

**Titre:** Développement d'un modèle numérique simplifié du tronc pour  
simuler l'effet d'une chirurgie de la scoliose sur l'apparence externe  
d'un patient  
Title:

**Auteur:** Olivier Dionne  
Author:

**Date:** 2009

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Dionne, O. (2009). Développement d'un modèle numérique simplifié du tronc  
pour simuler l'effet d'une chirurgie de la scoliose sur l'apparence externe d'un  
patient [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/228/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/228/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** Farida Cheriet, & François Guibault  
Advisors:

**Programme:** Génie informatique  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

**DÉVELOPPEMENT D'UN MODÈLE NUMÉRIQUE SIMPLIFIÉ DU TRONC  
POUR SIMULER L'EFFET D'UNE CHIRURGIE DE LA SCOLIOSE  
SUR L'APPARENCE EXTERNE D'UN PATIENT**

OLIVIER DIONNE

DÉPARTEMENT DE GÉNIE INFORMATIQUE ET GÉNIE LOGICIEL  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE INFORMATIQUE)  
DÉCEMBRE 2009

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

DÉVELOPPEMENT D'UN MODÈLE NUMÉRIQUE SIMPLIFIÉ DU TRONC  
POUR SIMULER L'EFFET D'UNE CHIRURGIE DE LA SCOLIOSE  
SUR L'APPARENCE EXTERNE D'UN PATIENT

présenté par : DIONNE Olivier

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. OZELL Benoît, Ph.D., président

Mme CHERIET Farida, Ph.D., membre et directrice de recherche

M. GUIBAULT François, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. PARENT Stefan, M.D., Ph.D., membre

## REMERCIEMENTS

Mes remerciements s'adressent en tout premier lieu à ma directrice de recherche, Dr. Farida Cheriet, pour son encadrement attentif et la confiance qu'elle m'a accordée tout au long de ce projet. Par sa passion indéfectible dans la recherche médicale, elle a su m'insuffler son enthousiasme et le désir d'aller plus loin dans ce cheminement. Son appui constant, ses conseils judicieux et sa très grande disponibilité ont été des atouts majeurs et fort précieux tout au long de ce mémoire.

Je souhaite également remercier le Dr. François Guibault pour avoir accepté de codiriger cette recherche. Ses commentaires constructifs lors de la révision ont été très utiles et appréciés. La charge de cours qu'il m'a bien voulu me confier m'a permis de vivre pleinement une expérience académique enrichissante.

Je tiens à remercier aussi le Dr. Benoît Ozell, président du jury, et le Dr. Stefan Parent, membre externe, pour avoir accepté, malgré leurs lourds engagements, de s'être libérés pour l'évaluation de mon travail.

C'est aussi avec un brin de nostalgie, tout en espérant que nous pourrions poursuivre nos échanges féconds après le dépôt de ce mémoire, que je remercie mes compagnons du LIV4D sans lesquels l'ambiance électrisante et créatrice de notre lab n'aurait été possible. Et maintenant, un merci spécial à ceux qui m'ont soutenu dans cette recherche, entre autres : Jonathan Boisvert (le goût de continuer mes études), Kondo-Claude Assi (le dépannage mathématique et nos nombreuses discussions sur les corps déformables), Lama Séoud (sa présence, ses encouragements et conseils en topographie) et Philippe Debanné (les données patients et sa disponibilité). Et en périphérie, j'ai une pensée toute particulière pour ceux qui m'ont soutenu avec amitié : Martin Bisson (les douleurs musculaires de nos séances de gym salutaires), Fouzi Benboujja (nos sessions de créativité verbale), Hervé Lombaert (nos surfings intellectuels sur les algorithmes



informatiques), Rafik Bourezak (notre sympathique tornade ambulante), Pascale Béliveau (l'expat qui est toujours avec nous), Rola Harmouche, Claudia Chevretils et Luc Duong. Je n'oserais conclure sans une pensée pour ceux qui nous ont quittés avec brio : Frédéric Plourde (son goût contagieux de l'infographie), Jérémie Thériault (son humour caustique) et Fantin Girard (le champagne, son amour!)

Je voudrais remercier tout particulièrement mes parents pour leur encouragement, amour et soutien sans borne. Une pensée va à ma mère pour le temps qu'elle a consacré à redonner un peu de rigueur à ma plume qui a parfois tendance à dérapier...

J'ajoute également un remerciement supplémentaire au Dr. Farida Cheriet, au Dr. François Guibault de même qu'à mon père pour le privilège de leur aide financière me permettant d'étudier sans soucis -- leurs taux d'intérêt sont imbattables!

Enfin, à mon amour, Noémi, je te remercie pour m'avoir accompagné et soutenu au quotidien. Merci pour m'avoir communiqué ta joie de vivre, pour avoir su apaiser mes anxiétés (tu sais comme je le suis...) et, créer aux moments opportuns, les distractions énergisantes qui m'ont permis de me ressourcer et de persister.

## RÉSUMÉ

La scoliose est une maladie du système musculo-squelettique caractérisée par une déformation tridimensionnelle complexe du tronc. Pour les cas les plus sévères, un traitement chirurgical est nécessaire. Celui-ci consiste à redresser la colonne vertébrale à l'aide de tiges métalliques ancrées aux vertèbres moyennant des vis et des crochets. La prédiction du résultat chirurgical s'avère un élément fondamental à toute planification opératoire. Actuellement, la méthode clinique pour élaborer une stratégie opératoire et estimer le résultat de la correction de la scoliose réside principalement dans l'analyse radiographique de la flexibilité du rachis jumelée à l'expérience du chirurgien. Afin d'assister davantage ce dernier lors de la planification, un simulateur biomécanique permettant d'identifier la configuration optimale des implants qui corrigera le mieux les déformations de la colonne est en cours de développement au Centre Hospitalier Universitaire Sainte-Justine à Montréal. Toutefois, ni ce simulateur ni l'analyse du chirurgien ne tient compte des tissus mous du tronc et ne fournit d'information sur l'apparence externe après l'intervention. Pour le chirurgien, le résultat de la chirurgie sur l'apparence externe s'avère hautement subjectif et son expérience demeure son seul atout. Tout ceci reste donc fort problématique, considérant que la principale raison pour prescrire une opération provient d'abord du mécontentement du patient vis-à-vis son apparence esthétique. Ne possédant aucune idée du niveau de correction esthétique qu'une chirurgie quelconque peut lui offrir, ce dernier est parfois déçu de l'imperfection de son apparence après l'intervention.

L'objectif principal du projet consiste donc à définir une modélisation physique simplifiée des tissus déformables entre l'épiderme (surface de la peau) et les structures osseuses du tronc, afin de visualiser en 3D et d'évaluer l'effet d'une chirurgie de la scoliose sur l'apparence externe du patient. Cette étude s'attarde uniquement aux tissus mous car la modélisation biomécanique des structures osseuses fait l'objet d'un autre

projet. Ainsi, pour prédire les résultats des corrections à l'externe, on utilise une configuration postopératoire déjà connue des structures osseuses.

Pour réaliser cet objectif, nous proposons d'abord une méthodologie pour la construction d'un système simplifié permettant de modéliser les différentes structures déformables du tronc. Dans un premier temps, des reconstructions en 3D des structures osseuses préopératoires et postopératoires s'obtiennent à partir de radiographies standard. La surface externe du tronc, quant à elle, s'acquiert par des numériseurs 3D à lumière blanche structurée non ionisante. Suite à des prétraitements effectués sur les modèles, nous élaborons une méthode générique pour produire les différents tissus mous du tronc. Ces couches, représentant qualitativement la peau, le gras et les muscles, permettent d'établir le modèle déformable du tronc en utilisant un système particulaire généralisé. Afin de décrire le comportement physique des différents tissus mous, des forces de préservation de contraintes de distance, d'aire et de volume sont constituées. Finalement, une modélisation articulée des structures osseuses est créée pour transformer la configuration interne préopératoire en postopératoire. Suite à la résolution des équations de dynamique, les déplacements de cette structure rigide déforment alors les différentes couches anatomiques simplifiées du tronc vers l'état postopératoire, afin de prédire le résultat d'une chirurgie sur la surface externe.

Une procédure numérique adéquate pour résoudre la dynamique du système est ensuite identifiée. Nous favorisons plus particulièrement l'obtention de simulations en temps réel au détriment de la précision, puisqu'elles sont mieux adaptées au milieu clinique en raison du délai rapide d'exécution. Notre étude de performance en calcul, précision et stabilité révèle que le schéma d'intégration Velocity Verlet répond parfaitement à nos besoins. D'autre part, afin d'assurer la stabilité et la convergence de la simulation, on développe une contrainte géométrique d'étirement.

Un logiciel prototype permettant de simuler de manière interactive l'effet d'une chirurgie de la scoliose sur l'apparence externe est construit tout au cours de ce projet. Ce dernier, conçu pour évoluer avec le projet, reste essentiel à l'obtention des résultats de cette recherche.

Par la suite, nous validons le système proposé en comparant les résultats de simulation au résultat postopératoire réel du tronc d'un patient. Pour ce faire, nous extrayons des indices cliniques évaluant l'asymétrie externe du tronc, à partir de sections transversales pour différents niveaux vertébraux. Pour le sujet testé, l'erreur moyenne absolue sur la surface postérieure du tronc (telle qu'évaluée par l'indice de rotation de la surface du dos) s'évalue à  $1.38^\circ$  au niveau thoracique et à  $3.26^\circ$  au niveau lombaire; alors que l'erreur moyenne absolue sur l'indice de gibbosité se chiffre à 2.73 mm au niveau thoracique et à 3.83 mm au niveau lombaire.

Ce projet démontre la faisabilité de simuler l'effet d'une chirurgie corrective de la scoliose sur la surface du tronc. Cependant, les résultats présentés révèlent les limites de la modélisation simplifiée. Une meilleure précision des résultats de simulation nécessiterait le développement d'un maillage plus raffiné des différentes structures du tronc humain incluant des constantes de rigidité calibrées.

Pour conclure, ce travail représente un premier pas encourageant vers l'élaboration d'un modèle physique pour évaluer l'effet de la correction chirurgicale de la colonne vertébrale sur l'ensemble du tronc. La simulation de l'effet d'une chirurgie de la scoliose sur l'apparence externe du patient permettra dès lors aux chirurgiens d'évaluer la correction de l'asymétrie globale du tronc et de choisir une stratégie opératoire davantage garante de la satisfaction du patient.

## ABSTRACT

Scoliosis is a musculoskeletal disorder characterized by a complex three-dimensional deformation of the trunk. For severe cases, surgical treatment is necessary. This procedure consists in rectifying the spine shape using metal rods anchored to the vertebrae by means of screws and hooks. The prediction of surgical outcome is a fundamental element of any preoperative evaluation. Currently, the clinical method to define a surgical strategy and estimate the result of curve correction relies primarily on radiographic analysis of spinal flexibility and on the surgeon's own experience. To further assist the clinician during surgical planning, a biomechanical simulator is currently being developed at Montreal's Sainte-Justine University Hospital Center to identify the optimal configuration of the implants to best correct the spinal deformities. However, neither this simulator nor the spinal flexibility analysis consider the soft tissues of the trunk in order to provide information on the patient's external appearance after the intervention. For the surgeon, the residual trunk asymmetry proves highly subjective and his experience remains his only asset. This is problematic considering that the main reason to prescribe an operation comes initially from the patient's dissatisfaction towards their apparent deformity. Having no prior knowledge of the level of aesthetic improvement a surgery can offer him, the patient is sometimes disappointed by the imperfection of his appearance after the intervention.

Therefore, the goal of this project is to define a simplified physical model of the deformable tissues between the skin surface (epidermis) and bone structures of the trunk in order to visualize in 3D and assess the effect of scoliosis surgery on the patient's external appearance. This research focuses only on the soft tissues since biomechanical modeling of the bone structures is the subject of another ongoing project. Consequently, a known postoperative configuration of the bone structures serves as our basis to predict the external appearance after scoliosis surgery.

To achieve our goal, we first propose a methodology to build a simplified system to model the different deformable structures of the trunk. Initially, 3D pre and postoperative reconstructions of the bone structures are obtained from standard radiographs while non-invasive 3D optical digitizers acquire the external surface of the trunk using white non-ionizing structure light. Following certain mesh preprocessing, we develop a generic method to generate three different tetrahedral layers starting from the external surface of the trunk to represent the skin, fat and muscles. From these new layers a generalized particle system based on elastic potential energy is defined. Forces preserving distance, area and volume constraints are calculated to describe the physical behavior of the various soft tissues. Finally, a rigid articulated model of the bone structures is created in order to transform the internal preoperative configuration to the postoperative state. By solving a set of dynamic equations, the displacements of this rigid model deform the simplified soft tissue layers of the trunk in order to predict the external appearance after scoliosis surgery.

A suitable numerical integration scheme to compute the dynamic behavior of our deformable model is then identified. In this work, we favor real-time simulations at the expense of accuracy since they are better suited to a clinical environment due to their lower computation time. Our study on computational performance, accuracy and stability reveals that the Velocity Verlet integration scheme meets our needs perfectly. To further strengthen stability and convergence of the simulation, we develop a geometric stretching constraint.

A software prototype allowing a user to interactively simulate the effect of scoliosis surgery on the external trunk appearance is also developed throughout this project. This software, which is designed to evolve with the project, is essential in obtaining the results presented in this thesis.

Subsequently, we validate our system by comparing the simulated and actual post-operative trunk surface shapes of a given patient. For this purpose, clinical indices of torso asymmetry were computed and compared by using cross-sections of the simulated and acquired postoperative external geometries at various vertebral levels. A preliminary evaluation study for one patient showed a mean absolute error of  $1.38^{\circ}$  (thoracic) and  $3.26^{\circ}$  (lumbar) on the back surface rotation index while the mean absolute error on the rib hump index is evaluated at 2.73 mm (thoracic) and 3.83 mm (lumbar).

This project, has allowed us to demonstrate the feasibility of simulating the external trunk appearance corrective scoliosis surgery. However, our results reveal the limits of the simplified modeling framework. Improved accuracy of simulation results would require the development of a more refined meshing of the different structures of the human trunk including calibrated physical properties.

To conclude, this work represents an encouraging first step towards the development of a physical model for evaluating the potential effect of scoliosis spine surgery on the whole trunk. Simulating the external outcome of a spine surgery will allow surgeons to assess the correction of the overall asymmetry of the trunk and choose a surgical strategy more likely to ensure patient satisfaction.

## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS .....	III
RÉSUMÉ.....	V
ABSTRACT .....	VIII
TABLE DES MATIÈRES .....	XI
LISTE DES TABLEAUX.....	XIV
LISTE DES FIGURES.....	XV
LISTE DES ANNEXES.....	XIX
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES NOTATIONS MATHÉMATIQUES .....	XX
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 1 – REVUE DES CONNAISSANCES .....	9
1.1 Modélisation non-physique des déformations .....	10
1.1.1 Modèles paramétriques .....	11
1.1.2 Modèle « ChainMail » .....	13
1.2 Modélisation physique des déformations .....	15
1.2.1 Méthode des éléments finis .....	16
1.2.2 Modèle masses-ressorts.....	19
1.2.3 Choix du modèle pour la simulation des tissus mous du tronc .....	24
1.2.4 Formalisation physique du modèle masses-ressorts .....	27
1.2.5 Formalisation physique du modèle particulière généralisé .....	29
1.2.5.1 Contraintes .....	29
1.2.5.2 Énergie potentielle élastique .....	30
1.2.5.3 Forces conservatrices .....	31
1.2.5.4 Amortissement .....	32
1.3 Schémas d'intégration .....	35



1.3.1 Euler explicite .....	36
1.3.2 Runge Kutta .....	36
1.3.3 Verlet.....	38
1.3.4 Euler implicite .....	39
1.3.5 Stabilité des systèmes raides .....	42
CHAPITRE 2 – OBJECTIFS DE RECHERCHE.....	49
CHAPITRE 3 – CONSTRUCTION D’UN MODÈLE PHYSIQUE SIMPLIFIÉ DU TRONC.....	50
3.1 Acquisition des données cliniques .....	50
3.1.1 Reconstruction 3D des structures osseuses du tronc .....	51
3.1.2 Topographie de surface du tronc .....	53
3.1.3 Superposition de la surface externe du tronc et des structures osseuses .....	54
3.2 Méthodologie générale .....	55
3.3 Modélisation géométrique du tronc .....	58
3.3.1 Prétraitements sur la géométrie externe .....	58
3.3.2 Prétraitements sur la géométrie interne .....	61
3.3.3 Génération des différentes couches de tissus mous .....	64
3.3.4 Modélisation de la déformation des tissus mous du tronc .....	69
3.3.4.1 Énergie potentielle de distance.....	69
3.3.4.2 Énergie potentielle d’aire .....	70
3.3.4.3 Énergie potentielle de volume .....	72
3.3.4.4 Contrainte géométrique d’étirement .....	74
3.3.5 Modélisation articulée des structures osseuses .....	75
3.4 Simulation d’une chirurgie.....	81
3.5 Méthodes de vérification .....	87
3.5.1 Vérification des schémas d’intégration .....	87
3.5.2 Vérification des contraintes physiques et géométriques .....	88

3.5.3 Évaluation de la simulation à partir d'indices cliniques sur la géométrie externe du tronc.....	90
CHAPITRE 4 – RÉSULTATS ET DISCUSSION .....	93
4.1 Vérification des schémas d'intégration .....	93
4.2 Contributions apportées par les contraintes physiques et géométriques .....	103
4.3 Résultats d'une simulation de chirurgie de la scoliose sur l'apparence externe ..	111
4.3.1 Ajustement des constantes de rigidité des contraintes physiques .....	123
4.4 Discussion générale.....	126
4.4.1 Simulation de chirurgie .....	126
4.4.2 Performance .....	127
CHAPITRE 5 – CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS .....	128
RÉFÉRENCES.....	134
ANNEXES .....	147

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1 : Comparaison des différents modèles de déformation .....	26
Tableau 4.1 : Pas maximal de simulation des schémas d'intégration pour un système en mouvement périodique .....	96
Tableau 4.2 : Pas maximal de simulation des schémas d'intégration pour un système en mouvement pseudo-périodique .....	98
Tableau 4.3 : Pas maximal de simulation des schémas d'intégration pour un système en mouvement apériodique critique .....	99
Tableau 4.4 : Pas maximal de simulation des schémas d'intégration pour un système en mouvement apériodique .....	101
Tableau 4.5 : Évaluation des schémas d'intégration explicites.....	102
Tableau 4.6 : Statistiques du modèle physique du tronc .....	111
Tableau 4.7 : Erreur moyenne absolue des indices cliniques.....	122
Tableau 4.8 : Valeurs des constantes de rigidité des contraintes physiques et géométriques employées pour la simulation .....	125

## LISTE DES FIGURES

Figure 0.1 : Résultats divergents suite à une stratégie chirurgicale équivalente, tiré de (Pazos, V., Cheriet, Dansereau, & Labelle, 2005) .....	5
Figure 1.1 : La forme d'une B-spline cubique étant décrite par la position de ses points de contrôle.....	11
Figure 1.2 : Déformation d'un crâne par FFD .....	12
Figure 1.3 : Le modèle « ChainMail » en 2D, tiré de (Gibson, S. F. F., 1997) .....	13
Figure 1.4 : Simulation d'une dissection modélisée par « ChainMail », tiré de (Mensmann, Ropinski, & Hinrichs, 2008).....	14
Figure 1.5 : Séquence de déformation de deux poutres élastiques encastées soumises à la gravité. La poutre du haut est modélisée selon un comportement d'élasticité non linéaire tandis que celle du bas suit l'hypothèse des petites déformations linéaires. Notons la dilatation du volume de la poutre du bas lorsqu'elle est largement déformée. Tiré de (Müller, Dorsey, McMillan, Jagnow, & Cutler, 2002) .....	17
Figure 1.6 : Séquence de déformation du foie, tiré de (Cotin, Delingette, & Ayache, 1999) .....	18
Figure 1.7 : La peau représentée par cinq différentes couches de ressorts (gauche) et une vue rapprochée du maillage facial (droite), tiré de (Lee, Terzopoulos, & Walters, 1995).....	20
Figure 1.8 : Résultats d'une simulation de chirurgie maxillo-faciale utilisant la MMR et la MEF, tiré de (Keeve, Girod, & Girod, 1996).....	22
Figure 1.9 : Le simulateur HystSim de VitraMed, tiré du site <a href="http://www.virtamed.com/cms/">http://www.virtamed.com/cms/</a> .....	23
Figure 1.10 : Résultats suite à une calibration des constantes élastiques, tiré de (Morris & Salisbury, 2008). a) Modèle à l'état initial où les flèches représentent les forces externes appliquées sur l'objet et les nœuds, représentés par des sphères, sont fixes. b) Déformation de référence obtenue par la MEF. c) Déformation obtenue par la MMR avec des constantes choisies	

arbitrairement. d) Déformation obtenue par la MMR suite à une calibration des constantes .....	24
Figure 1.11 : Un ressort linéaire de constante de rappel $k_s$ est intégré selon le schéma explicite d'Euler. Si le pas de temps apparaît trop grand, une augmentation irréversible de l'énergie du système est probable. ....	39
Figure 3.1 : Acquisition des radiographies LAT, PA-0 et PA-20 .....	51
Figure 3.2 : Étapes menant à la reconstruction 3D des structures osseuses d'un patient .....	52
Figure 3.3 : Reconstruction de la surface externe par quatre numériseurs 3D .....	53
Figure 3.4 : Schéma de la méthodologie .....	57
Figure 3.5 : Exemples d'arêtes non « manifold ». Ces arêtes sont désignées non « manifold » lorsqu'elles sont connectées à plus de deux faces .....	59
Figure 3.6 : Prétraitement et simplification d'un maillage passant de 69,600 nœuds et 138,652 triangles à 6,355 nœuds et 12,559 triangles .....	60
Figure 3.7 : Capture de l'application Scolio Editor. Les triangles en contour gras (rouge) de la surface externe sont présentement en intersection avec les segments du sternum du modèle filaire .....	63
Figure 3.8 : Capture de l'arbre OCTREE généré pour un patient donné dans l'application Scolio Editor .....	64
Figure 3.9 : Extrusion d'un élément triangulaire générant un prisme pouvant être divisé en trois tétraèdres .....	65
Figure 3.10 : Prismes dégénérés suite à une distance d'extrusion trop élevée .....	66
Figure 3.11 : Couches anatomiques qualitatives .....	67
Figure 3.12 : Capture de l'application Scolio Tissue. Les tétraèdres visualisés représentent ceux associés à la deuxième couche .....	68
Figure 3.13 : Contrainte physique de distance entre deux particules .....	69
Figure 3.14 : Contrainte physique d'aire entre trois particules .....	71
Figure 3.15 : Contrainte physique de volume entre quatre particules .....	72
Figure 3.16 : Comportement biphasique par une contrainte géométrique d'étirement ....	75
Figure 3.17 : Référentiel local d'une vertèbre .....	77

Figure 3.18 : Référentiel local d'une côte .....	78
Figure 3.19 : Référentiels locaux des structures osseuses du tronc sous différentes résolutions .....	79
Figure 3.20 : Génération du sternum.....	80
Figure 3.21 : Capture de l'application Scolio Dynamix .....	86
Figure 3.22 : Système masse-ressort-amortisseur linéaire où $k_r$ , $k_d$ et $m$ représentent respectivement la constante de raideur du ressort, le coefficient d'amortissement et la masse .....	87
Figure 3.23 : Calcul de l'indice BSR .....	90
Figure 3.24 : Calcul de la gibbosité .....	91
Figure 3.25 : Calcul de l'indice PAX.....	91
Figure 3.26 : Capture de l'application Scolio Sections.....	92
Figure 4.1 : Évaluation des schémas d'intégration pour un système en mouvement périodique .....	95
Figure 4.2 : Évaluation des schémas d'intégration pour un système en mouvement pseudo-périodique.....	97
Figure 4.3 : Évaluation des schémas d'intégration explicite pour un système en mouvement apériodique critique .....	99
Figure 4.4 : Évaluation des schémas d'intégration explicite lors d'un système en mouvement apériodique.....	100
Figure 4.5 : Séquence de déformation d'un cube considérant uniquement des contraintes physiques de distance.....	104
Figure 4.6 : Séquence de déformation d'un cube considérant des contraintes physiques de distance et d'aire .....	105
Figure 4.7 : Séquence de déformation d'un cube considérant des contraintes physiques de distance, d'aire et de volume.....	106
Figure 4.8 : Contribution des contraintes physiques pour un cube entrant en collision avec un plan .....	107

Figure 4.9 : Contribution de la contrainte géométrique d'étirement. Contrairement à celle du bas, la courbe du haut ne considère pas la contrainte géométrique d'étirement. ....	108
Figure 4.10 : Séquence de déformations de trois poutres encastrees définies selon différentes constantes de rigidité et soumises à la gravité .....	110
Figure 4.11 : Résultats suite à la génération des différentes couches anatomiques. La figure de droite présente une coupe du patient sur le plan frontal. ....	112
Figure 4.12 : Interpolation des structures osseuses déformant la surface externe .....	113
Figure 4.13 : Simulation de la correction de gibbosité sur la surface externe .....	114
Figure 4.14 : Vue antérieure des corrections simulées et réelles .....	116
Figure 4.15 : Vue postérieure des corrections simulées et réelles .....	117
Figure 4.16 : Vue du profil gauche des corrections simulées et réelles .....	118
Figure 4.17 : Vue du profil droit des corrections simulées et réelles .....	119
Figure 4.18 : Vues mettant en évidence la correction de la gibbosité simulée et réelle (gauche) .....	120
Figure 4.19 : Vues mettant en évidence la correction de la gibbosité simulée et réelle (droit) .....	121
Figure 4.20 : Comparaison des indices cliniques entre la surface externe du tronc simulée et acquise après opération .....	122
Figure 4.21 : Agrandissement de la boîte de contrôle d'interpolation (Scolio Dynamix) .....	124
Figure 4.22 : Ajustement des constantes de rigidité des contraintes physiques et géométriques (Scolio Dynamix) .....	124
Figure 4.23 : Sources d'erreurs de la région abdominale .....	127
Figure 5.1 : Génération de l'isocontour discrétisé en triangle d'une géométrie quelconque, tiré de (Spillmann, Wagner, & Teschner, 2006) .....	132

## **LISTE DES ANNEXES**

Annexe A : Calcul des forces.....	147
Annexe B : Cadre d'applications.....	161



## LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES NOTATIONS

### MATHÉMATIQUES

2D	: Bidimensionnel
3D	: Tridimensionnel
BSR	: Back Surface Rotation (Rotation de la surface du dos)
CAO	: Conception assistée par ordinateur
EDO	: Équation différentielle ordinaire
FFD	: Free Form Deformation
IRM	: Imagerie par résonance magnétique
LAT	: Latéral (pose radiographique)
LAVIANI	: Laboratoire de vision active non invasive
LIS3D	: Laboratoire informatique de scoliose 3D
LIV4D	: Laboratoire d'imagerie et de vision 4D
MEF	: Méthode des éléments finis
MMR	: Modélisation par masses-ressorts
PA	: Postéro-antérieur (pose radiographique)
PAX	: Principal axis orientation (Rotation du tronc)
SIA	: Scoliose idiopathique adolescente
SLERP	: Interpolation linéaire sphérique
SRS	: Scoliosis Research Society
<b>a</b>	: Désigne un vecteur $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$ définit dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$
<b>(a)<sub>x</sub></b>	: Désigne la composante $x$ du vecteur <b>a</b> soit $a_x$
<b>a · b</b>	: Désigne le produit scalaire entre les vecteurs <b>a</b> et <b>b</b>
<b>a × b</b>	: Désigne le produit vectoriel entre les vecteurs <b>a</b> et <b>b</b>
<b>M<sub>n,m</sub></b>	: Désigne une matrice <b>M</b> de dimension $n \times m$ ( $n$ lignes et $m$ colonnes)

## INTRODUCTION

La scoliose est une maladie du système musculo-squelettique caractérisée par une altération tridimensionnelle et complexe de la morphologie normale du tronc. Elle consiste en une déviation et une torsion généralisée, répartie sur l'ensemble du rachis, entraînant des déformations asymétriques au niveau des vertèbres, de la cage thoracique et du bassin (Dansereau & Stokes, 1988). Dans la majorité des cas (80-85%), elle est de nature idiopathique, c'est-à-dire d'une étiologie inconnue, et apparaît au début de la puberté chez des enfants en pleine santé et sans antécédent pathologique. La prévalence de la scoliose idiopathique adolescente (SIA) est approximativement de 3% avec un risque de progression 10 fois plus élevé chez les jeunes filles. L'ampleur des déformations subies par ces patients est très variable et environ 10% de ces derniers auront recours à un traitement orthopédique (Scherl, Phillips, & Torchia, 2008).

Dans la plupart des cas, c'est la présence d'anomalies visibles au niveau du tronc qui signale la découverte de cette maladie. Ces déformations se remarquent habituellement soit par l'entourage ou lors d'un contrôle de routine effectué par le médecin de famille. Elles se manifestent plus particulièrement par un déséquilibre au niveau des épaules, un mauvais alignement du tronc par rapport au bassin, la proéminence d'une des omoplates, l'apparition d'une gibbosité associée à la déformation de la cage thoracique, une inégalité du creux de la taille et, parfois, une asymétrie apparente des seins. Il est à noter que les déformations scoliotiques ne sont pas stables dans le temps; celles-ci progressent à différentes vitesses durant la croissance de l'adolescent. Lorsqu'elles sont légères, ces asymétries se répercutent uniquement sur l'esthétique externe du tronc, sans effet direct sur la santé. Cependant, puisque la scoliose atteint majoritairement des adolescents durant une période de leur vie où l'estime de soi est particulièrement fragile, l'impact des problèmes psychologiques secondaires attribuables à ces désagréments esthétiques est considérable (Payne et al., 1997). Les déformations plus importantes, quant à elles,

peuvent causer des douleurs chroniques au dos et même altérer les fonctions pulmonaires et cardiaques par la compression des organes dans le tronc (Weinstein, Zavala, & Ponseti, 1981).

Le diagnostic d'une scoliose se confirme par une analyse radiographique du tronc permettant au clinicien d'apprécier quantitativement les courbures rachidiennes et ainsi, de proposer un traitement adéquat au patient. Pour des courbures faibles ou moyennes, il prescrit généralement un traitement par corset. Cette orthèse ralentit ou, au mieux, arrête la progression des déformations osseuses par l'application d'une combinaison de forces sur la surface externe du tronc. D'un autre côté, pour des courbures plus importantes et progressives, il conseille un traitement par chirurgie orthopédique. Succinctement, cette chirurgie tente de corriger les déformations de façon permanente en instrumentant directement la colonne à l'aide d'une ou plusieurs tiges métalliques vissées et fixées aux vertèbres. Ce dernier traitement peut aussi être envisagé lorsque les déformations sont difficilement tolérées par le patient au point de vue tant fonctionnel qu'esthétique (Bridwell, 1999).

La prédiction des résultats obtenus suite à une éventuelle chirurgie s'avère un élément fondamental à toute planification opératoire. Actuellement, le standard clinique pour prédire la correction de la scoliose consiste à analyser la flexibilité du rachis du patient en inflexion latérale maximale, selon la capacité de ce dernier, en position décubitus dorsal sur une table radiographique (Davis, Gadgil, Trivedi, & Ahmed, 2004; Kelpps, Lenke, Bridwell, Bassett, & Whorton, 2001). En présence d'une seule courbe, le test d'inflexion est réalisé du côté de la convexité de la courbe, alors qu'il est réalisé des deux côtés en présence de plusieurs courbes. La correction de chaque courbure est mesurée à partir de ces acquisitions donnant ainsi une estimation sur la correction finale possible selon une stratégie opératoire justifiée au cas par cas et d'après l'expérience du chirurgien. Cependant, on note des distorsions dans la reproductibilité des données, car le test d'inflexion latérale dépend fortement de la volonté du patient (efforts et

coopération active surtout en présence de douleurs associées à la pathologie) et de l'expérience du technicien (Chen, G. et al., 2007). Dans certains cas, le test ne représente pas le plein potentiel du patient ce qui peut, dès le départ, fausser les prédictions de correction. Ainsi, plusieurs autres techniques d'évaluation (inflexion latérale avec point d'appui, décubitus dorsal sans inflexion, traction ou poussée latérale en décubitus dorsal) de la réductibilité des courbes scoliotiques sont aussi utilisées par les chirurgiens pour combler les faiblesses du standard. Plus récemment, des tests de flexibilité en suspension (Lamarre et al., 2009) et hyperextension en position décubitus dorsal (Lamarre, Parent, Labelle, Aubin, & Petit, Soumis 2008) ont été proposés. D'autre part, des études démontrent également une grande variabilité au niveau de la solution adoptée pour un même cas orthopédique parmi différents praticiens (Aubin, Labelle, & Ciolofan, 2007). On constate même que certaines planifications opératoires ont mené jusqu'à la rupture de tiges métalliques, à la perte de correction ou à l'extraction d'implants (Lenke, Betz, & Harms, 2004). Différents protocoles et outils ont donc été développés afin de minimiser ces risques. Mais, comme dans bien des domaines aussi vastes, il y a toujours place à l'amélioration des processus et autres procédures opérationnelles.

D'autre part, dans les différents secteurs de la médecine, les chirurgiens acquièrent généralement les compétences nécessaires pour effectuer des opérations sur des patients par de nombreuses années d'études et de pratique en utilisant soit des animaux, des cadavres ou encore, des simulateurs mécaniques. Il existe toutefois de nombreux inconvénients à ces techniques d'apprentissage. L'anatomie humaine, différant de celle des animaux, soulève des problèmes éthiques dans plusieurs pays européens et nord-américains. Le comportement physiologique d'organismes vivants diverge des sujets cadavériques et leur accessibilité en est limitée. D'autant plus que l'utilisation d'animaux ou de cadavres pour l'entraînement médical demeure une pratique coûteuse. Et la santé du patient risque d'être compromise lorsque le soignant est en formation

parce que les simulateurs mécaniques n'autorisent que l'acquisition des manœuvres chirurgicales de base (Ayache & Delingette, 2004).

Suite à ces désavantages et depuis le début des années 90, un intérêt marqué s'est développé pour la simulation numérique de procédures médicales. En voici les principaux avantages (Liu, Tendick, Cleary, & Kaufmann, 2003) :

- La répétabilité :  
Le processus de simulation peut être répété autant de fois que désiré. Contrairement à l'utilisation d'animaux ou de cadavres, les coûts restent minimes.
- La diversité :  
Les paramètres de simulation peuvent être ajustés pour simuler les différentes caractéristiques d'un patient, rendant possible la simulation de pathologies rares.
- La planification préopératoire :  
La simulation permet de préparer et d'étudier le résultat d'une stratégie opératoire sur les données réelles du patient.

La demande croissante des praticiens pour des outils cliniques, pouvant simuler des procédures médicales sur des modèles numériques, a permis de nombreux développements de simulateurs dans divers domaines de la médecine. Ces simulateurs exploitent plusieurs modélisations physiques afin de simuler de manière réaliste les déformations des différentes structures anatomiques. En orthopédie plus particulièrement, il existe actuellement un simulateur biomécanique permettant le prototypage virtuel de stratégies d'instrumentation du rachis pour des patients atteints de la scoliose (Aubin et al., 1995). Même si ce simulateur permet d'identifier la configuration optimale des implants qui corrigera le mieux les déformations des structures osseuses, il ne répercute pas l'effet du traitement sur l'apparence externe. On

réalise également que l'analyse radiographique de la flexibilité du rachis n'entre pas en ligne de compte sur ce résultat externe. En réalité, une correction optimale de la colonne n'entraîne pas une correction identique sur l'externe et une asymétrie visible du tronc peut hélas persister. La rectification de l'ensemble des structures anatomiques, incluant les tissus mous, a bien un impact sur le résultat obtenu à l'externe. Des études (Delorme et al., 2001; Willers, Transfeldt, & Hedlund, 1996) démontrent que, suite à un traitement chirurgical, la réduction de la gibbosité est moindre comparativement à celle des courbures internes. D'autres études font aussi ressortir que, bien qu'ayant subi des stratégies d'instrumentation équivalentes, le résultat postopératoire obtenu à l'externe diverge même pour des patients avec des courbures rachidiennes identiques avant chirurgie. (Pazos, V., Cheriet, Dansereau, & Labelle, 2005).

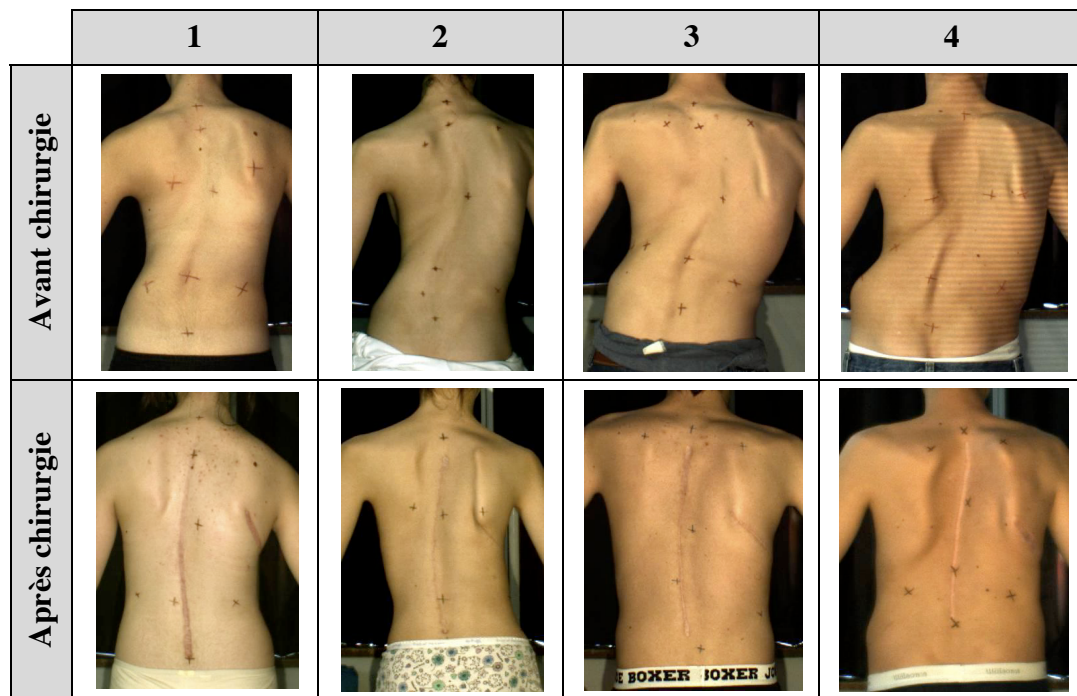


Figure 0.1 : Résultats divergents suite à une stratégie chirurgicale équivalente, tiré de (Pazos, V., Cheriet, Dansereau, & Labelle, 2005)

Pour les patients, la principale raison de subir une opération vient d'abord de leur mécontentement par rapport à leur apparence externe, plus particulièrement à cause de la

gibbosité (Hawes, 2006). En effet, si on se réfère à une méta analyse de la littérature, l'apparence esthétique du tronc s'avère le facteur primordial de garantie de leur satisfaction (Haheer et al., 1995). Les adolescents scoliotiques se disent très préoccupés par les anomalies perceptibles de leur silhouette du fait que leur corps se développe différemment de celui des adolescents sains, cela parfois plus que par leur santé à long terme. Dès lors, afin d'accroître la satisfaction des patients, il s'avère parfois nécessaire de procéder à une thoracoplastie complémentaire, consistant à la résection partielle ou totale de plusieurs côtes étant à l'origine de la gibbosité. Les procédures de thoracoplastie sont lourdes de conséquence et les stratégies opératoires récentes de la colonne semblent aussi entraîner un meilleur résultat dans la correction des gibbosités. Cependant, pour être pleinement satisfaisant, le traitement doit donc corriger à la fois les déformations des structures osseuses et l'apparence esthétique. Mais le pronostic de correction prévue sur l'apparence externe se communique difficilement au patient faute d'outils de visualisation et de consensus entre praticiens sur les résultats postopératoires. Actuellement le patient ne possède aucune idée du niveau de correction esthétique qu'une chirurgie quelconque peut lui offrir et il est parfois déçu de l'imperfection de son apparence externe après l'intervention.

Face à ce dilemme de communication entre chirurgiens et patients sur le résultat envisagé, notre équipe se penche ici sur la prédiction de la correction tant au niveau des structures osseuses que de l'apparence externe. Ceci, dans le but ultime de permettre au clinicien de décider de la meilleure stratégie chirurgicale à suivre, en considérant davantage l'asymétrie globale du tronc, tout en lui offrant la possibilité de visualiser le résultat potentiel. Le patient pourrait aussi participer au processus décisionnel du fait de voir à l'avance la correction qu'on espère effectuer. De telles techniques de simulation visuelle s'utilisent couramment en chirurgie plastique pour simuler l'effet probable d'une intervention maxillo-faciale (Keeve, Girod, Kikinis, & Girod, 1998; Koch et al., 1996; Mollemans, Schutyser, Van Cleynenbreugel, & Suetens, 2004; Vincent, Buchart, Borro, & Celig, 2009). L'objectif à long terme vise à produire un outil de simulation

validé pour une utilisation clinique de routine permettant de simuler le traitement des déformations scoliotiques sur l'ensemble du tronc, incluant les tissus mous et les structures osseuses sous-jacentes.

L'objectif principal de ce projet de maîtrise consiste à définir une modélisation simplifiée des tissus déformables entre l'épiderme et les structures internes du tronc, afin de simuler les résultats envisagés d'une chirurgie de la scoliose sur l'apparence externe du patient. Nous proposons donc un système permettant de propager la correction appliquée sur les structures osseuses vers les différentes couches anatomiques simplifiées pour visualiser et évaluer en 3D la correction potentielle sur la topologie externe. Étant donné qu'il s'agit de la première étape dans la construction d'un modèle physique des structures anatomiques du tronc, nous nous sommes davantage concentré sur le développement d'une méthodologie qui serait la plus adéquate pour les besoins du projet, en l'occurrence l'utilisation interactive du simulateur dans un environnement clinique. Par conséquent, nous avons favorisé l'interactivité au détriment de la précision dans le choix du modèle physique adopté. Rappelons que notre but est de simuler l'apparence externe du patient après traitement, ce qui implique de toute façon une évaluation subjective et justifie le fait que la contrainte de précision ne soit pas une priorité. D'autre part, nous nous sommes uniquement attardé aux tissus mous car la modélisation biomécanique des structures osseuses fait l'objet d'un autre simulateur qui est encore en développement par l'équipe du professeur Carl-Éric Aubin, du département de génie mécanique de l'École polytechnique de Montréal. C'est pour cette raison que nous utilisons une configuration postopératoire déjà connue des structures osseuses pour prédire les résultats des corrections à l'externe à partir des corrections obtenues de ces mêmes structures osseuses. D'autre part, la personnalisation du modèle, présentement en cours de développement par un collègue, dépasse le cadre de ce mémoire. En effet, le but de notre projet est de construire un modèle physique réaliste du tronc à partir des géométries personnalisées du patient. Ce réalisme est assuré par un choix judicieux des constantes de rigidité des différentes couches de tissus simulées.



