

**Titre:** Le contrôle des inflexions et des extrema de courbure portés par les courbes et les surfaces B-Splines  
Title: [Le contrôle des inflexions et des extrema de courbure portés par les courbes et les surfaces B-Splines](#)

**Auteur:** Éric Demers  
Author: [Eric Demers](#)

**Date:** 2017

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Demers, É. (2017). Le contrôle des inflexions et des extrema de courbure portés par les courbes et les surfaces B-Splines [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/2513/>  
Citation: [Demers, É. \(2017\). Le contrôle des inflexions et des extrema de courbure portés par les courbes et les surfaces B-Splines \[Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal\]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/2513/](#)

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/2513/>  
PolyPublie URL: [https://publications.polymtl.ca/2513/](#)

**Directeurs de recherche:** François Guibault, Jean-Yves Trépanier, & Christophe Tribes  
Advisors: [François Guibault](#), [Jean-Yves Trépanier](#), [Christophe Tribes](#)

**Programme:** Génie mécanique  
Program: [Génie mécanique](#)

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

LE CONTRÔLE DES INFLEXIONS ET DES EXTREMUMS DE COURBURE  
PORTÉS PAR LES COURBES ET LES SURFACES B-SPLINES

ÉRIC DEMERS  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
AVRIL 2017

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

LE CONTRÔLE DES INFLEXIONS ET DES EXTREMUMS DE COURBURE  
PORTÉS PAR LES COURBES ET LES SURFACES B-SPLINES

présentée par : DEMERS Éric

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. CAMARERO Ricardo, Ph. D., président

M. GUIBAULT François, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. TRÉPANIER Jean-Yves, Ph. D., membre et codirecteur de recherche

M. TRIBES Christophe, Doctorat, membre et codirecteur de recherche

M. GARON André, Ph. D., membre

M. LÉON Jean-Claude, Ph. D., membre externe

## DÉDICACE

*À mes parents, Codette et Alain  
et mes grand-parents, Thérèse et Réjean*

## REMERCIEMENTS

Ce projet a été un prétexte pour tisser des liens avec des personnes de grandes qualités. J'aimerais tout particulièrement exprimer ma reconnaissance envers mes directeurs de thèse François Guibault et Christophe Tribes. Ils ont su guider cette recherche avec beaucoup de doigté et faire graduellement mûrir les idées nouvelles. Je peux confirmer que leur rayonnement dépasse les 700 kilomètres qui séparent l'école Polytechnique de Montréal de mon lieu de résidence en Gaspésie.

Les rencontres avec les collègues dans différentes conférences reliées à la conception géométrique assistée par ordinateur ont également été très stimulantes et enrichissantes. J'ai aussi une pensée toute particulière pour tous les collègues dans le domaine des turbines hydrauliques que j'ai eu le grand bonheur de côtoyer d'abord chez GE Hydro et ensuite chez Andritz et qui ont inspiré ces travaux.

J'aimerais remercier, d'une manière plus personnelle, mes proches pour leur soutien. Mon épouse que j'aime de tout mon cœur et mes filles que j'adore et qui sont une source constante d'inspiration avec leur imagination fertile, leur curiosité et leur soif d'apprendre. Ma belle mère Monique qui s'est occupée des filles à des moments clés pour me permettre d'avancer les travaux. Je dois également beaucoup à toute ma famille pour m'avoir offert et continuer de m'offrir cet environnement chaleureux propice à l'épanouissement de chacun.

## RÉSUMÉ

Le contrôle des propriétés différentielles des courbes et des surfaces B-splines est un enjeu important, en particulier pour le domaine de la conception géométrique assistée par ordinateur. Un enjeu qui sollicite autant les méthodes analytiques que numériques dans le but de permettre au concepteur de manipuler les formes avec une aisance toujours croissante.

Ce texte explore les possibilités offertes lorsqu'on combine des méthodes numériques de pointe aux travaux de grands géomètres du 19<sup>e</sup> siècle. Ainsi, de nouveaux algorithmes pour l'optimisation sous contraintes des B-splines ont été développés. Ensuite, ces algorithmes ont été combinés à la théorie des groupes de transformations comme elle a été développée à l'origine par des pionniers comme Sophus Lie, Gaston Darboux et Felix Klein. Ceci permet d'ouvrir des portes vers de nouveaux horizons. Il devient possible de générer de larges espaces de formes sur lesquels on contrôle les propriétés différentielles. Il devient également possible d'éliminer des oscillations de façon sélective ou de manipuler les formes sans introduire d'oscillations indésirables.

Avant de progresser vers cet objectif ambitieux, il faut d'abord être en mesure de bien comprendre et de bien visualiser ces propriétés différentielles que l'on souhaite contrôler. L'histoire de la géométrie différentielle classique des courbes et des surfaces est très riche. Cette histoire est revisitée avec une perspective nouvelle. Soit la perspective du contrôle des inflexions et des extrema de courbure. Ceci permet de faire émerger des liens importants entre la géométrie différentielle, la théorie des singularités, les groupes de transformations et l'optique géométrique.

Ensuite viennent les algorithmes d'optimisation des B-splines sous contraintes. Les variables indépendantes sont les positions des points de contrôle de la B-spline alors que les contraintes portent sur la position des points de contrôle d'une fonction qui représente les propriétés différentielles de la B-spline.

Les algorithmes sont d'abord développés pour les fonctions B-splines à une et deux variables. Une fois ces algorithmes développés, plusieurs possibilités nouvelles s'offrent à nous. Il devient possible, par exemple d'obtenir la courbe qui s'approche le plus d'une autre courbe quelconque sous la contrainte de posséder certaines propriétés différentielles. De cette manière, il devient possible de travailler avec un plus grand nombre de points de contrôle et ainsi dans un espace de forme plus riche sans avoir à se soucier d'oscillations arbitraires. Ceci permet en particulier d'éliminer de façon sélective des oscillations indésirables sur des profils aérodynamiques.

Le premier algorithme est introduit comme une extension à la méthode standard des moindres carrés pour approximer une série de points en utilisant une B-spline. L'extension consiste à ajouter des contraintes pour produire, entre autres, des segments de courbe avec une croissance ou une décroissance monotone de la courbure. La méthode des points intérieurs est utilisée pour résoudre le problème d'optimisation sous contraintes. La méthode nécessite des gradients qui sont calculés en utilisant le calcul symbolique des B-splines. Par conséquent, l'algorithme repose sur les propriétés algébriques et différentielles des B-splines. La propriété de diminution des variations des B-splines est alors exploitée pour appliquer les contraintes.

Un exemple d'application consiste à produire des courbes lisses à partir des points mesurés sur des profils d'ailes d'avion. Les données proviennent de la base de données UIUC qui est publiquement disponible. Les données contiennent une bonne quantité de bruit pour certains profils. Dans ces circonstances, un nombre fixe de segments avec une variation monotone de courbure est une technique très prometteuse pour produire une approximation de ces points mesurés par des courbes qui sont à la fois très générales et sans compromis sur les oscillations.

Pour étendre ces idées aux surfaces, il est utile de faire appel aux notions qui appartiennent à la géométrie projective et à la géométrie des sphères de Lie. Alors que la géométrie projective préserve les inflexions, la géométrie des sphères de Lie préserve les extrema de courbure. Chacune de ces géométries offre 8 paramètres pour transformer les formes. Contrôler les inflexions ou les extrema de courbure sur la courbe méridienne d'une surface de révolution et ensuite leur appliquer une transformation projective ou des sphères de Lie donne déjà accès à des espaces intéressants de formes sans oscillation arbitraire. Une progression vers des surfaces plus générales suit. Les courbes flecnodales portées par les surfaces réglées et les courbes d'extrema de courbure portées par les surfaces des canaux sont discutées sous le spectre de la réciprocité droites-sphères de Sophus Lie. Enfin, l'optique géométrique permet d'établir un lien important entre les propriétés différentielles des fonctions et les propriétés différentielles des courbes et des surfaces. Un lien qui permet d'explorer de nouveaux espaces de formes avec un contrôle sur les lignes paraboliques et d'extrema de courbure portées par les surfaces. En particulier, ceci permet de produire une famille de surfaces à plusieurs paramètres qui possède un seul point ombilic sous sa forme la plus simple.

## ABSTRACT

Control of B-spline differential properties is an important stake, especially for the field of computer-aided geometric design. An issue that calls for analytical and numerical skills to allow the designer to manipulate shapes in an increasingly efficient way.

This text explores possibilities offered by combining new numerical methods with works of 19<sup>th</sup> century great geometers. Thus, new algorithms for constrained optimization of B-splines are selected and then grafted to the group theory of transformations as it was originally developed by pioneers such as Sophus Lie, Gaston Darboux and Felix Klein. This opens doors to new horizons. It becomes possible to generate large spaces of shapes with a control over their differential properties. This also gives us a selective eraser of curvature extrema and the option to manipulate shapes without introducing undesirables oscillations.

Before progressing towards this ambitious goal, one must first be able to understand and visualize these differential properties that one wishes to control. This rich history of the classical differential geometry is revisited with a new perspective. This new perspective is the one of the control of inflections and extrema of curvature. A perspective that allows to establish important links between differential geometry, the theory of singularities, groups of transformations and geometric optics.

Next comes the B-splines optimization algorithms with constraints. The independent variables are the B-spline position of the control points, while the constraints are applied to the control points of a function which represents the differential properties of the B-spline.

The algorithms are first developed for B-spline functions. Once these algorithms have been developed, several new possibilities open up to us. It becomes possible, for example, to find the closest curve to another one under specified differential properties. This particular algorithm is introduced as an extension to the standard B-spline least squares method to approximate a series of points. The extension consists in adding constraints to produce curve segments with monotonously increasing or decreasing curvature.

The interior point method is used to solve the constrained optimization problem. The method requires gradients and those are provided by symbolic B-spline operators. Therefore, the algorithm relies on the arithmetic, differential and variation diminishing properties of the B-splines to apply the constraints. Thereby, it becomes possible to work with a greater number of control points and thus in a richer shape space without having to manage undesired oscillations.

We give an example of application that consists in producing smooth curves from the points measured on airplane wing profiles. The data comes from the UIUC database which is publicly available. Measurement errors are the source of a good amount of noise for certain profiles. For such an application, a fixed number of segments with monotonous curvature is a very promising technique. It produce curves that are both uncompromising on oscillations and very general.

Later, to extend these ideas to surfaces, it is useful to make good use of notions belonging to projective and Lie spheres geometries. While projective geometry preserves inflections, the geometry of the Lie spheres preserves curvature extrema. Each of these geometries offers 8 parameters to transform shapes. Controlling the inflections or curvature extrema on the meridian curve of a surface of revolution and then applying them a projective or Lie spheres transformation already gives access to interesting shape spaces free of arbitrary oscillations. Progression to more general surfaces follows and culminates with an important link established between the differential properties of the two variables functions and the curvature extrema of surfaces.

To extend these ideas to surfaces, it is useful to call upon the notions that belong to projective and Lie spheres geometries. While projective geometry preserves inflections, Lie spheres geometry preserves the extrema of curvature. Each of these geometries offers 8 parameters to transform shapes. Controlling the inflexions or extrema of curvature on the meridian curve of a surface of revolution and then applying a projective or Lie sphere transformation to them already gives access to interesting spaces of shapes without arbitrary oscillations.

A progression towards more general surfaces follows. The flecnodal lines on ruled surfaces and lines of curvature extrema on channel surfaces are discusses under the light of Lie's line-sphere correspondence. Finally, geometric optics makes it possible to establish an important link between the differential properties of functions and the differential properties of curves and surfaces. A link that explores new shape spaces with control over the parabolic lines and curvature extrema on surfaces. In particular, this makes it possible to produce a family of surfaces which have a single umbilical point in its simplest form.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	III
REMERCIEMENTS . . . . .	IV
RÉSUMÉ . . . . .	V
ABSTRACT . . . . .	VII
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	IX
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	XIII
LISTE DES FIGURES . . . . .	XIV
LISTE DES ANNEXES . . . . .	XIX
CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 La notion de forme . . . . .	2
1.2 Plan de la thèse . . . . .	5
CHAPITRE 2 UNE REVUE DE LITTÉRATURE SUR LES B-SPLINES ET L'OPTIMISATION . . . . .	8
2.1 Les B-splines . . . . .	8
2.1.1 La propriété de diminution des variations . . . . .	8
2.1.2 Les courbes et les surfaces convexes . . . . .	9
2.1.3 Le contrôle des points d'extremums de courbure portés par les courbes B-splines . . . . .	10
2.1.4 Le tracé des inflexions et des extremums de courbure portés par les surfaces B-splines . . . . .	11
2.2 L'optimisation . . . . .	11
2.2.1 L'optimisation convexe . . . . .	11
2.2.2 La méthode du point intérieur . . . . .	12
2.2.3 Un aperçu du contrôle des propriétés différentielles d'une fonction . .	13
CHAPITRE 3 QUESTION DE RECHERCHE ET OBJECTIFS . . . . .	16

CHAPITRE 4 UNE NOUVELLE PERSPECTIVE SUR LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CLASSIQUE DES COURBES ET DES SURFACES . . . . .	18
4.1 La géométrie différentielle . . . . .	19
4.1.1 La géométrie différentielle d'une courbe dans le plan . . . . .	19
4.1.2 La notion de courbes et de surfaces génériques . . . . .	25
4.1.3 La géométrie différentielle d'une surface dans l'espace . . . . .	27
4.1.4 Discussion . . . . .	41
4.2 La réciprocité droites-sphères et les surfaces les plus simples . . . . .	42
4.2.1 La géométrie des sphères de Lie et les cyclides de Dupin . . . . .	43
4.2.2 La réciprocité droites-sphères . . . . .	47
4.2.3 Les cyclides de Dupin et les quadriques doublement réglées . . . . .	49
4.2.4 Discussion . . . . .	52
4.3 La notion de groupes de transformations linéaires et les matrices . . . . .	53
4.3.1 La géométrie projective . . . . .	53
4.3.2 La géométrie des sphères de Lie . . . . .	56
4.3.3 Discussion . . . . .	67
4.4 La technique du miroir . . . . .	69
4.4.1 Un miroir parabolique . . . . .	71
4.4.2 Un miroir et les zéros de sa dérivée troisième . . . . .	71
4.4.3 Généralisation à l'espace . . . . .	73
4.4.4 Discussion . . . . .	75
CHAPITRE 5 LE CONTRÔLE DES PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS . . . . .	77
5.1 Une fonction B-spline $s(u)$ sous contraintes uniformes . . . . .	78
5.1.1 La méthode des moindres carrés . . . . .	78
5.1.2 La méthode de newton en optimisation . . . . .	79
5.1.3 Une fonction non négative . . . . .	80
5.1.4 Une dérivée première non négative . . . . .	82
5.1.5 Une dérivée troisième non négative . . . . .	83
5.1.6 Discussion . . . . .	85
5.2 La forme générale d'un problème d'optimisation . . . . .	85
5.3 Une librairie de calcul algébrique et différentiel pour les B-splines . . . . .	86
5.3.1 La dérivée d'une fonction B-spline . . . . .	86
5.3.2 L'insertion de nœuds et l'augmentation du degré . . . . .	88
5.3.3 La multiplication de deux B-splines . . . . .	89

5.4	Une fonction B-spline $s(u)$ sous contraintes non uniformes . . . . .	90
5.4.1	Discussion . . . . .	91
5.5	Une fonction B-spline $s(u, v)$ sous contraintes uniformes . . . . .	92
5.5.1	La méthode des moindres carrés . . . . .	92
5.5.2	Une fonction non négative . . . . .	92
5.5.3	Une fonction avec une dérivée première non négative . . . . .	93
5.6	Une fonction B-spline à deux variables $s(u, v)$ convexe . . . . .	93
5.7	Les points d'une fonction B-spline $s(u, v)$ avec un contact plus étroit avec une parabole de révolution . . . . .	95
5.7.1	Discussion . . . . .	99
5.8	Contrôle de la courbure d'une fonction . . . . .	100
 CHAPITRE 6 LE CONTRÔLE DES PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES		
DES COURBES . . . . .		103
6.1	Les transformations de la géométrie des cercles orientés d'une ellipse . . . . .	103
6.1.1	L'espace des ellipses augmenté par ses courbes parallèles . . . . .	103
6.1.2	L'espace des formes ovales augmenté par la transformation des rayons réciproques . . . . .	104
6.2	Un algorithme pour supprimer des extrema de courbure de façon sélective . . . . .	105
6.2.1	La courbure d'une courbe B-spline . . . . .	106
6.2.2	La méthode des moindres carrés pour une courbe B-spline . . . . .	108
6.2.3	La méthode des moindres carrés pour une courbe B-spline avec un nombre fixe d'extrema de courbure . . . . .	109
6.2.4	Le gradient du numérateur de la dérivée de la courbure $g$ . . . . .	109
6.3	Le contrôle de la courbure des courbes de Bézier . . . . .	110
6.3.1	Courbe de Bézier quadratique . . . . .	110
6.3.2	Courbe de Bézier cubique . . . . .	111
6.4	Exemples d'applications . . . . .	113
6.5	Discussion . . . . .	116
6.5.1	Optimisation de la fonction de courbure . . . . .	116
6.5.2	Optimisation de la courbe tracée dans le plan . . . . .	118
 CHAPITRE 7 LE CONTRÔLE DES PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES DES SURFACES . . . . .		119
7.1	La convention de couleur pour les points d'extrema de courbure . . . . .	119
7.2	Surface de révolution . . . . .	120
7.2.1	Les transformations des sphères de Lie d'une surface de révolution . .	123

7.3	Les surfaces réglées . . . . .	124
7.4	Les surfaces des canaux . . . . .	126
7.5	L'ellipsoïde . . . . .	129
7.5.1	Les transformations des sphères de Lie d'un ellipsoïde . . . . .	130
7.6	Les surfaces de translation . . . . .	131
7.6.1	Les fronts d'onde et les surfaces de translation . . . . .	131
7.6.2	Les transformations des sphères de Lie . . . . .	132
7.7	Un point ombilic . . . . .	133
7.7.1	Les fronts d'onde et la forme normale d'un point ombilic . . . . .	133
7.7.2	Les directions principales de courbure autour du point ombilic . . . . .	135
7.7.3	Les transformations des sphères de Lie d'un point ombilic . . . . .	136
CHAPITRE 8 CONCLUSION . . . . .		138
8.1	Synthèse des travaux . . . . .	139
8.1.1	Retour sur les objectifs . . . . .	140
8.2	Limitations et améliorations futures . . . . .	142
8.2.1	Retour sur la notion de forme . . . . .	143
RÉFÉRENCES . . . . .		145
ANNEXES . . . . .		150

**LISTE DES TABLEAUX**

Tableau 6.1	Approximation par une courbe B-spline (corde = 1 mètre) . . . . .	115
-------------	---	-----

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Statue Apollon du Belvédère, ©Marie-Lan Nguyen / Wikimedia Commons	4
Figure 4.1	Un point régulier $r$ et un point d'infexion $i$	20
Figure 4.2	Un point régulier $r$ et un point d'extremum de courbure $v$	20
Figure 4.3	Un nombre pair d'intersections	21
Figure 4.4	Un nombre impair d'intersections	21
Figure 4.5	Légère rotation des droites tangentes	21
Figure 4.6	Légère variation des positions et des rayons des cercles osculateurs	21
Figure 4.7	Un point elliptique	28
Figure 4.8	Un point parabolique	28
Figure 4.9	Un point hyperbolique	28
Figure 4.10	Transformation projective	29
Figure 4.11	Point double : $y^2 + x^2(x - 1) = 0$	30
Figure 4.12	Point d'infexion d'un plan sécant et droite asymptotique	31
Figure 4.13	Point de rebroussement	31
Figure 4.14	Droite asymptotique	31
Figure 4.15	Une droite qui traverse la surface en trois points	32
Figure 4.16	Un point godron	33
Figure 4.17	Une surface qui représente les trois premiers termes de la série de Taylor $z = \frac{1}{2!}(f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2)$ et son intersection avec le plan horizontal	35
Figure 4.18	Une surface qui représente les quatre termes suivants $z = \frac{1}{3!}(f_{xxx}(0, 0)x^3 + 3f_{xxy}(0, 0)x^2y + 3f_{xyy}(0, 0)xy^2 + f_{yyy}(0, 0)y^3)$ et son intersection avec le plan horizontal	35
Figure 4.19	Point double : $y^2 + x^3 - x^2 = 0$	37
Figure 4.20	Rebroussement : $y^2 + x^3 = 0$	37
Figure 4.21	Point isolé : $y^2 + x^3 + x^2 = 0$	37
Figure 4.22	Rebroussement : $y^2 + x^3 - x^4 = 0$	37
Figure 4.23	Deux courbes tangentes : $y^2 - x^4 = 0$	37
Figure 4.24	Rebroussement : $y^2 - x^3 - x^4 = 0$	37
Figure 4.25	Rebroussement : $y^2 + x^3 + x^4 = 0$	38
Figure 4.26	Point isolé : $y^2 + x^4 = 0$	38
Figure 4.27	Rebroussement : $y^2 - x^3 + x^4 = 0$	38

Figure 4.28	Deux courbes tangentes : $2x^4/3 + x^2y^2 - 8x^2y + 4xy^2 + 16y^2 = 0$ . . . . .	38
Figure 4.29	Rebroussement de 2 <sup>e</sup> espèce : $x^4 + x^2y^2 - 8x^2y + 4xy^2 + 16y^2 = 0$ . . . . .	38
Figure 4.30	Point isolé : $6x^4/5 + x^2y^2 - 8x^2y + 4xy^2 + 16y^2 = 0$ . . . . .	38
Figure 4.31	Classification des points ombilics . . . . .	39
Figure 4.32	Deux courbes tangentes : $2x^3 - 6xy^2 - x^2 = 0$ . . . . .	40
Figure 4.33	Un point ombilic elliptique : $2x^3 - 6xy^2 = 0$ . . . . .	40
Figure 4.34	Deux courbes tangentes : $2x^3 - 6xy^2 + x^2 = 0$ . . . . .	40
Figure 4.35	Deux courbes tangentes : $-10x^3 - 18xy^2 - 5y^2 = 0$ . . . . .	40
Figure 4.36	Un point ombilic hyperbolique : $-10x^3 - 18xy^2 = 0$ . . . . .	40
Figure 4.37	Deux courbes tangentes : $-10x^3 - 18xy^2 + 5y^2 = 0$ . . . . .	40
Figure 4.38	Inversion d'une droite . . . . .	47
Figure 4.39	Section de la sphère d'inversion, d'un tore avec deux points d'auto-intersection et d'un cône droit avec l'axe de rotation qui permet de générer la sphère, le tore et le cône . . . . .	48
Figure 4.40	Les cercles qui occultent l'ellipse . . . . .	57
Figure 4.41	Faisceau de cercles orientés tangents . . . . .	58
Figure 4.42	Une transformation par rayons réciproques des cercles qui occultent l'ellipse qui produit une forme ovoïde . . . . .	59
Figure 4.43	Une transformation par rayons réciproques des cercles qui occultent l'ellipse qui produit un profil d'aile . . . . .	60
Figure 4.44	Les cercles qui occultent une ellipse avant la transformation par directions réciproques . . . . .	61
Figure 4.45	L'effet de la transformation de l'ellipse par directions réciproques . . . . .	61
Figure 4.46	Un cercle représenté par le point sommet d'un cône dans l'espace $(x, y, r)$ . . . . .	62
Figure 4.47	Projection stéréographique . . . . .	63
Figure 4.48	Plan $(x, r)$ . . . . .	64
Figure 4.49	Quadrique doublement réglée . . . . .	65
Figure 4.50	Projection stéréographique . . . . .	65
Figure 4.51	Projection stéréographique de l'axe des $x$ . . . . .	66
Figure 4.52	Miroir parabolique . . . . .	72
Figure 4.53	Le miroir $m = u^2 - u^4$ et la racine de sa dérivée troisième . . . . .	73
Figure 4.54	Le miroir $m = u^2 - 0.15u^4$ et les zéros de sa dérivée seconde . . . . .	74
Figure 5.1	Solution optimale avec 11 points de contrôle . . . . .	82
Figure 5.2	Solution optimale avec 200 points de contrôle . . . . .	82
Figure 5.3	Solution optimale avec 11 points de contrôle . . . . .	83
Figure 5.4	Solution optimale avec 200 points de contrôle . . . . .	83

Figure 5.5	Solution optimale avec 11 points de contrôle . . . . .	84
Figure 5.6	Solution optimale avec 200 points de contrôle . . . . .	84
Figure 5.7	Solution optimale avec 11 points de contrôle . . . . .	84
Figure 5.8	Solution optimale avec 200 points de contrôle . . . . .	84
Figure 5.9	Solution optimale avec 11 points de contrôle . . . . .	91
Figure 5.10	Solution optimale avec 200 points de contrôle . . . . .	91
Figure 5.11	La fonction à approximer $\gamma(u, v) = \sin(u) \sin(v)$ . . . . .	93
Figure 5.12	La solution optimale pour une grille de 400 points de contrôle . . . . .	93
Figure 5.13	La fonction à approximer $\gamma(u, v) = \cos(u) \sin(v) + 0.5v$ . . . . .	94
Figure 5.14	La solution optimale pour une grille de 400 points de contrôle . . . . .	94
Figure 5.15	La fonction $\gamma(u, v)$ à approximer . . . . .	95
Figure 5.16	La solution optimale pour une grille de 100 points de contrôle . . . . .	95
Figure 5.17	Contrôle des extrema de courbure pour un polynôme de Bernstein de degré 3 où $c_0 = 0$ , $c_1 = x$ , $c_2 = y$ et $c_3 = 0$ . . . . .	101
Figure 5.18	Contrôle des extrema de courbure pour un polynôme de Bernstein de degré 3 où $c_1 = 0$ , $c_2 = x$ , $c_3 = y$ et $c_4 = 0.5$ . . . . .	102
Figure 6.1	Des formes ovales . . . . .	104
Figure 6.2	Des formes ovoïdes . . . . .	105
Figure 6.3	Position du point de contrôle $\mathbf{P}_2$ qui satisfait aux contraintes $g_i > 0$ et qui assure une croissance monotone de la courbure . . . . .	111
Figure 6.4	Les différents cas possibles de signe des $g_i$ et la position du point de contrôle $\mathbf{P}_2$ pour une courbe de Bézier quadratique . . . . .	112
Figure 6.5	Position des points de contrôle $\mathbf{P}_1 = (-1, 0)$ , $\mathbf{P}_2 = (-1/3, y_2)$ , $\mathbf{P}_3 = (1/3, y_3)$ et $\mathbf{P}_4 = (1, 0)$ et différents cas possibles de signe des $g_i$ . . .	112
Figure 6.6	Position des points de contrôle $\mathbf{P}_1 = (-1, 0)$ , $\mathbf{P}_2 = (-6/15, y_2)$ , $\mathbf{P}_3 = (1/3, y_3)$ et $\mathbf{P}_4 = (1, 0)$ et différents cas possibles de signe des $g_i$ . . .	113
Figure 6.7	Archer A18 (lissé) . . . . .	114
Figure 6.8	Althaus AH 81-K 144 W-F Klappe . . . . .	114
Figure 6.9	Chuch Hollinger CH 10-48-13 (lissé) . . . . .	114
Figure 6.10	Bambino 6 (original) . . . . .	115
Figure 6.11	Bambino 6 (lissé) . . . . .	115
Figure 6.12	Bambino 6 (lissé) . . . . .	115
Figure 6.13	Dillner 20-32-C . . . . .	116
Figure 6.14	Eppler E377 ultralight airfoil . . . . .	116
Figure 6.15	Althaus AH 63-K 127 . . . . .	116
Figure 6.16	Agrandissement près du bord de fuite du profil AH 63-K 127 . . . . .	117

Figure 6.17	La fermeture du bord de fuite du profil AH 63-K 127 . . . . .	117
Figure 7.1	Cylindre . . . . .	123
Figure 7.2	Section d'un tore . . . . .	123
Figure 7.3	Cône . . . . .	123
Figure 7.4	Section inférieure d'un tore . . . . .	123
Figure 7.5	Entonnoir angulaire . . . . .	123
Figure 7.6	Corne . . . . .	123
Figure 7.7	Banane . . . . .	124
Figure 7.8	Trompette courbée . . . . .	124
Figure 7.9	Colimaçon . . . . .	124
Figure 7.10	Sphère . . . . .	130
Figure 7.11	Allongement . . . . .	130
Figure 7.12	Aplatissement . . . . .	130
Figure 7.13	Ellipsoïde . . . . .	131
Figure 7.14	Œuf . . . . .	131
Figure 7.15	Souris . . . . .	131
Figure 7.16	Haricot . . . . .	131
Figure 7.17	Galet . . . . .	132
Figure 7.18	Bol . . . . .	132
Figure 7.19	Planche de surf . . . . .	132
Figure 7.20	Sphère . . . . .	133
Figure 7.21	Canal . . . . .	133
Figure 7.22	Point violet . . . . .	133
Figure 7.23	$a = 0, b = 0$ . . . . .	134
Figure 7.24	$a = 1/3, b = 0$ . . . . .	134
Figure 7.25	$a = 1/2, b = 0$ . . . . .	134
Figure 7.26	$a = 1, b = 0$ . . . . .	135
Figure 7.27	$a = 2, b = 0$ . . . . .	135
Figure 7.28	$a = 0, b = 2$ . . . . .	135
Figure 7.29	$a = -1/2, b = 0$ . . . . .	136
Figure 7.30	$a = -1, b = 0$ . . . . .	136
Figure 7.31	$a = -2, b = 0$ . . . . .	136
Figure 7.32	Indice $-1/2, a = 0, b = 0$ . . . . .	137
Figure 7.33	Indice $+1/2, a = -2, b = 0$ . . . . .	137
Figure 7.34	Corolle vue du dessous . . . . .	137
Figure 7.35	Corolle vue de côté . . . . .	137

Figure 7.36	Corolle vue de dessus . . . . .	137
Figure A.1	La loi binomiale pour $p = 0.5$ . . . . .	152
Figure A.2	Base de Bernstein pour $n = 6$ . . . . .	153

**LISTE DES ANNEXES**

Annexe A	Le théorème d'approximation de Weierstrass . . . . .	150
Annexe B	La propriété de diminution des variations du polynôme de Bernstein à un et à deux paramètres . . . . .	156

## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

La conception géométrique assistée par ordinateur est une discipline qui fait le pont entre une recherche plus fondamentale et les applications industrielles. Les courbes et les surfaces y occupent une place importante. Parmi toutes les propriétés des courbes et des surfaces que l'on peut souhaiter contrôler, on retrouve naturellement les propriétés différentielles. Des propriétés qui peuvent caractériser des formes à la fois lisses et d'une grande diversité. Contrôler les inflexions et les extrema de courbure permet d'éliminer des bosses ou des oscillations indésirables. Mais au-delà du débosselage, un tel contrôle permet de se donner un cadre et les degrés de liberté pour obtenir des formes simples du point de vue différentiel.

La littérature sur le sujet est encore peu fournie. Pour progresser, il a fallu s'appuyer sur quelques sujets périphériques riches en ramifications. Du point de vue de la théorie, le point de départ du présent travail est en particulier une découverte faite en 1870 suite à une rencontre historique entre Felix Klein, Sophus Lie et Gaston Darboux. Cette découverte porte le nom de la géométrie des sphères de Lie. Cette géométrie permet de transformer les formes tout en préservant les extrema de courbure des courbes et des surfaces. C'est une propriété importante dans l'optique de manipuler et de transformer les courbes et les surfaces sans introduire de bosse ou d'oscillation.

La géométrie des sphères de Lie représente seulement une première étape. Pour progresser davantage, il faut aller au-delà de ce groupe de transformations qui possède un nombre limité de degrés de liberté en introduisant des espaces de formes avec beaucoup plus de degrés de liberté qui préservent encore les extrema de courbure et qui peuvent préserver également au besoin, les inflexions.

Pour ce faire, nous faisons appel aux B-splines. Une qualité importante d'une B-spline est qu'elle n'oscille jamais plus que son polygone de contrôle. On fait alors bon usage d'une propriété algébrique de la représentation polynomiale. Toutefois, lorsque l'on augmente le nombre de points de contrôle, il devient plus difficile de gérer les oscillations du polygone.

Pour remédier à cette difficulté, ce texte propose d'utiliser cette même propriété de diminution des variations mais à un autre niveau pour contrôler, non pas les propriétés algébriques, mais bien les propriétés différentielles des courbes et des surfaces. On peut alors augmenter le nombre de points de contrôle sans s'exposer à des oscillations arbitraires.

On peut obtenir de cette façon des familles très larges de formes simples du point de vue différentiel. Ceci peut être utilisé afin de s'approcher le plus près possible d'une surface

bosselée avec une surface sans oscillation arbitraire et de cette façon obtenir un débosselage. Ce sont là les ingrédients de cette thèse. Pour en faire la mise en contexte, la prochaine section propose une courte discussion sur la notion de forme. Une discussion qui permettra par la suite de mieux focaliser sur le sujet.

## 1.1 La notion de forme

Distinguer les formes est une question de survie. On peut imaginer que les premiers prédateurs dans l'océan dotés d'une vision primitive avaient alors en leur possession une arme de destruction massive pour chasser une multitude de proies aveugles. Cette théorie est proposée par Andrew Parker (2009). L'œil et le cortex visuel chez le règne animal se seraient développés un peu à la manière d'une course aux armements. Un rôle important d'un cortex visuel primitif était ainsi probablement de distinguer et de reconnaître les formes. On retrouve là, les premiers balbutiements d'une appréciation de la notion de forme.

Si l'on tient à remonter plus loin, on peut rechercher à la manière de D'arcy W. Thompson (1942), les mécanismes qui ont permis à la nature de produire ces formes en premier lieu. Aujourd'hui, Sean B. Carroll (2005) met à jour des éléments supplémentaires fascinants. Soit qu'une séquence d'ADN appelée boîte homéotique vieille de plus de 500 millions d'années permette de contrôler la position et le développement de plusieurs parties du corps, dont les yeux. Une séquence que l'être humain partage avec tout le règne animal. L'évolution a ensuite fait en sorte que l'œil et le cortex visuel deviennent des technologies extrêmement sophistiquées.

Chez l'être humain, de tout temps, la notion de forme a été un objet de fascination. On peut penser d'abord à toute la multitude de formes qu'on retrouve dans le règne végétal et animal. Des formes vivantes, qui grandissent et se renouvellent constamment. Des formes qui se transforment et qui se métamorphosent. Ensuite, la forme des objets inertes qui nous entourent et qu'on peut manipuler et transformer pour arriver à des fins spécifiques. Ces artefacts qui atteignent aujourd'hui un tel niveau de raffinement qu'il est nécessaire de réunir une armée de spécialistes pour en faire la conception. Un degré de raffinement qui s'apparente à l'œil et au cortex visuel.

Avec les spécialisations sont nées les activités humaines de nature plus abstraites. Il est étrange que cette dextérité à reconnaître les formes et concevoir et fabriquer des objets de formes variées, ce qui était au départ essentiel à la survie, se transpose à ces activités plus abstraites. On peut trouver sans difficulté de nombreux exemples d'abstractions reliées de près ou de loin à la notion de forme. Pour donner un exemple, dans la langue française, le verbe

formuler ou le nom formule viennent du mot latin *forma* qui veut dire forme. Lorsqu'on écrit une thèse, il faut déjà formuler une question de recherche. Ensuite, on décrira les concepts développés de façon précise avec des formules mathématiques.

Mais ici, c'est bien la notion de forme avec son sens le plus primitif qui est discutée. Soit quelque chose qu'on peut exprimer à l'aide de courbe dans le plan ou d'une surface dans notre espace à trois dimensions. Quelque chose que l'on peut étudier avec des concepts de géométrie. Exactement la même notion de forme qui occupe une si grande importance en art visuel. C'est étrange qu'on puisse avoir, en particulier en art visuel, un tel rapport émotif avec les formes. On peut attacher par exemple une importance particulière à la symétrie et à la simplicité des formes.

Cette passion pour les formes se transpose au domaine de la recherche scientifique. On trouve facilement des exemples de communautés de recherche qui travaillent sur le sujet. La vision est un sujet intense de recherche. La caméra est un outil aujourd'hui bien développé qui joue le rôle de l'œil. Il reste à développer un cortex visuel artificiel pour permettre à l'ordinateur de distinguer et d'analyser les objets et leurs mouvements. La conception géométrique assistée par ordinateur et l'infographie sont d'autres exemples qui consistent à générer des formes virtuelles à l'écran pour ainsi offrir un support à l'imagination. Dans ce domaine, on peut souligner des acteurs comme Ivan Sutherland et bien d'autres qui ont créé de toute pièce un peu l'équivalent d'une boîte homéotique pour générer toute la richesse et la diversité du monde virtuel auquel nous sommes exposés aujourd'hui.

C'est sans compter la géométrie qui est un sujet immense et qui était déjà développée de façon très impressionnante il y a deux mille ans et que l'on retrouve dans les *Éléments* d'Euclide. Appolonius de Perga vient compléter certains travaux d'Euclide avec son traité sur les sections coniques. Il est ainsi documenté que le lieu des centres de courbure de l'ellipse était déjà connu il y a plus de deux mille ans. Ce lieu des centres de courbure qu'on appelle la développée sera mis à profit par Christiann Huygens (1629-1695) pour étudier les propriétés des courbes. Le concept de la développée sera généralisé et utilisé pour étudier les propriétés des surfaces par Gaspard Monge (1746-1818). Des travaux qui ont des liens étroits avec ceux de Leonhard Euler et de Carl Friedrich Gauss.

Il faut encore faire le lien entre la notion de forme, qu'on peut apprécier avec le sens de la vue, et les propriétés différentielles des courbes et des surfaces.

Sur une courbe, les régions avec une courbure positive et négative sont séparées par des points d'inflexion. Sur une surface, les régions avec une courbure gaussienne positive et négative sont séparées par des courbes d'inflexions plus communément appelées courbes paraboliques. La page 197 du livre *Geometry and Imagination* de Hilbert and Cohn-Vossen (1932) a inspiré

les travaux de Jan J. Koenderink (1990). On retrouve à cette page les courbes paraboliques tracées sur un buste. En note de bas de page, on retrouve la remarque suivante :

Felix Klein (1849-1925) a utilisé les courbes paraboliques pour une investigation curieuse. Pour tester son hypothèse que la beauté artistique d'un visage était basée sur certaines relations mathématiques, il a fait tracer les courbes paraboliques sur la statue Apollon du Belvédère réputée pour son haut degré de beauté classique mise en valeur par ses traits. Mais ces courbes ne montrent aucune forme simple particulière, et ne suivent, non plus, aucune loi générale qui peut être discernée.



Figure 1.1 Statue Apollon du Belvédère, ©Marie-Lan Nguyen / Wikimedia Commons

La photo, que l'on retrouve dans le livre, permet d'abord d'illustrer les courbes paraboliques sur une surface plus complexe qu'une surface élémentaire. Ensuite, on peut interpréter la note de bas de page comme un avertissement pour ceux qui pourraient croire que d'établir le lien entre les propriétés différentielles des surfaces et l'esthétique des surfaces serait un exercice simple. Ce qui est intéressant c'est que Jan J. Koenderink (1990) s'est donné comme mission de donner raison à Felix Klein. Le lien n'est peut-être pas simple à faire, mais ce

n'est pas une raison de baisser les bras. À tout le moins, il est possible d'utiliser les propriétés différentielles des surfaces pour mieux les comprendre.

Jan J. Koenderink a côtoyé Ian R. Porteous (2001) auteur du livre *GEOMETRIC DIFFERENTIATION, For the intelligence of Curves and Surfaces*. On peut dire que la théorie des singularités s'inscrit dans une continuité des travaux de Christiann Huygens et Gaspard Monge. Le livre de Porteous est en quelque sorte un retour d'ascenseur à la théorie des propriétés différentielles des courbes et des surfaces. En particulier, le livre de Porteous présente la théorie des lignes d'extremums de courbure portées par les surfaces. Peter Giblin, un proche collègue de Ian R. Porteous est un coauteur d'un ouvrage sur la reconnaissance des visages. Ce dernier livre de Hallinan et al. (1999) ainsi que les livres de Koenderink et de Porteous forment de façon complémentaire une belle introduction au sujet. La notion d'extremums de courbure est également utile à la génération de maillages. Un raffinement et un alignement du maillage avec les extremums de courbure permettent de mieux approximer une forme. On peut lire sur ce sujet la thèse de Boris Clémenton (2008).

On peut ajouter que Ian R. Porteous a traduit du russe à l'anglais quelques écrits de Vladimir I. Arnold (1937-2010), dont le livre *Singularities of Differential Maps Volume 1*. Sur la jaquette de ce dernier livre, on peut lire que la théorie des singularités est une extension de grande envergure de l'étude des maximums et minimums des fonctions différentiables avec des implications pour de nombreux domaines des mathématiques, de l'ingénierie (la théorie des catastrophes et la théorie des bifurcations), et de la science.

Les travaux de Vladimir I. Arnold sont certainement une inspiration pour cette thèse. On se limite par contre ici à étudier et contrôler les points singuliers portés par les courbes dans le plan euclidien et les surfaces dans l'espace euclidien à trois dimensions.

Après tout ce parcours et toute cette passion pour les formes, il semble qu'il appartient au domaine de la conception géométrique assistée par ordinateur de boucler la boucle et d'appliquer ces connaissances sur les formes. Une contribution qui consiste à combiner de façon judicieuse différentes idées rigoureusement développées par les mathématiciens.

Le contrôle des propriétés différentielles des courbes et des surfaces B-spline en particulier est un enjeu important. La solution n'est pas si évidente. Comme toute histoire où il y a une impasse, il faut des idées nouvelles.

## 1.2 Plan de la thèse

Le deuxième chapitre fait une revue de la littérature sur les B-splines et l'optimisation. Un petit historique des B-splines est suivi d'une discussion sur la propriété de diminution des

variations. Ensuite, on relève les travaux reliés au contrôle des inflexions et des extrema de courbure des B-splines. Une courbe tel un cercle ou une surface telle une sphère sont convexes et ne portent pas de points d'infexion. Il est ainsi pertinent de faire la revue des travaux sur le sujet du contrôle de la convexité des courbes et des surfaces. Les travaux concernant le contrôle des extrema de courbure sont également soulignés. Suis une discussion sur quelques aspects importants de l'optimisation qui sont pertinents pour les présents travaux. La notion d'optimisation convexe est revue et suivie d'une introduction intuitive à la méthode du point intérieur. Le lien avec le contrôle des racines et des points critiques d'une fonction est également établi.

Le troisième chapitre permet d'énoncer la question de recherche et de préciser les objectifs.

Le quatrième chapitre propose une nouvelle perspective sur la géométrie différentielle classique des courbes et des surfaces. Il est par sa nature un hybride entre un chapitre de revue de littérature et un chapitre de contribution. Les notions d'inflexions et d'extrema de courbure sur les courbes dans le plan sont d'abord présentées d'une façon visuelle et par la suite d'une façon concise et formelle. Ensuite, le groupe des transformations de la géométrie projective qui préserve les inflexions et le groupe des transformations de la géométrie des sphères de Lie qui préserve les extrema de courbure sont revus. Ce sont des groupes avec une représentation matricielle, soit des matrices qui préservent leurs structures lorsqu'on les multiplie entre elles. Ce chapitre se termine avec quelques notions d'optique géométrique qui permettent de relier de façon étroite les propriétés différentielles des fonctions à une variable avec celles des courbes dans le plan ainsi que les propriétés différentielles des fonctions à deux variables avec celles des surfaces dans l'espace.

Le cinquième chapitre porte sur le contrôle des propriétés différentielles des fonctions à une et deux variables. Les contributions de ce chapitre sont des préalables pour les chapitres suivants.

Le sixième chapitre porte sur le contrôle des propriétés différentielles des courbes dans le plan. On peut alors procéder à une optimisation avec des contraintes sur la fonction de courbure. Les problèmes auxquels on fait face ne sont alors plus nécessairement convexes.

Le septième chapitre porte sur le contrôle des propriétés différentielles des surfaces dans l'espace. Le groupe de transformations de la géométrie projective et des sphères de Lie permettent de générer des espaces de formes qui préservent les inflexions ou les extrema de courbure. Mais au-delà de ces groupes de transformations, il existe des espaces de formes beaucoup plus larges qui préservent ces propriétés différentielles. On illustre ceci d'abord avec les surfaces de révolution et l'on traite par la suite de surfaces de plus en plus générales.

Le huitième chapitre est la conclusion. On y fait la synthèse des travaux pour bien mettre en évidence les contributions sur le contrôle des propriétés différentielles. On y relève également certaines limitations de la méthode et différentes avenues encore à explorer.

Suivent deux annexes où l'on peut retrouver les preuves des théorèmes sur lesquels on s'appuie pour contrôler les zéros d'une fonction à une ou deux variables.

## CHAPITRE 2 UNE REVUE DE LITTÉRATURE SUR LES B-SPLINES ET L'OPTIMISATION

Ce chapitre fait une revue de littérature sur les B-splines et l'optimisation. Le sujet de la géométrie différentielle est traité pour sa part en détail au chapitre 4 qui propose une nouvelle perspective sur la géométrie différentielle classique des courbes et des surfaces. Les deux annexes qui contiennent des démonstrations formelles viennent également compléter la présente revue de littérature.

### 2.1 Les B-splines

Sergei Natanovich Bernstein (1880-1968) a introduit le polynôme qui porte son nom pour donner une preuve constructive du théorème d'approximation de Weiertrass. Selon ce théorème, toute fonction continue peut être approchée uniformément aussi près que l'on veut par une fonction polynomiale. Une version qui se veut accessible de la preuve est présentée à l'annexe A. L'article de Rida T. Farouki (2012) est également une belle introduction à la base polynomiale de Bernstein.

Les B-splines généralisent la base polynomiale de Bernstein. Le mathématicien Isaac J. Schoenberg (1903-1990), qu'on peut appeler le père des splines, a fait émerger la notion de fonction B-spline de l'espace des fonctions polynomiales par morceaux. Carl de Boor a rendu le calcul numérique des B-splines stable, simple et efficace et il en a fait la promotion.

Les courbes de Bézier sont décrites pour la première fois en 1962 par l'ingénieur Pierre Étienne Bézier (1910-1999). On découvrira plus tard que ces courbes peuvent être exprimées avec la base polynomiale de Bernstein. Paul de Casteljau le savait déjà, mais n'avait pas l'autorisation de publier ses résultats.

C'est Richard F. Riesenfeld qui réalise qu'on peut ainsi généraliser les courbes de Bézier en utilisant comme base les B-splines. C'est le sujet de la thèse de Richard F. Riesenfeld (1973). L'article de Gerald E. Farin (2002a) donne un historique plus complet du développement des courbes et des surfaces B-splines.

#### 2.1.1 La propriété de diminution des variations

La propriété de diminution des variations d'une courbe B-spline fait référence au fait que la courbe n'oscille jamais plus que son polygone de contrôle. Plus précisément, le nombre d'intersections entre une droite et une courbe B-spline n'est jamais plus grand que le nombre

d'intersections entre cette droite et son polygone de contrôle.

Pour s'en convaincre, il faut d'abord savoir qu'on peut générer une courbe B-spline à l'aide d'un processus qui consiste à couper de façon itérative les coins de son polygone de contrôle. Soit en raffinant le vecteur nodal ou en augmentant le degré de la représentation polynomiale. Il faut ensuite montrer qu'un processus qui consiste à couper les coins d'un polygone possède la propriété de diminution des variations.

Couper le coin d'un polygone consiste à lui enlever un triangle. On peut oublier pour un moment le polygone et se concentrer sur ce triangle. Si une droite coupe un côté du triangle alors elle doit couper un autre côté du triangle. On peut imaginer que la droite est le trajet d'un point. Un point qui entre à l'intérieur du triangle doit bien ressortir quelque part et donc traverser un autre côté.

On peut maintenant retourner au polygone auquel on a enlevé un coin et qui a gagné ainsi un nouveau côté. Si ce côté est traversé par une droite, alors nécessairement cette droite devait traverser un autre côté du triangle qui a été coupé. Cet autre côté du triangle appartenait à l'ancien polygone. Ainsi l'ancien polygone possède au moins le même nombre d'intersections avec une droite que le nouveau polygone amputé d'un triangle.

Ainsi le fait que la courbe B-spline peut s'obtenir à partir d'un processus qui consiste à couper les coins du polygone de contrôle prouve d'une manière géométrique la propriété de diminution des variations des courbes B-splines. Soit que le nombre d'intersections entre une droite et la courbe est plus petit ou égal au nombre d'intersections entre la droite et le polygone de contrôle.

On peut lire sur le sujet par exemple le livre de Goldman (2002).

Une preuve algébrique de la propriété de diminution des variations du polynôme de Bernstein est présentée à l'annexe B. Celle-ci est plus près des travaux originaux d'Isaac J. Schoenberg et permet de traiter également le cas des fonctions de Bernstein à deux variables.

### 2.1.2 Les courbes et les surfaces convexes

On peut maintenant prouver une autre propriété importante, qui découle de la précédente, qu'une courbe B-spline qui possède un polygone de contrôle convexe est convexe. La preuve très simple est tirée du livre de Prautzsch et al. (2002).

Un polygone convexe possède au maximum deux intersections avec toutes les droites du plan qui le traverse. Ainsi par la propriété de diminution des variations, si le polygone de contrôle est convexe alors la courbe B-spline est convexe. La réciproque n'est pas nécessairement vraie. Un polygone non convexe peut produire une courbe B-spline convexe.

L'extension de cette propriété aux surfaces est le sujet de quelques articles. Pour le cas d'une surface polynomiale avec une représentation de Bernstein-Bézier en utilisant une base triangulaire, Chang and Davis (1984) observent que la convexité du polyèdre que forme le maillage de contrôle, fait lui-même de triangles, implique une surface convexe. La condition équivalente pour une représentation de Bernstein-Bézier avec un produit tensoriel implique que le maillage de contrôle, qui est fait de quadrilatères, forme un polyèdre convexe. Cette condition proscrit la torsion des éléments de maillage. On ne peut alors que modéliser des surfaces de translation  $S(u, v) = f(u) + g(v)$ . Floater (1994) donne une condition de convexité plus faible qui mène à un système d'inégalité quadratique. Jüttler (1998) présente des techniques d'ajustement de surfaces convexes qui s'appliquent aux surfaces de Bézier. Ensuite Hoschek and Jüttler (1999) discutent l'extension aux surfaces B-splines. Kakkis and Koras (1998) présentent une relation entre un point de la surface avec une courbure gaussienne nulle et la position d'un point de contrôle de la B-spline. Le point de contrôle doit-être situé sur une quadrique. Koras and Kakkis (1999) présentent également des conditions nécessaires pour obtenir une surface B-spline convexe.

