



Titre: Confection de calendriers d'événements sportifs au Québec
Title:

Auteur: Rina Razanakoto
Author:

Date: 2010

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Razanakoto, R. (2010). Confection de calendriers d'événements sportifs au Québec [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.
Citation: <https://publications.polymtl.ca/243/>

 Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/243/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Alain Hertz
Advisors:

Programme: Maîtrise en mathématiques appliquées
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CONFECTION DE CALENDRIERS D'ÉVÉNEMENTS SPORTIFS AU QUÉBEC

RINA RAZANAKOTO
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME
DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)
JANVIER 2010

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

CONFECTION DE CALENDRIERS D'ÉVÉNEMENTS SPORTIFS AU QUÉBEC

présenté par : RAZANAKOTO Rina,

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury constitué de :

M. GAMACHE Michel, ing., Ph.D., président

M. HERTZ Alain, Doct.ès.Sc., membre et directeur de recherche

M. FERLAND Jacques, Ph.D., membre

À Christophe...

REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier M. Alain Hertz, mon directeur de recherche, pour son soutien et son aide au niveau de ma recherche et de la rédaction de mon mémoire. C'est lui qui m'a donné la chance de pouvoir entamer des études en recherche opérationnelle et qui m'a permis de me découvrir un intérêt de plus en plus grand pour ce domaine. J'ai énormément profité de ses connaissances et ses contacts dans le domaine m'ont été très précieux. J'aimerais aussi le remercier pour toutes les démarches qu'il a entreprises afin que je puisse avoir une aide financière.

Je dois aussi remercier l'organisme MITACS et la fédération québécoise du sport étudiant pour le stage que j'ai pu faire avec eux et leurs subventions financières. Je remercie particulièrement Patricia Demers, Guy Thibault et Robert Panet-Raymond pour leur enthousiasme et leur précieuse collaboration tout au long du projet.

J'aimerais remercier Ahmed Beljadid pour sa contribution informatique au projet. Je remercie aussi Nadia Lahrichi pour sa disponibilité et la précieuse formation qu'elle m'a donnée sur CPLEX.

Un remerciement particulier aux personnes sans qui je n'aurais pas entamé des études supérieures : Élisabeth pour la motivation qu'elle m'a donnée, mes parents et mes frères qui ont toujours cru en moi, et finalement Christophe qui est mon soutien, partageant et portant mes rêves.

RÉSUMÉ

L'automatisation de la confection de calendriers pour les ligues sportives a reçu une attention particulière au cours des dernières années puisque les ligues sportives génèrent des revenus considérables ainsi que des problèmes d'optimisation combinatoire intéressants. La Fédération Québécoise pour le Sport Étudiant (FQSE) a reçu le mandat d'organiser les championnats sportifs provinciaux scolaires, collégiaux et universitaires. Nous comparons le problème québécois qu'elle nous expose à une classe de problèmes similaires communément appelés dans la littérature *traveling tournament problem*, ce type de problèmes ayant pour but de minimiser la distance totale parcourue par les équipes. Nous formulons par la suite un modèle mathématique dont l'objectif est de produire des calendriers satisfaisant un nombre optimal de contraintes inédites fournies par la FQSE. La revue de littérature met en avant les différentes méthodes qui ont été utilisées pour résoudre le *traveling tournament problem*, mais elle nous permet aussi de constater qu'un bon nombre des contraintes du problème québécois sont originales. Pour résoudre ce problème, nous avons formulé un modèle mathématique en nombres entiers que nous résolvons à l'aide du logiciel CPLEX. Notre modèle prend en compte des variables booléennes à deux indices qui vont nous permettre de déterminer l'endroit où a lieu chaque rencontre, la date à laquelle chaque rencontre va se jouer et les équipes qui vont jouer à domicile, à l'extérieur ou celles qui ne vont pas jouer à chaque date. Il a été testé sur deux instances fournies par la FQSE pour le football collégial et universitaire pour lesquelles nous avons pu facilement générer des calendriers optimaux. Une extension du modèle est ensuite proposée pour prendre en compte la distance parcourue pour chaque équipe. Ce nouveau modèle utilise des variables booléennes à deux et trois indices, le rendant ainsi plus intéressant que les modèles que nous avons pu trouver dans la littérature.

Le modèle développé est capable de prendre en compte toutes les contraintes que nous avons pu rencontrer dans la littérature, mais il est aussi capable de traiter ensemble un bon nombre de contraintes originales. La flexibilité du modèle rend ses applications éventuelles nombreuses étant donné que des contraintes supplémentaires peuvent facilement être rajoutées en autant qu'elles s'écrivent comme une combinaison linéaire des variables du modèle. La principale limitation est que plus il y a de

contraintes, plus le problème est difficile. Dans un tel cas, le développement d'une heuristique peut être intéressant.

ABSTRACT

Several sport federations are confronted with the problem of tournament scheduling. The *Fédération Québécoise du Sport Étudiant* (FQSE) has the mandate to organize championship tournaments at the school, college and university levels in the province of Quebec and we have been asked to help them in scheduling their tournaments. We first compare their problem to a class of similar instances commonly known as the traveling tournament problem (TTP). In the TTP, the objective is to minimize the total traveled distance for all teams. Then we formulate a mathematical model for the problem in Quebec where the objective is to produce schedules with an optimal number of satisfied constraints. The constraints we consider are all given by the FQSE and the literature review shows that many of them are new. After having described in the literature review the different methods that have been used for solving the TTP, we propose an integer programming model and use CPLEX to solve it. The mathematical model uses boolean variables with two indices which indicate where and when each game is to take place, and which teams play at home, away or do not play in each round. The mathematical model has been tested on two instances given by the FQSE for college and university football. For both of them we can easily generate optimal schedules. In the last section, an extended model is presented to take into account the traveled distance for each team. This model uses boolean variables with two or three indices, which makes it more interesting when compared with what can be found in the literature.

Our model is able to take into account the different types of constraints we have seen in the literature, but it can also handle a good number of original constraints. Its flexibility makes it easy to apply to several sport scheduling problems: we can add any constraint that can be written as a linear combination of the variables of the model. The main restriction is due to the fact that the more constraints a problem has, the more difficult it gets. In that case, a good solution would be to develop a heuristic algorithm.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	viii
LISTE DES TABLEAUX	x
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
CHAPITRE 2 CONCEPTS DE BASE	3
2.1 Définitions	3
2.2 Le TTP	6
CHAPITRE 3 REVUE DE LITTÉRATURE	8
CHAPITRE 4 MODÈLE PROPOSÉ	18
4.1 Présentation du problème québécois	18
4.2 Modélisation mathématique	19
4.2.1 Variables	19
4.2.2 Contraintes	20
4.2.3 Fonction à minimiser	24
4.2.4 Génération de toutes les solutions optimales	25
4.3 Expériences	27
4.3.1 Calendrier pour le football universitaire 2009	27
4.3.2 Calendrier pour le football collégial 2008	32
4.4 Prise en compte des déplacements	36

CHAPITRE 5	CONCLUSION	40
5.1	Synthèse des travaux	40
5.2	Limitations du modèle proposé	41
5.3	Améliorations futures	42
RÉFÉRENCES		43

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1	Alternance	5
Tableau 2.2	Intimité	5
Tableau 3.1	SwapHomes(S, T_i, T_j)	11
Tableau 3.2	SwapRounds(S, r_k, r_l)	11
Tableau 3.3	SwapTeams(S, T_i, T_j)	12
Tableau 3.4	PartialSwapRounds(S, T_i, r_k, r_l)	12
Tableau 3.5	PartialSwapTeams(S, T_i, T_j, r_k)	13
Tableau 4.1	Rencontres Football universitaire 2009	28
Tableau 4.2	Rencontres Football Collégial 2008	33

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Dans le monde d'aujourd'hui le sport professionnel et amateur est devenu une grande industrie qui génère des augmentations de revenus considérables au travers des ligues sportives. Une des clés de cette augmentation est la confection des calendriers des matchs à jouer. En effet, de nombreuses fédérations sportives sont confrontées à des problèmes de planification de matchs lors de tournois. Les règles qui régissent ces tournois, les exigences des équipes ou les souhaits des commanditaires sont autant de contraintes à prendre en compte comme par exemple la minimisation des distances de déplacement, un seul match par équipe et par jour, indisponibilité de certains stades à certaines dates, nombre minimal de jours entre le match aller et le match retour correspondant, etc. La création de calendriers respectant ces conditions est donc un problème difficile qui a suscité un grand intérêt de la part des chercheurs en recherche opérationnelle.

Le ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (MELS) reconnaît la Fédération Québécoise du Sport Étudiant (FQSE) comme l'organisme représentant tout le réseau du sport en milieu éducatif québécois, de l'école primaire à l'université. La FQSE est subventionnée pour l'organisation et la coordination d'activités pour le développement de l'excellence de fédérations sportives unidisciplinaires. Elle a entre autres pour mandat d'organiser les championnats provinciaux scolaires, collégiaux et universitaires dans toutes les disciplines concernées et de coordonner les différentes ligues. Le problème de la FQSE est original dans le fait qu'il prend en compte des contraintes qui ne sont généralement pas traitées ensemble dans la littérature.

La recherche que nous avons entreprise consiste à étendre les modèles mathématiques existants pour prendre en compte les contraintes originales de la FQSE dans la confection de calendriers des matchs pour le football. La première phase de notre projet nous a permis de rassembler toutes les données dont nous avons eu besoin pour mener à bien notre étude. Il a tout d'abord fallu recueillir auprès de la FQSE la liste complète

des contraintes et définir avec eux les contraintes dures et les contraintes molles. Parallèlement nous avons répertorié les modèles mathématiques et les différentes méthodes de résolution utilisées pour une classe de problèmes similaires au nôtre : le *traveling tournament problem*. Puisque le problème étudié est très spécifique, la majeure partie de la recherche a été consacrée à la formulation du problème de confection de calendriers sportifs pour la FQSE en termes de programmation linéaire en nombres entiers. Le modèle mathématique développé a été testé sur deux instances fournies par la FQSE à l'aide du logiciel CPLEX. Enfin, un nouveau modèle a été étudié pour prendre en compte les contraintes liées aux distances comme dans le *traveling tournament problem*.

Ce projet en collaboration avec la FQSE a permis de fournir aux fédérations sportives similaires un outil précieux réutilisable pour la planification de matchs lors de tournois. Il permet un gain précieux en temps et en argent ainsi qu'une utilisation optimale des ressources. Au niveau de la recherche, le modèle mathématique développé a permis de produire des calendriers satisfaisant un nombre important de contraintes inédites fournies par la FQSE.

CHAPITRE 2

CONCEPTS DE BASE

2.1 Définitions

Le problème que nous considérons peut être classé dans une catégorie de problèmes appelés dans la littérature *traveling tournament problem*. Notons immédiatement que nous avons décidé d'utiliser des termes anglais dans ce mémoire lorsque ceux-ci peuvent être considérés comme standard dans la littérature et qu'une traduction approximative en français n'aurait pour effet que de confondre le lecteur dans le cadre de recherches bibliographiques. Avant de décrire le *traveling tournament problem* en détail, il convient de définir certaines notions.

Considérons n équipes, n étant pair. De manière générale chaque équipe joue au plus une fois par manche. Un horaire de tournoi détermine dans quel stade et lors de quelle manche chaque match a lieu.

Un *single round-robin tournament* est un tournoi au cours duquel chaque équipe rencontre chacune des autres équipes exactement une fois. Ce tournoi requiert exactement $n - 1$ manches durant lesquelles $n/2$ matchs sont joués. Pour chaque match une équipe reçoit l'autre équipe à domicile.

Un *double round-robin tournament* est un tournoi au cours duquel chaque équipe rencontre chacune des autres équipes deux fois, une fois à domicile et une fois en visite. Dans ce cas le nombre de manches requis est $2(n - 1)$ pour un total de $n(n - 1)$ matchs.