Nous ne voulons pas, à ce stade-ci, personnaliser ces constantes selon les données réelles du patient, bien que cette restriction ait certainement un impact sur la précision des résultats de la simulation.

Ce document débute donc par une revue des connaissances sur la modélisation des tissus mous appliquée au domaine de la simulation chirurgicale interactive. Les objectifs propres à ce projet de maîtrise sont énoncés en second lieu. Le troisième chapitre décrit la méthodologie employée afin d'effectuer la simulation de l'effet d'une chirurgie de la scoliose sur l'apparence externe. Finalement, le quatrième chapitre présente les résultats et une discussion générale, avant de conclure en énonçant des recommandations pour la poursuite de certaines avenues de recherche.

## CHAPITRE 1 – REVUE DES CONNAISSANCES

Le développement d'un simulateur de chirurgie requiert une expertise multidisciplinaire. Mises à part diverses composantes techniques telles que l'acquisition, la reconstruction 3D, le recalage et le rendu réaliste des structures anatomiques, la simulation du comportement des tissus mous en fonction des différentes forces appliquées a fait l'objet de nombreuses études. Pour des applications interactives, une contrainte s'impose lors des calculs de déformation en temps réel. Ainsi les spécifications en matière de modélisation de tissus mous se présentent comme suit :

- **Réalisme :**

Le comportement des tissus animés doit être similaire à la réalité. En d'autres mots, les déformations induites sur le modèle par différentes forces doivent être visuellement et physiquement plausibles.

- **Temps réel :**

La simulation doit être calculée en temps réel et affichée en un nombre acceptable d'images par seconde.

L'objectif est donc de modéliser les tissus mous en temps réel de façon réaliste. Cependant, les spécifications requises s'antagonisent généralement. En effet, si on favorise un comportement physique purement réaliste, la contrainte du temps réel ne sera pas rencontrée. Tandis que si la simulation en temps réel est au rendez-vous, une approximation au niveau de la physique devra être acceptée. Subséquemment, dans le domaine de la simulation chirurgicale, l'objectif consiste à rendre la simulation la plus réaliste possible, tout en tenant compte de la puissance de calcul disponible.

La modélisation de tissus mous n'est qu'une sous-catégorie de la modélisation de corps déformables, qui a aussi fait l'objet de nombreuses recherches dans le domaine de l'infographie et ce, depuis plus de deux décennies. Suite aux présentations d'animations de Lasseter chez Pixar (Lasseter, 1987) et, concurremment, aux recherches de modèles élastiques déformables de Terzopoulos (Terzopoulos, Platt, Barr, & Fleischer, 1987), plusieurs chercheurs tentent de modéliser les corps déformables de façon réaliste. Une vue d'ensemble plus détaillée de ces différentes techniques est présentée dans (Gibson, Sarah F. F. & Mirtich, 1997; Nealen, Müller, Keiser, Boxerman, & Carlson, 2006).

Dans le domaine médical, fortement inspiré du domaine de l'infographie, les premières simulations modélisent de façon approximative les déformations en se basant sur des modèles non-physiques. Par la suite, différents algorithmes basés sur des lois physiques sont mis au point pour modéliser les différents comportements d'élasticité. Nous présentons l'état de l'art quant à la modélisation des tissus mous appliquée dans le domaine de la simulation chirurgicale.

### **1.1 Modélisation non-physique des déformations**

Jusqu'à la fin des années 80, les modèles non-physiques restent les seuls à être utilisés en animation et en simulation. Essentiellement, les autres solutions s'avèrent inaccessibles à cause de la puissance de calcul limitée des processeurs de l'époque. En simulation de chirurgie, certains travaux ont été réalisés sur la base de modèles purement mathématiques. Les exemples suivants témoignent qu'il est possible de modéliser des comportements de matériaux complexes à partir de méthodes géométriques ou mathématiques.

### 1.1.1 Modèles paramétriques

Les premières contributions au niveau de la modélisation des déformations d'objets solides apparaissent dans le domaine de la conception assistée par ordinateur (CAO). En effet, dû aux besoins variés des concepteurs pour définir, manipuler et raffiner intuitivement des courbes, surfaces et volumes numériques, de nombreuses contributions voient le jour. Pensons ici aux courbes de Bézières et aux différentes familles de splines incluant les courbes d'interpolations, les B-splines rationnelles et non uniformes (NURBS). Ces dernières représentations permettent de transformer la forme générale d'un objet en modifiant aisément les positions des points du polygone de contrôle. Une référence plus complète de ces techniques est donnée par (Bartels, Beatty, & Barsky, 1987).

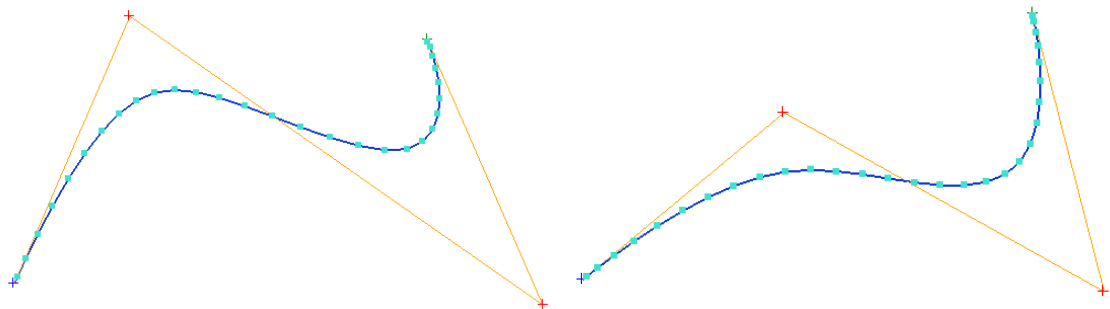


Figure 1.1 : La forme d'une B-spline cubique étant décrite par la position de ses points de contrôle

Les splines, aussi appelées contours actifs, sont les premiers modèles de déformation appliqués en simulation de chirurgie (Cover et al., 1993). Cover et son équipe modélisent les déformations surfaciques de la vésicule biliaire en employant des splines lors de la mise en œuvre de leur simulateur de chirurgie laparoscopique. En utilisant certains théorèmes fondamentaux propres à la géométrie différentielle en ce qui concerne l'équivalence des formes, ils définissent une relation mathématique entre l'énergie potentielle élastique et les déformations appliquées aux splines. Ils minimisent

ainsi l'énergie du système pour obtenir l'état déformé à l'équilibre, en déplaçant certains points de contrôle par l'approche Lagrangienne qui définit la dynamique du mouvement.

Le nombre élevé de paramètres de ce modèle de déformation permet un niveau de contrôle considérable sur la forme générale de l'objet. Cependant, ils sont choisis de façon arbitraire et, n'étant pas rattachés à des propriétés physiques, ils sont difficiles à déterminer de façon empirique. Par ailleurs, à chaque itération de rendu, une étape supplémentaire de calcul doit être effectuée pour générer la surface discrétisée en triangles. Étant une modélisation gourmande en calcul, les objets sont généralement représentés simplement par leurs surfaces frontalières au détriment du réalisme propre à la conservation du volume.

Une autre façon plus performante de modifier globalement la forme d'un objet est de déformer l'espace dans lequel il réside (Barr, 1984). Cette approche est généralisée par l'introduction des FFD (*Free Form Deformation*) (Sederberg & Parry, 1986). L'idée principale consiste à plonger l'objet dans un maillage volumique déformable où chaque cellule entraîne les points de l'objet qu'elle contient au moyen d'interpolations utilisant les polynômes de Bernstein.

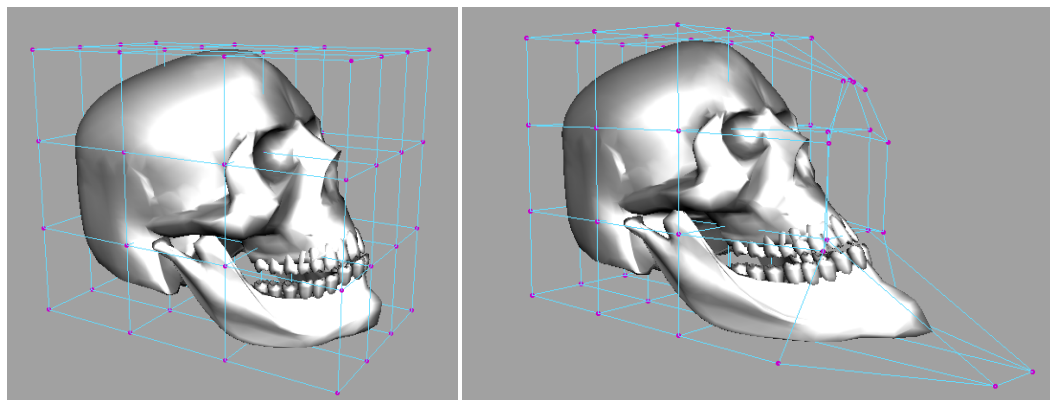


Figure 1.2 : Déformation d'un crâne par FFD

Ces méthodes de déformations paramétriques sont essentiellement introduites parce qu'elles sont reprises dans certains modèles physiques.

### 1.1.2 Modèle « ChainMail »

Un autre modèle géométrique est la modélisation par « ChainMail » proposée par Gibson (Gibson, S. F. F., 1997). Le concept principal derrière ce modèle de déformation ressemble à celui des maillons d'une chaîne :

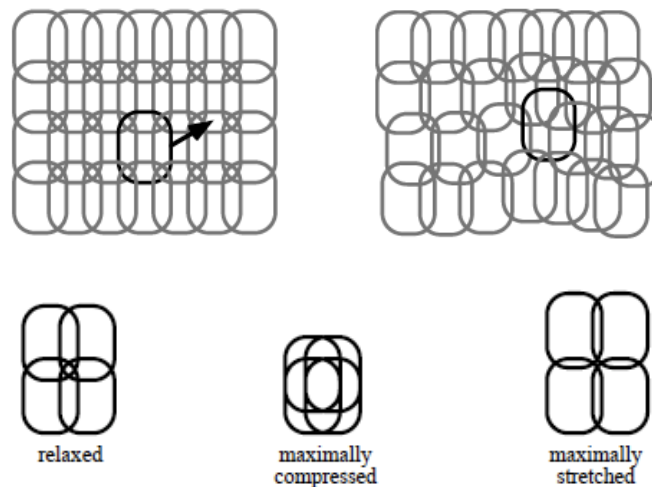


Figure 1.3 : Le modèle « ChainMail » en 2D, tiré de (Gibson, S. F. F., 1997)

Chaque maillon rigide est en mesure de se déplacer par rapport à ses voisins en satisfaisant des contraintes géométriques de distances minimales et maximales. Lorsque la position d'un maillon se voit modifiée, les contraintes se vérifient par rapport aux voisins immédiats. Si l'étirement ou la contraction du lien voisin est supérieur à sa limite, le maillon interrogé est déplacé à la position la plus proche satisfaisant les contraintes. La même logique se trouve conséquemment appliquée aux voisins du maillon interrogé afin de propager l'information de déformation au système. De ce fait, lorsqu'un maillon est largement déplacé le système se déforme globalement et, inversement, si le déplacement reste minimal, les déformations demeurent locales.

Gibson démontre qu'il est possible de simuler des objets à rigidité différente en variant les bornes de distance entre les maillons voisins.

Par ailleurs, afin d'obtenir le comportement d'un objet élastique, une étape de relaxation élastique s'applique entre les itérations de l'algorithme. Lors de cette étape, les maillons se déplacent vers une configuration d'énergie minimale évaluée en fonction de la distance entre les maillons voisins.

L'avantage principal de cette modélisation est sa simplicité au niveau du calcul, ce qui permet la manipulation d'objets de très grande taille en temps réel. Cependant, puisque les paramètres du modèle ne se rattachent pas à des caractéristiques physiques, les déformations ne s'avèrent pas toujours réalistes.

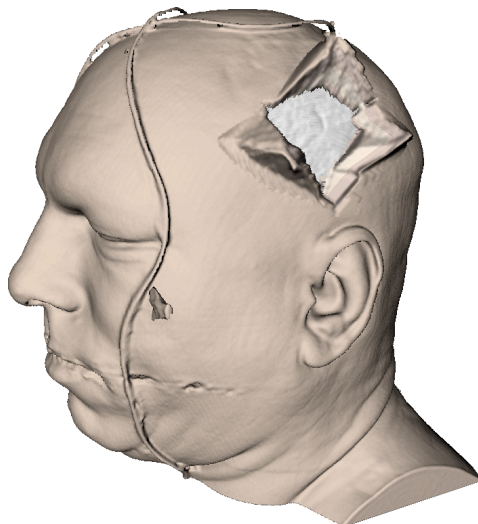


Figure 1.4 : Simulation d'une dissection modélisée par « ChainMail », tiré de (Mensmann, Ropinski, & Hinrichs, 2008)

Cette approche s'emploie dans deux différents simulateurs de chirurgie. Gibson et coll. conçoivent un simulateur pour des chirurgies arthroscopiques du genou où la modélisation des déformations du cartilage s'obtient par des maillons cubiques (Gibson, S. F. F. et al., 1997). Puis, un an plus tard, Schill et son équipe reprennent ce modèle de

déformation et introduisent un simulateur permettant l'entraînement de l'ablation chirurgicale de l'humeur vitrée de l'œil (Schill, Gibson, Bender, & Männer, 1998).

Somme toute, l'inconvénient principal posé par les modèles non basés sur des lois physiques est qu'ils ne permettent aucune généralisation. Il est toujours possible de trouver un modèle mathématique décrivant une situation donnée avec précision, mais il doit être adapté de façon empirique pour ce cas précis et, en conséquence, réévalué ou même reconstruit lors d'une nouvelle situation.

## **1.2 Modélisation physique des déformations**

Terzopoulos est le premier à établir le lien entre le monde de la mécanique et celui de l'infographie, en recourant aux théories de l'ingénierie mécanique pour les appliquer à la simulation d'objets déformables (Terzopoulos, Platt, Barr, & Fleischer, 1987). Son modèle répond à l'action de forces, de contraintes ou de contacts, comme les objets du monde réel, par contraste à des modèles dits cinématiques, construits à partir de primitives géométriques se déplaçant le long de trajectoires pour décrire les déformations de l'objet. Ses travaux ouvrent la voie à toute une série de recherches visant à trouver des algorithmes et des techniques de calcul appropriés à la simulation de déformations en temps réel.

Dans les prochaines sections, nous présentons la méthode des éléments finis ainsi que la modélisation par masses-ressorts, soit deux modélisations populaires dans la littérature basées sur les lois physiques.



### 1.2.1 Méthode des éléments finis

Le comportement des déformations élastiques d'un objet engendré par différentes forces est un sujet de la mécanique des milieux continus, une branche du domaine de la mécanique qui tente de décrire sous forme mathématique les phénomènes physiques des milieux continus.

La méthode des éléments finis (MEF) est une méthode numérique permettant de solutionner approximativement une équation aux dérivées partielles, tout comme celles rencontrées en mécanique des milieux continus. On l'utilise avec beaucoup de succès en ingénierie et en mathématique depuis plusieurs décennies, notamment dans l'étude du comportement en déformation de structures métalliques. Le principe consiste en la décomposition d'un domaine continu (soit l'objet de simulation) en éléments surfaciques (triangles ou quadrilatères) ou volumiques (cubes ou tétraèdres) simples. Ces éléments se caractérisent par un faible nombre de points appelés nœuds et une formule d'interpolation permettant d'obtenir une propriété physique en un point quelconque de l'élément à partir des valeurs aux nœuds. Le nombre de nœuds est fonction de la continuité désirée pour la solution calculée. En particulier, les déformations de l'objet s'obtiennent grâce au calcul de l'évolution de ces nœuds. Le choix des éléments, leur taille, le nombre de nœuds ainsi que la formule d'interpolation caractérisent les déformations obtenues lors d'une simulation. Cette technique s'utilise tant pour obtenir l'état statique final à l'équilibre que pour l'évolution dynamique de l'objet dans le temps. La présentation faite ici est très succincte; on peut toutefois se reporter à des ouvrages spécialisés, tel que (Lynch, 2005), pour de plus amples détails.

La MEF est généralement la première méthode à considérer lorsqu'on veut obtenir des déformations précises lors de la simulation des tissus mous puisqu'elle respecte très bien le caractère continu du corps étudié. Toutefois, étant complexe à implanter, les calculs impliqués sont en général très lourds et elle est donc difficilement utilisable dans un

contexte d'applications temps réel. Une variété d'approches se développe ainsi au cours des années pour enrayer ce problème de performance, au détriment de la précision de la solution. Afin de simplifier les équations du système, les hypothèses suivantes concernant la matière à simuler se posent généralement dans la littérature : elle doit être homogène, isotrope et suivre une relation linéaire entre la contrainte et la déformation (linéarité géométrique). Cette dernière hypothèse implique que la MEF n'est précise qu'en cas de déformations relativement petites et qu'un changement géométrique de l'objet n'affecte pas la distribution des forces appliquées (Wehner, Alterovitz, & Goldberg, 2006).

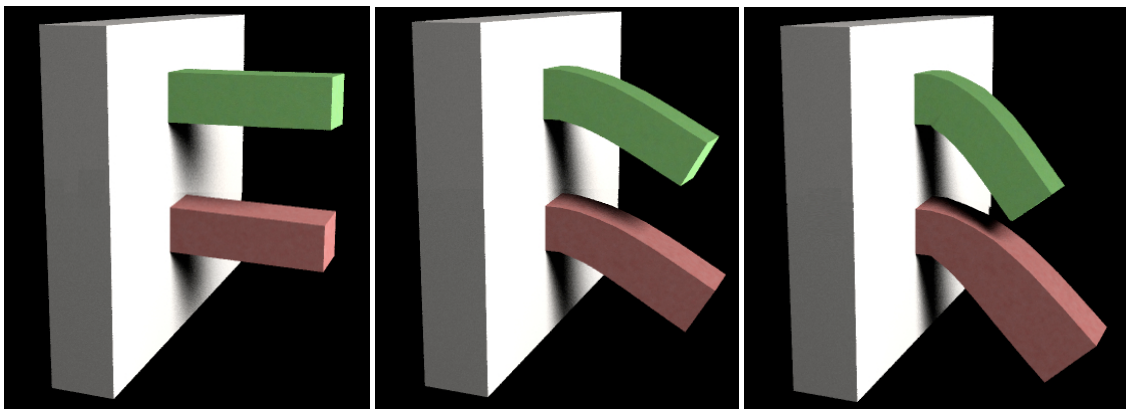


Figure 1.5 : Séquence de déformation de deux poutres élastiques encastées soumises à la gravité. La poutre du haut est modélisée selon un comportement d'élasticité non linéaire tandis que celle du bas suit l'hypothèse des petites déformations linéaires. Notons la dilatation du volume de la poutre du bas lorsqu'elle est largement déformée. Tiré de (Müller, Dorsey, McMillan, Jagnow, & Cutler, 2002)

(Gourret, Thalmann, & Thalmann, 1989) sont les premiers à proposer la MEF dans un contexte d'animation pour simuler les déformations de la peau d'une main saisissant et s'appuyant sur une balle. La matière de la peau est considérée comme élastique et isotrope. La modélisation des doigts est simpliste mais permet tout de même des déformations complexes. Par contre, la simulation est loin d'être en temps réel. L'évolution dynamique dans le temps est éventuellement écartée afin d'augmenter la rapidité des calculs.

(Chen, D. T.-W. & Zeltzer, 1992) modélisent les muscles du corps humain en utilisant un modèle biomécanique classique. Les muscles, estimés matière élastique et isotrope, sont décrits par deux éléments volumiques complexes comprenant 20 nœuds d'interpolation. Les forces externes en action sur les muscles proviennent des tendons connectés à la structure osseuse. Le résultat visuel de cette simulation s'avère réaliste quoique celle-ci s'effectue à peine en temps réel même pour 10 nœuds d'interpolation.

Ce n'est qu'en 1996 que l'interactivité avec un objet à des taux de rafraîchissement acceptables s'obtient en utilisant la MEF. (Bro-Nielsen, Morten & Cotin, 1996) simulent une matière élastique et isotrope suivant l'hypothèse des petites déformations linéaires. En restreignant le domaine de simulation aux nœuds de la surface frontalière de l'objet, ils sont en mesure de réduire la matrice du système. Cette simplification, appelée condensation dans leur article, diminue la précision de la simulation en ne considérant pas les nœuds internes du modèle, ceci afin d'augmenter les performances. Puisque l'inverse de la matrice de rigidité doit être précalculé, aucun changement topologique de la surface (coupures, déchirures ou perforations) ne s'envisage durant la simulation. Cette méthode s'utilise pour simuler les déformations d'un foie humain soumis à des forces externes engendrées par des outils virtuels (Cotin, Delingette, & Ayache, 1999).

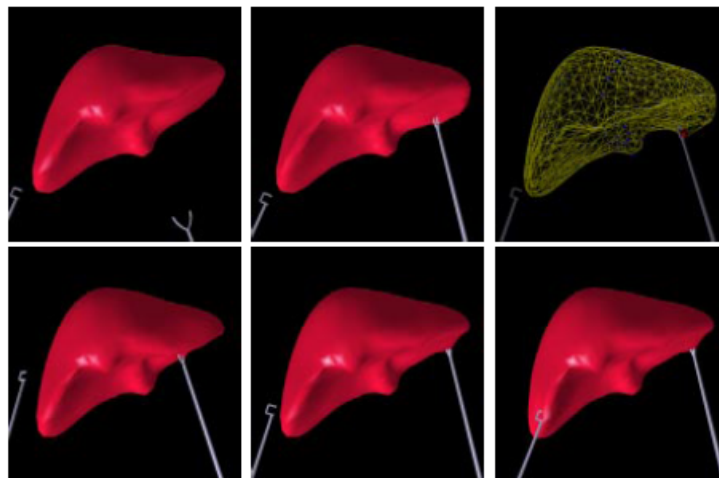


Figure 1.6 : Séquence de déformation du foie, tiré de (Cotin, Delingette, & Ayache, 1999)

Pour conclure, la MEF s'adapte bien à la modélisation réaliste des tissus mous. Cependant, sa performance en calcul empêche son utilisation à sa juste valeur en temps réel dans les simulateurs de chirurgie. Comme nous l'avons vu, plusieurs optimisations sont réalisables en diminuant hélas la précision des déformations.

### **1.2.2 Modèle masses-ressorts**

Nous présentons maintenant un autre modèle basé sur des lois physiques, soit la modélisation par masses-ressorts (MMR) souvent choisie lorsque l'exécution en temps réel est importante.

La MMR consiste en une subdivision d'un objet en un maillage surfacique ou volumique où chaque nœud représente une masse. Les interactions entre les nœuds se modélisent par des liens élastiques comme des nœuds reliés par des ressorts. Ces dernières lois d'interaction définissent le comportement de l'objet suite à l'application de la mécanique du point pour chaque particule massique. La différence majeure entre ce modèle-ci et le précédent est que celui-ci ne se base pas sur des principes continus de matière. Par conséquent, cette modélisation s'avère moins précise au niveau des déformations. Cependant, plusieurs opérations exigeant un changement topologique s'appliquent aisément suite à l'élimination de nœuds ou de liens. La MMR connaît de nombreux succès dans la littérature par sa simplicité de mise en œuvre, son caractère intuitif et son efficacité en calcul.

L'utilisation d'un système particulière, tel que la MMR, pour décrire le comportement d'objets déformables reste un sujet très à la mode en synthèse d'animation. Plus particulièrement, ce type de modèle s'utilise énormément en simulation de vêtements et de divers tissus tissés (Baraff & Witkin, 1998; Bridson, Fedkiw, & Anderson, 2002; Provot, 1995) de même que des cheveux (raides, bouclés, etc.) (Selle, Lentine, & Fedkiw, 2008).

Des tissus mous complexes, tels que des muscles, sont également simulés en utilisant la MMR munie de ressorts non linéaires et de contraintes de préservation de volume pour déformer un maillage d'une FFD (Miller, 1988). Miller reproduit la locomotion de serpents, vers et chenilles en modifiant simplement la longueur au repos des différents ressorts du maillage suivant des ondes sinusoïdales en fonction du temps, afin de simuler la contraction des différents muscles. Par ailleurs, Nedel et coll. modélisent les muscles d'un humain virtuel en utilisant un réseau surfacique de ressorts ainsi que des ressorts angulaires pour contrôler les courbures et torsions de la surface (Nedel & Thalmann, 1998).

La MMR s'emploie aussi largement en animation et en chirurgie faciale. En 1995, Lee et coll. proposent un système complet d'animation faciale en utilisant cette méthode (Lee, Terzopoulos, & Walters, 1995). La structure osseuse du crâne se recouvre de cinq couches distinctes de tissus mous représentant l'épiderme, le derme, le tissu conjonctif sous-cutané, le fascia et les muscles. L'incompressibilité de la peau se renforce par des contraintes additionnelles de préservation de volume de prisme entre les différentes surfaces triangulées.

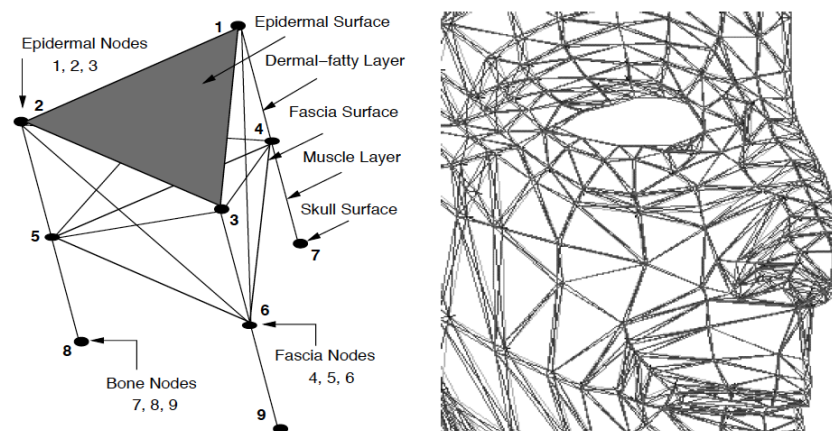


Figure 1.7 : La peau représentée par cinq différentes couches de ressorts (gauche) et une vue rapprochée du maillage facial (droite), tiré de (Lee, Terzopoulos, & Walters, 1995)

Koch et coll. reprennent éventuellement ce modèle pour une simulation de chirurgie esthétique du visage (Koch et al., 1996). La raideur des ressorts des couches inférieures se calcule en fonction des types de tissus rencontrés tel qu'identifiés par l'imagerie par résonance magnétique (IRM). Ceci personnalise le modèle à chaque patient. La surface frontalière du visage se modélise cependant par des éléments triangulaires de continuité  $C^1$  en utilisant la MEF qui assure une surface lisse lors de la simulation. En s'inspirant de ces méthodes, Keeve et coll. développent un outil clinique de planification préopératoire pour la chirurgie maxillo-faciale permettant la simulation de plusieurs stratégies opératoires en temps réel grâce à la MMR (Keeve, Girod, & Girod, 1996; Keeve, Girod, Kikinis, & Girod, 1998). Suite à la sélection d'une stratégie optimale, les chirurgiens choisissent ensuite de valider cette dernière avec plus de précision en employant la MEF. Une comparaison visuelle des corrections simulées par la MMR et la MEF, à la figure 1.6, illustre le peu de différence entre les deux techniques de modélisation lorsque les déformations restent petites. Finalement, des recherches plus récentes dans ce domaine s'effectuent afin d'obtenir un modèle MMR équivalent à la MEF en utilisant des éléments cubiques (Vincent, Buchart, Borro, & Celig, 2009).

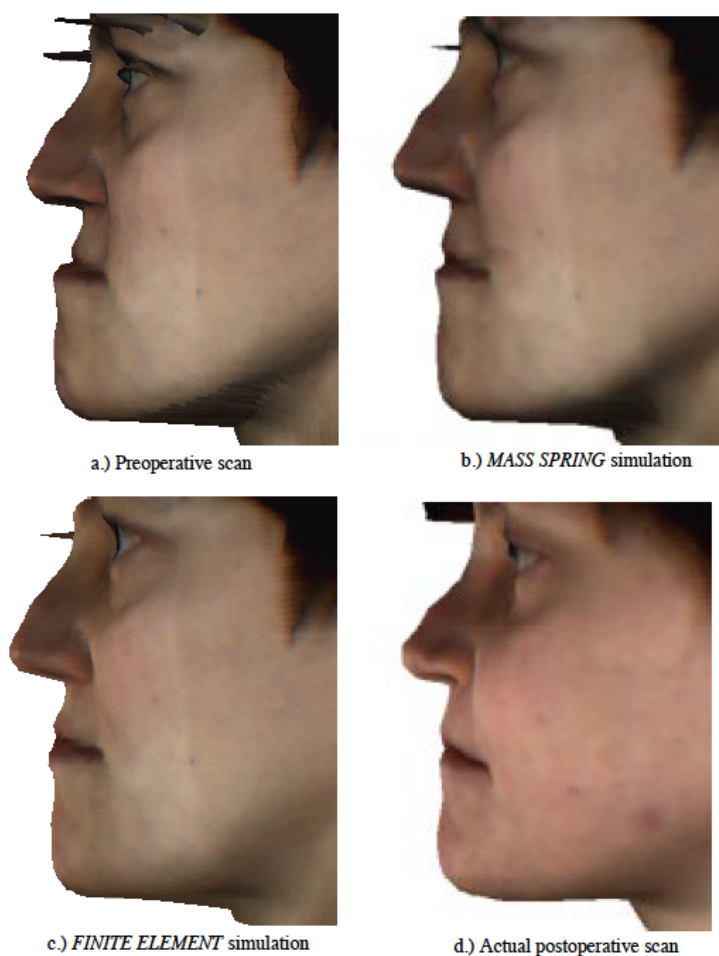


Figure 1.8 : Résultats d'une simulation de chirurgie maxillo-faciale utilisant la MMR et la MEF, tiré de (Keeve, Girod, & Girod, 1996)

Une autre application particulièrement avancée pour les tissus mous empruntant la MMR est le simulateur de chirurgie hystéroscopique de l'ETH Zurich<sup>1</sup>, adapté notamment à l'entraînement de l'ablation chirurgicale de l'endomètre, des myomes et des polypes utérins. Ce simulateur produit une vue oblique très près, en réalité, du rendu de la caméra endoscopique. Par contre, il offre non seulement un ensemble d'outils identiques à ceux dont le chirurgien dispose au cours d'une opération réelle, mais également une panoplie de complications virtuelles. Les organes modélisés par des

---

<sup>1</sup> <http://www.hystsim.ethz.ch/>

maillages volumiques de MMR se comportent comme des matériaux élastiques linéaires (Teschner, Heidelberger, Muller, & Gross, 2004). Les constantes élastiques des ressorts pour les différents matériaux se calibrent en employant un algorithme génétique minimisant la différence des déformations obtenues avec un modèle de référence modélisé par MEF (Bianchi, Solenthaler, Székely, & Harders, 2004). Suite à 7 ans de recherche et développement ainsi qu'à de nombreuses validations cliniques, ce projet académique commercialisé depuis 2007 par un *spin-off* de l'ETH se nomme VitraMed<sup>2</sup>.

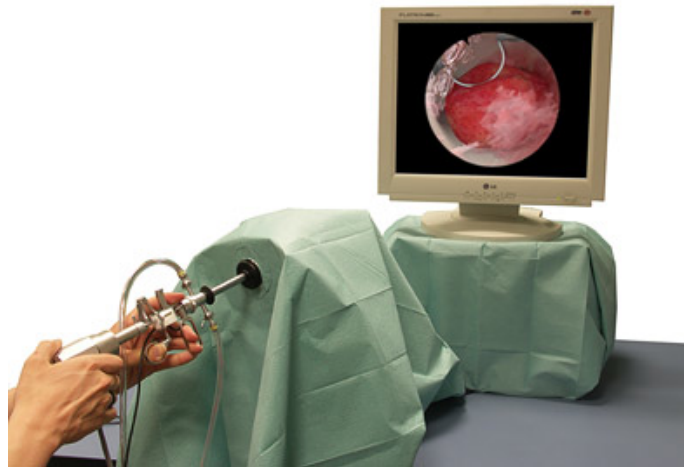


Figure 1.9 : Le simulateur HystSim de VitraMed, tiré du site <http://www.virtamed.com/cms/>

Une faiblesse notable de cette modélisation réside dans le fait que les forces se dirigent généralement le long des ressorts. Ceci implique que le comportement des déformations d'un objet dépend de sa géométrie, suivant plus particulièrement la distribution de la direction des arêtes. Différents auteurs tirent cependant profit de cette faiblesse en ajoutant d'autres types de ressort pour définir plus précisément le comportement désiré. À titre d'exemple, Chen et coll. proposent une modélisation sophistiquée de masses-ressorts incluant des ressorts structuraux, de cisaillement et de flexion (Chen, Y., Zhu, Kaufman, & Muraki, 1998). Il est aussi possible d'utiliser une modélisation généralisée

---

<sup>2</sup> <http://www.virtamed.com/cms/>



pour définir, non seulement des forces directionnelles, mais aussi des forces surfaciques et volumiques, tel que présenté dans (Baraff & Witkin, 1998; Terzopoulos, Platt, Barr, & Fleischer, 1987; Teschner, Heidelberger, Muller, & Gross, 2004).

Ce modèle présente aussi un autre inconvénient : les paramètres mécaniques sont difficilement identifiables, comparativement à la MEF qui se réfère communément à des mesures rhéologiques expérimentales acquises *in vivo* ou *in vitro*. En infographie, plusieurs articles choisissent arbitrairement une valeur uniforme pour les constantes élastiques, en fonction du résultat visuel. Toutefois, lorsqu'on désire la précision dans un contexte clinique, d'autres ouvrages (Bianchi, Solenthaler, Székely, & Harders, 2004; Morris & Salisbury, 2008) suggèrent d'effectuer une calibration automatique des constantes en s'appuyant sur les déformations d'un modèle de référence.

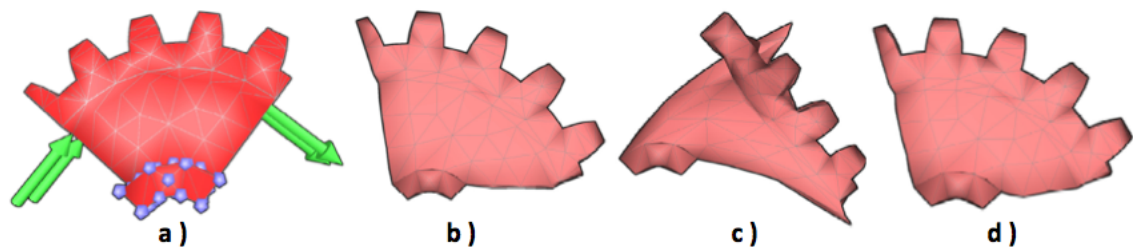


Figure 1.10 : Résultats suite à une calibration des constantes élastiques, tiré de (Morris & Salisbury, 2008). a) Modèle à l'état initial où les flèches représentent les forces externes appliquées sur l'objet et les nœuds, représentés par des sphères, sont fixes. b) Déformation de référence obtenue par la MEF. c) Déformation obtenue par la MMR avec des constantes choisies arbitrairement. d) Déformation obtenue par la MMR suite à une calibration des constantes

### 1.2.3 Choix du modèle pour la simulation des tissus mous du tronc

Ces dernières sections recensent plusieurs modèles de déformation utilisés dans la littérature pour la simulation des tissus mous en temps réel. Le tableau 1.1 compare ces différentes modélisations en terme de performance en calcul, complexité de mise en

œuvre, réalisme visuel et précision physique. Au cours de cette revue, nous remarquons qu'il n'y a actuellement aucun modèle permettant de modéliser précisément le comportement des tissus mous, tel que rencontré en médecine. Bro-Nielsen résume bien ce dernier point (Bro-Nielsen, M., 1997) :

“...due to the very complex visco-elastic behavior of human tissue, none of these mathematical models can be characterized as being accurate. Consequently, it does not make sense to perform very precise physical measurements of human tissue parameters, since current mathematical models cannot use or benefit from these parameters. Instead parameters are typically determined by comparing video tapes of real surgery with the simulation results, and making adjustments to obtain visually close results.”

On comprend donc qu'il importe que la simulation ressemble visuellement à la réalité plutôt qu'elle ne la reproduise avec une très grande précision. Cette simplification, rendue nécessaire en raison de la puissance de calcul limitée, permet de respecter la contrainte temps réel. Dans les différents modèles énoncés, le réalisme visuel des modèles basés sur les lois physiques est d'autant plus intéressant et convenable pour répondre à notre objectif, que nous écarterons les modélisations non-physiques.

Étant très populaire en ingénierie mécanique, la MEF est souvent utilisée lorsque la précision physique prend plus d'importance que la performance en calcul. Cependant, dans notre cas, dû aux erreurs cumulées lors des acquisitions, reconstructions et à la mise en correspondance des différents modèles géométriques employés pour la simulation, la MEF ne peut être fidèle. Il est ainsi déraisonnable d'exiger une haute précision physique lorsque les modèles de départ contiennent eux-mêmes des erreurs et des simplifications. D'autant plus qu'on veut simuler l'apparence qui est de toute façon évaluée subjectivement. C'est pourquoi une estimation qualitative des déformations sur la surface externe du tronc s'avère acceptable.

Tableau 1.1 : Comparaison des différents modèles de déformation

Modèle	Performance	Complexité	Réalisme	Précision
<b>Splines</b>	Moyenne	Moyenne	Moyen	Faible
<b>FFD</b>	Excellente	Faible	Faible	Faible
<b>ChainMail</b>	Excellente	Faible	Moyen	Faible
<b>MEF</b>	Faible	Haute	Excellent*	Excellente*
<b>MMR</b>	Bonne	Moyenne	Bon	Bonne

Nous favorisons donc principalement le réalisme visuel et le temps d'exécution en fonction de la complexité de mise en œuvre. Tel que mentionné antérieurement, il est tout à fait possible d'augmenter la rapidité de calcul de la MEF au prix de sa précision et de son réalisme visuel. Un nombre restreint d'éléments doit toutefois être utilisé pour espérer obtenir un temps d'exécution intéressant, et l'ordre de grandeur des déformations doit être petit afin de minimiser les altérations géométriques. Face à ces restrictions et la complexité de mise en œuvre, nous croyons que la MMR est d'autant plus adéquate pour simuler la correction d'une chirurgie de la scoliose sur l'apparence externe. Nous nous inspirons ainsi principalement des travaux effectués en chirurgie faciale et de l'ETH Zurich lors de la réalisation de notre modèle de déformation interactif. Éventuellement, si la précision devient un critère d'intérêt, il sera toujours possible d'effectuer une calibration des constantes ou même, de raffiner la modélisation du tronc pour prendre en compte différents modèles, tel que l'utilisation de la MEF non-linéaire *hors-ligne*, tout comme dans les travaux de l'équipe de Keeve.

Voyons dans les sections suivantes les bases physiques de la MMR et sa formalisation généralisée.

---

\* Excellent si les déformations sont petites

### 1.2.4 Formalisation physique du modèle masses-ressorts

Un objet déformable est typiquement défini par son état non déformé (aussi appelé configuration à l'équilibre ou état initial) et un ensemble de paramètres matériels qui définissent la manière dont il se déformera sous différentes forces appliquées.

Nous pouvons définir un objet déformable continu comme étant un sous-ensemble  $M$  de l'espace Euclidien  $\mathbb{R}^3$  et  $p \in M$  comme étant un point matériel ou une particule de cet objet. Inversement, dans le domaine discret,  $M$  est plutôt symbolisé par un nombre fini de particules représentant l'état initial de l'objet. Ces points matériels sont également soumis à différentes lois d'interaction définissant le comportement du corps.

La MMR, dans sa forme la plus simple, utilise la représentation discrète du corps, soit son maillage dont chaque sommet et chaque arête représentent respectivement une masse et un ressort linéaire. La force générée par ces ressorts se détermine par la loi de Hooke stipulant que celle-ci est proportionnelle à l'allongement du ressort. Ainsi, la force  $\mathbf{f}_{ij}$  s'appliquant sur la position  $\mathbf{x}_i$  du point de matière  $i$  relié par un ressort linéaire à la position  $\mathbf{x}_j$  du point de matière  $j$  s'exprime par :

$$\mathbf{f}_{ij} = -k_r \left( \|\mathbf{x}_{ij}\| - l_{ij} \right) \frac{\mathbf{x}_{ij}}{\|\mathbf{x}_{ij}\|} \quad (1.1)$$

où  $k_r$  représente la constante de rappel du ressort,  $l_{ij}$  la longueur au repos du ressort et  $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ . Si la distance euclidienne des points matériels  $\|\mathbf{x}_{ij}\|$  est égale à la longueur au repos du ressort  $l_{ij}$  le ressort demeure à son état d'équilibre et la force exercée sur les points matériels est nulle.

La force nette  $\mathbf{f}_i$  agissant sur le point matériel  $p_i$  peut être calculée par :

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_d + \sum_j \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_e \quad (1.2)$$

où  $\mathbf{f}_d$  est la force d'amortissement agissant sur  $p_i$ ,  $\mathbf{f}_{ij}$  représentant la force interne agissant sur  $p_i$  par le ressort reliant  $p_i$  et  $p_j$  et  $\mathbf{f}_e$  la force externe (gravité, vent, etc.) agissant sur  $p_i$ .

Afin de simuler la dynamique du corps déformable, nous devons connaître la position en fonction du temps  $\mathbf{x}(t)$  de tous les points matériels de  $M$ . Étant donné  $\mathbf{x}(t)$ , nous pouvons en conséquence obtenir les configurations  $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(\Delta t), \mathbf{x}(2\Delta t), \dots$  résultant en l'animation de l'objet. Ici,  $\Delta t$  est un laps de temps fixe de simulation et  $\mathbf{x}(t)$  représente la position au temps  $t$  du point matériel. Les positions inconnues  $\mathbf{x}(t)$  sont obtenues de façon implicite comme solution d'une équation différentielle ordinaire (EDO) du second ordre, soit par la loi fondamentale du mouvement de Newton :

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t), t)}{m} \quad (1.3)$$

où  $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t), t)$  est la somme des forces s'appliquant à la masse ponctuelle  $m$  au moment  $t$ . Pour être en mesure de trouver la solution de  $\mathbf{x}(t)$ , cette dernière équation est communément reformulée comme un système EDO couplé du premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(t) \\ \dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{v}(t), \mathbf{x}(t), t)}{m} = \mathbf{a}(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $\mathbf{v}(t)$  et  $\mathbf{a}(t)$  sont respectivement la vitesse et l'accélération d'un point matériel pour un temps donné. Il est donc possible de résoudre ce système d'équations par différents schémas d'intégration numérique abordés à la section 1.3.

