



**Titre:** Modèle constitutif du comportement viscoplastique d'un matériau  
Title: CFC

**Auteur:** Elias Farah  
Author:

**Date:** 2009

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Farah, E. (2009). Modèle constitutif du comportement viscoplastique d'un matériau CFC [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/233/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/233/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Martin Lévesque, & Claude Perron  
Advisors:

**Programme:** Génie mécanique  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÈLE CONSTITUTIF DU COMPORTEMENT VISCOPLASTIQUE D'UN  
MATÉRIAU CFC

ELIAS FARAH  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
DÉCEMBRE 2009

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

MODÈLE CONSTITUTIF DU COMPORTEMENT VISCOPLASTIQUE D'UN  
MATÉRIAU CFC

présenté par: FARAH Elias

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. TERRIAULT Daniel, Ph.D., président

M. LÉVESQUE Martin, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. PERRON Claude, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. LAKIS Aouni A., Ph.D., membre

## REMERCIEMENTS

J'exprime mes profonds remerciements à mon directeur de recherche, le professeur Martin Lévesque pour toute l'aide qui m'a apportée, pour sa patience et son encouragement à finir un travail commencé il y a longtemps.

Ensuite je tiens à remercier le Centre de Technologie et Fabrication Aérospatiale (CTFA) pour le financement dédié au projet et plus particulièrement mon co-directeur de recherche, professeur Claude Perron.

Je tiens aussi à remercier les membres de mon jury, les professeurs Daniel Thériault et Aouni Lakis d'avoir pris le temps de lire mon document et de m'avoir donné les meilleurs conseils pour ma carrière.

Un grand merci à ma famille au Liban qui m'a supporté et encouragé quand lâcher la maîtrise était une option. Un merci spécial à ma tante et oncle Mme Arlette et Mr Costa Issid que sans leurs support exceptionnel je n'aurai pas finis ce mémoire.

« Last but not least », je tiens à remercier la femme de ma vie, Lilas Wazirian, d'avoir été toujours là, d'avoir supporter mon attitude quand c'était difficile pour moi.

Ce mémoire est dédié à une seule personne, que c'est pour elle que je l'ai fait : ma mère Claude.

## RÉSUMÉ

L'objectif principal de ce projet de maîtrise est de développer un modèle constitutif du comportement viscoplastique d'un métal CFC. Le document comprend trois parties principales :

1. Le Chapitre 1 contient une revue de littérature qui explique les différentes théories adoptées pour le développement du modèle constitutif. Ce chapitre présente la théorie de l'activation thermique, un survol sur les lois de la thermodynamique et les différents modèles existants.
2. le Chapitre 2 porte sur le modèle proposée et sa formulation thermodynamique. Il présente la dérivation du modèle unidimensionnel et le détail de sa généralisation vers un modèle tridimensionnel dans le cadre des principes de la thermodynamique.
3. le Chapitre 3 porte sur l'implémentation numérique du modèle et la présentation des résultats. La méthode d'Euler et l'algorithme « Radial Return Mapping » ont été adoptés dans la solution numérique en utilisant le logiciel Matlab 7.0. L'implémentation a été suivie par des exemples numériques de différents types de chargement.

## ABSTRACT

The main objective of the thesis is to develop a constitutive model for viscoplastic behaviour of FCC metals. The document is composed of three main sections :

1. Chapter 1 present bibliographic review that explains the theories that helped developing the constitutive model. It presents the thermal activation theory followed by an overview on the thermodynamic principles and existing models
2. Chapter 2 discuss the proposed model and its thermodynamic formulation. It explains the development of the one-dimensional model then tridimensional formulation using the thermodynamic laws
3. Chapter 3 shows the numerical implementation and related results. Euler method and the Radial Return Mapping algorithm where adopted in the numerical implementation using Matlab 7.0. The program was tested for different loading types.

## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS . . . . .	iii
RÉSUMÉ . . . . .	iv
ABSTRACT . . . . .	v
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	vi
LISTE DES FIGURES . . . . .	ix
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES . . . . .	xv
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE 1 REVUE DE LA LITTÉRATURE . . . . .	4
1.1 LES DISLOCATIONS . . . . .	4
1.2 THÉORIE DE L'ACTIVATION THERMIQUE . . . . .	6
1.3 COMPORTEMENT UNIDIMENSIONNEL . . . . .	16
1.3.1 Écoulement plastique et écrouissage . . . . .	16
1.3.2 Écoulement sensible au taux de déformation . . . . .	20
1.3.2.1 Région 1 - fluage . . . . .	21
1.3.2.2 Région 2 - Activation thermique . . . . .	24
1.3.2.3 Région 3 - Amortissement linéaire . . . . .	31
1.4 MODÉLISATION . . . . .	32
1.4.1 Modèle Abed-Voyiadjis . . . . .	35
1.5 NOTIONS ET HYPOTHÈSES DES CONTRAINTES ET DES DÉ- FORMATIONS . . . . .	39
1.5.1 Contrainte hydrostatique et déviateurs . . . . .	41
1.5.2 Critère de plasticité de von Mises . . . . .	42

1.5.3	Écrouissage isotrope et écrouissage cinématique . . . . .	43
1.6	THERMODYNAMIQUE DES MILIEUX CONTINUS . . . . .	43
1.6.1	Mécanique des milieux continus et les principes de la thermodynamique . . . . .	46
1.6.1.1	Processus Thermodynamique et Variables d'État . . . . .	46
1.6.1.2	Équations de la mécanique des milieux continus . . . . .	47
1.6.1.3	Énoncés fondamentaux de la thermodynamique . . . . .	49
1.6.2	Principe de formulation . . . . .	53
1.6.2.1	Variables internes pour un modèle viscoplastique . . . . .	53
1.6.2.2	Potentiel thermodynamique et les lois d'états . . . . .	54
1.6.2.3	Potentiel de dissipation et lois complémentaires . . . . .	56
1.6.2.4	Surface d'écoulement et condition de consistance . . . . .	59
CHAPITRE 2	LE MODÈLE . . . . .	61
2.1	MODÈLE PROPOSÉ . . . . .	61
2.2	FORMULATION THERMODYNAMIQUE . . . . .	65
2.2.1	Loi de comportement viscoplastique . . . . .	65
2.2.1.1	Définition de la surface d'écoulement . . . . .	65
2.2.1.2	Définition du potentiel thermodynamique - Énergie libre de Helmotz . . . . .	66
2.2.1.3	Définition du dual du potentiel de dissipation - $F$ . . . . .	70
2.2.2	Détermination des dérivées : $\dot{p}$ , $\ddot{p}$ , $\dot{T}$ , $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ , $\dot{\mathbf{X}}$ . . . . .	70
2.2.2.1	Détermination du multiplicateur plastique à partir de l'équation de consistance . . . . .	74
2.2.3	Hypothèses adoptées quant à l'implémentation numérique . . . . .	78
CHAPITRE 3	APPLICATION NUMÉRIQUE . . . . .	82
3.1	Méthode d'Euler . . . . .	82
3.2	Méthode de "Radial Return Mapping" . . . . .	88



3.3 Exemples numériques . . . . .	93
CHAPITRE 4 CONCLUSION . . . . .	102
Bibliographie . . . . .	105

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Les lacunes sont des défauts ponctuels dans une sturcture cristalline représentant un atome manquant . . . . .	5
Figure 1.2	Les impuretés sont des défauts ponctuels dans une sturcture cristalline. Elles peuvent être un atome étranger substituant un atome existant ou inséré entre les autres atomes . . . . .	6
Figure 1.3	Les joints de grains sont l'interface où plusieurs séquences d'empilement s'intercèptent . . . . .	7
Figure 1.4	Les dislocations sont des chaines linéiques d'atomes imbriquées dans la structure cristalline changeant l'ordre d'empilement des atomes . . . . .	8
Figure 1.5	a)Dislocation coin : défaut créé par une translation d'une partie du cristal ; a)Dislocation vis : défaut créé par une rotation locale d'une partie du cristal . . . . .	9
Figure 1.6	Multiplication des dislocations par le mécanisme de Frank et Read. Une dislocation entre deux obstacles A et B (a) soumis à une force se déplace jusqu'à entourer les deux obstacles (b, c). Lorsque les deux branches se rejoignent en C (d), elles s'attirent et se recombinent pour donner naissance à une autre dislocation aussi source de multiplication (e, f).	10
Figure 1.7	Une dislocation peut croiser durant son mouvement autres dislocations dans le même plan de glissement et des dislocations sécantes à ce plan. Les dislocations et les autres types de défauts rencontrés constituent des obstacles résistant au glissement de la disloaction en mouvement - (Roters et Raabe, 2006b) . . . . .	11

Figure 1.8	Mécanismes de glissement des dislocations activées thermiquement . . . . .	12
Figure 1.9	Mouvement d'une dislocation coin. Le défaut linéique d'empilement se déplace d'une distance équivalente au vecteur de Burgers engendrant une rupture de liaison des atomes voisins. - (Conrad, 1964) . . . . .	13
Figure 1.10	Variation de l'énergie et de la contrainte selon la distance de mouvement pour une dislocation - (Conrad, 1964) . . . . .	14
Figure 1.11	Champ de contrainte interne opposant une dislocation en mouvement dans un réseau cristallin. $\tau_0$ est la contrainte nécessaire sans pour franchir les obstacles sans la contribution des fluctuations thermiques, $\tau$ est la contrainte appliquée nécessaire pour franchir les obstacles avec la contribution des fluctuations thermiques. $\tau_\mu$ est la contrainte nécessaire pour franchir un obstacle de long-intervalle et indépendante des fluctuations thermiques. $\tau^* = \tau - \tau_\mu$ est la partie de la contrainte dépendante des fluctuations thermiques. - (Conrad, 1964) . . . . .	15
Figure 1.12	Les différentes structures cristallines . . . . .	16
Figure 1.13	Éprouvette sous une force de traction Force, subit un allongement $\Delta l$ . La contrainte $\sigma$ à une section de l'éprouvette est la densité surfacique de force supposée uniformément distribuée	17
Figure 1.14	Courbe d'écrouissage à palier de l'Acier XC 38 - (Lemaitre, 2004) . . . . .	18
Figure 1.15	Courbe d'écrouissage à module tangent continu de l'Acier inoxydable A 316 - (Lemaitre, 2004) . . . . .	19
Figure 1.16	Courbe d'écrouissage Al 7075-T6 - (MMPDS-3, 2008) . . . . .	21

Figure 1.17	Courbes de contraintes plastiques pour plusieurs taux de déformation à plusieurs températures et à une déformation constante $\varepsilon = 0.1$ - Acier Ck45N - (El-Magd et al., 2005) . . . . .	22
Figure 1.18	Courbes de contraintes pour plusieurs taux de déformation à plusieurs températures - Titanium TIA16V4 - (El-Magd et al., 2005) . . . . .	23
Figure 1.19	Courbes de contraintes pour plusieurs taux de déformation à plusieurs températures - Aluminium AA7075 T351 - (El-Magd et al., 2005) . . . . .	24
Figure 1.20	a) Une courbe typique de fluage peut être divisée en trois zones : fluage primaire, fluage secondaire et fluage tertiaire. b) Durant le fluage la contrainte est maintenue constante en fonction du temps . . . . .	25
Figure 1.21	L'aire sous la courbe $F(x)$ représente l'énergie d'activation totale $G_o$ nécessaire pour franchir un obstacle d'une longueur $d^*$ sans aucune contribution des fluctuations thermiques. La partie hachurée représente l'énergie d'activation qui doit être fournie par les fluctuations thermiques pour que l'obstacle soit franchi par la dislocation de largeur $l^*$ sous une force appliquée $F = \tau^* b l^*$ où $b$ est le vecteur de Burgers. La partie non hachurée sous la courbe représente le travail effectué par la force $F = \tau^* b l^*$ - (Conrad, 1964) . . . . .	29
Figure 1.22	Mouvement d'une dislocation d'une longueur $l^*$ à travers une distance $d^*$ de la position 1 jusqu'à la position 2 sous une contrainte $\tau$ . . . . .	30

Figure 1.23	Courbes d'écrouissage du TANTALUM (CC) à plusieurs taux de déformation. Le matériau montre le même écrouissage pour les différents taux de déformation. C'est la limite d'écoulement qui augmente par rapport aux taux de déformation - CHEN and GRAY (1995) . . . . .	33
Figure 1.24	Courbes d'écrouissage du OFHC Cuivre (CFC) à plusieurs taux de déformation et températures. Le matériau montre des écrouissages croissants par rapport aux taux des déformations mais l'écrouissage débute à la même limite d'écoulement - (Johnson et Cook, 1988) . . . . .	34
Figure 1.25	Courbes d'écrouissage du TITANE (HC) à plusieurs taux de déformation et températures. Le matériau montre des écrouissages croissants par rapport aux taux des déformations débutants respectivement à des limite d'écoulement différentes qui augmentes par rapports aux taus de déformation- (Nemat-Nasser et al., 1999) . . . . .	35
Figure 1.26	Composantes du tenseur de contrainte sur un élément infinitésimal . . . . .	40
Figure 1.27	La surface d'écoulement au sens de von Mises se représente comme un cylindre dans l'espace des contraintes principales. L'axe du cylindre est la trissectrice du repère $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ), et son rayon $R$ est égal à $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s$ (Lemaitre et Chaboche 2004). . . . .	44
Figure 1.28	a) Durant un écrouissage isotrope la surface d'écoulement se dilate sans aucune translation de son centre. b) L'écrouissage cinématique est caractérisé par une translation du centre de la surface d'écoulement . . . . .	45
Figure 1.29	Corps soumis à des force de volume et de surface . . . . .	47

Figure 2.1	Approximation de la forme de $\beta_1(\varepsilon_p)$ proposée par Abed-Voyiadjis (Voyiadjis et Abed, 2005a) par une fonction de la forme $A\varepsilon_p^{1/2}$ . . . . .	62
Figure 2.2	Comparaison du modèle proposé avec les données expérimentales (Nemat-Nasser et Li, 1998) pour OFHC (cuivre) . . .	65
Figure 2.3	Comparaison de l'aire au-dessous de la courbe pour différentes hypothèses de $\bar{A}(p)$ . En traçant la courbe pour différentes valeurs de $p$ , on remarque que l'effet de $p$ est négligeable sur l'aire au-dessous de la courbe, représentant l'intégrale de la fonction $\bar{A}(p)$ . . . . .	69
Figure 3.1	Comparaison du modèle avec les données expérimentals de Johnson et Cook (Johnson et Cook, 1988) pour OFHC cuivre	94
Figure 3.2	Comparaison du modèle avec les données expérimentals de Nemat-Nasser et Li (Nemat-Nasser et Li, 1998) pour OFHC cuivre . . . . .	95
Figure 3.3	Prédiction du modèle pour OFHC cuivre sous compression .	96
Figure 3.4	Prédiction du modèle pour OFHC cuivre sous une séquence de chargement et déchargement . . . . .	97
Figure 3.5	Prédiction du modèle pour OFHC cuivre sous une séquence de chargement et déchargement partiels à différents taux de déformations . . . . .	98
Figure 3.6	Prédiction du modèle pour OFHC cuivre sous des chargements et déchargements cycliques bornés par une déformation négative et une déformation positive . . . . .	99
Figure 3.7	Prédiction du modèle pour OFHC cuivre sous des chargements et déchargements cycliques dont on augmente la déformation minimale et maximale à chaque cycle . . . . .	100

Figure 3.8	Prédiction du modèle pour OFHC cuivre sous des charge- ments et déchargements cycliques dont on augmente la dé- formation maximale à chaque cycle tout en revenant à une déformation minimale nulle . . . . .	101
------------	--	-----

## LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

$A$ :	constante reliée au matériau et à la température
$A^*$ :	aire d'activation
$A_o$ :	aire de section initiale
$\alpha$ :	variable interne, tensorielle d'ordre deux, caractérisant l'écrouissage cinématique
$\dot{\alpha}$ :	dérivée temporelle du tenseur de l'écrouissage cinématique
$B$ :	constante caractérisant le modèle proposé
$b$ :	vecteur de Burger
$\hat{B}$ :	paramètre caractérisant le modèle de Abed-Voyiadjis
$\beta_1$ :	paramètre caractérisant le modèle de Abed-Voyiadjis
$\beta_2$ :	paramètre caractérisant le modèle de Abed-Voyiadjis
$C_1$ :	constante caractérisant l'évolution des dislocations
$C_p$ :	chaleur spécifique
CC :	cristal Cubique Centré
CFC :	cristal Cubique à Faces Centrées
$d^*$ :	distance balayée par la dislocation durant son mouvement
$\hat{D}$ :	tenseur du second ordre du taux de déformation
$\delta_{ij}$ :	Delta de Kronecker
$e$ :	énergie interne spécifique
$E_t$ :	énergie interne totale
$E$ :	module d'élasticité
$\mathbf{E}$ :	tenseur d'ordre quatre définissant le module d'élasticité
$\varepsilon$ :	déformation
$\varepsilon_e$ :	déformation élastique
$\varepsilon_H$ :	déformation hydrostatique



$\varepsilon$ :	tenseur de déformation
$\varepsilon_n^e$ :	tenseur de déformation élastique à l'intervalle $n$
$\varepsilon_{n+1}^e$ :	tenseur de déformation élastique à l'intervalle $n + 1$
$\varepsilon_n^p$ :	tenseur de déformation plastique à l'intervalle $n$
$\varepsilon_{n+1}^p$ :	tenseur de déformation plastique à l'intervalle $n + 1$
$\varepsilon_n$ :	tenseur de déformation à l'intervalle $n$
$\varepsilon_{n+1}$ :	tenseur de déformation à l'intervalle $n + 1$
$\dot{\varepsilon}$ :	taux de déformation
$\dot{\varepsilon}_0$ :	taux de déformation initial
$\dot{\varepsilon}_{0i}$ :	taux initial de déformation, paramètre du modèle de Abed-Voyiadjis
$\dot{\varepsilon}_p$ :	taux de déformation plastiques
$\dot{\varepsilon}^p$ :	tenseur de taux de déformation plastique
$\Delta\varepsilon$ :	incrément de déformation
$\eta$ :	coefficient d'amortissement
$F$ :	dual du potentiel de dissipation viscoplastique
$f$ :	fonction d'écoulement caractérisant la surface d'écoulement
$F^*$ :	force fictive appliquée sur une dislocation
$F_t$ :	Force de traction
$\vec{f}$ :	forces de volume
$\Gamma$ :	variable utilisée pour des fins de simplification
$f_{n+1}^*$ :	fonction d'écoulement évaluée pour une contrainte d'essais $\sigma_{n+1}^*$ à l'intervalle $n + 1$
$f_n$ :	fonction d'écoulement à l'intervalle $n$
$f_{n+1}$ :	fonction d'écoulement à l'intervalle $n + 1$
$\varphi$ :	potentiel de dissipation

$\varphi^g$ :	potentiel de dissipation thermique
$\varphi^{vp}$ :	potentiel de dissipation viscoplastique
$G$ :	enthalpie, énergie d'activation
$G_{PN}$ :	énergie d'activation de Peierls-Nabarro
$G_0$ :	énergie d'activation nécessaire pour franchir l'obstacle sans aucune contrainte appliquée
$\dot{\gamma}_p$ :	taux de déformation plastique en cisaillement
$\gamma$ :	tenseur déviateur de la déformation
$h$ :	variable utilisée pour des fins de simplification
$h_n$ :	$h$ à l'intervalle $n$
$h_{n+1}$ :	$h$ à l'intervalle $n + 1$
HC :	cristal hexagonal compact
$\mathbf{i}$ :	tenseur d'identité
$\mathbf{J}$ :	Matrice Jacobienne
$K$ :	Énergie cinétique
$k$ :	constante de Boltzman
$k_a$ :	constante caractérisant l'évolution des dislocations
$K_Y$ :	constante caractérisant une courbe d'écrouissage
$\kappa_d$ :	constante de proportionnalité entre la contrainte et la densité des dislocations
$\kappa$ :	module de flexion
$l^*$ :	longueur du segment de dislocation en mouvement
$l_i$ :	longueur initiale
$\Delta l$ :	élongation
$\lambda^*$ :	constante caractérisant la loi de Norton
$\lambda_i, i = 1, 2, ..4$ :	constantes reliées à la multiplication des dislocations

$\dot{\lambda}$ :	multiplicateur plastique
$\ddot{\lambda}$ :	dérivée temporelle du multiplicateur plastique
$\Delta\lambda$ :	incrément du multiplicateur plastique
$M$ :	constante caractérisant l'évolution des dislocations
$M_Y$ :	constante caractérisant une courbe d'écrouissage
$\mathbf{M}$ :	Tenseur d'orientation
$\mu$ :	module d'élasticité en cisaillement
$N^*$ :	coefficient de Norton
$\mathbf{N}$ :	tenseur normal à la surface d'écoulement
$\mathbf{n}$ :	vecteur unitaire normal au plan de glissement de dislocation
$\mathbf{N}_n$ :	tenseur normal à la surface d'écoulement à l'intervalle $n$
$\mathbf{N}_{n+1}$ :	tenseur normal à la surface d'écoulement à l'intervalle $n + 1$
$\Omega$ :	fonction objective
$p$ :	variable interne de nature scalaire caractérisant l'écrouissage isotrope
$p_n$ :	variable interne de nature scalaire caractérisant l'écrouissage isotrope à l'intervalle $n$
$p_{n+1}$ :	variable interne de nature scalaire caractérisant l'écrouissage isotrope à l'intervalle $n + 1$
$\dot{p}$ :	dérivée temporelle de l'écrouissage isotrope
$\hat{P}(a)$ :	puissance produite par les quantités d'accélération
$\hat{P}(i)$ :	puissance des efforts intérieurs
$\hat{P}(x)$ :	la puissance produite par les efforts extérieurs
$\Psi$ :	énergie libre spécifique, potentiel thermodynamique
$\Psi_1$ :	partie du potentiel thermodynamique liée à l'évolution élastique
$\Psi_2$ :	partie du potentiel thermodynamique liée à l'écrouissage isotrope

$\Psi_3$ :	partie du potentiel thermodynamique reliée à l'écrouissage cinématique
$q$ :	constante reliée au matériau et à la température
$Q$ :	taux de chaleur
$q_1$ :	constante caractérisant le modèle de l'énergie d'activation
$q_2$ :	constante caractérisant le modèle de l'énergie d'activation
$\vec{q}$ :	vecteur flux de chaleur
$r$ :	densité volumique de production interne de chaleur
$r'$ :	dérivée temporelle du résidus
$r$ :	résidus
$R$ :	variable force, scalaire, associée à l'écrouissage isotrope
$R_n$ :	variable force de l'écrouissage isotrope à l'intervalle $n$
$R_{n+1}$ :	variable force de l'écrouissage isotrope à l'intervalle $n + 1$
$\dot{R}$ :	dérivée temporelle de la variable force de l'écrouissage isotrope
$\rho$ :	densité de dislocation
$\rho_d$ :	densité des dislocation
$\rho_{d_0}$ :	densité initiale des dislocations
$\rho_f$ :	densité des forêts des dislocations
$\rho_i$ :	densité initiale des dislocations
$\rho_m$ :	densité de dislocation mobile
$\rho_{mi}$ :	densité initiale des dislocations mobiles
$s$ :	entropie spécifique
$S$ :	entropie totale
$\sigma$ :	contrainte
$\sigma_n^{eq}$ :	contrainte équivalente à l'intervalle $n$
$\sigma_{n+1}^{eq}$ :	contrainte équivalente à l'intervalle $n + 1$

$\sigma_{\text{ath}}$ :	contrainte athermique
$\sigma_{\text{th}}$ :	contrainte thermique
$\sigma_{eq}$ :	contrainte équivalent au sens de von Mises
$\sigma_0$ :	contrainte minimale pour franchir un obstacle à 0 Kelvin
$\sigma_1$ :	contrainte principale
$\sigma_2$ :	contrainte principale
$\sigma_3$ :	contrainte principale
$\sigma_H$ :	contrainte hydrostatique
$\sigma_p$ :	contrainte plastique
$\sigma_s$ :	contrainte dans le domaine plastique
$\sigma_Y$ :	limite d'élasticité
$\boldsymbol{\sigma}$ :	tenseur de contrainte
$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^*$ :	contrainte d'essais à l'intervalle $n + 1$
$\boldsymbol{\sigma}_n$ :	tenseur de contrainte à l'intervalle $n$
$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ :	tenseur de contrainte à l'intervalle $n + 1$
$T$ :	température absolue en Kelvin
$t$ :	temps
$T_n$ :	température à l'intervalle $n$
$T_{n+1}$ :	température à l'intervalle $n + 1$
$\dot{T}$ :	dérivée temporelle de la température
$\vec{T}$ :	densité surfacique des forces
$t_m$ :	temps moyen de mouvement d'une dislocation entre deux obstacles
$t_n$ :	temps à l'intervalle $n$
$t_n + 1$ :	temps à l'intervalle $n + 1$
$t_w$ :	temps moyen d'attente d'une dislocation devant un obstacle
$\Delta t$ :	incrément de temps

$\tau$ :	contrainte appliquée sur une dislocation
$\tau^*$ :	contrainte appliquée sur une dislocation pour franchir un obstacle sans la contribution des fluctuations thermiques
$\tau_\mu$ :	contrainte appliquée sur une dislocation pour franchir un obstacle avec la contribution des fluctuations thermiques
$\tau_0$ :	contrainte minimale appliquée sur une dislocation pour franchir un obstacle à 0 Kelvin
$\boldsymbol{\tau}$ :	tenseur déviateur de la contrainte
$\theta$ :	variable utilisée pour des fins de simplification
$\theta_n$ :	$\theta$ à l'intervalle $n$
$\theta_{n+1}$ :	$\theta$ à l'intervalle $n + 1$
$\vartheta$ :	variable utilisée pour des fins de simplification
$\vartheta_n$ :	$\vartheta$ à l'intervalle $n$
$\vartheta_{n+1}$ :	$\vartheta$ à l'intervalle $n + 1$
$v$ :	facteur de fréquence, vitesse de mouvement des dislocations
$v_0$ :	vitesse moyenne de dislocation
$\vec{v}$ :	vitesse virtuelle
$V$ :	constante caractérisant le potentiel thermodynamique reliée à l'écoulement cinématique
$V^*$ :	volume d'activation
$\boldsymbol{v}$ :	vecteur unitaire parallèle à la direction du glissement de dislocation
$W^*$ :	travail effectué par une force durant l'activation thermique
$x$ :	fraction de la densité des dislocations totales
$x_1$ :	variable utilisée pour des fins de simplification
$x_2$ :	variable utilisée pour des fins de simplification

$\mathbf{X}$ :	variable force, tensorielle d'ordre deux, associée à l'écoulement cinématique
$\dot{\mathbf{X}}$ :	dérivée temporelle de la variable force du tenseur de l'écoulement cinématique
$\Xi$ :	variable utilisée pour des fins de simplification
$\xi$ :	variable utilisée pour des fins de simplification
$\xi_n$ :	$\xi$ à l'intervalle $n$
$\xi_{n+1}$ :	$\xi$ à l'intervalle $n + 1$
$y$ :	variable utilisée pour des fins de simplification
$y_n$ :	$y$ à l'intervalle $n$
$y_{n+1}$ :	$y$ à l'intervalle $n + 1$
$Y_d$ :	paramètre caractérisant le modèle de Abed-Voyiadjis
$z$ :	variable scalaire caractérisant l'évolution adiabatique de la température
$z_n$ :	évolution adiabatique de la température à l'intervalle $n$
$z_{n+1}$ :	évolution adiabatique de la température à l'intervalle $n + 1$

## INTRODUCTION

### Mise en contexte

Le grenaillage est un processus de bombardement d'une surface métallique par des billes ou des grenailles afin d'améliorer la vie en fatigue ou la mise en forme des pièces grenaillées. Durant le processus du grenaillage, les grenailles frappent la surface à des vitesses élevées engendrant des déformations permanentes et provoquant des contraintes résiduelles en compression à la surface (Schiffner et al., 1999; Deslaef et al., 2000; Miao et al., 2009).

Le Centre de la Technologie et de la Fabrication Aérospatiale (CTFA) cherche à simuler le grenaillage des pièces en Aluminium Al7075 dans le but de produire des outils prédictifs. Les résultats obtenus par la méthode des éléments finis surestiment les contraintes résiduelles. Plusieurs recherches ont montré que cette déviation est due au comportement visqueux du métal quant il est soumis à des déformations rapides suite à des impacts (Hassani, 1981; Al-Hassani et al., 1999; Meguid et al., 2002).

Dans ce contexte, l'objectif principal de ce projet de maîtrise est de formuler une loi de comportement pour les métaux qui tienne compte des phénomènes visqueux à des grands taux de déformation.

L'objectif d'une relation constitutive est de décrire le comportement macroscopique d'un matériau. Certaines relations constitutives sont purement empiriques, dérivées mathématiquement à partir de résultats expérimentaux. Elles sont une combinaison d'expressions mathématiques corrélées afin de coïncider avec ces résultats. La formulation de relations constitutives empiriques restreint souvent leur domaine de validité. La compréhension des mécanismes microscopiques dans les



matériaux est souvent très utile pour la dérivation de la loi de comportement.

Dans cette étude, on cherche à développer une loi de comportement pour l'aluminium soumis à des grands taux de déformation dans le domaine plastique. En appliquant une charge sur un corps métallique, le matériau se déforme élastiquement jusqu'à une certaine limite, appelée limite d'élasticité. Par la suite il se déforme inélastiquement et ne retourne plus à sa forme initiale ; c'est la plasticité. Les expériences ont montré que le comportement de certains matériaux dépend du taux de déformation auquel le chargement est effectué. Il est donc intéressant de comprendre la plasticité sensible aux taux de déformation : c'est la viscoplasticité.

Les différents types d'inélasticités, comme la plasticité, la viscoplasticité et autres, sont des distorsions macroscopiques résultantes d'un déplacement permanent des atomes au niveau microscopique à l'intérieur du matériau. Ceci est relié aux mouvements des dislocations dans le matériau, ce qui implique que la cinématique des dislocations est à l'origine de l'inélasticité macroscopique et doit être considérée dans la formulation d'une loi de comportement modélisant celle-ci.

## **Méthodologie**

Une introduction au concept des dislocations et une étude de la théorie de l'activation thermique sont réalisées en premier lieu pour comprendre les mécanismes microscopiques dans les matériaux. Ensuite on dérive un modèle unidimensionnel pour les matériaux du même type de structure cristalline (atomique) que l'aluminium basé sur les courbes d'écrouissage de traction. On procède par la suite à la formulation thermodynamique pour généraliser le modèle unidimensionnel pour des chargements tridimensionnels. On clôture par l'implémentation numérique du modèle tridimensionnel et la présentation des résultats.

## **Plan du mémoire**

Ce mémoire est structuré de la façon suivante : le Chapitre 1 donne un panorama du sujet de recherche à l'aide de la revue de la littérature où on présente une introduction sur les dislocations, la théorie de l'activation thermique, un survol sur les lois de la thermodynamique et les différents modèles existants ; le Chapitre 2 porte sur le modèle proposé et sa formulation thermodynamique ; le Chapitre 3 porte sur l'implémentation numérique du modèle et la présentation des résultats ; finalement les Conclusions où des perspectives de travail sont rajoutées.

Les contributions de ce mémoire sont donc a) une revue de littérature détaillée sur le sujet ; b) une nouvelle loi de comportement et c) la preuve qu'elle est adéquate pour être implémentée dans le code de calculs.

