POLYPUBLIE

Étude et prédiction numérique des modes d'écoulement à travers un renfort fibreux à double échelle de porosité

Grégory Martinez

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

Date	2016
Type	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis Mémoire de maîtrise/Master's thesis
URL de PolyPublie PolyPublie URL	https://publications.polymtl.ca/2377/
Conditions d'utilisation Terms of use	© Tous droits réservés / All rights reserved
Référence Citation	Martinez, G. (2016). Étude et prédiction numérique des modes d'écoulement à travers un renfort fibreux à double échelle de porosité [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/2377/

Détails de la thèse
Thesis details

Directeurs de recherche Advisors	François Trochu
Programme Program	Génie mécanique

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal
https://publications.polymtl.ca

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉTUDE ET PRÉDICTION NUMÉRIQUE DES MODES D'ÉCOULEMENT À TRAVERS UN RENFORT FIBREUX À DOUBLE ÉCHELLE DE POROSITÉ

GRÉGORY MARTINEZ

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION

DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES

(GÉNIE MÉCANIQUE)

DÉCEMBRE 2016

© Grégory Martinez, 2016.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire est intitulé :

ÉTUDE ET PRÉDICTION NUMÉRIQUE DES MODES D'ÉCOULEMENT À TRAVERS UN RENFORT FIBREUX À DOUBLE ÉCHELLE DE POROSITÉ

présenté par : MARTINEZ Grégory

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. ROBERT Étienne, Ph. D., président

M. TROCHU François, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. GARON André, Ph. D., membre

DÉDICACE

À ma famille et mes proches,

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon directeur de mémoire François Trochu de m'avoir permis d'effectuer ce travail de recherche sous sa supervision. Son expertise, sa vision globale ainsi que ses encouragements ont contribué au bon déroulement du projet. Je voudrais également remercier Philippe Causse pour son aide au quotidien, son optimisme ainsi que sa patience avec moi. J'ai particulièrement apprécié ses conseils toujours pertinents et précieux pour la compréhension des phénomènes.

J'aimerais remercier les membres du laboratoire Catherine Billotte, Christian-Charles Martel et Roland Fotsing. Durant ces deux années j'ai eu la chance de rencontrer les autres étudiants dynamiques et enthousiasmes du laboratoire, je remercie donc Anna Madra, Alessandro Scola, Alice Courtois, Béliny Bonnard, Cédric Pupin, Hubert Courteau-Godmaire, Jérome Tixier, Joffrey Renaud, Maria Benavente, Mohammad Karaki et Wei Huang. Je remercie aussi Nicolas Vernet.

Je souhaite également remercier les stagiaires de l'équipe Dario Perugini, Katrin Kenzlers et tout particulièrement Alexandre Moreau. J'ai apprécié son aide précieuse durant les 6 mois pendant lesquels nous avons travaillé ensemble.

Finalement j'aimerais remercier ma famille et mes amis de leur soutient pendant les périodes difficiles.

RÉSUMÉ

Les pièces composites fabriquées par des méthodes de moulage liquide («Liquid Composite Molding» ou LCM) sont de plus en plus utilisées dans l'industrie. L'une de ces méthodes est le moulage par transfert de résine («RTM»), qui consiste à injecter la matrice polymère sous forme d'une résine à l'état liquide à travers un renfort fibreux. La robustesse de ce procédé repose sur la connaissance des différents modes d'écoulement lors de l'injection et des propriétés du renfort imprégné. L'étude expérimentale ou par simulation numérique, des mécanismes d'imprégnation capillaires et à pression imposée vise à prédire et limiter certains défauts de fabrication reliés à ce procédé.

L'objectif général du projet est de généraliser au cas tridimensionnel un code d'écoulement à frontière libre par différences finies simulant le remplissage d'un moule d'injection. L'objectif est de prédire l'imprégnation de renforts fibreux de structure complexe afin de reproduire numériquement des expériences de montée capillaire. Un second objectif serait d'adapter un tel logiciel pour prédire la perméabilité d'un renfort fibreux. Les résultats obtenus lors des travaux antérieurs suggèrent en effet que la modélisation cellulaire des renforts fibreux pour un calcul par différences finies représente une démarche prometteuse.

Dans un premier temps, les modèles cellulaires utilisés ici sont obtenus à partir d'une voxélisation de la structure fibreuse des renforts. À partir des dimensions caractéristiques des renforts mesurées expérimentalement, on peut modéliser numériquement la géométrie des renforts. Un algorithme a été développé afin de créer des cellules de calcul qui représentent le renfort fibreux à partir du modèle voxélisé. Chaque cellule a plusieurs paramètres qui décrivent le volume du renfort que la cellule représente. Le paramètre majeur est un tenseur donnant la perméabilité dans les trois directions de l'espace, qui dépend du taux de fibres directionnel de la cellule.

Dans un deuxième temps, un code d'écoulement tridimensionnel à frontière libre est développé afin de simuler des expériences de montée capillaire et des mesures de perméabilité. Les lois qui gouvernent l'écoulement sont la loi de Darcy et la conservation de la masse. La méthode de

résolution fondée sur les différences finies des travaux précédents est corrigée, puis généralisée au cas 3D. Enfin, la simulation d'un certain nombre de cas de validation a permis de connaitre les limites du modèle concernant notamment la conservation de la masse lors du remplissage.

Le code d'écoulement est utilisé avec une discrétisation cellulaire des renforts étudiés afin de simuler la montée capillaire et la mesure de perméabilité. Les résultats concernant la simulation de la mesure de perméabilité mettent l'accent sur l'influence du maillage sur la prédiction de l'écoulement. En effet, l'apparition de canaux préférentiels d'écoulement dépend de la manière avec laquelle chaque toron est modélisé dans la discrétisation cellulaire, ce qui peut faire varier la valeur de la perméabilité analytique locale utilisée dans la simulation. Concernant la montée capillaire, les simulations effectuées sur les modèles des torons permettent d'avoir des positions du front proches des valeurs expérimentales. Cependant, afin d'avoir des résultats plus cohérent pour la masse absorbée en fonction du temps, il sera nécessaire de prendre en compte les phénomènes de saturation.

ABSTRACT

Composite materials manufactured by Liquid Composite Molding processes (LCM) are increasingly used in industry. One of these methods is *Resin Transfer Molding* (RTM) which consists of injecting a liquid reactive resin through a fibrous reinforcement. Successful implementation of this process requires a clear understanding of the different flow modes during the injection as well as a thorough knowledge of the porous fiber bed properties. To limit the generation of manufacturing defects during processing, the impregnation mechanisms driven by viscous or capillary forces can be studied either experimentally or through numerical simulations.

The main objective of this project is to numerically reproduce classical characterization tests such as capillary rises and permeability measurements using an original approach based on a cellular discrete representation of the fibrous structure. Results from previous work indeed suggest that this technique is promising, but an in-depth study must be conducted. To reach that goal, the present work generalized a filling code with free surface flow to the 3D case.

Firstly, cellular models are obtained using a method based on a voxel representation of the textile fabric. The approach requires an experimental characterization of the reinforcement specific dimensions. This step provides the input data to numerically model the reinforcement geometry using an idealized volume representation. This geometric model is then voxelized in an optimum manner. Finally, an algorithm is developed to create computing cells for finite difference approximation, which represent the fibrous reinforcement from the voxelized model. Several parameters are used to describe the material included in the volume of the different cells. The main parameter is a tensor giving the permeability in the three spatial directions which depends on the effective fiber volume content in each direction.

The second part of the work consisted of developing a three-dimensional mold filling code including a free surface to represent the flow front. The constitutive laws implemented are Darcy's law and the principle of mass conservation. The code allows simulating capillary rise and permeability experiments. The solution method based on finite differences is corrected and

generalized to the three-dimensional case. A number of validation tests are used to investigate the model limitations including mass conservation during filling.

Finally, the code is used with cellular models of different reinforcements in order to simulate capillary rise and permeability measurements. In the simulation of permeability measurements, it is shown that preferential flow channels appear depending on how tows are represented in the cellular discretization. This can in turn influence the permeability values predicted numerically. Regarding the capillary rise, tow simulations show that the simulated positions of the capillary front are close to experimental values. Results suggest also that saturation should probably be included in the model to improve the prediction of the absorbed mass as a function of time.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE III

REMERCIEMENTS IV

RÉSUMÉ V

ABSTRACT VII

TABLE DES MATIÈRES IX

LISTE DES TABLEAUX XIII

LISTE DES FIGURES XIV

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS XXII

LISTE DES ANNEXES XXV

CHAPITRE 1 INTRODUCTION 1

1.1 Motivation 2

1.2 Objectifs détaillés 5

1.3 Principales contributions du mémoire 5

1.4 Organisation du mémoire 6

CHAPITRE 2 ÉTAT DES CONNAISSANCES 7

2.1 Modélisation géométrique des renforts 7

2.1.1 Présentation générale 7

2.1.2 Le logiciel TexGen 10

2.2 Modélisation d'un écoulement à travers un milieu à double échelle de porosité 16

2.2.1 Double échelle de porosité 16

2.2.2 Modélisation de l'écoulement 20

2.3 Modélisation des expériences de caractérisation des renforts 25

2.3.1 Modélisation de la montée capillaire 25

2.3.2 Modélisation de la mesure de perméabilité 26
2.4 Conclusion 31
CHAPITRE 3 MODÉLISATION CELLULAIRE DES RENFORTS FIBREUX 33
3.1 Introduction 33
3.2 Reconstruction d'un renfort fibreux 34
3.2.1 Mesures expérimentales 34
3.2.2 Modèles continus obtenus avec TexGen 38
3.3 Voxélisation 41
3.3.1 Définition 42
3.3.2 Recherche d'une voxélisation optimale 43
3.3.3 Résultats des cas d'étude 45
3.4 Modélisation cellulaire 50
3.4.1 Définition 50
3.4.2 Construction du modèle cellulaire 51
3.4.3 Résultats des cas d'étude 53
3.4.4 Prise en compte de la compaction du renfort 58
3.4.5 Perméabilité cellulaire 61
3.5 Conclusion 65
CHAPITRE 4 MODÉLISATION DE L'ÉCOULEMENT 66
4.1 Introduction 66
4.2 Cadre de modélisation 66
4.2.1 Équations du modèle 66
4.2.2 Hypothèses simplificatrices 67
4.3 Simulation numérique des écoulements dans le cas unidimensionnel 67

4.3.1 Développement numérique du modèle unidimensionnel 67
4.3.2 Conditions aux limites 69
4.3.3 Stratégie de remplissage 71
4.3.4 Validation du modèle unidimensionnel 72
4.4 Simulation numérique des écoulements dans le cas tridimensionnel 77
4.4.1 Développement numérique du modèle tridimensionnel 78
4.4.2 Conditions aux limites 80
4.4.3 Stratégie de remplissage 84
4.4.4 Validation du modèle tridimensionnel 89
4.5 Conclusion 99
CHAPITRE 5 SIMULATION D'ÉCOULEMENT 100
5.1 Introduction 100
5.2 Cas de la mesure de perméabilité 100
5.2.1 Données du modèle d'écoulement 100
5.2.2 Résultats des simulations pour le renfort unidirectionnel 101
5.2.3 Résultats des simulations pour le renfort NCF 106
5.3 Cas de la montée capillaire 112
5.3.1 Propriétés du modèle d'écoulement 112
5.3.2 Étude des torons 117
5.3.3 Étude des empilements de plis 123
5.4 Conclusion 124
CHAPITRE 6 CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS 126
6.1 Synthèse 126
6.2 Recommandations 127

RÉFÉRENCES 129

ANNEXES 134

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1 Famille des logiciels de Wisetex [7] 9

Tableau 2.2 Exemple de plans définissant les bords du domaine [9] 16

Tableau 2.3 Paramètres pour des fibres parallèles contiguës [25] 31

Tableau 3.1 Mesures expérimentales sur les torons de Tissa 36

Tableau 3.2 Informations complémentaires pour la modélisation du Tissa 36

Tableau 3.3 Mesures expérimentales sur les torons de NCF 38

Tableau 3.4 Informations complémentaire pour la modélisation du NCF 38

Tableau 3.5 Résultats des pas de discrétisation pour les voxélisations du Tissa 46

Tableau 3.6 Résultats des pas de discrétisation pour les voxélisations du renfort NCF 48

Tableau 3.7 Modèles cellulaires d'un pli du renfort Tissa (voxélisation 24x24x24) 54

Tableau 3.8 Modèles cellulaires d'un pli du renfort NCF (voxélisation 24x24x24) 55

Tableau 5.1 Modèles cellulaires d'un empilement de 4 VER du renfort Tissa utilisés lors des simulations numériques de la mesure de perméabilité 102

Tableau 5.2 Modèles cellulaires d'un empilement de 5 VER du renfort NCF utilisés lors des simulations numériques de la mesure de perméabilité 107

Tableau 5.3 Propriétés du fluide utilisé lors de la montée capillaire 113

Tableau 5.4 Diamètre hydraulique des différents torons étudiés 117

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 Construction du domaine d'étude pour la simulation 2D : image scannée d'un renfort unidirectionnel et conversion en niveaux en niveau de gris [1] 3

Figure 1.2 Grille utilisée pour la simulation numérique 2D de l'écoulement à travers le renfort unidirectionnel [1] 3

Figure 1.3 Comparaison de la position du front lors d'une montée capillaire obtenue expérimentalement et numériquement pour le renfort unidirectionnel Tissa [1] 4

Figure 2.1 Outil de création des renforts de TexGen 8

Figure 2.2 Outil avancé de création des renforts de TexGen 8

Figure 2.3 Exemples de différentes architectures textiles de renforts fibreux [9] 10

Figure 2.4 Exemple d'interpolation par les méthodes des splines cubiques [9] 11

Figure 2.5 Section "power" elliptique [9] 12

Figure 2.6 Section lenticulaire [9] 13

Figure 2.7 Différentes sections interpolées le long du chemin [9] 14

Figure 2.8 Mèche répétée avec deux vecteurs [9] 15

Figure 2.9 Observation des deux échelles de porosité dans un renfort fibreux [11] 17

Figure 2.10 Deux cas d'imprégnation qui peuvent former des vides : 17

Figure 2.11 Mécanisme d'imprégnation dans un milieu poreux à double échelle [13] : 18

Figure 2.12 Écoulement à travers un milieu à double échelle de porosité [10] 19

Figure 2.13 Macrovides et microvides formés durant une imprégnation en fonction de la vitesse d'écoulement et du nombre capillaire (Ca). Un Ca optimum correspond au minimum des vides [14] 20

Figure 2.14 La simulation de l'écoulement considère les phénomènes à différentes échelles : (a) Pièce dont l'écoulement est simulé lors de la fabrication (Échelle macroscopique) ; (b) Volume moyen utilisé pour l'écoulement à l'échelle des torons ; (c) Volume moyen utilisé pour l'écoulement à l'échelle des fibres [19] 24

Figure 2.15 Utilisation d'éléments barres dans un maillage bidimensionnel afin de modéliser la saturation d'un milieu poreux à double échelle [20] 25

Figure 2.16 Exemple de cellule élémentaire utilisée pour la prédiction de la perméabilité [24]...27

Figure 2.17 Maillage régulier d'une cellule élémentaire d'un renfort (voxélisation) [24] 27

Figure 2.18 Cellule élémentaire constituée d'un arrangement rectangulaire de fibres [25].....29

Figure 2.19 Perméabilité adimensionnelle : (a) transverse et (b) longitudinale en fonction du rapport de forme d'une cellule élémentaire [25].....30

Figure 3.1 Processus d'obtention d'un modèle cellulaire d'un renfort fibreux 34

Figure 3.2 Mesures effectuées sur la section d'un toron de Tissa 35

Figure 3.3 Mesures effectuées sur un pli de Tissa : (a) Distance inter-éléments dans le plan, (b) Différence entre épaisseur d'un toron (H) et épaisseur d'un pli (E) 36

Figure 3.4 Image du TG15N60 vue du dessus 37

Figure 3.5 Mesure de l'espace inter-torons de la chaine avec Capilla 37

Figure 3.6 Modèle d'un VER du renfort Tissa avec TexGen : (a) VER seul, (b) Domaine du VER seul, (c) VER et domaine du Tissa.....39

Figure 3.7 Modèle TexGen du renfort Tissa 39

Figure 3.8 Modèle d'un VER du renfort NCF de Texonic avec TexGen : (a) VER seul, (b) Domaine du VER, (c) VER et domaine du NCF.....40

Figure 3.9 Modèle TexGen du renfort NCF.....40

Figure 3.10 Modèles d'un empilement de plusieurs plis de Tissa : (a) Empilement de 3 VER, (b) Empilement de 3 plis.....41

Figure 3.11 Modèles d'un empilement de plusieurs plis de NCF : (a) Empilement de 3 VER du, (b) Empilement de 3 plis.....41

Figure 3.12 Résultat d'un processus de voxélisation : (a) Torons représentés avec TexGen, (b) Torons voxélisés [26].....42

Figure 3.13 Influence de la résolution lors du processus de voxélisation.....43

Figure 3.14 Volume de toron en fonction du pas de discrétisation pour un pli de Tissa 45

Figure 3.15 Volume des fibres d'un toron de Tissa voxélisé en fonction du pas de discrétisation avec un critère de convergence à 5% 46

Figure 3.16 Volume des fibres d'un pli de Tissa voxélisé en fonction du pas de discrétisation avec un critère de convergence à 5%.....47

Figure 3.17 Volume des fibres d'un pli de Tissa voxélisé en fonction du pas de discrétisation avec un critère de convergence à 2%.....47

Figure 3.18 Volume des fibres d'un toron voxélisé de chaîne de NCF voxélisé en fonction du pas de discrétisation avec un critère de convergence à 5% 48

Figure 3.19 Volume des fibres d'un toron voxélisé de trame de NCF voxélisé en fonction du pas de discrétisation avec un critère de convergence à 5% 49

Figure 3.20 Volume des fibres d'un pli de NCF voxélisé en fonction du pas de discrétisation avec un critère de convergence à 5%.....49

Figure 3.21 Exemple de modèle cellulaire d'un toron voxélisé 51

Figure 3.22 Processus de répétition du modèle cellulaire du VER 53

Figure 3.23 Modèle cellulaire d'un VER du renfort Tissa (maillage 2x2x2).....54

Figure 3.24 Modèle cellulaire d'un VER du renfort NCF (maillage 2x2x2).....54

Figure 3.25 Modèle cellulaire d'un toron de renfort Tissa (maillage 2x2x2).....56

Figure 3.26 Modèle cellulaire d'un toron de renfort Tissa pour la montée capillaire : (a) maillage (1x1x1) ; (b) section de passage d'une cellule à l'autre 56

Figure 3.27 Modèle cellulaire d'un toron de chaine du renfort NCF (maillage 1x1x1).....56

Figure 3.28 Modèle cellulaire d'un toron de trame du renfort NCF (maillage 1x1x1) 57

Figure 3.29 Modèle cellulaire de 4 plis du VER du renfort Tissa 57

Figure 3.30 Modèle cellulaire de 4 plis du VER du renfort NCF 58

Figure 3.31 Étapes de compression d'un renfort tissé [27] 59

Figure 3.32 Réseau hexagonal de fibres [29].....61

Figure 3.33 Schéma simplifié d'une cellule composée de deux torons : (a) avant dilution du taux de torons, (b) après dilution du taux de torons.....63

Figure 3.34 Schéma d'une cellule de calcul composée de trois torons 64

Figure 4.1 Schéma du domaine unidimensionnel étudié.....68

Figure 4.2 Position des pressions à fixer lors du calcul des conditions aux limites.....69

Figure 4.3 Position de la vitesse du front calculée lors du remplissage.....72

Figure 4.4 Positions du front en fonction du temps obtenus numériquement et analytiquement pour un domaine 1D avec des cellules de même perméabilité dans le cas d'une injection à pression imposée.....73

Figure 4.5 Vitesse du front obtenue numériquement pour un domaine 1D avec des cellules de même perméabilité dans un cas d'injection à débit imposé.....74

Figure 4.6 Positions du front obtenues numériquement et analytiquement sur un domaine 1D avec des cellules de même perméabilité dans un cas d'injection à débit imposé.....75

Figure 4.7 Domaine cellulaire unidimensionnel avec une distribution discontinue de perméabilités (mm^2).....75

Figure 4.8 Courbes de pression en fonction de l'indice de la dernière cellule remplie lors du remplissage du domaine unidimensionnel à perméabilités variables.....76

Figure 4.9 Comparaison des volumes de fluide injecté et utilisé en avant du front lors du remplissage du domaine de perméabilités variable.....77

Figure 4.10 Exemple de domaine de calcul cellulaire bidimensionnel composé de cellules virtuelles et réelles.....78

Figure 4.11 Schéma d'un domaine bidimensionnel à un instant *t* 81

Figure 4.12 Exemple d'imposition d'une condition de Neumann dans la direction y pour des cellules avec une matrice de perméabilité diagonale 83

Figure 4.13 Schéma d'une configuration de remplissage d'un domaine bidimensionnel.....85

Figure 4.14 Schéma d'un domaine de calcul saturé 3D, seules les cellules réelles sont représentées 87

Figure 4.15 Cas simplifié bidimensionnel de remplissage par excès d'une cellule 88

Figure 4.16 Cas simplifié bidimensionnel après gestion du remplissage par excès d'une cellule. 89

Figure 4.17 Domaine cellulaire étudié dans le cas de la pression imposée 90

Figure 4.18 Évolution de la position du front lors de la mesure de perméabilité dans le cas d'un domaine 3D 91

Figure 4.19 Distribution du champ de pression dans le domaine de calcul à la fin de l'écoulement de remplissage unidirectionnel d'une cavité rectangulaire 92

Figure 4.20 Vitesse du front en fonction du temps dans un écoulement de remplissage à débit imposé d'une cavité rectangulaire 93

Figure 4.21 Position du front en fonction du temps d'un écoulement de remplissage à débit imposé dans le cas d'un domaine 3D 93

Figure 4.22 Représentation tridimensionnelle de la variabilité de la matrice de perméabilité diagonale dans un domaine 3D 95

Figure 4.23 Comparaison des volumes de fluide injecté et calculé à travers le front d'écoulement dans le cas tridimensionnel d'un domaine constitué de matrices de perméabilité diagonales 96

Figure 4.24 Processus de remplissage du domaine : (a) Au début de l'écoulement, les volumes injecté et calculé à travers le front restent identiques. (b) Au milieu de l'écoulement, la conservation de la masse est toujours garantie. (c) À la fin de l'écoulement, des cellules pleines à l'extrémité du domaine conduisent à sous-évaluer le volume calcul à travers le front 97

Figure 4.25 Visualisation de la variabilité de la matrice de perméabilité pleine à diagonale dominante dans un domaine 3D 98

Figure 4.26 Comparaison du volume de fluide injecté et calculé sur le front d'écoulement dans le cas tridimensionnel avec un domaine constitué de matrices de perméabilité pleines à diagonale dominante 99

Figure 5.1 Modèle TexGen de 4 VER de tissu unidirectionnel de la société Tissa avant compaction 101

Figure 5.2 Influence du maillage sur le taux de torons minimal du domaine pour différents taux de fibres du renfort unidirectionnel compacté 103

Figure 5.3 Comparaison des résultats de mesure de perméabilité à 0° pour la tissu unidirectionnel 104

Figure 5.4 Modèle cellulaire constitué des cellules dont le taux de torons est inférieur à 110% de la valeur minimale du domaine pour le tissu unidirectionnel pour un taux de fibres de 47,9%. L'échelle entre 0 et 1 correspond au taux de fibres de la cellule 105

Figure 5.5 Comparaison des résultats de mesure de perméabilité à 90° pour un tissu unidirectionnel 106

Figure 5.6 Modèle TexGen de 5 VER de tissu NCF de la société Texonic avant compaction ... 107

Figure 5.7 Influence du maillage sur le taux de torons minimal du domaine pour différents taux de fibres du renfort NCF compacté 108

Figure 5.8 Comparaison des résultats de mesure de perméabilité à 0° pour un tissu NCF..... 109

Figure 5.9 Modèle cellulaire constitué des cellules dont le taux de torons est inférieur à 110% de la valeur minimale du domaine pour le tissu NCF à un taux de fibres de 39.8%. L'échelle entre 0 et 1 correspond au taux de fibres de la cellule 110

Figure 5.10 Modèle cellulaire de l'empilement de VER le tissu NCF à un taux de fibres de 39.8%. L'échelle entre 0 et 1 correspond au taux de fibres de la cellule 110

Figure 5.11 Comparaison des résultats de mesure de perméabilité à 90° pour un tissu NCF..... 112

Figure 5.12 Front de liquide visualisé grâce à l'indicateur fluorescent présent dans l'hexadécane lors de la montée capillaire..... 113

Figure 5.13 Schéma des conditions aux limites lors d'une montée capillaire 114

Figure 5.14 Position du front au carré en fonction du temps obtenue avec l'identification numérique de B_h 116

Figure 5.15 Comparaison des résultats expérimentaux et numériques de la position du front lors de la montée capillaire pour un toron de Tissa 118

Figure 5.16 Comparaison des résultats expérimentaux et numériques de la masse lors de la montée capillaire pour un toron de Tissa 119

Figure 5.17 Comparaison des résultats expérimentaux et numériques de la position du front lors de la montée capillaire pour un toron de trame du NCF de Texonic 119

Figure 5.18 Comparaison des résultats expérimentaux et numériques de la masse absorbée lors de la montée capillaire pour un toron de trame du NCF de Texonic 120

Figure 5.19 Comparaison des résultats expérimentaux et numériques de la position du front lors de la montée capillaire pour un toron de chaîne du NCF de Texonic 121

Figure 5.20 Comparaison des résultats expérimentaux et numériques de la masse absorbée lors de la montée capillaire pour un toron de chaîne du NCF de Texonic 121

Figure 5.21 Photos de montées capillaires dans un toron d'un renfort unidirectionnel de la société Tissa : (a) le front de fluide est arrivé au bout du toron (dans la zone de contraste) sans le saturer complètement, (b) la saturation en liquide de la zone de contraste a augmenté à la fin de l'écoulement 122

Figure 5.22 Test qualitatif d'imbibition pour un pli de tissu NCF dans le sens trame avec deux fluides successifs de couleurs différentes (un bleu et un jaune) : (a) pendant l'imbibition, (b) après l'imbibition [22] 124

Figure A.1 Schéma d'une expérience de montée capillaire [1] 133

Figure A.2 Forces de tensions de surface d'une goutte de liquide sur une surface solide [1] 134

Figure A.3 Position d'équilibre d'un liquide dans un tube capillaire 135

Figure A.4 Régime linéaire de Lucas-Washburn 137

Figure B.1 Schéma d'un moule rectangulaire typique utilisé pour la mesure de la perméabilité par injection unidimensionnelle [30] 139

Figure B.2 Vue du dessus schématique d'un montage typique d'une mesure de perméabilité dans le plan [30] 140

Figure B.3 Allure schématique de la position du front en fonction du temps dans une injection à pression imposée [30] 141

Figure B.4 Allure schématique de la position du front au carré en fonction du temps à pression imposée [30] 141

Figure B.5 Schéma de découpe des échantillons dans les trois directions dans un rouleau de renfort [30]. 142

Figure B.6 Représentation schématique d'un montage de mesure de perméabilité transverse [35]. 143

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

Acronymes

LCM	*Liquid Composite Molding*
NCF	*Non crimp fabric*
RTM	*Resin Transfert Molding*
VER	Volume élémentaire représentatif
s	Initiale de south pour les cellules indexées (i, j, k-1)
u	Initiale de up pour les cellules indexées (i, j-1, k)
w	Initiale de west pour les cellules indexées (i-1, j, k)

Modélisation géométrique des renforts fibreux

C_i	Coefficients appartenant à l'ensemble des nombres relatifs
$\boldsymbol{D_f}$	Distance inter-fils
$\boldsymbol{D_t}$	Distance inter-torons
$\boldsymbol{E}$	Épaisseur renfort
$\boldsymbol{H}$	Épaisseur toron
L	Longueur du canal
L_c	Longueur caractéristique du renfort
$\boldsymbol{L_f}$	Largeur au fil
$\boldsymbol{L_m}$	Largeur au milieu du toron
P	Surface paramétrique de base de la mèche
r_{fibres}	Premier coefficient de réduction de l'épaisseur calculé lors de la compaction
$\overrightarrow{R_i}$	Vecteurs de répétition
r_{toron}	Deuxième coefficient de réduction de l'épaisseur lors de la compaction

V_f	Taux de fibres
$V_{f,cell}$	Taux de fibres moyen dans le domaine
$V_{f,dilué}(j)$	Taux de fibres du toron dilué
$V_{f,fibres}$	Taux de fibres moyen dans les torons du domaine
$V_{f,initial}(j)$	Taux de fibres du toron initial
$V_{f,max}$	Taux de fibres d'un arrangement hexagonal de fibres
$V_{f,objectif}$	Taux de fibres visé lors de la compaction
$V_{f,max}$	Taux de fibres maximum admissible (arrangement hexagonal)
$V_{t,dilué}(j)$	Taux de torons du toron j
$V_{t,inial}$	Taux de torons initial contenu dans la cellule

Modélisation d'un écoulement à travers un milieu poreux à double échelle

A	Aire de la section de la cavité
A_{gt}	*S*urface de contact du fluide contenu dans le volume moyen avec les torons
B_h	Pente de Lucas-Washburn
Ca	Nombre capillaire
d_h	Diamètre hydraulique
D_x, D_y, D_z	Pas de discrétisation dans les direction x,y,z
f	Coefficient de friction de Fanning
i,j,k	Indexes dans la direction x,y,z
$\boldsymbol{K}$	Tenseur de perméabilité du renfort
$k_r(S)$	Perméabilité relative
$\boldsymbol{K_s}$	Perméabilité intrinsèque ou saturé du renfort fibreux
n_{gt}	Normale unitaire à la surface du toron

P	Pression moyenne
$P_{t\to g}$	Matrice de changement de base du référentiel du toron vers le référentiel global
Q	Débit de fluide entrant
Re	Nombre de Reynolds
S	Saturation
$Sink$	Terme qui permet de tenir compte de la quantité de liquide qui pénètre progressivement dans les mèches lors de l'écoulement dans le renfort non saturé
t_{opt}	Temps optimal d'imprégnation de la longueur caractéristique
u	Vitesse du fluide
V	Volume moyen
v_g	Vitesse du fluide dans l'espace inter-mèche
$\bar{v}$	Vitesse moyenne de remplissage du renfort fibreux
v_{opt}	Vitesse optimale théorique
x,y,z	Coordonnées spatiales
γ	Tension de surface à l'interface air/résine
$\boldsymbol{\theta}$	Angle de contact dynamique
μ	Viscosité du fluide
ρ	Masse volumique du fluide
ϕ	Porosité du renfort
$\langle\ \rangle$	Valeurs moyennes prises sur le milieu poreux

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE A MODÉLISATION DE LA MONTÉE CAPILLAIRE..... 133

ANNEXE B MESURE DE PERMÉABILITÉ 139

ANNEXE C STRUCTURE DES FICHIERS DE MODÉLISATION DE TEXGEN 145

ANNEXE D DIFFÉRENCIATION DE LA COMBINAISON DE LA LOI DE DARCY ET DE LA CONSERVATION DE LA MASSE 146

ANNEXE E MATRICE À DIAGONALE DOMINANTE 149

ANNEXE F NORME 2 D'UNE MATRICE 149

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Les procédés de fabrication des matériaux composites tels que le procédé RTM («*Resin Transfer Molding*») sont de plus en plus utilisés dans l'industrie. Ils permettent d'obtenir des pièces presque finies et performantes du point de vue mécanique. Le principe général consiste à combiner deux matériaux : une matrice et un renfort fibreux. Lors de la mise en œuvre, la matrice qui est une résine à l'état liquide est injectée à travers le renfort fibreux. La robustesse de ce procédé repose en partie sur la connaissance des propriétés des différents modes d'écoulement à travers un milieu poreux. Si les propriétés des matériaux sont mal connues, des problèmes peuvent survenir lors de la fabrication. Il est alors possible que des bulles d'air restent emprisonnées (porosités) ou bien des zones sans résine (zones sèches) peuvent se former, qui nuisent aux propriétés mécaniques de la pièce.

Dans le cas des matériaux composites fabriqués à l'aide de renforts fibreux, la perméabilité du renfort est un paramètre important. La perméabilité mesure la capacité du renfort à être traversé par un fluide. Cette propriété est liée à la géométrie du renfort. En effet, il existe des espaces appelés *mésopores*, entre les mèches du renfort fibreux. En outre, chaque mèche est constituée d'un grand nombre de fibres plus ou moins espacées. Les interstices allongés entre les fibres d'une mèche sont appelés *micropores*. Le renfort fibreux est dit à double échelle de porosité. L'imprégnation des renforts fibreux peut être étudiée par des moyens expérimentaux ou par simulation numérique.

Au niveau macroscopique, le logiciel simulant le remplissage du renfort développé par la Chaire sur les composites à haute performance (CCHP) est commercialisé depuis 2001 par un éditeur de logiciels d'ingénierie, ESI-Group. Au niveau microscopique, il n'existe pas encore d'outil complètement validé pour simuler la micro-imprégnation d'un renfort fibreux. Deux modes d'écoulement sont généralement distingués : *capillaire* quand la résine imprègne le renfort à la pression atmosphérique et *visqueux* quand la résine est injectée sous pression. Des procédures expérimentales permettent de déterminer la vitesse optimale d'injection théorique pour optimiser les propriétés mécaniques. **L'objectif général du projet est de généraliser au cas tridimensionnel un code d'écoulement à frontière libre simulant le remplissage d'un moule d'injection afin de prédire l'imprégnation de renforts fibreux de structure complexe afin de reproduire numériquement des expériences de montée capillaire. Un second objectif serait d'adapter un tel logiciel pour prédire la perméabilité d'un renfort fibreux.**

La simulation de l'injection d'une résine polymère à travers un renfort fibreux reste un problème délicat, car il faut modéliser l'écoulement de remplissage d'un liquide à travers une structure fibreuse complexe. Des difficultés surviennent en raison de la géométrie des renforts tissés. Qu'ils soient constitués d'un empilement de tissus 2D ou d'un tissu 3D, les renforts fibreux contiennent un réseau d'écoulement complexe, difficile à mailler dans le cas d'une simulation par éléments finis. C'est la raison pour laquelle un code d'écoulement par différences finies a été développé dans cette étude. À cette fin, il a fallu discrétiser la structure fibreuses en cellules élémentaires de forme régulière, dont les propriétés reflètent celles du renfort, c'est-à-dire prennent en compte le taux des torons d'une cellule, le taux de fibres des torons ainsi que les orientations des fibres des torons (qui peuvent être différentes dans le cas d'un renfort tissé 3D ou d'une cellule contenant à la fois des torons de chaîne et de trame). Ces considérations ont motivé les travaux présentés dans ce mémoire qui ont porté principalement sur deux volets :

a) discrétisation cellulaire des renforts fibreux adaptée à un calcul d'écoulement par différences finies ;

b) développement d'un code de remplissage tridimensionnel d'une structure fibreuse respectant la conservation du volume de liquide injecté.

1.1 Motivation

Le projet présenté dans ce mémoire s'inscrit dans la continuité des travaux du laboratoire de la Chaire sur les composites à haute performance (CCHP) concernant la simulation numérique des procédés de fabrication des composites par injection sur renforts. La simulation numérique de la montée capillaire a été étudiée dans un premier temps au moyen d'un logiciel d'écoulement bidimensionnel [1] dans le cas d'un renfort fibreux unidirectionnel. Le domaine d'étude utilisé lors de ces travaux préliminaires a été obtenu en scannant un échantillon de tissu unidirectionnel (voir Figure 1.1), puis en convertissant l'image obtenue en niveaux de gris. Il a alors été supposé que le niveau de gris était directement proportionnel au taux de fibres local de l'échantillon.

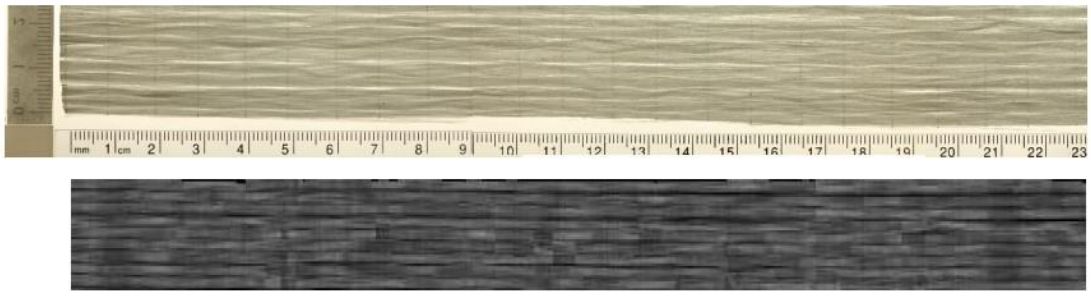


Figure 1.1 Construction du domaine d'étude pour la simulation 2D : image scannée d'un renfort unidirectionnel et conversion en niveaux en niveau de gris [1]

Dans un second temps, l'image en niveaux de gris a été maillée avec un quadrillage 2D régulier comme illustré sur la Figure 1.2. Le tissu a été ainsi représenté par un modèle cellulaire 2D dans lequel chaque cellule possède un taux de fibres distinct. Afin de reproduire des expériences de capillarité à différents niveaux de compaction, un simple coefficient multiplicateur a par ailleurs été appliqué pour augmenter chaque taux de fibres du domaine à la valeur désirée. Il convient de noter qu'il s'agit d'une méthode très simplifié qui néglige notamment les espaces inter-plis.

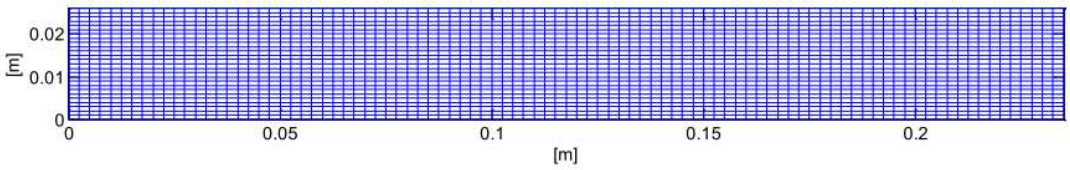


Figure 1.2 Grille utilisée pour la simulation numérique 2D de l'écoulement à travers le renfort unidirectionnel [1]

La méthode des différences finies a alors été utilisée pour réaliser la simulation de l'écoulement. Cette approche possède l'avantage d'être simple d'utilisation dans le cas d'une grille régulière comme le modèle cellulaire 2D. L'ajout d'un modèle de saturation a finalement permis d'obtenir une prédiction de la position du front en fonction du temps reproduisant assez fidèlement les résultats expérimentaux (voir Figure 1.3). Toutefois, la correspondance entre la masse injectée calculée numériquement et les valeurs mesurées expérimentalement n'a pas été étudiée systématiquement.

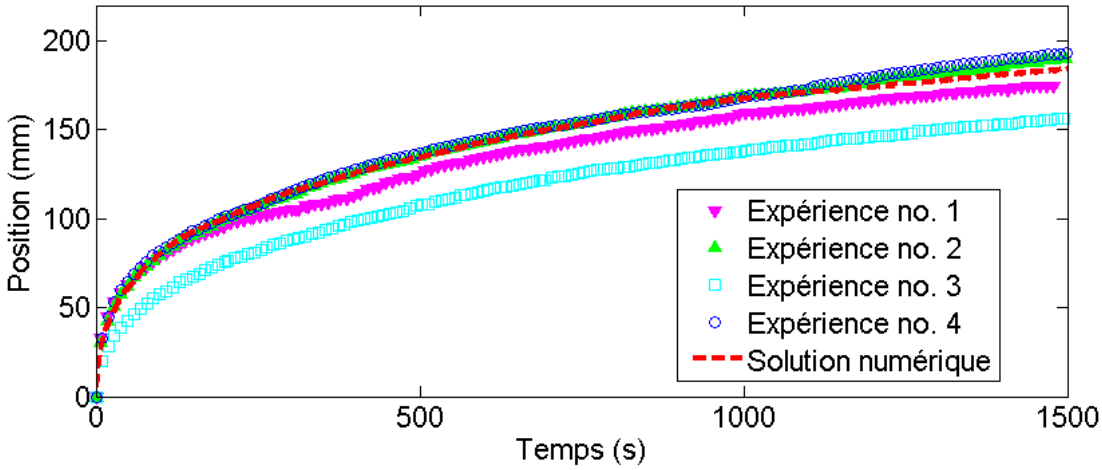


Figure 1.3 Comparaison de la position du front lors d'une montée capillaire obtenue expérimentalement et numériquement pour le renfort unidirectionnel Tissa [1]

Les résultats prometteurs obtenus lors des travaux antérieurs suggèrent que la modélisation cellulaire est une démarche prometteuse pouvant être généralisée au cas des renforts bidirectionnels et des tissus 2D ou 3D. Il convient cependant de remarquer que plusieurs points critiques devront être approfondis dans cette étude. La modélisation du renfort fibreux est en effet perfectible car il est difficile de justifier que le taux de fibres est parfaitement corrélé au niveau de gris d'une image. Par exemple, l'ondulation du tissu peut générer des zones d'ombre lors du scan. Par ailleurs, l'approximation de l'écoulement par différences finies n'a pas été complètement validée. En particulier, elle ne respecte notamment pas la conservation de la masse. De plus, la saturation du renfort calculée à chaque itération du calcul est fondée sur une distribution de pression fictive qui ne représente pas vraiment le champ de pression dans le domaine géométrique. Enfin, l'ensemble des paramètres du modèle de saturation sont par ailleurs fixés avant de commencer la simulation. Or, la vitesse de l'écoulement change à chaque itération, ce qui en principe exerce une influence directe sur le choix des paramètres du modèle de saturation. Par conséquent, il faut continuer l'étude en reprenant chaque point critique mentionné plus haut et, en parallèle, développer la méthode de discrétisation cellulaire à différents tissus, puis enfin généraliser le code d'écoulement au cas 3D en validant chaque étape.

1.2 Objectifs détaillés

Le projet consiste à généraliser au cas tridimensionnel un code d'écoulement à frontière libre fondé sur une description mésoscopique des phénomènes qui gouvernent le remplissage des moules d'injection. L'écoulement se fait à travers un renfort fibreux à double échelle de porosité. Le code existant doit être généralisé afin de s'adapter à tout type de renfort fibreux complexe. Il s'agit de reproduire par simulation numérique les expériences pratiques visant à déterminer les modes d'écoulement à travers le renfort fibreux : des essais de montée capillaire et des mesures de perméabilité à pression ou débit imposés. Pour atteindre l'objectif général, quatre objectifs spécifiques sont formulés :

1. Obtenir des reconstructions numériques cellulaires simplifiées des renforts utilisables par le programme de simulation tridimensionnelle des écoulements de remplissage d'un renfort fibreux.
2. Compléter la validation tridimensionnelle (3D) du code de simulation des écoulements de remplissage des procédés de moulage liquide à travers les renforts fibreux.
3. Utiliser les résultats expérimentaux de travaux antérieurs sur la mesure de perméabilité et les expériences de montée capillaire.
4. Comparer les résultats expérimentaux et numériques pour les renforts étudiés.

1.3 Principales contributions du mémoire

Les principales contributions nouvelles de ce projet de maîtrise sur la prédiction numérique des écoulements à travers un renfort fibreux à double échelle de porosité peuvent être résumées comme suit :

- Un code de remplissage tridimensionnel par différences finies permettant de simuler les écoulements à travers un renfort fibreux pour les procédés de moulage liquide a été développé.
- L'algorithme de simulation de l'écoulement de remplissage par différences finies a été modifié afin de vérifier la conservation de la masse injectée dans le moule.

- Une méthode de discrétisation cellulaire de la structure fibreuse des renforts a été développée à partir d'une voxélisation de l'architecture textile.
- La nouvelle discrétisation des renforts fibreux proposée est générale dans le sens qu'elle peut prendre en compte la présence de plusieurs torons d'orientations différentes dans une même cellule, comme par exemple des torons de chaîne et de trame des renforts tissés.
- Une méthode générale de composition des perméabilités a permis de calculer le tenseur de perméabilité de chaque cellule comprenant des torons d'orientations différentes.
- Des algorithmes ont été développés et validés pour générer des discrétisations cellulaire des renforts à différentes résolutions en satisfaisant à un certain nombre de contraintes sur le taux de fibres.
- Enfin, l'effet de la compaction des renforts sur le taux de fibres des renforts a été pris en compte d'une manière simplifiée.

1.4 Organisation du mémoire

Le Chapitre 2 de ce mémoire est dédié à la revue de littérature. Il présente l'état des connaissances en ce qui concerne la modélisation numérique des renforts fibreux et la modélisation des écoulements dans les renforts à double échelle de porosité. Les méthodes de simulation numérique, les procédés expérimentaux de mesure de la perméabilité et le principe des expériences de montée capillaire sont aussi exposés.

La stratégie retenue afin de modéliser les différents renforts est présentée dans le Chapitre 3. Les données utilisées pour chaque renfort sont présentées ainsi que la stratégie de représentation. L'étude de la voxélisation est résumée ainsi que le format de stockage des données.

Un code de calcul a été développé et son fonctionnement est décrit dans le Chapitre 4. Dans un premier temps, le modèle numérique décrivant l'écoulement est détaillé pour les conditions aux limites qui permettent de modéliser les différentes expériences. Enfin, la méthode de résolution des équations est présentée ainsi que la stratégie de remplissage du moule.

Finalement, le Chapitre 5 présente l'analyse des premiers résultats numériques. Certains cas d'écoulement sont comparés aux expériences. L'influence des différents paramètres et les limitations de l'approche proposée sont discutées.

CHAPITRE 2 ÉTAT DES CONNAISSANCES

Ce chapitre propose un résumé de l'état des connaissances pour chaque aspect du projet. Dans une première partie, une méthode numérique de modélisation d'un renfort fibreux est présentée, qui permet de tenir compte de toute la complexité du renfort tout en garantissant une simplicité d'utilisation. Après cette première étape, les équations qui décrivent la mécanique de l'imprégnation du renfort pour simuler les écoulements dans un milieu poreux à double échelle sont décrites. Enfin, les différentes expériences à reproduire sont présentées.

2.1 Modélisation géométrique des renforts

2.1.1 Présentation générale

Plusieurs logiciels de fabrication et de conception des renforts fibreux sont disponibles sur internet et commercialement, permettent d'utiliser des procédures de fabrication automatisée des renforts sur les métiers à tisser. Par exemple, des logiciels comme TexGen [2] ou Wisetex [3] permettent d'obtenir des modélisations numériques des renforts utilisables pour la simulation numérique.

TexGen est un logiciel «*open source*» dont le but est de modéliser de manière précise le volume élémentaire d'un renfort. La version 3.8.2 de ce logiciel (dernière version disponible le 5 août 2016) est compatible avec Windows et Linux. Un certain nombre d'outils d'aide à la modélisation sont présents dans l'interface de contrôle [4]. Le « Weave Wizard » présenté à la Figure 2.1 permet de modéliser rapidement des renforts simples. Le « 3D Weave Wizard » présenté à la Figure 2.2 permet de modéliser des renforts plus complexes. Cependant la force de TexGen réside dans son interface de programmation en Python. L'ensemble des classes utilisables est documenté [5] et permet à l'utilisateur un plus grand contrôle sur le logiciel. Ainsi ce logiciel permet d'exporter les modèles des renforts dans les logiciels de simulation numérique par éléments finis ABAQUS ou ANSYS. En revanche l'utilisateur doit vérifier le maillage. En outre, ce logiciel permet d'étudier les différentes propriétés des renforts [6] :

1. propriétés mécaniques
2. perméabilité des renforts
3. transfert thermique

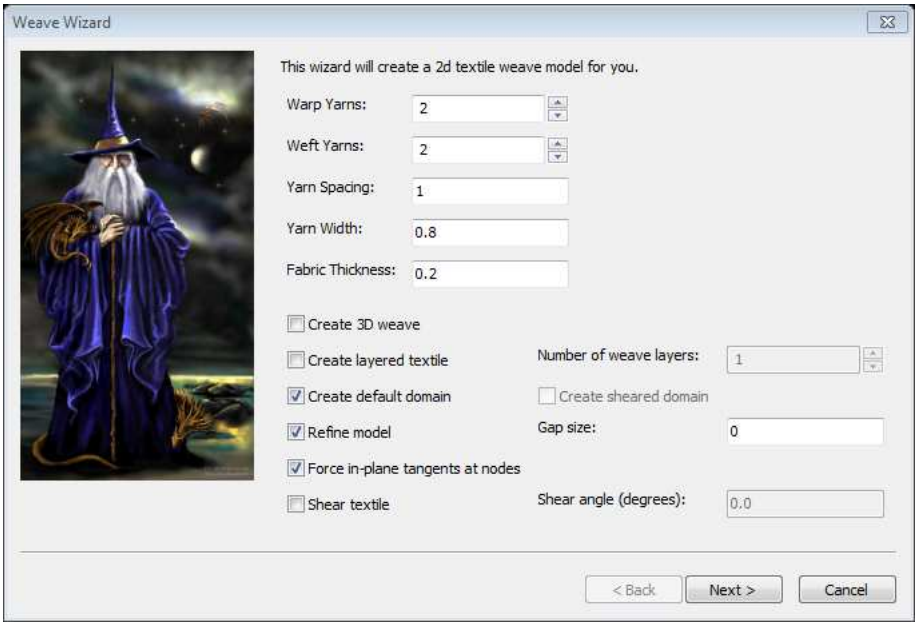


Figure 2.1 Outil de création des renforts de TexGen

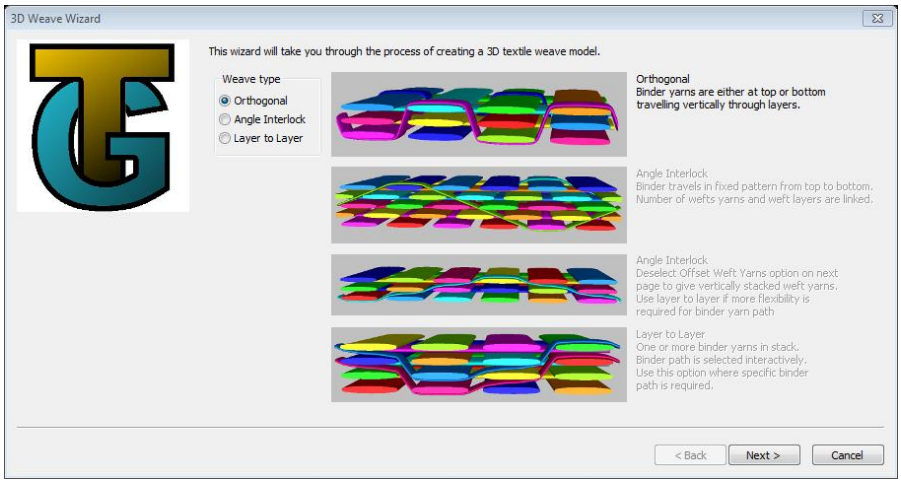


Figure 2.2 Outil avancé de création des renforts de TexGen

Wisetex est un logiciel commercial développé par l'équipe du Prof. Stepan Lomov [4]. Il a pour but de modéliser la structure interne d'un renfort à l'échelle d'une cellule élémentaire. Il est constitué d'une famille de logiciels présentés au Tableau 2.3, qui permettent de réaliser plusieurs études numériques. Le logiciel propose de plus une interface utilisateur qui permet de réaliser plusieurs types d'études sur le renfort étudié [7]:

1. simulation de l'injection de résine
2. mesure de la perméabilité
3. prédiction micromécanique des propriétés mécaniques

En outre, il est possible d'utiliser et d'obtenir des fichiers au format xml afin de réaliser les simulations numériques avec d'autres logiciels de simulation [8].

Tableau 2.1 Famille des logiciels de Wisetex [7]

	Usage	Développeur
WiseTex	Géométrie interne des tissus à l'état relaxé ; Compression, Tension et cisaillement du tissu	Lomov, Verpoest, K.U. Leuven
LamTex	Géométrie interne des textiles laminés	Lomov, Peeters, K.U. Leuven
FETex	Convertisseur éléments finis des données WiseTex	Lomov, Kondratiev, Bernal K.U. Leuven ; Poggi, Carvelli, Politechnico di Milano
MeshTex	Convertisseur éléments finis des données WiseTex (SACOM)	Zako, Nakai, Hirosawa, Osaka University
TexComp	Rigidité d'un tissu composite, modèle d'inclusion	Huysmans, Prodromou, Lomov, Verpoest, K.U. Leuven
FlowTex	Perméabilité d'un tissu, treillis de Boltzmann/éléments finis	Belov, Peeters, Roose, Verley, K.U. Leuven
Celper	Perméabilité d'un tissu, éléments finis, description en voxels	Laine, Boust, ONERA
VRTex	Réalité virtuelle des textiles à l'échelle méso	Mikolanda, T.U.Liberec

Le logiciel retenu pour ce projet est TexGen, qui permet un contrôle précis de la modélisation géométrique des renforts grâce à son interface de programmation. Afin de comprendre comment modéliser un renfort avec TexGen, il faut décrire la méthode de modélisation utilisée par le logiciel.