On retrouve aussi dans la littérature le *mirrored traveling tournament* qui correspond à un *single round-robin tournament* dans les $n - 1$ premières manches, suivi du même tournoi avec les lieux de matchs inversés. Considérons par exemple le cas $n = 4$. Pour que chaque équipe joue exactement deux fois contre chacune des autres équipes il faut exactement 6 manches. Supposons que lors des 3 premières manches les matchs de l'équipe 1 sont répartis comme suit : 1-4, 3-1, 1-2 où l'équipe de gauche joue à

domicile et celle de droite à l'extérieur. Dans un *mirrored traveling tournament*, les 3 dernières manches sont un miroir des 3 premières donc les matchs de l'équipe 1 sont répartis comme suit : 4-1, 1-3, 2-1.

Il est très courant que les équipes jouent plusieurs matchs consécutifs à l'extérieur. Il s'agit d'un *road trip*. Dans le cas de plusieurs matchs consécutifs à domicile on parle d'un *home stand*. Lorsqu'une équipe joue deux fois de suite au même endroit, que ce soit à domicile ou à l'extérieur, on dit que l'équipe fait un *break* (car elle brise l'alternance entre matchs à domicile et à l'extérieur).

Dans un *double round-robin* ou un *mirrored traveling tournament* il arrive que deux équipes jouent deux fois l'une contre l'autre deux matchs consécutifs. Il s'agit d'un *repeater*.

Le patron d'une équipe est un vecteur composé des désignations "domicile" (D) et "visite" (V), ce vecteur ayant une composante pour chaque manche. Dans l'exemple précédent les matchs concernant l'équipe 1 sont : 1-4, 3-1, 1-2, 4-1, 1-3, 2-1. Le patron de l'équipe 1 est donc [D V D V D V]. Lorsqu'on rassemble un patron par équipe on obtient un ensemble de patrons.

Pour une équipe donnée on définit par *alternance* le nombre de changements domicile-extérieur ou extérieur-domicile dans un patron. Dans notre exemple, l'équipe 1 a 5 alternances. En règle générale, on recherche un horaire ayant une faible alternance, surtout lorsque les équipes sont éloignées les unes des autres. Si les équipes sont par contre toutes situées dans une même région, il se peut qu'on soit au contraire intéressé par des horaires avec une grande alternance.

Une autre mesure de la qualité d'un horaire est l'*intimité* (de l'anglais "intimacy") entre deux manches consécutives qui est définie comme le nombre d'équipes jouant deux fois à domicile ou deux fois à l'extérieur au cours de ces deux manches.

Dans les tableaux suivants, pour une équipe i donnée, le signe "-" devant l'équipe j qu'elle rencontre lors d'une manche t signifie que l'équipe i joue en visite contre l'équipe j lors de la manche t ; l'absence de signe "-" devant l'équipe j signifie que l'équipe i joue à domicile contre l'équipe j lors de la manche t .

Dans le tableau 2.1 l'équipe i a 4 alternances qui sont : (-1,6), (4,-6), (-6,1), (2,-5).

Tableau 2.1 Alternance

Equipes/Manches	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
.						.				
.						.				
i	-2	-4	-1	6	5	4	-6	1	2	-5
.						.				
.						.				

Tableau 2.2 Intimité

Équipes/Manches			t	$t + 1$		
1			-6	4		
2			4	-5		
3		.	-5	-6	.	.
4			-2	-1		
5			3	2		
6			1	3		

Dans le tableau 2.2, l'intimité entre les manches t et $t + 1$ est de 4 puisque les équipes 3 et 4 jouent deux fois à l'extérieur et les équipes 5 et 6 jouent deux fois à domicile.

Les chercheurs s'intéressent à différentes classes d'instances en ce qui concerne la confection de calendriers pour les sports. Une des classes qui a été définie notamment dans le cadre des problèmes de minimisation de la distance est celle des instances dites *constantes*. Dans cette classe, la distance entre toute paire de stades est 1.

Certaines méthodes sont basées sur des *tuiles* (de l'anglais "tiles"). Une tuile représente un *road trip*. Chaque tuile contient des *blocs* qui représentent des matchs individuels. Par exemple un *road trip* avec 3 adversaires est considéré comme une tuile avec 3 blocs. L'horaire d'une équipe peut donc être représenté comme une série de tuiles avec des matchs à domicile entre chaque tuile. Une semi-tuile (de l'anglais "semi tile" est dérivée d'une tuile en réarrangeant l'ordre des équipes de sorte que le résultat n'est plus une tuile.

Puisque les tournois *round-robin* ont une correspondance avec les graphes, des

chercheurs ont choisi une approche basée sur la théorie des graphes. Nous introduisons donc quelques concepts. Soit $G = (V, E)$ un graphe où V est un ensemble fini de noeuds et E un ensemble d'arêtes dans G . Un couplage dans G est un ensemble d'arêtes non adjacentes. Un couplage parfait dans G est un couplage dans lequel tous les noeuds de V sont incidents à une arête du couplage parfait. Le graphe induit par un couplage parfait est un graphe 1-régulier c'est-à-dire que le degré de chaque noeud est 1. C'est un 1-facteur et une partition du graphe G en 1-facteurs est une 1-factorisation. Considérons un tournoi avec un nombre pair n d'équipes et $n - 1$ manches. Ce tournoi peut-être associé au graphe complet K_n dans lequel chaque noeud correspond à une équipe et chaque arête correspond au match entre les équipes associées aux noeuds incidents. Une 1-factorisation $F = (F_1, \dots, F_{n-1})$ de K_n où $F_1, \dots, F_{n-1}$ sont des 1-facteurs correspond alors au partitionnement des matchs en $n - 1$ manches puisque chaque noeud est incident à exactement une arête dans chaque 1-facteur.

2.2 Le TTP

Easton *et al.* (2001) ont été les premiers à décrire le TTP¹. Étant donné n équipes, n étant pair, la distance entre les domiciles de chaque paire d'équipes est donnée par une matrice n par n . Cette matrice est symétrique puisqu'on suppose que la distance du site i au site j est équivalente à celle du site j au site i pour tout i et pour tout j . Au début du tournoi, chaque équipe est à son domicile et peut jouer son premier match à domicile ou à l'extérieur. On suppose qu'à la fin de la dernière manche, chaque équipe ayant joué son dernier match à l'extérieur retourne à son domicile. Lorsqu'une équipe joue à l'extérieur après un match à domicile, on suppose qu'elle part de son domicile; lorsqu'elle joue plusieurs matchs consécutifs à l'extérieur, elle se déplace entre les sites de ses adversaires consécutifs, sans retourner à son domicile. Le coût associé à chaque équipe est la distance totale parcourue du domicile jusqu'au retour au domicile à la fin du tournoi. Le but du problème est de trouver un horaire de matchs réalisable tout en minimisant la distance totale parcourue.

Les contraintes du TTP sont :

- Contraintes du *double round-robin*;
- Contraintes de consécutivité;

¹Traveling Tournament Problem.

- Contraintes "pas de *repeater*".

Les contraintes du *double round-robin* ont été vues plus haut.

Les contraintes de consécutivité regroupent deux types de contraintes similaires : pour chaque équipe, on ne peut pas avoir plus de trois matchs consécutifs à domicile, ni plus de trois matchs consécutifs à l'extérieur.

Les contraintes "pas de *repeater*" impliquent que toute paire d'équipes ne peut pas jouer deux fois l'une contre l'autre lors de deux manches consécutives. Par exemple, pour les équipes 1 et 2, le match 1-2 ne peut pas être directement suivi du match 2-1, et inversement.

CHAPITRE 3

REVUE DE LITTÉRATURE

Easton *et al.* (2001) ont été les premiers à décrire le *traveling tournament problem*. Dans leur banc d'essai, ils se sont intéressés à générer des bornes inférieures serrées sur la distance totale que les équipes doivent parcourir. Ils sont capables de trouver de bonnes bornes rapidement et même de prouver l'optimalité dans le cas de $n = 4$ et $n = 6$ équipes. Pour de plus grandes instances, la combinaison des bornes générées avec la programmation par contraintes ou la programmation en nombres entiers donne des résultats intéressants, mais ne permet pas de prouver l'optimalité des horaires générés.

Urrutia et Ribeiro (2006) utilisent la programmation en nombres entiers pour maximiser le nombre de *breaks* et trouver des bornes sur la distance à parcourir dans le cas d'un *mirrored traveling tournament problem*. Ils observent que le nombre de *breaks* à domicile est égal au nombre de *breaks* à l'extérieur qui est égal à la moitié du nombre total de *breaks*. Ils effectuent leur étude sur les instances constantes (i.e., toutes les distances sont unitaires) pour lesquelles un nombre maximum de *breaks* implique une distance parcourue minimale. Dans le cas des instances constantes, le nombre maximum de *breaks* est une borne inférieure pour la distance parcourue. Urrutia et Ribeiro s'intéressent à déterminer le nombre maximum de *breaks* pour les différents types de tournois *round-robin*, puis des bornes supérieures au nombre maximum de *breaks* pour le *mirrored traveling tournament problem*. Pour évaluer la qualité des bornes obtenues dans le cadre du *traveling tournament problem* sur des instances constantes, ils utilisent une heuristique dérivée de la métaheuristique GRASP (Resende et Ribeiro, 2003) ainsi qu'une *Recherche Locale Itérative* (Lourenco *et al.*, 2003) avec un mécanisme de chaîne d'éjections.

Rasmussen et Trick (2007) proposent une méthode qui combine la programmation en nombres entiers et la programmation par contraintes en utilisant des coupes

de Benders. Le problème étudié se distingue des études précédentes par deux points essentiels. Mises à part les contraintes usuelles du *traveling tournament problem*, ils considèrent un nouveau type de contraintes appelé contraintes d’emplacement. On peut ainsi imposer à une équipe en particulier de jouer à domicile (ou en visite) lors d’une manche donnée. De plus, Rasmussen et Trick considèrent le problème de minimisation du nombre de *breaks*. Dans l’approche proposée, le problème maître trouve un ensemble de patrons avec un nombre minimal de *breaks* et les sous-problèmes vérifient la réalisabilité de l’ensemble de patrons. Si les sous-problèmes sont réalisables, un horaire est trouvé; sinon une coupe de Benders est ajoutée au problème maître pour mettre de côté les solutions irréalisables pour les itérations futures. Cette approche se distingue des autres méthodes du même type par le fait que la limitation du nombre de patrons générés initialement et le nombre de patrons irréalisables trouvés à l’aide des coupes de Benders accélèrent le processus.

Plusieurs heuristiques ont aussi été développées pour la résolution du TTP. Crauwels et Oudheusden (2002) ont développé un algorithme constructif qui peut être couplé avec une heuristique d’optimisation par colonies de fourmis pour le TTP avec un *double round-robin*.

Anagnostopoulos *et al.* (2006) utilisent un algorithme de recuit simulé pour le TTP basé sur plusieurs types de décisions. Les contraintes sont séparées en deux groupes : les contraintes du *double round-robin* forment le groupe des contraintes dures alors que les contraintes de *consécutivité* et “pas de *repeater*” sont molles. Les solutions non réalisables sont explorées mais une pénalité est rajoutée dans la fonction objectif et cette dernière est ajustée dynamiquement pour équilibrer le temps passé dans les régions réalisables et non réalisables. Enfin une méthode de réchauffement est utilisée pour sortir d’un minimum local. Le large voisinage est défini par cinq types de mouvements. Le voisinage d’un horaire S est l’ensemble des horaires qui peuvent être obtenus en appliquant un des cinq mouvements suivants qui sont illustrés dans les tableaux 3.1 à 3.2 tirés de l’article d’Anagnostopoulos *et al.*.

