

**Titre:** Développement d'une approche de conception des structures en  
béton armé basée sur la réduction de capacité résistive

**Auteur:** Oumaima Abra

**Date:** 2017

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Abra, O. (2017). Développement d'une approche de conception des structures en  
béton armé basée sur la réduction de capacité résistive [Mémoire de maîtrise,  
École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/2538/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/2538/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** Mahdi Ben Ftima  
Advisors:

**Programme:** Génie civil  
Program:



UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

DÉVELOPPEMENT D'UNE APPROCHE DE CONCEPTION DES STRUCTURES EN  
BÉTON ARMÉ BASÉE SUR LA RÉDUCTION DE CAPACITÉ RÉSISTIVE

OUMAIMA ABRA

DÉPARTEMENT DES GÉNIES CIVIL, GÉOLOGIQUE ET DES MINES  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE CIVIL)  
AVRIL 2017



UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

DÉVELOPPEMENT D'UNE APPROCHE DE CONCEPTION DES STRUCTURES EN  
BÉTON ARMÉ BASÉE SUR LA RÉDUCTION DE CAPACITÉ RÉSISTIVE

présenté par : ABRA Oumaima

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. MASSICOTTE Bruno, Ph. D, président

M. BEN FTIMA Mahdi, Ph. D, membre et directeur de recherche

M. LAGIER Fabien, Ph. D, membre



## DÉDICACE

*À mes parents et mon frère Marouane,*

*À mes grands-parents,*

*Et à mon oncle Mohammed et sa famille*



## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d’abord à remercier vivement mon directeur de recherche, M. Mahdi Ben Ftima, pour son soutien, sa gentillesse et sa disponibilité tout le long de ma maîtrise. Je voudrais le remercier aussi pour ses précieux conseils, sa rigueur et son expertise qui m’ont permis de développer une vraie passion pour le monde des études non-linéaires.

Je remercie M. Bruno Massicotte et M. Fabien Lagier pour leur participation en tant que jury d’examen pour cette maîtrise.

Je remercie tous les professeurs, associés de recherche et étudiants en génie des structures à l’École polytechnique Montréal.

Je remercie aussi l’École Polytechnique de Montréal et l’École Nationale Supérieure des Mines de Douai pour l’accord qui a permis la réalisation de ce double diplôme. Je remercie particulièrement Mme Karine Kominarz, responsable des échanges internationaux, pour sa disponibilité et sa patience tout le long de ma maîtrise.

Je remercie mes amis au Canada et partout dans le monde qui m’ont soutenu de près ou de loin. Une mention spéciale est dédiée à mon amie Yousra pour son amitié, sa gentillesse et sa bonne humeur.

Enfin, je remercie infiniment mes parents et mon frère pour leur soutien quotidien et leur support inconditionnel qui m’a permis d’aller au bout de ma maîtrise.



## RÉSUMÉ

La conception des structures ou d'éléments de structures complexes en béton armé est un défi auquel font face les ingénieurs en structures pour certains exemples de projets non conventionnels (centrales hydro-électriques, ponts, ...). Dans ces cas précis, l'utilisation de méthodes de conception standard telles que la méthode sectionnelle ou la méthode des bielles et tirants peut s'avérer lourde ou inappropriée. D'un autre côté, les méthodes sophistiquées telles que les analyses non-linéaires par éléments finis ne sont pas très utilisées en pratique en raison de leur complexité et de l'absence de consensus sur leur validité.

Ce travail présente une amorce d'un projet visant à développer une nouvelle approche de conception des structures en béton armé qui allie le conservatisme et le consensus reconnu en pratique pour la méthode des bielles et tirants à la puissance des éléments finis non-linéaires utilisant l'approche explicite de résolution numérique. L'approche est inspirée des méthodes de réduction de capacité résistive utilisées dans l'étude de stabilité numérique des pentes en mécanique des sols. En prenant comme cible les mécanismes de résistance et les modes de défaillance d'un modèle bielles et tirants, une méthodologie est développée en utilisant une loi de comportement simple du béton et permettant de simuler une dégradation fictive de la structure. La loi, programmée sous ABAQUS-Explicite, est basée sur l'élasticité non-linéaire et sur la théorie du champ de compression modifiée. Après une première phase de chargement en linéaire élastique, le modèle numérique est amené à une deuxième phase de dégradation non-uniforme du post-pic en traction. À la fin de cette phase de dégradation, une réorganisation des contraintes dans la structure se produit et l'on observe un agencement des efforts et à des modes de défaillance similaires à ceux des modèles bielles et tirants. Les applications sur trois exemples simples de poutres en porte à faux démontrent la faisabilité et le potentiel de la nouvelle approche ainsi que ses limites dans sa forme actuelle.

Mots clés : béton armé, conception, dégradation, modèle bielles et tirants, analyse non-linéaire par éléments finis, résolution explicite.



## ABSTRACT

The design of complex reinforced concrete structures or elements of structures can be a challenging task for practitioner structural engineers in some specific non-conventional projects (powerhouses, bridges, ...). For these specific cases, the use of well-established and standard design methods such as sectional methods or strut-and-tie methods can result into complex and sometimes inappropriate designs. On the other hand, the use of sophisticated numerical methods such as nonlinear finite element methods is not common in these situations because of their complexity and the lack of consensus on their validity within the engineering community.

This work presents an innovative new design approach for complex reinforced concrete structures. The approach is inspired from the strength reduction numerical methods, well-established in the field of slope stability in geotechnical engineering. It can be considered as an intermediate approach between the conservative and universally well accepted strut-and-tie method, and the powerful nonlinear finite elements method. A new simple constitutive law for concrete has been developed for that purpose as a user subroutine under the software ABAQUS-Explicit. It allows for the tensile post-pic degradation. This law is presented within an overall new framework for the design of reinforced concrete structure based on two steps. The structure is loaded in a first linear elastic step and then non uniform degradation of the tensile post-pic occurs in a second nonlinear step. At the end of this second step, a re-organisation of the internal stresses occurs within the structure. A resisting pattern and failure modes similar to those in the strut and tie models occur as well. Application on three simple fixed end beams examples demonstrate the potential and the feasibility of the new approach, as well as its limitations in its current form.

Keywords: reinforced concrete, design, degradation, strut-and-tie model, nonlinear finite element analysis, explicit approach.



## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE.....	III
REMERCIEMENTS .....	IV
RÉSUMÉ.....	V
ABSTRACT .....	VI
TABLE DES MATIÈRES .....	VII
LISTE DES TABLEAUX.....	XI
LISTE DES FIGURES.....	XII
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS .....	XVI
LISTE DES ANNEXES .....	XIX
CHAPITRE 1 INTRODUCTION.....	1
1.1 Contexte .....	1
1.2 Problématique.....	2
1.3 Objectifs .....	4
1.4 Méthodologie .....	4
1.5 Organisation du mémoire .....	5
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE .....	6
2.1 Introduction .....	6
2.2 Approches de calcul en béton armé.....	6
2.2.1 Méthode sectionnelle.....	10
2.2.2 Méthode des bielles et tirants .....	11
2.3 Analyses non-linéaires .....	17
2.3.1 Modèles constitutifs du béton .....	19
2.3.2 Modèles existants dans ABAQUS .....	23



2.4	L'approche explicite sous ABAQUS .....	24
2.4.1	Méthode explicite .....	25
2.4.2	Pas de temps stable.....	26
2.4.3	Analyse quasi-statique.....	26
2.5	Autres méthodes .....	27
2.5.1	Méthodes d'optimisation topologiques .....	28
2.5.2	Réduction de capacité résistive .....	30
2.6	Conclusion.....	30
CHAPITRE 3 ANALYSES PRÉLIMINAIRES.....		32
3.1	Introduction .....	32
3.2	Présentation de la structure considérée .....	33
3.3	Comparaison des approches de dimensionnement existantes .....	34
3.3.1	Méthode sectionnelle.....	35
3.3.2	Méthode des bielles et tirants .....	35
3.3.3	Analyse non linéaire.....	37
3.4	Approche utilisant le champ thermique fictif.....	38
3.4.1	Description de l'approche .....	38
3.4.2	Vérifications préliminaires .....	40
3.4.3	Application au porte à faux et analyse des résultats.....	43
3.5	EPM3D.....	46
3.6	Conclusion.....	47
CHAPITRE 4 LOI CONSTITUTIVE .....		48
4.1	Introduction .....	48
4.2	Description générale de la loi de comportement.....	48



4.2.1	Comportement pré-pic.....	49
4.2.2	Comportement post-pic .....	50
4.3	Comportement monotone uniaxial du béton .....	51
4.3.1	Comportement uniaxial en compression .....	51
4.3.2	Comportement uniaxial en traction .....	52
4.4	Comportement cyclique du béton .....	55
4.4.1	Endommagement au déchargement .....	55
4.4.2	Rotation des axes principaux.....	56
4.4.3	Indices de fissuration.....	57
4.5	Loi de dégradation en traction.....	57
4.6	Conclusion.....	59
CHAPITRE 5 DÉVELOPPEMENT DE LA MÉTHODOLOGIE ET APPLICATIONS.....		60
5.1	Introduction .....	60
5.2	Modèle considéré .....	60
5.3	Études paramétriques .....	61
5.3.1	Influence du comportement post-pic en traction.....	61
5.3.2	Stratégie de dégradation .....	64
5.4	Méthodologie proposée .....	70
5.5	Application .....	72
5.5.1	Analyses et résultats .....	73
5.5.2	Validation avec la méthode B/T.....	77
5.5.3	Discussions.....	78
5.6	Effet du maillage sur le tirant.....	80
5.7	Conclusion.....	82



CHAPITRE 6	CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS .....	83
BIBLIOGRAPHIE .....		86
ANNEXES .....		89



## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2-1: Coefficient d'efficacité $\nu$ .....	15
Tableau 3-1: Propriétés du béton et de l'acier pour la structure étudiée .....	33
Tableau 4-1 : Modèles de comportement uniaxial en compression du béton considérés .....	52
Tableau 4-2: Modèles de raidissement en traction du béton considérés .....	54
Tableau 5-1 : Charge limite suivant les méthodes de calculs existantes pour la structure modifiée .....	60



## LISTE DES FIGURES

Figure 1-1: Exemple d'une zone complexe en béton armé : (a) Extraction du modèle bielles et tirants à partir des éléments finis ; (b) Modèle bielles et tirants ; (c) Agencement final des barres d'armature.....	2
Figure 1-2: Position de la méthode développée par rapport aux autres approches de conception existantes .....	3
Figure 2-1: a) Exemple de définition des régions B et D dans une structure. Distribution des efforts internes dans : b) la région B et c) et la région D avec d) zoom sur la zone nodale .....	8
Figure 2-2: Nature de la rupture des poutres en fonction du ratio a/d .....	9
Figure 2-3: Champs d'application des méthodes de calcul : comparaison entre la méthode sectionnelle, la méthode B/T et les résultats expérimentaux (tirée de : Massicotte 2013) ....	10
Figure 2-4: Idéalisations des bielles : a) Forme d'éventail ; b) forme bouteille et c) forme prismatique (tirée de : Schlaich et al. (1987)).....	12
Figure 2-5: Incompatibilité au niveau de la zone nodale .....	13
Figure 2-6: Relation entre la résistance effective en compression et la déformation principale en traction (modifiée de : (Vecchio & Collins, 1986)) .....	14
Figure 2-7: Les différents types de nœuds : (1) CCT, (2) CCC, (3) TTT et (4) CTT .....	14
Figure 2-8: Algorithme de dimensionnement à l'aide de la méthode des bielles et tirants .....	16
Figure 2-9: Différents niveaux d'analyse non-linéaire (Modifiée de : Présentation Doctorat M. Ben Ftima (2013)).....	18
Figure 2-10: Surfaces d'écoulement dans le plan $\sigma_1, \sigma_3$ : a) critère de Rankine, critère de Tresca et critère de Von-Mises et b) critère de Drucker-Prager et Mohr-Coulomb .....	22
Figure 2-11: Modèles élastoplastiques endommageables (tirée de : (Bouzaiene & Massicotte, 1995)) .....	23
Figure 2-12: Approche Explicite sous ABAQUS .....	25
Figure 2-13: Exemple d'évolution du ratio $E_c / E_i$ dans le temps pour une analyse non linéaire par éléments finis sous ABAQUS explicite .....	27



Figure 2-14: Optimisation topologique suivant la méthode SIMP (modifié de Sigmund et Petersson (1998)).....	29
Figure 2-15: Réduction de la capacité résistive : glissement d'un barrage (Vulliet, Ben Ftima et Léger (2017)).....	30
Figure 3-1: Géométrie du modèle porte-à-faux étudié.....	34
Figure 3-2: a) Les zones de discontinuité dans la poutre en porte-à-faux et b) le modèle bielle et tirant .....	36
Figure 3-3: Modèle bielle et tirant avec dimensions de la bielle et du nœud pour le modèle considéré .....	37
Figure 3-4: Courbe Charge en fonction du déplacement de la poutre en porte-à-faux suite à l'analyse non-linéaire sous ABAQUS .....	38
Figure 3-5: Phases chargement / dégradation .....	39
Figure 3-6: Élément utilisé pour la vérification .....	40
Figure 3-7: Courbe contrainte - déformation et effet de la température a) Modèle CIP et b) Modèle CDP .....	41
Figure 3-8: Surface limite d'écoulement pour une température $T = 0$ et $T = 5$ : a) Modèle CIP, b) Modèle CDP .....	42
Figure 3-9: Force dans le tirant : Comparaison entre le modèle CIP, le modèle CDP et la valeur théorique.....	43
Figure 3-10: Modèle CDP à $t = t_1$ : a) Contraintes le long du tirant - b) Déformations principales maximales et c) Contraintes principales minimales .....	44
Figure 3-11: Rupture finale : déformée et distribution de la déformation principale en traction ..	46
Figure 4-1: Modèle exponentiel d'adoucissement en traction du béton non armé (tiré de Massicotte et al. 2012).....	52
Figure 4-2: Effet de la présence des armatures sur la résistance en traction du béton (tiré de Ben Ftima (2013)).....	53



Figure 4-3: Distribution des contraintes dans le béton et dans les armatures lors de la fissuration en traction .....	53
Figure 4-4: Comparaison des fonctions de raidissement en traction (tiré de Massicotte et al. 2012) .....	54
Figure 4-5: Endommagement du béton lors du déchargement en compression et en traction.....	55
Figure 4-6: Indices de fissuration dans la loi : a) coté compression et b) coté traction .....	57
Figure 4-7: Effet de la fonction dégradation sur le comportement en traction .....	58
Figure 5-1: Raidissement en traction : modèles Mitchell et Collins (1991) et Fields et Bischoff (2004) .....	62
Figure 5-2: Analyse de la poutre en porte à faux (déformations principales maximales) au moment de développement de la force dans le tirant : comparaison des modèles de béton a) Modèle Mitchell et Collins et b) Modèle Fields et Bischoff .....	63
Figure 5-3: Développement de la force dans tout le tirant en fonction de la dégradation de la résistance en traction (Modèle Fields et Bischoff (2004)) .....	64
Figure 5-4: Dégradation uniforme : Porte-à-faux de 2m sous charge $P = 55kN$ – a) Traction dans les armatures en fonction de la résistance en traction $ft'$ , b) Bielle à $ft1'$ et c) Bielle à $ft2'$ .....	65
Figure 5-5: Bielle sous forme bouteille a) Modèle réel et b) Idéalisation.....	66
Figure 5-6: Évolution du paramètre $\beta$ en fonction de l'état de compression.....	67
Figure 5-7: Évolution du coefficient de dégradation $\alpha$ en fonction du temps pour différentes valeurs du paramètre $\beta$ .....	68
Figure 5-8: Dégradation non-uniforme : Porte-à-faux de 2 m sous charge $P = 55 kN$ .....	69
Figure 5-9: Présentation sommaire de la méthodologie développée.....	72
Figure 5-10: Porte-à-faux de 4 m sans étrier sous charge $P = 27,5 kN$ .....	74
Figure 5-11: Porte-à-faux de 4 m avec étrier sous charge $P = 27,5 kN$ .....	75



Figure 5-12: Distribution de la force dans les armatures à la fin de l'analyse de la poutre en porte-à-faux de 4m.....	76
Figure 5-13: Forme de la zone nodale pour la poutre 4m sous la charge $P = 27,5 \text{ kN}$ .....	77
Figure 5-14: Modèle B/T de la poutre en porte-à-faux de 4m - Géométrie des nœuds, des bielles et des tirants et les efforts équivalents à chaque membre .....	78
Figure 5-15: Dégradation non-uniforme - Comparaison des forces dans le tirant pour les 3 poutres en porte-à-faux étudiés .....	79
Figure 5-16: Dégradation uniforme - Comparaison des forces dans le tirant pour les 3 poutres en porte-à-faux étudiés .....	80
Figure 5-17: Effet du maillage sur la force du tirant - porte-à-faux 2 m .....	81
Figure 5-18: Effet du maillage sur la rupture en compression - porte-à-faux 4 m sans étrier .....	81
Figure A-1: Courbe de dégradation en escaliers.....	89
Figure A-2: Algorithme de la sous-routine « Dégradation ».....	90
Figure B-1: Interface graphique dans ABAQUS.....	91
Figure C-1: Exemple de rotation d'axes : (A,B,C) système d'axe physiques et (1,2,3) système d'axes principaux.....	92



## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

### Sigles :

B/T	=	Bielles et tirants
CIP	=	Cast Iron Plasticity
CDP	=	Concrete Damaged Plasticity
EPM3D	=	Endommagement Progressif multiaxial tridimensionnel
MCFT	=	Modified Compression Field Theory

### Symboles :

$L$	=	longueur de la poutre
$h$	=	hauteur de la poutre
$b$	=	largeur de la poutre
$a$	=	distance entre la charge et l'appui le plus proche
$d$	=	profondeur de la poutre à partir des armatures en traction
$t$	=	temps d'analyse
$f'_c$	=	résistance uniaxiale en compression du béton
$f'_t$	=	résistance uniaxiale en traction du béton
$f_y, f_{py}$	=	limite d'élasticité de l'acier et l'acier précontraint
$E_c, E_s$	=	module d'Young du béton et de l'acier
$\rho$	=	masse volumique
$\nu$	=	coefficient de Poisson
$a_g$	=	diamètre du plus gros granulat dans le béton
$A_s$	=	aire des armatures
$\phi_s, \phi_c$	=	coefficient de tenue de l'acier et du béton



$M_r, V_r$ et $P_r$	=	résistances de la structure
$M_f, V_f$ et $P_f$	=	efforts dus au chargement soumis à la structure
$\theta$	=	angle entre la bielle et le tirant
$\varepsilon_1$	=	déformation principale en traction
$\varepsilon_2$	=	déformation principale en compression
$\varepsilon_x$	=	déformation suivant la direction de l'armature
$f_{c2max}$	=	résistance effective en compression de la bielle
$\nu$	=	coefficient d'efficacité des nœuds
$\sigma_{ij}^e$	=	tenseur contraintes élastiques
$C_{ijkl}$	=	tenseur des coefficients élastiques
$\varepsilon_{kl}^e$	=	tenseur déformations élastiques
$\lambda, \mu$	=	coefficient de Lamé
$\delta_{ij}$	=	symbole de Kronecker
$\varepsilon_{kk}$	=	trace de la matrice des déformations
$d\lambda$	=	multiplieur plastique
$f$	=	fonction d'écoulement plastique
$g$	=	fonction potentielle plastique
$d\varepsilon_{ij}^p$	=	incrément de déformation plastique
$K$	=	matrice de rigidité
$M$	=	matrice de masse
$u, \dot{u}, \ddot{u}$	=	déplacement, vitesse et accélération nodaux
$P$	=	vecteur des forces externes
$I$	=	vecteur des forces internes
$\Delta t_{stable}$	=	pas de temps stable sous ABAQUS/Explicit



$\xi$	=	amortissement
$\omega_{\max}$	=	plus haute fréquence du système analysé
$C_d$	=	vitesse de propagation d'onde dans le matériau
$L_e$	=	longueur caractéristique
$E_c, E_i$	=	Énergie cinétique et énergie interne
$f_{cu}$	=	résistance effective
$T$	=	effort dans le tirant
$P$	=	charge appliquée
$\varepsilon_c, \varepsilon_e$	=	déformation au pic en compression et en traction du béton
$\sigma_c, \sigma_t$	=	contrainte en compression et en traction du béton
$\alpha_c, \alpha_t$	=	coefficient de déchargement en compression et en traction
$G_f$	=	énergie de fissuration
$h_t$	=	taille du maillage
$\alpha$	=	coefficient de dégradation
$\beta$	=	coefficient de dégradation non-uniforme



## LISTE DES ANNEXES

ANNEXE A – Algorithme de Degradation.....	89
ANNEXE B – Interface Graphique.....	91
ANNEXE C – Rotation des axes.....	92



## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

### 1.1 Contexte

Le béton est un des matériaux de construction les plus utilisés dans le domaine du génie civil. Il présente plusieurs avantages notamment la grande disponibilité de ses constituants, la simplicité de sa mise en œuvre et le faible coût économique comparé aux autres matériaux de construction. Il est utilisé dans différents types de structures allant des plus simples (ex : les bâtiments), aux plus complexes (ex : plateformes offshore, centrales hydro-électriques et nucléaires). Toutefois, malgré sa grande popularité, il n'est toujours pas possible de prédire avec exactitude son comportement qui est étroitement lié à sa nature hétérogène.

La conception des structures en béton armé est un sujet de recherche continu particulièrement pour les structures/éléments de structures complexes. Pour la conception d'une structure en béton armé, l'ingénieur est muni de deux types d'outils :

- Les outils d'analyse : qui permettent de définir les efforts dans la structure issus du cas de chargement considéré,
- Les outils de dimensionnement : qui permettent de définir la géométrie générale et le détail des armatures pour assurer la résistance.

L'étape de dimensionnement est donc généralement précédée d'une étape d'analyse, et des itérations sont nécessaires entre les deux pour avoir une conception finale acceptable. La Figure 1-1 montre l'exemple d'une zone complexe en béton armé. Il s'agit d'un coin de mur des puits des alternateurs d'une centrale hydro-électrique qui reçoit localement une charge  $F$ . La Figure 1-1 a) montre le modèle éléments finis d'analyse qui a servi à extraire les composantes bielles (en trait pointillé) et tirants (en trait continu) nécessaires pour la méthode de conception en bielles et tirants (Figure 1-1 b)). Plusieurs itérations complexes sont généralement requises avant d'atteindre le résultat final d'agencement des barres d'armatures montré à la Figure 1-1 c).



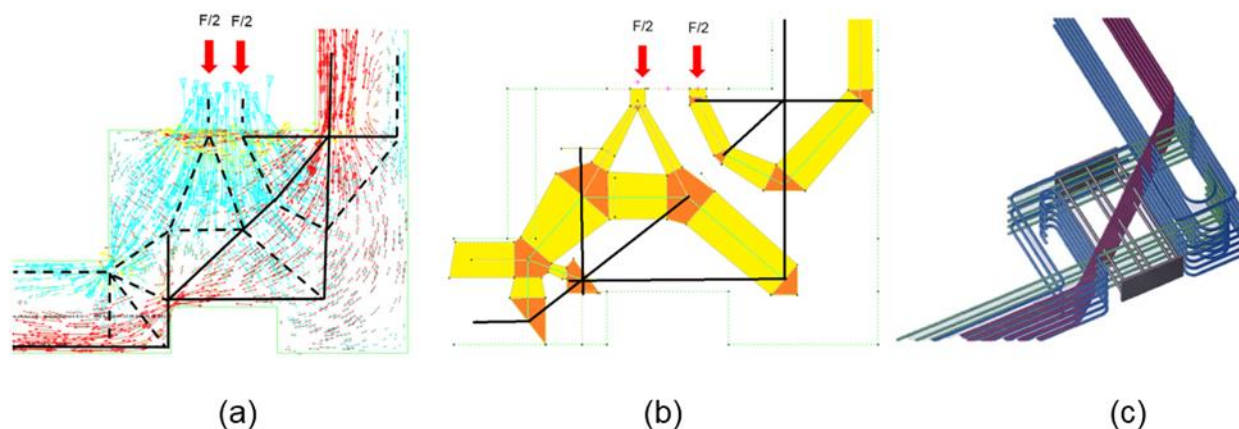


Figure 1-1: Exemple d'une zone complexe en béton armé : (a) Extraction du modèle bielles et tirants à partir des éléments finis ; (b) Modèle bielles et tirants ; (c) Agencement final des barres d'armature.

## 1.2 Problématique

Pour les structures/éléments de structures conventionnels, les méthodes de conception simplifiées issues des recommandations des codes et des normes du béton permettent en général de réaliser un bon dimensionnement (Figure 1-2). Plus la structure est complexe, plus l'utilisation de ces méthodes devient difficile et peut conduire à de mauvaises conceptions si jamais par exemple le schéma de résistance choisi s'éloigne du schéma réel issu de la compatibilité. Il est possible d'extrapoler ces mêmes méthodes en s'inspirant des recommandations de comités internationaux (ex : ACI Committee 207 1995, CEB-FIP 1993) ainsi que des règles existantes et des observations issues de projets similaires. L'utilisation d'outils plus sophistiqués qui sont en général réservés pour le domaine de la recherche peut aussi être un autre recours, par exemple : les analyses topologiques, de réduction de capacité ou encore les analyses non-linéaires (Figure 1-2). Les analyses non-linéaires par éléments finis représentent l'état de l'art en ce qui concerne les structures en béton armé (Ben Ftima 2013). Elles permettent de considérer le comportement réel du béton en intégrant des lois constitutives non-linéaires incluant les différents phénomènes physiques complexes que subit le béton après sa fissuration. L'utilisation de ces analyses en pratique pose beaucoup de problèmes pour trois raisons principales : (i) l'absence de consensus sur une loi constitutive universelle, (ii) la complexité de analyses et la difficulté d'obtenir les paramètres de



matériaux intrants à la loi constitutive et (iii) la nécessité de partir d'un dimensionnement initial (géométrie de coffrage, disposition et quantité de barres).

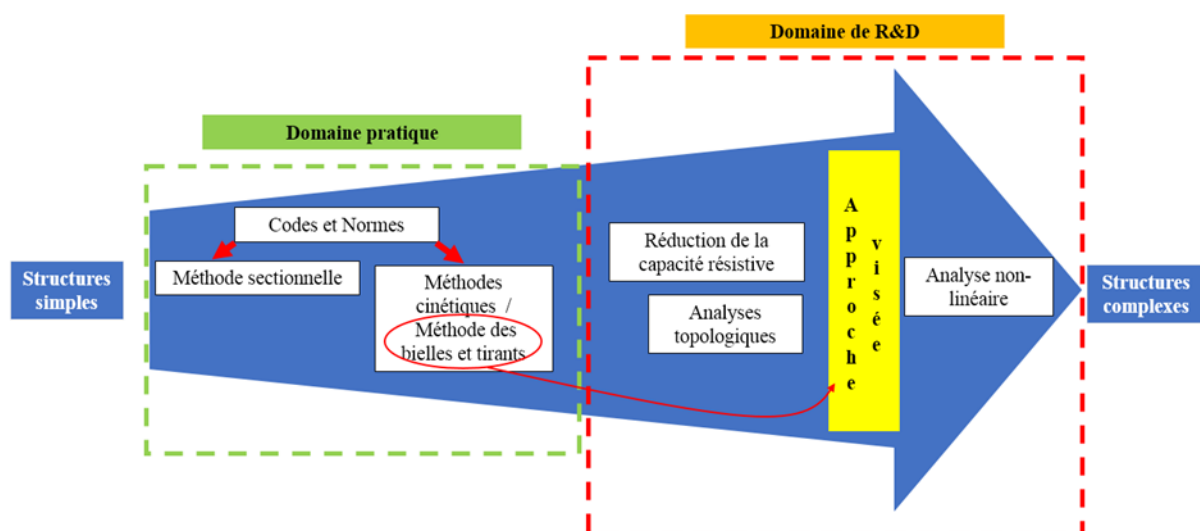


Figure 1-2: Position de la méthode développée par rapport aux autres approches de conception existantes

La *méthode des bielles et tirants* (Schlaich et al. 1987) est une méthode acceptée universellement par les ingénieurs et reconnue pour conduire à des conceptions du côté conservateur en raison de son respect pour les conditions d'équilibre et de résistance, les deux conditions nécessaires pour le théorème de la limite inférieure de la plasticité. L'utilisation de cette méthode peut devenir rapidement complexe comme le démontre l'exemple de la Figure 1-1. De plus, l'extrapolation de cette méthode pour des cas complexes, par exemple : béton de masse légèrement armé, géométries 3D, structure existante avec une fissuration discrète prononcée, etc..., peut induire à des modes de ruptures fragiles non couverts par la théorie de plasticité. L'utilisation des analyses par éléments finis linéaires pour l'extraction d'un schéma de résistance (ex : Figure 1-1 a)) n'est pas toujours évidente.

Pour les structures/éléments de structures complexes en béton armé, il y aurait donc un besoin industriel de développer une nouvelle famille d'outils/approches qui seraient acceptables par les ingénieurs spécialisés en pratique mais qui serait moins coûteuse que les analyses non-linéaires par éléments finis.



### 1.3 Objectifs

L'objectif général de ce projet de recherche est de développer une nouvelle approche de dimensionnement des structures complexes en béton armé qui s'inspire de la méthode des bielles et tirants, reconnue pour son conservatisme et bien acceptée en pratique, et qui serait plus adaptée à la philosophie de conception comparativement aux analyses non-linéaires par éléments finis. Cette nouvelle approche s'insérerait comme le montre la Figure 1-2 entre les méthodes d'analyses par réduction de capacité résistive et les approches non-linéaires par éléments finis.

Afin de parvenir à cet objectif général, on définit les objectifs spécifiques suivants :

1. effectuer une revue critique des méthodes de conception disponibles en béton armé ;
2. en déduire les ingrédients d'une méthodologie semi-automatique ou automatique de conception : méthode de résolution numérique, loi de comportement, étapes, limites d'applicabilité, ... ;
3. valider cette méthodologie par des exemples d'application simples.

### 1.4 Méthodologie

Une revue de littérature critique est faite en premier lieu afin d'étudier les limites des méthodes existantes dans le contexte du projet, de comprendre les modes de défaillance et la cinématique du modèle de bielles et tirants et de choisir la plateforme de travail (ABAQUS-Explicit) convenable à ce projet.

Des études préliminaires sont ensuite faites sur un exemple simple d'une poutre en porte-à-faux. Les résultats des méthodes existantes sont comparés et une première version de la méthodologie est présentée. Cette première version utilise un champ thermique fictif pour agir sur les paramètres des matériaux caractérisés par des lois de comportement existantes dans le logiciel ABAQUS-Explicit. L'idée est de faire une dégradation progressive de la résistance en traction afin d'amener la structure à un état d'équilibre similaire à celui du modèle bielles et tirants, c'est-à-dire sans aucune contribution en traction du béton.

Les études préliminaires mettent en évidence les difficultés liées à l'utilisation des lois de comportement existantes et amènent à développer une nouvelle loi plus adaptée aux objectifs



spécifiques de ce projet. La loi constitutive est programmée dans ABAQUS-Explicit et une méthodologie générale de son utilisation est développée.

Finalement, l'application sur des exemples simples permet de déduire les potentiels et les limites de la méthodologie proposée.

## **1.5 Organisation du mémoire**

L'introduction présentée dans le chapitre 1 a permis de définir le contexte dans lequel s'insère cette maîtrise, la problématique à laquelle elle répond ainsi que les objectifs et les étapes nécessaires pour les atteindre. Le second chapitre présente la revue de littérature avec une analyse critique des méthodes de conception existantes en présentant leurs limites. Les différentes analyses préliminaires effectuées sur des modèles simples et des lois de comportements existantes sont présentées dans le troisième chapitre. Le quatrième chapitre décrit la loi de comportement développée dans le cadre de cette maîtrise avec les propriétés physiques du béton considérées. Cette loi sera utilisée pour caractériser le béton dans la méthodologie de conception présentée dans le chapitre cinq de ce rapport. Une fois la méthodologie générale détaillée, des cas d'études sont présentés à la fin de ce même chapitre. Enfin, le chapitre six permet de conclure ce rapport avec les différentes recommandations pour les améliorations futures.



## CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

### 2.1 Introduction

Les méthodes de calcul des structures en béton armé vont des plus simples aux plus complexes et dépendamment du problème étudié et des moyens en place (budget, échéancier, expertise, ... etc.) un choix est toujours requis. Bien que les méthodes de calcul telles que la méthode sectionnelle ou la méthode des *bielles et tirants* (*B/T*) sont très utilisées en pratique, le passage à des outils plus sophistiqués tels que les analyses non-linéaires peut parfois s'avérer nécessaire dans le cas de comportement complexe. Ce chapitre présente une revue de littérature des notions fondamentales liées au projet de recherche. La première partie est une présentation générale des différentes approches de dimensionnement des structures en béton armé. La seconde partie traite spécifiquement les analyses non-linéaires ainsi que les différents paramètres dont elles peuvent dépendre. La troisième partie s'articule autour du logiciel d'analyse et de l'approche d'analyse retenus. Une revue critique d'autres approches de calcul numériques est présentée à la fin de ce chapitre.