2.1.2 Le logiciel TexGen

La modélisation des renforts consiste avant tout à reproduire l'architecture issue du tissage des fibres. Dans la plupart des cas, les renforts sont construits à partir de deux séries de torons de trame et de chaîne dans deux directions orthogonales, qui sont enlacées de manière différente selon le type de renfort et parfois maintenues par un fil de liaison. Des exemples d'architectures textiles sont représentés sur la Figure 2.3.

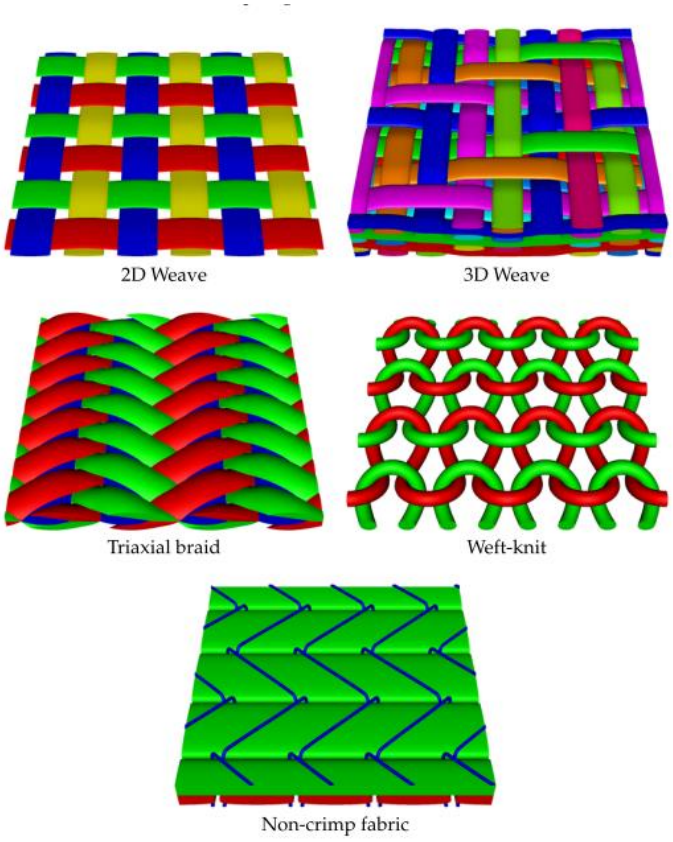


Figure 2.3 Exemples de différentes architectures textiles de renforts fibreux [9]

Pour représenter les renforts fibreux et leur architecture, l'approche utilisée par le logiciel TexGen consiste à représenter les mèches de fibres comme des volumes. Ainsi un échantillon de renfort sera constitué d'une répétition de volumes schématisant les mèches avec des propriétés associées

comme le rayon des fibres, leur densité et le nombre de fibres par mèche. Ces volumes sont agencés selon le patron du tissage et répétés. Pour obtenir ces volumes, il faut interpoler la section de la mèche le long de son parcours longitudinal.

Représentation du parcours de la mèche

Le parcours de la mèche va servir de support pour créer le volume de la mèche. La longueur de la mèche représentée doit être la plus petite possible [9]. En effet c'est le volume associé à ce parcours qui va être répété pour créer la mèche entière.

Le principe est de positionner dans l'espace une série de points maîtres par lesquels la mèche doit passer et interpoler ces points par une méthode classique d'interpolation telle que :

1. des courbes de Bézier
2. des splines cubiques naturelles
3. des splines cubiques périodiques

Il s'agit de fonctions définies par morceaux qui permettent de garantir au minimum une continuité C^1 le long de la courbe représentative, deux exemples d'interpolation avec la méthode des splines cubiques naturelles et des splines cubiques périodiques sont présentés sur la Figure 2.4.

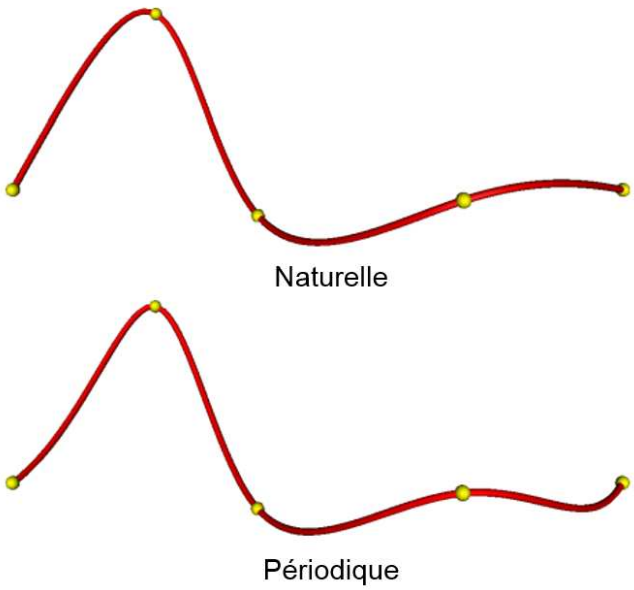


Figure 2.4 Exemple d'interpolation par les méthodes des splines cubiques [9]

Représentation de la section de la mèche

Lorsque le chemin de la mèche a été créé, il faut lui associer une ou des sections le long du chemin. La section est définie pour être la plus petite région qui encapsule la totalité des fibres [9]. Cette section peut être définie de différentes manières et peut prendre une forme :

1. d'ellipse
2. de « *power* » ellipse
3. de lentille

Ces sections permettent plus ou moins de précision sur la représentation de la géométrie de la mèche selon les cas. Des exemples de « *power* » ellipses sont présentés sur la Figure 2.5 et des exemples de section en forme de lentille sont présentés sur la Figure 2.6.

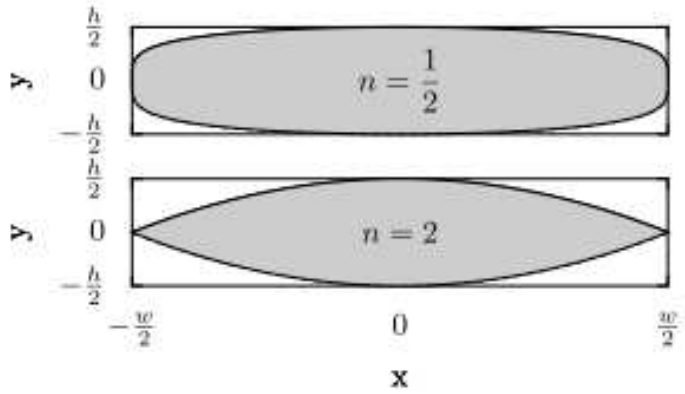


Figure 2.5 Section "power" elliptique [9]

Sur les exemples de la Figure 2.5, *n* est la valeur de la puissance utilisée dans les équations des ellipses. Si *n* est plus petit que 1 l'ellipse est proche d'un rectangle aux bords arrondis et si *n* est plus grand que 1 l'ellipse est proche d'une lentille. Sur les exemples de la Figure 2.6, *d* est la valeur de la distance de distorsion des rayons des cercles qui constituent l'ellipse. Si *d* est nul le rayon des deux cercles sont les même. Si *d* est non nul, un décalage apparait entre les deux cercles.

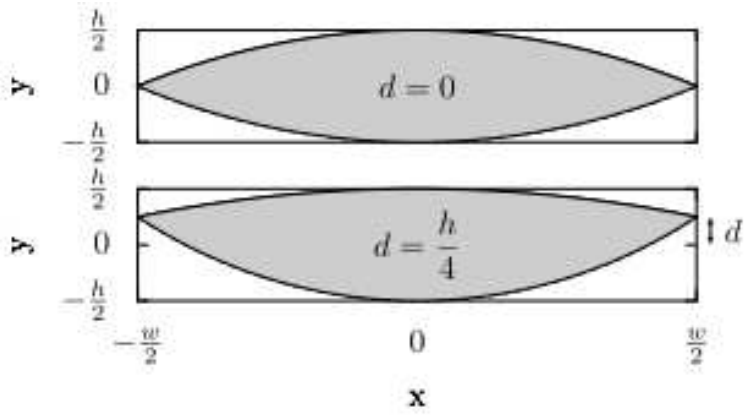


Figure 2.6 Section lenticulaire [9]

Les équations de ces sections :

$$r_1 = \frac{w^2 + (\mathrm{h} - 2\,\mathrm{d})^2}{4(\mathrm{h} - 2\,\mathrm{d})} \tag{2.1}$$

$$r_2 = \frac{w^2 + (\mathrm{h} + 2\,\mathrm{d})^2}{4(\mathrm{h} + 2\,\mathrm{d})} \tag{2.2}$$

$$o_1 = -r_1 + \frac{h}{2} \tag{2.3}$$

$$o_2 = r_2 - \frac{h}{2} \tag{2.4}$$

$$C(\mathrm{t})_x = \begin{cases} r_1 \sin\theta \;\; si \;\; 0 \le t \le 0.5 \\ r_2 \sin\theta \;\; si \;\; 0.5 \le t \le 1 \end{cases} \tag{2.5}$$

$$C(\mathrm{t})_y = \begin{cases} r_1 \cos\theta + o_1 \;\; si \;\; 0 \le t \le 0.5 \\ r_2 \sin\theta + o_2 \;\; si \;\; 0.5 \le t \le 1 \end{cases} \tag{2.6}$$

Avec :

$$\theta = \begin{cases} (1 - 4\,\mathrm{t}) \sin^{-1}\left(\frac{w}{2r_1}\right) \;\; si \;\; 0 \le t \le 0.5 \\ (-3 + 4\,\mathrm{t}) \sin^{-1}\left(\frac{w}{2r_2}\right) \;\; si \;\; 0.5 \le t \le 1 \end{cases} \tag{2.7}$$

Représentation du volume de la mèche

Le volume de la mèche est obtenu par interpolation le long du chemin des différentes sections. Il s'agit en réalité d'une surface paramétrique qui délimite le bord de la mèche [9]. Pour reproduire la surface de la mèche la section est extrudée le long du chemin dans le cas d'une section constante. Si la section est variable, une interpolation linéaire est faite entre chaque section de la mèche comme le montre Figure 2.7.

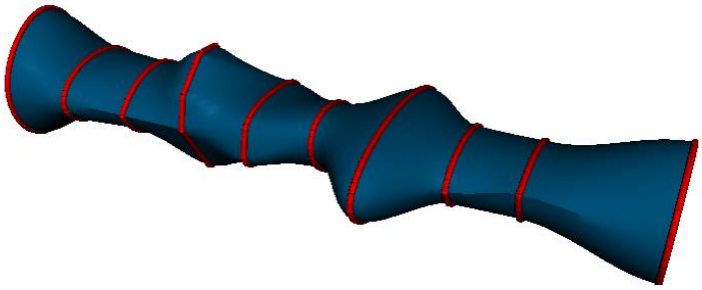


Figure 2.7 Différentes sections interpolées le long du chemin [9]

Répétition des mèches

Le volume des mèches représenté est normalement le plus petit possible afin d'éviter la multiplication des données dans le logiciel [9]. Ainsi pour obtenir le renfort en entier des vecteurs de répétition sont utilisés pour reproduire ce petit élément qui peut être constitué de plusieurs mèches dans tout l'espace. Les mèches du renfort suivent des lois comme celle-ci :

$$P + C_0\overrightarrow{R_0} + C_1\overrightarrow{R_1} + \ldots + C_{n-1}\overrightarrow{R_{n-1}} \qquad -\infty \le C_i \le \infty \tag{2.8}$$

où P est la surface paramétrique de base de la mèche, C_i sont des coefficients appartenant à l'ensemble des nombres relatifs et $\overrightarrow{R_i}$ sont les vecteurs de répétition. La Figure 2.8 illustre cette idée de répétition de petits éléments.

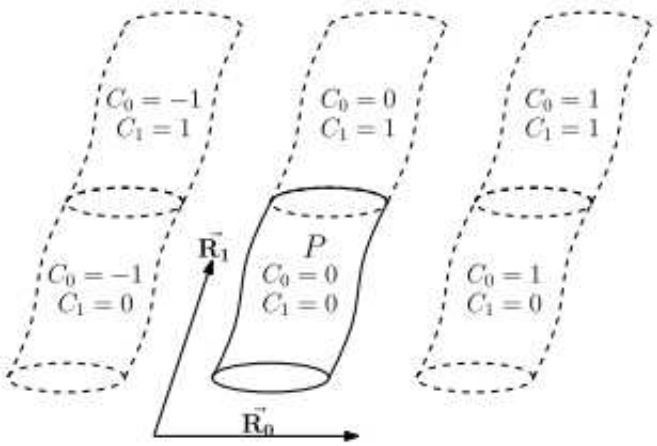


Figure 2.8 Mèche répétée avec deux vecteurs [9]

Création du domaine

Finalement il faut limiter le domaine de travail pour obtenir un modèle complet du renfort. En effet, la répétition des mèches permet de sauvegarder moins d'information et de gagner du temps, mais le renfort est répété à l'infini. Pour limiter le renfort, il faut le contraindre entre 6 surfaces du type [9]:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2.9}$$

Ainsi l'espace est séparé en deux, une partie ou l'équation du plan prendra une valeur négative et une autre où elle prendra une valeur positive. La partie négative sera considérée en dehors du domaine d'étude. Un exemple de domaine est représenté sous forme de tableau dans le Tableau 2.2.

Tableau 2.2 Exemple de plans définissant les bords du domaine [9]

	A	**B**	**C**	**D**
$\mathbf{P_0}$	1	0	0	x_1
$\mathbf{P_1}$	-1	0	0	$-x_2$
$\mathbf{P_2}$	0	1	0	y_1
$\mathbf{P_3}$	0	-1	0	$-y_2$
$\mathbf{P_4}$	0	0	1	z_1
$\mathbf{P_5}$	0	0	-1	$-z_2$

2.2 Modélisation d'un écoulement à travers un milieu à double échelle de porosité

Pour modéliser un écoulement à travers un milieu poreux à double échelle de porosité, il faut d'abord comprendre comment cette double échelle de porosité intervient et influence l'écoulement pour en tenir compte ensuite dans la modélisation.

2.2.1 Double échelle de porosité

Définition

Les milieux poreux étudiés sont constitués de mèches tissées ou assemblées entre elles par un fil liant. L'écart entre ces mèches est généralement de l'ordre du millimètre. Chacune de ces mèches est constituée de fibres séparées les unes des autres de quelques micromètres. Ainsi, deux tailles de pores existent dans un renfort fibreux : il s'agit d'un milieu poreux à double échelle de porosité [10]. La Figure 2.9 montre une image prise à l'aide d'un microscope optique qui permet d'observer cette double échelle de porosité grâce à une coupe transversale d'un renfort fibreux.

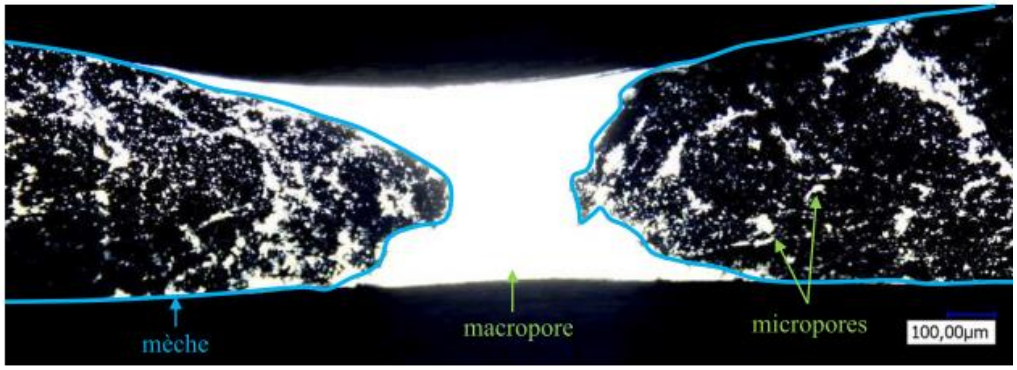


Figure 2.9 Observation des deux échelles de porosité dans un renfort fibreux [11]

Écoulement à double échelle

Lorsqu'un écoulement est établi à travers un renfort fibreux, des mécanismes d'emprisonnement d'air sont mis en action. Des vides apparaissent dans le composite qui peuvent nuire gravement à l'intégrité de la pièce finale et doivent être minimisés. Ainsi la vitesse d'imprégnation ne doit pas être trop rapide, ni trop lente. La Figure 2.10 illustre ces deux cas extrêmes.

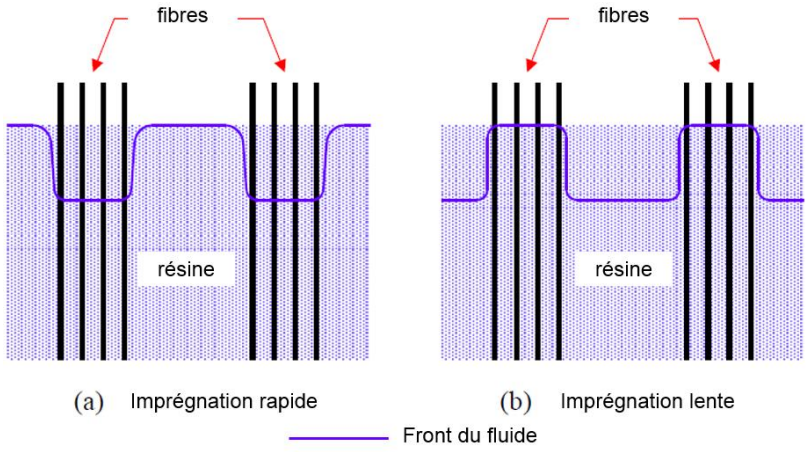


Figure 2.10 Deux cas d'imprégnation qui peuvent former des vides :
vitesse d'imprégnation rapide (a); vitesse d'imprégnation lente (b) [12]

Écoulement rapide

Si la vitesse d'injection est grande, les forces visqueuses vont être prédominantes. Le liquide commence par se propager d'abord entre les mèches, puis dans un second temps les mèches

s'imprègnent, car la perméabilité des mèches est plus faible. Des vides peuvent subsister à l'intérieur des mèches : il s'agit des micro-vides comme le montre la Figure 2.11.

Écoulement lent

Si la vitesse d'injection est faible, les phénomènes capillaires qui seront détaillés plus loin vont prédominer. Le liquide va se propager dans le renfort par les carnaux capillaires situés dans les mèches, il s'agit de petits pores allongés. Le risque est que le liquide piège du gaz entre les mèches ce qui peut créer des macro-vides comme le montre la Figure 2.11.

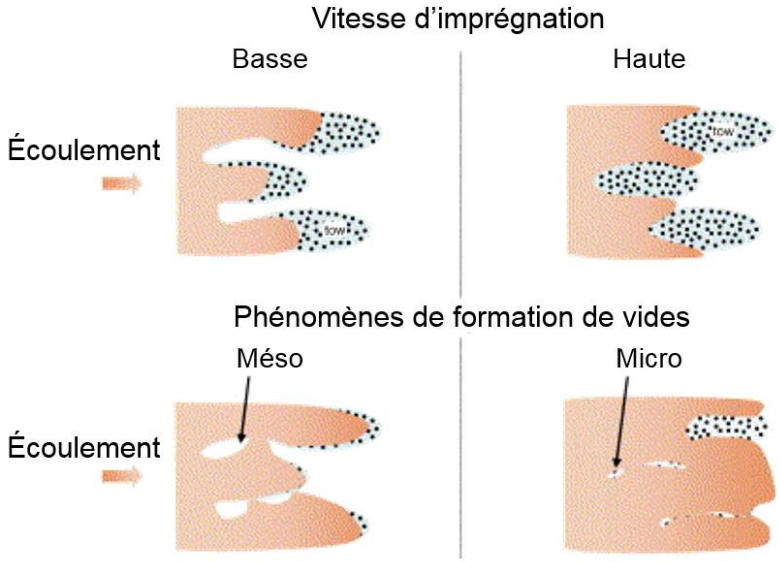


Figure 2.11 Mécanisme d'imprégnation dans un milieu poreux à double échelle [13] :
(a) formation des macro-vides à cause des forces capillaires ;
(b) formation des micro-vides à cause des forces visqueuses

Ces phénomènes délimitent différentes zones où la saturation du renfort est variable lors du remplissage du moule. En avant du front le renfort est sec, il s'agit de la zone non saturée, puis vient la partie partiellement saturée où le liquide est en train de remplir les mèches. Enfin, en amont de l'écoulement, le renfort est totalement saturé, tant les mésopores entre les mèches que les micropores à l'intérieur des mèches. La Figure 2.12 illustre ce phénomène.

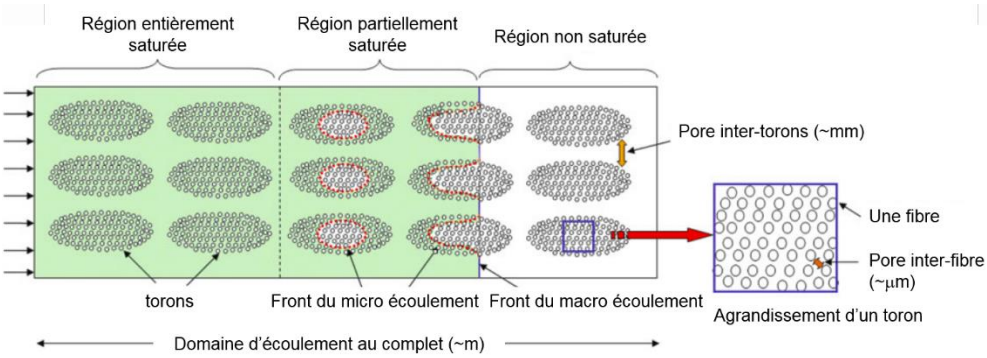


Figure 2.12 Écoulement à travers un milieu à double échelle de porosité [10]

De nombreuses études montrent qu'il est possible de relier la formation des différents vides au nombre capillaire *Ca* [14].

$$Ca = \frac{\mu v}{\gamma} \tag{2.10}$$

où v est la vitesse superficielle du fluide, μ la viscosité du fluide et γ la tension de surface à l'interface air/résine. La vitesse superficielle est la vitesse du fluide à la surface du milieu imprégné. Il existe une vitesse optimale d'injection théorique qui permet de minimiser la formation des vides. Pour un renfort, il existe donc un nombre capillaire optimal permettant de minimiser les vides tel qu'illustré à la Figure 2.13. Étant donné la large gamme de vitesses à considérer, l'identification du nombre capillaire minimal peut s'avérer compliqué en pratique.

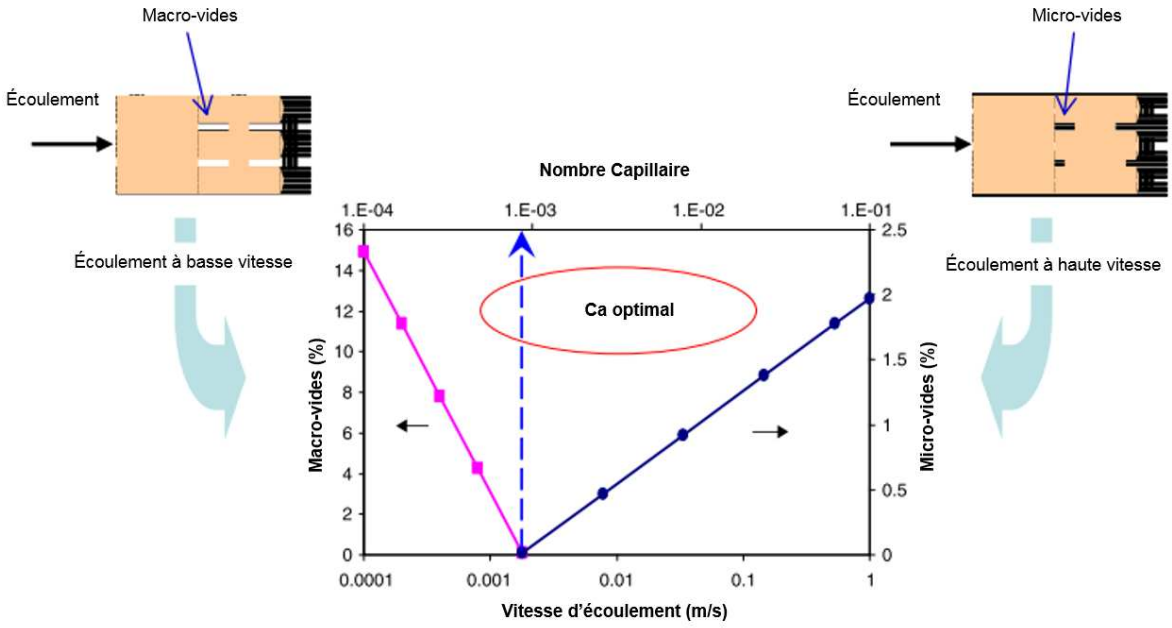


Figure 2.13 Macrovides et microvides formés durant une imprégnation en fonction de la vitesse d'écoulement et du nombre capillaire (Ca). Un Ca optimum correspond au minimum des vides [14]

F.Lebel et al. [15] ont proposé que la vitesse optimale d'injection puisse être prédite par l'absorption spontanée par capillarité d'une longueur caractéristique du renfort. Cette hypothèse traduit le fait que, lors d'une imprégnation à vitesse optimale, les forces visqueuses et capillaires sont à l'équilibre de telle sorte que l'écoulement avancera à la même vitesse dans les mésopores et dans les mèches. Théoriquement aucun vide ne sera donc emprisonné lors du remplissage. L'étude des phénomènes capillaires devrait donc permettre de connaitre la vitesse optimale de remplissage d'un renfort. Ainsi la double échelle de porosité des renforts fibreux est un facteur important qui gouverne les mécanismes d'écoulement lors du remplissage des moules d'injection. Il faut donc en tenir compte dans la modélisation de ces écoulements.

2.2.2 Modélisation de l'écoulement

Lorsqu'un fluide s'écoule dans un milieu poreux entièrement saturé, la vitesse moyenne du front peut s'écrire en utilisant la loi de Darcy [10]. En effet la loi de Darcy permet de modéliser les écoulements stationnaire pour un fluide incompressible de viscosité μ à travers un milieu poreux.

$$\vec{v} = -\frac{\boldsymbol{K}}{\mu}\vec{\nabla}P \tag{2.11}$$

où *v* représente la vitesse moyenne de remplissage du renfort fibreux, *P* est la pression moyenne et ***K*** le tenseur de perméabilité du renfort. La relation est vraie pour un fluide newtonien en négligeant l'effet de la gravité et toute déformation du moule [16].

Notez que la vitesse de Darcy est inférieure à la vitesse interstitielle de l'écoulement, c'est-à-dire la vitesse moyenne du liquide dans le milieu poreux. Ces deux vitesses sont reliées par la relation suivante.

$$\overrightarrow{v_{\text{interstitielle}}} = \frac{\vec{v}}{\phi} \tag{2.12}$$

où ϕ est la porosité du renfort ($\phi = 1 - V_f$) et V_f le taux de fibres. De plus, la vitesse de Darcy peut être calculée grâce à la formule suivante.

$$\vec{v} = \frac{\vec{Q}}{A} \tag{2.13}$$

où *Q* est le débit de fluide entrant dans la cavité d'injection et *A* l'aire de la section de la cavité. Les écoulements considérés sont généralement stationnaires et incompressibles, ainsi la loi de conservation de la masse peut s'écrire :

$$\vec{\nabla}.\vec{v} = \vec{0} \tag{2.14}$$

En combinant les équations (2.11) et (2.14), une équation de type Laplace est obtenue :

$$\vec{\nabla}.\left(-\frac{\boldsymbol{K}}{\mu}\vec{\nabla}P\right) = 0 \tag{2.15}$$

Cette équation permet d'évaluer la distribution de pression et donc la vitesse d'un écoulement au travers un milieu poreux saturé. Pour tenir compte de l'écoulement insaturé au travers du renfort, deux méthodes sont généralement utilisées [17]:

1. Résoudre les équations de la mécanique des fluides en connaissant la distribution de perméabilité en fonction de la saturation.

2. Considérer un écoulement dans un renfort saturé et ajouter un terme puits pour tenir compte de l'écoulement dans les torons (remplissage des micropores).

Perméabilité relative

Cette approche nécessite la connaissance des paramètres en fonction de la saturation relative du milieu poreux. Ainsi la matrice de perméabilité s'écrira :

$$\boldsymbol{K} = k_r(\mathrm{S})\boldsymbol{K}_s \tag{2.16}$$

où $k_r(S)$ est la perméabilité relative qui dépend de la saturation relative du renfort (notée S), $0 \le S \le 1$ et $\boldsymbol{K_s}$ est la perméabilité intrinsèque ou saturé du renfort fibreux. Cette nouvelle expression pour $\boldsymbol{K}$ peut être utilisée dans l'équation (2.15). La forme générale $k_r(S)$ est la suivante :

$$k_r = S^n \tag{2.17}$$

où la saturation S est le rapport entre le volume de liquide présent dans le renfort et le volume total disponible. L'exposant n est un paramètre qui varie généralement entre 1 et 3 selon le type de milieu poreux considéré. D'autres modèles ont été proposés en ajoutant des termes qui tiennent compte de la taille des pores. La difficulté de cette approche est que la saturation S doit être connue ou simulée en fonction de la pression. De plus, une fois un modèle pour S obtenu, il ne sera vrai que pour un renfort donné et un nombre capillaire donc une vitesse d'écoulement donné [17].

Terme puits

L'autre méthode consiste à conserver les équations d'écoulement au travers un renfort saturé et ajouter un terme puits dans l'équation de Darcy :

$$\vec{\nabla}.\left(-\frac{\boldsymbol{K}}{\mu}\vec{\nabla}P\right) = -Sink \tag{2.18}$$

où $Sink$ est un terme qui permet de tenir compte de la quantité de liquide qui pénètre progressivement dans les mèches lors de l'écoulement dans le renfort non saturé. Il s'agit du taux volumique de liquide absorbé. En effet, les mèches sont entourées de liquide lors de l'écoulement mais elles ne sont pas complètement saturées. Ainsi les mèches absorbent du liquide avec le temps [18]. Lorsque les pores à l'intérieur de la mèche sont remplis, le toron est saturé et le terme puits devient nul.

Pillai et al. [19] ont proposé une approche fondée sur les volumes moyens. Le débit est découplé en une partie qui décrit l'écoulement mésoscopique dans l'espace inter-mèche (Figure 2.14 (b)) et une autre partie pour prendre en compte l'écoulement à travers les torons (Figure 2.14 (c)) [19]. L'écoulement à l'échelle des torons est modélisé grâce à la combinaison de l'équation de Darcy avec la loi de conservation de la masse en tenant compte d'un terme puits *Sg* (*g* est utilisé pour «gap»).

$$S_g = \frac{1}{V} \int_{A_{gt}} v_g . n_{gt} dA \tag{2.19}$$

où V le volume moyen, v_g la vitesse du fluide dans l'espace inter-mèche, n_{gt} la normale unitaire à la surface du toron, A_{gt} est la surface de contact du fluide contenu dans le volume moyen avec les torons (voir Figure 2.14). Ce terme puits aura pour effet de ralentir la vitesse du front entre les torons. L'écoulement entre les mèches est modélisé par l'équation de Darcy et la conservation de la masse sans la perte de charge liée au terme puits. La position du front et la pression d'entrée simulées grâce à cette méthode sont en accord avec les résultats expérimentaux d'injection à débit imposé à travers un renfort bidirectionnel. En outre la perméabilité des torons du modèle est calculée à l'aide du modèle de Gebart ce qui nécessite une bonne connaissance du taux de porosité des torons. Il en résulte que le modèle d'écoulement est très sensible à la variation de porosité de chaque toron. L'autre difficulté réside dans le fait qu'il faille associer aux éléments inter-mèche une perméabilité.

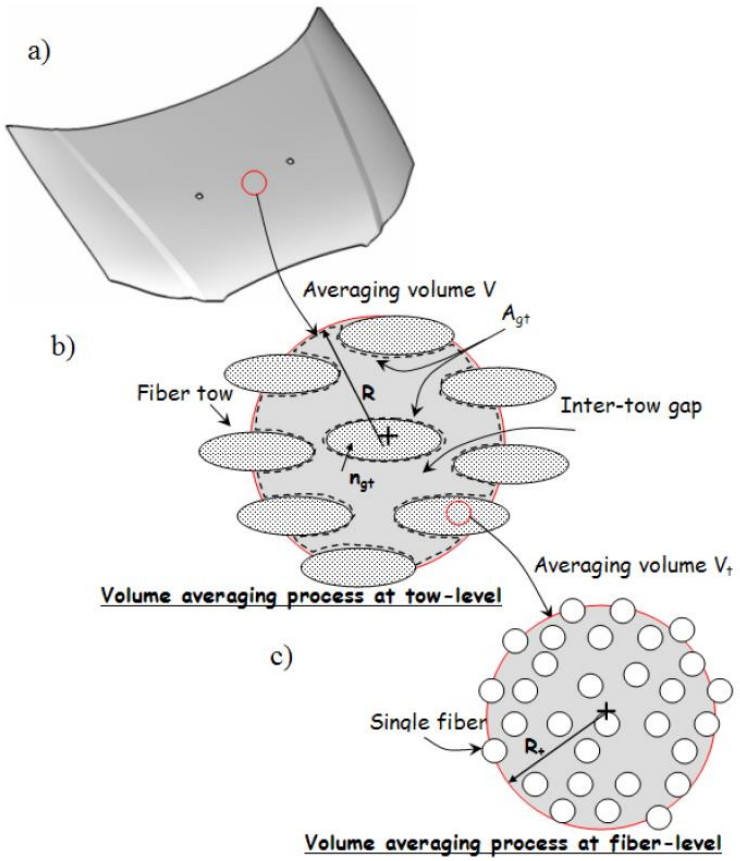


Figure 2.14 La simulation de l'écoulement considère les phénomènes à différentes échelles : (a) Pièce dont l'écoulement est simulé lors de la fabrication (Échelle macroscopique) ; (b) Volume moyen utilisé pour l'écoulement à l'échelle des torons ; (c) Volume moyen utilisé pour l'écoulement à l'échelle des fibres [19]

Advani et al. [20] ont proposé une manière alternative d'utiliser le concept du terme puits. La modification de l'équation de conservation de la masse peut conduire à un problème non linéaire. La modification est réalisée directement sur le maillage comme le présente la Figure 2.15. L'influence de la saturation relative des torons est prise en compte à l'aide d'éléments barres supplémentaires. Chaque élément barre ajouté est un puits qui va devoir être rempli durant l'écoulement. Ces éléments sont ajoutés aux nœuds maitres du maillage. Ainsi la porosité, perméabilité et les dimensions de l'élément ajouté correspondent à celles du toron modélisé. L'ensemble des paramètres du maillage sont ajustés pour obtenir le même volume disponible dans le domaine. Cette méthode donne de bons résultats pour les cas 1D. La difficulté d'appliquer cette approche est reliée à l'absence d'une connaissance expérimentale précise du volume réel d'espace disponible entre les fibres des torons.

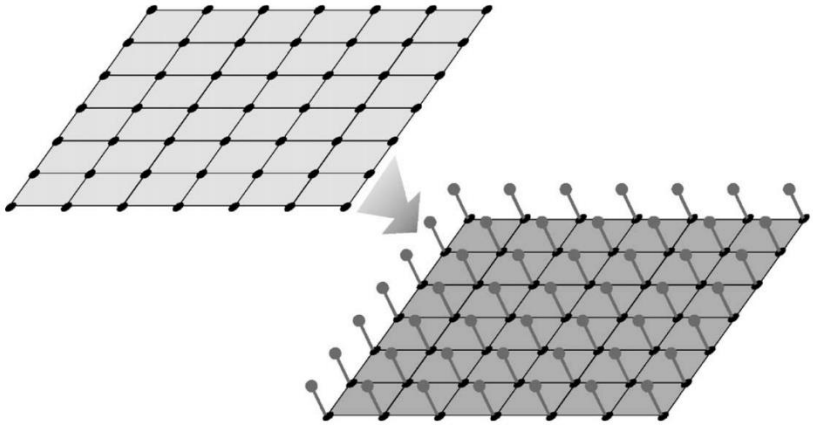


Figure 2.15 Utilisation d'éléments barres dans un maillage bidimensionnel afin de modéliser la saturation d'un milieu poreux à double échelle [20]

Un enjeu important de la modélisation des écoulements à travers les renforts fibreux consiste à déterminer la bonne échelle d'étude afin de tenir compte de tous les effets causés par les différentes tailles des pores et l'organisation géométrique des mèches. Ces effets sont généralement caractérisés par des procédés expérimentaux.

2.3 Modélisation des expériences de caractérisation des renforts

Les procédés de fabrications LCM («*Liquid Composite Molding*») impliquent une bonne connaissance des propriétés des renforts pour une qualité de pièce finale optimale. Ainsi les expériences de caractérisation des renforts comme la montée capillaire et la mesure de la perméabilité à pression imposée présentent un intérêt majeur. Afin de diminuer le temps et les coûts de ces expériences, il est intéressant de prédire ces comportements à l'aide d'un modèle prenant en compte la structure à double échelle de porosité des renforts fibreux.

2.3.1 Modélisation de la montée capillaire

L'expérience montre que les propriétés mécaniques d'une pièce composite fabriquée par un procédé LCM sont moins bonnes lorsque la quantité de vide à l'intérieur augmente. Afin de d'augmenter les propriétés mécaniques, il faut donc minimiser l'emprisonnement de bulles d'air en améliorant l'imprégnation des renforts lors de l'injection. La vitesse d'injection est un des paramètres critiques de ce phénomène d'emprisonnement. Les travaux de F.Lebel et al [15, 21, 22] sur la montée capillaire permettent d'obtenir une vitesse optimale de manière rapide et répétable

pour un couple renfort-résine donné. Les détails de la théorie et de la méthode expérimentale de ces travaux sont présentés en annexe annexe a A. La méthode proposée dans ces travaux postule que l'étude de l'imprégnation naturelle par capillarité d'une longueur caractéristique du renfort permet de déterminer une vitesse optimale d'injection. La formule suivante présente la vitesse optimale théorique obtenue.

$$v_{opt} = \frac{L_c}{t_{opt}} = \frac{B_h}{L_c} \tag{2.20}$$

où L_c est la longueur caractéristique du renfort, B_h est la constante de Lucas-Washburn identifiée expérimentalement et t_{opt} est le temps optimal d'imprégnation de la longueur caractéristique. Les phénomènes capillaires dans les milieux poreux restent complexes. La modélisation repose sur une série d'hypothèses simplificatrices qui ne sont valides que pour de faibles hauteurs d'imbibition naturelle avec des liquides de faible viscosité.

2.3.2 Modélisation de la mesure de perméabilité

La vitesse d'injection n'est pas le seul paramètre qui peut causer des défauts de fabrication liés à l'imprégnation. La capacité d'un renfort d'être traversé par un liquide dépend de la perméabilité, une grandeur importante reliée aux caractéristiques géométriques du renfort fibreux.

Définition

Le tenseur de perméabilité permet de représenter la perméabilité dans les trois directions de l'espace. La loi de Darcy s'exprime avec ce tenseur sous la forme suivante :

$$\left\langle \begin{matrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{matrix} \right\rangle = -\frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{pmatrix} \left\langle \begin{matrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{matrix} \right\rangle \tag{2.21}$$

où la notation $\langle\ \rangle$ représente les valeurs moyennes prises sur le milieu poreux, μ est la viscosité, P la pression et v la vitesse du fluide. La connaissance du tenseur de perméabilité permet de prédire le comportement de l'écoulement dans un procédé d'injection. Ainsi les risques reliés à une

mauvaise imprégnation sont diminués [23]. Généralement les valeurs de ce tenseur sont mesurées de manière expérimentale, un exemple de procédure utilisée est présenté en annexe B. Les valeurs de perméabilité peuvent aussi être prédites d'une manière approximative par simulation numérique ou analytiquement.

Méthodes de prédiction

Cette partie présente de manière non exhaustive certaines méthodes de prédiction numérique de la perméabilité. Il est possible de déterminer la perméabilité de manière numérique par prédiction de la mécanique de l'écoulement dans le renfort fibreux. L'écoulement peut être simulé dans une cellule élémentaire du renfort [23], il contient une portion du renfort avec quelques torons entrelacés comme le montre la Figure 2.16.

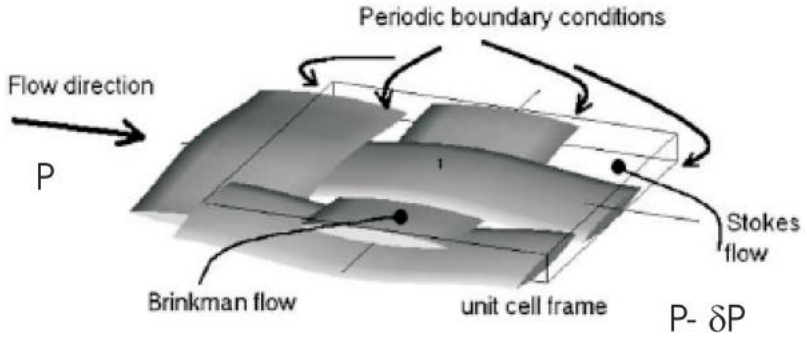


Figure 2.16 Exemple de cellule élémentaire utilisée pour la prédiction de la perméabilité [24]

Comme le montre la Figure 2.17, ce volume élémentaire peut être maillé de manière régulière par des parallélépipèdes rectangles encore appelés voxels.

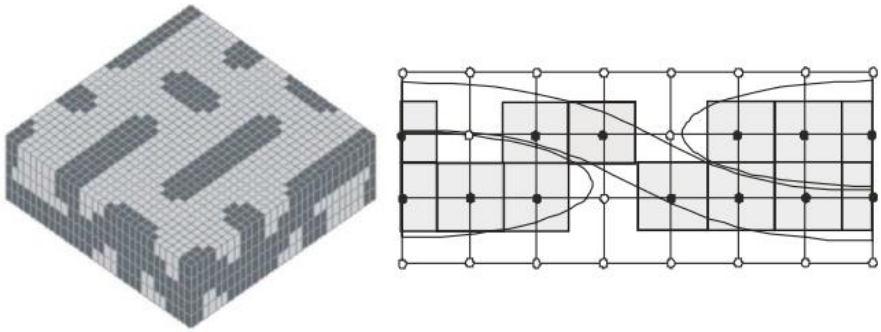


Figure 2.17 Maillage régulier d'une cellule élémentaire d'un renfort (voxélisation) [24]

Cette discrétisation donne des éléments qui contiennent des mèches et des éléments vides. Pour simuler l'écoulement entre les torons, les équations de (Navier-Stokes) peuvent être utilisées [24] :

$$\begin{cases} \dfrac{\delta \vec{u}}{\delta t} + (\vec{u}.\nabla)\vec{u} = -\nabla P + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\vec{u} \\ \nabla.\vec{u} = 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

où $\vec{u}$ est la vitesse du fluide et Re est le nombre de Reynolds. Pour tenir compte de l'écoulement de Darcy à travers les micropores de mèches, qui est couplé avec l'écoulement de Navier-Stokes dans les mésopores, il faut utiliser les équations de Brinkman [24] :

$$\begin{cases} \dfrac{\delta \vec{u}}{\delta t} + (\vec{u}.\nabla)\vec{u} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\overline{\overline{\boldsymbol{K}}}_{mèche}^{-1}.\vec{u} = -\nabla P + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\vec{u} \\ \nabla.\vec{u} = 0 \end{cases} \tag{2.23}$$

Pour utiliser ces formulations, il faut donc connaître la perméabilité de chaque mèche. Un modèle de Gebart ou de Berdichevsky peut être utilisé à cette fin [23]. Les champs de pression et de vitesse étant connus à chaque instant, il est alors possible en principe de déterminer la perméabilité macroscopique du renfort. La méthode proposée ici a encore besoin de cas de validation et est encore coûteuse en temps de calcul.

Une autre approche repose sur une détermination analytique de la perméabilité en explicitant une formule qui lie la chute de pression du fluide au débit. Le calcul est réalisé sur une cellule élémentaire du renfort pour un arrangement de fibres donné. La Figure 2.18 présente le cas d'une cellule élémentaire rectangulaire dans laquelle les fibres ne sont pas contiguës et un flux transverse aux fibres.

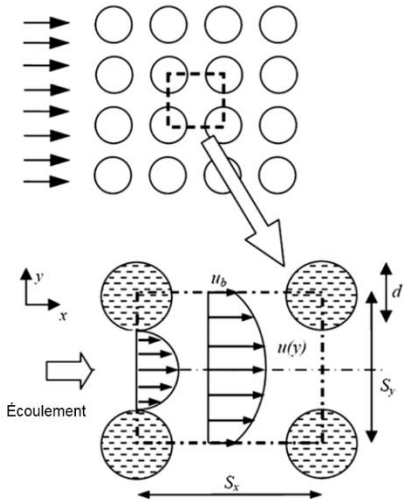


Figure 2.18 Cellule élémentaire constituée d'un arrangement rectangulaire de fibres [25]

La résolution de l'équation de Stokes dans ce cas simplifié permet de déterminer un profil de vitesse parabolique. Ainsi la chute de pression du fluide qui passe à travers la cellule peut être calculée en intégrant la vitesse. Il est possible de se référer à [25] pour une présentation plus complète de cette approche. La distance entre chaque fibre influence la valeur de perméabilité calculée comme le montre la Figure 2.19 qui présente les résultats de perméabilité en fonction du rapport de forme de la cellule élémentaire.

Dans le cas où les fibres sont contiguës comme le montre le Tableau 2.3, la méthode utilisée est différente. Dans ce cas, seule la perméabilité longitudinale n'est pas nulle. La chute de pression le long des fibres peut être calculée en utilisant la formule de Darcy-Weisbach [25] :

$$\frac{dP}{dz} \approx \frac{\Delta P}{L} = f\,\frac{\rho \bar{v}^2}{2\phi^2 d_h} \tag{2.24}$$

Cette formule permet d'évaluer la chute de pression dans le canal délimité par les fibres en fonction du diamètre hydraulique d_h , de la longueur du canal L, du coefficient de friction de Fanning f, de la porosité ϕ et de la vitesse superficielle moyenne $\bar{v}$. Ainsi la perméabilité peut être identifiée par la formule :

$$\boldsymbol{K}_{D-W} = \frac{2\phi^2 \mu d_h}{\rho \bar{v}} \tag{2.25}$$

où ρ est la masse volumique du fluide. Cette méthode donne une solution analytique assez précise, mais uniquement dans le cas des renforts unidirectionnels.

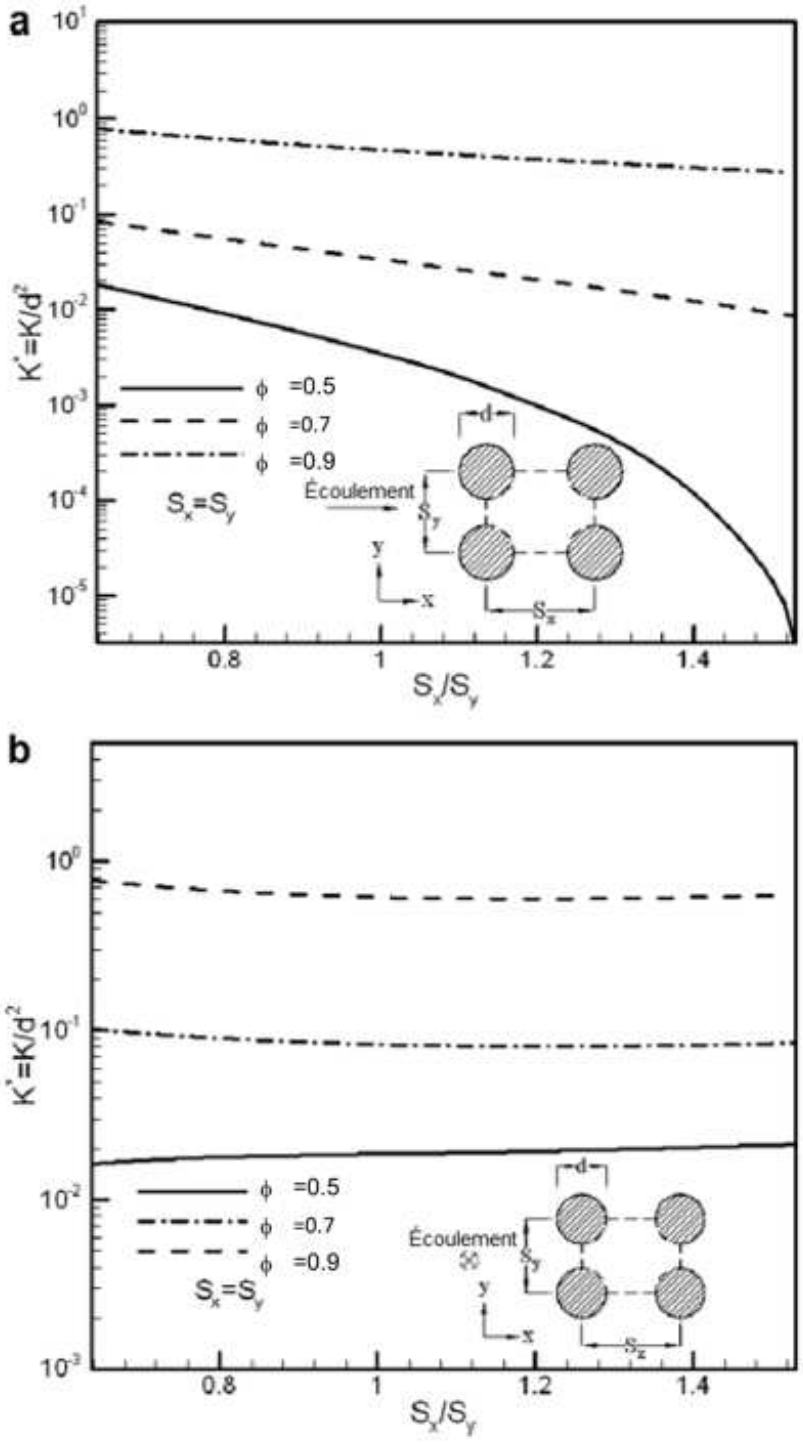
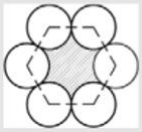
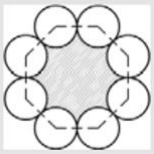


Figure 2.19 Perméabilité adimensionnelle : (a) transverse et (b) longitudinale en fonction du rapport de forme d'une cellule élémentaire [25]

Tableau 2.3 Paramètres pour des fibres parallèles contiguës [25]

Porosité (ϕ)	Arrangement	f Ref.[33]	D_h	K_{D-W}/d^2, Eq. (3)
0.094		6.503	0.103d	0.00008
0.215		6.606	0.274d	0.00122
0.316		6.634	0.462d	0.00509
0.396		6.639	0.655d	0.01280
0.512		6.629	1.050d	0.04260

2.4 Conclusion

En conclusion, afin de bien modéliser les écoulements à travers des renforts complexes, il faut une méthode de modélisation de la géométrie des renforts robuste. La méthode proposée par le logiciel TexGen permet de reproduire l'architecture issue du tissage des fibres. Le patron de tissage des renforts construits à partir de deux séries de mèches de trame et de chaîne peut être reproduit avec précision et la composition des torons peut être identifiée. La méthode de tissage des renforts et la structure de chaque mèche introduit une double échelle de porosité dans le renfort qu'il faut modéliser. Il est possible de modéliser ce phénomène en utilisant la saturation du renfort lors de la simulation de l'écoulement ou en introduisant un terme puits dans les équations qui régissent l'écoulement. Ce modèle précis permet de réaliser par simulation numérique des expériences de caractérisation des renforts comme la montée capillaire et la mesure de la perméabilité à pression imposée qui présentent un intérêt majeur pour l'optimisation des propriétés mécanique lors de fabrication avec les procédés LCM. La montée capillaire permet de déterminer une vitesse d'injection optimale basée sur les phénomènes d'imprégnation naturelle, alors que la mesure de

perméabilité donne une information sur la capacité du renfort à être traversé par un fluide. La première étape du processus de modélisation est donc d'étudier les renforts fibreux considérés dans ce mémoire. Cette étude permettra d'obtenir un modèle numérique fidèle de ces renforts.