### 1.2.5 Formalisation physique du modèle particulaire généralisé

En réalité, le modèle masses-ressorts présenté à la section précédente est simplement une spécialisation d'un modèle particulaire généralisé par contraintes fondées sur l'énergie potentielle que nous exposons maintenant.

Un modèle particulaire généralisé, comme celui utilisé dans (Baraff & Witkin, 1998; Terzopoulos, Platt, Barr, & Fleischer, 1987; Teschner, Heidelberger, Muller, & Gross, 2004), fournit un cadre robuste pour modéliser le comportement souhaité d'objets déformables. Il permet, entre autres, de définir facilement des contraintes qui, à leur tour, détermineront la déformation de l'objet sous différentes forces.

#### 1.2.5.1 Contraintes

Les contraintes sont exprimées comme des fonctions scalaires impliquant  $n$  particules  $p_0, \dots, p_{n-1}$ . Le scalaire retourné est nul lorsque les particules  $p_0, \dots, p_{n-1}$  sont à leurs positions désirées.

$$C(p_0, \dots, p_{n-1}) = \begin{cases} = 0 & \text{si } p_0, \dots, p_{n-1} \text{ sont aux positions désirées} \\ \neq 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.5)$$

Une fonction qui essaie de maintenir deux particules à une même position consiste un exemple simple d'une telle contrainte :

$$C(p_i, p_j) = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \quad (1.6)$$

La contrainte précédente sera nulle si  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j$ . Cela est vrai seulement si les deux particules se retrouvent à la même position, soit essentiellement le comportement désiré.

Les contraintes sont généralement définies de façon à ce que le scalaire de retour soit nul lorsque le comportement désiré est obtenu. Un autre exemple d'une telle fonction est :

$$C(p_i, p_j) = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| - d_{ij} \quad (1.7)$$

où  $d_{ij}$  représente la distance entre les particules  $p_i$  et  $p_j$ . Le but de cette fonction oblige donc les particules  $p_i$  et  $p_j$  à rester à une certaine distance  $d_{ij}$  l'une de l'autre. Cette fonction s'annule seulement si la distance courante  $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$  entre les deux particules égale la distance désirée  $d_{ij}$ .

Toutefois, on note que les contraintes imposées au système ne sont point des contraintes dites *dures*. Elles servent seulement à décrire l'état désiré du modèle. Couramment en simulation, les contraintes ne sont pas nécessairement rencontrées mais le modèle cherche à minimiser ces dernières.

### 1.2.5.2 Énergie potentielle élastique

L'énergie potentielle consiste en une énergie liée à une interaction ayant le potentiel de se transformer en énergie cinétique. Un système particulaire possède une énergie potentielle nulle lorsqu'il est dans son état initial non déformé. Cependant, si le modèle est déformé à cause de différentes forces externes, il contient l'énergie absorbée de déformation.

Dans un système particulaire généralisé, les fonctions d'énergie sont couramment définies comme l'énergie potentielle élastique :

$$E(p_0, \dots, p_{n-1}) = \frac{1}{2} k C^2 \quad (1.8)$$

où  $k$  est la constante de rigidité de la contrainte  $C$ , tel que défini par l'équation 1.5. Si l'objet est à sa configuration de repos, son énergie potentielle  $E$  est nulle puisque  $C$  équivaut à zéro lorsque les particules sont à leurs positions respectives originales, soit à l'état non déformé.

### 1.2.5.3 Forces conservatrices

Les forces internes ou conservatrices existent seulement lorsque le modèle est déformé. Pour un modèle non déformé, aucune force interne n'est générée. L'objectif principal de ces forces vise à retrouver l'état original non déformé du modèle. Cet objectif s'atteint en exprimant les forces désirées comme le gradient négatif de l'énergie potentielle 1.8 :

$$\mathbf{f}_i = -\frac{\partial E}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \left( \frac{1}{2} k C^2 \right) = -kC \frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}_i} \quad (1.9)$$

Ici,  $\mathbf{x}_i$  est la position de la particule  $i$  dont la force  $\mathbf{f}_i$  est calculée.  $C$  représente la contrainte appliquée sur  $p_i$  selon l'équation 1.5.

La force résultante  $\mathbf{f}_i$  est orientée dans la direction opposée du gradient de la fonction d'énergie  $E$ . Une mise à l'échelle de cette force s'applique par la constante de rigidité  $k$  et la contrainte  $C$ . Si le scalaire retourné par la contrainte est supérieur à zéro, la force résultante agit dans la direction opposée du gradient. Par contre, s'il est inférieur à zéro, la force résultante agit dans la direction du gradient. Finalement, la force est égale à zéro lorsque l'objectif de la contrainte est atteint.

Supposons que notre système soit composé seulement de deux particules,  $p_i$  et  $p_j$ , avec la contrainte définie à l'équation 1.6. L'objectif tend à évaluer la force agissant sur les



deux particules sous cette contrainte. Cela se fait en appliquant l'équation 1.9. Par conséquent, une solution pour  $\frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}_i}$  doit être déterminée.

$$\frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} (\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \quad (1.10)$$

La force  $\mathbf{f}_i$  agissant sur la particule  $p_i$  est donc :

$$\mathbf{f}_i = -kC \frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}_i} = -k(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (1.11)$$

Comparons ce dernier résultat avec le modèle masses-ressorts présenté à la section 1.2.4. Supposons que les mêmes particules définissent notre système et sont reliées par un ressort de longueur au repos  $l_{ij} = 0$ . Selon l'équation 1.1, la force exercée sur la particule  $p_i$  par le ressort est :

$$\mathbf{f}_i = -k_r (\|\mathbf{x}_{ij}\| - l_{ij}) \frac{\mathbf{x}_{ij}}{\|\mathbf{x}_{ij}\|} = -k_r \mathbf{x}_{ij} = -k_r (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (1.12)$$

La MMR peut donc être exprimée par un modèle particulaire généralisé.

#### 1.2.5.4 Amortissement

Les forces d'amortissement s'avèrent critiques à l'obtention de simulations acceptables de corps déformables. Elles nous permettent de tenir compte des objectifs suivants :

- Amortissement des oscillations du système

Un système sans amortissement ne perd pas d'énergie et oscille indéfiniment autour de son point d'équilibre (expliqué à la section 1.3). Pour éviter ce phénomène et simuler des objets réels, qui ne conservent généralement pas toute

leur énergie, on introduit une force d'amortissement pour réduire l'énergie totale du système.

- Augmentation de la stabilité de la simulation

Sans amortissement, on constate habituellement une perte de stabilité d'un système à cause de l'approximation numérique lors de la résolution des équations différentielles ordinaires. Si l'erreur s'accumule, de plus en plus d'énergie s'introduit dans le système; la simulation risque alors fortement *d'exploser*. Puisque l'amortissement diminue l'énergie du système, il permet aussi de contrôler la stabilité de la simulation.

Concernant le modèle masses-ressorts introduit à la section 1.2.4, la force d'amortissement  $\mathbf{f}_d$  agissant sur le point matériel  $p_i$  est habituellement modélisée par :

$$\mathbf{f}_d = -k_d \mathbf{v}_i \quad (1.13)$$

où  $k_d$  représente la constante d'amortissement et  $\mathbf{v}_i$  la vitesse du point  $p_i$ . Cette approche a été employée par (Provot, 1995). Puisque la force d'amortissement est en relation directe avec l'orientation de la vitesse, cette approche amortit simplement la dynamique générale du système.

Une autre approche consiste à amortir la vitesse relative du point matériel. Cela s'exprime de la façon suivante :

$$\mathbf{f}_d = -k_d (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \quad (1.14)$$

Ici,  $\mathbf{v}_j$  représente la vitesse du point matériel  $p_j$ . Toutefois, comme à l'équation 1.13, cette approche ne suffit pas puisque la dynamique générale du système est encore influencée. En d'autres mots, les forces externes comme la gravité ou le vent sont aussi

amorties et la quantité de mouvement n'est plus respectée. Si la constante d'amortissement est élevée, l'utilisation des équations d'amortissement 1.13 et 1.14 conduit à une simulation qui semble contenue dans un fluide visqueux comme de l'huile. Une meilleure approche est :

$$\mathbf{f}_d = -k_d \left( \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} \right) \frac{\mathbf{x}_{ij}}{\|\mathbf{x}_{ij}\|} \quad (1.15)$$

où  $\mathbf{v}_{ij}$  et  $\mathbf{x}_{ij}$  sont respectivement la vitesse et la position relative entre les points matériels  $p_i$  et  $p_j$ . Cela oblige la force d'amortissement à agir seulement le long du ressort et une mise à l'échelle est appliquée suivant la grandeur de la projection calculée par le produit scalaire  $\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij}$ . (Baraff & Witkin, 1998) utilisent une approche similaire.

Finalement, pour un système particulaire généralisé, (Teschner, Heidelberger, Muller, & Gross, 2004) démontrent que la force généralisée d'amortissement minimisant l'énergie produite par les forces internes se calcule ainsi :

$$\mathbf{f}_d = -k_d \left( \sum_{0 \leq j < n} \left( \frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}_j} \cdot \mathbf{v}_j \right) \right) \frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}_i} \quad (1.16)$$

où  $\mathbf{v}_j$  est la vitesse de la particule  $p_j$  et  $C$  une contrainte appliquée sur  $n$  particules.

Le terme  $\frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}_j} \cdot \mathbf{v}_j$  détermine pour une particule  $p_j$  donnée, la grandeur de la force

agissant dans la même direction que sa vitesse  $\mathbf{v}_j$ . Puisque les forces générées sur les particules  $p_0, \dots, p_{n-1}$  soumises à une contrainte  $C$  peuvent s'annuler, les poids de mise à l'échelle s'additionnent pour toutes les particules influencées par  $C$ .

### 1.3 Schémas d'intégration

La résolution numérique d'EDO représente un aspect important de la simulation de corps déformables. Essentiellement, résoudre une équation différentielle analytiquement revient à trouver une fonction continue possédant toutes les dérivées présentes dans l'équation. Une équation différentielle est dite ordinaire lorsqu'elle ne contient que des dérivées par rapport à une seule variable indépendante, qui est généralement le paramètre temporel en physique. Une EDO du premier ordre constitue une équation de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad (1.17)$$

$x(t)$  est une solution de cette équation si elle vérifie l'équation 1.17 alors que  $t$  exprime le paramètre libre. En général, une EDO possède une infinité de solutions mais en connaissant une condition initiale telle que :

$$x(t_0) = x_0 \quad (1.18)$$

la solution  $x(t)$  existe et est dite particulière. Ces deux dernières équations forment le problème de Cauchy.

Comme nous l'avons vu à la section 1.2.4, ce type de problème correspond à ceux posés par la mécanique du point puisqu'on connaît l'état du système au temps  $t_0$ . Ainsi, les solutions analytiques du système EDO couplé, défini à l'équation 1.4, s'exprime par :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{v}(t) dt \\ \mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v}(t) + \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{a}(t) dt \end{cases} \quad (1.19)$$

Partant des conditions initiales  $\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{v}(t)$  connues, les intégrales additionnent les changements infinitésimaux jusqu'au temps  $t + \Delta t$ . Dans cette section, nous présentons

donc les schémas d'intégration numériques populaires employés dans la littérature. Ceci nous permet une approximation des solutions analytiques du système d'équations ci-dessus décrivant la dynamique des particules composant le corps déformable.

### 1.3.1 Euler explicite

Le schéma numérique le plus simple est le schéma explicite d'Euler où la dérivée en fonction du temps se remplace simplement par la différence finie suivante :

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} .$$

Cette dernière provient de l'expansion des deux premiers termes de la série de Taylor pour  $x(t)$ . En substituant cette différence dans l'équation 1.17, nous retrouvons le schéma explicite d'Euler :

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t f(x(t), t) + O(\Delta t^2) \quad (1.20)$$

Bien que ce schéma requiert seulement une évaluation de la dérivée pour calculer le résultat à  $t + \Delta t$ , la méthode explicite d'Euler se révèle particulièrement lente puisqu'on doit utiliser un petit pas de temps pour maintenir la stabilité de la simulation. En pratique, la méthode explicite d'Euler n'est pas utilisée.

### 1.3.2 Runge Kutta

Les schémas d'intégration de Runge Kutta, provenant aussi d'une expansion de Taylor, se présentent comme des alternatives plus précises et plus stables comparativement au schéma explicite d'Euler.

Runge Kutta d'ordre 2 (RK2) utilise deux évaluations de la dérivée afin d'obtenir le résultat de l'équation différentielle :

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t k_2 + O(\Delta t^3) \quad (1.21)$$

avec,

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x(t), t) \\ k_2 &= f\left(x(t) + \frac{\Delta t}{2} k_1, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.22)$$

Ainsi, RK2 apparaît rapide à calculer et plus précise que la méthode explicite d'Euler, ce qui permet de choisir un pas de temps plus grand. La méthode Runge Kutta d'ordre 4 (RK4) se révèle habituellement plus précise que RK2 et permet un pas de temps encore plus grand (Press, Flannery, Teukolsky, & Vetterling, 1992) :

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(\Delta t^5) \quad (1.23)$$

avec,

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x(t), t) \\ k_2 &= f\left(x(t) + \frac{\Delta t}{2} k_1, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ k_3 &= f\left(x(t) + \frac{\Delta t}{2} k_2, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ k_4 &= f(x(t) + \Delta t k_3, t + \Delta t) \end{aligned} \quad (1.24)$$

Comme nous pouvons le voir, ces méthodes requièrent de multiples évaluations de la dérivée pour offrir une solution approximative. Par conséquent, un aspect important à considérer est le coût d'évaluation de la dérivée en comparant la performance en fonction du pas de temps. En simulation de corps déformables, (Teschner, Heidelberger, Muller, & Gross, 2004) ont établi que la méthode RK4 réduit considérablement les performances sans en augmenter le réalisme visuel.

### 1.3.3 Verlet

Le schéma d'intégration de Verlet s'utilise souvent pour calculer la position et la vitesse de particules dans le domaine de la dynamique moléculaire (Verlet, 1967). Ce schéma repose sur deux expansions de la série de Taylor pour  $x(t)$  aux instants  $t - \Delta t$  et  $t + \Delta t$  en poussant le développement jusqu'à l'ordre 4 :

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= x(t) + \Delta t \dot{x}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}(t) + \frac{\Delta t^3}{6} \dddot{x}(t) + O(\Delta t^4) \\ x(t - \Delta t) &= x(t) - \Delta t \dot{x}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}(t) - \frac{\Delta t^3}{6} \dddot{x}(t) + O(\Delta t^4) \end{aligned} \quad (1.25)$$

En additionnant ces deux dernières équations et en isolant  $x(t + \Delta t)$ , nous obtenons :

$$x(t + \Delta t) = 2x(t) - x(t - \Delta t) + \Delta t^2 \ddot{x}(t) + O(\Delta t^4) \quad (1.26)$$

d'où la possibilité d'utiliser l'équation 1.26 pour calculer directement la nouvelle position  $x(t + \Delta t)$ , sans toutefois considérer la vitesse mais plutôt la position au temps précédent  $x(t - \Delta t)$ . Cependant puisque la vitesse s'utilise généralement pour calculer les forces d'amortissement, il demeure souvent nécessaire de la calculer de façon approximative avec le théorème des accroissements finis :

$$\dot{x}(t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t)}{2\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (1.27)$$

Notons ici que les erreurs introduites par l'évaluation de la vitesse ne se cumulent pas puisque cette dernière se recalcule pour chaque pas de temps en fonction de positions plus précises, quoiqu'elle soit toujours un pas en retard. Ceci représente évidemment une grossière approximation mais, lorsqu'une grande précision ne se révèle pas nécessaire, cette méthode apparaît suffisante d'autant plus que le coût d'évaluation de la dérivée se trouve similaire au schéma explicite d'Euler.

Une variante de l'intégration de Verlet originale existe afin d'obtenir la position et la vitesse au même temps  $t + \Delta t$ . Elle se nomme couramment *Velocity Verlet* et se définit comme suit :

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= x(t) + \Delta t \dot{x}(t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{x}(t) + O(\Delta t^3) \\ \dot{x}(t + \Delta t) &= \dot{x}(t) + \frac{1}{2} \Delta t (a(t) + \ddot{x}(t + \Delta t)) + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Elle exige cependant deux évaluations de la dérivée par pas de simulation. L'erreur de troncature lors de l'évaluation de la position augmente, alors que la vitesse, quant à elle, demeure plus précise. Cette méthode a été jugée favorablement en ce qui concerne sa performance et sa stabilité lors de la simulation de corps déformables dans (Teschner, Heidelberger, Muller, & Gross, 2004).

### 1.3.4 Euler implicite

Les schémas explicites vus depuis le début de la section 1.3 possèdent tous une même faille fondamentale : l'utilisation d'un pas de temps trop grand causant des instabilités numériques. Considérons le système suivant :

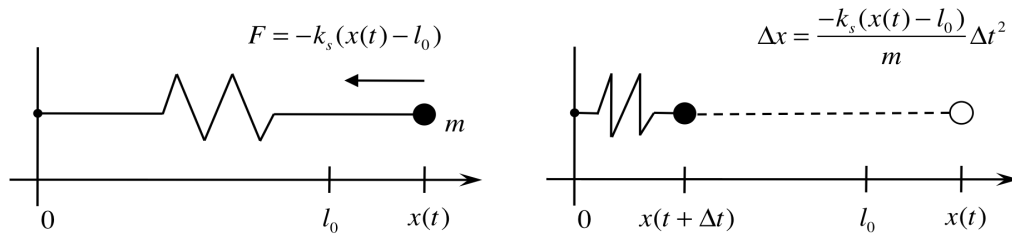


Figure 1.11 : Un ressort linéaire de constante de rappel  $k_s$  est intégré selon le schéma explicite d'Euler. Si le pas de temps apparaît trop grand, une augmentation irréversible de l'énergie du système est probable.



La figure 1.11 montre un ressort linéaire de longueur au repos  $l_0$  avec constante de rappel  $k_s$  reliant un point fixe à l'origine et un point de matière de masse  $m$  à la position  $x(t)$ . Le point de matière est tiré vers l'équilibre  $x(t) = l_0$  par la force  $F = -k_s(x(t) - l_0)$ . Les équations décrivant ce système en utilisant le schéma explicite d'Euler et en considérant la vitesse initiale nulle sont :

$$\begin{aligned} \text{à } t_0 \rightarrow & \begin{cases} x(t_1) = x(t_0) + v(t_0)\Delta t = x(t_0) \\ v(t_1) = v(t_0) + \frac{-k_s(x(t_0) - l_0)}{m}\Delta t = \frac{-k_s(x(t_0) - l_0)}{m}\Delta t \end{cases} \\ \text{à } t_1 \rightarrow & \begin{cases} x(t_2) = x(t_1) + v(t_1)\Delta t = x(t_0) + \frac{-k_s(x(t_0) - l_0)}{m}\Delta t^2 \\ v(t_2) = \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (1.29)$$

d' où le déplacement de  $t_1 \rightarrow t_2$  est égal à :

$$\Delta x_{t_1 \rightarrow t_2} = x(t_2) - x(t_1) = \frac{-k_s(x(t_0) - l_0)}{m}\Delta t^2 \quad (1.30)$$

Si la constante de rappel du ressort se montre trop grande ou la masse trop petite ou pire, que le pas de temps est trop long, le point de matière risque de se déplacer plus loin de sa position d'équilibre  $l_0$  vers une position où la force de déformation du ressort apparaît plus importante qu'au temps précédent. La force du ressort, étant proportionnelle à son étirement, provoque l'oscillation du point de matière avec une amplitude croissante à chaque pas de temps. (Kacic-Alesic, Nordenstam, & Bullock, 2003) démontrent que la condition de stabilité, prenant en compte la relation entre la constante de rappel du ressort, la masse et le pas de temps, peut s'exprimer ainsi :

$$\Delta t \leq 2\sqrt{\frac{m}{k_s}} \quad (1.31)$$

Le problème d'instabilité des schémas explicites provient de l'hypothèse posée des vitesses constantes pour chaque pas de temps en utilisant les forces initiales pour calculer l'état futur du système. Lorsque le pas de temps devient trop long, les

déplacements risquent de s'accroître par rapport à la position d'équilibre, ce qui augmente alors la déformation et l'énergie du système.

Dans un autre ordre d'idées, les schémas implicites permettent l'utilisation de pas de temps beaucoup plus longs, sans nuire à leur stabilité. Le schéma implicite d'Euler

s'obtient en remplaçant la dérivée en fonction du temps par  $\dot{x}(t) \approx \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t}$  :

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t f(x(t + \Delta t), t + \Delta t) + O(\Delta t^2) \quad (1.32)$$

En revenant sur le système à la figure 1.11 et en supposant les conditions initiales suivantes:  $x(t_0) \neq l_0$  et  $v(t_0) = 0$ , le point de matière se voit donc attiré vers  $l_0$ .

Conséquemment, pour une itération, nous obtenons :

$$\begin{cases} v(t_1) = \frac{-k_s(x(t_1) - l_0)}{m} \Delta t \\ x(t_1) = x(t_0) + v(t_1) \Delta t \end{cases} \quad (1.33)$$

En fusionnant ces deux équations et en isolant  $x(t_1)$  nous avons :

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x(t_0) - \frac{k_s(x(t_1) - l_0)}{m} \Delta t^2 \Rightarrow \\ x(t_1) &= \frac{x(t_0)m + k_s l_0 \Delta t^2}{m + k_s \Delta t^2} \end{aligned} \quad (1.34)$$

À la limite, on note que  $\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} x(t_1) = l_0$  le système converge donc théoriquement vers la solution réelle. En général, le pas de temps utilisé ne peut être infiniment long dans un contexte d'animation car on perd des détails de l'évolution dynamique.

Pour des cas plus complexes, une première étape vers la résolution du système d'équations consiste à générer les vecteurs de positions et vitesses ainsi qu'une matrice contenant les forces de toutes les  $N$  particules composant le système :

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= [\mathbf{x}_1(t)^T, \dots, \mathbf{x}_N(t)^T]^T \\
\mathbf{v}(t) &= [\mathbf{v}_1(t)^T, \dots, \mathbf{v}_N(t)^T]^T \\
\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), t) &= [\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t), t)^T, \dots, \mathbf{f}_N(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t), t)^T]^T
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Ensuite, il apparaît nécessaire de construire la matrice des masses  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3N \times 3N}$  du système qui consiste tout simplement en une matrice diagonale composée des valeurs  $m_1, m_1, m_1, \dots, m_n, m_n, m_n$  le long de la diagonale. En conséquence, ces dernières définitions entraînent le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{M}\mathbf{v}(t) + \Delta t \mathbf{F}(\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) \\ \mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \Delta t \mathbf{v}(t + \Delta t) \end{cases} \tag{1.36}$$

Par simplification, les équations ci-dessus s'expriment par un système unique où les inconnues à résoudre représentent les vitesses au prochain pas de temps :

$$\mathbf{M}\mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{M}\mathbf{v}(t) + \Delta t \mathbf{F}(\mathbf{x}(t) + \Delta t \mathbf{v}(t + \Delta t), t + \Delta t) \tag{1.37}$$

Somme toute, l'utilisation des conditions finales pour mettre à jour les particules ajoute automatiquement un amortissement proportionnel à la longueur du pas de temps et à la raideur du système, créant ainsi une stabilité inconditionnelle. C'est pour cette même raison qu'on ne considère pas les forces d'amortissement lorsqu'on utilise un schéma implicite. Cependant, ce gain en stabilité se livre avec le prix d'avoir à formuler et à résoudre un système d'équations non-linéaires à chaque pas de temps. Dépendant de la grosseur du système à modéliser, ce schéma peut facilement devenir gourmand autant en ressources qu'en temps de calcul.

### 1.3.5 Stabilité des systèmes raides

Deux aspects importants sont généralement mis de l'avant lors de la résolution numérique d'équations différentielles en simulation de corps déformables. En premier

lieu, nous tenons la précision qui permet de déterminer l'exactitude de l'approximation numérique par rapport à la vraie solution. Et deuxièmement, la stabilité nous habilite à s'assurer que l'erreur introduite ne s'accumule pas lors de l'approximation des résultats de l'intégration. En d'autres mots, une petite perturbation sur les données n'entraîne qu'une perturbation du même ordre de grandeur sur la solution. (Shinya, 2005) nous présente une description formelle plus élaborée.

Bien que la précision soit d'une grande importance en ingénierie, dans le domaine de la simulation, la précision se limite généralement par la modélisation choisie et non par la précision du schéma d'intégration. Cependant, on ne peut négliger la stabilité dans les deux domaines puisqu'un système instable s'avère essentiellement inutilisable. La stabilité détermine également la performance de la simulation puisqu'un schéma d'intégration stable permet l'utilisation de pas de temps plus grand. (Shinya, 2005) donne un bon aperçu sur ce sujet en discutant de différents problèmes et solutions.

Un système d'équations différentielles est dit raide lorsqu'il présente un paramètre exigeant un pas de temps très petit pour résoudre l'équation sans problème de stabilité. Par exemple, dans un système masses-ressorts, des problèmes de stabilité apparaissent en présence de constantes élastiques trop élevées. Selon (Baraff & Witkin, 1998), les systèmes raides représentent une source majeure de temps de calcul longs dans une simulation d'objets déformables.

Étant un problème commun pour tous, la littérature nous propose plusieurs solutions afin de stabiliser des systèmes raides.

Une première catégorie, comme nous l'avons vu à la section 1.2.5.4, consiste à influencer directement les paramètres physiques d'une scène en augmentant artificiellement l'amortissement des forces. Ceci s'applique bien sûr aux schémas explicites.

Une deuxième catégorie propose d'adapter le pas de temps d'un schéma explicite durant la simulation. Quant à (Joukhadar & Laugier, 1996), ils conseillent de calculer l'énergie du système simulé en considérant qu'elle doit rester constante durant la simulation. Si l'énergie varie à la nouvelle position, le pas de temps se divise par deux et se recalcule. Sinon, le pas de temps se multiplie par 1.5. Dès lors, ils simulent de façon stable une balle entrant en collision avec une surface, grâce à la diminution du pas de temps permettant de contrôler la précision des calculs durant les brefs moments de l'impact.

Une troisième catégorie suggère d'utiliser un schéma implicite simplifié pour la simulation. Comme nous l'avons vu, la stabilité des méthodes implicites est assurée étant donné l'intégration automatique de l'amortissement dans le système, mais celle-ci reste tout de même coûteuse. (Baraff & Witkin, 1998) proposent donc de faire une approximation du modèle mécanique pour arriver à un système d'équations linéaires.

Finalement, des méthodes plus récentes d'intégration par contraintes géométriques de position permettent de combiner l'efficacité computationnelle des schémas explicites et la stabilité inconditionnelle des schémas implicites. Les schémas d'intégration par contraintes géométriques sont formellement introduits par (Müller, Heidelberger, Hennix, & Ratcliff, 2006), quoique cette approche ait fait l'objet de nombreux articles dans le passé, sans être définie explicitement. En effet, plusieurs chercheurs évitent le dépassement dans l'intégration explicite en contraignant géométriquement l'amplitude des déplacements des points de matière.

(Provot, 1995) et (Desbrun, Schröder, & Barr, 1999) utilisent des contraintes de position dans leurs maillages masses-ressorts, pour prévenir les problèmes de divergence en limitant l'étirement des ressorts et l'effort généré par l'amortissement. Ces limitations permettent de contrôler l'amplitude des forces générées en demeurant dans le domaine de validité.

(Volino, Courchesne, & Thalmann, 1995) et (Bridson, Fedkiw, & Anderson, 2002) utilisent un schéma d'intégration explicite afin de simuler des tissus, en combinant des contraintes de positions géométriques pour résoudre les problèmes d'instabilité, lors de la génération des impulsions durant la détection de collision.

(Faure, 1998) et (Jakobsen, 2001) utilisent le schéma de Verlet, modifiant directement les positions plutôt que les vitesses. Ils utilisent ensuite des contraintes de positions géométriques sur les points de matière pour obtenir un comportement spécifique.

Dans ce type d'approche, un objet dynamique se représente par un ensemble de  $N$  points de matière et  $M$  contraintes géométriques  $C$ . Les forces s'utilisent d'abord pour mettre à jour la vitesse et la position des points par l'emploi d'un schéma explicite. On manipule ensuite les positions des points afin de satisfaire aux différentes contraintes. Ces dernières se résolvent indépendamment les unes après les autres et les points de matière se projettent vers une position valide par rapport à la contrainte utilisée pour chaque calcul. Voici l'algorithme général de ce schéma présenté par (Müller, Heidelberger, Hennix, & Ratcliff, 2006) :

**ALGORITHME 1.1 : SCHÉMA PAR CONTRAINTE DE POSITION**

(1) Pour chaque pas de simulation

    // Pas d'intégration explicite

(2) Pour chaque point de matière  $i$  faire

$$(3) \quad \mathbf{v}_i(t + \Delta t) = \mathbf{v}_i(t) + \mathbf{a}_i(t)\Delta t$$

    // Appliquer de l'amortissement sur le système si nécessaire

(4) *AppliquerAmortissement*( $\mathbf{v}_1(t + \Delta t), \dots, \mathbf{v}_N(t + \Delta t)$ )

(5) Pour chaque point de matière  $i$  faire

$$(6) \quad \mathbf{p}_i = \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{v}_i(t + \Delta t)\Delta t$$

```

// Projection des contraintes géométriques
(7)  Pour  $j = 1$  à itérations faire
(8)      ProjeterContraintesGéométriques( $C_1, \dots, C_M, p_1, \dots, p_N$ )

// Mise à jour de la configuration des points projetés
(9)  Pour chaque point de matière  $i$  faire
(10)       $\mathbf{v}_i(t + \Delta t) = (\mathbf{p}_i - \mathbf{x}_i(t)) / \Delta t$ 
(11)       $\mathbf{x}_i(t + \Delta t) = \mathbf{p}_i$ 

```

Ce schéma se révèle inconditionnellement stable puisque les points de matière se déplacent nécessairement vers une configuration valide, calculée par la projection des contraintes géométriques. (Müller, Heidelberger, Hennix, & Ratcliff, 2006) fournissent une explication mathématique rigoureuse.

Ce solveur utilise une approche itérative comme la méthode de Gauss-Seidel, bien que sur un système non-linéaire. En effectuant seulement une itération du solveur par pas de temps, ce schéma ressemble davantage à un schéma explicite. Cependant, en augmentant le nombre d'itérations par pas de simulation, le schéma se comporte plutôt comme un schéma implicite.

Notons un désavantage notable : l'ordre de la résolution de contraintes géométriques présente une implication sur le résultat de la configuration obtenu. Malgré cela, ce type de schéma reste toutefois très populaire et répandu dans plusieurs moteurs physiques cherchant à animer des objets déformables raides en temps réel. Notamment, nous avons trouvé cette approche dans les moteurs physiques (libres et commerciaux) suivants : Bullet Physics, Fysix (IO Interactive) et PhysX (NVidia).

La définition de contrainte géométrique se fait par rapport aux positions des points de matière comme à la section 1.2.5.1. La différence réside dans le fait que nous manipulons immédiatement la position des particules sans passer par l'énergie potentielle pour calculer une force. (Müller, Heidelberger, Hennix, & Ratcliff, 2006) démontrent que le déplacement  $\Delta \mathbf{x}_i$  d'une particule  $p_i$  en fonction d'une contrainte géométrique  $C(p_0, \dots, p_{n-1})$  se formule de la façon suivante :

$$\Delta \mathbf{x}_i = -k s w_i \frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}_i} \quad (1.38)$$

où  $k$  constitue la constante de rigidité de la contrainte géométrique variant entre  $[0,1]$ ,  $w_i$  symbolise l'inverse de la masse  $\frac{1}{m_i}$  de la particule  $p_i$  et  $s$  la mise à l'échelle du gradient de la contrainte définie par :

$$s = \frac{C}{\sum_{0 \leq j < n} w_j \left| \frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}_j} \right|^2} \quad (1.39)$$

On note que les itérations multiples du solveur lors de la projection des contraintes (ligne 7 et 8) ont pour effet de rendre la constante  $k$  non-linéaire. Ainsi, pour obtenir une relation linéaire, Müller et coll. démontrent la nécessité de multiplier le déplacement non par  $k$  mais plutôt :

$$k' = 1 - (1 - k)^{\frac{1}{n}} \quad (1.40)$$

où  $n$  représente le nombre d'itérations du solveur. La correction appliquée par la contrainte se trouve donc linéairement dépendante de  $k'$  et indépendante du nombre d'itérations effectuées.



À titre d'exemple, considérons la contrainte définie à l'équation 1.7. Les gradients de la contrainte par rapport aux points  $p_i$  et  $p_j$  sont :

$$\frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|}, \quad \frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}_j} = -\frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}_i} \quad (1.41)$$

La mise à l'échelle  $s$  équivaut donc à :

$$s = \frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| - d_{ij}}{w_i \left( \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \right)^2 + w_j \left( -\frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \right)^2} = \frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| - d_{ij}}{w_i + w_j} \quad (1.42)$$

Finalement, les déplacements obtenus pour les particules  $p_i$  et  $p_j$  se calculent ainsi :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}_i &= -k' \frac{w_i}{w_i + w_j} (\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| - d_{ij}) \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \\ \Delta \mathbf{x}_j &= k' \frac{w_j}{w_i + w_j} (\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| - d_{ij}) \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \end{aligned} \quad (1.43)$$

## CHAPITRE 2 – OBJECTIFS DE RECHERCHE

Ce projet de maîtrise s'inscrit dans le cadre d'un projet général de grande envergure qui vise à développer un outil de simulation validé pour une utilisation clinique de routine, permettant de simuler l'effet d'un traitement chirurgical des déformations scoliotiques sur l'apparence externe du tronc. Grâce à cet outil, le clinicien pourra décider de la meilleure stratégie chirurgicale à suivre en considérant davantage l'apparence externe, facteur primordial pour satisfaire son patient.

Le présent projet marque le début du développement d'un modèle physique des tissus mous du tronc pour prédire l'effet d'un traitement chirurgical des SIA sur la surface externe. En ce sens, l'objectif général consiste à définir une modélisation physique simplifiée des tissus déformables entre l'épiderme et les structures osseuses du tronc afin d'arriver au but ultime, la simulation de l'effet d'une chirurgie de la scoliose sur l'apparence externe. Plus précisément, il s'agit de :

- Proposer une méthodologie pour la construction d'un système simplifié permettant de modéliser les différentes structures déformables du tronc, à partir des modèles préopératoires surfaciques des géométries interne et externe présentement disponibles.
- Identifier une procédure numérique adéquate pour résoudre la dynamique du système.
- Développer un logiciel prototype permettant de simuler de manière interactive l'effet d'une chirurgie de la scoliose sur l'apparence externe.
- Valider le système proposé en comparant les résultats de simulation au modèle 3D postopératoire surfacique du tronc d'un patient.

## **CHAPITRE 3 – CONSTRUCTION D’UN MODÈLE PHYSIQUE SIMPLIFIÉ DU TRONC**

Dans ce chapitre, nous présentons en détails le matériel et les méthodes utilisés pour simuler une chirurgie de la scoliose sur l’apparence externe. Dans un premier temps, nous nous attardons aux protocoles d’acquisition des données permettant la reconstruction 3D des structures anatomiques du tronc. Ensuite, nous introduisons la méthodologie employée lors de la mise en œuvre de notre simulateur.

### **3.1 Acquisition des données cliniques**

Toutes les données acquises, dans le cadre de ce projet, proviennent d’un patient de la clinique de scoliose de l’Hôpital Sainte-Justine de Montréal. Suite à un diagnostic de scoliose idiopathique, ce patient, recruté de façon volontaire, subit un examen radiographique de routine et on acquiert, avant la chirurgie, une topographie de surface du tronc. On prend ces différentes acquisitions au cours d’une même journée dans le but d’éviter la croissance physique et la progression des déformations scoliotiques lors de l’analyse des données. Après la chirurgie, on répète ce même protocole d’acquisition afin d’obtenir les données postopératoires. L’obtention de ces données servant à cette recherche fut rendue possible grâce à la permission du Comité d’Éthique de l’Hôpital Sainte-Justine de Montréal.

Dans cette section, nous présentons le processus d’acquisition et la reconstruction 3D des structures osseuses du tronc ainsi que l’obtention de la topographie de surface du patient.

### 3.1.1 Reconstruction 3D des structures osseuses du tronc

Le laboratoire informatique de recherche sur la scoliose de l'Hôpital Sainte-Justine (LIS3D) a mis au point une technique permettant de reconstruire en 3D les structures osseuses d'un individu. Le processus débute par l'acquisition de trois radiographies numériques multi-planaires du patient. Le sujet est placé à l'intérieur d'un appareil de positionnement situé en avant des plaques radiographiques. Un plancher rotatif permet au technicien d'effectuer l'acquisition d'une radiographie latérale (LAT), de deux radiographies postéro-antérieures, une à incidence standard horizontale (PA-0) et une autre avec le tube à rayons X surélevé et angulé de 20 degrés par rapport à l'horizontale (PA-20). Fixées à l'avant et à l'arrière de l'appareil, deux plaques de plexiglas contenant des billes de plomb identifiables sur les radiographies et dont les coordonnées 3D sont connues permettent de calibrer le système.

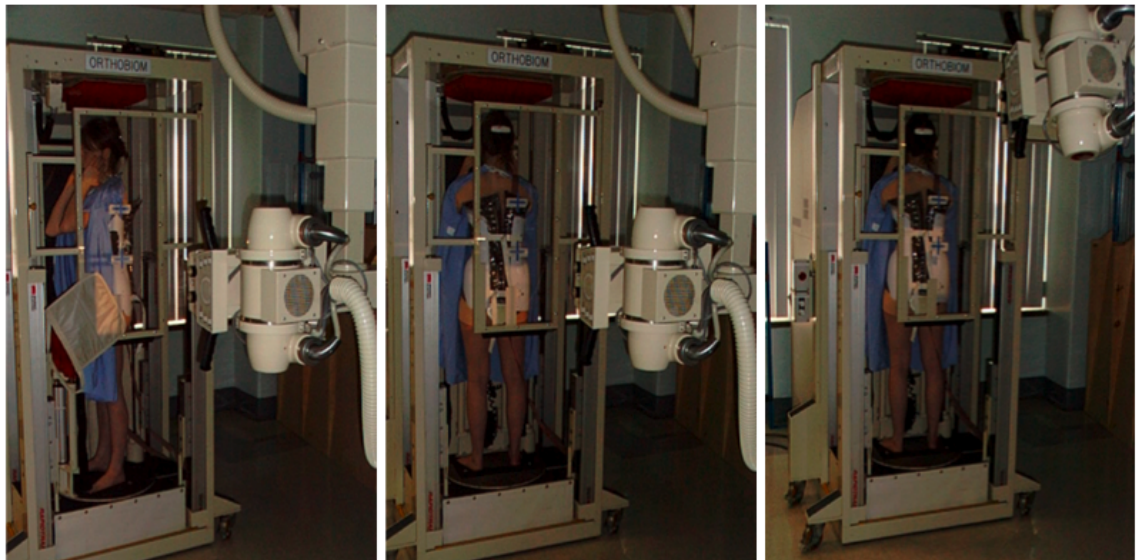


Figure 3.1 : Acquisition des radiographies LAT, PA-0 et PA-20

À la suite de ces acquisitions, un expert en radiologie identifie manuellement des repères anatomiques à l'aide d'un logiciel de numérisation. Plus spécifiquement, il s'agit d'identifier sur les différentes vues 6 points par vertèbre (le centre des plateaux

vertébraux supérieur et inférieur et les sommets supérieur et inférieur des pédicules droit et gauche), 20 points sur le bassin, 11 points sur la ligne médiane des côtes et 4 points sur le sternum. L'application utilise l'algorithme du *Direct Linear Transform* (DLT) permettant la reconstruction 3D des repères osseux avec une erreur de  $2.1 \pm 1.5$  mm (LAT et PA-0) pour la colonne, et de  $5.6 \pm 4.5$  mm (PA-0 et PA-20) pour la cage thoracique (Aubin, Dansereau, Parent, Labelle, & DeGuise, 1997).

On obtient ainsi un modèle filaire du tronc en 3D en reliant les différents points entre eux. Cette dernière représentation peut ensuite être rehaussée visuellement pour obtenir un modèle surfacique. Succinctement, l'approche consiste à déformer un atlas générique de structures osseuses en 3D par krigeage géométrique obtenu d'un spécimen cadavérique avec un tomographe (Aubin et al., 1995).

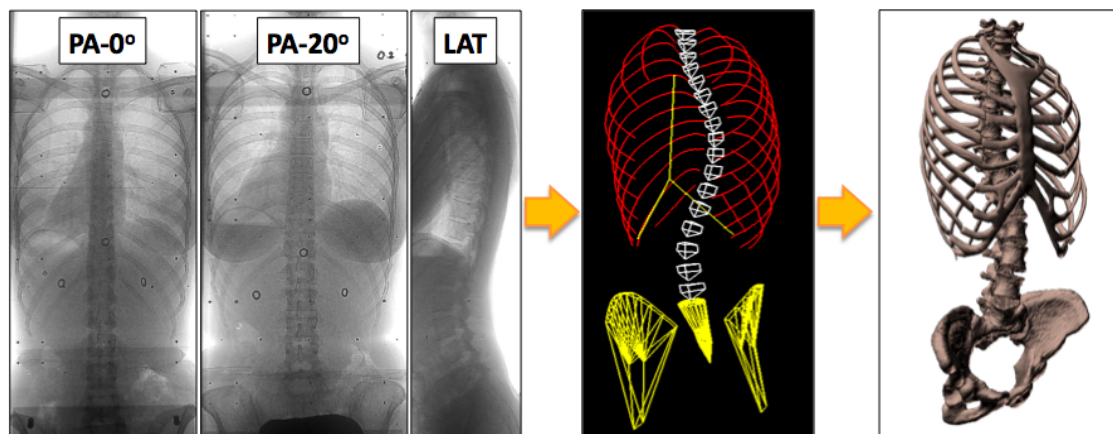


Figure 3.2 : Étapes menant à la reconstruction 3D des structures osseuses d'un patient

### 3.1.2 Topographie de surface du tronc

On réalise l'acquisition de la géométrie de surface du tronc à l'aide d'un système de quatre numériseurs optiques 3D commercialisés par la compagnie InSpeck<sup>3</sup> au laboratoire de vision active non invasive (LAVIANI) de l'Hôpital Sainte-Justine. Disposé autour du sujet, chaque numériseur est composé d'un projecteur de franges en lumière halogène permettant d'envoyer quatre patrons décalés en phase et d'une caméra pour enregistrer l'information. Une cinquième image, acquise sans projection de franges, fournit la texture de la surface reconstruite. L'information de déphasage se combine à une technique de triangulation active pour générer une surface partielle en 3D du tronc correspondant à la surface située dans le champ de vision du numériseur. Le modèle 3D du tronc complet s'obtient donc lorsque les quatre modèles partiels se recalent dans un même repère et se fusionnent pour former un maillage surfacique unique constitué d'environ 60 à 90 mille nœuds, dépendamment de la taille du patient.