### 2.2 Approches de calcul en béton armé

La conception d'une structure en béton armé vise à définir les résistances et quantités de béton et d'armatures nécessaires pour supporter les charges et les combinaisons de charges appliquées. Le béton, malgré sa grande popularité, reste un matériau complexe et difficile à modéliser. Les méthodes de calcul les plus utilisées par les ingénieurs adoptent souvent des hypothèses de comportement simple et linéaire des matériaux. Ces hypothèses sont généralement valides dans le cas des structures simples (ex : bâtiments, ponts conventionnels) mais sont questionnables lorsqu'il s'agit de structures ou éléments structuraux complexes (ex : centrales hydro-électriques, éléments non conventionnels de transfert des charges).

La théorie des poutres, d'où dérive la *méthode sectionnelle*, se base sur le principe de *Bernoulli* qui stipule qu'au cours de la déformation, les sections planes restent planes. Appliquée aux zones qui



respectent cette hypothèse, les forces et les propriétés sectionnelles permettent de déduire correctement le flux interne réel des contraintes. Ces zones sont appelées les *régions B* pour Bernoulli et leur dimensionnement est assez simple et bien défini en pratique (Figure 2-1 b)). Toutefois, la présence d'un changement au niveau de la géométrie, du matériau ou des conditions aux frontières cause une réorganisation au niveau des contraintes et des déformations. Cette discontinuité agit sur les zones avoisinantes et rend les approches d'analyse linéaire élastique incapables de bien décrire le comportement de ces régions. Les zones de discontinuités (Figure 2-1 c)), appelées les *régions D*, réfutent l'hypothèse de Bernoulli et leur dimensionnement se faisait soit empiriquement, en les comparant à des structures similaires, soit en se basant sur l'expérience de l'ingénieur. En 1987, Schlaich et al. développent la méthode des *bielles et tirants* et avec la contribution de plusieurs chercheurs par la suite, elle est actuellement la méthode recommandée par les codes de plusieurs pays pour le dimensionnement des régions D dans une structure, notamment le code canadien CSA (CSA A23.3 (2014)), le code américain (ACI 318 (2014)) et les codes européens EUROCODES.



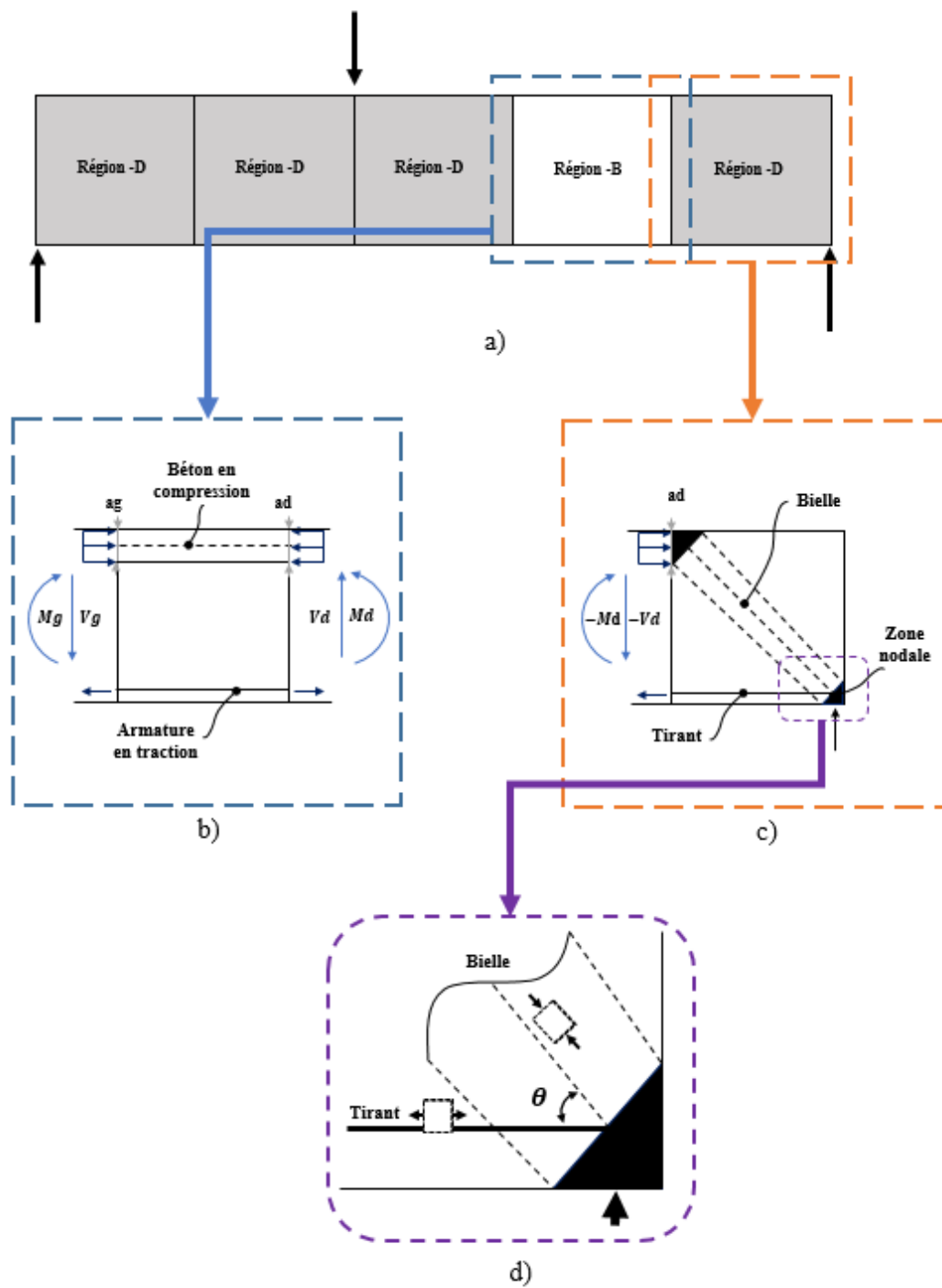


Figure 2-1: a) Exemple de définition des régions B et D dans une structure.  
Distribution des efforts internes dans : b) la région B et c) et la région D avec d) zoom sur la zone nodale



Les dimensions de la poutre et le positionnement des charges et des appuis ont beaucoup d'influence sur le mode de rupture obtenu à l'état limite ultime. En effet, lorsque la poutre est profonde, elle est plus susceptible à une rupture par cisaillement ou par écrasement du béton. Lorsqu'elle est élancée, c'est la rupture en flexion qui est la plus probable. Cet élancement est défini par les codes pour une poutre à l'aide du ratio  $a/d$  comme indiqué sur la Figure 2-2, avec  $d$  étant la profondeur de la poutre à partir des armatures en traction et  $a$  la distance entre la charge et l'appui le plus proche.

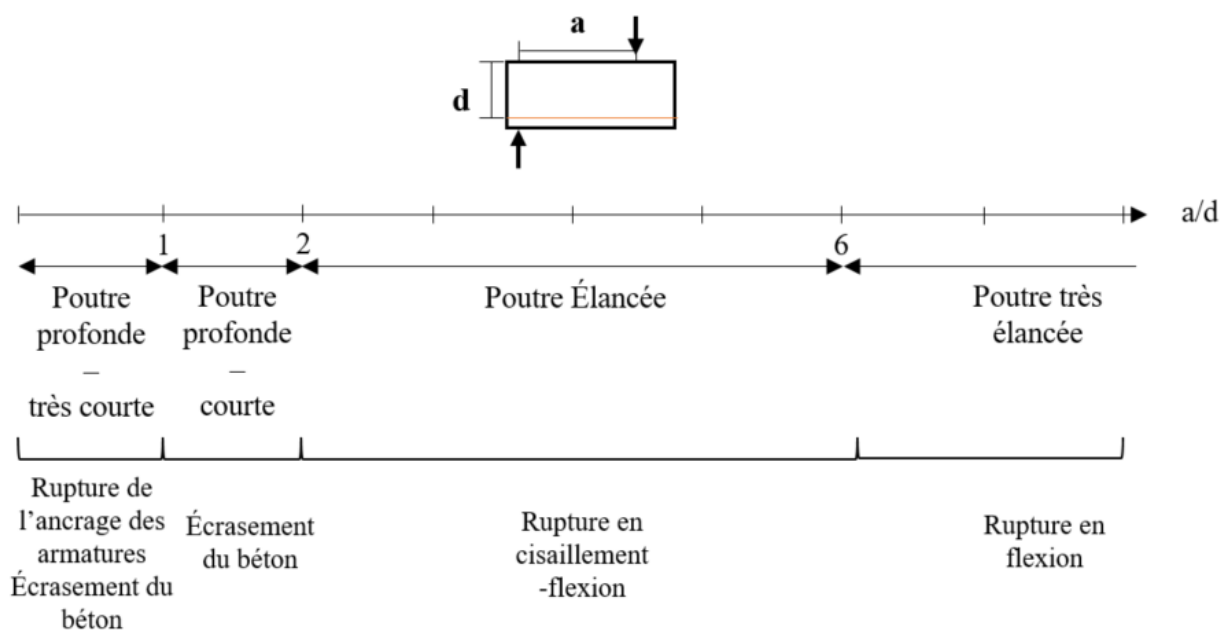


Figure 2-2: Nature de la rupture des poutres en fonction du ratio  $a/d$

L'élancement de la poutre affecte aussi les résultats des méthodes de calcul. La Figure 2-3 présente une comparaison entre les résultats issus de l'expérimental et la résistance calculée à l'aide de la méthode sectionnelle et de la méthode B/T pour différentes valeurs du ratio  $a/d$ . Bien que la méthode sectionnelle permette une bonne estimation de la résistance pour les poutres élancées, elle n'est pas du tout adaptée pour les poutres profondes car elle sous-estime beaucoup leur résistance. La méthode B/T, quant à elle, est bien adaptée pour le dimensionnement des poutres caractérisées par un faible ratio  $a/d$  et est assez conservatrice dans le cas de poutres élancées.



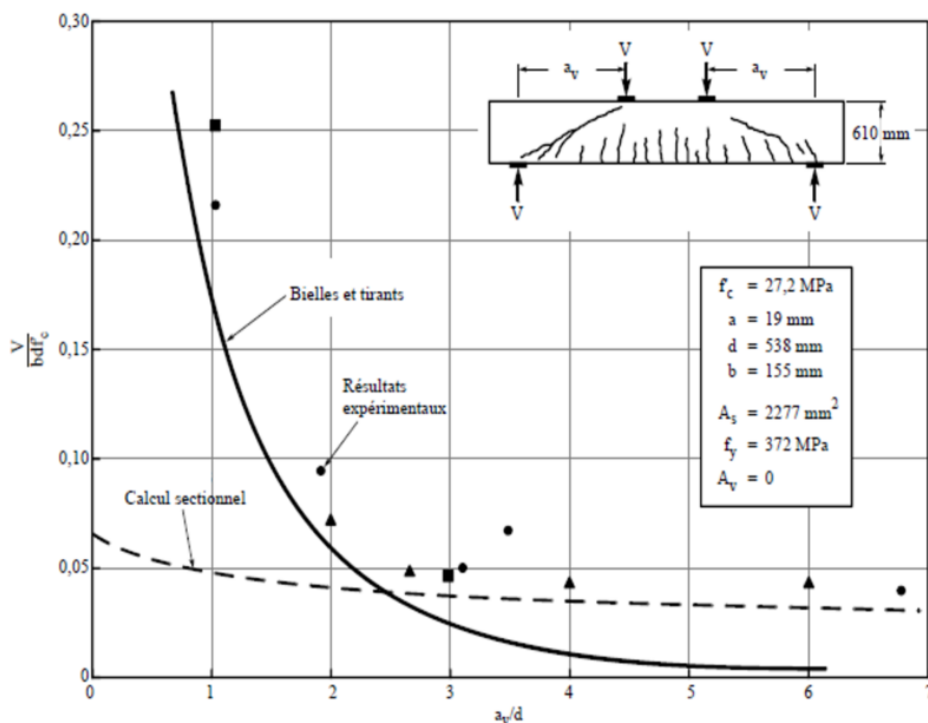


Figure 2-3: Champs d'application des méthodes de calcul : comparaison entre la méthode sectionnelle, la méthode B/T et les résultats expérimentaux (tirée de : Massicotte 2013)

Pour les poutres dont le rapport  $a/h > 2$ , le code CSA-A23.3 (article [10.7.1]) stipule qu'elles peuvent être dimensionnées à l'aide de la *méthode sectionnelle*. Pour un ratio  $a/h < 2$ , le code recommande d'utiliser la méthode des B/T.

### 2.2.1 Méthode sectionnelle

La méthode sectionnelle est une méthode de dimensionnement basée sur le principe d'équilibre et de résistance de la structure. Les méthodes d'analyse (manuelles ou numériques) sont utilisées pour évaluer les efforts agissant à chaque section, tandis que les codes donnent des expressions généralement semi-empiriques pour évaluer les résistances (flexion, cisaillement, compression). La méthode sectionnelle considère que le béton ne travaille pas en traction. La norme CSA-A23.3-14 recommande d'utiliser cette méthode en considérant que la déformation maximale vaut



–0.0035 à la fibre la plus comprimée, que les contraintes dans le béton peuvent être modélisées suivant un diagramme rectangulaire simplifié et que l’acier en compression et en traction a un comportement élastique parfaitement plastique. L’ingénieur doit vérifier pour toute section que la résistance est supérieure aux efforts appliqués :

$$M_r \geq M_f ,$$

$$V_r \geq V_f ,$$

$$P_r \geq P_f .$$

Où  $M_r, V_r$  et  $P_r$  représentent les résistances de la structure et  $M_f, V_f$  et  $P_f$  sont les efforts dus au chargement. Les interactions entre ces différents efforts sont également à considérer.

## 2.2.2 Méthode des bielles et tirants

La méthode des bielles et tirants ou méthode B/T est une méthode d’analyse et de dimensionnement des structures en béton armé. Elle transforme le flux des contraintes en un système de forces internes en équilibre. Le système généré permet de transmettre les charges appliquées aux appuis. La méthode B/T est basée sur le théorème de la borne inférieure de la théorie de plasticité qui stipule que la capacité réelle de la structure est supérieure à la résistance calculée quand les conditions d’équilibre et de résistance sont respectées.

### 2.2.2.1 Définition des régions-D

Le principe de Saint Venant définit les régions de discontinuité géométriquement en considérant que la région D s’étend sur une longueur égale à la plus grande valeur entre la largeur et l’épaisseur. Si deux régions D se chevauchent, elles sont considérées comme une seule région D (Figure 2-1 a)). Une fois les limites géométriques définies, les forces internes à l’interface issues des régions B avoisinantes ainsi que les appuis et les forces appliquées deviennent les conditions aux frontières à considérer pour l’étude de la région D (Figure 2-1 c)).



### 2.2.2.2 Composants du modèle Bielles et tirants

La méthode des bielles et tirants est basée sur le principe de l'analogie du treillis. Ainsi, les zones de béton en compression sont modélisées par des bielles, les armatures en traction représentent les tirants et les connexions entre les différentes zones représentent les nœuds ou zones nodales (Figure 2-1 d)).

Les *tirants* désignent les zones tendues soit les armatures en traction et sont généralement représentés par des traits pleins dans les modèles. La contrainte dans les tirants est limitée par la limite d'élasticité de l'acier  $f_y$  ou  $f_{py}$  dans le cas de l'acier précontraint. Les armatures doivent être dimensionnées de telle sorte que la résistance  $T_s = \phi_s \times f_y \times A_s$  soit supérieure à la force de traction du tirant,  $\phi_s$  étant le coefficient de tenue de l'acier,  $f_y$  la limite d'élasticité de l'acier et  $A_s$  l'aire des armatures. Une attention particulière doit être accordée à l'ancrage des armatures dans les zones nodales pour développer la pleine résistance des barres.

Les *bielles* représentent les zones comprimées du béton. Désignées généralement dans les modèles par des lignes en pointillé, elles sont souvent idéalisées sous une forme prismatique Figure 2-4 c), sous forme de bouteille Figure 2-4 b) ou sous forme d'éventail Figure 2-4 a).

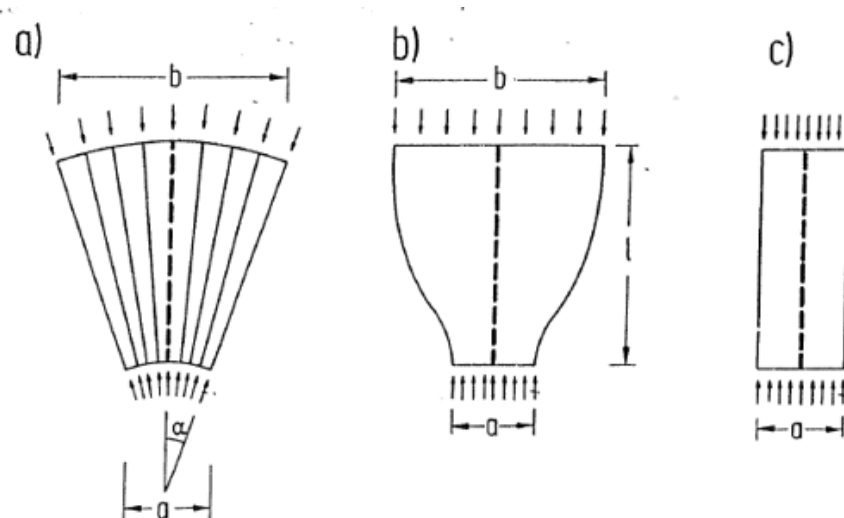


Figure 2-4: Idéalisations des bielles : a) Forme d'éventail ; b) forme bouteille et c) forme prismatique (tirée de : Schlaich et al. (1987))



La résistance ultime du béton dans la bielle diffère de la valeur limite  $f'_c$  issue d'un essai uniaxial en compression du béton. Lors de la construction d'un modèle B/T, l'angle  $\theta$  entre les bielles et les tirants qui se rencontrent dans un nœud doit être assez grand pour minimiser le niveau d'incompatibilité causé par la déformation en compression de la bielle et la déformation en traction du tirant qui risquent d'agir dans le même sens comme l'illustre la Figure 2-5. Vecchio et Collins (1986) ont observé que les dommages dus à la fissuration en traction du béton ont un effet dégradant sur la résistance en compression du béton. Ainsi, plus l'angle  $\theta$  diminue, plus la déformation en traction  $\varepsilon_1$  à côté de la bielle augmente et cause ainsi une réduction de la résistance effective en compression  $f_{c2max}$  de la bielle (Figure 2-6). En se basant sur les résultats expérimentaux sur des panneaux en béton armé testés à l'université de Toronto par Vecchio et Collins (1986), la formule suivante est utilisée pour déterminer la résistance en compression réduite du béton :

$$f_{c2max} = \frac{f'_c}{0.8+170*\varepsilon_1} \leq 0.85 \times f'_c \quad (2-1)$$

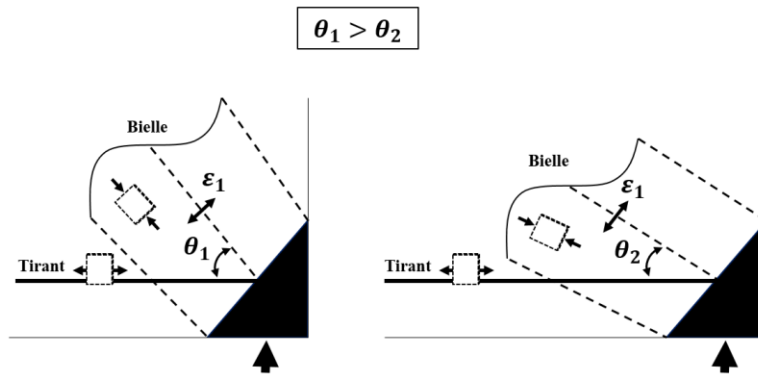


Figure 2-5: Incompatibilité au niveau de la zone nodale

Le cercle de Mohr des déformations permet d'avoir une relation mathématique entre la déformation principale en traction  $\varepsilon_1$ , la déformation principale en compression  $\varepsilon_2$  et la déformation  $\varepsilon_x$  suivant la direction de l'armature qui traverse la bielle. L'angle  $\theta$  est défini entre la déformation  $\varepsilon_x$  et la déformation principale  $\varepsilon_2$ , on a ainsi :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_s + (\varepsilon_s + 0.002) \times \cot^2(\theta) \quad (2-2)$$



Notons que plus l'angle  $\theta$  diminue, plus la capacité résistive de la bielle diminue significativement (Figure 2-6). Il est donc important de former des modèles avec des bielles peu inclinées pour respecter les limites de résistance.

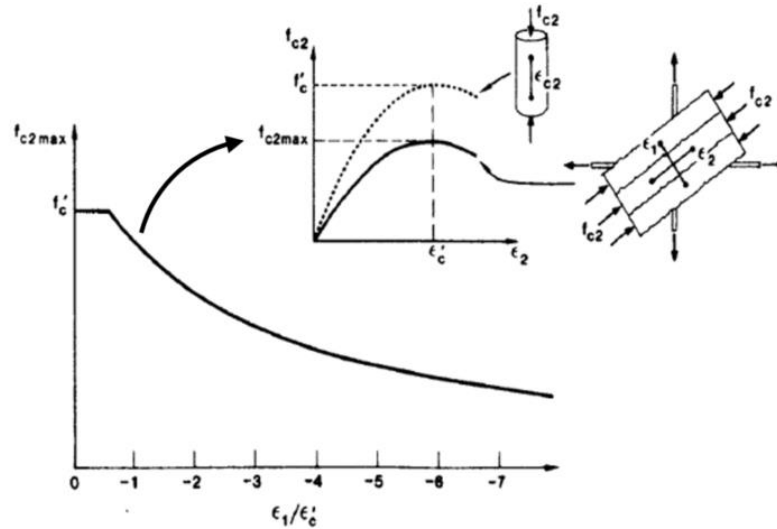


Figure 2-6: Relation entre la résistance effective en compression et la déformation principale en traction (modifiée de : (Vecchio & Collins, 1986))

Les *nœuds ou zones nodales* représentent les points d'intersection entre les bielles, les tirants, les charges et les réactions d'appuis. En fonction de la nature des forces connectées, il existe 4 types de nœuds : CCC, CCT, CTT, TTT avec C et T représentent respectivement les forces de compression et de traction (Figure 2-7).

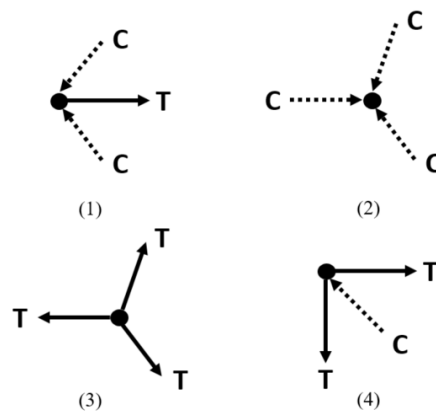


Figure 2-7: Les différents types de nœuds : (1) CCT, (2) CCC, (3) TTT et (4) CTT



Les différentes forces du modèle se rencontrent et s'équilibrent au niveau des nœuds. Encore une fois, l'incompatibilité qui apparaît lorsque des forces de compression et de traction se rencontrent conduit à l'affaiblissement de la résistance du nœud. En fonction du type de nœud, sa résistance effective est définie empiriquement suivant :

$$f_{cu} = v * \phi_c * f'_c \quad (2-3)$$

Où  $v$  est un coefficient d'efficacité compris entre 0 et 1 et défini par le code. Le Tableau 2-1 présente les valeurs recommandées par le code canadien CSA A23.3 et le code américain ACI 318-05.

Tableau 2-1: Coefficient d'efficacité  $v$

Type de nœud	CSA A23.3	ACI 318-05
CCC	0.85	0.85
CCT	0.75	0.68
CTT ou TTT	0.65	0.51

### 2.2.2.3 Méthode de résolution

La méthode des bielles et tirants se base sur une itération géométrique qui vise à tracer un modèle qui respecte les limites des dimensions de la zone étudiée tout en respectant les conditions de résistance. La Figure 2-8 présente la méthode classique de conception d'une structure en béton armé suivant la méthode des bielles et tirants.



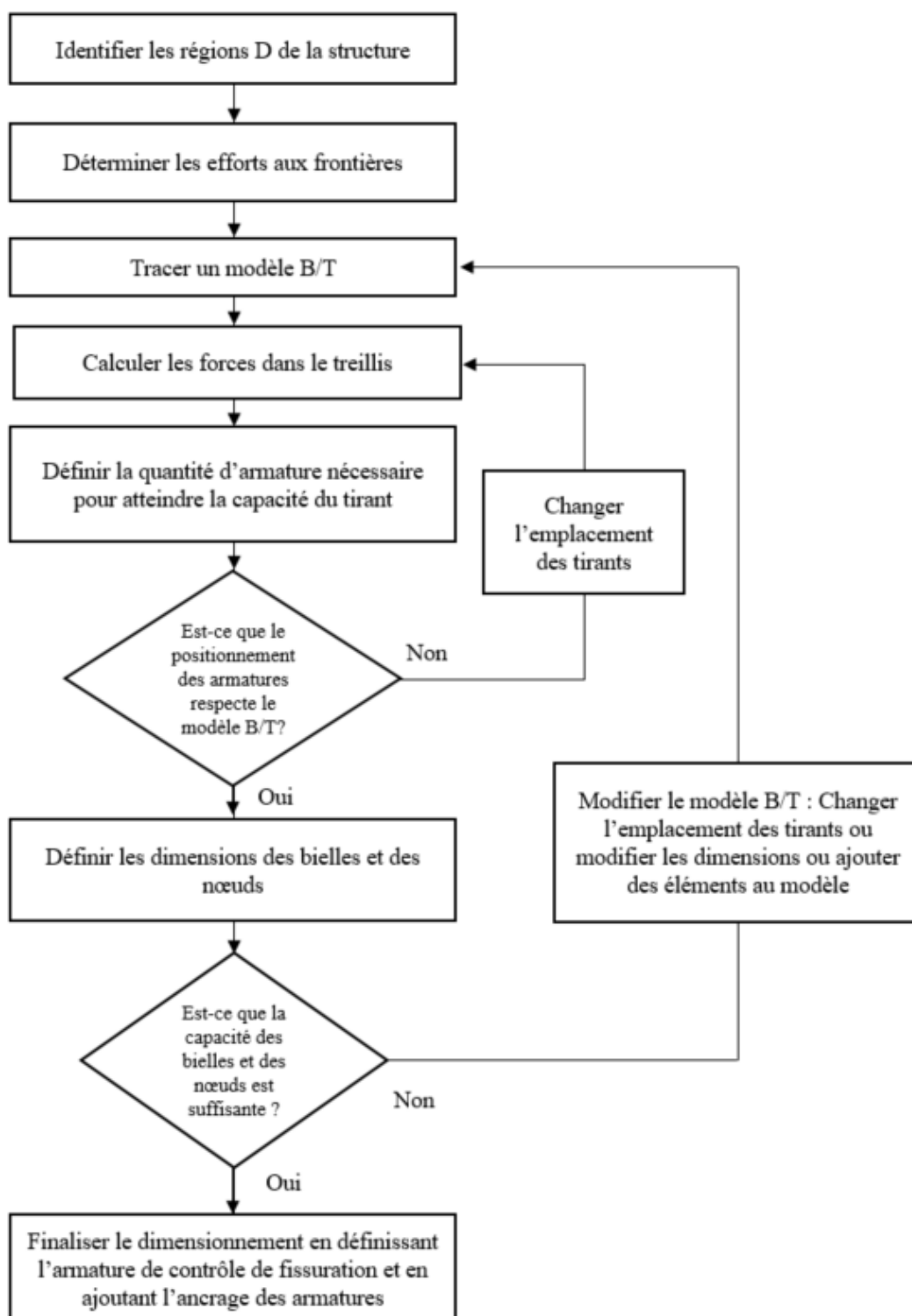


Figure 2-8: Algorithme de dimensionnement à l'aide de la méthode des bielles et tirants



#### 2.2.2.4 Unicité du modèle bielles et tirants

Il n'existe pas un seul modèle B/T pour une structure ou un élément de structure donnés. Plusieurs modèles admissibles peuvent être développés pour chaque cas de charge considéré. Ces modèles peuvent être valides tant que le treillis est en équilibre avec les conditions aux frontières (*condition d'équilibre*) et tant que les contraintes dans les bielles, les tirants et les nœuds ne dépassent pas les valeurs limites (*condition de résistance*).

Il existe toutefois des recommandations empiriques qui permettent de se rapprocher du modèle optimal pour une structure donnée. Le modèle B/T peut être vu comme une idéalisation du flux actuel des forces dans une structure. Ainsi, par une analyse linéaire élastique par éléments finis, il est possible de définir un chemin de charge qui définit un modèle de bielles et tirants conservateur à adopter. La configuration des fissures d'un spécimen, si disponible, peut aussi servir de bon guide lors de la définition du meilleur modèle B/T. Le modèle avec des tirants les plus courts et qui nécessitent le moins d'armatures est le meilleur modèle à choisir. Schlaich et al. (1987) proposent de définir les forces  $F_i$ , les longueurs  $l_i$  et les déformation moyennes  $\varepsilon_{mi}$  dans les bielles et les tirants et de choisir le meilleur modèle qui minimise l'expression  $\sum F_i * l_i * \varepsilon_{mi}$ .

Le modèle B/T respecte la *condition d'équilibre* et la *condition de résistance* mais ne respecte pas la *condition de compatibilité*. Les modèles, générés par cette méthode, qui tendent le plus vers la compatibilité, c'est-à-dire qui arrivent à décrire au mieux la déformation réelle et le flux réel des forces dans la structure, sont les meilleurs à utiliser. Seuls les modèles d'analyses non-linéaires ou les essais expérimentaux permettent de respecter la condition de compatibilité et se placent ainsi au niveau le plus proche de la réalité.

### 2.3 Analyses non-linéaires

L'analyse non-linéaire est l'approche la plus générale qui permet d'étudier la structure de façon à reproduire le plus fidèlement que possible les conditions réelles en termes de comportement structural. C'est aussi la seule qui permet de respecter simultanément les trois



conditions d'équilibre, de résistance et de compatibilité. Elle donne, en fonction du degré de précision voulu, la réponse de la structure la plus proche de la réalité.

La Figure 2-9 illustre l'évolution de la complexité et de la précision du modèle en fonction du raffinement des choix pour les matériaux, les conditions aux frontières et le type de discrétisation adoptées. Le dilemme précision/complexité est aussi mis en évidence d'après cette figure.

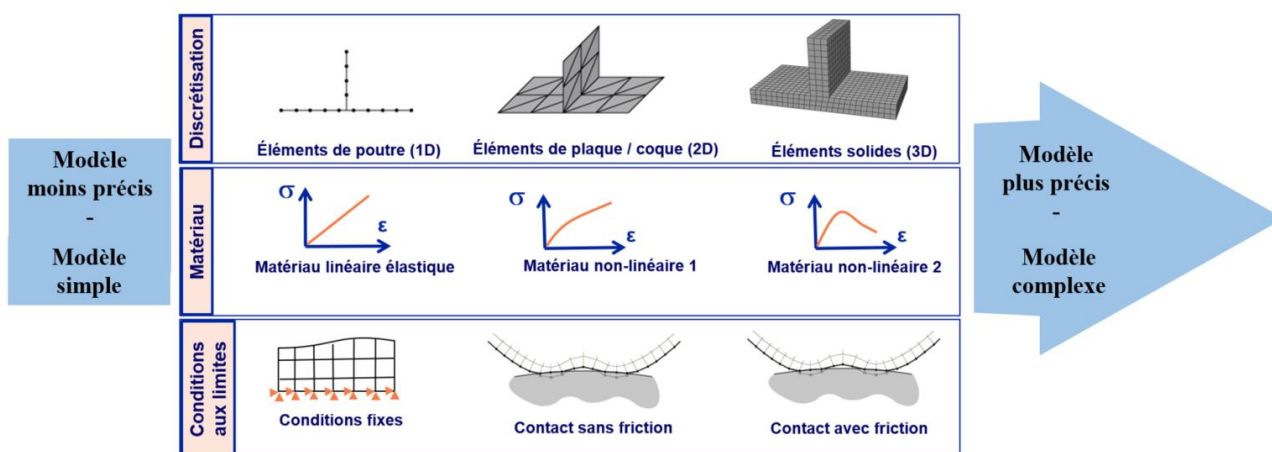


Figure 2-9: Différents niveaux d'analyse non-linéaire (Modifiée de : Présentation Doctorat M. Ben Ftima (2013))

Dans cette présente étude, l'accent est mis sur le comportement non-linéaire du béton avec un comportement post-pic adoucissant (non-linéaire 3 dans la Figure 2-9), des éléments solides (3D) et des conditions aux frontières fixes.

