

**Titre:** Optimisation stochastique de la répartition spatio-temporelle d'un volume d'eau aux groupes turbo-alternateurs d'un système de production hydroélectrique  
**Title:**

**Auteur:** Sara Séguin  
**Author:**

**Date:** 2016

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Séguin, S. (2016). Optimisation stochastique de la répartition spatio-temporelle d'un volume d'eau aux groupes turbo-alternateurs d'un système de production hydroélectrique [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
**Citation:** <https://publications.polymtl.ca/2229/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/2229/>  
**PolyPublie URL:**

**Directeurs de recherche:** Charles Audet, & Pascal Côté  
**Advisors:**

**Programme:** Mathématiques de l'ingénieur  
**Program:**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

OPTIMISATION STOCHASTIQUE DE LA RÉPARTITION SPATIO-TEMPORELLE  
D'UN VOLUME D'EAU AUX GROUPES TURBO-ALTERNATEURS D'UN SYSTÈME  
DE PRODUCTION HYDROÉLECTRIQUE

SARA SÉGUIN  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR  
(MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR)  
AOÛT 2016

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

OPTIMISATION STOCHASTIQUE DE LA RÉPARTITION SPATIO-TEMPORELLE  
D'UN VOLUME D'EAU AUX GROUPES TURBO-ALTERNATEURS D'UN SYSTÈME  
DE PRODUCTION HYDROÉLECTRIQUE

présentée par : SÉGUIN Sara

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. GENDREAU Michel, Ph. D., président

M. AUDET Charles, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. CÔTÉ Pascal, Ph. D., membre et codirecteur de recherche

M. DESAULNIERS Guy, Ph. D., membre

M. SHAWWASH Ziad, Ph. D., membre externe

## DÉDICACE

*À maman  
et Nana*

## REMERCIEMENTS

Quelle aventure ! Je n'ai pas vu passer les quatre dernières années de ma vie !

J'ai eu une opportunité incroyable de trouver ce projet de recherche alors que j'étais blasée au travail... quelques courriels, une rencontre, et j'étais lancée pour une maîtrise. Un an plus tard, j'étais lancée pour un doctorat, et maintenant je suis lancée pour un post-doctorat...

Tout d'abord je tiens à remercier les deux personnes les plus importantes dans ce projet, mes directeurs. Charles et Pascal, je ne saurais trouver les mots justes pour dire à quel point j'ai apprécié travailler avec vous. Nous avons formé une belle équipe ultra efficace et je veux vous en remercier. Lorsqu'on a du support et des encouragements de ses directeurs, je crois que cela fait toute la différence et nous aide à continuer. Je ne me suis jamais sentie seule et vous avez toujours été disponible pour répondre à mes questions concernant le projet, mais aussi mes questions existentielles venues quelques fois au fil des années. J'ai énormément appris de votre expérience et de vos compétences et vous m'avez aidée à devenir une doctorante outillée pour poursuivre mon chemin en recherche. Vous m'avez toujours encouragée à saisir les opportunités qui se présentent et cette liberté aussi compte pour beaucoup lors d'un doctorat. Bref, j'ai adoré faire ce projet avec vous et je recommencerais sans aucune hésitation demain matin ! Je souhaite à tous les étudiants de trouver des directeurs comme vous (sérieusement !).

Ce projet a été réalisé en collaboration avec Rio Tinto au Saguenay où j'ai dû me déplacer régulièrement. Merci à l'équipe de gestion des ressources hydriques pour votre bel accueil et votre implication dans le projet. De plus, ce projet m'a fait découvrir la belle région du Saguenay Lac-St-Jean. J'ai maintenant un beau réseau d'amis dans cette région et tout ça grâce à Catherine, à Hubert et Léo aussi. Je me sens chez moi quand je suis chez toi Cath et c'est toujours le fun ! Et à Stéphane pour le vélo et la raquette, et les bières !

J'ai eu la chance de passer 6 mois à Trondheim, en Norvège, afin de travailler sur mon 2e article avec Stein-Erik Fleten. Ce fut une expérience intéressante autant sur le plan académique/professionnel que sur le plan personnel. Travailler dans un autre pays permet d'élargir ses horizons et son réseau de contact et cela a été très bénéfique pour la poursuite de mon doctorat. J'ai rencontré des gens supers, autant à l'université qu'à l'extérieur. Tusen takk à mon colocataire norvégien Bjørnar, Eve, Marianne, Steinar et Norvald pour l'immersion complète dans ce beau pays.

Entre tous ces déplacements, il y a aussi mes collègues du GERAD qui ont été plus qu'importants dans cette aventure. À mes amis qui comprennent que je parte et que je revienne

sans trop savoir quand, vous êtes toujours là pour mes folies et je vous en remercie!! En plus vous venez me visiter, que ce soit à Québec, au Saguenay ou en Norvège :)

Si j'écris ces remerciements aujourd'hui c'est grâce à ma mère. Je ne sais pas par où commencer! Tu m'as toujours soutenue dans tous mes projets et tu m'as toujours encouragée à continuer. Tu ne connais pas l'adversité et je n'ai jamais de ma vie rencontré quelqu'un d'aussi fort que toi. Tu es toujours souriante et prête à aider, merci pour absolument tout, pour avoir fait de moi la personne que je suis aujourd'hui. Bien que je ne vous voie pas souvent, merci à toute ma famille pour votre éternel support et votre compréhension.

Un doctorat c'est un accomplissement énorme, autant sur le plan personnel que professionnel, alors merci à tous ceux qui ont fait de cette aventure une expérience enrichissante.

Alors sur une note finale : yaya<sup>1000</sup>.

## RÉSUMÉ

Le procédé de fabrication de l'aluminium consomme énormément d'énergie. Le Canada est le 4<sup>e</sup> producteur mondial d'aluminium et 90% de la production est effectuée au Québec, notamment pour son abondance en ressources hydriques. Cette province produit de l'hydroélectricité à des prix compétitifs et plusieurs producteurs d'aluminium possèdent des installations au Québec. L'entreprise minière Rio Tinto opère des alumineries dans la région du Saguenay Lac-St-Jean et est aussi propriétaire d'un système de production hydroélectrique, lui permettant de satisfaire 90% de la demande en énergie de ses alumineries. L'entreprise achète la portion restante à Hydro-Québec et il est dans leur intérêt de gérer efficacement leur réseau hydroélectrique afin de produire le maximum d'énergie avec l'eau disponible.

Plusieurs modèles d'optimisation sont utilisés pour gérer efficacement un système de production hydroélectrique. L'un d'entre eux est le modèle à court terme, aussi nommé le problème de chargement et de répartition optimal. Un système de production hydroélectrique est composé de centrales, qui abritent les turbines. Il existe deux types de centrales : au fil de l'eau et à réservoir. Les centrales au fil de l'eau possèdent peu de réserve d'eau et la puissance générée par les turbines dépend principalement du débit de l'eau. Les centrales à réservoir sont situées à côté d'un barrage permettant de moduler le volume d'eau dans les réservoirs et ainsi la production de puissance. La solution obtenue par cette optimisation détermine le volume des réservoirs, les turbines en marche dans chaque centrale et le débit turbiné par chacune d'entre elle, pour chaque pas de temps, habituellement horaire ou journalier. Ce problème est complexe à résoudre, car les fonctions de production sont non convexes et non linéaires. De plus, chaque turbine a une efficacité différente et les démarrages des turbines doivent être limités puisqu'ils causent une usure prématurée de l'équipement. Enfin, les précipitations qui tombent sur les bassins hydrographiques sont incertaines, ce qui signifie que les apports naturels d'eau dans les réservoirs sont inconnus au moment de prendre une décision. Cette thèse propose une modélisation du modèle à court terme pour le réseau hydroélectrique du Saguenay Lac-St-Jean, ainsi qu'une méthode d'optimisation stochastique pour le résoudre.

Tout d'abord, une modélisation déterministe du problème est proposée, c'est-à-dire que les apports naturels sont considérés connus. Un algorithme de programmation dynamique permet de calculer des surfaces de puissance pour chaque centrale qui sont ensuite utilisées comme fonction objectif dans la méthode d'optimisation en deux phases développée. La première phase, le problème de chargement, résout un modèle non linéaire mixte en nombres entiers. La deuxième phase, le problème de répartition, résout un modèle linéaire en nombres entiers.