- *SwapHomes*(S, T_i, T_j) : pour les équipes T_i et T_j ce mouvement intervertit l’équipe qui joue à domicile et celle qui joue à l’extérieur pour la manche r_k . Par exemple supposons que T_i joue à domicile contre T_j lors de la manche r_k et

T_i joue à l'extérieur contre T_j lors de la manche r_l . $SwapHomes(S, T_i, T_j)$ est le même horaire que S excepté aux manches r_k et r_l : T_i joue à l'extérieur contre T_j lors de la manche r_k et T_i joue à domicile contre T_j lors de la manche r_l .

- $SwapRounds(S, r_k, r_l)$ intervertit les manches r_k et r_l .
- $SwapTeams(S, T_i, T_j)$ intervertit l'horaire des équipes T_i et T_j sauf lorsqu'elles jouent l'une contre l'autre.
- $PartialSwapRounds(S, T_i, r_k, r_l)$: pour l'équipe T_i ce mouvement intervertit les matchs aux manches r_k et r_l , puis le reste de l'horaire concernant les manches r_k et r_l est réajusté pour former un *double round-robin tournament*.
- $PartialSwapTeams(S, T_i, T_j, r_k)$: pour la manche r_k ce mouvement intervertit les matchs des équipes T_i et T_j . Le reste de l'horaire pour les équipes T_i, T_j et leurs opposants est mis à jour pour former un *double round-robin*.

Lim *et al.* (2006) ont aussi choisi un algorithme de recuit simulé mais avec affectation. L'approche consiste à diviser l'espace de recherche en deux : un "espace horaire" dans lequel un algorithme de recuit simulé va effectuer la recherche du meilleur horaire, et un "espace d'allocation d'équipes" dans lequel un algorithme de *hill climbing* va rechercher les meilleures allocations d'équipes pour un horaire donné.

Lee *et al.* (2006) ont donné une formulation mathématique du TTP et ont utilisé les mêmes voisinages qu'Anagnostopoulos *et al.* pour développer une recherche tabou. Les variables décisionnelles de leur modèle mathématique sont $Y_{i,j,k,t}$ qui prennent la valeur 1 si l'équipe i se déplace du stade de l'équipe j au stade de l'équipe k lors de la manche t , et la valeur 0 autrement. La fonction objectif a pour but de minimiser la distance totale parcourue pour toutes les équipes. Nous décrivons ici en détail la formulation des contraintes proposée par Lee *et al.* car ceci nous donnera un point de comparaison avec le modèle que nous avons développé et que nous présenterons dans le chapitre suivant. La première contrainte est que chaque équipe doit jouer $n - 1$ fois à domicile, ce qui s'écrit :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^{2n-2} Y_{i,j,i,t} = n - 1 \quad \forall i$$

Tableau 3.1 SwapHomes(S, T_i , T_j)

Équipes/Manches	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	6	-2	4	3	-5	-4	-3	5	2	-6
2	5	1	-3	-6	4	3	6	-4	-1	-5
3	-4	5	2	-1	6	-2	1	-6	-5	4
4	3	6	-1	-5	-2	1	5	2	-6	-3
5	-2	-3	6	4	1	-6	-4	-1	3	2
6	-1	-4	-5	2	-3	5	-2	3	4	1

SwapHomes(S,2,4) produit l'horaire suivant :

Équipes/Manches	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	6	-2	4	3	-5	-4	-3	5	2	-6
2	5	1	-3	-6	-4	3	6	4	-1	-5
3	-4	5	2	-1	6	-2	1	-6	-5	4
4	3	6	-1	-5	2	1	5	-2	-6	-3
5	-2	-3	6	4	1	-6	-4	-1	3	2
6	-1	-4	-5	2	-3	5	-2	3	4	1

Tableau 3.2 SwapRounds(S, r_k , r_l)

Équipes/Manches	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	6	-2	4	3	-5	-4	-3	5	2	-6
2	5	1	-3	-6	4	3	6	-4	-1	-5
3	-4	5	2	-1	6	-2	1	-6	-5	4
4	3	6	-1	-5	-2	1	5	2	-6	-3
5	-2	-3	6	4	1	-6	-4	-1	3	2
6	-1	-4	-5	2	-3	5	-2	3	4	1

SwapRounds(S, r_3 , r_5) produit l'horaire suivant :

Équipes/Manches	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	6	-2	-5	3	4	-4	-3	5	2	-6
2	5	1	4	-6	-3	3	6	-4	-1	-5
3	-4	5	6	-1	2	-2	1	-6	-5	4
4	3	6	-2	-5	-1	1	5	2	-6	-3
5	-2	-3	1	4	6	-6	-4	-1	3	2
6	-1	-4	-3	2	-5	5	-2	3	4	1

Tableau 3.3 SwapTeams(S, T_i , T_j)

Équipes/Manches	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	6	-2	4	3	-5	-4	-3	5	2	-6
2	5	1	-3	-6	4	3	6	-4	-1	-5
3	-4	5	2	-1	6	-2	1	-6	-5	4
4	3	6	-1	-5	-2	1	5	2	-6	-3
5	-2	-3	6	4	1	-6	-4	-1	3	2
6	-1	-4	-5	2	-3	5	-2	3	4	1

SwapTeams(S, T_2 , T_5) produit l'horaire suivant :

Équipes/Manches	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	6	-5	4	3	-2	-4	-3	2	5	-6
2	5	-3	6	4	1	-6	-4	-1	3	-5
3	-4	2	5	-1	6	-5	1	-6	-2	4
4	3	6	-1	-2	-5	1	2	5	-6	-3
5	-2	1	-3	-6	4	3	6	-4	-1	2
6	-1	-4	-2	5	-3	2	-5	3	4	1

Tableau 3.4 PartialSwapRounds(S, T_i , r_k , r_l)

Équipes/Manches	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	6	-2	2	3	-5	-4	-3	5	4	-6
2	5	1	-1	-5	4	3	6	-4	-6	-3
3	-4	5	4	-1	6	-2	1	-6	-5	2
4	3	6	-3	-6	-2	1	5	2	-1	-5
5	-2	-3	6	2	1	-6	-4	-1	3	4
6	-1	-4	-5	4	-3	5	-2	3	2	1

PartialSwapRounds(S, T_2 , r_2 , r_9) produit l'horaire suivant :

Équipes/Manches	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	6	4	2	3	-5	-4	-3	5	-2	-6
2	5	-6	-1	-5	4	3	6	-4	1	-3
3	-4	5	4	-1	6	-2	1	-6	-5	2
4	3	-1	-3	-6	-2	1	5	2	6	-5
5	-2	-3	6	2	1	-6	-4	-1	3	4
6	-1	2	-5	4	-3	5	-2	3	-4	1

Tableau 3.5 PartialSwapTeams(S, T_i , T_j , r_k)

Équipes/Manches	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	6	-2	4	3	-5	-4	-3	5	2	-6
2	5	1	-3	-6	4	3	6	-4	-1	-5
3	-4	5	2	-1	6	-2	1	-6	-5	4
4	3	6	-1	-5	-2	1	5	2	-6	-3
5	-2	-3	6	4	1	-6	-4	-1	3	2
6	-1	-4	-5	2	-3	5	-2	3	4	1

PartialSwapTeams(S, T_2 , T_4 , r_9) produit l'horaire suivant :

Équipes/Manches	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	6	-2	2	3	-5	-4	-3	5	4	-6
2	5	1	-1	-5	4	3	6	-4	-6	-3
3	-4	5	4	-1	6	-2	1	-6	-5	2
4	3	6	-3	-6	-2	1	5	2	-1	-5
5	-2	-3	6	2	1	-6	-4	-1	3	4
6	-1	-4	-5	4	-3	5	-2	3	2	1

Chaque équipe joue une fois à l'extérieur contre chacune des autres équipes :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^{2n-2} Y_{i,j,k,t} = 1 \quad \forall \text{ paire } i, k \text{ avec } i \neq k$$

Pas plus de deux équipes ne peuvent se trouver sur le même terrain à la fois :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Y_{i,j,k,t} \leq 2 \quad \forall k, \quad \forall t$$

Si l'équipe i se déplace chez l'équipe k , cette dernière doit se trouver chez elle :

$$\sum_{j=1}^n Y_{i,j,k,t} \leq \sum_{j=1}^n Y_{k,j,k,t} \quad \forall i, \quad \forall k, \quad \forall t$$

Si l'équipe i se déplace chez l'équipe k lors de la manche t alors elle doit partir de là

pour la manche $t + 1$:

$$\sum_{j=1}^n Y_{i,j,k,t} = \sum_{j=1}^n Y_{i,k,j,t+1} \quad \forall i, \quad \forall k, \quad \forall t$$

Toutes les équipes commencent le tournoi au départ de chez elles

$$\sum_{k=1}^n Y_{i,i,k,1} = 1 \quad \forall i$$

Toutes les équipes retournent à leur domicile à la fin du tournoi.

$$\sum_{j=1}^n Y_{i,j,i,2n-1} = 1 \quad \forall i$$

La contrainte “pas de repeater” s’écrit comme suit :

$$\sum_{j=1}^n Y_{i,j,k,t} + Y_{k,k,i,t+1} \leq 1 \quad \forall \text{ paire } i, k \text{ avec } i \neq k, \quad \forall t \leq 2n - 3$$

Les dernières contraintes du modèle sont celles qui imposent qu’on ne peut pas avoir plus de 3 matchs consécutifs à domicile ou à l’extérieur :

$$\sum_t^{t+3} Y_{i,i,i,t} \leq 3 \quad \forall i, \forall t \leq 2n - 5$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \sum_t^{t+3} Y_{i,j,k,t} \leq 3 \quad \forall i, \forall t \leq 2n - 5$$

Pour ce qui est de la recherche tabou, Lee *et al.* proposent d’utiliser les cinq types de mouvements décrits précédemment, à savoir *SwapHomes*, *SwapRounds*, *SwapTeams*, *PartialSwapRounds* et *PartialSwapTeams*. Dans le but de conserver les caractéristiques d’une bonne solution et d’améliorer la recherche, ils utilisent les concepts d’alternance et d’intimité définis dans le chapitre précédent. Dans un horaire quelconque, si une équipe a une forte alternance elle va devoir se déplacer énormément. On évalue l’alternance pour chaque équipe puis les trois équipes qui ont le plus d’alternance sont sélectionnées. Des voisins sont générés en appliquant *SwapHomes* et

SwapTeams à ces trois équipes. On leur applique ensuite *PartialSwapRounds* et *PartialSwapTeams*. D'un autre côté, on évalue l'intimité de chaque paire de manches consécutives. Les paires de manches de moindre intimité sont retranchées de la liste des candidats jusqu'à ce qu'il ne reste plus que 3 ou 4 manches. Des voisins sont générés en appliquant *SwapRounds* aux 3 ou 4 manches restantes puis on leur applique *PartialSwapRounds* et *PartialSwapTeams*. Si un voisinage est non réalisable, il n'est pas considéré et le critère d'arrêt est basé sur le nombre d'itérations.

Gaspero et Schaerf (2007) ont aussi choisi une approche par recherche tabou sur le TTP avec *double round-robin*. Dans leur espace de recherche ils considèrent tous les horaires de tournoi, y compris ceux qui violent les contraintes de consécuité et "pas de *repeater*". La fonction de coût est une somme pondérée des violations plus la distance totale parcourue. Dans la définition de leur voisinage, ils se sont inspirés du travail de Anagnostopoulos *et al.*. Les voisinages *SwapHomes*, *SwapRounds*, *SwapTeams* sont repris tels quels. Deux autres voisinages sont proposés :

- *SwapMatches*(r, T_i, T_j) indique que lors de la manche r les opposants de T_i et T_j sont échangés. Les équipes T_i et T_j restent au même endroit (que ce soit à domicile ou à l'extérieur) mais il se peut que leurs adversaires changent d'endroit. Ce mouvement requiert que $T_i \neq T_j$ et que T_i et T_j ne se rencontrent pas lors de la manche r .
- *SwapMatchRound*(T_i, r_k, r_l) indique que les opposants de l'équipe T_i lors des manches r_k et r_l sont échangés. L'équipe T_i reste au même endroit mais il se peut que ses adversaires changent d'endroit. Ce mouvement requiert que $r_k \neq r_l$, et que l'équipe T_i ne rencontre pas les mêmes adversaires lors des manches r_k et r_l .