Bien que les analyses non-linéaires soient considérées les plus proches du comportement réel du béton, les résultats sont étroitement liés à la loi de comportement considérée. Contrairement à la méthode sectionnelle ou à la méthode B/T, il n'y a pas de consensus général dans le monde scientifique sur la définition d'une loi constitutive unique valable pour toute configuration et état de sollicitation. Plusieurs théories existent pour caractériser le béton et aucune n'est parfaite.



### 2.3.1 Modèles constitutifs du béton

La prédiction exacte du comportement du béton s'avère être une tâche fastidieuse à cause de sa nature hétérogène et de l'intervention de plusieurs paramètres physiques mécaniques et non-mécaniques qui modifient sa réponse aux sollicitations appliquées. Plusieurs modèles existent de béton existent dans la littérature et le choix dépend principalement de l'utilisation projetée, du degré de précision souhaité et du comportement physique privilégié.

Les modèles de béton peuvent être classés selon 3 critères principaux : l'échelle du matériau, le modèle de fissuration et la théorie de comportement.

#### 2.3.1.1 L'échelle du matériau

L'échelle considérée joue un rôle important dans la caractérisation du comportement du béton. En effet, ceci permet de définir le degré de raffinement des propriétés du béton. Wittmann (1983) distingue 3 niveaux de classification du béton : *micro*, *méso* et *macro*.

L'échelle micro et l'échelle méso considèrent le béton comme un matériau hétérogène. Elles permettent de tenir compte des interactions internes des constituants du béton : l'eau, le ciment et les granulats et vont même jusqu'au niveau des particules. Ces échelles peuvent être utilisées pour définir les caractéristiques générales du béton, données d'entrée pour les modèles de béton à l'échelle macro. Cette dernière dérive de la théorie des milieux continus et considère le béton comme un matériau continu et homogène.

Bien que l'échelle macro néglige certains phénomènes physiques internes dans le béton, c'est l'échelle considérée dans ce projet principalement pour sa simplicité et faisabilité.

#### 2.3.1.2 Modèle de fissuration

La fissuration du béton définit le point de départ du comportement non-linéaire du béton. Les modèles de fissuration issus de la littérature se divisent en deux grandes familles : la fissuration discrète ou la fissuration diffuse. Le modèle de fissuration discrète (Ngo & Scordelis, 1967) se base sur la discontinuité des déplacements au niveau des fissures. Ceci peut être réalisé par les modèles par éléments finis en créant une déconnexion au niveau des nœuds ce qui exige une intervention



au niveau de la topologie du modèle pour altérer les liens entre les éléments. Le modèle de fissuration diffuse, présenté par Raschid (1968), permet la génération implicite des fissures sans modifier la continuité de la structure. La fissure se produit perpendiculairement à l'axe de la déformation principale en traction, elle est donc définie dans le plan de fissuration puis transformée dans le repère global. Il existe deux types de modèles de fissuration diffuse : les modèles à orientation fixe et les modèles à rotation continue. Les modèles à orientation fixe considèrent que le plan de fissuration ne change pas après l'apparition de la première fissure. Le modèle de fissuration diffuse à rotation continue est utilisé dans ce travail en raison de sa simplicité suffisante pour ce que l'on projette de faire.

### 2.3.1.3 Théories de comportement du béton

Avant fissuration, le béton adopte un comportement linéaire élastique simple et bien défini. Une fois la première fissuration survient, le béton présente un comportement très complexe. Il existe un grand nombre de modèles constitutifs basés sur différentes théories qui tentent de décrire l'évolution non-linéaire des contraintes en fonction des déformations dans la structure. Les deux théories les plus utilisées pour caractériser le béton sont : la théorie élastique et la théorie de plasticité.

#### *Modèles élastiques*

Les modèles élastiques sont les modèles de béton les plus populaires. Ils offrent une formulation simple pour caractériser les différents états du béton. On distingue deux types de modèles élastiques : les modèles linéaires et les modèles non-linéaires.

Les *modèles linéaires élastiques* permettent de caractériser le béton non fissuré. Ils considèrent une variation linéaire des contraintes dans le matériau sans générer de déformations irréversibles. La relation contrainte-déformation suit la *loi de Hooke généralisée*, qui, dans le cas d'un matériau isotrope, s'écrit sous la forme :

$$\sigma_{ij}^e = C_{ijkl} * \varepsilon_{kl}^e \quad (2-4)$$



Avec  $\sigma_{ij}^e$  et  $\varepsilon_{kl}^e$  respectivement les tenseurs des contraintes et des déformations et  $C_{ijkl}$  le tenseur des coefficients élastiques. Selon les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , cette loi s'écrit sous la forme :

$$\sigma_{ij} = 2 * \mu * \varepsilon_{ij} + \lambda * \varepsilon_{kk} * \delta_{ij} \quad (2-5)$$

Où  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker,  $\varepsilon_{kk}$  la trace de la matrice des déformations :  $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ ,  $\lambda = \frac{\nu * E}{(1+\nu) * (1-2*\nu)}$  et  $\mu = \frac{E}{2*(1+\nu)}$ .

Les *modèles élastiques non-linéaires* font appel à une fonction non-linéaire  $f$ :

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}) \quad (2-6)$$

Les premiers modèles proposés s'appuyaient simplement sur la modification du tenseur des coefficients élastiques. Cette formulation totale caractérise un comportement réversible donc indépendant du chemin de chargement ce qui n'est pas le cas du béton. La formulation incrémentale permet d'inclure l'effet du chemin de chargement ce qui définit une sous-famille de modèles élastiques non-linéaires appelée modèles hypoélastiques. Ces modèles sont très simples à implémenter numériquement et ils permettent d'inclure plusieurs aspects du comportement complexe du béton.

### *Théories de plasticité*

Soumis à de grandes déformations et contraintes, le matériau produit des déformations qui modifient le matériau de façon permanente. Cet état de non-retour peut être interprété par la théorie de plasticité. Les modèles basés sur la plasticité sont des modèles mathématiques basés sur la *surface d'écoulement*. Ainsi, un modèle plastique est caractérisé par la *forme initiale* de la fonction d'écoulement  $f$ , son *évolution* suivant l'état du matériau et sa *direction d'écoulement*.

La déformation plastique est calculée en fonction du multiplicateur plastique  $d\lambda$  et de la fonction potentielle  $g$  qui permet de définir la direction de l'écoulement plastique. Elle est dite associative si elle est égale à la fonction d'écoulement  $f$ . La déformation plastique est donc égale à :

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda * \frac{\partial g(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2-7)$$



La forme de la surface d'écoulement est intimement liée au comportement général du matériau caractérisé. Les matériaux fragiles (ex : la fonte) obéissent au critère de Rankine alors que les matériaux plus ductiles vont suivre le critère de Von-Mises et le critère de Tresca. La Figure 2-10 a) présente la forme de ces critères dans le plan  $(\sigma_1, \sigma_3)$ .

Le béton est caractérisé par un comportement différent en traction et en compression. Les modèles basés sur des critères comme Drucker-Prager ou Mohr-Coulomb (Figure 2-10 b)) sont donc plus représentatifs de son comportement.

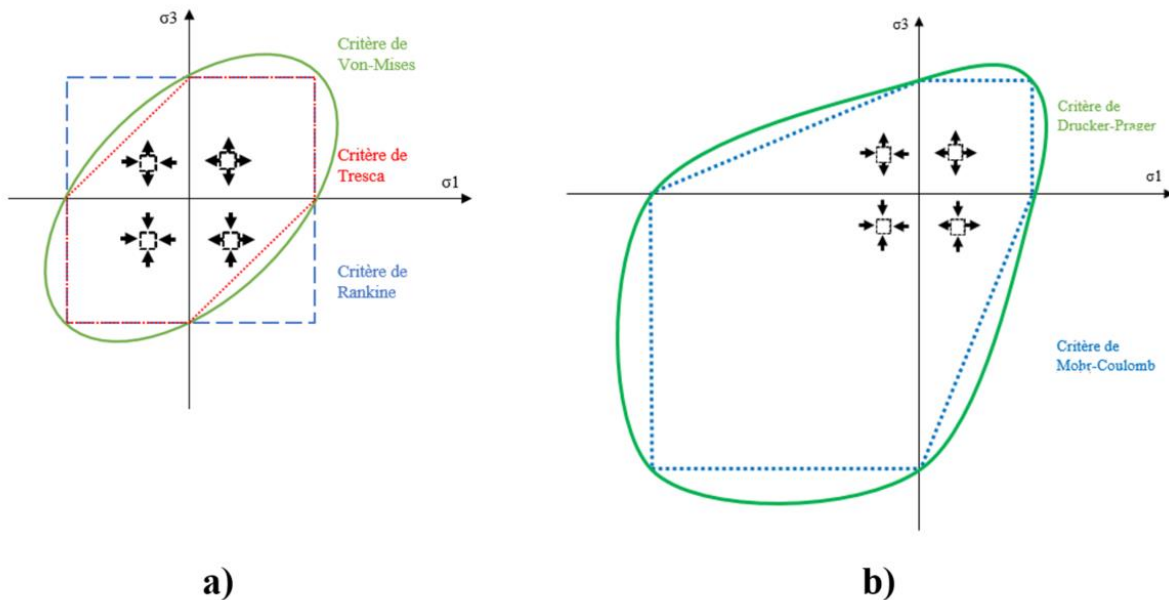


Figure 2-10: Surfaces d'écoulement dans le plan  $(\sigma_1, \sigma_3)$  : a) critère de Rankine, critère de Tresca et critère de Von-Mises et b) critère de Drucker-Prager et Mohr-Coulomb

### *L'endommagement du béton*

Suite à des cycles de chargement/déchargement, le matériau cumule une dégradation dans sa capacité à absorber de l'énergie. Les modèles élasto-plastiques sont incapables de décrire ce phénomène. Ainsi, Dougill et al. (1977) présentent la théorie de l'endommagement pour tenir compte de la réduction irréversible des propriétés élastiques du matériau dû à l'accumulation des dommages. Cette réduction est représentée par le coefficient d'endommagement  $d$  qui varie de 0 à 1 et est associé à la rigidité locale du matériau. La combinaison de la plasticité et de



l'endommagement (Figure 2-11), a donné naissance à plusieurs modèles de béton comme Bazant et Kim (1979), Lubliner et al. (1989), Lee et Fenves (1998).

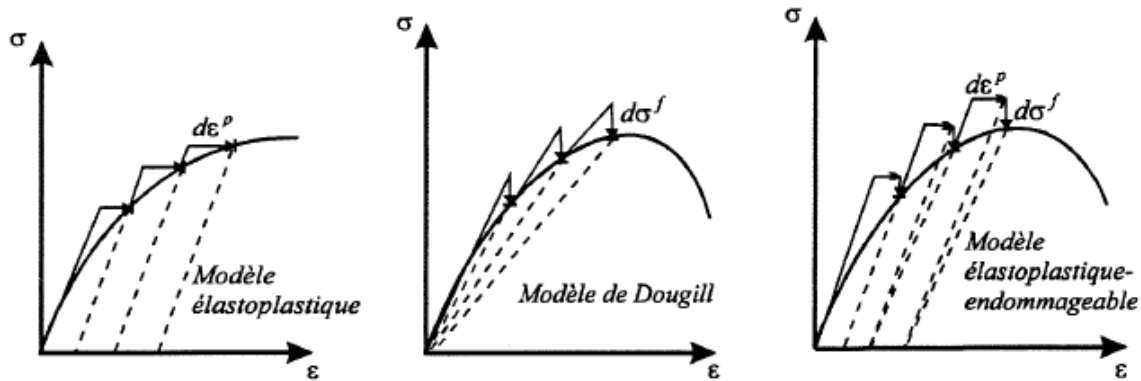


Figure 2-11: Modèles élastoplastiques endommageables (tirée de : (Bouzaïene & Massicotte, 1995))

## 2.3.2 Modèles existants dans ABAQUS

### 2.3.2.1 CIP

Le premier modèle étudié est le modèle *Cast Iron Plasticity* (CIP). Comme son nom l'indique, ce modèle a été créé pour l'analyse des alliages de fer et fonte grise mais contrairement aux autres modèles de métaux, il se caractérise par un comportement fragile en traction. Il est donc possible de l'utiliser pour caractériser le béton car il permet de définir des valeurs de résistance en traction et en compression différentes. Le modèle CIP est un modèle isotropique et élasto-plastique. Il est défini uniquement pour les cas de chargement monolithiques et ne permet pas de caractériser les cas d'inversion de chargement.

### 2.3.2.2 CDP

Le modèle *Concrete Damaged Plasticity* (CDP) est un modèle qui permet de caractériser le comportement plastique et endommagé du béton armé et non armé soumis à un chargement statique ou dynamique. Le modèle a été initialement développé par Lubliner et al. (1989) puis modifié par



Lee et Fenves (1998) pour considérer le comportement sous chargement dynamique et cyclique. Le modèle CDP permet de reproduire l'effet irréversible de l'endommagement associé aux mécanismes de rupture du béton : fissuration en traction et écrasement en compression. Dans la partie plastique, le béton subit un adoucissement en traction avec la possibilité de prendre en compte l'effet du raidissement en traction. En compression, le modèle est soumis à un écrouissage initial avant de suivre un adoucissement en compression. L'endommagement du béton est caractérisé par des coefficients de dégradation  $d$ , différents en compression et en traction.

### 2.3.2.3 EPM3D

Le modèle *d'Endommagement progressif multiaxial tridimensionnel (EPM3D)* est un modèle hypoélastique développé par Massicotte et al. (2007). Il permet de caractériser le béton suivant un comportement orthotropique à fissuration diffuse basé sur la coïncidence entre les contraintes et les déformations principales (*strain-rotating crack model*). Il permet la caractérisation du béton avec l'introduction de l'effet du raidissement en traction en cas de présence d'armatures et l'énergie de fissuration  $Gf$  dans le cas contraire pour tenir compte de la taille du maillage. Le modèle considère aussi l'endommagement couplé en traction et en compression, le confinement et le comportement cyclique du béton.

## 2.4 L'approche explicite sous ABAQUS

Il existe plusieurs logiciels de calcul par éléments finis (ex : LSDYNA, ADINA, etc...). Pour les différentes analyses effectuées dans ce rapport, on choisit d'utiliser le logiciel ABAQUS. La résolution classique par éléments finis se fait généralement suivant la méthode implicite, incluse dans le module ABAQUS/Standard. Cette méthode se base sur la résolution de l'équation d'équilibre des efforts :

$$K * u(t) = P - I \quad (2-8)$$

Avec  $u(t)$  le vecteur de déplacements nodaux,  $K$  la matrice de rigidité de la structure et  $I$  et  $P$  les vecteurs des forces internes et externes respectivement. Cette équation est résolue en non-linéaire suivant un processus itératif du type Newton-Raphson jusqu'à ce que le critère de convergence soit



vérifié. Dans ce projet, le béton est caractérisé par un comportement fortement non-linéaire (matériau non-linéaire de type 2 (Figure 2-9)) et les analyses effectuées évaluent le béton dans son état fissuré. Avec un comportement aussi complexe, la méthode implicite risque donc de présenter des problèmes de convergence (Ben Ftima, 2013). Avec l'approche explicite du module ABAQUS/Explicite, il est possible de résoudre dynamiquement les problèmes complexes en évitant les itérations successives et les problèmes de convergence anticipés.

### 2.4.1 Méthode explicite

La méthode explicite est basée sur la résolution dynamique de l'équation d'équilibre de Newton :

$$M\ddot{u} = P - I \quad (2-9)$$

qui relie le vecteur des accélérations nodales  $\ddot{u}$ , la matrice de masse  $M$ , et les vecteurs des forces internes  $I$  et externes  $P$ . La Figure 2-12 présente les différentes étapes de résolution d'un problème suivant l'approche explicite.

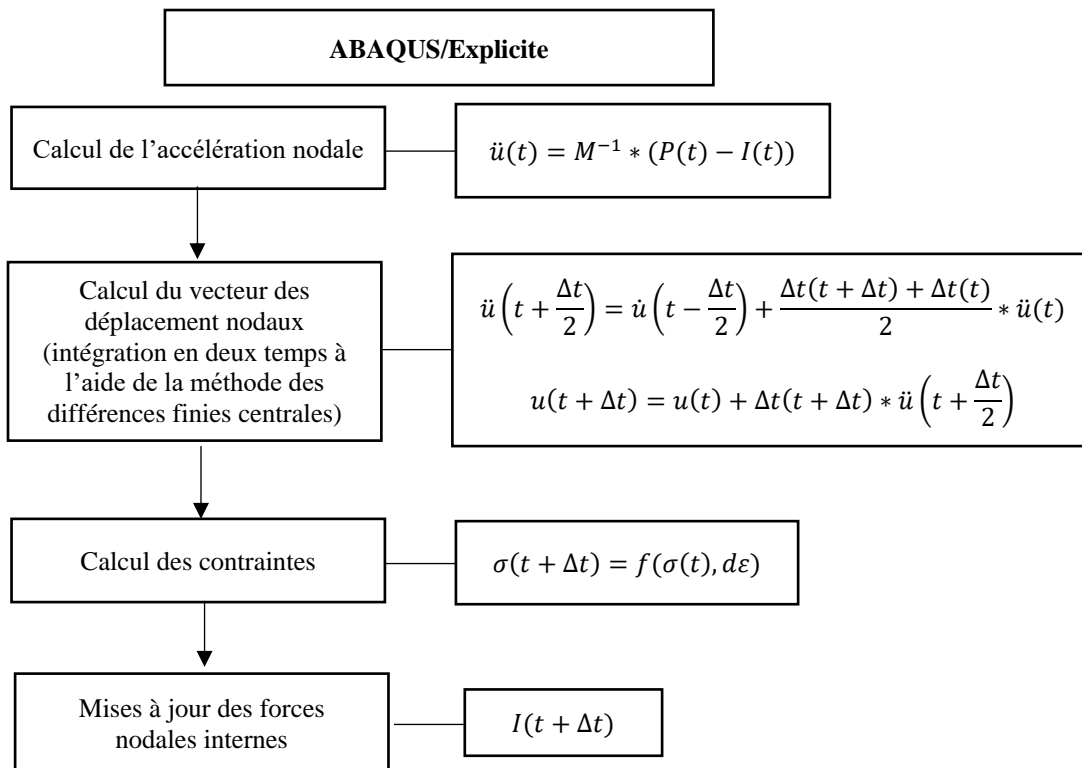


Figure 2-12: Approche Explicite sous ABAQUS



### 2.4.2 Pas de temps stable

Lors de l'utilisation d'ABAQUS/Explicit, il est important de porter une attention particulière au pas de temps pour assurer la stabilité de l'analyse. ABAQUS présente deux méthodes pour définir le temps stable de calcul. La première est de considérer le modèle dans sa globalité et de définir la plus haute fréquence  $\omega_{max}$  du système étudié. Le pas de temps stable est donné alors par :

$$\Delta t_{stable} = \frac{2}{\omega_{max}} \quad (2-10)$$

Si le cas étudié présente un amortissement  $\xi$ , l'équation précédente devient :

$$\Delta t_{stable} = \frac{2}{\omega_{max}} \times (\sqrt{1 + \xi^2} - \xi) \quad (2-11)$$

Pour des structures complexes, ce calcul devient vite très fastidieux. ABAQUS bascule alors vers la seconde méthode qui est plus conservatrice et qui considère les propriétés du plus petit élément du maillage. Ainsi avec la longueur caractéristique  $L_e$  et la vitesse de propagation d'onde dans le matériau  $C_d$  de l'élément, on trouve :

$$\Delta t_{stable} = \frac{L_e}{C_d} \quad (2-12)$$

ABAQUS offre la possibilité de définir manuellement la valeur du pas de temps stable tant que cette dernière est inférieure au  $\Delta t_{stable}$  calculé par le logiciel pour la structure étudiée.

### 2.4.3 Analyse quasi-statique

Une analyse est considérée comme quasi-statique si le ratio de l'énergie cinétique ( $Ec$ ) sur l'énergie interne ( $Ei$ ) ne dépasse pas une valeur limite (ex : 5%). La Figure 2-13 présente un exemple d'évolution du ratio des énergies lors d'une analyse quasi-statique d'une poutre en béton armé jusqu'à la rupture.





Figure 2-13: Exemple d'évolution du ratio  $E_c / E_i$  dans le temps pour une analyse non linéaire par éléments finis sous ABAQUS explicite

Les analyses explicites sous ABAQUS sont caractérisées par un début dynamique avec un ratio  $E_c/E_i$  élevé. Ce premier saut n'est pas lié au comportement des matériaux mais plutôt la propagation initiale des ondes dans la structure. Il est important que le matériau ait, dans cette zone, un comportement élastique et linéaire. Bien que ce saut dépasse les 5% admises, l'analyse est acceptée si la courbe connaît un retour immédiat vers une valeur très faible, aux alentours du zéro. Différents pics peuvent ensuite apparaître dans la courbe (ex : à  $t_2$ ) avec des amplitudes inférieures à 5% (Ben Ftima, 2013). Ces pics sont liés au comportement de la structure et correspondent à la fissuration du béton jusqu'à ce que la rupture survienne. La rupture finale se caractérise par une montée brusque et irréversible du ratio d'énergie ( $t_3$ ).

## 2.5 Autres méthodes

La méthode des bielles et tirants est une méthode simple à utiliser si la structure à analyser a une géométrie simple. Plus la région-D étudiée est complexe géométriquement, plus il est difficile de définir le modèle bielles et tirants.



### 2.5.1 Méthodes d'optimisation topologiques

Une des solutions présentées pour résoudre la complexité de l'implémentation numérique de la méthode des bielles et tirants est l'utilisation des méthodes d'optimisation structurales. Ces méthodes combinent les théories physiques des matériaux, le calcul mathématique et la programmation numérique pour pouvoir générer le cheminement interne des efforts dans une structure soumise à un état de chargement et à des conditions aux frontières donnés. Le développement des éléments finis a permis une meilleure exploitation des algorithmes basés sur l'optimisation topologique. En effet, pour une structure discrétisée, ces méthodes travaillent sur la sélection des éléments efficaces qui permettront de définir les zones actives et donc un treillis d'efforts optimal soit le modèle bielles et tirants optimal.

Il existe plusieurs modèles d'optimisation topologique dans la littérature. L'une des premières méthodes d'optimisation topologique proposée est la méthode *HBO (Homogenization Based Optimization)* présentée par Bendsøe and Kikuchi en 1988. Cette méthode se base sur la redistribution des propriétés du matériau dans une structure et sur la théorie d'homogénéisation. Les propriétés effectives définies permettent de caractériser un matériau composite avec des vides microscopiques utilisés pour caractériser les zones topologiques efficaces. Depuis, plusieurs méthodes d'optimisation ont vu le jour. La méthode *SIMP (Solid Isotropic Microstructure with Penalty)* par exemple développée par Zhou et Rozvany (1991) permet de générer un modèle topologique en se basant sur la pénalisation proportionnelle de la rigidité de la structure. Cette méthode est très utilisée et est implémentée dans plusieurs programmes numériques. Liang et al. (2002) proposent la méthode *PBO (Performance Based Optimization)* qui permet une optimisation basée sur la performance requise par la structure. Suite à une analyse par éléments finis de la structure, cette performance est calculée à l'aide de l'indice de performance PI qui permet d'évaluer les éléments dont la densité de l'énergie de déformation est inférieure au seuil fixé. Cet indice peut être incorporé dans différents méthodes pour assurer la convergence vers un modèle optimal. Pour l'analyse des structures en béton armé, la méthode d'optimisation la plus populaire dans la littérature est la méthode *ESO (Evolutionary Structural Optimization)* (ex : Xie et Steven (1993)). Cette méthode se caractérise par la suppression graduelle des matériaux inefficaces de la structure suite à une analyse par éléments finis. Plusieurs modèles dérivent de cette méthode comme la méthode *BESO (Bi-directionnal Evolutionary Structural Optimization)* Querin et al. (2000).



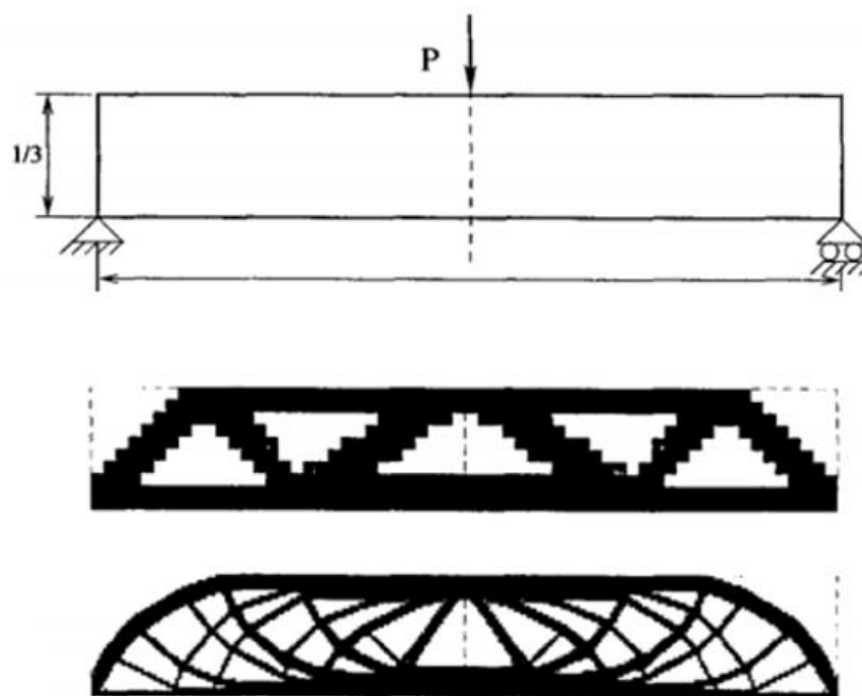


Figure 2-14: Optimisation topologique suivant la méthode SIMP (modifié de Sigmund et Petersson (1998))

Bien que ces méthodes permettent de définir le cheminement des efforts dans une structure donnée, ce ne sont pas des méthodes de dimensionnement à proprement parlé. En effet, une fois que la topologie est optimisée, on arrive à avoir un modèle de bielles et tirants qu'il faut exploiter par la suite en calculant les aires puis les efforts. De plus, ces méthodes n'accordent pas une attention particulière aux contraintes de dispositions conventionnelles des barres (souvent horizontales ou verticales) qui peuvent avoir une grande influence sur les coûts de constructions. Par exemple, pour le modèle résultant de la méthode SIMP, dans la Figure 2-14, les tirants issus de l'analyse impliquent la disposition d'armatures inclinées pour reprendre les efforts de traction qui ne sont pas faciles à placer au chantier. Du point de vue numérique, ces méthodes d'optimisation nécessitent d'effectuer plusieurs itérations de calcul et d'analyses par éléments finis.



### 2.5.2 Réduction de capacité résistive

La méthode de la réduction de capacité résistive (*strength reduction*) est une méthode très utilisée pour les analyses de stabilité des pentes. Cette méthode se caractérise par la réduction graduelle de la capacité résistive des matériaux de la structure étudiée. Elle a été récemment utilisée pour des études de stabilité des barrages fissurés, (Figure 2-15), et la réduction de la capacité résistive du barrage permet d'évaluer le facteur de sécurité au glissement et ainsi anticiper les mécanismes de défaillance (Vulliet, Ben Ftima et Léger (2017)).

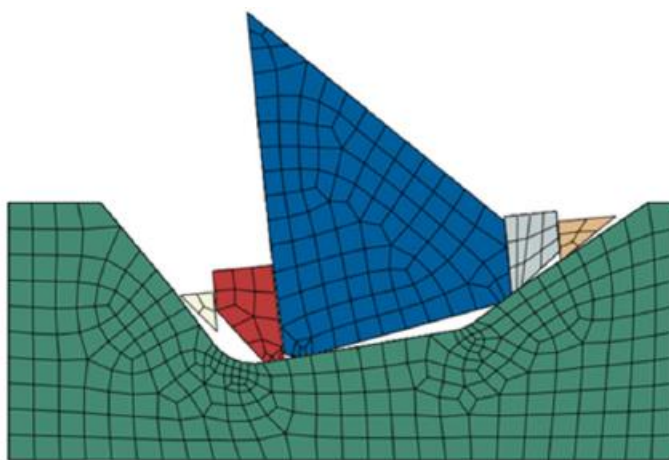


Figure 2-15: Réduction de la capacité résistive : glissement d'un barrage (Vulliet, Ben Ftima et Léger (2017))

## 2.6 Conclusion

Le béton armé, malgré sa grande popularité, est un matériau dont le comportement reste un sujet de recherche continue. La revue de littérature présentée dans ce chapitre, a permis de voir qu'il existe un grand nombre de méthodes de calcul des structures en béton armé. Ces méthodes varient des plus simples aux plus complexes : méthode sectionnelle, méthode B/T, méthodes numériques : optimisation, réduction de capacité ou analyse non-linéaire.

La méthode la plus utilisée en pratique est la méthode sectionnelle en utilisant des forces de section issues d'une analyse linéaire élastique (discrétisation 1D, rarement 2D ou 3D). La méthode la plus



complète (mais aussi la plus complexe) est celle des analyses non-linéaire. Il est important de noter que, contrairement aux méthodes sectionnelles et par B/T, cette méthode est une méthode de vérification de la conception plutôt qu'une méthode de conception. Autrement dit, on ne peut procéder à cette analyse sans un choix initial de géométrie du béton (coffrage) et de configuration/quantité d'armature (ferraillage) qui sont généralement issus d'une phase de conception proprement dite utilisant la méthode sectionnelle. De plus, l'utilisation de cette méthode en pratique pose beaucoup de problèmes : non unicité de la loi de comportement, difficulté de validation de cette loi, nécessité de définir plusieurs paramètres du matériau (intrants) qui ne sont pas toujours facilement mesurables surtout dans le contexte de nouvelle conception, ...etc. L'approche de réduction de capacité est simple relativement à l'approche non-linéaire mais elle reste aussi une méthode de vérification dont l'objectif principal est de trouver un facteur de sécurité pour un dimensionnement donné.

La méthode B/T permet un dimensionnement conservateur des zones complexes dans une structure. Toutefois, son utilisation peut devenir très lourde quand la géométrie ou les conditions aux frontières de la structure se complexifie et il devient difficile de trouver le modèle bielles et tirants optimal. Les méthodes d'optimisation topologique ont été développées pour palier à cet handicap mais elles sont à notre avis plus appropriées au domaine de génie mécanique puisqu'elles ne tiennent pas compte de la spécificité du béton armé : importance relative des coûts de construction, de mise en place des barres, ...etc. Ces méthodes demandent un grand nombre d'itérations et d'analyses par éléments finis et donnent uniquement une idée sur le cheminement des efforts sans s'occuper généralement de la résistance.

Dans ce projet, on propose de développer une approche intermédiaire (en termes de complexité) entre la méthode de B/T et les analyses non-linéaires. L'idée est de combiner la force des analyses par éléments finis avec les concepts de la méthode des B/T qui sont bien acceptés en pratique et partout dans le monde. Il s'agit de développer une nouvelle approche de dimensionnement qui s'inspire aussi du principe de la réduction de capacité résistive décrite précédemment.



## CHAPITRE 3 ANALYSES PRÉLIMINAIRES

### 3.1 Introduction

Tel qu'expliqué au chapitre précédent, les méthodes de calcul des structures en béton armé peuvent être classées en deux grandes familles : les méthodes de conception issues des codes et recommandations, assez utilisées en pratique (ex : méthode sectionnelle, méthode B/T) et les méthodes de vérification qui sont plus des méthodes numériques et souvent réservées au domaine de recherche (ex : analyse non-linéaire).

L'objectif de ce chapitre est double. Il vise d'une part à (i) présenter les études préliminaires effectuées pour la compréhension des mécanismes de résistance et de défaillance des membrures en béton armé et d'autre part, (ii) l'investigation d'une approche intermédiaire simplifiée basée sur un champ thermique fictif, en préparation à l'approche finale qui sera détaillée aux prochains chapitres.

Une première partie sera consacrée à la présentation de la structure de référence étudiée. Sa résistance sera évaluée avec les différentes méthodes présentées dans le chapitre 2. La deuxième partie de ce chapitre détaille une première version de l'approche proposée dans le cadre de cette maîtrise en se basant sur des lois de comportement présentes dans le logiciel. Dans les analyses non-linéaires par éléments finis, le béton a une résistance en traction non nulle. Il est donc capable de reprendre des efforts de traction non négligeables. Nous proposons de réduire cette résistance résiduelle pour permettre aux armatures de reprendre la quasi-totalité de ces efforts. Pour les lois de comportement existantes, il est possible d'affecter leur résistance limite en traction en faisant varier le champ de température du modèle dans le temps. Ce champ fictif de température est ainsi créé pour modifier les caractéristiques du béton en traction. Enfin, ce chapitre se termine sur la présentation des résultats des analyses effectuées et la discussion des différentes difficultés rencontrées avec l'approche utilisée.