Figure 3.3 : Reconstruction de la surface externe par quatre numériseurs 3D

La numérisation du tronc s'effectue avec le sujet debout et positionné approximativement au centre du volume de visualisation du système. Le processus

---

<sup>3</sup> [www.inspeck.com](http://www.inspeck.com)

complet d'acquisition prend environ cinq secondes, en demandant au patient de retenir son souffle pour minimiser l'effet des déplacements sur la surface reconstruite. Finalement, une étude d'évaluation du système réalisée sur un mannequin révèle une précision de l'ordre de 1.4 mm, en comparant les reconstructions d'un mannequin avec des mesures obtenues par une machine à mesurer tridimensionnelle (Pazos, Valérie, 2002).

### **3.1.3 Superposition de la surface externe du tronc et des structures osseuses**

Une fois reconstruite en 3D, la géométrie de la surface du tronc et celle des structures osseuses sont recalées à partir de la mise en correspondance de marqueurs visibles sur les deux reconstructions. Pour ce faire, avant l'acquisition de la géométrie externe et la prise des radiographies, des croix sont tracées sur la peau du sujet pour identifier les positions de marqueurs métalliques radio-opaques installés aux mêmes endroits juste avant la prise de radiographies.

Après identification manuelle de la position en 3D de chaque marqueur sur les géométries respectives, il s'agit dans un premier temps de ramener ces deux groupements de points reconstruits dans un même repère et de les faire coïncider en utilisant un algorithme itératif de minimisation de la distance point à point par moindre carré (Fortin et al., 2007). Plus spécifiquement, cet algorithme se résume à trouver la transformation rigide optimale permettant de mieux recentrer et aligner les douze points de l'externe vers ceux de l'interne. Cette même transformation géométrique s'applique subséquentement à la totalité des nœuds de la géométrie externe pour la représenter dans le même référentiel que la géométrie interne.

Cependant, puisque l'acquisition des données de l'interne et de l'externe se fait par des modalités d'imagerie différentes, à des moments distincts et dans deux salles distinctes, des erreurs dues aux changements de posture adoptée par les patients sont perceptibles.

En effet, le résultat du processus de recalage rigide montre que les structures osseuses se désalignent légèrement à l'intérieur de la surface du tronc même si des précautions sont prises pour standardiser la posture des patients lors des acquisitions. La solution adoptée pour tenir compte de ces incertitudes consiste à effectuer un recalage élastique. La méthode introduite utilise des splines d'ajustement par plaques minces pour compenser au mieux la différence de posture entre les deux séances d'acquisition des données (Seoud, Cheriet, Labelle, & Dansereau, 2009).

### **3.2 Méthodologie générale**

Suite à l'acquisition des données préopératoires et postopératoires (topologie de surface du tronc, reconstruction 3D des structures osseuses sous-jacentes avant et après chirurgie), on a développé un logiciel prototype permettant de prédire l'effet d'une intervention chirurgicale de la SIA sur la surface externe du tronc. Connaissant la configuration initiale du tronc (interne et externe avant chirurgie) et la nouvelle configuration des structures osseuses après traitement chirurgical, l'application prédit l'externe résultant. Cette nouvelle topologie externe, obtenue par simulation, est ensuite évaluée à partir d'indices cliniques en la comparant à l'acquisition postopératoire de la surface externe réelle du tronc.

Avant d'effectuer la simulation de la chirurgie, plusieurs opérations préliminaires sont nécessaires. Dans un premier temps, un prétraitement des modèles 3D (surface externe du tronc et structures osseuses sous-jacentes) est effectué pour corriger les erreurs provenant des acquisitions et reconstructions. Suite au recalage de l'externe et de l'interne, trois différentes épaisseurs formant un maillage d'éléments géométriques simples entre la surface externe et les structures internes du tronc sont générées pour représenter qualitativement la peau, le gras et les muscles. Ce maillage simplifié permet d'établir le système particulière généralisé, structuré en couches dont les paramètres varient selon le type de tissu représenté. On utilise alors une modélisation articulée de la



structure osseuse sous-jacente afin d'interpoler la configuration interne préopératoire en postopératoire. En pratique, le simulateur biomécanique qui est actuellement en développement fournira les différentes étapes de simulation de la correction des déformations des structures osseuses. Notre but est de propager ces différents pas de correction jusqu'à la surface externe du tronc. Cette même structure rigide guide les déformations des tissus mous durant la simulation. À chaque pas d'interpolation des structures osseuses, le déplacement des nœuds de la surface interne déforme les éléments des couches du système particulaire connectés à celle-ci. Suite à la résolution des équations de dynamique, des forces de préservation des contraintes établies se calculent ainsi à chaque nœud permettant leur déplacement vers une configuration stable. Finalement, la surface externe postopératoire simulée s'obtient au dernier pas d'interpolation de la structure interne lorsque les éléments du système particulaire sont en configuration stable.

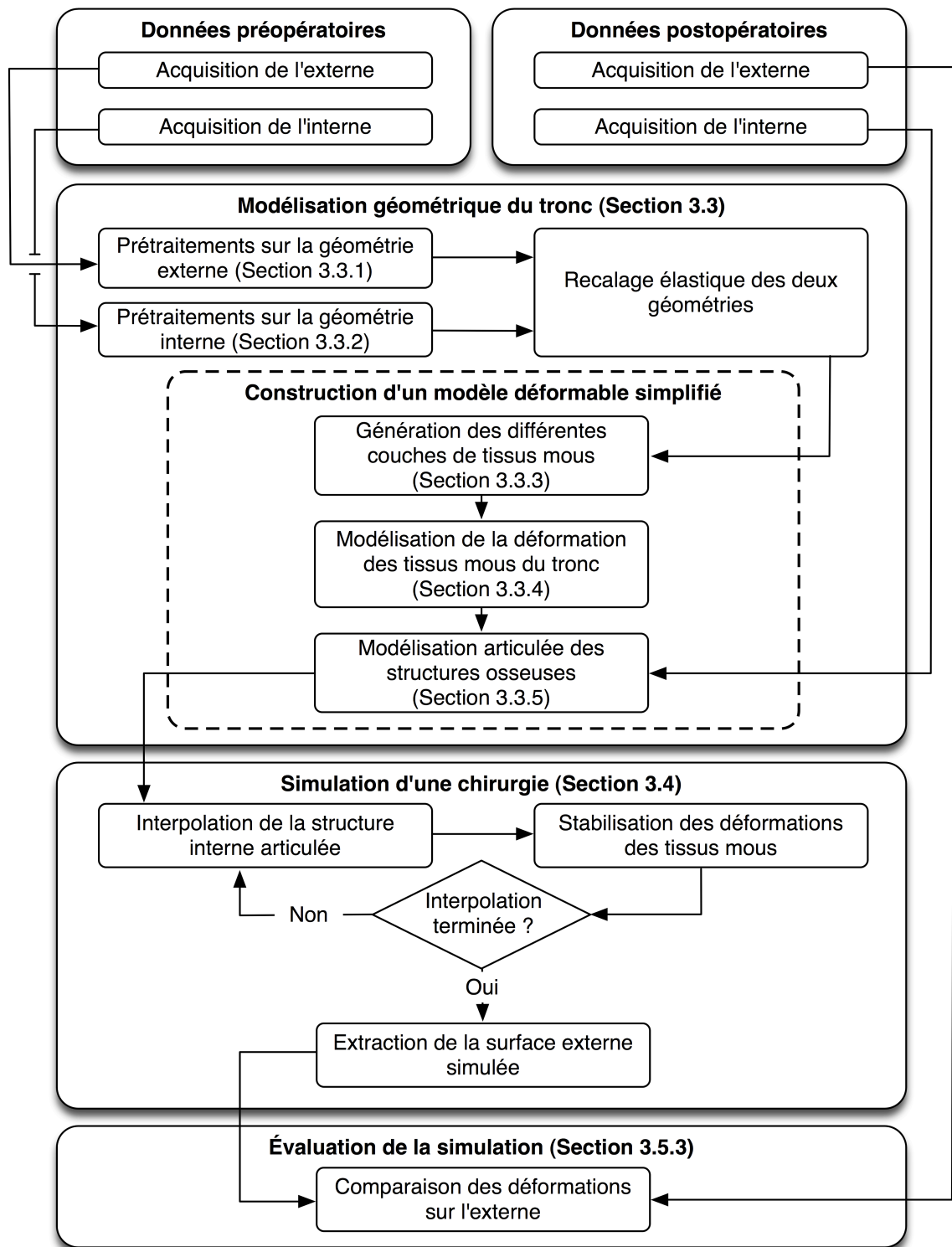


Figure 3.4 : Schéma de la méthodologie

Dans les prochaines sections, nous exposons chaque module du schéma de la méthodologie illustré à la figure 3.4.

### **3.3 Modélisation géométrique du tronc**

#### **3.3.1 Prétraitements sur la géométrie externe**

La surface externe obtenue lors de l’acquisition des données préopératoires est utilisée pour générer le maillage tétraédrique constituant les éléments physiques de notre système particulaire généralisé. Toutefois, vu la haute résolution du maillage généré lors de la reconstruction, il apparaît essentiel d’effectuer une décimation de la surface afin de réduire le nombre de polygones et, par conséquent, le temps de calcul lors de la simulation. Puisque les algorithmes de maillage 3D nécessitent une représentation frontalière valide, un prétraitement initial reste nécessaire pour corriger la géométrie acquise. Décrit à la section 3.1.2, le système Inspeck permet d’obtenir un modèle 3D de la topologie du tronc. Toutefois, il présente certaines limites (Shawafaty, 2007):

- Le maillage final peut contenir certains trous dus à la présence d’occlusions quand certaines régions de la surface deviennent invisibles pour les quatre caméras.
- Des erreurs de recalage produisent des problèmes lors de la fusion des différentes vues. À titre d’exemple, notons la présence de plusieurs sommets dupliqués dans le maillage et aussi des polygones en intersection.
- La sensibilité au mouvement du patient induit des erreurs de localisation des points produisant conséquemment une surface bruitée.

Une première étape consiste donc à éliminer les polygones en intersections, les doublons et toute arête non « manifold » (figure 3.5). Ceci dans le but d’assurer une surface « 2-manifold », soit une configuration permettant que son maillage se divise en deux le long

de ses arêtes et s'étale ensuite afin de reposer à plat sans présence de chevauchement entre ses différents polygones.

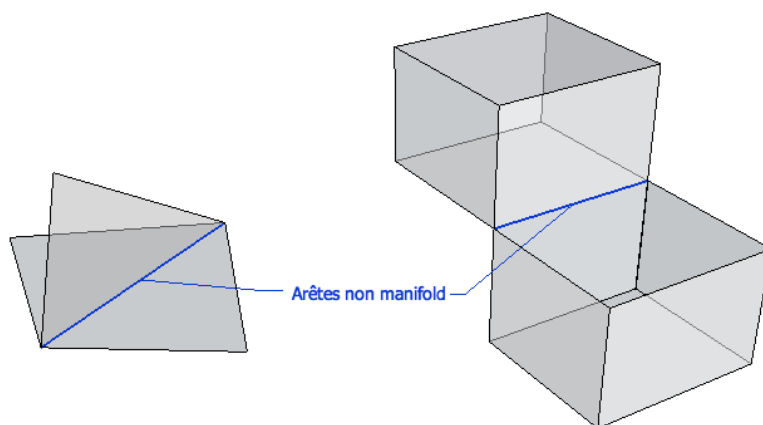


Figure 3.5 : Exemples d'arêtes non « manifold ». Ces arêtes sont désignées non « manifold » lorsqu'elles sont connectées à plus de deux faces

Pour ce faire, nous utilisons le logiciel MeshLab<sup>4</sup>, offrant le code source permettant le traitement et l'édition de maillages 3D. Ce logiciel libre, spécialement conçu pour le traitement de modèles acquis par numériseurs 3D, offre une panoplie d'outils pour le nettoyage, le filtrage et l'analyse des mailles. Cependant, puisque les données de la topologie externe sont conservées sous un format de fichier propriétaire au système Inspeck, on a développé un convertisseur permettant de sauvegarder le maillage en format Wavefront OBJ<sup>5</sup>. Ce choix de format se motive principalement par sa spécification ouverte et son adoption par d'autres logiciels 3D tels que Maya, Blender, MeshLab et 3D Studio Max.

Suite à cette première étape d'élimination de géométrie, nous obtenons une surface valide mais contenant plus de trous qu'au départ. Pour remplir ces derniers, on utilise un algorithme basé sur une représentation surfacique implicite modélisée par la fonction

---

<sup>4</sup> <http://www.meshlab.org/>

<sup>5</sup> <http://en.wikipedia.org/wiki/Obj>

FastRBF (Radial Basic Functions) (Carr et al., 2001). Les fonctions à base radiale demeurent populaires dans l'interpolation de données, vu que le système d'équations linéaires associé reste facile à inverser sous certaines conditions. La surface originale peut donc se représenter par une fonction de distance implicite suite à la résolution d'un système d'équations linéaires. Subséquemment, ces polygones peuvent être régénérés sous différentes dimensions régulières par cette même fonction de distance, avec l'aide de l'algorithme du cube baladeur (Lorensen & Cline, 1987). Nous pouvons ainsi remplir les trous et lisser la surface en même temps. Cette dernière étape s'exécute en utilisant un outil commercial, par ligne de commande, provenant de la compagnie FarField Technology<sup>6</sup>.

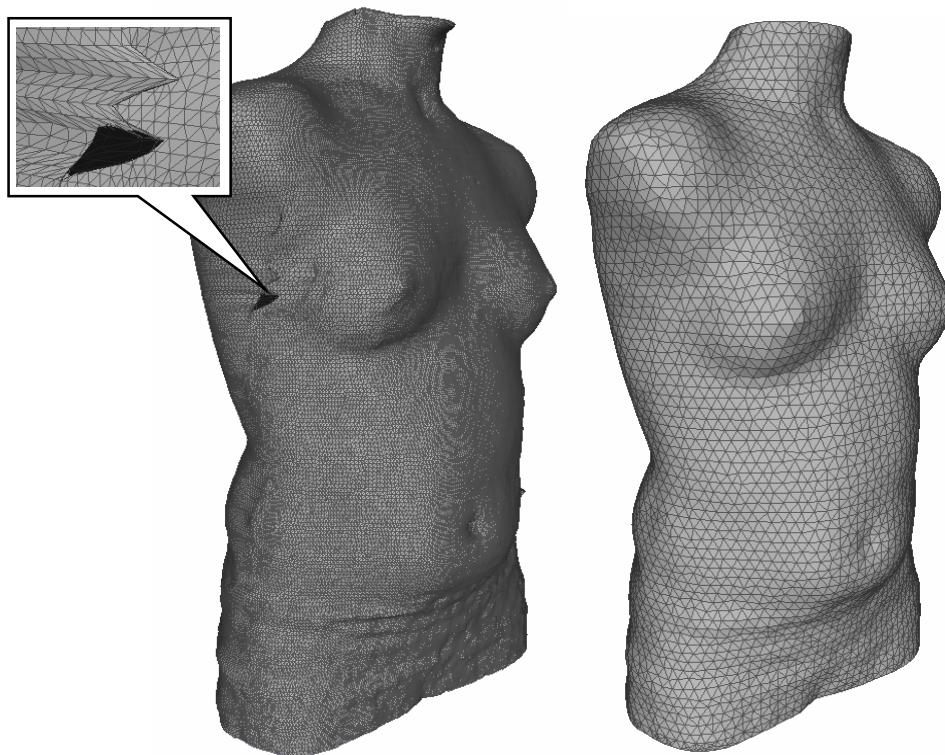


Figure 3.6 : Prétraitement et simplification d'un maillage passant de 69,600 nœuds et 138,652 triangles à 6,355 nœuds et 12,559 triangles

---

<sup>6</sup> <http://www.farfieldtechnology.com/>

### 3.3.2 Prétraitements sur la géométrie interne

Comme l'externe, la géométrie interne présente parfois des erreurs suite au processus de reconstruction. Notamment, certains modèles présentent :

- Des côtes en intersections.
- Des désalignements flagrants de côtes avec leurs facettes articulaires vertébrales respectives.
- Des débordements au niveau des côtes, du sternum ou du bassin avec la surface externe, malgré le recalage élastique.

Ces limitations peuvent s'expliquer par différents facteurs : l'identification manuelle fastidieuse des repères sur les radiographies souffre d'une variabilité entre opérateurs, les mouvements involontaires du patient entre les acquisitions induisent des erreurs lors de la reconstruction, la paire de vue PA-0 – PA-20 se présente non standard et la disparité des structures anatomiques apparaît relativement faible par rapport à la paire de vue LAT – PA-0.

Pour pallier à ces inconvénients, on considère actuellement de nouvelles méthodes. Entre autres, (Boisvert, Cheriet, Pennec, Labelle, & Ayache, 2008; Plourde, 2007) proposent des techniques de segmentation de radiographie semi-automatique ou automatique pour minimiser l'identification manuelle des repères anatomiques. Alors que (Cheriet, Laporte, Kadoury, Labelle, & Dansereau, 2007) nous offrent une méthode de calibrage explicite pour compenser au mieux les déplacements d'un patient entre les acquisitions. Finalement, une nouvelle méthode suggère de considérer seulement les radiographies standards (PA-0 et LAT) lors du processus de reconstruction des structures osseuses du tronc (Seoud, Cheriet, Labelle, & Dansereau, 2009).

Puisque les données obtenues pour cette recherche ne possèdent pas toutes ces récentes innovations intégrées lors des étapes d'acquisitions et reconstructions, une correction manuelle des points 3D du modèle filaire apparaît indispensable pour garantir un modèle géométrique du tronc valide pour la simulation. Tel que mentionné à la section 3.1.1, ces mêmes points sont ensuite réutilisés pour générer le modèle surfacique corrigé de l'interne. Ainsi, pour améliorer rapidement le modèle filaire, nous avons développé une application visuelle intitulée « Scolio Editor » permettant d'éditer, à l'aide d'une souris, la position de ces points conservés dans un fichier de format conçu au LIS3D. L'application s'assure également du débordement avec la surface externe lors de l'édition des points de l'interne. Pour ce faire, on effectue une vérification de la présence d'intersections entre les segments de l'interne reliés au point déplacé et les triangles de l'externe. Toutefois, vu le nombre important de triangles de l'externe, on se sert d'une accélération reposant sur le partitionnement de l'espace 3D par un arbre OCTREE. L'algorithme d'accélération s'énonce comme suit :

1. Dans un premier temps, l'espace de la surface externe est subdivisé par un arbre OCTREE dont chaque octant maintient une indication spécifiant qu'il est vide ou non. Un octant n'est pas considéré vide lorsqu'il contient d'autres sous octants ou lorsque sa liste des boîtes englobantes de géométrie contient des éléments. Dans notre application, cette géométrie comprendra naturellement les triangles de la surface externe.
2. Lorsqu'un point se déplace, les boîtes englobantes de tous les segments reliés à celui-ci sont déterminées. Pour chaque boîte englobante construite, nous obtenons, dans un premier temps, les octants en intersection les plus proches contenant une liste non vide de géométrie. Ainsi, pour chaque boîte englobante de la géométrie externe obtenue de l'octant, nous conservons la géométrie dont la boîte englobante chevauche la boîte du segment courant.

3. Finalement, pour chaque triangle retenu, nous vérifions s'il y a présence d'intersection avec le segment courant de l'interne. L'algorithme d'intersection segment-triangle employé nous vient de (Akenine-Möller, Haines, & Hoffman, 2008).

Cet algorithme efficace permet conséquemment d'effectuer les tests d'intersection en temps réel durant tout déplacement de point de l'interne accompli par l'utilisateur et ce, sur des modèles géométriques de l'externe non simplifiés.

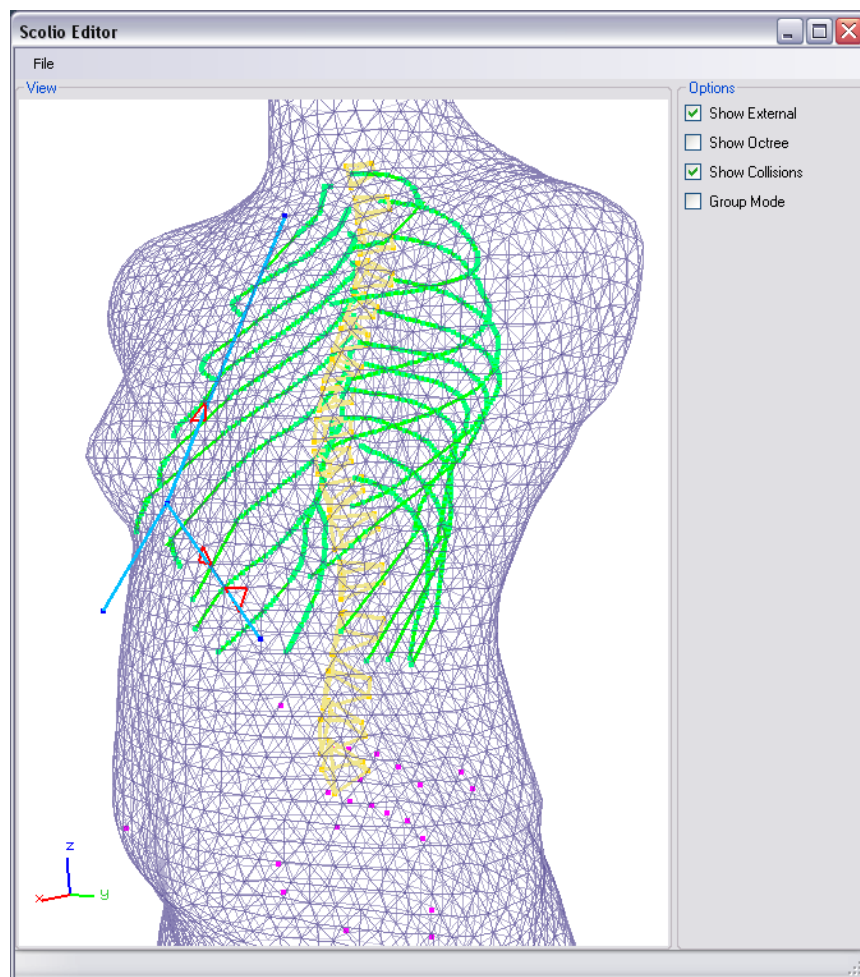


Figure 3.7 : Capture de l'application Scolio Editor. Les triangles en contour gras (rouge) de la surface externe sont présentement en intersection avec les segments du sternum du modèle filaire



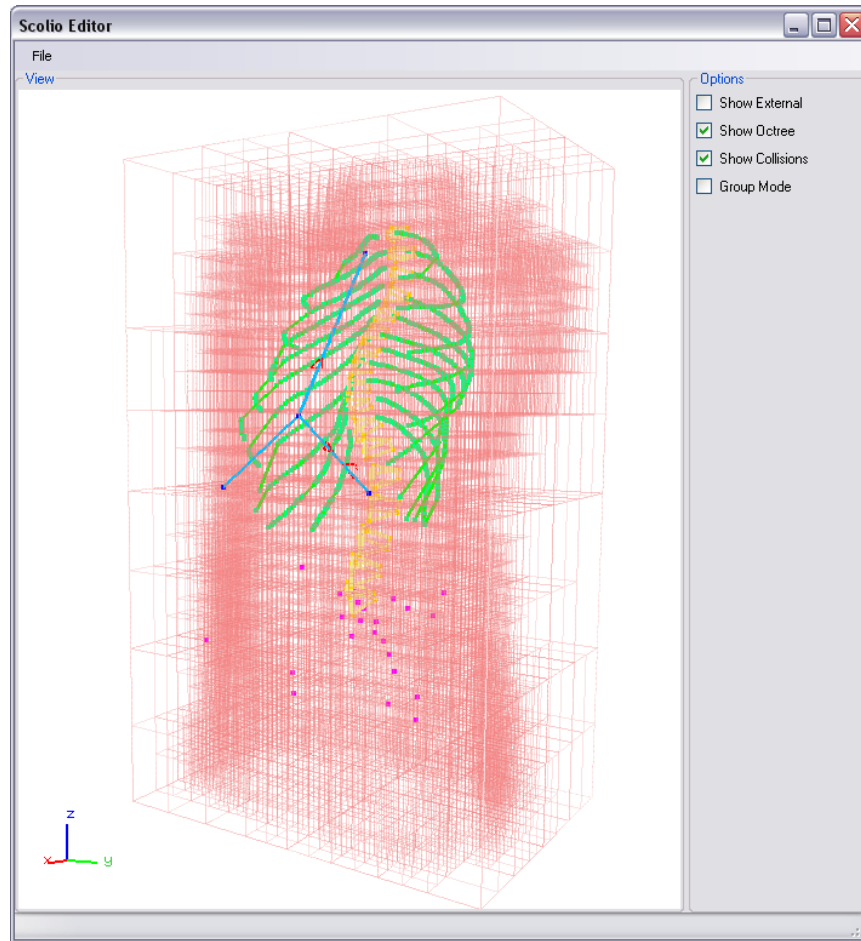


Figure 3.8 : Capture de l'arbre OCTREE généré pour un patient donné dans l'application Scolio Editor

Finalement, le déplacement multiple de tous les points représentant une structure osseuse interne unique (vertèbre, côte, sternum ou bassin) s'avère également possible. Cette fonctionnalité est activée lorsque l'utilisateur sélectionne la boîte de contrôle « Groupe Mode ».

### 3.3.3 Génération des différentes couches de tissus mous

Une fois la surface externe nettoyée puis simplifiée et l'interne corrigée, on procède à la génération des différentes couches anatomiques représentant qualitativement la peau, le

gras et les muscles. Pour ce faire, on utilise la méthode présentée par (Erleben, Dohlmann, & Sparring, 2005) produisant différentes sous-couches de tétraèdres à partir d'un maillage triangulaire étanche. La modélisation des tissus mous employée s'inspire essentiellement du domaine de la chirurgie faciale.

L'article présenté par Erleben et coll. décrit un algorithme simple permettant de créer une coquille d'une épaisseur de dimension  $\varepsilon$  définie par l'utilisateur à partir d'un maillage triangulaire surfacique. Les éléments tétraédriques s'obtiennent à la suite de la subdivision des prismes générés par des rayons d'extrusion partant de chaque nœud du maillage initial et allant dans la direction opposée des normales. Comme nous pouvons le voir à la figure 3.9, les trois nœuds originaux  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$  et  $\mathbf{p}_3$  s'extrudent par une distance  $\varepsilon$  produisant les nouveaux nœuds  $\mathbf{q}_1$ ,  $\mathbf{q}_2$ , et  $\mathbf{q}_3$ . Ces six points forment conséquemment un nouveau prisme pouvant se subdiviser en trois tétraèdres.

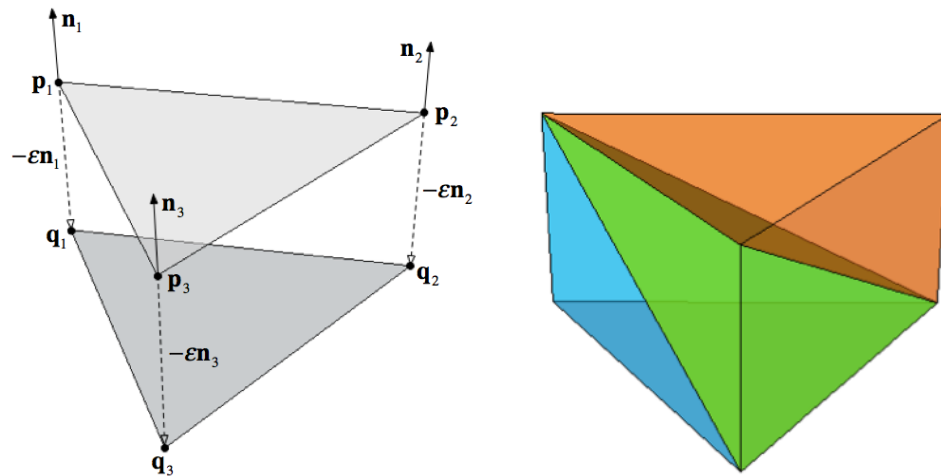


Figure 3.9 : Extrusion d'un élément triangulaire générant un prisme pouvant être divisé en trois tétraèdres

L'utilisation d'une distance  $\varepsilon$  trop grande peut toutefois engendrer des prismes non convexes, dépendant de la géométrie de départ tel qu'illustré à la figure 3.10. Il s'avère donc nécessaire d'établir une distance d'extrusion adaptée pour chaque nœud, dépendant de son voisinage. Ceci se fait itérativement en diminuant les rayons d'extrusion de 5%

lorsqu'une collision est détectée entre eux et les nouveaux prismes. Cette boucle se répète tant que le système contient des polygones en intersection. Notons que la détermination d'intersections se fait sur des prismes subdivisés en huit triangles et est optimisée par l'utilisation d'un arbre OCTREE tout comme à la section 3.3.2.

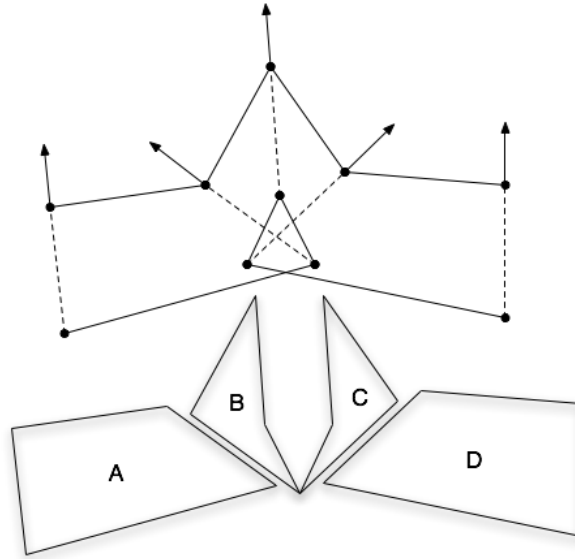


Figure 3.10 : Prismes dégénérés suite à une distance d'extrusion trop élevée

Ces dernières étapes produisent cependant une surface bruitée car le voisinage immédiat de chaque nœud peut contenir des valeurs  $\varepsilon$  bien différentes. Une étape de lissage des rayons d'extrusion en fonction de la moyenne des valeurs du voisinage est effectuée de manière à uniformiser la surface et, par conséquent, les tétraèdres. Toutefois, la valeur d'un  $\varepsilon$  interrogé n'augmente pas si la moyenne obtenue est supérieure puisque cela pourrait recréer des polygones en intersection. Bref, l'étape de lissage diminue globalement quelque peu l'épaisseur d'une couche.

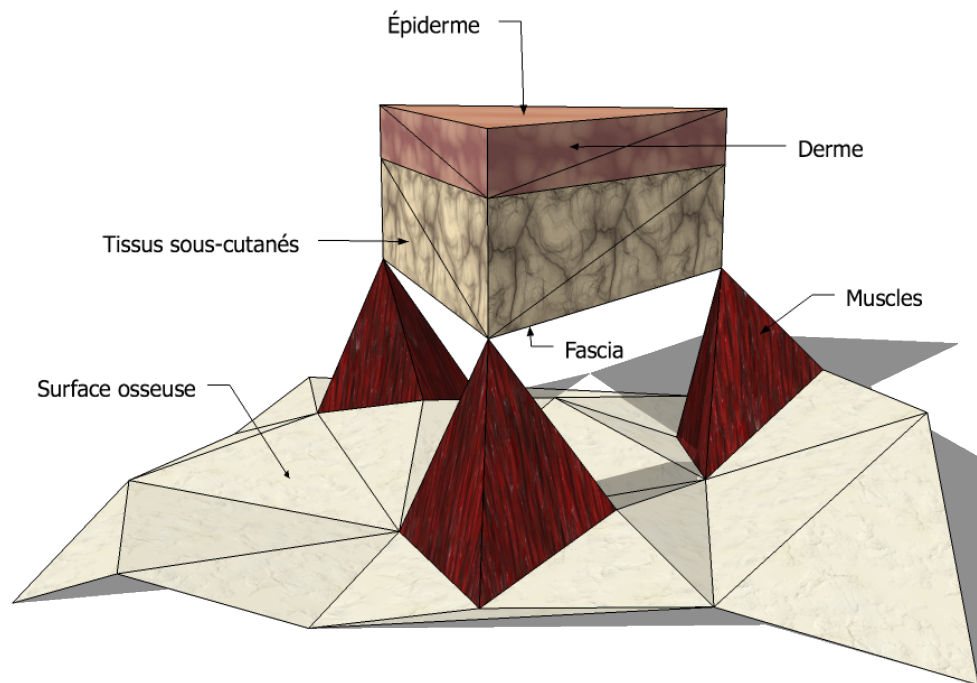


Figure 3.11 : Couches anatomiques qualitatives

Ce processus se répète une seconde fois sur la nouvelle surface triangulaire préalablement produite afin d'obtenir les deux premières couches de tétraèdres représentant respectivement le derme et les tissus sous-cutanés du tronc. Finalement, à chaque nœud de la deuxième surface générée, un tétraèdre dont trois nœuds font partie de la surface osseuse interne est créé. Plus précisément, les nœuds de l'interne constituent les nœuds les plus proches du nœud interrogé de la deuxième surface générée. Ces derniers tétraèdres représentent ainsi les muscles du tronc, tel qu'illustré à la figure 3.11.

Une application intitulée « Scolio Tissue » a été développée pour effectuer la génération des différentes couches anatomiques définissant le système particulaire. Elle permet de créer de multiples couches dont l'épaisseur initiale est spécifiée par l'utilisateur.

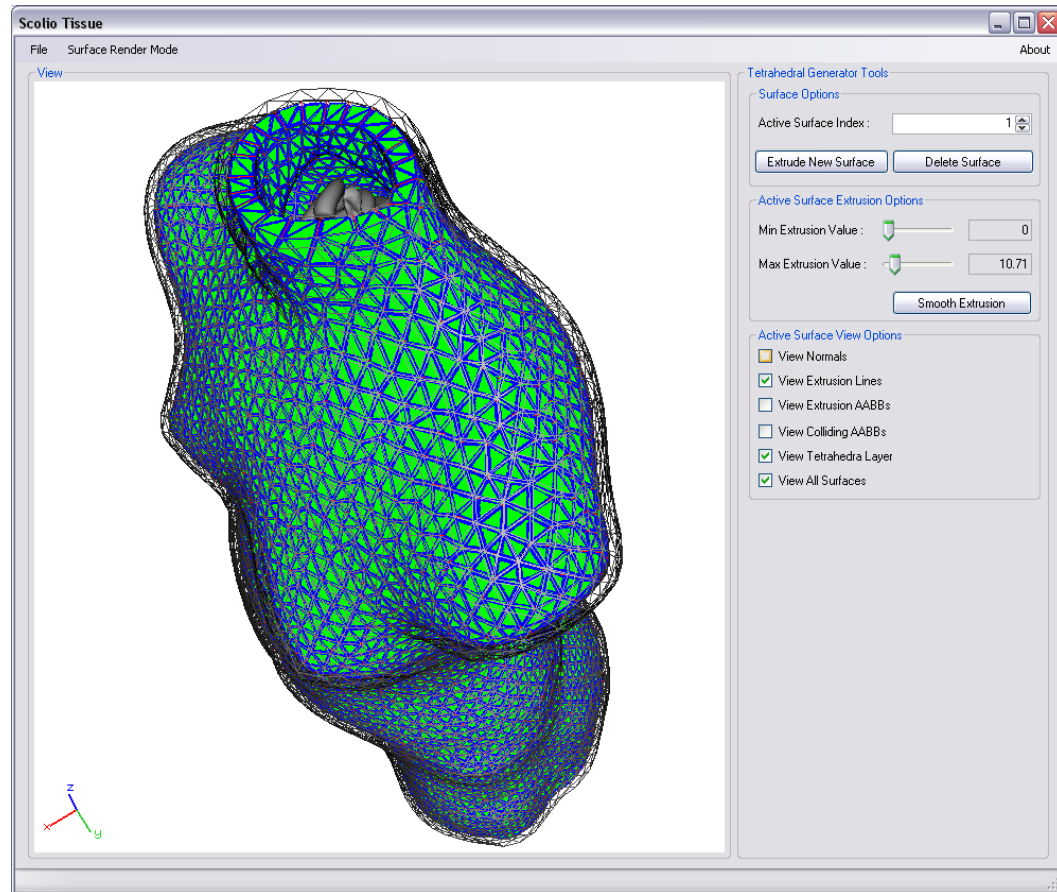


Figure 3.12 : Capture de l'application Scolio Tissue. Les tétraèdres visualisés représentent ceux associés à la deuxième couche

Notons que le maillage généré lors de cette étape n'est pas entièrement volumique et non plus, conforme aux sens des éléments finis. La solution proposée est tout de même suffisante pour un modèle de particules généralisé qui nous permet déjà d'obtenir des simulations réalistes. Cependant, il est possible de générer un maillage volumique plus personnalisé du patient à partir d'une acquisition IRM axiale du tronc (Courchesne, Guibault, Dompierre, & Cheriet, 2007). Étant obtenue en position couchée, un recalage de cette reconstruction doit toutefois se faire pour ramener le volume en position debout -- cela constitue présentement une recherche en cours au niveau doctoral.

### 3.3.4 Modélisation de la déformation des tissus mous du tronc

Suite à la génération des différentes couches anatomiques décomposées en tétraèdres, des contraintes physiques fondées sur l'énergie potentielle élastique, tel que vu à la section 1.2.5, sont appliquées pour définir le comportement dynamique des tissus mous du tronc. Plus précisément, des forces conservatrices sont établies permettant de préserver la distance entre deux nœuds, l'aire d'un triangle et le volume d'un tétraèdre. Les propriétés matérielles des différentes couches sont décrites par les constantes de rigidité des différentes contraintes physiques. On retrouve à l'Annexe A le développement mathématique plus complet pour chaque cas.

Nous exposons aussi une contrainte géométrique permettant de modéliser le comportement biphasique des tissus mous du tronc, aussi utile pour maintenir la stabilité du système lors de la simulation.

#### 3.3.4.1 Énergie potentielle de distance

Considérons le système de particules suivant :

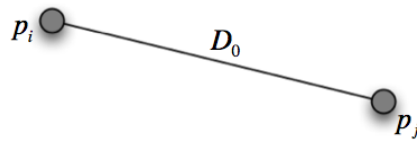


Figure 3.13 : Contrainte physique de distance entre deux particules

L'énergie potentielle associée à la variation de distance entre les particules  $p_i$  et  $p_j$  se définit par:

$$\begin{aligned}
E_D(p_i, p_j) &= \frac{1}{2} k_D \left( \frac{\Delta D}{D_0} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} k_D \left( \frac{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\| - D_0}{D_0} \right)^2, \quad \text{où } D_0 \neq 0
\end{aligned} \tag{3.1}$$

où  $k_D$  est la constante de rigidité de la contrainte de distance. Ainsi, les forces présentent comme objectif la préservation de  $D_0$ , soit la distance initiale au repos entre les particules  $i$  et  $j$ . Par l'équation 1.9, les forces conservatrices agissant sur  $p_i$  et  $p_j$  durant la simulation sont :

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_D^i &= -k_d C_D \frac{\partial C_D}{\partial \mathbf{x}_i} = k_d \left( \frac{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\| - D_0}{D_0^2} \right) \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \\
\mathbf{f}_D^j &= -k_d C_D \frac{\partial C_D}{\partial \mathbf{x}_j} = -k_d \left( \frac{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\| - D_0}{D_0^2} \right) \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Pour notre modèle, toute paire de particules composant une arête d'un tétraèdre généré se relie par une contrainte de distance. Cependant, les arêtes mitoyennes ne se joignent qu'une seule fois. Ainsi, les tétraèdres ne peuvent se séparer durant la simulation puisqu'ils se connectent les uns avec les autres par la contrainte. On veut ici maintenir l'interconnexion des tissus mous.

### 3.3.4.2 Énergie potentielle d'aire

Nous définissons aussi une énergie potentielle d'aire  $E_A$  qui considère les triplets de particules  $p_i$ ,  $p_j$  et  $p_k$  formant un triangle.

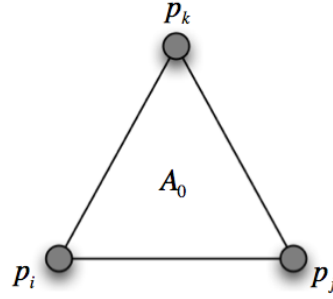


Figure 3.14 : Contrainte physique d'aire entre trois particules

L'énergie potentielle associée à la variation d'aire se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}
 E_A(p_i, p_j, p_k) &= \frac{1}{2} k_A \left( \frac{\Delta A}{A_0} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} k_A \left( \frac{\frac{1}{2} \|(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)\| - A_0}{A_0} \right)^2, \quad \text{où } A_0 \neq 0
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

où  $k_A$  est la constante de raideur de la contrainte d'aire. Cette énergie représente donc la différence entre l'aire initiale du triangle  $A_0$  et son aire actuelle. Par l'équation 1.9, nous obtenons, sous forme compacte, les forces conservatrices agissant sur  $p_i$ ,  $p_j$  et  $p_k$  :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_A^i &= -k_A C_A \frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_i} = -\frac{k_A C_A}{2A_0} \left( \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) \times \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right) \\
 \mathbf{f}_A^j &= -k_A C_A \frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_j} = -\frac{k_A C_A}{2A_0} \left( \frac{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \times \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right) \\
 \mathbf{f}_A^k &= -k_A C_A \frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_k} = -\frac{k_A C_A}{2A_0} \left( \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \times \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

avec,



$$\mathbf{u} = (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)$$

$$C_A = \frac{\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\| - A_0}{A_0} \quad (3.5)$$

La contrainte d'aire s'utilise pour contrôler davantage l'étirement sur les surfaces triangulaires frontalières de l'épaisseur générée, représentant plus particulièrement l'épiderme et le fascia (voir figure 3.11).