Il est important de noter qu'il existe très peu de présentation complète de la théorie de l'activation thermique. Comme cette théorie est relativement nouvelle pour le groupe de recherche, un effort particulier a été déployé pour la revue de littérature.

## CHAPITRE 1

### REVUE DE LA LITTÉRATURE

#### 1.1 LES DISLOCATIONS

Le concept des dislocations a été introduit en 1934 (Orowan, 1934; Taylor, 1934) par le fait que la force nécessaire pour déformer permanentement une structure cristalline est plus élevée que celle nécessaire à la déformation d'un seul cristal pur. Ce n'est qu'aux alentours des années soixante, avec l'apparition des microscopes électroniques, que l'existence des dislocations a été démontrée expérimentalement (Johnston et Gilman, 1959; Chiem et Duffy, 1983).

À l'échelle atomique, il existe initialement un certain nombre d'imperfections dans un matériau métallique cristallin (Seeger, 1955). Certaines imperfections sont définies comme des défauts d'empilement des atomes dans la structure d'un polycristal. Les types de défauts que l'on rencontre le plus souvent sont les suivants :

- Les défauts ponctuels engendrant des distorsions locales dans la structure cristalline. Les figures 1.1 et 1.2 montrent respectivement la présence de lacunes et d'atomes étrangers (impuretés) différents de la majorité des atomes formant le cristal.
- Les défauts surfaciques engendrant des distortions planaires dans la structure cristalline. On cite les joints de grains qui sont l'interface où plusieurs séquences d'empilement d'atomes s'intersectent. Ce type de défaut est illustré à la figure (1.3).
- Les défauts linéiques, aussi appelés « dislocations », sont principalement res-

ponsables des distortions macroscopiques des métaux. Ces dislocations sont des chaînes linéiques d'atomes imbriquées dans la structure cristalline et changent l'ordre d'empilement des atomes (figure (1.4)). On distingue plusieurs type de dislocations dont les dislocations de type coin (figure (1.5.a)) et les dislocations de type vis (figure (1.5.b))

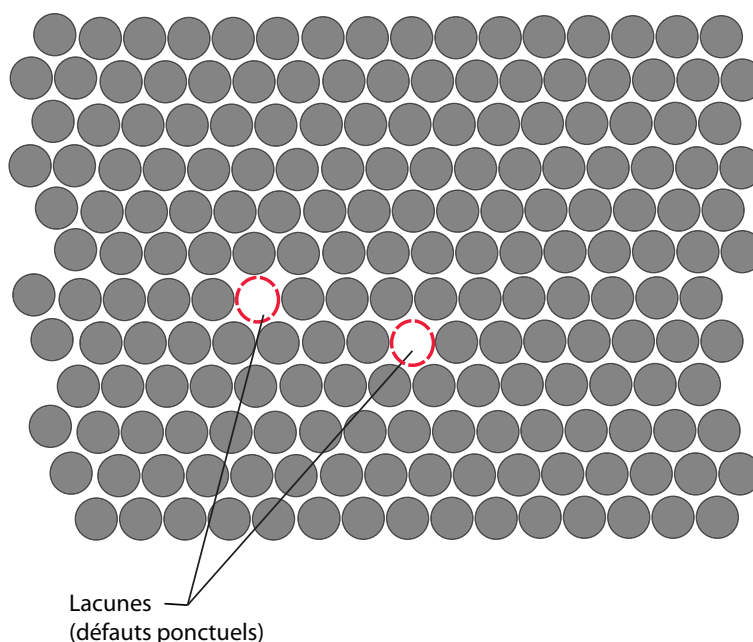


Figure 1.1 Les lacunes sont des défauts ponctuels dans une sturcture cristalline représentant un atome manquant

En appliquant une force au-delà d'une certaine limite, une fraction des dislocations glisse dans certains plans préférentiels, appelés « plans de glissement », dans la direction de la force projetée sur ces plans (Seeger, 1955; Gillis et Gilman, 1965a,b; Hahn, 1962). Durant leurs mouvements, les dislocations rencontrent des dislocations immobiles et d'autres défauts formant des obstacles qui résistent à leurs glissements. Les dislocations se multiplient et forment des cellules (concentration de dislocations) qui grandissent au fur et à mesure. En s'interceptant, elles créent des forêts de dislocations. La figure (1.6) illustre le mécanisme de création des dislocations présenté par Frank et Read. La densité des dislocations continue à augmenter

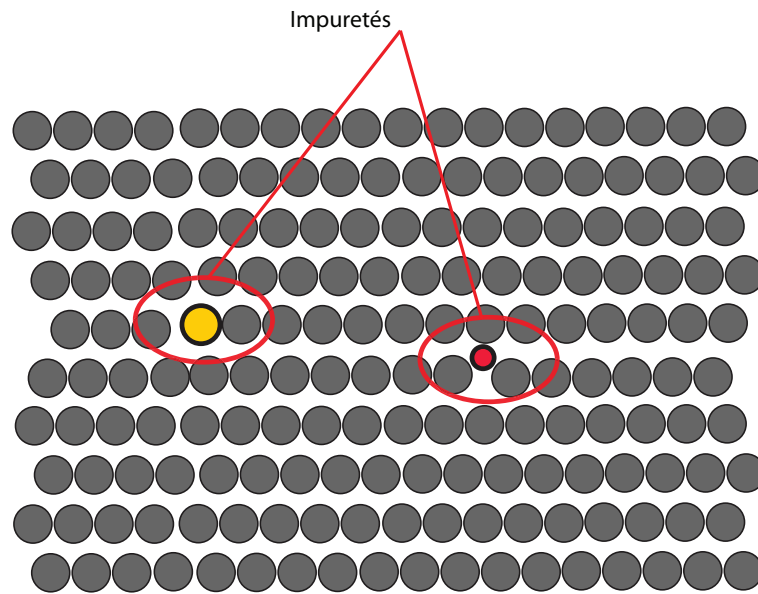


Figure 1.2 Les impuretés sont des défauts ponctuels dans une structure cristalline. Elles peuvent être un atome étranger substituant un atome existant ou inséré entre les autres atomes

jusqu'à une valeur de saturation (Klepaczko, 1986; Klepaczko et Chiem, 1986). Un autre phénomène qui se présente simultanément est la destruction des dislocations; en d'autres termes, la restauration. Ce phénomène est plus présent quand le matériau est chauffé permettant au cristal de rétablir l'ordre d'empilement (Klepaczko, 1968; Klepaczko et Duffy, 1977).

Le résultat de tous ces mécanismes est la raison des déformations inélastiques créant le durcissement du métal qu'on appelle « écrouissage ».

## 1.2 THÉORIE DE L'ACTIVATION THERMIQUE

Une dislocation mobile en mouvement sous l'action d'une force rencontre plusieurs obstacles générant des champs de contraintes qui résistent à son mouvement (figure(1.7)). Pour que les dislocations franchissent les obstacles, la force appliquée

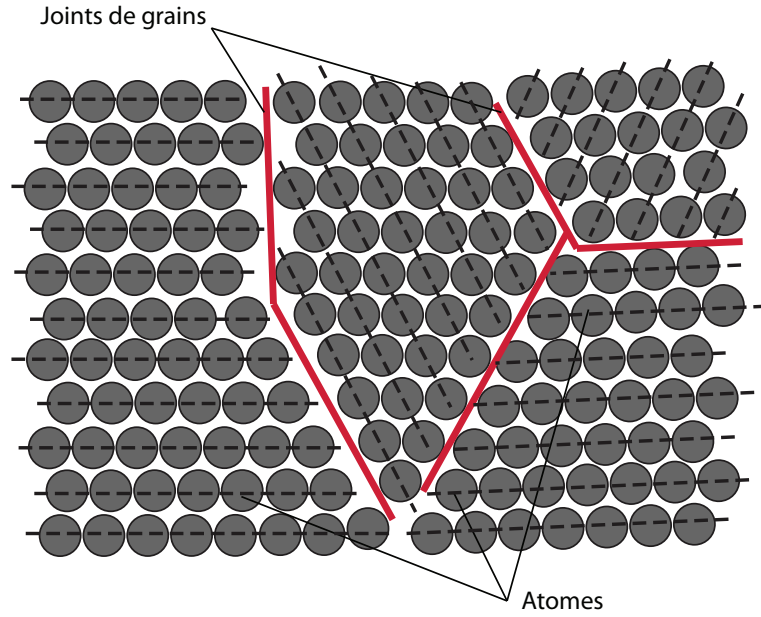


Figure 1.3 Les joints de grains sont l'interface où plusieurs séquences d'empilement s'interceptent

doit être supérieure à la force de résistance générée par ces obstacles. Cette nature dynamique de la déformation plastique a été initialement reconnue par Becker (Becker, 1925). Ce dernier a postulé que des fluctuations thermiques contribuent à la force appliquée pour franchir les obstacles en décrivant le taux de déformation plastique  $\dot{\epsilon}_p$  sous forme d'une équation d'Arrhenius :

$$\dot{\epsilon}_p = v \exp \left[ -\frac{G(\sigma)}{kT} \right] \quad (1.1)$$

où  $v$  est la vitesse de mouvement des dislocations appelée « facteur de fréquence »,  $G$  l'énergie d'activation (ou enthalpie) démontrée fonction de la contrainte appliquée (Kocks :75, Kocks :01),  $k$  la constante de Boltzman et  $T$  la température absolue en Kelvin.

Les obstacles peuvent être classés en deux groupes :

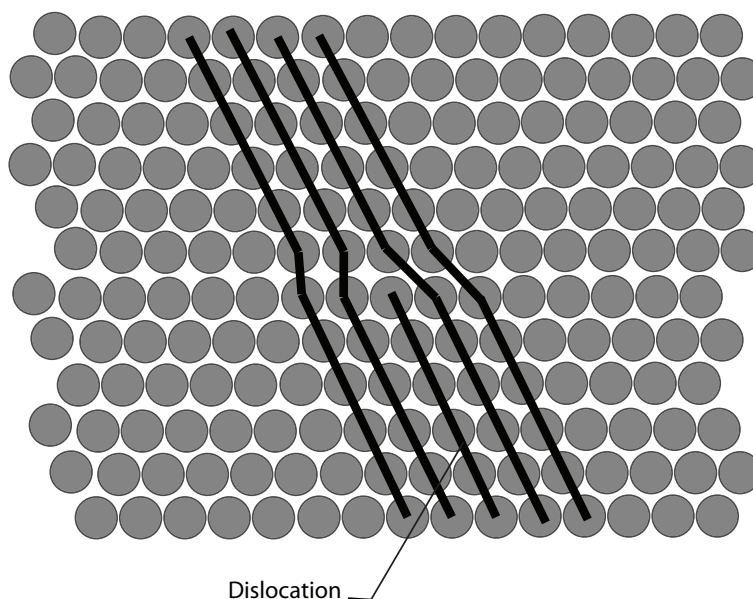


Figure 1.4 Les dislocations sont des chaînes linéiques d'atomes imbriquées dans la structure cristalline changeant l'ordre d'empilement des atomes

- Des obstacles générant des champs de contrainte sur un long intervalle. Ils sont moins nombreux mais offrent une grande résistance (Milella, 1998). On pourrait nommer les dislocations sur les plans de croisements parallèles et les précipités par exemple.
- Des obstacles générant des champs de contraintes sur un petit intervalle. Ils sont plus nombreux mais moins résistants (Milella, 1998). Les dislocations dispersées dans le plan de glissement, les dislocations de type vis et celles de type coin en sont des exemples (Figure 1.5).

Les obstacles de long intervalle sont moins nombreux, mais plus résistants ce qui fait que l'énergie requise pour les dépasser est relativement grande. Ceci fait en sorte que la contribution des fluctuations thermiques à la contrainte appliquée pour franchir ces obstacles devient négligeable (Conrad et Frederick, 1962; Davidson et Lindholm, 1974; Campbell, 1975), donc l'activation thermique ne joue aucun rôle et ces obstacles sont nommés « obstacles athermiques ».

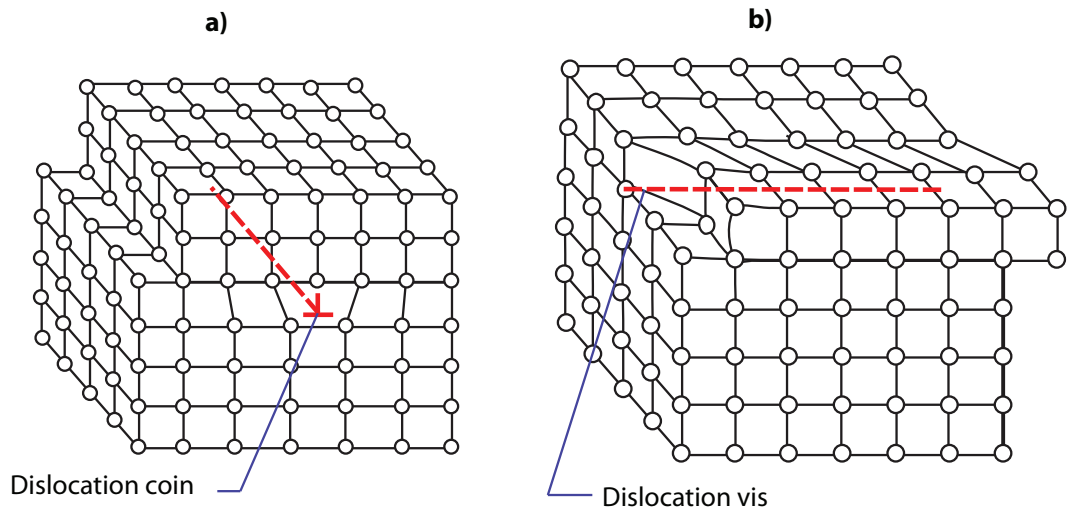


Figure 1.5 a) Dislocation coin : défaut créé par une translation d'une partie du cristal; a) Dislocation vis : défaut créé par une rotation locale d'une partie du cristal

Par contre, les fluctuations thermiques contribuent considérablement à surmonter les obstacles générant des champs de contraintes sur petits intervalles à cause de leur faible résistance (Conrad et Frederick, 1962; Davidson et Lindholm, 1974; Campbell, 1975). Ces obstacles sont désignés « obstacles thermiques ». Ce sont ces obstacles qui sont responsables de l'aspect dynamique de la déformation plastique. La figure 1.8 illustre comment certains obstacles de petits intervalles sont franchis par une dislocation. La figure 1.8.a montre le mouvement d'une dislocation mobile dans un plan d'atomes d'un réseau cristallin. La résistance que subit une dislocation durant un tel mouvement est appelée contrainte de Peierls-Nabarro. Cette résistance est sinusoïdale et fonction de la longueur de la dislocation et de la distance qui sépare deux plans d'atomes (Hertzberg, 1996). Elle est plus faible quand les plans d'atomes sont éloignés, donc quand la densité atomique planaire est plus élevée. La figure 1.8.b montre le mouvement d'une dislocation intersectée par des forêts de dislocations. Les forêts de dislocations sont les dislocations qui percent le plan de glissement d'une dislocation. La figure 1.8.c montre l'impact des impuretés sur le mouvement d'une dislocation et la figure 1.8.d présente l'influence de l'obs-



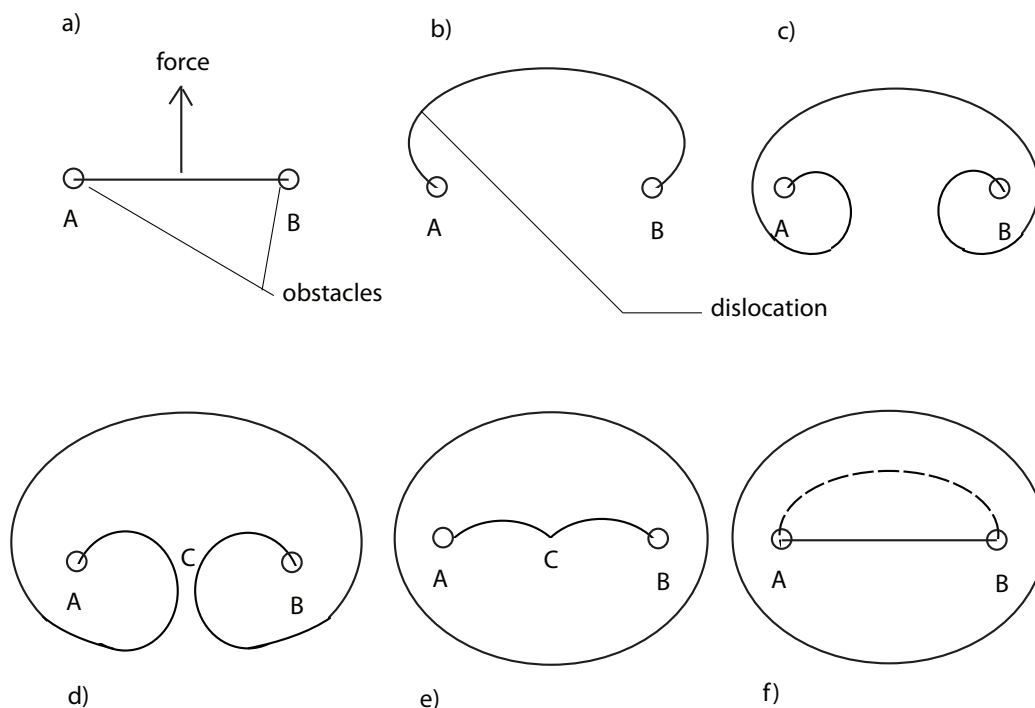


Figure 1.6 Multiplication des dislocations par le mécanisme de Frank et Read. Une dislocation entre deux obstacles A et B (a) soumise à une force se déplace jusqu'à entourer les deux obstacles (b, c). Lorsque les deux branches se rejoignent en C (d), elles s'attirent et se recombinent pour donner naissance à une autre dislocation aussi source de multiplication (e, f).

tacle formé par le croisement de deux plans sur le mouvement d'une dislocation.

Supposons une dislocation de type coin dans un réseau cristallin. La figure 1.9 montre la position initiale du défaut et sa position après un dépassement d'un obstacle. La distance entre ces deux positions d'équilibre est le vecteur Burgers de cette structure. En se déplaçant entre ces deux positions, la dislocation rencontre une énergie de résistance plus élevée qui est maximale à mi-chemin. C'est l'énergie nécessaire pour franchir la liaison entre deux atomes qui se déplacera dans le sens contraire au mouvement de la dislocation. La différence entre l'énergie maximale et

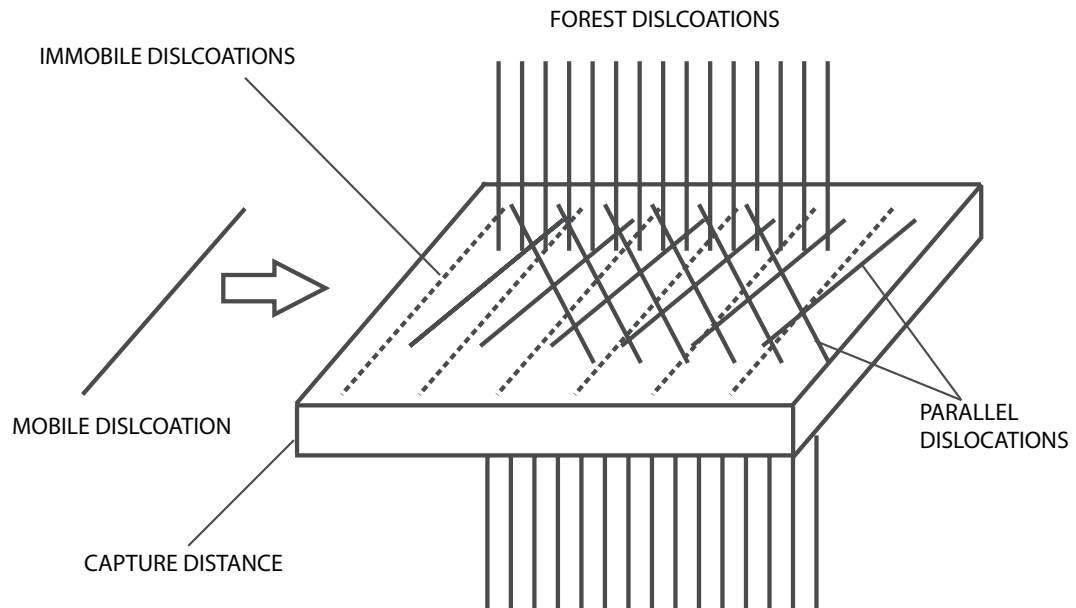


Figure 1.7 Une dislocation peut croiser durant son mouvement autres dislocations dans le même plan de glissement et des dislocations sécantes à ce plan. Les dislocations et les autres types de défauts rencontrés constituent des obstacles résistant au glissement de la dislocation en mouvement - (Roters et Raabe, 2006b)

l'énergie à l'équilibre est appelée « énergie de Peierls-Nabarro » et notée par  $G_{PN}$ . La figure 1.10 montre la variation de l'énergie le long du trajet ainsi que la variation de la résistance au mouvement de la dislocation. Même s'il s'agit ici d'un obstacle à champs de contraintes de petit intervalle, la variation d'énergie et la résistance au mouvement est semblable pour des obstacles de grands intervalles, seulement à plus grande échelle.

En superposant les mécanismes de franchissement d'obstacles à champs de contraintes sur petits intervalles (mécanismes activés thermiquement) à un mécanisme de franchissement d'obstacle à champs de contraintes sur longs intervalles (mécanisme athermique), la variation de la résistance interne aux dislocations le long d'un grand intervalle est alors la somme des contraintes opposées aux mouvements des dislocations des résistances créées par chaque obstacle. La figure 1.11 illustre une telle distribution.

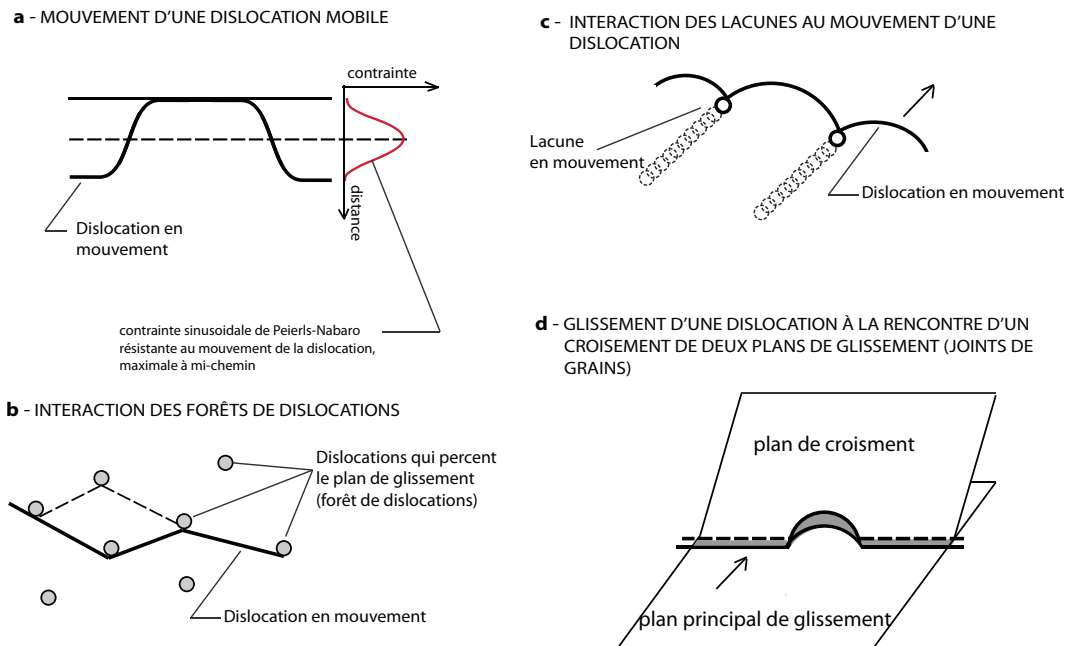


Figure 1.8 Mécanismes de glissement des dislocations activées thermiquement

À 0 Kelvin, pour qu'une dislocation soit en mouvement, i.e. pour avoir une déformation inélastique du matériau, la contrainte appliquée doit être supérieure à une contrainte minimale  $\tau_0$ . À une température plus élevée, les fluctuations thermiques contribueront aux franchissements des obstacles et la contrainte appliquée requise pour un mouvement des dislocations devient  $\tau < \tau_0$ . Si les obstacles à champs de contraintes sur des petits intervalles sont absents, la contrainte appliquée à la dislocation nécessaire pour franchir un obstacle de grand intervalle est alors moins sensible à la température.

La plupart des auteurs (Conrad et Frederick, 1962; Davidson et Lindholm, 1974; Campbell, 1975; Klepaczko, 1975; Klepaczko et Duffy, 1977, 1982; Klepaczko, 1986; Klepaczko et Chiem, 1986; Zerilli et Armstrong, 1987; Abed et Voyiadjis, 2005a; Voyiadjis et Abed, 2006a) supposent que la résistance aux obstacles de petit intervalle dépend de la température et du taux de déformation. Par contre, il existe différentes hypothèses sur la dépendance de la contrainte nécessaire pour franchir

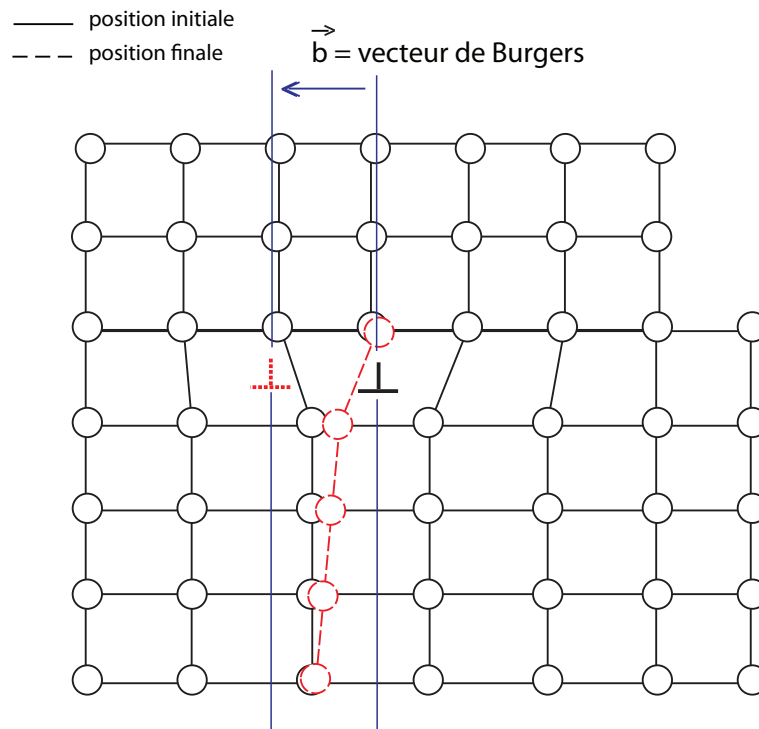


Figure 1.9 Mouvement d'une dislocation coin. Le défaut linéique d'empilement se déplace d'une distance équivalente au vecteur de Burgers engendrant une rupture de liaison des atomes voisins. - (Conrad, 1964)

les obstacles à long intervalle.

Certains auteurs considèrent la résistance des obstacles de long intervalle comme indépendante de la température et du taux de déformation (Zerilli et Armstrong, 1987; Tjøtta et Mo, 1993; Cheng et al., 2001; Abed et Voyiadjis, 2005a; Voyiadjis et Abed, 2006a), alors que d'autres (Klepaczko, 1975; Klepaczko et Duffy, 1977, 1982; Klepaczko et Chiem, 1986; Rusinek et Klepaczko, 2001; Uenishi et Teodosiu, 2004; Rusinek et al., 2007) la considère légèrement dépendante de ces deux paramètres. La dépendance de la résistance des obstacles de grand intervalle à la température provient de la dépendance du module de cisaillement à la température  $\mu(T)$ . Elle exerce toutefois un léger effet sur la résistance des obstacles de long intervalle. Cette étude partagera la résistance aux mouvements des dislocations en une résistance

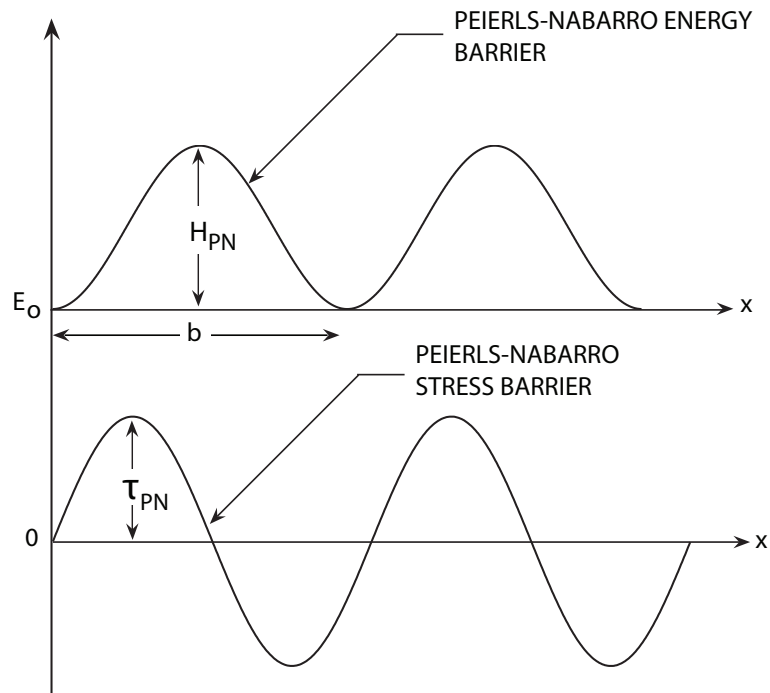


Figure 1.10 Variation de l'énergie et de la contrainte selon la distance de mouvement pour une dislocation - (Conrad, 1964)

sensible aux fluctuations thermiques et en une résistance athermique totalement indépendante de la température.

Il est important aussi de distinguer la structure cristalline du matériau en question. Il existe trois structures (figure 1.12) :

- CC (ou BCC), « cristal Cubique Centré » ou « Body Centered Cubic »
- CFC (ou FCC), « cristal Cubique à Face Centrées » ou « Face Centered Cubic »
- HC (ou HCP), « cristal hexagonal compact » ou « Hexagonal Close Packed »

Chaque structure a sa propre distribution d'obstacles et son propre comportement. La structure de l'aluminium pur est CFC ; nous nous concentrerons donc au comportement de ce type de structure.

