

**Titre:** Étude de la distribution des champs magnétostatiques dans une section d'essais de type CANDU chauffée par effet de Joule  
Title: [section d'essais de type CANDU chauffée par effet de Joule](#)

**Auteur:** Darren Hall  
Author: [Darren Hall](#)

**Date:** 2016

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Hall, D. (2016). Étude de la distribution des champs magnétostatiques dans une section d'essais de type CANDU chauffée par effet de Joule [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/2352/>

## Document en libre accès dans PolyPublie Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/2352/>  
PolyPublie URL: <https://publications.polymtl.ca/2352/>

**Directeurs de recherche:** Alberto Teyssedou  
Advisors: [Alberto Teyssedou](#)

**Programme:** Génie énergétique  
Program: [Génie énergétique](#)

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉTUDE DE LA DISTRIBUTION DES CHAMPS MAGNÉTOSTATIQUES DANS UNE  
SECTION D'ESSAIS DE TYPE CANDU CHAUFFÉE PAR EFFET DE JOULE

DARREN HALL  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE PHYSIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE ÉNERGÉTIQUE)  
OCTOBRE 2016

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

ÉTUDE DE LA DISTRIBUTION DES CHAMPS MAGNÉTOSTATIQUES DANS UNE  
SECTION D'ESSAIS DE TYPE CANDU CHAUFFÉE PAR EFFET DE JOULE

présenté par : HALL Darren

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées  
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. MEUNIER Michel, Ph. D., président

M. TEYSSEDOU Alberto, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. MARLEAU Guy, Ph. D., membre

## DÉDICACE

*À mes parents qui ont  
toujours cru en moi... .*

## REMERCIEMENTS

J'aimerais d'abord et avant tout remercier mon directeur de recherche Alberto Teyssedou pour toutes les belles discussions scientifiques que nous avons eues au cours de ma maîtrise. Grâce à lui, j'ai non seulement grandi en tant que scientifique mais j'ai aussi acquis des connaissances qui me seront utiles au cours de ma carrière. De plus, j'aimerais remercier ma famille et mes amis pour leur support au cours des dernières années, et tout au long de mon cheminement académique.

## RÉSUMÉ

Parmi tous les paramètres physiques considérés lors de l’analyse de sûreté d’un réacteur nucléaire, le *flux de chaleur critique* (FCC) fait partie des plus importants. Afin d’étudier le FCC sous des conditions expérimentales relativement sécuritaires, la chaleur dégagée par le combustible nucléaire peut être reproduite grâce à l’effet de Joule. Or, afin de générer la puissance thermique nécessaire pour les expériences sur le FCC des réacteurs CANDU, des courants électriques très élevés de l’ordre de plusieurs dizaines de milliers d’ampères sont requis ce qui génère un champ magnétostatique très intense capable d’interagir avec la section d’essais et l’instrumentation.

Conséquemment, l’industrie nucléaire est préoccupée par les effets de ce champ magnétique sur les données collectées et par les forces d’origine magnétique agissant sur le système. Dans ce contexte, le travail présenté dans ce mémoire de maîtrise vise l’implémentation d’une méthodologie de calcul capable de fournir une information détaillée sur le champ magnétique engendré par ces courants.

Toutefois, étant donné la complexité du système, une étude magnétostatique appropriée requiert une méthode numérique afin d’obtenir une distribution fiable du champ magnétique à travers différentes structures de la section d’essais. À cet effet, nous considérons dans le cadre de ce mémoire le *volume integral equation method* (VIEM), une méthode bien établie basée sur les solutions intégrales des équations de Maxwell. Plus précisément, nous employons le VIEM afin d’étudier la distribution du champ magnétique à l’intérieur de la section d’essais et pour déterminer l’influence des prises conçues pour le branchement des capteurs de pression sur la symétrie de cette distribution.

Étant donné que les méthodes intégrales incluent les conditions aux limites et par conséquent ne requièrent pas l’emploi d’un critère de convergence, nous proposons une nouvelle technique de discrétisation. L’emploi de cette procédure nous permet de raffiner nos calculs et de diminuer les erreurs numériques dans les régions physiques qui nous intéressent, notamment, aux proximités des discontinuités ferromagnétiques. Avant d’utiliser la méthode du VIEM nous avons comparé les prédictions avec des calculs analytiques. À cet égard, il faut mentionner que la complexité des problèmes magnétiques limite le traitement analytique aux cas simples, c.-à-d., ayant une certaine symétrie ou étant invariant par translation. Pour le traitement de ces types de problèmes, la méthode proposée dans ce mémoire produit d’excellents résultats.

À la suite de la validation du VIEM, nous l'avons utilisé pour simuler la distribution du champ dans la section d'essais de type CANDU. À partir de l'analyse de nos résultats, nous n'observons d'une part aucune asymétrie dans le champ et d'autre part nous observons qu'il y a bel et bien un effet magnétique discernable dû à la présence des prises de pression mais que sa portée est trop faible pour influencer les forces magnétiques agissant sur les grappes de combustible simulées.

## ABSTRACT

Given all the different parameters considered during the safety analysis of a nuclear reactor, the *critical heat flux* (CHF) is one of the most important. In order to study the CHF under relatively safe experimental conditions, the heat emitted by the nuclear fuel can be reproduced using Joule heating. That being said, to generate the thermal power required for the CHF tests of CANDU reactors, electric currents in the order of many tens of thousands of amperes are required, which in turn generates very intense magnetostatic fields capable of interacting with both the test section and the instrumentation.

Thus, the nuclear industry is very preoccupied by the effects of the magnetic field on the data collected and by the magnetic forces acting on the system. In this sense, the work presented in this thesis aims at the implementation of a calculation methodology capable of giving detailed information on the magnetic field generated by these currents.

However, given the complexity of the system, an appropriate magnetostatic study requires a numerical method in order to obtain a reliable magnetic field distribution throughout each structure of the test section. Thus, we consider in the context of this thesis the *volume integral equation method* (VIEM), a well-established method based on integral solutions of Maxwell's equations. More precisely, we use the VIEM to study the symmetry of the magnetic field within the test section and to determine the influence of inlets designed for the attachment of pressure sensors.

Given the fact that integral methods include boundary conditions and consequently do not require the use of a convergence criterion, we propose a new discretization technique. The use of this procedure permits us to refine our calculations and diminish the numerical errors in the physical regions of interest, namely, in the vicinity of ferromagnetic discontinuities. Before using the VIEM method we compared the predicted values with analytical calculations. To this end, the complexity of magnetic problems limits the analytical treatment to simple cases, that is to say, having a certain symmetry or being translation invariant. For the treatment of this kind of problem, the numerical method proposed in this master's thesis produces excellent results.

Following the validation of the VIEM, we use it to simulate the distribution of the magnetic field in the test section. From the analysis of our results, we observe no asymmetry in the field

and that there is a discernible magnetic effect due to the presence of the pressure inlets but its range is too small to influence the magnetic forces acting on the simulated fuel bundles.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	ix
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xi
LISTE DES FIGURES . . . . .	xii
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xv
NOMENCLATURE . . . . .	xvi
 CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 Objectifs de recherche . . . . .	3
1.2 Revue de littérature pour le VIEM . . . . .	3
1.3 Plan du mémoire . . . . .	4
 CHAPITRE 2 DÉFINITIONS ET CONCEPTS FONDAMENTAUX . . . . .	6
2.1 Les équations de Maxwell . . . . .	6
2.1.1 Système d'équations stationnaires . . . . .	6
2.1.2 EDP de l'électrostatique . . . . .	7
2.1.3 EDP de la magnétostatique . . . . .	9
2.2 Transformations pour les intégrales multiples . . . . .	11
2.2.1 Transformations pour les intégrales doubles . . . . .	12
2.2.2 Transformations pour les intégrales triples . . . . .	13
2.3 Méthode de la fonction de Green . . . . .	15
2.3.1 Approche générale . . . . .	15
2.3.2 Formes spécifiques de la fonction de Green . . . . .	18
2.4 Solutions intégrales des EDP . . . . .	19
2.4.1 Solutions 3D . . . . .	19

2.4.2 Solutions 2D . . . . .	24
<b>CHAPITRE 3 CALCUL DES COEFFICIENTS DE DÉSAIMANTATION . . . . .</b>	<b>26</b>
3.1 Auto-coefficients de désaimantation . . . . .	26
3.1.1 Auto-coefficients 2D . . . . .	27
3.1.2 Auto-coefficients 3D . . . . .	30
3.2 Formalisme matriciel . . . . .	34
3.2.1 Calcul 2D . . . . .	34
3.2.2 Calcul 3D . . . . .	39
<b>CHAPITRE 4 Élaboration, validation et discréétisation du VIEM . . . . .</b>	<b>46</b>
4.1 Formalisme du VIEM . . . . .	46
4.2 Validation du formalisme matriciel . . . . .	48
4.2.1 Géométrie elliptique . . . . .	48
4.2.2 Géométrie ellipsoïdale . . . . .	50
4.3 Schéma de discréétisation . . . . .	52
4.3.1 Induction uniforme et cylindre creux . . . . .	53
4.3.2 Blindage magnétique d'une ligne bifilaire . . . . .	59
4.4 Section d'essais de type CANDU . . . . .	64
4.4.1 Discréétisation de la section d'essais . . . . .	64
4.4.2 Simulation de la section d'essais . . . . .	66
<b>CHAPITRE 5 CONCLUSION . . . . .</b>	<b>71</b>
5.1 Synthèse des travaux . . . . .	71
5.2 Limitations du modèle proposé . . . . .	72
5.3 Améliorations futures . . . . .	73
<b>RÉFÉRENCES . . . . .</b>	<b>74</b>
<b>ANNEXES . . . . .</b>	<b>76</b>

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1	Auto-coefficients d'une ellipse ( $n = 50$ ) . . . . .	49
Tableau 4.2	Auto-coefficients d'une ellipse ( $n = 100$ ) . . . . .	49
Tableau 4.3	Auto-coefficients d'un ellipsoïde ( $c/a = 0.5$ et $n = 50$ ) . . . . .	51
Tableau 4.4	Auto-coefficients d'un ellipsoïde ( $c/a = 0.5$ et $n = 100$ ) . . . . .	52
Tableau A.1	Erreurs relatives (en %) pour la méthode matricielle 2D ( $n = 50$ ). Les erreurs relatives $\epsilon_{xx}$ et $\epsilon_{yy}$ sont respectivement associées à $N_{xx}$ et $N_{yy}$ . . .	76
Tableau A.2	Erreurs relatives (en %) pour la méthode matricielle 2D ( $n = 100$ ). Les erreurs relatives $\epsilon_{xx}$ et $\epsilon_{yy}$ sont respectivement associées à $N_{xx}$ et $N_{yy}$ . . .	76
Tableau A.3	Erreurs relatives (en %) pour la méthode matricielle 3D ( $c/a = 0.5$ et $n = 50$ ). Les erreurs relatives $\epsilon_{xx}$ , $\epsilon_{yy}$ et $\epsilon_{zz}$ sont respectivement associées à $N_{xx}$ , $N_{yy}$ et $N_{zz}$ . . . . .	77
Tableau A.4	Erreurs relatives (en %) pour la méthode matricielle 3D ( $c/a = 0.5$ et $n = 100$ ). Les erreurs relatives $\epsilon_{xx}$ , $\epsilon_{yy}$ et $\epsilon_{zz}$ sont respectivement associées à $N_{xx}$ , $N_{yy}$ et $N_{zz}$ . . . . .	77

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Section d'essais de type CANDU. . . . .	2
Figure 2.1	Exemples de différents types de régions planes : (a) type I; (b) type II. . . . .	12
Figure 2.2	Exemple d'une région solide de type I. . . . .	14
Figure 2.3	Système général étudié. . . . .	16
Figure 3.1	Contourner une singularité 2D : (a) parcours total ; (b) parcours lorsque $r_* \rightarrow 0$ . . . . .	28
Figure 3.2	Contourner une singularité 3D : (a) surface totale ; (b) surface lorsque $r_* \rightarrow 0$ . . . . .	32
Figure 3.3	Portion d'un polygone généralisé à $L$ noeuds. . . . .	35
Figure 3.4	Exemple d'une géométrie polyédrique (tétraèdre). . . . .	40
Figure 4.1	Exemple d'une ellipse centrée à $\vec{r}_c$ . . . . .	48
Figure 4.2	Exemple d'un ellipsoïde centré à $\vec{r}_c$ . . . . .	50
Figure 4.3	Système magnétostatique #1 (Durand, 1968). . . . .	53
Figure 4.4	Discrétisation de type trapézoïdal pour un anneau centré à l'origine ayant un rayon interne $a$ et un rayon externe $b$ . Dans cet exemple, les points intérieurs sont choisis au centre de chaque trapèze et des valeurs de $N_r = 2$ et $N_\phi = 16$ sont utilisées. . . . .	56
Figure 4.5	Lignes de champ pour $\vec{H}$ associées au système magnétostatique #1. . .	57
Figure 4.6	Erreur relative maximale pour un système tel que $N = 500$ , $a = 0.1$ m et $b = 0.2$ m : (a) région $0 \leq r < a$ avec un minimum à $N_r = 9$ et $\varepsilon_{\%}^{\max} = 0.65$ %; (b) région $r > b$ avec un minimum à $N_r = 6$ et $\varepsilon_{\%}^{\max} = 0.45$ %. Veuillez noter que $N_\phi$ s'ajuste selon la valeur de $N_r$ d'après l'équation (4.25). . . . .	59
Figure 4.7	Système de magnétostatique #2 (Durand, 1968). . . . .	60
Figure 4.8	Lignes de champ pour $\vec{H}$ associées au système magnétostatique #2. . .	62
Figure 4.9	Erreur relative maximale pour un système tel que $N = 500$ , $a = 0.1$ m et $b = 0.2$ m : (a) région $0 \leq r < a$ avec un minimum à $N_r = 12$ et $\varepsilon_{\%}^{\max} = 0.46$ %; (b) région $r > b$ avec un minimum à $N_r = 8$ et $\varepsilon_{\%}^{\max} = 2.2$ %. Veuillez noter que $N_\phi$ s'ajuste selon la valeur de $N_r$ d'après l'équation (4.25). . . . .	63

Figure 4.10	Discrétisation en forme de prismes trapézoïdaux isocèles pour un cylindre creux ayant une hauteur $H$ , un rayon interne $a$ et un rayon externe $b$ . Dans cet exemple, des valeurs de $N_r = 2$ , $N_\phi = 16$ et $N_z = 3$ sont utilisées. . . . .	64
Figure 4.11	Coupe transversale de la section d'essais pour un assemblage de 28 crayons. . . . .	66
Figure 4.12	Distribution angulaire de $\ \vec{B}\ $ le long de la face interne de la couche en céramique. La courbe en pointillé représente les solutions obtenues sans les prises de pression et la ligne pleine donne les résultats trouvés avec les prises de pression. De plus, les angles de $0^\circ$ ( $360^\circ$ ) et $180^\circ$ sont vis-à-vis le centre de chaque prise. . . . .	68
Figure 4.13	Distribution radiale de $\ \vec{B}\ $ le long de l'axe central des prises de pression. La courbe en pointillé représente les solutions obtenues sans les prises de pression et la ligne pleine donne les résultats trouvés avec les prises de pression. De plus, les distances relatives sont données par rapport au centre de la section d'essais et les deux lignes verticales (situées à $\pm 50$ cm) représentent la surface extérieure de la grappe. . . . .	70
Figure B.1	Erreur relative maximale pour un système tel que $N = 500$ , $a = 0.1$ m et $b = 0.15$ m : (a) région $0 \leq r < a$ avec un minimum à $N_r = 7$ et $\varepsilon_{\%}^{\max} = 0.54$ %; (b) région $r > b$ avec un minimum à $N_r = 6$ et $\varepsilon_{\%}^{\max} = 0.42$ %. Veuillez noter que $N_\phi$ s'ajuste selon la valeur de $N_r$ d'après l'équation (4.25). . . . .	78
Figure B.2	Erreur relative maximale pour un système tel que $N = 1000$ , $a = 0.1$ m et $b = 0.2$ m : (a) région $0 \leq r < a$ avec un minimum à $N_r = 13$ et $\varepsilon_{\%}^{\max} = 0.33$ %; (b) région $r > b$ avec un minimum à $N_r = 10$ et $\varepsilon_{\%}^{\max} = 0.22$ %. Veuillez noter que $N_\phi$ s'ajuste selon la valeur de $N_r$ d'après l'équation (4.25). . . . .	79
Figure C.1	Erreur relative maximale pour un système tel que $N = 500$ , $a = 0.1$ m et $b = 0.15$ m : (a) région $0 \leq r < a$ avec un minimum à $N_r = 11$ et $\varepsilon_{\%}^{\max} = 0.34$ %; (b) région $r > b$ avec un minimum à $N_r = 6$ et $\varepsilon_{\%}^{\max} = 1.3$ %. Veuillez noter que $N_\phi$ s'ajuste selon la valeur de $N_r$ d'après l'équation (4.25). . . . .	80

Figure C.2	Erreurs relatives maximales pour un système tel que $N = 1000$ , $a = 0.1$ m et $b = 0.2$ m : (a) région $0 \leq r < a$ avec un minimum à $N_r = 16$ et $\varepsilon_{\%}^{\max} = 0.27\%$ ; (b) région $r > b$ avec un minimum à $N_r = 11$ et $\varepsilon_{\%}^{\max} = 1.1\%$ . Veuillez noter que $N_\phi$ s'ajuste selon la valeur de $N_r$ d'après l'équation (4.25). . . . .	81
Figure D.1	Erreurs relatives le long de l'interface interne de la couche en céramique pour un système 2D tel que $N = 1500$ et un système 3D (sans prise de pression) tel que $M = 1500$ . Veuillez noter que dans les deux cas nous utilisons une grille de points ayant 1000 éléments angulaires et que la discrétisation du canal est effectuée selon le schéma de discrétisation décrit par les expressions (4.27) et (4.40). . . . .	82

**LISTE DES ANNEXES**

Annexe A	Erreurs relatives . . . . .	76
Annexe B	Graphiques : induction uniforme et cylindre creux . . . . .	78
Annexe C	Graphiques : blindage magnétique d'une ligne bifilaire . . . . .	80
Annexe D	Graphiques : comparaison entre les approches 2D et 3D . . . . .	82
Annexe E	Tenseur de désaimantation 2D	
	Code MATLAB : n2d.m . . . . .	83
Annexe F	Tenseur de désaimantation 3D	
	Code MATLAB : n3d.m . . . . .	85
Annexe G	Géométrie elliptique	
	Code MATLAB : gellipse.m . . . . .	88
Annexe H	Géométrie ellipsoïdale	
	Code MATLAB : gellipsoid.m . . . . .	89
Annexe I	Géométrie annulaire	
	Code MATLAB : gannulus.m . . . . .	91
Annexe J	Géométrie cylindrique	
	Code MATLAB : ghcylinder.m . . . . .	94

## NOMENCLATURE

### Liste des sigles et abréviations

FCC	Flux de chaleur critique
VIEM	Volume Integral Equation Method
EDP	Équations aux dérivées partielles

### Quantités physiques et unités

$\rho_f$	Densité de charges libres [ $C\ m^{-3}$ ]
$\varepsilon_0$	Permittivité du vide [ $C^2\ m^{-3}\ kg^{-1}\ s^2$ ]
$\mu_0$	Perméabilité du vide [ $C^{-2}\ m\ kg$ ]
$\chi_e$	Susceptibilité électrique [pas d'unité]
$\chi_m$	Susceptibilité magnétique [pas d'unité]
$\phi_f$	Potentiel électrique libre [ $C^{-1}\ m^2\ kg\ s^{-2}$ ]
$\phi_p$	Potentiel électrique dépolarisant [ $C^{-1}\ m^2\ kg\ s^{-2}$ ]
$\Omega_m$	Potentiel scalaire magnétique [ $C\ s^{-1}$ ]
$\bar{N}$	Tenseur de désaimantation [pas d'unité]
$\vec{J}_f$	Densité de courant libre [ $C\ m^{-2}\ s^{-1}$ ]
$\vec{D}$	Induction électrique [ $C\ m^{-2}$ ]
$\vec{E}$	Champ électrique total [ $C^{-1}\ m\ kg\ s^{-2}$ ]
$\vec{E}_f$	Champ électrique libre [ $C^{-1}\ m\ kg\ s^{-2}$ ]
$\vec{E}_p$	Champ dépolarisant [ $C^{-1}\ m\ kg\ s^{-2}$ ]
$\vec{P}$	Polarisation [ $C\ m^{-2}$ ]
$\vec{B}$	Densité de flux magnétique [ $C^{-1}\ kg\ s^{-1}$ ]
$\vec{H}$	Champ magnétique total [ $C\ m^{-1}\ s^{-1}$ ]
$\vec{H}_f$	Champ magnétique libre [ $C\ m^{-1}\ s^{-1}$ ]
$\vec{A}_f$	Potentiel vecteur libre [ $C^{-1}\ m\ kg\ s^{-1}$ ]
$\vec{H}_m$	Champ de désaimantation [ $C\ m^{-1}\ s^{-1}$ ]
$\vec{M}$	Aimantation [ $C\ m^{-1}\ s^{-1}$ ]

## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Parmi tous les paramètres physiques considérés lors de l’analyse de sûreté d’un réacteur nucléaire, le *flux de chaleur critique* (FCC) fait partie des plus importants puisqu’il dicte sous quelles conditions thermiques nous obtenons une crise d’ébullition (Tong et Tang, 1997). Plus précisément, cette dernière représente un phénomène qui se caractérise par une chute brusque et soudaine du coefficient de transfert de chaleur par convection lorsque le FCC est atteint. Dans ce cas, la génération de la phase gazeuse du caloporteur devient trop importante à l’interface de l’élément chauffant et forme une barrière thermique qui peut mener à des dommages irréversibles du réacteur et provoquer un accident nucléaire.

Afin d’étudier le FCC sous des conditions expérimentales relativement sécuritaires, la chaleur dégagée par le combustible nucléaire peut être reproduite grâce à l’effet de Joule, c.-à-d., en passant un courant électrique à travers une série d’éléments résistifs. Ce type d’expérience a été effectué pour un réacteur CANDU 6 (Teyssedou et Oleknovitch, 2007) par les laboratoires Stern et ceux de l’université de Columbia en utilisant des canaux de simulation (sections d’essais) à pleine échelle comme celui schématisé à la figure 1.1. Le montage en question comprend un cylindre creux fait d’acier 410 ayant une couche de céramique sur sa surface interne et des prises régulièrement espacées pour les capteurs de pression<sup>1</sup>. De plus, le cylindre contient 12 grappes ayant, selon le cas étudié, chacune 28 ou 37 crayons de combustible simulés qui constituent aussi les éléments résistifs. Or, afin de générer la puissance thermique d’environ 10 MW nécessaire pour les expériences sur le FCC, des courants électriques élevés de l’ordre de plusieurs dizaines de milliers d’ampères sont requis ce qui génère un champ magnétostatique très intense capable d’interagir avec la section d’essais et l’instrumentation. Ainsi, l’industrie nucléaire est préoccupée par les effets de ce champ magnétique, en particulier sur les forces agissant sur le système pouvant provoquer une distorsion de la disposition des crayons de simulation. Conséquemment, un tel changement géométrique peut modifier les conditions de transfert thermique ce qui peut se traduire en des asymétries de température, un phénomène que les chercheurs ont observé de façon systématique (Teyssedou et Oleknovitch, 2007). Il faut aussi mentionner qu’une analyse exhaustive de ce phénomène a déjà été effectuée par Landry-Lavoie (Landry-Lavoie, 2013).

---

1. Notez qu’il y a 2 prises de pression par grappe mais seulement une de ces prises est reliée à un capteur de pression. Le raisonnement derrière cette procédure est d’éviter des bris de symétrie dans le système.

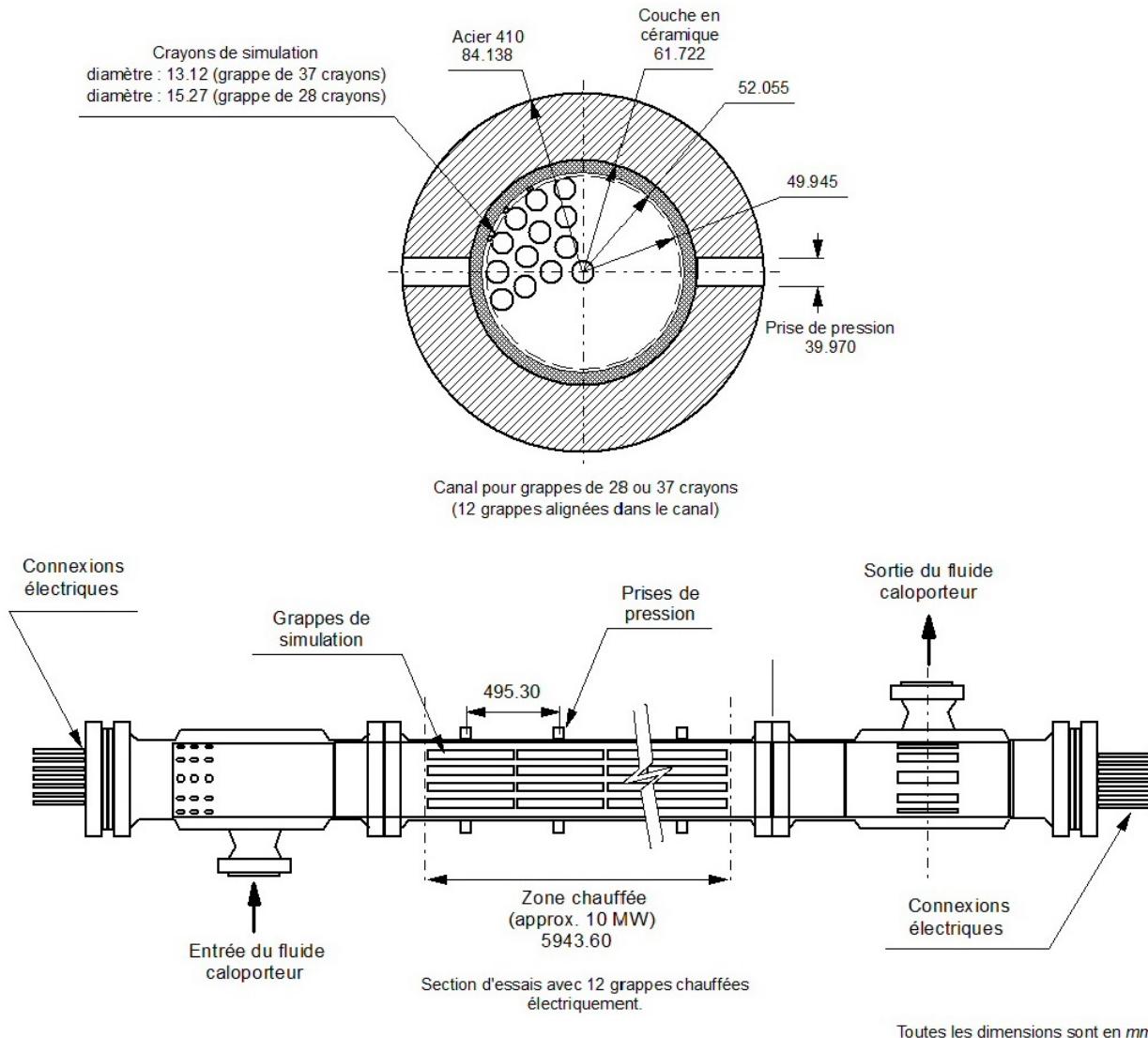


Figure 1.1 Section d'essais de type CANDU.

Pour évaluer le champ magnétique à travers la section d'essais, il est nécessaire de choisir une méthode de calcul numérique qui est bien adaptée au système envisagé. Ceci étant dit, pour ce système des approches qui font appel à des solutions intégrales deviennent intéressantes puisque, contrairement à des méthodes comme le *Finite Element Method* (Reddy, 2005), elles satisfont de façon inhérente les conditions frontières en jeu. En d'autres termes, ceci évite non seulement d'imposer des limites au système (où le champ magnétique devient suffisamment faible) mais aussi d'éliminer la discréétisation des régions de l'espace qui ne contiennent pas de matériaux magnétiques. Parmi les méthodes intégrales les plus communément rencontrées, nous retrouvons le *Boundary Element Method* qui emploie des intégrales de surfaces (Wrobel et Aliabadi, 2002) et le *Volume Integral Equation Method* (VIEM) qui, comme son nom

l'indique, utilise des intégrales volumiques (Turner, 1973).

## 1.1 Objectifs de recherche

Comme mentionné précédemment, l'influence des forces magnétiques sur les conditions de transfert thermique de la section d'essais de type CANDU a déjà été analysée de façon rigoureuse (Landry-Lavoie, 2013). Toutefois, étant donné qu'un système 2D a été considéré pour cette étude, c.-à-d., un canal invariant par translation le long de l'axe central<sup>2</sup>, les prises de pression (figure 1.1) n'ont pas été modélisées. En fait, Landry-Lavoie a choisi d'employer le formalisme 2D du VIEM afin de déterminer la distribution spatiale du champ magnétique ainsi que l'effet de l'intensité locale du champ sur l'ébullition. Par contre, pour cerner l'influence magnétique des prises de pression, une modélisation 3D doit nécessairement être effectuée. Or, dans cette optique, les objectifs de recherche suivants ont été formulés :

- (1) Établir les outils mathématiques requis pour effectuer une analyse magnétostatique 3D.
- (2) Implémenter numériquement le formalisme dans un code Matlab<sup>3</sup>.
- (3) Optimiser le cas 3D afin d'obtenir une approche fiable et bien adaptée à notre problème.

Pour le premier objectif, nous allons employer la forme 3D du VIEM, au lieu d'introduire une nouvelle méthode numérique, dans le but d'étendre le calcul effectué par Landry-Lavoie le plus aisément possible. Toutefois, accomplir cette tâche pour le système envisagé requiert le développement d'un formalisme qui n'existe pas dans la littérature. Pour ce qui est du deuxième objectif, tous les codes développés dans le cadre de ce mémoire sont donnés en annexe. En ce qui a trait au dernier objectif, nous allons voir au chapitre 4 qu'une utilisation appropriée du VIEM n'est pas simple et l'est encore moins pour la géométrie considérée de sorte qu'il devient important de prescrire un schéma de discrétisation adéquat afin d'obtenir des résultats fiables. Ainsi, puisque que nous utiliserons le VIEM comme outil d'analyse, une brève revue de littérature de cette méthode numérique est présentée dans la section suivante.

## 1.2 Revue de littérature pour le VIEM

Le formalisme mathématique à la base du VIEM est apparu vers la fin des années 60 sous le nom de *Method of Moments*, une méthode matricielle générale qui fait appel à des solutions intégrales d'équations différentielles non homogènes (Harrington, 1967). En effet,

---

2. Ceci demeure physiquement cohérent puisque la longueur du canal est beaucoup plus longue que son diamètre.

3. (MC) Marque de commerce de MathWorks, MA, USA.

quelques années plus tard, le VIEM tel que nous le connaissons aujourd’hui a émergé dans le cadre d’un progiciel appelé GFUN destiné à l’analyse de champs magnétostatiques 2D et 3D (Newman *et al.*, 1972). Plus précisément, cet ensemble de programmes informatiques a été conçu par le laboratoire Rutherford High Energy dans le but d’évaluer et de visualiser la distribution de ces champs à travers des milieux inhomogènes linéaires et non linéaires. Toutefois, quoique novateur pour son temps, le schéma de calcul proposé par GFUN était incapable d’implémenter des éléments de discrétilisation 3D autre que des prismes triangulaires et rectangulaires (Turner, 1973). De plus, les auteurs de GFUN mentionnent les difficultés reliées à l’évaluation des intégrales principales lorsque le point d’observation se retrouve à l’intérieur de la région intégrée, un problème clarifié dans le cas 2D par Hall et Teyssedou (Hall et Teyssedou, 2014). Récemment, une reformulation du VIEM basée sur le moyennage de l’aimantation a été proposée (Morandi *et al.*, 2010) mais cette nouvelle approche introduit une erreur numérique supplémentaire issue d’une intégration numérique.

Au-delà du fait que cette méthode incorpore de manière implicite les conditions aux frontières et par conséquent limite le nombre de calculs à effectuer, elle n’est pas très utilisée. D’une part, certaines difficultés mathématiques nécessitent l’implémentation d’algorithmes qui ne sont pas simples. En particulier, pour des applications en magnétostatique, les calculs sont encombrant et lourds à effectuer tel qu’indiqué par Silvester et Ferrari (Silvester et Ferrari, 1990) ainsi que par Hoole (Hoole, 1989). Deuxièmement, les calculs de type VIEM ne permettent pas l’emploi des critères de convergence. Ceci se traduit par une incertitude non mesurable des résultats. Toutefois, il faut mentionner qu’à partir des travaux de Fabbri (Fabbri, 2008), cette méthode prend de plus en plus de valeur. Pour remédier la faiblesse concernant la convergence, nous proposons dans ce mémoire une technique de discrétilisation qui s’applique au cas qui nous intéresse, c.-à-d., la section d’essais d’un canal de combustible de type CANDU chauffée par effet de Joule.

### 1.3 Plan du mémoire

La présentation de ce document se divise en cinq chapitres. Suivant cette introduction, le deuxième chapitre élabore les définitions et concepts nécessaires à la compréhension des sections futures. Par la suite, le troisième chapitre décrit en détail le formalisme mathématique relié au tenseur de désaimantation, une quantité physique essentielle au VIEM. Le quatrième chapitre élabore sur l’utilisation du VIEM et, pour terminer, le cinquième chapitre conclut le document et offre des recommandations.

Le chapitre 2 débute en élaborant les équations de Maxwell dans le cas statique. Ensuite, quelques équations différentielles de l'électrostatique et de la magnétostatique sont décrites. À la suite de cette analyse, des transformations pour les intégrales multiples sont données et la méthode de la fonction de Green est abordée. En effet, cette dernière est utilisée pour résoudre les équations en jeu ainsi que pour définir, parmi d'autres variables, le tenseur de désaimantation.

Le chapitre 3 porte sur le calcul du tenseur de désaimantation pour des systèmes 2D et 3D. Plus précisément, cette section du document débute par une application directe des transformations pour les intégrales multiples dans le but de rester cohérent avec la méthode de Green. Par la suite, des méthodes de calcul matricielles 2D et 3D sont rigoureusement développées pour des éléments de discrétisations polygonales et polyédriques, respectivement.

Le chapitre 4 présente une validation des méthodes de calcul mentionnées ci-dessus en se basant sur des solutions bien établies en physique du solide. Le VIEM est ensuite appliqué à un système 2D pour lequel une solution exacte existe. En effet, en se basant sur des principes physiques, un schéma de discrétisation est élaboré et directement appliqué à ces systèmes afin d'en étudier les bienfaits. Subséquemment, la logique mathématique issue de la discrétisation est étendue au cas 3D et une portion de la section d'essais est simulée.

Finalement, le chapitre 5 complète le document en faisant une synthèse des travaux effectués. De plus, les limitations du VIEM appliqué à la section d'essais sont discutées et des améliorations futures sont proposées.

## CHAPITRE 2 DÉFINITIONS ET CONCEPTS FONDAMENTAUX

Une étude appropriée des forces magnétiques présentes dans un canal de combustible simulé requiert de connaître à priori la distribution du champ magnétique à travers celui-ci. Par contre, étant donné la nature complexe des phénomènes en jeu, déterminer ce champ peut devenir une tâche ardue. Pour cette raison, des méthodes de résolution numérique comme le VIEM deviennent indispensables à l'analyse du canal en question. Ainsi, nous allons définir dans ce chapitre des concepts physiques essentiels à l'élaboration du VIEM et à l'obtention de la distribution du champ magnétique.

### 2.1 Les équations de Maxwell

À l'échelle macroscopique, les phénomènes physiques issus des interactions électromagnétiques se décrivent mathématiquement à partir d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles (EDP) communément appelé *les équations de Maxwell* (Stratton, 1941). Dans la présente section, nous allons élaborer en détails ces expressions dans le but de les appliquer à l'analyse magnétique de la section d'essais de type CANDU.

#### 2.1.1 Système d'équations stationnaires

Étant donné la nature du problème introduit au chapitre précédent, considérons un système pour lequel toutes les quantités physiques en jeu sont statiques ou en d'autres termes, indépendantes du temps. À un point  $\vec{r}$  de l'espace, les équations de Maxwell s'écrivent alors :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho_f(\vec{r}), \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0, \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}, \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}_f(\vec{r}), \quad (2.4)$$

où  $\vec{\nabla} \cdot$  et  $\vec{\nabla} \times$  sont respectivement les opérateurs *divergence* et *rotationnel*,  $\vec{D}$  est le *champ de déplacement électrique*,  $\rho_f$  est la *densité de charges libres*,  $\vec{B}$  est la *densité de flux magnétique*,  $\vec{E}$  est le *champ électrique*,  $\vec{H}$  est le *champ magnétique* et  $\vec{J}_f$  est la *densité de courant libre* (notez que l'indice f provient du fait qu'une charge libre est appelée “free charge” en anglais).

De plus, les quantités vectorielles  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$  sont reliées entre elles selon :

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}), \quad (2.5)$$

avec  $\varepsilon_0$  la *permittivité du vide* et  $\vec{P}$  la *polarisation*. Cette dernière variable physique peut être interprétée comme un champ engendré par la présence de dipôles électriques dans un matériau quelconque. En fait, le vecteur  $\vec{P}$  s'écrit en fonction de  $\vec{E}$  à partir de la relation constitutive suivante :

$$\vec{P}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \bar{\chi}_e(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}), \quad (2.6)$$

où la variable  $\bar{\chi}_e$  représente le *tenseur de susceptibilité électrique* et sera, dans le cadre de cette analyse, représenté sous la forme simplifiée  $\bar{\chi}_e = \chi_e \bar{\mathbb{I}}$  où  $\chi_e$  est un scalaire et  $\bar{\mathbb{I}}$  est le *tenseur identité*; cette formulation demeure vraie pour des milieux isotropes. Également, nous retrouvons normalement  $\chi_e \geq 0$  ce qui signifie que lorsque  $\chi_e \neq 0$ ,  $\vec{P}$  s'aligne toujours dans la même direction que  $\vec{E}$  mais  $\chi_e$  peut aussi être négatif dans le cas des métamatériaux (Koo, 2015). De façon similaire à l'équation (2.5),  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  sont reliés entre eux selon :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \left( \vec{H}(\vec{r}) + \vec{M}(\vec{r}) \right), \quad (2.7)$$

avec  $\mu_0$  la *perméabilité du vide* et  $\vec{M}$  l'*aimantation*. Il est important de mentionner que contrairement à  $\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$  représente une valeur exacte puisque ce dernier découle de la définition même de l'Ampère (Feynman *et al.*, 1979). De plus,  $\vec{M}$  est un champ produit par des dipôles magnétiques dans un milieu quelconque et s'écrit en fonction de  $\vec{H}$  à partir de :

$$\vec{M}(\vec{r}) = \bar{\chi}_m(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r}), \quad (2.8)$$

où  $\bar{\chi}_m$  représente le *tenseur de susceptibilité magnétique* et sera défini selon  $\bar{\chi}_m = \chi_m \bar{\mathbb{I}}$  comme c'était le cas pour  $\bar{\chi}_e$ . De plus, un milieu est dit *paramagnétique* lorsque  $\vec{M}$  s'aligne dans la même direction que  $\vec{H}$  ( $\chi_m > 0$ ) et *diamagnétique* lorsque ceux-ci sont antiparallèles ( $\chi_m < 0$ ). Maintenant que les expressions de base ont été élaborées, regardons comment la résolution des vecteurs en question peut être réduite à quatre EDP non homogènes.