### 3.3.4.3 Énergie potentielle de volume

Une énergie potentielle de volume est aussi employée pour garantir l'incompressibilité des tissus mous. Considérons le système de particules ci-dessous :

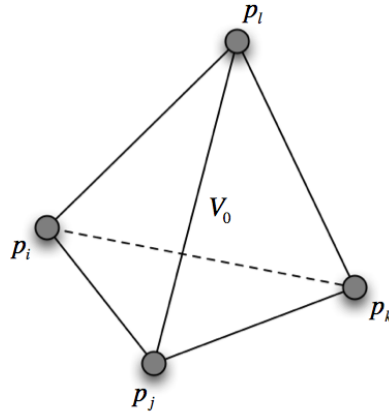


Figure 3.15 : Contrainte physique de volume entre quatre particules

L'énergie potentielle associée à la variation du volume du tétraèdre formé par les particules  $p_i$ ,  $p_j$ ,  $p_k$  et  $p_l$  est définie par :

$$\begin{aligned}
E_V(p_i, p_j, p_k, p_l) &= \frac{1}{2} k_V \left( \frac{\Delta V}{V_0} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} k_V \left( \frac{\frac{1}{6} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \cdot ((\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i)) - V_0}{V_0} \right)^2, \quad \text{où } V_0 \neq 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

où  $k_V$  est la constante de rigidité de la contrainte volumique. Une fois de plus, les forces conservatrices à appliquer sur les particules s'obtiennent par l'équation 1.9 :

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_V^i &= -k_V C_V \frac{\partial C_V}{\partial \mathbf{x}_i} = -k_V \frac{(\frac{1}{6} U - V_0)}{6V_0} \mathbf{w}_1 \\
\mathbf{f}_V^j &= -k_V C_V \frac{\partial C_V}{\partial \mathbf{x}_j} = -k_V \frac{(\frac{1}{6} U - V_0)}{6V_0} \mathbf{w}_2 \\
\mathbf{f}_V^k &= -k_V C_V \frac{\partial C_V}{\partial \mathbf{x}_k} = -k_V \frac{(\frac{1}{6} U - V_0)}{6V_0} \mathbf{w}_3 \\
\mathbf{f}_V^l &= -k_V C_V \frac{\partial C_V}{\partial \mathbf{x}_l} = -k_V \frac{(\frac{1}{6} U - V_0)}{6V_0} \mathbf{w}_4
\end{aligned} \tag{3.7}$$

avec,

$$\begin{aligned}
U &= (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \cdot ((\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i)) \\
\mathbf{w}_1 &= (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_k) - (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i) \\
\mathbf{w}_2 &= (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i) \\
\mathbf{w}_3 &= (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \\
\mathbf{w}_4 &= (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Il est à noter que le signe, lors du calcul du volume, représente une propriété importante de cette contrainte. Un changement de signe au niveau du volume calculé se produit lorsqu'il y a une inversion au niveau de la direction des arêtes formant le tétraèdre.

Essentiellement, cela permet de générer des forces pour reconstituer l'orientation originale du tétraèdre durant la simulation. De ce fait, tous les tétraèdres produits à la section 3.3.3 sont soumis à cette contrainte volumique.

Finalement, du fait de la normalisation des contraintes considérées, les constantes de rigidité  $k_D$ ,  $k_A$  et  $k_V$  sont toutes invariantes d'échelle. Ces constantes peuvent s'utiliser pour simuler une large variété de propriétés matérielles comme (Teschner, Heidelberger, Muller, & Gross, 2004) le démontrent. Ceci s'avère particulièrement utile pour la modélisation des différents tissus mous de notre modèle.

#### 3.3.4.4 Contrainte géométrique d'étirement

Nous avons aussi développé une contrainte géométrique d'étirement agissant principalement sur deux fronts. Premièrement, elle assure la stabilité de la simulation lors de l'utilisation d'un schéma par contrainte de position (section 1.3.5) -- ceci est expliqué davantage à la section 3.4. Deuxièmement, elle permet de modéliser le comportement biphasé de certains tissus mous comme le démontre (Provot, 1995). Cette contrainte géométrique agit sur une paire de particules, tout comme le système présenté à la figure 3.13, lorsque la distance courante s'avère plus grande qu'un certain seuil  $\alpha$  de la distance  $D_0$  au repos :

$$C_E(p_i, p_j) = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| > \alpha D_0 \quad (3.9)$$

Étant une contrainte géométrique, elle déplace donc les particules vers une configuration valide durant la simulation. Les déplacements à appliquer sur les particules  $p_i$  et  $p_j$ , selon l'équation 1.37, sont :

$$\begin{aligned}
&\text{si } \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| > \alpha D_0 \text{ alors,} \\
&\Delta \mathbf{x}_i = k'_E \frac{-w_i}{w_i + w_j} \left( \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| - \alpha D_0 \right) \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \\
&\Delta \mathbf{x}_j = k'_E \frac{w_j}{w_i + w_j} \left( \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| - \alpha D_0 \right) \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \\
&\text{sinon, } \Delta \mathbf{x}_i = \Delta \mathbf{x}_j = 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

où  $k'_E$  est la constante de rigidité, linéarisée par l'équation 1.39, de la contrainte géométrique d'étirement variant entre  $[0,1]$ . Cette constante permet de se rapprocher du comportement biphasique des tissus mous, tel qu'illustré à la figure ci-dessous :

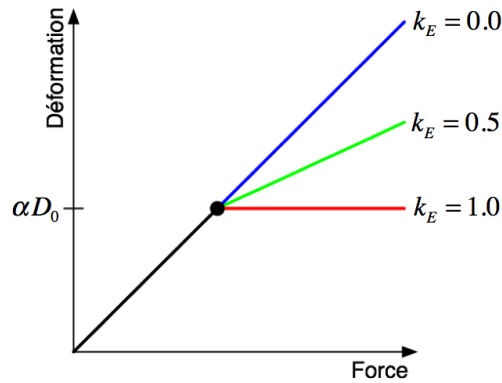


Figure 3.16 : Comportement biphasique par une contrainte géométrique d'étirement

La contrainte d'étirement permet de contrôler l'allongement maximal des tissus mous du tronc et s'applique à toute arête unique des couches tétraédriques générées.

### 3.3.5 Modélisation articulée des structures osseuses

On a développé un modèle rigide articulé de la structure osseuse sous-jacente permettant de transformer la configuration interne préopératoire vers la configuration postopératoire. Ainsi, chaque structure osseuse (vertèbres et côtes) du tronc se

représente par son système de coordonnées locales. Connaissant les ensembles de référentiels locaux représentant la configuration interne pré et postopératoire, il devient possible d'obtenir des référentiels intermédiaires entre ces deux états par interpolation, principe abondamment employé en animation. À chaque pas d'interpolation des structures osseuses, les déplacements des nœuds de la surface interne déforment ainsi les éléments des couches du système particulière connectés à celle-ci. Bref, les configurations intermédiaires des structures osseuses visent à guider les déformations des tissus mous jusqu'à la configuration externe postopératoire.

La configuration des structures osseuses se modélise par des transformations rigides provenant de la modélisation filaire de l'interne. Ces transformations représentent les changements d'orientation et de positions entre les systèmes de coordonnées locaux de vertèbres et le référentiel global du tronc situé au barycentre de la 5<sup>ème</sup> vertèbre lombaire. Les transformations des côtes de la cage thoracique se décrivent en fonction du changement de transformation obtenue entre le repère local d'une côte et celui de la vertèbre thoracique de même niveau.

Le référentiel local d'une vertèbre est défini selon le standard énoncé par le Scoliosis Research Society<sup>7</sup> (SRS). Ainsi, le barycentre d'une vertèbre se situe entre le centre des plateaux vertébraux supérieur et inférieur. L'axe Z est défini par ces deux mêmes repères anatomiques. L'axe Y est défini par les barycentres des paires de repères représentant les pédicules gauche et droit de la vertèbre. Enfin, le troisième axe est calculé par le produit vectoriel des deux premiers. Comme il est possible que les axes ne soient pas complètement perpendiculaires les uns vis-à-vis des autres, la procédure de Gram-Schmidt est utilisée pour assurer une base orthonormée.

---

<sup>7</sup> <http://www.srs.org>

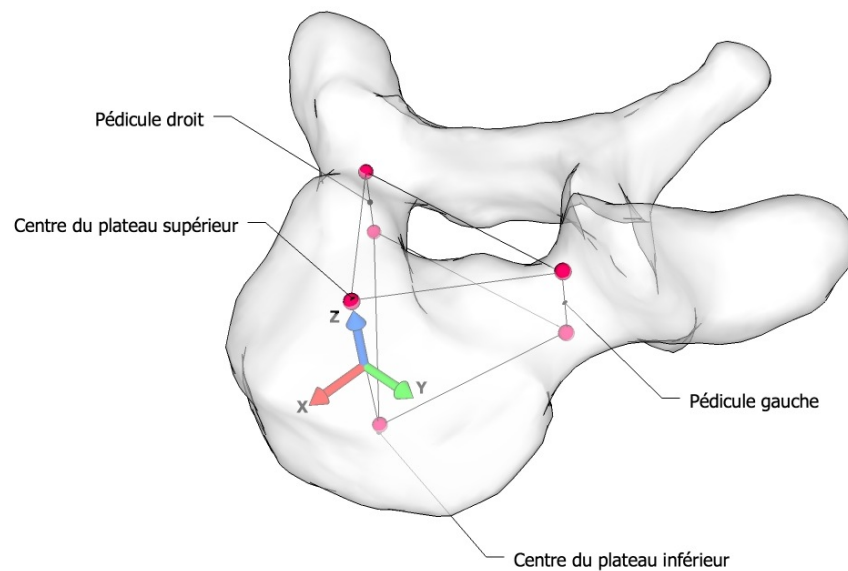


Figure 3.17 : Référentiel local d'une vertèbre

Pour une côte, le barycentre est défini comme étant la position du repère anatomique représentant sa tête. Son axe X s'obtient en traçant une droite reliant la tête au point limite de la côte. L'axe Y, quant à lui, s'obtient par la droite reliant le point milieu de la droite définissant l'axe X et le point milieu du corps de la côte. Puisque les repères anatomiques d'une côte ne sont pas toujours distribués de manière équidistante, nous utilisons une spline d'interpolation de Catmull-Rom avec une paramétrisation uniforme pour obtenir le point milieu du corps de la côte. Finalement, l'axe Z se calcule par un produit vectoriel. Pour les mêmes raisons qu'une vertèbre, il apparaît nécessaire d'assurer l'orthogonalité du référentiel local par l'algorithme de Gram-Schmidt.

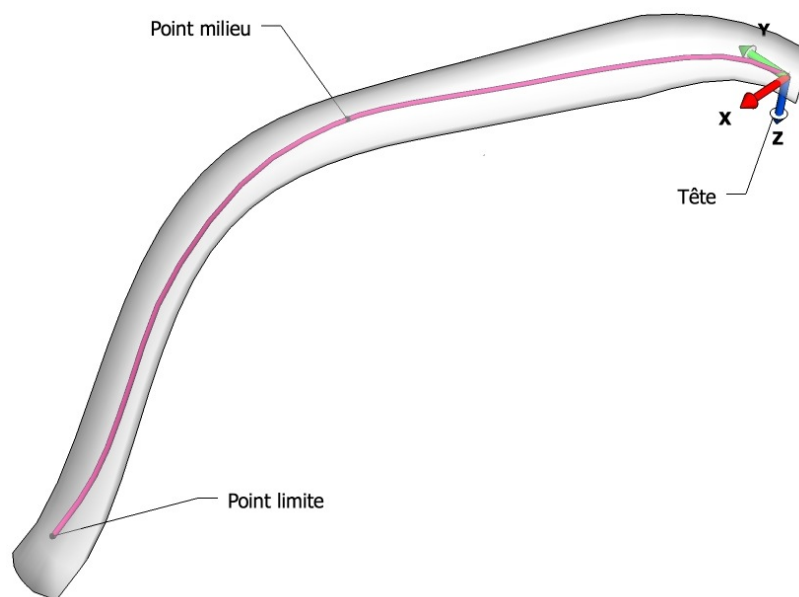


Figure 3.18 : Référentiel local d'une côte

Ainsi, pour le tronc complet, nous avons une série de repères locaux, tel qu'illustré à la figure 3.19.

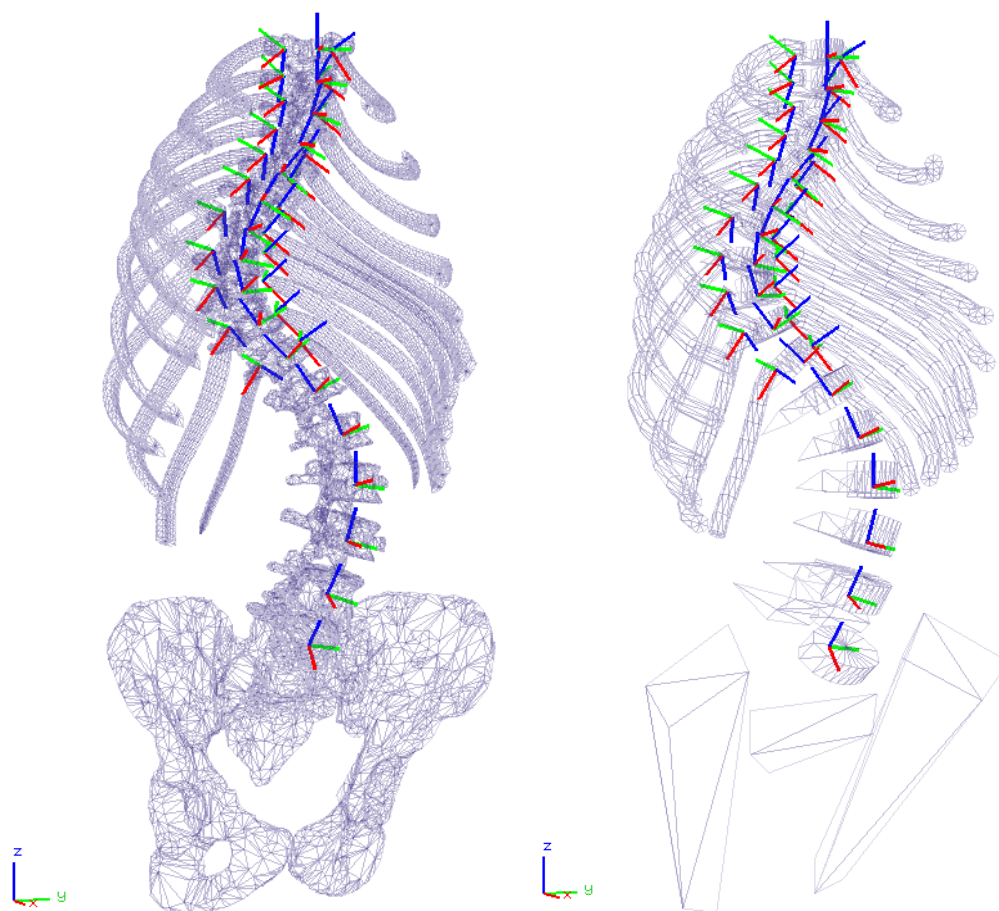


Figure 3.19 : Référentiels locaux des structures osseuses du tronc sous différentes résolutions

Il s'avère également possible d'avoir une représentation interne articulée sous différentes résolutions, grâce à la disponibilité de ces modèles surfaciques dans l'atlas générique des structures osseuses.

Pour compléter la cage thoracique, des points équidistants sont générés entre les points limites des paires de côtes thoraciques d'un même niveau -- ce, du fait que cette partie de la cage ne soit pas complètement rigide puisque le sternum se relie aux côtes par du cartilage costal. Ainsi, ces points se repositionnent toujours lors du déplacement des côtes durant l'interpolation du tronc.



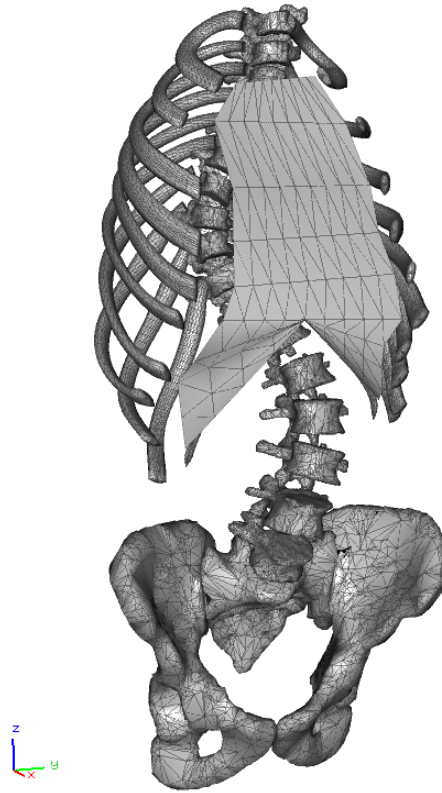


Figure 3.20 : Génération du sternum

Notons que le bassin représente la seule structure osseuse du tronc qui reste immobile durant l'interpolation.

Une transformation rigide se compose de la combinaison d'une rotation  $\mathbf{R}_{3,3}$  et d'une translation  $\mathbf{t}$ . Pour interpoler une transformation rigide vers une autre, il est nécessaire d'interpoler la rotation et la translation. L'interpolation de la translation peut s'effectuer directement par une interpolation linéaire mais, pour la rotation, il devient habituel d'utiliser une interpolation linéaire sphérique (SLERP) en représentant la rotation par un quaternion unitaire.

Les quaternions représentent l'œuvre du mathématicien irlandais Sir William Rowan Hamilton en 1843 alors que (Shoemake, 1985) les a introduit dans le domaine de

l'infographie. Tout comme les nombres complexes, les quaternions se composent d'une partie réelle et d'une partie imaginaire. La partie imaginaire généralement utilisée en infographie représente un vecteur de dimension 3. Un quaternion  $\tilde{\mathbf{q}}$  a donc l'aspect suivant :

$$\tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} s \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad \text{où } \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{H} \quad (3.11)$$

Puisque nous nous intéressons plus particulièrement aux quaternions unitaires, ces derniers résident sur la surface d'une hypersphère unitaire  $S^3$  centrée à l'origine. L'idée de base d'une SLERP consiste à interpoler en parcourant l'arc qui relie deux quaternions le long de la surface de l'hypersphère. Ainsi, nous avons l'expression générale suivante :

$$SLERP(\tilde{\mathbf{q}}_0, \tilde{\mathbf{q}}_1, u) = \frac{\sin((1-u)\omega)}{\sin \omega} \tilde{\mathbf{q}}_0 + \frac{\sin(u\omega)}{\sin \omega} \tilde{\mathbf{q}}_1 \quad (3.12)$$

où  $\omega$  représente l'angle entre les quaternions  $\tilde{\mathbf{q}}_0$  et  $\tilde{\mathbf{q}}_1$  et  $u$  le paramètre d'interpolation variant entre  $[0,1]$ . L'interpolation calcule ainsi la géodésique entre deux points de l'hypersphère. Cette technique s'utilise largement en animation pour interpoler des rotations de façon linéaire. L'article (Shoemake, 1985) offre une description plus détaillée, tant de la mathématique propre aux quaternions que de la conversion des différentes représentations d'une rotation.

### 3.4 Simulation d'une chirurgie

Après les différentes opérations préliminaires, nous nous considérons maintenant en mesure d'effectuer la simulation de l'effet de la chirurgie sur l'externe. Dans les pages suivantes, nous exposons les principaux algorithmes essentiels au simulateur développé

nous permettant de répondre à notre objectif de recherche. Dans un premier temps, nous présentons l'algorithme principal pour effectuer la simulation :

### ALGORITHME 3.1 : SIMULATION CHIRURGICALE

```

// Chargements des données préopératoires
(1) Chargement de l'interne (modèles filaires et surfaciques)
(2) Chargement de l'externe (couches anatomiques)
// Chargement des données postopératoires
(3) Chargement de l'interne (modèles filaires seulement)
// Initialisation des données :
// Génération des contraintes physiques  $C_{1,...,M}^P$  et géométriques  $C_{1,...,K}^G$ 
// à partir des couches anatomiques
(4) Initialiser  $D_0$ ,  $A_0$  et  $V_0$  des éléments physiques
(5) Initialiser les constantes de rigidité  $k_D$ ,  $k_A$  et  $k_V$  du système particulaire
(6) Initialiser les constantes de rigidité  $k_E$  et le paramètre de déformation maximale  $\alpha$ 
(7) Initialiser toute particule  $p_i$  du système  $p_{1,...,N}$  (soit  $\mathbf{x}_i$ ,  $\mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{f}_i$  et  $m_i$ )
// Boucle de simulation principale :
(8) Initialiser le paramètre d'interpolation de l'interne  $u = 0$ 
(9) Faire :
(10)  $u = u + \Delta u$ 
(11) InterpolationDesStructuresOsseuses(  $u$  )
(12) SimulationPhysiqueDesTissusMous(  $p_{1,...,N}, C_{1,...,M}^P, C_{1,...,K}^G$  )
(13) Mise à jour du modèle pour la visualisation
(14) Tant que  $u \neq 1$ 

(15) Extraction de la surface externe simulée

```

La simulation débute par le chargement des différents modèles préopératoires du tronc (lignes 1 et 2). Pour être en mesure d'effectuer l'interpolation des structures osseuses, le modèle filaire postopératoire est également chargé (ligne 3). Les éléments physiques du système particulaire sont créés à partir des différentes couches anatomiques présentées à la section 3.3.3. Pour les  $M$  contraintes physiques  $C_{1,...,M}^P$  et les  $K$  contraintes géométriques  $C_{1,...,K}^G$  du système, nous calculons à l'avance la distance  $D_0$ , l'aire  $A_0$  et le volume  $V_0$  à l'état initial, soit la configuration préopératoire (ligne 4). Les constantes de rigidité  $k_D$ ,  $k_A$ ,  $k_V$  et  $k_E$  du système ainsi que le paramètre de déformation  $\alpha$  pour chaque couche anatomique sont ensuite calibrés de manière uniforme (ligne 5 et 6). L'ajustement de ces constantes s'accomplit par inspection visuelle des déformations obtenues suite à l'essai de simulations effectuées sur un patient, le tout présenté au chapitre 4. On note ici que l'auto calibration du système fait présentement l'objet d'une thèse de doctorat et dépasse les objectifs associés à ce mémoire. On procède, par la suite, à l'initialisation des attributs des  $N$  particules du système  $p_{1,...,N}$  (ligne 7). Une valeur de densité  $\sigma$  spécifiée par l'utilisateur est employée pour calculer la masse  $m$  des particules. Plus précisément, la masse de chaque tétraèdre est calculée à partir de son volume, en valeur absolue, multiplié par cette densité. Chaque tétraèdre distribue ensuite sa masse uniformément parmi ses quatre sommets adjacents. Cette pratique s'avère standard dans la littérature des systèmes particuliers volumiques. Les particules rattachées aux structures osseuses se font cependant attribuer une masse nulle, signifiant une masse de quantité infinie puisqu'elles se déplacent uniquement lors de l'interpolation de l'interne. Finalement, la position des particules  $\mathbf{X}$  est définie par la position des nœuds du maillage puis la vitesse  $\mathbf{V}$  et la force nette  $\mathbf{f}$  sont initialisées à zéro. La boucle principale de simulation (lignes 9 à 14) qui interpole les structures osseuses, comme défini à la section 3.3.5, active, à chaque itération, la simulation physique des tissus mous afin de déformer l'apparence externe.

Détaillons maintenant la simulation physique des tissus :

**ALGORITHME 3.2 : SIMULATION PHYSIQUE DES TISSUS MOUS**

- (1) Calculer l'énergie potentielle totale courante  $E_t$  du système particulaire
- (2) Initialiser l'énergie potentielle totale au temps précédent  $E_{t-\Delta t} = 0$
- (3) Initialiser la variation d'énergie potentielle :  $\Delta E = |E_t - E_{t-\Delta t}|$   
// Minimisation de la variation d'énergie potentielle totale
- (4) Tant que  $\Delta E > \delta$  faire
  - (5) *InitialiserLesForcesAZero*(  $p_{1,\dots,N}$  )
  - (6) *AccumulationDesForces*(  $p_{1,\dots,N}, C_{1,\dots,M}^P, k_d$  )
  - (7) *SchemaIntegrationExplicite*(  $p_{1,\dots,N}, \mathbf{q}_{1,\dots,N}, \Delta t$  )
  - (8) Pour  $i = 1$  à *itération* faire
    - (9) *ProjectionDesContraintesGeometriques*(  $\mathbf{q}_{1,\dots,N}, C_{1,\dots,M}^G$  )  
// Mise à jour des particules
    - (10) Pour chaque particule  $p_i$  dans  $p_{1,\dots,N}$  faire
      - (11) Si particule projetée
      - (12)  $\mathbf{v}_i(t + \Delta t) = (\mathbf{q}_i - \mathbf{x}_i(t)) / \Delta t$
      - (13)  $\mathbf{x}_i(t + \Delta t) = \mathbf{q}_i$   
// Calcul de la variation d'énergie
      - (14)  $E_{t-\Delta t} = E_t$  ,  $E_t = 0$
      - (15) Pour chaque  $C_i^P$  dans  $C_{1,\dots,M}^P$  faire
        - (16)  $E_t = E_t + E(C_i^P)$
        - (17)  $\Delta E = |E_t - E_{t-\Delta t}|$
    - // Fin de la boucle (4)

La simulation débute par le calcul de l'énergie potentielle actuelle totale  $E_t$  du système particulière. Il s'agit ici d'accumuler l'énergie potentielle associée à la non-satisfaction de chaque contrainte physique décrivant notre système (voir lignes 15 et 16). L'énergie potentielle au temps précédent  $E_{t-\Delta t}$  est initialisée à zéro et la variation d'énergie du système (lignes 2 et 3) est calculée. Nous considérerons ainsi notre système particulière stable seulement lorsque la variation d'énergie du système entre deux itérations reste plus petite qu'un certain seuil  $\delta$ . Autrement dit, la boucle principale (lignes 4 à 17) vise à minimiser la variation de l'énergie potentielle totale du système. Pour ce faire, on emploie un schéma par contraintes de position pour contrôler le dépassement possible suite à l'utilisation d'un schéma d'intégration explicite. À chaque itération de la boucle, les forces nettes du système sont calculées en fonction de la nouvelle configuration des contraintes physiques (lignes 5 et 6). La variable  $k_d$  représente le coefficient d'amortissement variant entre  $[0,1]$  de la force d'amortissement telle que calculée par l'équation 1.14. Ensuite, les nouvelles positions temporaires des particules  $\mathbf{q}_{1,...,N}$  sont obtenues suite à l'utilisation d'un schéma d'intégration explicite choisi par l'utilisateur (ligne 7). Ici,  $\Delta t$  représente un pas de temps constant utilisé durant la simulation. En fonction des contraintes géométriques du système, les positions temporaires des particules sont modifiées (lignes 8 et 9). Une mise à jour de la position  $\mathbf{X}$  et de la vitesse  $\mathbf{V}$  d'une particule est effectuée lorsqu'une projection a lieu sur la position (lignes 10 à 13). La variation d'énergie potentielle du système (lignes 14 à 17) est finalement recalculée pour vérifier la nécessité d'effectuer une itération supplémentaire de cette boucle.

Pour effectuer la simulation de correction chirurgicale sur l'externe, nous avons développé une application intitulée « Scolio Dynamix », adaptée à nos besoins. Celle-ci permet plus spécifiquement de charger les différents modèles du tronc, de générer les différentes contraintes physiques et géométriques à partir des différentes couches anatomiques simplifiées, de spécifier les constantes de rigidité du modèle, d'interpoler

les structures internes du tronc et d'accomplir la simulation physique, telle que décrite ici, en laissant la possibilité à l'utilisateur de choisir parmi les différents schémas d'intégration explicite présentés au chapitre 1.

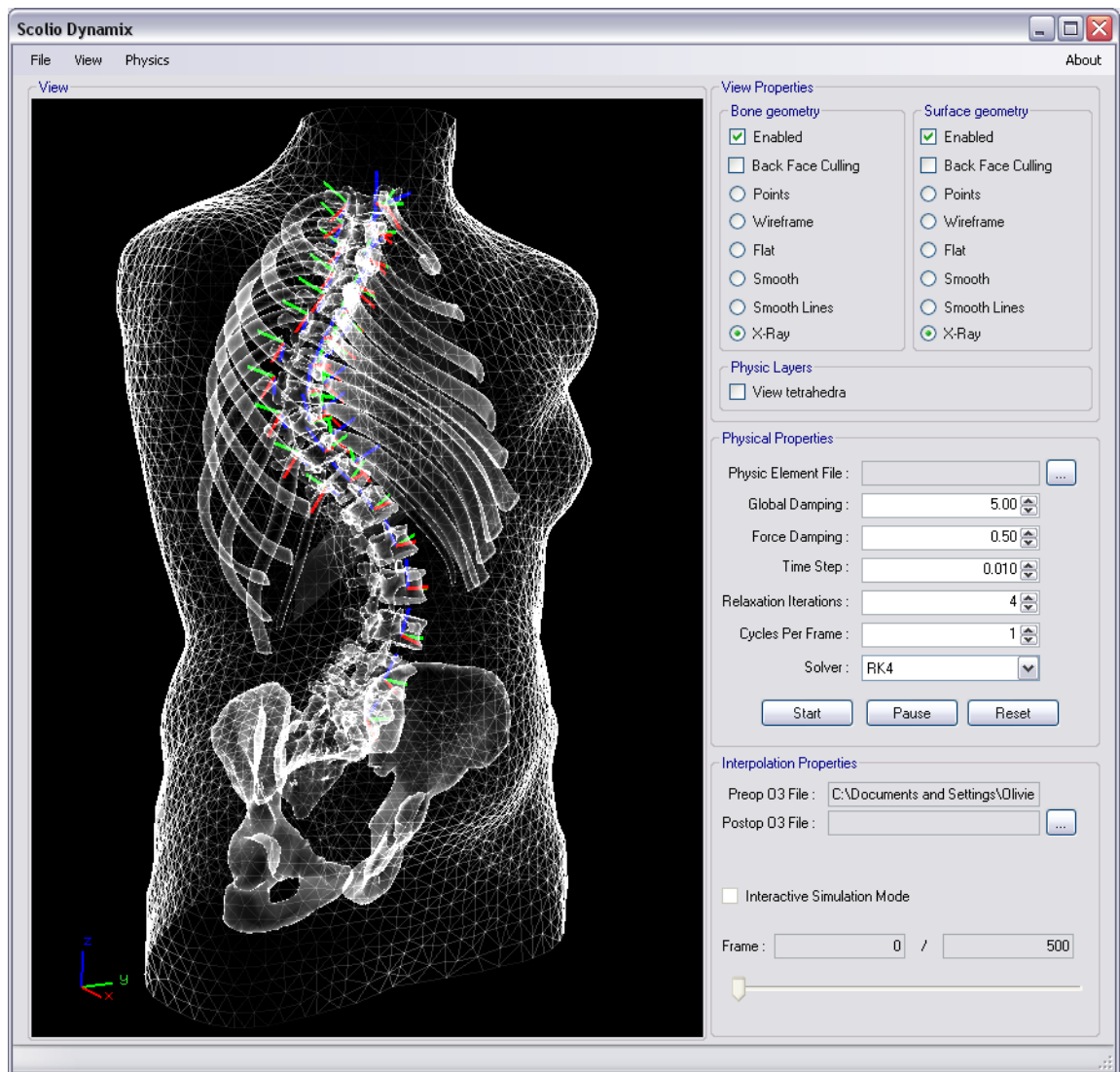


Figure 3.21 : Capture de l'application Scolio Dynamix

### 3.5 Méthodes de vérification

Présentons maintenant les méthodes de vérification des étapes importantes lors de la mise en œuvre de notre modèle numérique du tronc, pour simuler une chirurgie de la scoliose. En premier lieu, nous exposons le protocole d'expériences servant à vérifier les schémas d'intégration. Ensuite, nous décrivons les vérifications analytiques effectuées afin d'approuver les contraintes physiques et géométriques développées. Enfin, nous introduisons les indices cliniques provenant de sections transversales du tronc nous permettant d'évaluer quantitativement notre simulateur de chirurgie sur les données réelles d'un patient scoliotique.

#### 3.5.1 Vérification des schémas d'intégration

Pour vérifier et comparer les différents schémas d'intégration explicites implémentés, nous modélisons un système masse-ressort-amortisseur linéaire classique, tel qu'illustré à la figure 3.22, à solution analytique connue (Kreyszig, 1999).

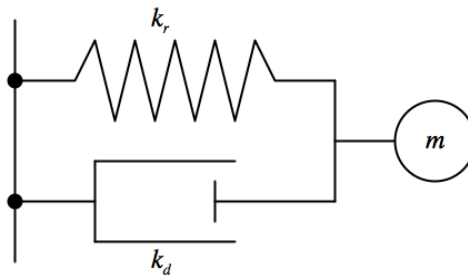


Figure 3.22 : Système masse-ressort-amortisseur linéaire où  $k_r$ ,  $k_d$  et  $m$  représentent respectivement la constante de raideur du ressort, le coefficient d'amortissement et la masse

Nous évaluons et classons ainsi les différents schémas en termes de performance en calcul, de précision et de stabilité lorsque le système est en mouvement périodique, pseudo-périodique, apériodique critique et apériodique. Pour ce faire, nous effectuons deux cents pas de simulation, pour chaque schéma, avec différents incréments de temps



variant entre une et trois cents millisecondes tout en augmentant graduellement l'incrément par une milliseconde. Nous fixons les paramètres de simulation de la façon suivante :

- La masse à 1 kg
- La constante de raideur du ressort  $k_r$  à 100 N/m
- La longueur au repos du ressort à 0 m
- La position initiale de la masse à 1 m
- La vitesse et l'accélération initiales de la masse à zéro

Le coefficient d'amortissement  $k_d$  s'obtient cependant selon le taux d'amortissement  $\zeta$  définissant le type de mouvement du système en utilisant l'équation 3.13.

$$k_d = 2\zeta\sqrt{k_r m} \quad (3.13)$$

Suite à l'exécution d'une simulation, l'erreur absolue moyenne est calculée par rapport aux positions prédites obtenues par un schéma d'intégration et aux positions réelles de la solution analytique. Pour chaque type de mouvement, les courbes d'erreur absolue moyenne sont générées, sous une échelle logarithmique décimale, pour chaque schéma d'intégration en fonction du pas de simulation employé. Ceci nous permet d'identifier le solveur répondant le mieux à nos besoins.

Les résultats de cette expérience se retrouvent au prochain chapitre.

### 3.5.2 Vérification des contraintes physiques et géométriques

La vérification des contraintes physiques et géométriques développées à la section 3.3.4 s'effectue aisément de manière analytique.

Considérant que les contraintes physiques génèrent des forces internes pour satisfaire ces dernières, il suffit simplement de s'assurer que la somme des forces résultantes sur chaque particule soit nulle.

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

Ici,  $n$  représente le nombre de particules considéré par la contrainte physique et  $\mathbf{f}$  la force interne appliquée sur une particule donnée.

La projection d'un ensemble de particules selon une contrainte géométrique signifie le déplacement de particules jusqu'à la satisfaction de la contrainte. Ainsi, il suffit de s'assurer que les déplacements effectués sur les particules soumises à une contrainte géométrique conservent la quantité de mouvements linéaires.

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad (3.15)$$

Ici,  $n$  représente le nombre de particules considérées par la contrainte géométrique,  $m$  représente la masse d'une particule et  $\Delta \mathbf{x}$  le déplacement appliqué sur une particule donnée selon la contrainte à respecter.

Au prochain chapitre, nous mettons en évidence la contribution apportée par chaque contrainte développée sur un cube subdivisé en tétraèdres soumis à la gravité et entrant en collision avec un plan. Pour ce faire, on calcule la variation de volume du cube à chaque trame de rendu. Une séquence de déformations de trois poutres, encastées définies selon différentes constantes de rigidité et soumises à la gravité, sera aussi présentée pour démontrer la possibilité de simuler différents types de matériau.

### 3.5.3 Évaluation de la simulation à partir d'indices cliniques sur la géométrie externe du tronc

Par la suite, nous évaluons le résultat d'une simulation sur la géométrie externe d'un patient en considérant des indices cliniques obtenus à partir de différentes sections transversales du tronc. Nous nous intéressons notamment à la rotation de la surface du dos (BSR), à la gibbosité et à la rotation du tronc (PAX), tel que défini par (Jaremko et al., 2002). (Miled, 2007; Shawafaty, 2007) offrent une description exhaustive des algorithmes utilisés afin d'extraire ces indices à partir d'une section transversale.

L'indice BSR se définit comme l'angle entre la tangente au profil du dos, soit la droite joignant les deux bosses détectées sur la surface du dos et l'axe des X du référentiel du patient.

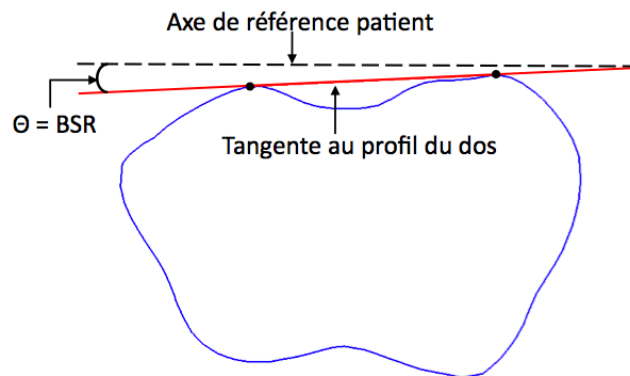


Figure 3.23 : Calcul de l'indice BSR

La gibbosité, quant à elle, se définit par la différence entre les deux hauteurs des bosses du dos. La hauteur d'une bosse se calcule à partir de sa projection orthogonale sur l'axe des X du référentiel patient, tel qu'illustré à la figure 3.24.

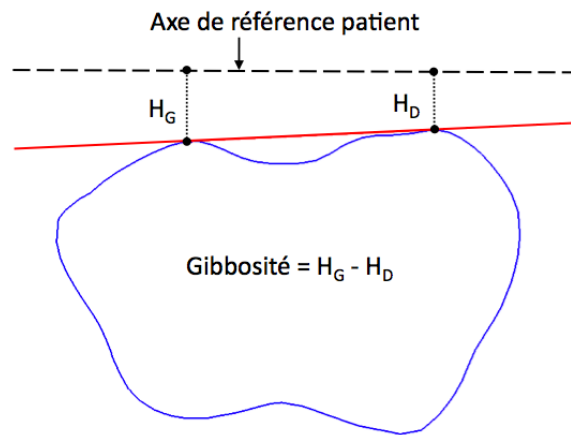


Figure 3.24 : Calcul de la gibbosité

L'indice PAX se calcule comme l'angle entre l'axe principal majeur de la section, obtenu suite à une analyse en composantes principales, avec l'axe des X du référentiel patient. Contrairement à l'indice BSR qui tient compte seulement de la rotation du dos, cet indice considère la rotation de toute la section dans son plan.

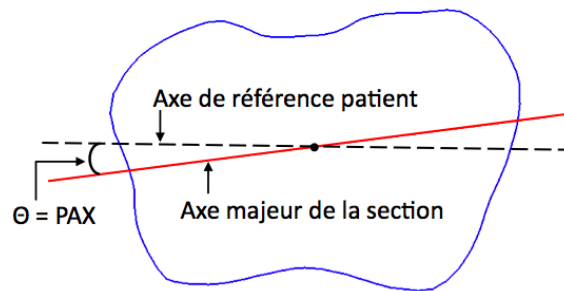


Figure 3.25 : Calcul de l'indice PAX

Pour chaque niveau vertébral entre la 3<sup>ème</sup> vertèbre thoracique et la 5<sup>ème</sup> vertèbre lombaire, nous extrayons la section transversale se situant au centre des plateaux vertébraux inférieur et supérieur. À partir de la géométrie externe postopératoire acquise et simulée, nous générons les courbes propres aux indices cliniques et compilons l'erreur absolue moyenne.

Pour automatiser cette tâche, nous avons développé une dernière application, intitulée « Scolio Sections », afin d'extraire les indices des sections transversales de la surface externe. Cet outil autorise notamment la sauvegarde des indices cliniques de plusieurs sections pour ensuite permettre de générer des courbes à partir du logiciel MatLab.

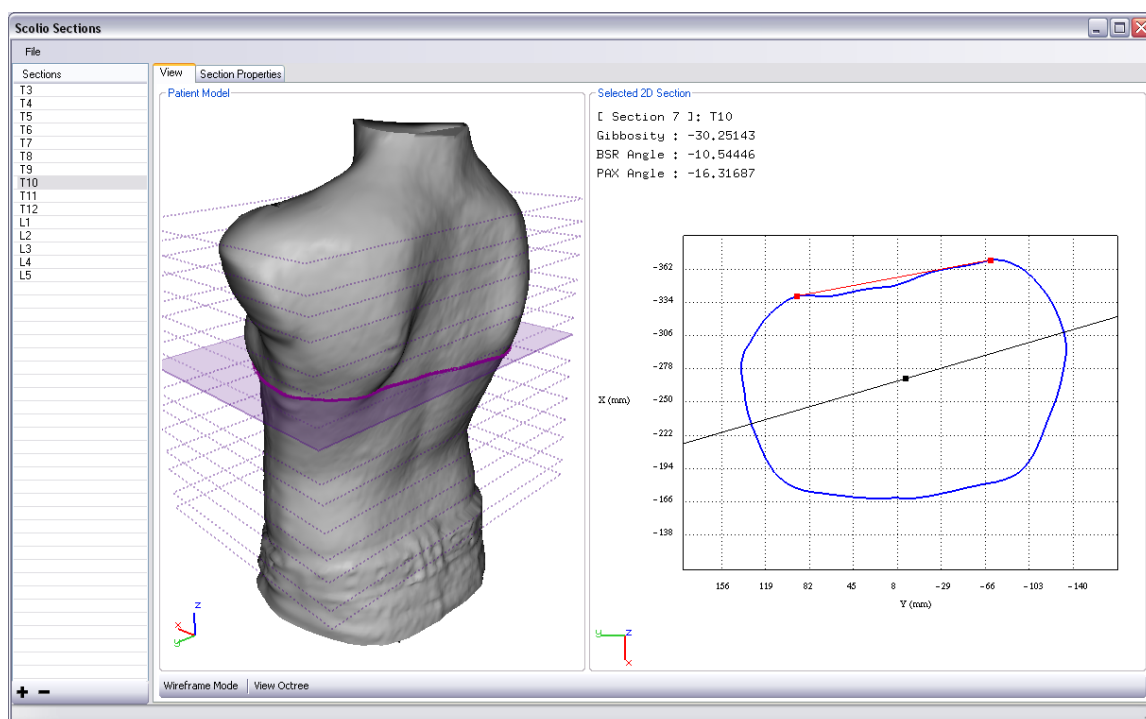


Figure 3.26 : Capture de l'application Scolio Sections

## CHAPITRE 4 – RÉSULTATS ET DISCUSSION

Dans ce chapitre, nous mettons en évidence les résultats des méthodes de vérification et de validation exposées à la section 3.5. En premier lieu, nous affichons les résultats de l'expérience pour la vérification des schémas d'intégration explicites. Nous poursuivons avec une démonstration de la contribution apportée par les contraintes physiques et géométriques développées lors de la méthodologie. Ensuite, les résultats d'une simulation de chirurgie sur un patient sont exposés pour finalement terminer avec une discussion générale permettant de les mettre en relief.

