

---

**Titre:** Adaptation de maillages anisotropes  
Title:**Auteur:** Simon Bélanger  
Author:**Date:** 2010**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis**Référence:** Bélanger, S. (2010). Adaptation de maillages anisotropes [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/245/>

---

**Document en libre accès dans PolyPublie**

Open Access document in PolyPublie

---

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/245/>  
PolyPublie URL:**Directeurs de recherche:** Dominique Pelletier, & André Garon  
Advisors:**Programme:** Génie mécanique  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ADAPTATION DE MAILLAGES ANISOTROPES

SIMON BÉLANGER

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
FÉVRIER 2010

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

ADAPTATION DE MAILLAGES ANISOTROPES

présenté par : M. BÉLANGER Simon

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès Sciences Appliquées  
a été dûment accepté par le jury constitué de :

M. CAMARERO Ricardo, Ph.D., président

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. GARON André, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. GUIBAULT François, Ph.D., membre

À Dalia et Hadi

## REMERCIEMENTS

Tout d'abord, j'aimerais remercier mes deux directeurs de recherche, Dominique Pelletier et André Garon. Votre présence, votre aide et votre support furent indispensables à la bonne réussite de cette maîtrise. Mais par-dessus tout, c'est vos conseils autant pour la maîtrise que pour la suite des choses que j'ai le plus appréciés.

Je tiens aussi à remercier mon directeur chez Bombardier, Daniel Gaulin pour m'avoir fait confiance durant ces dernières années. Sans son appui, il aurait été difficile pour moi d'atteindre mon but.

J'aimerais aussi remercier particulièrement Jérôme Vétel pour son aide précieuse et ses conseils judicieux, ainsi que Philippe Miron pour m'avoir donné un sérieux coup main avec les simulations. Je voudrais aussi remercier tous mes collègues et amis du labo. Ce fut deux très belles années passées en votre compagnie.

Je tiens à remercier ma famille et mes amis, et en particulier mon frère Samuel.

Enfin j'aimerais remercier celle sans qui je n'aurais pu devenir ce que je suis aujourd'hui. Dalia, merci pour tous, merci d'être dans ma vie, merci de croire en moi et de m'avoir supporter et encourager lorsque ça allait moins bien. Tu avais encore raison ; c'était la meilleure décision de ma vie. No regret... Finalement, je tiens à remercier mon grand garçon Hadi, mon Batman-Spiderman-Jedi, pour avoir su me protéger de tous ces méchants lorsque je travaillais dans mon château.

## RÉSUMÉ

En simulation numérique, l'adaptation de maillages se révèle être un outil essentiel à l'obtention de résultats crédibles. Un maillage mal adapté à une solution entraîne généralement une mauvaise définition de cette dernière et donc une perte de précision. Généralement, plus le maillage est fin, meilleure sera la précision de la solution. Toutefois, cette finesse a un prix et les maillages résultants peuvent devenir très gros en matière de nombre de noeuds. Plus le nombre de noeuds est important, plus le temps de calcul de la solution est long.

Les maillages anisotropes sont formés d'éléments étirés et orientés de manière à minimiser l'erreur d'interpolation sur le domaine tout en respectant un certain nombre de noeuds. Ces maillages particuliers permettent d'obtenir des solutions de précision équivalentes à celles obtenues sur des maillages classiques isotropes, mais comptent souvent beaucoup moins de noeuds. Ces économies en termes de noeuds et d'éléments ne sont pas négligeables en ce qui a trait aux temps de calcul de la solution et à l'espace mémoire requis.

La méthode sur laquelle est basée l'adaptation de maillages anisotropes présentée dans ce travail fait appel aux métriques optimales multi-échelle afin de minimiser l'erreur d'interpolation en norme  $L_p$  pour un nombre donné de noeuds  $N$ . La métrique est un tenseur d'ordre deux qui définit une transformation affine de l'espace physique vers un espace virtuel. Un élément anisotrope, qui est étiré dans l'espace physique, devient isotrope une fois transformé dans l'espace virtuel. L'étirement et l'orientation de l'élément dans l'espace physique assurent l'équirépartition de l'erreur d'interpolation dans toutes les directions, et minimisent cette dernière pour un élément triangulaire linéaire ayant une certaine aire. La taille, l'étirement et l'orientation des éléments anisotropes sont déterminés en chaque noeud du maillage par la métrique. Celle-ci est calculée à partir de la matrice hessienne, qui est la matrice des dérivées secondes de la solution. Le ratio des racines carrées des valeurs propres de cette matrice définit l'étirement de l'élément. Les tailles respectives aux deux directions principales sont définies par l'inverse des racines carrées de ces valeurs propres. Tandis que le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre en valeur absolue définit l'orientation principale d'étirement. La métrique est ainsi représentée par la matrice hessienne qui est modifiée de manière à ce qu'elle soit symétrique définie positive et donc une métrique. La métrique optimale est finalement obtenue en moyennant les métriques nodales par rapport à l'ensemble du domaine.

La norme  $L_p$  de calcul de la métrique permet de concentrer ou non les noeuds du maillage sur les zones les plus anisotropes. Ainsi, plus la norme se rapproche de 1, plus elle permet de générer un maillage offrant une meilleure définition des structures de plus faible amplitude en répartissant plus uniformément les noeuds sur le domaine. Tandis que les normes plus

grandes concentrent les nœuds au niveau des structures plus anisotropes, comme les ondes de choc ou les couches limites.

Les résultats présentés dans ce travail pour des problèmes de conduction avec terme source en deux dimensions permettent d'apprécier les performances des maillages anisotropes face à celles des maillages isotropes. Pour un phénomène hautement directionnel tel, l'onde de choc, les maillages anisotropes permettent d'obtenir des solutions aussi précises que celles obtenues sur des maillages isotropes qui comptent au moins dix fois plus de nœuds. Dans le cas d'une couche limite, le ratio du nombre de nœuds entre les maillages anisotrope et isotrope est moins élevé, mais les maillages anisotropes offrent tout de même une précision nettement supérieure pour un nombre de nœuds équivalent.

Les écoulements de Navier-Stokes en deux dimensions dépendent de plusieurs variables et il est nécessaire de tenir compte de ces différentes variables pour l'adaptation du maillage. Elles n'évoluent pas toutes de la même manière sur le domaine et nécessitent donc une adaptation différente du maillage. Afin d'impliquer chacune des variables de l'écoulement, nous utilisons une méthode d'intersection de métriques. Cette méthode permet d'obtenir une métrique de génération de maillage à partir des métriques de bases évaluées pour chacune des variables. La métrique ainsi obtenue tient compte des nécessités des différentes variables afin de garantir une erreur minimale pour chacune des variables sur l'ensemble du domaine. Nous avons d'abord comparé cette méthode d'intersection de métriques à d'autres méthodes ou stratégies de calcul de métrique multi variables. Il en ressort que seule l'intersection de métrique permet d'obtenir une métrique qui génère un maillage reflétant la solution des différentes variables.

Finalement, nous introduisons les grilles d'interpolations non structurées anisotropes dans le processus d'identification des structures lagrangiennes cohérentes appliqué aux écoulements en deux dimensions instationnaires. Ces structures sont des caractéristiques importantes de l'écoulement et définissent son comportement. Or elles sont dévoilées par les crêtes du champ des exposants de Lyapunov, qui sont elles même des structures très effilées et directionnelles. En adaptant les grilles d'interpolation anisotropes à ce champ, il est possible d'obtenir un niveau de précision accru de définition et d'identification des structures lagrangiennes cohérentes. Il est pratiquement impossible d'obtenir un tel niveau de précision à partir des grilles d'interpolation cartésiennes classiques. De plus, en combinant l'adaptation des grilles d'interpolation anisotropes et un algorithme d'identification des arêtes du champ d'exposants de Lyapunov, il est maintenant possible d'extraire avec une grande précision les structures lagrangiennes cohérentes d'un écoulement. Nous montrons à l'aide d'un champ de vitesse analytique tout le potentiel de cette technique.

## ABSTRACT

Mesh adaptation is essential in numerical simulation to obtain reliable results. A mesh poorly adapted to a solution will generate a wrong definition of the solution, and consequently it will lack precision. Generally, when the mesh is finer, the precision of the solution will be better. However, this increase of resolution has its price and the resulting meshes could become very large in terms of number of nodes. The computation time necessary for a solution will increase as the number of nodes on the mesh.

Anisotropic meshes are formed of stretched elements oriented such as to minimize the interpolation error on the domain for a fixed number of nodes. These special meshes can produce solutions of equivalent precision as the ones obtained from isotropic classic meshes, but with a lot less nodes. This reduction of nodes and elements is not negligible when considering solution processing time and necessary memory space.

The method on which is based the following anisotropic mesh adaptation technique refers to a multi-scale optimal metric minimizing the  $L_p$  norm of the interpolation error for a fixed number of nodes  $N$ . The metric is an order 2 tensor defining an affine transformation from a physical space to a virtual space. An anisotropic element, stretched in the physical space, becomes isotropic when transformed in the virtual space. The element stretching and orientation in the physical space guarantee equidistribution of the interpolation error in every direction, and minimize it for a triangular element of fixed area. The size, the stretching and the orientation of anisotropic elements are determined at every node of the mesh by the metric. This metric is calculated from the hessian matrix, which is the second derivatives matrix of the solution. The ratio of eigenvalue square root of this matrix defines the element stretching. The sizes along the eigenvectors directions are defined by the inverse of the corresponding eigenvalue square root. The eigenvector associated to the eigenvalue smallest absolute value defines the stretching principal direction. The metric is then represented by the hessian matrix modified to be symmetrical positive defined such as a metric tensor. The optimal metric is finally obtained by averaging the nodal metrics over the domain.

The  $L_p$  norm used to calculate the metric controls the mesh nodes concentration. As the norm is lower, the mesh generated offers a better definition for low amplitude structures of the solution. Therefore the nodes are then more evenly distributed on the domain. When higher norms are used, the nodes are concentrated on anisotropic structures, such as shock waves or boundary layers.

The results presented in this document for conduction problems with heat source in 2 dimensions demonstrate the great performance of anisotropic meshes compared to isotropic

meshes. For a highly anisotropic phenomenon, such as the shock wave, anisotropic meshes generate solutions as precise as the ones obtained with isotropic meshes that have at least ten times more nodes. In the case of a boundary layer, the number of nodes ratio between isotropic and anisotropic meshes is not as large, but anisotropic meshes still clearly offer a better precision compared to isotropic meshes with the same number of nodes.

The 2D Navier-Stokes flows depend on several variables that must be considered during the mesh adaptation process. They do not behave in the same way on the domain and they necessitate a different mesh adaptation. We use a metric intersection method to involve each variable. With this method we obtain a single metric for mesh generation from the variables basic metrics. The resulting metric take into account the needs of the different variables to ensure a minimal error for each variable over the domain. We first compared this metrics intersection method to other strategies used to compute multi variables metrics. The results are as follows; only the metric intersection method can produce a metric to generate a mesh that reflects the solution of every variable.

Finally, we introduce anisotropic non structured interpolation grids in the identification process of lagrangian coherent structures for 2 dimensional time dependent flows. These structures are important characteristics of the flow and define its behaviour. They are revealed from the ridges of the Lyapunov exponent field, which are very thin and directional structures. It is possible to obtain an increased level of precision for the definition and identification of lagrangian coherent structures from an anisotropic adaptation of the interpolation grids to the Lyapunov exponent field. It would almost be impossible to achieve such a level of precision from Cartesian interpolation grids. Moreover, the addition of this anisotropic interpolation grids adaptation to an identification algorithm for the Lyapunov exponent field ridges enables the extraction of the lagrangian coherent structures of a flow with great precision. We show from an analytical flow field all the potential of this method.

## TABLES DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vii
TABLES DES MATIÈRES . . . . .	ix
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xii
LISTE DES FIGURES . . . . .	xiii
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xvi
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . .	xvii
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE 1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE . . . . .	3
1.1 Introduction . . . . .	3
1.2 Adaptation de maillages en éléments finis . . . . .	3
1.3 Opérateur de transition . . . . .	5
1.3.1 Maillage classique / isotrope . . . . .	5
1.3.2 Maillage anisotrope . . . . .	7
1.3.3 Métrique . . . . .	8
1.3.4 Métrique optimale . . . . .	12
1.4 Le Conditionnement de la matrice globale . . . . .	12
1.5 Reconstruction du Hessien . . . . .	14
1.6 Éléments d'ordre élevé . . . . .	14
1.7 Buts et objectifs . . . . .	16
CHAPITRE 2 DÉVELOPPEMENT MATHÉMATIQUE . . . . .	17
2.1 Erreur d'interpolation . . . . .	17
2.1.1 Élément linéaire en dimension 1 . . . . .	17

2.1.2	Élément linéaire en dimension 2 . . . . .	18
2.2	Modèle d'erreur en 2 dimensions . . . . .	27
2.2.1	Orientation optimale du vecteur $\mathbf{L}$ . . . . .	28
2.2.2	Erreur locale optimale . . . . .	30
2.2.3	Modèle d'erreur . . . . .	33
2.3	Métrique . . . . .	35
2.4	Métrique optimale . . . . .	36
2.4.1	Problème d'optimisation . . . . .	37
2.4.2	Expression de la métrique optimale . . . . .	40
2.5	Évaluation discrète de la métrique . . . . .	44
2.5.1	Reconstruction des dérivées secondes . . . . .	44
2.5.2	Diagonalisation de la matrice hessienne . . . . .	47
2.5.3	Algorithme de calcul de la métrique . . . . .	53
2.6	Intersection de métriques . . . . .	55
2.6.1	Réduction simultanée de deux métriques . . . . .	55
2.6.2	Intersection . . . . .	56
2.6.3	Cas particuliers . . . . .	57
<b>CHAPITRE 3</b>	<b>APPLICATIONS NUMÉRIQUES</b> . . . . .	<b>59</b>
3.1	Conduction avec terme source . . . . .	59
3.1.1	Modèle continu d'une onde de choc . . . . .	60
3.1.2	Couche limite . . . . .	64
3.2	Écoulements 2D . . . . .	69
3.2.1	Écoulement de Poiseuille . . . . .	69
3.2.2	Cavité carrée entraînée . . . . .	75
3.3	Écoulement axisymétrique . . . . .	84
3.3.1	Rappels . . . . .	84
3.3.2	Adaptation de maillages anisotropes . . . . .	86
3.3.3	Simulation . . . . .	87
3.4	Structures lagrangiennes cohérentes . . . . .	102
3.4.1	Méthode d'identification des SLC . . . . .	102
3.4.2	Grilles d'interpolation anisotropes . . . . .	113
3.4.3	Champ de vitesse analytique . . . . .	117
<b>CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES</b> . . . . .	<b>131</b>	
<b>BIBLIOGRAPHIE</b> . . . . .	<b>134</b>	

ANNEXES . . . . .	139
-------------------	-----

**LISTE DES TABLEAUX**

TABLEAU 3.1	Erreurs énergie selon la norme $L_p$ de calcul de la métrique . . . . .	77
TABLEAU 3.2	Estimation de la contribution des métriques au nombre total de nœuds du maillage . . . . .	80
TABLEAU 3.3	Nombre de nœuds cibles $N$ . . . . .	89
TABLEAU 3.4	Pentes des courbes de convergence et degré de confiance . . . . .	100

## LISTE DES FIGURES

FIGURE 1.1	Algorithme général d'une méthode adaptative . . . . .	4
FIGURE 1.2	Paramètres d'un élément . . . . .	8
FIGURE 1.3	Cercle unité de la métrique $\mathcal{M}$ . . . . .	10
FIGURE 2.1	Interpolation linéaire de $u(x)$ . . . . .	17
FIGURE 2.2	Interpolation linéaire de $u(x, y)$ . . . . .	19
FIGURE 2.3	Élément de référence et élément réel . . . . .	19
FIGURE 2.4	Disposition des arêtes sur l'élément de référence et l'élément physique.	24
FIGURE 2.5	Ensemble $\tau(a)$ des triangles autour du point $a$ . . . . .	27
FIGURE 2.6	Forme de l'erreur locale : a) l'erreur est représentée par la courbe sur le paraboloïde elliptique b) vue plan de l'erreur qui est fonction de $r$ et $\theta$	31
FIGURE 2.7	Équirépartition de l'erreur locale : a) l'erreur forme une ellipse et est représentée par la courbe de niveau sur le paraboloïde elliptique b) vue plan de l'erreur qui est fonction de $r_{min}$ et $r_{max}$	33
FIGURE 2.8	Tailles $h_{min}$ et $h_{max}$ selon le niveau de l'erreur locale . . . . .	34
FIGURE 2.9	Transformation du cercle unité par la métrique $\mathcal{M}$ et son inverse . . .	36
FIGURE 2.10	Ensemble $\tau_a$ des triangles autour du point $a$ avec $k = 4$ points de Gauss par élément . . . . .	45
FIGURE 2.11	Algorithme de calcul de la métrique $\mathcal{M}$ . . . . .	54
FIGURE 2.12	Intersection des métriques $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ . . . . .	57
FIGURE 2.13	Intersection des métriques $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ : lorsqu'une des métriques est entièrement incluse dans l'autre, la métrique résultante de l'intersection est la plus petite des deux. . . . .	57
FIGURE 3.1	a) Photographie Schlieren d'ondes de choc sur un profil d'aide dans un écoulement transsonique. b) Onde de choc sur un avion de chasse. . .	60
FIGURE 3.2	Fonction $f_1(x, y)$ avec $\varepsilon = 100$ . . . . .	61
FIGURE 3.3	Maillages anisotropes issus de l'adaptation en norme $L_\infty$ . . . . .	62
FIGURE 3.4	Maillages anisotrope et isotrope . . . . .	63
FIGURE 3.5	Gros plan sur la zone de choc . . . . .	63
FIGURE 3.6	Erreur absolue en fonction du nombre de nœuds . . . . .	64
FIGURE 3.7	Fonction $f_3(x, y)$ . . . . .	66
FIGURE 3.8	Erreur absolue en fonction du nombre de nœuds . . . . .	66
FIGURE 3.9	Maillages adaptés selon trois méthodes différentes . . . . .	67
FIGURE 3.10	Gros plan sur les maillages adaptés . . . . .	67

FIGURE 3.11	Coupe de la solution de $f_2$ à $y = 0.5$	68
FIGURE 3.12	Écoulement de Poiseuille : géométrie et conditions aux limites	70
FIGURE 3.13	Valeur propre maximale des métriques $\mathcal{M}_F$ et $\mathcal{M}_G$	72
FIGURE 3.14	Maillages adaptés selon a) la métrique $\mathcal{M}_G$ et b) la métrique obtenue de l'intersection des métriques $\mathcal{M}_u$ , $\mathcal{M}_v$ et $\mathcal{M}_p$	74
FIGURE 3.15	Cavité carrée entraînée : géométrie et conditions aux limites	75
FIGURE 3.16	Cavité carrée entraînée : $R_e = 1600$	76
FIGURE 3.17	Coupes de vitesses horizontales et verticales	78
FIGURE 3.18	Maillages obtenus de différentes stratégies de calcul de métrique	79
FIGURE 3.19	Cavité carrée : vitesse U, vitesse V et pression P	80
FIGURE 3.20	Gros plan des maillages sur la singularité de pression à droite du domaine	81
FIGURE 3.21	Valeurs limites de pression	82
FIGURE 3.22	Cavité carrée entraînée : erreur en fonction du nombre de nœuds	83
FIGURE 3.23	Écoulement axisymétrique : coordonnées cylindriques, domaine et maillage	85
FIGURE 3.24	Dimensions de l'embout	87
FIGURE 3.25	Configuration expansion soudaine (SE)	88
FIGURE 3.26	Configuration diffuseur conique (CD)	88
FIGURE 3.27	Expansion soudaine : Iso-lignes vitesse et pression de la zone centrale, $Re = 3500$	91
FIGURE 3.28	Diffuseur conique : Iso-lignes vitesse et pression de la zone centrale, $Re = 3500$	91
FIGURE 3.29	Diffuseur conique : découpe des zones de maillage	92
FIGURE 3.30	Diffuseur conique : maillages de la zone centrale a	92
FIGURE 3.31	Diffuseur conique : maillages du diffuseur conique	93
FIGURE 3.32	Coupes radiales exactement à la fin du diffuseur conique ( $x = -15.7$ )	94
FIGURE 3.33	Diffuseur conique : maillages à l'entrée de l'étranglement	95
FIGURE 3.34	Expansion soudaine : découpe des zones de maillage	96
FIGURE 3.35	Expansion soudaine : maillages de la zone centrale	96
FIGURE 3.36	Expansion soudaine : maillages à l'entrée de l'étranglement	97
FIGURE 3.37	Expansion soudaine : maillages à la sortie de l'étranglement	98
FIGURE 3.38	Convergence de l'erreur	99
FIGURE 3.39	Indice relatif d'hémolyse en fonction du nombre de Reynolds	101
FIGURE 3.40	Position des particules $x_1$ et $x_2$ dans le temps	104
FIGURE 3.41	Temps d'intégration : $T < 0$ les particules convergent l'une vers l'autre, $T > 0$ les particules s'éloignent l'une de l'autre	105
FIGURE 3.42	Exemple de champ de FTLE	106

FIGURE 3.43	Courbures principales d'une surface $\sigma(x^1, x^2)$ . . . . .	107
FIGURE 3.44	Exemple de champs FTLE pour différentes résolutions et intervalles de temps . . . . .	112
FIGURE 3.45	Valeurs nodales de la fonction test. . . . .	115
FIGURE 3.46	Vecteurs propres de sens opposés . . . . .	116
FIGURE 3.47	Étapes permettant le bon choix de sens des vecteurs propres par rapport à l'orientation de l'arête. . . . .	116
FIGURE 3.48	Champ de vitesse analytique à différents temps . . . . .	118
FIGURE 3.49	Champ FTLE sur une grille cartésienne de 80000 éléments . . . . .	119
FIGURE 3.50	Champs FTLE et grilles d'interpolation . . . . .	121
FIGURE 3.51	Gros plan sur la racine de la SLC principale . . . . .	122
FIGURE 3.52	Ratio du nombre d'éléments . . . . .	122
FIGURE 3.53	Coupe du champ FTLE : en noir il s'agit d'un exemple de champ FTLE typique et en rouge le champ FTLE numérique . . . . .	123
FIGURE 3.54	Champ FTLE sur des grilles anisotropes adaptées selon différentes métriques . . . . .	124
FIGURE 3.55	Grilles anisotropes adaptées selon différentes métriques . . . . .	124
FIGURE 3.56	SLC secondaires et principales à $T = 10.0$ . . . . .	125
FIGURE 3.57	SLC principale à différents temps d'intégration . . . . .	126
FIGURE 3.58	SLC principale obtenue par une grille adaptée en norme $L_1$ à $T = 10.0$	127
FIGURE 3.59	Grilles d'interpolation adaptées . . . . .	129
FIGURE 3.60	Courbes SLC . . . . .	130

**LISTE DES ANNEXES**

A Erreur d'interpolation linéaire pour 1 dimension . . . . .	139
B Transformation de l'espace de référence vers l'espace physique . . . . .	140
C Preuve de la borne supérieure sur la valeur absolue de la matrice hessienne . . . . .	143
D Tailles résultantes lorsque les deux valeurs propres sont plus petites que $\varepsilon$ . . . . .	144
E Matrice $\mathcal{N}$ nulle . . . . .	145

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

CD	Conical Diffuser
CFD	Computational Fluid Dynamic
FTLE	Finite-Time Lyapunov Exponent
PIV	Particule Image Velocimetry
RIH	Relative Index of Hemolysis
SE	Sudden expansion
SLC	Structures Lagrangienne Cohérentes

### Caractères usuels

$\boldsymbol{a}$	Vecteur des coefficients de la base polynomiale
$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$	Vecteurs de la base covariante
$\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2$	Vecteurs de la base contracovariante
$\boldsymbol{a}_n$	Vecteur normal à la surface
$b$	Coefficient du tenseur de courbure
$B$	Tenseur de courbure
$C$	Multiplicateur de Lagrange
$\tilde{C}$	Constante
$d(x, y)$	Fonction de densité de maillage
$D^{(2)}$	Valeur maximale des termes de dérivées secondes
$D_{L_p}$	Terme fonction du nombre de noeuds $N$ et du déterminant $\det H $
$\boldsymbol{D}$	Vecteur de dérivées reconstruites
$e$	Erreur d'interpolation
$\boldsymbol{e}$	Vecteur d'orientation d'une arête
$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$	Vecteurs propres de la matrice $\mathcal{N}$
$E$	Espace vectoriel,
	Erreur d'interpolation
$E_a$	Modèle d'erreur d'interpolation locale au noeud $a$
$E_k$	Erreur d'interpolation sur l'élément $k$
$E_{\mathcal{M}}$	Modèle d'erreur d'interpolation locale de la métrique $\mathcal{M}$

$E_n$	Erreurs d'interpolation d'un polynôme de degré $n$
$\bar{e}$	Erreurs cible
$f(x, y)$	Solution exacte de l'équation de Poisson
$F$	Fonctionnelle
$F(x, y)$	Fonction d'adaptation
$G(x, y)$	Fonction d'adaptation
$h$	Taille ou espacement
$h_s$	Taille dans la direction $s$
$h_t$	Taille dans la direction $t$
$h^*$	Taille résultante de la limitation des valeurs propres par $\epsilon$
$H_u$	Matrice hessienne de la variable $u$
$H^*$	Matrice Hessienne reconstruite
$k$	Élément d'un maillage, nombre de points d'échantillonnage par élément, scalaire
$l_{max}$	Longueur de l'arête la plus grande d'un élément
$\mathbf{L}$	Vecteur arbitraire à l'intérieur d'un triangle ou d'un ensemble de triangle
$m$	Nombre d'éléments dans un ensemble $\tau(a)$
$n$	Degré d'un polynôme
$N$	Nombre de noeuds du maillage
$\mathbf{N}$	Vecteur des fonctions d'interpolation sur l'élément de référence
$p$	Exposant définissant la norme $L_p$ , pression
$p_n()$	Polynôme de degré $n$
$\mathbf{P}$	Vecteur de la base polynomiale
$P_{\mathcal{N}}$	Matrice de rotation de la matrice $\mathcal{N}$
$r$	Rayon d'une ellipse ou d'un cercle, ratio de tailles
$\hat{r}$	Rayon modifié d'une ellipse
$\vec{r}$	Résidu
$\mathbf{r}$	Vecteur position
$R_\phi$	Matrice des vecteurs propres, Matrice de rotation

$s$	Ratio d'anisotropie ou d'étirement
$\mathbf{s}$	Vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de la matrice hessienne
$S(x, t_0, T)$	Tenseur de déformation de Cauchy-Green
$\mathbf{t}$	Vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de la matrice hessienne
$t_0$	Temps initial
$T$	Intervalle de temps
$T_{sup}$	Termes d'ordre supérieur
$u$	Solution exacte
$\mathbf{u}$	Vecteur vitesse, champ de vitesse
$u_h$	Approximation de la solution
$u_n$	Solution nodale
$\mathbf{U}$	Vecteur dérivées estimées
$U$	Terme source dans l'équation de Poisson
$V_e$	Élément du domaine réel
$V_r$	Élément du domaine de référence
$x_0$	Position initiale
$\mathbf{x} = (x, y)$	Coordonnées cartésiennes ou de l'espace réel
$\mathbf{x}(t)$	Trajectoire
$\dot{\mathbf{x}}(t)$	Système dynamique
$(r, z, \theta)$	Coordonnées cylindriques
$\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}, \bar{y})$	Point d'évaluation des termes de dérivées secondees dans l'espace réel

## Lettres calligraphiques

$\mathcal{M}$	Métrique
$\mathcal{N}$	Matrice résultante de la multiplication de deux métriques $\mathcal{M}_1^{-1}\mathcal{M}_2$
$\mathcal{T}$	Métrique qui est l'inverse de $\mathcal{M}$

## Lettres grecques

$\alpha$	Taux de convergence, Orientation d'un élément
$\alpha_s$	Coefficient de la composante d'un dans la direction $s$
$\alpha_t$	Coefficient de la composante d'un dans la direction $t$
$\gamma_s$	Plus petite valeur propre de la métrique
$\gamma_t$	Plus grande valeur propre de la métrique
$\Gamma$	Opérateur projection
$\delta$	Variation d'une fonctionnelle
$\delta_{choc}$	Épaisseur d'une onde de choc
$\delta_k$	Taille optimale d'un élément
$\boldsymbol{\delta u}$	Vecteur des termes d'ordre inférieur
$\boldsymbol{\delta}(t)$	Vecteur de séparation
$\epsilon$	Valeur seuil des valeurs propres
$\theta$	Angle interne d'un triangle, Orientation du vecteur dans l'expression du modèle d'erreur
$\lambda$	Valeur propre de la matrice hessienne
$\lambda_s$	Plus petite valeur propre de la matrice hessienne
$\lambda_t$	Plus grande valeur propre de la matrice hessienne
$\Lambda$	Matrice diagonale des valeurs propres, Fonctionnelle
$\mu$	Viscosité du fluide
$\rho$	Densité du fluide
$\sigma_{t_0}^T()$	Exposant de Lyapunov
$\tau$	Transformation affine entre l'espace réel et l'espace

	de référence
$\tau(a)$	Ensemble des éléments ayant comme sommet le noeud $a$
$\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x})$	Flow map
$\xi = (\xi, \eta)$	Coordonnées dans l'espace de référence
$\bar{\xi} = (\bar{\xi}, \bar{\eta})$	Point d'évaluation des termes de dérivées seconde dans l'espace de référence
$\psi$	Fonction de courant
$\Omega$	Domaine de calcul
$\Omega_e$	Domaine réel
$\Omega_r$	Domaine de référence

## Symboles

$\det$	Déterminant d'une matrice
$\nabla$	Opérateur gradient
$\frac{\partial}{\partial}$	Dérivée partielle
$ . $	Valeur absolue
$\ \cdot\ $	Norme
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire de deux vecteurs
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$	Produit scalaire de deux vecteurs dans la métrique $\mathcal{M}$

## INTRODUCTION

Au cours des 30 dernières années, la recherche en méthodes numériques a connu des percées majeures. La puissance croissante des ordinateurs permet aujourd’hui des simulations de complexité et de précision inégalées. Toutefois, il est encore souvent impensable d’effectuer des simulations sur des modèles dont la complexité approche celle de la réalité. Les moyens informatiques sont encore insuffisants, et les méthodes numériques sont trop gourmandes pour ce qui est du temps de calcul et de l’espace mémoire. L’industrie cherche donc encore à améliorer l’efficacité de la dynamique des fluides assistée par ordinateur. L’adaptation de maillage anisotrope et les méthodes utilisant des éléments d’ordre élevé sont deux des principales avenues suscitant le plus d’intérêt et qui font l’objet d’intenses travaux et développements.

L’adaptation de maillages non structurés anisotropes a prouvé ces dernières années son efficacité pour améliorer la précision des simulations numériques et pour capturer les comportements et phénomènes anisotropes (ondes de choc, couches limites, etc.). Cette technique permet de réduire significativement le nombre de noeuds du maillage tout en minimisant l’erreur d’interpolation sur le domaine. L’espace mémoire et les temps de calcul de la solution sont ainsi diminués. De plus, le processus d’adaptation capture automatiquement les phénomènes anisotropes de l’écoulement étudié. La base de cette technique d’adaptation repose sur l’utilisation d’éléments triangulaires étirés et alignés selon la courbure de la solution pour minimiser l’erreur d’interpolation.

Le but de ce mémoire est de présenter une étude sur l’adaptation de maillages non structurés anisotropes. Il existe différentes approches pour ce type d’adaptation. Nous explorons ici les méthodes faisant appel au concept de métrique continue multi-échelle introduit par [3][14][16]. Plus spécifiquement, nous présentons l’approche définissant une métrique continue optimale minimisant l’erreur d’interpolation en norme  $\mathbf{L}_p$  pour la génération de maillages anisotropes adaptés. Cette métrique provient de la matrice hessienne, soit la matrice des dérivées seconde de la solution. Cette approche est générale et peut donc s’utiliser autant avec la méthode des volumes finis qu’avec la méthode des éléments finis. Dans ce travail, nous utilisons un résolveur éléments finis. La génération de maillage est effectuée par le remailleur surfacique *MeshAdapt* qui prend en entrée une métrique et un maillage initial pour générer le maillage anisotrope.

Le premier chapitre présente une revue bibliographique de l’ensemble des différents travaux réalisés sur ce sujet, et permet de situer notre contribution. Nous débutons par situer le processus d’adaptation de maillages dans le contexte de la simulation numérique par éléments

finis. Par la suite, nous exposons brièvement les détails de la génération de maillages anisotropes et du rôle joué par la métrique. Nous y présentons aussi plus en détail les buts et les objectifs de ce mémoire. Le second chapitre est le cœur de ce travail. À partir du développement de l'erreur d'interpolation sur un élément linéaire et d'un modèle d'erreur, nous présentons le calcul de la métrique continue optimale en 2 dimensions. Nous abordons le calcul numérique de la métrique et les méthodes de projections permettant de reconstruire les dérivés de la solution. Le chapitre 3 est divisé en quatre sections. La première nous permet de démontrer toute la puissance et les capacités de l'adaptation de maillages anisotropes à partir de quelques cas simples de simulations numériques de l'équation de Poisson. La deuxième section présente des simulations numériques des équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible. Nous y introduisons l'intersection de métriques calculées sur différentes variables pour définir la métrique de génération de maillage. À la troisième section, nous introduisons la méthode d'adaptation de maillage anisotrope pour les écoulements axisymétriques. La dernière section présente une nouvelle application des maillages anisotropes adaptés utilisés pour l'identification des structures lagrangiennes cohérentes dans un écoulement instationnaire.

# CHAPITRE 1

## REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

### 1.1 Introduction

Les méthodes adaptatives en éléments finis sont désormais très répandues. Elles permettent de calculer une solution dont la précision satisfait un niveau d'erreur prédéfini, par un processus presque automatique de discrétisation et de génération de maillages adaptés. L'analyste n'a presque plus à se soucier de générer un maillage qui conduira à une solution précise du problème qu'il simule. On libère ainsi l'analyste de la tâche lourde et compliquée de générer de bons maillages par intuition ou de manière empirique, pour qu'il puisse concentrer ses efforts sur l'interprétation des résultats des simulations.

Les maillages générés sont adaptés à la solution, c'est-à-dire que l'erreur est minimisée, pour un nombre d'éléments donné, en ajustant les paramètres du maillage, soit la densité de noeuds, la taille et l'orientation des éléments dans le cas de maillages anisotropes. Cependant, en éléments finis, il importe de tenir compte du nombre et de la taille des éléments générés ainsi que de leur forme. En effet, plus il y a d'éléments dans le domaine, plus ils sont petits et meilleure est la précision de la solution. Par contre, la finesse du maillage détermine le coût de résolution du problème, puisque la taille de la matrice de rigidité est proportionnelle au nombre de degrés de liberté du maillage. De plus, l'étape de génération de maillage fait partie d'un processus itératif, et ne doit pas être coûteuse vis-à-vis de la résolution du problème. Il y a donc un compromis à faire entre le nombre de noeuds qui nous donne un certain niveau de précision pour une solution, et le temps nécessaire à la génération du maillage et au calcul de la solution. De plus, le conditionnement du système d'équations et la précision de l'approximation dépendent beaucoup de la taille des éléments du maillage, de leur forme et plus précisément de leurs angles internes.

### 1.2 Adaptation de maillages en éléments finis

L'adaptation de maillages vise à réduire l'erreur d'interpolation sur le domaine, c'est-à-dire la différence entre la solution calculée par éléments finis et la solution exacte. Cette dernière étant inconnue en pratique, nous utilisons alors les estimateurs d'erreur pour contrôler l'algorithme d'adaptation. L'algorithme général d'une méthode adaptative en éléments finis est illustré à la figure 1.1 et se résume ainsi :

1. La première étape consiste en la discréétisation du domaine de calcul, soit la génération du maillage initial, qui généralement compte peu d'éléments.
2. La solution est calculée par la méthode des éléments finis sur le maillage, c'est l'étape de la résolution.
3. Nous estimons l'erreur de la solution calculée et nous déterminons si la solution est assez précise :
  - (a) Si l'erreur sur le domaine est satisfaisante (plus petite qu'un niveau de tolérance établi), la simulation est terminée.
  - (b) Sinon, nous continuons le processus.
4. Nous calculons un opérateur de transition qui permettra de modifier le maillage pour obtenir une solution plus précise.
5. Nous générions un nouveau maillage à partir de la fonction d'adaptation. La solution du maillage précédent est interpolée sur le nouveau maillage, et nous recommençons la boucle à l'étape 2.

Les étapes 2 à 5 sont répétées tant que l'estimation de l'erreur de la solution ou un autre critère d'arrêt préétabli (nombre de nœuds, nombre d'itérations, etc.) n'a pas atteint le niveau demandé.

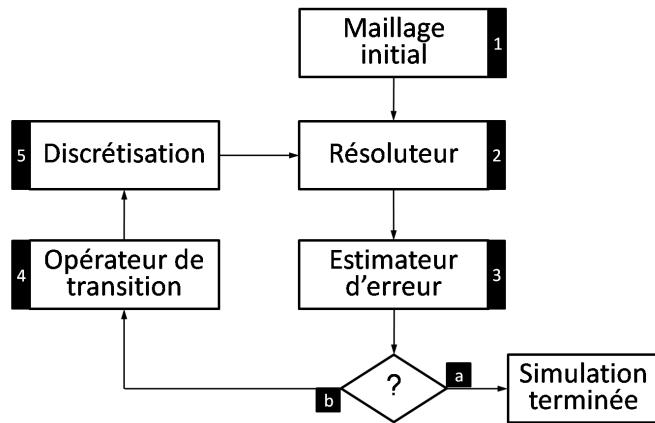


FIGURE 1.1 Algorithme général d'une méthode adaptative

### 1.3 Opérateur de transition

En adaptation classique, comme en adaptation anisotrope, nous cherchons à équirépartir l'erreur sur le domaine. Nous cherchons à obtenir un maillage  $\Omega$  dont la taille et l'orientation des éléments  $k$  permettent d'obtenir une équirépartition de l'erreur sur tout le domaine :

$$\|e\|_k = Cte \quad \forall k \in \Omega \quad (1.1)$$

Nous parlons alors d'un maillage optimal qui minimise l'erreur globale de la solution pour un nombre donné de degrés de liberté. Ce principe est à la base de l'adaptation de maillage [6][36]. L'opérateur de transition est calculé en estimant l'erreur de la solution approximative obtenue, nous parlons alors de méthode d'adaptation de maillage *a posteriori*.

#### 1.3.1 Maillage classique / isotrope

Dans la boucle d'adaptation<sup>1</sup> de la figure 1.1, l'estimateur d'erreur *a posteriori* est utilisé pour déterminer l'opérateur de transition, qui est en fait une fonction de taille ou de raffinement pour les maillages isotropes. La fonction de taille définit en chaque nœud une taille  $\delta_i$  d'élément en fonction de sa position sur le domaine. Cette fonction est utilisée par la suite par le mailleur/remailleur pour générer le nouveau maillage. Nous cherchons de cette manière la distribution de taille  $\delta_i$  qui conduira à un maillage optimal. Pour illustrer ce principe simplement, référons-nous au terme d'erreur du développement en série de Taylor. Pour un élément linéaire en 2 dimensions, nous avons :

$$e_h = \frac{1}{2}h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2}h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + 2h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (1.2)$$

Le terme d'erreur est proportionnel au carré de la taille  $h$  de l'élément. En variant la taille de l'élément, nous pouvons augmenter ou diminuer l'erreur. De façon générale, la norme de l'erreur d'interpolation nous indique sensiblement le même lien entre l'erreur et la taille  $h$  de l'élément :

$$\|e_k\| \simeq \tilde{C} h_k^\alpha \quad (1.3)$$

où  $\alpha$  est le taux de convergence qui dépend de la norme utilisée pour estimer l'erreur. Pour déterminer la fonction de taille, il faut d'abord évaluer le niveau d'erreur cible  $\bar{e}$  sur chaque

---

1. L'algorithme présenté ici est celui du mailleur adaptatif de la suite AMIRAL–CADYF–ADAPT et qui est décrit dans [27][38].

élément du maillage :

$$\bar{e} = \frac{e_\Omega}{\sqrt{N}} \quad (1.4)$$

où l'erreur globale  $e_\Omega$  est le seuil d'erreur désirée sur le maillage entier pour un certain nombre d'éléments  $N$ . La taille optimale  $\delta_k$  de l'élément, qui permet obtenir un maillage optimal, est reliée à l'erreur cible par la relation 1.3 :

$$\bar{e} \simeq \tilde{C} \delta_k^\alpha$$

$$\delta_k = \left[ \frac{\bar{e}}{\|e_k\|} \right]^{\frac{1}{\alpha}} h_k$$

Cette taille est constante par élément du maillage et nous utilisons une moyenne arithmétique pour obtenir les tailles nodales  $\delta_i$  sur tout le maillage. L'erreur est évaluée pour chacune des variables de la solution et généralement la variable la plus contraignante est choisie pour déterminer la taille optimale.

La fonction de taille conduit à la construction d'éléments triangulaires équilatéraux, ou du moins les plus équilatéraux possible. La forme équilatérale a longtemps été considérée comme la forme optimale pour un élément. Le concept est basé sur l'évaluation *a priori* de la borne supérieure de l'erreur en norme  $H_1$ , présentée dans les travaux de [5][54][35] :

$$\|e\|_1 \leq \frac{D^{(2)} l_{max}}{\cos \frac{\theta_{max}}{2}} \quad (1.5)$$

où  $\theta_{max}$  est l'angle interne maximal du triangle et  $l_{max}$  est une dimension caractéristique, par exemple la longueur de l'arête la plus grande.  $D^{(2)}$  représente la valeur maximale des termes de dérivées secondes de la solution interpolée sur l'élément. Ces travaux ont démontré que la précision des solutions par éléments finis sur des maillages triangulaires se dégrade rapidement lorsque les angles maximaux tendent vers  $\pi$ , puisque la borne de l'erreur tend alors vers l'infini. L'élément optimal est donc celui qui minimise le rapport entre la longueur et l'angle maximal pour une surface élémentaire donnée, soit le triangle équilatéral. En considérant ainsi l'angle maximal comme une constante, soit  $\approx \frac{\pi}{3}$ , la seule variable qui nous permet de réduire l'erreur est la longueur des segments du triangle, soit sa taille.

En nous limitant aux triangles équilatéraux, nous obtenons des maillages éléments finis qui sont relativement faciles à construire. Les éléments dégénérés ( $\theta_{max} \approx \pi$ ) sont d'ailleurs facilement évités par l'emploi de meilleur de type Delaunay. De plus, tel que démontré dans [52] les triangles équilatéraux minimisent le conditionnement de la matrice du système d'équations.

Ainsi, les triangles équilatéraux sont d'excellents éléments pour les calculs par la méthode des éléments finis.

### 1.3.2 Maillage anisotrope

Comme nous venons de le voir, plusieurs travaux concluent que les maillages de triangles équilatéraux sont optimaux pour la méthode des éléments finis. Les éléments étirés et plats seraient donc à éviter puisqu'ils dégradent la précision de la solution et le conditionnement de la matrice globale. Cependant, le développement des bornes d'erreur, qui sont à la base du choix des éléments équilatéraux, ne considère qu'une partie de l'information donnée par la solution.

Reprendons l'expression du terme d'erreur du développement en série de Taylor sur un élément linéaire à 2 dimensions :

$$e(x_1, x_2) = \frac{1}{2}h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2}h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (1.6)$$

Cette fois nous considérons que le terme d'erreur est déterminé par deux tailles différentes ( $h_1$  et  $h_2$ ) dans les directions  $\vec{x}_1$  et  $\vec{x}_2$ . En fait, nous montrons que la borne supérieure de l'erreur s'exprime comme suit :

$$\|e_{max}\|_0 \leq Cte \mathbf{L} |H| \mathbf{L} \quad (1.7)$$

où  $\mathbf{L}$  est un vecteur qui caractérise l'élément.  $|H|$  est la matrice hessienne modifiée<sup>2</sup> de la solution, et non pas seulement une borne supérieure des dérivés secondes comme dans le cas isotrope. En conservant la matrice hessienne, nous préservons l'information sur le comportement directionnel de la solution. Nous noterons que la borne de l'erreur est anisotope, donc que la borne n'a pas la même valeur selon la direction du vecteur  $\mathbf{L}$ .

Les travaux de [34][17][45] sont les premiers à avoir démontré que pour minimiser l'erreur d'interpolation linéaire en norme  $L^p$ , les éléments triangulaires doivent être étirés dans la direction pour laquelle la dérivée seconde directionnelle est petite. Ce qui correspond à aligner et à étirer les triangles dans la direction du vecteur propre de la matrice hessienne associé à la valeur propre la plus petite en valeur absolue. [52][9] ont obtenu le même résultat pour la norme  $L^2$  et  $H_1$ . La borne supérieure de l'erreur d'interpolation en norme  $H_1$  s'exprime :

$$\|e_{max}\|_1 \leq D^{(2)} \frac{l_{max}}{2 \sin \theta_{max}} \quad (1.8)$$

---

2.  $|H|$  a les mêmes vecteurs propres que la matrice hessienne  $H$ , mais ses valeurs propres correspondent à la valeur absolue des valeurs propres de  $H$ .

où  $D^{(2)}$  représente la valeur maximale des termes de dérivées secondes. L'angle maximal intervient dans l'expression de la borne de l'erreur, et tout comme pour les bornes isotropes nous devons imposer une condition sur l'angle maximal pour éviter que l'erreur ne tende vers l'infini. D'autre part, [53] montre que lorsque l'angle le plus petit tend vers 0 (et que les deux autres angles sont entre  $\frac{\pi}{3}$  et  $\frac{2\pi}{3}$ ), la borne de l'erreur varie peu. D'ailleurs dans [5], les auteurs suggéraient déjà de ne considérer que la condition sur l'angle maximal.

Nous cherchons donc maintenant à définir non seulement la taille des éléments, mais aussi leur orientation et leur étirement. *Peraire*, dans [40], a défini les paramètres du maillage tel qu'illustrés à la figure 1.2 où  $\delta$  est la taille de l'élément,  $s$  le ratio d'anisotropie et  $\alpha$  la

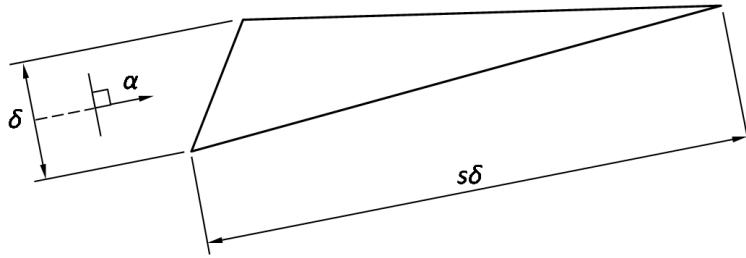


FIGURE 1.2 Paramètres d'un élément

direction d'étirement. La direction de l'étirement est alignée avec le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de  $H$  et le ratio d'anisotropie correspond au ratio des valeurs propres de  $H$  :

$$s = \sqrt{\frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}} \quad (1.9)$$

Ce ratio d'anisotropie assure une équirépartition de l'erreur dans les deux directions. Dans [40][39][59], ce genre de fonction d'adaptation est utilisé pour piloter l'adaptation et le remaillage de la simulation d'écoulements compressibles et d'écoulements visqueux. Les maillages anisotropes ainsi obtenus permettent, avec moins de noeuds, d'obtenir une solution dont la précision est équivalente à celle obtenue à l'aide de maillages isotropes.

### 1.3.3 Métrique

Dans [17][55][33] les auteurs ont introduit le concept de métrique pour contrôler l'étirement et l'orientation du maillage. La métrique est alors utilisée comme fonction d'adaptation. La métrique  $\mathcal{M}$  est un tenseur<sup>3</sup> d'ordre 2 défini sur un espace vectoriel  $E$  de dimension finie,

---

3. Les composantes d'un tenseur d'ordre 2 peuvent être représentés sous la forme d'une matrice.

c'est-à-dire une forme bilinéaire telle que :

$$\begin{aligned}\mathcal{M} : E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \mathcal{M}(u, v)\end{aligned}$$

et possède les propriétés suivantes :

– symétrique :

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E \quad \mathcal{M}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad (1.10)$$

– défini positif :

$$\forall x \in E \quad \mathcal{M}(x, x) \geq 0 \quad (1.11)$$

– non dégénéré :

$$[\forall \mathbf{u} \in E, \quad \mathcal{M}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0] \Rightarrow \mathbf{u} = 0 \quad (1.12)$$

Le tenseur métrique est étroitement lié à la définition du produit scalaire dans un espace vectoriel et à la notion de longueur dans un espace métrique. Le produit scalaire de deux vecteurs dans  $\mathbb{R}^2$  est défini, par rapport à une métrique  $\mathcal{M}$ , par :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{M}} = \langle \mathbf{u}, \mathcal{M}\mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \mathcal{M} \mathbf{v} \in \mathbb{R} \quad (1.13)$$

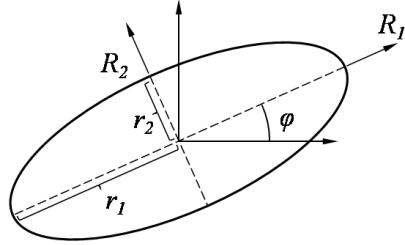
À partir de ce résultat, la norme euclidienne se traduit alors par :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{M}} = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathcal{M}}} = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathcal{M} \mathbf{u}} \quad (1.14)$$

et elle mesure la longueur du vecteur  $\mathbf{u}$  par rapport à la métrique  $\mathcal{M}$ .

