

Titre: Application de modèles de turbulence à deux équations à la
résolution éléments finis d'écoulements instationnaires

Auteur: Étienne Muller
Author:

Date: 2017

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Muller, É. (2017). Application de modèles de turbulence à deux équations à la
résolution éléments finis d'écoulements instationnaires [Mémoire de maîtrise,
École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.
Citation: <https://publications.polymtl.ca/2574/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/2574/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:** Dominique Pelletier
Advisors:

Programme: Génie aérospatial
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

APPLICATION DE MODÈLES DE TURBULENCE À DEUX ÉQUATIONS À LA
RÉSOLUTION ÉLÉMENTS FINIS D'ÉCOULEMENTS INSTATIONNAIRES

ÉTIENNE MULLER
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE AÉROSPATIAL)
MAI 2017

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

APPLICATION DE MODÈLES DE TURBULENCE À DEUX ÉQUATIONS À LA
RÉSOLUTION ÉLÉMENTS FINIS D'ÉCOULEMENTS INSTATIONNAIRES

présenté par : MULLER Étienne

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. GARON André, Ph. D., président

M. PELLETIER Dominique, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. CAMARERO Ricardo, Ph. D., membre

DÉDICACE

À ma mère et mon père . . .

REMERCIEMENTS

Je souhaite en premier lieu remercier mon directeur de recherche Dominique Pelletier pour l'aide précieuse et pertinente qu'il a toujours su m'apporter, en particulier pour faire face aux difficultés qui auront pu être rencontrées lors de ces travaux. Je mets également à l'honneur sa passion pour la matière utilisée tout au long du projet, et sa curiosité, qui n'ont fait que renforcer mon dévouement à notre équipe et à mes travaux.

J'adresse également mes remerciements au professeur André Garon pour l'aide apportée tout au long de cette maîtrise, notamment via le partage de son expertise en mathématiques.

Je souhaite également remercier Francis Lacombe, Jean-Baptiste Frigo, et Jacques Garapin pour leurs conseils avisés, leurs multiples suggestions éclairées, mais surtout pour le temps qu'ils m'auront consacré afin de me transmettre généreusement leur savoir.

J'en viens maintenant à Victor Amrom, dont je tiens à souligner l'inaltérable bonne humeur, et avec qui j'ai eu grand plaisir à travailler et échanger sur des sujets tant professionnels que personnels.

Pour terminer, je tiens également à remercier mes parents et mes amis, malheureusement laissés en France, pour leur indéfectible soutien malgré l'éloignement.

RÉSUMÉ

Ce mémoire présente le développement d'un algorithme éléments-finis tout couplé et tout adaptatif utilisable pour la résolution d'écoulements turbulents instationnaires et bidimensionnels. Par « tout adaptatif » on entend qu'il sera possible en cours de calcul de faire varier le pas d'intégration temporelle, l'ordre de la méthode d'intégration temporelle, mais aussi la finesse du maillage dans le domaine de calcul. Par application de cet algorithme on est en mesure d'obtenir une efficacité de résolution accrue, comparativement à une résolution basée sur un maillage fixe et pas de temps de fixe. La résolution se fait à l'aide de l'approximation URANS et via l'usage du modèle de turbulence $k-\varepsilon$ standard. Dans le cas d'écoulements de paroi on utilisera également les variables logarithmiques pour les inconnues relatives à la turbulence, et les lois de paroi standards à 2 échelles de vitesse pour compenser les faiblesses du modèle $k-\varepsilon$ standard en proche paroi. L'ensemble de cette approche permet une résolution robuste des problèmes fluides présentés ici.

La première partie du projet consiste à implémenter dans l'algorithme une méthode d'intégration temporelle linéaire et multi-pas, à ordre et pas de temps variables. Le schéma numérique retenu est celui des méthodes « Backward Differentiation Formulas » , particulièrement adaptées aux problèmes numériquement raides. L'implémentation de ce schéma numérique est vérifiée pour les ordres 1 à 4 par la méthode des solutions manufacturées, entre autres afin de retrouver les taux de convergence théoriques des différents ordres du schéma. La solution manufacturée utilisée pour cette vérification se rapproche d'un écoulement de Poiseuille.

Dans un second temps on développe une application permettant de piloter la résolution de l'écoulement turbulent instationnaire, au travers du découpage du temps simulé en intervalles de temps de durée variable, chaque transition entre intervalle de temps se faisant par un remaillage du domaine de calcul et l'interpolation de la solution précédente sur le nouveau maillage.

On termine en validant le nouvel algorithme sur plusieurs cas turbulents également classiques, que sont l'écoulement sur la marche de Kim et l'écoulement autour d'un cylindre carré puis circulaire. La complexité de ces cas est suffisante pour pleinement tester la robustesse de l'algorithme ici développé.

ABSTRACT

We present the development of a new algorithm dedicated to the resolution of bidimensional unsteady and turbulent flow based on the URANS approximation. The algorithm also uses the finite elements method, and a monolithic formulation, that is to say the movement, continuity, and turbulence partial derivatives equations are solved in one block, with the use of all interaction terms. But the main originality of the algorithm is its adaptive feature, both for the time and space discretization, and leading to an effective resolution.

For the time discretization we have extended the application of a hp-adaptive method using the 'Backward Differentiation Formulas' (BDF), formerly designed to solve unsteady laminar in a effective way, to turbulent problems. The error estimation to adapt the time step has been modified to deal with the differences between the velocity and turbulence variables. An adjustment of the stability indicator used to perform the order adaptation of the method has also been done for the same reason.

The algorithm can adapt the space discretization as well thanks to a posteriori error estimation using a local projection method. A driver program has been created to control the frequency of the mesh update during the resolution of an unsteady problem, and to keep a number of nodes in the mesh approximatively constant during the whole simulation.

All the developments and simulations use the standard $k-\varepsilon$ turbulence model to predict the effects of turbulence on the flow. To avoid transient negative values for turbulence variables, the natural logarithm of turbulence variables is used too. It has also been necessary to use a two velocity scales wall function to solve confined flows, or flows around a solid, to compensate for the weaknesses of the standard $k-\varepsilon$ turbulence model in such cases.

The developed algorithm has been checked, with the method of manufactured solutions. First, the standard $k-\varepsilon$ turbulence model has been tested to verify that our implementations did not introduce bugs in the resolution of steady problems. We then looked for the theoretical convergence rates of the BDF for all solved variables. We have also verified the performance of the error estimator used for the time step adaptation.

Finally we put our algorithm into practice to solve some widely studied turbulent flows, to compare our results with steady simulations or with other unsteady results found in the literature.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	III
REMERCIEMENTS	IV
RÉSUMÉ	V
ABSTRACT	VI
TABLE DES MATIÈRES	VII
LISTE DES TABLEAUX	IX
LISTE DES FIGURES	X
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS	XIV
LISTE DES ANNEXES	XVIII
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Introduction générale	1
1.2 Contexte du projet au laboratoire	3
1.3 Objectifs de recherche	5
1.4 Plan du mémoire	5
CHAPITRE 2 MISE EN CONTEXTE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET MÉTHODES NUMÉRIQUES	6
2.1 Équations aux dérivées partielles et modélisation	6
2.1.1 Les Équations de Navier Stokes et hypothèse d'incompressibilité	6
2.1.2 Aspects physiques et mathématiques de la turbulence	11
2.1.3 Les lois de paroi	30
2.2 Méthodes numériques	40
2.2.1 Méthode des éléments finis en mécanique des fluides	40
2.2.2 Les méthodes type « Backward Differentiation Formulas »	50
2.2.3 Adaptation de maillage	58
2.2.4 Présentation de l'algorithme complet	64

CHAPITRE 3	VÉRIFICATION DU CODE ÉLÉMENTS-FINIS	67
3.1	La méthode des solutions manufacturées	67
3.2	Vérification du code stationnaire en régime turbulent	68
3.3	Vérification des schémas BDF en régime turbulent	75
3.3.1	Vérification des ordres de convergence	75
3.3.2	Vérification du comportement de l'estimateur d'erreur	80
3.3.3	La procédure d'adaptation de maillage	83
CHAPITRE 4	VALIDATION SUR CAS TYPE	87
4.1	La marche de Kim	87
4.1.1	Présentation du cas	87
4.1.2	Présentation des résultats	89
4.2	Écoulement autour d'un cylindre carré	99
4.2.1	Présentation du cas	99
4.2.2	Présentation des résultats	102
4.3	Écoulement autour d'un cylindre circulaire	109
4.3.1	Présentation du cas	109
4.3.2	Présentation des résultats	111
4.4	Conclusion pour l'ensemble des 3 simulations	122
CHAPITRE 5	CONCLUSION	124
5.1	Synthèse des travaux	124
5.2	Limitations de la solution proposée	125
5.3	Améliorations futures	126
RÉFÉRENCES	128
ANNEXES	133

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1	Valeur des coefficients du modèle $k-\varepsilon$ standard	30
Tableau 2.2	Exemple de vecteur d'adressage	49
Tableau 2.3	Construction des différences divisées	52
Tableau 2.4	Valeurs maximales de s en fonction de l'ordre p	53
Tableau 3.1	Coefficients pour la solution manufacturée de Eça et al.	69
Tableau 3.2	Conditions limites pour la solution manufacturée stationnaire	70
Tableau 3.3	Conditions limites pour la solution manufacturée instationnaire . . .	75
Tableau 3.4	Ordres de convergence et coefficients de corrélation - cas standard . .	78
Tableau 3.5	Ordres de convergence et coefficients de corrélation - cas logarithmique	79
Tableau 3.6	Comparaison des erreurs avec et sans remaillage	83
Tableau 3.7	Temps de calcul total pour chaque simulation	84
Tableau 4.1	Conditions limites - marche de Kim	88
Tableau 4.2	Distance de raccordement pour les frontières avec loi de paroi	89
Tableau 4.3	Conditions limites - cylindre carré	100
Tableau 4.4	Conditions limites - cylindre circulaire	110
Tableau 4.5	Coefficients relatifs aux équations (4.2)	115

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Synthèse qualitative des 3 approches principales en CFD	3
Figure 2.1	Loi de la paroi - ©Aokomoriuta, 2011 [1]. Reproduit et modifié avec permission	32
Figure 2.2	Traitement d'une paroi avec loi de paroi	33
Figure 2.3	Cas particulier si changement de distance de raccordement	38
Figure 2.4	Cas particulier si changement brutal de l'orientation de la paroi . . .	38
Figure 2.5	Élément de Taylor-Hood P2-P1	42
Figure 2.6	Élément de référence	43
Figure 2.7	Patch pour un noeud milieu (a) et pour un noeud sommet (b)	60
Figure 2.8	Problématique pour le remaillage en instationnaire	62
Figure 2.9	Principe de l'interpolation	64
Figure 2.10	Organigramme synthèse de l'algorithme de traitement des écoulements instationnaires	66
Figure 3.1	Schéma de la situation pour la solution manufacturée stationnaire . .	69
	a) Maillage initial (10201 noeuds)	71
	b) Maillage final (183510 noeuds)	71
Figure 3.2	Maillage initial et final pour la MMS de la plaque plane	71
	—— a) Erreur sur la vitesse	73
	—— b) Indice d'efficacité pour la vitesse	73
	—— c) Erreur sur la pression	73
	—— d) Indice d'efficacité pour la pression	73
Figure 3.3	Erreur et indice d'efficacité pour \mathbf{U} et P	73
	—— a) Erreur sur \mathcal{K}	74
	—— b) Indice d'efficacité pour \mathcal{K}	74
	—— c) Erreur sur \mathcal{E}	74
	—— d) Indice d'efficacité pour \mathcal{E}	74
	—— e) Erreur sur μ_t	74
	—— f) Indice d'efficacité pour μ_t	74
Figure 3.4	Erreur et indice d'efficacité pour \mathcal{K} , \mathcal{E} et μ_t	74
Figure 3.5	Schéma de la situation pour la solution manufacturée instationnaire .	76
	—— a) Convergence des BDF pour la vitesse	79
	—— b) Convergence des BDF pour la pression	79
	—— c) Convergence des BDF pour k	79

	—— d) Convergence des BDF pour ε	79
Figure 3.6	Étude des ordres de convergence des BDF avec variables standards	79
	—— a) Convergence des BDF pour la vitesse	80
	—— b) Convergence des BDF pour la pression	80
	—— c) Convergence des BDF pour k	80
	—— d) Convergence des BDF pour ε	80
Figure 3.7	Étude des ordres de convergence des BDF avec variables logarithmiques	80
	—— a) Cas du BDF-1	82
	—— b) Cas du BDF-2	82
	—— c) Cas du BDF-3	82
	—— d) Cas du BDF-4	82
Figure 3.8	Comportement de l'estimateur par troncature pour différents ordres des BDF	82
Figure 3.9	Variation de l'ordre de la méthode au cours du temps	84
Figure 3.10	Évolution du nombre de noeuds pour les cas avec remaillage	85
Figure 4.1	Géométrie retenue - marche de Kim	88
	—— a) Maillage à $t = 2$	91
	—— b) Maillage à $t = 5$	91
	—— c) Maillage à $t = 10$	91
	—— d) Maillage à $t = 20$	91
Figure 4.2	Évolution du maillage et contours de U à différents instants	91
	—— a) Maillage à $t = 30$	92
	—— b) Maillage à $t = 50$	92
Figure 4.3	Évolution du maillage et contours de U à différents instants (suite)	92
	—— a) Entre $t = 0.0$ et $t = 5.0$	93
	—— b) Entre $t = 65.0$ et $t = 70.0$	93
Figure 4.4	Évolution du pas de temps - marche descendante	93
Figure 4.5	Évolution de l'ordre de la méthode BDF - marche de Kim	94
	—— a) Entre $t = 2.0$ et $t = 70.0$	95
	—— b) Entre $t = 60.0$ et $t = 70.0$	95
Figure 4.6	Position du point de recollement au cours de la durée simulée	95
Figure 4.7	Champs de vitesse U final en instationnaire	95
Figure 4.8	Champs de vitesse U en stationnaire	96
	—— a) En $x = 3$	97
	—— b) En $x = 8$	97
	—— c) En $x = 13$	97

	—— d) En $x = 18$	97
Figure 4.9	Superposition de la vitesse U à différentes abscisses pour la simulation stationnaire et instationnaire	97
Figure 4.10	Maillage final en instationnaire (213296 noeuds)	98
Figure 4.11	Maillage final en stationnaire (383220 noeuds)	98
Figure 4.12	Géométrie retenue - cylindre carré	100
Figure 4.13	y^+ sur le pourtour du carré en stationnaire avec $d = 0.02$	101
	—— a) Maillage à $t = 5$	103
	—— b) Maillage à $t = 10$	103
	—— c) Maillage à $t = 20$	103
Figure 4.14	Évolution du maillage à différents instants - cas du cylindre carré	103
	—— d) Maillage à $t = 30$	104
	—— e) Maillage à $t = 40$	104
Figure 4.15	Évolution du maillage à différents instants (suite) - cas du cylindre carré	104
Figure 4.16	Déphasage entre le maillage et l'écoulement à $t = 40$	104
	—— a) Entre $t = 5.0$ et $t = 15.0$	105
	—— b) Entre $t = 60.0$ et $t = 70.0$	105
Figure 4.17	Évolution du pas de temps - cylindre carré	105
Figure 4.18	Évolution de l'ordre de la méthode BDF - cylindre carré	106
	—— a) Coefficient de portance	108
	—— b) Coefficient de trainée	108
Figure 4.19	Évolution du coefficient de portance et de trainée dans le temps	108
Figure 4.20	Géométrie retenue - cylindre circulaire	110
	—— a) Maillage à $t = 3$	112
	—— b) Maillage à $t = 5$	112
	—— c) Maillage à $t = 10$	112
	—— d) Maillage à $t = 20$	112
Figure 4.21	Évolution du maillage à différents instants - cas du cylindre circulaire	112
Figure 4.22	Valeur de y^+ sur le pourtour du cylindre à $t = 40$	113
Figure 4.23	Maillage fixe - cylindre circulaire	114
	—— a) Sans perturbation en entrée	118
	—— b) Avec perturbation en entrée	118
Figure 4.24	Évolution du pas de temps - cylindre circulaire	118
	—— a) Sans perturbation en entrée	119
	—— b) Avec perturbation en entrée	119
Figure 4.25	Évolution de l'ordre de la méthode BDF - cylindre circulaire	119

Figure 4.26	Coefficients de portance - cylindre circulaire	120
Figure 4.27	Carte de vorticité - Cas $E = 9.0$ et $d = 0.01$	121
Figure 4.28	Carte de vorticité - Cas $E = 0.3$ et $d = 0.03$	121

LISTE DES ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS

ABRÉVIATIONS

CFD	Computational Fluid Dynamics
DNS	Direct Numerical Simulation
LES	Large Eddy Simulation
RANS	Reynolds Averaged Navier Stokes
URANS	Unsteady Reynolds Averaged Navier Stokes
BDF	Backward Differentiation Formulas
EDP	Équation aux dérivées partielles
ODE	Ordinary differential equation
DAE	Differential algebraic equation

NOTATIONS

Notations mathématiques

\mathbf{a}	Variable vectorielle
$\underline{\mathbf{a}}$	Tenseur d'ordre 2 (matrice)
\mathbf{a}_i	Composante i du vecteur \mathbf{a}
$\underline{\mathbf{a}}_{ij}$ ou $\underline{\mathbf{a}}(ij)$	Composante à la i -ème ligne et j -ème colonne du tenseur $\underline{\mathbf{a}}$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	Produit scalaire euclidien
$\ \cdot\ $	Norme associée au produit scalaire euclidien
$\underline{\mathbf{a}} : \underline{\mathbf{b}}$	Produit doublement contracté
$\nabla(\cdot)$	Opérateur gradient
$\nabla \cdot \mathbf{a}$	Divergence du vecteur \mathbf{a}
$\nabla \cdot \underline{\mathbf{a}}$	Divergence du tenseur $\underline{\mathbf{a}}$
$\frac{\partial a}{\partial b}$	Dérivée partielle de a par rapport à b
$\frac{da}{db}$	Dérivée simple de a par rapport à b
$\left. \frac{\partial a}{\partial b} \right _{b=c}$	Dérivée partielle de a par rapport à b évaluée en $b = c$
\mathbf{I}	Matrice identité

$\underline{\mathbf{a}}^T$	Tranposée du tenseur $\underline{\mathbf{a}}$
\cdot^*	Notation adimensionnelle
$\bar{\cdot}$	Notation valeur moyenne
$\tilde{\cdot}$	Notation partie fluctuante
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
$\ln(x)$	Logarithme naturel du scalaire x
$\exp(x)$ ou e^x	Exponentielle du scalaire x
$\delta_U, \delta_V, \delta_p, \delta_K, \delta_\varepsilon$	Fonctions test pour les variables à résoudre
Ω	Domaine de calcul
Γ	Frontière du domaine de calcul
Γ_{D_i}	Portion de frontière avec condition limite de Dirichlet pour la variable i
Γ_{N_i}	Portion de frontière avec condition limite de Neumann pour la variable i
$\{\emptyset\}$	Ensemble vide
\cup	Union ensembliste
\cap	Intersection ensembliste
\mathcal{F}	Application de passage entre l'élément réel et l'élément de référence
\mathcal{F}^{-1}	Application inverse de \mathcal{F}
\mathcal{R}	Résidu
\mathcal{R}_n	Résidu à la n-ème itération
\mathbf{x}_n	Vecteur solution initiale à l'itération n
\mathbf{x}_{n+1}	Vecteur solution calculé à l'itération n
\mathbf{X}	Vecteur solution exacte
$\underline{\mathbf{J}}_{\mathcal{R}_n}$	Matrice jacobienne associée à \mathcal{R}_n
ε_M	Précision machine
h	Pas de temps, ou taille caractéristique de maille
p	Ordre de la méthode linéaire multi-pas
s	Swing factor
C_{p+1}	Constante d'erreur pour la méthode BDF- p
e_{n+1}	Erreur locale introduite sur le dernier pas de temps
γ	Reconstruction de la solution éléments-finis
γ_h	Solution éléments-finis
ξ	Facteur de réduction d'erreur
N_e	Nombre d'éléments dans le maillage courant

e_g	Erreur globale
N_c	Nombre d'intervalle de temps sur la durée totale simulée
N_t	Nombre de noeuds cible
Q_α	Terme source pour la variable α
Φ_i	Indice d'efficacité pour la variable i

Notations physiques

M	Masse d'une particule de fluide
\mathbf{F}_v	Force volumique s'appliquant à une particule fluide
\mathbf{F}_s	Force surfacique s'appliquant à une particule fluide
\mathbf{x}	Vecteur position
x	Première coordonnée cartésienne
y	Seconde coordonnée cartésienne
\mathbf{U}	Vecteur vitesse d'une particule fluide
u	Composante de vitesse suivant l'axe des x
v	Composante de vitesse suivant l'axe des y
\mathcal{V}	Volume de contrôle bidimensionnel
$\delta\mathcal{V}$	Frontière du volume de contrôle \mathcal{V}
ρ_f	Masse volumique du fluide
$\underline{\tau}$	Tenseur des contraintes internes au fluide
$\nabla(\mathbf{U})$	Tenseur du taux de déformation (ou gradient du vecteur vitesse)
p	Pression mécanique
μ	Viscosité dynamique
ν	Viscosité cinématique
L_0	Longueur caractéristique
U_0	Vitesse caractéristique
p_{ref}	Pression thermodynamique de référence
p_0	Pression thermodynamique caractéristique
ρ_0	Masse volumique caractéristique
μ_0	Viscosité dynamique caractéristique
t_0	Échelle de temps caractéristique
Re	Nombre de Reynolds
St	Nombre de Strouhal
$\delta\mathbf{u}$	Perturbation du vecteur vitesse
δp	Perturbation de la pression thermodynamique

\mathbf{k}	Vecteur d'onde d'une perturbation
ω	Pulsation temporelle
$\underline{\sigma}_{Re}$	Tenseur de Reynolds
k	Énergie cinétique de turbulence massique
k_0	Énergie cinétique de turbulence massique caractéristique
ε	Taux de dissipation de k
ε_0	Taux de dissipation de k caractéristique
μ_t	Viscosité turbulente dynamique
μ_{t0}	Viscosité turbulente dynamique caractéristique
ν_t	Viscosité turbulente cinématique
Re_t	Nombre de Reynolds turbulent
Re_{t0}	Nombre de Reynolds turbulent caractéristique
l_{mix}	Longueur de mélange
v_{mix}	Vitesse de mélange
E_c	Énergie cinétique
K	Énergie cinétique de l'écoulement moyen
$\sigma_k, \sigma_\varepsilon, C_D, C_1, C_2, C_\mu$	Constantes de fermeture
\mathcal{K}	Variable logarithmique pour k
\mathcal{E}	Variable logarithmique pour ε
C_k, C_ε	Constantes pour l'adimensionnalisation
u_τ	Vitesse de frottement
u_k	Échelle de vitesse basée sur k
τ_p	Cisaillement à la paroi
κ	Constante de Von Karman
E	Paramètre de rugosité
d	Distance de raccord à la paroi
T	Durée adimensionnelle totale simulée
ΔT	Durée adimensionnelle d'un intervalle de temps

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE A	FORME FAIBLE DES ÉQUATIONS	133
ANNEXE B	FICHIER PILOTE POUR LES SIMULATIONS INSTATIONNAIRES	136

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

1.1 Introduction générale

De nombreux secteurs industriels sont aujourd'hui confrontés à des problématiques impliquant des écoulements fluides de nature turbulente. On pourra par exemple citer les secteurs aéronautique et automobile, que ce soit au travers de l'étude aérodynamique d'un profil d'aile pour le premier, ou bien au travers de l'étude d'un système de refroidissement moteur pour le second. Bien évidemment on pourrait s'attarder sur bon nombre d'autres cas d'ingénierie, tant la mécanique des fluides est un domaine vaste et multidisciplinaire. Mais le sujet demeure complexe.

Il existe tout d'abord des fluides de natures très différentes et qui ne sont pas gouvernés par les mêmes équations. La classe de fluide de loin la plus courante reste celle des fluides dits newtoniens. Les activités de recherche qui seront présentées plus loin se limitent au cas de ces fluides. Nous aurons l'occasion de revenir sur leur définition mathématique dans le chapitre 2. Une autre distinction usuellement faite lors de la définition d'un problème fluide réside dans l'aspect laminaire ou turbulent de l'écoulement à l'étude. Dans le premier cas, l'écoulement est ordonné aux petites et aux grandes échelles d'espace, ce qui le rend en général simple à étudier, voire permet d'obtenir des solutions analytiques à partir des équations de Navier-Stokes, qui régissent la mécanique des fluides newtoniens. Dans le second cas, l'écoulement est fortement désordonné aux petites échelles d'espace et bien souvent aux grandes échelles aussi. De ce fait la physique de ces écoulements est notablement plus complexe que celle des écoulements laminaires. Que ce soit par des biais expérimentaux ou numériques il est très difficile de capturer tous les mécanismes intervenants. Nous reviendront dans le chapitre 2 sur la quantification de la transition entre les états laminaire et turbulent, se faisant majoritairement au travers du nombre de Reynolds R_e .

De nos jours les activités de recherche sur le sujet de la turbulence continuent de passer par des méthodes expérimentales et numériques. Du point de vue numérique l'une des méthodes couramment utilisée est celle des éléments finis [2]. Cette méthode sera largement présentée dans le chapitre 2 également. Les méthodes expérimentales sont quant à elles très nombreuses et sont en général utilisées pour faire de la recherche fondamentale qui permettra de mettre en lumière, ou de confirmer, certains mécanismes physiques qu'il conviendra ensuite d'intégrer dans les modèles numériques. Dans le monde industriel on tend néanmoins à éviter le recours à l'expérience pour limiter les coûts. Les montages expérimentaux se révèlent vite onéreux car ils exigent des caractéristiques uniques. Les outils numériques tendent donc à

prendre toute la place dans le secteur industriel, et la recherche sur l’optimisation de ces outils est particulièrement active. Bien que les outils numériques soient devenus très puissants en vitesse de calcul, la turbulence reste toujours très complexe à étudier numériquement. En effet, à physique complexe correspond modélisation fidèle complexe et pour cause : il n’existe à ce jour aucune méthode numérique capable de résoudre avec fidélité l’intégralité des classes de problèmes qui ont pu être identifiées.

Il existe 3 grandes approches pour la résolution numérique des écoulements turbulents. La première est la Simulation Numérique Directe (Direct Numerical Simulation ou DNS en anglais) [3], et elle consiste à résoudre numériquement les équations de Navier-Stokes sans introduire d’hypothèses ou de modélisations supplémentaires. C’est l’approche permettant d’obtenir la plus grande précision de résolution (en comparant à des travaux expérimentaux) mais les coûts de calcul sont immenses, car il faut que la discrétisation en temps et en espace (maillage) soit extrêmement fine. Les ressources informatiques nécessaires sont colossales (usage de superordinateurs). On comprend donc que cette approche soit principalement utilisée par le secteur de la recherche et non le secteur industriel [4]. On y reviendra plus en détails dans la section 2 sur la principale limitation de cette approche.

La seconde approche est la LES (‘Large Eddy Simulation’ en anglais). Cette approche consiste à utiliser un maillage plus grossier pour réduire les coûts de calcul. Les plus petites échelles de la turbulence, non capturées par le maillage, sont intégrées via des modélisations complémentaires aux équations de Navier-Stokes [5]. Cette approche utilisée pour la première fois en 1970 a depuis beaucoup gagné en popularité, notamment pour l’étude des écoulements libres.

Enfin, la dernière approche, qui sera la nôtre pour toutes les activités de recherche présentées ici, est celle de l’approximation URANS (‘Unsteady Reynolds Average Navier-Stokes’). Cette approche est de loin la plus utilisée dans le monde industriel, tant son rapport précision/coût *peut* être intéressant. Elle consiste à appliquer la moyenne d’ensemble aux équations de Navier-Stokes en considérant que le champ de vitesses à résoudre se décompose en une partie moyenne et une partie fluctuante (à moyenne d’ensemble nulle). En moyennant les équations de Navier-Stokes, la partie fluctuante du champ de vitesses se concentre uniquement dans un terme de ces équations. L’introduction des parties fluctuantes pose néanmoins un problème de fermeture car on ajoute plusieurs inconnus au problème. Il convient donc de modéliser le terme issu des parties fluctuantes et/ou d’ajouter des équations supplémentaires traitant de grandeurs caractéristiques du phénomène turbulent. Dans les activités de recherche qui seront décrites ici, nous travaillerons avec un modèle de turbulence à 2 équations. Le chapitre 2 reviendra sur ces notions. Une grande partie de la recherche gravitant autour de l’approximation URANS cible l’optimisation des modèles existants, ou la création de nou-

veaux modèles dédiés à une ou plusieurs classes de problèmes. Mais une autre composante majeure de la recherche en CFD (Computational Fluids Dynamics) se situe dans l'étude des méthodes numériques en support à la résolution. C'est davantage dans cette perspective que s'inscrit ce travail, car il s'agit principalement ici d'étudier le comportement numérique d'un schéma d'intégration temporelle, en regard d'un modèle de turbulence qui lui sera fixé pour la totalité du projet.

La figure 1.1 présente une synthèse qualitative des 3 approches précédemment décrites, en termes d'effort de calcul et d'effort de modélisation.

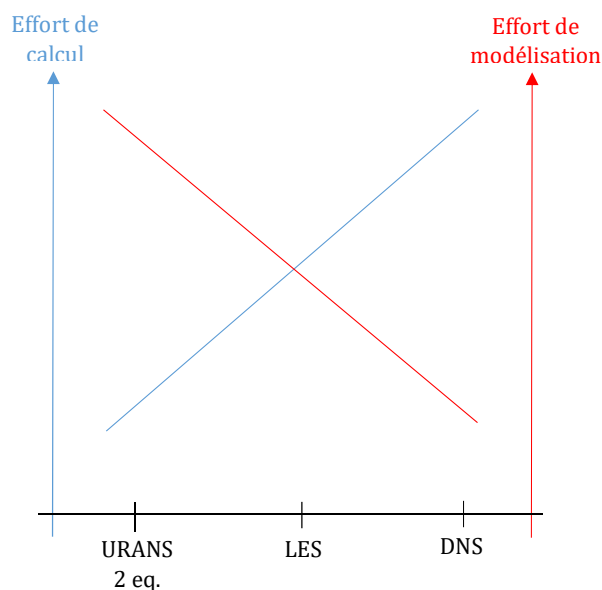


Figure 1.1 Synthèse qualitative des 3 approches principales en CFD

1.2 Contexte du projet au laboratoire

La quantité de mémoire des ordinateurs ayant beaucoup augmenté ces dernières années, la résolution d'écoulements turbulents avec modèle de turbulence à 2 équations a pu être repensée. L'approche classique consistait à résoudre ces problèmes de manière découplée, soit en retirant les termes de couplage entre les équations du mouvement et de la turbulence dans la matrice issue de la méthode de Newton. Ainsi, il était possible de stocker le système matriciel sous la forme de trois sous-systèmes : un pour les variables de vitesse, la tempéra-

ture et la pression, un pour la première variable de turbulence (ici k), un pour la seconde variable de turbulence (ici ε). Mais dernièrement l'approche dite « tout couplée » (les termes de couplage sont conservés), ou monolithique, est devenue viable grâce aux progrès informatiques. Une étude comparative entre ces deux approches a démontré une vitesse de résolution nettement meilleure pour l'approche tout couplée [6]. Le nombre d'itérations nécessaires à l'obtention de la solution est nettement moindre pour l'approche tout couplée, ce qui compense largement l'accroissement du temps calcul par itération, induit par l'augmentation de la taille du système à résoudre.

Un autre sujet de recherche particulièrement étudié au laboratoire est celui des lois de parois. Ce concept consiste à résoudre l'écoulement de proche paroi à partir d'une loi de comportement « universelle », qui a été déterminée par des considérations d'analyse dimensionnelle puis vérifiée expérimentalement. La physique à capturer étant particulièrement riche en proche paroi, cela requiert un maillage très dense pour capturer cette dite physique. Via l'usage des lois de parois on s'affranchit en partie de cette contrainte, tout en permettant à des modèles de turbulence non intégrables jusqu'à la paroi d'être utilisables pour des écoulements de parois. L'usage de ces lois de paroi est cependant complexe et exige de la prudence [7]. Selon les paramètres utilisés, la physique du problème peut être enrichie. Par exemple dans le cas de l'écoulement dans une conduite en U, la distance de raccordement entre domaine de calcul et loi de paroi conditionne l'apparition d'une zone de recirculation à la sortie du coude [8]. Plus récemment le sujet des lois de paroi adaptatives a été étudié au laboratoire. Leur intérêt réside dans l'élargissement de la zone valide de raccordement avec le domaine de calcul, mais aussi dans le fait que les conditions limites appliquées pour ces lois de parois sont beaucoup moins approximatives que dans le cas de la loi de paroi standard. Néanmoins ces lois de parois se sont révélées parfois difficiles d'utilisation pour cause de très forte sensibilité aux conditions initiales [9]. De plus elles sont toujours en développement au laboratoire, présentement afin de les sensibiliser à des gradients de pression. C'est pourquoi notre projet se limite à l'utilisation de la loi de paroi standard à deux échelles de vitesse, qui a déjà été pleinement vérifiée.

Enfin un des aspects particulièrement important de notre recherche est celui de l'adaptation. On se place dans la continuité de nombreux travaux réalisés tant en régime laminaire que turbulent. Comme précisé dans le résumé de ce mémoire l'adaptation sera à la fois spatiale et temporelle. L'une des méthodes en espace particulièrement connue est celle du « super-convergent patch recovery » [10]. Le maillage est mis-à-jour selon l'analyse d'une estimation à posteriori de l'erreur. Pour les écoulements turbulents l'usage du logarithme népérien des variables de turbulence conjointement avec cette méthode a permis d'augmenter notablement la précision de résolution [11]. Pour l'adaptation en temps il s'agit d'élargir au régime

turbulent l'application de l'algorithme à pas de temps et ordre variable basé sur les BDF, qui a récemment été testé avec succès au laboratoire, sur l'écoulement laminaire autour d'un cylindre [12].

1.3 Objectifs de recherche

L'objectif général du projet est donc de développer et appliquer un algorithme éléments finis tout couplé, adaptatif en espace (adaptation du maillage) et en temps (adaptation du pas de temps et de l'ordre de l'intégration temporelle), pour la résolution d'écoulements turbulents instationnaires. Plus précisément cette introduction a permis de souligner les **objectifs spécifiques** suivants :

- Développer et implémenter le couplage des méthodes BDF à un algorithme RANS monolithique existant, et en vérifier le bon fonctionnement par méthode des solutions manufacturées.
- Mettre en place une application pilote pour la résolution des écoulements turbulents instationnaires.
- Valider l'ensemble sur plusieurs cas d'école.

1.4 Plan du mémoire

Le présent mémoire s'articule autour de 4 grandes parties. A la suite directe de cette introduction le chapitre 2 se consacre à présenter la grande majorité des concepts mathématiques et numériques du projet. On y abordera notamment les équations aux dérivées partielles de Navier Stokes soumises à la contrainte d'incompressibilité, les équations du modèle de turbulence $k-\varepsilon$ standard, la définition mathématique des méthodes BDF, et bien sûr la méthode des éléments finis. Pour faire suite à cela le chapitre 3 se consacre à présenter la méthode des solutions manufacturées, et son application directe à la vérification des méthodes BDF en régime turbulent. Enfin le chapitre 4 présente la validation de l'ensemble de l'algorithme ici développé sur les cas typiques de la marche descendante de Kim et de l'écoulement autour de cylindres carrés et circulaires isolés. Le tout sera suivi d'une conclusion faisant la synthèse de nos résultats, et soulignant les limitations et améliorations possibles à apporter à notre algorithme.

CHAPITRE 2 MISE EN CONTEXTE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET MÉTHODES NUMÉRIQUES

2.1 Équations aux dérivées partielles et modélisation

2.1.1 Les Équations de Navier Stokes et hypothèse d'incompressibilité

Avant même de présenter ces équations, il paraît bon de rappeler que leur résolution analytique constitue l'un des problèmes du millénaire, récompensé avant même le dépôt d'un brevet par l'Institut de mathématiques Clay et à hauteur d'un million de dollars américain : c'est dire la complexité intrinsèque de la mécanique des fluides ! En dehors du cas particulier des écoulements dits visqueux et de quelques problèmes très spécifiques (on pourra penser au premier et second problème de Stokes), il est aujourd'hui impossible de résoudre à la main ces équations.

Ces équations peuvent être obtenues de deux façons distinctes. La première consiste en un problème de minimisation d'une intégrale relative à l'énergie mécanique du système fluide. On peut également, en considérant un volume de fluide quelconque, procéder à un bilan de quantité de mouvement dans ce volume. C'est l'approche qui est présentée ici. Toutefois et afin de conserver le problème comme spatialement continu, on fait l'hypothèse que ce volume est à l'échelle mésoscopique. Cette échelle spatiale est telle qu'elle peut être considérée comme un infiniment petit au devant de l'échelle macroscopique, et comme un infini grand face à l'échelle atomique/particulaire. On assimilera ce volume à une « particule fluide ». A partir de là on est en droit d'appliquer la seconde loi de Newton, relative à la mécanique des milieux continus : la variation temporelle de quantité de mouvement de la particule fluide choisie est égale à la somme des efforts s'exerçant sur son volume, qu'ils soit volumiques ou surfaciques. Du point de vue Lagrangien, qui consiste à suivre la particule fluide dans son mouvement on peut donc écrire :

$$\frac{d(M\mathbf{U})}{dt} = \mathbf{F}_v + \mathbf{F}_s \quad (2.1)$$

Où \mathbf{U} est le vecteur vitesse de la particule, M sa masse, et \mathbf{F}_v et \mathbf{F}_s respectivement les forces volumiques et surfaciques s'appliquant sur la particule. La dérivée droite est aussi appelée la dérivée Lagrangienne, ou particulaire. Néanmoins le point de vue Lagrangien se prête mal à la mécanique des fluides, car la particule de fluide mésoscopique (qui contient de par son échelle un certain nombre de molécule de fluide) va fortement se déformer et perdre rapidement

sa cohérence spatiale initiale. C'est pourquoi on lui préfère le point de vue Eulérien, qui va nous faire passer de l'équation différentielle ordinaire précédente à une équation aux dérivées partielles. Le passage au point de vue Eulérien se fait aisément en notant que :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \nabla(\alpha) \cdot \mathbf{U} \quad (2.2)$$

Où α est un scalaire quelconque par simplicité. On aurait très bien pu considérer une grandeur vectorielle.

En point de vue Lagrangien, le vecteur vitesse de la particule n'est fonction que du temps et de ce qui fait l'identité de la particule (par exemple : sa position (x_0, y_0) à $t = 0$). Le propre du point de vue Eulérien est de s'attacher à un point du domaine de l'écoulement de coordonnées (x, y) (en 2D cartésien) et de regarder les particules de fluides qui passent par ce point. Ainsi on ne considère plus l'évolution temporelle du vecteur vitesse d'une particule en particulier, mais on évalue le vecteur vitesse de la particule qui coïncide avec le point d'accroche à l'instant t . Les variables indépendantes pour ce vecteur vitesse deviennent donc t, x et y . Ainsi l'équation (2.2) aurait pu s'écrire de façon intermédiaire :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \underbrace{\frac{\partial\alpha(x(t), y(t), t)}{\partial t}}_{\text{dérivée Eulérienne}} + \underbrace{\frac{\partial\alpha}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\alpha}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}}_{\text{dérivée convective}} \quad (2.3)$$

Cela se ramène bien à l'expression (2.2) en notant que les coordonnées (x, y) du point d'accroche sont finalement la position de la particule fluide qui coïncide avec le point d'accroche.

On peut donc distinguer deux variations du point de vue Eulérien :

- Une variation purement temporelle, qui serait la variation de la vitesse entre deux particules qui passent successivement par le point d'accroche, leur instant de passage à ce point différent d'un Δt infiniment petit. Cette variation est la dérivée temporelle Eulérienne.
- Une variation due à la convection de la particule à la vitesse \mathbf{U} vers un autre point d'accroche coïncidant avec une particule fluide de variable scalaire $\alpha' = \alpha + \Delta\alpha$.

On peut désormais raisonner de manière volumique et considérer un ensemble de particules fluides dans un volume de contrôle \mathcal{V} bidimensionnel. On note sa frontière linéique $\partial\mathcal{V}$. Cela conduit à écrire la relation (2.1) sous la forme intégrale suivante :

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{d(\rho_f \mathbf{U})}{dt} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}_v d\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{f}_s dl \quad (2.4)$$

Où ρ_f désigne la masse surfacique du fluide, supposée constante en temps et en espace. En

utilisant la relation (2.2) appliquée au vecteur vitesse \mathbf{U} on aboutit directement à :

$$\int_{\mathcal{V}} \left\{ \rho_f \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho_f (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right\} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}_v d\mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}} \mathbf{f}_s dl \quad (2.5)$$

En notant $\underline{\boldsymbol{\tau}}$ le tenseur des contraintes à la frontière du volume de contrôle alors on a $\mathbf{f}_s|_{\hat{\mathbf{n}}} = \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$, avec $\hat{\mathbf{n}}$ la normale sortante à l'élément de frontière. L'application du théorème de la divergence conduit à écrire alors :

$$\int_{\mathcal{V}} \left\{ \rho_f \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho_f (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right\} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}_v d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}) d\mathcal{V} \quad (2.6)$$

Le volume de contrôle étant quelconque on peut alors déduire de cette dernière équation l'EDP vectorielle :

$$\rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right) = \mathbf{f}_v + \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} \quad (2.7)$$

Avant même d'explicitier les termes de droite de cette EDP on comprend donc pourquoi la mécanique des fluides est si complexe analytiquement : la partie convective du membre de gauche est non linéaire ! Mais c'est aussi pourquoi la résolution de problèmes fluides se prête tant au numérique.

Nous avons dit en introduction que ce projet de recherche se limiterait aux fluides dits Newtoniens. L'aspect Newtonien du problème réside dans le choix de la modélisation du tenseur des contraintes $\underline{\boldsymbol{\tau}}$. Le modèle des fluides newtoniens correspond à une loi de comportement de fluide. Cette loi fait le lien entre le tenseur des contraintes $\underline{\boldsymbol{\tau}}$ et le tenseur de taux de transformation qui n'est autre que le tenseur de gradient de vitesse $\nabla(\mathbf{U})$. La partie antisymétrique de ce tenseur n'étant représentative que de la rotation pure de la particule de fluide sur elle-même on peut, en faisant l'hypothèse de l'absence de couple exercé sur la particule, préciser que la relation tensorielle recherchée ne fera apparaître que la partie symétrique de $\nabla(\mathbf{U})$, ou tenseur du taux de déformation. On pose également l'hypothèse d'isotropie du fluide, soit que dans un cas statique il n'existe aucune direction privilégiée pour la transmission de la contrainte statique. On peut également imaginer un comportement différent selon que la déformation s'accompagne d'un changement de volume ou non. Or la variation de volume par unité de temps et de volume n'est autre que la quantité $\nabla \cdot \mathbf{U}$. A partir de ces éléments, la loi de comportement des fluides newtoniens prend donc la forme suivante :

$$\underline{\boldsymbol{\tau}} = \alpha_1 \underline{\mathbf{I}} + \alpha_2 (\nabla \cdot \mathbf{U}) \underline{\mathbf{I}} + \frac{\alpha_3}{2} (\nabla(\mathbf{U}) + \nabla(\mathbf{U})^T) \quad (2.8)$$

Les coefficients α_2 et α_3 sont les coefficients de Lamé. Traduisant tous deux des effets visqueux, on les appelle également premier et deuxième coefficient de viscosité. Il faut maintenant se rappeler que nous avons fait l'hypothèse d'incompressibilité du fluide. Physiquement cela signifie que le volume d'une particule fluide est indépendante de la pression. Au sens large en supposant que l'écoulement est isotherme, cela veut dire que le volume d'une particule fluide se conserve dans le temps et l'espace. Le principe de conservation de la masse dans un volume de contrôle arbitraire (toujours limité dans l'infiniment petit par l'échelle mésoscopique) permet de montrer que l'incompressibilité du fluide se ramène alors mathématiquement à la condition $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$. On peut donc simplifier la relation (2.8) par :

$$\underline{\tau} = \alpha_1 \underline{\mathbf{I}} + \frac{\alpha_3}{2} (\nabla(\mathbf{U}) + \nabla(\mathbf{U})^T) \quad (2.9)$$

En notant que dans un cas hydrostatique la contrainte interne au fluide se limite à la seule pression mécanique p il vient directement que $\alpha_1 = -p$. Par ailleurs on pose $\alpha_3 = 2\mu$, avec μ la viscosité dynamique du fluide.

D'autre part le terme de force volumique (ou surfacique puisque l'on travaille ici en 2D) dans la relation (2.7) représente de manière générale seulement la force de gravité. Mais dans le cas d'un fluide particulier présentant par exemple des propriétés magnétiques, on peut très bien imaginer des forces volumiques venant s'ajouter à la gravité. Dans notre cas on va aller jusqu'à négliger tout bonnement ces forces, car pour un fluide newtonien classique tel que l'eau dans un contexte turbulent, l'influence de la gravité va devenir négligeable devant les effets convectifs et diffusifs. Cela permettra de plus de s'affranchir du plan considéré pour les simulations, vu que la gravité s'exerce seulement selon une direction de l'espace privilégiée. On peut donc finalement présenter les équations dites de Navier Stokes incompressibles en 2D cartésien, avec lesquelles nous avons travaillées, en injectant (2.9) dans (2.7) privée du terme de force volumique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_f \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right] \\ \rho_f \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A})$$

Avec $\mathbf{U} = (u, v)$. Le système A présente la forme conservative des équations de Navier Stokes incompressibles. En supposant que la viscosité dynamique μ est une constante et en utilisant l'EDP de la pression ($\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$), on peut alors en présenter une forme plus compacte dite

forme laplacienne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_f \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\ \rho_f \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (B)$$

Ces équations pilotent donc le comportement des fluides modélisés comme newtoniens. Il faut souligner que les deux systèmes précédents sont dimensionnels. En introduction nous avons évoqué le nombre de Reynolds, qui permet de délimiter pour une valeur approximative et propre à chaque type d'écoulement la transition entre le régime laminaire et turbulent. Pour le mettre en lumière il est nécessaire de travailler avec des équations adimensionnelles. Pour ce faire il faut identifier une longueur L_0 , une vitesse U_0 , une masse volumique ρ_0 , une viscosité dynamique μ_0 , et une durée caractéristique t_0 pour le problème étudié. La référence de pression p_0 est très souvent choisie comme étant la pression dynamique de référence construite à partir de la masse volumique et de la vitesse caractéristiques : $\rho_0 L_0^2$. On pose $u^* = \frac{u}{U_0}$ la vitesse adimensionnelle associée à u . On procède de même pour les autres quantités. La pression étant définie à une constante près on a par contre $p^* = \frac{p - p_{ref}}{P_0}$. En prenant la convection comme référence dans les équations de Navier Stokes, celles-ci peuvent se représenter sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_f^* \left(\frac{L_0}{t_0 U_0} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{P_0}{\rho_0 U_0^2} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \mu^* \frac{\mu_0}{\rho_0 L_0 U_0} \left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right] \\ \rho_f^* \left(\frac{L_0}{t_0 U_0} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{P_0}{\rho_0 U_0^2} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \mu^* \frac{\mu_0}{\rho_0 L_0 U_0} \left[\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right] \\ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \end{array} \right.$$

Cela s'écrit communément de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_f^* \left(\frac{1}{S_t} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \mu^* \frac{1}{R_e} \left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right] \\ \rho_f^* \left(\frac{1}{S_t} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \mu^* \frac{1}{R_e} \left[\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right] \\ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \end{array} \right. \quad (C)$$

Selon la même procédure d'adimensionnalisation on présente ci-dessous le système (A) avec l'hypothèse $\mu = cste$ sous forme adimensionnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_f^* \left(\frac{1}{S_t} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \mu^* \frac{1}{R_e} \left[2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right] \\ \rho_f^* \left(\frac{1}{S_t} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \mu^* \frac{1}{R_e} \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) \right] \\ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \end{array} \right. \quad (D)$$

On identifie donc deux nombres adimensionnels caractéristiques du problème étudié :

- Le nombre de Strouhal $\mathbf{S}_t = \frac{t_0 U_0}{L_0}$ qui se veut faire le rapport d'une durée caractéristique du cas étudié sur la durée caractéristique que met le fluide pour parcourir la distance L_0 à la vitesse U_0 . Dans la majorité des cas on fixe ce nombre à 1. Cependant dans un cas comme celui de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire, il sera différent de 1 si l'on souhaite adimensionner le temps par rapport à la fréquence du relâché tourbillonnaire dans l'allée de Von Karman. Dans les cas que nous présentons plus loin dans ce mémoire, le Strouhal a toujours été fixé à 1.
- Le nombre de Reynolds $\mathbf{R}_e = \frac{\rho_0 L_0 U_0}{\mu_0}$ qui lui établit le rapport de force entre le terme de convection et le terme de diffusion. Il peut être également vu comme une mesure du poids des non-linéarités dans l'écoulement. Dans la sous section 2.1.2 suivante on présente combien ce nombre est déterminant dans la description du phénomène turbulent.