### 2.1.2 EDP de l'électrostatique

De façon générale, le champ électrique total  $\vec{E}$  peut s'écrire :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_f(\vec{r}) + \vec{E}_p(\vec{r}), \quad (2.9)$$

avec  $\vec{E}_f$  le *champ électrique libre* et  $\vec{E}_p$  le *champ dépolarisant*. Plus précisément,  $\vec{E}_f$  représente le champ électrique engendré par la présence de charges libres et  $\vec{E}_p$  est le champ de réponse issu des milieux diélectriques ( $\chi_e \neq 0$ ). Ainsi, lorsque  $\chi_e = 0 \forall \vec{r}$ , nous avons toujours  $\vec{P} = \vec{0}$  et  $\vec{E}_p = \vec{0}$  de sorte que les équations (2.1), (2.5) et (2.9) mènent à :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_f(\vec{r}) = \frac{\rho_f(\vec{r})}{\varepsilon_0}. \quad (2.10)$$

De plus, l'expression (2.3) devient dans ce cas :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_f(\vec{r}) = \vec{0}. \quad (2.11)$$

Il est bien connu en analyse vectorielle (Stewart, 2012) que toute fonction scalaire  $\eta$  satisfait :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \eta(\vec{r}) = \vec{0}. \quad (2.12)$$

Ainsi,  $\vec{E}_f$  peut être dérivé à partir d'un scalaire, c.-à-d., d'un *potentiel électrique libre*  $\phi_f$  :

$$\vec{E}_f(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi_f(\vec{r}). \quad (2.13)$$

Donc, en combinant les expressions (2.10) et (2.13), nous obtenons :

$$\nabla^2 \phi_f(\vec{r}) = -\frac{\rho_f(\vec{r})}{\varepsilon_0}, \quad (2.14)$$

où  $\nabla^2 \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$  est l'opérateur Laplacien. L'expression ci-dessus représente une EDP de deuxième ordre non homogène communément appelé *l'équation de Poisson*. De plus, lorsqu'un matériau diélectrique est présent dans le système, les champs vectoriels  $\vec{P}$  et  $\vec{E}_p$  ne sont pas nécessairement nuls. Ainsi, en prenant la divergence de part et d'autre de (2.5) et en combinant le résultat obtenu avec les relations (2.1) et (2.9), nous trouvons :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_f(\vec{r}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_p(\vec{r}) = \frac{\rho_f(\vec{r})}{\varepsilon_0} - \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r})}{\varepsilon_0}. \quad (2.15)$$

En effet, nous déduisons à partir de (2.10) que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_p(\vec{r}) = -\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r})}{\varepsilon_0}. \quad (2.16)$$

De plus, selon les équations (2.3) et (2.9), nous obtenons :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_f(\vec{r}) + \vec{\nabla} \times \vec{E}_p(\vec{r}) = \vec{0}. \quad (2.17)$$

En conséquence, l'expression (2.11) mène à :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_p(\vec{r}) = \vec{0}, \quad (2.18)$$

ce qui signifie selon l'équation (2.12) que le vecteur  $\vec{E}_p$  peut être obtenu à partir d'un *potentiel électrique dépolarisant*  $\phi_p$  défini selon la relation suivante :

$$\vec{E}_p(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi_p(\vec{r}). \quad (2.19)$$

Ainsi, en combinant l'équation ci-dessus avec (2.16), nous obtenons :

$$\nabla^2\phi_p(\vec{r}) = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r})}{\varepsilon_0}. \quad (2.20)$$

Les deux équations différentielles principales de l'électrostatique ayant été développées, il reste à définir celles de la magnétostatique qui font intervenir  $\vec{H}$ .

### 2.1.3 EDP de la magnétostatique

De façon similaire à  $\vec{E}$ , le champ magnétique total  $\vec{H}$  peut s'écrire comme suit :

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_f(\vec{r}) + \vec{H}_m(\vec{r}), \quad (2.21)$$

où  $\vec{H}_f$  est le *champ magnétique libre* et  $\vec{H}_m$  est le *champ de désaimantation*. En effet,  $\vec{H}_f$  représente le champ magnétique engendré par le courant dû aux charges libres et  $\vec{H}_m$  est le champ de réponse issu des milieux magnétiques ( $\chi_m \neq 0$ ). Ainsi, lorsque  $\chi_m = 0 \forall \vec{r}$ , nous trouvons toujours  $\vec{M} = \vec{0}$  et  $\vec{H}_m = \vec{0}$  de sorte que les expressions (2.2), (2.7) et (2.21) donnent :

$$\vec{\nabla} \cdot (\mu_0 \vec{H}_f(\vec{r})) = 0. \quad (2.22)$$

Il est bien connu en analyse vectorielle (Stewart, 2012) que tout vecteur  $\vec{\zeta} \in \Re^3$  satisfait :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\zeta}(\vec{r})) = 0, \quad (2.23)$$

ce qui signifie que  $\vec{H}_f$  peut être exprimé à partir d'un *potentiel vecteur libre*  $\vec{A}_f$ , c.-à-d. :

$$\vec{H}_f(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{A}_f(\vec{r})}{\mu_0} \right). \quad (2.24)$$

De plus, nous trouvons dans ce cas que la relation (2.4) s'écrit :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_f(\vec{r}) = \vec{J}_f(\vec{r}). \quad (2.25)$$

Donc, en utilisant l'identité vectorielle donnée par  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\zeta}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\zeta}) - \nabla^2 \vec{\zeta}$ , les relations (2.24) et (2.25) mènent à l'équation différentielle suivante :

$$\nabla^2 \vec{A}_f(\vec{r}) - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_f(\vec{r})) = -\mu_0 \vec{J}_f(\vec{r}). \quad (2.26)$$

À ce stade-ci de l'analyse, il est intéressant de noter que les équations (2.12) et (2.24) impliquent que le champ vectoriel  $\vec{A}_f$  peut s'écrire sous la forme générale :

$$\vec{A}_f(\vec{r}) = \vec{a}_f(\vec{r}) + \vec{\nabla} \gamma(\vec{r}), \quad (2.27)$$

avec  $\gamma$  une fonction scalaire arbitraire et le choix de celle-ci s'appelle une *jauge*. Dans le cadre de la magnétostatique, nous employons la *jauge de Coulomb* décrite par :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_f(\vec{r}) = 0 \leftrightarrow \nabla^2 \gamma(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{a}_f(\vec{r}). \quad (2.28)$$

De cette manière, l'expression (2.26) peut être représentée par l'EDP suivante :

$$\nabla^2 \vec{A}_f(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{J}_f(\vec{r}). \quad (2.29)$$

Lorsqu'un matériau magnétique est présent dans le système, les champs vectoriels  $\vec{M}$  et  $\vec{H}_m$  ne sont pas nuls  $\forall \vec{r}$ . Ainsi, en combinant (2.2), (2.7) et (2.21), nous obtenons :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_f(\vec{r}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{H}_m(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}(\vec{r}). \quad (2.30)$$

Conséquemment, l'expression (2.22) mène à :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_m(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}(\vec{r}). \quad (2.31)$$

De plus, les relations (2.4) et (2.21) donnent :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_f(\vec{r}) + \vec{\nabla} \times \vec{H}_m(\vec{r}) = \vec{J}_f(\vec{r}), \quad (2.32)$$

de sorte que l'équation (2.25) nous permet d'écrire :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_m(\vec{r}) = \vec{0}. \quad (2.33)$$

En conséquence, selon l'identité vectorielle décrite par (2.12), nous concluons que :

$$\vec{H}_m(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Omega_m(\vec{r}), \quad (2.34)$$

où  $\Omega_m$  représente un *potentiel scalaire magnétique*. Finalement, en combinant cette expression avec l'équation (2.31), nous trouvons l'équation différentielle donnée par :

$$\nabla^2\Omega_m(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{M}(\vec{r}). \quad (2.35)$$

Maintenant que nous avons élaboré en détail les quatre EDP données par les expressions (2.14), (2.20), (2.29) et (2.35), il s'agit de résoudre celles-ci selon des conditions frontières appropriées. Par contre, avant de procéder, nous devons introduire des outils mathématiques nécessaires à l'analyse des méthodes intégrales comme le VIEM. Ainsi, dans la prochaine section, nous allons définir des transformations intégrales qui seront employées tout au long de ce document.

## 2.2 Transformations pour les intégrales multiples

Selon le degré de complexité liée à la résolution d'une intégrale multiple, il est souvent nécessaire d'appliquer une ou plusieurs transformations à celle-ci afin d'obtenir une solution analytique. Entre autres, nous parlons des transformations issues du *théorème de Green* pour les intégrales doubles et celles qui découlent du *théorème de flux-divergence* pour les intégrales triples. Dans cette section, nous abordons en profondeur ces deux théorèmes ainsi que toutes les définitions mathématiques nécessaires à leur compréhension.

Dans les applications autant de l'électrostatique que de la magnétostatique, ces transformations sont parfois mal utilisées ou elles sont implémentées de manière obscure. En particulier, il faut mentionner que ces transformations peuvent devenir ambiguës lors du développement d'algorithmes de calcul numérique. Ainsi, nous avons considéré nécessaire de clarifier leurs implémentation pour ces types de calculs (Hall et Teyssedou, 2014).

### 2.2.1 Transformations pour les intégrales doubles

En présence d'une intégrale double, il est parfois possible de transformer celle-ci en intégrale de parcours fermé. Afin de décrire tous les aspects de cette transformation, il est nécessaire de définir ce que nous appelons des régions planes de type I, II et III (Stewart, 2012). D'abord, une région plane  $A$  est dite de type I si elle peut être bornée par :

$$A_I = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}, \quad (2.36)$$

avec les fonctions scalaires  $g_1$  et  $g_2$  continues dans l'intervalle  $x \in [a, b]$  (figure 2.1a). Dans ce cas, la transformation applicable sur le domaine d'intégration est exprimée comme suit :

$$\iint_A \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_{\zeta} P dx, \quad (2.37)$$

où  $\zeta$  est une courbe plane simple, fermée, orientée positivement, lisse par morceaux et qui délimite la région  $A$ . En fait, la courbe  $\zeta$  est orientée positivement lorsqu'un observateur qui parcourt celle-ci en s'alignant selon l'axe des  $z$  positif voit toujours la région  $A$  à sa gauche. Dans le cas contraire, la courbe est orientée négativement. Aussi,  $P(x, y)$  est une fonction scalaire ayant des dérivées partielles continues dans une région ouverte en  $\mathbb{R}^2$  qui contient  $A$  ; cette propriété sera exploitée dans la section 3.1.

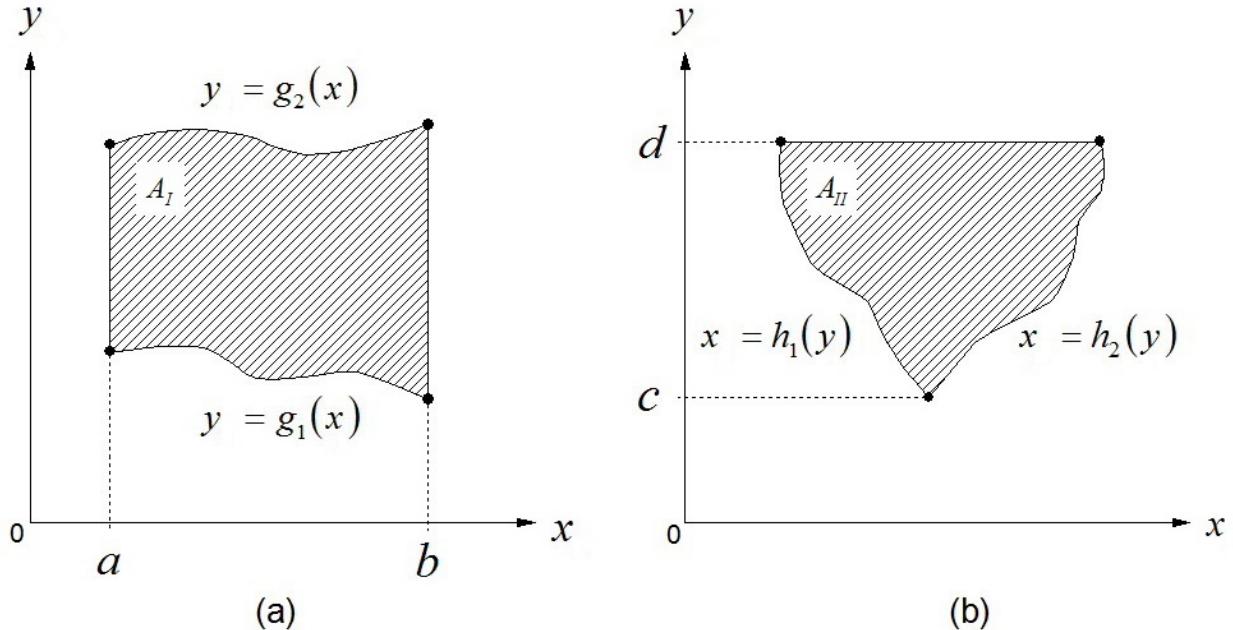


Figure 2.1 Exemples de différents types de régions planes : (a) type I; (b) type II.

Une région est définie comme étant de type II quand elle satisfait :

$$A_{\text{II}} = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}, \quad (2.38)$$

avec les fonctions scalaires  $h_1$  et  $h_2$  continues dans l'intervalle  $y \in [c, d]$  (figure 2.1b). De cette manière, la transformation associée à ce type de région s'exprime comme suit :

$$\iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{\zeta} Q dy, \quad (2.39)$$

où la fonction scalaire  $Q(x, y)$  a des dérivées partielles continues dans une région ouverte en  $\Re^2$  qui contient  $A$ . Finalement, une région plane est dite de type III (ou simple) si elle peut être considérée soit comme un domaine de type I ou II. En d'autres termes, cela signifie que les deux transformations élaborées dans cette section sont simultanément vérifiées de sorte que si nous définissons la fonction  $\vec{F}(x, y) \equiv P\vec{i} + Q\vec{j}$ , nous trouvons selon (2.37) et (2.39) :

$$\iint_A \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_{\zeta} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (2.40)$$

avec  $dA = dx dy$  et  $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$  (notez que les vecteurs unitaires  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont respectivement orientés selon l'axe des x et y positifs). Le résultat ci-dessus représente le *théorème de Green* et peut être perçu comme l'homologue du théorème fondamental du calcul intégral pour les intégrales doubles. Dans la section suivante nous présentons les transformations qui s'appliquent sur des domaines d'intégration appartenant à  $\Re^3$ .

### 2.2.2 Transformations pour les intégrales triples

En ce qui a trait aux intégrales triples, il est possible dans certains cas de transformer celles-ci en intégrales de surfaces fermées. Afin d'élaborer tous les aspects de cette transformation, il faut définir ce que nous appelons des régions solides de type I, II, III et IV (Stewart, 2012). D'abord, une région solide  $V$  est dite de type I si elle peut être bornée par :

$$V_{\text{I}} = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in A_{xy}, w_1(x, y) \leq z \leq w_2(x, y)\}, \quad (2.41)$$

où  $A_{xy}$  est la projection de  $V_{\text{I}}$  dans le plan  $Oxy$  et les fonctions scalaires  $w_1$  et  $w_2$  définissent respectivement les surfaces ouvertes  $S_1$  et  $S_2$  (figure 2.2). Ainsi, en définissant aussi une surface ouverte  $S_3$  qui se projette sur la frontière de  $A_{xy}$  et qui relie  $S_1$  et  $S_2$  ensemble, il devient possible de définir l'interface de  $V_{\text{I}}$  à partir de la surface fermée  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ .

Dans ce cas, la transformation applicable sur le domaine d'intégration est donnée par :

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_S R \vec{k} \cdot d\vec{S}, \quad (2.42)$$

avec  $\vec{k}$  un vecteur unitaire orienté selon l'axe des  $z$  positifs,  $R(x, y, z)$  est une fonction scalaire ayant des dérivées partielles continues sur une région ouverte en  $\Re^3$  qui contient  $V$ ,  $d\vec{S} = \|d\vec{S}\|\hat{n}$  est un élément infinitésimal de la surface  $S$  et  $\hat{n} \equiv n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}$  est un vecteur unitaire normal à  $S$ . De plus, il est important de mentionner que la surface fermée  $S$  doit être orientée positivement ou en d'autres termes, doit avoir un vecteur  $\hat{n}$  qui pointe vers l'extérieur de  $V$ . Pour des régions solides de type II et III, les domaines sont bornés par :

$$V_{II} = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in A_{yz}, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}, \quad (2.43)$$

$$V_{III} = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in A_{xz}, v_1(x, z) \leq y \leq v_2(x, z)\}, \quad (2.44)$$

où  $A_{yz}$  et  $A_{xz}$  sont respectivement les projections de  $V_{II}$  dans le plan  $Oyz$  et de  $V_{III}$  dans le plan  $Oxz$ . De plus, les fonctions scalaires  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $v_1$  et  $v_2$  jouent un rôle analogue aux quantités  $w_1$  et  $w_2$  (équation 2.42).

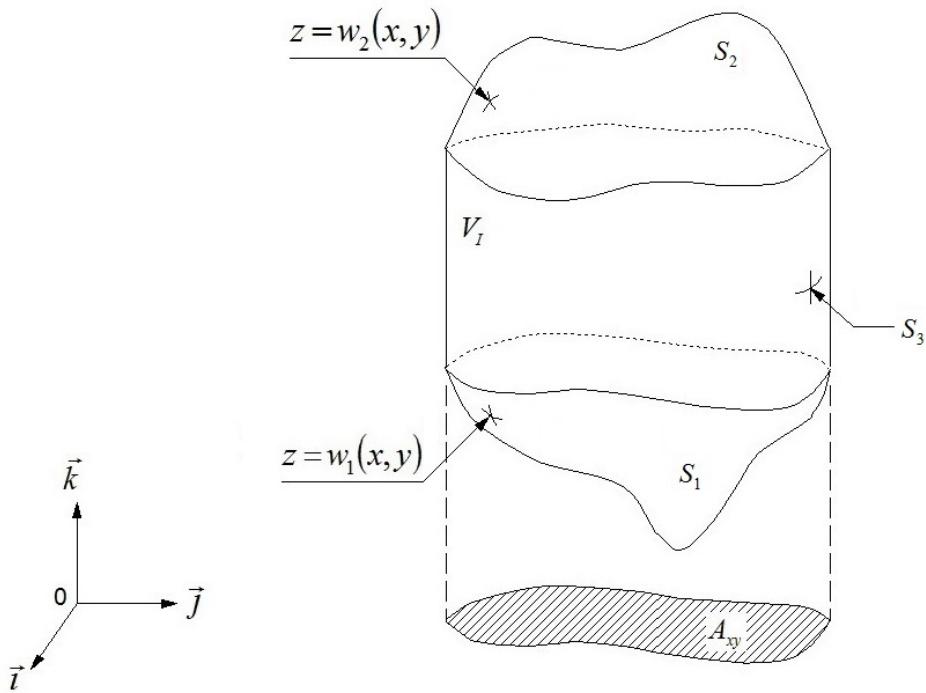


Figure 2.2 Exemple d'une région solide de type I.

Ainsi, pour un domaine de type II, la transformation est donnée par :

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_S P \vec{i} \cdot d\vec{S}, \quad (2.45)$$

avec  $P(x, y, z)$  défini comme une fonction scalaire ayant des dérivées partielles continues sur une région ouverte en  $\Re^3$  qui contient  $V$ . De plus, pour un domaine de type III, la transformation est décrite à partir de l'équation suivante :

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_S Q \vec{j} \cdot d\vec{S}, \quad (2.46)$$

où  $Q(x, y, z)$  représente une fonction scalaire ayant des dérivées partielles continues sur une région ouverte en  $\Re^3$  qui contient  $V$ . Finalement, une région solide est dite de type IV si elle peut être considérée soit comme un domaine de type I, II ou III. En d'autres termes, ceci signifie que les trois transformations sont applicables de sorte que si  $\vec{F}(x, y, z) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ , nous déduisons selon (2.42), (2.45) et (2.46) le *théorème de flux-divergence* :

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}, \quad (2.47)$$

avec  $dV = dx dy dz$ . Ainsi, maintenant que les transformations 2D et 3D ont été élaborées, nous sommes en mesure de trouver les solutions des EDP définies précédemment. Pour ce faire, il est possible d'employer une méthode intégrale bien établie que nous allons décrire en détail dans les sections suivantes.

## 2.3 Méthode de la fonction de Green

La *méthode de la fonction de Green* (Butkov, 1968) est une approche utilisée pour résoudre des EDP de deuxième ordre comme celles développées aux sections 2.1.2 et 2.1.3. Ce qui distingue cette méthode des autres techniques de résolution plus conventionnelles est le fait que le résultat obtenu est donné sous une forme intégrale. Ainsi, nous allons maintenant élaborer le formalisme nécessaire à l'obtention de cette forme particulière de solution.

### 2.3.1 Approche générale

Soit un point matériel  $\vec{r}_s = x_s \vec{i} + y_s \vec{j} + z_s \vec{k}$  et un point d'observation  $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ , c.-à-d., deux vecteurs indépendants entre eux. Dans le cadre de l'électrostatique (équations 2.14 et 2.20) et de la magnétostatique (équations 2.29 et 2.35), nous cherchons une solution

de l'équation différentielle donnée par :

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) = F(\vec{r}), \quad (2.48)$$

où l'opérateur  $\nabla^2$  est exprimé selon la variable  $\vec{r}$ ,  $\psi$  est la fonction recherchée et la fonction  $F$  est définie par parties selon la forme générale suivante :

$$F(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{r} \notin V_s, \\ f(\vec{r}) & \text{si } \vec{r} \in V_s, \end{cases} \quad (2.49)$$

avec  $f$  une nouvelle fonction et  $V_s$  un volume tel que  $\vec{r}_s \in V_s$ . De plus, la *fonction de Green*,  $G$ , satisfait dans ce cas l'équation différentielle donnée par :

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}_s) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_s), \quad (2.50)$$

où  $\delta$  est défini comme la fonction de Dirac 3D associée à une distribution le long d'une région solide  $V$  tel que  $\vec{r} \in V$  et  $V_s \subseteq V$ . En effet, étant donné que  $V$  est un volume immatériel sa portée maximale n'est pas restreinte et peut, par exemple, représenter l'espace  $\Re^3$  en entier (figure 2.3). Cela étant dit, regardons à présent comment  $G$  permet d'obtenir une solution intégrale de la fonction  $\psi$ .

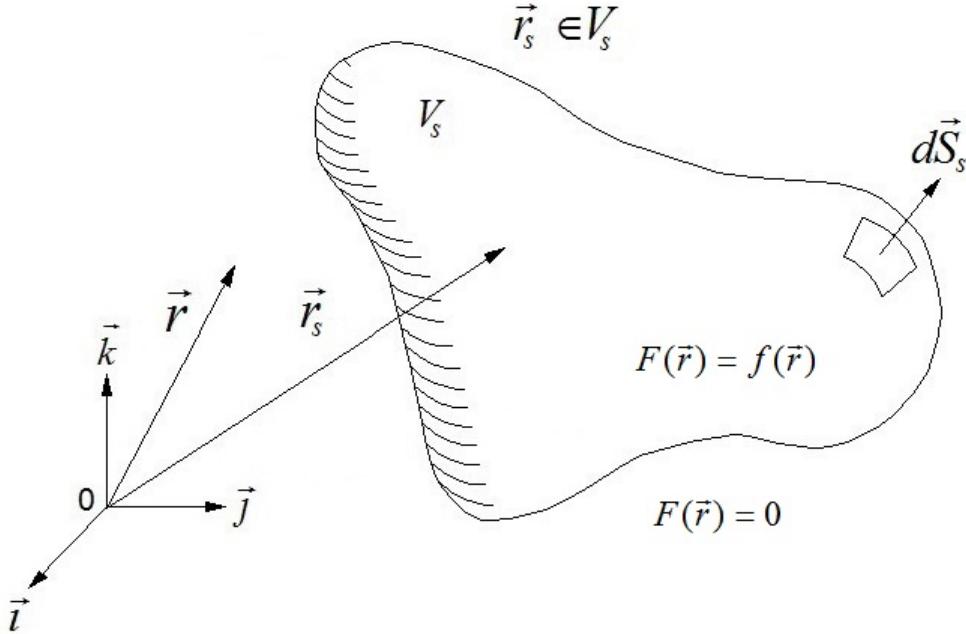


Figure 2.3 Système général étudié.

D'abord, en multipliant (2.48) par  $G$  et (2.50) par  $\psi$ , nous trouvons après soustraction :

$$\psi(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}_s) = F(\vec{r})G(\vec{r}, \vec{r}_s) + \psi(\vec{r})\nabla^2G(\vec{r}, \vec{r}_s) - G(\vec{r}, \vec{r}_s)\nabla^2\psi(\vec{r}). \quad (2.51)$$

De plus, les propriétés associées à la fonction  $\delta$  nous permettent entre autres d'exprimer :

$$\iiint_V \psi(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}_s)dV = \psi(\vec{r}_s), \quad (2.52)$$

étant donné que  $\vec{r}_s \in V$ . En utilisant l'identité vectorielle suivante :

$$\vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{\nabla} G - G \vec{\nabla} \psi) = \psi \nabla^2 G - G \nabla^2 \psi, \quad (2.53)$$

et en intégrant par rapport à  $V$  chaque membre de (2.51), nous trouvons :

$$\psi(\vec{r}_s) = \iiint_V F(\vec{r})G(\vec{r}, \vec{r}_s)dV + \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\psi(\vec{r})\vec{\nabla} G(\vec{r}, \vec{r}_s) - G(\vec{r}, \vec{r}_s)\vec{\nabla} \psi(\vec{r}))dV. \quad (2.54)$$

Selon le *théorème de flux-divergence* présenté à la section 2.2.2, il est possible de transformer une intégrale de volume en intégrale de surface fermée, tel que :

$$\psi(\vec{r}_s) = \iiint_V F(\vec{r})G(\vec{r}, \vec{r}_s)dV + \iint_S (\psi(\vec{r})\vec{\nabla} G(\vec{r}, \vec{r}_s) - G(\vec{r}, \vec{r}_s)\vec{\nabla} \psi(\vec{r})) \cdot d\vec{S}, \quad (2.55)$$

où  $S$  est la surface frontière du volume  $V$ . Cette surface est orientée selon un vecteur unitaire normal  $\hat{n}$  qui pointe vers l'extérieur du volume. Afin d'obtenir  $\psi(\vec{r})$ , il faut permuter les variables  $\vec{r}_s$  et  $\vec{r}$  de manière que si nous définissons  $S_s$  comme l'interface de  $V_s$ , nous trouvons :

$$\psi(\vec{r}) = \iiint_{V_s} f(\vec{r}_s)G(\vec{r}_s, \vec{r})dV_s + \iint_{S_s} (\psi(\vec{r}_s)\vec{\nabla}_s G(\vec{r}_s, \vec{r}) - G(\vec{r}_s, \vec{r})\vec{\nabla}_s \psi(\vec{r}_s)) \cdot d\vec{S}_s, \quad (2.56)$$

tel que  $F(\vec{r}) \rightarrow F(\vec{r}_s)$  selon la forme permutee de l'expression (2.49) et  $F(\vec{r}_s) = f(\vec{r}_s)$  puisque  $\vec{r}_s \in V$ . Or, ce n'est pas  $G(\vec{r}_s, \vec{r})$  mais plutôt  $G(\vec{r}, \vec{r}_s)$  qui satisfait l'EDP donnée par l'équation (2.50) de sorte qu'il est utile d'imposer la propriété suivante :

$$G(\vec{r}_s, \vec{r}) = G(\vec{r}, \vec{r}_s). \quad (2.57)$$

De plus, tel que démontré par Butkov (Butkov, 1968), cette expression est vérifiée pour des

conditions frontières de Dirichlet, de Newmann ou intermédiaires. Ainsi,  $\psi(\vec{r})$  s'écrit :

$$\psi(\vec{r}) = \iiint_{V_s} f(\vec{r}_s) G(\vec{r}, \vec{r}_s) dV_s + \iint_{S_s} \left( \psi(\vec{r}_s) \vec{\nabla}_s G(\vec{r}, \vec{r}_s) - G(\vec{r}, \vec{r}_s) \vec{\nabla}_s \psi(\vec{r}_s) \right) \cdot d\vec{S}_s. \quad (2.58)$$

Toutefois, même si le formalisme mathématique élaboré dans cette section s'applique à une fonction de Green arbitraire, seulement certaines formes de  $G$  s'appliquent aux équations de Maxwell statiques. Ainsi, regardons maintenant ces différentes formes en 2D et 3D.

### 2.3.2 Formes spécifiques de la fonction de Green

Considérons la fonction de Green suivante écrite en coordonnées sphériques isotropes :

$$g(\|\vec{r} - \vec{r}_s\|, R^*) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi R^*} & \text{pour } \|\vec{r} - \vec{r}_s\| < R^* \\ -\frac{1}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}_s\|} & \text{pour } \|\vec{r} - \vec{r}_s\| \geq R^* \end{cases} \quad (2.59)$$

où  $R^* \geq 0$  représente un rayon de coupure arbitraire et  $\|\vec{r} - \vec{r}_s\| \geq 0$  est la norme du vecteur  $(\vec{r} - \vec{r}_s)$ . D'abord, il est intéressant de noter que  $g$  est continu  $\forall \|\vec{r} - \vec{r}_s\|$  mais ses dérivées partielles ne le sont pas, plus particulièrement, en  $\|\vec{r} - \vec{r}_s\| = R^*$ ; cette propriété est à la base de l'utilisation de la fonction de Dirac. De plus, les termes qui constituent  $g$  sont directement proportionnels à l'une des deux solutions linéairement indépendantes obtenues en résolvant l'équation de Laplace isotrope en coordonnées sphériques. En d'autres termes, cela signifie que  $\nabla^2 g = 0$  lorsque  $\|\vec{r} - \vec{r}_s\| \neq R^*$ . Donc, afin de trouver une représentation de  $G$  conforme à l'équation (2.50), posons  $R^* \rightarrow 0$  de sorte que la fonction de Green donne :

$$G(\vec{r}, \vec{r}_s) = \lim_{R^* \rightarrow 0} g(\|\vec{r} - \vec{r}_s\|, R^*) = -\frac{1}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}_s\|}, \quad (2.60)$$

tel que (2.57) est respectée. De plus, la forme de l'expression ci-dessus implique que :

$$\vec{\nabla}_s G(\vec{r}, \vec{r}_s) = -\vec{\nabla} G(\vec{r}, \vec{r}_s). \quad (2.61)$$

En ce qui a trait à la fonction de Green pour des systèmes 2D, un raisonnement mathématique similaire à l'approche 3D mène à la forme suivante :

$$\tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}_s) = \frac{1}{2\pi} \ln (\|\vec{r} - \vec{r}_s\|), \quad (2.62)$$

où cette fois-ci  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ,  $\vec{r}_s = x_s\vec{i} + y_s\vec{j}$  et  $\tilde{G}$  est obtenu à partir de l'équation de Laplace isotrope en coordonnées polaires. Veuillez noter que nous utilisons la notation  $\sim$  pour

différentier les fonctions de Green 2D des fonctions de Green 3D. De plus, l'équivalent 2D de (2.50) emploie une fonction de Dirac 2D associée à une distribution à l'intérieur d'une région appartenant à  $\Re^2$  et  $\tilde{G}$  satisfait l'expression (2.61). Ainsi, maintenant que les différentes formes de la fonction de Green ont été définies, élaborons les solutions des EDP étudiées aux sections 2.1.2 et 2.1.3.

## 2.4 Solutions intégrales des EDP

Les solutions intégrales des équations de Maxwell statiques peuvent s'obtenir à partir du formalisme mathématique élaboré précédemment. Comme nous allons le voir, les conditions frontières en jeu sont satisfaites de façon inhérente pour des solutions intégrales. Il est important de mentionner qu'exceptionnellement dans cette section, les solutions 3D sont présentées avant les solutions 2D. Le raisonnement derrière cette logique est que le formalisme associé à la méthode de la fonction de Green (section 2.3) a été présenté sous une forme 3D de manière à, comme nous allons le démontrer par la suite, obtenir les solutions 2D par analogie.