CHAPITRE 3 MODÉLISATION CELLULAIRE DES RENFORTS FIBREUX

3.1 Introduction

La simulation de l'écoulement de la résine à travers un renfort fibreux requiert une discrétisation et une modélisation adéquate du milieu poreux. Il faut une méthode de modélisation de la géométrie des renforts qui permet de tenir compte du nombre de plis de renforts considérés, de l'architecture de chaque pli et des propriétés de chaque toron. L'ensemble de l'étude portera sur la modélisation de deux matériaux :

1. Un renfort unidirectionnel en fibres de verre de la marque Tissa.
2. Un renfort non tissé (90°-0°-90°) ou «*Non Crimp Fabric*» en fibres de verre de la marque Texonic (référence: TG15N60)

Le choix de ces deux renforts permet une augmentation graduelle de la difficulté de modélisation. En effet, le Tissa contient une succession de torons de chaîne orientés dans la même direction et reliés par un fil alors que celui de Texonic est un 2.5D constitué d'une couche à 0° au milieu de deux couches à 90°, le tout lié par un fil en polyester. Ce dernier n'est cependant pas modélisé car son influence sur l'écoulement est supposée négligeable. L'objectif est d'obtenir une modélisation numérique de ces différents renforts, puis de construire un modèle cellulaire. L'approche utilisée consiste à modéliser dans un premier temps avec TexGen les renforts étudiés à partir d'observations expérimentales qui décrivent la géométrie du textile. Une discrétisation spatiale fine est par la suite effectuée afin d'obtenir une représentation voxélisée. Cette dernière sert alors de base à la construction du modèle cellulaire du renfort fibreux. Finalement, un traitement de ces données aboutit à une description structurée du renfort fibreux à double échelle de porosité en fonction des taux de fibres et des vecteurs directeurs de chaque mèche. La description finale du renfort est constituée d'un ensemble de cellules régulières, orthonormées et dotées des propriétés caractéristiques du textile que sont le taux de fibres et l'orientation des mèches dans chaque cellule. La démarche est résumée sur la Figure 3.1.

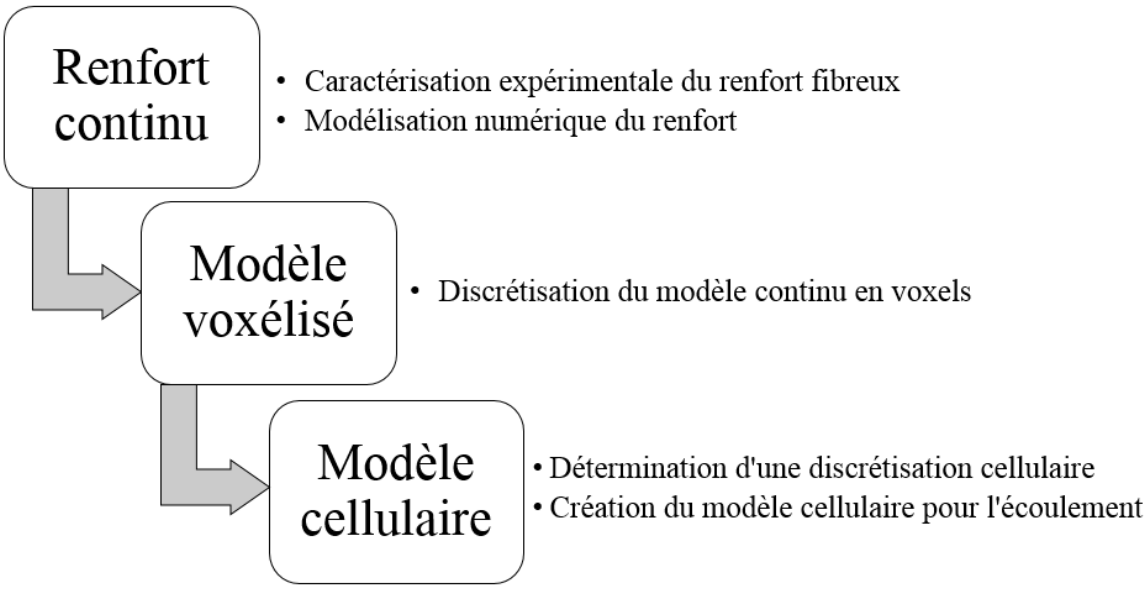


Figure 3.1 Processus d'obtention d'un modèle cellulaire d'un renfort fibreux

3.2 Reconstruction d'un renfort fibreux

Afin de reproduire fidèlement les deux renforts fibreux utilisés lors de cette étude, un certain nombre d'informations sont nécessaires et doivent être mesurées. Une fois ces informations récupérées, le modèle numérique de chaque renfort peut être développé.

3.2.1 Mesures expérimentales

Les grandeurs géométriques nécessaires pour modéliser des renforts sont mesurées de plusieurs manières. L'ensemble des informations concernant la géométrie des torons est obtenue à l'aide d'un microscope. Les distances entre chaque toron sont mesurées grâce au logiciel de traitement d'image «Capilla», développé par la chaire sur les composites à haute performance. Enfin, l'épaisseur est obtenue par la norme ASTM D1777. Certaines caractéristiques des matériaux constitutifs peuvent aussi être trouvées dans les fiches techniques du fabricant. Pour chaque paramètre, l'écart type est répertorié lorsque la valeur est disponible.

Unidirectionnel Tissa

Un échantillon de Tissa est maintenu en position verticale afin d'obtenir les images de la section d'un toron et effectuer les mesures de la géométrie de la section (voir Figure 3.2). Ensuite, l'échantillon est posé à plat pour mesurer les distances entre les torons et les fils liants (voir Figure

3.3 a). Comme on peut le constater, l'épaisseur d'un toron n'est pas égale à celle d'un pli du renfort. En effet le fil liant introduit une certaine ondulation des torons qui devra être modélisée (voir Figure 3.3 b). L'ensemble des valeurs concernant les torons sont résumées dans le Tableau 3.1. Les autres valeurs nécessaires à la modélisation sont présentées dans le Tableau 3.2. Il convient enfin de noter que la mesure par microscope doit être réalisée avec une grande précaution, car les manipulations de l'échantillon peuvent parfois engendrer des dommages physiques à la structure du renfort. En effet, lorsqu'un toron est coupé, les fibres ont tendance à se détacher plus facilement de la mèche.

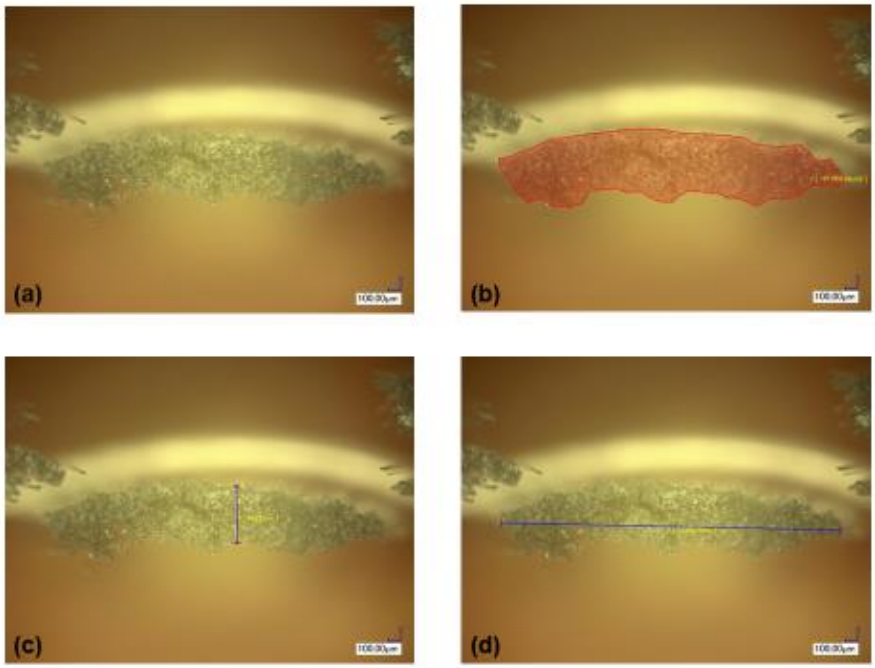


Figure 3.2 Mesures effectuées sur la section d'un toron de Tissa

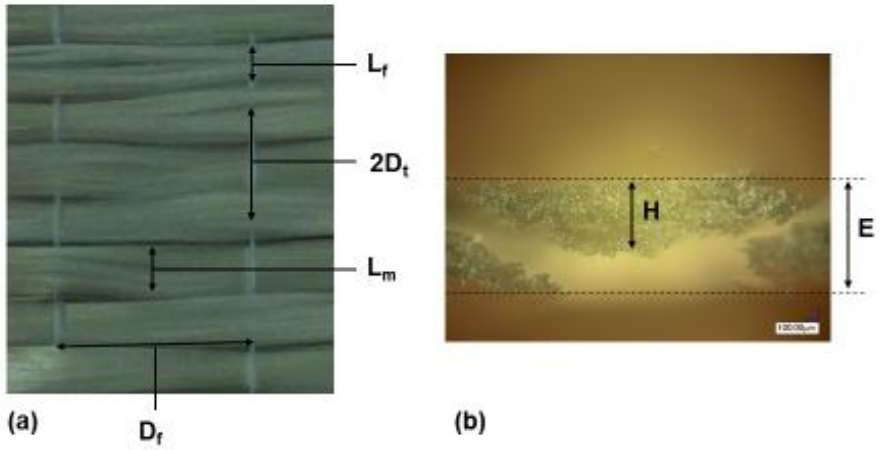


Figure 3.3 Mesures effectuées sur un pli de Tissa : (a) Distance inter-éléments dans le plan, (b) Différence entre épaisseur d'un toron (H) et épaisseur d'un pli (E)

Tableau 3.1 Mesures expérimentales sur les torons de Tissa

Toron	**Matériau**	**Distance inter torons (D_t) (mm)**	**Largeur au fil (L_f) (mm)**	**Largeur au milieu (L_m) (mm)**	**Épaisseur (H) (mm)**	**Section**
Chaîne	verre	2,74±0.07	2,97±0.21	2,74±0.07	0,37	Lenticu

Tableau 3.2 Informations complémentaires pour la modélisation du Tissa

Épaisseur renfort (E) (mm)	**Distance inter fils (D_f) (mm)**	**Masse linéaire toron (g/km)**	**Masse volumique des fibres (g/cm^3)**	**Diamètre des fibres (μm)**
0,47	19,51±0.26	1200	2,55	16

NCF Texonic

Le TG15N a déjà été caractérisé à plusieurs reprises. Les valeurs utilisées ici proviennent ainsi de travaux antérieurs. Les mesures de la géométrie des torons dans le sens de la trame et de la chaîne (voir Figure 3.4) sont résumées dans le Tableau 3.3 et ont été vérifiées avec le logiciel Capilla (voir Figure 3.5). Le Tableau 3.4 donne des informations complémentaires sur la modélisation de renforts. Par ailleurs, les observations ont montré que le diamètre du fil de liaison était très faible. Tel que déjà mentionné, il sera négligé dans la modélisation.

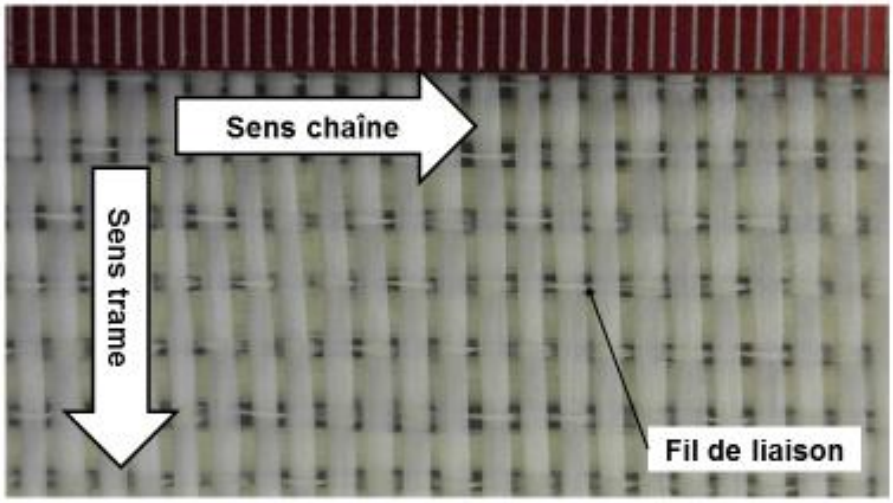


Figure 3.4 Image du TG15N60 vue du dessus

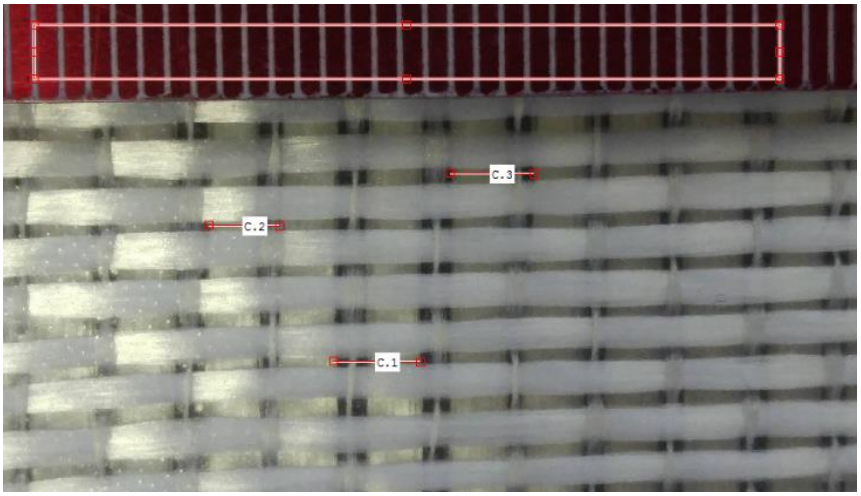


Figure 3.5 Mesure de l'espace inter-torons de la chaine avec Capilla

Tableau 3.3 Mesures expérimentales sur les torons de NCF

Toron	Matériau	Distance inter torons (mm)	Largeur (*L*) (mm)	Hauteur (*H*) (mm)	Section
Chaîne	verre	3,21±0.15	2,2±0.02	0,32±0.01	Ellipse
Trame	verre	1,85±0.06	1,347±0.007	0,168±0.007	Ellipse

Tableau 3.4 Informations complémentaire pour la modélisation du NCF

Toron	Masse linéaire toron (g/km)	Masse volumique des fibres (g/cm^3)	Diamètre des fibres (μm)
Chaîne	735	2,57	14,9±0.1
Trame	275	2,57	13,1±0.2

3.2.2 Modèles continus obtenus avec TexGen

L'intégralité des informations sur la géométrie et les propriétés des renforts permet de les modéliser avec le logiciel TexGen. À cette fin, différents scripts Python ont été développés pour les différents renforts à l'aide de la librairie disponible dans TexGen. Pour chaque pli de renfort, le volume élémentaire représentatif (VER) est utilisé. Le VER correspond au plus petit volume pouvant être répété afin d'obtenir un pli du renfort.

Renfort Unidirectionnel de la société Tissa

Dans le logiciel TexGen, le renfort Tissa est modélisé en considérant que son VER est inclus dans un domaine parallélépipédique (voir Figure 3.6). C'est ce VER dans son domaine (voir Figure 3.6c) qui sera reproduit dans toutes les directions de l'espace afin d'obtenir le modèle du renfort en entier comme celui présenté sur la Figure 3.7.

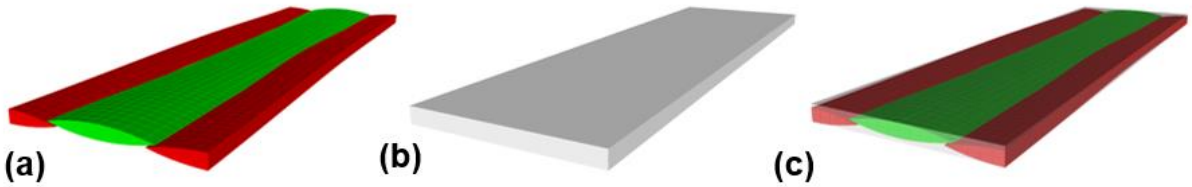


Figure 3.6 Modèle d'un VER du renfort Tissa avec TexGen : (a) VER seul, (b) Domaine du VER seul, (c) VER et domaine du Tissa

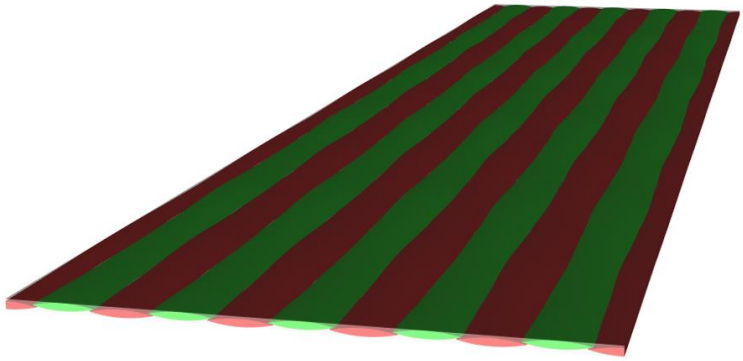


Figure 3.7 Modèle TexGen du renfort Tissa

Le modèle numérique du VER utilise un toron et deux demi-torons. Le toron au centre est contracté au milieu dans le sens de sa largeur à cause du fil liant. Il est également situé au-dessus des deux demi-torons. À l'inverse, les deux demi-torons sont plus larges au milieu de l'échantillon. Cette légère contraction du toron devrait entrainer une augmentation locale du taux de fibres à l'intérieur du toron central et à l'inverse le taux de fibres devrait diminuer dans les deux demi-torons.

Renfort NCF de la société Texonic

Le NCF est modélisé de la même manière que le Tissa en ce qui concerne le VER et le domaine d'étude comme le présente la Figure 3.8. Le modèle numérique utilise deux torons avec un profil de demi-ellipse l'un au-dessus de l'autre et un troisième entre eux. Un modèle de renfort est présenté à la Figure 3.9.

Figure 3.8 Modèle d'un VER du renfort NCF de Texonic avec TexGen : (a) VER seul, (b) Domaine du VER, (c) VER et domaine du NCF

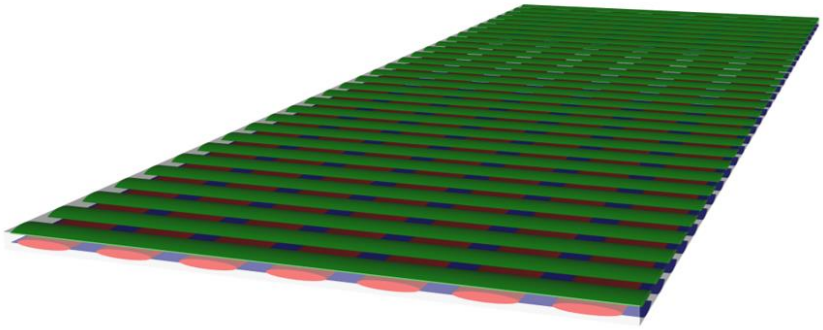


Figure 3.9 Modèle TexGen du renfort NCF

Empilement de plusieurs plis

Dans la pratique, les expériences sont réalisées avec des renforts comprenant plusieurs plis empilés. Comme une telle configuration se comporte différemment d'un pli seul, il est nécessaire de les traiter à part. La modélisation des deux renforts avec plusieurs plis se fait de manière simplifiée en superposant les VER de chaque pli et en emboitant les torons entre eux. En effet, deux plis de renfort superposés auront tendance à se décaler l'un par rapport à l'autre. La modélisation des renforts à plusieurs plis tient compte de ce comportement. La Figure 3.10 présente un empilement de 3 plis décalés de Tissa et la Figure 3.11 présente un empilement de 3 plis décalés de NCF.

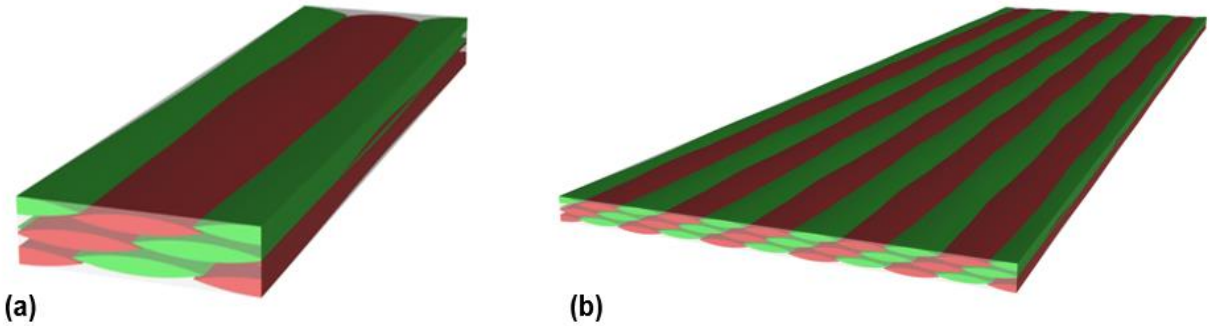


Figure 3.10 Modèles d'un empilement de plusieurs plis de Tissa : (a) Empilement de 3 VER, (b) Empilement de 3 plis

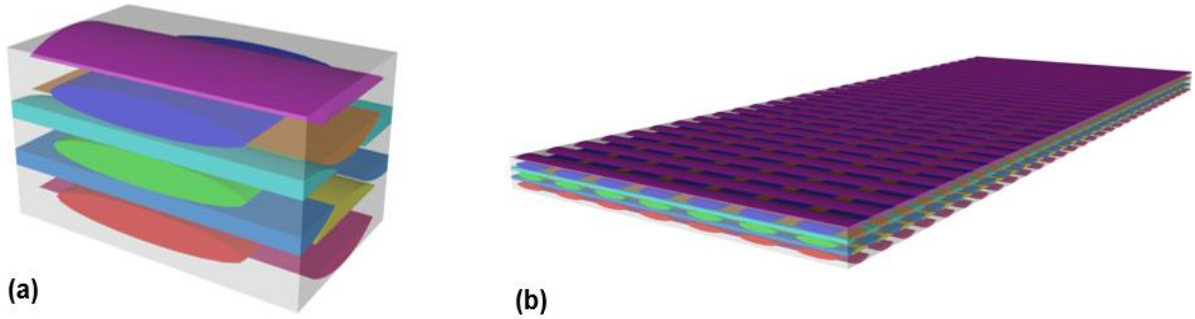


Figure 3.11 Modèles d'un empilement de plusieurs plis de NCF : (a) Empilement de 3 VER du, (b) Empilement de 3 plis

Les modèles obtenus représentent la géométrie des renforts à l'aide de surfaces paramétriques qui modélisent chaque toron. Afin de réaliser des simulations numériques d'écoulement à l'aide de ces renforts, un maillage du domaine est nécessaire.

3.3 Voxélisation

Les VER modélisés numériquement ne peuvent pas être utilisés directement dans le code d'écoulement. En effet, le renfort est décrit pas les surfaces paramétriques de chaque toron. La méthode retenue ici consiste à utiliser une modélisation discrète obtenue de manière automatisée. Le modèle discret permet d'obtenir toutes les propriétés du renfort et de réaliser les calculs d'écoulement.

La stratégie retenue est de voxéliser le domaine d'étude afin de pouvoir l'étudier et optimiser le processus de discrétisation.

3.3.1 Définition

La voxélisation est une des étapes de la méthode utilisée pour obtenir une structure de données décrivant les renforts fibreux. Le mot voxel vient de la contraction de l'expression «*volumetric pixel*» il s'agit de discrétiser de manière régulière un volume en le maillant avec des éléments cubiques. Chaque petit cube est un pixel en 3D, il a un volume et une position dans l'espace. Pour chacun de ces voxels le logiciel va fournir des informations telles que le taux de fibres de la mèche dont le voxel est extrait ainsi que le vecteur directeur des fibres. Il est à noter qu'un voxel contient uniquement une seule mèche ou du vide. Il ne peut pas être composé de plusieurs torons. La Figure 3.12(a) présente 3 torons représentés dans leur domaine, le résultat de la voxélisation de ce modèle est présenté sur la Figure 3.12(b).

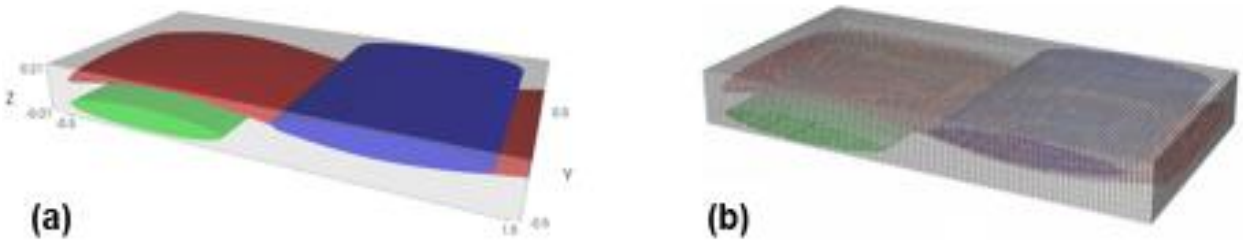


Figure 3.12 Résultat d'un processus de voxélisation : (a) Torons représentés avec TexGen, (b) Torons voxélisés [26]

Les fichiers obtenus par la voxélisation de TexGen sont traités selon une procédure résumée à l'annexe C. Les informations suivantes sont enregistrées :

1 le nombre de voxels dans les trois directions de l'espace,

2 le pas de discrétisation dans les trois directions de l'espace,

3 les indices de position pour chaque voxel,

4 le taux de fibres du toron dont le voxel est extrait,

5 le vecteur directeur local du toron dont le voxel est extrait,

6 les numéros du toron dont le voxel est extrait,

7 le diamètre des fibres du toron dont le voxel est extrait.

3.3.2 Recherche d'une voxélisation optimale

Le procédé de voxélisation fait intervenir un pas de discrétisation dans chaque direction de l'espace. Pour optimiser le processus, il faut choisir judicieusement ces paramètres.

Fonctionnement du processus de voxélisation

La précision de la voxélisation est liée au pas de discrétisation choisi. Il s'agit d'un paramètre important pour reproduire fidèlement les courbes des torons et conserver un volume des fibres le plus précis possible. La Figure 3.13 présente l'influence de la discrétisation sur la modélisation d'un toron.

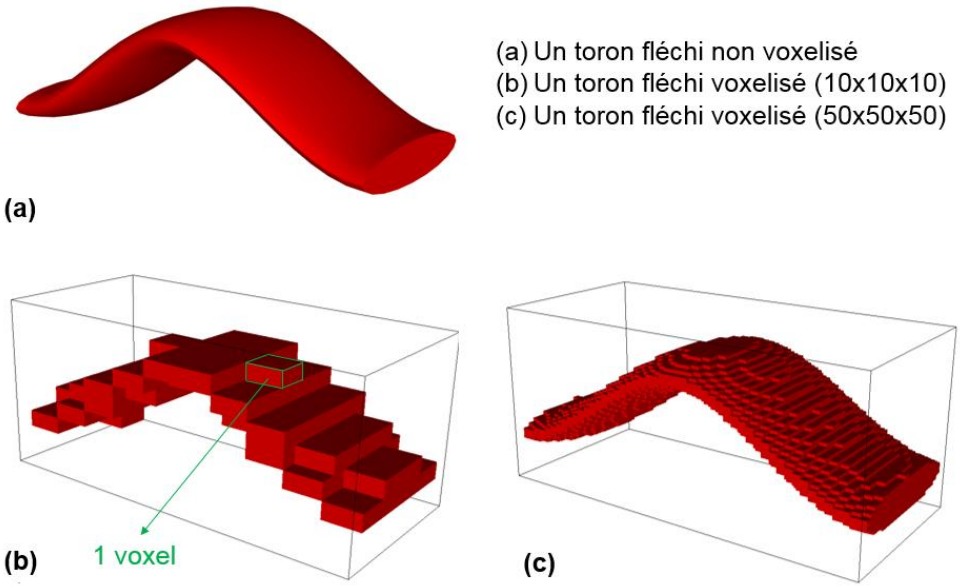


Figure 3.13 Influence de la résolution lors du processus de voxélisation

Plus la voxélisation est fine, plus la description du renfort est précise. Le volume de chaque mèche sera en effet décrit avec plus de précision. Cette information est indispensable pour calculer les propriétés des cellules de calcul comme le volume disponible ou la perméabilité. Cependant si la voxélisation est trop fine, les fichiers sont volumineux et le temps de calcul est long. Bien que le problème puisse être réduit en ne considérant que le VER des renforts étudiés, il est important de

choisir la résolution de la voxélisation afin de s'assurer que celle-ci ne soit pas inutilement trop détaillée. La recherche de cette voxélisation « optimale » a été effectuée à l'aide d'un critère portant sur le taux de fibres moyen du modèle discret.

Traitement avec critère

La voxélisation utilisée est fondée sur un critère de convergence pour fixer le pas de discrétisation dans les trois directions de l'espace. À la suite de chaque voxélisation, le code calcule le volume total du renfort en faisant la somme des voxels appartenant aux mèches qui le compose. Plus la discrétisation est fine, plus le volume du renfort se rapproche de la valeur du modèle continu construit avec le logiciel TexGen. Ainsi le code augmente le pas de discrétisation après chaque itération (augmentation du nombre de voxels) en comparant le volume du renfort voxélisé avec celui du modèle continu. Lorsque 5 valeurs successives du volume du renfort sont dans un intervalle à ±5% (ou ±2%) de la valeur du modèle continu de TexGen le calcul s'arrête. La Figure 3.14 présente un graphique montrant la convergence du volume du renfort en fonction des voxélisations successives. Les deux bornes, supérieure et inférieure, correspondent à un intervalle du volume du modèle de TexGen à ±5%. La courbe est le volume de toron calculé par la voxélisation. La convergence selon le critère à 5% est obtenue pour une discrétisation de 21 voxels dans chaque direction.

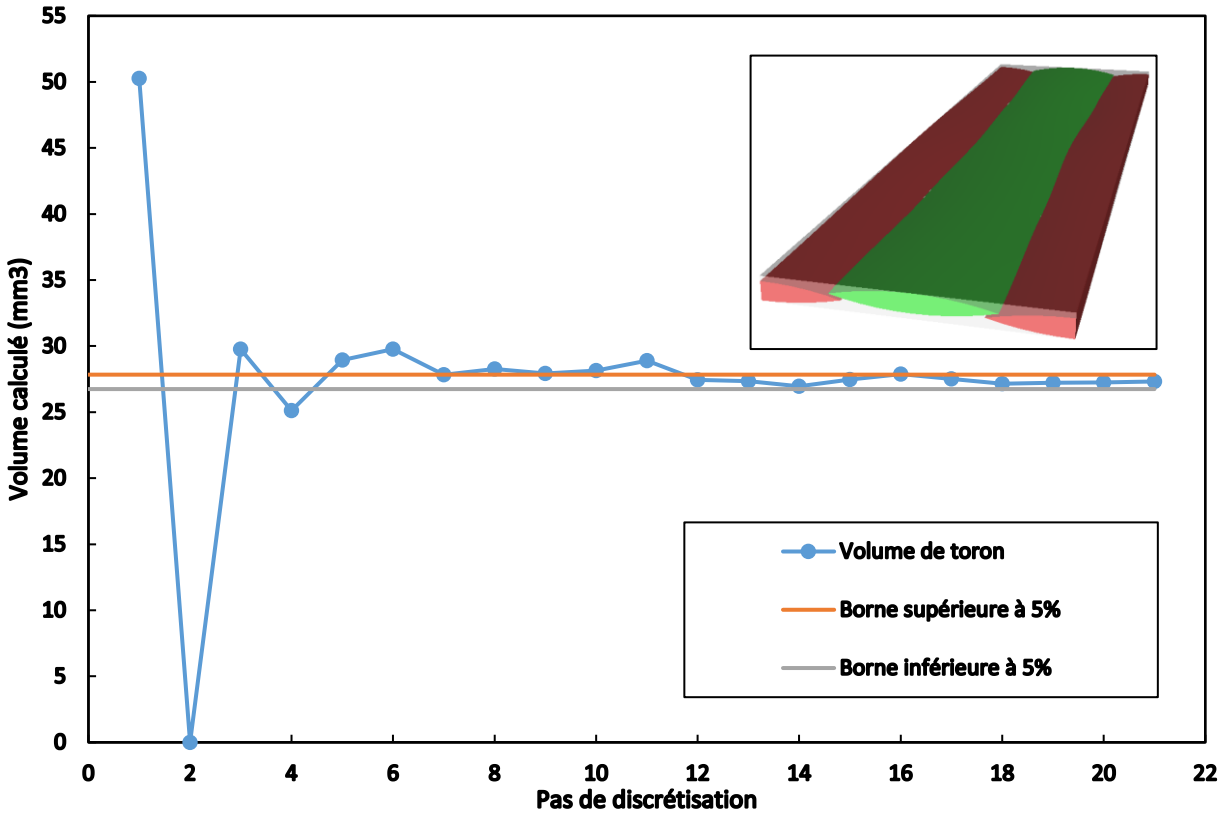


Figure 3.14 Volume de toron en fonction du pas de discrétisation pour un pli de Tissa

Il faut noter que l'étape de discrétisation cellulaire qui suit la voxélisation nécessite un nombre initial de voxels dans chaque direction qui n'est pas un nombre premier. Ainsi, si la voxélisation converge avec un nombre premier de voxels, un calcul supplémentaire est effectué avec un voxel supplémentaire dans chaque direction. Cela permettra de découper la voxélisation en cellules de calcul régulières constituées du même nombre de voxels.

3.3.3 Résultats des cas d'étude

Les résultats obtenus pour les différents modèles TexGen étudiés sont présentés ci-dessous. Pour les renforts considérés, la voxélisation du VER et de chaque toron est faite. Les tableaux Tableau 3.5 et Tableau 3.6 résument les résultats de convergence de la voxélisation pour chaque renfort. Les graphes de convergence de la voxélisation ainsi que l'intervalle à ±5% de la valeur de TexGen sont tracés sur les figures Figure 3.15 à Figure 3.20Figure 3.16.

Renfort unidirectionnel Tissa

Tableau 3.5 Résultats des pas de discrétisation pour les voxélisations du Tissa

Modèle TexGen	**Critère de convergence (%)**	**Pas de voxélisation**
Toron à section lenticulaire	5	15
VER	5	12
	2	21

La valeur obtenue pour la voxélisation du VER avec un critère à 5% semble un peu faible. Le critère est donc affiné pour ce cas particulier à 2%.

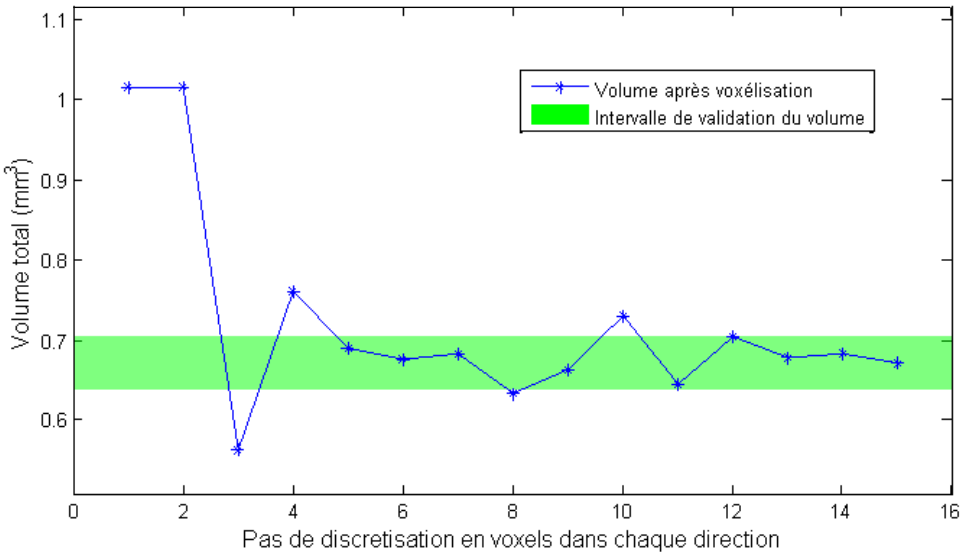


Figure 3.15 Volume des fibres d'un toron de Tissa voxélisé en fonction du pas de discrétisation avec un critère de convergence à 5%

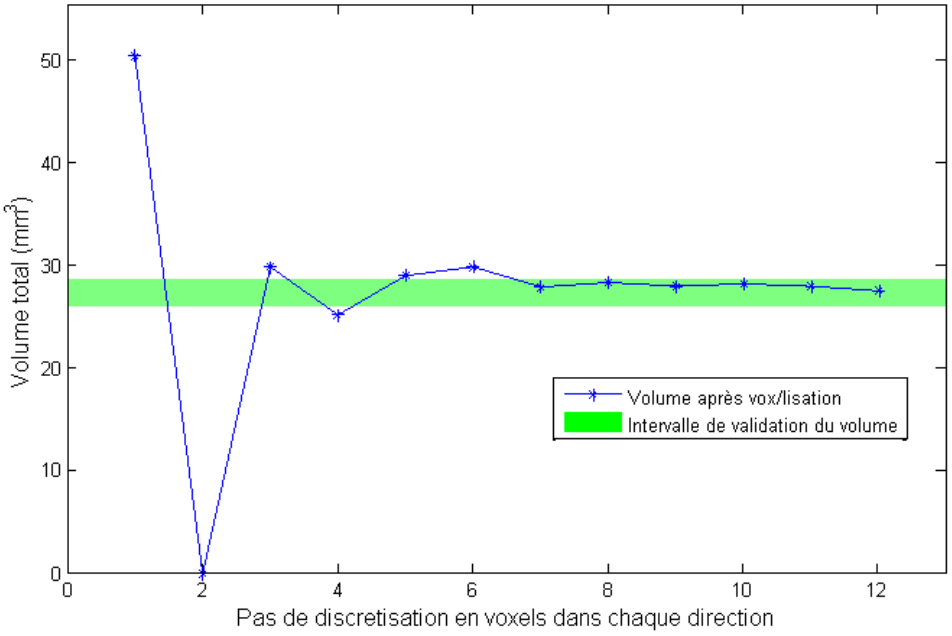


Figure 3.16 Volume des fibres d'un pli de Tissa voxélisé en fonction du pas de discrétisation avec un critère de convergence à 5%

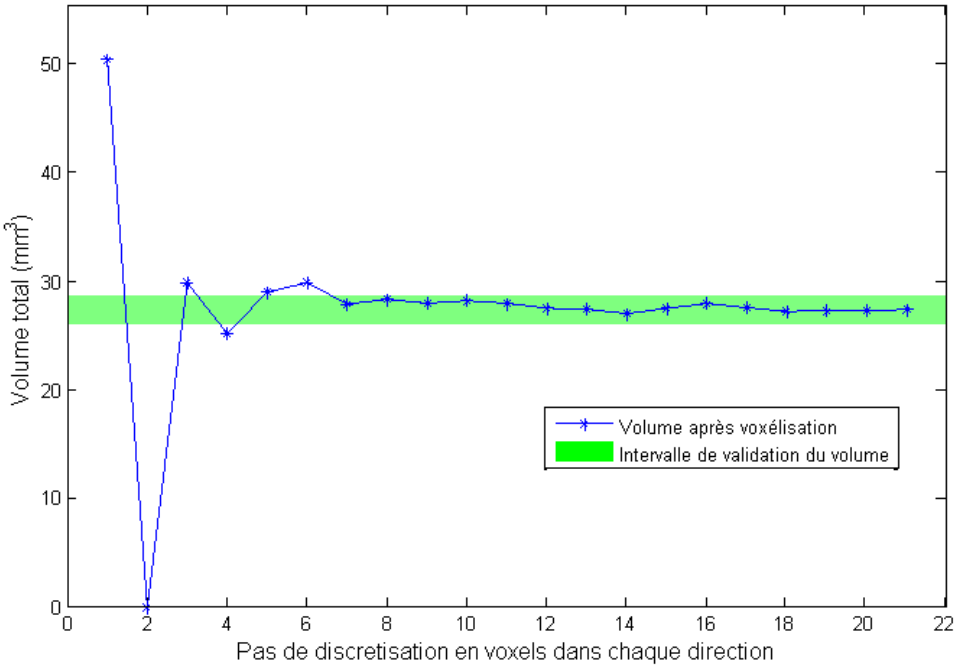


Figure 3.17 Volume des fibres d'un pli de Tissa voxélisé en fonction du pas de discrétisation avec un critère de convergence à 2%

Renfort NCF de Texonic

Tableau 3.6 Résultats des pas de discrétisation pour les voxélisations du renfort NCF

Modèle TexGen	**Critère de convergence (%)**	**Pas de voxélisation**
Toron de trame	5	12
Toron de chaîne	5	14
VER	5	24

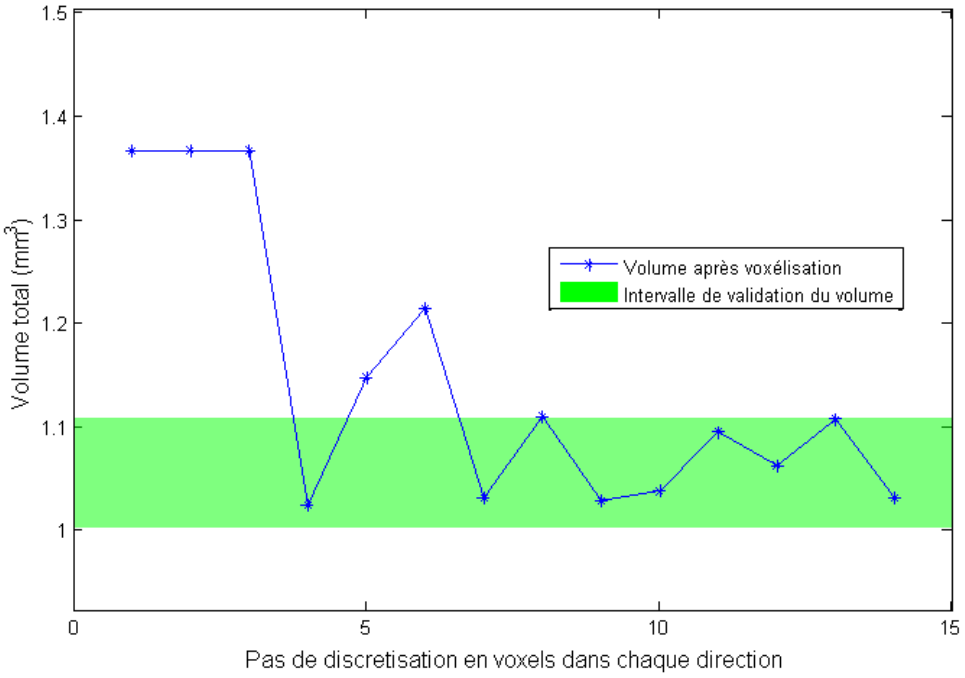


Figure 3.18 Volume des fibres d'un toron voxélisé de chaîne de NCF voxélisé en fonction du pas de discrétisation avec un critère de convergence à 5%

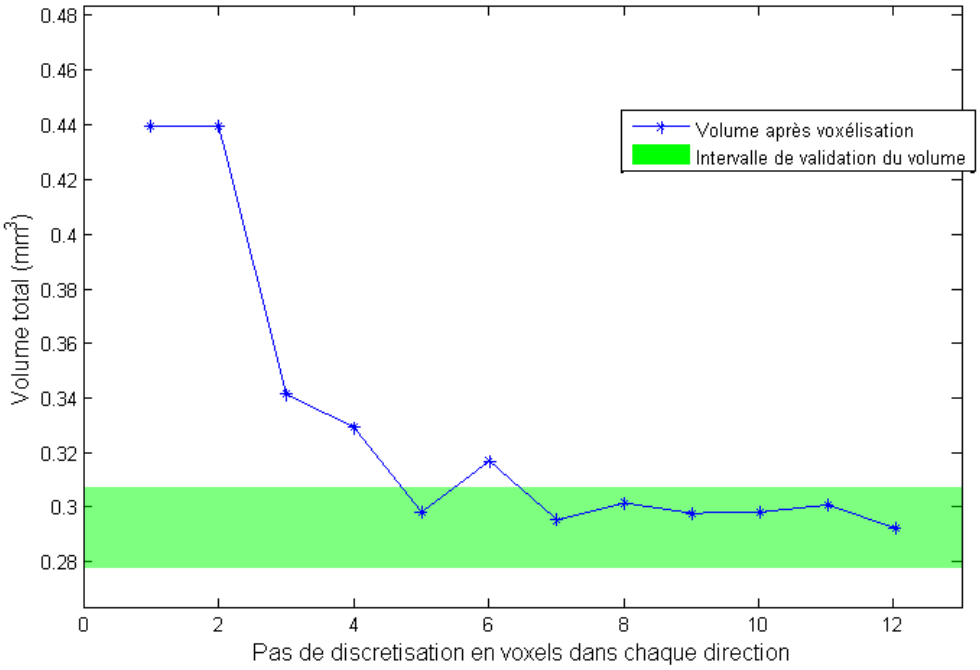


Figure 3.19 Volume des fibres d'un toron voxélisé de trame de NCF voxélisé en fonction du pas de discrétisation avec un critère de convergence à 5%

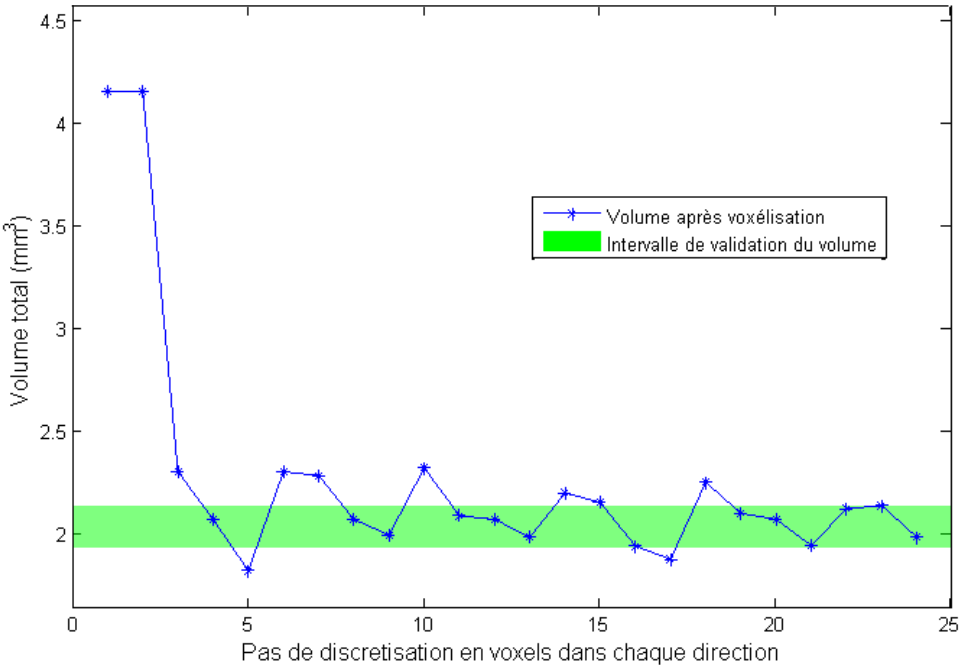


Figure 3.20 Volume des fibres d'un pli de NCF voxélisé en fonction du pas de discrétisation avec un critère de convergence à 5%

Empilement de plusieurs plis

La même démarche peut être utilisée pour voxéliser un empilement de plusieurs plis. La principale différence réside dans l'application du critère. En effet, le critère est appliqué à seulement un pli. La discrétisation totale de l'empilement de plis se fait en fonction du résultat du critère pour un pli seulement. Par exemple, pour discrétiser un renfort à quatre plis, si le critère donne un pas de discrétisation de 12x12x12 pour un pli, alors le pas de discrétisation pour les quatre plis sera de 12x48x12. Ainsi, seulement la valeur dans la direction de l'empilement est multipliée par le nombre de plis. La voxélisation permet d'obtenir un modèle discret du matériau de renfort. Cependant, cette voxélisation comporte un certain nombre de voxels vides qui ne contiennent aucune fibre.

3.4 Modélisation cellulaire

Afin d'utiliser une approche de simulation fondée sur le taux de fibres dans chaque partie de l'espace, un modèle numérique cellulaire reposant sur la voxélisation est proposé. À chaque cellule sont associées les propriétés de la portion du renfort voxélisé qu'elle contient, ce sont les informations nécessaires pour simuler l'écoulement.

3.4.1 Définition

Le modèle numérique du renfort fibreux utilisé est enregistré sous la forme d'une matrice de discrétisation tridimensionnelle appelée le modèle cellulaire. Ce dernier est créé à partir de la structure de voxels optimale en additionnant des groupes de voxels pour former une série de cellules de calcul. Chaque voxel est donc contenu dans une seule cellule. À chaque cellule de calcul correspond une entrée de la matrice tridimensionnelle qui forme le modèle cellulaire du renfort. Une cellule contient une structure de données qui possède les propriétés de la moyenne des voxels qu'elle contient. La Figure 3.21 présente le modèle cellulaire d'un toron et les données contenues dans une cellule.

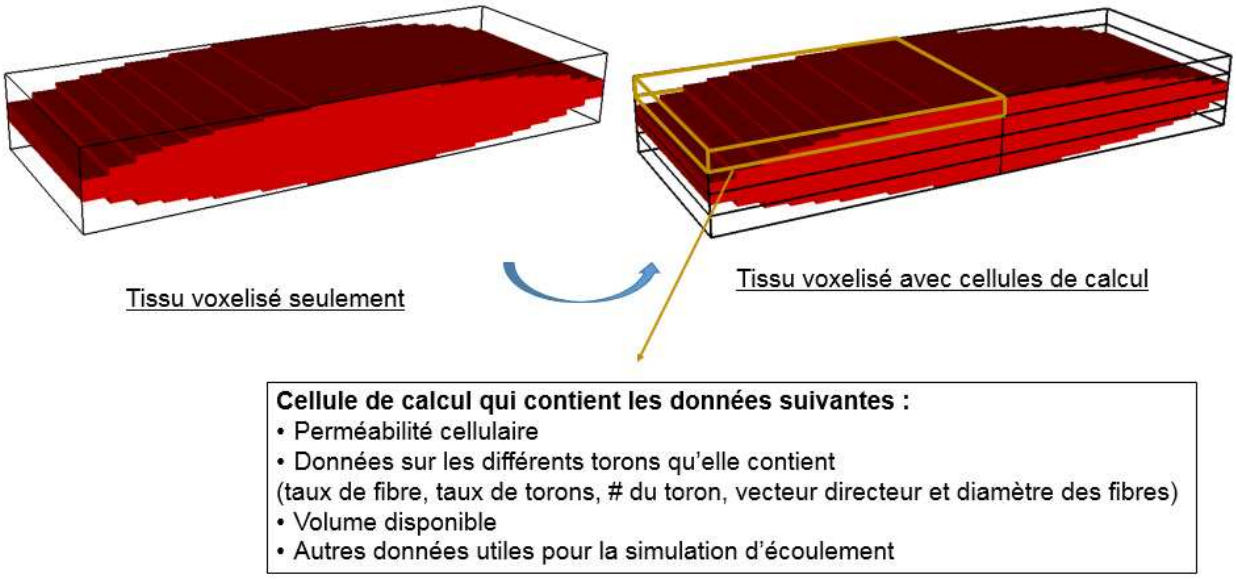


Figure 3.21 Exemple de modèle cellulaire d'un toron voxélisé

Le calcul du volume disponible est fait en considérant la double échelle de porosité du renfort. L'espace inter-toron contenu dans la cellule et l'espace dans le toron sont sommés afin d'obtenir le volume vide dans la cellule. Des informations sur les torons de chaque cellule sont sauvegardées :

1. l'indice de numérotation du toron,
2. le taux de fibres,
3. le vecteur directeur,
4. le diamètre des fibres,
5. le pourcentage du volume total de la cellule qu'il occupe.

3.4.2 Construction du modèle cellulaire

Le paramètre principal de cette seconde discrétisation est le nombre de voxels des cellules selon chaque direction spatiale. Plusieurs modèles cellulaires peuvent donc être obtenus à partir d'un même modèle voxélisé. Il existe cependant une taille de cellule minimale devant être respectée car l'hypothèse de modélisation nécessite que chaque cellule possède un taux de fibres. À l'inverse, la

taille de la cellule peut être augmentée sans contrainte jusqu'à obtenir des cellules contenant plusieurs torons différents ainsi que de nombreux espaces inter-toron. Dans ce cas de figure, chaque toron aura une contribution relativement faible au taux de fibres moyen de la cellule. Il est cependant impossible de déterminer la taille optimale des cellules a priori. Pour étudier l'influence de ce paramètre sur la prédiction de l'écoulement, une approche paramétrique a été adoptée lors du développement des codes de construction cellulaire. Comme il sera montré au Chapitre 5, l'obtention de plusieurs modèles cellulaires permettra d'étudier l'influence de la discrétisation spatiale sur les prédictions numériques.

