déterminé par les conditions limites de Dirichlet sur les vitesses. Par contre, en sortie, l'imposition des tractions permettent de moduler l'énergie transmise au fluide.*

En effet, si nous faisons usage de la condition limite de tractions nulles ($\boldsymbol{\tau} = 0$), alors

$$\mathcal{F}(0, \boldsymbol{u}) = -\rho \frac{u^2}{2} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \begin{cases} > 0 & si \quad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} < 0 \\ < 0 & si \quad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} > 0 \end{cases}$$

A priori (naïvement), le critère intégral

$$\int_{\Gamma_s} \mathcal{F} \, d\Gamma \leq 0$$

devrait être suffisant pour assurer la stabilité de la simulation numérique, puisque le bilan d'énergie est négatif (ou nul) favorisant la décroissance de l'énergie cinétique du système. Cependant, ce critère ne résiste pas à l'épreuve des faits (cf. fig. 5.1c).

En effet, on constate que la vitesse est entrante ($\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} < 0$) sur une petite fraction de la sortie, tout en satisfaisant le critère intégrale. Pourtant, le simulation se déstabilise (diverge).

Conjecture 5.2.1 (Critère de stabilité) *Pour améliorer la stabilité de la simulation numérique, les tractions à la sortie doivent être contrôlées telles que*

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{u}) \leq 0$$

en tout point de la frontière Γ_s*. Nous utiliserons ce critère pour concevoir les tractions de la condition limite diffusive (*c.f. *déf. 5.2.1).*

La confirmation ou l'infirmation théorique de cette conjecture requiert des analyses plus approfondies, hors des objectifs de ce mémoire. Cependant, les expériences numériques réalisées jusqu'à présent semblent en démontrer la pertinence par une amélioration significative de la stabilité des simulations numériques.

5.3 Modélisation des conditions limites diffusives

Nous allons construire dans cette section une famille de conditions limites diffusives. La démarche de modélisation consiste à remplacer la relation $\boldsymbol{\tau} = 0$ par un succédané qui satisfait le critère de stabilité (conjecture 5.2.1). Ainsi, lorsque le fluide est sortant ($\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} > 0$), $\mathcal{F}(0, \boldsymbol{u}) < 0$ et la simulation numérique est stable – l'expression de la condition limite n'est pas modifiée. Par contre, lorsque le fluide est entrant, $\mathcal{F}(0, \boldsymbol{u}) > 0$ et la simulation numérique est instable – l'expression de la condition limite est modifiée pour annihiler l'effet déstabilisant de l'afflux positif de densité de puissance surfacique. Cette opération conditionnelle est décrite à l'aide d'une fonction échelon similaire à la fonction de *Heaviside*

$$S(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} < 0 \\ 0 & \text{si} \quad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} > 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

La mise en oeuvre dans un programme d'éléments finis de la fonction (5.6) est problématique. D'une part, les formules d'intégration numérique requièrent une description continue élément par élément des tractions et, d'autre part, il est impossible de la linéariser en fonction de ses paramètres. En réponse à ces deux problématiques, Dong *et al.* (2014) ont proposé une approximation continue différentiable

$$S(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}, \delta) = \frac{1}{2}\left(1 - \tanh \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}}{\delta}\right) \tag{5.7}$$

dont la vraisemblance est contrôlée par un paramètre de forme positif δ. Ce paramètre doit être ajusté au problème étudié et à la discrétisation (maillage). Lorsque δ tend vers 0, la fonction $S(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}, \delta)$ tend vers la fonction discontinue (5.6). Le paramètre δ contrôle le lissage

de discontinuité, et la valeur $\delta = 1/20$ a été jugée adéquate pour nos simulations.

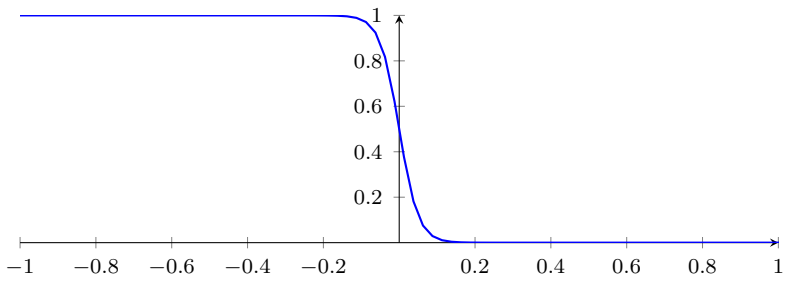


Figure 5.3 Fonction scalaire $S(x, \delta)$ avec $\delta = \frac{1}{20}$

La clef de la construction de la condition limite diffusive est l'identification d'une fonction vectorielle $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ telle que l'afflux positif de densité de puissance surfacique est annihilée, c'est-à-dire

$$\mathcal{F}(\hat{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{u}) = \boxed{\hat{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \boldsymbol{u} - \rho \frac{u^2}{2} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

Immédiatement, deux candidats peuvent être déduits de la relation à équilibrer

$$\mathcal{F}(\hat{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{u}) = \boxed{\rho \frac{u^2}{2} \boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{u} - \rho \frac{u^2}{2} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

et

$$\mathcal{F}(\hat{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{u}) = \boxed{\rho (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}) \frac{\boldsymbol{u}}{2}} \cdot \boldsymbol{u} - \rho \frac{u^2}{2} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

En combinant ces deux relations avec la fonction échelon, nous obtenons deux conditions limites diffusives de la condition naturelle que nous nommons

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}_1 = \rho \frac{u^2}{2} \boldsymbol{n} S(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}, \delta)} \tag{5.8}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}_2 = \rho (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}) \frac{\boldsymbol{u}}{2} S(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}, \delta)} \tag{5.9}$$

En ce qui concerne la dissipation de l'excès d'afflux d'énergie, les modèles $\boldsymbol{\tau_1}$ et $\boldsymbol{\tau_2}$ sont équivalents, tout en interagissant différemment avec l'écoulement. En particulier $\boldsymbol{\tau_1}$ agit strictement dans la direction normale à la paroi. Son action est donc dépendante de l'orientation et de la forme de la frontière de sortie. Par ailleurs, $\boldsymbol{\tau_2}$ est toujours parallèle au vecteur vitesse, et peut probablement exercer un contrôle plus efficace sur l'écoulement que sa contrepartie $\boldsymbol{\tau_1}$.

Mentionnons également que les modèles $\boldsymbol{\tau_1}$ et $\boldsymbol{\tau_2}$ peuvent être combinées linéairement pour définir une famille de modèles de conditions limites diffusives de la condition limite naturelle.

Notation 5.3.1 (Famille de modèles $\lambda(\alpha, \beta, \boldsymbol{f})$) *Nous notons par*

$$\lambda(\alpha, \beta, \boldsymbol{f}) = \alpha\boldsymbol{\tau}_1 + \beta\boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{f} \tag{5.10}$$

la famille de conditions limites diffusives. Le vecteur traction $\boldsymbol{f}$ est ajouté pour se comparer aux travaux de Dong et al. (2014) et de Dong et Shen (2015) résumés au tableau 5.1.

Notation 5.3.2 (Famille de modèles $\Lambda(\alpha, \beta)$) *Nous notons par*

$$\Lambda(\alpha, \beta) \equiv \lambda(\alpha, \beta, 0) = \alpha\boldsymbol{\tau}_1 + \beta\boldsymbol{\tau}_2 \tag{5.11}$$

la famille de conditions limites diffusives de la condition limite naturelle ($\boldsymbol{f} = 0$).

La famille de modèles $\Lambda(\alpha, \beta)$ a été développée en utilisant la formulation de Cauchy des équations de Navier-Stokes (3.2a)-(3.2b) ($\mathrm{NS_D}$). Ce résultat s'applique également à la forme simplifiée (3.1a)-(3.1b) en Laplacien des vitesses ($\mathrm{NS_L}$). Seule l'interprétation physique des expressions est modifiée, car $\Lambda(\alpha, \beta)$ s'interprète alors comme des pseudo-tractions.

Tableau 5.1 Conditions limites de Dong et Shen (2015) pour les pseudo-tractions ($\tilde{\boldsymbol{\tau}}$) et les tractions ($\boldsymbol{\tau}$)

$\lambda(\alpha, \beta, \boldsymbol{f})$	$\boldsymbol{\tau}$ ou $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$
(1,0)	$\boldsymbol{f} + \frac{\rho}{2}[u^2\boldsymbol{n}]S(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})$
(0,1)	$\boldsymbol{f} + \frac{\rho}{2}[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{u}]S(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})$
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\boldsymbol{f} + \frac{\rho}{4}[u^2\boldsymbol{n} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{u}]S(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})$
(2,0)	$\boldsymbol{f} + \rho[u^2\boldsymbol{n}]S(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})$
(0,2)	$\boldsymbol{f} + \rho[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{u}]S(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})$
(1,1)	$\boldsymbol{f} + \frac{\rho}{2}[u^2\boldsymbol{n} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{u}]S(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})$

Remarque 3 (Modèle diffusif) *Si $\alpha + \beta = 1$, alors le modèle est strictement diffusif, car il équilibre exactement l'afflux d'énergie : $\mathcal{F}(\Lambda(\alpha, \beta), \boldsymbol{u}) = 0$ si $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} < 0$.*

Remarque 4 (Modèle sur-diffusif) *Si $\alpha + \beta > 1$, alors le modèle est sur-diffusif, car il prélève plus d'énergie que l'afflux : $\mathcal{F}(\Lambda(\alpha, \beta), \boldsymbol{u}) < 0$ si $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} < 0$. Les modèles sur-diffusifs peuvent s'avérer plus robustes que les modèles diffusifs, en atténuant plus fortement les structures de l'écoulement.*

5.3.1 Commentaires sur l'art antérieur

Avec toute la rigueur mathématique qui s'impose, Bruneau *et al.* (1994) ont été les premiers à proposer plusieurs conditions limites diffusives obtenus par sérendipité, car la méthodologie pour les construire n'a pas été expliquée. Celles-ci ont été étudiées théoriquement pour les formes $\mathrm{NS_D}$ et $\mathrm{NS_L}$ des équations de Navier-Stokes. Bien qu'ayant anticipé l'usage de ces conditions limites pour les écoulements externes autour d'un obstacle, seule la formulation $\mathrm{NS_D}$ a fait l'objet de simulations numériques qualitatives dans un canal. À ce jour, on ne connaît de ces auteurs aucune étude quantitative sur l'effet de leurs conditions limites sur la précision des forces et moments sur un objet immergé dans le domaine de calcul. De toutes les formulations proposées par ces auteurs, seule la condition limite $\Lambda(0,1)$ (*cf.* tableau 5.1) s'en approche.

Il faut attendre les travaux de Dong pour réaliser une synthèse exhaustive de l'art antérieur. On lui doit également une explication rigoureuse de l'incohérence de la condition limite de tractions nulles, lorsque le fluide est entrant à la sortie du domaine de calcul. Dans son article fondateur (Dong *et al.* (2014)), il est le premier à utiliser l'équation de l'énergie mécanique pour expliquer l'incohérence et en déduire la condition limite $\Lambda(1,0)$ (*cf.* tableau 5.1). Plus récemment, il a proposé une famille de conditions limites diffusives (Dong et Shen (2015)) similaire à celles que nous avons construite (*cf.* tableau 5.1). Dong et ses coauteurs analysent ces six conditions limites en fonction de la variation d'énergie cinétique interne au domaine. Ils arguent qu'il y a peu (ou pas) de différences quantitatives observables entre les résultats numériques obtenus de conditions limites sur-diffusives ou diffusives. Par ailleurs, ils notent que le champ de vecteurs vitesse et la décharge des tourbillons à travers la frontière de sortie sont qualitativement mieux représentés par les modèles sur-diffusifs, sans étayer cette observation par des résultats quantitatifs. Finalement, parmi ces dernières, la condition $\Lambda(1,1)$ leur apparaît moins susceptible de déformer les tourbillons.

L'art antérieur montre que les conditions limites $\Lambda(\alpha,\beta)$ ont été étudiées de manière exhaustive, uniquement, pour l'approximation spectrale $(P_N P_N)$ de la la formulation $\mathrm{NS_L}$ dans un référentiel inertiel. De plus, la très grande majorité de ces études se sont limités à des méthodes d'intégration en temps à l'ordre 2 et à pas constant.

Il n'existe aucune étude de conditions limites diffusives développées pour la simulation de l'interaction fluide-structure. Pour combler ce déficit de connaissances nous allons :

1. **Étudier** dans un référentiel inertiel les conditions limites $\Lambda(\alpha,\beta)$, pour l'approximation spectrale $(P_N P_{N-1})$ de la formulation $\mathrm{NS_D}$ et une discrétisation adaptative en temps. Ainsi, l'art antérieur sera étendue à des approximations de *Taylor-Hood*

satisfaisant la condition *inf-sup*. L'efficience de la combinaison conditions limites et contrôle de la discrétisation temporelle sera également évaluée.

2. **Généraliser** les conditions limites $\Lambda(\alpha, \beta)$ pour la formulation des équations de Navier-Stokes dans un référentiel accéléré. L'étude portera que sur les référentiels accélérés en translation par rapport au référentiel inertiel (de référence) ; le référentiel accéléré n'est donc pas en rotation et les effets de Coriolois sont absents de cette analyse.
3. **Intégrer** les conditions limites $\Lambda(\alpha, \beta)$ à la formulation monolithique des équations de Navier-Stokes dans un référentiel accéléré.

En continuité avec les travaux de Dong (Dong *et al.* (2014); Dong et Shen (2015)), nous simulerons l'écoulement non confiné autour d'un cylindre carré inséré dans un domaine de calcul rectangulaire. Les simulations seront réalisées pour diverses longueurs du domaine de calcul et pour une plage étendue du nombre de Reynolds pour évaluer l'influence de ces paramètres combinés aux conditions limites $\Lambda(\alpha, \beta)$.

5.4 Conditions limites diffusives en référentiel inertiel

5.4.1 Solutions manufacturées

Afin de s'assurer que les conditions limites ont été proprement codées, nous calculons une série de simulations avec la solution analytique exacte de Kovasnay (Kovasznay, 1948). Ce problème stationnaire est particulièrement intéressant pour la vérification des écoulements avec reflux de fluide à la frontière de sortie (voir fig. 5.4). La solution exacte s'écrit

$$u = 1 - \exp(\lambda x)\cos(2\pi x) \tag{5.12a}$$

$$v = \frac{\lambda}{2\pi}\exp(\lambda x)\sin(2\pi x) \tag{5.12b}$$

$$p = \frac{1}{2}(1 - \exp(2\lambda x)) \tag{5.12c}$$

où (u, v) est la vitesse du fluide dans les directions respectives x et y, et p la pression. Tout comme Dong *et al.* (2014), nous posons $\lambda = \frac{1}{2\nu} - \sqrt{\frac{1}{4\nu^2} + 4\pi^2}$ et $\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{1}{40}$ pour ce test. Nous considérons quatre domaines de calculs $[-0.5; x_f] \times [-0.5; 0.5]$, où $x_f \in \{-0.1; 0.5; 2; 5\}$. Le maillage est composé de deux quadrangles spectraux de tailles identiques alignés verticalement. Sur les frontières de gauche, haut et bas sont imposées les vitesses exactes de Kovasnay, définies aux équations (5.12a)-(5.12b). Sur le bord droit, nous fixons un à un les

modèles de conditions limites développés précédemment. La condition initiale est nulle. Enfin, nous imposons les forces volumiques, calculées préalablement pour coïncider avec la solution de Kovasnay, sur le domaine de calcul.