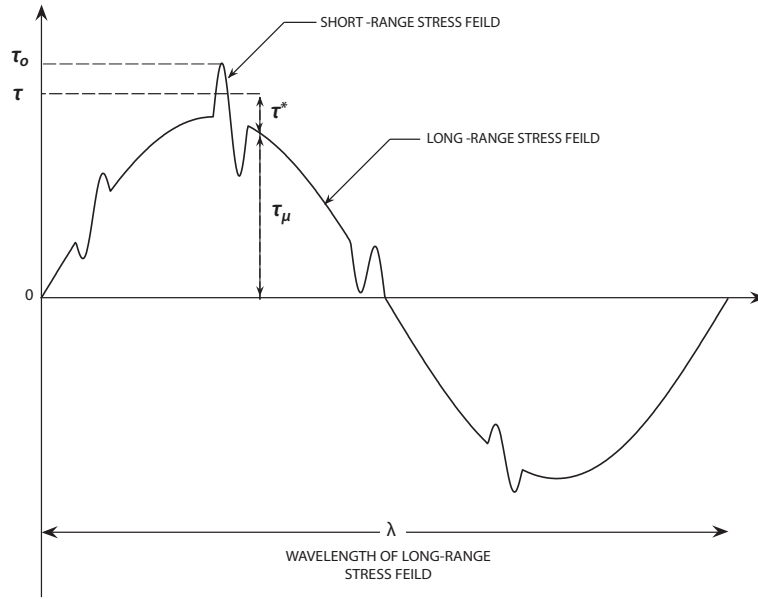


Figure 1.11 Champ de contrainte interne opposant une dislocation en mouvement dans un réseau cristallin.  $\tau_0$  est la contrainte nécessaire sans pour franchir les obstacles sans la contribution des fluctuations thermiques,  $\tau$  est la contrainte appliquée nécessaire pour franchir les obstacles avec la contribution des fluctuations thermiques.  $\tau_\mu$  est la contrainte nécessaire pour franchir un obstacle de long-intervalle et indépendante des fluctuations thermiques.  $\tau^* = \tau - \tau_\mu$  est la partie de la contrainte dépendante des fluctuations thermiques. - (Conrad, 1964)

En se basant sur l'existence de deux types d'obstacles dans la structure cristalline à l'échelle microscopique, l'hypothèse suivante selon laquelle la contrainte peut être séparée en deux composantes, est formulée :

$$\sigma = \sigma_{\text{ath}} + \sigma_{\text{th}} \quad (1.2)$$

où  $\sigma_{\text{ath}}$  est la partie de la contrainte indépendante du taux de déformation et de la température, appelée « contrainte athermique », et  $\sigma_{\text{th}}$  la partie de la contrainte sensible au taux de déformation et à la température, appelée « contrainte thermique ».

Plusieurs auteurs ont réussi à écrire des relations constitutives décrivant le com-

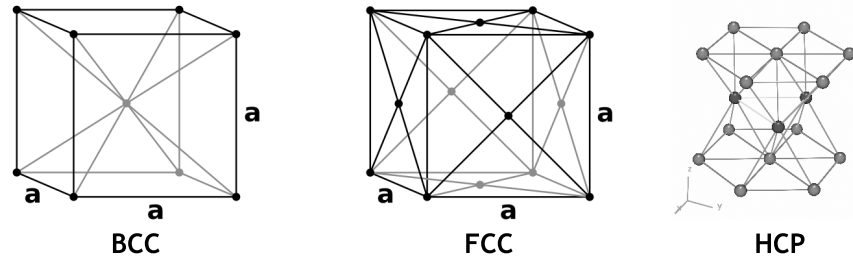


Figure 1.12 Les différentes structures cristallines

portement des matériaux pour plusieurs intervalles de taux de déformation et de températures en adoptant cette hypothèse de partition (Tjøtta et Mo, 1993; Cheng et al., 2001; Abed et Voyiadjis, 2005a; Voyiadjis et Abed, 2006a; Klepaczko et Chiem, 1986; Rusinek et Klepaczko, 2001; Uenishi et Teodosiu, 2004). Chacune des composantes sera traitée en détail dans les prochaines pages en considérant un comportement unidimensionnel. Une fois la forme empirique de ces relations obtenue, elle servira de base pour la formulation du comportement tridimensionnel d'un matériau CFC.

### 1.3 COMPORTEMENT UNIDIMENSIONNEL

#### 1.3.1 Écoulement plastique et écrouissage

Supposons une éprouvette sous une force de traction  $F_t$  comme montrée à la figure (1.13). La contrainte à une section de l'éprouvette est considérée uniforme et définie comme étant la quantité moyenne de force par unité d'aire de surface :

$$\sigma = \frac{F_t}{A_o} \quad (1.3)$$

où  $A_o$  est l'aire de section initiale. En effectuant un test de traction, la déformation est mesurée comme étant l'élongation  $\Delta l$  divisée par la longueur initiale  $l_i$  de

l'éprouvette :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_i} \quad (1.4)$$

Une courbe de traction (ou de compression) est construite en traçant la contrainte en fonction de la déformation.

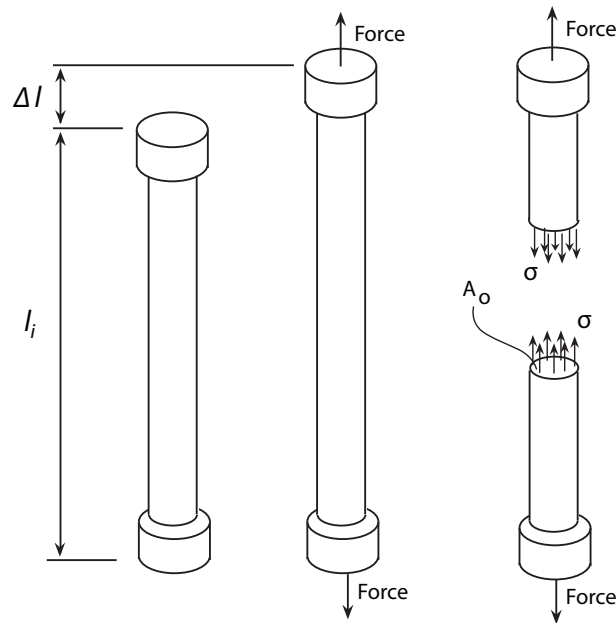


Figure 1.13 Éprouvette sous une force de traction Force, subit un allongement  $\Delta l$ . La contrainte  $\sigma$  à une section de l'éprouvette est la densité surfacique de force supposée uniformément distribuée

En général, les courbes de traction-compression des matériaux peuvent être classées dans deux catégories (Lemaitre, 2004) :

- Courbes d'écrouissage à palier - figure 1.14
- Courbes d'écrouissage à module tangent continu - figure 1.15

Le comportement de l'Al7075 sous traction ou compression présente une courbe d'écrouissage à module tangent continu : Quand la force est appliquée, la contrainte  $\sigma$  commence à augmenter linéairement par rapport à la déformation  $\varepsilon$  jusqu'à une valeur seuil  $\sigma_Y$  qui limite le domaine élastique, appelée limite d'élasticité. Dans ce domaine, la contrainte est liée à la déformation par une constante  $E$  appelée



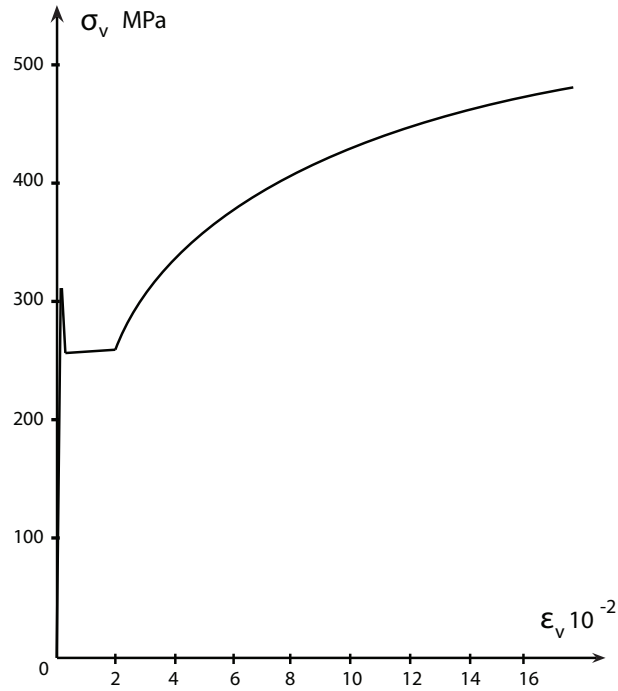


Figure 1.14 Courbe d'écrouissage à palier de l' Acier XC 38 - (Lemaitre, 2004)

module d'élasticité qui représente le taux de variation de la contrainte par rapport à la déformation :

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon}\varepsilon \quad (1.5)$$

Quand la contrainte  $\sigma$  dépasse la limite d'élasticité  $\sigma_Y$ , le matériau montre un durcissement et le taux de variation de la contrainte par rapport à la déformation diminue. Ce phénomène est appelé écrouissage et caractérise le domaine plastique ( $\sigma > \sigma_Y$ ) où la contrainte n'évolue plus linéairement en fonction de la déformation :

Si on pose que la déformation plastique  $\varepsilon_p$  et la déformation élastique  $\varepsilon_e$  sont indépendante, la déformation totale s'écrit :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (1.6)$$

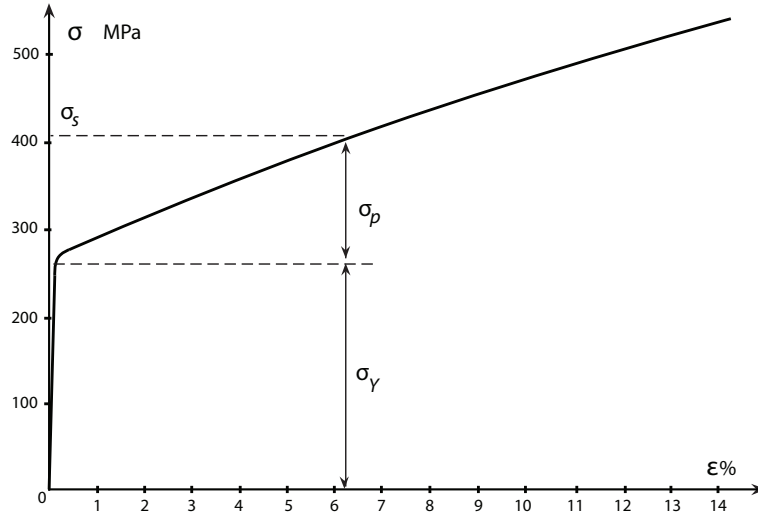


Figure 1.15 Courbe d'écrouissage à module tangent continu de l'Acier inoxydable A 316 - (Lemaitre, 2004)

et la contrainte totale devient :

$$\sigma = E\varepsilon_e \quad \sigma < \sigma_Y \quad (1.7)$$

$$\sigma = \sigma_s = E\varepsilon_e + \sigma_p(\varepsilon_p) \quad \sigma > \sigma_Y \quad (1.8)$$

où  $\sigma_s$  est la contrainte dans le domaine plastique et  $\sigma_p$  la contrainte plastique.

Ramberg et Osgood (Ramberg et Osgood, 1943) ont montré que l'écrouissage obéit à l'équation suivante :

$$\sigma_s = \sigma_Y + K_Y \varepsilon_p^{1/M_Y} \quad (1.9)$$

où  $K_Y$  et  $M_Y$  sont des constantes déterminées à partir des données expérimentales.

Cette forme d'écrouissage découle d'un passage à l'échelle macroscopique de la théorie de dislocations. Introduite par Taylor (Taylor, 1938), cette théorie postule que la contrainte dans le domaine plastique est proportionnelle à la racine carrée

de la densité de dislocation  $\rho_d^{1/2}$ , telle que

$$\sigma_s = \kappa_d b \rho_d^{1/2} \quad (1.10)$$

où  $\kappa_d$  est une constante et  $b$  le vecteur de Burger.

Comme il existe une densité initiale de dislocations (ou défauts)  $\rho_{d_0}$  qui n'est pas nulle dans un matériau avant sa déformation, l'équation précédente peut s'écrire alors sous la forme suivante :

$$\sigma_s = \sigma_Y + \kappa_d b (\rho_d - \rho_{d_0})^{1/2} \quad (1.11)$$

La figure 1.16 montre une courbe d'écrouissage pour de l'Al 7075-T6 roulé et fini à froid. En réarrangeant l'équation (1.9), on obtient

$$\ln [\sigma_s - \sigma_Y] = \ln [K_Y] + 1/M_Y \ln [\varepsilon_p] \quad (1.12)$$

Par régression linéaire, il est possible d'obtenir  $M_Y$  et  $K_Y$ . On trouve  $M_Y = 1.7$ ;  $K_Y = 356.38$  MPa;  $\sigma_Y = 510.21$  MPa. La figure 1.16 montre que la courbe tracée en utilisant les valeurs obtenues coïncide avec les données expérimentales et que l'équation (1.9) modélise bien l'écrouissage de ce type de matériau.

### 1.3.2 Écoulement sensible au taux de déformation

Selon le taux de déformation et la température à laquelle le matériau est sollicité, trois régions sont distinguées, chacune caractérisée par un mécanisme de déformation dominant (El-Magd et al., 2005, 2006; Lee et M.S., 2003; Uenishi et Teodosiu, 2004; Rusinek et al., 2007).

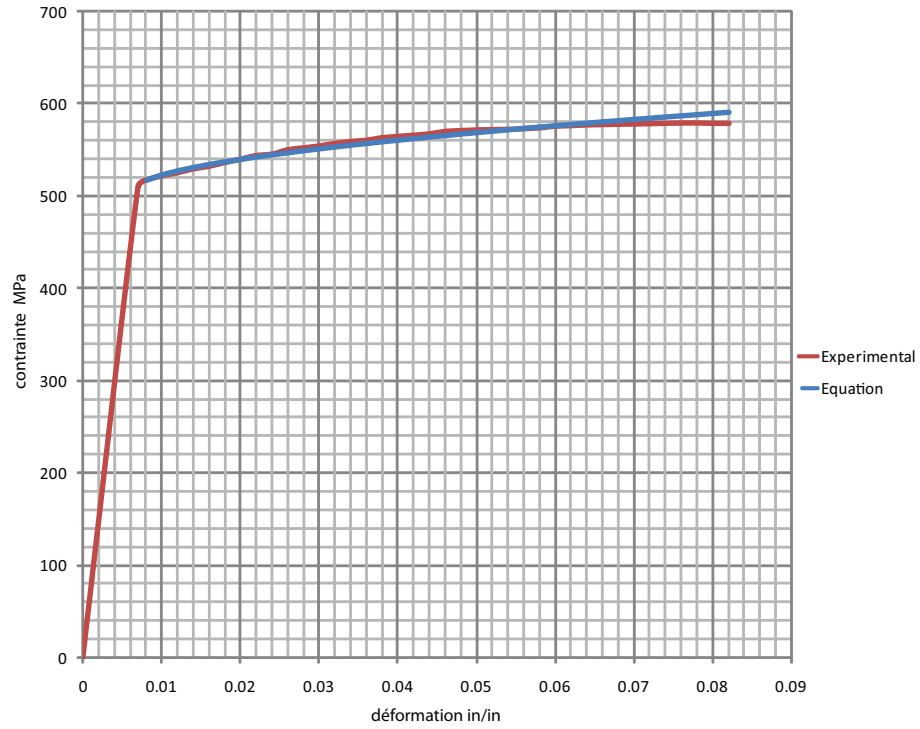


Figure 1.16 Courbe d'écrouissage Al 7075-T6 - (MMPDS-3, 2008)

Ces régions sont identifiées en étudiant la variation de la contrainte plastique  $\sigma_s$ , à plusieurs températures  $T$ , en fonction du taux de déformation  $\dot{\varepsilon}$  pour une valeur choisie de déformation  $\varepsilon$  (ou de déformation plastique  $\varepsilon^p$ ). Les figures 1.17, 1.18 et 1.19 illustrent bien le cas des alliages d'acier, de titane, et celui d'un aluminium, respectivement. Elles montrent des courbes de la contrainte  $\sigma_s(T, \dot{\varepsilon})|_{\varepsilon=\text{constante}}$  en fonction du taux de déformation sur une échelle logarithmique pour plusieurs températures.

### 1.3.2.1 Région 1 - fluage

À des températures élevées et des taux de déformation relativement faibles ( $\dot{\varepsilon} \leq 10^{-2}$ ), on remarque le mécanisme du fluage qui gouverne la déformation quand le

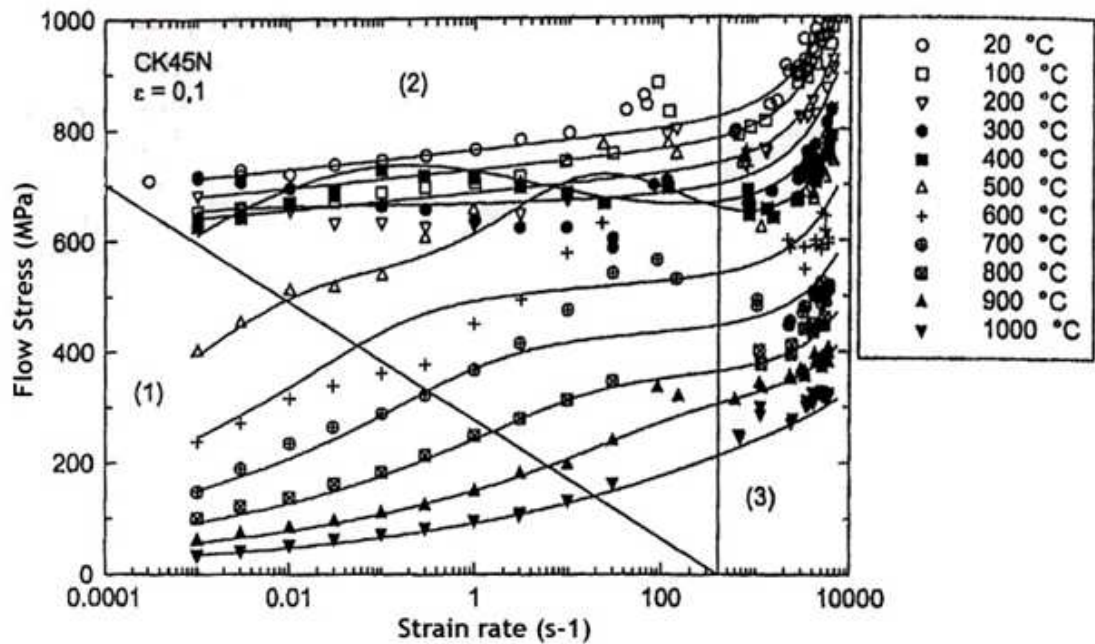


Figure 1.17 Courbes de contraintes plastiques pour plusieurs taux de déformation à plusieurs températures et à une déformation constante  $\varepsilon = 0.1$  - Acier Ck45N - (El-Magd et al., 2005)

matériau est soumis à une charge pendant une longue période.

Pour des températures élevées, supérieures aux tiers de la température de fusion du matériau et à des taux de déformation faibles-moyens (région 1), la déformation est gouvernée par le fluage résultant d'une restauration de la structure cristalline et du mouvement des dislocations dans les grains, auxquels se superposent des effets de glissement intercristallin (Conrad et Frederick, 1962; Johnston, 1962; Kocks et al., 1975; Meyers, 2002).

Lemaitre et Chaboche (Lemaitre, 2004) ont expliqué que la courbe de fluage peut être divisée en trois phases (figure(1.20)) :

- Une phase de fluage primaire,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ , au cours de la quelle l'écroutissage du matériau engendre initialement une vitesse de fluage très grande. Dans

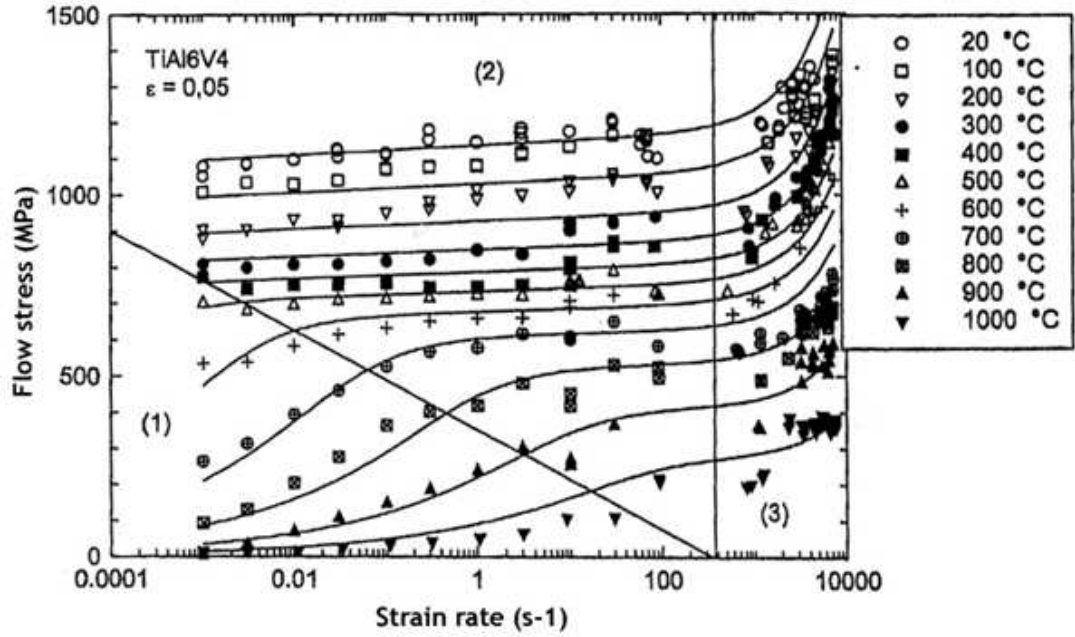


Figure 1.18 Courbes de contraintes pour plusieurs taux de déformation à plusieurs températures - Titanium TIA16V4 - (El-Magd et al., 2005)

cette phase la déformation peut être reliée au temps par la loi d'Andrade :

$$\varepsilon = At^{1/q} \quad (1.13)$$

où  $A$  et  $q$  sont des constantes reliées au matériau et à la température.

- Une phase de fluage secondaire,  $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$ , où la vitesse de fluage est constante. Dans ce cas, le taux de déformation est relié à la contrainte par la loi de Norton :

$$\dot{\varepsilon}_p^* = \left( \frac{\sigma}{\lambda^*} \right)^{N^*} \quad (1.14)$$

où  $N^*$  est le coefficient de Norton et  $\lambda^*$  une constante. Ces deux constantes sont reliées au matériau et à la température.

- Une phase de fluage tertiaire,  $\varepsilon_2 < \varepsilon$ , où se présentent plusieurs mécanismes, dont l'endommagement qui réduit la résistance du matériau, ainsi qu'une in-

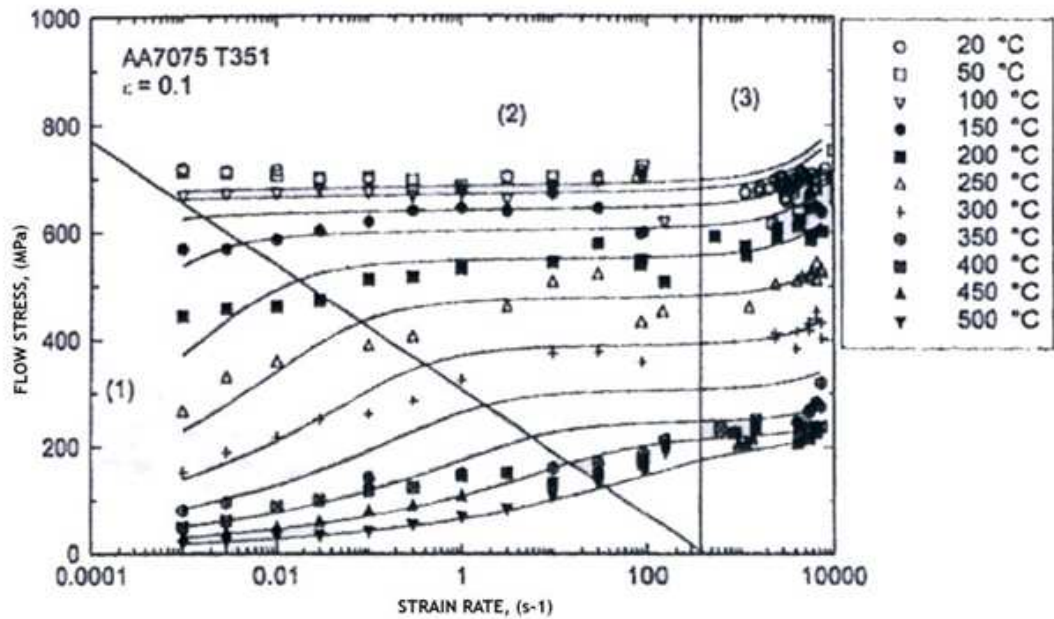


Figure 1.19 Courbes de contraintes pour plusieurs taux de déformation à plusieurs températures - Aluminium AA7075 T351 - (El-Magd et al., 2005)

stabilité de déformation résultante de la réduction de section dans les essais à force constante.

### 1.3.2.2 Région 2 - Activation thermique

Dans la région des températures faibles (autour de la température ambiante), à des taux de déformation moyens jusqu'à des taux légèrement élevés, la contrainte  $\sigma_s$  est linéairement proportionnelle au logarithme du taux de déformation pour une déformation donnée (Maiden et Green, 1966; Holt, 1967; Johnson et Cook, 1983; El-Magd, 1985; Lee, 2000; et al., 2000; Lee et M.S., 2003; Zhao, 1997; El-Magd et al., 2005, 2006; Malinowski et al., 2007). Cette tendance peut être expliquée par la théorie de l'activation thermique (Conrad et Frederick, 1962; Conrad, 1964; Medrano, 1972; Davidson et Lindholm, 1974; Campbell, 1975; Kocks et al., 1975; Puchi, 1997; Goto, 2000; Kocks, 2001; Kocks et Mecking, 2003; Elmustafa et al.,

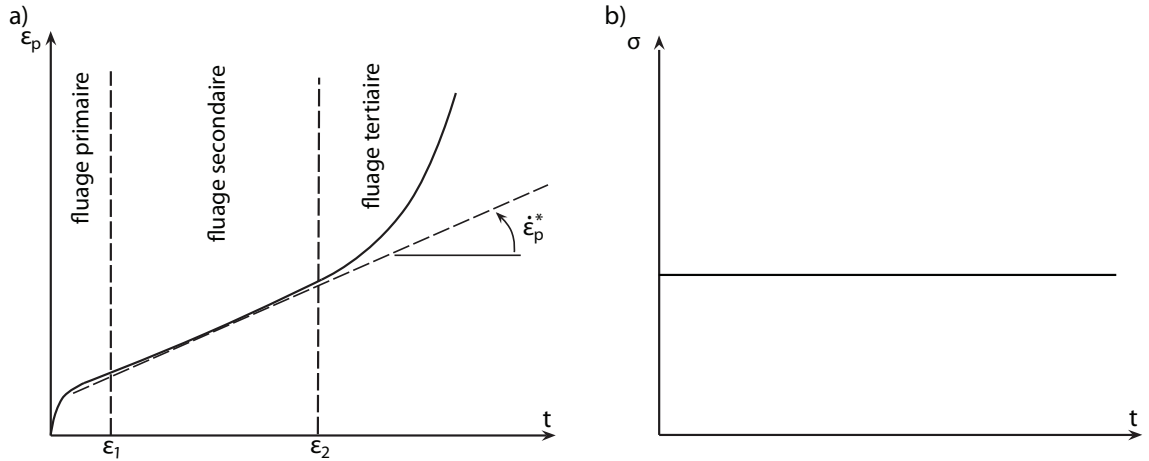


Figure 1.20 a) Une courbe typique de fluage peut être divisée en trois zones : fluage primaire, fluage secondaire et fluage tertiaire. b) Durant le fluage la contrainte est maintenue constante en fonction du temps

2003; Roters et Raabe, 2006b,a).

Dans cette région, le mouvement des dislocations devient de plus en plus influencé par les obstacles de petit intervalle, comme les forêts de dislocations et les impuretés dans les matériaux CFC et comme les barrières de Peierls dans les matériaux CC.

Orowan (Orowan, 1934) a postulé que le taux de déformation en cisaillement plastique est relié à la densité des dislocations mobiles par l'équation suivante :

$$\dot{\gamma}_p = b\rho_m v \quad (1.15)$$

où  $\rho_m$  est la densité des dislocations mobiles.

La vitesse de dislocation est généralement écrite sous la forme d'une équation de type Arrhenius (Conrad, 1964; Kocks, 2001; Klepaczko, 1975) :



$$v = v_0 \exp \left[ -\frac{G(\sigma)}{kT} \right] \quad (1.16)$$

où  $v_0 = d/(t_w + t_m)$  est la vitesse moyenne de dislocation sur une distance moyenne  $d$  entre les obstacles.  $t_w$  est le temps moyen d'attente d'une dislocation devant un obstacle et  $t_m$  le temps moyen de mouvement entre un obstacle et l'autre. Plusieurs auteurs (McCormick, 1972; Shioiri et al., 1985; El-Magd et al., 2006) ont observé que dans la région de l'activation thermique le temps moyen de mouvement est négligeable par rapport au temps d'attente qui est relativement élevé.

En substituant l'équation (1.16) dans l'équation (1.15), on obtient une relation entre le taux de déformation en cisaillement, la densité des dislocations mobiles, l'énergie d'activation et la température :

$$\dot{\gamma}_p = b\rho_m v_0 \exp \left[ -\frac{G(\sigma)}{kT} \right] \quad (1.17)$$

Le tenseur de taux de déformation plastique (à l'échelle macroscopique) peut être relié au taux de déformation plastique en cisaillement (à l'échelle microscopique) par un tenseur d'orientation d'ordre deux  $\mathbf{M}$  (Bammann et Aifantis, 1987) :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}_p \mathbf{M} \quad (1.18)$$

Le tenseur d'orientation  $\mathbf{M}$  est déduit du vecteur unitaire normal au plan de glissement  $\mathbf{n}$  et du vecteur unitaire parallèle à la direction du glissement  $\mathbf{v}$ , par l'équation (1.19) :

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{n}) \quad (1.19)$$

Les matériaux métalliques sont incompressibles dans le domaine plastiques et la déformation hydrostatique  $\varepsilon_H$  est nulle. Le taux de déformation équivalent s'écrit

$$\dot{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}^p : \dot{\varepsilon}^p} \quad (1.20)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\dot{\varepsilon}^p = mb\rho_m v_0 \exp \left[ -\frac{G(\sigma)}{kT} \right] \quad (1.21)$$

où  $m = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{M} : \mathbf{M}}$  est le facteur d'orientation de Shmidt.

Les variables  $m$ ,  $b$  et  $v_0$  sont des constantes et sont des propriétés du matériau. Si la densité de dislocations mobiles  $\rho_m$  reste constante, le terme pré-exponentiel dans l'équation (1.21) devient constant et peut être posé égal à un taux de déformation initial  $\dot{\varepsilon}_0$ . On obtient une équation semblable à l'équation (1.1) suggérée par Conrad :

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon}_0 \exp \left[ -\frac{G(\sigma)}{kT} \right] \quad (1.22)$$

où

$$\dot{\varepsilon}_0 = mbv_0\rho_m \quad (1.23)$$

Cette hypothèse peut être valide au début de l'écrouissage où les déformations sont petites. Plusieurs auteurs (Kubin et Estrin, 1990; Klepaczko et Chiem, 1986; Klepaczko et al., 1993; Kubin et al., 2008) ont démontré que ce terme n'est pas constant, spécialement dans le domaine des grandes déformations où la densité des dislocations évolue en fonction de la déformation. L'évolution est approximativement linéaire dans le premier stade de l'écrouissage alors qu'elle devient plus

complexe pour des déformations importantes. Plusieurs modèles ont été proposés, les plus importants étant :

- Klepaczko (Klepaczko, 1988) a postulé que l'évolution des dislocations  $\rho$  par rapport à la déformation plastique  $\varepsilon_p$  est linéairement proportionnelle à la différence entre la densité des forêts des dislocations  $\rho_f$  et la densité des dislocations initiales  $\rho_i$  dans le matériau. :

$$\frac{d\rho}{d\varepsilon_p} = M - k_a (\rho_f - \rho_i) \quad (1.24)$$

où  $M$  et  $k_a$  peuvent être considérés comme des constantes dans les premiers stades de l'écrouissage.