Fonctionnement du processus de discrétisation cellulaire

La discrétisation cellulaire des renforts voxélisés est réalisée en divisant le volume des voxels de manière régulière. Un voxel est alors considéré comme une entité entière non divisible. Pour chaque cas d'étude, le pas de voxélisation choisi respecte le critère de voxélisation et possède plusieurs diviseurs. L'idée est de comparer plusieurs configurations cellulaires et de ne pas avoir de cellules vides. Le code construit toutes les cellules de calcul possibles avec chacune des combinaisons des diviseurs des pas de discrétisation selon chaque direction spatiale, puis pour chacune des structures, il calcule le taux minimum de torons par cellule. Il s'agit du volume de torons contenu dans chaque cellule divisé par le volume total de la cellule. Pour un même tissu, ce taux minimal donne une indication sur le niveau de raffinement du modèle cellulaire considéré. En effet, le taux de torons minimum par cellule diminue lorsque le modèle cellulaire est plus fin. L'influence de ce paramètre sur la prédiction numérique sera présentée au Chapitre 5.

Processus de création du modèle cellulaire pour l'écoulement numérique

Afin de réaliser la simulation numérique de l'écoulement à travers un échantillon du renfort, le modèle cellulaire du VER doit être étendu. Le modèle cellulaire du VER est répété dans deux directions spatiales. Il faut pouvoir obtenir suffisamment de positions du front lors de la simulation de l'écoulement pour décrire avec précision l'écoulement. La Figure 3.22 illustre la méthode utilisée dans un cas où le VER est répété 3 fois dans chaque direction.

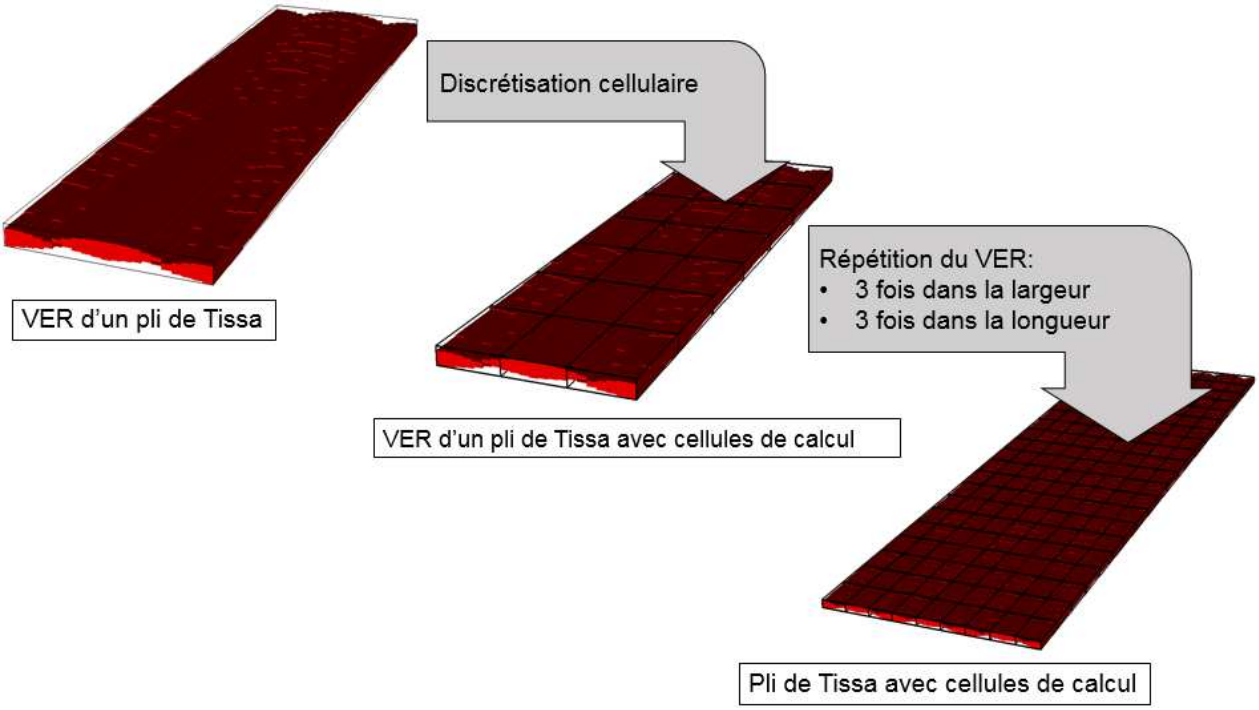


Figure 3.22 Processus de répétition du modèle cellulaire du VER

3.4.3 Résultats des cas d'étude

Plusieurs discrétisations cellulaires sont possibles afin de ne pas avoir de cellules vides. Quelques résultats de discrétisation des renforts étudiés sont présentés dans les paragraphes suivants. La voxélisation choisie pour les modèles cellulaires comprend 24 voxels dans chaque direction. Cette discrétisation répond au critère de ±5% du volume total des fibres et n'est pas trop éloignée des résultats de voxélisation optimale. De plus elle offre un grand nombre de diviseurs possibles pour raffiner le maillage.

Unidirectionnel Tissa

Le VER du Tissa est constitué de torons ondulés juxtaposés les par rapports aux autres (voir Figure 3.23). Ainsi le nombre de cellules dans la direction z n'influencera pas de manière significative le taux de torons par cellule minimal. Les maillages obtenus sont présentés dans le Tableau 3.7.

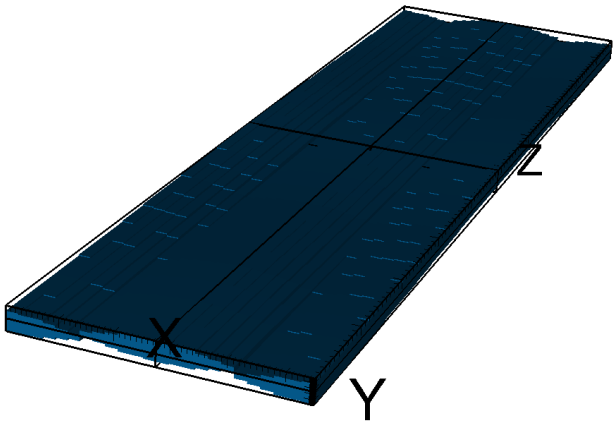


Figure 3.23 Modèle cellulaire d'un VER du renfort Tissa (maillage 2x2x2)

Tableau 3.7 Modèles cellulaires d'un pli du renfort Tissa (voxélisation 24x24x24)

Nombre de cellules dans la direction x	**Nombre de cellules dans la direction y**	**Nombre de cellules dans la direction z**	**Taux de torons par cellule minimum**
2	2	2	0,5394
6	2	2	0.2674
3	6	4	0.0052

NCF Texonic

Le modèle du VER du NCF est présenté à la Figure 3.24 et des exemples de maillages sont présentés dans le Tableau 3.8.

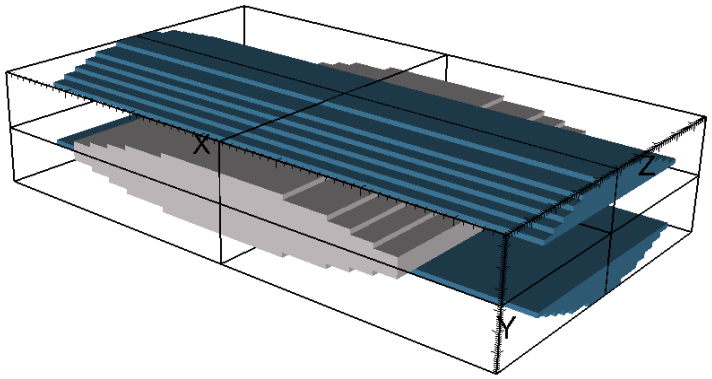


Figure 3.24 Modèle cellulaire d'un VER du renfort NCF (maillage 2x2x2)

Tableau 3.8 Modèles cellulaires d'un pli du renfort NCF (voxélisation 24x24x24)

Nombre de cellules dans la direction x	Nombre de cellules dans la direction y	Nombre de cellules dans la direction z	Taux de torons par cellule minimum
1	1	1	0,4792
2	2	2	0,4792
3	3	2	0,2396
6	3	3	0,0156

Il faut éviter d'avoir des cellules avec un nombre différents de torons, car il est plus difficile d'obtenir une perméabilité équivalente pour ce type de cellules. Ainsi un modèle à une seule cellule est à éviter, car celle-ci serait composée de trois torons, dont deux dans la même direction. Les mêmes recommandations que pour le toron du renfort Tissa sont valides pour les torons du renfort NCF.

Montée capillaire avec un toron

L'expérience de montée capillaire avec un seul toron représente un cas particulier pour lequel la démarche générale de construction du modèle cellulaire doit être légèrement adaptée. En effet, les mesures de montée capillaire pour les torons sont réalisées sans moule de sorte que seul l'espace intra-toron est imprégné au cours de l'expérience. Or, la modélisation cellulaire présentée précédemment s'appuie sur le domaine voxélisé inclut dans un domaine parallélépipédique. Comme illustré sur la Figure 3.25 dans le cas du Tissa, le volume disponible est surestimé dans le modèle, car les canaux préférentiels situé dans les coins de la cellule ne sont pas imprégnés dans la réalité. Pour corriger ce problème, le volume disponible de chaque cellule et la section de passage d'une cellule à l'autre ont été modifiés afin de tenir compte des conditions expérimentales. Le taux de fibres est constant dans le toron, il est alors possible de mailler un toron avec une seule cellule dans la section comme le montre la Figure 3.26a. La section de passage d'une cellule à l'autre est recalculée en ne considérant que l'aire de la section du toron (voir Figure 3.26b). La même approche a été adoptée pour obtenir des modèles des torons de chaîne et de trame du tissu NCF possédant une seule cellule dans la section du toron (voir Figure 3.27 et Figure 3.28).

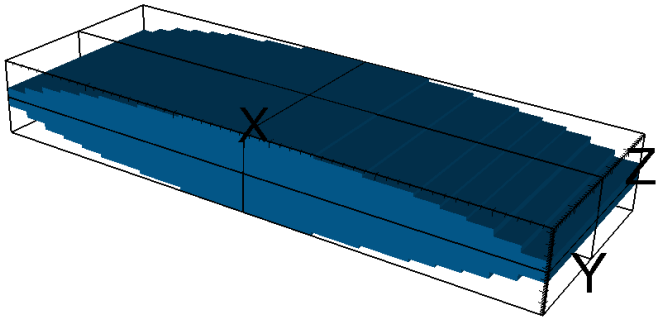


Figure 3.25 Modèle cellulaire d'un toron de renfort Tissa (maillage 2x2x2)

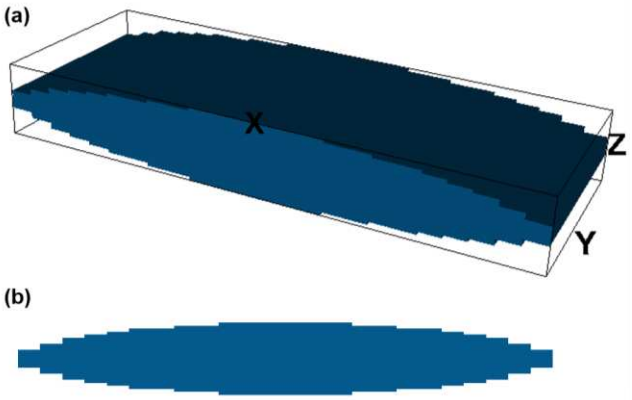


Figure 3.26 Modèle cellulaire d'un toron de renfort Tissa pour la montée capillaire : (a) maillage (1x1x1) ; (b) section de passage d'une cellule à l'autre

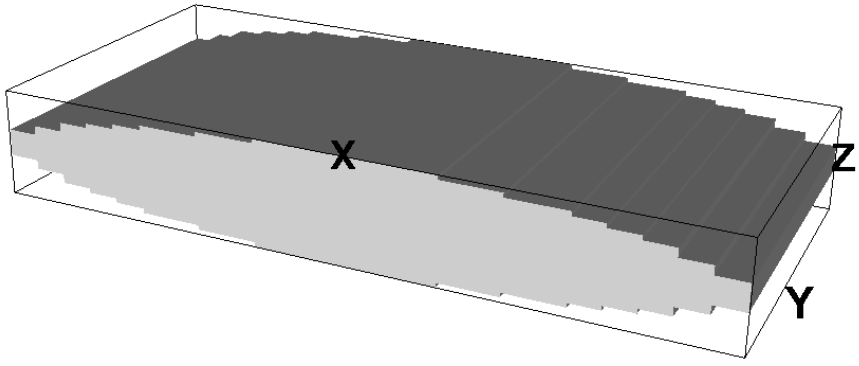


Figure 3.27 Modèle cellulaire d'un toron de chaine du renfort NCF (maillage 1x1x1)

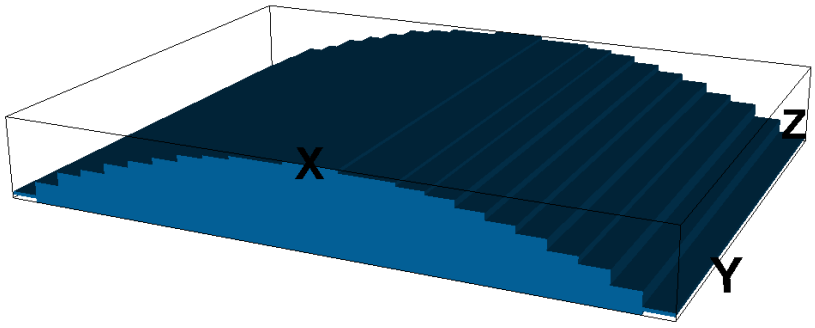


Figure 3.28 Modèle cellulaire d'un toron de trame du renfort NCF (maillage 1x1x1)

Empilement de plusieurs plis

En ce qui concerne les modèles cellulaires de l'empilement de plusieurs plis, la même méthode qu'avec un pli est utilisée. Les propriétés des voxels contenus dans chaque cellule sont moyennées pour obtenir les propriétés de la cellule. La Figure 3.29 présente un modèle cellulaire de 4 plis du VER du renfort Tissa, et la Figure 3.30 un modèle cellulaire de 4 plis du VER du renfort NCF. Le comportement dans les modèles cellulaires d'empilement de plis du taux de torons en fonction de la taille des cellules est le même que celui présenté au paragraphe précédent.

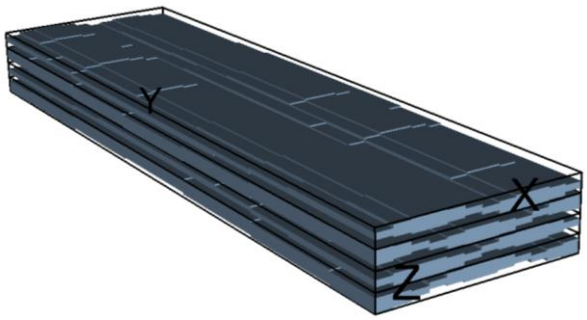


Figure 3.29 Modèle cellulaire de 4 plis du VER du renfort Tissa

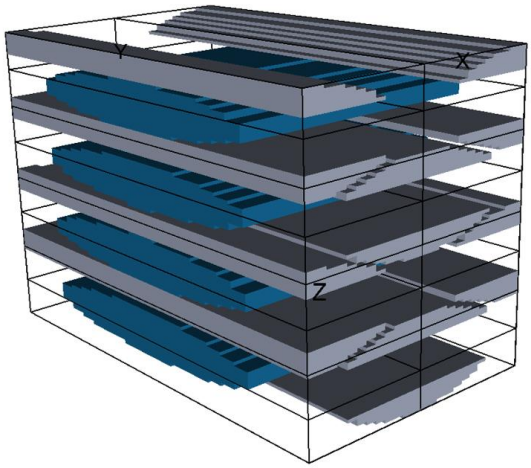


Figure 3.30 Modèle cellulaire de 4 plis du VER du renfort NCF

Le comportement dans les modèles cellulaires d'empilement de plis du taux de torons minimal en fonction de la taille des cellules est le même que celui présenté au paragraphe précédent.

3.4.4 Prise en compte de la compaction du renfort

Les procédés de fabrication des composites impliquent généralement une compression à travers l'épaisseur du renfort pour atteindre le taux de fibres souhaité dans la pièce finale. Les expériences de caractérisation des renforts sont donc généralement effectuées sur des tissus compactés pour reproduire les conditions de fabrication. Or, la modélisation des tissus présentée précédemment a été effectuée à un taux de fibres relativement faible représentant l'état naturel (i.e. non compacté) des tissus. Une procédure de compaction doit donc être appliquée aux modèles cellulaires pour simuler les expériences réalisées à des taux de fibres plus élevés.

Définition du phénomène

Pour augmenter le taux de fibres d'un empilement de plis, une pression est appliquée à travers l'épaisseur du renfort. C'est le phénomène de compaction. D'une manière pratique, lors des expériences considérées, les différents plis de renforts sont enfermés dans la cavité d'épaisseur contrôlée d'un moule. Lorsqu'un renfort tissé est ainsi comprimé entre deux plaques la structure du renfort est modifiée [27]:

1. La tension appliquée lors du tissage provoque une différence d'ondulation entre les fibres de chaîne et de trame. De cette différence résulte un espace δ représenté à la Figure 3.31

a. Pendant les premiers instants de la compression, l'espace diminue. Il en résulte une augmentation de la courbure d'une des séries de torons et une diminution de la courbure de l'autre série.

2. Une fois que l'espace δ est complètement fermé avec la poursuite de la compression, les torons s'aplatissent et la courbure des torons diminue comme présenté à la Figure 3.31 b.
3. L'aplatissement des torons continue jusqu'à que chaque fibre le constituant soit en contact comme présenté à la Figure 3.31 c.

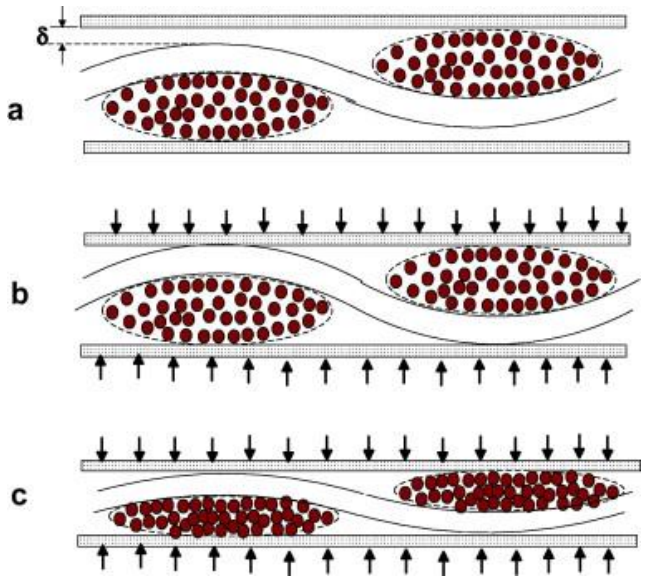


Figure 3.31 Étapes de compression d'un renfort tissé [27]

Il existe différents modèles analytiques qui tentent de décrire le comportement des renforts lors de la compression. Ces modèles étudient la courbure des fibres, leur déformation ou le contact inter-fibre. Robitaille et Gauvin [28] ont proposé une revue des différents modèles analytiques de compaction des renforts fibreux. La compaction d'un textile reste un phénomène complexe qui requiert généralement une étude expérimentale.

Modélisation simplifiée du phénomène

Afin de modéliser simplement le phénomène de compaction, la stratégie retenue consiste à modifier le modèle cellulaire de l'empilement de plis. Le déplacement des torons ne sera pas pris en compte.

La méthode générale utilise le taux de fibres final dans la cavité qui est une donnée du problème. Il est possible de réduire l'épaisseur de chaque cellule et de modifier les propriétés de chaque cellule du modèle afin d'obtenir un taux de fibres moyen du domaine qui correspond au taux de fibres visé. Cela revient à faire l'hypothèse que chaque pli est compacté de la même manière lors de la compaction de l'empilement de plis.

La procédure de calcul est la suivante :

1. Le taux de fibres de chaque toron est fixé à une valeur correspondante à 90% de la valeur maximale pour un cas d'un arrangement de fibres hexagonal (voir équation (3.5)). Cela permet d'avoir un toron qui aura une perméabilité transverse non nulle.

2. Le premier coefficient r_{fibres} de réduction de l'épaisseur est calculé en fonction du taux de fibres moyen des torons dans chaque cellule et du taux de fibres fixé.

$$r_{fibres} = \frac{V_{f,\text{fibres}}}{0,90 \text{x} V_{f,\max}} \tag{3.1}$$

   où $V_{f,fibres}$ est le taux de fibres moyen dans les torons du domaine et $V_{f,max}$ le taux de fibres d'un arrangement hexagonal de fibres.

3. L'épaisseur de chaque cellule est réduite par le facteur r_{fibres}. Le taux de fibres de chaque cellule est augmenté en le multipliant par $1/r_{fibres}$. La modification de ces deux paramètres permet de recalculer le volume disponible dans chaque cellule.

4. Le deuxième coefficient r_{toron} de réduction de l'épaisseur est calculé en fonction du nouveau taux de fibres moyen dans chaque cellule et du taux de fibres objectif.

$$r_{toron} = \frac{V_{f,cell}}{V_{f,objectif}} \tag{3.2}$$

   où $V_{f,cell}$ est le taux de fibres moyen dans le domaine et $V_{f,objectif}$ le taux de fibres visé.

5. L'étape 3 est répétée avec r_{toron} afin de mettre à jour toutes les propriétés des cellules. Le taux de vide de chaque cellule est lui aussi recalculé.

6. Enfin si une cellule comporte un taux de torons plus grand que 1, l'excédent est distribué à la cellule voisine. Cela signifie que la cellule est devenue trop petite pour contenir le toron lors de la compaction. Le taux de vides inter-torons de la cellule voisine est ainsi diminué.

Les informations enregistrées lors de la création du modèle cellulaire et de la compaction du renfort sont nécessaires pour déterminer la dernière propriété importante du modèle cellulaire, soit le tenseur de perméabilité local du renfort.

3.4.5 Perméabilité cellulaire

Le code d'écoulement développé repose sur la loi de Darcy (2.11) et utilise la discrétisation cellulaire du renfort fibreux développée dans ce chapitre. Ainsi pour chaque cellule, il faut calculer un tenseur de perméabilité afin de prendre en compte la capacité de chaque cellule à laisser passer le fluide dans chaque direction de l'espace. L'idée est de calculer la perméabilité de chaque cellule à partir des perméabilités analytiques de Gebart [29] pour les torons.

Perméabilité de Gebart

Le modèle utilisé pour calculer la perméabilité saturée de chaque toron est celui de Gebart [29]. Le modèle considère des fibres parallèles et donne des formules analytiques pour les perméabilités longitudinale (dans le sens des fibres) et transverse (perpendiculaire aux fibres) d'un toron. Il est fondé sur le profil des vitesses et le coefficient de friction du fluide dans les canaux entre les fibres. Les valeurs des différentes constantes du modèle diffèrent selon la disposition des fibres (carrée ou hexagonale). Le cas retenu ici est une distribution hexagonale tel qu'indiqué sur la Figure 3.32.

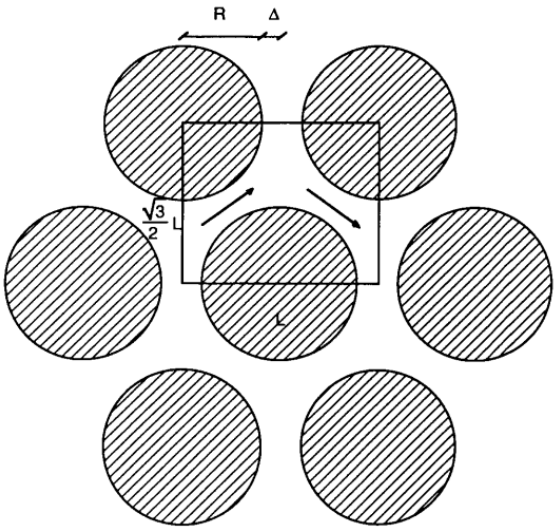


Figure 3.32 Réseau hexagonal de fibres [29]

La perméabilité longitudinale du milieu constitué de fibres parallèles s'écrit :

$$K^{//} = \frac{8R^2(1-V_f)^3}{53V_f^2} \tag{3.3}$$

avec R le rayon de fibres et V_f le taux de fibres du toron. La perméabilité transverse s'écrit de la manière suivante :

$$K^{\perp} = \frac{16}{9\pi\sqrt{6}}\left(\sqrt{\frac{V_{f,max}}{V_f}}-1\right)^{\frac{5}{2}} R^2 \tag{3.4}$$

où $V_{f,max}$ est le taux de fibres maximum admissible. Il correspond au cas d'un arrangement hexagonal quand toutes les fibres sont en contact. Sa valeur est :

$$V_{f,max} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \tag{3.5}$$

Ce modèle permet de calculer la perméabilité de chaque toron dans le sens longitudinal et transverse. Cependant, comme chaque cellule peut contenir plusieurs torons, il faut être en mesure de composer les perméabilités analytiques de chaque toron pour obtenir la perméabilité de la cellule.

Combinaison des perméabilités

Les tenseurs de perméabilité de chaque toron d'une cellule sont combinés en tenant compte de l'influence de chaque toron et de son taux de fibres dilué dans la cellule. Le taux de fibres dilué du toron correspond au taux de fibres à l'intérieur du toron dilué dans le volume de la cellule correspondant à la contribution du toron dans la cellule. Le cas de la Figure 3.33 est pris comme exemple d'explication de la méthode, la cellule est composée de deux torons représentés de manière simplifiée. Chaque toron occupe un quart du volume de la cellule. Il est associé à chacun de ces torons une proportion du vide de la cellule en diluant le taux de torons de chaque toron. Le taux de torons dilué $V_{t,dilué}(j)$ de chaque toron $\boldsymbol{j}$ s'écrit :

$$V_{t,\text{dilué}}(j) = \frac{V_{t,initial}(j)}{\sum_{i=1}^{2} V_{t,initial}(i)} \tag{3.6}$$

où $V_{t,inial}$ est le taux de torons initial de chaque toron contenu dans la cellule. Ainsi pour chaque toron dans le cas de la Figure 3.33 a. le taux de torons dilué est de un demi comme présenté à la Figure 3.33 b. Le nouveau taux de fibres de chaque toron doit être recalculé en tenant compte de la dilution du taux de torons. Le taux de fibres dilué utilisé pour les formules de Gebart s'écrit :

$$V_{f,\text{dilué}}(j) = V_{f,initial}(j).\frac{V_{t,\text{initial}}(j)}{V_{t,dilué}(j)} \tag{3.7}$$

où $V_{f,initial}(j)$ et $V_{f,dilué}(j)$ sont respectivement le taux de fibres du toron initial et dilué. Ainsi pour chaque toron dans le cas de la Figure 3.33 le taux de fibres dilué est la moitié du taux de fibres initial. Les taux de fibres sont dilués afin de tenir compte des vides entre les torons. En effet, en diminuant ainsi les taux de fibres de chaque toron la perméabilité de la cellule augmente. Donc l'influence du volume disponible est prise en compte. La perméabilité avec chacun de ces $V_{f,dilué}$ de chaque toron est calculée en utilisant les formules de Gebart.

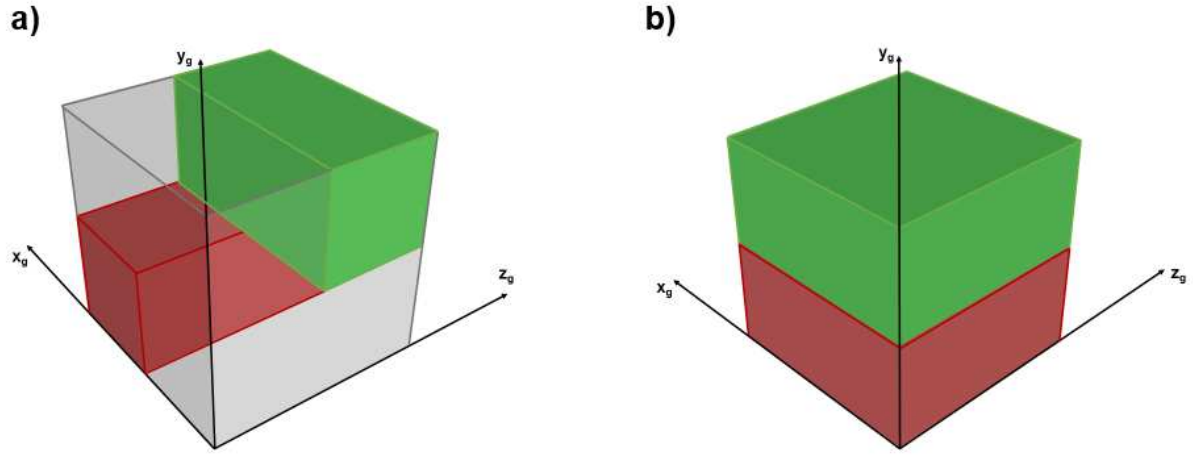


Figure 3.33 Schéma simplifié d'une cellule composée de deux torons : (a) avant dilution du taux de torons, (b) après dilution du taux de torons

La méthode générale pour calculer la perméabilité d'un toron est la suivante. Une base locale est associée à chaque toron comme le montre la Figure 3.34. L'axe $\boldsymbol{x}$ est orienté dans le sens longitudinal du toron. La diagonale du tenseur de perméabilité peut donc être calculée à l'aide des formules de Gebart. La matrice de perméabilité locale $\boldsymbol{K}_{(x_{toron},y_{toron},z_{toron})}$ est obtenue dans la base locale du toron, en considérant le taux de fibres dilué du toron et le rayon des fibres.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_{(x_{toron},y_{toron},z_{toron})}(1,1) &= K^{//}\\ \boldsymbol{K}_{(x_{toron},y_{toron},z_{toron})}(2,2) &= K^{\perp}\\ \boldsymbol{K}_{(x_{toron},y_{toron},z_{toron})}(3,3) &= K^{\perp}\end{aligned} \tag{3.8}$$

Puis un changement de base est effectué pour obtenir le tenseur de perméabilité dans la base globale de la cellule ($\boldsymbol{x_g},\boldsymbol{y_g},\boldsymbol{z_g}$).

$$\boldsymbol{K}_{(x_g,y_g,z_g)} = P_{t\to g}.\boldsymbol{K}_{(x_{toron},y_{toron},z_{toron})}.P^{t}_{t\to g} \tag{3.9}$$

où $P_{t\to g}$ est la matrice de changement de base du référentiel du toron vers le référentiel global, $\boldsymbol{K}_{(x_g,y_g,z_g)}$ le tenseur de perméabilité du toron dans la base globale de la cellule et $\boldsymbol{K}_{(x_{toron},y_{toron},z_{toron})}$ le tenseur de perméabilité du toron dans la base du toron.

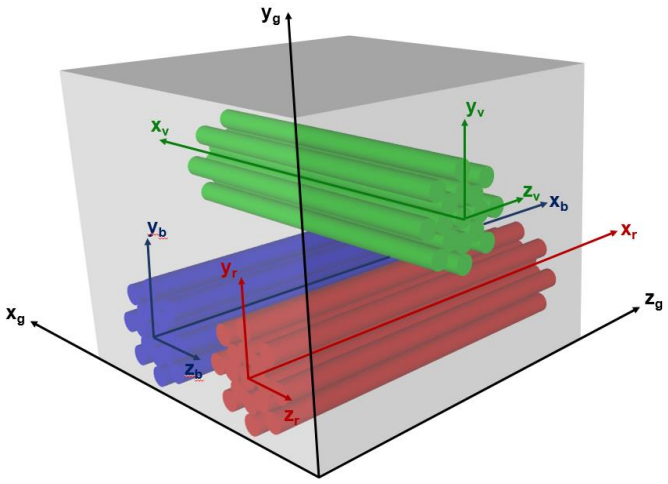


Figure 3.34 Schéma d'une cellule de calcul composée de trois torons

Enfin il faut associer les perméabilités de chaque toron de la cellule afin d'obtenir le tenseur de perméabilité équivalent. La formule de Darcy en termes de débit s'écrit :

$$\vec{Q} = -\frac{\boldsymbol{K}}{\mu}\nabla\vec{P}A \tag{3.10}$$

Avec Q qui est le débit qui traverse une cellule, $\boldsymbol{K}$ qui est le tenseur de perméabilité d'ordre 3 et A l'aire d'entrée de la cellule. Par conservation du débit il est possible d'écrire :

$$\vec{Q} = \sum_i \vec{Q_i} \tag{3.11}$$

où i est l'indice de sommation pour considérer chaque toron. En substituant (3.10) et en simplifiant et en notant que les rapports A_i/A correspondent au $V_{t,dilué}(i)$ il est possible d'identifier la perméabilité équivalente de la cellule :

$$K_{cellule} = \sum_i V_{t,dilué}(\mathrm{i})\boldsymbol{K}_i \tag{3.12}$$

où $\boldsymbol{K}_i$ est le tenseur de perméabilité du toron i calculé à l'aide des formules de Gebart et du taux de fibres $V_{f,dilué}(i)$ dans la base globale.

3.5 Conclusion

Les deux renforts fibreux étudiés ont été caractérisés expérimentalement afin d'obtenir des renseignements sur leur géométrie et leur taux de fibres. Cette caractérisation a permis d'obtenir des modèles numériques de chaque VER. Ces VER ont été voxélisés en respectant un critère basé sur le volume de fibres du modèle TexGen. Le volume de fibres de la voxélisation est ainsi identique à celui du modèle TexGen à ±5% ou à ±2%. Ce critère a permis d'obtenir le pas de voxélisation minimal à respecter pour que la voxélisation soit fidèle au modèle TexGen. Cette représentation voxélisée a ensuite été utilisée lors de la construction du modèle cellulaire. À cette étape, le nombre de voxel contenue dans chaque cellule est un paramètre important de la modélisation. Une approche paramétrique permettant de générer automatiquement plusieurs modèles cellulaires de taille variable a donc été adoptée. Ce processus a été réalisé pour chacun des torons des renforts étudiés et pour différents empilements de plis de renforts. C'est à travers les domaines de calcul obtenus par cette méthode que la simulation de l'écoulement sera réalisée à l'aide du code de calcul présenté au chapitre suivant.

CHAPITRE 4 MODÉLISATION DE L'ÉCOULEMENT

4.1 Introduction

L'objectif central du projet consiste à simuler numériquement le remplissage d'un domaine tridimensionnel représentatif du renfort fibreux. Les expériences à reproduire numériquement grâce au code de calcul sont des essais de montée capillaire et des mesures de perméabilité à pression ou débit imposé. Les études sont faites pour un régime d'écoulement stationnaire et non turbulent. L'ensemble des simulations est réalisé à l'aide d'un code implémenté en Matlab utilisant la description cellulaire du VER de renfort présentée au Chapitre 3 comme domaine de calcul. Ce chapitre présente les équations qui décrivent l'écoulement et les hypothèses simplificatrices utilisées. Les équations sont ensuite développées, puis la méthode de résolution est présentée en détail dans les cas unidimensionnel et tridimensionnel. L'application des conditions aux limites et la stratégie de remplissage du domaine sont détaillées. Enfin, les modèles unidimensionnel et tridimensionnel sont validés par comparaison avec des solutions analytiques.

4.2 Cadre de modélisation

Afin de modéliser l'écoulement dans le domaine cellulaire qui représente le renfort fibreux, un ensemble d'équations est tout d'abord établi. Des hypothèses simplificatrices sont par la suite proposées afin de résoudre numériquement le système.

4.2.1 Équations du modèle

L'écoulement est simulé à travers un milieu poreux. Ainsi le champ de vitesse peut être déterminé par la loi de Darcy :

$$\vec{v} = -\frac{\boldsymbol{K}}{\mu}\vec{\nabla}P \tag{4.1}$$

où $\boldsymbol{K}$ est le tenseur de perméabilité du milieu, μ est la viscosité du fluide et P la pression. Le principe de conservation de la masse est utilisé à travers l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho\vec{v}) = 0 \tag{4.2}$$

où ρ est la masse volumique du fluide et v son champ de vitesse.

4.2.2 Hypothèses simplificatrices

Afin de résoudre les deux équations qui régissent l'écoulement, un certain nombre d'hypothèses sont posées. Ces hypothèses sont extraites des travaux antérieurs réalisés sur le projet. Le lecteur pourra se référer à ces travaux pour plus de détails [1]. Le fluide est considéré incompressible, ce qui justifie l'utilisation de la loi de Darcy et permet de ne plus tenir compte de la masse volumique du fluide dans l'équation de continuité. La viscosité du fluide est supposée constante. En outre, dans une première approche, la saturation relative n'est pas considérée dans les équations du système. Ainsi le système d'équation réduit peut s'écrire de la manière suivante :

$$\vec{\nabla}.(\boldsymbol{K}\ \vec{\nabla}P) = 0 \tag{4.3}$$

L'équation aux dérivées partielles obtenue est linéaire. Cette équation doit être vérifiée sur l'intégralité du domaine, dans lequel chaque cellule possède son propre tenseur de perméabilité, potentiellement différent de celui des cellules voisines. Une méthode numérique est nécessaire pour résoudre cette équation sur l'ensemble du domaine d'étude.

4.3 Simulation numérique des écoulements dans le cas unidimensionnel

L'équation (4.3) qui régit l'écoulement est résolue en pression grâce à la méthode des différences finies. Le domaine d'étude 1D est discrétisé de manière régulière avec une pression et une perméabilité différentes dans chaque cellule. Deux différenciations successives sont nécessaires pour résoudre l'équation. Ceci permet de garantir la conservation de la masse. La stratégie retenue est présentée en détail dans un cas simple unidimensionnel afin de poser les bases de la méthode.

4.3.1 Développement numérique du modèle unidimensionnel

Le domaine étudié est constitué d'une série de cellule qui sont indexées avec la lettre *i*, à chaque cellule est associée l'ensemble des propriétés propre aux cellules : une matrice de perméabilité, une valeur de pression et une valeur de vitesse dans la direction de l'écoulement *z*. L'ensemble de ces propriétés est homogène dans chaque cellule et peut être associé à un nœud central dans la cellule. La distance qui sépare deux nœuds consécutifs est notée D_z. Deux cellules virtuelles sont

ajoutées au début et à la fin du domaine pour fixer les conditions limites d'injection du liquide dans le domaine. La Figure 4.1 présente la configuration étudiée.

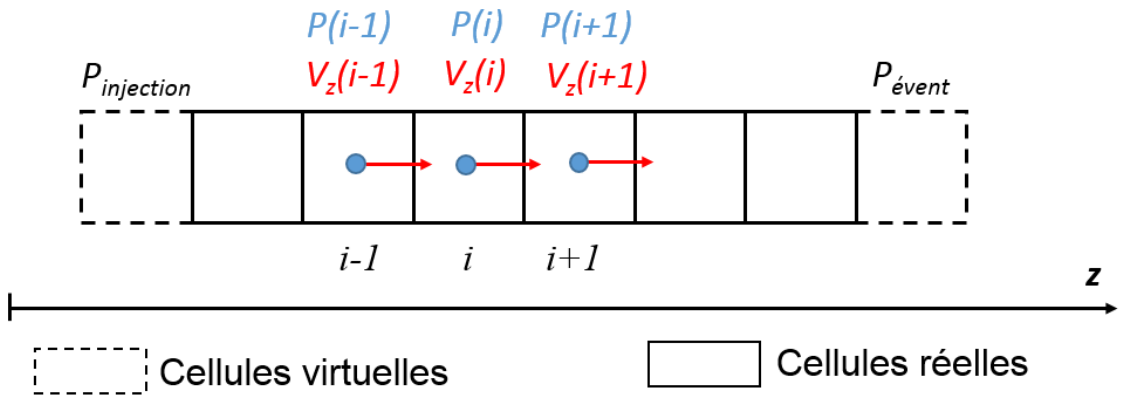


Figure 4.1 Schéma du domaine unidimensionnel étudié

La loi de Darcy relie le gradient de pression à la vitesse de l'écoulement alors que la loi de conservation de la masse annule le divergent de la vitesse. La loi de Darcy est différenciée en pression grâce à un schéma avant dans un cas 1D selon la direction z.

$$\vec{v} = -\frac{\boldsymbol{K}}{\mu}\vec{\nabla}P$$
$$\Leftrightarrow \quad v_z(i) = -\frac{K(i)}{\mu}\frac{P(i+1)-P(i)}{D_z} \tag{4.4}$$

où K est un scalaire qui représente la perméabilité de la cellule dans le cas 1D et D_z le pas de discrétisation dans la direction z. Ensuite la divergence de la vitesse est différenciée dans le cas 1D. Un schéma arrière de différences finies est utilisé afin de tenir compte de la vitesse en amont de l'écoulement et garantir la conservation de liquide d'une cellule à une autre :

$$\vec{\nabla}.\vec{v} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{v_z(i)-v_y(i-1)}{D_z} = 0 \tag{4.5}$$

Afin de résoudre le système en pression uniquement, les deux équations (4.4) et (4.5) sont combinées pour obtenir finalement une équation reliant les pressions et les perméabilités des positions *i-1*, *i* et *i+1*. L'équation obtenue est la suivante :

$$-P(i-1)\frac{K(i-1)}{D_z^{\,2}}+P(i)\frac{K(i)+K(i-1)}{D_z^{\,2}}-P(i+1)\frac{K(i)}{D_z^{\,2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad -P(i-1)K(i-1)+P(i)(K(i)+K(i-1))-P(i+1)K(i)=0 \tag{4.6}$$

Le code d'écoulement développé est un code de remplissage, ainsi le domaine saturé en liquide augmente en fonction du temps. Cette équation permet de tenir compte de l'effet de la variation de la perméabilité le long de l'écoulement sur le champ de pression dans le domaine saturé. Pour chaque cellule saturée du domaine, une équation semblable peut être écrite. Il est alors possible d'assembler une matrice qui relie les valeurs de perméabilités des cellules saturées au champ de pression. Ainsi la matrice du système va augmenter de taille au fur et à mesure que le front de liquide va avancer. Afin de fixer le comportement du fluide aux extrémités du domaine, des conditions aux limites sont nécessaires.

4.3.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites permettent la modélisation d'écoulements à pression ou débit imposés. Il est nécessaire de fixer les valeurs de pression au début du domaine, $P_{injection}$ et en avant du front $P_{évent}$. Noter que la première cellule virtuelle au début du domaine permet de fixer $P_{injection}$, alors que la première cellule vide en avant du front saturé permet de fixer $P_{évent}$. Ces deux cellules sont donc utiles lors du calcul du champ de pression dans le domaine saturé. La Figure 4.2 présente un domaine saturé constitué de 3 cellules et le domaine de calcul utile.

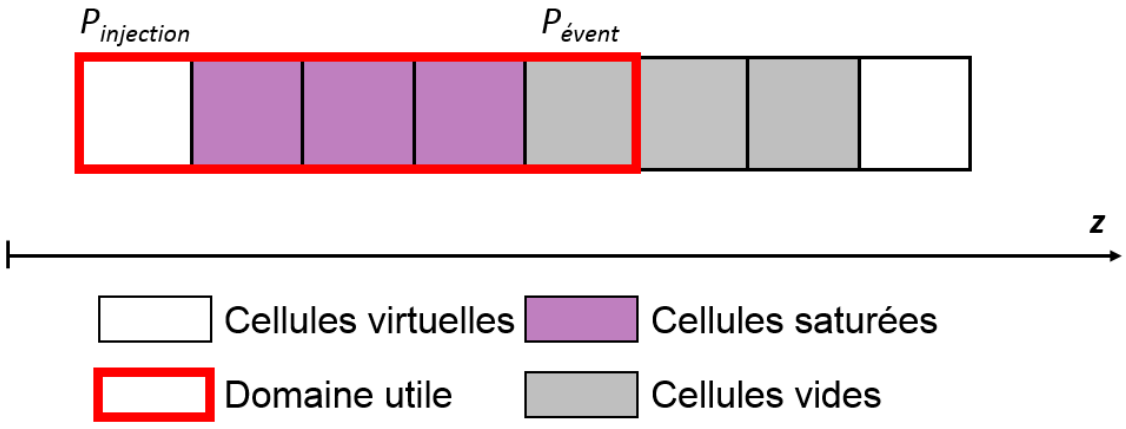


Figure 4.2 Position des pressions à fixer lors du calcul des conditions aux limites

Conditions de pression imposée

Le cas de la pression imposée est très utile, car il permet de reproduire les conditions de mesure de perméabilité. La condition à imposer sur la pression du port d'injection consiste à fixer la valeur de $P_{injection}$. La valeur généralement utilisée est 1 bar. La condition à imposer pour la pression en avant du front $P_{évent}$ est semblable. La valeur utilisée est 0 bar. Dans le cas de la pression imposée, les conditions aux limites ne varient pas d'un pas de temps à l'autre. La condition à l'évent ne fait que se déplacer avec le front de fluide.

Conditions de débit imposé

La modélisation de l'écoulement à débit imposé constitue un cas de validation du code de calcul. En outre, l'injection à débit imposé est couramment utilisée lors de la fabrication de matériaux composites. Afin de fixer le débit d'injection dans l'échantillon, il faut déterminer la vitesse dans la cellule du port d'injection, qui s'écrit de la manière suivante :

$$v_{z,injection} = -\frac{K_{injection}}{\mu}\frac{dP}{dz} \tag{4.7}$$

La vitesse du liquide au port d'injection $v_{z,injection}$ est fixée. La perméabilité de la cellule virtuelle $K_{injection}$ au port d'injection est considérée connue identique à celle de la première cellule réelle suivante notée $K_{réelle}$. Les variables du code sont les pressions P dans chaque cellule. C'est donc la valeur de la pression dans la cellule du port d'injection qui doit être imposée. L'équation (4.7) est différenciée à l'aide d'un schéma avant. Ainsi la formulation pour la pression au port d'injection ($P_{injection}$) est obtenue :

$$\begin{aligned} & v_{z,injection} = -\frac{K_{réelle}}{\mu}\frac{dP}{dz} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{v_{z,injection}\mu}{K_{réelle}} = -\frac{P_{réelle} - P_{injection}}{D_z} \\ \Leftrightarrow \quad & P_{injection} - P_{réelle} = \frac{v_{z,injection}\mu D_z}{K_{réelle}} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{injection} \\ P_{réelle} \end{pmatrix} = \frac{v_{z,injection}\mu D_z}{K_{réelle}} \end{aligned} \tag{4.8}$$

où $P_{réelle}$ est la pression de la première cellule réelle en avant de la cellule virtuelle du port d'injection. Cette équation peut être implémentée lors de l'assemblage matriciel comme condition limite pour la pression dans la cellule du port d'injection. Pour la cellule en avant du front, il suffit d'imposer la valeur de $P_{évent}$. La valeur utilisée est $P_{évent} = 0$ bar parce que le calcul est généralement réalisé en pression relative par rapport à la pression atmosphérique.

Ces conditions aux limites combinées au modèle numérique permettent la résolution du système linéaire et d'obtenir la pression dans chaque cellule du domaine saturé. La distribution de pression est donc connue à chaque instant dans ce domaine. Ceci permet de calculer les vitesses du liquide sur le front d'écoulement et donc de remplir progressivement le domaine.

4.3.3 Stratégie de remplissage

Le code de calcul remplit chaque cellule vide en avant du front saturé. Une cellule est considérée comme saturée si son volume disponible est nul. Pour effectuer un remplissage une distribution de pression est considérée à chaque itération qui permet de calculer la vitesse du front saturé en tenant compte des conditions aux limites. Une fois la vitesse du front connue, un pas de temps est calculé afin remplir la cellule vide suivante. Le domaine saturé augmente de taille. La condition limite en avant du front est déplacée d'une cellule et un nouveau domaine de calcul est disponible. Il faut donc recalculer une nouvelle distribution de pression et recommencer le processus jusqu'au bout du domaine. Dans un premier temps le calcul des vitesses sera présenté puis le calcul du pas de temps.

Calcul des vitesses

La vitesse de la cellule du front de fluide est obtenue à l'aide de la loi de Darcy en utilisant un schéma de différence fini. Soit *i* l'indice de la dernière cellule du front, la vitesse du front est obtenue par la formule suivante :

$$v_z(i) = -\frac{K(i)}{\mu}\frac{P_{évent} - P(\mathrm{i})}{D_z} \tag{4.9}$$

La Figure 4.3 indique la position où la vitesse du front est calculée.

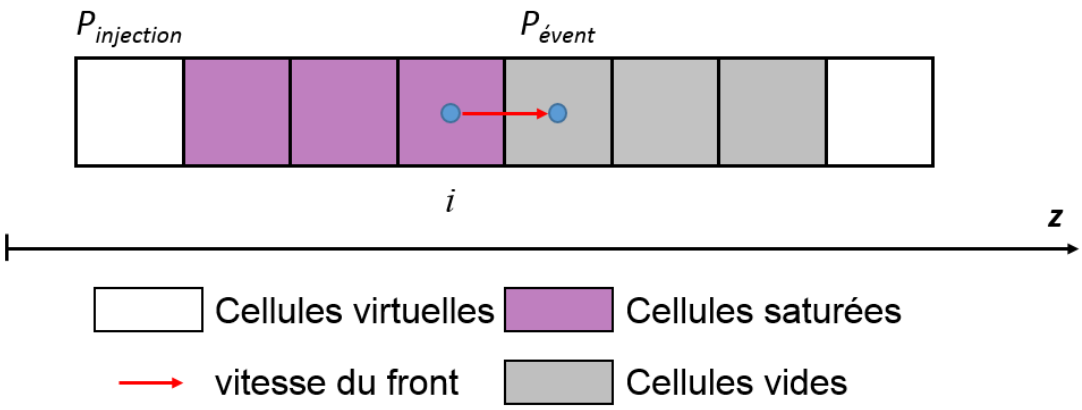


Figure 4.3 Position de la vitesse du front calculée lors du remplissage

Une fois la vitesse du front déterminée, il faut calculer le pas de temps durant lequel cette vitesse est appliquée.

Calcul du pas de temps

Le pas de temps durant lequel la vitesse du front est vérifiée n'est pas connu. L'écoulement étant considéré stationnaire, on suppose que la vitesse du front reste la même suffisamment longtemps pour remplir la cellule vide en avant du front. Ainsi Δt correspond au pas de temps qui permet au débit de fluide, calculé en utilisant la vitesse du front à travers la face de la cellule, de remplir la cellule vide suivante. Le volume disponible de la cellule en avant du front et la matrice de position du front saturé sont mis à jour. Il est alors possible de calculer une nouvelle distribution de pression dans le nouveau domaine saturé. Cette stratégie de remplissage permet de faire avancer le front de fluide à chaque itération de calcul. Il est maintenant nécessaire d'étudier des cas simples afin de valider le code de calcul.

4.3.4 Validation du modèle unidimensionnel

Afin de valider le comportement du code dans le cas unidimensionnel, un domaine simple composé de 25 cellules réelles et 2 cellules virtuelles est utilisé. Dans un premier temps, deux tests sont réalisés, à pression et débit imposés. Dans chaque essai la perméabilité est $6{,}98 \times 10^{-12}$ m^2dans tout le domaine, puis la conservation de la masse sera vérifiée quand les perméabilités sont différentes dans chacune des cellules du domaine.

Mesure de perméabilité

L'écoulement est simulé à une pression d'injection imposée $P_{injection}$ = 10^5 Pa. Le fluide a une viscosité μ = 0,0035 Pa.s (comparable au jus de raisin). Il est possible de comparer la position du front numérique z en fonction du temps avec la solution analytique du problème d'injection à pression imposée donnée par la formule suivante [30]:

$$z = \sqrt{\left(\frac{2K_{zz}(P_{injection} - P_{évent})}{\mu \phi} \right) t} \tag{4.10}$$

où K_{zz} est la perméabilité globale du domaine, $P_{évent}$ est la pression à l'évent et t le temps. La position du front d'écoulement calculée en fonction du temps correspond à la solution analytique tracée sur la Figure 4.4. On a donc vérifié que la condition imposée au port d'injection permet de simuler des écoulements à pression imposée.