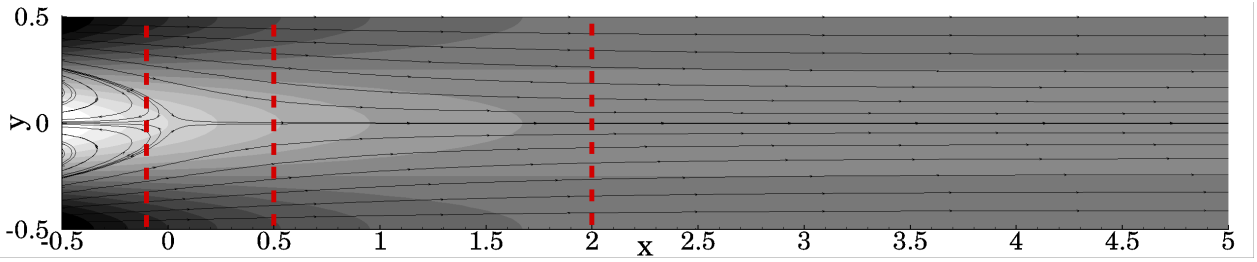


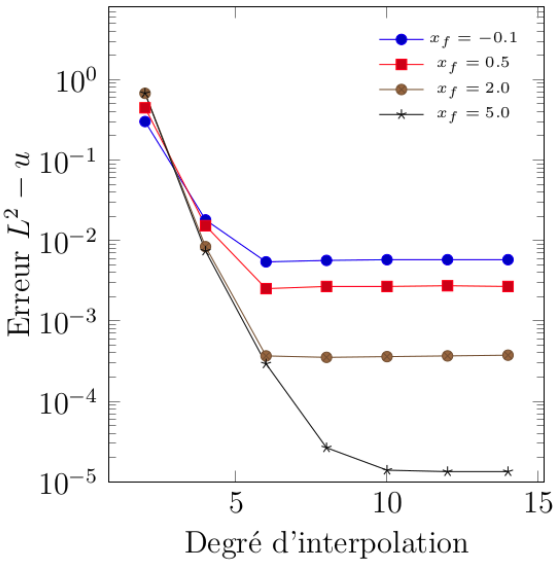
Figure 5.4 Contours de la vitesse selon $\boldsymbol{e_x}$ et lignes de courant de l'écoulement de Kovasnay

Dans un premier temps, nous traçons les graphes de convergence (fig. 5.5) en norme L^2 selon le degré d'interpolation des polynômes pour les équations de Navier-Stokes $\mathrm{NS_L}$ et $\mathrm{NS_D}$ combinés avec la condition limite $\Lambda(1,0)$. Les résultats montrent une même convergence spectrale pour $\mathrm{NS_D}$ et $\mathrm{NS_L}$ jusqu'à ce qu'un seuil soit atteint. En effet, la résolution spatiale du maillage choisi est extrêmement pauvre et la condition limite ne peut approcher la solution exacte du problème et empêche la convergence. La saturation apparaît à $||\epsilon|| = 10^{-4}$ pour des polynômes P_8P_7 sur la géométrie la plus longue $x_f = 5$ pour la simulation calculée avec $\mathrm{NS_D}$. Toujours sur la géométrie la plus longue, la saturation pour $\mathrm{NS_L}$ apparaît pour le même degré d'interpolation à $||\epsilon|| = 10^{-5}$, c'est-à-dire un ordre de grandeur plus bas. Cette différence quantitative influence peu la convergence de la solution et son taux de convergence.

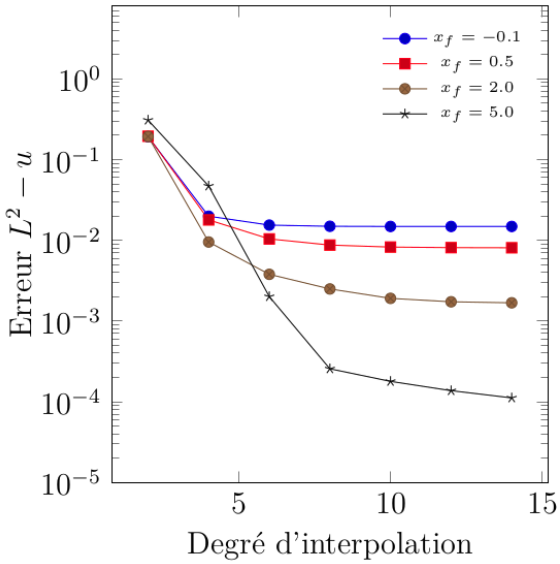
La figure 5.5c illustre les graphes de convergence sur le domaine court $x_f = -0.1$ en fonction de la condition limite imposée à la sortie. Nous limitons les simulations à la formulation $\mathrm{NS_D}$ et les résultats montrent que, quelque soit la condition limite utilisée, les taux de convergence sont identiques et la saturation apparaît au même degré d'interpolation. Notons que cette observation est uniquement vraie en stationnaire, comme nous le verrons plus tard.

5.4.2 Écoulement autour d'un cylindre carré

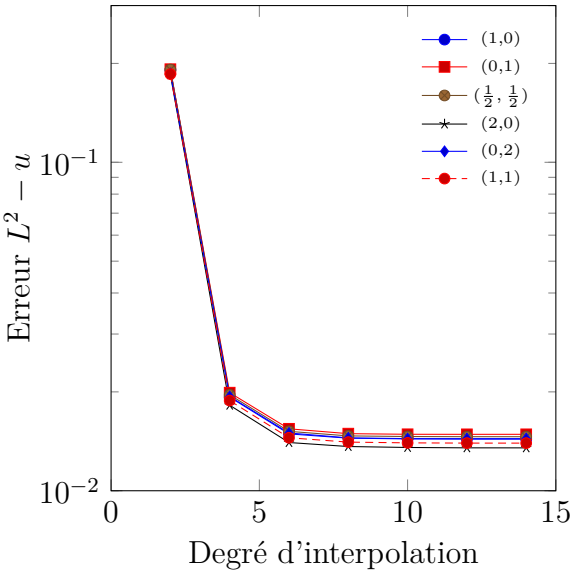
Nous considérons l'écoulement incompressible transitoire autour d'un cylindre carré sur des domaines sévèrement tronqués avec des nombres de Reynolds variant de $Re = 100$ à $Re = 10,000$. Expérimentalement l'écoulement en aval d'un obstacle devient tridimensionnel à partir de $Re \approx 150$ et le sillage turbulent. Cependant, à dessein de reproduire les résultats de Dong *et al.* (2014), nous limiterons nos calculs à la deuxième dimension. Dans ce sens, Dong et Karniadakis (2005) prouvent que les tourbillons créés en aval d'un obstacle sur un domaine



(a) $\mathrm{NS_D} + \Lambda(1,0)$



(b) $\mathrm{NS_L} + \Lambda(1,0)$



(c) $\mathrm{NS_D}$ sur le maillage court $x_f = -0.1$.

Figure 5.5 Erreur $L^2 - u$ calculée sur les quatre domaines en fonction du degré d'interpolation, de la forme des équations de Navier-Stokes et de la condition limite imposée à la sortie

2D sont plus forts que leurs équivalents 3D, donnant ainsi une plus grande responsabilité à la fonction dissipative de la condition limite de sortie.

Soit $[-5D; L_x] \times [-L_y; L_y]$ le domaine de calcul avec $D = 1$ la longueur caractéristique du cylindre carré occupant la région $[-D/2; D/2] \times [-D/2; D/2]$. Afin d'étudier l'effet de la proximité de la frontière de sortie, nous varions la longueur L_x du sillage ; la largeur L_y reste

constante car les effets de bord ne sont pas étudiés ici.

Sur la frontière de gauche entre un écoulement uniforme $\boldsymbol{u} = (1, 0)$. Sur les rives, nous imposons une condition limite de symétrie afin d'imiter l'écoulement à travers un groupement vertical de cylindres carrés. La condition limite de sortie et ses différents modèles sont imposés sur la frontière de droite. Les équations de Navier-Stokes sont normalisées par la vitesse caractéristique U, la longueur caractéristique D, le temps caractéristique $t = \frac{D}{U}$ et la pression ρU_0^2. Le nombre de Reynolds s'écrit alors $Re = \frac{UD}{\nu}$.

Re=100

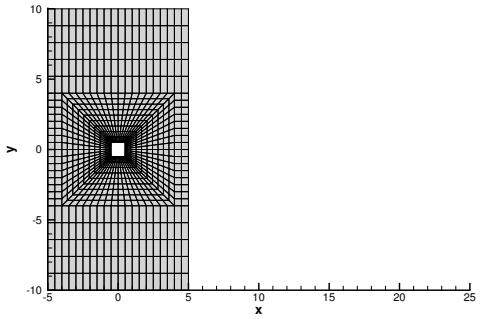
Dans cette section, nous effectuons une série de tests à $Re = 100$. Nous considérons six géométries avec une largeur fixe de $L_y/D = 10$ et diverses longueurs de sillage $L_x/D \in \{5; 7.5; 10; 15; 20; 25\}$. Les géométries et leur maillage respectif sont illustrés sur la figure 5.6, comprenant entre 840 et 1880 éléments spectraux. Pour toutes les simulations, nous utilisons des interpolants P_8P_7 combinés avec une intégration spatiale exacte (méthode de Gauss). L'intégration temporelle utilise la méthode BDF d'ordres 1 à 4 avec un pas de temps variable $10^{-6} \leq \Delta t \leq 1$, dans le but d'accélérer les calculs informatiques (Hay *et al.*, 2015a,b). La tolérance d'intégration temporelle, fixée à $\varepsilon = 10^{-5}$, contrôle la valeur du pas de temps. Le pas de temps initial est 10^{-3} et la vitesse initiale

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \begin{cases} 1 + 0.1 \tanh \dfrac{y}{0.2\sqrt{2}} \\ 0 \end{cases} \tag{5.13}$$

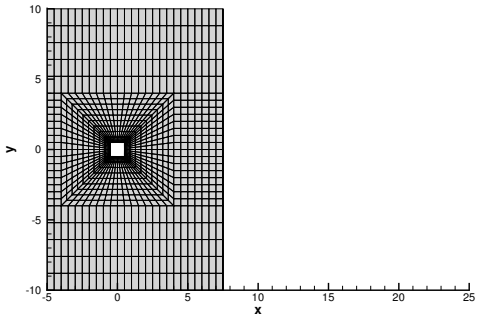
déclenche l'instabilité en aval de l'obstacle.

Une fois la phase transitoire terminée, les allées de von Kármán sont établies et nous pouvons calculer les paramètres globaux de l'écoulement : le coefficient de traînée moyen $C_d = \dfrac{2\overline{F_x}}{\rho U^2}$ (où $\overline{F_x}$ est la force de traînée moyenne) et la moyenne quadratique (r.m.s., pour *root mean square*) du coefficient de portance $C_L = \dfrac{2F'_y}{\rho U^2}$ (où F'_y est la portance r.m.s.). Nous choisissons la moyenne quadratique plutôt qu'arithmétique, car l'écoulement autour d'un cylindre carré ne produit aucune force de portance moyenne. Le dernier paramètre est le nombre de Strouhal $St = \frac{fD}{U}$ (où f est la fréquence de relâchers tourbillonnaires). Nous résumons les résultats dans le tableau 5.2.

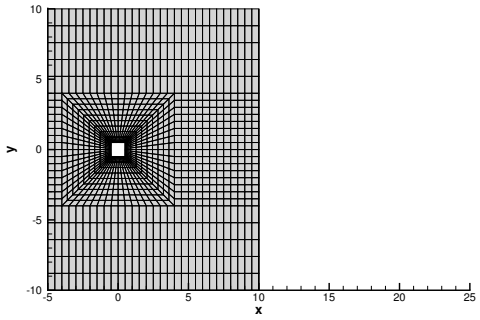
Les valeurs obtenues sont très proches de celles de Dong *et al.* (2014) sur toutes les géométries et les valeurs du plus petit domaine $L_x = 5D$ sont globalement proches de celles du plus long domaine $L_x = 25D$ (0.8% pour C_d, 13% pour C_L et 4% pour St). Cette tendance est



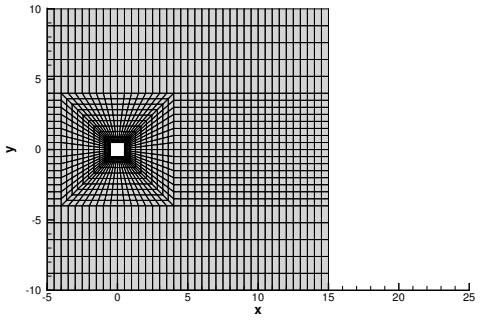
(a) $L_x = 5D$, 840 éléments.



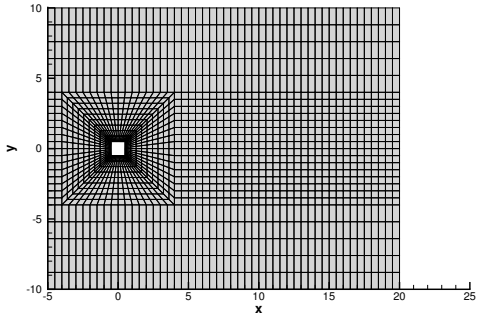
(b) $L_x = 7.5D$, 970 éléments.



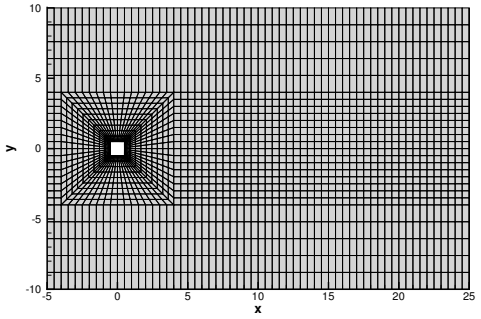
(c) $L_x = 10D$, 1100 éléments.



(d) $L_x = 15D$, 1360 éléments.



(e) $L_x = 20D$, 1620 éléments.



(f) $L_x = 25D$, 1880 éléments.

Figure 5.6 Géométries et maillages

cohérente étant donné que le nombre de Reynolds est faible et que nous travaillons avec les mêmes paramètres de simulation, géométries, maillages spectraux et conditions initiales. Nous devrions souligner que nous utilisons un pas de temps variable dont la moyenne tourne autour de $\overline{\Delta t} = 7 \times 10^{-2}$, alors que Dong *et al.* (2014) emploient un pas constant $\Delta t = 10^{-3}$ et inférieur.

Pour étudier l'effet de la proximité de la sortie, nous traçons la vorticité instantanée le long de la ligne centrale $y = 0$ derrière le cylindre carré à $t = 100$ (fig. 5.7). Les deux plus petites géométries ($L_x = 5D$ et $7.5D$) produisent des vorticités légèrement différentes de celles du plus long domaine ($L_x = 25D$), notamment un déphasage et une amplitude un peu plus grande. Cependant, les profils sur les domaines plus longs ($L_x = 10D$ à $20D$) coïncident parfaitement avec celui du domaine long.

La tendance générale révèle des résultats précis et proches de ceux trouvés dans la littérature (Shimizu et Tanida, 1978; Davis et Moore, 1982; Sohankar *et al.*, 1998) à $Re = 100$ pour toutes longueurs de sillage L_x.

Tableau 5.2 Paramètres d'écoulement à $Re = 100$ pour toutes les géométries : coefficient de traînée C_d, coefficient de portance r.m.s. C_L et nombre de Strouhal St. Comparaison des résultats obtenus avec $\mathrm{NS_D} + \Lambda(0, 1)$ et ceux de Dong *et al.* (2014)

	C_d		C_L		St	
	Étude	(2014)	Étude	(2014)	Étude	(2014)
$L_x = 5D$	1.634	1.614	0.226	0.227	0.147	0.151
$L_x = 7.5D$	1.640	1.622	0.203	0.203	0.151	0.154
$L_x = 10D$	1.645	1.627	0.198	0.198	0.152	0.153
$L_x = 15D$	1.647	1.630	0.196	0.195	0.153	0.156
$L_x = 20D$	1.648	1.630	0.195	0.194	0.153	0.156
$L_x = 25D$	1.648	1.630	0.195	0.194	0.153	0.154

Source	C_d	C_L	St
Shimizu et Tanida (1978)	1.6	-	-
Sohankar *et al.* (1998)	1.478	-	0.146
Davis et Moore (1982)	1.63	-	0.15

Re = 1000

Les tests suivants se basent sur un nombre de Reynolds plus élevé $Re = 1000$. Les simulations sont lancées uniquement en 2D pour se comparer aux résultats de Dong *et al.* (2014).

Dans cette section, nous établissons dans un premier temps la robustesse des modèles de conditions limites de sortie en fonction de la formulation des équations de Navier-Stokes et de la discrétisation temporelle. Dans un second temps, nous calculons les paramètres d'écoulement pour les combinaisons les plus stables que nous comparons qualitativement en

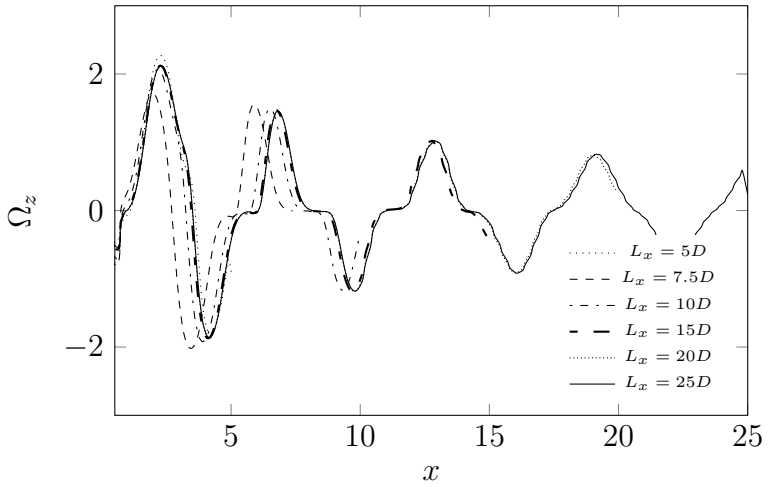


Figure 5.7 Comparaison des profils de traînée le long de la ligne centrale $y = 0$ pour différentes longueurs de domaine

fonction de la décharge des tourbillons.