Géométriquement, une métrique est représentée par son cercle unité, soit une ellipse en 2D (un ellipsoïde en 3D). Les axes principaux de l'ellipse sont alignés avec les vecteurs propres du tenseur, et la longueur des rayons est l'inverse de la racine carrée des valeurs propres respectives ( $r_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$  et  $r_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$ ). Rappelons que par ses propriétés le tenseur métrique  $\mathcal{M}$  admet toujours une diagonalisation propre, qui s'écrit comme suit :

$$\mathcal{M} = R_{\phi} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} R_{\phi}^T \quad R_{\phi} = [\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2] \quad (1.15)$$

FIGURE 1.3 Cercle unité de la métrique  $\mathcal{M}$ 

où  $R_\phi$  est la matrice de rotation composée des vecteurs propres  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$ , et auxquels sont associés les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

Comme nous le verrons dans les prochains chapitres, les composantes du tenseur métrique, ou plus simplement la métrique, sont définies à partir de la matrice hessienne. Cette matrice n'est toutefois pas nécessairement définie positive et peut aussi être dégénérée. Ce cas particulier sera abordé plus loin. L'expression ci-dessous permet d'établir une relation entre la métrique et la matrice hessienne :

$$\mathcal{M} = |H| = R_\phi \begin{bmatrix} |\lambda_1| & 0 \\ 0 & |\lambda_2| \end{bmatrix} R_\phi^T \quad \text{où } |\lambda_1| \geq |\lambda_2| > 0 \quad (1.16)$$

Nous obtenons la matrice hessienne modifiée  $|H|$  en prenant la valeur absolue des valeurs propres,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , de la matrice hessienne  $H$ . La matrice hessienne prend alors la forme d'un tenseur métrique. Les directions associées aux valeurs propres sont les vecteurs propres, représentés ici par la matrice de rotation  $R_\phi$ . Rappelons que la borne d'erreur de l'équation 1.7 définit une borne anisotrope, puisque l'erreur n'est pas la même dans toutes les directions.

La métrique est une transformation affine de l'espace physique anisotrope vers un espace virtuel isotrope. Un élément étiré et orienté dans l'espace physique selon la métrique, devient équilatéral et unitaire lorsqu'il est transformé dans l'espace virtuel isotrope. L'étirement et l'orientation de l'élément dans l'espace physique assurent l'équirépartition de l'erreur dans toutes les directions. Ainsi, nous minimisons l'erreur d'interpolation pour un élément triangulaire linéaire ayant une certaine aire, en étirant cet élément selon le ratio d'anisotropie défini précédemment et en l'orientant dans la direction de la courbure minimum. Cet élément offre alors une meilleure précision qu'un élément triangulaire équilatéral de même aire. Plusieurs travaux qui portent sur l'utilisation de métrique continue basée sur le Hessien ont étudié ce comportement pour différents écoulements, entre autres [17][8][13][4][24][2][22][47, 46]. Citons en particulier [55] sur la génération de maillages anisotropes pour les éléments finis.

Les meilleurs anisotropes non structurés, quel que soit leur type (Delaunay, avance de front ou autre), utilisent le principe de calcul de distance par rapport à une métrique continue dans leur algorithme de génération d'élément. Le calcul de longueur dans l'espace virtuel permet de construire un *maillage unité* par rapport à une métrique continue définie sur le domaine  $\Omega$ . Ce *maillage unité* est isotrope et ses éléments sont unitaires (ou presque). Pour un élément triangulaire non dégénéré dans l'espace physique, il existe une seule et unique métrique dans laquelle ce triangle est équilatéral et unitaire [55]. Il faut noter par contre qu'il existe une infinité de triangles non dégénérés dans l'espace physique qui sont équilatéraux dans une métrique donnée. Ils ont tous la même taille, la même aire et le même étirement. Par contre, leurs angles ne sont pas les mêmes. La métrique ne permet donc pas de contrôler les angles d'un élément. Il faut donc adopter un autre mécanisme pour contrôler l'angle maximal afin de minimiser l'erreur d'interpolation. Cette tâche revient aux meilleurs lors de la génération des éléments.

La fonction de taille pour les maillages isotropes peut être vue comme un cas particulier de la métrique qui s'écrit alors comme le produit de la matrice identité par un scalaire caractérisé par la taille  $h$  de l'élément :

$$\mathcal{M}(x) = \frac{1}{h^2(x)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

La taille est la même dans toutes les directions, et nous obtenons évidemment des éléments équilatéraux.

Une approche un peu différente est traitée dans [20][21][41][42][43][7]. Au lieu de calculer une métrique à partir de la matrice hessienne nécessitant l'évaluation des dérivées secondes de la solution, les auteurs utilisent le champ des dérivées premières pour le calcul d'un estimateur d'erreur anisotrope *a posteriori*. Il joue un rôle similaire à celui joué par l'estimateur d'erreur lors de l'adaptation isotrope. Cependant, nous cherchons à obtenir deux tailles dans les directions de courbures principales afin d'équirépartir l'erreur dans ces mêmes directions. Ceci permet de construire un maillage anisotrope dont l'erreur relative estimée est le plus près possible d'une tolérance prédéterminée. C'est un processus itératif; au fur et à mesure que nous avançons dans les itérations, les éléments s'aligneront et s'étireront de manière à atteindre un état d'équilibre. L'orientation des éléments est obtenue en évaluant les vecteurs propres d'une matrice symétrique positive, qui s'apparente à la matrice hessienne, mais qui ne fait intervenir que la norme des dérivées premières sur un élément. Le principal avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas l'évaluation des dérivées secondes, et qu'ainsi nous n'avons pas à nous soucier des erreurs d'approximation commises lors de l'évaluation de ces dernières. Par contre, la richesse de l'information dimensionnelle qu'elle dévoile est inférieure

à celle obtenue de la matrice hessienne. De plus, puisque l'estimateur d'erreur est développé pour un type bien spécifique d'équation aux dérivées partielles, l'algorithme d'adaptation doit tenir compte des équations devant être résolues, ce qui limite sa généralité.

### 1.3.4 Métrique optimale

Nous expliquons au chapitre 2 que la métrique, telle qu'elle est définie à l'équation 1.16, représente un niveau d'erreur d'interpolation locale. Nous cherchons ici à minimiser l'erreur d'interpolation globale afin d'obtenir un maillage optimal ayant un nombre de noeuds arbitraire. Puisque le maillage est défini par une métrique, nous recherchons donc la métrique optimale, définissant en chaque noeud un niveau d'erreur d'interpolation locale, qui permettra d'obtenir globalement le meilleur maillage. Ainsi, il est possible de définir une métrique optimale multi-échelle qui minimise l'erreur d'interpolation en norme  $L_p$  de façon à obtenir un maillage anisotrope optimal pour un nombre de noeuds  $N$  arbitrairement fixé. Ce principe a été introduit dans [14][16], et a été généralisé en 2 et 3 dimensions dans [3][32][31]. Nous expliquerons en détail le développement de l'expression de la métrique optimale en 2 dimensions. En dimension  $n$  pour un nombre de noeuds  $N$  l'expression finale de la métrique optimale est la suivante :

$$\mathcal{M}_{L^p} = D_{L^p} (\det|H|)^{\frac{-1}{2p+n}} R_\phi |\Lambda| R_\phi^T$$

$$\text{où } D_{L^p} = N^{\frac{2}{n}} \left( \int_{\Omega} \left| \prod_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right|^{\frac{p}{2p+n}} \right)^{\frac{-2}{n}} \quad \text{et} \quad |\Lambda| = \begin{bmatrix} |\lambda_1| & 0 \\ 0 & \ddots \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

## 1.4 Le Conditionnement de la matrice globale

La résolution du système d'équations en éléments finis est affectée par le conditionnement de la matrice globale du système d'équations. Le nombre de condition de cette matrice dépend entre autres de la mise à l'échelle du système d'équations, du choix de l'interpolant, et aussi des éléments du maillage, relativement à leur forme et à leur distribution. Nous nous intéressons ici un peu plus à l'impact des éléments sur le conditionnement. La distribution des éléments détermine leur taille et leur densité. Plus la densité des éléments est élevée, plus les éléments sont petits. Le conditionnement de la matrice élémentaire est inversement proportionnel à l'aire de l'élément. Donc plus un élément est petit, plus le conditionnement de la matrice élémentaire risque d'être grand. La forme de l'élément, reliée aux angles de celui-ci, influence aussi le conditionnement de la matrice élémentaire. Lorsque l'angle minimal  $\theta_{min}$  tend vers 0, le conditionnement peut devenir très grand, puisqu'il est proportionnel à

$\cot(\theta_{min})$ , qui tend alors vers l'infini. L'effet combiné des différentes matrices élémentaires affecte le conditionnement de la matrice globale du système d'équations.

Or le conditionnement de la matrice globale a un impact non négligeable sur la résolution du système d'équations. Par exemple, le taux de convergence et la stabilité des méthodes de résolution itératives sont grandement affectés par le nombre de condition de la matrice globale ; plus le nombre de condition est grand, plus l'efficacité des méthodes itératives à réduire le résidu du système d'équations est réduite. Le mauvais conditionnement peut aussi affecter la précision de la solution, et ce, autant pour les solveurs itératifs que pour les solveurs directs. L'importance des erreurs d'arrondis et d'arithmétique flottante est proportionnelle au conditionnement de la matrice et à la norme du résidu obtenue lors de la résolution du système d'équations. Par exemple, si nous considérons le système linéaire suivant :

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad (1.19)$$

où  $\vec{x}$  est la solution exacte. Si  $\vec{x}_h$  est la solution approximative, la norme de l'erreur peut s'exprimer ainsi :

$$\|\vec{e}\| = \|\vec{x} - \vec{x}_h\| \quad (1.20)$$

et le résidu par :

$$\vec{r} = \vec{b} - A\vec{x}_h \quad (1.21)$$

Il est alors possible d'écrire l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{\text{cond}A} \frac{\|\vec{r}\|}{\|\vec{b}\|} \leq \frac{\|\vec{e}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \text{cond}A \frac{\|\vec{r}\|}{\|\vec{b}\|} \quad (1.22)$$

Le terme du centre représente l'erreur relative de la solution. Si le conditionnement de la matrice  $A$  est grand, alors la valeur de l'erreur relative est comprise entre zéro et un nombre qui peut lui aussi être grand. Une grande erreur relative implique une solution approximative de faible précision. Si le nombre de condition est très grand, la solution peut même être complètement fausse. Par contre, si la norme du résidu est assez petite, il est possible de contrer l'effet d'un mauvais conditionnement. La borne supérieure de l'erreur relative est alors diminuée et nous pouvons obtenir une solution relativement précise. Pour la simulation des écoulements dans ce travail, nous avons utilisé des solveurs directs basés sur une factorisation approximative de la matrice stockée en format creux [48][49]. Ils se basent sur des algorithmes permettant d'obtenir une norme très faible sur le résidu de la solution. Ainsi, nous réduisons

l'impact d'un mauvais conditionnement sur la précision de la solution.

## 1.5 Reconstruction du Hessien

Une des étapes les plus cruciales dans l'adaptation de maillages anisotropes est sûrement la reconstruction des dérivées secondes. La métrique est directement liée aux dérivées secondes, et puisque ces dernières ne sont pas connues *a priori*, il est important d'avoir un bon algorithme de reconstruction. Une mauvaise métrique donnera un maillage qui est souvent mal adapté à la solution, donc un maillage non optimal. À partir de la solution discrète, il est possible par différentes techniques de reconstruire une approximation des dérivées secondes. Nous référons le lecteur aux articles suivants, [56] et [30], qui présentent une bonne comparaison entre différentes techniques de reconstruction des dérivées secondes dans le cadre de l'adaptation anisotrope. Dans le présent travail, nous avons opté pour une technique dite de double projection de type Zhu–Zienkiewicz sur des éléments triangulaires linéaires [29][60][61].

## 1.6 Éléments d'ordre élevé

En introduction, nous avons abordé les méthodes numériques d'ordre élevé. En éléments finis, il y a énormément de recherche effectuée à ce niveau, et les éléments isotropes d'ordre élevé sont maintenant relativement communs et répandus. Par contre, il y a encore peu d'exemples de maillages anisotropes d'ordre élevé. À ce jour, seulement quelques publications [10][11][12][37][31] ont abordé le sujet. La raison est fort simple. La métrique est un tenseur d'ordre 2 définissant une forme bilinéaire qui est reliée à l'erreur d'interpolation sur un élément linéaire par les dérivées secondes de la solution. Lorsque nous augmentons le degré du polynôme d'interpolation, nous changeons l'expression de l'erreur et ainsi le polynôme homogène la définissant. Par exemple, pour un élément quadratique l'expression de l'erreur est définie par les dérivées troisièmes représentées par un tenseur d'ordre trois. Les techniques de diagonalisation qui permettent de trouver les valeurs propres et vecteurs propres d'un tenseur d'ordre deux ne peuvent pas être généralisées aux tenseurs d'ordre supérieur. Il existe quelques techniques de diagonalisation pour les tenseurs symétriques d'ordre élevé [44][18][15]. Par ces techniques, nous obtenons une approximation d'une certaine forme de diagonalisation, puisque les tenseurs d'ordre élevé, contrairement aux tenseurs d'ordre 2, ne peuvent être complètement diagonalisés. Actuellement, ces techniques sont surtout utilisées dans l'analyse de signaux. Des travaux futurs pourraient envisager l'utilisation de techniques, telles que développées dans [15], pour le calcul de métriques équivalentes utilisées pour la génération de maillages anisotropes d'ordre élevé.

Dans [37], une approche différente utilisant une approximation du polynôme homogène

de l'erreur en série de Fourier pour obtenir un tenseur d'ordre 2 équivalent est présentée. Ce dernier induit une métrique pour la génération d'un maillage d'éléments linéaires, que nous enrichissons ensuite pour obtenir un maillage d'éléments quadratiques. Dans [12] et [31], un changement de coordonnées est effectué afin d'exprimer le polynôme homogène de l'erreur d'interpolation en coordonnées polaires. L'erreur s'exprime alors en fonction d'un rayon et d'un angle. La direction d'étirement correspond à l'angle qui coïncide avec l'erreur maximale. Le ratio d'anisotropie est ensuite obtenu par le biais de différentes propriétés géométriques de l'erreur. Une fois les paramètres obtenus, nous calculons une métrique pour la génération du maillage linéaire, qui est ensuite enrichi pour finalement aboutir à un maillage anisotrope quadratique. Cette dernière technique est relativement complexe et nécessite beaucoup de calcul. L'automatisme du processus est aussi incertain, surtout au niveau de l'évaluation de l'angle maximal.

## 1.7 Buts et objectifs

Le but de ce mémoire est premièrement d'expliquer, préciser et enrichir les concepts sur lesquels repose l'adaptation de maillages anisotropes non structurés par l'utilisation d'une métrique optimale. Deuxièmement, nous voulons établir l'utilité d'une telle méthode dans différentes situations en mécanique des fluides. Les objectifs sont les suivants :

- Développer un modèle d'erreur d'interpolation sur un élément linéaire ;
- Développer l'expression de la métrique optimale à partir du modèle d'erreur ;
- Élaborer un algorithme efficace pour le calcul de la métrique ;
- Implémenter l'algorithme dans un code existant ;
- Interfacer le remailleur surfacique *MeshAdapt* ;
- Évaluer la méthode d'adaptation par différentes applications.

### Applications aux écoulements classiques

Nous présentons différentes simulations en 2 dimensions pour les équations de Poisson et de Navier-Stokes pour illustrer les avantages de cette technique d'adaptation de maillage. Nous introduisons par la suite la méthode d'adaptation de maillage anisotrope par métrique optimale pour les écoulements axisymétriques.

### Applications aux écoulements instationnaires

Nous introduisons une nouvelle approche pour l'identification des structures lagrangiennes cohérentes d'écoulements instationnaires en 2 dimensions. Cette nouvelle approche facilite l'identification des structures présentes et permet d'améliorer leur définition. De plus, les exemples étudiés nous permettront de repousser les limites de la méthode d'adaptation de maillage anisotrope.

## CHAPITRE 2

### DÉVELOPPEMENT MATHÉMATIQUE

Ce chapitre met en place les bases mathématiques nécessaires à la compréhension de l'expression de la métrique optimale. Nous débutons par un rappel de l'erreur d'interpolation sur un élément linéaire. De cette expression, nous développons un modèle d'erreur qui conduit à l'expression de la métrique optimale. Nous présentons finalement les méthodes de calcul discret de cette métrique optimale.

### 2.1 Erreur d'interpolation

À partir d'une collection de points sur un espace  $\Omega$  donné, où nous connaissons la valeur d'une fonction  $u_i$  en chacun des points, il est possible de construire une approximation de la fonction  $u(x_0, \dots, x_n)$  en tous points  $(x_0, \dots, x_n)$  du domaine. Toutefois, nous introduisons de cette manière une erreur d'interpolation sur la fonction.

#### 2.1.1 Élément linéaire en dimension 1

Prenons une série de points de collocation  $x_0, x_1, \dots, x_n$  pour lesquels nous connaissons la valeur de la fonction  $u(x_i) = u_i$ . Il existe un polynôme  $p_n(x)$  de degré  $n$  qui nous permet d'obtenir une approximation de  $u(x)$  dont l'erreur d'interpolation est notée par  $E_n(x)$ .

$$u(x) = p_n(x) + E_n(x) \quad (2.1)$$

L'erreur est nulle aux points de collocation puisque le polynôme passe par ces points, donc

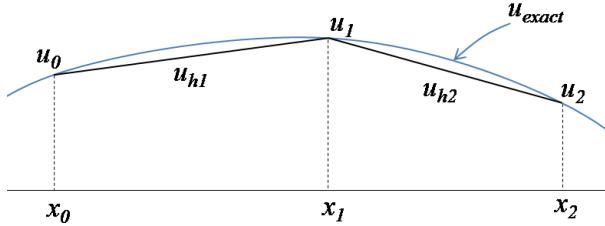


FIGURE 2.1 Interpolation linéaire de  $u(x)$

$u(x_i) = u_{exact}$ . Si nous supposons que la fonction  $u(x)$  est définie dans l'intervalle  $[x_0, x_n]$  et

qu'elle est  $n + 1$  fois dérivable dans l'intervalle  $]x_0, x_n[$ . Il existe alors une fonction  $\xi(x)$  dans l'intervalle  $]x_0, x_n[$  telle que :

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} u(\xi(x))}{\partial x^{n+1}} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \quad (2.2)$$

Sur un élément linéaire, défini par les points  $x_i$  et  $x_{i+1}$ ,  $n$  vaut 1 et l'expression de l'erreur d'interpolation sur un élément s'écrit :

$$E_1(x) = \frac{1}{(2)!} \frac{\partial^2 u(\xi(x))}{\partial x^2} (x - x_i)(x - x_{i+1}) \quad (2.3)$$

La fonction  $\xi(x)$  est inconnue, nous ne pouvons donc pas évaluer le terme d'erreur exacte. En prenant la valeur maximale du terme de dérivée seconde sur l'intervalle  $]x_i, x_{i+1}[$ ,

$$\left| \frac{\partial^2 u(\xi(x))}{\partial x^2} \right| \leq \max_{x \in ]x_i, x_{i+1}[} \left| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \right| = D_u^{(2)}$$

il est possible d'obtenir un majorant de l'erreur d'interpolation :

$$E_1(x) \leq \frac{D_u^{(2)}}{2} (x - x_i)(x - x_{i+1}) \quad (2.4)$$

La valeur maximale<sup>1</sup> du terme de droite est :

$$\max |(x - x_i)(x - x_{i+1})| = \frac{h^2}{4}$$

de sorte que la borne supérieure de l'erreur d'interpolation sur un élément linéaire s'écrit :

$$|E_1(x)| \leq \frac{D_u^{(2)}}{8} h^2 \quad (2.5)$$

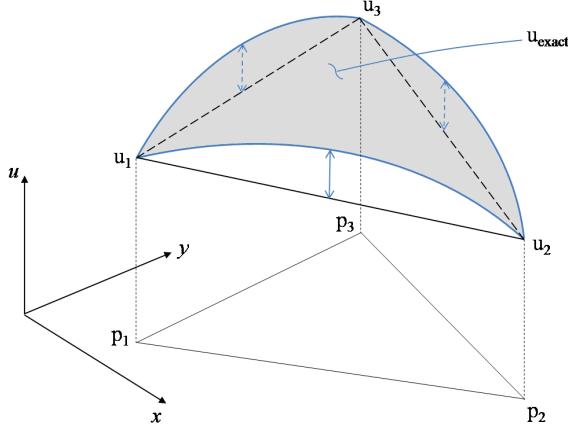
où  $h$  représente la taille de l'élément.

### 2.1.2 Élément linéaire en dimension 2

Un élément linéaire en dimension 2 peut être représenté par un triangle formé par trois nœuds, tel qu'illustré à la figure 2.2. L'erreur d'interpolation mesure la différence entre la solution exacte  $u$  et la solution approximée  $u_h$  obtenue par le calcul éléments finis. Comme pour le cas 1D, nous supposons ici que la valeur aux sommets des éléments est connue et correspond à la valeur exacte de la solution. Le triangle formé des sommets  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$

---

1. Le développement complet se trouve à l'annexe A.

FIGURE 2.2 Interpolation linéaire de  $u(x, y)$ 

représente la solution interpolée entre ces trois points. Nous pouvons facilement voir qu'il y a une différence entre la solution exacte et la solution interpolée. C'est précisément cette différence que nous voulons mesurer. Nous développons dans ce qui suit une estimation de l'erreur d'interpolation pour une approximation de la solution par éléments finis en dimension 2 sur un élément triangulaire linéaire. L'expression de l'erreur est d'abord développée sur un élément de référence, et sera par la suite transformée dans l'espace physique pour faire intervenir la géométrie de l'élément, soit sa forme et ses dimensions.

En éléments finis, nous utilisons le concept d'élément de référence pour simplifier les calculs. L'élément de référence  $V_r$ , tel que montré à la figure 2.3, est un élément de forme simple défini dans un espace de référence  $\Omega_r$ , et qui est associé par une transformation affine  $\tau$  à un élément  $V_e$  du domaine réel  $\Omega_e$ . Dans l'espace de référence les coordonnées sont

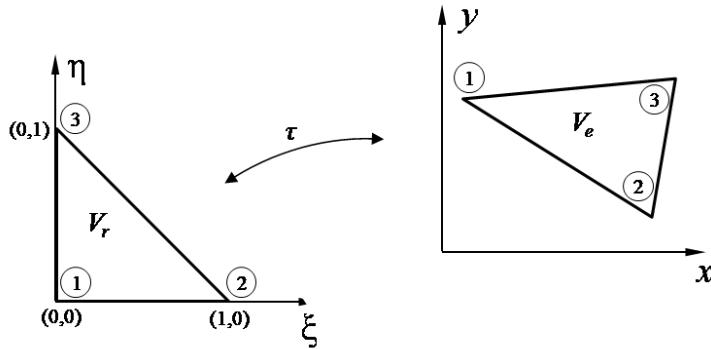


FIGURE 2.3 Élément de référence et élément réel

représentées par le vecteur  $\xi$ , tandis que dans l'espace physique elles sont représentées par le

vecteur  $\mathbf{x}$ . Nous définissons alors la transformation  $\tau$  telle que :

$$\tau : \boldsymbol{\xi} \rightarrow \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \left[ N(\boldsymbol{\xi}) \right] \mathbf{x}_n \quad \text{où} \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Le vecteur  $\mathbf{N}(\xi, \eta)$  s'écrit à l'aide des fonctions de transformation de l'élément et qui, pour un élément linéaire, sont les mêmes que les fonctions d'interpolation sur l'élément de référence.

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta ; & \xi ; & \eta \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Ces fonctions sont indépendantes de la géométrie de l'élément réel. Ce qui nous permet de développer une expression générale de l'erreur d'interpolation sur l'élément de référence, indépendante de la géométrie des éléments réels. De plus, la transformation  $\tau$  étant linéaire les conclusions relatives à l'approximation  $u_h(\boldsymbol{\xi})$  sur l'élément de référence se transposent directement sur l'approximation  $u_h(\mathbf{x})$  de l'élément réel. Ainsi, nous pouvons étendre les conclusions sur l'erreur d'interpolation de l'élément de référence à tout élément réel du domaine physique, tant que ce dernier peut être caractérisé par cet élément de référence.

### Solution exacte

La solution exacte  $u(\xi, \eta)$  sur l'élément de référence peut être développée en série de Taylor autour du point  $\xi = 0, \eta = 0$ .

$$u(\xi, \eta) = u|_0 + \xi \frac{\partial u}{\partial \xi}|_0 + \eta \frac{\partial u}{\partial \eta}|_0 + \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|_{\bar{\boldsymbol{\xi}}} + \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}|_{\bar{\boldsymbol{\xi}}} + \xi \eta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}|_{\bar{\boldsymbol{\xi}}} + \dots \quad (2.8)$$

où  $\bar{\boldsymbol{\xi}}$  dénote le point où sont évaluées les dérivées secondes :

$$\bar{\boldsymbol{\xi}} = (\bar{\xi}, \bar{\eta}) \in V_r$$

En notation vectorielle l'expression devient :

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \langle \mathbf{P}, \boldsymbol{\delta u} \rangle + T_{Sup} \\ \text{où} \quad \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \text{ est la base polynomiale} \\ \boldsymbol{\delta u} &= \begin{bmatrix} u|_0 & \frac{\partial u}{\partial \xi}|_0 & \frac{\partial u}{\partial \eta}|_0 \end{bmatrix} \\ T_{Sup} &= \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}|_{\bar{\boldsymbol{\xi}}} + \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}|_{\bar{\boldsymbol{\xi}}} + \xi \eta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}|_{\bar{\boldsymbol{\xi}}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Nous limitons les termes d'ordre supérieur à l'ordre 2. La notation  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire de deux vecteurs.

### Solution numérique

La solution numérique est exprimée sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions de la base polynomiale  $\mathbf{P}$ .

$$u_h(\xi, \eta) = a_0 + a_1\xi + a_2\eta = \langle \mathbf{P}, \mathbf{a} \rangle \quad (2.10)$$

Aux  $n$  nœuds de l'élément, l'expression de la solution prend la forme :

$$\mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} P_n \end{bmatrix} \mathbf{a}$$

où  $\begin{bmatrix} P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$

et puisqu'aux nœuds la valeur de l'approximation coïncide avec la solution exacte, nous avons :

$$\mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} P_n \end{bmatrix} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} P_n \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta u} + \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{Sup} \end{bmatrix}$$

où  $\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{Sup} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{Sup}|_n \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.12)$

$$T_{Sup}|_n = \frac{\xi_n^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right|_{\bar{\xi}} + \frac{\eta_n^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right|_{\bar{\xi}} + \xi_n \eta_n \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{\bar{\xi}}$$

Nous pouvons finalement isoler le vecteur  $\boldsymbol{\delta u}$  :

$$\boldsymbol{\delta u} = \mathbf{a} - \begin{bmatrix} P_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{Sup} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

En remplaçant le terme  $\boldsymbol{\delta u}$  dans l'équation 2.9 par l'expression de 2.13, nous pouvons réécrire la solution exacte de la façon suivante :

$$u(\xi, \eta) = \langle \mathbf{P}, \mathbf{a} \rangle - \mathbf{P} \begin{bmatrix} P_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{Sup} \end{bmatrix} + T_{Sup} \quad (2.14)$$

Le vecteur  $\mathbf{N}$  peut exprimer le produit suivant :

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \begin{bmatrix} P_n \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta & \xi & \eta \end{bmatrix} = \mathbf{N}\end{aligned}$$

Ce qui réduit la solution exacte à l'expression suivante :

$$u(\xi, \eta) = \langle \mathbf{P}, \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{N}, [\mathbf{T}_{Sup}] \rangle + T_{Sup} \quad (2.15)$$

### Borne supérieure de l'erreur d'interpolation

L'erreur d'interpolation est la différence entre la solution numérique et la solution exacte. À partir des équations 2.10 et 2.15, nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned}E(\xi, \eta) &= |u_h(\xi, \eta) - u(\xi, \eta)| \\ &= \left| \langle \mathbf{P}, \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{P}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{N}, [\mathbf{T}_{Sup}] \rangle - T_{Sup} \right| \\ &= \left| \langle \mathbf{N}, [\mathbf{T}_{Sup}] \rangle - T_{Sup} \right|\end{aligned} \quad (2.16)$$

Les termes du vecteur  $[\mathbf{T}_{Sup}]$  prennent les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}T_{Sup}|_1 &= T_{Sup}(\xi_1, \eta_1) = 0 \\ T_{Sup}|_2 &= T_{Sup}(\xi_2, \eta_2) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \Big|_{\bar{\xi}} \\ T_{Sup}|_3 &= T_{Sup}(\xi_3, \eta_3) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \Big|_{\bar{\xi}}\end{aligned} \quad (2.17)$$

Nous obtenons ainsi l'erreur d'interpolation sur l'élément de référence.

$$E(\xi, \eta) = \left| \frac{\xi}{2} (1 - \xi) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \Big|_{\bar{\xi}} + \frac{\eta}{2} (1 - \eta) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \Big|_{\bar{\xi}} - \xi \eta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \Big|_{\bar{\xi}} \right| \quad (2.18)$$

Les termes  $\frac{\xi}{2}(1 - \xi)$ ,  $\frac{\eta}{2}(1 - \eta)$  et  $\xi \eta$  s'annulent tous aux sommets de l'élément, ce qui respecte l'hypothèse que l'approximation  $u_h(\xi, \eta)$  coïncide avec la solution exacte  $u(\xi, \eta)$  aux noeuds. Cette expression représente l'erreur d'interpolation sur l'élément de référence. Nous ne connaissons pas les valeurs des dérivées secondes, et il est donc impossible d'évaluer

l'équation 2.18. De plus, il est difficile de borner cette équation puisque la position et la valeur maximale de l'erreur sont inconnues. Toutefois, nous pouvons considérer l'erreur  $\bar{E}(\xi, \eta)$  sur les arêtes de l'élément qui s'écrit comme suit :

$$\bar{E}_i(\xi, \eta) = k_i \mathbf{e}_i^T \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{bmatrix}_{\bar{\xi}} \mathbf{e}_i = k_i \langle \mathbf{e}_i, \mathcal{H}_u(\bar{\xi}) \mathbf{e}_i \rangle \quad (2.19)$$

où  $\mathbf{e}$  correspond à un des vecteurs définissant les arêtes du triangle,  $k_i$  un scalaire qui tient compte de la position  $(\xi, \eta)$  sur l'arête, et  $\mathcal{H}_u(\bar{\xi})$  est la matrice hessienne dans la base de référence  $\xi - \eta$ . Ainsi pour les trois arêtes de l'élément nous avons :

$$\begin{aligned} \bar{E}_a(\xi, \eta) &= k_a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \mathcal{H}_u(\bar{\xi}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bar{E}_b(\xi, \eta) &= k_b \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}^T \mathcal{H}_u(\bar{\xi}) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \bar{E}_c(\xi, \eta) &= k_c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \mathcal{H}_u(\bar{\xi}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.20)$$

où les scalaires  $k_i$  sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} k_a &= \frac{\xi}{2}(1 - \xi) \\ k_b &= \frac{\xi}{2}(1 - \xi) = \frac{\eta}{2}(1 - \eta) = \xi\eta \\ k_c &= \frac{\eta}{2}(1 - \eta) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ils atteignent tous leur valeur maximale au milieu de l'arête, soit lorsque  $\xi = \frac{1}{2}$  et/ou  $\eta = \frac{1}{2}$ , et valent alors :

$$k_a = k_b = k_c = \frac{1}{8}$$

L'erreur d'interpolation sur l'arête atteint aussi son maximum au milieu de celle-ci. Nous pouvons donc définir la borne supérieure de l'erreur d'interpolation sur les arêtes comme

suit :

$$\begin{aligned}\bar{E}_{max} &= \max \left[ \left| \bar{E}_a \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right|, \left| \bar{E}_b \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right|, \left| \bar{E}_c \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right| \right] \\ &= \frac{1}{8} \left| \langle \mathbf{e}_{max}, \mathcal{H}_u(\bar{\xi}) \mathbf{e}_{max} \rangle \right|\end{aligned}\quad (2.22)$$

où  $\mathbf{e}_{max}$  représente le vecteur définissant l'arête où se trouve l'erreur  $\bar{E}_{max}$ . Si nous posons que l'erreur maximale  $\bar{E}_{max}$  sur les arêtes est représentative de l'erreur maximale  $E_{max}$  sur l'élément, nous avons :

$$E_{max} \approx \bar{E}_{max} = \frac{1}{8} \left| \langle \mathbf{e}_{max}, \mathcal{H}_u(\bar{\xi}) \mathbf{e}_{max} \rangle \right| \quad (2.23)$$

Cette dernière expression est vraie si la valeur maximale de l'erreur de l'élément se trouve sur une des arêtes. Ce qui n'est pas toujours le cas. Toutefois, nous considérons que cette borne supérieure de l'erreur sur les arêtes est une bonne approximation de l'erreur d'interpolation maximale de l'élément de référence. Nous pouvons alors considérer cette expression afin de borner l'erreur d'interpolation sur l'élément :

$$E(\xi, \eta) \leq \frac{1}{8} \left| \langle \mathbf{e}_{max}, \mathcal{H}_u(\bar{\xi}) \mathbf{e}_{max} \rangle \right| \quad (2.24)$$

Si nous considérons que l'erreur maximale se trouve sur l'arête définie par le vecteur  $\mathbf{e}_{max} =$

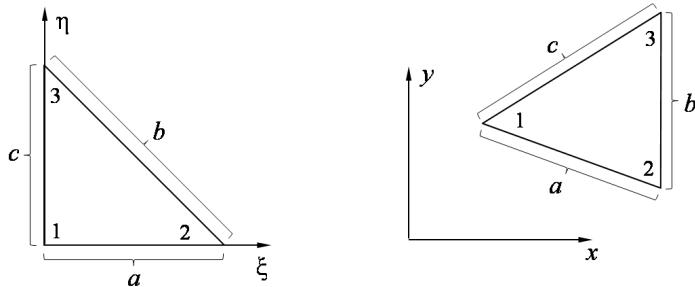


FIGURE 2.4 Disposition des arêtes sur l'élément de référence et l'élément physique.

[1 – 1], soit sur l'arête  $b$  de l'élément de référence sur la figure 2.4, nous obtenons l'expression suivante<sup>2</sup> :

$$E(\xi, \eta) \leq \frac{1}{8} \left| \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right]_{\bar{\xi}} \right| \quad (2.25)$$

2. Nous obtenons le même résultat final en considérant les arêtes  $a$  ou  $c$ .

Cette équation représente une approximation de la borne supérieure de l'erreur d'interpolation sur l'élément de référence. En transformant<sup>3</sup> cette borne dans l'espace physique nous obtenons une approximation de la borne supérieure de l'erreur d'interpolation suivante :

$$\begin{aligned} E(x, y) &\leq \frac{1}{8} \left| \left[ x_b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y_b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x_b y_b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right]_{\bar{x}} \right| \\ &\leq \frac{1}{8} \left| \begin{bmatrix} x_b & y_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{\bar{x}} \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \end{bmatrix} \right| \end{aligned} \quad (2.26)$$

où le vecteur  $[x_b \ y_b]$  correspond à l'arête  $b$  du triangle de l'espace physique de la figure 2.4. Si nous définissons le vecteur  $\mathbf{L}$  comme étant cette arête du triangle, nous obtenons finalement le terme d'erreur suivant :

$$E(x, y) \leq \frac{1}{8} |\langle \mathbf{L}, H_u(\bar{x}) \mathbf{L} \rangle| \quad (2.27)$$

La matrice  $H_u$  est la matrice hessienne de la solution  $u$  évaluée au point  $\bar{x}$  de l'espace physique correspondant au point  $\bar{\xi}$  de l'espace de référence et défini comme suit :

$$\bar{x} = (\bar{x}, \bar{y}) \in V_e$$

Ces points permettent d'évaluer l'erreur telle qu'exprimée par les équations 2.24 et 2.26, mais leur position est généralement inconnue. Lors du développement de la borne supérieure de l'erreur en 1D, nous avons obtenu une expression similaire et avons borné l'erreur par la valeur maximale de la dérivée seconde sur l'élément. De la même façon ici, nous majorons l'erreur en considérant le point à l'intérieur du triangle pour lequel le Hessien est maximum.

$$E(x, y) \leq \frac{1}{8} |\langle \mathbf{L}, H_u(\bar{x}) \mathbf{L} \rangle| \leq \left| \frac{1}{8} \max_{\mathbf{x} \in V_e} \langle \mathbf{L}, H_u(\mathbf{x}) \mathbf{L} \rangle \right|$$

De plus, il est possible de démontrer<sup>4</sup> que :

$$|\langle \mathbf{L}, H_u \mathbf{L} \rangle| \leq \langle \mathbf{L}, |H_u| \mathbf{L} \rangle \quad (2.28)$$

---

3. Pour les détails de la transformation voir l'annexe B.  
4. Voir l'annexe C pour la démonstration.

où selon la décomposition propre du Hessien

$$|H_u| = R_\phi |\Lambda| R_\phi^T$$

$R_\phi$  étant la matrice des vecteurs propres de  $H_u$

$$|\Lambda| = \begin{bmatrix} |\lambda_1| & 0 \\ 0 & |\lambda_2| \end{bmatrix}$$

$\lambda_1$  et  $\lambda_2$  étant les valeurs propres de  $H_u$

Ce qui entraîne que l'erreur d'interpolation sur un élément  $k$  est bornée par :

$$E_k \leq \frac{1}{8} \max_{\mathbf{x} \in k} \langle \mathbf{L}, |H_u(\mathbf{x})| \mathbf{L} \rangle \quad (2.29)$$

Cette approximation de la borne supérieure de l'erreur d'interpolation est similaire à celles développées dans plusieurs travaux cités précédemment. Elles sont toutes similaires à une constante près. Par exemple dans [40] nous avons considéré une valeur moyenne de l'erreur sur l'élément, ce qui donne une constante plus petite. Dans [3] et [16], les auteurs ont développé plusieurs bornes selon la dimension spatiale de l'élément en jeu. En prenant une moyenne de l'erreur à partir des différents sommets de l'élément et en prenant l'extremum du vecteur  $\mathbf{L}$  par rapport au centre de gravité de l'élément, les auteurs obtiennent des bornes égales ou légèrement supérieures à celles que nous obtenons. Cependant, la valeur de cette constante ne change rien aux développements qui suivent, et n'a aucune influence sur l'expression finale de la métrique optimale. C'est pour cette raison que nous considérons que cette constante vaut 1. L'expression de l'approximation de la borne supérieure de l'erreur d'interpolation prend ainsi la forme ci-dessous :

$$E_k \leq \max_{\mathbf{x} \in k} \langle \mathbf{L}, |H_u(\mathbf{x})| \mathbf{L} \rangle \quad (2.30)$$

D'autre part, si nous considérons seulement la valeur maximale des trois composantes de la matrice hessienne comme une constante sur l'élément, alors l'équation 2.30 prend la forme de l'équation 1.3. La borne supérieure de l'erreur dépend ainsi seulement de la taille de l'élément et ne tient pas compte du caractère anisotrope de la solution.

## 2.2 Modèle d'erreur en 2 dimensions

Considérons un point  $a$  appartenant au domaine  $\Omega_e$ . Nous visons à contrôler l'erreur à proximité de ce point, de façon à obtenir :

$$E_a \leq \max_{\mathbf{x} \in \tau(a)} |u(\mathbf{x}) - u_h(\mathbf{x})|$$

où  $\tau(a)$  représente l'ensemble des éléments qui ont le point  $a$  comme sommet.

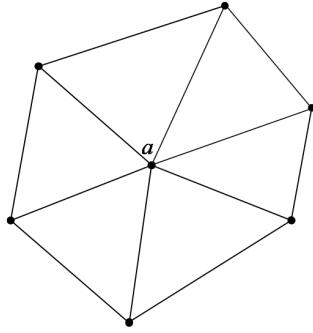


FIGURE 2.5 Ensemble  $\tau(a)$  des triangles autour du point  $a$

L'approximation de la borne supérieure de l'erreur d'interpolation sur un élément  $k$  est donnée par l'équation 2.30. La borne supérieure de l'erreur d'interpolation au point  $a$  par rapport à l'ensemble des éléments de  $\tau(a)$  est alors donnée par :

$$E_a \leq \max_{k \in \tau(a)} \max_{\mathbf{x} \in k} \langle \mathbf{L}, |H_u(\mathbf{x})| \mathbf{L} \rangle \quad (2.31)$$

Cette majoration de l'erreur d'interpolation nous indique que cette erreur est proportionnelle au produit  $\langle \mathbf{L}, |H_u(\mathbf{x})| \mathbf{L} \rangle$  où le vecteur  $\mathbf{L}$  et la matrice  $H_u$  sont définis sur l'ensemble  $\tau(a)$ . Nous cherchons à représenter cette majoration, donc l'erreur d'interpolation au point  $a$ , à l'aide d'une expression qui possède des propriétés analogues à cette majoration. Nous proposons ainsi le modèle d'erreur d'interpolation locale ci-dessous :

$$E_a = \langle \mathbf{L}, |H_u(a)| \mathbf{L} \rangle \quad (2.32)$$

où  $\mathbf{L}$  est un vecteur de  $\tau(a)$  défini par  $\mathbf{L} = \{\vec{ab} \mid b \in \tau(a)\}$ . Ce modèle respecte la forme de l'expression 2.31, et nous permet de représenter l'erreur d'interpolation sous une forme un peu plus simple.

### 2.2.1 Orientation optimale du vecteur $\mathbf{L}$

Nous cherchons l'orientation du vecteur  $\mathbf{L}$  qui permet d'obtenir les extrema du modèle d'erreur locale précédent. Ce vecteur peut être écrit dans la base orthonormale des vecteurs propres,  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{t}$ , de la matrice hessienne.

$$\mathbf{L} = \alpha_s \mathbf{s} + \alpha_t \mathbf{t}$$

où  $\alpha_s$  et  $\alpha_t$  sont des scalaires définis par  $\|\mathbf{L}\| = \sqrt{\alpha_s^2 + \alpha_t^2}$ . La matrice hessienne peut être décomposée en terme de ses vecteurs propres et de ses valeurs propres, où nous définissons les vecteurs propres,  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{t}$ , associés respectivement aux valeurs propres  $\lambda_s$  et  $\lambda_t$ .

$$|H_u(a)| = \left[ \begin{Bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix} \right] \begin{bmatrix} |\lambda_s| & \\ & |\lambda_t| \end{bmatrix} \left[ \begin{Bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix} \right]^T \quad (2.33)$$

Par conséquent, nous pouvons développer le produit scalaire de l'équation 2.32 comme suit :

$$E_a = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{L}, \mathbf{s} \rangle & \langle \mathbf{L}, \mathbf{t} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\lambda_s| & \\ & |\lambda_t| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \mathbf{L}, \mathbf{s} \rangle & \langle \mathbf{L}, \mathbf{t} \rangle \end{bmatrix}^T$$

$$E_a = \langle \mathbf{L}, \mathbf{s} \rangle^2 |\lambda_s| + \langle \mathbf{L}, \mathbf{t} \rangle^2 |\lambda_t|$$

$$E_a = \alpha_s^2 |\lambda_s| + \alpha_t^2 |\lambda_t| \quad (2.34)$$

De cette manière, en exprimant le vecteur  $\mathbf{L}$  dans la base orthonormale  $(\mathbf{s} - \mathbf{t})$ , il est possible de faire pivoter le vecteur  $\mathbf{L}$  autour du point  $a$ . La contrainte imposée sur  $\alpha_s$  et  $\alpha_t$  préserve la norme du vecteur.

#### Extremum de l'erreur locale

Nous désirons optimiser l'erreur locale  $E_a$  selon les coefficients  $\alpha_s$  et  $\alpha_t$  pour en déduire l'orientation optimale du vecteur  $\mathbf{L}$ . Nous cherchons donc :

$$\min_{\alpha_s, \alpha_t} E_a = \alpha_s^2 |\lambda_s| + \alpha_t^2 |\lambda_t| \quad (2.35)$$

sous la contrainte :

$$\alpha_s^2 + \alpha_t^2 = \|\mathbf{L}\|^2 \quad (2.36)$$

Ce problème d'optimisation nous amène à considérer la fonctionnelle  $F$  ci-dessous :

$$F(\alpha_s, \alpha_t, C) = \alpha_s^2 |\lambda_s| + \alpha_t^2 |\lambda_t| + C (\alpha_s^2 + \alpha_t^2 - \|\mathbf{L}\|^2) \quad (2.37)$$

où  $C$  est le multiplicateur de Lagrange. Les variations de  $F$  par rapport aux trois variables sont les suivantes :

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_s} = 2\alpha_s |\lambda_s| + 2C\alpha_s = \alpha_s (|\lambda_s| + C) = 0 \quad (i)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_t} = 2\alpha_t |\lambda_t| + 2C\alpha_t = \alpha_t (|\lambda_t| + C) = 0 \quad (ii)$$

$$\frac{\partial F}{\partial C} = \alpha_s^2 + \alpha_t^2 - \|\mathbf{L}\|^2 = 0 \quad (iii)$$

Du résultat (i), nous pouvons dans un premier temps considérer que le coefficient  $\alpha_s$  vaut zéro. Ce qui implique par la relation (iii) que le coefficient  $\alpha_t = \|\mathbf{L}\|$ , et que l'erreur prend la forme suivante :

$$E_t = \alpha_t^2 |\lambda_t| = \|\mathbf{L}\|^2 |\lambda_t|$$

À partir du résultat (ii), nous trouvons une relation similaire à la première soit que si le coefficient  $\alpha_t$  vaut zéro, alors  $\alpha_s = \|\mathbf{L}\|$  et l'erreur prend la forme ci-dessous :

$$E_s = \alpha_s^2 |\lambda_s| = \|\mathbf{L}\|^2 |\lambda_s|$$

Ces résultats nous montrent premièrement qu'il existe un maximum et un minimum pour le modèle d'erreur. Deuxièmement, ces extrema sont alignés avec les vecteurs propres de la matrice hessienne. Les deux équations d'erreur obtenues représentent les valeurs extrêmes de l'erreur locale  $E_a$ , et nous obtenons le résultat important suivant :

$$\begin{aligned} \text{Si } |\lambda_s| < |\lambda_t| & : & E_{min} &= \|\mathbf{L}\|^2 |\lambda_s| \\ & & E_{max} &= \|\mathbf{L}\|^2 |\lambda_t| \\ \text{Si } |\lambda_s| > |\lambda_t| & : & E_{min} &= \|\mathbf{L}\|^2 |\lambda_t| \\ & & E_{max} &= \|\mathbf{L}\|^2 |\lambda_s| \end{aligned} \quad (2.38)$$

et finalement,

$$\begin{aligned}
 \text{Si } |\lambda_s| < |\lambda_t| : & \quad E_{min} \text{ est aligné avec le vecteur } \mathbf{s} \\
 & \quad E_{max} \text{ est aligné avec le vecteur } \mathbf{t} \\
 \text{Si } |\lambda_s| > |\lambda_t| : & \quad E_{min} \text{ est aligné avec le vecteur } \mathbf{t} \\
 & \quad E_{max} \text{ est aligné avec le vecteur } \mathbf{s}
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

D'autre part, si nous reprenons le résultat (i) et que nous considérons maintenant que  $C + |\lambda_s| = 0$ , soit que  $C = -|\lambda_s|$ . En remplaçant le multiplicateur de Lagrange dans le résultat (ii) par cette valeur, nous obtenons alors la relation suivante :

$$|\lambda_t| - |\lambda_s| = 0$$

Soit que  $|\lambda_s|$  et  $|\lambda_t|$  sont de mêmes valeurs. L'erreur prend alors la forme qui suit :

$$E = \alpha_s^2 |\lambda| + \alpha_t^2 |\lambda| = (\alpha_s^2 + \alpha_t^2) |\lambda| = \|\mathbf{L}\|^2 |\lambda|$$

Cette condition impose une erreur locale constante et indépendante de l'orientation du vecteur  $\mathbf{L}$ , donc équirépartie dans les directions  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{t}$ , soit celles des vecteurs propres de  $H_u(a)$ .