Ces travaux sont des avancées importantes et il faut maintenant trouver les bonnes abstractions pour généraliser ces travaux et progresser vers des méthodes plus générales pour contrôler les surfaces.

### 2.1.3 Le contrôle des points d'extremums de courbure portés par les courbes B-splines

Une courbe qui présente une variation monotone de la courbure est une spirale. Ensuite, deux sections d'une courbe, une première avec une croissance monotone de la courbure suivie d'une deuxième avec une décroissance monotone, sont séparées par un point d'extremum de courbure. Selon Gerald E. Farin (2002b) une courbe est de bonne qualité (en anglais : fair) si sa fonction de courbure est continue et consiste seulement en un faible nombre de segments monotones. Selon cette définition, posséder un faible nombre d'extremums de courbure est un prérequis.

Alan K. Jones (1994) observe le fait que la courbure possède une variation monotone si le numérateur de la dérivée de la courbure ne change pas de signe. On peut ainsi faire abstraction du dénominateur puisqu'il est toujours de signe positif. Il remarque également que ce numérateur peut-être exprimé à l'aide d'une fonction B-spline. Alors, par la propriété de diminution des variations, contrôler les coefficients de cette fonction B-spline permet de contrôler le nombre d'extremums de courbure de la courbe.

Ceci est possible parce que la multiplication de deux B-splines peut s'exprimer avec une B-

spline et la dérivée d'une B-spline peut s'exprimer avec une B-spline. Piegl and Tiller (1997) observent ce fait et présentent les algorithmes qui permettent de tels calculs algébriques et différentiels. Chen et al. (2006) mettent en œuvre le calcul algébrique et différentiel pour obtenir les propriétés différentielles des courbes B-splines rationnelles et des surfaces réglées.

#### 2.1.4 Le tracé des inflexions et des extremums de courbure portés par les surfaces B-splines

Musuvathy et al. (2011) obtiennent une méthode qui permet de tracer les lignes d'extremums de courbure sur une surface B-spline en bénéficiant du calcul algébrique et différentiel qu'on peut appliquer directement aux B-splines. L'article de Hahmann et al. (2008) fait une revue plus détaillée du sujet de l'affichage des propriétés différentielles des formes.

## 2.2 L'optimisation

Cette section définit la notion d'optimisation convexe. Suit une introduction intuitive à la méthode du point intérieur qui est à la fois suffisamment simple pour être décrite en quelques pages et suffisamment puissante pour résoudre l'ensemble des problèmes qui servent à illustrer les idées importantes de ce texte. On donne ensuite un aperçu du contrôle des propriétés différentielles d'une fonction.

### 2.2.1 L'optimisation convexe

Le livre *Convex Optimization* de Boyd and Vandenberghe (2004) est une belle référence sur le sujet.

On considère un problème de la forme

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimiser}} && f_0(x) \\ & \text{sous contraintes} && f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Le vecteur  $x = (x_1, \dots, x_n)$  contient les variables indépendantes qu'on doit optimiser pour minimiser la fonction coût  $f_0(x)$ . Les fonctions  $f_i(x)$  sont les contraintes qui permettent de définir un ensemble admissible. Le problème consiste à trouver un candidat  $x^*$  tel que  $f_0(x^*) \leq f_0(x)$  pour tout  $x$  faisant partie de l'ensemble admissible.

S'il est possible d'exprimer le problème seulement avec des fonctions  $f_i(x)$ ,  $i = 0, \dots, m$  qui satisfont à l'inégalité

$$f_i(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f_i(x) + \beta f_i(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

où  $\alpha + \beta = 1$  et  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ , alors le problème d'optimisation est convexe.

Si la fonction convexe  $f(x)$  est continûment différentiable, alors la fonction  $f(x)$  se situe au-dessus de toutes ses tangentes  $f(x) \geq f(y) + \nabla f(y)(x - y)$ . Si la fonction convexe  $f(x)$  possède une dérivée seconde, alors la matrice hessienne de la fonction  $\nabla^2 f(x)$  est une matrice symétrique avec toutes ses valeurs propres non négatives et donc une matrice semi-définie positive pour laquelle  $v^T \nabla^2 f(x) v \geq 0$  pour tout vecteur  $v$ . Par exemple, pour une fonction à une seule variable avec une dérivée seconde qui existe partout, la dérivée seconde d'une fonction convexe doit alors être non négative sur tout son domaine.

### 2.2.2 La méthode du point intérieur

Soit d'abord un ensemble admissible convexe. On peut imaginer que cet ensemble est l'intérieur d'un polyèdre convexe ou encore d'un ballon sphérique. Le vecteur  $x$  est la position d'un point  $A$  à l'intérieur de cet ensemble admissible. Pour contraindre le point à rester à l'intérieur, on utilise une fonction barrière qui agit comme un champ de force. Dans le cas où l'ensemble admissible serait une sphère, les forces sont à l'équilibre au centre de la sphère et repoussent le point  $A$  vers ce centre. Plus le point s'approche de la frontière plus la force de répulsion augmente pour tendre vers l'infini à la frontière et former un mur infranchissable.

Ensuite, soit une fonction coût convexe. On peut imaginer un champ de force cette fois attractif généré par un point  $B$  fixe, situé à l'extérieur de l'ensemble admissible. Le problème consiste à positionner le point  $A$  le plus près possible de  $B$  afin de minimiser la fonction coût tout en restant à l'intérieur de l'ensemble admissible. Pour y arriver, on augmente graduellement le champ de force attractif en multipliant ce champ de force par une constante de plus en plus grande. Alors le point  $A$  initialement au centre de l'ensemble admissible va se diriger graduellement vers une position optimale de plus en plus près de la frontière, et ce toujours en demeurant à l'intérieur du domaine admissible d'où le nom de la méthode du point intérieur.

Pour les problèmes d'optimisations strictement convexes traités au chapitre 5, cet algorithme permet de converger rapidement vers l'optimum global. L'algorithme utilisé est tiré du livre *Convex Optimization* de Boyd and Vandenberghe (2004).

Certains problèmes d'optimisation traités dans ce texte ont une fonction coût convexe, mais des contraintes  $f_i(x)$  non convexes. On peut alors imaginer par exemple un ensemble admissible qui aurait l'allure d'une banane dans l'espace. Cet ensemble est non convexe, puisqu'on

peut relier deux points à l'intérieur de l'ensemble par une ligne qui n'est pas nécessairement complètement à l'intérieur de l'ensemble. Le champ de force généré par la frontière va repousser et positionner le point  $A$  quelque part au centre de l'ensemble admissible. En augmentant graduellement l'effet de la force d'attraction du point  $B$  situé à l'extérieur, le point  $A$  va suivre une certaine trajectoire et s'approcher de plus en plus de la frontière. La solution obtenue peut alors dépendre de la position initiale du point  $A$ . Dans ces circonstances, à défaut d'obtenir nécessairement un optimum global, la méthode du point intérieur permet de générer, lorsqu'elle converge, une solution intéressante avec une garantie sur le respect des contraintes. Au besoin il est possible de faire varier la position initiale  $x$  si c'est nécessaire pour explorer différentes solutions. Sur le sujet de la méthode du point intérieur pour des problèmes non convexes, on peut lire par exemple Nocedal and Wright (2006).

### 2.2.3 Un aperçu du contrôle des propriétés différentielles d'une fonction

Voici d'abord un exemple très simple. Soit le problème d'approximer de la meilleure façon possible une fonction  $\gamma(x_i)$  discrète qui consiste en  $m$  points  $(x_i, \gamma_i)$  avec une fonction  $f(x_i)$  également discrète et qui possède également  $m$  points  $(x_i, f_i)$ . On impose d'abord seulement des contraintes sur les changements de signes de la fonction  $f(x_i)$ .

On peut écrire le problème d'optimisation de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \underset{f_i}{\text{minimiser}} && \sum_{i=1}^m (f_i - \gamma_i)^2 \\ & \text{soumis à} && f_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Supposons que  $m = 3$  et que les  $\gamma_i$  soient  $\gamma_1 = 3$ ,  $\gamma_2 = -1$  et  $\gamma_3 = 1$ . La solution du problème sous contrainte est alors évidemment  $f_1 = 3$ ,  $f_2 = 0$  et  $f_3 = 1$ .

La fonction discrète  $f(x_i)$  possède alors seulement trois degrés de liberté. Soit  $f_1 = X$ ,  $f_2 = Y$  et  $f_3 = Z$ . On a donc dans ce cas un espace de fonctions à trois dimensions. Les plans  $X = 0$ ,  $Y = 0$  et  $Z = 0$  découpent l'espace total en huit sous-espaces. Les valeurs admissibles pour les  $f(x_i)$  correspondent ainsi à 1/8 de l'espace total.

Dans ce cas précis, l'espace est convexe avec un seul sommet. Le sommet est le point  $X = 0$ ,  $Y = 0$  et  $Z = 0$ . Un tel espace convexe avec un seul sommet est appelé, en optimisation, un cône.

Un espace admissible convexe est une propriété très utile en optimisation. Si l'espace admissible est strictement convexe et si la fonction à optimiser est strictement convexe alors la solution est unique et les algorithmes d'optimisations convexes sont très efficaces pour

trouver cette solution.

Que se passe-t-il alors si l'on inverse l'une des trois contraintes ? Disons que  $f_3 \geq 0$  devienne  $f_3 \leq 0$ . Il est simple de visualiser que l'espace reste un espace convexe. C'est simplement un octant différent qui occupe à son tour un huitième de l'espace total.

Ensuite si l'on passe à une fonction continue, alors on obtient un espace avec une infinité de dimensions. La notion de cône tient toujours dans cet espace avec une infinité de dimensions.

Mais avec la fonction strictement convexe à minimiser  $\int(f(x) - \gamma(x))^2 dx$  et la contrainte convexe  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x$  la solution est évidente. Il suffit que la fonction  $f(x) = 0$  lorsque  $\gamma(x) < 0$  et de laisser les autres valeurs de  $f(x) = \gamma(x)$  tel quel.

Maintenant que se passe-t-il si on impose que  $f(x) \geq 0$  sur l'intervalle  $[0, 0.5]$  et que  $f(x) \leq 0$  sur l'intervalle  $[0.5, 1]$ . L'espace reste convexe pour la même raison que l'exemple du début à 3 dimensions lorsque l'on a inversé une contrainte.

Ensuite, les points critiques d'une fonction correspondent aux valeurs de  $x$  pour lesquelles la dérivée de la fonction  $f_x(x) = 0$ . On peut maintenant approximer de la meilleure façon possible une fonction  $\gamma(x)$  donnée par une fonction  $f(x)$  avec des contraintes sur ses dérivées. Par exemple, on peut imposer que la fonction  $f(x)$  présente une croissance monotone et donc que sa dérivée  $f_x(x) \geq 0$ .

L'espace admissible est encore un espace convexe. On peut le visualiser de la façon suivante. Retournons à l'exemple  $f_1 = X$ ,  $f_2 = Y$  et  $f_3 = Z$ . Disons qu'on souhaite imposer une croissance monotone. Alors il faut que  $Y - X \geq 0$  et  $Z - Y \geq 0$ . Les équations  $Y - Z = 0$  et  $Z - Y = 0$  sont deux plans dans l'espace  $(X, Y, Z)$  qui passent par  $(0, 0, 0)$ . Ces deux plans produisent un espace admissible convexe.

Maintenant qu'on peut visualiser les choses, on peut en faire la preuve. Le critère pour établir qu'un ensemble est convexe est le suivant. Soit deux fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$ . Supposons que  $f_t(t) \geq 0$  et que  $g_t(t) \geq 0$ . Alors il faut que la fonction  $h(t) = \alpha f(t) + (1 - \alpha)g(t)$  où  $\alpha = [0, 1]$  possède nécessairement une dérivée  $h_t(t) \geq 0$ . Donc toutes les fonctions doivent être admissibles sur la ligne droite qui relie deux fonctions admissibles dans l'espace des fonctions. C'est bel et bien le cas puisque :

$$h_t(t) = \alpha f_t(t) + (1 - \alpha)g_t(t) \quad (2.2)$$

et que dans cette expression on ne fait que multiplier et additionner des nombres plus grands ou égaux à zéro.

On peut produire des espaces admissibles convexes avec des contraintes sur la fonction elle-

même, la dérivée première, seconde et ainsi de suite. De plus, on peut imposer des contraintes différentes sur différentes sections d'une courbe. On peut imposer par exemple que la pente ait une croissance monotone sur une section de la courbe et une décroissance monotone sur une autre section. On peut à la fois imposer une contrainte sur la dérivée première et seconde sur une même section de la courbe. L'espace admissible sera toujours convexe. Il n'est pas garanti pour autant qu'une solution existe, l'ensemble peut-être vide. Par exemple si l'on impose à la fois que  $f_t(t) \geq 0$  et que  $f(1) = 1$  et que  $f(2) = 0$  alors il n'y a pas de solution. Ainsi, si la solution existe elle sera unique, mais il faut encore qu'elle existe. Mais sinon, toutes les combinaisons sont permises.

On peut trouver un exemple d'interpolation linéaire par morceaux avec la contrainte que la fonction obtenue soit convexe dans le livre de Boyd and Vandenberghe (2004) à la page 339. Ensuite, la notion de norme convexe pour un espace de fonctions est discutée dans le livre de Theodore J. Rivlin (1969).

## CHAPITRE 3 QUESTION DE RECHERCHE ET OBJECTIFS

Cette recherche vise la conception géométrique assistée par ordinateur de formes libres. Le but est de développer de nouveaux algorithmes et des idées nouvelles qui pourraient être incorporés à différents outils spécialisés de conception. Des algorithmes pour donner à un concepteur les moyens de manipuler et de transformer les formes de telle sorte qu'elles préservent les caractéristiques qu'il recherche, et ce, avec une aisance nouvelle.

En géométrie différentielle, les inflexions et les extrema de courbure sont des concepts importants et bien étudiés qui sont utiles pour analyser les formes. Mais peut-on franchir le pas non trivial entre l'analyse et la génération de nouvelles formes ?

### Question de recherche

*Est-il possible de contrôler les inflexions et les extrema de courbure des courbes et des surfaces au moment de la création et de la conception de forme ?*

### Sous-question

*Est-il possible de contrôler directement la position paramétrique de ces marqueurs différentiels ?*

### Hypothèse

*Le contrôle des points critiques permet de produire des formes flexibles, simples et lisses.*

Une hypothèse qui sera validée tout au long du texte.

Il existe plusieurs méthodes pour générer des espaces de formes avec peu d'oscillations. Un exemple est en particulier l'utilisation d'une courbe ou d'une surface B-spline, rationnelle ou non, avec peu de points de contrôle. Alors à première vue les B-splines permettent de contrôler assez bien les propriétés différentielles des courbes. Il faut par contre réaliser qu'une méthode basée sur des B-splines avec un nombre réduit de points de contrôle n'offre que peu de degrés de liberté. Si pour certaines applications ces degrés de liberté sont suffisants, pour d'autres, un plus haut degré de raffinement est nécessaire. Alors il faut inévitablement augmenter le nombre de degrés de liberté. Avec l'exemple des B-splines, la solution semble simple. Il suffit d'augmenter le nombre de points de contrôle en raffinant le vecteur nodal. Mais alors, ce qui est gagné en terme de degrés de liberté est perdu du côté du contrôle des propriétés différentielles.

Ensuite, il existe plusieurs méthodes de lissage. Le principe consiste habituellement à minimiser une fonction d'énergie en utilisant des méthodes inspirées de la spline originale, soit

une latte souple en bois utilisée pour tracer à la main des courbes lisses. Ce sont des méthodes très efficaces qui permettent de générer des formes esthétiques. Mais encore une fois, le nombre de degrés de liberté est limité. Minimiser ces fonctions d'énergie fait tendre toutes les formes vers des droites ou des cercles. Sur le lissage des courbes et des surfaces on peut lire par exemple le recueil d'articles édité par Sapidis (1994) ou le très bel article de Hildebrandt and Polthier (2004).

Le cœur du travail consiste à développer des algorithmes qui peuvent s'appliquer de façon générale pour contrôler les inflexions et les extrema de courbure que portent les B-splines. L'utilisation des B-splines est aujourd'hui très répandue et le contrôle de leurs propriétés différentielles est un enjeu important. Un tel contrôle pourrait permettre en particulier d'étudier et d'exploiter des ensembles de formes avec des propriétés différentielles spécifiques. Ceci nous mène à la formulation des objectifs de recherche suivants :

## Objectifs

1. *Générer des espaces de formes qui préservent les inflexions et les extrema de courbure.*
2. *Éliminer des inflexions et des extrema de courbure de façon sélective, et ce en restant aussi proche que possible d'une géométrie initiale.*
3. *Manipuler une forme générale sans introduire de nouvelles inflexions ou de nouveaux extrema de courbure.*

Après avoir obtenu de larges espaces de formes qui préservent les propriétés différentielles, la problématique devient alors la suivante. Comment permettre à un concepteur de naviguer dans ces espaces ? Les deuxième et troisième objectifs spécifiques visent une telle problématique.

## CHAPITRE 4 UNE NOUVELLE PERSPECTIVE SUR LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CLASSIQUE DES COURBES ET DES SURFACES

La géométrie différentielle des courbes et des surfaces est un sujet qui possède une histoire très riche. Ce chapitre propose une relecture de cette histoire sous une nouvelle perspective. Soit la perspective du contrôle des inflexions et des extrema de courbure qui est au cœur de ce travail. Ceci permet d'établir différents liens entre des notions importantes et bien connues, mais distribuées dans une liste assez longue de références qui sont fournies tout au long du chapitre.

Lors d'une recherche plus fondamentale, il est normal de privilégier des définitions plus abstraites avec une portée plus large. Par contre, pour une recherche plus appliquée ou dans un texte destiné aux non-initiés du domaine, il peut être intéressant de rattacher d'abord à chacune des définitions des exemples concrets. Ce chapitre adopte cette dernière approche.

Les points d'infexion et d'extrema de courbure des courbes sont d'abord présentés de façon visuelle et intuitive et ensuite d'une façon plus formelle. Ces inflexions et ces extrema de courbure sont des exemples de points singuliers que l'on peut retrouver sur une courbe générique. La généralisation de ces notions permet d'énumérer l'ensemble des points d'infexion et d'extrema de courbure que l'on peut trouver cette fois sur une surface générique.

Ces surfaces génériques représentent la règle générale. Suivent des exceptions importantes, soit les surfaces doublement réglées et les cyclides de Dupin. Ce sont les surfaces que l'on peut considérer comme les plus symétriques et les plus simples du point de vue des inflexions et des extrema de courbure. C'est la présentation au préalable des surfaces génériques qui permet alors de bien apprécier les particularités de ces surfaces.

Ensuite, il existe un lien étroit entre l'ensemble des cyclides de Dupin et les transformations des sphères de Lie. De même, il existe un lien étroit entre l'ensemble des quadriques doublement réglées et les transformations projectives. Ces surfaces les plus simples sont les exemples concrets auxquels on peut se rattacher et avec lesquels on peut illustrer l'intérêt de ces groupes de transformations, toujours sous la perspective du contrôle des inflexions et des extrema de courbure.

Cette première introduction aux groupes de transformations est un préambule à une définition plus complète et plus formelle de la notion plus générale de groupes des transformations linéaires. La familiarité avec la notion de matrice permet alors de démystifier assez rapidement cette notion de groupe de transformations linéaires. Les groupes de transformations projec-

tives et des sphères de Lie deviennent alors les exemples concrets qui permettent d'apprécier la notion plus générale de groupe de transformations linéaires.

Le chapitre termine avec la technique du miroir qui permet entre autres de relier les cyclides de Dupin aux fonctions quadratiques et ainsi établir un lien entre les propriétés différentielles des fonctions et les propriétés différentielles des surfaces.

Cette perspective sur la géométrie différentielle est originale et parfois surprenante. Mais au-delà de toute chose, nous l'espérons efficace.

## 4.1 La géométrie différentielle

David Hilbert et Stephan Cohn-Vossen introduisent la géométrie différentielle dans leur livre GEOMETRY AND THE IMAGINATION de la façon suivante.

La géométrie différentielle consiste à étudier les courbes et les surfaces seulement au voisinage immédiat d'un de ses points. Pour ce faire, on compare le voisinage d'un tel point à une forme qui est aussi simple que possible comme ; une droite, un plan, un cercle ou une sphère et qui approxime le voisinage considéré de façon la plus proche possible.

### 4.1.1 La géométrie différentielle d'une courbe dans le plan

Soit une courbe générique dans le plan qui contient des points réguliers et comme points singuliers des points d'inflexion et des points d'extremums de courbure.

La droite tangente en un point d'une courbe permet de distinguer un point régulier d'un point d'inflexion. Les points du voisinage immédiat d'un point régulier sont situés du même côté de la tangente. Par contre, à un point d'inflexion, les points qui le précèdent sont situés d'un côté de la droite tangente alors que les points qui lui succèdent sont situés de l'autre côté (voir figure 4.1). À ce point spécifique, la courbe traverse la droite tangente et possède un degré de contact plus élevé qu'à un point régulier. On définira plus bas de façon plus formelle, le degré de contact entre deux courbes.

Le cercle qui osculte la courbe permet de distinguer à son tour un point régulier d'un point d'extremum de courbure. Ce sont maintenant les points au voisinage d'un point régulier qui traverse le cercle et les points au voisinage d'un point d'extremum de courbure qui ne traversent pas le cercle qui osculte la courbe. Un point d'extremum de courbure est appelé aussi vertex en géométrie différentielle. Les points du voisinage d'un vertex  $v$  sont alors situés du même côté, soit à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle (voir figure 4.2). En ce point, la

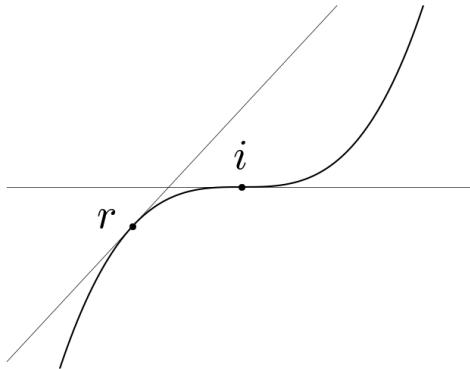


Figure 4.1 Un point régulier  $r$  et un point d'inflexion  $i$

courbe aura un degré de contact plus élevé avec le cercle.

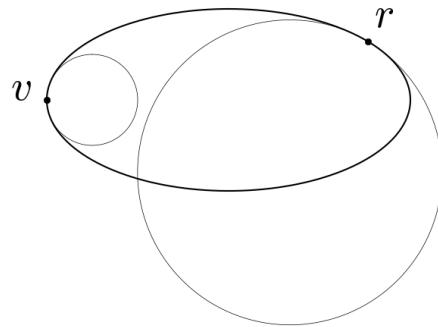


Figure 4.2 Un point régulier  $r$  et un point d'extremum de courbure  $v$

La règle suivante permet de progresser dans la compréhension de ces dernières observations. Deux courbes quelconques ayant un nombre pair de points d'intersection ont les points qui précèdent la première intersection et qui succèdent la dernière intersection du même côté par rapport à l'autre courbe (voir figure 4.3). Alors que deux courbes avec un nombre impair de points d'intersection se traversent mutuellement (voir figure 4.4).

Une droite coupant une courbe en deux points est une droite sécante. Si une droite sécante tourne par rapport à un point d'intersection de telle façon que le deuxième point d'intersection se rapproche du premier, alors la droite sécante s'approche d'une position définie. La droite en cette position est appelée droite tangente à la courbe. À un point régulier, on dit que la droite tangente a deux points de contact avec la courbe. À un point d'inflexion, la droite

tangente a trois points de contact avec la courbe. Trois points qu'on peut faire apparaître en appliquant une légère rotation à la droite tangente (voir figure 4.5).

Une droite unique passe à travers 2 points alors qu'un cercle unique passe à travers 3 points. À un point régulier, on dit que le cercle qui osculte la courbe a 3 points de contact avec celle-ci, alors qu'à un extremum de courbure, ce nombre de points de contact est de 4 (voir figure 4.6).

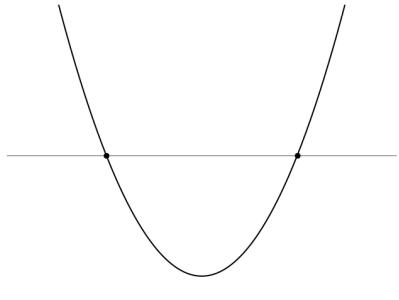


Figure 4.3 Un nombre pair d'intersections

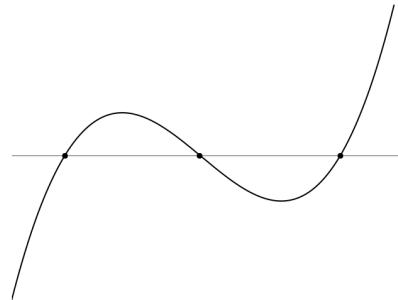


Figure 4.4 Un nombre impair d'intersections

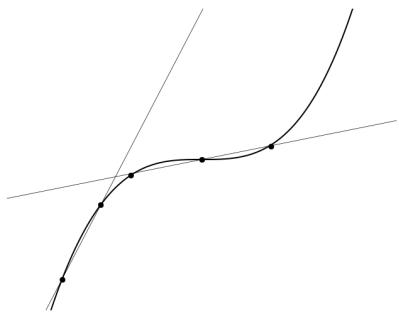


Figure 4.5 Légère rotation des droites tangentes

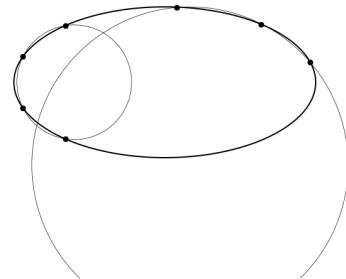


Figure 4.6 Légère variation des positions et des rayons des cercles osculateurs

Cette discussion peut se formaliser avec la notion de degré de contact. À un contact de degré  $d$  correspondra un nombre de points de contact  $d + 1$ .

Soit une courbe  $\mathbf{c} = (x(t), y(t))$  et un point spécifique sur cette courbe  $\mathbf{c}_0 = (x(t_0), y(t_0))$ . La courbe  $\mathbf{c}$  est une droite s'il existe un vecteur  $\mathbf{n}$  tel que l'équation suivante soit vérifiée quelque soit  $t$ .

$$F = (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.1)$$

Le vecteur  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal de la droite qui permet de fixer sa direction.

À présent, considérons une droite qui passe par le point fixe  $\mathbf{c}_0$  de la courbe. La droite et la courbe possèdent alors au moins un contact de degré 0. Le degré avec lequel la droite permet d'approximer la courbe s'obtient en dérivant l'équation 4.1 plusieurs fois. La première dérivée est notée  $F_t$ .

$$F_t = \mathbf{c}_t \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.2)$$

Une droite qui a un vecteur normal  $\mathbf{n}$  perpendiculaire au vecteur tangent  $\mathbf{c}_t$  de la courbe possède un contact au moins de degré 1 avec celle-ci. Si on dérive  $F$  une deuxième fois, on obtient :

$$F_{tt} = \mathbf{c}_{tt} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.3)$$

Pour un point régulier de la courbe, cette équation n'est pas satisfaite. Par contre, l'équation est satisfaite à un point d'inflexion. Un point d'inflexion avec une dérivée troisième  $F_{ttt}$  non nulle possède, avec sa droite tangente, un contact de degré 2.

La procédure est identique pour obtenir le degré de contact entre la courbe et un cercle. La courbe  $\mathbf{c}$  est un cercle s'il existe un point  $\mathbf{o}$  tel que l'équation suivante soit vérifiée quelque soit  $t$ .

$$V = (\mathbf{c} - \mathbf{o}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{o}) - (\mathbf{c}_0 - \mathbf{o}) \cdot (\mathbf{c}_0 - \mathbf{o}) = 0 \quad (4.4)$$

Le point  $\mathbf{o}$  représente le centre du cercle et le vecteur  $(\mathbf{c}_0 - \mathbf{o})$  un rayon du cercle.

À présent, considérons un cercle qui passe par le point fixe  $\mathbf{c}_0$  de la courbe  $\mathbf{c}$ . Le cercle touche la courbe au point  $\mathbf{c}_0$  et possède donc, au moins, un contact de degré 0. Le degré avec lequel le cercle permet d'approximer la courbe s'obtient en dérivant l'équation 4.4.

Si

$$V_t = \mathbf{c}_t \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{c}) = 0 \quad (4.5)$$

alors le contact est au moins de degré 1 et le cercle est tangent à la courbe. C'est-à-dire

lorsque le centre du cercle est situé sur la droite normale à la courbe au point  $\mathbf{c}_0$ . Si l'on dérive  $V$  une deuxième fois on obtient :

$$V_{tt} = \mathbf{c}_{tt} \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{c}) - \mathbf{c}_t \cdot \mathbf{c}_t = 0 \quad (4.6)$$

Pour trouver la position du centre du cercle  $\mathbf{o}$  qui osculte la courbe, il est possible de résoudre les deux dernières équations simultanément. Il faut donc résoudre un système linéaire.

La grandeur du vecteur  $(\mathbf{o} - \mathbf{c})$  représente le rayon de courbure  $r$  de la courbe au point  $\mathbf{c}_0$ .

On peut exprimer le vecteur  $\mathbf{c}_{tt}$  de la façon suivante :

$$\mathbf{c}_{tt} = \lambda \mathbf{T} + \mu \mathbf{N} \quad (4.7)$$

où

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{c}_t}{(\mathbf{c}_t \cdot \mathbf{c}_t)^{1/2}} = \frac{(x_t, y_t)}{(x_t^2 + y_t^2)^{1/2}} \quad (4.8)$$

est le vecteur unitaire tangent à la courbe et  $\mathbf{N} = (-y_t, x_t)/(x_t^2 + y_t^2)^{1/2}$  est le vecteur normal unitaire qu'on obtient en faisant faire une rotation d'un angle droit au vecteur tangent. On obtient alors de l'équation 4.6 :

$$\mu r - \mathbf{c}_t \cdot \mathbf{c}_t = 0 \quad (4.9)$$

où

$$\mu = \mathbf{c}_{tt} \cdot \mathbf{N} = (x_{tt}, y_{tt}) \cdot \frac{(-y_t, x_t)}{(x_t^2 + y_t^2)^{1/2}} = \frac{x_t y_{tt} - y_t x_{tt}}{(x_t^2 + y_t^2)^{1/2}} \quad (4.10)$$

et sachant que  $\mathbf{c}_t \cdot \mathbf{c}_t = x_t^2 + y_t^2$  on obtient l'expression du rayon de courbure de la courbe :

$$r = \frac{(x_t^2 + y_t^2)^{3/2}}{x_t y_{tt} - y_t x_{tt}} \quad (4.11)$$

Cette formule est bien connue et permet d'évaluer le rayon de courbure d'une courbe paramétrique et en particulier d'une courbe B-spline.

En dérivant l'équation 4.4 une troisième fois, on obtient :

$$V_{ttt} = \mathbf{c}_{ttt} \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{c}) - 3\mathbf{c}_t \cdot \mathbf{c}_{tt} = 0 \quad (4.12)$$

Pour un point régulier de la courbe, cette équation n'est pas satisfaite. À un point avec un degré de contact plus élevé, le vecteur  $\mathbf{o} - \mathbf{c}$  avec les composantes  $(r_x, r_y)$  doit satisfaire à la fois les trois équations de  $V_t$ ,  $V_{tt}$  et  $V_{ttt}$ .

$$\begin{bmatrix} x_t & y_t \\ x_{tt} & y_{tt} \\ x_{ttt} & y_{ttt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_t^2 + y_t^2 \\ -3(x_t x_{tt} + y_t y_{tt}) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

C'est un système linéaire avec plus d'équations que d'inconnues. Pour qu'une solution existe à un tel système d'équations de la forme  $[A][x] = [B]$ , il est nécessaire que le déterminant de  $[A|B]$  soit nul.

$$\begin{vmatrix} x_t & y_t & 0 \\ x_{tt} & y_{tt} & x_t^2 + y_t^2 \\ x_{ttt} & y_{ttt} & -3(x_t x_{tt} + y_t y_{tt}) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.14)$$

Ce qui revient à dire que l'une des trois équations est une combinaison linéaire des deux autres. Cette formule permet d'identifier les points de contact de degré au moins 3 entre une courbe paramétrique et le cercle qui l'osculte.

Maintenant, il reste à faire le lien entre ce contact de degré 3 et la notion d'extremum de courbure. Les équations de  $V_{tt}$  et  $V_{ttt}$  prennent une forme particulièrement simple avec une paramétrisation  $\mathbf{c} = (x(s), y(s))$  de vitesse unitaire  $\mathbf{c}_s = 1$ . L'équation 4.6 devient :

$$V_{ss} = \mathbf{c}_{ss} \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{c}) - 1 = 0 \quad (4.15)$$

Puisque  $\mathbf{c}_s = 1$ , l'accélération tangentielle est nulle et on peut écrire  $\mathbf{c}_{ss} = \kappa \mathbf{N}$  où  $\kappa$  reste à déterminer. Puisque  $\mathbf{N}$  est un vecteur unitaire parallèle à  $(\mathbf{o} - \mathbf{c})$  on obtient :

$$\kappa = \frac{1}{\mathbf{N} \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{c})} = \frac{1}{r} \quad (4.16)$$

où la courbure  $\kappa$  est, par définition, l'inverse du rayon de courbure. Pour sa part, l'équation 4.12 devient :

$$V_{sss} = \mathbf{c}_{sss} \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{c}) + \mathbf{c}_{ss} \cdot \mathbf{c}_s = 0 \quad (4.17)$$

Mais  $\mathbf{c}_{ss} = \kappa \mathbf{N}$  et  $\mathbf{c}_s = \mathbf{T}$  sont perpendiculaires et donc leur produit scalaire est nul. Ensuite en dérivant le vecteur  $\mathbf{c}_{ss}$  on obtient :

$$\mathbf{c}_{sss} = \kappa_s \mathbf{N} + \kappa \mathbf{N}_s \quad (4.18)$$

mais puisque  $\mathbf{N}$  est un vecteur unitaire sa variation ne peut-être que perpendiculaire à lui-même et donc  $\mathbf{N}_s \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{c}) = 0$ . Alors  $\mathbf{c}_{sss} \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{c})$  devient :

$$\kappa_s \mathbf{N} \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{c}) = 0 \quad (4.19)$$

et donc si le vecteur  $(\mathbf{o} - \mathbf{c})$  qui pointe dans la direction normale  $\mathbf{N}$  est non nul, c'est-à-dire si le rayon de courbure est non nul, on doit avoir :

$$\kappa_s = 0 \quad (4.20)$$

Le lien est alors établi entre le contact de degré 3 entre une courbe et le cercle qui l'osculte et la notion d'extremum de courbure. À un point d'extremum de courbure, lorsque la dérivée quatrième  $V_{tttt}$  est non nulle, la courbe possède un contact de degré  $d = 3$ . À un tel extremum de courbure, le cercle qui osculte la courbe possède  $d + 1 = 4$  points de contact avec celle-ci.

#### 4.1.2 La notion de courbes et de surfaces génériques

On peut d'abord introduire la notion de fonction générique. Les racines d'une fonction correspondent aux valeurs  $x$  pour lesquelles la fonction  $f(x) = 0$ . Une racine peut être simple ou multiple. Par exemple, la fonction  $f(x) = x^2$  possède une racine double à  $x = 0$ . Une perturbation arbitrairement petite  $\epsilon$  de la fonction, qui devient alors  $f(x) = x^2 + \epsilon$  fait disparaître les racines si  $\epsilon > 0$  et produit deux racines simples si  $\epsilon < 0$ . Par opposition, une perturbation arbitrairement petite n'est pas en mesure de faire disparaître une racine simple.

Une fonction qui possède seulement des racines simples peut-être qualifiée ainsi de générique. Une telle fonction générique peut approximer avec une précision arbitraire une fonction non générique avec des racines multiples. Ce principe se généralise aux courbes et aux surfaces avec la théorie des singularités qui est maintenant une branche importante des mathématiques. On peut lire sur le sujet par exemple Arnold et al. (1985), Bruce and Giblin (1992), Porteous

(2001) et Arnold (2003).

Cette théorie des singularités permet de déterminer que les contacts de degré 0, 1 et 2 d'une courbe avec une droite sont génériques. Un contact de degré 2 correspond à un point d'inflexion de la courbe et il est impossible de faire disparaître un point d'inflexion sur une courbe avec une perturbation arbitrairement petite de la courbe. Par opposition, un contact de degré 3 d'une courbe avec une droite est non générique. Une perturbation arbitrairement petite de la courbe peut permettre de faire disparaître un tel degré de contact, et ce sur l'ensemble de la courbe.

Les contacts de degré 0, 1, 2 et 3 d'une courbe avec un cercle sont génériques. Une perturbation arbitrairement petite de la courbe ne permet pas de faire disparaître un point d'extremum de courbure. Par contre, une telle perturbation peut permettre de faire disparaître un contact de degré 4.

On peut ainsi approximer une courbe régulière sans auto-intersection avec une précision arbitraire à l'aide d'une courbe générique, qui contient comme points singuliers seulement des points d'inflexion, avec un contact avec une droite de degré 2 et des points d'extremums de courbure avec un contact avec un cercle de degré 3. Il n'est pas nécessaire d'avoir recours aux autres points singuliers non génériques de degré supérieur pour obtenir une approximation d'une telle courbe avec une précision aussi grande que l'on veut. De ce point de vue, tous les cas possibles ont été traités pour les courbes régulières sans auto-intersection.

Avant de traiter de mêmes considérations pour les surfaces, il est utile d'étendre la discussion aux courbes qui peuvent présenter des auto-intersections et des points de rebroussement, puisque de telles courbes permettent de caractériser l'intersection d'une surface avec un plan ou une sphère.

Pour aider l'imagination, on peut penser à une ficelle très fine qu'on laisse tomber de façon arbitraire sur le sol. On se propose d'étudier les points singuliers qu'on peut alors observer. Soit d'abord un point où la ficelle présente un point d'auto-intersection.

À un point d'auto-intersection, une droite tangente avec une branche de la courbe possède deux points de contact avec cette première branche et un point de contact avec l'autre branche. De cette manière, on peut trouver, à un point d'auto-intersection, deux droites avec trois points de contact avec la courbe. Toutes les autres droites qui passent par ce point possèdent deux points de contact avec la courbe puisqu'elles traversent simplement les deux branches.

On peut maintenant chercher à éliminer de telles auto-intersections en tirant sur la ficelle toujours contre le sol. Alors quelques situations peuvent se produire.

Soit d'abord le cas d'un seul point d'auto-intersection suivi d'une boucle. Si l'on tire sur la ficelle de telle sorte que la boucle devienne de plus en plus petite, alors éventuellement la boucle et le point d'intersection vont laisser place à un point de rebroussement.

On peut obtenir ainsi le point de rebroussement le plus simple. La courbe  $\mathbf{c} = (t^2, t^3)$  est un exemple. Au point de rebroussement, le rayon de courbure est nul. On peut visualiser ce rayon nul comme la boucle qui vient de disparaître. Au point de rebroussement, la courbe traverse sa droite tangente et possède trois points de contact avec elle. Elle possède deux points de contact avec toutes les autres droites qui passent par ce point.

Ensuite, on peut considérer le cas de deux points d'auto-intersection qui viennent se rencontrer avant de disparaître et permettre aux deux branches de la courbe de se séparer. Il se produira alors un moment où les deux branches vont seulement se toucher avant de se séparer et seront ainsi tangentes l'une à l'autre. Alors la droite tangente simultanément à ces deux branches possède quatre points de contact avec la courbe. Toutes les autres droites qui passent par ce point possèdent deux points de contact avec elle.

Une courbe algébrique peut comporter d'autres cas encore plus singuliers. Parmi ceux-ci, on peut mentionner deux cas importants pour la section suivante.

Par exemple, la courbe  $\mathbf{c} = (t^2, t^4 + t^5)$  est un point de rebroussement de deuxième espèce ordinaire (en anglais : ordinary rhampoid cusp). Au point de rebroussement, la courbe ne traverse pas sa droite tangente et il y a quatre points de contact entre cette droite et la courbe. Par contre, la courbe traverse le cercle qui l'osculte. Il y a trois points de contact entre ce cercle et la courbe. On peut lire sur le sujet Porteous (2001) et Rutter (2000). On retrouvera une courbe avec un point de rebroussement de deuxième espèce à la figure 4.29.

Le point double isolé possède deux points de contact avec toutes les droites qui passent par ce point. Un tel point est discuté plus en détail à la section suivante et est illustré à la figure 4.7.

Avec ces notions de la théorie des singularités, il est possible d'attaquer la géométrie différentielle d'une surface dans l'espace. On peut alors énumérer tous les types de points singuliers d'une surface générique. Encore une fois, il sera possible d'approximer une surface quelconque avec une précision aussi grande que l'on veut à l'aide d'une telle surface générique.

#### 4.1.3 La géométrie différentielle d'une surface dans l'espace

Tout comme les courbes, la géométrie différentielle des surfaces consiste à étudier une surface seulement au voisinage immédiat d'un de ses points. Pour ce faire, on compare le voisinage d'un tel point à une forme aussi simple que possible. Soit par exemple un plan, une droite ou une sphère.

### Un plan tangent à la surface

Lorsqu'une portion d'une surface est concave ou convexe, l'intersection avec un plan tangent présente un seul point au voisinage immédiat du point d'intérêt (voir figure 4.7). Un tel point est dit elliptique. Par opposition, une portion d'une surface qui a l'allure d'une selle à cheval est dite hyperbolique. À un tel point, l'intersection d'un plan tangent avec la surface présente deux courbes qui se croisent (voir figure 4.9). Les points elliptiques et hyperboliques sont séparés par une courbe parabolique illustrée en vert. Sur cette courbe parabolique, une intersection avec le plan tangent présente un point de rebroussement (voir figure 4.8).

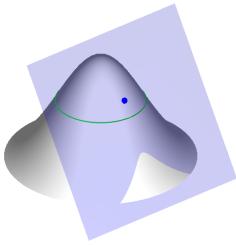


Figure 4.7 Un point elliptique

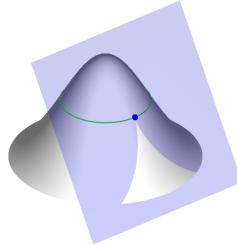


Figure 4.8 Un point parabolique

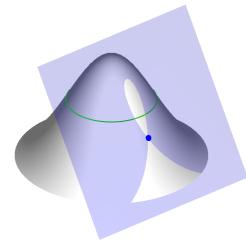


Figure 4.9 Un point hyperbolique

Jan J. Koenderink (1990) fait remarquer qu'on peut détecter un point parabolique en examinant le contour d'une surface qu'on fait pivoter dans l'espace. À un point d'inflexion apparent sur le contour correspond un point parabolique sur la surface.

On peut faire appel à une transformation projective pour bien apprécier ce fait remarquable. La figure 4.10 montre une transformation projective qui permet non seulement la projection d'un objet sur un plan, mais également d'aplatir graduellement la surface en forme de cloche vers sa projection sur ce plan. Le contour correspond alors à un pli qui s'est formé dans la surface lors de l'opération d'aplatissement. Les points elliptiques sur le contour deviennent des courbes convexes bombées vers l'extérieur et les points hyperboliques, des courbes concaves bombées vers l'intérieur. Entre ces deux régions, on retrouve bien un point d'inflexion sur le contour.

Le continuum de transformations projectives qui permet de passer de la cloche à son aplatissement sur le plan  $x = 1$  avec le point de projection à l'origine est obtenu à l'aide des équations suivantes :

$$x' = \frac{x}{cx + 1 - c} \quad (4.21)$$

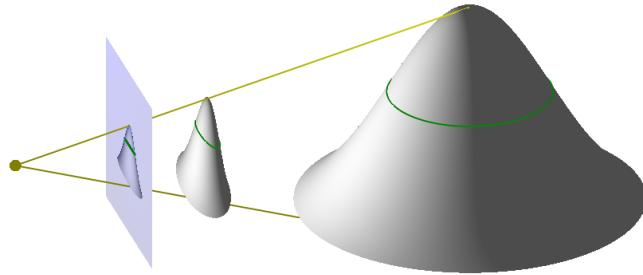


Figure 4.10 Transformation projective

$$y' = \frac{y}{cx + 1 - c} \quad (4.22)$$

$$z' = \frac{z}{cx + 1 - c} \quad (4.23)$$

où le paramètre  $c$  varie de 0 jusqu'à 1. Une transformation projective s'exprime toujours avec de telles équations linéaires rationnelles et un dénominateur commun.

Avant l'aplatissement final, la transformation projective est non singulière. Les transformations projectives non singulières sont réversibles et forment un groupe de transformations. Ces transformations préservent les droites, les plans et les intersections. Elles préservent en particulier les intersections entre un plan et une surface. Ainsi les points elliptiques, paraboliques et hyperboliques d'une surface sont préservés.

De cette manière un point hyperbolique avec sa forme de selle à cheval doit nécessairement présenter un contour avec une courbe concave bombée vers l'intérieur. Autrement, avant le repliement, le point hyperbolique aurait dû se transformer en point elliptique, ce qui n'est pas possible pour une transformation projective. Le scénario est le même pour un point elliptique. Alors un point parabolique situé sur le contour qui sépare une courbe concave d'une courbe convexe ne peut être qu'un point d'inflexion.

### Une droite tangente à la surface

L'ensemble des droites tangentes en un point d'une surface lisse forme un plan. Ce plan n'est nul autre que le plan tangent discuté précédemment. Voici maintenant la classification

exhaustive des points d'une surface générique en terme de contact avec ses droites tangentes. On peut consulter à ce sujet Arnold (2003) et Uribe-Vargas (2006).

Pour un point elliptique d'une surface, il n'y a pas de droite tangente avec plus de deux points de contact. Pour un point hyperbolique, il y a deux droites, appelées droites asymptotiques avec au moins trois points de contact. Un point parabolique possède, pour sa part, une seule droite asymptotique.

Ainsi, le plan tangent d'une surface à un point hyperbolique possède deux droites asymptotiques illustrées en rouge et bleu à la figure 4.11. On peut d'abord visualiser les trois points de contact de la droite asymptotique avec la surface de la façon suivante. On peut compter deux points de contact du fait que la droite est tangente à une branche de la courbe d'intersection et un troisième point de contact du fait que la droite croise l'autre branche.

Ces trois points de contact peuvent également s'obtenir de façon plus formelle. Par exemple pour la courbe d'intersection  $y^2 + x^2(x - 1) = 0$  illustrée à la figure 4.11, les droites asymptotiques sont  $y = \pm x$ . En substituant  $y = \pm x$  dans l'équation de la courbe d'intersection on obtient  $x^3 = 0$  et donc une racine triple. Ce qui confirme les trois points de contact entre la droite et la surface.

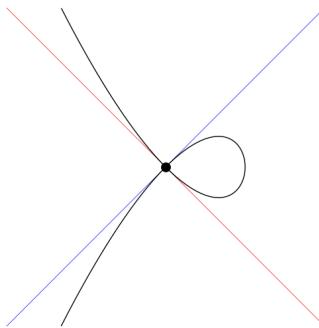


Figure 4.11 Point double :  $y^2 + x^2(x - 1) = 0$

Ensuite, si l'on fait effectuer une rotation du plan tangent par rapport à une droite asymptotique, on obtient une courbe d'intersection avec un point d'inflexion tel qu'illustré à la figure 4.12. Dans le plan, la droite tangente à un point d'inflexion possède trois points de contact avec la courbe. Ce qui confirme encore une fois les trois points de contact de la droite avec la surface. Une telle droite traverse la courbe au point d'inflexion et traverse donc également la surface comme on peut le constater sur la figure 4.12. La situation dans le plan est alors la même que pour le point d'inflexion  $i$  à la figure 4.1.

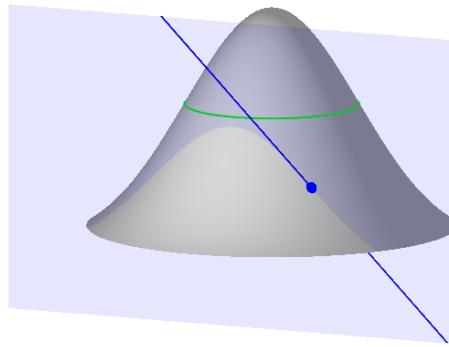


Figure 4.12 Point d'inflexion d'un plan sécant et droite asymptotique

Vladimir I. Arnold (2003) fait remarquer qu'on peut détecter une droite asymptotique en faisant pivoter une surface transparente dans l'espace et en examinant son contour. Un point de rebroussement sur le contour est observé lorsqu'on regarde un point de la surface dans une direction asymptotique. La figure 4.13 et la figure 4.14 sont des vues de face et de côté d'une forme de cloche inclinée. Le point de rebroussement apparent marqué d'un point bleu de la figure 4.13 correspond à la droite asymptotique qui traverse la surface à la figure 4.14. Sur cette dernière figure, le contour apparent est tracé par une courbe noire.

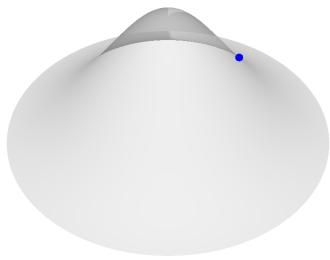


Figure 4.13 Point de rebroussement

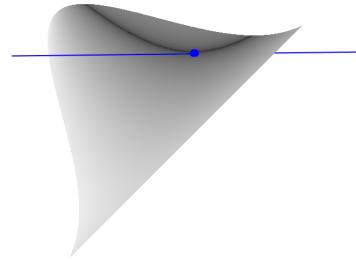


Figure 4.14 Droite asymptotique

Enfin, la figure 4.15 montre une légère translation de la droite asymptotique qui fait apparaître trois points de contact entre la surface et la droite. On peut imaginer alors un tissu sur une table. Pour passer une aiguille à travers trois points, il est nécessaire de replier localement le tissu. On peut alors imaginer un tel pli qui se termine par deux points de rebroussement tels qu'obtenus à la figure 4.13 après avoir projeté la surface en forme de cloche inclinée sur un plan. La courbe noire de la figure 4.14 représente l'endroit où la surface est repliée.