2.1.2 Aspects physiques et mathématiques de la turbulence

Comme l'intitulé de ce mémoire le précise les problèmes qui ont été étudiés dans le cadre de ce travail sont turbulents. Bien que cela ne remette pas en question la validité des équations

de Navier Stokes qui ont été présentées plus haut, un écoulement turbulent est physiquement beaucoup plus riche qu'un écoulement laminaire. Cette richesse se traduit par une excitation de beaucoup plus de fréquences spatiales. L'excitation des fréquences est rendue possible par le terme non linéaire des équations de Navier Stokes. Néanmoins la persistance des effets visqueux joue le rôle de filtre passe bas pour les fréquences spatiales. La *théorie des instabilités linéaires* [13] est l'un des outils d'analyse permettant de se faire une idée de la fréquence critique qui peut-être excitée pour un nombre de Reynolds donné.

Loic Frazza a utilisé cette théorie dans le cas d'un écoulement de Couette en vue de ces travaux sur les lois de paroi adaptatives [14]. On restera ici un peu plus général en considérant un champs de vitesse $\mathbf{U} = (U, V)$ solution des équations de Navier Stokes incompressibles, sans forme analytique particulière mais purement suivant l'axe des x ($V = 0$). On introduit dans l'écoulement une perturbation $\delta\mathbf{u}$ telle que le champs de vitesse résultant $\mathbf{U} + \delta\mathbf{u}$ vérifie également les équations de Navier Stokes. Du fait de la non linéarité des équations, on ne peut à priori pas dire que le champs $\delta\mathbf{u}$ vérifie lui même les équations de Navier Stokes. Mais on peut écrire directement :

$$\rho_f \left(\frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \delta\mathbf{u} + (\delta\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U} + (\delta\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta\mathbf{u} \right) = -\nabla(\delta p) + \mu \nabla \cdot [\nabla(\delta\mathbf{u}) + \nabla(\delta\mathbf{u})^T] \quad (2.10)$$

Comme son nom l'indique cette théorie analytique est linéaire, ce qui revient à faire l'hypothèse que $\|\delta\mathbf{u}\| \ll \|\mathbf{U}\|$ (avec $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire euclidien) afin de négliger le terme $(\delta\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta\mathbf{u}$. De plus en supposant que la référence de la perturbation de pression δp est de l'ordre de $\rho_f \delta u^2$ on peut également négliger le terme de gradient de pression dans l'équation précédente. D'autre part on pose :

$$\delta\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta u_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) \\ \delta v_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) \end{pmatrix}$$

Avec $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ le vecteur d'onde, $\mathbf{x} = (x, y)$ le vecteur position, et ω la pulsation temporelle de la perturbation. les scalaires k_x et k_y sont les nombres d'onde dans les directions x et y et sont deux constantes réelles positives. La pulsation temporelle ω est cependant supposée être une constante complexe. En projetant l'équation (2.10) selon l'axe des x et après quelques

simplifications et manipulations algébriques on aboutit à :

$$\omega \delta u_0 \approx k_x U \delta u_0 - i \left(\nu(k_x^2 + k_y^2) \delta u_0 + \delta v_0 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \right) \quad (2.11)$$

Quant à l'équation de continuité elle devient :

$$k_x \delta u_0 + k_y \delta v_0 = 0 \quad (2.12)$$

En utilisant (2.12) on peut récrire (2.11) sous la forme :

$$\omega \approx k_x U - i \left(\nu(k_x^2 + k_y^2) - \frac{k_x}{k_y} \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \right) \quad (2.13)$$

En procédant à une mise sous forme adimensionnelle partielle comme dans la sous-section 2.1.1, il vient finalement que :

$$-\omega \approx -k_x U + i \frac{\nu}{L_0^2} \left(\frac{L_0^2}{l_0^2} - Re \left| \frac{\partial U^*}{\partial y^*} \right| \right) \quad (2.14)$$

En supposant que $k_x = k_y = \frac{1}{l_0}$ où l_0 est la taille caractéristique de la perturbation.

Ainsi la perturbation sera dissipée dans le temps si la partie imaginaire de $-\omega$ est positive, ce qui correspond à la condition :

$$l_0 < \frac{L_0}{\sqrt{Re \left| \frac{\partial U^*}{\partial y^*} \right|}} \quad (2.15)$$

Ainsi plus le nombre de Reynolds augmente plus le spectre des nombres d'onde excités sera riche et donc plus la physique de l'écoulement elle-même sera riche. La transition entre l'écoulement laminaire et turbulent peut donc être autant quasi-instantanée que progressive selon la façon dont apparaît la première perturbation amplifiable. La distinction entre les deux régimes n'est finalement qu'une question de complexité structurelle de l'écoulement. Dans le cas laminaire on distingue clairement et uniquement des grosses structures dans l'écoulement, tandis que dans le cas turbulent la richesse structurelle est telle qu'il devient impossible de distinguer et de suivre toutes les structures. La majeure partie des aspects de la turbulence découle de cette simple observation. Parmi les aspects les plus notables on retiendra que :

- la turbulence est un phénomène fondamentalement instationnaire
- la turbulence est un phénomène tridimensionnel. Toutes les simulations en 2D que nous allons présenter ici relèvent donc déjà par ce simple fait d'approximations et de

modélisation.

- l'apparition de la turbulence dépend du nombre de Reynolds et est donc liée à la nature de l'écoulement, et non à la nature du fluide utilisé. Pour une géométrie d'écoulement donnée et deux fluides différents, la transition vers la turbulence s'effectue donc au même nombre de Reynolds.
- la turbulence est un phénomène non linéaire et dissipé par la viscosité moléculaire. Pour la modéliser, il est donc nécessaire de conserver le terme de dissipation visqueuse et cela malgré les hauts nombres de Reynolds utilisés.
- la physique de la turbulence est contenue dans les équations de Navier-Stokes, comme le montre la théorie précédente.

L'approche URANS

Il reste maintenant à présenter l'approche URANS pour le traitement des écoulements turbulents. Mais avant cela, il paraît bon de justifier pourquoi une alternative à la DNS a été recherchée. La théorie des instabilités linéaires nous a fourni un ordre de grandeur de la plus petite échelle spatiale pouvant être rencontrée dans l'écoulement en fonction du nombre de Reynolds. Sachant que pour des problèmes rencontrés dans l'aéronautique il n'est pas rare de travailler avec un nombre de Reynolds de l'ordre de 10^8 , cela veut dire, en considérant que $\left| \frac{\partial U^*}{\partial y^*} \right| \sim 1$, que l'on a :

$$\left(\frac{L_0}{l_0} \right)^3 \sim Re^{\frac{3}{2}} = 10^{12} \quad (2.16)$$

Dans un volume cubique de côté L_0 il faudra donc en première approximation 10^{12} noeuds pour capturer toute la physique... Cela s'avère absolument colossal et avec les moyens technologiques d'aujourd'hui toujours impraticable. Pour compléter ce commentaire il est opportun de présenter rapidement la théorie de la cascade d'énergie de Kolmogorov (1941) [15], formalisation des observations expérimentales de Richardson (1922). Cette théorie fournit elle aussi un ordre de grandeur du nombre de noeuds nécessaires pour traiter un problème en fonction du Reynolds utilisé.

Cette théorie se veut interpréter la richesse structurelle de la turbulence (présence de structures tourbillonnaires à des échelles d'espace très variées) du point de vue énergétique. Par cascade d'énergie Kolmogorov entend que les petites structures naissent localement des plus grandes en leur extrayant de l'énergie. Ce phénomène se reproduit jusqu'à ce que les nouvelles structures atteignent l'échelle dite de Kolmogorov, alors dissipée par les effets de la viscosité moléculaire (par opposition à la viscosité turbulente qui est définie plus loin). Cela empêche la naissance de tourbillon de vorticité infinie et donc de gradient de vitesse localement beaucoup trop grands. Le transfert de l'énergie se veut à sens unique, des grosses

échelles vers les petites, mais peut parfois se faire dans les deux sens par appariement de structures tourbillonnaires. Cela s'observe notamment dans le cas des couches de mélange. Mais même dans ces cas les nouvelles structures appariées finissent pas donner naissance à des structures plus petites.

Pour construire la théorie mathématique associée Kolmogorov a fait 3 hypothèses fortes :

- La première concerne la caractérisation des échelles dissipatives de la turbulence, au sens que l'énergie cinétique de la turbulence est finalement transformée en chaleur. Les échelles spatiales relatives à la dissipation de l'énergie peuvent être décrites à partir de la simple donnée de la viscosité moléculaire cinématique ν et du taux de dissipation de l'énergie turbulente ε . On notera η l'ordre de grandeur de cette échelle dissipative, aussi appelée échelle de Kolmogorov. Cette échelle η se caractérise également par le fait qu'à cette échelle les effets dissipatifs deviennent du même ordre de grandeur que les effets convectifs, ce qui se traduit par $R_{e_\eta} = \frac{\eta u_\eta}{\nu} = 1$ avec u_η l'échelle de vitesse caractéristique des tourbillons à l'échelle η .
- La seconde hypothèse est relative à la séparation des échelles. Si le nombre de Reynolds R_e de l'écoulement est suffisamment grand, alors il existe une échelle spatiale intermédiaire l entre l'échelle l_0 de production de l'énergie cinétique turbulente et l'échelle η précédemment introduite ($\eta \ll l \ll l_0$), et caractérisée par la seule donnée du taux de dissipation ε_l . Cette dissipation aux échelles l n'est finalement que la production d'énergie cinétique de turbulence à l'échelle η .
- La troisième hypothèse est relative à l'équilibre de la turbulence. Dans sa théorie, Kolmogorov suppose que la turbulence est à l'équilibre, soit que la production d'énergie cinétique turbulente est égale au taux de dissipation de cette même énergie. De par le principe de cascade d'énergie évoqué, cela veut dire que le taux de dissipation de l'énergie est le même à toutes les échelles et on a notamment $\varepsilon_l = \varepsilon$.

A partir de la première et troisième hypothèse il est possible par analyse dimensionnelle de construire une autre estimation de la finesse des maillages exigée pour capturer cette physique multi-échelle. On note l_0 la taille caractéristique des grandes échelles tourbillonnaires de la turbulence et on estime l'énergie cinétique massique qu'elles contiennent par la quantité u_0^2 . Le Reynolds de l'écoulement est construit à partir de ces quantités : $R_e = \frac{l_0 u_0}{\nu}$. En considérant que l'énergie à cette échelle est dissipée en un temps de retournement des tourbillons τ_0 tel que $\tau_0 = \frac{l_0}{u_0}$ alors le taux de dissipation à cette échelle est approximativement donné

par $\varepsilon_0 \sim \frac{u_0^2}{\tau_0} = \frac{u_0^3}{l_0}$. De la même façon, on a pour les échelles dissipatives $\varepsilon \sim \frac{u_\eta^2}{\tau_\eta} = \frac{u_\eta^3}{\eta}$. L'utilisation de la troisième hypothèse nous permet d'écrire $\varepsilon_0 = \varepsilon$ et donc on a :

$$\left(\frac{l_0}{\eta}\right)^3 = \left(\frac{u_0}{u_\eta}\right)^9$$

L'utilisation de la première hypothèse permet d'exprimer u_η en fonction de η et ν et obtient finalement :

$$\left(\frac{l_0}{\eta}\right)^3 = \left(\frac{u_0 \eta}{\nu}\right)^9 \Leftrightarrow \left(\frac{l_0}{\eta}\right)^3 = \left(\frac{u_0 l_0}{\nu}\right)^{\frac{9}{4}} = R_{e_0}^{\frac{9}{4}} \quad (2.17)$$

Ainsi si on travaille avec un Reynolds typique de l'aéronautique, de l'aérospatial ou de la météorologie de l'ordre de 10^8 , il faudra pour mailler un volume cubique de côté l_0 un nombre de noeuds de l'ordre de $N = 10^{18}$. Cette estimation indirecte de la puissance de calcul par la théorie de Kolmogorov s'avère donc encore plus dure que celle issue de la théorie des instabilités linéaires... Traiter directement les équations de Navier-Stokes par DNS s'avère donc impossible pour bon nombre de cas industriels.

Il a donc été historiquement nécessaire de développer une autre façon d'aborder la résolution des problèmes turbulents. La première tentative remonte aux travaux de Boussinesq en 1872 [16]. Il propose alors de réaliser une décomposition du vecteur vitesse \mathbf{U} et de la pression p sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{U} &= \bar{\mathbf{U}} + \tilde{\mathbf{u}} \\ p &= \bar{P} + \tilde{p} \end{cases} \quad (2.18)$$

L'opérateur $\bar{\cdot}$ désigne la partie moyenne de la variable et l'opérateur $\tilde{\cdot}$ désigne la partie fluctuante (ainsi $\tilde{\bar{\cdot}} = 0$). Pour condenser l'écriture on considère désormais le système d'équations de Naviers-Stokes incompressible sous forme intrinsèque et adimensionnelle suivant :

$$\begin{cases} \rho_f^* \left(\frac{1}{S_t} \frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{U}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{U}^* \right) = -\nabla^*(p^*) + \frac{\mu^*}{R_e} \nabla^* \cdot [\nabla^*(\mathbf{U}^*) + \nabla^*(\mathbf{U}^*)^T] \\ \nabla^* \cdot \mathbf{U}^* = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

La procédure permettant de se diriger vers l'approche URANS consiste à injecter les équations (2.18) dans le système (2.19), puis de moyenner ce système en utilisant la moyenne d'ensemble. Après utilisation des propriétés mathématiques de la moyenne et quelques manipulations algébriques (en notant notamment que le champs de vitesse fluctuant vérifie lui aussi la condition d'incompressibilité) on aboutit au système dit URANS suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_f^* \left(\frac{1}{S_t} \frac{\partial \overline{U}^*}{\partial t^*} + (\overline{U}^* \cdot \nabla^*) \overline{U}^* \right) = -\nabla^*(\overline{P}^*) + \frac{\mu^*}{Re} \nabla^* \cdot \left[\nabla^*(\overline{U}^*) + \nabla^*(\overline{U}^*)^T \right] - \underbrace{\nabla^* \cdot \underline{\sigma}_{Re}^*}_{(1)} \\ \nabla^* \cdot \overline{U}^* = 0 \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Ce résultat a été obtenu pour la première fois par Reynolds en 1894. Comparativement au système d'équations (2.19) on voit qu'un nouveau terme est apparu dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Ce terme porte le nom de *tenseur de Reynolds* et son apparition est la conséquence de la non linéarité du terme de convection. Il s'exprime ainsi :

$$\underline{\sigma}_{Re}^* = \rho_f^* \begin{bmatrix} \overline{\tilde{u}^* \tilde{u}^*} & \overline{\tilde{u}^* \tilde{v}^*} \\ \overline{\tilde{v}^* \tilde{u}^*} & \overline{\tilde{v}^* \tilde{v}^*} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Physiquement le terme (1) de (2.20) représente la convection moyenne des parties fluctuantes du vecteur vitesse par elles-mêmes, responsable du phénomène de brassage turbulent. En effet un des aspects notable de la turbulence encore non mentionné est celui du pouvoir de mélange et d'uniformisation de la turbulence. Néanmoins ce terme pose un problème de fermeture du système d'équations. L'introduction des parties fluctuantes rajoute 3 inconnues pour les problèmes bidimensionnels à l'étude ici. Une possibilité est de construire une équation de transport pour $\tilde{\mathbf{u}}^*$ mais cela ne revient qu'à déplacer le problème puisque on fait alors apparaître des corrélations triples des parties fluctuantes qu'il faudra modéliser. Une alternative retenue ici est de modéliser directement le tenseur de Reynolds à l'aide d'hypothèses semi-empiriques sur l'écoulements à l'étude. L'approche la plus connue est de construire le tenseur de Reynolds à l'image du tenseur des contraintes visqueuses pour les fluides newtoniens, soit donc de relier les tensions de Reynolds aux gradients de vitesse du champs de vitesse moyen. La relation générale proposée est donc la suivante :

$$\underline{\sigma}_{Re}^* = \alpha_{t1}^* \underline{I} + \alpha_{t2}^* (\nabla^* \cdot \overline{\mathbf{U}^*}) \underline{I} + \frac{\alpha_{t3}^*}{2} (\nabla^* (\overline{\mathbf{U}^*}) + \nabla^* (\overline{\mathbf{U}^*})^T) \quad (2.22)$$

Compte tenu de l'hypothèse d'incompressibilité vérifiée par le champs de vitesse moyen le second terme du membre de droite disparaît. Le coefficient α_{t1}^* peut lui être déterminé en considérant la trace du tenseur de Reynolds. Compte tenu une nouvelle fois que $\nabla^* \cdot \overline{\mathbf{U}^*} = 0$ il vient directement que :

$$\alpha_{t1}^* = \frac{1}{2} \rho_f^* (\overline{\tilde{u}^* \tilde{u}^*} + \overline{\tilde{v}^* \tilde{v}^*}) = \rho_f^* \overline{k^*}$$

où $\rho_f^* \overline{k^*}$ est l'énergie cinétique de turbulence moyenne. Par ailleurs et par analogie avec le tenseur des contraintes visqueuses adimensionnelles on pose $\alpha_{t3}^* = -\frac{2\mu_t^*}{R_{et0}}$ avec μ_t la *viscosité turbulente* introduite en premier par Boussinesq et $R_{et0} = \frac{U_0 L_0 \rho_0}{\mu_{t0}}$ le Reynolds turbulent caractéristique. À ce stade il faut faire attention à l'adimensionnalisation. Notamment il faut noter que $\overline{k^*} = \frac{k}{U_0^2}$. Il conviendra de s'en rappeler dans la suite lorsque l'on traitera l'EDP relative à $\overline{k^*}$. Finalement on peut donc réécrire le système (2.20) sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_f^* \left(\frac{1}{S_t} \frac{\partial \overline{\mathbf{U}^*}}{\partial t^*} + (\overline{\mathbf{U}^*} \cdot \nabla^*) \overline{\mathbf{U}^*} \right) = -\nabla^* (\overline{P_g^*}) + \nabla^* \cdot \left[\left(\frac{\mu^*}{R_e} + \frac{\mu_t^*}{R_{et0}} \right) \nabla^* (\overline{\mathbf{U}^*}) + \nabla^* (\overline{\mathbf{U}^*})^T \right] \\ \nabla^* \cdot \overline{\mathbf{U}^*} = 0 \end{array} \right. \quad (2.23)$$

On remarquera que la partie isotrope du tenseur de Reynolds a été absorbée dans la pression globale $\overline{P_g^*} = \overline{P^*} + \rho_f^* \overline{k^*}$. Lors de la résolution numérique on ne résout donc pas directement la pression thermodynamique. La résolution de $\overline{k^*}$ est nécessaire pour déduire la pression $\overline{P^*}$. Nous aurons l'occasion d'y revenir dans la section sur les modèles de turbulence à deux équations. On remarquera également qu'une hypothèse d'isotropie implicite existe avec ce modèle de viscosité turbulence, car la valeur de μ_t^* est commune aux deux directions du plan. Cela revient déjà à mettre de côté une bonne partie de la complexité de la turbulence. Pour mieux faire les choses, il serait nécessaire d'exprimer μ_t^* sous la forme du tenseur d'ordre deux $\underline{\mu_t^*}$. De nombreux travaux expérimentaux ont en effet montré qu'en proche paroi, la condition de non pénétration du fluide induit une anisotropie locale des intensités turbulentes [17]. Néanmoins nous utiliserons la viscosité turbulente sous forme d'un scalaire pour la suite des travaux. Enfin il faut noter que contrairement à la viscosité moléculaire qui est une propriété intrinsèque du fluide et éventuellement dépendante des grandeurs thermodynamiques, la viscosité turbulente est quant à elle une propriété de l'écoulement et dépend donc notamment du nombre de Reynolds de l'écoulement.

Il reste maintenant à modéliser la viscosité turbulente μ_{t_0} qui vient d'être introduite. Il existe principalement trois grandes familles de modèles :

- Les modèles à 0 équation, ou algébriques. Comme leur nom l'indique ces modèles ne rajoutent pas d'équations dans le système à résoudre. La viscosité turbulente est modélisée par l'introduction d'une longueur dite de mélange et des variables de l'écoulement.
- Les modèles à 1 équation, qui ont constitué historiquement une première amélioration des modèles à 0 équation.
- Les modèles à 2 équations, qui sont présentement les modèles les plus utilisés aujourd'hui. Quoique souvent plus élaborés que les modèles à 0 et 1 équations, aucun des modèles à 2 équations n'est capable de résoudre fidèlement toutes les classes de problèmes. A titre d'exemple, le modèle $k-\varepsilon$ « standard » est connu pour donner des résultats particulièrement bons dans le cas des écoulements libres mais il n'est cependant pas valide en très proche paroi [18]. Cela s'explique par le fait qu'il suppose que l'effet de brassage turbulent domine complètement la diffusion moléculaire, ce qui n'est pas le cas en proche paroi. La physique de la turbulence en proche paroi est présentée dans la section 2.1.3.

Dans la suite on présente plus en détails chaque classe de modèles.

Modèles à 0 équation

Cette classe de modèle a été introduite par Prandtl en 1925 [19] via son hypothèse de longueur de mélange. Cette idée a le même fondement que le concept de viscosité turbulente de Boussinesq. En construisant une analogie entre l'agitation moléculaire et les fluctuations turbulentes, et en s'intéressant au problème du transfert de quantité de mouvement au travers d'un plan parallèle à la direction principale x d'un écoulement cisailé selon y (le lecteur intéressé pourra se référer à l'ouvrage [18] pour plus de détails), Prandtl pose la relation suivante :

$$\rho_f \overline{\tilde{u}\tilde{v}} = \frac{1}{2} \rho_f v_{mix} l_{mix} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \quad (2.24)$$

Où l_{mix} est la longueur de mélange et v_{mix} la vitesse de mélange. Cette relation s'inscrit toujours dans le cadre d'un écoulement selon x et cisailé selon y . Prandtl interprète la longueur de mélange comme la longueur selon y sur laquelle un « amas » de particules fluide cède sa quantité de mouvement orientée selon x . La vitesse de mélange traduit quant à elle la vitesse à laquelle s'effectue le transfert de quantité de mouvement selon la direction y .

Prandtl propose de l'exprimer de la façon suivante :

$$v_{mix} = cste l_{mix} \left| \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right| \quad (2.25)$$

En reprenant l'hypothèse de Boussinesq de l'existence d'une viscosité turbulente, et plus précisément la forme du tenseur de Reynolds (2.22), on a finalement par identification terme à terme avec (2.25) :

$$\mu_t = \rho_f l_{mix}^2 \left| \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right| \quad (2.26)$$

en absorbant la constante de l'équation (2.25) dans la longueur de mélange. Il convient à ce stade de préciser les hypothèses faites par Boussinesq et Prandtl pour réaliser l'analogie avec le transfert de quantités de mouvement par agitation moléculaire. Elles sont les suivantes :

- La première hypothèse est la satisfaction de la condition :

$$l_{mix} \ll \frac{\left| \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right|}{\left| \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} \right|} = L$$

avec L une longueur caractéristiques de l'écoulement moyen. Or il s'avère que ce n'est pas vraiment le cas en pratique.

- La seconde hypothèse est que l'amas de particules de fluide reste cohérent pendant le transfert de quantité de mouvement, et ce malgré le cisaillement. Une autre façon de le dire est que la turbulence est à l'équilibre sur la hauteur de la longueur de mélange. Ce n'est pas le cas non plus. Comme on le verra plus loin via l'équation de $\overline{k^*}$, la turbulence se nourrit de l'existence de gradients de vitesse dans l'écoulement afin d'adoucir ces gradients. D'une certaine façon la turbulence naît donc pour mourir par son propre effet de mélange, ce qui traduit bien une nouvelle fois qu'elle a un lien direct avec la nature de l'écoulement moyen et qu'elle s'ajuste en permanence à ce milieu. L'amas n'aura donc pas au cours de son existence la cohérence supposée.

Une nouvelle fois on comprend donc que l'hypothèse de viscosité turbulente, et à fortiori celle de la longueur de mélange de Prandtl, relèvent bien de l'approximation. D'autre part, il faut souligner un fait important : l'expression de la longueur de mélange doit être fournie pour pouvoir résoudre. On parle dans ce contexte de modèle *incomplet*, c'est à dire qu'il requiert une connaissance *à priori* de l'écoulement pour pouvoir obtenir une précision de résolution

numérique satisfaisante. Malgré tout, ce type de modèle fournit des résultats très satisfaisants pour certains problèmes et connaît plusieurs déclinaisons encore utilisées aujourd’hui pour leur coût de calcul particulièrement attractif et leur facilité de calibration. L’aspect incomplet de ce type de modèle a même été partiellement levé par Baldwin et Lomax [20] qui proposent une méthode permettant d’éviter la spécification de l’épaisseur des couches limites, reliée à la longueur de mélange, dans le cas d’écoulements à séparation en 2D ou 3D. Les travaux de Chima *et al.* [21] se sont inscrits dans la continuité en proposant des ajustements permettant de corriger des erreurs de prédictions parfois fortes en proche paroi, et d’inclure les effets de gradients de pression. Un nouveau modèle pour les écoulements de type sillage a également été proposé. Dans le même temps les travaux de Johnson et Coakley [22] ont proposé une nouvelle définition de la longueur de mélange dans le cadre des écoulements transsoniques et supersoniques, pour inclure les effets de compressibilité. Un peu plus tard en 1998 alors que les modèles à deux équations étaient de loin les plus populaires, Chen et Xu [23] ont néanmoins décidé d’investiguer un modèle algébrique pour la convection naturelle et forcée dans un pièce. Des résultats assez satisfaisants ont été obtenus pour un coût de calcul 10 fois moindre à celui demandé par le modèle $k-\varepsilon$.

Modèles à 1 équation

Ces modèles sont nés dans les années 60, grâce à l’augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs. Ils se basent sur l’exploitation de l’équation de l’énergie cinétique de la turbulence $\overline{k^*}$. Etant donné que cette équation est une équation constituante du modèle à deux équations utilisé pour les travaux présentés dans les chapitres 3 et 4, il paraît judicieux de présenter la façon de l’obtenir ici. Elle dérive de l’équation de l’énergie cinétique obtenue en multipliant scalairement l’équation de la quantité de mouvement du système (A) par le vecteur vitesse. Pour les développements suivants on utilisera la convention d’Einstein pour alléger les notations. De fait on pose ici $\mathbf{U} = (u_1, u_2)$ et $(x, y) = (x_1, x_2)$. On a l’équation suivante :

$$\rho_f u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-p \delta_{ij} + \underbrace{\mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]}_{D_{ij}} \right)$$

Où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker. Ce qui en notant l'énergie cinétique $E_c = \sum_{i=0}^2 \frac{1}{2} u_i^2$ peut aussi s'écrire :

$$\rho_f \left(\frac{\partial E_c}{\partial t} + u_j \frac{\partial E_c}{\partial x_j} \right) = u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{(-p\delta_{ij} + \mu D_{ij})}_{\tau_{ij}} \quad (2.27)$$

Cette forme n'est pas très parlante en soit. Pour qu'elle le soit on présente ci-dessous une forme qui fait le parallèle avec le théorème de l'énergie cinétique, à savoir que la variation dans le temps de l'énergie cinétique dans un volume de contrôle est égale à la puissance des efforts extérieurs et intérieurs s'appliquant sur ce volume. Dans ce contexte on présente la forme suivante de l'équation (2.27) :

$$\rho_f \left(\frac{\partial E_c}{\partial t} + u_j \frac{\partial E_c}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_j} - \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Le premier terme du membre de droite représente la puissance des efforts extérieurs, tandis que le second représente la puissance des efforts intérieurs. On s'en convainc aisément en exprimant sous forme intégrale la puissance des efforts extérieurs. Finalement et en explicitant le terme de puissance des efforts intérieurs il vient :

$$\rho_f \left(\frac{\partial E_c}{\partial t} + u_j \frac{\partial E_c}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\mu D_{ij} D_{ij}}{2} \quad (2.28)$$

Physiquement on constate donc que la puissance des efforts intérieurs correspond à la dissipation (ce terme étant toujours positif) de l'énergie cinétique en chaleur par action de la viscosité moléculaire, l'énergie cinétique se transformant alors en énergie interne par principe de conservation de l'énergie. Il convient maintenant d'adimensionner cette équation. En conservant les grandeurs caractéristiques et les notations utilisées pour les adimensionnalisations précédentes on arrive à :

$$\rho_f^* \left(\frac{1}{S_t} \frac{\partial E_c^*}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial E_c^*}{\partial x_j^*} \right) = -\frac{\mu^* D_{ij}^* D_{ij}^*}{2 R_e} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[u_i^* \left(-p^* \delta_{ij} + \frac{1}{R_e} \mu^* D_{ij}^* \right) \right] \quad (2.29)$$

Il reste à préciser le lien entre \bar{k}^* et E_c^* . En prenant la moyenne de E_c^* il vient :

$$\bar{E}_c^* = \rho_f^* \frac{\overline{(U_i^* + \tilde{u}_i^*)^2}}{2} = \rho_f^* \left(\frac{\overline{U_i^* U_i^*}}{2} + \frac{\overline{\tilde{u}_i^* \tilde{u}_i^*}}{2} \right) = \rho_f^* (K^* + \bar{k}^*) \quad (2.30)$$

Où K^* désigne finalement l'énergie cinétique de l'écoulement moyen. L'équation de \bar{k}^* s'obtient donc en retranchant dans l'équation de \bar{E}_c^* (obtenue en moyennant l'équation (2.29)) l'équation relative à K^* . Cette dernière équation est quant à elle obtenue en multipliant

scalairement par le vecteur des vitesses moyennes la première équations du système (2.20). Tous calculs faits et en notant $\tilde{d}_{ij}^* = \left(\frac{\partial \tilde{u}_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial \tilde{u}_j^*}{\partial x_i^*} \right)$ l'équation de \bar{k}^* prend donc la forme suivante :

$$\rho_f^* \left(\frac{1}{S_t} \frac{\partial \bar{k}^*}{\partial t^*} + U_j^* \frac{\partial \bar{k}^*}{\partial x_j^*} \right) = \overbrace{\frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(-\bar{p}^* \tilde{u}_j^* - \rho_f^* \tilde{u}_i^* \tilde{u}_i^* \tilde{u}_j^* + \frac{1}{Re} \mu^* \frac{\partial \bar{k}^*}{\partial x_j^*} \right)}^{Transport} - \underbrace{\frac{\mu^* \tilde{d}_{ij}^* \tilde{d}_{ij}^*}{2 Re}}_{\rho_f^* \varepsilon_{vraie}} - \underbrace{\frac{\rho_f^* \tilde{u}_i^* \tilde{u}_j^*}{\sigma_{Re_{ij}}^*} \frac{\partial \bar{U}_i^*}{\partial x_j^*}}_P \quad (2.31)$$

Le dernier terme du membre de droite représente la production P de \bar{k}^* . Comme on l'a dit plus haut, la turbulence se nourrit des gradients de vitesse de l'écoulement moyen et en extrait de l'énergie. Le second terme du membre de droite est par analogie avec l'équation (2.28) le terme de dissipation *vraie* de \bar{k}^* par la viscosité moléculaire. Cependant le terme de dissipation est usuellement présenté de la façon suivante :

$$\varepsilon_{vraie}^* = \underbrace{\frac{1}{Re} \nu^* \frac{\partial \tilde{u}_i^*}{\partial x_j^*} \frac{\partial \tilde{u}_i^*}{\partial x_j^*}}_{\varepsilon_{pseudo}} + \frac{1}{Re} \nu^* \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\tilde{u}_i^* \frac{\partial \tilde{u}_j^*}{\partial x_i^*} \right)$$

La quantité ε_{pseudo} est appelée la pseudo dissipation et dans bons nombres de cas elle est identifiée à la dissipation vraie, car l'expérience a montré que pour de très grandes valeurs du nombre de Reynolds la différence entre ε_{pseudo} et ε_{vraie} est négligeable ([24], [25]). On notera donc dans la suite et indistinctement le terme de dissipation ε . Une nouvelle fois ce terme représente toujours une perte d'énergie cinétique au profit de l'énergie interne. Enfin le premier terme du membre de droite regroupe les mécanismes de transport de \bar{k}^* . On y discerne trois mécanismes distincts : le transport par interaction avec les fluctuations de pression, le transport par les fluctuations de vitesses, et le transport par la viscosité (ou transport diffusif).

Nous avons dit plus haut que l'équation (2.31) servait de base aux modèles de turbulence à une équation. Néanmoins et tout comme pour l'équation (2.20), cette équation nécessite de mettre en place une stratégie de fermeture. Cette fermeture sera notamment plus drastique que celle que représente l'introduction de la viscosité turbulente, car tous les termes appellent à être modélisés. Une nouvelle fois c'est Prandtl qui a initié la stratégie de fermeture de cette

équation en optant pour une modélisation terme à terme.

Concernant le terme de production, il a logiquement été modélisé en reprenant l'hypothèse de la viscosité turbulente :

$$P = \frac{1}{R_{et0}} \mu_t^* \left(\frac{\partial \overline{U_i^*}}{\partial x_j^*} + \frac{\partial \overline{U_j^*}}{\partial x_i^*} \right) \frac{\partial \overline{U_i^*}}{\partial x_j^*}$$

De la même façon le mécanisme de transport par le mouvement fluctuant peut être modélisé à partir de la viscosité turbulente, par analogie avec le transport de quantité de mouvement moyenne. Le mécanisme de transport par la pression, qui lui ne suggère pas directement cette possibilité par son écriture, a en première approximation été considéré comme proportionnel au mécanisme de transport par fluctuation de vitesse, ce qui permet d'écrire :

$$Transport = \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\left[\frac{1}{R_e} \mu^* + \frac{1}{R_{et0}} \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right] \frac{\partial \overline{k^*}}{\partial x_j^*} \right)$$

Il ne reste plus qu'à modéliser le terme de dissipation ε . La façon la plus simple de procéder est d'utiliser l'analyse dimensionnelle pour relier la diffusion à $\overline{k^*}$. En revenant temporairement à des considérations dimensionnelles on a :

$$\varepsilon \sim \frac{\overline{k}^{3/2}}{l}$$

Où l désigne une longueur caractéristique du phénomène turbulent, à bien distinguer de la longueur de mélange l_{mix} . Finalement le terme de dissipation proposé par Prandtl a la forme :

$$\varepsilon = C_D \frac{\overline{k}^{3/2}}{l}$$

Afin de rester cohérent avec tous les développements précédents la longueur l est adimensionnée par rapport à la longueur caractéristique L_0 . L'équation de conservation de $\overline{k^*}$ peut donc finalement s'écrire :

$$\begin{aligned} \rho_f^* \left(\frac{1}{S_t} \frac{\partial \overline{k^*}}{\partial t^*} + \overline{U_j^*} \frac{\partial \overline{k^*}}{\partial x_j^*} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\left[\frac{1}{R_e} \mu^* + \frac{1}{R_{et0}} \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right] \frac{\partial \overline{k^*}}{\partial x_j^*} \right) - C_D \frac{\overline{k}^{3/2}}{l^*} \\ &+ \frac{1}{R_{et0}} \mu_t^* \left(\frac{\partial \overline{U_i^*}}{\partial x_j^*} + \frac{\partial \overline{U_j^*}}{\partial x_i^*} \right) \frac{\partial \overline{U_i^*}}{\partial x_j^*} \end{aligned} \quad (2.32)$$

La longueur l demeure inconnue mais intervient également dans la formulation de μ_t^* . En effet dans le cadre des modèles de turbulence à une équation et utilisant l'équation de $\overline{k^*}$ la

formulation de la viscosité turbulente est la suivante :

$$\mu_t^* = C \rho_f^* \overline{k^*}^{\frac{1}{2}} l^* \quad (2.33)$$

Le coefficient C dans cette expression est supposé constant en première approximation et se retrouve bien souvent absorbé dans l^* . L'utilisation du modèle requiert donc d'étalonner les constantes σ_k et C_D , et de renseigner la longueur caractéristique l .

La suite de cette partie sur les modèles à 1 équation se consacre à une brève revue de littérature sur le sujet. Comme on l'a dit, ces modèles sont historiquement nés en rajoutant au système à résoudre l'équation de $\overline{k^*}$. La première application de ces modèles remonte aux travaux de Bradshaw *et al.* en 1967 [26], où il était question du calcul numérique du développement d'une couche limite. Une étude similaire en compressible et par différences-finies à été menée par McDonald, pour étudier la transition laminaire/turbulent et le phénomène de relaminarisation [27]. Rapidement d'autres applications ont été proposées, dans le cas des écoulements de type jet plan ou circulaire, ou des couches de mélange [28]. Beaucoup plus tard en 1992, à l'époque où le modèle $k-\varepsilon$ était de loin le modèle de turbulence le plus populaire, est apparu un nouveau modèle à une équation développé par Spalart et Allmaras [29], présentant l'avantage d'être complet puisqu'il repose sur une équation de transport de la viscosité turbulente. C'est sans doute le modèle de turbulence à une équation le plus utilisé à ce jour. Des enrichissements de ce modèle ont bien sûr été étudiés par la suite. Par exemple Aupoix et Spalart décrivent en 2003 [30] des extensions du modèle pour prendre en compte les effets de rugosité à la paroi. Ce modèle présente en effet la possibilité d'être intégré à la paroi.

Modèles à 2 équations

Dans cette section on présente la classe de modèle la plus utilisée au niveau industriel. Le modèle utilisé pour tous les calculs qui sont présentés ici, à savoir le modèle $k-\varepsilon$ standard [31] sera présenté en détails. Son principal concurrent, le modèle $k-\omega$ et ses variantes, très utilisé pour les applications aéronautiques, ne sera pas présenté ici. Néanmoins la curiosité du lecteur sera aisément satisfaite en consultant les références [32] et [18]. On prend également le temps de mentionner le modèle de Menter [33], dit $k-\omega$ SST, qui se veut utiliser les forces du $k-\varepsilon$ pour les écoulements libres et celle du $k-\omega$ en proche paroi. Ce modèle est présentement en cours d'implémentation au laboratoire de Polytechnique Montréal. Pour une présentation détaillée de ce modèle et de son application, on pourra consulter les travaux de Francis Lacombe [34].

Le modèle k - ε standard

La version standard de ce modèle remonte à 1974 et sa formulation est dû à Launder et Spalding [31]. Néanmoins les premiers travaux ayant conduit à son développement date des années 1940. Depuis la formulation standard de 1974, il y a eu de nombreuses propositions de modifications du modèle pour en permettre l'usage dans des cas d'écoulement de paroi. De manière générale la plupart des variantes introduisent de nouveaux termes d'amortissement dans la définition de la viscosité turbulente et dans les termes de production et de dissipation de ε . C'est par exemple le cas du modèle présenté en 1974 par Launder et Sharma [35] qui introduit 3 fonctions d'amortissement. Ces fonctions s'activent en proche paroi et permettent au modèle de représenter la sous-couche visqueuse (cf. section 2.1.3). Dans le même esprit on peut citer les travaux successifs de Bremhorst, Chien, et de Hishida et Nagano ([36], [37], [38]). On peut par ailleurs citer la modification introduite par Kato et Launder en 1993 [39], qui consiste en une modification du terme de production dans les équations de turbulence. Cette modification a permis de corriger la tendance du modèle standard à surestimer la production de k au niveau des zones de stagnation, ce qui pouvait parfois retarder ou empêcher le déclenchement d'un phénomène instationnaire. Enfin la théorie « RNG » (*ReNormalisation Group* développée par Yakhot *et al.* ([40],[41]), qui se veut tenir compte des différentes échelles de la turbulence, peut conduire à une variante du modèle k - ε standard, par l'ajustement des valeurs des coefficients de fermeture donnés à la table 2.1, et une définition alternative du coefficient C_2 , qui devient fonction des valeurs de k et ε .

Pour en revenir à la formulation du modèle k - ε standard, elle s'appuie pour commencer sur la formulation suivante de μ_t :

$$\mu_t = \rho_f C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\varepsilon} \quad (2.34)$$

où C_μ désigne une constante de modélisation, tandis que \bar{k} et ε désignent respectivement l'énergie cinétique de turbulence la dissipation vraie introduites précédemment. Le modèle utilise donc en premier lieu l'équation de \bar{k}^* (2.32), où le terme de dissipation peut désormais s'exprimer en fonction de \bar{k}^* et de μ_t^* :

$$\begin{aligned} \rho_f^* \left(\frac{1}{S_t} \frac{\partial \bar{k}^*}{\partial t^*} + \bar{U}_j^* \frac{\partial \bar{k}^*}{\partial x_j^*} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\left[\frac{1}{R_e} \mu^* + \frac{1}{R_{et0}} \frac{\mu_t^*}{\sigma_k} \right] \frac{\partial \bar{k}^*}{\partial x_j^*} \right) - \rho_f^{*2} C_\mu \frac{R_{et0} \bar{k}^{*2}}{\mu_t^*} \\ &\quad + \frac{1}{R_{et0}} \mu_t^* \left(\frac{\partial \bar{U}_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial \bar{U}_j^*}{\partial x_i^*} \right) \frac{\partial \bar{U}_i^*}{\partial x_j^*} \end{aligned}$$

Pour fermer le système d'équations on utilise une équation de transport pour ε^* . Il en existe une forme exacte, fonction de corrélations doubles et triples des fluctuations de vitesse et de leur dérivées spatiales [18]. Cette équation étant inutilisable sous cette forme, elle a été elle aussi drastiquement modélisée de la même manière que l'équation de $\overline{k^*}$. En d'autres termes, la variation lagrangienne de ε^* est égale à la sommation d'un terme de transport, d'un terme de dissipation et d'un terme de production. En formulant l'hypothèse que les mécanismes de production et de dissipation de $\overline{k^*}$ et ε^* restent en proportion et en reprenant la modélisation du terme de transport sous la forme d'un terme de diffusion on arrive à :

$$\begin{aligned} \rho_f^* \left(\frac{1}{S_t} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t^*} + \overline{U_j^*} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_j^*} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\left[\frac{1}{R_e} \mu^* + \frac{1}{R_{et0}} \frac{\mu_t^*}{\sigma_\varepsilon} \right] \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_j^*} \right) - C_2 \rho_f^* \frac{\varepsilon^{*2}}{\overline{k^*}} \\ &+ \frac{C_1}{R_{et0}} \frac{\varepsilon^*}{\overline{k^*}} \mu_t^* \left(\frac{\partial \overline{U_i^*}}{\partial x_j^*} + \frac{\partial \overline{U_j^*}}{\partial x_i^*} \right) \frac{\partial \overline{U_i^*}}{\partial x_j^*} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Où C_1, C_2 , et σ_ε sont des constantes de fermeture, qu'il convient d'étalonner. On rappelle maintenant les relations d'adimensionnalisation suivantes :

$$\overline{k^*} = \frac{\overline{k}}{U_0^2} \quad (2.36)$$

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon L_0}{U_0^3} \quad (2.37)$$

Ce choix est critiquable dans la mesure où bien souvent les valeurs de \overline{k} et ε sont très inférieures aux valeurs caractéristiques retenues pour l'adimensionnalisation. De ce fait lors de la résolution d'écoulements turbulents on peut constater deux problèmes importants :

- Les variables à résoudre sont d'un ordre de grandeur très différent. Comme nous le verrons plus loin l'utilisation d'un jacobien numérique pour la méthode de Newton exige alors une précaution.
- On court le risque pendant la résolution de passer transitoirement par des valeurs négatives de $\overline{k^*}$ et ε^* , ce qui d'une part n'est pas physiquement acceptable, et d'autre part peut conduire à une stabilité de résolution détériorée.

Nous avons retenu deux moyens de contourner ces problèmes, leur usage pouvant être facilement combiné. En premier lieu on peut faire le choix d'introduire des grandeurs caractéristiques différentes pour adimensionnaliser k et ε , notées k_0 et ε_0 . On note également $C_k = \frac{k_0}{U_0^2}$ et $C_\varepsilon = \frac{\varepsilon_0 L_0}{U_0^3}$. On peut montrer facilement qu'en jouant sur la définition de μ_t relative au

modèle et en introduisant C_k et C_ε , le système d'équations complet peut se mettre sous la forme intrinsèque suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_f \left(\frac{1}{S_t} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right) = -\nabla(P_g) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0}} \right) \cdot (\nabla(\mathbf{U}) + \nabla(\mathbf{U})^T) \right] \\ \rho_f \left(\frac{1}{S_t} \frac{\partial k}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) k \right) = \nabla \cdot \left[\left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_k} \right) \nabla(k) \right] + \frac{\mu_t}{R_{et0} C_k} P(\mathbf{U}) - \rho_f^2 C_\mu R_{et0} C_k \frac{k^2}{\mu_t} \\ \rho_f \left(\frac{1}{S_t} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \varepsilon \right) = \nabla \cdot \left[\left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_\varepsilon} \right) \nabla(\varepsilon) \right] + \rho_f C_\mu C_1 \frac{C_k}{C_\varepsilon} k P(\mathbf{U}) - \rho_f C_2 \frac{C_\varepsilon}{C_k} \frac{\varepsilon^2}{k} \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{Stand-1})$$

Avec $P(\mathbf{U}) = \nabla(\mathbf{U}) : (\nabla(\mathbf{U}) + \nabla(\mathbf{U})^T)$ la production de turbulence. Pour plus de légèreté on s'est affranchit d'utiliser les notations adimensionnelles et de moyenne. Il en sera de même dans toute la suite, sauf mention contraire.