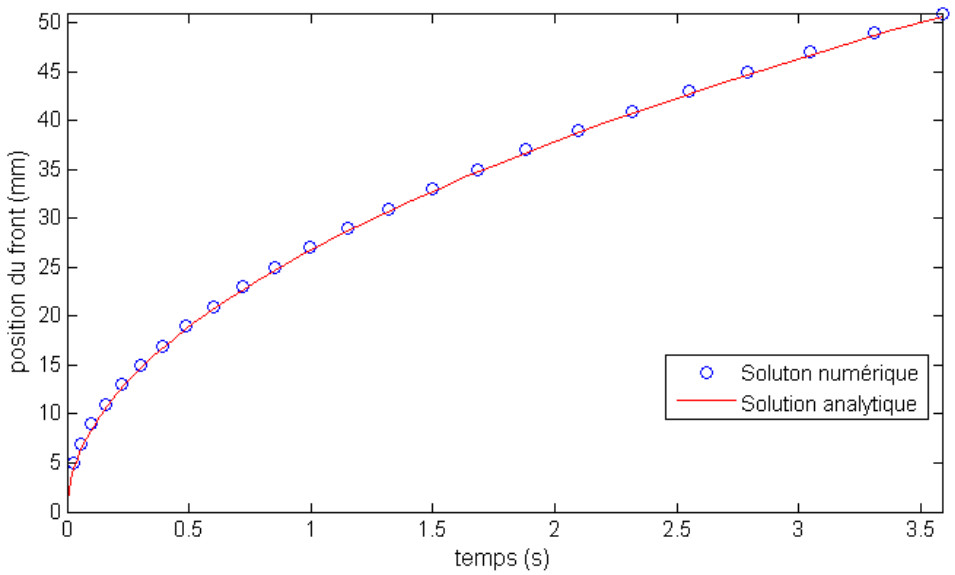


Figure 4.4 Positions du front en fonction du temps obtenus numériquement et analytiquement pour un domaine 1D avec des cellules de même perméabilité dans le cas d'une injection à pression imposée

Cas du débit imposé

L'écoulement est simulé avec une vitesse d'injection $v_{z,injection}$ = 40 mm/s. Il est possible de tracer la position du front en fonction du temps grâce à la formule analytique suivante [31]:

$$z = \frac{v_{z,injection}}{\phi} t \tag{4.11}$$

où z est la position du front de fluide, ϕ est le taux porosité et t le temps. La vitesse du front obtenue numériquement est présentée sur la Figure 4.5. Tel qu'attendu, la vitesse du front reste constante durant le remplissage.

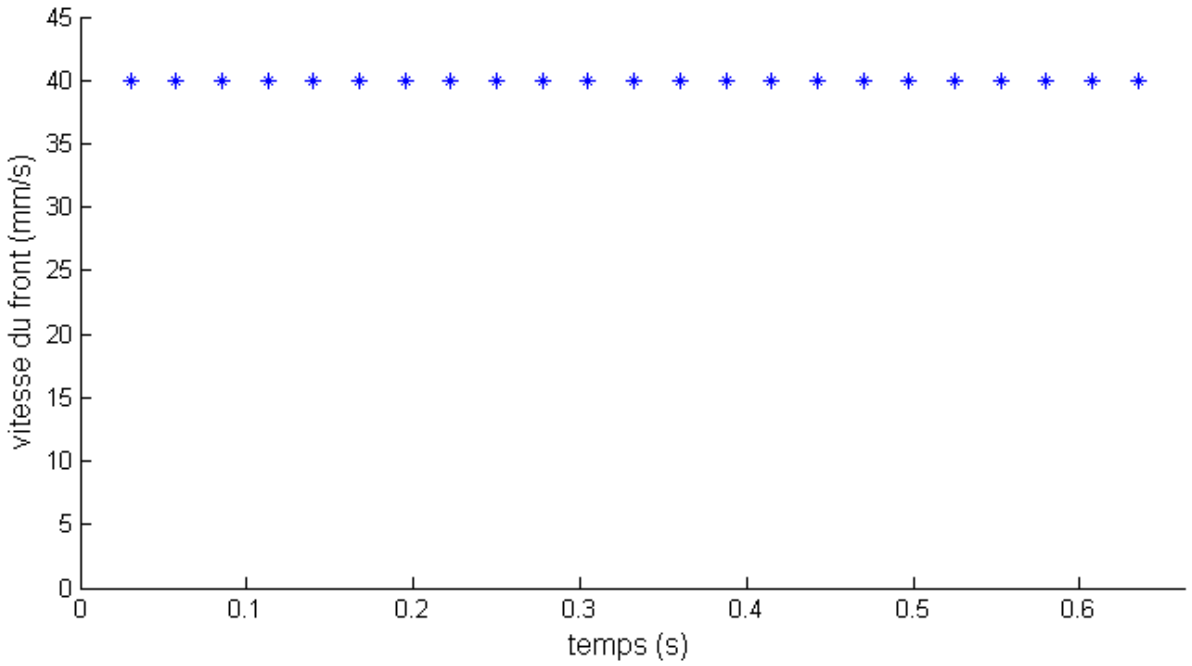


Figure 4.5 Vitesse du front obtenue numériquement pour un domaine 1D avec des cellules de même perméabilité dans un cas d'injection à débit imposé

La position du front obtenue numériquement est comparée avec la solution analytique sur la Figure 4.6. On a donc vérifié que la condition imposé au port d'injection permet de simuler des écoulements à débit imposé.

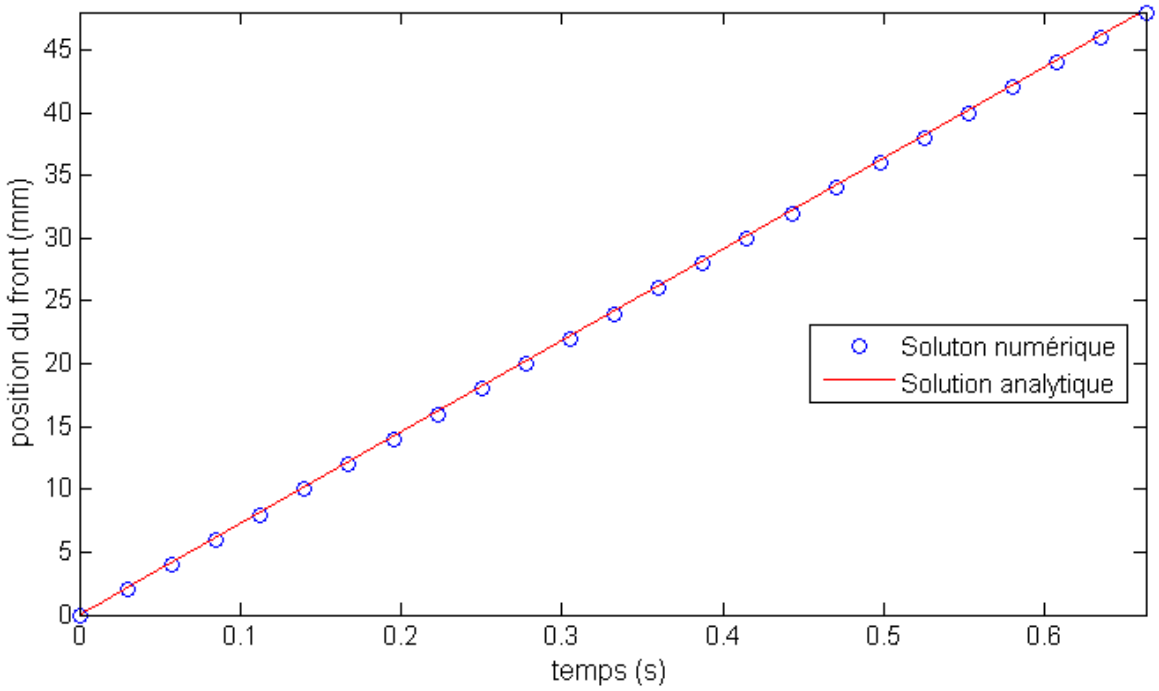


Figure 4.6 Positions du front obtenues numériquement et analytiquement sur un domaine 1D avec des cellules de même perméabilité dans un cas d'injection à débit imposé

Conservation de la masse

Le code de remplissage de moule, développé doit aussi vérifier la conservation de la masse du fluide entré dans le domaine au port d'injection et utilisé en avant du front à chaque itération. Cette démarche de validation est appliquée au domaine cellulaire présenté à la Figure 4.7. Il est constitué de 25 cellules réelles avec une perméabilité longitudinale variable. Les variations de perméabilité sont représentées à l'aide de l'échelle de couleur à droite de la figure.

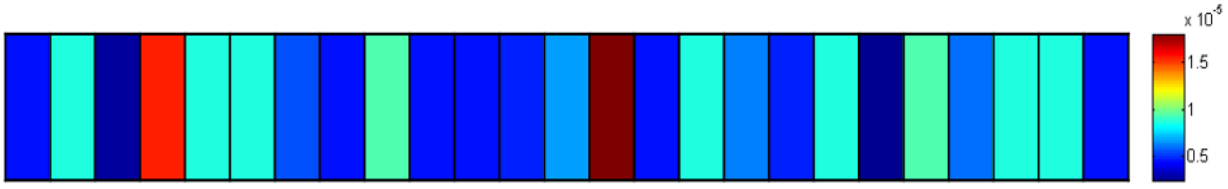


Figure 4.7 Domaine cellulaire unidimensionnel avec une distribution discontinue de perméabilités (mm^2)

La simulation est réalisée avec une pression au bord d'injection de 10^5 Pa et une valeur nulle de la pression à l'évent. La Figure 4.8 présente la distribution de pression à chaque pas de calcul lors du remplissage du domaine unidimensionnel. Plus le domaine est rempli, plus l'indice de la dernière cellule remplie est grand. Il faut noter que la pression varie le long du domaine en concordance avec la variation de perméabilité. Ces variations sont liées au caractère discontinu du domaine. Ainsi une grande variation de perméabilité entre deux cellules consécutives va engendrer un brusque changement du gradient de pression. C'est ce comportement de la pression lors de la résolution des équations qui garantit la conservation de la masse dans l'écoulement.

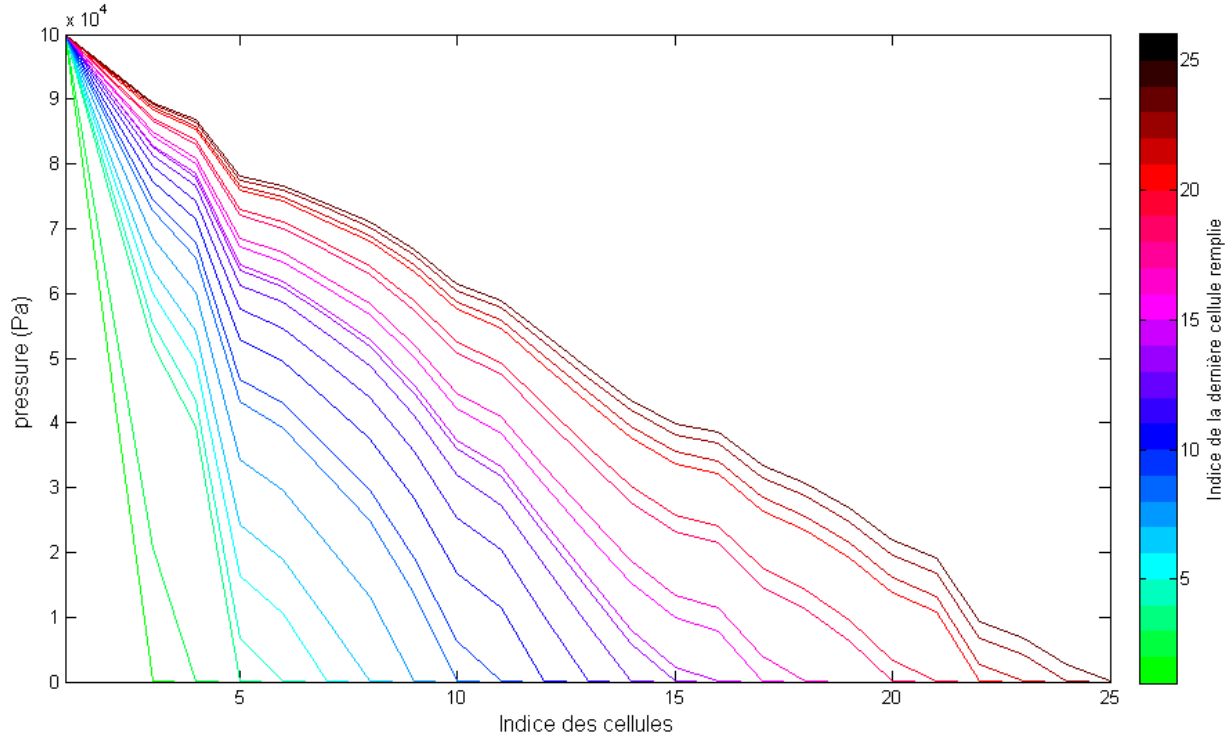


Figure 4.8 Courbes de pression en fonction de l'indice de la dernière cellule remplie lors du remplissage du domaine unidimensionnel à perméabilités variables

Lors de la simulation numérique, le volume de liquide utilisé en avant du front et le volume injecté sont enregistrés. La Figure 4.9 présente ces deux volumes en fonction du temps, correspondent au cours du remplissage. La masse de liquide est donc bien conservée dans la solution du problème à frontière libre. On peut donc maintenant généraliser cette approche au cas d'un écoulement tridimensionnel.

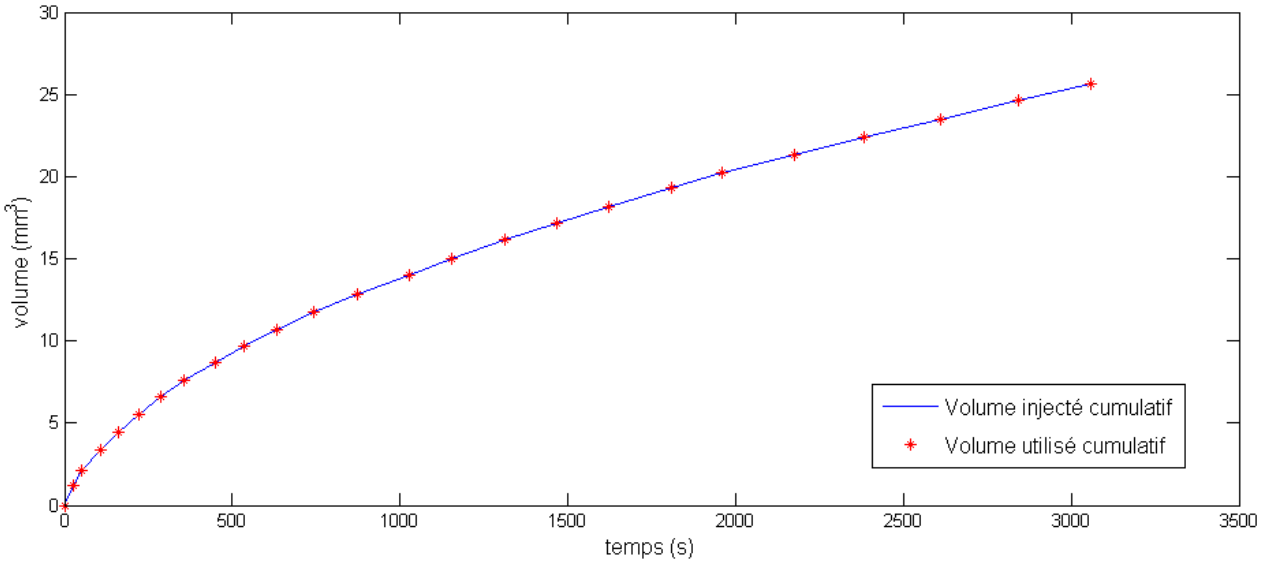


Figure 4.9 Comparaison des volumes de fluide injecté et utilisé en avant du front lors du remplissage du domaine de perméabilités variable

4.4 Simulation numérique des écoulements dans le cas tridimensionnel

L'équation (4.3) qui régit l'écoulement est obtenue de la même manière que dans le cas 1D. Elle sera résolue en pression par la méthode des différences finies. Le domaine étudié est discrétisé selon le modèle cellulaire tridimensionnel décrit dans le Chapitre 3. Il permet d'obtenir une grille 3D régulière qui représente l'intégralité du renfort étudié. Cette grille forme un ensemble de cellules qui possède une série de propriétés (voir Chapitre 3). Des cellules virtuelles sans réalité physique sont ajoutées autour du domaine afin de simplifier la formulation du schéma de calcul par différences finies. Ces cellules virtuelles permettent de définir les différentes conditions aux limites du problème. La Figure 4.10 présente un exemple de domaine avec ses cellules virtuelles. Noter que par souci de clarté, cet exemple est bidimensionnel même si le code développé est tridimensionnel. Des cercles indiquent le centre des cellules virtuelles alors que des points sont situés à l'intérieur des cellules qui discrétisent le renfort.

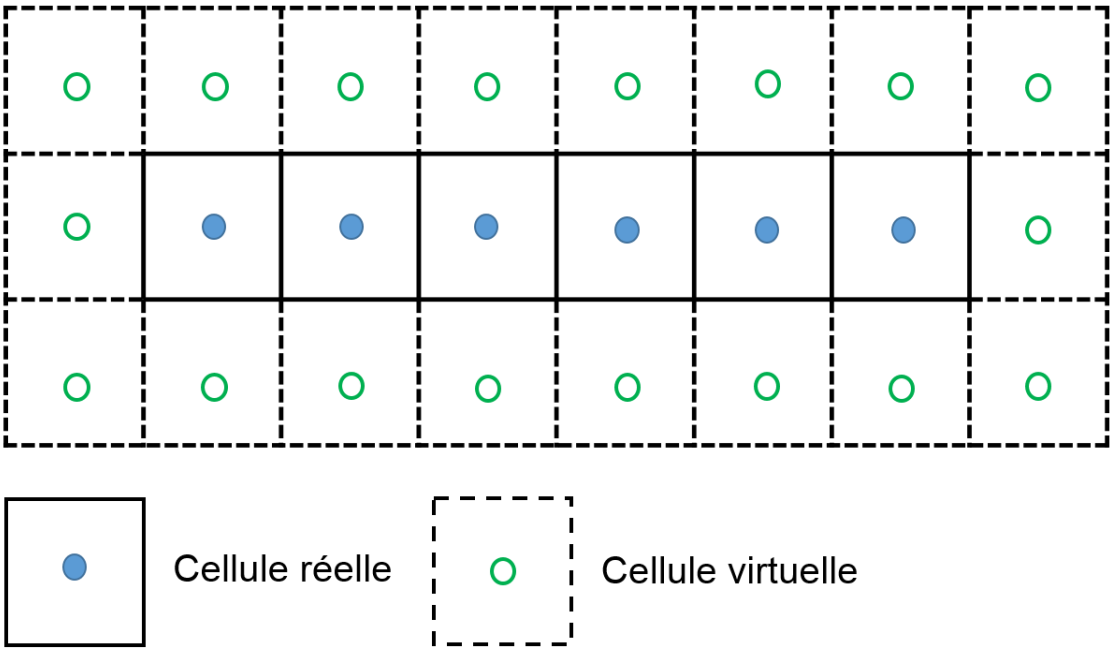


Figure 4.10 Exemple de domaine de calcul cellulaire bidimensionnel composé de cellules virtuelles et réelles

Dans un premier temps la méthode de résolution du problème de la section 4.3.1 est généralisée au cas 3D, puis les différentes conditions aux limites sont développées aux cellules virtuelles. La stratégie de remplissage est ensuite généralisée au cas 3D. Enfin, un certain nombre de cas de validation seront traités.

4.4.1 Développement numérique du modèle tridimensionnel

La méthode présentée dans la section 4.3.1 peut être généralisée au cas tridimensionnel. La vitesse est alors liée au champ de pression par le biais d'une matrice de perméabilité. Dans la notation utilisée, l'indice i indexe la direction x, j la direction y et k la direction z. La loi de Darcy discrétisée par différences finies s'écrit sous la forme suivante (voir détail des calculs à l'annexe annexe dD) :

$$\vec{v} = -\frac{\boldsymbol{K}}{\mu}\vec{\nabla}P$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} v_x(i,j,k) \\ v_y(i,j,k) \\ v_z(i,j,k) \end{pmatrix} = -\frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} \frac{K_{xx}}{D_x}P(i+1,j,k)+\frac{K_{xy}}{D_y}P(i,j+1,k)+\frac{K_{xz}}{D_z}P(i,j,k+1)-\left(\frac{K_{xx}}{D_x}+\frac{K_{xy}}{D_y}+\frac{K_{xz}}{D_z}\right)P(i,j,k) \\ \frac{K_{yx}}{D_x}P(i+1,j,k)+\frac{K_{yy}}{D_y}P(i,j+1,k)+\frac{K_{yz}}{D_z}P(i,j,k+1)-\left(\frac{K_{yx}}{D_x}+\frac{K_{yy}}{D_y}+\frac{K_{yz}}{D_z}\right)P(i,j,k) \\ \frac{K_{zx}}{D_x}P(i+1,j,k)+\frac{K_{zy}}{D_y}P(i,j+1,k)+\frac{K_{zz}}{D_z}P(i,j,k+1)-\left(\frac{K_{zx}}{D_x}+\frac{K_{zy}}{D_y}+\frac{K_{zz}}{D_z}\right)P(i,j,k) \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

où $\boldsymbol{K}$ est la matrice de perméabilité de la cellule *i,j,k.* Le même genre de discrétisation est utilisé pour la loi de conservation de la masse :

$$\vec{\nabla}.\vec{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{4.13}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{v_x(i,j,k)-v_x(i-1,j,k)}{D_x}+\frac{v_y(i,j,k)-v_y(i,j-1,k)}{D_y}+\frac{v_z(i,j,k)-v_z(i,j,k-1)}{D_z} = 0$$

Pour simplifier les notations lors de la substitution des vitesses dans l'équation (4.13), il est associé aux coefficients du tenseur de perméabilité une lettre en indice. Cette dernière dépend des indexes de chaque vitesse. Les correspondances sont les suivantes :

4. (i-1, j, k): w pour « west »
5. (i, j-1, k): u pour « up »
6. (i, j, k-1): s pour « south »
7. (i, j, k): aucune lettre n'est ajoutée

La combinaison des deux formulations précédentes donne l'équation qui régit le système à une position (i,j,k) donnée :

$$\begin{pmatrix} \frac{K_{zx,s}}{D_xD_z}+\frac{K_{zy,s}}{D_yD_z}+\frac{K_{zz,s}}{D_z^2} \\ -\frac{K_{zx,s}}{D_xD_z} \\ -\frac{K_{zy,s}}{D_yD_z} \\ \frac{K_{yx,u}}{D_xD_y}+\frac{K_{yy,u}}{D_y^2}+\frac{K_{yz,u}}{D_zD_y} \\ -\frac{K_{yx,u}}{D_xD_y} \\ \frac{K_{xx,w}}{D_x^2}+\frac{K_{xy,w}}{D_yD_x}+\frac{K_{xz,w}}{D_zD_x} \\ -\left(\frac{K_{xx}}{D_x^2}+\frac{K_{xy}}{D_yD_x}+\frac{K_{xz}}{D_zD_x}\right)-\left(\frac{K_{yz}}{D_xD_y}+\frac{K_{yy}}{D_y^2}+\frac{K_{yz}}{D_zD_y}\right)-\left(\frac{K_{zx}}{D_xD_z}+\frac{K_{zy}}{D_yD_z}+\frac{K_{zz}}{D_z^2}\right)-\frac{K_{xx,w}}{D_x^2}-\frac{K_{yy,u}}{D_y^2}-\frac{K_{zz,s}}{D_z^2} \\ \frac{K_{xx}}{D_x^2}+\frac{K_{zx}}{D_xD_z}+\frac{K_{yx}}{D_xD_y} \\ -\frac{K_{xy,w}}{D_yD_x} \\ \frac{K_{yy}}{D_y^2}+\frac{K_{zy}}{D_yD_z}+\frac{K_{xy}}{D_yD_x} \\ -\frac{K_{yz,u}}{D_zD_y} \\ -\frac{K_{xz,w}}{D_zD_x} \\ \frac{K_{xz}}{D_zD_x}+\frac{K_{yz}}{D_zD_y}+\frac{K_{zz}}{D_z^2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P(i,j,k-1) \\ P(i+1,j,k-1) \\ P(i,j+1,k-1) \\ P(i,j-1,k) \\ P(i+1,j-1,k) \\ P(i-1,j,k) \\ P(i,j,k) \\ P(i+1,j,k) \\ P(i-1,j+1,k) \\ P(i,j+1,k) \\ P(i,j-1,k+1) \\ P(i-1,j,k+1) \\ P(i,j,k+1) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.14)$$

Il s'agit d'une formulation tridimensionnelle qui tient compte de l'ensemble des conditions de perméabilité des cellules situées autour de la cellule (*i,j,k*) considérée. Pour chaque cellule du domaine saturé, une équation matricielle semblable à celle de l'équation (4.14) peut être écrite. Un certain nombre de conditions aux limites sont nécessaires pour fixer la pression ou le débit dans les cellules virtuelles. Le champ de pression dans le domaine saturé est obtenu en inversant la matrice assemblée à partir des équations de chaque cellule saturée. La taille du domaine saturé, et par conséquent celle de la matrice assemblée, augmentent à chaque incrément de calcul au fur et à mesure du remplissage.

4.4.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites dans le cas 3D permettent de simuler les différentes conditions d'injection comme dans le cas 1D de débit ou débit. Elles permettent en outre d'annuler les vitesses normales dans les cellules en bordure du domaine réel. Toutes ces conditions sont réalisées en agissant sur les pressions des cellules virtuelles. La Figure 4.12 présente le schéma d'un domaine

2D à un instant donné. Il faut noter que le port d'injection et le front d'écoulement sont étendus aux cellules virtuelles voisines.

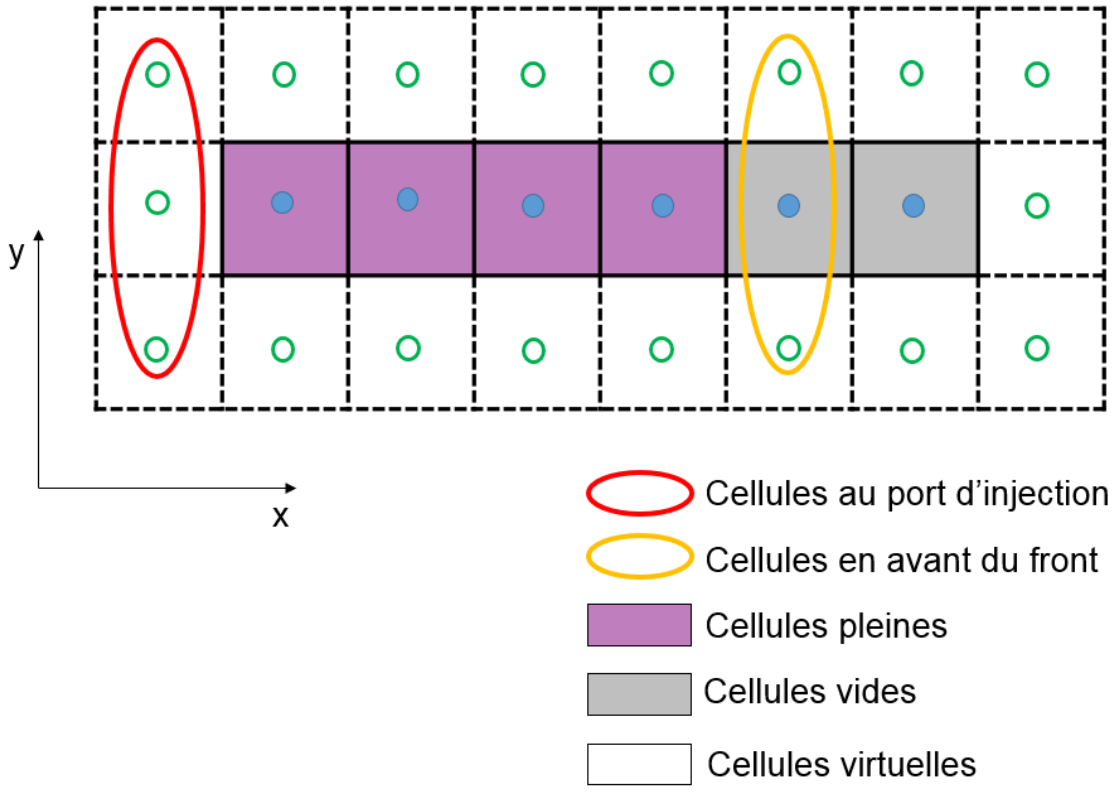


Figure 4.11 Schéma d'un domaine bidimensionnel à un instant *t*

Conditions de pression imposée

La pression au port d'injection est imposée de la même manière que dans le cas 1D. La condition à fixer est la valeur de la pression sur l'ensemble des cellules du port d'injection. La condition imposée sur les cellules en avant du front d'écoulement est la même que dans le cas 1D. La valeur utilisée est 0 bar. Rappelons enfin que les conditions aux limites sur le front se déplacent avec l'avancement du liquide au cours du remplissage du domaine.

Conditions de débit imposé

Dans le cas de l'écoulement à débit imposé, il faut fixer la vitesse des cellules au port d'injection. La pression de chaque cellule du port d'injection est imposée à l'aide de la même formulation que dans le cas 1D :

$$
\begin{aligned}
& v_{z,injection} = -\frac{K_{réelle}}{\mu}\frac{dP}{dz} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{v_{z,injection}.\mu}{K_{réelle}} = -\frac{P_{réelle} - P_{injection}}{D_z} \\
\Leftrightarrow \quad & P_{injection} - P_{réelle} = \frac{v_{z,injection}\mu D_z}{K_{réelle}} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{injection} \\ P_{réelle} \end{pmatrix} = \frac{v_{z,injection}\mu D_z}{K_{réelle}}
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

La condition à imposer pour la pression sur le front d'écoulement est semblable au cas 1D. La valeur généralement utilisée est 0 bar ou 0.1 Pa dans le cas de problèmes numériques.

Conditions limites sur les faces du domaine

Au bord du domaine des conditions sont ajoutées pour tenir compte du fait que les parois de la cavité sont imperméables. Ainsi la composante de la vitesse orthogonale à la surface extérieure du domaine réel est nulle. Si la normale à la surface est notée $\vec{n}$, cette condition ce traduit par :

$$\vec{v}.\vec{n} = 0 \tag{4.16}$$

En utilisant la loi de Darcy, il vient :

$$
\begin{pmatrix} K_{xx}\nabla P_x + K_{xy}\nabla P_y + K_{xz}\nabla P_z \\ K_{yx}\nabla P_x + K_{yy}\nabla P_y + K_{yz}\nabla P_z \\ K_{zx}\nabla P_x + K_{zy}\nabla P_y + K_{zz}\nabla P_z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = 0 \tag{4.17}
$$

Avec l'ensemble des *K* les coefficients de la matrice de perméabilité des cellules réelles. Dans certains cas la matrice de perméabilité des cellules est diagonale. C'est le cas pour les tissus du type NCF. Il est alors possible de simplifier encore cette équation qui devient :

$$
\begin{pmatrix} \nabla P_x \\ \nabla P_y \\ \nabla P_z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = 0 \tag{4.18}
$$

Cette condition implique que le long de la direction orthogonale à la surface la composante normale du gradient de pression est nulle au bord du domaine réel. Il s'agit d'une condition de Neumann. La valeur de la pression au nœud dans la cellule virtuelle est la même que celle du nœud dans la cellule du domaine réel dans une direction normale à la surface. La Figure 4.12 présente un exemple

de domaine 2D et considère une cellule réelle et une cellule virtuelle pour définir une condition de Neumann. Dans ce cas la condition de Neumann s'écrit :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \tag{4.19}$$

En utilisant un schéma de différence finie arrière, la condition imposée à la pression de la cellule virtuelle est :

$$P_{virtuelle} - P_{réelle} = 0 \tag{4.20}$$

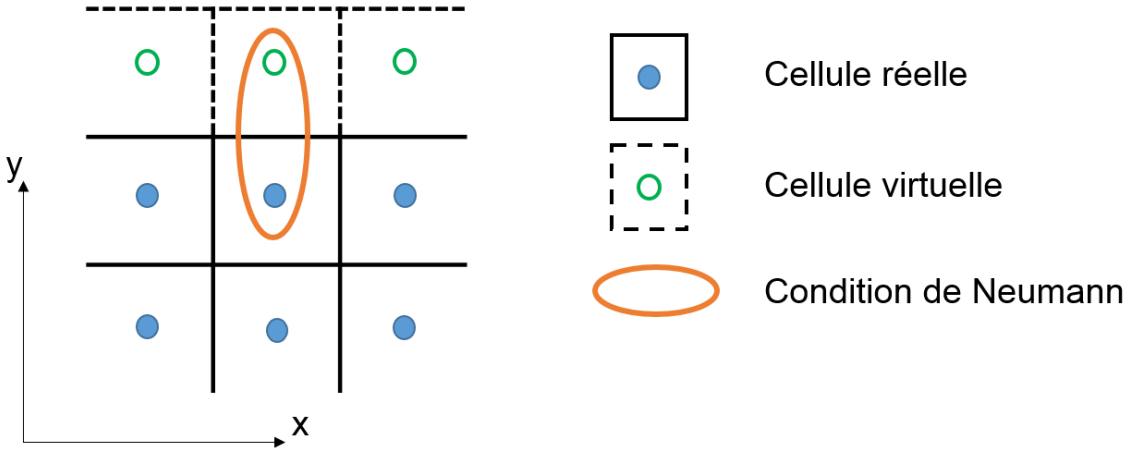


Figure 4.12 Exemple d'imposition d'une condition de Neumann dans la direction y pour des cellules avec une matrice de perméabilité diagonale

Dans le cas où la matrice de perméabilité des cellules n'est pas diagonale, il n'est pas possible de simplifier la condition de vitesse nulle. Il faut alors tenir compte du gradient de pression dans les trois directions de l'espace pour la cellule considérée. Ils sont indicés respectivement *x*, *y* et *z* pour chaque direction de l'espace. Ainsi la condition $v_y=0$ de l'exemple précédent développée avec un schéma de différences finies avant devient :

$$K_{yx}\nabla P_x + K_{yy}\nabla P_y + K_{yz}\nabla P_z = 0$$

$$\Leftrightarrow K_{yx}\frac{P(i+1,j,k)-P(i,j,k)}{Dx} + K_{yy}\frac{P(i,j+1,k)-P(i,j,k)}{Dy} + K_{yz}\frac{P(i,j,k+1)-P(i,j,k)}{Dz} = 0$$

$$\Leftrightarrow P(i+1,j,k)\frac{K_{yx}}{Dx} + P(i,j+1,k)\frac{K_{yy}}{Dy} + P(i,j,k+1)\frac{K_{yz}}{Dz} - P(i,j,k)\left(\frac{K_{yx}}{Dx} + \frac{K_{yy}}{Dy} + \frac{K_{yz}}{Dz}\right) = 0 \quad (4.21)$$

Ainsi la condition limite de débit nul devient plus difficile à respecter à cause des termes de la matrice de perméabilité hors diagonale. L'ensemble de ces conditions aux limites permet la résolution du système linéaire. La distribution de pression est donc connue à chaque instant, ce qui permet de calculer les vitesses du front et d'ultimement remplir le domaine.

4.4.3 Stratégie de remplissage

La stratégie de remplissage dans le cas 3D est semblable à celle du cas 1D. Le code de calcul remplit chacune des cellules non saturées ou vides en avant du front de cellules saturées. Une cellule sera considérée comme non saturée, si elle partiellement remplie. Pour effectuer un remplissage, un champ de pression est considéré sur le domaine obtenu après résolution du système matriciel qui tient compte des différentes conditions aux limites. Pour chaque cellule, les vitesses dans les trois directions de l'espace sont utilisées. Le pas de temps pendant lequel le gradient de pression est calculé permet d'obtenir le nouveau volume de fluide qui contribue à remplir le domaine de calcul en avant du front saturé. Ce volume est légèrement surévalué et réparti en avant du front afin d'autoriser éventuellement un remplissage par excès. Les conditions aux limites à l'évent sont déplacées et la taille du domaine de calcul augmente. Ainsi, un nouveau gradient de pression peut être calculé par résolution du nouveau système matriciel qui tient compte du nouveau domaine de calcul saturé défini. Dans un premier temps, le calcul des vitesses sera présenté, puis le calcul du pas de temps et enfin la gestion du remplissage par excès.

Calcul des vitesses

Pour chaque cellule saturée du front de fluide, trois vitesses sont calculées pour remplir la partie non saturée en avant du front. Le calcul des vitesses est effectué avec la loi de Darcy en utilisant un schéma de différences finies avant. Soit (i,j,k) les indices de la cellule considérée. Alors le champ de vitesse est obtenu par la formule suivante :

$$\vec{v}(i,j,k) = -\frac{1}{\mu}\boldsymbol{K}(i,j,k)\begin{pmatrix} \dfrac{P(i+1,j,k)-P(i,j,k)}{Dx} \\ \dfrac{P(i,j+1,k)-P(i,j,k)}{Dy} \\ \dfrac{P(i,j,k+1)-P(i,j,k)}{Dz} \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

où μ est la viscosité du fluide, $\boldsymbol{K}(i,j,k)$ est la matrice de perméabilité de la cellule considérée et P la pression. La Figure 4.13 présente un exemple bidimensionnel. Les vitesses calculées au début du remplissage sont représentées avec des flèches rouges. Selon la configuration du remplissage, l'intégralité des vitesses n'est pas nécessaire. Si une cellule a une face commune avec une cellule pleine, alors la vitesse de fluide entre ces deux cellules dans la direction normale à cette surface sera nulle.

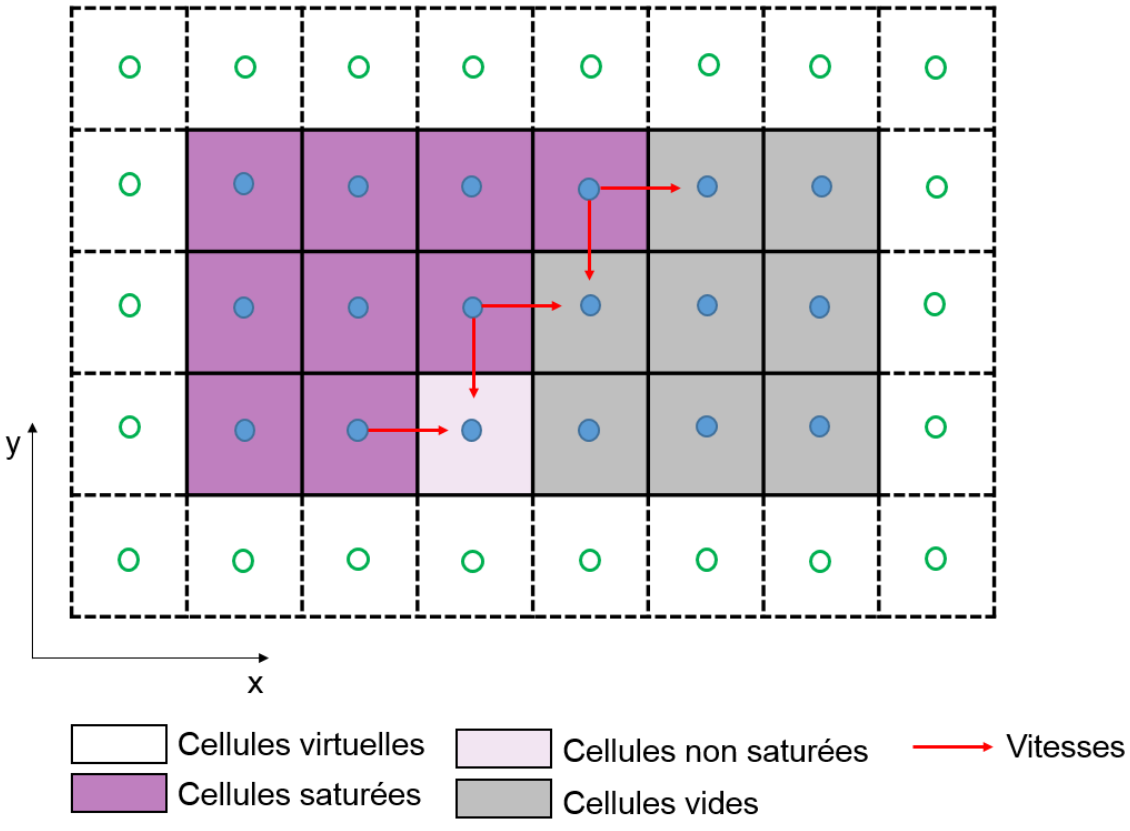


Figure 4.13 Schéma d'une configuration de remplissage d'un domaine bidimensionnel

Calcul du pas de temps

Le pas de temps durant lequel le champ des vitesses courant est vérifié n'est pas connu. L'écoulement étant considéré stationnaire, il est postulé que la configuration des vitesses reste la même suffisamment longtemps pour remplir complètement une cellule en avant du front saturé. La recherche du pas de temps Δt utilisé s'effectue sur toute la partie du domaine contenant des cellules saturées qui possèdent des cellules voisines vides ou non saturées. Il correspond au temps minimal pour remplir au moins une cellule vide ou non saturée avec le débit de fluide des cellules adjacentes. Le débit de fluide est calculé en utilisant la vitesse de fluide entre deux cellules voisine et l'aire de leur face mitoyenne.

La Figure 4.14 donne un exemple de configuration tridimensionnelle. Dans le domaine, seules les cellules réelles et saturées sont représentées. Une matrice bidimensionnelle contient le nombre de cellules du front saturé pour chaque position (i,j) dans une section verticale du domaine. Dans l'exemple présenté ici, les dimensions de cette matrice sont quatre par trois. Sa valeur minimale est deux, et sa valeur maximale huit. L'algorithme recherche le pas de temps minimal tranche par tranche. À la tranche 2 ($k=2$), le temps de remplissage de toutes les cellules vides voisines est calculé à partir des vitesses de chaque cellule. Le temps minimal pour remplir une cellule est noté dans un vecteur. Ensuite la tranche suivante ($k=3$) est traitée de la même manière jusqu'à la dernière tranche ($k=9$ car la tranche huit remplit la neuf). Finalement le temps Δt donné est le minimum de l'ensemble des temps minimaux notés.

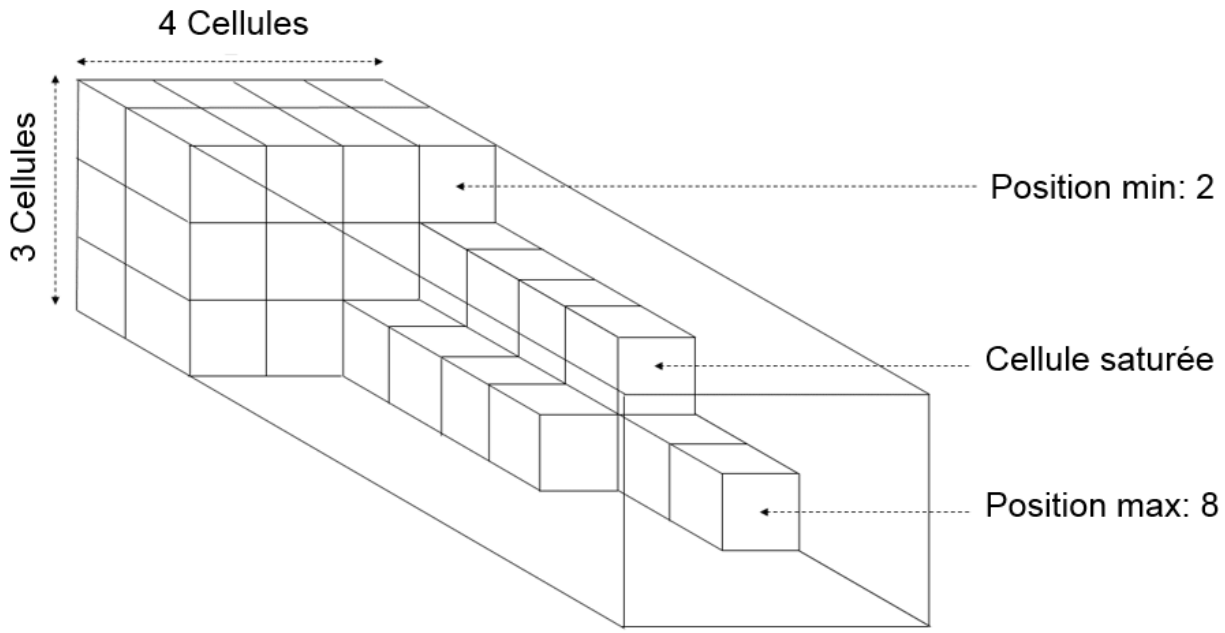


Figure 4.14 Schéma d'un domaine de calcul saturé 3D, seules les cellules réelles sont représentées

La valeur de l'incrément de temps Δt obtenue est multipliée par 1.1 (coefficient réglable) pour autoriser un remplissage par excès des cellules. Cette méthode accélère le remplissage sans modifier de manière notable la mécanique de l'écoulement. Enfin, pour l'ensemble des cellules du domaine non saturé, le volume de liquide qui remplit ces cellules est calculé. Le volume disponible de chaque cellule est mis à jour et les matrices des positions du front saturé et non saturé sont actualisées. Il est alors possible que des cellules aient des volumes disponibles négatifs.

Gestion du remplissage par excès

La définition du pas de temps à l'aide du coefficient multiplicateur peut entrainer un remplissage par excès de certaines cellules (volume disponible négatif). Le volume de liquide en trop est alors redistribué de manière proportionnelle aux surfaces de contact de la cellule remplie par excès avec l'ensemble des cellules voisines disponibles. Cette approche est décrite dans l'article de Trochu et al. [32]. Dans le cas simplifié de la Figure 4.15, la cellule la plus foncée est sur-remplie, les surfaces A_1, A_2 et A_3 sont les seules faces en contact avec des cellules vides.

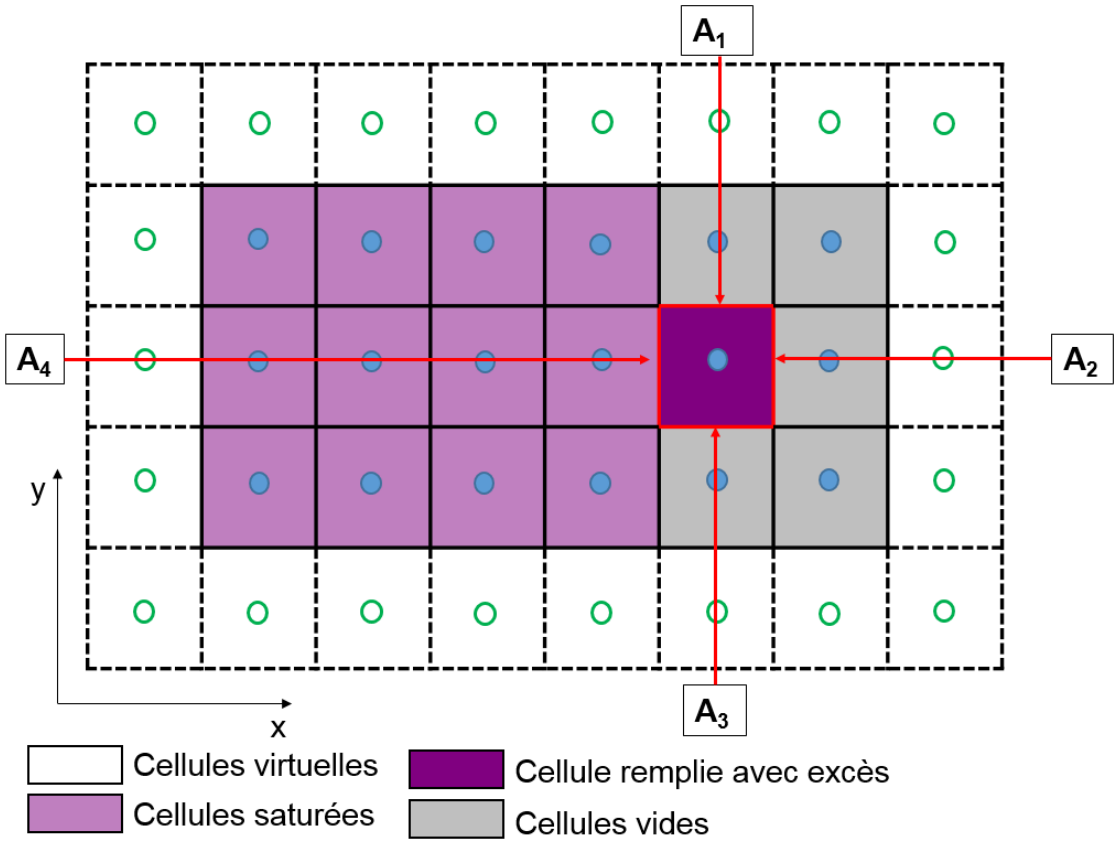


Figure 4.15 Cas simplifié bidimensionnel de remplissage par excès d'une cellule

Le pourcentage de fluide qui va être déversé dans la cellule qui a la surface en commun A_i, $1 \leq i \leq 3$ avec la cellule foncée est :

$$\frac{A_i}{A_1 + A_2 + A_3} \tag{4.23}$$

De cette manière, le fluide en excès est déversé dans les cellules voisines comme le montre la Figure 4.16. Le processus de remplissage peut ainsi être accéléré. L'ensemble des variables va ainsi être mis à jour ainsi que la matrice des positions du front.

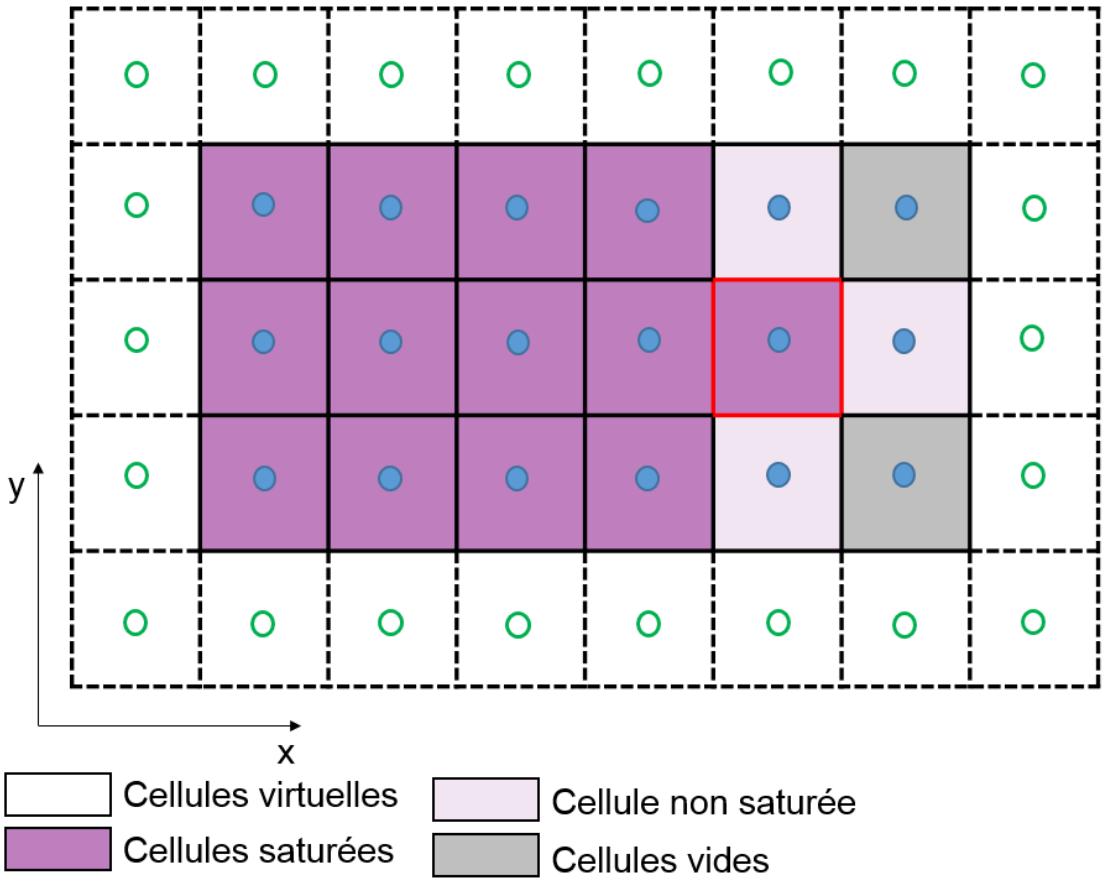


Figure 4.16 Cas simplifié bidimensionnel après gestion du remplissage par excès d'une cellule

Il faut maintenant valider si le présent modèle d'écoulement permet de reproduire un phénomène de remplissage 3D dans les cas d'une injection à débit ou pression imposée.