## 3.2 Présentation de la structure considérée

Pour les différentes analyses effectuées dans cette étude, on considère la poutre en porte à faux présentée dans la Figure 3-1. La poutre étudiée a une profondeur de  $h = 1\text{ m}$ , une largeur de  $b = 0.5\text{ m}$  et une longueur de  $L = 2\text{ m}$ . L'armature est constituée de 3 barres 20M placées à  $d = 0.925\text{ m}$  du bas de la poutre. Dans tout ce qui suit, on considère que les barres sont pleinement ancrées dans le béton, quitte à utiliser des plaques d'ancrage aux extrémités.

Les propriétés mécaniques du béton et de l'acier sont présentées dans le Tableau 3-1. Les valeurs considérées pour les coefficients de tenue du béton et de l'acier sont :

$$\phi_c = \phi_s = 1$$

Tableau 3-1: Propriétés du béton et de l'acier pour la structure étudiée

Matériau	Propriétés
<b>Béton</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Résistance uniaxiale en compression <math>f'_c = 30\text{ MPa}</math></li> <li>• Résistance uniaxiale en traction <math>f'_t = 2.2\text{ MPa}</math></li> <li>• Module de Young <math>E_c = 27.4\text{ GPa}</math></li> <li>• Masse volumique <math>\rho = 2400\text{ kg/m}^3</math></li> <li>• Coefficient de Poisson <math>\nu = 0.18</math></li> <li>• Béton normal : <math>\lambda = 1.0</math></li> <li>• Diamètre du plus gros granulat : <math>a_g = 20\text{ mm}</math></li> </ul>
<b>Acier</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Limite d'élasticité de l'acier <math>f_y = 400\text{ MPa}</math></li> <li>• Module de Young <math>E_s = 200\text{ GPa}</math></li> <li>• Masse volumique <math>\rho = 7800\text{ kg/m}^3</math></li> <li>• Coefficient de Poisson <math>\nu = 0.3</math></li> <li>• Aire des armatures 20M : <math>A_s = 300\text{ mm}^2</math></li> </ul>



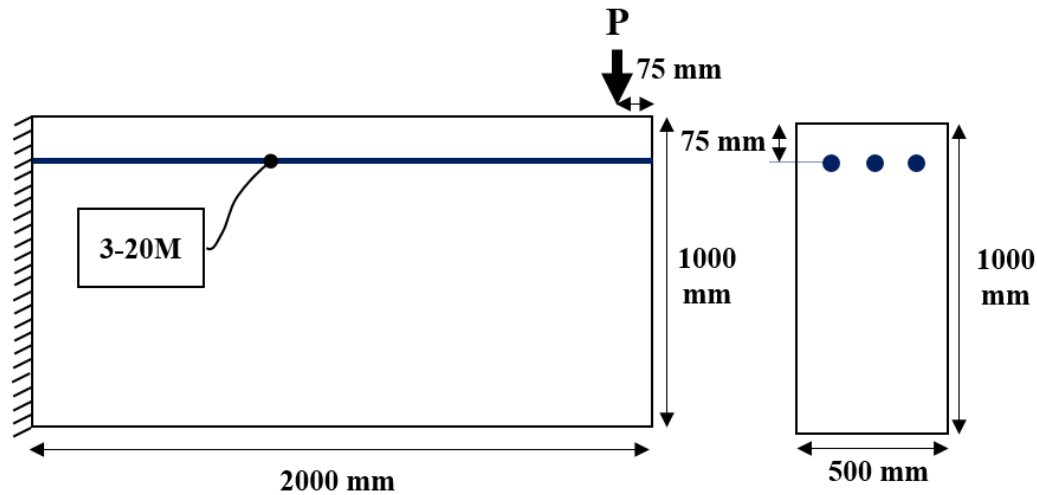


Figure 3-1: Géométrie du modèle porte-à-faux étudié

### 3.3 Comparaison des approches de dimensionnement existantes

Pour commencer, on effectue l'étude de la poutre en porte-à-faux à l'aide des méthodes présentes dans le code. La poutre est encastree et est soumise à une charge ponctuelle  $P$  à son autre extrémité placée à  $a = 1.925 \text{ m}$  de l'appui. En considérant que la poutre est armée de 3 barres 20M, la charge limite  $P$  que peut reprendre la membrure permettra de définir une valeur de référence pour l'approche de dimensionnement développée par la suite. Pour définir cette limite, deux méthodes de dimensionnement seront considérées : la méthode sectionnelle et la méthode B/T. Une analyse non-linéaire de la poutre est aussi effectuée pour considérer le comportement proche de la réalité et évaluer la charge limite en considérant la non-linéarité des matériaux.

Le modèle étudié est une poutre en porte-à-faux caractérisée par une longueur  $L = 2 \text{ m}$  ( Figure 3-1) et un ratio  $\frac{a}{d} = \frac{1.925 \text{ m}}{0.925 \text{ m}} = 2.08$  ce qui la place à la limite de l'application de la méthode sectionnelle et la méthode des B/T.



### 3.3.1 Méthode sectionnelle

La méthode sectionnelle se base sur l'équilibre des forces internes dans la section du béton soit ici la force de compression dans le béton et la force de traction dans les armatures. Le moment résistant aux efforts de flexion est défini par la formule :

$$M_r = \phi_s * f_y * A_s * \left( d - \frac{\phi_s * A_s * f_y}{2 * \phi_c * (\alpha_1 * f'_c) * b} \right) = 328 \text{ kN.m}$$

$(\alpha_1 * f'_c)$  : est la contrainte uniforme équivalente et  $\alpha_1 = 0.85 - 0.0015 * f'_c = 0.805 \geq 0.67$

La charge limite supportée pouvant être supportée est donc égale à :

$$\frac{M_r}{1.925 \text{ m}} = 170 \text{ kN}$$

En ce qui concerne la résistance à l'effort tranchant, la contribution du béton est donnée par la formule :

$$V_c = \lambda * \phi_c * \beta * \sqrt{f'_c} * b * d = 304 \text{ kN}$$

$$\beta = \left( \frac{230}{1000 + d_v} \right) = 0.12$$

En tout point de la structure, le béton est capable de résister aux efforts de cisaillement et ne nécessite pas l'ajout d'étriers d'après cette méthode :

$$V_r = V_c > P$$

### 3.3.2 Méthode des bielles et tirants

La méthode des bielles et tirants permet le dimensionnement en flexion et en cisaillement de la structure. En se basant sur le principe de Saint Venant, les zones de la poutre en porte-à-faux proches de l'appui et de la charge sont des zones de discontinuité. Soumise à une charge ponctuelle à son extrémité, le modèle bielle et tirant est présenté dans la Figure 3-2 a).



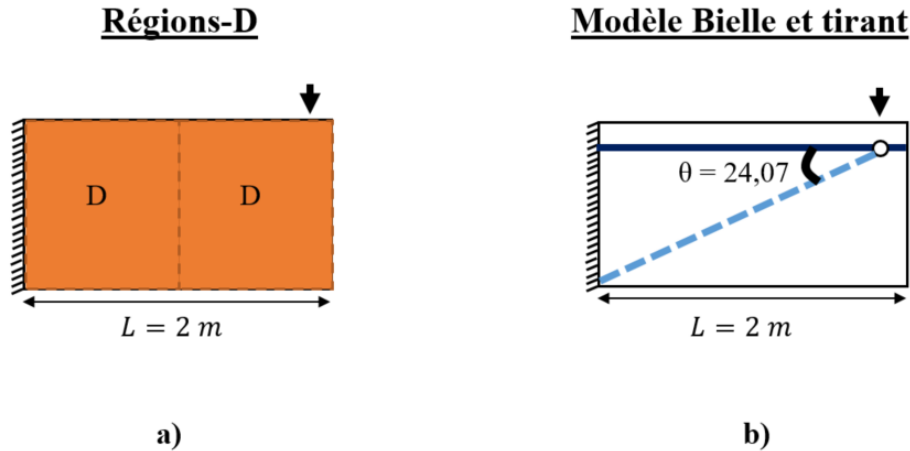


Figure 3-2: a) Les zones de discontinuité dans la poutre en porte-à-faux  
et b) le modèle bielle et tirant

La poutre est armée de 3 barres 20M. La force dans le tirant est calculée suivant la formule suivante :

$$T = \phi_s * A_s * f_y = 360\text{ kN}$$

La bielle et le tirant forment un angle  $\theta = 24.07$ . Pour valider le tracé choisi, on vérifie que la résistance des membres du modèle est suffisante pour reprendre les efforts appliqués. Le nœud regroupe deux efforts de compression et un tirant en traction, il est donc de type CCT. Sa résistance est, d'après la norme, égale à :

$$f_{cu} = 0.75 * \phi_c * f'_c = 22.5\text{ MPa}$$

La présence d'un tirant et d'une bielle dans le nœud crée une zone d'incompatibilité qui affecte la résistance de la bielle à cette interface. Sa résistance se calcule selon la formule :

$$f_{cu} = \frac{f'_c}{0.8 + 170 * \varepsilon_1} = 6.6\text{ MPa}$$

Avec :  $\varepsilon_1 = \varepsilon_s + (\varepsilon_s + 0.002) * \cot^2(\theta) = 0.022$  en considérant que les armatures du tirant plastifient, soit  $\varepsilon_s = 0.002$ .

La résistance effective de la bielle est inférieure à celle du nœud, c'est donc elle qui gouverne pour définir les dimensions du nœud. Comme l'illustre le tracé complet présenté dans la Figure 3-3, les



éléments du modèle B/T ne dépassent pas les limites géométriques de la structure, c'est donc un choix de modèle B/T valide et tous les membres résistent correctement à la charge limite :

$$P = 161 \text{ kN}$$

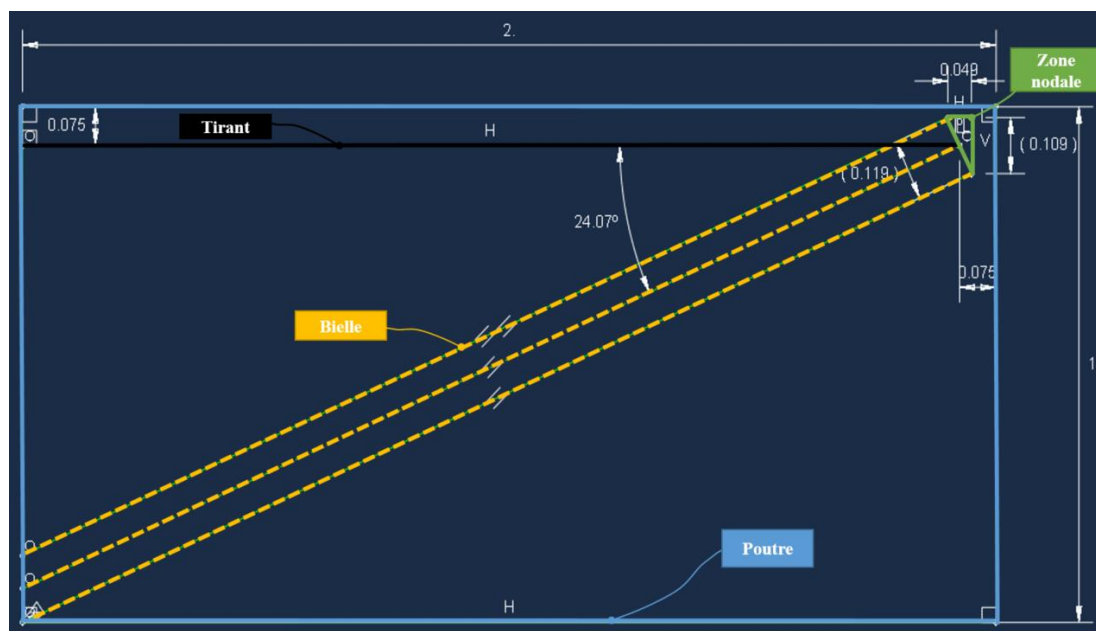


Figure 3-3: Modèle bielle et tirant avec dimensions de la bielle et du nœud pour le modèle considéré

### 3.3.3 Analyse non linéaire

Une analyse non-linéaire a été effectuée en utilisant le logiciel ABAQUS pour tenir compte du comportement non linéaire du béton. Le modèle non-linéaire utilisé pour caractériser le béton est le modèle EPM3D en considérant les propriétés des matériaux définis au Tableau 3-1. D'après le graphe présenté dans la Figure 3-4, la charge plafonne à une valeur limite et la structure subit une rupture ductile liée à la plastification des armatures. La charge limite supportée par cette poutre en béton armé de 3 barres 20M suivant l'analyse non-linéaire est égale à :

$$P = 177 \text{ kN}$$



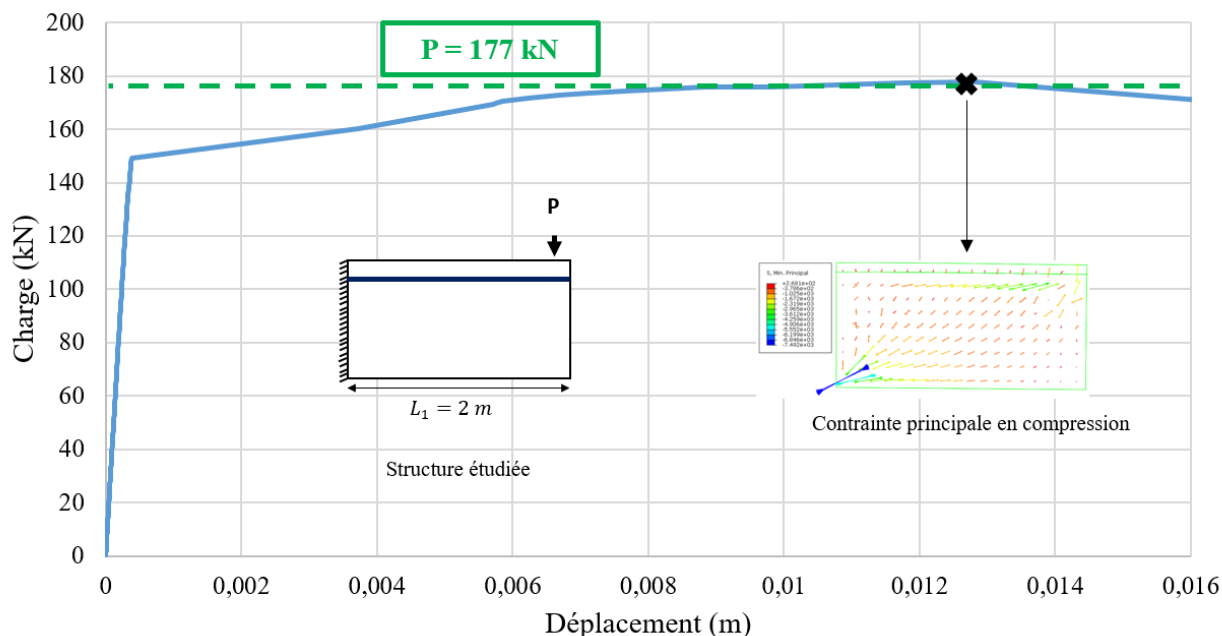


Figure 3-4: Courbe Charge en fonction du déplacement de la poutre en porte-à-faux suite à l'analyse non-linéaire sous ABAQUS

### 3.4 Approche utilisant le champ thermique fictif

Le béton, présent dans les modèles numériques linéaires ou non-linéaires, a une résistance en traction non nulle. Cette résistance lui permet, même après fissuration, de supporter des efforts de traction grâce au phénomène de raidissement en traction. Dans cette partie, on propose d'agir sur cette résistance pour amener les armatures, présentes dans les zones tendues, à reprendre la totalité de ces efforts. La réduction de la résistance en traction causera aussi une réorganisation des efforts de compression dans la structure. Deux modèles seront testés dans cette partie : le modèle CIP et le modèle CDP, définis au chapitre 2. Les armatures ont un comportement linéaire élastique tout le long de l'analyse.

#### 3.4.1 Description de l'approche

Le logiciel d'analyse par éléments finis ABAQUS dispose de plusieurs modèles de matériaux à utiliser. N'ayant pas accès à leur programme source pour modifier leur comportement, il est



toutefois possible de modifier la résistance en traction de certains modèles en fonction de la température appliquée à la structure. Muni donc de cet artifice, on applique à la structure un champ fictif de température dont le seul but est de faire varier la résistance en traction du béton dans le temps.

L'analyse se fait en 2 étapes : une étape de chargement et une étape de dégradation. Dans la première étape, la structure est soumise aux charges appliquées. Notons que dans cette phase, le béton est caractérisé par un comportement linéaire élastique avec une valeur initiale de résistance en traction supérieure ou égale à la contrainte principale de traction dans la structure. Lors de la seconde étape et sous charge constante, le béton est 'vidé' graduellement de sa résistance en traction. Le comportement non linéaire commence au début de cette étape et la courbe de traction varie jusqu'à atteindre des valeurs très faibles de résistance.

La Figure 3-5 illustre la cinétique de l'application de la charge et de la température. Les variations suivent une fonction polynomiale de degré 5 présente dans ABAQUS (*smooth step*) pour assurer un comportement quasi-statique du modèle.

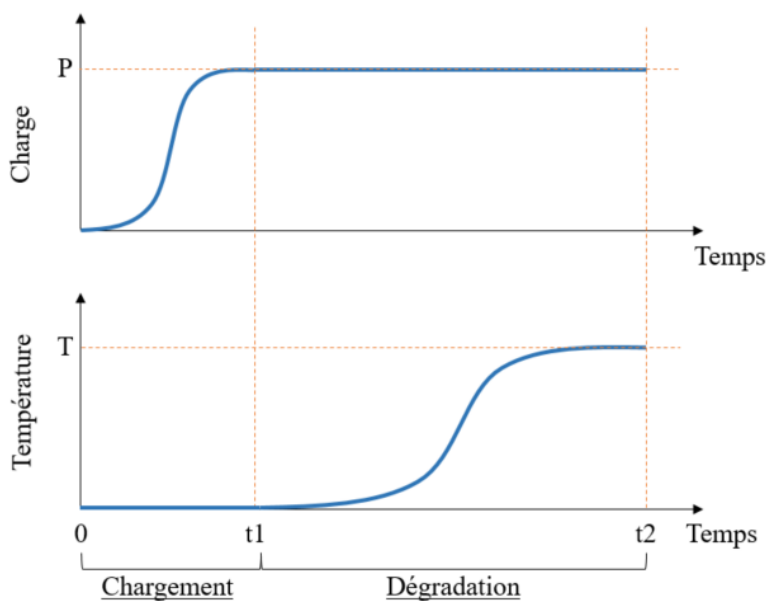


Figure 3-5: Phases chargement / dégradation



### 3.4.2 Vérifications préliminaires

Avant d'analyser la structure avec les deux modèles de béton choisis, une série d'analyses a été effectuée sur un cube en béton avec un seul élément et un seul point d'intégration pour vérifier les lois de comportement choisies, plus particulièrement dans la phase dégradation. (Figure 3-6).

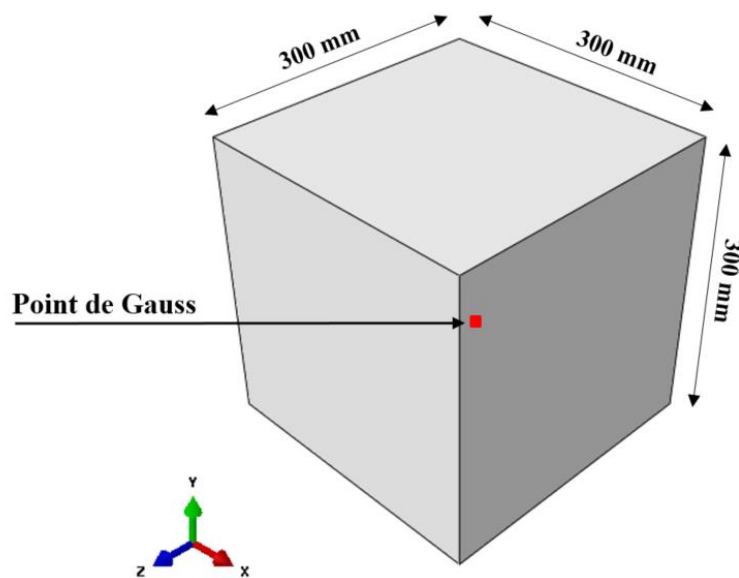


Figure 3-6: Élément utilisé pour la vérification

La dégradation de la résistance en traction modifie le comportement général en traction du matériau. La Figure 3-7 présente, en fonction de la température appliquée, la courbe de traction dans le cas d'un *chargement uniaxial* en traction. Les modèles CIP et CDP étant des modèles plastiques, la limite de résistance dans le cas de *chargement biaxial* est limitée par la surface d'écoulement. La Figure 3-8 présente l'effet de la dégradation sur la forme générale de la surface d'écoulement.



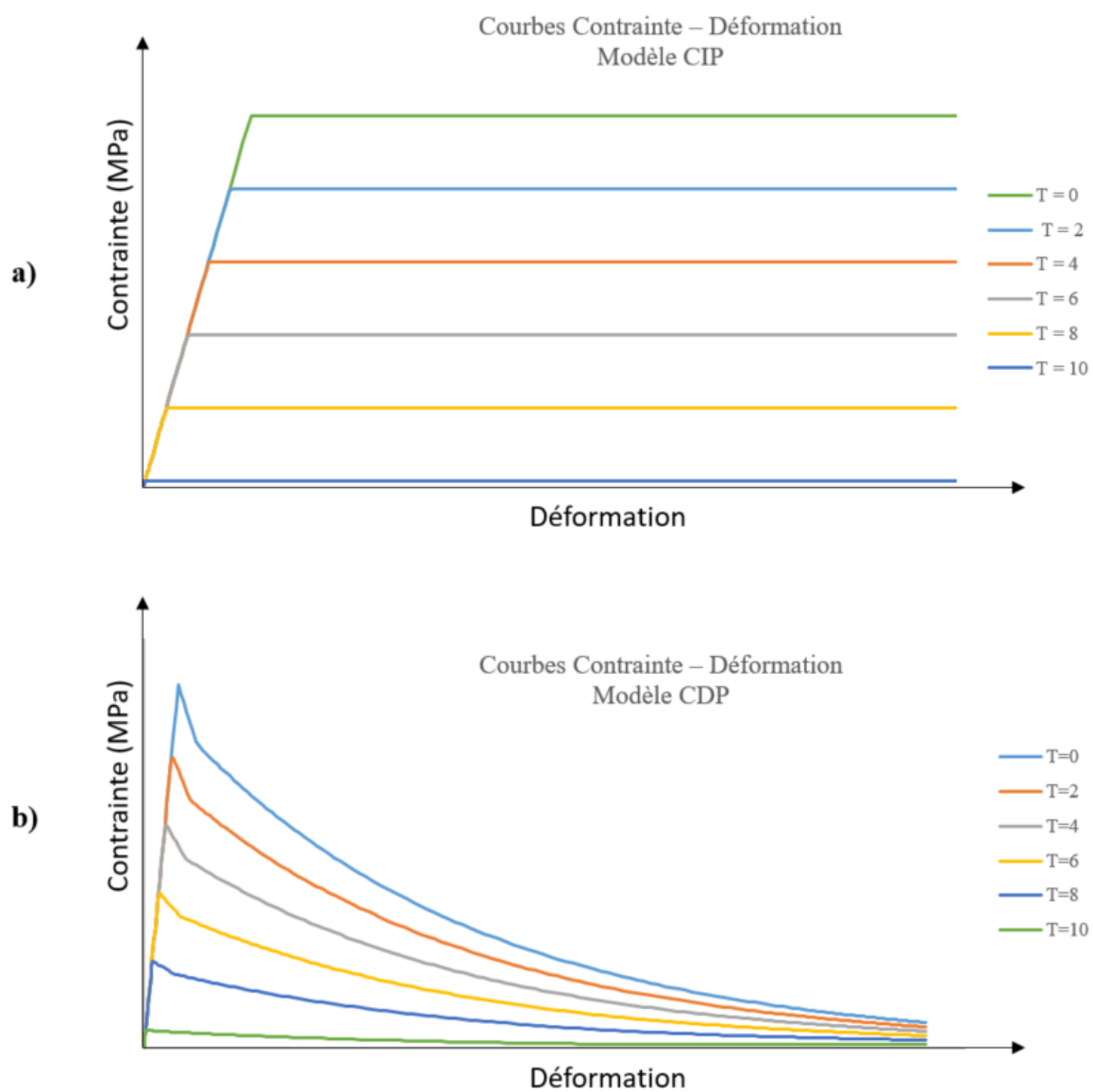


Figure 3-7: Courbe contrainte - déformation et effet de la température a) Modèle CIP et b) Modèle CDP



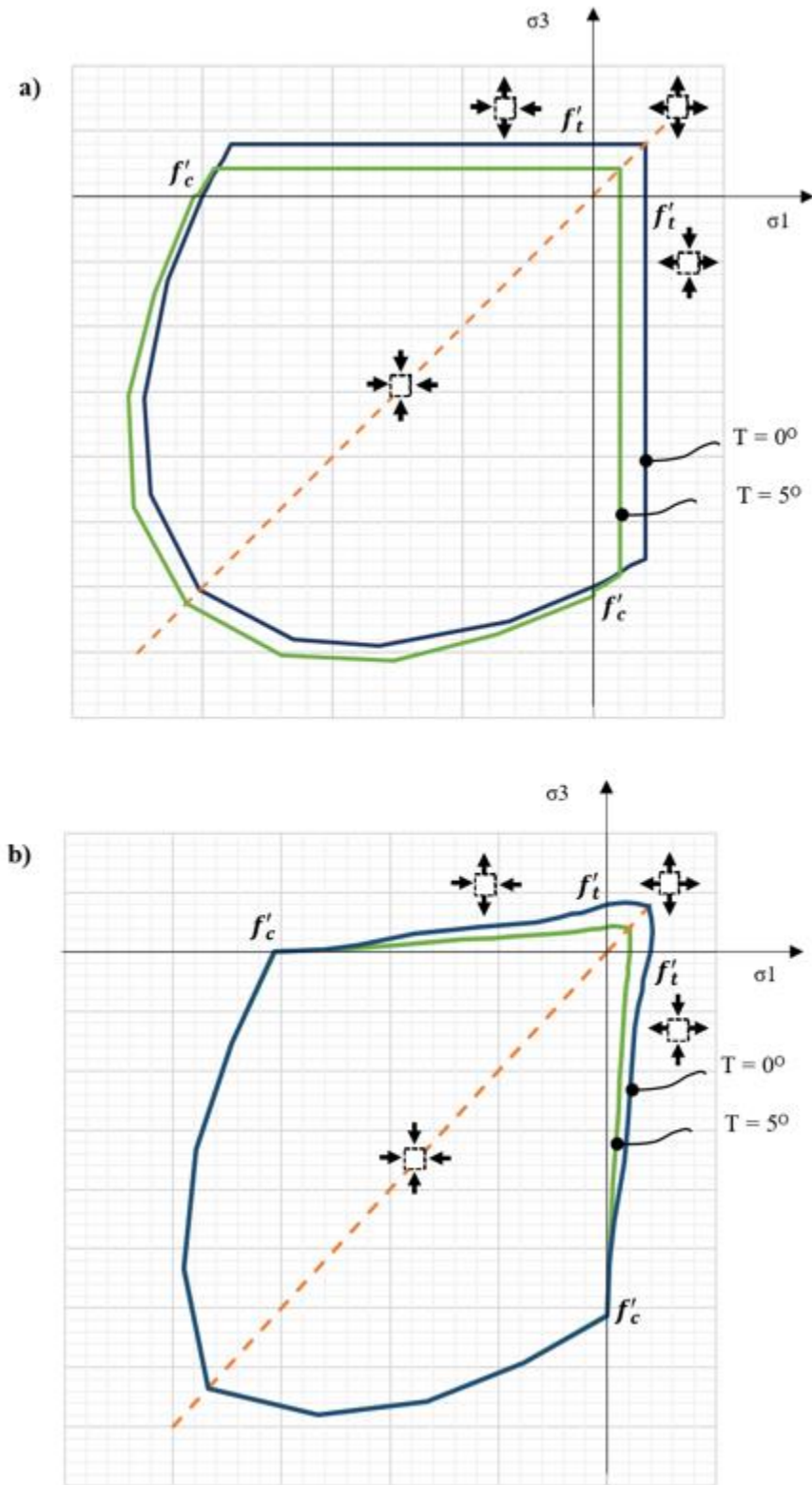


Figure 3-8: Surface limite d'écoulement pour une température  $T = 0$  et  $T = 5$  : a) Modèle CIP, b) Modèle CDP



### 3.4.3 Application au porte à faux et analyse des résultats

#### 3.4.3.1 Analyse porte-à-faux

La poutre en porte-à-faux a été analysée avec le modèle CIP et le modèle CDP. La charge  $P = 161 \text{ kN}$  a été considérée (Figure 3-1).

La Figure 3-9 présente l'évolution de la force dans les armatures en fonction du temps pour les deux modèles.

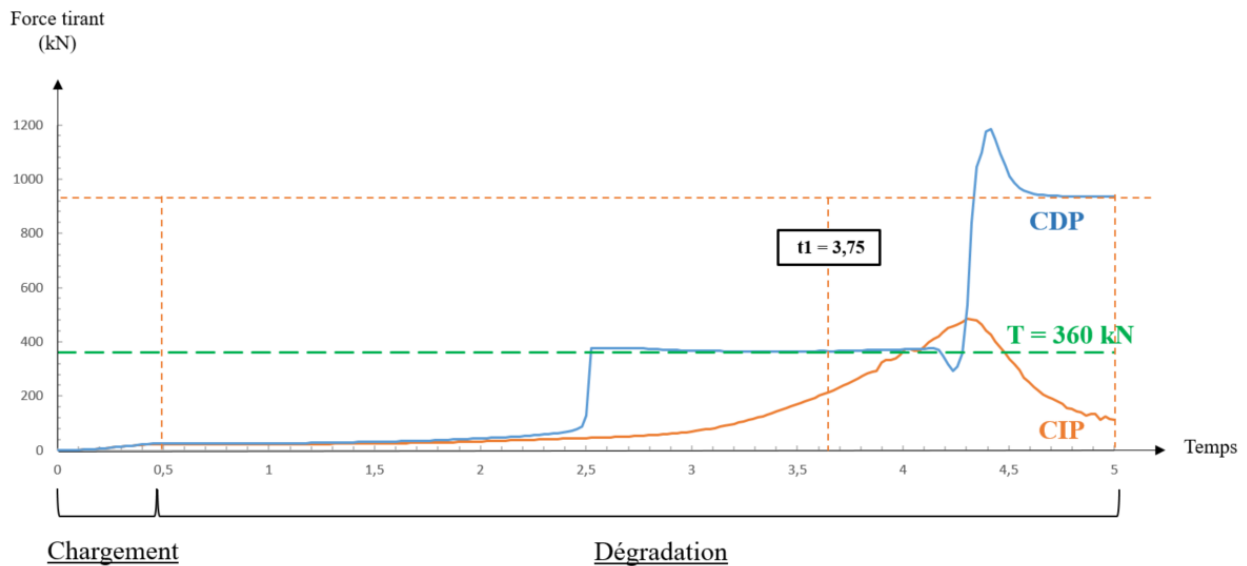


Figure 3-9: Force dans le tirant : Comparaison entre le modèle CIP, le modèle CDP et la valeur théorique

La Figure 3-10 illustre la distribution des contraintes principales en compression et des déformations principales en traction dans la poutre en porte-à-faux au temps  $t1$  pour le modèle CDP.