Afin de ne pas sortir de l'espace de recherche, l'application de ces deux voisinages nécessite une chaîne de réparations qui implique aussi d'autres équipes et d'autres manches. Après avoir fait une analyse du voisinage pour détecter les différents mouvements qui amènent au même état, Gaspero et Schaerf construisent des ensembles de voisinages composites avec les meilleures performances.

Ryckbosch *et al.* (2008) ont développé une recherche tabou basée sur des tuiles (dont la définition a été donnée au chapitre précédent). Dans un premier temps ils développent une heuristique constructive dans laquelle ils cherchent à minimiser la

distance totale parcourue en résolvant un *problème de voyageur de commerce* (TSP), en supposant que des parties de la solution optimale du TSP ont de bonnes chances de former des *road trip* (ou tuiles) de bonne qualité. Une première solution partielle est donc créée en assignant des tuiles dans un horaire initialement vide tout en respectant les contraintes du TTP. L'horaire qui en résulte est forcément incomplet puisqu'il manque des matchs. Il est donc complété à l'aide d'un algorithme de recherche tabou à voisinage composite. Les voisinages appliqués sont les suivants :

- $InsertGame(T_i, T_j, r)$ qui insère le match entre T_i et T_j dans la manche r . Ce voisinage requiert que T_i et T_j ne jouent pas déjà durant la manche r et que le match qui les oppose ne soit pas déjà joué lors d'une autre manche.
- $RotateGameInRound(T_i, T_j, r)$ qui définit T_i comme le nouvel opposant à T_j lors de la manche r . Ce voisinage requiert que T_j joue contre une autre équipe que T_i à la manche r , que T_i ne joue aucun match à la manche r , et le match qui oppose T_i et T_j n'est pas déjà joué lors d'une autre manche.
- $RotateGameInTeam(T_i, T_j, r)$ déplace le match opposant T_i à T_j à la manche r . Ce voisinage requiert que le match opposant T_i et T_j soit joué à une manche $r' \neq r$ et que ni T_i ni T_j ne joue déjà un match à la manche r .

La recherche tabou s'arrête dès qu'elle trouve une solution complète. Cette solution sert de solution réalisable initiale pour la deuxième heuristique qui est basée sur une recherche tabou à voisinage composite. Les voisinages utilisés sont ceux qu'on a déjà retrouvés dans la littérature.

Bar-Noy et Moody (2006) ont eux aussi développé une approche basée sur des tuiles. C'est une heuristique rapide en trois phases. La première phase sert à créer des tuiles pour chaque équipe. Dans la deuxième phase il s'agit de placer les tuiles dans l'horaire en vérifiant la cohérence. Lorsqu'on ne peut plus rajouter de tuile, on passe à la phase 3 dans laquelle les tuiles non placées sont séparées en blocs individuels qu'on place un à un. Lorsque les blocs placés ne peuvent pas amener à des solutions on effectue un "backtracking". Cette heuristique produit de très bonnes solutions rapidement mais elles ne sont pas optimales.

Dans le lot des heuristiques rapides, Ribeiro et Urrutia (2007) se sont attaqués au *mirrored traveling tournament problem*. Les solutions sont formulées comme des 1-factorisation ordonnées et orientées par une heuristique constructive rapide. Ils

définissent ensuite 4 voisinages :

- *Home-awaySwap* : chaque solution de ce voisinage est obtenue en inversant l'affectation des stades d'un match précis.
- *Team Swap* : chaque solution de ce voisinage s'obtient en échangeant les adversaires de n'importe quelle paire d'équipes dans toutes les manches.
- *PartialRoundSwap* : étant données 4 équipes T_1, T_2, T_3, T_4 telles que T_1 joue contre T_3 et T_2 contre T_4 à la manche r_1 alors que T_1 joue contre T_4 et T_2 contre T_3 à la manche r_2 , ce voisinage inverse les dates des confrontations entre ces 4 équipes, à savoir que T_1 joue contre T_3 et T_2 contre T_4 à la manche r_2 alors que T_1 joue contre T_4 et T_2 contre T_3 à la manche r_1 . Toutes les combinaisons sont testées pour savoir quel est le meilleur stade pour chaque match.
- *GameRotation* : chaque solution de ce voisinage s'obtient en imposant qu'un match donné se joue lors d'une manche donnée. Un tel mouvement nécessite une chaîne de réparations pour retrouver une solution admissible.

Les trois premiers voisinages sont explorés par une recherche locale basée sur une stratégie semblable à une descente à voisinages variables. Le dernier voisinage est exploré seulement pour diversification.

CHAPITRE 4

MODÈLE PROPOSÉ

4.1 Présentation du problème québécois

Comme nous l’avons mentionné dans l’introduction, le ”problème québécois” auquel nous nous intéressons est similaire au *traveling tournament problem* dans le sens où on y retrouve des contraintes de *double round-robin*, des contraintes de consécutivité et des contraintes “pas de *repeater*”. Notre problème se démarque toutefois de plusieurs manières.

Le problème québécois est né d’un souci d’aider les planificateurs du Québec dans leur tâche de confection de calendrier pour divers sports. Dans un premier temps nous observons que dans ce problème, les contraintes de *double round-robin* ne sont pas appliquées comme dans la littérature. En effet, dans la plupart des cas que nous avons rencontrés ici au Québec, seul un sous-ensemble d’équipes doivent jouer exactement deux fois l’une contre l’autre, une fois à domicile et une fois à l’extérieur. Les autres paires d’équipes ne se rencontrent qu’une fois lors du tournoi. De la même manière, les contraintes de consécutivité et les contraintes “pas de *repeater*” sont, dans certains cas, considérées comme des contraintes molles ou encore elles ne concernent que certaines équipes. Dans un deuxième temps, le problème québécois se démarque par le fait qu’il ne se limite pas aux contraintes du TTP. Avec l’aide de la FQSE, nous avons fait l’inventaire de tous les types de contraintes que les planificateurs québécois ont rencontrés à ce jour. Par exemple, il est assez typique d’imposer que chaque équipe joue au moins une fois à domicile durant les 2 premières semaines du tournoi. Aussi, pour des raisons médiatiques qui empêchent les reporters de couvrir deux matchs dans la même région le même jour, il peut être imposé qu’une équipe au maximum joue à domicile parmi un ensemble de plusieurs équipes de la même région. Nous donnerons dans la prochaine section une description détaillée de toutes les contraintes que nous avons prises en compte. Notons que contrairement au TTP, le problème québécois

que nous avons résolu n'avait aucune contrainte concernant les distances à parcourir lors des déplacements. Il n'existe en général aucun calendrier qui respecte l'ensemble des contraintes. L'objectif que nous poursuivons est donc plutôt de trouver un horaire satisfaisant le plus de contraintes possibles.

Dans la prochaine section, nous présentons un modèle mathématique de programmation linéaire en nombres entiers qui permet de formuler l'ensemble des contraintes de notre problème ainsi que l'objectif poursuivi. Ce modèle mathématique sera testé à l'aide d'un solveur ILOG CPLEX.

4.2 Modélisation mathématique

4.2.1 Variables

Nous considérons qu'un ensemble I de rencontres sportives doivent être planifiées sur un ensemble J de dates possibles. Chaque élément de J peut correspondre soit à une manche, une semaine ou un jour particulier. Soit K l'ensemble des équipes impliquées dans le calendrier. De manière générale, deux équipes ne se rencontrent pas plus de deux fois lors d'un tournoi. Chaque rencontre $i \in I$ est définie par une paire ordonnée (k_1, k_2) d'équipes de K . Notons qu'il se peut que deux rencontres i et i' soit caractérisées par la même paire d'équipes k_1, k_2 , ce qui veut simplement dire que k_1 et k_2 s'affrontent deux fois. Le modèle mathématique considère les variables booléennes X_i pour chaque match $i \in I$ impliquant les deux équipes (k_1, k_2) :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le match } i \text{ a lieu au domicile de } k_1 \\ 0 & \text{si le match } i \text{ a lieu au domicile de } k_2 \end{cases}$$

Nous définissons ensuite les variables booléennes Y_{ij} pour chaque $i \in I$ et $j \in J$:

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le match } i \text{ est joué à la date } j \\ 0 & \text{si le match } i \text{ n'est pas joué à la date } j \end{cases}$$

Pour chaque $k \in K$ et pour chacune des dates $j \in J$, il faut déterminer si k joue à domicile, à l'extérieur, ou ne joue pas. Pour cela, nous définissons les variables

booléennes suivantes pour chaque $j \in J$ et $k \in K$:

$$Z_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si l'équipe } k \text{ joue à domicile à la date } j \\ 0 & \text{si l'équipe } k \text{ joue à l'extérieur ou ne joue pas à la date } j \end{cases}$$

$$U_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si l'équipe } k \text{ joue à l'extérieur à la date } j \\ 0 & \text{si l'équipe } k \text{ joue à domicile ou ne joue pas à la date } j \end{cases}$$

$$V_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si l'équipe } k \text{ ne joue pas à la date } j \\ 0 & \text{si l'équipe } k \text{ joue (à domicile ou à l'extérieur) à la date } j \end{cases}$$

Le but du modèle mathématique est de déterminer pour chaque rencontre $i \in I$, pour chaque date $j \in J$ et pour chaque équipe $k \in K$:

- l'endroit où a lieu chaque match
- la date à laquelle chaque match est joué
- les équipes qui jouent à domicile, à l'extérieur ou qui ne jouent pas à chaque date.

4.2.2 Contraintes

Les variables définies à la section précédente sont liées entre elles par des contraintes qui rendent certaines assignations de valeurs invalides.

Si une équipe $k \in K$ ne joue pas à la date j , alors elle ne joue ni à domicile ni à l'extérieur. Si une équipe $k \in K$ joue à domicile à la date $j \in J$, alors elle ne joue pas à l'extérieur et ne peut pas ne pas jouer à la date j . De même si elle joue à l'extérieur à la date j . Cela se traduit par

$$Z_{kj} + U_{kj} + V_{kj} = 1 \quad \forall k \in K, \quad \forall j \in J \quad (4.1)$$

Tous les matchs doivent être planifiés. Il doit donc exister exactement une date $j \in J$ pour chaque match $i \in I$, c'est-à-dire

$$\sum_{j \in J} Y_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad (4.2)$$

Si le match $i \in I$ se joue au domicile de k_1 à la date $j \in J$, alors on a $X_i = 1$, $Y_{ij} = 1$

et $U_{k_2j} = 1$. Si le match i ne se joue pas à la date j , on ne peut rien conclure sur les équipes k_1 et k_2 à la date j donc $Y_{ij} = 0$ mais X_i et U_{k_2j} peuvent prendre les valeurs 0 ou 1. Si le match i se joue à la date j mais au domicile de k_2 on a $X_i = 0$, $Y_{ij} = 1$ et $U_{k_2j} = 0$. Cela peut s'écrire

$$X_i + Y_{ij} - U_{k_2j} \leq 1 \quad \forall i \in I, \quad \forall j \in J \quad (4.3)$$

Si le match $i \in I$ se joue au domicile de k_2 à la date $j \in J$, alors on a $X_i = 0$, $Y_{ij} = 1$ et $Z_{k_1j} = 0$. Sinon, soit le match i ne se joue pas à la date j et on ne peut rien conclure sur les équipes k_1 et k_2 , soit le match i se joue à la date j mais au domicile de k_1 et on a $X_i = 1$, $Y_{ij} = 1$ et $Z_{k_1j} = 1$. Cela peut s'écrire

$$X_i + Y_{ij} - Z_{k_1j} \leq 1 \quad \forall i \in I, \quad \forall j \in J \quad (4.4)$$