### 2.4.1 Solutions 3D

Premièrement, en ce qui a trait au potentiel électrique provenant des charges libres,  $\phi_f$ , les relations (2.14), (2.48) et (2.58) mènent à :

$$\phi_f(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V_s} \rho_f(\vec{r}_s) G(\vec{r}, \vec{r}_s) dV_s + \Delta\phi_f(\vec{r}), \quad (2.63)$$

avec  $\Delta\phi_f$  défini comme suit :

$$\Delta\phi_f(\vec{r}) = \iint_{S_s} \left( \phi_f(\vec{r}_s) \vec{\nabla}_s G(\vec{r}, \vec{r}_s) - G(\vec{r}, \vec{r}_s) \vec{\nabla}_s \phi_f(\vec{r}_s) \right) \cdot d\vec{S}_s. \quad (2.64)$$

Ces expressions impliquent que  $\phi_f$  provient à la fois d'une densité de charges libres  $\rho_f$  contenues dans  $V_s$  et d'une source de potentiel provenant de l'interface  $S_s$  du volume. En effet, cette dernière peut être perçue comme le potentiel issu d'une densité surfacique de charges libres. Toutefois, la représentation ci-dessus peut se simplifier en notant que la condition à la frontière est telle que  $\Delta\phi_f = 0$ . Plus précisément, cette condition provient du fait qu'en absence de forces externes, il n'y a pas d'accumulation de charges libres à la surface d'un conducteur électrique idéal. Ainsi, nous trouvons :

$$\phi_f(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V_s} \rho_f(\vec{r}_s) G(\vec{r}, \vec{r}_s) dV_s. \quad (2.65)$$

Nous trouvons alors une solution intégrale qui tient compte implicitement des conditions frontières. Deuxièmement, pour le potentiel électrique dépolarisant,  $\phi_p$ , les expressions (2.20), (2.48) et (2.58) permettent d'obtenir la solution suivante :

$$\phi_p(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V_s} \left( \vec{\nabla}_s \cdot \vec{P}(\vec{r}_s) \right) G(\vec{r}, \vec{r}_s) dV_s + \Delta\phi_p(\vec{r}), \quad (2.66)$$

avec  $\Delta\phi_p$  défini comme suit :

$$\Delta\phi_p(\vec{r}) = \iint_{S_s} \left( \phi_p(\vec{r}_s) \vec{\nabla}_s G(\vec{r}, \vec{r}_s) - G(\vec{r}, \vec{r}_s) \vec{\nabla}_s \phi_p(\vec{r}_s) \right) \cdot d\vec{S}_s. \quad (2.67)$$

Par contre, cette fois-ci, les contributions surfaciques ne s'annulent pas comme c'était le cas pour le potentiel libre  $\phi_f$ . Ainsi, il est utile de considérer l'identité vectorielle donnée par :

$$\left( \vec{\nabla}_s \cdot \vec{P}(\vec{r}_s) \right) G(\vec{r}, \vec{r}_s) = \vec{\nabla}_s \cdot \left( \vec{P}(\vec{r}_s) G(\vec{r}, \vec{r}_s) \right) - \vec{P}(\vec{r}_s) \cdot \vec{\nabla}_s G(\vec{r}, \vec{r}_s). \quad (2.68)$$

Donc, en combinant les équations (2.66) et (2.68) avec le théorème de flux-divergence, nous trouvons que si la condition à la frontière pour le potentiel électrique dépolarisant  $\phi_p$  s'écrit :

$$\Delta\phi_p(\vec{r}) = - \iint_{S_s} \left( \frac{G(\vec{r}, \vec{r}_s)}{\epsilon_0} \vec{P}(\vec{r}_s) \right) \cdot d\vec{S}_s, \quad (2.69)$$

ce qui signifie qu'il existe une densité surfacique de charges liées fonction de  $\vec{P}(\vec{r}_s) \cdot \hat{n}$ , alors nous trouvons pour l'expression (2.66) :

$$\phi_p(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V_s} \left( \vec{P}(\vec{r}_s) \cdot \vec{\nabla} G(\vec{r}, \vec{r}_s) \right) dV_s, \quad (2.70)$$

où nous avons posé  $\vec{\nabla}_s G(\vec{r}, \vec{r}_s) = -\vec{\nabla} G(\vec{r}, \vec{r}_s)$  d'après l'équation (2.61). Il est important de mentionner que le volume d'intégration  $V_s$  n'est pas forcément le même que celui employé dans l'expression (2.65) puisque les régions où  $\rho_f \neq 0$  et  $\vec{P} \neq \vec{0}$  ( $\chi_e \neq 0$ ) ne coïncident pas nécessairement ; par souci de simplification, nous avons négligé cette distinction. À ce stade-ci, il est intéressant de noter les similitudes qui existent entre les EDP de l'électrostatique et de la magnétostatique. À cet égard, les équations (2.14) et (2.29) permettent d'appliquer au vecteur  $\vec{A}_f$  l'analogie suivante :

$$\phi_f \rightarrow \vec{A}_f, \quad \rho_f \rightarrow \vec{J}_f \quad \text{et} \quad \epsilon_0 \rightarrow \mu_0^{-1}. \quad (2.71)$$

Étonnamment, cette analogie n'est pas purement mathématique puisque la même condition à

la frontière appliquée à  $\phi_f$  est utilisée pour  $\vec{A}_f$ . En effet, les équations (2.65) et (2.71) donnent :

$$\vec{A}_f(\vec{r}) = -\mu_0 \iiint_{V_s} \vec{J}_f(\vec{r}_s) G(\vec{r}, \vec{r}_s) dV_s. \quad (2.72)$$

Par contre, la procédure employée pour trouver le potentiel vecteur libre  $\vec{A}_f$  ne fait pas intervenir la jauge de Coulomb décrite par la relation (2.28). Or, en prenant la divergence de l'expression ci-dessus, nous trouvons :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_f(\vec{r}) = -\mu_0 \iiint_{V_s} \left( \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{J}_f(\vec{r}_s) G(\vec{r}, \vec{r}_s) \right) \right) dV_s. \quad (2.73)$$

Veuillez noter que l'opérateur divergence a été inséré dans l'intégrale puisque les vecteurs  $\vec{r}$  et  $\vec{r}_s$  sont indépendants. De plus, il est utile de considérer les deux identités suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{J}_f(\vec{r}_s) G(\vec{r}, \vec{r}_s) \right) &= \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_f(\vec{r}_s) \right) G(\vec{r}, \vec{r}_s) + \vec{J}_f(\vec{r}_s) \cdot \vec{\nabla} G(\vec{r}, \vec{r}_s) \\ &= -\vec{J}_f(\vec{r}_s) \cdot \vec{\nabla}_s G(\vec{r}, \vec{r}_s), \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_s \cdot \left( \vec{J}_f(\vec{r}_s) G(\vec{r}, \vec{r}_s) \right) &= \left( \vec{\nabla}_s \cdot \vec{J}_f(\vec{r}_s) \right) G(\vec{r}, \vec{r}_s) + \vec{J}_f(\vec{r}_s) \cdot \vec{\nabla}_s G(\vec{r}, \vec{r}_s) \\ &= \vec{J}_f(\vec{r}_s) \cdot \vec{\nabla}_s G(\vec{r}, \vec{r}_s), \end{aligned} \quad (2.75)$$

où  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_f(\vec{r}_s) = 0$  par indépendance et selon l'équation (2.61)  $\vec{\nabla} G = -\vec{\nabla}_s G$ . De plus, nous avons dans ce cas que  $\vec{\nabla}_s \cdot \vec{J}_f(\vec{r}_s) = 0$  d'après l'équation de Maxwell donnée par (2.4) et la relation (2.23). Ainsi, en additionnant les expressions ci-dessus, nous déduisons que :

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \vec{J}_f(\vec{r}_s) G(\vec{r}, \vec{r}_s) \right) = -\vec{\nabla}_s \cdot \left( \vec{J}_f(\vec{r}_s) G(\vec{r}, \vec{r}_s) \right). \quad (2.76)$$

Conséquemment, en combinant (2.73) et (2.76) avec le théorème de flux-divergence, nous trouvons que la jauge de Coulomb implique le résultat suivant :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_f(\vec{r}) = 0 \rightarrow \iint_{S_s} \left( \mu_0 G(\vec{r}, \vec{r}_s) \vec{J}_f(\vec{r}_s) \right) \cdot d\vec{S}_s = 0. \quad (2.77)$$

Étant donné que l'intégrale de surface fermée doit être nulle  $\forall \vec{r}$  et que le volume est arbitraire, nous devons nécessairement avoir  $\vec{J}_f(\vec{r}_s) \cdot d\vec{S}_s = 0 \forall \vec{r}_s \in S_s$ . En d'autres termes, puisque par définition  $\vec{J}_f(\vec{r}_s) \neq \vec{0} \forall \vec{r}_s$  (section 2.3.1), cela signifie que la densité de courant à l'interface de  $V_s$  doit toujours être orthogonale à la normale de  $S_s$ . Maintenant que la solution pour  $\vec{A}_f$  a été trouvée, il est possible de déterminer celle du champ magnétique libre  $\vec{H}_f$ . À ce propos,

les expressions (2.24) et (2.72) donnent :

$$\vec{H}_f(\vec{r}) = - \iiint_{V_s} \left( \vec{\nabla} \times \left( \vec{J}_f(\vec{r}_s) G(\vec{r}, \vec{r}_s) \right) \right) dV_s, \quad (2.78)$$

où l'opérateur rotationnel est inséré dans l'intégrale parce qu'il n'agit pas sur  $\vec{r}_s$ . De plus, il est important de noter que :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \left( \vec{J}_f(\vec{r}_s) G(\vec{r}, \vec{r}_s) \right) &= \vec{\nabla} G(\vec{r}, \vec{r}_s) \times \vec{J}_f(\vec{r}_s) + \left( \vec{\nabla} \times \vec{J}_f(\vec{r}_s) \right) G(\vec{r}, \vec{r}_s) \\ &= \vec{\nabla} G(\vec{r}, \vec{r}_s) \times \vec{J}_f(\vec{r}_s), \end{aligned} \quad (2.79)$$

où  $\vec{\nabla} \times \vec{J}_f(\vec{r}_s) = \vec{0}$  par indépendance. Ainsi, en combinant (2.78) et (2.79), nous obtenons :

$$\vec{H}_f(\vec{r}) = \iiint_{V_s} \left( \vec{J}_f(\vec{r}_s) \times \vec{\nabla} G(\vec{r}, \vec{r}_s) \right) dV_s, \quad (2.80)$$

ce qui représente tout simplement *l'équation de Biot-Savart* pour un volume conducteur électrique. Par ailleurs, en ce qui concerne le potentiel scalaire magnétique  $\Omega_m$ , les similarités qui existent entre les relations (2.20) et (2.35) nous permettent d'appliquer l'analogie suivante :

$$\phi_p \rightarrow \Omega_m, \quad \vec{P} \rightarrow \vec{M} \quad \text{et} \quad \epsilon_0 \rightarrow 1. \quad (2.81)$$

Similairement à l'analogie entre  $\phi_f$  et  $\vec{A}_f$ , l'expression ci-dessus mène à des conditions frontières cohérentes de sorte que les expressions (2.70) et (2.81) donnent :

$$\Omega_m(\vec{r}) = \iiint_{V_s} \left( \vec{M}(\vec{r}_s) \cdot \vec{\nabla} G(\vec{r}, \vec{r}_s) \right) dV_s. \quad (2.82)$$

Conséquemment, selon l'équation (2.34), le champ de désaimantation  $\vec{H}_m$  s'écrit comme suit :

$$\vec{H}_m(\vec{r}) = - \iiint_{V_s} \left( \vec{\nabla} \left( \vec{M}(\vec{r}_s) \cdot \vec{\nabla} G(\vec{r}, \vec{r}_s) \right) \right) dV_s, \quad (2.83)$$

où l'opérateur  $\vec{\nabla}$  a été inséré dans l'intégrale. Donc, en développant l'intégrant ci-dessus en tenant compte de l'indépendance entre  $\vec{r}$  et  $\vec{r}_s$ , nous obtenons :

$$\vec{\nabla} \left( \vec{M}(\vec{r}_s) \cdot \vec{\nabla} G(\vec{r}, \vec{r}_s) \right) = \bar{n}(\vec{r}, \vec{r}_s) \vec{M}(\vec{r}_s), \quad (2.84)$$

où  $\bar{n} = [n_{ij}]$  est un tenseur de deuxième ordre tel que  $i = \{x, y, z\}$ ,  $j = \{x, y, z\}$  et  $n_{ij} = \frac{\partial^2 G}{\partial i \partial j}$ . Nous notons que dans le cadre de cette analyse, l'aimantation  $\vec{M}$  sera considérée uniforme à

l'intérieur de  $V_s$  et par conséquent ne dépend pas de la variable  $\vec{r}_s$ ; nous verrons à la section 4.1 dans quel contexte cette condition est valide. Dans ce cas, il est possible de définir le *tenseur de désaimantation* selon la forme suivante :

$$\bar{\bar{N}}(\vec{r}) = \iiint_{V_s} \bar{n}(\vec{r}, \vec{r}_s) dV_s, \quad (2.85)$$

de sorte que si nous écrivons  $\vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$  et  $\vec{H}_m = H_{mx} \vec{i} + H_{my} \vec{j} + H_{mz} \vec{k}$ , les expressions (2.83)-(2.85) mènent au système d'équations suivant :

$$\vec{H}_m(\vec{r}) = -\bar{\bar{N}}(\vec{r}) \vec{M} \quad \begin{cases} H_{mx}(\vec{r}) = -(N_{xx}(\vec{r})M_x + N_{xy}(\vec{r})M_y + N_{xz}(\vec{r})M_z), \\ H_{my}(\vec{r}) = -(N_{yx}(\vec{r})M_x + N_{yy}(\vec{r})M_y + N_{yz}(\vec{r})M_z), \\ H_{mz}(\vec{r}) = -(N_{zx}(\vec{r})M_x + N_{zy}(\vec{r})M_y + N_{zz}(\vec{r})M_z). \end{cases} \quad (2.86)$$

De plus, selon la définition de  $n_{ij}$  et la forme de la fonction de Green donnée par l'équation (2.60), les coefficients du tenseur de désaimantation s'expriment comme suit :

$$N_{xx}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_s} \frac{(y_s - y)^2 + (z_s - z)^2 - 2(x_s - x)^2}{((x_s - x)^2 + (y_s - y)^2 + (z_s - z)^2)^{\frac{5}{2}}} dx_s dy_s dz_s, \quad (2.87)$$

$$N_{xy}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_s} \frac{-3(x_s - x)(y_s - y)}{((x_s - x)^2 + (y_s - y)^2 + (z_s - z)^2)^{\frac{5}{2}}} dx_s dy_s dz_s, \quad (2.88)$$

$$N_{xz}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_s} \frac{-3(x_s - x)(z_s - z)}{((x_s - x)^2 + (y_s - y)^2 + (z_s - z)^2)^{\frac{5}{2}}} dx_s dy_s dz_s, \quad (2.89)$$

$$N_{yy}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_s} \frac{(x_s - x)^2 + (z_s - z)^2 - 2(y_s - y)^2}{((x_s - x)^2 + (y_s - y)^2 + (z_s - z)^2)^{\frac{5}{2}}} dx_s dy_s dz_s, \quad (2.90)$$

$$N_{yz}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_s} \frac{-3(y_s - y)(z_s - z)}{((x_s - x)^2 + (y_s - y)^2 + (z_s - z)^2)^{\frac{5}{2}}} dx_s dy_s dz_s, \quad (2.91)$$

de cette manière le restant des coefficients doivent satisfaire les identités suivantes :

$$N_{yx}(\vec{r}) = N_{xy}(\vec{r}), \quad (2.92)$$

$$N_{zx}(\vec{r}) = N_{xz}(\vec{r}), \quad (2.93)$$

$$N_{zy}(\vec{r}) = N_{yz}(\vec{r}), \quad (2.94)$$

$$N_{zz}(\vec{r}) = -N_{xx}(\vec{r}) - N_{yy}(\vec{r}). \quad (2.95)$$

Maintenant que les solutions 3D pour  $\vec{H}_f$  et  $\vec{H}_m$  ont été établies, la prochaine section est axée sur la représentation 2D de ces vecteurs.

### 2.4.2 Solutions 2D

Considérons maintenant un système magnétostatique 2D invariant par translation, c'est à dire, un système 3D tel que toutes les quantités physiques pertinentes ne changent pas le long d'une direction donnée. Dans le cadre de cette analyse, la direction invariante sera arbitrairement choisie comme l'axe des  $z$ . Or, dans ce cas, nous écrivons  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ,  $\vec{r}_s = x_s\vec{i} + y_s\vec{j}$ ,  $J_f(\vec{r}) = J_{fz}(\vec{r})\vec{k}$ ,  $G \rightarrow \tilde{G}$  et  $dV_s \rightarrow dA_s$  où la fonction scalaire  $\tilde{G}$  représente la fonction de Green pour des systèmes 2D et  $dA_s$  est un élément infinitésimal d'une région plane  $A_s$  appartenant dans ce cas au plan  $xy$ . Conséquemment, les expressions 2D analogues aux équations (2.80) et (2.83) s'écrivent :

$$\vec{H}_f(\vec{r}) = \iint_{A_s} \left( J_{fz}(\vec{r}_s) \vec{k} \times \vec{\nabla} \tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}_s) \right) dA_s, \quad (2.96)$$

$$\vec{H}_m(\vec{r}) = - \iint_{A_s} \left( \vec{\nabla} \left( \vec{M}(\vec{r}_s) \cdot \vec{\nabla} \tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}_s) \right) \right) dA_s. \quad (2.97)$$

D'abord, de façon similaire aux systèmes 3D (équation 2.85), le tenseur de désaimantation 2D s'écrit comme suit :

$$\bar{\bar{N}}(\vec{r}) = \iint_{A_s} \bar{n}(\vec{r}, \vec{r}_s) dA_s, \quad (2.98)$$

où  $\bar{n} = [n_{ij}]$  est un tenseur de deuxième ordre tel que  $i = \{x, y\}$ ,  $j = \{x, y\}$  et  $n_{ij} = \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial i \partial j}$ . Donc, le champ de désaimantation 2D est défini comme suit :

$$\vec{H}_m(\vec{r}) = -\bar{\bar{N}}(\vec{r}) \vec{M} \quad \begin{cases} H_{mx}(\vec{r}) = -(N_{xx}(\vec{r})M_x + N_{xy}(\vec{r})M_y), \\ H_{my}(\vec{r}) = -(N_{yx}(\vec{r})M_x + N_{yy}(\vec{r})M_y). \end{cases} \quad (2.99)$$

Ainsi, selon l'expression (2.62), les coefficients de ce tenseur sont donnés par :

$$N_{xx}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{A_s} \frac{(y_s - y)^2 - (x_s - x)^2}{((x_s - x)^2 + (y_s - y)^2)^2} dx_s dy_s, \quad (2.100)$$

$$N_{xy}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{A_s} \frac{-2(x_s - x)(y_s - y)}{((x_s - x)^2 + (y_s - y)^2)^2} dx_s dy_s. \quad (2.101)$$

De plus, le restant des coefficients satisfont les identités suivantes :

$$N_{yx}(\vec{r}) = N_{xy}(\vec{r}), \quad (2.102)$$

$$N_{yy}(\vec{r}) = -N_{xx}(\vec{r}). \quad (2.103)$$

En ce qui concerne le vecteur  $\vec{H}_f(\vec{r})$ , l'intégrale représentée par l'expression (2.96) peut être simplifiée en supposant que la distance entre le point d'observation  $\vec{r}$  et la région  $A_s$  est suffisamment grande pour que cette dernière puisse être assimilée en un point  $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$ ; en effet, cette condition est valable pour le traitement de la section d'essais (c.-à-d. le diamètre  $\ll$  que la longueur). Plus précisément, nous pouvons écrire dans ce cas  $J_{fz}(\vec{r}_s)dA_s \rightarrow I_0$  tel que  $I_0$  est le *courant électrique* traversant le plan  $xy$  au point  $\vec{r}_0$ . Alors, aucune intégration n'est requise de sorte que nous obtenons :

$$\vec{H}_f(\vec{r}) = I_0 \vec{k} \times \vec{\nabla} \tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}_0) \quad \begin{cases} H_{fx}(\vec{r}) = -\frac{I_0(y-y_0)}{2\pi\|\vec{r}-\vec{r}_0\|^2}, \\ H_{fy}(\vec{r}) = \frac{I_0(x-x_0)}{2\pi\|\vec{r}-\vec{r}_0\|^2}, \end{cases} \quad (2.104)$$

tel que  $\|\vec{r} - \vec{r}_0\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ .

Avant de passer au prochain chapitre, il faut clarifier pourquoi nous avons considéré des solutions intégrales 2D malgré le fait que, comme indiqué au chapitre 1, les objectifs de recherche concernent l'élaboration d'outils d'analyse 3D. Premièrement, puisque la longueur de la section d'essais de type CANDU est beaucoup plus grande que son diamètre (voir la figure 1.1) et en négligeant les effets possibles des discontinuités introduites par les prises de pression, les éléments de courant qui simulent les crayons des grappes de combustible peuvent être considérés comme étant invariants par translation. Conséquemment, en posant  $H_{fz} = 0$ , l'expression ci-dessus peut être appliquée au système 3D en jeu. Deuxièmement, comme nous allons le voir en détail au chapitre 4, le formalisme mathématique associé au tenseur de désaimantation 2D sera utilisé en tant qu'outil d'analyse qui permettra la discréétisation de l'approche 3D. Ainsi, puisque la forme de  $\vec{H}_f$  est maintenant connue, il ne reste plus qu'à évaluer les coefficients du tenseur de désaimantation 2D et 3D afin de trouver  $\vec{H}_m$ . Une fois cette tâche accomplie, nous serons en mesure d'évaluer, à partir du VIEM, la distribution du champ magnétique total à travers un système magnétique quelconque.

## CHAPITRE 3 CALCUL DES COEFFICIENTS DE DÉSAIMANTATION

Afin d'appliquer la solution intégrale du champ magnétique  $\vec{H}$  avec les techniques de résolution employées dans le cadre du VIEM, il faut d'abord évaluer le tenseur défini précédemment, et ce, pour des géométries 2D et 3D représentatives de la section d'essais de type CANDU. À cet effet, une méthode de calcul matricielle sera rigoureusement détaillée dans cette section. Plus précisément, comme il sera montré, le formalisme en jeu est parfaitement adapté à l'utilisation d'une fonction de Green. Toutefois, avant d'élaborer ce calcul, clarifions certains détails mathématiques reliés au tenseur de désaimantation  $\bar{\bar{N}}$ .

### 3.1 Auto-coefficients de désaimantation

Une des particularités de la méthode élaborée à la section 2.3 est qu'elle permet de générer des solutions capables de distinguer un point intérieur d'un point extérieur du domaine d'intégration. En considérant  $\vec{M}$  uniforme dans  $V_s$ , en tenant compte de l'équation (2.84) (c.-à-d. la définition du tenseur de  $\bar{\bar{N}}$ ) et en utilisant l'expression (2.50) nous pouvons écrire :

$$N_{xx}(\vec{r}) + N_{yy}(\vec{r}) + N_{zz}(\vec{r}) = \iiint_{V_s} \delta(\vec{r} - \vec{r}_s) dV_s = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{r} \notin V_s \\ 1 & \text{si } \vec{r} \in V_s \end{cases} \quad (3.1)$$

Il est important de noter que la même logique s'applique au cas 2D. Ainsi, il devient utile de définir les *auto-coefficients de désaimantation* comme les termes du tenseur pour lesquelles  $\vec{r} \in V_s$ . En fait, comme nous allons le voir au prochain chapitre, les auto-coefficients sont nécessaires à l'utilisation adéquate du VIEM. Par contre, il est important de mentionner que l'expression (3.1) contredit l'équation (2.95) puisque cette dernière mène à la somme des termes de la diagonale de  $\bar{\bar{N}}$  qui est nulle  $\forall \vec{r}$ . Autrement dit, sous leurs formes actuelles, les solutions intégrales des coefficients s'appliquent seulement à des points extérieurs au domaine d'intégration  $V_s$ . Conséquemment, nous allons maintenant montrer comment les transformations 2D et 3D élaborées à la section 2.2 peuvent remédier à ce problème (pour plus de détails sur le cas 2D voir Hall et Teyssedou, 2014).

### 3.1.1 Auto-coefficients 2D

Étant donné la forme des équations (2.100) et (2.101), considérons :

$$\frac{\tilde{y}^2 - \tilde{x}^2}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^4} = \frac{\partial}{\partial x_s} \left[ \frac{\tilde{x}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^2} \right] = \frac{\partial}{\partial y_s} \left[ \frac{-\tilde{y}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^2} \right], \quad (3.2)$$

$$\frac{-2\tilde{x}\tilde{y}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^4} = \frac{\partial}{\partial x_s} \left[ \frac{\tilde{y}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^2} \right] = \frac{\partial}{\partial y_s} \left[ \frac{\tilde{x}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^2} \right], \quad (3.3)$$

avec  $\|\vec{r}_s - \vec{r}\|$  le module du vecteur  $\vec{r}_s - \vec{r}$ . De plus, par souci de simplification nous avons appliqué le changement de variable  $\tilde{x} = x_s - x$  et  $\tilde{y} = y_s - y$ . Ainsi, en combinant les transformations (2.37) et (2.39) aux résultats ci-dessus, nous obtenons les relations suivantes :

$$N_{xx}^{(I)}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_s} \frac{\tilde{y}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^2} dx_s, \quad (3.4)$$

$$N_{xy}^{(I)}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_s} \frac{-\tilde{x}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^2} dx_s, \quad (3.5)$$

$$N_{xx}^{(II)}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_s} \frac{\tilde{x}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^2} dy_s, \quad (3.6)$$

$$N_{xy}^{(II)}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_s} \frac{\tilde{y}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^2} dy_s, \quad (3.7)$$

où l'exposant attribué aux coefficients (I, II) indique le type de transformation qui s'applique (Hall et Teyssedou, 2014). De plus,  $C_s$  représente la courbe frontière (orientée positivement) du domaine d'intégration  $A_s$ . En ce qui a trait aux quantités  $N_{yx}$  et  $N_{yy}$ , les relations (2.102) et (2.103) donnent :

$$N_{yy}^{(u)}(\vec{r}) = -N_{xx}^{(u)}(\vec{r}), \quad (3.8)$$

$$N_{yx}^{(u)}(\vec{r}) = N_{xy}^{(u)}(\vec{r}), \quad (3.9)$$

avec  $u = \{I, II\}$ . À ce stade-ci de l'analyse, rappelons-nous qu'une région 2D est dite simple (ou de type III) lorsqu'elle peut être considérée à la fois de type I et II (Stewart, 2012). En effet, cela signifie que les relations (3.4) et (3.5) sont respectivement égales aux équations (3.6) et (3.7) alors :

$$N_{xx}^{(I)}(\vec{r}) - N_{xx}^{(II)}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_s} \left[ \frac{\tilde{y} \vec{r}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^2} - \frac{\tilde{x} \vec{j}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^2} \right] \cdot d\vec{r}_s, \quad (3.10)$$

$$N_{xy}^{(I)}(\vec{r}) - N_{xy}^{(II)}(\vec{r}) = -\frac{1}{2\pi} \oint_{C_s} \left[ \frac{\tilde{x}\vec{i}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^2} + \frac{\tilde{y}\vec{j}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^2} \right] \cdot d\vec{r}_s. \quad (3.11)$$

Il est clair que ces relations doivent être nulles indépendamment de la géométrie de  $C_s$ . Conséquemment, il devient utile de mentionner qu'une intégrale de parcours fermé d'un vecteur est toujours nulle lorsque ce dernier peut s'écrire comme le gradient d'une fonction scalaire (Stewart, 2012). En effet, selon l'identité (2.12), ceci revient à dire que le vecteur a un rotationnel nul. Dès lors, nous notons que :

$$\vec{\nabla}_s \times \left[ \frac{\tilde{y}\vec{i}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^2} - \frac{\tilde{x}\vec{j}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^2} \right] = \vec{0}, \quad (3.12)$$

$$\vec{\nabla}_s \times \left[ \frac{\tilde{x}\vec{i}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^2} + \frac{\tilde{y}\vec{j}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^2} \right] = \vec{0}. \quad (3.13)$$

Ainsi, selon les équations (3.10)-(3.13), nous concluons que les coefficients de désaimantation appliqués à des transformations de type I et II sont toujours équivalents tant et aussi longtemps que  $A_s$  représente un domaine simple. Toutefois, ce raisonnement n'est pas complet : rappelons-nous que les transformations intégrales définies à la section 2.2.1 nécessitaient que les fonctions intégrées aient des dérivées partielles continues dans une région ouverte de  $\Re^2$ . Or, selon les équations (3.2) et (3.3), il est clair que cette propriété n'est pas respectée lorsque  $\tilde{x} = \tilde{y} = 0$  le long de  $A_s$ , c.-à-d. pour des auto-coefficients. Afin de résoudre ce problème, considérons une forme arbitraire pour  $A_s$  (figure 3.1a) qui contient à la fois un sous-parcours circulaire  $C_*$  de rayon  $r_*$  centré à  $\vec{r}$  ainsi que deux sous-parcours linéaires  $C_1$  et  $C_2$ .

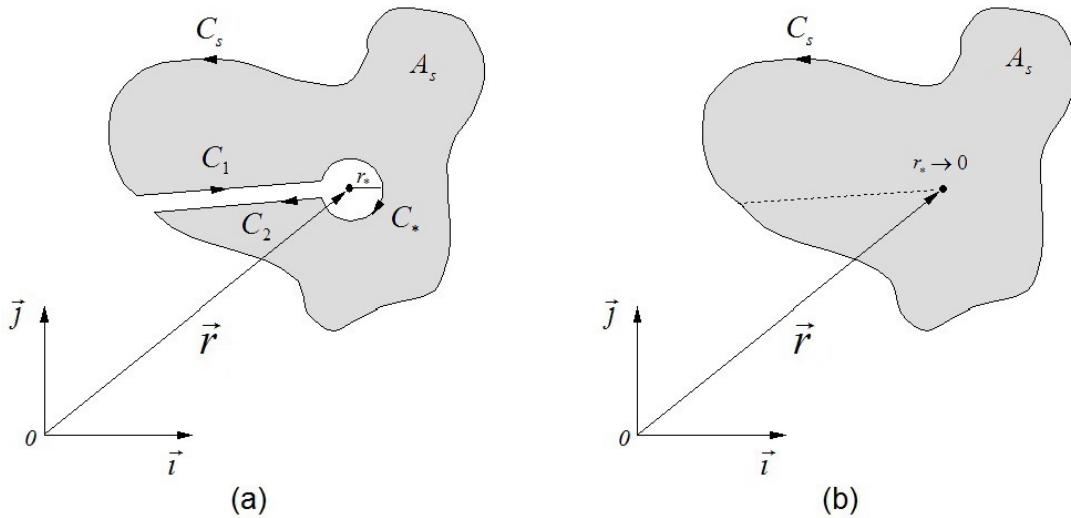


Figure 3.1 Contourner une singularité 2D : (a) parcours total ; (b) parcours lorsque  $r_* \rightarrow 0$ .

Dans ce cas, les formes appropriées pour les équations (3.10) et (3.11) sont donc :

$$N_{xx}^{(I)}(\vec{r}) - N_{xx}^{(II)}(\vec{r}) = \frac{\delta_s(\vec{r})}{2\pi} \lim_{r_* \rightarrow 0} \oint_{C_*} \left[ \frac{-\tilde{y} \vec{i}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^2} + \frac{\tilde{x} \vec{j}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^2} \right] \cdot d\vec{r}_s, \quad (3.14)$$

$$N_{xy}^{(I)}(\vec{r}) - N_{xy}^{(II)}(\vec{r}) = \frac{\delta_s(\vec{r})}{2\pi} \lim_{r_* \rightarrow 0} \oint_{C_*} \left[ \frac{\tilde{x} \vec{i}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^2} + \frac{\tilde{y} \vec{j}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^2} \right] \cdot d\vec{r}_s, \quad (3.15)$$

où nous avons omis de représenter  $C_1$  et  $C_2$  étant donné que ceux-ci se cancellent lorsque  $r_* \rightarrow 0$  et  $\delta_s$  se nomme le *delta de Kronecker 2D* qui vaut 1 pour les auto-coefficients ( $\vec{r} \in A_s$ ) et 0 autrement ( $\vec{r} \notin A_s$ ). De plus, le parcours  $C_*$  peut être paramétré selon le changement de variable  $\tilde{x} = r_* \cos(\phi)$  et  $\tilde{y} = r_* \sin(\phi)$  avec  $\phi \in [0, 2\pi[$  l'angle entre les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{r}_s - \vec{r}$ . Conséquemment, en prenant la limite des intégrales le long de  $C_*$ , nous trouvons :

$$\lim_{r_* \rightarrow 0} \oint_{C_*} \frac{\tilde{x}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^2} dx_s = - \int_{2\pi}^0 \cos(\phi) \sin(\phi) d\phi = 0, \quad (3.16)$$

$$\lim_{r_* \rightarrow 0} \oint_{C_*} \frac{\tilde{x}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^2} dy_s = \int_{2\pi}^0 \cos^2(\phi) d\phi = -\pi, \quad (3.17)$$

$$\lim_{r_* \rightarrow 0} \oint_{C_*} \frac{\tilde{y}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^2} dx_s = - \int_{2\pi}^0 \sin^2(\phi) d\phi = \pi, \quad (3.18)$$

$$\lim_{r_* \rightarrow 0} \oint_{C_*} \frac{\tilde{y}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^2} dy_s = \int_{2\pi}^0 \cos(\phi) \sin(\phi) d\phi = 0. \quad (3.19)$$

Il est important de mentionner que l'intégration selon  $\phi$  est effectuée de  $\phi = 2\pi$  à  $\phi = 0$  puisque tous les parcours sont par définition orientés positivement. De cette manière, les équations (3.14) et (3.15) donnent les deux résultats suivants :

$$N_{xx}^{(I)}(\vec{r}) - N_{xx}^{(II)}(\vec{r}) = -\delta_s(\vec{r}), \quad (3.20)$$

$$N_{xy}^{(I)}(\vec{r}) - N_{xy}^{(II)}(\vec{r}) = 0. \quad (3.21)$$

Premièrement, selon les expressions (3.9) et (3.21) appliquées à une région simple, nous déduisons que les transformations de type I et II sont toujours équivalentes pour  $N_{xy}$  et  $N_{yx}$ . Autrement dit, puisque nous avons entre autres  $n_{xy} = \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial x_s \partial y_s}$  (voir la section 2.3.2 pour la définition de  $\tilde{G}$ ), cela signifie que l'ordre de dérivation peut toujours être permué même quand la fonction de Green comporte une discontinuité. Deuxièmement, selon les expressions

(3.8) et (3.20), nous trouvons que la seule configuration qui respecte la forme 2D analogue à l'expression (3.1) est telle que :

$$N_{xx}^{(II)}(\vec{r}) + N_{yy}^{(I)}(\vec{r}) = \delta_s(\vec{r}). \quad (3.22)$$

En d'autres termes, cela signifie qu'afin de respecter la méthode de la fonction de Green qui a mené à la forme intégrale 2D de  $\bar{N}$ , il faut absolument que  $N_{xx}$  et  $N_{yy}$  soient respectivement évalués selon une transformation de type II et I (Hall et Teyssedou, 2014).

### 3.1.2 Auto-coefficients 3D

Quoique le raisonnement utilisé en 2D est très similaire à celui employé en 3D, ce dernier est considérablement plus lourd d'un point de vue mathématique. Conséquemment, afin de simplifier l'analyse, nous allons nous baser sur le principe suivant : à partir de la même logique appliquée aux coefficients de désaimantation 2D, nous considérons que la permutation de l'ordre de dérivation n'affecte pas les intégrales (voir le théorème de Schwarz dans Stewart, 2012). En d'autres termes, selon le formalisme élaboré à la section 2.2.2, cela signifie que les transformations de type I, II et III sont toujours équivalentes pour  $N_{xy}$ ,  $N_{xz}$ ,  $N_{yx}$ ,  $N_{yz}$ ,  $N_{zx}$  et  $N_{zy}$ . D'autre part, les expressions (2.87) et (2.90) nous permettent d'écrire :

$$\frac{\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 - 2\tilde{x}^2}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^5} = \frac{\partial}{\partial x_s} \left[ \frac{\tilde{x}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \right] = \frac{\partial}{\partial y_s} \left[ \frac{\tilde{y} f_{xx}^{(y)}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \right] = \frac{\partial}{\partial z_s} \left[ \frac{\tilde{z} f_{xx}^{(z)}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \right], \quad (3.23)$$

$$\frac{\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2 - 2\tilde{y}^2}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^5} = \frac{\partial}{\partial x_s} \left[ \frac{\tilde{x} f_{yy}^{(x)}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \right] = \frac{\partial}{\partial y_s} \left[ \frac{\tilde{y}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \right] = \frac{\partial}{\partial z_s} \left[ \frac{\tilde{z} f_{yy}^{(z)}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \right], \quad (3.24)$$

où  $\tilde{z} = z_s - z$  et les fonctions (sans unités)  $f_{xx}^{(y)}$ ,  $f_{xx}^{(z)}$ ,  $f_{yy}^{(x)}$  et  $f_{yy}^{(z)}$  sont respectivement :

$$f_{xx}^{(y)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{(\tilde{z}^2 - \tilde{x}^2)(\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2) - 2\tilde{x}^4}{(\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2)^2}, \quad (3.25)$$

$$f_{xx}^{(z)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{(\tilde{y}^2 - \tilde{x}^2)(\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2) - 2\tilde{x}^4}{(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^2}, \quad (3.26)$$

$$f_{yy}^{(x)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{\tilde{x}^2(\tilde{z}^2 - \tilde{y}^2) + (\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2)(\tilde{z}^2 - 2\tilde{y}^2)}{(\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2)^2}, \quad (3.27)$$

$$f_{yy}^{(z)}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{\tilde{x}^4 + \tilde{x}^2(\tilde{z}^2 - \tilde{y}^2) - \tilde{y}^2(2\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2)}{(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^2}. \quad (3.28)$$

Ainsi, en appliquant ces résultats aux équations (2.42), (2.45) et (2.46), nous obtenons :

$$N_{xx}^{(I)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_s} \frac{\tilde{z} f_{xx}^{(z)} \vec{k}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \cdot d\vec{S}_s, \quad (3.29)$$

$$N_{yy}^{(I)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_s} \frac{\tilde{z} f_{yy}^{(z)} \vec{k}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \cdot d\vec{S}_s, \quad (3.30)$$

$$N_{xx}^{(II)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_s} \frac{\tilde{x} \vec{i}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \cdot d\vec{S}_s, \quad (3.31)$$

$$N_{yy}^{(II)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_s} \frac{\tilde{x} f_{yy}^{(x)} \vec{i}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \cdot d\vec{S}_s, \quad (3.32)$$

$$N_{xx}^{(III)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_s} \frac{\tilde{y} f_{xx}^{(y)} \vec{j}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \cdot d\vec{S}_s, \quad (3.33)$$

$$N_{yy}^{(III)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_s} \frac{\tilde{y} \vec{j}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \cdot d\vec{S}_s, \quad (3.34)$$

où  $S_s$  représente l'interface (orientée positivement) du volume  $V_s$  et, comme avant, l'exposant attribué aux coefficients indique le type de transformation qui doit être appliqué. En ce qui concerne le terme  $N_{zz}$ , l'équation (2.95) mène à l'identité suivante :

$$N_{zz}^{(u)}(\vec{r}) = -N_{xx}^{(u)}(\vec{r}) - N_{yy}^{(u)}(\vec{r}), \quad (3.35)$$

avec  $u = \{I, II, III\}$ . De plus, rappelons-nous que le volume  $V_s$  est dit de type IV lorsque nous pouvons paramétriser celui-ci comme un domaine de type I, II ou III. Dans ce cas, les trois transformations intégrales en question doivent être équivalentes, ou bien :

$$N_{xx}^{(I)}(\vec{r}) - N_{xx}^{(II)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_s} \left[ \frac{-\tilde{x} \vec{i}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} + \frac{\tilde{z} f_{xx}^{(z)} \vec{k}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \right] \cdot d\vec{S}_s, \quad (3.36)$$

$$N_{xx}^{(I)}(\vec{r}) - N_{xx}^{(III)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_s} \left[ \frac{-\tilde{y} f_{xx}^{(y)} \vec{j}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} + \frac{\tilde{z} f_{xx}^{(z)} \vec{k}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \right] \cdot d\vec{S}_s, \quad (3.37)$$

$$N_{yy}^{(I)}(\vec{r}) - N_{yy}^{(II)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_s} \left[ \frac{-\tilde{x} f_{yy}^{(x)} \vec{i}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} + \frac{\tilde{z} f_{yy}^{(z)} \vec{k}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \right] \cdot d\vec{S}_s, \quad (3.38)$$

$$N_{yy}^{(I)}(\vec{r}) - N_{yy}^{(III)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_s} \left[ \frac{-\tilde{y} \vec{j}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} + \frac{\tilde{z} f_{yy}^{(z)} \vec{k}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \right] \cdot d\vec{S}_s, \quad (3.39)$$

doivent être nulles. Ainsi, il devient utile de noter qu'une intégrale de surface fermée d'un vecteur est toujours nulle lorsque ce dernier peut s'écrire à partir d'un rotationnel (Stewart, 2012). En effet, d'après l'équation (2.23), nous obtenons les identités suivantes :

$$\vec{\nabla}_s \cdot \left[ \frac{-\tilde{x} \vec{i}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} + \frac{\tilde{z} f_{xx}^{(z)} \vec{k}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \right] = 0, \quad (3.40)$$

$$\vec{\nabla}_s \cdot \left[ \frac{-\tilde{y}f_{xx}^{(y)}\vec{j}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} + \frac{\tilde{z}f_{xx}^{(z)}\vec{k}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \right] = 0, \quad (3.41)$$

$$\vec{\nabla}_s \cdot \left[ \frac{-\tilde{x}f_{yy}^{(x)}\vec{i}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} + \frac{\tilde{z}f_{yy}^{(z)}\vec{k}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \right] = 0, \quad (3.42)$$

$$\vec{\nabla}_s \cdot \left[ \frac{-\tilde{y}\vec{j}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} + \frac{\tilde{z}f_{yy}^{(z)}\vec{k}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \right] = 0. \quad (3.43)$$

De cette manière et selon les équations (3.36)-(3.43), nous concluons que les coefficients de désaimantation appliqués à des transformations de type I, II et III sont toujours équivalents tant et aussi longtemps que  $V_s$  représente un domaine de type IV. Toutefois, comme c'est le cas en 2D, ces transformations nécessitent que les fonctions intégrées aient des dérivées partielles continues dans une région ouverte de  $\Re^3$ . Or, selon (3.23) et (3.24), il est clair que cette propriété n'est pas respectée lorsque  $\tilde{x} = \tilde{y} = \tilde{z} = 0$  à l'intérieur de  $V_s$ . Afin de résoudre ce problème, considérons une forme arbitraire pour  $V_s$  (comme celle mentionnée à la figure 3.2a) qui contient une surface sphérique  $S_*$  de rayon  $r_*$  centrée à  $\vec{r}$  et, à titre d'exemple, une surface cylindrique  $S_1$ .