De façon générique, on obtient seulement deux types de singularités lorsqu'on projette une surface sur un plan, soit un pli ou un point de rebroussement. Ce sont les seules singularités

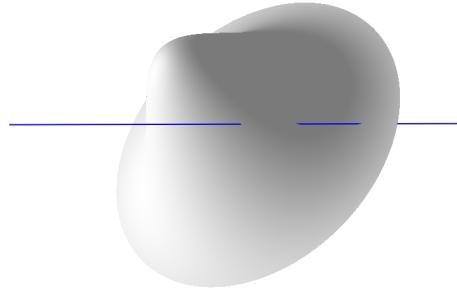


Figure 4.15 Une droite qui traverse la surface en trois points

qui sont stables ou résistantes à une perturbation de la direction d'observation. Ainsi lorsqu'on fait pivoter une surface transparente, un point de rebroussement peut rester visible malgré une petite rotation de la surface. Ce point de rebroussement correspond alors à un point voisin de la surface qui possède une direction asymptotique qui correspond à la nouvelle direction d'observation.

On peut maintenant considérer les droites tangentes qui possèdent plus de trois points de contact avec la surface. Ces points peuvent être situés à l'intérieur d'une région hyperbolique et sur sa frontière parabolique. À l'intérieur d'un tel domaine, on peut retrouver les éléments suivants.

1. La courbe flecnodale constituée de points pour lesquels la droite tangente possède plus de 3 points de contact avec la surface. À un tel point, la courbe d'intersection entre le plan tangent et la surface présente un point d'inflexion au point d'intérêt.
2. Le point biflecnodal ou de double inflexion est situé sur la courbe flecnodale et possède plus de 4 points de contact avec une droite tangente à la surface. À un tel point, la courbe flecnodale et une direction asymptotique sont tangentes.
3. Le point d'inflexion simultané des deux courbes asymptotiques qui correspond à l'intersection de deux courbes flecnodales.
4. Le point godron aussi appelé point de plissement par Korteweg (1891). En anglais ce point est appelé *cusp of gauss* ou *ruffle*. Le godron est un point parabolique avec sa direction asymptotique unique parallèle à la courbe parabolique. À un tel point, les courbes paraboliques et flecnodales sont tangentes.

Tous ces marqueurs différentiels sont invariants à une transformation projective et contrôler les inflexions sur une surface consiste à limiter l'apparition ou la présence de ces points singuliers.

On se concentre maintenant sur le point godron pour illustrer plusieurs de ces éléments, et ce à l'aide de la forme normale de Platonova. On peut lire sur le sujet Uribe-Vargas (2006). Avec une transformation projective, il est possible de transformer le voisinage immédiat d'un point godron générique à cette forme normale. Soit la forme de Platonova :

$$z = \frac{y^2}{2} - x^2y + \frac{\rho}{2}x^4 \quad (4.24)$$

où  $\rho$  est un paramètre qu'on peut faire varier. Pour une valeur de  $\rho$  quelque peu supérieure à 1 on obtient une surface telle qu'illustrée à la figure 4.16. Sur cette figure, la zone hyperbolique est colorée en vert ainsi que la courbe parabolique à la frontière, alors que la zone grise est elliptique. La courbe rouge et la courbe bleue forment la courbe flecnodale. Au centre, le point godron correspond au point où la courbe flecnodale est tangente à la courbe parabolique et où la courbe flecnodale passe du rouge au bleu.

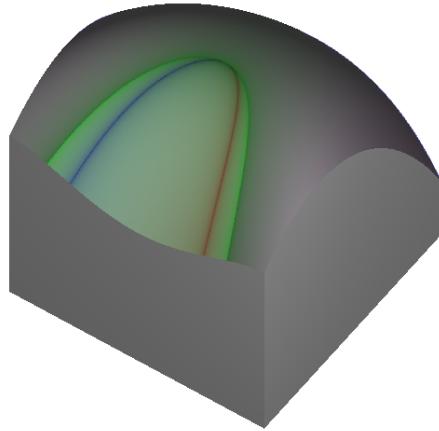


Figure 4.16 Un point godron

Cette discussion peut se formaliser encore une fois avec la notion de degré de contact. Soit une surface  $\mathbf{S} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  et un point spécifique sur cette surface  $\mathbf{S}_0 = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ .

Si la surface possède un point  $\mathbf{S}_0$  avec un contact plus étroit qu'à l'habitude avec l'une de ses droites tangentes alors on peut également tracer une courbe sur la surface avec un contact plus étroit avec cette droite tangente. Cette droite tangente appartient au plan tangent de la surface au point  $\mathbf{S}_0$ . Alors la courbe tracée sur la surface possède également un contact plus étroit qu'à l'habitude avec ce plan tangent. De cette manière, plutôt que de considérer le contact entre une droite et la surface, on peut considérer le contact entre une courbe tracée sur la surface et le plan tangent de la surface au point  $\mathbf{S}_0$ . Ceci permet le développement

suivant.

La surface  $\mathbf{S}$  est un plan s'il existe un vecteur  $\mathbf{n}$  tel que l'équation suivante soit vérifiée quelque soit  $u$  et  $v$ .

$$F = (\mathbf{S} - \mathbf{S}_0) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.25)$$

Le vecteur  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal du plan qui permet de fixer son orientation. On introduit ensuite la courbe paramétrique  $\mathbf{c} = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$  tracée sur la surface  $\mathbf{S}$ . Le degré avec lequel le plan peut approximer la courbe  $\mathbf{c}$  est obtenu en dérivant l'équation 4.25 plusieurs fois. La première dérivée est notée  $F_t$ .

$$F_t = (a\mathbf{S}_u + b\mathbf{S}_v) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.26)$$

où  $a = \frac{du}{dt}$  et  $b = \frac{dv}{dt}$ .

L'équation est vérifiée pour toutes valeurs de  $a$  et  $b$  lorsque  $\mathbf{n} = \mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v$ . Ainsi une courbe lisse tracée sur la surface et qui passe par le point  $\mathbf{S}_0$  possède un contact au moins de degré 1 avec le plan tangent. Si on dérive  $F$  une deuxième fois, on obtient :

$$F_{tt} = (a^2\mathbf{S}_{uu} + 2ab\mathbf{S}_{uv} + b^2\mathbf{S}_{vv} + c\mathbf{S}_u + d\mathbf{S}_v) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.27)$$

où  $c = \frac{d^2u}{dt^2}$  et  $d = \frac{d^2v}{dt^2}$ . Mais lorsque l'équation 4.26 est vérifiée alors  $(c\mathbf{S}_u + d\mathbf{S}_v) \cdot \mathbf{n} = 0$  pour tout  $c$  et  $d$ . On peut ainsi simplifier l'équation qui devient :

$$F_{tt} = (a^2\mathbf{S}_{uu} + 2ab\mathbf{S}_{uv} + b^2\mathbf{S}_{vv}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.28)$$

Un discriminant  $\mathbf{S}_{uu}\mathbf{S}_{vv} - \mathbf{S}_{uv}^2$  négatif correspond à un point elliptique de la surface. Pour un tel point, la dernière équation 4.28 n'est jamais satisfaite. Un discriminant nul correspond à un point parabolique avec une seule direction  $a\mathbf{S}_u + b\mathbf{S}_v$  qui satisfait à la dernière équation. Un discriminant positif correspond à un point hyperbolique avec deux directions  $a\mathbf{S}_u + b\mathbf{S}_v$  qui satisfont à la dernière équation. Ces directions permettent de définir des droites qui passent par le point  $\mathbf{S}_0$ . Ces droites possèdent un degré de contact avec la surface au moins de degré 2.

Si on dérive  $F$  une troisième fois, on obtient :

$$F_{ttt} = (a^3 \mathbf{S}_{uuu} + 3a^2 b \mathbf{S}_{uuv} + 3ab^2 \mathbf{S}_{uvv} + b^3 \mathbf{S}_{vvv} + \mathbf{S}_{uu}ac + \mathbf{S}_{uv}(cb + ad) + \mathbf{S}_{vv}bd) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.29)$$

En choisissant  $c$  et  $d$  de telle sorte que  $(\mathbf{S}_{uu}ac + \mathbf{S}_{uv}(cb + ad) + \mathbf{S}_{vv}bd) \cdot \mathbf{n} = 0$ , l'équation se réduit à :

$$F_{ttt} = (a^3 \mathbf{S}_{uuu} + 3a^2 b \mathbf{S}_{uuv} + 3ab^2 \mathbf{S}_{uvv} + b^3 \mathbf{S}_{vvv}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.30)$$

Lorsqu'une droite asymptotique de direction  $a\mathbf{S}_u + b\mathbf{S}_v$  satisfait avec les mêmes constantes  $a$  et  $b$  à la fois l'équation 4.28 et l'équation 4.30, alors le degré de contact de cette droite avec la surface est au moins de degré 3. On peut déterminer ainsi un point flecnodal.

Ceci devient plus concret lorsqu'on étudie un point d'une surface exprimée avec une équation sous la forme de Monge  $\mathbf{S} = (x, y, f(x, y))$  avec le point d'intérêt situé à l'origine  $f(0, 0) = 0$  et la surface positionnée de telle sorte que le plan tangent au point d'intérêt soit horizontal, c'est-à-dire que  $f_x(0, 0) = 0$  et  $f_y(0, 0) = 0$ .

La série de Taylor qui permet d'approximer la surface au voisinage immédiat de l'origine devient :

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \frac{1}{2!} (f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2) + \\ & \frac{1}{3!} (f_{xxx}(0, 0)x^3 + 3f_{xxy}(0, 0)x^2y + 3f_{xyy}(0, 0)xy^2 + f_{yyy}(0, 0)y^3) + \dots \end{aligned}$$

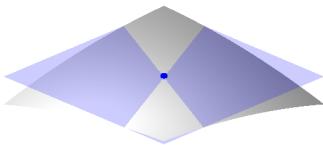


Figure 4.17 Une surface qui représente les trois premiers termes de la série de Taylor  $z = \frac{1}{2!}(f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2)$  et son intersection avec le plan horizontal

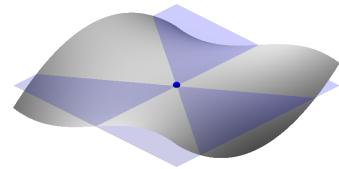


Figure 4.18 Une surface qui représente les quatre termes suivants  $z = \frac{1}{3!}(f_{xxx}(0, 0)x^3 + 3f_{xxy}(0, 0)x^2y + 3f_{xyy}(0, 0)xy^2 + f_{yyy}(0, 0)y^3)$  et son intersection avec le plan horizontal

L'approximation de la surface avec les trois premiers termes de la série de Taylor et l'intersection de cette approximation avec le plan tangent produit les deux droites asymptotiques

lorsque le point de la surface est hyperbolique comme illustré à la figure 4.17. La fonction  $z(x, y)$  peut ainsi s'écrire  $z = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)$  où  $a_i x + b_i y = 0$  est l'équation d'une droite asymptotique qui passe par l'origine.

Ensuite, si on considère seulement les quatre termes suivants de la série de Taylor l'intersection avec le plan horizontal consiste alors également en des droites, puisque la fonction  $z(x, y)$  peut s'écrire  $z = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)(a_3x + b_3y)$ . Le nombre de droites distinctes est au maximum trois, comme illustré à la figure 4.18. Un point est flecnodal lorsqu'une de ces dernières droites réelles coïncide avec une droite asymptotique.

### Une sphère tangente à la surface

En faisant l'intersection d'une surface avec une sphère, on obtient une courbe. C'est alors le type de point singulier que l'on retrouve sur cette courbe au point de contact qui permet de distinguer les propriétés différentielles des points sur la surface. Voici les différents types de courbes d'intersections que l'on retrouve de façon générique. L'équation particulière utilisée pour produire la figure est également donnée.

Les figures 4.19 à 4.21 représentent l'évolution de l'intersection entre une surface et une sphère tangente à un point de cette surface lorsque le rayon de la sphère varie. Un point de rebroussement est observé lorsque le rayon de la sphère correspond à une courbure principale de la surface.

Voici quelques mots sur la notion de courbure principale. Soit un plan qui contient la droite perpendiculaire à un point d'une surface. L'intersection entre le plan et la surface produit une courbe plane. On peut calculer la courbure de cette courbe plane au point d'intérêt. Ensuite, on peut faire tourner le plan par rapport à la droite perpendiculaire. La valeur maximale et la valeur minimale de la courbure qu'on peut ainsi obtenir représentent les deux courbures principales de la surface. Lorsque le point de la surface n'est pas un point ombilic, il existe alors deux directions de courbure principale. Ces deux directions sont perpendiculaires l'une à l'autre.

On peut maintenant étudier les points qui présentent un contact de degré supérieur avec la sphère. Pour ce faire, les figures 4.22 à 4.30 représentent des sphères tangentes à la surface toujours avec un rayon qui correspond à une courbure principale de la surface.

Les figures 4.22 à 4.24 montrent ce qui se produit lorsqu'on croise une ligne d'extremums de courbure hyperbolique (en anglais : hyperbolic ridge). Au moment du croisement, on peut observer à la figure 4.23 deux courbes tangentes. C'est un point où la courbure principale maximale  $\kappa_1$  atteint une valeur minimale ou un point où la courbure principale minimale  $\kappa_2$

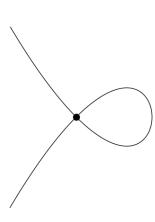


Figure 4.19 Point double :  
 $y^2 + x^3 - x^2 = 0$



Figure 4.20 Rebrousse-  
ment :  $y^2 + x^3 = 0$



Figure 4.21 Point isolé :  
 $y^2 + x^3 + x^2 = 0$

atteint une valeur maximale.

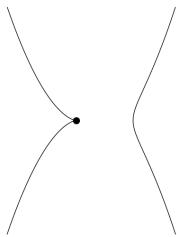


Figure 4.22 Rebrousse-  
ment :  $y^2 + x^3 - x^4 = 0$

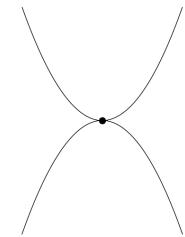


Figure 4.23 Deux courbes  
tangentes :  $y^2 - x^4 = 0$

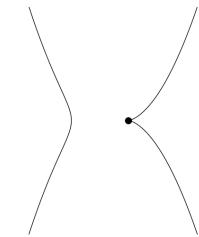


Figure 4.24 Rebrousse-  
ment :  $y^2 - x^3 - x^4 = 0$

Les figures 4.25 à 4.27 montrent un point isolé qui est obtenu lorsque l'on croise une ligne d'extremums de courbure elliptique (en anglais : elliptic ridge). C'est un point où la courbure principale maximale  $\kappa_1$  atteint une valeur maximale ou un point où la courbure principale minimale  $\kappa_2$  atteint une valeur minimale.

Les figures 4.28 à 4.30 montrent ce qui se passe lorsqu'on se déplace sur une ligne d'extremums de courbure à une transition hyperbolique-elliptique. À la transition, le point est dit parabolique (en anglais : parabolic ridge point) et l'on peut observer alors un point de rebroussement de deuxième espèce.

### Point ombilic

Les points ombilics correspondent aux points où les valeurs des deux courbures principales coïncident. Ce sont donc les points d'une surface les mieux approximés par une sphère. Puisque les deux courbures principales doivent être alors de même signe, on peut les re-



Figure 4.25 Rebroussement :  $y^2 + x^3 + x^4 = 0$

•



Figure 4.26 Point isolé :  $y^2 + x^4 = 0$

Figure 4.27 Rebroussement :  $y^2 - x^3 + x^4 = 0$

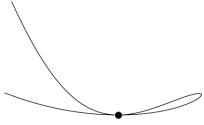


Figure 4.28 Deux courbes tangentes :  $2x^4/3 + x^2y^2 - 8x^2y + 4xy^2 + 16y^2 = 0$

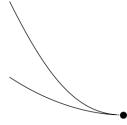


Figure 4.29 Rebroussement de 2<sup>e</sup> espèce :  $x^4 + x^2y^2 - 8x^2y + 4xy^2 + 16y^2 = 0$



Figure 4.30 Point isolé :  $6x^4/5 + x^2y^2 - 8x^2y + 4xy^2 + 16y^2 = 0$

trouver seulement à des endroits où la surface est elliptique au sens du contact avec le plan. Ensuite, on peut retrouver un point ombilic seulement sur une ligne d'extremums de courbure hyperbolique et jamais sur une ligne d'extremums de courbure elliptique.

La classification des points ombilics peut s'obtenir avec la forme normale suivante.

$$z = (6a + 2)x^3 + 6bx^2y + (6a - 6)xy^2 + 6by^3 \quad (4.31)$$

Le point ombilic est situé à l'origine ( $x = 0, y = 0, z = 0$ ). Les surfaces très simples qu'on peut produire avec une telle forme normale avec un seul point ombilic sont présentées et discutées plus en détail à la section 7.7. Aux fins de la classification, on fait correspondre à une valeur des paramètres  $a$  et  $b$  de cette forme normale un point sur la figure 4.31.

L'intersection de la sphère qui osculte la surface à un point ombilic peut engendrer :

1. Trois lignes réelles distinctes

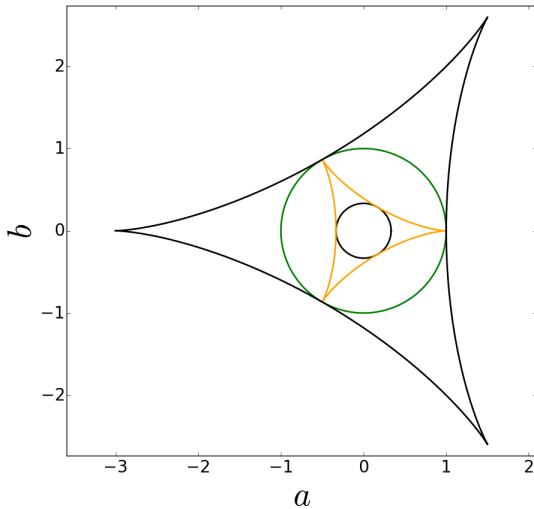


Figure 4.31 Classification des points ombilics

2. Une seule ligne réelle
3. Trois lignes réelles dont deux coïncident
4. Trois lignes réelles coïncidentes

Pour un point  $(a, b)$  situé à l'intérieur de la deltoïde orange, l'intersection présente trois lignes distinctes tel qu'illustré sur la figure 4.33 et le point ombilic est dit elliptique. Pour un point  $(a, b)$  situé à l'extérieur de la deltoïde orange, l'intersection présente une seule ligne réelle tel qu'illustré sur la figure 4.36 et le point ombilic est dit hyperbolique. Un point situé sur la deltoïde orange est dit parabolique.

Les trois intersections entre le cercle noir et la deltoïde orange présentent trois lignes dont deux coïncident. Alors que les trois intersections entre le cercle vert et les deltoïdes présentent trois lignes coïncidentes.

Pour des valeurs  $(a, b)$  situées à l'intérieur du cercle vert de rayon unitaire, l'indice du point ombilic est de  $-1/2$ . Pour des valeurs  $(a, b)$  situées à l'extérieur du cercle vert l'indice du point ombilic est de  $1/2$ . Sur une surface qui a la topologie d'une sphère, la somme des indices de tous les points ombilics est égale à 2 pourvu que le nombre de points ombilics reste fini. L'ellipsoïde par exemple possède 4 points ombilics d'indice  $1/2$ . Sur un tore, la somme des indices doit être égale à 0. Ce sont des invariants topologiques.

La classification originale des points ombilics vient de Gaston Darboux (1896). Pour une référence plus moderne, on peut consulter en particulier Ian R. Porteous (2001).

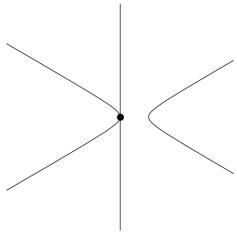


Figure 4.32 Deux courbes tangentes :  
 $2x^3 - 6xy^2 - x^2 = 0$

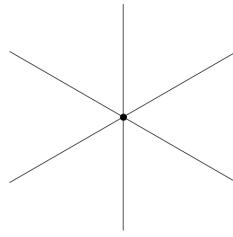


Figure 4.33 Un point ombilic elliptique :  
 $2x^3 - 6xy^2 = 0$

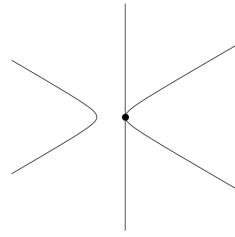


Figure 4.34 Deux courbes tangentes :  
 $2x^3 - 6xy^2 + x^2 = 0$



Figure 4.35 Deux courbes tangentes :  
 $-10x^3 - 18xy^2 - 5y^2 = 0$



Figure 4.36 Un point ombilic hyperbolique :  
 $-10x^3 - 18xy^2 = 0$



Figure 4.37 Deux courbes tangentes :  
 $-10x^3 - 18xy^2 + 5y^2 = 0$

Ces indices du point ombilic font référence à l'indice d'un point singulier que l'on obtient lorsque l'on trace les lignes de courbure principales sur une surface.

On peut obtenir une intuition sur la signification de ces indices de la façon suivante. En mécanique des fluides, dans un écoulement plan on peut trouver également des points singuliers. Le centre d'un vortex est un point singulier. On assigne à ce point l'indice +1. Ce nombre représente le nombre de tours qu'un vecteur fait sur lui-même lorsqu'on fait un parcours fermé autour de ce point singulier en pointant toujours dans la direction des lignes de courants. Autour d'un tel point singulier, les lignes de courant ont approximativement la forme d'un cercle. On peut également trouver des points singuliers avec des indices -1. Autour d'un tel point singulier, les lignes de courant ont la forme d'une hyperbole.

Mais en mécanique des fluides, pour de telles lignes de courants orientées, on ne peut jamais trouver des points singuliers d'indice 1/2 ou -1/2. C'est seulement possible pour des lignes non orientées. Les lignes de courbures principales que l'on peut tracer sur une surface sont

des lignes non orientées. Ce ne sont pas des lignes d'un écoulement qui se dirige dans une direction donnée, ce sont seulement des lignes. Si l'on fait un parcours fermé autour d'un point singulier d'indice  $1/2$ , le vecteur fait un demi-tour sur lui-même et pointe alors à son retour dans la direction opposée.

Maintenant, l'invariant topologique est le même pour des lignes orientées ou non. Sur un tore on peut imaginer un écoulement sans points singuliers. Par exemple, l'écoulement peut tourner autour de l'axe de symétrie du tore. Par contre sur une sphère, il n'est pas possible de produire un écoulement sans points singuliers. Si l'écoulement sur la sphère est la rotation autour d'un axe, alors on trouve bien deux vortex aux pôles d'indice  $+1$ . On obtient ainsi au moins une situation où on peut visualiser que la somme des indices respecte bien l'invariant topologique pour une surface qui a la topologie d'une sphère. Ainsi sur la terre, il doit nécessairement toujours y avoir au moins un endroit où le vent ne souffle pas<sup>1</sup>. Ce ne serait pas nécessairement le cas si nous habitions sur une planète en forme de tore.

#### 4.1.4 Discussion

Les points d'inflexion et d'extremum de courbure d'une courbe dans le plan font référence à un point avec un degré de contact plus élevé avec une droite ou un cercle.

Ces notions se généralisent aux surfaces avec un contact plus étroit avec une droite et une sphère.

À un point elliptique, toutes les droites tangentes possèdent seulement deux points de contact. À un point hyperbolique, deux droites, dites asymptotiques possèdent au moins trois points de contact avec la surface. Les points elliptiques et hyperboliques sont séparés par des courbes paraboliques qui ont la particularité de posséder une seule droite asymptotique. On peut ensuite tracer à l'intérieur des régions hyperboliques les lignes flecnodales qui ont plus de trois points de contact avec la surface. Sur cette courbe flecnodale, on peut encore discerner quelques points. En particulier, le godron qui est un point où la courbe flecnodale vient toucher la courbe parabolique.

L'intersection entre une surface et une sphère tangente produit une courbe. C'est alors le type de singularité obtenu situé au point d'intérêt qui détermine le niveau de contact. Parmi toutes les sphères tangentes à un point d'une surface, il y a deux sphères qui possèdent un contact plus élevé avec celle-ci. Deux sphères qu'on peut distinguer à un point régulier à l'aide de la courbe d'intersection qui présente un point de rebroussement. On peut obtenir ainsi les deux directions de courbures principales à un point régulier de la surface. Ce point de

---

1. On peut faire coïncider les deux points d'indice  $+1$  pour obtenir un point d'indice  $+2$

rebroussement est un premier niveau de singularité. À un point d'extremums de courbure, le niveau de singularité augmente. Ces points d'extremums de courbure forment des lignes sur une surface générique. Sur ces lignes on trouve d'abord trois types de singularité. Soit deux courbes d'intersection tangentées, un point isolé ou un point de rebroussement de deuxième espèce qui se retrouve à la transition entre les deux cas précédents. Enfin, on peut trouver sur ces courbes d'extremums de courbure les points ombilics où la valeur des deux courbures principales coïncide. Ce sont les points de la surface qui ressemblent le plus à une sphère.

Ainsi, une classification complète des inflexions et des extremums de courbure pour les courbes et les surfaces génériques a été présentée. Sur une surface générale telle un visage, la configuration de ces marqueurs différentiels peut-être très complexe. Contrôler une telle configuration est un problème extrêmement difficile. Mais il n'est pas nécessaire de s'attaquer immédiatement à des problèmes aussi complexes. On peut d'abord contrôler les propriétés différentielles des courbes dans le plan. Ensuite, on peut chercher à contrôler les propriétés différentielles des surfaces les plus simples pour attaquer seulement ensuite et graduellement des surfaces de plus en plus générales.

À l'antipode des courbes génériques, on retrouve les courbes les plus simples, soit la droite et le cercle qui ne possède aucun point générique. On peut contrôler les propriétés différentielles de ces courbes les plus simples sans difficulté. De la même manière, à l'antipode des surfaces génériques on retrouve les surfaces élémentaires du point de vue différentiel. Parmi celles-ci, on retrouve le plan, la sphère, le cylindre, le cône, le tore et les quadriques doublement réglées. La section suivante porte sur ces surfaces les plus élémentaires et les plus simples du point de vue des inflexions ou des extremums de courbure.

## 4.2 La réciprocité droites-sphères et les surfaces les plus simples

Voici les premières lignes du premier volume des *Éléments d'Euclide* (vers 300 av. J.-C.) :

Définitions

1. Un point est ce qui n'a aucune partie.
2. Une ligne est une longueur sans largeur.
3. Les extrémités d'une ligne sont des points.
4. Une ligne droite est celle qui repose également sur ses points.<sup>2</sup>
5. Une surface est ce qui a seulement une longueur et une largeur.
6. Les extrémités d'une surface sont des lignes.

---

2. Cette définition peut sembler quelque peu énigmatique, mais des explications seront fournies à la page 52.

7. Une surface plane est une surface qui repose également sur ses lignes droites<sup>3</sup> et les premières lignes du livre GEOMETRY AND THE IMAGINATION de David Hilbert et Stephan Cohn-Vossen (1932) :

La surface la plus simple est le plan. Les courbes les plus simples sont les courbes dans le plan, et parmi celles-ci la plus simple est la droite. La droite peut-être définie comme le trajet le plus court entre deux points, ou comme l'intersection entre deux plans, ou comme un axe de rotation. La courbe la plus simple après la droite est le cercle. Le cercle peut-être défini comme la courbe dans le plan dont les points sont à distance constante d'un point donné.

La réciprocité découverte par Sophus Lie entre la géométrie des droites et la géométrie des sphères permet de présenter de façon naturelle les surfaces les plus simples du point de vue des inflexions et des extremums de courbure.

On peut commencer par les surfaces les plus simples du point de vue des extremums de courbure. De ce point de vue après le plan et la sphère on retrouve des surfaces comme le cylindre, le cône et le tore, des primitives très utiles en conception géométrique assistée par ordinateur. Ces primitives sont des cas particuliers d'une famille de surfaces plus générales, soit les cyclides de Dupin. Le groupe des transformations de la géométrie des sphères de Lie permet de générer avec beaucoup d'économie l'ensemble des cyclides de Dupin. Il suffit d'y introduire une droite.

Ensuite la réciprocité droites-sphères permettra de générer les surfaces équivalentes du point de vue des inflexions, soit les surfaces quadriques doublement réglées.

#### 4.2.1 La géométrie des sphères de Lie et les cyclides de Dupin

La géométrie des sphères de Lie fait référence à un groupe de transformations qui permet de produire l'ensemble des cyclides de Dupin.

Un groupe de transformations doit posséder les propriétés suivantes. Il doit contenir un élément identité qui consiste à ne rien perturber. Si un groupe contient une transformation  $M$  alors il doit contenir une transformation inverse  $M^{-1}$  qui annule  $M$ . Enfin si  $M$  et  $N$  font partie du groupe alors la composition des transformations  $M$  suivie de  $N$  fait aussi partie du groupe.

On peut alors construire le groupe des transformations des sphères, introduit par Sophus Lie (1872), en ajoutant graduellement des éléments au groupe. Ajoutons d'abord à la trans-

---

3. Voir note de bas de page 2

formation identité les transformations qui permettent de générer à partir d'une surface, une surface parallèle (en anglais : offset).

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} + d\mathbf{n} \quad (4.32)$$

où  $\mathbf{n}$  est un vecteur unitaire normal à la surface  $\mathbf{S}$  et  $d$  la distance qui sépare les deux surfaces parallèles  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{S}'$ . Ces surfaces parallèles ont la propriété de partager leurs droites normales.

Considérons d'abord, comme surface  $\mathbf{S}$ , une sphère. Elle possède parmi ses surfaces parallèles une sphère de rayon infiniment petit qu'on peut appeler un point. Inversement, on peut considérer qu'un tel point possède comme surface parallèle une famille de sphères concentriques. Ensuite, on peut appeler une sphère de rayon infiniment grand un plan. Avec ce point de vue, les transformations des sphères de Lie permettent déjà de générer les surfaces les plus simples soit le plan et la sphère à partir d'un point. La géométrie des sphères de Lie considère ainsi le point et le plan comme des sphères.

Une propriété différentielle importante du plan et de la sphère est la suivante : la courbure d'un plan ou d'une sphère est constante, peu importe le point et la direction sur la surface. Puisque la courbure est constante, on peut considérer que tous les points de ces surfaces sont des extrema de courbure. Plus précisément, tous les points sont des points ombilics.

On peut ensuite introduire la notion d'inversion dans une sphère. Considérons l'inversion dans une sphère de rayon  $k$  avec son centre à l'origine. Un point de la surface de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  occupe, suite à l'inversion dans la sphère, la nouvelle position  $(x', y', z')$  suivante :

$$x' = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.33)$$

$$y' = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.34)$$

$$z' = \frac{k^2 z}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.35)$$

L'inversion dans une sphère de rayon infini consiste à produire une symétrie par rapport à un plan. La composition de symétries avec différents plans permet de produire l'ensemble des transformations rigides de l'espace, soit les trois translations et les trois rotations rigides. Sur ce sujet, on peut consulter par exemple Needham (1998). Alors que la composition de deux inversions dans des sphères concentriques permet de produire une mise à l'échelle. Ainsi

les transformations de similitude forment un sous-groupe du groupe de transformations des sphères de Lie.

La transformation identité, la transformation des surfaces parallèles et l'inversion dans les sphères sont suffisantes pour générer par composition l'ensemble des transformations de la géométrie des sphères de Lie. Ce groupe possède 15 paramètres qui sont décrits à la section 4.3.2. Ces transformations ont la particularité de préserver le degré de contact entre une sphère et une surface et donc les extremums de courbure portés par une surface.

À ces 15 paramètres, on peut soustraire les 7 paramètres de similitude qui ne changent pas la forme d'un objet, soit les trois translations rigides, les trois rotations rigides et la mise à l'échelle. On peut changer la forme d'une surface générale ainsi avec 8 paramètres tout en préservant ses extremums de courbure. Mais on peut d'abord produire une famille de surfaces bien particulières, soit les cyclides de Dupin, à partir simplement d'une droite.

Premièrement, une droite est composée de points. Les surfaces parallèles à ces points sont des sphères et la surface qui enveloppe ces sphères est un cylindre. Plus directement, on peut considérer qu'une droite est un cylindre de rayon infiniment petit.

Deuxièmement, l'inversion d'une droite dans une sphère produit un cercle tel qu'illustré à la figure 4.38.

Si l'on se limite au plan, on obtient que l'inversion d'une droite dans un cercle produit un cercle. Pour s'en convaincre, il est plus simple d'utiliser le plan complexe  $z = (x, iy)$  où  $i = \sqrt{-1}$ . Dans le plan complexe, tous les cercles et les droites peuvent s'exprimer par une équation de la forme :

$$z = \frac{z_1 u + z_2}{z_3 u + z_4} \quad (4.36)$$

où les  $z_i$  sont des constantes complexes et  $u \in \mathbb{R}$  est un paramètre. Dans ce contexte, une droite est un cercle de rayon infini. L'équation de l'inversion dans le cercle unitaire centré à l'origine est simplement :

$$z' = \frac{1}{z} \quad (4.37)$$

Ainsi il devient évident qu'une telle opération préserve les cercles. C'est-à-dire qu'un cercle sera transformé soit en cercle ou en droite.

Il faut encore se convaincre que l'équation paramétrique représente bien une droite ou un cercle. Une droite est simplement une équation de la forme  $z = z_1 u + z_2$ . Alors que par

exemple le cercle de rayon unitaire centré à l'origine peut s'écrire :

$$z = \frac{u+i}{u-i} = \frac{u^2 + 2ui - 1}{u^2 + 1} \quad (4.38)$$

Qu'on peut écrire avec les coordonnées cartésiennes :

$$x = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \quad (4.39)$$

$$y = \frac{-2u}{u^2 + 1} \quad (4.40)$$

qui est une paramétrisation rationnelle du cercle bien connu et il est simple de vérifier que cette paramétrisation satisfait l'équation du cercle  $x^2 + y^2 = 1$ . Il est également simple de déduire, à partir de ces équations, que l'inversion d'une droite qui passe par l'infini est un cercle qui doit nécessairement passer par l'origine.

Ayant obtenu un cercle à partir d'une droite, on peut maintenant générer ses surfaces parallèles. Évidemment, ses surfaces parallèles sont les tores que l'on cherchait à obtenir.

Troisièmement, utilisons maintenant comme point de départ ce cercle et ses tores parallèles. Lorsque l'on génère un tore avec une distance parallèle  $d$  qui dépasse le rayon du cercle, alors le tore perd son trou au centre et gagne deux points d'auto-intersection. L'inversion d'un tel tore avec un point d'intersection situé au centre de la sphère produit un cône. Pour s'en convaincre, on peut procéder comme suit.

Soit d'abord un cercle d'inversion dans le plan et un axe de symétrie qui passe par le centre de ce cercle (voir figure 4.39) . On ajoute une droite dans le plan ainsi que sa droite symétrique par rapport à l'axe de symétrie. L'inversion de ces deux droites produit deux cercles qui se croisent au centre du cercle d'inversion ainsi qu'à un deuxième point situé sur l'axe de symétrie. Maintenant, si l'on utilise l'axe de symétrie comme axe de révolution on obtient des surfaces de révolution. La révolution de la droite produit un cône, alors que la révolution d'un cercle qui croise l'axe de révolution sans avoir son centre sur l'axe produit un tore avec deux points d'auto-intersection situés sur l'axe. De cette façon, on obtient bien le résultat que l'inversion dans une sphère de ce tore produit un cône.

Ainsi à partir d'une droite on peut produire le cylindre, le tore et le cône. Ce sont des surfaces élémentaires qui partagent les propriétés différentielles suivantes. La courbure est constante en tout point de la surface en suivant les deux lignes de courbure principale. Les lignes de courbure sur ces surfaces sont alors des cercles ou des droites. Ainsi, tous les points de ces surfaces sont des extrema de courbure dans les deux directions de courbures principales.

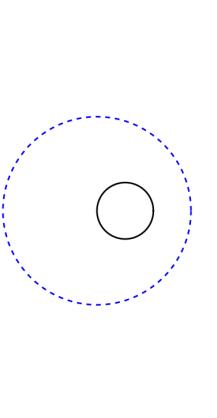


Figure 4.38 Inversion d'une droite

À la distinction du plan et de la sphère, tous les points ne sont pas des points ombilics, c'est-à-dire que la valeur de la courbure n'est pas la même dans les deux directions.

De façon plus générale, l'ensemble des surfaces que l'on peut générer avec les transformations des sphères de Lie à partir d'une droite sont les cyclides de Dupin. Les cyclides de Dupin sont l'ensemble des surfaces pour lesquelles les lignes de courbures principales sont des cercles ou des droites. Les transformations des sphères de Lie permettent de générer ainsi à partir d'une droite l'ensemble des cyclides de Dupin<sup>4</sup>.

Le but de cette démarche était à la fois d'introduire les transformations des sphères de Lie et d'exprimer la notion que du point de vue des extrema de courbure, après le plan et la sphère, les cyclides de Dupin sont les surfaces les plus simples.

Il faut encore générer les surfaces équivalentes du point de vue des inflexions. La géométrie des sphères de Lie possède une géométrie réciproque, soit la géométrie des droites dans l'espace qui sont soumises au groupe des transformations projectives.

#### 4.2.2 La réciprocité droites-sphères

La géométrie différentielle d'une surface consiste à comparer le voisinage immédiat de celle-ci à une forme aussi simple que possible comme une sphère ou une droite. La géométrie des sphères faisait l'objet des travaux de Gaston Darboux. La géométrie des droites introduite par Julius Plücker faisait l'objet des travaux de Felix Klein et Sophus Lie. Leur rencontre à

---

4. Charles Dupin (1784-1873) géomètre et ingénieur naval

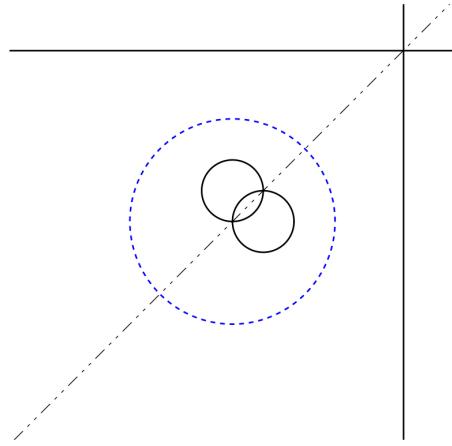


Figure 4.39 Section de la sphère d'inversion, d'un tore avec deux points d'auto-intersection et d'un cône droit avec l'axe de rotation qui permet de générer la sphère, le tore et le cône

Paris en 1870 a été fructueuse. Voici les mots de Gaston Darboux :

Cette transformation, qui établit une liaison entre les lignes droites et les sphères, c'est-à-dire entre les éléments les plus essentiels de l'espace, est une des plus belles découvertes de la Géométrie moderne ; elle est due à M. Sophus Lie.

On trouve ces derniers mots dans le premier volume des leçons sur la théorie générale des surfaces de Gaston Darboux aux pages 231 et 232. On y trouve également le développement suivant où  $i = \sqrt{-1}$ .

Si l'on prend les équations d'une droite sous la forme

$$x = az + p \quad (4.41)$$

$$y = bz + q \quad (4.42)$$

la condition pour que deux droites différentes se coupent s'exprime par la relation

$$(a - a')(q - q') - (b - b')(p - p') = 0 \quad (4.43)$$

et si l'on pose

$$a = x + yi \quad (4.44)$$

$$b = z + R \quad (4.45)$$

$$q = x - yi \quad (4.46)$$

$$p = R - z \quad (4.47)$$

et, de même,

$$a' = x' + y'i \quad (4.48)$$

$$b' = z' + R' \quad (4.49)$$

$$q' = x' - y'i \quad (4.50)$$

$$p' = R' - z' \quad (4.51)$$

elle devient

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 - (R - R')^2 = 0 \quad (4.52)$$

Si donc on considère ces formules comme établissant une correspondance entre la droite arbitraire et la sphère dont le rayon serait  $R$  et le centre aurait pour coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , on voit que ces formules font correspondre à deux droites qui se coupent deux sphères qui se touchent, et réciproquement.

Ensuite Milson (2001) énonce de façon un peu plus explicite le théorème suivant. Soit  $\sigma, \Sigma \in \mathbb{R}$  deux surfaces analytiques réelles avec un prolongement analytique complexe qui est relié par la transformation de contact droites-sphères précédente. Alors la même transformation fait correspondre les directions de courbure principales complexes de la surface  $\Sigma$  aux directions asymptotiques complexes de  $\sigma$ .

#### 4.2.3 Les cyclides de Dupin et les quadriques doublement réglées

Un exemple simple permet de se passer du prolongement complexe analytique qui est nécessaire en général. De plus, cet exemple permet de générer la famille de surfaces simples qui correspond aux cyclides de Dupin pour la géométrie des droites. Soit, comme point de départ dans l'espace des sphères, la droite qui correspond à l'axe des  $x$ . Cette droite peut être représentée par une famille de sphères de centre  $(x = u, y = 0, z = 0)$  et de rayon nul ( $R = 0$ ). La correspondance dans l'espace de la géométrie projective des droites s'obtient par les équations 4.41 et 4.42 qui contiennent les termes  $a, b, p$  et  $q$ . En substituant

$x = u, y = 0, z = 0, R = 0$  dans l'équation 4.44 on obtient  $a = u$ . De la même manière avec l'équation 4.45 on obtient  $b = 0$ , avec l'équation 4.46,  $q = u$  et avec l'équation 4.47,  $p = 0$ . Le résultat est donc :

$$x = uz \quad (4.53)$$

$$y = u \quad (4.54)$$

En éliminant le paramètre  $u$  on obtient  $x = yz$ . C'est l'équation d'une surface quadrique doublement réglée. Une surface qui contient deux familles de droites. Ces deux familles de droites forment les directions asymptotiques. Ainsi, tous les points de cette surface possèdent plus de trois points de contact avec leurs droites asymptotiques. Tous les points de cette surface sont donc flecnodaux selon les deux directions asymptotiques.

On peut maintenant appliquer à cette surface une transformation projective. Le groupe des transformations projectives possède 15 paramètres qui sont décrits à la section 4.3.1. Le passage de l'espace des sphères à l'espace des droites ne produit pas de nouveaux degrés de liberté pour transformer les surfaces. Le nombre de paramètres est ainsi le même pour les deux géométries.

Une transformation projective préserve les droites et leurs intersections ainsi que le degré des surfaces rationnelles. On peut générer avec le groupe de transformations projectives toute la famille des surfaces quadriques doublement réglées. Tous les points de ces surfaces sont flecnodaux selon les deux directions asymptotiques. De la même manière que tous les points de la cyclide de Dupin sont des extremums de courbure selon les deux directions principales.

On peut maintenant pousser un peu plus loin la correspondance entre les cyclides de Dupin et les surfaces quadriques doublement réglées.

Une quadrique doublement réglée peut-être définie à partir de trois droites gauches, c'est-à-dire trois droites non coplanaires et donc sans intersection (en anglais : skew lines). La surface peut alors être générée par la famille à un paramètre de droites qui coupent à la fois les trois droites données.

On peut obtenir une droite qui coupe les trois droites données de la façon suivante. Aucune de ces trois droites ne possède de plan en commun. Ainsi un seul plan contient une droite et un point sur une autre droite. Soit alors un premier plan qui contient la première droite et un point sur la troisième droite et un second plan qui contient la deuxième droite et le même point sur la troisième droite. L'intersection de ces deux plans est la droite unique qui passe à la fois par le point sur la troisième droite et qui coupe les deux autres droites. En

faisant varier la position du point sur la troisième droite, on génère une famille de droites à un paramètre contenue dans la quadrique doublement réglée. En choisissant trois droites de cette famille, on peut produire de la même façon la deuxième famille de droites contenue dans la quadrique. Les trois droites de départ font nécessairement partie de cette deuxième famille de droites.

Maintenant, combien de quadriques réglées distinctes peut contenir l'espace ? Pour générer toutes les droites de l'espace, il faut 4 paramètres. Une surface réglée quadrique est définie par 3 droites. Il faut  $4 \times 3 = 12$  paramètres pour générer tous les trios de droites. Mais puisque toutes les droites d'une surface quadrique réglée sont membres d'une famille à un paramètre, 3 des 12 paramètres génèrent la même surface. Ainsi l'espace contient une famille à 9 paramètres de surfaces réglées quadriques. Si l'on soustrait les 7 paramètres de similitude, il reste une famille à 2 paramètres de formes différentes.

On peut maintenant faire le raisonnement analogue avec les cyclides de Dupin. Une cyclide de Dupin peut-être définie par trois sphères non tangentes dans l'espace. La cyclide de Dupin peut alors être générée par une famille à un paramètre de sphères qui est en contact à la fois avec les trois sphères données. De façon analogue à une quadrique doublement réglée qui contient deux familles de droites, une cyclide de Dupin est enveloppée par deux familles de sphères. Par exemple pour un tore, on peut bien imaginer qu'une famille de sphères est située à l'intérieur et l'autre à l'extérieur du tore.

Maintenant, pour générer toutes les sphères de l'espace il faut 4 paramètres. Il faut 12 paramètres pour générer tous les trios de sphères. Toutes les sphères qui permettent de générer une cyclide de Dupin appartiennent à une famille à un paramètre. Ainsi l'espace contient une famille à 9 paramètres de cyclides de Dupin. Le groupe des transformations projectives et le groupe des transformations des sphères partagent un sous-groupe de transformations, soit les transformations de similitude. Si on soustrait les 7 paramètres de similitude, il reste également une famille à 2 paramètres de formes différentes.

Les mathématiques permettent ainsi parfois de raisonner avec des analogies qui sont exactes. Voici une dernière correspondance.

Le groupe des transformations des sphères de Lie possède 15 paramètres et préserve les cyclides de Dupin. Il existe une famille à 9 paramètres de cyclides de Dupin dans l'espace. Ainsi  $15 - 9 = 6$  paramètres du groupe des transformations des sphères de Lie permettent de faire glisser une cyclide sur elle-même. De la même manière 6 paramètres du groupe des transformations projectives permettent de faire glisser une quadrique doublement réglée sur elle-même.

De façon analogue, la géométrie de similitude possède 7 paramètres et préserve les sphères. Il faut quatre paramètres pour générer toutes les sphères de l'espace. Il reste donc  $7 - 4 = 3$  paramètres pour faire glisser la surface de la sphère sur elle-même. Ces 3 paramètres correspondent à des rotations rigides suivant trois axes.

On peut relier ce dernier point à la quatrième définition quelque peu énigmatique des éléments d'Euclide, soit qu'une droite est une ligne qui repose également sur ses points. Une interprétation possible est la suivante. La droite est une forme simple puisqu'elle peut glisser sur elle-même, suite à une translation, et toujours passer à travers tous ses points. Il en est de même pour le cercle suite à une rotation. La droite se distingue par le fait qu'en plus, une mise à l'échelle peut transformer une droite en elle-même, ce qui n'est pas le cas du cercle.

Le chapitre 7 consiste à s'attaquer graduellement à des surfaces plus complexes. Plus complexe d'abord dans le sens qu'une transformation projective ou une transformation des sphères de Lie ne permet plus de transformer une surface en elle-même avec 6 paramètres. Pour une surface générale, il restera les extrema de courbure et les inflexions comme marqueurs différentiels importants.

#### 4.2.4 Discussion

La réciprocité droites-sphères a permis de présenter en parallèle les surfaces les plus simples du point de vue des inflexions et des extrema de courbure. Le groupe des transformations des sphères de Lie permet de générer à partir d'une droite, l'ensemble des cyclides de Dupin. Alors que le groupe des transformations projectives permet de générer à partir d'une surface doublement réglée l'ensemble des surfaces doublement réglées.

Générer ces surfaces les plus simples est un premier pas vers un contrôle des propriétés différentielles des surfaces. Il faut encore aller au-delà de ces espaces de formes à deux paramètres.

Les transformations projectives permettent de transformer une surface quelconque tout en préservant ses inflexions. Les transformations des sphères de Lie peuvent transformer une surface quelconque tout en préservant ses extrema de courbure. Pour une surface générale, on obtient alors des espaces de formes à 8 paramètres. Mais il existe des espaces de formes encore plus larges qui préservent ces marqueurs différentiels. Les groupes de transformations sont ainsi les premières clés qui permettent d'ouvrir les portes vers ces espaces de formes.

On peut maintenant faire une revue un peu plus détaillée de ces groupes de transformations.

### 4.3 La notion de groupes de transformations linéaires et les matrices

Le groupe de transformations linéaires aussi appelé groupe matriciel et ses sous-groupes jouent un rôle central pour la théorie des groupes de Lie. On peut lire par exemple John Stillwell (2008) sur le sujet. En particulier, la géométrie projective et la géométrie des sphères de Lie peuvent se représenter par de tels groupes matriciels.

Une matrice d'un groupe matriciel présente certaines propriétés qui sont préservées lorsqu'on la multiplie par une autre matrice du même groupe. Le groupe le plus simple est constitué seulement de la matrice identité. La matrice identité multipliée par elle-même produit à nouveau la matrice identité. Les matrices qui permettent de produire les rotations rigides forment un groupe puisque deux rotations successives produisent également une rotation. Ainsi la multiplication de deux matrices de rotation produit une matrice de rotation. Ces matrices forment un sous-groupe du groupe des transformations linéaires.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Un point situé sur un cercle  $x^2 + y^2 = r^2$  se retrouve sur le même cercle suite à la transformation. De façon plus générale, le groupe de transformations préserve le résultat d'un produit scalaire entre deux vecteurs.

Il faut travailler un peu plus pour obtenir une représentation matricielle du groupe des transformations projectives et du groupe des transformations des sphères de Lie.

#### 4.3.1 La géométrie projective

David Hilbert et Stephan Cohn-Vossen introduisent la géométrie projective dans leur livre GEOMETRY AND THE IMAGINATION de la façon suivante.

Nous allons en apprendre davantage sur les faits géométriques qui peuvent être formulés et démontrés sans aucune mesure ou comparaison de distances ou d'angles. On pourrait imaginer qu'aucune propriété importante d'une figure ne pourrait être obtenue en se passant de mesure de distances et d'angles et que cela mènerait seulement à des énoncés vagues. Et en effet, la recherche a été confinée à la partie métrique de la géométrie pendant une longue période, et les questions du genre que nous allons discuter ne se sont posées que plus tard, lorsque les phénomènes associés à la peinture en perspective ont été étudiés scientifiquement.

La géométrie projective c'est la géométrie des points, des droites, des plans et de leurs incidences. C'est une géométrie déjà très utile pour la théorie des B-splines rationnelles. Le livre *NURBS from Projective Geometry to Practical Use* de Gerald E. Farin (1999) est une belle référence sur le sujet. En particulier, une transformation projective d'une B-spline rationnelle produit une B-spline rationnelle.