Si le match $i \in I$ se joue au domicile de k_1 à la date $j \in J$, alors on a aussi $X_i = 1$, $Y_{ij} = 1$ et $Z_{k_2j} = 0$. En d'autres termes $-X_i + Y_{ij} - Z_{k_2j} = 0$. Si le match i ne se joue pas à la date j ou si le match i se joue à la date i mais au domicile de k_2 on a soit $Y_{ij} = 0$, soit $Y_{ij} = 1$ et $X_i = 0$ impliquant $Z_{k_2j} = 1$. Cela peut s'écrire

$$-X_i + Y_{ij} - Z_{k_2j} \leq 0 \quad \forall i \in I, \quad \forall j \in J \quad (4.5)$$

Si le match $i \in I$ se joue au domicile de k_2 à la date $j \in J$, alors on a aussi $X_i = 0$, $Y_{ij} = 1$ et $U_{k_1j} = 1$. En d'autres termes $-X_i + Y_{ij} - U_{k_1j} = 0$. Si le match i ne se joue pas à la date j ou si le match i se joue à la date j mais au domicile de k_1 , on a soit $Y_{ij} = 0$, soit $Y_{ij} = 1$ et $X_i = 1$ impliquant $U_{k_1j} = 0$. Cela peut s'écrire

$$-X_i + Y_{ij} - U_{k_1j} \leq 0 \quad \forall i \in I, \quad \forall j \in J \quad (4.6)$$

Il faut aussi imposer que chaque équipe $k \in K$ joue au plus un match à chaque date $j \in J$. Soit I_k l'ensemble des matchs impliquant l'équipe k , on impose donc que pour tout $i \in I_k$, à chaque date $j \in J$ il y a au plus une variable Y_{ij} valant 1 :

$$\sum_{i \in I_k} Y_{ij} = 1 - V_{kj} \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K \quad (4.7)$$

Les contraintes définies ci-dessus sont communes à tout problème de confection

de calendriers sportifs. Celles qui vont suivre dépendent de l'application traitée.

On peut imposer qu'un match i impliquant la paire ordonnée d'équipes (k_1, k_2) se joue au domicile de k_1 :

$$X_i = 1 \quad (4.8)$$

ou on peut imposer que le match se joue au domicile de k_2

$$X_i = 0. \quad (4.9)$$

On peut également imposer une borne A sur le nombre maximum de matchs consécutifs qu'une équipe $k \in K$ peut jouer à l'extérieur. Pour chaque date $j \in J$ on a donc la contrainte que k ne joue pas à l'extérieur durant au moins l'un des jours, $j, j+1, \dots, j+A$, ce qui est équivalent à écrire l'équation

$$\sum_{l=0}^A U_{k(j+l)} \leq A \quad j = 1, \dots, |J| - A, \quad \forall k \in K \quad (4.10)$$

De la même manière, pour limiter à B le nombre de matchs consécutifs d'une équipe k à domicile, on impose la contrainte suivante pour toute date j

$$\sum_{l=0}^B Z_{k(j+l)} \leq B \quad j = 1, \dots, |J| - B, \quad \forall k \in K \quad (4.11)$$

On peut aussi imposer que chaque équipe joue au moins un match à domicile dans un ensemble de C dates consécutives $j, j+1, \dots, j+C-1$

$$\sum_{l=0}^{C-1} Z_{k(j+l)} \geq 1 \quad j = 1, \dots, |J| - C, \quad \forall k \in K \quad (4.12)$$

Pour imposer un nombre minimum D de matchs à domicile sur un sous-ensemble de dates $J' \subseteq J$ pour une équipe $k \in K$, il suffit d'écrire

$$D \leq \sum_{j \in J'} Z_{kj} \quad (4.13)$$

De la même manière on peut imposer un minimum E de matchs à l'extérieur sur un

sous-ensemble de dates $J' \subseteq J$ pour une équipe $k \in K$

$$E \leq \sum_{j \in J'} U_{kj} \quad (4.14)$$

Lorsqu'on veut imposer qu'une équipe $k \in K$ joue au moins $F-1$ fois sur un ensemble de F dates consécutives, il faut que pour toute date $j \in J$ au plus l'une des variables $V_{kj}, V_{k(j+1)}, \dots, V_{k(j+F-1)}$ vaille 1. En d'autres termes

$$\sum_{d=0}^{F-1} V_{k(j+d)} \leq 1 \quad j = 1, \dots, |J| - F + 1 \quad (4.15)$$

Il peut arriver que deux matchs i et i' de I impliquent les deux mêmes équipes k_1 et k_2 . Dans un tel cas, on peut souhaiter qu'au moins G jours séparent ces deux matchs. Ceci peut être imposé en ajoutant la contrainte

$$\sum_{d=0}^{G-1} (Y_{i(j+d)} + Y_{i'(j+d)}) \leq 1 \quad j = 1, \dots, |J| - G + 1 \quad (4.16)$$

Notons $J_d(k)$ l'ensemble des dates durant lesquelles on souhaite que l'équipe k joue à domicile, et notons $\hat{J}_d(k)$ l'ensemble des dates durant lesquelles on ne souhaite pas que l'équipe k joue à domicile.

$$\sum_{j \in J_d(k)} Z_{kj} = |J_d(k)| \quad (4.17)$$

$$\sum_{j \in \hat{J}_d(k)} Z_{kj} = 0 \quad (4.18)$$

De même notons $J_e(k)$ et $\hat{J}_e(k)$ les ensembles de dates durant lesquelles on veut imposer que l'équipe k joue à l'extérieur ou ne joue pas à l'extérieur.

$$\sum_{j \in J_e(k)} U_{kj} = |J_e(k)| \quad (4.19)$$

$$\sum_{j \in \hat{J}_e(k)} U_{kj} = 0 \quad (4.20)$$

Finalement, notons $J_b(k)$ et $\hat{J}_b(k)$ les ensembles de dates durant lesquelles on veut

imposer que l'équipe k ne doit jouer aucun match ou doit absolument jouer des matchs, que ce soit à domicile ou à l'extérieur.

$$\sum_{j \in J_b(k)} V_{kj} = |J_b(k)| \quad (4.21)$$

$$\sum_{j \in \hat{J}_b(k)} V_{kj} = 0 \quad (4.22)$$

On peut imposer d'innombrables autres contraintes. Par exemple, on peut imposer qu'à une date j , l'équipe k joue à domicile l'un des matchs du sous-ensemble $I' \subset I$, chaque match $i \in I'$ impliquant l'équipe k . En plus de la contrainte $Z_{kj} = 1$ (qui est de type 4.17), on impose

$$\sum_{i \in I'} Y_{ij} = 1 \quad (4.23)$$

On peut aussi imposer que dans un ensemble $K' \subset K$ d'équipes, au plus H parmi elles jouent à domicile à chaque date. On a donc que la somme des Z_{kj} où $k \in K'$ doit être au plus égal à H . On a donc la contrainte suivante pour tout $j \in J$

$$\sum_{k \in K'} Z_{kj} \leq H \quad \forall j \in J \quad (4.24)$$

4.2.3 Fonction à minimiser

Toutes les contraintes définies ci-dessus sont de la forme $A \leq B$ ou $A = B$. Les contraintes de type 4.1 à 4.7 sont des contraintes dures parce que si elles sont violées, le calendrier serait inutilisable en pratique. Le reste des contraintes sont molles et peuvent être vues comme des souhaits plus ou moins importants. Notons $C_1, C_2, \dots, C_m$ l'ensemble des contraintes molles. Pour autoriser la violation d'une contrainte C_r de type $A \leq B$, nous remplaçons celle-ci par $A - p_r \leq B$, où p_r est une nouvelle variable à valeurs positives qui correspond à une pénalité en cas de violation de la contrainte C_r . Le but est de minimiser la valeur de p_r pour éviter cette violation. Ainsi, si la contrainte C_r est respectée, on peut poser $p_r = 0$ et il n'y a donc aucune pénalité. Par contre, dans le cas où A est strictement plus grand que B , la plus petite valeur de p_r qui permet de satisfaire la contrainte $A - p_r \leq B$ est $p_r = A - B$, ce qui correspond à une mesure de la violation de la contrainte $A \leq B$.

Le cas d'une contrainte C_r de type $A = B$ peut être transformé en deux contraintes $A \leq B$ et $B \leq A$. La pénalité associée à la contrainte $A \leq B$ indique qu'on tente d'éviter des valeurs de A supérieures à celles de B , alors que la pénalité associée à la contrainte $B \leq A$ a pour but d'éviter des valeurs de B supérieures à celles de A .

Le modèle mathématique que nous avons mis en place ne considère que des contraintes de type $A \leq B$. Toute contrainte de la forme $A = B$ est remplacée par les deux contraintes $A \leq B$ et $B \leq A$.

En notant $C_1, \dots, C_m$ l'ensemble des contraintes molles et $p_1, \dots, p_r$ les pénalités associées, l'objectif du modèle mathématique est de minimiser la valeur suivante

$$\sum_{r=1}^m \omega_r p_r \quad (4.25)$$

où ω_r est l'importance que le planificateur donne au respect de la contrainte C_r . Une grande valeur de ω_r signifie qu'on préférerait satisfaire cette contrainte et en violer d'autres jugées moins importantes.

4.2.4 Génération de toutes les solutions optimales

Un calendrier des matchs est totalement défini par la valeur des variables X_i et Y_{ij} . En effet, en connaissant pour tout $i \in I$ si $X_i = 0$ ou 1, on sait dans quel lieu chaque match se joue, et une valeur de 1 donnée à une variable Y_{ij} nous indique que le match i a lieu à la date j . Pour générer tous les horaires optimaux, nous nous y prenons comme suit. Nous générons tout d'abord un premier horaire optimal, noté S_1 en considérant toutes les contraintes décrites dans les sections précédentes. Notons

- $I_1(S_1)$ l'ensemble des matchs i impliquant la paire ordonnée d'équipes (k_1, k_2) qui se jouent au domicile de k_1 dans la solution S_1
- $I_2(S_1)$ ceux ayant lieu au domicile de k_2 dans la solution S_1
- $j_i(S_1)$ la date à laquelle le match i a lieu dans la solution S_1
- V la valeur de la fonction objective définie par l'équation 4.25 à la section précédente, lorsque calculée pour la solution S_1 .

Dans la solution S_1 du programme mathématique défini plus haut, nous avons donc $X_i = 1$ si $i \in I_1(S_1)$, $X_i = 0$ si $i \in I_2(S_1)$, $Y_{ij} = 1$ si $j = j_i(S_1)$ et $Y_{ij} = 0$ sinon.

Nous ajoutons les deux contraintes suivantes :

$$\sum_{i \in I_1(S_1)} X_i + \sum_{i \in I_2(S_1)} (1 - X_i) + \sum_{i \in I} Y_{ij_i(S_1)} \leq 2|I| - 1 \quad (4.26)$$

$$\sum_{r=1}^m \omega_r p_r = V \quad (4.27)$$

La contrainte 4.26 indique que nous désirons obtenir une solution différente de S_1 . En effet, comme $I_1(S_1)$ et $I_2(S_1)$ sont des ensembles disjoints de matchs, la somme des deux premiers termes de cette inéquation vaut au maximum $|I|$. Le troisième terme de cette inéquation vaut également au plus $|I|$ puisqu'on somme $|I|$ variables valant chacune 0 ou 1. En résumé, le terme de gauche de l'inéquation 4.26 vaut au plus $2|I|$. En imposant d'obtenir une solution pour laquelle cette somme vaille au plus $2|I| - 1$, nous imposons que l'une au moins des situations suivantes soit rencontrée :

- $X_i = 0$ pour un match $i \in I_1(S_1)$, ce qui signifie que i se joue au domicile de k_2 alors qu'il se jouait au domicile de k_1 dans S_1
- $X_i = 1$ pour un match $i \in I_2(S_1)$, ce qui signifie que i se joue au domicile de k_1 alors qu'il se jouait au domicile de k_2 dans S_1
- $Y_{ij_i(S_1)} = 0$ pour un match $i \in I$, ce qui signifie que i ne se joue pas à la date $j_i(S_1)$ alors qu'il se jouait à cette date dans S_1 .