Nous limitons les simulations à quatre longueurs de domaines $L_x/D \in \{5; 7.5; 10; 15\}$. Nous utilisons la même configuration et paramètres de simulation qu'à la section précédente 5.4.2. Les maillages spectraux sont ceux de la figure 5.6 et les éléments sont construits avec des interpolants P_8P_7 puis intégrés exactement.

Pour l'étude de la robustesse de la condition limite, la discrétisation temporelle BDF prend deux formes. La première emploie les ordres inconditionnellement stables BDF_1 et BDF_2 avec un pas de temps fixe Δt entre chaque instant ; c'est la méthode usuellement utilisée dans la littérature (Dong *et al.*, 2014; Dong et Shen, 2015). Généralement, le programme débute à l'ordre BDF_1 puis augmente dès le deuxième pas de temps à BDF_2 et y reste pour toute la simulation. La seconde est adaptative BDF_{1-4} où uniquement la tolérance ε est fixée. L'heuristique écrite dans EF6 choisit alors à la fois le pas de temps Δt et l'ordre BDF afin de résoudre le système matriciel le plus rapidement possible et de la manière la plus efficiente. La table 5.3 expose la stabilité des combinaisons forme forte de Navier-Stokes/modèle de condition limite selon que nous fixons le pas de temps ou la tolérance. Nous calculons respectivement la tolérance moyenne et le pas de temps moyen.

Dong et Shen (2015) ont déjà évalué la robustesse des différents modèles combinés avec la forme Laplacienne NS_L et ont établi que tous les modèles sont stables pour une discrétisation BDF_2 définie avec un pas de temps 5×10^{-4}. Le même pas de temps fixe démontre également la stabilité de tous les modèles $\Lambda(\alpha, \beta)$ en association avec NS_L et NS_D, révélant respectivement des erreurs moyennes $\overline{\varepsilon} = 1.57 \times 10^{-9}$ et $\overline{\varepsilon} = 4.98 \times 10^{-10}$. Ces valeurs sont au minimum cinq

ordres de grandeur plus petites que les tolérances typiquement exigées en paramètre d'entrée et imposent des durées de simulation colossales (de l'ordre de 250 jours pour une simulation de durée de 50 unités de temps). Une augmentation de la taille du pas de temps s'impose, mais il s'en suit une perte indéniable de robustesse pour certains modèles. Seule la condition $\Lambda(0,1)$ combinée avec $\mathrm{NS_L}$ reste stable au pas de temps $\Delta t = 10^{-2}$. Pourtant, combinée à $\mathrm{NS_D}$, elle se révèle instable, au même titre que son équivalente plus diffusive $\Lambda(0,2)$, pour un pas de temps plus élevé à $\Delta t = 5 \times 10^{-2}$. Cependant, lorsque nous fixons la tolérance à $\varepsilon = 10^{-4}$ et $\varepsilon = 10^{-2}$, les pas de temps moyens sont bien plus élevés ($\overline{\Delta t} = 0.0110$ et $\overline{\Delta t} = 0.302$ respectivement pour $\mathrm{NS_L}$ et $\mathrm{NS_D}$) et les tendances de stabilité changent. En effet, à pas de temps variable, le modèle $\Lambda(1,1)$ s'avère le moins robuste ; alors que Dong et Shen (2015) l'ont annoncé comme le plus efficace à pas de temps fixe. Au vu de nos résultats, nous observons que les modèles $\Lambda(0,1)$, $\Lambda(0,2)$ et $\Lambda(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ sont les plus robustes. Nous exposerons ainsi dans la suite de l'étude uniquement les paramètres d'écoulement pour le modèle $\mathrm{NS_D} + \Lambda(0,1)$.

En outre, l'analyse des temps de calculs réels nécessaires à l'obtention totale de la solution indique que la méthode adaptative avec une tolérance de $\varepsilon = 10^{-4}$ est bien plus efficiente que celle à pas de temps fixe $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ pour une faible perte de précision. Nous opterons donc pour une méthode adaptative dans la suite de l'étude.

Tableau 5.3 Robustesse des différentes combinaisons de conditions limites $\Lambda(\alpha,\beta)$ et des équations de Navier-Stokes. Stabilité en fonction du pas de temps Δt fixé et de la tolérance ε imposée. Valeurs respectives de la tolérance moyenne $\overline{\varepsilon}$ et du pas de temps moyen $\overline{\Delta t}$

$\Lambda(\alpha,\beta)$	Navier-Stokes Laplacien				Navier-Stokes divergence			
	Δt		ε		Δt		ε	
	5×10^{-4}	10^{-2}	10^{-4}	10^{-2}	5×10^{-4}	5×10^{-2}	10^{-4}	10^{-2}
(0,1)	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓
(1,0)	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓	×
$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓
(0,2)	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓
(2,0)	✓	×	✓	✓	✓	×	✓	×
(1,1)	✓	×	✓	×	✓	✓	✓	×
Valeur moyenne	$\overline{\varepsilon}$		$\overline{\Delta t}$		$\overline{\varepsilon}$		$\overline{\Delta t}$	
	1.57e-9	1.13e-5	0.0110	0.302	4.98e-10	4.15e-4	0.0177	0.281

Nous résumons dans la table 5.4 les paramètres globaux de l'écoulement obtenus avec la

combinaison $\mathrm{NS_D} + \Lambda(0,1)$ pour toutes les longueurs de domaine. La méthode temporelle BDF_{1-4} avec une tolérance 10^{-4} produit un pas de temps moyen de $\overline{\Delta t} = 0.0177$. Nous comparons les valeurs du coefficient de traînée moyen C_d, le coefficient de portance r.m.s. C_L et le nombre de Strouhal St avec celles de Dong *et al.* (2014). Le coefficient de traînée et le nombre de Strouhal calculés sur le plus petit domaine correspondent très bien avec ceux du plus long domaine, avec moins de 5% de différence en C_d et 8% en St ; le coefficient de portance exhibe la plus grande différence avec 11%. Les résultats montrent des différences plus faibles entre les deux domaines extrêmes $L_x = 5D$ et $L_x = 15D$, probablement imputables à leur pas de temps fixe beaucoup plus faible. Malgré cela, les résultats de notre étude s'avèrent aussi précis que les leurs, en comparaison avec les expériences (Shimizu et Tanida, 1978). Les valeurs de Davis et Moore (1982) sont en accord uniquement pour le C_d ; les C_L et St concordent à un facteur 2 près, dû à une définition différente du coefficient de portance et du nombre de Strouhal.

Tableau 5.4 Paramètres d'écoulement à $Re = 1000$ pour les quatre domaines de calcul : coefficient de traînée C_d, coefficient de portance r.m.s. C_L et nombre de Strouhal. Combinaison $\mathrm{NS_D} + \Lambda(0,1)$. Comparaison avec les résultats de Dong *et al.* (2014)

	C_d		C_L		St	
	Étude	(2014)	Étude	(2014)	Étude	(2014)
$L_x = 5D$	2.243	2.501	1.479	1.640	0.088	0.087
$L_x = 7.5D$	2.303	2.654	1.598	1.630	0.094	0.093
$L_x = 10D$	2.331	2.579	1.619	1.678	0.095	0.097
$L_x = 15D$	2.349	2.628	1.674	1.694	0.096	0.097

Source	C_d	C_L	St
Shimizu et Tanida (1978)	2.3	-	-
Davis et Moore (1982)	2.5	0.85	0.15

Ensuite, nous analysons la traversée des tourbillons à la frontière de sortie en fonction du modèle de condition limite utilisé. Les figures 5.8 et 5.9 illustrent l'évolution temporelle de la dissipation d'un tourbillon pour respectivement $\Lambda(1,0)$ et $\Lambda(0,1)$. Dans le premier cas, nous observons que le vortex bleu s'écrase le long de la frontière et n'apparaît plus circulaire. Ceci peut s'expliquer par l'action de la condition limite qui induit une traction dans la direction normale à la sortie ($\propto u^2 \boldsymbol{n}$). Dans le deuxième cas, la condition limite dissipe le vortex bleu en créant un vortex de sens contraire et en tirant le tourbillon dans le sens de l'écoulement. Nous remarquons également une légère dérive vers le bas de ce même vortex bleu. Ce phénomène

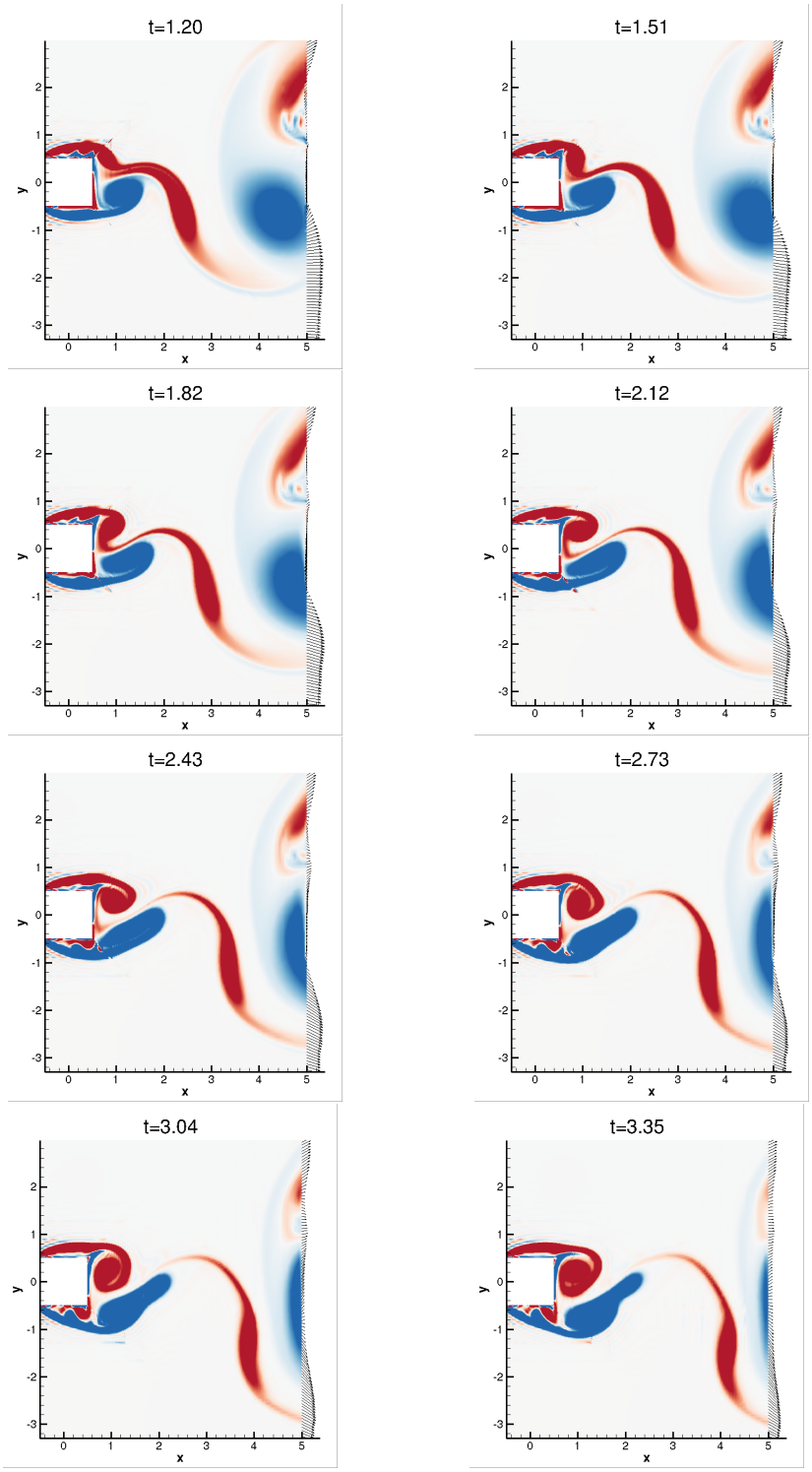


Figure 5.8 Séquence temporelle des champs de vecteurs et de la vorticité à $Re = 1000$ illustrant la décharge des tourbillons à travers la frontière de sortie calculée par la condition limite $\Lambda(1, 0)$. Dans l'ordre de lecture : $t = 1.20$, $t = 1.51$, $t = 1.82$, $t = 2.12$, $t = 2.43$, $t = 2.73$, $t = 3.04$, $t = 3.35$

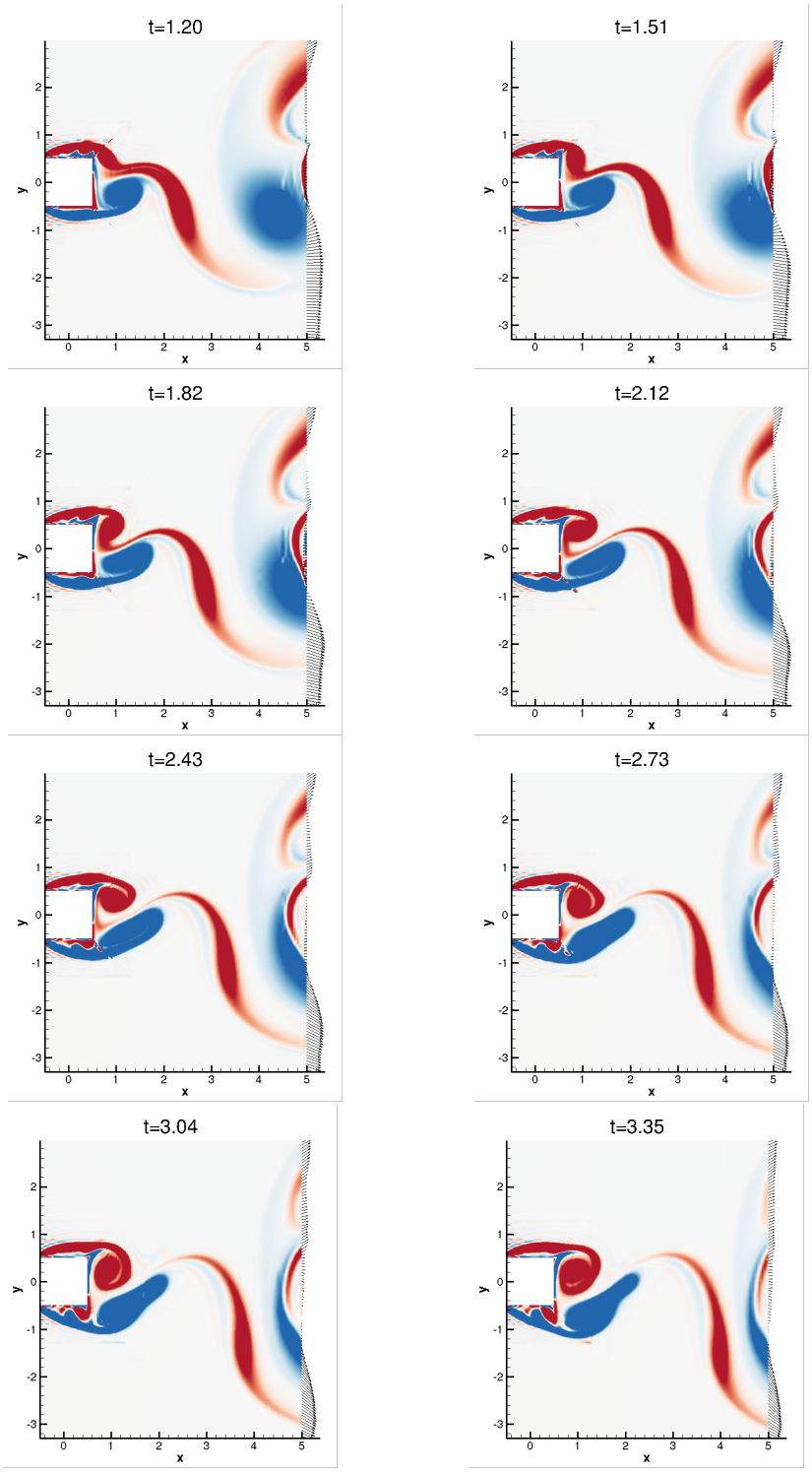


Figure 5.9 Séquence temporelle des champs de vecteurs et de la vorticité à $Re = 1000$ illustrant la décharge des tourbillons à travers la frontière de sortie calculée par la condition limite $\Lambda(0, 1)$. Dans l'ordre de lecture : $t = 1.20$, $t = 1.51$, $t = 1.82$, $t = 2.12$, $t = 2.43$, $t = 2.73$, $t = 3.04$, $t = 3.35$

peut s'expliquer par l'action de la condition limite qui induit des tractions dans les directions normale et transversale à la sortie ($\propto (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{u}$). Les conditions $\Lambda(2,0)$ et $\Lambda(0,2)$ agissent sensiblement de la même manière que $\Lambda(1,0)$ et $\Lambda(0,1)$, à ceci près qu'elles diffusent plus les vortex. Les modèles $\Lambda(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ et $\Lambda(1,1)$ sont des hybrides de ces deux termes et les effets individuels de ceux-ci sont indiscernables.