### 2.2.2 Erreur locale optimale

Reprenons l'équation 2.34 exprimant le modèle d'erreur locale au point  $a$ ,

$$E_a = \alpha_s^2 |\lambda_s| + \alpha_t^2 |\lambda_t|$$

et considérons le cas où  $|\lambda_s| < |\lambda_t|$ . Pour mieux illustrer le comportement de l'erreur autour du point  $a$ , nous transformons l'équation en coordonnées cylindriques. Les coefficients deviennent alors :

$$\alpha_s = r \cos \theta \quad \text{et} \quad \alpha_t = r \sin \theta$$

où  $\theta$  est l'angle entre le vecteur  $\mathbf{L}$  et le vecteur propre  $\mathbf{s}$  et  $r$  est égale à la longueur du vecteur  $\mathbf{L}$ . L'équation 2.34 prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 E_a(r, \theta) &= r^2 \cos^2 \theta |\lambda_s| + r^2 \sin^2 \theta |\lambda_t| \\
 &= \|\mathbf{L}\|^2 \cos^2 \theta |\lambda_s| + \|\mathbf{L}\|^2 \sin^2 \theta |\lambda_t| \\
 &= E_{min}(r) \cos^2 \theta + E_{max}(r) \sin^2 \theta
 \end{aligned}$$

D'une part, nous voyons clairement apparaître les valeurs extrêmes définies précédemment par 2.38. Ces extrema sont indépendants de l'orientation du vecteur  $\mathbf{L}$ . D'autre part, nous distinguons mieux la forme du modèle d'erreur qui peut être représenté par un paraboloïde elliptique dont l'équation est donnée par :

$$z(r, \theta) = \left( \frac{r \cos \theta}{a} \right)^2 + \left( \frac{r \sin \theta}{b} \right)^2 \quad \text{où} \quad a = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_s|}} \quad b = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_t|}}$$

et qui est illustré à la figure 2.6. Si nous considérons le modèle d'erreur pour un vecteur  $\mathbf{L}$  de

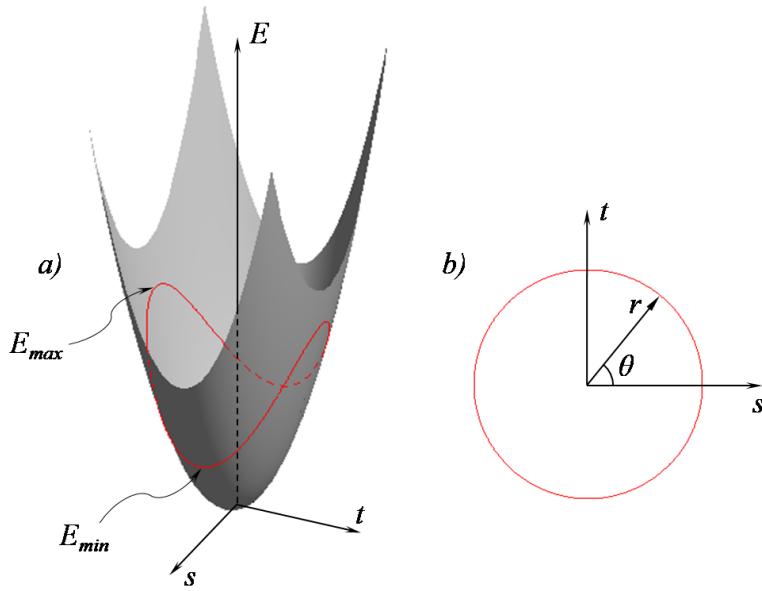


FIGURE 2.6 Forme de l'erreur locale : a) l'erreur est représentée par la courbe sur le paraboloïde elliptique b) vue plan de l'erreur qui est fonction de  $r$  et  $\theta$

longueur fixe, alors nous obtenons l'équation d'une courbe, qui peut être illustrée à la figure 2.6 par la courbe noire. Elle représente le modèle d'erreur locale pour un vecteur de longueur fixe et correspond à l'expression ci-dessous :

$$E_a(\theta) = E_{min} \cos^2 \theta + E_{max} \sin^2 \theta$$

Notre but est d'équirépartir l'erreur dans toutes les directions, et du même coup de minimiser le modèle d'erreur locale. Nous voulons de manière générale que les deux valeurs extrêmes qui composent l'erreur locale soient de mêmes amplitudes.

$$E_{max} = E_{min}$$

Nous voulons réduire l'influence de  $E_{max}$  pour obtenir un niveau d'erreur constant correspondant à  $E_{min}$ . Ce qui mène au ratio ci-dessous, qui est le même ratio d'anisotropie que celui défini par l'équation 1.9.

$$\begin{aligned} E_{max} &= E_{min} \\ r_{max}^2 |\lambda_{max}| &= r_{min}^2 |\lambda_{min}| \\ s &= \frac{r_{min}}{r_{max}} = \sqrt{\frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}} \end{aligned}$$

Comme nous l'avons vu précédemment, en ayant des valeurs propres identiques l'erreur est automatiquement équirépartie. Cependant, nous ne contrôlons pas les valeurs propres, puisqu'elles font partie des données du problème. En revanche, il n'y a aucune contrainte sur les rayons  $r_{min}$  et  $r_{max}$  autre que celle imposée pour la longueur du vecteur, soit que  $r_{min} = r_{max} = \|\mathbf{L}\|$ . Dans les développements précédents, cette contrainte nous a permis de trouver les valeurs extrêmes du modèle d'erreur pour un vecteur de longueur donnée. Maintenant, en laissant tomber cette contrainte, il est possible de définir une transformation de l'espace qui conduit à une équirépartition de l'erreur dans toutes les directions. Nous cherchons à modifier la taille  $r_{max}$  pour diminuer l'importance de  $E_{max}$ . À partir du ratio d'anisotropie, nous dégageons la relation suivante :

$$\hat{r}_{max} = r_{min} \sqrt{\frac{|\lambda_{min}|}{|\lambda_{max}|}}$$

Puisque  $r_{min}$  et  $r_{max}$  sont par définition de même valeur, nous pouvons écrire cette relation comme suit :

$$\hat{r}_{max} = r_{max} \sqrt{\frac{|\lambda_{min}|}{|\lambda_{max}|}} \quad (2.40)$$

Le rayon modifié  $\hat{r}_{max}$  est donc plus petit que le rayon  $r_{max}$ . L'expression du modèle d'erreur devient alors :

$$E_a(\theta) = r_{min}^2 \cos^2 \theta |\lambda_{min}| + \hat{r}_{max}^2 \sin^2 \theta |\lambda_{max}| = E_{min} \quad (2.41)$$

La figure 2.7 illustre cette transformation, et nous y voyons l'équirépartition de l'erreur locale. La transformation contracte l'espace dans la direction du vecteur propre associé à la plus grande des valeurs propres selon un ratio défini par la relation 2.40. L'espace est contracté dans une direction puisque nous avons fixé la taille dans l'autre direction, soit celle

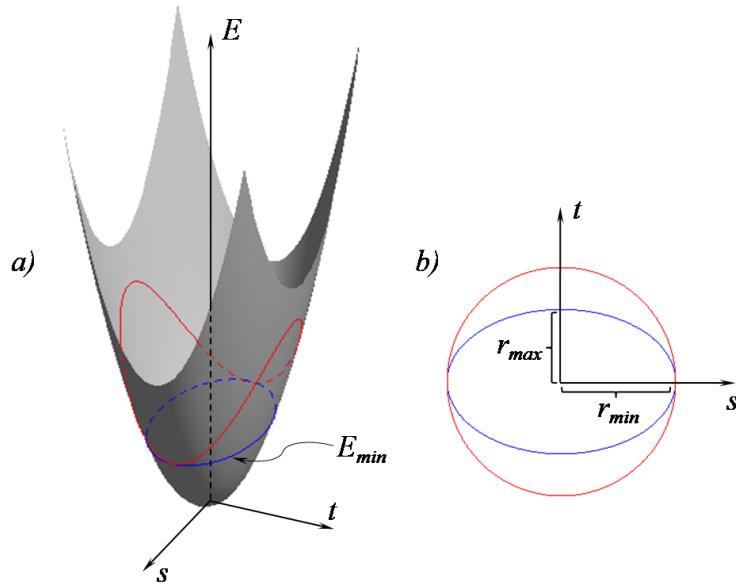


FIGURE 2.7 Équirépartition de l'erreur locale : a) l'erreur forme une ellipse et est représentée par la courbe de niveau sur le paraboloïde elliptique b) vue plan de l'erreur qui est fonction de  $r_{min}$  et  $r_{max}$

de la valeur propre la plus petite, dans le but d'obtenir une erreur locale constante égale à la valeur extrême minimale de l'erreur  $E_{min}$ .

### 2.2.3 Modèle d'erreur

Une fois la transformation appliquée au domaine, l'erreur locale est équirépartie dans toutes les directions. L'équation 2.41 nous montre que l'erreur est alors indépendante de l'orientation du vecteur  $\mathbf{L}$ . Nous pouvons donc simplifier l'équation 2.41 comme suit :

$$E_a = r_{min}^2 |\lambda_{min}| + \hat{r}_{max}^2 |\lambda_{max}| \quad (2.42)$$

où  $r_{min}$  et  $\hat{r}_{max}$  sont liés par la relation 2.40. Les résultats précédents indiquent que la taille notée  $r_{min}$  est en fait plus grande que la taille  $\hat{r}_{max}$ . Nous noterons dorénavant ces tailles de la façon suivante :

$$h_{max} = r_{min} \quad \text{et} \quad h_{min} = \hat{r}_{max}$$

Ce qui nous donne le modèle d'erreur locale au nœud  $a$  :

$$E_a = h_{max}^2 |\lambda_{min}| + h_{min}^2 |\lambda_{max}|$$

où  $\frac{h_{min}}{h_{max}} = \sqrt{\frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}}$  (2.43)

D'autre part, il y a un parallèle évident à faire entre les expressions 2.43 et 2.34. Elles ont

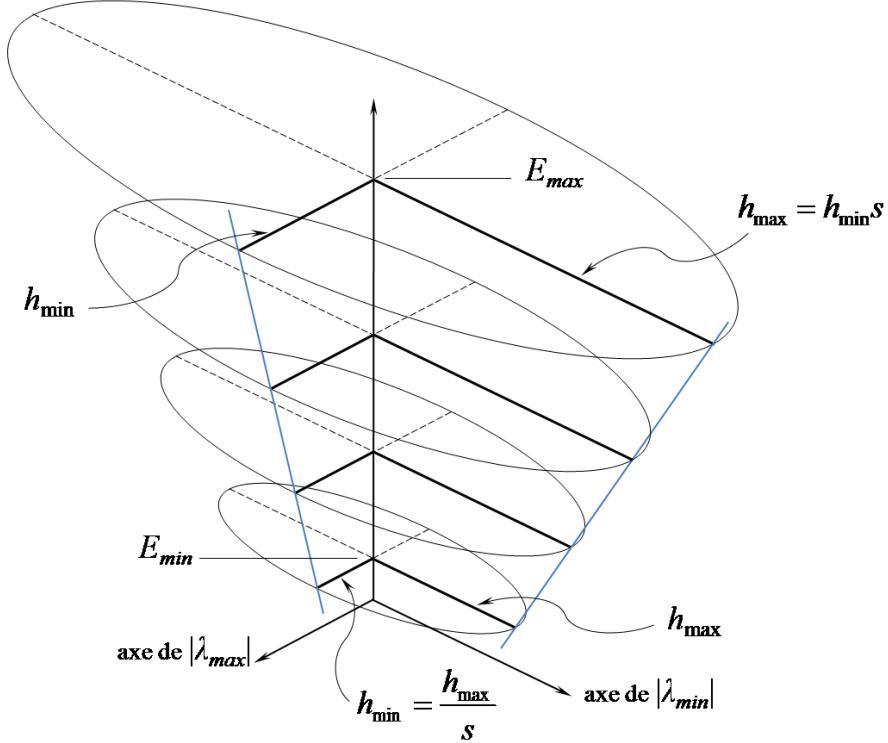


FIGURE 2.8 Tailles  $h_{min}$  et  $h_{max}$  selon le niveau de l'erreur locale

exactement la même forme, mais il y a tout de même une différence importante. L'équation 2.34 fait intervenir les composantes d'un vecteur  $\mathbf{L}$  quelconque de longueur fixe. Ses coefficients sont reliés par la relation 2.36. L'erreur locale prend alors la forme présentée à la figure 2.6, et n'est donc pas l'erreur équirépartie que nous cherchons. Tandis que l'équation 2.43 exprime une erreur locale constante et indépendante de l'orientation du vecteur  $\mathbf{L}$ . Elle exprime l'équirépartition de l'erreur locale dans toutes les directions. Nous pourrions même affirmer que l'erreur est alors indépendante de la longueur du vecteur, puisque les tailles  $h_{min}$  et  $h_{max}$  ne sont a priori pas fixées. Par contre, elles sont reliées par le ratio d'anisotropie  $s$  de la relation 1.9.

Dans le développement du modèle d'erreur, nous avons voulu minimiser l'erreur locale pour obtenir  $E_a = E_{min}$ . Par contre, l'équation 2.43 n'impose pas cette relation. Elle ne fait

qu'exprimer un niveau d'erreur locale constante dans toutes les directions, et qui dépend de la taille qui est fixée. La figure 2.8 illustre ce principe de niveau d'erreur. Lorsque le niveau d'erreur correspond à la valeur minimum de l'erreur  $E_{min}$ , l'espace est contracté dans la direction du vecteur propre associé à la plus grande valeur propre  $|\lambda_{max}|$ . Tandis que, lorsque le niveau d'erreur est la valeur maximale  $E_{max}$ , l'espace est étiré dans la direction du vecteur propre associé à la plus petite valeur propre  $|\lambda_{min}|$ . Il existe une infinité de niveaux d'erreur, il y a donc une infinité de possibilités de couples de tailles  $h_{min}$  et  $h_{max}$ . Cependant,  $h_{min}$  et  $h_{max}$  seront toujours reliés par le ratio d'anisotropie  $s$  pour réaliser l'équirépartition de l'erreur locale dans toutes les directions.

### 2.3 Métrique

La transformation qui nous a permis de développer le modèle d'erreur locale 2.43 est en fait une métrique que nous notons  $\mathcal{T}_a$ . L'espace local physique est caractérisé *a priori* par une base vectorielle orthonormale et est donc un espace physique isotrope. Nous déformons cet espace en un espace physique anisotrope par l'imposition de la métrique  $\mathcal{T}_a$ . La base vectorielle qui caractérise alors l'espace physique anisotrope est toujours orthogonale, mais elle est anisotrope. C'est cette déformation locale qui permet d'obtenir une équirépartition de l'erreur locale dans toutes les directions et qui minimise l'erreur locale pour les tailles,  $h_s$  et  $h_t$ , prescrites par la métrique  $\mathcal{T}_a$ . Cette métrique prend la forme suivante :

$$\mathcal{T}_a = |H_u(a)|^{-1} = R_\phi \begin{bmatrix} \frac{1}{|\lambda_s|} & 0 \\ 0 & \frac{1}{|\lambda_t|} \end{bmatrix} R_\phi^T \quad \text{où } 0 < |\lambda_s| \leq |\lambda_t| \quad (2.44)$$

Il est possible par inspection de vérifier que la matrice  $|H_u|^{-1}$  possède toutes les propriétés d'un tenseur métrique définies par les relations 1.10, 1.11 et 1.12. Les tailles  $h_s$  et  $h_t$  sont reliées à la métrique par les relations suivantes :

$$h_s = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_s|}} \quad h_t = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_t|}} \quad (2.45)$$

et sont orientées selon leur vecteur propre respectif. Ces tailles correspondent aux rayons d'une ellipse représentée par une des courbes de niveau de la figure 2.8.

Par ailleurs, l'inverse de cette métrique définit une autre métrique,  $\mathcal{T}_a^{-1}$ . Elle est la transformation inverse qui permet le passage de l'espace physique anisotrope vers l'espace virtuel

isotrope, et elle est définie par l'équation 1.16 qui prend la forme suivante :

$$\mathcal{T}_a^{-1} = \mathcal{M}_a = |H_u(a)| = R_\phi \begin{bmatrix} |\lambda_s| & 0 \\ 0 & |\lambda_t| \end{bmatrix} R_\phi^T \quad \text{où } 0 < |\lambda_s| \leq |\lambda_t| \quad (2.46)$$

La figure 2.9 illustre la relation entre ces deux métriques, où une ellipse dans l'espace physique anisotrope, devient un cercle unitaire dans l'espace virtuel isotrope, et où les métriques correspondent aux expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \mathcal{T}^{-1} = |H_u| \\ \mathcal{M}^{-1} &= \mathcal{T} = |H_u|^{-1}\end{aligned}$$

La métrique  $\mathcal{M}_a$  définit localement une déformation qui permettra la génération d'un

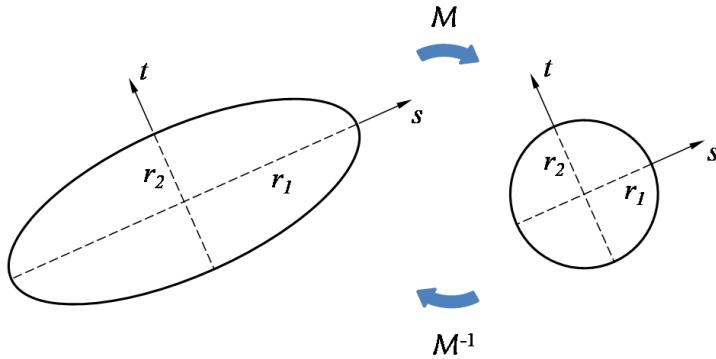


FIGURE 2.9 Transformation du cercle unité par la métrique  $\mathcal{M}$  et son inverse

élément dont la taille, l'étirement et l'orientation correspondent aux caractéristiques imposées par la métrique  $\mathcal{M}_a^{-1}$ . L'ensemble des métriques  $\mathcal{M}_a$  associées aux nœuds du domaine définit une fonction continue que nous nommons métrique continue. Cette fonction continue permet la génération d'un maillage correspondant aux caractéristiques locales nécessaires à l'équirépartition de l'erreur d'interpolation locale.

## 2.4 Métrique optimale

La métrique optimale est une métrique continue, qui correspond à une fonction continue définissant un champ de métriques minimisant l'erreur d'interpolation en norme  $L^p$  de façon à générer le meilleur maillage anisotrope adapté à la solution calculée. Plus simplement, nous cherchons à définir en chaque nœud le niveau d'erreur d'interpolation locale en norme  $L^p$  qui permettra d'obtenir globalement le meilleur maillage ayant un nombre de nœuds  $N$

spécifique. La norme  $L^p$  permet une certaine latitude dans la façon d'adapter le maillage et permet de distribuer différemment les nœuds sur le domaine et de les concentrer ou non dans les zones les plus anisotropes.

#### 2.4.1 Problème d'optimisation

Si nous considérons le modèle d'erreur de l'équation 2.43 pour un nœud arbitraire du domaine  $\Omega$  :

$$E_{\mathcal{M}}(x, y) = h_s^2 |\lambda_s| + h_t^2 |\lambda_t|$$

où  $\frac{h_s}{h_t} = \sqrt{\frac{|\lambda_t|}{|\lambda_s|}}$  et  $0 < |\lambda_s| \leq |\lambda_t|$  (2.47)

alors le problème d'optimisation se pose de la façon suivante :

$$\min_{\mathcal{M}} \int_{\Omega} (E_{\mathcal{M}}(x, y))^p d\Omega = \min_{h_s, h_t} \int_{\Omega} (h_s^2 |\lambda_s| + h_t^2 |\lambda_t|)^p d\Omega (2.48)$$

sous la contrainte :

$$\int_{\Omega} d(x, y) d\Omega = N (2.49)$$

La fonction  $d(x, y)$  est une fonction de densité de maillage définie de la façon suivante :

$$d(x, y) = \frac{1}{h_s h_t} (2.50)$$

Nous introduisons un ratio de tailles  $r$  similaire au ratio d'anisotropie et qui s'écrit de la façon suivante :

$$r = \sqrt{\frac{h_s}{h_t}} (2.51)$$

Il permet de réécrire les deux tailles sous une forme nous permettant par la suite d'exprimer le modèle d'erreur en fonction de la densité de maillage  $d(x, y)$  et du ratio de taille  $r$  :

$$h_s = (h_s h_t)^{\frac{1}{2}} r = d(x, y)^{-\frac{1}{2}} r \quad h_t = \frac{(h_s h_t)^{\frac{1}{2}}}{r} = \frac{d(x, y)^{-\frac{1}{2}}}{r} (2.52)$$

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{M}}(x, y) &= h_s h_t [r^2 |\lambda_s| + r^{-2} |\lambda_t|] \\ &= d^{-1} [r^2 |\lambda_s| + r^{-2} |\lambda_t|] \end{aligned} \tag{2.53}$$

Ce qui nous amène à la fonctionnelle  $\Lambda$  suivante :

$$\Lambda(r, d, C) = \int_{\Omega} d^{-p} [r^2 |\lambda_s| + r^{-2} |\lambda_t|]^p d\Omega - C \left[ \int_{\Omega} d(x, y) d\Omega - N \right] \tag{2.54}$$

où  $C$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte 2.49. Nous cherchons les fonctions  $r$  et  $d(x, y)$  qui permettent d'obtenir le minimum de cette fonctionnelle. Elles sont déterminées en annulant la première variation de  $\Lambda$  par rapport à  $r$  et  $d(x, y)$  :

$$\delta\Lambda = \frac{\partial\Lambda}{\partial r} \delta r + \frac{\partial\Lambda}{\partial d} \delta d = 0 \tag{2.55}$$

Dans un premier temps en considérant la variation  $\delta r$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \Lambda(r + \omega\delta r, d, C) &= \int_{\Omega} d^{-p} [(r + \omega\delta r)^2 |\lambda_s| + (r + \omega\delta r)^{-2} |\lambda_t|]^p d\Omega \\ &\quad - C \left[ \int_{\Omega} d(x, y) d\Omega - N \right] \end{aligned}$$

Nous dérivons par la suite la fonctionnelle par rapport à  $\omega$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Lambda}{\partial\omega} &= \int_{\Omega} d^{-p} p [(r + \omega\delta r)^2 |\lambda_s| + (r + \omega\delta r)^{-2} |\lambda_t|]^{p-1} \\ &\quad (2(r + \omega\delta r)\delta r |\lambda_s| - 2(r + \omega\delta r)^{-3}\delta r |\lambda_t|) d\Omega = 0 \end{aligned}$$

Et en prenant la limite de cette équation lorsque  $\omega$  tend vers 0, nous obtenons :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\partial\Lambda}{\partial\omega} = \int_{\Omega} d^{-p} p [r^2 |\lambda_s| + r^{-2} |\lambda_t|]^{p-1} 2\delta r ((r|\lambda_s| - r^{-3}|\lambda_t|) d\Omega = 0$$

Or puisque les deux premiers termes sous l'intégrale sont toujours positifs pour toutes variations  $\delta r$  :

$$\forall \delta r \quad d^{-p} p [r^2 |\lambda_s| + r^{-2} |\lambda_t|]^{p-1} > 0$$

nous avons finalement que :

$$\begin{aligned}\forall \delta r \quad & r|\lambda_s| - r^{-3}|\lambda_t| = 0 \\ & r^4 = \frac{|\lambda_t|}{|\lambda_s|}\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi le ratio de taille optimale  $r_{opt}$  :

$$r_{opt} = \left( \frac{|\lambda_t|}{|\lambda_s|} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.56)$$

Dans un deuxième temps, nous effectuons un exercice similaire, mais pour la densité de maillage  $d(x, y)$ . Nous annulons la variation de densité  $\delta d$  de la fonctionnelle  $\Lambda$ , ce qui donne :

$$\Lambda(r, d + \omega\delta d, C) = \int_{\Omega} (d + \omega\delta d)^{-p} [r^2|\lambda_s| + r^{-2}|\lambda_t|]^p d\Omega - C \left[ \int_{\Omega} (d + \omega\delta d) d\Omega - N \right]$$

En dérivant cette équation par rapport à  $\omega$  et en prenant la limite lorsque  $\omega$  tend vers 0, nous obtenons :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} = \int_{\Omega} (-p d^{-(p+1)} [r^2|\lambda_s| + r^{-2}|\lambda_t|]^p - C) \delta d d\Omega = 0$$

Pour toutes variations  $\delta d$ , il existe un multiplicateur de Lagrange  $C$  tel que :

$$\begin{aligned}\forall \delta d \quad & d^{-(p+1)} (r^2|\lambda_s| + r^{-2}|\lambda_t|)^p - C = 0 \\ & d^{-(p+1)} = \frac{C}{(r^2|\lambda_s| + r^{-2}|\lambda_t|)^p} \\ & d = \left[ \frac{C}{(r^2|\lambda_s| + r^{-2}|\lambda_t|)^p} \right]^{\frac{-1}{p+1}}\end{aligned}$$

En utilisant le résultat 2.56, nous obtenons la fonction de densité optimale  $d_{opt}(x, y)$  :

$$\begin{aligned}d_{opt}(x, y) &= \left[ \frac{C}{(r_{opt}^2|\lambda_s| + r_{opt}^{-2}|\lambda_t|)^p} \right]^{\frac{-1}{p+1}} \\ d_{opt}(x, y) &= \left[ \frac{C}{2^p(|\lambda_s||\lambda_t|)^{\frac{p}{2}}} \right]^{\frac{-1}{p+1}} = \left[ \frac{\tilde{C}}{(|\lambda_s||\lambda_t|)^{\frac{p}{2}}} \right]^{\frac{-1}{p+1}}\end{aligned}$$

En introduisant ce résultat dans l'expression 2.49, nous obtenons la relation suivante :

$$\int_{\Omega} d_{opt}(x, y) d\Omega = N$$

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\tilde{C}}{(|\lambda_s| |\lambda_t|)^{\frac{p}{2}}} \right]^{\frac{-1}{p+1}} d\Omega = N$$

Nous pouvons sortir la constante  $\tilde{C}$  de l'intégrale et l'isoler pour obtenir :

$$\tilde{C}^{\frac{1}{p+1}} = \frac{1}{N} \int_{\Omega} (|\lambda_s| |\lambda_t|)^{\frac{p}{2(p+1)}} d\Omega$$

Ce qui conduit finalement à l'expression de la fonction de densité de maillage optimale  $d_{opt}(x, y)$  :

$$d_{opt}(x, y) = \frac{N (|\lambda_s| |\lambda_t|)^{\frac{p}{2(p+1)}}}{\int_{\Omega} (|\lambda_s| |\lambda_t|)^{\frac{p}{2(p+1)}} d\Omega}$$

$$d_{opt}(x, y) = N \det(|H_u(x, y)|)^{\frac{p}{2(p+1)}} \left( \int_{\Omega} \det(|H_u(x, y)|)^{\frac{p}{2(p+1)}} d\Omega \right)^{-1} \quad (2.57)$$

## 2.4.2 Expression de la métrique optimale

Nous cherchons l'expression d'une nouvelle métrique, la métrique optimale  $\mathcal{M}_{opt}$ , de la forme :

$$\mathcal{M}_{opt}(x, y) = R_{\phi} \begin{bmatrix} \gamma_s & 0 \\ 0 & \gamma_t \end{bmatrix} R_{\phi}^T \quad \text{où } 0 < \gamma_s \leq \gamma_t$$

Tout d'abord, si nous reprenons la relation 2.45 qui relie les tailles  $h_s$  et  $h_t$  aux valeurs propres de la métrique, et que nous exprimons les valeurs propres en fonction des tailles, nous obtenons la relation suivante :

$$\gamma_s = h_s^{-2} \quad \gamma_t = h_t^{-2}$$

où  $\gamma_s$  et  $\gamma_t$  représentent les valeurs propres de la nouvelle métrique. À partir des équations 2.52, 2.53 et 2.56, nous obtenons alors les valeurs propres suivantes :

$$\gamma_s = \frac{d_{opt}}{r_{opt}^2} \quad \gamma_t = d_{opt} r_{opt}^2$$

Si nous développons l'équation pour  $\gamma_s$ , nous avons :

$$\gamma_s = \frac{d_{opt}}{r_{opt}^2} = \frac{N}{\int_{\Omega} \det(|H_u(x, y)|)^{\frac{p}{2(p+1)}} d\Omega} \frac{(|\lambda_s| |\lambda_t|)^{\frac{p}{2(p+1)}}}{\left(\frac{|\lambda_t|}{|\lambda_s|}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Le premier quotient du terme de droite est un scalaire que nous identifions selon la même nomenclature que [3], soit  $D_{Lp}$ . La valeur propre  $\gamma_s$  devient alors :

$$\begin{aligned} \gamma_s &= D_{Lp} \left[ |\lambda_s|^{\frac{p}{p+1}} |\lambda_s| \frac{|\lambda_t|^{\frac{p}{p+1}}}{|\lambda_t|} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= D_{Lp} \left[ \frac{|\lambda_s|^2}{(|\lambda_s| |\lambda_t|)^{\frac{1}{p+1}}} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\gamma_s = D_{Lp} \det(|H_u(x, y)|)^{\frac{-1}{2(p+1)}} |\lambda_s| \quad (2.58)$$

Le même développement est fait sur  $\gamma_t$ .

$$\begin{aligned} \gamma_t &= d_{opt} r_{opt}^2 = \frac{N}{\int_{\Omega} \det(|H_u(x, y)|)^{\frac{p}{2(p+1)}} d\Omega} (|\lambda_s| |\lambda_t|)^{\frac{p}{2(p+1)}} \left(\frac{|\lambda_t|}{|\lambda_s|}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \gamma_t &= D_{Lp} \left[ \frac{|\lambda_s|^{\frac{p}{p+1}}}{|\lambda_s|} |\lambda_t|^{\frac{p}{p+1}} |\lambda_t| \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= D_{Lp} \left[ \frac{|\lambda_t|^2}{(|\lambda_s| |\lambda_t|)^{\frac{1}{p+1}}} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\gamma_t = D_{Lp} \det(|H_u(x, y)|)^{\frac{-1}{2(p+1)}} |\lambda_t| \quad (2.59)$$

L'expression finale de la métrique optimale est donc :

$$\mathcal{M}_{opt}(x, y) = R_{\phi} \begin{bmatrix} \gamma_s & 0 \\ 0 & \gamma_t \end{bmatrix} R_{\phi}^T \quad \text{où } 0 < \gamma_s \leq \gamma_t \quad (2.60)$$

$$\mathcal{M}_{opt}(x, y) = D_{Lp} \det(|H_u(x, y)|)^{\frac{-1}{2(p+1)}} |H_u(x, y)| \quad (2.61)$$

Rappelons que la matrice de rotation  $R_\phi$  est formée des vecteurs propres de  $H_u(x, y)$ . La métrique optimale  $\mathcal{M}_{opt}$  est proportionnelle à la matrice  $|H_u|$ , et est donc le résultat de la multiplication de cette dernière par un scalaire local. Ce scalaire est fonction du nombre de nœuds  $N$  désirés sur le maillage et du poids du déterminant de la matrice  $|H_u(x, y)|$  locale par rapport à l'ensemble des déterminants du domaine. D'autre part, nous observons que les tailles optimales  $h_s$  et  $h_t$ , qui sont définies par :

$$h_s = \frac{1}{\sqrt{\gamma_s}} \quad h_t = \frac{1}{\sqrt{\gamma_t}}$$

préservent le ratio d'anisotropie et assurent l'équirépartition de l'erreur locale dans toutes les directions.

$$s = \frac{h_s}{h_t} = \frac{\sqrt{\gamma_t}}{\sqrt{\gamma_s}} = \frac{\sqrt{|\lambda_t|}}{\sqrt{|\lambda_s|}} \quad (2.62)$$

### Métrique optimale vs erreur d'interpolation locale

En définissant la métrique optimale de cette façon, nous pouvons réécrire l'expression 2.47 de l'erreur d'interpolation locale comme suit :

$$E_{\mathcal{M}}(x, y) = h_s^2 |\lambda_s| + h_t^2 |\lambda_t|$$

où la taille  $h_s$  est obtenue de l'expression suivante :

$$\begin{aligned} h_s^2 &= \frac{1}{\gamma_s} = \frac{\det(|H_u(x, y)|)^{\frac{1}{2(p+1)}}}{D_{Lp} |\lambda_s|} \\ &= \frac{\det(|H_u(x, y)|)^{\frac{1}{2(p+1)}}}{N |\lambda_s|} \int_{\Omega} \det(|H_u(x, y)|)^{\frac{p}{2(p+1)}} d\Omega \end{aligned}$$

et où, de façon similaire, la taille  $h_t$  est obtenue de :

$$h_t^2 = \frac{\det(|H_u(x, y)|)^{\frac{1}{2(p+1)}}}{N |\lambda_t|} \int_{\Omega} \det(|H_u(x, y)|)^{\frac{p}{2(p+1)}} d\Omega$$

L'équation de l'erreur locale sous la métrique optimale  $\mathcal{M}_{opt}$  est alors :

$$E_{\mathcal{M}_{opt}}(x, y) = \frac{2}{N} \det(|H_u(x, y)|)^{\frac{1}{2(p+1)}} \int_{\Omega} \det(|H_u(x, y)|)^{\frac{p}{2(p+1)}} d\Omega \quad (2.63)$$

L'erreur est équirépartie dans toutes les directions, puisque pour un point donné, elle est constante et indépendante de la direction. L'erreur est de cette façon minimisée pour le

nombre de nœuds désirés. D'ailleurs, il est évident que plus le nombre de nœuds est élevé, plus le niveau d'erreur locale est bas. Nous remarquons aussi que le niveau d'erreur locale est proportionnel au déterminant de  $|H_u(x, y)|$  local à une certaine puissance en  $p$ . C'est ce terme qui différencie le niveau d'erreur locale d'un nœud à l'autre. Plus ce terme est grand, plus l'erreur locale est élevée. Il y a plusieurs possibilités au niveau de la valeur du déterminant. Une zone où la solution est relativement constante démontre un déterminant qui est petit, ce qui se traduit par une erreur locale faible. Une zone caractérisée par une solution hautement anisotrope, donc très directionnelle, démontre aussi un déterminant relativement petit, puisqu'une des valeurs propres est très petite et presque nulle. Un déterminant élevé correspond donc à une zone de la solution où il y a de forts gradients dans les deux directions de courbures principales, ce qui se traduit par une erreur locale plus importante. Cette situation ne privilégie pas nécessairement une direction en particulier, ce qui s'exprime par la génération d'éléments de petite taille et généralement équilatéraux.

### Métrique optimale vs erreur d'interpolation globale

À partir de l'équation 2.48, nous obtenons l'expression de l'erreur d'interpolation évaluée sur l'ensemble du domaine  $\Omega$  par rapport à la métrique optimale  $\mathcal{M}_{opt}$ .

$$\|E_{\mathcal{M}_{opt}}\|_{L_p} = \left( \int_{\Omega} (E_{\mathcal{M}_{opt}}(x, y))^p d\Omega \right)^{\frac{1}{p}}$$

En introduisant l'expression de l'erreur locale  $E_{\mathcal{M}_{opt}}(x, y)$  dans cette équation, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|E_{\mathcal{M}_{opt}}\|_{L_p} &= \left( \int_{\Omega} \left[ \frac{2}{N} \det(|H_u(x, y)|)^{\frac{1}{2(p+1)}} \int_{\Omega} \det(|H_u(x, y)|)^{\frac{p}{2(p+1)}} d\Omega \right]^p d\Omega \right)^{\frac{1}{p}} \\ \|E_{\mathcal{M}_{opt}}\|_{L_p} &= \frac{2}{N} \int_{\Omega} \det(|H_u(x, y)|)^{\frac{p}{2(p+1)}} d\Omega \left( \int_{\Omega} \det(|H_u(x, y)|)^{\frac{p}{2(p+1)}} d\Omega \right)^{\frac{1}{p}} \\ \|E_{\mathcal{M}_{opt}}\|_{L_p} &= \frac{2}{N} \left( \int_{\Omega} \det(|H_u(x, y)|)^{\frac{p}{2(p+1)}} d\Omega \right)^{\frac{p+1}{p}} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Encore une fois, comme pour l'équation 2.63, il est évident que plus le nombre de nœuds est élevé pour un maillage, plus l'erreur d'interpolation globale diminue.

## 2.5 Évaluation discrète de la métrique

Référons-nous à l'algorithme général d'adaptation de la figure 1.1. Dans le processus d'adaptation, nous sommes à l'étape 4, soit la construction de l'opérateur de transition. Nous avons un maillage sur lequel a été calculée une solution et nous voulons à partir de cette solution construire une fonction qui permet la construction d'un maillage adapté. L'expression de la métrique optimale nous permet de construire cette fonction d'adaptation, soit un champ de métriques optimales. Cette expression est fonction de trois éléments : le nombre de noeuds  $N$  demandés, le niveau de la norme  $p$  et les dérivées seconde de la solution évaluées en chaque noeud du maillage de départ. Les dérivées secondes sont nécessaires à l'évaluation du déterminant de  $|H_u(x, y)|$ , et sont donc la base de la construction des métriques.

### 2.5.1 Reconstruction des dérivées secondes

La première étape consiste donc à évaluer les dérivées secondes. Nous avons déjà fait mention au chapitre 1 des articles [56] et [30] qui comparent les méthodes de reconstruction de dérivées, et nous ne reprendrons pas ici cet exercice. Par contre, nous trouvons important, pour la compréhension et la suite des choses, de décrire l'algorithme et les méthodes utilisées dans ce travail.

La méthode de reconstruction est entièrement décrite dans [29], et elle se base sur la méthode de Zhu-Zienkiewicz (*superconvergent patch recovery method*)[60][61]. Au lieu d'utiliser les points de superconvergence sur les triangles, comme il est précisé dans la méthode de Zhu-Zienkiewicz, nous utilisons les points d'intégration de Gauss. Il y a deux raisons à ce choix. D'une part, la position des points de superconvergence n'est pas nécessairement facile à déterminer, et d'autre part, certaines situations font en sorte qu'il n'y a pas assez de points pour résoudre le système d'équations. Nous sacrifions le comportement superconvergent au profit d'un algorithme plus simple et robuste, et qui fonctionne même pour les noeuds sur la frontière.

Les dérivées de la solution sont obtenues par reconstruction locale au sens des moindres carrés. Nous devons projeter les dérivées discontinues obtenues de la solution éléments finis (ou autre) sur une base continue. Supposons un ensemble  $\tau_a$  de  $m$  éléments qui partagent le point  $a$  comme sommet. Cet ensemble désigne le sous domaine de projection. Les dérivées exactes de la solution sont continues et différentiables d'un élément à l'autre, contrairement aux dérivées du champ discret qui sont discontinues. Nous utilisons donc une projection locale au sens des moindres carrés des dérivées discontinues  $du_h$ , évaluées aux points d'échantillonnage de  $\tau_a$ , pour obtenir une meilleure approximation  $du_h^*$  au point  $a$ .

Soit  $Q = \frac{du}{d\alpha}$ , la quantité que nous cherchons et qui doit être projetée. Nous désignons par

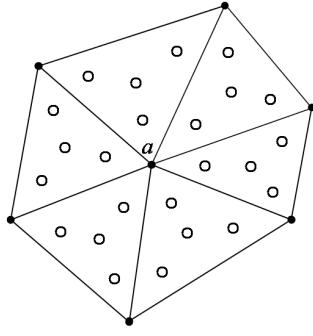


FIGURE 2.10 Ensemble  $\tau_a$  des triangles autour du point  $a$  avec  $k = 4$  points de Gauss par élément

$Q_h$  les dérivées discontinues obtenues de la solution et  $Q^*$  l'approximation améliorée qui doit être obtenue par projection locale, et qui s'exprime comme suit :

$$Q^* = \langle \mathbf{P}, \mathbf{c} \rangle \quad (2.65)$$

où  $\mathbf{P}$  est une base polynomiale du premier degré et  $\mathbf{c}$  le vecteur des coefficients inconnus qui doivent être déterminés :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix}^T \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}^T$$

Les coefficients  $c_i$  sont obtenus par projection au sens des moindres carrés sur le sous domaine. Nous cherchons ainsi à minimiser la fonctionnelle qui suit :

$$F(c_1, c_2, c_3) = \frac{1}{2} \int_{\tau_a} (Q^* - Q_h)^2 d\tau_a \quad (2.66)$$

Ce qui entraîne les équations suivantes pour les coefficients  $c_i$  :

$$\frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{1}{2} \int_{\tau_a} (\langle \mathbf{P}, \mathbf{c} \rangle - Q_h)^2 d\tau_a \right) = 0$$

$$\begin{aligned} c_1 : \quad & \int_{\tau_a} (\langle \mathbf{P}, \mathbf{c} \rangle - Q_h) d\tau_a = 0 \\ c_2 : \quad & \int_{\tau_a} x(\langle \mathbf{P}, \mathbf{c} \rangle - Q_h) d\tau_a = 0 \\ c_3 : \quad & \int_{\tau_a} y(\langle \mathbf{P}, \mathbf{c} \rangle - Q_h) d\tau_a = 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons réorganiser ces équations selon le système qui suit :

$$\int_{\tau_a} \mathbf{P}(\langle \mathbf{P}, \mathbf{c} \rangle - Q_h) d\tau_a = 0$$

et finalement, nous obtenons le système suivant :

$$\left[ \int_{\tau_a} \mathbf{P} \mathbf{P}^T d\tau_a \right] \mathbf{c} = \int_{\tau_a} \mathbf{P} Q_h d\tau_a \quad (2.67)$$

L'équation 2.67 est un système de 3 équations à 3 inconnues, soit les  $c_i$ . Seul le côté droit de l'équation dépend de la quantité à projetée  $Q$ .

La base polynomiale  $\mathbf{P}$  est définie dans le système de coordonnées global  $(x, y)$ . Pour éviter un mauvais conditionnement de la matrice de projection  $\mathbf{P} \mathbf{P}^T$ , nous transposons toutefois les coordonnées dans un système de coordonnées local  $(\bar{x}, \bar{y})$  dont l'origine est le centre du sous domaine  $(x_a, y_a)$ .

$$\bar{x} = x - x_a \quad \bar{y} = y - y_a$$

La base polynomiale devient donc :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{x} & \bar{y} \end{bmatrix}^T$$

Le système 2.67 représente la formulation intégrale de projection. Nous pouvons aussi exprimer la fonctionnelle 2.66 sous sa forme discrète :

$$F(c_1, c_2, c_3) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{mk} (Q^* - Q_h)^2 \quad (2.68)$$

Nous obtenons alors le système d'équations suivant :

$$\left[ \sum_{j=1}^{mk} \mathbf{P} \mathbf{P}^T \right] \mathbf{c} = \sum_{j=1}^{mk} \mathbf{P} Q_h \quad (2.69)$$

Ce dernier système représente la formulation discrète de la projection.

L'évaluation de ces systèmes mène à l'obtention du vecteur  $\mathbf{c}$ , et la quantité que nous cherchons s'obtient de la relation suivante :

$$\left. \frac{du_h^*}{d\alpha} \right|_a = \left[ 1 \quad x - x_a \quad y - y_a \right]_a \mathbf{c}$$

Cette procédure définit des opérateurs de projection  $\Gamma_\alpha(q)$ , intégrale ou discret, qui agissent sur un champ scalaire pour en déterminer les dérivées premières. Ainsi, nous obtenons les dérivées premières au point  $a$  du champ scalaire  $q = u_h(x_a, y_a)$  :

$$\begin{aligned}\frac{du_h^*}{dx}\Big|_a &= \Gamma_x(u_h(x_a, y_a)) \\ \frac{du_h^*}{dy}\Big|_a &= \Gamma_y(u_h(x_a, y_a))\end{aligned}$$

De cette façon, en projetant deux fois nous obtenons les dérivées secondes.

$$\begin{aligned}\frac{d^2u_h^*}{dx^2}\Big|_a &= \Gamma_x\left(\frac{du_h^*}{dx}\Big|_a\right) \\ \frac{d^2u_h^*}{dxdy}\Big|_a &= \Gamma_y\left(\frac{du_h^*}{dx}\Big|_a\right) \\ \frac{d^2u_h^*}{dy^2}\Big|_a &= \Gamma_y\left(\frac{du_h^*}{dy}\Big|_a\right) \\ \frac{d^2u_h^*}{dydx}\Big|_a &= \Gamma_x\left(\frac{du_h^*}{dy}\Big|_a\right)\end{aligned}$$

L'approximation de la matrice hessienne est alors calculée de la manière suivante :

$$H_u^* = \begin{bmatrix} \frac{d^2u_h^*}{dx^2} & \frac{1}{2} \left( \frac{d^2u_h^*}{dxdy} + \frac{d^2u_h^*}{dydx} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{d^2u_h^*}{dxdy} + \frac{d^2u_h^*}{dydx} \right) & \frac{d^2u_h^*}{dy^2} \end{bmatrix}$$

### 2.5.2 Diagonalisation de la matrice hessienne

La matrice hessienne est symétrique par construction, et une matrice  $A$  est symétrique si elle accepte la factorisation suivante :

$$A = QDQ^T$$

où  $Q$  est une matrice orthonormale et  $D$  une matrice diagonale. Cette équation est équivalente à la suivante :

$$AQ = QD$$

qui est à son tour équivalente à :

$$AQ_i = \lambda_i Q_i \quad \text{où } 1 \leq i \leq n$$

où  $\lambda_i$  est la  $i$ ème valeur sur la diagonale de  $D$ . Ainsi, les valeurs de la diagonale de  $D$  sont les valeurs propres de  $A$ , et les colonnes de  $Q$  correspondent aux vecteurs propres de  $A$ . Une matrice symétrique est donc toujours diagonalisable.

## Situations particulières

Jusqu'à maintenant nous avons toujours considéré que les valeurs propres de la matrice hessienne  $H_u$  sont différentes de zéro. Par contre, en pratique ce n'est pas toujours le cas, et il peut arriver qu'une ou les deux valeurs propres soient nulles. Le déterminant est alors nul et nous nous retrouvons devant un problème pour le calcul de la métrique. En pratique, des valeurs propres très près de zéro peuvent conduire au même problème. Il faut alors établir une procédure pour assurer un calcul sain de la métrique en limitant à un certain seuil  $\varepsilon$  les valeurs propres nulles ou presque nulles. Ce seuil est choisi en fonction des dimensions de l'écoulement qui est simulé et sa valeur est généralement de l'ordre de  $1.0 \cdot 10^{-10}$  à  $1.0 \cdot 10^{-16}$ . Les valeurs propres prennent différentes valeurs sur le domaine et les trois situations suivantes peuvent se produire :

1.  $|\lambda_1| \geq \varepsilon$  et  $|\lambda_2| \geq \varepsilon$
2.  $|\lambda_1| < \varepsilon$  et  $|\lambda_2| \geq \varepsilon$
3.  $|\lambda_1| < \varepsilon$  et  $|\lambda_2| < \varepsilon$

**Situation 1 :** La première situation implique que le déterminant de la matrice hessienne est différent de zéro et sa valeur n'est pas trop petite. Le calcul de la métrique ne présente aucune problématique.