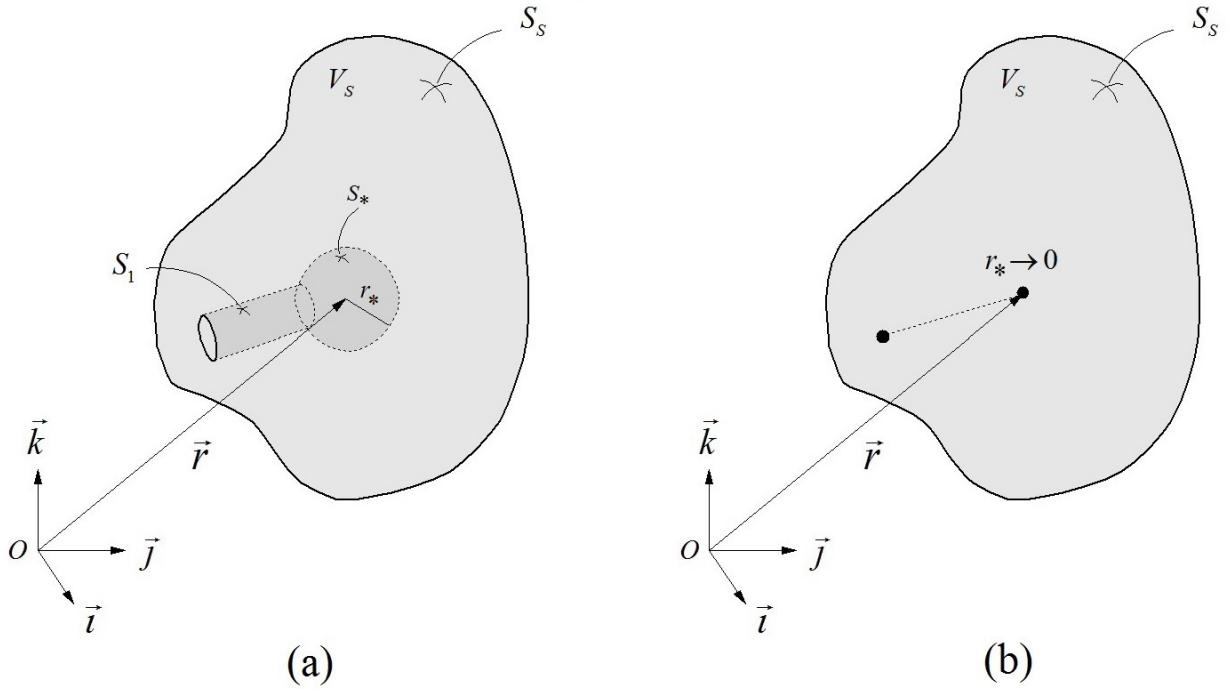


Figure 3.2 Contourner une singularité 3D : (a) surface totale ; (b) surface lorsque  $r_* \rightarrow 0$ .

En définissant  $\delta_s$  comme le *delta de Kronecker 3D* qui vaut 1 pour les auto-coefficients ( $\vec{r} \in V_s$ )

et 0 autrement ( $\vec{r} \notin V_s$ ), nous pouvons donc écrire :

$$N_{xx}^{(I)}(\vec{r}) - N_{xx}^{(II)}(\vec{r}) = \frac{\delta_s}{4\pi} \lim_{r_* \rightarrow 0} \iint_{S_*} \left[ \frac{\tilde{x} \vec{i}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} - \frac{\tilde{z} f_{xx}^{(z)} \vec{k}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \right] \cdot d\vec{S}_s, \quad (3.44)$$

$$N_{xx}^{(I)}(\vec{r}) - N_{xx}^{(III)}(\vec{r}) = \frac{\delta_s}{4\pi} \lim_{r_* \rightarrow 0} \iint_{S_*} \left[ \frac{\tilde{y} f_{xx}^{(y)} \vec{j}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} - \frac{\tilde{z} f_{xx}^{(z)} \vec{k}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \right] \cdot d\vec{S}_s, \quad (3.45)$$

$$N_{yy}^{(I)}(\vec{r}) - N_{yy}^{(II)}(\vec{r}) = \frac{\delta_s}{4\pi} \lim_{r_* \rightarrow 0} \iint_{S_*} \left[ \frac{\tilde{x} f_{yy}^{(x)} \vec{i}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} - \frac{\tilde{z} f_{yy}^{(z)} \vec{k}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \right] \cdot d\vec{S}_s, \quad (3.46)$$

$$N_{yy}^{(I)}(\vec{r}) - N_{yy}^{(III)}(\vec{r}) = \frac{\delta_s}{4\pi} \lim_{r_* \rightarrow 0} \iint_{S_*} \left[ \frac{\tilde{y} \vec{j}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} - \frac{\tilde{z} f_{yy}^{(z)} \vec{k}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \right] \cdot d\vec{S}_s, \quad (3.47)$$

où nous avons omis de représenter  $S_1$  étant donné que celle-ci est nulle lorsque  $r_* \rightarrow 0$ . De plus, la surface sphérique peut être paramétrée selon le changement de variable  $\tilde{x} = r_* \cos(\phi) \sin(\theta)$ ,  $\tilde{y} = r_* \sin(\phi) \sin(\theta)$  et  $\tilde{z} = r_* \cos(\theta)$  tel que  $\phi \in [0, 2\pi[$  est l'angle entre le vecteur  $\vec{i}$  et la projection de  $\vec{r}_s - \vec{r}$  dans le plan Oxy et  $\theta \in [0, \pi]$  est l'angle entre les vecteurs  $\vec{k}$  et  $\vec{r}_s - \vec{r}$ . Il est important de noter les intervalles de validité autant pour  $\phi$  que pour  $\theta$ . Ces conditions doivent être respectées lors de l'élaboration d'un algorithme de calcul. Ainsi, en écrivant  $d\vec{S}_s = -r_*^2 \sin(\theta) [\cos(\phi) \sin(\theta) \vec{i} + \sin(\phi) \sin(\theta) \vec{j} + \cos(\theta) \vec{k}] d\phi d\theta$  (le signe négatif est employé étant donné que  $S_*$  doit être orienté positivement), nous trouvons :

$$\lim_{r_* \rightarrow 0} \iint_{S_*} \frac{\tilde{z} f_{xx}^{(z)} \vec{k}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \cdot d\vec{S}_s = - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \sin(\theta) F_{xx}^{(z)} d\phi d\theta = \frac{2\pi}{3}, \quad (3.48)$$

$$\lim_{r_* \rightarrow 0} \iint_{S_*} \frac{\tilde{z} f_{yy}^{(z)} \vec{k}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \cdot d\vec{S}_s = - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \sin(\theta) F_{yy}^{(z)} d\phi d\theta = \frac{2\pi}{3}, \quad (3.49)$$

$$\lim_{r_* \rightarrow 0} \iint_{S_*} \frac{\tilde{x} \vec{i}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \cdot d\vec{S}_s = - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi) \sin^3(\theta) d\phi d\theta = -\frac{4\pi}{3}, \quad (3.50)$$

$$\lim_{r_* \rightarrow 0} \iint_{S_*} \frac{\tilde{x} f_{yy}^{(x)} \vec{i}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \cdot d\vec{S}_s = - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi) \sin^3(\theta) F_{yy}^{(x)} d\phi d\theta = -\frac{4\pi}{3}, \quad (3.51)$$

$$\lim_{r_* \rightarrow 0} \iint_{S_*} \frac{\tilde{y} f_{xx}^{(y)} \vec{j}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \cdot d\vec{S}_s = - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2(\phi) \sin^3(\theta) F_{xx}^{(y)} d\phi d\theta = -\frac{4\pi}{3}, \quad (3.52)$$

$$\lim_{r_* \rightarrow 0} \iint_{S_*} \frac{\tilde{y} \vec{j}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \cdot d\vec{S}_s = - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2(\phi) \sin^3(\theta) d\phi d\theta = -\frac{4\pi}{3}, \quad (3.53)$$

telles que les fonctions  $F_{xx}^{(y)}$ ,  $F_{xx}^{(z)}$ ,  $F_{yy}^{(x)}$  et  $F_{yy}^{(z)}$  représentent respectivement  $f_{xx}^{(y)}$ ,  $f_{xx}^{(z)}$ ,  $f_{yy}^{(x)}$  et  $f_{yy}^{(z)}$  en coordonnées sphériques. De plus, étant donné la lourdeur mathématique du problème, les intégrales ont été évaluées en utilisant le logiciel Mathematica<sup>1</sup>. De cette manière, nous obtenons les résultats suivants :

$$\left. \begin{array}{l} N_{xx}^{(I)}(\vec{r}) - N_{xx}^{(II)}(\vec{r}) \\ N_{xx}^{(I)}(\vec{r}) - N_{xx}^{(III)}(\vec{r}) \\ N_{yy}^{(I)}(\vec{r}) - N_{yy}^{(II)}(\vec{r}) \\ N_{yy}^{(I)}(\vec{r}) - N_{yy}^{(III)}(\vec{r}) \end{array} \right\} = -\frac{1}{2}\delta_s(\vec{r}), \quad (3.54)$$

de sorte que nous déduisons que  $N_{xx}^{(II)} = N_{xx}^{(III)}$  et  $N_{yy}^{(II)} = N_{yy}^{(III)}$ . En conséquence, selon l'identité (3.35) et les équations présentées ci-dessus, nous trouvons que les configurations qui respectent la conditions donnée par l'équation (3.1) sont :

$$N_{xx}^{(u)}(\vec{r}) + N_{yy}^{(v)}(\vec{r}) + N_{zz}^{(I)}(\vec{r}) = \delta_s(\vec{r}) \quad \text{avec } u, v = \{\text{II, III}\}. \quad (3.55)$$

Autrement dit, afin de respecter la méthode de la fonction de Green qui mène à la forme intégrale 3D de  $\bar{N}$ , il faut absolument que  $N_{zz}$  soit évalué avec une transformation de type I et les coefficients  $N_{xx}$  et  $N_{yy}$  avec des transformations de types II ou III. De plus, quoique essentielle à l'évaluation adéquate des auto-coefficients, un sujet communément discuté en physique du solide (Ashcroft et Mermin, 1976), il est important de noter que la preuve mathématique 3D présentée dans cette section n'est pas présente dans la littérature. Ainsi, regardons maintenant en détails le calcul utilisé pour évaluer  $\bar{N}$ .

## 3.2 Formalisme matriciel

À ce stade-ci, nous sommes en mesure d'élaborer la méthode de calcul qui sera employée pour évaluer les éléments du tenseur  $\bar{N}$  au prochain chapitre. Comme nous allons le voir, ce calcul est non seulement parfaitement adapté à l'utilisation d'une fonction de Green, mais il tient également compte des résultats exprimés par les équations (3.22) et (3.55) associés respectivement aux auto-coefficients 2D et 3D.

### 3.2.1 Calcul 2D

Afin que le calcul de  $\bar{N}$  puisse s'appliquer à la géométrie de la section d'essais mentionnée au chapitre 1 tout en demeurant une approche exacte, considérons un polygone généralisé

---

1. (MC) Marque de commerce de Wolfram Research, IL, USA.

à  $L$  noeuds comme celui illustré à la figure 3.3. Plus précisément, si la discrétisation du système est suffisamment raffinée, cette géométrie devrait représenter à la limite n'importe quelle domaine en  $\Re^2$ . Il est important de noter que nous cherchons une formulation exacte puisque nous allons éventuellement utiliser le même formalisme dans le cadre d'un calcul numérique (le VIEM) de sorte que nous voulons éviter d'introduire des erreurs numériques supplémentaires.

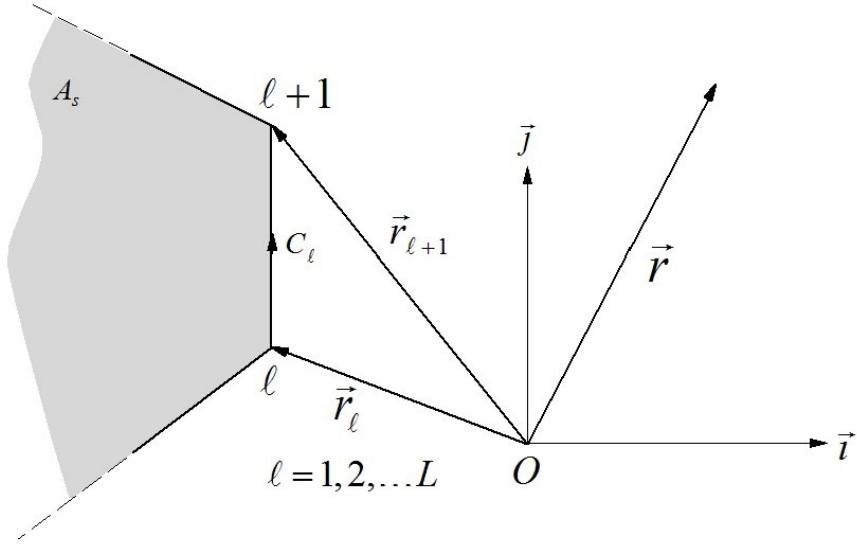


Figure 3.3 Portion d'un polygone généralisé à  $L$  noeuds.

Or, nous pouvons toujours décomposer le parcours frontière du polygone en  $L$  sous-parcours linéaires. Dans ce cas, le calcul du tenseur  $\bar{N}$  est composé de  $L$  termes, c.-à-d. :

$$\bar{N}(\vec{r}) = \sum_{\ell=1}^L \begin{bmatrix} N_{xx\ell}(\vec{r}) & N_{xy\ell}(\vec{r}) \\ N_{yx\ell}(\vec{r}) & N_{yy\ell}(\vec{r}) \end{bmatrix}, \quad (3.56)$$

tels que les formes employées pour les coefficients sont données par :

$$N_{xx\ell}(\vec{r}) = \int_{C_\ell} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x_s} t_y \|d\vec{r}_s\| = t_{y\ell} \int_{C_\ell} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x_s} \|d\vec{r}_s\|, \quad (3.57)$$

$$N_{xy\ell}(\vec{r}) = \int_{C_\ell} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y_s} t_y \|d\vec{r}_s\| = t_{y\ell} \int_{C_\ell} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y_s} \|d\vec{r}_s\|, \quad (3.58)$$

$$N_{yx\ell}(\vec{r}) = - \int_{C_\ell} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x_s} t_x \|d\vec{r}_s\| = -t_{x\ell} \int_{C_\ell} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x_s} \|d\vec{r}_s\|, \quad (3.59)$$

$$N_{yy\ell}(\vec{r}) = - \int_{C_\ell} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y_s} t_y \|d\vec{r}_s\| = -t_{y\ell} \int_{C_\ell} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y_s} \|d\vec{r}_s\|, \quad (3.60)$$

où  $\vec{t} = t_x \vec{i} + t_y \vec{j}$  est défini comme un vecteur unitaire tangentiel au parcours fermé qui représente l'interface de la région  $A_s$ . De plus, rappelons-nous que la fonction de Green 2D  $\tilde{G}$  est donnée par l'équation (2.62) et que, conformément aux résultats obtenus à la section 3.1.1, les expressions (3.57) et (3.60) ont été respectivement évaluées selon des transformations de type II et I (Hall et Teyssedou, 2014). Étant donné que les sous-parcours sont linéaires, nous considérons  $\vec{t}_\ell = t_{x\ell} \vec{i} + t_{y\ell} \vec{j} \forall \ell = 1, 2, \dots L$  comme un vecteur uniforme le long de  $C_\ell$  et, en conséquence, on peut sortir  $t_{x\ell}$  et  $t_{y\ell}$  des intégrales ci-dessus. Plus précisément, en écrivant  $\vec{r}_\ell = x_\ell \vec{i} + y_\ell \vec{j}$  et  $\vec{r}_{\ell+1} = x_{\ell+1} \vec{i} + y_{\ell+1} \vec{j}$  comme les  $\ell^{\text{ème}}$  et  $(\ell+1)^{\text{ème}}$  noeuds (voir la figure 3.3 pour plus de détails), nous trouvons que les composantes de  $\vec{t}_\ell$  s'expriment comme suit :

$$t_{x\ell} = \frac{x_{\ell+1} - x_\ell}{\sqrt{(x_{\ell+1} - x_\ell)^2 + (y_{\ell+1} - y_\ell)^2}}, \quad (3.61)$$

$$t_{y\ell} = \frac{y_{\ell+1} - y_\ell}{\sqrt{(x_{\ell+1} - x_\ell)^2 + (y_{\ell+1} - y_\ell)^2}}, \quad (3.62)$$

tel que  $\vec{t}_{L+1} = \vec{t}_1$  puisque le parcours total est fermé, par définition. Premièrement, considérons la combinaison linéaire suivante :

$$\nu_1 N_{xx\ell}(\vec{r}) + \nu_2 N_{xy\ell}(\vec{r}) = t_{y\ell} \int_{C_\ell} \left[ \nu_1 \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x_s} + \nu_2 \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y_s} \right] \|d\vec{r}_s\|, \quad (3.63)$$

avec  $\nu_1$  et  $\nu_2$  définis comme des constantes. Posons  $\nu_1 = t_{x\ell}$  et  $\nu_2 = t_{y\ell}$ , nous obtenons alors

$$t_{x\ell} N_{xx\ell}(\vec{r}) + t_{y\ell} N_{xy\ell}(\vec{r}) = t_{y\ell} \alpha_\ell(\vec{r}) \quad \text{avec} \quad \alpha_\ell(\vec{r}) = \int_{C_\ell} \vec{\nabla}_s \tilde{G} \cdot d\vec{r}_s, \quad (3.64)$$

avec  $d\vec{r}_s = \|d\vec{r}_s\| \vec{t}$ . Deuxièmement, à ce stade-ci de l'analyse, il est utile de considérer le vecteur  $\vec{n}$  qui est orthogonal à  $\vec{t}$  et qui, pour des parcours orientés positivement, pointe vers l'extérieur de la région  $A_s$ . Donc, en écrivant  $\vec{n}_\ell = n_{x\ell} \vec{i} + n_{y\ell} \vec{j}$  le long de  $C_\ell$ , nous trouvons

$n_{x\ell} = t_{y\ell}$  et  $n_{y\ell} = -t_{x\ell}$  de sorte qu'en posant  $\nu_1 = n_{x\ell}$  et  $\nu_2 = n_{y\ell}$ , nous trouvons :

$$t_{y\ell} N_{xx\ell}(\vec{r}) - t_{x\ell} N_{xy\ell}(\vec{r}) = t_{y\ell} \beta_\ell(\vec{r}) \quad \text{avec} \quad \beta_\ell(\vec{r}) = \int_{C_\ell} \vec{\nabla}_s \tilde{G} \cdot \vec{n} \|d\vec{r}_s\|. \quad (3.65)$$

Ainsi, nous obtenons un système à deux inconnus, notamment, les variables  $N_{xx\ell}$  et  $N_{xy\ell}$ , et deux équations données par (3.64) et (3.65). En d'autres termes, tant et aussi longtemps que les quantités  $\alpha_\ell$  et  $\beta_\ell$  peuvent être évaluées, les coefficients peuvent être trouvés sans soucis. Le système d'équations s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} t_{x\ell} & t_{y\ell} \\ t_{y\ell} & -t_{x\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{xx\ell}(\vec{r}) \\ N_{xy\ell}(\vec{r}) \end{bmatrix} = t_{y\ell} \begin{bmatrix} \alpha_\ell(\vec{r}) \\ \beta_\ell(\vec{r}) \end{bmatrix}. \quad (3.66)$$

De plus, en utilisant la même logique pour les coefficients  $N_{yx\ell}$  et  $N_{yy\ell}$ , nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} t_{x\ell} & t_{y\ell} \\ t_{y\ell} & -t_{x\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{yx\ell}(\vec{r}) \\ N_{yy\ell}(\vec{r}) \end{bmatrix} = -t_{x\ell} \begin{bmatrix} \alpha_\ell(\vec{r}) \\ \beta_\ell(\vec{r}) \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

Conséquemment, les expressions (3.56), (3.66) et (3.67) mènent aux résultats suivants :

$$N_{xx}(\vec{r}) = \sum_{\ell=1}^L [t_{y\ell}^2 \beta_\ell(\vec{r}) + t_{x\ell} t_{y\ell} \alpha_\ell(\vec{r})], \quad (3.68)$$

$$N_{xy}(\vec{r}) = \sum_{\ell=1}^L [-t_{x\ell} t_{y\ell} \beta_\ell(\vec{r}) + t_{y\ell}^2 \alpha_\ell(\vec{r})], \quad (3.69)$$

$$N_{yx}(\vec{r}) = - \sum_{\ell=1}^L [t_{x\ell} t_{y\ell} \beta_\ell(\vec{r}) + t_{x\ell}^2 \alpha_\ell(\vec{r})], \quad (3.70)$$

$$N_{yy}(\vec{r}) = \sum_{\ell=1}^L [t_{x\ell}^2 \beta_\ell(\vec{r}) - t_{x\ell} t_{y\ell} \alpha_\ell(\vec{r})]. \quad (3.71)$$

Or, afin de compléter le formalisme matriciel 2D, il suffit maintenant d'élaborer le calcul de  $\alpha_\ell$  et  $\beta_\ell$ . Pour ce faire, nous allons nous inspirer de l'approche issue du domaine complexe employée par Beth (Beth, 1966) étant donné que celle-ci simplifie considérablement les calculs en jeu. Considérons la fonction complexe suivante :

$$f(Z, Z_s) = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x_s} - i \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y_s} = \frac{1}{2\pi (Z_s - Z)}, \quad (3.72)$$

où  $Z_s = x_s + iy_s$  et  $Z = x + iy$  représentent des variables complexes avec  $i$  l'unité imaginaire

( $i^2 = -1$ ). Ainsi, en écrivant  $dZ_s = dx_s + idy_s$ , nous trouvons :

$$f(Z, Z_s) dZ_s = \left[ \vec{\nabla}_s \tilde{G} \cdot d\vec{r}_s \right] + i \left[ \vec{\nabla}_s \tilde{G} \cdot \vec{n} \|d\vec{r}_s\| \right]. \quad (3.73)$$

À ce stade-ci, il est utile de noter que l'intégrale de parcours d'une fonction complexe dite *analytique* peut être obtenue de façon directe, c.-à-d. sans avoir à paramétriser le parcours selon la géométrie envisagée, lorsque les *équations de Cauchy-Riemann* (Butkov, 1968) sont satisfaites. Pour l'expression (3.72), ceci revient à dire que :

$$\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial x_s^2} = -\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial y_s^2}, \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial y_s \partial x_s} = \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial x_s \partial y_s}. \quad (3.75)$$

En d'autres termes, pour que  $f(Z_s, Z)$  soit analytique, ces équations nous indiquent que l'opérateur Laplacien 2D appliqué à la fonction de Green doit être nul (ce qui est vrai selon la définition même de  $\tilde{G}$  dans le cas statique) et que les dérivées partielles croisées doivent commuter. Ainsi, à partir des équations (3.64), (3.65), (3.72) et (3.73) nous trouvons que :

$$\alpha_\ell(\vec{r}) = \operatorname{Re} \left[ \int_{C_\ell} \frac{dZ_s}{2\pi(Z_s - Z)} \right] = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left[ \ln \left( \frac{Z_{\ell+1} - Z}{Z_\ell - Z} \right) \right], \quad (3.76)$$

$$\beta_\ell(\vec{r}) = \operatorname{Im} \left[ \int_{C_\ell} \frac{dZ_s}{2\pi(Z_s - Z)} \right] = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left[ \ln \left( \frac{Z_{\ell+1} - Z}{Z_\ell - Z} \right) \right], \quad (3.77)$$

avec  $\operatorname{Re}[\bullet]$  et  $\operatorname{Im}[\bullet]$  définis respectivement comme la partie *réelle* et *imaginaire* de la quantité complexe considérée, c.-à-d.  $Z_\ell = x_\ell + iy_\ell$  et  $Z_{\ell+1} = x_{\ell+1} + iy_{\ell+1}$ . Conséquemment, en utilisant les deux relations ci-dessus avec (3.68)-(3.71), il devient possible de déterminer le tenseur de désaimantation pour n'importe quel point d'observation  $\vec{r}$  sans effectuer d'approximation (le calcul est décrit dans le fichier Matlab *n2d.m* donné à l'annexe E). Il est important de mentionner qu'il est toujours possible de déterminer  $\alpha_\ell$  et  $\beta_\ell$  sans passer par un calcul complexe ; il s'agit tout simplement de développer davantage les expressions (3.76) et (3.77) en associant un module et une phase à une forme d'Euler pour  $Z_\ell$  et  $Z_{\ell+1}$ . Par contre, tel qu'indiqué par Turner (Turner, 1973), il est parfois nécessaire de corriger la valeur de  $\beta_\ell$  ce qui peut compliquer l'implémentation du calcul. De plus, quoique les expressions pour les coefficients 2D existent depuis le début des années 70, le formalisme mathématique qui mène à leur obtention n'a jamais été décrit jusqu'à maintenant ; ce sujet est abordé entre autres par Silvester et Ferrari (Silvester et Ferrari, 1990) ainsi que par Hoole (Hoole, 1989).

### 3.2.2 Calcul 3D

Comme c'était le cas en 2D, nous cherchons à effectuer le calcul du tenseur de désaimantation 3D de façon exacte et selon une géométrie applicable à la section d'essais utilisée pour la simulation d'un canal de combustible de type CANDU. Pour ce faire, considérons un polyèdre généralisé à  $M$  faces comme celui illustré à la figure 3.4. Plus précisément, si la discréétisation du système est suffisamment raffinée, cette géométrie devrait représenter, à la limite, n'importe quelle domaine en  $\Re^3$ . En d'autres termes, le calcul du tenseur de désaimantation se réduit à la somme de  $M$  termes :

$$\bar{\bar{N}}(\vec{r}) = \sum_{m=1}^M \begin{bmatrix} N_{xxm}(\vec{r}) & N_{xym}(\vec{r}) & N_{xzm}(\vec{r}) \\ N_{yxm}(\vec{r}) & N_{yym}(\vec{r}) & N_{yzm}(\vec{r}) \\ N_{zxm}(\vec{r}) & N_{zym}(\vec{r}) & N_{zzm}(\vec{r}) \end{bmatrix}, \quad (3.78)$$

où les formes employées pour les coefficients sont données par :

$$N_{xxm}(\vec{r}) = \iint_{S_m} \frac{\partial G}{\partial x_s} n_x \|d\vec{S}_s\| = n_{xm} \iint_{S_m} \frac{\partial G}{\partial x_s} \|d\vec{S}_s\|, \quad (3.79)$$

$$N_{xym}(\vec{r}) = \iint_{S_m} \frac{\partial G}{\partial y_s} n_x \|d\vec{S}_s\| = n_{xm} \iint_{S_m} \frac{\partial G}{\partial y_s} \|d\vec{S}_s\|, \quad (3.80)$$

$$N_{xzm}(\vec{r}) = \iint_{S_m} \frac{\partial G}{\partial z_s} n_x \|d\vec{S}_s\| = n_{xm} \iint_{S_m} \frac{\partial G}{\partial z_s} \|d\vec{S}_s\|, \quad (3.81)$$

$$N_{yxm}(\vec{r}) = \iint_{S_m} \frac{\partial G}{\partial x_s} n_y \|d\vec{S}_s\| = n_{ym} \iint_{S_m} \frac{\partial G}{\partial x_s} \|d\vec{S}_s\|, \quad (3.82)$$

$$N_{yym}(\vec{r}) = \iint_{S_m} \frac{\partial G}{\partial y_s} n_y \|d\vec{S}_s\| = n_{ym} \iint_{S_m} \frac{\partial G}{\partial y_s} \|d\vec{S}_s\|, \quad (3.83)$$

$$N_{yzm}(\vec{r}) = \iint_{S_m} \frac{\partial G}{\partial z_s} n_y \|d\vec{S}_s\| = n_{ym} \iint_{S_m} \frac{\partial G}{\partial z_s} \|d\vec{S}_s\|, \quad (3.84)$$

$$N_{zxm}(\vec{r}) = \iint_{S_m} \frac{\partial G}{\partial x_s} n_z \|d\vec{S}_s\| = n_{zm} \iint_{S_m} \frac{\partial G}{\partial x_s} \|d\vec{S}_s\|, \quad (3.85)$$

$$N_{zym}(\vec{r}) = \iint_{S_m} \frac{\partial G}{\partial y_s} n_z \|d\vec{S}_s\| = n_{zm} \iint_{S_m} \frac{\partial G}{\partial y_s} \|d\vec{S}_s\|, \quad (3.86)$$

$$N_{zzm}(\vec{r}) = \iint_{S_m} \frac{\partial G}{\partial z_s} n_z \|d\vec{S}_s\| = n_{zm} \iint_{S_m} \frac{\partial G}{\partial z_s} \|d\vec{S}_s\|, \quad (3.87)$$

où, comme indiqué à la section 2.2.2,  $\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}$  représente un vecteur unitaire orthogonal à l'interface du volume en question, qui pointe vers l'extérieur du domaine. Plus

particulièrement,  $\vec{n}_m = n_{xm} \vec{i} + n_{ym} \vec{j} + n_{zm} \vec{k}$   $\forall m = 1, 2, \dots, M$  est un vecteur uniforme le long de la  $m^{\text{ème}}$  surface ouverte  $S_m$  qui constitue l'interface du polyèdre (voir la figure 3.4) de sorte que nous avons sorti chaque composante de  $\vec{n}$  des intégrales ci-dessus. De plus, rappelons-nous que  $G$  est donné par l'équation (2.59) et que, conformément aux résultats obtenus à la section 3.1.2, les expressions (3.79), (3.83) et (3.87) ont été respectivement évaluées selon des transformations de type II, III et I.

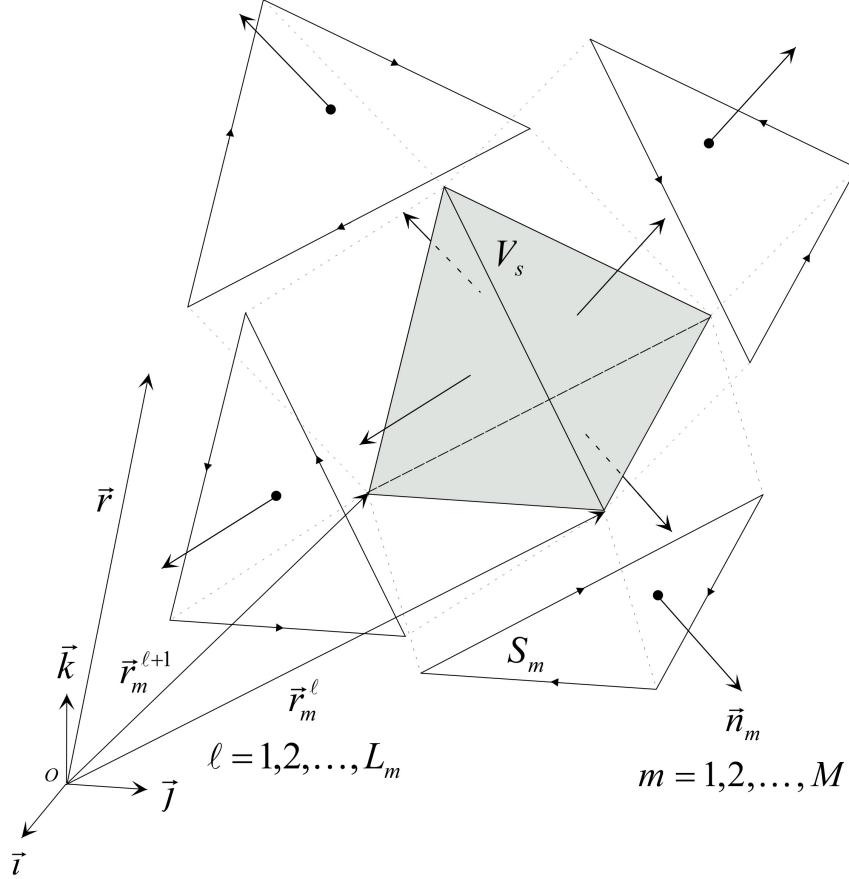


Figure 3.4 Exemple d'une géométrie polyédrique (tétraèdre).

Maintenant, avant d'élaborer en détails le calcul 3D, considérons les 3 vecteurs suivants :

$$\vec{t}_x = \vec{i} \times \vec{n} = -n_z \vec{j} + n_y \vec{k}, \quad (3.88)$$

$$\vec{t}_y = \vec{j} \times \vec{n} = n_z \vec{i} - n_x \vec{k}, \quad (3.89)$$

$$\vec{t}_z = \vec{k} \times \vec{n} = -n_y \vec{i} + n_x \vec{j}. \quad (3.90)$$

Ainsi, il devient possible d'écrire les relations suivantes :

$$\iint_{S_m} \vec{\nabla}_s G \cdot \vec{t}_x \|d\vec{S}_s\| = \iint_{S_m} [\vec{\nabla}_s \times G \vec{i}] \cdot d\vec{S}_s = \oint_{C_m} G dx_s, \quad (3.91)$$

$$\iint_{S_m} \vec{\nabla}_s G \cdot \vec{t}_y \|d\vec{S}_s\| = \iint_{S_m} [\vec{\nabla}_s \times G \vec{j}] \cdot d\vec{S}_s = \oint_{C_m} G dy_s, \quad (3.92)$$

$$\iint_{S_m} \vec{\nabla}_s G \cdot \vec{t}_z \|d\vec{S}_s\| = \iint_{S_m} [\vec{\nabla}_s \times G \vec{k}] \cdot d\vec{S}_s = \oint_{C_m} G dz_s, \quad (3.93)$$

tel que  $d\vec{S}_s = \|d\vec{S}_s\| \vec{n}$  et le passage d'une intégrale de surface ouverte vers une intégrale de parcours fermé à été effectué en employant le *théorème de Stokes* (Stewart, 2012). Plus précisément,  $C_m$  est la courbe frontière orientée positivement<sup>2</sup> qui délimite la région  $S_m$ . En utilisant la méthodologie utilisée pour le cas 2D, considérons la combinaison linéaire de  $N_{xxm}$ ,  $N_{xym}$  et  $N_{xzm}$  donnée par :

$$\nu_1 N_{xxm}(\vec{r}) + \nu_2 N_{xym}(\vec{r}) + \nu_3 N_{xzm}(\vec{r}) = n_{xm} \iint_{S_m} \left[ \nu_1 \frac{\partial G}{\partial x_s} + \nu_2 \frac{\partial G}{\partial y_s} + \nu_3 \frac{\partial G}{\partial z_s} \right] \|d\vec{S}_s\|, \quad (3.94)$$

avec  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  et  $\nu_3$  définis comme des constantes le long de  $S_m$ . En effet, puisque le vecteur  $\vec{n}_m$  est par définition uniforme le long de  $S_m$  (c.-à-d. que chaque surface ne change pas son orientation), rien ne nous empêche de poser  $\nu_1 = 0$ ,  $\nu_2 = -n_{zm}$  et  $\nu_3 = n_{ym}$  de sorte que l'expression ci-dessus mène à :

$$-n_{zm} N_{xym}(\vec{r}) + n_{ym} N_{xzm}(\vec{r}) = n_{xm} \alpha_{xm}(\vec{r}) \quad \text{avec } \alpha_{xm}(\vec{r}) = \oint_{C_m} G dx_s, \quad (3.95)$$

où nous avons employé les relations (3.88) et (3.91). Suivant la même logique, utilisons des valeurs de  $\nu_1 = n_{zm}$ ,  $\nu_2 = 0$  et  $\nu_3 = -n_{xm}$  :

$$n_{zm} N_{xxm}(\vec{r}) - n_{xm} N_{xzm}(\vec{r}) = n_{xm} \alpha_{ym}(\vec{r}) \quad \text{avec } \alpha_{ym}(\vec{r}) = \oint_{C_m} G dy_s. \quad (3.96)$$

Finalement, en posant  $\nu_1 = -n_{ym}$ ,  $\nu_2 = n_{xm}$  et  $\nu_3 = 0$ , nous obtenons :

$$-n_{ym} N_{xxm}(\vec{r}) + n_{xm} N_{xym}(\vec{r}) = n_{xm} \alpha_{zm}(\vec{r}) \quad \text{avec } \alpha_{zm}(\vec{r}) = \oint_{C_m} G dz_s. \quad (3.97)$$

---

2. c.-à-d., si nous parcourons  $C_m$  avec la tête qui pointe dans la même direction que  $\vec{n}$ , la région définie par  $S_m$  se retrouve toujours à notre gauche (Stewart, 2012).

Ainsi, nous obtenons jusqu'à présent un système à trois inconnus, notamment, les variables  $N_{xxm}$  et  $N_{xym}$  et  $N_{xzm}$ , et trois équations données par (3.95), (3.96) et (3.97). Cependant, il est important de noter que ce système algébrique n'est pas linéairement indépendant car une des expressions en jeu peut s'écrire comme une combinaison linéaire des deux autres. Pour remédier à ce problème, considérons  $\nu_1 = n_{xm}$ ,  $\nu_2 = n_{ym}$  et  $\nu_3 = n_{zm}$  :

$$n_{xm}N_{xxm}(\vec{r}) + n_{ym}N_{xym}(\vec{r}) + n_{zm}N_{xzm}(\vec{r}) = n_{xm}\beta_m(\vec{r}), \quad (3.98)$$

avec  $\beta_m(\vec{r})$  défini comme l'angle solide réduit (avec signe) généré par  $S_m$  au point  $\vec{r}$ , c.-à-d. :

$$\beta_m(\vec{r}) = \iint_{S_m} \vec{\nabla}_s G \cdot d\vec{S}_s = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_m} \frac{\vec{r}_s - \vec{r}}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|^3} \cdot d\vec{S}_s. \quad (3.99)$$

Conséquemment, nous avons maintenant suffisamment de relations pour résoudre le système algébrique en question. Toutefois, puisque nous avons quatre équations données par (3.95)-(3.98) dont (3.98) doit absolument être employé afin d'obtenir un déterminant non nul (indépendance linéaire). Nous avons donc trois combinaisons d'équations possibles. À titre d'exemple, soit le système formé par les expressions (3.95), (3.96) et (3.98) :

$$\begin{bmatrix} 0 & -n_{zm} & n_{ym} \\ n_{zm} & 0 & -n_{xm} \\ n_{xm} & n_{ym} & n_{zm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{xxm}(\vec{r}) \\ N_{xym}(\vec{r}) \\ N_{xzm}(\vec{r}) \end{bmatrix} = n_{xm} \begin{bmatrix} \alpha_{xm}(\vec{r}) \\ \alpha_{ym}(\vec{r}) \\ \beta_m(\vec{r}) \end{bmatrix}, \quad (3.100)$$

En ce qui a trait aux coefficients  $N_{y xm}$ ,  $N_{yym}$  et  $N_{yzm}$ , nous trouvons selon la même méthodologie qui a conduit à la relation ci-dessus le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 0 & -n_{zm} & n_{ym} \\ n_{zm} & 0 & -n_{xm} \\ n_{xm} & n_{ym} & n_{zm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{y xm}(\vec{r}) \\ N_{yym}(\vec{r}) \\ N_{yzm}(\vec{r}) \end{bmatrix} = n_{ym} \begin{bmatrix} \alpha_{xm}(\vec{r}) \\ \alpha_{ym}(\vec{r}) \\ \beta_m(\vec{r}) \end{bmatrix}. \quad (3.101)$$

Finalement, nous obtenons pour  $N_{z xm}$ ,  $N_{zym}$  et  $N_{zzm}$  le système matriciel donné par :

$$\begin{bmatrix} 0 & -n_{zm} & n_{ym} \\ n_{zm} & 0 & -n_{xm} \\ n_{xm} & n_{ym} & n_{zm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{z xm}(\vec{r}) \\ N_{zym}(\vec{r}) \\ N_{zzm}(\vec{r}) \end{bmatrix} = n_{zm} \begin{bmatrix} \alpha_{xm}(\vec{r}) \\ \alpha_{ym}(\vec{r}) \\ \beta_m(\vec{r}) \end{bmatrix}. \quad (3.102)$$

Il est important de noter que nous avons un déterminant de  $[n_{xm}^2 + n_{ym}^2 + n_{zm}^2] n_{zm} = n_{zm}$ .