- Kubin et Estrin (Kubin et Estrin, 1990) ont proposé deux équations différentielles reliant la densité des dislocations mobiles  $\rho_m$  à la densité des forêts de dislocations  $\rho_f$  :

$$\frac{d\rho_m}{d\varepsilon_p} = \frac{\lambda_1}{b^2} - \lambda_2 \rho_m - \frac{\lambda_3}{b} \rho_f^{1/3} \quad (1.25)$$

$$\frac{d\rho_f}{d\varepsilon_p} = \lambda_2 \rho_m + \frac{\lambda_3}{b} \rho_f^{1/2} - \lambda_4 \rho_f \quad (1.26)$$

où  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  et  $\lambda_4$  sont des constantes reliées à la multiplication des dislocations.

Développer une expression convenable de l'énergie d'activation  $G$  est aussi le sujet de plusieurs recherches dans la théorie de l'activation thermique. Si on désigne  $\sigma_0$  la contrainte appliquée nécessaire à franchir un obstacle de petit intervalle à 0K sans la contribution des fluctuations thermiques et  $\tau_0$  sa composante projetée dans le plan de glissement de la dislocation, l'énergie d'activation est l'énergie requise des fluctuations thermiques pour franchir un obstacle sous une contrainte appliquée

$\tau^* < \tau_0$ . La Figure (1.21) illustre l'énergie d'activation pour un seul obstacle.

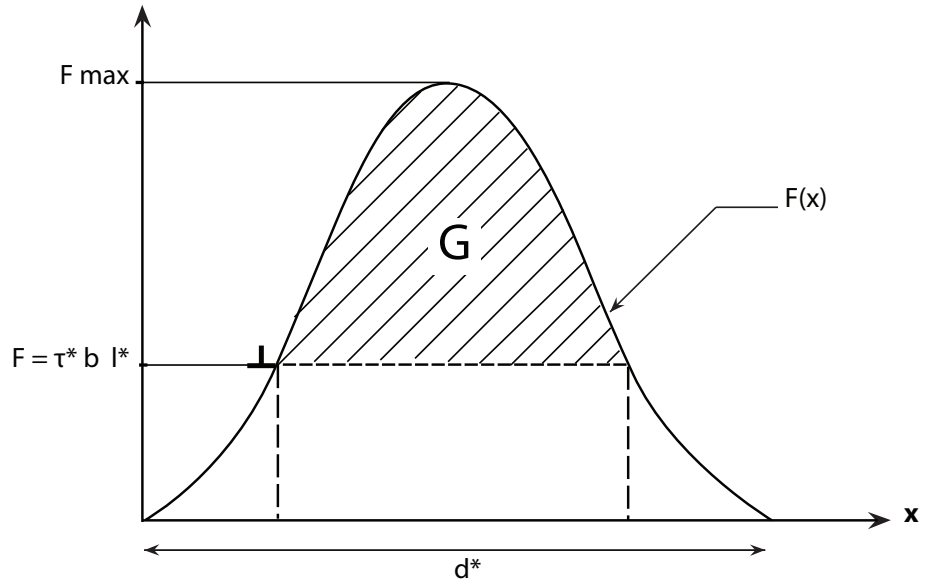


Figure 1.21 L'aire sous la courbe  $F(x)$  représente l'énergie d'activation totale  $G_o$  nécessaire pour franchir un obstacle d'une longueur  $d^*$  sans aucune contribution des fluctuations thermiques. La partie hachurée représente l'énergie d'activation qui doit être fournie par les fluctuations thermiques pour que l'obstacle soit franchi par la dislocation de largeur  $l^*$  sous une force appliquée  $F = \tau^* b l^*$  où  $b$  est le vecteur de Burgers. La partie non hachurée sous la courbe représente le travail effectué par la force  $F = \tau^* b l^*$  - (Conrad, 1964)

La force fictive  $F^*$  appliquée sur une dislocation soumise à  $\tau^*$  est égale à :

$$F^* = \tau^* b l^* \quad (1.27)$$

où  $l^*$  est la longueur du segment de dislocation en mouvement. Le produit  $A^* = b l^*$  est appelé l'aire d'activation.

Le travail effectué par cette force durant l'activation thermique s'obtient en intégrant la force  $F^*$  le long de la distance  $d^*$  balayée par la dislocation durant son mouvement (figure 1.22) :

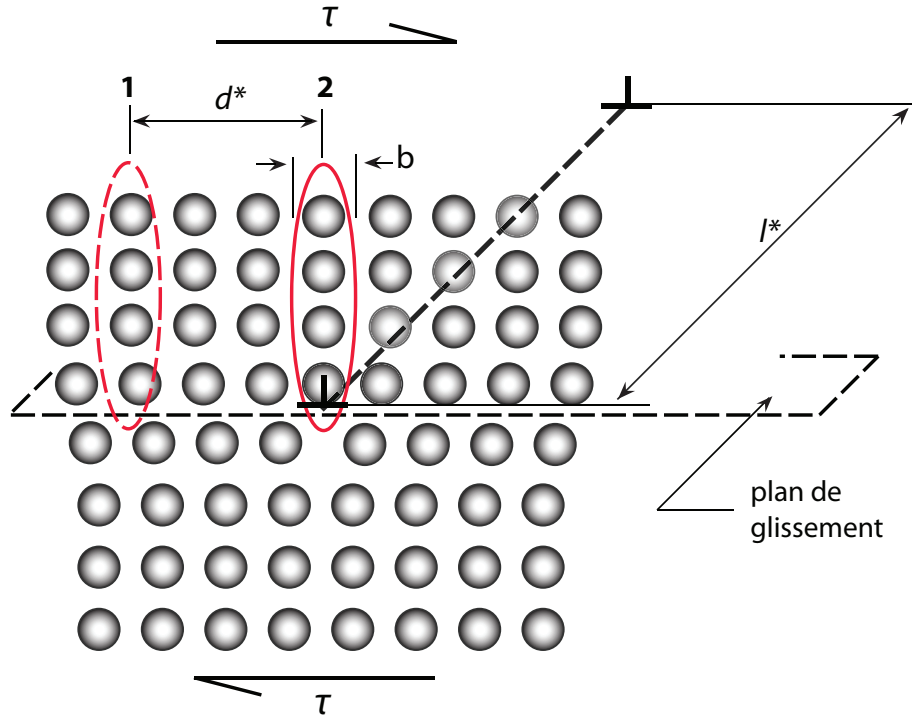


Figure 1.22 Mouvement d'une dislocation d'une longueur  $l^*$  à travers une distance  $d^*$  de la position 1 jusqu'à la position 2 sous une contrainte  $\tau$ .

$$W^* = \int_0^{d^*} F^* dx \quad (1.28)$$

En se référant à la Figure (1.21), l'énergie de l'activation est la différence entre le travail total nécessaire pour franchir un obstacle sans la contribution des fluctuations thermiques et le travail effectué par la force appliquée ;

$$G = \int_0^{d^*} F(x) dx - \int_0^{d^*} F^* dx = \int_0^{d^*} F(x) dx - \int_0^{d^*} \tau^* b l^* dx \quad (1.29)$$

En fait, le premier terme de l'équation (1.29) est l'énergie d'activation  $G_0$  nécessaire pour franchir l'obstacle sans aucune contrainte appliquée, possible à des températures très élevées parfois supérieures à la température de fusion.

Le deuxième terme est souvent écrit sous forme d'une intégrale en fonction de la contrainte, ce qui permet de sortir le volume d'activation  $V^* = bl^*d^*$ , où  $d^*$  est la distance balayée par la dislocation durant le glissement.

$$G = G_0 - \int_0^{\tau^*} V^* d\tau^* \quad (1.30)$$

Kocks (Kocks, 2001; Kocks et Mecking, 2003) a observé, après plusieurs expériences, que l'énergie d'activation peut être reliée à la contrainte thermique  $\sigma_{th}$  et à la contrainte totale  $\sigma_0$  nécessaire pour franchir un obstacle sans contribution des fluctuations thermiques par une formule empirique :

$$G = G_0 \left[ 1 - \left[ \frac{\sigma_{th}}{\sigma_0} \right]^{q_1} \right]^{q_2} \quad (1.31)$$

où  $q_1$  et  $q_2$  sont des constantes dont la valeur typique est de 1/2 et 3/2 respectivement, pour les matériaux CFC et de 2/3 et 2, respectivement pour les matériaux CC. En combinant l'équation (1.31) et l'équation (1.22), on obtient une forme générale reliant la contrainte et le taux de déformation dans la région des mécanismes activés thermiquement :

$$\sigma_{th} = \sigma_0 \left\{ 1 - \left[ -\frac{kT}{G_0} \ln \left( \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right]^{1/q_2} \right\}^{1/q_1} \quad (1.32)$$

### 1.3.2.3 Région 3 - Amortissement linéaire

Pour des taux de déformation élevés (de l'ordre  $10^4 s^{-1}$ ), le temps d'attente  $t_m$  devient négligeable (El-Magd et al., 2005) et la vitesse de dislocation s'écrit  $v_0 = d/t_m$ . Alors les dislocations glissent à des grandes vitesses créant des distor-

sions élastiques suivies par des relaxations. Dans cette région, on observe que la contrainte dans le domaine plastique est décomposée en une contrainte  $\sigma_h$  dépendante de la déformation et de la température et une partie proportionnelle au taux de déformation (El-Magd et al., 2005, 2006) :

$$\sigma = \sigma_h(\varepsilon, T) + \eta \dot{\varepsilon}_p \quad (1.33)$$

où  $\eta$  est un coefficient d'amortissement créé par la dissipation d'énergie résultante des distorsions élastiques.

## 1.4 MODÉLISATION

L'objectif d'une relation constitutive est de décrire le comportement macroscopique d'un matériau. Certaines relations constitutives sont purement empiriques (Johnson et Cook, 1983; Zhao, 1997; Liang et Khan, 1999; Lee et G.H., 1999; Khan et Liang, 1999, 2000; Goto, 2000; Zubelewicz et al., 2006; Sheikh-Ahmad et Twomey, 2007), dérivées mathématiquement à partir de résultats expérimentaux. Elles sont une combinaison d'expressions mathématiques corrélées afin de coïncider avec ces résultats. La formulation de relations constitutives empiriques restreint souvent leur domaine de validité. Il existe aussi des relations constitutives basées uniquement sur le comportement physique du matériau au niveau microscopique (Zerilli et Armstrong, 1987; Tjotta et Mo, 1993; Teodosiu et Hu, 1995; Campagne et al., 2005; Cheng et al., 2001; Meyers, 2002; Rusinek et al., 2007). La compréhension des mécanismes microscopiques dans les matériaux est souvent très utile pour la dérivation de la loi de comportement, mais elle ajoute une certaine complexité au modèle par l'implication d'un grand nombre de paramètres physiques et par la mesure des propriétés de la microstructure.

L'idée générale derrière ce projet est de proposer un modèle phénoménologique (ou empirique) en se basant sur les mécanismes au niveau microscopique. Dans ce qui suit, on fait l'hypothèse qu'une courbe d'écrouissage peut être approximée par une relation de Ramberg-Osgood, peu importe le taux de déformation (équation 1.9).

La sensibilité aux taux de déformation de la courbe d'écrouissage se manifeste de différentes manières, dépendamment de la structure cristalline du matériau. Les figures (1.23), (1.24) et (1.25) illustrent comment réagissent les matériaux CC, CFC et HC, lorsque écouis à plusieurs taux de déformation.

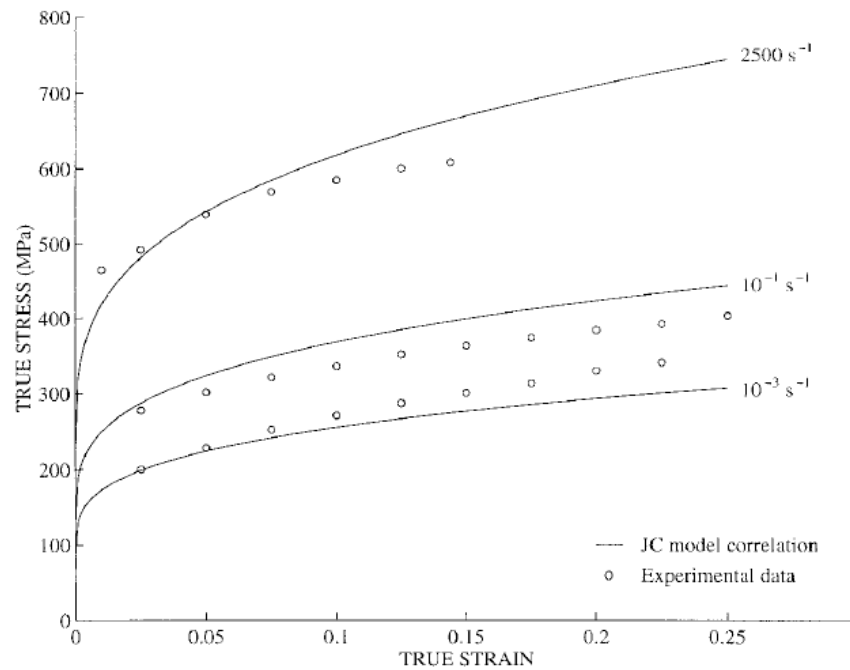


Figure 1.23 Courbes d'écrouissage du TANTALUM (CC) à plusieurs taux de déformation. Le matériau montre le même écrouissage pour les différents taux de déformation. C'est la limite d'écoulement qui augmente par rapport aux taux de déformation - CHEN and GRAY (1995)

On observe que les matériaux CC (1.23) sont seulement influencés au niveau de la limite d'élasticité qui est croissante par rapport au taux de déformation. Par contre,



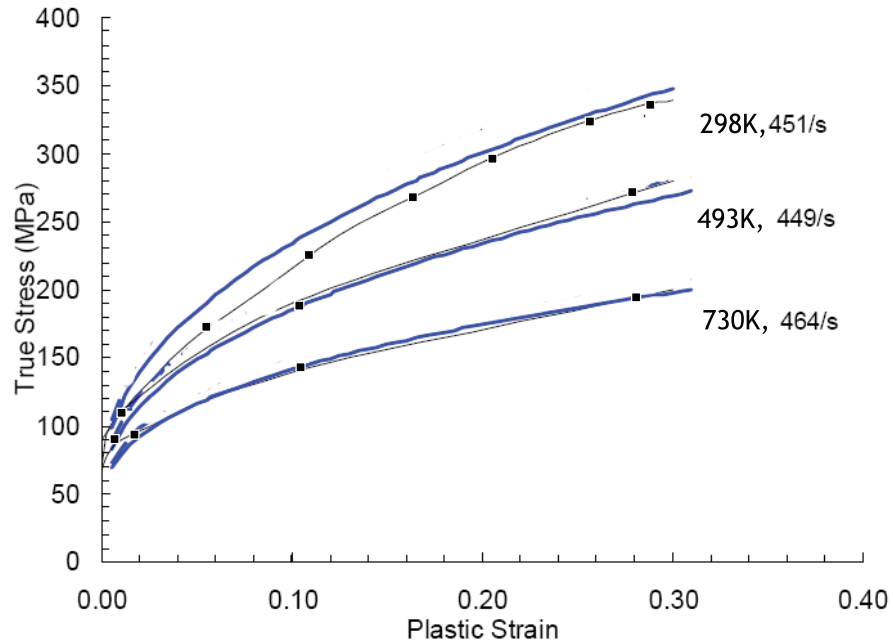


Figure 1.24 Courbes d'écrouissage du OFHC Cuivre (CFC) à plusieurs taux de déformation et températures. Le matériau montre des écrouissages croissants par rapport aux taux des déformations mais l'écrouissage débute à la même limite d'écoulement - (Johnson et Cook, 1988)

l'écrouissage est indépendant du taux de déformation. Pour les matériaux CFC, on note que la limite d'élasticité reste invariable par rapport au taux de déformation. C'est l'écrouissage et la variation de la contrainte plastique en fonction de la déformation qui sont influencés. Les matériaux HC regroupent les deux phénomènes. La limite d'élasticité et l'écrouissage sont dépendants du taux de déformation.

En se basant sur ces observations, on peut conclure que le premier terme de l'équation de Ramberg-Osgood (équation (1.9)) est indépendant du taux de déformation pour un matériau CFC.  $\sigma_Y$  représente donc la contrainte athermique  $\sigma_{ath}$ , et l'équation (1.32) forme la contrainte thermique  $\sigma_{th}$  tout en remplaçant  $\sigma_0$  par le deuxième terme de l'équation (1.9). On aura donc :

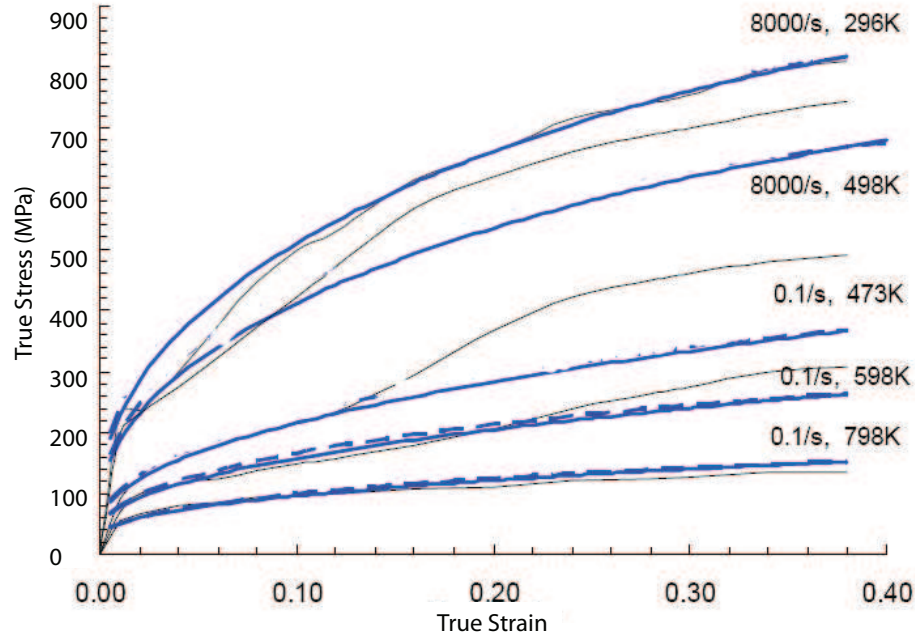


Figure 1.25 Courbes d'écrouissage du TITANE (HC) à plusieurs taux de déformation et températures. Le matériau montre des écrouissages croissants par rapport aux taux des déformations débutants respectivement à des limite d'écoulement différentes qui augmentes par rapports aux taus de déformation- (Nemat-Nasser et al., 1999)

$$\sigma_s = \underbrace{\sigma_Y}_{\sigma_{ath}} + \underbrace{K_Y \varepsilon_p^{1/M_Y} \left\{ 1 - \left[ -\frac{kT}{G_0} \ln \left( \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right]^{1/q_2} \right\}^{1/q_1}}_{\sigma_{th}} \quad (1.34)$$

#### 1.4.1 Modèle Abed-Voyiadjis

Zerilli et Armstrong (Zerilli et Armstrong, 1987) ont proposé un modèle pour prédire le comportement viscoplastique de certains matériaux CFC en se basant sur les mécanismes microscopiques physiques présents quand le matériau est soumis à des grands taux de déformation. Abed et Voyiadjis (Abed et Voyiadjis, 2005a) ont montré que le modèle de Zerilli et Armstrong montre certaines inconsistencies

avec les expériences (Hoge et Mukherjee, 1977; Nemat-Nasser et Li, 1998; Nemat-Nasser et Issacs, 1997) dues à une approximation mathématique proposée par ces derniers. Abed et Voyiadjis ont réussi à dériver des modèles (Abed et Voyiadjis, 2005b; Voyiadjis et Abed, 2005a,b, 2006a,b, 2007; Abed et Voyiadjis, 2007), basés aussi sur les mécanismes microscopiques, sans adopter l'hypothèse simplificatrice assumée par Zeirilli et Armstrong (Zeirilli et Armstrong, 1987).

Après modification du modèle Zeirilli-Armstrong (Abed et Voyiadjis, 2005a), ils ont considéré une évolution linéaire de la densité des dislocations  $\rho$  (Voyiadjis et Abed, 2005a) telle que proposée par Klepaczko (Klepaczko, 1988) par l'équation (1.24). De l'équation (1.23) on peut voir que

$$\dot{\varepsilon}_0(\varepsilon_p) = mbv_0\rho_m(\varepsilon_p) \quad (1.35)$$

ce qui implique que  $\dot{\varepsilon}_0$  dans l'équation (1.32) est dépendant de la déformation plastique  $\varepsilon_p$ .

Abed et Voyiadjis (Voyiadjis et Abed, 2005a) ont obtenu la densité de dislocation totale  $\rho(\varepsilon_p)$  par une intégration directe de l'équation (1.24) en supposant que  $M$  et  $k_a$  demeurent constantes durant l'évolution :

- soit  $\bar{e}$  et  $\bar{\varepsilon}_p$  des variables d'intégration représentant respectivement la densité des dislocations et la déformation plastique. L'intégrale de l'équation (1.24) s'écrit :

$$\int_{\rho_i}^{\rho} \frac{d\bar{e}}{M + k_a\rho_i - k_a\bar{e}} = \int_0^{\varepsilon_p} d\bar{\varepsilon}_p \quad (1.36)$$

où on intègre pour une évolution de dislocation à partir d'une densité initiale  $\rho_i$  qui représente l'état du matériau sans aucune déformation plastique ( $\varepsilon_p = 0$ ) jusqu'à une densité de dislocation  $\rho$  après un écrouissage ( $\varepsilon_p \neq 0$ ).

– la solution de l'intégrale devient :

$$-\frac{1}{k_a} \ln(M + k_a \rho_i - k_a \bar{\epsilon}) \Big|_{\bar{\epsilon}=\rho_i}^{\bar{\epsilon}=\rho} = \varepsilon_p \Big|_{\bar{\varepsilon}_p=0}^{\bar{\varepsilon}_p=\varepsilon_p} \quad (1.37)$$

– en évaluant aux bornes, on obtient :

$$-\frac{1}{k_a} [\ln(M + k_a \rho_i - k_a \rho) - \ln(M)] = \varepsilon_p \quad (1.38)$$

– si on applique la propriété  $\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b)$ , on obtient :

$$-\frac{1}{k_a} \left[ \frac{(M + k_a \rho_i - k_a \rho)}{M} \right] = \varepsilon_p \quad (1.39)$$

– en réarrangeant, on obtient la densité des dislocation en fonction de la déformation plastique :

$$\rho = \rho_i + \frac{M}{k_a} [1 - \exp(-k_a \varepsilon_p)] \quad (1.40)$$

La densité des dislocation mobiles  $\rho_m$  est une fraction  $x$  de la densité des dislocations totales et peut être écrite comme :

$$\rho_m = x \rho \quad (1.41)$$

Par conséquent, la densité des dislocations mobiles initiale est écrite sous la forme d'une fraction de la densité des dislocation initiale :

$$\rho_{mi} = x \rho_i \quad (1.42)$$

L'équation (1.40) devient alors :

$$\rho_m = \rho_{mi} \left\{ 1 + x \frac{M}{\rho_{mi} k_a} [1 - \exp(-k_a \varepsilon_p)] \right\} \quad (1.43)$$

Afin de simplifier, on pose  $C_1 = x \frac{M}{\rho_{mi} k_a}$ , une constante, et on l'insère dans l'équation (1.43) pour obtenir :

$$\rho_m = \rho_{mi} \{1 + C_1 [1 - \exp(-k_a \varepsilon_p)]\} \quad (1.44)$$

En remplaçant l'équation (1.44) dans l'équation (1.35) on obtient :

$$\dot{\varepsilon}_0(\varepsilon_p) = mbv_0\rho_{mi} \{1 + C_1 [1 - \exp(-k_a \varepsilon_p)]\} \quad (1.45)$$

En posant le premier terme en facteur dans l'équation (1.45) constant et égal à  $\dot{\varepsilon}_{0i}$  (équation (1.49)) et en remplaçant l'équation (1.45) dans l'équation (1.34) Abed et Voyiadjis (Voyiadjis et Abed, 2005a) ont proposé l'équation (1.46) pour la contrainte thermique de leurs modèles :

$$\sigma_{th} = \sigma_0 \left\{ 1 - \left[ \beta_1 T - \beta_2 T \ln \left( \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\dot{\varepsilon}_{0i}} \right) \right]^{1/q_2} \right\}^{1/q_1} \quad (1.46)$$

où

$$\beta_1 = \frac{k}{G_0} \{1 + C_1 [1 - \exp(-k_a \varepsilon_p)]\} \quad (1.47)$$

$$\beta_2 = \frac{k}{G_0} \quad (1.48)$$

$$\dot{\varepsilon}_{0i} = m b v_0 \rho_{mi} \quad (1.49)$$

$$\sigma_0 = Y_d + \hat{B} \varepsilon_p^{1/2} \quad (1.50)$$

où  $Y_d$  et  $\hat{B}$  sont des constantes.

Le modèle viscoplastique de Abed et Voyiadjis devient :

$$\sigma_s = \sigma_Y + (Y_d + \hat{B} \varepsilon_p^{1/2}) \left\{ 1 - \left[ \beta_1 T - \beta_2 T \ln \left( \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\dot{\varepsilon}_{0i}} \right) \right]^{1/q_2} \right\}^{1/q_1} \quad (1.51)$$

## 1.5 NOTIONS ET HYPOTHÈSES DES CONTRAINTES ET DES DÉFORMATIONS

En pratique, la contrainte n'est pas tout à fait distribuée uniformément sur une section comme expliquée à la section (1.3.1). On cherche alors à examiner la contrainte sur un petit élément du matériau. Supposons un cube élémentaire du matériau infiniment petit. La contrainte sur cet élément peut être définie par neufs (9) composantes d'un tenseur d'ordre deux comme l'indique la figure (1.26)

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

et le tenseur de déformation s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

Les composantes de contraintes orthogonales aux faces de l'élément sont appelées « contraintes normales ». Les composantes parallèles aux faces de l'élément sont appelées « contraintes de cisaillement ». Ces composantes sont désignées par  $\sigma_{ij}$  où

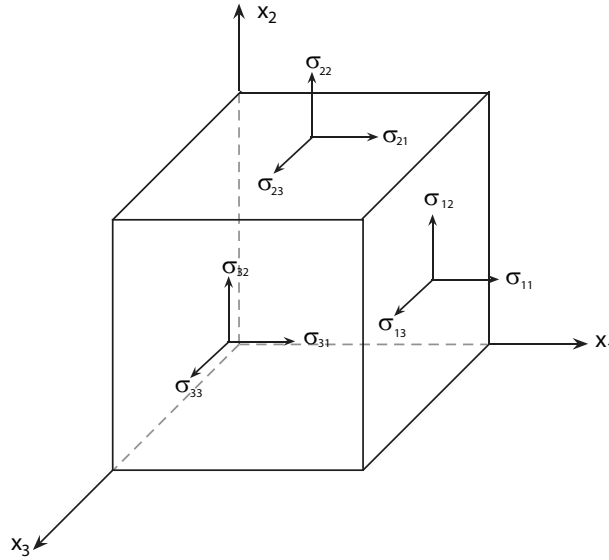


Figure 1.26 Composantes du tenseur de contrainte sur un élément infinitésimal

$i$  est l'indice de la face correspondante à la composante et  $j$  l'indice de la direction de cette composante. Le « théorème de Cauchy » stipule que pour des éléments infiniment petits les moments résultants aux trois axes ( $x_1$ ,  $x_2$ , et  $x_3$ ) sont nuls, par conséquent l'élément n'est pas soumis à un couple de rotation ce qui conduit aux relations :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (1.54)$$

En considérant cette hypothèse, le tenseur de contrainte devient symétrique et défini par six (6) composantes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

c'est le tenseur de Cauchy.

On peut orienter l'élément dans l'espace de façon à ce que toutes les contraintes

de cisaillement soient nulles et d'obtenir juste des contraintes normales :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

Les contraintes  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  sont appelées « contraintes principales », et sont souvent utilisés comme les axes de références de l'espace tridimensionnel des contraintes.

### 1.5.1 Contrainte hydrostatique et déviateurs

Quand les contraintes normales sont égales ( $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$ ) et les contraintes de cisaillement sont nulles ( $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ ), l'état de contrainte auquel l'élément est soumis est celui d'un corps immergé dans l'eau où les déformations sont attribuables uniquement aux contraintes normales. Pour un état de contrainte quelconque, les portions hydrostatiques de la contrainte  $\sigma_H$  et celle de la déformation  $\varepsilon_H$  sont définies respectivement par :

$$\sigma_H = \frac{\sigma_{kk}}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (1.57)$$

$$\varepsilon_H = \frac{\varepsilon_{kk}}{3} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} \quad (1.58)$$

En soustrayant la partie hydrostatique du tenseur de la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  et de la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , on obtient les déviateurs de la contrainte et de la déformation respectivement :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\mathbf{i} \quad (1.59)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\mathbf{i} \quad (1.60)$$



où  $\mathbf{i}$  est le tenseur d'identité de deuxième ordre :

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

### 1.5.2 Critère de plasticité de von Mises

La définition de la limite d'élasticité introduite à la section (1.3.1) pour un chargement unidimensionnel représente un point dans l'espace de la contrainte à une dimension qui sépare le domaine élastique du domaine plastique. Dans l'espace de contrainte à trois dimensions, cette limite est représentée par une surface ou un enveloppe qui sépare les deux domaines. La limite d'élasticité n'est plus définie par un scalaire ( $\sigma_Y$ ) mais par une fonction qui détermine la surface limite appelée « surface d'écoulement ».

Von Mises a postulé que pour des matériaux métalliques ductiles, le seuil de plasticité est relié à l'énergie élastique de distorsion. En d'autres termes, la fonction d'écoulement est indépendante de la contrainte hydrostatique  $\sigma_H$  et peut être écrite en fonction du tenseur déviateur  $\boldsymbol{\tau}$  de la contrainte. La contrainte équivalente au sens de von Mises est défini par :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau}} \quad (1.62)$$

Le critère de von Mises est défini par la fonction d'écoulement  $f$  fonction de la contrainte équivalente  $\sigma_{eq}$  et de la contrainte seuil de plasticité  $\sigma_s$  :

$$f = \sigma_{eq} - \sigma_s = 0 \quad (1.63)$$

En utilisant la définition du tenseur de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  (équation 1.55) et du déviateur  $\boldsymbol{\tau}$  (équation 1.59) dans l'équation (1.62), l'équation (1.63) de la fonction d'écoulement s'écrit :

$$\frac{1}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2)] - \sigma_s^2 = 0 \quad (1.64)$$

Dans l'espace des contraintes principales la fonction d'écoulement se déduit :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} - \sigma_s = 0 \quad (1.65)$$

La surface d'écoulement décrite par l'équation (1.65) représente un cylindre dans l'espace des contraintes principales dont l'axe est la trissectrice du repère  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  et de rayon  $R = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s$  (figure 1.27).

### 1.5.3 Écrouissage isotrope et écrouissage cinématique

Durant l'écrouissage d'un matériau, l'écrouissage isotrope est caractérisé par une dilatation de la surface d'écoulement, donc une augmentation de la contrainte seuil  $\sigma_s$ , mais le centre de la surface d'écoulement reste invariable. L'écrouissage est cinématique si la surface d'écoulement subit une translation  $\mathbf{X}$  dans l'espace des contraintes (figure 1.28). Certains matériaux subissent simultanément un écrouissage mixte isotrope-cinématique.