4.4.4 Validation du modèle tridimensionnel

Le comportement du code est étudié dans le cas du débit et de la pression imposés dans un domaine tridimensionnel. La conservation de la masse est vérifiée pour un domaine 3D dans lequel la matrice de perméabilité de chaque cellule est variable. La stratégie utilisée est semblable à cellule du cas 1D.

Mesure de la perméabilité

Le cas étudié pour valider la condition de pression imposée au bord d'injection est celui d'un domaine constitué d'une couche de cellules (voir Figure 4.17). Les dimensions du domaine sont de 50 x 200 cellules.

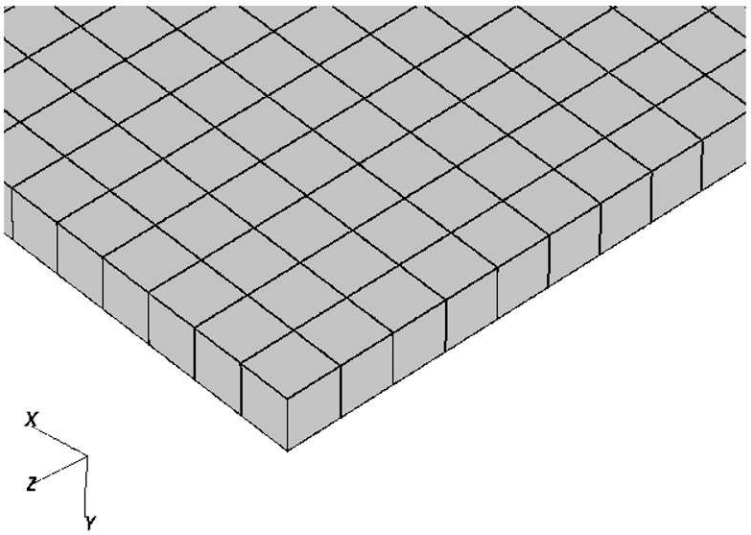


Figure 4.17 Domaine cellulaire étudié dans le cas de la pression imposée

À chaque cellule du domaine est associé un taux de fibres $V_f = 0.45$ ($V_f = 1 - \phi$) dans la direction z et une matrice de perméabilité $\boldsymbol{K}$ calculée à l'aide des formules analytiques de Gebart [29].

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 1,4823 & 0 & 0 \\ 0 & 1,4823 & 0 \\ 0 & 0 & 6,9759 \end{pmatrix} \text{x}10^{-12} m^2 \tag{4.24}$$

L'écoulement se fait à pression imposée de 10^5 Pa dans la direction z. Le fluide utilisé a une viscosité de 0,0035 Pa.s. Il est possible de comparer de la même manière que dans le cas 1D la position du front numérique en fonction du temps avec la solution analytique donné par la formule suivante [30] :

$$z = \sqrt{\left(\frac{2K_{zz}(P_{injection} - P_{évent})}{\mu\phi} \right) t} \tag{4.25}$$

où K_{zz} est la valeur de perméabilité dans le sens de l'écoulement. La valeur de K_{zz} peut être identifiée sur la courbe représentative du front de fluide en fonction du temps.

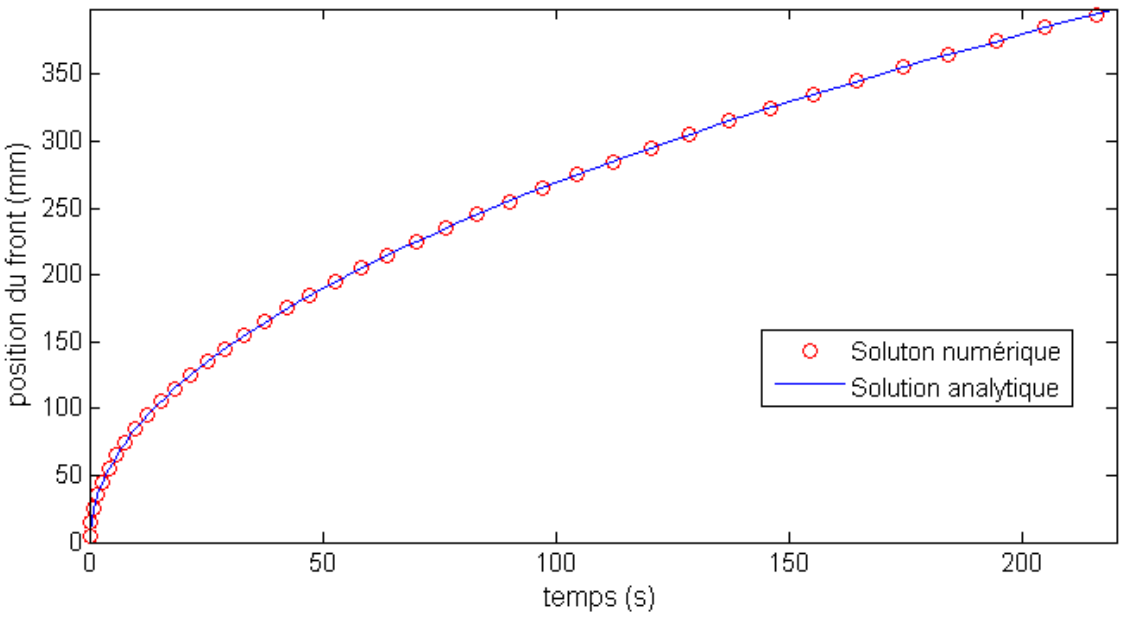


Figure 4.18 Évolution de la position du front lors de la mesure de perméabilité dans le cas d'un domaine 3D

La valeur de perméabilité identifiée K_{zz} est 6,9748x10^{-12} m^2, qui correspond bien à la perméabilité du domaine dans la direction z. En effet, la Figure 4.18 montre que la courbe analytique suit parfaitement la courbe numérique. La courbe analytique est obtenue en utilisant la formule (4.25) avec la valeur de K_{zz} identifiée à l'aide des valeurs de la position du front numérique en fonction du temps. Comme attendu, la distribution de pression varie linéairement de la valeur de pression d'injection à la valeur de pression à l'évent comme le montre la Figure 4.19. Ainsi les conditions aux limites du domaine permettent de simuler un écoulement de remplissage à pression imposée et de mesurer la perméabilité du domaine.

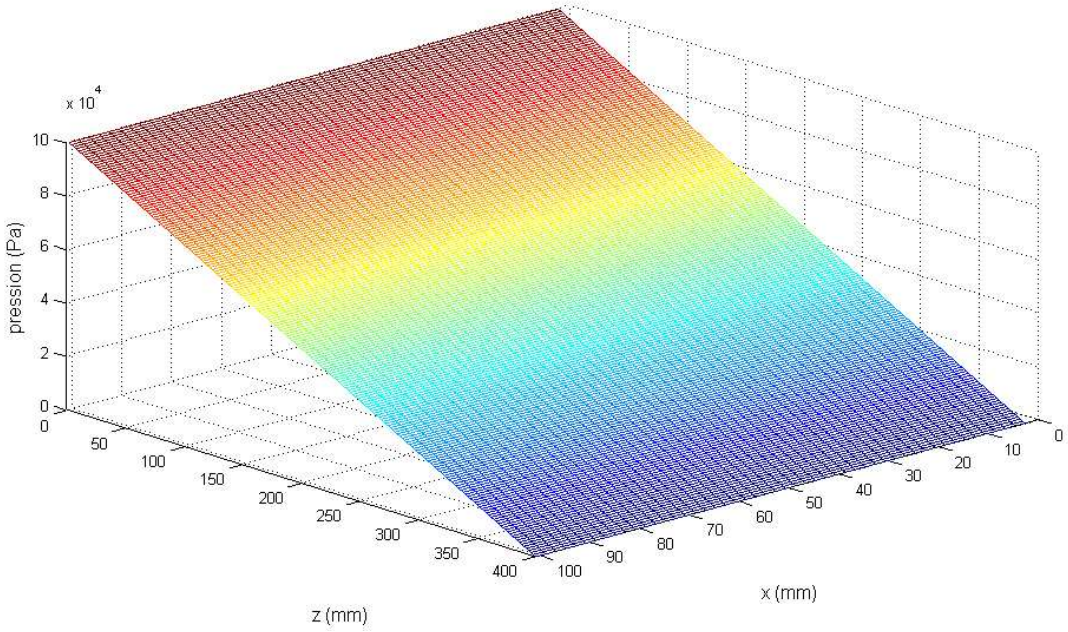


Figure 4.19 Distribution du champ de pression dans le domaine de calcul à la fin de l'écoulement de remplissage unidirectionnel d'une cavité rectangulaire

Cas du débit imposé

Une vitesse d'injection $v_{z,injection}$ de 40 mm/s est choisie et imposée au port d'injection du modèle. Il est possible de tracer la position du front en fonction du temps grâce à la formule analytique suivante :

$$z = \frac{v_{z,injection}}{\phi} t \tag{4.26}$$

Où z est la position du front d'écoulement, ϕ le taux porosité et t le temps. La vitesse du front prédite par la simulation est présentée à la Figure 4.20. La vitesse reste constante durant le remplissage. Ainsi la condition imposée au port d'injection permet de simuler des écoulements de remplissage à débit imposé, la vitesse du front d'écoulement numérique reste la même que la vitesse d'injection.

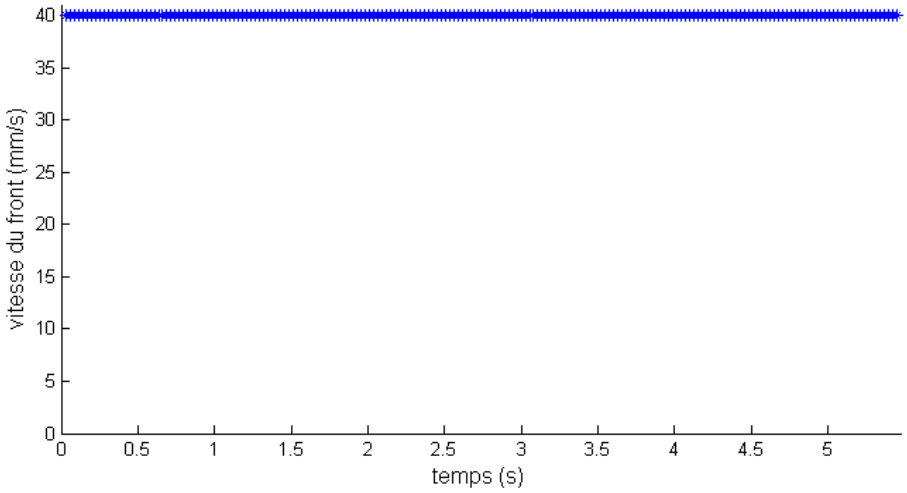


Figure 4.20 Vitesse du front en fonction du temps dans un écoulement de remplissage à débit imposé d'une cavité rectangulaire

La position du front calculée numériquement est comparée avec la solution analytique à la Figure 4.6 .

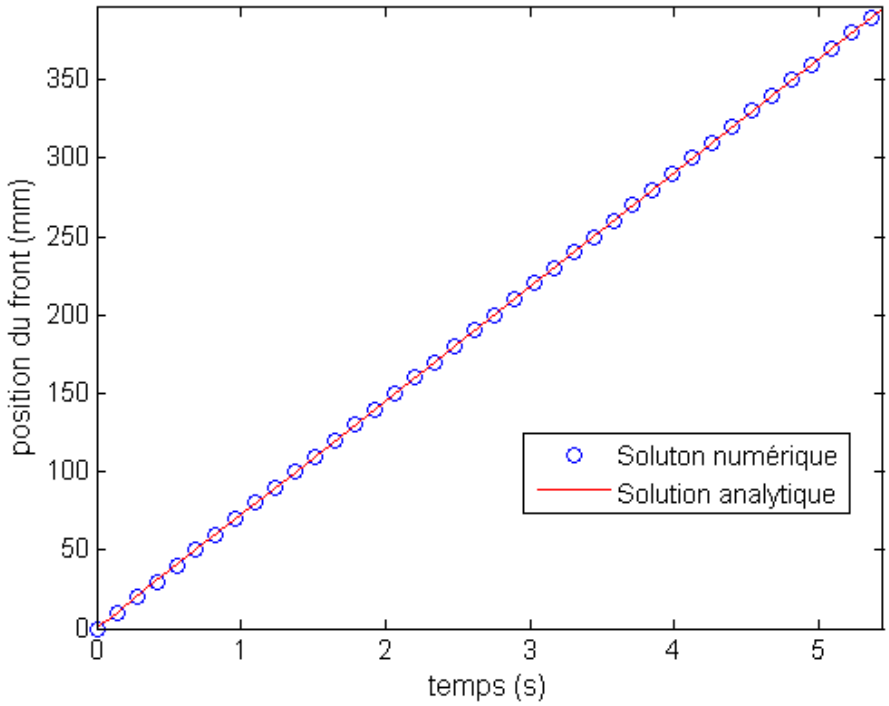


Figure 4.21 Position du front en fonction du temps d'un écoulement de remplissage à débit imposé dans le cas d'un domaine 3D

Conservation de la masse

Le code d'écoulement développé est un code de remplissage de moule. Lors de la simulation, il faut éviter qu'une quantité de liquide soit perdue dans les calculs. Afin de valider la conservation du volume de liquide lors du remplissage, une série de tests sont réalisés. Le premier cas est simple, il s'agit de considérer une matrice de perméabilité diagonale comme dans le cas d'une simulation avec un modèle de NCF simplifié à 0 degré ou à 90 degrés. En effet dans le modèle utilisé tous les torons ont un vecteur directeur selon une des directions de l'espace *x*,*y* ou z. Dans un second temps, l'ondulation des torons est prise en compte et la matrice de perméabilité est pleine, mais à diagonale dominante. C'est par exemple le cas des modélisations avec le renfort Tissa. (Pour un rappel de la définition d'une matrice à diagonale dominante, voir l'annexe E). En effet, l'influence du fil liant sur le modèle du renfort Tissa se fait par un changement de section le long du toron. Ainsi les vecteurs directeurs des torons ne sont pas parfaitement alignés avec une des directions de l'espace *x*,*y* ou z. Le tenseur de perméabilité a donc des termes hors diagonale mais qui ont une valeur très faible. Dans les deux cas, le domaine étudié est composé de dix cellules dans la direction *x*, 3 cellules dans la direction *y* et 20 cellules dans la direction de l'écoulement *z*. Chaque cellule du domaine est une variation d'une cellule de base fictive avec une matrice de perméabilité fictive $\boldsymbol{K}$.

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 6,883 & 0 & 0 \\ 0 & 6,883 & 0 \\ 0 & 0 & 6,883 \end{pmatrix} \text{x} 10^{-12}\, m^2 \tag{4.27}$$

Pour le premier cas, chaque matrice de perméabilité est diagonale, mais les valeurs peuvent varier d'une cellule à l'autre dans le domaine. Pour chaque cellule du domaine, la matrice de perméabilité de base est multipliée pas un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 (avec une distribution uniforme). Afin d'observer la variabilité de la matrice de perméabilité sur l'ensemble du domaine, la norme 2 est calculée pour chaque matrice de perméabilité de chaque cellule. (Pour un rappel de la définition de la norme 2 d'une matrice, voir l'annexe annexe fF.) Ainsi une représentation tridimensionnelle est faite où une valeur scalaire est associée à chaque cellule du domaine en fonction de la valeur de la norme matricielle. Le résultat présenté à la Figure 4.22 permet d'observer la variabilité des matrices de perméabilité du domaine.

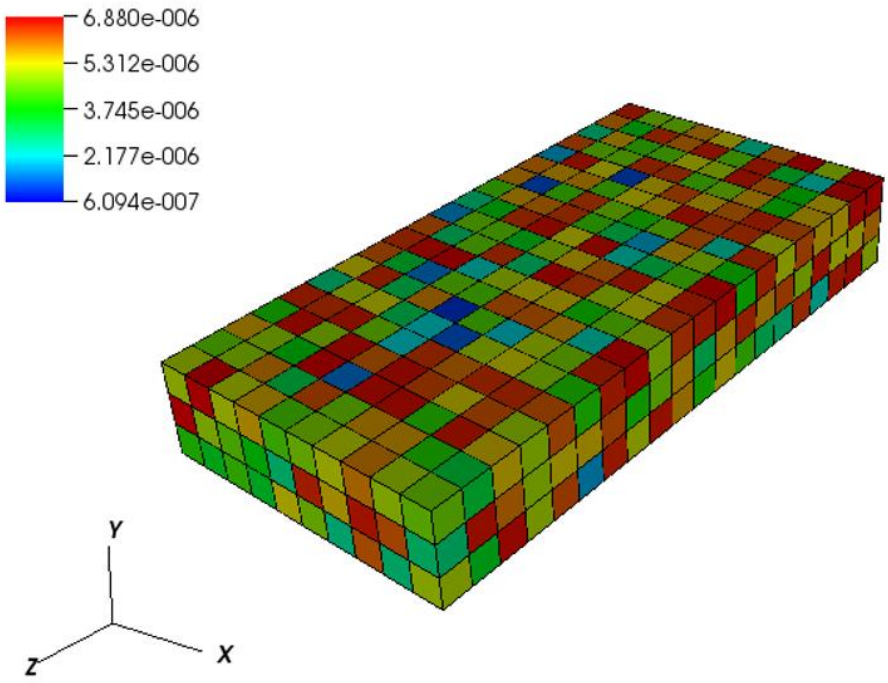


Figure 4.22 Représentation tridimensionnelle de la variabilité de la matrice de perméabilité diagonale dans un domaine 3D

Le domaine de calcul obtenu, l'écoulement est réalisé à pression imposée de 10^5 Pa en entrée et 0 Pa en sortie. Les volumes injectés et calculés traversant le front sont présentés sur la Figure 4.23. La courbe du volume calculé suit la courbe du volume injecté sauf à la fin de l'écoulement. Cet écart peut être expliqué par la méthode de calcul des volumes de fluide.

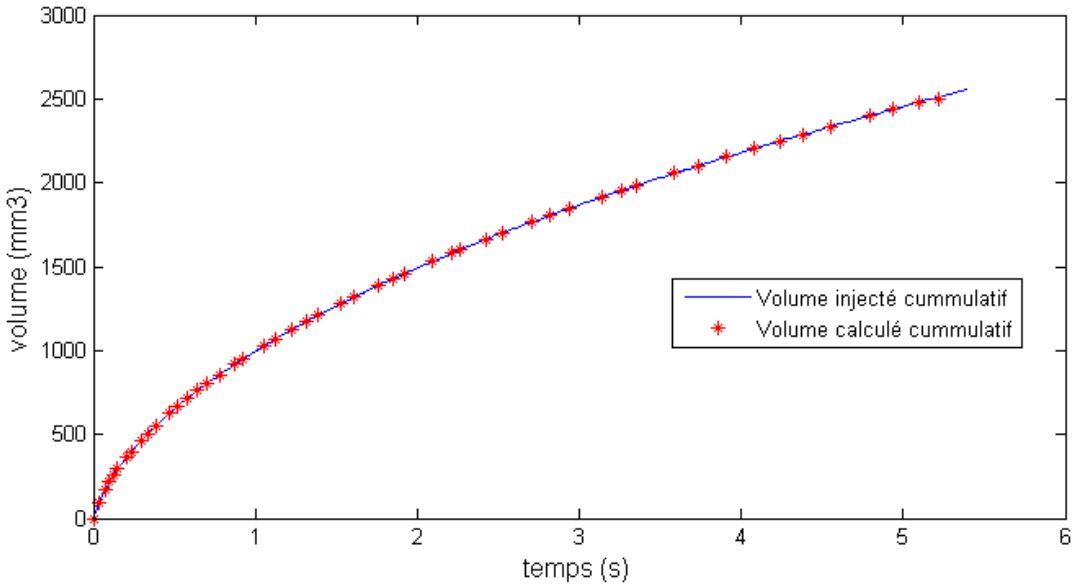


Figure 4.23 Comparaison des volumes de fluide injecté et calculé à travers le front d'écoulement dans le cas tridimensionnel d'un domaine constitué de matrices de perméabilité diagonales

En effet, à chaque pas de temps, le volume injecté est déterminé en considérant l'ensemble des vitesses en entrée du domaine et en utilisant ces vitesses pour calculer le volume de liquide injecté pendant le pas de temps courant. En ce qui concerne le volume calculé sur le front, il s'agit du volume de liquide obtenu à partir des vitesses calculées sur le front d'écoulement. Cependant, si une cellule du front est au bout du domaine, alors sa vitesse dans la direction de l'écoulement n'est pas prise en compte dans le calcul (pas de liquide qui s'écoule par l'évent numériquement). Ce cas est présenté à la Figure 4.24, au début de l'écoulement les volumes injectés et calculés au front sont les mêmes (Figure 4.24a) puis durant l'écoulement la conservation de la masse est toujours garantie (Figure 4.24b). En revanche, à la fin de l'écoulement, des cellules sont remplies à l'extrémité du domaine, mais l'écoulement n'est pas terminé. Donc le volume traversant le front est sous-évalué ici par rapport au volume injecté (Figure 4.24c). Ainsi la conservation de la masse semble garantie dans le cas des matrices de perméabilité diagonales.

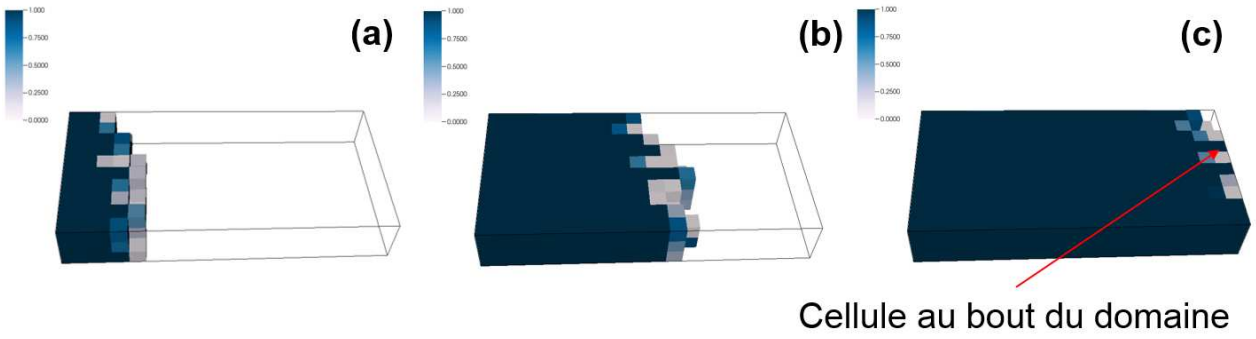


Figure 4.24 Processus de remplissage du domaine : (a) Au début de l'écoulement, les volumes injecté et calculé à travers le front restent identiques. (b) Au milieu de l'écoulement, la conservation de la masse est toujours garantie. (c) À la fin de l'écoulement, des cellules pleines à l'extrémité du domaine conduisent à sous-évaluer le volume calcul à travers le front

Le deuxième cas d'étude reprend la méthode du premier en considérant des matrices de perméabilités aléatoires pleines à diagonales dominantes. Pour obtenir les données de calcul chaque matrice de perméabilité diagonale de base est multipliée par une valeur aléatoire comprise entre 0 et 1. À chaque cellule est associé un vecteur aléatoire représentant la direction des fibres pour que le changement de base de chaque matrice de perméabilité permette d'obtenir une matrice de perméabilité pleine. Les termes hors diagonales sont divisés par 10 afin de vérifier le critère de matrice à diagonale dominante. Le domaine de calcul est visualisé ici aussi à l'aide de la norme 2, de la même manière que pour les matrices diagonales. Le résultat est présenté à la Figure 4.25.

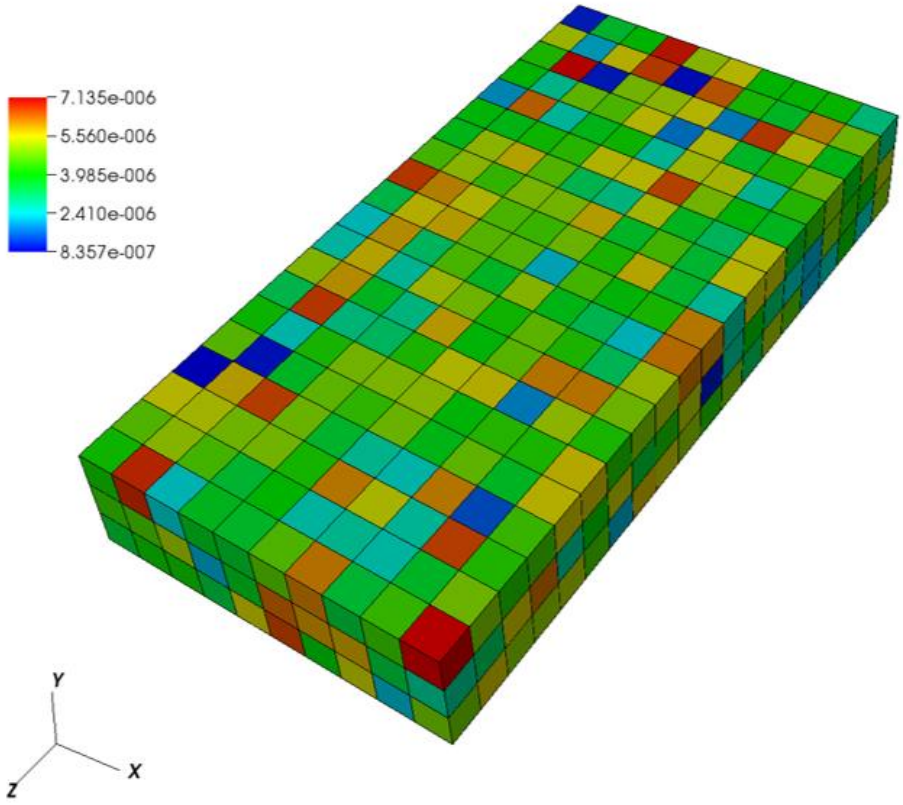


Figure 4.25 Visualisation de la variabilité de la matrice de perméabilité pleine à diagonale dominante dans un domaine 3D

L'écoulement est réalisé à une pression imposée de 10^5 Pa en entrée et 0 Pa en sortie. Les volumes cumulatifs de liquide injecté et calculé à travers le front sont présentés à la Figure 4.26. Un léger écart entre les deux volumes de fluide apparait au cours de la simulation numérique. Cette différence peut être expliquée par les termes hors diagonales dans la matrice de perméabilité qui rendent plus difficiles l'annulation des vitesses du fluide au bord du domaine (condition de Neumann).

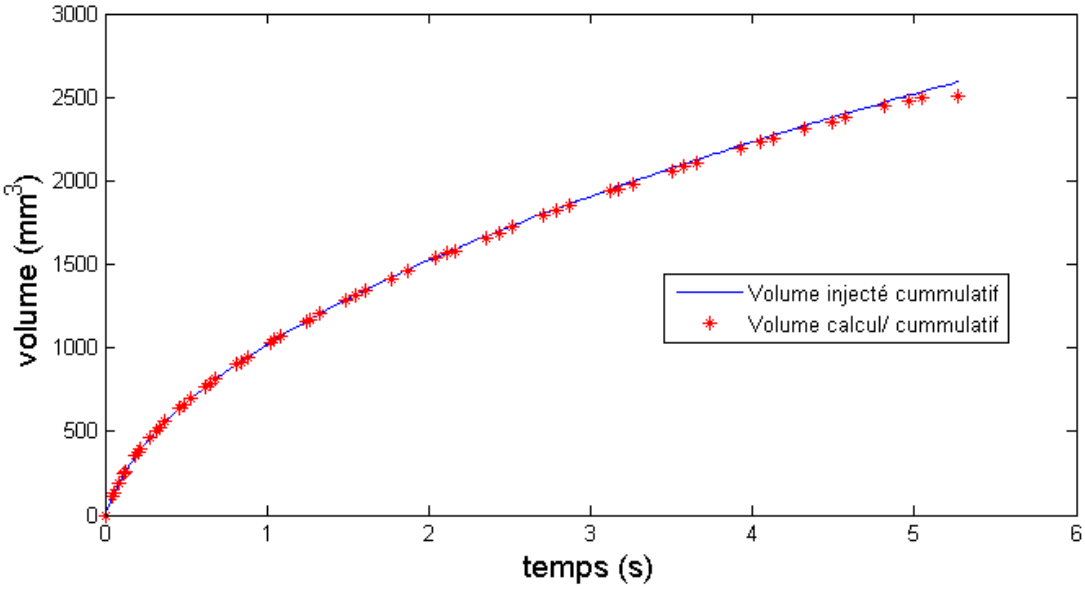


Figure 4.26 Comparaison du volume de fluide injecté et calculé sur le front d'écoulement dans le cas tridimensionnel avec un domaine constitué de matrices de perméabilité pleines à diagonale dominante

En outre, la conservation de la masse est globalement garantie dans le cas d'un domaine qui possède des matrices ce perméabilités pleines à diagonale dominante. La simulation de ces cas particuliers permet de valider le code d'écoulement dans le cas général d'un domaine tridimensionnel. L'analyse de la conservation de la masse de fluide dans l'écoulement permet de connaitre les limitations du modèle.

4.5 Conclusion

L'équation qui régit l'écoulement dans le domaine cellulaire qui représente le renfort fibreux est établie. Des hypothèses simplificatrices permettent de la résoudre numériquement par la méthode des différences finies. Deux différenciations successives sont nécessaires afin d'obtenir la formulation analytique pour chaque cellule du domaine. Les codes d'écoulements des travaux précédents sont donc généralisés au cas 3D et une série de validations permet d'établir les limites du modèle concernant la conservation de la masse lors du remplissage. Ainsi cet outil de simulation va permettre de comparer le modèle numérique d'écoulement avec des résultats expérimentaux dans le cas de montées capillaire et de mesures de perméabilité à pression imposée.

CHAPITRE 5 SIMULATION D'ÉCOULEMENT

5.1 Introduction

Les simulations numériques des différents cas d'écoulement sont présentées dans ce chapitre. L'ensemble de ces simulations repose sur les modèles numériques des tissus étudiés dans ce projet : le tissu NCF de la société Texonic et le tissu unidirectionnel de la société Tissa. Le code d'écoulement présenté au chapitre précédent est utilisé pour simuler le remplissage du domaine d'étude. La position du front et la masse de liquide entrée dans le domaine sont sauvegardées à chaque pas de temps. Les résultats numériques sont comparés avec des expériences réalisées au laboratoire de la Chaire sur les composites à haute performance (CCHP). On commence par simuler la mesure de perméabilité, puis la montée capillaire à travers un renfort fibreux.

5.2 Cas de la mesure de perméabilité

Afin de simuler la mesure de perméabilité (présentée en détail en annexe B) un certain nombre de propriétés sur l'écoulement sont nécessaires. Une fois ces propriétés identifiées, les résultats numériques obtenus pour le tissu unidirectionnel et pour le tissu NCF sont présentés.

5.2.1 Données du modèle d'écoulement

Les propriétés du fluide et les conditions aux limites utilisées dans la simulation des mesures de perméabilité sont présentées.

Propriétés du fluide utilisé

L'étude de la perméabilité d'un tissu ne dépend pas des propriétés du fluide. Cependant les propriétés du fluide expérimental utilisé sont employées pour les simulations. Lors des expériences de mesure de perméabilité, le liquide employé dans les essais reflète le comportement de la résine durant une injection. C'est une huile silicone au comportement parfaitement Newtonien et de viscosité 0,1Pa.s.

Conditions aux limites

Les conditions aux limites utilisées lors des simulations numériques sont celles du cas d'injection à pression imposée présenté au Chapitre 4. La pression à l'évent est fixée à 0 Pa, celle au port d'injection à 10^5 Pa.

5.2.2 Résultats des simulations pour le renfort unidirectionnel

Les simulations numériques de la mesure de perméabilité du renfort unidirectionnel sont réalisées à l'aide d'un domaine d'écoulement constitué d'un empilement de 4 VER imbriqués comme présenté à la Figure 5.1. L'algorithme simplifié de compaction présenté au Chapitre 3 permet d'obtenir plusieurs modèles cellulaires à différents taux de fibres. Afin d'avoir suffisamment de cellules lors de la simulation de l'écoulement, l'empilement de VER est répété dans les deux directions de l'espace **x** et **z**. Une étude préalable a permis de déterminer pour tous les cas étudiés le nombre minimal de VER requis dans chaque direction à partir duquel la perméabilité ne changera plus. Ainsi l'étude se focalisera sur l'influence du nombre de cellules constituant l'empilement de VER sur la perméabilité prédite numériquement. Dans un premier temps, les différents maillages étudiés sont présentés, puis les perméabilités obtenues pour les maillages aux différents taux de fibres sont détaillées.

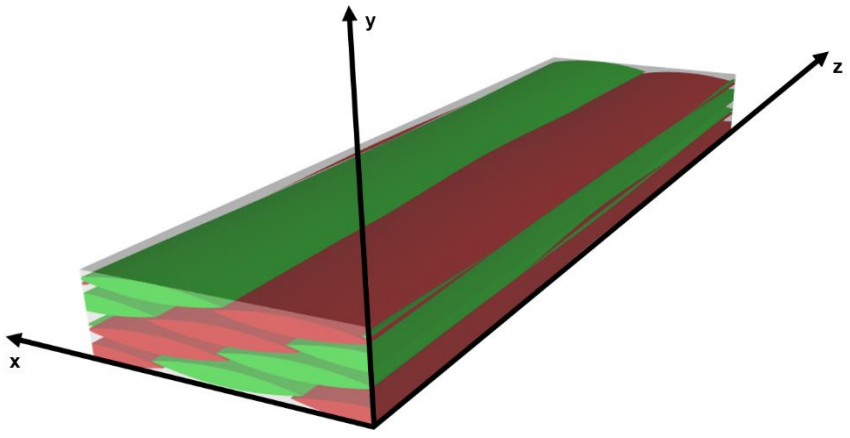


Figure 5.1 Modèle TexGen de 4 VER de tissu unidirectionnel de la société Tissa avant compaction

Discrétisation cellulaire

Afin d'analyser l'influence de la discrétisation sur la prédiction de la perméabilité, plusieurs maillages sont étudiés. Pour chaque taux de fibres considéré, trois maillages sont utilisés : un maillage grossier, intermédiaire et fin. Le détail du nombre de cellules dans chaque direction du domaine dans les trois cas est présenté dans le Tableau 5.1.

Tableau 5.1 Modèles cellulaires d'un empilement de 4 VER du renfort Tissa utilisés lors des simulations numériques de la mesure de perméabilité

Type de maillage	**Nombre de cellules dans la direction x**	**Nombre de cellules dans la direction y**	**Nombre de cellules dans la direction z**
Grossier	4	4	4
Intermédiaire	8	4	4
Fin	8	8	4

La grille régulière qui constitue le maillage va couper plus ou moins chaque toron du domaine selon le nombre de cellules de la grille. Ainsi pour chaque taux de fibre considéré, chaque cellule contient plus ou moins de torons. Le taux de torons de chaque cellule varie donc d'un maillage à l'autre et d'un taux de fibres à l'autre. L'influence du maillage sur le taux de torons minimal dans le domaine est présentée à la Figure 5.2.

Pour chaque maillage considéré lorsque le taux de fibres du domaine augmente, l'espace inter-torons diminue. Donc pour un maillage donné, les cellules contiennent de plus de torons lorsque le taux de fibres augmente. Plus le maillage est fin, plus les torons sont divisés. Le taux de torons minimal du domaine diminue donc lorsque le maillage s'affine.

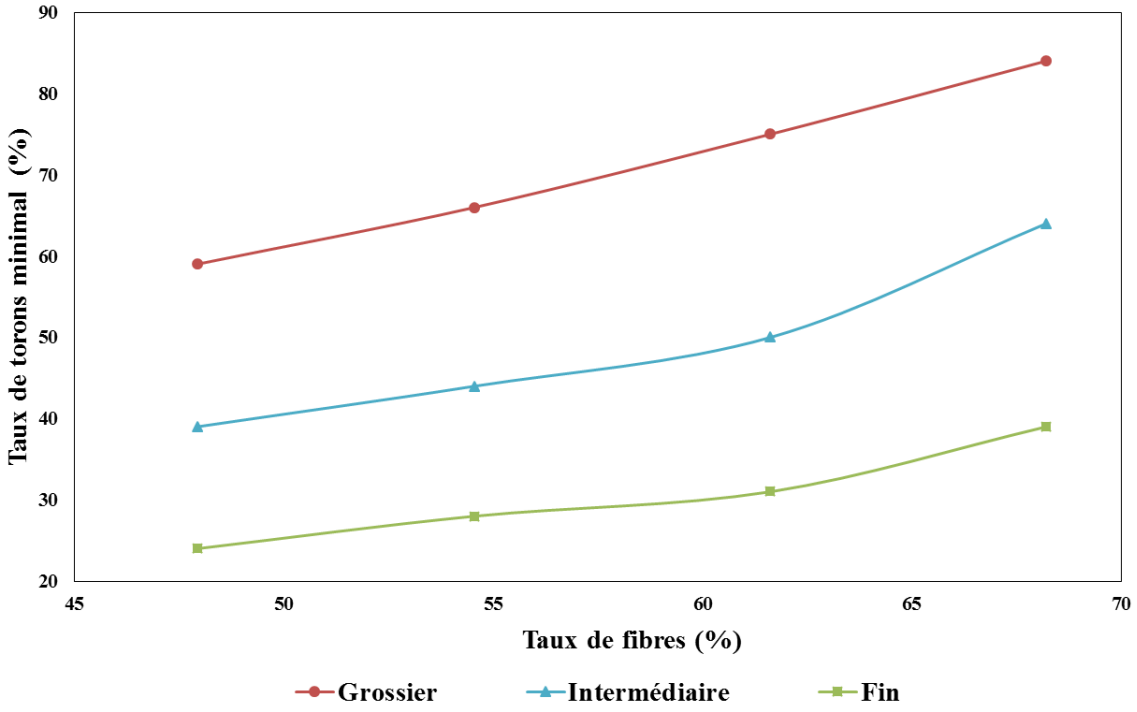


Figure 5.2 Influence du maillage sur le taux de torons minimal du domaine pour différents taux de fibres du renfort unidirectionnel compacté

Résultats des simulations

Dans un premier temps, les simulations de mesure de perméabilité sont réalisées à 0°, cela correspond à la direction **z** sur la Figure 5.1. Les résultats obtenus pour les différents maillages sont présentés avec les résultats expérimentaux sur la Figure 5.3 (expériences réalisées au laboratoire de la chaire sur les matériaux composites à haute performance). Lorsque le taux de fibres augmente, l'espace libre entre les fibres est réduit, donc la perméabilité diminue. Tous les résultats de simulation et expérimentaux montrent une perméabilité qui diminue quand le taux de fibres augmente. Plus le maillage est fin, plus la perméabilité prédite se rapproche des valeurs expérimentales. Toutefois pour les forts taux de fibres, l'écart devient plus important. Afin d'expliquer ce phénomène, les trois maillages considérés sont schématisés à la Figure 5.4. Les trois maillages sont représentés lorsque le taux de fibres du domaine vaut 47,9% mais le même phénomène est observable pour chaque taux de fibres considéré. Seules les cellules qui possèdent un taux de torons inférieur à 110% du taux de torons minimal du domaine sont représentées. L'intensité de la couleur de chaque cellule est comprise entre 0 et 1 et correspond au taux de fibres

de la cellule. Plus le maillage est fin, plus des canaux à faible taux de fibres sont présents dans le domaine. Ces canaux orientés dans le sens de l'écoulement à 0 degrés possèdent des perméabilités élevées qui facilitent l'écoulement. Ainsi la perméabilité équivalente calculée tend à être plus grande que la perméabilité mesurée. Parmi les trois configurations, les valeurs de perméabilité du maillage intermédiaire restent à moins d'un facteur 2 des valeurs expérimentales. Cependant, il est difficile de définir un critère objectif permettant de justifier à priori l'emploi d'un maillage lors du paramétrage des simulations numériques des mesures de perméabilité.

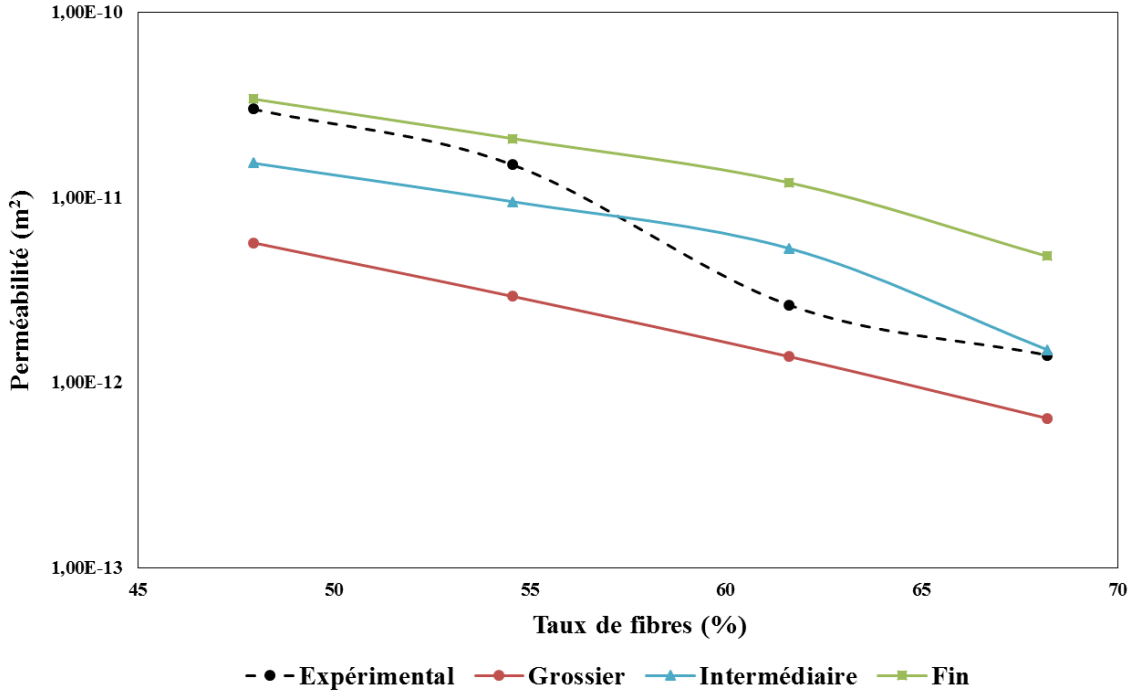


Figure 5.3 Comparaison des résultats de mesure de perméabilité à 0° pour la tissu unidirectionnel

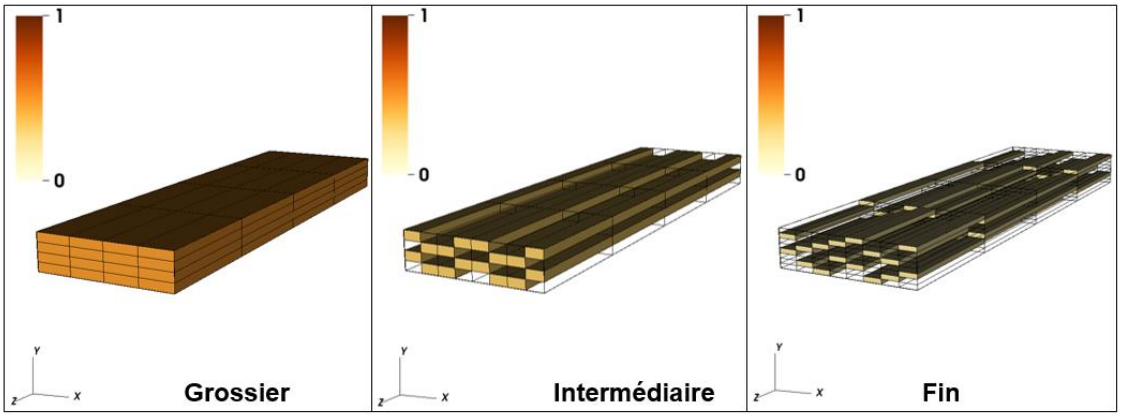


Figure 5.4 Modèle cellulaire constitué des cellules dont le taux de torons est inférieur à 110% de la valeur minimale du domaine pour le tissu unidirectionnel pour un taux de fibres de 47,9%. L'échelle entre 0 et 1 correspond au taux de fibres de la cellule

Dans un second temps, les simulations de mesure de perméabilité sont réalisées à 90°, cela correspond à la direction **x** sur la Figure 5.1. Les résultats obtenus pour les différents maillages sont présentés avec les résultats expérimentaux sur la Figure 5.5. Comme dans le cas à 0°, les perméabilités numériques et expérimentales diminuent quand le taux de fibres augmente. Plus le maillage est fin, plus on se rapproche des perméabilités expérimentales. Les mêmes conclusions que pour le cas à 0° peuvent être tirées dans le cas à 90° concernant l'enchainement des courbes selon le type de maillage. Cependant un écart plus important dans le cas à 90° subsiste entre les valeurs expérimentales et numériques, sans doute causé par l'utilisation du modèle de Gebart avec un taux de fibres dilué. En effet, l'ensemble des torons qui constituent le domaine sont orientés approximativement à 0°. Donc l'intégralité du vide de chaque cellule est associée à ces torons dans cette direction. La perméabilité dans la direction **x** est donc calculée avec la formule de Gebart dans le cas transverse or celle-ci est toujours un ordre de grandeur plus faible que celle dans le sens longitudinal à un taux de fibres donné. En revanche la perméabilité à 90° mesurée expérimentalement est du même ordre de grandeur que celle à 0°. C'est pour cette raison qu'un écart subsiste entre les valeurs numériques et expérimentales, y compris pour le maillage le plus fin. Dans ce dernier cas, les cellules à faible taux de fibres présentées sur la Figure 5.4 ne semblent pas constituer un réseau interconnecté capable de créer un écoulement préférentiel dans le tissu.

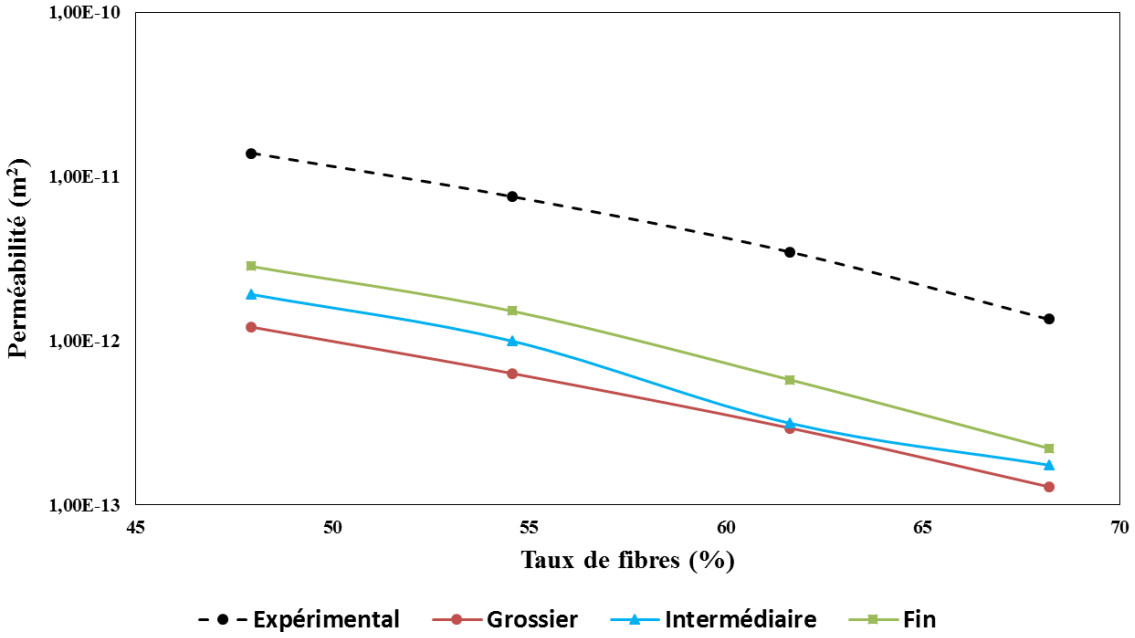


Figure 5.5 Comparaison des résultats de mesure de perméabilité à 90° pour un tissu unidirectionnel

5.2.3 Résultats des simulations pour le renfort NCF

Les simulations numériques de la mesure de perméabilité du renfort NCF sont réalisées à l'aide d'un domaine d'écoulement constitué d'un empilement de 5 VER imbriqués comme présenté à la Figure 5.6. La procédure utilisée pour obtenir le domaine de calcul du renfort NCF est la même que pour le renfort unidirectionnel. L'étude faite pour le renfort NCF est aussi similaire au cas du renfort unidirectionnel. Dans un premier temps, les différents maillages étudiés sont présentés, puis les perméabilités obtenues sont détaillées pour les maillages aux différents taux de fibres considérés.

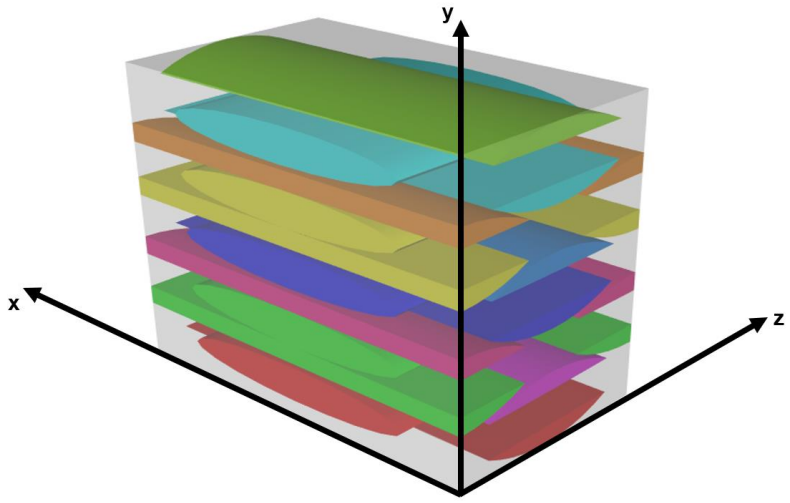


Figure 5.6 Modèle TexGen de 5 VER de tissu NCF de la société Texonic avant compaction

Maillages considérés

L'analyse de l'influence du maillage du domaine sur la mesure de perméabilité est ici aussi réalisée grâce à trois maillages différents. Le détail du nombre de cellules dans chaque direction du domaine dans les trois cas est présenté dans le Tableau 5.2.

Tableau 5.2 Modèles cellulaires d'un empilement de 5 VER du renfort NCF utilisés lors des simulations numériques de la mesure de perméabilité

Type de maillage	**Nombre de cellules dans la direction x**	**Nombre de cellules dans la direction y**	**Nombre de cellules dans la direction z**
Grossier	2	4	2
Intermédiaire	4	5	2
Fin	4	20	2

L'influence du maillage sur le taux de torons minimal dans le domaine est présentée à la Figure 5.7. Comme indiqué, les variations du taux de torons minimal dans le domaine pour les maillages du tissu NCF sont assez similaires au cas unidirectionnel. On peut cependant remarquer que le taux de torons minimal est inférieur d'environ 10% comparativement au cas précédent.

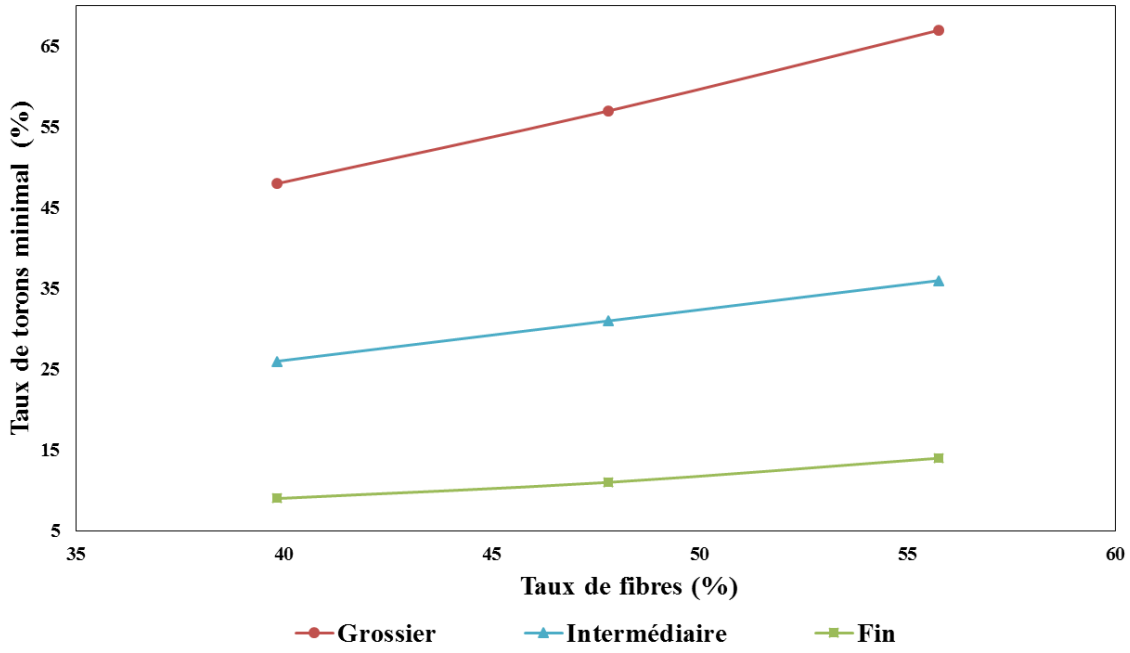


Figure 5.7 Influence du maillage sur le taux de torons minimal du domaine pour différents taux de fibres du renfort NCF compacté

Résultats des simulations

Dans un premier temps les simulations de mesure de perméabilité sont réalisées à 0°, cela correspond à la direction **z** sur la Figure 5.6. Les résultats obtenus pour les différents maillages sont présentés avec les résultats expérimentaux sur la Figure 5.8. Les perméabilités numériques et expérimentales diminuent toujours lorsque le taux de fibres augmente et la perméabilité prédite se rapproche des valeurs expérimentales quand le maillage est raffiné.