Tableau 5.5 Paramètres d'écoulement à $Re = 1000$ pour toutes les combinaisons d'équations fluide et de modèles de condition limite sur la géométrie courte $L_x = 5D$: C_d, C_L et St

$\Lambda(\alpha,\beta)$	$\mathrm{NS_L}$			$\mathrm{NS_D}$		
	C_d	C_L	St	C_d	C_L	St
(1,0)	2.271	1.407	0.09			
(0,1)	2.262	1.437	0.097	2.542	1.537	0.105
$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$				2.550	1.559	0.108
(2,0)	2.224	1.438	0.088			
(0,2)	2.312	1.482	0.103	2.487	1.518	0.106
(1,1)	2.214	1.413	0.099			

Finalement, nous comparons les paramètres globaux d'écoulement en fonction de la combinaison d'équations de Navier-Stokes et de modèle de condition limite utilisée sur la plus petite géométrie $L_x = 5D$. Les résultats sont obtenus pour une intégration temporelle adaptative BDF_{1-4} avec une tolérance $\varepsilon = 10^{-2}$, donc seront exposés uniquement les résultats dont les simulations convergent (*c.f.* table 5.5). Nous observons des différences très faibles de l'ordre de 3% [1] en C_d et C_L entre toutes les combinaisons possibles, et un maximum de 14% de différence en St avec la forme de Laplace des équations fluides. Globalement, les résultats concordent bien avec les valeurs trouvées dans la littérature (Shimizu et Tanida, 1978; Davis et Moore, 1982) à la table 5.4.

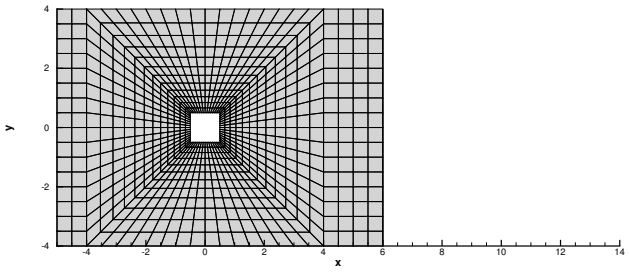
Notons que les valeurs obtenues avec la combinaison $\mathrm{NS_D} + \Lambda(0,1)$ sont différentes aux tables 5.4 et 5.5, car nous n'utilisons pas les mêmes tolérances d'intégration temporelle, respectivement $\varepsilon = 10^{-4}$ et $\varepsilon = 10^{-2}$.

Re = 10,000

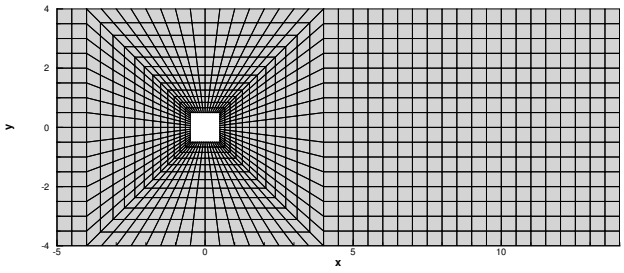
Le dernier ensemble de tests pour le cylindre carré considère le nombre de Reynolds $Re = 10,000$. Nous n'utilisons que deux géométries, plus petites que les précédentes de largeur

1. Différence prise par rapport à la valeur maximale de chaque paramètre.

$L_y/D = 4$ et de longueur $L_x/D \in \{6; 14\}$. Les maillages spectraux sont dessinés à la figure 5.10 et contiennent respectivement 864 et 1120 quadrangles. Nous utilisons la méthode BDF_{1-4} avec un pas de temps variable et une tolérance fixée à $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$. Le pas de temps initial est $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ et une simulation calculée à un nombre de Reynolds plus faible sert de condition initiale.



(a) $L_x = 6D$, 864 éléments.



(b) $L_x = 14D$, 1120 éléments.

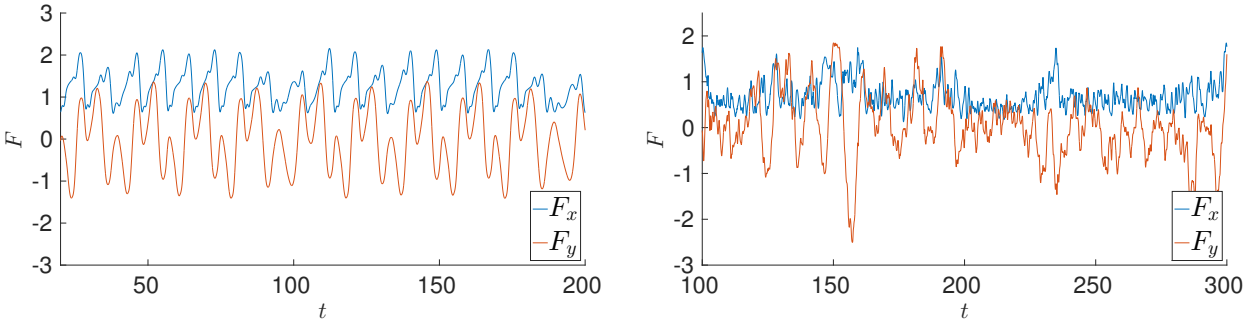
Figure 5.10 Géométries et maillages pour $Re = 10,000$

Avec un pas de temps fixé à $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$ et des éléments spectraux $P_{14}P_{13}$, Dong *et al.* (2014) ont lancé des simulations excessivement coûteuses en temps et ressources. Il est inconcevable pour nous d'utiliser la même configuration, car une telle simulation lancée sur nos machines durerait 250 jours sur la plus petite géométrie, pour une durée de $t = 50$ unités de temps. À cet effet, nous abaissons le degré d'interpolation à des éléments P_8P_7 et utilisons une discrétisation temporelle adaptative produisant un pas de temps moyen $\overline{\Delta t} = 6 \times 10^{-2}$.

Le tableau 5.6 fournit une comparaison quantitative des résultats avec le coefficient de traînée moyen C_d et le coefficient de portance r.m.s. C_L à $Re = 10,000$. Le nombre de Strouhal n'est pas calculé puisqu'une longue durée de simulation est requise pour calculer une fréquence de relâchers tourbillonnaire fiable et que le coût serait prohibitif. Le coefficient de traînée moyen obtenu avec $\text{NS}_\text{D} + \Lambda(1,0)$ pour le domaine court $L_x = 6D$ est très proche de la valeur obtenue sur le domaine long $L_x = 14D$ (moins de 1%) et les deux sont plus proches de la valeur expérimentale (Tamura et Kuwahara, 1990) que toute autre combinaison. D'autre

Tableau 5.6 Paramètres d'écoulement à $Re = 10,000$ et pour deux longueurs de domaine : C_d et C_L. Combinaison $\mathrm{NS_D} + \Lambda(0,1)$

	C_d		C_L	
	Étude	(2014)	Étude	(2014)
$L_x = 6D$	1.909	1.479	0.837	0.804
$L_x = 14D$	1.901	1.491	1.452	0.825
Source	C_d		C_L	
Tamura et Kuwahara (1990)	2.2 - 2.3		-	



(a) $Re = 1000$. (b) $Re = 10,000$.

Figure 5.11 Historique des forces de traînée et de portance sur le cylindre

part, les valeurs de C_L ne concordent pas entre elles, ce qui est probablement dû au fait que la durée des simulations est trop courte (limitée à $t = 400$ unités de temps).

La figure 5.11 présente les historiques des forces de traînée et de portance calculées sur la géométrie courte pour différents nombres de Reynolds. La figure 5.11a correspond à $Re = 1000$ et nous constatons que les forces sur le cylindre possèdent des périodes bien définies. En revanche, les signaux à $Re = 10,000$ qu'illustre la figure 5.11b sont bien plus chaotiques et progressent sur une large plage de fréquences. Cela démontre la capacité de la condition limite de sortie $\Lambda(0,1)$ à stabiliser différents types d'écoulement et à dissiper des vortex relâchers à hautes fréquences.

Sur la figure suivante 5.12, nous affichons les contours de la vorticité avec le champ de vitesses instantané obtenus sur le domaine long $L_x = 14D$ à $Re = 10,000$. Tel qu'avancé précédemment, les allées tourbillonnaires sont bien plus riches en tourbillons et ces derniers sont plus petits mais bien plus forts que ceux créés à $Re = 1000$. De plus, si nous nous intéressons au phénomène physique advenant à la frontière de sortie, nous pouvons alléguer que les vortex

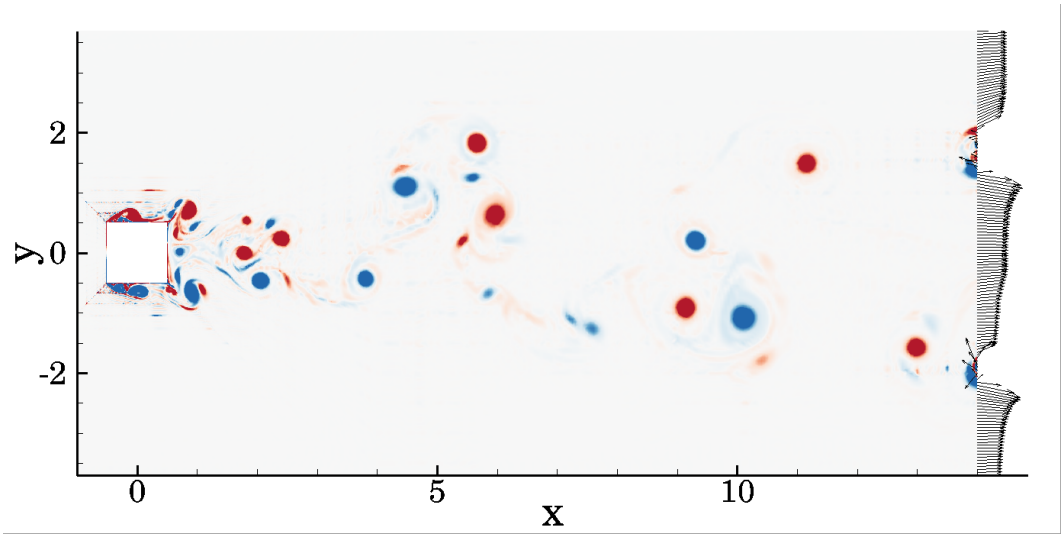


Figure 5.12 Vorticité et champ de vitesses obtenus sur le domaine $L_x = 6D$ à $Re = 10,000$ avec la combinaison $\mathrm{NS_D} + \Lambda(0,1)$

sont suffisamment dissipés par la condition $\Lambda(0,1)$ pour ne polluer ni l'écoulement amont ni les vortex créés autour de l'obstacle.

5.5 Généralisation aux VIV en référentiel accéléré

Dans cette section, nous nous intéressons à l'étude VIV d'un cylindre carré à ratio de masse nul et libre selon deux degrés de liberté. Les écoulements que nous résolvons sont bidimensionnels et à nombres de Reynolds élevés, dans la continuité de la section précédente. Nous présentons dans un premier temps les équations mises en jeu dans l'interaction fluide-structure puis leur couplage dans le référentiel accéléré (Moulin, 2016). L'étude dans le référentiel accéléré, et non dans le référentiel inertiel, présente plusieurs avantages numériques dont la possibilité de ne pas recréer le maillage autour de l'obstacle à chaque pas de temps, limitant ainsi le temps de calcul. Ensuite, nous développons la mise en œuvre des conditions limites diffusives de sortie dans un mobile et leur modélisation numérique. Enfin, nous analysons les résultats obtenus par les simulations 2D aux nombres de Reynolds $Re = 100$ et $Re = 500$.

5.5.1 Interactions fluide-structure

Référentiels inertiel et accéléré

Soient R_0 et R_1 les référentiels respectivement absolu et relatif :

$$R_0 = (O, \boldsymbol{i'}, \boldsymbol{j'}) \tag{5.14a}$$

$$R_1 = (G, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) \tag{5.14b}$$

Soit M un point quelconque de l'espace, nous notons

$$\boldsymbol{OM} \equiv \boldsymbol{x'} = \boldsymbol{OG} + \boldsymbol{GM} = \boldsymbol{x_c} + \boldsymbol{x} \tag{5.15}$$

Étant donné que le référentiel R_1 est en translation par rapport à R_0, la rotation est omise et $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = (\boldsymbol{i'}, \boldsymbol{j'})$.

Mécanique du solide

Premièrement, l'obstacle est un solide indéformable de masse m_c. Celui-ci subit les forces fluides $\boldsymbol{F_f}$ et les forces $\boldsymbol{F_r}$ induites par les ressorts de raideur k, placés dans les directions $\boldsymbol{i'}$ et $\boldsymbol{j'}$. La deuxième loi de Newton dans un référentiel galiléen

$$m_c \boldsymbol{a}_{G/0} = \boldsymbol{F_f} + \boldsymbol{F_r} \tag{5.16}$$

combinée à la composition des accélérations dans le référentiel relatif R_1

$$\boldsymbol{a}_{M/0} = \boldsymbol{a}_{M/1} + \boldsymbol{a}_{G/0} \tag{5.17}$$

donne l'équation du mouvement du solide

$$m_c \ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{c}} + k\boldsymbol{x_c} = \boldsymbol{F_f}. \tag{5.18}$$

Mécanique des fluides

Deuxièmement, nous devons exprimer les équations de Navier-Stokes dans le référentiel accéléré R_1. Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{u'}$ les vitesses d'un point quelconque M dans les référentiels respecti-

vement relatif et absolu tels que

$$\boldsymbol{u} \equiv \left(\frac{d\boldsymbol{GM}}{dt}\right)_{R_1} \tag{5.19a}$$

$$\boldsymbol{u'} \equiv \left(\frac{d\boldsymbol{OM}}{dt}\right)_{R_0} = \boldsymbol{u} + \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{c}} \tag{5.19b}$$

Les équations régissant les écoulements fluides développées aux équations (3.2a)-(3.3) dans le référentiel galiléen R_0, combinées à la formule de composition des vitesses

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{u'}}{\partial t}\right)_{R_0} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right)_{R_1} + \left(\frac{d^2\boldsymbol{OG}}{dt^2}\right)_{R_0} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u'}\cdot\nabla')\boldsymbol{u'} \tag{5.20}$$

deviennent dans le référentiel mobile R_1

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right)_{R_1} + \rho(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} - \rho\ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{c}} \tag{5.21a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{5.21b}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mu(\nabla\boldsymbol{u} + \nabla^t\boldsymbol{u}). \tag{5.21c}$$

Couplage des équations

Finalement, nous pouvons intégrer l'accélération du référentiel à l'intérieur de tenseur de Cauchy

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right)_{R_1} + \rho(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = \nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}} \tag{5.22a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{5.22b}$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = -(p + \rho\boldsymbol{x}\cdot\ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{c}})\mathbf{I} + \mu(\nabla\boldsymbol{u} + \nabla^t\boldsymbol{u}), \tag{5.22c}$$

faisant apparaître une nouvelle pression $\hat{p} = p + \rho\boldsymbol{x}\cdot\ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{c}}$ propre au référentiel relatif. Nous pouvons alors exprimer la nouvelle force relative $\hat{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{f}}$ exercée par le fluide sur le solide qui considère les effets inertiels

$$\hat{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{f}} \equiv \int_S \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\hat{p}, \boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{f}} - \rho V\ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{c}}. \tag{5.23}$$

L'équation (5.18) devient alors

$$(m_c - \rho V)\ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{c}} + k\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{c}} = \hat{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{f}}. \tag{5.24}$$

Analyse dimensionnelle

Nous pouvons écrire la relation

$$\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{x}, t, p, \mu, \rho, D, U_0, k, m_c, V) \tag{5.25}$$

avec D la longueur caractéristique du cylindre, U_0 la vitesse caractéristique du problème et V le volume du solide. Il y a donc onze variables dépendantes et trois dimensions définies par la masse, le temps et la longueur. Du théorème de Vaschy-Buckingham (Vaschy, 1892; Buckingham, 1914), on déduit huit nombres adimensionnels afin de décrire complètement le problème.