En résumé, pour que la contrainte 4.26 soit satisfaite, il faut que la nouvelle solution trouvée soit différente de S_1 . De plus, comme nous ne nous intéressons qu'aux solutions optimales, nous imposons la contrainte 4.27 qui indique que nous voulons une solution aussi bonne que S_1 .

Si nous réussissons à déterminer une telle solution respectant toutes les contraintes, y compris les contraintes 4.26 et 4.27, notons S_2 une telle solution. Nous ajoutons alors une nouvelle contrainte identique à 4.26 si ce n'est que $I_1(S_1), I_2(S_1)$ et $j_i(S_1)$ sont remplacés par $I_1(S_2), I_2(S_2)$ et $j_i(S_2)$. Nous continuons ainsi de suite jusqu'à ce que le modèle mathématique n'ait plus de solution respectant toutes les contraintes, ce qui signifie que nous aurons déterminé toutes les solutions de valeur optimale V . En pratique, nous générons tout d'abord au maximum cinq solutions optimales, pour autant qu'il en existe un tel nombre. Le planificateur peut alors décider s'il désire davantage de solutions optimales et, si tel est cas, nous générons au plus cinq nouvelles solutions optimales. Nous procédons ainsi jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de

solution optimale ou que l'utilisateur décide qu'il a un nombre suffisant de solutions optimales entre ses mains.

4.3 Expériences

Nous avons pu tester notre modèle sur deux exemples donnés par la Fédération Québécoise pour le Sport Étudiant. Pour chaque exemple le modèle a été implanté sur ILOG CPLEX (version 9.0). Le poids de chaque souhait a été fixé par les planificateurs.

4.3.1 Calendrier pour le football universitaire 2009

Nous avons tout d'abord testé notre modèle en planifiant les rencontres de football universitaire pour l'année 2009. Le tournoi est composé de 10 équipes (BSH, CON, LAV, MCG, MTL, SHE, ACA, MTA, SFX, SMU), 28 matchs (ou rencontres) et il s'étale sur 8 semaines. Les rencontres sont listées dans le tableau 4.1. Dans cet exemple, $I = \{1, 2, \dots, 28\}$, $J = \{1, 2, \dots, 8\}$ et $K = \{1, 2, \dots, 10\}$. Les équipes sont séparées en deux groupes, les équipes du Québec (BSH, CON, LAV, MCG, MTL, SHE) et celles de l'Atlantique (ACA, MTA, SFX, SMU). Les contraintes données par la Fédération Québécoise pour le Sport Étudiant pour ce problème sont énumérées ci-dessous.

- Chacune de ces rencontres i a lieu au domicile de l'équipe k_1 . On ajoute donc la contrainte 4.8 pour tout $i \in I$ soit

$$X_i = 1 \quad \forall i \in I$$

- Aucune équipe ne devrait jouer plus de 2 fois consécutives à domicile ou à l'extérieur. Cette contrainte est similaire à la contrainte de consécutivité qu'on retrouve dans le *traveling tournament problem* mis à part que dans cet exemple chaque équipe ne doit pas avoir plus de 2 matchs consécutifs à domicile ou à l'extérieur contrairement à 3 matchs consécutifs dans la contrainte de consécutivité. On ajoute donc une contrainte de type 4.10 avec $A = 2$ et une

Tableau 4.1 Rencontres Football universitaire 2009

Match i	Équipe k_1	Équipe k_2
1	2-CON	1-BSH
2	3-LAV	1-BSH
3	4-MCG	1-BSH
4	5-MTL	1-BSH
5	1-BSH	6-SHE
6	1-BSH	4-MCG
7	1-BSH	3-LAV
8	1-BSH	9-SFX
9	2-CON	3-LAV
10	4-MCG	2-CON
11	5-MTL	2-CON
12	6-SHE	2-CON
13	2-CON	6-SHE
14	9-SFX	2-CON
15	2-CON	7-ACA
16	3-LAV	4-MCG
17	5-MTL	3-LAV
18	3-LAV	6-SHE
19	3-LAV	5-MTL
20	8-MTA	3-LAV
21	4-MCG	5-MTL
22	6-SHE	4-MCG
23	4-MCG	8-MTA
24	10-SMU	4-MCG
25	6-SHE	5-MTL
26	5-MTL	6-SHE
27	7-ACA	5-MTL
28	6-SHE	10-SMU

contrainte de type 4.11 avec $B = 2$ soit

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^2 U_{k(j+l)} &\leq 2 & \forall j = 1, \dots, 6, \quad \forall k \in K \\ \sum_{l=0}^2 Z_{k(j+l)} &\leq 2 & \forall j = 1, \dots, 6, \quad \forall k \in K \end{aligned}$$

- Chaque équipe du Québec ouvre sa saison locale au plus tard la deuxième semaine du calendrier, c'est-à-dire qu'elle doit jouer au moins une fois à domicile dans les 2 premières semaines. On a donc la contrainte 4.13 avec $J' = \{1, 2\}$ et $D = 1$ soit

$$1 \leq \sum_{j=1}^2 Z_{kj} \quad \forall k = 1, \dots, 6$$

- Les matchs contre les équipes de l'Atlantique doivent être placés aux semaines 4 et 7 du calendrier. En d'autres termes les équipes de l'Atlantique ne doivent pas jouer les semaines 1, 2, 3, 5, 6 et 8. On a donc la contrainte 4.21 pour tout $k = \{7, 8, 9, 10\}$ et $J_{b(k)} = \{1, 2, 3, 5, 6, 8\}$.

$$\sum_{j \in J_{b(k)}} V_{kj} = 6 \quad \forall k = 7, 8, 9, 10$$

- Éviter que deux équipes jouent l'une contre l'autre deux semaines de suite. Cette contrainte correspond à la contrainte "pas de *repeater*" dans le *traveling tournament problem*. Dans cet exemple par contre cette contrainte de type 4.16 est molle avec $G = 2$ et la pondération de sa violation a été fixée à 75. Soit M l'ensemble des paires de matchs (i, i') impliquant deux mêmes équipes. On a donc la contrainte

$$\sum_{d=0}^1 (Y_{i(j+d)} + Y_{i'(j+d)}) \leq 1 \quad \forall (i, i') \in M, \quad \forall j = 1, \dots, 7$$

- Éviter que 1-BSH et 6-SHE jouent à domicile à la même date. C'est une contrainte de type 4.24 valable à chaque date avec $K' = \{1, 6\}$ et $H = 1$.

La contrainte est molle avec une pondération de la violation fixée à 25.

$$\sum_{k \in K'} Z_{kj} \leq 1 \quad \forall j \in J$$

- Éviter que plus de 2 équipes parmi 2-CON, 4-MCG et 5-MTL jouent à domicile à la même date. C'est encore une contrainte molle de type 4.24 valable pour chaque date avec $K' = \{2, 4, 5\}$, $H = 2$ et une pondération de la violation fixée à 25.

$$\sum_{k \in K'} Z_{kj} \leq 2 \quad \forall j \in J$$

- Chaque équipe du Québec doit jouer exactement 4 matchs à domicile et 4 matchs à l'extérieur. Pour se faire nous ajoutons des contraintes de type 4.13 et 4.14 pour chaque équipe du Québec avec $J' = J$ et $D = E = 4$.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J'} Z_{kj} &\geq 4 & \forall k = 1, \dots, 6 \\ \sum_{j \in J'} U_{kj} &\geq 4 & \forall k = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

- Répartir au mieux les matchs à domicile et les matchs à l'extérieur de chaque équipe. On souhaite donc avoir exactement 2 matchs à domicile et 2 matchs à l'extérieur en chaque moitié de saison pour chaque équipe. Nous avons ajouté une contrainte molle de type 4.13 et une de type 4.14 pour chaque équipe, avec $J' = \{1, 2, 3, 4\}$ et $D = E = 2$. La pondération de la violation de cette contrainte a été fixée à 75.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J'} Z_{kj} &\geq 2 & \forall k = 1, \dots, 6 \\ \sum_{j \in J'} U_{kj} &\geq 2 & \forall k = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

- On veut imposer que
 - 5-MTL joue à domicile et 6-SHE joue à l'extérieur la semaine 1,
 - 9-SFX joue à domicile la semaine 4,
 - 1-BSH et 6-SHE jouent à l'extérieur la semaine 5,
 - 4-MCG joue à domicile la semaine 6,
 - 3-LAV joue à l'extérieur la semaine 8.

Nous avons donc imposé des contraintes de type 4.17 avec les couples $(k, J_{d(k)}) = (5 - MTL, 1)$, $(9 - SFX, 4)$ et $(4 - MCG, 6)$ et des contraintes de type 4.19 avec les couples $(k, J_{e(k)}) = (6 - SHE, 1)$, $(1 - BSH, 5)$, $(6 - SHE, 5)$ et $(3 - LAV, 8)$. Toutes ces contraintes ont été considérées comme dures, à l'exception de la contrainte imposant un match à l'extérieur pour 6-SHE la semaine 5 qui a obtenu un poids de 5 car elle entraînait en conflit avec la contrainte imposant que 1-BSH et 6-SHE ne doivent jamais jouer à domicile aux mêmes dates.

$$\begin{aligned} Z_{5,1} &= 1, & Z_{9,4} &= 1, & Z_{4,6} &= 1, \\ U_{6,1} &= 1, & U_{1,5} &= 1, & U_{3,8} &= 1, \\ U_{6,5} &= 1. \end{aligned}$$

Après avoir introduit toutes ces contraintes, nous avons recherché toutes les solutions optimales et nous sommes arrivés à la conclusion qu'il n'y a qu'une seule solution optimale de pénalité totale 130. Les contraintes violées sont les suivantes :

- BSH et MCG jouent 2 matchs l'un contre l'autre deux semaines consécutives (les semaines 2 et 3), ce qui a provoqué une pénalité de 75 ;
- BSH et SHE jouent toutes les deux à domicile les semaines 3 et 6, ce qui donne deux pénalités de 25 ;
- SHE joue à domicile la semaine 5, ce qui donne une pénalité de 5.

Ce meilleur calendrier est le suivant :

Semaine 1 : BSH $\leftarrow$ LAV, CON $\leftarrow$ SHE, MTL $\leftarrow$ MCG

Semaine 2 : MCG $\leftarrow$ BSH, LAV $\leftarrow$ CON, SHE $\leftarrow$ MTL

Semaine 3 : BSH $\leftarrow$ MCG, CON $\leftarrow$ MTL, SHE $\leftarrow$ LAV

Semaine 4 : SFX $\leftarrow$ BSH, ACA $\leftarrow$ CON, LAV $\leftarrow$ MTA, MCG $\leftarrow$ SMU, MTL $\leftarrow$ SHE

Semaine 5 : SHE $\leftarrow$ BSH, CON $\leftarrow$ MCG, LAV $\leftarrow$ MTL

Semaine 6 : BSH $\leftarrow$ MTL, SHE $\leftarrow$ CON, MCG $\leftarrow$ LAV

Semaine 7 : LAV $\leftarrow$ BSH, CON $\leftarrow$ SFX, MTA $\leftarrow$ MCG, MTL $\leftarrow$ ACA, SMU $\leftarrow$ SHE

Semaine 8 : BSH $\leftarrow$ CON, MTL $\leftarrow$ LAV, MCG $\leftarrow$ SHE

4.3.2 Calendrier pour le football collégial 2008

Nous avons ensuite testé notre modèle en planifiant les rencontres de football collégial de la ligue AAA pour l'année 2008. Le tournoi est composé de 7 équipes (VAN, FXG, VXM, BAP, EDM, LEN, MOM), 28 matchs (ou rencontres) et il s'étale sur 10 semaines. Les rencontres sont listées dans le tableau 4.2. Dans cet exemple, $I = \{1, 2, \dots, 28\}$, $J = \{1, 2, \dots, 10\}$ et $K = \{1, 2, \dots, 7\}$. Chacune de ces rencontres peut avoir lieu au domicile de n'importe laquelle des deux équipes de la paire ordonnée (k_1, k_2) . Les contraintes données par la Fédération Québécoise pour le Sport Étudiant pour ce problème sont énumérées ci-dessous.