Du côté des propriétés différentielles, une transformation projective préserve le degré de contact qu'une courbe peut avoir avec une droite et une surface avec une droite ou un plan. Ainsi une transformation projective préserve les points d'inflexion des courbes dans le plan. Dans l'espace, les transformations projectives préservent entre autres les lignes paraboliques, les lignes asymptotiques, les lignes flecnodales et les points godrons. En fait toutes les propriétés qui sont reliées au degré de contact entre une surface et une droite ou une surface et un plan.

Traçons quatre droites non parallèles dans le plan. Chaque paire de droites possède alors nécessairement un point d'intersection. On peut former  $3 + 2 + 1 = 6$  paires de droites distinctes et on obtient ainsi 6 points d'intersection.

À travers des paires de points parmi ces 6 points d'intersection on peut faire passer de nouvelles droites qui auront elles-mêmes de nouveaux points d'intersection. En procédant de cette manière on peut démontrer qu'il y aura ultimement des points d'intersection se trouvant aussi près que l'on veut de chaque point du plan. La figure obtenue de cette façon est appelée réseau de Möbius.

Plutôt que de commencer par 4 droites, on peut également commencer la construction avec 4 points. À travers ces quatre points on peut faire passer 6 droites et on obtient à nouveau un réseau de Möbius.

Si l'on déplace un de ces quatre points on obtient un réseau déformé qui transforme par continuité tous les points du plan. On peut transformer de cette façon les courbes tracées dans le plan.

Une telle déformation est la transformation la plus générale qui préserve toutes les droites et leurs intersections. Elle préserve également le nombre de points de contact entre une courbe et une droite. Une telle déformation préserve alors les inflexions portées par les courbes. Une courbe qui possède trois points de contact avec une droite possèdera toujours trois points de contact avec celle-ci après la transformation.

Le plan permet un déplacement dans deux directions. On obtient un groupe de transformations à  $2 \times 4 = 8$  paramètres qui permet de transformer les courbes tout en préservant les inflexions portées par cette courbe.

On peut généraliser cette construction à l'espace. Il faut au départ 5 points qui peuvent se déplacer dans trois directions. On obtient un groupe de transformations à 15 paramètres qui permettent de transformer les surfaces tout en préservant les inflexions portées par cette surface.

Maintenant, on peut faire le lien entre le groupe des transformations projectives et sa représentation matricielle. Dans l'espace, une transformation projective peut s'exprimer avec les équations suivantes :

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{a_4x + b_4y + c_4z + d_4} \quad (4.56)$$

$$y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{a_4x + b_4y + c_4z + d_4} \quad (4.57)$$

$$z' = \frac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{a_4x + b_4y + c_4z + d_4} \quad (4.58)$$

Ces équations présentent un total de 16 paramètres avec tous les  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  et  $d_i$ . Par contre, la multiplication de tous ces paramètres par une constante ne change pas le résultat. Pour cette raison, le groupe de transformations possède 15 paramètres indépendants.

Maintenant pour obtenir une représentation matricielle on fait appel à un espace avec une dimension supplémentaire avec les coordonnées  $(X, Y, Z, W)$ . Si on divise toutes les coordonnées par  $W$  on obtient la projection  $(X/W, Y/W, Z/W, 1)$ . Une projection qui permet d'établir les correspondances  $x = X/W$ ,  $y = Y/W$  et  $z = Z/W$ . Les équations précédentes peuvent alors s'écrire :

$$\frac{X'}{W'} = \frac{a_1 \frac{X}{W} + b_1 \frac{Y}{W} + c_1 \frac{Z}{W} + d_1}{a_4 \frac{X}{W} + b_4 \frac{Y}{W} + c_4 \frac{Z}{W} + d_4} \quad (4.59)$$

qu'on peut réécrire sous la forme homogène

$$\frac{X'}{W'} = \frac{a_1X + b_1Y + c_1Z + d_1W}{a_4X + b_4Y + c_4Z + d_4W} \quad (4.60)$$

On peut maintenant, en introduisant un facteur de proportionnalité  $\rho'$ , séparer les numérateurs du dénominateur et écrire :

$$\rho'X' = a_1X + b_1Y + c_1Z + d_1W \quad (4.61)$$

$$\rho'Y' = a_2X + b_2Y + c_2Z + d_2W \quad (4.62)$$

$$\rho'Z' = a_3X + b_3Y + c_3Z + d_3W \quad (4.63)$$

$$\rho'W' = a_4X + b_4Y + c_4Z + d_4W \quad (4.64)$$

Ce qui permet d'exprimer une transformation projective sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \rho'X' \\ \rho'Y' \\ \rho'Z' \\ \rho'W' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

La projection  $(X'/W', Y'/W', Z'/W', 1)$  permet d'obtenir à la fin le résultat dans l'espace original à trois dimensions. On obtient ainsi une représentation matricielle du groupe des transformations projectives. Le groupe est représenté par l'ensemble des matrices non singulières. Cependant, il ne faut pas oublier que toutes les matrices identiques à un facteur multiplicatif près représentent la même transformation projective.

Sur le sujet, on peut lire par exemple Felix Klein et al. (1941).

#### 4.3.2 La géométrie des sphères de Lie

##### L'ensemble des cercles qui occultent l'ellipse

Voici un exemple pour introduire de façon concrète la géométrie des cercles dans le plan qui deviendra, dans l'espace, la géométrie des sphères de Lie.

Soit une ellipse exprimée par l'équation paramétrique :

$$\mathbf{c} = (a \cos(t), b \sin(t)) \quad (4.66)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes. Le vecteur tangent à la courbe est :

$$\mathbf{T} = \frac{(-a \sin(t), b \cos(t))}{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{1/2}} \quad (4.67)$$

Le vecteur normal qui pointe vers l'intérieur est :

$$\mathbf{N} = \frac{(-b \cos(t), -a \sin(t))}{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{1/2}} \quad (4.68)$$

En utilisant l'équation 4.11, on obtient le rayon de courbure à un point de la courbe.

$$r = \frac{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{3/2}}{ab} \quad (4.69)$$

Les centres des cercles qui osculent l'ellipse sont ainsi donnés par l'expression :

$$\mathbf{o} = \mathbf{c} + r \mathbf{N} = \mathbf{c} - \frac{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}{ab} (b \cos(t), a \sin(t)) \quad (4.70)$$

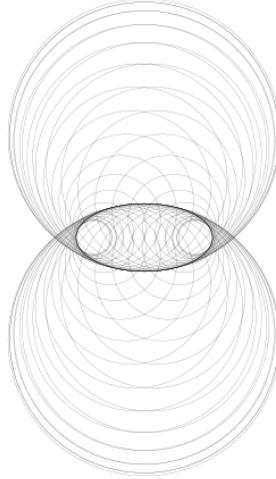


Figure 4.40 Les cercles qui osculent l'ellipse

### La géométrie des cercles orientés et les groupes de transformations qui préservent leurs contacts

La section précédente donne un exemple de calcul pour obtenir l'ensemble des cercles qui osculent une courbe. Une fois ces cercles obtenus, il est possible d'appliquer des transformations à ces cercles pour modifier leurs positions et leurs rayons tout en préservant leurs contacts. Ensuite, il est possible de régénérer la courbe qui enveloppe ces cercles transformés. Le résultat est une nouvelle courbe dont le degré de contact avec les cercles qui l'oscultent est préservé. Cette nouvelle courbe doit alors posséder nécessairement un nombre d'extremums de courbure identique à la courbe originale.

Définissons maintenant ces transformations. Soit d'abord un cercle orienté de centre  $(x, y)$  et de rayon  $r$ . La notion de cercle orienté permet de distinguer un cercle de rayon positif

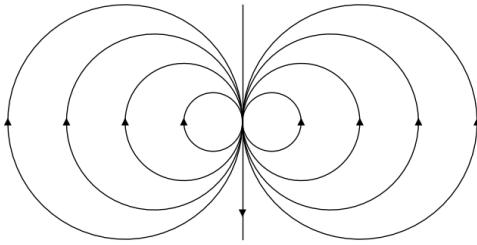


Figure 4.41 Faisceau de cercles orientés tangents

d'un cercle de rayon négatif. On peut illustrer par exemple un cercle de rayon positif avec une orientation antihoraire et un cercle de rayon négatif avec une orientation horaire. La figure 4.41 montre un faisceau de cercles orientés avec un contact de degré 1, c'est-à-dire un point commun tangent entre deux cercles orientés  $(x_1, y_1, r_1)$  et  $(x_2, y_2, r_2)$ . Non seulement deux cercles doivent être tangents, mais également avoir une même direction à leur point de contact.

La transformation de rayons réciproques et la transformation par directions réciproques présentées ci-dessous préservent un tel contact et donc préservent la relation suivante entre deux cercles en contact :

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 0 \quad (4.71)$$

### Transformation par rayons réciproques

Une transformation par rayons réciproques peut s'exprimer de la façon suivante :

$$x' = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2 - r^2} \quad (4.72)$$

$$y' = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2 - r^2} \quad (4.73)$$

$$r' = \frac{k^2 r}{x^2 + y^2 - r^2} \quad (4.74)$$

où  $k$  représente le rayon d'un cercle.

Il est simple de montrer que la transformation préserve bien la relation 4.71.

Le cercle de rayon  $k$  est illustré en rouge à la figure 4.42. Sur cette figure, l'ellipse et les cercles qui l'oscultent sont positionnés à l'intérieur du cercle rouge. La nouvelle figure obtenue après l'inversion par rayons réciproques est une forme ovoïde située à l'extérieur du cercle rouge. Le cercle rouge lui-même est préservé par la transformation. La forme elliptique devient une forme ovoïde. Ces deux formes possèdent quatre extrema de courbure, le nombre minimal pour une courbe fermée simple.

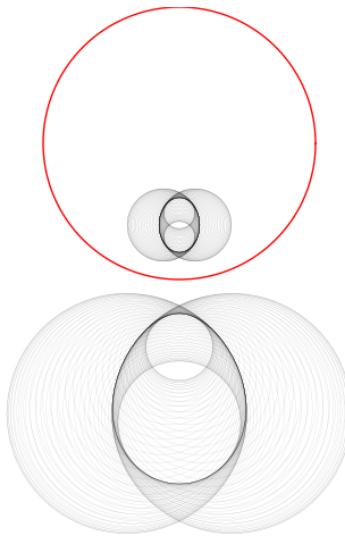


Figure 4.42 Une transformation par rayons réciproques des cercles qui osculent l'ellipse qui produit une forme ovoïde

La figure 4.43 montre un deuxième exemple avec une ellipse à une position différente, mais toujours à l'intérieur du cercle. L'échelle de la figure permet seulement de distinguer les plus grands cercles qui osculent cette ellipse. La nouvelle figure obtenue est une forme profilée qui possède toujours 4 extrema de courbure.

### Transformation par directions réciproques

Une rotation hyperbolique peut s'exprimer de la façon suivante :

$$x' = x \quad (4.75)$$

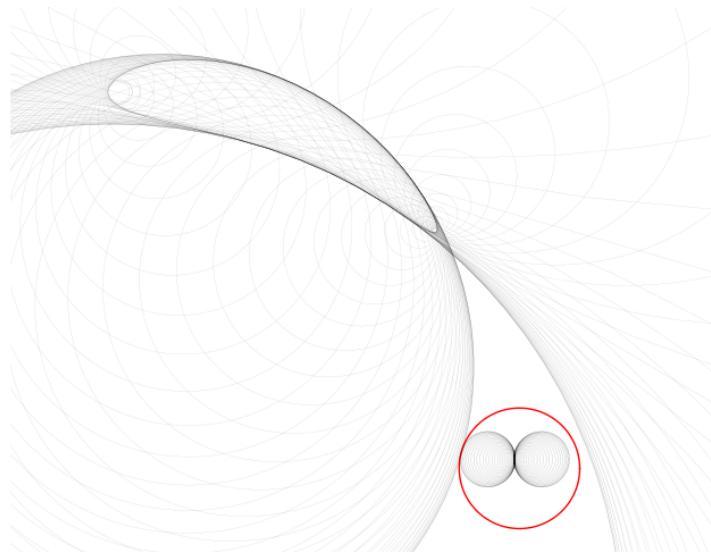


Figure 4.43 Une transformation par rayons réciproques des cercles qui osculent l'ellipse qui produit un profil d'aile

$$y' = \cosh(\theta)y + \sinh(\theta)r \quad (4.76)$$

$$r' = \sinh(\theta)y + \cosh(\theta)r \quad (4.77)$$

En ajoutant la réflexion  $x' = x$ ,  $y' = -y$  et  $r' = r$  on obtient la transformation par directions réciproques introduite par Edmond Laguerre en 1881.

On peut démontrer tout comme pour la transformation par rayon réciproque qu'une telle rotation hyperbolique ou une transformation par directions réciproques préservent bien la relation 4.71.

La figure 4.44 montre les cercles qui osculent l'ellipse avant la transformation. L'effet de la transformation est illustré à la figure 4.45. Sur ces deux figures l'axe des  $x$  est représenté par une ligne rouge. La ligne rouge elle-même est préservée par la transformation. Le résultat est une courbe qui possède toujours quatre points d'extremums de courbure.

### Le groupe de transformations de la géométrie des cercles orientés

D'abord, une transformation par rayons réciproques préserve les cercles de rayon nul. En identifiant ces cercles de rayon nul à des points, on peut affirmer que les points sont préservés par une transformation par rayons réciproques. Les transformations par rayons réciproques

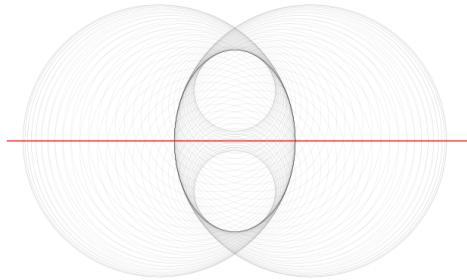


Figure 4.44 Les cercles qui occultent une ellipse avant la transformation par directions réciproques

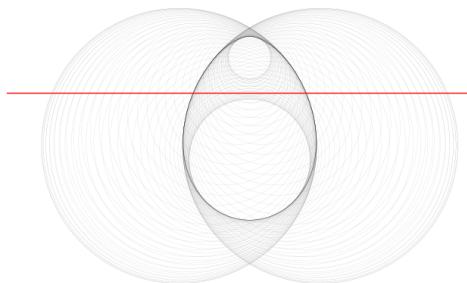


Figure 4.45 L'effet de la transformation de l'ellipse par directions réciproques

génèrent le groupe de transformations de Möbius. Le livre de Tristan Needham (1998) est une belle introduction à ce groupe de transformations de Möbius dans le plan.

Pour sa part, une transformation par directions réciproques préserve les cercles de rayon infini. En identifiant ces cercles de rayon infini à des droites, on peut affirmer que les droites sont préservées par ces transformations. Ces transformations génèrent le groupe de transformations de Laguerre.

L'ensemble de ces transformations génère le groupe de transformations de la géométrie des cercles orientés dans le plan avec ses 10 paramètres et la géométrie des sphères orientées dans l'espace avec ses 15 paramètres. La géométrie de Möbius est un sous-groupe avec 6 paramètres pour les cercles dans le plan et 10 paramètres pour les sphères dans l'espace. La

géométrie de Laguerre est un sous-groupe avec 6 paramètres pour les cercles dans le plan et 10 paramètres pour les sphères dans l'espace. En ajoutant l'opération de mise à l'échelle qui préserve également les plans, on obtient le groupe étendu de Laguerre avec 7 paramètres pour les cercles dans le plan et 11 paramètres pour les sphères dans l'espace. On peut lire par exemple les livres de Julian L. Coolidge (1916) et Thomas E. Cecil (1992) sur le sujet.

La collaboration de Sophus Lie, Felix Klein et Gaston Darboux en 1870 a permis la découverte de ces groupes de transformations. Pour apprécier ces géométries, il faut visualiser ces transformations à la manière de ces grands géomètres du 19<sup>e</sup> siècle.

On peut aborder d'abord la géométrie des cercles dans le plan. Un groupe de transformations dont les 10 paramètres correspondent au sous-groupe des transformations projectives qui préserve la quadrique de Lie dans un espace à 4 dimensions. On arrive à développer assez rapidement une intuition pour ces transformations en étudiant quelques projections de ces transformations dans notre espace à trois dimensions.

On souhaite représenter l'ensemble des cercles que contient le plan. Pour y arriver, on associe un point de l'espace à trois dimensions à chacun de ces cercles orientés de la façon suivante. On donne tout simplement à un cercle la coordonnée  $(x, y, r)$ . On peut ensuite imaginer que ce point représente le sommet d'un cône dans cet espace à trois dimensions (voir figure 4.46). L'intersection du cône et du plan  $(x, y)$  produit le cercle que ce point représente.

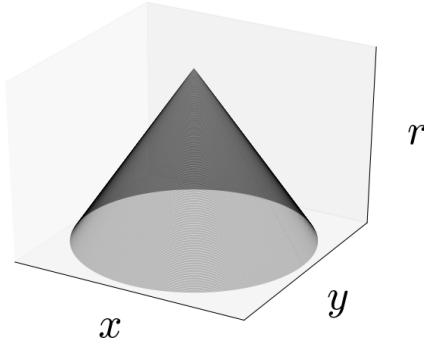


Figure 4.46 Un cercle représenté par le point sommet d'un cône dans l'espace  $(x, y, r)$

Le premier sous-groupe de transformations généré par la transformation par rayons réciproques possède 6 paramètres. Ce groupe de transformations préserve les cercles de rayons nuls et donc les points dans le plan  $(x, y)$  à la figure 4.46. Ainsi on peut d'abord faire abstraction pour un moment de la dimension  $r$ . Il faut maintenant visualiser ce groupe de transformations à 6 paramètres qui préserve les points et associer ce groupe à un groupe

matriciel.

Cette première projection dans notre espace à trois dimensions donne à la quadrique de Lie la forme d'une sphère. La démonstration a été faite à la section 4.2.3, que le groupe des transformations projectives permet d'altérer la position des points sur une quadrique doublement réglée tout en préservant la quadrique, et ce avec 6 paramètres. De la même manière, le groupe des transformations projectives permet d'altérer la position des points sur une sphère tout en préservant la sphère avec 6 paramètres.

Habituellement, les transformations projectives ne préservent pas les cercles, par contre ce sous-groupe de transformations préserve tous les cercles tracés sur cette sphère. Ceci s'explique du fait que les transformations projectives préparent les plans et que tous ces cercles peuvent être obtenus par l'intersection entre un plan et la sphère. Une telle transformation à 6 paramètres qui préserve les cercles sur une sphère est connue depuis l'antiquité. C'est tout simplement la projection stéréographique.

Une première projection stéréographique applique tous les points du plan sur une sphère. Les déplacements rigides de la sphère, soit trois rotations et trois translations, représentent les 6 paramètres. Une deuxième projection stéréographique retourne les points de la sphère vers le plan.

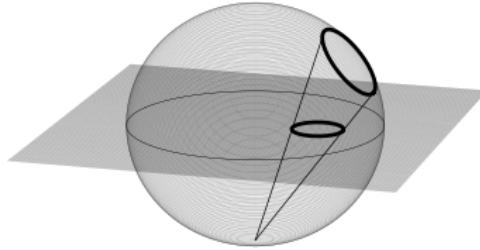


Figure 4.47 Projection stéréographique

On ne visualise de cette façon que les transformations des points. Ceci est déjà une étape importante. Ce groupe de transformations des points du plan est le groupe des transformations de Möbius. On peut appliquer ces transformations directement à des courbes et le nombre d'extremums de courbure sera préservé.

Maintenant on peut visualiser une deuxième projection de la quadrique de Lie dans notre

espace à trois dimensions. Cette fois plutôt que de considérer le plan  $(x, y)$  de la figure 4.46 on considère plutôt le plan  $(x, r)$ . Ce plan est illustré à la figure 4.48. Deux points situés sur une même ligne droite qui coupent l'axe  $r$  à  $\pm 45$  degrés représentent deux cercles en contact. On souhaite obtenir les transformations qui préservent le contact entre les cercles. Ainsi deux points situés sur une même droite à  $\pm 45$  degrés doivent toujours se situer sur une même droite à  $\pm 45$  degrés après la transformation.

On peut d'abord appliquer une translation rigide du plan  $(x, r)$ . Une telle transformation préserve bien les droites à  $\pm 45$  degrés. Ce sont en effet deux degrés de liberté permis.

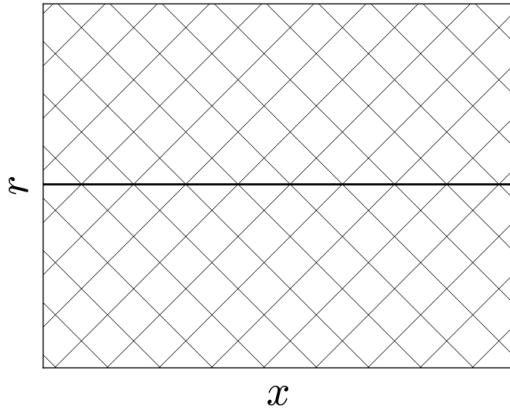


Figure 4.48 Plan  $(x, r)$

La translation dans la direction de  $r$  consiste à augmenter ou réduire le rayon des cercles d'une valeur constante pour tous les cercles sans changer la position de leurs centres. Cette transformation permet de produire les courbes parallèles.

Pour obtenir les autres degrés de liberté, on utilise une projection analogue à la projection stéréographique. On peut même utiliser les formules de la projection stéréographique telles quelles si l'on multiplie d'abord la valeur du rayon par  $i = \sqrt{-1}$ . Le rayon devient alors une variable au même titre que  $x$  et  $y$ .

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 0 \quad (4.78)$$

avec la substitution  $t = ir$  on obtient :

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (t_1 - t_2)^2 = 0 \quad (4.79)$$

Avec une telle substitution, un cercle dans le plan réel est transformé en hyperbole toujours

dans le plan réel. De la même façon, la sphère de la projection stéréographique est transformée en quadrique doublement réglée illustrée à la figure 4.49.

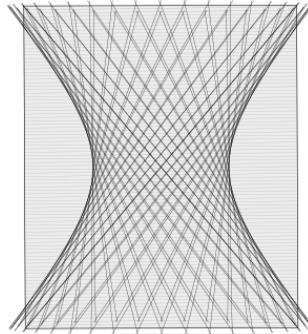


Figure 4.49 Quadrique doublement réglée

Même si la sphère s'est transformée en quadrique doublement réglée, le principe de projection stéréographique reste le même. La figure 4.50 illustre la projection d'une droite qui coupe l'axe  $r = 0$  à 45 degrés dans le plan  $(x, r)$  sur la quadrique de Lie. Cette droite est toujours une droite après la projection, mais elle est maintenant contenue dans la quadrique doublement réglée.

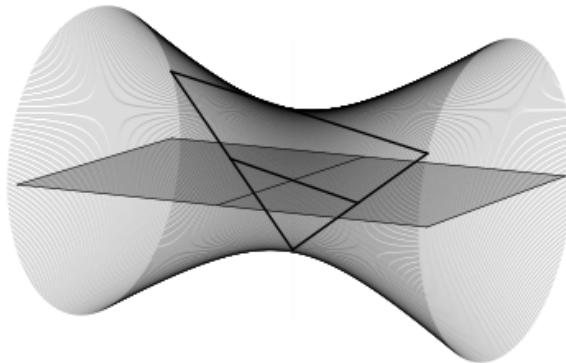


Figure 4.50 Projection stéréographique

La figure 4.51 illustre la projection de l'axe des  $x$  sur la quadrique doublement réglée. Le cercle qu'on obtient alors n'est qu'une tranche de la sphère de la projection stéréographique

du plan  $(x, y)$ . Il faudrait ainsi avoir 4 dimensions pour illustrer la quadrique de Lie associée à la géométrie des cercles dans le plan.

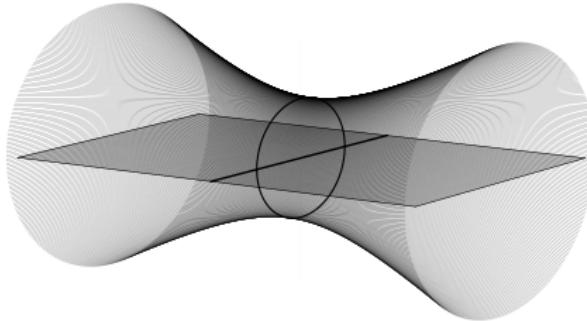


Figure 4.51 Projection stéréographique de l'axe des  $x$

La dernière étape consiste à appliquer l'analogue des translations et des rotations rigides à cette quadrique. L'espace de tous les cercles dans le plan  $(x, y)$  est représenté par des points dans l'espace  $(x, y, r)$ . Ensuite, on ajoute une dimension supplémentaire. Appelons cette dimension supplémentaire  $\rho$ . La figure 4.47 représente l'espace  $(x, y, \rho)$ . La figure 4.50 représente l'espace  $(x, r, \rho)$ .

Au total, il faudrait 4 dimensions pour représenter l'espace  $(x, y, r, \rho)$ . Quatre dimensions qui donnent à la géométrie des cercles orientés ses 10 paramètres. Soit les quatre translations  $x$ ,  $y$ ,  $r$ ,  $\rho$  et les six rotations  $xy$ ,  $xr$ ,  $x\rho$ ,  $yr$ ,  $y\rho$ ,  $r\rho$  de la quadrique de Lie. Les rotations  $xy$ ,  $x\rho$  et  $y\rho$  ont la forme :

$$x' = x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \quad (4.80)$$

$$y' = x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \quad (4.81)$$

alors que les rotations hyperboliques  $xr$ ,  $yr$  et  $r\rho$  ont la forme

$$x' = x\cosh(\theta) + r\sinh(\theta) \quad (4.82)$$

$$r' = x\sinh(\theta) + r\cosh(\theta) \quad (4.83)$$

La généralisation aux sphères dans l'espace se fait sans difficulté. Au total il faudrait 5 dimensions pour représenter l'espace  $(x, y, z, r, \rho)$ . Cinq dimensions qui donnent à la géométrie

des sphères orientées ses 15 paramètres. Soit les 5 translations  $x, y, z, r, \rho$  et les 10 rotations qui correspondent aux  $4 + 3 + 2 + 1 = 10$  paires d'axes ( $xy, xz, xr, x\rho, \dots$ ) qu'on peut former avec 5 axes.

Sur le sujet on peut consulter le livre *Lie Sphere Geometry* de Thomas E. Cecil (1992).

#### 4.3.3 Discussion

On peut associer le groupe des transformations projectives à un groupe matriciel. Soit l'ensemble des matrices non singulières où toutes les matrices identiques à un facteur de proportionnalité près représentent la même transformation projective.

De manière similaire, on peut associer le groupe des transformations des cercles orientés à un groupe matriciel. Soit le groupe des transformations projectives dans un espace à 4 dimensions qui préserve une quadrique de Lie.

On peut encore diviser le groupe des transformations des cercles orientés en sous-groupe. Les transformations par rayons réciproques génèrent le groupe des transformations de Möbius. C'est la projection stéréographique qui était déjà connue de Ptolémée qui permet de visualiser ce groupe de transformations pour les points du plan. Ensuite pour obtenir la quadrique complète de Lie pour la géométrie des cercles orientés, il faut ajouter une dimension. Mais pour les besoins de la visualisation, il est plus simple de se restreindre à un espace à trois dimensions. On retire donc d'abord la dimension  $y$  avant d'ajouter la dimension  $r$ . Alors que dans le sous-espace  $(x, y, \rho)$  la quadrique de Lie se présente comme une sphère, dans le sous-espace  $(x, r, \rho)$ , la même quadrique de Lie se présente comme une quadrique doublement réglée. C'est la projection stéréographique sur cette quadrique doublement réglée qui permet de visualiser l'effet des autres paramètres du groupe de transformations.

On obtient ainsi l'ensemble des transformations projectives qui préservent la quadrique de Lie. De façon générale, une transformation projective préserve les droites et leurs intersections. Pour préserver le contact entre les cercles il était essentiel que les droites et leurs intersections soient préservées sur la quadrique de Lie.

La géométrie des cercles orientés de coordonnées  $(x, y, r)$  devient la géométrie des sphères de Lie en ajoutant simplement une dimension pour obtenir les coordonnées  $(x, y, z, r)$ . On obtient alors une représentation matricielle du groupe des transformations des cercles et des sphères de Lie. Une matrice qui présente 10 paramètres pour la géométrie des cercles dans le plan et 15 paramètres pour la géométrie des sphères.

Une sphère est ainsi associée à un point sur une quadrique de Lie. Avec la réciprocité droites-sphères on peut montrer qu'une droite dans l'espace est associée à un point sur une qua-

drique de Klein et que les transformations projectives qui préservent cette dernière quadrique confèrent aux droites de l'espace les mêmes degrés de liberté offerts par le groupe de transformations projectives de l'espace.

Dans le plan, une transformation projective préserve le degré de contact entre une courbe et une droite. Ces transformations préservent ainsi les points d'inflexion sur une courbe. Ce groupe possède 8 paramètres.

Dans l'espace, une transformation projective préserve le contact entre une surface et un plan et le degré de contact entre une surface et une droite. Alors ces transformations préservent les lignes paraboliques, les lignes flecnodales et tous les points qui ont un degré de contact plus élevé avec une droite. Ce groupe possède 15 paramètres.

Dans le plan, une transformation de la géométrie des cercles orientés préserve le degré de contact entre une courbe et un cercle. Alors ces transformations préservent les points d'extremums de courbure. Ce groupe possède 10 paramètres.

Dans l'espace, une transformation des sphères de Lie préserve le contact entre une surface et une sphère. Alors ces transformations préservent les points d'extremums de courbure. Ce groupe possède 15 paramètres.

Dans le plan, la géométrie étendue de Laguerre est un sous-groupe de la géométrie des cercles orientés qui préserve également les droites. Ce sous-groupe possède 7 paramètres.

Dans l'espace, la géométrie étendue de Laguerre, un sous-groupe de la géométrie des sphères de Lie, préserve également les plans. Ce groupe de transformations préserve donc le degré de contact entre une surface et un plan et entre une surface et une sphère. Ainsi ces transformations préservent à la fois les lignes paraboliques et les lignes d'extremums de courbure. Par contre, ces transformations qui permettent entre autres de produire les surfaces parallèles ne préservent pas les droites. Les surfaces parallèles d'une droite sont des cylindres. Alors une telle transformation ne préserve pas nécessairement les points d'une surface avec un degré de contact plus élevé avec une droite comme par exemple les lignes flecnodales.

Tous ces groupes de transformations ont comme sous-groupe les transformations de similitude, soit les translations, les rotations et les mises à l'échelle. Ce sont des transformations qui ne modifient pas la forme d'une courbe ou d'une surface. Dans le plan, le groupe de similitudes possède 4 paramètres et dans l'espace 7 paramètres. Si l'on soustrait ces paramètres aux groupes de transformations précédents, on obtient le nombre de paramètres qui permettent de changer une forme. Dans le plan on obtient :

- La géométrie projective :  $8 - 4 = 4$
- La géométrie des cercles orientés de Lie :  $10 - 4 = 6$

- La géométrie de Möbius :  $6 - 4 = 2$
- La géométrie étendue de Laguerre :  $7 - 4 = 3$

Alors que dans l'espace on obtient :

- La géométrie projective :  $15 - 7 = 8$
- La géométrie des sphères orientées de Lie :  $15 - 7 = 8$
- La géométrie de Möbius :  $10 - 7 = 3$
- La géométrie étendue de Laguerre :  $11 - 7 = 4$

#### 4.4 La technique du miroir

On peut retrouver à la page 62 du livre *GEOMETRIC DIFFERENTIATION For the intelligence of curves and surfaces* de Ian R. Porteous ce qui suit :

L'identification des développées avec les caustiques peuvent être la base d'une approche toute nouvelle de la géométrie différentielle des courbes dans le plan dans laquelle une courbe et ses parallèles sont considérées comme les fronts d'onde de la lumière se déplaçant à une vitesse constante le long des rayons Ces rayons sont les normales d'une courbe et se concentrent sur sa développée, la caustique de l'onde. L'intuition, dont les origines historiques remontent aux premiers travaux sur la géométrie différentielle, est à la base de beaucoup de travaux contemporains sur la théorie des singularités, en particulier ceux de l'école russe sous la direction de V.I. Arnold, mais ceci n'est pas l'approche adoptée pour le présent livre sauf incidemment. Pour un compte rendu récent des travaux russes au cours des vingt dernières années, on peut consulter Arnold (1990).

Dans ce que nous venons de dire, nous avons pris la vision simpliste de l'optique géométrique que la lumière qui voyage le long de rayons. Pour une étude de caustiques réelles, on peut consulter les expériences remarquables de Berry and Upstill (1980) fait à Britol qui ont été grandement influencées par l'œuvre de René Thom (1972), l'inspiration originale de ce livre.

Après avoir considéré les droites tangentes, les cercles tangents et les sphères tangentes, on peut considérer un dernier élément, soit les droites normales. Si l'on fait le rapprochement entre une telle droite normale et un rayon de lumière, les surfaces parallèles qui partagent leurs droites normales peuvent alors représenter un front d'onde qui se propage dans l'espace.

Pour simplifier le développement, on se limite d'abord à deux dimensions. On considère ainsi les courbes dans le plan. Les résultats seront généralisés par la suite pour les surfaces dans

l'espace.

On peut déduire le théorème suivant des travaux de Bruce et al. (1982) et Pottmann and Peternell (1998). Dans le plan, contrôler la dérivée troisième d'une fonction qui représente un miroir permet de contrôler les extrema de courbure d'un front d'onde réfléchi.

Un front d'onde correspond dans notre contexte à une courbe  $\mathbf{c}(u)$  tracée dans le plan et sur laquelle on souhaite exercer un contrôle sur ses propriétés différentielles. Un front d'onde qui résulte de la réflexion sur un miroir  $m(u)$  d'un front d'onde qui était une droite horizontale qui se dirigeait vers le miroir.

La relation suivante permet de passer de la fonction rationnelle  $m(u)$  qui représente le miroir à la courbe rationnelle  $\mathbf{c}(u)$  qui représente le front d'onde réfléchi.

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} u \\ m \end{bmatrix} + \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}(d + m) \quad (4.84)$$

Le terme  $[u, m]^T$  représente les coordonnées d'un point sur le miroir. Le terme  $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$  est la direction de réflexion qu'il faut encore déterminer. Enfin, le terme  $(d + m)$  est la distance parcourue dans cette direction normale. La variable  $d$  exprime la distance entre deux courbes parallèles. Le dernier terme  $m$  permet de tenir compte de l'effet de l'élévation d'un point du miroir. La réflexion d'un rayon se produit plus tôt pour un point du miroir avec une élévation plus grande.

Pour déterminer le terme  $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ , on utilise la loi de réflexion selon laquelle l'angle d'incidence par rapport à la normale du miroir est égal à l'angle de réflexion. Une direction qui peut s'exprimer avec le vecteur  $\mathbf{v} = [\tan(2\theta), 1]^T$  où l'angle  $\theta$  est l'angle entre l'incidence verticale et le vecteur normal du miroir à un point  $(u, m(u))$ .

On peut calculer ce vecteur  $\mathbf{v}$  avec l'identité trigonométrique :

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)} \quad (4.85)$$

et le fait que  $\tan(\theta) = -m_u$ .

on peut donc choisir un vecteur  $\mathbf{v}$  :

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2m_u \\ 1 - m_u^2 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

En particulier pour  $d = 0$  :

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} u \\ m \end{bmatrix} + \frac{m}{m_u^2 + 1} \begin{bmatrix} -2m_u \\ 1 - m_u^2 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

Si la fonction  $m$  est rationnelle alors la courbe  $\mathbf{c}$  est également rationnelle.

On peut encore simplifier

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2m}{m_u^2 + 1} \begin{bmatrix} -m_u \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

On peut enfin obtenir les courbes parallèles de la façon suivante. On peut faire une première translation verticale du miroir d'une valeur de  $d$ , produire la réflexion et ensuite faire une translation verticale du résultat d'une valeur de  $-d$ .

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} u \\ -d \end{bmatrix} + \frac{2(m + d)}{m_u^2 + 1} \begin{bmatrix} -m_u \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

On peut également lire sur le sujet Rida T. Farouki (2008).

#### 4.4.1 Un miroir parabolique

L'exemple le plus simple est le miroir parabolique qui peut réfléchir la lumière vers son foyer et ainsi produire des fronts d'onde en forme de cercle. Pour  $m = u^2$  :

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -d \end{bmatrix} + \frac{1}{4u^2 + 1} \begin{bmatrix} u - 4du \\ 2u^2 + 2d \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

Les courbes  $\mathbf{c}$  sont des arcs de cercle. Les courbes obtenues avec  $d = [0.00, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25]$  sont illustrées à la figure 4.52.

#### 4.4.2 Un miroir et les zéros de sa dérivée troisième

Pour une forme de miroir plus générale, un rayon de lumière est réfléchi vers le foyer de la fonction parabolique qui osculte la courbe.

Soit le miroir  $m = u^2 - u^4$ . Sur la figure 4.53 l'ensemble des foyers des paraboles qui osculent le miroir  $m$  trace la courbe en bleu. Cette courbe bleue est appelée caustique. La caustique peut-être aussi définie comme l'enveloppe des rayons réfléchis par le miroir. À un tel endroit,

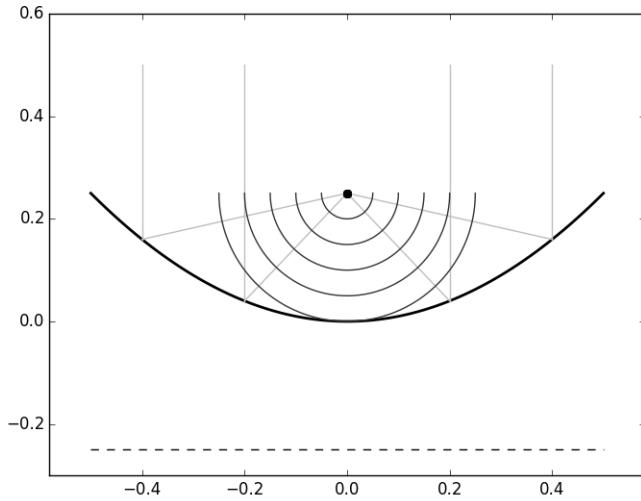


Figure 4.52 Miroir parabolique

la lumière est concentrée et pourrait causer une brûlure d'où le nom caustique.

Une seule fonction parabolique passe par trois points. En général, il existe trois points de contact entre la fonction  $m(u)$  et la parabole qui l'osculte. Dans une telle situation, il existe un contact de degré 2. Mais si en un point de la fonction la dérivée troisième est nulle et la dérivée quatrième est non nulle alors le contact devient de degré 3.

La dérivée troisième de la fonction  $m$  par rapport à  $u$  est  $m_{uuu} = -24u$ . À  $u = 0$ , la fonction parabolique qui osculte la courbe possède un contact de degré 3. On peut dire qu'à un tel point le miroir se comporte davantage comme une parabole qu'aux autres points du miroir. L'effet sera notable sur la caustique. Les rayons réfléchis à proximité de ce point vont produire une courbe caustique avec un point de rebroussement.

Ce qui est remarquable, c'est que les fronts d'onde réfléchis possèdent un extremum de courbure au point correspondant. À un tel point, le cercle qui osculte le front d'onde possède 4 points de contact avec celui-ci. L'extremum de courbure est illustré à l'aide d'un point rouge sur la figure 4.53. La caustique joue alors également le rôle de centre de courbure pour le front d'onde. Dans ce contexte, la courbe caustique illustrée en bleu peut également porter le nom de développée. Ceci illustre bien que toutes les courbes parallèles qui partagent leurs droites normales ont toujours en commun le même lieu des centres de courbure et donc la même développée.

La correspondance entre les zéros de la dérivée troisième d'une fonction représentée par un miroir et les extrema de courbure d'une courbe dans le plan peut s'établir de cette façon.

On peut lire sur le sujet l'article de Bruce et al. (1982). La réflexion fait correspondre à une parabole qui osculte le miroir, un cercle qui osculte le front d'onde. La conséquence importante est qu'un contact plus élevé du miroir avec une parabole fait correspondre un contact plus élevé d'un front d'onde avec un cercle.

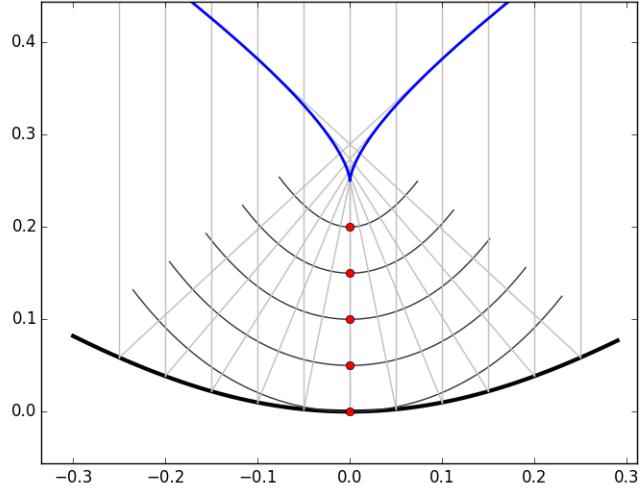


Figure 4.53 Le miroir  $m = u^2 - u^4$  et la racine de sa dérivée troisième

Avec ce principe du front d'onde réfléchi  $\mathbf{c}$ , si on sait contrôler les zéros de la dérivée troisième d'une fonction  $m$  alors on peut produire des courbes  $\mathbf{c}$  avec un nombre prédéterminé d'extremums de courbure. Le contrôle des zéros de la dérivée troisième d'une fonction fait l'objet du chapitre 5.

De plus, les zéros de la dérivée seconde d'une fonction  $m$  correspondent aux points d'inflexion du front d'onde réfléchi  $\mathbf{c}$ . La fonction  $m$  et le front d'onde réfléchi possèdent deux points d'inflexion illustrés par deux points verts à la figure 4.54.

On peut appliquer une transformation des sphères de Lie à toutes ces courbes rationnelles  $\mathbf{c}$  et le résultat sera une courbe rationnelle. Dans le plan, 10 degrés de liberté sont disponibles pour transformer le résultat en une autre courbe rationnelle avec le même nombre d'extremums de courbure.

#### 4.4.3 Généralisation à l'espace

La relation suivante permet de passer de la fonction  $m(u, v)$  qui représente le miroir dans l'espace à la surface B-spline rationnelle  $\mathbf{S}(u, v)$  qui représente le front d'onde réfléchi.

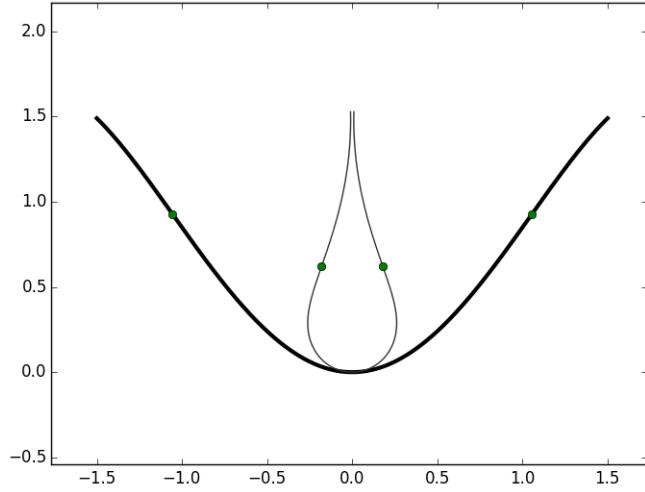


Figure 4.54 Le miroir  $m = u^2 - 0.15u^4$  et les zéros de sa dérivée seconde

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ -d \end{bmatrix} + \frac{2(m+d)}{m_u^2 + m_v^2 + 1} \begin{bmatrix} -m_u \\ -m_v \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

Les points du front d'onde qui possède un degré de contact plus élevé avec une sphère correspondent aux points du miroir qui possède un degré de contact plus élevé avec une parabole de révolution. On peut identifier de tels points sur le miroir à l'aide des formes différentielles de degré deux et trois.

La forme différentielle de degré deux peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{uu} & m_{uv} \\ m_{uv} & m_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a^2 m_{uu} + 2ab m_{uv} + b^2 m_{vv} \quad (4.92)$$

Une telle matrice réelle symétrique possède des vecteurs propres orthogonaux. Ces deux directions  $[a, b]^T$  vont correspondre aux deux directions de courbures principales sur le front d'onde réfléchi.

Si pour une de ces deux directions  $[a, b]^T$ , la forme différentielle de degré trois  $a^3 m_{uuu} + 3a^2 b m_{uuv} + 3ab^2 m_{uvv} + b^3 m_{vvv}$  s'annule, alors on retrouve un point d'extremum de courbure sur le front d'onde réfléchi.

Ceci permet déjà d'établir un lien avec les surfaces les plus simples du point de vue des

extremums de courbure. Si le miroir est une parabole de révolution  $m(u, v) = a(u^2 + v^2)$  alors le front d'onde réfléchi prendra la forme d'une sphère. Si le miroir est une fonction quadratique  $m(u, v) = au^2$  alors le front d'onde réfléchi prendra la forme d'un cylindre.

De façon plus générale, pour un miroir défini par une fonction de degré deux  $m = au^2 + buv + cv^2 + du + ev + f$  la forme différentielle de degré trois est nulle pour tous les points du miroir, peu importe la direction  $[a, b]^T$ . Alors tous les points du front d'onde sont des extreumums de courbure. Ainsi, pour un miroir quadratique plus général qu'une parabole de révolution, le front d'onde prendra la forme d'une cyclide de Dupin.

#### 4.4.4 Discussion

Les propriétés différentielles des courbes et des surfaces sont étudiées en utilisant des principes d'optique géométrique.

Dans le plan, la courbe étudiée correspond à la réflexion d'un front d'onde horizontal qui se dirige vers un miroir. Le miroir correspond à une fonction à une variable. L'axe d'une fonction parabolique est toujours perpendiculaire à l'horizontale. Dans une telle situation, la caustique est dégénérée et tous les rayons réfléchis convergent vers un point. Dans cette situation, le front d'onde est un arc de cercle. De façon plus générale, la caustique est une courbe qui est formée par les foyers des fonctions paraboliques qui osculent la fonction.

Une seule fonction parabolique passe à travers trois points. Ainsi une fonction parabolique qui oscule une fonction possède habituellement trois points de contact avec celle-ci. Un point d'inflexion sur une fonction correspond à un zéro de sa dérivée seconde. La parabole qui oscule une fonction à un point d'inflexion est une droite. Le foyer d'une telle parabole dégénérée est situé à l'infini. La caustique va alors passer par l'infini. Cette caustique représente le centre de courbure du front d'onde réfléchi. Un tel centre de courbure à l'infini correspond bien à un point d'inflexion sur le front d'onde réfléchi et donc sur la courbe étudiée.

On peut maintenant chercher à déterminer les points d'une fonction avec un contact plus étroit avec une fonction parabolique. Un zéro de la dérivée troisième de la fonction permet d'obtenir au moins 4 points de contact avec la fonction parabolique qui l'oscute. À un tel point, le front d'onde réfléchi possède également au moins 4 points de contact avec le cercle qui l'oscute. Ce point sur le front d'onde est un extremum de courbure.

De la même manière la surface étudiée correspond à un front d'onde plan réfléchi par un miroir.

La réflexion d'un front d'onde plan qui se dirige vers une parabole de révolution dont l'axe est perpendiculaire à ce front d'onde incident produit un front d'onde sphérique. De manière

plus générale, la réflexion d'un front d'onde plan sur un miroir qui possède un point avec un contact plus étroit avec une parabole de révolution dont l'axe est perpendiculaire au front d'onde incident produit un front d'onde réfléchi qui possède un contact plus étroit avec une sphère.

Un point d'une surface possède en général un contact plus étroit avec deux sphères. De façon analogue, une fonction à deux variables possède en général un contact plus étroit avec deux paraboles de révolution. Le foyer d'une telle parabole représente un point d'une caustique des rayons réfléchis. On peut produire ainsi deux surfaces focales. Ces deux surfaces focales sont également le lieu des centres des sphères qui possède un contact plus étroit avec la surface étudiée.

Si une de ces deux paraboles est un plan, alors le foyer se retrouve à l'infini. De plus, la courbe d'intersection entre ce plan et la fonction présente alors un point de rebroussement. C'est donc un point parabolique sur la fonction. Ainsi les lignes paraboliques sur le miroir correspondent aux lignes paraboliques sur le front d'onde réfléchi et donc sur la surface étudiée.

Si une de ces deux paraboles de révolution possède un contact encore plus étroit que d'habitude avec la fonction, alors on retrouvera sur la surface un contact également plus élevé avec une sphère et donc un extremum de courbure.

La technique du miroir permet également d'obtenir des courbes ou des surfaces avec une paramétrisation rationnelle dont les courbes ou les surfaces parallèles possèdent également une paramétrisation rationnelle.

L'inversion dans une sphère d'une surface rationnelle produit une surface rationnelle. Pour générer le groupe des transformations des sphères de Lie il faut ajouter l'opération qui permet d'obtenir les surfaces parallèles. Alors la transformation des sphères de Lie d'une surface rationnelle ne produira pas en général une surface qui possède une paramétrisation rationnelle. La situation est différente pour une surface obtenue à partir de la technique du miroir. Pour une telle surface, toute transformation des sphères de Lie produit une surface avec une paramétrisation rationnelle.

Enfin, il est plus simple de développer une technique nouvelle d'abord sur une fonction à deux variables avant d'attaquer une surface. Les fonctions peuvent devenir ainsi un laboratoire pour mieux comprendre les propriétés différentielles des courbes et des surfaces.

## CHAPITRE 5 LE CONTRÔLE DES PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS

Ce texte porte sur le contrôle des inflexions et des extrema de courbure. Ce sont des propriétés différentielles des courbes et des surfaces. Ce chapitre est une étape préparatoire pour atteindre ce but. Cette première étape consiste à contrôler les propriétés différentielles des fonctions. L'approche présentée ici pour traiter ce sujet est, au meilleur de nos connaissances, originale.

Ce chapitre permet d'introduire les différents concepts graduellement. Une première étape cruciale, pour l'approche proposée, consiste à traduire le problème du contrôle des propriétés différentielles des fonctions en un problème d'approximation. En particulier d'approximer de la meilleure façon possible une fonction  $\gamma(u)$  donnée avec une fonction B-spline  $s(u)$  soumise à des contraintes sur ses propriétés différentielles. La résolution de ce problème consiste à déterminer un espace de fonctions qui satisfait aux contraintes et de faire la sélection, parmi celles-ci, de la fonction la plus intéressante selon une grille d'évaluation.