Tableau 5.7 Nombres adimensionnels

Nombre adimensionnel	Signification
$\dfrac{\boldsymbol{x}}{D}$	Position adimensionnelle
$\dfrac{\boldsymbol{u}}{U_0}$	Vitesse adimensionnelle
$\dfrac{tU_0}{D}$	Temps adimensionnel
$\dfrac{p}{\rho U_0}$	Pression adimensionnelle
$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m_c + M_a}}$	Pulsation propre du cylindre
$Re = \dfrac{\rho U_0 D}{\mu}$	Nombre de Reynolds
$U_r = \dfrac{U_0}{fD}$	Vitesse réduite
$\mathcal{V} = \dfrac{V}{D^3}$	Volume adimensionel
$r_m = \dfrac{m_c}{\rho V D^3}$	Ratio de masse

Le tableau 5.7 explicite les huit nombres adimensionnels choisis dans le cadre de notre étude, avec $f_n = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$ la fréquence propre du cylindre et $M_a = \rho V$ la masse de fluide ajoutée.
Nous décrivons les simulations réalisées dans la suite de l'étude par ces nombres adimension-

nels. Notamment par le nombre de Reynolds Re qui illustre le rapport entre les effets d'inertie et visqueux à l'intérieur de l'écoulement, par la vitesse réduite U_r représentant le rapport du temps caractéristique fluide sur le temps caractéristique solide et permet de classer les différents types d'interactions et enfin par le ratio de masse r_m exprimant le rapport entre la masse du solide et celle du fluide. À titre informatif, nous pouvons ajouter le nombre adimensionnel de Strouhal $St = \dfrac{fD}{U_0}$ (où f est la fréquence d'émission des tourbillons), identique à l'inverse du temps adimensionnel.

Les équations adimensionnées s'écrivent

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right)_{R_1} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = \nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}} \tag{5.26a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{5.26b}$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = -(p + \boldsymbol{x}\cdot\ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{c}})\mathbf{I} + \frac{1}{Re}(\nabla\boldsymbol{u} + \nabla^t\boldsymbol{u}) \tag{5.26c}$$

$$(r_m - 1)\ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{c}} + (r_m + 1)\left(\frac{2\pi}{U_r}\right)^2 \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{c}} = \frac{1}{\mathcal{V}}\hat{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{f}} \tag{5.26d}$$

5.5.2 Modélisation numérique

Conditions limites en référentiel relatif

Les conditions limites usuelles appliquées sur le bord du domaine en référentiel absolu ne sont plus valables lorsque nous étudions les VIV en référentiel relatif. En effet, les frontières ne sont plus fixes et bougent à la vitesse du cylindre ; ce qui nécessite une réécriture des conditions de Dirichlet et de Neumann. Celles-ci se réécrivent respectivement dans le référentiel accéléré R_1

$$\boldsymbol{u_D} = \boldsymbol{u'_D} - \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{c}} \qquad \text{sur } \Gamma_D \tag{5.27a}$$

$$\boldsymbol{\tau_N} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\tau'_N} - \rho(\boldsymbol{x}\cdot\ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{c}})\boldsymbol{n} \qquad \text{sur } \Gamma_N \tag{5.27b}$$

Sur le domaine tracé à la figure 5.2 maintenant choisi dans le référentiel relatif, il convient d'imposer les conditions limites adéquates sur chaque partie du bord. En entrée Γ_e et sur les rives, nous imposons la condition limite de Dirichlet avec un écoulement entrant uniforme tel que

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{c}} \quad \text{sur } \Gamma_e. \tag{5.28}$$

À la paroi du cylindre, la condition est toujours sans glissement et ne change pas après le

passage au référentiel relatif

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \text{sur } \Gamma_c. \tag{5.29}$$

Notation 5.5.1 (Famille de modèles $\Pi(\alpha, \beta)$) *Nous notons par*

$$\Pi(\alpha, \beta) = \Lambda(\alpha, \beta) - \rho \left(\boldsymbol{x} \cdot \frac{d\boldsymbol{u_c}}{dt} \right) \boldsymbol{n}. \tag{5.30}$$

la famille de conditions limites diffusives de la condition limite naturelle en référentiel accéléré.

Le choix d'intégrer la composante inertielle $-\rho\ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{c}} \equiv -\rho\dfrac{d\boldsymbol{u_c}}{dt}$ au terme de pression est délibéré et vérifié (Moulin, 2016). En effet, au premier regard, il semble intuitif de garder la famille $\Lambda(\alpha, \beta)$ en référentiel accéléré. Ce qui reviendrait à imposer la condition limite naturelle $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}(p, \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n} = 0$ à la frontière de sortie du domaine mobile. Cette démarche n'est pourtant pas convenable et un simple contre-exemple permet de la réfuter.

Soit un fluide stagnant avec la pression nulle sur tout le volume de contrôle en référentiel inertiel. Nous nous plaçons dans un référentiel accéléré qui se meut librement à l'intérieur de ce volume. Le fluide est alors en mouvement dans ce référentiel dont la vitesse est égal à l'opposé de celle du référentiel ($\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u_c}$). Les termes visqueux et convectifs restent nuls. Finalement, afin de conserver la quantité de mouvement, la pression relative $\hat{p}$ n'est plus constante (contrairement à son équivalent en référentiel inertiel p) :

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \right)_{R_1} = \nabla \hat{p} \tag{5.31}$$

À cet égard, il est nécessaire d'augmenter les conditions limites du terme inertiel $-\rho\ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{c}}$ afin d'ajuster la valeur de la pression au bord de sortie.

Remarque 5 *Dans le cadre où nous prenons en compte le vecteur traction $\boldsymbol{f}$ (c.f. équation (5.10)), la famille des modèles devient*

$$\Pi(\alpha, \beta) \equiv \lambda \left(\alpha, \beta, -\rho \left(\boldsymbol{x} \cdot \frac{d\boldsymbol{u_c}}{dt} \right) \boldsymbol{n} \right) = \alpha\boldsymbol{\tau}_1 + \beta\boldsymbol{\tau}_2 - \rho \left(\boldsymbol{x} \cdot \frac{d\boldsymbol{u_c}}{dt} \right) \boldsymbol{n} \tag{5.32}$$

Résolution monolithique fortement couplée

Le système d'équations (5.26a)-(5.26d) augmenté des conditions limites (éq. (5.28)-(5.30)) peut être couplé de différentes façons (Causin *et al.*, 2005; Fernández et Gerbeau, 2009) :

explicite, semi-implicite ou monolithique. Lorsque $r_m \geq 1$, les couplages explicite et semi-implicite peuvent être utilisés, car ils permettent de découpler le calcul de l'écoulement de la dynamique du solide. Au contraire, lorsque $r_m < 1$, seul le couplage monolithique garantit des solutions au problème.

La formulation faible finale du système est

$$
\begin{aligned}
\overbrace{\int_\Omega \boldsymbol{\psi} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} \right) \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \frac{1}{Re} (\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^t \boldsymbol{u}) : \nabla \boldsymbol{\psi} \, \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \hat{p} \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} \, \mathrm{d}\Omega}^{\text{A}} &= \overbrace{\int_{\Gamma_s} \boldsymbol{\psi} \cdot \Pi(\alpha, \beta) \, \mathrm{d}\Gamma}^{\text{E}} \\
&\quad + \int_{\Gamma_e} \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\lambda_e} \, \mathrm{d}\Gamma \qquad \Big\} \text{C} \\
&\quad + \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\lambda_c} \, \mathrm{d}\Gamma \qquad \Big\} \text{D} \\
\int_\Omega q(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}\Omega = 0 \qquad &\Big\} \text{A} \\
\int_{\Gamma_e} \boldsymbol{\beta_e} \cdot (\boldsymbol{u} - 1\boldsymbol{i} + \boldsymbol{u_c}) \, \mathrm{d}\Gamma = 0 \qquad &\Big\} \text{C} \\
\int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\beta_c} \cdot \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\Gamma = 0 \qquad &\Big\} \text{D} \\
-\frac{d\boldsymbol{u_c}}{dt} + \left(\frac{2\pi}{U_r} \right)^2 \boldsymbol{x_c} = -\frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\lambda_c} \, \mathrm{d}\Gamma \qquad &\Big\} \text{B} \\
\frac{d\boldsymbol{x_c}}{dt} - \boldsymbol{u_c} = 0 \qquad &\Big\} \text{B}'
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

Moulin (2016) décrit parfaitement le rôle de chaque membre du système ci-dessus. Nous en reprenons les grandes lignes

A - Formulation faible de Navier-Stokes La forme présentée ici est adimensionnelle et dans le référentiel relatif, d'où la présence de la pression modifiée $\hat{p}$.

B, B' - Équations du solide L'équation du mouvement est divisée en deux sous- équations du premier ordre afin de faciliter leur mise en œuvre numérique dans EF6. En effet, celui-ci utilise déjà l'écriture sous forme de matrices de masse $\boldsymbol{M}$ et de raideur $\boldsymbol{K}$. Nous introduisons notamment l'équation B' avec la définition de la variable $\boldsymbol{u_c}$.

C - Condition de Dirichlet sur Γ_e L'imposition faible de la condition limite d'entrée en vitesse suppose l'introduction d'un coefficient multiplicateur $\boldsymbol{\lambda_e}$ et de sa fonction

test $\boldsymbol{\beta_e}$, de manière similaire à la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Ce multiplicateur possède alors un sens physique : lorsque comparé au terme sur le bord Γ_s, il s'apparente à une contrainte.

D - Condition de Dirichlet sur Γ_c La condition de non-glissement sur le solide est également imposée faiblement. Le coefficient multiplicateur $\boldsymbol{\lambda_c}$ s'identifie à une contrainte et permet de calculer les efforts du fluide sur le solide. La condition limite est imposée faiblement *via* la fonction test $\boldsymbol{\beta_c}$ associée au multiplcateur $\boldsymbol{\lambda_c}$.

E - Condition de Neumann sur Γ_s L'imposition de la famille de conditions limites de sortie $\Pi(\alpha, \beta)$ nécessite l'introduction d'un nouveau terme dans la formulation faible de Navier-Stokes.

5.5.3 Étude VIV sur un cylindre carré

La validation numérique en 2D et 3D est effectuée et développée par Moulin (2016) pour des écoulements autour d'un cylindre circulaire à des nombres de Reynolds inférieurs ou égaux à 300. Nous continuons l'étude effectuée en analysant non seulement la robustesse des conditions limites diffusives de sortie sur des domaines sévèrement tronqués mais également la précision des résultats.

Optimisation spatiale et spectrale

Avant de décrire entièrement la configuration des simulations qui seront effectuées dans la suite, il est important de noter que Moulin (2016) et Wasselet (2016) sont parvenus à une méthode d'éléments spectraux optimale. L'utilisation d'un maillage transfini et régulier parallèle à l'écoulement d'entrée permet d'éviter l'asymétrie induite par un maillage non régulier et donc de produire une portance non-nulle. De plus, la combinaison petit nombre d'éléments/méthode spectrale réduit drastiquement la durée de calcul et la mémoire nécessaire aux simulations tout en ayant des résultats identiques à la combinaison grand nombre d'éléments/méthode d'éléments finis. Cela est possible grâce à deux choses. La première est la réduction du nombre de degrés de liberté de la solution qui permet un gain remarquable en mémoire. La seconde est le nombre de coefficients non-nuls des matrices triangulaires $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{U}$. À titre informatif, Moulin (2016) a utilisé une interpolation spatiale P_6P_5 et un maillage rectangulaire comprenant 202 éléments, soit 2×10^4 ddl, pour étudier les vibrations induites d'un cylindre circulaire à $Re = 125$. L'auteur a obtenu un gain en temps d'environ 6 par rapport à la méthode des éléments finis P_2P_1 calculée sur un maillage comprenant $23,300$ quadrangles.

Dans la suite de notre étude, il est important de remarquer que nous utilisons une interpolation spatiale plus élevée, car les écoulements sont simulés pour des nombres de Reynolds bien plus grands. Cela permet de réduire le nombre de Reynolds relatif (basé sur la longueur caractéristique de l'élément) afin de capturer les variations brutales de l'écoulement. De plus, comme énoncé à la section 4.3, les vortex captés à $Re \geq 150$ sur des domaines bidimensionnels sont bien plus forts que leurs équivalents tridimensionnels.

Optimisation de la discrétisation temporelle

L'étape la plus coûteuse du calcul de la solution est la refactorisation du système matriciel global, donc il est nécessaire de l'éviter le plus possible, quitte à calculer plus de fois le résidu et la correction par étape de temps. L'heuristique force par définition la refactorisation dans deux cas : si le seuil de tolérance de factorisation n'est pas atteint ou si le code parvient à $N/2$ ou N itérations, avec N le nombre d'itérations par étape de temps fixées par l'utilisateur. La solution évidente est d'augmenter N. Cependant, cette technique connaît une limitation si le pas de temps choisi par EF6 est trop grand. Dans ce cas, la solution ne convergera pas quelque soit N et une factorisation du système sera exigée. Généralement, nous fixons la tolérance à $\varepsilon = 10^{-2}$ qui produit un pas de temps moyen de $\overline{\Delta t} = 0.281$ (*c.f.* table 5.3) et de nombreuses refactorisations par étape de temps. Donc l'augmentation du nombre d'itérations ne diminuera pas la durée des simulations. Il existe cependant d'autres paramètres sur lesquels nous pouvons jouer tels que les bornes de pas de temps et l'ordre BDF.

D'après l'étude des historiques de convergence, nous remarquons de nombreuses fluctuations entre les ordres conditionnellement stables 3 et 4 et quelques passages à l'ordre inconditionnellement stable 2 lorsque la solution varie trop brusquement. De plus, il semblerait que l'utilisation d'une borne supérieure du pas de temps Δt assez faible empêche l'heuristique de varier continuellement la taille du pas de temps en le gardant égal à son maximum. Lorsque ce dernier est suffisament petit, la refactorisation matricielle n'est plus nécessaire et les gains obtenus en temps sont remarquables.

La phase de tests en VIV à un nombre de Reynolds modéré $Re = 100$ apporte les optimisations finales suivantes : BDF_{1-3}, $10^{-6} \leq \Delta t \leq 10^{-2}$ et $\varepsilon = 10^{-2}$.

Cette méthode permet de réduire le nombre de factorisations du système matriciel d'un facteur quatre. Avec la méthode utilisée dans les simulations antérieures, pour une simulation de 400 unités de temps et une tolérance plus grande, nous atteignons environ $12,000$ refactorisations de la matrice pour un peu plus de $40,000$ étapes de temps. En fixant le pas de temps à 10^{-2} et en augmentant le nombre d'itérations N, le code ne procède plus qu'à $3,000$ refactorisations pour $40,000$ étapes de temps, réduisant considérablement la durée réelle de

la simulation.

Configuration numérique

Dans la continuité des simulations précédentes, nous considérons l'écoulement bidimensionnel autour d'un cylindre carré pour les nombres de Reynolds $Re = 100$ et $Re = 500$. Le ratio de masse est nul $r_m = 0$ et la vitesse réduite est posée égale à $U_r = 11$. Le choix de cette vitesse réduite est arbitraire et ne suit pas de logique de vérification particulière, car il n'existe aucune étude VIV antérieure des conditions limites diffusives sur des domaines tronqués. Notons également qu'à un ratio de masse nul, le solide oscille fortement quelque soit la vitesse réduite.

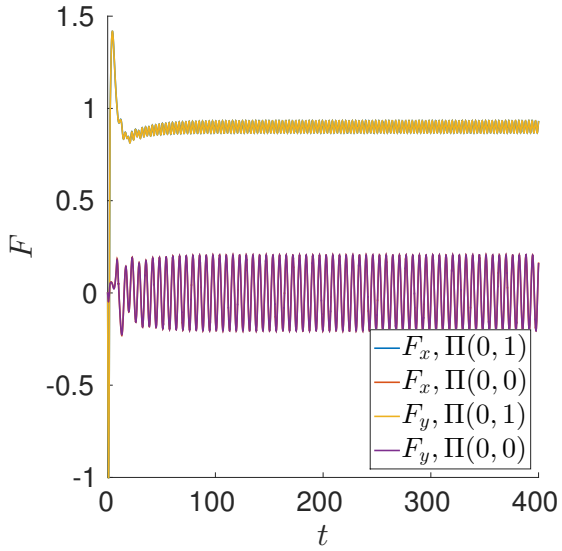
Nous utilisons les mêmes domaines de calcul et maillages spectraux que précédemment (fig. 5.6) mais ne gardont que ceux de longueur $L_x = 5D$ et $L_x = 10D$. Nous obtenons respectivement $152,560$ et $199,130$ degrés de liberté pour les deux domaines. Pour toutes les simulations, nous interpolons spatialement la solution sur des éléments P_8P_7 et employons une discrétisation temporelle BDF_{1-3} à pas de temps variable $10^{-6} \leq \Delta t \leq 10^{-2}$. La tolérance d'intégration est fixée à $\varepsilon = 10^{-2}$.