Dans ce cas, la seule façon que nous pouvons utiliser (3.100)-(3.102) pour résoudre tous les coefficients est lorsque  $n_{zm} \neq 0$ . Cependant, ceci n'est pas nécessaire pour déterminer exclusivement  $N_{zxm}$ ,  $N_{zym}$  et  $N_{zzm}$  étant donné que le membre de droite de l'expression (3.102) est proportionnel à  $n_{zm}$  (de sorte que le déterminant s'annule lors de l'inversion matricielle). Ainsi, sachant qu'à un signe près les équations (3.95), (3.97) et (3.98) donnent un déterminant de  $n_{ym}$  et (3.96)-(3.98) donnent  $n_{xm}$ , il devient utile de formuler les règles à respecter qui sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Utiliser (3.96), (3.97) et (3.98) pour déterminer } N_{xxm}, N_{xym} \text{ et } N_{xzm}. \\ \text{Utiliser (3.95), (3.97) et (3.98) pour déterminer } N_{y xm}, N_{yym} \text{ et } N_{yzm}. \\ \text{Utiliser (3.95), (3.96) et (3.98) pour déterminer } N_{z xm}, N_{zym} \text{ et } N_{zzm}. \end{array} \right\} \quad (3.103)$$

En conséquence, l'expression (3.78) mène à :

$$N_{xx}(\vec{r}) = \sum_{m=1}^M [n_{xm}^2 \beta_m(\vec{r}) + n_{xm} n_{zm} \alpha_{ym}(\vec{r}) - n_{xm} n_{ym} \alpha_{zm}(\vec{r})], \quad (3.104)$$

$$N_{xy}(\vec{r}) = \sum_{m=1}^M [n_{xm} n_{ym} \beta_m(\vec{r}) + n_{ym} n_{zm} \alpha_{ym}(\vec{r}) + [n_{xm}^2 + n_{zm}^2] \alpha_{zm}(\vec{r})], \quad (3.105)$$

$$N_{xz}(\vec{r}) = \sum_{m=1}^M [n_{xm} n_{zm} \beta_m(\vec{r}) - [n_{xm}^2 + n_{ym}^2] \alpha_{ym}(\vec{r}) - n_{ym} n_{zm} \alpha_{zm}(\vec{r})], \quad (3.106)$$

$$N_{yx}(\vec{r}) = \sum_{m=1}^M [n_{xm} n_{ym} \beta_m(\vec{r}) - n_{xm} n_{zm} \alpha_{xm}(\vec{r}) - [n_{ym}^2 + n_{zm}^2] \alpha_{zm}(\vec{r})], \quad (3.107)$$

$$N_{yy}(\vec{r}) = \sum_{m=1}^M [n_{ym}^2 \beta_m(\vec{r}) - n_{ym} n_{zm} \alpha_{xm}(\vec{r}) + n_{xm} n_{ym} \alpha_{zm}(\vec{r})], \quad (3.108)$$

$$N_{yz}(\vec{r}) = \sum_{m=1}^M [n_{ym} n_{zm} \beta_m(\vec{r}) + [n_{xm}^2 + n_{ym}^2] \alpha_{xm}(\vec{r}) + n_{xm} n_{zm} \alpha_{zm}(\vec{r})], \quad (3.109)$$

$$N_{zx}(\vec{r}) = \sum_{m=1}^M [n_{xm} n_{zm} \beta_m(\vec{r}) + n_{xm} n_{ym} \alpha_{xm}(\vec{r}) + [n_{ym}^2 + n_{zm}^2] \alpha_{ym}(\vec{r})], \quad (3.110)$$

$$N_{zy}(\vec{r}) = \sum_{m=1}^M [n_{ym} n_{zm} \beta_m(\vec{r}) - [n_{xm}^2 + n_{zm}^2] \alpha_{xm}(\vec{r}) - n_{xm} n_{ym} \alpha_{ym}(\vec{r})], \quad (3.111)$$

$$N_{zz}(\vec{r}) = \sum_{m=1}^M [n_{zm}^2 \beta_m(\vec{r}) + n_{ym} n_{zm} \alpha_{xm}(\vec{r}) - n_{xm} n_{zm} \alpha_{ym}(\vec{r})], \quad (3.112)$$

qui sont valides  $\forall \vec{n}_m$ . À ce stade-ci de l'analyse, il ne reste plus qu'à formuler des solutions pour  $\alpha_{xm}$ ,  $\alpha_{ym}$ ,  $\alpha_{zm}$  et  $\beta_m$  afin d'évaluer les coefficients de désaimantation 3D. Pour débuter,

considérons le vecteur  $\vec{\alpha}_m$  donné par l'intégrale de parcours suivante :

$$\vec{\alpha}_m(\vec{r}) = \sum_{\ell=1}^{L_m} \vec{\alpha}_{m\ell}(\vec{r}) \quad \text{avec} \quad \vec{\alpha}_{m\ell}(\vec{r}) = \int_{C_{m\ell}} G d\vec{r}_s = -\frac{1}{4\pi} \int_{C_{m\ell}} \frac{d\vec{r}_s}{\|\vec{r}_s - \vec{r}\|}, \quad (3.113)$$

où  $C_{m\ell} \forall \ell = 1, 2, \dots, L_m$  correspond au parcours ouvert qui représente chaque côté de la surface polygonale  $S_m$  à  $L_m$  noeuds (voir la figure 3.4). En effet, les quantités  $\alpha_{xm}$ ,  $\alpha_{ym}$  et  $\alpha_{zm}$  représentent respectivement les composantes de  $\vec{\alpha}_m$  selon  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$ . Pour leur calcul, nous utilisons une relation proposée par Fabbri (Fabbri, 2008), c.-à-d. :

$$\vec{\alpha}_{m\ell}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}_m^\ell - \vec{r}_m^{\ell+1}}{4\pi \|\vec{r}_m^{\ell+1} - \vec{r}_m^\ell\|} \ln \left( \frac{\|\vec{r}_m^\ell - \vec{r}\| + \|\vec{r}_m^{\ell+1} - \vec{r}\| + \|\vec{r}_m^{\ell+1} - \vec{r}_m^\ell\|}{\|\vec{r}_m^\ell - \vec{r}\| + \|\vec{r}_m^{\ell+1} - \vec{r}\| - \|\vec{r}_m^{\ell+1} - \vec{r}_m^\ell\|} \right), \quad (3.114)$$

où  $\vec{r}_m^\ell$  et  $\vec{r}_m^{\ell+1}$  sont les  $\ell$ <sup>ème</sup> et  $(\ell+1)$ <sup>ème</sup> noeuds de la surface  $S_m$  et  $\vec{r}_m^{L_m+1} = \vec{r}_m^1$  étant donné que chaque courbe frontière est fermée. Finalement, puisque l'angle solide sous-tendu à  $\vec{r}$  d'une surface triangulaire peut être évalué de façon exacte (Oosterom et Strackee, 1983), nous pouvons toujours effectuer une triangulation de  $S_m$  afin d'obtenir :

$$\beta_m(\vec{r}) = \frac{(\vec{r}_m^1 - \vec{r}) \cdot \vec{n}_m}{4\pi |(\vec{r}_m^1 - \vec{r}) \cdot \vec{n}_m|} \sum_{\ell=1}^{L_m} \frac{\left( \frac{1}{2}(\vec{r}_m^\ell + \vec{r}_m^{\ell+1}) - \vec{r}_m^1 \right) \cdot ((\vec{r}_m^{\ell+1} - \vec{r}_m^\ell) \times \vec{n}_m)}{\left| \left( \frac{1}{2}(\vec{r}_m^\ell + \vec{r}_m^{\ell+1}) - \vec{r}_m^1 \right) \cdot ((\vec{r}_m^{\ell+1} - \vec{r}_m^\ell) \times \vec{n}_m) \right|} \beta_{m\ell}(\vec{r}), \quad (3.115)$$

telle que  $|\bullet|$  est la valeur absolue d'une quantité scalaire quelconque,  $\overline{\bullet}$  représente le signe de  $\bullet$  et vaut 0 lorsque  $\bullet \rightarrow 0$ . De plus, la nouvelle variable  $\beta_{m\ell}$  est définie comme suit :

$$\beta_{m\ell}(\vec{r}) = \operatorname{Im} \left[ \ln \left[ Z_{m\ell}^{(1)}(\vec{r}) Z_{m\ell}^{(2)}(\vec{r}) Z_{m\ell}^{(3)}(\vec{r}) e^{-i\pi} \right] \right] + \pi. \quad (3.116)$$

Ici, le logarithme complexe a été employé pour la même raison que dans le cas 2D, c.-à-d., afin d'éviter la correction de  $\beta_{m\ell}$  (voir l'annexe de Barnard *et al.*, 1967, pour plus de détails). En ce qui concerne les nombres complexes  $Z_{m\ell}^{(1)}$ ,  $Z_{m\ell}^{(2)}$  et  $Z_{m\ell}^{(3)}$ , ils sont obtenus à partir des relations suivantes :

$$Z_{m\ell}^{(1)}(\vec{r}) = \vec{a}(\vec{r}) \cdot \vec{c}(\vec{r}) - i \|\vec{a}(\vec{r}) \times \vec{c}(\vec{r})\|, \quad (3.117)$$

$$Z_{m\ell}^{(2)}(\vec{r}) = \vec{b}(\vec{r}) \cdot \vec{a}(\vec{r}) - i \|\vec{b}(\vec{r}) \times \vec{a}(\vec{r})\|, \quad (3.118)$$

$$Z_{m\ell}^{(3)}(\vec{r}) = \vec{c}(\vec{r}) \cdot \vec{b}(\vec{r}) - i \|\vec{c}(\vec{r}) \times \vec{b}(\vec{r})\|, \quad (3.119)$$

où, par souci de simplification, les fonctions  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$  ont été introduites comme suit :

$$\vec{a}(\vec{r}) = (\vec{r}_m^1 - \vec{r}) \times (\vec{r}_m^\ell - \vec{r}), \quad (3.120)$$

$$\vec{b}(\vec{r}) = (\vec{r}_m^\ell - \vec{r}) \times (\vec{r}_m^{\ell+1} - \vec{r}), \quad (3.121)$$

$$\vec{c}(\vec{r}) = (\vec{r}_m^{\ell+1} - \vec{r}) \times (\vec{r}_m^1 - \vec{r}). \quad (3.122)$$

Ainsi, étant donné que nous avons une formulation analytique pour  $\vec{\alpha}_m$  et  $\beta_m$ , nous pouvons évaluer les coefficients du tenseur de désaimantation 3D de façon exacte, pour n'importe quel point d'observation  $\vec{r}$  (le calcul est décrit dans le fichier Matlab *n3d.m* donné à l'annexe F). Il faut mentionner que la forme des coefficients 3D telle que donnée par les expressions (3.104)-(3.112) n'est pas présente dans la littérature. Ainsi, tous les éléments nécessaires à l'emploi du VIEM sont en place et, conséquemment, le champ magnétique à travers la section d'essais décrite au chapitre 1 peut être évalué. Cependant, avant de procéder à ces calculs, la méthodologie qui a été proposée sera d'abord validée dans le chapitre suivant.

## CHAPITRE 4 Élaboration, validation et discrétisation du VIEM

Maintenant que nous avons établi les équations différentielles principales qui ont mené à la définition du tenseur de désaimantation  $\bar{\bar{N}}$  (voir le chapitre 2) ainsi que les méthodes de calcul 2D et 3D utilisées pour évaluer ce tenseur (chapitre 3), nous sommes en mesure d'élaborer la méthode numérique, notamment, le VIEM, qui sera employé pour déterminer la distribution de  $\vec{H}$  le long de la section d'essais de type CANDU. Toutefois, bien que l'emploi du VIEM est à la base simple, nous allons voir qu'il existe certains critères d'application qui ne sont pas bien expliqués dans la littérature voire même absents de celle-ci, et ce, malgré le fait que le VIEM existe depuis longtemps (chapitre 1). Ainsi, dans ce chapitre, nous allons débuter par l'élaboration de cette méthode numérique tout en la distinguant de l'approche classique fréquemment rencontrée en physique du solide. Par la suite, nous allons employer les résultats obtenus en utilisant cette méthode afin de valider les calculs matriciels élaborés au chapitre précédent. Finalement, nous allons établir des critères de discrétisation novateurs et les appliquer à la section d'essais afin d'obtenir une distribution spatiale fiable pour le champ magnétique. En particulier, nous allons calculer la distribution du champ en présence des prises de pression placées latéralement le long du canal de la section d'essais (figure 1.1).

### 4.1 Formalisme du VIEM

Avant d'élaborer le formalisme mathématique associé au VIEM, rappelons-nous que vers la fin du chapitre 2 nous avions sorti  $\vec{M}$  de la solution intégrale de  $\vec{H}_m$  donnée par l'équation (2.83) ce qui nous a mené à la définition du tenseur de désaimantation  $\bar{\bar{N}}$ . Toutefois, quoique nous avions mentionné qu'une aimantation uniforme était nécessaire pour obtenir l'expression pour  $\bar{\bar{N}}$ , nous n'avions pas clairement identifié dans quel contexte physique cette supposition est valide. En effet, une aimantation uniforme est observée à travers la région d'intérêt (Stratton, 1941) lorsque les trois critères suivants sont respectés : (1) la susceptibilité magnétique  $\bar{\chi}_m$  du milieu est constante; (2) l'échantillon est assujetti à un champ magnétique libre  $\vec{H}_f$  uniforme et (3) le milieu magnétique a une forme elliptique en 2D et ellipsoïdale en 3D (ce qui correspond, dans les cas limites, à des disques ou à des cylindres). Notez que le dernier critère implique que  $\bar{\bar{N}}$  est aussi uniforme dans le domaine (c.-à-d. tous les coefficients ne varient pas en fonction de  $\vec{r}$ ). De même, il est clair que ces suppositions restreignent les systèmes envisagables et, plus particulièrement, ne semblent pas toutes s'appliquer à la section

d'essais que nous désirons analyser (figure 1.1). Ceci étant dit, en insérant l'équation (2.86) dans l'équation (2.21), nous obtenons l'expression suivante pour  $\vec{H}$  :

$$\vec{H} = \vec{H}_f - \bar{\bar{N}} \vec{M}, \quad (4.1)$$

où la dépendance en  $\vec{r}$  a été omise puisque toutes les quantités sont supposées uniformes à l'intérieur du matériau. Donc, selon l'équation (2.8), nous trouvons :

$$\vec{H} = \vec{H}_f - \bar{\bar{N}} \bar{\chi}_m \vec{H} \leftrightarrow \vec{H} = [\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{N}} \bar{\chi}_m]^{-1} \vec{H}_f, \quad (4.2)$$

ce qui représente tout simplement une expression analogue à celle qui mène à la relation de *Clausius-Mossotti* (Feynman *et al.*, 1979) mais dans le cas présent, associée au magnétisme. Ici, il est important de mentionner qu'étant donné la présence de matrices carrées dans l'équation ci-dessus, la notation  $[\bullet]^{-1}$  indique une inversion matricielle. Ainsi, en supposant que  $\bar{\bar{N}}$ ,  $\bar{\chi}_m$  et  $\vec{H}_f$  sont toutes des quantités connues (comme c'est le cas dans le cadre de ce travail), il est alors possible d'évaluer  $\vec{H}$ . Or, le VIEM emploie un système mathématique similaire mais présume que l'aimantation est uniforme à l'intérieur de la région d'intégration sous l'approximation que la discréétisation envisagée est suffisamment raffinée. Ainsi, nous nous libérons des trois contraintes issues de la définition de  $\bar{\bar{N}}$  mentionnées plus tôt mais l'approche devient approximative. Dans ce cas, nous pouvons écrire :

$$\vec{H}(\vec{r}) \approx \vec{H}_f(\vec{r}) - \sum_{k=1}^L \bar{\bar{N}}_k(\vec{r}) \bar{\chi}_m(\vec{R}_k) \vec{H}(\vec{R}_k), \quad (4.3)$$

tel que  $\vec{R}_k \forall k = 1, 2, \dots, L$  représente n'importe quel vecteur appartenant au domaine d'intégration du  $k^{\text{ème}}$  élément de discréétisation et  $\bar{\bar{N}}_k$  est le tenseur de désaimantation intégré sur la région qui lui est associée. Par contre, nous trouvons un total de  $L$  inconnus vectoriels,  $\vec{H}(\vec{R}_k)$ , mais seulement une expression vectorielle donnée par (4.3), ce qui signifie que le système ne peut pas à priori être résolu de manière directe. Ainsi, afin de remédier ce problème, il s'agit d'évaluer (4.3) sur chacun des  $L$  éléments afin d'obtenir :

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{R}_1) &\approx \vec{H}_f(\vec{R}_1) - \sum_{k=1}^L \bar{\bar{N}}_k(\vec{R}_1) \bar{\chi}_m(\vec{R}_k) \vec{H}(\vec{R}_k), \\ \vec{H}(\vec{R}_2) &\approx \vec{H}_f(\vec{R}_2) - \sum_{k=1}^L \bar{\bar{N}}_k(\vec{R}_2) \bar{\chi}_m(\vec{R}_k) \vec{H}(\vec{R}_k), \\ &\vdots \\ \vec{H}(\vec{R}_L) &\approx \vec{H}_f(\vec{R}_L) - \sum_{k=1}^L \bar{\bar{N}}_k(\vec{R}_L) \bar{\chi}_m(\vec{R}_k) \vec{H}(\vec{R}_k). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Donc, en effectuant une inversion matricielle similaire à celle présentée dans l'expression (4.2), nous obtenons un système d'équations qui peut être résolu pour chaque  $\vec{H}(\vec{R}_k)$ . Une fois ce calcul complété, nous pouvons évaluer  $\vec{H}$  en tout point de l'espace à partir de l'expression (4.3). De plus, il faut noter que nous avons un total de  $L$  auto-coefficients  $\bar{\bar{N}}_k(\vec{R}_k)$  présents lors de cette démarche, de sorte qu'il est impossible d'utiliser le VIEM sans effectuer à priori une analyse comme celle élaborée au chapitre précédent. Examinons maintenant en détail l'approche décrite ci-dessus en se basant sur des solutions bien connues.

## 4.2 Validation du formalisme matriciel

À ce stade-ci de l'analyse, nous sommes en mesure d'évaluer la distribution du champ magnétique à travers la section d'essais de type CANDU (figure 1.1). Toutefois, avant de procéder, il est prudent de valider la méthode de calcul afin d'assurer la fiabilité des éléments théoriques qui le composent. Ainsi, puisque l'évaluation de  $\bar{\bar{N}}$  est au cœur du calcul, nous allons mettre à l'épreuve les méthodes matricielles 2D et 3D élaborées au chapitre 3 afin de confirmer la performance du formalisme qui leur est associé.

### 4.2.1 Géométrie elliptique

Rappelons-nous qu'un système 2D correspond à un système invariant par translation selon un axe donné (que nous avons choisi comme l'axe des  $z$ ). Dans ce cas, une ellipse comme celle illustrée à la figure 4.1 représente un cylindre elliptique infiniment long.

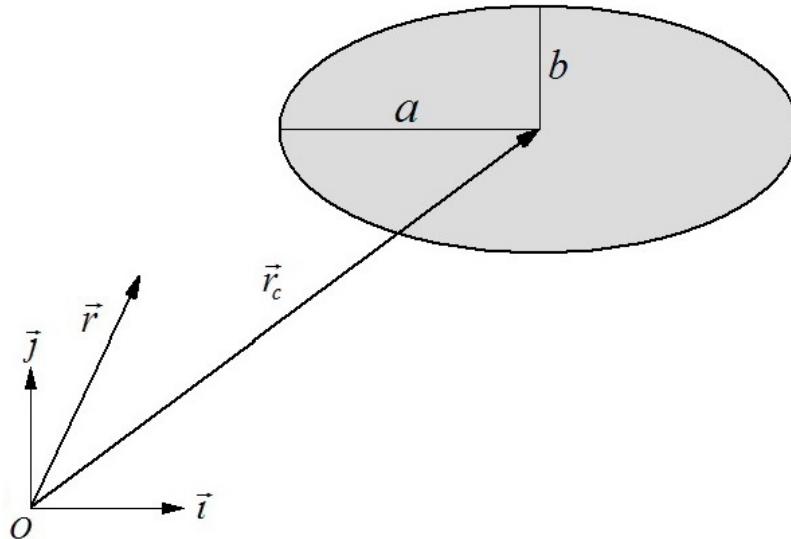


Figure 4.1 Exemple d'une ellipse centrée à  $\vec{r}_c$ .

Or, contrairement au cas 3D que nous allons discuter par la suite, le cas 2D permet l'obtention d'une formulation analytique pour le tenseur de désaimantation. Plus précisément, selon Osborn (Osborn, 1945), les coefficients croisés  $N_{xy}$  et  $N_{yx}$  sont nuls et nous avons :

$$N_{xx} = \frac{b}{a+b}, \quad (4.5)$$

$$N_{yy} = \frac{a}{a+b}. \quad (4.6)$$

Par contre, puisque nous considérons un polygone dans le cadre de notre calcul numérique, nous nous attendons à converger vers de bons résultats lorsque la discrétisation de l'interface de l'élément devient suffisamment fine. Donc, en utilisant la fonction Matlab *gellipse.m* (voir le script présenté à l'annexe G) pour générer l'ellipse et *n2d.m* pour évaluer les coefficients, nous obtenons à titre d'exemples les résultats donnés dans les tableaux 4.1 et 4.2.

Tableau 4.1 Auto-coefficients d'une ellipse ( $n = 50$ )

$b/a$	$N_{xx}$	$N_{yy}$
1.0	0.50000	0.50000
0.9	0.47382	0.52618
0.8	0.44474	0.55526
0.7	0.41224	0.58776
0.6	0.37570	0.62430
0.5	0.33432	0.66568

Tableau 4.2 Auto-coefficients d'une ellipse ( $n = 100$ )

$b/a$	$N_{xx}$	$N_{yy}$
1.0	0.50000	0.50000
0.9	0.47372	0.52628
0.8	0.44452	0.55548
0.7	0.41188	0.58812
0.6	0.37518	0.62482
0.5	0.33358	0.66642

Notez que l'entier  $n \geq 0$  est associé à un polygone avec un total de  $n$  faces. En outre, le point d'observation a été choisi au centre de l'ellipse, c.-à-d.  $\vec{r} = \vec{r}_c$ , et les tableaux A.1 et A.2 présentés à l'annexe A contiennent les erreurs relatives des calculs effectués numériquement

par rapport aux valeurs de référence déterminées à partir des expressions (4.5) et (4.6) telles que données par Osborn. À partir de l'analyse de ces erreurs, nous déduisons que le formalisme matriciel 2D fonctionne correctement et qu'une augmentation de  $n$  implique une meilleure convergence. Examinons maintenant le cas 3D.

#### 4.2.2 Géométrie ellipsoïdale

Tel que mentionné plus tôt, le tenseur de désaimantation est uniforme partout à l'intérieur d'un domaine élliptique (voir la figure 4.2 pour un exemple de ce type de géométrie). En fait, ce résultat est bien documenté et a non seulement été abordé par Maxwell (Maxwell, 1881) vers la fin du 19<sup>ème</sup> siècle mais également par Dirichlet environ 40 ans auparavant (Dirichlet, 1839) qui a traité des problèmes de gravitation. Plusieurs valeurs des coefficients du tenseur ont été évaluées pour différentes longueurs des demi-axes  $a$ ,  $b$  et  $c$  de l'ellipsoïde (Stoner, 1945). Plus récemment, une approche similaire a été considérée mais en rajoutant davantage de chiffres significatifs (Cronemeyer, 1991). Ainsi, même si le VIEM ne requiert pas nécessairement des éléments de discréétisation ellipsoïdaux pour être employé, il est toujours possible de valider la méthode matricielle 3D (section 3.2.2) en se basant sur les valeurs des coefficients présentées dans la littérature, comme nous l'avons fait pour le cas 2D.

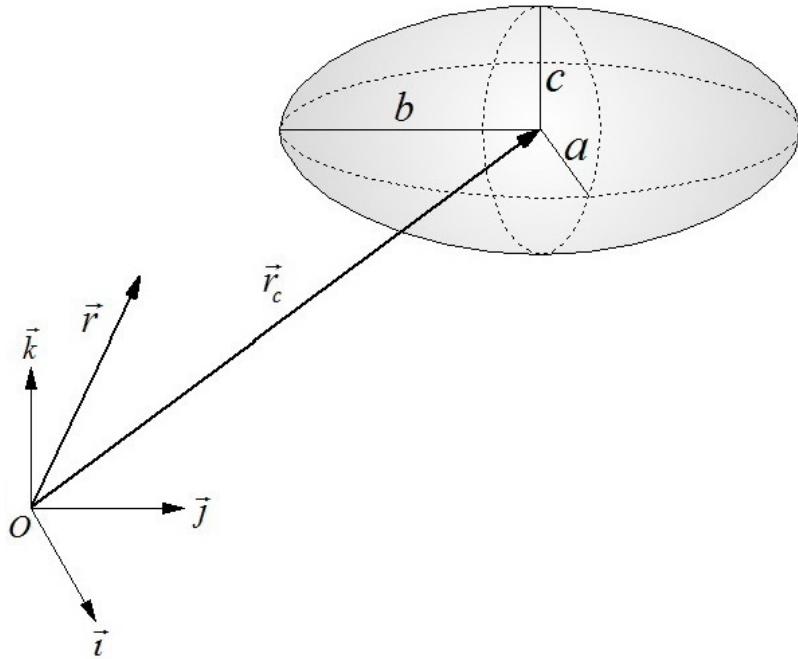


Figure 4.2 Exemple d'un ellipsoïde centré à  $\vec{r}_c$ .

Selon Osborn (Osborn, 1945), tous les coefficients croisés  $N_{xy}$ ,  $N_{xz}$ ,  $N_{yx}$ ,  $N_{yz}$ ,  $N_{zx}$  et  $N_{zy}$  sont

nuls et nous avons lorsque  $a \geq b \geq c$  :

$$N_{xx} = \frac{\cos(\varphi) \cos(\vartheta)}{4\pi \sin^3(\vartheta) \sin^2(\varsigma)} [F(\kappa, \vartheta) - E(\kappa, \vartheta)], \quad (4.7)$$

$$N_{yy} = \frac{\cos(\varphi) \cos(\vartheta)}{4\pi \sin^3(\vartheta) \sin^2(\varsigma) \cos^2(\varsigma)} \left[ E(\kappa, \vartheta) - \cos^2(\varsigma) F(\kappa, \vartheta) - \frac{\sin^2(\varsigma) \sin(\vartheta) \cos(\vartheta)}{\cos^2(\varphi)} \right], \quad (4.8)$$

$$N_{zz} = \frac{\cos(\varphi) \cos(\vartheta)}{4\pi \sin^3(\vartheta) \cos^2(\varsigma)} \left[ \frac{\sin(\theta) \cos(\varphi)}{\cos(\vartheta)} - E(\kappa, \vartheta) \right], \quad (4.9)$$

avec les paramètres  $\vartheta$ ,  $\varphi$ ,  $\varsigma$  et  $\kappa$  définis selon :

$$\cos(\vartheta) = c/a, \quad (4.10)$$

$$\cos(\varphi) = b/a, \quad (4.11)$$

$$\sin(\varsigma) = \sqrt{\frac{1 - (b/a)^2}{1 - (c/a)^2}} = \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\vartheta)} = \kappa, \quad (4.12)$$

où les quantités  $F$  et  $E$  sont respectivement des *intégrales elliptiques incomplètes* de première et deuxième espèces (Pierce, 1929) et nous avons  $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  et  $0 \leq \varsigma \leq \frac{\pi}{2}$ . En outre, il est important de mentionner que, étant donné la présence de  $F$  et  $E$ , les expressions (4.7)-(4.9) ne peuvent pas être évaluées analytiquement de sorte qu'une intégration numérique est requise dans ce cas (Osborn, 1945). Or, en utilisant la fonction Matlab *gellipsoid.m* (voir le script donné à l'annexe H) pour générer l'ellipsoïde et *n3d.m* pour évaluer les auto-coefficients selon le formalisme développé dans ce document, nous obtenons à titre d'exemples les valeurs données dans les tableaux 4.3 et 4.4.

Tableau 4.3 Auto-coefficients d'un ellipsoïde ( $c/a = 0.5$  et  $n = 50$ )

$b/a$	$N_{xx}$	$N_{yy}$	$N_{zz}$
1.00000	0.23658	0.23658	0.52683
0.98863	0.23564	0.23913	0.52523
0.95513	0.23276	0.24690	0.52034
0.90139	0.22784	0.26026	0.51190
0.83073	0.22076	0.27970	0.49954
0.74825	0.21147	0.30557	0.48296
0.66144	0.20027	0.33729	0.46244
0.58115	0.18833	0.37174	0.43992
0.52213	0.17841	0.40092	0.42067
0.50000	0.17440	0.41284	0.41276

Tableau 4.4 Auto-coefficients d'un ellipsoïde ( $c/a = 0.5$  et  $n = 100$ )

$b/a$	$N_{xx}$	$N_{yy}$	$N_{zz}$
1.00000	0.23645	0.23645	0.52711
0.98863	0.23549	0.23900	0.52551
0.95513	0.23260	0.24679	0.52062
0.90139	0.22765	0.26018	0.51218
0.83073	0.22052	0.27966	0.49982
0.74825	0.21116	0.30559	0.48325
0.66144	0.19987	0.33739	0.46274
0.58115	0.18784	0.37192	0.44024
0.52213	0.17782	0.40117	0.42101
0.50000	0.17377	0.41312	0.41310

Le nombre entier  $n \geq 0$  présenté dans ces tableaux est le même que celui utilisé pour *ellipsoid.m* fourni par défaut avec Matlab<sup>1</sup>; cette fonction nous mène à un polyèdre avec un total de  $n^2$  faces. De plus, les résultats ci-dessus ont été obtenus en choisissant le point d'observation au centre de l'ellipsoïde, c.-à-d.  $\vec{r} = \vec{r}_c$ , et les tableaux A.3 et A.4 présentés à l'annexe A contiennent les erreurs relatives des calculs numériques par rapport aux valeurs de référence déterminées à partir des expressions (4.7)-(4.9) telles que données par Osborn (voir le tableau I dans Osborn, 1945). À partir de l'analyse des erreurs, nous concluons non seulement qu'une augmentation de  $n$  implique une meilleure convergence mais aussi que la théorie associée à la méthode matricielle 3D fonctionne correctement. De plus, l'approche décrite ici ouvre la porte à une nouvelle façon de déterminer les coefficients d'un ellipsoïde général qui, contrairement aux approches effectuées par Osborn et Cronemeyer (Cronemeyer, 1991), n'emploie pas de tables d'intégration ni d'interpolation. Ainsi, maintenant que nous avons vérifié le calcul du tenseur  $\bar{N}$  pour les cas 2D et 3D, nous sommes en mesure d'optimiser le VIEM.

### 4.3 Schéma de discréétisation

À ce stade-ci, il ne reste plus qu'à élaborer un schéma de discréétisation afin d'appliquer le VIEM de façon fiable à la section d'essais décrite au chapitre 1. Pour ce faire, nous allons nous baser sur deux systèmes magnétostatiques 2D pour lesquelles la solution analytique du champ magnétique est connue, et étendre les résultats de l'analyse au formalisme 3D.

1. Plus précisément, *gellipsoid.m* et *ellipsoid.m* génèrent les mêmes ellipsoïdes mais ce premier génère les données de sortie de façon à les utiliser avec *n3d.m*

### 4.3.1 Induction uniforme et cylindre creux

À la section 4.1, nous avons établi trois conditions physiques sous lesquelles l'aimantation  $\vec{M}$  peut être considérée uniforme à l'intérieur d'un domaine magnétique quelconque. Toutefois, dans le cadre du VIEM, nous avons vu qu'il est possible de contourner ces critères tant et aussi longtemps que la région d'intégration est suffisamment discrétisée. En effet, nous déduisons que toute erreur numérique issue du VIEM doit nécessairement provenir du non respect de ces conditions. Pour cette raison, il devient utile de considérer un système de référence pour lequel la solution exacte de  $\vec{H}$  est connue et qui satisfait deux des trois critères, notamment, que  $\bar{\chi}_m$  et  $\vec{H}_f$  sont uniformes dans le matériau donné. De cette façon, pour des éléments de discrétisation qui ne sont pas elliptiques (en 2D) ou ellipsoïdaux (en 3D) il est possible d'établir, comme nous allons le voir dans cette section, un schéma de discrétisation pour le VIEM purement basé sur la géométrie du problème et parfaitement adapté à la section d'essais que nous proposons de simuler. Soit une anneau<sup>2</sup> centré à l'origine ayant un rayon interne  $a$  et un rayon externe  $b$  (voir la figure 4.3). Dans ce cas, le milieu magnétique est assujetti à un champ magnétique libre uniforme  $\vec{H}_f$  orienté selon l'axe des  $x$  et a une perméabilité magnétique  $\mu = \mu_0 \mu_r$  où  $\mu_r = (1 + \chi_m)$  est la perméabilité relative.

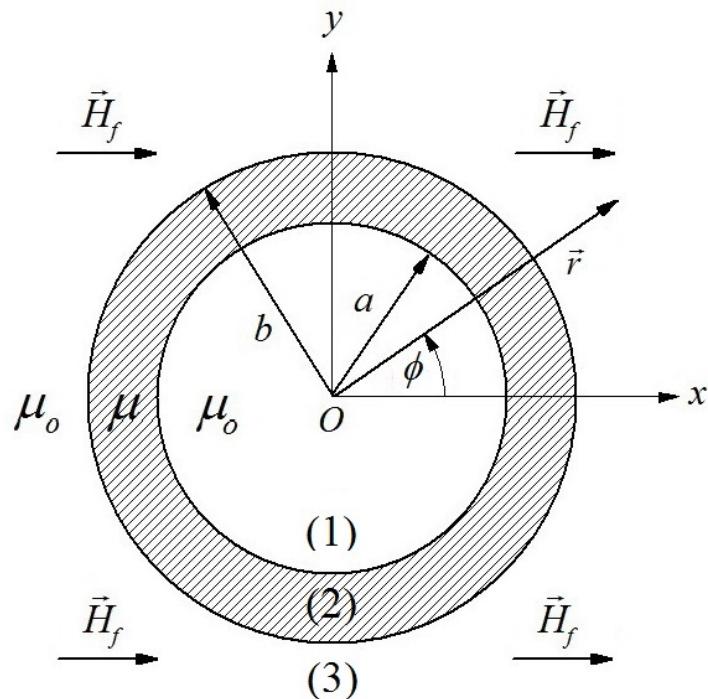


Figure 4.3 Système magnétostatique #1 (Durand, 1968).

---

2. Étant donné que nous considérons des systèmes invariants par translation, un anneau se réfère à un cylindre creux infiniment long.