## 1.6 THERMODYNAMIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Une fois les bases physiques du modèle viscoplastique uni-dimensionnel établies, une généralisation pour des chargements multiaxiaux à des grandes vitesses de

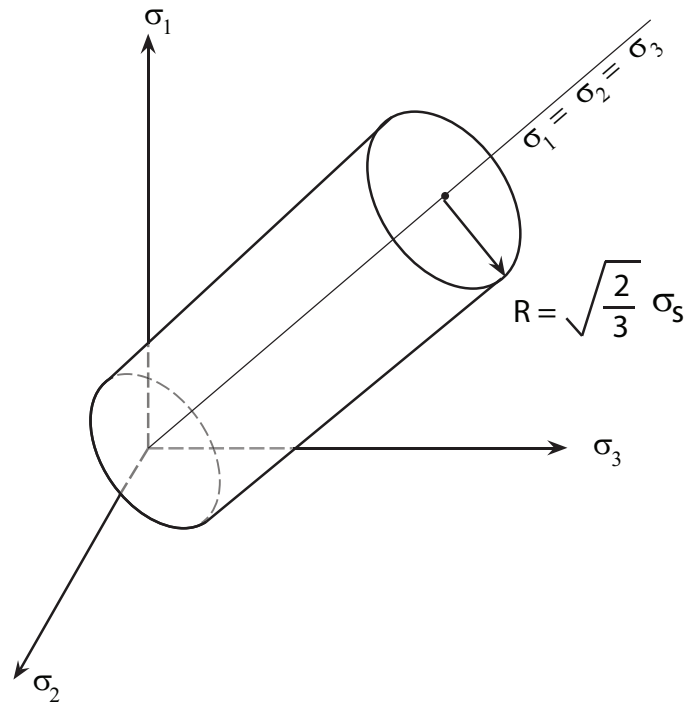


Figure 1.27 La surface d'écoulement au sens de von Mises se représente comme un cylindre dans l'espace des contraintes principales. L'axe du cylindre est la trissectrice du repère  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ), et son rayon  $R$  est égal à  $\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_s$  (Lemaitre et Chaboche 2004).

déformation (jusqu'à  $10^4 \text{s}^{-1}$ ) est développée en utilisant le cadre de la théorie de la thermodynamique. La formulation thermodynamique des processus irréversibles avec des variables internes offre un cadre solide pour le développement d'une relation constitutive. Ce formalisme conduit à des lois de comportement phénoménologiques qui respectent les principes de la thermodynamique. Cette approche est purement empirique et ne traite aucunement la structure atomique du matériau. Elle englobe des méthodes qui décrivent des effets dissipatifs.

Les lois constitutives sont tirées à partir de deux potentiels :

- Le potentiel thermodynamique qui décrit l'état actuel du matériau.
- Le potentiel de dissipation qui décrit la nature irréversible du processus.

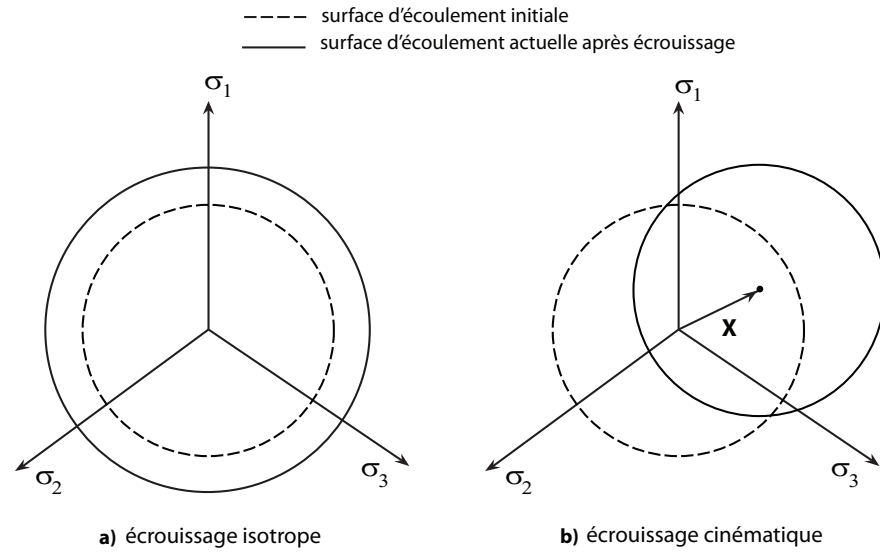


Figure 1.28 a) Durant un écrouissage isotrope la surface d'écoulement se dilate sans aucune translation de son centre. b) L'écrouissage cinématique est caractérisé par une translation du centre de la surface d'écoulement

Le choix de la forme des potentiels est important pour aboutir à des lois de comportement adéquates. L'étude de la microstructure physique du matériau et la théorie de l'activation thermique serviront alors pour le choix des potentiels. Ceci permettra de formuler une loi de comportement constitutive phénoménologique inspirée des micromécanismes physiques.

Pour bien comprendre la formulation thermodynamique, il est essentiel de connaître la théorie derrière ce formalisme. Un résumé de cette théorie est présenté à la section suivante. Pour plus de détails, il est conseillé de consulter le livre de Lemaitre et Chaboche (Lemaitre, 2004).

### 1.6.1 Mécanique des milieux continus et les principes de la thermodynamique

#### 1.6.1.1 Processus Thermodynamique et Variables d'État

On considère un corps  $D$  avec des particules  $M$  appartenant à ce corps. On suppose que ce corps  $D$  peut se déformer et conduire la chaleur. Le processus thermodynamique de ce corps est décrit par un groupe de variables, appelées variables d'état, qui décrivent l'état interne de la matière. Elles sont fonction de la position de la particule  $M$  et de l'instant  $t$ . Le processus est appelé processus thermodynamique si à chaque instant de l'évolution les principes de la thermodynamique sont satisfaits. Chaque phénomène physique devant intervenir dans la formulation est représentée par une ou plusieurs de ces variables. Le choix de ces variables ainsi que le potentiel thermodynamique qui les relie est important car celui-ci détermine le succès ou l'échec de la loi de comportement. Les variables d'état peuvent être réparties en deux classes :

- variables observables : ce sont les variables mesurables directement. La température  $T$  et la déformation  $\varepsilon$  sont deux exemples de variables observables, souvent imposées par le formalisme de la théorie thermodynamique des milieux continus.
- Variables internes : ce sont les variables cachées qui ne sont pas directement mesurables et servent à décrire l'état interne de la microstructure.

Une fonction d'état est une fonction scalaire des variables d'états  $f(T, \varepsilon, \dots)$  permettant de déterminer entièrement l'état thermodynamique d'un matériau. Chaque valeur de la fonction d'état correspond à un état thermodynamique particulier. Si la fonction d'état est continue, elle prendra une infinité de valeurs représentant tous les états thermodynamique du matériaux.

### 1.6.1.2 Équations de la mécanique des milieux continus

Soit un point  $M$  d'un corps de volume  $D$  en mouvement à une vitesse  $\vec{v}$  et une accélération  $\vec{\gamma}$ , soumis à des forces extérieures (figure 1.29) :

- $\vec{f}$  : forces de volume exercées à distance par des systèmes extérieurs sur le volume  $D$  du corps.
- $\vec{T}$  : densité surfacique des forces exercées par des systèmes extérieurs sur la surface  $\partial D$  du corps.

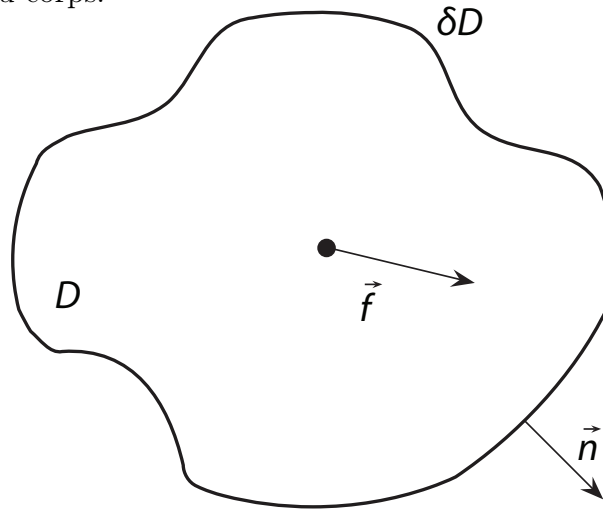


Figure 1.29 Corps soumis à des force de volume et de surface

L'axiome de l'équilibre stipule que pour tout mouvement virtuel à une vitesse  $\vec{v}$  cinématiquement admissible et à n'importe quel instant  $t$ , la somme de la puissance des efforts intérieurs  $\hat{P}(i)$  et de la puissance produite par les efforts extérieurs  $\hat{P}(x)$  est égale à la puissance produite par les quantités d'accélérations  $\hat{P}(a)$ . Le bilan de puissance s'écrit alors :

$$\hat{P}(i) + \hat{P}(x) = \hat{P}(a) \quad (1.66)$$

En écrivant chacune des puissances sous sa forme intégrale de produit scalaire entre la force (ou accélération) et la vitesse sur le volume du domaine  $D$ , on obtient (Lemaitre, 2004) :

$$\underbrace{- \int_D \boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{d}} \, dV}_{\dot{P}(i)} + \underbrace{\int_D \vec{f} \cdot \vec{v} \, dV + \int_{\partial D} \vec{T} \cdot \vec{\hat{v}} \, dS}_{\dot{P}(x)} = \underbrace{\int_D \vec{\gamma} \cdot \vec{\hat{v}} \, \rho dV}_{\dot{P}(a)} \quad (1.67)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur de contrainte,  $\rho$  la masse volumique et  $\hat{\mathbf{D}}$  est le tenseur du second ordre du taux de déformation :

$$\hat{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} \left[ \vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^T \right] \quad (1.68)$$

En appliquant le théorème de divergence au premier terme de l'équation (1.67), on obtient l'équation d'équilibre suivante :

$$\int_D (\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} - \rho \vec{\gamma}) \cdot \vec{\hat{v}} \, dV + \int_{\partial D} (\vec{T} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{\hat{v}} \, dS = 0 \quad (1.69)$$

où cette identité n'est rencontrée que s'il existe un équilibre statique ou dynamique local,

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} - \rho \vec{\gamma} = 0 \quad (1.70)$$

et

$$\vec{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (1.71)$$

Si on suppose que pour des cas où le carré du module de la déformation  $|\varepsilon| < 2\%$ , les hypothèses des petites déformations et des s s'appliquent ; le vecteur de déplacement et le tenseur de déformation deviennent :

$$\vec{u} = \int_0^t \vec{v} \, dt \quad (1.72)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \int_0^t \hat{\mathbf{D}} \, dt = \frac{1}{2} \int_0^t \left[ \vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^T \right] dt = \frac{1}{2} \left[ \vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^T \right] \quad (1.73)$$

Les équations de la mécanique des milieux continus en petites déformations et petits déplacements se résument donc à :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} = \rho \vec{\gamma} \quad (1.74)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[ \vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^T \right] \quad (1.75)$$

### 1.6.1.3 Énoncés fondamentaux de la thermodynamique

#### *L'énergie cinétique*

L'énergie cinétique d'un corps d'une masse volumique  $\rho$ , en mouvement à une vitesse  $\vec{v}$  est donnée par :

$$K = \frac{1}{2} \int_D \rho \vec{v} \cdot \vec{v} \, dV \quad (1.76)$$

La variation temporelle de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_D \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} \, dV \\ &= \int_D \vec{\gamma} \cdot \vec{v} \, \rho \, dV \end{aligned} \quad (1.77)$$

D'après l'équation 1.67 on peut écrire :

$$\frac{dK}{dt} = \hat{P}(i) + \hat{P}(x) \quad (1.78)$$

#### *Taux de chaleur reçue par un corps*

Le taux de chaleur reçue par un corps de volume  $D$  est donné par :

$$Q = \int_D r \, dV - \int_{\partial D} \vec{q} \cdot \vec{n} \, dS \quad (1.79)$$



où  $\vec{q}$  est le vecteur flux de chaleur et  $r$  la densité volumique de production interne de chaleur à distance. En appliquant le théorème de la divergence, on obtient :

$$Q = \int_D \left[ r - \operatorname{div}(\vec{q}) \right] dV \quad (1.80)$$

### ***Énergie interne totale d'un corps***

L'énergie interne totale d'un corps de volume  $D$  est donnée par :

$$E_t = \int_D \rho e dV \quad (1.81)$$

où  $e$  est l'énergie interne spécifique au corps par unité de volume.

***Premier principe de la thermodynamique, lois de conservation de l'énergie***

Le premier principe de l'énergie implique que l'énergie emmagasinée par le corps est égale à l'énergie fournie par l'extérieur :

$$\frac{d}{dt}(E_t + K) = P(x) + Q \quad (1.82)$$

En remplaçant les équations 1.81, 1.78 et 1.80 dans l'équation 1.82, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho e \, dV + P(x) + P(i) = P(x) + \int_D \left[ r - \operatorname{div}(\vec{q}) \right] dV \quad (1.83)$$

La puissance interne  $P(i)$  est déduite de l'équation 1.67, et l'équation 1.83 devient :

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho e \, dV - \int_D \boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{d}} \, dV = \int_D \left[ r - \operatorname{div}(\vec{q}) \right] dV \quad (1.84)$$

Sous sa forme locale, et en considérant l'hypothèse des petites déformations et petits déplacement, le premier principe de la thermodynamique devient,

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + r - \operatorname{div} \vec{q} \quad (1.85)$$

***Deuxième principe de la thermodynamique, lois de production de l'entropie***

Soit la température  $T(M, t)$  un champ à valeur scalaire positive définie à chaque instant et en tout point du corps  $D$ . L'entropie se définit comme une variation d'énergie associée à une variation de température. Si on désigne  $s$  comme étant

l'entropie spécifique par unité de volume, l'entropie totale est donnée par :

$$S = \int_D \rho s dV \quad (1.86)$$

Le second principe de la thermodynamique stipule que le taux de production d'entropie est toujours supérieur ou égal au taux de chaleur reçu divisé par la température :

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_D \frac{r}{T} dV - \int_{\partial D} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} dS \quad \forall x \in D \quad (1.87)$$

En utilisant l'équation (1.86) et en appliquant le théorème de divergence, on obtient :

$$\int_D \rho \frac{ds}{dt} dV - \int_D \left[ \frac{r}{T} - \text{div} \frac{\vec{q}}{T} \right] dV \geq 0 \quad \forall x \in D \quad (1.88)$$

Sous sa forme locale, l'équation 1.88 devient :

$$\rho \frac{ds}{dt} - \frac{r}{T} + \text{div} \frac{\vec{q}}{T} \geq 0 \quad \forall x \in D \quad (1.89)$$

En utilisant le premier principe (équation 1.85), on obtient l'inégalité fondamentale

$$\rho \frac{ds}{dt} + \text{div} \frac{\vec{q}}{T} - \frac{1}{T} \left( \rho \frac{de}{dt} - \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \text{div} \vec{q} \right) \geq 0 \quad \forall x \in D \quad (1.90)$$

or, il peut être montré que

$$\text{div} \left( \frac{\vec{q}}{T} \right) = \frac{\text{div} \vec{q}}{T} - \frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla} T}{T^2} \quad (1.91)$$

En remplaçant l'équation (1.91) dans l'équation (1.90) et en multipliant par la température  $T$  l'inégalité fondamentale devient,

$$\rho \left( T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} \right) + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \vec{q} \cdot \frac{\vec{\nabla} T}{T} \geq 0 \quad \forall x \in D \quad (1.92)$$

en introduisant dans l'inégalité fondamentale la variable de l'énergie libre spécifique

$$\Psi = e - Ts \quad (1.93)$$

on obtient l'inégalité de Clausius-Duhem pour des petites perturbations,

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho(\dot{\Psi} + s\dot{T}) - \vec{q} \cdot \frac{\vec{\nabla} T}{T} \geq 0 \quad (1.94)$$

Dans ce qui suit, l'énergie libre spécifique  $\Psi$  va jouer le rôle d'une fonction d'état. On va lui postuler une forme mathématique qui fera intervenir les variables internes et observables afin de faire le lien entre la contrainte et les déformations appliquées. Certaines restrictions doivent être introduites afin de respecter l'inégalité de Clausius-Duhem décrite par l'équation (1.94).

## 1.6.2 Principe de formulation

### 1.6.2.1 Variables internes pour un modèle viscoplastique

Comme mentionné ci-haut, la déformation totale  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et la température  $T$  sont des variables d'état observables. Pour obtenir un modèle élasto-viscoplastique, on a choisi des variables internes décrivant l'état actuel du matériau qui seront considérées dans la formulation selon la nature du comportement étudié. En général les variables internes suivantes sont choisies :

- $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  : la déformation plastique ou viscoplastique. Variable tensorielle du second ordre reliée à la déformation totale et la déformation élastique  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  par l'hypothèse de partition :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (1.95)$$

- $p$  : variable interne de nature scalaire caractérisant l'écouissage isotrope. Elle est souvent considérée comme la déformation plastique cumulée.

$$p = \int_0^t \left( \frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\tau) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\tau) \right)^{1/2} d\tau \quad (1.96)$$

- $\boldsymbol{\alpha}$  : variable tensorielle d'ordre deux caractérisant l'écouissage cinématique.

### 1.6.2.2 Potentiel thermodynamique et les lois d'états

Postulons l'existence d'un potentiel thermodynamique fonction des variables internes et observables, à valeur scalaire, concave par rapport à  $T$  et convexe par rapport aux autres variables d'états. Les conditions de concavité et de convexité sont exigées pour assurer l'existence de solutions stables à cette fonction (Lemaitre, 2004). On aura alors :

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, T, \boldsymbol{\alpha}, p) \quad (1.97)$$

En viscoplasticité, les déformations sont représentées sous forme de partition, ce qui implique :

$$\Psi = \Psi([\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p], T, \boldsymbol{\alpha}, p) = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, \boldsymbol{\alpha}, p) \quad (1.98)$$

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial \Psi}{\partial p} \dot{p} \quad (1.99)$$

En remplaçant dans l'inégalité de Clausius-Duhem, on obtient :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial \Psi}{\partial p} \dot{p} + s \dot{T} \right) - \frac{\vec{q}}{T} \cdot \frac{\vec{\nabla} T}{T} \geq 0 \quad (1.100)$$

$$(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \rho \left( \frac{\partial \Psi}{\partial T} + s \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial p} \dot{p} - \frac{\vec{q}}{T} \cdot \frac{\vec{\nabla} T}{T} \geq 0 \quad (1.101)$$

L'inégalité de Clausius-Duhem doit être vérifiée pour n'importe quel changement réversible dans les variables observables, en particulier pour une histoire de char-

gement réversible où les variables internes demeurent constantes ( $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\boldsymbol{\alpha}} = 0$  et  $\dot{T} = 0$ ). Les deux termes entre parenthèses doivent s'annuler indépendamment :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \bigg|_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\alpha}}=0} \quad (1.102)$$

$$s = - \frac{\partial \Psi}{\partial T} \bigg|_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\alpha}}=0} \quad (1.103)$$

Nous remarquons que le potentiel thermodynamique a permis d'écrire les relations des variables observables  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  et  $T$  avec  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $s$  respectivement. On dit que  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $s$  sont les variables « force » associées à ces variables d'état, et les équations (1.102) et (1.103) sont les lois d'état. Par contre, aucune relation n'est définie pour les variables d'état interne. Il est seulement possible, par analogie, de définir les variables « force » associées

$$R = - \frac{\partial \Psi}{\partial p} \quad (1.104)$$

$$\mathbf{X} = - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \quad (1.105)$$

Pour cette raison on a recours à des lois complémentaires pour décrire l'évolution des variables internes. Leur évolution est reliée aux processus dissipatifs dans le matériau étudié. Nous introduirons donc la notion du potentiel de dissipation.

Il est important de mentionner que les variables forces définies  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $R$  et  $\mathbf{X}$  sont indépendantes entre elles :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial R} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial R} = 0 \quad (1.106)$$

### 1.6.2.3 Potentiel de dissipation et lois complémentaires

En remplaçant les relations d'état 1.102 à 1.105 dans l'inégalité de Clausius-Duhem, on obtient l'expression de dissipation :

$$\Phi = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \mathbf{X} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} - R\dot{p} - \vec{g} \cdot \frac{\vec{q}}{T} \geq 0 \quad (1.107)$$

Considérant l'hypothèse de découplage entre les effets thermiques et les effets intrinsèques, on obtient :

- La dissipation intrinsèque ou mécanique

$$\Phi_m = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \mathbf{X} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} - R\dot{p} \geq 0 \quad (1.108)$$

- La dissipation thermique

$$\Phi_t = - \vec{g} \cdot \frac{\vec{q}}{T} \geq 0 \quad (1.109)$$

Par contre, cette hypothèse n'est pas valide dans notre cas étant donné le couplage entre la température et les taux de déformation.

Comme pour le potentiel thermodynamique, on postule l'existence d'un potentiel de dissipation, fonction des variables flux relatives aux variables internes, vérifiant l'expression de dissipation. Soit

$$\varphi = \varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \dot{p}, \frac{\vec{q}}{T}) \quad (1.110)$$

Le travail plastique peut être décomposé en énergie intrinsèque stockée dans le matériau dû à l'écrouissage et en une énergie dissipée comme chaleur. Dans le cas présent il s'agit des processus dissipatifs et le potentiel de dissipation peut se décomposer en un potentiel de dissipation viscoplastique et un potentiel de

dissipation thermique :

$$\varphi = \varphi^{vp} + \varphi^g \quad (1.111)$$

où le potentiel de dissipation viscoplastique est :

$$\varphi^{vp} = \varphi^{vp}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \dot{p}) \quad (1.112)$$

et le potentiel de dissipation thermique est :

$$\varphi^g = \varphi^g\left(\frac{\vec{q}}{T}\right) \quad (1.113)$$

Une façon d'avoir un potentiel fonction des variables flux à la place des variables internes est d'appliquer la transformée de Legendre-Fenchel (Rockafellar, 1970) au potentiel de dissipation viscoplastique  $\varphi^{vp}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \dot{p})$  pour obtenir son dual (Chaboche, 1991, 1997) :

$$F = F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R) \quad (1.114)$$

Les lois complémentaires sont obtenues après l'application du principe de dissipation maximale (Hill, 1948; Lubliner, 1984). Ce principe dicte que la fonction de dissipation viscoplastique est maximisée sur tous les états admissibles par l'état actuel des forces thermodynamiques. Donc on cherche à maximiser l'expression de dissipation  $\Phi$  en imposant le dual du potentiel de dissipation viscoplastique  $F$ , qui représentera l'état dissipatif actuel, comme contrainte d'optimisation. En utilisant la méthode de Lagrange on obtient le problème suivant :

– Fonction objective :

$$\Omega = \Phi - \dot{\lambda} F \quad (1.115)$$



– Condition initiales :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{X}} = 0; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial R} = 0; \quad (1.116)$$

En appliquant l'équation (1.116) à la fonction objective (1.115) , on obtient les lois d'évolution complémentaires en forme des variables flux en fonction des forces thermodynamiques :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (1.117)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} \quad (1.118)$$

$$\dot{p} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial R} \quad (1.119)$$

En remplaçant les équations (1.117), (1.118) et (1.119) dans l'équation (1.107), l'expression de la dissipation devient :

$$\Phi = \left[ \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{X} : \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} + R \frac{\partial F}{\partial R} \right] \dot{\lambda} - \vec{g} \cdot \frac{\vec{q}}{T} \geq 0 \quad (1.120)$$

Pour modéliser le comportement du matériau par une loi de plasticité ou de viscoplasticité, il suffit donc de déterminer l'expression analytique du potentiel thermodynamique  $\Psi$  et du potentiel de dissipation  $\varphi$  et/ou de son dual  $F$  et de les identifier auprès des expériences caractéristiques.

En pratique il est presque impossible de mesurer la valeur de  $\varphi$  ou de  $F$  en raison de leur nature énergétique. Les lois complémentaires d'évolution sont donc identifiées directement à partir des variables flux et des variables duales. Le potentiel de dissipation servira donc comme guide ou cadre pour leur écriture.

#### 1.6.2.4 Surface d'écoulement et condition de consistance

La surface d'écoulement est une surface fermée dans l'espace des contraintes. L'intérieur de cette surface constitue le domaine élastique, l'extérieur de cette surface est le domaine plastique. Dans le cas de la viscoplasticité il ne s'agit plus d'une seule surface d'écoulement mais de plusieurs surfaces emboîtées l'une dans l'autre, souvent appelées « surfaces à dissipation égale ». Elles sont nommées de cette manière car la dissipation est égale pour chaque état appartenant à la même surface.

Dans ce travail, la surface d'écoulement est définie en se basant sur le critère de von Mises et en s'inspirant du modèle unidirectionnel proposé. La viscoplasticité est modélisée en incorporant la dépendance du temps de certaines variables dans le critère d'écoulement. Dans l'espace des contraintes la surface d'écoulement est représentée par une fonction  $f$  :

$$f = f(\boldsymbol{\sigma}, p, \mathbf{X}, \dot{p}, T) \quad (1.121)$$

La condition de consistance découle du critères charge-décharge introduit par Kuhn et Tucker. Kuhn et Tucker ont montré que pour que l'écoulement plastique se produise, deux conditions doivent être présentes :

- Le point représentatif de l'état de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^*$  doit appartenir à la surface

d'écoulement :

$$f = f(\boldsymbol{\sigma}^*, p, \mathbf{X}, \dot{p}, T) \quad (1.122)$$

- Tout le long de l'écoulement, le point représentatif de l'état de contrainte ne doit pas pouvoir sortir de la surface :

$$df(\boldsymbol{\sigma}^*) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma}^* + \frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} : d\mathbf{X} + \frac{\partial f}{\partial \dot{p}} d\dot{p} + \frac{\partial f}{\partial T} dT = 0 \quad (1.123)$$

Les critères de charge/décharge deviennent :

- $f < 0 \rightarrow$  comportement élastique
- $f = 0$  et  $df = 0 \rightarrow$  écoulement plastique
- $f = 0$  et  $df < 0 \rightarrow$  décharge élastique

Ces critères impliquent la définition de la condition de consistance en dérivant par rapport au temps  $t$  :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} : \dot{\mathbf{X}} + \frac{\partial f}{\partial \dot{p}} \ddot{p} + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} = 0 \quad (1.124)$$

## CHAPITRE 2

### LE MODÈLE

#### 2.1 MODÈLE PROPOSÉ

Comme expliqué à la section 1.4.1 le modèle Abed-Voyiadjis est dérivé à partir de la théorie d'activation thermique, et définit par des paramètres dont certains sont fonctions des propriétés de la microstructure du matériau en question :

- $\beta_1 = \beta_1(k, G_o, C_1, k_a)$
- $\beta_2 = \beta_2(k, G_o)$
- $\dot{\epsilon}_{0i} = \dot{\epsilon}_{0i}(m, b, v_o, \rho_{mi})$
- $Y_d$
- $\hat{B}$

Dans les prochains paragraphes, on propose un modèle dont la forme est inspirée des mécanismes au niveau microscopiques, mais définis par des paramètres phénoménologiques déterminés à partir du comportement macroscopique. Ceci permettra de réduire le nombre des paramètres qui définissent le modèle. La nature phénoménologique de ces paramètres permettra aussi une formulation thermodynamique d'un modèle dont les paramètres peuvent être identifiés par des essais expérimentaux à l'échelle macroscopique, loin des observations microscopiques complexes.

Dans le cadre du processus de grenailage, la déformation plastique n'excède pas les 15% (Miao et al., 2009; Meguid et al., 2002), ce qui permet d'appliquer l'hypothèse des petites déformations. Si on limite l'étude de la variation de  $\beta_1$  en fonction de la déformation plastique  $\varepsilon_p$  (équation (1.47)) au domaine des petites

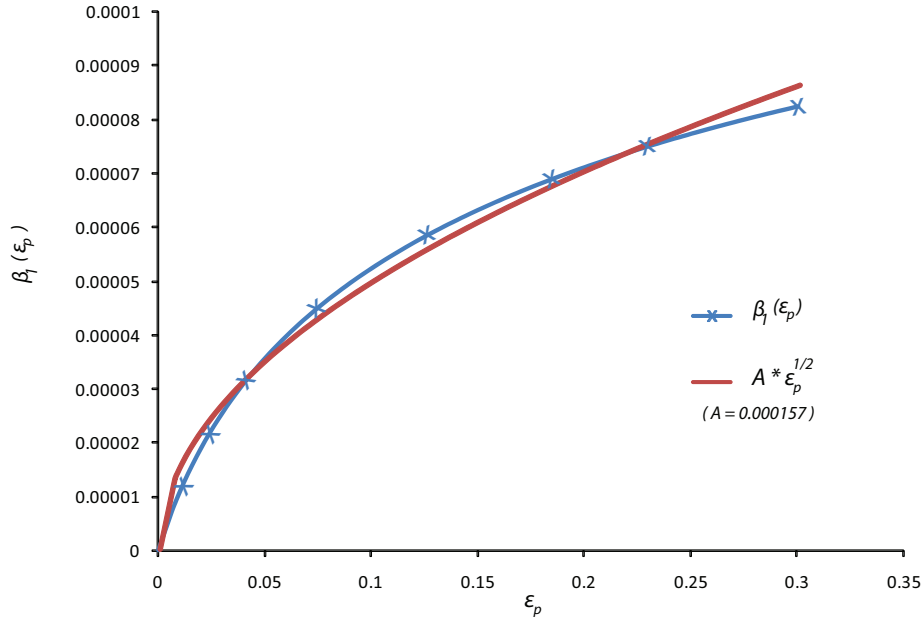


Figure 2.1 Approximation de la forme de  $\beta_1(\epsilon_p)$  proposée par Abed-Voyiadjis (Voyiadjis et Abed, 2005a) par une fonction de la forme  $A\epsilon_p^{1/2}$

déformations, certaines simplifications s'appliquent en vertu de l'hypothèse d'une évolution linéaire de  $\rho_m$  ((Klepaczko, 1988), équation (1.24)).

En utilisant les constantes obtenues par Abed et Voyiadjis pour le cuivre OFHC,  $\beta_1(\epsilon_p)$  est tracé en fonction de la déformation plastique jusqu'à une valeur de 30%. La figure (2.1) montre que  $\beta_1(\epsilon_p)$  peut être approximé par une fonction de la forme  $A\epsilon_p^{1/2}$  pour ce matériau. En supposant que cette hypothèse est valable pour tous les matériaux FCC, l'équation (1.47) peut être remplacée par une forme plus simple et permet de réduire le nombre du paramètre du modèle par éliminant deux :  $C_1$  et  $k_a$ .

Le modèle proposé pour les matériaux FCC dans le domaine des petites déformations est le suivant :

$$\sigma_s = \sigma_Y + K_Y \varepsilon_p^{1/M_Y} \left\{ 1 - \left[ A \varepsilon_p^{1/2} T - B T \ln \left( \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\dot{\varepsilon}_{i0}} \right) \right]^{1/q} \right\}^{1/p} \quad (2.1)$$

où  $K_Y$ ,  $M_Y$ ,  $A$ ,  $B$  et  $\dot{\varepsilon}_{i0}$  sont des constantes.