Toute fonction continue sur un segment peut-être uniformément approchée arbitrairement près par une fonction polynomiale et par conséquent par une fonction polynomiale par morceaux. C'est un théorème important en théorie de l'approximation qui a été démontré par Karl Weierstrass en 1885. Une preuve de ce théorème est présentée à l'annexe A. Cette preuve donne en prime la source historique de la base polynomiale de Bernstein si importante pour la théorie des B-splines.

L'idée nouvelle que ce chapitre propose est la suivante. Pour bien apprécier toute l'efficacité et la flexibilité des bases polynomiales et des bases polynomiales par morceaux, il faut combiner deux technologies bien développées et qui s'avèrent complètement compatibles. Soit l'optimisation convexe et le calcul algébrique et différentiel appliqué aux fonctions B-splines. Ce sont deux technologies qui ont été introduites dans le chapitre de la revue de littérature.

Le chapitre commence par une mise en contexte. Le point de départ est une méthode bien connue et très répandue, soit la méthode des moindres carrés appliquée d'abord aux fonctions à une variable. La méthode d'optimisation est ensuite présentée comme une extension à la méthode des moindres carrés qui permet d'inclure des contraintes sur les propriétés différentielles. Une librairie de calcul algébrique et différentiel de fonctions B-splines permet de poser simplement le problème d'optimisation. Ensuite, pour résoudre le problème, on tire profit des avancées de l'optimisation convexe, en particulier l'application de la méthode des points intérieurs.

La difficulté des problèmes d'optimisation augmente graduellement tout au long du chapitre. Une transition importante se produit pour les fonctions B-splines à deux variables, au moment où les problèmes d'optimisation deviennent non convexes. La solution obtenue ne sera alors plus nécessairement un optimum global. La méthode des points intérieurs permettra tout de même de s'assurer que ce minimum local respecte toutes les contraintes et, au besoin, il sera possible de perturber la solution pour converger ensuite vers un minimum local plus satisfaisant.

## 5.1 Une fonction B-spline $s(u)$ sous contraintes uniformes

### 5.1.1 La méthode des moindres carrés

Soit une fonction B-spline  $s(u)$  définie par

$$s(u) = \sum_{i=1}^n N_{i,d}(u)x_i \quad (5.1)$$

où les  $x_i$  sont les coefficients à déterminer et les  $N_{i,d}(u)$  sont les fonctions de base de degré  $d$ . On suppose  $m$  points de discréétisation situés sur une fonction  $\gamma(u)$ . La fonction  $s(u)$  doit s'approcher le plus possible de ces  $m$  points selon la distance au carré suivante :

$$\underset{x_i}{\text{minimiser}} \quad \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n N_{i,d}(u_j)x_i - \gamma(u_j) \right)^2$$

On peut représenter les termes  $N_{i,d}(u_j)$  par une matrice  $\mathbf{A}$ , les termes  $\gamma(u_j)$  par un vecteur  $\mathbf{b}$  et les  $x_i$  à déterminer par le vecteur  $\mathbf{x}$ . La fonction à minimiser peut alors s'écrire :

$$f_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^2 \quad (5.2)$$

qu'on peut développer pour obtenir l'expression

$$f_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{x} - (\mathbf{A}^T\mathbf{b})^T\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{b}^T\mathbf{b} \quad (5.3)$$

La méthode des moindres carrés consiste à résoudre le système linéaire représentant la condition d'optimalité :

$$\nabla f_0(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{x} - (\mathbf{A}^T\mathbf{b})^T = 0 \quad (5.4)$$

La solution peut donc s'écrire

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{b})^T \quad (5.5)$$

### 5.1.2 La méthode de newton en optimisation

Il existe un lien étroit entre la méthode de Newton, continuellement utilisée par la suite, et la méthode des moindres carrés.

Si on applique l'opération du gradient une deuxième fois à l'équation 5.4 on obtient

$$\nabla^2 f_0(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (5.6)$$

Si on linéarise la condition d'optimalité  $\nabla f_0(\mathbf{x}^*) = 0$  près de  $\mathbf{x}$  on obtient

$$\nabla f_0(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}_{nt}) \approx \nabla f_0(\mathbf{x}) + \nabla^2 f(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}_{nt} = 0 \quad (5.7)$$

et donc le pas de Newton  $\Delta \mathbf{x}_{nt}$

$$\Delta \mathbf{x}_{nt} = -\nabla^2 f_0(\mathbf{x})^{-1} \nabla f_0(\mathbf{x}) \quad (5.8)$$

Pour un problème que l'on peut résoudre avec la méthode des moindres carrés, la solution optimale est obtenue après une seule itération, par exemple avec comme point de départ  $\mathbf{x} = 0$ .

Une matrice hessienne  $\nabla^2 f_0(\mathbf{x})$  est toujours symétrique. Pour une fonction  $f_0(\mathbf{x})$  strictement convexe, la matrice hessienne est une matrice symétrique définie positive  $\nabla^2 f_0(\mathbf{x})$ . Pour une fonction convexe  $f_0(\mathbf{x})$  non quadratique, il faut habituellement plus d'un pas de Newton pour converger vers la solution optimale  $\mathbf{x}^*$  avec un niveau de tolérance  $\epsilon$  souhaité.

Le critère d'arrêt pour la méthode de newton est typiquement  $-\nabla f(\mathbf{x})^T \Delta \mathbf{x}_{nt} / 2 \leq \epsilon$

Il reste deux critères importants à considérer. Premièrement, à chacune des itérations, il faut éviter de sortir du domaine admissible qui satisfait aux contraintes. Deuxièmement, à chacune des itérations, il faut assurer une réduction suffisante de la fonction  $f_0(\mathbf{x})$  pour forcer la convergence. La recherche linéaire permet d'adresser ces deux critères. L'algorithme est simple. À chacune des itérations, le pas complet de Newton est graduellement raccourci jusqu'à ce que ces deux critères soient satisfaits.

Le critère de réduction suffisante de la fonction s'exprime avec l'expression :

$$f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}) + \alpha \nabla f(\mathbf{x})^T \Delta\mathbf{x} \quad (5.9)$$

où  $\alpha \in (0, 0.5)$ .

Enfin, si le problème est non convexe, alors la méthode ne s'applique pas directement du moins loin de la solution optimale. Pour que la méthode puisse fonctionner, il faut absolument une matrice hessienne définie positive. Il existe alors différentes techniques pour contourner ce problème. Une technique particulièrement simple pour contourner le problème sera présentée plus loin.

### 5.1.3 Une fonction non négative

Soit la fonction  $\gamma(u) = \cos(u)$  à approximer avec une fonction B-spline  $s(u)$  de degré 3 sous la contrainte  $s(u) \geq 0$ . Une contrainte peut être appliquée directement sur les points de contrôle  $x_i$  et ainsi permettre de s'assurer que la fonction  $s(u)$  soit non négative. Ceci se déduit directement du fait que les fonctions de base  $N_{i,d}(u)$  sont non négatives. Le problème d'optimisation peut alors s'écrire sous la forme suivante.

$$\begin{aligned} & \text{minimiser}_{\mathbf{x}} \quad \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})^2 \\ & \text{soumis à} \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

C'est un problème d'optimisation convexe quadratique (en anglais Quadratic Program ou QP), soit un problème où on minimise une fonction quadratique avec des contraintes linéaires. La méthode des points intérieurs est très efficace pour résoudre ce genre de problème. On suppose avoir comme point de départ un vecteur  $\mathbf{x}$  qui satisfait aux contraintes et l'on transforme le problème avec contraintes en un problème sans contraintes. Un principe introduit à la section optimisation dans le chapitre de la revue de littérature. La contrainte est incluse dans la fonction à minimiser sous forme de barrière logarithmique  $\phi(\mathbf{x})$ .

$$\text{minimiser}_{\mathbf{x}} \quad f_0(\mathbf{x}) = t \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})^2 + \phi(\mathbf{x})$$

où

$$\phi(\mathbf{x}) = - \sum_{i=0}^n \ln(x_i) \quad (5.10)$$

Il faut d'abord fournir un point de départ  $\mathbf{x}$  qui satisfait à toutes les contraintes. Le vecteur  $\mathbf{x}$  converge suite à une succession de pas de Newton vers une solution optimale pour une première valeur de  $t$ . Il faut ensuite répéter l'opération pour des valeurs successivement plus grandes de  $t$ . L'effet de la barrière devient non négligeable seulement à proximité de la frontière lorsqu'on augmente la valeur de  $t$ . Ainsi on obtient un parcours rapide vers une solution optimale, et ce en restant toujours à l'intérieur du domaine admissible d'où le nom de méthode des points intérieurs. C'est particulièrement vrai lorsque la barrière est une fonction auto-concordante comme c'est le cas ici. Les équations pour calculer le pas de Newton sont les suivantes :

$$\nabla f_0(\mathbf{x}) = t(\mathbf{A}^T \mathbf{A})\mathbf{x} - t(\mathbf{A}^T b)^T + \nabla \phi(\mathbf{x}) \quad (5.11)$$

où

$$\nabla \phi(\mathbf{x}) = - \begin{bmatrix} 1/x_1 \\ \vdots \\ 1/x_n \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

et

$$\nabla^2 f_0(\mathbf{x}) = t(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) + \nabla^2 \phi(\mathbf{x}) \quad (5.13)$$

où

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1/x_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/x_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/x_3^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/x_n^2 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

On peut alors calculer le pas de Newton

$$\Delta \mathbf{x}_{nt} = -\nabla^2 f_0(\mathbf{x})^{-1} \nabla f_0(\mathbf{x}) \quad (5.15)$$

qui permet de converger graduellement vers une solution

$$\mathbf{x}^{(l+1)} = \mathbf{x}^{(l)} + \beta^{(l)} \Delta \mathbf{x}_{nt}^{(l)} \quad (5.16)$$

et répéter le processus pour des valeurs de  $t$  graduellement plus grandes jusqu'à atteindre le niveau de tolérance souhaité. Le terme  $\beta^{(l)} \in (0, 1)$  permet au besoin de réduire le pas de Newton pour s'assurer le respect des contraintes et un taux suffisant de convergence.

La figure 5.1 présente la solution optimale qui satisfait aux contraintes imposées pour une fonction B-spline avec 11 points de contrôle. Les points de contrôle sont représentés en gris. La figure 5.2 présente la solution optimale pour une fonction B-spline avec 200 points de contrôle. Les 200 points de contrôle ne sont pas illustrés pour éviter d'encombrer la figure.

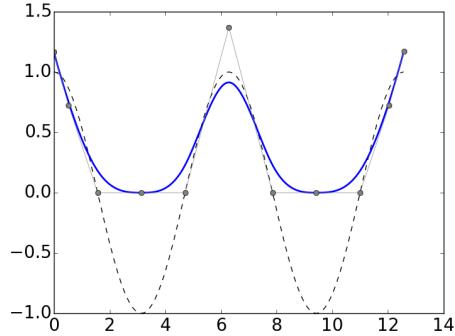


Figure 5.1 Solution optimale avec 11 points de contrôle

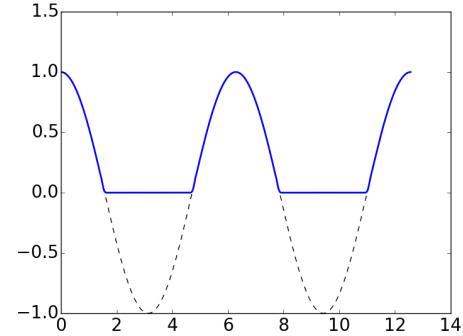


Figure 5.2 Solution optimale avec 200 points de contrôle

#### 5.1.4 Une dérivée première non négative

Le principe reste ici le même que pour le problème précédent. On peut donc poser le problème et ensuite directement présenter la solution. Cette fois, on approxime la fonction  $\gamma(u) = \sin(u) + 0.5u$  avec une fonction B-spline  $s(u)$  de degré 3 sous la contrainte que la première dérivée soit non négative  $s_u(u) \geq 0$ . Toujours en utilisant les propriétés des B-splines, la contrainte peut être appliquée directement sur les points de contrôle  $x_i$ . Le problème consiste toujours à minimiser une fonction quadratique avec des contraintes linéaires.

$$\begin{aligned} & \text{minimiser}_{\mathbf{x}} \quad \frac{1}{2} (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})^2 \\ & \text{soumis à} \quad x_{i+1} - x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

La figure 5.3 présente la solution optimale pour une fonction B-spline avec 11 points de

contrôle. La figure 5.4 présente la solution optimale pour une fonction B-spline avec 200 points de contrôle.

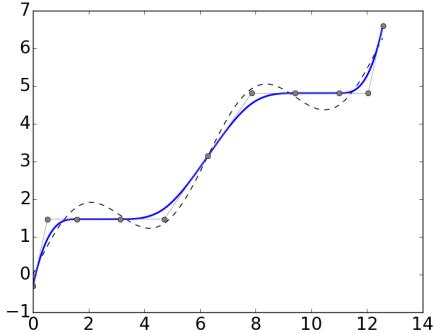


Figure 5.3 Solution optimale avec 11 points de contrôle

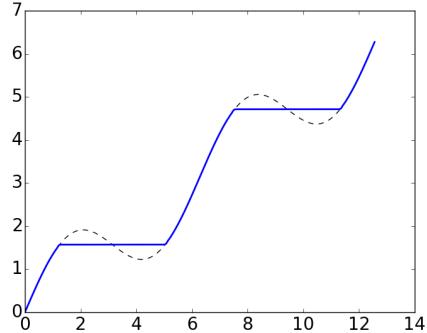


Figure 5.4 Solution optimale avec 200 points de contrôle

### Une dérivée seconde non négative

Soit la fonction  $\gamma(u) = \cos(2u) + 0.2(u - 2\pi)^2$  approximée avec une fonction B-spline  $s(u)$  de degré 4 sous la contrainte que la dérivée seconde  $s_{uu}(u) \geq 0$ . Pour une fonction B-spline avec une distribution uniforme de noeuds, le problème d'optimisation peut s'écrire :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser}_{\mathbf{x}} \quad \frac{1}{2}(\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^2 \\ & \text{soumis à} \quad x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n-2. \end{aligned}$$

Ce qui est encore une fonction quadratique à minimiser avec des contraintes linéaires.

La figure 5.5 présente la solution optimale pour une fonction B-spline avec 11 points de contrôle et la figure 5.6 pour une fonction B-spline avec 200 points de contrôle. Le dernier résultat peut sembler surprenant, pourtant il permet bel et bien de diminuer la fonction coût quadratique à minimiser. La valeur de la fonction coût est de 235.6 pour la solution optimale avec 11 points de contrôle et diminue à 158.2 pour la solution optimale avec 200 points de contrôle.

#### 5.1.5 Une dérivée troisième non négative

Soit la fonction  $\gamma(u) = \sin(2u) + 0.05(u - 2\pi)^3$  approximée avec une fonction B-spline  $s(u)$  de degré 5 sous la contrainte que la dérivée troisième  $s_{uuu}(u) \geq 0$ . Pour une fonction B-spline

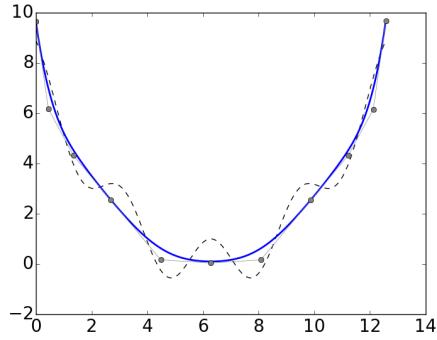


Figure 5.5 Solution optimale avec 11 points de contrôle

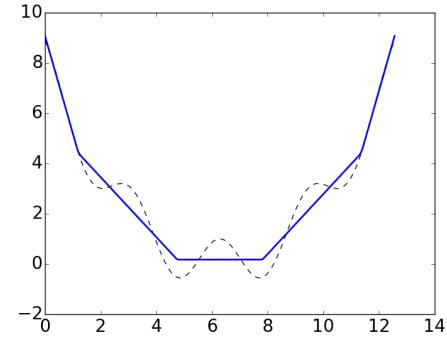


Figure 5.6 Solution optimale avec 200 points de contrôle

avec une distribution uniforme des noeuds, le problème d'optimisation peut s'écrire :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser}_{\boldsymbol{x}} \quad \frac{1}{2}(\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b})^2 \\ & \text{soumis à} \quad x_{i+3} - 3x_{i+2} + 3x_{i+1} - x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n-3. \end{aligned}$$

C'est toujours une fonction quadratique à minimiser avec des contraintes linéaires.

La figure 5.7 présente la solution optimale pour une fonction B-spline avec 11 points de contrôle. La figure 5.8 présente la solution optimale pour une fonction B-spline avec 200 points de contrôle.

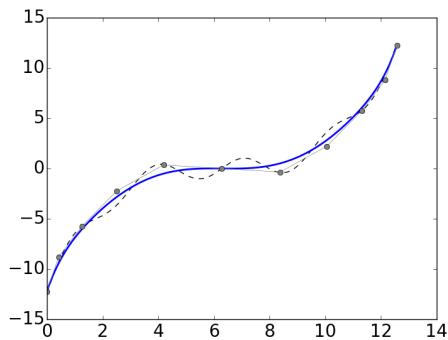


Figure 5.7 Solution optimale avec 11 points de contrôle

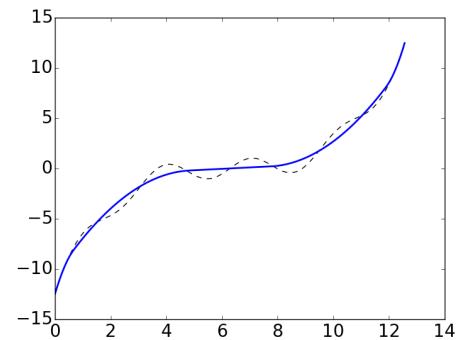


Figure 5.8 Solution optimale avec 200 points de contrôle

### 5.1.6 Discussion

Ces premiers exemples permettent de faire émerger quelques éléments importants.

Le problème du contrôle des propriétés différentielles des fonctions à une variable est un problème convexe avec des contraintes linéaires. Dans ces circonstances, la méthode des points intérieurs permet de converger rapidement vers un optimum global.

Il sera possible aux chapitres suivants de tracer un parallèle entre le contrôle de la dérivée seconde et le contrôle des inflexions ainsi qu'un parallèle entre le contrôle de la dérivée troisième et le contrôle des extrema de courbure pour les courbes et les surfaces.

Une dérivée seconde non négative implique que la pente doit avoir une croissance monotone. Si l'on augmente le nombre de points de contrôle, la solution peut tendre vers une solution avec des discontinuités de pente. Ainsi, la contrainte elle-même n'empêche pas une augmentation soudaine de la pente.

La situation est différente lorsque l'on impose que la dérivée troisième soit non négative. Il n'est plus possible alors d'avoir à l'intérieur de l'intervalle un taux de croissance infini de la pente suivi par un taux de croissance plus petit. Alors, la contrainte elle-même prévient les discontinuités de pente.

## 5.2 La forme générale d'un problème d'optimisation

Un problème d'optimisation a la forme générale

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{x}}{\text{minimiser}} && f_0(\mathbf{x}) \\ & \text{soumis à} && f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Comme à la section précédente, le problème est d'abord transformé en un problème sans contraintes avec une barrière logarithmique  $\phi(\mathbf{x})$

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{minimiser}} \quad t f_0(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{x})$$

où

$$\phi(\mathbf{x}) = - \sum_{i=1}^n \log(-f_i(\mathbf{x})) \tag{5.17}$$

$$\nabla \phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{-f_i(\mathbf{x})} \nabla f_i(\mathbf{x}) \quad (5.18)$$

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_i(\mathbf{x})^2} \nabla f_i(\mathbf{x}) \nabla f_i(\mathbf{x})^T + \sum_{i=1}^n \frac{1}{-f_i(\mathbf{x})} \nabla^2 f_i(\mathbf{x}) \quad (5.19)$$

Si l'on sait évaluer  $\nabla f_0(\mathbf{x})$ ,  $\nabla^2 f_0(\mathbf{x})$  et  $f_i(\mathbf{x})$ ,  $\nabla f_i(\mathbf{x})$ ,  $\nabla^2 f_i(\mathbf{x})$  pour  $i = 1, \dots, n$  alors on a tous les éléments pour calculer les pas de Newton pour l'optimisation.

### 5.3 Une librairie de calcul algébrique et différentiel pour les B-splines

Dans ce texte, on propose d'utiliser le calcul algébrique et différentiel appliqué aux B-splines pour évaluer les vecteurs  $\nabla f_i(\mathbf{x})$  et les matrices hessiennes  $\nabla^2 f_i(\mathbf{x})$ .

Le principe est le suivant. Le résultat de la multiplication de deux B-splines peut se représenter par une B-spline. Le résultat de la dérivée d'une B-spline peut également se représenter par une B-spline. Ainsi il est possible et relativement simple de construire une librairie avec des algorithmes standards qui permettent de faire du calcul algébrique et différentiel appliqué aux B-splines. L'idée générale est de prendre comme entrée les points de contrôle  $\mathbf{x}$  d'une fonction B-spline et de donner en sortie les points de contrôle  $f_i(\mathbf{x})$  d'une autre fonction B-spline.

L'utilisation d'une librairie de calcul algébrique et différentiel pour les B-splines permet ainsi d'étendre la méthode d'optimisation à des problèmes avec une forme beaucoup plus générale sans augmenter pour autant la difficulté de modélisation et de résolution des problèmes.

#### 5.3.1 La dérivée d'une fonction B-spline

La dérivée d'une fonction B-spline  $s(u) = \sum_{i=1}^n x_i N_{i,d}(u)$  peut s'exprimer à l'aide de la fonction B-spline  $s_u(u)$ .

$$s_u(u) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(\mathbf{x}) N_{i,d-1}(u) \quad (5.20)$$

où

$$f_i(\mathbf{x}) = \frac{d}{u_{i+d+1} - u_{i+1}} (x_{i+1} - x_i) \quad (5.21)$$

Les  $f_i(\mathbf{x})$  sont ainsi les points de contrôle de la spline  $s_u(u)$ . Le vecteur de nœuds  $[u_1, \dots, u_{n+d+1}]$

est identique à la spline  $s(u)$  sauf qu'il est amputé du premier et du dernier nœud. Cette dernière équation est bien connue en théorie des B-splines.

Il faut maintenant évaluer les  $\nabla f_i(\mathbf{x})$  et les  $\nabla^2 f_i(\mathbf{x})$ . Pour y arriver, on procède d'une façon originale.

Une fonction spline  $s(u)$  est habituellement considérée comme une fonction à une variable, soit ici la variable  $u$ , et déterminée par un vecteur de nœuds et une série de points de contrôle  $[x_1, \dots, x_n]$ .

L'originalité consiste à considérer la même fonction spline comme une fonction à  $n+1$  variables  $s(u, x_1, \dots, x_n)$ . Ceci permet d'utiliser le théorème de Schwarz sur la symétrie des dérivées partielles secondes. Par ce théorème, si une telle fonction  $s : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  possède des dérivées partielles secondes continues alors ses dérivées partielles secondes sont symétriques. Alors intervertir l'ordre des dérivées ne change pas le résultat.

$$\frac{\partial^2 s(u, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j \partial u} = \frac{\partial^2 s(u, x_1, \dots, x_n)}{\partial u \partial x_j} \quad (5.22)$$

La dérivée de  $s$  par rapport à  $x_j$  est une fonction B-spline particulièrement simple :

$$\frac{\partial s}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \delta_{i,j} N_{i,d} \quad (5.23)$$

où  $\delta_{i,j} = 0$  lorsque  $i \neq j$  et prend la valeur de 1 lorsque  $i = j$ . Ainsi les points de contrôle  $\boldsymbol{\delta}_j = [\delta_{1,j}, \dots, \delta_{n,j}]^T$  sont tous nuls sauf le point de contrôle  $\delta_{j,j}$  qui possède une valeur unitaire. Ensuite, la dérivée par rapport à  $u$  de cette B-spline avec les points de contrôle  $\boldsymbol{\delta}_j$  se calculent avec l'équation 5.20. On obtient donc le résultat suivant.

$$\left( \frac{\partial s}{\partial x_j} \right)_u = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(\boldsymbol{\delta}_j) N_{i,d-1} \quad (5.24)$$

Pour sa part, la dérivée de  $s_u$  par rapport à  $x_i$  peut s'écrire :

$$\frac{\partial(s_u)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} N_{i,d-1} \quad (5.25)$$

et de la symétrie des dérivées partielles

$$\left( \frac{\partial s}{\partial x_j} \right)_u = \frac{\partial(s_u)}{\partial x_j} \quad (5.26)$$

on obtient finalement

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = f_i(\boldsymbol{\delta}_j) \quad (5.27)$$

On peut calculer ainsi tous les membres de la matrice

$$Df(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{\delta}_1) & \dots & f_1(\boldsymbol{\delta}_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n-1}(\boldsymbol{\delta}_1) & \dots & f_{n-1}(\boldsymbol{\delta}_n) \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

une colonne à la fois. Les lignes de cette matrice sont les  $\nabla f_i(\mathbf{x})^T$ .

Ces valeurs ne dépendent pas des valeurs des  $x_i$ . Il est donc nécessaire de faire le calcul une seule fois et il est ensuite possible de réutiliser les mêmes  $\nabla f_i(\mathbf{x})^T$  à chacune des évaluations de pas de Newton.

Pour une contrainte  $f_i(\mathbf{x})$  linéaire, les matrices hessiennes  $\nabla^2 f_i(\mathbf{x})^T$  sont identiquement nulles.

### 5.3.2 L'insertion de nœuds et l'augmentation du degré

L'insertion de nœuds et l'augmentation du degré sont des opérations classiques et importantes en théorie des B-splines. Il existe une relation linéaire entre les points de contrôle  $\mathbf{x}$  de la spline  $s(u)$  avant l'insertion d'un noeud ou l'augmentation du degré et les points de contrôle  $f_i(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  après l'insertion de nœud ou l'augmentation du degré.

Pour une telle relation linéaire

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = A\boldsymbol{\delta}_j \quad (5.29)$$

On obtient donc également la relation

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = f_i(\boldsymbol{\delta}_j) \quad (5.30)$$

Et encore une fois, la matrice hessienne  $\nabla^2 f_i(\mathbf{x})$  est identiquement nulle.

### 5.3.3 La multiplication de deux B-splines

Soit deux fonctions B-splines  $a(u) = \sum_{i=1}^{n_1} g_i(\mathbf{x}) N_{i,d_1}(u)$  et  $b(u) = \sum_{i=1}^{n_2} h_i(\mathbf{x}) N_{i,d_2}(u)$  où les  $g_i(\mathbf{x})$  et  $h_i(\mathbf{x})$  sont des fonctions linéaires de  $\mathbf{x}$ .

Le produit  $c(u) = a(u)b(u)$  peut se représenter par une fonction B-spline

$c(u) = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{g}(\mathbf{x}), \mathbf{h}(\mathbf{x})) N_{i,d_1+d_2}(u)$ . Alors la dérivée de la fonction B-spline  $c(u)$  par rapport à  $x_j$  peut s'écrire :

$$\frac{\partial c(u)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(\mathbf{g}(\mathbf{x}), \mathbf{h}(\mathbf{x}))}{\partial x_j} N_{i,d_1+d_2}(u) \quad (5.31)$$

Cette dernière formule doit donner comme résultat la même fonction que

$$\frac{\partial c(u)}{\partial x_j} = \frac{\partial a(u)}{\partial x_j} b(u) + a(u) \frac{\partial b(u)}{\partial x_j} \quad (5.32)$$

où

$$\frac{\partial a(u)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m g_i(\boldsymbol{\delta}_j) B_{i,d_1}(u) \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial b(u)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n h_i(\boldsymbol{\delta}_j) B_{i,d_2}(u) \quad (5.34)$$

On peut donc déduire que

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{g}, \mathbf{h})}{\partial x_j} = f_i(\mathbf{g}(\boldsymbol{\delta}_j), \mathbf{h}(\mathbf{x})) + f_i(\mathbf{g}(\mathbf{x}), \mathbf{h}(\boldsymbol{\delta}_j)) \quad (5.35)$$

Ainsi, lors d'une multiplication, les  $\nabla f_i(\mathbf{x})$  ne sont pas constants et il est nécessaire de les évaluer à chacune des itérations.

En dérivant une seconde fois on obtient

$$\frac{\partial^2 c(u)}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial a(u)}{\partial x_j} \frac{\partial b(u)}{\partial x_k} + \frac{\partial a(u)}{\partial x_k} \frac{\partial b(u)}{\partial x_j} \quad (5.36)$$

et donc

$$\frac{\partial^2 f_i(\mathbf{g}(\mathbf{x}), \mathbf{h}(\mathbf{x}))}{\partial x_j \partial x_k} = f_i(\mathbf{g}(\boldsymbol{\delta}_j), \mathbf{h}(\boldsymbol{\delta}_k)) + f_i(\mathbf{g}(\boldsymbol{\delta}_k), \mathbf{h}(\boldsymbol{\delta}_j)) \quad (5.37)$$

qui correspond bien une matrice hessienne symétrique. Cette fois, c'est la matrice hessienne qui n'est pas fonction de  $\mathbf{x}$  et qu'il est nécessaire d'évaluer une seule fois lors de l'optimisation.

## La multiplication de deux fonctions polynomiales de Bernstein

Il faut encore avoir une représentation concrète du produit  $f_i(\mathbf{g}, \mathbf{h})$ . Avec l'insertion de nœuds, il est possible de décomposer une fonction B-spline en fonctions polynomiales de Bernstein. Alors si les  $g_i$  et les  $h_i$  sont les points de contrôle d'une fonction polynomiale de Bernstein alors les points de contrôle  $f_i$  du produit sont donnés par l'expression suivante.

$$f_i(\mathbf{g}, \mathbf{h}) = \sum_{j=\max(0, i-n)}^{\min(m, i)} \frac{\binom{m}{j} \binom{n}{i-j}}{\binom{m+n}{i}} g_j h_{i-j} \quad (5.38)$$

## 5.4 Une fonction B-spline $s(u)$ sous contraintes non uniformes

L'étape suivante est d'étendre la méthode aux contraintes non uniformes. Par exemple que la dérivée première soit non négative sur un premier intervalle et non positive sur un second intervalle.

Pour y arriver, on peut utiliser la technique de l'insertion de nœuds. En insérant un nombre suffisant de nœuds au même endroit, on obtient un point de contrôle  $f_i(\mathbf{x})$  qui interpole la fonction qui représente la contrainte en ce point. Il est alors possible d'imposer que ce point de contrôle soit égal à zéro, que les points de contrôle situés avant soient non négatifs et que les points de contrôle situés après soient non positifs.

Si la fonction B-spline qui représente la contrainte est déjà décomposée en fonction polynomiale de Bernstein on peut procéder comme suit. La propriété de diminution de la variation d'une fonction polynomiale de Bernstein implique que le nombre de racines de la fonction soit inférieur ou égal au nombre de changement de signes de ces points de contrôle si ces points de contrôle ne sont pas tous nuls. Puisqu'une fonction de Bernstein interpole le premier et le dernier point de contrôle, alors s'il y a précisément un changement de signe il y aura précisément une racine située quelque part sur l'intervalle.

Voici un exemple, soit la fonction  $\gamma(u) = -4 \cos(4u) - (u - 2\pi)^2$  approximée avec une fonction B-spline  $s(u)$  de degré 3 sous la contrainte que la dérivée  $s_u(u) \geq 0$  sur l'intervalle  $[0, 2\pi - \epsilon]$ , la contrainte que la dérivée  $s_u(u) \leq 0$  sur l'intervalle  $[2\pi + \epsilon, 4\pi]$  et la contrainte que la dérivée  $s_u(u)$  possède exactement une racine sur l'intervalle  $(2\pi - \epsilon, 2\pi + \epsilon)$  si la fonction de Bernstein n'est pas identiquement nulle. Ce dernier intervalle est déterminé par la décomposition en fonction de Bernstein et peut être arbitrairement petit. La figure 5.9 présente la solution

optimale pour une fonction B-spline avec 11 points de contrôle. La figure 5.10 présente la solution optimale pour une fonction B-spline avec 200 points de contrôle.

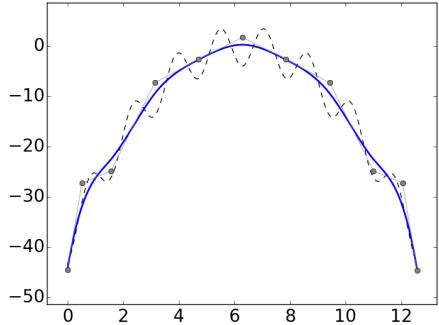


Figure 5.9 Solution optimale avec 11 points de contrôle

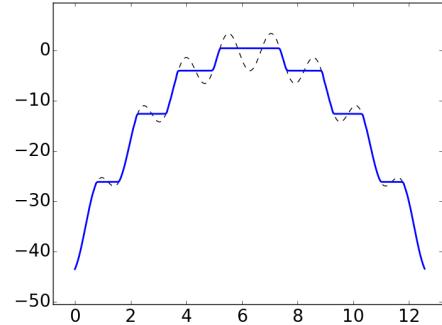


Figure 5.10 Solution optimale avec 200 points de contrôle

#### 5.4.1 Discussion

Cette méthode permet de résoudre d'une façon conceptuellement très simple le problème du contrôle des propriétés différentielles des fonctions à une variable. Le principe est de bénéficier de toute la flexibilité et de l'efficacité des bases polynomiales par morceaux. Pour y arriver, il suffit de combiner deux technologies bien développées. Soit l'optimisation convexe et le calcul algébrique et différentiel appliquée aux fonctions B-splines.

C'est précisément cette idée nouvelle que ce chapitre s'est efforcé de développer jusqu'à présent. La méthode a été présentée comme une extension de la méthode des moindres carrés. Ensuite graduellement la méthode a été généralisée, ce qui a permis d'introduire un à un les concepts importants. Avec cette méthode, le problème du contrôle des propriétés différentielles des fonctions est essentiellement transformé en un problème de calcul matriciel. Des matrices qui sont typiquement creuses.

La suite de la thèse repose sur cette méthode. Ainsi, la prochaine section consiste à transformer le problème du contrôle des propriétés différentielles des fonctions à deux variables en un problème de calcul matriciel. Soit les matrices nécessaires pour calculer les pas de Newton. De la même façon, les deux chapitres suivants consistent à transformer le problème du contrôle des propriétés différentielles des courbes et des surfaces en un problème de calcul matriciel.

## 5.5 Une fonction B-spline $s(u, v)$ sous contraintes uniformes

### 5.5.1 La méthode des moindres carrés

Soit une fonction B-spline  $s(u, v)$  définie par

$$s(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,d}(u) N_{j,d}(v) x_{i,j} \quad (5.39)$$

On suppose une grille de  $p$  par  $q$  points de discréétisation situés sur une fonction  $\gamma(u, v)$ . La fonction  $s(u, v)$  doit s'approcher le plus possible de ces points selon la distance au carré suivante :

$$\underset{x_{i,j}}{\text{minimiser}} \quad \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,d}(u_k) N_{j,d}(v_l) x_{i,j} - \gamma(u_k, v_l) \right)^2$$

On peut représenter les termes  $N_{i,d}(u_k) N_{j,d}(v_l)$  par une matrice  $\mathbf{A}$ , les termes  $\gamma(u_k, v_l)$  par un vecteur  $\mathbf{b}$  et les  $x_{i,j}$  à déterminer par le vecteur  $\mathbf{x}$ . La fonction à minimiser peut alors s'écrire :

$$f_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^2 \quad (5.40)$$

La fonction coût à minimiser est donc toujours une fonction quadratique convexe.

### 5.5.2 Une fonction non négative

Soit une fonction  $\gamma(u, v)$  à approximer avec une fonction B-spline  $s(u, v)$  sous la contrainte  $s(u, v) \geq 0$ . En utilisant le fait que les fonctions de base d'une B-spline sont non négatives, la contrainte peut être appliquée directement sur les points de contrôle  $x_{i,j}$  et ainsi s'assurer que la fonction  $s(u, v)$  soit non négative.

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{x}}{\text{minimiser}} \quad \frac{1}{2} (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^2 \\ & \text{soumis à} \quad x_{i,j} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

La figure 5.11 présente la fonction  $\gamma(u, v) = \sin(u) \sin(v)$  à approximer à l'aide d'une B-spline. La figure 5.12 présente la solution optimale pour une fonction B-spline de degré 3 avec une grille  $(20 \times 20)$  de points de contrôle.

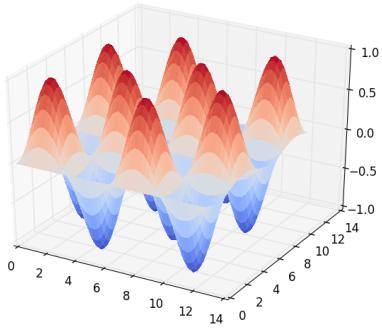


Figure 5.11 La fonction à approximer  $\gamma(u, v) = \sin(u) \sin(v)$

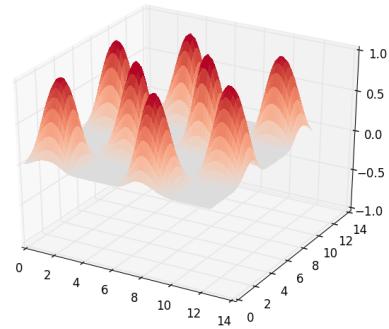


Figure 5.12 La solution optimale pour une grille de 400 points de contrôle

### 5.5.3 Une fonction avec une dérivée première non négative

Soit la fonction  $\gamma(u, v) = \cos(u) \sin(v) + 0.25v$  à approximer avec une fonction B-spline  $s(u, v)$  de degré 3 sous la contrainte  $s_v(u, v) \geq 0$ . Toujours, en utilisant les propriétés des B-splines, la contrainte peut être appliquée directement sur les points de contrôle  $x_{i,j}$  et ainsi s'assurer que la fonction  $s_v(u, v)$  soit non négative.

$$\begin{aligned} & \text{minimiser}_{\mathbf{x}} \quad \frac{1}{2}(\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^2 \\ & \text{soumis à} \quad x_{i,j+1} - x_{i,j} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

La figure 5.13 présente la fonction  $\gamma(u, v)$  à approximer. La figure 5.14 présente la solution optimale pour une fonction B-spline avec une grille de 400 points de contrôle.

### 5.6 Une fonction B-spline à deux variables $s(u, v)$ convexe

Une fonction B-spline  $s(u, v)$  est convexe si en tout point de cette fonction la matrice hessienne

$$\begin{bmatrix} s_{uu} & s_{uv} \\ s_{uv} & s_{vv} \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

présente des valeurs propres non négatives. Une telle matrice est dite semi-définie positive et doit nécessairement respecter les contraintes  $s_{uu} \geq 0$ ,  $s_{vv} \geq 0$  et  $s_{uu}s_{vv} - s_{uv}^2 \geq 0$ . Évidemment si les signes de  $s_{uu}$  et  $s_{vv}$  sont différents alors la dernière contrainte ne peut pas être respectée.

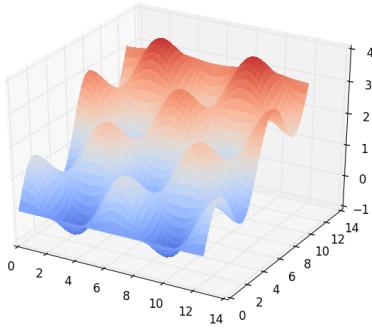


Figure 5.13 La fonction à approximer  $\gamma(u, v) = \cos(u) \sin(v) + 0.5v$

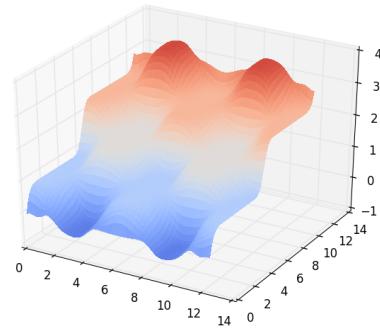


Figure 5.14 La solution optimale pour une grille de 400 points de contrôle

Ainsi il suffit d'imposer la dernière contrainte avec la première ou la seconde.

Ces différentes contraintes sont elles-mêmes des fonctions B-splines qui doivent être non négatives en tout point. On en arrive ainsi à imposer que les points de contrôle  $f_i(\mathbf{x})$  de ces trois fonctions B-splines aient une valeur non négative. La méthode d'optimisation requiert d'évaluer également les vecteurs  $\nabla f_i(\mathbf{x})$  et les matrices hessiennes  $\nabla^2 f_i(\mathbf{x})$ .

La contrainte  $s_{uu}(u, v) \geq 0$  est traitée en premier.

La valeur des points de contrôle  $f_i(\mathbf{x})$  de la fonction B-spline  $s_{uu}(u, v)$  est obtenue en dérivant deux fois  $s(u, v)$  par rapport au paramètre  $u$ . Ensuite pour évaluer le gradient  $\nabla f_i(\mathbf{x})$  on utilise la relation  $\nabla(s_{uu}) = (\nabla s)_{uu}$ . Ceci permet d'évaluer  $\nabla f_i(\mathbf{x})$  à l'aide du même algorithme qui a permis d'obtenir  $s_{uu}(u, v)$ . Il faut simplement utiliser comme entrée  $\delta_j$  plutôt que  $\mathbf{x}$ . Il est nécessaire de faire ce calcul une seule fois puisque le résultat n'est pas fonction de  $\mathbf{x}$ . Enfin, la matrice hessienne  $\nabla^2 f_i(\mathbf{x})$  est identiquement nulle.

La procédure pour  $s_{vv}(u) \geq 0$  serait la même. Il reste maintenant à traiter la contrainte  $s_{uu}s_{vv} - s_{uv}^2 \geq 0$ .

On possède déjà les résultats  $s_{uu}$ ,  $s_{vv}$  ainsi que  $(\nabla s)_{uu}$ ,  $(\nabla s)_{vv}$ . On doit calculer  $s_{uv}$  et  $(\nabla s)_{uv}$ .

Il faut ensuite calculer les points de contrôle  $f_i(\mathbf{x})$  de la fonction B-spline  $s_{uusvv} - s_{uv}^2$ , les points de contrôle  $\nabla f_i(\mathbf{x})$  des fonctions B-splines  $(\nabla s)_{uu}s_{vv} + s_{uu}(\nabla s)_{vv} - 2(\nabla s)_{uv}s_{uv}$  et les points de contrôle  $\nabla^2 f_i(\mathbf{x})$  des fonctions B-splines  $(\nabla s)_{uu}(\nabla s)_{vv} + (\nabla s)_{uu}(\nabla s)_{vv} - 2(\nabla s)_{uv}(\nabla s)_{uv}$  où on a utilisé le fait que  $\nabla^2 s = 0$ . Cette fois, c'est seulement la matrice hessienne qui n'est pas fonction de  $\mathbf{x}$  et qu'on peut évaluer une seule fois.

La figure 5.15 présente la fonction  $\gamma(u, v) = \sin(u) \sin(v) + 0.05((u - 2\pi)^2 + (v - 2\pi)^2)$  à approximer. La figure 5.16 présente la solution optimale pour une fonction B-spline avec une grille de 100 points de contrôle.

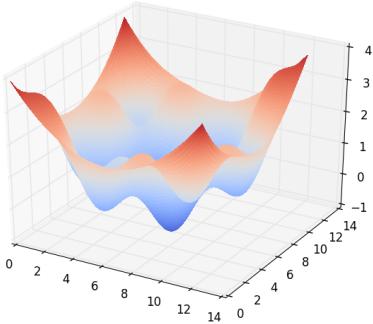


Figure 5.15 La fonction  $\gamma(u, v)$  à approximer

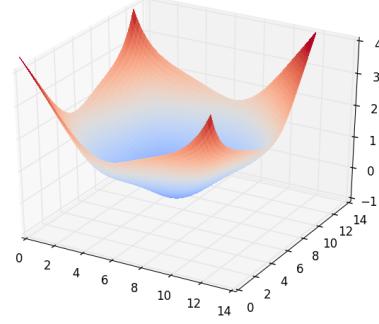


Figure 5.16 La solution optimale pour une grille de 100 points de contrôle

## 5.7 Les points d'une fonction B-spline $s(u, v)$ avec un contact plus étroit avec une parabole de révolution

Il a été présenté à la section précédente qu'une fonction B-spline  $s(u, v)$  est convexe si et seulement si les valeurs propres de sa matrice hessienne sont non négatives en tout point.

$$\begin{bmatrix} s_{uu} & s_{uv} \\ s_{uv} & s_{vv} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Maintenant, on veut contrôler des propriétés différentielles d'ordre supérieur. Soit les extrema de ces valeurs propres lorsque l'on parcourt la fonction en suivant la direction du vecteur propre correspondant. On adopte la convention de colorer les extrema de la valeur propre  $\lambda_1$  en bleu et les extrema de la valeur propre  $\lambda_2$  en rouge.

Les valeurs propres d'une matrice s'obtiennent de l'équation

$$\begin{vmatrix} s_{uu} - \lambda & s_{uv} \\ s_{uv} & s_{vv} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (5.43)$$

Les valeurs propres de la matrice hessienne sont

$$\lambda_{1,2} = \frac{s_{uu} + s_{vv} \pm \sqrt{(s_{uu} - s_{vv})^2 + 4s_{uv}^2}}{2} \quad (5.44)$$

Les vecteurs propres s'obtiennent des équations

$$\begin{bmatrix} s_{uu} - \lambda_1 & s_{uv} \\ s_{uv} & s_{vv} - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^u \\ v_1^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

$$\begin{bmatrix} s_{uu} - \lambda_2 & s_{uv} \\ s_{uv} & s_{vv} - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2^u \\ v_2^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

Les lignes de ces deux matrices sont linéairement dépendantes. On peut donc choisir l'une ou l'autre ligne pour déterminer un vecteur propre.

Si l'on choisit la première, on trouve à un facteur près la solution

$$v_{1,2} = \begin{bmatrix} s_{uv} \\ -s_{uu} + \lambda_{1,2} \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

Si l'on choisit la deuxième, on trouve à un facteur près la solution

$$w_{1,2} = \begin{bmatrix} s_{vv} - \lambda_{1,2} \\ -s_{uv} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

Lorsque  $s_{uv} \neq 0$  on obtient nécessairement des vecteurs propres non dégénérés. Les deux expressions donnent alors les mêmes vecteurs propres à un facteur près. Ces deux vecteurs propres sont toujours orthogonaux pour une matrice réelle symétrique.

Par contre lorsque  $s_{uv} = 0$  on obtient deux ou quatre vecteurs propres dégénérés  $[0, 0]^T$ . Premièrement si  $s_{uu} > s_{vv}$  alors on obtient  $\lambda_1 = s_{uu}$  et  $\lambda_2 = s_{vv}$ . Deuxièmement si  $s_{vv} > s_{uu}$  alors on obtient  $\lambda_1 = s_{vv}$  et  $\lambda_2 = s_{uu}$ . Troisièmement si  $s_{uu} = s_{vv}$  alors on obtient  $\lambda_1 = \lambda_2 = s_{uu}$ .

Pour ces deux premiers cas, lorsque  $s_{uv} = 0$  et que  $s_{uu} \neq s_{vv}$ , alors les vecteurs propres sont à un facteur près  $[1, 0]^T$  et  $[0, 1]^T$ . Il y a alors deux possibilités, soit  $v_1 = [0, 1]^T$  et  $w_2 = [1, 0]^T$  ou  $w_1 = [1, 0]^T$  et  $v_2 = [0, 1]^T$ . Ainsi le premier vecteur propre est alors dans la direction  $u$  ou  $v$  et vice versa pour le deuxième vecteur propre.

Pour le troisième cas  $s_{uv} = 0$  et  $s_{uu} = s_{vv}$ , les vecteurs propres ne sont pas définis. Ceci

correspond aux points qui ressemblent le plus à des paraboles de révolution sur une fonction. À un tel point, les valeurs propres sont identiques  $\lambda_1 = \lambda_2$  et les vecteurs propres obtenus sont tous dégénérés  $v_1 = v_2 = w_1 = w_2 = [0, 0]^T$ .

Les dérivées des valeurs propres par rapport à  $u$  et par rapport à  $v$  sont :

$$\lambda_{1u,2u} = \frac{s_{uuu} + s_{uvv}}{2} \pm \frac{2(s_{uu} - s_{vv})(s_{uuu} - s_{uvv}) + 8s_{uv}s_{uuu}}{4\sqrt{(s_{uu} - s_{vv})^2 + 4s_{uv}^2}} \quad (5.49)$$

$$\lambda_{1v,2v} = \frac{s_{uuv} + s_{vvv}}{2} \pm \frac{2(s_{uu} - s_{vv})(s_{uuv} - s_{vvv}) + 8s_{uv}s_{uuv}}{4\sqrt{(s_{uu} - s_{vv})^2 + 4s_{uv}^2}} \quad (5.50)$$

La condition pour être situé sur une ligne bleue union  $v_1 = [0, 0]^T$  est :

$$e_1 = \begin{bmatrix} \lambda_{1u} & \lambda_{1v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{uv} \\ -s_{uu} + \lambda_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.51)$$

La condition pour être situé sur une ligne rouge union  $v_2 = [0, 0]^T$  est :

$$e_2 = \begin{bmatrix} \lambda_{2u} & \lambda_{2v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{uv} \\ -s_{uu} + \lambda_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.52)$$

La condition pour être situé sur une ligne bleue union  $w_1 = [0, 0]^T$  est :

$$f_1 = \begin{bmatrix} \lambda_{1u} & \lambda_{1v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{vv} - \lambda_1 \\ -s_{uv} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.53)$$

La condition pour être situé sur une ligne rouge union  $w_2 = [0, 0]^T$  est :

$$f_2 = \begin{bmatrix} \lambda_{2u} & \lambda_{2v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{vv} - \lambda_2 \\ -s_{uv} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.54)$$

Alors une condition pour être situé sur une ligne bleue union les points avec deux valeurs propres identiques est :

$$e_1^2 + f_1^2 = 0 \quad (5.55)$$

Et une condition pour être situé sur une ligne rouge union les points avec deux valeurs propres identiques est :

$$e_2^2 + f_2^2 = 0 \quad (5.56)$$

La condition d'extrémalité de Thirion (1994) est  $e_1e_2 = 0$  et  $f_1f_2 = 0$ . Voici la démonstration que ces équations ne comportent pas de racine carrée. Il est possible d'écrire :

$$e_1 = a + \frac{b}{\sqrt{d}} \quad (5.57)$$

$$e_2 = a - \frac{b}{\sqrt{d}} \quad (5.58)$$

$$e_1e_2 = a^2 - \frac{b^2}{d} \quad (5.59)$$

ainsi que

$$f_1 = a' + \frac{b'}{\sqrt{d}} \quad (5.60)$$

$$f_2 = a' - \frac{b'}{\sqrt{d}} \quad (5.61)$$

$$f_1f_2 = a'^2 - \frac{b'^2}{d} \quad (5.62)$$

où

$$d = (s_{uu} - s_{vv})^2 + 4s_{uv}^2 \quad (5.63)$$

$$a = s_{uv}c_1 - s_{uu}c_3 + \frac{c_5c_3}{2} + \frac{c_4}{8} \quad (5.64)$$

$$b = \frac{s_{uv}c_2}{4} - \frac{s_{uu}c_4}{4} + \frac{c_5c_4}{8} + \frac{dc_3}{2} \quad (5.65)$$

$$a' = s_{vv}c_1 - \frac{c_5c_1}{2} - \frac{c_2}{8} - s_{uv}c_3 \quad (5.66)$$

$$b' = s_{vv}\frac{c_2}{4} - \frac{c_5c_2}{8} - \frac{c_1d}{2} - \frac{s_{uv}c_4}{4} \quad (5.67)$$

$$c_1 = \frac{s_{uuu} + s_{uvv}}{2} \quad (5.68)$$

$$c_2 = 2(s_{uu} - s_{vv})(s_{uuu} - s_{uvv}) + 8s_{uv}s_{uuu} \quad (5.69)$$

$$c_3 = \frac{s_{uuv} + s_{vvv}}{2} \quad (5.70)$$

$$c_4 = 2(s_{uu} - s_{vv})(s_{uuv} - s_{vvv}) + 8s_{uv}s_{uvv} \quad (5.71)$$

$$c_5 = s_{uu} + s_{vv} \quad (5.72)$$

Il est probablement préférable de travailler avec les conditions équivalentes

$$e_1 e_2 d = a^2 d - b^2 \quad (5.73)$$

$$f_1 f_2 d = a'^2 d - b'^2 \quad (5.74)$$

La condition  $d = 0$  correspond à un point avec deux valeurs propres identiques.