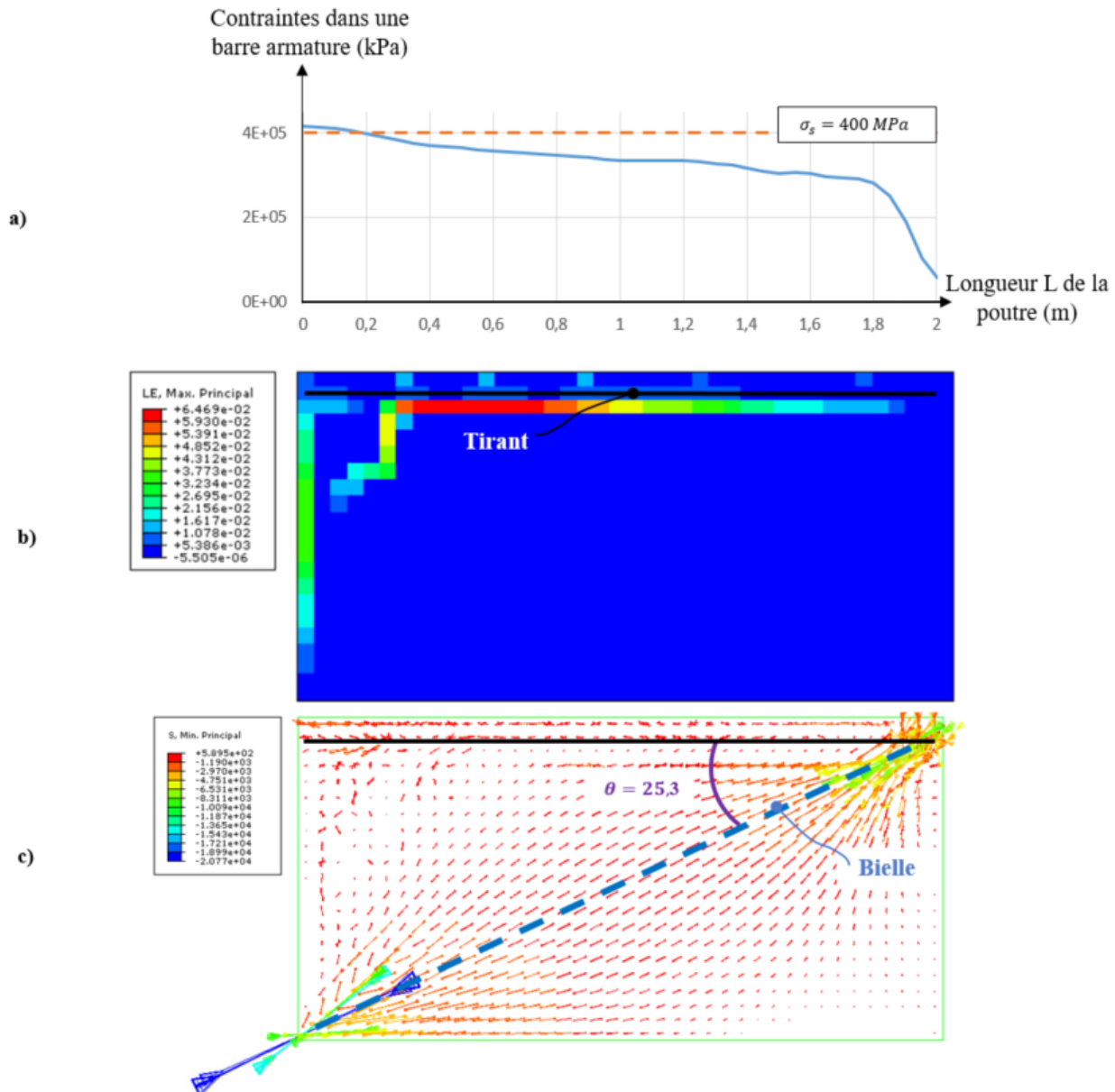


Figure 3-10: Modèle CDP à  $t = t_1$  : a) Contraintes le long du tirant - b) Déformations principales maximales et c) Contraintes principales minimales

### 3.4.3.2 Analyse des résultats

Le modèle CIP caractérise le béton comme un matériau élastique parfaitement plastique. Cette approche n'est pas adaptée pour caractériser le comportement réel du béton car elle permet au béton



de stocker une grande énergie même après sa fissuration en traction et en compression. Comme présenté dans la Figure 3-9, les armatures reprennent graduellement les efforts en traction. Parallèlement, la structure est amenée à un état de contraintes uniforme et le mode de rupture final observé n'est pas physique (Figure 3-11). Le modèle CIP, ou plus généralement tout modèle élasto-plastique parfait, n'est donc pas bien adapté pour l'approche de conception souhaitée.

Le modèle CDP permet par contre de considérer le comportement adoucissant du béton après avoir atteint la résistance limite en traction ce qui constitue un comportement plus proche de la réalité du béton. Contrairement au modèle CIP, la force dans le tirant augmente plus rapidement et plafonne en premier lieu à la valeur théorique  $T = 360 \text{ kN}$  obtenue avec le modèle B/T. Les mécanismes 'numériques' qui permettent de converger à cette première asymptote sont très intéressants. Le premier mécanisme est le '*dézippage*' ou dégradation en chaîne des éléments situés directement en dessous du tirant comme présenté dans la Figure 3-10 b). L'examen de l'état de contraintes de ces éléments juste avant le *dézippage* révèle un cisaillement qui est dû au différentiel des efforts de traction dans les éléments du tirant juste au-dessus. Ainsi, ce mécanisme de dégradation en chaîne permet d'obtenir un état de contraintes quasi-uniforme dans les éléments de tirant comme le montre la Figure 3-10 a) ce qui est consistant avec le modèle B/T. Parallèlement à ce mécanisme, les contraintes principales de compression subissent une réorganisation et s'orientent en formant une bielle comme le montre la Figure 3-10 – c). Notons que l'orientation approximative de cette bielle est assez proche de celle du modèle B/T.

Toutefois, malgré le fait que la charge soit maintenue constante dans la phase dégradation, la force dans le tirant augmente aux alentours de  $t = 4.3 \text{ s}$  pour atteindre un deuxième plateau. L'orientation des contraintes principales de compression montre la formation d'une deuxième bielle moins inclinée que la première (par rapport au tirant) qui fait augmenter la force dans le tirant. La rupture du modèle survient juste après l'atteinte de ce deuxième plateau. Comme pour le modèle CIP, le mode de rupture final n'est pas très clair et correspond à une dégradation généralisée de la structure comme le montre la Figure 3-11 qui présente la déformée du porte-à-faux à la fin des analyses suivant les deux modèles.



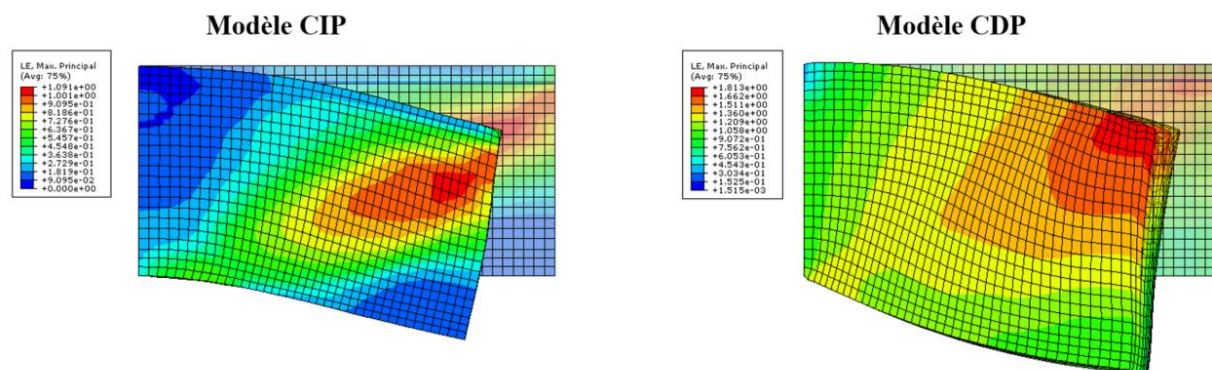


Figure 3-11: Rupture finale : déformée et distribution de la déformation principale en traction

Des analyses effectuées sur le porte-à-faux, dont la longueur a été modifiée pour une valeur  $L = 4 \text{ m}$ , ont donné le même comportement asymptotique. Ceci démontre que le modèle CDP n'arrive pas à détecter la faiblesse de la bielle due à sa faible inclinaison par rapport au tirant.

Les résultats issus du modèle CDP sont très prometteurs car contrairement au modèle CIP, le tirant commence par plafonner à la bonne valeur théorique. La présence du tirant est donc liée à la loi de comportement non linéaire en traction du béton et il est important de modéliser l'adoucissement du béton après sa fissuration. Un des handicaps liés à l'utilisation de ce modèle a été l'incapacité de distinguer la nature de la rupture qui survient à la fin de l'analyse.

### 3.5 EPM3D

Les deux modèles utilisés précédemment se basent sur la théorie de plasticité. Un troisième modèle existant a été utilisé pour caractériser le béton mais cette fois en se basant sur la théorie hypoélastique. Le modèle EPM3D, dans sa version actuelle, n'admet pas la modification de la résistance par le biais d'un champ thermique fictif. Une fonction a donc été programmée en introduisant la dégradation qui agit directement sur la résistance en traction du béton en fonction du temps d'analyse (Annexe A).

Des analyses préliminaires ont été lancées en utilisant cette loi modifiée mais n'ont pas donné de résultats concluants. Cette loi modifiée a été vite abandonnée en raison de la complexité du modèle,



de l'existence de plusieurs couplages et surtout du fait que la loi EPM3D n'a pas été programmée pour permettre ce genre de dégradation progressive.

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, des analyses préliminaires ont été effectuées sur différents modèles de matériaux existants. En utilisant une dégradation artificielle de la résistance en traction du béton, on souhaite exhiber les trois membres constituant la méthode B/T qui sont : les tirants, les bielles et les zones nodales. Une structure simple a été définie pour appliquer les tests préliminaires et pouvoir comparer les résultats aux méthodes existantes. Le modèle parfaitement plastique (modèle CIP) s'est avéré non convenable puisque le plateau plastique ne correspond pas à la réalité du béton. Le modèle CDP permet de caractériser le béton avec une loi d'adoucissement en compression et de raidissement en traction. Le modèle arrive à reproduire la bonne valeur de la force dans le tirant. Toutefois, il ne permet pas de détecter la rupture de la bielle. Le dernier modèle existant testé est le modèle hypoélastique EPM3D. Une fonction de dégradation fut implémentée pour affecter directement la résistance limite en traction de la loi de comportement en traction. La complexité du modèle n'a pas permis de bien définir la dégradation dans le matériau.

En se basant sur les analyses préliminaires effectuées dans ce chapitre, un nombre de conclusions suivantes ont été retenues :

- le comportement adoucissant en traction est important à considérer dans la loi de comportement pour être en concordance avec la réalité du béton ;
- même en reproduisant la bonne force dans le tirant, les lois existantes n'arrivent pas à reproduire les modes de défaillance liés à la rupture des bielles ou des zones nodales.

Pour mieux contrôler le comportement non-linéaire et considérer les phénomènes physiques compatibles avec la méthode de conception visée, on procède au développement d'une nouvelle loi de comportement qui permettra de tenir compte des différentes observations effectuées dans ce chapitre.



## CHAPITRE 4 LOI CONSTITUTIVE

### 4.1 Introduction

Suite aux différentes limitations présentées dans le chapitre 3, une nouvelle loi de comportement a été développée. Comme présenté dans le chapitre 2, il existe plusieurs familles de modèles de béton dans la littérature. Malgré que les modèles plastiques-endommageables arrivent à bien traduire plusieurs phénomènes liés au béton, ils s'accompagnent d'une grande complexité liée à des formulations mathématiques lourdes et rendent ainsi leur implémentation numérique très difficile. Ces modèles sont aussi très demandant en termes de paramètres d'entrées qui sont souvent difficiles à identifier expérimentalement. Notre choix s'est donc porté sur les modèles élastiques non-linéaires qui sont plus simples à implémenter numériquement tout en permettant une très bonne caractérisation du comportement complexe du béton.

Ce chapitre présente la loi de comportement développée en détaillant les propriétés du béton considérées. Cette loi permet de caractériser le béton avant et après fissuration en considérant l'effet de l'endommagement sur les caractéristiques mécaniques du matériau. Sa formulation est simple, générale et s'adapte au contexte précis de ce projet, c'est-à-dire intégrer la dégradation du matériau en utilisant la formulation explicite.

### 4.2 Description générale de la loi de comportement

La modélisation de tous les aspects liés au comportement non-linéaire du béton ne constitue pas l'objectif de ce travail. Le modèle de B/T étant notre modèle cible, certaines hypothèses fondamentales ont été émises pour la loi de comportement développée. L'idée est de partir du plus simple (loi linéaire élastique de Hooke) jusqu'à un niveau de complexité adéquat permettant de modéliser *la cinématique de comportement d'un modèle B/T vue du côté d'un milieu continu*.

D'après les discussions du chapitre précédent, les principales caractéristiques recherchées du modèle sont les suivantes :



- la modélisation d'une fissuration diffuse en traction et de l'endommagement en compression ;
- le comportement adoucissant en traction et en compression pour considérer l'effet des macro-fissures sur le matériau ; (dans ce projet, l'accent est mis sur l'adoucissement du côté traction) ;
- la dégradation de la résistance en compression en fonction de la déformation principale de traction (incompatibilité du point de vue de la mécanique des milieux continus) ;
- comportement cyclique du côté de la traction et changement de rigidité lors du passage de la traction à la compression.

La loi constitutive développée est une loi tridimensionnelle qui s'insère dans la famille des modèles élastiques non-linéaires. Cette approche permet une caractérisation pratique des phénomènes de dégradation du béton en se basant sur la définition non linéaire de la courbe uniaxiale des contraintes en fonction des déformations. Les hypothèses retenues pour la loi sont compatibles avec le modèle B/T sont :

- le confinement et ses effets sur la résistance en compression ne sont pas considérés ;
- l'effet de Poisson est ignoré dans les phases non-linéaires adoucissantes.

La loi a été développée sous Fortran et implémentée dans ABAQUS/Explicit.

## 4.2.1 Comportement pré-pic

### 4.2.1.1 Loi de Hooke généralisée

Avant fissuration, le béton est considéré linéaire élastique et suit la loi de Hooke généralisée pour un matériau isotropique qui considère que les propriétés du matériau sont indépendantes de l'orientation des axes. Les relations caractéristiques intégrées sont présentées dans le chapitre 2 selon l'équation (2-4).

En traction, le matériau reste linéaire élastique jusqu'à ce que la contrainte atteigne la limite en traction  $f'_t$ . Comme on le verra plus loin dans la méthodologie, cette limite en traction n'est pas



nécessairement un paramètre du matériau qu'on devra caractériser expérimentalement ou à l'aide de formules semi-empiriques.

Le développement des microfissures en compression modifie la linéarité du comportement du béton en diminuant la rigidité ce qui résulte une non-linéarité de la courbe avant fissuration. Dans notre modèle, ce phénomène débute quand la contrainte en compression atteint 75% de la résistance en compression considérée.

#### **4.2.1.2 Coefficient de Poisson**

Avant fissuration, le coefficient de Poisson est considéré dans le comportement général du matériau ce qui permet de relier les états de contraintes dans les 3 directions selon la loi de Hooke. Toutefois, une fois que la 1<sup>ère</sup> fissuration survient, on fait l'hypothèse de ne pas le considérer dans le comportement non-linéaire du béton.

### **4.2.2 Comportement post-pic**

#### **4.2.2.1 Modèle à fissuration diffuse**

La fissuration du béton définit le point de départ du comportement non-linéaire du béton. Le modèle retenu dans la loi développée est le modèle de *fissuration diffuse*. De plus, on considère que le plan de fissuration change après l'apparition de la première fissure ce qui nous place dans un modèle de *fissuration diffuse à rotation continue* du plan de fissuration en fonction de *l'état de déformations*.

#### **4.2.2.2 Coïncidence entre les contraintes et les déformations principales**

Le modèle développé fait l'hypothèse de coïncidence entre les contraintes et les déformations principales. La définition des contraintes principales suit donc l'orientation des déformations et le comportement général du matériau est régi par l'évolution des déformations. Le choix de s'orienter suivant les déformations permet d'avoir un comportement plus stable du programme. En effet, le chemin de contrainte de traction est non-linéaire et se caractérise par une montée suivie d'un



adoucissement après fissuration. Ceci implique que, pour un état de contraintes donné, la courbe donne deux états de déformation possibles. L'utilisation des déformations est aussi très pratique pour traduire le cas de l'endommagement du béton détaillé dans la partie 4.4 de ce chapitre.

#### 4.2.2.3 Dégradation de la résistance en compression

Quand la fissuration du béton survient dans une direction, le béton présent parallèlement à la fissuration est capable de résister à des efforts de traction et de compression. Le comportement en traction du matériau n'est pas supposé d'être affecté par cette fissuration, mais il n'en est pas de même pour la compression. Il est donc important de considérer ce phénomène car il peut devenir très critique et pousser la structure vers une rupture fragile en compression avant la plastification des armatures. L'équation (2.1), issue de la théorie *Modified Compression Field Theory (MCFT)* des travaux de Vecchio et Collins (1986), est intégrée dans la loi de comportement et permet ainsi de relier la résistance uniaxiale en compression à la déformation principale en traction  $\varepsilon_1$ .

Ce comportement dans le béton est un des ajouts clés du modèle développé car il reflète d'un point de vue milieu continu, l'incompatibilité liée aux bielles en compression au voisinage d'un nœud, en présence d'un tirant attaché à ce même nœud.

### 4.3 Comportement monotone uniaxial du béton

#### 4.3.1 Comportement uniaxial en compression

Il existe plusieurs modèles qui tentent de traduire le comportement non-linéaire en compression du béton. La difficulté de cette tâche réside dans la complexité de la nature de la rupture en compression qui n'est pas un phénomène isolé et cause un affaiblissement général de tout le matériau. De plus, le comportement post-pic en compression est très lié aux dimensions du spécimen. D'un point de vue numérique, la loi en compression doit être fonction du maillage choisi. Dans la loi développée, on fait l'hypothèse de ne pas considérer cet aspect-là, le comportement post-pic étant d'une importance secondaire pour nos objectifs. Le début de l'adoucissement en compression signifie, dans notre cas, la rupture *numérique* du modèle.



Le Tableau 4-1 présente les fonctions non-linéaires de comportement général en compression implémentées dans le programme.

Tableau 4-1 : Modèles de comportement uniaxial en compression du béton considérés

Modèle Todeschini (1964)	Modèle Mitchell et Collins (1991)
$\sigma_c = \frac{f'_c * \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)^2}$	$\sigma_c = f'_c * \left(\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right) - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)^2\right)$
Avec : $\varepsilon_c = \frac{140+f'_c}{80000} \geq 0.002$ (Massicotte 2015)	

### 4.3.2 Comportement uniaxial en traction

Le béton fissure en traction lorsqu'il atteint la limite en traction  $f'_t$  et se caractérise par une perte rapide en résistance résiduelle. Deux modèles d'adoucissement en traction ont été implémentés : un modèle linéaire et un modèle exponentiel (Figure 4-1). Ces modèles considèrent l'énergie de fissuration  $G_f$  et l'influence de la taille  $h_t$  du maillage dans le comportement post-pic du béton en traction.

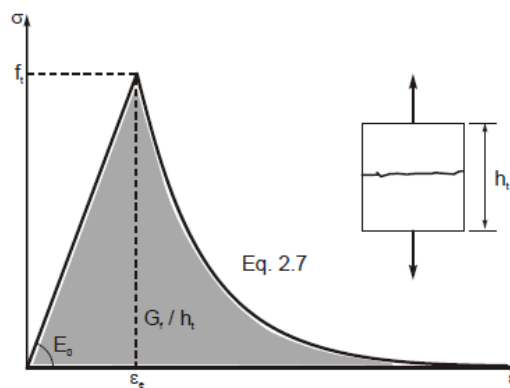


Figure 4-1: Modèle exponentiel d'adoucissement en traction du béton non armé (tiré de Massicotte et al. 2012)



La présence des armatures modifie ce comportement et oriente le béton vers des modèles de raidissement en traction. Ces modèles traduisent un gain de résistance en traction dans le béton résultant de l'intervention des barres d'armature et leur capacité à reprendre progressivement les efforts de traction en fonction de la fissuration du béton (Figure 4-3). Ces barres ralentissent donc le processus d'ouverture des fissures et permettent au béton de résister à des déformations plus importantes. La Figure 4-2 illustre l'effet de la présence des armatures sur le comportement post-pic en traction du béton. Les fonctions de raidissement en traction programmées dans le modèle sont présentées dans le Tableau 4-2 et leur tracé est présenté dans la Figure 4-4.

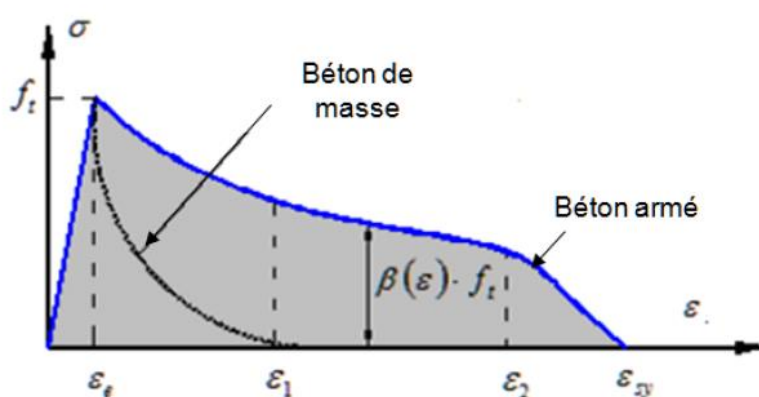


Figure 4-2: Effet de la présence des armatures sur la résistance en traction du béton (tiré de Ben Ftima (2013))

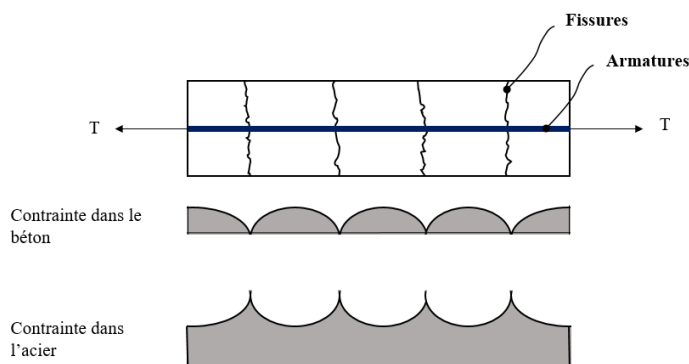


Figure 4-3: Distribution des contraintes dans le béton et dans les armatures lors de la fissuration en traction



Tableau 4-2: Modèles de raidissement en traction du béton considérés

Modèle	Formule	
AIJ (1986)	$\sigma_t = \frac{f'_t}{(2000 * \varepsilon + 0.8)}$	MPa
Mitchell et Collins (1991)	$\sigma_t = \frac{f'_t}{(\sqrt{500 * \varepsilon} + 1)}$	MPa
Belarbi et Hsu (1994)	$\sigma_t = \left(\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon}\right)^{0.4}$	MPa
Fields et Bischoff (2004)	$\sigma_t = \exp(-800 * (\varepsilon - \varepsilon_e))$	MPa

Avec :  $\varepsilon_e = f'_t / E$

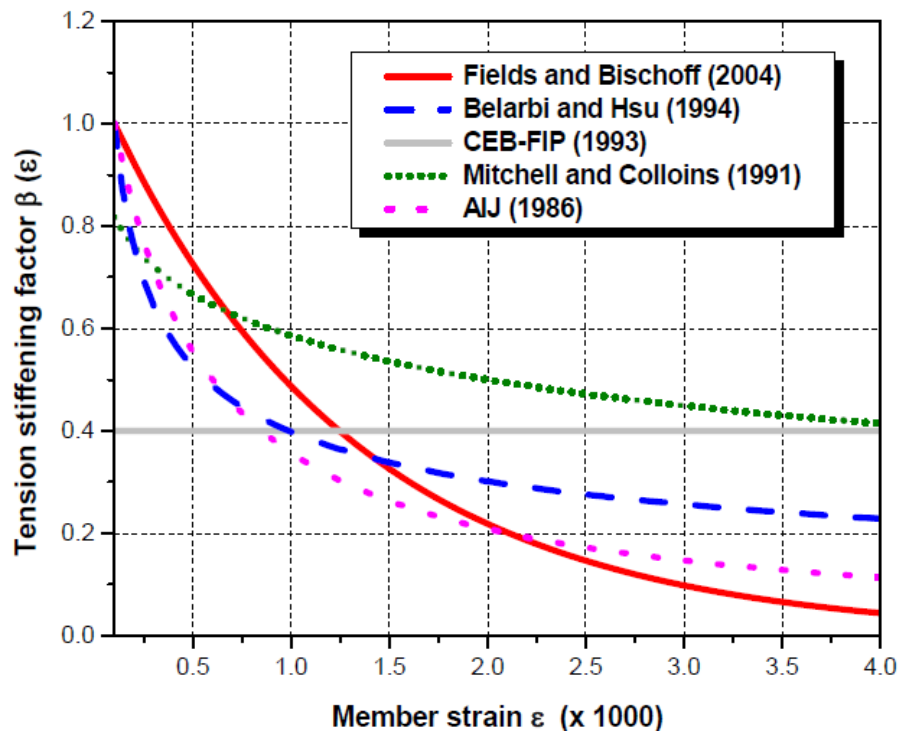


Figure 4-4: Comparaison des fonctions de raidissement en traction (tiré de Massicotte et al. 2012)



## 4.4 Comportement cyclique du béton

### 4.4.1 Endommagement au déchargement

Malgré que le but de notre étude se résume à des cas de chargements monotones, il a été important de considérer le comportement cyclique du béton dans la loi constitutive proposée. En effet, Reinhardt (1984) et Dahlblom et Ottosen (1992) ont souligné l'importance du développement du comportement cyclique qui peut survenir même dans le cas d'un chargement monotone. Le développement du modèle cyclique du béton équivaut à la définition du comportement du matériau sous la succession de chargement / déchargement. Dans le matériau, ceci correspond à la caractérisation de ses capacités suite à l'ouverture puis la fermeture des fissures.

Pour un état de compression pure ou de traction pure, après fissuration, le déchargement du béton se fait en tenant compte de l'endommagement de la rigidité du béton. Le modèle développé permet de modifier la valeur  $\alpha_c$  ou  $\alpha_t$  associée à la déformation au point de déclenchement du déchargement en compression et en traction respectivement (Figure 4-5). Reinhardt (1984) indique qu'une valeur de  $\alpha_c = \alpha_t = 0.2$  et de permet de prédire un comportement similaire à celui observé dans les essais expérimentaux.

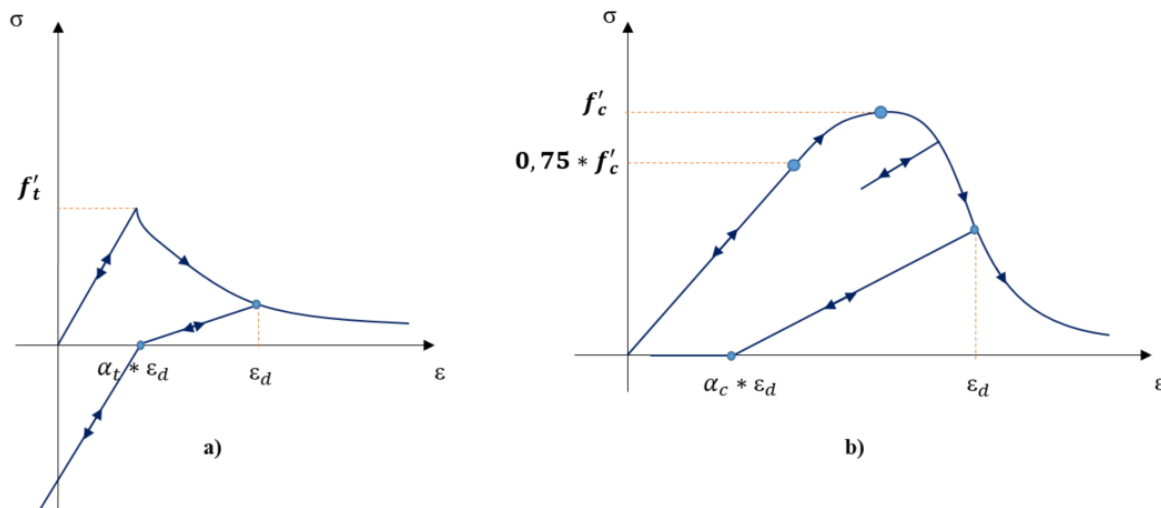


Figure 4-5: Endommagement du béton lors du déchargement en compression et en traction



Il est aussi pertinent de caractériser le passage de la traction à la compression et vice versa. Le béton, même s'il fissure en traction, est capable de résister à des efforts de compression. Ayant un sens d'application opposés, les efforts de compression referment les fissures et se comportent suivant la courbe de compression mais décalée ce qui tient compte de l'historique d'endommagement porté par le matériau. Malgré que le même phénomène s'applique lors du passage de la compression à la traction, la résistance en traction qui reste est très faible car elle est lourdement endommagée par les fissures en compression présentes dans le matériau. On décide de poser comme hypothèse dans la loi constitutive développée qu'une fois l'endommagement en compression survenu, le béton est incapable de résister à des efforts de traction, tel qu'illustré sur la Figure 4-5 b).

#### **4.4.2 Rotation des axes principaux**

La loi de comportement développée se base sur la coïncidence entre les contraintes et les déformations principales (*strain rotating crack*). La réorganisation des déformations dans le matériau induit une modification au niveau de l'orientation des axes principaux. Le développement asymétrique des efforts dans l'élément, les cycles de chargement déchargement, le passage d'un état de contrainte à un autre ou la présence de fortes contraintes en cisaillement provoquent une rotation des axes principaux qui risquent de créer une confusion dans la continuité de la caractérisation du comportement suivant le système d'axe global.

Cet aspect important pour les lois du type élastique non-linéaires a été considéré dans les travaux de doctorat de Massicotte (1988) pour les cas 2D, puis par Ben Ftima (2013) pour les cas 3D. Ainsi, pour chaque incrément, on évalue la position du système des axes physiques par rapport à l'orientation du système des axes principaux qui est régie par le classement des déformations principales. En évaluant l'angle de rotation entre les deux systèmes d'axes, il est possible de détecter le reclassement des axes principaux ce qui nous permet de se réorganiser pour assurer la continuité de la caractérisation suivant les axes réels du béton (Ben Ftima, 2013) (Annexe C).



### 4.4.3 Indices de fissuration

La loi développée dans le cadre de ce travail de recherche a pour but de caractériser le béton avant et après fissuration. Le programme doit donc permettre une visualisation claire de la progression des contraintes dans les courbes équivalentes en traction et en compression. Pour évaluer l'état du matériau à différents temps de l'analyse, des indices de fissuration ont été ajoutés pour caractériser le type de comportement en cours.

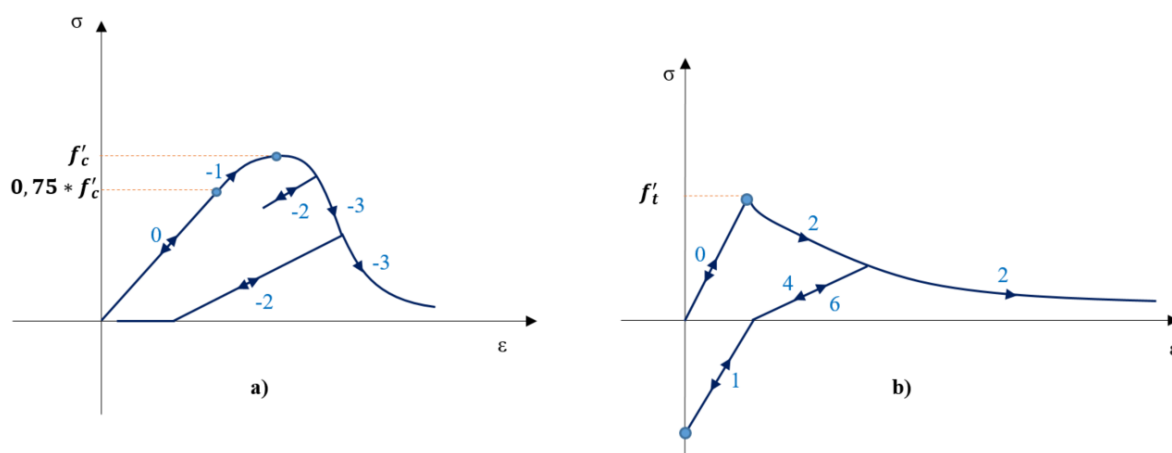


Figure 4-6: Indices de fissuration dans la loi : a) coté compression et b) coté traction

## 4.5 Loi de dégradation en traction

La loi de dégradation a pour but de modifier les propriétés du béton. En effet, la fonction développée permet d'agir sur la résistance en compression, la résistance en traction, la rigidité élastique ou l'énergie de fissuration du matériau. Lorsque le matériau rentre en phase dégradation, ses caractéristiques globales sont modifiées ce qui affecte l'allure générale du comportement du béton. Le choix du paramètre à dégrader est défini par l'utilisateur et représente une donnée d'entrée de la loi constitutive. Dans ce projet de maîtrise, *seule* la dégradation de la résistance en traction  $f'_t$  est considérée.

La Figure 4-7 illustre l'effet de la dégradation sur deux points A et B de la structure. Ces deux points sont soumis à des efforts de traction et en début de dégradation (état 0) se trouvent à



différents points d'évolution dans la courbe. Le point A est le plus critique en traction et se retrouve au début de la phase de dégradation avec une contrainte égale à la résistance en traction. Le point B, moins affecté par la traction, évolue toujours dans la zone élastique. À l'état I, la résistance en traction  $f_t^{(0)}$  est réduite à une valeur dégradée  $f_t^{(I)}$ . Comme le montre la Figure 4-7, le point A est contraint à évoluer suivant la nouvelle courbe en traction ce qui diminue énormément son état de contrainte par rapport à un comportement non-dégradé. Le point B ne sort pas de sa phase linéaire élastique car il n'est pas affecté par la dégradation de la courbe qui ne modifie que la zone post-pic. Cependant, à l'état II, le point B subit un incrément de déformation  $d\varepsilon_B^{(II)}$  qui, suivant la nouvelle fonction dégradée en traction, l'oblige à basculer vers un comportement non-linéaire modifié par la dégradation continue de la valeur de la résistance en traction.