**Situation 2 :** La deuxième situation est plus complexe. Avec seulement une valeur propre plus grande qu'un certain  $\varepsilon$ , la métrique ne peut pas être calculée dans bien des cas, la valeur du déterminant étant trop petite. Reprenons l'expression de la métrique optimale, mais avec

une écriture un peu différente :

$$\mathcal{M}_{opt}(x, y) = R_\phi \begin{bmatrix} \gamma_s & 0 \\ 0 & \gamma_t \end{bmatrix} R_\phi^T$$

où       $\gamma_s = \left( \frac{|\lambda_s|^{2p+1}}{|\lambda_t|} \right)^{\frac{1}{2(p+1)}} D_{L_p}$       (2.70)

$$\gamma_t = \left( \frac{|\lambda_t|^{2p+1}}{|\lambda_s|} \right)^{\frac{1}{2(p+1)}} D_{L_p} \quad \text{avec} \quad |\lambda_s| \leq |\lambda_t|$$

Cette écriture est équivalente à celle de 2.61, mais sans faire apparaître le déterminant, ce qui nous permet de mieux expliquer la problématique. Si nous supposons que  $\lambda_s$  est nulle (ou presque nulle), alors la métrique, selon les relations ci-dessus, s'exprime par les valeurs propres et tailles suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma_s &= 0 & \gamma_t &= \infty \\ h_s &= \frac{1}{\sqrt{\gamma_s}} = \infty & h_t &= \frac{1}{\sqrt{\gamma_t}} = 0 \end{aligned}$$

La métrique est donc indéterminée. Pour remédier à ce problème, nous pouvons utiliser un critère sur les valeurs propres. Si la valeur propre est sous un certain seuil  $\varepsilon$ , elle prend alors la valeur du  $\varepsilon$ .

$$|\lambda_i| = \max(|\lambda_i|, \varepsilon)$$

C'est le critère qui est habituellement utilisé dans beaucoup d'algorithmes de calcul de la métrique. Par contre, il est important de comprendre l'effet que cette modification a sur la métrique, le maillage et l'erreur d'interpolation. Pour mieux comprendre, reprenons les termes de la matrice diagonale de l'équation 2.70, où dans un premier temps nous considérons  $|\lambda_s| < \varepsilon$  et  $|\lambda_t| \geq \varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \gamma_s &= \left( \frac{|\lambda_s|^{2p+1}}{|\lambda_t|} \right)^{\frac{1}{2(p+1)}} D_{L_p} \\ h_s &= \frac{1}{\sqrt{\gamma_s}} = D_{L_p}^{\frac{-1}{2}} \left( \frac{|\lambda_s|^{2p+1}}{|\lambda_t|} \right)^{\frac{-1}{4(p+1)}} \end{aligned}$$

En substituant  $|\lambda_s|$  par  $\varepsilon$  nous obtenons la taille résultante suivante :

$$h_s^* = D_{L_p}^{\frac{-1}{2}} \left( \frac{\varepsilon_s^{2p+1}}{|\lambda_t|} \right)^{\frac{-1}{4(p+1)}} \quad (2.71)$$

En prenant le ratio des tailles, nous voyons bien que la taille résultante  $h_s^*$  est plus petite que la taille originale  $h_s$ .

$$\frac{h_s}{h_s^*} = \left( \frac{\varepsilon_s}{|\lambda_s|} \right)^{\frac{(2p+1)}{4(p+1)}} \geq 1$$

Nous supposons ici que la modification locale apportée à la valeur propre a peu d'influence sur la valeur du  $D_{L_p}$ , ce qui nous permet d'éliminer cette valeur du ratio de tailles. Cette hypothèse est réaliste puisque le  $D_{L_p}$  est une mesure globale des déterminants et est proportionnel aux plus grands déterminants sur domaine. Le cas local qui est examiné ici fait intervenir un déterminant presque nul, et qui n'a pratiquement aucune influence sur la valeur du  $D_{L_p}$ . Donc, en augmentant ainsi la valeur propre minimale jusqu'au  $\varepsilon$  nous obtenons une taille  $h_s$  plus petite ou égale à la taille imposée par le  $|\lambda_s|$  original. Dans cette direction, l'erreur d'interpolation locale est donc plus petite ou égale à l'erreur d'interpolation originale. Par contre, la taille  $h_t$  subit la transformation inverse :

$$\begin{aligned} \gamma_t &= \left( \frac{|\lambda_t|^{2p+1}}{|\lambda_s|} \right)^{\frac{1}{2(p+1)}} D_{L_p} \\ h_t &= \frac{1}{\sqrt{\gamma_t}} = D_{L_p}^{\frac{-1}{2}} \left( \frac{|\lambda_t|^{2p+1}}{|\lambda_s|} \right)^{\frac{-1}{4(p+1)}} \end{aligned}$$

En substituant  $|\lambda_s|$  par  $\varepsilon$  nous obtenons la taille résultante suivante :

$$h_t^* = D_{L_p}^{\frac{-1}{2}} \left( \frac{|\lambda_t|^{2p+1}}{\varepsilon_s} \right)^{\frac{-1}{4(p+1)}} \quad (2.72)$$

et le ratio de tailles ci-dessous :

$$\frac{h_t}{h_t^*} = \left( \frac{|\lambda_s|}{\varepsilon_s} \right)^{\frac{(2p+1)}{4(p+1)}} \leq 1$$

La taille résultante  $h_t^*$  est augmentée, ce qui a pour effet d'augmenter l'erreur d'interpolation locale dans cette direction. Le ratio d'anisotropie n'est évidemment pas préservé et nous perdons du coup l'équirépartition de l'erreur dans toutes les directions. Ce résultat est important, puisque de cette façon la taille prescrite dans la direction de courbure maximale (dans la direction  $t$  dans le développement) est augmentée, et nous perdons de la précision dans la direction la plus critique. Cette situation où une des valeurs propres est presque nulle correspond à une zone du domaine où l'écoulement est hautement directionnel et anisotrope. Les maillages anisotropes devraient améliorer la précision dans de telles circonstances, et

cette méthode n'est peut-être pas tout à fait adéquate, ou du moins elle n'est pas optimale pour ce genre de situation.

Une façon très simple de remédier à cette perte de précision dans une des directions est de préserver le ratio d'anisotropie. Pour la valeur propre minimale, nous procédon avec le même critère pour un seuil  $\varepsilon$  donné. Cependant, nous nous assurons de conserver le même ratio d'anisotropie en modifiant la valeur propre dans l'autre direction.

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{\frac{|\lambda_t|}{|\lambda_s|}} \\ |\lambda_s|^* &= \max(|\lambda_s|, \varepsilon) \\ |\lambda_t|^* &= |\lambda_s|^* s^2 \end{aligned} \tag{2.73}$$

Les tailles résultantes  $h_s^*$  et  $h_t^*$  prennent alors la forme suivante.

$$h_s^* = D_{L_p}^{\frac{-1}{2}} \left( \frac{\varepsilon^{2p+1}}{|\lambda_t|^*} \right)^{\frac{-1}{4(p+1)}} = D_{L_p}^{\frac{-1}{2}} \left( \frac{\varepsilon^p}{s} \right)^{\frac{-1}{2(p+1)}} \tag{2.74}$$

$$h_t^* = D_{L_p}^{\frac{-1}{2}} \left( \frac{(|\lambda_t|^*)^{2p+1}}{|\varepsilon|} \right)^{\frac{-1}{4(p+1)}} = D_{L_p}^{\frac{-1}{2}} (s \varepsilon^p)^{\frac{-1}{2(p+1)}} \tag{2.75}$$

En examinant les ratios de tailles, nous observons que les tailles résultantes sont plus petites dans les deux directions.

$$\frac{h_s}{h_s^*} = \left( \frac{\varepsilon}{|\lambda_s|} \right)^{\frac{(p)}{2(p+1)}} \geq 1$$

$$\frac{h_t}{h_t^*} = \left( \frac{\varepsilon}{|\lambda_s|} \right)^{\frac{(p)}{2(p+1)}} \geq 1$$

Il s'agit du même ratio puisque les valeurs propres originales ont été multipliées par le même facteur. Les tailles résultantes étant plus petites ou égales aux tailles originales respectives, l'erreur d'interpolation est aussi plus petite ou égale dans chacune des directions. Ainsi, nous nous assurons d'avoir un niveau de précision au moins égale au niveau de précision original. L'hypothèse qui nous a permis d'exprimer les ratios de tailles et qui suppose une influence négligeable sur la valeur du  $D_{L_p}$  par la modification des valeurs propres doit être nuancée. Dans certaines situations où le ratio d'anisotropie est très grand et qu'une des valeurs est très petite, la modification de cette valeur propre comme nous le proposons peut induire un déterminant très grand. La valeur du  $D_{L_p}$  peut alors être sensiblement affectée.

La conséquence est que les tailles prescrites originalement à tous les nœuds du domaine deviennent plus petites, et nous devrions alors obtenir un maillage ayant un nombre de nœuds beaucoup plus grand que ce qui est demandé. Pour diminuer cet impact négatif sur le nombre de nœuds du maillage, nous proposons de calculer la valeur du  $D_{L_p}$  à partir des valeurs propres originales. Par la suite, les valeurs propres sont modifiées pour le reste du calcul des métriques. Ainsi, la modification de valeurs propres garantit un impact local sur les métriques.

Cette méthode exige le calcul du ratio d'anisotropie pour pouvoir modifier, s'il y a lieu, la valeur propre maximale. Par contre, dans la situation présente la valeur propre minimale est nulle ou presque nulle, ce qui implique que ce ratio pourrait être infini ou très grand si  $\lambda_{min} \approx 0$ . Nous introduisons donc un ratio d'anisotropie maximal  $s_{max}$  qui permet de limiter le ratio des valeurs propres à un certain nombre. Pour ce faire, nous utilisons le test suivant lors du calcul de la métrique :

$$\text{Si } s_{max}\lambda_{min} \leq \lambda_{max} \text{ alors } s = s_{max}$$

Nous limitons ainsi le ratio d'anisotropie à une valeur finie sans faire intervenir une potentielle division par zéro. Un ratio maximal de  $s_{max} = 1 \cdot 10^{14}$  permet d'éviter ce genre de situation sans trop altérer le maillage résultant.

**Situation 3 :** Cette situation est très particulière et correspond à une matrice hessienne dont toutes les entrées sont nulles ou presque nulles. Nous retrouvons cette condition dans une zone de l'écoulement où la solution est constante dans toutes les directions ou lorsqu'elle varie linéairement dans toutes les directions. Un écoulement plan de ce type est résolu exactement par l'emploi d'éléments linéaires, et l'erreur d'interpolation dans cette zone est par conséquent pratiquement nulle. Par contre, nous ne pouvons pas négliger cette situation puisqu'elle peut conduire, comme nous venons de le voir, à une indétermination de la métrique aux nœuds où le Hessien est nul, puisque le déterminant est aussi nul. Bien qu'elles correspondent à deux types d'écoulement complètement différents, nous appliquons la même méthode à la situation 3 qu'à la situation 2. Cette méthode vise à limiter la plus petite des valeurs propres à une valeur minimale  $\varepsilon$  tout en conservant le ratio d'anisotropie. Il est vrai que pour un écoulement plan (ou presque plan) de ce type, un élément étiré aura peu, voir aucun impact, sur la précision de la solution. Toutefois, il est important de conserver une certaine régularité dans la transition des éléments du maillage entre les zones où l'écoulement se comporte différemment.

D'autre part, nous avons fait mention plus tôt du critère habituellement utilisé dans les algorithmes de calcul de métrique qui vise à limiter les valeurs propres à un certain seuil

minimal. Lorsque les deux valeurs propres sont modifiées de cette façon, il est possible de démontrer<sup>5</sup> qu'il existe une condition pour laquelle une des tailles résultantes est plus grande que la taille originale, ce qui se traduit par une perte de précision. Évidemment, l'erreur d'interpolation dans ces conditions est négligeable, tout comme la perte de précision sur la solution globale. Par contre, dans l'optique de la génération de maillage, l'algorithme de calcul de la métrique devrait nous permettre d'obtenir un maillage optimal.

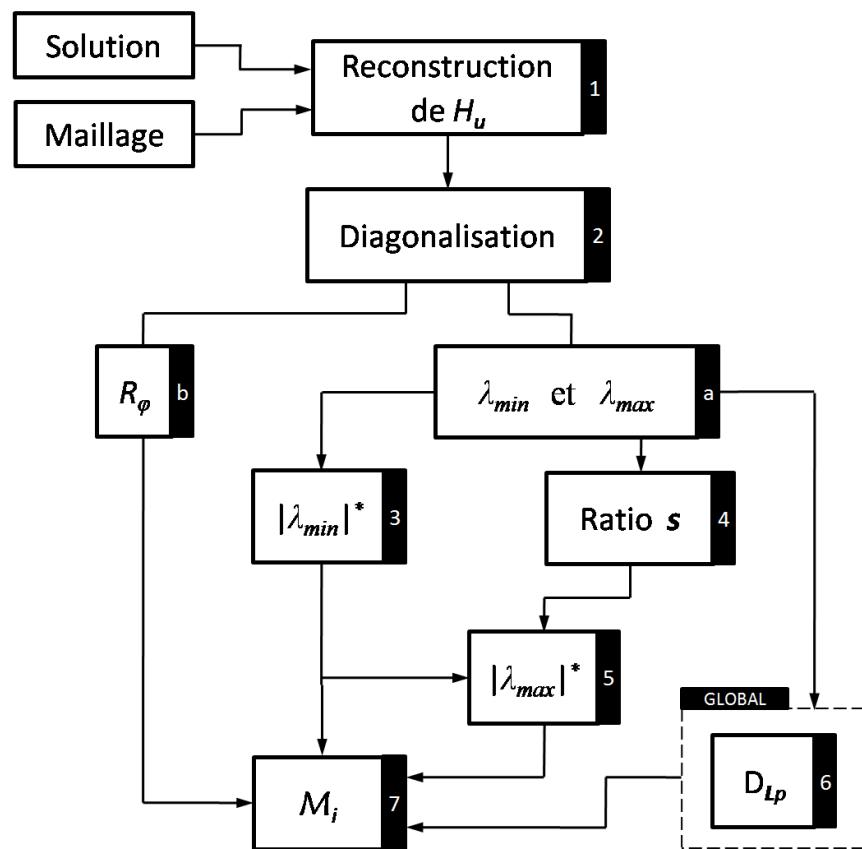
### 2.5.3 Algorithme de calcul de la métrique

Nous présentons brièvement l'algorithme de calcul de la métrique. La section précédente a permis d'expliquer et de justifier les différentes étapes de l'algorithme. La figure 2.11 permet de mieux comprendre les liens et les interactions entre les différentes étapes.

1. À partir d'une solution et du maillage sur lequel elle a été calculée, on reconstruit les dérivées secondes pour former la matrice hessienne  $H_u$  à chacun des noeuds du domaine.
2. On diagonalise la matrice hessienne
  - a) On obtient la matrice des vecteurs propres  $R_\phi$  qui servira au calcul de la métrique locale
  - b) On obtient les valeurs propres  $\lambda_{min}$  et  $\lambda_{max}$
3. À partir des valeurs propres  $\lambda_{min}$  et  $\lambda_{max}$  on calcule le ratio d'anisotropie  $s$ .
4. On calcule la valeur propre minimale  $|\lambda_{min}|^* = \max(|\lambda_{min}|, \varepsilon)$
5. On calcule ensuite la valeur propre maximale  $|\lambda_{max}|^* = |\lambda_{min}|^* s^2$
6. La valeur du  $D_{L_p}$  est calculée à partir des valeurs propres originales  $\lambda_{min}$  et  $\lambda_{max}$ . Ce calcul est global, il somme la contribution du déterminant de chacun des noeuds du domaine.
7. On calcule la métrique locale  $\mathcal{M}_i$

---

5. Le développement se trouve à l'annexe D.

FIGURE 2.11 Algorithme de calcul de la métrique  $\mathcal{M}$

## 2.6 Intersection de métriques

L'expression de la métrique a été développée par rapport à une seule variable correspondant à un champ scalaire défini en chaque noeud d'un maillage. Toutefois pour un écoulement en plusieurs dimensions, lors de la construction de la métrique il y a souvent plusieurs variables à considérer et pour lesquelles nous désirons contrôler l'erreur d'interpolation. De cette manière, nous générerons plusieurs métriques correspondant aux différentes variables qui seront utilisées pour contrôler le maillage. Pour obtenir la métrique qui est utilisée lors de la génération du maillage, nous faisons appel à une méthode d'intersection de métriques utilisant la réduction simultanée des formes quadratiques associées à deux métriques. La métrique obtenue de l'intersection préserve les bornes de l'erreur d'interpolation pour chaque variable.

### 2.6.1 Réduction simultanée de deux métriques

Soit deux métriques  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  symétriques définies positives et de dimension  $2 \times 2$ . Il existe une base  $(e_1, e_2)$  dans laquelle ces deux métriques sont diagonales. Notons que cette base n'est généralement pas orthogonale. En exprimant les deux métriques dans cette base, nous pouvons en déduire une métrique  $\mathcal{M}$  qui préserve les contraintes de tailles imposées par les deux métriques initiales. Il est possible d'obtenir cette base par réduction simultanée si au moins une des deux métriques initiales admet son inverse. Par construction les métriques ont toutes un déterminant non nul et elles sont donc inversibles. Nous introduisons ainsi la matrice  $\mathcal{N}$  :

$$\mathcal{N} = \mathcal{M}_1^{-1} \mathcal{M}_2$$

Cette matrice peut être décomposée de manière usuelle :

$$\mathcal{N} = P_{\mathcal{N}} \Lambda P_{\mathcal{N}}^{-1}$$

où la matrice de rotation  $P_{\mathcal{N}}$  est composée des vecteurs propres  $e_1$  et  $e_2$  de  $\mathcal{N}$ . Puisque cette dernière n'est pas symétrique, ses vecteurs propres ne sont pas orthogonaux. Ils définissent la base commune aux deux métriques de départ qui nous permet de calculer leur intersection. Les valeurs propres des métriques  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  associées aux vecteurs propres de  $\mathcal{N}$  sont calculées de la manière suivante. À partir de l'égalité suivante, où  $\mathcal{M}_j$  est une des métriques

de départ, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_j \mathbf{e}_i &= \mathbf{e}_i (\lambda_i)_j \\ \mathbf{e}_i^T \mathcal{M}_j \mathbf{e}_i &= \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i (\lambda_i)_j = (\lambda_i)_j \\ \langle \mathbf{e}_i, \mathcal{M}_j \mathbf{e}_i \rangle &= (\lambda_i)_j \\ P_{\mathcal{N}}^T \mathcal{M}_j P_{\mathcal{N}} &= \begin{bmatrix} (\lambda_1)_j & 0 \\ 0 & (\lambda_2)_j \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Nous obtenons de cette façon la diagonalisation de  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  dans la base  $P_{\mathcal{N}}$ .

$$\mathcal{M}_1 = (P_{\mathcal{N}}^T)^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} P_{\mathcal{N}}^{-1} \quad (2.76)$$

$$\mathcal{M}_2 = (P_{\mathcal{N}}^T)^{-1} \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} P_{\mathcal{N}}^{-1} \quad (2.77)$$

## 2.6.2 Intersection

La réduction simultanée des métriques  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  nous permet d'exprimer ces deux métriques dans une base commune. Nous cherchons à obtenir une métrique dans cette même base qui préserve les bornes de l'erreur d'interpolation pour les différentes variables dans chacune des directions propres  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ . Par l'intersection des deux métriques, nous choisissons donc la valeur propre la plus contraignante, soit celle se traduisant par la plus petite taille de maillage. Si nous rappelons la relation entre la taille  $h$  et la valeur propre  $\lambda$  qui est donnée par :

$$h = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

Nous choisissons ainsi la valeur propre maximale dans les directions  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  pour définir l'intersection.

$$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = (P_{\mathcal{N}}^T)^{-1} \begin{bmatrix} \max(\lambda_1, \mu_1) & 0 \\ 0 & \max(\lambda_2, \mu_2) \end{bmatrix} P_{\mathcal{N}}^{-1} \quad (2.78)$$

De cette façon, nous assurons que l'erreur d'interpolation dans la métrique  $\mathcal{M}$  est plus petite ou égale à celles dans les métriques  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ . Par construction, il est évident que la nouvelle métrique a les mêmes propriétés que les deux métriques de départ ; elle est symétrique définie positive et représente bel et bien une métrique. La métrique  $\mathcal{M}$  correspond à l'ellipse la plus grande inscrite à l'intérieur de  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ .

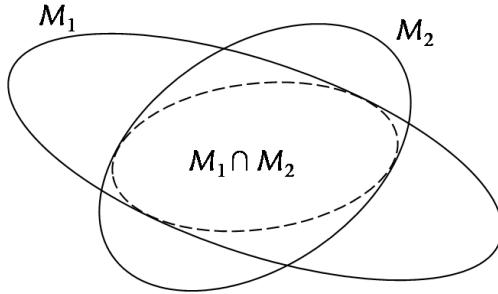


FIGURE 2.12 Intersection des métriques  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$

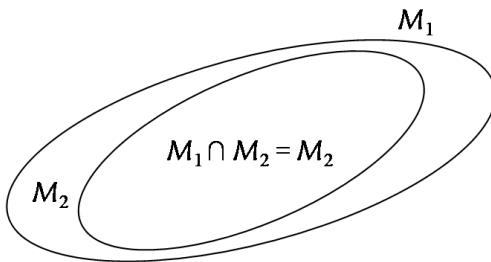


FIGURE 2.13 Intersection des métriques  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  : lorsqu'une des métriques est entièrement incluse dans l'autre, la métrique résultante de l'intersection est la plus petite des deux.

### 2.6.3 Cas particuliers

Nous exposons ici deux cas particuliers pour le calcul de l'intersection de deux métriques. Le premier fait intervenir deux métriques semblables soit lorsque :

$$\mathcal{M}_1 = k\mathcal{M}_2$$

où  $k$  est un scalaire différent de zéro. La matrice  $\mathcal{N}$  prend alors la forme suivante :

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Cette matrice est la matrice identité multipliée par le scalaire  $k$ , et sa matrice des vecteurs propres est aussi la matrice identité. La métrique résultante devrait correspondre exactement à l'une des deux métriques  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ . Par contre, l'algorithme précédent conduira à une métrique dont les vecteurs propres sont ceux de la matrice identité. En pratique, il est plutôt rare, voire impossible, que les deux métriques à intersecter aient exactement la même valeur.

Cependant, par précautions nous rajoutons un test dans la boucle de calcul juste après le calcul de la matrice  $\mathcal{N}$ , soit :

Si  $\mathcal{N}(1,1) = \mathcal{N}(2,2)$  et que  $\mathcal{N}(1,2) = 0$

alors  $\mathcal{M} = \max(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$

Le deuxième cas particulier est celui où  $\mathcal{N} = 0$ . Les vecteurs propres sont alors indéterminés et nous ne pouvons pas calculer l'intersection des deux métriques. Ce cas se présente dans deux situations bien précises qui ne sont pas rencontrées en pratique puisqu'elles correspondent à une situation où au moins une des deux métriques ne vérifie pas la définition même d'une métrique. La première situation est évidemment lorsque l'une des deux métriques est nulle. Cette situation est évitée par l'algorithme mis en place pour le calcul de la métrique, puisque la métrique aura toujours des valeurs propres différentes de zéro. La deuxième situation où  $\mathcal{N}$  est nulle survient lorsque les deux métriques ont un déterminant nul et que les composantes des métriques respectent un certain ratio<sup>6</sup>. Puisque par définition une métrique a un déterminant différent de zéro, cette situation n'est jamais rencontrée lors du calcul de l'intersection de deux métriques.

---

6. Pour les détails de la preuve voir l'annexe E.

## CHAPITRE 3

### APPLICATIONS NUMÉRIQUES

Ce chapitre présente différents exemples d'applications de la méthode d'adaptation de maillages anisotropes introduite au chapitre précédent. Il est divisé en quatre sections. La première nous permet de présenter le fonctionnement de l'adaptation de maillages anisotropes à partir de deux cas simples de l'équation de Poisson. La deuxième section présente des simulations numériques des équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible. Nous y présentons dans un premier temps un écoulement de Poiseuille qui nous amène à nous questionner sur la stratégie à adopter pour le calcul de la métrique d'adaptation pour un écoulement à plusieurs variables. La simulation classique de la cavité carrée entraînée nous permet de choisir la meilleure stratégie de calcul de métrique pour un écoulement à plusieurs variables. À la troisième section, nous introduisons la méthode d'adaptation de maillages anisotropes pour les écoulements axisymétriques. La dernière section présente une nouvelle application des maillages anisotropes adaptés utilisés pour l'identification des structures lagagiennes cohérentes dans un écoulement instationnaire de dimension 2.

### 3.1 Conduction avec terme source

L'équation de Poisson en 2 dimensions modélise des problèmes de conduction avec terme source. Nous nous en servons ici pour générer des solutions pour simuler des phénomènes qui s'apparentent à ceux d'une couche limite ou d'une onde de choc dans un écoulement en 2 dimensions. L'adaptation de maillage anisotrope cible de tels problèmes, et nous présentons ici les possibilités qui sont offertes par cette méthode pour améliorer la qualité des maillages et la précision des solutions. Cette section nous permet aussi de présenter le fonctionnement de l'adaptation de maillage anisotrope et de comparer les maillages obtenus aux maillages isotropes.

L'équation de Poisson a la forme suivante :

$$\nabla^2 F = -U \tag{3.1}$$

Le terme source  $U$  nous permet de spécifier la solution  $f(x, y)$  présentant les caractéristiques souhaitées pour modéliser les phénomènes telles une onde de choc ou une couche limite. Cette approche dite des solutions manufacturées offre la flexibilité requise.

### 3.1.1 Modèle continu d'une onde de choc

Une onde de choc est caractérisée par un changement abrupt, quasi discontinu, des variables de l'écoulement. Par exemple, à travers un choc il y a une augmentation rapide et presque instantanée de la pression, de la température et de la masse volumique du fluide. L'épaisseur d'une onde de choc dans les conditions atmosphériques est de l'ordre de quelques micromètres ( $1.0 \cdot 10^{-6} m$ ).

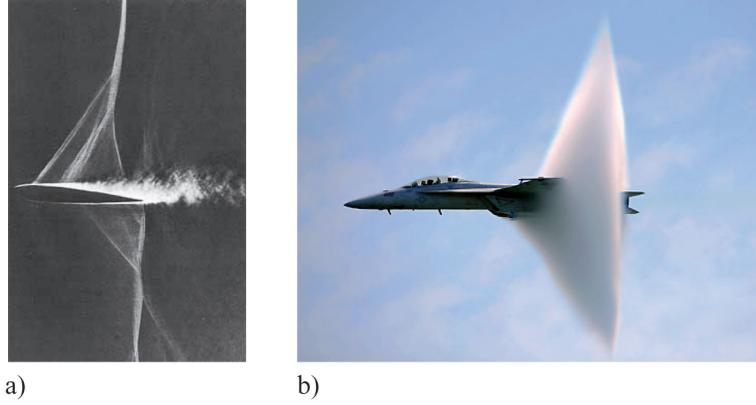


FIGURE 3.1 a) Photographie Schlieren d'ondes de choc sur un profil d'aide dans un écoulement transsonique. b) Onde de choc sur un avion de chasse.

Le problème qui suit permet de reproduire un changement abrupt contrôlé grâce à la fonction  $f_1$  suivante :

$$f_1(x, y) = \tanh\left(\varepsilon \left(y - \frac{x}{2}\right)\right) \quad \text{définie sur } \Omega : x \in [-1, 1], y \in [-1, 1] \quad (3.2)$$

Cette fonction est continue et deux fois différentiable. Le paramètre  $\varepsilon$  contrôle l'épaisseur du choc :

$$\delta_{choc} = \frac{1}{\varepsilon}$$

En augmentant le coefficient  $\varepsilon$  le gradient modélisé par  $f_1(x, y)$  devient de plus en plus raide. Le terme source dans l'équation 3.1 est déterminé afin d'obtenir une solution qui correspond à  $f_1(x, y)$ .

### Adaptation de maillage

Dans un premier temps, nous démontrons le fonctionnement de l'adaptation de maillage anisotrope. Référons-nous à l'algorithme d'adaptation défini au chapitre 1. Il débute par un

maillage initial relativement grossier et facile à obtenir sur lequel nous obtenons une première solution. Le calcul d'un opérateur de transition, à l'aide de la métrique, permet de générer un nouveau maillage qui devrait être meilleur. Nous reprenons le cycle jusqu'au critère d'arrêt. En adaptation classique, nous augmentons le nombre de nœuds à chaque itération pour améliorer la précision de la solution. Dans l'exemple qui suit, nous spécifions le nombre de nœuds de sorte que les différents maillages obtenus ont tous approximativement le même nombre de nœuds et d'éléments. Par contre, la distribution, l'orientation et l'étirement des éléments évoluent au fur et à mesure que nous progressons dans les boucles d'adaptation pour améliorer la précision de la solution.

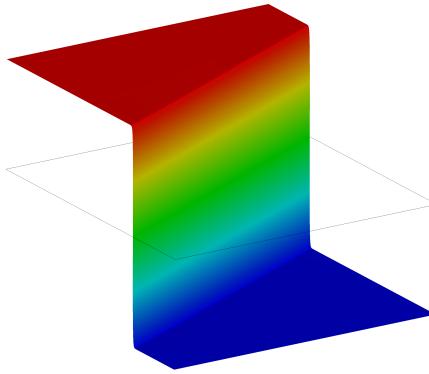


FIGURE 3.2 Fonction  $f_1(x, y)$  avec  $\varepsilon = 100$

## Résultats

Dans notre exemple, nous utilisons une valeur  $\varepsilon$  de 100. Cette valeur est loin de correspondre à l'épaisseur réelle d'un choc, mais elle nous permet de mesurer la difficulté du problème et de comparer l'adaptation de maillage anisotrope et isotrope. La figure 3.2 illustre la forme de la solution de la fonction  $f_1(x, y)$ .

Pour la première série d'adaptation de maillages anisotropes, nous fixons le nombre de nœuds à 600 et nous utilisons la norme  $L_\infty$  pour le calcul de la métrique, telle que définie à la section 2.4. Cette norme conduit à une meilleure capture des phénomènes anisotropes. La figure 3.3 montre quelques-uns des maillages obtenus. Nous voyons très bien l'évolution du maillage et la capture du choc par le maillage. À chaque boucle d'adaptation de maillage, les éléments s'étirent et s'alignent sur le choc. Les maillages obtenus comptent plus de nœuds que le nombre demandé. Ce surnombre de nœuds est la conséquence de deux facteurs. Le premier de ces facteurs s'observe lors du calcul de la métrique. Les restrictions<sup>1</sup> imposées

---

1. Voir la section 2.5.2

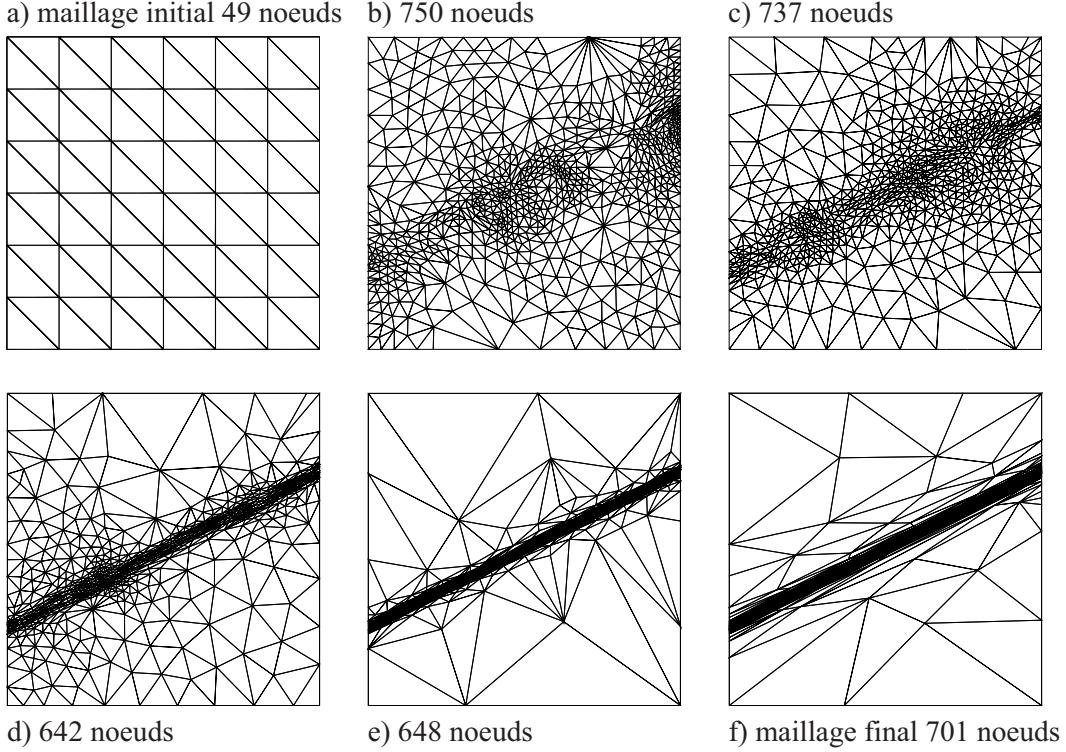


FIGURE 3.3 Maillages anisotropes issus de l'adaptation en norme  $L_\infty$

sur les valeurs propres ont comme conséquence d'augmenter le nombre réel de noeuds de la métrique par rapport au nombre de noeuds demandé  $N$ . Le deuxième facteur est l'algorithme de *mesh gradation* du mailleur. Cet algorithme est utilisé afin de générer un maillage dont les transitions sont douces entre les éléments de tailles et/ou d'orientations différentes. Le mailleur que nous avons utilisé permet théoriquement d'éliminer cette option de *gradation* du maillage, mais en pratique les maillages obtenus ont généralement un nombre de noeuds 10% à 30% supérieur au nombre de noeuds demandé, selon l'écoulement étudié.

Pour la deuxième série d'adaptation, les métriques sont calculées en norme  $L_1$ . Le maillage final montre une distribution de noeuds un peu différente, comme nous pouvons le constater sur la figure 3.4a). Il y a beaucoup plus d'éléments dans les zones planes, mais la majorité des éléments est toujours concentrée dans la zone de choc.

Une dernière série d'adaptation, isotrope cette fois-ci, permet de comparer les deux méthodes d'adaptation. Cette dernière adaptation ne se fait pas avec un nombre fixe de noeuds. Nous tentons plutôt de réduire l'erreur globale par un certain facteur, ce qui généralement entraîne une augmentation du nombre de noeuds à chaque itération. La figure 3.4b) montre le dernier maillage obtenu, qui compte un peu plus de 65000 noeuds. Il fut nécessaire

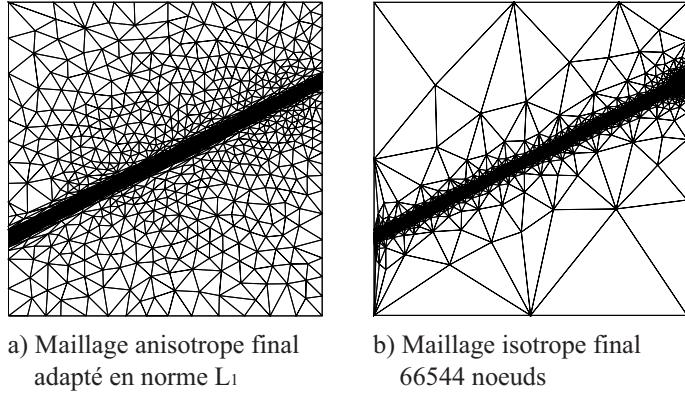


FIGURE 3.4 Maillages anisotrope et isotrope

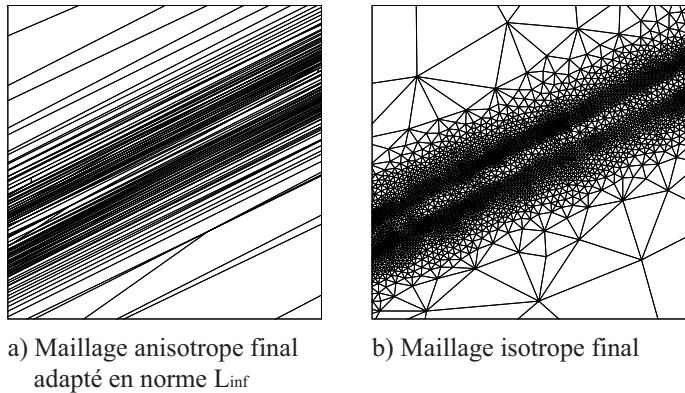


FIGURE 3.5 Gros plan sur la zone de choc

d'amorcer les calculs sur un maillage de départ plus fin de 625 nœuds comparativement à 49 nœuds pour les maillages anisotropes. Un maillage de départ trop grossier peut engendrer un lot de difficultés, car la solution est alors mal représentée, la physique mal capturée et l'adaptation peut ainsi s'égarer. Ce qui entraîne un nombre important d'itérations avant d'obtenir une série de maillages permettant la capture du choc.

La figure 3.5 présente un gros plan des maillages anisotrope  $L_\infty$  et isotrope à l'endroit du choc. Les maillages dévoilent la forme de la fonction  $f_1(x, y)$ . La densité de nœuds augmente dans les zones où la courbure est élevée, et ces zones correspondent, sur la solution, à la transition entre les plateaux. La différence entre les deux types de maillages est énorme. Dans l'image 3.5a) il n'y a qu'une trentaine de nœuds comparativement à plusieurs centaines de nœuds pour le maillage isotrope.

Finalement, nous pouvons vraiment apprécier la performance des maillages anisotropes par le graphique de l'erreur absolue en fonction du nombre de nœuds du maillage. Il ne s'agit pas ici d'une étude du taux de convergence des maillages anisotropes. Nous désirons plutôt

mettre en évidence la façon dont l'évolution des maillages anisotropes améliore la précision de la solution à chaque étape, et ce, même si le nombre de nœuds varie peu. Cette évolution du maillage est en quelque sorte la convergence du maillage vers une forme optimale. Nous

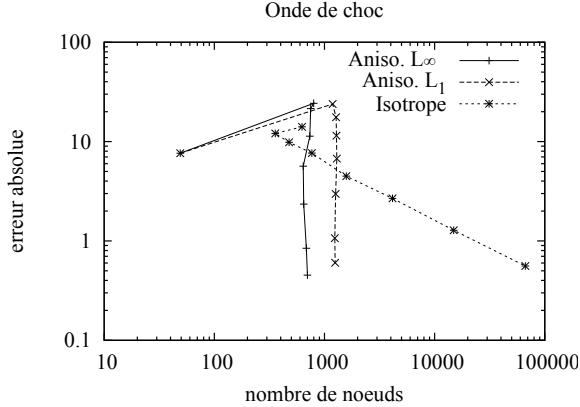


FIGURE 3.6 Erreur absolue en fonction du nombre de nœuds

noterons aussi la grande différence entre les nombres de nœuds requis pour chaque approche pour atteindre un même niveau d'erreur. Dans le cas présent, l'anisotropie du maillage réduit par un facteur de 100 le nombre de nœuds. Évidemment, il s'agit ici d'un problème purement anisotrope, donc il n'est pas surprenant que la méthode d'adaptation de maillage anisotrope soit si performante. La différence entre les maillages est impressionnante, et nous montre que la capture d'une onde de choc, dont l'épaisseur  $\delta_{choc}$  serait de l'ordre de  $1.0 \cdot 10^{-6}$ , nécessiterait un maillage isotrope extrêmement fin.

### 3.1.2 Couche limite

Un des éléments les plus importants et complexes de la mécanique des fluides est sans aucun doute la couche limite. Le concept de couche limite, introduit par Prandtl en 1905, identifie la région du fluide près d'un corps où les effets visqueux sont importants. La vitesse du fluide est nulle à la paroi et augmente progressivement à l'intérieur de la couche limite pour atteindre la vitesse  $U$  de l'écoulement non perturbé. Par exemple, le comportement et les performances d'une aile d'avion sont très influencés par la couche limite. Elle affecte entre autres la portance, la traînée ainsi que l'angle de décrochage (*stall angle*) de l'aile. Pour bien évaluer les caractéristiques aérodynamiques d'une aile, il est donc nécessaire de bien connaître la couche limite.

L'exemple qui suit illustre l'utilité des maillages anisotropes dans l'étude des couches limites. Blasius a développé une solution analytique pour une couche limite analytique bidimensionnelle sur une plaque plane. Il a montré que l'épaisseur de la couche limite varie de la

façon suivante :

$$\delta_{CL}(x) \approx \left(\frac{\nu}{U} x\right)^{\frac{1}{2}} = x R_e^{-\frac{1}{2}} \quad (3.3)$$

où  $\nu$  représente la viscosité cinématique du fluide,  $U$  la vitesse de l'écoulement non perturbé,  $x$  la position le long de la plaque plane et  $Re$  le nombre de Reynolds. En écrivant cette relation en fonction du nombre de Reynolds, nous pouvons introduire le ratio  $S_{CL}$  caractérisant l'épaisseur de la couche limite par rapport à sa longueur :

$$S_{CL} = \frac{\delta_{CL}(x)}{x} = R_e^{\frac{-1}{2}} \quad (3.4)$$

L'étude numérique des couches limites nécessite des maillages ayant un grand nombre de nœuds  $N_\delta$  dans la direction de l'épaisseur de la couche limite, puisque c'est dans cette direction que la vitesse varie le plus. Si nous utilisons un maillage isotrope (de mêmes densités de nœuds dans toutes les directions), nous pouvons estimer le nombre de noeuds  $N_L$  requis dans la direction longitudinale :

$$N_L \approx \frac{N_\delta}{S_{CL}} = N_\delta R_e^{\frac{1}{2}} \quad (3.5)$$

À titre d'exemple, pour un nombre de Reynolds de l'ordre de  $1.0 \cdot 10^4$ , en supposant que seulement 10 nœuds sont requis dans l'épaisseur  $\delta_{CL}$  pour bien évaluer la couche limite, le nombre total de nœuds dans la couche limite est alors :

$$N_{CL} \approx N_\delta \times N_L \approx 10000 \quad (3.6)$$

Pour les maillages anisotropes, les éléments étant étirés dans la direction de l'écoulement, nous pouvons diminuer le nombre de nœuds dans cette direction, sans réduire la densité de nœuds sur l'épaisseur de la couche limite. Si nous supposons un ratio d'étirement moyen de  $s \approx 10$ , le nombre total de nœuds dans la couche limite est divisé par ce facteur et est alors de 1000 nœuds.

### Modèle de couche limite

Nous pouvons obtenir une solution manufacturée présentant des caractéristiques de couche limite par la fonction  $f_2(x, y)$  qui est continue et 2 fois différentiable :

$$f_2(x, y) = 4 y(1 - y)(1 - \exp(-100x)) - (1 - \exp(-100))x \quad (3.7)$$

définie sur  $\Omega : x \in [0, 1], y \in [0, 1]$

Le terme source de l'équation 3.1 est déterminé afin d'obtenir une solution qui correspond à  $f_2(x, y)$ . La solution exacte est présentée à la figure 3.7, qui montre une solution de type couche limite sur la frontière  $x = 0$ . Nous adoptons une variante de stratégie d'adaptation

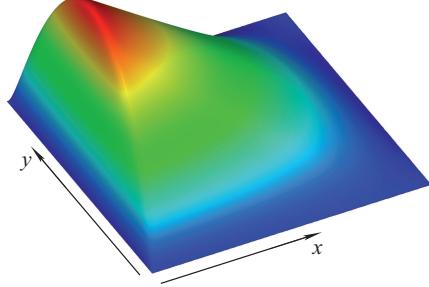


FIGURE 3.7 Fonction  $f_3(x, y)$

des maillages anisotropes. Nous augmentons le nombre de noeuds à toutes les 2 itérations, pour réaliser une étude du taux de convergence pour comparer les maillages anisotropes et isotropes. Nous utilisons les deux mêmes normes pour le calcul de la métrique, soit les normes  $L_1$  et  $L_\infty$ .

## Résultats

Le graphique 3.8 présente les courbes de convergence des trois maillages. Nous noterons que la pente de 2 de l'erreur indique que nous avons atteint la zone asymptotique. Il y a une différence marquée entre les trois maillages. Pour une erreur absolue du même ordre

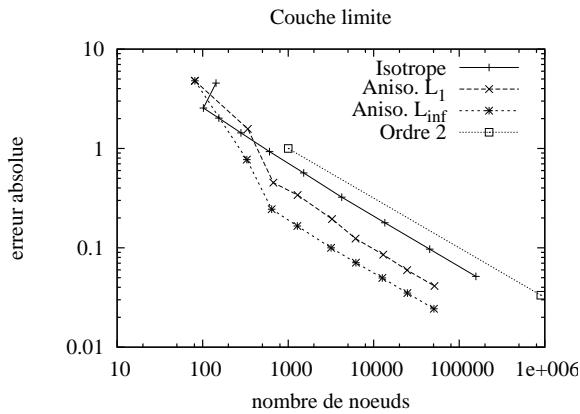


FIGURE 3.8 Erreur absolue en fonction du nombre de noeuds

que celle d'un maillage isotrope, le maillage anisotrope en norme  $L_1$  comporte environ 5 fois moins de noeuds, tandis que celui en norme  $L_\infty$  comporte 14 fois moins de noeuds. Cette

différence entre les maillages se comprend mieux en observant la figure 3.9, qui présente trois des maillages ayant un nombre de nœuds équivalent. Le maillage isotrope concentre beaucoup

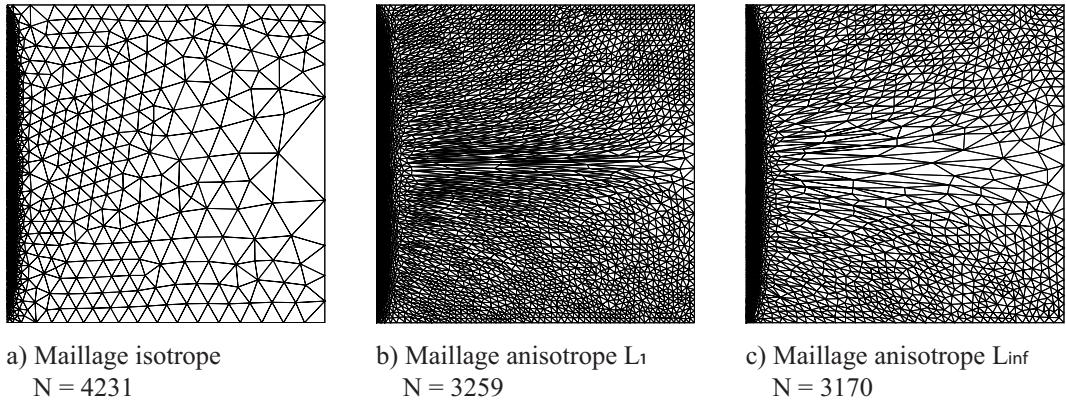


FIGURE 3.9 Maillages adaptés selon trois méthodes différentes

plus les noeuds au niveau de la couche limite que les deux autres maillages. Par contre, même s'il comporte plus de nœuds l'erreur obtenue est beaucoup plus grande que pour les deux autres. La figure 3.10 montre un gros plan du maillage isotrope et du maillage anisotrope

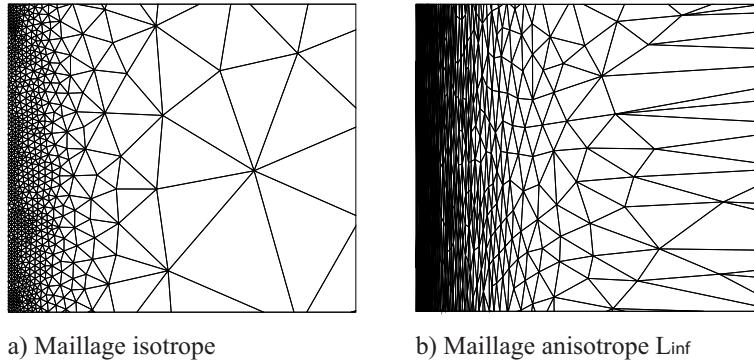


FIGURE 3.10 Gros plan sur les maillages adaptés

$L_{\infty}$ . Ce dernier permet d'avoir une plus grande concentration de noeuds dans la direction de l'épaisseur de la couche limite comparativement au maillage isotrope. La concentration dans la direction transverse est toutefois beaucoup moins élevée. Il est difficile de le constater sur l'image tellement les éléments sont étirés, mais il y a seulement 3 nœuds sur la frontière gauche ( $x = 0$ ) pour le maillage anisotrope de la figure 3.10b), comparativement à environ 90 nœuds pour le maillage isotrope. Une coupe de la solution à  $y = 0.5$  permet de mieux cibler la différence majeure entre les solutions obtenues sur les différents maillages. Le graphe 3.11 montre les solutions des maillages a) et c) de la figure 3.9 dans la zone de courbure maximale.

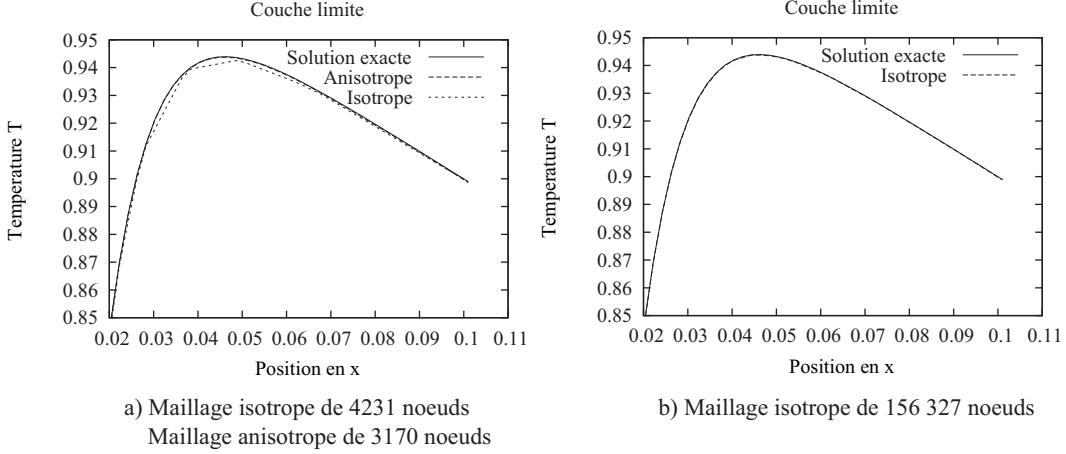


FIGURE 3.11 Coupe de la solution de  $f_2$  à  $y = 0.5$

Le maillage isotrope ne permet pas d'avoir une bonne définition de la solution dans cette zone comparativement au maillage anisotrope. Il faut augmenter le nombre de noeuds à plus de 150000 pour obtenir une solution qui se rapproche de celle du maillage anisotrope et de la solution exacte. L'économie de noeuds au niveau de la couche limite permet aussi d'augmenter le nombre de noeuds sur le reste du domaine, ce qui contribue aussi à réduire l'erreur globale.