Les résultats obtenus avec la méthode proposée sont comparés aux décisions opérationnelles historiques et démontrent que la méthode permet d'augmenter la production d'énergie. De plus, une comparaison avec une modélisation en une seule phase confirme que la méthodologie proposée permet de résoudre rapidement le modèle à court terme.

Ensuite, la modélisation déterministe est étendue afin de considérer des apports naturels incertains et un modèle à court terme stochastique est développé. Une méthode de génération d'arbres de scénarios, basée sur la minimisation de la distance imbriquée est utilisée afin de créer les arbres de scénarios utilisés dans le modèle d'optimisation, à partir de prévisions d'apports. L'équivalent déterministe du modèle stochastique est résolu, c'est-à-dire qu'un modèle déterministe est résolu à chaque noeud de l'arbre de scénarios. Un horizon roulant est retenu pour valider le modèle d'optimisation. Les prévisions d'apports sont mises à jour quotidiennement, un arbre de scénarios est généré, le modèle stochastique est résolu, la solution du premier noeud est implémentée, les volumes des réservoirs sont mis à jour avec la vraie réalisation des apports et le processus est relancé pour tout l'horizon de planification. Les résultats numériques comparent la solution obtenue par l'optimisation stochastique à l'utilisation du scénario médian des prévisions dans l'horizon roulant et démontrent que l'utilisation d'un modèle stochastique permet de produire plus d'énergie. Des tests avec des arbres de scénarios comportant un nombre différent d'étapes et de scénarios sont effectués.

Finalement, la complexité des arbres de scénarios, utilisés dans le modèle d'optimisation à court terme, est étudiée. La méthode de génération d'arbres de scénarios requiert des paramètres qui sont : le nombre d'étapes, le nombre de noeuds fils par étape et l'agrégation de chaque étape. L'horizon roulant, comportant la génération des arbres de scénarios et l'optimisation, est défini comme un problème d'optimisation boîte noire et les paramètres de la méthode de génération d'arbres de scénarios sont optimisés. Le problème consiste à maximiser la production d'énergie de l'horizon roulant en considérant la valeur de l'eau restant dans les réservoirs à la fin de l'horizon de planification et en pénalisant les démarrages de turbines. La solution obtenue avec l'arbre permettant de maximiser l'énergie est comparée avec l'optimisation utilisant des peignes de scénarios pour représenter l'incertitude des apports naturels. Les résultats numériques démontrent que, dans ce cas précis, l'utilisation d'un éventail de peignes de scénarios permet d'obtenir des résultats comparables à un arbre de scénarios complexe, mais que le temps de calcul est grandement diminué.



## ABSTRACT

Aluminium production requires huge amounts of energy. Canada is the fourth largest aluminium producer in the world and 90% of the production takes place in Québec, mainly for its abundant water resources. This province produces hydropower at competitive prices and many aluminium producers operate in Québec. The mining company Rio Tinto is one of them and owns many aluminium plants in the Saguenay Lac-St-Jean region. This company also owns an hydroelectric production system, which allows them to satisfy the demand in energy of the aluminium plants at a 90% fulfillment. For the remainder, they need to buy the energy from Hydro-Québec so it is at their advantage to operate the hydropower system as efficiently as possible, in order to minimize their energy purchase.

Many optimization models are used to manage efficiently hydropower systems. One of them is the short-term, or unit commitment and loading problem. An hydropower system is composed of power plants which contains the turbines. There are two types of power plants: run of the river and power plants with storage reservoir. Run of the river plants have small water reserve capacities and the power production is mostly influenced by the water flow of the river. Reservoir power plants are located beside a dam, which is used to control the volume of water in the reservoirs to modulate power production. The solution to the short-term scheduling problem determines the optimal unit commitment and loading, the water flow through the turbines and the volume of water in the reservoirs, for every period, usually hourly or daily. This problem is complex to solve since the hydropower production functions are nonconvex and nonlinear. Also, each turbine has a different efficiency and it is important to limit unit restarts since they cause premature wear to the equipment. Finally, precipitations that fall on the watersheds are uncertain, which means that the reservoir inflows are unknown when a decision is taken. This thesis proposes a modeling of the short-term problem for the Saguenay Lac-St-Jean hydroelectric system, and proposes a stochastic optimization model to solve it.

First, a deterministic modeling of the problem is proposed, which means that the inflows are known. A dynamic programming algorithm is used to calculate power production functions for each power plant, which are then used in the objective functions of a two-phase optimization process. The first phase, namely the loading problem, is a nonlinear mixed integer program. The second phase, the unit commitment, is a linear integer model. Results obtained from the two phase optimization process are compared to historical operational decisions and show that the method increases energy production. Also, a comparison with a modeling of

the problem in a single optimization model confirms that the proposed methodology allows to solve rapidly the short-term unit commitment and loading problem.

Second, the deterministic modeling is extended to consider uncertain water inflows in the reservoirs and a stochastic short-term model is developed. A scenario tree generation method, based on the minimization of the nested distance, is used to create scenario tree from the inflow forecasts that are then used as input to the stochastic optimization model. The deterministic equivalent of the model is solved, which means that a deterministic model is solved at every node of the scenario tree. A rolling-horizon simulation is used to validate the optimization models. Inflow forecasts are updated daily, a scenario tree is generated, the stochastic optimization model is solved, the solution of the first scenario tree node is implemented, reservoir volumes are updated with the real realizations of the inflows and the process is relaunched for the whole planning horizon. Numerical results compare the solution obtained from the stochastic optimization to the solution obtained with the use of the median scenario of the inflows forecast only and show that the stochastic model allows to produce more energy. Multiple numerical tests are conducted, with different numbers of stages and scenarios in the scenario trees.

Finally, the complexity required in the structure of the scenario trees to maximize energy production in a rolling-horizon framework is investigated. The scenario tree generation method requires input parameters which are the number of stages, the number of child nodes at each stage and the aggregation of the period covered by each stage. The best scenario tree parameters are found using a Blackbox optimization formulation of the stochastic short-term unit commitment and loading problem that maximizes the energy production over the rolling-horizon. Three comparisons with the stochastic short-term model are conducted. The first one involves generating a set of scenario trees built from inflow forecast data over a rolling-horizon. The second replaces the set of scenario trees by the median scenario. The last one replaces the set of trees by scenario fans. Numerical results show that using a set of scenario trees is better than using the median scenario, but using scenario fans yields a comparable solution to using scenario trees with less computational effort.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	vi
ABSTRACT . . . . .	viii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	x
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xiii
LISTE DES FIGURES . . . . .	xiv
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . .	xvi
CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 Définitions et concepts de base . . . . .	1
1.2 Éléments de la problématique . . . . .	3
1.3 Objectifs de recherche . . . . .	5
1.4 Plan de la thèse . . . . .	7
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE . . . . .	8
2.1 Méthodes déterministes . . . . .	8
2.1.1 Programmation dynamique . . . . .	9
2.1.2 Programmation mixte en nombres entiers . . . . .	10
2.1.3 Relaxation lagrangienne . . . . .	12
2.1.4 Autres approches . . . . .	13
2.2 Méthodes stochastiques . . . . .	13
2.2.1 Programmation dynamique stochastique . . . . .	13
2.2.2 Méthodes stochastiques pour résoudre le problème à court terme . . . . .	15
2.3 Optimisation boîte noire . . . . .	21
2.3.1 Algorithme de recherche par coordonnées (CS) . . . . .	21
2.3.2 Algorithme de recherche par motifs (PS) . . . . .	22
2.3.3 Algorithme de recherche sur treillis adaptatifs (MADS) . . . . .	22
2.3.4 Applications des méthodes d'optimisation boîte noire . . . . .	24