### 5.7.1 Discussion

Les fonctions convexes qui ont pour matrice hessienne une matrice semi-définie positive en tout point forment un ensemble convexe, peu importe le nombre de paramètres.

Ceci peut se voir directement de la définition de matrice semi-définie positive. Soit  $A$  et  $B$  deux matrices semi-définies positives. Alors par définition pour tout vecteur  $v$  les matrices doivent respecter la relation  $v^T A v \geq 0$  et  $v^T B v \geq 0$ . L'ensemble est un cône convexe puisque pour  $\theta_1, \theta_2 \geq 0$  alors

$$v^T (\theta_1 A + \theta_2 B) v = \theta_1 v^T A v + \theta_2 v^T B v \geq 0 \quad (5.75)$$

La matrice hessienne de telles sommes pondérées de deux fonctions est la somme pondérée des matrices hessiennes de ces dernières. Ainsi les fonctions convexes forment bien un ensemble convexe. Sous cette contrainte le problème d'optimisation est un problème convexe.

La situation est identique pour les fonctions concaves. Alors les matrices hessiennes sont semi-définies négatives et doivent respecter la relation  $v^T A v \leq 0$  et  $v^T B v \leq 0$ .

Il reste un cas à traiter, soit une fonction qui a la forme d'une selle à cheval. Alors la fonction n'est ni convexe ni concave. Pour ce cas, le problème d'optimisation n'est plus convexe. On peut visualiser l'espace admissible comme l'extérieur d'un cône. Alors toutes les droites qui relient tous les points admissibles ne sont plus nécessairement à l'intérieur du domaine admissible. C'est le cas lorsqu'une droite passe par l'intérieur du cône qui est une région exclue du domaine.

## 5.8 Contrôle de la courbure d'une fonction

La courbure d'une fonction, c'est simplement la courbure d'une courbe exprimée d'une façon particulière dans le plan. Soit la courbe  $\gamma(u) = (u, f(u))$ . La dérivée de la courbure  $\kappa_u$  peut s'écrire de la façon suivante.

$$\kappa_u = \frac{f_{uuu} + f_u^2 f_{uuu} - 3f_{uu}^2 f_u}{(f_u^2 + 1)^{5/2}} \quad (5.76)$$

Puisque le dénominateur est toujours positif, les zéros de  $\kappa_u$  ne dépendent que du numérateur.

$$N(u) = f_{uuu} + f_u^2 f_{uuu} - 3f_{uu}^2 f_u \quad (5.77)$$

Soit  $f(u)$  un polynôme de Bernstein de degré 3 :

$$f(u) = \sum_{i=0}^3 c_i b_i^3(u) \quad (5.78)$$

Alors le numérateur de la dérivée de la courbure est un polynôme de degré 4. Celui-ci s'exprime avec un polynôme de Bernstein de degré 4 et donc avec 5 coefficients  $d_i$ .

$$N(u) = \sum_{i=0}^4 d_i b_i^4(u) \quad (5.79)$$

Si ces 5 coefficients  $d_i$  sont positifs alors la fonction présente nécessairement une croissance monotone de la courbure. Si ces 5 coefficients  $d_i$  sont négatifs alors la fonction présente nécessairement une décroissance monotone de la courbure. Enfin si les coefficients  $d_i$  présentent un seul changement de signe alors la fonction possède nécessairement un seul extremum de courbure.

Pour illustrer la non-convexité du problème, on peut procéder comme ceci. On peut fixer d'abord les coefficients  $c_0$  et  $c_3$  de la fonction  $f(u)$  et étudier les valeurs des coefficients  $c_1 = x$  et  $c_2 = y$  qui correspondent à des coefficients  $d_i$  de même signe ou avec un seul changement de signe.

Sur les figures 5.17 et 5.18 la zone verte correspond à des valeurs de  $d_i$  toutes positives et donc à une croissance monotone de la courbure. La zone rouge correspond à une décroissance monotone de la courbure. Les autres couleurs correspondent à un seul changement de signe des coefficients  $d_i$  et donc à une fonction qui présente un seul extremum de courbure.

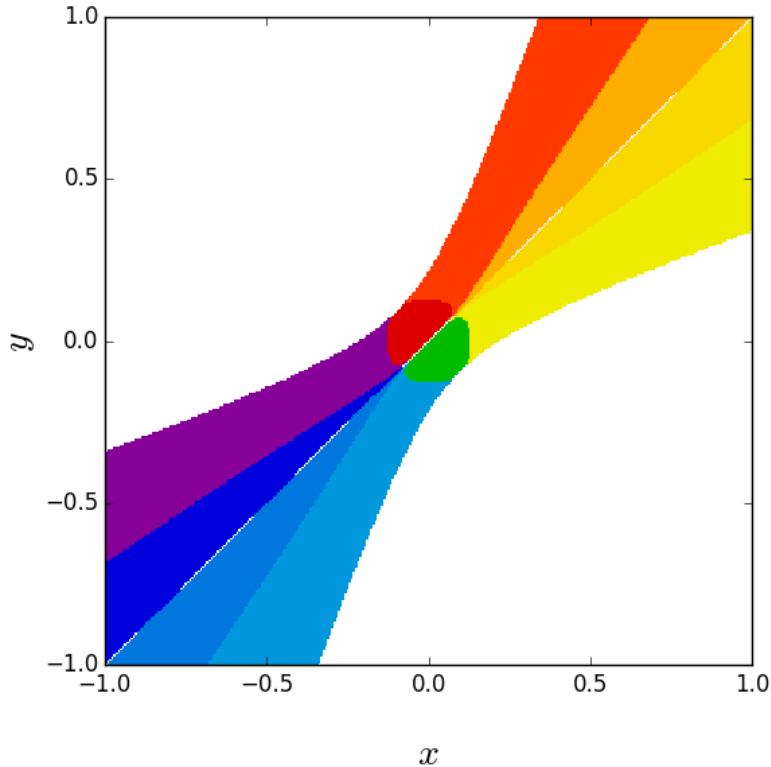


Figure 5.17 Contrôle des extrema de courbure pour un polynôme de Bernstein de degré 3 où  $c_0 = 0$ ,  $c_1 = x$ ,  $c_2 = y$  et  $c_3 = 0$

On peut alors constater que les domaines sont non convexes et que certains d'entre eux présentent une singularité. Ceci peut causer des problèmes de convergence lors de l'optimisation. Ce sont ainsi des considérations importantes à étudier.

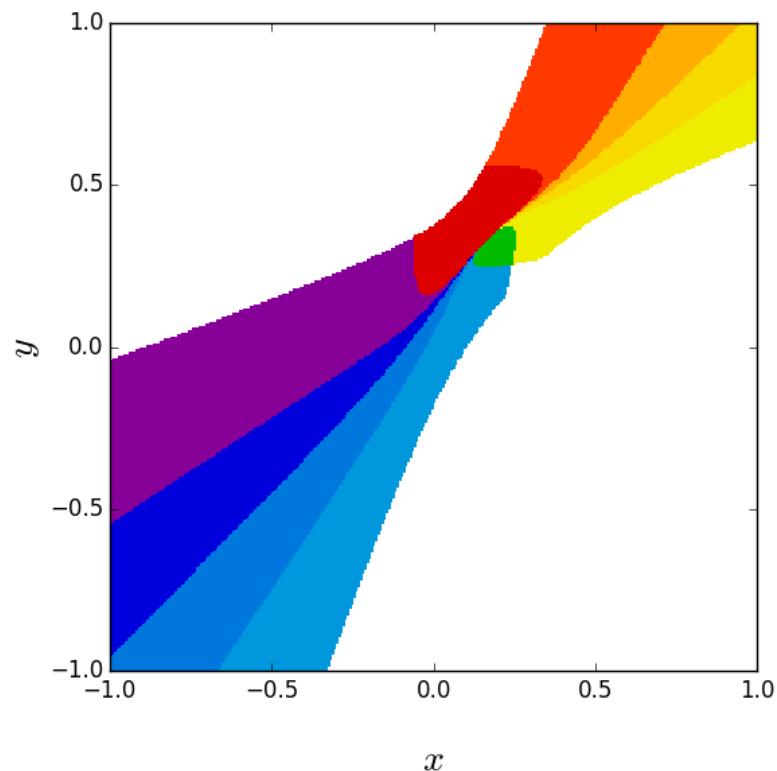


Figure 5.18 Contrôle des extréums de courbure pour un polynôme de Bernstein de degré 3 où  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = x$ ,  $c_3 = y$  et  $c_4 = 0.5$

## CHAPITRE 6 LE CONTRÔLE DES PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES DES COURBES

Ce chapitre est essentiellement une adaptation d'un article de Demers et al. (2015), soit du présent auteur et de ses directeurs de recherche, publié sous le titre : *A selective eraser of curvature extrema for B-spline curves*. Comme au chapitre précédent, le problème du contrôle des propriétés différentielles des courbes est d'abord traduit en un problème d'approximation. Soit d'approximer de la meilleure façon possible une courbe  $\gamma(u)$  donnée avec une courbe B-spline  $c(u)$  soumise à des contraintes sur ses propriétés différentielles.

### 6.1 Les transformations de la géométrie des cercles orientés d'une ellipse

#### 6.1.1 L'espace des ellipses augmenté par ses courbes parallèles

L'espace des ellipses est l'exemple idéal pour illustrer un espace de formes très simples qui préserve le nombre d'extremums de courbure. On peut le générer avec les équations :

$$x(t) = a\cos(t) \quad (6.1)$$

$$y(t) = b\sin(t) \quad (6.2)$$

Pour chacun des ratios différents  $a/b$ , la forme sera distincte. C'est-à-dire qu'on ne pourra les superposer de façon identique suite à une translation, une rotation et une mise à l'échelle.

Mais l'ensemble de formes ovales est plus riche que l'ensemble des ellipses. Une définition d'une forme ovale assez naturelle est une forme avec 4 extrema de courbure, sans point d'inflexion et deux axes de symétrie.

Maintenant, il suffit d'utiliser une petite partie de ce qui a été développé au chapitre 4 pour enrichir l'espace des ellipses et générer un espace plus représentatif de l'espace des formes ovales.

Les courbes parallèles à une distance  $\rho$  d'une courbe paramétrique  $c = (x(t), y(t))$  peuvent se tracer avec les équations :

$$x'(t) = x + \frac{\rho y_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2}} \quad (6.3)$$

$$y'(t) = y - \frac{\rho x_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2}} \quad (6.4)$$

Pour l'ellipse en particulier on obtient :

$$x'(t) = \left( a + \frac{b\rho}{\sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}} \right) \cos(t) \quad (6.5)$$

$$y'(t) = \left( b + \frac{a\rho}{\sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}} \right) \sin(t) \quad (6.6)$$

Voici le résultat si l'on trace les courbes avec les constantes  $\rho = [-100, -5, -1, 0, 0.5, 0.8, 0.95]$   $a = 2 - \rho$ ,  $b = 1 - \rho$ . Toutes ces formes ovales possèdent précisément deux maximums et deux minimums de courbure.

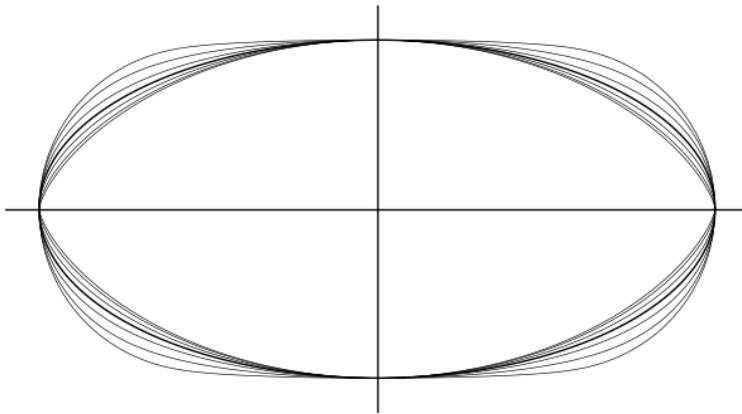


Figure 6.1 Des formes ovales

### 6.1.2 L'espace des formes ovales augmenté par la transformation des rayons réciproques

Ensuite, on pourrait enlever une contrainte et ne préserver qu'un seul axe de symétrie. On obtient alors un espace des formes qui ressemblent à des oeufs. La figure 6.2 illustre cet espace de formes.

Toutes ces formes possèdent toujours deux maximums et deux minimums de courbure.

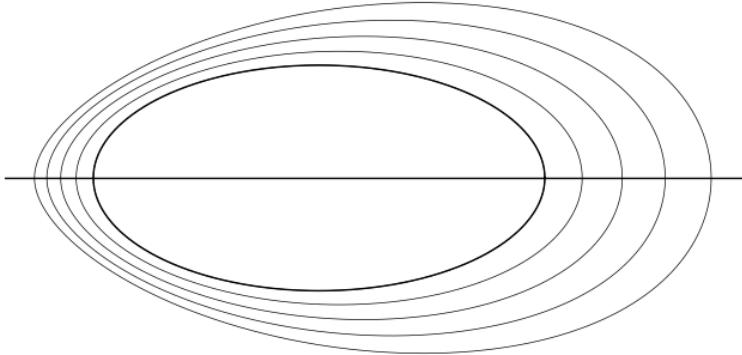


Figure 6.2 Des formes ovoïdes

On peut ensuite enlever la contrainte de cet axe de symétrie et permettre les points d’infexion pour obtenir un espace qui contient entre autres des formes qui ressemblent beaucoup à des profils d’ailes d’avion. Cependant, ce sont des espaces avec peu de paramètres. Dans les sections qui suivent, une méthode d’optimisation permet d’ouvrir des portes vers des espaces de formes avec beaucoup plus de paramètres tout en contrôlant le nombre d’extremums de courbure.

## 6.2 Un algorithme pour supprimer des extremums de courbure de façon sélective

Cette section présente un algorithme pour effacer de façon sélective les extremums de courbure portés par une courbe B-spline  $\mathbf{c}(u)$ . L’algorithme est introduit comme une extension à la méthode standard des moindres carrés pour approximer une série de points avec une courbe B-spline.

En géométrie différentielle, un extremum de courbure est appelé un vertex. Un tel point est typiquement un maximum ou un minimum local de la courbure. Deux exceptions à cette règle sont notables et permettent de clarifier le concept de vertex.

Le premier cas est le suivant. Lors d’une transformation continue d’une courbe, des vertex vont apparaître et disparaître. Pour éliminer des vertex, un vertex de courbure maximum et un vertex de courbure minimum doivent entrer en collision. Pour créer deux nouveaux vertex, le même processus se produit dans l’ordre inverse. À la transition, un seul vertex est présent

qui n'est ni un maximum ni un minimum de courbure. À un tel point, la dérivée seconde de la courbure est également nulle.

Le deuxième cas est lorsque la courbure est constante sur un segment de courbe. Ce segment est alors un arc de cercle ou un segment de droite. Sur un tel segment, tous les points sont des vertex.

### 6.2.1 La courbure d'une courbe B-spline

Une courbe B-spline est définie par

$$\mathbf{c}(u) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i N_{i,d}(u) \quad (6.7)$$

où les  $\mathbf{P}_i$  sont les points de contrôle et les  $N_{i,d}(u)$  les fonctions de base de degré  $d$ .

La courbure de toute courbe  $\mathbf{c}(u)$  avec un paramètre général  $u$  qui n'est pas nécessairement la longueur d'arc, est donnée par

$$\kappa = \frac{\mathbf{c}_u \wedge \mathbf{c}_{uu}}{(\mathbf{c}_u \cdot \mathbf{c}_u)^{3/2}} \quad (6.8)$$

où  $\mathbf{c}_u$  et  $\mathbf{c}_{uu}$  sont la première et la deuxième dérivées de la courbe par rapport à  $u$ . La courbure et le rayon de courbure ont la relation  $\kappa = 1/r$ . Le rayon de courbure a été obtenu à l'équation 4.11.

Les extrema de courbure sont les points où la première dérivée de la courbure est égale à zéro. Ce sont ces points d'extrema de courbure que l'on souhaite contrôler.

La dérivée de la courbure par rapport à  $u$  est donnée par

$$\kappa_u = \frac{(\mathbf{c}_u \cdot \mathbf{c}_u)(\mathbf{c}_u \wedge \mathbf{c}_{uuu}) - 3(\mathbf{c}_u \cdot \mathbf{c}_{uu})(\mathbf{c}_u \wedge \mathbf{c}_{uu})}{(\mathbf{c}_u \cdot \mathbf{c}_u)^{5/2}} \quad (6.9)$$

On peut écrire la fonction  $g$  qui représente le numérateur de la dérivée de la courbure avec les quatre termes  $h_1$  à  $h_4$ .

$$g = h_1 h_2 - 3h_3 h_4 \quad (6.10)$$

$$h_1 = \mathbf{c}_u \cdot \mathbf{c}_u \quad (6.11)$$

$$h_2 = \mathbf{c}_u \wedge \mathbf{c}_{uuu} \quad (6.12)$$

$$h_3 = \mathbf{c}_u \cdot \mathbf{c}_{uu} \quad (6.13)$$

$$h_4 = \mathbf{c}_u \wedge \mathbf{c}_{uu} \quad (6.14)$$

Le terme  $h_1$  est toujours non négatif. En géométrie différentielle, une courbe différentiable est appelée régulière si  $\mathbf{c}_u$  n'est jamais nulle. Il sera assumé que la courbe  $\mathbf{c}$  est régulière. Pour une courbe régulière, les extrema de courbure correspondent aux zéros de la fonction  $g$ .

Sachant la position des points de contrôle  $\mathbf{P}_i$ , il est simple de calculer les points de contrôle de la fonction B-spline  $g$ . On peut consulter sur le sujet Piegl and Tiller (1997); Chen et al. (2006). La première étape consiste à décomposer la courbe B-spline  $\mathbf{c}$  en ses segments de Bézier. Une courbe B-spline de degré  $d$  avec  $n$  points de contrôle se décompose en  $(n - d)$  segments de Bézier.

La fonction  $g$  est de degré  $(4d - 6)$  et est elle-même décomposée en  $(n - d)$  segments de Bézier. La courbe  $\mathbf{c}$  et la fonction  $g$  possèdent les mêmes nœuds mais, parce qu'elles sont en général de degrés différents, elles ont des nœuds de différentes multiplicités. Chacun des segments de Bézier de  $g$  possède  $(4d - 6 + 1)$  points de contrôle. La fonction  $g$  possède au total  $m = (4d - 6 + 1)(n - d)$  points de contrôle.

Les points de contrôle  $g_i$  d'une fonction B-spline  $g$  de degré  $p$  avec un vecteur de nœuds  $(u_1, \dots, u_{p+m+1})$  possèdent les abscisses de Greville  $u_i^*$  par rapport au paramètre  $u$  (de Boor, 1978, p. 133).

$$u_i^* = \frac{u_{i+1} + \dots + u_{i+p}}{p} \quad (6.15)$$

Les points de contrôle doivent être positionnés aux abscisses de Greville sur l'axe paramétrique pour que les propriétés des B-splines s'appliquent.

En particulier, la propriété de diminution des variations des B-splines a la conséquence que, si les points de contrôle de la fonction B-spline  $g$  ne croisent pas zéro, alors la fonction  $g$  ne croise pas zéro. Imposer les contraintes sur les points de contrôle s'avère très pratique pour s'assurer qu'un segment de courbe est sans extremum de courbure. Avec un vecteur de nœuds grossier, cette contrainte peut-être trop restrictive. La solution est alors de raffiner le vecteur de nœuds pour obtenir un polygone de contrôle plus près de la fonction  $g$ .

### 6.2.2 La méthode des moindres carrés pour une courbe B-spline

Le problème sera graduellement formulé en utilisant comme point de départ la méthode standard des moindres carrés pour une courbe B-spline  $\mathbf{c}(u)$ . Le problème est de trouver une position optimale pour les points de contrôle  $\mathbf{P}_i$  pour une courbe B-spline  $\mathbf{c}(u)$ . Les variables indépendantes sont les coordonnées  $(x_i, y_i)$  des points de contrôle.

$$\underset{x_i, y_i}{\text{minimiser}} \quad f_0(x_i, y_i)$$

La fonction  $f_0$  à minimiser est

$$f_0(x_i, y_i) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k (\mathbf{c}(\bar{u}_j) - \mathbf{Q}_j)^2 \quad (6.16)$$

où  $\bar{u}_1 = 0$ ,  $\bar{u}_k = 1$  et

$$\bar{u}_j = \bar{u}_{j-1} + \frac{|\mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_{j-1}|}{\sum_{i=2}^k |\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1}|} \quad j = 2, \dots, k-1 \quad (6.17)$$

et où les coordonnées des points cibles sont  $\mathbf{Q}_j = (\hat{x}_j, \hat{y}_j)$ . On peut donc écrire

$$\begin{aligned} f_0(x_i, y_i) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^n N_{i,d}(\bar{u}_j) (x_i - \hat{x}_j) \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^n N_{i,d}(\bar{u}_j) (y_i - \hat{y}_j) \right)^2 \end{aligned}$$

Définissant un vecteur  $\mathbf{x}$  comme la concaténation des coordonnées  $x_i$  et  $y_i$

$$\mathbf{x} = [x_1, y_1, \dots, x_n, y_n]^T \quad (6.18)$$

L'équation plus haut peut s'écrire sous forme matricielle

$$f_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{x} - (\mathbf{A}^T \mathbf{b})^T \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{b}^T \mathbf{b} \quad (6.19)$$

Cette dernière équation est identique à l'équation 5.3 de la section 5.1.1. Ainsi de la même façon qu'au chapitre précédent, la méthode des moindres carrés consiste à résoudre le système linéaire

$$\nabla f_0(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})\mathbf{x} - (\mathbf{A}^T \mathbf{b})^T = \mathbf{0} \quad (6.20)$$

qui permet de trouver la position optimale des points de contrôle  $\mathbf{P}_i$  de la courbe B-spline.

### 6.2.3 La méthode des moindres carrés pour une courbe B-spline avec un nombre fixe d'extremums de courbure

La tâche est maintenant d'effacer des extrema de courbure non désirés provenant du bruit dans les données en imposant un nombre fixe d'extrema de courbure portés par la courbe et en éliminant tous les autres. Pour atteindre ce but,  $m$  contraintes sont ajoutées au problème d'optimisation.

$$\begin{aligned} \text{minimiser}_{\mathbf{x}} \quad & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{sous contraintes} \quad & f_i(\mathbf{x}) < 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Il est alors nécessaire de relier les contraintes  $f_i(\mathbf{x})$  aux points de contrôle de la fonction B-spline  $g$ . Un segment de courbe avec une croissance monotone de courbure possède une relation  $f_i = -g_i$  alors qu'un segment de courbe avec une décroissance monotone possède une relation  $f_i = g_i$ . Les segments de courbe alternent et sont séparés par un extremum de courbure.

$$f_i = (-1)^j g_i \quad (6.21)$$

Avec cette formulation, un extremum de courbure sera situé à l'intérieur d'un segment décomposé en fonctions de Bernstein dont les coefficients  $g_i$  possèdent seulement un changement de signe.

### 6.2.4 Le gradient du numérateur de la dérivée de la courbure $g$

Le gradient de  $g$  par rapport aux coordonnées des points de contrôle peut se calculer en utilisant les fonctions B-splines  $h_1$  à  $h_4$  de la section 6.2.1 et avec les vecteurs de fonctions  $\mathbf{h}_5$  à  $\mathbf{h}_{11}$  donnés ci-dessous.

$$\nabla g = 2\mathbf{h}_5 h_2 + h_1(\mathbf{h}_6 + \mathbf{h}_7) - 3(\mathbf{h}_8 + \mathbf{h}_9)h_4 - 3h_3(\mathbf{h}_{10} + \mathbf{h}_{11}) \quad (6.22)$$

$$\mathbf{h}_5 = (\nabla \mathbf{c})_u \cdot \mathbf{c}_u \quad (6.23)$$

$$\mathbf{h}_6 = (\nabla \mathbf{c})_u \wedge \mathbf{c}_{uuu} \quad (6.24)$$

$$\mathbf{h}_7 = \mathbf{c}_u \wedge (\nabla \mathbf{c})_{uuu} \quad (6.25)$$

$$\mathbf{h}_8 = (\nabla \mathbf{c})_u \cdot \mathbf{c}_{uu} \quad (6.26)$$

$$\mathbf{h}_9 = \mathbf{c}_u \cdot (\nabla \mathbf{c})_{uu} \quad (6.27)$$

$$\mathbf{h}_{10} = (\nabla \mathbf{c})_u \wedge \mathbf{c}_{uu} \quad (6.28)$$

$$\mathbf{h}_{11} = \mathbf{c}_u \wedge (\nabla \mathbf{c})_{uu} \quad (6.29)$$

### 6.3 Le contrôle de la courbure des courbes de Bézier

Cette section permet d'illuster la non-convexité du problème d'optimisation.

#### 6.3.1 Courbe de Bézier quadratique

Soit une courbe de Bézier quadratique avec trois points de contrôle de coordonnées  $\mathbf{P}_1 = (-1, 0)$ ,  $\mathbf{P}_2 = (x, y)$  et  $\mathbf{P}_3 = (1, 0)$ . Pour une telle courbe, le numérateur de la dérivée de la courbure peut s'exprimer avec le polynôme de Bernstein de degré 2 qui possède les trois coefficients suivants :

$$g_1 = -y((x + 0.5)^2 + y^2 - 0.25) \quad (6.30)$$

$$g_2 = -xy \quad (6.31)$$

$$g_3 = y((x - 0.5)^2 + y^2 - 0.25) \quad (6.32)$$

Trois valeurs positives  $g_i > 0$  impliquent une croissance monotone de la courbure de la courbe

de Bézier quadratique. Le domaine de positions du point de contrôle  $\mathbf{P}_2$  qui satisfait à ces contraintes est illustré en vert à la figure 6.3.

La position du point de contrôle  $\mathbf{P}_2$  doit alors être située à l'intérieur du domaine illustré en vert à la figure 6.3.

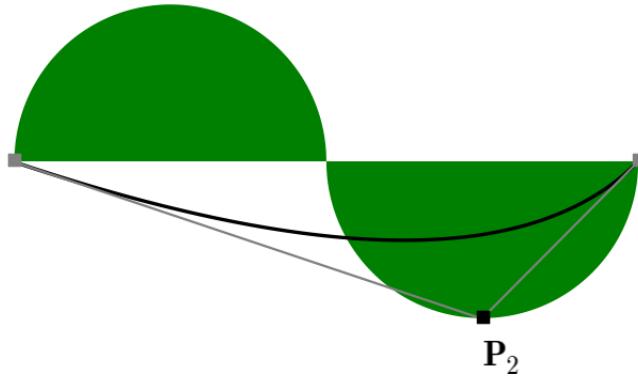


Figure 6.3 Position du point de contrôle  $\mathbf{P}_2$  qui satisfait aux contraintes  $g_i > 0$  et qui assure une croissance monotone de la courbure

La figure 6.4 représente les différents cas possibles de signe des coefficients  $g_i$ . Il existe  $2 \times 2 \times 2 = 8$  possibilités parmi lesquelles 6 se réalisent. Les cas  $g_1 < 0, g_2 > 0, g_3 < 0$  et  $g_1 > 0, g_2 < 0, g_3 > 0$  qui présentent deux changements de signe n'est pas une possibilité pour une courbe de Bézier quadratique. Les six autres possibilités sont illustrées de couleurs différentes sur la figure. Le vert et le rouge représentent respectivement une croissance et une décroissance monotone de la courbure. Les autres cas présentent un changement de signe et alors nécessairement un point d'extremum de courbure.

Pour ces cas qui présentent un changement signe, le domaine admissible comporte une singularité à l'origine.

### 6.3.2 Courbe de Bézier cubique

La même étude pour une courbe de Bézier cubique est plus difficile à illustrer. On peut toujours fixer le premier point de contrôle  $\mathbf{P}_1 = (-1, 0)$  et le dernier point de contrôle  $\mathbf{P}_4 = (1, 0)$ . Il reste encore 4 degrés de liberté, soit les coordonnées  $\mathbf{P}_2 = (x_2, y_2)$  et  $\mathbf{P}_3 = (x_3, y_3)$ . En fixant  $x_2 = -1/3$  et  $x_3 = 1/3$  on peut obtenir la figure 6.5. Les zones en vert et en rouge représentent respectivement des courbes avec une croissance et une décroissance monotone de la courbure. Les autres couleurs représentent des courbes avec un seul extremum de courbure.

En fixant  $x_2 = -6/15$  et  $x_3 = 1/3$  on peut obtenir la figure 6.6.

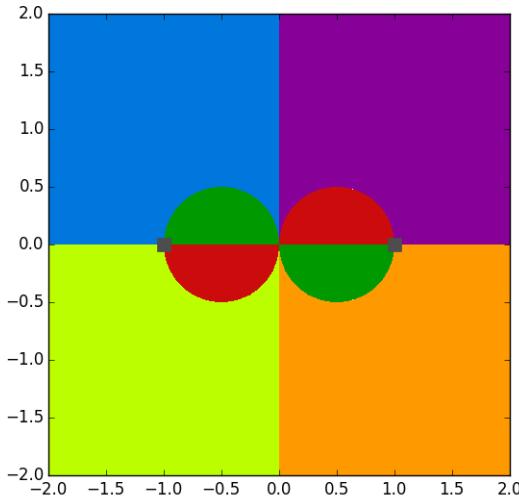


Figure 6.4 Les différents cas possibles de signe des  $g_i$  et la position du point de contrôle  $\mathbf{P}_2$  pour une courbe de Bézier quadratique

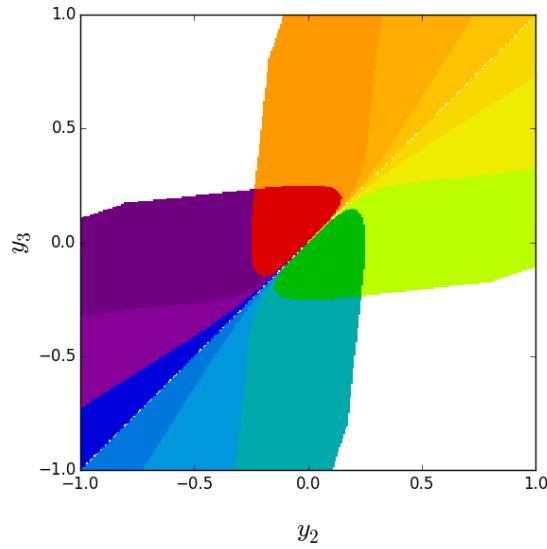


Figure 6.5 Position des points de contrôle  $\mathbf{P}_1 = (-1, 0)$ ,  $\mathbf{P}_2 = (-1/3, y_2)$ ,  $\mathbf{P}_3 = (1/3, y_3)$  et  $\mathbf{P}_4 = (1, 0)$  et différents cas possibles de signe des  $g_i$

On peut comparer ces figures aux figures 5.17 et 5.18. Les conclusions sont les mêmes. Les domaines sont non convexes et peuvent comporter des singularités.

La méthode des points intérieurs n'est pas à toute épreuve pour ce genre de situation. Pourtant, dans bien des cas elle permet de converger vers des solutions intéressantes. Ceci est le

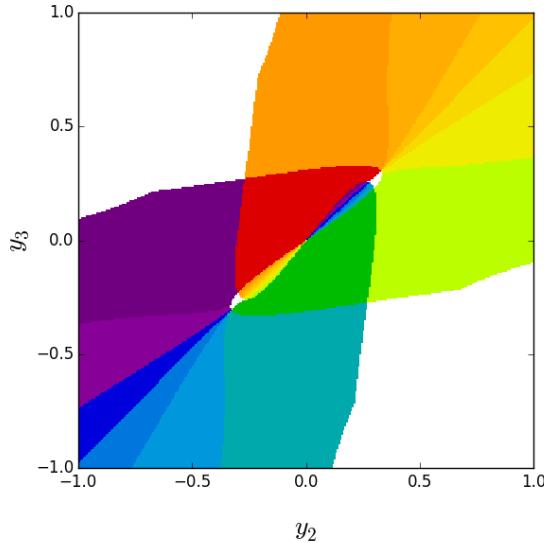


Figure 6.6 Position des points de contrôle  $\mathbf{P}_1 = (-1, 0)$ ,  $\mathbf{P}_2 = (-6/15, y_2)$ ,  $\mathbf{P}_3 = (1/3, y_3)$  et  $\mathbf{P}_4 = (1, 0)$  et différents cas possibles de signe des  $g_i$

sujet de la section suivante.

#### 6.4 Exemples d'applications

La banque de données UIUC de Selig (2015), qui est disponible publiquement, donne accès à des coordonnées de points mesurés sur près de 1600 profils d'ailes d'avions. Le bruit qui provient des erreurs de mesures introduit de petites oscillations. La méthode d'approximation par les moindres carrés produit alors des courbes avec un grand nombre d'extremums de courbure. Ces extremums de courbure sont des oscillations indésirables. Cette base de données est ainsi une excellente source pour tester l'algorithme pour contrôler les extremums de courbure. Les points saillants des tests sont présentés ci-dessous.

Pour plusieurs profils d'ailes, appliquer l'algorithme est simple. Les profils peuvent être approximés de façon précise avec un seul extremum de courbure. Cet extremum est un maximum de courbure situé sur le nez du profil.

Il faut mentionner que cette courbe n'est pas habituellement fermée au bord de fuite. On assume ici que ce bord de fuite serait fermé par une droite pour ainsi produire des arêtes vives ou par un petit arc de cercle.

Pour une longueur de corde de 1 mètre, la distance maximale entre la courbe et les points cibles, de la banque de données, est typiquement moins de 2 millimètres. L'algorithme élimine tous les extremums de courbure sauf un extremum qui correspond à un maximum de courbure.

Les figures 6.7 à 6.9 sont des exemples typiques.

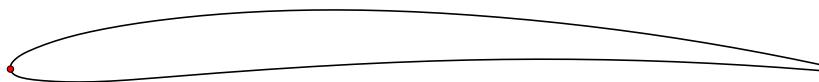


Figure 6.7 Archer A18 (lissé)

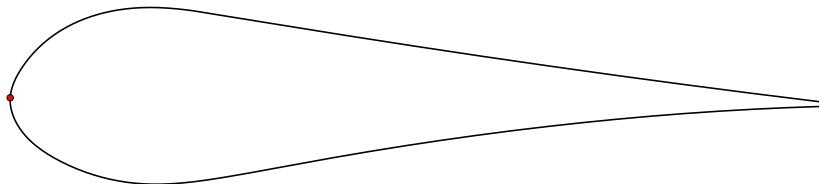


Figure 6.8 Althaus AH 81-K 144 W-F Klappe

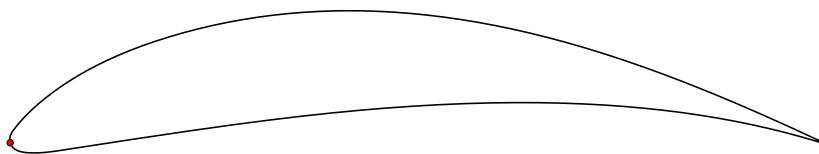


Figure 6.9 Chuch Hollinger CH 10-48-13 (lissé)

Les effets du lissage sont dans la plupart des cas très subtils. Cependant, quelques profils qui sont particulièrement bruités, comme celui montré à la figure 6.10, permettent de voir clairement l'effet du lissage. À la figure 6.11, l'algorithme a été utilisé pour effacer tous les extréums de courbure au nez du profil sauf un maximum de courbure qui est illustré en rouge. Le profil entier après lissage est montré à la figure 6.12. Un deuxième extréum de courbure, cette fois un minimum, a été conservé sur le côté intrados (côté pression) pour mieux approximer une région plane.

Les figures 6.13 et 6.14 montrent deux autres exemples de profils qui requièrent un point de minimum de courbure sur le côté intrados. Les minimums de courbure sont illustrés par des points bleus.

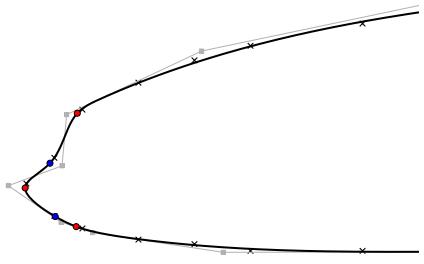


Figure 6.10 Bambino 6 (original)

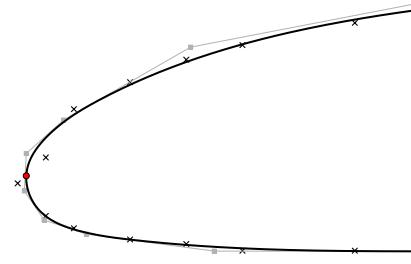


Figure 6.11 Bambino 6 (lissé)

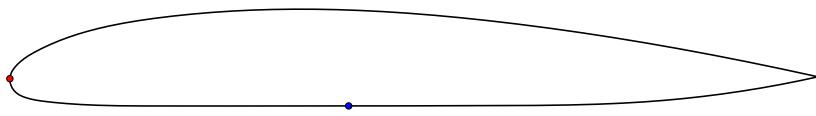


Figure 6.12 Bambino 6 (lissé)

Les positions paramétriques des extremums de courbure doivent être choisies avec soin. La figure 6.15 est une solution avec un seul extremum de courbure au nez. La figure 6.16 montre un agrandissement près du bord de fuite. Un extremum de courbure est ajouté pour permettre de fermer le bord de fuite avec une seule arête vive. Cet extremum de courbure est à une position paramétrique  $u = 0.02$ . Le résultat est montré à la figure 6.17.

Pour résumer, le tableau 6.1 donne le nombre de points de contrôle pour les courbes montrées et la distance maximale entre les points fournis par la banque de données et la courbe.

Tableau 6.1 Approximation par une courbe B-spline (corde = 1 mètre)

Profil	points de contrôle	Déviation
a18sm	17	0.8 mm
ah81k144wfKlappe	15	2.0 mm
ch10sm	22	0.7 mm
bambino6	17	5.6 mm
2032c	16	2.2 mm
e377	19	1.1 mm
ah63k127	26	2.7 mm



Figure 6.13 Dillner 20-32-C



Figure 6.14 Eppler E377 ultralight airfoil

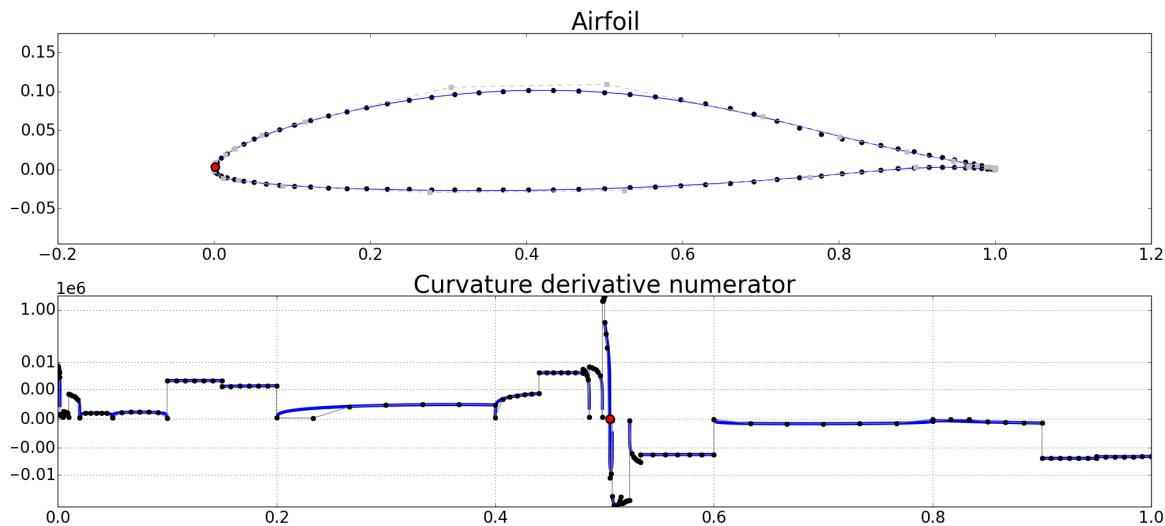


Figure 6.15 Althaus AH 63-K 127

## 6.5 Discussion

### 6.5.1 Optimisation de la fonction de courbure

Soit une courbe  $\gamma(u)$  qui possède une fonction de courbure  $\kappa(s)$  où le paramètre  $s$  représente la longueur d'arc.

On peut approximer cette fonction  $\kappa(s)$  de la meilleure façon possible avec une autre fonction qui est soumise à des contraintes. Il est alors possible de contrôler les zéros de cette

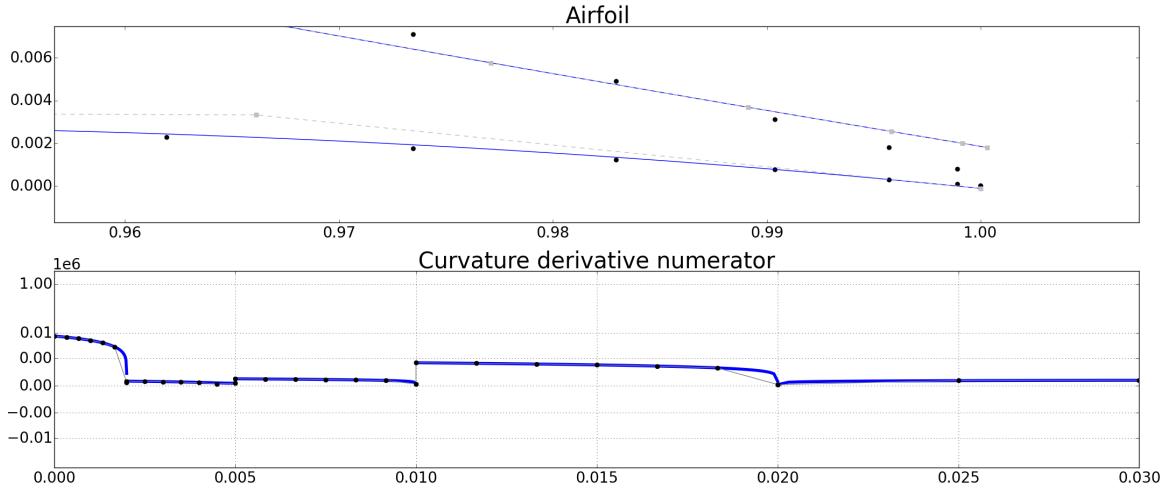


Figure 6.16 Agrandissement près du bord de fuite du profil AH 63-K 127

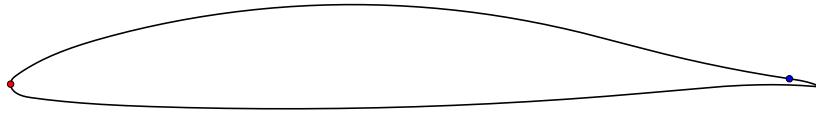


Figure 6.17 La fermeture du bord de fuite du profil AH 63-K 127

fonction qui sont les points d'inflexion de la courbe. Il est également possible de contrôler les extrema de cette fonction qui sont les extrema de courbure. Ensuite, il faut intégrer le résultat deux fois pour obtenir une courbe  $\mathbf{c}(u)$  qui satisfait aux contraintes. Le problème d'optimisation est convexe avec des contraintes linéaires. La solution de ce problème a été présentée au chapitre précédent. L'algorithme permet de converger rapidement vers l'optimum global. Par contre, on obtient de cette façon la meilleure approximation possible de la fonction de courbure  $\kappa(s)$  avec les propriétés différentielles souhaitées et non la meilleure approximation possible de la courbe  $\mathbf{c}(u)$  avec les propriétés différentielles souhaitées. De plus pour obtenir une courbe fermée il serait nécessaire d'ajouter la contrainte  $\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}(L)$  et pour que la courbe soit régulière la contrainte  $\mathbf{c}_u(0) = \mathbf{c}_u(L)$ . Keenan Crane (2013) discute ces dernières contraintes dans sa thèse. Pour ces raisons, cette approche n'est pas celle privilégiée ici. On propose plutôt l'approche suivante.

### 6.5.2 Optimisation de la courbe tracée dans le plan

La courbe B-spline  $\mathbf{c}(u)$  qui approxime le mieux une courbe  $\gamma(u)$  avec un contrôle sur les points d'inflexion et les extrema de courbure est un problème d'optimisation non convexe. La méthode du point intérieur permet de garantir que la solution respectera toutes les contraintes. Par contre, cette solution n'est pas nécessairement un optimum global. En pratique la solution obtenue n'est pas tellement sensible au point de départ. La convergence est par contre parfois plus difficile.

## CHAPITRE 7 LE CONTRÔLE DES PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES DES SURFACES

Ce chapitre ouvre des portes vers de nouveaux espaces de formes où les propriétés différentielles sont maîtrisées.

C'est un domaine vaste et encore peu exploré. La contribution de ce chapitre consiste à présenter quelques exemples pour montrer l'intérêt d'un tel contrôle sur les surfaces en suivant une méthodologie qui consiste à s'attaquer à des espaces de formes de plus en plus généraux. Le programme de recherche est ambitieux et nous en sommes pour l'instant seulement aux premiers pas.

On commence par les surfaces de révolution où il suffit de contrôler les propriétés différentielles de la courbe méridienne. Les transformations projectives et des sphères de Lie permettent déjà d'étendre cet espace de formes et montrer l'intérêt du contrôle des propriétés différentielles des surfaces. En particulier, on peut étendre les cyclides de Dupin à un espace de formes plus général sans faire aucun compromis sur les oscillations. On discute ensuite les surfaces réglées et les surfaces des canaux. Sur ce sujet, on se limite à présenter des éléments importants concernant respectivement leurs inflexions et leurs extrema de courbure et à établir certains liens. On présente ensuite les transformations des sphères de Lie d'une surface plus générale, mais qui est encore élémentaire du point de vue des extrema de courbure, soit l'ellipsoïde. On termine par une application de la technique du miroir pour produire des surfaces simples qui possèdent un seul point ombilic. Un point ombilic dont on peut choisir le type et une surface à laquelle on peut appliquer une transformation des sphères de Lie.

### 7.1 La convention de couleur pour les points d'extrema de courbure

Parmi toutes les sphères tangentes à un point d'une surface, deux de celles-ci ont un contact plus étroit avec la surface. Ceci est vrai à l'exception des points ombilics où ces deux sphères sont confondues. Pour aider l'imagination, on peut associer une couleur différente à ces deux sphères. On peut associer la couleur bleue à la sphère de rayon plus petit et la couleur rouge à la sphère de rayon plus grand. Parmi toutes ces sphères bleues et rouges, certaines possèdent un contact encore plus étroit avec la surface. Ceci se produit lorsque la surface présente un extremum de courbure.

Les lieux de ces extrema de courbure sur la surface sont tracés respectivement en rouge pour la famille de sphères rouges et en bleu pour la famille de sphères bleues. Un point d'une

surface qui est un extremum de courbure pour les deux directions de courbures principales sera alors violet.

Si l'on trace ensuite le lieu des centres de ces sphères, on obtient deux surfaces focales. Une première surface focale qu'on peut imaginer rouge pour les sphères rouges et une deuxième surface focale qu'on peut imaginer bleue pour les sphères bleues. À un point d'extremum de courbure marqué d'une certaine couleur, correspond nécessairement une singularité sur la surface focale de la même couleur. De plus, à un point parabolique d'une surface, une surface focale doit passer par l'infini puisqu'une des deux sphères est alors un plan.

## 7.2 Surface de révolution

Pour rendre le sujet plus vivant, on peut se rappeler que le tour à bois, une des premières machines-outils, et le tour du potier qui permet de produire diverses poteries axisymétriques étaient déjà utilisés du temps de l'Égypte ancienne. De façon plus abstraite, une surface de révolution peut être générée par la rotation d'une courbe plane autour d'un axe. Cette courbe plane est appelée mérienne.

Une section perpendiculaire à l'axe de rotation est donc circulaire. Les droites normales à la surface pour une telle section circulaire forment un cône et coupent l'axe de rotation à un même point. Ce centre de courbure est le centre d'une sphère qui est tangente à la surface sur toute sa circonférence. La surface focale pour ces sphères est dégénérée et tous ses points sont situés sur l'axe de révolution. Tous les points d'une surface de révolution sont alors des extrema de courbure pour cette direction de courbure principale.