Les maillages anisotropes permettent non seulement une économie en termes de noeuds, mais améliorent aussi la précision de la solution. Le ratio du nombre de noeuds entre les maillages isotropes et anisotropes dépend évidemment du problème en jeu. L'onde de choc par exemple est un phénomène très directionnel et les maillages anisotropes réduisent considérablement le nombre de noeuds et d'éléments nécessaires pour atteindre un niveau de précision donné. La couche limite est aussi un phénomène directionnel, mais moins raide que celui de l'onde de choc. Les maillages anisotropes permettent non seulement de réduire significativement le nombre noeuds, mais surtout de concentrer les noeuds dans la direction la plus critique, soit celle de l'épaisseur de la couche limite.

## 3.2 Écoulements 2D

Cette section nous permet de présenter l'adaptation de maillage anisotrope en 2 dimensions pour des équations à plusieurs variables dépendantes. La section précédente nous a permis de démontrer le potentiel des maillages anisotropes pour la simulation de phénomènes directionnels. Ici, nous mettons en applications l'adaptation de maillage anisotrope sur quelques écoulements visqueux typiques. Le but principal est de présenter l'intersection de métriques, qui semble être la meilleure stratégie de calcul de la métrique d'adaptation pour un écoulement à plusieurs variables. Le premier exemple nous permet d'exposer notre point vue à partir d'un écoulement très simple, soit l'écoulement de Poiseuille. Par la suite, nous validons la technique d'intersection de métrique dans le processus d'adaptation de maillages anisotropes pour des écoulements de Navier-Stokes.

### 3.2.1 Écoulement de Poiseuille

Cette section éclairent le choix à faire pour le calcul de la métrique d'adaptation pour un écoulement à plusieurs variables dépendantes. Nous y présentons différents choix de stratégie de calcul de métrique ainsi que les restrictions et désavantages qui s'y rattachent. Nous considérons ici l'écoulement de Poiseuille en 2 dimensions d'un fluide newtonien entre deux plaques parallèles où nous négligeons les effets tridimensionnels. L'écoulement est laminaire, visqueux et incompressible. Ces conditions ont comme conséquences :

1. L'écoulement est toujours parallèle aux parois.
2. La vitesse du fluide est nulle aux parois.
3. La pression est constante sur la section et diminue linéairement de l'entrée à la sortie.

Pour la géométrie de la figure 3.12, le champ de vitesse résultant est parabolique et son expression est la suivante :

$$\mathbf{u}(x, y) = u(y) = u_{max} \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right) \quad (3.8)$$

Les conditions aux limites imposent une vitesse nulle aux parois inférieure et supérieure ( $u = v = 0$ ). À l'entrée et à la sortie, la vitesse  $u$  concorde avec le profil de vitesse décrit par l'équation 3.8. La vitesse verticale  $v$  est aussi nulle sur tout le domaine. Dans l'exemple qui suit, la vitesse maximale est fixée à une valeur de 1.5, tandis que la hauteur  $h$  est fixée à 1. La longueur du conduit est de 10.

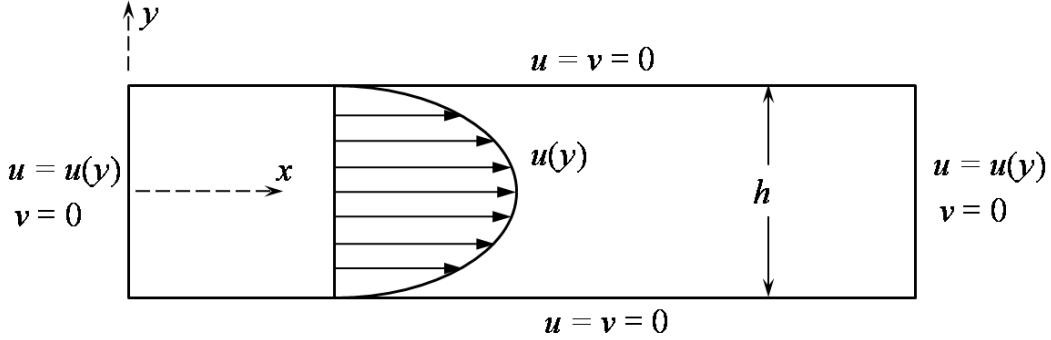


FIGURE 3.12 Écoulement de Poiseuille : géométrie et conditions aux limites

### Calcul de la métrique

Cet écoulement ne fait intervenir qu'une seule variable, la vitesse horizontale  $u$ . Donc le calcul de la métrique devrait seulement faire intervenir la variable  $u$ , puisque la vitesse  $v$  est nulle sur tout le domaine. À partir de l'équation 3.8 du champ de vitesse, nous obtenons la métrique théorique dont la forme est la suivante :

$$\mathcal{M}_{theo} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Cette métrique est constante sur tout le domaine, même aux parois, et correspond à la situation d'un écoulement unidirectionnel. Les éléments du maillage anisotrope adapté doivent tous être étirés selon le même ratio d'anisotropie et orientés dans la même direction, soit la direction  $x$ .

Cependant, si nous nous plaçons dans le contexte d'un écoulement général, dont le comportement des composantes de vitesses n'est pas connu *a priori*, nous ne pouvons pas considérer une seule des variables de l'écoulement pour le calcul de la métrique. Plusieurs moyens peuvent être envisagés pour tenir compte du caractère multi-variable d'un écoulement. La première approche est de calculer la métrique à partir d'une fonction qui englobe les variables de l'écoulement. Par exemple, nous pouvons considérer la norme du vecteur vitesse  $\|\mathbf{u}\|$ , ou l'énergie interne du fluide  $E = p + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2$ . Dans ce qui suit, nous montrons les effets de l'utilisation de ces fonctions sur le calcul de la métrique et sur le maillage résultant. La deuxième approche est d'obtenir une métrique d'adaptation résultante de l'intersection de métriques calculées pour chacune des variables dépendantes de l'écoulement.

**Norme du vecteur vitesse :** La fonction d'adaptation  $F$  est donnée par la norme du vecteur vitesse et s'exprime comme suit :

$$F(x, y) = \|\mathbf{u}\| = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (3.10)$$

Le calcul de la métrique implique les dérivées secondes de cette fonction :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= (u^2 + v^2)^{-\frac{3}{2}} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \\ &\quad + (u^2 + v^2)^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= (u^2 + v^2)^{-\frac{3}{2}} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left( u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &\quad + (u^2 + v^2)^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= (u^2 + v^2)^{-\frac{3}{2}} \left( u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \\ &\quad + (u^2 + v^2)^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \end{aligned}$$

Dans chacune de ces expressions, nous voyons apparaître une division par la norme de la vitesse à une certaine puissance. Lorsque la vitesse est nulle, il en résulte une division par zéro, et les dérivées secondes ne sont alors pas définies. Les conditions aux limites du problème imposent une vitesse nulle aux parois supérieure et inférieure. Il y a par conséquent une division par zéro pour chacun des termes de dérivées secondes aux parois. La matrice hessienne est alors indéterminée, tout comme la métrique. Ainsi, cette fonction d'adaptation engendre mathématiquement une indétermination de la métrique là où la vitesse est nulle. Si nous examinons le comportement de la plus grande valeur propre  $F''$  de cette métrique, qui pour ce problème spécifique a la forme suivante :

$$\mathcal{M}_F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F'' \end{bmatrix} \quad \text{où } F'' = \frac{2}{u} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.11)$$

nous obtenons la courbe  $\mathcal{M}_F$  sur la figure 3.13. La valeur propre maximale  $F''$  tend vers l'infini lorsque nous nous rapprochons des parois. La courbe solide correspond à la valeur propre de la métrique théorique, et nous voyons très bien les différences des deux métriques. Les éléments du maillage résultant seraient orientés dans la même direction, mais leur ratio d'anisotropie varieraient selon la position en  $y$ . Près des parois les éléments seraient très étirés, tandis que vers la position  $y = \pm 0.22$  les éléments seraient pratiquement équilatéraux, puisque

les deux valeurs propres auraient la même valeur. Un tel maillage est bien loin du maillage optimal engendré par la métrique théorique. Puisque cette fonction d'adaptation cause une division par zéro lors du calcul de la métrique là où les vitesses sont nulles, elle se prête mal à l'adaptation de maillage. Toutefois, il est possible de considérer seulement le champ

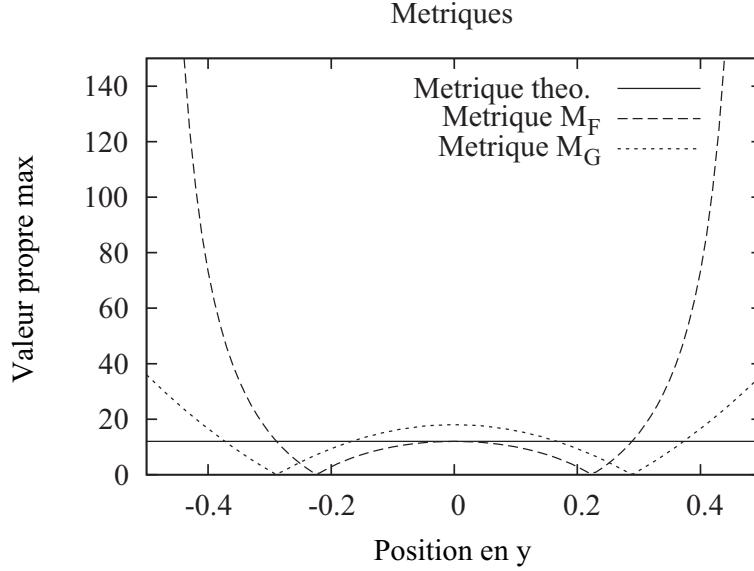


FIGURE 3.13 Valeur propre maximale des métriques  $\mathcal{M}_F$  et  $\mathcal{M}_G$

scalaire de la fonction  $F$  et de prendre seulement les dérivées secondes de ce champ. Nous évitons ainsi de faire intervenir des divisions par zéro tout en considérant les deux vitesses. Par contre, les comportements de  $u$  et de  $v$  ne coïncident pas toujours en terme de direction et/ou d'intensité. Le maillage résultant est bien adapté pour une des deux variables, mais peut engendrer des erreurs élevées pour l'autre variable. L'écoulement étudié de la prochaine section nous permet d'exposer ce genre de situation.

**Énergie interne du fluide E :** L'équation de l'énergie interne nous permet de développer une autre fonction d'adaptation  $G$  qui s'écrit comme suit :

$$G(x, y) = p(x, y) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}\|^2 \quad (3.12)$$

où  $p(x, y)$  représente la pression. Cette fonction ne fait apparaître aucune division par zéro dans les termes de dérivées secondes, qui sont les suivants :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\end{aligned}$$

Si nous considérons l'écoulement de Poiseuille étudié dans cette section, plusieurs termes disparaissent ce qui donne la métrique suivante :

$$\mathcal{M}_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G'' \end{bmatrix} \quad \text{où } G'' = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.13)$$

La pression pour ce type d'écoulement varie linéairement de l'entrée à la sortie et est constante dans la direction perpendiculaire à l'écoulement. Les dérivées secondes de la pression sont donc nulles. La figure 3.13 présente la variation de la valeur propre maximale  $G''$  en fonction de la position  $y$  entre les deux plaques. Elle présente un comportement similaire à celui observé pour  $F''$ , mais est toutefois définie aux parois et moins grande que dans le cas de  $F''$ . La figure 3.14 a) montre une partie du maillage résultant, et nous voyons bien la variation de l'étirement dans la direction verticale. Les zones de maillage moins denses correspondent aux valeurs de la métrique qui sont presque nulles. Le maillage aux parois est beaucoup plus étiré que partout ailleurs. Ce type de maillage ne correspond pas à la solution de l'écoulement de Poiseuille. Il est adapté à une fonction qui ne traduit absolument pas le comportement des variables de l'écoulement étudié. Pour cet écoulement, il est facile de voir et de comprendre l'interaction entre la fonction d'adaptation  $G''$  ou  $F''$ , la métrique et le maillage. Par contre, pour un écoulement arbitraire il serait difficile de faire la part des choses. Pour ces raisons, nous préférons adopter une autre approche, soit l'intersection de métrique.

**Intersection de métriques :** La section 2.6 explique les détails du calcul de l'intersection de deux métriques. Ici, nous utilisons l'intersection des trois  $\mathcal{M}_u$ ,  $\mathcal{M}_v$  et  $\mathcal{M}_p$  correspondantes aux trois variables dépendantes de l'écoulement. L'intersection se fait alors en deux étapes. La première consiste en l'intersection des métriques de vitesses. Ensuite, nous calculons l'intersection de la métrique résultante et de la métrique de pression. Il faut porter une attention particulière au fait que l'algorithme d'intersection implique l'inversion d'une des deux métriques lors du calcul. Par exemple, dans l'écoulement qui nous intéresse, les

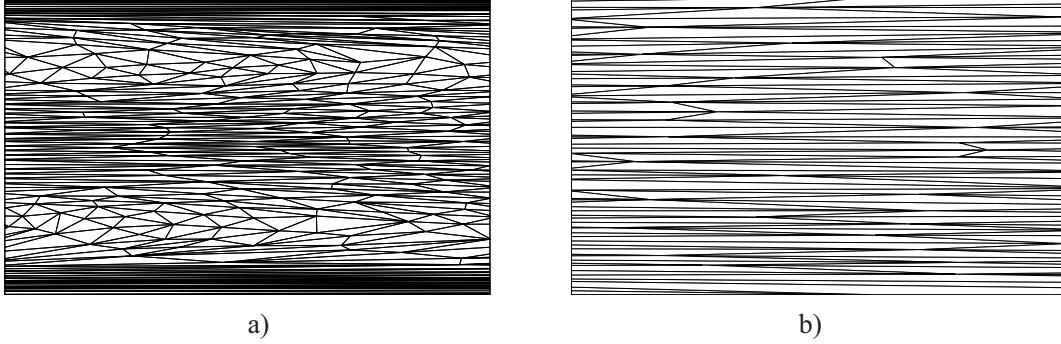


FIGURE 3.14 Maillages adaptés selon a) la métrique  $\mathcal{M}_G$  et b) la métrique obtenue de l'intersection des métriques  $\mathcal{M}_u$ ,  $\mathcal{M}_v$  et  $\mathcal{M}_p$

métriques  $\mathcal{M}_v$  et  $\mathcal{M}_p$  sont théoriquement nulles, et en pratique ont des valeurs très petites. Leur inversion peut s'avérer hasardeuse si l'algorithme de calcul de la métrique ne garantit pas un déterminant différent de zéro de la métrique.

L'intersection des métriques théoriques de vitesses mène à une matrice  $\mathcal{N}$  nulle, dont les vecteurs propres restent indéterminés. En pratique, la matrice  $\mathcal{N}$  ne sera jamais nulle puisque les métriques ont toujours un déterminant différent de zéro. Par conséquent, leur produit est toujours différent de zéro. Par contre, les coefficients de la matrice  $\mathcal{N}$  peuvent être très petits, mais les vecteurs propres de la matrice seront toujours définis. La métrique finale de cette intersection pour cet écoulement correspond à la métrique  $\mathcal{M}_u$ , puisque les valeurs propres maximales sont celles de  $\mathcal{M}_u$  :

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M}_u \cap \mathcal{M}_v) \cap \mathcal{M}_p = \mathcal{M}_u$$

La figure 3.14 b) montre une partie du maillage anisotrope obtenu. Les éléments sont tous étirés et orientés de la même manière, comme nous devons nous y attendre pour un écoulement de Poiseuille.

Pour cet écoulement, il est évident que l'intersection de métriques conduit à une métrique produisant un maillage qui respecte le comportement réel de l'écoulement. Les métriques de fonctions d'adaptation se basant sur la norme de la vitesse et sur l'énergie interne ne représentent pas de bonnes stratégies de calcul de métrique selon ce que nous venons d'exposer. Il s'agissait ici d'un écoulement très simple. Le prochain exemple nous permet de mettre à l'épreuve notre choix de stratégie de calcul de métrique sur un écoulement beaucoup plus complexe.

### 3.2.2 Cavité carrée entraînée

La cavité carrée entraînée est un problème classique dans la comparaison de méthodes numériques. C'est un écoulement relativement complexe lorsque le nombre de Reynolds augmente. Il apparaît alors des zones de recirculation qui interagissent avec les zones de couche limite. Il y aussi des changements importants de direction de l'écoulement, et aucune des composantes de vitesse ne peut être négligée.

La figure 3.15 présente le domaine qui est simulé. Le nombre de Reynolds est fixé à 1600. Il s'agit d'un domaine carré de dimension unitaire, dont la frontière supérieure est entraînée par une vitesse horizontale  $u$  unitaire vers la droite. Les conditions aux limites sur les autres frontières imposent une vitesse nulle pour le fluide. Nous imposons une condition de vitesse horizontale libre sur une petite section dans la partie supérieure des frontières verticales gauche et droite. Cela permet premièrement d'éviter une singularité au niveau de la vitesse  $u$ , mais aussi de fixer naturellement le niveau de pression, puisqu'il s'agit alors d'un écoulement de type ouvert. Un autre aspect intéressant de cet écoulement est justement la pression, qui présente deux singularités dans les coins supérieurs. Le choix de la stratégie de calcul de la métrique est important dans ce genre situation où une des variables présente une singularité, comme il est présenté dans ce qui suit.

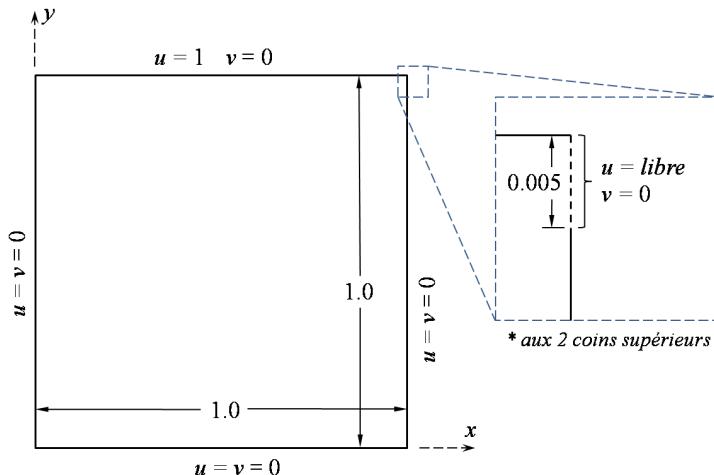


FIGURE 3.15 Cavité carrée entraînée : géométrie et conditions aux limites

### Calcul de la métrique

Contrairement à l'écoulement de Poiseuille, les deux composantes de vitesse ont des contributions du même ordre. Il est alors impossible de négliger une de ces composantes lors de

l'adaptation de maillage. La pression aussi ne peut être complètement négligée. Les singularités de pression aux coins supérieurs sont un facteur important dans la résolution du problème. À titre d'exemple et de base de comparaison, nous pouvons observer un maillage isotrope obtenu pour ce problème à la figure 3.16. C'est la zone de la frontière supérieure où sont majoritairement concentrés les noeuds. Nous y observons une sorte de couche limite le long de la partie centrale de la frontière, et les deux singularités qui agissent comme des points d'attraction sur les noeuds du maillage. Les lignes de courant permettent de comprendre et de voir le mouvement général du fluide, les couches limites aux parois et les zones de recirculation dans les coins inférieurs de la cavité.

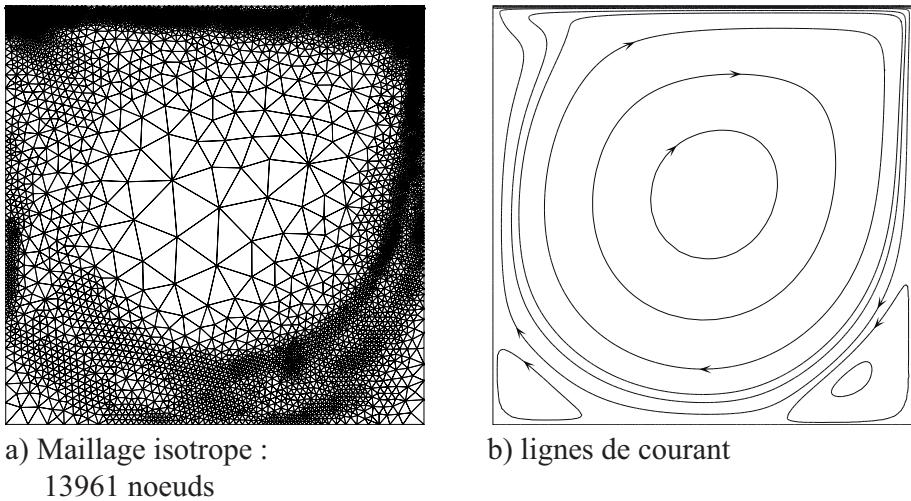


FIGURE 3.16 Cavité carrée entraînée :  $R_e = 1600$

Nous voulons comparer dans cette section les maillages obtenus de trois stratégies de calcul de métrique. La première stratégie consiste à évaluer le champ scalaire de la norme de la vitesse afin d'obtenir la métrique modifiée de la norme des vitesses  $\mathcal{M}_{F^*}$ . La deuxième passe par l'intersection des métriques de vitesse pour obtenir la métrique  $\mathcal{M}_A$ . La dernière métrique  $\mathcal{M}_B$  s'obtient de l'intersection de la métrique  $\mathcal{M}_A$  et de la métrique de pression.

**Métrique  $\mathcal{M}_{F^*}$  :** Les commentaires faits pour l'écoulement de Poiseuille sur cette stratégie de calcul de la métrique sont toujours aussi pertinents ici. Les conditions aux limites imposent une vitesse nulle aux parois et engendrent donc certains problèmes lors du calcul de la métrique. De plus, la vitesse est presque nulle au centre du tourbillon principal et des deux zones de recirculation secondaires. Le calcul de la métrique, comme exposé dans la section précédente, est donc impossible. Par contre, nous pouvons évaluer les dérivées seconde du champ scalaire de la fonction  $F(x, y)$ . C'est cette technique qui est utilisée dans beaucoup de

travaux en adaptation de maillages anisotropes pour les écoulements de Navier-Stokes. Nous noterons cette stratégie de calcul de métrique par  $\mathcal{M}_{F*}$  pour ne pas le confondre avec celle exposée à la section précédente.

**Métrique  $\mathcal{M}_A$  :** Cette stratégie ne fait intervenir que les métriques de vitesse, ce qui nous permettra d'évaluer l'impact de la métrique pression et des singularités sur la génération du maillage. La métrique se calcule donc comme suit :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_u \cap \mathcal{M}_v$$

Le choix de la norme de calcul de la métrique joue aussi un rôle important. Elle permet de concentrer plus ou moins les nœuds dans les zones de fort gradient. Nous cherchons la norme qui permettra d'atteindre le plus bas niveau d'erreur pour un certain nombre de nœuds. Le tableau 3.1 montre la variation de l'estimation de l'erreur en norme énergie en fonction de la norme de calcul de la métrique. Les maillages pour ces différentes normes ont été construits

Norme $L_p$	Erreur
$L_1$	1.06708
$L_2$	0.631293
$L_\infty$	0,331406

TABLEAU 3.1 Erreur énergie selon la norme  $L_p$  de calcul de la métrique

par le biais de métriques calculées par l'intersection des métriques  $\mathcal{M}_u$  et  $\mathcal{M}_v$ , et chacun des maillages obtenus compte environ 6000 nœuds. La meilleure norme pour ce problème, et selon l'estimation d'erreur en norme énergie, est la norme  $L_\infty$ . Cette norme concentre un peu plus les nœuds sur les singularités et permet donc d'obtenir une meilleure précision pour les vitesses et en pression dans ces régions.

**Métrique  $\mathcal{M}_B$  :** Cette dernière métrique s'obtient de l'intersection de la métrique  $\mathcal{M}_A$  et de la métrique pression. Il s'agit en fait du même calcul de métrique utilisé par l'écoulement de Poiseuille. Nous nous basons sur les résultats préliminaires de la métrique pour choisir la norme de calcul de la métrique, soit la norme  $L_\infty$ . Cette métrique devrait encore plus concentrer les nœuds sur les singularités en pression.

## Adaptations et résultats

Les quatre séries d'adaptation commencent toutes par le même maillage isotrope qui compte environ 3000 nœuds. La figure 3.18 présente les quatre maillages obtenus après

quelques boucles d'adaptation. Nous pouvons premièrement voir que les quatre maillages se distinguent les uns des autres par la distribution des noeuds sur le domaine. Les trois premiers maillages concentrent beaucoup moins les noeuds au centre du tourbillon principal comparativement au dernier maillage. Les vitesses sont relativement petites à cet endroit, mais surtout leur variation est constante. Nous pouvons d'ailleurs l'observer sur les graphiques 3.17a), b) qui présentent les coupes des vitesses horizontale et verticale. Entre les zones de couches limites près des parois, les vitesses varient presque linéairement. Les éléments n'ont donc pas besoin d'être si concentrés comme ils le sont pour le maillage  $\mathcal{M}_{F*}$ . Pour ce dernier, les éléments sont même étirés et orientés vers le centre du tourbillon. Cette métrique concentre les noeuds au mauvais endroit et le maillage obtenu ne semble pas correspondre à l'écoulement.

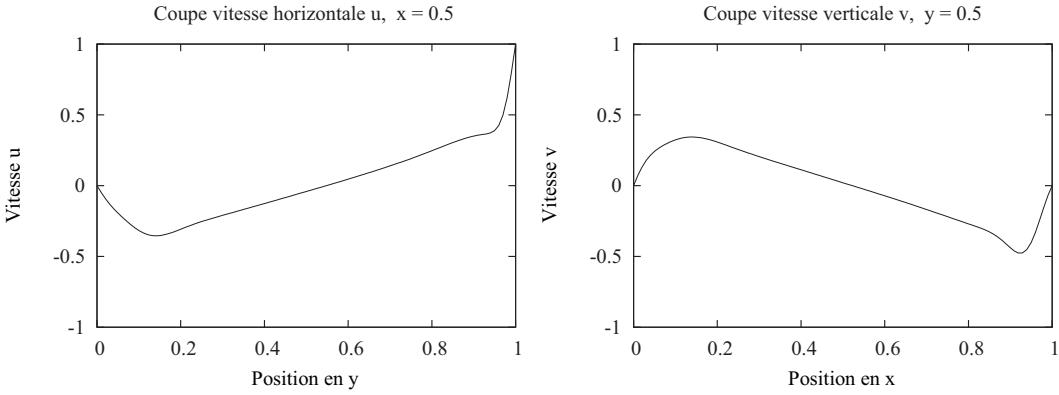


FIGURE 3.17 Coupes de vitesses horizontales et verticales

Les maillages des métriques  $\mathcal{M}_A$  et  $\mathcal{M}_B$  semblent identiques, par contre le maillage de la métrique  $\mathcal{M}_B$  compte presque 3000 noeuds de plus que l'autre maillage. Pourtant le nombre de noeuds  $N$  demandé est le même lors du calcul des deux ou trois métriques de base, soit les métriques  $\mathcal{M}_u$ ,  $\mathcal{M}_v$  et  $\mathcal{M}_p$ , qui interviennent dans le calcul des métriques  $\mathcal{M}_A$  et  $\mathcal{M}_B$ .

Cette différence importante du nombre de noeuds s'explique par l'intersection des métriques. Premièrement, les métriques de base distribuent les noeuds de trois manières bien différentes, puisqu'elles tiennent compte respectivement d'une seule variable de l'écoulement. Les nombres noeuds résultants,  $N_u$ ,  $N_v$  et  $N_p$ , de chacune de ces métriques de bases sont donc tous un peu différents. Deuxièmement, l'intersection des métriques favorise les valeurs propres maximales<sup>2</sup>, soit les plus petites tailles. Ainsi, le nombre de noeuds de la métrique obtenue de l'intersection est donc plus grand ou égal au nombre de noeuds de la métrique de base comptant le plus de noeuds, et plus petit ou égal au total des nombres de noeuds des

2. Voir la section 2.6 pour plus de détails

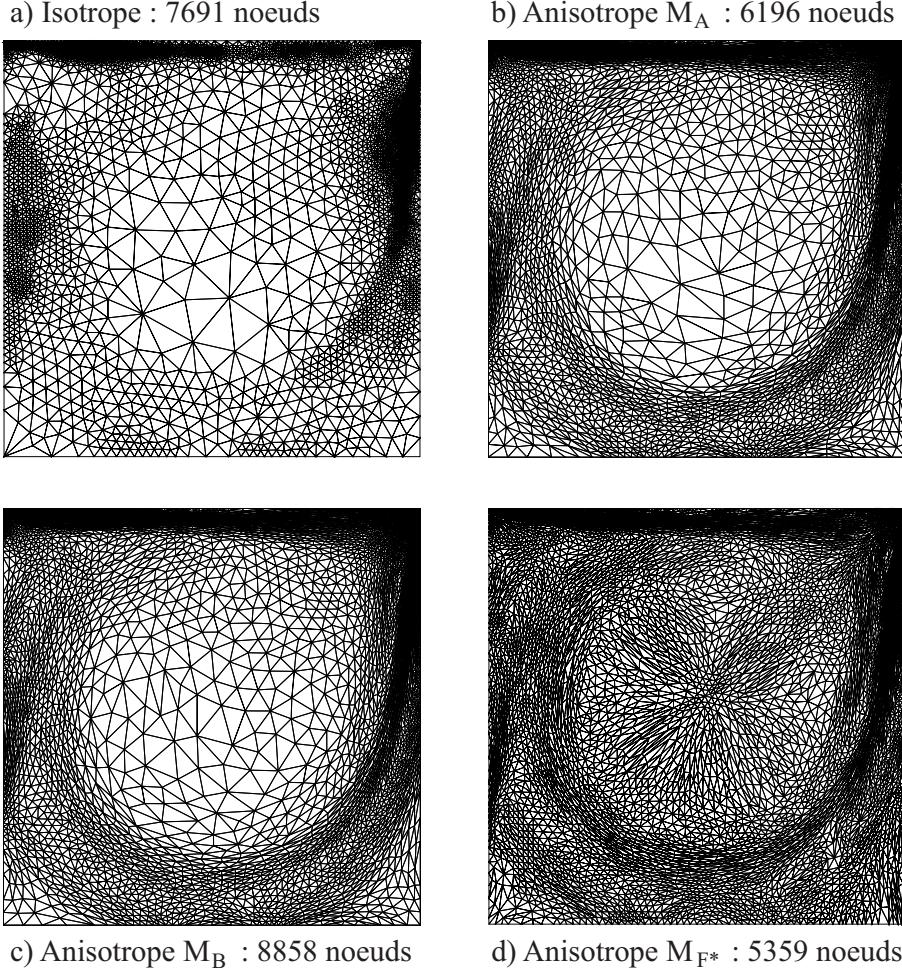


FIGURE 3.18 Maillages obtenus de différentes stratégies de calcul de métrique

trois métriques.

$$\max*(N_u, N_v, N_p) \leq N_{obtenu} \leq N_u + N_v + N_p$$

De plus, puisque les métriques définissent des surfaces différentes, les zones de concentration de nœuds sont différentes selon les métriques. L'intersection tient compte de toutes ces zones et le nombre de nœuds résultant est donc généralement plus élevé que le nombre de nœuds demandé. Plus il y a de métriques de base, plus le nombre de nœuds résultant risque d'être élevé. Ce nombre de nœuds résultant dépend aussi beaucoup de l'écoulement étudié. Pour un écoulement très directionnel, comme l'écoulement de Poiseuille, les métriques de base de la vitesse verticale  $\mathcal{M}_v$  et de pression  $\mathcal{M}_p$  n'ont pratiquement aucune incidence sur l'intersection des métriques, et la métrique résultante n'est ni plus ni moins la métrique de vitesse

horizontale  $\mathcal{M}_u$ . Par conséquent, le nombre de nœuds résultant est approximativement celui de la métrique  $\mathcal{M}_u$ . Par contre, pour un écoulement comme celui de la cavité carrée entraînée tel que défini dans cette section, les trois métriques de bases semblent avoir chacune une incidence marquée sur la métrique résultante. Si nous nous fions au nombre de nœuds des maillages obtenus des métriques  $\mathcal{M}_A$  et  $\mathcal{M}_B$ , les trois métriques apportent sensiblement le même nombre de nœuds au maillage résultant, tel que résumé dans le tableau qui suit.

Nombre de nœuds demandé	$N = 3000$
Nombre de nœuds maillage $\mathcal{M}_A$	$N_A \approx 6000^+$
Nombre de nœuds maillage $\mathcal{M}_B$	$N_B \approx 9000^-$
Estimation du nombre de nœuds de $\mathcal{M}_u$	$N_u \approx 3000^+$
Estimation du nombre de nœuds de $\mathcal{M}_v$	$N_v \approx 3000$
Estimation du nombre de nœuds de $\mathcal{M}_p$	$N_p \approx 3000^-$

TABLEAU 3.2 Estimation de la contribution des métriques au nombre total de nœuds du maillage

Nous basons ces estimations sur l'analyse de l'écoulement et des maillages. Si nous observons attentivement les maillages b) et c) de la figure 3.18 en omettant les zones des deux singularités, ils sont pratiquement identiques en terme de distribution et de concentration de nœuds, ainsi qu'en termes d'étirement et d'orientation des éléments. De plus, la pression est relativement constante et régulière sur le domaine, sauf au niveau des deux singularités, comme nous pouvons l'observer à la figure 3.19c). Les vitesses varient beaucoup plus et présentent plusieurs zones de couches limites. Donc, la métrique pression concentre la majorité des nœuds sur les deux singularités, et le reste du domaine est pris en charge par les métriques de vitesses. C'est pour cette raison que les deux maillages semblent identiques.

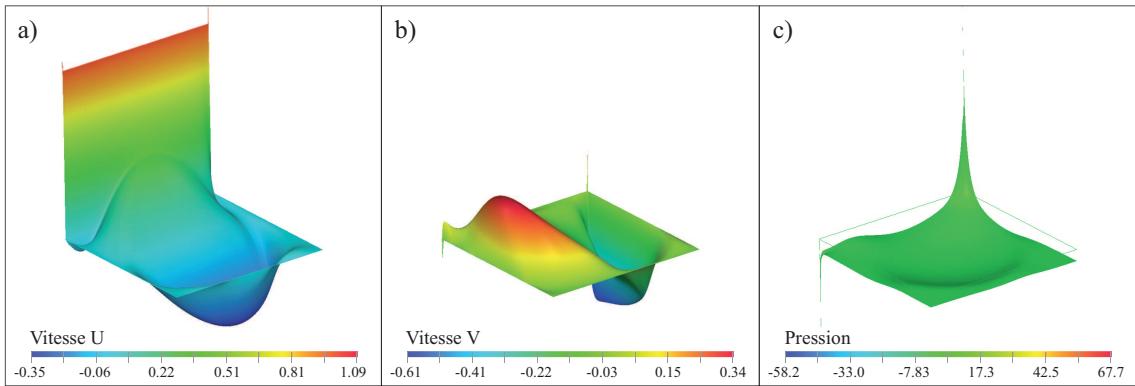


FIGURE 3.19 Cavité carrée : vitesse U, vitesse V et pression P

Par contre si nous observons le gros plan fait sur une des singularités nous pouvons y

voir une différence, comme le montre la figure 3.20 qui présente les deux maillages agrandis environ 4000 fois. Sans surprise, le maillage obtenu de la métrique  $\mathcal{M}_B$  concentre beaucoup plus les nœuds au niveau des singularités de pression. Sur ce dernier maillage, nous observons une densité de nœuds beaucoup plus élevée au niveau du noyau de la singularité.

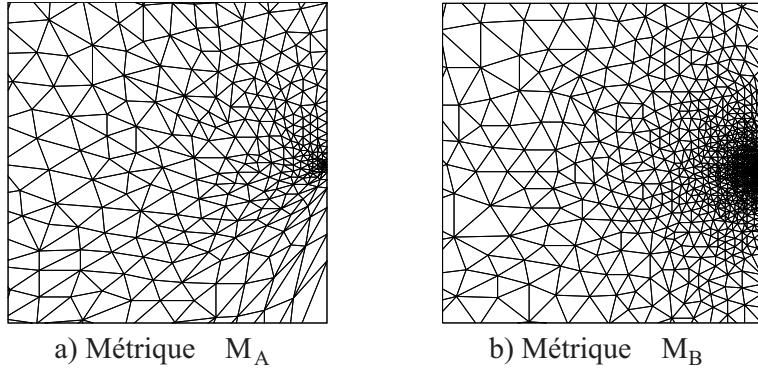


FIGURE 3.20 Gros plan des maillages sur la singularité de pression à droite du domaine

D'autre part, la figure 3.21 présente l'évolution des valeurs limites de la solution de pression par rapport au nombre de noeuds du maillage. Les valeurs limites des maillages de la métrique  $\mathcal{M}_B$  sont constantes d'un maillage à l'autre. Pourtant, nous devrions nous attendre à ce que ces valeurs limites ne cessent d'augmenter (diminuer) vers une valeur infinie, comme c'est le cas pour les maillages de la métrique  $\mathcal{M}_A$ . Or la métrique pression impose une taille d'élément autour des singularités sous la limite de précision du mailleur. Le mailleur étant en simple précision, il limite ainsi la taille minimale des éléments pouvant être générés.

Finalement, si nous examinons l'évolution de l'erreur en fonction du nombre de nœuds sur le graphique 3.22, nous voyons à quel point le maillage obtenu de la métrique  $\mathcal{M}_{F*}$  ne performe pas aussi bien que les autres. L'erreur sur ce maillage est même supérieure à celle du maillage isotrope. Cette stratégie de calcul de la métrique s'avère donc un très mauvais choix, et ne devrait pas être utilisée. Les maillages des deux métriques intersection offrent des performances similaires. Toutefois, la métrique  $\mathcal{M}_A$  est légèrement meilleure et offre l'erreur la plus basse des quatre types de maillages. En comparaison avec le maillage isotrope, le maillage anisotrope  $\mathcal{M}_A$  permet d'obtenir le même niveau d'erreur avec environ 4 fois moins de nœuds. C'est un très bon ratio compte tenu du caractère de l'écoulement qui n'est pas particulièrement anisotrope.

Les deux stratégies sont pour ainsi dire équivalentes ; la première permet d'obtenir une meilleure précision sur les vitesses tout en exhibant une très bonne définition de la pression en général, tandis que la deuxième permet d'obtenir une meilleure précision en pression,

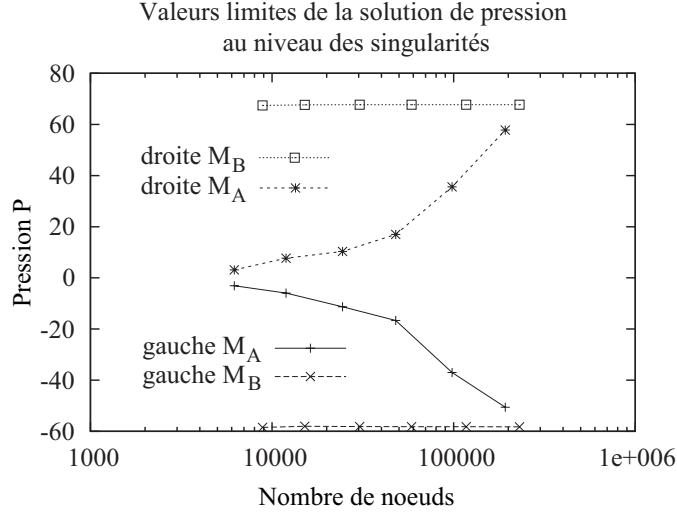


FIGURE 3.21 Valeurs limites de pression

surtout pour les variations extrêmes de pression, tout en garantissant une bonne définition du champ de vitesse. Si le critère principal de sélection est l'estimation d'erreur en norme énergie, le meilleur choix de stratégie de calcul de métrique pour ce type d'écoulement s'avère donc la métrique  $\mathcal{M}_A$ . La métrique  $\mathcal{M}_B$  n'est pas un mauvais choix pour autant, puisqu'elle performe presque aussi bien que la métrique  $\mathcal{M}_A$ . Nous recommandons son utilisation pour des écoulements ayant de fortes variations de pression et exigeant une très bonne précision en pression.

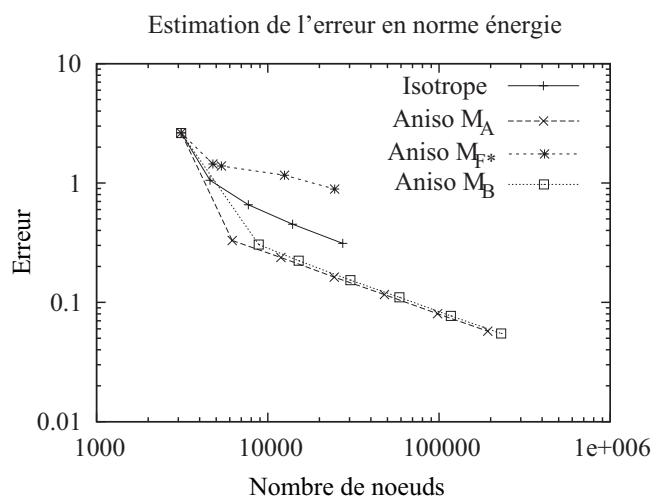


FIGURE 3.22 Cavité carrée entraînée : erreur en fonction du nombre de noeuds

### 3.3 Écoulement axisymétrique

Dans cette section nous introduisons l'adaptation de maillages anisotropes pour les écoulements axisymétriques en régime stationnaire modélisés par les équations de Navier-Stokes. Nous exposons dans un premier temps les quelques différences entre l'adaptation de maillages pour les écoulements 2D et les écoulements axisymétriques. Nous présentons par la suite une série de simulations qui étudie l'écoulement du sang dans un tube ayant les caractéristiques typiques de différents équipements médicaux. Ces simulations permettent d'évaluer et de prédire les dommages causés aux globules rouges du sang par ces équipements.

#### 3.3.1 Rappels

Rappelons dans un premier temps quelques notions sur les écoulements axisymétriques. Ce sont des écoulements en 3 dimensions qui sont symétriques par rapport à un axe de rotation définissant le centre du domaine. Ils sont définis en coordonnées cylindriques  $r, z, \theta$ . La géométrie, les conditions limites et l'écoulement sont tous indépendants de l'angle  $\theta$ . Ainsi, toutes les dérivées angulaires  $\frac{\partial}{\partial\theta}$  ainsi que la vitesse angulaire  $u_\theta$  sont nulles pour ce type d'écoulement. Le problème tridimensionnel défini sur  $(r, z, \theta)$  se réduit donc à un problème bidimensionnel sur  $(r, z)$ .

#### Équations de Navier-Stokes

Pour un écoulement axisymétrique stationnaire de fluide newtonien, les équations de Navier-Stokes s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} &= 0 \\ \rho \left( u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} \right) \\ \rho \left( u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

#### Domaine et maillage

L'écoulement est défini selon les coordonnées cylindriques  $(r, z, \theta)$ . Le domaine de calcul est par contre défini sur le plan **r-z**, puisque la composante en  $\theta$  est nulle. La discréétisation du domaine s'effectue donc de la même manière que pour un domaine bidimensionnel normal. Le maillage est ainsi formé d'éléments triangulaires dans le plan **r-z**. Cependant, le domaine,

malgré qu'il soit défini en deux dimensions, s'exprime en unités de volume :

$$d\Omega = r \, dr \, dz$$

La composante  $r$  a une incidence dans l'évaluation des intégrales sur le domaine qui apparaissent dans les différents calculs lors de la simulation et de l'adaptation de maillage.

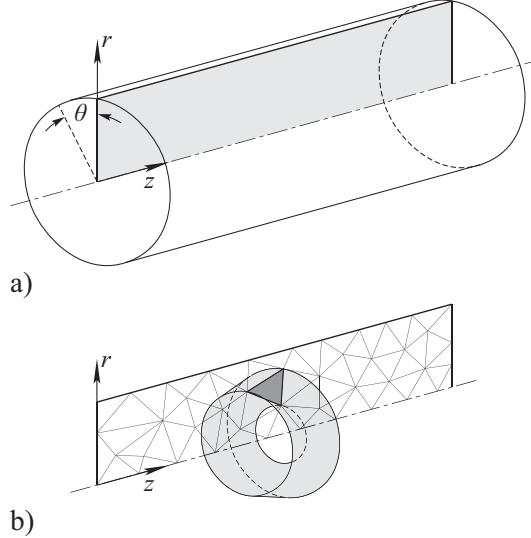


FIGURE 3.23 Écoulement axisymétrique : coordonnées cylindriques, domaine et maillage

### Estimation de l'erreur d'interpolation

Nous utilisons la norme énergie pour l'estimation de l'erreur d'interpolation de la solution. Elle est définie comme suit :

$$\|\mathbf{u}\|_E^2 = \int_{\Omega} 2\mu^2 \left( 2 \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left( \frac{u_r}{r} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 \right) d\Omega \quad (3.15)$$

où  $d\Omega = 2\pi r \, dz \, dr \, d\theta$

L'estimation d'erreur tient donc compte de la position de l'élément par rapport à l'axe de révolution. Plus un élément est éloigné de l'axe, plus la contribution de son erreur locale à l'erreur globale est importante. Cette contribution est proportionnelle au volume de l'anneau généré par la révolution de l'élément autour de l'axe, tel qu'illustré à la figure 3.23b).

### 3.3.2 Adaptation de maillages anisotropes

Le calcul de la métrique se fait globalement selon le même algorithme que celui présenté à la figure 2.11. Cependant, lors du calcul de la métrique, à plusieurs endroits nous calculons une intégrale sur le domaine  $d\Omega$ . Nous examinons l'impact de la composante  $r$  dans le calcul de la métrique optimale et lors de la reconstruction des dérivées secondes.

#### Métrique optimale

L'expression de la métrique optimale est définie par l'équation 2.61 :

$$\mathcal{M}_{opt}(r, z) = D_{L_p} \det(|H_u(r, z)|)^{\frac{-1}{2(p+1)}} |H_u(r, z)|$$

où le terme  $D_{L_p}$  s'exprime comme suit :

$$D_{L_p} = \frac{N}{\int_{\Omega} \det(|H_u(r, z)|)^{\frac{p}{2(p+1)}} r dz dr} \quad (3.16)$$

Ce terme est une constante qui agit sur l'ensemble des métriques du domaine. L'ajout de la composante  $r$  dans l'intégrale vient seulement changer la valeur finale du  $D_{L_p}$ , et a donc la même influence que le nombre de noeuds  $N$  dans l'équation. Elle agit sur le nombre de noeuds résultant du maillage adapté, et non pas sur la distribution ou la concentration des noeuds, ou sur l'orientation des éléments ou sur leur étirement. Pour ces raisons nous considérons que cette composante à un impact minime sur la métrique et l'omettons donc dans l'évaluation de l'intégrale lors du calcul du  $D_{L_p}$ .

#### Reconstruction des dérivées secondes

Pour la reconstruction des dérivées secondes nécessaires au calcul du Hessien, nous avons opté pour la formulation intégrale du système d'équations 2.67. Ce système s'écrit comme suit pour un problème axisymétrique :

$$\left[ \int_{\Omega_p} \mathbf{P} \mathbf{P}^T d\Omega \right] \mathbf{c} = \left\{ \int_{\Omega_p} \mathbf{P} Q_h d\Omega \right\} \quad (3.17)$$

où  $d\Omega = r dr dz$ . Toutefois, nous n'avons pas utilisé cette expression du domaine élémentaire. Tout comme pour le calcul de la métrique nous omettons la composante  $r$  dans les intégrales du système d'équations et le domaine élémentaire est donc décrit par  $d\Omega = dr dz$ . C'est un choix arbitraire basé sur la dimension du maillage qui est un maillage 2D. Les dérivées ainsi obtenues expriment la courbure de la surface de la solution 2D dans le plan **r-z**. Le maillage généré à l'aide de la métrique associée à ces dérivées s'ajuste donc à cette surface.

### 3.3.3 Simulation

Nous étudions dans cette section l'écoulement axisymétrique dans un embout qui a des caractéristiques communes aux équipements médicaux dans lesquelles circule du sang, tels des cathéters, canules, seringues, aiguilles hypodermiques, etc. L'écoulement dans cet embout est caractérisé par des accélérations, décélérations et variations de contrainte de cisaillement et de vitesse du fluide, qui contribuent toutes à la destruction des globules rouges dans le sang (hémolyse). Le but d'une telle simulation est donc d'estimer et de prédire les dommages causés au sang par ces équipements médicaux dès les premières étapes de design. Le niveau de destruction de globules rouges est estimé par l'indice relatif d'hémolyse (*Relative Index of Hemolysis (RIH)*). Nous avons utilisé un modèle d'hémolyse [23][19] basé sur l'évaluation des contraintes de cisaillement induites dans le sang. Ce modèle permet de remplacer l'évaluation des dommages faits au sang par l'intégration volumique sur le domaine d'une fonction *damage*. Le modèle est bien adapté aux maillages non structurés et aux écoulements présentant des zones de recirculation.