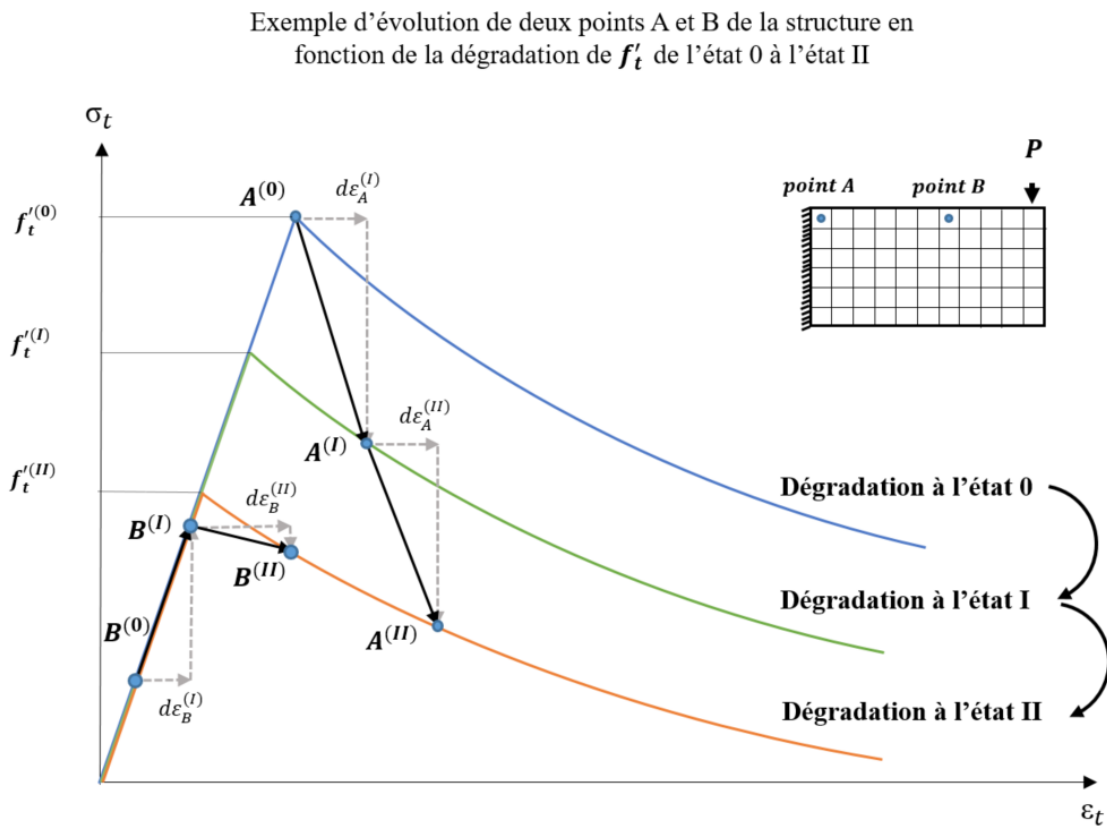


Figure 4-7: Effet de la fonction dégradation sur le comportement en traction



## 4.6 Conclusion

La loi constitutive développée permet de caractériser le béton comme un matériau orthotropique. Chaque direction évolue en fonction de son état de déformation. La loi considère un modèle de fissuration diffuse et tient compte de l'endommagement de la rigidité lors du déchargement pour caractériser l'influence de l'état du matériau sur le chemin des contraintes. Le modèle capture aussi le comportement cyclique du béton en particulier le passage de la traction à la compression tout en tenant compte de l'historique de chargement du matériau.

Les aspects du béton traités dans la loi développée permettent de définir un matériau en concordance avec le modèle cible de B/T. Plus précisément, le modèle inclut l'effet de la déformation principale sur la résistance en compression suivant la théorie de champ de compression modifiée présentée par Vecchio et Collins (1986). Ceci permet à la loi de détecter l'incompatibilité locale entre les zones de traction et les zones compression soit entre le tirant et la bielle dans le béton.

Muni de cette loi de comportement, on propose de développer dans le chapitre suivant une nouvelle approche de conception pour le dimensionnement des structures en béton armé inspirée du modèle *B/T* et de la réduction de la capacité résistive du béton.



## CHAPITRE 5 DÉVELOPPEMENT DE LA MÉTHODOLOGIE ET APPLICATIONS

### 5.1 Introduction

Ce chapitre présente la nouvelle approche proposée pour le dimensionnement des structures en béton armé. Cette approche se base sur la réduction de la capacité résistive pour définir l'armature nécessaire pour résister aux efforts appliqués tout en vérifiant la capacité des bielles et des zones nodales. Le béton est caractérisé par la loi constitutive présentée dans le chapitre précédent. Les analyses qui suivent montrent que les résultats du modèle dépendent de deux grands paramètres :

- le comportement post-pic du béton en traction;
- la stratégie de dégradation choisie.

La méthodologie générale proposée est ensuite détaillée avec les différentes étapes à suivre pour dimensionner une structure donnée. Pour illustrer l'application de cette méthode, un cas d'étude est présenté avec les différents résultats et observations obtenus. Enfin l'effet du maillage sur les résultats est discuté.

### 5.2 Modèle considéré

Dans cette étude, on reprend la poutre en porte-à-faux présentée dans le chapitre 3. Pour diminuer le temps d'analyse, la structure est simplifiée en diminuant la largeur de la structure à  $0.167m$  et le nombre d'armatures à une seule barre 20M. Les nouvelles valeurs de la charge limite pour la nouvelle structure considérée dans les 2 méthodes de calculs existantes sont résumées dans le Tableau 5-1.

Tableau 5-1 : Charge limite suivant les méthodes de calculs existantes pour la structure modifiée

Méthode de calcul	Charge limite
Méthode sectionnelle	$P = 57 \text{ kN}$
Méthode B/T	$P = 54 \text{ kN}$



Des études paramétriques sur le choix de la fonction en compression ont été effectuées pour évaluer l'effet du comportement post-fissuration en compression. L'influence du modèle choisi a été jugée minime. Pour toutes les analyses effectuées dans ce chapitre, le comportement en compression est défini suivant le modèle de Todeschini présenté dans le chapitre 4. Le choix du modèle en traction est discuté dans la partie suivante.

## **5.3 Études paramétriques**

Des tests sur différentes structures ont montré que la méthode développée est sensible à deux paramètres : le choix du modèle pour décrire le comportement en traction du béton après fissuration et le type de dégradation appliquée sur la structure.

### **5.3.1 Influence du comportement post-pic en traction**

Le choix du comportement du béton armé après sa fissuration en traction est un paramètre très influant dans les résultats obtenus. La caractérisation de la zone du tirant varie en fonction du modèle de béton choisi pour caractériser l'effet des fissures sur le béton et la présence des armatures.

Pour évaluer l'influence du comportement post-pic en traction sur l'analyse, deux modèles de raidissement en traction sont choisis : le modèle Mitchell et Collins (1991) et le modèle Fields et Bischoff (2004).

Les deux modèles caractérisent l'effet de la fissuration sur le béton en présence d'armatures. Comme présenté dans la Figure 5-1, le modèle Fields et Bischoff décrit la dégradation du béton en considérant une décroissance rapide (au-delà d'une certaine déformation) de la contrainte en traction en fonction de la déformation post fissuration. Ainsi, l'ouverture des fissures conduit à un affaiblissement plus rapide du béton.



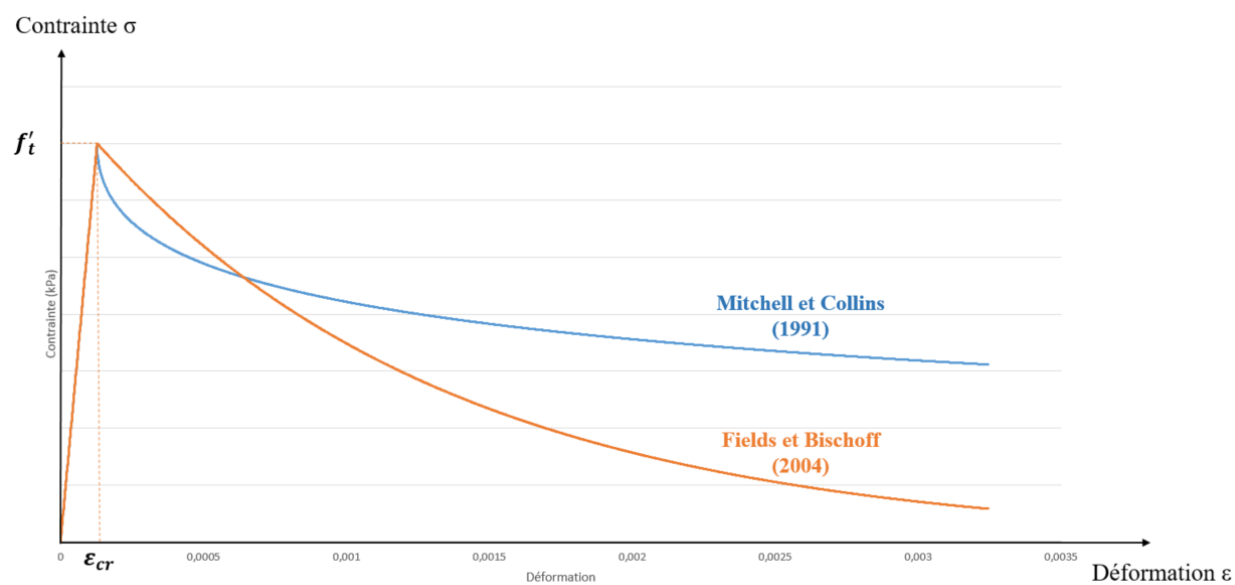


Figure 5-1: Raidissement en traction : modèles Mitchell et Collins (1991) et Fields et Bischoff (2004)

L'effet de chaque modèle de béton est évalué en considérant le porte à faux de 2m. La Figure 5-2 présente la différence observée entre les deux types de comportement.



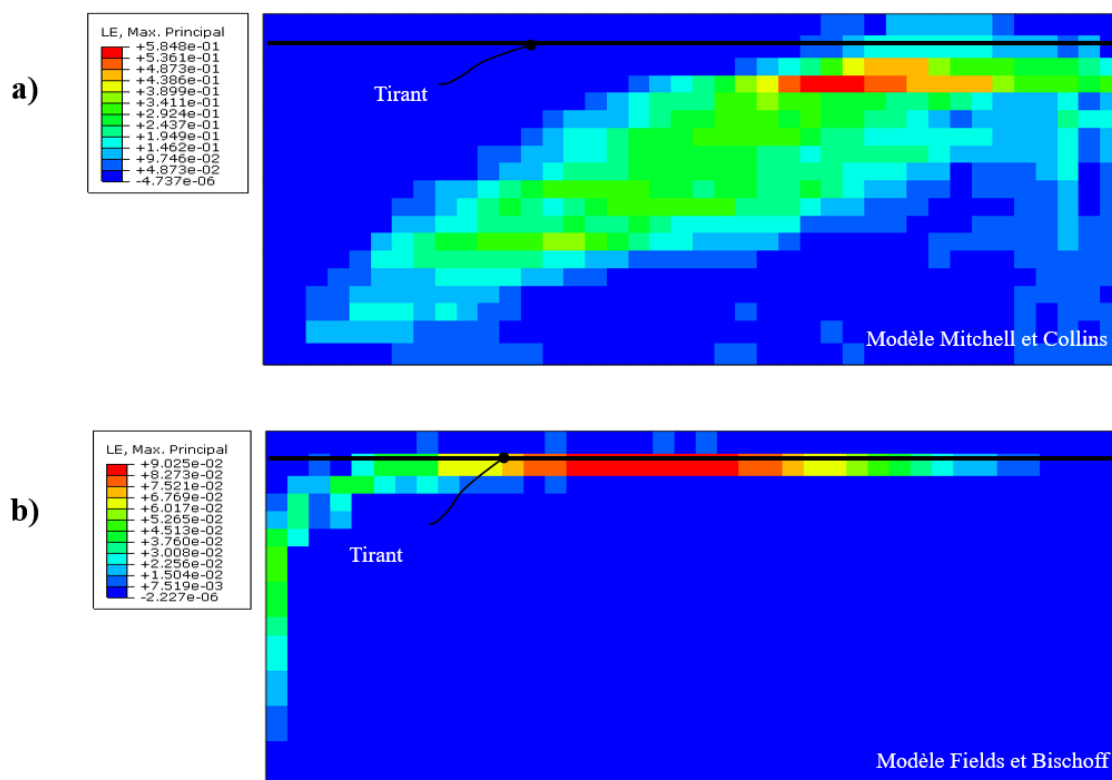


Figure 5-2: Analyse de la poutre en porte à faux (déformations principales maximales) au moment de développement de la force dans le tirant : comparaison des modèles de béton a)

Modèle Mitchell et Collins et b) Modèle Fields et Bischoff

Lorsque le matériau stocke une grande énergie de fissuration, comme c'est le cas pour le modèle Mitchell et Collins, un profil d'endommagement plus généralisé est favorisé pendant la phase de dégradation et se propage parallèlement à la bielle comme l'illustre la Figure 5-2 a).

Suivant le modèle Fields et Bischoff, on remarque un phénomène de *dézippage* qui se localise dans la zone en dessous des armatures et se propage suivant la direction du tirant, zone en rouge dans la Figure 5-2 b). La Figure 5-3 représente la force dans le tirant tout au long du porte à faux dans le cas du modèle de Fields et Bischoff. On remarque que la force dans le tirant s'initie d'abord dans l'extrémité gauche de la poutre, au niveau de l'encastrement. Puis, plus la dégradation avance, (plus on diminue la résistance en traction dans le béton), plus la force dans le tirant tend à s'uniformiser. Le *dézippage* de la zone sous les armatures favorise donc l'uniformisation de la



force dans le tirant, un résultat qui a été déjà obtenu dans le chapitre 3 pour le modèle CDP et qui est bien consistant avec la cinématique souhaitée des B/T.

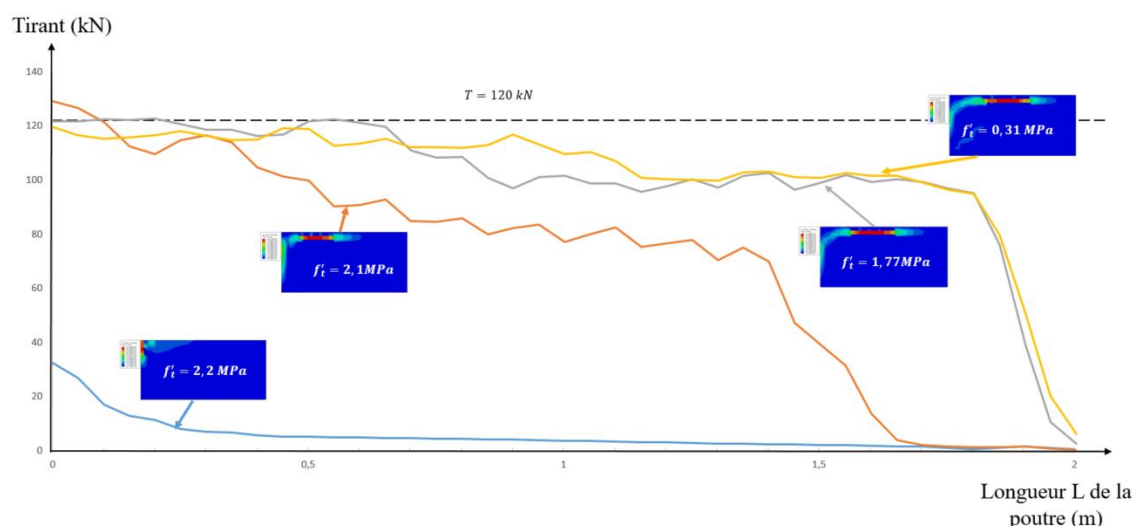


Figure 5-3: Développement de la force dans tout le tirant en fonction de la dégradation de la résistance en traction (Modèle Fields et Bischoff (2004))

Les résultats précédents montrent l'importance du choix de la loi d'adoucissement. En réalité toute loi autre que Fields et Bischoff (2004), qui montre une descente post-pic plus rapide aurait favorisé la cinématique du *dézippage*. Pour les analyses qui suivent, on considère que le comportement post-pic du béton en traction est régi par le modèle Fields et Bischoff (2004).

### 5.3.2 Stratégie de dégradation

La phase de dégradation vise à diminuer la résistance en traction du béton jusqu'à atteindre une valeur négligeable. Deux stratégies ont été entreprises dans cette étude : une dégradation uniforme et une dégradation non-uniforme.

#### 5.3.2.1 Dégradation uniforme

La dégradation uniforme vise à dégrader uniformément tout le béton dans la structure indépendamment de son état de contraintes. Pour évaluer l'effet de ce type de dégradation sur l'analyse, on considère la poutre en porte-à-faux de 2 m. Les résultats obtenus sont présentés dans la Figure 5-4.



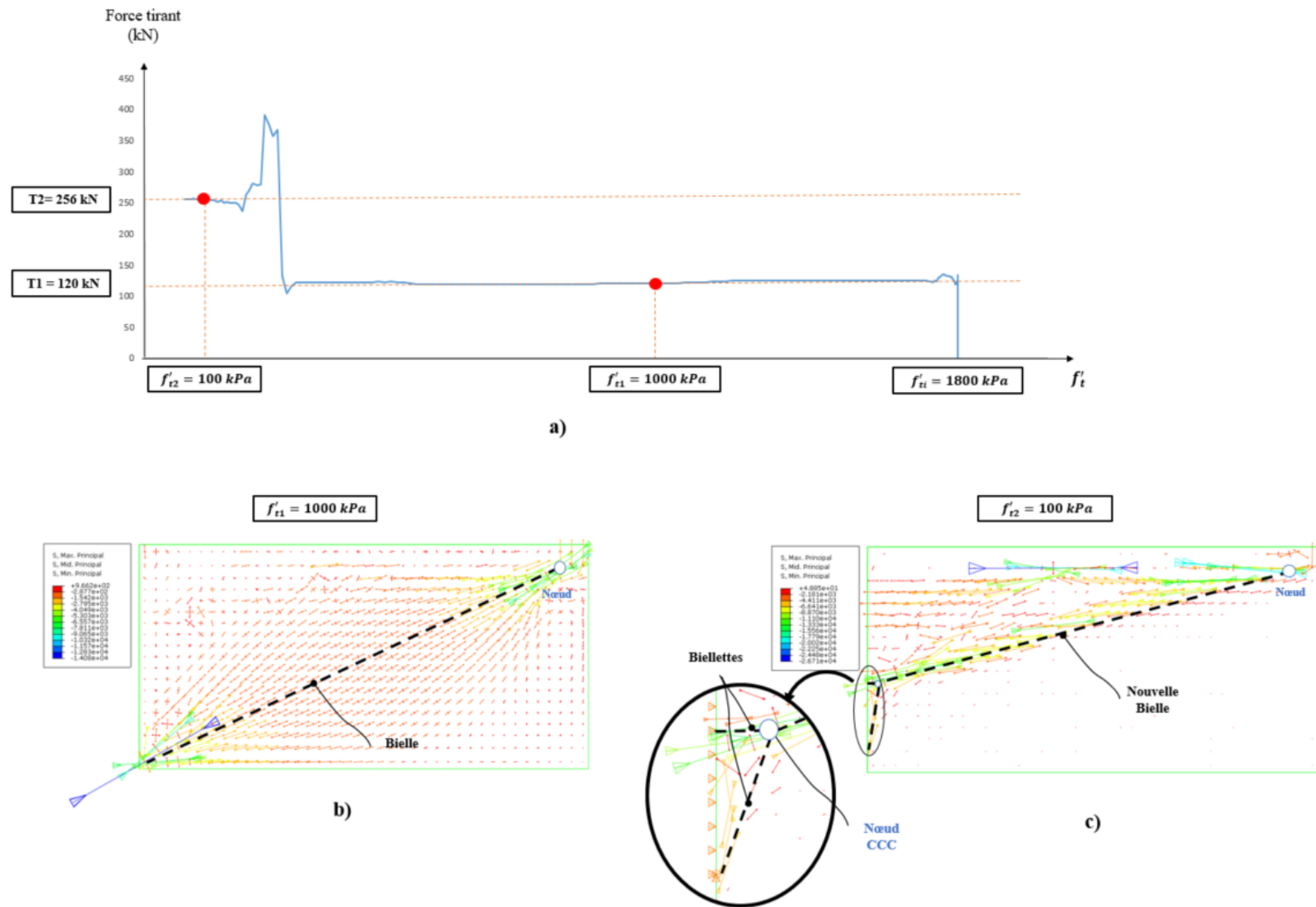


Figure 5-4: Dégradation uniforme : Porte-à-faux de 2m sous charge  $P = 55 \text{ kN}$  – a) Traction dans les armatures en fonction de la résistance en traction  $f'_t$ , b) Bielle à  $f'_{t1}$  et c) Bielle à  $f'_{t2}$



La courbe du tirant présentée dans la Figure 5-4 a) représente l'évolution de la force à l'extrémité gauche du tirant (au niveau de l'encastrement). Dans un premier temps, le tirant plafonne à la bonne valeur  $T = 120kN$  (bonne par rapport au modèle B/T) et le chemin de la bielle se trace clairement suivant la contrainte minimale dans le béton (Figure 5-4 b)). Toutefois, la structure connaît une soudaine réorganisation des contraintes qui la pousse vers un nouvel état d'équilibre comme l'illustre la Figure 5-4 c). Un zoom au voisinage de l'encastrement montre que le modèle tente de former une nouvelle bielle et qu'une zone nodale CCC cinématiquement admissible avec les conditions aux limites se forme. Le tirant aussi ressent ce changement avec la formation d'un nouveau plateau Figure 5-4 a).

L'examen des résultats révèle que ce deuxième plateau vient en réalité à la suite d'un mode de rupture local au niveau de la bielle initiale. L'affaiblissement généralisé de la résistance en traction du béton pousse le modèle à perdre sa bielle principale (aux alentours d'une contrainte résiduelle de 400 kPa). Une explication possible à ce phénomène réside dans la forme en bouteille de la bielle (Figure 5-5 a) montrée à un instant qui précède la formation du deuxième plateau. Cette forme courbée favorise la formation de tirants locaux en traction qui cèdent à un moment donné lors de la phase de dégradation. Cette observation est confirmée par l'idéalisation de la bielle sous la forme discrétisée présentée dans la Figure 5-5 b).

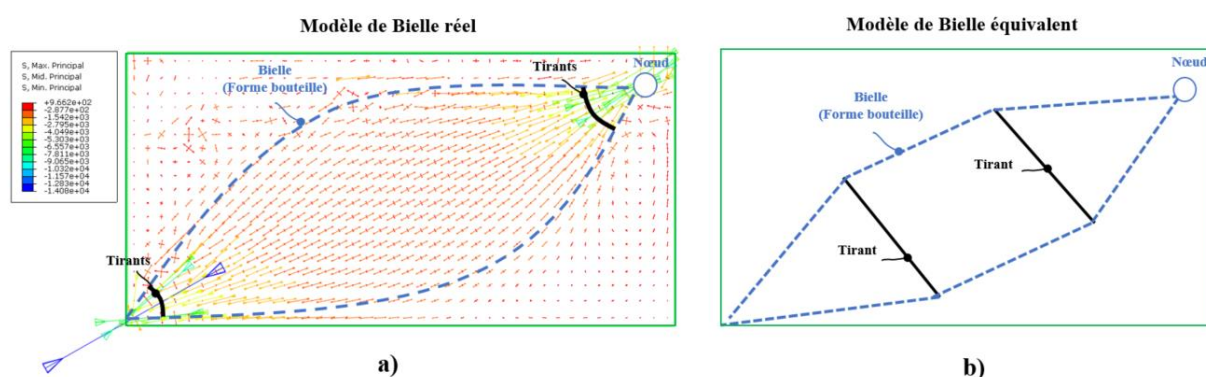


Figure 5-5: Bielle sous forme bouteille a) Modèle réel et b) Idéalisation

La dégradation de la résistance en traction de façon uniforme dans la structure agit sur ces tirants en diminuant leur résistance causant ainsi l'affaiblissement de la bielle. Le modèle perd donc sa



bielle principale et bascule vers un autre chemin d'équilibre (Figure 5-4 c)). Ce comportement non souhaité par rapport à notre cinématique cible de B/T nous amène à réfléchir à un autre mode de dégradation présenté à la section suivante.

### 5.3.2.2 Dégradation non-uniforme

Pour éviter la rupture prématurée de la bielle principale, on décide de basculer vers un nouveau modèle de dégradation qui tient compte de l'état de contraintes du matériau dégradé. On propose donc de varier la cinétique de dégradation pour les zones très comprimées pour permettre aux bielles de garder un minimum de résistance. Pour cela, la dégradation sera fonction de la contrainte principale en compression dans l'élément comme présenté dans la Figure 5-6. L'idée est que pour les éléments avec des contraintes principales en compression très élevées subiront une cinétique de dégradation plus faible. Comme le montre la Figure 5-7, les éléments qui subissent beaucoup d'efforts de compression suivront le chemin dicté par le paramètre  $\beta = 2$ . Les zones hors de la bielle subiront la dégradation totale de leur résistance en traction, selon la cinétique normale obtenue avec  $\beta = 1$ . Des états intermédiaires sont présentés dans la Figure 5-7 dépendamment de la valeur de  $\beta$ .

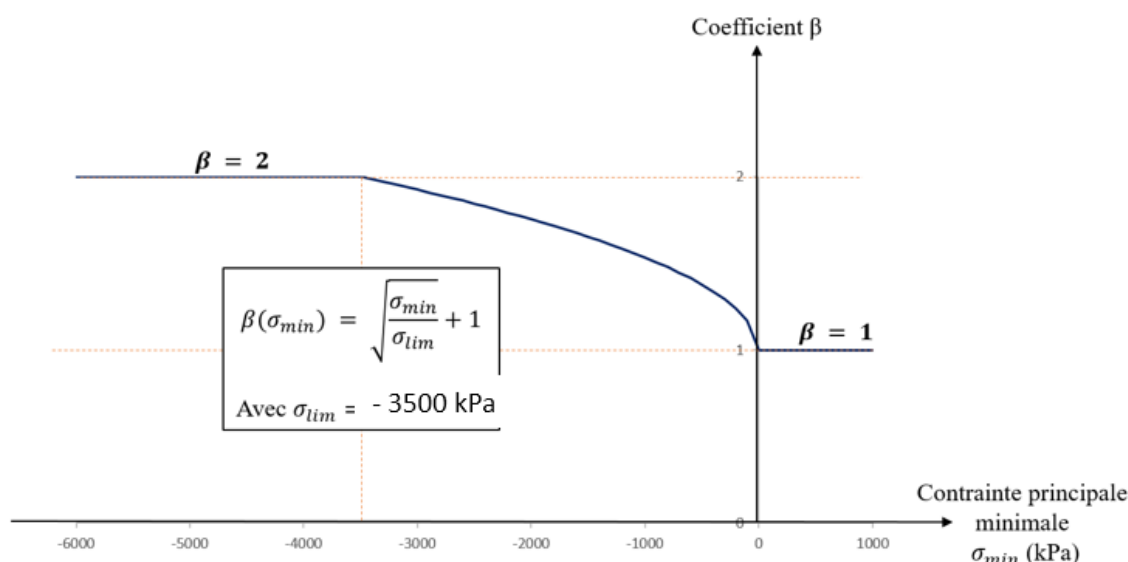


Figure 5-6: Évolution du paramètre  $\beta$  en fonction de l'état de compression



Une fois le coefficient  $\beta$  défini, il est introduit à la formulation du coefficient de dégradation  $\alpha(t)$  (Figure 5-7). Ce coefficient est affecté à la résistance en traction du béton pour appliquer sa dégradation en fonction du temps.

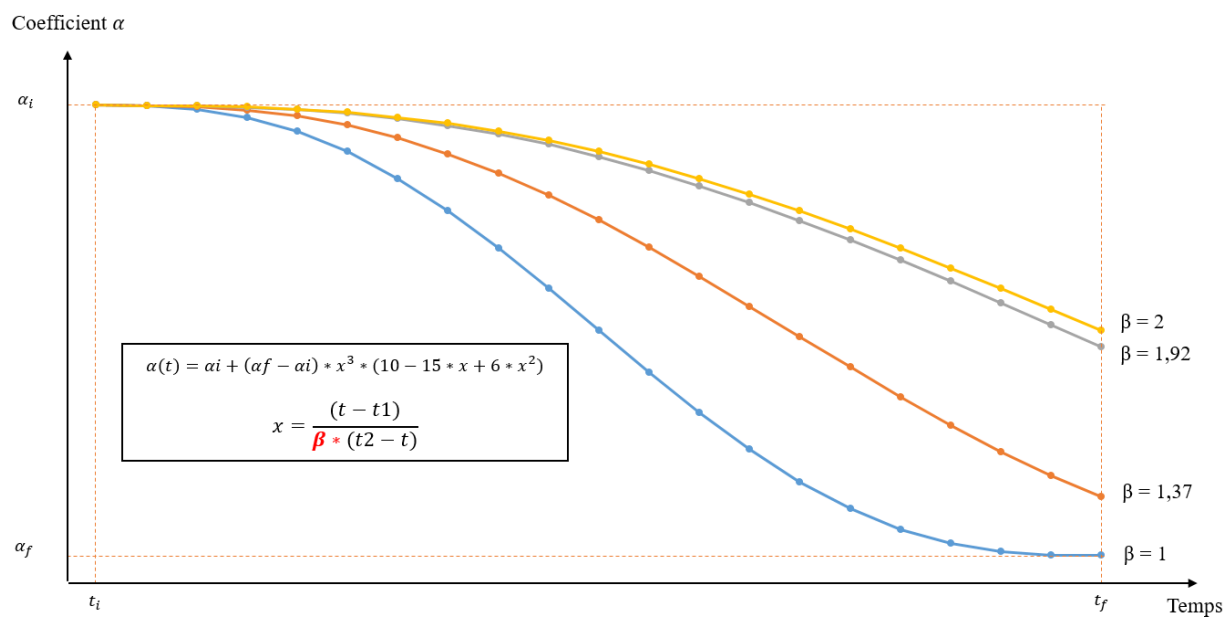


Figure 5-7: Évolution du coefficient de dégradation  $\alpha$  en fonction du temps pour différentes valeurs du paramètre  $\beta$

L'analyse du porte-à-faux de 2 m est effectuée en appliquant cette fois-ci la dégradation non-uniforme dans la zone en compression. Ce type de dégradation n'est pas affecté à la zone du tirant qui subit une dégradation uniforme. La Figure 5-8 illustre les résultats obtenus.