En faisant un choix de k_0 et de ε_0 cohérent avec l'écoulement à résoudre on peut alors se rapprocher de la relation $\overline{k^*} \sim \varepsilon^* \sim u^*$. Typiquement, on pourra faire le choix d'adimensionner par les valeurs de \overline{k} et ε à l'entrée du domaine de calcul. Cela se révèle une option intéressante pour réaliser l'estimation d'erreur en temps, variable par variable, car toutes les variables seront d'un ordre de grandeur comparable.

Un autre procédé a été introduit en 1998 par Ilinca et Pelletier [11] pour changer l'échelle des variables de turbulence et garantir leur positivité : réaliser les changements de variables $\mathcal{K} = \ln(\overline{k^*})$ et $\mathcal{E} = \ln(\varepsilon^*)$. Il a été montré que cette manipulation permettait de stabiliser la résolution, mais également une adaptation des maillages plus efficace. En effet, il est possible de montrer qu'au premier ordre l'erreur absolue sur \mathcal{K} et sur \mathcal{E} correspond à l'erreur relative sur les variables standards associées. On note $\mathcal{K}_{ex} = \mathcal{K}_{cal} + e_{\mathcal{K}}$ et $\overline{k}_{ex} = \overline{k}_{cal} + e_{\overline{k}}$, à lire « quantité exacte = quantité calculée + erreur ». On a d'une part :

$$\ln \left(\frac{\bar{k}_{cal} + e_{\bar{k}}}{\bar{k}_{cal}} \right) = \frac{e_{\bar{k}}}{\bar{k}_{cal}} + O \left[\left(\frac{e_{\bar{k}}}{\bar{k}_{cal}} \right)^2 \right] \quad \text{au premier ordre}$$

et

$$\ln \left(\frac{\bar{k}_{cal} + e_{\bar{k}}}{\bar{k}_{cal}} \right) = \mathcal{K}_{ex} - \mathcal{K}_{cal} = e_{\mathcal{K}}$$

D'où au premier ordre :

$$e_K \approx \frac{e_k^-}{\bar{k}_{cal}} \quad (2.38)$$

En ayant indirectement accès à l'erreur relative sur les variables standards de turbulence, il va donc être possible d'adapter le maillage dans des zones où l'erreur absolue est très faible, mais pas l'erreur relative. Nous aurons l'occasion de revenir sur la procédure d'adaptation de maillage à la section 2.2.3.

D'autre part les équations de turbulence s'écrivent désormais :

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_f \left(\frac{1}{S_t} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathcal{K} \right) &= \nabla \cdot \left[\left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_k} \right) \nabla(\mathcal{K}) \right] + \left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_k} \right) \nabla(\mathcal{K})^2 \\ &\quad + \frac{\mu_t}{R_{et0} C_k} e^{-\mathcal{K}} P(\mathbf{U}) - \rho_f^2 C_\mu R_{et0} C_k \frac{e^{\mathcal{K}}}{\mu_t} \\ \rho_f \left(\frac{1}{S_t} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathcal{E} \right) &= \nabla \cdot \left[\left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_\varepsilon} \right) \nabla(\mathcal{E}) \right] + \left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_\varepsilon} \right) \cdot (\nabla(\mathcal{E}))^2 \\ &\quad + \rho_f C_\mu C_1 \frac{C_k}{C_\varepsilon} e^{\mathcal{K} - \mathcal{E}} P(\mathbf{U}) - \rho_f C_2 \frac{C_\varepsilon}{C_k} e^{\mathcal{E} - \mathcal{K}} \end{aligned} \right. \quad (\text{Log-1})$$

Les équations de transport de la quantité de mouvement et de la masse restent quant à elles inchangées. Il ne reste plus qu'à déterminer les constantes du modèle. Selon les auteurs, celles-ci peuvent varier. De manière générale, elles ont été déterminées en tentant de séparer les mécanismes physiques qui interviennent : production, dissipation, transport. Mais dans le cas du modèle $k-\varepsilon$ standard que nous allons utiliser les constantes prennent les valeurs figurant dans la table 2.1.

Tableau 2.1 Valeur des coefficients du modèle k - ε standard

C_μ	C_1	C_2	σ_k	σ_ε
0.09	1.44	1.92	1.00	1.30

2.1.3 Les lois de paroi

Comme on l'a dit plus tôt, le modèle k - ε dans sa forme standard a été pensé en premier lieu pour résoudre les problèmes d'écoulements libres tels que les jets. On sait par ailleurs qu'il est mal adapté aux écoulements de paroi car il n'est pas possible de l'intégrer jusqu'à la paroi. Par là on souhaite signifier que les valeurs limites de k et ε ne tendent pas vers 0 à la paroi, ce qui témoigne de l'incapacité du modèle à capturer la physique réelle des écoulements de paroi. Mais de manière générale et quel que soit le modèle de turbulence utilisé, l'effort de calcul pour les écoulements turbulents se concentrent dans les zones de gradients de vitesse maximaux puisque ce sont ces gradients qui génèrent la turbulence. Dans le cas des écoulements de paroi ces zones de forts gradients sont justement en très proche paroi. C'est en réponse à ces deux problèmes que les lois de paroi ont été développées et continuent de l'être, car comme on le verra, il existe encore des limitations à leur utilisation. La suite immédiate de cette section se consacre aux mathématiques des lois de paroi. La deuxième partie de cette section tentera de dresser des limitations à leur utilisation et donc les précautions qu'il convient de prendre.

A) Loi de paroi à une échelle de vitesse

Ce type de loi s'appuie sur « la loi de la paroi ». Cette loi distingue trois régions dans un écoulement de paroi : une zone très proche de la paroi (connue sous le nom de « sous-couche visqueuse »), une zone éloignée de la paroi (ou « région externe »), et une zone découlant du recouvrement des deux premières. Du fait que la physique de l'écoulement diffère fortement de celle de l'écoulement libre, il est nécessaire d'introduire de nouvelles grandeurs caractéristiques de vitesse et de longueur : u_τ et δ_ν . En notant τ_p la valeur du frottement à la paroi, on a :

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho_f}} \quad \delta_\nu = \frac{\nu}{u_\tau} \quad (2.39)$$

La quantité u_τ est appelée vitesse de frottement. Et on note le vecteur vitesse adimensionnel $\mathbf{U}^+ = \frac{\mathbf{U}}{u_\tau}$. On note également la distance adimensionnelle à la paroi $y^+ = \frac{y}{\delta_\nu}$. En se plaçant dans le contexte de l'écoulement pleinement développé et statistiquement stationnaire dans un canal plan, il est possible de montrer par analyse des équations de Navier-Stokes moyennées

que dans ce cas le frottement à la paroi τ_p est constant dans la direction de l'écoulement. On peut également montrer que l'équation du mouvement moyennée dans la direction de l'écoulement se ramène, en utilisant L_0 comme longueur caractéristique, à :

$$-\frac{\overline{u\tilde{v}}}{u_{\tau^2}} + \frac{dU^+}{dy^+} = 1 - y^+ / \left(\frac{u_{\tau} L_0}{\nu} \right) \quad (2.40)$$

De part l'anisotropie locale de la turbulence induite par la présence de la paroi, et en considérant un développement limité des fluctuations de vitesse selon y^+ en $y^+ = 0$, on trouve que $\overline{u\tilde{v}} \sim y^{+3}$. En se limitant à des termes du premier ordre en y^+ l'équation précédente peut donc en très proche paroi se simplifier à :

$$\frac{dU^+}{dy^+} \approx 1 - y^+ / \left(\frac{u_{\tau} L_0}{\nu} \right)$$

Or la quantité $\frac{u_{\tau} L_0}{\nu}$ est généralement très grande pour des écoulements à haut Reynolds. Pour de faible valeur de y^+ , typiquement comprises entre 0 et 5, on peut simplifier encore d'avantage l'équation précédente en :

$$\frac{dU^+}{dy^+} \approx 1 \quad \Leftrightarrow \quad U^+ = y^+ \quad (2.41)$$

Par ailleurs, on peut du point de vue dimensionnel considérer que l'écoulement est défini entièrement par la donnée de ρ_f , μ , u_{τ} et L_0 (échelle de longueur caractéristique pour le centre de la conduite). Mais compte tenu des relations (2.39) on peut également décrire l'écoulement à partir de δ_{ν} au lieu d'utiliser μ . L'utilisation du théorème II de Vaschy-Buckingham permet alors d'écrire :

$$\frac{dU^+}{dy^+} = \frac{1}{y^+} f \left(\frac{y}{L_0}, \frac{y}{\delta_{\nu}} \right) \quad (2.42)$$

Typiquement le premier argument de la fonction f est largement prédominant dans le coeur de la conduite. Le second aura une influence de loin majoritaire en très proche paroi. La zone de recouvrement entre la sous couche visqueuse et la zone externe se caractérise quand à elle par $f = cste = \frac{1}{\kappa}$, soit par le fait que les effets aux échelles L_0 et δ_{ν} sont tous les deux négligeables. La constante κ est la constante de Von Karman qui a été déterminée expérimentalement à 0.41. Dans cette zone de recouvrement, d'autant plus étendue que le nombre de Reynolds de l'écoulement est grand et commençant à environ $y^+ = 30$, on a donc :

$$\frac{dU^+}{dy^+} = \frac{1}{y^+} \quad \Leftrightarrow \quad U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) \quad (2.43)$$

La constante d'intégration $B = \frac{1}{\kappa} \ln(E)$ est représentative de la rugosité de la paroi. Pour une paroi supposée parfaitement lisse, l'expérience montre que l'on a : $B \approx 5.2 \Leftrightarrow E \approx 9.0$. Compte tenu de la forme du champs U^+ , cette zone de recouvrement entre les zones interne et externe porte le nom de région logarithmique et la relation (2.43) s'appelle la loi logarithmique. Entre la sous couche visqueuse et la région logarithmique, soit pour y^+ compris entre 5 et 30, il existe une zone de transition dite tampon, ne présentant pas de forme analytique simple. Il existe également une zone tampon entre la région logarithmique et la zone externe connue sous le nom de zone de défaut. Le début de cette deuxième zone tampon en terme de y^+ est fonction du Reynolds de l'écoulement. La figure 2.1 fait le bilan de ce qui vient d'être dit.

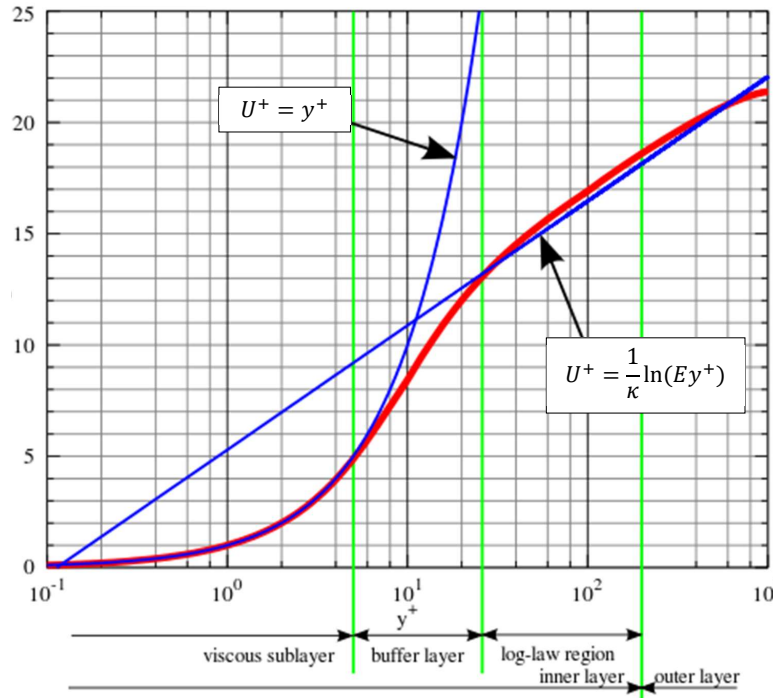


Figure 2.1 Loi de la paroi - ©Aokomoriuta, 2011 [1]. Reproduit et modifié avec permission

Pour revenir aux lois de paroi à une échelle de vitesse, celles-ci mettent à profit les formes analytiques simples de la sous-couche visqueuse et de la région logarithmique. En se basant sur la définition de u_τ on a :

$$\tau_p = \rho_f u_\tau^2 \quad (2.44)$$

Une hypothèse forte des lois de paroi est de supposer que $\tau \approx \tau_p = cste$ de la paroi jusqu'à la zone logarithmique comprise. La loi de paroi « standard » pose de plus :

$$\begin{cases} U^+ = y^+ & \text{si } y^+ < y_c^+ \\ U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) & \text{si } y^+ \geq y_c^+ \\ V^+ = 0 & \forall y^+ \end{cases} \quad (2.45)$$

La valeur de y_c^+ est déterminée par une méthode de point fixe en posant $y_c^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey_c^+)$ ce qui conduit à $y_c^+ \approx 11.6$. La vitesse V^+ désigne quant à elle la vitesse adimensionnelle normale à la paroi. Le but de la loi de paroi standard est donc de déterminer le cisaillement τ_p équivalent à la présence de la paroi en se plaçant à une valeur de $y^+ > 0$. La limite du domaine de calcul ne coïncide donc plus avec la géométrie de la paroi mais se retrouve translatée d'une distance d comme en témoigne la figure 2.2 suivante :

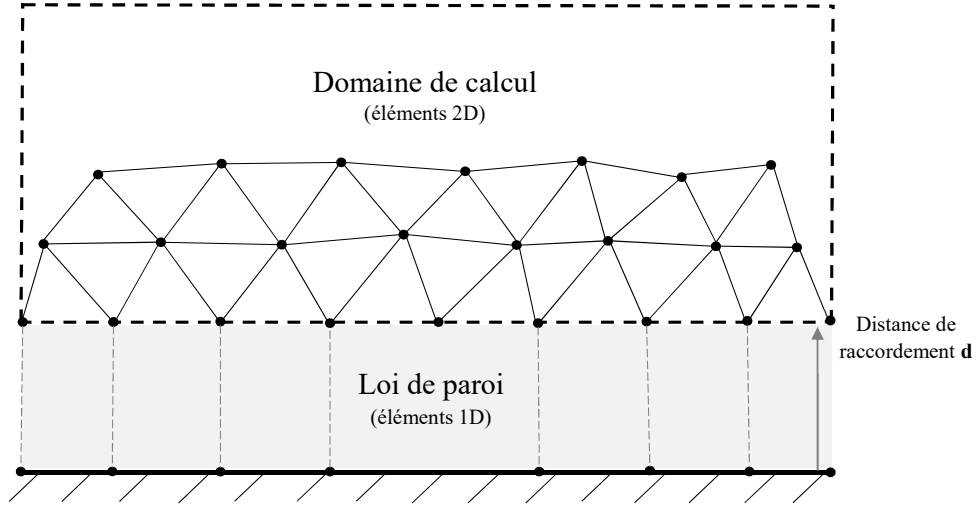


Figure 2.2 Traitement d'une paroi avec loi de paroi

La distance d est la distance de raccordement de la loi de paroi. Le cisaillement τ_p constitue une condition de Neumann pour la vitesse tangentielle à la paroi. Une condition de Dirichlet est imposée sur la vitesse normale à la paroi. Il reste à préciser les conditions limites imposées sur les variables de turbulence du modèle k - ε . Il faut que celle-ci soit consistante avec la formulation du modèle est l'aspect monolithique de la formulation utilisée. Pour y parvenir il convient de simplifier les équations de k et ε en supprimant les termes négligeables ou nuls du fait de l'hypothèse d'écoulement pleinement développé selon l'axe des x . Du point de vue

dimensionnel on montre alors qu'il convient d'imposer à la paroi numérique :

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad \varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa d} \quad (2.46)$$

Il faut néanmoins se souvenir que le modèle k - ε n'est pas intégrable jusqu'à la paroi et par conséquent il lui est impossible de représenter fidèlement la sous-couche visqueuse. Le modèle représente par contre très bien la région logarithmique.

Stratégie de résolution :

La combinaison des équations (2.44), (2.45) et (2.46) suffit pour déterminer τ_p , k et ε à la paroi. En effet compte tenu de la définition de y^+ on a dans la zone logarithmique :

$$\frac{U\kappa d}{\nu} = y^+ \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$

- Ceci permet de déterminer la valeur du y^+ à tous les noeuds de la paroi numérique à partir de la vitesse U .
- La définition de y^+ nous permet ensuite de déterminer la valeur de u_τ à chaque noeud.
- La connaissance de u_τ permet alors de déterminer τ_p , k , et ε .

L'implémentation de ce type de loi est donc simple et présente l'avantage de fournir des conditions limites de Dirichlet pour les variables de turbulence. Cependant on voit que cette formulation entraînera une valeur de k nulle si le cisaillement τ_p à la paroi est lui-même nul. Typiquement si l'on considère l'écoulement autour d'un cylindre circulaire, le point de stagnation à l'amont du cylindre présentera cette caractéristique. Or en réalité la production de turbulence est maximale dans cette zone : on s'attend donc à des écarts importants entre la simulation et l'expérimental. Pour répondre à cette limitation on a développé des lois de parois à deux échelles de vitesse. On décrit dans la suite celle développée par Chabard [42], et appliquée, entre autres, dans les travaux [43] et [44] concernant l'application de la méthode des équations de sensibilités présentée par Borggaard [45].

B) Loi de paroi à deux échelles de vitesse

Une nouvelle fois ce type de loi s'appuie sur la loi de la paroi vue à la section de précédente. C'est ce type de loi qui a été utilisée pour tous les écoulements de paroi simulés pendant les travaux.

On fait les mêmes hypothèses sur le cisaillement τ_p et la vitesse normale V^+ . Cependant on formule désormais τ_p de la manière suivante :

$$\tau_p = -\rho_f u_\tau u_k \quad (2.47)$$

Où u_k est une nouvelle échelle de vitesse, basée sur la valeur de k à la frontière numérique. Pour la suite on utilise les variables logarithmiques car l'implémentation de ce type de loi

dans le code éléments finis utilisé est fondée dessus.

$$u_k = \left(\sqrt{C_\mu} e^K \right)^{\frac{1}{2}}$$

Et la valeur de y^+ est basée elle aussi sur cette échelle de vitesse :

$$y^+ = \frac{y}{\delta_\nu} = \frac{y u_k}{\nu}$$

Les conditions limites de \mathcal{K} et \mathcal{E} sont également différentes et données par :

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \hat{n}} = \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial \hat{n}} = 0 \quad (2.48)$$

$$\mathcal{E} - \ln \left(\frac{k_0^{3/2}}{\varepsilon_0} \right) - \underbrace{\ln \left(\frac{C_\mu^{3/4}}{\kappa d} \right)}_{\alpha} - \frac{3}{2} \mathcal{K} = 0 \quad (2.49)$$

La condition limite sur \mathcal{E} apparaît sous une forme résiduelle car elle utilise en principe une valeur de \mathcal{K} en cours de résolution du fait de la formulation monolithique du problème [46]. Dans les faits, notre implémentation utilise la valeur de \mathcal{K} de l'itération précédente pour déterminer \mathcal{E} . De plus et afin de donner de la souplesse au système une condition limite de Neumann libre est appliquée sur \mathcal{K} , l'expérience montrant que pour un écoulement de conduite pleinement développé, la valeur de k dans la zone logarithmique est approximativement constante dans la direction normale à la paroi [47]. Toutefois conserver cette approximation pour \mathcal{K} peut s'avérer douteux si le nombre de Reynolds devient très grand, car on a l'équivalence suivante :

$$y^+ \geq 30 \quad \Leftrightarrow \quad k \geq \left(\frac{30}{R_e y C_\mu^{1/4}} \right)^2 \quad (2.50)$$

Pour une valeur élevée du nombre de Reynolds, la quantité $\frac{1}{k}$ à la frontière numérique peut donc devenir très grande, et la condition limite de Neumann libre sur \mathcal{K} ne tient plus vraiment.

Stratégie de résolution :

Pour chaque noeud de la paroi numérique on suit le cheminement suivant :

- À partir de la valeur courante de \mathcal{K} on détermine u_k .
- On détermine ensuite y^+ à partir de u_k .
- La connaissance de y^+ nous permet de déterminer u_τ
- On en déduit finalement le cisaillement τ_p .

L'implémentation de ce type de loi reste lui aussi très simple et donne des résultats bien plus fidèles à la réalité dans le cas des points de recollement et des zones de stagnation. On va néanmoins voir dans la sous-section suivante qu'il convient de les utiliser avec prudence.

C) Limitations et compléments à leur utilisation

A propos de la distance de raccordement d :

On a vu que le modèle $k-\varepsilon$, sous sa forme standard, ne permet de représenter fidèlement que la région logarithmique en proche paroi. Il est donc impératif que la distance de raccordement d entre le domaine de calcul et la paroi effective garantisse que la valeur de y^+ soit supérieure à 30 si l'on espère avoir des résultats fiables. De plus vu que l'étendue de la région logarithmique dépend directement du nombre de Reynolds, il convient dans les faits d'avoir une valeur de y^+ juste légèrement supérieure à 30, et ce pendant toute la durée d'une simulation instationnaire. C'est là que la difficulté majeure réside. Dans le cas de la simulation de la marche de Kim que l'on verra plus loin, la phase instationnaire est particulièrement longue et ne présente pas d'effets périodiques comme le relâché tourbillonnaire derrière un cylindre. De plus la formulation monolithique tolère souvent mal un départ impulsif, donnée par une vitesse U d'entrée unitaire et un champs de vitesse initial nul. Si le cas se présente il faudra mettre une rampe en temps sur les conditions limites essentielles à l'entrée du domaine, ce qui reviendra à réaliser une montée en Reynolds en cours de simulation. En présence de loi de paroi cela peut poser problème car l'on va transiter temporairement par des valeurs très faibles de y^+ à la distance de raccordement. Le cisaillement calculé par la loi de paroi aura donc toutes les chances d'être erroné.

Au delà de la précision des résultats, le choix de la distance de raccordement peut également avoir un impact important sur la physique de l'écoulement. Notamment si l'expérience prévoit le décollement d'une couche limite et que la distance de raccordement est mal choisie, il est possible que les résultats numériques n'en témoignent pas, et ce malgré une convergence en maillage des résultats [8]. Dans le code utilisé, la distance de raccordement à la paroi est imposée par entité de courbe frontière. Sur une même entité de frontière il n'est donc pas possible de faire varier continûment cette distance de raccordement comme on pourrait le souhaiter. Dans le même ordre idée la jonction de deux segments de frontière avec des distances de raccordement différentes, ce qui est parfois souhaitable, va introduire des discontinuités néfastes à la résolution.

Plus problématique encore, le point de jonction entre deux segments de frontière d'orientation différente. Dans notre implémentation, ce point de jonction est traité comme appartenant aux deux segments. Cela revient à imposer à ce noeud un vecteur vitesse nul alors qu'en pratique ce n'est pas le cas. Les figures 2.3 et 2.4 illustrent ces deux problèmes.

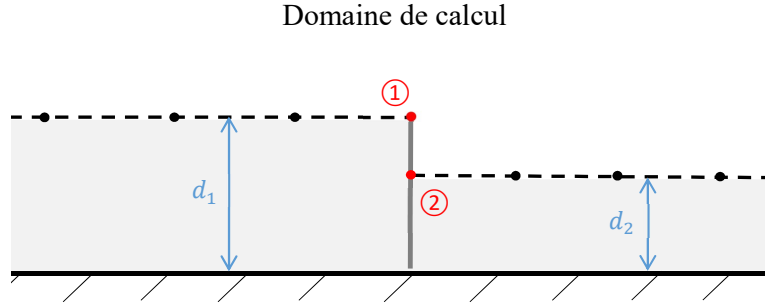


Figure 2.3 Cas particulier si changement de distance de raccordement

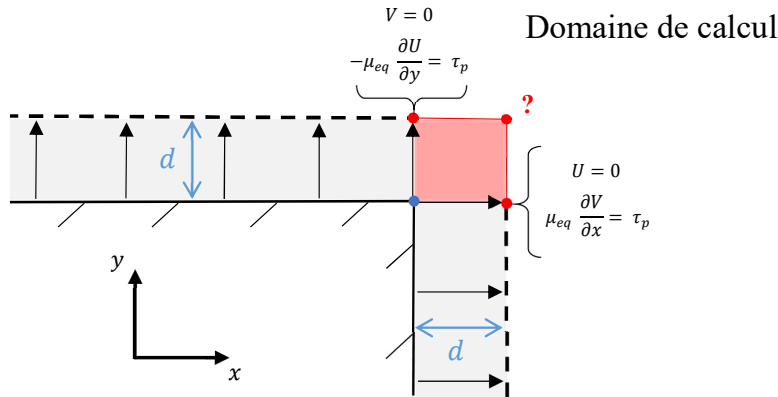


Figure 2.4 Cas particulier si changement brutal de l'orientation de la paroi

A propos de la condition de tangence :

Jusque ici nous avons considéré que la paroi coïncidait avec un des axes du repère cartésien, et noté U et V respectivement les vitesses tangentielle et normale à la paroi. Ce n'est pas le cas en général. Dans ce cas il est nécessaire de projeter le cisaillement pariétal sur les deux axes du repère cartésien. Mais il en résulte alors une condition limite incomplète pour les deux variables de vitesse, au sens que ces conditions limites ne sont pas naturelles. Pour les compléter on doit imposer la condition de non pénétration (vue sous la forme $V^+ = 0$ auparavant) à la paroi. On parle alors de condition de tangence. Il est possible de l'imposer au sens fort à chaque noeud de la portion de frontière concerné, ou bien au sens

faible [48], en considérant cette condition comme une nouvelle contrainte qui vient s'ajouter au problème (similaire à ce qu'est la condition d'incompressibilité). Au sens fort, on utilise les résidus selon x et y , respectivement noté $R_x(U, V)$, et $R_y(U, V)$, afin de dresser une nouvelle équation résiduelle pour la vitesse tangentielle au noeud. C'est pour ce résidu que le cisaillement déterminé par la loi de paroi est une condition naturelle. En notant le vecteur tangent $\hat{\mathbf{t}} = (t_x, t_y)$ le résidu pour la vitesse tangentielle $R_t(U, V)$ s'écrit :

$$R_t(U, V) = \begin{pmatrix} R_x(U, V) \\ R_y(U, V) \end{pmatrix} \cdot \hat{\mathbf{t}} = R_x(U, V)t_x + R_y(U, V)t_y = 0$$

On complète alors cela par la non pénétration à la paroi. En notant $\hat{\mathbf{n}} = (n_x, n_y)$ la normale extérieure au domaine cela se traduit par :

$$\mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{n}} = Un_x + Vn_y = 0$$

Bien que formellement simple, cette approche présente une implémentation finalement peu aisée.

On lui préfère l'approche au sens faible car cela vient juste ajouter un terme dans les résidus $R_x(U, V)$ et $R_y(U, V)$, en complément de la projection du cisaillement tangentiel dans ces mêmes résidus.

2.2 Méthodes numériques

Dans cette section on présente les principales méthodes et aspects numériques qui ont été utilisées lors des travaux. Les deux premières parties de cette section sont les plus importantes car elles constituent le coeur mathématique du projet. On démarre en effet en présentant la méthode des éléments finis avec un niveau de détails raisonnable. Suivra la présentation des méthodes d'intégration temporelles dites « Formules de différentiation rétrograde » (où "Backward Differentiation Formulas" en anglais). On tâchera d'en présenter les aspects essentiels. On présente ensuite brièvement le fonctionnement de l'adaptation automatique du maillage basée sur la méthode de Zienkiewicz et Zhu. La dernière partie de cette section présente l'algorithme complet utilisé. On s'attardera sur le pilotage de l'adaptation du maillage en cours de simulations instationnaires.

2.2.1 Méthode des éléments finis en mécanique des fluides

Cette section présente la méthode des éléments finis appliquée à la mécanique des fluides. Cette présentation n'a pas vocation à être exhaustive, mais tache plutôt de donner un éclairage relativement complet quant au code éléments finis qui a été utilisé et enrichi durant le projet de recherche. Un lecteur intéressé trouvera des informations beaucoup plus fournies dans la référence [49]. On présentera successivement les formulations faibles des équations de mouvement et de pression du système (Stand-1), et des équations de turbulence du système (Log-1). On abordera ensuite le principe de la méthode de Galerkin, avant de s'intéresser à la construction du système matriciel à résoudre.

Formulations faibles :

Les équations des systèmes (Stand-1) et (Log-1) présentées plus haut sont représentatives du problème fort que l'on cherche à résoudre dans un domaine bidimensionnel Ω , bordé par une frontière Γ . Le problème faible associé à un problème fort se construit en intégrant ce problème fort sur Ω , tout en pondérant chaque intégrande d'une fonction « test » notée respectivement δ_U , δ_V , δ_p , δ_K , et δ_ε , selon que l'on traite le problème fort de la quantité de mouvement, de la pression, ou des variables de turbulence. Afin de mettre en place la notion de résidu \mathcal{R} , tous les termes intégrés sur Ω sont ramenés du même côté de l'équation. En réalisant des intégrations par parties, et en usant du théorème de la divergence, on fait alors apparaître des termes de bord, qui constituent des conditions limites naturelles pour chaque formulation faible. Pour ne pas alourdir inutilement la présentation les formulations faibles de chaque équation du système à résoudre ont été placées en annexe (A). Il existe alors deux

façons de traiter les termes de bord :

- Si l'on souhaite imposer fortement, au travers d'une condition limite essentielle de Dirichlet, la valeur de l'une des variables sur une portion de la frontière, alors la fonction test associée à cette variable doit être nulle sur cette même portion de frontière. La condition limite naturelle pour cette variable étant une condition limite de type Neumann, on ne peut en effet imposer à la fois un flux pour la variable et la valeur de la variable sur une même portion de frontière. En ce sens on peut voir la fonction test δ comme une perturbation admissible de la variable à laquelle elle est associée. En imposant la valeur de la variable à la frontière, on signifie donc qu'aucune perturbation n'est admissible à cette endroit de la frontière. On note Γ_{D_i} la portion de frontière sujette à une condition de Dirichlet pour la variable i .

- On peut autrement choisir d'imposer la valeur du flux qui apparaît naturellement, sur une portion de la frontière. Le flux sera cependant imposé au sens faible. On note Γ_{N_i} la portion de frontière sujette à une condition de Neumann pour la variable i .

Dans tous les cas, Γ_{D_i} et Γ_{N_i} doivent respecter les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \Gamma_{D_i} \cup \Gamma_{N_i} = \Gamma \\ \Gamma_{D_i} \cap \Gamma_{N_i} = \{\emptyset\} \end{cases}$$

Discrétisation et méthode de Galerkin :

Une fois les conditions limites définies, on passe à la discrétisation spatiale du domaine de calcul Ω , qui consiste à morceler le domaine en un ensemble d'entités appelées « éléments », ou maille. Un élément e_i respecte toujours la propriété de non intersection avec les éléments voisins. L'union de tous les éléments constitue le domaine de calcul effectif Ω_{eff} , dont la frontière est notée Γ_{eff} . Dans le cas d'un domaine de calcul Ω présentant une portion de frontière courbe, on aura de manière générale $\Omega \neq \Omega_{eff}$. Un élément possède en effet généralement une géométrie régulière, et se présente le plus couramment sous la forme d'une triangle, ou d'un quadrangle. Afin d'illustrer les propos qui vont suivre, considérons la figure 2.5 suivante, représentant un élément triangulaire.

Cet élément porte le nom d'élément de Taylor-Hood, et dans le cadre de ces travaux, nous utiliserons uniquement ce type d'élément, que le maillage soit structuré ou non. On a fait le choix de se placer dans le cas le plus général, ou l'élément n'est pas équilatéral, isocèle ou rectangle, et où aucun de ses segments ne coïncide avec les axes principaux du repère cartésien. On note cet élément e_{TH} .

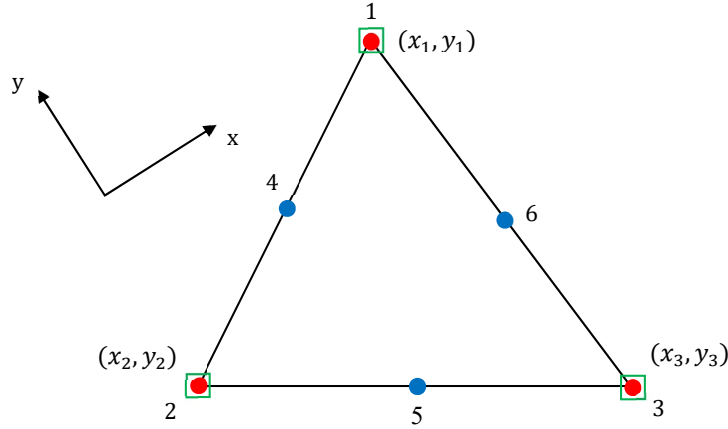


Figure 2.5 Élément de Taylor-Hood P2-P1

Comme on peut le voir cet élément possède 3 noeuds sommet (en rouge), ainsi que 3 noeuds milieu (en bleu). C'est à ces 6 noeuds que seront évaluées les vitesses U et V , les variables de turbulence \mathcal{K} et \mathcal{E} , ainsi que les dérivées spatiales et temporelles de ces quantités. La pression sera quant à elle évaluée aux 3 noeuds verts, coïncidant avec les noeuds sommet. Pour un élément donné on a donc $4 \cdot 6 + 3 = 27$ inconnues. Au niveau de l'élément on notera U_i , la vitesse U au noeud i . On procède de même pour les autres variables. On a alors au niveau de l'élément les relations suivantes :

$$U = \sum_{i=1}^6 U_i Q_i \quad V = \sum_{i=1}^6 V_i Q_i \quad (2.51)$$

$$\mathcal{K} = \sum_{i=1}^6 \mathcal{K}_i Q_i \quad \mathcal{E} = \sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_i Q_i \quad (2.52)$$

$$P = \sum_{i=1}^3 P_i L_i \quad (2.53)$$

Où Q_i désigne la fonction d'interpolation quadratique sur l'élément et respectant la propriété de collocation au noeud i , tandis que L_j désigne la fonction d'interpolation linéaire sur l'élément et respectant la propriété de collocation au noeud j , les noeuds j se limitant au noeud sommet. De manière générale on a donc :

$$Q_i = \mathbf{P}_q \cdot \boldsymbol{\alpha}_i \quad (2.54)$$

$$L_i = \mathbf{P}_l \cdot \boldsymbol{\beta}_i \quad (2.55)$$

avec $P_q = [1, x, y, xy, x^2, y^2]$, $P_l = [1, x, y]$ et α_i et β_i des vecteurs de coefficients dépendant du noeud i considéré. La méthode de Galerkin consiste à choisir les fonctions test, pour une variable, identiques aux fonctions d'interpolation. Ceci constitue un choix de fonction test qui n'est pas unique, mais l'on se placera toujours dans ce cadre. Il est également propice à ce moment de préciser que ce choix de fonctions d'interpolation différentes pour la pression n'est pas anodin. C'est une conséquence de la condition de stabilité pour un élément, connue sous le nom de « condition LBB » (Ladyshenskaya–Babuška–Brezzi). On ne rentrera pas dans les détails ici. Pour plus d'informations le lecteur pourra consulter à nouveau la référence [49]. Par ailleurs, il paraît judicieux d'introduire ici le concept d'élément de référence. Il s'agit d'un concept central dans la méthode des éléments finis, qui intervient lors de l'évaluation des intégrales des formulations faibles au niveau de chaque élément. Cet élément particulier est présenté à la figure 2.6 ci-après.

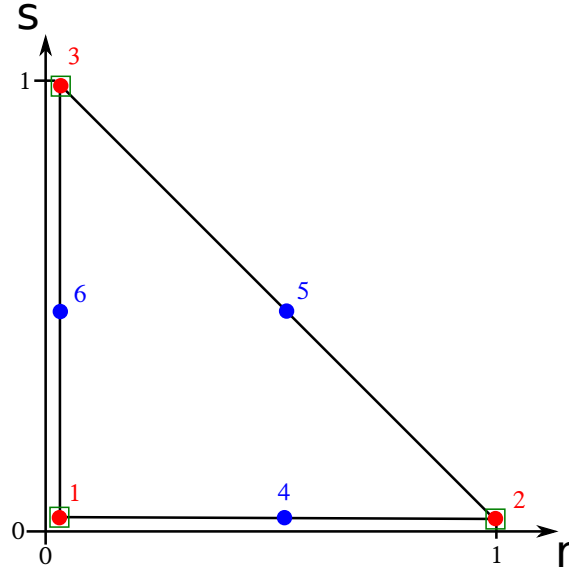


Figure 2.6 Éléments de référence

On note cet élément e_{ref} . Cette fois-ci on remarque que l'élément est rectangle isocèle, et que deux de ces segments coïncident avec le repère principal cartésien (r, s) . De plus tout point à l'intérieur de l'élément vérifie :

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

On définit alors la relation de passage \mathcal{F} entre l'élément quelconque de la figure 2.5 et l'élément

de référence. On définit les ensembles suivants :

$$\mathcal{A}_{TH} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in e_{TH}\}$$

$$\mathcal{A}_{ref} = \{(r, s) \in \mathbb{R}^2 : (r, s) \in e_{ref}\}$$

On cherche donc à établir :

$$\mathcal{F} : \mathcal{A}_{ref}^2 \rightarrow \mathcal{A}_{TH}^2, (r, s) \mapsto (x, y)$$

On notera, pour commencer, que cette application doit transformer chacun des noeuds sommet de l'élément e_{ref} en les noeuds sommet de e_{TH} . De plus on pose (r, s) de la forme :

$$\begin{cases} x = \alpha_x + \beta_x r + \gamma_x s \\ y = \alpha_y + \beta_y r + \gamma_y s \end{cases}$$

Cette transformation est une bijection, il est donc possible de définir la transformation inverse comme suit :

$$\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{A}_{TH}^2 \rightarrow \mathcal{A}_{ref}^2, (x, y) \mapsto (r, s) \quad (2.56)$$

$$\begin{cases} r = \alpha_r + \beta_r x + \gamma_r y \\ s = \alpha_s + \beta_s x + \gamma_s y \end{cases}$$

où les nouveaux coefficients s'expriment tous en fonction de $(\alpha_x, \alpha_y, \beta_x, \beta_y, \gamma_x, \gamma_y)$. Dans le cas d'un élément triangulaire, la transformation inverse est toujours possible (ce n'est pas forcément le cas avec des quadrangles). Si l'on cherche à intégrer sur l'élément réel une quantité $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, on est alors en mesure d'écrire :

$$\int_{e_{TH}} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dS = \int_{s=0}^{s=1-r} \int_{r=0}^{r=1} \frac{\partial f(r, s)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} |\underline{\mathbf{J}}_{\mathcal{F}}| dr ds \quad (2.57)$$

où $|\underline{\mathbf{J}}_{\mathcal{F}}|$ désigne le Jacobien associé à la transformation \mathcal{F} :

$$|\underline{\mathbf{J}}_{\mathcal{F}}| = \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \right|$$

Comme on peut le voir dans l'équation (2.57), on a besoin de connaître la transformation

inverse \mathcal{F}^{-1} explicitement afin de pouvoir évaluer la quantité $\frac{\partial r}{\partial x}$. On peut alors calculer l'intégrale double par quadrature de Gauss-Legendre. Le choix du nombre de points de Gauss permettra d'évaluer exactement ou non l'intégrale en question. Si l'intégrande n'est pas de nature polynomiale, alors on pourra minimiser l'erreur d'intégration commise en augmentant le nombre de points de Gauss. Dans l'implémentation du code éléments finis utilisé, il est possible d'imposer jusqu'à 42 points de Gauss. Les résidus pour les variables à résoudre sont tous évalués par cette méthode. Il reste à générer le système matriciel.

Construction du système matriciel :

On veut construire un système matriciel de la forme $\underline{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Ce système matriciel complet est généré par assemblage des systèmes relatifs à chaque élément. On souhaite en effet que le problème faible soit vérifié au niveau de chaque élément, ce qui conduit donc à évaluer les résidus pour chacun d'entre eux. De par la non-linéarité du système on est également dans l'obligation d'utiliser une méthode de résolution itérative applicable à ces non-linéarités. Dans notre implémentation, c'est la méthode de Newton et certaines de ses variantes qui ont été retenues. Si l'on note \mathcal{R}_n le vecteur résidu à l'étape n , contenant les résidus (calculés avec la solution courante \mathbf{x}_n) pour chaque inconnue au niveau de l'élément, $\delta \mathbf{x}_n$ le vecteur perturbation de la solution, et $\underline{\mathbf{J}}_{\mathcal{R}_n}$ la matrice Jacobienne associée à \mathcal{R}_n , alors la méthode se présente comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{On résout : } \quad \underline{\mathbf{J}}_{\mathcal{R}_n} \delta \mathbf{x}_n = -\mathcal{R}_n \\ \text{puis on pose : } \quad \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \delta \mathbf{x}_n \end{array} \right. \quad (2.58)$$

En théorie, la méthode de Newton convergera quadratiquement vers la solution si l'estimé initial de solution, noté \mathbf{x}_0 est suffisamment proche de la solution exacte \mathbf{X} , et si la matrice Jacobienne est inversible. De plus, on suppose implicitement que cette dernière est évaluée exactement à chaque itération. En pratique, ce n'est pas le cas dans notre implémentation. On utilise en réalité la méthode de la matrice Jacobienne numérique, qui revient à une itération donnée n à poser :

$$\underline{\mathbf{J}}_{\mathcal{R}_n}(ij) = \frac{\mathcal{R}_{ni}(\mathbf{x}_n + \delta x_{nj} \mathbf{e}_j) - \mathcal{R}_{ni}(\mathbf{x}_n)}{\delta x_{nj}} \quad (2.59)$$

où δx_{nj} désigne une perturbation de la composante j du vecteur de la solution courante \mathbf{x} à l'itération n . La notation R_i désigne, quant à elle, la composante i du vecteur résidu courant \mathcal{R}_n . Dans ce cas la convergence quadratique de la méthode n'est conservée que si

l'on respecte la condition suivante :

$$\exists C, \text{ tel que } \forall n : \max_j |\delta x_{nj}| \leq C \| \mathbf{x}_n - \mathbf{X} \|$$

Le choix le plus simple serait d'opter pour une valeur de perturbation δx_{nj} commune à variable j , et égale à la précision machine. Dans les faits cette approche est dangereuse car elle peut entraîner des erreurs d'arrondi importantes [50]. Dans les travaux de Dennis et Schnabel [51], il est plutôt conseillé de faire le choix suivant :

$$\delta x_{nj} = \sqrt{\varepsilon_M} \max \{ |x_{nj}|, M_j \} \text{sign}(x_j)$$

où ε_M désigne la précision machine et M_j un ordre de grandeur supposé pour la variable j . On a typiquement $\varepsilon_M \sim 10^{-15}$. En général ce choix permet d'avoir des perturbations de l'ordre de 10^{-8} , ce qui permet de conserver la convergence quadratique à minima sur les premières itérations.

Approche découplée - couplée - semi-couplée :

À ce stade, on peut envisager trois façons de construire les systèmes élémentaires :

- L'approche découplée préconise d'imposer nuls les termes de couplage entre les équations de mouvement et de turbulence, et d'imposer nuls les termes de couplage entre l'équation de \mathcal{K} et l'équation de \mathcal{E} . Cela donne schématiquement la structure suivante pour le système matriciel élémentaire :

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} \frac{\partial \mathcal{R}_U}{\partial U} & \frac{\partial \mathcal{R}_U}{\partial V} & \frac{\partial \mathcal{R}_U}{\partial P} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \frac{\partial \mathcal{R}_V}{\partial U} & \frac{\partial \mathcal{R}_V}{\partial V} & \frac{\partial \mathcal{R}_V}{\partial P} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \frac{\partial \mathcal{R}_P}{\partial U} & \frac{\partial \mathcal{R}_P}{\partial V} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & \frac{\partial \mathcal{R}_\mathcal{K}}{\partial \mathcal{K}} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & \boxed{0} & \frac{\partial \mathcal{R}_\mathcal{E}}{\partial \mathcal{E}} \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} \delta U \\ \delta V \\ \delta P \\ \delta \mathcal{K} \\ \delta \mathcal{E} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{R}_U \\ \mathcal{R}_V \\ \mathcal{R}_P \\ \mathcal{R}_\mathcal{K} \\ \mathcal{R}_\mathcal{E} \end{array} \right\} \quad (\text{Découplée})$$

En réalité le système matriciel est un 27 par 27 comme on l'a déjà précisé. Comme on peut le voir ce système peut se décomposer en 3 sous-systèmes : l'un relatif à (U, V, P) , un relatif à \mathcal{K} , et un dernier relatif à \mathcal{E} . On souligne d'ailleurs que la formulation du système (Stand-1) a initialement été pensée pour cette approche découplée, afin par exemple de ne pas faire

apparaître explicitement \mathcal{E} dans l'équation de \mathcal{K} .

Dans cette approche on distingue les itérations globales et les sous-itérations, ces dernières ne concernant que les équations de turbulence. Dans cette approche on résout en premier le système relatif à la quantité de mouvement, en prenant les valeurs de \mathcal{K} et \mathcal{E} issues de l'itération globale précédente et considérées fixes. On injecte ensuite les nouvelles valeurs de la vitesse dans l'équation de \mathcal{K} , en prenant toujours la même valeur de \mathcal{E} . Ceci permet de déterminer une nouvelle valeur de \mathcal{K} dont on se sert enfin dans l'équation de \mathcal{E} , tant directement que pour actualiser la valeur de μ_t . On termine l'itération globale en pratiquant toutes les sous-itérations sur \mathcal{K} et \mathcal{E} , c'est-à-dire que l'on boucle sur la résolution successive des équations de turbulence un certain nombre de fois. Cette approche a été utilisée par Gammacurta [52] pour réaliser des travaux similaires à ceux présentés ici. Cette approche a eu beaucoup de succès, car elle permet de limiter la quantité de mémoire nécessaire pour réaliser les calculs.

- L'approche couplée, en revanche, conserve tous les termes de couplage entre les équations. Un système élémentaire se présente donc cette fois sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{R}_U}{\partial U} & \frac{\partial \mathcal{R}_U}{\partial V} & \frac{\partial \mathcal{R}_U}{\partial P} & \boxed{\frac{\partial \mathcal{R}_U}{\partial \mathcal{K}}} & \boxed{\frac{\partial \mathcal{R}_U}{\partial \mathcal{E}}} \\ \frac{\partial \mathcal{R}_V}{\partial U} & \frac{\partial \mathcal{R}_V}{\partial V} & \frac{\partial \mathcal{R}_V}{\partial P} & \boxed{\frac{\partial \mathcal{R}_V}{\partial \mathcal{K}}} & \boxed{\frac{\partial \mathcal{R}_V}{\partial \mathcal{E}}} \\ \frac{\partial \mathcal{R}_P}{\partial U} & \frac{\partial \mathcal{R}_P}{\partial V} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{\frac{\partial \mathcal{R}_K}{\partial U}} & \boxed{\frac{\partial \mathcal{R}_K}{\partial V}} & 0 & \frac{\partial \mathcal{R}_K}{\partial \mathcal{K}} & \boxed{\frac{\partial \mathcal{R}_K}{\partial \mathcal{E}}} \\ \boxed{\frac{\partial \mathcal{R}_E}{\partial U}} & \boxed{\frac{\partial \mathcal{R}_E}{\partial V}} & 0 & \boxed{\frac{\partial \mathcal{R}_E}{\partial \mathcal{K}}} & \frac{\partial \mathcal{R}_E}{\partial \mathcal{E}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta U \\ \delta V \\ \delta P \\ \delta \mathcal{K} \\ \delta \mathcal{E} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{R}_U \\ \mathcal{R}_V \\ \mathcal{R}_P \\ \mathcal{R}_K \\ \mathcal{R}_E \end{Bmatrix} \quad (\text{Couplée})$$

Comme précisé en introduction, cette approche est devenue viable il y a une quinzaine d'années, grâce aux progrès réalisés en informatique, notamment au niveau de la quantité de mémoire disponible. Une large partie des travaux de Navah [46] a concerné l'étude comparative des approches couplée et découplée. Au delà de la mémoire nécessaire, l'approche couplée a montré une vitesse de résolution largement accrue, mais une sensibilité plus forte aux conditions initiales, rendant parfois la convergence difficile. Dans le cadre de ce projet, on utilise en majeure partie l'approche couplée, conjointement avec l'approche semi-couplée pour les premières itérations à chaque instant t considéré.