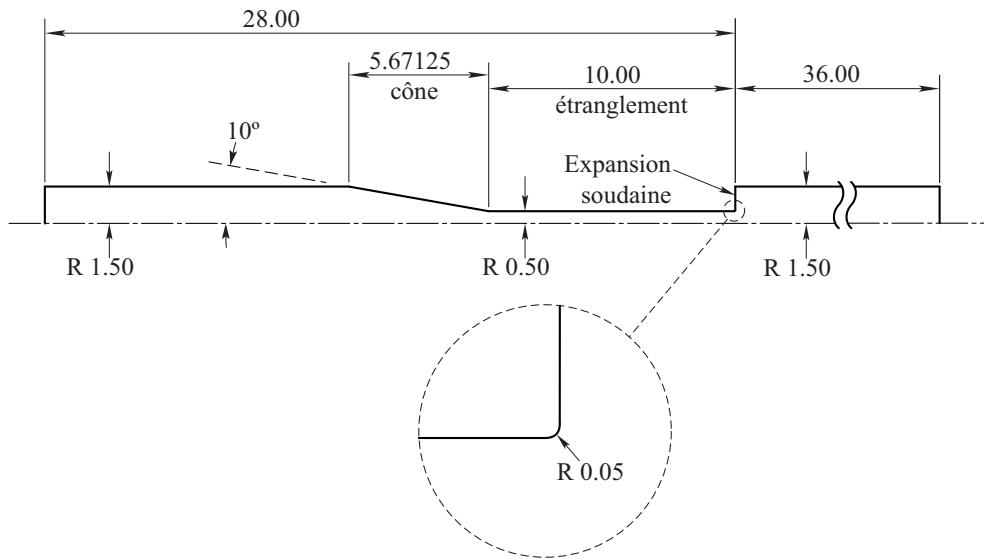


FIGURE 3.24 Dimensions de l'embout

### Description du domaine et de l'écoulement

L'embout est composé de tubes de différents diamètres et connecté à un cône et une expansion soudaine. Le modèle adimensionnel de l'embout est présenté à la figure 3.24. Nous modifions l'embout en incorporant un congé dont le rayon est de 0.05 de manière à éliminer l'arête vive de l'expansion soudaine. Ce congé élimine la singularité en pression et cisaillement

qui serait apparue si nous avions conservé l'embout original. Nous étudions deux configurations qui dépendent de la direction de l'écoulement.

Les deux configurations sont étudiées pour cinq nombres de Reynolds (500, 2000, 3500, 5000 et 6500) basés sur le diamètre de l'étranglement (le plus petit diamètre), la vitesse moyenne dans l'étranglement, la densité et la viscosité dynamique du sang. Les propriétés moyennes du sang humain sont les suivantes :

- Densité :  $1056 \text{ kg/m}^3$
- Viscosité dynamique :  $0.0035 \text{ Ns/m}^2$

**Expansion soudaine :** La première configuration est notée SE en référence à l'expansion soudaine (*sudden expansion*) qui la caractérise. Cette expansion soudaine se situe à la sortie de l'étranglement. La flèche indique le sens de l'écoulement.

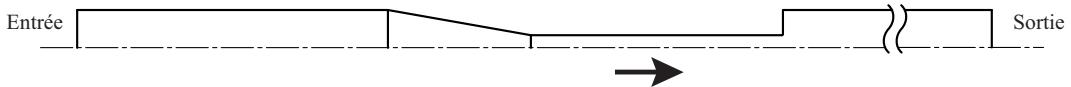


FIGURE 3.25 Configuration expansion soudaine (SE)

**Diffuseur conique :** La deuxième configuration est noté CD en référence au diffuseur conique (*conical diffuser*).



FIGURE 3.26 Configuration diffuseur conique (CD)

**Conditions limites :** Nous imposons une vitesse nulle aux parois extérieures de l'embout ( $u = v = 0$ ). À l'entrée nous imposons un profil de vitesse complètement développé. Ce profil de vitesse parabolique s'exprime comme suit :

$$u(r) = \alpha \frac{2}{9} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (3.18)$$

où  $R$  est le rayon du tube à l'entrée et  $\alpha$  prend une valeur de  $\pm 1$  en fonction de la direction de l'écoulement ( $\alpha = 1$  pour la configuration SE et  $\alpha = -1$  pour la configuration CD). Selon notre formulation variationnelle, les conditions à la sortie impliquent que nous imposons une force de traction nulle sur le fluide selon la direction axiale.

## Adaptation de maillage

Nous choisissons la stratégie de calcul de la métrique selon les conclusions obtenues pour les écoulements étudiés à la section 3.2. Le calcul du RIH nécessite un champ de vitesse le plus précis possible, or selon les résultats obtenus pour la cavité carrée la métrique obtenue de l'intersection des métriques de vitesse permet d'obtenir le meilleur champ de vitesse. L'intersection des métriques de vitesse s'avère donc la stratégie la plus efficace dans cette perspective.

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{u_r} \cap \mathcal{M}_{u_z} \quad (3.19)$$

**Norme de calcul de la métrique** Pour ce qui est de la norme de calcul de la métrique, toutes les simulations précédentes ont dévoilé le même comportement. L'estimation de l'erreur en norme énergie est toujours plus faible lorsque nous utilisons la norme  $L_\infty$  pour le calcul de la métrique. Donc nous utilisons cette norme pour le calcul des métriques dans les simulations qui suivent.

**Stratégie d'adaptation** Nous voulons réaliser une étude de convergence de l'erreur en fonction de la configuration de l'écoulement et du nombre de Reynolds. Nous amorçons chaque série d'adaptation de maillage avec le même maillage de départ. Pour chaque nombre de noeuds cible, nous réalisons quatre fois la boucle d'adaptation de la figure 1.1. Ensuite, le nombre de noeuds cible est doublé. Le tableau 3.3 présente les nombres de noeuds cible utilisés pour les simulations.

Nombre de nœuds $N$
5000
10000
20000
40000
80000

TABLEAU 3.3 Nombre de nœuds cibles  $N$

## Résultats

Les écoulements en configuration SE et CD sont bien différents. Pour la première configuration, le fluide subit une accélération graduelle due au cône menant à l'étranglement, comme le montre la figure 3.25. Nous observons une baisse de pression constante dans la partie conique et l'étranglement. Une couche limite se développe dans l'étranglement et se transforme

en jet à la sortie de l'expansion soudaine. L'écoulement est alors séparé en deux régimes ; un jet au centre du cylindre et une zone de recirculation qui l'entoure. Le jet est caractérisé par une vitesse longitudinale  $u_z$  pratiquement constante dans la direction  $z$  jusqu'à la sortie de l'embout.

L'écoulement du diffuseur conique subit plutôt une accélération très rapide près de l'entrée de l'étranglement au niveau de la *contraction* soudaine, comme le montre la figure 3.26. La pression diminue radicalement au même endroit pour ensuite diminuer graduellement dans l'étranglement. Il s'y développe une couche limite qui se transforme aussi en jet à la sortie de l'étranglement. Nous observons le même genre de recirculation au niveau du diffuseur conique jusqu'à la sortie.

Les maillages obtenus pour ces écoulements sont donc très différents. Nous concentrerons notre analyse des maillages et de l'écoulement sur la zone centrale de l'embout, soit la partie conique, l'étranglement et l'expansion (contraction) soudaine, puisque c'est dans ces zones que l'écoulement connaît le plus de variations.

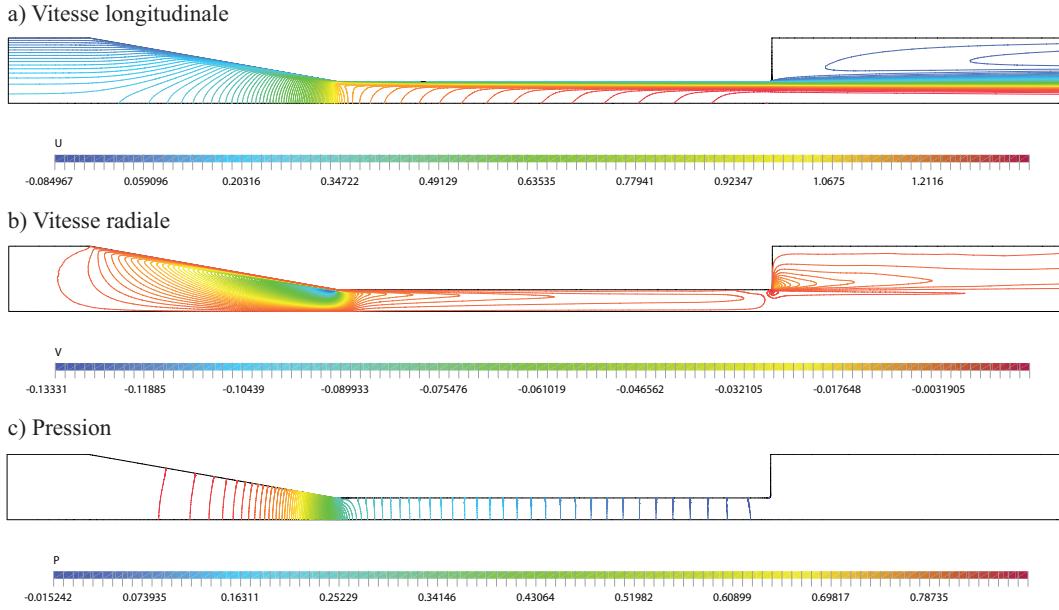


FIGURE 3.27 Expansion soudaine : Iso-lignes vitesse et pression de la zone centrale,  $Re = 3500$

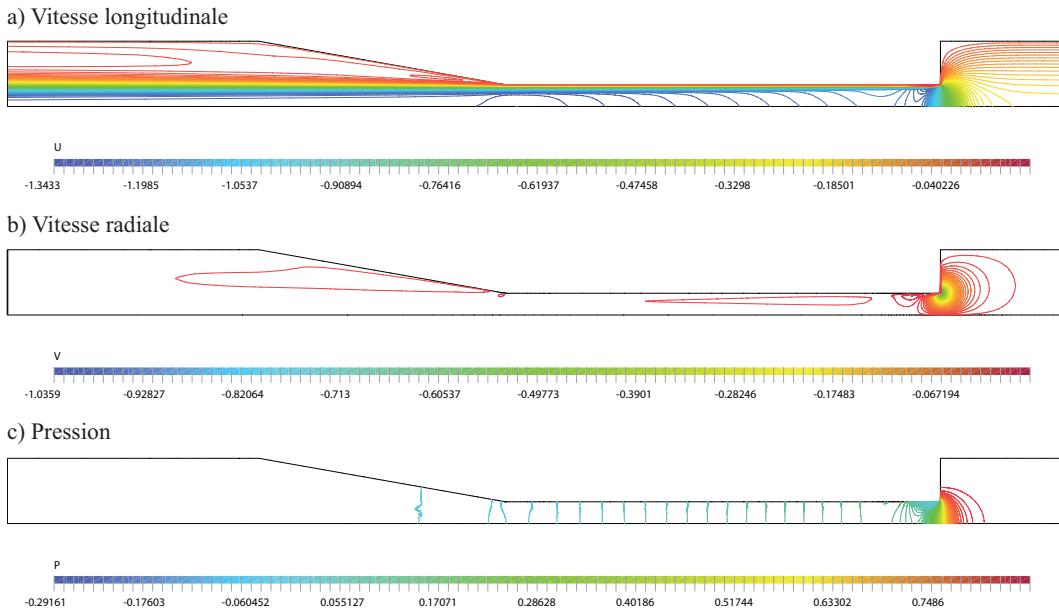


FIGURE 3.28 Diffuseur conique : Iso-lignes vitesse et pression de la zone centrale,  $Re = 3500$

**Diffuseur conique :** La figure 3.29 montre les zones du maillage qui nous intéressent pour la configuration CD. Nous comparons trois maillages obtenus pour différents nombres de Reynolds. L'intensité du jet, l'épaisseur de la couche limite et la zone de recirculation sont toutes influencées par l'augmentation du nombre de Reynolds. La figure 3.30 montre un gros plan du maillage de la zone centrale (*zone a*). Nous y voyons très bien la différence d'épaisseur de la couche limite dans l'étranglement selon la vitesse de l'écoulement. Plus le nombre de Reynolds est élevé plus la couche limite s'amincit. La vitesse  $u_z$  varie de façon importante sur une plus petite distance (épaisseur), ce qui augmente la densité de noeuds près de la paroi et la diminue autour de l'axe.

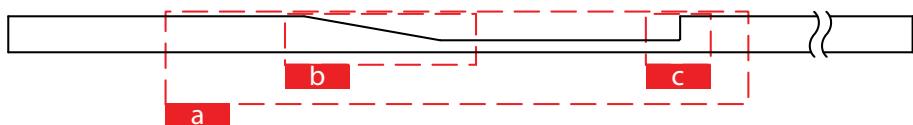


FIGURE 3.29 Diffuseur conique : découpe des zones de maillage

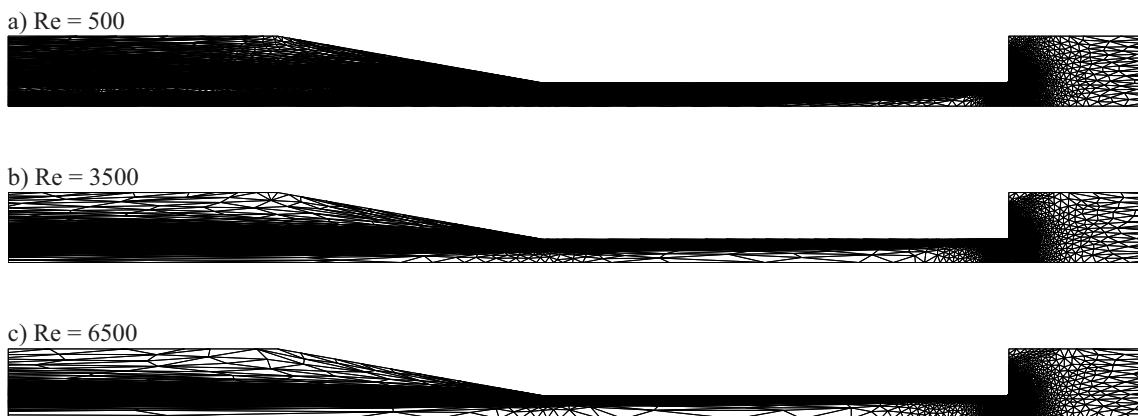


FIGURE 3.30 Diffuseur conique : maillages de la zone centrale *a*

La figure 3.31 montre un gros plan du maillage de la partie du diffuseur conique (*zone b*). Nous pouvons y apprécier l'étirement des éléments dans la couche limite et le jet. Il y a une zone entre le jet et la recirculation ( $r \approx 0.42$ ) où la densité du maillage diminue. La figure 3.32a) montre une coupe des vitesses longitudinales  $u_z$  et radiales  $u_r$  exactement à la fin du diffuseur conique pour un nombre de Reynolds de 3500. La vitesse radiale est constante tandis que le profil de vitesse longitudinale présente deux plateaux de vitesse séparés par une zone de transition. La coupe des dérivées premières de la vitesse longitudinale atteint un maximum vers  $r = 0.42$ . À cet endroit les dérivées secondes sont donc nulles (ou très petites), ce qui mène à une densité plus faible du maillage. Finalement, après la sortie de

l'étranglement l'étirement du maillage près de l'axe semble augmenter ce qui traduit une vitesse longitudinale presque constante dans le jet.

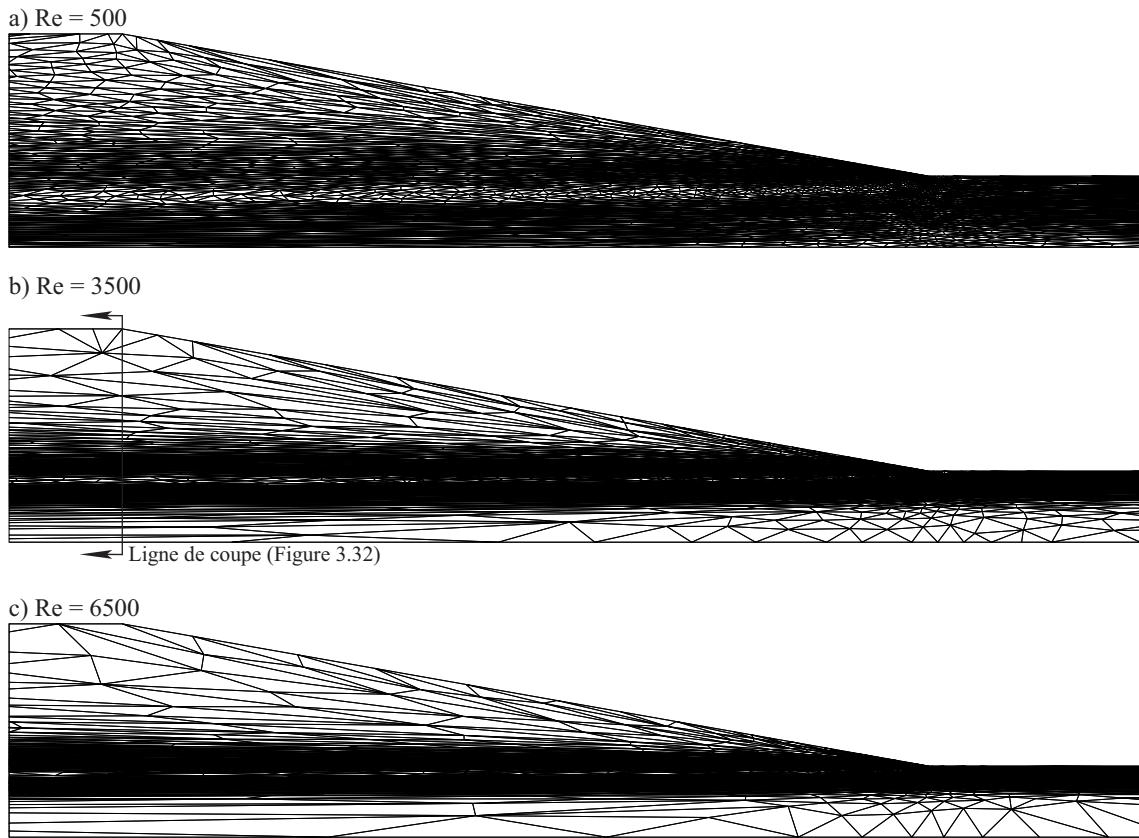


FIGURE 3.31 Diffuseur conique : maillages du diffuseur conique

Le maillage à l'entrée de l'étranglement (*zone c*) est montré à la figure 3.33. Le maillage dévoile une couche limite secondaire sur la paroi verticale, et qui est en fait le début de la couche limite principale dans l'étranglement. Nous pouvons aussi observer une zone de recirculation près de l'entrée sur la paroi de l'étranglement. La couche limite décolle de la paroi en contournant le congé et recolle à la paroi un peu plus loin dans l'étranglement. Sur les images *a*) et *b*) le point de recollement se trouve dans la zone du maillage moins dense sur la paroi supérieure. Ce décollement entraîne une recirculation secondaire dont la longueur augmente et dont l'épaisseur diminue lorsque le nombre de Reynolds augmente.

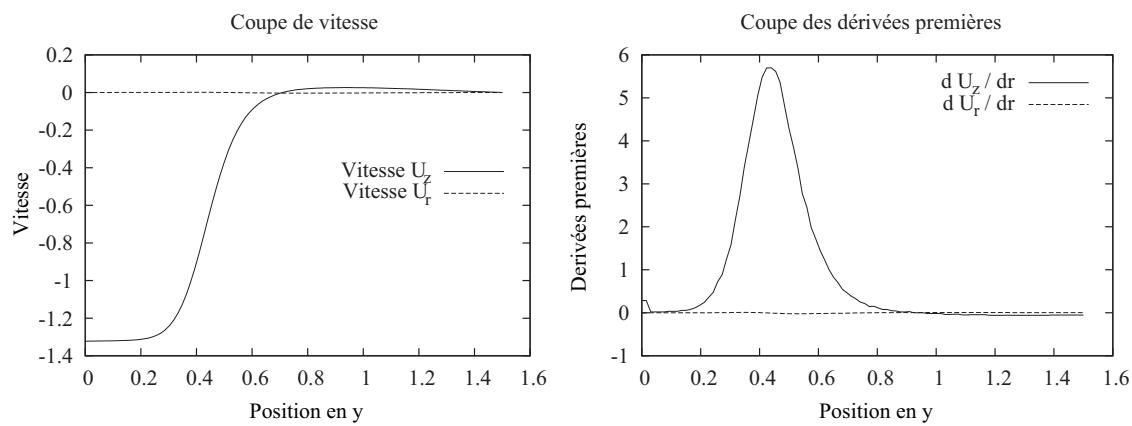


FIGURE 3.32 Coupes radiales exactement à la fin du diffuseur conique ( $x = -15.7$ )

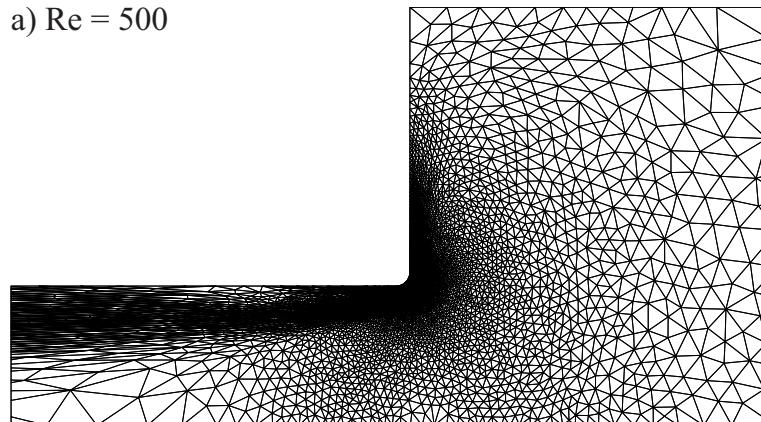
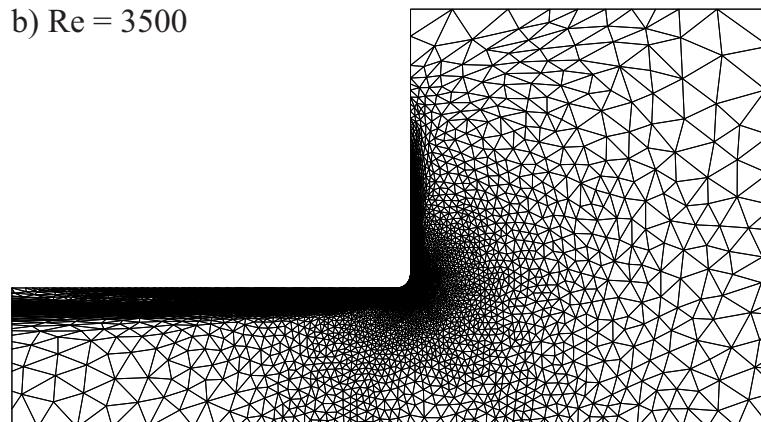
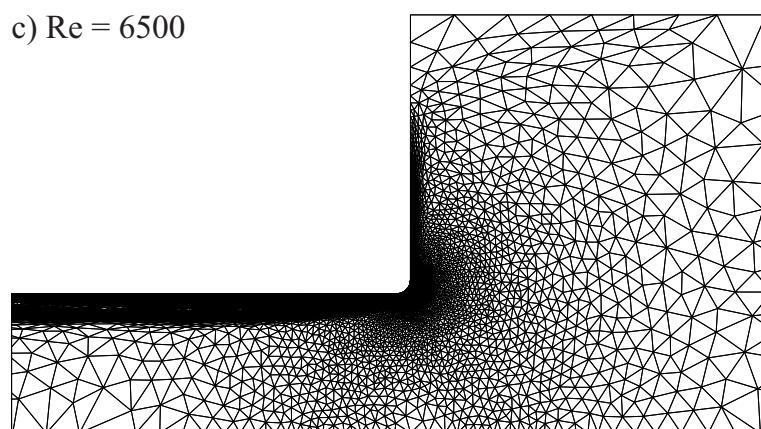
a)  $Re = 500$ b)  $Re = 3500$ c)  $Re = 6500$ 

FIGURE 3.33 Diffuseur conique : maillages à l'entrée de l'étranglement

**Expansion soudaine :** La figure 3.34 présente une découpe un peu différente de la section centrale pour la configuration SE. Nous comparons ici trois maillages obtenus pour différents nombres de Reynolds. La figure 3.35 présente la section centrale (*zone a*) des maillages obtenus. Les maillages présentent des caractéristiques et une allure générale similaires aux maillages de la configuration précédente. La couche limite, le jet et la zone de recirculation sont influencés par le nombre de Reynolds de l'écoulement. Nous y voyons très bien la diminution de l'épaisseur de la couche limite qui débute cette fois-ci dans la partie conique et se termine à la sortie de l'étranglement.

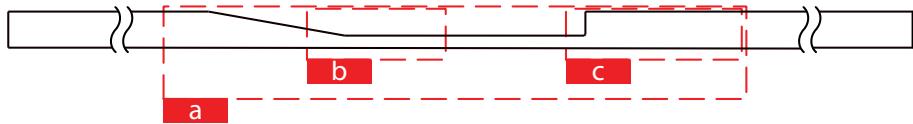


FIGURE 3.34 Expansion soudaine : découpe des zones de maillage



FIGURE 3.35 Expansion soudaine : maillages de la zone centrale

Le maillage à l'entrée de l'étranglement (*zone b*) est présenté à la figure 3.36. La différence majeure par rapport à la configuration précédente est l'absence de recirculation secondaire au niveau de l'entrée de l'étranglement pour un nombre de Reynolds faible. La recirculation est toutefois présente pour les  $Re$  plus élevés, mais est beaucoup moins importante, puisque la transition est beaucoup plus douce. Toute la zone conique en dehors de la couche limite présente un maillage isotrope qui traduit une variation des vitesses dans les deux directions. Nous pouvons d'ailleurs l'observer sur la figure 3.27 où la vitesse  $u_z$  subit une transition et accélère dans la direction longitudinale dans la partie conique et l'étranglement. Tandis que la vitesse  $u_r$  varie dans les deux directions dans la partie conique.

La figure 3.37 montre en gros plan la sortie de l'étranglement (*zone c*) où nous observons le jet. Ce dernier se comporte sensiblement de la même manière que pour la configuration

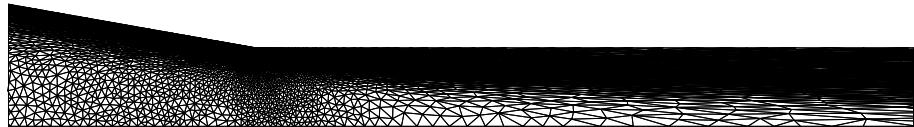
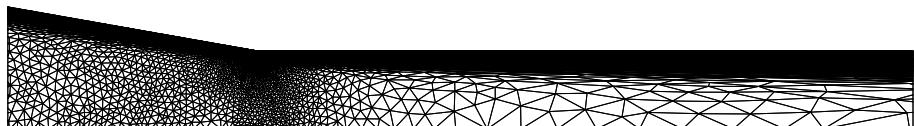
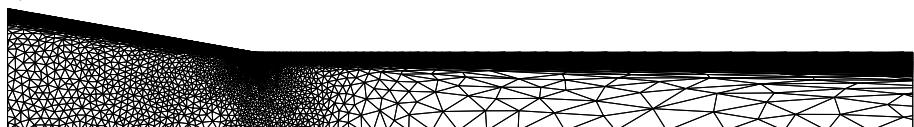
a)  $Re = 500$ b)  $Re = 3500$ c)  $Re = 6500$ 

FIGURE 3.36 Expansion soudaine : maillages à l'entrée de l'étranglement

précédente. La présence d'une ligne de maillage moins dense entre le jet et la recirculation principale s'explique de la même manière que pour le phénomène similaire observé pour la configuration CD. Les dérivées secondes sur cette ligne sont presque nulles, ce qui a pour effet de diminuer la densité du maillage à cet endroit. Finalement, l'étirement du maillage augmente près de l'axe, ce qui traduit ici aussi une vitesse longitudinale constante dans la direction longitudinale.

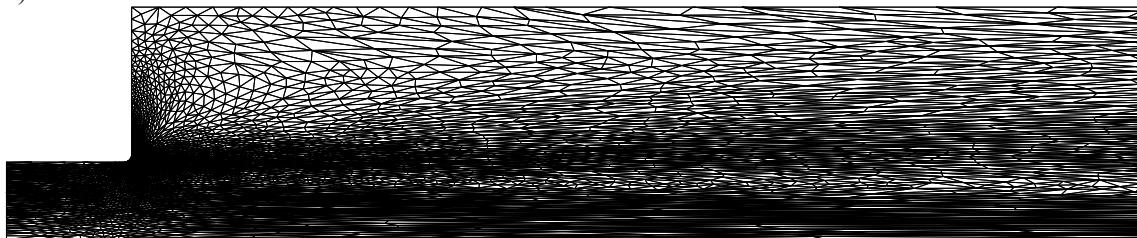
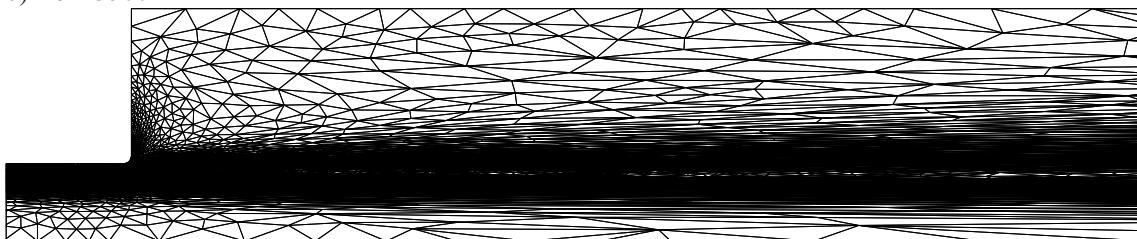
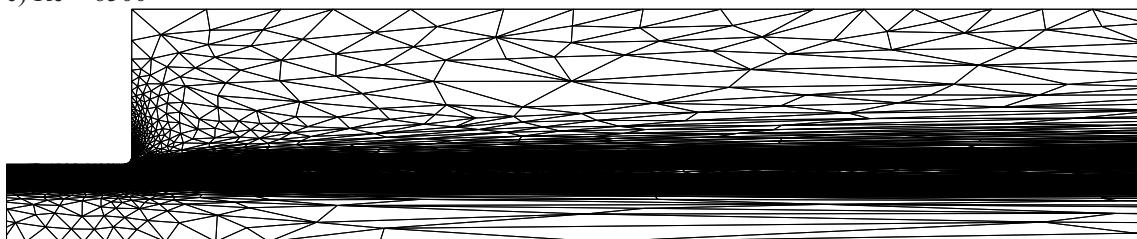
a)  $Re = 500$ b)  $Re = 3500$ c)  $Re = 6500$ 

FIGURE 3.37 Expansion soudaine : maillages à la sortie de l'étranglement

**Convergence des solutions :** La figure 3.38 présente les courbes de convergence des solutions obtenues pour les configurations CD et SE et selon différents nombres de Reynolds. L'ordonnée correspond à l'estimation de l'erreur en norme énergie et l'abscisse à la taille caractéristique du maillage ( $h$ ). Pour les maillages non structurés Akin [1] propose la taille caractéristique suivante :

$$h = \frac{1}{N^{\frac{1}{d}}} \quad (3.20)$$

où  $N$  est le nombre de noeuds du maillage et  $d$  la dimension de calcul ( $d = 2$  en 2 dimensions).

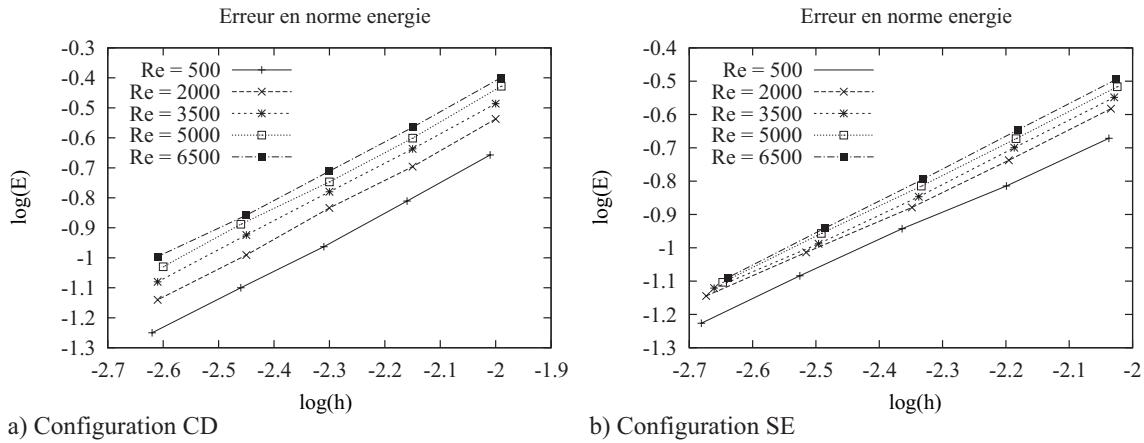


FIGURE 3.38 Convergence de l'erreur

Nous pouvons donc observer sur cette figure le comportement presque asymptotique de l'erreur par rapport à la taille caractéristique, et ce, même pour les maillages comportant moins de noeuds. Ce bon comportement s'explique par la *double* adaptation du maillage que nous avons utilisée. Rappelons que l'adaptation se fait en deux étapes. La première consiste à obtenir, pour un certain nombre de noeuds cible, un maillage se rapprochant de l'état optimal par une suite de quatre adaptations. La deuxième étape consiste seulement à augmenter le nombre de noeuds cible afin d'augmenter globalement la finesse du maillage. Les courbes de la figure 3.38 présentent l'erreur des solutions calculées sur des maillages qui sont presque optimaux, soit les maillages obtenus après la première étape d'adaptation. Il est donc normal d'observer un tel comportement de l'erreur face à la diminution de la taille caractéristique.

Le tableau 3.4 résume pour les différentes courbes les pentes  $m$  obtenues par régression linéaire. Nous présentons dans ce même tableau les coefficients  $R^2$  de corrélation de dépendance linéaire entre les deux variables, soit le logarithme de l'erreur et le logarithme de la taille moyenne. Ce coefficient est une indication du degré de confiance de la relation linéaire

Nombre $Re$	$m$ SE	$R^2$ SE	$m$ CD	$R^2$ CD
500	0.85474	0.99935	0.97228	0.99971
200	0.87570	0.99848	0.98384	0.99956
3500	0.91098	0.99848	0.96829	0.99986
5000	0.91803	0.99913	0.98466	0.99907
6500	0.95464	0.99976	0.97483	0.99929

TABLEAU 3.4 Pentes des courbes de convergence et degré de confiance

entre les deux variables. Un coefficient de 1 indique que cette relation décrit parfaitement le comportement d'une variable en fonction de l'autre. Les coefficients qui sont présentés sont très près de 1 ce qui nous indique que la pente de ces courbes décrit presque parfaitement la relation entre les variables en jeu.

Selon les graphiques, les courbes de la configuration CD semblent très près de la droite asymptotique, peu importe le nombre de Reynolds. Les valeurs des pentes et des coefficients de corrélation confirment pour cette configuration que les courbes ont pratiquement atteint le taux de convergence asymptotique.

La configuration SE présente des courbes ayant un comportement moins asymptotique. Elles semblent être soumises à une zone de transition dès le début de la courbe qui leur donne une forme de  $z$  très allongé. Plus le nombre de Reynolds est élevé, plus le maillage doit compter de noeuds afin d'atteindre la zone asymptotique de la courbe. Nous sommes ainsi en mesure de comprendre pourquoi les valeurs de pente du tableau 3.4 sont moins bonnes pour cette configuration. Les pentes augmentent et se rapprochent de la valeur théorique lorsque le nombre de Reynolds augmente, contrairement à la configuration CD qui présente des pentes plus stables. Ce comportement s'explique principalement par l'influence de la discontinuité causée par l'arête vive de la transition du convergent conique à l'entrée de l'étranglement. Nous n'avons pas éliminé cette discontinuité en ajoutant un congé, contrairement à celle de l'expansion soudaine. Cette discontinuité influence beaucoup plus la solution en configuration SE, puisque le fluide doit alors contourner l'arête vive. Tandis que pour la configuration CD, le fluide glisse sur la discontinuité, puisque sa vitesse longitudinale à cet endroit est très élevée.

Toutefois, le taux de convergence moins bon de la configuration SE n'exprime pas un manque d'adaptation ou une mauvaise adaptation des maillages. Il s'agit plutôt d'une mauvaise définition du domaine. En ajoutant un congé au bon endroit, les courbes auraient très certainement un comportement aussi bon que celui observé pour la configuration CD.

Le choix d'adapter le maillage par l'intersection des métriques de vitesse semble une bonne stratégie. Les solutions de vitesse sont très bien définies sur tout le domaine et les niveaux

d'erreur obtenus sont excellents. Cependant, nous pouvons remarquer sur la figure 3.28c) des oscillations des isopressions en configuration CD dans la partie conique. Ces oscillations sont directement reliées au maillage anisotrope très allongé à cet endroit. Le maillage n'est pas adapté en pression et ne permet pas une bonne définition de la pression sur tout le domaine. Il serait donc nécessaire d'introduire la pression dans le calcul de la métrique d'adaptation par l'intersection de la métrique de pression avec celle de l'intersection des vitesses.

**Indice relatif d'hémolyse :** Le graphique qui suit montre l'indice relatif d'hémolyse (RIH) en fonction du nombre de Reynolds pour les configurations SE et CD. Nous y voyons aussi les courbes de régression de loi de puissance qui mettent en évidence la forte corrélation qui existe entre le RIH et le nombre de Reynolds de l'écoulement. Les coefficients de corrélation  $R^2$  pour les deux configurations témoignent du niveau de fidélité de ces corrélations de loi de puissance. Le sens de l'écoulement a une certaine influence sur le niveau de dommage fait au sang, puisque les corrélations ne sont pas les mêmes pour les deux configurations. Cependant, puisqu'il s'agit ici d'un indice relatif calculé par rapport à l'indice d'hémolyse à Reynolds = 3500 pour chacune des configurations, il est donc difficile de comparer les deux configurations. Toutefois, nous pouvons affirmer que la configuration CD semble plus sensible à l'augmentation du nombre de Reynolds.

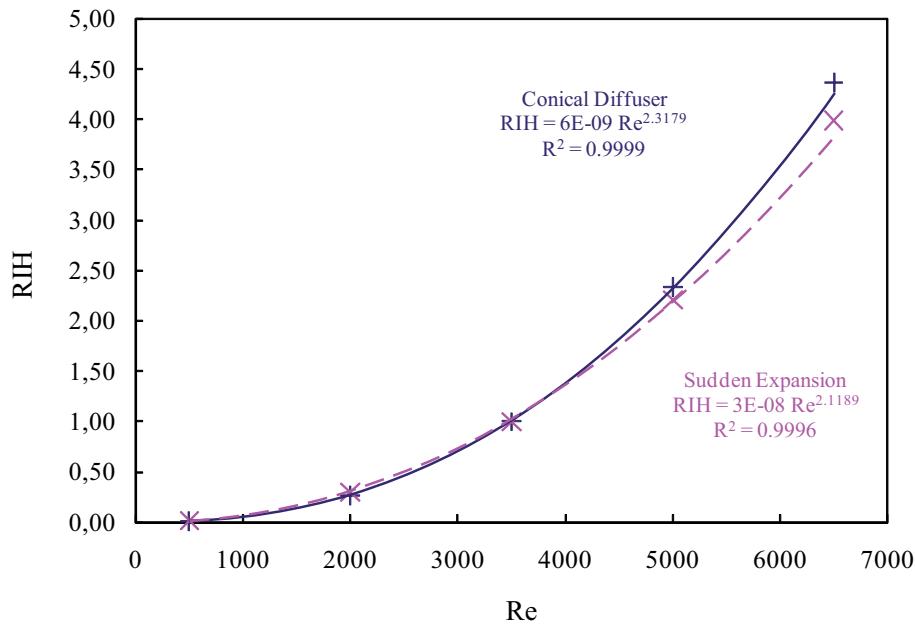


FIGURE 3.39 Indice relatif d'hémolyse en fonction du nombre de Reynolds

### 3.4 Structures lagrangiennes cohérentes

Le comportement d'un fluide dans un écoulement stationnaire en 2D est dévoilé par les lignes de courants qui permettent d'identifier facilement les zones de recirculation et les zones d'écoulement libre. L'analyse des écoulements instationnaires et/ou 3D est plus complexe. Il n'existe que peu d'outils permettant l'analyse des régions de recirculation, de décollement et de recollement de ce type d'écoulement. Les structures lagrangiennes cohérentes (SLC) permettent de séparer les régions de l'écoulement qui ont des dynamiques différentes et qui ne se mélangent pas. Les SLC sont des lignes de trajectoire instantanées qui agissent comme barrières matérielles dans le fluide, ce qui permet de délimiter les zones caractérisant le comportement de l'écoulement. Certaines méthodes d'analyse des mécanismes d'un écoulement s'appuient ainsi sur l'identification des SLC.

Cette section se divise en trois parties principales. La première permet d'exposer une méthode d'identification des SLC. Elle se base sur les exposants de Lyapunov et a été introduite par *Haller* dans [25][26], et reprise plus récemment dans [50][51] afin d'étudier les structures dominantes dans un écoulement. Cette première partie est nécessaire à la compréhension et permet d'introduire les contributions que nous apportons. Dans la seconde partie, nous introduisons l'adaptation de grilles d'interpolation anisotropes. La méthode d'identification des SLC utilise des grilles d'interpolations cartésiennes ou structurées. Elles présentent certains avantages en termes de rapidité de calcul, mais sont limitées en précision ce qui réduit la qualité des SLC extraits. Les grilles anisotropes non structurées utilisent considérablement moins de noeuds tout en augmentant la précision et la qualité des SLC extraits. Nous apportons de plus quelques modifications et améliorations à la méthode d'identification, dont une approche d'évaluation plus directe des exposants de Lyapunov. Finalement, la troisième partie nous permet de montrer l'efficacité des grilles d'interpolation anisotropes à partir d'un champ de vitesse analytique.

#### 3.4.1 Méthode d'identification des SLC

Afin d'identifier les SLC, nous faisons appel aux exposants de Lyapunov. En dynamique des systèmes, les exposants de Lyapunov permettent de quantifier le comportement asymptotique de la distance séparant deux particules initialement adjacentes. En mécanique des fluides, où les domaines de travail sont finis, nous utilisons une approche dite de Finite-Time Lyapunov Exponent (FTLE), où nous calculons les exposants de Lyapunov sur un temps fini.

## Exposant de Lyapunov - FTLE

Un système dynamique peut être sensible aux petites perturbations de ses conditions initiales, perturbations qui avec le temps peuvent devenir plus importantes. L'exposant de Lyapunov mesure la sensibilité d'un système dynamique, c'est-à-dire la vitesse à laquelle les petites perturbations s'amplifient. Lorsque cet exposant est positif, le système est particulièrement sensible aux petites variations de ses conditions initiales. S'il est négatif, les variations de ses conditions initiales n'ont pas d'influence sur le système et les perturbations sont amorties.

Prenons un champ de vitesse  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  d'un écoulement. La fonction  $\mathbf{x}(t)$  décrit la position d'une particule dans l'écoulement en fonction du temps et s'obtient en résolvant les équations aux dérivées ordinaires suivantes :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \{u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t)\} \quad (3.21)$$

En intégrant cette expression sur l'intervalle de temps de  $t_0$  à  $t_0 + T$ , nous obtenons la carte de flot, ou plus simplement le flot, qui suit :

$$\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_0) : \mathbf{x}(t_0) \mapsto \mathbf{x}(t_0 + T) \quad (3.22)$$

Il décrit la position finale d'une particule au temps  $t_0 + T$  à partir de sa position initiale  $\mathbf{x}_0$  au temps  $t_0$ . La figure 3.40 montre un point défini par le vecteur  $\mathbf{x}_1(t_0)$  au temps initial  $t_0$ . Ce point emporté par le champ de vitesse après un certain intervalle de temps  $T$  s'est déplacé à la position  $\mathbf{x}_1(t_0 + T)$ . Considérons un deuxième point  $\mathbf{x}_2(t_0)$  à une distance infinitésimale de  $\mathbf{x}_1(t_0)$  au temps  $t_0$  :

$$\mathbf{x}_2(t_0) = \mathbf{x}_1(t_0) + \boldsymbol{\delta}(t_0) \quad (3.23)$$

Après le même intervalle de temps  $T$ , la position du deuxième point est maintenant :

$$\mathbf{x}_2(t_0 + T) = \mathbf{x}_1(t_0 + T) + \boldsymbol{\delta}(t_0 + T) \quad (3.24)$$

Le vecteur de séparation à la position finale peut s'exprimer en termes du flot comme suit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}(t_0 + T) &= \phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_2(t_0)) - \phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_1(t_0)) \\ &= \phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_1(t_0) + \boldsymbol{\delta}(t_0)) - \phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_1(t_0)) \end{aligned} \quad (3.25)$$

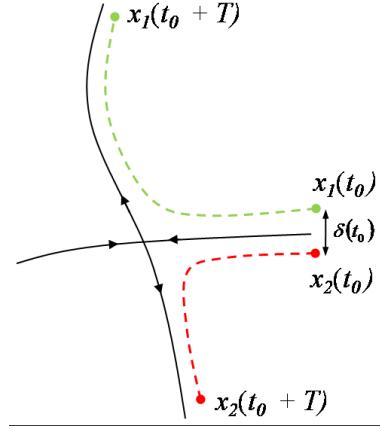


FIGURE 3.40 Position des particules  $x_1$  et  $x_2$  dans le temps

Un développement en séries de Taylor du premier terme du membre de droite donne :

$$\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_1(t_0) + \boldsymbol{\delta}(t_0)) \approx \phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_1(t_0)) + \frac{\partial \phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_1(t_0))}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_1(t_0))}{\partial y} \delta y \quad (3.26)$$

où  $\boldsymbol{\delta}(t_0) = \begin{Bmatrix} \delta x & \delta y \end{Bmatrix}$ .

Ce qui permet d'écrire le vecteur de séparation comme suit :

$$\boldsymbol{\delta}(t_0 + T) \approx \frac{\partial \phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_1(t_0))}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_1(t_0))}{\partial y} \delta y \quad (3.27)$$

La distance de séparation s'obtient en prenant la norme euclidienne de ce vecteur :

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\delta}(t_0 + T)\| &= \langle \boldsymbol{\delta}(t_0 + T), \boldsymbol{\delta}(t_0 + T) \rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[ \left\langle \boldsymbol{\delta}(t_0), \frac{d\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_1(t_0))}{d\mathbf{x}}^* \frac{d\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_1(t_0))}{d\mathbf{x}} \boldsymbol{\delta}(t_0) \right\rangle \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.28)$$

où nous définissons le tenseur de Cauchy-Green pour un temps fini par :

$$S(\mathbf{x}, t_0, T) = \frac{d\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_1(t_0))}{d\mathbf{x}}^* \frac{d\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_1(t_0))}{d\mathbf{x}} \quad (3.29)$$

et où  $*$  désigne la transposée. La séparation entre les deux points est maximale lorsque le vecteur de séparation initial est aligné avec le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre  $\lambda_{max}(S)$  du tenseur de déformation de Cauchy-Green. On le note alors  $\bar{\boldsymbol{\delta}}(t_0)$  et

l'équation 3.28 devient :

$$\begin{aligned}\|\delta(t_0 + T)\| &\leq [\langle \bar{\delta}(t_0), \lambda_{\max}(S) \bar{\delta}(t_0) \rangle]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{\lambda_{\max}(S)} \|\bar{\delta}(t_0)\|\end{aligned}\tag{3.30}$$

Nous définissons la forme exponentielle suivante :

$$\exp^{\sigma_{t_0}^T(x)|T|} = \sqrt{\lambda_{\max}(S)}\tag{3.31}$$

ce qui nous permet d'exprimer le champ d'exposant de Lyapunov  $\sigma_{t_0}^T(x)$  comme suit :

$$\sigma_{t_0}^T(x) = \frac{\ln(\lambda_{\max}(S))}{2|T|}\tag{3.32}$$

Plus l'exposant de Lyapunov est élevé, plus le taux de séparation est élevé. Des particules, à l'origine voisines, pourront être séparées d'une distance importante après un intervalle de temps  $T$ . Une petite valeur de l'exposant correspond donc à une région où le taux de séparation est faible. Les particules voisines dans ce cas risquent d'évoluer ensemble dans le temps.