CHAPITRE 3	ORGANISATION DE LA THÈSE . . . . .	26
CHAPITRE 4	ARTICLE 1 : SELF-SCHEDULING SHORT-TERM UNIT COMMIT- MENT AND LOADING PROBLEM . . . . .	28
4.1	Introduction . . . . .	28
4.1.1	Saguenay-Lac-St-Jean hydroelectric system . . . . .	30
4.1.2	Notation . . . . .	31
4.2	Short-term unit commitment and loading problem . . . . .	32
4.2.1	Problem description . . . . .	32
4.2.2	Problem modeling . . . . .	34
4.3	Mathematical models . . . . .	37
4.3.1	Loading problem . . . . .	38
4.3.2	Unit commitment . . . . .	40
4.4	Computational results . . . . .	41
4.4.1	Interpretation of the results . . . . .	44
4.4.2	Benchmarking of the proposed solution . . . . .	46
4.5	Conclusion . . . . .	48
CHAPITRE 5	ARTICLE 2 : STOCHASTIC SHORT-TERM HYDROPOWER PLAN- NING WITH INFLOW SCENARIO TREES . . . . .	50
5.1	Introduction . . . . .	51
5.2	Scenario fan of inflows . . . . .	53
5.3	Scenario tree generation . . . . .	54
5.3.1	Fixing the initial scenario tree structure : k-means clustering . . . . .	54
5.3.2	Improvement of the clusters . . . . .	55
5.3.3	Probabilities . . . . .	59
5.3.4	Termination criterion . . . . .	60
5.4	Stochastic short-term hydropower model . . . . .	61
5.4.1	Modeling of the short-term problem . . . . .	61
5.4.2	Phase I : loading problem . . . . .	63
5.4.3	Phase II : unit commitment . . . . .	64
5.5	Results . . . . .	65
5.5.1	Hydroelectric system studied . . . . .	65
5.5.2	Rolling-horizon procedure . . . . .	66
5.5.3	Numerical results . . . . .	67
5.6	Conclusion . . . . .	74

CHAPITRE 6	ARTICLE 3 : SCENARIO TREE MODELING FOR STOCHASTIC SHORT-TERM HYDROPOWER OPERATIONS PLANNING . . . . .	76
6.1	Introduction . . . . .	76
6.2	Methodology . . . . .	79
6.2.1	Stochastic Short-Term Unit Commitment And Loading Problem . . . . .	79
6.2.2	Rolling-Horizon Scheme . . . . .	79
6.2.3	Parameters Of The Scenario Tree . . . . .	81
6.2.4	Loading And Unit Commitment Problems . . . . .	82
6.3	Blackbox optimization . . . . .	83
6.3.1	Blackbox Optimization Concept . . . . .	83
6.3.2	Blackbox Formulation Of The Rolling-Horizon Scheme . . . . .	83
6.3.3	Blackbox Validation . . . . .	86
6.4	Case study . . . . .	88
6.4.1	Hydropower System . . . . .	88
6.4.2	Structure Of The Data . . . . .	89
6.5	Computational experiments . . . . .	89
6.5.1	Deterministic Optimization With The Median Scenario . . . . .	90
6.5.2	Scenario Fans . . . . .	92
6.6	Conclusion . . . . .	94
6.7	Notation . . . . .	95
CHAPITRE 7	DISCUSSION GÉNÉRALE . . . . .	96
CHAPITRE 8	CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS . . . . .	98
RÉFÉRENCES	. . . . .	101

## LISTE DES TABLEAUX

Table 4.2	Turbine combinations at Chute-du-Diable . . . . .	34
Table 4.3	Total energy production with same initial solution . . . . .	43
Table 4.4	Benchmarking on instances with 10 turbines . . . . .	47
Table 5.1	Results for 6 test cases (5 are data sets from the year 2011 and 1 from 2010). Energy produced by the stochastic solution and the median scenario rolling-horizon is given. Also, the difference in energy between both solutions is shown. . . . .	69
Table 5.2	Objective function values for 6 random scenario trees with the same number of stages and scenarios, on two data sets. . . . .	70
Table 6.1	Reservoir and power plants characteristics . . . . .	89

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Vue en coupe d'une centrale hydroélectrique. Adaptée avec permission de "Hydroelectric dam" par Tomia, 2008. Image sous license GFDL et CC-BY-2.5. . . . .	2
Figure 1.2	Efficacité en fonction du débit turbiné unitaire . . . . .	4
Figure 1.3	Réseau hydroélectrique du Saguenay Lac-St-Jean. Les rectangles représentent des centrales et les triangles des réservoirs. . . . .	6
Figure 2.1	Arbre de scénarios avec 4 scénarios et 4 étapes. . . . .	17
Figure 2.2	Algorithme de recherche par coordonnées . . . . .	22
Figure 2.3	Optimisation d'une boîte noire . . . . .	23
Figure 4.1	Turbine efficiency as a function of water discharge. . . . .	33
Figure 4.2	Power output at Chute-du-Diable. . . . .	35
Figure 4.3	Power output at Chute-du-Diable. . . . .	36
Figure 4.4	Power output with different number of active turbines. . . . .	37
Figure 4.5	Histogram of differences of energy. . . . .	44
Figure 4.6	Case 1 water discharge and water head. . . . .	45
Figure 4.7	Case 6 water discharge and water head. . . . .	46
Figure 4.8	Case 9 benchmark and two-phase approach water head. . . . .	48
Figure 5.1	Building inflow scenarios from a 7 day deterministic precipitation forecast. . . . .	55
Figure 5.2	Generation of a random path based on three available data paths of inflows. The generated value of inflow for stage 1 is shown with a star marker. . . . .	56
Figure 5.3	Illustration of the 2 steps of the algorithm. Generation of a random path of inflows from available data paths of inflows and stochastic approximation to improve the value of some scenario tree nodes. . . . .	59
Figure 5.4	A scenario tree with node probabilities (over the node) and scenario $i$ probabilities (indicated with $\pi_i$ ) . . . . .	60
Figure 5.5	Maximum output surfaces . . . . .	62
Figure 5.6	Hydroelectric system studied. . . . .	66
Figure 5.7	Average computational time of scenario tree generation and optimization for one day in the rolling-horizon. . . . .	68
Figure 5.8	Water discharges and reservoir levels for the case June 2011, 5 stages, 16 scenarios. . . . .	71

Figure 5.9	Water discharges and reservoir levels for the case June 2011, 7 stages, 16 scenarios. . . . .	72
Figure 5.10	Comparison of September (lower figures in each subfigure) and October (upper figures in each subfigure) day 1 data sets. The dashed lines are the minimum and maximum scenarios. The median scenario is the solid line. The actual realization of the inflows is the plus sign line. . . . .	73
Figure 6.1	Rolling-horizon scheme. These steps are repeated for each day $h$ of the rolling-horizon. . . . .	80
Figure 6.2	A scenario tree with $D = 4$ stages . . . . .	82
Figure 6.3	The Blackbox optimization solution approach. Index $h$ is the day in the rolling-horizon framework. . . . .	85
Figure 6.4	Validation of the blackbox. For the same scenario tree structure, histogram of the energy production in $GWh$ . . . . .	86
Figure 6.5	Convergence of Blackbox optimization for a 5-stage scenario tree . . . . .	87
Figure 6.6	Hydroelectric system studied. Squares represent power plants and triangles reservoirs. . . . .	88
Figure 6.7	Scenario trees built from inflow forecast scenarios . . . . .	89
Figure 6.8	Boxplots of the difference in energy production between stochastic and deterministic optimization . . . . .	91
Figure 6.9	Scenario fan with $x$ scenarios and $D$ stages . . . . .	92
Figure 6.10	Boxplots of the difference in energy production between stochastic optimization of the structure and the aggregation of the scenario tree compared to scenario fans . . . . .	93



**LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS**

ARIMA	Auto-Regressive Integrated Moving Average
CS	Coordinate Search
GPS	Generalized Pattern Search
MADS	Mesh Adaptive Direct Search
PS	Pattern Search

## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

La province de Québec est située sur un territoire riche en rivières, ce qui en fait un endroit de prédilection pour la production hydroélectrique. Cette province possède trois pour cent de la réserve mondiale en eau douce et dix pour cent de son territoire en est couvert. La production d'aluminium est un processus très énergivore, résultant du procédé de fusion qui permet de réduire l'alumine, obtenue à partir de bauxite, par électrolyse. Ce procédé consiste à faire fondre le mélange d'alumine et de cryolithe dans une cuve, puis à y faire traverser un courant électrique continu par une anode et une cathode. L'aluminium liquide se dépose ainsi au fond de la cuve où il peut être récupéré. Plusieurs producteurs d'aluminium sont installés au Québec à proximité de centrales hydroélectriques afin d'alimenter leurs usines en énergie hydroélectrique. C'est notamment le cas de Rio Tinto, une entreprise minière qui exploite des usines de production d'aluminium dans la région du Saguenay Lac-St-Jean. Cette compagnie est aussi propriétaire d'un système de production hydroélectrique lui permettant d'alimenter la demande en énergie de ses usines à hauteur de 90%. Ils doivent acheter l'énergie manquante à Hydro-Québec, donc il est primordial pour eux de gérer leur réseau hydroélectrique de façon efficace pour produire le plus d'énergie possible avec la quantité d'eau disponible afin de limiter leur achat d'énergie.