Toutes les expérimentations sont effectuées grâce aux différentes applications développées au cours de ce projet de maîtrise. Le développement rapide de ces outils devient possible uniquement suite à la mise en œuvre d'un cadre d'application robuste présenté brièvement à l'annexe B.

### 4.1 Vérification des schémas d'intégration

Dans cette section, nous évaluons d'abord le schéma d'intégration répondant le mieux à nos besoins en terme de stabilité, de performance et de précision. Par la suite, nous présentons les résultats de l'expérience définie à la section 3.5.1.

L'équation différentielle ordinaire modélisant le comportement du système idéal illustré à la figure 3.22, suite à l'utilisation de la deuxième loi de Newton, se formule ainsi :

$$\ddot{x}(t) + \frac{k_d}{m} \dot{x}(t) + \frac{k_r}{m} x(t) = 0 \quad (4.1)$$

La pulsation propre  $\omega_0$  du système est décrite par :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_r}{m}} \quad (4.2)$$

Le taux d'amortissement  $\zeta$ , caractérisant le type de mouvement du système, est donné par :

$$\zeta = \frac{k_d}{2\sqrt{k_r m}} \quad (4.3)$$

Par les équations 4.2 et 4.3, l'équation 4.1 devient :

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (4.4)$$

Rappelons que la solution générale  $x(t)$  de l'équation 4.4 renferme une combinaison linéaire de deux solutions linéairement indépendantes tel que :

$$x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) \quad (4.5)$$

La recherche des solutions  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  se fait en considérant la fonction  $x(t) = e^{\lambda t}$  et en reportant cette fonction dans l'équation 4.4. Nous obtenons ainsi l'équation caractéristique associée à l'équation 4.4:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\zeta\omega_0\lambda + \omega_0^2 &= 0 \\ \lambda_{\pm} &= \omega_0 \left( -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Les racines (réelles ou complexes conjuguées)  $\lambda_+$  et  $\lambda_-$  permettent de déterminer les deux solutions linéairement indépendantes pour finalement trouver la solution analytique générale de  $x(t)$  :

$$x(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t} \quad (4.7)$$

Le forme de  $x(t)$  dépend donc de la pulsation propre et du taux d'amortissement employés. Les constantes  $A$  et  $B$  sont déterminées grâce aux conditions initiales  $x(t_0)$  et  $\dot{x}(t_0)$  du système.

Lorsque  $0 \leq \zeta < 1$ , il existe deux racines complexes conjuguées et le système se dit sous-amorti. L'équation de la solution analytique du système devient (Kreyszig, 1999) :

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)), \quad \text{d'où } \beta = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (4.8)$$

avec,

$$\begin{aligned} A &= x(t_0) \\ B &= \frac{1}{\beta} (\zeta\omega_0 x(t_0) + \dot{x}(t_0)) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Lorsque le taux d'amortissement  $\zeta$  du système est nul, la solution analytique a la forme d'une sinusoïde. Les courbes de l'erreur absolue moyenne par rapport à la solution analytique d'un tel système en mouvement périodique sont affichées à la figure 4.1. Rappelons que la constante d'amortissement  $k_d$  se calcule par l'équation 3.13.

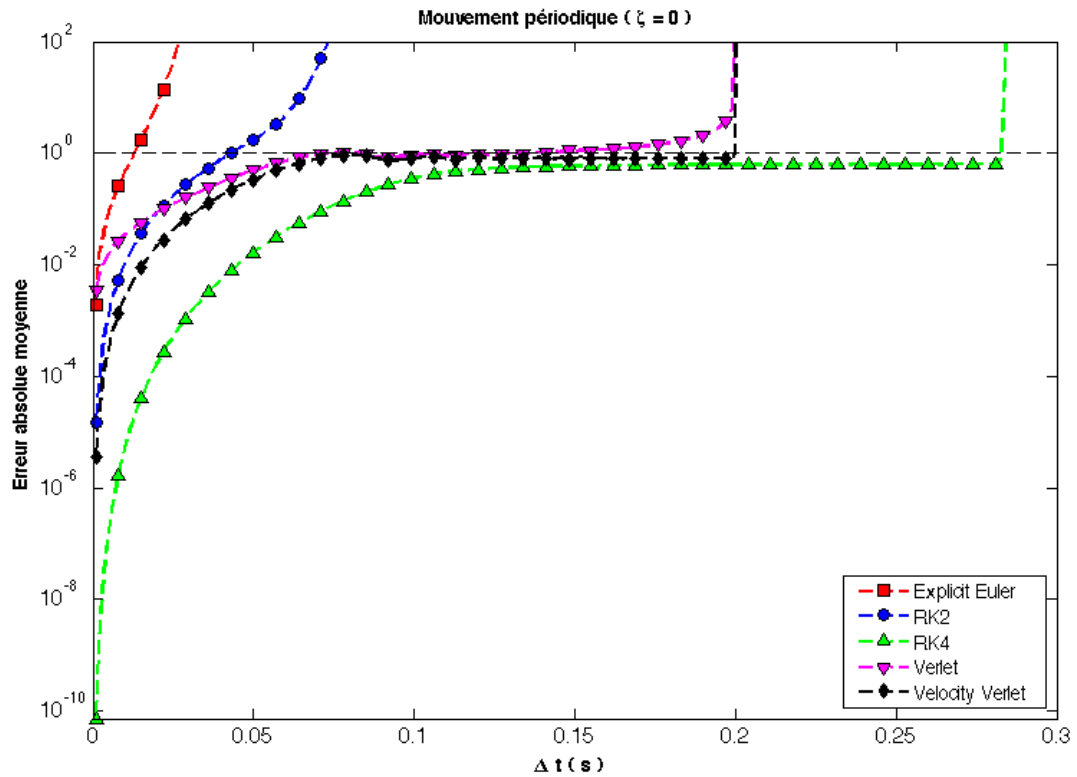


Figure 4.1 : Évaluation des schémas d'intégration pour un système en mouvement périodique



Les courbes de la figure 4.1 présentent l'erreur absolue moyenne de deux cents pas de simulation pour un pas de temps constant entre les positions prédites d'un schéma d'intégration. Ici on utilise l'équation 4.1 et la solution analytique d'un système sous-amorti, donnée par l'équation 4.8.

On remarque que le premier schéma devenant instable (ou ayant une erreur absolue moyenne supérieure à  $10^0$ ) lorsque nous augmentons le pas de simulation est celui d'Euler, suivi de RK2, Verlet, Velocity Verlet et finalement RK4. Les pas maximaux de simulation pour chaque schéma se retrouvent au tableau 4.1.

Tableau 4.1 : Pas maximal de simulation des schémas d'intégration pour un système en mouvement périodique

	<b>Pas de simulation maximal (ms)</b>
<b>Euler</b>	13
<b>RK2</b>	43
<b>RK4</b>	283
<b>Verlet</b>	73
<b>Velocity Verlet</b>	201

L'expérience est répétée pour un système en mouvement pseudo-périodique en fixant le taux d'amortissement  $\zeta$  à 0.5. Dans ce cas, la solution analytique est produite d'une exponentielle décroissante et d'une sinusoïde.

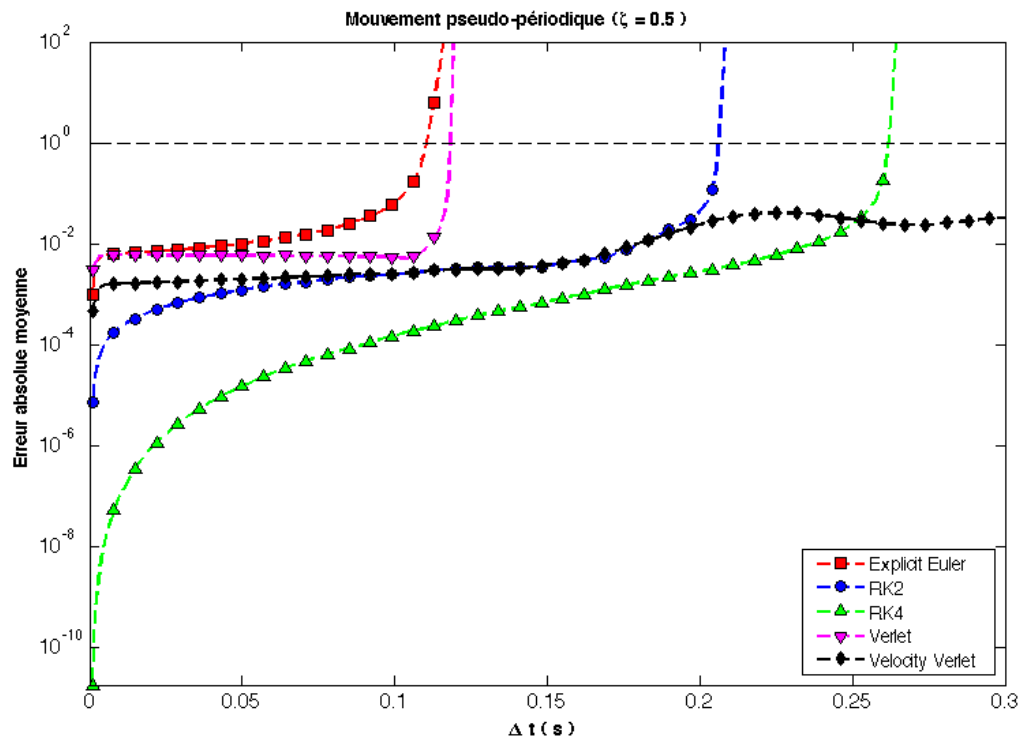


Figure 4.2 : Évaluation des schémas d'intégration pour un système en mouvement pseudo-périodique

Le premier schéma à montrer quelque instabilité est, une fois de plus, celui d'Euler suivi de Verlet, RK2 et RK4. Cependant, nous remarquons que Velocity Verlet demeure stable pour un pas de simulation allant au-delà de 0.3 seconde. Les pas maximaux de simulation sont donnés au tableau 4.2 pour un système en mouvement pseudo-périodique.

Tableau 4.2 : Pas maximal de simulation des schémas d'intégration pour un système en mouvement pseudo-périodique

	Pas maximal de simulation (ms)
<b>Euler</b>	111
<b>RK2</b>	207
<b>RK4</b>	262
<b>Verlet</b>	119
<b>Velocity Verlet</b>	357

Lorsque le taux d'amortissement égale 1, il existe une racine double réelle négative. Dans ce cas particulier, le système se retrouve en mouvement apériodique critique et la solution analytique du système devient (Kreyszig, 1999) :

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t} \quad (4.10)$$

Avec,

$$\begin{aligned} A &= x(t_0) \\ B &= \dot{x}(t_0) + \omega_0 x(t_0) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Cela représente la solution optimale à un problème d'oscillations amorties. La figure 4.3 illustre l'évaluation des schémas d'intégration pour ce type de mouvement.

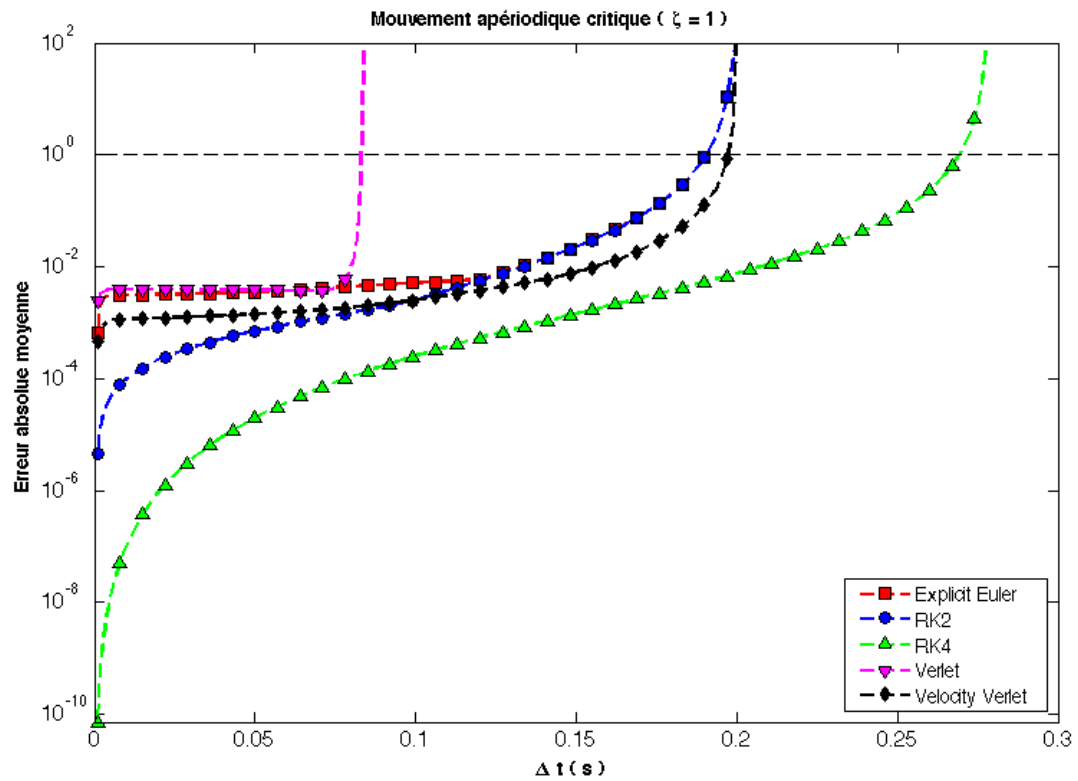


Figure 4.3 : Évaluation des schémas d'intégration explicite pour un système en mouvement aperiodique critique

Notons ici que le premier schéma à présenter une instabilité est celui de Verlet suivi de Euler/RK2 (égalité), Velocity Verlet puis RK4.

Tableau 4.3 : Pas maximal de simulation des schémas d'intégration pour un système en mouvement aperiodique critique

	Pas maximal de simulation (ms)
<b>Euler</b>	191
<b>RK2</b>	191
<b>RK4</b>	270
<b>Verlet</b>	84
<b>Velocity Verlet</b>	198

Finalement lorsque le taux d'amortissement  $\zeta$  est supérieur à 1, il existe deux racines réelles nécessairement négatives. La solution analytique du système s'obtient par l'équation 4.7 et les constantes se calculent par (Kreyszig, 1999) :

$$\begin{aligned} A &= x(t_0) + \frac{\lambda_+ x(t_0) - \dot{x}(t_0)}{\lambda_- - \lambda_+} \\ B &= -\frac{\lambda_+ x(t_0) - \dot{x}(t_0)}{\lambda_- - \lambda_+} \end{aligned} \quad (4.12)$$

La forme de la solution comporte simplement une exponentielle décroissante sans oscillation. Les résultats pour un système en mouvement apériodique, lorsque le taux d'amortissement égale 1.5, se retrouvent à la figure 4.4.

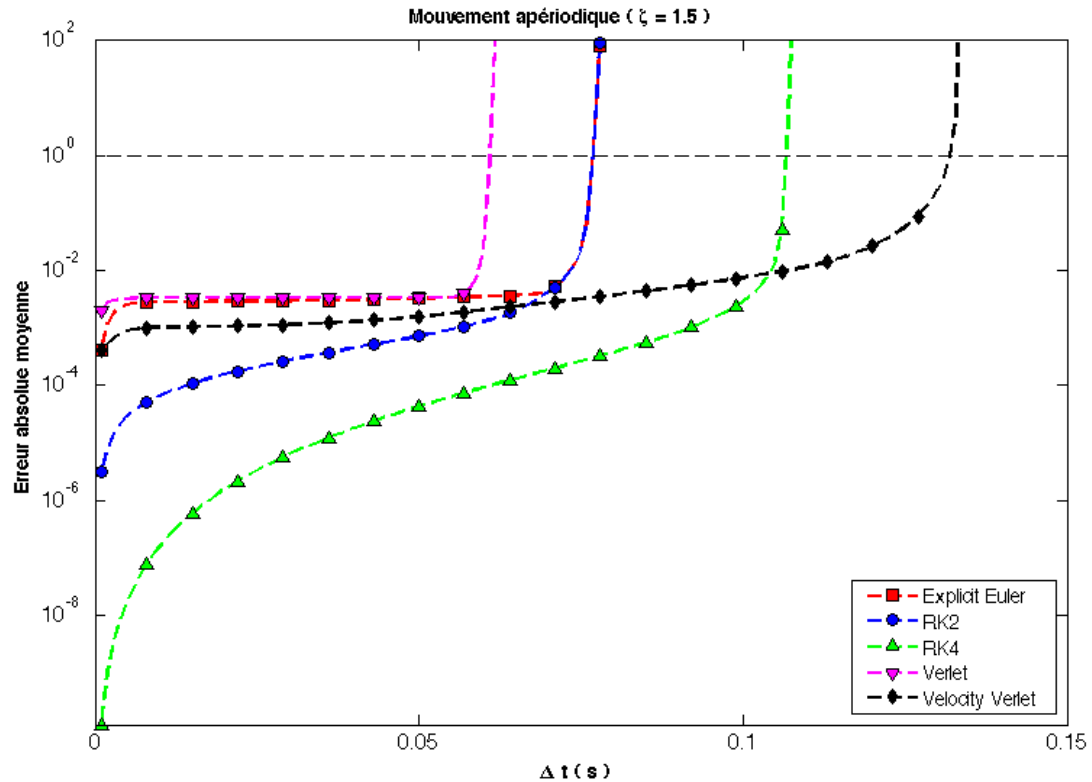


Figure 4.4 : Évaluation des schémas d'intégration explicite lors d'un système en mouvement apériodique

En ordre croissant de stabilité pour un système sur-amorti, nous trouvons : Verlet, Euler/RK2 (égalité), RK4 et Velocity Verlet. Par ailleurs, on observe qu'en général tous les schémas deviennent instables plus rapidement. Le tableau 4.4 présente les pas maximaux pour ce type de mouvement.

Tableau 4.4 : Pas maximal de simulation des schémas d'intégration pour un système en mouvement apériodique

	<b>Pas maximal de simulation (ms)</b>
<b>Euler</b>	77
<b>RK2</b>	77
<b>RK4</b>	107
<b>Verlet</b>	62
<b>Velocity Verlet</b>	133

Un résumé de l'étude de stabilité est présenté au tableau 4.5. Pour chaque schéma d'intégration, nous attribuons une valeur (1 étant la meilleure) spécifiant son classement selon le type de mouvement du système simulé.

Pour classer les schémas d'intégration en terme de performance, nous considérons le nombre d'évaluations de la dérivée nécessaire au calcul. Dépendant de la complexité du système physique, la détermination de l'accélération peut sembler gourmande en temps de calcul et influence grandement les performances générales de la simulation.

En dernier lieu, pour classer les schémas d'intégration en terme de précision, nous avons décidé de retenir l'erreur absolue moyenne de départ (lorsque le pas de simulation se situe à 0.001 seconde).

Tableau 4.5 : Évaluation des schémas d'intégration explicites

	<b>Euler</b>	<b>RK2</b>	<b>RK4</b>	<b>Verlet</b>	<b>Velocity Verlet</b>
<b>Stabilité (périodique)</b>	5	4	1	3	2
<b>Stabilité (pseudo-périodique)</b>	5	3	2	4	1
<b>Stabilité (apériodique critique)</b>	3	3	1	4	2
<b>Stabilité (apériodique)</b>	3	3	2	4	1
<b>Performance en calcul</b>	1	2	4	1	2
<b>Précision</b>	5	2	1	4	3
<b>Total</b>	<b>22</b>	<b>17</b>	<b>11</b>	<b>20</b>	<b>11</b>

Les comportements observés des schémas d'intégration implémentés suite à cette étude s'accordent avec ceux rencontrés dans la littérature. Le pire schéma d'intégration demeure certainement celui d'Euler et explique la raison pour laquelle il est peu considéré en simulation. Ensuite, nous avons le schéma de Verlet lequel, en présence d'amortissement dans le système, devient très instable (notons sa stabilité quasi similaire à Velocity Verlet pour un système sans amortissement à la figure 4.1). Ceci s'explique aisément considérant que la vitesse, déterminante pour calculer l'amortissement, demeure toujours un pas de temps en arrière et induit ainsi une erreur récurrente lors de l'évaluation de l'accélération. Nous observons aussi le gain apporté au niveau de la précision, par utilisation de schémas d'intégration d'ordre supérieur (particulièrement RK4).

Au tableau 4.5, la somme du pointage pour chaque schéma d'intégration fait essentiellement ressortir RK4 et Velocity Verlet. Le choix du schéma constitue ainsi un compromis entre la précision et la performance en calcul. Dans notre cas, nous mettons plutôt l'accent sur des simulations interactives au détriment de la précision et nous choisissons donc d'utiliser le schéma de Velocity Verlet. D'autant plus que ce schéma se comporte avec beaucoup de stabilité pour des systèmes en mouvement pseudo-

périodique, systèmes rencontrés en simulation de tissus mous dans notre simulateur. Cependant, les limites théoriques du pas de simulation demeurent difficilement quantifiables en raison de la complexité du modèle, de la variabilité des contraintes et des détails de mise en œuvre (i.e. précision d'un nombre réel). L'attribution du pas de temps s'effectue plutôt par inspection visuelle en augmentant graduellement ce dernier lorsqu'il ne provoque pas d'oscillations irrégulières qui accroissent irréversiblement l'énergie du système.

#### **4.2 Contributions apportées par les contraintes physiques et géométriques**

Pour évaluer les contributions apportées par les contraintes développées, nous choisissons de simuler un cube, composé de 729 particules et subdivisé en 2,560 tétraèdres soumis à la gravité et entrant en collision avec un plan. Les collisions causent souvent des problèmes en simulation puisqu'elles engendrent des forces élevées et soudaines pour changer la vitesse du modèle. Ceci révèle, du même coup, la plupart des problèmes liés à la stabilité. Les figures 4.5, 4.6 et 4.7 illustrent respectivement les résultats de ces simulations obtenus au moment de l'impact par l'ajout sur le cube des différentes contraintes physiques de distance, d'aire et de volume.

Pour la première simulation (figure 4.5), nous considérons seulement 3,672 contraintes de distance provenant de toutes les arêtes uniques du cube. Pour la seconde simulation (figure 4.6), nous ajoutons 5,504 contraintes liées à l'aire des triangles formant les tétraèdres du cube. Finalement, pour la simulation de la figure 4.7, nous additionnons 2,560 contraintes de volume au cube. Les constantes de rigidité sont attribuées de manière uniforme comme suit :  $k_d = k_a = k_v = 500N$  (on rappelle que les constantes de rigidité sont invariantes d'échelle).



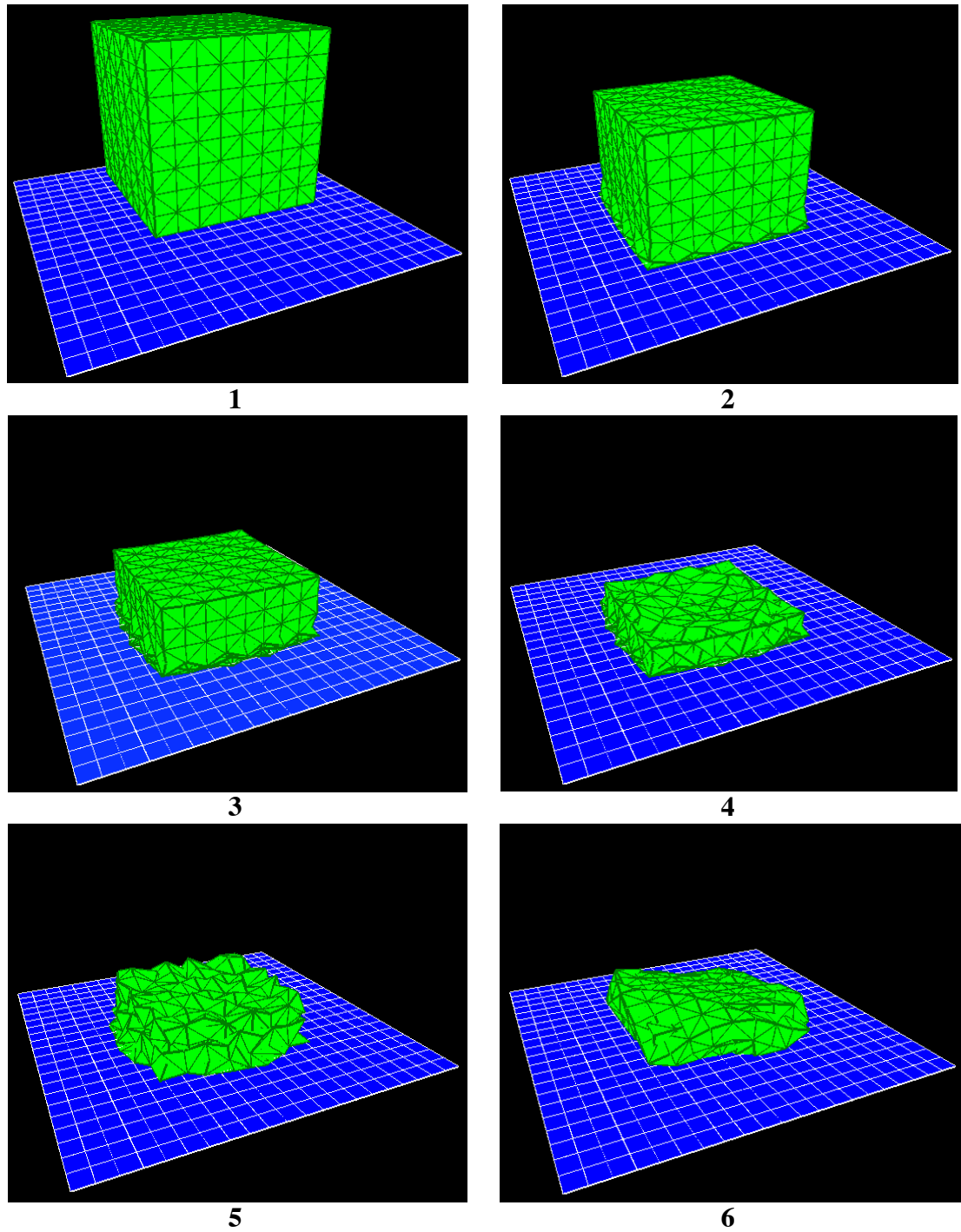


Figure 4.5 : Séquence de déformation d'un cube considérant uniquement des contraintes physiques de distance

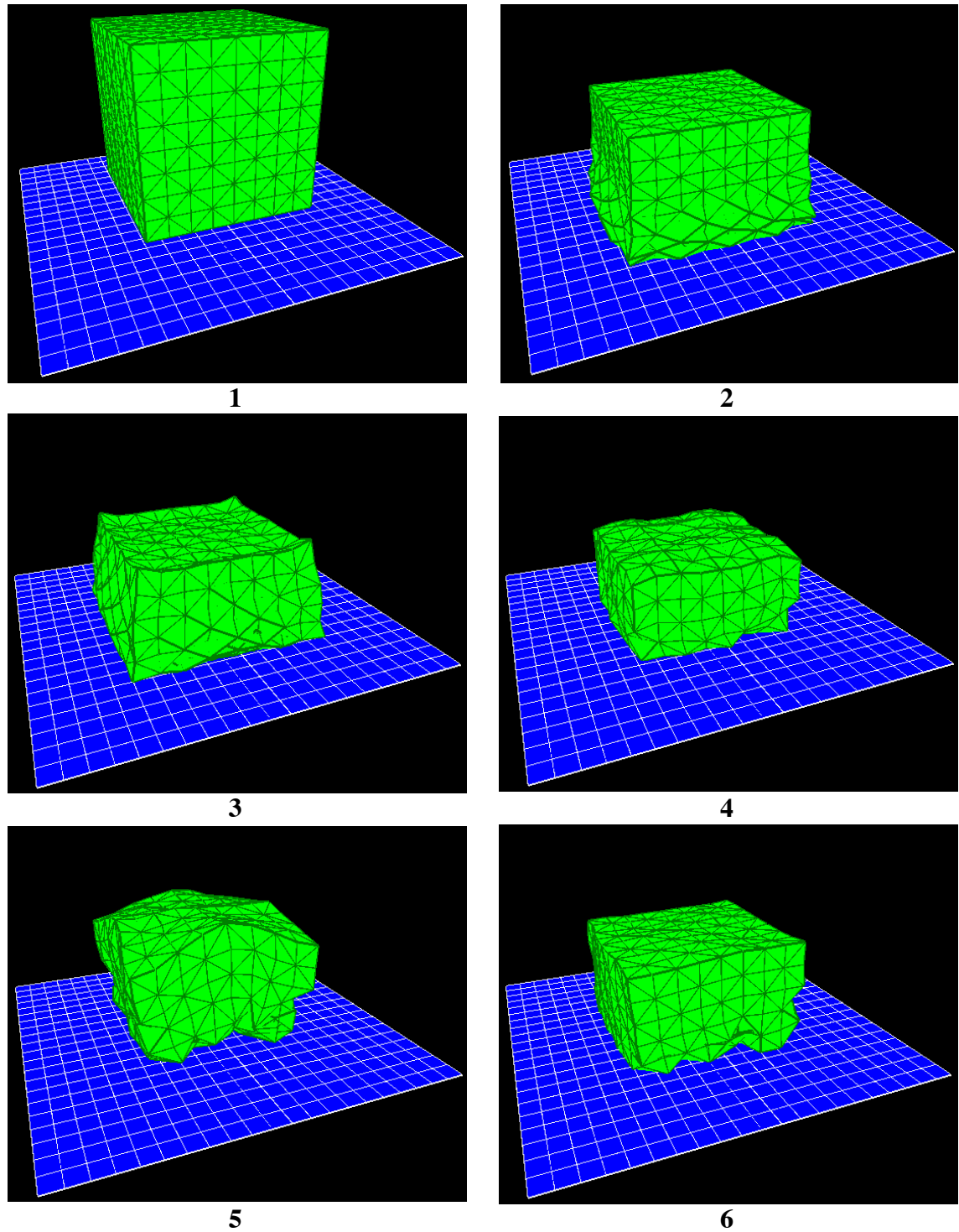


Figure 4.6 : Séquence de déformation d'un cube considérant des contraintes physiques de distance et d'aire

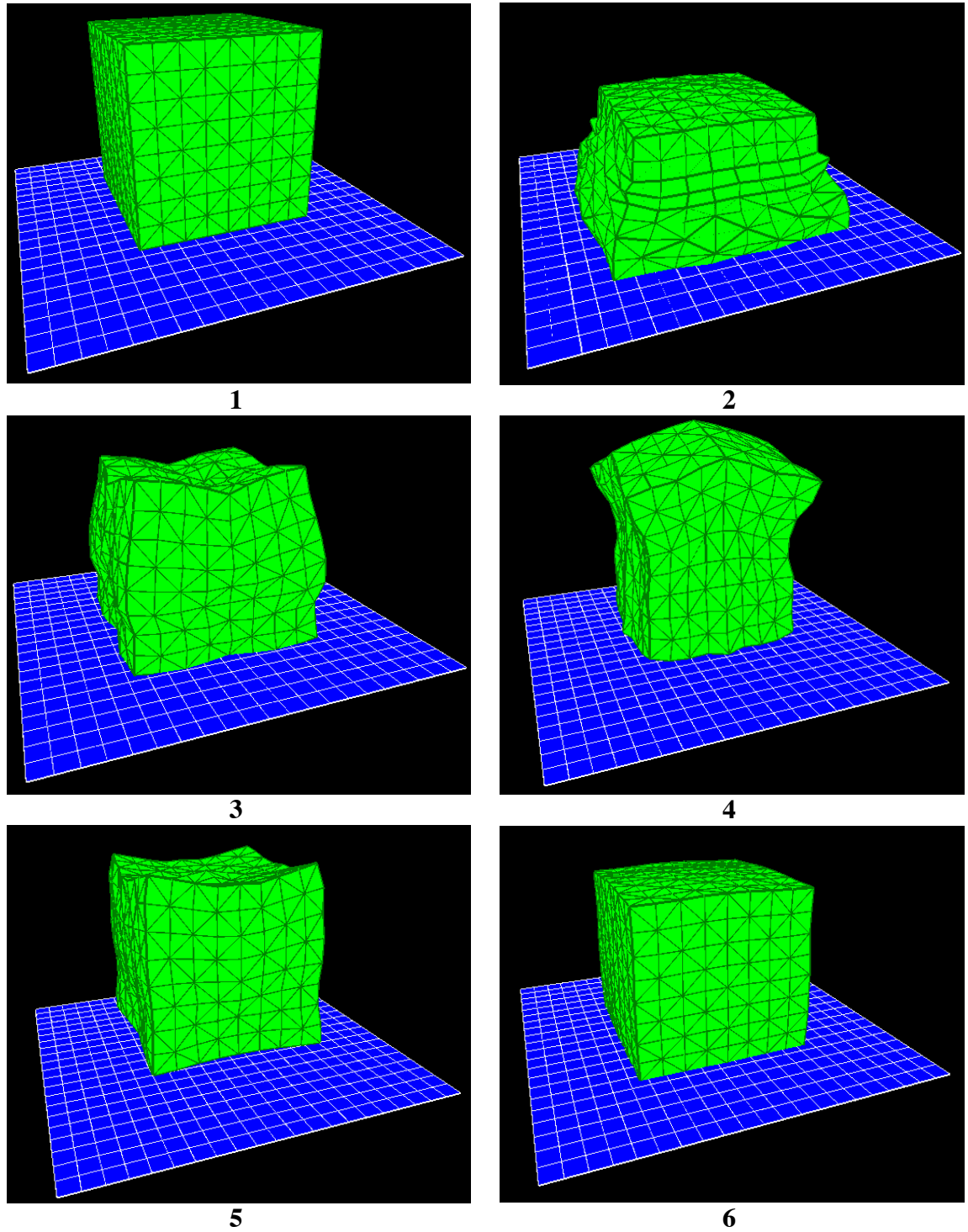


Figure 4.7 : Séquence de déformation d'un cube considérant des contraintes physiques de distance, d'aire et de volume

La variation de volume du cube calculée à chaque trame de rendu est illustrée à la figure 4.8.

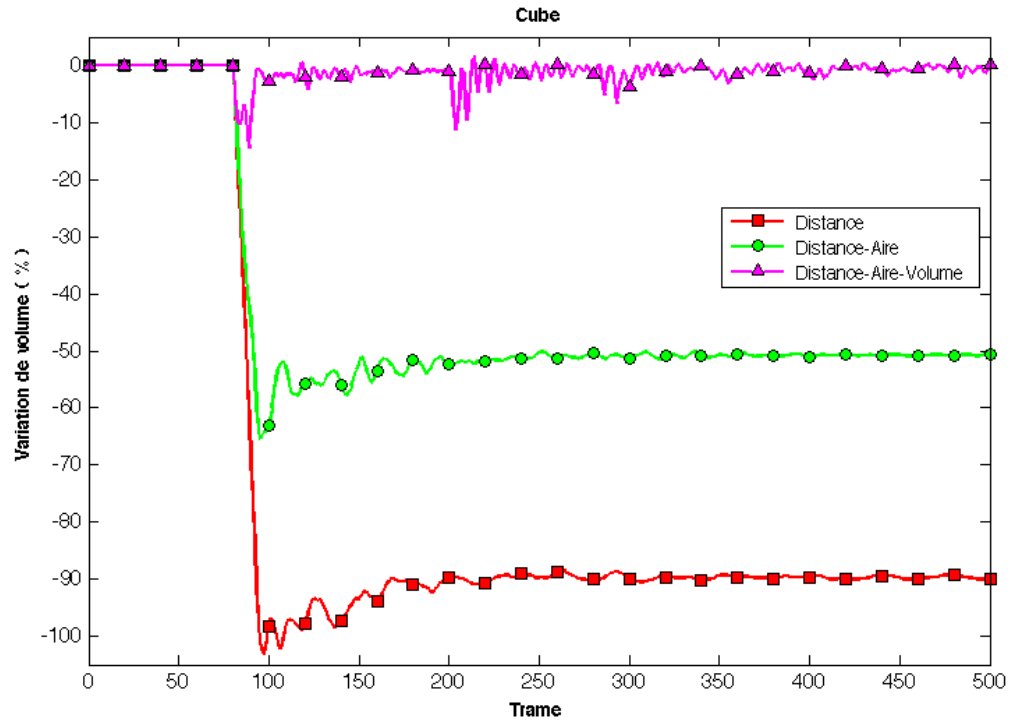


Figure 4.8 : Contribution des contraintes physiques pour un cube entrant en collision avec un plan

Nous observons, à partir des simulations, que l'utilisation unique des contraintes de distance ne suffit pas pour soutenir la structure générale du cube lors de l'impact. Cependant, en ajoutant la contrainte d'aire, la rigidité du cube se renforce mais une inversion des éléments tétraédriques ainsi qu'une perte de volume s'avèrent tout de même observables. C'est seulement grâce à l'ajout de la contrainte volumique que l'objet préserve son volume initial. Notons que les baisses plus accentuées en variation de volume (lorsque le cube contient des contraintes volumiques) constituent les rebondissements du cube sur le plan.

La contribution apportée par la contrainte géométrique d'étirement se situe plutôt au niveau de la stabilité lors de notre simulation dynamique. La variation de volume pour

deux simulations, dont l'une contient la contrainte géométrique d'étirement, se retrouve à la figure 4.9.

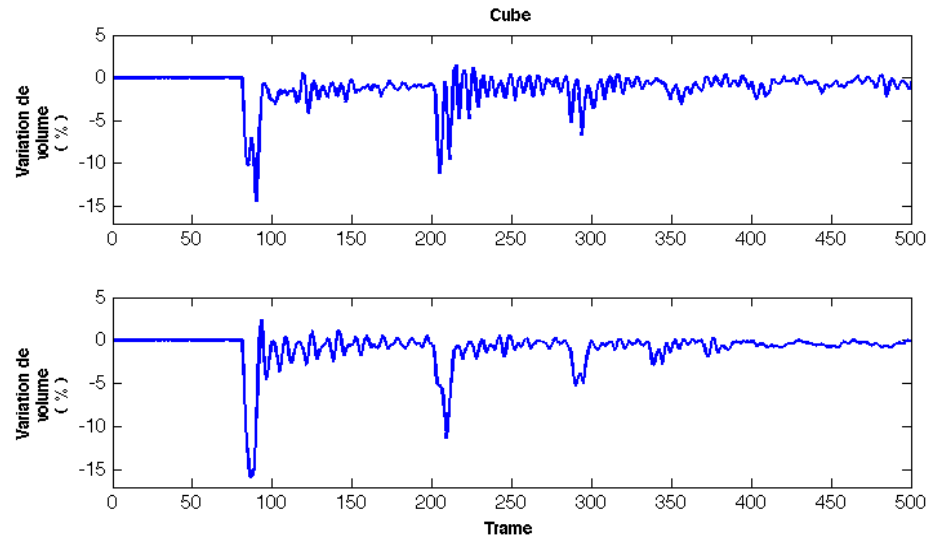


Figure 4.9 : Contribution de la contrainte géométrique d'étirement. Contrairement à celle du bas, la courbe du haut ne considère pas la contrainte géométrique d'étirement.

La courbe du haut représente la simulation du cube de la figure 4.7 qui ne considère pas la contrainte géométrique d'étirement. La courbe du bas décrit ce même cube, en simulant maintenant avec la contrainte d'étirement. Notons que, lorsqu'activée, la diminution de la fréquence d'oscillation permet au cube de converger plus rapidement vers son volume initial (dans ce cas-ci, à partir de la trame quatre cents). En utilisant cette contrainte géométrique, nous nous retrouvons donc en mesure de mieux contrôler les instabilités engendrées par l'oscillation dégénérée d'une particule et, ainsi, d'assurer la stabilité du système. La simulation présentée à la figure 4.9 utilise une constante de rigidité  $k_E = 0.1$  avec un allongement maximal de 5% ( $\alpha = 1.05$ ).

Tel que mentionné à la section 1.3.5, l'ordre de résolution des contraintes géométriques a un impact sur la solution finale puisque les positions des particules se déplacent explicitement pour satisfaire la contrainte. Ainsi, tout comme de nombreux auteurs (section 1.3.5), nous l'utilisons uniquement pour contrôler la stabilité de notre système

dynamique en lui attribuant une constante de rigidité faible ( $k_E \leq 0.1$ ) laissant plutôt les forces du système guider les déplacements des particules.

La figure 4.10 illustre la possibilité de simuler une variété de différents matériaux en modifiant simplement les constantes de rigidité des contraintes physiques développées. À cette figure, les constantes de rigidité définies pour la poutre du fond sont  $k_D = 20kN$  ,  $k_A = 1kN$  et  $k_V = 25kN$  . Ensuite, nous prenons le quart de ces valeurs pour définir les constantes de la poutre du milieu. Finalement, pour la poutre du devant, on emploie le huitième des constantes de rigidité de la poutre du milieu.