- Chaque équipe joue exactement 4 matchs à domicile et 4 matchs à l'extérieur. Nous ajoutons donc des contraintes de type 4.13 et 4.14 pour chaque équipe avec $J' = J$ et $D = E = 4$.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J'} Z_{kj} &\geq 4 & \forall k = 1, \dots, 7 \\ \sum_{j \in J'} U_{kj} &\geq 4 & \forall k = 1, \dots, 7 \end{aligned}$$

- Chaque équipe joue au moins 3 fois en l'espace de 4 semaines. Nous ajoutons donc pour toute équipe k et pour toute date j une contrainte de type 4.15 avec $F = 4$.

$$\sum_{d=0}^3 V_{k(j+d)} \leq 1 \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K$$

- Équilibrer les matchs à domicile et les matchs à l'extérieur pour chaque demi saison. On souhaite donc avoir exactement 2 matchs à domicile et 2 matchs à l'extérieur en chaque moitié de saison pour chaque équipe. Nous avons ajouté une contrainte molle de type 4.13 et une de type 4.14 pour chaque équipe, avec $J' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $D = E = 2$. Une pondération de 75 est associée à toute violation de cette contrainte.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J'} Z_{kj} &\geq 2 & \forall k \in K \\ \sum_{j \in J'} U_{kj} &\geq 2 & \forall k \in K \end{aligned}$$

Tableau 4.2 Rencontres Football Collégial 2008

Match i	Équipe k_1	Équipe k_2
1	1-VAN	2-FXG
2	1-VAN	3-VXM
3	1-VAN	4-BAP
4	1-VAN	5-EDM
5	1-VAN	6-LEN
6	1-VAN	7-MOM
7	2-FXG	3-VXM
8	2-FXG	4-BAP
9	2-FXG	5-EDM
10	2-FXG	6-LEN
11	2-FXG	7-MOM
12	3-VXM	4-BAP
13	3-VXM	5-EDM
14	3-VXM	6-LEN
15	3-VXM	7-MOM
16	4-BAP	5-EDM
17	4-BAP	6-LEN
18	4-BAP	7-MOM
19	5-EDM	6-LEN
20	5-EDM	7-MOM
21	6-LEN	7-MOM
22	2-FXG	1-VAN
23	3-VXM	1-VAN
24	4-BAP	2-FXG
25	4-BAP	3-VXM
26	6-LEN	5-EDM
27	7-MOM	5-EDM
28	7-MOM	6-LEN

- Deux équipes ne doivent pas jouer l'une contre l'autre à moins de 3 semaines d'intervalle. Pour ce faire nous imposons la contrainte de type 4.16 avec $G = 3$. Comme dans l'exemple précédent, nous notons M l'ensemble des paires de matchs (i, i') impliquant deux mêmes équipes.

$$\sum_{d=0}^2 (Y_{i(j+d)} + Y_{i'(j+d)}) \leq 1 \quad \forall (i, i') \in M, \quad \forall j = 1, \dots, 8$$

- Imposer un maximum de 2 matchs consécutifs à l'extérieur pour chaque équipe. Nous ajoutons donc une contrainte de type 4.10 avec $A = 2$ soit

$$\sum_{l=0}^2 U_{k(j+l)} \leq 2 \quad \forall j = 1, \dots, 8, \quad \forall k \in K$$

- Imposer à chaque équipe au moins un match à domicile toutes les 4 semaines consécutives. Nous ajoutons des contraintes de type 4.12 avec $C = 4$.

$$\sum_{l=0}^3 Z_{k(j+l)} \geq 1 \quad \forall j = 1, \dots, 6, \quad \forall k = 1, \dots, 7$$

- Imposer à l'équipe 6-LEN de jouer à domicile contre 5-EDM ou 4-BAP les semaines 7 et 8. Nous avons donc ajouté une contrainte de type 4.17 avec $k=6$ -LEN et $J_{d(k)} = \{7, 8\}$ et des contraintes de type 4.23 avec $j = \{7, 8\}$ et I' étant l'ensemble des matchs que 6-LEN joue contre 5-EDM ou 4-BAP.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J_{d(6)}} Z_{6,j} &= 2 \\ \sum_{i \in I'} Y_{ij} &= 1 \quad \forall j = 7, 8 \end{aligned}$$

- Lorsque deux équipes k_1 et k_2 s'affrontent deux fois, l'un des matchs doit se jouer au domicile de k_1 et l'autre au domicile de k_2 . Toutes ces contraintes sont de type 4.8 et 4.9.

$$\begin{aligned} X_i &= 1 & \forall (i, i') \in M \\ X_{i'} &= 0 & \forall (i, i') \in M \end{aligned}$$

- L'équipe 1-VAN ne peut pas jouer la première semaine. Nous imposons alors une contrainte de type 4.21 avec $k=1\text{-VAN}$ et $J_{b(k)} = \{1\}$.

$$V_{6,1} = 1$$

- L'équipe 4-BAP doit jouer à domicile la première semaine. Nous imposons alors une contrainte de type 4.17 avec $k=4\text{-BAP}$ et $J_{d(k)} = \{1\}$.

$$Z_{4,1} = 1$$

- Les paires (k, j) suivantes indiquent quand une équipe k ne peut pas jouer à domicile la semaine j car son terrain n'est pas disponible : (1-VAN,1), (1-VAN,2), (1-VAN,5), (1-VAN,7), (1-VAN,9), (1-VAN,10), (2-FXG,5), (2-FXG,6), (2-FXG,9), (2-FXG,10), (3-VXM,9), (6-LEN,3), (6-LEN,5), (6-LEN,10), (7-MOM,1), (7-MOM,2), (7-MOM,4), (7-MOM,5). Nous ajoutons donc cinq contraintes de type 4.18 : l'une avec $k=1\text{-VAN}$ et $\hat{J}_{d(k)} = \{1, 2, 5, 7, 9, 10\}$, l'une avec $k=2\text{-FXG}$ et $\hat{J}_{d(k)} = \{5, 6, 9, 10\}$, l'une avec $k=3\text{-VXM}$ et $\hat{J}_{d(k)} = \{9\}$, l'une avec $k=6\text{-LEN}$ et $\hat{J}_{d(k)} = \{3, 5, 10\}$, et finalement une avec $k=7\text{-MOM}$ et $\hat{J}_{d(k)} = \{1, 2, 4, 5\}$.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \hat{J}_{d(1)}} Z_{1,j} &= 0 & \sum_{j \in \hat{J}_{d(2)}} Z_{2,j} &= 0 \\ \sum_{j \in \hat{J}_{d(3)}} Z_{3,j} &= 0 & \sum_{j \in \hat{J}_{d(6)}} Z_{6,j} &= 0 \\ \sum_{j \in \hat{J}_{d(7)}} Z_{7,j} &= 0 \end{aligned}$$

Après avoir introduit toutes ces contraintes, nous avons recherché toutes les solutions optimales et nous sommes arrivés à la conclusion qu'il n'y a qu'une seule

solution optimale de pénalité totale 150. Le meilleur calendrier est donc le suivant :

Semaine 1 : LEN $\leftarrow$ FXG, BAP $\leftarrow$ VXM, EDM $\leftarrow$ MOM
 Semaine 2 : FXG $\leftarrow$ VAN, VXM $\leftarrow$ EDM
 Semaine 3 : VAN $\leftarrow$ LEN, FXG $\leftarrow$ BAP, MOM $\leftarrow$ VXM
 Semaine 4 : VAN $\leftarrow$ BAP, EDM $\leftarrow$ FXG, LEN $\leftarrow$ MOM
 Semaine 5 : VXM $\leftarrow$ VAN, BAP $\leftarrow$ MOM, EDM $\leftarrow$ LEN
 Semaine 6 : VAN $\leftarrow$ FXG, VXM $\leftarrow$ LEN, BAP $\leftarrow$ EDM
 Semaine 7 : MOM $\leftarrow$ VAN, FXG $\leftarrow$ VXM, LEN $\leftarrow$ BAP
 Semaine 8 : VAN $\leftarrow$ VXM, FXG $\leftarrow$ MOM, LEN $\leftarrow$ EDM
 Semaine 9 : EDM $\leftarrow$ VAN, BAP $\leftarrow$ FXG, MOM $\leftarrow$ LEN
 Semaine 10 : VXM $\leftarrow$ BAP, MOM $\leftarrow$ EDM

Les contraintes violées sont les suivantes :

- EDM joue 3 matchs (au lieu de 2) à domicile durant les 5 premières semaines, ce qui a provoqué une pénalité de 75 ;
- MOM ne joue aucun match (au lieu de 2) à domicile durant les 5 premières semaines, ce qui a provoqué une pénalité de 75. Cette pénalité ne pouvait être évitée car MOM ne peut pas jouer sur son terrain les semaines 1,2,4 et 5.

4.4 Prise en compte des déplacements

Dans le dernier volet de notre recherche, nous avons développé un modèle permettant de prendre en compte les contraintes de distance, en supposant que les équipes ne retournent pas à leur domicile entre deux matchs s'ils jouent à l'extérieur. Ce modèle s'intègre au modèle présenté dans la section 4.2. Les variables, les contraintes et la fonction objectif sont donc conservées. Plutôt que de chercher à minimiser la distance totale parcourue comme dans le TTP, nous avons choisi de limiter la distance parcourue par chaque équipe pendant un certain nombre de manches consécutives. Pour ce faire nous introduisons les nouvelles variables booléennes $L_{k,k',j}$ pour chaque équipe

$k \in K$, chaque équipe $k' \in K$ et chaque semaine $j \in J$:

$$L_{k,k',j} = \begin{cases} 1 & \text{si l'équipe } k \text{ joue au domicile de l'équipe } k' \text{ la semaine } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Aussi, pour tenir compte du retour à la maison à la fin du tournoi, si le dernier match était à l'extérieur, nous considérons la date $|J| + 1$ au calendrier et supposons que chaque équipe joue à son domicile à cette date. Ainsi, nous fixons $L_{k,k',|J|+1} = 1$ pour $k' = k$ et $L_{k,k',|J|+1} = 0$ pour $k' \neq k$.

Pour chaque équipe $k \in K$, les autres équipes sont partitionnées en 3 groupes :

- $N_0(k)$ comprend l'ensemble des équipes dont le domicile est situé tout près du domicile de k ,
- $N_1(k)$ comprend l'ensemble des équipes dont le domicile est un peu éloigné du domicile de k ,
- $N_2(k)$ comprend l'ensemble des équipes dont le domicile est très éloigné du domicile de k .

Pour simplifier, on attribue une distance entière δ_r entre le domicile de k et celui d'une équipe $k' \in N_r(k)$ ($r = 0, 1, 2$). On suppose bien entendu $\delta_0 < \delta_1 < \delta_2$. La partition définie ci-dessus induit une matrice des distances symétrique puisqu'on suppose que la distance du domicile de l'équipe k au domicile de l'équipe k' est la même que la distance du domicile de l'équipe k' au domicile de l'équipe k .

Nous définissons ensuite les variables entières D_{kj} pour chaque $k \in K$ et $j \in J$ comme suit : $D_{kj} = \delta_r$ si l'équipe k se déplace du domicile de l'équipe k' la semaine j vers le domicile de l'équipe $k'' \in N_r(k')$ la semaine $j + 1$.

Comme précédemment, les variables qui viennent d'être ajoutées doivent être liées aux autres variables par des contraintes qui rendent certaines assignations impossibles.