### 1.1 Définitions et concepts de base

La gestion d'un système de production hydroélectrique est complexe et nécessite plusieurs processus d'optimisation. Un tel système est constitué de centrales hydroélectriques qui abritent les groupes turbo-alternateurs, ou turbines, qui transforment l'énergie mécanique produite par la pression de l'eau sur les pales de la turbine en énergie électrique. Deux types de centrales existent : au fil de l'eau et à réservoir. Les centrales au fil de l'eau ont peu de réserve d'eau et la production d'énergie est surtout influencée par le débit du cours d'eau. Les centrales à réservoir sont situées à côté d'un barrage qui permet de moduler la production d'énergie en variant la hauteur de chute, qui est la différence entre l'élévation de l'eau en amont et en aval du barrage. Une conduite forcée, aussi connue sous le nom de conduite d'amenée, relie le barrage à la centrale qui, comme son nom l'indique, permet d'amener l'eau à la turbine.

La figure 1.1 montre une vue en coupe d'une centrale hydroélectrique. La centrale hydroélectrique B est composée d'un groupe turbo-alternateur dénoté par C et D. Le bief amont, qui est la hauteur d'eau maximale du barrage est désigné par A. La conduite d'amenée, en F,

amène l'eau retenue par le barrage à la turbine et H est la rivière en aval du barrage, où le bief aval est la hauteur d'eau maximale à la sortie.

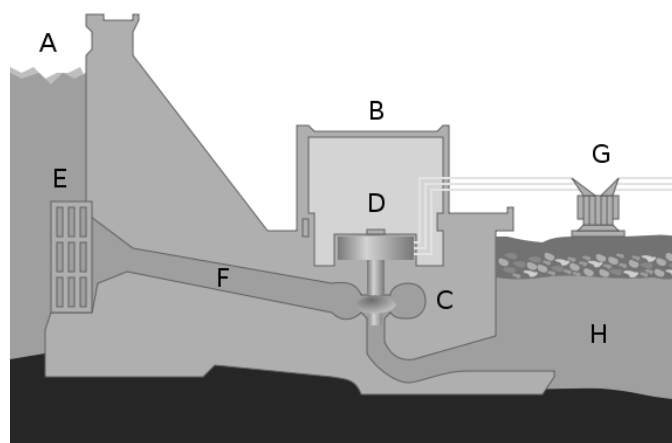


Figure 1.1 Vue en coupe d'une centrale hydroélectrique. Adaptée avec permission de "Hydroelectric dam" par Tomia, 2008. Image sous licence GFDL et CC-BY-2.5.

Plusieurs facteurs influencent la capacité de production d'énergie des centrales hydroélectriques et le plus important est sans contredit les précipitations qui tombent sur le bassin hydrographique. Aussi désigné sous le nom de bassin versant, c'est le territoire sur lequel tombent les précipitations sous forme de pluie et de neige, nommés apports naturels des réservoirs. Ces données sont incertaines puisque les précipitations ne sont pas connues avant de prendre une décision pour l'opération du système hydroélectrique. Une bonne prévision des phénomènes naturels est primordiale afin d'assurer la production d'énergie. Des modèles mathématiques sont utilisés pour tenter de prévoir le plus fidèlement possible les apports naturels des réservoirs. D'autres modèles d'optimisation sont nécessaires pour répartir la production de façon optimale entre toutes les centrales et tous les groupes turbo-alternateurs d'un système de production hydroélectrique. Plusieurs modèles permettent d'effectuer cette gestion : long terme, moyen terme et court terme.

L'optimisation à long terme est utilisée pour déterminer le potentiel de production futur, considérant l'incertitude des apports naturels des réservoirs et son horizon est de quelques années. Elle n'est pas utilisée sur une base opérationnelle régulière, mais plutôt lors de modifications majeures au réseau.

L'optimisation moyen terme est utilisée sur une base hebdomadaire afin d'estimer la quantité d'eau disponible à la production. Ce modèle permet de gérer les réservoirs des centrales et

prend en considération l'écoulement de l'eau entre les centrales, les niveaux des réservoirs, les apports naturels ainsi que leur incertitude et la demande en énergie, pour ne nommer que ceux-là.

L'optimisation à court terme est nécessaire afin de déterminer comment répartir l'eau disponible à la production, obtenue de l'optimisation moyen terme, entre les turbines et les centrales. Son horizon est court, habituellement des périodes allant de une à 24 heures sur un horizon d'une à quelques semaines.

Cette thèse traite uniquement de l'optimisation à court terme.

## 1.2 Éléments de la problématique

Les problèmes d'optimisation à court terme sont complexes à résoudre, car les fonctions de production hydroélectrique sont non convexes. Elles sont aussi non linéaires et dépendent de l'efficacité des turbines, de la hauteur de chute nette qui est une fonction non linéaire du débit turbiné et du volume, et, finalement, du débit turbiné unitaire.

La puissance pouvant être générée par une turbine [106] est donnée par l'équation :

$$P = n(Q) \times g \times Q \times h_n(v, Q), \quad (1.1)$$

où  $P$  est la puissance en kW,  $n(Q)$  est l'efficacité de la turbine,  $g$  est l'accélération gravitationnelle en  $m/s^2$ ,  $Q$  est le débit turbiné en  $m^3/s$ ,  $v$  est le volume du réservoir en  $hm^3$  et  $h_n$  est la hauteur de chute nette en  $m$ . Pour une turbine donnée, la puissance est une fonction du débit turbiné, de la hauteur de chute nette et de l'efficacité. La hauteur de chute brute est la différence entre le bief amont et le bief aval. Lorsque l'eau circule dans la conduite d'amenée, la friction cause des pertes sous forme de chaleur, réduisant l'énergie. Ce phénomène crée des pertes de charges qui doivent être considérées dans le calcul de la puissance, avec l'utilisation de la hauteur de chute nette, qui est la hauteur de chute brute à laquelle les pertes de charge sont soustraites. La hauteur de chute nette est calculée par :

$$h_n(v, Q) = h_f(v) - h_t(Q) - \psi(Q), \quad (1.2)$$

où  $v$  est le volume du réservoir en  $hm^3$ ,  $Q$  est le débit total à la centrale en  $m^3/s$ ,  $h_f$  est une fonction non linéaire retournant l'élévation amont en  $m$ ,  $h_t$  est une fonction non linéaire retournant l'élévation aval en  $m$  et  $\psi$  est une fonction non linéaire retournant les pertes de charge en  $m$ .

Une des particularités du système étudié est qu'il n'y a pas de représentation analytique des

fonctions de puissance. D'autres caractéristiques du problème compliquent sa résolution et sont expliquées ci-après.

**Efficacité** Chaque turbine possède sa propre courbe d'efficacité, ce qui signifie qu'elles ne produiront pas la même puissance pour un débit unitaire et une hauteur de chute donnés. À titre d'exemple pour une turbine, la figure 1.2 montre que le débit turbiné unitaire maximal est de  $48 \text{ m}^3/\text{s}$ . Au-delà de cette valeur, il est nécessaire de déverser de l'eau, ce qui fait diminuer la puissance et donc l'efficacité. Le rendement maximal de la turbine est obtenu pour un débit de  $41 \text{ m}^3/\text{s}$ . Dans ces conditions, la turbine est opérée dans sa zone optimale, autant pour maximiser la puissance que la durée de vie de l'équipement.