- L'approche semi-couplée est comme son nom l'indique un entre-deux entre la méthode découplée et couplée. Comme pour l'approche découplée on supprime le couplage entre les équations de mouvement et de turbulence, mais les équations de turbulence restent couplées entre elles. Cela donne schématiquement le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{R}_U}{\partial U} & \frac{\partial \mathcal{R}_U}{\partial V} & \frac{\partial \mathcal{R}_U}{\partial P} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \frac{\partial \mathcal{R}_V}{\partial U} & \frac{\partial \mathcal{R}_V}{\partial V} & \frac{\partial \mathcal{R}_V}{\partial P} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \frac{\partial \mathcal{R}_P}{\partial U} & \frac{\partial \mathcal{R}_P}{\partial V} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & \frac{\partial \mathcal{R}_K}{\partial K} & \boxed{\frac{\partial \mathcal{R}_K}{\partial \mathcal{E}}} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & \boxed{\frac{\partial \mathcal{R}_\mathcal{E}}{\partial K}} & \frac{\partial \mathcal{R}_\mathcal{E}}{\partial \mathcal{E}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta U \\ \delta V \\ \delta P \\ \delta K \\ \delta \mathcal{E} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{R}_U \\ \mathcal{R}_V \\ \mathcal{R}_P \\ \mathcal{R}_K \\ \mathcal{R}_\mathcal{E} \end{Bmatrix} \quad (\text{SCouplée})$$

De plus on pratique une linéarisation partielle de certains termes de la matrice Jacobienne pour les équations de mouvement en négligeant des dépendances. Ces linéarisations partielles reviennent à pratiquer des itérations de type point fixe, aussi appelées itérations de Picard. Par ce biais on élargit le domaine de convergence, mais l'on perd la convergence quadratique théorique de la méthode de Newton.

Assemblage du système matriciel global :

Comme mentionné plus haut, il reste à assembler les systèmes élémentaires au sein du système global. Pour ce faire, on utilise le vecteur d'adressage de chaque éléments afin de positionner les coefficients de chaque matrice élémentaire au bon endroit dans la matrice globale. De même, ce vecteur d'adressage permet de placer chaque partie du membre de droite élémentaire dans le membre de droite du système global. Ce vecteur fait correspondre à chaque degré de liberté i (i allant de 1 à 27) de l'élément considéré un degré de liberté global j . Les degrés de liberté globaux sont issus d'un algorithme de renumérotation, qui va permettre d'optimiser le stockage des coefficients de la matrice globale. La pratique veut également que tous les degrés de liberté concernés par une condition limite de Dirichlet se voient attribuer les numéros j les plus grands. On suppose le nombre de condition de Dirichlet total égal à 30, et le nombre de degré de liberté total du système global égal à 600. Dans le cas de l'élément réel de la figure 2.5, le vecteur d'adressage pourrait ressembler à la table 2.2 , si l'on suppose que les noeuds 1,2, et 4 sont soumis à une condition de Dirichlet pour la vitesse V . D'après

ce vecteur d'adressage le degré de liberté U rattachée au noeud 6 de l'élément aura le numéro 62 dans le système global. En pratique le vecteur d'adressage aura une troisième dimension, relative au numéro de l'élément considéré.

Tableau 2.2 Exemple de vecteur d'adressage

noeud	u	v	\mathcal{K}	\mathcal{E}	p
<i>1</i>	43	<u>580</u>	56	22	3
<i>2</i>	12	<u>585</u>	41	8	17
<i>3</i>	60	70	91	135	14
<i>4</i>	5	<u>588</u>	19	82	-
<i>5</i>	120	2	148	56	-
<i>6</i>	62	9	136	69	-

2.2.2 Les méthodes type « Backward Differentiation Formulas »

Dans cette section on tâche de présenter de manière détaillée le principe des méthodes BDF utilisées pour l'intégration en temps. On introduira pour commencer les méthodes linéaires multi-pas dont les BDF font partie. On s'attardera ensuite sur la formulation des BDF proprement dite. On introduit alors les aspects adaptatifs possibles de la méthode, tant en ordre qu'en taille du pas d'intégration, basés sur un indicateur de stabilité heuristique et un estimateur d'erreur par troncature. On clôturera cette section en discutant de l'application des méthodes BDF à la résolution du système d'équations URANS qui nous intéresse.

Les méthodes linéaires multi-pas :

L'article de Hairer *et al.*[53] propose une très bonne définition qualitative des méthodes linéaires multi-pas :

« Contrairement aux méthodes linéaires à 1 pas, les méthodes linéaires multi-pas gagnent en efficacité en utilisant l'information de plusieurs pas de temps » [Notre traduction].

Pour la suite on considère un problème de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \quad (2.60)$$

Il s'agit donc d'un problème de Cauchy constitué d'un ensemble d'équations différentielles ordinaires (« ODE » en anglais). Si l'on note n l'itération courante, et \mathbf{y}_{n+i} et \mathbf{f}_{n+i} les approximations numériques de $\mathbf{y}(t_{n+i})$ et $\mathbf{f}(t_{n+i}, \mathbf{y}(t_{n+i}))$, alors les méthodes multi-pas linéaires à p pas (avec p un entier positif) sont définies par la relation générale :

$$\mathbf{y}_{n+1} = \sum_{j=0}^{p-1} a_j \mathbf{y}_{n-j} + h \sum_{j=0}^{p-1} b_j \mathbf{f}_{n-j} - h b_{-1} \mathbf{f}_{n+1} \quad (2.61)$$

Le scalaire h désigne le pas de temps supposé constant dans cette relation. Dans le cas à pas variable cette forme reste valable mais h n'apparaît plus explicitement et les coefficients a_j et b_j deviennent fonction des différents pas de temps, en plus de rester fonction de p .

Les coefficients a_j , et b_j sont caractéristiques de la méthode linéaire multi-pas utilisée. Le coefficient b_{-1} sera nul si la méthode utilisée est explicite : ce n'est pas notre cas ici. Les coefficients a_p et b_p sont également supposés non nuls afin que la méthode soit bien à p pas. Nous verrons plus loin que dans leur construction les méthodes BDF possèdent bien cette forme générale. Comme on le voit, la méthode peut faire le choix d'utiliser l'information aux

instants précédents tant sur la solution (coefficients a_j , que sur sa dérivée temporelle (coefficients b_j). Les méthodes BDF correspondent au premier cas, tandis que les méthodes tout aussi connues d'Adams-Moulton [50] correspondent au second cas.

Formulation des méthodes BDF :

Les méthodes BDF utilisent l'information sur la solution à des pas de temps précédents. Pour ce faire on définit un vecteur polynôme $\mathbf{P}(t)$, interpolant la solution aux instants t_{n+1-k} pour $k = 0, \dots, p$ si la méthode est à p pas. Ce polynôme d'interpolation est mis sous la forme de Newton, ce qui donne :

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{j=0}^p \left[\prod_{i=0}^{j-1} (t - t_{n+1-i}) \right] \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^j \quad (2.62)$$

où le vecteur $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^j$ désigne la différence divisée rétrograde $[\mathbf{y}_{n+1}, \dots, \mathbf{y}_{n+1-j}]$ [54]. Cette forme du polynôme d'interpolation est particulièrement utile afin de rajouter des données relatives à des pas de temps plus anciens sans avoir à récrire le polynôme au complet comme c'est le cas pour la forme classique de Lagrange. De plus les différences divisées dans leur formulation se prêtent particulièrement bien aux procédures récursives. Elles sont en effet définies par la relation suivante :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^0 = [\mathbf{y}_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}] = \mathbf{y}_{n+1} \\ \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^j = \frac{[\mathbf{y}_{n+1}, \dots, \mathbf{y}_{n+2-j}] - [\mathbf{y}_n, \dots, \mathbf{y}_{n+1-j}]}{t_{n+1} - t_n} \end{cases} \quad (2.63)$$

Afin de mettre en évidence la facilité de construction de ces quantités, on présente ci-dessous le cas où l'on fait varier j entre 0 et 2. On se placera dans le cas général à pas de temps variable. On note pour la suite $h_k = t_k - t_{k-1}$, le pas de temps à l'étape k . Il vient pour $j = 1$:

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^1 = \frac{[\mathbf{y}_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}] - [\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_n]}{t_{n+1} - t_n} = \frac{\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n}{h_{n+1}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^0 - \boldsymbol{\alpha}_n^0}{h_{n+1}}$$

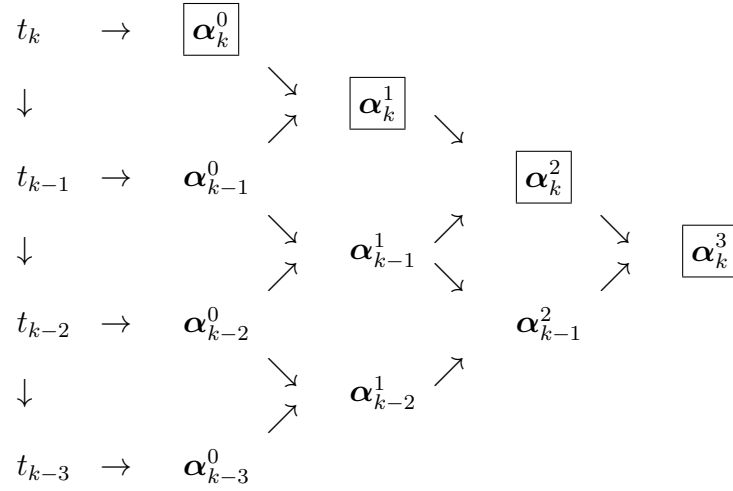
Et pour $j = 2$ on a :

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^2 = \frac{[\mathbf{y}_{n+1}, \mathbf{y}_n] - [\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1}]}{t_{n+1} - t_{n-1}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^1 - \boldsymbol{\alpha}_n^1}{h_{n+1} + h_n}$$

On peut donc schématiser la construction des différences divisées comme illustré dans le tableau 2.3.

Remarque importante : L'interpolation de Newton définit à l'équation (2.62) peut se ramener à un développement en série de Taylor si l'on impose $\{h_n, \dots, h_{n+1-p}\} \mapsto \{0, \dots, 0\}$. Cela permet de dire qu'en première approximation la quantité $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^j$ se comporte comme

Tableau 2.3 Construction des différences divisées



$\frac{1}{j!} \frac{\partial^j \mathbf{P}(t)}{\partial t^j} \Big|_{t=t_{n+1}}$. Ce comportement est intéressant car comme on le verra plus loin l'estimateur d'erreur et l'indicateur de stabilité nécessitent à minima l'évaluation de la dérivée d'ordre $p + 1$ de \mathbf{y} . Cela permet de dire qu'une méthode BDF à p pas va être consistante d'ordre p pour le calcul de la dérivée en temps de \mathbf{y} .

Pour avoir la variation de la solution dans le temps au temps courant on dérive le polynôme $\mathbf{P}(t)$ par rapport au temps et on l'évalue au temps courant. Il vient :

$$\mathbf{P}^{(1)}(t_{n+1}) = \sum_{j=1}^p \left[\prod_{i=1}^{j-1} (t_{n+1} - t_{n+1-i}) \right] \alpha_{n+1}^j$$

En arrangeant les termes différemment cela peut s'écrire :

$$\mathbf{P}^{(1)}(t_{n+1}) = \sum_{i=0}^p a_i \mathbf{y}_{n+1-i}$$

En effet on a par exemple pour $p = 2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(1)}(t_{n+1}) = & \underbrace{\left[\frac{1}{h_{n+1}} + \frac{1}{h_{n+1} + h_n} \right]}_{a_0} \mathbf{y}_{n+1} - \underbrace{\left[\frac{1}{h_{n+1}} + \frac{1}{h_{n+1} + h_n} \left(1 + \frac{1}{h_n} \right) \right]}_{-a_1} \mathbf{y}_n \\ & + \underbrace{\frac{1}{(h_{n+1} + h_n)h_n}}_{a_2} \mathbf{y}_{n-1} \end{aligned}$$

On remarquera que l'on a $\sum_{i=0}^p a_i = 0$, ce qui permet de garantir $\mathbf{P}^{(1)}(t) = 0$ si le problème est stationnaire. D'autre part vu que $\mathbf{P}^{(1)}(t_{n+1}) = f_{n+1}$ il vient finalement :

$$\mathbf{y}_{n+1} = \sum_{j=1}^p a_j \mathbf{y}_{n+1-j} - h_{n+1} b_{-1} \mathbf{f}_{n+1} \quad (2.64)$$

en posant $b_{-1} = \frac{1}{h_{n+1} a_0}$. Cela revient bien, moyennant un ré-arrangement des indices, à un cas particulier de la forme générale (2.61).

Considérations de stabilité pour les méthodes BDF :

Les points de stabilité des méthodes BDF discutées ici sont toujours relatifs au problème (2.60), constitué uniquement d'ODE. On peut commencer par noter que comme pour toutes les méthodes multi-pas, les méthodes BDF connaissent la limitation connue sous le nom de *Seconde barrière de Dahlquist* : il n'existe pas de méthode linéaire multi-pas et « A-stable » d'ordre strictement supérieure à 2. Cela signifie qu'une méthode BDF à p pas, notée désormais BDF- p , ne sera plus absolument stable si $p > 2$. On peut montrer que les méthodes BDF-1 (Euler-implicite), et BDF-2 sont absolument stables. On peut donc les employer en toute sécurité du point de vue numérique. De plus les méthodes BDF sont, pour $p \leq 6$, au moins θ - stable, ce qui renforce leur intérêt dans le cas des problèmes numériquement raides, car leurs domaines de stabilité restent infinis. Le lecteur intéressé pourra consulter la référence [50] pour voir une représentation graphique de ces domaines de stabilité. Pour $p > 6$, on peut montrer que les méthodes BDF ne sont plus zéro-stable, ce qui rend les méthodes correspondantes inutilisables. Dans le cadre de ce projet on utilisera exclusivement les méthodes d'ordre 1 à 5, même si en pratique l'adaptation d'ordre ne permettra jamais de monter jusqu'à l'ordre 5.

Les considérations précédentes supposent que la méthode utilisée soit à pas de temps fixe. Lorsque la méthode est à pas de temps variable la stabilité d'une méthode est également conditionnée par le « swing-factor » $s = \frac{h_{n+1}}{h_n}$. En se plaçant dans le cadre d'une évolution relativement lisse du pas de temps, les travaux de Skelboe [55] suggèrent des valeurs maximales de s en fonction de l'ordre p de la méthode. Le tout est présenté dans le tableau 2.4 ci-dessous.

Tableau 2.4 Valeurs maximales de s en fonction de l'ordre p

p	2	3	4	5
s_{max}	2.6	1.9	1.5	1.2

Aspects adaptatifs de la méthode :

On va présenter ici successivement le fonctionnement de l'adaptation du pas de temps et de l'ordre. La procédure d'adaptation du pas de temps est un ajustement, rendu nécessaire par l'ajout des variables de turbulence, de la procédure présentée par Hay dans [56]. La procédure d'adaptation en ordre, développée initialement par Shampine et Gordon [57], a subi une modification s'inscrivant dans la même logique que celle pratiquée pour l'adaptation du pas de temps.

1) Estimation d'erreur et adaptation du pas de temps :

L'estimation d'erreur se fait par le biais de l'évaluation de l'erreur de troncature locale tel que suggéré dans [58]. Dans le cadre de la vérification de nos modifications du code, dont le chapitre 3 fait l'objet, on étudiera le comportement de cet estimateur. On commence par présenter l'estimateur basé sur l'erreur de troncature.

L'erreur de troncature locale, relative au problème (2.60) est définie comme suit :

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}(t_{n+1})) = \mathbf{y}'(t_{n+1}) - \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}(t_{n+1})) \quad (2.65)$$

Si la solution est exacte alors on aura bien sûr $\mathcal{L}(\mathbf{y})_{n+1} = 0$ pour tout n . Mais en introduisant l'approximation fournie par les BDF pour $\mathbf{y}'(t)$ et en utilisant le fait que $\mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}(t_{n+1})) = \mathbf{y}^{(1)}_{n+1}$, on peut évaluer l'erreur de troncature locale \mathcal{L}_p , basée sur la méthode BDF- p , comme suit :

$$\mathcal{L}_p(\mathbf{y}_{n+1}) = \sum_{i=0}^p a_i \mathbf{y} \left(t_{n+1} - \underbrace{\sum_{j=1}^i h_{n+1-j}}_{H_i} \right) - \mathbf{y}^{(1)}_{n+1} \quad (2.66)$$

En supposant $H_i \ll 1$ on peut alors effectuer un développement limité en t_{n+1} à l'ordre $p+1$ pour tous les termes $\mathbf{y}(t_{n+1} - H_i)$. On arrive tous calculs faits à la forme :

$$\mathcal{L}_p(\mathbf{y}_{n+1}) = \sum_{i=0}^{p+1} C_i \mathbf{y}_{n+1}^{(i)} \quad (2.67)$$

Sachant que la méthode BDF- p est consistante d'ordre p on peut dire que $C_i = 0 \ \forall i \in \llbracket 0, p \rrbracket$ et donc il vient en première approximation :

$$\mathcal{L}_p(\mathbf{y}_{n+1}) \approx C_{p+1} \mathbf{y}_{n+1}^{(p+1)} \quad (2.68)$$

où C_{p+1} désigne la constante d'erreur qui vaut :

$$C_{p+1} = \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!} \left(\sum_{i=1}^p a_i H_i^{p+1} \right)$$

On déduit alors une estimation de l'erreur locale \mathbf{e}_{n+1} introduite sur le dernier pas de temps via :

$$\mathbf{e}_{n+1} = C_{p+1} \mathbf{y}_{n+1}^{(p+1)} h_{n+1} \quad (2.69)$$

Le vecteur $\mathbf{y}_{n+1}^{(p+1)}$ est approximé par $(p+1)! \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{p+1}$, en accord avec la remarque faite plus haut. Dans l'implémentation de départ de cette méthode, on évaluait ensuite une erreur moyenne basée sur la moyenne des composantes de \mathbf{e}_{n+1} . Cela est apparu comme étant un choix peu pertinent après l'ajout des variables de turbulence, car celles-ci sont d'une nature totalement différentes de celle des variables de vitesse. De plus si l'une des variables est très peu erronée, cette approche va conduire à sous-estimer l'erreur moyenne sur les autres variables. On a donc fait le choix de réorganiser le vecteur contenant la solution courante en 4 vecteurs, rattachés respectivement à une unique variable, et notés \mathbf{e}_{n+1}^U , \mathbf{e}_{n+1}^V , \mathbf{e}_{n+1}^K , et \mathbf{e}_{n+1}^E . L'erreur retenue est finalement donnée par :

$$e_{n+1} = \max \{M(\mathbf{e}_{n+1}^U), M(\mathbf{e}_{n+1}^V), M(\mathbf{e}_{n+1}^K), M(\mathbf{e}_{n+1}^E)\} \quad (2.70)$$

où M désigne l'opérateur moyenne sur les composantes du vecteur argument. En comparant e_{n+1} à une erreur cible e_t , une stratégie adaptative peut être mise en place, dans le respect de la contrainte sur le swing-factor s . On remarquera que cet estimateur ne permet pas en soi de découpler l'erreur temporelle de l'erreur spatiale. Pour tendre vers l'évaluation de l'erreur temporelle, il est nécessaire de réduire au préalable l'erreur de discrétisation spatiale, par adaptation de maillage par exemple (cf. section 2.2.3).

Afin de tenir compte de l'ordre de grandeur des variables résolues, on a de plus implémenté la possibilité d'évaluer l'erreur de troncature sur une variable relativement à la norme moyenne de cette variable sur le domaine de calcul. Ce choix a été fait car une erreur absolue peut finalement se révéler élevée alors que l'erreur relative, qui fait numériquement plus de sens, demeure faible. Cependant si une variable prend en moyenne une valeur très faible dans le domaine de calcul, l'erreur relative peut devenir particulièrement grande alors que l'effet de la variable considérée sur l'écoulement reste moindre. On peut alors injustement empêcher l'augmentation du pas du temps. Pour contourner le problème un seuil sur la norme moyenne des variables est renseigné, de telle sorte que l'on travaille en erreur absolue si la norme moyenne de la variable est en dessous du seuil, et en erreur relative dans le cas contraire.

2) Indicateur de stabilité et adaptation de l'ordre :

La procédure d'adaptation en ordre est basée sur une heuristique, et son efficacité ne repose donc sur aucune démonstration mathématique. Initialement implémenté pour les écoulements laminaires visqueux, le principe en a été repris, à ceci près qu'une nouvelle-fois l'analyse a été conduite variable par variable, et non sur la solution globale. Le principe repose sur le fait qu'une instabilité se traduit numériquement par la croissance d'une oscillation haute fréquence. L'opération de dérivation permettant d'amplifier ces composantes hautes fréquences du signal, celles-ci seront d'autant plus visibles que l'opérateur de dérivation a été appliqué plusieurs fois. Le but est donc d'analyser les termes d'ordre élevé dans le développement en série de Taylor de $\mathbf{y}(t_n + h_{n+1})$ car si une instabilité commence à naître alors ces termes vont se retrouver amplifiés, au point de posséder une valeur plus élevée que des termes d'ordre moindre. Le développement de Taylor à l'ordre $p + 3$ donne :

$$\mathbf{y}(t_n + h_{n+1}) = \sum_{i=0}^{p+3} \frac{(h_{n+1})^i}{i!} \mathbf{y}_n^{(i)} = \sum_{i=0}^{p+3} \frac{\delta_i}{i!} \approx \sum_{i=0}^{p+3} (h_{n+1})^i \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^i \quad (2.71)$$

Le choix a été fait au préalable de s'intéresser seulement aux termes δ_{p-1} , δ_p , δ_{p+1} , δ_{p+2} et δ_{p+3} et de vérifier le séquençement suivant :

$$\delta_{p-1} > \delta_p > \delta_{p+1} > \delta_{p+2} > \delta_{p+3} \quad (2.72)$$

La méthode d'ordre p sera jugée stable si :

- toutes les méthodes d'ordre inférieures sont jugées stables.
- la séquence (2.72) est vérifiée pour $(N * 10)\%$ des 10 dernières itérations, où N est un entier à spécifier. Typiquement N est fixé à 5, afin de rendre l'adaptation d'ordre active mais suffisamment lisse.

Application des méthodes BDF à résolution du système URANS :

Les méthodes BDF ont donc été retenues pour effectuer l'intégration temporelle nécessaire au traitement des écoulements turbulents instationnaires résultant de l'approximation URANS.

Cela se justifie déjà par une implémentation simple de la méthode (cf. la construction simple des différences divisées rétrogrades), en dehors de ses aspects adaptatifs, car elle utilise la solution connue à des instants précédents, qu'il est donc possible de stocker à part du système à résoudre pour faire des économies de mémoire importantes. Cela permet également pour une précision en temps fixé, d'accélérer la construction des systèmes matriciels élémentaires,

comparativement à des méthodes de Runge-Kutta implicites qui nécessitent d'évaluer des quantités à des pas de temps intermédiaires où la solution demeure inconnue.

Concernant les aspects adaptatifs de la méthodes, leur implémentation est finalement très simple puisque l'évaluation des quantités C_{p+1} et $\mathbf{y}_{n+1}^{(i)}$ se fait à partir de quantités qui ont déjà été calculées et stockées pour évaluer le vecteur $\mathbf{y}_{n+1}^{(1)}$.

Les méthodes BDF se prêtent par ailleurs très bien à l'application de stratégie *PEC* (Prédiction - Évaluation - Correction) ([59], [50]), qui consiste à la première itération au temps t_{n+1} à estimer la nouvelle valeur du champs solution \mathbf{y}_{n+1} à partir d'un schéma linéaire multipas explicite, avant de retourner sur une méthode BDF- p . Cela permet en général, sous réserve que la solution ne varie pas trop vite dans le temps, de faire l'économie de plusieurs itérations pour la résolution du pas temps courant.

L'intérêt des méthodes BDF réside également dans le fait qu'elles sont applicables à des systèmes d'équations différentielles algébriques (DAE en anglais) semi-explicite d'index 2 (dont le système URANS incompressible avec modèle $k-\varepsilon$ standard est un exemple), et cela sans dégradation de l'ordre de convergence pour la variable d'index-2 qu'est la pression. Pour une introduction efficace aux systèmes de DAE et à la notion d'index, on pourra consulter la référence [60] ou l'ouvrage [61].

Le seul aspect limitant des méthodes BDF est qu'elles ne sont pas auto-démarrantes. Comme on l'a déjà dit, une méthode BDF- p nécessitent de connaître la solution à p instants précédents. En début de simulation il sera donc nécessaire de démarrer la résolution avec un schéma BDF-1. Si l'on souhaite introduire peu d'erreur sur le premier pas de temps, il faudra donc choisir un premier pas de temps de petite taille. Néanmoins la méthode BDF-2 étant absolument stable, l'adaptation d'ordre fera passer le schéma à l'ordre 2 dès la résolution du quatrième pas de temps, et non du deuxième afin de ne pas rendre la montée en ordre trop brusque en début de simulation.

2.2.3 Adaptation de maillage

Dans cette section nous présentons de manière synthétique le fonctionnement du module d'adaptation de maillage, et ses principales limitations pour les écoulements à l'étude. Pour une présentation beaucoup plus riche sur les méthodes d'éléments finis adaptatives, on se référera aux travaux de Ilinca [48] et de Hétu [62].

A) Intérêt d'utiliser un algorithme adaptatif :

A l'issue d'un calcul éléments finis et en supposant que l'algorithme utilisé a déjà été vérifié, il est encore nécessaire de se questionner sur la précision de la solution obtenue. Dans le cas d'un problème stationnaire, l'erreur commise proviendra alors de deux sources distinctes. En premier lieu, il y aura l'erreur de modélisation, introduite par toutes les approximations et hypothèses retenues et nécessaires à la formulation du modèle de turbulence utilisé. En deuxième lieu, il y aura l'erreur introduite par la discrétisation spatiale. Cette source d'erreur est elle-même la sommation de deux contributions : l'erreur nodale et l'erreur d'interpolation. S'il est impensable pour un problème réel de vouloir parvenir à dissocier directement toutes les sources d'erreur, il est par contre tout à fait envisageable de construire des outils dont on sait qu'ils agiront sur une source d'erreur particulière. Les méthodes d'adaptation de maillage constituent l'un de ces outils. Elles agissent exclusivement sur l'erreur de discrétisation. On distingue alors trois options pour contrôler cette erreur :

- Agir directement au niveau des noeuds : on parle alors de méthodes de relocalisation des noeuds (ou de méthodes r).
- Enrichir l'espace des fonctions d'interpolation : on parle de méthodes p .
- Agir sur la finesse du maillage en imposant une nouvelle taille caractéristique d'élément aux noeuds du maillage courant : on parle de méthodes h .

Dans notre cas le module d'adaptation de maillage utilise une méthode h . On en aborde le principe dans le paragraphe suivant. On a noté que l'ensemble de la procédure d'adaptation de maillage est automatisable, ce qui constitue un intérêt majeur pour l'utilisateur. De plus dans le cas d'un écoulement instationnaire l'adaptation de maillage prend également tout son sens. Il est en effet fort probable que durant la phase transitoire apparaissent et disparaissent successivement des zones critiques en termes de gradients à capturer. L'adaptation de maillage permettra de mailler finement et *temporairement* dans ces zones.

B) Principe général des méthodes h :

Le principe est d'utiliser un estimateur à posteriori de l'erreur, qui à partir de la solution obtenue va donc construire une estimation de l'erreur commise par rapport à la solution exacte (qui aurait dû être obtenue avec la modélisation retenue). Si le niveau d'erreur obtenu est considéré satisfaisant, on cherche ensuite à équidistribuer l'erreur sur l'ensemble du domaine de calcul, afin de tendre vers un maillage dit optimal pour la précision recherchée. Dans les faits, l'utilisateur vise plutôt un certain niveau de discrétisation plutôt qu'un niveau d'erreur, soit donc un certain nombre de noeuds dans le maillage afin de contrôler l'effort de calcul nécessaire à la résolution de l'écoulement. Toutefois le module d'adaptation utilisé fournit la norme de l'erreur estimée, pour chaque variable. On peut donc rapidement faire le lien entre le niveau d'erreur et le nombre de noeuds dans le maillage, pour proposer ensuite une réduction cible de l'erreur moyenne commise afin de raffiner le maillage et de tendre vers un nombre de noeuds cible. Le raffinement effectif du maillage est quant à lui piloté par ce qu'on appelle l'opérateur de transition, qui va calculer et affecter la nouvelle taille caractéristique des éléments à chaque noeud du maillage courant.

On présente plus spécifiquement dans la suite les aspects mathématiques de l'estimation d'erreur, de l'équidistribution de l'erreur, et enfin de l'opérateur de transition.

1) Estimation et équidistribution de l'erreur

L'estimation de l'erreur repose sur le fait que les dérivées spatiales de la solution exacte sont continues. En effet si la solution éléments finis présente une solution continue pour les variables résolues, leurs dérivées spatiales ne le sont en général pas à l'interface entre les éléments, car les dérivées au noeuds possèdent une interpolation linéaire et non quadratique. Or, dans le modèle du fluide newtonien le tenseur des contraintes est fonction du tenseur de gradient de vitesse. Obtenir des contraintes continues à l'interface entre les éléments nécessite donc d'avoir la continuité des dérivées de vitesse. Le principe d'estimation d'erreur repose donc sur la construction d'une solution considérée exacte et présentant des dérivées aux noeuds continues pour toutes les variables résolues. Pour ce faire on projette les dérivées dans l'espace de discrétisation quadratique utilisé pour les variables inconnues primales. Il est possible de procéder localement, ou globalement (soit sur le domaine de calcul complet). Dans les deux cas, les méthodes ont été développées par Zienkiewicz et Zhu [63]. Dans notre cas la technique de projection locale par moindres carrés a été retenue. La construction de l'estimation d'erreur exacte se fait alors noeud par noeud, en considérant des « patchs » composés des éléments entourant directement le noeud considéré. Selon que le noeud soit un noeud sommet ou un noeud milieu, la figure 2.7 illustre ce que sont ces « patchs ».

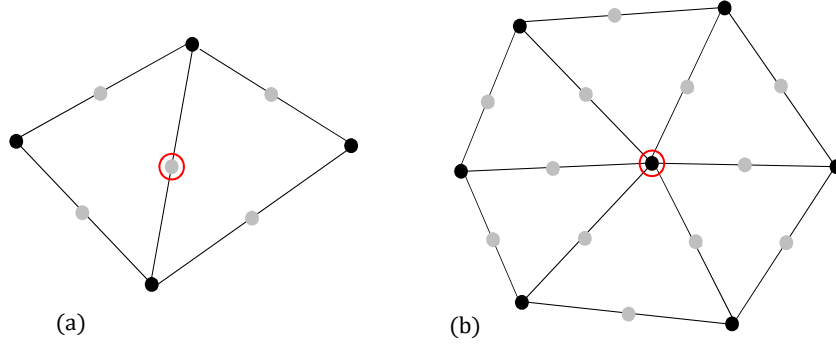


Figure 2.7 Patch pour un noeud milieu (a) et pour un noeud sommet (b)

Le calcul des valeurs nodales continues au noeud se fait par une reconstruction polynomiale des dérivées. En notant γ_h la quantité supposée scalaire issue de la solution éléments finis et γ cette quantité reconstruite on pose :

$$\gamma = \sum_{i=1}^6 P_i \alpha_i$$

avec $P = [1, x, y, xy, x^2, y^2]$ la base polynomiale quadratique pour les problèmes bidimensionnels en 2D, et $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6]$ un vecteur de scalaires, déterminés par la méthode des moindres carrés. Cela revient à minimiser la forme quadratique :

$$\int_{\Omega_p} (\gamma_h - \gamma)^2 dS \quad (2.73)$$

où Ω_p représente le « patch » considéré. La méthode des moindres carrés implique que l'on a plus spécifiquement :

$$\int_{\Omega_p} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (\gamma_h - \gamma)^2 dS = 0$$

pour $i = 1, 6$. Cela revient donc à résoudre, avec la convention d'Einstein, le système suivant :

$$\int_{\Omega_p} P_i P_j \alpha_j dS = \int_{\Omega_p} P_i \gamma_h dS \quad \Leftrightarrow \quad [A_{ij}] \alpha_j = B_i \quad (2.74)$$

Bien qu'il soit possible de résoudre analytiquement le système précédent il a été montré qu'il était plus efficace de traiter la minimisation de la forme quadratique (2.73) de manière discrète en évaluant celle-ci uniquement en des points « optimaux » [10], coïncidant avec les noeuds milieux des éléments et au nombre de N_0 . La forme quadratique discrète à minimiser

devient donc :

$$\sum_{i=1}^{N_o} [\gamma_h(x_i, y_i) - \gamma(x_i, y_i)]^2 \quad (2.75)$$

Selon le même principe que précédemment, cela revient donc à résoudre le système discret suivant :

$$\sum_{k=1}^{N_o} P_i(x_k, y_k) P_j(x_k, y_k) \alpha_j = \sum_{k=1}^{N_o} P_i(x_k, y_k) \gamma_h(x_k, y_k) \quad (2.76)$$

pour $i, j \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$.

Finalement, et selon que γ soit une quantité tensorielle, vectorielle, ou scalaire, l'erreur sera respectivement calculée comme suit :

$$\| e^{\underline{\gamma}_h} \|_{E,\Omega} = \left[\int_{\Omega} (\underline{\gamma} - \underline{\gamma}_h) : (\underline{\gamma} - \underline{\gamma}_h) \, d\Omega \right]^{1/2} \quad (2.77)$$

$$\| e^{\gamma_h} \|_{E,\Omega} = \left[\int_{\Omega} (\gamma - \gamma_h) \cdot (\gamma - \gamma_h) \, d\Omega \right]^{1/2} \quad (2.78)$$

$$\| e^{\gamma_h} \|_{E,\Omega} = \left[\int_{\Omega} (\gamma - \gamma_h)^2 \, d\Omega \right]^{1/2} \quad (2.79)$$

2) Opérateur de transition

L'opérateur de transition a pour objectif de déterminer les nouvelles tailles caractéristiques de maille à chaque noeud du maillage courant, après avoir équilibré l'erreur globale cible $\| e_{gc} \|$ sur le domaine de calcul. On a donc :

$$\| e_{gt} \|^2 = \left(\sum_{i=1}^{N_e} \| e_i \|^2 \right) \cdot \xi^2 = \| e_g \|^2 \xi^2 = N_e \| e_{at} \|^2$$

Où N_e désigne le nombre d'élément dans le maillage courant, $\| e_i \|^2$ l'erreur sur l'élément i , $\| e_g \|^2$ l'erreur globale effective, et $\| e_{at} \|^2$ l'erreur moyenne cible. Le scalaire ξ désigne lui le facteur de réduction de l'erreur cible. Connaissant le taux de convergence p_j de l'élément de Taylor Hood pour la variable résolue j (typiquement $p_j = 2$ pour u, v, k et ε , et $p_j = 1$ pour la pression p), on peut alors établir la nouvelle taille caractéristique h_{ij}^{new} de l'élément i pour la variable j par la relation :

$$h_{ij}^{new} = \left[\frac{\| e_{at} \|}{\| e_{ij} \|} \right]^{1/p_j} h_{ij} = \left[\frac{\xi \| e_g \|}{\| e_{ij} \| \sqrt{N_e}} \right]^{1/p_j} h_{ij} \quad (2.80)$$

La procédure actuelle au laboratoire veut ensuite que l'on pose :

$$h_i^{new} = \min_j h_{ij}^{new}$$

C) Précautions à prendre pour les écoulements instationnaires :

Il est particulièrement important de souligner ici que la méthode d'adaptation de maillage par projection locale telle que présentée ci-dessus s'adresse en premier lieu à des écoulements stationnaires, car comme l'a vu l'estimation d'erreur travaille sur la solution courante sans prendre en compte aucun effet d'histoire. Le processus n'est pas prédictif non plus en regard de la suite de la résolution. Le module considère donc chaque solution de travail comme une solution stationnaire. Il faudra donc faire particulièrement attention lors de la résolution d'écoulements avec une phase transitoire très marquée. Si l'adaptation de maillage n'est pas pratiquée suffisamment régulièrement on risque de dénaturer complètement le maillage lors des remaillages. En effet, et comme on le verra à la section 2.2.4 suivante, l'algorithme utilisé cherche à atteindre un nombre de noeuds cible et à le maintenir pendant les différents remaillages. Si le délai de rafraîchissement du maillage est trop long, au point que les zones critiques se soient considérablement déplacées, et si le nombre de noeuds est très proche de sa cible (on imposera donc $\xi = 1$), le nouveau maillage généré ne sera pas suffisamment adapté. On observera également une chute importante du nombre de noeuds. Pour le comprendre considérons un cas 1D représenté par la figure 2.8 ci-après :

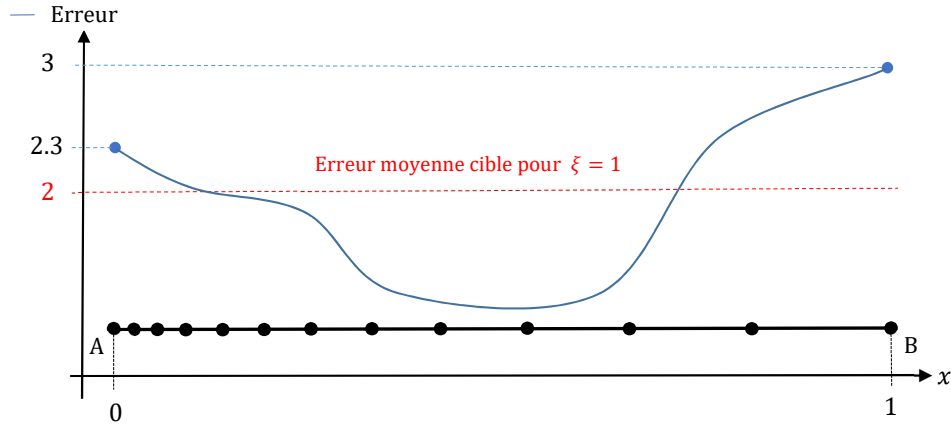


Figure 2.8 Problématique pour le remaillage en instationnaire

Comme en témoigne la figure, le maillage n'est pas du tout adapté à la solution au moment du remaillage, si bien qu'un seul remaillage à cet instant ne va pas permettre d'inverser com-

plètement la concentration du maillage, mais plutôt d'obtenir un maillage uniforme avec un nombre de noeud inférieur. Le processus de régulation du nombre de noeuds va en souffrir. Si en plus on se trouvait dans une phase où l'erreur en B tendait à croître encore davantage, le nouveau maillage ne sera pas suffisant et il est possible que la résolution échoue par divergence de la méthode de Newton. Quand on sait de plus l'importance d'être convergé en maillage pour les simulations avec loi de paroi [7], cela peut poser problème. Il faudra donc veiller à remailler fréquemment si l'on ne possède pas de connaissances à priori de l'écoulement, afin de conserver une solution convergée en maillage tout au long de la simulation.

2.2.4 Présentation de l'algorithme complet

Cette section va présenter de manière synthétique et schématique l'organisation de l'algorithme complet que nous avons utilisé et développé dans le cadre de ce projet de recherche. Pour commencer on précise que l'application éléments finis utilisée est composée de 3 modules distincts :

- Un module jouant le rôle de pré-processeur nommé *Amiral*. Toutes les données d'entrée du problème à traiter sont renseignées dans un fichier analysé par ce module. Ce module gère également la génération du maillage via un algorithme de maillage par front mobile, décrit dans [64], et l'interpolation d'une solution sur le maillage généré. L'algorithme d'interpolation existant a été conservé mais corrigé pour tenir compte de cas très particuliers. Succinctement, cet algorithme utilise une interpolation linéaire sur les sous-triangles de l'élément de Taylor-Hood de la figure 2.5. Chaque noeud du nouveau maillage est identifié comme appartenant à un sous-triangle de l'ancien maillage et les valeurs des variables à ce noeud sont alors interpolées linéairement sur le sous-triangle identifié. La figure 2.9 illustre ce qui vient d'être dit.

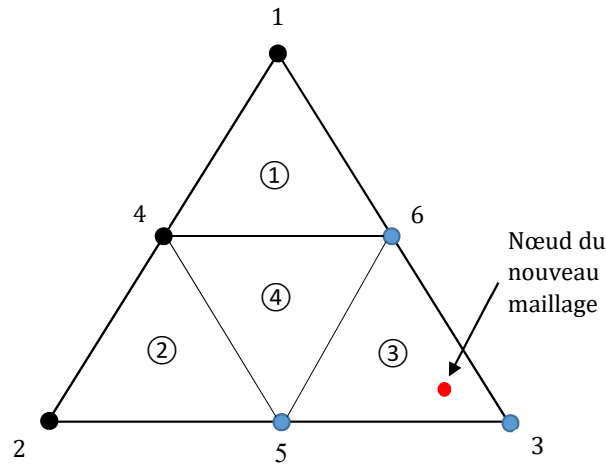


Figure 2.9 Principe de l'interpolation

- Un module de résolution du problème par méthode des éléments finis, nommé *Cadyf*. C'est au sein de ce module que figure l'algorithme monolithique de résolution des écoulements turbulents instationnaires. C'est donc ici que le plus gros du travail a été réalisé en implémentant le couplage des méthodes BDF avec l'approche URANS

existante.

- Un module d'adaptation de maillage nommé *Adapt*, permettant de définir un nouveau maillage pour le problème, selon la procédure vue à la section 2.2.3.

En s'appuyant sur cette structure tripartite et l'environnement Linux utilisé au laboratoire, une procédure permettant de piloter les simulations instationnaires, laminaires ou turbulentes, a été développée pour automatiser ces simulations et permettre d'insérer plusieurs cycles *Amiral-Caduf-Adapt* sur la durée T totale résolue. La durée ΔT d'un cycle peut être spécifiée comme fixe en imposant un nombre N_c de cycles sur la durée T . Il est également possible de spécifier via un fichier d'entrée (dont la trame figure en annexe B) les délimitations en temps des cycles. Par ailleurs et comme évoqué à la section 2.2.3, la procédure développée permet de contrôler le nombre de noeuds N_{node} dans le maillage en regard d'un nombre cible N_t , en construisant pour la réduction d'erreur cible ξ une relation de la forme $\xi = f\left(\frac{N_{node}}{N_t}\right)$. La procédure développée est grandement inspirée des travaux de Gammacurta [52].

On résume à la page suivante et sur la figure 2.10 le déroulement de la résolution d'un écoulement instationnaire.

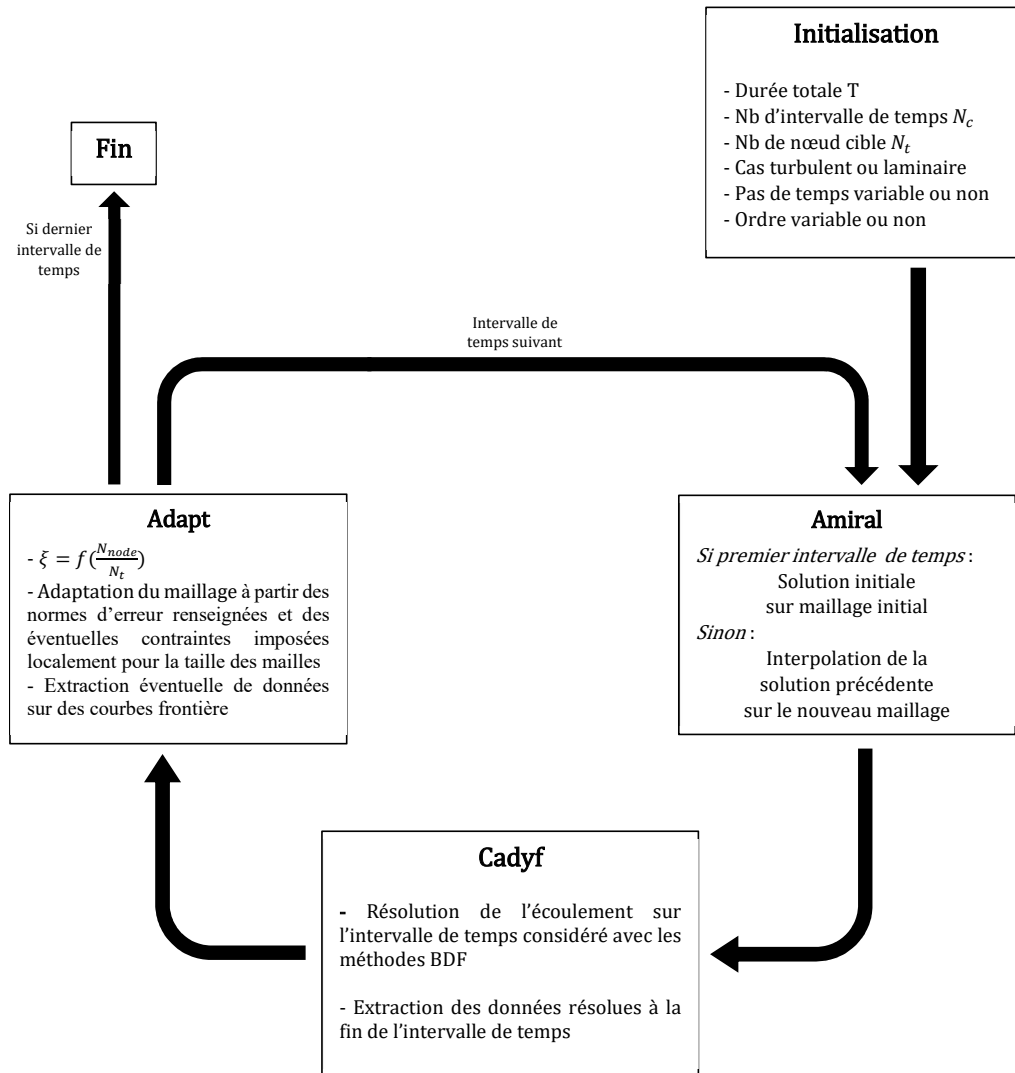


Figure 2.10 Organigramme synthèse de l'algorithme de traitement des écoulements instationnaires

CHAPITRE 3 VÉRIFICATION DU CODE ÉLÉMENTS-FINIS

Ce chapitre présente dans le détail les travaux de vérification qui ont été menés durant le projet de recherche. Ils s'appuient tous sur la méthode des solutions manufacturées (MMS en anglais) développée par Roache [65]. En premier lieu, on prend le temps de définir la méthode dans le cadre de la formulation URANS. On présente ensuite une première vérification du code dans un cadre stationnaire pour vérifier que les modifications apportées n'ont pas d'impact en stationnaire. Dans un troisième temps on présente les calculs de vérification qui ont été lancés pour vérifier l'implémentation des méthodes BDF en régime turbulent. On s'attarde également sur le comportement de l'estimateur d'erreur présenté à la section 2.2.2. On terminera ce chapitre en testant l'impact de l'adaptation du maillage en cours de simulation instationnaire, en considérant la valeur de l'erreur exacte mesurée en fin de simulation.