Il reste seulement à traiter la deuxième direction de courbure principale dans la direction orthogonale. En suivant cette direction de courbure principale, on trace tout simplement la courbe mérienne. Alors une inflexion ou un extremum de courbure de la courbe mérienne correspond à une inflexion ou un extremum de courbure sur la surface pour cette direction de courbure principale. Une section circulaire qui est une courbe d'inflexion plus communément appelée courbe parabolique est illustrée sur la forme de cloche à la figure 4.8.

On peut arriver aux mêmes conclusions en étudiant la surface focale. La surface focale pour cette direction de courbure principale est elle-même une surface de révolution. On peut la générer à l'aide des lieux de centres de courbure de la courbe mérienne, soit la développée. La rotation de la développée par rapport à l'axe de révolution produit ainsi cette surface focale. Sachant que le centre de courbure d'un point d'inflexion de la courbe mérienne est situé à l'infini on déduit que tous les points de la section circulaire correspondante de la surface de révolution seront des points paraboliques.

Ensuite, à un point d'extremum de courbure sur la courbe méridienne correspond un point de rebroussement sur sa développée tel qu'illustré à la figure 4.53. La révolution de cette développée produit la surface focale qui comporte une singularité axisymétrique. Ainsi à un point d'extremum de courbure sur la courbe méridienne correspond une section circulaire d'extremum de courbure sur la surface.

Alors, contrôler les inflexions sur la courbe méridienne permet de contrôler les points paraboliques sur la surface de révolution. De la même manière, contrôler les extrema de courbure sur la courbe méridienne permet de contrôler les extrema de courbure de la surface.

Sur une surface de révolution, on peut également retrouver une section circulaire ombilic. Le centre de courbure de la courbe méridienne est alors situé sur l'axe de rotation.

On peut également retrouver une section circulaire flecnodale. On sait déjà contrôler les inflexions et les extrema de courbure d'une courbe dans le plan et donc dans le plan méridien. On peut maintenant ajouter le contrôle de cette section circulaire flecnodale.

Soit la surface de révolution

$$\mathbf{S}(\theta, z) = (f(z) \cos(\theta), f(z) \sin(\theta), z) \quad (7.1)$$

L'équation de la surface est alors  $f(z)^2 - x^2 - y^2 = 0$ . L'équation paramétrique d'une droite qui passe par le point  $(x_0, 0, 0)$  de la surface peut s'exprimer par l'équation  $\mathbf{d} = (x_0 + az, bz, z)$ . En substituant cette dernière équation dans l'équation de la surface on obtient :

$$F = f(z)^2 - (x_0 + az)^2 - (bz)^2 = 0 \quad (7.2)$$

On dérive l'équation une première fois,

$$F_z = ff_z - 2(x_0 + az)a - 2bz = 0 \quad (7.3)$$

une deuxième fois,

$$F_{zz} = f_z f_z + ff_{zz} - 2a^2 - 2b = 0 \quad (7.4)$$

et une troisième fois pour obtenir :

$$F_{zzz} = 3f_z f_{zz} + ff_{zzz} = 0 \quad (7.5)$$

Un point flecnodal sur une surface de révolution est un point qui satisfait cette équation qui est présentée dans Cipolla and Giblin (2000). On peut ajouter l'interprétation suivante. L'hyperbole avec les trois constantes d'intégration  $a$ ,  $b$  et  $c$  est solution de cette dernière équation différentielle :

$$f(z) = a\sqrt{1 - b(z + c)^2} \quad (7.6)$$

À un point flecnodal, la courbe méridienne possède ainsi un contact de degré trois avec une hyperbole. En particulier, tous les points de l'hyperboloïde obtenu par la révolution de cette hyperbole sont flecnodaux. Cette surface n'est rien d'autre qu'une quadrique réglée et les deux droites asymptotiques sont alors contenues complètement dans la surface.

Pour contrôler les points flecnodaux d'une surface de révolution, il suffit donc d'imposer, par exemple, la contrainte :

$$3f_z f_{zz} + ff_{zzz} > 0 \quad (7.7)$$

Il fait du sens d'ajouter la contrainte  $f(z) > 0$  pour éviter que la courbe méridienne croise l'axe de révolution. Ensuite, il suffit de fixer le signe de  $f_z$  ou de  $f_{zz}$  pour obtenir un problème d'optimisation convexe. Par exemple, on peut ajouter la dernière contrainte  $f_z > 0$ .

Il est ensuite possible d'appliquer une transformation projective à une telle surface de révolution. Les points paraboliques et flecnodaux seront alors préservés. De la même manière il est possible d'appliquer une transformation des sphères de Lie à ces surfaces, alors les points d'extremums de courbure seront préservés.

Il est possible d'appliquer une transformation inverse à ces surfaces pour obtenir à nouveau une surface axisymétrique. Alors il est possible de faire glisser la surface sur elle-même sans la déformer par une rotation autour de l'axe de symétrie. Ainsi on ne génère pas une famille à 15 paramètres de surfaces avec ces transformations, mais bien une famille à 14 paramètres. Il en est de même pour toutes surfaces qu'on peut faire glisser sur elle-même avec une transformation projective ou une transformation des sphères de Lie. Par exemple par une certaine combinaison de rotation, translation et de mise à l'échelle. Une telle transformation préserve les lignes de courbures principales, les extrema de courbure, les lignes asymptotiques et les inflexions.

La section suivante permettra d'illustrer le cas particulier des transformations de sphères de Lie d'une surface de révolution.

### 7.2.1 Les transformations des sphères de Lie d'une surface de révolution

Les sections circulaires d'extremums de courbure et ombilic sont préservées par une transformation des sphères de Lie. Donnons quelques exemples. La figure 7.1 montre une section de cylindre. Le groupe de transformations des sphères de Lie permet de générer la famille à deux paramètres de cyclides à partir de ce cylindre. Les figures suivantes jusqu'à la figure 7.6 montrent des sections de cyclides. Tous les points de ces surfaces sont des extrema de courbure dans les deux directions de courbure principale.



Figure 7.1 Cylindre



Figure 7.2 Section d'un tore

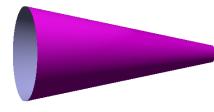


Figure 7.3 Cône



Figure 7.4 Section inférieure d'un tore



Figure 7.5 Entonnoir angulaire



Figure 7.6 Corne

On obtient une famille plus large de surfaces si on impose que tous les points soient des extrema de courbure dans une seule direction. Un sous-ensemble de ces surfaces peut être généré à l'aide des transformations des sphères de Lie et d'une surface de révolution avec une courbe méridienne sans extremum de courbure. Les figures 7.7 à 7.9 montrent quelques exemples.

La figure 7.7 montre un résultat généré à partir d'une courbe méridienne sans extremum de courbure, mais qui porte un point d'inflexion. La figure 7.8 montre que de telles surfaces permettent d'élargir l'espace des formes des cyclides de Dupin tout en préservant des propriétés différentielles similaires. La figure 7.9 montre qu'il est possible d'ajouter à ces surfaces des canaux une certaine torsion de la courbe directrice, ce qui n'est pas possible pour une cyclide de Dupin.

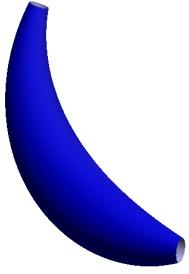


Figure 7.7 Banane

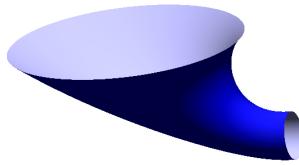


Figure 7.8 Trompette courbée

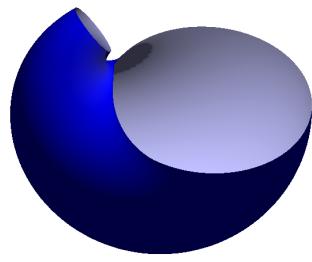


Figure 7.9 Colimaçon

### 7.3 Les surfaces réglées

Cette section discute la géométrie différentielle des surfaces réglées. Elle permet en particulier d'établir le lien entre les courbes flecnodales d'une surface réglée et le contact avec une surface doublement réglée qui l'osculte. C'est là un lien bien connu par les spécialistes du domaine. La contribution se retrouve à la section suivante où l'on fait appel à la réciprocité droites-sphères discutée à la section 4.2.2 pour établir le lien analogue en ce qui concerne les extremaums de courbure de la surface d'un canal et le contact avec une cyclide de Dupin qui l'osculte.

Une surface réglée peut être générée par le déplacement d'une droite dans l'espace. Cette droite est appelée génératrice. Si les droites successives ne sont pas coplanaires et n'ont pas de point d'intersection alors la surface est réglée, mais non développable. Deux droites successives non coplanaires et sans intersection sont dites gauches (en anglais : skew lines). On peut produire de telles droites en déplaçant par exemple une droite génératrice à la manière de l'hélice d'un avion avec un mouvement vers l'avant.

Les surfaces développables, un sous ensemble des surfaces réglées, ont la particularité de ne posséder que des points paraboliques. À un point parabolique, une des deux courbures principales est nulle. Il est intéressant de se souvenir de la réciproque suivante, valide pour notre espace à trois dimensions. Une surface qui n'est constituée que de points paraboliques est développable et donc réglée. C'est le cas d'une feuille de papier si on la déforme sans la plier ou la froisser. Une surface réglée plus générale contiendra des points hyperboliques. Par contre, en aucun cas une surface réglée ne peut avoir des points elliptiques.

Voici une petite parenthèse au sujet des surfaces quelconques. Les droites normales d'une surface sur une même ligne de courbure principale produisent une surface développable. Une surface qu'on peut donc rendre plane. Les extremaums de courbure de cette courbe dans le plan correspondent aux extremaums de courbure de la surface dans cette direction

de courbure principale. C'était là une découverte importante de Gaspard Monge. Dans les autres directions, les droites normales forment des surfaces réglées non développables.

Pour revenir aux surfaces réglées, les lignes flecnodales sont des marqueurs différentiels importants pour celles-ci.

Dans la direction asymptotique qui correspond à la directrice, tous les points sont flecnodaux. Il ne reste qu'à considérer les points flecnodaux dans l'autre direction. Alors, en ce qui concerne les points flecnodaux sur une droite génératrice, les possibilités sont seulement les suivantes. La droite génératrice entière peut être flecnodale. Elle ne peut comporter aucun point flecnodal réel, deux points flecnodaux coïncidents ou deux points flecnodaux distincts. On peut lire sur le sujet les livres de Ernest J. Wilczynski (1906) et Ernest P. Lane (1932). Pour expliquer ceci, on fait appel à une surface doublement réglée.

On peut rappeler les éléments suivants discutés plus en détail à la section 4.2.3. Les surfaces doublement réglées sont des quadriques. Trois droites gauches dans l'espace permettent de générer une telle surface en faisant passer la famille de droites à un paramètre qui coupent simultanément ces trois droites. On génère ainsi une famille de directions asymptotiques de la surface quadrique. Alors tous les points de la quadrique doublement réglée sont flecnodaux pour les deux directions asymptotiques, c'est-à-dire qu'ils ont plus de trois points de contact avec leurs droites asymptotiques. On appellera dans ce qui suit une telle surface quadratique doublement réglée un réguli.

Maintenant, trouver les directions asymptotiques et les points flecnodaux sur une génératrice d'une surface réglée, revient à obtenir le réguli qui l'osculte.

On peut faire une analogie avec les points d'extremums de courbure sur une courbe et le cercle qui l'osculte. Pour trouver le cercle qui osculte une courbe on peut prendre trois points sur cette courbe et les faire converger vers un même point. Puisqu'un seul cercle passe à travers trois points, à la limite on obtient le cercle qui osculte la courbe. De la même manière, on peut prendre trois droites directrices contenues dans une surface réglée et les faire converger vers une même droite. Puisqu'un seul réguli passe à travers trois droites, on obtient ainsi le réguli qui osculte la surface réglée.

Ce réguli a été produit à partir de trois droites. Une famille à un paramètre de droite passe simultanément par celles-ci. Ce sont les droites asymptotiques de la surface pour cette position de la génératrice.

Tout comme pour la courbe dans le plan et le cercle qui l'osculte, si la surface réglée possède trois points de contact avec ses droites asymptotiques, alors elle doit traverser le réguli qui l'osculte. Dans une telle situation, la droite génératrice ne comporte aucun point flecnodal.

Par opposition, si l'ensemble des points de la droite génératrice ne traverse pas le réguli, alors tous les points de cette droite sont flecnodaux. Ensuite, selon un théorème de l'algèbre, une droite génératrice peut traverser le réguli, une surface de degré 2 en au maximum 2 points si elle n'est pas complètement incluse dans la surface. Il reste alors seulement deux cas à considérer. Le cas où deux points distincts sur la génératrice sont flecnodaux et le cas où ses deux points coïncident.

Ainsi produire une surface réglée sans points flecnodaux pour sa deuxième famille de directions flecnodales revient à imposer que tous les points de la droite directrice traversent le réguli qui l'osculte.

Une transformation projective préserve le contact entre les droites et une surface. Ainsi une transformation projective d'une surface préserve ses points flecnodaux. On peut produire ainsi une famille de surfaces à 8 paramètres de formes différentes qui préserve les points flecnodaux.

Il reste encore à développer un algorithme qui utilise ces observations pour contrôler les courbes flecnodales sur les surfaces réglées. Pour l'instant, on peut ajouter qu'en utilisant la réciprocité droites-sphères discutée à la section 4.2.2, un tel algorithme peut être développé en parallèle d'un deuxième algorithme pour contrôler cette fois les extrema de courbure portés par la surface d'un canal. Ce qui est le sujet de la section suivante.

#### 7.4 Les surfaces des canaux

Une surface d'un canal  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^3$  est définie par l'enveloppe d'une sphère  $\mathbf{S}$  en mouvement, de centre  $\mathbf{m} = (x(t), y(t), z(t))$  et de rayon  $r(t)$ . Les équations qui définissent  $\mathbf{C}$  sont :

$$\mathbf{S} : (\mathbf{C} - \mathbf{m})^2 - r^2 = 0 \quad (7.8)$$

$$\mathbf{S}_t : (\mathbf{C} - \mathbf{m}) \cdot \mathbf{m}_t - rr_t = 0 \quad (7.9)$$

Pour une valeur fixe de  $t$ , la solution de ces deux équations est un cercle situé dans l'espace.

On peut interpréter ces deux équations comme l'intersection de deux sphères successives. Soit une première sphère  $\mathbf{S}(t_1)$  et une deuxième sphère  $\mathbf{S}(t_2)$ . Les points de l'espace qui satisfont simultanément à ces deux équations sont situés à l'intersection de ces deux sphères et donc sur un cercle. Les points sur ce cercle satisfont également à l'équation  $(\mathbf{S}(t_2) - \mathbf{S}(t_1))/(t_2 - t_1)$ . Maintenant, si l'on fait tendre la différence  $(t_2 - t_1)$  vers zéro on obtient l'équation 7.9.

Ce cercle est également l'intersection entre la surface d'un canal  $\mathbf{C}$  et la sphère  $\mathbf{S}(t)$  tangente à la surface. Par le contact particulièrement élevé entre la surface et cette sphère tangente, le cercle représente une direction de courbure principale et un extremum de courbure sur toute sa circonférence. Il n'y a plus qu'à étudier les extrema de l'autre courbure principale dans la direction perpendiculaire.

La surface d'un canal  $\mathbf{C}$  est ainsi formée d'une famille continue de cercles lorsqu'on fait varier la valeur de  $t$ . On peut donner à cette surface la paramétrisation  $\mathbf{C}(t, \theta)$

$$\mathbf{C} = \mathbf{m} + r \left( \frac{r_t}{v} \mathbf{T} + \sqrt{1 - \left( \frac{r_t}{v} \right)^2} (\cos \theta \mathbf{N} + \sin \theta \mathbf{B}) \right) \quad (7.10)$$

où  $v = \sqrt{\mathbf{m}_t \cdot \mathbf{m}_t}$  alors que  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{B}$  sont respectivement le vecteur tangentiel unitaire, normal et binormal de la courbe  $\mathbf{m}$ . Sur le sujet de la paramétrisation rationnelle on peut consulter Peternell and Pottmann (1997) et Dahl (2012).

Christoph Maurer (2000) fait remarquer qu'il est naturel de faire appel à la géométrie des sphères pour étudier les surfaces des canaux. On peut utiliser en particulier la géométrie de Laguerre dont le groupe des transformations est un sous-groupe de celui de la géométrie des sphères de Lie. Alors on obtient le modèle cyclographique  $\mathbb{R}^{3,1}$  très intuitif pour représenter une famille de sphères. Une sphère  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^3$  de centre  $\mathbf{m} = (x, y, z)$  et de rayon  $r$  est alors décrite par un point  $\mathbf{p} = (x, y, z, r) \in \mathbb{R}^{3,1}$ . Dans l'espace  $\mathbb{R}^{3,1}$  on utilise le produit scalaire  $\langle p_1, p_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - r_1 r_2$ .

La distance  $\sqrt{\langle p_1 - p_2, p_1 - p_2 \rangle}$  représente la distance tangentielle entre deux sphères. On peut imaginer un plan tangent qui repose sur les deux sphères. La distance entre les deux points de contact est cette distance tangentielle. Deux sphères tangentes possèdent ainsi une distance tangentielle nulle. C'est cette propriété de l'espace  $\mathbb{R}^{3,1}$  qui peut s'avérer intéressante. Par exemple, cette formule permet d'identifier si deux sphères sont l'une dans l'autre. Alors la distance tangentielle n'est pas un nombre réel puisque le produit scalaire devient  $\langle p_1 - p_2, p_1 - p_2 \rangle < 0$ .

Ensuite une surface d'un canal  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^3$  est décrite par une courbe  $\gamma(t) \in \mathbb{R}^{3,1}$ . Alors on peut imposer la condition  $\langle \gamma_t, \gamma_t \rangle > 0$  qui est nécessaire pour que l'enveloppe des sphères soit une surface réelle. La courbure  $\kappa$  de cette courbe  $\gamma$  peut s'obtenir avec la formule de Frenet  $\mathbf{T}_s = \kappa \mathbf{N}$ . Le vecteur tangent unitaire  $\mathbf{T}$  peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\mathbf{T} = \frac{\gamma_t}{\sqrt{\langle \gamma_t, \gamma_t \rangle}} \quad (7.11)$$

Ensuite si l'on dérive cette équation par rapport à la longueur d'arc  $s$  on obtient :

$$\mathbf{T}_s = \frac{\mathbf{T}_t}{\sqrt{\langle \gamma_t, \gamma_t \rangle}} = \frac{\gamma_{tt}\sqrt{\langle \gamma_t, \gamma_t \rangle} - \gamma_t \langle \gamma_t, \gamma_t \rangle^{-1/2} \langle \gamma_t, \gamma_{tt} \rangle}{\langle \gamma_t, \gamma_t \rangle^{3/2}} \quad (7.12)$$

qu'on peut simplifier à :

$$\mathbf{T}_s = \frac{\gamma_{tt}\langle \gamma_t, \gamma_t \rangle - \gamma_t \langle \gamma_t, \gamma_{tt} \rangle}{\langle \gamma_t, \gamma_t \rangle^2} \quad (7.13)$$

et cette expression permet d'obtenir la courbure :

$$\kappa = \sqrt{\langle \mathbf{T}_s, \mathbf{T}_s \rangle} \quad (7.14)$$

On peut étudier d'abord la courbe la plus simple dans cet espace, soit une courbe de courbure constante. En faisant varier  $\theta$  on peut ainsi tracer par exemple le cercle  $(\cos \theta, \sin \theta, 0, 0)$  dans l'espace  $\mathbb{R}^{3,1}$ . Ce cercle est également un cercle dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Ensuite, une translation du cercle dans la direction de  $r$  dans l'espace  $\mathbb{R}^{3,1}$  produit une surface d'un canal très simple dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , soit un tore. De façon plus générale, une courbe de courbure  $\kappa$  constante dans l'espace  $\mathbb{R}^{3,1}$  correspond à une cyclide de Dupin dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ . On peut consulter sur ce sujet Krasauskas and Mäurer (2000).

Dans l'espace euclidien, on peut tracer un seul cercle qui passe par trois points distincts. De façon similaire, on peut tracer une seule courbe de courbure constante qui passe par trois points distincts dans l'espace  $\mathbb{R}^{3,1}$ . On peut également obtenir la cyclide de Dupin directement dans l'espace euclidien. Il existe une famille à un paramètre de sphères qui sont tangentes à la fois à trois sphères données. L'enveloppe de cette famille de sphères est la cyclide de Dupin recherchée.

À une valeur  $t$  d'une surface d'un canal  $\mathbf{C}$  on peut maintenant obtenir la cyclide de Dupin qui osculte la surface du canal.

On peut alors procéder par analogie avec les surfaces réglées. Un résultat possiblement connut, mais nous n'avons pas encore trouvé une référence qui présente le résultat de façon explicite.

De la même manière qu'on peut générer un réguli à partir de trois droites, on peut générer une cyclide de Dupin à partir de trois sphères. Tout comme un réguli osculte une surface réglée, une cyclide de Dupin osculte une surface d'un canal.

La direction de courbure principale de la surface d'un canal correspond à la direction de courbure principale de la cyclide de Dupin qui l'osculte. Soit une telle ligne de courbure

principale sur la surface d'un canal. Si cette ligne possède 3 points de contact avec la cyclide de Dupin, alors elle doit la traverser. Ainsi, si la surface d'un canal traverse la cyclide de Dupin qui l'osculte sur toute sa section circulaire, alors cette section circulaire ne possède aucun point d'extremum de courbure. Par opposition, si tous les points de la section circulaire ne traversent pas la cyclide, alors tous ces points sont des extrema de courbure. Autrement, la section circulaire peut seulement avoir deux points d'intersection avec la section de la cyclide. Deux cercles peuvent avoir au maximum deux intersections. Ainsi il ne reste plus que deux cas à considérer. Ces deux points peuvent être distincts ou peuvent coïncider.

Ainsi une surface d'un canal sans extrema de courbure dans cette direction de courbure principale doit toujours traverser la cyclide de Dupin qui l'osculte pour tous les points de sa section circulaire.

Une transformation des sphères de Lie préserve le contact entre les sphères et une surface. Ainsi, une transformation des sphères de Lie préserve les extrema de courbure. On peut produire ainsi une famille de surfaces à 8 paramètres de formes différentes qui préserve ses extrema de courbure.

## 7.5 L'ellipsoïde

Le groupe des transformations affines, un sous-groupe des transformations projectives permet de transformer une surface avec les 12 paramètres de la relation linéaire suivante.

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \quad (7.15)$$

$$y' = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \quad (7.16)$$

$$z' = a_3x + b_3y + c_3z + d_3 \quad (7.17)$$

Une transformation affine dans le plan préserve et permet de générer l'ensemble des ellipses à partir d'un cercle. Elle préserve les ellipses puisqu'elle préserve le degré d'une courbe ainsi que les points à l'infini. De façon analogue les transformations affines dans l'espace préparent et permettent de générer l'ensemble des ellipsoïdes à partir d'une sphère.

On peut maintenant afficher les extrema de courbure bien connus sur ces ellipsoïdes avec la convention de couleurs discutée à la section 7.1. Les extrema de courbure portés par les ellipsoïdes présentent trois cas spécifiques illustrés aux figures 7.10 à 7.12 et un cas général illustré à la figure 7.13.

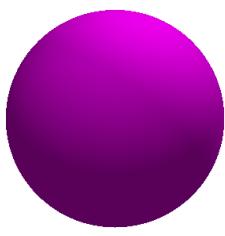


Figure 7.10 Sphère

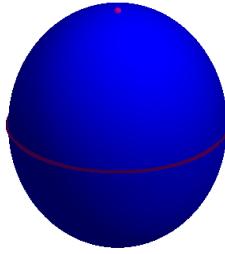


Figure 7.11 Allongement

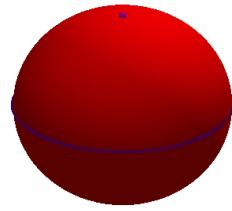


Figure 7.12 Aplatissement

### 7.5.1 Les transformations des sphères de Lie d'un ellipsoïde

Si l'on exclut les transformations de similitude, l'espace des formes des ellipsoïdes est un espace à 2 paramètres. En excluant également les transformations de similitude, il reste 8 paramètres aux transformations des sphères de Lie. Ainsi on peut produire un espace de formes à 10 paramètres avec la même configuration de ligne d'extremums de courbure que le cas général de l'ellipsoïde.

Après une transformation des sphères de Lie, le résultat n'est plus nécessairement un ellipsoïde. Une section plane de la forme n'est plus nécessairement une ellipse. L'espace des formes est plus large. On peut alors, par exemple, modéliser la forme d'un œuf complètement axisymétrique ou non. Une telle forme ovoïde pas tout à fait axisymétrique est présentée à la figure 7.14. En utilisant comme point de départ un ellipsoïde plus aplati, on obtient une forme qui peut ressembler à une souris montrée à la figure 7.15. En ajoutant une cambrure, on peut obtenir une forme de haricot avec deux plans de symétrie tel que montré à la figure 7.16.

On peut modéliser également un galet tel qu'illustré à la figure 7.17 qui, constamment emporté par les vagues et frappé de tous les côtés, a perdu toute aspérité et est devenu complètement lisse. En ajoutant plus de cambrure, on peut obtenir une forme de bol comme à la figure 7.18. Enfin, une transformation des surfaces parallèles permet de s'éloigner d'une section elliptique pour obtenir une surface plus aplatie au centre telle une spatule ou une planche de surf comme montrée à la figure 7.19.

Il est possible de générer ainsi une famille de surfaces à 10 paramètres qui ont en commun une même configuration de lignes d'extremums de courbure.

On peut appliquer le même procédé à toute autre surface et en particulier aux autres surfaces quadriques. Du point de vue de la géométrie projective, il existe trois types de surfaces

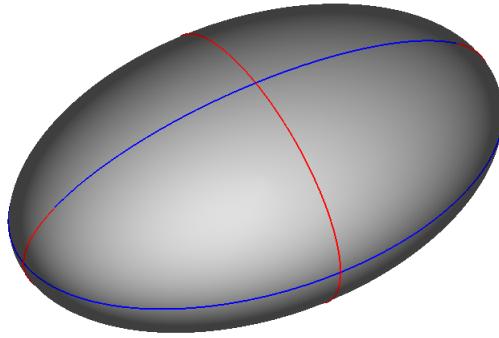


Figure 7.13 Ellipsoïde

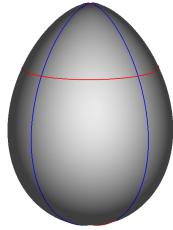


Figure 7.14 Œuf

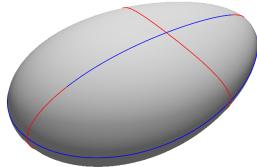


Figure 7.15 Souris

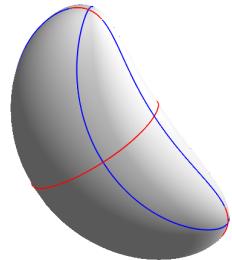


Figure 7.16 Haricot

quadriques. Soit les surfaces comme l'ellipsoïde avec une courbure gaussienne positive, les quadriques doublement réglées avec une courbure gaussienne négative et les surfaces développables avec une courbure gaussienne nulle comme par exemple le cylindre. Ceci démontre qu'il existe des espaces de formes tout de même assez larges avec très peu de lignes d'extremums de courbure. On peut faire maintenant un dernier pas vers des surfaces plus générales.

## 7.6 Les surfaces de translation

### 7.6.1 Les fronts d'onde et les surfaces de translation

Soit un miroir dont la forme peut s'exprimer avec l'équation suivante :

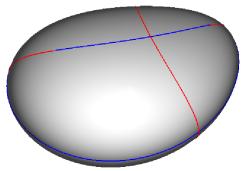


Figure 7.17 Galet

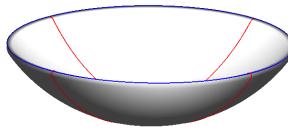


Figure 7.18 Bol

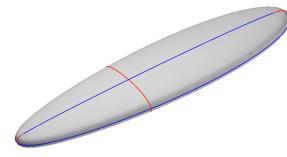


Figure 7.19 Planche de surf

$$z(x, y) = f(x) + g(y) \quad (7.18)$$

Alors ce miroir est une surface de translation. On peut supposer que  $f(x)$  et  $g(y)$  sont deux fonctions B-splines à une variable. Contrôler les zéros des dérivées seconde et troisième de ces fonctions permet de contrôler les lignes paraboliques et d'extremums de courbure portées par le front d'onde réfléchi.

De plus, les directions de courbures principales sur le front d'onde vont correspondre aux directions  $[1, 0]^T$  et  $[0, 1]^T$  sur le miroir puisque ces directions sont déterminées par les valeurs propres de la matrice :

$$\begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

et que  $z_{xy} = 0$  pour une telle surface de translation. Il faut aussi ajouter la contrainte  $z_{xx} > z_{yy}$  ou  $z_{yy} > z_{xx}$  pour éviter l'apparition de points ombiliques.

Par exemple, soit un miroir dont l'équation est sous la forme  $z = ax^2 + bx^4 + cy^2 + dy^4$ . La figure 7.20 montre la section d'un sphère obtenue lorsque  $a = c$  et  $b = d = 0$ . Lorsque  $a \neq b$  et que  $b = d = 0$  on obtient une cyclide de Dupin. La figure 7.21 montre la surface d'un canal obtenue lorsque  $b \neq 0$  et que  $d = 0$ . Enfin la figure 7.22 montre un cas plus général. On obtient alors un croisement entre les lignes d'extremum de courbure rouge et bleue.

### 7.6.2 Les transformations des sphères de Lie

Les transformations des sphères de Lie du front d'onde réfléchi avec miroir exprimé avec l'équation 7.18 permettent d'élargir l'espace de formes sur lesquelles on peut contrôler les extremums de courbure.



Figure 7.20 Sphère

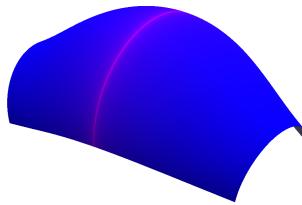


Figure 7.21 Canal

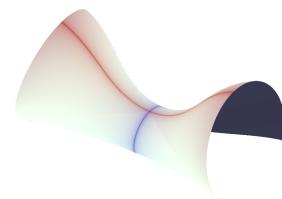


Figure 7.22 Point violet

## 7.7 Un point ombilic

Les figures 7.11 et 7.12 montrent une sphère allongée et une sphère aplatie par une transformation affine. Ce sont des surfaces axisymétriques. Sur ces surfaces, on peut trouver deux points ombilics situés à l'intersection de l'axe de symétrie et de la surface. Pour ces points la courbure est constante, peu importe la direction. C'est là la définition d'un point ombilic. Ces deux points ombilics sont d'indice 1. Il est bien connu, par les spécialistes du domaine, que la somme des indices des points ombilics sur une surface qui possède seulement des points ombilics isolés et qui a la topologie d'une sphère est un invariant qui doit être égal à 2. Pour sa part, la somme des indices des points ombilics sur une surface qui a la topologie d'un tore est un invariant qui doit être égal à 0.

De façon plus générale les indices d'un point ombilic sont de  $1/2$  et de  $-1/2$ . L'ellipsoïde montré à la figure 7.13 présente 4 points ombilics d'indice  $1/2$  situés aux points où la ligne d'extremum de courbure passe du bleu au rouge. Ainsi, lorsque l'ellipsoïde devient axisymétrique deux points ombilics d'indice  $1/2$  viennent se rencontrer sur l'axe pour former les deux points ombilics discutés précédemment d'indice 1.

Une ligne de courbure peut changer de couleur seulement à un point ombilic. Ce sont les points sur une surface qui ont un voisinage immédiat qui ressemble le plus à une sphère.

### 7.7.1 Les fronts d'onde et la forme normale d'un point ombilic

Tel que déjà mentionné à la section 4.1.3 à la page 37, la classification des points ombilics peut s'obtenir avec la forme normale suivante.

$$z = (6a + 2)x^3 + 6bx^2y + (6a - 6)xy^2 + 6by^3 \quad (7.20)$$

Malheureusement, la surface produite directement de cette forme normale n'est pas élémentaire du point de vue des extrema de courbure. Si l'on s'éloigne de l'origine où est situé le

point ombilic, on y retrouve des extrema de courbure qui s'ajoutent.

Nous proposons une technique qui permet d'obtenir des surfaces avec un seul point ombilic et qui comporte le minimum de ligne d'extrema de courbure. Ceci permet déjà de se familiariser avec la notion de point ombilic sous sa forme la plus simple.

Pour ce faire, il suffit d'utiliser la forme normale 7.20 comme un miroir et de produire la réflexion d'un front d'onde plan comme discuté à la section 4.4. Suite à la réflexion, le front d'onde devient une surface courbe qui se propage pour produire une famille de surfaces parallèles. Toutes ces surfaces parallèles ont en commun de posséder un seul point ombilic et un minimum de ligne d'extrema de courbure.

Les paramètres  $a$  et  $b$  de l'équation 7.20 sont illustrés par un point rouge de coordonnées  $(a, b)$  sur les figures 7.23 à 7.31.

Les faits suivants sont bien connus par les spécialistes du domaine.

Lorsque les paramètres  $(a, b)$  sont situés à l'intérieur de la deltoïde orange, trois courbes d'extrema de courbure viennent se rencontrer et changent de couleur au point ombilic, comme illustré sur les figures 7.23 à 7.25.

Lorsque les paramètres  $a$  et  $b$  sont situés à l'intérieur du cercle noir, les couleurs des lignes d'extrema de courbure alternent. Lorsque les paramètres  $a$  et  $b$  sont situés sur le cercle noir, deux courbes d'extrema de courbure viennent se superposer. Lorsque les paramètres  $a$  et  $b$  sont situés à l'extérieur du cercle noir mais toujours à l'intérieur de la deltoïde orange, toutes les courbes d'une même couleur se retrouvent du même côté.

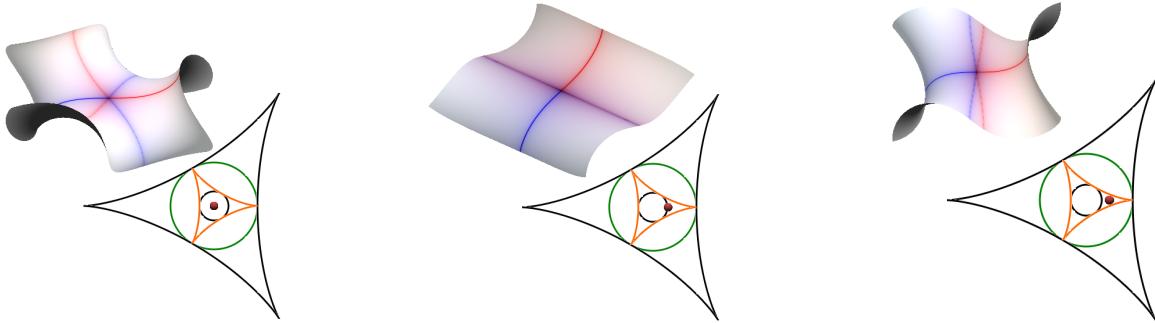


Figure 7.23  $a = 0, b = 0$

Figure 7.24  $a = 1/3, b = 0$

Figure 7.25  $a = 1/2, b = 0$

Les figures 7.27 et 7.28 montrent qu'il y a une seule ligne d'extremum de courbure lorsque les paramètres  $a$  et  $b$  sont situés à l'extérieur de la deltoïde orange.

Les faits suivants sont plus spécifiques à la méthode proposée.

Un point situé sur le cercle vert est une situation très particulière. Le cas général est montré à la figure 7.30 alors que le cas particulier est illustré à la figure 7.26.

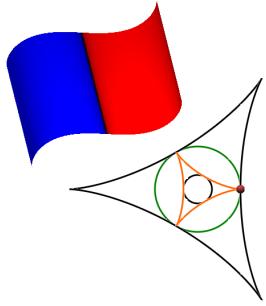


Figure 7.26  $a = 1, b = 0$

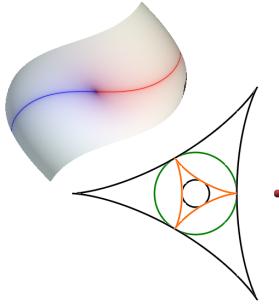


Figure 7.27  $a = 2, b = 0$

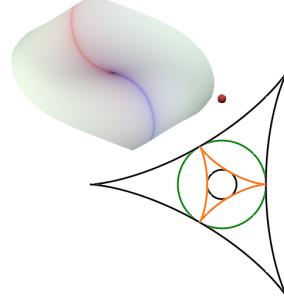


Figure 7.28  $a = 0, b = 2$

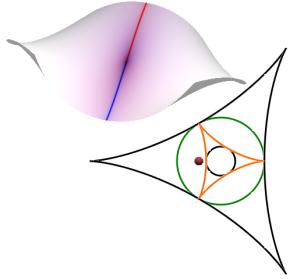
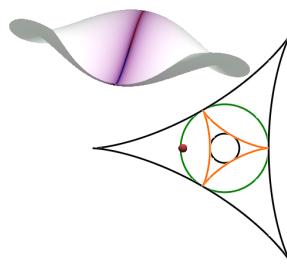
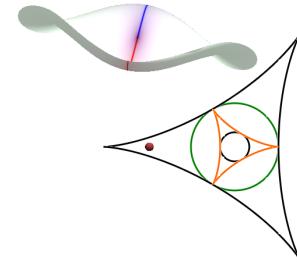
Les points ombilics situés à l'intérieur du cercle vert sont d'indice  $-1/2$  alors que les points situés à l'extérieur sont d'indice  $1/2$ . Afin de préserver la somme des indices qui est un invariant topologique sur une surface fermée, la naissance de nouveaux points ombilics doit se faire par paires et se produire sur le cercle vert.

Sur une surface générale, suite à la naissance de ces deux jumeaux situés sur une même ligne d'extremum de courbure, on peut observer à deux reprises un changement de couleur sur cette ligne. Cette situation ne se produit pas pour la présente famille de surfaces élémentaires. De part et d'autre du cercle on observe un seul point ombilic. Par contre, les couleurs de la ligne d'extremums de courbure sont inversées comme illustré aux figures 7.29 et 7.31. La figure 7.30 montre qu'à la transition on retrouve une ligne violette d'extremums de courbure.

Ceci à l'exception de trois combinaisons de paramètres  $a$  et  $b$  qui correspondent à l'intersection du cercle vert et de la deltoïde orange. Alors on passe directement d'un point ombilic traversé par trois lignes d'extremums de courbure d'indice  $-1/2$  à un point ombilic traversé par une seule ligne de courbure d'indice  $1/2$  comme illustré à la figure 7.26.

### 7.7.2 Les directions principales de courbure autour du point ombilic

Avec la méthode du miroir on obtient une surface avec un point ombilic dans sa forme la plus simple. Ceci est vrai également pour les directions de courbure principale. Pour trouver ces directions, on considère toujours le contact entre le miroir et une parabole de révolution et on peut transposer ces directions du miroir au front d'onde. Ces directions principales sur le miroir correspondent aux valeurs propres de la matrice :

Figure 7.29  $a = -1/2, b = 0$ Figure 7.30  $a = -1, b = 0$ Figure 7.31  $a = -2, b = 0$ 

$$\begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

Pour le cas de l'équation 7.20 :

$$z_{xx} = 6(6a + 2)x + 12by \quad (7.22)$$

$$z_{xy} = 12bx + 2(6a - 6)y \quad (7.23)$$

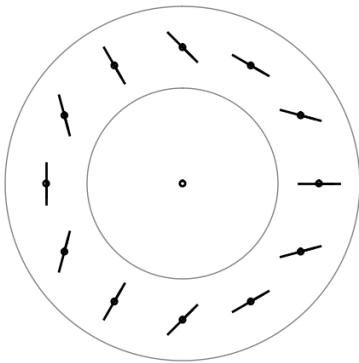
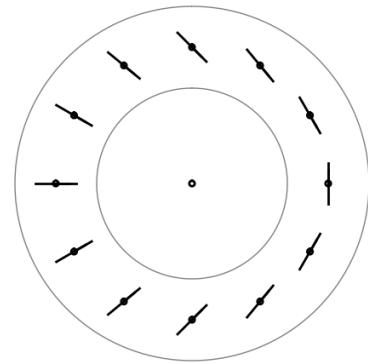
$$z_{yy} = 2(6a - 6)x + 36by \quad (7.24)$$

Les figures 7.32 et 7.33 montrent une direction de courbure principale sur un cercle autour du point ombilic. Pour le cas de l'équation 7.20, ces directions sont constantes, peu importe le rayon du cercle. L'autre direction de courbure principale est orthogonale à celle montrée sur les figures. Un vecteur qui pointe dans une direction et qui fait un tour du point ombilic en pointant toujours dans une direction principale revient bien à son point de départ en pointant dans la direction opposée.

### 7.7.3 Les transformations des sphères de Lie d'un point ombilic

Le contrôle de la forme différentielle d'ordre trois d'une fonction à deux paramètres permet ainsi, avec la technique du miroir de contrôler les extrema de courbure d'une surface. Ensuite, il est possible d'appliquer les transformations des sphères de Lie à la surface obtenue pour obtenir une famille de surfaces à 8 paramètres de formes différentes qui partagent une même configuration de lignes d'extrema de courbure.

Voici un exemple, soit une transformation des sphères de Lie d'un front d'onde réfléchi sur le miroir  $z = 2x^3 - 6y^2$  en forme de disque. Le résultat est une surface qui a la forme d'une

Figure 7.32 Indice  $-1/2$ ,  $a = 0$ ,  $b = 0$ Figure 7.33 Indice  $+1/2$ ,  $a = -2$ ,  $b = 0$ 

corolle montrée aux figures 7.34 à 7.36 sous trois angles différents.

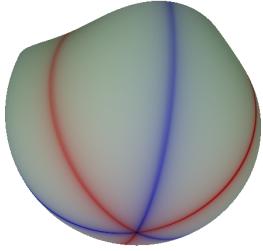


Figure 7.34 Corolle vue du dessous

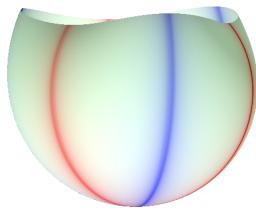


Figure 7.35 Corolle vue de côté

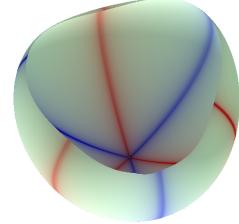


Figure 7.36 Corolle vue de dessus

Ceci permet de visualiser un point ombilic porté par une surface dans sa plus simple expression. Cette construction permet d'étudier les points ombilics et constitue possiblement un apport didactique intéressant. De plus, ceci n'est qu'un exemple parmi une multitude de possibilités. Par exemple, on peut étudier les points ombilics non génériques. On peut étudier le voisinage du croisement de deux lignes de courbure de couleur différente. Ces points nommés *purple flyovers* par Ian R. Porteous. On trouve 6 de ces points sur l'ellipsoïde. Ce sont les points d'une surface générique qui s'approche le plus d'une cyclide de Dupin.

De cette manière, on peut déjà générer une variété impressionnante de surfaces élémentaires du point de vue des extrema de courbure. Des surfaces intermédiaires entre les surfaces primitives, telle la sphère, le cylindre et le cône et les surfaces libres qui peuvent être d'une complexité arbitrairement grande. Des surfaces intermédiaires à la fois flexibles et intransigeantes aux oscillations arbitraires.

## CHAPITRE 8 CONCLUSION

Contrôler les inflexions et les extrema de courbure permet de manipuler des formes libres tout en préservant certaines propriétés différentielles. En particulier, ceci permet d'éliminer des bosses ou des oscillations indésirables.

Une forme peut être d'une complexité sans borne. La conception de forme fait alors nécessairement appel à quelques heuristiques qui permettent à la fois de réduire cette complexité et de converger plus rapidement vers des résultats intéressants. L'utilisation d'une B-spline avec peu de points de contrôle est une heuristique fort utile et très répandue. Une heuristique qui permet d'explorer un espace de formes sans oscillations arbitraires et qui s'appuie sur la propriété de diminution des variations. On fait alors bon usage d'une propriété algébrique de la représentation polynomiale des courbes et des surfaces.

Mais cette heuristique possède certaines limites et il est pertinent d'explorer des alternatives. Le contrôle des inflexions et des extrema de courbure portés par les courbes et les surfaces a été présenté comme une telle alternative qui mérite d'être explorée. Pour ce faire, la même propriété de diminution des variations des B-splines peut-être utilisée à un autre niveau pour contrôler non pas les propriétés algébriques, mais bien les propriétés différentielles des courbes et des surfaces.

Les algorithmes gagnent en complexité, mais au bout du compte le concepteur peut bénéficier d'heuristiques plus puissantes qui permettent d'explorer de façon plus fine des espaces de formes sans oscillations arbitraires. Très concrètement, il devient possible d'utiliser une B-spline avec un plus grand nombre de points de contrôle sans introduire involontairement des inflexions ou des extrema de courbure.

On peut alors se demander jusqu'à quel point ces idées sont novatrices et utiles en pratique. Ce texte est un regroupement d'idées qui sont pour la plupart très anciennes et les défis à relever pour rendre cette technologie largement disponible et vraiment utile en pratique sont possiblement encore nombreux. D'un autre côté, les opportunités et les bénéfices potentiels sont bien réels. L'utilisation des courbes et des surfaces B-splines est très répandue. Améliorer un tant soit peu l'aisance de manipulation des B-splines à le potentiel d'avoir un impact global très important. Cet objectif, pas toujours nécessairement formulé de façon explicite, stimule plusieurs groupes de recherche.

## 8.1 Synthèse des travaux

Le contrôle des propriétés différentielles des courbes et des surfaces est un sujet qui combine géométrie différentielle et optimisation avec l'ambition de mettre ces disciplines aux profits de la conception géométrique assistée par ordinateur.

Dans son livre *How to Solve it*, George Polya (1945) fait remarquer que derrière un problème qu'on ne sait résoudre, il existe un problème plus simple. Le conseil est alors le suivant : *Trouve le !* Le problème général à résoudre est le contrôle des inflexions et des extrema de courbure portés par les courbes et les surfaces. Derrière ce problème se cachent différents problèmes plus simples que ce texte s'efforce d'identifier et ensuite résoudre pour s'approcher graduellement du but initial qui est de résoudre le problème général.

Le problème du contrôle des propriétés différentielles est transformé en un problème de contrôle des zéros d'une fonction polynomiale. Une fonction polynomiale exprimée sous la forme d'un polynôme de Bernstein. Le contrôle des zéros de la fonction repose alors sur la propriété de la diminution des variations de ce polynôme.

Un tel algorithme permet d'effacer de façon sélective des extrema de courbure. Cet algorithme produit des formes avec un nombre fixe de segments avec une variation de courbure monotone. Cela définit un espace de courbes qui se caractérise par une nature intransigeante envers les oscillations, mais qui est en même temps un espace très général. Il ne se limite pas à une famille prédéfinie de courbes. Cet espace de courbes peut être approché en raffinant le vecteur nodal d'une B-spline autant que nécessaire pour représenter une forme donnée.

Les exemples d'application donnent un aperçu de l'espace gigantesque que couvrent les courbes avec un seul maximum de courbure et éventuellement un minimum de courbure de chaque côté du maximum.

Il n'est pas difficile pour le cas d'un profil aérodynamique de déterminer la position de ce maximum unique de courbure. Cependant, la détermination de la position des minimums de courbure est une tâche plus difficile. Nous n'avons pas de méthode automatique pour déterminer ces points et nous procémons par tâtonnements. De plus, un bon point de départ est nécessaire pour permettre à l'algorithme de bien converger. Plutôt que de commencer par une approximation par moindres carrés des points, il est parfois nécessaire de commencer avec un autre profil lisse précédemment obtenu.

Pour faire quelques progrès sur le contrôle des propriétés différentielles des surfaces il est utile de faire appel au groupe de transformations de la géométrie projective et de la géométrie des sphères de Lie. Les inflexions portées par les courbes et les surfaces sont préservées par les transformations projectives. Alors que les extrema de courbure portés par les courbes et

les surfaces sont préservés par les transformations des sphères de Lie.

Pour les inflexions d'une surface, on peut considérer les courbes paraboliques et les courbes flecnodales. Une transformation projective préserve ces deux courbes. En général, une transformation des sphères de Lie ne les préserve pas. Par contre, une transformation de Laguerre qui est un sous-groupe de transformations des sphères de Lie préserve les plans et donc le contact entre une surface et un plan. Ainsi une transformation de Laguerre préserve également les courbes paraboliques. Par contre, les transformations de Laguerre ne préservent pas les courbes flecnodales.

Ces groupes de transformations permettent de manipuler les formes tout en préservant certaines propriétés différentielles et ainsi générer des espaces de formes libres d'oscillations arbitraires. La géométrie projective et la géométrie des sphères de Lie permettent de générer à partir d'une surface quelconque un espace de forme à 8 paramètres qui préservent les invariants de la géométrie. C'est un bon début, mais il est naturel de chercher à élargir ces espaces de formes tout en préservant un contrôle sur les propriétés différentielles.

Ce que les algorithmes de ce texte proposent, ce sont des degrés de liberté supplémentaires qui permettent de transformer une forme tout en préservant les inflexions ou les extremums de courbure.

### 8.1.1 Retour sur les objectifs

Le problème général du contrôle des inflexions et des extremums de courbure des courbes et des surfaces est gigantesque. Dans ces circonstances, pour atteindre les objectifs, il est essentiel de s'attaquer graduellement et systématiquement à une série des sous-problèmes.

#### 1. Générer les espaces de formes qui préservent les inflexions et les extremums de courbure.

On peut approximer avec une précision aussi grande que l'on veut une fonction continue avec une fonction polynomiale. La preuve se trouve à l'annexe A. On peut ensuite ajouter des contraintes sur les dérivées deuxième et troisième, ce qui est le sujet du chapitre 5. Pour une fonction à une variable, le problème d'optimisation est convexe. La méthode du point intérieur est très performante pour résoudre de tels problèmes et permet de converger rapidement vers un optimum global. La technique du miroir présentée à la section 4.4 établit le lien entre les zéros de la dérivée deuxième d'une fonction et les points d'inflexion sur une courbe et les zéros de la dérivée troisième et les points d'extremums de courbure sur une courbe. On obtient ainsi une première technique pour générer les espaces de courbes qui préservent les inflexions et les extremums de courbure.