Re=100

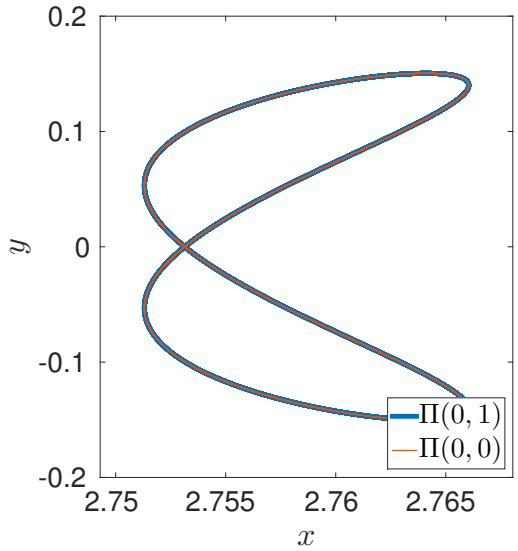
La première phase de tests étudie l'écoulement autour d'un cylindre carré à un petit nombre de Reynolds afin de valider la mise en œuvre numérique des formes faibles du couplage et des conditions limites de sortie. Nous réalisons deux types de simulation : l'une sans condition limite de sortie, l'autre avec le modèle de condition limite validé précédemment $\Pi(0,1)$ imposée sur la frontière de sortie.

Nous illustrons à la figure 5.13 l'historique des forces qui s'exercent sur le cylindre carré, calculées avec la forme divergente des équations de Navier-Stokes $\mathrm{NS_D}$ et l'une ou l'autre condition limite de sortie, puis la trajectoire du cylindre carré. Nous n'observons aucune différence notable entre les deux tests, pour lesquels les tracés se superposent parfaitement. Par conséquent, à petits nombres de Reynolds, l'utilisation d'une condition limite diffusive n'est pas nécessaire, et ce même sur un domaine avec une faible longueur de sillage.

En revanche, lorsque nous comparons les résultats des simulations effectuées sur les domaines court et long, nous remarquons un léger décalage du centre de la trajectoire dans la direction de l'écoulement de $\Delta x_c = 0.0562$, soit une différence de 2%. L'allongement de la longueur du domaine réduit l'influence de la frontière de sortie, et *a fortiori* de la condition limite, et autorise le cylindre à se mouvoir plus librement dans le fluide. En effet, la position moyenne

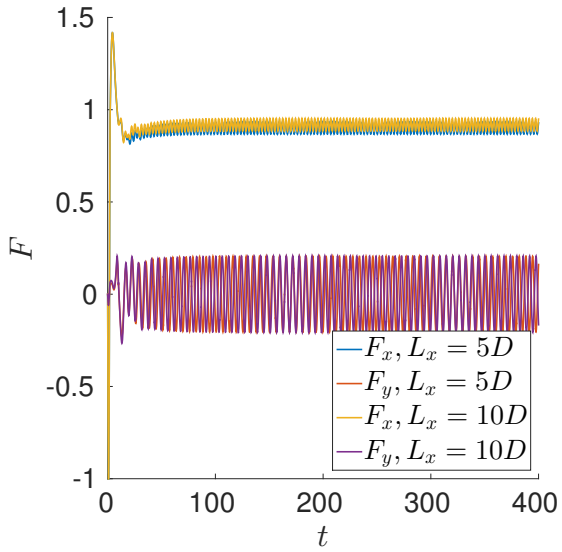


(a) Forces de traînée et de portance exercées sur le cylindre.

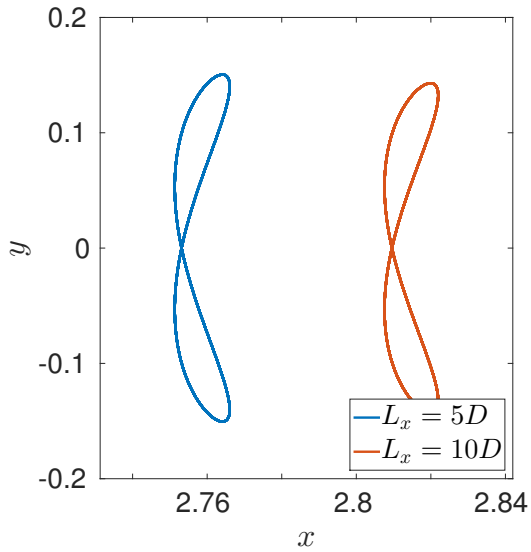


(b) Trajectoire du cylindre tracée à partir de $t = 200$.

Figure 5.13 Comparaison des résultats entre la condition limite $\Pi(0,1)$ imposée à la frontière de sortie et pas de condition limite $\Pi(0,0)$ à $Re = 100$ sur le domaine court $L_x = 5D$



(a) Forces de traînée et de portance exercées sur le cylindre.



(b) Trajectoire du cylindre tracée à partir de $t = 200$.

Figure 5.14 Comparaison des résultats entre les domaines $L_x = 5D$ et $L_x = 10D$ $Re = 100$ avec la condition $\Pi(0,1)$ imposée à la sortie

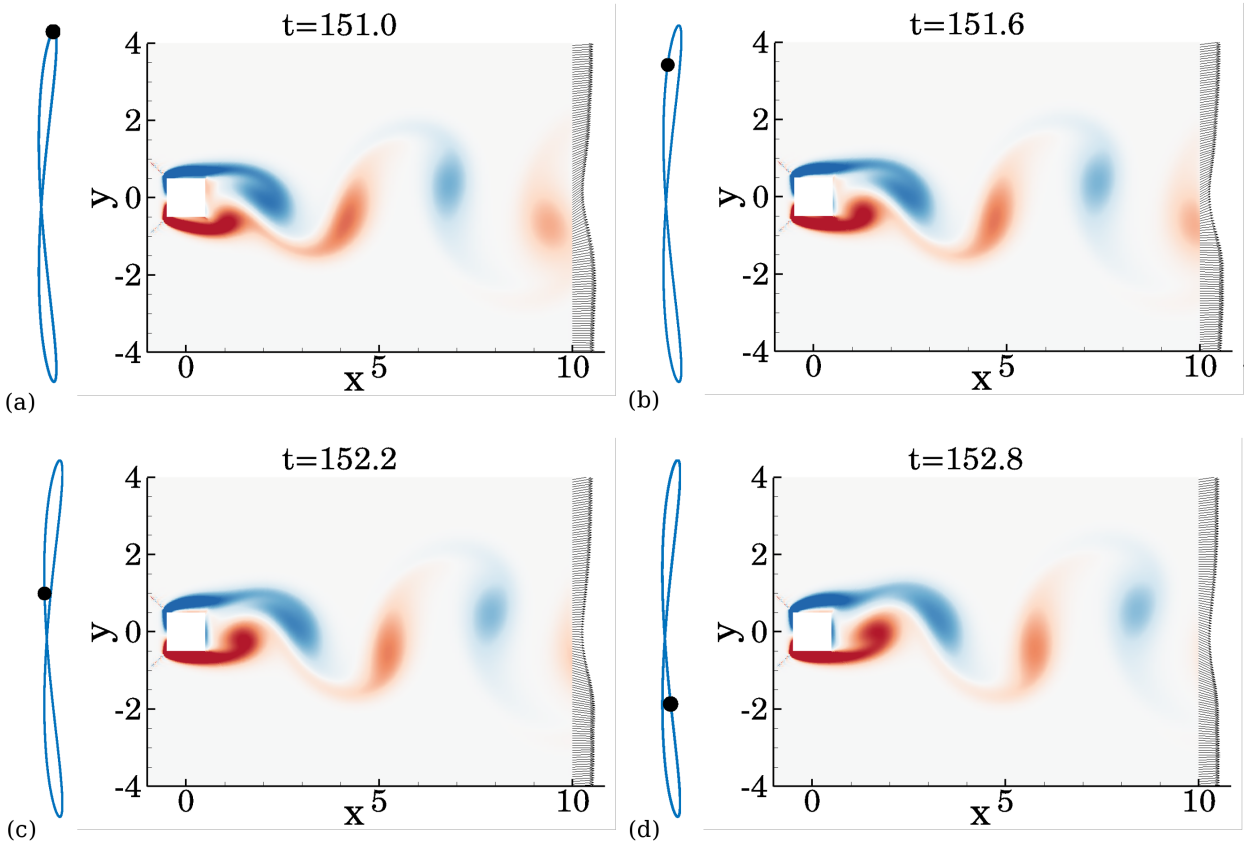


Figure 5.15 Contours de la vorticité et champs de vitesses instantanés pour les VIV d'un cylindre carré à $Re = 100$ et pour la condition limite $\Pi(0, 1)$ sur le domaine $L_x = 10D$. Le point noir indique la position du cylindre sur la trajectoire XY. Lecture dans l'ordre lexicographique

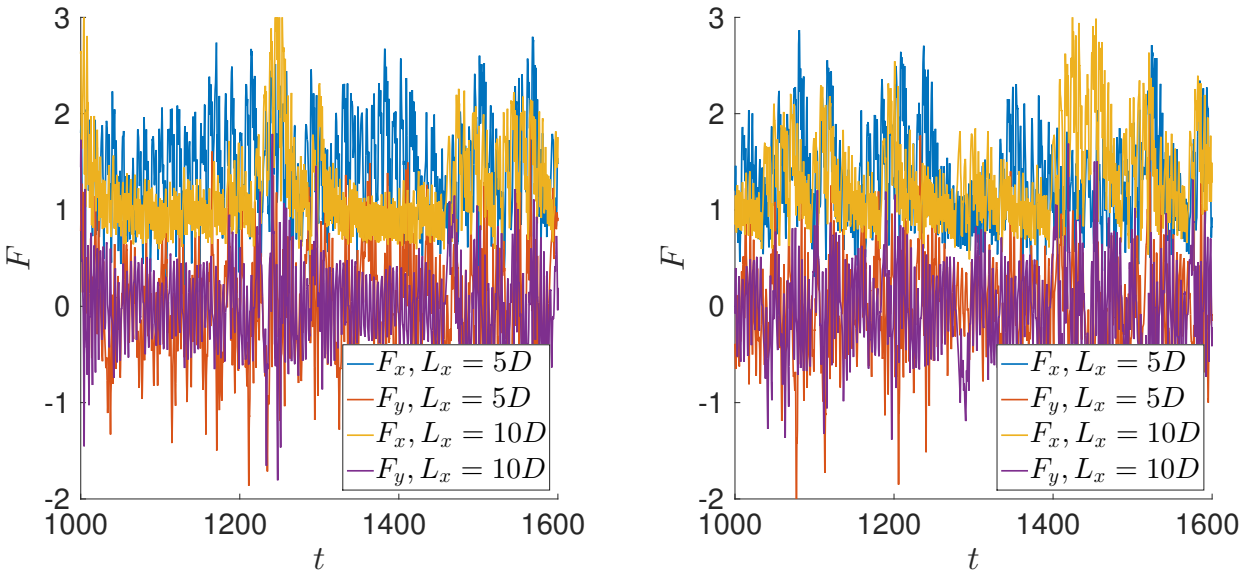
du cylindre se trouve à $\overline{x_c} = 2.75D$ en aval de sa position initiale pour la géométrie la plus courte. L'impact physique de la sortie sur l'obstacle est donc très important. En outre, l'amplitude du mouvement du solide selon $\boldsymbol{j'}$ sur le domaine court est légèrement supérieure $\Delta Y_c = 0.075D$ à celle sur le domaine long. Finalement, nous observons que les nombres de Strouhal des deux simulations ne diffèrent que de 4% (0.323 pour le domaine court $L_x = 5D$ et 0.336 pour le domaine long $L_x = 10D$).

Nous retrouvons les trajectoires en forme de huit exposées par Sen et Mittal (2015) et Sun *et al.* (2017), mais ici pour un ratio de masse nul. La faible amplitude des mouvements du cylindre à $Re = 100$ affecte peu la position de la frontière de sortie. Leur dissipation par la condition limite $\Pi(0, 1)$ lors de la traversée de la frontière de sortie est donc qualitativement semblable à celle pour un cylindre statique. La séquence temporelle de cette dissipation est illustrée à la figure 5.15 et nous remarquons que le champ de vitesse à la frontière avale est

toujours orienté vers l'extérieur, limitant l'effet de la condition limite de sortie.

Re=500

La seconde phase de tests considère des écoulements à $Re = 500$. Notons que les simulations sur les deux domaines $L_x = 5D$ et $L_x = 10D$ divergent sans l'imposition d'une condition limite à la frontière avale. Il est alors indispensable d'imposer un des modèles de la famille $\Pi(\alpha, \beta)$ afin d'obtenir des résultats cohérents sur de si courts domaines de calcul.

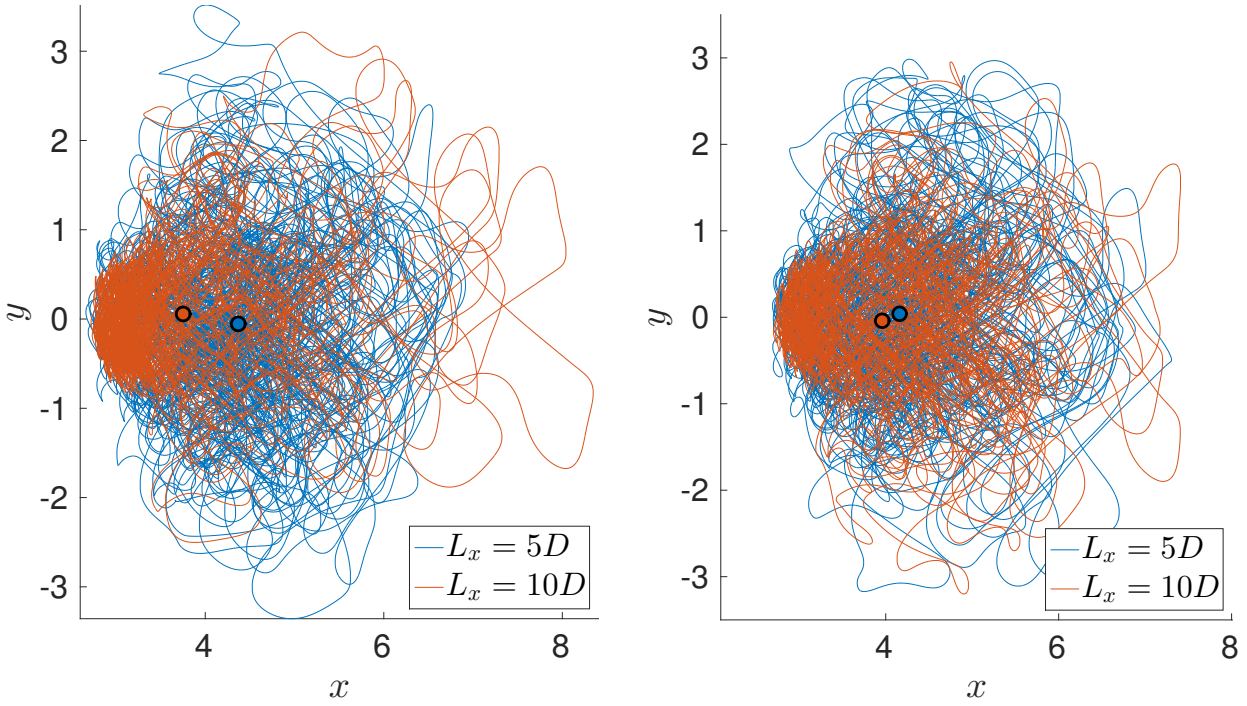


(a) $\Pi(0, 1)$. (b) $\Pi(0, 2)$.

Figure 5.16 Historique des forces de traînée F_x et de portance F_y à $Re = 500$ pour les domaines $L_x = 5D$ et $L_x = 10D$

Nous traçons dans un premier temps les historiques des forces de traînée et de portance calculées grâce à la méthode des réactions à la figure 5.16. Le détachement tourbillonnaire semble chaotique à un nombre de Reynolds aussi élevé, d'où l'absence de périodicité dans les courbes des forces. Les signaux sont très bruités donc les spectres fréquentiels des forces n'apportent aucun renseignement quantitatif quant à la possibilité de comparer les différentes courbes.

Dans un deuxième temps, nous considérons les trajectoires du cylindre carré dans le fluide à la figure 5.17 pour les domaines court $L_x = 5D$ et long $L_x = 10D$. Dans les deux cas $\Pi(0, 1)$ et $\Pi(0, 2)$, le solide reste confiné dans le domaine $[2.5; 7.5] \times [-3; 3]$ et sa position moyenne varie peu restant proche de la coordonnée $(4, 0)$. Ceci étant dit, il n'apparaît pas de forme notable comme le huit écrasé remarqué à $Re = 100$.



(a) $\Pi(0,1)$. (b) $\Pi(0,2)$.