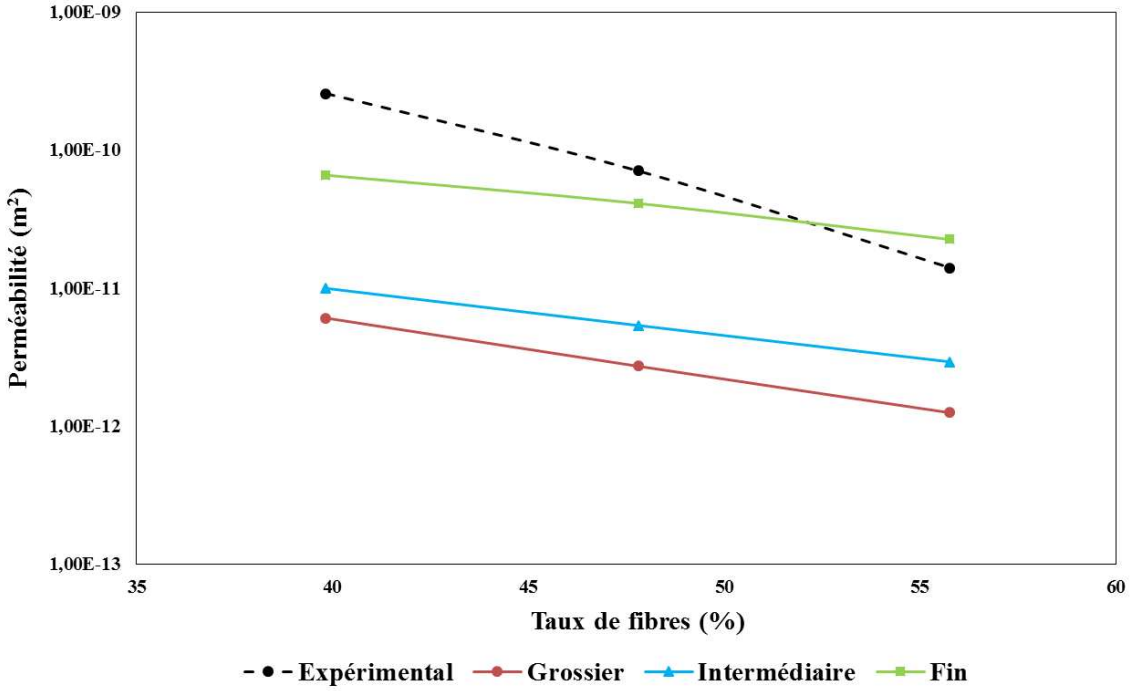


Figure 5.8 Comparaison des résultats de mesure de perméabilité à 0° pour un tissu NCF

Les schémas des trois maillages considérés de la Figure 5.4 sont réalisés de la même manière que dans le cas du renfort unidirectionnel Tissa. Il semble cependant difficile d'expliquer ici les résultats sur la prédiction de la perméabilité à partir d'une telle représentation. En effet, l'influence du taux de torons minimal dans le domaine ne parait pas être le seul paramètre qui influence les résultats numériques.

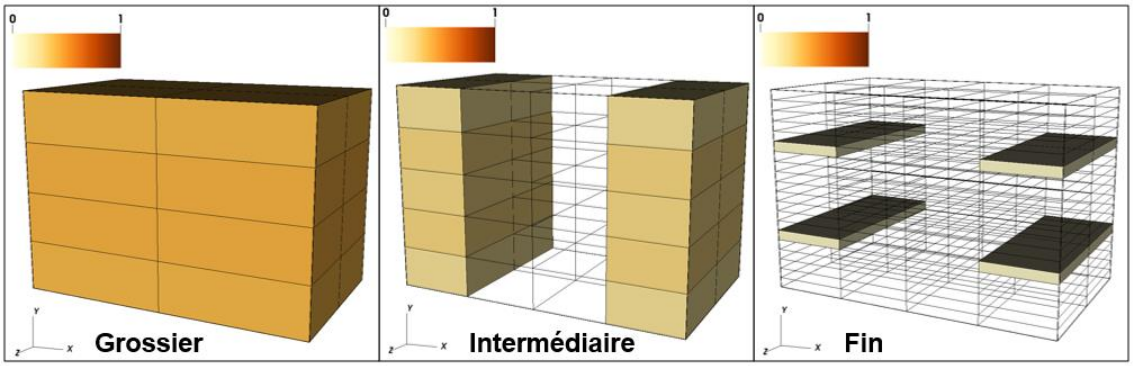


Figure 5.9 Modèle cellulaire constitué des cellules dont le taux de torons est inférieur à 110% de la valeur minimale du domaine pour le tissu NCF à un taux de fibres de 39.8%. L'échelle entre 0 et 1 correspond au taux de fibres de la cellule

Une représentation du modèle cellulaire au complet à la Figure 5.10 permet de mieux comprendre le phénomène. Les trois maillages sont représentés dans le cas où le taux de fibres du domaine vaut 39,8% car le même phénomène est observable à chaque taux de fibres. Toutes les cellules du domaine sont représentées. L'intensité de la couleur de chaque cellule comprise entre 0 et 1 correspond au taux de fibres de la cellule.

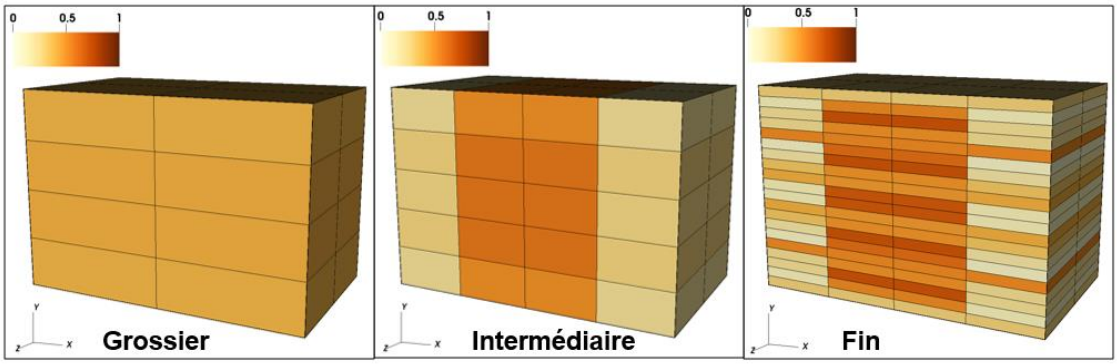


Figure 5.10 Modèle cellulaire de l'empilement de VER le tissu NCF à un taux de fibres de 39.8%. L'échelle entre 0 et 1 correspond au taux de fibres de la cellule

Afin de comprendre les résultats obtenus, il faut noter que chaque VER du tissu NCF est constitué de trois torons : un toron à 0 degré et deux torons à 90°. Dans le cas grossier, les cellules sont constituées d'un mélange de ces deux types de torons. Ainsi la perméabilité mesurée reste plus

faible que celle des deux autres maillages, car chaque cellule est influencée par la perméabilité transverse des torons à 90° présents. Pour le maillage intermédiaire, la même analyse peut être faite. Cependant les cellules présentes sur les bords du maillage ont un taux de fibres plus faible que celles du centre et celles du cas grossier. En effet, les torons à 0° sont très peu présents dans ces cellules. La perméabilité mesurée est supérieure au cas grossier. Le constat est le même pour la discrétisation fine : le grand nombre de cellule dans l'épaisseur du domaine permet d'obtenir plusieurs cellules avec un taux de fibres faible. Ainsi la perméabilité mesurée est plus grande car l'écoulement est facilité par l'apparition de ces canaux de grande perméabilité. Dans cette configuration, le maillage permet d'obtenir des résultats de perméabilité proche de l'expérimental à moins d'un ordre et demi de grandeur. Cependant une fois encore, aucun critère ne permet à priori de choisir un maillage de façon objective pour effectuer une prédiction.

Dans un second temps, les simulations de mesure de perméabilité sont réalisées à 90°, cela correspond à la direction **x** sur la Figure 5.6. Les résultats obtenus pour les différents maillages sont présentés avec les résultats expérimentaux sur la Figure 5.11. Comme dans le cas du tissu unidirectionnel, la prédiction de la perméabilité reste nettement inférieure à valeur mesurée expérimentalement pour les trois maillages considérés. En revanche, on remarque que la perméabilité la plus faible est obtenue ici avec le maillage intermédiaire.

Une analyse de la composition des cellules de chaque maillage permet d'expliquer les différentes variations de perméabilité. Les cellules du maillage grossier sont constituées d'un mélange de torons à 0° et à 90°. La simulation de la mesure de perméabilité à 90° est influencée par la perméabilité longitudinale des torons à 90°. Ainsi les mesures de perméabilités à 90° pour le cas grossier sont proches de celles à 0°. Le cas fin donne des perméabilités plus faibles que dans le cas à 0°. En effet les torons centraux à 0° ont une perméabilité transverse qui est un ordre de grandeur plus faible à un taux de fibres donné. Les valeurs numériques restent donc à un ordre de grandeur des valeurs expérimentales, car l'ordre de grandeur des perméabilités mesurées à 0° et à 90° est le même. Concernant le maillage intermédiaire, un nouveau phénomène intervient. Les cellules centrales avec un taux de fibres élevé traversent l'intégralité du domaine et sont constituées majoritairement de torons transverses à l'écoulement. La perméabilité de ces cellules dans le sens de l'écoulement est donc faible comparativement aux autres. Ainsi l'écoulement sera considérablement ralenti lors de son passage au travers de ces cellules. C'est pourquoi le modèle intermédiaire donne des perméabilités simulées plus faibles que les deux autres cas de maillage.

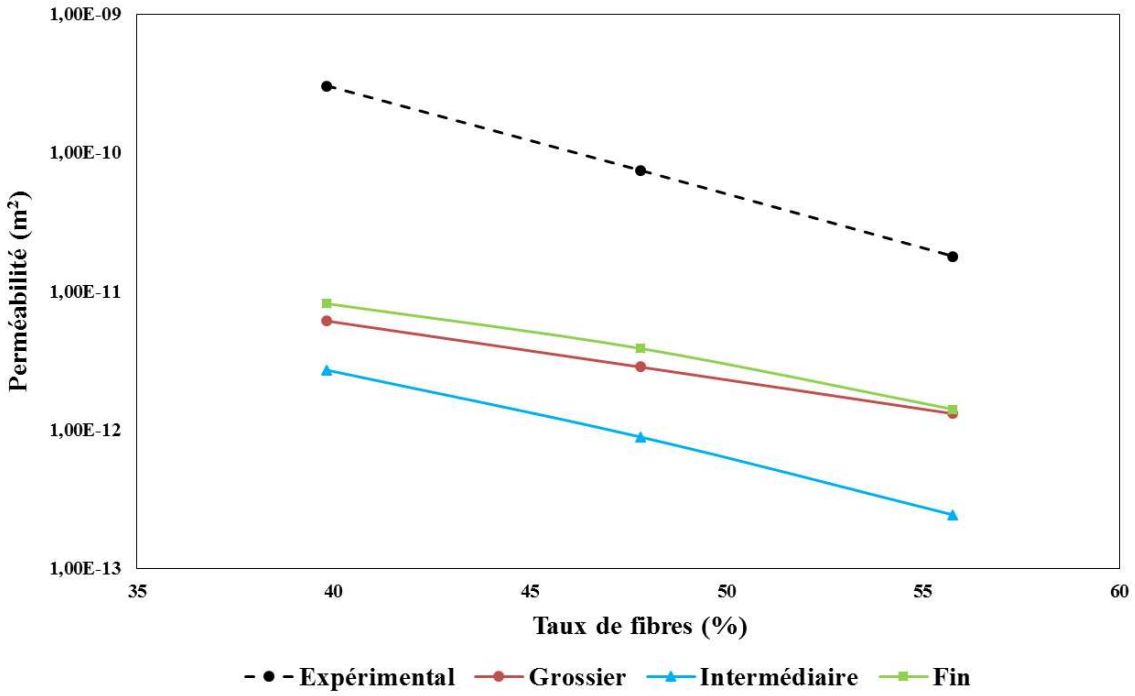


Figure 5.11 Comparaison des résultats de mesure de perméabilité à 90° pour un tissu NCF

5.3 Cas de la montée capillaire

Afin de simuler l'expérience de montée capillaire (présentée en détail en annexe A) un certain nombre de propriétés sont nécessaires. Une fois ces propriétés identifiées, l'étude des modèles numériques de torons peut être présentées puis les résultats sur l'empilement des plis.

5.3.1 Propriétés du modèle d'écoulement

Le code présenté au chapitre précédent permet de simuler différents types d'écoulement en considérant les propriétés du fluide utilisé expérimentalement et en modifiant les conditions aux limites du domaine de calcul. L'ensemble des propriétés du fluide sont identifiées, puis les conditions aux limites lors d'une montée capillaire sont présentées et validées.

Propriétés du fluide utilisé

Les rapports des travaux expérimentaux précédents, réalisés au laboratoire de la Chaire sur les composites à hautes performance (CCHP), concernant la montée capillaire [1, 21, 22] utilisent l'hexadécane pur à 99% de la compagnie Sigma-Aldrich comme fluide d'infiltration. Ce liquide parfaitement mouillant est peu volatile et non-hygroscopique. L'hexadécane est mélangé à un traceur fluorescent (0,1 g/l) qui permet de visualiser le front capillaire comme le montre la Figure 5.12. L'ensemble des propriétés du fluide sont résumés dans le Tableau 5.3 .

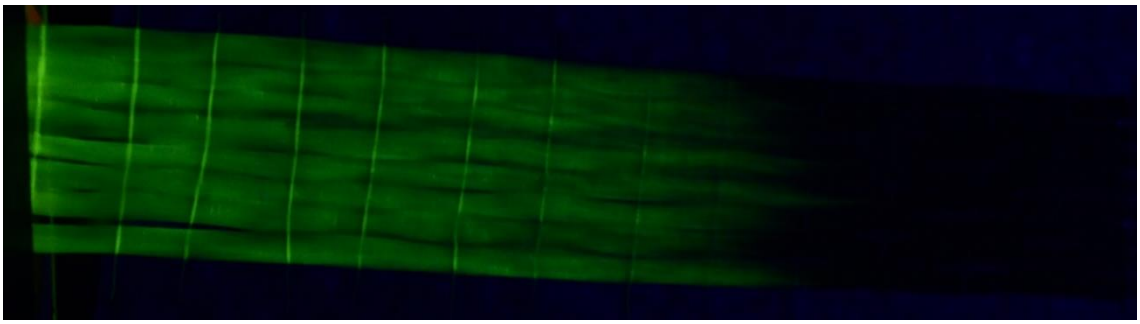


Figure 5.12 Front de liquide visualisé grâce à l'indicateur fluorescent présent dans l'hexadécane lors de la montée capillaire

Tableau 5.3 Propriétés du fluide utilisé lors de la montée capillaire

	Masse volumique ρ **(kg/m^3)**	**Viscosité dynamique** μ **(mPa.s)**	**Tension de surface (résine/renfort)** γ_{lv} **(mN/m)**	**Angle de contact dynamique** θ **(deg)**	**Angle de contact statique (deg)**
Sigma Aldrich 99% pur hexadécane	767,1948 ±0,0004	3,51 ±0,01	27,50 ±0,3	~ 0	~ 0

Conditions aux limites

Afin de modéliser la montée capillaire à travers le domaine de calcul, deux conditions aux limites sont appliquées. Ces conditions doivent évoluer dans le temps car elles doivent tenir compte de la hauteur de liquide dans le renfort (l'échantillon est supposé vertical). La pression atmosphérique agit sur l'intégralité du liquide dans le renfort fibreux. Ainsi la pression atmosphérique sera appliquée au port d'injection et en avant du front. Il est décidé que la pression liée au poids de la colonne de liquide est appliquée en avant du front. De même pour la pression capillaire qui permet de compenser la pression liée au poids du liquide et de faire monter le liquide au travers de l'échantillon. Cette dernière est retranchée en avant du front. En effet lorsque le fluide monte par capillarité dans le renfort il est soumis aux phénomènes capillaires qui « aspirent » le fluide. La Figure 5.13 montre un schéma de montée capillaire avec les conditions limites au port d'injection et en avant du front de liquide.

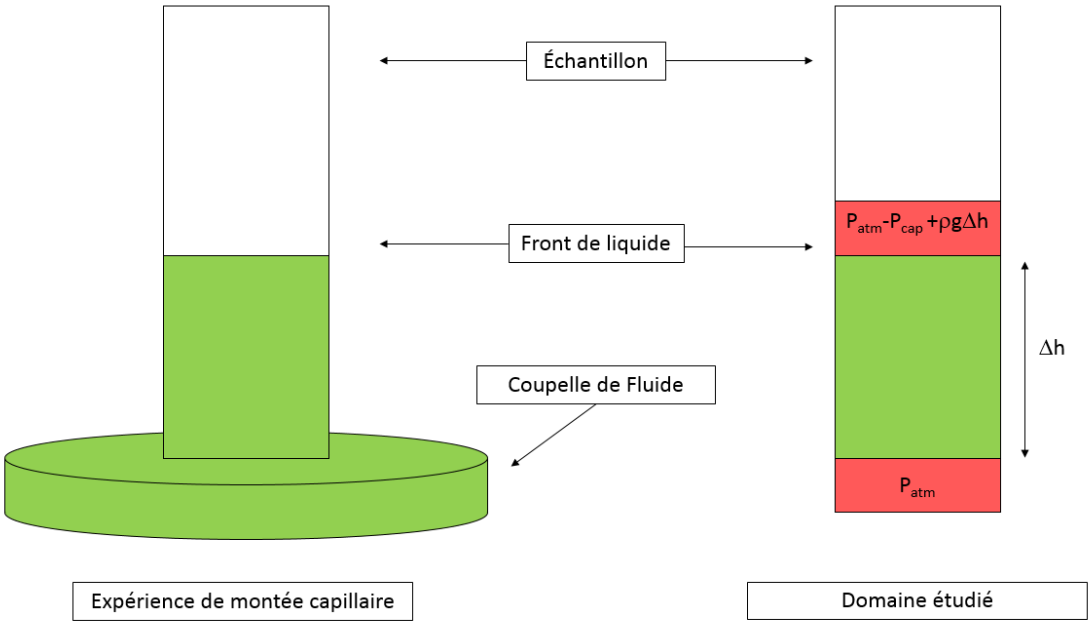


Figure 5.13 Schéma des conditions aux limites lors d'une montée capillaire

La pression capillaire dont la définition est détaillée en annexe A est calculée grâce à la formule suivante :

$$P_{cap} = \frac{2}{r}\gamma_{lv}\cos(\theta) \tag{5.1}$$

où $\gamma_{lv}.cos(\theta)$ est la tension d'adhésion, r est le rayon du tube équivalent à la taille moyenne des pores du renfort dans la section de l'échantillon. Le rayon du tube peut être déduit du diamètre hydraulique d_h :

$$r = \frac{d_h}{2} \tag{5.2}$$

avec :

$$d_h = \frac{4A}{P} \tag{5.3}$$

où A est l'aire de la section de l'échantillon et P le périmètre mouillé de la section. La pression liée au poids de la colonne de liquide est calculée par la formule suivante :

$$P_{poids} = \rho g \Delta h \tag{5.4}$$

où ρ est la masse volumique du liquide considéré, g est la pesanteur et Δh la hauteur de la colonne de liquide dans le renfort. La valeur de P_{oids} est mise à jour à chaque incrément de calcul puisque Δh est modifié.

Validation numérique des conditions aux limites

Afin de valider les conditions aux limites pour modéliser la montée capillaire, un domaine constitué d'une couche de cellules est utilisé. Les dimensions du domaine sont de 50x200 cellules. À chaque cellule du domaine est associé un taux de fibres V_f ($V_f = 1 - \phi$) de 0,45 dans la direction z et le tenseur de perméabilité $\boldsymbol{K}$ (m^2) calculé à l'aide des formules de Gebart s'écrit :

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 1,4823 & 0 & 0 \\ 0 & 1,4823 & 0 \\ 0 & 0 & 6,9759 \end{pmatrix} \text{x} 10^{-12} m^2 \tag{5.5}$$

L'écoulement est simulé avec une pression capillaire de $5,08\text{x}10^3$ Pa et se produit uniquement dans la direction z. Cette valeur correspond à un rayon du tube équivalent de $1,08\text{x}10^{-5}$ m. Les propriétés du fluide ont été détaillées précédemment. Dans le cas de la montée capillaire, il est possible

d'identifier B_h la pente de Lucas-Washburn grâce à la formule analytique suivante qui est vraie au début de l'écoulement [21] :

$$z^2 = B_h t \tag{5.6}$$

où z est la position du front de fluide et t le temps. L'identification de B_h avec les 50 premières valeurs de la position du front en fonction du temps est obtenue à l'aide d'une droite qui représente la position du front au carré en fonction du temps (voir Figure 5.14). L'interpolation permet d'obtenir une valeur de B_h de 3,3712x10^{-5} m^2/s.

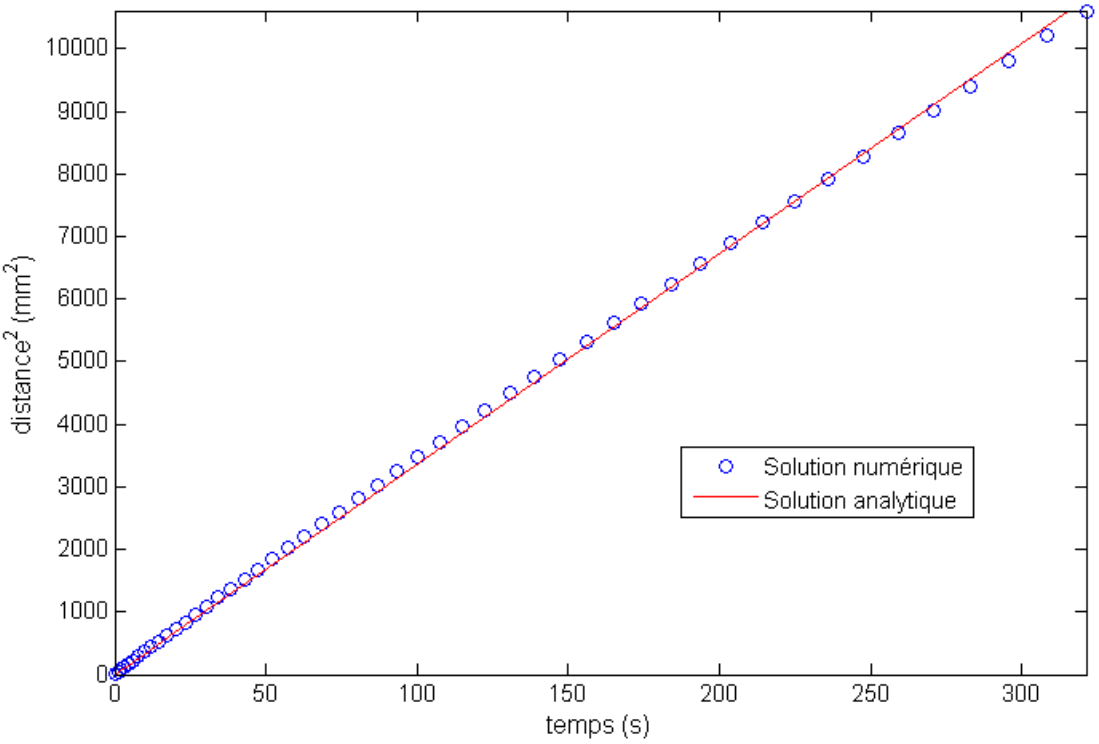


Figure 5.14 Position du front au carré en fonction du temps obtenue avec l'identification numérique de B_h

La perméabilité d'un domaine poreux peut être reliée à la pente de Lucas-Washburn grâce à la formule suivante [21] :

$$K_{zz} = \frac{B_h (1 - \mathrm{V}_f)\mu}{2P_{cap}} \tag{5.7}$$

Dans le cas simulé la valeur de K_{zz} identifiée par la simulation numérique est de $6{,}40 \times 10^{-12}$ m^2. Cette valeur est très proche de la perméabilité K_{zz} de la matrice de perméabilité initiale. Ainsi ces conditions aux limites donnent des résultats consistants et semblent convenir pour simuler la montée capillaire.

5.3.2 Étude des torons

Les simulations sont réalisées sur les modèles des torons des différents tissus considérés. Dans un premier temps, le maillage des torons utilisé est détaillé, puis les résultats des simulations sont présentés. Enfin, une brève discussion concernant l'utilisation d'un modèle de saturation est faite.

Maillages considérés

Les simulations numériques correspondant aux différents torons sont réalisées avec les voxélisations et les domaines cellulaires présentés dans le Chapitre 3. Le nombre de cellules dans le sens de la longueur du toron (la direction z) permet d'obtenir une position du front numérique qui correspond à la valeur expérimentale. Une étude préalable a permis de déterminer que le nombre de cellules pour une longueur de domaine donné n'est pas un facteur qui influence les résultats des simulations numériques. Cependant plus le nombre de cellules dans un domaine fixe est grand, plus la résolution de la courbe de la montée capillaire est fine. Cette démarche est réalisée pour chaque toron étudié. En outre, pour chaque simulation, la valeur du diamètre hydraulique est obtenue grâce aux travaux expérimentaux précédents [1, 21, 22], dont les résultats sont résumés dans le Tableau 5.4.

Tableau 5.4 Diamètre hydraulique des différents torons étudiés

	Tissa	**NCF Texonic trame**	**NCF Texonic chaîne**
d_h **(μm)**	21,67	12 ±2	12 ±2

Résultats des simulations

Les courbes représentatives de la position du front et de la masse absorbée en fonction du temps sont présentées pour le toron du tissu unidirectionnel de la société Tissa et comparées aux valeurs expérimentales. La courbe représentative de la position du front en fonction du temps a la même tendance que les courbes expérimentales comme le montre la Figure 5.15. Cependant la courbe de la masse obtenue par simulation reste éloignée des courbes expérimentales comme le montre la Figure 5.16. Les mêmes courbes que pour le tissu unidirectionnel sont présentées pour les torons du tissu NCF de la société Texonic de la Figure 5.17 à la Figure 5.20.

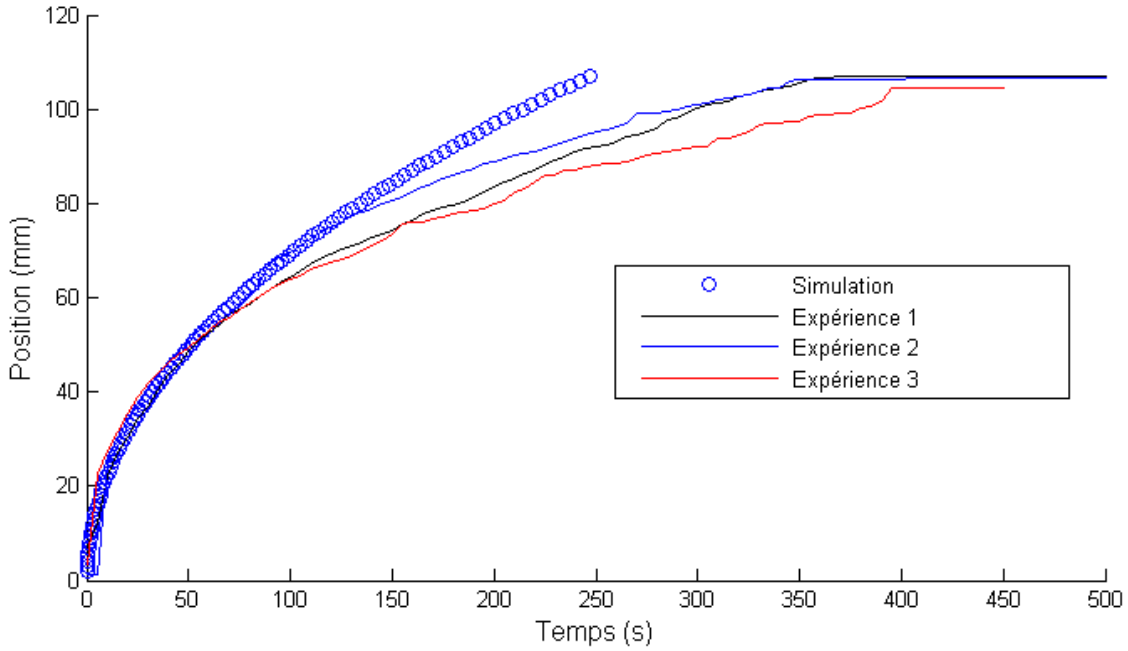


Figure 5.15 Comparaison des résultats expérimentaux et numériques de la position du front lors de la montée capillaire pour un toron de Tissa

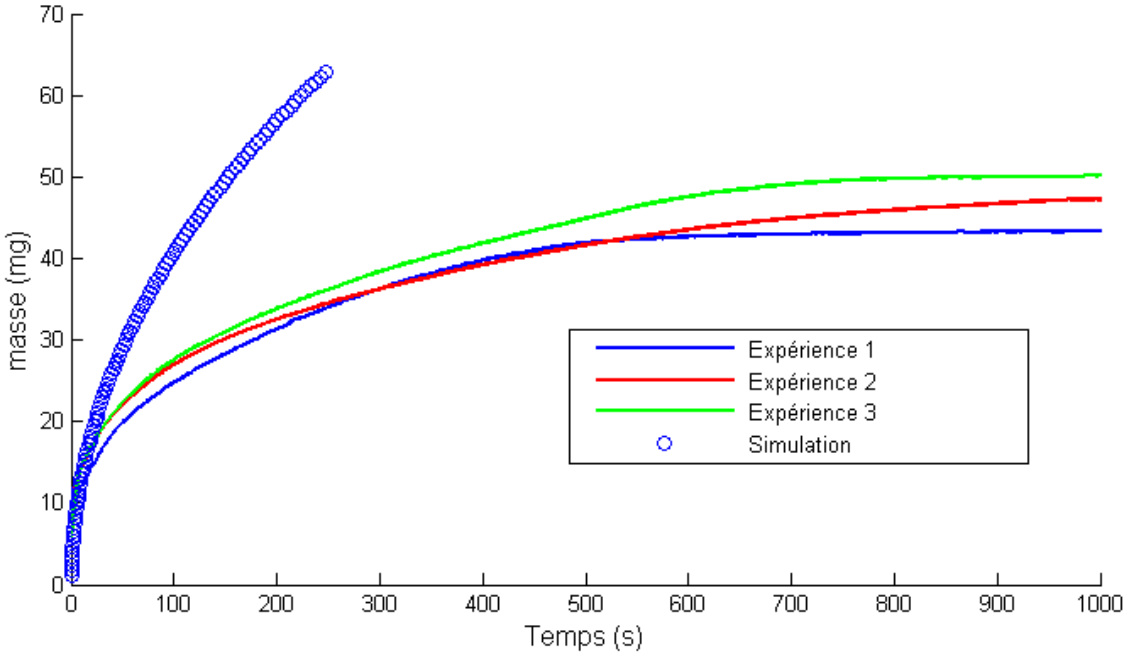


Figure 5.16 Comparaison des résultats expérimentaux et numériques de la masse lors de la montée capillaire pour un toron de Tissa

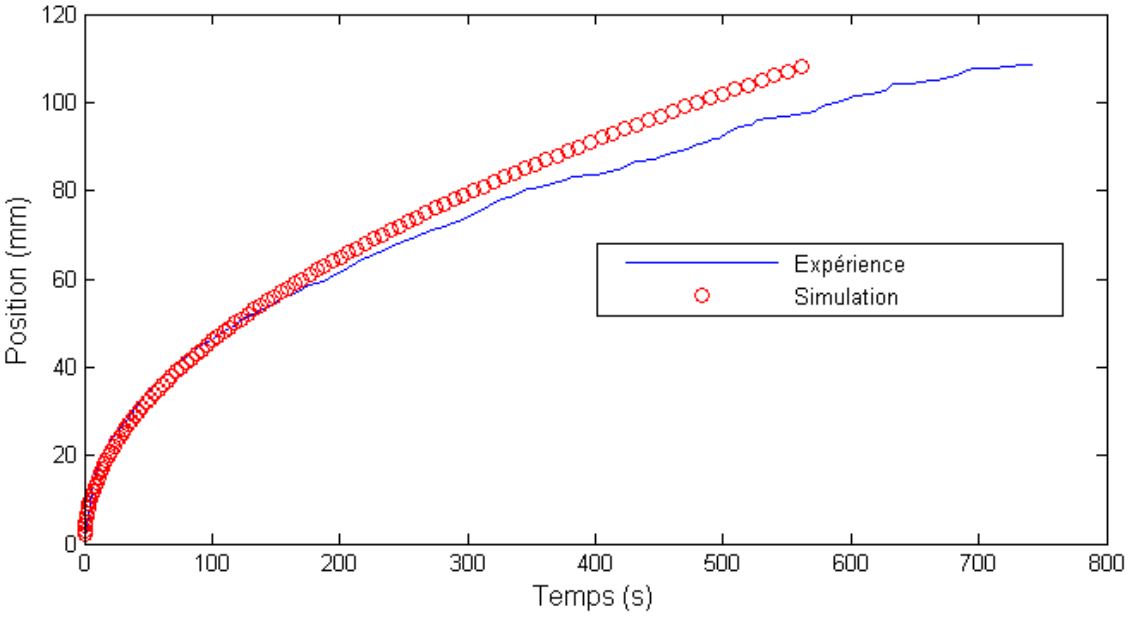


Figure 5.17 Comparaison des résultats expérimentaux et numériques de la position du front lors de la montée capillaire pour un toron de trame du NCF de Texonic

Les mêmes observations que pour les résultats obtenus avec l'unidirectionnel de Tissa peuvent être faites pour le NCF de Texonic. Dans tous les cas d'étude, les courbes de masses continuent d'augmenter après que le front soit arrivé au sommet de l'échantillon. L'échantillon continue donc d'absorber du liquide alors que le front est arrivé au bout de l'échantillon. Ce résultat est cohérent avec les résultats expérimentaux qui montrent qu'en fait le front détecté expérimentalement n'est pas saturé [21].

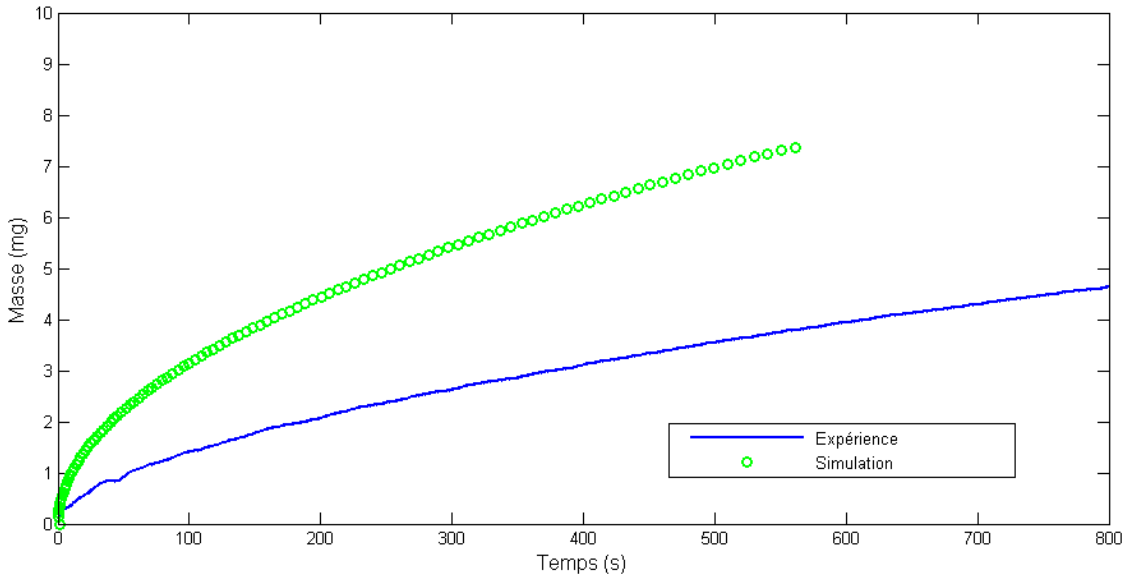


Figure 5.18 Comparaison des résultats expérimentaux et numériques de la masse absorbée lors de la montée capillaire pour un toron de trame du NCF de Texonic

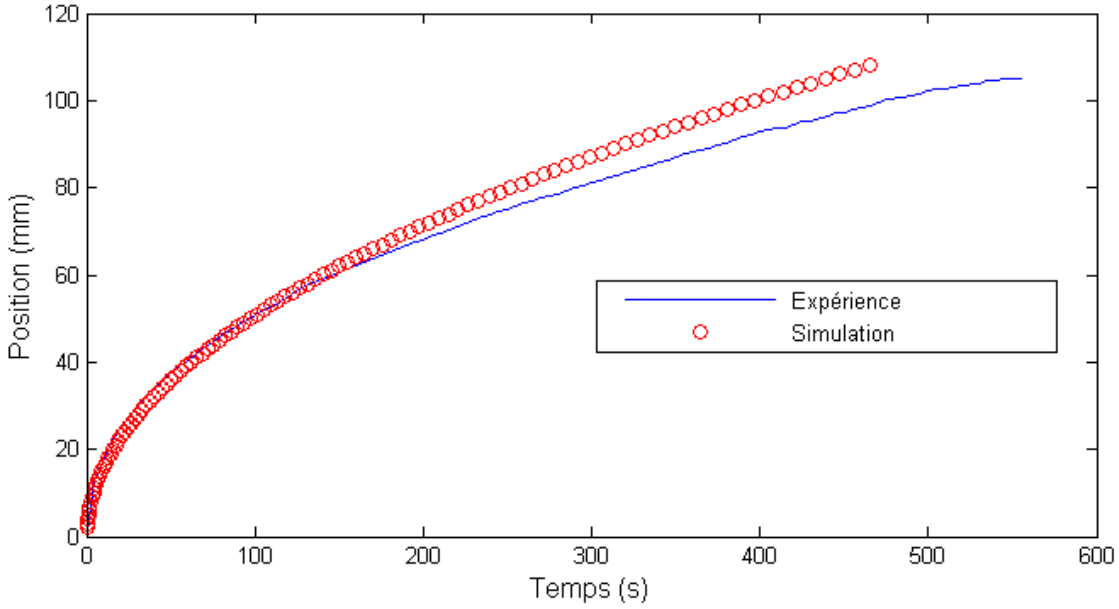


Figure 5.19 Comparaison des résultats expérimentaux et numériques de la position du front lors de la montée capillaire pour un toron de chaîne du NCF de Texonic

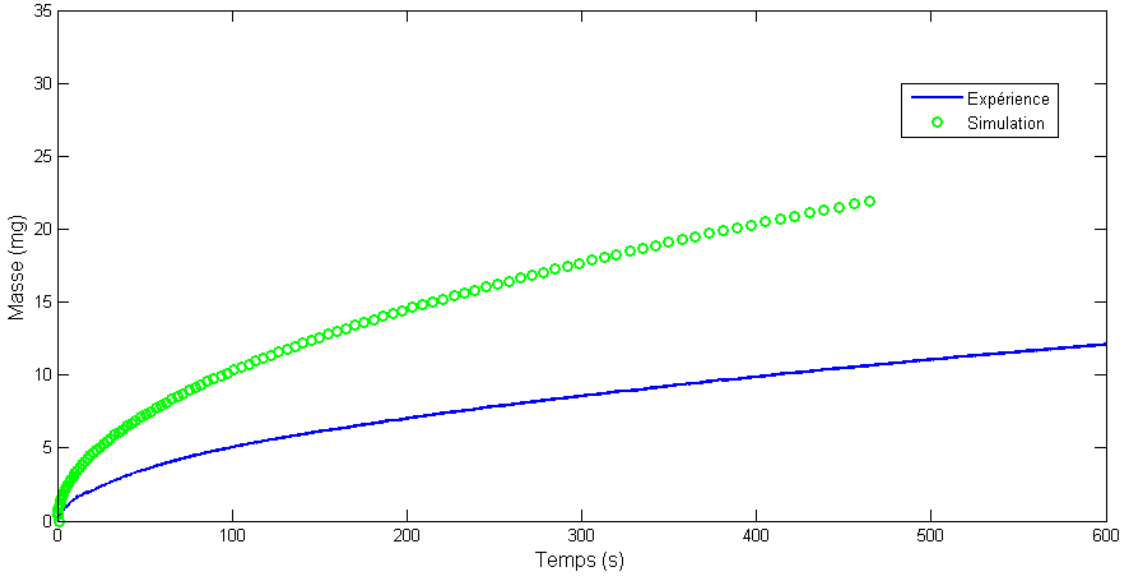


Figure 5.20 Comparaison des résultats expérimentaux et numériques de la masse absorbée lors de la montée capillaire pour un toron de chaîne du NCF de Texonic

Phénomène de saturation

Le phénomène de saturation apparaît lorsqu'un toron, un pli ou un empilement de plis quelconque se remplit de liquide et que ce liquide ne remplit pas l'espace disponible au complet. Il faut alors parler de tissu partiellement saturé. À l'inverse, lorsqu'un tissu est complètement imbibé d'un liquide, il est dit saturé. Expérimentalement, la saturation de l'échantillon augmente au fur et à mesure de l'avancement du front de liquide, mais n'atteint que très rarement 100%. En effet, après observations des différentes montées capillaires réalisées, le liquide atteint d'abord le sommet de l'échantillon sans nécessairement saturer le spécimen tel qu'illustré à la Figure 5.21.

Figure 5.21 Photos de montées capillaires dans un toron d'un renfort unidirectionnel de la société Tissa : (a) le front de fluide est arrivé au bout du toron (dans la zone de contraste) sans le saturer complètement, (b) la saturation en liquide de la zone de contraste a augmenté à la fin de l'écoulement

Par conséquent, le tissu continuera de se remplir même si le liquide a atteint le haut de tissu. Afin de tenir compte de ce phénomène, il faudrait pouvoir obtenir une courbe de saturation du toron pour chaque nombre capillaire atteint lors de l'expérience. En effet, la vitesse d'écoulement varie à chaque instant. Pour chacune de ces courbes, on pourrait déterminer les paramètres d'un des modèles de saturation choisi à partir des références disponibles dans la littérature scientifique. Le choix d'un modèle empirique pour $k_r(S)$ permettrait de calculer l'ensemble des perméabilités relatives pour tenir compte de la saturation lors du calcul des perméabilités. Cette procédure devrait être réalisée pour chaque itération de la simulation. L'application de cette méthode nécessiterait cependant une étude plus fondamentale des phénomènes de saturation qui demanderait la réalisation de nombreuses expériences supplémentaires (pour comprendre les effets du nombre capillaire sur le modèle de saturation) cette étude m'a pu être entreprise dans le cadre du présent travail.

5.3.3 Étude des empilements de plis

Le phénomène de montée capillaire dans un empilement de plis semble complexe à simuler avec le modèle numérique développé au Chapitre 3 et au Chapitre 4. Un certain nombre de phénomènes apparaissant lors d'une montée capillaire dans un empilement de plis seront maintenant décrits ainsi que les paramètres de simulation associés. Ces explications permettent de comprendre pourquoi le modèle présenté permet pour l'instant seulement une simulation partielle du phénomène. Dans un premier temps, les limitations concernant le maillage du domaine et les conditions aux limites sont présentées. Dans un deuxième temps, les limitations causées par le phénomène de saturation sont discutées.

Limitations du maillage et des conditions aux limites

Le choix du maillage à utiliser reste toujours délicat. Tel que présenté pour la mesure de perméabilité, ce choix a des conséquences directes sur les mécanismes de remplissage du renfort fibreux. En outre, les conditions aux limites lors de la montée capillaire sont imposées grâce au calcul d'une pression capillaire. Cette dernière est évaluée grâce au diamètre hydraulique d_h, qui est directement lié à la géométrie des pores. Si cette approche paraît justifiée pour un toron seul, elle est en revanche discutable dans le cas d'un empilement de plis puisque la valeur de la pression capillaire peut varier localement dans la section. La pression capillaire dépend en effet de la combinaison des pores dans les torons, de l'espace inter-toron et de l'orientation des torons dans le sens ou non de l'écoulement. Il est donc difficile de connaitre la contribution de chaque pore et d'évaluer la manière dont ils interviennent lors de l'imbibition du renfort. Ainsi le calcul du diamètre du tube équivalent qui représente la succession de pores semble difficile à réaliser en pratique.

Limitations causées par le phénomène de saturation

Le phénomène de saturation est lui aussi présent lors de la montée capillaire dans les plis de tissus. Les espaces entre les torons et dans les fibres ne se remplissent pas de la même manière puisque la pression capillaire appliquée localement n'a pas la même valeur. Lebel l'a notamment montré à l'aide d'une expérience réalisée sur un pli du renfort NCF de la société Texonic [22]. Cette expérience est réalisée à l'aide de deux imbibitions successives avec le même pli. La première imbibition est réalisée avec un fluide de couleur jaune et une seconde imbibition est effectuée avec

un fluide de couleur bleue. La Figure 5.22 montre le résultat des expériences. Les espaces inter-torons sont remplis par le liquide bleu, alors que les torons dans les sens transverse et longitudinal sont remplis par le liquide jaune. La montée capillaire dans l'espace inter-toron s'est arrêtée avant celle dans les torons. Cette observation montre qu'il est difficile de modéliser la montée capillaire pour un empilement de plis avec la description cellulaire du tissu utilisée dans ce travail. En effet dans le modèle développé, chaque cellule est constituée de torons dilués dans l'espace inter-toron. Le phénomène de montée capillaire dans le toron et dans l'espace inter-toron n'est donc pas découplé. Il faudrait ajouter à la modélisation une saturation qui permettrait de représenter ce phénomène à l'échelle de la cellule.

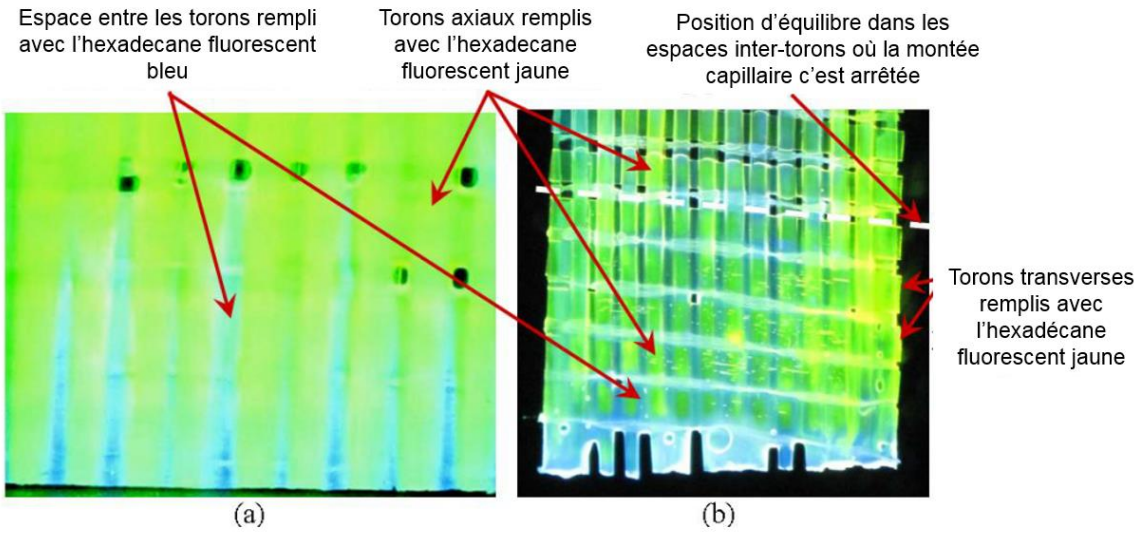


Figure 5.22 Test qualitatif d'imbibition pour un pli de tissu NCF dans le sens trame avec deux fluides successifs de couleurs différentes (un bleu et un jaune) : (a) pendant l'imbibition, (b) après l'imbibition [22]

5.4 Conclusion

Les résultats de simulation de la mesure de perméabilité et de la montée capillaire ont été présentés pour les différents renforts étudiés. Dans le cas de la mesure de perméabilité, l'influence du maillage sur le comportement de l'écoulement a été clairement démontrée. Dans certains cas, une discrétisation fine peut engendrer l'apparition de canaux préférentiels d'écoulement ayant pour

conséquence d'augmenter la perméabilité prédite. Dans d'autres cas, des obstacles constitués de cellules avec un haut taux de fibres peuvent diminuer les valeurs de perméabilité prédites. Si pour certaines configurations, des prédictions proches des expériences ont été obtenues, il reste délicat de trouver un critère objectif permettant de sélectionner a priori une discrétisation adéquate. Concernant la montée capillaire, les simulations effectuées sur les modèles des torons permettent d'avoir des positions du front proches des valeurs expérimentales. Afin d'avoir des résultats plus cohérents pour la masse absorbée en fonction du temps, il semble nécessaire de traiter le phénomène de saturation. La prochaine étape sera de prédire la montée capillaire dans le cas d'un renfort tissé comme dans l'exemple de la Figure 5.22.

CHAPITRE 6 CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

6.1 Synthèse

Le projet de maîtrise présenté dans ce mémoire a permis de développer une nouvelle approche pour simuler l'écoulement de remplissage d'un moule, dans lequel un renfort fibreux est imprégné par une résine liquide. Le renfort est considéré comme un milieu poreux à double échelle discrétisé en cellules pour une solution de l'équation de Darcy par différences finies. L'étude a porté sur deux renforts typiquement utilisés pour la fabrication de composites à matrice polymère. Le travail inclut la caractérisation et la modélisation géométrique des renforts et la simulation d'expériences de caractérisation couramment utilisées dans l'étude des procédés LCM (mesure de perméabilité, montée capillaire).

Dans un premier temps, une caractérisation expérimentale de la structure des renforts fibreux a permis d'obtenir des renseignements sur leur géométrie. Ces tissus ont ensuite été modélisés avec le logiciel textile TexGen à partir des caractéristiques mesurées et des données recueillies dans des travaux antérieurs. Une première discrétisation cellulaire des renforts en voxels a été utilisée. L'étude de la voxélisation optimale des VER de chaque tissu représenté sur TexGen a notamment permis d'obtenir un critère d'arrêt du processus de discrétisation. Enfin, une méthode de construction des modèles cellulaires des tissus à partir de leur voxélisation a été mise en place. Le résultat final est une description structurée du renfort dans laquelle chaque cellule contient des informations sur les propriétés locales de l'échantillon du tissu quelle contient. Dans tous les cas étudiés, des discrétisations cellulaires de tailles différentes ont pu être générées automatiquement afin de simuler l'écoulement de remplissage 3D à travers la structure fibreuse.

Un code de simulation a été entièrement développé avec le logiciel Matlab. Les lois constitutives implémentées sont la loi de Darcy et la conservation de la masse. La méthode de résolution fondée sur les différences finies des travaux précédents a été validée et généralisée au cas 3D. Un certain nombre de validations ont permis de connaitre les limites du modèle concernant la conservation de la masse lors des simulations de remplissage de la structure fibreuse. Par la suite, cet outil de simulation a permis de comparer des écoulements simulés à des résultats expérimentaux pour la montée capillaire et la mesure de perméabilité à pression imposée.