La technique du miroir de la section 4.4 permet d'établir également un lien entre les fonctions

à deux paramètres et les surfaces. Les lignes paraboliques sur la fonction vont correspondre à des lignes paraboliques sur la surface. Alors que les points de la fonction avec un contact plus étroit avec une parabole de révolution vont correspondre à des points d'extremums de courbure sur la surface. Ainsi, générer ces espaces de fonctions qui préservent ces derniers points critiques permet de générer les espaces de surfaces qui préservent les lignes paraboliques et les extremums de courbure. Les équations pour déterminer les points d'une fonction avec un contact plus étroit avec une parabole de révolution sont fournies à la section 5.7.

Mais il faut encore être en mesure d'obtenir un tel contrôle sur les fonctions. Les lignes paraboliques sur une fonction séparent les points elliptiques des points hyperboliques. Le problème d'optimisation devient non convexe lorsqu'on impose une région hyperbolique. Ceci est discuté à la section 5.7.1. On s'aventure alors sur un terrain moins balisé.

**2. *Éliminer des inflexions et des extremums de courbure de façon sélective, et ce en restant aussi proche que possible d'une géométrie initiale.***

L'algorithme est développé pour les courbes dans le plan à la section 6.2. La section 6.4 présente des résultats d'optimisation très prometteurs. Il faut encore développer une technique d'optimisation à toute épreuve qui permette une convergence rapide, peu importe la géométrie initiale et la requête sur la position des extremums de courbure.

Pour une surface générale, il reste beaucoup de travail. Pour certaines surfaces plus spécifiques, le problème est beaucoup plus simple. Contrôler les inflexions et les extremums de courbure d'une surface de révolution n'est pas plus difficile que de contrôler une courbe dans le plan. Ceci est présenté à la section 7.2.

**3. *Manipuler une forme générale sans introduire de nouvelles inflexions ou de nouveaux extremums de courbure.***

Les groupes de transformations sont un premier pas important dans cette direction. Les transformations de la géométrie des cercles orientés d'une ellipse sont présentées à la section 6.1. De façon plus générale, on peut appliquer ces transformations à une courbe quelconque et ainsi préserver ses points d'extremums de courbure. Le sous-groupe de transformation de la géométrie de Laguerre préserve également les points d'inflexion.

Ensuite, le deuxième objectif est lié à ce troisième objectif. On peut éditer d'une façon conventionnelle une courbe B-spline en déplaçant ses points de contrôle. On peut ensuite éliminer les inflexions et les extremums de courbure qui se sont ajoutés. Ainsi, on obtient une technique pour manipuler une forme tout en préservant ses propriétés différentielles.

Encore une fois, pour une surface générale, il reste encore beaucoup de travail. Par contre, quelques opportunités se présentent pour des surfaces plus simples. Par exemple, on sait déjà

contrôler les propriétés différentielles des surfaces de révolution. On peut alors appliquer à une telle surface une transformation projective ou une transformation des sphères de Lie. Ceci permet de manipuler une surface sans introduire de nouvelles inflexions ou de nouveaux extrema de courbure. Ceci est présenté à la section 7.2.1. Enfin, on peut également appliquer les transformations des sphères de Lie à une surface plus générale obtenue avec la technique du miroir. Ceci permet à la fois de manipuler une forme et de générer des espaces de formes qui préservent les extrema de courbure. Ceci est discuté à la section 7.7.3 pour le cas particulier d'une surface qui comporte un seul point ombilic et un minimum de ligne d'extrema de courbure.

## 8.2 Limitations et améliorations futures

Le contrôle des propriétés différentielles des courbes et des surfaces est un sujet qui nécessite de maîtriser plusieurs sous-disciplines importantes de la conception géométrique assistée par ordinateur. Une discipline relativement récente qui appartient autant aux chercheurs académiques qu'aux praticiens de l'industrie. Un domaine riche en opportunités qui se développe rapidement avec un savoir cumulatif déjà considérable.

Avant de contrôler les propriétés différentielles, il faut d'abord savoir reconnaître dans quelles circonstances un tel contrôle peut être pertinent. Il faut comprendre ces propriétés différentielles et être en mesure d'imaginer des espaces de formes qui préservent ces propriétés. Une maîtrise qui se développe en s'attaquant d'abord à des courbes et des surfaces élémentaires qui portent une configuration minimale de point d'inflexions et d'extrema de courbure.

Plusieurs habiletés sont à développer. Par exemple, savoir positionner correctement les points d'inflexions et d'extrema de courbure sur une courbe. Il est envisageable d'explorer de façon automatique la position de ces points s'ils sont peu nombreux ou si la courbe à lisser en comporte peu au départ. Par contre, la complexité d'une telle opération augmente très rapidement lorsque le nombre de ces points augmente. Dans de telles circonstances, il est pertinent d'obtenir rapidement des solutions intéressantes qui ne sont pas nécessairement optimales. Pour y arriver, on peut faire appel à quelques heuristiques. On peut alors revenir à une technique de lissage sur un principe de minimisation de l'énergie ou de diffusion pour accélérer la convergence vers des solutions intéressantes.

Pour ce qui est des surfaces, les configurations de lignes d'extrema de courbure, les lignes paraboliques et les lignes flecnodales peuvent devenir rapidement très complexes. La complexité du contrôle direct de ces configurations dépasse largement nos capacités actuelles. Nous sommes alors contraints à résoudre des problèmes plus simples. Il faut donc imaginer

des scénarios où il est plus simple de contrôler les propriétés différentielles. Par exemple s'attaquer d'abord aux surfaces des canaux et aux surfaces réglées.

Ce texte met beaucoup l'accent sur les inflexions et les extrema de courbure. La courbure est certainement un invariant très important de la géométrie différentielle euclidienne. Une hypothèse importante de ce travail suppose que de contrôler ces points critiques permet de produire des courbes et des surfaces à la fois flexibles, simples et lisses. Les différentes études de cas tendent à montrer que cette hypothèse est vérifiée. On décrit ainsi une forme dans un contexte indépendant d'une application spécifique.

Ceci est à la fois une force et une faiblesse. Pour une application spécifique, une géométrie peut-être décrite parfois, avec des paramètres qui possèdent un lien étroit avec la physique de l'application. Alors la fonction de courbure n'est plus nécessairement la plus appropriée pour exprimer la simplicité d'une forme dans ce contexte précis. Mais tout de même, le principe général qu'on s'efforce de développer ici, celui du contrôle des points critiques d'une fonction, peut toujours s'appliquer.

Par exemple, pour une aile d'avion, la direction de l'écoulement est probablement plus importante que les directions des courbures principales. Il peut alors paraître sensé de contrôler les propriétés différentielles dans la direction approximative de l'écoulement et dans la direction qui lui est approximativement perpendiculaire. Déterminer de cette manière à l'avance les deux directions sur le profil selon lesquelles on souhaite contrôler les propriétés différentielles peut simplifier beaucoup le problème. La situation pourrait être similaire par exemple pour une pale d'éolienne ou une aube d'une turbine hydraulique.

Pour d'autres parties d'un même objet, la stratégie peut-être différente. Par exemple, pour le nez de l'avion, on pourrait chercher à imposer qu'il y ait seulement deux lignes d'extrema de courbure. Deux lignes de couleurs différentes qui viennent se croiser au bout du nez. On peut observer de telles lignes sur l'ellipsoïde. Ceci n'est pas un point ombilic. C'est un point qui présente un extremum de courbure dans les deux directions de courbure principale. Ces points violets sur une surface générale sont ceux qui s'apparentent le plus à une cyclide de Dupin.

### 8.2.1 Retour sur la notion de forme

Une forme est une notion à multiples facettes. Ce texte a exploré la facette qui consiste à marquer en gras les inflexions et les extrema de courbure et générer les espaces de formes qui préservent ces marqueurs différentiels.

Ce passage de l'analyse à la génération de nouvelles formes n'est pas nécessairement une étape

triviale. La division des disciplines le montre bien. L'étude de la géométrie ne fait pas d'une personne un artiste et des études en arts visuels ne font pas d'une personne un mathématicien. La toile *La Queue d'aronde* de Salvador Dalí est un pied de nez surréaliste à cette dichotomie. Elle fait référence à une singularité qu'on peut observer à la transition hyperbolique-elliptique d'une ligne d'extremum de courbure sur la surface focale correspondante. La complicité du peintre Salvador Dalí avec le mathématicien René Thom permet d'imaginer qu'il est possible de tracer des ponts entre ces deux mondes.

Selon la mythologie de l'Égypte ancienne, le premier être humain aurait été formé sur un tour de potier. Cette mythologie est étrange puisque nous ne sommes pas axisymétriques. On peut en conclure que l'invention du tour a fasciné les gens exposés pour la première fois à cette nouvelle technologie. D'une certaine façon, le tour permet déjà un contrôle de propriétés différentielles et permet ainsi la concrétisation de formes élégantes.

Sans être axisymétriques, nous sommes approximativement symétriques par rapport à un plan comme une bonne partie du règne animal. Puisqu'une forme peut être d'une complexité arbitraire, il faut bien que la nature utilise, d'une manière ou d'une autre, certaines heuristiques pour réduire cette complexité et converger plus rapidement vers des résultats intéressants. D'un autre côté, la diversité des formes organiques semble indiquer qu'aucune porte n'est définitivement fermée.

La notion de formes est d'une beauté et d'une profondeur qui dépasse toute attente. Les années passent et la quête reste la même : mieux comprendre les formes pour mieux les concevoir.

## RÉFÉRENCES

- V. I. Arnold, *Singularities of Caustics and Wave Fronts*. Springer Science & Business Media, 1990, vol. 62.
- , *Catastrophe theory*. Springer Science & Business Media, 2003.
- V. I. Arnold, S. Gusein-Zade, et A. Varchenko, “Singularities of differential maps, volume I”, *Basel, Stuttgard : Birkhauser*, 1985.
- M. V. Berry et C. Upstill, “Iv catastrophe optics : morphologies of caustics and their diffraction patterns”, *Progress in optics*, vol. 18, pp. 257–346, 1980.
- S. Boyd et L. Vandenberghe, *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.
- J. W. Bruce et P. J. Giblin, *Curves and Singularities : a geometrical introduction to singularity theory*. Cambridge university press, 1992.
- J. Bruce, P. Giblin, et C. Gibson, “On caustics by reflexion”, *Topology*, vol. 21, no. 2, pp. 179–199, 1982.
- S. B. Carroll, *Endless forms most beautiful : The new science of evo devo and the making of the animal kingdom*. WW Norton & Company, 2005, no. 54.
- T. E. Cecil, “Lie sphere geometry”, dans *Lie Sphere Geometry*. Springer, 1992, pp. 8–28.
- G.-z. Chang et P. J. Davis, “The convexity of bernstein polynomials over triangles”, *Journal of Approximation Theory*, vol. 40, no. 1, pp. 11–28, 1984.
- X. Chen, R. F. Riesenfeld, et E. Cohen, “Degree reduction for nurbs symbolic computation on curves”, dans *Shape Modeling and Applications, 2006. SMI 2006. IEEE International Conference on*. IEEE, 2006, pp. 28–28.
- R. Cipolla et P. Giblin, *Visual motion of curves and surfaces*. Cambridge University Press, 2000.
- B. Clémenton, “Extraction des lignes caractéristiques géométriques des surfaces paramétrées et application à la génération de maillages surfaciques”, Thèse de doctorat, Troyes, 2008.
- J. L. Coolidge, *A Treatise on the Circle and the Sphere*. Oxford University Press, 1916.

K. M. Crane, “Conformal geometry processing”, Thèse de doctorat, California Institute of Technology, 2013.

H. E. Dahl, “Piecewise rational parametrizations of canal surfaces”, dans *International Conference on Mathematical Methods for Curves and Surfaces*. Springer, 2012, pp. 88–111.

G. Darboux, “Leçons sur la théorie générale des surfaces, 4me partie”, *Gauthiers-Villars et Fils, Paris*, 1896.

C. de Boor, *A practical guide to splines*, 1978.

É. Demers, C. Tribes, et F. Guibault, “A selective eraser of curvature extrema for b-spline curves”, *Computers & Graphics*, vol. 51, pp. 35–42, 2015.

G. E. Farin, *NURBS : from projective geometry to practical use*. AK Peters, Ltd., 1999.

—, *Curves and surfaces for CAGD : a practical guide*. Morgan Kaufmann, 2002.

—, “A history of curves and surfaces in”, *Handbook of Computer Aided Geometric Design*, p. 1, 2002.

R. T. Farouki, *Pythagorean—hodograph Curves*. Springer, 2008.

—, “The bernstein polynomial basis : a centennial retrospective”, *Computer Aided Geometric Design*, vol. 29, no. 6, pp. 379–419, 2012.

M. S. Floater, “A weak condition for the convexity of tensor-product bézier and b-spline surfaces”, *Advances in Computational Mathematics*, vol. 2, no. 1, pp. 67–80, 1994.

—, “On zero curves of bivariate polynomials”, *Advances in Computational Mathematics*, vol. 5, no. 1, pp. 399–415, 1996.

R. Goldman, *Pyramid algorithms : A dynamic programming approach to curves and surfaces for geometric modeling*. Morgan Kaufmann, 2002.

S. Hahmann, A. Belyaev, L. Busé, G. Elber, B. Mourrain, et C. Roessl, “Shape interrogation”, dans *Shape analysis and structuring*. Springer, 2008, pp. 1–51.

P. W. Hallinan, G. G. Gordon, A. L. Yuille, P. Giblin, et D. Mumford, *Two-and three-dimensional patterns of the face*. AK Peters, Ltd., 1999.

D. Hilbert et S. Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination*. American Mathematical Soc., 1932, vol. 87.

- K. Hildebrandt et K. Polthier, “Anisotropic filtering of non-linear surface features”, dans *Computer Graphics Forum*, vol. 23, no. 3. Wiley Online Library, 2004, pp. 391–400.
- J. Hoschek et B. Jüttler, “Techniques for fair and shape preserving surface fitting with tensor-product b-splines”, *Shape preserving representations in computer aided design. New York : Nova Science Publishers*, pp. 163–85, 1999.
- A. K. Jones, “Curvature integration through constrained optimization”, *Designing fair curves and surfaces, shape quality in geometric modeling and computer-aided design*, pp. 29–44, 1994.
- B. Jüttler, “Convex surface fitting with parametric bézier surfaces”, *Mathematical Methods for Curves and Surfaces II*, pp. 263–270, 1998.
- P. D. Kaklis et G. D. Koras, *A quadratic-programming method for removing shape-failures from tensor-product B-spline surfaces*. Springer, 1998.
- F. Klein, E. Hedrick, et C. Noble, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. Geometry*. JSTOR, 1941.
- J. J. Koenderink, *Solid shape*. Cambridge Univ Press, 1990, vol. 2.
- G. D. Koras et P. D. Kaklis, “Convexity conditions for parametric tensor-product b-spline surfaces”, *Advances in computational mathematics*, vol. 10, no. 3-4, pp. 291–309, 1999.
- D. Korteweg, “Sur le points de plissements arch. néerl. 24 (1891) 57–98 ; theorie générale des plis”, *Arch. Néerl.*, vol. 24, pp. 295–368, 1891.
- R. Krasauskas et C. Mäurer, “Studying cyclides with laguerre geometry”, *Computer Aided Geometric Design*, vol. 17, no. 2, pp. 101–126, 2000.
- E. P. Lane, *Projective differential geometry of curves and surfaces*. University of Chicago Press Chicago, 1932.
- S. Lie, “Ueber komplexe, insbesondere linien-und kugel-complexe, mit anwendung auf die theorie partieller differential-gleichungen”, *Mathematische Annalen*, vol. 5, no. 1, pp. 145–208, 1872.
- C. Maurer, “Applications of sphere geometry in canal surface design”, DTIC Document, Rapp. tech., 2000.

- R. Milson, “An overview of lie’s line-sphere correspondence”, *Contemporary Mathematics*, vol. 285, pp. 1–10, 2001.
- S. Musuvathy, E. Cohen, J. Damon, et J.-K. Seong, “Principal curvature ridges and geometrically salient regions of parametric b-spline surfaces”, *Computer-Aided Design*, vol. 43, no. 7, pp. 756–770, 2011.
- T. Needham, *Visual complex analysis*. Oxford University Press, 1998.
- J. Nocedal et S. J. Wright, *Numerical optimization 2nd*. Springer, 2006.
- A. Parker, *In the blink of an eye : How vision sparked the big bang of evolution*. Basic Books, 2009.
- M. Peternell et H. Pottmann, “Computing rational parametrizations of canal surfaces”, *Journal of Symbolic Computation*, vol. 23, no. 2, pp. 255–266, 1997.
- L. Piegl et W. Tiller, “Symbolic operators for nurbs”, *Computer-Aided Design*, vol. 29, no. 5, pp. 361–368, 1997.
- G. Polya, *How to solve it : A new aspect of mathematical method*. Princeton university press, 1945.
- I. R. Porteous, *Geometric differentiation : for the intelligence of curves and surfaces*. Cambridge University Press, 2001.
- H. Pottmann et M. Peternell, “Applications of laguerre geometry in cagd”, *Computer Aided Geometric Design*, vol. 15, no. 2, pp. 165–186, 1998.
- H. Prautzsch, W. Boehm, et M. Paluszny, “Bézier-and b-spline techniques”, 2002.
- R. F. Riesenfeld, “Applications of b-spline approximation to geometric problems of computer-aided design”, Thèse de doctorat, 1973.
- T. J. Rivlin, *An Introduction to the Approximation of Functions*. Courier Corporation, 1969.
- J. W. Rutter, *Geometry of curves*. CRC press, 2000.
- N. S. Sapidis, *Designing fair curves and surfaces : shape quality in geometric modeling and computer-aided design*. SIAM, 1994.
- L. Schumaker, *Spline functions : basic theory*. Cambridge University Press, 2007.

M. S. Selig. (2015) UIUC airfoil coordinates database. En ligne : [http://m-selig.ae.illinois.edu/ads/coord\\_database.html](http://m-selig.ae.illinois.edu/ads/coord_database.html)

J. Stillwell, *Naive lie theory*. Springer Science & Business Media, 2008.

J.-P. Thirion, “The extremal mesh and the understanding of 3d surfaces”, dans *Biomedical Image Analysis, 1994.*, *Proceedings of the IEEE Workshop on*. IEEE, 1994, pp. 3–12.

R. Thom, “Stabilité structurelle et morphogénèse. essai d'une théorie générale des modèles”, 1972.

D. W. Thompson, *On growth and form*. Cambridge Univ. Press, 1942.

R. Uribe-Vargas, “A projective invariant for swallowtails and godrons, and global theorems on the flecnodal curve”, *Moscow Math. J*, vol. 6, no. 4, pp. 731–768, 2006.

E. J. Wilczynski, *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*. BG Teubner, 1906, vol. 18.

## ANNEXE A Le théorème d'approximation de Weierstrass

Karl Weierstrass (1815-1897) prouve en 1872 l'existence de fonctions continues partout, mais dérivables en aucun endroit. Ces fonctions ont d'abord été considérées par plusieurs mathématiciens comme des atrocités. L'existence de ces fonctions a été un moteur important pour faire progresser la rigueur analytique nécessaire pour mieux comprendre l'ensemble des fonctions continues. En contrepoids à cette découverte, Karl Weierstrass prouve en 1885 que toutes fonctions continues peuvent être approximées arbitrairement bien par les fonctions lisses ultimes, les fonctions polynomiales.

Les fonctions continues sur un intervalle  $[a, b]$  forment un espace vectoriel noté  $C[a, b]$ . Pour rendre la notion de bonne approximation précise, on introduit une norme sur cet espace. La norme  $\|f\|$  retourne la plus grande valeur de  $|f(x)|$  pour tout  $x$  sur l'intervalle. La distance entre deux fonctions  $\|f(x) - g(x)\|$  sera alors petite si la fonction  $|f(x) - g(x)|$  est petite pour tout  $x$  sur l'intervalle. Dans ces conditions, on peut dire que  $f$  approxime de façon uniforme  $g$ .

En 1912, Sergei Natanovich Bernstein (1880-1968) publie son article : Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. Le théorème de Bernstein en plus de montrer le résultat de Weierstrass donne en prime une expression explicite de l'approximation polynomiale. Il a ainsi introduit la forme polynomiale qui porte son nom.

Soit  $f(x)$  une fonction continue quelconque dans l'intervalle  $[0, 1]$ , alors le polynôme de Bernstein de degré  $n$   $B_n(f; x)$  converge uniformément vers  $f(x)$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f; x) = f(x) \quad (\text{A.1})$$

Il faut noter que si  $f(x) \in C[a, b]$ , alors il est toujours possible de faire le changement de variable  $y = \frac{x-a}{b-a}$  pour ramener le problème d'approximation sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

Voici maintenant la preuve du théorème de Weierstrass avec le polynôme de Bernstein. La loi binomiale bien connue en théorie des probabilités s'exprime avec l'expression :

$$P(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (\text{A.2})$$

Si la variable  $0 \leq p \leq 1$  est la probabilité d'un événement  $A$  alors  $P(X = k)$  est la probabilité que  $A$  se produise exactement  $k$  fois lors de  $n$  essais indépendants.

Le nom binomiale vient d'une formule découverte par Newton, le binôme de Newton :

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \quad (\text{A.3})$$

Le coefficient devant le terme  $p^k q^{n-k}$  représente le nombre de combinaisons différentes de  $k$  éléments qui peuvent être choisis parmi  $n$  éléments. Par exemple pour  $(p+q)(p+q) = p^2 + 2pq + q^2$  il y a deux façons de produire le terme  $pq$  avec le premier ou le deuxième  $p$ .

Il est simple alors de montrer que pour la loi binomiale, la somme des probabilités qu'un événement se produise  $k$  fois lorsqu'on fait varier  $k$  entre 0 et  $n$  et bien égale à 1.

$$\sum_{k=0}^n P(X = k) = (p + (1-p))^n = 1 \quad (\text{A.4})$$

Sergei Natanovich Bernstein écrit :

Supposons qu'on effectue  $n$  expériences et que l'on convienne de payer à un joueur la somme  $f(k/n)$ , si l'événement  $A$  se produit  $k$  fois. Dans ces conditions, l'espérance mathématique  $B_n$  du joueur aura la valeur

$$B_n(f; p) = \sum_{k=0}^n f(k/n) \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (\text{A.5})$$

Il y a deux variables indépendantes à considérer,  $k$  et  $p$ . On peut d'abord faire varier  $k$  et tracer la probabilité  $P(X = k)$  multipliée par  $n$  en fonction de  $k/n$ . De cette façon l'aire sous la courbe reste unitaire. La distribution tend vers une gaussienne avec un écart type de plus en plus petit. Cette distribution gaussienne avec un écart type qui tend vers zéro est un modèle pour construire la distribution de Dirac (voir figure A.1).

Il est alors plausible que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f; x) = f(x) \quad (\text{A.6})$$

Puisque c'est là l'expression de l'intégrale d'une fonction multipliée par une distribution de Dirac.

Maintenant si l'on fixe  $k$  pour faire varier cette fois la probabilité  $p$  de l'événement alors on obtient une fonction de base du polynôme de Bernstein  $b_k^n(p)$  (voir figure A.2).

Avec cette base, un polynôme  $p(x)$  s'écrit :

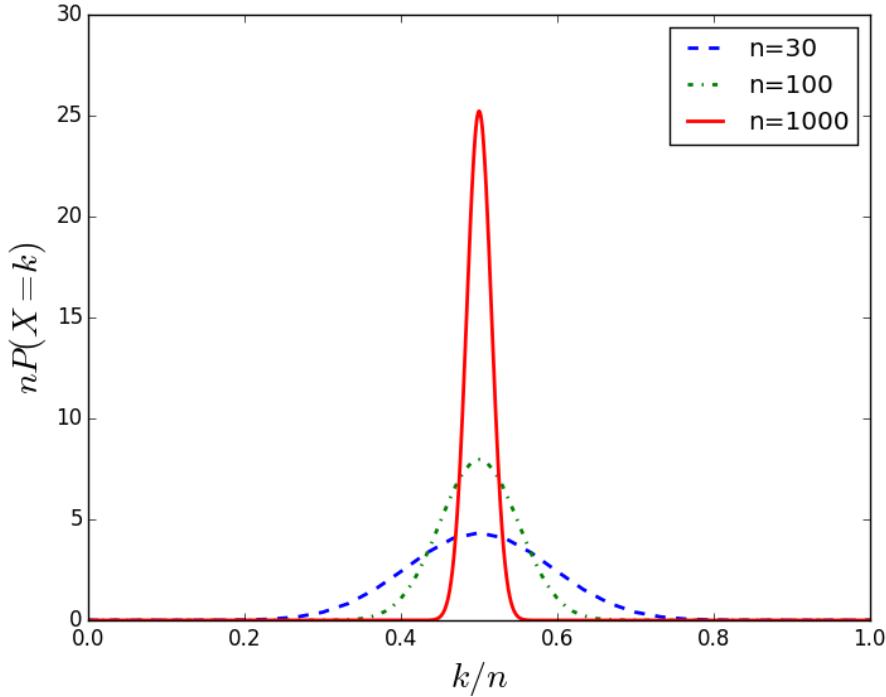


Figure A.1 La loi binomiale pour  $p = 0.5$

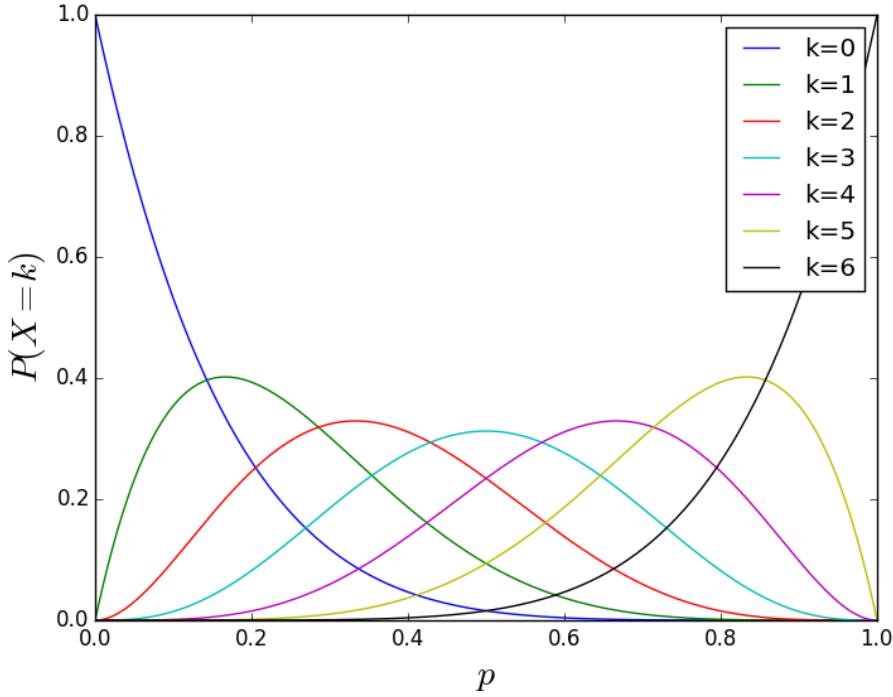
$$p(x) = \sum_{k=0}^n c_k b_k^n(x) \quad (\text{A.7})$$

Pour visualiser la distribution qui tend vers la distribution de Dirac à partir de la figure A.2, il faut imaginer ce qui se produit lorsqu'on fixe  $p$ , et qu'on fait varier  $k$ . On peut imaginer que l'axe  $k$  est perpendiculaire à la page. On fait alors une coupe à travers toutes les fonctions de base. Ensuite, il suffit de normaliser correctement le résultat, soit divisé  $k$  par  $n$  et multiplier  $P(X = k)$  par  $n$ .

Maintenant, on peut formaliser la preuve de la façon suivante. On cherche à démontrer que la différence entre la fonction  $B_n(f; x)$  et  $f(x)$  tend vers 0 pour tout  $x$  lorsqu'on augmente  $n$ . On peut d'abord écrire la différence entre les deux fonctions de la façon suivante :

$$B_n(f; x) - f(x) = \sum_{k=0}^n (f(k/n) - f(x)) b_k^n(x) \quad (\text{A.8})$$

Puisque la fonction  $f(x)$  est continue, pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un  $\delta > 0$  tel que :

Figure A.2 Base de Bernstein pour  $n = 6$ 

$$|x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \epsilon \quad (\text{A.9})$$

On divise les termes de la somme en deux groupes. Le premier groupe  $I$  correspond aux valeurs de  $k$  tel que  $|x - k/n| < \delta$  et le deuxième groupe  $J$  correspond aux valeurs de  $k$  tel que  $|x - k/n| \geq \delta$ .

$$B_n(f; x) - f(x) = \sum_{k \in I} (f(k/n) - f(x)) b_k^n(x) + \sum_{k \in J} (f(k/n) - f(x)) b_k^n(x) \quad (\text{A.10})$$

$$\|B_n(f; x) - f(x)\| \leq \epsilon \left\| \sum_{k \in I} b_k^n(x) \right\| + \left\| \sum_{k \in J} (f(k/n) - f(x)) b_k^n(x) \right\| \quad (\text{A.11})$$

$$\|B_n(f; x) - f(x)\| \leq \epsilon + \left\| \sum_{k \in J} (f(k/n) - f(x)) b_k^n(x) \right\| \quad (\text{A.12})$$

On peut noter  $\|f\|$  la plus grande valeur de cette fonction en valeur absolue. Alors la différence entre deux points de cette fonction ne peut pas être plus grande que deux fois cette valeur.

$$\|B_n(f; x) - f(x)\| \leq \epsilon + 2\|f\| \left\| \sum_{k \in J} b_k^n(x) \right\| \quad (\text{A.13})$$

mais puisque sur  $J$  on a  $|x - k/n| \geq \delta$  alors

$$\frac{(x - k/n)^2}{\delta^2} \geq 1 \quad (\text{A.14})$$

et

$$\left\| \sum_{k \in J} b_k^n(x) \right\| \leq \left\| \sum_{k=0}^n b_k^n(x) \right\| \quad (\text{A.15})$$

$$\left\| \sum_{k \in J} b_k^n(x) \right\| \leq \frac{1}{\delta^2} \left\| \sum_{k=0}^n (x - k/n)^2 b_k^n(x) \right\| \quad (\text{A.16})$$

$$\left\| \sum_{k \in J} b_k^n(x) \right\| \leq \frac{1}{\delta^2} \left\| \sum_{k=0}^n (x^2 - 2x(k/n) + (k/n)^2) b_k^n(x) \right\| \quad (\text{A.17})$$

$$\left\| \sum_{k \in J} b_k^n(x) \right\| \leq \frac{1}{\delta^2} \left\| \sum_{k=0}^n (x^2 B_n(1; x) - 2x B_n(x; x) + B_n(x^2; x)) \right\| \quad (\text{A.18})$$

Il est assez simple de montrer que :

$$B_n(1; x) = 1 \quad (\text{A.19})$$

$$B_n(x; x) = x \quad (\text{A.20})$$

$$B_n(x^2; x) = x^2 + \frac{1}{n}x(1 - x) \quad (\text{A.21})$$

on obtient avec ces résultats :

$$\left\| \sum_{k \in J} b_k^n(x) \right\| \leq \frac{1}{\delta^2} \left\| \frac{x(1 - x)}{n} \right\| \quad (\text{A.22})$$

Et puisque sur  $0 \leq x \leq 1$  le terme  $x(1 - x) \leq 1/4$  on obtient :

$$\|B_n(f; x) - f(x)\| \leq \epsilon + \frac{\|f\|}{2n\delta^2} \quad (\text{A.23})$$

maintenant si on choisit  $n$  tel que :

$$n > \frac{\|f\|}{2\epsilon\delta^2} \quad (\text{A.24})$$

on trouve

$$\|B_n(f; x) - f(x)\| \leq 2\epsilon \quad (\text{A.25})$$

On peut enfin faire tendre  $\epsilon$  vers zéro, ce qui prouve le théorème d'approximation de Weierstrass et donne en prime l'expression explicite de l'approximation, soit le polynôme de Bernstein. Ainsi, toutes fonctions continues peuvent être approximées arbitrairement bien par les fonctions polynomiales.

La leçon à retenir pour un ingénieur est la suivante. Si un algorithme retourne une fonction polynomiale non satisfaisante, il faut blâmer l'algorithme et non l'ensemble des fonctions polynomiales !

La forme polynomiale de Bernstein est très importante en particulier pour les algorithmes de conception géométrique assistée par ordinateur. Ce qui est le plus curieux c'est que cette forme polynomiale très utile trouve sa source dans cette démonstration du théorème de Weierstrass. Un théorème qui est en soi abstrait avec aucune application précise en vue.

Sur le sujet de la théorie de l'approximation on peut lire par exemple le livre *An Introduction to the Approximation of Functions* de Theodore J. Rivlin (1969). La dernière section de la preuve qui est donnée dans la présente annexe suit d'assez près la preuve donnée dans ce livre.

## ANNEXE B La propriété de diminution des variations du polynôme de Bernstein à un et à deux paramètres

### La règle des signes de Descartes

La règle des signes de René Descartes (1596-1650) donne une borne supérieure au nombre de racines  $p_n(x) = 0$  d'un polynôme sous la forme  $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$  pour  $x > 0$ . Il ne peut y avoir plus de racines réelles positives que le nombre de changements de signe + ou - des coefficients  $a_i$ .

Par exemple, le polynôme  $-1 - x + x^2 + x^3$  comporte seulement un changement de signe. Selon la règle de Descartes alors il ne peut y avoir plus d'une seule racine positive et dans ce cas particulier on peut facilement se convaincre qu'il y a exactement une racine positive.

On procède maintenant à la preuve de ce théorème. L'espace vectoriel des polynômes  $p_n(x)$  est exprimé avec la base :

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^n \quad (B.1)$$

Pour interpoler une série de points  $(x_i, y_i)$  avec  $p_n(x)$ , on peut résoudre le système linéaire  $Va = y$  où les valeurs des  $a_i$  sont à déterminer.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (B.2)$$

Si le déterminant de la matrice  $V$  est non nul alors l'équation  $Va = y$  possède une solution unique  $a = V^{-1}y$ .

Ce dernier système a ceci de particulier que pour  $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ , le déterminant de la matrice est positif. Il faut maintenant le prouver. Cette matrice porte d'abord un nom, c'est la matrice de Vandermonde. On souhaite évaluer le déterminant d'une matrice de la forme :

$$detV = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} \quad (B.3)$$

On soustrait à une colonne la colonne précédente multipliée par  $x_0$ .

$$\det V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) \\ 1 & x_2 - x_0 & x_2(x_2 - x_0) \end{vmatrix} \quad (\text{B.4})$$

On utilise l'identité

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B| \quad (\text{B.5})$$

pour obtenir

$$\det V = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \end{vmatrix} \quad (\text{B.6})$$

La sous-matrice  $B$  est à nouveau une matrice de Vandermonde. On répète l'opération jusqu'à ce qu'on obtienne

$$\det V = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & (x_2 - x_1) \end{vmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \quad (\text{B.7})$$

Pour le cas général, on obtient la formule :

$$\det V = \prod_{0 \leq k < l \leq n} (x_l - x_k) \quad (\text{B.8})$$

Alors le déterminant est bien positif lorsque  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ .

On arrive à la conclusion peu surprenante lorsqu'on connaît le théorème fondamental de l'algèbre que la fonction  $p_n(x)$  peut avoir au plus  $n$  zéros sans qu'elle soit identiquement nulle  $p_n(x) = 0$ . Par exemple, une fonction quadratique  $c(x - a)(x - b)$  peut avoir au plus deux zéros. Si l'on demande à une fonction quadratique d'interpoler trois zéros à des positions différentes alors on obtient bien la fonction  $p_2(x) = 0$  pour tout  $x$ .

Une telle base de fonctions qui ne peut avoir plus de  $n$  zéros sur un intervalle lorsque les coefficients  $a_i$  sont non tous nuls est appelée un système de Tchebycheff.

Il faut ensuite introduire le concept de système strictement totalement positif. La base vec-

torielle du polynôme  $p_n(x)$  forme un système strictement totalement positif sur l'intervalle  $(0, \infty)$ . C'est-à-dire que tous les déterminants des sous-matrices carrées de  $M$  sont positifs.

Maintenant il faut montrer que la matrice  $V$  est bien strictement totalement positive. Par exemple qu'une sous-matrice carrée  $A$  est positive.

$$\det A = \begin{vmatrix} x_0^3 & x_0^5 & x_0^8 \\ x_1^3 & x_1^5 & x_1^8 \\ x_2^3 & x_2^5 & x_2^8 \end{vmatrix} > 0 \quad (\text{B.9})$$

Pour ce faire, on démontre le cas plus général suivant. On démontre que la matrice de Vandermonde généralisée avec les exposants réels  $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$  est toujours positive lorsque  $0 < x_0 < x_1 < \dots < x_n$ .

$$\begin{bmatrix} x_0^{\alpha_0} & x_0^{\alpha_1} & x_0^{\alpha_2} \\ x_1^{\alpha_0} & x_1^{\alpha_1} & x_1^{\alpha_2} \\ x_2^{\alpha_0} & x_2^{\alpha_1} & x_2^{\alpha_2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Si le déterminant de cette matrice pouvait être égal à zéro alors on pourrait déterminer des nombres  $c_i$  non tous nuls de telle sorte que la fonction  $f(x)$  avec des  $x_i > 0$

$$f(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^{\alpha_i} \quad (\text{B.11})$$

ait  $n$  racines  $x_i$  telles que  $f(x_i) = 0$ . Supposons alors que la fonction  $f(x)$  ait  $n$  racines. Le théorème de Rolle dit qu'entre deux racines d'une équation est comprise au moins une racine de l'équation dérivée. Alors la fonction  $f_1(x) = [x^{-\alpha_0} f(x)]'$  qui possède  $n - 1$  termes aurait au moins  $n - 1$  zéros positifs. De façon inductive on arrive à la conclusion qu'on peut trouver un terme  $c_0$  différent de zéro qui produit  $f_n(x) = c_0 x^{\beta} = 0$  lorsque  $x > 0$ . Mais ceci est impossible. Alors la matrice Vandermonde généralisée doit être positive lorsque  $0 < x_0 < x_1 < \dots < x_n$ .

Alors les mineurs c'est-à-dire les sous-matrices carrées des matrice de Vandermonde, sont toutes positives. La matrice de Vandermonde est donc strictement totalement positive. Toujours avec la condition  $0 < x_0 < x_1 < \dots < x_n$ .

Maintenant, nous sommes en position de prouver la règle des signes de Descartes en utilisant l'équation  $Va = y$ . Lorsque les coefficients du vecteur  $a$  comportent  $\lambda - 1$  changements de signe alors on peut les séparer en  $\lambda$  ensembles de telle sorte que dans un ensemble tous les coefficients soit du même signe et qu'au moins un coefficient soit non nul. Dans l'exemple

$-1 - x + x^2 + x^3$  on obtient les deux sous ensembles  $(-1, -1)$  et  $(1, 1)$ . Les sous-ensembles  $s_i$  contiennent les nombres entiers des puissances de  $x$ . Le premier sous-ensemble contient  $s_0 = (0, 1)$  et le deuxième sous ensemble aux indices  $s_1 = (2, 3)$

On forme ensuite les vecteurs

$$v_{i,k} = \sum_{j \in s_k} |a_j| x_i^j \quad (B.12)$$

Si le premier sous ensemble a des coefficients positifs, on a la relation

$$y_i = \sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^k v_{i,k} \quad (B.13)$$

Sinon il faut remplacer  $(-1)^k$  par  $(-1)^{k+1}$ .

On obtient un système linéaire de la forme :

$$\begin{bmatrix} v_{0,0} & v_{0,1} & \dots & v_{0,\lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{n,0} & v_{n,1} & \dots & v_{n,\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^0 \\ (-1)^1 \\ \vdots \\ (-1)^\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_\lambda \end{bmatrix} \quad (B.14)$$

Maintenant, il faut prouver que ce système est un système de Tchebycheff. C'est-à-dire que le vecteur  $y$  ne peut avoir plus de  $\lambda$  zéros. Pour cela il faut que la matrice des  $v_{i,k}$  soit toujours positive peu importe la position des  $0 < x_0 < x_1 < \dots < x_n$ .

Le déterminant de la matrice suivante peut également s'écrire :

$$\begin{vmatrix} (|a_1|x_1 + |a_2|x_1^2) & (|a_3|x_1^3) \\ (|a_1|x_2 + |a_2|x_2^2) & (|a_3|x_2^3) \end{vmatrix} = |a_1||a_3| \begin{vmatrix} x_1 & x_1^3 \\ x_2 & x_2^3 \end{vmatrix} + |a_2||a_3| \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^2 & x_2^3 \end{vmatrix} \quad (B.15)$$

De cette façon, le déterminant de la matrice  $v_{i,k}$  se traduit à une somme de déterminants qui sont tous des sous-matrices carrées de la matrice de Vandermonde. Et puisque la matrice de Vandermonde est strictement totalement positive et que dans chacun des groupes il y a au moins un coefficient  $a_i$  non nul alors le déterminant de la matrice  $v_{i,k}$  est bien positif. Alors il ne peut y avoir que  $\lambda - 1$  racines positives sans que la fonction polynomiale soit identiquement nulle lorsque le polynôme possède  $\lambda - 1$  changement de signes.

On a donc prouvé la règle de signes Descartes.

### La propriété de diminution des variations du polynôme de Bernstein à un paramètre

Cette propriété se prouve directement avec la règle des signes de Descartes. L'équation polynôme de Bernstein  $p(u) = \sum c_i b_i^k(u)$  est :

$$p_n(u) = \sum_{k=0}^n c_k \frac{n!}{k!(n-k)!} u^k (1-u)^{n-k} \quad (\text{B.16})$$

On transforme l'intervalle  $u \in (0, 1)$  du polynôme de Bernstein en l'intervalle  $x \in (0, \infty)$  avec le changement de variable  $u = x/(1+x)$ .

$$p_n(u) = \sum_{k=0}^n c_k \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{x}{1+x}\right)^k \left(\frac{1+x}{1+x} - \frac{x}{1+x}\right)^{n-k} \quad (\text{B.17})$$

$$p_n(x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^n c_k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k \quad (\text{B.18})$$

Les termes  $(1+x)^{-n}$  et  $n!/k!(n-k)!$  sont toujours positifs. Donc le nombre de zéros du polynôme de Bernstein n'est jamais plus grand que le nombre de changements signe qu'on retrouve dans les coefficients  $c_k$ .

De plus, la matrice d'interpolation avec un polynôme de Bernstein est une matrice strictement totalement positive.

Cette propriété de diminution des variations est très importante pour cette thèse. C'est cette propriété qui permet de contrôler le nombre maximum de points d'inflexions et d'extremums de courbure. Ces points correspondent aux racines d'une fonction. On sait maintenant contrôler le nombre maximum de racines d'une fonction en imposant des contraintes sur les coefficients  $c_k$ .

On peut également lire sur le sujet Larry L. Schumaker (2007).

### Théorème de Haar

Alfréd Haar (1885-1933) a étudié à l'Université de Göttingen avec entre autres David Hilbert. Le théorème porte sur le problème de l'interpolation avec plus d'une variable indépendante. Soit par exemple le polynôme à deux variables :

$$p_n(x, y) = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 x^2 + c_4 x y + c_5 y^2 \quad (\text{B.19})$$

Si la matrice d'interpolation était strictement totalement positive, il y aurait un problème important. Si elle était simplement toujours positive, il y aurait encore ce même problème important. Les points  $(x_i, y_i)$  qui satisfont à l'équation  $p_n(x, y) = 0$  sont habituellement situés sur une courbe. Une courbe comporte une infinité de points. Déjà, si la matrice d'interpolation était toujours positive peu importe la position des points d'interpolations  $(x_i, y_i)$ , alors la fonction  $p_n(x, y)$  ne pourrait avoir plus de 5 racines sans que la fonction soit identiquement nulle. Heureusement, le théorème de Haar est là pour nous rassurer que la matrice d'interpolation ne sera jamais toujours positive sur un domaine lorsqu'il y a plus d'une variable indépendante.

Le concept de matrice strictement totalement positive qui joue un rôle si important lorsqu'il y a seulement une variable indépendante ne s'applique plus directement lorsqu'il y a plusieurs variables indépendantes.

Voici un exemple pour illustrer le théorème de Haar.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & y_0 & x_0^2 & x_0y_0 & y_0^2 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 \\ 1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

Par exemple si les 6 points d'interpolation  $(x_i, y_i)$  sont situés sur le cercle  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  alors

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & y_0 & x_0^2 & x_0y_0 & y_0^2 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 \\ 1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

est une solution de  $Mc = 0$  avec des  $c_i$  non tous nuls. Pour que ce soit possible, il faut que le déterminant de la matrice  $M$  soit nul. C'est un problème important pour l'interpolation parce qu'on vient de perdre la propriété de solution unique, peu importe la position des points d'interpolation qu'on avait pour le cas à une variable. Il faut faire un peu plus attention à la position des points d'interpolations. Pour avoir une solution unique avec cet exemple, il faut

éviter que les points d'interpolation soient situés sur une conique. Soit une courbe implicite du second degré :

$$a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 = 0 \quad (\text{B.22})$$

Ce n'est pas une contrainte insurpassable.

Le fait que le nombre de variables soit plus grand que 1 permet d'intervertir la position de deux points d'interpolations sans qu'ils entrent en contact. Si l'on intervertit deux lignes de la matrice alors le déterminant change de signe. Par la continuité de la valeur du déterminant lorsqu'on déplace les points dans le plan pour les intervertir, il doit nécessairement y avoir une position des points pour lesquels le déterminant doit être nul. C'est le théorème de Haar.

### Une généralisation de la règle des signes de Descartes pour deux variables indépendantes

On s'appuie maintenant en particulier sur les travaux de Michael S. Floater (1996) et Tim Goodman, sur les propriétés de préservation de la forme du polynôme de Bernstein à plusieurs variables indépendantes.

C'est le cas particulier d'un seul changement de signe qui est pertinent et qui se généralise lorsqu'il y a deux variables indépendantes.

Soit le polynôme :

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i y^j \quad (\text{B.23})$$

sur l'intervalle  $(0, \infty) \times (0, \infty)$ . Sur une courbe  $g_\alpha(x) = \alpha x^\beta$  avec  $\alpha > 0$  et  $\beta \neq 0$  on a :

$$f(x) = p(x, g_\alpha(x)) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} \alpha x^{i+\beta j} \quad (\text{B.24})$$

S'il y a plusieurs termes avec un exposant  $p_k = i + \beta j$  identique, on les rassemble pour pouvoir écrire :

$$f(x) = \sum_{k=0}^r c_k x^{p_k} \quad (\text{B.25})$$

avec une suite croissante  $p_0 < p_1 < \dots < p_r$ .

Si tous les  $a_{ij}$  qui contribuent à un  $c_k$  sont négatifs lorsque  $i + \beta j$  est plus petit qu'une certaine valeur et que tous les  $a_{ij}$  sont positifs lorsque  $i + \beta j$  est plus grand qu'une certaine valeur alors la règle de Descartes s'applique et  $f(x)$  possède une seule racine pour.

Donc si une ligne dans le plan des indices  $(i, j)$  permet de séparer les coefficients positifs des coefficients négatifs alors les racines de la fonction  $p(x, y)$  sont situées sur une ligne continue qui sépare le domaine  $(0, \infty) \times (0, \infty)$  en deux : une portion où la fonction  $p(x, y) > 0$  et une portion où  $p(x, y) < 0$ .

### Le polynôme de Bernstein avec deux variables indépendantes

Une première façon de généraliser le polynôme de Bernstein à deux variables indépendantes sur le domaine  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$  c'est avec le produit tensoriel :

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{ij} b_i^m(u) b_j^n(v) \quad (\text{B.26})$$

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m c_{ij} \binom{n}{i} \binom{m}{j} u^i (1-u)^{n-i} v^j (1-v)^{m-j} \quad (\text{B.27})$$

Avec le changement de variable  $u = x/(1+x)$  et  $v = y/(1+y)$  on obtient :

$$p(x, y) = (1+x)^n (1+y)^m \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m c_{ij} \binom{n}{i} \binom{m}{j} x^i y^j \quad (\text{B.28})$$

Si les coefficients  $c_{ij}$  positifs et négatifs sont séparés par une ligne dans le plan des indices  $(i, j)$  alors une courbe continue sépare le domaine  $(0, 1) \times (0, 1)$ . C'est la généralisation de la propriété de diminution des variations lorsqu'il y a plus d'une variable indépendante.

Une deuxième façon de généraliser le polynôme de Bernstein à plusieurs variables c'est d'utiliser un simplex comme domaine. Lorsqu'il y a deux variables, le domaine est un triangle. On augmente d'une dimension le binôme de Newton pour obtenir directement le trinôme :

$$(b_1 + b_2 + b_3)^d = \sum_{i+j+k=d} \frac{d!}{i!j!k!} b_1^i b_2^j b_3^k \quad (\text{B.29})$$

où  $b_1$ ,  $b_2$  et  $b_3$  sont les coordonnées barycentriques. Si l'on connaît les coordonnées  $(x_i, y_i)$  des trois sommets du triangle et les coordonnées barycentriques d'un point, alors les coordonnées  $(x, y)$  de ce point sont :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{B.30})$$

L'approximation de Bernstein généralisée à deux variables sur le domaine d'un triangle devient :

$$B_d(f; b_1, b_2, b_3) = \sum_{i+j+k=d} f\left(\frac{i}{d}, \frac{j}{d}, \frac{k}{d}\right) \frac{d!}{i!j!k!} b_1^i b_2^j b_3^k \quad (\text{B.31})$$

On choisit un triangle avec les coordonnées barycentriques  $b_1 = s$ ,  $b_2 = t$  et  $b_3 = 1 - s - t$ . Alors une fonction de base peut s'écrire de façon explicite :

$$b_{ijk}^d = \frac{d!}{i!j!k!} s^i t^j (1 - s - t)^k \quad (\text{B.32})$$

et on fait le changement de variable  $s = 0.5x/(1+x)$  et  $t = 0.5y/(1+y)$ .

$$b_{ijk}^d = \frac{1}{4(1+x)^i(1+y)^j} \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \right)^k \frac{d!}{i!j!k!} x^i y^j \quad (\text{B.33})$$

mais les termes devant  $x^i y^j$  sont tous positifs sur le domaine  $(0, \infty) \times (0, \infty)$ . Alors la généralisation de la règle des signes de Descartes s'applique également sur ce domaine. Si une ligne sépare les indices en coordonnées barycentriques  $(i/d, j/d, k/d)$  alors une courbe continue sépare le domaine du triangle. D'un côté de la courbe la fonction est positive, de l'autre côté la fonction est négative.