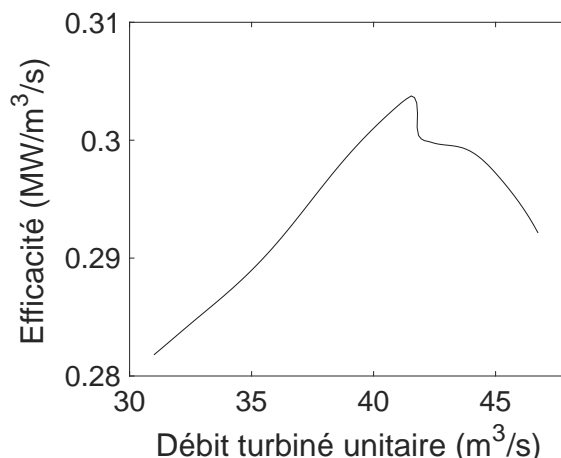


Figure 1.2 Efficacité en fonction du débit turbiné unitaire

**Zones d'opération interdites** Les turbines ont des zones d'opération interdites. Sous certaines conditions d'opération, un vortex peut se former dans la turbine et créer des variations de pression qui peuvent causer des dommages aux composants mécaniques. Elles ne doivent pas être opérées sous ces conditions. Les zones interdites sont souvent discontinues lorsqu'une turbine en a plusieurs.

**Démarrages de turbines** Les démarrages fréquents de turbines réduisent leur durée de vie. Un démarrage peut être considéré comme un certain nombre d'heures d'opération. Ainsi, chaque fois qu'une turbine est démarrée, sa durée de vie est raccourcie. Cette caractéristique

est modélisée en terme de coût de démarrage dans les modèles d'optimisation. La valeur du coût est calculée par Rio Tinto et est utilisée comme un paramètre dans le modèle.

**Valeur de l'eau** L'objectif du modèle d'optimisation à court terme est de maximiser l'énergie produite. Dans un contexte d'application réel, il est crucial d'empêcher l'optimisation de vider le réservoir à la fin de l'horizon de planification puisqu'une continuité est nécessaire d'une période à l'autre. Si l'eau à la fin de l'horizon de planification n'est pas valorisée, l'optimisation videra le réservoir afin de turbiner toute l'eau qui s'y trouve, peu importe qu'elle le soit de façon efficace ou non puisque de l'énergie sera produite. Dans un modèle d'optimisation déterministe, c'est-à-dire avec un seul scénario d'apports, il y a deux façons de s'assurer que le réservoir ne sera pas vidé. La première est de contraindre le volume final du réservoir et la seconde est d'avoir une fonction valeur finale de l'eau qui valorise l'eau à la fin de l'horizon dans l'objectif. Il est possible d'obtenir le volume final du réservoir par un modèle d'optimisation à moyen terme, par exemple. Cela signifie que les apports sont supposés parfaitement connus tout au long de l'horizon de planification et ainsi le volume final du réservoir peut être obtenu et utilisé comme paramètre dans le modèle d'optimisation. Or, avec un modèle d'optimisation stochastique, dans lequel plusieurs scénarios d'apports sont considérés, imposer une cible de volume final devient problématique puisque les apports naturels sont inconnus et que chaque scénario a une probabilité de se réaliser. Cela dit, un modèle d'optimisation à moyen terme peut être résolu pour tous les scénarios, mais chaque scénario a une valeur de volume final différente. Ainsi, une cible finale sur le volume pourrait ne pas être réalisable pour un autre scénario si l'effet des conditions hydriques est négligé, ce qui implique que la cible finale est propre à un scénario et que la solution trouvée ne sera possiblement pas optimale. Une façon de contraindre l'optimisation à ne pas vider le réservoir est de définir une fonction valeur de l'eau à la fin de l'horizon qui est maximisée. Cette fonction est construite avec un modèle d'optimisation moyen terme à l'aide d'un algorithme de programmation dynamique stochastique et elle dépend du volume du réservoir. Pour les besoins de cette thèse, cette fonction est élaborée par Rio Tinto et utilisée dans l'objectif du modèle d'optimisation à court terme.

### 1.3 Objectifs de recherche

Cette thèse, rédigée par articles, a pour objectif de développer un modèle d'optimisation stochastique à court terme pour le réseau hydroélectrique du Saguenay Lac-St-Jean. Le modèle considère toutes les caractéristiques du problème expliquées précédemment en plus de tenir compte de l'incertitude liée aux apports naturels des réservoirs. Plus spécifiquement, un

modèle d'optimisation stochastique à court terme est développé et permet de déterminer les volumes des réservoirs, les débits turbinés et les turbines en marche à chaque pas de temps, pour chaque centrale.

Le réseau hydroélectrique est composé de cinq centrales hydroélectriques soit : Chute-Savane, Chute-du-Diable, Shipshaw/Chute-à-Caron, Chute-des-Passes et Isle-Maligne, illustrées à la figure 1.3. Le réseau est composé de 42 turbines et la capacité installée est de 3100 MW. Quatre réservoirs sont disponibles et trois d'entre eux ont une capacité de stockage supérieure à 2000 hm<sup>3</sup>. Pour les besoins de la thèse, le modèle d'optimisation à court terme est validé sur un sous-ensemble de centrales, soit Chute-du-Diable et Chute-Savane pour le premier article et en ajoutant Isle-Maligne pour les deuxième et troisième articles.

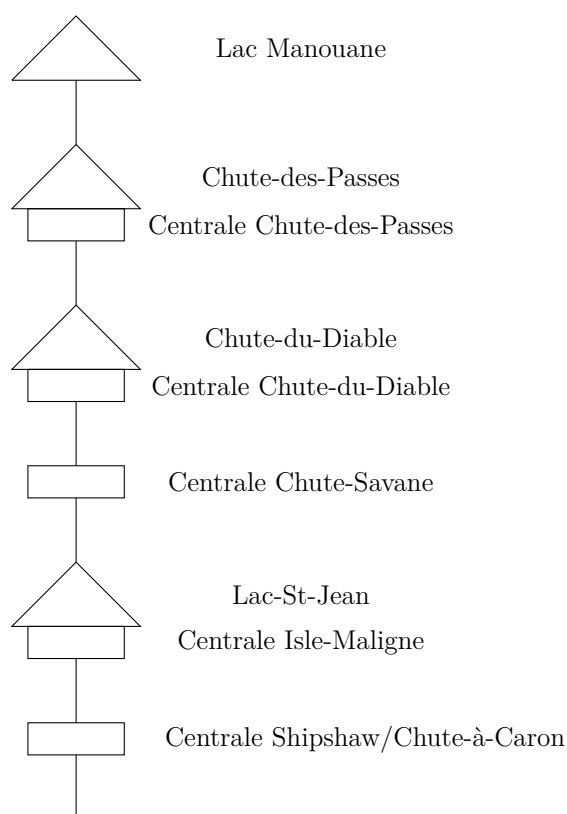


Figure 1.3 Réseau hydroélectrique du Saguenay Lac-St-Jean. Les rectangles représentent des centrales et les triangles des réservoirs.

Le premier objectif consiste à développer un modèle d'optimisation déterministe à court terme pour le réseau hydroélectrique du Saguenay Lac-St-Jean. Cet objectif permet de modéliser le problème à court terme et la solution obtenue par l'optimisation est comparée aux décisions opérationnelles historiques de Rio Tinto. Le deuxième objectif reprend cette modélisation mais la modifie pour formuler un modèle d'optimisation stochastique, c'est-à-dire que les

apports naturels sont incertains. Une méthode de génération d'arbres de scénarios, qui permettent de représenter l'incertitude des apports dans le modèle d'optimisation à court terme, est utilisée. Finalement, le dernier objectif consiste à déterminer la complexité nécessaire dans les arbres de scénarios afin d'obtenir une bonne solution au modèle d'optimisation à court terme. Pour ce faire, l'optimisation boîte noire est utilisée pour optimiser les paramètres de la méthode de génération d'arbres de scénarios.

#### **1.4 Plan de la thèse**

Le chapitre deux présente une revue de littérature des principales méthodes d'optimisation court terme déterministes et stochastiques, ainsi que de l'optimisation boîte noire. Le troisième chapitre détaille l'organisation de la thèse ainsi que la démarche scientifique liant les articles. Les chapitres quatre, cinq et six présentent les articles. Une discussion générale synthétisant le travail effectué est présentée dans le chapitre sept. Finalement, la conclusion est exposée au chapitre huit, discutant des limitations de la solution proposée ainsi que des perspectives de recherche futures.



## CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

Les notions présentées dans ce chapitre sont nécessaires à la bonne compréhension des trois objectifs de recherche présentés dans cette thèse. Le premier objectif est de créer un modèle à court terme déterministe. Le second est d'utiliser une méthode de génération d'arbres de scénarios afin de développer un modèle d'optimisation stochastique qui considère l'incertitude liée aux apports naturels des réservoirs. Le troisième objectif étudie la complexité nécessaire dans les arbres de scénarios utilisés dans le modèle à court terme, en utilisant l'optimisation boîte noire pour optimiser les paramètres de génération des arbres de scénarios.

Ce chapitre est découpé en plusieurs parties. Tout d'abord, le problème de chargement et de répartition déterministe est abordé. Par la suite, les méthodes d'optimisation stochastiques sont présentées. Finalement, une revue du concept d'"optimisation boîte noire" est effectuée.

### 2.1 Méthodes déterministes

Le premier objectif de recherche est de développer un modèle déterministe. Le problème de chargement et de répartition optimal, ou à court terme, est complexe et plusieurs interdépendances existent entre les variables qui composent ce problème. Le volume et le débit doivent être optimisés simultanément, ce qui complique sa résolution. De plus, tel qu'expliqué à l'introduction, chaque turbine possède une efficacité différente, les turbines ont des zones d'opération interdites, et il est important de limiter les démarrages. Dans ces modèles, il n'y a pas d'incertitude et ils sont déterministes [40, 96]. Les fonctions objectif des problèmes à court terme dépendent de la modélisation mais peuvent être de : maximiser la production d'énergie, minimiser les coûts d'opération ou minimiser les pertes de production d'énergie, par exemple. Les contraintes que l'on retrouve le plus souvent sont : les contraintes hydriques et les bornes sur les volumes/niveaux des réservoirs et les débits. Les contraintes hydriques représentent simplement la loi de la conservation de l'eau d'une période à l'autre.

Les principales méthodes de résolution, soient la programmation dynamique, la programmation mixte en nombres entiers et la relaxation lagrangienne, sont expliquées ci-après. Une revue récente [99] expose les différentes approches pour résoudre ce problème. Il est important de spécifier qu'au Québec, les producteurs doivent absolument transiger avec Hydro-Québec, ce qui signifie que les prix de l'énergie n'ont pas à être considérés dans les modèles d'optimisation, ce qui n'est pas le cas dans le reste du monde.

### 2.1.1 Programmation dynamique

Une des méthodes populaires pour résoudre le problème de chargement et de répartition est la programmation dynamique [24]. Cette méthode consiste à décortiquer le problème en sous-problèmes afin d'obtenir la solution optimale de façon récursive.

La programmation dynamique comporte des étapes et des états. Chaque sous-problème est une étape alors qu'à chaque étape, un état du système est défini. La solution est construite par induction arrière, c'est-à-dire que la résolution du problème commence à la dernière étape et les sous-problèmes sont résolus en reculant d'une étape à chaque fois, jusqu'à ce que tous les sous-problèmes soient résolus. Un de problèmes majeurs de cette méthode est que, rapidement, le problème devient difficile à résoudre compte tenu du nombre de variables. En fait, il est nécessaire de discrétiser l'espace d'états. Par exemple, en optimisation hydroélectrique, il faut discrétiser le volume, le débit unitaire, le débit total, sans oublier qu'il faut considérer le nombre de turbines ainsi que les périodes. Évidemment, cette énumération dépend de la modélisation du problème. Un des avantages de la programmation dynamique est que les non-linéarités sont traitées facilement, puisque toutes les combinaisons de variables sont évaluées.

Afin d'illustrer la méthode, la programmation dynamique est appliquée au problème de chargement des groupes, qui consiste à déterminer le débit turbiné par chaque turbine, selon un débit total  $Q$  et un volume donné  $v$ . Chaque sous-problème correspond à une turbine et, en termes de programmation dynamique, une étape. Les états sont  $s^j \in \{1, 2, \dots, r\}$  le débit restant à turbiner pour la turbine  $j$  et les variables d'optimisation sont  $q^j \in \{1, 2, \min\{\bar{q}^j, Q\}\}$ , le débit turbiné par la turbine  $j$ , où  $\bar{q}^j$  est le débit maximum de la turbine  $j$ . L'objectif est de maximiser la puissance totale. La solution est retrouvée de façon récursive en résolvant un sous-problème par turbine. Pour  $j = n$ , où  $n$  est le nombre total de turbines, la puissance optimale est  $f^{*j}(s^j) = P(s^j, v)$ , où  $v$  est le volume donné et  $P$  est la puissance. Le débit turbiné optimal est  $q^{*j} = s^j$ . Pour les autres sous-problèmes, c'est-à-dire pour  $j = n - 1, n - 2, \dots, 1$ , la puissance optimale est donnée par  $f^{*j}(s^j) = \max_{q^j} P(s^j, v) + f^{*j+1}(s^j - q^j)$  et le débit optimal par  $q^{*j} = s^j$  qui maximise  $f^{*j}(s^j)$ .

Les auteurs de [7] utilisent la programmation dynamique pour déterminer le nombre de turbines en marche sur une base horaire. Pour ce faire, les étapes sont les heures, les états sont le nombre de turbines en marche à chaque étape et les variables de décision sont le nombre de démarrages et d'arrêts de turbines à chaque étape. Un compromis entre l'efficacité de la puissance produite et des démarrages est minimisé dans la fonction objectif du problème de programmation dynamique. Les auteurs ne considèrent pas les contraintes hydriques, car l'élévation amont ne varie pas beaucoup sur des périodes horaires. Pour des systèmes hy-

droélectriques comportant de petits réservoirs, cette hypothèse ne peut être appliquée. Une autre approche [109] utilise des approximations successives de la programmation dynamique, afin de contourner le problème de dimensionnalité. Une fonction de puissance représentant les pertes est utilisée afin de considérer l'efficacité des turbines, mais les élévations amonts sont négligées, ce qui est important à considérer lorsque les réservoirs ont des capacités de stockage relativement petites. Les étapes correspondent aux turbines, et il y a trois vecteurs d'état : la puissance accumulée des turbines, le débit turbiné total et la puissance maximale accumulée. Le but du problème est de maximiser l'efficacité totale du système de production hydroélectrique. Un autre article [80] utilise la programmation dynamique pour résoudre le problème de chargement et de répartition optimal dans le but de maximiser les revenus. Dans ce cas-ci, l'élévation amont est considérée, en plus des arrêts et démarrages des turbines. Une méthode en deux phases, comprenant chacune un algorithme de programmation dynamique est définie. La première phase construit un espace d'états et la seconde résout le problème de répartition et de chargement optimal. Cependant, le système hydroélectrique à l'étude comporte un seul réservoir. La modélisation considère les apports de réservoir, les prix de l'énergie et les disponibilités de turbines, mais l'ajout d'autres réservoirs et centrales impliquera des temps de calcul beaucoup plus élevés, voire rédhibitoires.

### 2.1.2 Programmation mixte en nombres entiers

Plusieurs auteurs proposent des méthodes de résolution du problème de chargement et de répartition à l'aide de modèles mixtes en nombres entiers. Ils peuvent être non linéaires [66] ou linéaires [49]. Les fonctions de production hydroélectrique sont, soit dépendantes de la hauteur de chute et du débit turbiné, soit linéarisées et dépendent seulement du débit, en utilisant, par exemple, des fonctions linéaires par morceaux [31, 93] ou par interpolation. Ces problèmes comportent des variables continues pour le volume et le débit turbiné, par exemple, et des variables binaires pour l'arrêt et le démarrage des turbines.