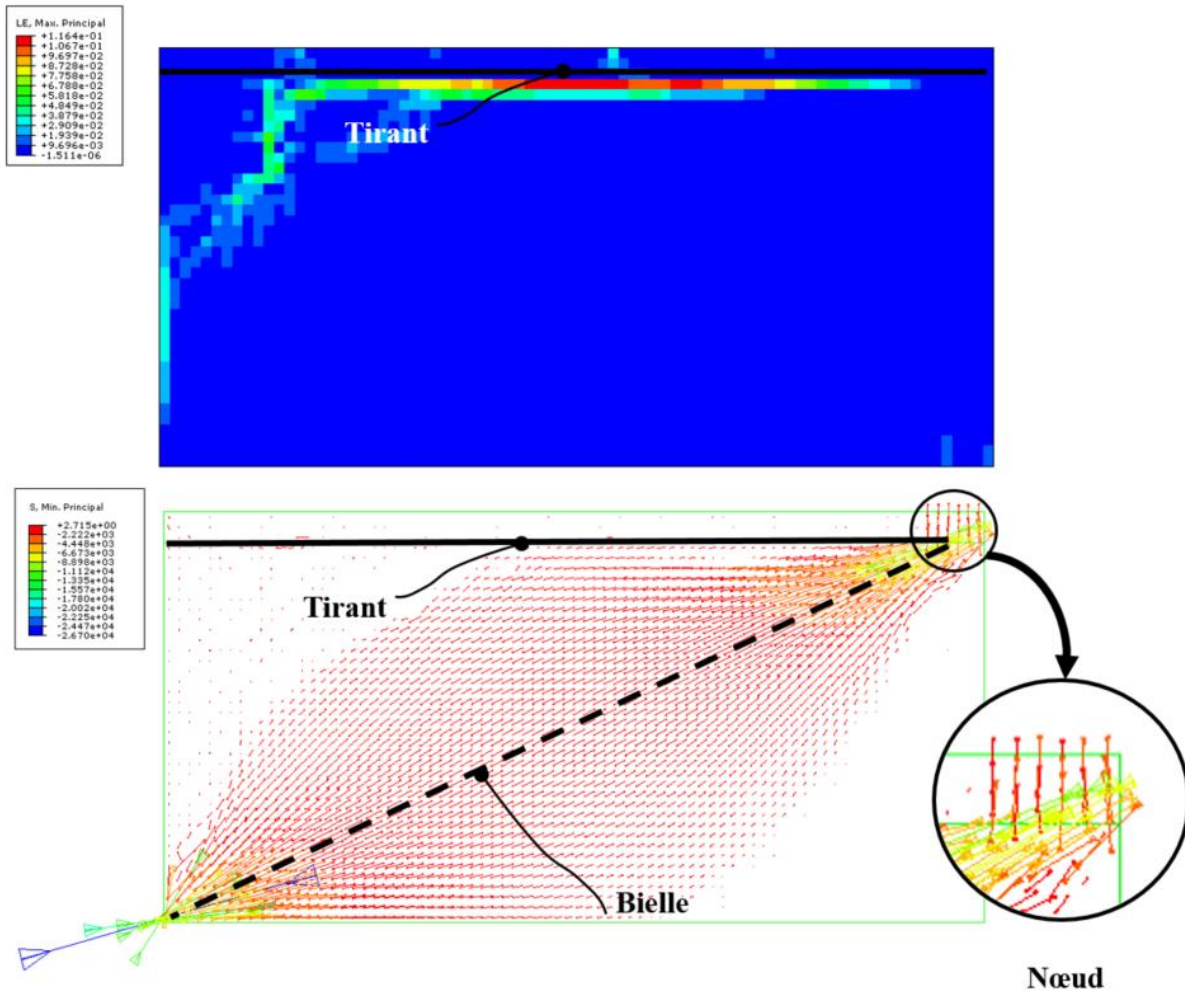


Figure 5-8: Dégradation non-uniforme : Porte-à-faux de 2 m sous charge  $P = 55 \text{ kN}$

Cette fois-ci et contrairement au cas de dégradation uniforme, la bielle a été maintenue jusqu'à la fin de l'analyse et la force dans le tirant est restée dans le premier plateau. La dégradation non-uniforme a permis à la bielle de résister tout le long de la phase de dégradation. Le zoom de la zone nodale présenté dans la Figure 5-8 montre que le modèle arrive aussi recréer la zone nodale. Les contraintes principales minimales en compression à la fin de la phase de dégradation donnent le même tracé décrit par la méthode B/T (Figure 3-3). On arrive, grâce au processus de dégradation,



à trouver le modèle B/T équivalent de la poutre en porte-à-faux étudiée pour le cas de chargement donné.

Pour les analyses qui suivent, le modèle de dégradation retenu est une dégradation non-uniforme dans le béton exception faite de la zone tendue autour du tirant.

## 5.4 Méthodologie proposée

Suite aux différentes analyses et études paramétriques présentées précédemment, une méthode de conception a été développée pour le dimensionnement des structures en béton armé. Cette méthode se base sur la réduction de la capacité résistive du béton pour pousser la structure à exhiber le comportement du modèle de B/T équivalent au cas de chargement appliqué. Pour cela, on applique une *dégradation* artificielle des propriétés des matériaux sous chargement constant pour pousser la structure à définir les zones actives en traction et en compression soit le tirant, la bielle et la zone nodale, principaux membres de la méthode *B/T*. La méthode vise aussi à automatiser le dimensionnement et permettre d'extraire directement la quantité d'armature nécessaire pour résister au cas de chargement appliqué.

La méthode proposée se base sur 2 analyses par éléments finis. La 1<sup>ère</sup> analyse est une analyse linéaire élastique qui vise à définir la contrainte maximale en traction dans la structure. Une fois cette valeur définie, une deuxième analyse est lancée avec une première étape de chargement suivie d'une deuxième étape de dégradation où le chargement est maintenu constant. Le paramètre choisi pour la dégradation est la résistance en traction du béton. Dans toutes les analyses, les armatures sont caractérisées par un comportement linéaire élastique.

La géométrie, les conditions aux limites et les propriétés linéaires élastiques de base de la structure sont des données d'entrées de la méthode. Une fois la géométrie de coffrage définie, les armatures sont positionnées à l'intérieur de cette géométrie en respectant les critères établis (recouvrement, contraintes de positionnement des barres...etc.). La force développée dans ces armatures permettra de déduire la quantité d'armatures nécessaire suivant la formule :

$$T = \sigma_s * A_s$$



Avec :  $A_s$  l'aire des armatures entrées dans la modèle et  $\sigma_s$  la contrainte obtenue à la fin des analyses.

Le développement des forces dans les tirants est aussi accompagné de la formation de bielles qui doivent pouvoir résister au chargement appliqué. La rupture de la structure à l'étape de dégradation permet de détecter la faiblesse de ces bielles. Plus la bielle est inclinée, plus sa résistance en compression diminue et des problèmes d'incompatibilités au voisinage du nœud surviennent.

La rupture de la bielle signifie le besoin d'ajouter des étriers pour basculer vers un nouveau système de force interne, donc un nouveau modèle B/T, avec des bielles adéquates. Si le modèle ne présente aucune rupture à la fin de l'étape de dégradation, le modèle résiste et le positionnement des armatures est valide pour résister au chargement appliqué. La Figure 5-9 résume les étapes à suivre pour assurer la conception d'une structure en béton armé en se basant sur la méthode de la réduction de la capacité résistive.



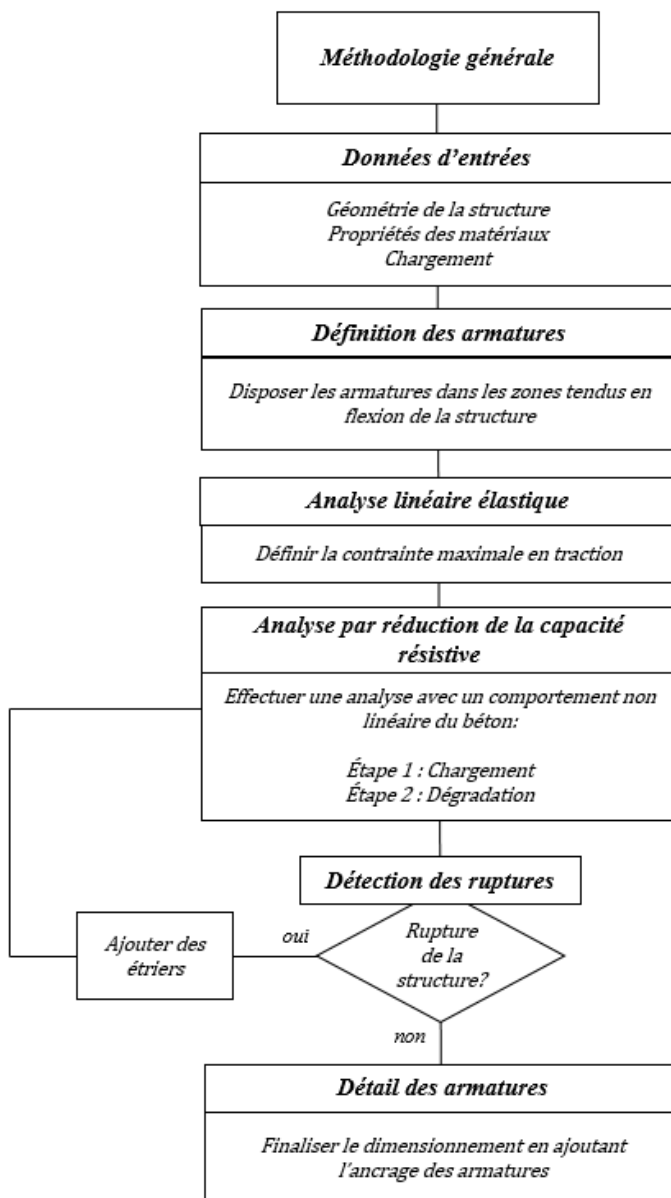


Figure 5-9: Présentation sommaire de la méthodologie développée

## 5.5 Application

Dans cette partie, on propose d'appliquer la méthodologie développée sur la même poutre en porte-à-faux définie précédemment mais en modifiant sa longueur pour  $L = 4m$ . La structure est soumise à une charge  $P = 27,5 \text{ kN}$ , soit la moitié de la charge définie précédemment dans le cas d'un porte à faux de  $2 \text{ m}$ .



## 5.5.1 Analyses et résultats

### 1. Analyse linéaire élastique

Pour la première analyse, on dispose des armatures de flexion dans la zone supérieure de la poutre. L'analyse linéaire élastique permet de définir la valeur  $\sigma_{max} = 3,5 \text{ MPa}$  dans la structure, valeur qui va correspondre à la résistance en traction initiale du béton.

### 2. Analyse par réduction de la capacité résistive du béton

On effectue ensuite l'analyse de dégradation. La résistance en traction initiale est égale à la contrainte maximale définie précédemment. Cette valeur sera réduite progressivement jusqu'à atteindre une valeur minimale de  $20 \text{ kPa}$ .

L'analyse est interrompue par une rupture au voisinage de la zone nodale. La Figure 5-10 présente, au moment de la rupture, la distribution des déformations maximales principales, des contraintes principales minimales ainsi que l'indice de fissuration dans la structure, indice présenté dans la partie 4.4.3 du chapitre 4. L'examen des résultats montre *un glissement* au voisinage de la zone nodale qui se traduit avec la loi de comportement programmée par une rupture locale en compression (indice de fissuration égal à -3). La théorie *MCFT* joue un rôle important ici puisque la résistance locale est affaiblie par la valeur de la déformation maximale en traction selon l'équation (2.1) présentée au chapitre 2.

### 3. Ajout d'un étrier

On décide d'ajouter un étrier 20M en milieu de travée (à  $2 \text{ m}$  de l'appui) et une nouvelle analyse de chargement/dégradation est lancée.

La Figure 5-11 présente les résultats obtenus en termes de déformations en traction, de contraintes principales en compression. L'analyse ne détecte aucune rupture, on conclut donc que la disposition des armatures proposée est valide d'après la nouvelle approche.



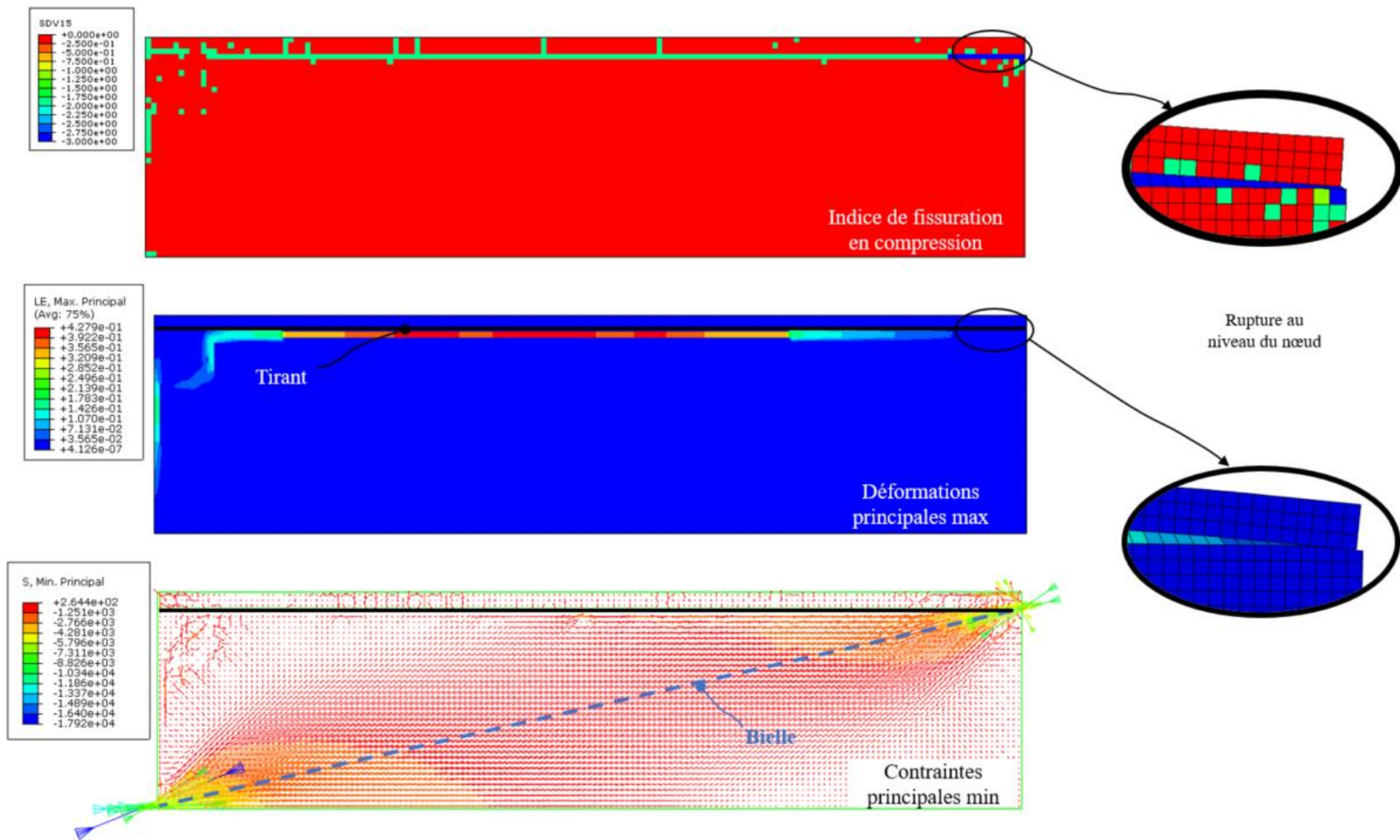


Figure 5-10: Porte-à-faux de 4 m sans étrier sous charge  $P = 27,5 \text{ kN}$



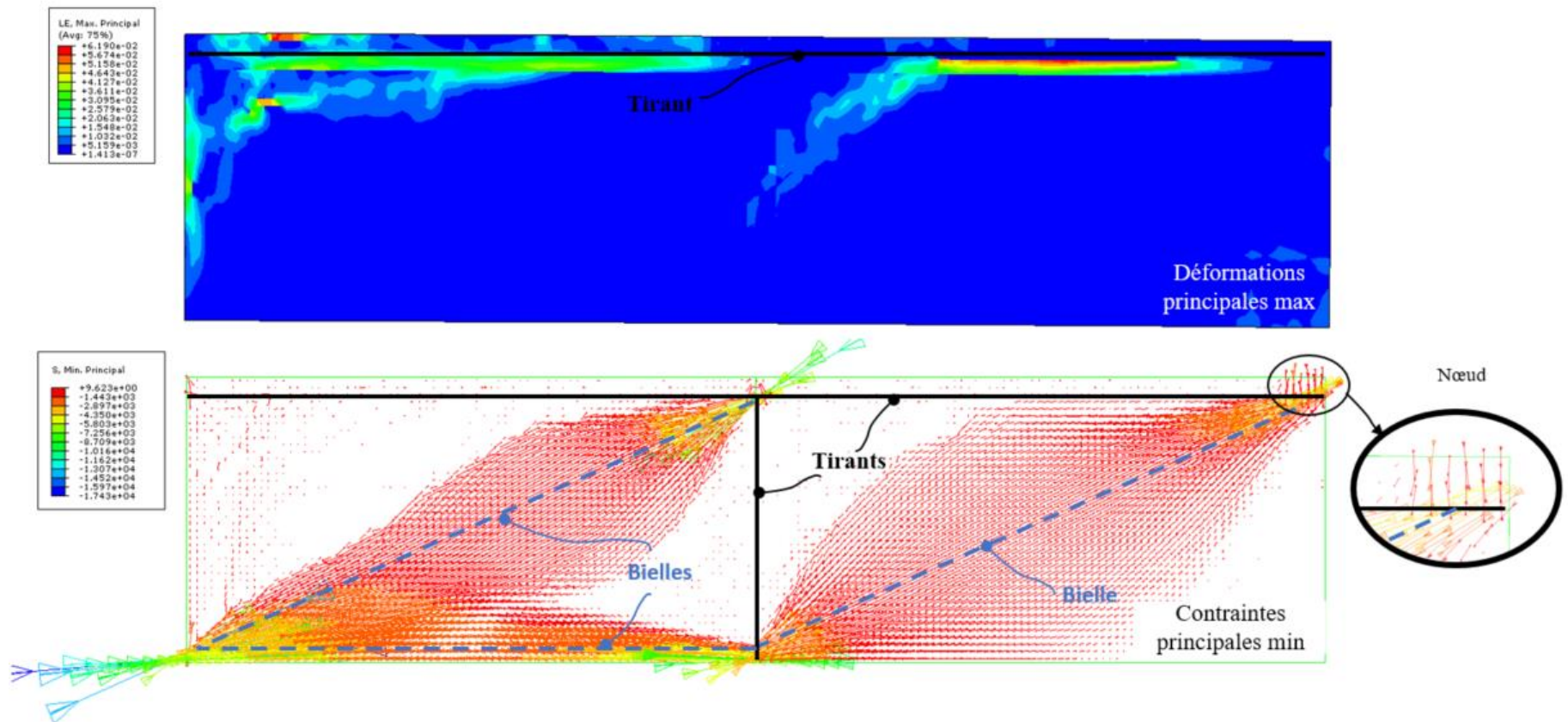


Figure 5-11: Porte-à-faux de 4 m avec étrier sous charge  $P = 27,5 \text{ kN}$



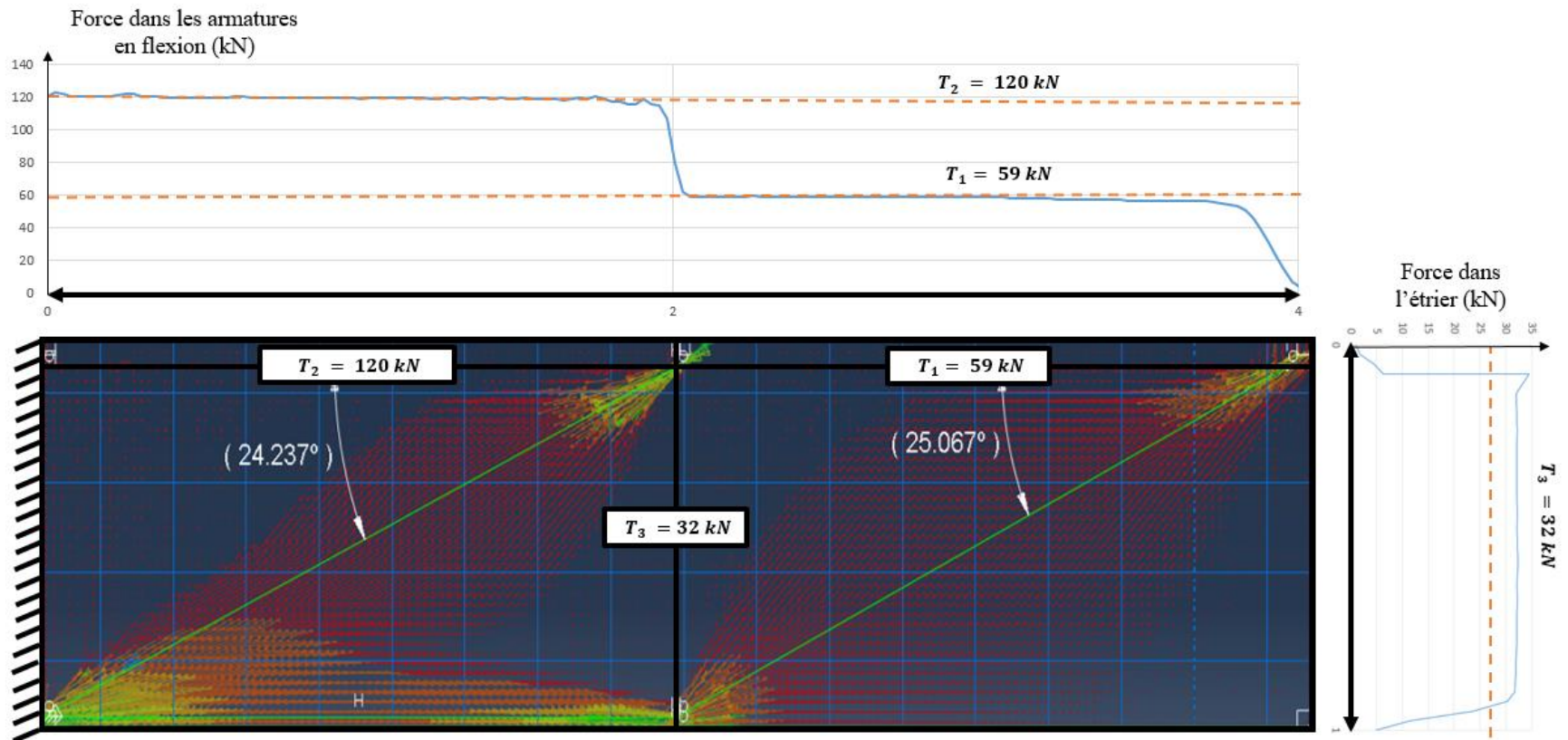


Figure 5-12: Distribution de la force dans les armatures à la fin de l'analyse de la poutre en porte-à-faux de 4m



### 5.5.2 Validation avec la méthode B/T

Pour valider les résultats de l'analyse, on effectue le dimensionnement de la structure à l'aide de la méthode des B/T. Armée d'une barre 20M et sans étriers, la charge limite de la poutre est égale à :

$$P = 27,5 \text{ kN}$$

L'éclatement de la poutre pousse la bielle à être très peu inclinée par rapport au tirant avec qui elle forme un angle  $\theta = 12,17$ . Les calculs donnent une résistance faible en compression :

$$f_{cu} = \frac{f'_c}{0.8 + 170 * \varepsilon_1} = 1.9 \text{ MPa}$$

La forme de la zone nodale présentée dans la Figure 5-13 pour ce cas de chargement dépasse les limites de la structure, la poutre de 4 m ne peut donc pas supporter cette charge limite car elle risque de rompre en cisaillement avant même d'atteindre sa résistance en flexion.

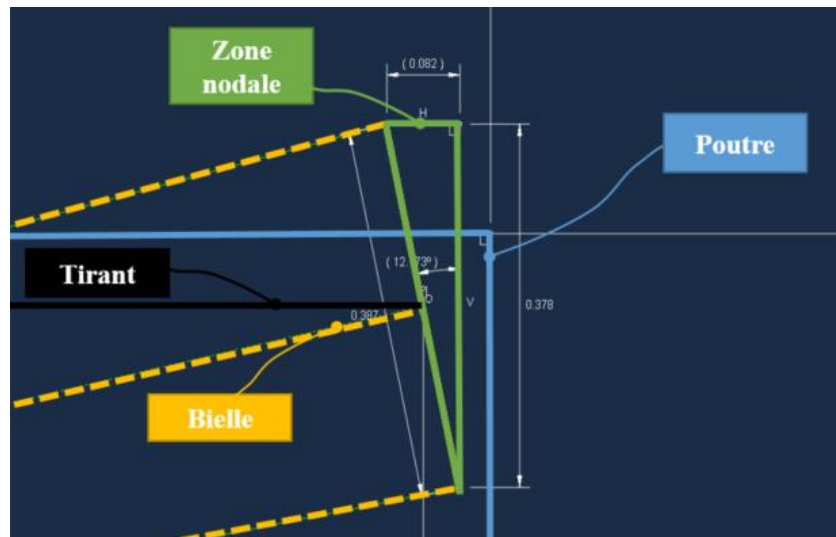


Figure 5-13: Forme de la zone nodale pour la poutre 4m sous la charge  $P = 27,5 \text{ kN}$

L'ajout de l'étrier au milieu de la poutre modifie le modèle B/T initial. La Figure 5-14 résume les efforts obtenus pour chaque élément du modèle B/T.



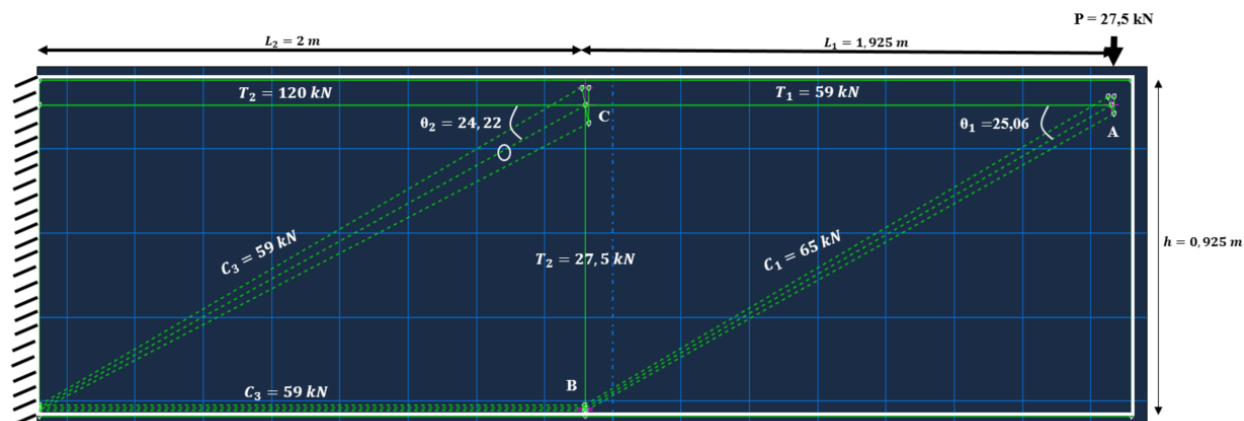


Figure 5-14: Modèle B/T de la poutre en porte-à-faux de 4m - Géométrie des nœuds, des bielles et des tirants et les efforts équivalents à chaque membre

Les résultats dans les tirants se comparent bien avec la Figure 5-12 montrée précédemment.

En ce qui concerne les armatures de flexion, les deux méthodes donnent la même valeur. La différence apparaît au niveau de l'étrier. La méthode des B/T donne une force dans l'étrier :  $T_3 = 27,5 \text{ kN}$  alors que la méthode par réduction de la capacité résistive donne une force  $T_3 = 32 \text{ kN}$ .

### 5.5.3 Discussions

Les résultats obtenus suite à l'analyse du porte-à-faux ont permis de valider l'utilisation de la méthode développée. La dégradation générale de la structure permet de capturer le tirant à la bonne force équivalente issue du modèle B/T. Grâce à la dégradation non-uniforme, il a été possible de garder une bonne résistance dans la bielle lorsque celle-ci est peu inclinée par rapport au tirant. En augmentant la longueur de la poutre, la bielle est devenue très inclinée ce qui réduit sa résistance à une valeur très faible et accentue l'incompatibilité locale au niveau du nœud. Le modèle développé détecte cet état de faiblesse et le porte-à-faux de 4 m sans étrier rompt en compression au voisinage du nœud avant la fin de l'analyse. Dans la Figure 5-10, on voit que le modèle commence par développer la bielle très inclinée mais finit par rompre à cause de l'incompatibilité locale au niveau du nœud. L'ajout de l'étrier au milieu de la poutre a permis de modifier la distribution des efforts internes, le modèle crée de nouvelles bielles comme le montre la Figure 5-11. Ces bielles sont



moins inclinées donc plus résistantes. On bascule vers un nouveau modèle, équivalent à celui défini par la méthode des B/T, qui résiste à la charge appliquée jusqu'à la fin de la phase de dégradation.

La Figure 5-15 présente l'évolution de la force du tirant en fonction de la résistance en traction résiduelle dans le béton. En dessous d'une certaine contrainte, la force dans le tirant au voisinage de l'encastrement plafonne pour les trois modèles : porte-à-faux de 2m, porte-à-faux de 4m sans étrier et porte-à-faux de 4m avec étrier. Cette force se maintient jusqu'à la fin de l'analyse seulement pour les deux modèles porte à faux court et porte à faux long avec étrier. Pour le modèle long sans étrier, une rupture survient au voisinage du nœud tel qu'expliqué précédemment et l'analyse s'arrête avec ABAQUS-Explicit.

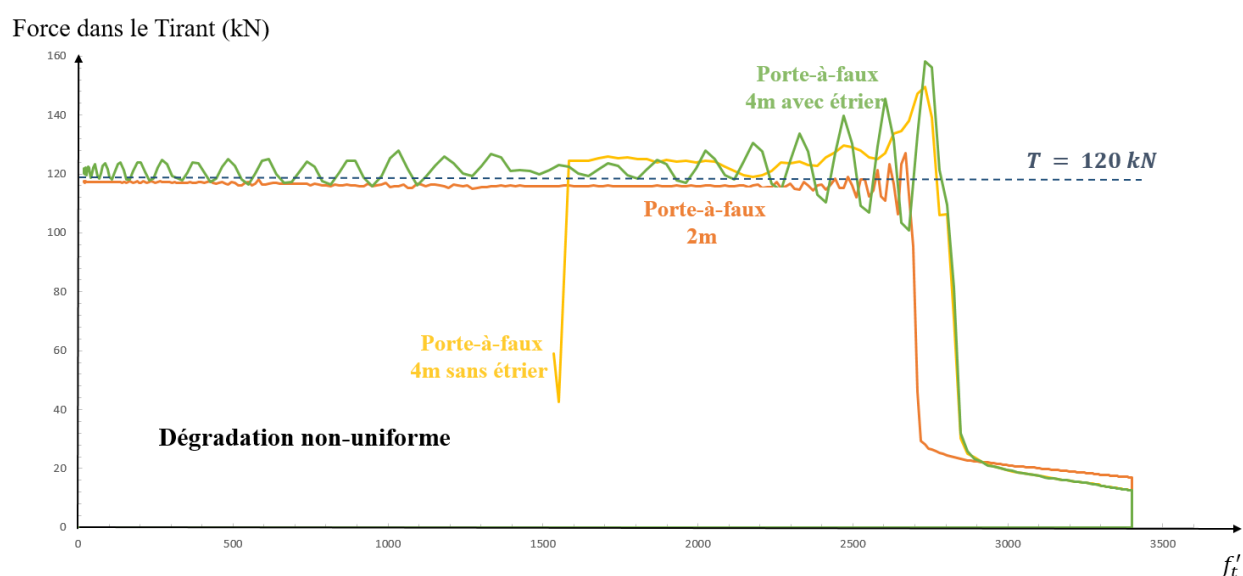


Figure 5-15: Dégradation non-uniforme - Comparaison des forces dans le tirant pour les 3 poutres en porte-à-faux étudiés

Les trois porte-à-faux sont aussi analysés suivant la dégradation uniforme. Bien qu'ils cèdent tous les trois avant la fin de la phase de dégradation, le tracé du développement de la force du tirant en fonction de la résistance en traction dégradée, illustré sur la Figure 5-16, montre que le long porte-à-faux sans étriers cède à une résistance en traction supérieure aux deux autres modèles. Le modèle court et le modèle long avec étrier quant à eux, cèdent au même moment à une valeur de résistance en traction assez faible tout en développant la bonne valeur dans le tirant.



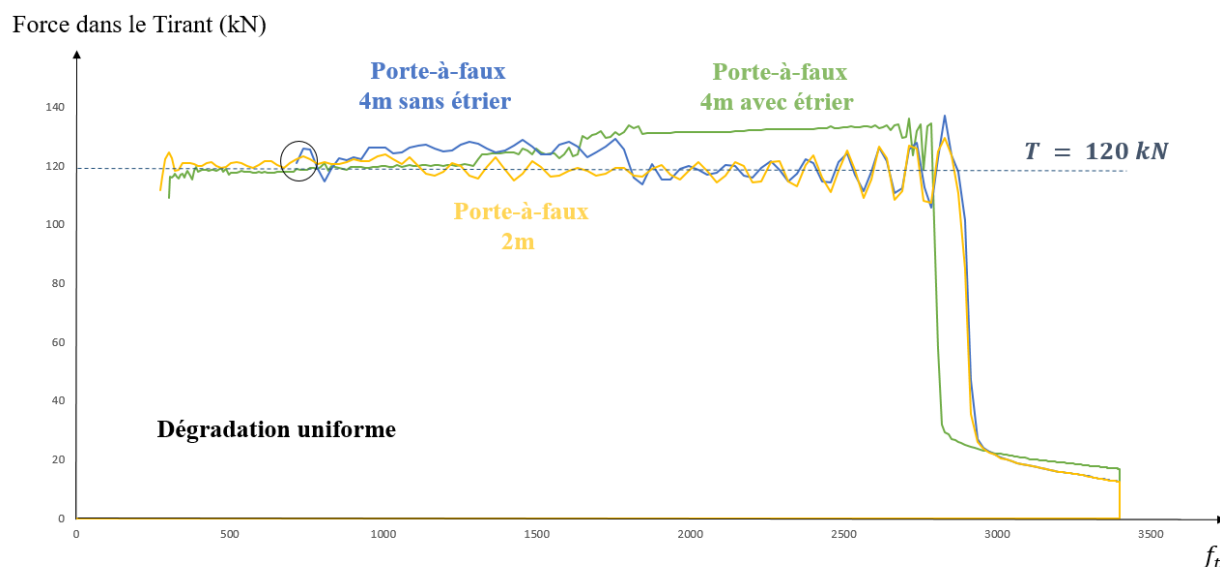


Figure 5-16: Dégradation uniforme - Comparaison des forces dans le tirant pour les 3 poutres en porte-à-faux étudiés

## 5.6 Effet du maillage sur le tirant

Pour évaluer l'effet du maillage sur les résultats et plus précisément sur la force dans les tirants et l'évaluation de l'état de faiblesse de la bielle, on reprend deux des trois porte-à-faux étudiés précédemment et on les analyse pour différentes valeurs du maillage. Les analyses précédentes ont été effectuées pour un maillage de  $0,025\text{ m}$ . On évalue donc, pour un maillage plus grossier (maillage de  $0,05\text{ m}$ ), l'évolution de la force dans le tirant en flexion en fonction de la dégradation de la résistance en traction  $f'_t$ . Les figures comparent les résultats obtenus pour différents cas de maillage.