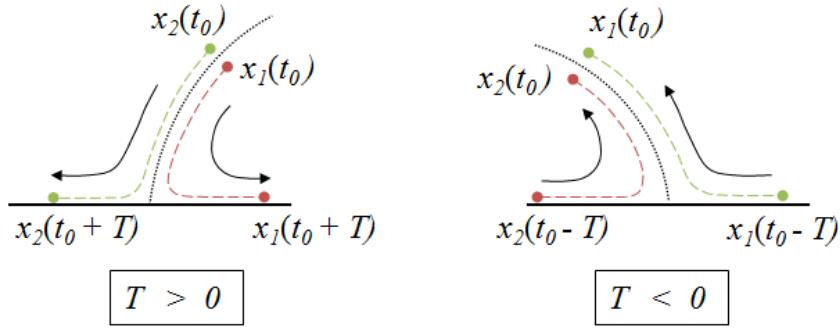


FIGURE 3.41 Temps d'intégration :  $T < 0$  les particules convergent l'une vers l'autre,  $T > 0$  les particules s'éloignent l'une de l'autre

Nous avons exprimé le champ d'exposant de Lyapunov pour un temps fini  $T$ . Ce temps peut autant être négatif que positif puisque nous avons considéré sa valeur absolue dans l'équation 3.32. Cette différence de signe permet de localiser des dynamiques différentes dans l'écoulement. Par exemple, un temps positif permet d'identifier le point de recollement d'une zone de recirculation, tel qu'illustré à la figure 3.41. Les points initialement adjacents s'éloignent l'un de l'autre avec le temps. Inversement, un temps négatif permet de localiser

le point de décollement, puisque des particules éloignées au temps  $t_0 - T$  se concentrent à cet endroit au temps  $t_0$ .

**Algorithme d'évaluation du champ FTLE :** Nous présentons à titre d'exemple l'algorithme de calcul du champ FTLE des références [50][51]. Nous présentons l'algorithme général pour mettre en évidence les modifications que nous apportons à cette méthodologie.

1. Nous débutons par le calcul du flot sur une grille cartésienne. La trajectoire des particules est évaluée par un schéma d'intégration numérique (par exemple Runge-Kutta-Fehlberg) à partir du champ de vitesse.
2. Une fois obtenue, la position finale de chaque particule nous permet d'évaluer le gradient du flot à chaque nœud de la grille par différence finie. Le gradient est évalué à la position initiale des particules, aux nœuds de la grille.
3. À partir des gradients nous calculons le tenseur de déformation de Cauchy-Green, duquel nous extrayons la plus grande valeur propre en valeur absolue. Nous calculons ensuite le champ FTLE par l'équation 3.32.

Les étapes 1 à 3 sont répétées afin d'obtenir une série de champs FTLE.

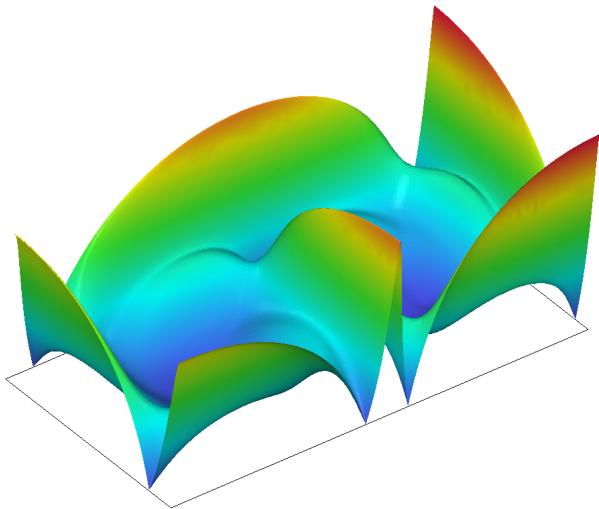


FIGURE 3.42 Exemple de champ de FTLE

En 2D, le champ FTLE obtenu peut être considéré comme une surface. Un exemple de surface correspondant à un champ FTLE est illustré à la figure 3.42. Cette surface présente plusieurs zones de crêtes et de sillons. Il est possible d'extraire les courbes correspondantes aux maximums (minimums) de ces crêtes (sillons). Les SLC en 2D sont représentées par des courbes matérielles et correspondent à certaines de ces courbes de crête de la surface du

champ FTLE. La section qui suit présente une méthode permettant d'identifier et d'extraire les SLC à partir du champ FTLE.

## Identification des SLC

Nous reprenons la méthode d'identification de crêtes correspondant aux SLC introduite dans [50]. Nous débutons par un rappel sur la définition de courbure d'une surface et définissons son rôle dans l'identification de crêtes d'une surface. Ensuite nous présentons la méthode d'identification des crêtes et des conditions nécessaires à l'existence de SLC.

**Courbure d'une surface :** Soit une surface  $\sigma(x^1, x^2)$ , telle qu'illustrée à la figure 3.43. En un point  $P$ , nous pouvons définir un plan tangent à la surface par son vecteur normal. Ce vecteur peut être interprété comme un axe de rotation d'un plan perpendiculaire au plan tangent. En faisant pivoter ce plan autour du vecteur normal, nous obtenons une série de courbes issues de l'intersection du plan pivotant et de la surface. À chacune de ces courbes est associée une valeur de courbure au point  $P$ . Les courbures principales correspondent aux valeurs minimum et maximum de courbure. Les intersections de ces plans de courbure avec le plan tangent définissent les directions principales au point  $P$ .

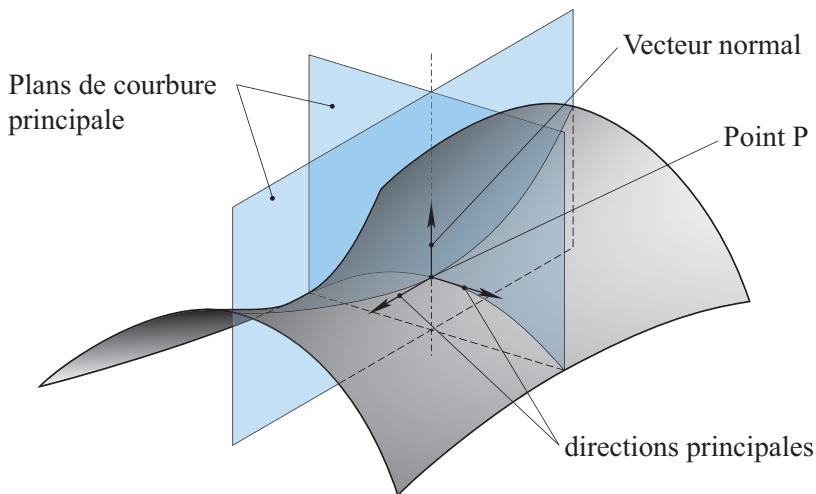


FIGURE 3.43 Courbures principales d'une surface  $\sigma(x^1, x^2)$

Les courbures principales définissent les taux de variations minimum et maximum de la surface en un point, et les directions principales les directions dans lesquelles ces variations ont lieu. Si nous prenons une surface quelconque notée  $\sigma(x^1, x^2)$ , nous pouvons définir les

dérivées de cette surface selon les notations suivantes :

$$\sigma_1 = \frac{\partial \sigma}{\partial x^1} \quad \sigma_2 = \frac{\partial \sigma}{\partial x^2}$$

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^1 \partial x^1} \quad \sigma_{12} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^1 \partial x^2} \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2 \partial x^2}$$

À partir du vecteur position :

$$\mathbf{r}(x^1, x^2) = \{x^1 \ x^2 \ \sigma(x^1, x^2)\}$$

nous définissons les trois vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} = \{1 \ 0 \ \sigma_1\} \\ \mathbf{a}_2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} = \{0 \ 1 \ \sigma_2\} \\ \mathbf{a}_n &= \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|} = \frac{\{-\sigma_1 \ -\sigma_2 \ 1\}}{(1 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

où les vecteurs  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  définissent la base covariante  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$  du plan tangent. Il est possible de démontrer que :

1. Le vecteur  $\mathbf{a}_n$  est unitaire :

$$\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{a}_n = 1$$

2. Ce même vecteur  $\mathbf{a}_n$  est normal au plan défini par la base covariante  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$  (ou la base contravariante  $\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2\}$ ) :

$$\frac{\partial \mathbf{a}_n}{\partial x^\alpha} \cdot \mathbf{a}_n = 0$$

Cette dérivée s'exprime par un vecteur dans l'une des bases :

$$\frac{\partial \mathbf{a}_n}{\partial x^\alpha} = \mathbf{a}_{n\alpha} = -b_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\beta$$

Nous obtenons alors le coefficient suivant :

$$-b_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_{n\alpha} \cdot \mathbf{a}_\beta$$

3. Les coefficients  $b_{\alpha\beta}$  représentent les composantes du tenseur de courbure.

Soit l'expression :

$$\mathbf{a}_n \cdot F = \{-\sigma_1 - \sigma_2 1\} \quad \text{où} \quad F = (1 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

La dérivée de cette expression s'écrit :

$$\mathbf{a}_{n\alpha} \cdot F + \mathbf{a}_n \cdot \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} = \{-\sigma_{1\alpha} - \sigma_{2\alpha} 0\}$$

Expression à laquelle nous appliquons le produit scalaire suivant :

$$\underbrace{\mathbf{a}_{n\alpha} \cdot \mathbf{a}_\beta}_{-b_{\alpha\beta}} F + \underbrace{\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{a}_\beta}_{\emptyset, \text{vecteurs } \perp} \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} = \{-\sigma_{1\alpha} - \sigma_{2\alpha} 0\} \cdot \mathbf{a}_\beta$$

Nous obtenons finalement :

$$b_{\alpha\beta} = \frac{\{\sigma_{1\alpha} \ \sigma_{2\alpha} \ 0\} \cdot \mathbf{a}_\beta}{F}$$

Soit :

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{F} & b_{12} &= \frac{\sigma_{21}}{F} \\ b_{21} &= \frac{\sigma_{12}}{F} & b_{22} &= \frac{\sigma_{22}}{F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{F} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2 \partial x_2} \end{bmatrix} \\ B &= \frac{H^T}{F} = \frac{H}{F} \quad (\text{puisque il s'agit d'un tenseur symétrique}) \end{aligned}$$

où  $B$  représente le tenseur de courbure et  $H$  la matrice hessienne.

Le tenseur de courbure peut donc être représenté par la matrice hessienne. Les courbures et directions principales correspondent respectivement aux valeurs propres et vecteurs propres du tenseur de courbure, qui sont donc liées aux valeurs propres de la matrice hessienne par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda_{min}|_B &= \frac{\lambda_{min}|_H}{F} \\ \lambda_{max}|_B &= \frac{\lambda_{max}|_H}{F} \end{aligned}$$

et associées aux mêmes vecteurs propres.

**Gradient d'une surface :** Le vecteur gradient de la surface donne aussi une information importante. Ce vecteur correspond aux dérivées premières de la surface :

$$\nabla\sigma = \left\{ \frac{\partial\sigma}{\partial x^1} \quad \frac{\partial\sigma}{\partial x^2} \right\} \quad (3.33)$$

Ce vecteur pointe dans la direction de variation maximale de la surface. Nous pouvons donc facilement repérer les maximums et minimums locaux par inspection du champ vectoriel de  $\nabla\sigma$ . L'identification des crêtes tire avantage de cette information. Les crêtes (sillons) correspondent en fait à une série de maximums (minimums) locaux dans la direction de courbure maximale. Donc, en un point positionné sur une ligne de crête (sillon), la composante du vecteur gradient est nulle dans la direction de courbure maximale, et la composante dans l'autre direction n'est pas nécessairement nulle. Sur une ligne de crête (sillon), le vecteur gradient peut donc prendre deux formes :

1. Si  $\|\nabla\sigma\| \neq 0$ , alors  $\nabla\sigma$  est perpendiculaire à la direction de courbure maximale
2. Si  $\|\nabla\sigma\| = 0$ , alors les deux composantes du vecteur sont nulles, il s'agit d'un extremum local.

**Fonction test :** Nous introduisons une fonction test  $F(x, y)$  qui exploite ces propriétés pour identifier les crêtes et les sillons. Nous définissons cette fonction par le produit scalaire du vecteur gradient et du vecteur propre  $\mathbf{v}_{max}$  associé à la valeur propre la plus grande en valeur absolue :

$$F(x, y) = \nabla\sigma \cdot \mathbf{v}_{max} \quad (3.34)$$

La fonction  $F(x, y)$  est nulle lorsque le vecteur  $\nabla\sigma$  est perpendiculaire à  $\mathbf{v}_{max}$  ou lorsque l'un des deux vecteurs est nul. Dans cette dernière éventualité, seul le vecteur  $\nabla\sigma$  peut être nul, puisque les vecteurs propres sont toujours définis, même si la matrice hessienne est nulle.

Nous obtenons ainsi une autre surface définie par la fonction test  $F(x, y)$ . Les courbes de niveau où  $F(x, y) = 0$  correspondent aux lignes de crête et de sillons de la surface. Le signe de la valeur propre associée à la direction de courbure maximale nous indique s'il s'agit d'un maximum (crête) ou d'un minimum (sillons) local :

- Si  $\lambda_{max} < 0$ , alors il s'agit d'un maximum local, donc une crête.
- Si  $\lambda_{max} > 0$ , alors il s'agit d'un minimum local, donc un sillon.

Il y a évidemment un cas particulier, celui où  $|\lambda_{max}| = |\lambda_{min}|$ . Il y a dans cette situation deux directions de courbure maximale. La zone de la surface où nous rencontrons ce genre de situation ne présente pas réellement de lignes de crête ou de sillon. La surface n'a pas un

comportement anisotrope ou directionnel, comme lorsqu'il y a une ligne de crête ou de sillon. En pratique, si nous rencontrons ce genre de surface, il est presque impossible d'obtenir des valeurs propres exactement de même valeur à cause des erreurs numériques introduites par les méthodes de reconstruction de dérivées secondees. Les valeurs propres sont alors presque égales ( $|\lambda_{max}| \approx |\lambda_{min}|$ ), ce qui se traduit par un phénomène qui s'apparente à du bruit. Le modèle analytique qui est étudié à la section 3.4.3 illustre bien ce phénomène. Les courbes extraites présentent alors un comportement un peu chaotique. Cependant, les SLC qui présentent un intérêt correspondent aux zones du champ FTLE qui sont très anisotropes. Donc, il n'y a généralement pas d'ambiguïté par rapport à la direction principale.

**Tenseur de déformation de Cauchy-Green :** Le tenseur de déformation de Cauchy-Green s'exprime comme suit :

$$S(\mathbf{x}, t_0, T) = \frac{d\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_1(t_0))}{d\mathbf{x}}^* \frac{d\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}_1(t_0))}{d\mathbf{x}} \quad (3.35)$$

Ce tenseur symétrique défini positif décrit la déformation subie localement par les particules fluides dans un écoulement. Les vecteurs propres du tenseur correspondent aux directions de déformations et les valeurs propres sont les amplitudes de ces déformations. Le signe du logarithme de la valeur propre indique le type de déformation dans la direction associée :

- Si  $\ln(\lambda_i) > 0$ , alors les particules tendent à s'éloigner
- Si  $\ln(\lambda_i) < 0$ , alors les particules tendent à se rapprocher

Or les structures (SLC) de l'écoulement qui nous intéressent sont celles où l'ensemble de particules est étiré dans la direction parallèle à la courbe SLC, et compressé dans l'autre direction, celle perpendiculaire à la courbe SLC. Elles existent si les trajectoires associées sont de type hyperbolique [50][58]. Pour garantir cette propriété, le champ FTLE à proximité des SLC doit respecter la condition suivante :

$$\sigma_{min} = \ln(\lambda_{min}(S)) < 0 < \ln(\lambda_{max}(S)) = \sigma_{max} \quad (3.36)$$

Cette condition a été introduite dans [28], et garantit aussi l'existence mathématique des dérivées du champ FTLE.

### Grilles d'interpolation cartésiennes

À partir d'une solution numérique ou par une approche expérimentale, il est possible d'obtenir un champ de vitesse  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  en fonction de la position et du temps, et de générer le champ FTLE. Les méthodes expérimentales telles que la PIV (*Particule Image Velocimetry*)

font l'acquisition du champ de vitesse sur des grilles cartésiennes servant aussi à interpoler les vitesses lors du calcul du champ FTLE. Les méthodes actuelles d'identification de SLC préfèrent utiliser ces grilles structurées même dans le cas où le champ de vitesse a été généré numériquement sur un maillage non structuré. Les vitesses sont alors interpolées sur une grille structurée à cause de la rapidité et de la simplicité des techniques de différences finies lors de l'évaluation des dérivées nécessaires aux calculs du champ FTLE et à l'identification des SLC.

Ces grilles structurées d'interpolation sont isotropes et de tailles constantes sur le domaine. La précision et la définition des SLC extraites sont directement reliées à la finesse de la grille. Les SLC sont des structures très effilées lorsque le temps d'intégration est grand. Pour bien les identifier, les éléments doivent être aussi fins que l'épaisseur de la structure elle-même. Afin d'augmenter la résolution, la technique de subdivision est parfois utilisée. C'est-à-dire que nous subdivisons les éléments jugés trop grands en plus petits éléments. Cette technique n'est toutefois pas totalement automatique et peut s'avérer coûteuse. Il est aussi parfois difficile de cibler exactement les zones nécessitant une résolution accrue. Nous augmentons alors la résolution générale de la grille d'interpolation. La figure 3.44 montre un exemple de raffinements successifs pour améliorer la précision du champ FTLE. Les figures sont tirées de l'article de *Vetel* [57] ; la première image comporte environ 2000 éléments, la deuxième 20 000 éléments et la dernière 200 000 éléments. Dans le cas présent, la finesse de la grille est augmentée globalement, même dans les régions qui ne requièrent pas autant de précision. Le nombre de noeuds nécessaires augmente lorsque nous tentons d'obtenir une bonne définition des structures, surtout pour les temps d'intégration élevés. Le champ de FTLE présente alors des détails fins et précis qui nécessitent une taille très petite des éléments dans la direction perpendiculaire aux SLC.

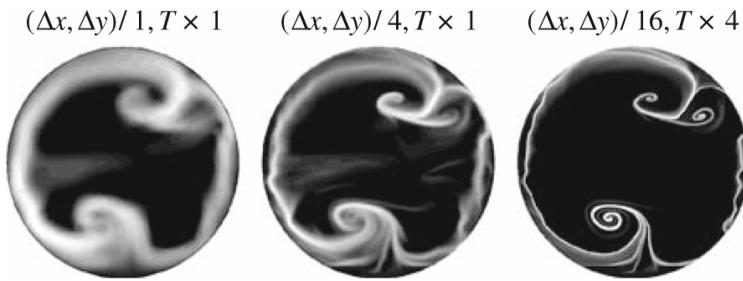


FIGURE 3.44 Exemple de champs FTLE pour différentes résolutions et intervalles de temps

### 3.4.2 Grilles d'interpolation anisotropes

Nous proposons d'adapter les grilles d'interpolation au champ FTLE afin d'augmenter la résolution dans les zones où apparaissent les SLC et de la diminuer dans les zones sans intérêt. Le caractère anisotrope des SLC se prête très bien à l'utilisation de maillages anisotropes. En éléments finis, nous utilisons la courbure d'une surface pour générer une métrique qui permet d'obtenir un maillage anisotrope améliorant la précision de l'approximation de la surface. Ici, nous utilisons la surface du champ de FTLE pour générer une métrique servant à l'adaptation de la grille d'interpolation. Par contre, il s'avère nécessaire de troquer les grilles structurées pour des grilles non structurées dont les éléments sont triangulaires. Nous perdons donc un certain avantage au niveau du calcul des dérivées, puisque les techniques de différences finies doivent être abandonnées au profit d'une méthode de projection pour reconstruire les dérivées secondes requises pour évaluer la courbure du champ FTLE.

## Évaluation du champ FTLE

Certaines modifications doivent donc être apportées à l'algorithme d'évaluation du champ FTLE. Nous ne pouvons utiliser la méthode de différences finies pour évaluer les gradients du flot, puisque nous utilisons une grille non structurée. Les méthodes de projection utilisées pour l'estimation d'erreur en simulation par éléments finis permettent d'obtenir une approximation équivalente des dérivées sur des maillages non structurés. Ces méthodes ne sont toutefois pas très précises lorsque les maillages sont grossiers. Elles sont aussi relativement lourdes en termes de calcul et ont tendance à lisser le champ de FTLE obtenu, ce qui réduit la précision de la position et la définition des structures à capturer. Dans ce qui suit, nous proposons une approche plus directe et plus précise d'évaluation des gradients.

**Évaluation directe des gradients du flot :** À partir d'un champ de vitesse :

$$\mathbf{u}(x, y) = \{u(x, y) \ v(x, y)\} \quad (3.37)$$

nous calculons le vecteur flot, que nous exprimons selon la notation suivante :

$$\phi_{t_0}^{t_0+t}(\mathbf{x}_0) = \boldsymbol{\phi}(t; t_0, x_0, y_0) = \{\phi_x(t; t_0, x_0, y_0) \ \phi_y(t; t_0, x_0, y_0)\} \quad (3.38)$$

Au temps  $t_0$  le vecteur flot correspond à la condition initiale :

$$\boldsymbol{\phi}(t_0; t_0, x_0, y_0) = \{x_0 \ y_0\} \quad (3.39)$$

La position finale s'obtient en résolvant le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\frac{d\phi}{dt}(t; t_0, x_0, y_0) = \mathbf{u}(\phi_x(t; t_0, x_0, y_0), \phi_y(t; t_0, x_0, y_0)) \quad (3.40)$$

soumis à la condition initiale  $\phi(t_0; t_0, x_0, y_0) = \{x_0 \ y_0\}$  et où  $t \in [t_0, T]$ . Le vecteur vitesse est interpolé sur la trajectoire  $\phi(t; t_0, x_0, y_0)$  à chaque pas de temps.

Le calcul du tenseur de déformation nécessite l'évaluation des gradients suivants :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x_0}(T; t_0, x_0, y_0) &= \left\{ \frac{\partial \phi_x}{\partial x_0}(T; t_0, x_0, y_0) \quad \frac{\partial \phi_y}{\partial x_0}(T; t_0, x_0, y_0) \right\} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y_0}(T; t_0, x_0, y_0) &= \left\{ \frac{\partial \phi_x}{\partial y_0}(T; t_0, x_0, y_0) \quad \frac{\partial \phi_y}{\partial y_0}(T; t_0, x_0, y_0) \right\} \end{aligned} \quad (3.41)$$

où  $\phi(T; t_0, x_0, y_0)$  est obtenue de la résolution du système d'EDO 3.40.

L'algorithme proposé dans [50] utilise alors une méthode de différences finies afin d'obtenir les gradients à partir du champ de  $\phi(T; t_0, x_0, y_0)$ . Nous pouvons toutefois modifier le système EDO 3.40 de façon à obtenir directement ces gradients. Premièrement, nous prenons avantage de la relation suivante qui permet d'intervertir les dérivées :

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \frac{d\phi}{dt}(t; t_0, x_0, y_0) = \frac{d}{dt} \frac{\partial \phi}{\partial x_0}(t; t_0, x_0, y_0) \quad (3.42)$$

Ce qui conduit aux systèmes d'équations différentielles ordinaires suivants :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \phi}{\partial x_0}(t; t_0, x_0, y_0) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial x_0}(t; t_0, x_0, y_0) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x_0}(t; t_0, x_0, y_0) \quad (3.43)$$

avec la condition initiale :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_0}(t_0; t_0, x_0, y_0) = \{1 \ 0\} \quad (3.44)$$

De même, nous écrivons :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \phi}{\partial y_0}(t; t_0, x_0, y_0) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial y_0}(t; t_0, x_0, y_0) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial y_0}(t; t_0, x_0, y_0) \quad (3.45)$$

avec la condition initiale :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y_0}(t_0; t_0, x_0, y_0) = \{0 \ 1\} \quad (3.46)$$

où  $t \in [t_0, T]$ . Les deux systèmes sont liés par les dérivées  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$  qui sont évaluées sur les trajectoires  $\phi(t; t_0, x_0, y_0)$  à chaque pas de temps. Nous utilisons un schéma Runge-Kutta d'ordre 5 pour la résolution des systèmes qui mène aux gradients recherchés en 3.41.

### Évaluation discrète de la fonction test $F(x, y)$

La fonction test  $F(x, y)$  doit être calculée sur l'ensemble des nœuds de la grille d'interpolation. Il est rare que la fonction soit nulle en un nœud. Nous cherchons plutôt le passage par zéro de la fonction entre deux nœuds. La fonction test est évaluée aux extrémités de chaque arête d'un élément. Lorsqu'il y a changement de signe ou passage par zéro de la fonction sur une arête, nous estimons la position d'un point zéro par interpolation. Nous évaluons ainsi la fonction test sur chacune des trois arêtes de chaque élément de la grille. Lorsque nous trouvons deux points sur un élément, nous créons une ligne (segment) qui permet de générer une courbe SLC. Sur la figure 3.45, la courbe en pointillée représente une ligne de crête théorique et les croix sont les points générés par interpolation linéaire pour estimer la position de la ligne de crête. Les valeurs positives et négatives de la fonction test sont notées  $F+$  et  $F-$ .

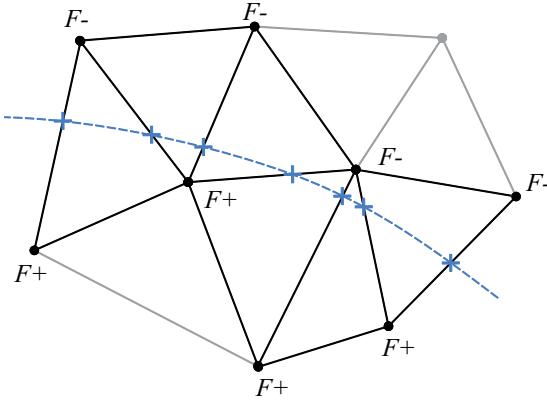


FIGURE 3.45 Valeurs nodales de la fonction test.

L'évaluation de la fonction test présente toutefois une difficulté. Le sens des vecteurs propres n'est pas unique. Un vecteur propre peut prendre l'un des deux sens opposés selon l'algorithme qui est utilisé pour le calculer. Si entre deux nœuds les vecteurs propres n'ont pas le même sens, il y aura un passage par zéro artificiel de la fonction test, qui engendrera de fausses lignes de crête. La figure 3.46 montre un exemple de vecteurs de sens opposés, mais de mêmes directions. Afin de contourner ce problème, nous proposons l'algorithme suivant. Les étapes sont illustrées à la figure 3.47.

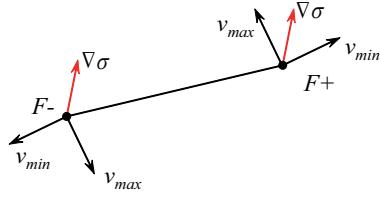


FIGURE 3.46 Vecteurs propres de sens opposés

- Soit l'arête formée des nœuds  $a$  et  $b$  et orientée selon le vecteur  $e$ . Dans un premier temps, nous choisissons le sens du vecteur propre  $v_{max}|_a$  au point  $a$  de manière à obtenir :

$$\langle v_{max}|_a, e \rangle \geq 0$$

Si ce produit scalaire est négatif, nous inversons le sens de  $v_{max}|_a$ .

- Dans un deuxième temps, nous choisissons le sens du vecteur propre  $v_{max}|_b$  au point  $b$  de manière à obtenir :

$$\langle v_{max}|_a \cdot v_{max}|_b \rangle > 0$$

Si le produit scalaire est négatif, nous changeons le sens du vecteur.

En choisissant de cette manière le sens des vecteurs propres maximaux en nous basant sur l'orientation de l'arête, nous évitons le passage artificiel par zéro de la fonction test  $F(x, y)$ .

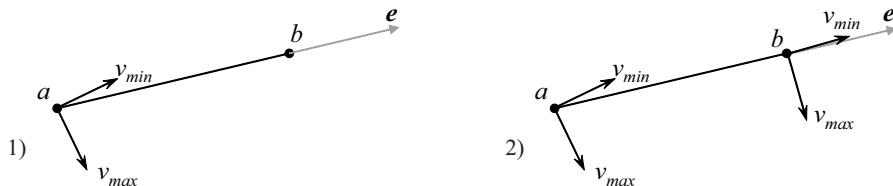


FIGURE 3.47 Étapes permettant le bon choix de sens des vecteurs propres par rapport à l'orientation de l'arête.

### 3.4.3 Champ de vitesse analytique

Afin d'exposer notre méthode, nous utilisons un champ de vitesse analytique de double tourbillon. La fonction de courant correspondante s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}\psi(x, y, t) &= A \sin(\pi f(x, t)) \sin(\pi y) \\ \text{où } f(x, t) &= \varepsilon \sin(\omega t)x^2 + (1 - 2\varepsilon \sin(\omega t))x\end{aligned}\tag{3.47}$$

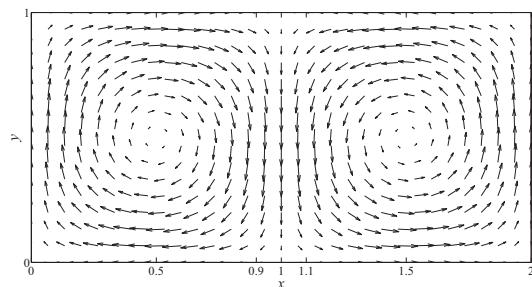
Les paramètres ont les valeurs suivantes :  $A = 0.1$ ,  $\omega = 0.2\pi$  et  $\varepsilon = 0.1$ . Le champ de vitesse de cet écoulement est donné par :

$$u(t, x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\pi A \sin(\pi f(x, t)) \cos(\pi y)\tag{3.48}$$

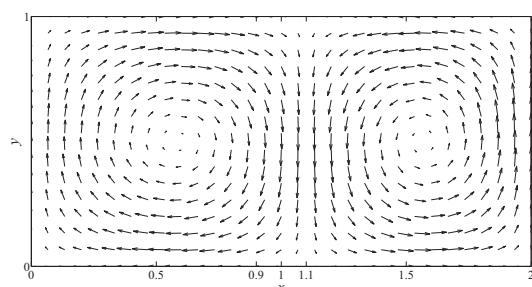
$$v(t, x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \pi A \cos(\pi f(x, t)) \sin(\pi y) \frac{df}{dx}\tag{3.49}$$

et est représenté à la figure 3.48 à différents temps. L'écoulement présente deux tourbillons en rotation opposée. La ligne de tangence séparant les deux tourbillons oscille périodiquement de la position  $x \approx 0.9$  à  $x \approx 1.1$ . Il s'agit d'un écoulement qui semble plutôt simple *a priori*. Par contre, les SLC extraits permettent de dévoiler des phénomènes qu'il est impossible d'identifier en examinant le champ de vitesse ou les lignes de courant.

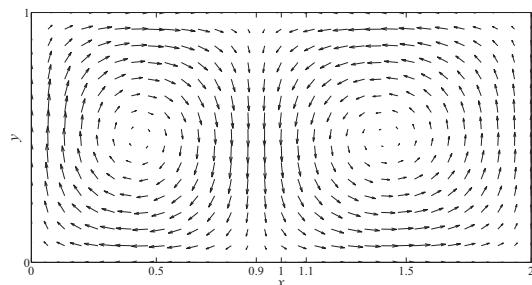
Dans ce qui suit, nous abordons deux types d'analyse. La première analyse se fait avec différentes valeurs de l'intervalle d'intégration, soit de  $T = 0.1$  à  $T = 10$ , pour un temps physique fixe  $t = 0.0$ , qui permet de montrer l'évolution des SLC par rapport au temps d'intégration. Le deuxième type d'analyse se fait avec un temps d'intégration fixe sur une plage de temps physique allant de  $t = 0.0$  à  $t = 10.0$ , soit la durée d'une période de l'écoulement. Cette analyse met en lumière l'évolution des différentes structures de l'écoulement sur une période complète.



a)  $t = 0.0, 5.0$  et  $10.0$



b)  $t = 2.5$



c)  $t = 7.5$

FIGURE 3.48 Champ de vitesse analytique à différents temps

## Analyse en temps d'intégration

Nous voulons montrer l'influence du temps d'intégration sur la définition des SLC. Pour ce faire, nous utilisons une grille d'interpolation qui contient environ 8000 noeuds. La norme de calcul de la métrique a beaucoup d'influence sur la grille d'interpolation générée. La différence majeure entre l'adaptation de maillages éléments finis et l'adaptation de grilles d'interpolation est justement le critère d'adaptation du maillage. En simulation numérique c'est l'estimation de l'erreur qui guide le choix de la norme de calcul de la métrique. Nous choisissons celle qui engendre le maillage pour lequel l'estimation d'erreur est minimale. Pour les grilles d'interpolation, c'est un peu différent. L'adaptation de la grille est liée en quelque sorte à l'erreur qu'elle induit sur la métrique. Cependant, le critère principal de sélection est beaucoup plus qualitatif : nous voulons obtenir la meilleure définition possible des SLC, soit des courbes SLC qui sont continues, lisses et dont la position est précise.

Des résultats obtenus sur une grille structurée indiquent que les courbes de SLC principales correspondent à des structures relativement minces, comme le montre la figure 3.49. Nous optons donc dans un premier temps pour la norme infini  $L_\infty$  pour le calcul de la métrique sur le champ FTLE.

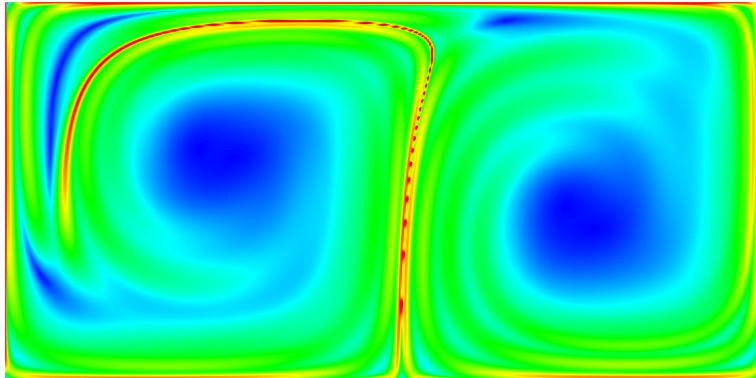


FIGURE 3.49 Champ FTLE sur une grille cartésienne de 80000 éléments

La figure 3.50 présente la série d'adaptation et les champs FTLE pour les temps d'intégration  $T = 0.01$ ,  $T = 1.0$ ,  $T = 4.0$ ,  $T = 6.0$  et  $T = 10.0$  secondes. Les SLC correspondent aux zones de valeurs élevées du champ FTLE (couleur variant du jaune au rouge). Ces zones s'allongent et s'amincent à mesure que le temps d'intégration augmente. D'ailleurs à  $T = 10.0$  il est difficile de distinguer les zones de couleurs jaune-rouge, ce qui montre à quel point les structures sont anisotropes et effilées. La figure 3.54a) montre une vue isométrique de la surface du champ FTLE et permet de constater à quel point la SLC principale est fine et effilée.

Les grilles d'interpolation traduisent très bien cette évolution. Les éléments s'alignent et s'allongent comme les structures du champ de FTLE. Les grilles s'adaptent autant pour les crêtes que pour les sillons, puisque la métrique, qui se base sur la courbure de la surface, ne tient pas compte de cette distinction. Les éléments se concentrent sur les structures anisotropes du champ FTLE. Il y a donc beaucoup de noeuds sur les SLC principales, soit celles aux parois et celle qui évolue à l'intérieur du domaine. La densité de noeuds diminue dans les zones de FTLE faible, qui sont des zones de moindre intérêt. Les figures *c)* et *d)* dévoilent la présence de SLC secondaires qui diminuent d'intensité à mesure que le temps d'intégration augmente.

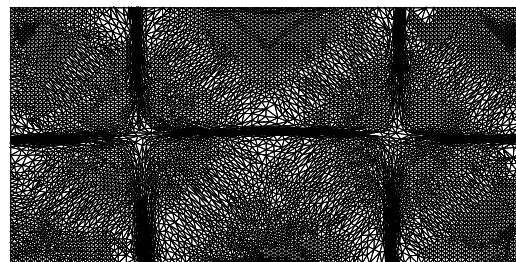
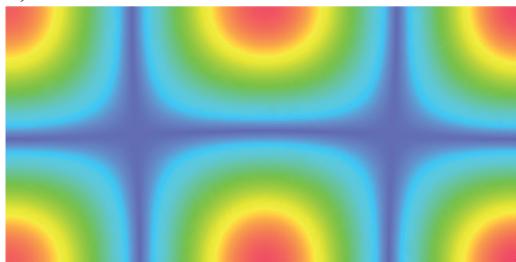
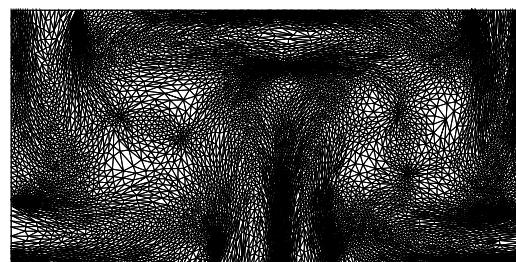
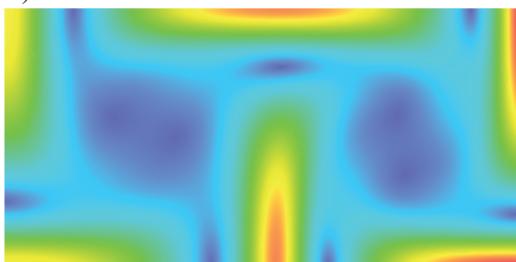
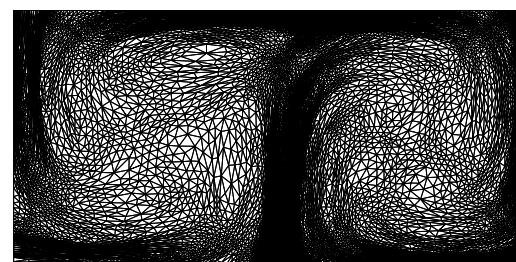
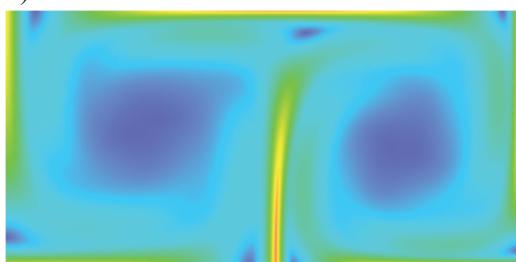
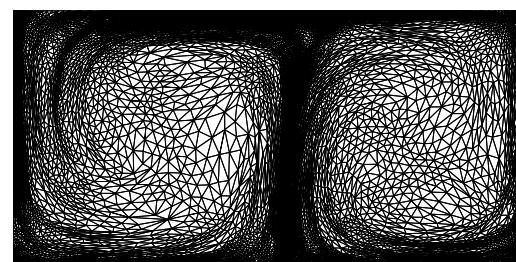
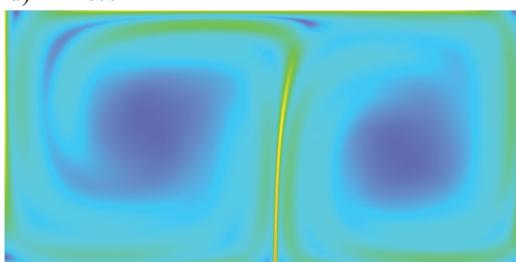
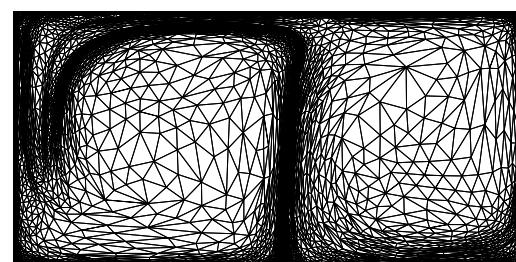
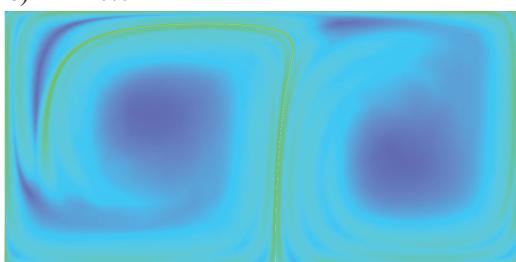
a)  $T = 0.01$ b)  $T = 2.0$ c)  $T = 4.0$ d)  $T = 6.0$ e)  $T = 10.0$ 

FIGURE 3.50 Champs FTLE et grilles d'interpolation

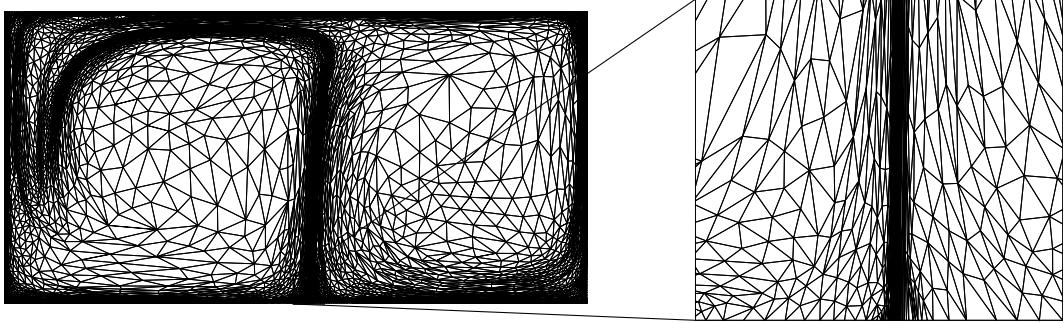


FIGURE 3.51 Gros plan sur la racine de la SLC principale

La figure 3.51 montre en gros plan une vue à la paroi  $y = 0$  de la structure principale, et nous pouvons apprécier à quel point les éléments sont étirés et concentrés sur la SLC. Le ratio d'anisotropie ou d'étirement est extrême dans la région du SLC principale. Pour cet écoulement et un temps d'intégration  $T \approx 12$  secondes, le ratio d'étirement est de l'ordre du  $1 : 10^5$ . Ce qui se traduit par un espacement moyen dans cette zone de  $1.0 \cdot 10^{-6}$ . Pour obtenir une précision équivalente sur l'épaisseur de la SLC avec une grille triangulaire structurée isotrope, le nombre de nœuds résultant serait gigantesque. À titre d'exemple, prenons seulement deux éléments étirés selon un ratio  $s = 1.0 \cdot 10^5$ , comme illustré à la figure 3.52. Pour obtenir une grille isotrope de précision équivalente, cette grille devrait compter  $2.0 \cdot 10^5$  éléments. Si nous transposons ce constat sur la zone entourant une SLC, il est évident qu'il est pratiquement impossible d'atteindre le même niveau de précision sur la SLC principale avec une grille structurée.

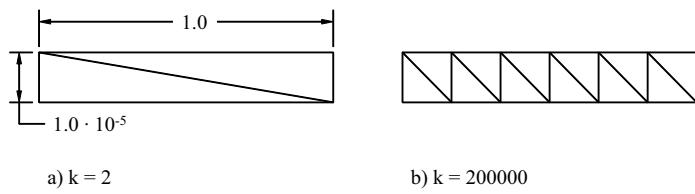


FIGURE 3.52 Ratio du nombre d'éléments

D'ailleurs si nous nous référons à la figure 3.49, la SLC principale semble beaucoup plus large en épaisseur que celle obtenue sur une grille adaptée telle que montrée à la figure 3.50e). Il est d'ailleurs difficile de la distinguer tellement elle est mince sur cette figure. La grille structurée comporte environ 80 000 nœuds, soit environ 10 fois plus que les grilles d'interpolation adaptées. Le fait que la SLC obtenue est épaisse s'explique par l'espacement entre les nœuds. La figure 3.53 montre une section d'un champ FTLE typique. La SLC est

une structure tellement mince et effilée qu'une faible résolution a comme conséquence de tronquer le champ FTLE et d'en fausser l'intensité. Ce qui peut conduire par la suite à une mauvaise représentation des SLC.

Lorsque le temps d'intégration est élevé et que la grille de départ est trop grossière dans la région de la SLC, il se peut qu'il soit difficile d'obtenir un champ FTLE ayant une bonne définition le long des SLC. La figure 3.54a) montre le genre de champ qu'il n'est pas souhaitable d'obtenir. Le champ FTLE est mal évalué le long de la SLC principale puisque la résolution est trop faible dans la direction transverse à la SLC, à l'instar de l'exemple de la figure 3.53. Le mauvais champ FTLE engendre une mauvaise métrique qui conduit à une grille d'interpolation dont la résolution n'est pas adéquate. La métrique n'est alors pas celle du vrai champ FTLE et la grille qui en découle ne concentre pas les noeuds au bon endroit, car la courbure reconstruite pour le calcul de la métrique est beaucoup plus faible que la courbure réelle.

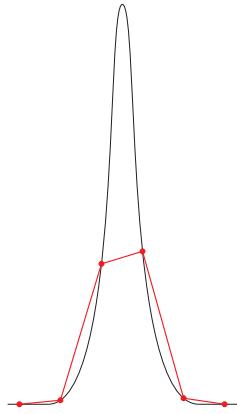


FIGURE 3.53 Coupe du champ FTLE : en noir il s'agit d'un exemple de champ FTLE typique et en rouge le champ FTLE numérique

C'est exactement ce qui se produit lorsque nous utilisons la norme  $L_1$  pour le calcul de la métrique. Cette norme concentre beaucoup moins les noeuds sur les structures anisotropes de la surface et répartit les noeuds sur le reste de la grille. La figure 3.55 montre la différence entre les grilles obtenues pour le même temps d'intégration. Celle de la norme  $L_1$  permet de bien définir toutes les petites variations du champ FTLE, soit les SLC secondaires. Par contre, puisque la densité de noeuds sur l'épaisseur de la SLC principale n'est pas assez grande nous n'arrivons jamais à obtenir une définition régulière de la crête à des temps d'intégration élevés.

Même avec la norme  $L_\infty$ , il est nécessaire de faire une montée en temps d'intégration, un

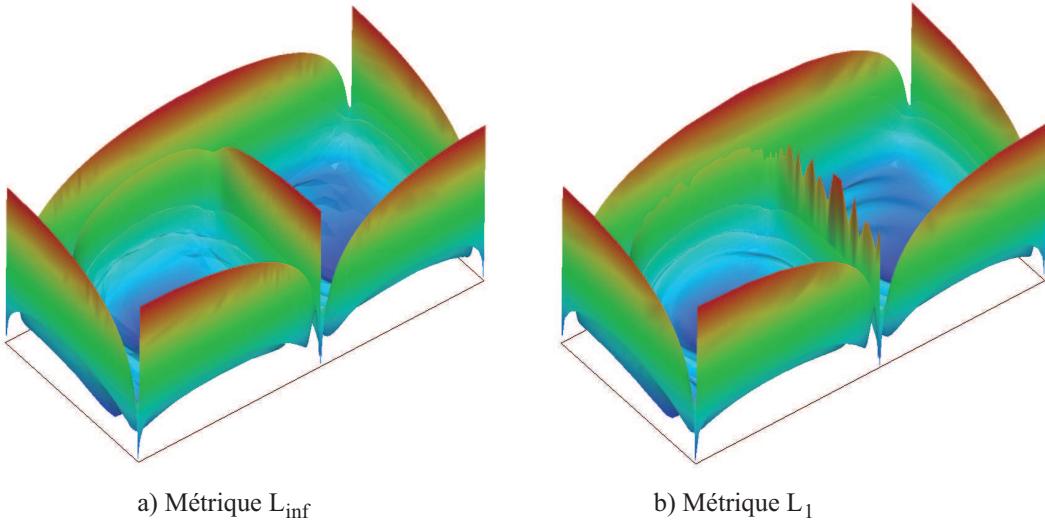


FIGURE 3.54 Champ FTLE sur des grilles anisotropes adaptées selon différentes métriques

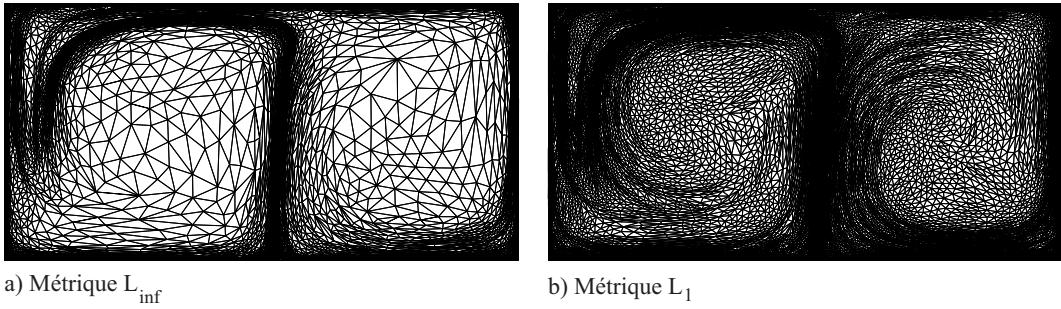


FIGURE 3.55 Grilles anisotropes adaptées selon différentes métriques

peu à la manière des montées en Reynolds pour la simulation des équations de Navier-Stokes en éléments finis. Plus la montée en temps est graduelle, plus le nombre de boucles d'adaptation requises pour obtenir une bonne grille d'interpolation est faible. Pour les résultats présentés ici, nous avons opté pour un pas de temps d'intégration de 0.1 et avons limité le nombre de boucles d'adaptation à 2 par pas de temps.