Un des avantages de la formulation non linéaire est que l'effet de la hauteur de chute est considéré. De plus, les solveurs non linéaires actuels sont puissants et permettent de résoudre ces problèmes. Une formulation non linéaire de la fonction objectif qui dépend du débit turbiné et du volume est proposée et résolue avec un problème mixte non linéaire en nombres entiers [30]. Cette formulation est intéressante, car elle considère, entre autres, l'effet de la hauteur de chute et la pénalisation des démarrages de turbines. Une comparaison avec un modèle linéaire en nombres entiers, dont la fonction de production hydroélectrique varie linéairement avec le débit seulement, et ce modèle non linéaire est effectuée et les résultats montrent que la formulation non linéaire mixte permet d'obtenir de bons résultats dans un

temps de calcul satisfaisant, pour un système hydroélectrique de sept réservoirs et centrales. Pour un système de plus grande taille, les temps de calcul seraient beaucoup plus élevés. Les mêmes auteurs proposent une formulation quadratique du problème [29]. La fonction objectif comporte un terme pour maximiser les profits et un second pour valoriser l'eau contenue dans les réservoirs à la fin de l'horizon de planification. La formulation quadratique, comparativement à une formulation linéaire, permet d'augmenter les profits, mais il n'y a pas de comparaison avec une formulation non linéaire, ce qui aurait été intéressant, puisque la comparaison aurait été plus juste. Une autre approche consiste à minimiser les pertes de puissance [59] et à résoudre la relaxation du modèle non linéaire mixte en nombres entiers. À l'aide d'une méthode de simulation, la solution obtenue est ensuite ajustée afin de respecter les contraintes hydriques. Cette méthode est intéressante, car la décomposition permet de résoudre des problèmes de grand taille, dans ce cas-ci 95 centrales et 447 turbines, mais démontre que pour résoudre des problèmes réels, les formulations non linéaires mixtes en nombres entiers doivent être couplées à des méthodes de simulation et de décomposition, sinon elles sont impossibles à résoudre.

La modélisation est très importante dans les modèles linéarisés, car la solution peut être grandement influencée par la précision de celle-ci. Habituellement, l'effet de la hauteur de chute est implicite dans les modèles linéaires. Une technique d'interpolation [65] est utilisée afin de linéariser les fonctions de production hydroélectrique et considère l'effet de la hauteur de chute. Un problème linéaire mixte en nombres entiers est résolu afin de minimiser les coûts d'opérations du plus gros système de production hydroélectrique au monde, situé en Chine. Toutefois, cette modélisation ajoute un grand nombre de contraintes dans le modèle d'optimisation. Des tests sont réalisés pour un réservoir et 32 turbines. Advenant le cas où il y a plus de réservoirs, cette modélisation deviendrait rapidement difficile à appliquer, compte tenu du nombre de variables et de contraintes. Dans [23], les fonctions de production hydroélectrique sont linéarisées et l'effet de la hauteur de chute est considéré. Un modèle linéaire mixte en nombres entiers est résolu pour un système comportant un réservoir avec capacité de pompage. Un gros effort de linéarisation est réalisé et permet une bonne représentation des fonctions de production, mais tel qu'indiqué par les auteurs, cette technique est difficilement applicable en pratique, compte tenu de la taille du problème à résoudre.

Ces méthodes fonctionnent bien, mais plus le système hydroélectrique est complexe, plus elles deviennent lentes en termes de temps de calcul puisque le nombre de variables d'optimisation explose. Cependant, les solveurs modernes permettent de résoudre des problèmes de grande taille, mais plus le modèle est précis, plus difficiles ils sont à résoudre.

### 2.1.3 Relaxation lagrangienne

Les problèmes d'optimisation hydroélectrique à court terme deviennent rapidement difficiles à résoudre, car ils comportent un grand nombre de variables d'optimisation. De plus, selon la modélisation désirée, plusieurs inter-dépendances peuvent être considérées et compliquent la résolution des problèmes telles l'efficacité des turbines, l'effet de la hauteur de chute, les zones d'opération interdites ou les démarrages de turbines pour ne nommer que celles-là.

La relaxation lagrangienne [51, 98] permet de simplifier la résolution en séparant le problème original en plusieurs sous-problèmes faciles à résoudre. Les contraintes liantes, difficiles à traiter, sont relaxées et un problème maître coordonne la résolution en se basant sur la théorie de la dualité. Pour ce faire, les contraintes liantes, soit les contraintes hydriques, sont incorporées dans la fonction objectif avec un multiplicateur de Lagrange associé à chacune. Par la suite, le dual du problème lagrangien est résolu afin de trouver les valeurs des multiplicateurs. Cette façon de faire permet de trouver une borne inférieure serrée. Des méthodes de sous-gradients [76], qui sont des méthodes d'optimisation itératives, sont fréquemment utilisées pour résoudre le dual lagrangien.

Dans l'article [42], une méthode de décomposition en deux phases est proposée. La première phase est une relaxation lagrangienne, qui permet d'obtenir une borne sur la solution et la deuxième phase utilise une méthode de lagrangien augmenté [26] afin d'obtenir une solution réalisable. La méthode est validée sur un système hydroélectrique comportant 4 centrales et considère l'effet de la hauteur de chute, l'efficacité des turbines, les zones interdites et les démarrages des turbines sont pénalisés. Les résultats obtenus démontrent que cette méthode permet d'obtenir des résultats satisfaisants et que les temps de calcul sont raisonnables. Récemment, ces mêmes auteurs [43] ont comparé des méthodes de construction du dual lagrangien, appliquées au problème de répartition et de chargement optimal. Dans cet article, deux méthodes sont comparées : la relaxation des contraintes hydriques et l'ajout de variables artificielles qui sont relaxées. Afin de s'assurer que les solutions trouvées par le dual sont réalisable pour le primal, une méthode de lagrangien augmenté est utilisée, ce qui implique l'ajout d'un terme pour pénaliser les violations de contraintes dans la fonction objectif. Les turbines sont considérées identiques, ce qui n'est pas le cas en pratique. Les résultats montrent que la relaxation des contraintes hydriques permet d'obtenir de meilleurs résultats, mais qu'ils sont dépendants du problème. Ainsi, si le problème primal était différent, la conclusion pourrait aussi l'être, il est donc difficile de définir quelle méthode est la meilleure.

Une étude récente [44] compare les solutions obtenues par relaxation lagrangienne, programmation linéaire mixte en nombres entiers et programmation non linéaire mixte en nombres entiers. D'un point de vue opérationnel, la relaxation lagrangienne est la méthode qui requiert

le plus faible temps de calcul et qui peut résoudre des problèmes de grande dimension. Or, son implémentation en pratique requiert beaucoup de connaissances et de programmation, alors que les modèles mixtes en nombres entiers peuvent être utilisés plus facilement à l'aide de solveurs commerciaux.

#### **2.1.4 Autres approches**

D'autres approches ont été utilisées afin de résoudre le problème de répartition et de chargement optimal. Par exemple, les algorithmes génétiques [79], des heuristiques basés sur les fourmilières [70] ou des réseaux [78], mais ces méthodes requièrent une très bonne connaissance du problème pour l'ajustement de paramètres, ce qui n'est pas le cas lorsque des méthodes mathématiques avec preuves de convergence, telles que présentées ci-haut, sont utilisées. Toutefois, ces méthodes sont utiles pour traiter efficacement des problèmes non convexes, non lisses ou discontinus.

## **2.2 Méthodes stochastiques**

Le second objectif de recherche est de développer un modèle d'optimisation stochastique à court terme pour le réseau hydroélectrique du Saguenay Lac-St-Jean. Cette section est constituée de trois parties. La première expose la programmation dynamique stochastique, qui est souvent utilisée pour élaborer la fonction de valorisation de l'eau restant dans le réservoir à la fin de l'horizon de planification. La seconde partie présente les méthodes d'optimisation stochastiques utilisées pour résoudre le problème d'optimisation à court terme. Finalement, des méthodes de génération d'arbres de scénarios sont présentées.

### **2.2.1 Programmation dynamique stochastique**

Lorsque des apports naturels incertains sont considérés dans le modèle d'optimisation à court terme, il est important de valoriser l'eau restant dans les réservoirs à la fin de l'horizon de planification afin d'empêcher les réservoirs de se vider. Comparativement à un modèle déterministe, un modèle stochastique ne peut utiliser de cible finale pour les volumes de réservoirs puisque le scénario d'apport qui se produira est inconnu. Il est possible de calculer le volume final pour chaque scénario, mais il est alors problématique de donner une seule valeur au modèle, puisque cette dernière pourrait ne pas être réalisable pour un scénario donné. L'optimisation moyen terme permet de gérer les réservoirs d'un système de production hydroélectrique. Elle est aussi utilisée en optimisation court terme déterministe afin de fournir le volume final du réservoir ou en optimisation court terme stochastique pour fournir une

fonction de valeur de l'eau au modèle à court terme. La programmation dynamique stochastique [18], qui est une extension de la programmation dynamique, est largement utilisée en optimisation moyen terme. D'autres méthodes découlent de celle-ci, par exemple la programmation dynamique stochastique duale [92] et la programmation dynamique stochastique par échantillonnage [32], mais pour les besoins de cette revue de littérature, seules les notions théoriques de programmation dynamique stochastique sont présentées. Tout comme pour la programmation dynamique, l'inconvénient majeur de la programmation dynamique stochastique est que les problèmes deviennent rapidement impossibles à résoudre, compte tenu de leur taille, surtout que l'incertitude doit maintenant être discrétisée.