Pour valider le modèle, on s'est appuyé sur les données expérimentales de Johnson et Cook (Johnson et Cook, 1988) pour déterminer les différents paramètres du modèle proposé (équation (2.1)). Les paramètres ont été identifiés pour le matériau OFHC (cuivre) en utilisant la méthode ci-dessous. Cette méthode peut être utilisée pour la détermination des paramètres du modèle pour n'importe quel matériau FCC :

- Peu importe les taux de déformation, l'écoulement plastique ou viscoplastique dans un matériau FCC commence à la même contrainte d'écoulement  $\sigma_Y$ . Celle-ci est donc déterminée en observant le début d'écoulement de la courbe d'écrouissage.
- Chaque courbe d'écoulement disponible ( $i$ ) est considérée comme une courbe d'écrouissage sous un chargement quasi-statique. Les paramètres  $(K_Y)_i$  et  $(M_Y)_i$  respectifs sont déterminés en effectuant une régression linéaire utilisant l'équation (1.12). Par la suite, on calcule la moyenne des  $(K_Y)_i$  et  $(M_Y)_i$  pour obtenir les paramètres  $K_Y$  et  $M_Y$  respectivement.
- On fixe la valeur  $\dot{\varepsilon}_{i0}$  selon la vitesse à laquelle le chargement est considéré quasi-statique. Normalement cette valeur est de l'ordre  $10^{-6}$  (Kocks et Mecking, 2003).
- Les valeurs des paramètres  $A$  et  $B$  sont déterminées par une simple régression.

Le choix de la méthode de détermination est laissé aux utilisateurs comme elle peut varier selon le niveau de déformation, la plage de température et le taux de déformation en question ainsi que la disponibilité des données expérimentales.

Voici les valeurs des paramètres trouvées pour le cuivre OFHC à partir des données expérimentales de (Johnson et Cook, 1988) illustrés à la figure (1.24) :

$\sigma_Y = 75 \text{ MPa}$
$K_Y = 990 \text{ MPa}$
$\sigma_Y = 75 \text{ MPa}$
$K_Y = 990 \text{ MPa}$
$M_Y = 2$
$A = 0.000156 K^{-1}$
$B = 0.0000352 K^{-1}$
$\dot{\epsilon}_{i0} = 6.9710^{-6}$

Celles-ci sont obtenues par des corrélations avec les données de Johnson et Cook, la validation du modèle doit être étudiée par un différent lot de tests. Pour cette raison, les valeurs obtenues sont remplacées dans l'équation (2.1) du modèle proposé et comparées avec les données expérimentales obtenues par Nemat-Nasser et Li (Nemat-Nasser et Li, 1998), (voir figure (2.2)).

La figure (2.2) montre une bonne corrélation entre le modèle proposé et les données expérimentales. Elle montre que le modèle prédit bien le comportement viscoplastique d'un matériau FCC. Dans les prochains chapitres, le modèle est généralisé pour des chargements tridimensionnels en utilisant le cadre de la thermodynamique.

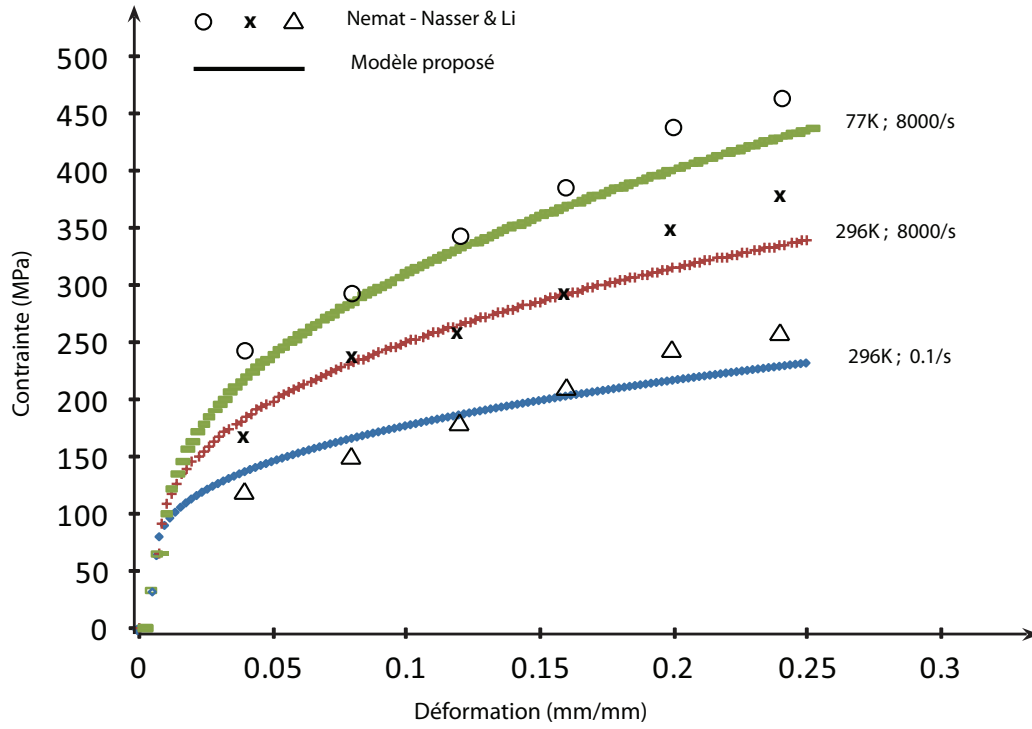


Figure 2.2 Comparaison du modèle proposé avec les données expérimentales (Nemat-Nasser et Li, 1998) pour OFHC (cuivre)

## 2.2 FORMULATION THERMODYNAMIQUE

### 2.2.1 Loi de comportement viscoplastique

#### 2.2.1.1 Définition de la surface d'écoulement

La surface d'écoulement doit représenter la forme des courbes d'écrouissage. En se basant sur le modèle unidimensionnel déjà proposé, la surface d'écoulement est posée sous la forme suivante :

$$f = \sigma_{eq} - \sigma_Y - R(p, \dot{p}, T) \quad (2.2)$$



où  $R$  est défini à partir du modèle unidimensionnel proposé,

$$R(p, \dot{p}, T) = Kp^{1/M} \left\{ 1 - \left[ Ap^{1/2}T - BT \ln \left( \frac{\dot{p}}{\dot{p}_{i0}} \right) \right]^{1/q_1} \right\}^{1/q_2} \quad (2.3)$$

$f$  s'écrit alors,

$$f(\boldsymbol{\sigma}, p, \mathbf{X}, \dot{p}, T) = \sigma_{eq} - \sigma_Y - Kp^{1/M} \left\{ 1 - \left[ Ap^{1/2}T - BT \ln \left( \frac{\dot{p}}{\dot{p}_{i0}} \right) \right]^{1/q_1} \right\}^{1/q_2} \quad (2.4)$$

$\sigma_{eq}$  est définie selon le critère d'écoulement von Mises en considérant un écrouissage cinématique :

$$\sigma_{eq} = \left( \frac{3}{2} (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{X}) : (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{X}) \right)^{1/2} \quad (2.5)$$

Si on suppose un écrouissage isotrope ( $\mathbf{X} = 0$ ), la contrainte équivalente se réduit à l'équation (1.62), et le terme de l'écrouissage cinématique s'élimine de la condition de consistance :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial f}{\partial \dot{p}} \ddot{p} + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} = 0 \quad (2.6)$$

### 2.2.1.2 Définition du potentiel thermodynamique - Énergie libre de Helmotz

Le potentiel thermodynamique doit aussi se définir en se basant sur le modèle unidimensionnel proposé. Sa forme est fondamentale pour la dérivation des relations constitutives. Le potentiel thermodynamique choisi est en fait l'énergie libre de Helmotz. Le potentiel peut être décomposé en plusieurs potentiels, chacun décrivant

l'état de chaque variable interne :

$$\rho\Psi = \rho\Psi_1(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \rho\Psi_2(\boldsymbol{\alpha}) + \rho\Psi_3(p) \quad (2.7)$$

La forme du premier terme doit restituer le domaine élastique à partir de la loi d'état tirée de l'inégalité de Clausius-Duhem qui relie la contrainte à la déformation élastique (équation 1.102). Proposée par nombre d'auteurs (Chaboche, 1989; Chaboche et Cailletaud, 1996; Abed et Voyiadjis, 2007; Wang et al., 1997), la forme est la suivante :

$$\rho\Psi_1(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.8)$$

On obtient le tenseur de contrainte en dérivant l'équation (2.8) et en remplaçant dans la loi d'état de l'équation (1.102) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{E} : [\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p] \quad (2.9)$$

Le but d'introduire un écrouissage cinématique est de pouvoir représenter des chargements cycliques. Ould et al. (Ould et al., 2006) ont démontré qu'un écrouissage cinématique représente mieux le comportement du matériau soumis au processus de grenailage à cause du bombardement consécutif de la surface métallique. Pour modéliser l'écrouissage cinématique, Chaboche et Jung (Chaboche et Jung, 1989) se sont basés sur cette formulation commune :

$$\rho\Psi_3(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{3}V\boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\alpha} \quad (2.10)$$

Remplacée dans l'équation (1.105) cette formule permet d'obtenir une relation

linéaire entre la variable force  $\mathbf{X}$  et la variable interne d'écroutissage  $\alpha$  :

$$\mathbf{X} = \frac{2}{3}V\alpha \quad (2.11)$$

La forme du troisième terme  $\rho\Psi(p)$  doit restituer la relation entre  $R$  et  $p$  à partir de l'équation (1.104). Or la relation entre  $R$  et  $p$  est dictée par le modèle unidimensionnel proposé par l'équation (2.3). La forme de  $\rho\Psi(p)$  est alors obtenue à partir de l'équation (1.104) après intégration :

$$\rho\Psi_1(p) = \int_0^p R dp \quad (2.12)$$

En remplaçant  $R$  par sa valeur :

$$\rho\Psi_1(p) = \int_0^p K p^{1/M} \left\{ 1 - \left[ \bar{A}(p)T - BT \ln \left( \frac{\dot{p}}{\dot{p}_{i0}} \right) \right]^{1/q_1} \right\}^{1/q_2} dp \quad (2.13)$$

où

$$\bar{A}(p) = Ap^{1/2} \quad (2.14)$$

Cette intégrale peut être résolue analytiquement si  $\bar{A}(p)$  est supposée constante. Mathématiquement parlant l'intégrale dans l'équation (2.13) n'est que l'aire en dessous de la courbe  $R(p)$  entre 0 et  $p$ . La figure (2.3) montre que l'hypothèse de considérer  $\bar{A}(p)$  constante ( $\bar{A}(p = 0.1)$ ,  $\bar{A}(p = 0.15)$ ,  $\bar{A}(p = 0.2)$ ), engendre une erreur négligeable sur l'aire en-dessous de la courbe  $R(p)$ .

Par la suite, l'intégrale peut être effectuée en considérant le terme entre accolades comme indépendant de  $p$ , ce qui permet d'obtenir la forme de  $\rho\Psi(p)$  :

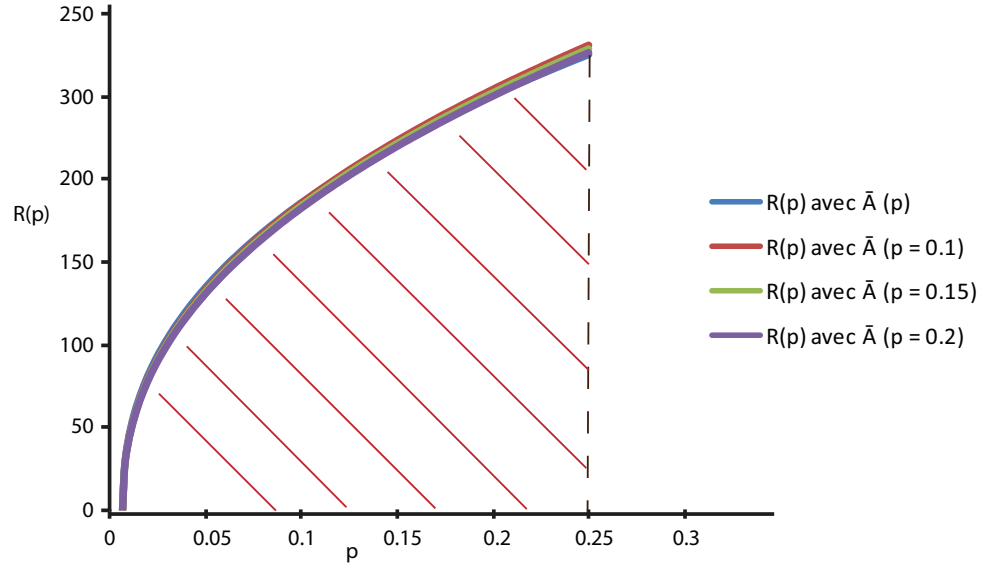


Figure 2.3 Comparaison de l'aire au-dessous de la courbe pour différentes hypothèses de  $\bar{A}(p)$ . En traçant la courbe pour différentes valeurs de  $p$ , on remarque que l'effet de  $p$  est négligeable sur l'aire au-dessous de la courbe, représentant l'intégrale de la fonction  $\bar{A}(p)$ .

$$\rho\Psi_1(p) = K \frac{p^{(1+M)/M}}{(1+M)/M} \left\{ 1 - \left[ \bar{A}(p)T - BT \ln \left( \frac{\dot{p}}{\dot{p}_{i0}} \right) \right]^{1/q_1} \right\}^{1/q_2} \quad (2.15)$$

En remplaçant les équations (2.8), (2.10) et (2.15) dans (2.7) on obtient le potentiel thermodynamique total :

$$\rho\Psi_1 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{1}{3} V \boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\alpha} + K \frac{p^{(1+M)/M}}{(1+M)/M} \left\{ 1 - \left[ \bar{A}(p)T - BT \ln \left( \frac{\dot{p}}{\dot{p}_{i0}} \right) \right]^{1/q_1} \right\}^{1/q_2} \quad (2.16)$$

### 2.2.1.3 Définition du dual du potentiel de dissipation - $F$

Ould et al. (Ould et al., 2006) ont montré qu'un modèle avec un écrouissage cinématique permet de mieux estimer les contraintes résiduelles dans l'aluminium après grenailage. Abed (Abed, 2005) a déclaré qu'un écrouissage cinématique non-linéaire donne une caractérisation plus réaliste de la réponse du métal. Pour obtenir un écrouissage cinématique non-linéaire, on propose un dual du potentiel de dissipation  $F$ , différent de la surface d'écoulement  $f$ , sous la forme suivante (Chaboche, 1989; Abed, 2005) :

$$F = f + \frac{3\gamma}{4V} \mathbf{X} : \mathbf{X} \quad (2.17)$$

où  $\gamma$  et  $V$  sont des constantes ajustées pour la compatibilité des unités.

En remplaçant l'équation (2.4) dans l'équation (2.17), on obtient le dual de la dissipation thermique :

$$F = \frac{3\gamma}{4V} \mathbf{X} : \mathbf{X} + \sigma_{eq} - \sigma_Y - Kp^{1/M} \left\{ 1 - \left[ Ap^{1/2}T - BT \ln \left( \frac{\dot{p}}{\dot{p}_{i0}} \right) \right]^{1/q_1} \right\}^{1/q_2} \quad (2.18)$$

ou

$$F = \frac{3\gamma}{4V} \mathbf{X} : \mathbf{X} + \sigma_{eq} - \sigma_Y - R(p, \dot{p}, T) \quad (2.19)$$

### 2.2.2 Détermination des dérivées : $\dot{p}$ , $\ddot{p}$ , $\dot{T}$ , $\dot{\sigma}$ , $\dot{\mathbf{X}}$

L'équation (2.19) permet de déterminer les variables flux à partir des lois d'évolution complémentaires (équations 1.117, 1.118, et 1.119) :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\tau} - \mathbf{X}}{\sigma_{eq}} \dot{\lambda} \quad (2.20)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} = \left[ \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\tau} - \mathbf{X}}{\sigma_{eq}} - \frac{3\gamma}{2V} \mathbf{X} \right] \dot{\lambda} \quad (2.21)$$

$$\dot{p} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial R} = \dot{\lambda} \quad (2.22)$$

Suite à l'équation (2.22) on obtient  $\ddot{p}$

$$\ddot{p} = \ddot{\lambda} \quad (2.23)$$

En dérivant l'équation (2.11) par rapport au temps et en substituant  $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$  par son expression dans (2.21), on obtient  $\dot{\mathbf{X}}$  :

$$\dot{\mathbf{X}} = \left[ V \frac{\boldsymbol{\tau} - \mathbf{X}}{\sigma_{eq}} - \gamma \mathbf{X} \right] \dot{\lambda} \quad (2.24)$$

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  est aussi obtenu en dérivant l'équation (2.9) par rapport au temps, et en substituant  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  par l'équation (2.20) :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E} : [\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p] = \mathbf{E} : \left[ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\tau} - \mathbf{X}}{\sigma_{eq}} \dot{\lambda} \right] \quad (2.25)$$

En posant (Abed, 2005),

$$\mathbf{N} = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\tau} - \mathbf{X}}{\sigma_{eq}} \quad (2.26)$$

et en remplaçant dans les équations (2.20) à (2.33), on obtient les équations d'évolution :

$$\dot{\epsilon}^p = \mathbf{N}\dot{\lambda} \quad (2.27)$$

$$\dot{p} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial R} = \dot{\lambda} \quad (2.28)$$

$$\ddot{p} = \ddot{\lambda} \quad (2.29)$$

$$\dot{\alpha} = \left[ \mathbf{N} - \frac{3\gamma}{2C} \mathbf{X} \right] \dot{\lambda} \quad (2.30)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \left[ \frac{2}{3} V \mathbf{N} - \gamma \mathbf{X} \right] \dot{\lambda} \quad (2.31)$$

$$\dot{\sigma} = \mathbf{E} : [\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p] = \mathbf{E} : [\dot{\epsilon} - \mathbf{N}\dot{\lambda}] \quad (2.32)$$

L'évolution de la température durant un chargement adiabatique est dérivée à partir de la première loi de la thermodynamique (équation 1.85) (Lemaitre, 2004). Abed (Abed, 2005) a montré que  $\dot{T}$  s'écrit :

$$\rho C_p \dot{T} = \left[ \sigma_{eq} - \frac{3\gamma}{2V} \mathbf{X} : \mathbf{X} - R \right] \dot{\lambda} \quad (2.33)$$

où  $C_p$  est la chaleur spécifique du matériau. Si on pose

$$z = \frac{1}{\rho C_p} \left[ \sigma_{eq} - \frac{3\gamma}{2V} \mathbf{X} : \mathbf{X} - R \right] \quad (2.34)$$

on obtient :

$$\dot{T} = z\dot{\lambda} \quad (2.35)$$

On remarque que dans l'évolution de la température, l'écroissance isotrope  $R$  intervient dans l'équation (2.34). Il devient alors nécessaire de calculer l'équation d'évolution de l'écroissance isotrope.

Pour fin de simplification on pose

$$\hat{R}(p) = Kp^{1/M} \quad (2.36)$$

et

$$\vartheta(p, \dot{p}, \dot{T}) = \left\{ 1 - \left[ Ap^{1/2}T - BT \ln \left( \frac{\dot{p}}{\dot{p}_{i0}} \right) \right]^{1/q_1} \right\}^{1/q_2} \quad (2.37)$$

la variable d'écroissance isotrope s'écrit

$$R(p, \dot{p}, \dot{T}) = \hat{R}(p)\vartheta(p, \dot{p}, \dot{T}) \quad (2.38)$$

La dérivée temporelle de  $R(p, \dot{p}, \dot{T})$  s'écrit

$$\dot{R}(p, \dot{p}, \dot{T}) = \frac{\partial R}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial R}{\partial \dot{p}} \ddot{p} + \frac{\partial R}{\partial \dot{T}} \dot{T} \quad (2.39)$$

en développant chaque terme on obtient



$$\dot{R} = \left[ \frac{\partial \hat{R}}{\partial p} \vartheta + \hat{R} \frac{\partial \vartheta}{\partial p} \right] \dot{p} + \hat{R} \frac{\partial \vartheta}{\partial \dot{p}} \ddot{p} + \hat{R} \frac{\partial \vartheta}{\partial T} \dot{T} \quad (2.40)$$

Abed (Abed, 2005) a postulé que l'équation d'évolution de l'écrouissage isotrope est principalement due à la déformation plastique (représentée par la déformation plastique cumulée  $p$ ), et peut être approximée par

$$\dot{R} = \frac{\partial \hat{R}}{\partial p} \vartheta \dot{p} \quad (2.41)$$

et que la contribution des autres termes à l'évolution est négligeable. Dans notre cas l'équation d'évolution de l'écrouissage isotrope s'écrit

$$\dot{R} = \frac{K}{M} \vartheta p^{(1-M)/M} \dot{p} \quad (2.42)$$

### 2.2.2.1 Détermination du multiplicateur plastique à partir de l'équation de consistance

Les équations d'évolution sont maintenant en fonction de la dérivée temporelle du multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$ . Pour déterminer ce multiplicateur, les équations d'évolution sont remplacées dans la condition de consistance (équation 1.124). Il reste maintenant à développer les dérivés partielles de  $f$ .

On rappelle l'équation de la surface d'écoulement  $f$  de l'équation (2.4)

$$f(\boldsymbol{\sigma}, p, \mathbf{X}, \dot{p}, T) = \sigma_{eq} - \sigma_Y - Kp^{1/M} \left\{ 1 - \left[ Ap^{1/2}T - BT \ln \left( \frac{\dot{p}}{\dot{p}_{i0}} \right) \right]^{1/q_1} \right\}^{1/q_2} \quad (2.43)$$

et la condition de consistance

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} : \dot{\mathbf{X}} + \frac{\partial f}{\partial \dot{p}} \ddot{p} + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} = 0 \quad (2.44)$$

La dérivée de  $f$  par rapport au tenseur de la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{X})}{2\sigma_{eq}} = \mathbf{N} \quad (2.45)$$

la dérivée de  $f$  par rapport au tenseur de l'écoulement cinématique  $\mathbf{X}$  s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} = -\frac{3(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{X})}{2\sigma_{eq}} = -\mathbf{N} \quad (2.46)$$

la dérivée de  $f$  par rapport à la déformation plastique cumulée  $p$  s'écrit :

$$-\frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{1}{q_1 q_2} \frac{ATK}{2} p^{\frac{2-M}{2M}} \Xi^{\frac{1-q_2}{q_2}} \Gamma^{\frac{1-q_1}{q_1}} + \frac{K}{M} p^{\frac{1-M}{M}} \Xi^{1/q_2} \quad (2.47)$$

où

$$\Xi = \left\{ 1 - \left[ Ap^{1/2}T - BT \ln \left( \frac{\dot{p}}{\dot{p}_{i0}} \right) \right]^{1/q_1} \right\} \quad (2.48)$$

$$\Gamma = \left[ Ap^{1/2}T - BT \ln \left( \frac{\dot{p}}{\dot{p}_{i0}} \right) \right] \quad (2.49)$$

la dérivée de  $f$  par rapport au taux de la déformation plastique cumulée  $\dot{p}$  s'écrit :

$$-\frac{\partial f}{\partial \dot{p}} = \frac{1}{q_1 q_2} K B T \Xi^{\frac{1-q_2}{q_2}} \Gamma^{\frac{1-q_1}{q_1}} p^{1/M} \dot{p}^{-1} \quad (2.50)$$

la dérivée de  $f$  par rapport à la température  $T$  s'écrit :

$$-\frac{\partial f}{\partial T} = \frac{1}{q_1 q_2} K p^{1/M} \Xi^{\frac{1-q_2}{q_2}} \Gamma^{\frac{1-q_1}{q_1}} \left[ Ap^{1/2} - B \ln \left( \frac{\dot{p}}{\dot{p}_{i0}} \right) \right] \quad (2.51)$$

En remplaçant les dérivées temporelles des variables d'états, équations (2.28), (2.29), (2.31), (2.32) et (2.35), et les dérivées partielles de  $f$  (2.45), (2.46), (2.47), (2.50) et (2.51) dans l'équation de consistance (1.124), on obtient la condition de consistance en fonction des dérivées du multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$  et  $\ddot{\lambda}$  :

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \mathbf{N} : \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - [\mathbf{N} : \mathbf{E} : \mathbf{N}] \dot{\lambda} \\ &+ \left[ -\frac{2}{3} V \mathbf{N} : \mathbf{N} + \gamma \mathbf{X} : \mathbf{N} \right] \dot{\lambda} \\ &- \left[ -\frac{1}{q_1 q_2} \frac{ATK}{2} p^{\frac{2-M}{2M}} \Xi^{\frac{1-q_2}{q_2}} \Gamma^{\frac{1-q_1}{q_1}} + \frac{K}{M} p^{\frac{1-M}{M}} \Xi^{1/q_2} \right] \dot{\lambda} \\ &- \left[ +\frac{1}{q_1 q_2} K B T \Xi^{\frac{1-q_2}{q_2}} \Gamma^{\frac{1-q_1}{q_1}} p^{1/M} \dot{p}^{-1} \right] \ddot{\lambda} \\ &- \left[ +\frac{1}{q_1 q_2} K p^{1/M} \Xi^{\frac{1-q_2}{q_2}} \Gamma^{\frac{1-q_1}{q_1}} \left[ Ap^{1/2} - B \ln \left( \frac{\dot{p}}{\dot{p}_{i0}} \right) \right] \right] \dot{\lambda} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

En posant

$$x_1 = [\mathbf{N} : \mathbf{E} : \mathbf{N}] \quad (2.53)$$

$$x_2 = \left[ \frac{2}{3} V \mathbf{N} : \mathbf{N} - \gamma \mathbf{X} : \mathbf{N} \right] \quad (2.54)$$

$$h = \frac{\partial f}{\partial p} = \left[ -\frac{1}{q_1 q_2} \frac{ATK}{2} p^{\frac{2-M}{2M}} \Xi^{\frac{1-q_2}{q_2}} \Gamma^{\frac{1-q_1}{q_1}} + \frac{K}{M} p^{\frac{1-M}{M}} \Xi^{1/q_2} \right] \quad (2.55)$$

$$y = \frac{\partial f}{\partial \dot{p}} = \left[ -\frac{1}{q_1 q_2} K B T \Xi^{\frac{1-q_2}{q_2}} \Gamma^{\frac{1-q_1}{q_1}} p^{1/M} \dot{p}^{-1} \right] \quad (2.56)$$

$$\theta = \frac{\partial f}{\partial T} = \left[ +\frac{1}{q_1 q_2} K p^{1/M} \Xi^{\frac{1-q_2}{q_2}} \Gamma^{\frac{1-q_1}{q_1}} \left[ A p^{1/2} - B \ln \left( \frac{\dot{p}}{\dot{p}_{i0}} \right) \right] \right] \quad (2.57)$$

et en regroupant les termes en  $\dot{\lambda}$  et  $\ddot{\lambda}$  la condition de consistance devient une équation différentielle dont la solution est le multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$

$$\ddot{\lambda} - \frac{(x_1 + x_2 + h + \theta z)}{y} \dot{\lambda} + \frac{\mathbf{N} : \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{y} = 0 \quad (2.58)$$

Plusieurs méthodes peuvent être adoptées pour résoudre l'équation (2.58). On cite la méthode de discrétisation proposée par Wang et al. (Wang et al., 1997), la méthode de transformée de Laplace proposée par Heeres et al. (Heeres et al., 2002) et l'algorithme suivant proposé par Abed (Abed, 2005) :

$$\dot{\lambda}(t) = \dot{\lambda}(0) + \frac{1}{y} (N_{ij}\varepsilon_{ij}(t) - N_{ij}\varepsilon_{ij}(0)) - \frac{(x_1 + x_2 + h + \theta z)}{y} (\lambda(t) - \lambda(0)) \quad (2.59)$$

Dans le prochain chapitre, une méthode incrémentale présentée par Wang et al. (Wang et al., 1997) et reprise par Abed et Voyiadjis (Voyiadjis et Abed, 2007) est utilisée pour déterminer le multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$ . Cette méthode est basée sur la méthode d'intégration d'Euler et utilise la technique de Newton-Raphson pour la solution des équations non-linéaires. Ces deux techniques sont les plus utilisées dans les solutions des éléments finis.

Dans ce chapitre, la formulation thermodynamique a été développée de façon à couvrir la plus grande variété de matériaux métalliques de nature cristalline FCC. Par contre, à cause du manque de données expérimentales, nous nous limiterons aux matériaux d'une élasticité isotrope, d'un écrouissage isotrope lorsque subit à un chargement dans le domaine inélastique et d'une incompressibilité plastique. Ces hypothèses et leurs effets sur les équations constitutives seront expliqués dans la section 2.2.3.

### 2.2.3 Hypothèses adoptées quant à l'implémentation numérique

Dans le cadre de ce projet, on va se limiter à développer une solution aux problèmes d'élasticité et d'inélasticité isotrope. Ceci implique que les composantes du module d'élasticité  $\mathbf{E}$  se réduisent à 21 composantes. Le tenseur  $\mathbf{E}$  s'écrit alors :

$$\mathbf{E} = E_{ijkl} = \kappa\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (2.60)$$

où  $\kappa$  est le module de flexion,  $\mu$  le module d'élasticité en cisaillement et  $\delta_{ij}$ ,  $\delta_{kl}$ ,  $\delta_{ik}$ ,  $\delta_{jl}$ ,  $\delta_{il}$  et  $\delta_{jk}$  sont le Delta de Kronecker.

À cause du manque de données expérimentales concernant l'écoulement cinématique des matériaux étudiés dans le cadre de cette recherche, les variables reliées à l'écoulement cinématique ne seront pas considérées dans l'implémentation numérique. En d'autres termes, on considère que les matériaux sous chargement dans le domaine plastique vont subir seulement un écoulement isotrope. Cette hypothèse est surtout valide quand il ne s'agit pas de chargements cycliques.

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{X} = 0 \quad (2.61)$$

Les matériaux métalliques en général se déforment plastiquement à volume constant, ce qui fait que l'écoulement ne dépend pas de la contrainte hydrostatique  $\sigma_H$ . Le tenseur de contrainte déviatorique s'écrit dans ce cas :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} \quad (2.62)$$

En tenant compte des trois hypothèses expliquées ci-haut, les équations constitutives se réduisent à :

$$\mathbf{N} = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sigma_{eq}} \quad (2.63)$$

l'équation (2.20) d'évolution de la déformation plastique devient

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{3}{2} \frac{\sigma}{\sigma_{eq}} \dot{\lambda} = N \dot{\lambda} \quad (2.64)$$

l'équation (2.25) d'évolution de la contrainte s'écrit

$$\dot{\sigma} = \mathbf{E} : [\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p] = \mathbf{E} : \left[ \dot{\epsilon} - \frac{3}{2} \frac{\sigma}{\sigma_{eq}} \dot{\lambda} \right] = \mathbf{E} : [\dot{\epsilon} - N \dot{\lambda}] \quad (2.65)$$

et l'évolution de la température (2.35) devient

$$\dot{T} = z \dot{\lambda} \quad (2.66)$$

où

$$z = \frac{1}{\rho C_p} [\sigma_{eq} - R] \quad (2.67)$$

Le restant des équations d'évolution sont indépendantes de l'écrouissage cinématique et restent comme telles :

$$\dot{p} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial R} = \dot{\lambda} \quad (2.68)$$

$$\ddot{p} = \ddot{\lambda} \quad (2.69)$$

$$\dot{R} = \frac{K}{M} \vartheta p^{(1-M)/M} \dot{p} \quad (2.70)$$

Les termes d'écrouissage cinématique disparaissent aussi de la condition de consistance (2.52) et de l'équation différentielle qui en découle (2.58) :

$$\begin{aligned}
\dot{f} &= \mathbf{N} : \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - [\mathbf{N} : \mathbf{E} : \mathbf{N}] \dot{\lambda} \\
&- \left[ -\frac{1}{q_1 q_2} \frac{ATK}{2} p^{\frac{2-M}{2M}} \Xi^{\frac{1-q_2}{q_2}} \Gamma^{\frac{1-q_1}{q_1}} + \frac{K}{M} p^{\frac{1-M}{M}} \Xi^{1/q_2} \right] \dot{\lambda} \\
&- \left[ +\frac{1}{q_1 q_2} KBT \Xi^{\frac{1-q_2}{q_2}} \Gamma^{\frac{1-q_1}{q_1}} p^{1/M} \dot{p}^{-1} \right] \ddot{\lambda} \\
&- \left[ +\frac{1}{q_1 q_2} K p^{1/M} \Xi^{\frac{1-q_2}{q_2}} \Gamma^{\frac{1-q_1}{q_1}} \left[ A p^{1/2} - B \ln \left( \frac{\dot{p}}{\dot{p}_{i0}} \right) \right] \right] z \dot{\lambda} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.71}$$

$$\ddot{\lambda} - \frac{(x_1 + h + \theta z)}{y} \dot{\lambda} + \frac{\mathbf{N} : \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{y} = 0 \tag{2.72}$$



## CHAPITRE 3

### APPLICATION NUMÉRIQUE

Ce chapitre explique la procédure numérique utilisée pour résoudre l'équation différentielle (2.59) et implémenter les équations obtenues par la formulation thermodynamique du modèle pour prédire l'évolution des variables d'état.