3.1 La méthode des solutions manufacturées

La méthode des solutions manufacturées est un outil très puissant pour vérifier que les équations que l'on souhaite traiter sont bien implémentées. En aucun cas cette méthode n'a été conçue pour juger des performances et de la pertinence d'une modélisation donnée. Cela relève de la validation. Néanmoins il est extrêmement important de pouvoir affirmer qu'un code résout correctement les équations avant d'envisager de s'en servir sur un cas d'étude réel. La méthode des solutions manufacturées est également un outil particulièrement intéressant pour traquer des coquilles résiduelles dans un code.

Le principe de la méthode est simple. L'utilisateur impose la forme mathématique que doivent prendre les variables à résoudre, puis il injecte ces formes dans les équations aux dérivées partielles traitées. De manière générale les formes proposées ne peuvent pas satisfaire le système d'équations à résoudre. Pour contourner ce problème on modifie le système d'équation en rajoutant des termes sources dans chaque équation. Dans le cas du système d'équations qui nous intéresse, cela veut dire que l'on va insérer un terme source dans les équations de vitesse, de turbulence et de pression. On note respectivement ces termes Q_U , Q_V , Q_K , Q_ε , et Q_P . On s'intéresse au système intrinsèque (Stand-1), où les équations des variables de

turbulence sont celles du système (Log-1). Cela donne finalement avec les termes sources :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_f \left(\frac{1}{S_t} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right) + \nabla(P_g) - \nabla \cdot \left[\left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0}} \right) \cdot (\nabla(\mathbf{U}) + \nabla(\mathbf{U})^T) \right] = Q_U \\ \rho_f \left(\frac{1}{S_t} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathcal{K} \right) - \nabla \cdot \left[\left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_k} \right) \nabla(\mathcal{K}) \right] - \left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_k} \right) \nabla(\mathcal{K})^2 \\ \quad - \frac{\mu_t}{R_{et0} C_k} e^{-\kappa} P(\mathbf{U}) + \rho_f^2 C_\mu R_{et0} C_k \frac{e^\kappa}{\mu_t} = Q_K \\ \rho_f \left(\frac{1}{S_t} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathcal{E} \right) - \nabla \cdot \left[\left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_\varepsilon} \right) \nabla(\mathcal{E}) \right] - \left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_\varepsilon} \right) \cdot (\nabla(\mathcal{E}))^2 \\ \quad - \rho_f C_\mu C_1 \frac{C_k}{C_\varepsilon} e^{\kappa - \varepsilon} P(\mathbf{U}) + \rho_f C_2 \frac{C_\varepsilon}{C_k} e^{\varepsilon - \kappa} = Q_\varepsilon \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = Q_P \end{array} \right. \quad (\text{MMS})$$

Où $Q_U = (Q_U, Q_V)$. On a volontairement ramené tous les termes des équations sauf les termes sources du côté gauche des égalités. On constate que si l'on pose les termes sources égaux aux résidus forts des équations (que constituent les membres de gauche) après injection de la solution manufacturée dans les équations, alors on obtient bien un résidu effectif nul pour chaque équation. Ainsi il est possible, en choisissant bien la solution à imposer, de n'activer que certains termes des équations, afin de vérifier que chacun des termes est fonctionnel de manière indépendante, ou presque. Entre autre on peut donc tester la fonctionnalité des dérivée spatiales conjointement ou non avec la dérivée temporelle. C'est le choix qui a été fait ici.

3.2 Vérification du code stationnaire en régime turbulent

Afin de vérifier que l'implémentation du couplage de l'algorithme RANS avec les méthodes BDF n'a pas eu d'impact dans un cadre stationnaire, nous avons traité la solution manufacturée mise au point par Eça et al. [66], et auparavant traitée par Navah dans [46] pour vérifier la formulation RANS monolithique qui faisait l'objet de ses travaux. Cette solution manufacturée se veut représenter une couche limite en développement sur une plaque, à une distance de 0.5 du bord d'attaque. On utilise notamment les variables de similitude suivantes :

$$\eta = \frac{\sigma(y - y_0)}{x} \quad \eta_\nu = \frac{\sigma_\nu(y - y_0)}{x}$$

Le cas est traité de manière adimensionnelle, et on pose $U_0 = 1$, $L_0 = 1$, $\rho_0 = 1$, $C_k = 1$, $C_\varepsilon = 1$, $\mu_0 = \frac{1}{R_e} = 10^{-6}$, et $\mu_{t0} = \frac{1}{R_{et0}} = 1$. Ces choix ont été fait afin de rester cohérent avec la forme adimensionnelle des équations développé au chapitre 2. On rappelle ci-après

les forme retenues pour les variables de vitesse, de turbulence et de pression.

$$U = erf(\eta) \quad \text{où } erf \text{ désigne la fonction erreur} \quad (3.1)$$

$$V = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} (1 - e^{-\eta^2}) \quad (3.2)$$

$$\mathcal{K} = \ln(k_{max}\eta_\nu^2 e^{-\eta_\nu^2} + \alpha_k) \quad (3.3)$$

$$\mathcal{E} = \ln\left(0.36 \frac{k_{max}^2}{\nu_{max}} e^{-\eta_\nu^2} + \alpha_\varepsilon\right) \quad (3.4)$$

$$P = 0.5 \left[\ln(2x - x^2 + 0.35) \ln(4(y - y_0)^3 - 3(y - y_0)^2 + 1.25) \right] \quad (3.5)$$

Les valeurs des coefficients qui apparaissent dans ces expressions sont données dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1 Coefficients pour la solution manufacturée de Eça et al.

σ	σ_ν	y_0	ν_{max}	k_{max}	α_k	α_ε
4	10	0.006	$10^3 \frac{\mu_0}{\rho_0}$	0.01	10^{-5}	10^{-3}

La figure 3.1 présente le domaine de calcul. On précise le type de condition limite associée à chaque frontière identifiée sur ce schéma dans le tableau 3.2.

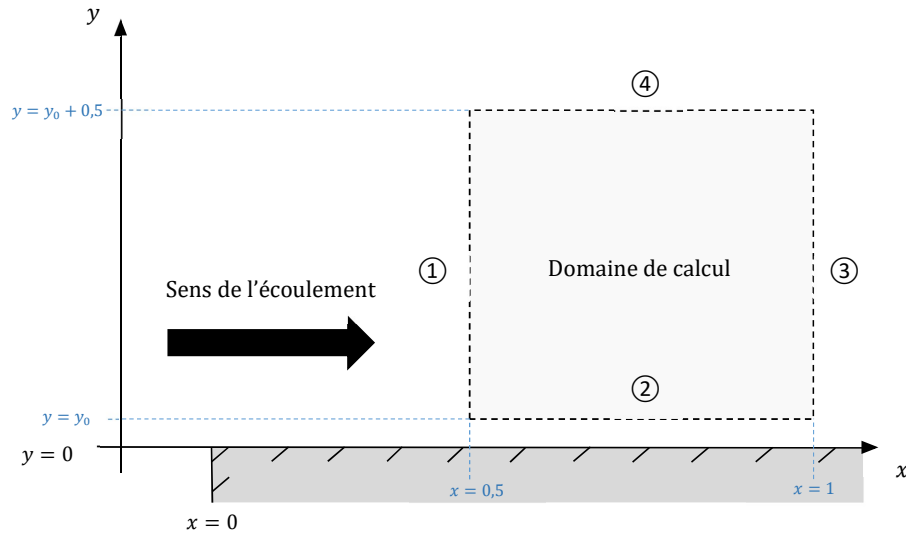


Figure 3.1 Schéma de la situation pour la solution manufacturée stationnaire

Tableau 3.2 Conditions limites pour la solution manufacturée stationnaire

Frontière	U	V	\mathcal{K}	\mathcal{E}
①	D_{user}	D_{user}	D_{user}	D_{user}
②	LDP_{user}	0.0	N_{user}	LDP_{user}
③	D_{user}	D_{user}	D_{user}	D_{user}
④	N_{user}	N_{user}	N_{user}	N_{user}

Où D_{user} et N_{user} désignent respectivement une condition limite de Dirichlet et de Neumann basées sur la solution manufacturée. Les conditions de Neumann s'accordent avec les formes faibles des équations que l'on a introduit en annexe A. Par exemple cela veut dire que pour la frontière ④ on aura explicitement les conditions limites suivantes :

$$Neumann(U) = \left\{ \left(\frac{1}{R_e} \mu + \frac{1}{R_{t_0}} \mu_t \right) \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right\}_{user} \quad (3.6)$$

$$Neumann(V) = \left\{ -P + \left(\frac{1}{R_e} \mu + \frac{1}{R_{t_0}} \mu_t \right) \frac{\partial V}{\partial y} \right\}_{user} \quad (3.7)$$

$$Neumann(\mathcal{K}) = \left\{ \left(\frac{1}{R_e} \mu + \frac{1}{R_{t_0} \sigma_k} \mu_t \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} \right\}_{user} \quad (3.8)$$

$$Neumann(\mathcal{E}) = \left\{ \left(\frac{1}{R_e} \mu + \frac{1}{R_{t_0} \sigma_\varepsilon} \mu_t \right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} \right\}_{user} \quad (3.9)$$

La frontière ② est quant à elle gouvernée par une loi de paroi standard à deux échelles de vitesse. Pour vérifier le bon fonctionnement de celle-ci, il est nécessaire d'ajouter un terme source dans les équations (2.47) et (2.49) pour annuler ce qui est calculé par la loi de paroi et finalement imposer la solution manufacturée. Concrètement cela donne :

$$\tau_p = -\rho_f u_\tau u_k + \{\rho_f u_\tau u_k\}_{user} + \left\{ \left(-\frac{1}{R_e} \mu + \frac{1}{R_{t_0}} \mu_t \right) \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right\}_{user} \quad (3.10)$$

$$\mathcal{E} - \alpha - \frac{3}{2} \mathcal{K} - \left\{ -\alpha - \frac{3}{2} \mathcal{K} \right\}_{user} = \{\mathcal{E}\}_{user} \quad (3.11)$$

Cette solution présente l'avantage d'activer toutes les dérivées spatiales en même temps, et de tester la fonctionnalité de la loi de paroi standard à deux échelles de vitesse (le scalaire y_0 représente la distance de raccordement à la paroi numérique). On se limite à ce cas puisque le code RANS monolithique à tester est supposé fonctionner parfaitement.

La simulation est réalisée pour un nombre de noeud croissant. Les maillages postérieurs au maillage initial sont obtenus via le module *Adapt*. Chaque adaptation de maillage a été pilotée par la considération de l'erreur sur $\nabla(U)$, $\nabla(\mathcal{K})$, $\nabla(\mathcal{E})$, $\nabla(\mu_t)$, et p . On présente sur la figure 3.2 les maillages initial et final.

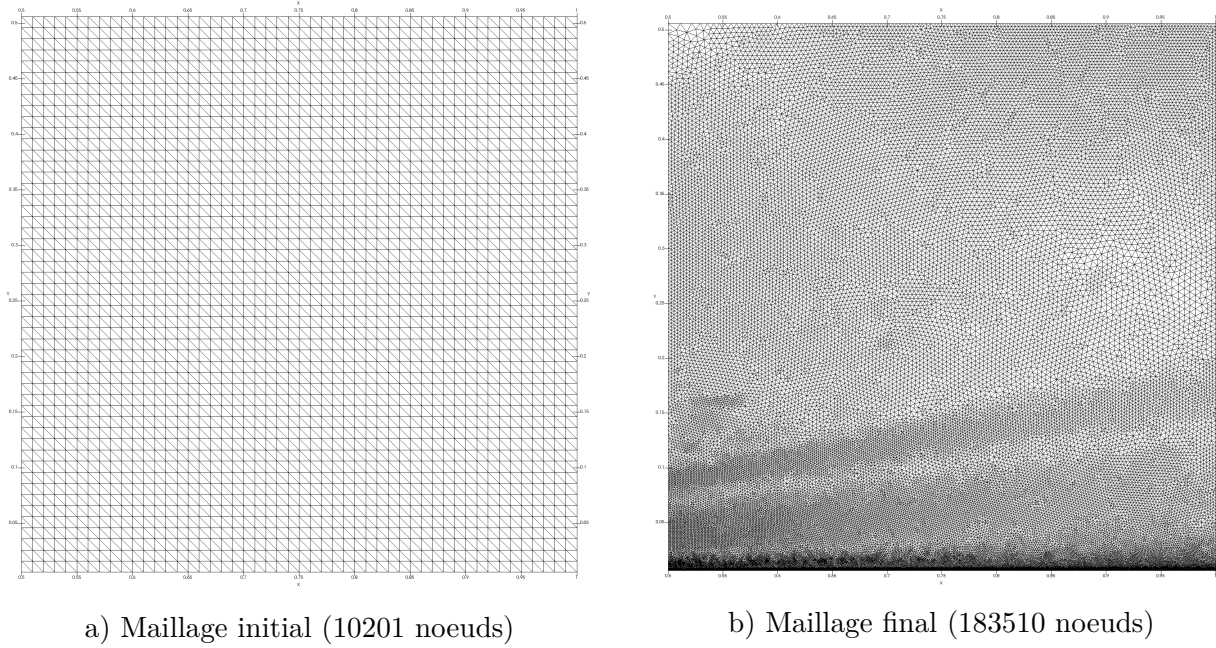


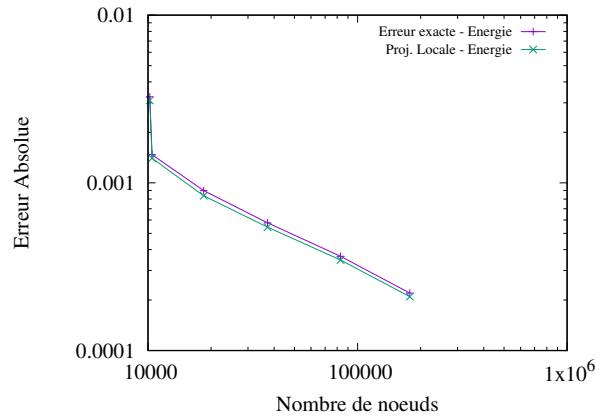
Figure 3.2 Maillage initial et final pour la MMS de la plaque plane

L'intérêt d'une telle vérification réside également dans le test des estimateurs de l'erreur spatiale, puisque tous les remaillages exécutés en cours de simulation instationnaire vont s'appuyer sur ces estimateurs, l'erreur exacte étant alors inconnue. On présente ci-après les graphes de convergence de la solution pour chaque variable résolue. Sur chaque graphe on retrouve deux courbes, une pour l'erreur vraie, et une seconde pour l'erreur estimée par projection locale. On a utilisé la norme énergie pour le calcul de l'erreur sur $\nabla(U)$, en posant $\underline{\gamma}_h = \underline{\tau}$ (avec $\underline{\tau}$ le tenseur des contraintes visqueuses effectif) dans l'équation (2.77). Le calcul de l'erreur sur $\nabla(\mathcal{K})$ et $\nabla(\mathcal{E})$ est réalisé par application de l'équation (2.78), en posant respectivement $\gamma_h = \nabla(\mathcal{K})$ et $\gamma_h = \nabla(\mathcal{E})$. On a également réalisé le calcul de l'erreur sur $\nabla(\mu_t)$ en posant $\gamma_h = \nabla(\mu_t)$. Enfin l'erreur sur la pression a été évaluée en posant $\gamma_h = p$ dans l'équation (2.78). On juxtapose également à ces graphes les graphes des indices d'efficacité correspondant Φ_i , où :

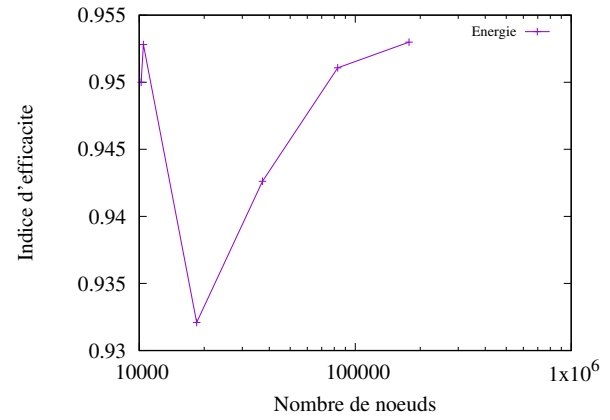
$$\Phi_i = \frac{\text{Erreur estimée pour la variable } i}{\text{Erreur exacte pour la variable } i}$$

Comme on peut le voir les estimations d'erreurs obtenues par la méthode de projection locale constituent une très bonne approximation de l'erreur vraie, d'autant plus fiable que le nombre de noeud est grand.

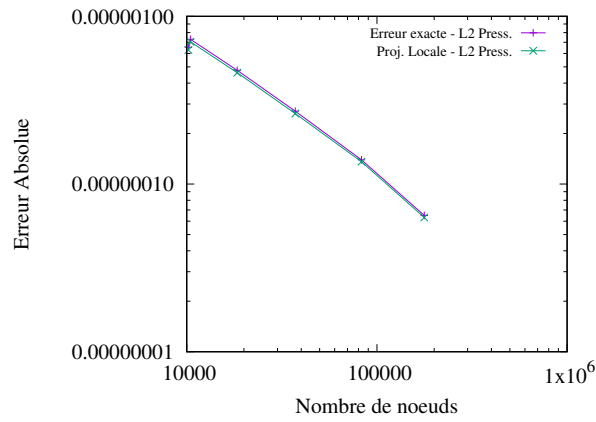
De plus on peut observer que l'on retrouve à peu de choses près le taux de convergence linéaire attendu pour la pression. Les résultats sont plus mitigés pour le taux de convergence quadratique attendue pour $\nabla(\mathbf{U})$ qui tend à converger linéairement vers la solution exacte. Les gradients de \mathcal{K} et \mathcal{E} ont un taux de convergence légèrement supérieur à 2, tandis que le gradient de μ_t a lui un taux de convergence très proche de 2. Il faut noter que cette étude de convergence s'est faite avec seulement 7 points de Gauss dans l'élément de référence. Or la forme des expressions de chaque variable n'est pas une fonction polynomiale des coordonnées spatiales. Les intégrales des formes faibles ne pourront donc pas être évalués exactement, ce qui peut justifier le niveau d'erreur encore important sur le maillage final. Une autre source d'erreur évidente est que la solution manufacturée n'est pas contenue dans l'espace de discrétisation. Néanmoins le comportement de l'erreur sur toutes les variables est globalement très satisfaisant : on peut donc affirmer que la formulation monolithique pour les simulations avec approximation RANS est vérifiée. Il faut maintenant vérifier le comportement des schémas BDF qui ont été couplés à la formulation RANS existante.



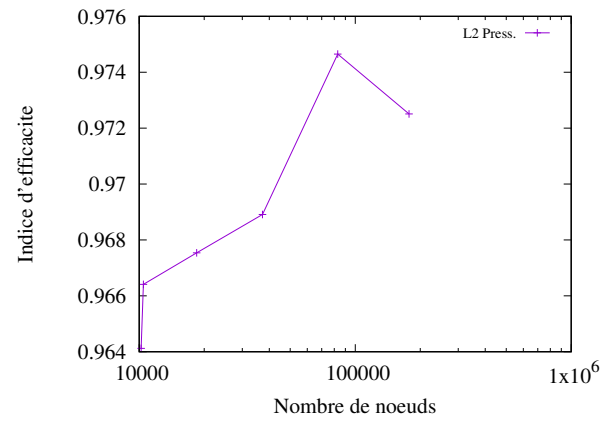
a) Erreur sur la vitesse



b) Indice d'efficacité pour la vitesse

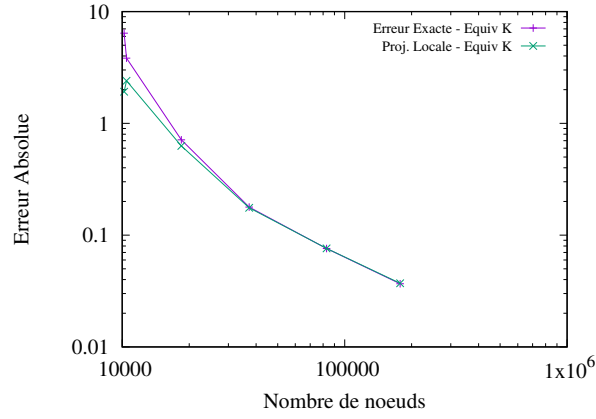
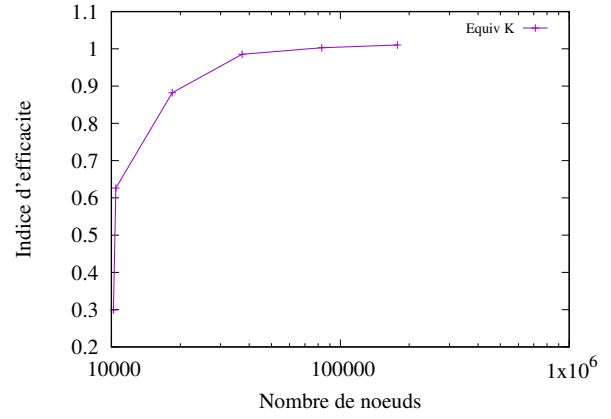
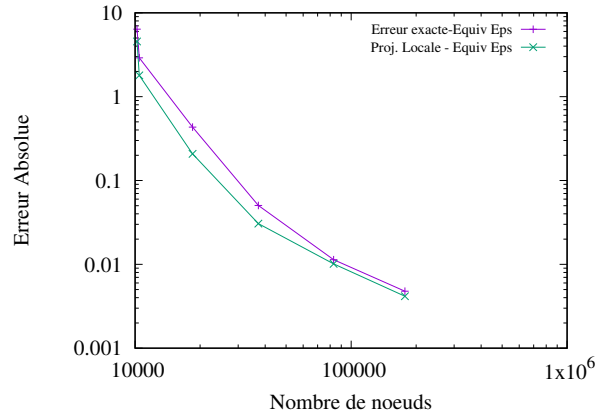
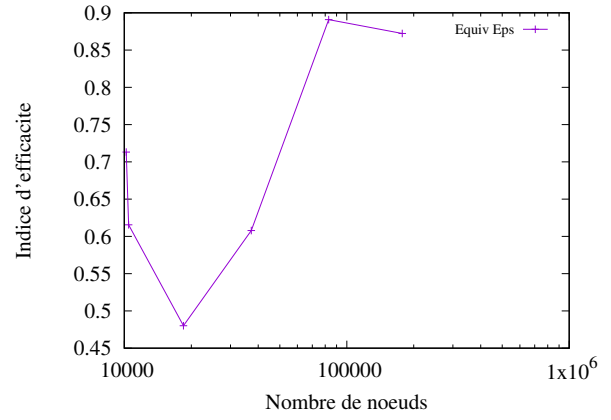
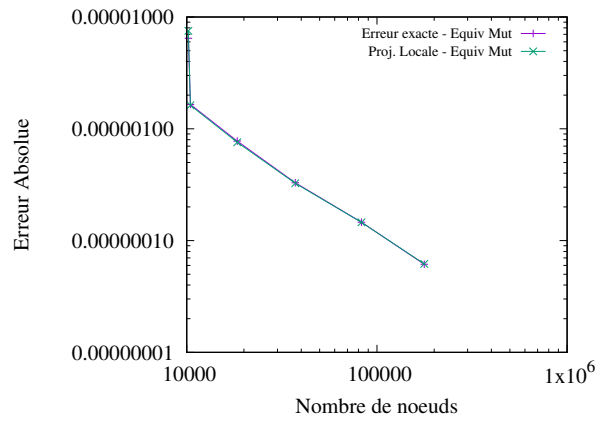
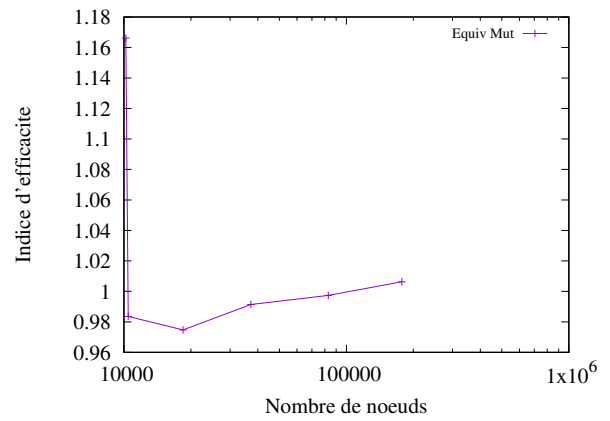


c) Erreur sur la pression



d) Indice d'efficacité pour la pression

Figure 3.3 Erreur et indice d'efficacité pour \mathbf{U} et P

a) Erreur sur \mathcal{K} b) Indice d'efficacité pour \mathcal{K} c) Erreur sur \mathcal{E} d) Indice d'efficacité pour \mathcal{E} e) Erreur sur μ_t f) Indice d'efficacité pour μ_t Figure 3.4 Erreur et indice d'efficacité pour \mathcal{K} , \mathcal{E} et μ_t

3.3 Vérification des schémas BDF en régime turbulent

Il est maintenant temps de s'intéresser à la vérification des méthodes BDF en régime turbulent. Pour se faire on souhaite principalement vérifier deux choses. En premier lieu il est nécessaire de vérifier si les taux de convergence théoriques discutés à la section 2.2.2 sont retrouvés numériquement, autant pour les variables standards que pour les variables logarithmiques. En deuxième lieu on va vérifier le comportement de l'estimateur d'erreur basée sur l'erreur de troncature locale, pour différents ordres de la méthode. La solution manufacturée choisie ici s'est voulue la plus simple possible, afin de pouvoir identifier assez rapidement la localisation d'une éventuelle coquille dans le code.

3.3.1 Vérification des ordres de convergence

La solution manufacturée proposée se veut approximer un écoulement de Poiseuille plan et tronqué, au sens où les zones de proche paroi ont été retirées du domaine de calcul. On se place de plus dans l'hypothèse d'un écoulement pleinement développé. L'intérêt de cette solution est qu'elle permet de s'affranchir des dérivées spatiales dans une direction choisie si l'on fait coïncider la direction de l'écoulement avec un axe principal du repère cartésien. Cela a permis d'accélérer grandement la phase de débogage. On a successivement traité le cas où l'écoulement était pleinement dans la direction x , et pleinement dans la direction y . Pour ne pas alourdir inutilement la présentation on limitera la présentation au premier cas. Tous les résultats présentés ici sont valables dans les deux cas.

On présente sur la figure 3.5 un schéma de la situation. Le type de condition limite, pour chaque variable et pour chaque segment de frontière identifié, est donné dans le tableau 3.3.

Tableau 3.3 Conditions limites pour la solution manufacturée instationnaire

Frontière	U	V	\mathcal{K}	\mathcal{E}
①	D_{user}	D_{user}	D_{user}	D_{user}
②	D_{user}	D_{user}	D_{user}	D_{user}
③	N_{user}	N_{user}	N_{user}	N_{user}
④	D_{user}	D_{user}	D_{user}	D_{user}

On a adopté la même terminologie pour les conditions limites que dans la cas de la section 3.2. Le but étant ici d'étudier l'erreur induite par la discrétisation temporelle, il est nécessaire

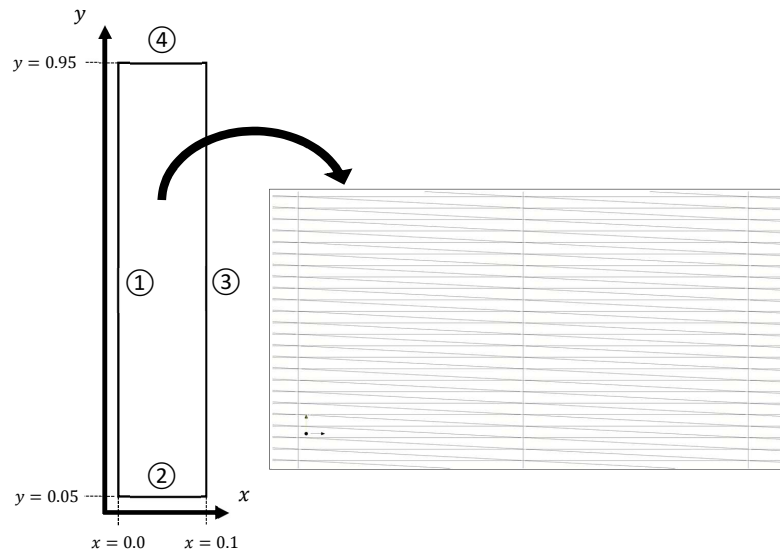


Figure 3.5 Schéma de la situation pour la solution manufacturée instationnaire

de prendre toutes les précautions pour que l'erreur spatiale soit la plus faible possible. Dans ce contexte plusieurs choix ont été faits :

- Le domaine de calcul est beaucoup plus allongé selon y , que selon x . Ce choix a été fait car c'est la discrétisation suivant y seule qui est pertinente ici (l'écoulement étant pleinement développé suivant x).
- Dans le même ordre d'idée, on a utilisé un maillage structuré dont les éléments sont très élancés suivant x , afin de discrétiser la direction y sans sur-discrétiser la direction x . Le maillage utilisé comporte 24500 noeuds.
- Le nombre de point de Gauss, pour les quadratures de Gauss-Legendre 2D sur l'élément de référence, est fixé à 42.
- La solution imposée pour toutes les variables est sous la forme d'un polynôme d'ordre 2 en y (sauf la pression P qui est fonction de x), pondéré en temps par une fonction

non polynomiale et uniquement dépendante du temps t :

$$U = (-6 y^2 + 6 y) (1 + 0.2 \sin(t)) \quad (3.12)$$

$$V = 0.0 \quad (3.13)$$

$$k = (0.4 y^2 - 0.4 y + 0.15) (1 + 0.2 \sin(t)) \quad (3.14)$$

$$\varepsilon = (0.036 y^2 - 0.036 y + 0.01) (1 + 0.2 \sin(t)) \quad (3.15)$$

$$P = (-0.1 x) (1 + 0.2 \sin(t)) \quad (3.16)$$

On a traité successivement le problème en variables standards et logarithmiques. Dans le cas standard, la seule quantité qui n'est pas polynomiale est μ_t mais dans le cas logarithmique, les résidus de \mathcal{K} et \mathcal{E} comportent de nombreux termes non polynomiaux, ce qui va introduire de nouveau de l'erreur spatiale. Les solutions exactes de ces mêmes variables ne sont également plus représentables dans l'espace de discrétisation quadratique utilisé, ce qui va introduire principalement de l'erreur d'interpolation. On a testé les méthodes d'ordre 1 à 5. Cependant la méthode d'ordre 5 n'est pas présentée car on atteint immédiatement la précision machine ou la saturation due à une erreur spatiale devenue prépondérante.

Pour chaque méthode BDF on simule une durée de 6.4 unités de temps, soit un peu plus d'une période sur le sinus. Cette durée est simulée 3 fois par méthodes, pour un nombre de pas de temps N_{step} croissant : 50, 125, et 200. Le calcul de l'erreur a cette fois-ci été fait sur U , V , k , et ε , en utilisant les mêmes normes d'erreur que pour la solution manufacturée stationnaire. Les figures 3.6 et 3.7 présentent respectivement les graphes de convergence dans le cas des variables standards et des variables logarithmiques. Pour chaque courbe de convergence on a réalisé une régression de type puissance. On a donc cherché les coefficients réels α_{ij} et β_{ij} optimaux et tels que l'erreur $\|e\|_{ij}$ sur la variable i et pour la méthode BDF- j soit de la forme :

$$\|e\|_{ij} = \alpha_{ij} (N_{step})^{-\beta_{ij}}$$

Les tables 3.4 et 3.5 récapitulent les valeurs des β_{ij} , et fournissent également le coefficient de corrélation R_{ij} associée à chaque régression.

Comme on peut le constater on retrouve plutôt bien les ordres de convergence attendus pour chaque méthode BDF. On voit cependant dans ces graphes des phénomènes que l'on peut interpréter mathématiquement. Dans le cas des variables standards, notre choix de solutions manufacturées conduit à ce que la source d'erreur principale soit due à l'intégration en temps. Le pas de temps étant imposé, l'erreur maximale va être commise vers les instants $t_1 = \frac{\pi}{2}$ et $t_2 = \frac{3\pi}{2}$. Or la formule de Taylor pour une fonction f , jusqu'au second ordre puis dérivée une

fois, donne :

$$f'(t - t_0) \approx f'(t_0) + f^{(2)}(t_0) \cdot (t - t_0) + o(t - t_0)^2$$

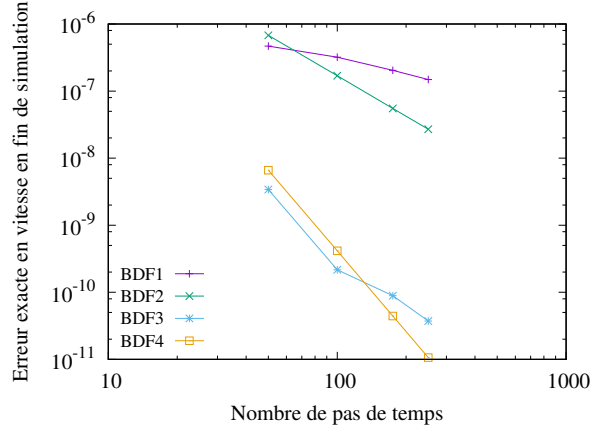
En raisonnant par analogie avec l'interpolation de Newton, une méthode BDF d'ordre 1 considérera uniquement le premier terme à droite de l'équation précédente. Vers les instants t_1 et t_2 la prédiction du BDF1 sera donc assez bonne pour un pas de temps intermédiaire, alors qu'une méthode BDF d'ordre 2 tiendra compte du second terme de droite. Or $f^{(2)}(t_1) \cdot (t - t_1) = -\sin(t_1) * h = -h$, avec h le pas de temps fixe utilisé. Ce terme peut devenir prépondérant et fausser la prédiction de la dérivée temporelle. Pour une valeur intermédiaire de h il est donc possible que la résolution en BDF-1 soit plus performante que la résolution en BDF-2, d'où le croisement des courbes de convergence dans le cas des variables standards. Le même phénomène s'observe pour les ordres 3 et 4.

Par ailleurs dans le cas logarithmique on voit qu'on ne peut plus séparer l'erreur spatiale de l'erreur temporelle, comme en témoigne les seuils qui apparaissent pour l'ordre 4, et aussi l'ordre 3 dans le cas de la variable k .

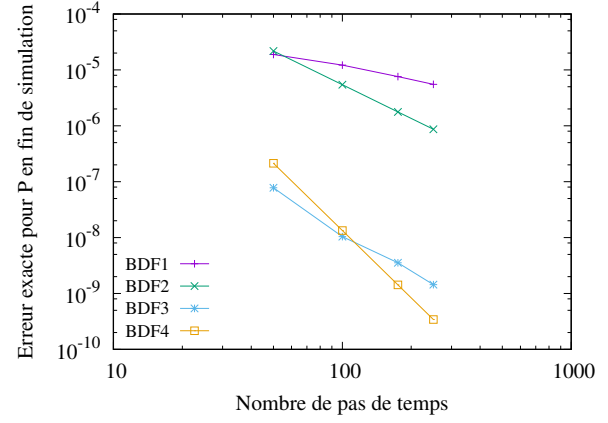
Enfin on notera que l'erreur sur la variable k est toujours supérieure à celle commise sur ε . On peut l'expliquer par la formulation des équations aux dérivées partielles. Dans le cas du système (Stand-1) on voit que le terme de production dans l'équation de ε va être polynômial, alors que celui de l'équation de k ne l'est pas à cause de la présence μ_t .

Tableau 3.4 Ordres de convergence et coefficients de corrélation - cas standard

	BDF-1		BDF-2		BDF-3		BDF-4	
	β	R	β	R	β	R	β	R
Vitesse	0.714	0.988	2.002	0.999	2.730	0.961	3.996	0.999
Pression	0.764	0.993	2.002	0.999	2.436	0.993	3.997	0.999
k	0.673	0.982	2.001	0.999	2.944	0.934	3.995	0.999
ε	0.614	0.969	2.000	0.999	3.140	0.909	3.993	0.999



a) Convergence des BDF pour la vitesse



b) Convergence des BDF pour la pression

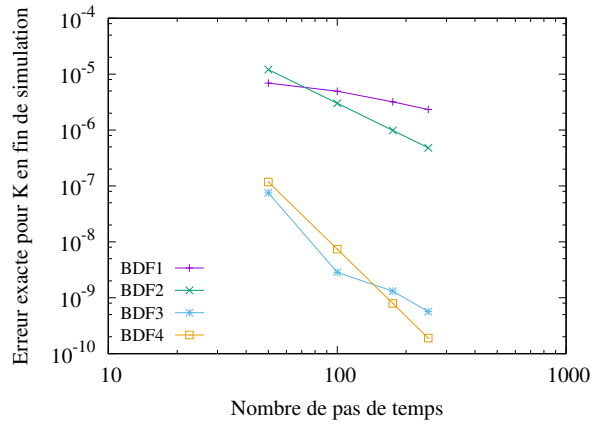
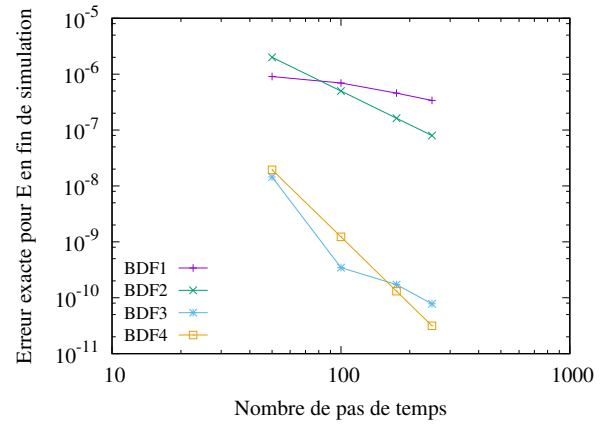
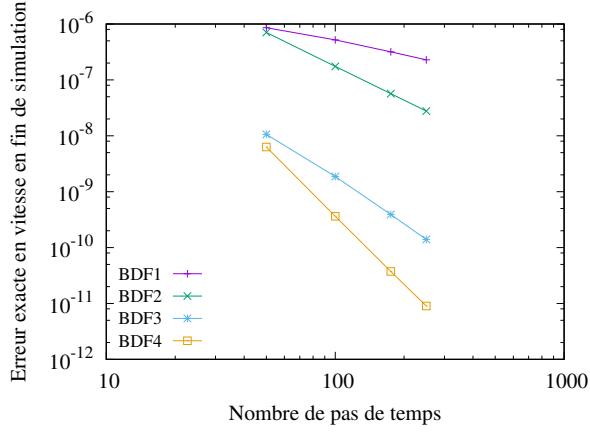
c) Convergence des BDF pour k d) Convergence des BDF pour ε

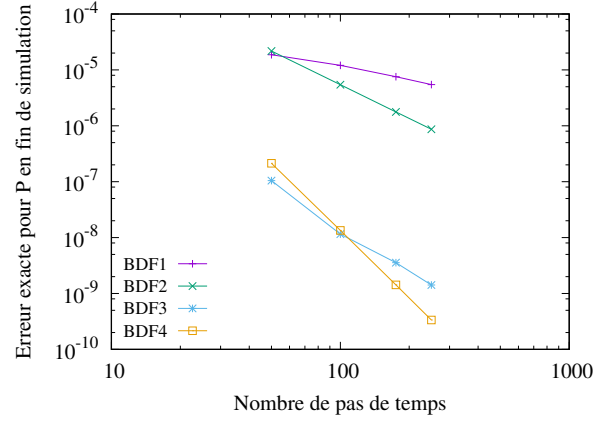
Figure 3.6 Étude des ordres de convergence des BDF avec variables standards

Tableau 3.5 Ordres de convergence et coefficients de corrélation - cas logarithmique

	BDF-1		BDF-2		BDF-3		BDF-4	
	β	R	β	R	β	R	β	R
Vitesse	0.822	0.997	2.011	0.999	2.691	0.999	4.070	0.999
Pression	0.767	0.993	2.002	0.999	2.633	0.992	4.008	0.999
\mathcal{K}	0.922	0.999	2.036	0.999	/	/	/	/
\mathcal{E}	0.921	0.999	2.040	0.999	2.971	0.999	/	/



a) Convergence des BDF pour la vitesse



b) Convergence des BDF pour la pression

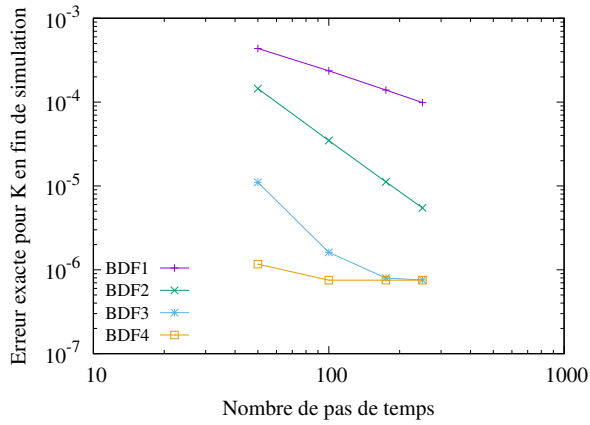
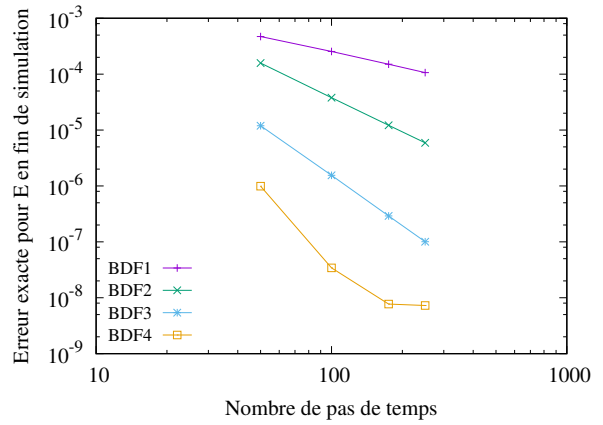
c) Convergence des BDF pour k d) Convergence des BDF pour ε

Figure 3.7 Étude des ordres de convergence des BDF avec variables logarithmiques

3.3.2 Vérification du comportement de l'estimateur d'erreur

Il nous reste à vérifier que l'estimateur d'erreur se comporte correctement. Pour ce faire on utilise la propriété du sinus, dont les dérivés impaires par rapport au temps sont des cosinus, tandis que les dérivés paires sont des sinus. Vu que l'estimateur d'erreur de troncature, pour une méthode BDF- p , repose sur l'évaluation de la dérivée $p + 1$ au temps courant, il est possible de prédire le comportement que doit avoir l'estimateur d'erreur selon que p est pair ou impair. Si p est pair alors on aura :

$$\|e\|_{t_n} \propto \cos(t_n)$$

Si p est impair on devra en revanche avoir :

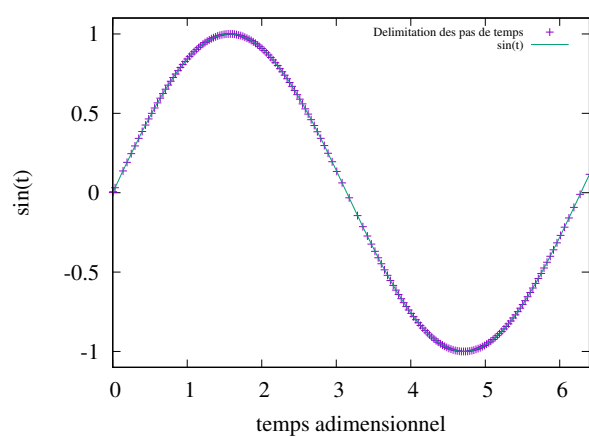
$$\|e\|_{t_n} \propto \sin(t_n)$$

En particulier si $t_n = \frac{\pi}{2}$ ou si $t_n = \frac{3\pi}{2}$ l'erreur sera considérée comme maximale si p est impair, ce qui conduira à un raffinement local du pas de temps, tandis que l'erreur sera considérée comme minimale si p est pair, et on aura localement une augmentation du pas de temps.

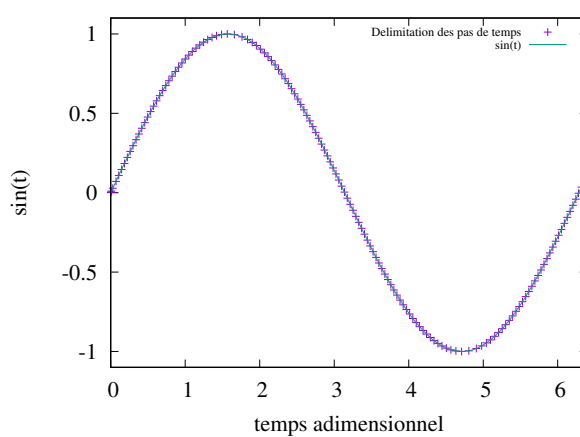
En guise de test on utilise les méthodes BDF-1 à BDF-4 en pas de temps variable. La figure 3.8 représente la superposition d'un sinus avec la délimitation des pas de temps dans le cas des méthodes BDF retenues.

On retrouve bien le comportement attendu. On observe bien dans le cas du BDF-2 une augmentation locale du pas de temps aux temps t_n évoqués plus haut, tandis que le pas de temps se réduit notablement à ces mêmes instants pour les méthodes BDF-1 et BDF-3. On remarquera également une concentration des premiers pas de temps de plus en plus marquée lorsque l'ordre augmente. C'est la conséquence du swing-factor maximal que nous avons évoqués dans la section 2.2.2, qui tend vers l'unité pour les ordres élevés de la méthode BDF. Enfin on constate à fortiori que l'adaptation du pas de temps basée sur l'estimateur d'erreur par troncature est fonctionnelle.

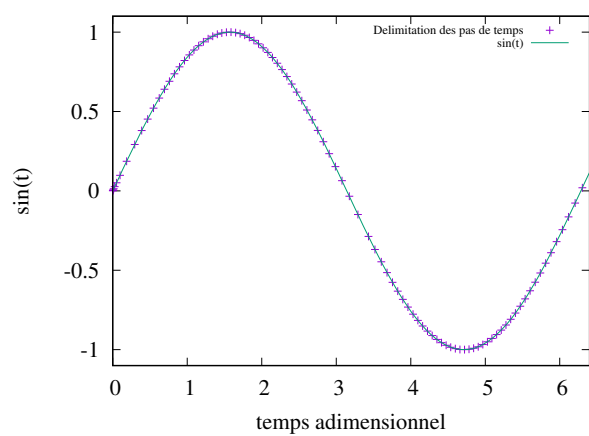
A la vue de ce résultat on peut néanmoins émettre des réserves sur la fiabilité de cet estimateur d'erreur. La méthode BDF-2 étant absolument stable, l'algorithme d'adaptation d'ordre va permettre de monter à l'ordre 2 dès le 4ème pas de temps résolu (pour lisser la montée en ordre). Or dans le cas d'un écoulement pulsé ou périodique, la variation en temps des variables de vitesse sera justement sinusoïdale, et il en sera peut-être de même pour les variables de turbulence. Dans ce cas l'utilisation de l'estimateur d'erreur par troncature conjointement à une méthode d'ordre 2 va entraîner une mauvaise gestion du pas de temps. Toutefois cette remarque est elle-même à prendre avec précaution puisque l'estimation d'erreur se faisant variable par variable, un simple déphasage des variations en temps sur les différentes variables résolues permettra de ne pas être trop pénalisé par cette faiblesse de l'estimateur d'erreur. Finalement, l'estimateur d'erreur par troncature conduit souvent à une surestimation de l'erreur [56].