Pour la mesure de perméabilité, l'accent a été porté sur l'influence du maillage sur le comportement de l'écoulement. Dans certains cas, on a montré que des canaux préférentiels d'écoulement apparaissaient selon le maillage cellulaire sélectionné. Dans d'autres cas, des obstacles constitués de cellules avec un haut taux de fibres diminuent la valeur de perméabilité prédite numériquement. Ainsi, la manière dont chaque toron est représenté a pour effet soit d'augmenter la perméabilité prédite ou de la diminuer. Le fait de ne pouvoir sélectionner a priori une taille de maillage permettant d'effectuer une prédiction de la perméabilité comparable aux résultats expérimentaux reste à l'heure actuelle la principale limitation de la modélisation cellulaire proposée. Concernant la montée capillaire, les simulations effectuées sur les modèles des torons ont donné des positions du front proches des valeurs expérimentales. L'étude de la masse absorbée a aussi montrée que les phénomènes de saturation pouvaient jouer un rôle important lors de la montée capillaire dans un toron seul. Dans le futur, certaines améliorations pourraient être apportées au modèle afin de prendre en compte les phénomènes de saturation.

6.2 Recommandations

Une des principales limitations de l'approche cellulaire pour la prédiction de la perméabilité réside dans la dépendance des résultats par rapport au maillage sélectionné. L'approche actuelle fondée sur la dilution du taux de fibres pour le calcul de la perméabilité cellulaire ne permet pas de tenir compte de l'existence de canaux d'écoulement préférentiel de façon robuste. Pour corriger ce problème, la modélisation pourrait être affinée en considérant l'espace inter-torons et en lui associant une perméabilité équivalente. Il serait alors possible d'effectuer des simulations avec des cellules vides ne contenant pas de fibres. La perméabilité équivalente des espaces inter-torons permettrait aussi de proposer une nouvelle méthode de calcul de la perméabilité cellulaire qui viserait à mieux décrire la contribution des canaux libres. Il convient cependant de remarquer que l'estimation de la perte de charge dans les canaux entre les torons n'est pas un exercice facile, puisque la perméabilité équivalente dépend de la morphologie complexe du réseau des mésopores. Une autre alternative serait de résoudre l'écoulement de Stokes dans l'espace inter-torons et la loi de Darcy ou de Brinkman dans les torons. Cette approche permettrait probablement d'obtenir une convergence spatiale lors du raffinement du modèle. En revanche, le temps de calcul pourrait devenir prohibitif, s'éloignant ainsi des raisons initiales qui ont motivé la discrétisation cellulaire pour un calcul par différences finies.

La comparaison des prédictions numériques avec les expériences de montée capillaire a clairement montré les phénomènes de saturation pouvaient jouer un rôle important. Afin d'avoir des résultats plus précis sur la masse absorbée en fonction du temps, il sera important dans l'avenir de prendre en compte la saturation progressive des torons pendant le remplissage de la cavité du moule. Deux choix sont possibles, soit en introduisant un terme puits dans les équations qui régissent l'écoulement, soit en paramétrant un modèle de saturation choisi à partir des travaux réalisés dans la littérature scientifique sur les écoulements dans les milieux poreux. A priori, les deux approches pourraient être implémentées avec le modèle actuel. La difficulté réside cependant dans le choix et la paramétrisation du modèle à utiliser.

Finalement, la compaction du renfort revêt une grande importance dans les procédés de moulage liquide. Au cours de ce travail, une approche simplifiée a été utilisée pour modéliser ce phénomène. Afin de mieux décrire l'évolution du volume libre dans les torons et entre ceux-ci lors de la compaction, une méthode plus robuste fondée sur les lois de comportement mécanique des renforts pourrait être utilisée. Les principaux défis de cette solution restent la sélection d'une loi de comportement adaptée pour reproduire la déformation des torons et la résolution numérique d'un problème mécanique fortement non linéaire incluant de nombreux contacts entre les torons.

RÉFÉRENCES

[1] C. Thurnherr, "Resin flow analysis through a fibrous reinforcement of double scale porosity," *Rapport de stage au laboratoire de la Chaire sur les Composites à Haute Performance, Polytechnique Montréal,* 2013.

[2] (05 Août 2016). *Texgen*. Available: http://texgen.sourceforge.net/index.php/Main_Page

[3] (5 Août 2016). *WiseTex suite* Available: https://www.mtm.kuleuven.be/Onderzoek/Composites/software/wisetex

[4] N. N. Nemeth, S. Mital, and J. Lang, "Evaluation of solid modeling software for finite element analysis of woven ceramic matrix composites," 2010.

[5] (5 Août 2016). *Texgen api*. Available: http://texgen.sourceforge.net/api/

[6] (5 Août 2016). *Texgen Applications*. Available: http://texgen.sourceforge.net/index.php/TexGen_Applications

[7] I. Verpoest and S. V. Lomov, "Virtual textile composites software WiseTex: Integration with micro-mechanical, permeability and structural analysis," *Composites Science and Technology,* vol. 65, pp. 2563-2574, 2005.

[8] (5 Août 2016). *WiseTex 3.0: towards interface with curtom simulation systems*. Available: http://www.simposium.eu/media/WiseTex_KULEUVEN.pdf

[9] M. Sherburn, "Geometric and mechanical modelling of textiles," University of Nottingham, 2007.

[10] H. Tan and K. M. Pillai, "Fast liquid composite molding simulation of unsaturated flow in dual-scale fiber mats using the imbibition characteristics of a fabric-based unit cell," *Polymer Composites,* vol. 31, pp. 1790-1807, 2010.

[11] N. Vernet, "Étude des propriétés de mise en oeuvre de renforts fibreux interlock tridimensionnels," Thèse de doctorat, Polytechnique Montréal, 2013.

[12] P. Ermanni and F. Trochu, "Molding, Liquid Composite Molding (LCM)," in *Wiley encyclopedia of composites*, 2nd ed Hoboken, NY: Wiley, 2012, pp. 1884-1893.

[13] E. Ruiz, V. Achim, S. Soukane, F. Trochu, and J. Bréard, "Optimization of injection flow rate to minimize micro/macro-voids formation in resin transfer molded composites," *Composites science and technology,* vol. 66, pp. 475-486, 2006.

[14] J. S. Leclerc and E. Ruiz, "Porosity reduction using optimized flow velocity in Resin Transfer Molding," *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing,* vol. 39, pp. 1859-1868, 2008.

[15] F. LeBel, A. E. Fanaei, É. Ruiz, and F. Trochu, "Prediction of optimal flow front velocity to minimize void formation in dual scale fibrous reinforcements," *International journal of material forming,* vol. 7, pp. 93-116, 2014.

[16] E. Ruiz and F. Trochu, "Flow Modeling in Composite Reinforcements," in *Composite Reinforcements for Optimum Performance*. vol. chap. 19, 588, ed: Woodhead Pub., Boisse Ed., 2011.

[17] V. Michaud, "A Review of Non-saturated Resin Flow in Liquid Composite Moulding processes," *Transport in Porous Media,* pp. 1-21, 2016.

[18] K. M. Pillai, "Modeling the unsaturated flow in liquid composite molding processes: a review and some thoughts," *Journal of Composite materials,* vol. 38, pp. 2097-2118, 2004.

[19] H. Tan and K. M. Pillai, "Multiscale modeling of unsaturated flow in dual-scale fiber preforms of liquid composite molding I: isothermal flows," *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing,* vol. 43, pp. 1-13, 2012.

[20] P. Simacek and S. G. Advani, "A numerical model to predict fiber tow saturation during liquid composite molding," *Composites Science and Technology,* vol. 63, pp. 1725-1736, 2003.

[21] F. LeBel, A. E. Fanaei, E. Ruiz, and F. Trochu, "Experimental characterization by fluorescence of capillary flows in the fiber tows of engineering fabrics," *Open Journal of Inorganic Non-metallic Martials (OJINM),* 2013.

[22] F. LeBel, A. E. Fanaei, E. Ruiz, and F. Trochu, "Experimental characterization by fluorescence of capillary flows in dual-scale engineering fabrics," *Textile Research Journal,* p. 0040517512471742, 2013.

[23] B. Verleye, M. Klitz, R. Croce, M. Griebel, S. Lomov, D. Roose*, et al.*, "Predicting the permeability of textile reinforcements via a hybrid navierstokes/brinkman solver," in *8th International conference on flow processes in composite materials*, 2006.

[24] B. Verleye, M. Klitz, R. Croce, D. Roose, S. Lomov, and I. Verpoest, *Computation of permeability of textile reinforcements*: SFB 611, 2005.

[25] A. Tamayol and M. Bahrami, "Analytical determination of viscous permeability of fibrous porous media," *International Journal of Heat and Mass Transfer,* vol. 52, pp. 2407-2414, 2009.

[26] F. Trochu, A. Madra, G. Hello, "Discretization of composite structures: an overview and Modcell implementation," Rapport interne, L*aboratoire de la Chaire sur les Composites à Haute Performance, Polytechnique Montréal,* 2014.

[27] P. Potluri and T. Sagar, "Compaction modelling of textile preforms for composite structures," *Composite Structures,* vol. 86, pp. 177-185, 2008.

[28] F. Robitaille and R. Gauvin, "Compaction of textile reinforcements for composites manufacturing. I: Review of experimental results," *Polymer composites,* vol. 19, pp. 198-216, 1998.

[29] B. Gebart, "Permeability of unidirectional reinforcements for RTM," *Journal of composite materials,* vol. 26, pp. 1100-1133, 1992.

[30] J. B. Alms, N. Correia, S. G. Advani, E. Ruiz, and C. Gonçalves, "Experimental procedures to run longitudinal injections to measure unsaturated permeability of LCM reinforcements," *FCPM Collaboration,* 2010.

[31] P. Hubert, "Course : Processing of composite materials," 2015.

[32] F. Trochu, R. Gauvin, and D. M. Gao, "Numerical analysis of the resin transfer molding process by the finite element method," *Advances in Polymer Technology,* vol. 12, pp. 329-342, 1993.

[33] R. W. Johnson, *The Handbook of Fluid Dynamics*. Boca Raton: CRC Press, 1998.

[34] E. W. Washburn, "The dynamics of capillary flow," *Physical Review,* vol. 17, pp. 273-283, Mar 1921.

[35] T. Balfourier, "Étude de la perméabilité transverse de renforts en carbon tridimensionnels," *Rapport de stage au laboratoire de la Chaire sur les Composites à Haute Performance, Polytechnique Montréal,* 2013.

ANNEXE A MODÉLISATION DE LA MONTÉE CAPILLAIRE

La mesure de la montée capillaire consiste à suivre le front du liquide et la masse de liquide absorbée à travers une mèche ou un échantillon de renfort placé lors de son imprégnation naturelle (i.e. par capillarité). (Voir Figure A.1)

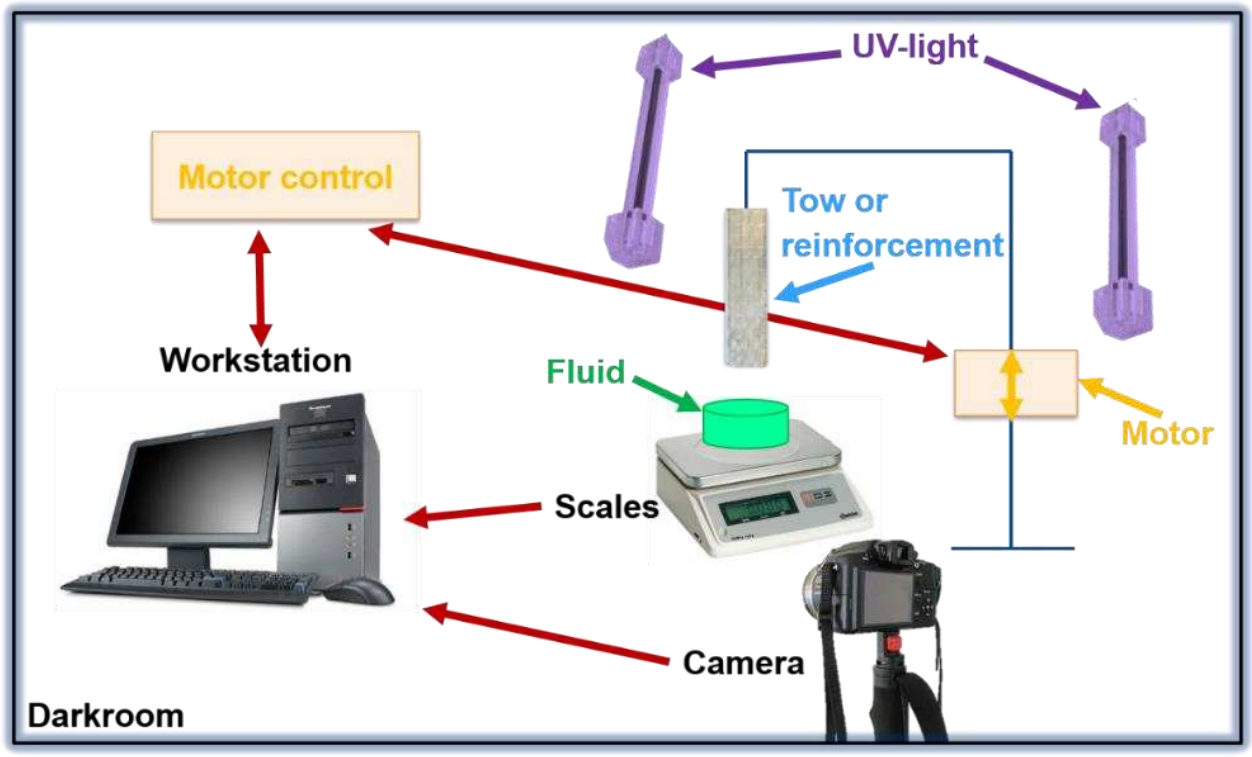


Figure A.1 Schéma d'une expérience de montée capillaire [1]

La Figure A.1 montre le dispositif expérimental conçu pour les expériences de montée capillaire. Le renfort est maintenu verticalement sur un système motorisé qui permet de faire descendre l'échantillon et de le mettre en contact avec le liquide. Lors de l'expérience, la masse de l'échantillon est enregistrée ainsi que des images du front de liquide qui monte à travers le renfort. Le liquide est rendu fluorescent à la lumière ultraviolette par l'ajout d'un pigment adéquat. Ce montage a permis à F.Lebel et al [21, 22] de caractériser des mèches de renforts fibreux et des renforts bidirectionnels à double échelle de porosité. Ainsi des grandeurs caractéristiques comme la perméabilité, le diamètre hydraulique et la pente de Lucas-Washburn ont pu être mesurées. Pour

modéliser la montée capillaire à travers un renfort fibreux, il faut évaluer la pression capillaire et écrire le bilan d'équilibre des pressions dans l'échantillon.

A.1 Pression capillaire

La montée capillaire est un phénomène qui peut être expliquée par l'effet des forces de tension de surface entre deux phases. Dans le cas d'un liquide avec un solide, le déséquilibre de ces forces entraine une cohésion du liquide contre la surface du solide. La capacité d'un liquide d'être attiré ou repoussé par une surface s'appelle le mouillage, un phénomène caractérisé par un angle de contact θ entre le liquide et la surface du solide. Pour un liquide parfaitement mouillant (mouillage total) le liquide forme un film sur la surface et l'angle de contact θ est nul [21]. La relation qui régit ces forces d'interface est l'équation de Young :

$$\gamma_{sv} - \gamma_{sl} - \gamma_{lv} cos\theta = 0 \tag{A.1}$$

où θ est l'angle de contact entre l'interface liquide/vapeur et solide/liquide et γ_{sv}, γ_{sl}, γ_{lv} sont les tensions de surface des contacts solide/vapeur, solide/liquide et liquide vapeur respectivement (voir Figure A.2).

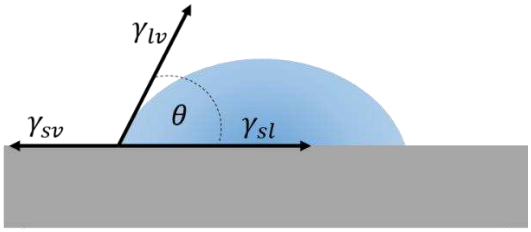


Figure A.2 Forces de tensions de surface d'une goutte de liquide sur une surface solide [1]

La tension d'adhésion définie par $\gamma_{lv}\, cos(\theta)$ provoque une montée ou une descente de liquide à travers les pores capillaires. Pour un tube de rayon r, les forces capillaires peuvent être décrites par une pression capillaire P_{cap} qui se calcule grâce à la loi de Young-Laplace [21]:

$$P_{cap} = -\frac{2}{r}\gamma_{lv}\cos(\theta) \tag{A.2}$$

Cette pression est à l'origine des phénomènes capillaires.

A.2 Loi de Jurin (position d'équilibre)

Lorsqu'un écoulement est établi dans un tube capillaire, il existe une hauteur pour laquelle les pressions mises en jeu s'équilibrent et le mouvement du fluide cesse. Cette hauteur d'équilibre z_{eq} est telle que la pression sous le ménisque est donnée par la loi de Pascal [21]:

$$P_B = P_{atm} - \Delta\rho \; g \; z_{eq} \tag{A.3}$$

où P_{atm} est la pression atmosphérique, ΔP *est* la différence entre la densité du gaz et du liquide et g est l'accélération de la pesanteur. Les ménisques sont causés par l'angle de contact comme le montre la Figure A.3.

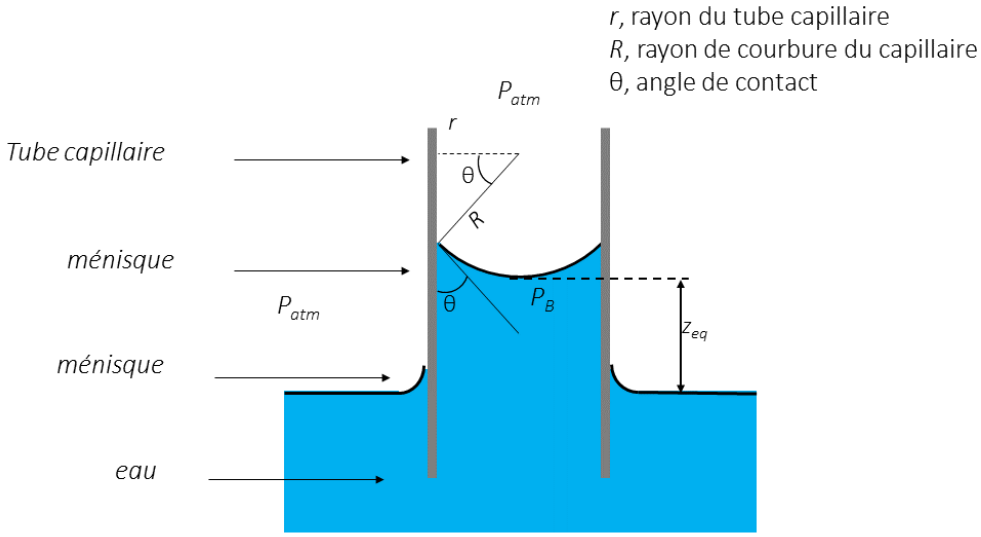


Figure A.3 Position d'équilibre d'un liquide dans un tube capillaire

Lorsque la position d'équilibre est atteinte, la pression P_B est compensée par la pression atmosphérique P_{atm} et la pression capillaire P_{cap} :

$$P_B = P_{atm} + P_{cap} \tag{A.4}$$

En combinant les équations (A.3) et (A.4), il est possible d'obtenir la position d'équilibre z_{eq} qui est aussi appelée z_{Jurin} (loi de Jurin) :

$$z_{eq} = z_{Jurin} = \frac{4}{d_h}\frac{\gamma_{lv}\cos}{\rho g} \tag{A.5}$$

où d_h est le diamètre hydraulique équivalent du tube capillaire. Si A est l'aire du tube capillaire et P son périmètre mouillé, alors le diamètre hydraulique est défini par :

$$d_h = \frac{4A}{P} = \frac{4\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)}{\pi d} = d = 2r \tag{A.6}$$

Dans un milieu poreux, le diamètre hydraulique est calculé en évaluant A et P.

A.3 Modélisation pour un renfort fibreux

Un renfort fibreux est constitué d'un assemblage de fibres et de mèches qui constituent un ensemble de canaux qui peuvent potentiellement devenir le siège de phénomènes capillaires. Une version modifiée de la loi de Jurin permet de modéliser la dynamique de l'écoulement capillaire.

A.3.1 Loi de Jurin modifiée

La loi de Jurin modifiée permet de tenir compte de la taille des pores dans le renfort ainsi que de la surface réelle en contact avec le fluide [21] :

$$z_{Jurin} = \frac{P_{cap}}{\rho g} = f_{geo} S_{pv}\left(\frac{\gamma_{lv}\cos(\theta)}{\rho g}\right) \tag{A.7}$$

où f_{geo} est un paramètre qui tient compte de la distribution des pores et S_{pv} est la surface spécifique. C'est cette valeur qui sera utilisée pour déterminer l'évolution de la montée capillaire en fonction du temps. Il faut noter que lors d'une montée capillaire dans un renfort à double échelle de porosité, les macropores et les micropores se remplissent au début de l'écoulement, mais que la hauteur d'équilibre est plus rapidement atteinte pour les macropores. À la fin de l'écoulement les micropores se remplissent avec un délai temporel non négligeable [22].

A.3.2 Modèle dynamique de la montée capillaire

Le bilan des forces dans un écoulement capillaire à travers un renfort fibreux est régi par l'équation de Hagen-poiseuille [33].

$$\underbrace{\frac{\pi d_h^2}{4}\rho\tau^2 z\frac{d^2z}{dt^2}}_{\text{Inertie}} = \underbrace{\frac{\pi d_h^2}{4}p_{cap}}_{\text{Capillarité}} \underbrace{-8\pi\mu\tau^2 z\frac{dz}{dt}}_{\text{Force visqueuse}} \underbrace{-\frac{\pi d_h^2}{4}\rho g z}_{\text{Gravité}} \tag{A.8}$$

où d_h est le diamètre hydraulique, P_{cap} la pression capillaire, μ la viscosité du fluide, τ la tortuosité et g la constante de gravitation.

Au début de l'écoulement et pour une faible hauteur de liquide la gravité peut être négligée. De plus, l'inertie n'a d'influence qu'au tout début de l'écoulement (la première microseconde pour les pores les plus larges (d_h>100 μm) et pour des liquides de faible viscosité) [22]. En tenant compte de ces hypothèses, l'équation peut se simplifier de la manière suivante :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d_h^2\rho g}{32\mu\tau^2}\left(\frac{z_{Jurin}}{z}\right) \tag{A.9}$$

La résolution de cette équation donne la position du front en fonction du temps [34] :

$$z^2 = B_h t \tag{A.10}$$

où B_h est la pente de Lucas-Washburn :

$$B_h = 2\frac{d_h^2\rho g}{32\mu\tau^2} z_{Jurin} \tag{A.11}$$

Ainsi sous ces hypothèses, la position du front au carré varie linéairement en fonction du temps au début de l'écoulement comme le schématise la Figure A.4 .

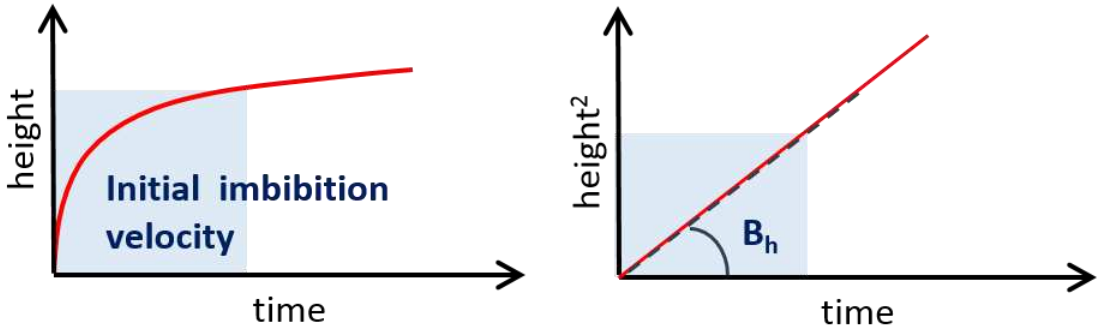


Figure A.4 Régime linéaire de Lucas-Washburn

La grandeur B_h dans l'équation (A.11) permet de déterminer le temps caractéristique t_c nécessaire pour imbiber une longueur caractéristique L_c de renfort.

$$t_c = \frac{L_c^{\,2}}{B_h} \tag{A.12}$$

De plus, si le remplissage d'une longueur caractéristique du renfort se fait à la même vitesse dans les micropores et les macropores, alors en principe aucune bulle d'air ne devrait être emprisonnée. Il est alors possible de déterminer la vitesse de remplissage optimale théorique du front de résine par la relation suivante :

$$v_{opt} = \frac{L_c}{t_{opt}} = \frac{B_h}{L_c} \tag{A.13}$$

Les phénomènes capillaires dans les milieux poreux restent complexes. La modélisation repose sur une série d'hypothèses simplificatrices qui ne sont valides que pour de faibles hauteurs d'imbibition naturelle avec des liquides de faible viscosité.

ANNEXE B MESURE DE PERMÉABILITÉ

Pour mesurer la perméabilité d'un renfort dans les directions du plan et à travers l'épaisseur, il est d'usage d'utiliser deux montages expérimentaux différents. Un des montages permet de mesurer la perméabilité dans le plan du renfort et le second montage à travers l'épaisseur.

B.1 Méthode de mesure dans le plan

La mesure de perméabilité dans le plan consiste généralement à découper plusieurs échantillons de renfort de forme rectangulaire et de les compresser dans un moule avec une taille de cavité contrôlée à l'aide d'une cale. Un moule de perméabilité est souvent composé de cinq éléments importants : une surface de moulage supérieure, une surface de moulage inférieure, une cale d'épaisseur contrôlée, un point d'injection et un évent. Le schéma d'un tel moule est présenté Figure B.1.

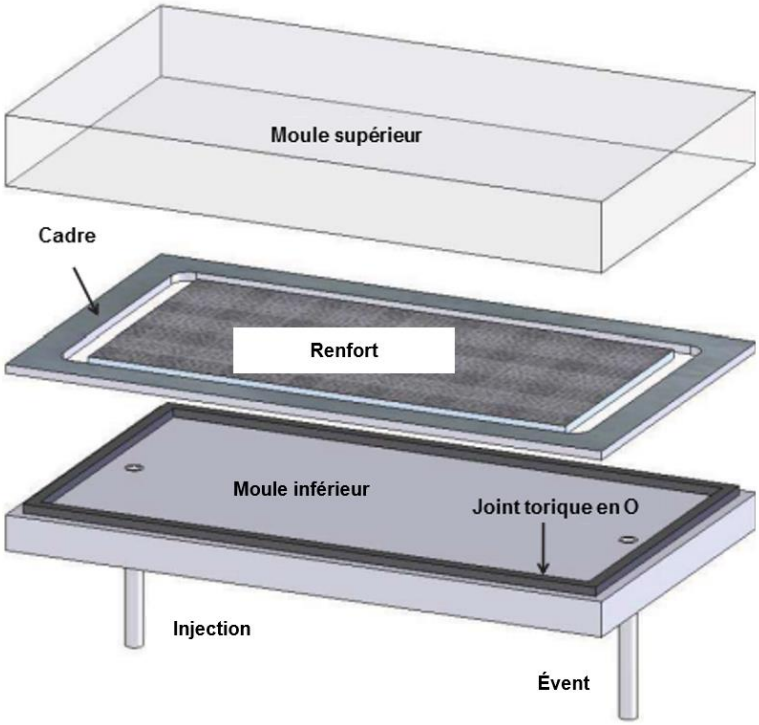


Figure B.1 Schéma d'un moule rectangulaire typique utilisé pour la mesure de la perméabilité par injection unidimensionnelle [30]

La taille contrôlée de la cavité permet de connaitre le taux de fibres lors de l'expérience, un paramètre critique qui gouverne la valeur de la perméabilité. Lorsque le moule est fermé, un liquide est injectée à une pression imposée suffisamment importante pour qu'on puisse négliger les phénomènes capillaires [30]. Le liquide passe à travers le renfort du point d'injection vers l'évent. Tout au long de l'écoulement la position du front est enregistrée. La Figure B.2 montre le schéma d'un montage typique pour une mesure de perméabilité dans le plan.

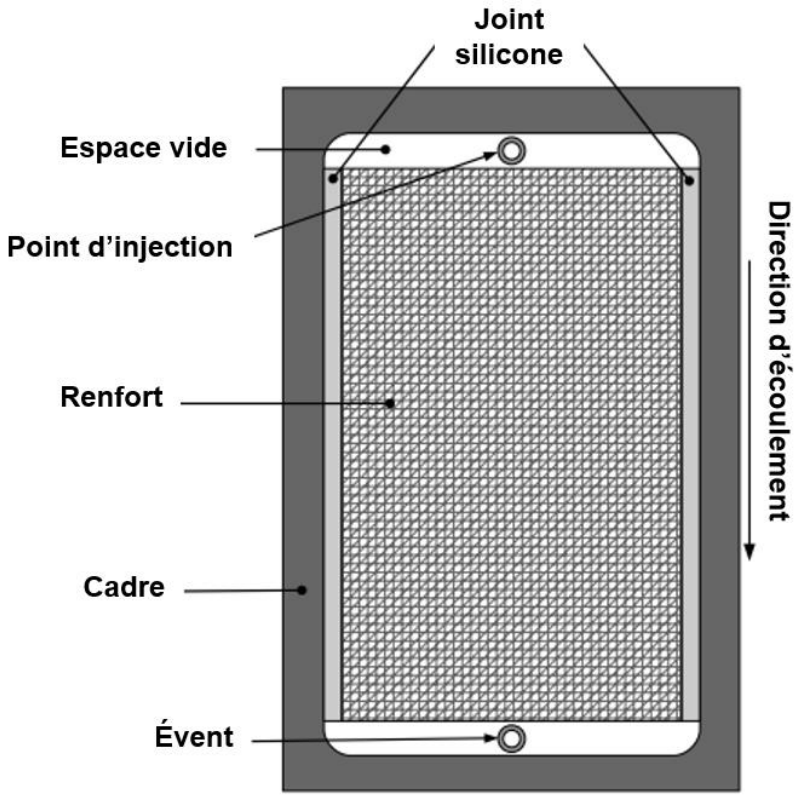


Figure B.2 Vue du dessus schématique d'un montage typique d'une mesure de perméabilité dans le plan [30]

La connaissance de la position du front à un instant donné permet de calculer la perméabilité dans la direction de l'écoulement. Une possibilité est d'identifier la perméabilité *K* dans la direction de l'écoulement grâce à la solution analytique de l'équation de Darcy dans le cas 1D par la relation suivante [30] :

$$x_{ff} = \sqrt{\frac{2K}{\phi.\mu}(\mathrm{P}_{injection} - \mathrm{P}_{évent})\,\mathrm{t}} \qquad \text{(B.1)}$$

où x_{ff} est la position du front, ϕ la porosité du renfort, μ la viscosité de résine utilisée et P la pression mesurée respectivement à l'évent et au port d'injection. L'allure caractéristique de cette équation est présentée à la Figure B.3.

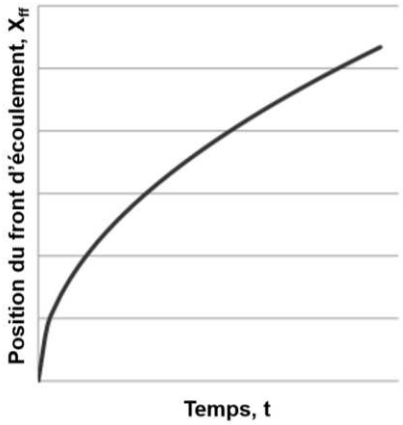


Figure B.3 Allure schématique de la position du front en fonction du temps dans une injection à pression imposée [30]

Ainsi, il est possible de tracer la position du front au carré afin d'obtenir une droite et d'identifier K à l'aide du coefficient directeur (Figure B.4).

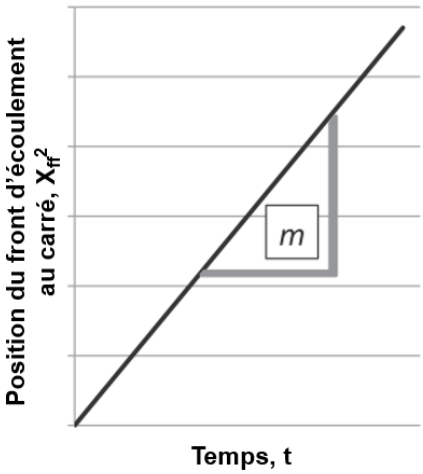


Figure B.4 Allure schématique de la position du front au carré en fonction du temps à pression imposée [30]

La valeur de la perméabilité est donnée par l'équation :

$$K = \frac{\mu.\phi}{2(\mathrm{P}_{injection} - P_{évent})} m \tag{B.2}$$

En suivant cette méthode, des expériences dans les trois directions du plan (0, 45 et 90°) peuvent être réalisées pour totalement caractériser le renfort fibreux. Un schéma montrant la découpe de ces trois directions dans un rouleau de renfort est présenté à la Figure B.5.

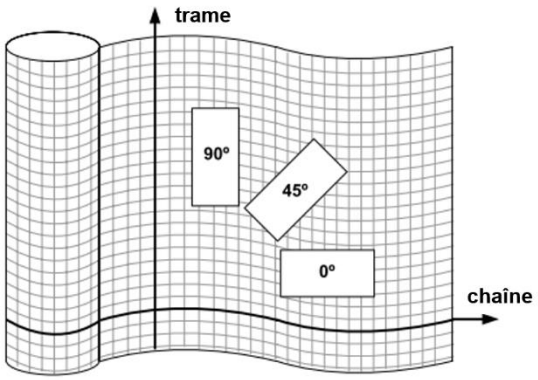


Figure B.5 Schéma de découpe des échantillons dans les trois directions dans un rouleau de renfort [30].

Les expérimentations dans les trois directions 0, 45, 90 permettent d'obtenir la matrice de perméabilité dans le plan (dimension 2) et de déterminer les perméabilités principales du renfort.

B.2 Méthode de mesure transverse

La mesure de la perméabilité transverse peut s'effectuer par empilement d'échantillons eux aussi positionnés dans une cavité de dimension contrôlée. L'expérience est basée sur une mesure de la différence de pression à travers le renfort saturé du liquide qui s'écoule à débit constant. La Figure B.6 présente un montage qui permet de comprimer le renfort entre deux plaques trouées à une épaisseur déterminée grâce à un jeu de cales.

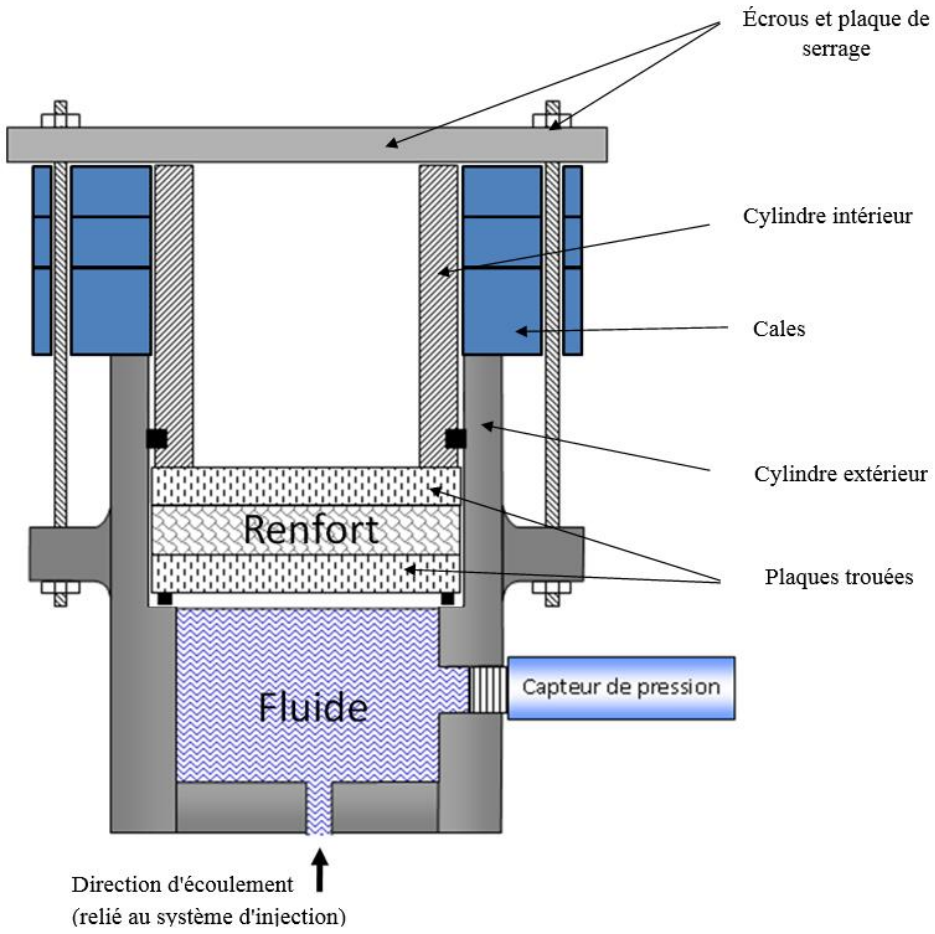


Figure B.6 Représentation schématique d'un montage de mesure de perméabilité transverse [35].

La loi de Darcy permet de calculer le débit du liquide en fonction de la différence de pression dans la direction transverse notée z :

$$V_z = \frac{Q}{A} = \frac{K_z}{\mu}\frac{\Delta P}{e} \tag{B.3}$$

$$Q = A\ \frac{K_z}{\mu}\frac{\Delta P}{e} \tag{B.4}$$

où Q est le débit d'injection choisi, ΔP la différence de pression, μ la viscosité du liquide utilisé, K_z la perméabilité transverse, A la surface imbibée lors de la mesure et e la distance entre les surfaces extérieures des plaques trouées.

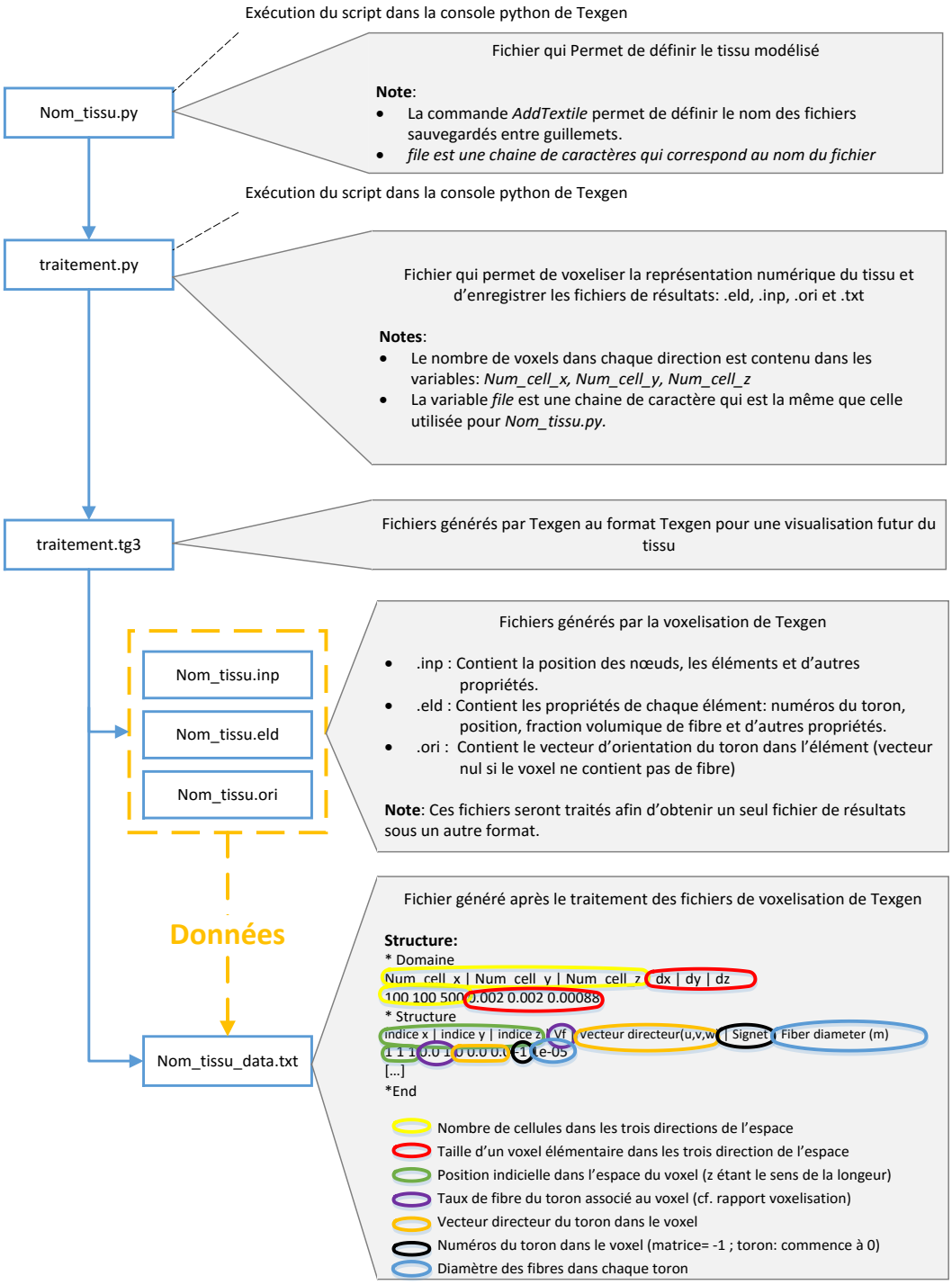
De la même manière que pour la mesure dans le plan, il est possible d'identifier K_z avec le coefficient directeur de la droite *m* représentative du débit en fonction de ΔP [35].

Ainsi :

$$K_z = \frac{m\mu e}{A} \tag{B.5}$$

Cette méthode expérimentale permet de déterminer la valeur de perméabilité transverse pour un taux de fibres donné.

ANNEXE C STRUCTURE DES FICHIERS DE MODÉLISATION DE TEXGEN



ANNEXE D DIFFÉRENCIATION DE LA COMBINAISON DE LA LOI DE DARCY ET DE LA CONSERVATION DE LA MASSE

L'équation de Darcy en 3D s'écrit :

$$\vec{v} = -\frac{\boldsymbol{K}}{\mu}\vec{\nabla}P$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = -\frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nabla P_x \\ \nabla P_y \\ \nabla P_z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = -\frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} K_{xx}\nabla P_x + K_{xy}\nabla P_y + K_{xz}\nabla P_z \\ K_{yx}\nabla P_x + K_{yy}\nabla P_y + K_{yz}\nabla P_z \\ K_{zx}\nabla P_x + K_{zy}\nabla P_y + K_{zz}\nabla P_z \end{pmatrix}$$

Pour une cellule à la position i,j,k et en différenciant la pression l'équation de Darcy devient :

$$\begin{pmatrix} v_x(i,j,k) \\ v_y(i,j,k) \\ v_z(i,j,k) \end{pmatrix} = -\frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} K_{xx}\dfrac{P(i+1,j,k)-P(i,j,k)}{D_x} + K_{xy}\dfrac{P(i,j+1,k)-P(i,j,k)}{D_y} + K_{xz}\dfrac{P(i,j,k+1)-P(i,j,k)}{D_z} \\ K_{yx}\dfrac{P(i+1,j,k)-P(i,j,k)}{D_x} + K_{yy}\dfrac{P(i,j+1,k)-P(i,j,k)}{D_y} + K_{yz}\dfrac{P(i,j,k+1)-P(i,j,k)}{D_z} \\ K_{zx}\dfrac{P(i+1,j,k)-P(i,j,k)}{D_x} + K_{zy}\dfrac{P(i,j+1,k)-P(i,j,k)}{D_y} + K_{zz}\dfrac{P(i,j,k+1)-P(i,j,k)}{D_z} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} v_x(i,j,k) \\ v_y(i,j,k) \\ v_z(i,j,k) \end{pmatrix} = -\frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} \dfrac{K_{xx}}{D_x}P(i+1,j,k) + \dfrac{K_{xy}}{D_y}P(i,j+1,k) + \dfrac{K_{xz}}{D_z}P(i,j,k+1) - \left(\dfrac{K_{xx}}{D_x} + \dfrac{K_{xy}}{D_y} + \dfrac{K_{xz}}{D_z}\right)P(i,j,k) \\ \dfrac{K_{yx}}{D_x}P(i+1,j,k) + \dfrac{K_{yy}}{D_y}P(i,j+1,k) + \dfrac{K_{yz}}{D_z}P(i,j,k+1) - \left(\dfrac{K_{yx}}{D_x} + \dfrac{K_{yy}}{D_y} + \dfrac{K_{yz}}{D_z}\right)P(i,j,k) \\ \dfrac{K_{zx}}{D_x}P(i+1,j,k) + \dfrac{K_{zy}}{D_y}P(i,j+1,k) + \dfrac{K_{zz}}{D_z}P(i,j,k+1) - \left(\dfrac{K_{zx}}{D_x} + \dfrac{K_{zy}}{D_y} + \dfrac{K_{zz}}{D_z}\right)P(i,j,k) \end{pmatrix}$$

La différenciation de l'équation de conservation de la masse donne :

$$\vec{\nabla}.\vec{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{v_x(i,j,k) - v_x(i-1,j,k)}{D_x} + \frac{v_y(i,j,k) - v_y(i,j-1,k)}{D_y} + \frac{v_z(i,j,k) - v_z(i,j,k-1)}{D_z} = 0$$

Chaque vitesse est exprimée grâce à la formule de Darcy et remplacée dans l'équation.

$$\begin{aligned}
&\frac{K_{xx}(i,j,k)}{D_x^2}P(i+1,j,k) + \frac{K_{xy}(i,j,k)}{D_yD_x}P(i,j+1,k) + \frac{K_{xz}(i,j,k)}{D_zD_x}P(i,j,k+1) - \left(\frac{K_{xx}(i,j,k)}{D_x^2} + \frac{K_{xy}(i,j,k)}{D_yD_x} + \frac{K_{xz}(i,j,k)}{D_zD_x}\right)P(i,j,k) \\
&- \frac{K_{xx}(i-1,j,k)}{D_x^2}P(i,j,k) - \frac{K_{xy}(i-1,j,k)}{D_yD_x}P(i-1,j+1,k) - \frac{K_{xz}(i-1,j,k)}{D_zD_x}P(i-1,j,k+1) + \left(\frac{K_{xx}(i-1,j,k)}{D_x^2} + \frac{K_{xy}(i-1,j,k)}{D_yD_x} + \frac{K_{xz}(i-1,j,k)}{D_zD_x}\right)P(i-1,j,k) \\
&+ \frac{K_{yx}(i,j,k)}{D_xD_y}P(i+1,j,k) + \frac{K_{yy}(i,j,k)}{D_y^2}P(i,j+1,k) + \frac{K_{yz}(i,j,k)}{D_zD_y}P(i,j,k+1) - \left(\frac{K_{yx}(i,j,k)}{D_xD_y} + \frac{K_{yy}(i,j,k)}{D_y^2} + \frac{K_{yz}(i,j,k)}{D_zD_y}\right)P(i,j,k) \\
&- \frac{K_{yx}(i,j-1,k)}{D_xD_y}P(i+1,j-1,k) - \frac{K_{yy}(i,j-1,k)}{D_y^2}P(i,j,k) - \frac{K_{yz}(i,j-1,k)}{D_zD_y}P(i,j-1,k+1) + \left(\frac{K_{yx}(i,j-1,k)}{D_xD_y} + \frac{K_{yy}(i,j-1,k)}{D_y^2} + \frac{K_{yz}(i,j-1,k)}{D_zD_y}\right)P(i,j-1,k) \\
&+ \frac{K_{zx}(i,j,k)}{D_xD_z}P(i+1,j,k) + \frac{K_{zy}(i,j,k)}{D_yD_z}P(i,j+1,k) + \frac{K_{zz}(i,j,k)}{D_z^2}P(i,j,k+1) - \left(\frac{K_{zx}(i,j,k)}{D_xD_z} + \frac{K_{zy}(i,j,k)}{D_yD_z} + \frac{K_{zz}(i,j,k)}{D_z^2}\right)P(i,j,k) \\
&- \frac{K_{zx}(i,j,k-1)}{D_xD_z}P(i+1,j,k-1) - \frac{K_{zy}(i,j,k-1)}{D_yD_z}P(i,j+1,k-1) - \frac{K_{zz}(i,j,k-1)}{D_z^2}P(i,j,k) + \left(\frac{K_{zx}(i,j,k-1)}{D_xD_z} + \frac{K_{zy}(i,j,k-1)}{D_yD_z} + \frac{K_{zz}(i,j,k-1)}{D_z^2}\right)P(i,j,k-1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Pour simplifier les notations lors de la substitution des vitesses dans l'équation de conservation de la masse, il est associé aux coefficients du tenseur de perméabilité une lettre en indice. Cette dernière dépend des indexes de chaque vitesse. Les correspondances sont les suivantes :

8. (*i*-1, *j*, *k*): w pour « west »
9. (*i*, *j*-1, *k*): u pour « up »
10. (*i*, *j*, *k*-1): s pour « south »

Après simplification il est obtenu une formulation vraie pour chaque cellule du modèle.

$$
\begin{pmatrix}
\frac{K_{zx,s}}{D_xD_z}+\frac{K_{zy,s}}{D_yD_z}+\frac{K_{zz,s}}{D_z^2} \\
-\frac{K_{zx,s}}{D_xD_z} \\
-\frac{K_{zy,s}}{D_yD_z} \\
\frac{K_{yx,u}}{D_xD_y}+\frac{K_{yy,u}}{D_y^2}+\frac{K_{yz,u}}{D_zD_y} \\
-\frac{K_{yx,u}}{D_xD_y} \\
\frac{K_{xx,w}}{D_x^2}+\frac{K_{xy,w}}{D_yD_x}+\frac{K_{xz,w}}{D_zD_x} \\
-\left(\frac{K_{xx}}{D_x^2}+\frac{K_{xy}}{D_yD_x}+\frac{K_{xz}}{D_zD_x}\right)-\left(\frac{K_{yz}}{D_xD_y}+\frac{K_{yy}}{D_y^2}+\frac{K_{yz}}{D_zD_y}\right)-\left(\frac{K_{zx}}{D_xD_z}+\frac{K_{zy}}{D_yD_z}+\frac{K_{zz}}{D_z^2}\right)-\frac{K_{xx,w}}{D_x^2}-\frac{K_{yy,u}}{D_y^2}-\frac{K_{zz,s}}{D_z^2} \\
\frac{K_{xx}}{D_x^2}+\frac{K_{zx}}{D_xD_z}+\frac{K_{yx}}{D_xD_y} \\
-\frac{K_{xy,w}}{D_yD_x} \\
\frac{K_{yy}}{D_y^2}+\frac{K_{zy}}{D_yD_z}+\frac{K_{xy}}{D_yD_x} \\
-\frac{K_{yz,u}}{D_zD_y} \\
-\frac{K_{xz,w}}{D_zD_x} \\
\frac{K_{xz}}{D_zD_x}+\frac{K_{yz}}{D_zD_y}+\frac{K_{zz}}{D_z^2}
\end{pmatrix}^T
\begin{pmatrix}
P(i,j,k-1) \\
P(i+1,j,k-1) \\
P(i,j+1,k-1) \\
P(i,j-1,k) \\
P(i+1,j-1,k) \\
P(i-1,j,k) \\
P(i,j,k) \\
P(i+1,j,k) \\
P(i-1,j+1,k) \\
P(i,j+1,k) \\
P(i,j-1,k+1) \\
P(i-1,j,k+1) \\
P(i,j,k+1)
\end{pmatrix}
=0
$$

ANNEXE E MATRICE À DIAGONALE DOMINANTE

Une matrice carrée à coefficients réels est dite à diagonale dominante si le module de chaque terme de la diagonale est supérieur ou égal à la somme des modules des autres termes de sa ligne. Si $A = (\mathrm{a}_{i,j})_{i\in[1,\mathrm{n}]}$ on a alors :

$$\forall i \in \ 1,n \ , \left|a_{i,i}\right| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|a_{i,j}\right| \tag{E.1}$$

ANNEXE F NORME 2 D'UNE MATRICE

Cette norme se calcule pour une matrice *A* carrée donnée de la manière suivante :

$$\left\|A\right\|_2 = \sqrt{\rho(\mathrm{A}^t\ A)} \tag{F.1}$$

Avec ρ le rayon spectral de la matrice qui est défini par :

$$\rho(A) = \max\left|\lambda_i\right| \tag{F.2}$$

Où les λ_i sont les valeurs propres de *A*.