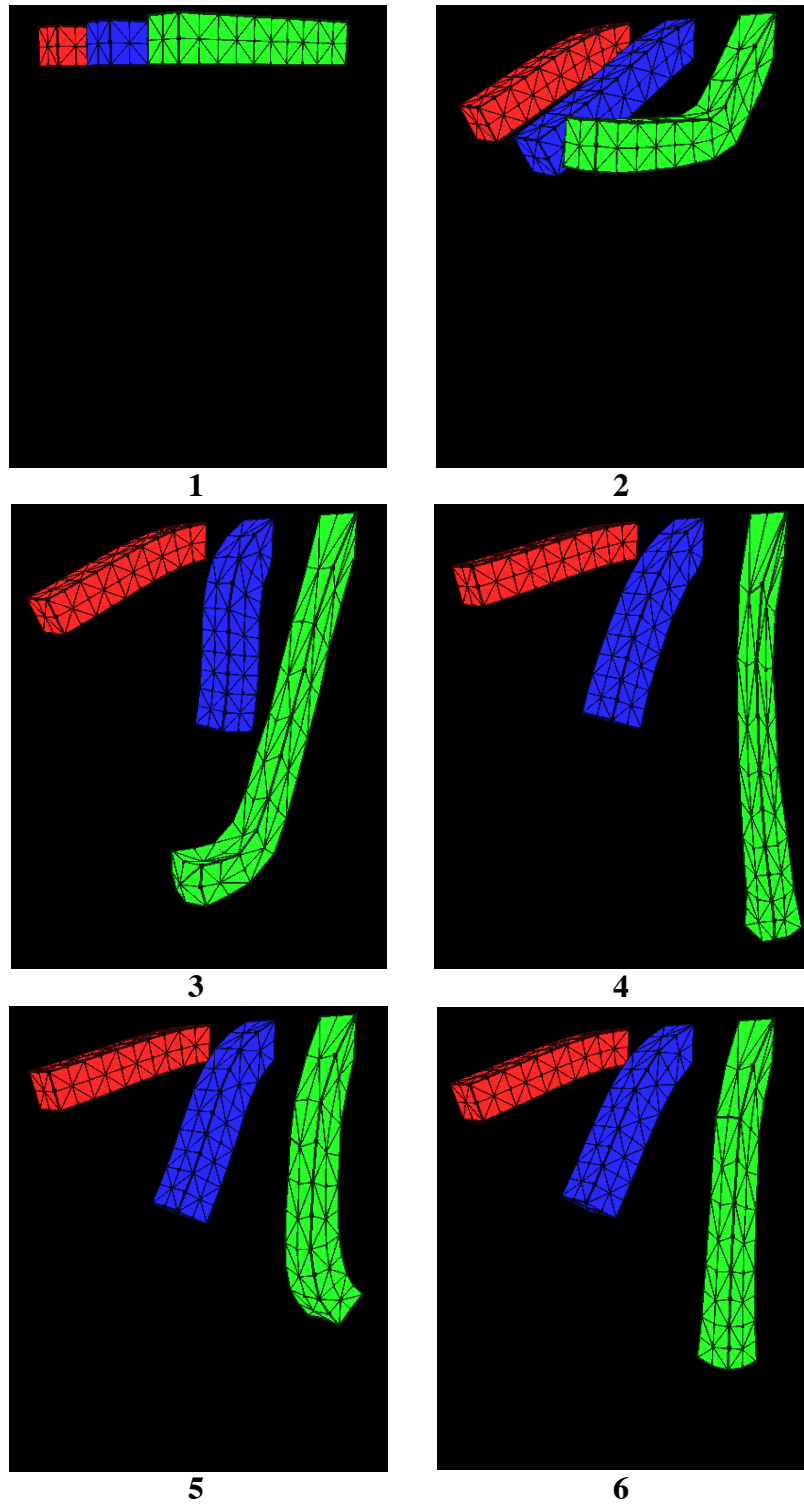


Figure 4.10 : Séquence de déformations de trois poutres encastées définies selon différentes constantes de rigidité et soumises à la gravité

### 4.3 Résultats d'une simulation de chirurgie de la scoliose sur l'apparence externe

Nous présentons maintenant les résultats d'une simulation de chirurgie de la scoliose sur l'apparence externe. Pour ce faire, nous obtenons les reconstructions 3D préopératoire et postopératoire d'un patient ayant subi une chirurgie correctrice à l'Hôpital Sainte-Justine de Montréal. Ce dernier possède toutes les reconstructions nécessaires pour la simulation, soit : la topographie du tronc ainsi que les reconstructions des structures internes (vertèbres, côtes et bassin) avant et après chirurgie. Chaque étape, telle que présentée lors de la méthodologie, s'exécute sur les données préopératoires afin d'obtenir un modèle dynamique du tronc pour effectuer la simulation. Le résultat obtenu, suite à la génération des différentes couches tétraédriques représentant qualitativement la peau, le gras et les muscles, se retrouve à la figure 4.11.

Le nombre de particules et de contraintes formant la totalité du modèle dynamique du tronc figure au tableau ci-dessous.

Tableau 4.6 : Statistiques du modèle physique du tronc

<b>Nombre de particules</b>	42,671
<b>Nombre de contraintes physiques de distance</b>	89,426
<b>Nombre de contraintes physiques d'aire</b>	15,840
<b>Nombre de contraintes physiques de volume</b>	51,112
<b>Nombre de contraintes géométriques d'étirement</b>	89,426

Les constantes de rigidité du modèle ont été ajustées par inspection visuelle du résultat final. Nous rappelons que la calibration de ces dernières fait présentement l'objet d'un doctorat. Nous discutons de leurs ajustements manuels à la section 4.3.1.



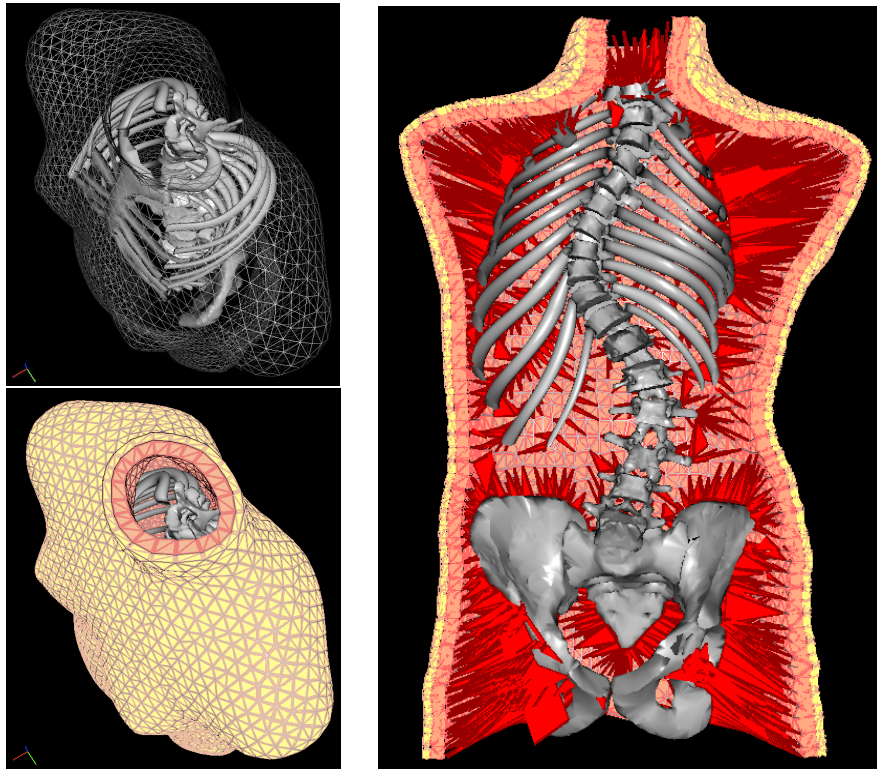


Figure 4.11 : Résultats suite à la génération des différentes couches anatomiques. La figure de droite présente une coupe du patient sur le plan frontal.

Nous observons, à la figure 4.11, que la reconstruction des structures osseuses ne semble pas optimale pour ce patient à cause de la position éloignée des côtes par rapport à la surface externe. Également, les côtes flottantes de la 12<sup>ième</sup> vertèbre thoracique sont absentes de la reconstruction.

L'interpolation des structures osseuses, propageant la correction vers les différentes couches afin de déformer la topologie externe, s'illustre à la figure 4.12.

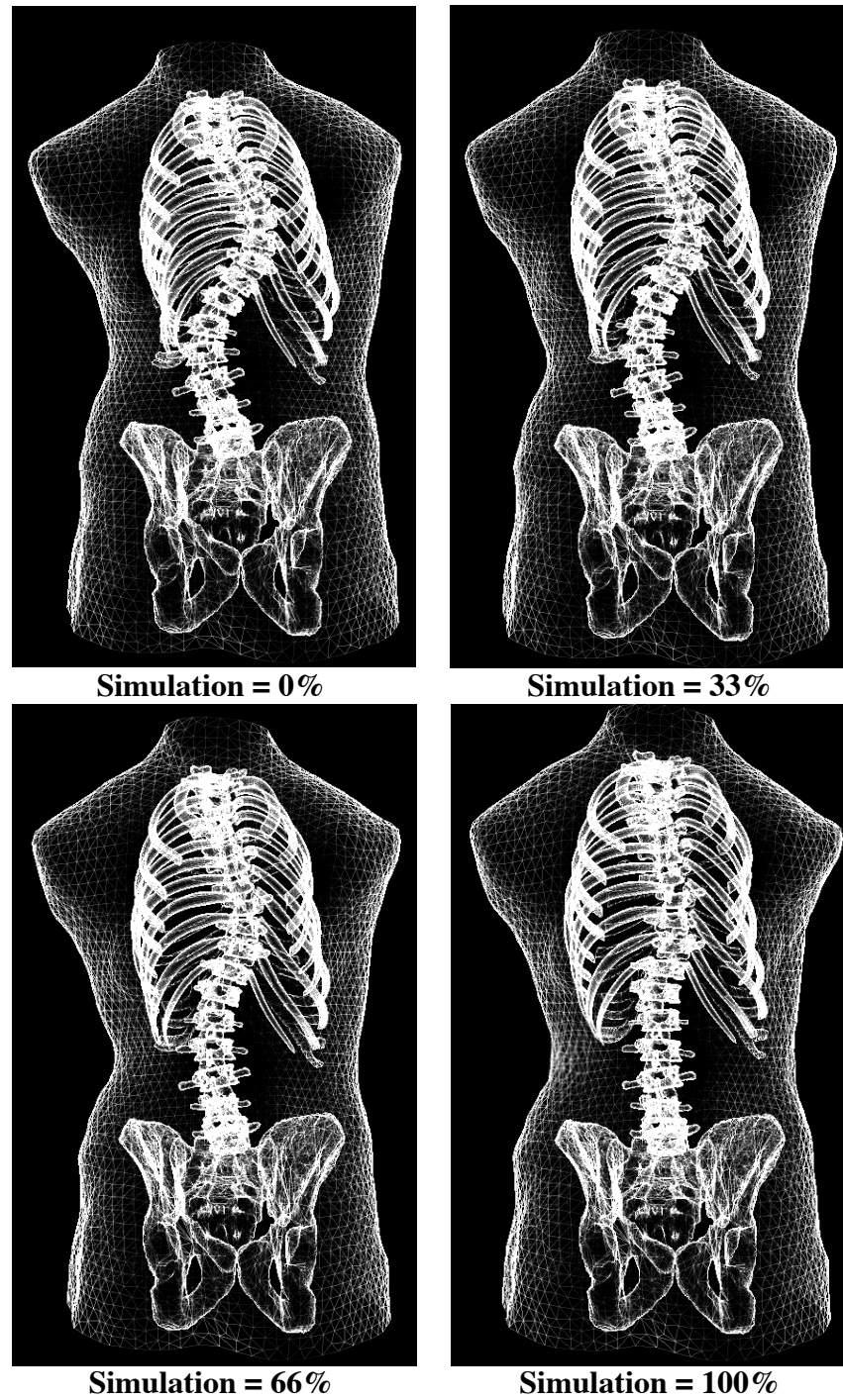


Figure 4.12 : Interpolation des structures osseuses déformant la surface externe

La correction de la gibbosité sur la surface du dos est mise en évidence par l'ajout de l'ombrage en utilisant le modèle de Phong à la figure ci-dessous.

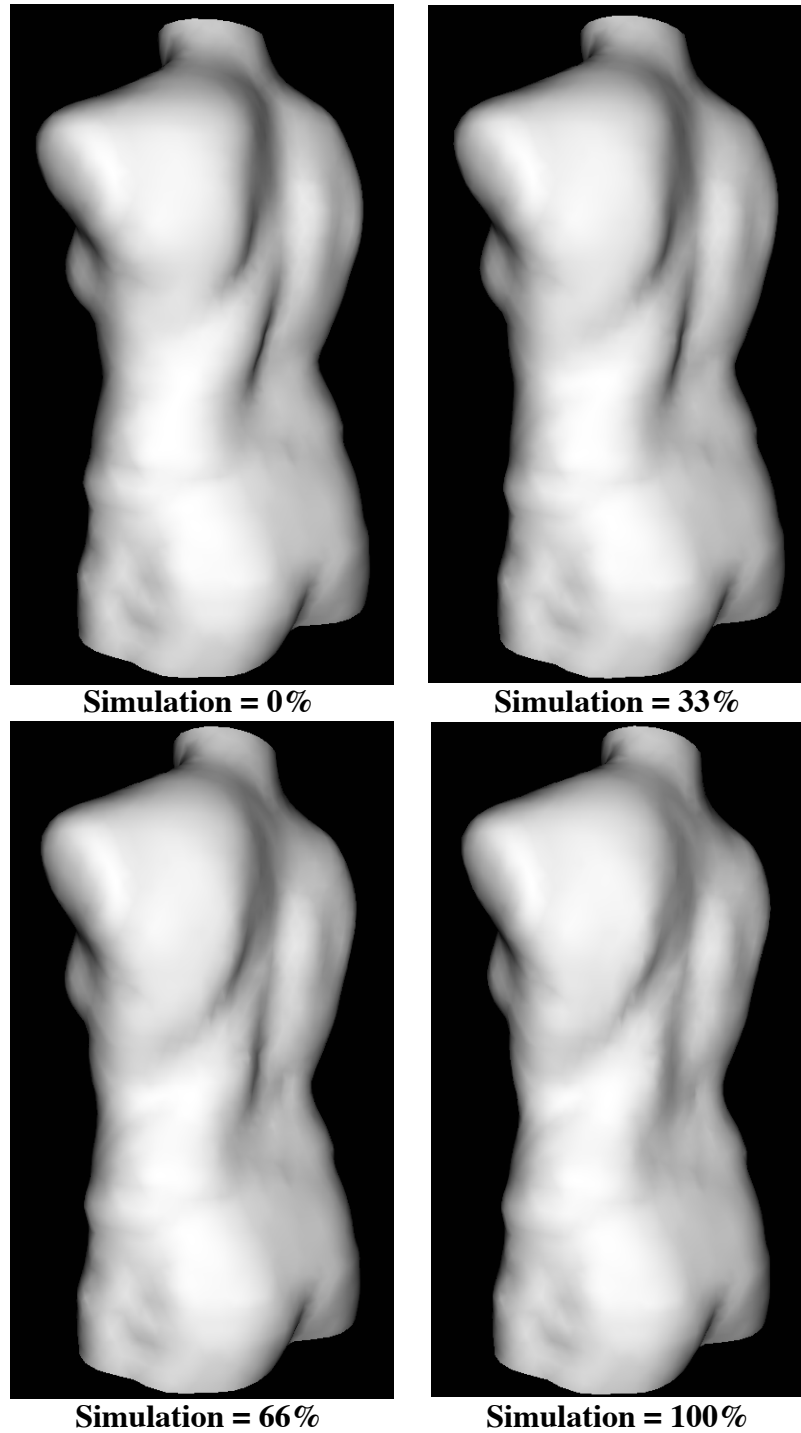


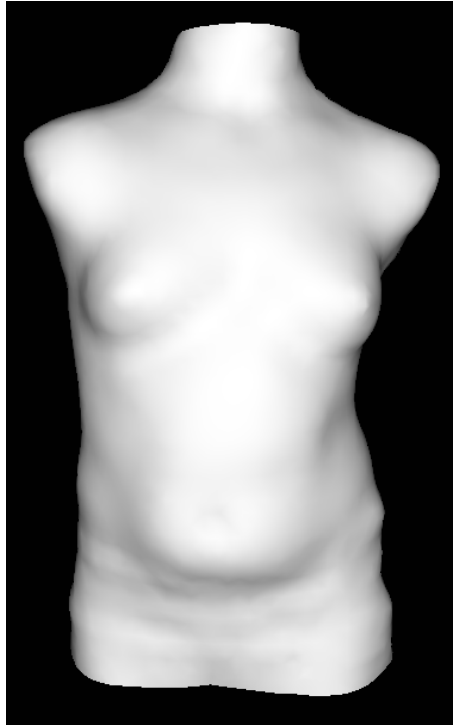
Figure 4.13 : Simulation de la correction de gibbosité sur la surface externe

Les figures 4.14, 4.15, 4.16, 4.17, 4.18 et 4.19 présentent les différences visuelles, selon des points de vue variés, des corrections simulées et réelles obtenues par l'acquisition de la surface externe du tronc suite à une chirurgie.

Notons qu'à partir des figures 4.14 et 4.15 (pages 116 et 117), la coupe du bassin ne se trouve pas exactement à la même hauteur et de plus le patient porte une ceinture durant l'acquisition postopératoire. Ces éléments sont à prendre en considération lors de l'évaluation visuelle. Un léger débalancement au niveau des épaules et des creux plus accentués sur les côtés droit et gauche de l'externe simulé peuvent également être observés.

Les profils droit et gauche du patient s'affichent aux figures 4.16 et 4.17 (pages 118 et 119). Une proéminence se voit au niveau du thorax sur le profil gauche simulé ainsi qu'une cavité plus prononcée au niveau du dos. L'abdomen s'avère quelque peu différent entre l'externe simulé et acquis, mais une partie de cela s'explique par la différence de posture lors des acquisitions. On perçoit également une différence au niveau des omoplates.

Les figures 4.18 et 4.19 (pages 120 et 121) illustrent la différence au niveau de la gibbosité. La correction simulée de cette dernière se révèle intéressante compte tenu de sa proéminence de départ, surtout à la figure 4.18. Nous observons, une fois de plus, la dissemblance des omoplates entre l'externe simulé et acquis (figure 4.19).



**Acquisition préopératoire**



**Simulation**

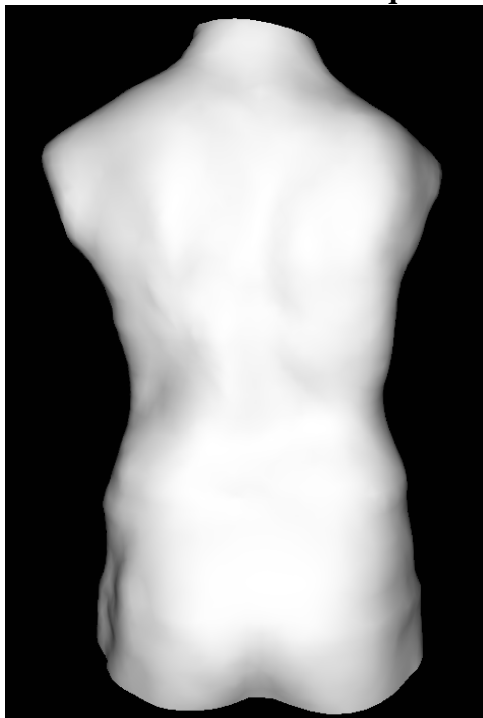


**Acquisition postopératoire**

Figure 4.14 : Vue antérieure des corrections simulées et réelles



**Acquisition préopératoire**



**Simulation**



**Acquisition postopératoire**

Figure 4.15 : Vue postérieure des corrections simulées et réelles



**Acquisition préopératoire**



**Simulation**



**Acquisition postopératoire**

Figure 4.16 : Vue du profil gauche des corrections simulées et réelles



**Acquisition préopératoire**



**Simulation**



**Acquisition postopératoire**

Figure 4.17 : Vue du profil droit des corrections simulées et réelles





**Acquisition préopératoire**

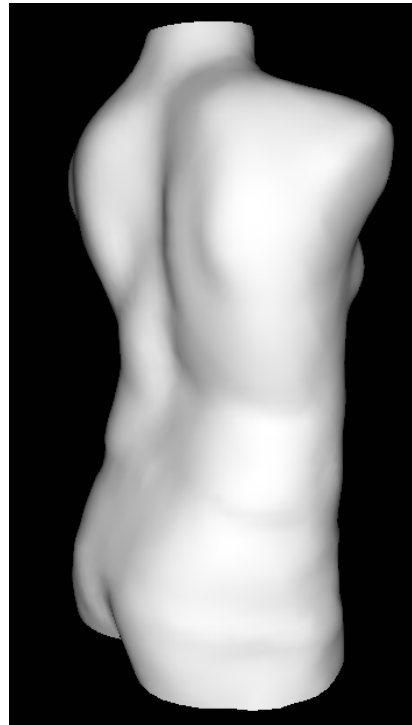


**Simulation**



**Acquisition postopératoire**

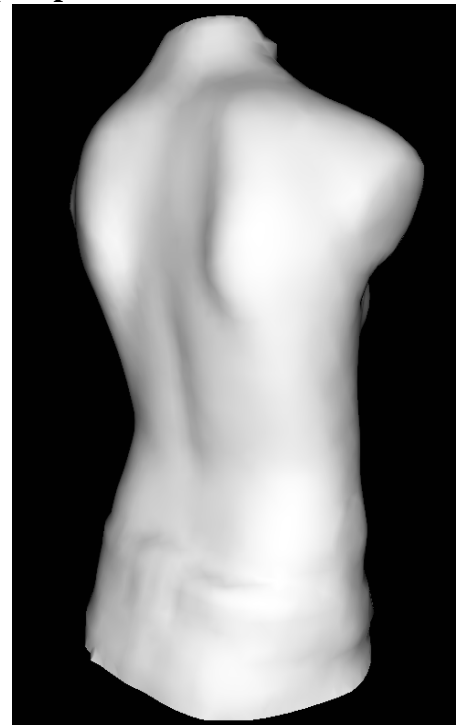
Figure 4.18 : Vues mettant en évidence la correction de la gibbosité simulée et réelle (gauche)



**Acquisition préopératoire**



**Simulation**



**Acquisition postopératoire**

Figure 4.19 : Vues mettant en évidence la correction de la gibbosité simulée et réelle (droit)

Les résultats des mesures des indices cliniques pour différents niveaux vertébraux, tel que présenté à la section 3.5.3, sont illustrés dans les courbes de la figure 4.20. On fournit l'erreur moyenne absolue au niveau thoracique et lombaire pour chaque indice au tableau 4.7.

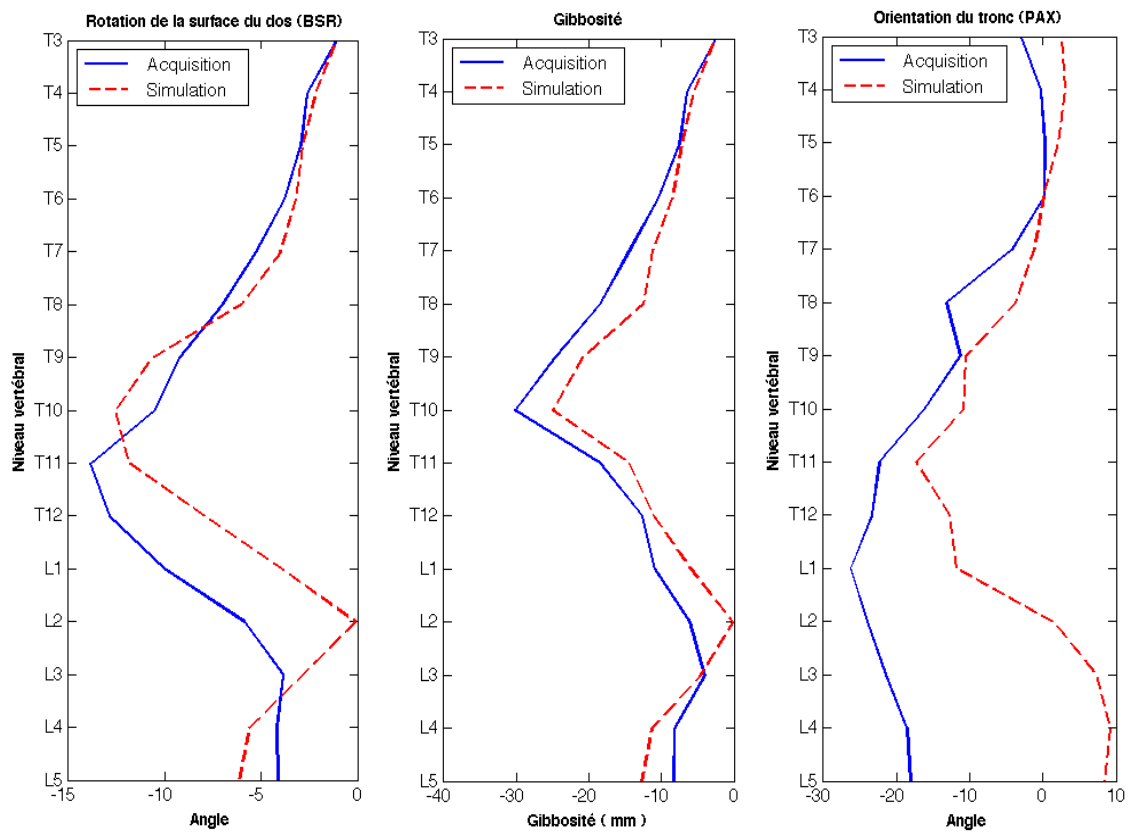


Figure 4.20 : Comparaison des indices cliniques entre la surface externe du tronc simulée et acquise après opération

Tableau 4.7 : Erreur moyenne absolue des indices cliniques

Indice clinique	Erreur au niveau thoracique	Erreur au niveau lombaire
Rotation de la surface du tronc (BSR)	1.38°	3.26°
Gibbosité	2.73 mm	3.83 mm
Orientation du tronc (PAX)	4.50°	24.54°

Les indices mesurés à partir de la surface externe simulée semblent suivre le comportement général des indices obtenus de l'acquisition postopératoire. De plus, l'erreur absolue moyenne apparaît faible pour la gibbosité et l'indice BSR.

Une divergence s'observe toutefois sur les courbes au niveau lombaire pour les indices BSR et PAX.

Nous notons une erreur moyenne plus élevée pour l'indice PAX comparativement aux autres indices. Nous rappelons que le calcul se fait à partir de l'axe principal de la section -- ainsi tous les points de la section présentent une influence sur l'angle calculé.

#### **4.3.1 Ajustement des constantes de rigidité des contraintes physiques**

La simulation de chirurgie nécessite l'ajustement des constantes de rigidité des contraintes physiques de distance, d'aire et de volume. Pour cette recherche, nous nous limitons à ajuster ces constantes physiques par une inspection visuelle des déformations de la surface externe. Cela se fait en modifiant manuellement le paramètre d'interpolation des structures osseuses en temps réel, en se servant d'un curseur de défilement sur le panneau de droite de l'interface de Scolio Dynamix (voir figures 3.21 et 4.21). La procédure générale consiste simplement à augmenter les constantes de distance, d'aire et de volume d'une couche -- ceci s'effectue dans la fenêtre présentée à la figure 4.22 -- lorsque l'application détecte une inversion des éléments tétraédriques. Dans ce cas, un message textuel, spécifiant la couche impliquée, s'affiche dans la console. On retrouve au tableau 4.8 les constantes de rigidité employées pour la simulation de chirurgie présentée à la section précédente.

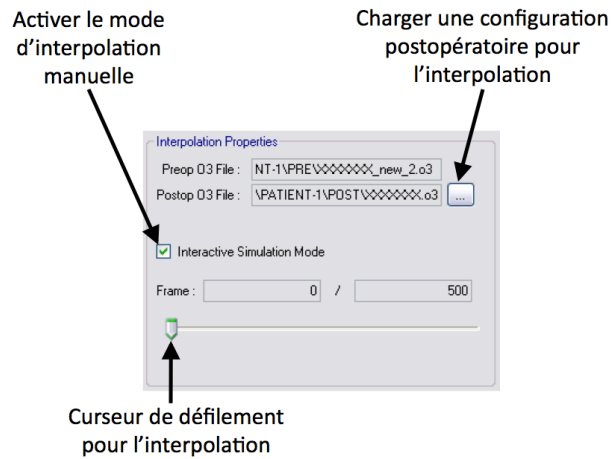


Figure 4.21 : Agrandissement de la boîte de contrôle d'interpolation (Scolio Dynamix)

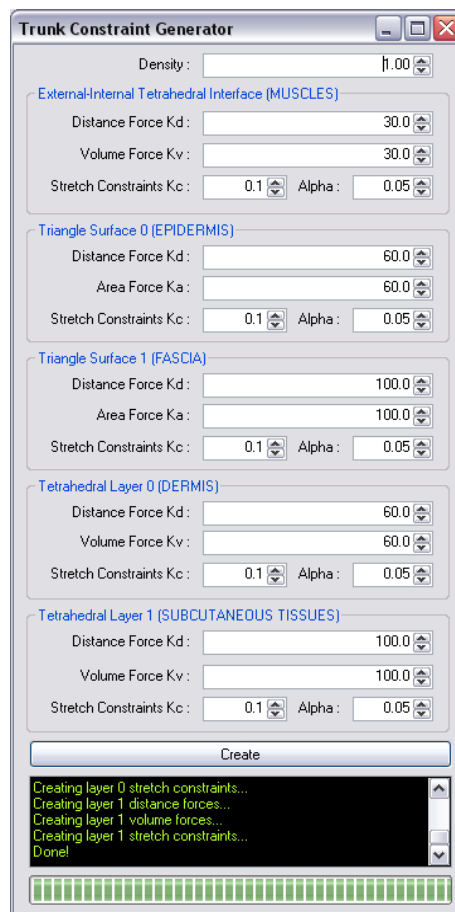


Figure 4.22 : Ajustement des constantes de rigidité des contraintes physiques et géométriques (Scolio Dynamix)

La fenêtre présentée à la figure 4.22 s'obtient lorsque l'utilisateur sélectionne « Create Trunk Constraints... » du menu « Physics » se retrouvant sur la barre principale de l'interface Scolio Dynamix (voir figure 3.21). Les valeurs attribuées aux constantes pourraient certainement être améliorées pour donner de meilleurs résultats. Une méthode plus formelle d'ajustement automatique s'avérerait d'autant plus intéressante.

Tableau 4.8 : Valeurs des constantes de rigidité des contraintes physiques et géométriques employées pour la simulation

	<b>Densité</b>	1.0
<b>Muscles</b>	<b>Constante de distance(<math>k_D</math>)</b>	30.0 N
	<b>Constante de volume(<math>k_v</math>)</b>	30.0 N
	<b>Constante d'étirement (<math>k_E</math>)</b>	0.1 ( $\alpha = 0.05$ )
<b>Épiderme</b>	<b>Constante de distance(<math>k_D</math>)</b>	60 N
	<b>Constante d'aire (<math>k_A</math>)</b>	60 N
	<b>Constante d'étirement (<math>k_E</math>)</b>	0.1 ( $\alpha = 0.05$ )
<b>Fascia</b>	<b>Constante de distance(<math>k_D</math>)</b>	100.0 N
	<b>Constante d'aire (<math>k_A</math>)</b>	100.0 N
	<b>Constante d'étirement (<math>k_E</math>)</b>	0.1 ( $\alpha = 0.05$ )
<b>Derme</b>	<b>Constante de distance(<math>k_D</math>)</b>	60 N
	<b>Constante de volume (<math>k_v</math>)</b>	60 N
	<b>Constante d'étirement (<math>k_E</math>)</b>	0.1 ( $\alpha = 0.05$ )
<b>Tissus sous-cutanés</b>	<b>Constante de distance(<math>k_D</math>)</b>	100 N
	<b>Constante de volume (<math>k_v</math>)</b>	100 N
	<b>Constante d'étirement (<math>k_E</math>)</b>	0.1 ( $\alpha = 0.05$ )

Pour les fins de ce mémoire, le fait d'avoir obtenu les données complètes d'un seul patient a limité la possibilité de déterminer des paramètres optimaux de simulation.

## 4.4 Discussion générale

### 4.4.1 Simulation de chirurgie

Les résultats de simulation présentés à la section 4.4, quoique intéressants, révèlent les limites de la modélisation simplifiée. Différents motifs expliquent les dissemblances au niveau des corrections simulées sur l'externe du patient.

La modélisation géométrique de l'interne ne considère pas la flexibilité des structures osseuses. Les côtes de la cage thoracique présentent ainsi des déplacements plus importants au niveau du sternum. Ceci est dû à la définition des repères locaux de côte se situant à la tête de ces dernières (voir figure 3.18) pour minimiser les déplacements aux facettes articulaires vertébrales. Subséquemment, le plan déformable pour représenter le sternum, généré à partir des points limites des côtes, se voit grandement affecté durant l'interpolation. Cela explique en partie l'erreur moyenne élevée de l'indice PAX puisqu'il tient compte des points provenant de la partie antérieure du tronc. Du même coup, la performance des indices BSR et de la gibbosité se retrouve justifiée puisque la surface du dos présente moins d'erreurs causées par des déplacements moins prononcés des structures internes de cette région.

Nous observons aussi une augmentation de l'erreur au niveau lombaire pour les indices PAX et BSR. La région abdominale de la modélisation simplifiée présente un vide indéniable et les tétraèdres constituant les muscles recherchent à se connecter aux structures osseuses à proximité, soit sur le bassin, le sternum ou les vertèbres (pour les muscles de la région postérieure). Durant l'interpolation de l'interne, des creux sur la surface externe apparaissent dans cette région à cause de certains tétraèdres connectés au bassin fixe et d'autres aux structures osseuses en mouvement, tel qu'illustré à la figure 4.23.

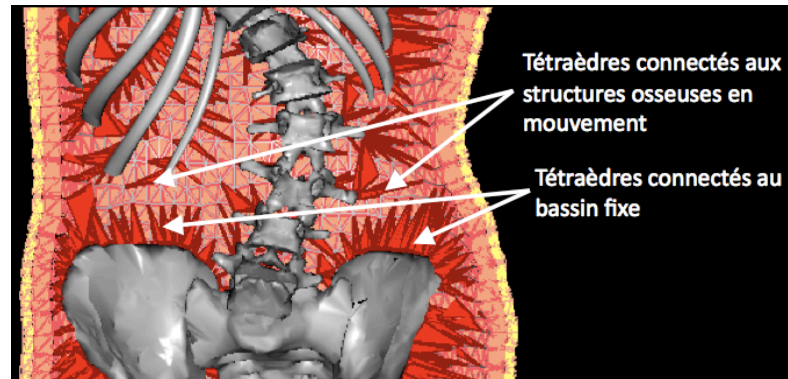


Figure 4.23 : Sources d'erreurs de la région abdominale

Il faut aussi considérer les erreurs dues aux changements de posture du patient lors du processus d'acquisition. À titre d'exemple, nous remarquons, à partir des figures 4.16 et 4.17, des courbures différentes au niveau du profil de l'abdomen dans les acquisitions pré et postopératoire. Cela influence également l'indice PAX. De plus, on remarque que le patient peut aussi changer de poids entre ces deux acquisitions.

#### 4.4.2 Performance

Le temps d'exécution pour effectuer la simulation complète (présentée à la section 4.4) du patient totalise 543 secondes (~9 minutes) sur un Macbook Pro Core 2 Duo 2.8GHz. Ceci ne représente pas les performances du système puisqu'à chaque augmentation du paramètre d'interpolation des structures internes, on attend que le système particulaire se stabilise. Tel que mentionné à la section 4.3.1, il est possible d'effectuer la simulation en temps réel en laissant l'opérateur modifier manuellement le paramètre d'interpolation, à l'aide du curseur de défilement sur l'interface de Scolio Dynamix. Nous obtenons en moyenne 20 images par seconde en effectuant deux itérations physiques (avec un pas de simulation constant de 15 ms) à chaque rendu, allouant ainsi un niveau d'interactivité acceptable. Dans ce mode, des instabilités peuvent cependant survenir lorsque les déplacements des nœuds de l'interne engendrés par l'utilisateur s'avèrent trop grands.



## CHAPITRE 5 – CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

L'objectif principal de ce projet de maîtrise consiste à définir une modélisation physique simplifiée des tissus déformables entre l'épiderme et les structures osseuses du tronc, afin de simuler l'effet d'une chirurgie de la scoliose sur l'apparence externe. Plusieurs objectifs spécifiques ont été fixés au début de ce travail.

Notre premier objectif était de proposer une méthodologie sur la construction d'un système simplifié permettant de modéliser les différentes structures déformables du tronc, à partir des géométries interne et externe acquises à l'aide de radiographies et du système de topographie de surface. Suite à des prétraitements effectués sur les modèles, nous avons élaboré une méthode générique qui a servi à produire les différents tissus mous du tronc. Ces couches, représentant qualitativement la peau, le gras et les muscles, nous ont permis d'établir notre modèle déformable en utilisant un système particulière généralisé. Une grande partie de ce travail a été dédiée au développement des forces de préservation de contraintes de distance, d'aire et de volume pour décrire le comportement physique des différents tissus mous du tronc. Pour être en mesure de transformer la configuration interne préopératoire en postopératoire, une modélisation articulée des structures osseuses a par la suite été développée. Suite à la résolution des équations de dynamique, les déplacements de cette structure rigide déforment alors les différentes couches anatomiques simplifiées du tronc vers l'état postopératoire pour enfin prédire le résultat d'une chirurgie sur l'externe. Au cours de l'exercice, deux applications fort utiles ont été créées : Scolio Editor et Scolio Tissue.

Le second objectif consistait à identifier une procédure numérique adéquate pour résoudre la dynamique du système. Du fait que nous ayons favorisé l'obtention de simulations en temps réel, nous avons choisi d'utiliser un schéma d'intégration explicite, à cause de sa performance supérieure en calcul, comparée à l'usage des schémas

implicites. Considérant le large éventail de méthodes présentées dans la littérature et en se limitant aux plus populaires, on a fait une étude de performance en calcul, précision et stabilité afin d'identifier le schéma explicite répondant le mieux à nos besoins. Suite à cet exercice, deux schémas ressortaient du lot : RK4 et Velocity Verlet. Nous avons choisi ce dernier pour sa performance et sa stabilité supérieures pour le calcul des systèmes en mouvement pseudo-périodique. D'autre part, afin d'assurer la stabilité et la convergence de la simulation, nous avons développé une contrainte géométrique d'étirement. Cette procédure numérique a permis de valider les contraintes physiques modélisant les tissus mous du tronc, car on pouvait visualiser l'évolution des déformations pas à pas en temps réel.

Le troisième objectif visait à développer un logiciel prototype servant à simuler de manière interactive l'effet d'une chirurgie de la scoliose sur l'apparence externe. Pour y arriver et tout au cours de ce projet, on a construit, testé et manœuvré l'application Scolio Dynamix afin d'effectuer et déboguer des simulations de correction en temps réel. On s'est aussi penché sur la création d'une interface conviviale pour faciliter le changement des différents paramètres de simulation (constantes de rigidité, schémas d'intégration, pas de simulation, etc.). Notre prototype a été conçu pour évoluer avec le projet et a été fort utile pour l'obtention des résultats de cette recherche.

Notre dernier objectif s'appliquait à valider le système proposé en comparant les résultats de simulation au modèle 3D postopératoire surfacique du tronc d'un patient. Une dernière application, Scolio Sections, a été développée pour extraire, à partir des sections transversales du tronc, des indices cliniques évaluant l'asymétrie externe. Cette étude préliminaire a révélé des résultats très encourageants et a également contribué à cibler les éléments à améliorer de notre système.

Finalement, nous observons des résultats concrets et positifs pour chacun de nos sous-objectifs. Nous pouvons donc dire que nous avons bel et bien atteint notre objectif principal.

Ce travail en soit a bien sûr bénéficié d'un bon nombre d'intrants déjà existants, que nous avons analysés et sélectionnés parmi un large éventail de possibilités -- l'originalité vient de ce qu'ils ont été utilisés dans un cadre tout à fait nouveau, soit pour prédire l'effet d'une chirurgie de la scoliose sur l'apparence externe. Enfin, ce travail représente un premier pas encourageant vers l'élaboration d'un modèle physique pour évaluer la correction sur l'ensemble du tronc.

Les résultats obtenus nous poussent maintenant à aller plus loin dans notre réflexion. Certaines limites de la modélisation simplifiée du tronc ont été mises de l'avant à la section 4.4. Nous pouvons dès lors formuler certaines recommandations pour améliorer les résultats obtenus et également présenter d'autres avenues de recherche pour la suite du projet.

Nous observons, dans les conclusions de la simulation présentées au chapitre 4, qu'il est important de considérer la flexibilité des structures osseuses. Une solution, présentement en cours de développement, consiste à se servir d'une interpolation utilisant des fonctions à base radiale en 3D, dont les nœuds de contrôle sont les points du modèle filaire interne. Une première étape interpole les déformations obtenues grâce aux points du modèle filaire postopératoire, sur l'ensemble des nœuds du tronc. Les éléments physiques deviennent conséquemment en configuration instable. En deuxième lieu, on se sert de l'algorithme 3.2 du simulateur pour minimiser l'énergie potentielle du modèle. Dans ce contexte d'application, nous perdons l'aspect dynamique puisque nous avons simplement un résultat final des déformations à l'externe. Toutefois, nous obtenons le résultat beaucoup plus rapidement puisqu'une stabilisation des contraintes

physiques s'effectue en une seule étape contrairement au système actuel de petits pas d'interpolation.

De même, le travail d'intégration suivant peut s'avérer avantageux. En effet, si on obtient les positions intermédiaires ou finales des structures osseuses prédites du simulateur biomécanique par éléments finis, les chirurgiens pourront ainsi sélectionner une stratégie d'instrumentation de leur choix tout en visualisant son impact sur la surface externe. Cependant, ce simulateur étant encore en cours de développement, nous devons attendre sa finalisation pour intégrer les deux systèmes.

En outre, les tissus mous étant guidés par les structures osseuses sous-jacentes et du fait que, suite à la simulation, on remarque des différences visibles au niveau des omoplates et ailleurs dans la région supérieure du tronc, il serait bien utile de pouvoir travailler nos simulations avec une reconstruction interne plus complète (omoplates, clavicules et humérus). Dans un même sens, la région abdominale pourrait aussi être remplie d'un objet synthétique mou, tel qu'un ellipsoïde, pour représenter qualitativement les organes de cette région. De plus, à cause de l'instrumentation qui restreint la visibilité des repères anatomiques des radiographies postopératoires, il s'avère difficile d'obtenir une reconstruction 3D complète des structures osseuses. En ce sens, il n'a été possible de trouver qu'un seul candidat possédant les spécifications nécessaires pour notre simulateur. À l'évidence, quand on pourra réunir un nombre quelconque de reconstructions complètes, on pourra déterminer les paramètres optimaux de simulation.

D'autre part, sachant déjà qu'un autre travail progresse sur le recalage d'un maillage volumique à partir d'une acquisition IRM afin de personnaliser et raffiner la simulation, nous avons travaillé sur cette partie sans trop l'approfondir. Maintenant, considérant les erreurs que produit la simulation actuelle, il serait opportun de considérer un maillage volumique sans nécessairement le personnaliser, mais plutôt pour améliorer nos résultats finaux à court terme. Une solution possible serait de remplir le vide par un maillage

tétraédrique entre deux surfaces décrivant respectivement la géométrie externe et interne du tronc. Pour ce faire, il faudra tenter d'obtenir une enveloppe la plus rapprochée possible des structures osseuses. Une piste prometteuse, présentée par (Spillmann, Wagner, & Teschner, 2006), utilise l'algorithme du cube baladeur sur un champ de distance produit à partir d'une géométrie quelconque pour générer son isocontour (voir figure 5.1).