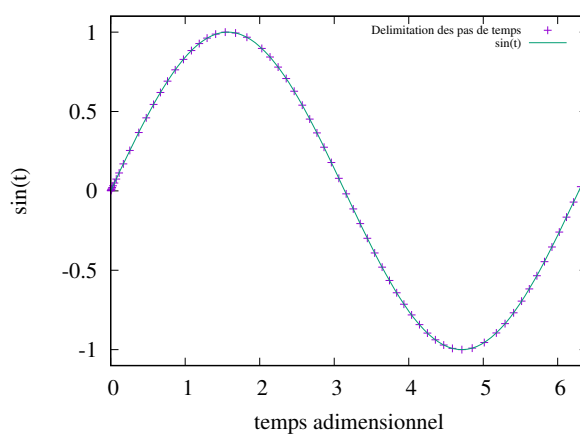
a) Cas du BDF-1



b) Cas du BDF-2



c) Cas du BDF-3



d) Cas du BDF-4

Figure 3.8 Comportement de l'estimateur par troncature pour différents ordres des BDF

3.3.3 La procédure d'adaptation de maillage

Pour terminer ce chapitre nous allons étudier brièvement le comportement de la procédure d'adaptation de maillage sur la solution manufacturée précédente. Il faut bien comprendre que cette procédure n'est pas entièrement automatique puisque l'utilisateur doit spécifier les instants auxquels il souhaite effectuer l'adaptation du maillage. On a déjà souligné l'importance de pratiquer cette adaptation assez fréquemment pour ne pas dénaturer trop fortement le maillage au cours du temps et conserver un nombre de noeuds sensiblement constant. Il peut cependant être assez difficile à priori d'évaluer la fréquence optimale de remaillage. En ce sens il paraît prudent de commencer par un remaillage très fréquent. Mais chaque remaillage se traduit par une interpolation linéaire de la solution qui va introduire de l'erreur d'un maillage à l'autre, de sorte que la solution initiale ne vérifiera pas la condition d'incompressibilité. Chaque remaillage se traduit également par un retour à l'ordre 1 de la méthode BDF. Une bonne précaution veut donc que le premier pas de temps suivant un remaillage soit très petit pour réajuster rapidement la solution.

Afin de se faire une idée des performances de l'adaptation de maillage au niveau de l'erreur introduite, on a de nouveau simulé 6.4 secondes de la solution manufacturée de la section 3.3 en activant l'adaptation du pas de temps et de l'ordre de la méthode. La simulation a été faite trois fois avec les variables logarithmiques pour étudier l'impact du remaillage sur l'erreur spatiale. Dans le premier cas on résout sur le maillage fixe de 24500 noeuds utilisé plus tôt. Dans le second cas on pratique un remaillage toutes les 0.2 unité de temps, en essayant de conserver un nombre de noeuds similaire au cours du temps. Dans le dernier cas on remaillage également mais seulement toutes les 0.4 unité de temps. L'adaptation de maillage est pilotée par la méthode de projection locale. L'erreur par rapport à la solution exacte est mesurée dans les trois cas en fin de simulation. Le tableau 3.6 fournit les valeurs des erreurs pour chaque variable et chaque cas. Le graphe 3.9 présente l'ordre de la méthode au cours du temps pour le maillage fixe et le remaillage toutes les 0.2 unités de temps.

Tableau 3.6 Comparaison des erreurs avec et sans remaillage

Erreur exacte	Maillage fixe	Remaillage 0.2 u. de t.	Remaillage 0.4 u. de t.
Vitesse	4.969 E-7	3.846 E-6	3.819 E-6
k	1.762 E-5	1.944 E-5	1.877 E-5
e	2.076 E-5	2.179 E-5	2.112 E-5

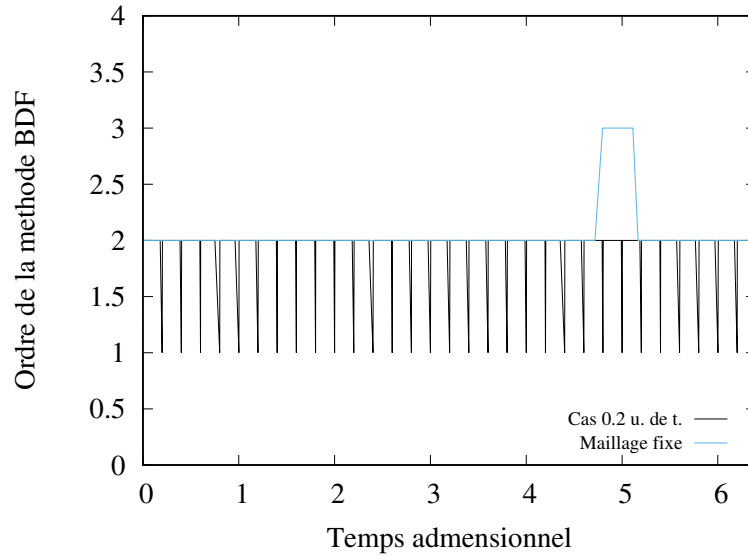


Figure 3.9 Variation de l'ordre de la méthode au cours du temps

On présente également dans le tableau 3.7 le temps de calcul total (somme des temps passés dans Amiral, Cadyf et Adapt) pour se faire une idée de l'augmentation du temps de calcul requis pour une simulation comprenant des remaillages. Pour ce faire on a bien évidemment utilisé un seul poste de calcul avec des ressources de calcul fixes pour les 3 cas.

Tableau 3.7 Temps de calcul total pour chaque simulation

	Maillage fixe	Remaillage 0.2 u. de t.	Remaillage 0.4 u. de t.
Temps de calcul (s)	316.26	1570.72	876.53

On donne enfin à titre indicatif sur le graphe 3.10 la variation du nombre de noeuds pour les deux cas avec remaillage. On constate que l'on est en moyenne très légèrement au dessus des 24500 noeuds du maillage fixe.

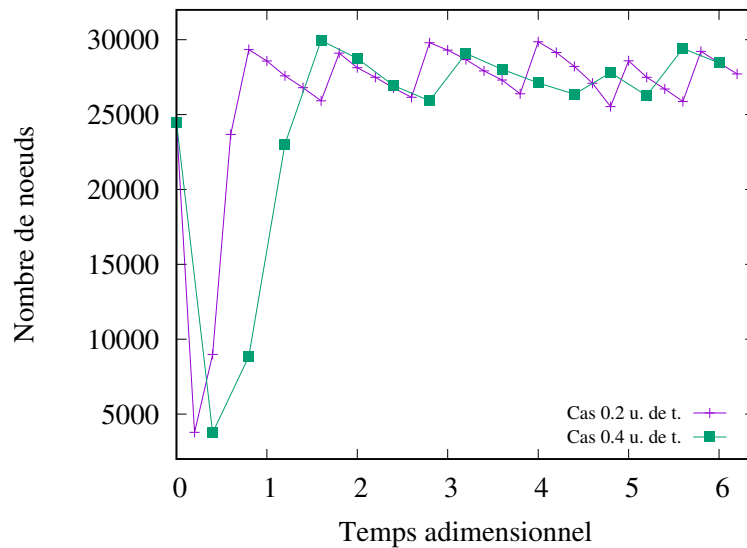


Figure 3.10 Évolution du nombre de noeuds pour les cas avec remaillage

Conclusion :

Avant toute chose il faut se souvenir que le maillage fixe utilisé possède déjà un nombre de noeuds important, et que ce maillage a été choisi pour réduire le plus possible l'erreur spatiale dans le cas des variables standards, et effectuer les tests de taux de convergence des BDF. Le nombre de noeuds dans les deux cas de remaillage est resté proche du nombre de noeuds du maillage fixe. Il ne faut donc pas nécessairement s'attendre à une diminution de l'erreur exacte dans les cas avec remaillage. Comme on l'a dit cette étude permet surtout de se faire une idée de l'erreur introduite par les interpolations linéaires lors des remaillages, et les retours à l'ordre 1 pour l'intégration temporelle. On constate d'ailleurs bien qu'augmenter le nombre de remaillage conduit à une légère augmentation de l'erreur exacte sur les variables résolues. Comparativement à la résolution sur maillage fixe, les cas avec remaillages conduisent à une augmentation de l'erreur exacte, assez notable pour le champs de vitesse. Néanmoins l'erreur sur les variables de turbulence est sensiblement constante pour les 3 cas. Ces résultats sont donc très encourageants car l'erreur introduite par les remaillages semble rester faible.

Cependant le tableau 3.7 montre que le temps de calcul augmente rapidement en pratiquant des remaillages. Cela s'explique par le fait que la génération d'un maillage n'est pas gratuite en temps, car l'algorithme de génération de maillage utilisé ne bénéficie pour le moment pas du calcul parallèle. L'interpolation n'est pour le moment pas parallélisée non plus. Il faut aussi se souvenir que le pas de temps est réinitialisé consécutivement à un remaillage.

On retiendra finalement que la procédure de remaillage se comporte conformément à nos attentes, bien que sur un cas comme celui-ci elle ne soit pas utile pour réduire l'erreur commise.

CHAPITRE 4 VALIDATION SUR CAS TYPE

L'objet de ce dernier chapitre est de mettre en pratique l'ensemble de ce qui a été implémenté et vérifié au chapitre 3. Nous avons pour cela retenu 3 cas type, largement étudiés tant expérimentalement que numériquement dans la littérature. Dans un premier temps, nous étudierons l'écoulement dans un canal présentant une marche descendante. Ce cas sera représentatif d'un écoulement confiné. Dans un second temps, on traitera l'écoulement autour d'un cylindre carré, afin d'étudier le décollement d'une couche limite induit par la géométrie dans le cadre d'un écoulement libre périodique. Enfin on terminera par la présentation de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire, afin d'étudier le comportement de l'algorithme instationnaire conjointement avec une condition de tangence. Ce sera également un bon moyen d'évaluer le comportement du modèle $k-\varepsilon$ standard dans le cadre du décollement d'une couche limite induit par un gradient de pression adverse. Les travaux de Patel en 1985 [67] ont montré que le modèle $k-\varepsilon$ dans sa forme standard présentait des faiblesses pour ce genre d'écoulement.

4.1 La marche de Kim

4.1.1 Présentation du cas

Ce cas est particulièrement célèbre, et il a été traité à bien des reprises tant expérimentalement, à commencer par Kim *et al.* [68] en 1980, que numériquement [69].

Comme nous l'avons dit plus tôt les travaux présentés dans ce mémoire possèdent beaucoup d'aspects similaires avec ceux de Gammacurta [52], surtout en ce qui concerne la procédure de remaillage en cours de simulation instationnaire. Il nous a donc paru judicieux de traiter la marche de Kim avec exactement le même nombre de Reynolds (47625) et les mêmes conditions limites permanentes que celles utilisées dans son mémoire. Ce cas avait à l'origine été traité au laboratoire par Ilinca [48] dans un contexte stationnaire et avec une approche découplée, au même nombre de Reynolds et mais pour deux valeurs du nombre de Reynolds turbulent (423 et 5000). Nos conditions limites sont précisées à la table 4.1. La géométrie du domaine est également identique et rappelée à la figure 4.1.

Comme on l'avait évoqué plus tôt, l'aspect monolithique de la formulation ne permet pas d'imposer un échelon de vitesse en entrée, sous peine de divergence immédiate de la méthode de Newton, et même des itérations de type Picard. On a donc imposé une rampe de vitesse

en entrée, caractérisée par la fonction $f(t)$ suivante :

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

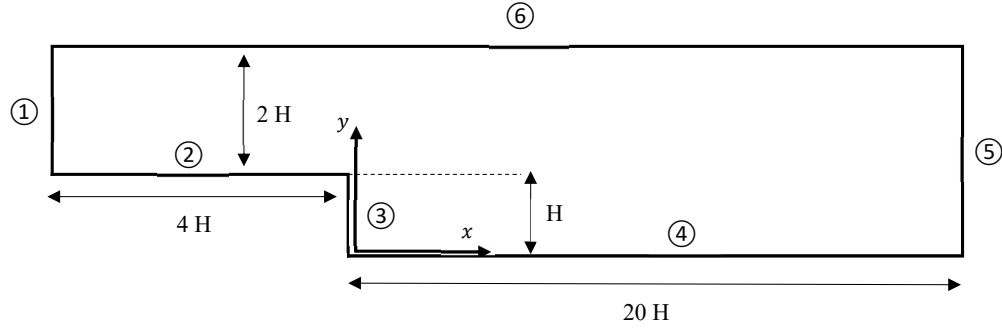


Figure 4.1 Géométrie retenue - marche de Kim

Tableau 4.1 Conditions limites - marche de Kim

Frontière	U	V	\mathcal{K}	\mathcal{E}
①	$1.0 f(t)$	0.0	$\ln(0.005)$	$\ln(0.01)$
②	ldp	0.0	ldp	ldp
③	0.0	ldp	ldp	ldp
④	ldp	0.0	ldp	ldp
⑤	$-p + 2 \left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0}} \right) \frac{\partial U}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$	$\left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_k} \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} = 0$	$\left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = 0$
⑥	ldp	0.0	ldp	ldp

Par la notation « ldp » on désigne que la condition limite est pilotée par la loi de paroi standards à deux échelles de vitesses, conformément aux équations (2.47), (2.48) et (2.49). Les frontières 2, 3, 4 et 6 utilisent cette loi de paroi. On précise dans la table 4.2 les distances de raccordement d qui ont été utilisées.

La durée simulée est de 70 unités de temps adimensionnelles. On rappelle que le temps caractéristique est basé sur la convection et vaut $t_0 = \frac{L_0}{U_0}$ (soit $St = 1$), où L_0 correspond à la

Tableau 4.2 Distance de raccordement pour les frontières avec loi de paroi

Frontière	d/H
②	0.04
③	0.05
④	0.025
⑥	0.05

hauteur de la marche, fixée à l'unité car on adimensionne également la géométrie. La valeur de U_0 est également fixée à 1 car on impose le Reynolds via Re dans le système d'équation (Log-1). On notera également que l'on a posé $Re_{to} = 1$, $C_k = 1$, et $C_\varepsilon = 1$. Ceci revient à donner la condition limite d'entrée pour k sous la forme d'une intensité de turbulence. On justifie cette façon de procéder par le fait que l'usage des variables logarithmiques est, de par notre implémentation, obligatoire pour résoudre les cas avec loi de paroi. Et nous n'avons pas eu le temps d'explorer suffisamment l'impact sur la résolution de l'usage conjoint de l'adimensionnalisation complète avec les variables logarithmiques. Cette façon de procéder est valable pour les trois cas d'application présentés dans ce chapitre.

Nos conditions limites d'entrée pour les variables de turbulence imposent de plus un Reynolds turbulent de 4444 en entrée. Ce choix correspond à celui fait par Gammacurta. Vu que l'écoulement est confiné, il était nécessaire de ne pas mettre un niveau de turbulence en entrée trop élevé afin de bien mesurer l'influence de la marche, de son coin supérieur, et de la zone de recirculation, sur la naissance de la turbulence dans la partie basse du canal à l'aval de la marche.

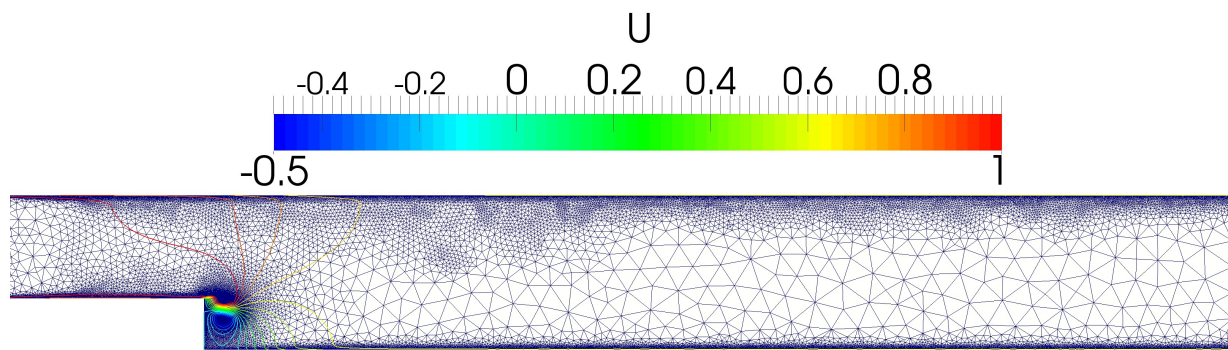
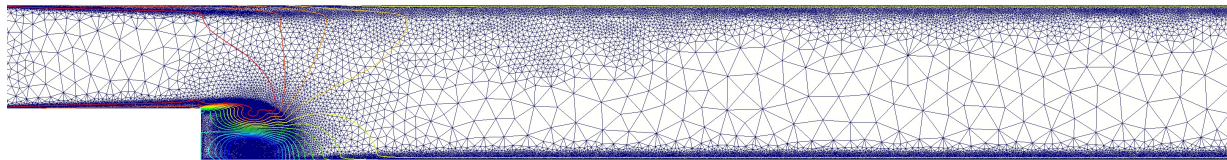
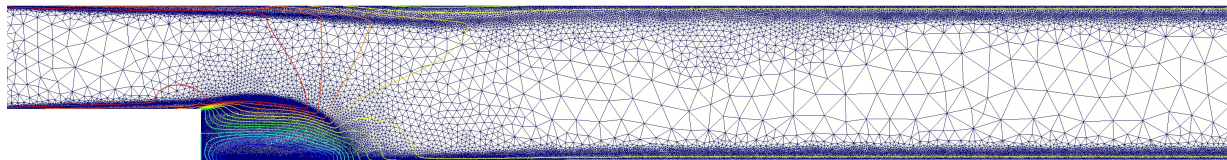
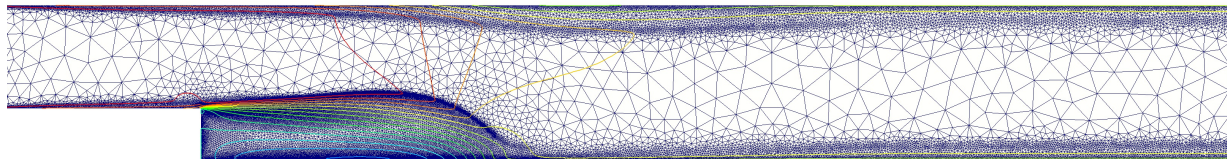
4.1.2 Présentation des résultats

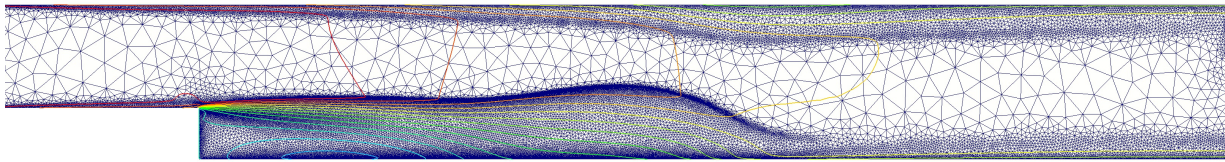
On présente ici successivement plusieurs résultats. En premier lieu on présente au travers de plusieurs figures l'évolution du maillage au cours du temps. On s'intéresse ensuite au comportement de la méthode BDF, et à l'adaptation de l'ordre et du pas de temps. Pour finir on s'intéresse à certaines données pertinentes de l'écoulement, afin de dresser un comparatif entre le calcul stationnaire et l'état supposé stationnaire atteint en fin de simulation instationnaire.

Procédure d'adaptation de maillage

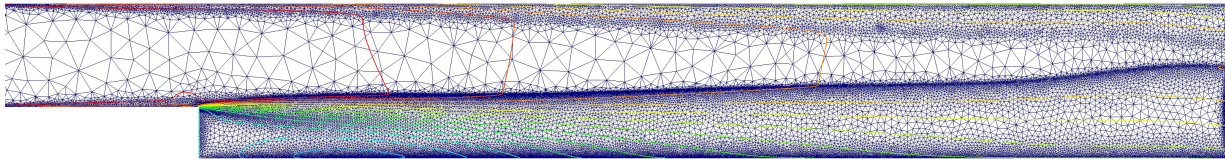
N'ayant aucune connaissance à priori de l'évolution de l'écoulement au cours du temps, nous avons décidé de procéder à un remaillage tous les $0.2 \frac{L_0}{U_0}$. Nous avons constaté que ce choix était plutôt pertinent en début de simulation, et beaucoup moins sur la fin, car l'écoulement se rapproche de son état stationnaire, et les champs des variables résolues n'évoluent presque plus. Un remaillage trop fréquent devient alors superflu. On présente aux figures 4.2 et 4.3 les maillages aux instants $t = \{2.0, 5.0, 10.0, 20.0, 30.0, 50.0\}$, sur lesquels on a superposé quelques contours de U . On notera que l'on a imposé une taille caractéristique d'élément minimale pour réaliser cette simulation, afin que le mailleur ne raffine pas à l'excès au coin supérieur de la marche dont on sait qu'il constitue une singularité.

L'évolution du maillage est telle qu'un nouveau maillage reste globalement assez bien adapté sur l'intervalle de temps résolu par la suite. Cela s'explique par le fait que l'évolution de l'écoulement est relativement lente, d'autant plus vers la fin de la durée simulée comme on l'a déjà souligné. On remarquera néanmoins que les zones de concentration des noeuds se déplacent considérablement au cours de la simulation. C'est en cela que la procédure d'adaptation de maillage est intéressante, car on vient résoudre à l'instant t sur un maillage où les noeuds sont localisés aux endroits nécessaires. L'alternative à notre procédure serait d'utiliser un maillage fixe et fin dans toutes les zones temporairement critiques, mais cela exigerait un nombre de noeuds très important pour ce cas. De plus la résolution sur un tel maillage serait particulièrement coûteuse en temps de calcul.

a) Maillage à $t = 2$ b) Maillage à $t = 5$ c) Maillage à $t = 10$ d) Maillage à $t = 20$ Figure 4.2 Évolution du maillage et contours de U à différents instants



a) Maillage à $t = 30$



b) Maillage à $t = 50$

Figure 4.3 Évolution du maillage et contours de U à différents instants (suite)

Comportement des méthodes BDF

On a utilisé pour cette simulation l'adaptation en ordre et en pas de temps. C'est d'ailleurs également le cas pour les deux autres applications présentées dans ce chapitre. L'adaptation du pas de temps s'est faite conformément à ce qui a été décrit dans la section 2.2.2. La tolérance d'erreur absolue a été fixée à 10^{-6} , tandis que la tolérance d'erreur relative a été fixée à $5 \cdot 10^{-5}$. On présente à la figure 4.4 l'évolution du pas de temps sur les 5 premières et 5 dernières unités de temps. La figure 4.5 présente quant à elle l'évolution de l'ordre de la méthode BDF en cours de résolution. Sans surprise on retrouve le même comportement que dans le cas manufacturé de la section 3.3.3. Encore plus ici on mesure les limitations imposées par la forme actuelle de notre procédure. Sur les 5 premières unités de temps adimensionnelles on constate que le pas de temps cherche à augmenter continûment mais le fait de remailler implique de le réinitialiser à sa valeur par défaut (ici posée à 0.005). L'erreur induite par l'interpolation, et la chute de l'ordre de la méthode BDF, se ressentent également par la chute du pas de temps à sa valeur minimale choisie (ici de 0.001) sur les premiers pas de temps suivant un remaillage. Enfin on remarquera que sur la fin de la simulation le pas de temps cherche également à augmenter, ce à quoi on peut logiquement s'attendre vu que l'on tend vers un état supposé stationnaire.

Concernant l'ordre de la méthode, on voit que la très grande majorité des pas de temps a été résolue avec une méthode d'ordre 2, dont on sait qu'elle possède la propriété de A-stabilité. Malgré un remaillage fréquent la méthode est parvenue à atteindre l'ordre 3 en début de simulation.

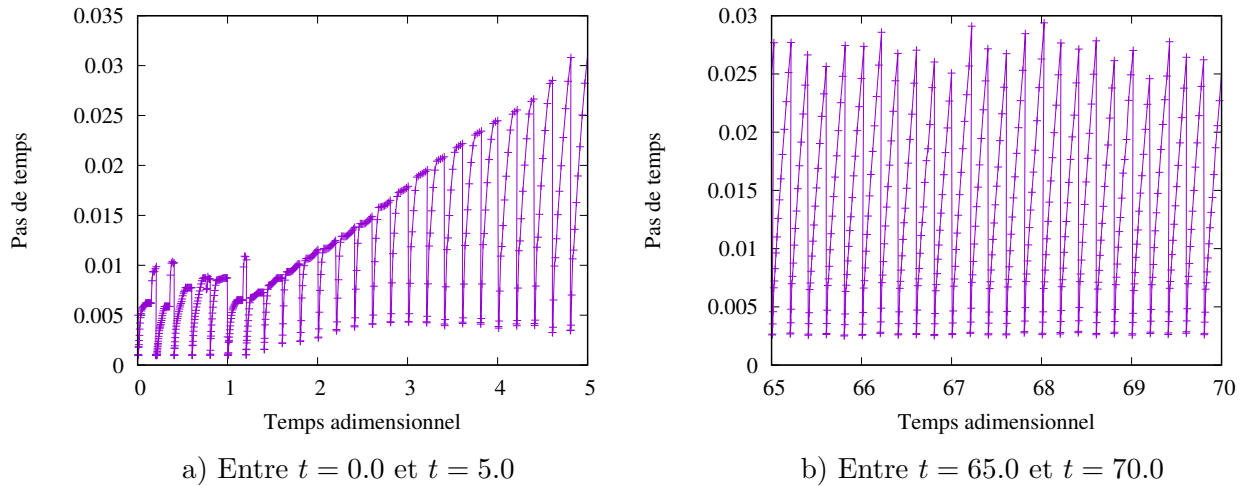


Figure 4.4 Évolution du pas de temps - marche descendante

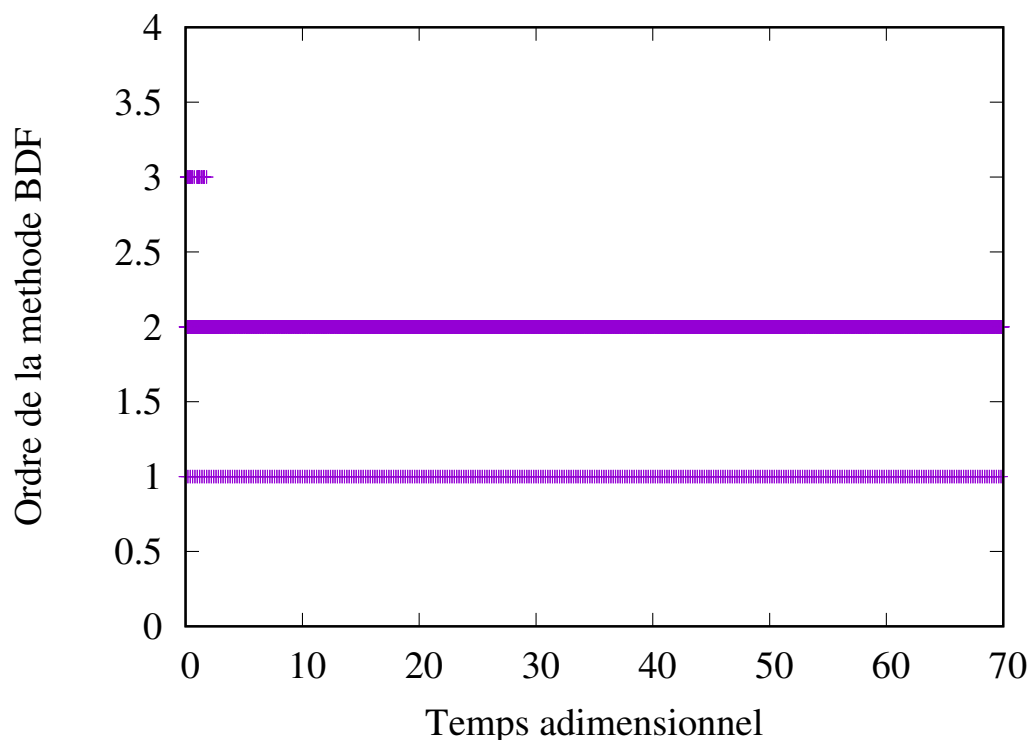


Figure 4.5 Évolution de l'ordre de la méthode BDF - marche de Kim

Comparaison avec le calcul stationnaire

Afin de dresser un comparatif entre le calcul stationnaire et l'état supposé stationnaire atteint en fin de simulation, nous nous sommes intéressés à la position du point de recollement dans les deux cas, et nous avons également superposé les profils de U obtenus aux abscisses $x = \{3, 8, 13, 18\}$. Les maillages finaux en stationnaire et instationnaire sont aussi présentés.

Concernant le point de recollement nous avons extrait sa position au cours du temps, après que la zone de recirculation ait commencé à se former : les résultats sont fournis à la figure 4.6. La position du point de recollement est extraite en se basant sur le changement de signe du cisaillement pariétal. On a utilisé tant le cisaillement issu de la loi de paroi (imposé faiblement), que celui donné par le tenseur des contraintes et qui constitue le cisaillement effectif. On constate donc qu'au bout de 70 unités de temps adimensionnelles l'abscisse effective du point de recollement est d'environ $x = 6.28$, tandis qu'elle est de $x = 6.33$ d'après la loi de paroi. D'autre part une mesure directe de la position du point de recollement sur un logiciel de visualisation a donné $x = 6.33$ en fin de simulation. Finalement la mesure s'avère donc plus précise en considérant le cisaillement issu de la loi paroi, moins bruitée.

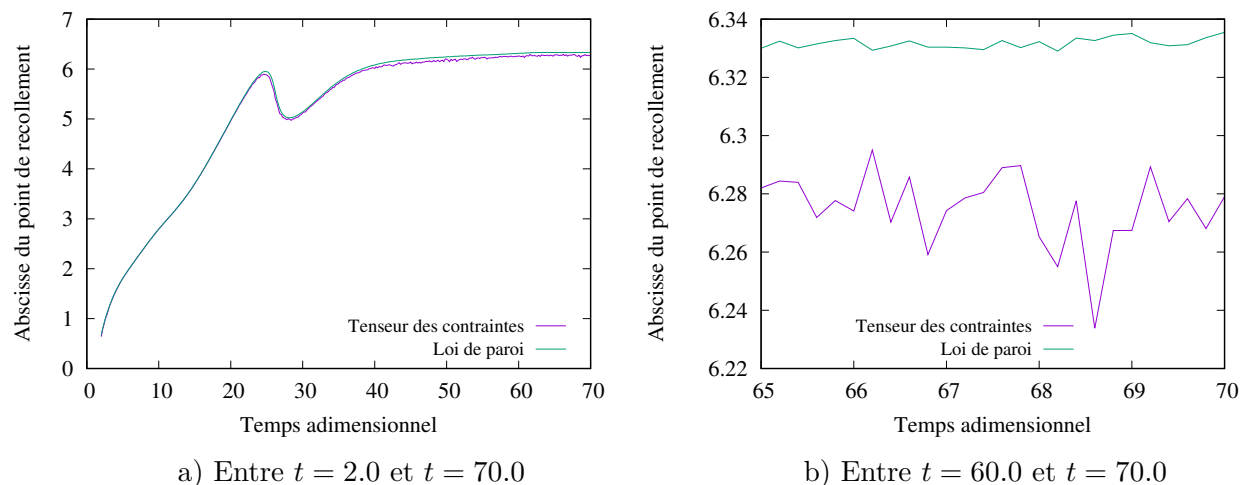


Figure 4.6 Position du point de recollement au cours de la durée simulée

Afin d'illustrer ce résultat on présente également à la figure 4.7 le champ de U final obtenu en instationnaire, et sur lequel on a fait apparaître quelques lignes de courant. La figure 4.8 présente quant à elle le même champ de vitesse dans le cadre stationnaire.

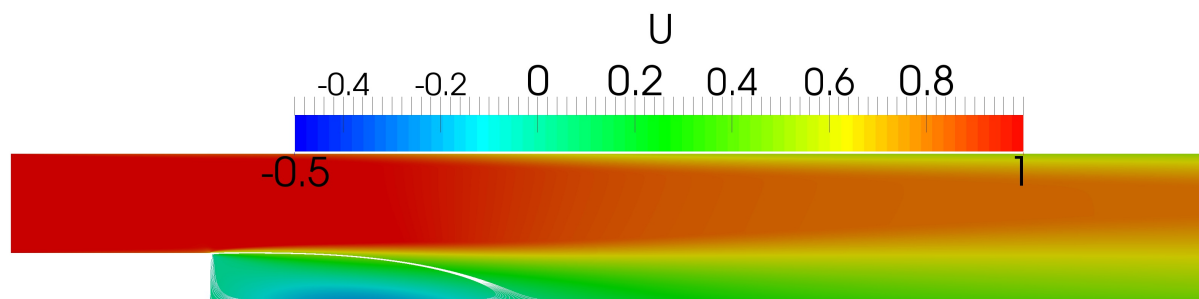


Figure 4.7 Champs de vitesse U final en instationnaire

On constate pour commencer que ces champs de vitesse sont très similaires. De plus la position du point de recollement est de 6.34 dans le cas stationnaire, ce qui est en très bon accord avec la simulation instationnaire. A titre informatif, la valeur déterminée par Ilinca [48] en stationnaire et sur son dernier maillage était de 6.19 pour le Reynolds turbulent de 323, et

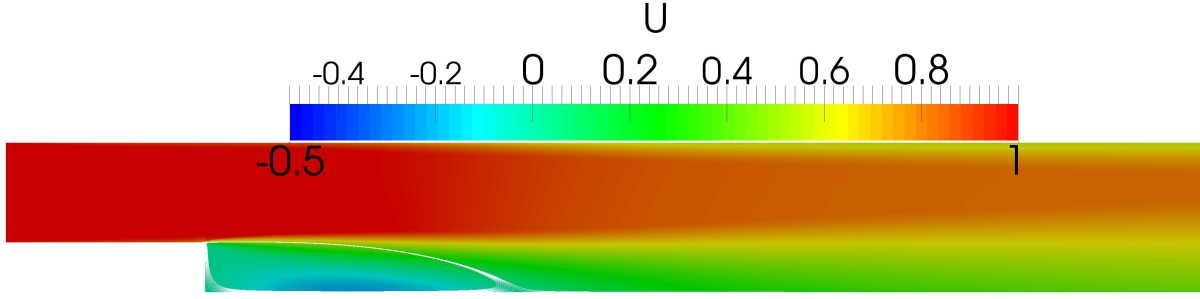


Figure 4.8 Champs de vitesse U en stationnaire

de 6.46 dans l'autre cas. Les résultats que l'on a obtenus sont donc dans l'intervalle souhaité, compte tenu du Reynolds turbulent que nous avons utilisé.

Dans la continuité de ce qui précède, la figure 4.9 présentent les profils de vitesse U stationnaire et instationnaire, superposés aux abscisses indiquées plus haut. On voit que plus l'on se rapproche de la sortie du domaine de calcul et plus la cohérence des deux champs de vitesse se perd. On peut émettre deux hypothèses qui permettraient d'expliquer cette observation. La plus simple, et très probablement vraie, serait que 70 unités de temps adimensionnelles ne sont pas suffisantes pour atteindre l'état stationnaire. Mais on pourrait aussi très bien imaginer que l'écoulement n'atteigne jamais un état complètement stationnaire, et qu'il demeure dans le champs de vitesse une composante oscillante.

On présente, pour terminer, le maillage obtenu en stationnaire après plusieurs adaptations de maillage, et le maillage final obtenu en instationnaire. L'adaptation de maillage s'est bien sûr faite dans les deux cas en considérant les mêmes normes d'erreur, sur les quantités $\nabla(k)$, $\nabla(\varepsilon)$, $\nabla(\mu_t)$, et $\nabla(U)$. Les deux maillages sont très ressemblants. On peut juste constater que le fait de remailler en cours de simulation instationnaire a permis de conserver un maillage plus fin sur la paroi supérieure et la paroi inférieure à l'amont de la marche, tandis que le remaillage en stationnaire concentre les noeuds dans la zone de forts gradients entre la partie haute et basse du canal. De nouveau ces différences entre les maillages peuvent laisser penser qu'il subsiste encore des effets instationnaires dans l'écoulement à $t = 70$.

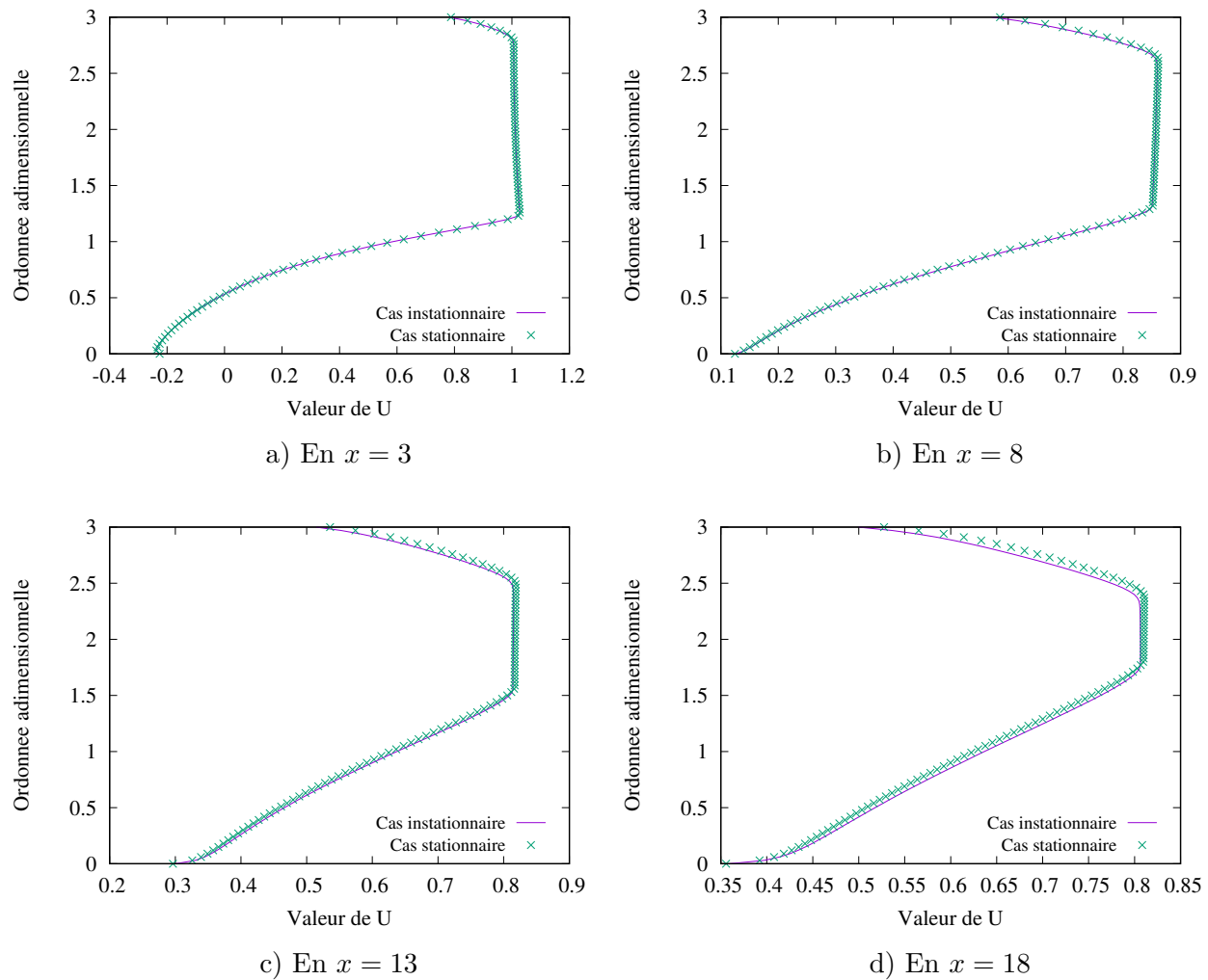


Figure 4.9 Superposition de la vitesse U à différentes abscisses pour la simulation stationnaire et instationnaire

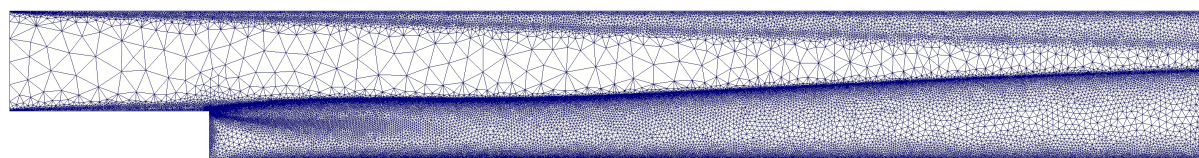


Figure 4.10 Maillage final en instationnaire (213296 noeuds)



Figure 4.11 Maillage final en stationnaire (383220 noeuds)

4.2 Écoulement autour d'un cylindre carré

4.2.1 Présentation du cas

Ici on étudie l'écoulement instationnaire autour d'un cylindre carré. On cherchera ici à comparer notre prédiction du Strouhal avec celle obtenue par Mohammadi et Pironneau [70]. Le Reynolds utilisé est de 22000 et se base sur la vitesse à l'entrée du domaine, et sur la longueur D d'un côté du carré. Pour réaliser cette simulation et selon la recommandation de Gammacurta [52], on a activé la modification du terme de production proposée par Kato et Launder [39]. Cette modification propose l'expression suivante du terme de production :

$$P(\mathbf{U}) = \left[\nabla(\mathbf{U}) : \left(\nabla(\mathbf{U}) + \nabla(\mathbf{U})^T \right) \right]^{1/2} \cdot \left[\nabla(\mathbf{U}) : \left(\nabla(\mathbf{U})^T - \nabla(\mathbf{U}) \right) \right]^{1/2} \quad (4.1)$$

On voit donc que cette modification introduit l'opposée de la partie anti-symétrique du tenseur du taux de déformation, représentative de la vorticité. L'absence de vorticité à l'approche du cylindre va permettre de réduire fortement la production de turbulence dans la zone de stagnation. Par ce biais on amoindrit l'impact de la diffusion turbulente, qui tend à produire un sillage stationnaire en aval du cylindre.

Le domaine de calcul est précisé à la figure 4.12, tandis que les conditions limites sont donn  es dans la table 4.3. On remarquera que les conditions impos  es sur les frontières inférieure et supérieure du domaine sont des conditions de symétrie. On note également que la vitesse en entrée est soumise à la même rampe en temps que dans le cas de la marche descendante.

Les conditions limites aux parois du carré n'ont pas été pr  cis  es car elles sont toutes conformes à celles de la loi de paroi standard à 2 échelles de vitesse, pr  sent  e dans la section 2.1.3. La distance de raccordement à la paroi utilis  e pour les quatre côtés du carré est unique et vaut $d = 0.02$. Cette distance a été retenue suite à un calcul stationnaire sur le même domaine, avec convergence en maillage (le dernier maillage ayant 145000 noeuds). On a en effet observé que cette valeur de d permettait en stationnaire de maintenir un y^+ entre 27 et 200 sur tout le pourtour du cylindre. La figure 4.13 illustre ce résultat. Bien que cela ne permette pas à priori de dire que le y^+ restera dans la bonne plage en instationnaire, cela nous a paru être la meilleure stratégie initiale. La valeur de d retenue par Mohammadi était de $d = 0.005$, mais cela conduisait chez nous à raccorder dans la première zone tampon (cf. figure 2.1), ce qui ne fait pas de sens avec le modèle $k-\varepsilon$ standard.

La durée simul  e est à nouveau ici de 70 unités de temps adimensionnelles, afin d'avoir

une phase de relâché tourbillonnaire suffisamment longue pour étudier le Strouhal basé sur la fréquence de ce relâché.

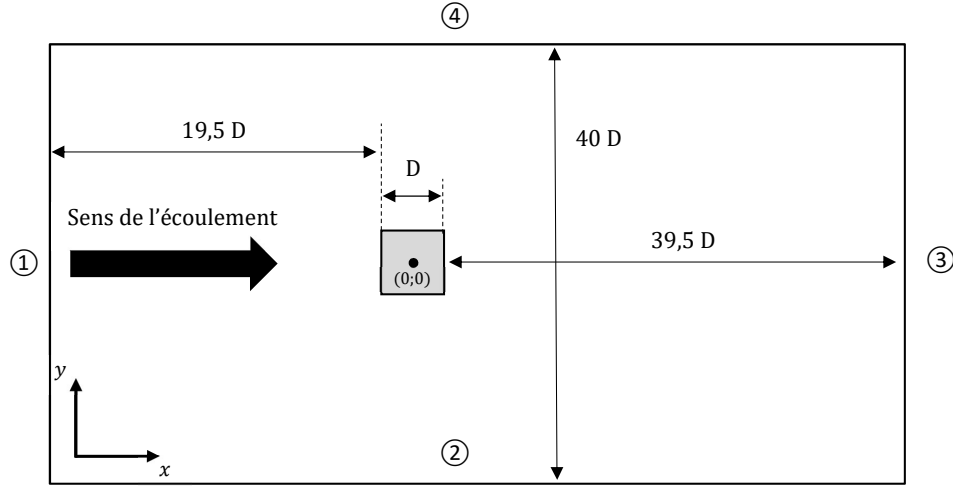


Figure 4.12 Géométrie retenue - cylindre carré

Tableau 4.3 Conditions limites - cylindre carré

Frontière	U	V	\mathcal{K}	\mathcal{E}
①	$1.0 f(t)$	0.0	$\ln(0.01)$	$\ln(0.009)$
②	$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$	0.0	$\left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_k}\right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} = 0$	$\left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_\varepsilon}\right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} = 0$
③	$-p + 2 \left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0}}\right) \frac{\partial U}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$	$\left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_k}\right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} = 0$	$\left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_\varepsilon}\right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = 0$
④	$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$	0.0	$\left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_k}\right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} = 0$	$\left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_\varepsilon}\right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} = 0$

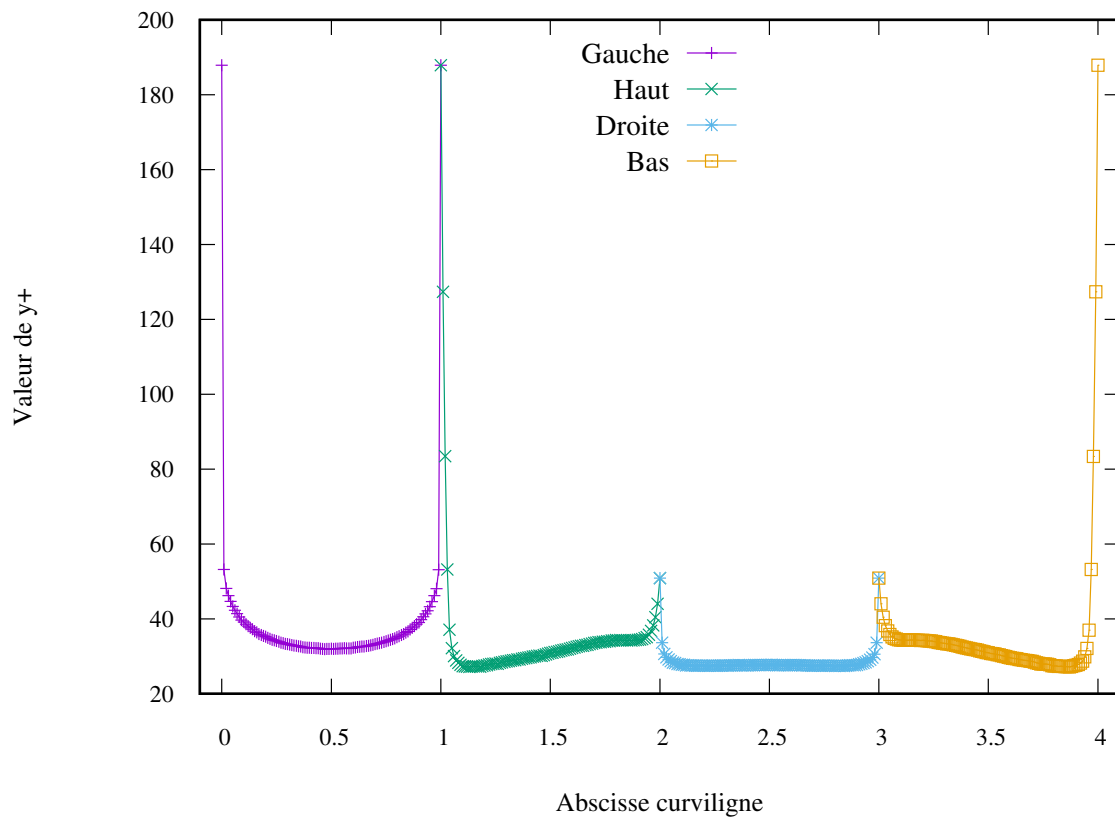


Figure 4.13 y^+ sur le pourtour du carré en stationnaire avec $d = 0.02$

4.2.2 Présentation des résultats

Comme pour le cas précédent on présente ici les résultats relatifs à la procédure de remaillage, et au comportement des méthodes BDF. On réalise également une rapide comparaison de nos résultats avec ceux obtenus par Mohammadi.