Pour le porte-à-faux de  $2\text{ m}$ , la force dans le tirant arrive à plafonner à la même valeur pour les deux types de maillage considérés (Figure 5-17). L'effet du maillage intervient dans la vitesse du développement de cette force dans le tirant qui plafonne rapidement plus le maillage est raffiné.

Plus le modèle est maillé grossièrement, moins il est capable de détecter la rupture de la bielle (Figure 5-18). Pour un maillage de  $0,05\text{ m}$  par exemple, le modèle a réussi à supporter sa bielle et



à converger vers la bonne valeur du tirant (Figure 5-18). Notons que pour un maillage de  $0.01\text{ m}$ , le modèle a rompu mais la nature de la rupture présentée n'était pas physique.

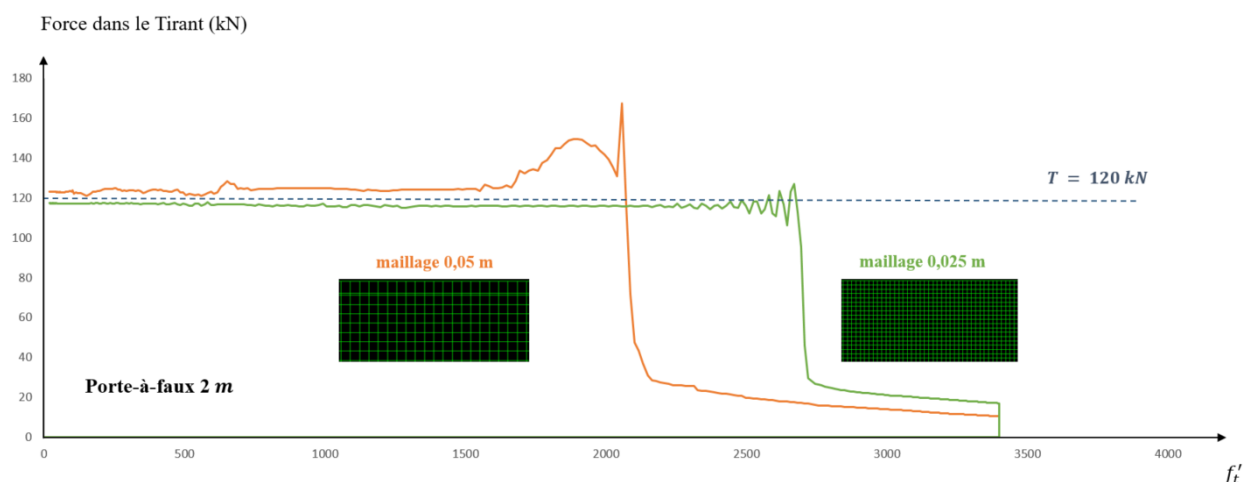


Figure 5-17: Effet du maillage sur la force du tirant - porte-à-faux 2 m

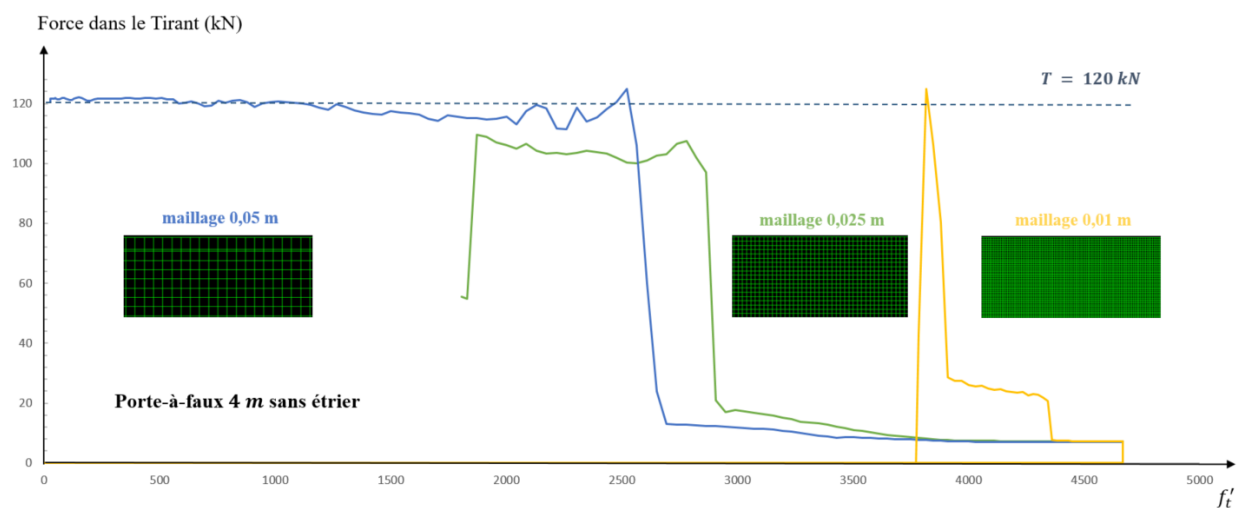


Figure 5-18: Effet du maillage sur la rupture en compression - porte-à-faux 4 m sans étrier

Pour ce qui est mode de rupture de la bielle et zone nodale, la dépendance des résultats en fonction du maillage choisi est un comportement prévisible. Dans sa formulation actuelle, le mécanisme de *dézipage* n'est pas relié à la taille des éléments finis choisis. La Figure 5-17 montre clairement que la *vitesse du dézipage* dépend du raffinement du maillage, ce qui n'influence pas les résultats



si le paramètre recherché est la force dans le tirant. Cependant, cette vitesse influence clairement le mode de rupture d'incompatibilité au voisinage du nœud comme le montre la Figure 5-18.

## 5.7 Conclusion

La méthode de conception développée dans ce projet permet de définir efficacement le chemin des efforts internes dans la structure. Le modèle a été capable de mettre en exergue le modèle  $B/T$  équivalent en modifiant l'organisation générale des efforts dans la structure. Le phénomène de *dézippage*, qui a été observé dans la zone sous les armatures, accompagne le développement de la force tout le long du tirant. Deux types de dégradation ont été considérées : uniforme et non-uniforme. La dégradation uniforme permet de définir la bonne valeur de force du tirant mais conduit la structure à une rupture prématurée causée par l'affaiblissant des bielles en compression. En considérant une dégradation non-uniforme dans les zones en compression, on arrive à garder les bielles résistantes quand celles-ci peuvent supporter la charge appliquée. Le modèle arrive aussi à détecter les ruptures liées à la faiblesse de la bielle lorsque celle-ci est très inclinée en considérant l'effet de l'incompatibilité local entre le tirant et la bielle dans la zone nodale. Enfin, une étude sur l'effet du maillage a permis de détecter la dépendance des résultats obtenus au maillage pour ce qui est du mode de rupture par incompatibilité. Une amélioration pourra être faite à ce niveau en développant une formulation qui rend le mécanisme de *dézippage* indépendant de la taille des éléments finis choisis.



## CHAPITRE 6 CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

Dans le cadre de ce projet de recherche, une nouvelle approche de conception des structures en béton armé est suggérée. Elle prend comme point de départ les concepts de base de la méthode bielles et tirants, notamment l'organisation des efforts internes dans la structure suivant des zones de tirants et de bielles qui se rejoignent dans des zones nodales et les modes de défaillance qui en résultent. L'approche s'inspire des méthodes de réduction de capacité et utilise des analyses non-linéaires avec une dégradation progressive du post-pic en traction.

Des analyses préliminaires sur des lois de béton existantes dans le logiciel ABAQUS-Explicit (CDP, CIP et EPM3D) ont été faites. Elles démontrent les points suivants :

- Avec un comportement adoucissant en post-pic, la réduction de la résistance en traction du béton permet de reproduire la force dans le tirant, donc la quantité d'armatures, nécessaire pour reprendre le chargement appliqué.
- La dégradation fictive du post-pic entraîne une réorganisation complexe des contraintes principales de compression dans la structure. Pour la loi de comportement CDP, la formulation de plasticité utilisée ne permet pas de détecter le mode de défaillance lié à l'incompatibilité locale entre la bielle et le tirant au voisinage du nœud. Ce mode de rupture est fondamental et constitue d'après nous un mode qui représente à la fois la faiblesse de la bielle et de la zone nodale. Les analyses avec le modèle EPM3D ont été faites en introduisant une fonction de dégradation mais n'ont pas été concluantes. La raison principale d'après nous est que cette dégradation fictive (avec des très faibles valeurs de résistance en traction) n'a pas été prévue lors de la programmation initiale de la loi qui est censée représenter un béton plus normal.
- La formulation explicite utilisée est bien adaptée au contexte de dégradation voulu, dans la mesure où elle est capable de considérer les problèmes d'adoucissement et de *dézippage* qui sont fort probablement des problèmes dynamiques locaux. Nous estimons que les



analyses avec la version standard (implicite) auraient été impossibles pour le contexte de ce projet.

En raison des difficultés trouvées avec les lois de béton existantes, une nouvelle loi constitutive utilisant la théorie d'élasticité non-linéaire a été développée et a été insérée dans le cadre d'une nouvelle méthodologie de conception. Les applications de cette méthodologie sur des exemples sélectionnées de poutres en porte à faux démontrent les points suivants :

- La théorie d'élasticité non-linéaire utilisant la théorie du champ de compression modifiée ou MCFT (Vecchio et Collins (1986)) est bien adaptée à la cinématique cible du modèle bielles et tirants. Elle permet aussi de se dégager des restrictions mathématiques de la théorie de plasticité.
- Le mécanisme intermédiaire de *dézippage* observé permet d'aboutir à des forces quasi-constantes dans les barres d'armatures, représentatives des tirants dans un modèle bielles et tirants. Les analyses paramétriques montrent que ce mécanisme souhaitable ne peut avoir lieu que pour certaines lois post-pics qui favorisent une localisation en dessous de la zone des tirants.
- Deux cas de dégradation ont été utilisés pour la méthodologie développée. Un premier cas de dégradation uniforme du post-pic en traction peu importe l'état des contraintes. Ce cas mène à une rupture prématurée des bielles principales de compression en raison de la présence de faibles contraintes de traction à l'intérieur même de ces bielles. Pour remédier à ce problème, un deuxième cas de dégradation non-uniforme en fonction de l'état des contraintes de compression a été développé. Il conduit à des résultats plus représentatifs du modèle bielles et tirants.
- Les trois exemples d'application considérés montrent la faisabilité de l'approche développée, plus précisément, l'aptitude à reproduire les forces dans les tirants et les modes de défaillances très proches du modèle de référence qui est le modèle de bielles et tirants.



- La demande finale dans les tirants semble être indifférente au raffinement du maillage mais ce n'est pas le cas pour le mode de défaillance d'incompatibilité locale entre les bielles et les tirants au voisinage des zones nodales.

La méthodologie proposée est assez simple et est destinée aux ingénieurs praticiens. L'objectif général de ce projet est certainement *audacieux* : développer une *nouvelle approche* de conception en béton armé qui soit acceptée par les ingénieurs praticiens. Ce travail est d'après nous une excellente avancée dans ce sens et démontre clairement la faisabilité de cet objectif. Il démontre aussi la complexité du comportement du béton après fissuration et les multiples possibilités de redistribution d'efforts.

Pour les études à venir, et à la lumière des résultats et difficultés de ce travail, on propose les recommandations suivantes :

- Développer une formulation du post-pic qui rendrait le mécanisme de dézippage indépendant ou quasi-indépendant de la taille du maillage. Un concept similaire à celui de l'énergie de fissuration pour le mode I pourrait être utilisé.
- Étendre la validation à d'autres exemples 2D et 3D avec une complexité croissante : poutres sur appuis simples, poutres hyperstatiques, colonnes, cadres...
- La norme A23.3-14 (article 11.4.5) recommande de garder un ratio d'armature de 0.2% pour le contrôle de fissuration. Des études dans cette direction pourraient permettre d'introduire cet aspect dans le modèle notamment avec le choix de la valeur finale de la résistance en traction dégradée.
- Des comparaisons supplémentaires avec les résultats de la méthode bielles et tirants permettront de bien calibrer l'équation 2.1 de la théorie MCFT pour le contexte spécifique du projet.



## BIBLIOGRAPHIE

- ACI Committe 207. (1995). Effect of Restraint, Volume Change, and Reinforcement on Cracking in Massive Concrete. *American Concrete Institute*, 3-8.
- ACI318-05. (2005). : *Building Code Requirements for Structural Concrete*.
- AIJ. (1986). "Recommendations for Design and Construction of Partially Prestressed Concrete (Class II) Structures.". *Architectural Institute of Japan*.
- Bazat , Z. P., & Bhat, P. D. (1976). "Endochronic theory of inelasticity and failure of concrete.". *Journal of engineering Mechanics Division, ASCE*, 102, 701-722.
- Belarbi, A., & Hsu, T. T. (1994). "Constitutive Laws of Concrete in Tension and Reinforcing Bars Stiffened by Concrete". *ACI Structural Journal*, 91(4), 465-474.
- Ben Ftima, M. (2013). *Utilisation de la méthode des éléments finis non-linéaire pour la conception des structures en béton armé : Application aux structures massives* , Ph.D. École Polytechnique de Montréal.
- Bendsoe, M. P., & Kikuchi, N. (1988). "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71, 197-224.
- Bouzaiene, A., & Massicotte, B. (1995). *Caractérisation et modélisation du comportement non linéaire d'éléments en béton armé et non armé sous sollicitations multiaxiales*. École Polytechnique de Montréal, Rapport No EPM/GRS-1995-13.
- Chen, W. F. (1982). *Plasticity in reinforced concrete*. NewYork: J.Ross.
- Collins, M. P., & Mitchell, D. (1991). *Prestressed Concrete Structures*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc.,.
- Comite Euro-International du Béton (CEB-FIP). (1993). *CEB-FIP Model Code 1990 - Design code*. London: Thomas Telford.
- CSA-A23.3-14. (2014). *Design of Concrete Structures*. Canada: Association Canadienne de Normalisation.



- Dahlblom, O., & Ottosen, N. S. (1990). "Smeared crack analysis using generalized fictitious crack model". *ASCE Journal of Engineering Mechanics* 116, 55-76.
- Dougill, T. W., Law, J. C., & Burt, N. J. (1977). "Towards a theoretical model for progressive failure and softening in rock, concrete and similar materials.". *Mechanics in engineering Univeristy of Waterloo Press*, 335-355.
- Fédération Internationale du béton (FIB). (2008). *Practitioners' guide to finite element modelling of reinforced concrete structures*. State-of-Art Report, CEB-FIB bulletin 45.
- Field, K., & Bischoff, P. H. (2004). "Tension stiffening and cracking of high-strength reinforced concrete tension members". *ACI Structural journal* 101(4), 447-456.
- Lee, J., & Fenves, G. L. (1998). "A plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures". *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 124, 892–900.
- Liang, Q. Q., Uy, B., & Steven, G. P. (2002). "Performance-Based Optimization for strut-tie modeling of structural concrete". *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 128 (6), 815-823.
- Lubliner, J., Oliver, J., Oller, S., & Onate, E. (1989). "A plastic-damage model for concrete". *International Journal of Solids Structures*, 25, 299–326.
- MacGregor, J. G., & Bartlett, F. M. (2000). *Reinforced concrete Mechanics and Design*. Ontario: Prentice Hall Canada Inc.
- Massicotte, B. (2015). *Calcul des structures en béton armé - Concepts de base*. Laval: Éditions da Vinci.
- Massicotte, B., Nour, A., Ben Ftima, M., & Yildiz, E. (2007). *EPM3D – A user-supplied constitutive model for the nonlinear finite element analysis of reinforced concrete structures, Rapport SR07-10*. École Polytechnique de Montréal.
- Massicotte, B., Nour, A., Ben Ftima, M., Yildiz, E., & Conciatori, D. (2012). *EPM3D-v3.1 – A user-supplied constitutive model for the nonlinear finite element analysis of reinforced concrete structures, Rapport SR12-03*. École Polytechnique de Montréal.
- Ngo, D., & Scordelis, A. C. (1967). "Finite element analysis of reinforced concrete beams.". *Journal of the American Concrete Institute*, 64(3), , 152-163.



- Querin , O. M., Young, V., Steven, G. P., & Xie, Y. M. (2000). "Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimisation". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189, 559-573.
- Rashid, Y. R. (1968). "Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels". *Nuclear Engineering Design* vol 7, 334–344.
- Reinhardt, H. W. (1984). "Fracture mechanics of an elastic softening material like concrete". *Heron* 29(2), 1-42.
- Schlaich, J., Schafer, K., & Jennewein, M. (1987). "Toward a consistent design of structural concrete.". *Journal of the Prestressed Concrete Institute*, 32(3), 74-150.
- Sigmund, O., & Petersson, J. (1998). "Numerical instabilities in topology optimization : A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh dependencies and local minima.". *Structural Optimization* 16(1), 68-75.
- Todeschini, C. E., Bianchini, A. C., & Kesler, C. E. (1964). "Behavior of concrete columns reinforced with high strength steels. *ACI J.Proc*, 61, 701-716.
- Vecchio , F. J., & Collins, M. P. (1986). "Modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear". *ACI Journal*, 83(2), 219-231.
- Vulliet, F., Ben Ftima, M., & Léger, P. (2017). "Stability of cracked concrete hydraulic structures by nonlinear quasi-static explicit finite element and 3D limit equilibrium methods". *Computers and Structures*, 25-35.
- Wittmann, F. H. (1983). *Structure and mechanical properties of concrete*, *The Architectural Report of the Tohoku University*, 22, 93-112.
- Xie, Y. M., & Steven, G. P. (1993). A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers and Structures*, 49(5), 885-896.



## ANNEXE A – ALGORITHME DE DEGRADATION

Une fonction dégradation a été développée pour affecter les propriétés du béton. Cette fonction vise à modifier quatre paramètres principaux dans le comportement du béton en fonction du temps. La fonction permet de choisir le ou les paramètres à modifier. La variation dans le temps suit une fonction polynomiale de degré 5 pour assurer une dégradation de type « *smooth* ». Le modèle permet de caractériser une dégradation par escaliers comme présenté dans la figure suivante en définissant le coefficient de raffinement  $n$  dans les données d'entrées de la fonction.

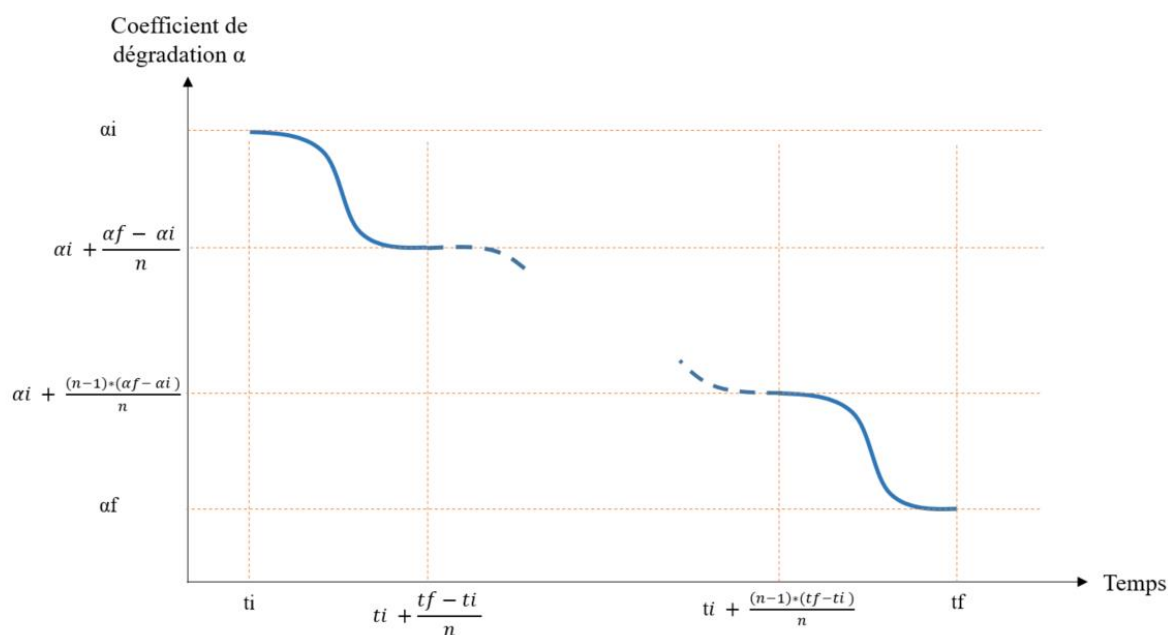


Figure A-1: Courbe de dégradation en escaliers

La figure suivante présente l'algorithme général de la fonction de dégradation proposée. Notons que le choix du type de dégradation dépend de la valeur du coefficient  $\beta$ . En effet, pour une dégradation uniforme,  $\beta = 1$  pour tous les éléments de la structure ce qui implique une dégradation uniforme. Pour une dégradation non-uniforme,  $\beta$  varie en fonction de l'état du matériau.



Le modèle permet de dégrader 4 propriétés caractéristiques du béton : la résistance en compression, la résistance en traction, le module d'élasticité et l'énergie de fissuration. Le choix du paramètre à dégrader est défini par l'utilisateur. Dans ce projet de maitrise, seule la résistance en traction est affectée.

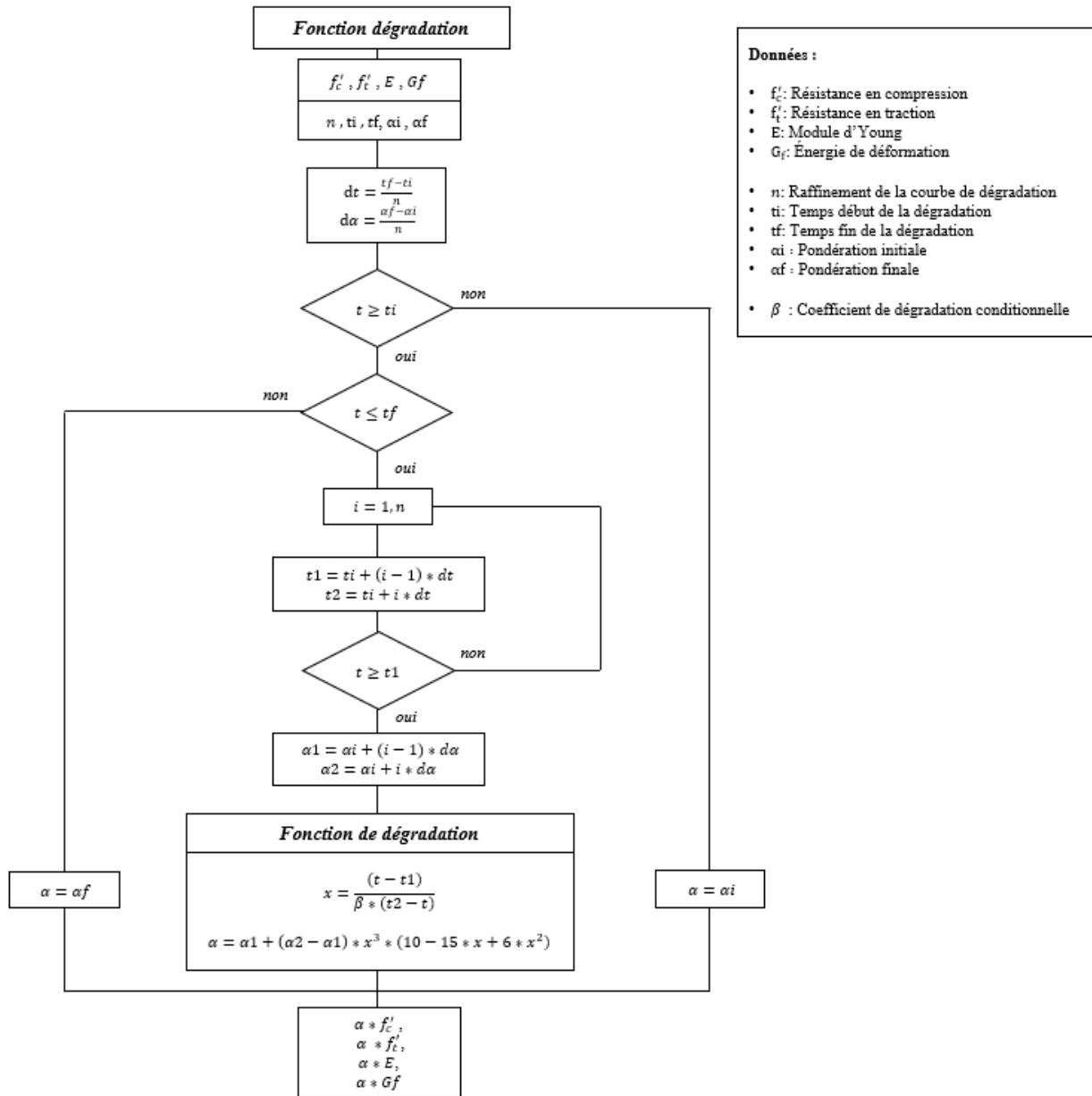


Figure A-2: Algorithme de la sous-routine « Dégradation »



## ANNEXE B – INTERFACE GRAPHIQUE

Pour faciliter la définition des propriétés du béton dans le logiciel ABAQUS, une interface graphique a été créée. Cette interface permet aussi de définir le modèle de dégradation choisi et de configurer son application dans le temps.

Un exemple de définition du matériau sur ABAQUS est présenté dans la figure suivante :

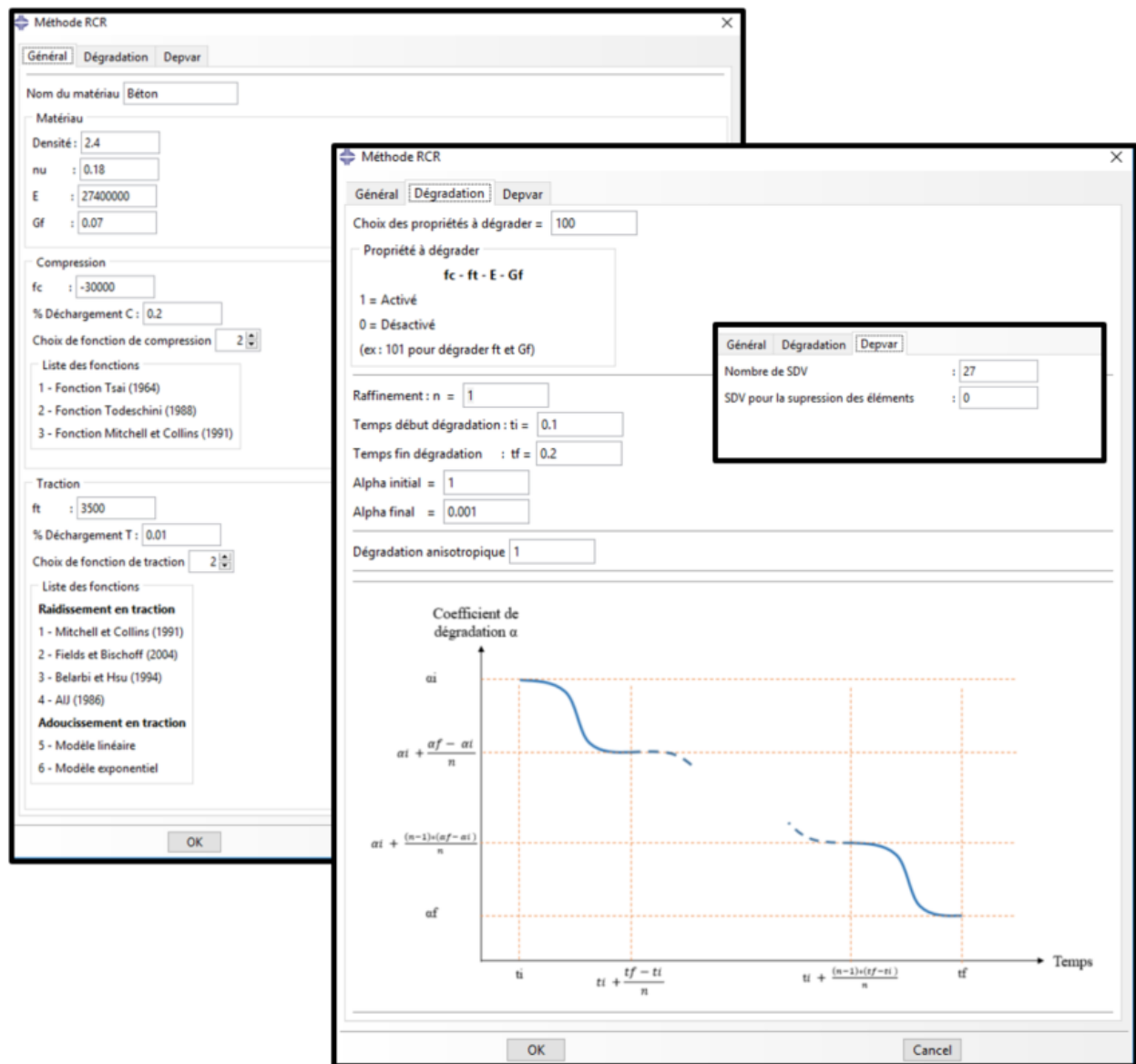


Figure B-1: Interface graphique dans ABAQUS



## ANNEXE C – ROTATION DES AXES

Dans la loi constitutive, la rotation des axes principaux due au classement des contraintes suivant les déformations principales peuvent créer une discontinuité au niveau de la caractérisation du comportement suivant la direction physique réelle. Pour éviter cela, on introduit une fonction de permutation qui permet de détecter le reclassement des axes principaux en les comparant à leur position précédente par rapport aux axes physiques. Un exemple de rotation d'axes est présenté dans la figure qui suit :

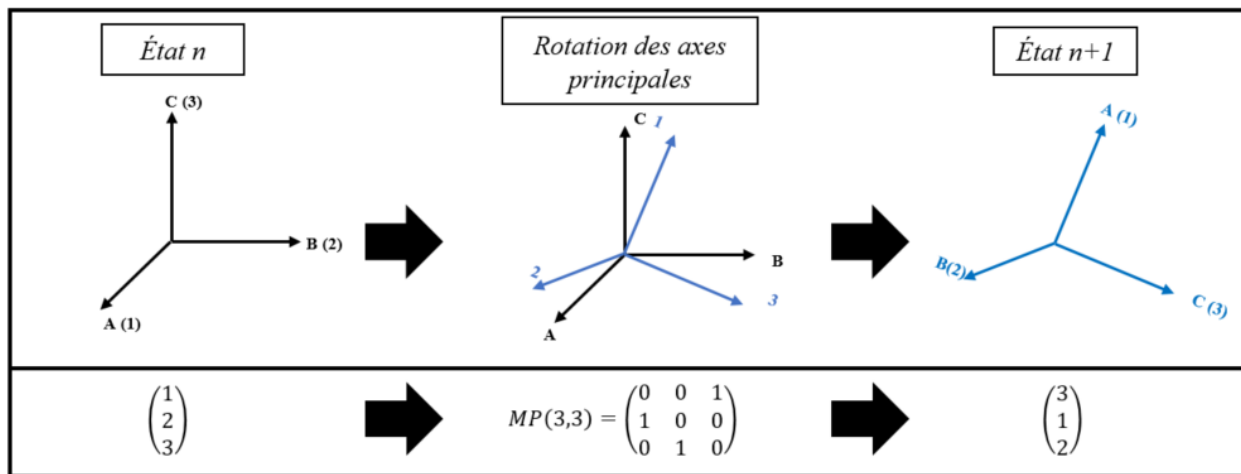


Figure C-1: Exemple de rotation d'axes : (A,B,C) système d'axe physiques et (1,2,3) système d'axes principaux

Dans l'exemple proposé, les déformations principales ont subi un reclassement à l'état *n+1*. L'équivalence qui existait à l'état *n* entre les axes principaux et les axes physiques est alors perdue. La fonction de permutation, en évaluant la rotation des vecteurs caractéristiques de chaque axe, permet de définir la nouvelle position des axes physiques et de générer la matrice de permutation  $MP(3)$ . Cette matrice permet de définir le changement que subit l'ordre du système d'axes physiques par rapport au système d'axes principaux et surtout de permettre aux propriétés de suivre cette rotation. Ainsi, en détectant la rotation des axes, on est capable d'évaluer la rotation effectuée qui permettra d'affecter à chaque nouvelle direction les bonnes valeurs pour assurer la continuité du comportement.