Il faut noter que la notation tensorielle pour  $\chi_m$  a été omise en considérant le milieu isotrope (section 2.1.1). Ainsi, selon le travail effectué par Durand (Durand, 1968) pour ce type de problème, le potentiel scalaire magnétique total  $\psi$  est défini comme suit :

$$\psi_1(\vec{r}) = -\tilde{a} r \cos \phi, \quad (4.13)$$

$$\psi_2(\vec{r}) = -\left(\tilde{b} r + \frac{\tilde{c}}{r}\right) \cos \phi, \quad (4.14)$$

$$\psi_3(\vec{r}) = -\left(\|\vec{H}_f\| r + \frac{\tilde{d}}{r}\right) \cos \phi, \quad (4.15)$$

où  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{c}$  et  $\tilde{d}$  sont des constantes,  $\|\vec{H}_f\|$  est le module vectoriel de  $\vec{H}_f$ ,  $r \in [0, -\infty[$  est le module de  $\vec{r}$  et  $\phi \in [0, 2\pi[$  est l'angle entre  $\vec{r}$  et l'axe des  $x$ . De plus, les indices 1, 2 et 3 attribués à la variable  $\psi$  représentent respectivement les régions définies par  $0 \leq r < a$ ,  $a \leq r \leq b$  et  $r > b$  (figure 4.3). Ainsi, sachant que le champ magnétique total  $\vec{H}$  est relié à  $\psi$  selon l'expression  $\vec{H} = -\vec{\nabla}\psi$ , nous trouvons :

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \hat{\phi}, \quad (4.16)$$

avec  $\hat{r} = \cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j}$  et  $\hat{\phi} = -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j}$  des vecteurs orthonormaux qui pointent respectivement vers une variation positive de  $r$  et  $\phi$ . En ce qui a trait aux constantes, elles sont déterminées à partir des conditions aux frontières suivantes : (1) le potentiel scalaire  $\psi$  ainsi que (2) la composante normale de la densité de flux magnétique  $\vec{B}$  doivent être continus à l'interface de deux régions (Feynman *et al.*, 1979). En d'autre termes, selon la définition de  $\mu$  et les équations (2.7) et (2.8), nous obtenons :

$$\psi_1 = \psi_2 \quad \text{et} \quad \mu_0 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \mu \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \quad \text{lorsque } r = a, \quad (4.17)$$

$$\psi_2 = \psi_3 \quad \text{et} \quad \mu \frac{\partial \psi_2}{\partial r} = \mu_0 \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \quad \text{lorsque } r = b. \quad (4.18)$$

Ainsi, ces expressions nous permettent d'obtenir les constantes en jeu, c.-à-d. :

$$\tilde{a} = \frac{4\mu_r b^2 \|\vec{H}_f\|}{(b^2 - a^2) \left(1 + 2\mu_r \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} + \mu_r^2\right)}, \quad (4.19)$$

$$\tilde{b} = \frac{2(1 + \mu_r) b^2 \|\vec{H}_f\|}{(b^2 - a^2) \left(1 + 2\mu_r \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} + \mu_r^2\right)}, \quad (4.20)$$

$$\tilde{c} = \frac{2(\mu_r - 1) a^2 b^2 \|\vec{H}_f\|}{(b^2 - a^2) \left(1 + 2\mu_r \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} + \mu_r^2\right)}, \quad (4.21)$$

$$\tilde{d} = \frac{(1 - \mu_r^2) b^2 \|\vec{H}_f\|}{1 + 2\mu_r \frac{a^2+b^2}{b^2-a^2} + \mu_r^2}. \quad (4.22)$$

Notez que ces résultats ne sont pas explicitement donnés par Durand (Durand, 1968). Maintenant que la solution exacte pour le champ magnétique a été élaborée dans ce cas, nous devons déterminer à ce stade-ci les solutions numériques. Rappelons-nous que conformément au formalisme développé à la section 4.1, une utilisation appropriée du VIEM requiert d'une part la discrétisation d'un milieu magnétique quelconque en  $L$  sous domaines et d'autre part la spécification de points,  $\vec{R}_k \forall k = 1, 2, \dots, L$ , intérieurs à ces régions. Ceci étant dit, malgré le fait que le VIEM tel que nous le connaissons aujourd'hui existe depuis le début des années 70 (chapitre 1), peu d'information concernant son utilisation est disponible dans la littérature. Premièrement, Newman *et al.* (Newman *et al.*, 1972) ainsi que Turner (Turner, 1973) choisissent les points  $\vec{R}_k$  au centre d'éléments triangulaires (en 2D) et de prismes triangulaires (en 3D). Deuxièmement, Hoole (Hoole, 1989) ainsi que Silvester et Ferrari (Silvester et Ferrari, 1990) appliquent la forme 2D du VIEM à des points intérieurs situés au centre d'éléments carrés. Finalement, Morandi *et al.* (Morandi *et al.*, 2010) emploie des tétraèdres et évite de choisir des points intérieurs en utilisant un formalisme basé sur le moyennage des coefficients. À la lumière de cette information, nous avons utilisé dans le contexte de l'analyse 2D du VIEM des trapèzes isocèles (voir la figure 4.4 à titre d'exemple) tels que les points intérieurs sont choisis au centre de chaque élément, c.-à-d. la position moyenne des quatre sommets constituant le trapèze ; la fonction Matlab *gannulus.m* (annexe I) permet de générer ce type de géométrie. Veuillez noter qu'il est toujours possible de discrétiser davantage chaque trapèze en éléments triangulaires (comme c'est le cas pour Newman *et al.*) mais nous avons choisi de ne pas procéder de la sorte afin de réduire le nombre total d'intégrales de parcours à effectuer (section 3.2.1). Dans ce cas, il est possible de définir le pas radial  $\Delta r$  et le pas angulaire  $\Delta\phi$  à partir des relations suivantes :

$$\Delta r = \frac{b - a}{N_r}, \quad (4.23)$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{N_\phi}, \quad (4.24)$$

où  $N_r$  et  $N_\phi$  sont respectivement le nombre d'éléments radiaux et angulaires. Ainsi, nous pouvons définir un nombre  $N$  pour les éléments de notre système donné par :

$$N = N_r N_\phi. \quad (4.25)$$

Or, nous sommes maintenant en mesure d'établir un schéma de discrétisation pour le VIEM

basé sur l'analyse du système 2D illustré à la figure 4.3. Toutefois, avant de procéder, regardons un cas typique d'application numérique afin de pouvoir valider l'approche de résolution établie à la section 4.1 d'une part et avoir une meilleure compréhension globale sur la performance du VIEM d'autre part.

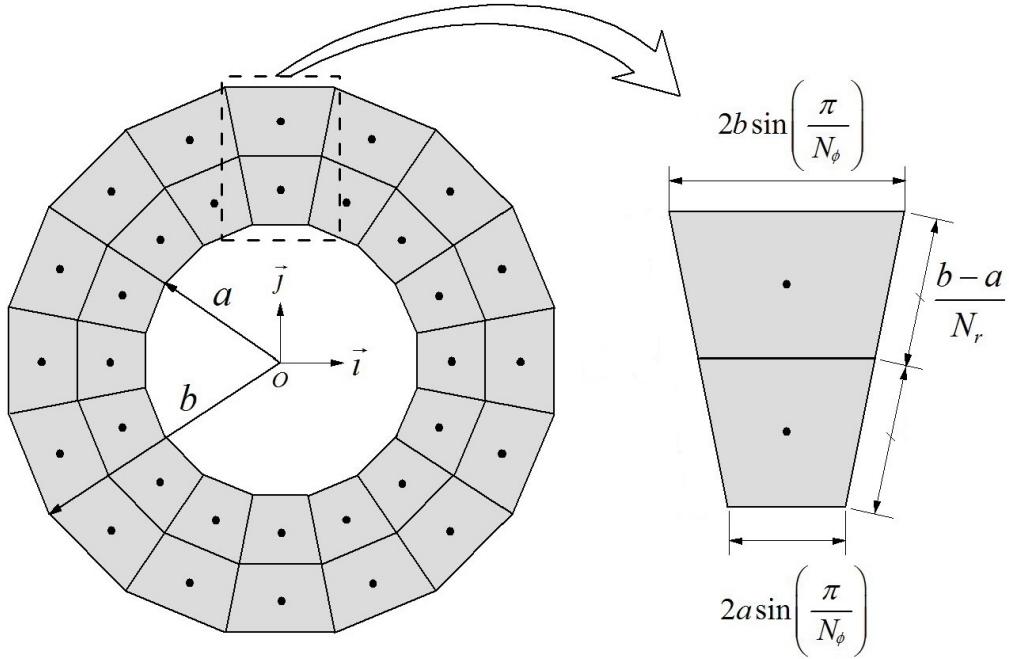


Figure 4.4 Discrétisation de type trapézoïdal pour un anneau centré à l'origine ayant un rayon interne  $a$  et un rayon externe  $b$ . Dans cet exemple, les points intérieurs sont choisis au centre de chaque trapèze et des valeurs de  $N_r = 2$  et  $N_\phi = 16$  sont utilisées.

Plus précisément, considérons un anneau centré à l'origine de rayon interne  $a = 0.1$  m, rayon externe  $b = 0.2$  m et ayant une susceptibilité magnétique de  $\chi_m = 10^3$ ; les valeurs pour  $a$  et  $b$  ont été choisies de sorte à être du même ordre de grandeur que celles associées à la section d'essais de type CANDU (figure 1.1) et la valeur pour  $\chi_m$  est utilisée pour représenter l'acier 410 (Landry-Lavoie, 2013). De plus, le système est assujetti à un champ magnétique libre uniforme de module vectoriel  $\|\vec{H}_f\| = 1$  A m<sup>-1</sup> orienté selon l'axe des  $x$ . En outre, la variable principale sur laquelle nous allons nous baser pour effectuer notre analyse est l'erreur relative  $\varepsilon\%$  (donnée en %) associée au module de  $\vec{H}_m$ , c.-à-d. :

$$\varepsilon\% = \frac{|\|\vec{H}_m\|_{\text{num}} - \|\vec{H}_m\|_{\text{ref}}|}{\|\vec{H}_m\|_{\text{ref}}} \times 100, \quad (4.26)$$

où  $\|\vec{H}_m\|_{\text{num}}$  et  $\|\vec{H}_m\|_{\text{ref}}$  sont respectivement les modules obtenus à partir du VIEM et de la solution analytique (Durand, 1968). De cette manière, étant donné que les constantes données

par les expressions (4.19)-(4.22) sont directement proportionnelles à  $\|\vec{H}_f\|$  et que la solution numérique pour  $\vec{H}_m$  l'est aussi (section 4.1), la valeur attribuée à  $\|\vec{H}_f\|$  n'affecte pas  $\varepsilon\%$ . Notez que nous employons le module de  $\vec{H}_m$  dans la définition de  $\varepsilon\%$  puisque ce premier est un champ de réponse et conséquemment son module ne peut pas être nul pour des valeurs de  $\chi_m \neq 0$ . En effet, cette formulation nous évite d'effectuer une division par zéro. D'un point de vue numérique, nous avons choisi dans un premier temps de discréteriser la région magnétique ( $a \leq r \leq b$ ) en  $N = 500$  trapèzes avec  $N_r = 5$  éléments radiaux et  $N_\phi = 100$  éléments angulaires. En ce qui a trait aux deux régions extérieures, notamment, lorsque  $0 \leq r < a$  et  $r > b$ , nous avons utilisé pour chacune d'entre elles une grille de points contenant 100 éléments angulaires (vis-à-vis le centre de chaque trapèze) et 50 éléments radiaux. Premièrement, dans la région  $a \leq r \leq b$ , nous trouvons une erreur relative moyenne de 0.042 % par rapport au calcul analytique, un écart type de 0.036 % et une valeur maximale de 0.15 %. De plus, tel qu'illustré à la figure 4.5, nous avons pu déterminer la distribution des lignes de champ pour  $\vec{H}$  (c.-à-d. le champ magnétique total).

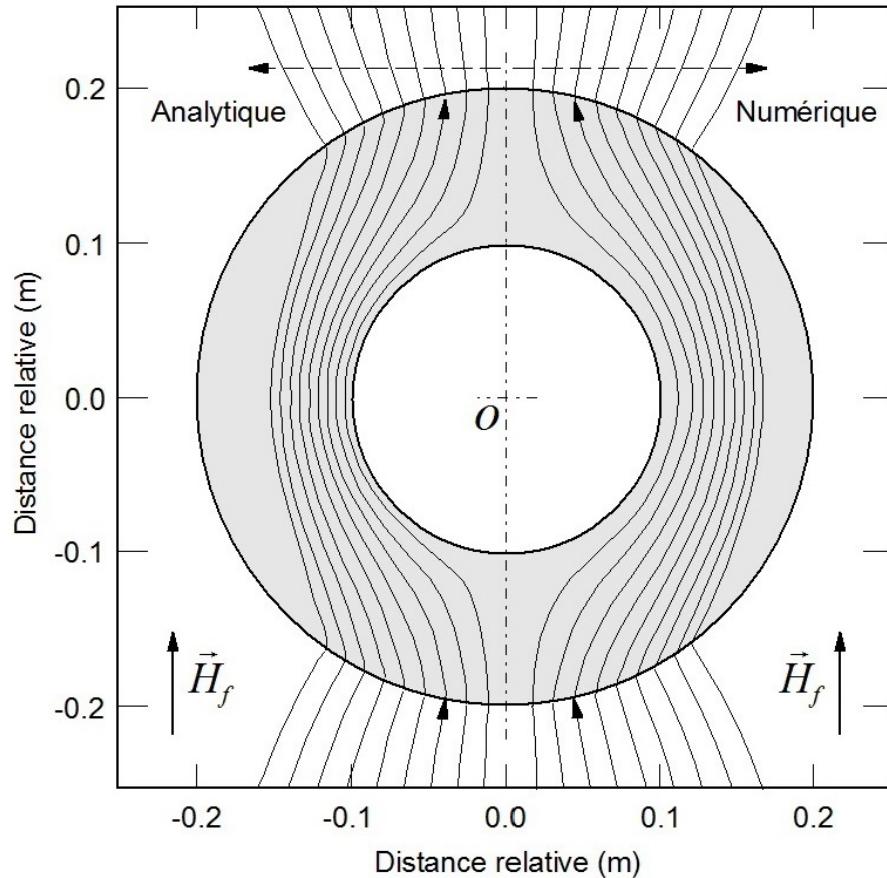


Figure 4.5 Lignes de champ pour  $\vec{H}$  associées au système magnétostatique #1.

À partir de cette distribution, nous constatons qu'il n'y a pas de fuite du champ magnétique vers l'intérieur du cylindre et que les solutions numériques respectent bien la forme analytique mais semblent concentrer les lignes moins efficacement. Deuxièmement, dans la région  $0 \leq r < a$ , nous obtenons une erreur relative moyenne de 1.4 %, un écart type de 0.18 % et une valeur maximale de 3.5 % (près de l'interface<sup>3</sup>). Finalement, pour la région  $r > b$ , nous trouvons une erreur relative moyenne de 0.58 %, un écart type de 0.34 % et une valeur maximale de 3.5 % (près de l'interface). Ainsi, nous concluons que le VIEM prédit assez bien le comportement de  $\vec{H}_m$  et de  $\vec{H}$  dans toutes les régions.

Basé sur l'analyse effectuée jusqu'à présent, une question importante se pose : pour une valeur de  $N$  donnée, existe-t-il une configuration pour  $N_r$  et  $N_\phi$  qui minimise de façon globale l'erreur produite par la méthode du VIEM ? Intuitivement, puisque pour une valeur de  $N$  fixe une discrétisation radiale trop rafinée mène à un pas angulaire trop élevé et vice versa, nous déduisons qu'un schéma de discrétisation adéquat est tel que les distances radiales et angulaires sont égales, c.-à-d. :

$$\Delta r = r \Delta\phi \rightarrow N_r^*(r) = \sqrt{\frac{(b-a)N}{2\pi r}}, \quad (4.27)$$

où les expressions (4.23)-(4.25) ont été utilisées et  $N_r^*$  représente le nombre d'éléments radiaux optimal. Ainsi, pour un système tel que  $N = 500$ ,  $a = 0.1$  m et  $b = 0.2$  m comme celui étudié précédemment, l'équation ci-dessus nous mène à des valeurs situées entre  $N_r^*(a) = 8.92 \approx 9$  et  $N_r^*(b) = 6.31 \approx 6$ . En effet, afin de comparer ces résultats avec les configurations optimales obtenues à partir du VIEM, nous avons employé dans les régions  $0 \leq r < a$  et  $r > b$  une grille de points ayant 100 éléments angulaires situés à une distance de l'interface de 15 % du rayon interne  $a$  ; ce pourcentage correspond approximativement à celui associé à la couche en céramique de la section d'essais (figure 1.1). Ainsi, tel qu'illustré à la figure 4.6, nous avons fait varier  $N_r$  pour une valeur de  $N$  fixe afin d'évaluer l'erreur relative maximale  $\varepsilon_{\%}^{\max}$  dans chacune des deux régions. De cette manière, nous avons pu déterminer une configuration pour  $N_r$  et  $N_\phi$  telle que  $\varepsilon_{\%}^{\max}$  est situé à un minimum. Conséquemment, dans ce cas, les configurations géométriques optimales obtenues numériquement concordent parfaitement avec celles prédites par l'expression (4.27). En outre, nous avons aussi considéré deux autres configurations, les résultats issus de cette analyse sont reportés aux figures B.1 et B.2 situées à l'annexe B. À partir de ces données, nous concluons sans aucun doute que les valeurs numériques pour  $N_r^*$  sont très bien prédites par le schéma de discrétisation élaboré dans cette section. Plus

---

3. Puisque le VIEM ne permet pas l'évaluation de  $\bar{N}$  sur la frontière d'un élément, nous avons choisi dans les deux régions de distancer la grille de points de l'interface d'une valeur de 0.1 % du rayon interne  $a$ .

précisément, pour une géométrie annulaire, une utilisation adéquate du VIEM est telle que : (i) pour des points d'évaluation situés dans la région  $0 \leq r < a$ , la discréétisation devrait être choisie de sorte à satisfaire  $\Delta r = a \Delta\phi$  et (ii) pour des points appartenant à la région  $r > b$ , nous devons poser  $\Delta r = b \Delta\phi$ .

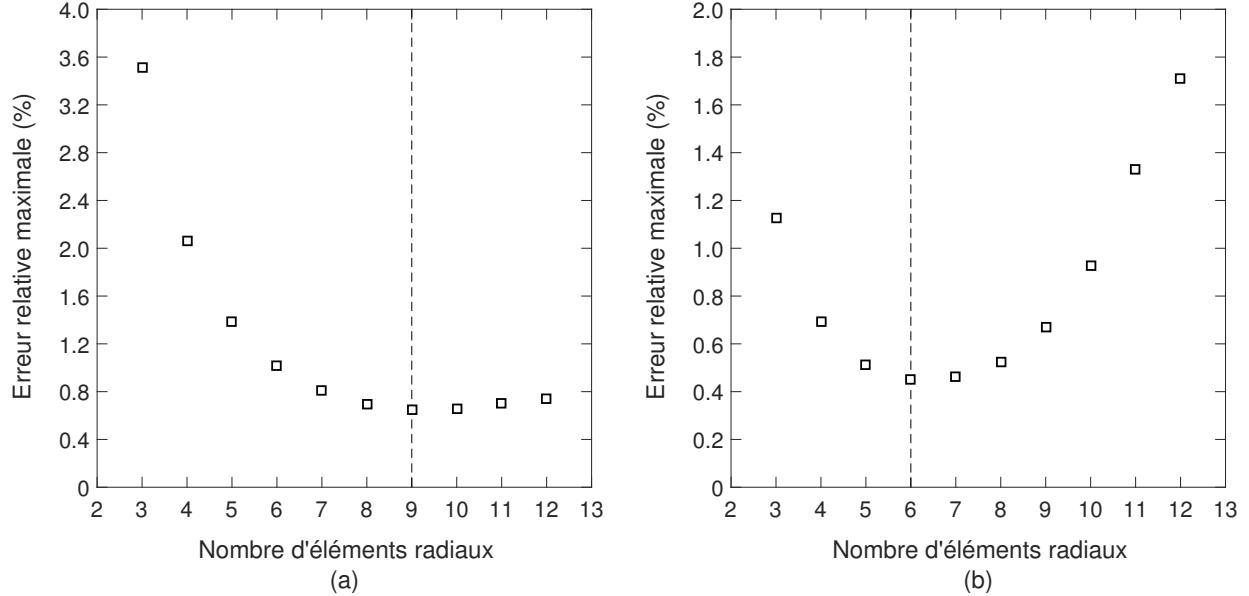


Figure 4.6 Erreur relative maximale pour un système tel que  $N = 500$ ,  $a = 0.1$  m et  $b = 0.2$  m : (a) région  $0 \leq r < a$  avec un minimum à  $N_r = 9$  et  $\varepsilon_{\%}^{\max} = 0.65$  % ; (b) région  $r > b$  avec un minimum à  $N_r = 6$  et  $\varepsilon_{\%}^{\max} = 0.45$  %. Veuillez noter que  $N_\phi$  s'ajuste selon la valeur de  $N_r$  d'après l'équation (4.25).

De manière rigoureuse, la discréétisation devrait se faire en utilisant des ellipses (2D) ou des ellipsoïdes (3D), (Hall et Teyssedou, 2014). Cependant, il est clair que cette géométrie n'est pas appropriée pour résoudre le problème présenté dans ce document. De façon générale, nous déduisons que la méthode du VIEM devrait être employée avec des éléments de discréétisation qui sont, quand la géométrie le permet, bornés par des domaines carrés (en 2D) et cubiques (en 3D) afin d'éviter un écart trop important entre les pas de discréétisation considérés. Ceci étant dit, nous pouvons maintenant discréétiser la section d'essais de façon fiable. Toutefois, avant de procéder à cette étape, regardons à présent un autre système de référence important afin de comprendre davantage l'utilisation du VIEM.

### 4.3.2 Blindage magnétique d'une ligne bifilaire

Même si nous pouvons à ce moment-ci employer le schéma de discréétisation élaboré à la section précédente, il est intéressant d'étudier brièvement un autre système 2D qui res-

semble davantage à la section d'essais, c.-à-d., qui utilise des éléments de courant associés à un champ magnétique libre donné par l'expression (2.104). Rappelons-nous que la discréétisation du VIEM est basée sur une approche purement géométrique pour laquelle  $\chi_m$  et  $\vec{H}_f$  sont considérés uniformes à l'intérieur de la région magnétique. Toutefois, dans la présente section, seulement  $\chi_m$  sera considéré constant de sorte que nous nous attendons à ce que la configuration géométrique optimale obtenue numériquement s'écarte de celle prescrite par le schéma de discréétisation ; pour cette raison, il devient intéressant d'analyser un tel cas afin d'étudier si notre méthode mène à des résultats acceptables. Ainsi, considérons un anneau ayant une perméabilité  $\mu$ , un rayon interne  $a$  et un rayon externe  $b$  (figure 4.7).

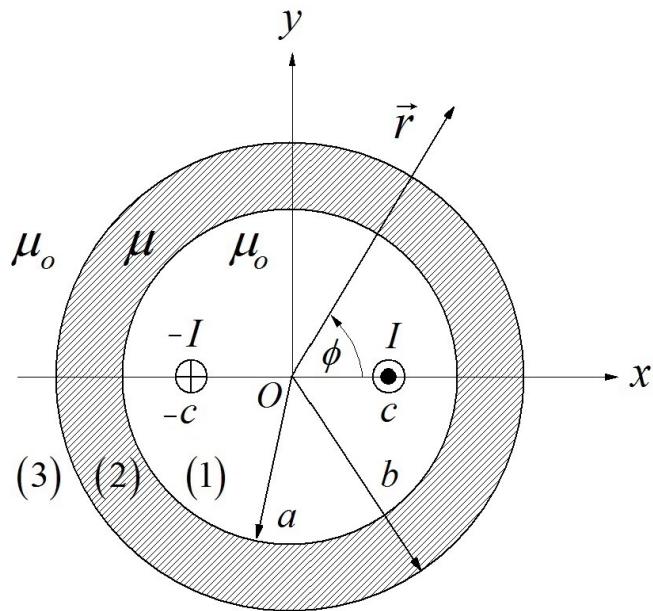


Figure 4.7 Système de magnétostatique #2 (Durand, 1968).

De plus, le système comprend deux éléments de courant situés à une distance relative à l'origine de  $c$  et  $-c$  le long de l'axe des  $x$  et ayant respectivement une intensité de  $I$  (qui sort du plan  $xOy$ ) et  $-I$  (qui rentre dans le plan  $xOy$ ). Ainsi, selon le travail effectué par Durand (Durand, 1968) pour ce type de problème, le potentiel vecteur  $\vec{A} = A \vec{k}$  s'écrit alors :

$$A_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \left[ \left( \frac{c}{r} \right)^{2n+1} + \tilde{a}_{2n+1} \left( \frac{r}{c} \right)^{2n+1} \right] \frac{\cos((2n+1)\phi)}{2n+1} \right), \quad (4.28)$$

$$A_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \left[ \tilde{b}_{2n+1} \left( \frac{r}{c} \right)^{2n+1} + \tilde{c}_{2n+1} \left( \frac{c}{r} \right)^{2n+1} \right] \frac{\cos((2n+1)\phi)}{2n+1} \right), \quad (4.29)$$

$$A_3(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \tilde{d}_{2n+1} \left( \frac{c}{r} \right)^{2n+1} \frac{\cos((2n+1)\phi)}{2n+1} \right), \quad (4.30)$$

où  $\tilde{a}_i$ ,  $\tilde{b}_i$ ,  $\tilde{c}_i$  et  $\tilde{d}_i \forall i = \{1, 3, 5, \dots\}$  sont des constantes et, comme à la section précédente, les indices 1, 2 et 3 utilisés pour  $A$  représentent respectivement les régions définies par  $0 \leq r < a$ ,  $a \leq r \leq b$  et  $r > b$  (figure 4.7). Ainsi, sachant que la densité de flux magnétique  $\vec{B}$  est reliée à  $\vec{A}$  selon l'expression  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , nous trouvons :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \phi} \hat{r} - \frac{\partial A}{\partial r} \hat{\phi}. \quad (4.31)$$

En ce qui concerne les constantes, elles sont déterminées à partir des conditions aux frontières suivantes : (i) le potentiel vecteur  $\vec{A}$  ainsi que (ii) la composante tangentielle du champ magnétique total  $\vec{H}$  doivent être continus à l'interface de deux régions (Feynman *et al.*, 1979). En d'autres termes, selon la définition de  $\mu$  et les équations (2.7) et (2.8), nous obtenons :

$$A_1 = A_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_1}{\partial r} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_2}{\partial r} \quad \text{lorsque } r = a, \quad (4.32)$$

$$A_2 = A_3 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_2}{\partial r} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_3}{\partial r} \quad \text{lorsque } r = b. \quad (4.33)$$

Ainsi, ces quatre conditions nous permettent d'obtenir les constantes nécessaires, c.-à-d. :

$$\tilde{d}_{2n+1} = \frac{4}{\mu_r} \left[ \left( \frac{1}{\mu_r} + 1 \right)^2 - \left( \frac{1}{\mu_r} - 1 \right)^2 \left( \frac{a}{b} \right)^{4n+2} \right]^{-1}, \quad (4.34)$$

$$\tilde{a}_{2n+1} = \frac{\mu_r}{4} \left( \frac{1}{\mu_r^2} - 1 \right) \left[ \left( \frac{c}{b} \right)^{4n+2} - \left( \frac{c}{a} \right)^{4n+2} \right] \tilde{d}_{2n+1}, \quad (4.35)$$

$$\tilde{b}_{2n+1} = 2 \left( \frac{1}{\mu_r} - 1 \right) \left[ \left( \frac{1}{\mu_r} + 1 \right)^2 \left( \frac{b}{c} \right)^{4n+2} - \left( \frac{1}{\mu_r} - 1 \right)^2 \left( \frac{a}{c} \right)^{4n+2} \right]^{-1}, \quad (4.36)$$

$$\tilde{c}_{2n+1} = 2 \left( \frac{1}{\mu_r} + 1 \right) \left[ \left( \frac{1}{\mu_r} + 1 \right)^2 - \left( \frac{1}{\mu_r} - 1 \right)^2 \left( \frac{a}{b} \right)^{4n+2} \right]^{-1}. \quad (4.37)$$

Veuillez noter que les expressions (4.35) et (4.36) diffèrent de celles reportées par Durand (Durand, 1968) en raison d'une erreur typographique de l'auteur. De plus, nous avons utilisé dans le cadre de nos calculs 200 termes pour les séries infinies données par les équations (4.28)-(4.30) puisqu'une convergence suffisante est observée dans ce cas. En effet, en utilisant une grille de points, une configuration géométrique ainsi qu'une susceptibilité magnétique  $\chi_m$  identiques à celles utilisées pour obtenir la figure 4.5, la distribution des lignes de champ pour  $\vec{H}$  a été évaluée pour une valeur arbitraire de courant  $I = 1$  A (figure 4.8) ; cependant, selon les équations (2.104) et (4.26) ainsi que la forme de la solution analytique pour  $\vec{H}$ , la valeur attribuée à  $I$  n'influence pas l'allure de cette distribution ni les valeurs de  $\varepsilon\%$ . Or, comme c'était le cas pour le système considéré à la section précédente, la méthode du VIEM mène

à une distribution numérique qui concorde très bien avec celle prédictée par la théorie mais semble concentrer les lignes de champ moins efficacement.

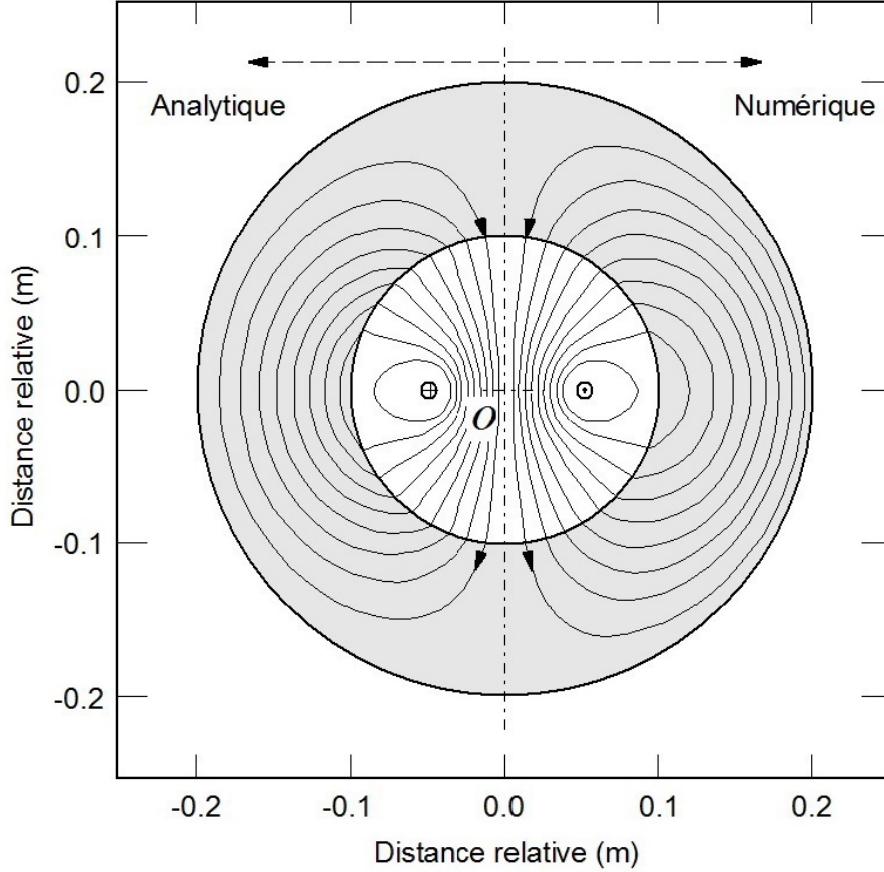


Figure 4.8 Lignes de champ pour  $\vec{H}$  associées au système magnétostatique #2.

De plus, dans la région  $a \leq r \leq b$ , nous trouvons une erreur relative moyenne de 0.085 %, un écart type de 0.086 % et une valeur maximale de 0.38 %. En outre, dans ce cas, nous obtenons pour la région  $0 \leq r < a$  une erreur relative moyenne de 1.3 %, un écart type de 0.26 % et une valeur maximale de 3.9 % (près de l'interface). Pour ce qui est de la région  $r > b$ , nous trouvons une erreur relative moyenne de 1.9 %, un écart type de 0.75 % et une valeur maximale de 6.3 % (près de l'interface). Conséquemment, même avec la présence d'éléments de courant, nous concluons que le VIEM offre de bons résultats.

À ce stade-ci, il ne reste plus qu'à effectuer une analyse identique à celle qui a menée aux figures 4.6, B.1 et B.2, c.-à-d., de déterminer numériquement la configuration pour  $N_r$  et  $N_\phi$  qui donne la plus faible valeur de l'erreur relative maximale  $\varepsilon_{\%}^{\max}$ . Ainsi, en utilisant la même

grille de points que celle utilisée pour le système magnétostatique #1 (section 4.3.1), nous avons pu déterminer les configurations numériques optimales présentées à la figure 4.9.

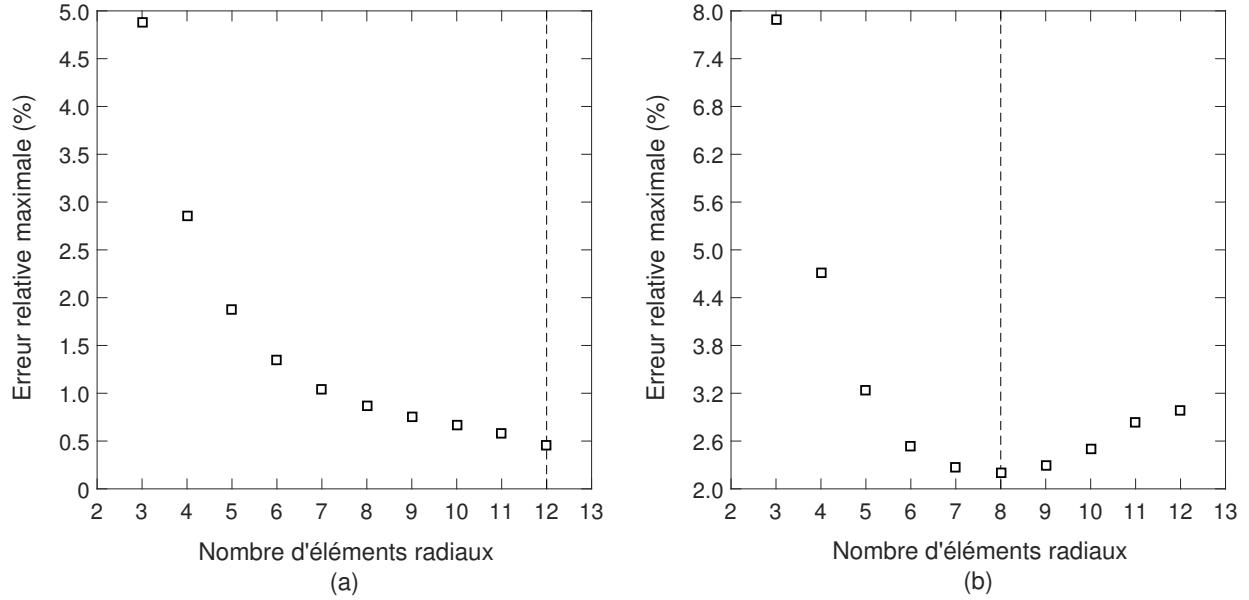


Figure 4.9 Erreur relative maximale pour un système tel que  $N = 500$ ,  $a = 0.1$  m et  $b = 0.2$  m : (a) région  $0 \leq r < a$  avec un minimum à  $N_r = 12$  et  $\varepsilon_{\%}^{\text{max}} = 0.46\%$ ; (b) région  $r > b$  avec un minimum à  $N_r = 8$  et  $\varepsilon_{\%}^{\text{max}} = 2.2\%$ . Veuillez noter que  $N_\phi$  s'ajuste selon la valeur de  $N_r$  d'après l'équation (4.25).

Premièrement, dans la région  $0 \leq r < a$ , nous trouvons un minimum à  $N_r = 12$ , notamment, la dernière valeur simulée pour le nombre d'éléments radiaux (figure 4.9a). Conséquemment, nous concluons que le vrai minimum doit se trouver à une valeur de  $N_r \geq 12$ . Ainsi, même si cette valeur optimale est relativement éloignée de celle estimée par l'équation (4.27), soit  $N_r^* \approx 9$ , cette dernière se retrouve dans une portion de la courbe qui d'une part se comporte de façon monotone avec une faible pente et d'autre part mène à une bonne erreur relative (0.75 %). Deuxièmement, dans la région  $0 \leq r < a$ , nous trouvons un minimum à  $N_r = 8$  de sorte que nous déduisons que le schéma de discréttisation offre une configuration géométrique adéquate dans ce cas. En effet, nous avons aussi considéré deux autres configurations, les résultats issus de cette analyse sont reportés aux figures C.1 et C.2 situées à l'annexe C. Or, tel que prévu, les points optimaux obtenus à partir du VIEM s'écartent légèrement de ceux donnés par l'équation (4.27). Toutefois, dans tous les cas, nous déduisons que le schéma de discréttisation mène à des résultats valables. Maintenant que les deux systèmes magnétostatiques 2D ont été étudiés et validés, portons notre attention sur la section d'essais de type CANDU décrite dans le chapitre 1.

## 4.4 Section d'essais de type CANDU

Étant donné que le formalisme du VIEM a été validé et qu'un schéma de discrétisation fiable a été élaboré, nous sommes actuellement en mesure de déterminer, entre autres, la distribution du champ magnétique total  $\vec{H}$  à travers la section d'essais de type CANDU (figure 1.1). Ceci étant dit, nous allons débuter cette section en donnant les détails concernant la discrétisation du milieu magnétique et par la suite employer le VIEM afin d'obtenir les quantités désirées.

### 4.4.1 Discrétisation de la section d'essais

Rappelons-nous qu'à la section 4.3.1, nous avions abordé différentes façons de discrétiser un domaine magnétique 3D. Plus précisément, nous avons vu que Morandi *et al.* (Morandi *et al.*, 2010) utilisent des domaines tétraédriques tandis que Newman *et al.* (Newman *et al.*, 1972) ainsi que Turner (Turner, 1973) se servent plutôt de prismes triangulaires. Toutefois, afin de rester conforme avec la discrétisation 2D que nous avons appliquée à une géométrie annulaire (figure 4.4), nous allons considérer dans le cadre du calcul 3D des éléments ayant la forme de prismes trapézoïdaux isocèles comme ceux illustrés à la figure 4.10.

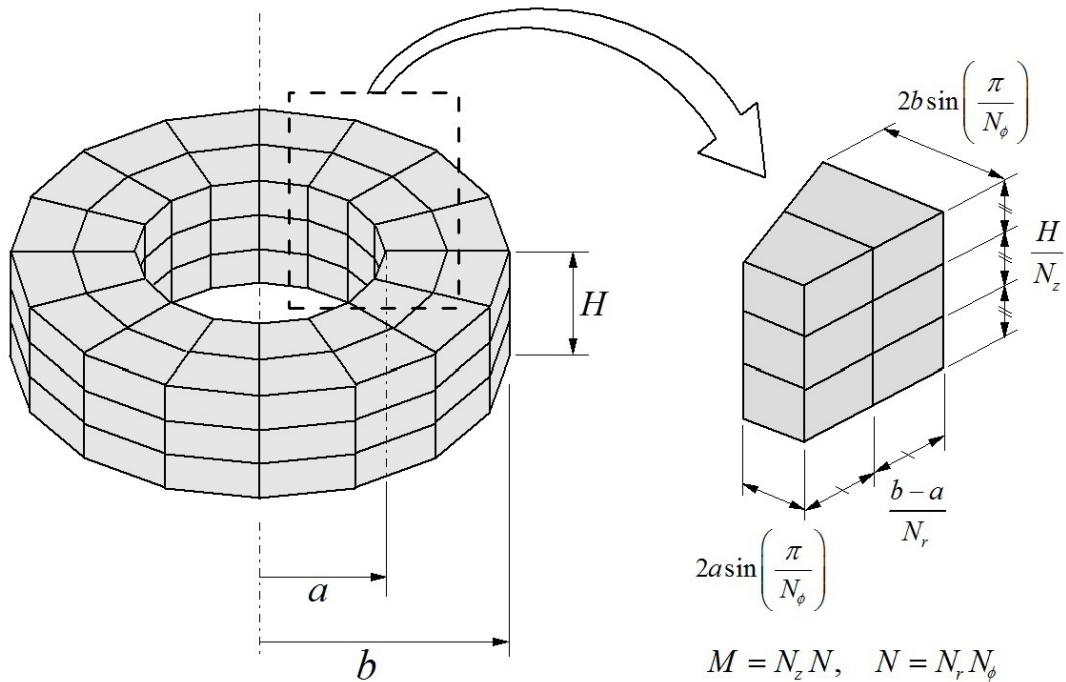


Figure 4.10 Discrétisation en forme de prismes trapézoïdaux isocèles pour un cylindre creux ayant une hauteur  $H$ , un rayon interne  $a$  et un rayon externe  $b$ . Dans cet exemple, des valeurs de  $N_r = 2$ ,  $N_\phi = 16$  et  $N_z = 3$  sont utilisées.