Procédure d'adaptation de maillage

Contrairement au cas de la marche descendante, nous avons fait ici le choix de remailler toutes les 0.5 unité de temps. Nous allons de nouveau voir ici que ce choix est pertinent en début de simulation, correspondant à la phase d'allongement du sillage, mais un peu moins dès que l'on rentre dans la phase de relâché tourbillonnaire. On présente aux figures ?? et ?? les maillages relevés aux instants $t = \{5, 10, 20, 30, 40\}$.

À $t = 5$ le maillage est symétrique par rapport à la direction de l'écoulement car on est toujours dans la phase de croissance de la zone de recirculation à l'aval du cylindre. Néanmoins dès $t = 10$ on discerne une claire rupture de symétrie dans le maillage : l'instabilité qui va donner naissance à l'allée de Von-Karman s'amplifie. Dans tous les cas on remarque à quel point le maillage est représentatif de la physique de l'écoulement. Chaque opération de remaillage permet de traquer à nouveau la position des interfaces entre les tourbillons et le reste de l'écoulement. Ces interfaces sont d'ailleurs de moins en moins nettes plus l'on se rapproche de la sortie du domaine de calcul, les gradients de vitesse s'étant adoucis sous l'effet de la diffusion turbulente.

Pour en revenir à la procédure d'adaptation de maillage proprement dite, on a remarqué qu'elle n'était pas encore optimale. Comme on l'a déjà dit le module d'adaptation de maillage travaille en considérant que la solution est stationnaire. Pour un écoulement dont la solution varie assez lentement dans le temps, comme dans le cas de la marche descendante, la procédure de remaillage reste intéressante. Dans le cas présent, la phase de relâché tourbillonnaire est une phase de forte instationnarité et un remaillage toutes les 0.5 unité de temps permet déjà de constater un déphasage notable entre le maillage et l'écoulement effectif à la fin d'un intervalle de temps. La figure ?? illustre ce point. Le phénomène est particulièrement visible sur le tourbillon naissant, à vorticité négative. Or il est nécessaire d'avoir une discrétisation spatiale bien adaptée au voisinage du cylindre pour garantir une bonne précision de calcul sur les forces subies par le cylindre. Une solution envisageable à ce problème consisterait à post-traiter le fichier de maillage généré par le module *Adapt*, en se basant sur le champs de vitesse afin de pré-raffiner le maillage dans les zones couvertes par la progression des tourbillons pendant l'intervalle de temps suivant.

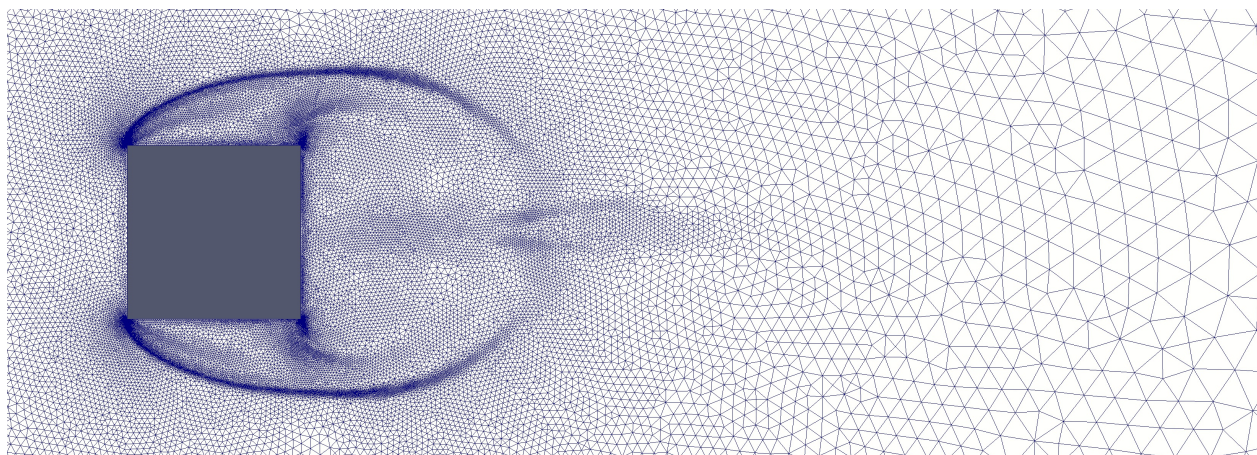
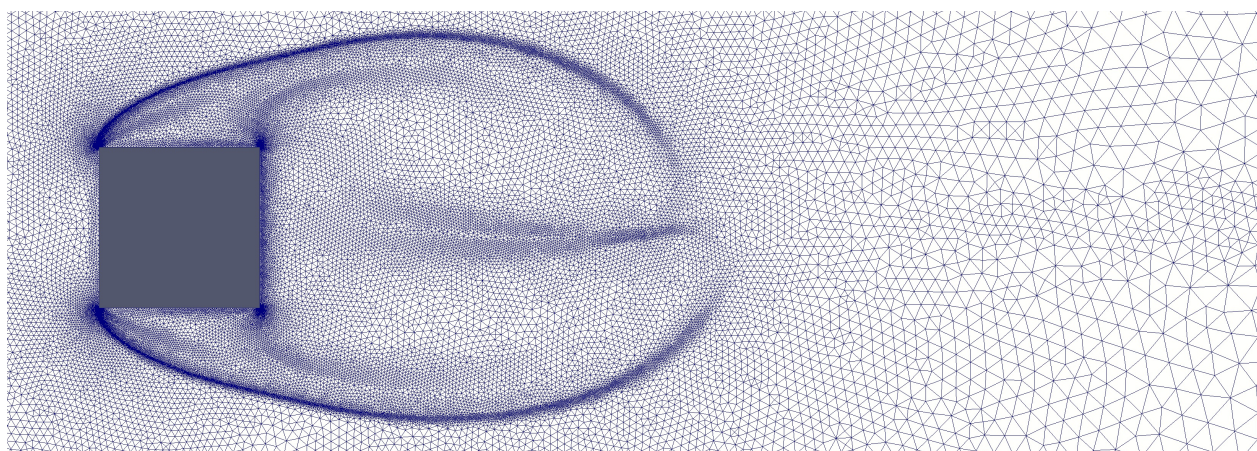
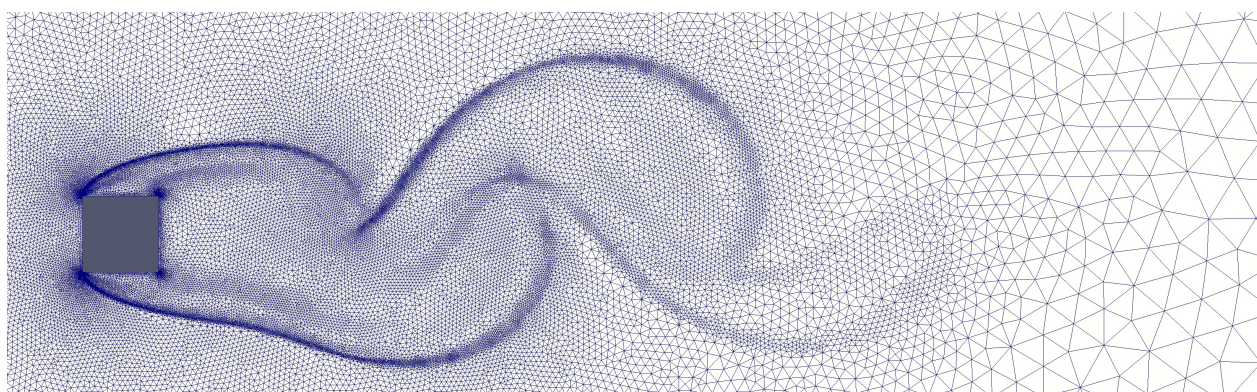
a) Maillage à $t = 5$ b) Maillage à $t = 10$ c) Maillage à $t = 20$

Figure 4.14 Évolution du maillage à différents instants - cas du cylindre carré

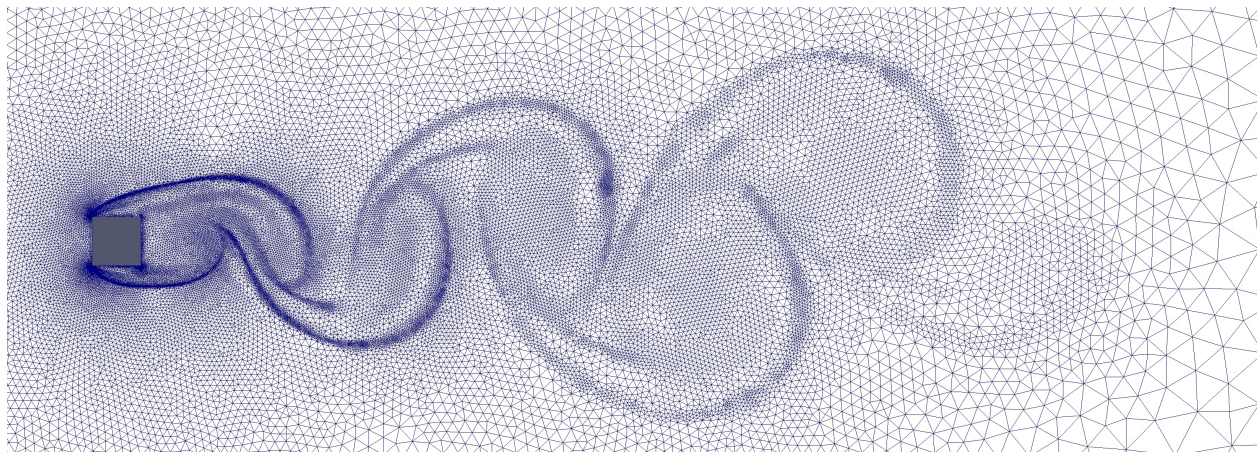
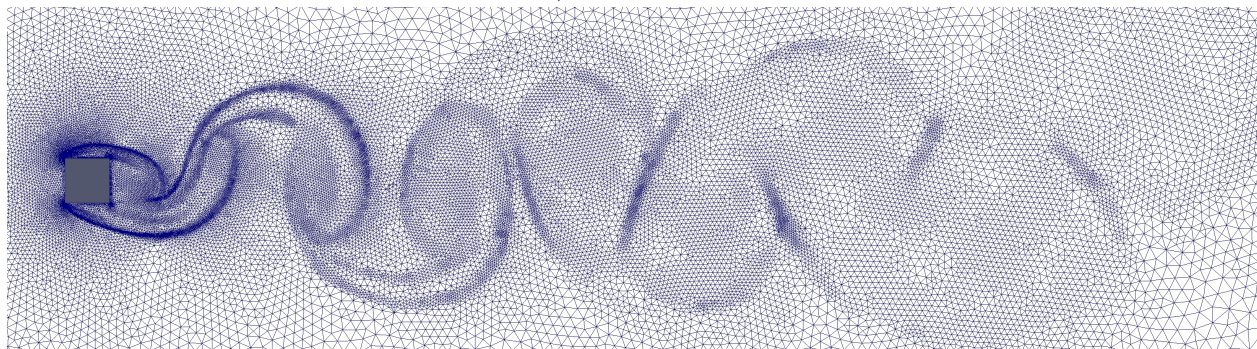
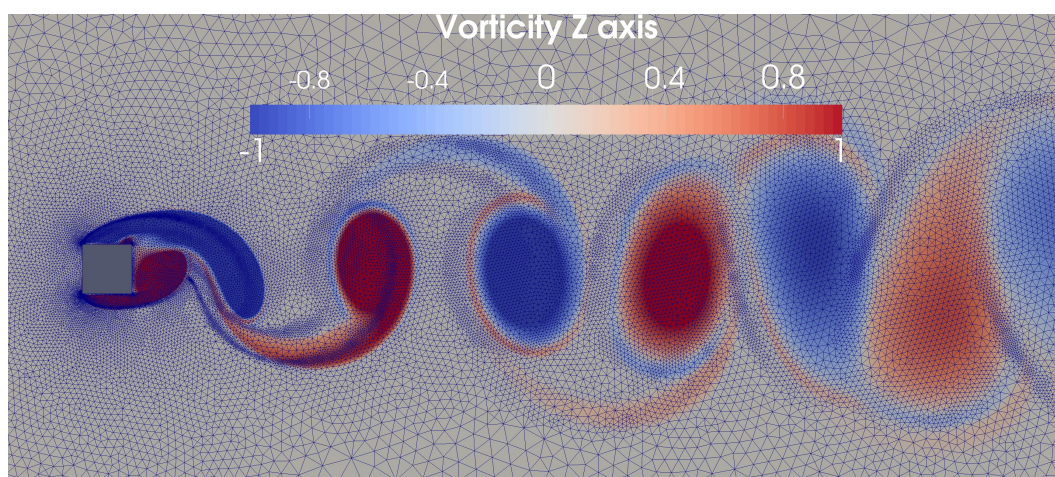
d) Maillage à $t = 30$ e) Maillage à $t = 40$

Figure 4.15 Évolution du maillage à différents instants (suite) - cas du cylindre carré

Figure 4.16 Déphasage entre le maillage et l'écoulement à $t = 40$

Comportement des méthodes BDF

Malgré les remaillages successifs nous avons pu observer des tendances très intéressantes sur le comportement des méthodes BDF, et qui sont conformes à nos attentes. On présente à la figure 4.17 l'évolution du pas de temps sur deux plages de temps distinctes, la première correspondant à la phase de croissance de la zone de recirculation et de transition, tandis que la seconde se place dans la phase de relâché tourbillonnaire. On présente également la variation de l'ordre de la méthode BDF au cours de la simulation à la figure 4.18.

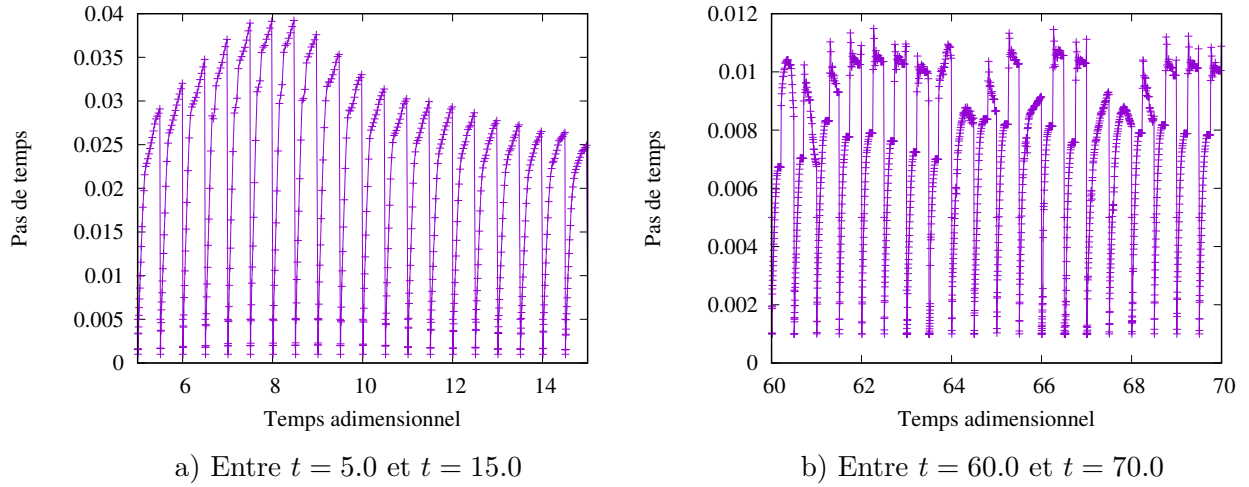


Figure 4.17 Évolution du pas de temps - cylindre carré

On peut remarquer plusieurs choses. Pour commencer, la valeur du pas de temps tend à croître facilement dans la phase de croissance de la zone de recirculation, ce qui s'explique par une évolution lente de l'écoulement. Dès $t = 9$, on observe un changement de comportement et le pas de temps ne parvient plus à augmenter autant sur chaque intervalle de temps résolu : on rentre dans la phase de transition vers le relâché tourbillonnaire. Le résultat est encore plus flagrant sur la plage de temps comprise entre $t = 60$ et $t = 70$, où la valeur du pas de temps ne dépasse plus 0.012 en fin d'intervalle de temps. C'est la conséquence d'une variation plus rapide de l'écoulement. Le fait de conserver un pas de temps faible durant cette phase tend à nous maintenir dans la zone de stabilité des méthodes BDF d'ordre élevée, ce qui va permettre de monter en ordre si l'heuristique d'adaptation d'ordre est pertinente : c'est bien le cas ici ! On voit même que dans la phase de relâché tourbillonnaire la majorité des pas de temps sont résolus en utilisant une méthode BDF d'ordre 3.

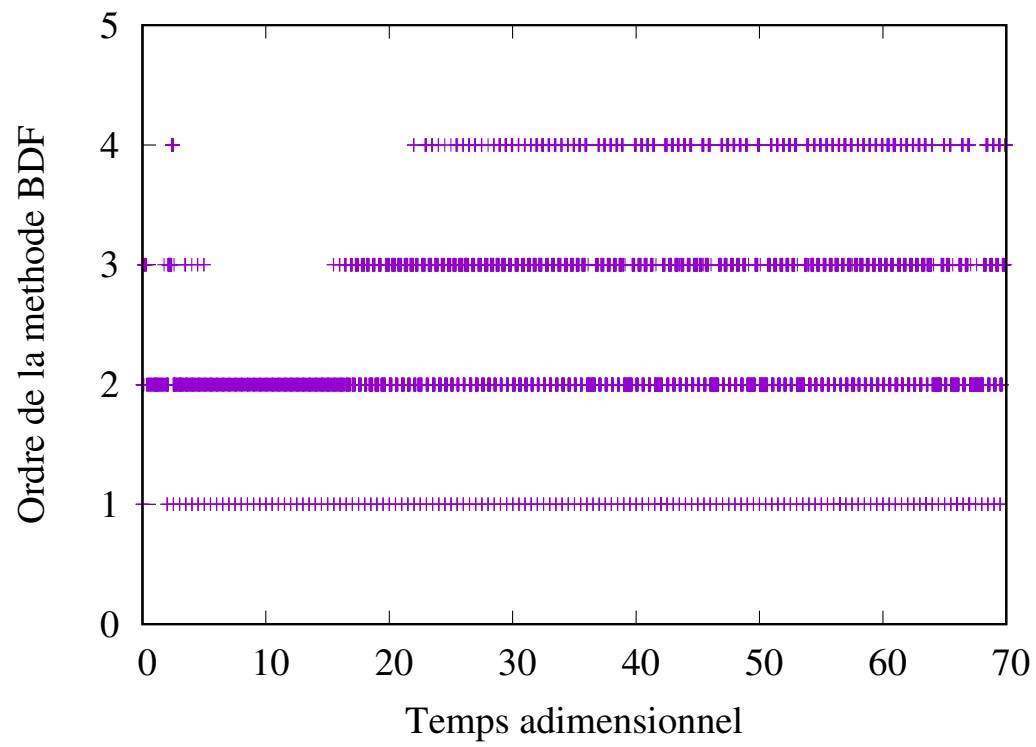


Figure 4.18 Évolution de l'ordre de la méthode BDF - cylindre carré

Comparaison avec les résultats de Mohammadi et Pironneau

Comme on l'a dit auparavant, ce cas d'application a été choisi afin de comparer nos résultats à ceux de Mohammadi et Pironneau. Avant toute chose il faut savoir que le modèle de turbulence utilisé dans leur travaux est une variante de la forme standard que nous utilisons ici. Cette variante a été conçue pour sensibiliser le modèle aux effets de la compressibilité. Cependant le cas du cylindre traité ici se fait à Mach 0.1 ce qui nous place dans le cadre de l'hypothèse d'incompressibilité que nous utilisons. Il faut également noter que la modification de Kato-Launder n'est pas utilisée dans leur travaux, et qu'une loi de paroi de type Reichardt sensibilisée aux effets de gradients de pression, et de convection, est utilisée à la place de notre loi de paroi standard à deux échelles de vitesse. Le nombre de Strouhal est défini chez eux par la relation :

$$St = \frac{L_0}{t_0 U_0}$$

ce qui correspond à l'inverse de la définition que nous avons retenue au chapitre 1. La valeur obtenue est dans leur cas de 0.14 en prenant la période du relâché tourbillonnaire comme durée caractéristique t_0 . L'implémentation que nous utilisons ne permettant pas encore d'extraire les réactions au cours du temps mais seulement les champs solution sur des courbes frontière, nous avons post-traité ces données afin d'en déduire les efforts à chaque noeud sur le cylindre. Puis une méthode des trapèzes a permis d'intégrer ces efforts sur le pourtour du cylindre. On donne à la figure 4.19 l'évolution au cours du temps des coefficients de traînée C_d et de portance C_l , dont on rappelle la définition :

$$C_d = \frac{2 \mathcal{F}_d}{\rho_f U_0^2 S_1}$$

$$C_l = \frac{2 \mathcal{F}_l}{\rho_f U_0^2 S_2}$$

où \mathcal{F}_d et \mathcal{F}_l désignent respectivement les forces de traînée et de portance, et où S_1 et S_2 sont le maître-couple et la surface alaire. Compte tenu de l'adimensionnalisation on a dans notre cas :

$$C_d = 2 \mathcal{F}_d$$

$$C_l = 2 \mathcal{F}_l$$

Le nombre de Strouhal peut être déduit de l'évolution du coefficient de portance. Du fait de notre rampe en temps au début de simulation, nous n'avons pu baser l'évaluation de notre nombre de Strouhal que sur 4 périodes seulement. Néanmoins la valeur obtenue est de 0.139,

ce qui est en très bonne concordance avec la valeur de 0.140 obtenue par Mohammadi et Pironneau, et même très légèrement meilleure vis-à-vis des résultats expérimentaux, où une valeur de 0.132 est relevée [70]. Toutefois la valeur maximale de notre coefficient de portance est deux fois supérieure à celle de Mohammadi et Pironneau, ce qu'on peut raisonnablement expliquer par la modification de Kato-Launder utilisée dans notre implémentation.

On pourra, pour terminer, souligner le caractère un peu bruité des signaux de la figure 4.19. Cela est la conséquence du fait que la discrétisation sur le cylindre n'est pas rigoureusement la même entre deux remaillages. On a également l'effet de l'erreur d'interpolation dont nous avons déjà parlé à plusieurs reprises.

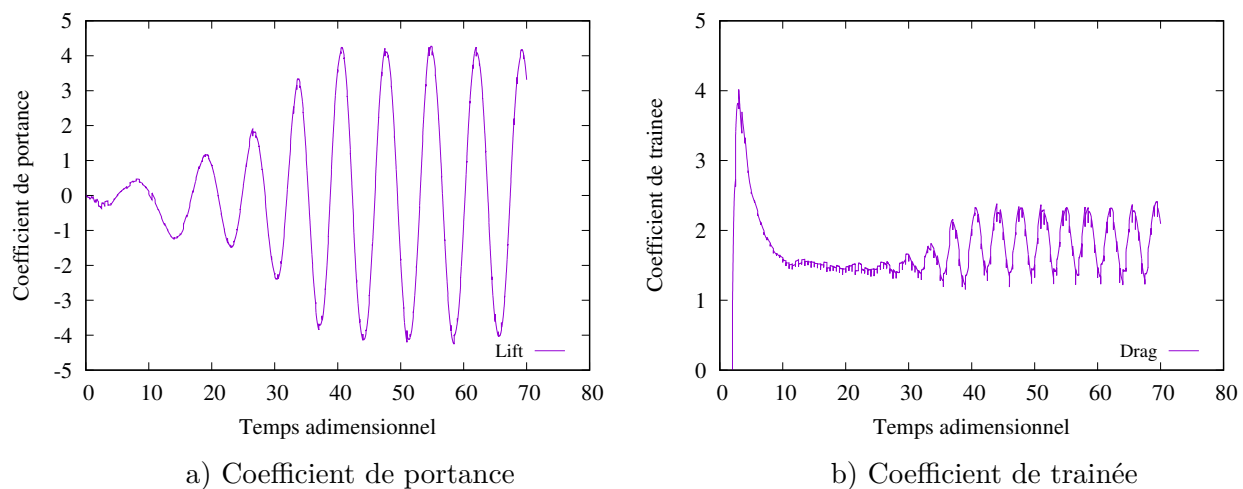


Figure 4.19 Évolution du coefficient de portance et de trainée dans le temps

4.3 Écoulement autour d'un cylindre circulaire

4.3.1 Présentation du cas

Le dernier cas présenté ici est celui de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire parfaitement lisse. Le nombre de Reynolds utilisé, et basé sur le diamètre du cylindre, est de 10000. Pour ce cas on utilise à nouveau la modification du terme de production de Kato-Launder. Il a également été nécessaire d'utiliser la condition tangence en débit vue à la section 2.1.3. A nouveau, les résultats sont comparés avec ceux obtenus par Mohammadi et Pironneau [70]. L'étude de ce cas s'est faite en deux temps. Nous avons en premier lieu simulé l'écoulement sur une durée de 40 unités de temps adimensionnelles, et avec un remaillage pratiqué toutes les 0.5 unités de temps. La distance de raccordement à la paroi du cylindre, conformément au choix de Mohammadi, a été fixée à $d = 0.01$. Seulement nous avons constaté d'une part que cela conduisait à raccorder à des valeurs de y^+ comprises entre 1 et 10, ce qui n'est pas viable avec le modèle de turbulence utilisé. Cela a eu pour effet d'induire une allée de Von Karman très étroite. En conséquence, les valeurs du coefficient de portance étaient très faibles et ont rendu le post-traitement inexploitable du fait des nombreux remaillages (cf. la section précédente).

On a donc, dans un second temps, chercher à résoudre l'ensemble de ces problèmes en utilisant un maillage fixe pour l'ensemble de la simulation. Cela a également permis de pouvoir étudier pleinement la variation du pas de temps et de l'ordre des méthodes BDF. De plus on a eu recours à l'astuce de Gammacurta [52] afin de faire monter la valeur du y^+ sur le pourtour du cylindre : modifier le paramètre de rugosité E de la loi de paroi utilisée.

La géométrie utilisée pour ce cas est présentée à la figure 4.20. La table 4.4 reprend les conditions limites pour les frontières non assujetties à une loi de paroi.

Les conditions limites d'entrée pour \mathcal{K} et \mathcal{E} sont choisies afin d'imposer une intensité de turbulence $I_t = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}k}}{U} = 2\%$ et un rapport $\frac{\mu_t}{\mu} = 10$ en entrée du domaine. Ce choix permet d'éviter de générer un gradient trop fort pour \mathcal{K} et \mathcal{E} en entrée, dont on a constaté en premier lieu qu'il entraînait un raffinement du maillage non souhaité dans cette zone lors des remaillages.

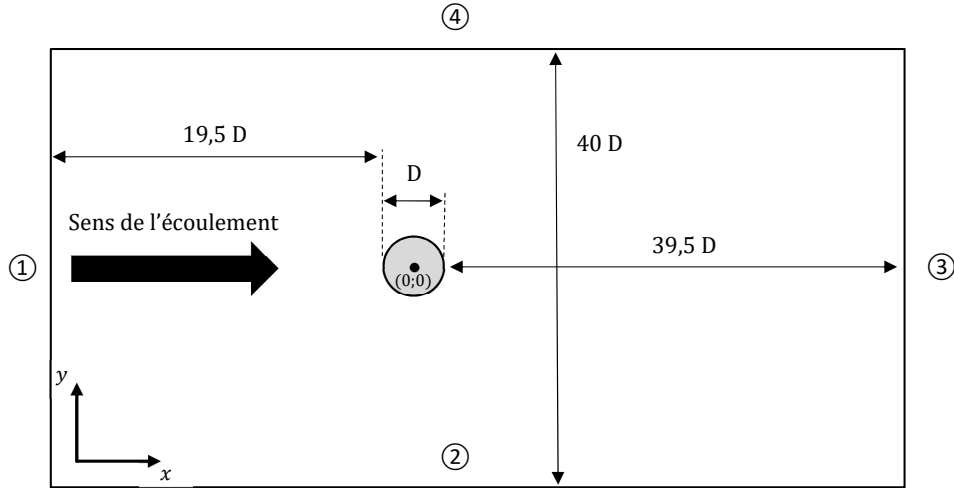


Figure 4.20 Géométrie retenue - cylindre circulaire

Tableau 4.4 Conditions limites - cylindre circulaire

Frontière	U	V	\mathcal{K}	\mathcal{E}
①	$1.0 f(t)$	0.0	$\ln(6 \cdot 10^{-4})$	$\ln(3.24 \cdot 10^{-5})$
②	$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$	0.0	$\left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_k}\right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} = 0$	$\left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_\varepsilon}\right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} = 0$
③	$-p + 2 \left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0}}\right) \frac{\partial U}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$	$\left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_k}\right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} = 0$	$\left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_\varepsilon}\right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = 0$
④	$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$	0.0	$\left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_k}\right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} = 0$	$\left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_\varepsilon}\right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} = 0$

4.3.2 Présentation des résultats

En premier on présente le calcul réalisé avec la procédure d'adaptation de maillage. Dans un second temps on présente le comportement des méthodes BDF pour la simulation sur maillage fixe, et on compare nos résultats avec ceux obtenus par Mohammadi et Pironneau.

Première simulation : procédure de remaillage

Comme énoncé plus tôt, cette simulation se caractérise par une distance de raccordement à la paroi de $d = 0.01$, et un cylindre avec une paroi parfaitement lisse, ce qui correspond à $E = 9.0$ dans la zone logarithmique de la loi de paroi (cf. équation (2.45)). Tout comme pour le cylindre carré on a choisi de remailler toutes les 0.5 unité de temps. Le maillage aux instants $t = \{3, 5, 10, 20\}$ est présenté dans la figure 4.21. On constate à nouveau que le maillage permet d'avoir une information sur la physique de l'écoulement. Notamment on souligne que l'allée de Von Karman est particulièrement étroite. On pouvait néanmoins s'y attendre du fait des résultats rapportés par Mohammadi et Pironneau, qui font état d'une amplitude de variation très faible, de l'ordre de 0.2, pour le coefficient de portance si le cas est simulé avec une loi de paroi similaire à la nôtre, c'est-à-dire fondée sur la zone logarithmique. Toutefois on pourra noter que l'instabilité se déclenche plus tôt que dans le cas du cylindre carré, car on y discerne déjà la rupture de la symétrie du maillage par rapport à la direction de l'écoulement dès $t = 5$.

Malgré des résultats intéressants pour cette première simulation, l'ensemble des résultats est à prendre avec précaution, car comme on l'a déjà souligné, les valeurs de y^+ sur le pourtour du cylindre se situent dans la première zone tampon, voir même dans la sous-couche visqueuse pour la partie amont du cylindre. Or le modèle $k-\varepsilon$ représente fidèlement que la zone logarithmique uniquement. La loi de paroi utilisée effectue donc son raccordement avec la loi logarithmique pour toute valeur de y^+ . Toutes les conditions limites fournies par la loi de paroi sont donc erronées, tout particulièrement la condition de Neumann imposée sur \mathcal{K} . La figure 4.22 présente la valeur du y^+ sur le pourtour du cylindre en fin de simulation.

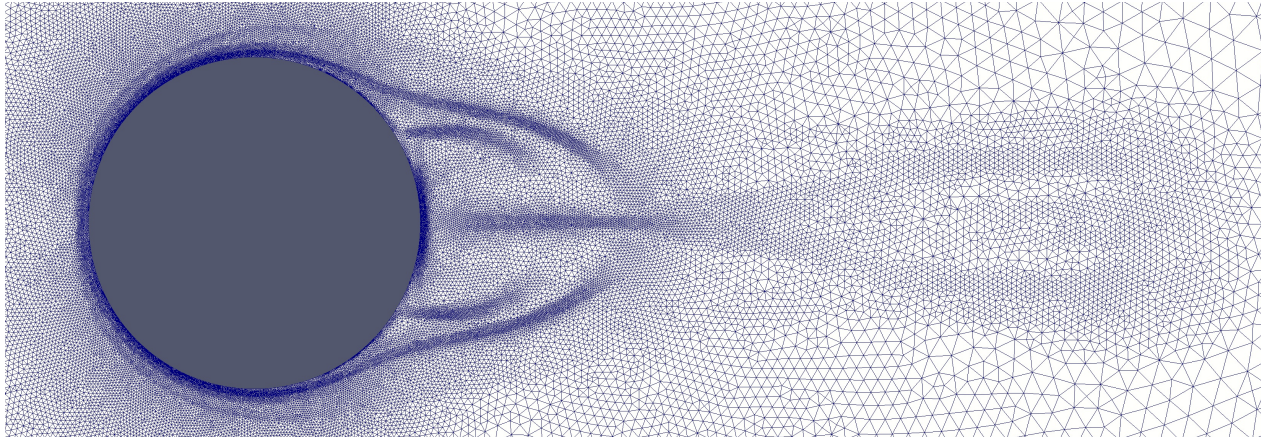
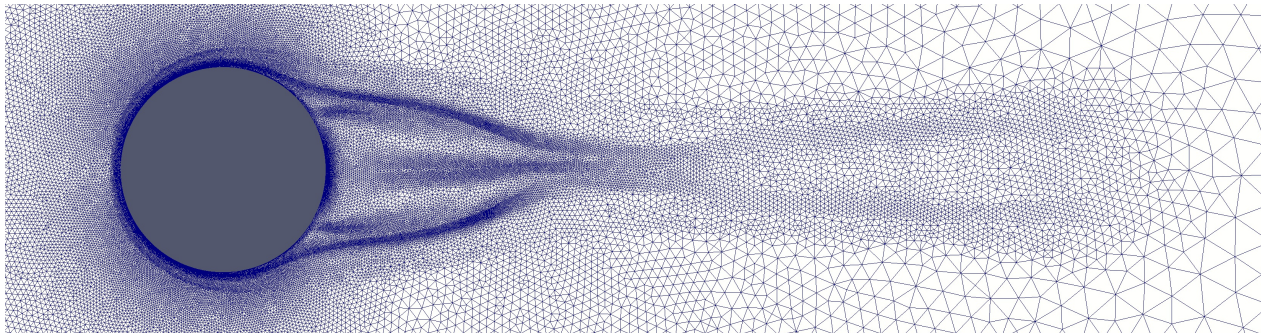
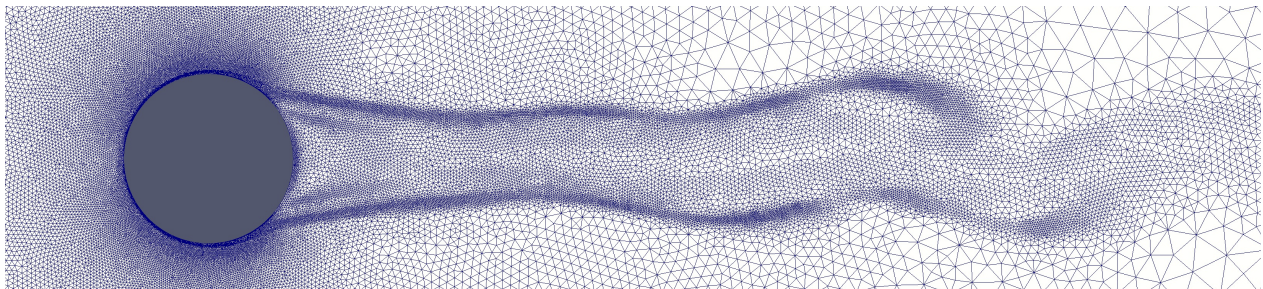
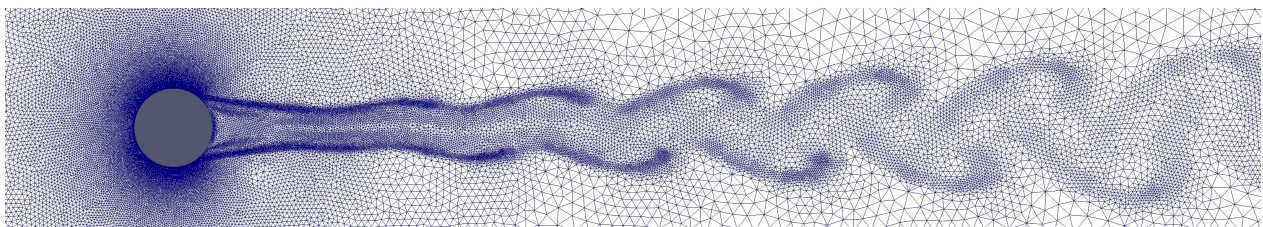
a) Maillage à $t = 3$ b) Maillage à $t = 5$ c) Maillage à $t = 10$ d) Maillage à $t = 20$

Figure 4.21 Évolution du maillage à différents instants - cas du cylindre circulaire

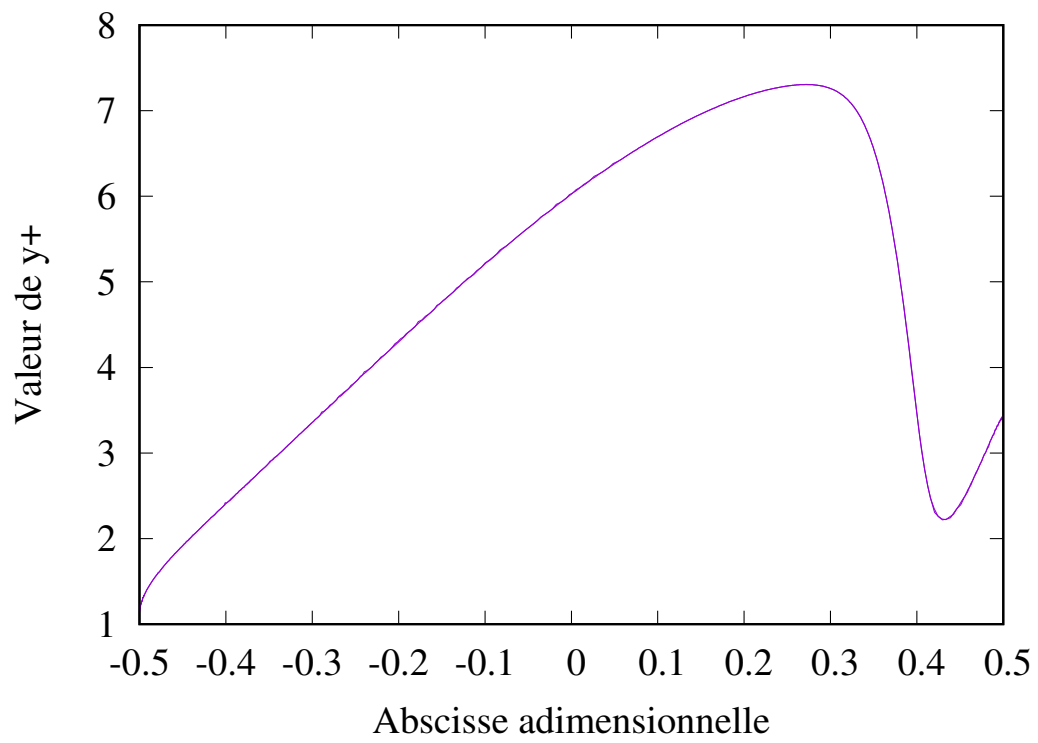


Figure 4.22 Valeur de y^+ sur le pourtour du cylindre à $t = 40$

Seconde simulation : maillage fixe

Cette seconde simulation a été menée afin de tenter de corriger les prédictions obtenues avec la simulation précédente, et afin de pouvoir étudier le comportement des méthodes BDF sans les limitations actuelles imposées par les remaillages. Le maillage fixe que nous avons utilisé est présenté à la figure 4.23. Ce maillage est le résultat d'une suite de plusieurs essais, pour lesquels une allée de Von Karman n'a pas toujours été observée et cela malgré des paramètres de loi de paroi et des conditions limites identiques à ceux et celles retenues pour la simulation précédente. C'est donc dire l'importance du maillage dans un tel cas ! Ces essais nous ont d'ailleurs permis de comprendre que c'est la procédure de remaillage qui dans le cas précédent a déclenché l'instabilité, très probablement à cause des erreurs d'interpolation. De manière générale on a supposé que si le maillage présente une densité de noeud trop forte au voisinage direct de la surface du cylindre alors l'instabilité peut ne pas apparaître, et ce malgré la modification de Kato-Lauder. Il est alors nécessaire d'en forcer le déclenchement. Nous reviendrons plus bas sur la technique que nous avons utilisée pour réaliser ce forçage.

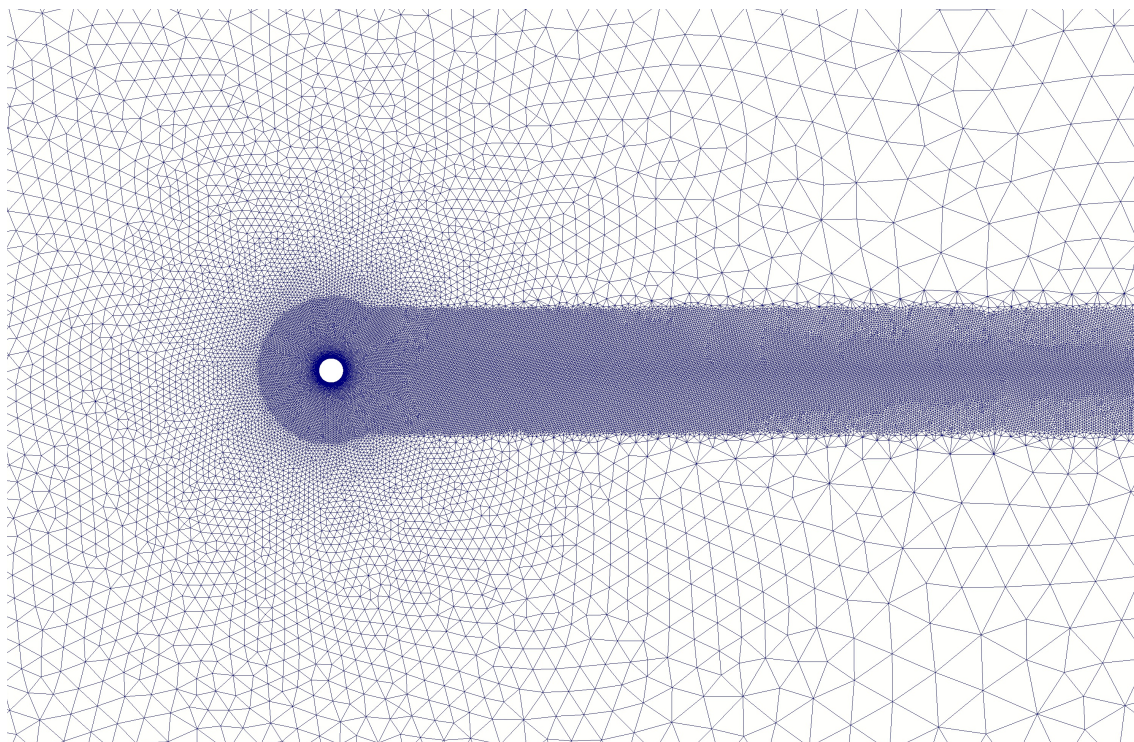


Figure 4.23 Maillage fixe - cylindre circulaire

Afin d'expliciter le maillage fixe, on précise que deux zones ont été définies pour le construire : une première zone circulaire, centrée sur le centre du cylindre (origine du repère cartésien) et de rayon $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 3.0$, une seconde zone rectangulaire à l'aval du cylindre et couvrant la plage $[-2.6 ; 2.6]$ pour la coordonnée y .

Si on appelle h la taille de maille alors on a les relations :

$$h = \begin{cases} h_{min} + (h_{max} - h_{min}) \left[1 - e^{-\frac{r}{r_0}}\right] & \text{si zone 1} \\ h_{max} + h_{max} \left[1 - e^{-\frac{x}{x_0}}\right] \left[1 - e^{-\frac{y}{y_0}}\right] & \text{si zone 2} \end{cases} \quad (4.2)$$

La table 4.5 fournit les valeurs des coefficients apparaissant dans l'équation précédente.

De plus nous avons utilisé la suggestion de Gammacurta afin de pouvoir, en modifiant un peu la physique du problème, augmenter la valeur de y^+ sur le pourtour du cylindre et ainsi se rapprocher de la zone de validité du raccordement pour le modèle $k-\varepsilon$ standard. Pour plusieurs simulations sur maillage fixe la valeur du paramètre de rugosité E a été réduite de 9.0 à 0.3, tandis que la valeur de la distance de raccordement d a été augmentée à 0.03. Il nous a semblé non envisageable d'augmenter d davantage car cela revient physiquement à réduire le diamètre D du cylindre de 6%, tout comme la valeur du nombre de Reynolds, dont la valeur effective passe à 9400 alors que l'on conserve le paramètre dans nos équations à 10000.