La plupart des solutions des éléments finis utilisent typiquement une procédure incrémentale itérative pour résoudre le problème en question. Le choix de la méthode numérique utilisée affecte énormément la stabilité et l'efficacité de la solution entière. Les méthodes d'intégration numérique implicite ont montré un grand niveau de stabilité et de performance quand il s'agit de problèmes de plasticité et de viscoplasticité (Tjøtta et Mo, 1993; Wang et al., 1997; Voyiadjis et Abed, 2006b, 2007; Rusinek et al., 2007). La méthode la plus reconnue est la méthode d'Euler qui se divise en deux méthodes :

- Méthode d'Euler-Avant (explicite)
- Méthode d'Euler-Arrière (implicite)

#### 3.1 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler consiste à approximer une fonction  $y(t)$  en connaissant sa dérivée temporelle  $f(y(t), t) = \frac{dy}{dt}$  à partir d'une condition initiale  $y(0) = 0$ . En connaissant un point  $y_n = y(t_n)$  à un temps  $t_n$ , le point  $y_{n+1} = y(t_{n+1})$  à un temps  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  peut s'approximer par :

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(t_n, y_n) \quad (3.1)$$

Comme la dérivée  $f(t_n, y_n)$  de  $y(t)$  est fonction de  $y_n$ , valeur connue à un temps  $t_n$ ,  $y_{n+1}$  est calculée directement. Pour cette raison la méthode est considérée explicite et appelée méthode d'intégration d'Euler-Avant. Telle qu'énoncée ci-haut, cette méthode consiste en une application directe et ne demande pas beaucoup de calculs ou d'itérations. Par contre elle requière d'avoir des petits intervalles de temps  $\Delta t$  pour assurer la convergence si on intègre sur un temps  $t = N\Delta t$

La méthode d'Euler-Arrière propose d'écrire la dérivée  $f(t_{n+1}, y_{n+1})$  en fonction d'équation implicite de  $y_{n+1}$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad (3.2)$$

comme  $y_{n+1}$  est encore inconnue et écrite sous sa forme implicite, cette méthode d'intégration est considérée implicite et appelée méthode d'intégration d'Euler-Arrière. Dans ce cas, calculer  $y_{n+1}$  revient à résoudre une équation non-linéaire en  $y_{n+1}$ . L'équation (3.2) s'écrit

$$y_{n+1} - y_n - \Delta t f(t_{n+1}, y_{n+1}) = 0 \quad (3.3)$$

et la méthode de solution Newton-Raphson est utilisée pour la résoudre.

En général, dans un problème d'éléments finis, la contrainte est recalculée (mise à jour) au point de Gauss pour un déplacement au nœud spécifique ce qui fait que l'histoire de déplacement est connue. La méthode consiste donc à discrétiser l'histoire de déplacement en plusieurs sous-intervalles pour lesquels les autres variables d'état sont recalculées.

Soit une histoire de déformation de  $\varepsilon = \varepsilon_i$  jusqu'à  $\varepsilon = \varepsilon_f$ . Si on divise l'histoire de déformation en  $N$  intervalles réguliers, alors l'incrément de déformation sur un intervalle de  $n$  jusqu'à  $n + 1$  est :

$$\Delta\varepsilon = \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_i}{N} \quad (3.4)$$

Un incrément de temps  $\Delta t$  entre le début de l'intervalle  $t_n$  et la fin de l'intervalle  $t_{n+1}$  doit être spécifié de façon à refléter le taux de déformation désiré pour cet intervalle :

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t \quad (3.5)$$

Les équations d'évolution sont dérivées à la section (2.2.2) et reprises à la section (2.2.3) en tenant compte des hypothèses d'isotropie et d'incompressibilité plastique. En se basant sur celles-ci et sur la méthode d'Euler expliquée ci-haut, les équations constitutives sous forme incrémentale s'écrivent :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \Delta\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \quad (3.6)$$

où

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.7)$$

et

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta \lambda \mathbf{N}_{n+1} \quad (3.8)$$

avec

$$\mathbf{N}_{n+1} = \frac{3}{2\sigma_{n+1}^{eq}} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (3.9)$$

la contrainte équivalente sous forme incrémentale devient

$$\sigma_{n+1}^{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \quad (3.10)$$

La température après un temps  $\Delta t$  évolue incrémentalement par

$$T_{n+1} = T_n + \Delta \lambda z_{n+1} \quad (3.11)$$

où

$$z_{n+1} = \frac{1}{\rho c_p} (\sigma_{n+1}^{eq} - R_{n+1}) \quad (3.12)$$

et l'écoulement isotrope définie par

$$R_{n+1} = R_n + \frac{K}{M} \vartheta_{n+1} p_{n+1}^{(1-M)/M} \Delta \lambda \quad (3.13)$$

où  $\vartheta_{n+1}$  d'après l'équation (2.37)

$$\vartheta_{n+1} = \left\{ 1 - \left[ A p_{n+1}^{1/2} T_{n+1} - B T_{n+1} \ln \left( \frac{1}{\dot{p}_{i0}} \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} \right) \right]^{1/q_1} \right\}^{1/q_2} \quad (3.14)$$

et la déformation plastique cumulée s'écrit

$$p_{n+1} = p_n + \Delta \lambda \quad (3.15)$$

Pour résoudre les équations non-linéaires ci-haut, on a recours à la technique de Newton-Raphson.

Si on considère une fonction nonlinéaire  $y(x)$  que l'on tente de résoudre pour  $x$  si  $y(x) = a$ , les étapes essentielles à la solution sont les suivantes :

1. Écrire sous une forme résiduelle  $r(x) = y(x) - a = 0$
2. Calculer la dérivée de  $r(x)$  par rapport à  $x$  :  $r'(x)$
3. Spécifier  $x_0$  une valeur initiale de  $x$  suffisamment proche de la solution
4. Calculer

$$x_{i+1} = x_i - \frac{r(x_i)}{r'(x_i)} \quad (3.16)$$

où l'indice  $i$  signifie la  $i^{me}$  itération

5. Répéter les étapes 1, 2, et 4 avec la nouvelle valeur de  $x_{i+1}$ . Itérer jusqu'à convergence  $|x_{i+1} - x_i| < TOLRANCE \approx 0$

En écrivant les équation incrémentales (3.6), (3.7), (3.11) et (3.13) sous la forme résiduelle, on obtient le système nonlinéaire suivant

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \mathbf{E} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p - \Delta\lambda^p \mathbf{N}_{n+1}) = 0 \quad (3.17)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p - \Delta\lambda^p \mathbf{N}_{n+1} = 0 \quad (3.18)$$

$$T_{n+1} - T_n - \Delta\lambda^p z_{n+1} = 0 \quad (3.19)$$

$$R_{n+1} - R_n - \frac{K}{M} \vartheta_{n+1} p_{n+1}^{(1-M)/M} \Delta\lambda^p = 0 \quad (3.20)$$

où la seule inconnue est  $\Delta\lambda^p$ .

Généralisant l'équation (3.16) pour résoudre un système non-linéaire, la technique de Newton-Raphson s'écrit

$$x_{i+1} = x_i - \mathbf{J}^{-1}(x_i) \mathbf{r}(x_i) \quad (3.21)$$

où  $\mathbf{J}(x_i)$  est la matrice jacobienne et définie par

$$\mathbf{J}(x_i) = \left( \frac{\partial \mathbf{r}_{n+1}^i}{\partial x_{n+1}^i} \right) \quad (3.22)$$

Les équations non-linéaires à résoudre sont inter-reliées entre elles et la détermination des dérivées nécessaires dans le calcul de la matrice jacobienne est difficile. Cette complexité rend l'algorithme de la solution lourde et instable. Abed (Abed, 2005) a observé que pour des matériaux réels, les dérivées des équations en questions sont souvent incalculables et deviennent trop coûteuses numériquement. Pour ces raisons, on a recours à des algorithmes qui surpassent ces difficultés. L'algorithme « return mapping » est une forme spéciale de la méthode d'Euler et souvent utilisé pour l'intégration des relations constitutives en élastoplasticité et élastoviscoplasticité. Simo (Simo et Taylor, 1986), Wang (Wang et al., 1997) et autres, ont

montré l'efficacité et la stabilité de cet algorithme.

### 3.2 Méthode de "Radial Return Mapping"

Comme on remarque dans le système non-linéaire, les équations (3.17), (3.18), (3.19) et (3.20) sont dépendantes de l'incrément du multiplicateur plastique  $\Delta\lambda$ . Une fois cet incrément déterminé, l'évolution des variables d'état devient explicite.

Soit l'équation de la surface d'écoulement (2.43) sous forme incrémentale

$$f_{n+1} = \sigma_{n+1}^{eq} - \sigma_Y - K p_{n+1}^{1/M} \left\{ 1 - \left[ A p_{n+1}^{1/2} T_{n+1} - B T_{n+1} \ln \left( \frac{1}{\dot{p}_{i0}} \frac{\Delta\lambda}{\Delta t} \right) \right]^{1/q_1} \right\}^{1/q_2} \quad (3.23)$$

Tel qu'expliqué dans la section (2.2.2.1) le multiplicateur plastique est déduit de la condition de consistance. Cette condition implique que pour toute contrainte  $\sigma_{n+1}$  :

- si  $f(\sigma_{n+1}, \epsilon_{n+1}^p, R_{n+1}, T_{n+1}) < 0$ , il s'agit alors d'un chargement dans le domaine élastique
- si  $f(\sigma_{n+1}, \epsilon_{n+1}^p, R_{n+1}, T_{n+1}) = 0$  et  $df = 0$  il s'agit alors d'un chargement dans le domaine inélastique
- si  $f(\sigma_{n+1}, \epsilon_{n+1}^p, R_{n+1}, T_{n+1}) = 0$  et  $df < 0$  il s'agit alors d'un déchargement

L'algorithme "radial return mapping" permet de résoudre les équations constitutives (3.17), (3.18), (3.19) et (3.20) tout en respectant les conditions ci-haut pour un incrément de temps  $\Delta t$  et une histoire de déformation  $\Delta\epsilon$  connue. En supposant que les états initiaux sont connus  $(\sigma_n, \epsilon_n^p, R_n, T_n \dots)$ , les différentes étapes pour

trouver l'état final (  $\sigma_{n+1}, \varepsilon_{n+1}^p, R_{n+1}, T_{n+1} \dots$  ) sont les suivantes :

1. on suppose qu'après l'incrément de déformation  $\Delta \varepsilon$  on est toujours dans le domaine élastique

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^e \quad (3.24)$$

dans ce cas la contrainte d'essai  $\sigma_{n+1}^*$  se calcule par

$$\sigma_{n+1}^* = \sigma_n + \mathbf{E} : \Delta \varepsilon \quad (3.25)$$

cette tentative suppose que la contrainte évolue élastiquement et qu'il n'y a aucun écoulement inélastique. Cette hypothèse est à vérifier dans la prochaine étape.

2. L'équation de la surface d'écoulement ( 3.23 ) est évaluée pour la valeur de la contrainte d'essai  $\sigma_{n+1}^*$

$$f_{n+1}^* = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{n+1}^* : \sigma_{n+1}^*} - \sigma_Y - K p_n^{1/M} \left\{ 1 - \left[ A p_n^{1/2} T_n - B T_n \ln \left( \frac{1}{\dot{p}_{i0}} \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} \right) \right]^{1/q_1} \right\}^{1/q_2} \quad (3.26)$$

Une fois la valeur de la fonction d'écoulement  $f_{n+1}^*$  déterminée, deux cas se présentent

- si  $f_{n+1}^* \leq 0$  alors l'hypothèse posée à la première étape est valide, le matériau n'a subi aucune déformation inélastique et la valeur de la contrainte d'essai  $\sigma_{n+1}^*$  est acceptée

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^* \quad (3.27)$$

Comme il n'y a aucun écoulement inélastique, les autres variables restent les mêmes et on retourne à l'étape (1) pour la solution du prochain incrément



- si  $f_{n+1}^* > 0$  alors le matériau a subi un écoulement viscoplastique et une correction doit être apportée à la contrainte d'essai  $\sigma_{n+1}^*$ . En effet, il faut retrancher de la contrainte d'essai la partie supposée élastique alors qu'elle est viscoplastique

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^* - \mathbf{E} : \Delta \epsilon^p = \sigma_{n+1}^* - 2\mu \mathbf{N}_{n+1} \Delta \lambda \quad (3.28)$$

Sous l'hypothèse de l'incompressibilité plastique et d'écroutissage isotrope, la surface d'écoulement dans l'espace de contrainte déviatorique forme une sphère et le tenseur  $\mathbf{N}_{n+1}$  est le tenseur normal à cette surface. Cette propriété nous permet d'affirmer que l'évolution de la contrainte  $\sigma$  est radiale et que les tenseurs normaux à la surface sont égaux

$$\mathbf{N}_{n+1} = \mathbf{N}_{n+1}^* = \frac{3}{2\sigma_{n+1}^{eq*}} \sigma_{n+1}^* \quad (3.29)$$

où

$$\sigma_{n+1}^{eq*} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{n+1}^* : \sigma_{n+1}^*} \quad (3.30)$$

Les prochaines étapes expliquent la procédure de solution durant un écoulement viscoplastique.

3. L'équation (3.29) est facilement évaluée puisque la seule inconnue dans l'équation (3.28) est l'incrément du multiplicateur plastique  $\Delta \lambda$ . Les autres équations constitutives sont similairement déduites en fonction de  $\Delta \lambda$  :

$$\sigma_{n+1}^{eq} = \sigma_{n+1}^{eq*} - 3\mu \Delta \lambda \quad (3.31)$$

$$\Delta \epsilon^p = \mathbf{N}_{n+1} \Delta \lambda \quad (3.32)$$

$$\epsilon_{n+1}^p = \epsilon_n^p + \Delta \epsilon^p = \epsilon_n^p + N_{n+1} \Delta \lambda \quad (3.33)$$

$$p_{n+1} = p_n + \Delta \lambda \quad (3.34)$$

$$T_{n+1} = T_n + z_{n+1} \Delta \lambda \quad (3.35)$$

où

$$z_{n+1} = \frac{1}{\rho c_p} (\sigma_{n+1}^{eq} - R_{n+1}) \quad (3.36)$$

et l'écoulement isotrope,

$$R_{n+1} = R_n + \frac{K}{M} \vartheta_{n+1} p_{n+1}^{(1-M)/M} \Delta \lambda \quad (3.37)$$

où

$$\vartheta_{n+1} = \left\{ 1 - \left[ A p_{n+1}^{1/2} T_{n+1} - B T_{n+1} \ln \left( \frac{1}{\dot{p}_{i0}} \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} \right) \right]^{1/q_1} \right\}^{1/q_2} \quad (3.38)$$

4. Les équations (3.31) jusqu'à (3.36), fonction de  $\Delta \lambda$ , sont remplacées dans l'équation d'écoulement (3.23)

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\Delta \lambda) = & \sigma_{n+1}^{eq*} - 3\mu \Delta \lambda - \sigma_Y \\ & - K p_{n+1}^{1/M} \left\{ 1 - \left[ A p_{n+1}^{1/2} T_{n+1} - B T_{n+1} \ln \left( \frac{1}{\dot{p}_{i0}} \frac{\Delta \lambda}{\Delta t} \right) \right]^{1/q_1} \right\}^{1/q_2} \end{aligned} \quad (3.39)$$

5. Résoudre l'équation (3.39) pour  $\Delta \lambda$  en utilisant la méthode de Newton-

Raphson

$$(\Delta\lambda)^{i+1} = (\Delta\lambda)^i - \frac{r((\Delta\lambda)^i)}{r'((\Delta\lambda)^i)} \quad (3.40)$$

où le résidu  $r(\Delta\lambda) = f_{n+1}(\Delta\lambda)$

$$r(\Delta\lambda) = \sigma_{n+1}^{eq*} - 3\mu\Delta\lambda - \sigma_Y - K p_{n+1}^{1/M} \left\{ 1 - \left[ A p_{n+1}^{1/2} T_{n+1} - B T_{n+1} \ln \left( \frac{1}{\dot{p}_{i0}} \frac{\Delta\lambda}{\Delta t} \right) \right]^{1/q_1} \right\}^{1/q_2} \quad (3.41)$$

et  $r'(\Delta\lambda)$  la dérivée du résidu par rapport à  $\Delta\lambda$

$$r'(\Delta\lambda) = -3\mu + \frac{\partial f_{n+1}}{\partial p_{n+1}} \frac{\partial p_{n+1}}{\partial \Delta\lambda} + \frac{\partial f_{n+1}}{\partial T_{n+1}} \frac{\partial T_{n+1}}{\partial \Delta\lambda} + \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \dot{p}} \frac{\partial \dot{p}}{\partial \Delta\lambda} \quad (3.42)$$

en se référant à la section (2.2.2.1)  $r'(\Delta\lambda)$  s'écrit

$$r'(\Delta\lambda) = -3\mu - h_{n+1} - \theta_{n+1} z_{n+1} - \frac{y_{n+1}}{\Delta t} \quad (3.43)$$

où  $h_{n+1}$ ,  $\theta_{n+1}$  et  $y_{n+1}$  sont les équations (2.55), (2.56) et (2.57) respectivement sous leur forme incrémentale :

$$h_{n+1} = \xi_{n+1} p_{n+1}^{\frac{2-M}{2M}} \frac{A K T_{n+1}}{2} + \frac{K}{M} p_{n+1}^{\frac{1-M}{M}} \vartheta_{n+1} \quad (3.44)$$

$$\theta_{n+1} = \xi_{n+1} p_{n+1}^{1/M} \left[ A p_{n+1}^{1/2} - B \ln \left( \frac{1}{\dot{p}_{i0}} \frac{\Delta\lambda}{\Delta t} \right) \right] \quad (3.45)$$

$$y_{n+1} = \xi_{n+1} K p_{n+1}^{1/M} B T_{n+1} \frac{\Delta\lambda}{\Delta t} \quad (3.46)$$

où  $\vartheta_{n+1}$  déjà définie par l'équation (3.14) et  $\xi_{n+1}$  par

$$\xi_{n+1} = -\frac{1}{q_1 q_2} \left\{ 1 - \left[ A p_{n+1}^{1/2} T_{n+1} - B T_{n+1} \ln\left(\frac{1}{p_{i0}} \frac{\Delta \lambda}{\Delta t}\right) \right]^{1/q_1} \right\}^{\frac{1-q_2}{q_2}} \quad (3.47)$$

$$\left[ A p_{n+1}^{1/2} T_{n+1} - B T_{n+1} \ln\left(\frac{1}{p_{i0}} \frac{\Delta \lambda}{\Delta t}\right) \right]^{\frac{1-q_1}{q_1}}$$

6. Une fois la valeur  $\Delta \lambda$  déterminée, elle est remplacée dans les équations (3.31) à (3.38) et les variables d'état sont déterminées. Pour un nouveau incrément de déformation  $\Delta \epsilon$  et de temps  $\Delta t$ , les valeurs obtenues sont considérées initiales et on retourne à l'étape (1) pour la détermination des nouvelles valeurs à la fin de ces incréments.

### 3.3 Exemples numériques

L'algorithme présenté dans la section précédente est codé numériquement dans Matlab 7.0 . Le détail du code numérique est en annexe. Les prochaines figures présentent des courbes d'écrouissages pour différents types de chargements afin de valider l'algorithme présenté dans la section précédente. Les propriétés utilisées dans le code numérique sont celles du matériaux OFHC obtenues à la section 2.1.

Les figures 3.1 et 3.2 montrent des courbes d'écrouissages pour des chargements uniaxiaux pour différents conditions de chargement. Le modèle montre une bonne corrélation avec les données expérimentales obtenues par Nemat-Nasser et Li (Nemat-Nasser et Li, 1998) et celles obtenues par Johnson et Cook (Johnson et Cook, 1988). Ceci indique que le modèle simule bien l'effet de taux de déformaion et de la température quand le matériau est soumis à un chargement.

Les figures 3.3 jusqu'à 3.8 sont produites pour tester si l'algorithme peut sup-

porter autre que les chargements simples de traction. La figure 3.3 montre une courbe d'écrouissage du matériau soumis à une compression tout en assumant que la limite d'écoulement  $\sigma_Y$  est égale  $75\text{MPa}$ . La figure 3.4 montre une séquence de chargement et de déchargement à un taux de déformation constant alors que la figure 3.5 illustre une séquence de chargements et de déchargements partiels à des différents taux de déformation.

Les figures 3.6 jusqu'à 3.8 montrent une varié de chargements cycliques. La figure 3.6 présente un chargement cyclique borné par une déformation négative et une déformation positive. La figure 3.7 montre un chargement cyclique dont on augmente la déformation minimale et maximale à chaque cycle. La figure 3.8 présente un chargement cyclique dont on augmente la déformation maximale à chaque cycle tout en revenant à une déformation minimale nulle.

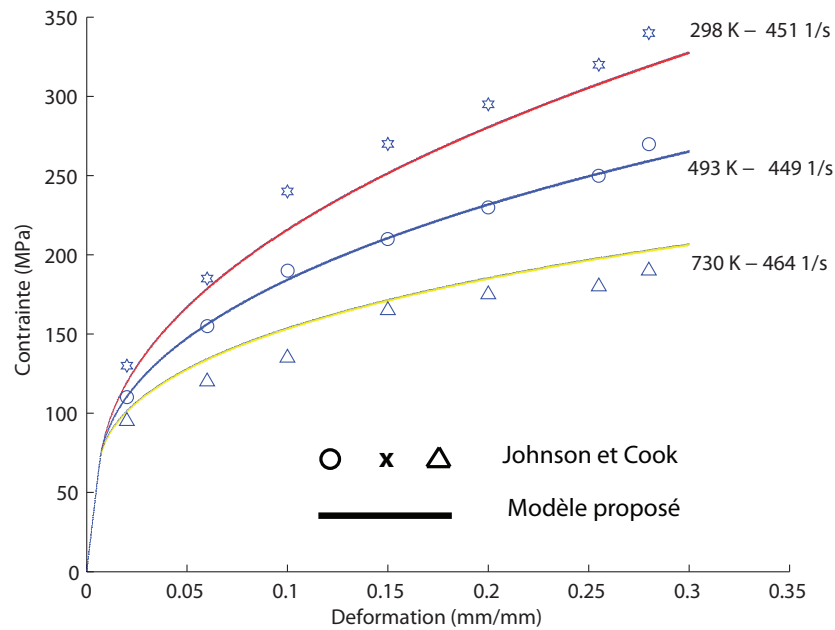


Figure 3.1 Comparaison du modèle avec les données expérimentales de Johnson et Cook (Johnson et Cook, 1988) pour OFHC cuivre

Après l'observation de ces figures, on peut conclure que le modèle présenté prédit

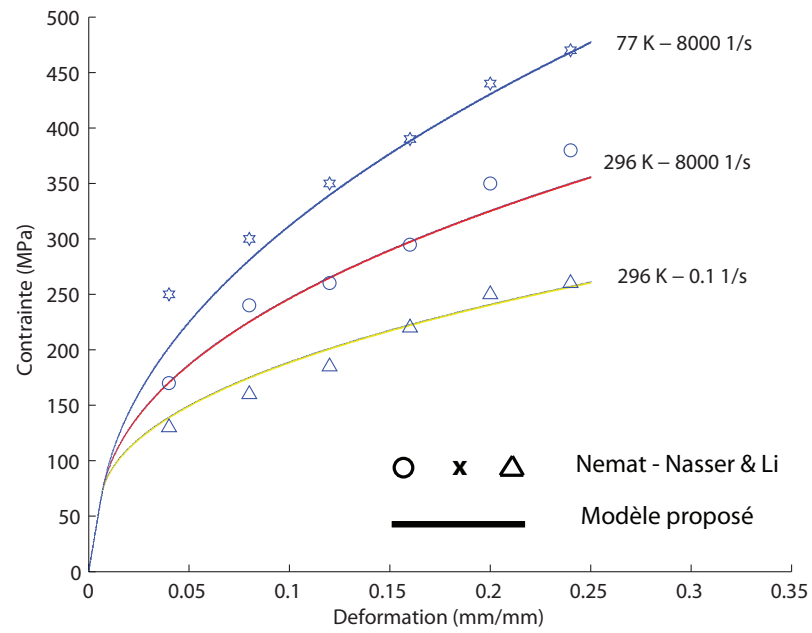


Figure 3.2 Comparaison du modèle avec les données expérimentales de Nemat-Nasser et Li (Nemat-Nasser et Li, 1998) pour OFHC cuivre

bien le comportement d'un matériau CFC à plusieurs taux de déformation et que l'algorithme respective peut être utilisé pour différents types de chargement.

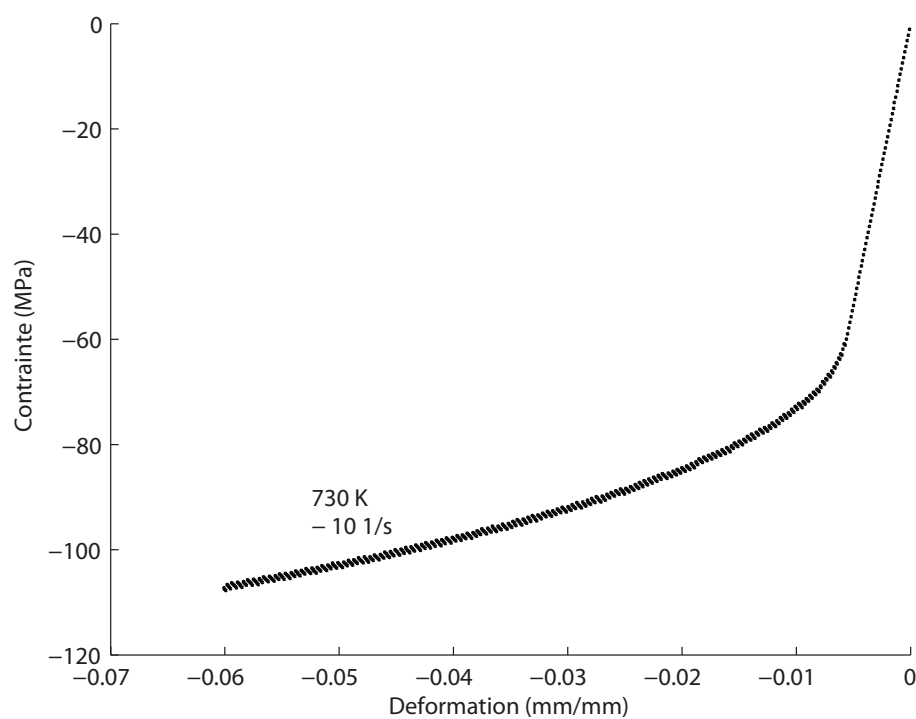


Figure 3.3 Prédiction du modèle pour OFHC cuivre sous compression

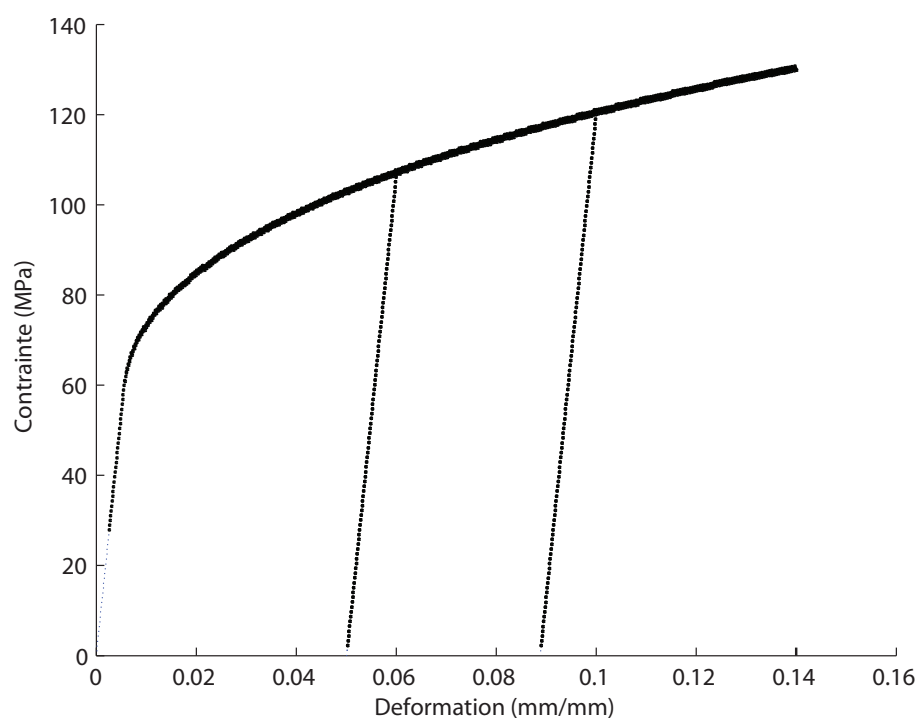


Figure 3.4 Prédiction du modèle pour OFHC cuivre sous une séquence de chargement et déchargement



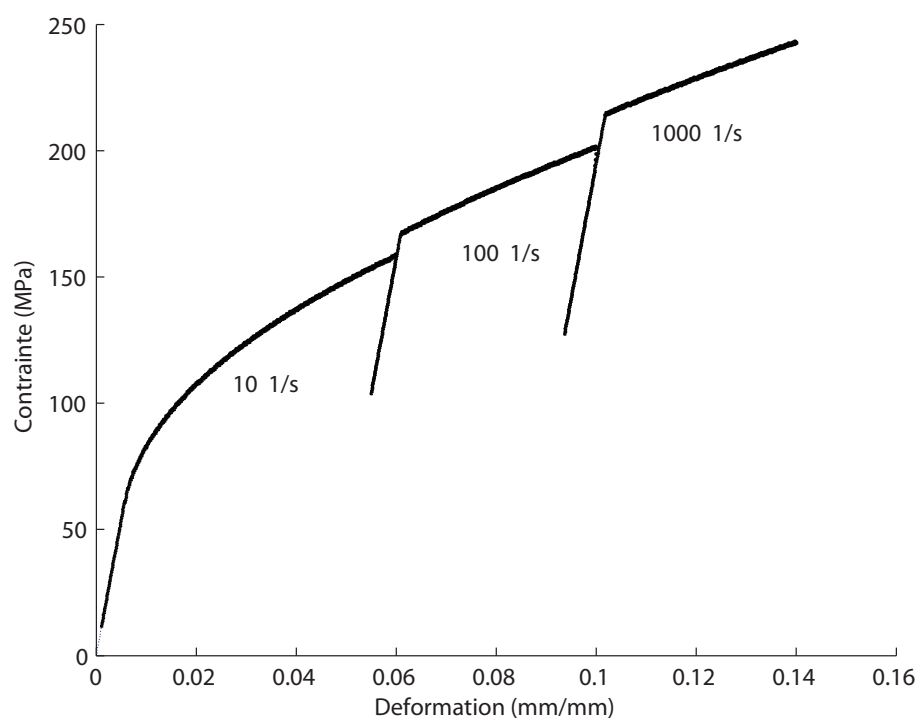


Figure 3.5 Prédiction du modèle pour OFHC cuivre sous une séquence de chargement et déchargement partiels à différents taux de déformations