En effet, cette forme de discréétisation permet de modeler un cylindre creux de hauteur  $H$ , rayon interne  $a$  et rayon externe  $b$  tout en minimisant le nombre d'intégrales de surface à évaluer lors du calcul de  $\bar{N}$  (section 3.2.2). Veuillez noter que la fonction Matlab *ghcylinder.m* (annexe J) permet de générer ce type de géométrie. De plus, nous allons choisir des points intérieurs situés au centre de chaque élément, c.-à-d. à la position moyenne des huit sommets constituant chaque prisme. Pour ce qui est de la section d'essais de type CANDU, la région magnétique peut être décomposée en deux types de domaines cylindriques : (i) une couche centrale ouverte qui comprend les deux prises de pression et (ii) deux couches adjacentes fermées qui composent le restant du canal qui contient la grappe de combustible simulée<sup>4</sup>. Conséquemment, puisque nous nous servons dans ce cas de prismes trapézoïdaux, il est évident que nous ne sommes pas en mesure de former pour la couche centrale des prises de pression conformes à la réalité, notamment, des orifices parfaitement cylindriques. En effet, afin d'obtenir des dimensions qui correspondent à celles présentées à la figure 1.1, la portée angulaire de chaque prise sera choisie de sorte que le diamètre prescrit est satisfait à la paroi extérieure de la section d'essais. En outre, il est possible de définir le pas selon  $z$ ,  $\Delta z$ , à partir de la relation suivante :

$$\Delta z = \frac{H}{N_z}, \quad (4.38)$$

avec  $N_z$  le nombre d'éléments le long de l'axe des  $z$ . Or, comme c'était le cas en 2D, nous pouvons définir un nombre  $M$  pour les éléments 3D de notre système donné par :

$$M = N_r N_\phi N_z = N_z N, \quad (4.39)$$

où nous avons employé l'expression (4.25). Ainsi, tel que discuté à la section 4.3.1, le schéma de discréétisation associé au cas 3D requiert que tous les pas de discréétisation soient équivalents, c.-à-d.  $\Delta z = \Delta r = r \Delta\phi$ . Donc, en combinant les expressions (4.23), (4.27), (4.38) et (4.39), le nombre optimal d'éléments selon  $z$ ,  $N_z^*$ , s'écrit comme suit :

$$N_z^*(r) = \left[ \frac{MH^2}{(b-a)r\Theta} \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (4.40)$$

avec  $\Theta$  la portée angulaire du cylindre qui, comme mentionné plus tôt, diffère de  $2\pi$  pour la couche centrale ; veuillez noter qu'il faut aussi poser  $2\pi \rightarrow \Theta$  dans l'expression (4.27). En effet, pour des points d'évaluation situés à l'intérieur du cylindre creux ( $0 \leq r < a$ ), nous

---

4. Il faut noter qu'afin d'alléger le calcul, nous allons simuler une seule grappe d'environ 50 cm de longueur (figure 1.1). Ceci demeure physiquement acceptable sous l'approximation que les grappes voisines influencent très peu la distribution du champ magnétique près d'une prise de pression.

devons poser  $r = a$  tandis que pour des points extérieurs ( $r > b$ ), nous devons utiliser un rayon de  $r = b$ . Dans la prochaine section, nous allons appliquer la méthode du VIEM à la section d'essais afin d'obtenir divers résultats pertinents à la compréhension globale des phénomènes magnétostatiques en jeu.

#### 4.4.2 Simulation de la section d'essais

À la section 1.1, nous avons établi trois objectifs de recherche qui consistent à élaborer un formalisme magnétostatique 3D, de l'optimiser et de l'implémenter numériquement dans un code Matlab. En particulier, il devient intéressant et important de mettre à l'épreuve la méthodologie développée dans ce mémoire afin de cerner l'influence des prises de pression sur la distribution du champ magnétique à l'intérieur de la section d'essais de type CANDU. Pour débuter, considérons une coupe transversale du canal contenant les grappes de combustible simulées alignée selon le centre des prises de pression (figure 4.11).

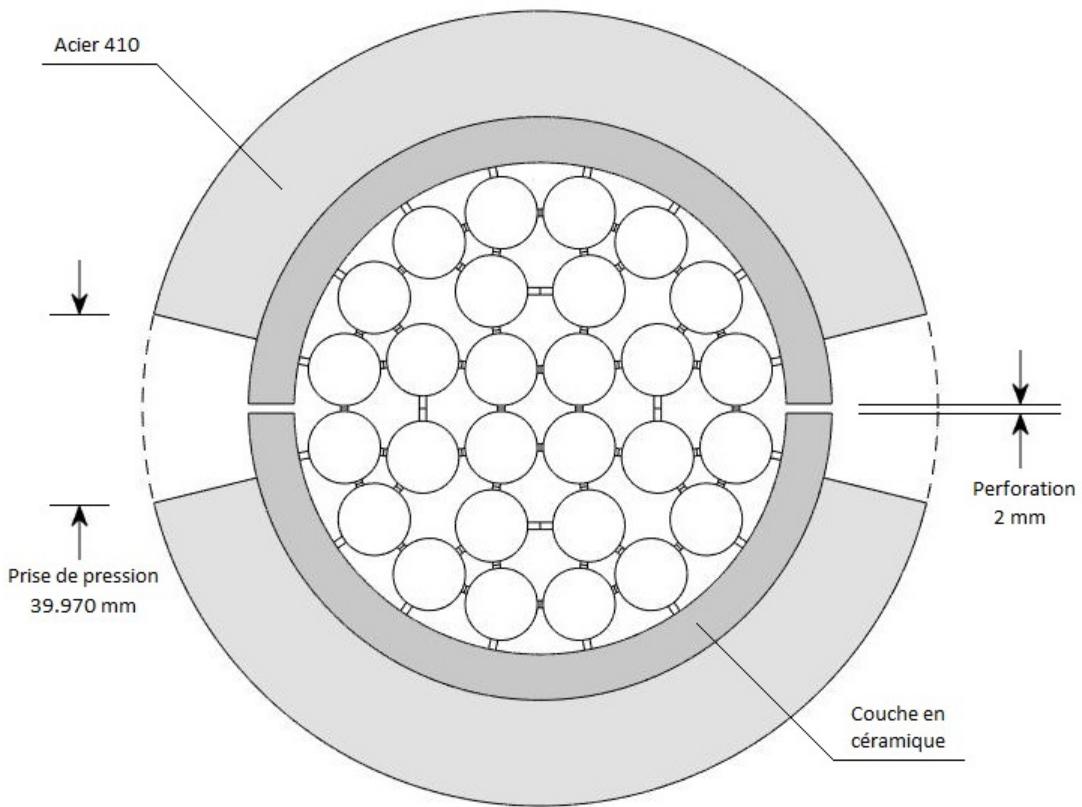


Figure 4.11 Coupe transversale de la section d'essais pour un assemblage de 28 crayons.

Ici, nous avons un système constitué d'un assemblage de 28 crayons, qui simulent le combustible nucléaire, espacés par des patins d'écartement et traversés par un courant électrique

total de 42 kA ainsi que des perforations dans la couche de céramique afin que les capteurs de pression puissent être reliés à la portion intérieure du canal<sup>5</sup> (voir Teyssedou et Oleknovitch, 2007, pour plus de détails sur la structure de la section d'essais). De plus, dans ce cas, les prises de pressions ont été coupées en angle afin qu'elles s'adaptent à la discréétisation que nous avons discutée à la section précédente. En outre, étant donné les dimensions du canal (figure 1.1) et la valeur du courant électrique attribuée à chaque crayon (1.5 kA), l'expression (2.104) nous mène à un module du champ magnétique libre,  $\|\vec{H}_f\|$ , compris entre 79 kA/m et 108 kA/m dans la couche en acier. À la lumière de ces valeurs, il est important de mentionner que pour des champs appliqués relativement intenses, le milieu magnétique entre dans un régime non-linéaire, c.-à-d., la relation constitutive donnée par l'équation (2.8) s'écrit comme suit pour un matériau isotrope :

$$\vec{M}(\vec{r}) = \chi_m(\vec{r}, \|\vec{H}(\vec{r})\|) \vec{H}(\vec{r}). \quad (4.41)$$

En d'autres termes, la susceptibilité magnétique  $\chi_m$  dépend maintenant de la valeur locale du champ magnétique total. En effet, tel que discuté par Cubberly *et al.* (Cubberly *et al.*, 1980), lorsque  $\|\vec{H}\| \rightarrow \infty$  nous avons  $\chi_m \rightarrow 0$  et le module de l'aimantation atteint une valeur de saturation  $\|\vec{M}_{sat}\|$ . Or, la méthode de résolution décrite à la section 4.1 devient inutilisable sous sa forme présente étant donné que  $\vec{H}$  est la variable inconnue. Pour remédier à ce problème, il s'agit de fournir une courbe expérimentale de  $\chi_m$  en fonction de  $\|\vec{H}\|$  et appliquer un processus itératif pour le VIEM (Newman *et al.*, 1972). Toutefois, comme cette démarche sort du cadre de notre travail, il vaut la peine de noter que l'acier 410 a une valeur de  $\|\vec{M}_{sat}\|$  qui correspond à 101 kA/m (Cubberly *et al.*, 1980) et par conséquent, elle est très près des valeurs de  $\|\vec{H}_f\|$  mentionnées plus haut. Ainsi, sous l'approximation que  $\|\vec{H}\| \approx \|\vec{H}_f\|$  dans le milieu magnétique (ce qui est valide lorsque le matériau est hautement saturé), nous déduisons qu'une valeur de  $\chi_m = 1$  devrait nous mener dans notre cas à des valeurs de  $\vec{M}$  physiquement cohérentes, c.-à-d. ayant des modules vectoriels du même ordre de grandeur que  $\|\vec{M}_{sat}\|$ .

À ce stade-ci, tous les paramètres physiques et géométriques nécessaires à l'utilisation du VIEM ont été définis. D'abord, nous avons comparé les résultats 2D (c.-à-d. invariant par translation) avec ceux obtenus par un calcul 3D. Étant donné que la longueur de la grappe est approximativement cinq fois son diamètre externe, les deux calculs doivent être très similaires. À cet effet, à partir de la figure D.1 présentée à l'annexe D, nous observons en général que l'écart entre ces deux types de calculs est presque négligeable lorsque nous nous rapprochons de la périphérie de la grappe. Cette comparaison valide encore une fois la robustesse de

---

5. Toutefois, il faut noter que la structure en céramique n'influence pas le calcul du champ puisqu'elle n'est pas composée d'un matériau magnétique ( $\chi_m \approx 0$ ).

la méthode proposée dans ce mémoire pour le traitement des problèmes 3D. Cependant, il faut mentionner que la méthode 2D ne peut pas être utilisée, rigoureusement, pour calculer la distribution du champ produit par les discontinuités associées aux prises de pression. Ainsi, en ce qui a trait aux discrétilisations 3D du système, nous avons considéré une valeur de  $M = 1500$  et les calculs (3D) ont été répétés en absence et présence des discontinuités magnétiques (c.-à-d. sans et avec les prises de pression). De cette manière, à partir du schéma de discrétilisation décrit par les expressions (4.27) et (4.40) pour une valeur de  $r = a$ , nous trouvons dans l'acier une valeur maximale pour le module de l'aimantation de 101 kA/m sans les prises et de 107 kA/m avec les prises ; ces résultats se rapprochent beaucoup de la valeur de  $\|\vec{M}_{\text{sat}}\|$  donnée plus tôt et conséquemment justifient la valeur utilisée pour  $\chi_m$ . En effet, afin de mieux comprendre l'influence des prises de pression, considérons maintenant deux distributions pour la densité de flux magnétique à l'intérieur du canal. En utilisant une grille de point comportant 1000 éléments, nous avons pu évaluer la distribution angulaire de  $\|\vec{B}\|$  le long de la face interne de la couche en céramique (figure 4.12).

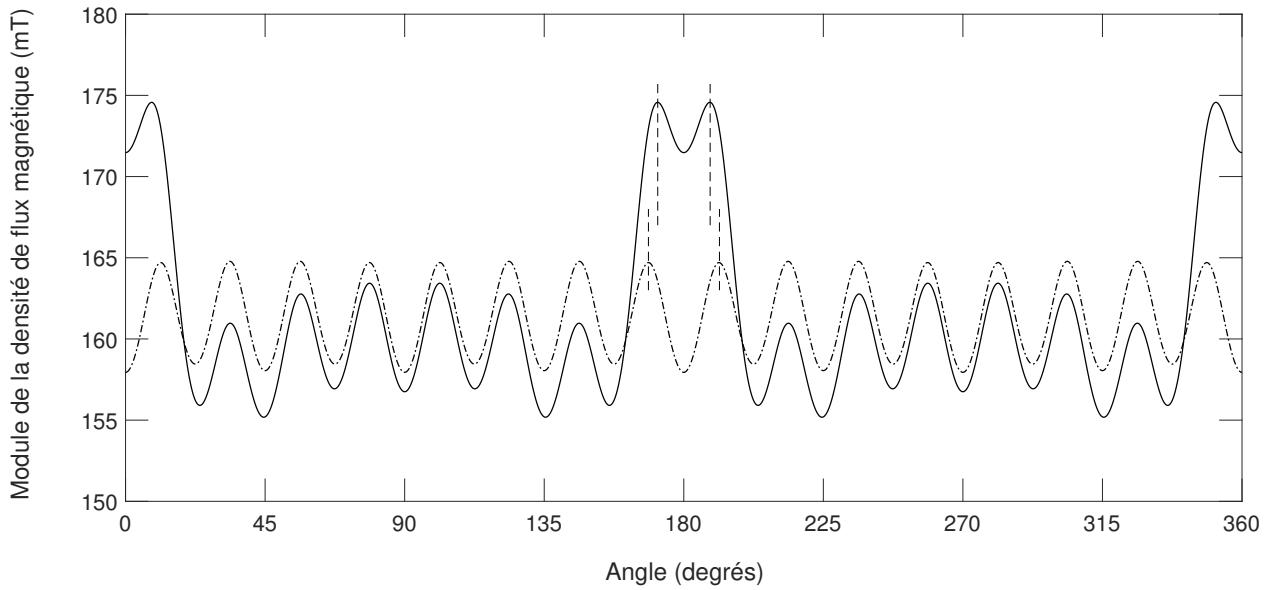


Figure 4.12 Distribution angulaire de  $\|\vec{B}\|$  le long de la face interne de la couche en céramique. La courbe en pointillés représente les solutions obtenues sans les prises de pression et la ligne pleine donne les résultats trouvés avec les prises de pression. De plus, les angles de  $0^\circ$  ( $360^\circ$ ) et  $180^\circ$  sont vis-à-vis le centre de chaque prise.

Nous observons dans les deux cas (sans et avec les prises de pression) qu'il n'y a aucune asymétrie dans le champ et qu'il y a des oscillations ayant des maximums locaux centrés avec chaque crayon externe de la grappe simulée (soit 16 au total conformément à la figure

4.11). En outre, nous voyons clairement à partir de la figure 4.12 que les prises de pression influencent l'intensité du champ et mènent à une valeur maximale du module de 175 mT versus 165 mT lorsqu'il n'y a pas de prise. Toutefois, dans tous les cas, les valeurs moyennes sont très similaires, soient 161.4 mT sans les prises et 161.5 mT avec les prises. Les variations relativement importantes observées en présence des prises de pression sont provoquées par les fuites magnétiques. En effet, l'absence de matériel magnétique dans ces régions du canal de la section d'essais (figure 1.1) provoque un accroissement non négligeable de la réluctance magnétique. Par conséquent, aux alentours des trous, les lignes de champ s'écartent autant vers l'intérieur que l'extérieur du canal. Il est clair que cette distorsion locale se traduit par les variations observées à la figure 4.12 et permet d'expliquer le rapprochement des pics observés autour de  $180^\circ$  en présence des prises de pression. Étant donné la condition stationnaire du problème, c.-à-d. des courants électriques constants et uniformément distribués à travers les 28 crayons (figure 4.11), la distribution du champ dans le restant du canal diminue légèrement. Il est important de souligner que cette condition de symétrie est seulement valable dans le cas où tous les matériaux, placés de part et d'autre dans les prises de pression, ainsi que leur géométrie sont identiques. Donc, il est clair que l'emploi d'un matériau différent dans une des deux connexions mécaniques utilisées pour la mesure de pression peut affecter la symétrie du champ. Dans une telle condition, les distributions locales du champ magnétique peuvent se traduire par des efforts non symétriques sur la grappe. Cependant, les effets de cette asymétrie sur le transfert thermique tel qu'observé expérimentalement (Teyssedou et Oleknovitch, 2007) ne peuvent pas être expliqués uniquement par le phénomène magnétique présenté dans ce mémoire.

En utilisant une grille de points comportant 500 éléments, nous avons pu évaluer la distribution radiale de  $\|\vec{B}\|$  le long de l'axe central des prises (figure 4.13). Ainsi, nous notons d'abord selon la figure 4.13 qu'il y a encore une fois aucun bris de symétrie et que le module du champ à l'extérieur du canal en acier 410 est systématiquement toujours plus intense sans prise qu'avec prises. Cependant, nous trouvons un maximum de 173 mT en présence de prises près de la couche en céramique et 267 mT à l'intérieur de l'acier (sans prise). De plus, l'écart entre les deux courbes de la figure 4.13 diminue au fur et à mesure que nous nous rapprochons du centre du canal et un écart de 11.6 mT est observé à la surface extérieure de la grappe (voir la ligne verticale présentée à la figure 4.13). Ces résultats confirment que la présence ou absence de prises de pression influence peu l'intensité de la distribution du champ qui peut affecter le transfert thermique autour de la grappe de simulation. Par ailleurs, il est intéressant de noter qu'il y a quatre changements abrupts de la pente situés à des distances approximatives de  $\pm 15$  mm,  $\pm 20$  mm,  $\pm 30$  mm et  $\pm 35$  mm qui sont tous engendrés par la

proximité des crayons de simulation.

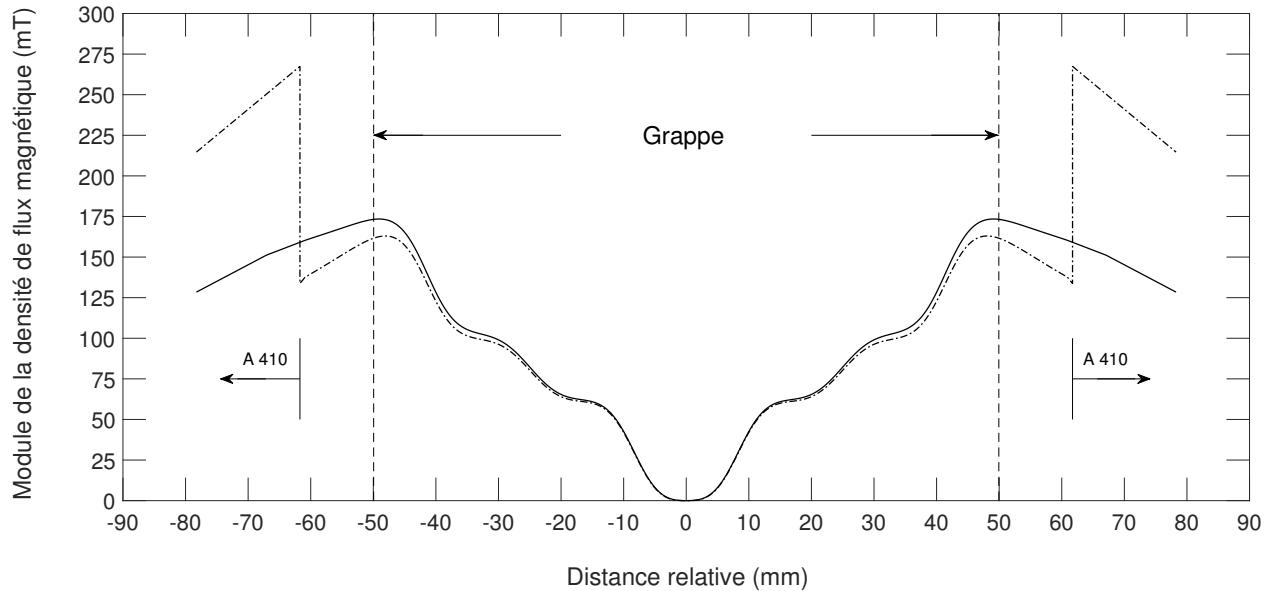


Figure 4.13 Distribution radiale de  $\|\vec{B}\|$  le long de l'axe central des prises de pression. La courbe en pointillés représente les solutions obtenues sans les prises de pression et la ligne pleine donne les résultats trouvés avec les prises de pression. De plus, les distances relatives sont données par rapport au centre de la section d'essais et les deux lignes verticales (situées à  $\pm 50$  cm) représentent la surface extérieure de la grappe.

Ceci étant dit, nous déduisons que les prises de pression ne provoquent pas d'asymétrie dans la distribution du champ magnétique  $\vec{H}$  à l'intérieur de la section d'essais de type CANDU et que, seulement à des distances surpassant l'interface interne de la couche en céramique, elles influencent de façon non négligeable l'intensité du champ. De façon plus générale, les résultats obtenus au cours de ce mémoire avec l'approche novatrice 3D nous mènent à conclure que la méthodologie développée est cohérente d'un point de vue mathématique et permet bel et bien la résolution fiable des équations de Maxwell statiques. L'emploi de cette méthodologie confirme que la distribution du champ, quoique très intense, n'introduit pas des effets asymétriques pouvant influencer les données expérimentales.

## CHAPITRE 5 CONCLUSION

### 5.1 Synthèse des travaux

Ce travail de maîtrise a présenté une nouvelle méthode de calcul 3D pour évaluer la distribution spatiale des champs magnétostatiques. Plus particulièrement, cette approche rend possible l'application de la méthode numérique du VIEM à des géométries tout à fait générales puisqu'elle est basée sur des éléments de discréttisation polyédriques. En outre, la méthodologie a été conçue spécifiquement pour l'analyse d'une section d'essais de type CANDU (décrise au chapitre 1 et à la section 4.4.2), et elle a permis de calculer, entre autres, les effets des prises destinées aux mesures de pression. De plus, une série de codes Matlab a été développée et insérée en annexe afin de rendre la méthode facile d'accès et simple à implémenter pour tous travaux futurs. L'élaboration de cette méthode a requis plusieurs étapes importantes que nous allons maintenant brièvement récapituler.

Premièrement, au chapitre 2, les solutions intégrales 2D et 3D de plusieurs champs magnétostatiques ont été données en détail, c.-à-d. en partant des équations de Maxwell et allant jusqu'à l'application de la méthode de la fonction de Green pour des conditions frontières appropriées. Parmi ces solutions, nous avons mis l'accent sur le tenseur de désaimantation  $\bar{N}$ , une quantité physique communément rencontrée en physique du solide et à la base de la méthode de résolution numérique proposée. Toutefois, comme nous l'avons vu au chapitre 3, un calcul approprié de  $\bar{N}$  requiert une analyse supplémentaire lorsque le point d'évaluation appartient au domaine d'intégration. Nous avons donc effectué une preuve mathématique novatrice qui nous a permis de prescrire une façon d'évaluer adéquatement le tenseur. En effet, nous avons élaboré une méthode de calcul matricielle non présentée dans la littérature qui a permis d'évaluer  $\bar{N}$  à partir d'une géométrie polyédrique, un problème qui n'a pas été résolu depuis l'émergence du VIEM au début des années 70.

Deuxièmement, au chapitre 4, nous avons décrit en détail le formalisme associé au VIEM en faisant appel à l'équation de Clausius-Mossoti et à trois critères physiques nécessaires à la définition du tenseur de désaimantation. Par la suite, nous nous sommes basés sur ces critères afin d'élaborer un schéma de discréttisation pour le VIEM parfaitement adapté à la géométrie cylindrique de la section d'essais. En effet, cette analyse nous a mené à conclure

qu'une discrétisation optimale du système doit être choisie de sorte à restreindre les éléments à des domaines carrés (en 2D) et cubiques (en 3D). Aussi, nous avons proposé une façon de valider la nouvelle méthode de calcul basée sur les solutions du tenseur  $\bar{N}$  pour un ellipsoïde général, un sujet qui prend ses racines dès le début du 19<sup>e</sup> siècle par le mathématicien Dirichlet. Conséquemment, ceci nous a mené à une nouvelle façon de déterminer les coefficients du tenseur de désaimantation pour un ellipsoïde sans avoir à effectuer d'approximation ni d'intégration numérique (c.-à-d. l'emploi des intégrales elliptiques).

Finalement, à la fin du chapitre 4, nous avons appliqué toutes les notions théoriques développées au cours du mémoire afin de simuler une portion de la section d'essais. De cette manière, quelques distributions pour le module du champ magnétique ont été analysées afin de cerner de façon préliminaire l'influence des prises de pression sur la grappe et par conséquent sur les mesures (pression, température, etc.). À partir de cette analyse, nous avons pu constater d'une part qu'il n'y a aucune assymétrie dans le champ et d'autre part qu'il y a un effet discernable dû à la présence des prises. Cependant, celui-ci est négligeable au niveau de la grappe de combustible simulée.

## 5.2 Limitations du modèle proposé

Quoique la méthode de calcul développée dans ce mémoire s'apprête à toute forme de géométrie, il existe certains aspects théoriques du modèle qui limitent les applications envisageables. Tout d'abord, tel que discuté brièvement à la section 4.4.2, en présence d'un champ magnétique relativement intense, le milieu se comporte de manière non linéaire. En effet, cela signifie physiquement que la susceptibilité magnétique varie en fonction du champ appliqué et de la réponse du matériel lui-même. Or, même si nous avons contourné ce problème en utilisant des suppositions bien justifiées, notre modèle n'est pas bien adapté à ce genre de situation. De plus, afin de modeler les crayons de simulation présents dans la section d'essais de type CANDU, nous avons appliqué la loi de Biot-Savard 2D donnée par l'équation (2.104) pour des éléments de courant infinitésimaux, c.-à-d pour des domaines ayant des dimensions négligeables par rapport au système étudié. Étant donné que les courants électriques sont appliqués dans les parois minces des crayons (voir la figure 4.11), l'emploi d'éléments ayant des largeurs infinitésimales constitue une approximation. Pour améliorer la méthode, nous devrions inclure dans le calcul la discrétisation fine de la paroi de chaque crayon. Conséquemment, une approche plus rigoureuse serait de résoudre la forme intégrale représentée par l'expression (2.96) pour une densité de courant  $\tilde{J}_f$  appropriée ; cette voie semble possible selon le travail effectué par Beth (Beth, 1966) pour le traitement 2D de ce type de problème.

### 5.3 Améliorations futures

À la lumière de tout ce qui a été réalisé au cours de ce travail de maîtrise, nous pouvons à ce stade-ci suggérer quelques améliorations constructives à apporter à la méthode proposée. En ce qui a trait à la discussion effectuée à la section 4.4.2 concernant les milieux non linéaires, un modèle plus approprié du VIEM devrait implémenter une courbe expérimentale ou analytique de  $\chi_m$  en fonction de  $\|\vec{H}\|$  dans le but d'appliquer une méthode itérative décrite en détail par Newman *et al.* (Newman *et al.*, 1972) ainsi que par Turner (Turner, 1973). Toutefois, une telle approche nécessite d'une part des données expérimentales sur le matériau considéré et d'autre part une analyse de convergence adéquate. Par ailleurs, tel qu'abordé en profondeur par Landry-Lavoie (Landry-Lavoie, 2013), la section d'essais de type CANDU comporte aussi des supports externes en acier au carbone, un aspect que nous avons omis dans le cadre de ce mémoire. En effet, afin d'obtenir une représentation plus fidèle du système, cette structure devrait être implémentée à partir d'une nouvelle fonction Matlab conçue pour générer des rectangles (en 2D) et des prismes rectangulaires (en 3D) représentatifs de ces supports. Finalement, tel que déjà mentionné, même si les crayons ne sont pas ferromagnétiques, une discréétisation fine des éléments de courant le long de leurs surfaces est fortement souhaitable.

Même s'il ne s'agit pas d'un mémoire par article, nous devons mentionner que la première partie de ce travail (section 3.1) a été l'objet d'une publication dans la revue scientifique “European Journal of Physics”. À ce moment-ci, un deuxième papier sur le calcul 3D du tenseur  $\bar{\bar{N}}$  est en rédaction et sera bientôt le sujet d'une deuxième publication.

## RÉFÉRENCES

- ASHCROFT, N. et MERMIN, N. (1976). *Solid State Physics*. Holt, Rinehart & Winston.
- BARNARD, A., DUCK, I., LYNN, M. et TIMLAKE, W. (1967). The Application of Electromagnetic Theory to Electrocardiology. *Biophysical Journal*, vol. 7, pp. 463–491.
- BETH, R. (1966). Complex Representation and Computation of Two-Dimensional Magnetic Fields. *Journal of Applied Physics*, vol. 37, pp. 2568–2571.
- BUTKOV, E. (1968). *Mathematical Physics*. Addison-Wesley.
- CRONEMEYER, D. (1991). Demagnetization Factors for General Ellipsoids. *Journal of Applied Physics*, vol. 70, pp. 2911–2914.
- CUBBERLY, W., UNTERWEISER, P., BENJAMIN, D., KIRKPATRICK, C., KNOLL, V. et NIEMAN, K. (1980). *Metals Handbook vol. 3 (ninth edition)*. ASM.
- DIRICHLET, G. (1839). Über eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale. *Preussischen Akademie der Wissenschaften*.
- DURAND, E. (1968). *Magnétostatique*. Masson et cie.
- FABBRI, M. (2008). Magnetic Flux Density and Vector Potential of Uniform Polyhedral Sources. *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 44, pp. 32–36.
- FEYNMAN, R., LEIGHTON, R. et SANDS, M. (1979). *The Feynman Lectures on Physics, vol. 2 : Mainly Electromagnetism and Matter*. Addison-Wesley.
- HALL, D. et TEYSSEDOU, A. (2014). Calculation of self-field coefficients for 2D magnetostatic systems. *European Journal of Physics*, vol. 35, pp. 1–8.
- HARRINGTON, R. (1967). Calculation of self-field coefficients for 2D magnetostatic systems. *Proceedings of the IEEE*, vol. 55, pp. 136–149.
- HOOLE, S. (1989). *Computer-Aided Analysis and Design of Electromagnetic Devices*. Elsevier.
- KOO, J. (2015). Negative Electric Susceptibility and Magnetism from Translational Invariance and Rotational Invariance. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 375, pp. 106–110.
- LANDRY-LAVOIE, R. (2013). *Étude de l'influence du champ magnétique dans une section d'essais thermohydraulique d'un canal de réacteur nucléaire CANDU 6*. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal.
- MAXWELL, J. (1881). *Electricity and Magnetism (vol. II, second edition)*. Oxford University Press Warehouse.

- MORANDI, A., FABBRI, M. et RIBANI, P. (2010). A Modified Formulation of the Volume Integral Equations Method for 3-D Magnetostatics. *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 46, pp. 3848–3859.
- NEWMAN, M., TROWBRIDGE, C. et TURNER, L. (1972). GFUN : An Interactive Program as an Aid to Magnet Design. *Rutherford High Energy Laboratory*.
- OOSTEROM, A. et STRACKEE, J. (1983). The Solid Angle of a Plane Triangle. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 30, pp. 125–126.
- OSBORN, J. (1945). Demagnetizing Factors of the General Ellipsoid. *Physical Review*, vol. 67, pp. 351–357.
- PIERCE, B. (1929). *A Short Table of Integrals (third edition)*. Ginn and Company.
- REDDY, J. (2005). *An Introduction to the Finite Element Method (third edition)*. McGraw-Hill.
- SILVESTER, P. et FERRARI, R. (1990). *Finite Elements for Electrical Engineers (second edition)*. Cambridge University Press.
- STEWART, J. (2012). *Calculus (seventh edition)*. Brooks/Cole.
- STONER, E. (1945). The Demagnetizing Factors for Ellipsoids. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 36, pp. 803–821.
- STRATTON, J. (1941). *Electromagnetic Theory*. John Wiley & Sons.
- TEYSSEDOU, A. et OLEKNOVITCH, A. (2007). Independent review of 28-element CHF and PDO tests at Stern laboratories. *Rapport technique IGE-304, Département de génie physique, École polytechnique de Montréal*.
- TONG, L. et TANG, Y. (1997). *Boiling Heat Transfer and Two-Phase Flow (second edition)*. Taylor & Francis.
- TURNER, L. (1973). Direct calculation of magnetic fields in the presence of iron, as applied to the computer program GFUN. *Rutherford High Energy Laboratory*.
- WROBEL, L. et ALIABADI, M. (2002). *The Boundary Element Method*. John Wiley & Sons.

## ANNEXE A

### Erreurs relatives

D'abord, dans le cadre de la section 4.2, les erreurs relatives  $\epsilon$  (données en %) des calculs effectués numériquement par rapport aux valeurs de référence données par Osborn (Osborn, 1945) sont définies comme suit :

$$\epsilon = \frac{|\text{valeur approximative} - \text{valeur de référence}|}{|\text{valeur de référence}|} \times 100. \quad (\text{A.1})$$

De cette manière, le calcul matriciel 2D nous mène aux tableaux suivants :

Tableau A.1 Erreurs relatives (en %) pour la méthode matricielle 2D ( $n = 50$ ). Les erreurs relatives  $\epsilon_{xx}$  et  $\epsilon_{yy}$  sont respectivement associées à  $N_{xx}$  et  $N_{yy}$ .

$b/a$	$\epsilon_{xx}$	$\epsilon_{yy}$
1.0	0.00	0.00
0.9	0.03	0.03
0.8	0.07	0.05
0.7	0.12	0.08
0.6	0.19	0.11
0.5	0.30	0.15

Tableau A.2 Erreurs relatives (en %) pour la méthode matricielle 2D ( $n = 100$ ). Les erreurs relatives  $\epsilon_{xx}$  et  $\epsilon_{yy}$  sont respectivement associées à  $N_{xx}$  et  $N_{yy}$ .

$b/a$	$\epsilon_{xx}$	$\epsilon_{yy}$
1.0	0.00	0.00
0.9	0.01	0.01
0.8	0.02	0.01
0.7	0.03	0.02
0.6	0.05	0.03
0.5	0.08	0.04

Finalement, le calcul matriciel 3D nous mène aux tableaux suivants :

Tableau A.3 Erreurs relatives (en %) pour la méthode matricielle 3D ( $c/a = 0.5$  et  $n = 50$ ). Les erreurs relatives  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  et  $\epsilon_{zz}$  sont respectivement associées à  $N_{xx}$ ,  $N_{yy}$  et  $N_{zz}$ .

$b/a$	$\epsilon_{xx}$	$\epsilon_{yy}$	$\epsilon_{zz}$
1.00000	0.08	0.08	0.07
0.98863	0.04	0.12	0.07
0.95513	0.09	0.07	0.07
0.90139	0.11	0.05	0.07
0.83073	0.15	0.01	0.07
0.74825	0.20	0.01	0.08
0.66144	0.29	0.05	0.09
0.58115	0.32	0.04	0.10
0.52213	0.44	0.06	0.13
0.50000	0.48	0.09	0.11

Tableau A.4 Erreurs relatives (en %) pour la méthode matricielle 3D ( $c/a = 0.5$  et  $n = 100$ ). Les erreurs relatives  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  et  $\epsilon_{zz}$  sont respectivement associées à  $N_{xx}$ ,  $N_{yy}$  et  $N_{zz}$ .

$b/a$	$\epsilon_{xx}$	$\epsilon_{yy}$	$\epsilon_{zz}$
1.00000	0.02	0.02	0.02
0.98863	0.03	0.06	0.02
0.95513	0.02	0.03	0.02
0.90139	0.02	0.02	0.02
0.83073	0.04	0.00	0.02
0.74825	0.05	0.00	0.02
0.66144	0.09	0.02	0.02
0.58115	0.06	0.01	0.03
0.52213	0.11	0.00	0.05
0.50000	0.12	0.02	0.03

## ANNEXE B

### Graphiques : induction uniforme et cylindre creux

De la même façon qui nous a mené à la figure 4.6, nous avons déterminé numériquement les configurations optimales pour  $N_r$  et  $N_\phi$ , et ce, à partir de deux systèmes avec des valeurs de  $N$  ou  $b/a$  différentes de celles employées à la section 4.3.1. Premièrement, en faisant varier le ratio  $b/a$ , nous obtenons le graphique suivant :

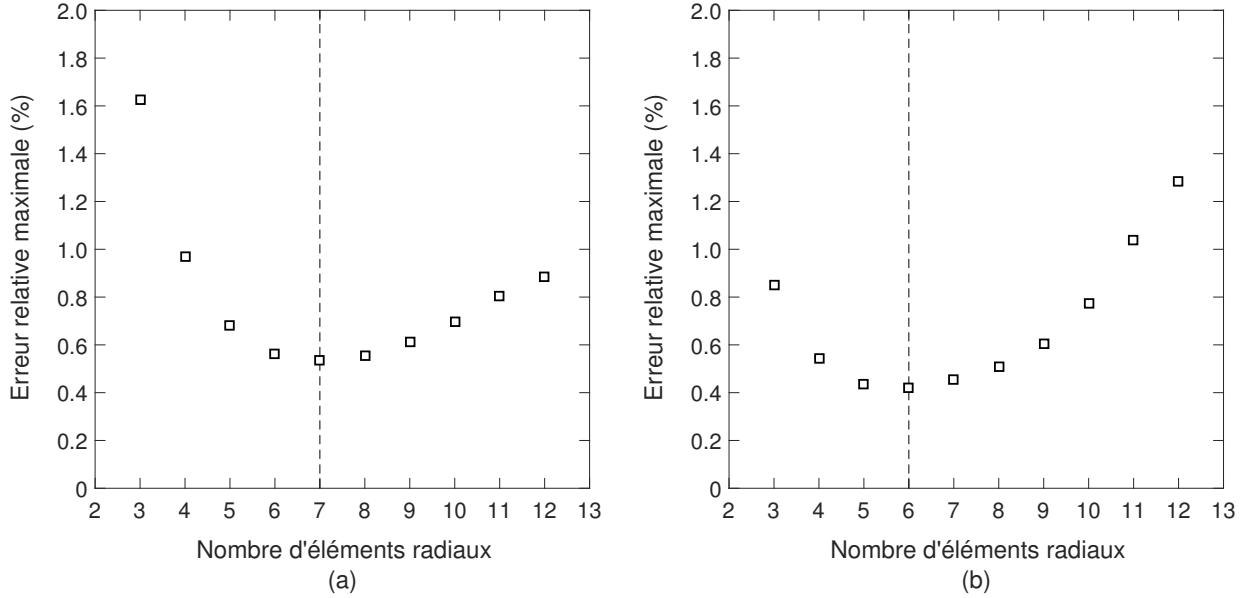


Figure B.1 Erreur relative maximale pour un système tel que  $N = 500$ ,  $a = 0.1$  m et  $b = 0.15$  m : (a) région  $0 \leq r < a$  avec un minimum à  $N_r = 7$  et  $\varepsilon_{\%}^{\max} = 0.54\%$ ; (b) région  $r > b$  avec un minimum à  $N_r = 6$  et  $\varepsilon_{\%}^{\max} = 0.42\%$ . Veuillez noter que  $N_\phi$  s'ajuste selon la valeur de  $N_r$  d'après l'équation (4.25).