Figure 5.17 Trajectoires et positions moyennes des cylindres carrés à $Re = 500$ pour les domaines $L_x = 5D$ et $L_x = 10D$

La figure 5.18 montre les contours de la vorticité instantanés à $Re = 500$ sur le domaine long. Dans cette séquence d'images, le cylindre recule (fig. 5.18 (a)-(g)) puis avance (fig. 5.18 (g)-(h)) lentement tandis qu'il oscille rapidement dans la direction verticale. Le fait que sa vitesse soit opposée à celle de l'écoulement induit une vitesse relative du solide supérieure à celle de l'écoulement, donc que les tourbillons doivent traverser plus rapidement la frontière avale. La dissipation de ces derniers avec une telle configuration d'écoulement ($Re = 500$, $U_r = 11$) n'est pas aussi régulière qu'à $Re = 100$: le tourbillon rouge atteint la frontière à l'image (a) ($t = 317.2$) et n'est toujours pas entièrement dissipé en (h) ($t = 321.6$). De plus, nous observons que la diffusion VIV de ce même vortex n'est pas semblable à celle pour un cylindre statique (*c.f.* fig. 5.9) à cause du déplacement vertical de l'obstacle. Le tourbillon s'allonge dans la direction $\boldsymbol{i'}$ et déforme par la même occasion les deux vortex en amont. Nous constatons que sur ce domaine de longueur $L_x = 10D$, considéré comme suffisamment long, la condition limite a peu d'influence sur les phénomènes se produisant autour du cylindre carré. En revanche, sur le domaine court $L_x = 5D$, la longueur du sillage est fortement tronquée et la dissipation lente des tourbillons joue indéniablement sur les déplacements du solide.

Sur cette même séquence, nous observons un phénomène qui n'était pas présent dans les

simulations à $Re = 100$ (*c.f.* fig 5.15) : le champ de vitesse à la frontière de sortie est rentrant. Cela prouve que la condition limite joue un rôle dans la diffusion des tourbillons à la sortie. Nous remarquons également qu'il existe une partie de la frontière sur laquelle s'applique la condition limite et qu'elle semble se déplacer verticalement le long du bord.

Les trajectoires obtenues à $Re = 500$ sont bien plus riches en oscillations que celles à $Re = 100$. Le battement longitudinal du cylindre carré atteint $\Delta x_c = 5.3D$ sur le domaine court, alors qu'il était borné à $\Delta x_c = 0.019$ lors des simulations précédentes à $Re = 100$. Ces grands mouvements impliquent des grands déplacements de la frontière de sortie et donc que la condition limite intervient sur la surface (volume en 3D) balayé par le mouvement de la frontière de sortie.

Afin d'établir des comparaisons quantitatives et qualitatives des historiques des forces de traînée en fonction de la condition limite imposée et de la longueur du domaine, nous calculons les positions moyennes du cylindre et les densités de probabilité des forces de traînée respectives à chaque domaine et condition limite utilisée. Or, la position moyenne est directement proportionnelle à la force de traînée moyenne sur le solide

$$\underbrace{-\langle\frac{d^2x_c}{dt^2}\rangle}_{0} + \left(\frac{2\pi}{U_r}\right)^2 \langle x_c\rangle = \langle F_x\rangle \tag{5.34}$$

où $\langle . \rangle$ est la moyenne temporelle [2]. $\langle\frac{d^2x_c}{dt^2}\rangle = 0$ est évident pour un signal périodique ; en revanche, pour le signal bruité obtenu à $Re = 500$ (*c.f.* fig. 5.16), cette égalité est vraie seulement si le signal contient un grand nombre d'étapes de temps.

Tableau 5.8 Positions moyennes du cylindre selon $\boldsymbol{i'}$ en fonction de la longueur du sillage L_x et de la condition limite de sortie

$\overline{x_c}$	$\Pi(0,1)$	$\Pi(0,2)$
$L_x = 5D$	4.375	4.079
$L_x = 10D$	3.756	3.956
$L_x = 15D$	3.395	3.382
$L_x = 25D$	3.280	3.265

Dans notre étude, nous simulons les écoulements VIV pendant $t = 3000$ secondes adimensionnelles, durée qui comprend suffisamment d'étapes de temps pour analyser les données et

2. Moyenne arithmétique de l'accélération, de la position et de la force à chaque étape de temps (à pas de temps constant).

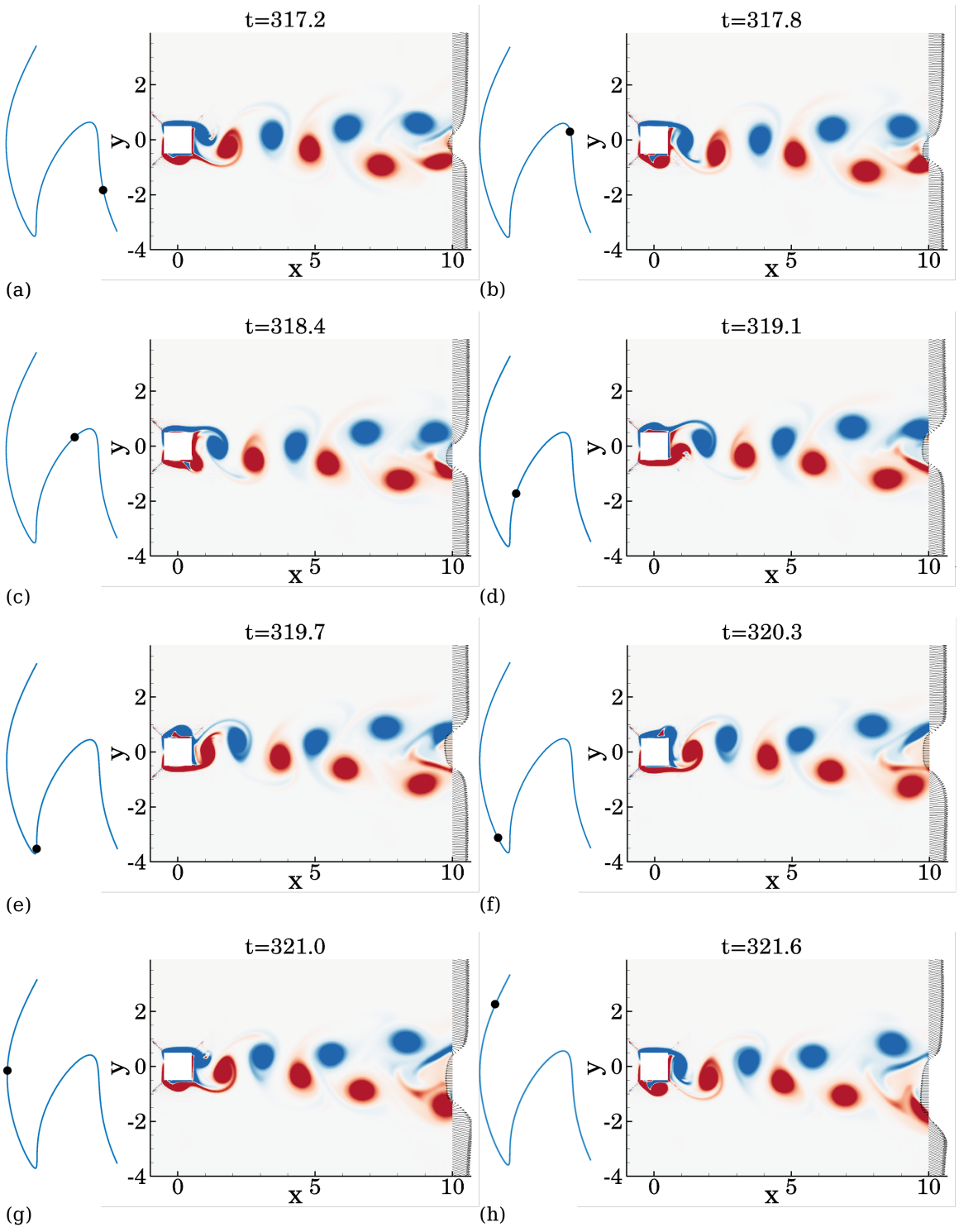


Figure 5.18 Contours de la vorticité et champs de vitesses instantanés pour les VIV d'un cylindre carré à $Re = 500$ et pour la condition limite $\Pi(0,1)$ sur le domaine $L_x = 10D$. Le point noir indique la position du cylindre sur la trajectoire XY. Lecture dans l'ordre lexicographique

les positions moyennes. Nous remarquons à la table 5.8 que l'augmentation de la longueur du sillage éloigne la position moyenne du cylindre $\overline{x_c}$ de la frontière de sortie et que les valeurs semblent tendre vers une borne inférieure.

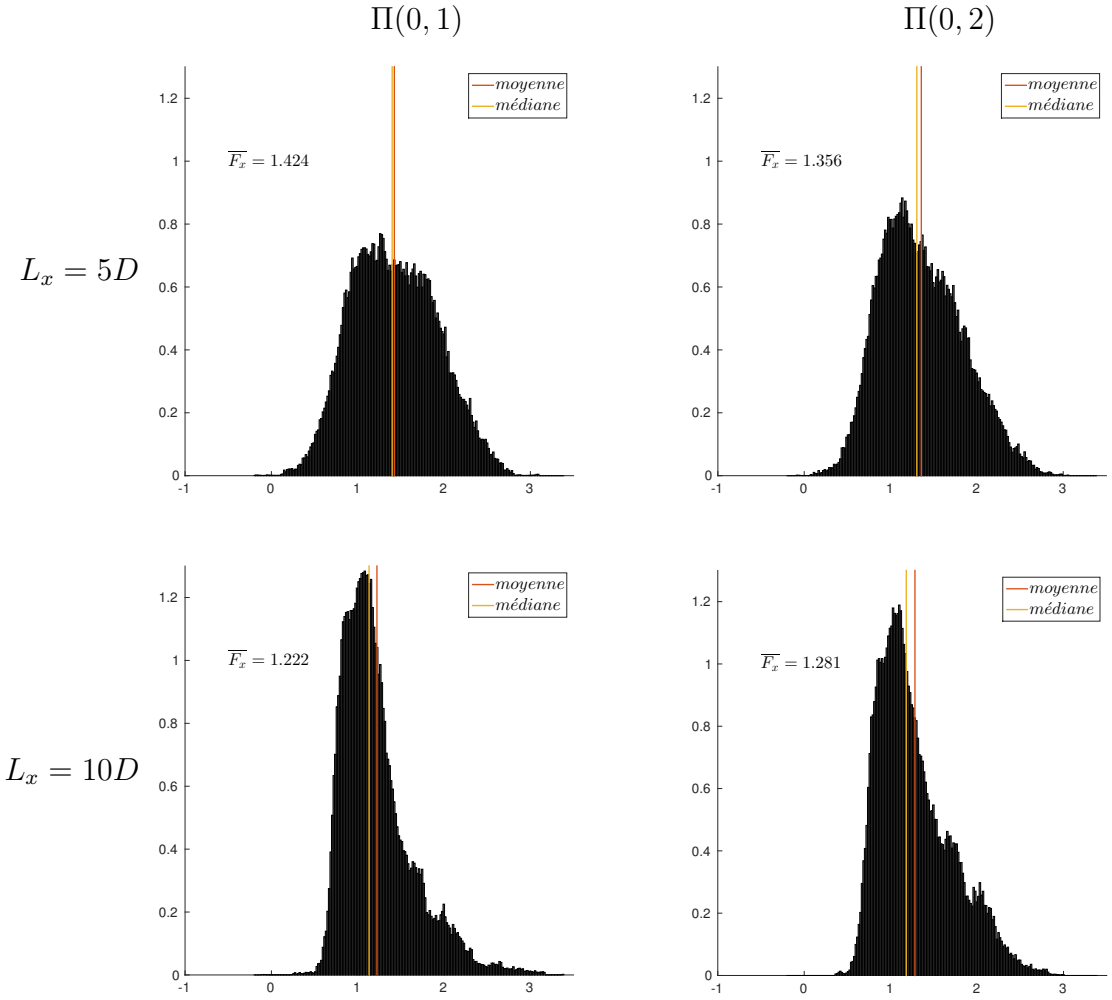


Figure 5.19 Densité de probabilité des forces de traînée F_x et tracé des moyennes et médianes à $Re = 500$. (haut) $L_x = 5D$. (bas) $L_x = 10D$. (gauche) $\Pi(0, 1)$. (droite) $\Pi(0, 2)$

Nous traçons à la figure 5.19 les densités de probabilité des forces de traînée F_x. Les graphes sont ordonnés de la même manière que le tableau 5.8 : la première ligne correspond à $L_x = 5D$, la deuxième à $L_x = 10D$, la colonne de gauche correspond à $\Pi(0, 1)$, celle de droite à $\Pi(0, 2)$. Les forces moyennes suivent les mêmes tendances que les positions moyennes : la force moyenne est la plus grande lorsque calculée avec la condition limite $\Pi(0, 1)$ sur le domaine court $\overline{F_x} = 1.424$ et diminue avec l'allongement du domaine $\overline{F_x} = 1.222$. Concernant la forme des histogrammes, il semblerait que les distributions de la force de traînée F_x tendent vers une courbe asymétrique avec un pic autour de $F_x = 1.1$. Sur le domaine long, nous discernons

des structures identiques quelque soit la condition limite : un léger plateau autour de $F_x = 1$ et deux petits pics autour des valeurs $F_x = 1.8$ et $F_x = 2$. En deçà de $F_x \leq 0$ et au-dessus de $F_x \geq 3$, la distribution des forces tend vers 0.

Nous constatons deux phénomènes selon la condition limite. Premièrement, la forme écrasée de la distribution de la force de traînée, qui se manifeste avec $\Pi(0, 1)$ sur le domaine court, s'affine et gagne en intensité sur le domaine long. Deuxièmement, la condition limite $\Pi(0, 2)$ produit une distribution sur le domaine court qui ressemble grandement à celle sur le domaine long. La force de traînée moyenne du domaine court $\overline{F_x} = 1.356$ est également très proche de celle du domaine long $\overline{F_x} = 1.281$. La concordance de ces résultats semble prouver la véracité de la remarque de Dong et Shen (2015) affirmant que la condition $\Pi(0, 2)$ est plus diffusive que $\Pi(0, 1)$.

L'ensemble de l'étude apporte plusieurs indications quant à l'utilisation future des conditions limites de sortie. Premièrement, le choix d'un domaine aussi court $L_x = 5D$ pour une étude VIV semble un facteur limitant pour le déplacement du solide. Bien que les calculs soient stables, la précision des résultats est affectée quelque soit la condition limite choisie. Deuxièmement, le choix d'un maillage rigide en référentiel accéléré implique que la condition limite diffusive opère dans le volume balayé par la frontière de sortie. En effet, le cylindre se déplace horizontalement sur de relativement grandes distances $\Delta x_c \approx 5D$ et embarque tout le domaine de calcul avec lui. Donc la condition limite de sortie (éq. (5.30)) n'altère pas uniquement les tourbillons à la distance fixe L_x, mais sur un intervalle équivalent au déplacement du solide.

CHAPITRE 6 CONCLUSION

6.1 Synthèse des travaux

Suite aux développements théoriques concernant les méthodes des éléments finis et spectraux, nous avons présenté une mise en œuvre numérique de celles-ci : le logiciel EF6. Initialement déployé par le laboratoire LADYF, il a été correctement vérifié et validé avec la méthode des solutions manufacturées. Puis, la phase de tests d'écoulements autour de cylindres circulaire et carré à hauts nombres de Reynolds sur des domaines courts a démontré la nécessité d'imposer une condition limite à la frontière de sortie dans le cas d'étude de relâchers tourbillonaires.

L'état de l'art a montré l'existence de certaines conditions limites diffusives (Bruneau *et al.*, 1994; Dong et Shen, 2015) utiles lors de la simulation numérique de tels écoulements : nombre de Reynolds élevé $Re \geq 1000$, domaine court ou tronqué, obstacle perturbant l'écoulement, simulation temporelle. Nous avons alors implémenté la famille de conditions limites de sortie $\Lambda(\alpha, \beta)$ dans le logiciel EF6 dont nous avons vérifié les résultats. Il en est sorti deux résultats principaux selon l'utilisation de l'une ou de l'autre écriture des équations de Navier-Stokes. En présence de la forme Navier-Stokes Laplacien, les modèles $\Lambda(1, 0)$, $\Lambda(2, 0)$ et $\Lambda(1, 1)$ sont les plus robustes, comme l'avaient démontré Dong et Shen (2015). En revanche, les conditions $\Lambda(0, 1)$ et $\Lambda(0, 2)$ sont plus efficaces et plus stables lorsque combinées à la forme divergente des équations fluides. De manière générale, les résultats produits par ces simulations sur des domaines tronqués sont en adéquation avec ceux trouvés dans la littérature. De plus, la configuration adoptée emploie typiquement moins de nœuds de calculs donc moins de ressources mémoire et moins de temps CPU, pour des résultats identiques.