Si l'équipe k joue à domicile ou si elle ne joue pas la semaine j , alors l'équipe k est chez elle la semaine j et $L_{k,k,j} = 1$. Cela se traduit par

$$V_{kj} + Z_{kj} - L_{k,k,j} \leq 0 \quad \forall k \in K, \quad \forall j \in J \quad (4.28)$$

Pour tout match $i \in I$ tel que $i = (k, k')$, si le match i a lieu chez l'équipe k' la

semaine j alors $X_i = 0$ et $Y_{ij} = 1$. L'équipe k joue donc chez l'équipe k' la semaine j . Si le match i n'a pas lieu chez l'équipe k' ou si le match i n'a pas lieu la semaine j , on ne peut rien conclure sur l'endroit où se trouve l'équipe k la semaine j . Cela peut donc s'écrire comme suit :

$$Y_{ij} - X_i - L_{k,k',j} \leq 0 \quad \forall i = (k, k') \in I, \quad \forall j \in J. \quad (4.29)$$

Pour tout match $i \in I$ tel que $i = (k', k)$, si le match i a lieu chez l'équipe k' la semaine j alors $X_i = 1$ et $Y_{ij} = 1$. Si le match i n'a pas lieu chez l'équipe k' ($X_i = 0$) ou si le match i n'a pas lieu la semaine j ($Y_{ij} = 0$), on ne peut rien conclure sur l'endroit où se trouve l'équipe k la semaine j . Cela peut donc s'écrire comme suit :

$$Y_{ij} + X_i - L_{k,k',j} \leq 1 \quad \forall i = (k', k) \in I, \quad \forall j \in J. \quad (4.30)$$

L'équipe k ne peut se trouver qu'à un seul endroit la semaine j .

$$\sum_{k' \in K} L_{k,k',j} = 1 \quad \forall k \in K, \quad \forall j \in J \quad (4.31)$$

Supposons que l'équipe k joue chez l'équipe k' la semaine j ($L_{k,k',j} = 1$). Si k joue chez $k'' \in N_r(k')$ la semaine $j+1$ ($\sum_{k'' \in N_r(k')} L_{k,k'',j+1} = 1$) alors k parcourt une distance δ_r de la semaine j à la semaine $j+1$ ($D_{kj} = \delta_r$). On peut donc écrire la contrainte suivante :

$$\delta_2 L_{k,k',j} + \sum_{r=0}^2 \delta_r \sum_{k'' \in N_r(k')} L_{k,k'',j+1} - D_{kj} \leq \delta_2 \quad \forall k, k' \in K, \quad \forall j \in J \quad (4.32)$$

Remarquons que si l'équipe k ne joue par contre pas chez l'équipe k' la semaine j ($L_{k,k',j} = 0$), on a $\sum_{r=0}^2 \delta_r \sum_{k'' \in N_r(k')} L_{k,k'',j+1} \leq \delta_2$ puisque l'équipe k ne peut se trouver qu'à un seul endroit chaque semaine. La contrainte ci-dessus n'impose donc rien quand à la valeur de D_{kj} dans ce cas.

Soit J' un ensemble de α dates consécutives. On veut imposer pour chaque équipe $k \in K$ que la distance parcourue depuis le lieu de rencontre de la semaine j jusqu'au

lieu de rencontre de la semaine $j + \alpha + 1$ soit inférieure ou égale à une distance Δ_k .

$$\sum_{j'=j}^{j+\alpha} D_{kj'} \leq \Delta_k \quad \forall k \in K, \quad \forall j = 1, \dots, J - \alpha \quad (4.33)$$

Ces contraintes permettent théoriquement de construire des calendriers de matchs tenant compte des contraintes de déplacement que la FQSE peut être amenée à traiter. Dans le cadre de cette maîtrise, la FQSE n'a cependant pas pu nous soumettre un exemple de problème avec des restrictions sur les distances parcourues par les équipes, et nous n'avons ainsi pas pu valider le modèle. Nous sommes cependant confiants que le modèle proposé sera en mesure de construire des calendriers satisfaisants lorsque des contraintes de déplacement doivent être prises en compte.

CHAPITRE 5

CONCLUSION

5.1 Synthèse des travaux

Nous avons vu dans notre revue de littérature que plusieurs heuristiques ont été développées pour résoudre le TTP dont des métaheuristiques comme la recherche tabou, le recuit simulé, l'optimisation par colonies de fourmis, mais aussi des heuristiques rapides et de la programmation par contraintes. Contrairement à ce qui s'est fait dans la littérature, nous avons voulu formuler un modèle mathématique capable de traiter ensemble un bon nombre de contraintes originales. Les contraintes de type 4.10 et 4.11 sont une généralisation des contraintes de consécutivité et les contraintes de type 4.16 sont une généralisation des contraintes "pas de *repeater*" que l'on retrouve dans le TTP. Les contraintes du *double round-robin* peuvent être écrites avec des contraintes de type 4.13 et 4.14. La plupart des articles revus dans la section 3 ne considèrent pas d'autres contraintes. Rasmussen et Trick (2007) sont les seuls à avoir considéré un nouveau type de contraintes qui permet d'imposer à une équipe de jouer à domicile (ou en visite) lors d'une manche donnée. Cette contrainte est de type 4.17 ou 4.19.

Bien que le modèle proposé par Lee *et al.* (2006) soit différent du modèle que nous proposons en 4.2, puisque ce dernier ne prend pas en compte les distances, la plupart des contraintes de leur modèle sont prises en compte dans notre modélisation. En effet,

- la contrainte qui impose que chaque équipe doit jouer $n - 1$ fois à domicile est de type 4.13,
- celle qui veut que chaque équipe joue 1 fois à l'extérieur contre chacune des autres équipes peut s'écrire avec des contraintes de type 4.14 et 4.23,
- celle qui impose que pas plus de 2 équipes ne peuvent se trouver sur le même terrain à la fois est de type 4.7,
- Si l'équipe k_1 se déplace chez l'équipe k_2 alors k_2 doit être chez elle, cette

contrainte est induite par des contraintes de type 4.3 à 4.4.

Le modèle mathématique développé dans la section 4.2 est flexible. Nous avons pu facilement générer des calendriers optimaux qui ont donné pleine satisfaction aux responsables de cette confection d’horaires comme le montrent les deux exemples traités. On peut noter que les deux tests prennent en compte des contraintes différentes. Par exemple, dans le calendrier pour le football universitaire 2009 (section 4.3.1), les planificateurs ont déterminé d’avance le lieu où chaque rencontre doit se jouer tandis que dans l’exemple du football collégial 2008 (section 4.3.2) le modèle doit déterminer le lieu de chaque match.

Le nouveau modèle exposé dans la section 4.4 est complémentaire puisqu’il permet de prendre en compte la distance parcourue par chaque équipe. Du même coup ce modèle tient compte des contraintes de déplacement du modèle de Lee *et al.*. Il est important de noter ici que Lee *et al.* considèrent des variables à 4 indices tandis que notre nouveau modèle utilise des variables à 3 indices et des variables à 2 indices. Le modèle initial (section 4.2) n’utilise que des variables à 2 indices. Ce fait joue beaucoup sur le temps de résolution du problème considéré.

5.2 Limitations du modèle proposé

Le modèle a été bâti de façon flexible dans le sens qu’il est assez aisé d’ajouter des contraintes nouvelles en autant que les contraintes à ajouter puissent s’écrire comme une combinaison linéaire des variables X_i , Y_{ij} , Z_{kj} , U_{kj} , V_{kj} , $L_{k,k',j}$ et D_{kj} . Naturellement, l’efficacité des deux modèles que nous avons exposés est limitée par le nombre d’équipes, le nombre de rencontres et le nombre de manches puisqu’ils déterminent le nombre de variables du modèle, mais aussi par le nombre de contraintes prises en compte puisque plus un problème est contraignant, plus il est difficile. Il faut toutefois tenir compte du fait que le modèle de la section 4.4 aurait besoin d’être validé par des tests. Nous sommes cependant persuadés que le modèle mathématique proposé peut être utile pour d’autres fédérations sportives dont les ligues ne comportent qu’un petit nombre d’équipes et qui doivent faire face à de nombreuses contraintes.

5.3 Améliorations futures

Les travaux que nous avons effectués dans le cadre de notre recherche nous ont permis de constater que le secteur de la confection de calendriers pour les sports est un domaine de plus en plus intéressant pour les chercheurs en recherche opérationnelle. Les observations précédentes nous permettent de faire ressortir deux pistes d'améliorations futures pour le problème québécois. Une première amélioration serait de valider le modèle prenant en compte les distances (section 4.4) avec des instances que la FQSE pourrait fournir. Nous avons mentionné que plus le nombre d'équipes concernées augmente, plus le nombre de variables augmente ce qui diminue la vitesse de résolution du problème. L'ajout de contraintes peut aussi contribuer à rendre le problème difficile. Lorsque le logiciel CPLEX ne permettrait plus de trouver une solution au travers de la programmation en nombres entiers, une amélioration possible serait alors de développer une métaheuristique semblable à ce qui a été proposé par Lee *et al.* (2006).

RÉFÉRENCES

ANAGNOSTOPOULOS, A., MICHEL, L., HENTENRYCK, P. V. et VERGADOS, Y. (2006). A simulated annealing approach to the traveling tournament problem. *Journal of Scheduling*, vol. 9, pp. 177–193.

BAR-NOY, A. et MOODY, D. (2006). A tiling approach for fast implementation of the traveling tournament problem. *Proceedings of the 6th International Conference on the Practice and Theory of Automated Timetabling - PATAT 2006*. pp. 351–358.

CRAUWELS, H. et OUDHEUSDEN, D. V. (2002). A Generate-and-Test Heuristic Inspired by Ant Colony Optimization for the Traveling Tournament Problem. *Proceedings of the 4th International Conference on the Practice and Theory of Automated Timetabling - PATAT 2002*. pp. 314–315.

EASTON, K., NEMHAUSER, G. et TRICK, M. (2001). The Traveling Tournament Problem Description and Benchmarks. *Principles and Practice of Constraint Programming - CP 2001*. Springer Berlin, pp. 580–584.

GASPERO, L. D. et SCHAERF, A. (2007). A composite-neighborhood tabu search approach to the traveling tournament problem. *Journal of Heuristics*, vol. 13, pp. 189–207.

LEE, J. H., LEE, Y. H. et LEE, Y. H. (2006). Mathematical Modeling and Tabu Search Heuristic for the Traveling Tournament Problem. *Computational Science and Its Applications - ICCSA 2006*. Springer Berlin, pp. 875–884.

LIM, A., RODRIGUES, B. et ZHANG, X. (2006). A simulated annealing and hill-climbing algorithm for the traveling tournament problem. *European Journal of Operational Research*, vol. 174, pp. 1459–1478.

LOURENCO, H. R., MARTIN, O. C. et STUTZLE, T. (2003). Iterated local search. *Handbook of Metaheuristics*, pp. 321–353.

RASMUSSEN, R. et TRICK, M. (2007). A benders approach for the constrained minimum break problem. *European Journal of Operational Research*, vol. 177, pp. 198–213.

RESENDE, M. G. C. et RIBEIRO, C. C. (2003). Greedy randomized adaptative search procedures. *Handbook of Metaheuristics*, pp. 219–249.

RIBEIRO, C. C. et URRUTIA, S. (2007). Heuristics for the mirrored traveling tournament problem. *European Journal of Operational Research*, vol. 179, pp. 775–787.

RYCKBOSCH, F., BERGHE, G. V. et KENDALL, G. (2008). A heuristic approach for the travelling tournament problem using optimal travelling salesman tours. *Proceedings of the 7th International Conference on the Practice and Theory of Automated Timetabling - PATAT 2008*.

URRUTIA, S. et RIBEIRO, C. C. (2006). Maximizing breaks and bounding solutions to the mirrored traveling tournament problem. *Discrete Applied Mathematics*, vol. 154, pp. 1932–1938.