On a aussi cherché un moyen de déclencher l'apparition de l'allée de Von Karman dans le cas où la finesse du maillage l'empêcherait. Une solution aurait pu consister à imposer une légère rotation du cylindre sur quelques pas de temps mais l'utilisation de la loi de paroi ne permet pas de le faire simplement. On a donc opté pour la modification de la condition limite d'entrée pour la vitesse U . Le but est de briser temporairement la symétrie par rapport à l'axe des x de cette condition limite, tout en respectant la condition limite des 2 points coïncidant avec les frontières ② et ④. Pour ce faire on a choisi d'utiliser les polynômes d'interpolation d'Hermite, permettant d'imposer à la fois la valeur de la fonction et de sa dérivée pour une valeur donnée de son argument (cet argument pouvant être le temps t comme la coordonnée

Tableau 4.5 Coefficients relatifs aux équations (4.2)

h_{min}	h_{max}	r_0	x_0	y_0
0.005	0.075	$\frac{3}{8}$	30.0	2.2

d'espace y). Plus précisément la condition limite sur la vitesse U est donnée par :

$$U(y) = \begin{cases} R(t) \cdot (1 + [q_{y=-20}(y)P_{y=-20}(y) + q_{y=20}(y)P_{y=20}(y)]) & \text{si } t \leq 1 \\ 1 + q_{y=-20}(y)P_{y=-20}(y) + q_{y=20}(y)P_{y=20}(y) & \text{si } t > 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

avec dans notre cas :

$$\begin{cases} q_{y=-20}(y) = \left(\frac{y-20}{-40}\right)^2 \\ q_{y=20}(y) = \left(\frac{y+20}{40}\right)^2 \\ P_{y=-20}(y) = -\Delta(t) \cdot (1 - (y+20)q'_{y=-20}(-20)) \\ P_{y=20}(y) = \Delta(t) \cdot (1 - (y-20)q'_{y=20}(20)) \end{cases}$$

et tel que :

$$\Delta(t) = \Delta_0 \left(1 - \frac{\min\{t, T_0\}}{T_0}\right) \quad \text{avec } \Delta_0 = 0.3 \text{ et } T_0 = 10$$

En pratique, cela veut dire que l'on aura une différence de vitesse maximale de $2\Delta_0$ en entrée du domaine et entre les points extrêmes de cette courbe frontière. Cette perturbation, décroissante dans le temps, sera finalement annulée à partir de $t = T_0$. Par contre on aura bien en tout temps en entrée :

$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=-20} = \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=20} = 0$$

Par ailleurs la fonction $R(t)$ fait référence à une nouvelle rampe en temps, que nous avons adoucie afin d'avoir une valeur continue de la dérivée de la vitesse dans le temps en début et fin de rampe. Ceci a également été réalisé en utilisant les pôlynomes d'interpolation d'Hermite entre les instants $t = 0$ et $t = 2$. L'adoucissement de la rampe est renforcé en prenant une durée support de rampe de 2 unités de temps, contre seulement une sur les simulations précédentes. On a donc :

$$R(t) = q_{t=0}(t)P_{t=0}(t) + q_{t=2}(t)P_{t=2}(t) \quad (4.4)$$

avec cette fois :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{t=0}(t) = \left(\frac{t-2}{-2}\right)^2 \\ q_{t=2}(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^2 \\ P_{t=0}(t) = 0 \\ P_{t=2}(t) = 1 - (t-2)q'_{t=2}(2) \end{array} \right.$$

Notre choix de la fonction $\Delta(t)$ conduit à maintenir une perturbation conséquente de la condition limite d'entrée pour une durée assez longue. En pratique on a observé que cela pouvait permettre de déclencher l'allée de Von Karman, dépendamment du paramètre de rugosité et de la distance de raccordement à la paroi utilisés, et également du maillage fixe choisi. Toutefois, il faudra simuler une durée suffisamment longue pour laisser le temps au plus gros de la perturbation de se convecter jusqu'au cylindre pour perturber le sillage et déclencher l'instabilité. Ce temps peut-être raccourci si la distance entre l'entrée du domaine et le cylindre est réduite. Toutefois nous avons fait le choix de garder le même domaine que pour la simulation avec remaillage, pour nous concentrer seulement sur l'effet de la perturbation sur l'écoulement.

On présente dans la suite les résultats qui ont été obtenus pour quelques simulations réalisées sur le maillage fixe précédent.

Résultats obtenus pour les BDF

Puisque l'on travaille sur maillage fixe, le pas de temps et l'ordre de la méthode BDF n'ont jamais été réinitialisés au cours de la simulation. On présente à la figure 4.24 l'évolution du pas de temps pour deux cas simulés sur maillage fixe. Pour le premier cas, aucune perturbation de la condition limite d'entrée n'a été utilisée et on a gardé une rampe linéaire en temps jusqu'à $t = 1$, contrairement au second cas où nous avons appliqué la perturbation explicitée plus haut. Les valeurs de E et de d sont toujours celles de la simulation avec remaillages. La figure 4.25 présente quant à elle l'évolution de l'ordre de la méthode BDF pour ces mêmes cas.

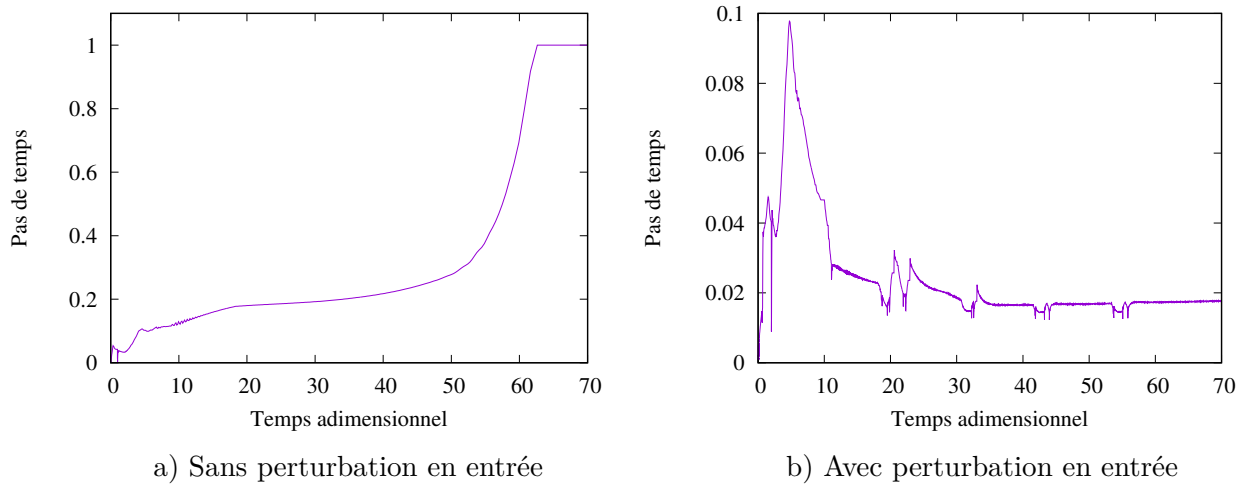


Figure 4.24 Évolution du pas de temps - cylindre circulaire

On peut faire plusieurs observations. Dans le premier cas on voit que le pas de temps a considérablement augmenté en fin de simulation pour finalement atteindre une valeur maximale de 1 unité de temps. Rien qu'à la vue de ce graphe on peut donc se douter que l'allée de Von Karman n'est pas apparue et que l'on a atteint une solution stationnaire : et c'est bien le cas en pratique. Cet exemple prouve la puissance de l'adaptation automatique du pas de temps. On remarquera d'ailleurs que la discontinuité dans la dérivée temporelle de la vitesse à l'entrée à $t = 1$ est captée par l'estimateur d'erreur, ce qui conduit à faire chuter le pas de temps, mais à monter en ordre !

Avec la perturbation de la vitesse en entrée on obtient des résultats à l'image du phénomène instationnaire. On retrouve bien les tendances que nous avons mis en lumière dans le cas avec remaillage. On voit que l'adoucissement de la rampe en temps n'a pas été suffisant pour empêcher la chute du pas de temps à la fin de la rampe. On observe également la chute rapide

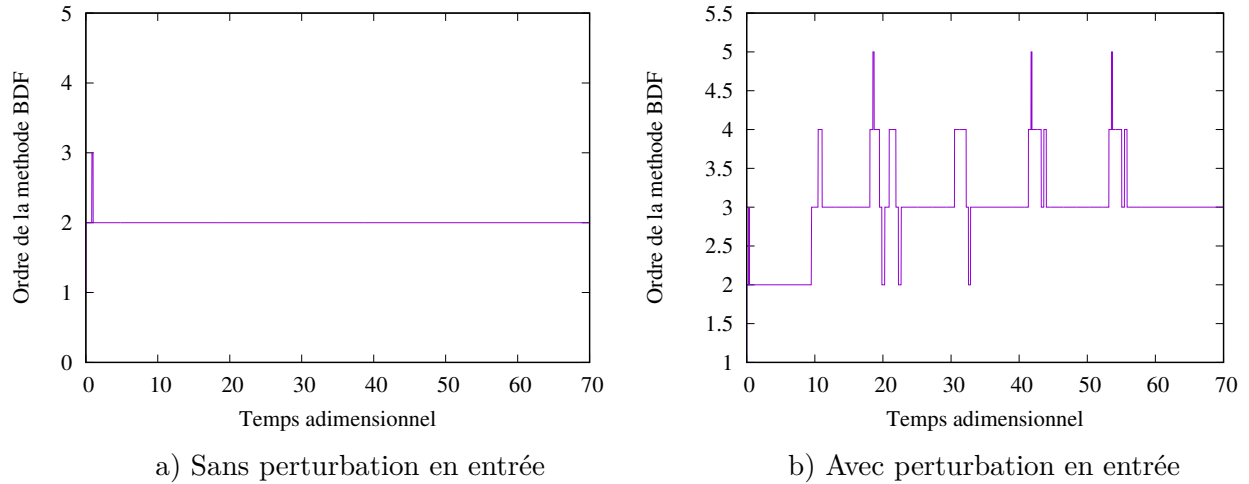


Figure 4.25 Évolution de l'ordre de la méthode BDF - cylindre circulaire

du pas dès la naissance de l'allée de Von Karman vers $t = 7$. Le passage de la perturbation introduite en entrée au niveau du cylindre implique une perturbation du pas de temps vers $t = 20$ mais on observe aussi ce qui semble être un écho de cette perturbation toutes les 10 unités de temps, jusqu'à ce que la perturbation soit évacuée en sortie vers $t = 60$. Quoi qu'il se soit vraiment passé, la méthode adaptative a bien ressenti la perturbation et a ajusté le pas de temps en conséquence. On soulignera aussi encore une fois que l'ordre de la méthode s'est ajusté rapidement à ces instants pour compenser les chutes locales du pas de temps.

Évolution du coefficient de portance - Prédiction du Strouhal

On présente ici les coefficients de force de portance qui ont été obtenus pour deux simulations différant seulement par la valeur des paramètres E et d de la loi de paroi. Dans le premier cas on a $E = 9.0$ et $d = 0.01$, tandis que dans le second cas on a $E = 0.3$ et $d = 0.03$. Dans les deux cas on a utilisé la perturbation, décrite plus haut, pour la vitesse en entrée. On a superposé dans la figure 4.26 le coefficient de portance dans les deux cas.

Le graphe des coefficients de portance nous permet de déterminer la valeur du nombre de Strouhal dans les deux cas. La valeur attendue pour ce cas est de 0.27 [70]. Dans notre cas on a $S_t = 0.452$ pour la première simulation, et $S_t = 0.307$ pour la seconde. La différence est donc assez notable avec les valeurs de Mohammadi (valeurs comprises entre 0.26 et 0.27), mais aussi entre nos deux cas numériques. On illustre davantage cette différence entre nos 2 cas en présentant la vorticité en fin de simulation au travers des figures 4.27 et 4.28. Toutefois

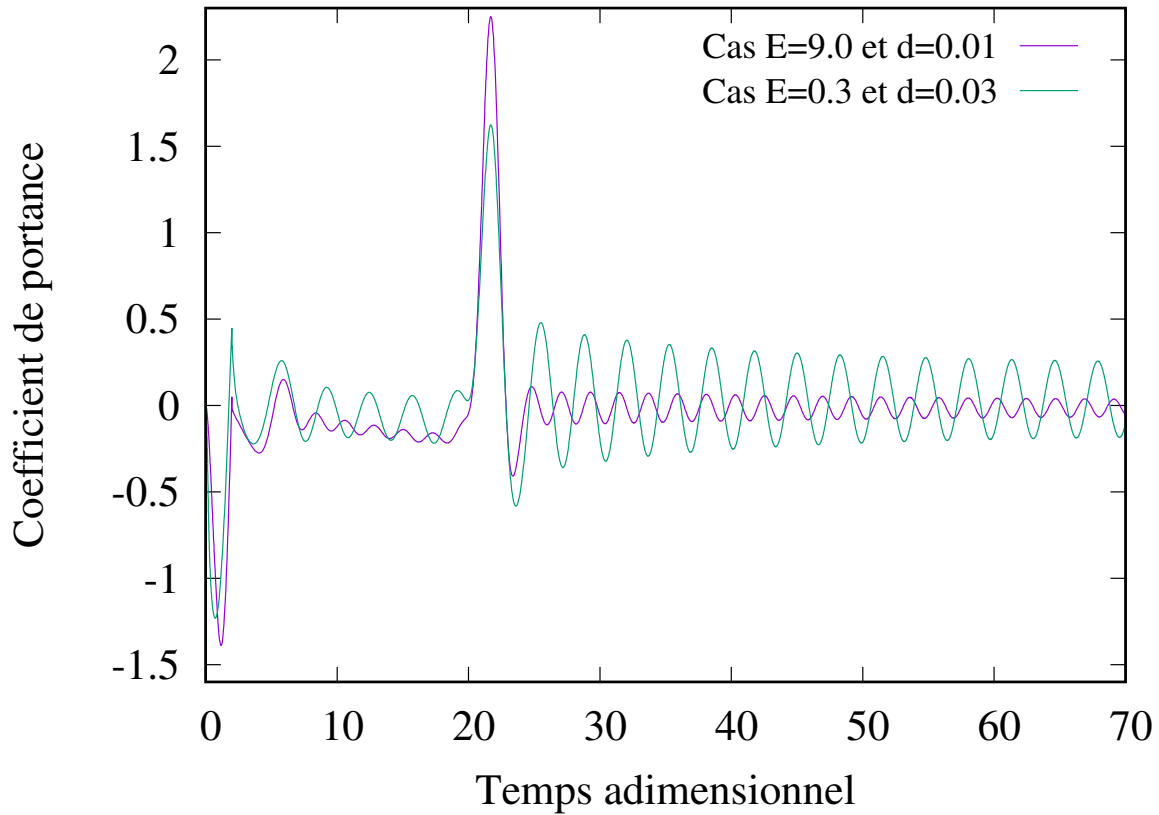


Figure 4.26 Coefficients de portance - cylindre circulaire

la prévision de Mohammadi passe par l'utilisation de la loi de Reichardt sensibilisée aux effets de pression et de convection. Dans leur simulation avec loi de paroi standard, à une échelle de vitesse et réduite à la loi logarithmique, ils obtiennent en réalité $S_t \approx 0.35$. Notre premier cas montre donc à priori que dans le cas d'une loi de paroi standard à deux échelles de vitesse, la distance de raccordement d préconisée par Mohammadi n'est pas pertinente. Nos valeurs de y^+ , bien en dehors de la bonne zone de raccordement ($y^+ > 30$), ne pouvaient faire autrement que conduire à des résultats erronés. La prédiction du Strouhal obtenue dans notre second cas n'est cependant pas si mauvaise, mais requiert de modifier le paramètre de rugosité, ce qui revient finalement à devoir modifier la physique du problème et n'est donc guère plus acceptable. Quoi qu'il en soit nos valeurs de Strouhal et celles obtenues par Mohammadi demeurent éloignées de la valeur théorique attendue de 0.2.

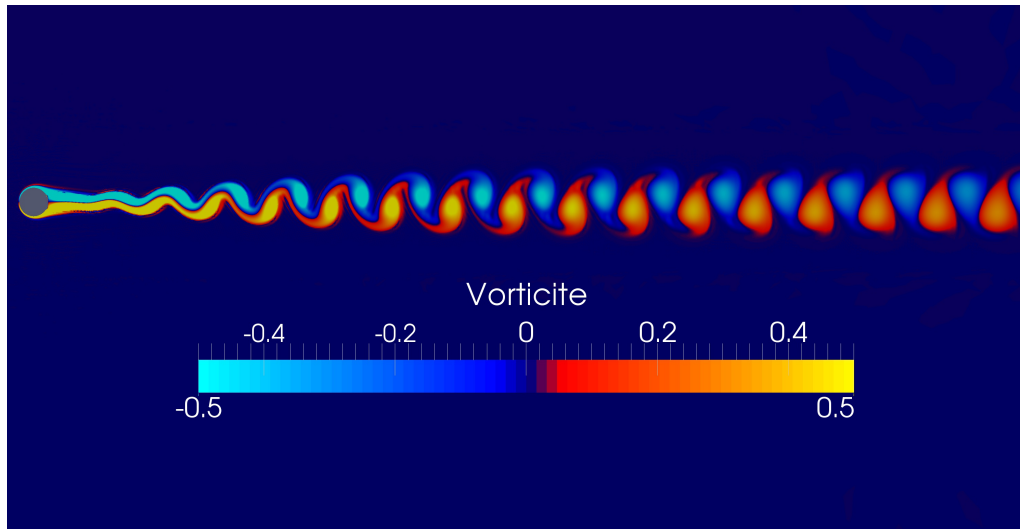


Figure 4.27 Carte de vorticité - Cas $E = 9.0$ et $d = 0.01$

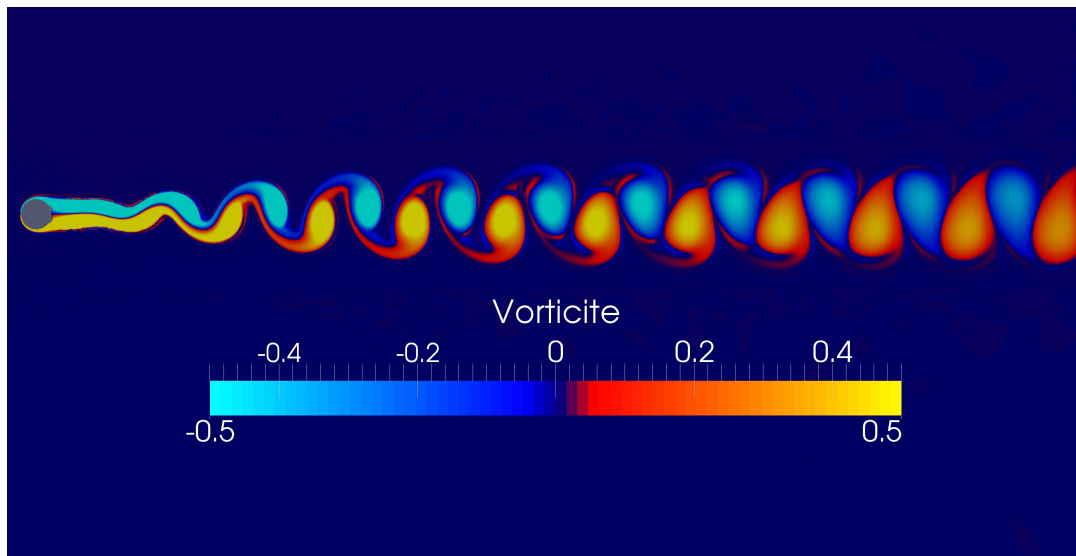


Figure 4.28 Carte de vorticité - Cas $E = 0.3$ et $d = 0.03$

4.4 Conclusion pour l'ensemble des 3 simulations

Via le cas de la marche descendante on a pu vérifier à nouveau l'algorithme instationnaire en montrant que pour un temps de simulation assez long les résultats tendaient bien vers ceux que la simulation stationnaire nous fournit avec des paramètres de simulation identiques. Ce premier cas d'étude a également permis de valider indirectement l'algorithme complet car nous avons retrouvé le résultat qu'avait obtenu Ilinca pour la longueur de la zone de recirculation. La procédure de remaillage est apparue particulièrement bien adaptée pour ce genre d'écoulement, tendant vers un état stationnaire et dont la localisation des zones de forts gradients se déplacent beaucoup, mais lentement, durant la phase instationnaire.

Le cas du cylindre carré nous a permis de valider notre algorithme en retrouvant la prédiction du Strouhal de Mohammadi et Pironneau, et cela malgré un modèle de turbulence légèrement différent du leur, et une loi de paroi permettant un raccordement pour toute valeur de y^+ dans leur cas. La modification du terme de production proposée par Kato-Launder pour ce type d'écoulement a été testée avec succès.

La procédure de remaillage, bien qu'impressionnante pour traquer au cours du temps les interfaces entre les tourbillons et l'écoulement libre, a montré des limitations. Le remaillage n'étant pas prédictif, il est nécessaire de remailler très régulièrement pour que les zones très denses en nombre de noeuds restent raisonnablement en phase avec les interfaces.

Concernant les méthodes BDF, on a pu vraiment apprécier la puissance de ses aspects adaptatifs. L'évolution du pas de temps et de l'ordre ont eu le comportement logique attendu, et d'ailleurs très pertinent pour un cas d'étude comme celui-ci. En effet une montée en pas de temps facile s'est traduit par l'utilisation d'une méthode BDF d'ordre 2 (à stabilité absolue), tandis qu'un maintien du pas de temps à des valeurs assez faibles pendant la phase de relâché tourbillonnaire a permis de monter en ordre, augmentant grandement la précision de l'intégration temporelle dans cette phase où les effets instationnaires sont forts.

Le cas du cylindre circulaire, étudié plus longuement car plus complexe, a bien montré les faiblesses du modèle de turbulence $k-\varepsilon$ standard pour ce genre de cas. L'utilisation de la loi de paroi standard à deux échelles de vitesse s'est aussi révélée peu adaptée pour résoudre ce problème, car le décollement des couches limites autour du cylindre est provoqué par un gradient de pression adverse et notre loi de paroi n'est pas sensibilisée à la pression. Il a aussi été impossible d'obtenir des valeurs correctes de y^+ pour la distance de raccordement à la paroi préconisée par Mohammadi. Les résultats les plus proches de ceux attendus sont finalement obtenus pour un problème dont la physique est modifiée avec un changement drastique

au niveau du paramètre de rugosité de notre loi de paroi, ce qui suggère que la loi de la paroi utilisée n'est pas adaptée pour un tel problème. Par ailleurs la modification de Kato-Launder s'est révélée moins pertinente ici car en l'absence de perturbation de la vitesse en entrée les résultats obtenus ont été stationnaires.

CHAPITRE 5 CONCLUSION

5.1 Synthèse des travaux

Durant ces travaux de recherche on aura donc bien répondu aux objectifs énoncés en introduction.

Le couplage des méthodes BDF adaptatives en ordre et en pas de temps, avec l'algorithme RANS existant, a été réalisé avec succès comme en témoigne la vérification des ordres de convergences des BDF au chapitre 3, et le comportement des méthodes lors des cas d'application du chapitre 4. Les modifications qui ont été apportées à l'estimation d'erreur et d'ordre se sont aussi révélées pertinentes.

La procédure de remaillage a également été testée et a démontré toute sa capacité à générer des maillages parfaitement adaptés à la solution calculée, tout en gardant un nombre de noeuds proche d'une cible prédéterminée. Mais on aura malgré tout pu identifier plusieurs limitations (cf. section suivante) au fonctionnement actuel de la procédure. Des propositions permettant de pallier à ces problèmes ont d'ors et déjà été énoncées, et feront très certainement l'objet de futurs travaux.

Une formulation adimensionnelle alternative des équations à résoudre a également été proposée dans ce mémoire, intéressante pour les écoulements libres, n'exigeant pas l'usage de loi de paroi, et donc pas l'usage des variables logarithmiques conformément à l'implémentation actuelle.

L'algorithme complet développé ici a montré une grande robustesse au niveau de la résolution, puisque la méthode de Newton a pu être employée directement, sans recourir aux itérations de Picard. Les prédictions obtenues dans les cas de validation de la marche de Kim et du cylindre carré sont très satisfaisantes. Le cas du cylindre circulaire a donné des résultats beaucoup plus mitigés mais a permis de remettre en lumière la faiblesse du modèle $k-\varepsilon$ pour cet écoulement, et même plus particulièrement la faiblesse de la loi de paroi standard à deux échelles de vitesses dans les cas présentant des gradients de pression. Cela justifie d'autant plus les efforts actuels du laboratoire, tournés vers le développement des lois de paroi automatiques sensibilisées à la pression.

5.2 Limitations de la solution proposée

Comme nous avons pu l'expliquer au chapitre 3, l'algorithme que nous avons utilisé ici pour mener les simulations d'écoulements turbulents instationnaires est sujet à plusieurs limitations. Premièrement il faut bien noter que la méthode d'adaptation de maillage utilisée et que nous avons décrite à la section 2.2.3 a été mise au point pour des écoulements stationnaires. En ce sens l'adaptation de maillage travaille en considérant que la solution de support est un état stationnaire. Le nouveau maillage obtenu permet théoriquement de réduire l'erreur spatiale commise sur la résolution de l'écoulement à l'instant T où le remaillage a été effectué. Seulement, dans le cas d'un écoulement présentant une phase instationnaire assez rapide (cf. étude du cylindre carré au chapitre 4) , la procédure de remaillage va nécessiter pour être efficace d'être réalisée très fréquemment, afin que les zones fortement maillées restent en phases avec la physique de l'écoulement. L'algorithme perd donc un peu de son efficacité de ce point de vue car la génération du nouveau maillage n'est pas gratuite en temps de calcul, d'autant plus que le nombre d'éléments à créer est grand. Dans le cas où l'on considérerait une durée d'intervalle de temps trop grande entre deux procédures de remaillage, il est également probable que le nouveau maillage généré ne soit pas satisfaisant. Le principe d'équi-répartition d'erreur va tendre surtout à augmenter la tailles des mailles dans les zones qui ne sont plus critiques avant de commencer à raffiner dans les nouvelles zones sensibles. Cela sera d'autant plus vrai que le facteur cible de réduction de l'erreur globale sera proche de 1, et c'est souvent le cas dans notre algorithme car l'on cherche à rester autour d'un nombre de nœuds cible.

Une autre limitation de l'algorithme se situe dans le contrôle de l'erreur et dépend encore une fois de la qualité du nouveau maillage généré. L'interpolation de la solution précédente dans le nouveau maillage est par construction une interpolation linéaire, et ce bien que les fonctions d'interpolation de l'élément utilisé soient quadratiques. Il en a été décidé ainsi pour une raison simple de robustesse de l'interpolation. Une interpolation quadratique aurait pu conduire dans certains cas de figure à interpoler des valeurs de k et ε négatives, ce qui n'est pas physique et produirait une sortie anticipée du programme en cas d'utilisation de variables logarithmiques. Mais l'interpolation linéaire va avoir pour inconvénient d'introduire davantage d'erreur. Bien que chaque élément P2 soit découpé en 4 éléments P1 afin de conserver l'information utile des noeuds milieux de l'élément P2, il faudra bien garder en tête que si une zone du domaine de calcul est critique (en termes de variations rapides de la solution dans l'espace) et insuffisamment maillée, alors l'interpolation risque d'introduire beaucoup d'erreur lors de la reprise du calcul. Dans le même ordre d'idée nous avons fait le

choix d'utiliser un schéma d'intégration temporelle d'ordre 1 (Euler implicite) pour le premier pas de temps suivant un remaillage, car c'était la façon la plus directe de procéder vu le fonctionnement présent du pré-processeur. On introduit donc consécutivement à l'erreur d'interpolation un surplus d'erreur temporelle, dont la seule façon d'en limiter l'impact est de redémarrer le calcul avec un très petit pas de temps. Une autre façon de faire, nécessitant des modifications dans Amiral et Cadyf, eût été d'interpoler les p derniers pas de temps sur le nouveau maillage, pour reprendre directement avec la méthode d'ordre p et le pas de temps h utilisé au dernier pas de temps précédant le remaillage. Mais rien ne dit que cette alternative soit plus performante, car on introduit p fois l'erreur d'interpolation, ce qui peut potentiellement fausser notablement la valeur des dérivées temporelles initiales lors de la reprise du calcul.

5.3 Améliorations futures

En vue de répondre aux limitations évoquées dans la section 5.2 on peut proposer une piste majeure d'amélioration de l'algorithme global via l'enrichissement du module adapt. Comme évoqué précédemment la procédure d'adaptation de maillage ne possède aucune considération instationnaire pour le moment. L'idée serait donc d'élargir les possibilités du module en mettant au point un procédé d'adaptation de maillage prédictif. En s'appuyant sur le champs de vitesse support pour la génération du nouveau maillage, ainsi que sur la durée T simulée pour le prochain intervalle de temps résolu, on peut raisonnablement penser qu'il sera possible d'estimer comment seront convectées les structures maillées les plus finement sur cette durée T . A partir de cette estimation il sera possible d'étendre le raffinement du maillage aux zones du domaine de calcul censées recevoir les structures critiques. En procédant ainsi on réduira à priori l'erreur d'interpolation mais on stabilisera également l'erreur globale au cours de l'intervalle de temps suivant le remaillage.

On prévoit également de revenir à une interpolation quadratique, afin de ne plus injecter d'erreur lors d'un remaillage. Un léger écart à la satisfaction de la contrainte d'incompressibilité pourra cependant toujours être observé au début du premier pas de temps. En vue de traiter des cas d'interactions fluide-structure en régime turbulent, il est en effet nécessaire de s'assurer que l'on introduit le moins d'erreur possible entre deux remaillages, pour garantir la continuité dans les efforts repris par le solide.

Pour terminer on peut facilement envisager d'étendre l'application des méthodes BDF à

d'autres modèles de turbulence, tel que le $k\text{-}\omega$ SST maintenant disponible au laboratoire, à l'heure où ces dernières lignes sont écrites.

RÉFÉRENCES

- [1] Aokomoriuta. Law of the wall, horizontal velocity near the wall with mixing length model, 2011. [Online; accessed April 3, 2017] - URL : https://en.wikipedia.org/wiki/Law_of_the_wall.
- [2] O. C. Zienkiewicz, Robert L. (Robert Leroy) Taylor, and J. Z. Zhu. *Finite element method : its basis and fundamentals*. Butterworth-Heinemann, 2013.
- [3] G. N. Coleman and R. D. Sandberg. A primer on direct numerical simulation of turbulence - methods, procedures and guidelines. *Tech. Rep.*, pages 1–21, 2010.
- [4] P. Moin and K. Mahesh. Direct Numerical Simulation : A Tool in Turbulence Research. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 30(1) :539–578, jan 1998.
- [5] P. Sagaut. *Large eddy simulation for incompressible flows : an introduction*. Springer-Verlag, 2006.
- [6] F. Navah, S. Etienne, and D. Pelletier. Coupled and Semi-Coupled Finite Element Algorithms for the K-Epsilon Model of Turbulence. In *47th AIAA Aerosp. Sci. Meet. Incl. New Horizons Forum Aerosp. Expo.*, Reston, Virigina, jan 2009. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [7] B. Mohammadi and G. Puigt. Wall functions in computational fluid mechanics. *Comput. Fluids*, 35(10) :1108–1115, 2006.
- [8] D. Lacasse, É. Turgeon, and D. Pelletier. Prediction of Turbulent Separated Flow in a Turnaround Duct Using Wall Functions and Adaptivity. *Int. J. Comput. Fluid Dyn.*, 15(3) :209–225, nov 2001.
- [9] L. Frazza. Utilisation conjointe de lois de parois et modèles bas-Reynolds. Master’s thesis, Université de Montréal, 2015.
- [10] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2 : Error estimates and adaptivity. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 33(7) :1365–1382, may 1992.
- [11] F. Ilinca and D. Pelletier. Positivity Preservation and Adaptive Solution for the k-e Model of Turbulence. *AIAA J.*, 36(1) :44–50, 1998.
- [12] A. Hay, S. Etienne, D. Pelletier, and A. Garon. Hp-Adaptive time integration based on the BDF for viscous flows. *J. Comput. Phys.*, 291 :151–176, 2015.
- [13] P. Holmes and E. Shea-Brown. Stability. *Scholarpedia*, 2006.

- [14] L Frazza, A Hay, and D Pelletier. A logarithmic formulation for low-Reynolds number turbulence models with adaptive wall-functions. (June) :1–20, 2015.
- [15] U. (Uriel) Frisch. *Turbulence : the legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995.
- [16] J. Boussinesq. *Essai sur la théorie des eaux courantes*. Paris, Imprimerie Nationale, 1872.
- [17] Klebanoff and P S. Characteristics of turbulence in boundary layer with zero pressure gradient. Technical report, 1955.
- [18] David C Wilcox. *Turbulence modeling for CFD (Third Edition)*. 2006.
- [19] L Prandtl. A report on testing for built-up turbulence. *Z. Angew. Math. Mech*, 1925.
- [20] B. Baldwin and H. Lomax. Thin-layer approximation and algebraic model for separated turbulentflows. In *16th Aerosp. Sci. Meet.*, Reston, Virigina, jan 1978. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [21] R. Chima, P. Giel, and R. Boyle. An algebraic turbulence model for three-dimensional viscous flows. In *31st Aerosp. Sci. Meet.*, Reston, Virigina, jan 1993. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [22] D. A. Johnson and T. J. Coakley. Improvements to a nonequilibrium algebraic turbulence model. *AIAA J.*, 28(11) :2000–2003, nov 1990.
- [23] Q. Chen and W. Xu. A zero-equation turbulence model for indoor airflow simulation. *Energy Build.*, 28(2) :137–144, oct 1998.
- [24] S. Jakirlic and K. Hanjalic. A new approach to modelling near-wall turbulence energy and stress dissipation. *J. Fluid Mech*, 459 :139–166, 2002.
- [25] P. Bradshaw and J. B. Perot. A note on turbulent energy dissipation in the viscous wall region. *Phys. Fluids A Fluid Dyn.*, 5(12) :3305–3306, dec 1993.
- [26] P. Bradshaw, D. H. Ferriss, and N. P. Atwell. Calculation of boundary-layer development using the turbulent energy equation. *J. Fluid Mech.*, 28(03) :593, may 1967.
- [27] H. McDonald and R.W. Fish. Practical calculations of transitional boundary layers. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 16(9) :1729–1744, sep 1973.
- [28] W. Rodi and D. B. Spalding. A two-parameter model of turbulence, and its application to free jets. *Heat Mass Transf.*, 3(2) :85–95, jun 1970.
- [29] P Spalart and S Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. In *30th Aerosp. Sci. Meet. Exhib.*, Reston, Virigina, jan 1992. American Institute of Aeronautics and Astronautics.

- [30] B Aupoix and P R Spalart. Extensions of the Spalart - Allmaras turbulence model to account for wall roughness. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 24(4) :454–462, 2003.
- [31] B E Launder and B I Sharma. Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. *Lett. Heat Mass Transf. vol. 1, Nov.-Dec. 1974*, p. 131-137. *Sci. Res. Counc.*, 1 :131–137, 1974.
- [32] D C Wilcox. Formulation of the kw turbulence model revisited. *AIAA J.*, 46(11) :2823–2838, 2008.
- [33] F R Menter. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA J.*, 32(8) :1598–1605, aug 1994.
- [34] F. Lacombe. Vérification et validation d’une loi de paroi consistante avec le modèle de turbulence $k-\omega$ SST. Master’s thesis, École Polytechnique de Montréal, 2017.
- [35] B.E. Launder and B.I. Sharma. Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. *Lett. Heat Mass Transf.*, 1(2) :131–137, nov 1974.
- [36] CKG Lam and K Bremhorst. A modified form of the k-epsilon model for predicting wall turbulence. *ASME Trans. J. Fluids . . .*, 103(September 1981) :456–460, 1981.
- [37] K.Y. Chien. Predictions of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low-Reynolds-Number Turbulence Model. *AIAA J.*, 20(1) :33–38, jan 1982.
- [38] Y Nagano and M Hishida. Improved Form of the $k-\epsilon$ Model for Wall Turbulent Shear Flows. *J. Fluids Eng.*, 109(2) :156–160, 1987.
- [39] M. Kato and B.E Launder. The modeling of turbulent flow around stationary and vibrating square cylinders. *Ninth Symp. Turbul. Shear Flows*, (January 1993) :10.4.1–10.4.6, 1993.
- [40] V. Yakhot and S. A. Orszag. Renormalization group analysis of turbulence. I. Basic theory. *J. Sci. Comput.*, 1(1) :3–51, 1986.
- [41] V. Yakhot, S. A. Orszag, S. Thangam, T. B. Gatski, and C. G. Speziale. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique. *Phys. Fluids A Fluid Dyn.*, 4(7) :1510–1520, jul 1992.
- [42] J.P. Chabard. Projet N3S de mécanique des fluides - manuel théorique de la version 3. Technical report EDF HE-41/91.30B. Technical report, Electricité de France, 1991.
- [43] E. Colin, S. Etienne, D. Pelletier, and J. Borggaard. Application of a sensitivity equation method to turbulent flows with heat transfer. *Int. J. Therm. Sci.*, 44(11) :1024–1038, nov 2005.

- [44] É. Turgeon, D. Pelletier, and J. Borggaard. A General Continuous Sensitivity Equation Formulation for the k-e Model of Turbulence. *Int. J. Comput. Fluid Dyn.*, 18(1) :29–46, jan 2004.
- [45] J. Borggaard. *The sensitivity equation method for optimal design*. PhD thesis, 1994.
- [46] F. Navah. Une formulation monolithique des modèles de turbulence à deux équations : calcul éléments finis d'écoulements et de sensibilités. Master's thesis, Université de Montréal, 2008.
- [47] J. Laufer. The structure of turbulence in fully developed pipe flow. Technical report, 1952.
- [48] F. Ilinca. *Méthodes d'éléments-finis adaptatives pour les écoulements turbulents*. PhD thesis, Université de Montréal, 1996.
- [49] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1986.
- [50] A. Quarteroni, F. Saleri, and R. Sacco. *Numerical Mathematics*. Springer, 2007.
- [51] J.E. Dennis and R.B. Schnabel. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.
- [52] E. Gammacurta. Analyse de sensibilité d'écoulements turbulents instationnaires. Master's thesis, Université de Montréal, 2009.
- [53] E. Hairer and G. Wanner. Linear multistep method. *Scholarpedia*, 2010.
- [54] C De Boor. *A practical guide to splines*. Springer, 1978.
- [55] S. Skelboe. The control of order and steplength for backward differentiation methods. *BIT Numer. Math.*, 17(1) :91–107, mar 1977.
- [56] A Hay, S Etienne, and D Pelletier. Time-integration for incompressible viscous flows : Stepsize and order selection based on the BDF. Number June, pages 1–16. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2014.
- [57] LF Shampine and MK Gordon. *Computer solution of ordinary differential equations*. San Francisco, California : Freeman, 1975.
- [58] J. D. (John Denholm) Lambert. *Numerical methods for ordinary differential systems : the initial value problem*. John Wiley & Sons, 1991.
- [59] J. C. (John Charles) Butcher. *Numerical methods for ordinary differential equations*. Wiley, 2016.
- [60] S. Campbell, V. Linh, and L. Petzold. Differential-algebraic equations. *Scholarpedia*, 2008.

- [61] U. M. Ascher and L. R. Petzold. *Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.
- [62] J. F. Hétu. *Méthode d'éléments finis adaptatives pour les écoulements visqueux incompressibles*. PhD thesis, Université de Montréal, 1991.
- [63] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 24(2) :337–357, feb 1987.
- [64] J Peraire, M Vahdati, and K Morgan. Adaptive remeshing for compressible flow computations. *J. Comput.*, pages 449–466, 1987.
- [65] P. J. Roache. Code Verification by the Method of Manufactured Solutions. *J. Fluids Eng.*, 124(1) :4, 2002.
- [66] L. Eça, M. Hoekstra, a. Hay, and D. Pelletier. A manufactured solution for a two-dimensional steady wall-bounded incompressible turbulent flow. *Int. J. Comput. Fluid Dyn.*, 21(3-4) :175–188, 2007.
- [67] V. C. Patel, W. Rodi, and Scheuerer G. Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows - A review. *AIAA J.*, 23(9) :1308–1319, sep 1985.
- [68] J Kim, S J Kline, and J P Johnston. Investigation of a reattaching turbulent shear layer : flow over a backward-facing step. *J. Fluids Eng*, 102 :302–308, 1980.
- [69] J.Y. Kim, A. J. Ghajar, C. Tang, and G. L. Foutch. Comparison of near-wall treatment methods for high Reynolds number backward-facing step flow. *Int. J. Comput. Fluid Dyn.*, 19(7) :493–500, 2005.
- [70] B. Mohammadi and O. Pironneau. Unsteady separated turbulent flows computation with wall-laws and k - e model. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 148 :393–405, 1997.

ANNEXE A FORME FAIBLE DES ÉQUATIONS

On présente ici les formulations faibles des équations de vitesse U et V , de l'énergie cinétique de la turbulence k , de la dissipation ε , et de la pression P . Les formulations faibles des équations des variables de turbulence sont traitées en variables standards, puis logarithmiques. Toutes les formulations sont adimensionnelles.

- Formulation faible pour $\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_x = U$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_U = & \int_{\Omega} \rho_f \left(\frac{1}{St} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) \delta_U \, dS \\ & + \int_{\Omega} -p \frac{\partial \delta_U}{\partial x} + \left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0}} \right) \left[2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \delta_U}{\partial x} + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta_U}{\partial y} \right] \, dS \\ & - \int_{\Omega} Q_U \, dS \\ & - \int_{\partial\Omega_N} \left[\left(-p + \left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0}} \right) \frac{\partial U}{\partial x} \right) n_x + 2 \left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0}} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) n_y \right] \delta_U \, dl \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

- Formulation faible pour $\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_y = V$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_V = & \int_{\Omega} \rho_f \left(\frac{1}{St} \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) \delta_V \, dS \\ & + \int_{\Omega} -p \frac{\partial \delta_V}{\partial y} + \left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0}} \right) \left[2 \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial \delta_V}{\partial y} + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta_V}{\partial x} \right] \, dS \\ & - \int_{\Omega} Q_V \, dS \\ & - \int_{\partial\Omega_N} \left[\left(-p + \left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0}} \right) \frac{\partial V}{\partial y} \right) n_y + 2 \left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0}} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) n_x \right] \delta_V \, dl \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

- Formulation faible pour P :

$$\mathcal{R}_p = \int_{\Omega} \delta_p \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} - Q_p \right) \, dS \quad (\text{A.3})$$

- Formulation faible pour k :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_k = & \int_{\Omega} \rho_f \left(\frac{1}{St} \frac{\partial k}{\partial t} + U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} \right) \delta_k \, dS \\
& + \int_{\Omega} \left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_k} \right) \left[\frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial \delta_k}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \delta_k}{\partial y} \right] \, dS \\
& + \int_{\Omega} \left[\rho_f^2 C_{\mu} R_{et0} C_k \frac{k^2}{\mu_t} - \frac{\mu_t}{R_{et0} C_k} P(\mathbf{U}) - Q_k \right] \delta_k \, dS \\
& - \int_{\partial\Omega_N} \left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_k} \right) \left(n_x \frac{\partial k}{\partial x} + n_y \frac{\partial k}{\partial y} \right) \delta_k \, dl
\end{aligned} \tag{A.4}$$

- Formulation faible pour \mathcal{K} :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = & \int_{\Omega} \rho_f \left(\frac{1}{St} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} + V \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} \right) \delta_{\mathcal{K}} \, dS \\
& + \int_{\Omega} \left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_k} \right) \left[\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} \frac{\partial \delta_{\mathcal{K}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} \frac{\partial \delta_{\mathcal{K}}}{\partial y} - \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} \right)^2 \right] \, dS \\
& + \int_{\Omega} \left[\rho_f^2 C_{\mu} R_{et0} C_k \frac{e^{\mathcal{K}}}{\mu_t} - \frac{\mu_t}{R_{et0} C_k} e^{-\mathcal{K}} P(\mathbf{U}) - Q_{\mathcal{K}} \right] \delta_{\mathcal{K}} \, dS \\
& - \int_{\partial\Omega_N} \left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_k} \right) \left(n_x \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} + n_y \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} \right) \delta_{\mathcal{K}} \, dl
\end{aligned} \tag{A.5}$$

- Formulation faible pour ε :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\varepsilon} = & \int_{\Omega} \rho_f \left(\frac{1}{St} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \delta_{\varepsilon} \, dS \\
& + \int_{\Omega} \left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_{\varepsilon}} \right) \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \delta_{\varepsilon}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial \delta_{\varepsilon}}{\partial y} \right] \, dS \\
& + \int_{\Omega} \left[\rho_f C_2 \frac{C_{\varepsilon}}{C_k} \frac{\varepsilon^2}{k} \frac{k^2}{\mu_t} - \rho_f C_{\mu} C_1 \frac{C_k}{C_{\varepsilon}} k P(\mathbf{U}) - Q_{\varepsilon} \right] \delta_{\varepsilon} \, dS \\
& - \int_{\partial\Omega_N} \left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_{\varepsilon}} \right) \left(n_x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + n_y \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \delta_{\varepsilon} \, dl
\end{aligned} \tag{A.6}$$

- Formulation faible pour \mathcal{E} :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\mathcal{E}} = & \int_{\Omega} \rho_f \left(\frac{1}{St} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} + V \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} \right) \delta_{\varepsilon} \, dS \\
& + \int_{\Omega} \left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_{\varepsilon}} \right) \left[\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \frac{\partial \delta_{\varepsilon}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} \frac{\partial \delta_{\varepsilon}}{\partial y} - \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} \right)^2 \right] \, dS \\
& + \int_{\Omega} \left[\rho_f C_2 \frac{C_{\varepsilon}}{C_k} e^{\mathcal{E}-\kappa} - \rho_f C_{\mu} C_1 \frac{C_k}{C_{\varepsilon}} e^{\kappa-\mathcal{E}} P(\mathbf{U}) - Q_{\mathcal{E}} \right] \delta_{\varepsilon} \, dS \\
& - \int_{\partial \Omega_N} \left(\frac{\mu}{R_e} + \frac{\mu_t}{R_{et0} \sigma_{\varepsilon}} \right) \left(n_x \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} + n_y \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} \right) \delta_{\varepsilon} \, dl
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Les quantités δ_U , δ_V , δ_k , δ_{ε} , et δ_p , désignent les fonctions test évoquées à la section 2.2.1. On a de plus volontairement introduit ici les termes sources adimensionnels Q_U , Q_V , Q_k , Q_{ε} , Q_{κ} , $Q_{\mathcal{E}}$, et Q_p qui seront utiles dans le cadre de la méthodes des solutions manufacturées présentées à la section 3.1. On a également identifié pour chaque forme faible, et par la notation $\partial \Omega_N$, les portions de frontière concernées par une condition limite de type Neumann. De manière générale ces portions de frontière ne coïncident pas d'une forme faible à l'autre.

ANNEXE B FICHIER PILOTE POUR LES SIMULATIONS INSTATIONNAIRES

On présente ici la forme du fichier d'entrée pour l'application pilote des simulations instationnaires, laminares ou turbulentes. En guise d'exemple on donne la forme qu'aurait pu avoir le fichier pour le cas de la marche descendante traitée au chapitre 4 :

Données d'entrée générales :

=====

```
Nom_du_cas           = marche
Type_cas             = turbulent
Temps_initial        = 0.0d0
Temps_final_simu     = 5.0d0
Nombre_interval_temps = 6
Duree_interval_variable = oui
Nombre_pas_par_interval = variable
Nombre_noeud_cible   = 100000
Reduc_erreur_par_defaut = 0.5
```

Données pour la situation initiale :

=====

```
Condition_initiale    = nulle
Numero_initiale_du_cas : = 0
Fichier_guess_initial = guess
```

===== TABLEAU_DE_VALEURS =====

No	Temps_final	Nb_pas_de_temps	Pas_de_temps_impression
1	0.5	0.0
2	1.5	0.1
3	3.5	0.2
4	5.0	0.25
5	7.5	0.5
6	10.0	0.5