Finalement, nous avons étendu l'étude bidimensionnelle des conditions limites de sortie aux VIV en repère accéléré. Au terme d'une optimisation de la méthode adaptative BDF en pas de temps et en ordre, nous avons établi une configuration idéale. Elle a été mise à profit pour des écoulements VIV autour d'un cylindre carré à $Re = 500$ sur un domaine avec une frontière de sortie proximale. Nous avons ajouté un terme d'accélération à la famille de conditions limite précédente, que nous avons alors renommée $\Pi(\alpha, \beta)$, afin de la transposer en repère accéléré. Les nombreuses simulations effectuées ont prouvé que la position de la frontière de sortie influait sur les paramètres de l'écoulement bien plus en VIV qu'en statique. L'analyse des trajectoires du solide et de la densité de probabilité de la force de traînée démontre que le modèle de condition limite $\Pi(0, 2)$ combinée à la formulation divergente des équations de Navier-Stokes provoque moins de pollution sur le signal amont que son équivalent moins

diffusif $\Pi(0,1)$. Nous avons également pu définir la signature de la distribution de la force de traînée vers laquelle tendent tous les résultats obtenus.

Malgré une faible perte en précision, l'utilisation de cette condition limite sur un domaine sévèrement tronqué stabilise l'écoulement au profit de gains substantiels en temps et en mémoire. Donc l'utilisateur doit envisager un compromis, lors d'une étude VIV en repère accéléré, entre pertes en précision et gain de temps et de ressources.

Nous avons ainsi répondu exactement au problème initial à la fois pour un solide fixe et pour un solide à deux degrés de liberté en VIV à haut nombre de Reynolds et sur un domaine court. Alors que Dong et Shen (2015) annonçait la condition limite $\Lambda(1,0)$ combinée à Navier-Stokes Laplacien comme la plus robuste et précise, nous pouvons attester de la stabilité et de la précision du modèle $\Lambda(0,2)$ associé à Navier-Stokes divergence.

6.2 Améliorations futures

L'étude effectuée lors de cette maîtrise ouvre sur de nombreux autres axes de recherches.

Le plus évident est celui d'étendre l'investigation à la troisième dimension. Cela permettrait de mieux approcher la physique et les mouvements du solide. La signature de la distribution de la force de traînée pourrait alors se préciser et donner des informations supplémentaires. De plus, il serait intéressant de connaître les modes de relâchers tourbillonaires du cylindre carré à $Re = 500$, à ratio de masse nul et à la vitesse réduite $U_r = 11$.

Il serait pertinent de tester la famille de condition limites $\Pi(\alpha, \beta)$ avec d'autres géométries telles que celles d'un *riser*, d'une ellipse en rotation, d'une plaque plane, *etc.* Les tourbillons crées par chacun de ces obstacles sont uniques et interagiront de manières différentes avec la condition limite.

Il serait finalement judicieux de trouver un outil mathématique fiable qui faciliterait la comparaison des résultats obtenus par les diverses conditions limites sur diverses longueurs de domaines. La densité de probabilité apporte une vision qualitative mais limite les possibilités d'évaluation pour des futures simulations.

RÉFÉRENCES

Arrow, Kenneth Joseph and Hurwicz, Leonid and Uzawa, Hirofumi and Chenery, Hollis Burnley (1958). Studies in linear and non-linear programming.

Babuska, Ivo and Szabo, Barna A and Katz, I Norman (1981). The p-version of the finite element method. *SIAM journal on numerical analysis*, *18*(3), 515–545.

Bearman, Peter W (1984). Vortex shedding from oscillating bluff bodies. *Annual review of fluid mechanics*, *16*(1), 195–222.

Bishop, RED and Hassan, AY (1964). The lift and drag forces on a circular cylinder oscillating in a flowing fluid. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society, vol. 277, 51–75.

Blevins, Robert D (1990). Flow-induced vibration.

Breuer, M and Bernsdorf, J and Zeiser, T and Durst, F (2000). Accurate computations of the laminar flow past a square cylinder based on two different methods : lattice-boltzmann and finite-volume. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, *21*(2), 186–196.

Brezzi, Franco (1974). On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique*, *8*(2), 129–151.

Bruneau, CH and Fabrie, P and others (1994). Effective downstream boundary conditions for incompressible navier–stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, *19*(8), 693–705.

Bruneau, C-H and Fabrie, P (1996). New efficient boundary conditions for incompressible navier-stokes equations : a well-posedness result. *RAIRO-Modélisation mathématique et analyse numérique*, *30*(7), 815–840.

Buckingham, Edgar (1914). On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations. *Physical review*, *4*(4), 345.

Causin, Paola and Gerbeau, Jean-Frédéric and Nobile, Fabio (2005). Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid–structure problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, *194*(42), 4506–4527.

Chen, Shoei-Sheng (1987). *Flow-induced vibration of circular cylindrical structures*, vol. 414. Hemisphere Publishing Corporation Washington, DC.

Chorin, Alexandre Joel (1968). Numerical solution of the navier-stokes equations. *Mathematics of computation*, *22*(104), 745–762.

Coutanceau, Madeleine and Bouard, Roger (1977). Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. part 1. steady flow. *Journal of Fluid Mechanics*, *79*(02), 231–256.

Craske, John and van Reeuwijk, Maarten (2013). Robust and accurate open boundary conditions for incompressible turbulent jets and plumes. *Computers & Fluids*, *86*, 284–297.

Crouzeix, Michel and Raviart, P-A (1973). Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary stokes equations i. *Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Mathématique*, *7*(3), 33–75.

Cuvelier, Cornelius and Segal, August and Van Steenhoven, Anton A (1986). *Finite element methods and Navier-Stokes equations*, vol. 22. Springer Science & Business Media.

Dahl, JM and Hover, FS and Triantafyllou, MS and Oakley, OH (2010). Dual resonance in vortex-induced vibrations at subcritical and supercritical reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, *643*, 395–424.

Davis, RW and Moore, EF and Purtell, LP (1984). A numerical-experimental study of confined flow around rectangular cylinders. *The Physics of fluids*, *27*(1), 46–59.

Davis, R Wt and Moore, EF (1982). A numerical study of vortex shedding from rectangles. *Journal of Fluid Mechanics*, *116*, 475–506.

De Langre, Emmanuel (2001). *Fluides et solides*. Editions Ecole Polytechnique.

Deville, Michel O and Fischer, Paul F and Mund, Ernest H (2002). *High-order methods for incompressible fluid flow*, vol. 9. Cambridge University Press.

Dong, Suchuan (2015). A convective-like energy-stable open boundary condition for simulations of incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, *302*, 300–328.

Dong, Suchuan and Karniadakis, George E (2005). Dns of flow past a stationary and oscillating cylinder at. *Journal of Fluids and Structures*, *20*(4), 519–531.

Dong, Suchuan and Karniadakis, George E and Chryssostomidis, C (2014). A robust and accurate outflow boundary condition for incompressible flow simulations on severely-truncated unbounded domains. *Journal of Computational Physics*, *261*, 83–105.

Dong, Suchuan and Shen, Jie (2015). A pressure correction scheme for generalized form of energy-stable open boundary conditions for incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, *291*, 254–278.

Engquist, Björn and Majda, Andrew (1977). Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *74*(5), 1765–1766.

Eymard, Robert and Gallouët, Thierry and Herbin, Raphaèle (2000). Finite volume methods. *Handbook of numerical analysis*, *7*, 713–1018.

Feng, CC (1968). *The measurement of vortex induced effects in flow past stationary and oscillating circular and d-section cylinders*. Thèse de doctorat, University of British Columbia.

Fernández, Miguel A and Gerbeau, Jean-Frédéric (2009). Algorithms for fluid-structure interaction problems. *Cardiovascular mathematics*, 307–346.

Fortin, André and Garon, André (2011). *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*.

Fortin, Michel and Glowinski, Roland (1982). Méthodes de lagrangien augmenté : applications à la résolution numérique de problèmes aux limites.

Geuzaine, Christophe and Remacle, Jean-François (2009). Gmsh : A 3-d finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *79*(11), 1309–1331.

Goda, Katuhiko (1979). A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two-or three-dimensional cavity flows. *Journal of Computational Physics*, *30*(1), 76–95.

Govardhan, R and Williamson, CHK (2000). Modes of vortex formation and frequency response of a freely vibrating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, *420*, 85–130.

Gresho, Philip M (1991). Some current cfd issues relevant to the incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *87*(2-3), 201–252.

Griffin, OM (1980). Vortex-excited cross-flow vibrations of a single cylindrical tube. *Journal of Pressure Vessel Technology*, *102*(2), 158–166.

Guermond, JL and Minev, Peter and Shen, Jie (2006). An overview of projection methods for incompressible flows. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, *195*(44), 6011–6045.

Guermond, Jean-Luc and Shen, Jie (2003). Velocity-correction projection methods for incompressible flows. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, *41*(1), 112–134.

Hagstrom, Thomas (1991). Conditions at the downstream boundary for simulations of viscous, incompressible flow. *SIAM journal on scientific and statistical computing*, *12*(4), 843–858.

Halpern, Laurence and Schatzman, Michelle (1989). Artificial boundary conditions for incompressible viscous flows. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, *20*(2), 308–353.

Hay, A and Etienne, S and Garon, A and Pelletier, D (2015a). Time-integration for ale simulations of fluid–structure interaction problems : Stepsize and order selection based on the bdf. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *295*, 172–195.

Hay, Alexander and Etienne, Stéphane and Pelletier, Dominique and Garon, André (2015b). hp-adaptive time integration based on the bdf for viscous flows. *Journal of Computational Physics*, *291*, 151–176.

Jauvtis, N and Williamson, CHK (2003). Vortex-induced vibration of a cylinder with two degrees of freedom. *Journal of Fluids and Structures*, *17*(7), 1035–1042.

Jauvtis, N and Williamson, CHK (2004). The effect of two degrees of freedom on vortex-induced vibration at low mass and damping. *Journal of Fluid Mechanics*, *509*, 23–62.

Jin, G and Braza, M (1993). A nonreflecting outlet boundary condition for incompressible unsteady navier-stokes calculations. *Journal of computational physics*, *107*(2), 239–253.

Koumoutsakos, Petros and Leonard, A (1995). High-resolution simulations of the flow around an impulsively started cylinder using vortex methods. *Journal of Fluid Mechanics*, *296*, 1–38.

Kovasznay, LIG (1948). Laminar flow behind a two-dimensional grid. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Cambridge Univ Press, vol. 44, 58–62.

Miyauchi, Toshio and Tanahashi, Mamoru and Suzuki, Motohiro (1996). Inflow and outflow boundary conditions for direct numerical simulations. *JSME International Journal Series B Fluids and Thermal Engineering*, *39*(2), 305–314.

Moulin, Adrien (2016). *Simulation numérique par la méthode des éléments spectraux des vibrations induites par relâcher tourbillonnaire*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal.

Naudascher, Eduard and Rockwell, Donald (2012). *Flow-induced vibrations : an engineering guide*. Courier Corporation.

Okajima, Atsushi (1982). Strouhal numbers of rectangular cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*, *123*, 379–398.

Ol'Shanskii, MA and Staroverov, Vladimir M (2000). On simulation of outflow boundary conditions in finite difference calculations for incompressible fluid. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, *33*(4), 499–534.

Orlanski, I_ (1976). A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *Journal of computational physics*, *21*(3), 251–269.

Ozgoren, Muammer (2006). Flow structure in the downstream of square and circular cylinders. *Flow Measurement and Instrumentation*, *17*(4), 225–235.

Parkinson, GV (1974). Mathematical models of flow-induced vibrations of bluff bodies. *Flow-induced structural vibrations.(A 75-15253 04-39) Berlin, Springer-Verlag, 1974,*, 81–127.

Patera, Anthony T (1984). A spectral element method for fluid dynamics : laminar flow in a channel expansion. *Journal of computational Physics*, *54*(3), 468–488.

Petra, Cosmin G. and Schenk, Olaf and Anitescu, Mihai (2014a). Real-time stochastic optimization of complex energy systems on high-performance computers. *IEEE Computing in Science & Engineering*, *16*(5), 32–42.

Petra, Cosmin G. and Schenk, Olaf and Lubin, Miles and Gärtner, Klaus (2014b). An augmented incomplete factorization approach for computing the schur complement in stochastic optimization. *SIAM Journal on Scientific Computing*, *36*(2), C139–C162.

Pozrikidis, Constantine (2005). *Introduction to finite and spectral element methods using MATLAB*. CRC Press.

Qian, Ling and Vezza, M (2001). A vorticity-based method for incompressible unsteady viscous flows. *Journal of Computational Physics*, *172*(2), 515–542.

Roache, Patrick J (1998). *Verification and validation in computational science and engineering*, vol. 895. Hermosa Albuquerque, NM.

Rønquist, Einar M and Patera, Anthony T (1987). A legendre spectral element method for the stefan problem. *International journal for numerical methods in engineering*, *24*(12), 2273–2299.

Sani, Robert L and Gresho, Philip M (1994). Résumé and remarks on the open boundary condition minisymposium. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, *18*(10), 983–1008.

Sarpkaya, T (2004). A critical review of the intrinsic nature of vortex-induced vibrations. *Journal of Fluids and Structures*, *19*(4), 389–447.

Sen, Subhankar and Mittal, Sanjay (2015). Effect of mass ratio on free vibrations of a square cylinder at low reynolds numbers. *Journal of Fluids and Structures*, *54*, 661–678.

Shimizu, Y and Tanida, Y (1978). Fluid forces acting on cylinders of rectangular cross-section. *Trans. JSME B*, *44*(384), 2699–2706.

Sohankar, A and Norberg, C and Davidson, L (1998). Low-reynolds-number flow around a square cylinder at incidence : study of blockage, onset of vortex shedding and outlet boundary condition. *International journal for numerical methods in fluids*, *26*(1), 39–56.

Strouhal, Vincenz (1878). Über eine besondere art der tonerregung. *Annalen der Physik*, *241*(10), 216–251.

Sun, Wenjuan and Zhou, Dai and Tu, Jiahuang and Han, Zhaolong (2017). Vortex-induced vibrations of a square cylinder under linear shear flow. *Fluid Dynamics Research*, *49*(2), 025502.

Tamura, Tetsuro and Kuwahara, Kunio (1990). Numerical study of aerodynamic behavior of a square cylinder. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, *33*(1-2), 161–170.

Taylor, Cedric and Hood, Paul (1973). A numerical solution of the navier-stokes equations using the finite element technique. *Computers & Fluids*, *1*(1), 73–100.

Taylor, C and Rance, J and Medwell, JO (1985). A note on the imposition of traction boundary conditions when using the fem for solving incompressible flow problems. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, *1*(3), 113–121.

Tsynkov, Semyon V (1998). Numerical solution of problems on unbounded domains. a review. *Applied Numerical Mathematics*, *27*(4), 465–532.

Vaschy, Aimé (1892). Sur les lois de similitude en physique. *Annales télégraphiques*. vol. 19, 25–28.

von Kármán, Theodor and Rubach, H (1912). Über den mechanismus des flüssigkeits-und luftwiderstandes. *Phys. Z*, *13*(2), 49–59.

Wasselet, Martin (2016). *Calcul des forces et moments sur des corps immergés par la méthode des éléments spectraux*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal.

Wooton, LR and Warner, MH and Sainsbury, RN and Cooper, DH (1972). Oscillations of piles in marine structures. a resume of full-scale experiments at immingham. Rapport technique, CIRIA Tech. Rep. 41.

Xu, CJ and Lin, YM (2000). Open boundary conditions for the spectral simulation of poiseuille–benard flow. *Acta Mech. Sini*, *32*(1), 1–10.

Xu, Chuanju and Pasquetti, Richard (2004). Stabilized spectral element computations of high reynolds number incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, *196*(2), 680–704.

ANNEXE A CADRE FONCTIONNEL

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3), on définit l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable :

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \middle| \int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x < \infty \right\} \tag{A.1}$$

muni du produit scalaire et de la norme associée :

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega uv \ \mathrm{d}x, \ ||u||^2 = \int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x. \tag{A.2}$$

On désigne ensuite l'espace de Sobolev d'ordre 1 :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \middle| \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \right\} \tag{A.3}$$

que l'on munit du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{1,\Omega} = \int_\Omega \left(uv + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \mathrm{d}x \tag{A.4}$$

et de la norme :

$$||u||^2_{1,\Omega} = \int_\Omega \left(u^2 + \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right) \mathrm{d}x \tag{A.5}$$

On définit deux sous-espaces de l'espace $H^1(\Omega)$;

$$H^1_0(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) \mid u|_\Gamma = 0 \} \tag{A.6}$$

dont les fonctions s'annulent sur la frontière Γ de Ω – on note $u|_\Gamma$ la trace de u sur Γ, et :

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\Gamma_0} = 0 \} \tag{A.7}$$

où Γ_0 est une partie de la frontière Γ de Ω.