Le résultat final recherché est la définition et l'identification des courbes SLC. La figure 3.56 montre ces courbes obtenues à  $T = 10.0$  secondes. Il y a plusieurs SLC. La SLC principale est celle qui débute au centre de la paroi  $y = 0$ . Il s'agit de la SLC principale puisqu'elle correspond aux valeurs les plus élevées du champ FTLE, donc celle qui s'apparente le plus à une structure lagrangienne. Les autres SLC sont de moindres intérêts puisqu'elles correspondent à des valeurs beaucoup moins élevées du champ FTLE. Nous concentrerons donc la prochaine analyse sur la SLC principale. Pour former ces courbes SLC, nous avons tout sim-

plement formé des segments de courbe sur chacun des éléments présentant un passage par zéro de la fonction test comme expliqué à la section 3.4.1. Tous les segments de courbe sont ensuite affichés pour former les courbes SLC.

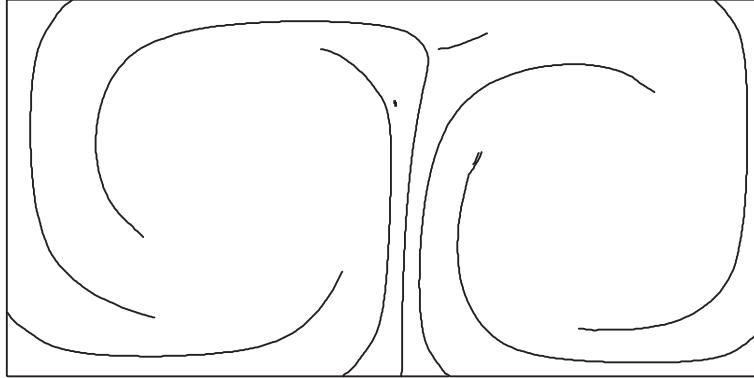


FIGURE 3.56 SLC secondaires et principales à  $T = 10.0$

La figure 3.57 montre l'évolution de la SLC principale dans le temps. À  $T = 0.1$  il se produit un phénomène particulier, où les SLC semblent chaotiques et mal définies. Le champ FTLE est pourtant bien défini si nous regardons la figure 3.50a). Toutefois, ce champ ne présente aucune structure anisotrope s'apparentant aux SLC. Nous avons fait mention de ce phénomène à la section 3.4.1. La forme du champ FTLE est telle que les valeurs propres de la matrice hessienne sont presque identiques. Puisqu'il s'agit d'un champ FTLE discret, une certaine erreur s'introduit lors de la reconstruction des dérivées, et elle est alors suffisamment importante pour changer localement la direction principale d'un noeud à l'autre. Les SLC semblent alors instables et chaotiques.

Lorsque le temps d'intégration augmente, le champ FTLE se précise et s'organise en structures anisotropes. Les courbes SLC s'approchent de plus en plus de la ligne matérielle théorique, où le flux transversal à la courbe est nul. Les instabilités des SLC diminuent et s'estompent au fur et à mesure que l'anisotropie des structures augmente. Les SLC sont alors mieux définies et s'allongent avec l'augmentation du temps d'intégration. La position de la courbe n'est pas influencée par le temps  $T$  d'intégration (mis à part les premiers temps d'intégration), seule son intensité augmente avec le temps.

À  $T = 10$ , nous obtenons la SLC principale. Par simple inspection du champ FTLE, nous pouvons déterminer la position de la SLC. Cependant, la nature très anisotrope de cette structure et le fait qu'elle est très mince compliquent son identification. L'algorithme d'identification permet donc d'obtenir la position presque exacte de la structure et simplifie son extraction du champ FTLE.

La figure 3.58 montre finalement la courbe SLC principale obtenue à partir du champ

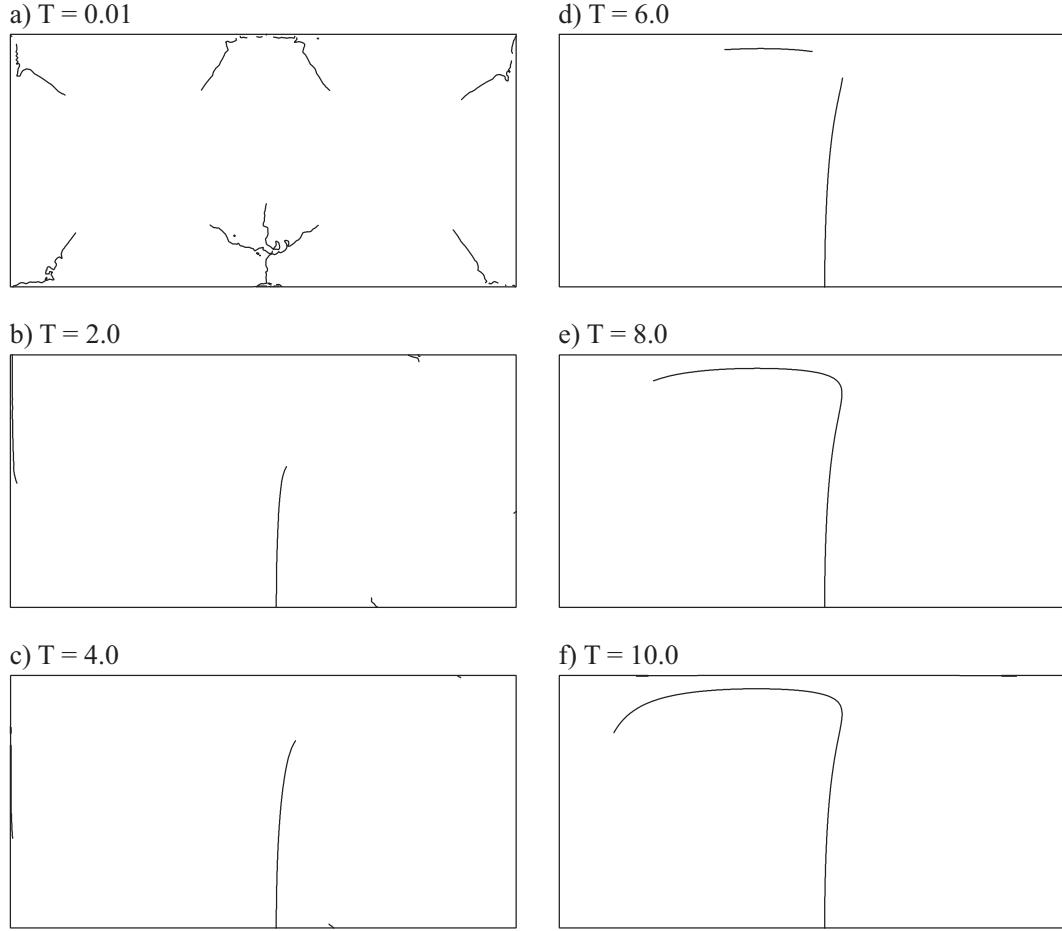


FIGURE 3.57 SLC principale à différents temps d'intégration

FTLE calculé sur la grille d'interpolation adaptée en norme  $L_1$ . Nous obtenons la même forme générale, mais il est évident que la courbe n'est pas continue. Il semble que cette norme ne garantit pas une bonne définition des SLC principales. Pour un temps d'intégration moins grand, lorsque les SLC sont moins effilées, cette norme donne des résultats similaires à la norme  $L_\infty$ , et les SLC sont aussi bien définies dans les deux normes. Toutefois puisque nous cherchons à obtenir les SLC les mieux définies, la norme  $L_\infty$  semble la meilleure option pour le calcul de la métrique pour cet écoulement.

### Analyse en temps physique

À partir de la grille d'interpolation obtenue de l'analyse précédente au temps d'intégration  $T = 10$  secondes, nous débutons l'analyse en temps physique sur une période de l'écoulement de  $t = 0.0$  à  $t = 10.0$  secondes. Pour ce faire, nous conservons le même nombre de boucles d'adaptation par pas de temps que nous fixons à 0.05 seconde. Cette très petite valeur se

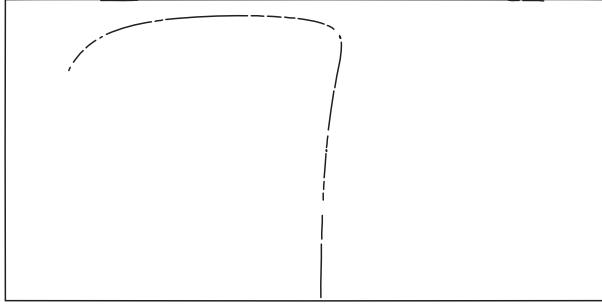


FIGURE 3.58 SLC principale obtenue par une grille adaptée en norme  $L_1$  à  $T = 10.0$

justifie par la faible épaisseur de la SLC et sa vitesse de déplacement. Si nous choisissons un pas de temps trop grand, la SLC principale se retrouve dans une zone de la grille moins dense au pas suivant. Le champ FTLE peut alors présenter des oscillations au niveau des structures les plus anisotropes (comme illustré à la figure 3.54), qui entraînent une perte de définition des SLC.

La figure 3.59 montre quelques-unes des grilles obtenues au cours de la simulation. Nous noterons que les grilles s'adaptent bien aux mouvements des structures. En fait, nous pouvons pratiquement déduire la position des structures principales à partir de la grille. La figure 3.60 montre les courbes SLC extraites sur les huit grilles de la figure 3.59. À la figure *b*) apparaît une courbe SLC qui semble se détacher de la paroi supérieure. Elle se rapproche par la suite de la courbe SLC principale pour s'y connecter à l'image *d*). Les champs FTLE et les grilles d'interpolation montrent qu'il s'agit en fait de la même structure, puisque nous y voyons une structure continue presque tout au long de la période. C'est le critère de sélection des segments de courbe SLC qui fausse le résultat. Nous avons tout simplement sélectionné les SLC correspondantes aux valeurs du champ FTLE qui sont égales ou supérieures à un certain seuil. Or la SLC principale n'est pas partout de même intensité et la valeur du champ FTLE est parfois inférieure au seuil fixé. C'est aussi pour cette raison que les courbes SLC principales ne sont pas aussi longues qu'elles ne le paraissent sur les champs FTLE et les grilles d'interpolation.

Le choix du temps d'intégration est presque un art en soi. Il dépend du temps caractéristique du système dynamique ou de l'écoulement. Nous avons opté pour un temps de 10 secondes correspondant à une période de l'écoulement. Si nous avions choisi une valeur plus grande, les structures auraient été plus longues et probablement continues tout au long de l'écoulement, aboutissant ainsi en une meilleure définition des courbes SLC. Par contre, à partir d'une valeur critique du temps d'intégration le processus d'adaptation éprouve de la difficulté à générer de bonnes grilles d'interpolation. Comme nous l'avons vu, plus le temps d'intégration augmente plus les structures deviennent minces et effilées. Les éléments de la

grille s'étirent alors de plus en plus pour se concentrer sur ces structures anisotropes. Le ratio d'étirement atteint alors des valeurs extrêmes qui dépassent les capacités du mailleur que nous avons utilisé.

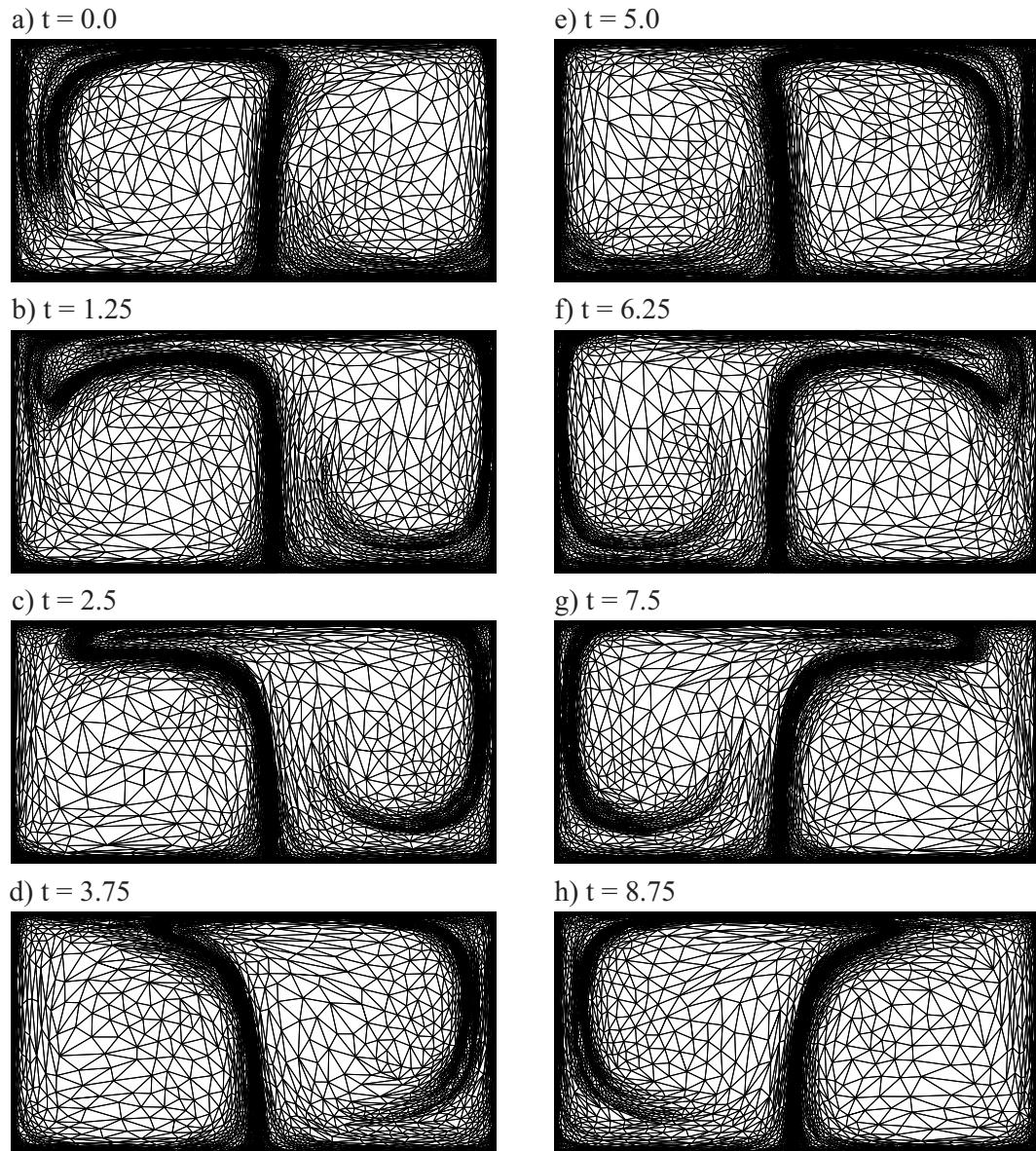


FIGURE 3.59 Grilles d'interpolation adaptées

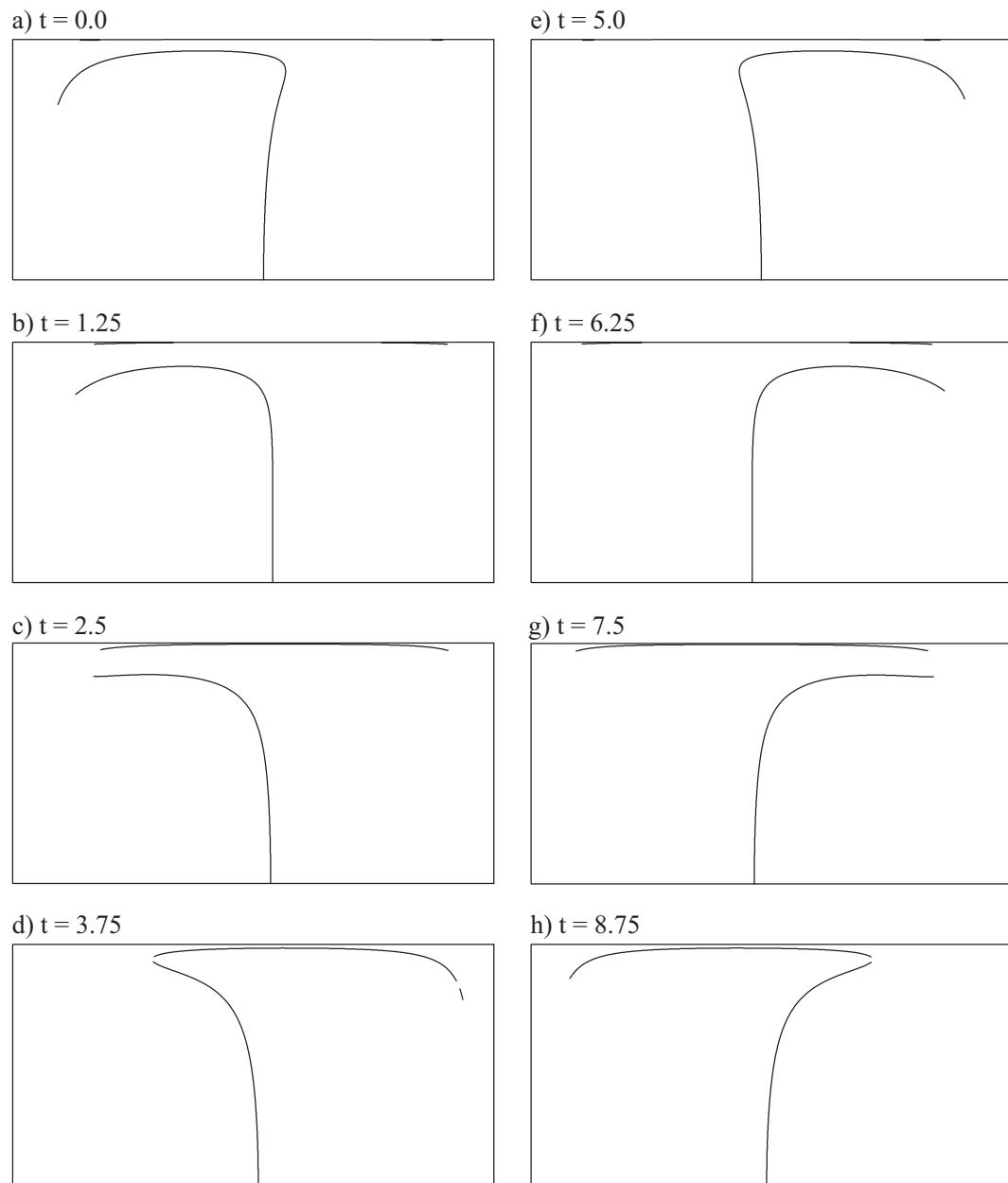


FIGURE 3.60 Courbes SLC

## CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Ce mémoire a pour but l'étude de l'adaptation de maillages non structurés anisotropes, et plus particulièrement la méthode faisant appel aux métriques optimales multi-échelle de minimisation de l'erreur d'interpolation en norme  $L_p$ . Nous avons tenté d'illustrer d'un point de vue géométrique la définition de cette métrique optimale, ce qui a entre autres permis de visualiser le principe d'équidistribution de l'erreur à la base de cette méthode d'adaptation. Nous avons par la suite mis en oeuvre la méthode tout en soulignant certaines de ses caractéristiques dont il faut tenir compte, telles les limites numériques à imposer lors du calcul des valeurs propres et le choix de la stratégie de calcul de la métrique d'adaptation lorsque plusieurs variables sont en jeu.

### **Intersection de métriques**

Quant à ce dernier aspect, il s'est avéré évident que l'intersection de métriques est la seule stratégie de calcul de la métrique d'adaptation qui respecte le comportement de l'écoulement. Toutefois, certaines avenues n'ont pu être étudiées dans ce travail. Mentionnons d'une part le choix de la norme de calcul des métriques de bases. Les différentes variables d'un écoulement n'évoluent pas de la même manière et ne nécessitent peut-être pas la même norme pour le calcul de leur métrique de base respective. Par exemple, nous avons vu que la norme  $L_\infty$  semblait dans la plupart des cas donner les meilleurs résultats pour les métriques de vitesses en considérant l'estimation d'erreur en norme énergie. Par contre, pour la variable de pression rien ne nous indique qu'il s'agit de la norme de calcul de métrique adéquate. Une norme différente permettrait peut-être de mieux définir la pression sur l'ensemble du domaine sans sacrifier la précision au niveau des structures anisotropes.

D'autre part, cette méthode d'adaptation par métrique optimale se veut une méthode multi-échelle, c'est-à-dire une méthode d'adaptation de maillage pouvant convenir aux différentes amplitudes et structures d'une solution. La norme  $L_\infty$  permet de concentrer les noeuds sur les structures fortement anisotropes et de fortes amplitudes, tandis que les normes plus faibles répartissent les noeuds plus uniformément et permettent la capture et une meilleure définition des structures d'amplitude plus faible (par exemple, les structures Lagrangiennes cohérentes secondaires du champ de Lyapunov). Or il serait possible de capturer toutes ces structures par l'intersection des métriques calculées sur une même variable dans différentes normes de calcul de métrique. Ainsi, pour les champs de Lyapunov un maillage dévoilant parfaitement les SLC principales et secondaires pourrait être obtenu par l'intersection des métriques calculées en norme  $L_\infty$  et  $L_1$ . Il s'agirait alors d'une vraie méthode multi-échelle.

Il serait aussi intéressant de voir quel serait l'impact d'une telle intersection sur l'estimation d'erreur des vitesses et de la pression d'un écoulement.

## Éléments finis

Les résultats obtenus pour les différentes simulations par éléments finis nous ont montré l'efficacité des maillages anisotropes face à celle des maillages isotropes. Il est évident qu'un maillage anisotrope, même pour un écoulement qui n'est pas fortement anisotrope, permet d'obtenir un niveau de précision supérieur à un maillage isotrope pour un nombre de noeuds équivalent. Plus l'écoulement présente un comportement anisotrope et plus la différence de nombre de noeuds entre ces deux types de maillage sera grande.

Nous avons introduit l'adaptation de maillages anisotropes aux écoulements axisymétriques. Comme il a été mentionné à cette section, une hypothèse importante a été posée pour la simulation présentée dans ce travail. La composante  $r$  a été omise dans la définition du domaine élémentaire pour les intégrales utilisées lors du calcul du  $D_{L_p}$ , et lors de la reconstruction des dérivées pour obtenir le Hessian. Il est difficile d'évaluer la véritable influence de ce choix sur la génération du maillage. Pour le calcul du  $D_{L_p}$ , c'est le nombre de noeuds résultant du maillage qui est affecté. Ce nombre sera plus ou moins élevé dépendamment de la géométrie du domaine et de l'écoulement. Par contre, pour la reconstruction des dérivées il est moins évident d'en prédire les conséquences réelles, et il serait nécessaire de les évaluer.

## Taux de convergence

L'adaptation de maillage se fait en deux volets. Le premier consiste à adapter le maillage pour un nombre de noeuds fixe. Ce type d'adaptation nous a permis d'étudier comment un maillage évolue vers sa configuration optimale. Le deuxième volet consiste à augmenter successivement le nombre de noeuds du maillage après chaque cycle d'adaptation à nombre de noeuds fixe. Les étapes sont ainsi répétées jusqu'à l'obtention du niveau d'erreur désiré. Le taux de convergence global observé nous indique que souvent dès les premiers maillages, l'erreur estimée se situe près de la courbe asymptotique théorique de convergence. Ceci s'explique par le premier volet de l'adaptation qui vise à obtenir un maillage optimal, peu importe le nombre de noeuds de ce dernier. Les maillages retenus pour illustrer le taux de convergence sont donc tous quasi optimaux.

## Identification des structures lagrangiennes cohérentes

L'adaptation anisotrope des grilles d'interpolation s'avère un outil très performant pour améliorer la précision des champs de FTLE et la résolution des structures lagrangiennes

cohérentes. En améliorant la définition du champ FTLE, nous améliorons du même coup la qualité des courbes SLC extraites. L'adaptation anisotrope des grilles d'interpolation permet d'étirer les éléments le long des structures du champ FTLE et permet d'atteindre des niveaux de précision impressionnant en utilisant peu d'éléments.

L'amélioration de la qualité de ces courbes s'accompagne d'une diminution de la taille des grilles d'interpolation grâce à l'adaptation anisotrope. Les éléments sont étirés parallèlement aux structures du champ FTLE et permettent d'atteindre des niveaux de précision impressionnantes en utilisant peu d'éléments. Les ratios d'étiement atteignent des valeurs extrêmes dépassant  $1 : 10^5$  dans les régions les plus anisotropes du champ FTLE. Les grilles conventionnelles cartésiennes requièrent tellement d'éléments afin d'obtenir une précision acceptable, qu'elles s'avèrent d'une utilité pratique limitée. Les structures extraites sur ces grilles sont similaires à celles obtenues sur des grilles adaptées, mais sont toutefois moins précises.

Les grilles conventionnelles cartésiennes permettent l'utilisation de méthodes de différences finies pour l'évaluation des différentes dérivées requises tout au long du processus. Ces méthodes sont simples et rapides et se traduisent par des temps de calcul relativement courts, même pour des grilles comportant beaucoup de noeuds. Nous ne disposons pas de technique rapide d'évaluation des dérivées sur les grilles d'interpolation non structurées. Nous utilisons alors les mêmes techniques qu'en estimation d'erreur pour calculer les dérivées. Ces méthodes sont lourdes, peu précises aux parois du domaine et introduisent une certaine erreur. Afin d'éliminer une étape d'évaluation de dérivées, nous avons donc introduit une nouvelle approche pour évaluer les exposants de Lyapunov. Une modification du système d'équations aux dérivées ordinaires permet d'évaluer directement les dérivées nécessaires au calcul du tenseur de déformation de Cauchy-Green. La performance de cette nouvelle approche n'a pas été étudiée ici, mais tout nous laisse croire à son bon fonctionnement. Cette approche devrait faire l'objet de travaux futurs.

La prochaine étape consiste à tester la méthode sur des écoulements plus physiques qui permettront de mieux cerner le compromis à faire dans le choix de la norme de calcul de la métrique par rapport aux structures qui doivent être extraites. Finalement, des essais sur des écoulements menés en laboratoire permettront de mettre la présente méthode à l'épreuve, et de voir l'influence du bruit inhérent aux données expérimentales sur la méthode d'identification des SLC.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. AKIN, *Finite Element Analysis with error estimators*, Elsevier, 2005, pp. 130–131.
- [2] F. ALAUZET, P. GEORGE, B. MOHAMMADI, P. FREY, AND H. BOROUCHAKI, *Transient fixed point-based unstructured mesh adaptation*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 43 (2003), pp. 729–745.
- [3] F. ALAUZET, A. LOSEILLE, A. DERVIEUX, AND P. FREY, *Multi-dimensional continuous metric for mesh adaptation*, in Proceedings of the 15th International Meshing Roundtable, Springer, ed., 2006, pp. 191–214.
- [4] R. ALMEIDA, R. FEIJÓO, A. GALEÃO, C. PADRA, AND R. SILVA, *Adaptive finite element computational fluid dynamics using an anisotropic error estimator*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 182 (1998), pp. 379–400.
- [5] I. BABUSKA AND A. AZIZ, *On the angle condition in the finite element method*, SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 13 (1976), pp. 214–226.
- [6] I. BABUSKA AND W. RHEINBOLDT, *Error estimate for adaptive finite element computations*, SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 15 (1978), pp. 736–754.
- [7] Y. BOURGAULT, M. PICASSO, F. ALAUZET, AND A. LOSEILLE, *On the use of anisotropic a posteriori error estimators for the adaptative solution of 3D inviscid compressible flows*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 59 (2009), pp. 47–74.
- [8] G. BUSCAGLIA AND D. E.A., *Anisotropic mesh optimisation and its application to adaptation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 40 (1997), pp. 4119–4136.
- [9] W. CAO, *On the error of linear interpolation and the orientation, aspect ratio, and internal angles of a triangle*, SIAM Journal Numer. Anal., vol. 43 (2005), pp. 19–40.
- [10] ——, *Anisotropic measures of third order derivatives and the quadratic interpolation error on triangular elements*, SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 29 (2007), pp. 756–781.
- [11] ——, *An interpolation error estimate on anisotropic meshes in  $R^n$  and optimal metrics for mesh refinement*, SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 45 (2007), pp. 2368–2391.
- [12] ——, *An interpolation error estimate in  $R^2$  based on the anisotropic measures of higher order derivatives*, Mathematics of Computation, vol. 77 (2008), pp. 265–286.

- [13] M. CASTRO-DIAZ, F. HECHT, B. MOHAMMADI, AND O. PIRONNEAU, *Anisotropic unstructured mesh adaption for flow simulations*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 25 (1997), pp. 475–491.
- [14] L. CHEN, P. SUN, AND J. XU, *Optimal anisotropic meshes for minimizing interpolation errors in  $L^p$ -norm*, Mathematics of Computation, vol. 76 (2007), pp. 179–204.
- [15] P. COMON, B. MOURRAIN, AND E. TSIGARIDAS, *Symmetric tensor diagonalization*, Research Report ISRN I3S/RR-2008-12-FR, I3S, Sophia-Antipolis, France, (2008).
- [16] F. COURTY, D. LESERVOISIER, P. GEORGE, AND D. A., *Continuous metrics and mesh adaptation*, Applied Numerical Mathematics, vol. 56 (2006), pp. 117–145.
- [17] E. D’AZEVEDO AND R. SIMPSON, *On optimal triangular meshes for minimizing the gradient error*, Numerische Mathematik, vol. 59 (1991), pp. 321–348.
- [18] L. DE LATHAUWER, B. DE MOOR, AND J. VANDEWALLE, *Independent component analysis and (simultaneaous) third-order tensor diagonalization*, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 49 (2001), pp. 2262–2271.
- [19] M. FARINAS, A. GARON, D. LACASSE, AND D. NDRI, *Asymptotically consistent numerical approximation of hemolysis*, ASME Journal of Biomechanical Engineering, vol. 128 (2006), pp. 688–696.
- [20] L. FORMAGGIA AND S. PEROTTO, *New anisotropic a priori error estimates*, Numerische Mathematik, vol. 89 (2001), pp. 641–667.
- [21] ———, *Anisotropic error estimates for elliptic problems*, Numerische Mathematik, vol. 94 (2003), pp. 67–92.
- [22] P. FREY AND F. ALAUZET, *Anisotropic mesh adaptation for CFD computations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 194 (2005), pp. 5068–5082.
- [23] A. GARON AND M. FARINAS, *Fast 3D numerical approximation of hemolysis*, Artificial Organs, vol. 28 (2004), pp. 1016–1025.
- [24] W. HABASHI, J. DOMPIERRE, Y. BOURGAULT, D. AIT-ALI-YAHIA, M. FORTIN, AND M. VALLET, *Anisotropic mesh adaptation : towards user-independent, mesh-independent and solver-independent CFD. part I : general principles*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 32 (2000), pp. 725–744.
- [25] G. HALLER, *Distinguished material surfaces and coherent structures in three-dimensional fluid flows*, Physica D, vol. 149 (2001), pp. 248–277.
- [26] ———, *Lagrangian coherent structures from approximate velocity data*, Phys. Fluids, vol. 14 (2002), pp. 1851–1861.

- [27] J.-F. HÉTU, *Méthodes d'Éléments Finis Adaptatives pour les Écoulements Visqueux Incompressibles*, PhD thesis, École Polytechnique de Montréal, 1991.
- [28] K. IDE, D. SMALL, AND S. WIGGINS, *Distinguished hyperbolic trajectories in time-dependent fluid flows : analytical and computational approach for velocity fields defined as data sets*, Nonlinear Processes in Geophysics, vol. 9 (2002), pp. 237–263.
- [29] P. LABBÉ AND A. GARON, *A robust implementation of Zienkiewicz and Zhu's local patch recovery method*, Communications in numerical methods in engineering, vol. 11 (1995), pp. 427–434.
- [30] K. LIPNIKOV AND Y. VASSILEVSKI, *Analysis of Hessian recovery methods for Generating Adaptive Meshes*, in Proceedings of the 15th International Meshing Roundtable, Springer, ed., 2006, pp. 163–171.
- [31] A. LOSEILLE, *Adaptation de maillage anisotrope 3D multi-échelles et ciblée à une fonctionnelle pour la mécanique des fluides. Application à la prédiction haute-fidélité du bang sonique.*, PhD thesis, L'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 2009.
- [32] A. LOSEILLE, A. DERVIEUX, P. FREY, AND F. ALAUZET, *Achievement of global second order mesh convergence for discontinuous flows with adapted unstructured meshes*, in Collection of Technical Papers - 18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, vol. vol. 1, 2007, pp. 993–1012.
- [33] D. MAVRIPLIS, *Adaptive mesh generation for viscous flows using delaunay triangulation*, Journal of Computational Physic, vol. 90 (1990), pp. 271–291.
- [34] E. NADLER, *Piecewise linear best  $l_2$  approximation on triangulations*, in Approximation Theory V, A. Press, ed., 1986, pp. 499–502.
- [35] J. ODEN, *Finite Elements of Nonlinear Continua*, McGraw-Hill, 1972.
- [36] T. ODEN, T. STROUBULIS, AND P. DEVLOO, *Adaptive finite element methods for the analysis of inviscid compressible flow : Part 1.*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., vol. 59 (1986), pp. 327–362.
- [37] D. PAGNUTTI AND C. OLLIVIER-GOOCH, *A generalized framework for high order anisotropic mesh adaptation*, Computers and Structures, vol. 87 (2009), pp. 670–679.
- [38] D. PELLETIER AND F. NAVAH, *ADAPT documentation*, École Polytechnique de Montréal, 2008.
- [39] J. PERAIRE, J. PPEIRO, L. FORMAGGIA, K. MORGAN, AND O. ZIENKIEWICZ, *Finite element Euler computations in three dimensions*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 26 (1988), pp. 2135–2159.

- [40] J. PERAIRE, M. VAHDAJI, K. MORGAN, AND O. ZIENKIEWICZ, *Adaptive remeshing for compressible flow computations.*, Journal of Computational Physics, vol. 72 (1987), pp. 449–466.
- [41] M. PICASSO, *An anisotropic error indicator based on Zienkiewicz-Zhu error estimator : Application to elliptic and parabolic problems*, SIAM Journal of Scientific Computing, vol. 24 (2003), pp. 1328–1355.
- [42] ——, *Numerical study of the effectivity index for an anisotropic error indicator based on Zienkiewicz-Zhu error estimator*, Communications in numerical methods in engineering, vol. 19 (2003), pp. 13–23.
- [43] ——, *Adaptive finite elements with large aspect ratio based on an anisotropic error estimator involving first order derivatives*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 196 (2006), pp. 14–23.
- [44] L. QI, *Eigenvalues of a real supersymmetric tensor*, Journal of Symbolic Computation, vol. 40 (2005), pp. 1302–1324.
- [45] S. RIPPAA, *Long and thin triangles can be good for linear interpolation*, SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 29 (1992), pp. 257–270.
- [46] O. SAHNI, K. JANSEN, M. SHEPHARD, C. TAYLOR, AND M. BEALL, *Adaptive boundary layer meshing for viscous flow simulations*, Engineering with Computers, vol. 24 (2008), pp. 267–285.
- [47] O. SAHNI, J. MULLER, K. JANSEN, M. SHEPHARD, AND C. TAYLOR, *Efficient anisotropic adaptive discretization of the cardiovascular system*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 195 (2006), pp. 5634–5655.
- [48] O. SCHENK AND K. GÄRTNER, *Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with PARDISO*, Journal of Future Generation Computer Systems, vol. 20 (2004), pp. 475–487.
- [49] ——, *On fast factorization pivoting methods for symmetric indefinite systems*, Elec. Trans. Numer. Anal., vol. 23 (2006), pp. 158–179.
- [50] S. SHADDEN, F. LEKIEN, AND J. MARSDEN, *Definition and properties of lagrangian coherent structures from finite-time lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows*, Physica D, vol. 212 (2005), pp. 271–304.
- [51] S. SHADDEN AND C. TAYLOR, *Characterization of coherent structures in the cardiovascular system*, Annals of Biomedical Engineering, vol. 36 (2008), pp. 1152–1162.
- [52] J. SHEWCHUK, *What is a good linear finite element ? interpolation, conditionning, and quality measures*, in Proceedings of the 11th International Meshing Roundtable, 2002, pp. 115–126.

- [53] ——, *What is a good linear finite element ? interpolation, conditionning, anisotropy, and quality measures*, (Preprint, not published), (2002).
- [54] J. SYNGE, *The Hypocircle in Mathematical Physics*, Cambridge university press, 1957.
- [55] M. VALLET, *Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs*, PhD thesis, L'Université de Paris VI, 1992.
- [56] M. VALLET, C. MANOLE, J. DOMPIERRE, S. DUFOUR, AND F. GUIBAULT, *Numerical comparison of some Hessian recovery techniques*, International journal for numerical methods in engineering, vol. 72 (2007), pp. 987–1007.
- [57] J. VÉTEL, A. GARON, AND D. PELLETIER, *Vortex identification methods based on temporal signal-processing of time-resolved PIV data*, Exp. Fluids, (2009).
- [58] S. WIGGINS, *The dynamical systems approach to lagrangian transport in oceanic flows*, Annu. Rev. Fluid Mech., vol. 37 (2005), pp. 295–328.
- [59] O. ZIENKIEWICZ AND J. WU, *Automatic directional refinement in adaptative analysis of compressible flows*, International Journal for Numerical Methods in engineering, vol. 37 (1994), pp. 2189–2210.
- [60] O. ZIENKIEWICZ AND J. ZHU, *The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1 : The recovery technique.*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 33 (1992), pp. 1331–1364.
- [61] ——, *The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2 : Error estimates and adaptivity.*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 33 (1992), pp. 1365–1382.

## ANNEXES

### A Erreur d'interpolation linéaire pour 1 dimension

L'équation 2.4 représente une borne supérieure de l'erreur d'interpolation.

$$E_1(x) \leq \frac{D_u^{(2)}}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1})$$

Le maximum du terme  $F = (x - x_i)(x - x_{i+1})$  se trouve en prenant la dérivée par rapport à  $x$ .

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - (x_i + x_{i+1}) = 0$$

$F$  est maximal lorsque  $x = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ . La borne supérieure de l'erreur devient alors :

$$\begin{aligned} E_1(x) &\leq \frac{D_u^{(2)}}{2} \left( \frac{x_i + x_{i+1}}{2} - x_i \right) \left( \frac{x_i + x_{i+1}}{2} - x_{i+1} \right) \\ E_1(x) &\leq \frac{D_u^{(2)}}{2} \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right) \left( \frac{x_i - x_{i+1}}{2} \right) \end{aligned} \tag{50}$$

Et finalement, en prenant la valeur absolue et en définissant la taille  $h = x_{i+1} - x_i$

$$E_1(x) \leq \frac{D_u^{(2)}}{2} \left| \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right) \left( \frac{x_i - x_{i+1}}{2} \right) \right| = \frac{D_u^{(2)}}{8} (x_{i+1} - x_i)^2$$

On obtient l'expression de la borne supérieure de l'erreur d'interpolation sur un élément 1D.

$$E_1(x) \leq \frac{D_u^{(2)}}{8} h^2$$

(51)

## B Transformation de l'espace de référence vers l'espace physique

Les dérivées secondees de  $u$  dans l'espace de référence s'expriment en fonction des dérivées dans l'espace physique.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} = [T_1] \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} + [T_2] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (52)$$

Si le vecteur  $[N]$  décrit une transformation linéaire, alors la matrice  $[T_1]$  vaut 0. La matrice  $[T_2]$  s'exprime en fonction des coefficients de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$ .

$$[T_2] = \begin{bmatrix} J_{11}^2 & J_{12}^2 & 2J_{11}J_{12} \\ J_{21}^2 & J_{22}^2 & 2J_{21}J_{22} \\ J_{11}J_{21} & J_{12}J_{22} & J_{11}J_{22} + J_{12}J_{21} \end{bmatrix} \quad (53)$$

La matrice jacobienne est définie comme suit :

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

La matrice  $[T_2]$  prend la forme suivante :

$$[T_2] = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 & 2\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 & 2\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

On peut réécrire l'équation 52 comme suit :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left[ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (54)$$

D'autre part, on peut définir  $x$  et  $y$  en fonction de  $\xi$  et  $\eta$  par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= [N] \mathbf{x}_i \\ &= (1 - \xi - \eta)x_1 + \xi x_2 + \eta x_3 \\ y(\xi, \eta) &= [N] \mathbf{y}_i \\ &= (1 - \xi - \eta)y_1 + \xi y_2 + \eta y_3 \end{aligned}$$

où  $x_i$  et  $y_i$  représentent les coordonnées des sommets du triangle dans l'espace physique. On peut en tirer les dérivées premières par rapport  $\xi$  et  $\eta$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= x_2 - x_1 = x_a \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= x_3 - x_1 = x_c \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= y_2 - y_1 = y_a \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= y_3 - y_1 = y_c \end{aligned}$$

En remplaçant ces derniers résultats dans l'équation 54, on obtient les trois expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} &= x_a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y_a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x_a y_a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} &= x_c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y_c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x_c y_c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} &= x_a x_c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y_a y_c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (x_a y_c + x_c y_a) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

L'Erreur d'interpolation, exprimée par l'équation 2.24, peut alors être exprimée dans l'espace physique en fonction de  $x$ ,  $y$  et de leurs dérivées.

$$\begin{aligned}
 E(x, y) &\leq \frac{1}{8} \left[ x_a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y_a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x_a y_a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \\
 &\quad - 2 \left( x_a x_c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y_a y_c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (x_a y_c + x_c y_a) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \\
 &\quad \left. + x_c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y_c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x_c y_c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] \\
 E(x, y) &\leq \frac{1}{8} \left[ (x_a^2 + x_c^2 - 2x_a x_c) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (y_a^2 + y_c^2 - 2y_a y_c) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right. \\
 &\quad \left. + 2(x_a y_a + x_c y_c - x_a y_c - x_c y_a) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] \\
 E(x, y) &\leq \frac{1}{8} \left[ (x_a - x_c)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (y_a - y_c)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right. \\
 &\quad \left. + 2(x_a - x_c)(y_a - y_c) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right]
 \end{aligned} \tag{55}$$

Après simplification, on obtient l'équation 55. Par inspection et en prenant la valeur absolue des coefficients devant les termes de dérivées secondes comme suit :

$$|x_a - x_c| = |x_2 - x_1 - x_3 + x_1| = |x_2 - x_3| = x_b$$

$$|y_a - y_c| = |y_2 - y_1 - y_3 + y_1| = |y_2 - y_3| = y_b$$

on obtient finalement l'expression de la borne supérieure de l'erreur d'interpolation sur l'élément dans l'espace physique.

$$E(x, y) \leq \frac{1}{8} \left[ x_b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y_b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x_b y_b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right]$$

$E(x, y) \leq \frac{1}{8} \begin{bmatrix} x_b & y_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \end{bmatrix}$
--

(56)

## C Preuve de la borne supérieure sur la valeur absolue de la matrice hessienne

Supposons une quantité définie par le produit scalaire suivant :

$$E = \langle \mathbf{L}, H\mathbf{L} \rangle \quad (57)$$

où  $\mathbf{L}$  représente un vecteur et  $H$  représente une matrice symétrique et qui peut être diagonalisée de la façon suivante :

$$H = R\Lambda R^T = R \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} R^T$$

La matrice  $R$  est la matrice des vecteurs propres de  $H$  associés aux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . On peut décomposer l'équation 57 comme suit :

$$E = \mathbf{L}^T R \Lambda R^T \mathbf{L} = \langle \mathbf{m}, \Lambda \mathbf{m} \rangle$$

En considérant maintenant les deux quantités suivantes, où  $|\Lambda| = \bar{\Lambda}$  :

$$E = \langle \mathbf{m}, \Lambda \mathbf{m} \rangle \quad \bar{E} = \langle \mathbf{m}, \bar{\Lambda} \mathbf{m} \rangle$$

on obtient les expressions suivantes :

$$E = m_1^2 \lambda_1 + m_2^2 \lambda_2 \quad \bar{E} = m_1^2 \bar{\lambda}_1 + m_2^2 \bar{\lambda}_2$$

Si  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1$ , on peut obtenir l'égalité suivante :

$$E - m_2^2 \lambda_2 = \bar{E} - m_2^2 \bar{\lambda}_2$$

$$E = \bar{E} + m_2^2 (\lambda_2 - \bar{\lambda}_2)$$

Si  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_2$ , les 2 quantités sont égales  $E = \bar{E}$ .

Si  $\lambda_2 = -\bar{\lambda}_2$ , alors  $\bar{E} > E$ .

Finalement, on peut conclure que

$$\boxed{\langle \mathbf{L}, H\mathbf{L} \rangle \leq \langle \mathbf{L}, |H|\mathbf{L} \rangle}$$

## D Tailles résultantes lorsque les deux valeurs propres sont plus petites que $\varepsilon$

Reprendons les équations 2.71 et 2.72 des tailles résultantes  $h_s^*$  et  $h_t^*$  :

$$h_s^* = D_{L_p}^{\frac{-1}{2}} \left( \frac{\varepsilon_s^{2p+1}}{|\lambda_t|} \right)^{\frac{-1}{4(p+1)}}$$

$$h_t^* = D_{L_p}^{\frac{-1}{2}} \left( \frac{|\lambda_t|^{2p+1}}{\varepsilon_s} \right)^{\frac{-1}{4(p+1)}}$$

et considérons maintenant la condition où  $|\lambda_t|$  est aussi plus petite que la valeur seuil  $\varepsilon$ . En remplaçant la valeur propre par sa nouvelle valeur on obtient le tailles résultantes qui suivent :

$$\tilde{h}_s = D_{L_p}^{\frac{-1}{2}} (\varepsilon^{2p})^{\frac{-1}{4(p+1)}}$$

$$\tilde{h}_t = D_{L_p}^{\frac{-1}{2}} (\varepsilon^{2p})^{\frac{-1}{4(p+1)}}$$

Elles ont évidemment les mêmes valeurs. Si on prend le ratio entre les tailles résultantes et les tailles originales, on obtient ce qui suit pour les tailles dans la direction  $s$  :

$$\frac{h_s}{\tilde{h}_s} = \left( \varepsilon^{2p} \frac{|\lambda_t|}{|\lambda_s|^{2p+1}} \right)^{\frac{1}{4(p+1)}} = \left( \frac{\varepsilon^p s}{|\lambda_s|^p} \right)^{\frac{2}{4(p+1)}} \leq 1$$

Ce ratio est toujours plus petit ou égal à 1. Par contre, lorsqu'on observe le ratio de tailles dans l'autre direction on a :

$$\frac{h_t}{\tilde{h}_t} = \left( \varepsilon^{2p} \frac{|\lambda_s|}{|\lambda_t|^{2p+1}} \right)^{\frac{1}{4(p+1)}} = \left( \frac{\varepsilon^p}{s |\lambda_t|^p} \right)^{\frac{2}{4(p+1)}}$$

Or ce ratio peut prendre différentes valeurs. Par exemple, le ratio prend les valeurs suivantes dépendamment de la valeur propre  $|\lambda_t|$  :

$$\begin{aligned} \text{Si } |\lambda_t| &\leq \varepsilon s^{-\frac{1}{p}} & \text{alors } \tilde{h}_t &\leq h_t \\ \text{Si } |\lambda_t| &\geq \varepsilon s^{-\frac{1}{p}} & \text{alors } \tilde{h}_t &\geq h_t \end{aligned}$$

Ainsi, la taille résultante  $\tilde{h}_t$  peut parfois être plus grande que la taille originale dans la direction critique, celle de plus grande courbure.

### E Matrice $\mathcal{N}$ nulle

Soit deux métriques  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  différentes de zéro et définies par :

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

Le produit de ces deux métriques donne la matrice suivante :

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} (aA + bB) & (aB + bC) \\ (bA + cB) & (bB + cC) \end{bmatrix}$$

Si  $\mathcal{N}$  est nulle, on a :

$$aA + bB = 0 \tag{i}$$

$$aB + bC = 0 \tag{ii}$$

$$bA + cB = 0 \tag{iii}$$

$$bB + cC = 0 \tag{iv}$$

De (i) et (iii) on obtient :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{b}$$

$$ac - b^2 = 0$$

et de (i) et (ii) on obtient :

$$\frac{B}{A} = \frac{C}{B}$$

$$AC - B^2 = 0$$

Donc, la première condition pour que la matrice  $\mathcal{N}$  soit nulle est que les déterminants des métriques  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  soient nuls. La deuxième condition implique les relations (i), (ii) et

(iv) et fixe un ratio entre les coefficients des deux métriques :

$$aA = -bB = cC$$

Ces deux conditions sont nécessaires pour que la matrice  $\mathcal{N}$  soit nulle. Par contre, par définition les métriques ont un déterminant différent de zéro et par construction elles sont non nulles, ce qui assure une matrice  $\mathcal{N}$  toujours différente de zéro.