Deuxièmement, en faisant varier le nombre  $N$ , nous obtenons le graphique suivant :

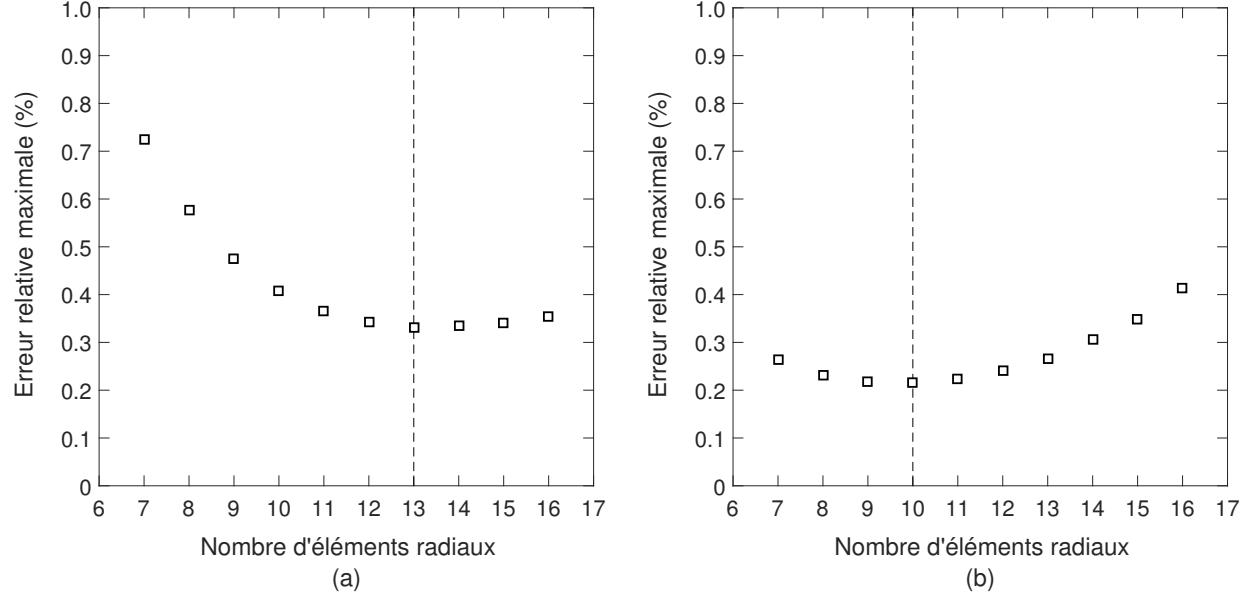


Figure B.2 Erreur relative maximale pour un système tel que  $N = 1000$ ,  $a = 0.1$  m et  $b = 0.2$  m : (a) région  $0 \leq r < a$  avec un minimum à  $N_r = 13$  et  $\varepsilon_{\%}^{\max} = 0.33$  % ; (b) région  $r > b$  avec un minimum à  $N_r = 10$  et  $\varepsilon_{\%}^{\max} = 0.22$  %. Veuillez noter que  $N_\phi$  s'ajuste selon la valeur de  $N_r$  d'après l'équation (4.25).

## ANNEXE C

### Graphiques : blindage magnétique d'une ligne bifilaire

De la même façon qui nous a mené à la figure 4.9, nous avons déterminé numériquement les configurations optimales pour  $N_r$  et  $N_\phi$ , et ce, à partir de deux systèmes avec des valeurs de  $N$  ou  $b/a$  différentes de celles employées à la section 4.3.2. Premièrement, en faisant varier le ratio  $b/a$ , nous obtenons le graphique suivant :

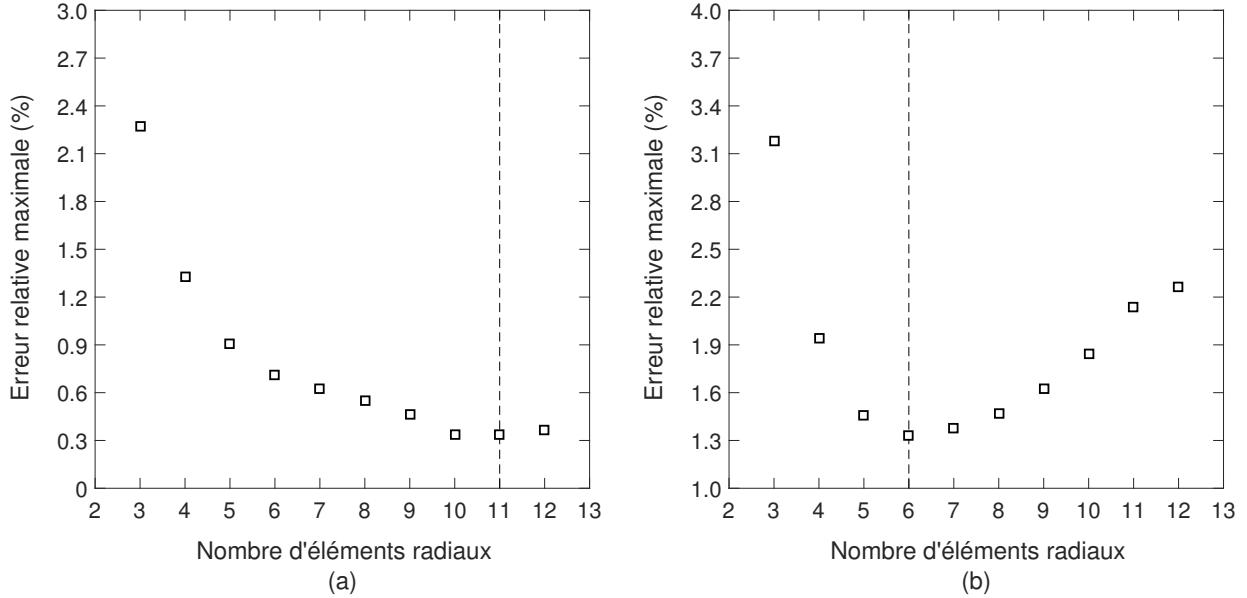


Figure C.1 Erreur relative maximale pour un système tel que  $N = 500$ ,  $a = 0.1$  m et  $b = 0.15$  m : (a) région  $0 \leq r < a$  avec un minimum à  $N_r = 11$  et  $\varepsilon_{\%}^{\max} = 0.34\%$ ; (b) région  $r > b$  avec un minimum à  $N_r = 6$  et  $\varepsilon_{\%}^{\max} = 1.3\%$ . Veuillez noter que  $N_\phi$  s'ajuste selon la valeur de  $N_r$  d'après l'équation (4.25).

Deuxièmement, en faisant varier le nombre  $N$ , nous obtenons le graphique suivant :

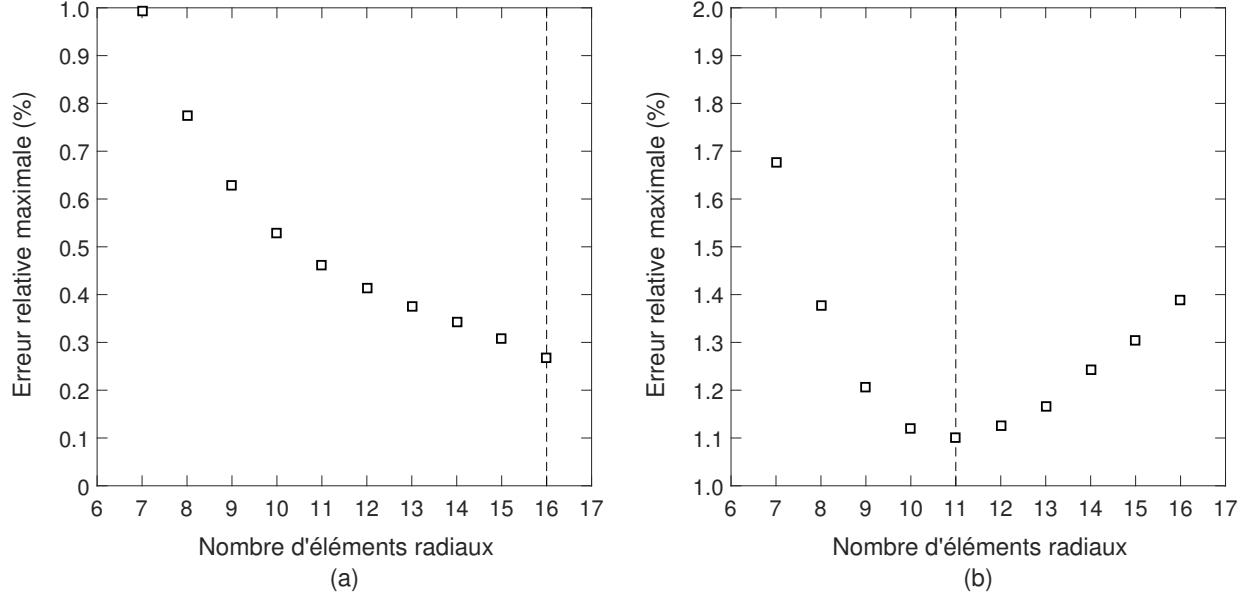


Figure C.2 Erreur relative maximale pour un système tel que  $N = 1000$ ,  $a = 0.1$  m et  $b = 0.2$  m : (a) région  $0 \leq r < a$  avec un minimum à  $N_r = 16$  et  $\varepsilon_{\%}^{\max} = 0.27$  % ; (b) région  $r > b$  avec un minimum à  $N_r = 11$  et  $\varepsilon_{\%}^{\max} = 1.1$  %. Veuillez noter que  $N_\phi$  s'ajuste selon la valeur de  $N_r$  d'après l'équation (4.25).

## ANNEXE D

### Graphiques : comparaison entre les approches 2D et 3D

Dans le cadre de la section 4.4.2, les erreurs relatives  $\epsilon$  (données en %) pour le module  $\|\vec{H}\|$  associées aux calculs effectués en 3D sans les prises de pression par rapport aux valeurs obtenues en 2D (approche invariant par translation) sont définies comme suit :

$$\epsilon = \frac{|\|\vec{H}\|_{3D} - \|\vec{H}\|_{2D}|}{\|\vec{H}\|_{2D}} \times 100. \quad (\text{D.1})$$

Ainsi, en utilisant respectivement pour les cas 2D et 3D des valeurs de  $N = 1500$  et  $M = 1500$  pour la discréétisation du canal, nous obtenons le graphique suivant :

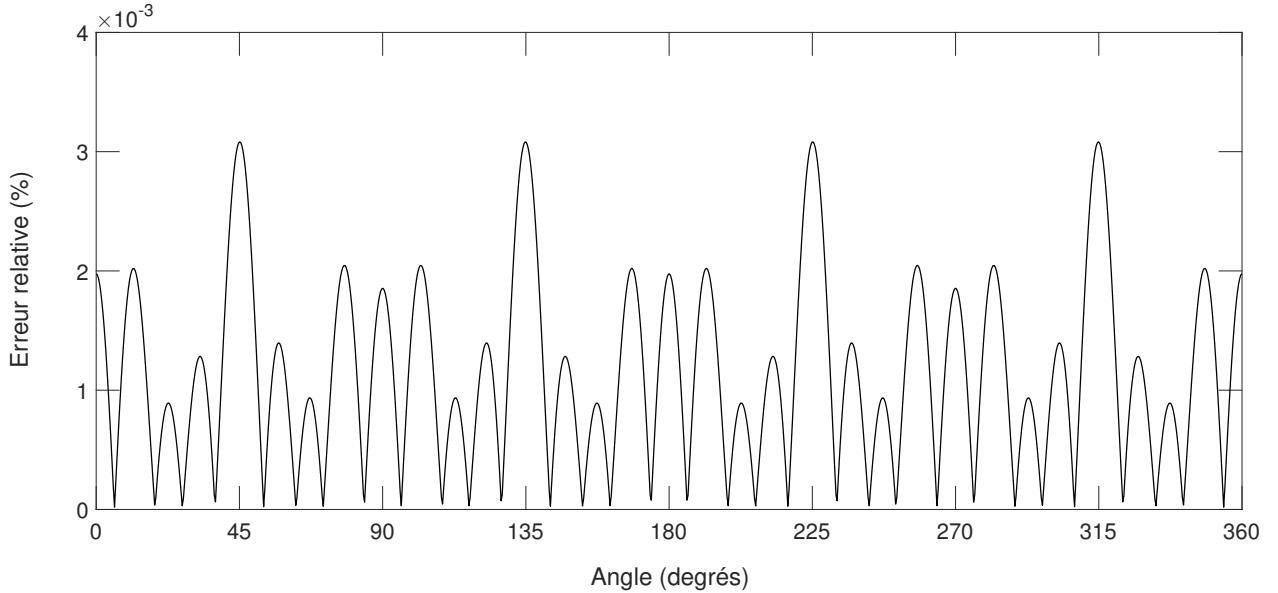


Figure D.1 Erreur relative le long de l'interface interne de la couche en céramique pour un système 2D tel que  $N = 1500$  et un système 3D (sans prise de pression) tel que  $M = 1500$ . Veuillez noter que dans les deux cas nous utilisons une grille de points ayant 1000 éléments angulaires et que la discréétisation du canal est effectuée selon le schéma de discréétisation décrit par les expressions (4.27) et (4.40).

En effet, nous constatons que la différence maximale entre les modules vectoriels ne dépasse pas une erreur relative de  $3.5 \times 10^{-3} \%$ .

## ANNEXE E

### Tenseur de désaimantation 2D Code MATLAB : n2d.m

```

1 function [ N ] = n2d( x, y, nodes )
2 %N2D - Evaluate the 2D demagnetizing tensor.
3 %
4 % N = N2D(X, Y, NODES)
5
6 format long;
7 %% Initialize variables %%
8
9 Nb_elements = numel(nodes);
10 N = nan(2, 2*Nb_elements);
11
12 %% Main algorithm %%
13
14 for i = 1:Nb_elements
15     matrix = [nodes{i}, nodes{i}(:, 1)];
16     Nb_nodes = numel(nodes{i}(1, :));
17     Nxx = nan(1, Nb_nodes);
18     Nxy = nan(1, Nb_nodes);
19     Nyx = nan(1, Nb_nodes);
20     Nyy = nan(1, Nb_nodes);
21     for j = 1:Nb_nodes
22         x1 = matrix(1, j) - x;
23         y1 = matrix(2, j) - y;
24         x2 = matrix(1, j + 1) - x;
25         y2 = matrix(2, j + 1) - y;
26         I = log((x2 + 1i*y2)/(x1 + 1i*y1))/(2*pi);
27         tx = (x2 - x1)/sqrt((x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2);
28         ty = (y2 - y1)/sqrt((x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2);
29         alpha = real(I);
30         if dot([x1 ; y1], [ty ; -tx]) == 0
31             beta = 0;
32         else
33             beta = imag(I);
34         end

```

```
35     Nxx(j) = ty^2*beta + tx*ty*alpha;
36     Nxy(j) = -tx*ty*beta + ty^2*alpha;
37     Nyx(j) = -(tx*ty*beta + tx^2*alpha);
38     Nyy(j) = tx^2*beta - tx*ty*alpha;
39   end
40   tag = 2*i - 1;
41   N(1, tag) = sum(Nxx);
42   N(1, tag + 1) = sum(Nxy);
43   N(2, tag) = sum(Nyx);
44   N(2, tag + 1) = sum(Nyy);
45 end
46 end
```

## ANNEXE F

### Tenseur de désaimantation 3D Code MATLAB : n3d.m

```

1 function [ N ] = n3d( x, y, z, nodes )
2 %N3D - Evaluate the 3D demagnetizing tensor.
3 %
4 % N = N3D(X, Y, Z, NODES)
5
6 format long;
7 %% Initialize variables %%
8
9 Nb_elements = numel(nodes);
10 N = nan(3, 3*Nb_elements);
11
12 %% Main algorithm %%
13
14 for i = 1:Nb_elements
15     Nb_faces = numel(nodes{i});
16     Nxx = nan(1, Nb_faces);
17     Nxy = nan(1, Nb_faces);
18     Nxz = nan(1, Nb_faces);
19     Nyx = nan(1, Nb_faces);
20     Nyy = nan(1, Nb_faces);
21     Nyz = nan(1, Nb_faces);
22     Nzr = nan(1, Nb_faces);
23     Nzy = nan(1, Nb_faces);
24     Nzr = nan(1, Nb_faces);
25     for j = 1:Nb_faces
26         matrix = [nodes{i}{j}(:, 1:(end - 1)), nodes{i}{j}(:, 1)];
27         Nb_nodes = numel(nodes{i}{j}(1, 1:(end - 1)));
28         R0 = nodes{i}{j}(:, 1) - [x ; y ; z];
29         alpha = zeros(Nb_nodes, 3);
30         beta = zeros(1, Nb_nodes);
31         nx = nodes{i}{j}(1, end);
32         ny = nodes{i}{j}(2, end);
33         nz = nodes{i}{j}(3, end);
34         n = [nx ; ny ; nz];

```

```

35     for k = 1:Nb_nodes
36         R1 = matrix(:, k) - [x ; y ; z];
37         R2 = matrix(:, k + 1) - [x ; y ; z];
38         t = (R2 - R1)/sqrt(dot(R2 - R1, R2 - R1));
39         u = sqrt(dot(R1, R1)) + sqrt(dot(R2, R2)) ...
40             - sqrt(dot(R2 - R1, R2 - R1));
41         v = sqrt(dot(R1, R1)) + sqrt(dot(R2, R2)) ...
42             + sqrt(dot(R2 - R1, R2 - R1));
43         alpha(k, :) = -t/(4*pi)*log(v/u);
44         if k == 1 || k == Nb_nodes || dot(R0, n) == 0
45             beta(k) = 0;
46             continue;
47         end
48         a = cross(R0, R1);
49         b = cross(R1, R2);
50         c = cross(R2, R0);
51         Z1 = dot(a, c) - li*sqrt(dot(cross(a, c), cross(a, c)));
52         Z2 = dot(b, a) - li*sqrt(dot(cross(b, a), cross(b, a)));
53         Z3 = dot(c, b) - li*sqrt(dot(cross(c, b), cross(c, b)));
54         beta(k) = (imag(log(Z1*Z2*Z3*exp(-li*pi))) + pi)/(4*pi);
55         beta(k) = sign(dot(0.5*(R1 + R2) - R0, cross(t, n)))*beta(k);
56     end
57     alpha = sum(alpha);
58     beta = sign(dot(R0, n))*sum(beta);
59     Nxx(j) = nx^2*beta + nx*nz*alpha(2) - nx*ny*alpha(3);
60     Nxy(j) = nx*ny*beta + ny*nz*alpha(2) + (nx^2 + nz^2)*alpha(3);
61     Nxz(j) = nx*nz*beta - (nx^2 + ny^2)*alpha(2) - ny*nz*alpha(3);
62     Nyx(j) = nx*ny*beta - nx*nz*alpha(1) - (ny^2 + nz^2)*alpha(3);
63     Nyy(j) = ny^2*beta - ny*nz*alpha(1) + nx*ny*alpha(3);
64     Nyz(j) = ny*nz*beta + (nx^2 + ny^2)*alpha(1) + nx*nz*alpha(3);
65     Nzr(j) = nx*nz*beta + nx*ny*alpha(1) + (ny^2 + nz^2)*alpha(2);
66     Nzy(j) = ny*nz*beta - (nx^2 + nz^2)*alpha(1) - nx*ny*alpha(2);
67     Nzz(j) = nz^2*beta + ny*nz*alpha(1) - nx*nz*alpha(2);
68 end
69 tag = 3*i - 2;
70 N(1, tag) = sum(Nxx);
71 N(1, tag + 1) = sum(Nxy);
72 N(1, tag + 2) = sum(Nxz);
73 N(2, tag) = sum(Nyx);
74 N(2, tag + 1) = sum(Nyy);
75 N(2, tag + 2) = sum(Nyz);
76 N(3, tag) = sum(Nzx);
77 N(3, tag + 1) = sum(Nzy);
78 N(3, tag + 2) = sum(Nzz);

```

79 end  
80 end

## ANNEXE G

### Géométrie elliptique Code MATLAB : gellipse.m

```
1 function [ nodes ] = gellipse( xc, yc, xr, yr, n )
2 %GELLIPE - Generate the nodal positions of an ellipse.
3 %
4 %    NODES = GELLIPE(XC, YC, XR, YR, N)
5 %
6 format long;
7 %% Main algorithm %%
8
9 phi = (0:360/n:(360 - 360/n)) + (1 + (-1)^(n + 1))*(90/n);
10 r = 1./sqrt((cosd(phi)/xr).^2 + (sind(phi)/yr).^2);
11 nodes = {[r.*cosd(phi) + xc ; r.*sind(phi) + yc]};
12 end
```

## ANNEXE H

### Géométrie ellipsoïdale

#### Code MATLAB : gellipsoid.m

```

1 function [ nodes ] = gellipsoid( xc, yc, zc, xr, yr, zr, n, display )
2 %GELLIPOID - Generate the nodal positions of an ellipsoid.
3 %
4 % NODES = GELLIPOID(XC, YC, ZC, XR, YR, ZR, N, DISPLAY)
5
6 format long;
7 %% Initialize variables %%
8
9 counter = zeros(1, 2);
10 nodes = {cell(1, n^2)};
11
12 %% Main algorithm %%
13
14 if exist('display', 'var') && ischar(display) && strcmpi(display, 'on')
15     clc;
16     fprintf('Generating ellipsoid...\n');
17     fprintf('Percentage of completion: 0 %%');
18 end
19 theta = 0:180/n:180;
20 z = zr*cosd(theta) + zc;
21 phi = (0:360/n:(360 - 360/n)) + (1 + (-1)^(n + 1))*(90/n);
22 phi = [phi, phi(1) + 360];
23 r = cell(n + 1, 1);
24 for i = 1:(n + 1)
25     u = 1 - ((z(i)*ones(1, n + 1) - zc)/zr).^2;
26     v = (cosd(phi)/xr).^2 + (sind(phi)/yr).^2;
27     rho = sqrt(u./v);
28     r{i}(1, :) = rho.*cosd(phi) + xc;
29     r{i}(2, :) = rho.*sind(phi) + yc;
30     r{i}(3, :) = z(i)*ones(1, n + 1) + zc;
31 end
32 for i = 1:n
33     for j = 1:n
34         counter(1) = counter(1) + 1;

```

```

35     if exist('display', 'var') && ischar(display) ...
36         && strcmpi(display, 'on')
37     if counter(1) == 1 || round((counter(2)/n^2)*100) == 1
38         clc;
39         counter(2) = 0;
40         fprintf('Generating ellipsoid...\n');
41         fprintf('Percentage of completion: %i %%', ...
42                 round((counter(1)/n^2)*100));
43     end
44     counter(2) = counter(2) + 1;
45 end
46 upper_layer = r{j}(:, (i + 1):-1:i);
47 lower_layer = r{j + 1}(:, i:(i + 1));
48 if j == 1
49     upper_layer = upper_layer(:, 1);
50 elseif j == n
51     lower_layer = lower_layer(:, 1);
52 end
53 nodes{1}{counter(1)} = [upper_layer, lower_layer];
54 r_rel = nodes{1}{counter(1)}(:, 1) - [xc ; yc ; zc];
55 r21 = nodes{1}{counter(1)}(:, 1) - nodes{1}{counter(1)}(:, 2);
56 r31 = nodes{1}{counter(1)}(:, 1) - nodes{1}{counter(1)}(:, 3);
57 nn = cross(r21, r31)/sqrt(dot(cross(r21, r31), cross(r21, r31)));
58 if sign(dot(r_rel, nn)) == -1
59     clc;
60     error('An unexpected error occurred.');
61 end
62 nodes{1}{counter(1)} = [nodes{1}{counter(1)}, nn];
63 end
64 end
65 if exist('display', 'var') && ischar(display) && strcmpi(display, 'on')
66     clc;
67 end
68 end

```

## ANNEXE I

### Géométrie annulaire

**Code MATLAB : gannulus.m**

```

1 function [ nodes, r_in ] = gannulus( xc, yc, r, phi, Nr, Na, r_gap )
2 %GANNULUS - Generate the nodal positions of an annulus.
3 %
4 %    [NODES, R_IN] = GANNULUS(XC, YC, R, PHI, NR, NA, R_GAP)
5
6 format long;
7 %% Verify input data %%
8
9 msg = '';
10 char = { 'mean', 'critical' };
11 if ~exist('r_gap', 'var') % Verify 'r_gap' variable.
12     r_gap = 'mean';
13 elseif ~isnumeric(r_gap) && ~ischar(r_gap)
14     msg = 'The variable ''R_GAP'' must be numeric or a character array.';
15 elseif isempty(r_gap)
16     msg = 'The variable ''R_GAP'' cannot be empty.';
17 elseif numel(r_gap(:, 1)) ~= 1
18     msg = 'The variable ''R_GAP'' must have 1 line.';
19 elseif ischar(r_gap) && sum(strcmpi(r_gap, char)) == 0
20     msg = 'An unrecognized character array value for ''R_GAP'' was given.';
21 elseif isnumeric(r_gap) && sum(isnan(r_gap)) ~= 0
22     msg = 'Numerical values of ''R_GAP'' cannot be NaN.';
23 elseif isnumeric(r_gap) && sum(r_gap <= 0) ~= 0
24     msg = 'Numerical values of ''R_GAP'' must be > 0.';
25 elseif isnumeric(r_gap) && sum(r_gap >= 100) ~= 0
26     msg = 'Numerical values of ''R_GAP'' must be < 100.';
27 end
28 if ~isempty(msg)
29     clc;
30     error(msg);
31 end
32
33 %% Initialize variables %%
34

```

```

35 counter = 0;
36 nodes = cell(1, Nr*Na);
37 r = r(1):(r(2) - r(1))/Nr:r(2);
38 phi = phi(1):(phi(2) - phi(1))/Na:phi(2);
39 if isnumeric(r_gap) % Numerical array.
40     r_gap = r_gap/100;
41     r_in = cell(1, numel(r_gap));
42     for i = 1:numel(r_gap)
43         r_in{i} = nan(2, Nr*Na);
44     end
45 else % Character array.
46     r_in = nan(2, Nr*Na);
47 end
48
49 %% Main algorithm %%
50
51 for i = 1:Nr % Generate discretization elements.
52     for j = 1:Na
53         counter = counter + 1;
54         r1 = r(i)*[cosd(phi(j)) ; sind(phi(j))] + [xc ; yc];
55         r2 = r(i + 1)*[cosd(phi(j)) ; sind(phi(j))] + [xc ; yc];
56         r3 = r(i + 1)*[cosd(phi(j + 1)) ; sind(phi(j + 1))] + [xc ; yc];
57         r4 = r(i)*[cosd(phi(j + 1)) ; sind(phi(j + 1))] + [xc ; yc];
58         nodes{counter} = [r1, r2, r3, r4];
59     end
60 end
61 for i = 1:numel(nodes) % Generate inner points.
62     r1 = nodes{i}(:, 1);
63     r2 = nodes{i}(:, 2);
64     r3 = nodes{i}(:, 3);
65     r4 = nodes{i}(:, 4);
66 %=====
67     if strcmpi(r_gap, 'critical') % Point of zero gradient.
68 %=====
69     matrix = nan(2);
70     matrix(1, 1) = r3(1) - r1(1);
71     matrix(1, 2) = r2(1) - r4(1);
72     matrix(2, 1) = r3(2) - r1(2);
73     matrix(2, 2) = r2(2) - r4(2);
74     vector = [r2(1) - r1(1) ; r2(2) - r1(2)];
75     t = matrix\vector;
76     x = (r3(1) - r1(1))*t(1) + r1(1);
77     y = (r3(2) - r1(2))*t(1) + r1(2);
78     r_in(:, i) = [x ; y];

```

```

79 %=====
80 elseif strcmpi(r_gap, 'mean') % Mean nodal point.
81 %=====
82 x = mean([r1(1), r2(1), r3(1), r4(1)]);
83 y = mean([r1(2), r2(2), r3(2), r4(2)]);
84 r_in(:, i) = [x ; y];
85 %=====
86 elseif isnumeric(r_gap) % Relative spacing point(s).
87 %=====
88 xx = mean([r1(1), r2(1), r3(1), r4(1)]);
89 yy = mean([r1(2), r2(2), r3(2), r4(2)]);
90 rr = [xx - xc ; yy - yc]/sqrt((xx - xc)^2 + (yy - yc)^2);
91 x_base = mean([r1(1), r4(1)]);
92 y_base = mean([r1(2), r4(2)]);
93 x_top = mean([r2(1), r3(1)]);
94 y_top = mean([r2(2), r3(2)]);
95 m_base = sqrt((x_base - xc)^2 + (y_base - yc)^2);
96 m_top = sqrt((x_top - xc)^2 + (y_top - yc)^2);
97 for j = 1:numel(r_gap)
98     m = (1 - r_gap(j))*m_base + r_gap(j)*m_top;
99     x = m*rr(1) + xc;
100    y = m*rr(2) + yc;
101    r_in{j}(:, i) = [x ; y];
102 end
103 %=====
104 else
105 %=====
106 clc;
107 error('An unknown value for ''R_GAP'' was given.');
108 %=====
109 end
110 end
111 if isnumeric(r_gap) && numel(r_gap) == 1
112     r_in = r_in{1};
113 end
114 end

```

## ANNEXE J

### Géométrie cylindrique

#### Code MATLAB : ghcylinder.m

```

1 function [ nodes, r_in ] = ...
2     ghcylinder( xc, yc, zc, r, phi, h, Nr, Na, Nz, r_gap )
3 %GHCYLINDER - Generate the nodal positions of a hollow cylinder.
4 %
5 %    NODES = GHCYLINDER(XC, YC, ZC, R, PHI, H, NR, NA, NZ)
6
7 format long;
8 %% Verify input data %%
9
10 msg = '';
11 char = {'mean', 'critical'};
12 if ~exist('r_gap', 'var') % Verify 'r_gap' variable.
13     r_gap = 'mean';
14 elseif ~isnumeric(r_gap) && ~ischar(r_gap)
15     msg = 'The variable ''R_GAP'' must be numeric or a character array.';
16 elseif isempty(r_gap)
17     msg = 'The variable ''R_GAP'' cannot be empty.';
18 elseif numel(r_gap(:, 1)) ~= 1
19     msg = 'The variable ''R_GAP'' must have 1 line.';
20 elseif ischar(r_gap) && sum(strcmpi(r_gap, char)) == 0
21     msg = 'An unrecognized character array value for ''R_GAP'' was given.';
22 elseif isnumeric(r_gap) && sum(isnan(r_gap)) ~= 0
23     msg = 'Numerical values of ''R_GAP'' cannot be NaN.';
24 elseif isnumeric(r_gap) && numel(r_gap) ~= 1
25     msg = 'Numerical values of ''R_GAP'' must contain 1 element.';
26 elseif isnumeric(r_gap) && r_gap <= 0
27     msg = 'Numerical values of ''R_GAP'' must be > 0.';
28 elseif isnumeric(r_gap) && r_gap >= 100
29     msg = 'Numerical values of ''R_GAP'' must be < 100.';
30 end
31 if ~isempty(msg)
32     clc;
33     error(msg);
34 end

```

```

35
36 %% Initialize variables %%
37
38 counter = 0;
39 r_in = nan(3, Nr*Na*Nz);
40 if isnumeric(r_gap) % Numerical array.
41     r_gap = r_gap/100;
42 end
43 nodes = cell(1, Nr*Na*Nz);
44 r = r(1):(r(2) - r(1))/Nr:r(2);
45 phi = phi(1):(phi(2) - phi(1))/Na:phi(2);
46 z = -h/2:h/Nz:h/2;
47
48 %% Main algorithm %%
49
50 for i = 1:Nz % Generate discretization elements.
51     for j = 1:Nr
52         for k = 1:Na
53             counter = counter + 1;
54             for l = 1:6
55                 if l == 1
56                     r1 = r(j);
57                     r2 = r(j + 1);
58                     r3 = r(j + 1);
59                     r4 = r(j);
60                     phi1 = phi(k);
61                     phi2 = phi(k);
62                     phi3 = phi(k);
63                     phi4 = phi(k);
64                     z1 = z(i);
65                     z2 = z(i);
66                     z3 = z(i + 1);
67                     z4 = z(i + 1);
68                 elseif l == 2
69                     r1 = r(j + 1);
70                     r2 = r(j + 1);
71                     r3 = r(j + 1);
72                     r4 = r(j + 1);
73                     phi1 = phi(k);
74                     phi2 = phi(k + 1);
75                     phi3 = phi(k + 1);
76                     phi4 = phi(k);
77                     z1 = z(i);
78                     z2 = z(i);

```

```

79      z3 = z(i + 1);
80      z4 = z(i + 1);
81      elseif l == 3
82          r1 = r(j + 1);
83          r2 = r(j);
84          r3 = r(j);
85          r4 = r(j + 1);
86          phi1 = phi(k + 1);
87          phi2 = phi(k + 1);
88          phi3 = phi(k + 1);
89          phi4 = phi(k + 1);
90          z1 = z(i);
91          z2 = z(i);
92          z3 = z(i + 1);
93          z4 = z(i + 1);
94      elseif l == 4
95          r1 = r(j);
96          r2 = r(j);
97          r3 = r(j);
98          r4 = r(j);
99          phi1 = phi(k + 1);
100         phi2 = phi(k);
101         phi3 = phi(k);
102         phi4 = phi(k + 1);
103         z1 = z(i);
104         z2 = z(i);
105         z3 = z(i + 1);
106         z4 = z(i + 1);
107     elseif l == 5
108         r1 = r(j);
109         r2 = r(j + 1);
110         r3 = r(j + 1);
111         r4 = r(j);
112         phi1 = phi(k + 1);
113         phi2 = phi(k + 1);
114         phi3 = phi(k);
115         phi4 = phi(k);
116         z1 = z(i);
117         z2 = z(i);
118         z3 = z(i);
119         z4 = z(i);
120     elseif l == 6
121         r1 = r(j);
122         r2 = r(j + 1);

```

```

123         r3 = r(j + 1);
124         r4 = r(j);
125         phil = phi(k);
126         phi2 = phi(k);
127         phi3 = phi(k + 1);
128         phi4 = phi(k + 1);
129         z1 = z(i + 1);
130         z2 = z(i + 1);
131         z3 = z(i + 1);
132         z4 = z(i + 1);
133     end
134     r1 = [r1*cosd(phi1) + xc ; r1*sind(phi1) + yc ; z1 + zc];
135     r2 = [r2*cosd(phi2) + xc ; r2*sind(phi2) + yc ; z2 + zc];
136     r3 = [r3*cosd(phi3) + xc ; r3*sind(phi3) + yc ; z3 + zc];
137     r4 = [r4*cosd(phi4) + xc ; r4*sind(phi4) + yc ; z4 + zc];
138     normal = cross(r2 - r1, r3 - r1);
139     normal = normal/sqrt(dot(normal, normal));
140     nodes{counter}{1} = [r1, r2, r3, r4, normal];
141   end
142 end
143 end
144 end
145 for i = 1:numel(nodes) % Generate inner points.
146   r1 = nodes{i}{6}{:, 1};
147   r2 = nodes{i}{6}{:, 2};
148   r3 = nodes{i}{6}{:, 3};
149   r4 = nodes{i}{6}{:, 4};
150 %=====
151 if strcmpi(r_gap, 'critical') % Point of zero gradient.
152 %=====
153   matrix = nan(2);
154   matrix(1, 1) = r3(1) - r1(1);
155   matrix(1, 2) = r2(1) - r4(1);
156   matrix(2, 1) = r3(2) - r1(2);
157   matrix(2, 2) = r2(2) - r4(2);
158   vector = [r2(1) - r1(1) ; r2(2) - r1(2)];
159   t = matrix\vector;
160   x = (r3(1) - r1(1))*t(1) + r1(1);
161   y = (r3(2) - r1(2))*t(1) + r1(2);
162 %=====
163 elseif strcmpi(r_gap, 'mean') % Mean nodal point.
164 %=====
165   x = mean([r1(1), r2(1), r3(1), r4(1)]);
166   y = mean([r1(2), r2(2), r3(2), r4(2)]);

```

```

167 %=====
168 elseif isnumeric(r_gap) % Relative spacing point(s).
169 %=====
170     xx = mean([r1(1), r2(1), r3(1), r4(1)]);
171     yy = mean([r1(2), r2(2), r3(2), r4(2)]);
172     rr = [xx - xc ; yy - yc]/sqrt((xx - xc)^2 + (yy - yc)^2);
173     x_base = mean([r1(1), r4(1)]);
174     y_base = mean([r1(2), r4(2)]);
175     x_top = mean([r2(1), r3(1)]);
176     y_top = mean([r2(2), r3(2)]);
177     m_base = sqrt((x_base - xc)^2 + (y_base - yc)^2);
178     m_top = sqrt((x_top - xc)^2 + (y_top - yc)^2);
179     m = (1 - r_gap)*m_base + r_gap*m_top;
180     x = m*rr(1) + xc;
181     y = m*rr(2) + yc;
182 %=====
183 else
184 %=====
185     clc;
186     error('An unknown value for ''R_GAP'' was given.');
187 %=====
188 end
189 r_in(:, i) = [x ; y ; mean([nodes{i}{5}(3, 1), nodes{i}{6}(3, 1)])];
190 end
191 end

```