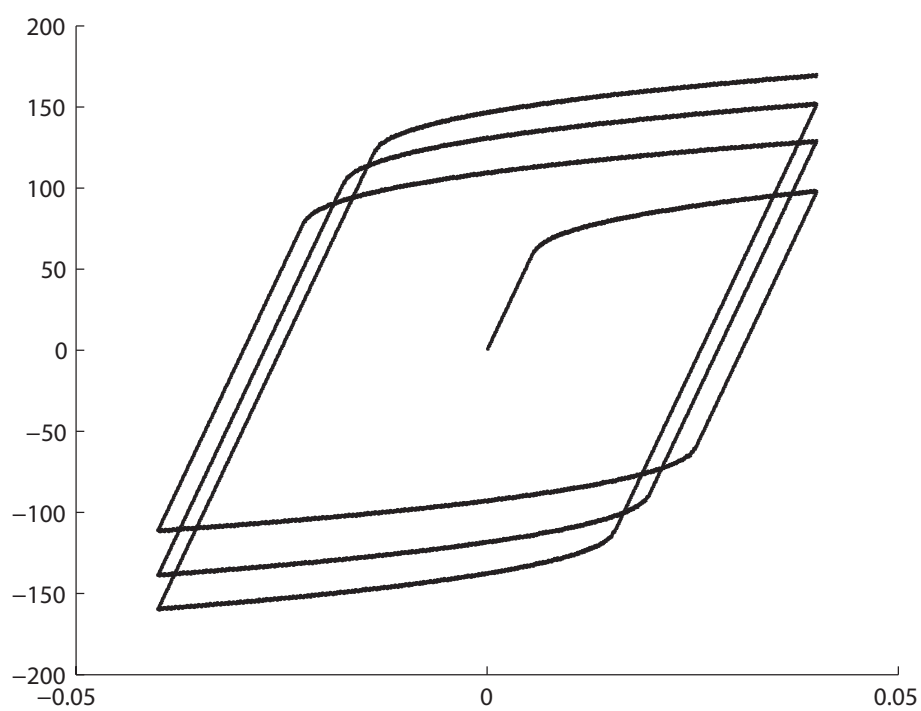


Figure 3.6 Prédiction du modèle pour OFHC cuivre sous des chargements et déchargements cycliques bornés par une déformation négative et une déformation positive

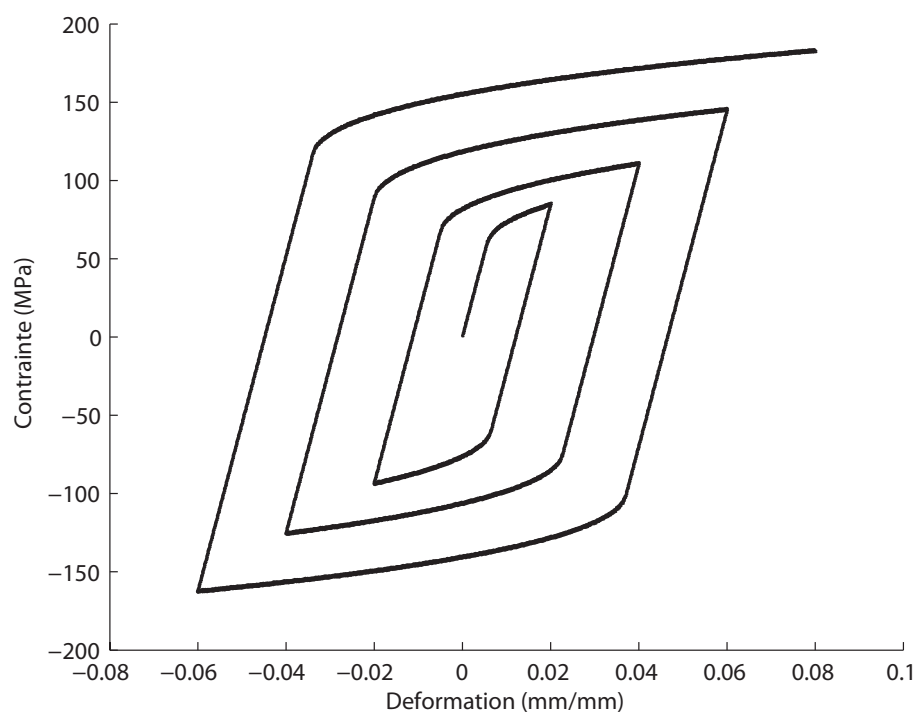


Figure 3.7 Prédiction du modèle pour OFHC cuivre sous des chargements et déchargements cycliques dont on augmente la déformation minimale et maximale à chaque cycle

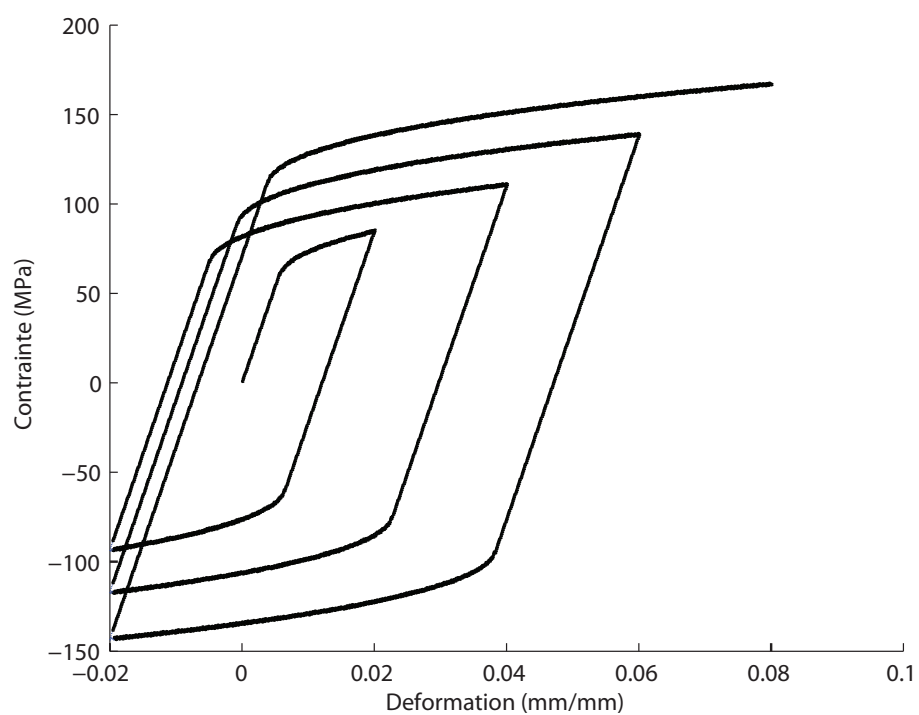


Figure 3.8 Prédiction du modèle pour OFHC cuivre sous des chargements et déchargements cycliques dont on augmente la déformation maximale à chaque cycle tout en revenant à une déformation minimale nulle

## CHAPITRE 4

### CONCLUSION

L'objectif de ce projet de maitrise a été de modéliser le comportement d'un matériau CFC lorsque soumis à des chargements à des grands taux de déformation. Un modèle phénoménologique a été développé à partir des mécanismes microscopiques réagissant à l'échelle atomiques. Par le biais de la thermodynamique des processus irréversibles, un modèle est formulé pour décrire le comportement viscoplastique des matériaux CFC à l'échelle macroscopique.

Étant donné que la littérature sur ce sujet est éparpillée et loin d'être claire, et que la solution au problème requière la compréhension de plusieurs notions dans différents domaines, il était nécessaire de construire une revue de littérature ordonnée regroupant et expliquant les différentes théories reliées à ce problème avant d'entamer sa solution.

D'abord une définition des dislocations, leurs différents types et leurs comportements ont été présentés. À partir des mécanismes de dislocation étudiés, on présente la théorie de l'activation thermique qui explique l'effet du taux de déformation et de la température sur le comportement du matériau quand soumis à un chargement.

En second lieu, la représentation de la contrainte et de l'écroutissage dans l'espace est révisée ainsi que le critère de plasticité de Von Mises. Par la suite, les principes de la thermodynamique des milieux continus sont présentés afin de préparer une base physique pour la formulation d'un modèle tridimensionnel respectant les lois fondamentales de la thermodynamique.

En deuxième partie, on propose un modèle empirique unidimensionnel inspiré des équations de la théorie de l'activation thermique. Les avantages apportés par le modèle proposé sont un nombre des paramètres inférieur au nombre des paramètres définissant les modèles existants, ainsi qu'une nature phénoménologique permettant de simplifier la complication présente dans les détails de la microstructure mais dérivée de ces derniers. Par la suite, la formulation de la thermodynamique est adoptée pour la généralisation dans l'espace. Elle introduit un système d'équation non-linéaire dont sa solution décrit l'évolution de la contrainte pour une histoire de déformation donnée. Les étapes de la formulation se résument à :

- Une dérivation d'une surface d'écoulement à partir du modèle unidimensionnel
- Une introduction d'un potentiel thermodynamique et d'un potentiel de dissipation pour un écrouissage isotrope en fonction des variables internes et du multiplicateur plastique
- Définition de la condition de consistance qui est base de la résolution du problème thermodynamique

Le chapitre 3 présente la méthode d'Euler pour la solution des systèmes non-linéaires. Par la suite, la méthode numérique « Radial Return Mapping », basée sur la méthode d'Euler, définit les différentes étapes de la solution numérique.

Finalement, l'algorithme numérique présenté est codé dans Matlab 7.0 pour démontrer la validité de l'algorithme pour plusieurs types de chargement.

Les contributions de ce travail sont :

1. Une revue de littérature ordonnée regroupant les différentes notions reliées à la formulation d'un modèle viscoplastique. La revue de littérature présentée dans ce mémoire a été travaillée dans le but de couvrir toute la matière reliée au développement d'un modèle viscoplastique tout en ayant un aspect

pédagogique pouvant servir dans des travaux futurs. Il n'était pas trouver dans la littérature un tel document.

2. Une méthodologie de formulation d'un modèle macroscopique à partir des comportements microscopiques. À travers le document on couvre les différentes étapes nécessaires au développement d'un modèle :
  - Compréhension de la théorie reliée à la microstructure
  - Observation des données expérimentales disponibles et conclusion
  - Modélisation unidimensionnelle et corrélation avec les données expérimentales
  - Formulation thermodynamique et généralisation du modèle unidimensionnel
  - Écriture d'un algorithme pour l'implémentation du modèle dans un code numérique
3. Un modèle modélisant le comportement viscoplastique d'un matériau CFC et respectant les lois de la thermodynamique.

### **Perspective de Travail**

Afin d'améliorer et/ou d'élargir le domaine d'utilisation du modèle développé dans le cadre de ce projet de maîtrise certaines recommandations sont suggérées :

1. Des observations microscopiques (Johnston et Gilman, 1959; Chiem et Duffy, 1983; Bhattacharjee, 2007; Kubin et al., 2008) pour les matériaux qu'on désire modéliser spécifiquement, peuvent montrer les mécanismes dominants au niveau de la microstructure ainsi que l'évolution des dislocations sous les conditions respectives.
2. De plus, différents tests mécaniques sur des échantillons peuvent être effectués. Par exemple, il est intéressant d'avoir plus de courbes de traction à différents taux de déformations et de températures pour différents matériaux

CFC. Il est aussi possible d'étudier le comportement des matériaux sous différents types de chargement, citons les chargements bi-axiaux, les chargements cycliques et d'autres chargements complexes pouvant offrir une meilleure définition du comportement du matériau et servir l'écriture du modèle. Les méthodes de tests rencontrées dans la littérature varie entre des tests dynamiques axiaux (Maiden et Green, 1966; Lee, 2000; Rusinek et Klepaczko, 2001; Hopperstad et al., 2003; Lee et M.S., 2003; Uenishi et Teodosiu, 2004; El-Magd et al., 2005) et les tests dynamiques en torsion (Nicholas, 1971; R.A. et Duffy, 1972; Khan et Liang, 2000).

3. Il devient alors possible de formuler le modèle en considérant un écrouissage cinématique. L'hypothèse d'un écrouissage isotrope a été adoptée à cause de l'absence des données expérimentales décrivant cette nature. Dans le chapitre 2 on montre comment une telle formulation est possible.
4. Il doit être noté que l'implémentation du modèle dans un code d'élément finis n'a pas été réalisée. L'algorithme présenté au chapitre 3 peut être codé dans un logiciel de calcul d'éléments finis, ABAQUS à titre d'exemple, et des simulations numériques du maillage peuvent être effectuées.
5. Finalement, la méthodologie présentée dans ce mémoire peut être adoptée pour développer le comportement viscoplastique des matériaux de types CC ou HC.



## BIBLIOGRAPHIE

- ABED F. (2005). *Physically based multiscale-viscoplastic model for metals and steel alloys : theory and computation*. PhD thesis, Graduate Faculty of the Louisiana State University and Agricultural and Mechanical College.
- ABED F. et VOYIADJIS G. (2005a). A consistent modified zerilli-armstrong flow stress model for bcc and fcc metals for elevated temperatures. *Acta Mechanica*, 175 :1 – 18.
- ABED F. et VOYIADJIS G. (2005b). Plastic deformation modeling of al-6xn stainless steel at low and high strain rates and temperatures using a combination of bcc and fcc mechanisms of metals. *International Journal of Plasticity*, 21(8) :1618 – 1639.
- ABED F. et VOYIADJIS G. (2007). Thermodynamics consistent formulation of viscoplastic deformation in fcc metals. *Journal of Engineering Mechanics*, pages 76 – 86.
- AL HASSANI S., KORMI K. et WEBB D. (1999). Numerical simulation of multiple shot impact. *7th ICSP*, pages 217 – 227.
- BAMMANN D. et AIFANTIS E. (1987). A model for finite-deformation plasticity. *ACTA MECHANICA*, 69 :97 – 117.
- BECKER R. (1925). *Z.Physik*, 26(919).
- BHATTACHARJEE A. e. a. (2007). Room temperature plastic flow behaviour of ti-6.8mo-4.5fe-1.5al and ti-10v-4.5fe-1.5al : Effect of grain size and strain rate. *Materials Science and Engineering*, pages 1 – 9.
- CAMPAGNE L., DARIDON L. et AHZI S. (2005). A physically based model for dynamic failuer in ductile materials. *Mechanics of Materials*, 37 :869 – 886.

- CAMPBELL J. (1975). Temperature and rate effects in metal plasticity. *Archives of Mechanics*, 27(3) :407 – 416.
- CHABOCHE J. (1989). Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. *International Journal of Plasticity*, 5 :247 – 302.
- CHABOCHE J. (1991). Thermodynamically based viscoplastic constitutive equations : Theory versus experiment. *High Temperature Constitutive Modeling - ASME*, 26 :207 – 226.
- CHABOCHE J. (1997). Thermodynamic formulation of constitutive equations and application of the viscoplasticity of metals and polymers. *International Journal of Solids Structures*, 34(18) :2239 – 2254.
- CHABOCHE J. et CAILLETAUD G. (1996). Integration methods for complex plastic constitutive equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 133 :125 – 155.
- CHABOCHE J. et JUNG O. (1989). Application of a kinematic hardening viscoplasticity model with threshold to the residual stress relaxation. *International Journal of Plasticity*, 5 :247 – 302.
- CHENG J., NEMAT NASSER S. et GUO W. (2001). A unified constitutive model for strain-rate and temperature dependant behaviour of molybdenum. *Mechanics of Material*, 33 :603 – 616.
- CHIEM C. et DUFFY J. (1983). Strain rate history effects and observations of dislocation substructure in aluminum single crystals following dynamic deformation. *Materials Science and Engineering*, 57 :233 – 247.
- CONRAD H. (1964). Thermally activated deformation of metals. *Journal of metals*, pages 582 – 588.

- CONRAD H. et FREDERICK S. (1962). *Acta Metallurgica*, 10 :1013 – 1020.
- DAVIDSON D. et LINDHOLM U. (1974). The effect of barrier shape in the rate theory of metal plasticity. *Institute of Ohysics*, 21 :124 – 137.
- DESLAEF D., ROUHAUD E. et RASOULI YAZID S. (2000). 3d finite element models of shot peening processes. *Materials Science Forum*, 347 :241 – 246.
- EL MAGD E. (1985). Material constants and mechanical behaviour during plastic wave propagation. *Proceedings if the NUMETA 85 Conference*, 7(11) :437 – 445.
- EL MAGD E., TREPPMAN C. et KOTHAUER M. (2005). Experimentelle und numerische untersuchung zum thermomechanischen stoffverhalten. *Hochgeschwindigkeitsspanen metallischer Werkstoffe*, pages 183 – 206.
- EL MAGD E., TREPPMAN C. et KOTHAUER M. (2006). Description of flow curves over wide ranges of strain rate and temperature. *International Journal of Materials Research*, 97(10) :1453 – 1459.
- ELMUSTAFA G., TAMBWE M. et D.S. S. (2003). Activation volume analysis of plastic deformation in fcc materials using nanoindentation. *Materials Research Society*, 750 :77 – 82.
- ET AL. J. (2000). Mechanical response of aa7075 aluminium alloy over a wide range of temperature and strain rates. *Materials Science Forum*, 331 :527 – 532.
- GILLIS P. et GILMAN J. (1965a). Dynamical dislocation theory of crystal plasticity - 1 - yield stress. *Journal of Applied Physics*, 36(11) :3370 – 3380.
- GILLIS P. et GILMAN J. (1965b). Dynamical dislocation theory of crystal plasticity - 2 - easy glide and strain hardening. *Journal of Applied Physics*, 36(11) :3380 – 3391.

- GOTO D. e. a. (2000). The mechanical threshold stress constitutive-strength model description of HY-100 steel. *Metallurgical and Materials Transactions*, 31 :1985 – 1996.
- HAHN G. (1962). A model for yielding with special reference to the yield-point phenomena of iron and related bcc metals. *Acta Metallurgica*, 10 :727 – 738.
- HASSANI S. (1981). Mechanical aspects of residual stress development in shot peening. *Proceedings of the First International Conference on Shot Peening*, pages 583 – 602.
- HEERS O., SUIKER S. et BORST R. (2002). A comparison between the Perzyna viscoplastic model and the consistency viscoplastic model. *European Journal of Mechanics*, 21 :1 – 12.
- HERTZBERG R. W. (1996). *Deformation and fracture of Engineering Material 4th Edition*. John Wiley and Sons.
- HILL R. (1948). A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1 :18 – 28.
- HOGUE K. et MUKHERJEE K. (1977). The temperature and strain rate dependence of the flow stress of tantalum. *Journal of Material Science*, 12 :1666 – 1672.
- HOLT D. e. a. (1967). The strain-rate dependence of the flow stress in some aluminum alloys. *Transactions of the ASM*, 60 :152 – 159.
- HOPPERSTAD O., BOVRIK T. et LANGSETH M. (2003). On the influence of stress triaxiality and strain rate on the behaviour of a structural steel. part 1, experiments. *European Journal of Mechanics*, 22 :1 – 13.
- JOHNSON G. et COOK W. (1983). Constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures. *Proceedings of the Seventh International Symposium on Ballistics*, pages 541 – 547.

- JOHNSON G. et COOK W. (1988). Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures. *Engineering Fracture Mechanics*, pages 31 – 48.
- JOHNSTON W. (1962). Yield points and delay times in single crystals. *Journal of Applied Physics*, 33(9) :2716 – 2739.
- JOHNSTON W. et GILMAN J. (1959). Dislocation velocities, dislocation densities, and plastic flow in lithium fluoride crystals. *Journal of Applied Physics*, 30(2) :129 – 144.
- KHAN A. S. et LIANG R. (1999). Behaviour of three bcc metal over a wide range of strain rates and temperatures : experiments and modelling. *International Journal of Plasticity*, 15 :1089 – 1109.
- KHAN A. S. et LIANG R. (2000). Behaviour of three bcc metals during non-proportional multi-axial loadings : experiments and modelling. *International Journal of Plasticity*, 16 :1443 – 1458.
- KLEPACZKO J. (1968). Strain rate history effects for polychrystalline aluminium and theory of intersections. *Journal of Mechanical Physics of Solids*, 16 :255 – 266.
- KLEPACZKO J. (1975). Thermally activated flow and strain rate history effects for some polychrystalline f.c.c. metals. *Materials Science and Engineering*, 18 :121 – 135.
- KLEPACZKO J. (1986). Constitutive modeling of strain rate and temperature effects in fcc metals. *Proceedings of the International Symposium on Intense Dynamic Loading and Its Effects*, pages 670 – 678.
- KLEPACZKO J. (1988). A general approach to rate sensitivity and constitutive modelling of fcc and bcc metals. *Impact, effects of fast transient loading : procee-*

*dings f the first International Conference of Effects of Fast Transient Loadings*, pages 3 – 35.

KLEPACZKO J. et CHIEM C. (1986). On rate sensitivity of f.c.c. metals, instantaneous rate sensitivity and rate sensitivity of strain hardening. *Journal of Mechanical Physics of Solids*, 34(1) :29 – 54.

KLEPACZKO J. et DUFFY J. (1977). History effects in polychristalline fcc metals and steel subjected to rapid changes in strain rate and temperature. *Engineering Transactions*, 25(1) :3 – 22.

KLEPACZKO J. et DUFFY J. (1982). History effects in polychristalline bcc metals and steel subjected to rapid changes in strain rate and temperature. *Archives of mechnices*, 34(4) :419 – 436.

KLEPACZKO J., SASAKI T. et KUOKAWA T. (1993). On rate sensitivity of polycrystalline aluminium at high strain rates. *Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Science*, 36(113) :170 – 187.

KOCKS U. (2001). Realistic constitutive relations for metal plasticity. *Materials Science and Engineering*, 317 :181 – 187.

KOCKS U., ARGON A. et ASHBY M. (1975). Thermodynamics and kinetics of slip. *Progress in Material Science*, 19 :1 – 333.

KOCKS U. et MECKING H. (2003). Physics and phenomenology of strain hardening : the fcc case. *Progress in Material Science*, 48 :171 – 273.

KUBIN L., DEVINCRE B. et HOC T. (2008). Modeling dislocation storage rates and mean free paths in face-centered cubic crystals. *Acta materialia*, 56(20) :6040 – 6049.

- KUBIN L. et ESTRIN Y. (1990). Evolution of dislocation densities and the critical conditions for the portevin-le chatelier effect. *Acta Metallurgica*, 38(5) :697 – 708.
- LEE H. et G.H. S. (1999). The thermomechanical behavior for aluminum alloy under uniaxial tensile loading. *Materials Science and Engineering*, pages 154 – 164.
- LEE O. et M.S. K. (2003). Dynamic material property characterization by using split hopkinson pressure bar (shpb) technique. *Nuclear Engineering and Design*, 226 :119 – 125.
- LEE W. e. a. (2000). The strain rate and temperature dependence of the dynamic impact properties of 7075 aluminum alloy. *Journal of Materials Processing Technology*, 100 :116 – 122.
- LEMAITRE, J. et Chaboche, J.-L. (2004). *Mécaniques des matériaux solides*. DUNOD.
- LIANG R. et KHAN A. S. (1999). A critical review of experimental results and constitutive models for bcc and fcc metals over wide range of strain rates and temperature. *International Journal of Plasticity*, 15 :963 – 980.
- LUBLINER J. (1984). A maximum-dissipation principle in generalized plasticity. *Acta Mechanica*, 52 :225 – 237.
- MAIDEN C. et GREEN S. (1966). Compressive strain-rate tests on six selected materials at strain rates from  $10^{-3}$  to  $10^4$  in/in/sec. *Journal of Applied Mechanics*, pages 496 – 504.
- MALINOWSKI J., KLEPACZKO J. et KOWALEWSKI Z. (2007). Miniaturized compression test at very high strain rates by direct impac. *Experimental MEchanics*, 47 :451 – 463.

- MCCORMICK P. (1972). Serrated yielding and the occurrence of the strain gradients in an al-cu alloy. *Scripta Metallurgica*, 6(12) :1133–1138.
- MEDRANO R. (1972). Force-distance relations in dislocation forest cutting processes. *Revista Brasileira de Fisica*, 2(3) :357 – 363.
- MEGUID S., SHAGAL G. et J.C. S. (2002). 3d fe analysis of peening of strain-rate sensitive materials using multiple impingement model. *International Journal of Impact Engineering*, 27 :119 – 134.
- MEYERS M. e. a. (2002). Constitutive description of dynamic deformation : physically-based mechanisms. *Materials Science and Engineering*, pages 194 – 216.
- MIAO H., LAROSE S. et LEVESQUE M. (2009). On the potential applications of a 3d random finite element model for the simulation of shot peening. *Advances in engineering software*, 40(10) :1023 – 1038.
- MILELLA P. (1998). Temperature and strain rate dependence of mechanical behavior of body-centered cubic structure materials. *Proceeding of TMS Fall Meeting 98*.
- MMPDS 3 (2008). *The Metallic Materials Properties Development and Standardization*.
- NEMAT NASSER S., GUO W. et CHENG J. (1999). Mechanical properties and deformation mechanisms of a commercially pure titanium. *Acta Metallurgica*, 47(13) :3705 – 3720.
- NEMAT NASSER S. et ISSACS J. (1997). Direct measurement of isothermal flow stress of metals at elevated temperatures and high strain rates with application to ta and ta-w alloys. *Acta Metallurgica*, 45 :907 – 919.



- NEMAT NASSER S. et LI Y. (1998). Flow stress of f. c.c. polycrystals with application to fcc Cu. *Acta Metallurgica*, 46 :565 – 577.
- NICHOLAS T. (1971). Strain-rate and strain-rate-history effects in several metals in torsion. *Experimental Mechanics*, pages 370 – 374.
- OROWAN E. (1934). On the kinetics of plastic flow. *Z.Physik*, 89(605) :614 – 634.
- OULD C., ROUHAUD E. et CHABOCHE J. (2006). A kinematic hardening finite element model to evaluate residual stresses in shot peened parts, local measurements by x-ray diffraction. *Materials Science Forum*, 524 :161 – 166.
- PUCHI E. e. a. (1997). On the mechanical behavior of commercial-purity aluminium deformed under axisymmetric compression conditions. *International Journal of Plasticity*, 13(8) :723 – 742.
- R.A. F. et DUFFY J. (1972). The dynamic stress-strain behavior in torsion of 1100-o aluminum subjected to a sharp increase in strain rate. *Journal of Applied Mechanics*, pages 939 – 945.
- RAMBERG W. et OSGOOD W. (1943). Description of stress-strain curves by three parameters. *Technical Note no. 92, National Advisory Committee for Aerospace*.
- ROCKAFELLAR R. (1970). *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton.
- ROTTERS A. et RAABE D. (2006a). A dislocation density based constitutive law for bcc materials in crystal plasticity fem. *Computational Material Science*, 39 :91 – 95.
- ROTTERS A. et RAABE D. (2006b). A dislocation density based constitutive model for crystal plasticity fem including geometrically necessary dislocations. *Acta Materialia*, 54 :2169 – 2179.

- RUSINEK A. et KLEPACZKO J. (2001). Shear testing of a sheet steel at wide range of strain rates and a constitutive relation with strain-rate and temperature dependence of the flow stress. *International Journal of Plasticity*, 17 :87 – 115.
- RUSINEK A., ZAERA R. et KLEPACZKO J. (2007). Constitutive relations in 3-d for a wide range of strain rates and temperatures- application to mild steels. *Journal of Mechanical Physics of Solids*, 44 :5611 – 5634.
- SCHIFFNER K., DROSTE C. et HELLING g. (1999). Simulation of residual stresses by shot peening. *Computer and Structures*, 72 :329 – 340.
- SEEGER A. (1955). The generation of lattice defects by moving dislocations, and its application to the temperature dependence of the flow-stress of f.c.c. crystals. *Philosophical Magazine*, 46 :1194 – 1217.
- SHEIKH AHMAD J. et TWOMEY J. (2007). Ann constitutive model for high strain-rate deformation of al 7075-t6. *Journal of Materials Processing Technology*, 186 :339 – 345.
- SHIOIRI J., SAKINO K. et SATOH K. (1985). An ultrasonic study of the behavior of dislocations under high speed plastic deformation in aluminium. *Journal de Physique*, 46(12) :333 – 336.
- SIMO J. et TAYLOR R. (1986). A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 22 :640 – 670.
- TAYLOR G. (1934). On the mechanis, of work hardenning. *Proceeding of Royal Society*, 145(362) :388 – 405.
- TAYLOR G. (1938). Plastic strain in metals. *Journal of the institute of Metals*, 62(1) :307 – 324.

- TEODOSIU C. et HU Z. (1995). Evolution of the intragranular microstructure at moderate and large strains : Modeling and computational significance. *Simulation of Material Processing : Theory, Methods and Applications*, pages 173 – 182.
- TJOTTA S. et MO A. (1993). Constitutive model for cold deformation of aluminium at large strains and high strain rates. *International Journal of Plasticity*, 9 :461 – 478.
- UENISHI A. et TEODOSIU C. (2004). Constitutive modelling of the high strain rate behaviour of interstitial-free steel. *International Journal of Plasticity*, pages 915 – 936.
- VOYIADJIS G. et ABED F. (2005a). Effects of dislocation density evolution on the thermomechanical response of metals with different crystal structures at low and high strain rates and temperature. *Archives of Mechanics*, 57(4) :299 – 343.
- VOYIADJIS G. et ABED F. (2005b). Microstructural based models for bcc and fcc metals with temperature and strain rate dependency. *Mechanics of Materials*, 37 :355 – 378.
- VOYIADJIS G. et ABED F. (2006a). A coupled temperature and strain rate dependent yield function for dynamic deformations of bcc metals. *International Journal of Plasticity*, 22 :1398 – 1431.
- VOYIADJIS G. et ABED F. (2006b). Implicit algorithm for finite deformation hypoelastic-viscoplasticity in fcc metals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67 :933 – 959.
- VOYIADJIS G. et ABED F. (2007). Transient localizations in metals using microstructure-based yield surfaces. *INSTITUTE OF PHYSICS PUBLISHING*, 15 :S83 – S95.

- WANG W., SLUYS L. et DE BORST R. (1997). Viscoplasticity for instabilities due to strain softening and strain-rate softening. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40 :3839 – 3864.
- ZERILLI F. et ARMESTRONG R. (1987). Dislocation-mechanics-based constitutive relations for material dynamics calculations. *Journal of Applied Physics*, 61(5) :1816 – 1825.
- ZHAO H. (1997). A constitutive model for metals over a large range of strain rates identification for mild-steel and aluminium sheets. *Materials Science and Engineering*, pages 95 – 99.
- ZUBELEWICZ A., ZUREL A. et POTOCKI M. (2006). Dynamic behavior of copper under extreme loading rates. *Journal de Physique*, 134 :23 – 27.