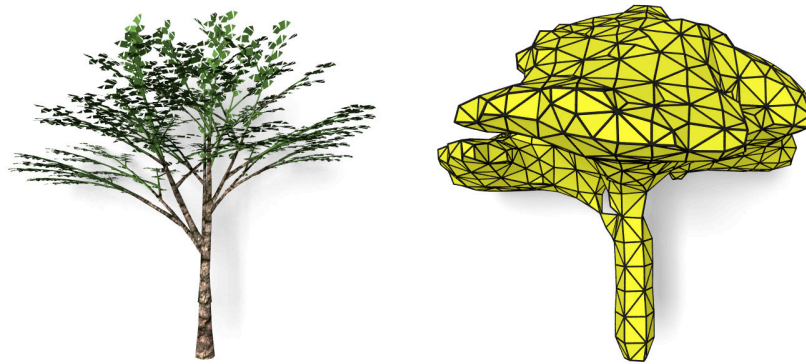


Figure 5.1 : Génération de l'isocontour discrétisé en triangle d'une géométrie quelconque, tiré de (Spillmann, Wagner, & Teschner, 2006)

Également, bien qu'on ne se soit pas attardé à calibrer les constantes de rigidité des contraintes physiques développées, on constate tout de même des résultats fort encourageants. Ici aussi, cette calibration fait l'objet d'une recherche d'un pair. Mais il pourrait être intéressant de développer un système d'auto calibrage, qui tiendrait compte des indices cliniques d'asymétrie externe, correspondant à l'aspect final comme fonction objective pour calibrer le système. Par la suite, pour vérifier ces constantes de rigidité obtenues de façon automatique, on pourrait injecter ces nouvelles valeurs sur un autre patient. On considère ici que le maillage volumique utilisé pour la physique des tissus mous est générique. Cependant, une autre possibilité serait de calibrer les constantes de rigidité en fonction de tissus rencontrés tel qu'identifiés par IRM, s'inspirant plus particulièrement des travaux de Koch (Koch et al., 1996) pour la personnalisation du modèle physique.

D'autre part, compte tenu que des changements topologiques s'appliquent aisément à ce modèle de déformation, un ajout intéressant au simulateur serait de pouvoir effectuer une thoracoplastie, soit la résection partielle ou totale de côtes étant à l'origine de la gibbosité en éliminant certaines contraintes physiques durant la simulation. Bien sûr, il sera nécessaire de se pencher sur la meilleure approche pour implémenter une procédure facilement manipulable par le clinicien.

Finalement, des possibilités d'optimisation sont envisageables afin de gérer l'augmentation de complexité du modèle. Une grande partie des calculs physiques peuvent être parallélisés sur plusieurs processeurs et même redirigés sur des unités de calcul en flux continu (GPU) encore plus performantes. Nous ciblons plus particulièrement l'évaluation de la dérivée du système et le calcul de la dynamique du mouvement décrite par le schéma d'intégration explicite.

## RÉFÉRENCES

- Akenine-Möller, T., Haines, E., & Hoffman, N. (2008). *Real-Time Rendering 3rd Edition* (3<sup>e</sup> éd.). Natick, MA, USA: A. K. Peters Ltd.
- Aubin, C.-É., Dansereau, J., Parent, F., Labelle, H., & DeGuise, J. A. (1997). Morphometric validations of personalized 3D reconstructions and geometric models of the human spine. *Medical and biological engineering computing*, 35, 611-618.
- Aubin, C.-É., Descrimes, J.-L., Dansereau, J., Skalli, W., Lavaste, F., & Labelle, H. (1995). Modélisation géométrique du rachis et du thorax par l'analyse biomécanique par éléments finis des déformations scoliotiques. *Annales de Chirurgie*, 49(8), 749-761.
- Aubin, C.-É., Labelle, H., & Ciolofan, O. C. (2007). Variability of Spinal Instrumentation Configurations in Adolescent Idiopathic Scoliosis. *European Spine Journal*, 16(1), 57-64.
- Ayache, N., & Delingette, H. (2004). Soft Tissue Modeling for Surgery Simulation. In N. Ayache (éd.), *Computational Models for the Human Body* (pp. 435-550): Elsevier.
- Baraff, D., & Witkin, A. (1998). Large steps in cloth simulation. *SIGGRAPH 98 : Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (pp. 862-870)ACM Press.

- Barr, A. H. (1984). Global and Local Deformations of Solid Primitives. *SIGGRAPH Computer Graphics*, 18(3), 21-30.
- Bartels, R. H., Beatty, J. C., & Barsky, B. A. (1987). *An Introduction to Splines for use in Computer Graphics and Geometric Modeling*. Los Altos: Morgan Kaufmann.
- Bianchi, G., Solenthaler, B., Székely, G., & Harders, M. (2004). Simultaneous Topology and Stiffness Identification for Mass-Spring Models based on FEM Reference Deformation. *MICCAI 2004 : Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention, St-Malo* (Vol. 2, pp. 293-301)Springer.
- Boisvert, J., Cheriet, F., Pennec, X., Labelle, H., & Ayache, N. (2008). Geometric Variability of the Scoliotic Spine Using Statistics on Articulated Shape Models. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 27(4), 557-568.
- Bridson, R., Fedkiw, R., & Anderson, J. (2002). Robust Treatment of Collisions, Contact and Friction for Cloth Animation. *Proceedings of ACM Siggraph* (pp. 594-603).
- Bridwell, K. H. (1999). Surgical Treatment of Idiopathic Adolescent Scoliosis. *Spine*, 24(24), 2607-2615.
- Bro-Nielsen, M. (1997). Simulation Techniques for Minimally Invasive Surgery. *Journal of Minimally Invasive Therapy and Allied Technologies*, 6, 106-110.



- Bro-Nielsen, M., & Cotin, S. (1996). Real-time Volumetric Deformable Models for Surgery Simulation using Finite Elements and Condensation. *Eurographics 96 : Computer Graphics Forum* (Vol. 15, pp. 57-66)Blackwell Publishers for Eurographics Association.
- Carr, J. C., Beatson, R. K., Cherrie, J. B., Mitchell, T. J., Fright, W. R., McCallum, B. C., et al. (2001). Reconstruction and representation of 3D objects with radial basis functions. *Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* ACM.
- Chen, D. T.-W., & Zeltzer, D. (1992). Pump it Up: Computer Animation of a Biomechanically Based Model of Muscle Using the Finite Element Method. *SIGGRAPH Computer Graphics*, 26(2), 89-98.
- Chen, G., Lenke, L. G., Lehman, R. A., Yongjung, K. J., Nunley, R., & Bridwell, K. H. (2007). The reliability of preoperative supine radiographs to predict the amount of curve flexibility in adolescent idiopathic scoliosis. *Spine*, 32(24), 2668-2672.
- Chen, Y., Zhu, Q., Kaufman, A., & Muraki, S. (1998). Physically-based Animation of Volumetric Objects. *Proceedings of the Computer Animation* IEEE Computer Society.
- Cheriet, F., Laporte, C., Kadoury, S., Labelle, H., & Dansereau, J. (2007). A Novel System for the 3D Reconstruction of the Human Spine and Rib Cage From

Biplanar X-Ray Images. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 54(7), 1356-1358.

Cotin, S., Delingette, H., & Ayache, N. (1999). Real-Time Elastic Deformations of Soft Tissues for Surgery Simulation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 5(1), 62-73.

Courchesne, O., Guibault, F., Dompierre, J., & Cheriet, F. (2007). Adaptive Mesh Generation of MRI Images for 3D Reconstruction of Human Trunk. *4th International Conference on Image Analysis and Recognition* (pp. 1040-1051)ICIAR.

Cover, S. A., Ezquerro, N. F., O'Brien, J. F., Rowe, R., Gadacz, T., & Palm, E. (1993). Interactively deformable models for surgery simulation. *Computer Graphics And Applications, IEEE*, 13(6), 68-75.

Dansereau, J., & Stokes, I. A. F. (1988). Measurements of the Three-Dimensional Shape of the Rib Cage. *Journal of Biomechanics*, 21(11), 893-901.

Davis, B. J., Gadgil, A., Trivedi, J., & Ahmed, N. B. (2004). Traction radiography performed under general anesthetic: a new technique for assessing idiopathic scoliosis curves. *Spine*, 29(21), 2466-2470.

Delorme, S., Violas, P., Dansereau, J., Guise, J. d., Aubin, C.-É., & Labelle, H. (2001). Preoperative and early postoperative three-dimensional changes of the rib cage

after posterior instrumentation in adolescent idiopathic scoliosis. *European Spine Journal*, 10(2), 101-107.

Desbrun, M., Schröder, P., & Barr, A. (1999). Interactive Animation of Structured Deformable Objects. *Proceedings of Graphics Interface '99* (pp. 1-8).

Erleben, K., Dohlmann, H., & Sporring, J. (2005). The Adaptive Thin Shell Tetrahedral Mesh. *WSCG 2005 : The 13th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization, and Computer Vision* (Vol. 13, pp. 17-24).

Faure, F. (1998). Interactive solid animation using linearized displacement constraints. In *9th Eurographics Workshop on Computer Animation and Simulation* (pp. 61-72).

Fortin, D., Cheriet, F., Beauséjour, M., Debanné, P., Joncas, J., & Labelle, H. (2007). A 3D Visualization Tool for the Design and Customization of Spinal Braces. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 31(8), 614-624.

Gibson, S. F. F. (1997). 3D ChainMail: a Fast Algorithm for Deforming Volumetric Objects. *Proceedings of the 1997 symposium on Interactive 3D graphics, Providence, Rhode Island, United States ACM*.

Gibson, S. F. F., & Mirtich, B. (1997). A Survey of Deformable Modeling in Computer Graphics.

- Gibson, S. F. F., Samosky, J., Mor, A., Fyock, C., Grimson, W. E. L., Kanade, T., et al. (1997). Simulating arthroscopic knee surgery using volumetric object representations, real-time volume rendering and haptic feedback. *Proceedings of the First Joint Conference on Computer Vision, Virtual Reality and Robotics in Medicine and Medial Robotics and Computer-Assisted Surgery* (Vol. 1205, pp. 369-378)Springer-Verlag.
- Gourret, J.-P., Thalmann, N. M., & Thalmann, D. (1989). Simulation of Object and Human Skin Formations in a Grasping Task. *SIGGRAPH Computer Graphics*, 23(3), 21-30.
- Haheer, T. R., Merola, A., Zipnick, R. I., Gorup, J., Mannor, D., & Orchowski, J. (1995). Meta-analysis of surgical outcome in adolescent idiopathic scoliosis. A 35-year English literature review of 11,000 patients. *Spine*, 20(14), 1575-1584.
- Hawes, M. (2006). Impact of Spine Surgery on Signs and Symptoms of Spinal Deformity. *Pediatric Rehabilitation*, 9(4), 318-339.
- Jakobsen, T. (2001). Advanced Character Physics. *Proceedings of Game Developer Conference, San Diego*.
- Jaremko, J. L., Poncet, P., Ronsky, J., Harder, J., Dansereau, J., Labelle, H., et al. (2002). Indices of Torso Asymmetry Related to Spinal Deformity in Scoliosis. *Clinical Biomechanics*, 17(8), 559-568.

- Joukhadar, A., & Laugier, C. (1996). Adaptive time step for fast converging dynamic simulation system. *Proceedings of the IEEE-RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* (pp. 418-424).
- Kacic-Alesic, Z., Nordenstam, M., & Bullock, D. (2003). A Practical Dynamics System. *SIGGRAPH 03 : Symposium on Computer Animation* (pp. 7-16).
- Keeve, E., Girod, S., & Girod, B. (1996). Craniofacial Surgery Simulation. In *Visualization in Biomedical Computing* (1131, pp. 514-546): Springer.
- Keeve, E., Girod, S., Kikinis, R., & Girod, B. (1998). Deformable modeling of facial tissue for craniofacial surgery simulation. *Computer Aided Surgery*, 3(5), 228-238.
- Kelpps, S. J., Lenke, L. G., Bridwell, K. H., Bassett, G. S., & Whorton, J. (2001). Prospective comparison of flexibility radiographs in adolescent idiopathic scoliosis. *Spine*, 26(5), E74-79.
- Koch, R. M., Gross, M. H., Carls, F. R., Büren, D. F. v., Fankhauser, G., & Parish, Y. I. H. (1996). Simulating facial surgery using finite element models. *Proceedings of the 23rd annual conference on Computer graphics and interactive techniques* ACM.
- Kreyszig, E. (1999). *Advanced Engineering Mathematics* (8<sup>e</sup> éd.): Wiley.

- Lamarre, M. E., Parent, S., Labelle, H., Aubin, C. E., Joncas, J., Cabral, A., et al. (2009). Assessment of Spinal Flexibility in Adolescent Idiopathic Scoliosis : Suspension Versus Side-Bending Radiography. *Spine*, 34(6), 591-597.
- Lamarre, M. E., Parent, S., Labelle, H., Aubin, C. E., & Petit, Y. (Soumis 2008). Assessment of Spinal Flexibility in Adolescent Idiopathic Scoliosis: Supine Extension Versus Side-Bending Radiograph. *Spine*.
- Lasseter, J. (1987). Principles of traditional animation applied to 3D computer animation. *SIGGRAPH 87 : Proceedings of the 14th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (Vol. 21, pp. 35-44)ACM Press.
- Lee, Y., Terzopoulos, D., & Walters, K. (1995). Realistic modeling for facial animation. *Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques* ACM.
- Lenke, L., Betz, R., & Harms, J. (2004). *Modern Anterior Scoliosis Surgery*. St. Louis: Quality Medical Publishing.
- Liao, Q. H. (2004). *Fusion de structures anatomiques déformables du tronc humain*. M. Sc. A. inédit, École polytechnique de Montréal, Montréal.
- Liu, A., Tendick, F., Cleary, K., & Kaufmann, C. (2003). A survey of surgical simulation: applications, technology, and education. *Presence: Teleoperators and Virtual Environments*, 12(6), 599-614.

- Lorensen, W. E., & Cline, H. E. (1987). Marching cubes: A High Resolution 3D Surface Construction Algorithm. *SIGGRAPH Computer Graphics*, 21(4), 163-169.
- Lynch, D. R. (2005). *Numerical Partial Differential Equations for Environmental Scientists and Engineers : A First Practical Course*: Springer.
- Mensmann, J., Ropinski, T., & Hinrichs, K. (2008). Interactive Cutting Operations for Generating Anatomical Illustrations from Volumetric Data Sets. *Journal of WSCG : 16th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision*, 16, 89-96.
- Miled, F. (2007). *Analyse de la géométrie externe du tronc scoliotique en flexion latérale*. École polytechnique de Montréal, Montréal.
- Miller, G. S. P. (1988). The motion dynamics of snakes and worms. *Proceedings of the 15th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* ACM.
- Morris, D., & Salisbury, K. (2008). Automatic preparation, calibration, and simulation of deformable objects. *Comput Methods Biomech Biomed Engin*, 11(3), 263-279.
- Müller, M., Dorsey, J., McMillan, L., Jagnow, R., & Cutler, B. (2002). Stable Real-Time Deformations. *Proceedings of the 2002 ACM SIGGRAPH Eurographics symposium on Computer animation, San Antonio, Texas* ACM.

- Müller, M., Heidelberger, B., Hennix, M., & Ratcliff, J. (2006). Position based dynamics. *VRIPhys 06 : Proceedings of Virtual Reality Interactions and Physical Simulations* (pp. 71-80).
- Nealen, A., Müller, M., Keiser, R., Boxerman, E., & Carlson, M. (2006). Physically Based Deformable Models in Computer Graphics. *Computer Graphics Forum*, 25(4), 809-836.
- Nedel, L. P., & Thalmann, D. (1998). Real Time Muscle Deformations using Mass-Spring Systems. *Proceedings of the Computer Graphics International 1998* IEEE Computer Society.
- Payne, W. K., Ogilvie, J. W., Resnick, M. D., Kane, R. L., Transfeldt, E. E., & Blum, R. W. (1997). Does scoliosis have a psychological impact and does gender make a difference ? *Spine*, 22(12), 1380-1384.
- Pazos, V. (2002). *Développement d'un système de reconstruction 3D et d'analyse de la surface externe du tronc humain pour un suivi non invasif des déformations scoliotiques*. École polytechnique de Montréal, Montréal.
- Pazos, V., Cheriet, F., Dansereau, J., & Labelle, H. (2005). Quantitative analysis of external trunk asymmetry: pre- and post-surgery comparison. *35ième réunion annuelle de la Société de Scoliose du Québec* (pp. 14).



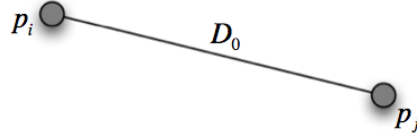
- Plourde, F. (2007). *Détection semi-automatique des contours des côtes à partir de radiographies thoraciques postéro-antérieures de patients scoliotiques*. École polytechnique de Montréal, Montréal.
- Press, W., Flannery, B., Teukolsky, S., & Vetterling, W. (1992). *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing*: Cambridge University Press.
- Provot, X. (1995). Deformation Constraints in a Mass-Spring Model to Describe Rigid Cloth Behavior. *Proceedings of Graphics Interface '95* (pp. 147-154).
- Scherl, S. A., Phillips, W., & Torchia, M. M. (2008). Clinical features; evaluation; and diagnosis of adolescent idiopathic scoliosis. In *UpToDate*. Waltham, MA: UpToDate.
- Schill, M. A., Gibson, S. F. F., Bender, H. J., & Männer, R. (1998). Biomechanical Simulation of the Vitreous Humor in the Eye Using an Enhanced ChainMail Algorithm. In *Medical Image Computing and Computer Assisted Intervention (MICCAI 98)* (1496, pp. 679-687): Springer Berlin.
- Sederberg, T. W., & Parry, S. R. (1986). Free-Form Deformation of Solid Geometric Models. *SIGGRAPH Computer Graphics*, 20(4), 151-160.
- Selle, A., Lentine, M., & Fedkiw, R. (2008). A Mass Spring Model for Hair Simulation. *ACM Transactions on Graphics*, 27(3), 1-11.

- Seoud, L., Cheriet, F., Labelle, H., & Dansereau, J. (2009). A Novel Method for the 3D Reconstruction of Scoliotic Ribs From Frontal and Lateral Radiographs. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, (en révision).
- Shawafaty, N. (2007). *Évaluation non invasive de l'effet du traitement par corset spinecor sur la géométrie externe du tronc*. École polytechnique de Montréal, Montréal.
- Shinya, M. (2005). Theories for Mass-Spring Simulation in Computer Graphics: Stability, Costs and Improvements. *IEICE - Transactions on Information and Systems*, E88-D(4), 767-774.
- Shoemake, K. (1985). Animating Rotation with Quaternion Curve. In *Computer Graphics : SIGGRAPH '85 Proceedings* (Vol. 19, pp. 245-254).
- Spillmann, J., Wagner, M., & Teschner, M. (2006). Robust Tetrahedral Meshing of Triangle Soups. *Proceedings in vision, modeling and visualization, Germany* (pp. 9-15).
- Terzopoulos, D., Platt, J., Barr, A., & Fleischer, K. (1987). Elastically deformable models. *SIGGRAPH 87 : Proceedings of the 14th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (pp. 205-214)ACM Press.
- Teschner, M., Heidelberger, B., Muller, M., & Gross, M. (2004). A Versatile and Robust Model for Geometrically Complex Deformable Solids. *Proceedings of the Computer Graphics International* IEEE Computer Society.

- Verlet, L. (1967). Computer "Experiments" on Classical Fluids. I. Thermodynamical Properties of Lennard-Jones Molecules. *Physical Review*, 159(1), 98.
- Vincent, G. S., Buchart, C., Borro, D., & Celig, J. (2009). Maxillofacial surgery simulation using a mass-spring model derived from continuum and the scaled displacement method. *International Journal of Computer Assisted Radiology and Surgery*, 4(1), 89-98.
- Volino, P., Courchesne, M., & Thalmann, N. M. (1995). Versatile and efficient techniques for simulating cloth and other deformable objects. *Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques* ACM Press.
- Wehner, M., Alterovitz, R., & Goldberg, K. (2006). Geometric Nonlinearity : Is it Important for Realtime FEM Surgical Simulation ? *Medicine Meets Virtual Reality 14, Long Beach, CA*.
- Weinstein, S. L., Zavala, D. C., & Ponseti, I. V. (1981). Idiopathic scoliosis : long-term follow-up and prognosis in untreated patients. *The Journal of Bone and Joint Surgery*, 63(5), 702-712.
- Willers, U., Transfeldt, E. E., & Hedlund, R. (1996). The segmental effect of Cotrel-Dubousset instrumentation on vertebral rotation, rib hump and the thoracic cage in idiopathic scoliosis. *European Spine Journal*, 5(6), 387-393.

**ANNEXE A***Calcul des forces*

### Calcul des forces associées à une distance



Définissons une contrainte, invariante d'échelle, permettant de maintenir les particules  $p_i$  et  $p_j$  à une certaine distance  $D_0$  entre elles :

$$C_D(p_i, p_j) = \frac{\Delta D}{D_0} = \frac{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\| - D_0}{D_0}, \quad \text{où } D_0 \neq 0 \quad (\text{A.1})$$

L'énergie potentielle générée par la différence de la distance actuelle des deux particules et la distance  $D_0$  initiale s'exprime par :

$$E_D(p_i, p_j) = \frac{1}{2} k_D C_D^2 \quad (\text{A.2})$$

Ainsi, par l'équation 1.9, nous pouvons déterminer les forces conservatrices du système suite au calcul du gradient inverse de l'énergie potentielle par rapport aux positions des particules :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_D^i &= -\frac{\partial E_D}{\partial \mathbf{x}_i} = -\frac{1}{2} k_D 2 C_D \frac{\partial C_D}{\partial \mathbf{x}_i} = -k_D C_D \frac{\partial C_D}{\partial \mathbf{x}_i} \\ \mathbf{f}_D^j &= -\frac{\partial E_D}{\partial \mathbf{x}_j} = -\frac{1}{2} k_D 2 C_D \frac{\partial C_D}{\partial \mathbf{x}_j} = -k_D C_D \frac{\partial C_D}{\partial \mathbf{x}_j} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Subséquentement, il suffit de déterminer  $\frac{\partial C_D}{\partial \mathbf{x}_i}$  et  $\frac{\partial C_D}{\partial \mathbf{x}_j}$ . Posons,

$$U = \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\| = \left[ (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_x^2 + (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_y^2 + (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_z^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.4})$$

Alors l'équation A.1 devient,

$$C_D(p_i, p_j) = \frac{U - D_0}{D_0} \quad (\text{A.5})$$

Et,

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_D}{\partial \mathbf{x}_i} &= \frac{1}{D_0} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i} \\ \frac{\partial C_D}{\partial \mathbf{x}_j} &= \frac{1}{D_0} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_j} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Avec,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i} &= \left( \frac{\partial U}{\partial (\mathbf{x}_i)_x}, \frac{\partial U}{\partial (\mathbf{x}_i)_y}, \frac{\partial U}{\partial (\mathbf{x}_i)_z} \right)^T \\ \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_j} &= \left( \frac{\partial U}{\partial (\mathbf{x}_j)_x}, \frac{\partial U}{\partial (\mathbf{x}_j)_y}, \frac{\partial U}{\partial (\mathbf{x}_j)_z} \right)^T \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Évaluons  $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial (\mathbf{x}_i)_x} &= -\frac{1}{2} \frac{2(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_x}{\left[ (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_x^2 + (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_y^2 + (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{-(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_x}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \\ \frac{\partial U}{\partial (\mathbf{x}_i)_y} &= -\frac{1}{2} \frac{2(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_y}{\left[ (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_x^2 + (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_y^2 + (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{-(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_y}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \\ \frac{\partial U}{\partial (\mathbf{x}_i)_z} &= -\frac{1}{2} \frac{2(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_z}{\left[ (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_x^2 + (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_y^2 + (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{-(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_z}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Donc,

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{-1}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \begin{bmatrix} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_x \\ (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_y \\ (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_z \end{bmatrix} = -\frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \quad (\text{A.9})$$

Par le même raisonnement nous trouvons :

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_j} = \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \quad (\text{A.10})$$

Ainsi,

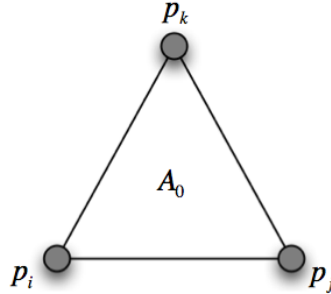
$$\begin{aligned} \frac{\partial C_D}{\partial \mathbf{x}_i} &= -\frac{1}{D_0} \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \\ \frac{\partial C_D}{\partial \mathbf{x}_j} &= \frac{1}{D_0} \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Nous sommes conséquemment en mesure de calculer les forces conservatrices du système :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_D^i &= k_D \left( \frac{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\| - D_0}{D_0^2} \right) \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \\ \mathbf{f}_D^j &= -k_D \left( \frac{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\| - D_0}{D_0^2} \right) \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Finalement, connaissant  $\frac{\partial C_D}{\partial \mathbf{x}_i}$  et  $\frac{\partial C_D}{\partial \mathbf{x}_j}$  nous pouvons aisément calculer les forces d'amortissement respectives à appliquer sur chaque particule en utilisant l'équation 1.16.

### Calcul des forces associées à l'aire



Définissons une contrainte, invariante d'échelle, permettant de conserver l'aire d'un triangle  $A_0$  défini par le triplet de particules  $p_i$ ,  $p_j$  et  $p_k$  :

$$C_A(p_i, p_j, p_k) = \frac{\Delta A}{A_0} = \frac{\frac{1}{2} \|(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)\| - A_0}{A_0}, \quad \text{où } A_0 \neq 0 \quad (\text{A.13})$$

L'énergie potentielle générée par la différence de l'aire actuelle et l'aire initiale  $A_0$  s'exprime par :

$$E_A(p_i, p_j, p_k) = \frac{1}{2} k_A C_A^2 \quad (\text{A.14})$$

Par l'équation 1.9, nous pouvons exprimer les forces conservatrices du système par :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_A^i &= -\frac{\partial E_A}{\partial \mathbf{x}_i} = -k_A C_A \frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_i} \\ \mathbf{f}_A^j &= -\frac{\partial E_A}{\partial \mathbf{x}_j} = -k_A C_A \frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_j} \\ \mathbf{f}_A^k &= -\frac{\partial E_A}{\partial \mathbf{x}_k} = -k_A C_A \frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_k} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Il suffit donc de trouver  $\frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_i}$ ,  $\frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_j}$  et  $\frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_k}$ .

Posons,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \\ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_y (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)_z - (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_z (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)_y \\ (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_x (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)_z - (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_z (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)_x \\ (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_x (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)_y - (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_y (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Ainsi,



$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_i} &= \frac{1}{2A_0} \frac{\partial \|\mathbf{u}\|}{\partial \mathbf{x}_i} \\
\frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_j} &= \frac{1}{2A_0} \frac{\partial \|\mathbf{u}\|}{\partial \mathbf{x}_j} \\
\frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_k} &= \frac{1}{2A_0} \frac{\partial \|\mathbf{u}\|}{\partial \mathbf{x}_k}
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Par l'expression générale de  $\frac{\partial \|\mathbf{u}\|}{\partial \mathbf{x}}$  on a,

$$\frac{\partial \|\mathbf{u}\|}{\partial \mathbf{x}} = \left( \frac{\partial \|\mathbf{u}\|}{\partial \mathbf{x}_x}, \frac{\partial \|\mathbf{u}\|}{\partial \mathbf{x}_y}, \frac{\partial \|\mathbf{u}\|}{\partial \mathbf{x}_z} \right)^T \tag{A.18}$$

En utilisant la propriété de dérivée de fonctions composées, on retrouve :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \|\mathbf{u}\|}{\partial \mathbf{x}_x} &= \frac{u_x \frac{\partial u_x}{\partial \mathbf{x}_x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial \mathbf{x}_x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial \mathbf{x}_x}}{\|\mathbf{u}\|} \\
\frac{\partial \|\mathbf{u}\|}{\partial \mathbf{x}_y} &= \frac{u_x \frac{\partial u_x}{\partial \mathbf{x}_y} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial \mathbf{x}_y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial \mathbf{x}_y}}{\|\mathbf{u}\|} \\
\frac{\partial \|\mathbf{u}\|}{\partial \mathbf{x}_z} &= \frac{u_x \frac{\partial u_x}{\partial \mathbf{x}_z} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial \mathbf{x}_z} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial \mathbf{x}_z}}{\|\mathbf{u}\|}
\end{aligned} \tag{A.19}$$

Pouvant s'écrire sous forme d'un produit matrice vecteur :

$$\frac{\partial \|\mathbf{u}\|}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{M} \mathbf{u} \tag{A.20}$$

où  $\mathbf{M}$  est donné par :

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial \mathbf{x}_x} & \frac{\partial u_y}{\partial \mathbf{x}_x} & \frac{\partial u_z}{\partial \mathbf{x}_x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial \mathbf{x}_y} & \frac{\partial u_y}{\partial \mathbf{x}_y} & \frac{\partial u_z}{\partial \mathbf{x}_y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial \mathbf{x}_z} & \frac{\partial u_y}{\partial \mathbf{x}_z} & \frac{\partial u_z}{\partial \mathbf{x}_z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

À partir des équations A.17, A.20 et A.21 nous pouvons déterminer  $\frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_i}$ ,  $\frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_j}$  et

$\frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_k}$  par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_i} &= \frac{1}{2A_0} \mathbf{M}_i \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \\ \frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_j} &= \frac{1}{2A_0} \mathbf{M}_j \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \\ \frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_k} &= \frac{1}{2A_0} \mathbf{M}_k \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

À titre d'exemple, nous calculerons seulement  $\frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_i}$  puisque le raisonnement est le

même pour  $\frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_j}$  et  $\frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_k}$ . Dans un premier temps, calculons  $\mathbf{M}_i$  :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_i &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial(\mathbf{x}_i)_x} & \frac{\partial u_y}{\partial(\mathbf{x}_i)_x} & \frac{\partial u_z}{\partial(\mathbf{x}_i)_x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial(\mathbf{x}_i)_y} & \frac{\partial u_y}{\partial(\mathbf{x}_i)_y} & \frac{\partial u_z}{\partial(\mathbf{x}_i)_y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial(\mathbf{x}_i)_z} & \frac{\partial u_y}{\partial(\mathbf{x}_i)_z} & \frac{\partial u_z}{\partial(\mathbf{x}_i)_z} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)_z - (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_z & -(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)_y + (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_y \\ -(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)_z + (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_z & 0 & -(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_x + (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)_x \\ -(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_y + (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)_y & (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_x - (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.23}) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)_z & (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)_y \\ (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)_z & 0 & -(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)_x \\ -(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)_y & (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)_x & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

L'expression ci-dessus peut être simplifiée davantage en utilisant la propriété du produit vectoriel suivante :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a}] \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

Ainsi,  $\frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_i}$  peut s'écrire sous la forme compacte suivante :

$$\frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{1}{2A_0} \mathbf{M}_i \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{1}{2A_0} \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) \times \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \quad (\text{A.25})$$

En appliquant le même raisonnement pour  $\frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_j}$  et  $\frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_k}$  nous obtenons :

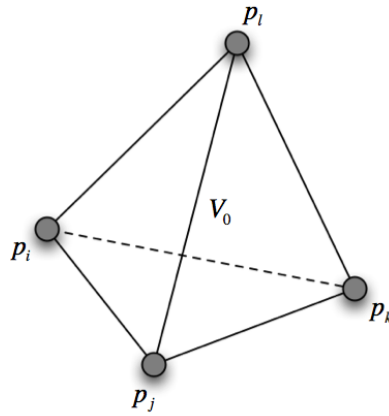
$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_j} &= \frac{1}{2A_0} \mathbf{M}_j \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{1}{2A_0} \frac{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \times \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \\
\frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_k} &= \frac{1}{2A_0} \mathbf{M}_k \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{1}{2A_0} \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \times \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}
\end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Maintenant, les forces conservatrices du système se calculent aisément :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_A^i &= -\frac{k_A C_A}{2A_0} \left( \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) \times \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right) \\ \mathbf{f}_A^j &= -\frac{k_A C_A}{2A_0} \left( \frac{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \times \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right) \\ \mathbf{f}_A^k &= -\frac{k_A C_A}{2A_0} \left( \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \times \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Connaissant  $\frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_i}$ ,  $\frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_j}$  et  $\frac{\partial C_A}{\partial \mathbf{x}_k}$  nous sommes une fois de plus en mesure de calculer les forces d'amortissement respectives appliquer sur chaque particule en utilisant l'équation 1.16.

### Calcul des forces associées au volume



Définissons une contrainte, invariante d'échelle, permettant de conserver le volume d'un tétraèdre  $V_0$  défini par les particules  $p_i$ ,  $p_j$ ,  $p_k$  et  $p_l$  :

$$C_V(p_i, p_j, p_k, p_l) = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\frac{1}{6}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \cdot ((\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i)) - V_0}{V_0}, \quad \text{où } V_0 \neq 0 \quad (\text{A.28})$$

L'énergie potentielle générée par la différence du volume actuel et du volume initial,  $V_0$  s'exprime par :

$$E_V(p_i, p_j, p_k, p_l) = \frac{1}{2} k_V C_V^2 \quad (\text{A.29})$$

Par l'équation 1.9, nous pouvons exprimer les forces conservatrices du système par :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_V^i &= -\frac{\partial E_V}{\partial \mathbf{x}_i} = -k_V C_V \frac{\partial C_V}{\partial \mathbf{x}_i} \\ \mathbf{f}_V^j &= -\frac{\partial E_V}{\partial \mathbf{x}_j} = -k_V C_V \frac{\partial C_V}{\partial \mathbf{x}_j} \\ \mathbf{f}_V^k &= -\frac{\partial E_V}{\partial \mathbf{x}_k} = -k_V C_V \frac{\partial C_V}{\partial \mathbf{x}_k} \\ \mathbf{f}_V^l &= -\frac{\partial E_V}{\partial \mathbf{x}_l} = -k_V C_V \frac{\partial C_V}{\partial \mathbf{x}_l} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Il suffit donc de trouver  $\frac{\partial C_V}{\partial \mathbf{x}_i}$ ,  $\frac{\partial C_V}{\partial \mathbf{x}_j}$ ,  $\frac{\partial C_V}{\partial \mathbf{x}_k}$  et  $\frac{\partial C_V}{\partial \mathbf{x}_l}$ . Posons,

$$U = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (\text{A.31})$$

où,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i \\ \mathbf{b} &= (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Ainsi,

$$C_V = \frac{\frac{1}{6} U - V_0}{V_0} \quad (\text{A.33})$$

Et,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_v}{\partial \mathbf{x}_i} &= \frac{1}{6V_0} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i} \\
\frac{\partial C_v}{\partial \mathbf{x}_j} &= \frac{1}{6V_0} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_j} \\
\frac{\partial C_v}{\partial \mathbf{x}_k} &= \frac{1}{6V_0} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_k} \\
\frac{\partial C_v}{\partial \mathbf{x}_l} &= \frac{1}{6V_0} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_l}
\end{aligned} \tag{A.34}$$

À titre d'exemple, nous calculerons seulement  $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i}$  puisque le raisonnement est similaire pour  $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_j}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_k}$  et  $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_l}$ . Ainsi,

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i} = \left( \frac{\partial U}{\partial (\mathbf{x}_i)_x}, \frac{\partial U}{\partial (\mathbf{x}_i)_y}, \frac{\partial U}{\partial (\mathbf{x}_i)_z} \right)^T \tag{A.35}$$

Commençons par déterminer  $\frac{\partial U}{\partial (\mathbf{x}_i)_x}$  :

$$\frac{\partial U}{\partial (\mathbf{x}_i)_x} = \frac{\partial (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{\partial (\mathbf{x}_i)_x} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial (\mathbf{x}_i)_x} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial (\mathbf{x}_i)_x} \tag{A.36}$$

Ainsi, pour  $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial (\mathbf{x}_i)_x}$  nous avons :

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial (\mathbf{x}_i)_x} = \begin{bmatrix} \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_x}{\partial (\mathbf{x}_i)_x} \\ \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_y}{\partial (\mathbf{x}_i)_x} \\ \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)_z}{\partial (\mathbf{x}_i)_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\mathbf{n}_x \tag{A.37}$$

Et pour  $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial (\mathbf{x}_i)_x}$  :

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial (\mathbf{x}_i)_x} = \begin{bmatrix} \frac{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)_y (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i)_z - (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)_z (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i)_y}{\partial (\mathbf{x}_i)_x} \\ \frac{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)_x (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i)_z - (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)_z (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i)_x}{\partial (\mathbf{x}_i)_x} \\ \frac{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)_x (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i)_y - (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)_y (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i)_x}{\partial (\mathbf{x}_i)_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_k)_z \\ (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l)_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.38})$$

On remarque ici que :

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial (\mathbf{x}_i)_x} = -\mathbf{n}_x \times (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_k) \quad (\text{A.39})$$

Par la propriété vectorielle :

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \quad (\text{A.40})$$

On déduit :

$$\frac{\partial U}{\partial (\mathbf{x}_i)_x} = \mathbf{n}_x \cdot [(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_k) - (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i)] \quad (\text{A.41})$$

De la même manière, nous obtenons  $\frac{\partial U}{\partial (\mathbf{x}_i)_y}$  et  $\frac{\partial U}{\partial (\mathbf{x}_i)_z}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial (\mathbf{x}_i)_y} &= \mathbf{n}_y \cdot [(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_k) - (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i)] \\ \frac{\partial U}{\partial (\mathbf{x}_i)_z} &= \mathbf{n}_z \cdot [(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_k) - (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i)] \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

où,

$$\mathbf{n}_y = (0, 1, 0)^T \text{ et } \mathbf{n}_z = (0, 0, 1)^T$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial(\mathbf{x}_i)} &= \left( \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{x}_i)_x}, \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{x}_i)_y}, \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{x}_i)_z} \right)^T \\ &= (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_k) - (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i)\end{aligned}\quad (\text{A.43})$$

Par le même raisonnement, nous trouvons  $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_j}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_k}$  et  $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_l}$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial(\mathbf{x}_j)} &= (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i) \\ \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{x}_k)} &= (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \\ \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{x}_l)} &= (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)\end{aligned}\quad (\text{A.44})$$

Ainsi à partir de A.34, nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_V}{\partial \mathbf{x}_i} &= \frac{1}{6V_0} \left( (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_k) - (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i) \right) \\ \frac{\partial C_V}{\partial \mathbf{x}_j} &= \frac{1}{6V_0} \left( (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i) \right) \\ \frac{\partial C_V}{\partial \mathbf{x}_k} &= \frac{1}{6V_0} \left( (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \right) \\ \frac{\partial C_V}{\partial \mathbf{x}_l} &= \frac{1}{6V_0} \left( (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \right)\end{aligned}\quad (\text{A.45})$$

Maintenant, nous sommes aisément en mesure de trouver les forces conservatrices de système :



$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_V^i &= -k_V C_V \frac{\partial C_V}{\partial \mathbf{x}_i} = -k_V \frac{(\frac{1}{6}U - V_0)}{6V_0} \mathbf{w}_1 \\
\mathbf{f}_V^j &= -k_V C_V \frac{\partial C_V}{\partial \mathbf{x}_j} = -k_V \frac{(\frac{1}{6}U - V_0)}{6V_0} \mathbf{w}_2 \\
\mathbf{f}_V^k &= -k_V C_V \frac{\partial C_V}{\partial \mathbf{x}_k} = -k_V \frac{(\frac{1}{6}U - V_0)}{6V_0} \mathbf{w}_3 \\
\mathbf{f}_V^l &= -k_V C_V \frac{\partial C_V}{\partial \mathbf{x}_l} = -k_V \frac{(\frac{1}{6}U - V_0)}{6V_0} \mathbf{w}_4
\end{aligned} \tag{A.46}$$

avec,

$$\begin{aligned}
U &= (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \cdot ((\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i)) \\
\mathbf{w}_1 &= (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_k) - (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i) \\
\mathbf{w}_2 &= (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i) \\
\mathbf{w}_3 &= (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \\
\mathbf{w}_4 &= (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)
\end{aligned} \tag{A.47}$$

Connaissant  $\frac{\partial C_V}{\partial \mathbf{x}_i}$ ,  $\frac{\partial C_V}{\partial \mathbf{x}_j}$ ,  $\frac{\partial C_V}{\partial \mathbf{x}_k}$  et  $\frac{\partial C_V}{\partial \mathbf{x}_l}$  nous sommes une fois de plus en mesure de

calculer les forces d'amortissement respectives appliquées sur chaque particule en utilisant l'équation 1.16.

**ANNEXE B***Cadre d'applications*

Le cadre d'applications développé lors de cette maîtrise fut essentiellement conçu pour faciliter la suite de ce projet. Cette bibliothèque, programmée en C#, utilise les technologies .Net de Microsoft permettant aux intéressés de l'utiliser avec le langage de programmation de leur choix (C#, C++, Visual Basic, F# et J#) grâce à la compilation du code source en CLR (*Common Language Runtime*). Cela étant particulièrement intéressant étant donné la diversité des formations des membres de notre laboratoire.

Ce cadre d'application fut construit progressivement au fil des besoins du projet et utilise trois bibliothèques externes libres. La première intitulée ILNumerics.Net<sup>8</sup> est utilisée pour faciliter l'implémentation de certains algorithmes numériques. La seconde est la librairie OpenGL<sup>9</sup> permettant la visualisation des données et l'exploitation du processeur graphique par l'intermédiaire de nuanceurs. Finalement, la librairie TaoFramework<sup>10</sup>, constituée de classes enveloppantes pour permettre l'utilisation d'OpenGL avec le langage C#, fut aussi employée.

Plusieurs packages furent développés dans un objectif de réutilisation :

- Package IO : Possède des classes permettant l'importation des différentes géométries acquises (modèles filaires et surfaciques) propres au LIV4D et l'exportation de ces dernières sous format OBJ pour une analyse avec d'autres logiciels ou en format binaire pour optimiser la taille des fichiers.
- Package Graphics : Encapsule certaines fonctionnalités clés d'OpenGL afin de faciliter le rendu des données telles que les textures, les matériaux, les lumières, le rendu « hors-ligne », les nuanceurs, la géométrie, les projections de vue et la sélection.

---

<sup>8</sup> <http://ilnumerics.net/>

<sup>9</sup> Open Graphics Library (<http://www.opengl.org/>)

<sup>10</sup> <http://www.taoframework.com/>

- *Package Physics*: Contient l'engin physique des tissus mous, notamment les différentes contraintes développées, les différents schémas d'intégration et un gestionnaire générique permettant son utilisation simple pour d'autres projets.
- *Packages Geometry et Collision*: Comprend des classes pour faciliter la recherche géométrique et la détection de collision sur des plans, triangles, segments, tétraèdres et boîtes englobantes; ainsi que des algorithmes de recherche sur un maillage, le calcul de l'enveloppe convexe d'une géométrie quelconque et l'algorithme du cube baladeur.
- *Package GUI*: Contient différentes classes pour faciliter la mise en œuvre d'interfaces avec OpenGL.

Cette bibliothèque est par conséquent utilisée par toutes les applications développées tout au long de ce projet et une documentation est en cours de rédaction.