La méthode de programmation dynamique stochastique appliquée à l'optimisation hydro-électrique moyen terme comporte plusieurs éléments :

- **Les états** à chaque étape sont notés  $v_k^c$  : le volume à la période  $k$  et à la centrale  $c$ . Notons  $S_k^c$  l'ensemble des états.
- **Les décisions** à chaque étape sont  $q_k^c$  : le débit turbiné à la période  $k$  et à la centrale  $c$ . Notons  $U_k^c(v_k^c)$  l'ensemble des décisions possibles selon l'état  $v_k^c$ .
- **Les variables aléatoires** sont  $\delta_k^c$  : l'apport naturel à la période  $k$  pour la centrale  $c$ .

À chaque étape, selon l'état du système et la réalisation de la variable aléatoire, une puissance  $\chi_k^c(v_k^c, q_k^c, \delta_k^c)$  est produite et elle est cumulative sur toutes les périodes. Il est important de noter que les apports des réservoirs sont corrélés dans le temps. Devant cette situation, l'introduction d'une variable hydrologique est nécessaire, afin de considérer les apports de la période précédente ou toute autre information permettant de bien représenter le système hydroélectrique à l'étude. Ainsi, la variable hydrologique  $\psi_k^c$  peut être définie ainsi :

$$\psi_k^c = \delta_{k-1}^c. \quad (2.1)$$

Des politiques sont dites admissibles si une séquence de fonctions  $\pi = \{\mu_0, \dots, \mu_{N-1}\}$  est telle que  $q_k^c = q_k^c(v_k^c)$  et  $q_k^c(v_k^c) \in U_k^c(v_k^c), \forall v_k^c \in S_k^c$ , où  $N$  est le nombre de périodes.

L'équation de Bellman, qui permet de calculer la valeur espérée de la puissance pour une politique admissible, dépend de l'état initial du système. Cependant, le principe d'optimalité de Bellman stipule que peu importe l'état initial, si  $\pi^* = (\mu_0^*, \mu_1^*, \dots, \mu_{N-1}^*)$  est une politique optimale pour le problème complet, elle l'est aussi pour une politique tronquée  $\pi_t^* = (\mu_t^*, \mu_{t+1}^*, \dots, \mu_{N-1}^*)$ .

La fonction de récurrence, ou de Bellman, est alors  $P_k^c(v_k^c, \psi_k^c)$  et correspond à la valeur espérée optimale de la puissance à l'étape  $k$  à la fin si le système est à l'état  $v_k^c$  à l'étape  $k$  et

que la variable hydrologique est  $\psi_k^c$ . Les équations de Bellman à résoudre sont alors :

$$P_k^{c*}(v_k^c, \psi_k^c) = \mathbb{E}_{\delta_k^c | \psi_k^c} \left[ \max_{q_k^c \in U_k^c(q_k^c)} (\chi_k^c(v_k^c, q_k^c, \delta_k^c) + P_{k+1}^c(v_{k+1}, \psi_{k+1}^c)) \right], k = 0, 1, \dots, N - 1. (2.2)$$

Dans [37], un modèle de programmation dynamique stochastique par échantillonnage est utilisé pour résoudre le problème d'optimisation des réservoirs. Comparativement à la programmation dynamique stochastique, cette méthode utilise des scénarios pour les apports naturels des réservoirs et les probabilités de transition pour passer d'un scénario  $i$  au scénario  $j$  doivent être calculées. Cela permet de préserver la persistance des apports d'une période à l'autre. La particularité de la méthode présentée dans l'article est l'utilisation des prévisions d'ensembles au lieu de l'historique des apports. L'avantage de ces prévisions, comparativement aux données historiques, est qu'elles sont cohérentes avec les conditions actuelles du réservoir. De plus, la corrélation spatiale des apports entre plusieurs réservoirs est conservée puisque différentes réalisations tirées des bases de données historiques sont utilisées.

Tel que décrit dans [32], plusieurs choix de variable hydrologique sont possibles. Par exemple, l'apport de la période avant ou le meilleur apport prévu. L'introduction de cette variable dans le modèle permet de préserver les caractéristiques du système étudié, et le modèle donnera une approximation plus près de la réalité. En Amérique du Nord, l'indicateur de neige peut être un bon choix de variable hydrologique, puisque c'est cette variable qui permet d'approximer l'apport d'eau dans les bassins lors de la crue du printemps. Dans l'Ouest canadien et au Saguenay Lac-St-Jean, cette variable prend tout son sens puisque ce sont des régions qui reçoivent beaucoup de précipitations sous forme de neige.

Le défi de la programmation dynamique stochastique n'est pas d'utiliser l'algorithme en soi, qui est une extension de la programmation dynamique déterministe, mais plutôt de choisir la façon dont sera traitée l'incertitude. Selon la taille du système hydroélectrique à l'étude, il se peut qu'une modélisation déterministe utilisant la moyenne des apports naturels sur quelques années soit suffisante afin de résoudre le problème, tel que présenté dans [95], mais c'est rarement le cas dans des systèmes réels, où une bonne connaissance de l'historique permet de prendre de meilleures décisions.

## 2.2.2 Méthodes stochastiques pour résoudre le problème à court terme

Peu d'articles traitent du problème stochastique à court terme avec apports incertains dans la littérature. En considérant l'incertitude des apports, les turbines sont utilisées de façon plus efficace puisque l'optimisation stochastique est un compromis entre de faibles et de fortes prévisions d'apports. Par exemple, si les réservoirs sont pleins, le fait de considérer des



apports incertains lorsque des apports élevés sont prévus empêche l'optimisation de diminuer le volume d'eau contenu dans les réservoirs et de forcer les turbines dans des zones non efficaces, ce qui se traduit par des pertes de production d'énergie dans le futur si ces apports élevés ne se produisent pas.

La majorité des articles qui traitent de l'optimisation court terme stochastique [3] utilisent des arbres de scénarios pour représenter la distribution des apports incertains. Des modèles de programmation stochastiques, résolus selon leur équivalent déterministe, c'est-à-dire que chaque noeud de l'arbre de scénarios est un modèle d'optimisation déterministe, sont ensuite résolus. Cette section présente les modèles de programmation stochastique ainsi que différentes méthodes pour générer des arbres de scénarios.

### **Programmation stochastique avec recours**

Un modèle de programmation stochastique comporte des paramètres incertains ou aléatoires. La solution à ce problème doit donc être optimale pour toutes les valeurs que peuvent prendre ce paramètre. Dans le modèle à court terme qui nous intéresse, les apports naturels sont incertains. Les programmes stochastique peuvent être en deux étapes ou multi-étapes. Les problèmes en deux étapes impliquent deux étapes de décisions. La première étape consiste à prendre une décision avant de connaître la vraie réalisation de l'apport, alors que la deuxième étape consiste à ajuster la décision prise à l'étape précédente lorsque la vraie réalisation de l'apport est connue. Les problèmes multi-étapes sont simplement une extension des modèles à deux étapes dans lesquels on considère des apports à plusieurs moments : lorsqu'un apport est révélé, la décision correspondante est ajustée, une nouvelle décision est prise à l'étape suivante et ainsi de suite. La référence [19] explique la programmation stochastique en détails, veuillez vous y référer pour plus d'information. En pratique, les équivalents déterministes sont résolus, ce qui signifie qu'un modèle d'optimisation est résolu pour toutes les possibilités, ou les scénarios, possibles d'apports. Un arbre de scénarios est une représentation discrète d'un processus stochastique continu et peut être vu à la figure 2.1. Cet arbre de scénarios a 4 scénarios et les probabilités que chacun se réalisent sont dénotées par  $\pi$ . Les probabilités de chaque noeud constituant un scénario sont multipliées pour obtenir la probabilité du scénario. Par exemple, le premier scénario est constitué des noeuds 1, 2, 3 et 5 et a une probabilité de 0,15 de se réaliser.

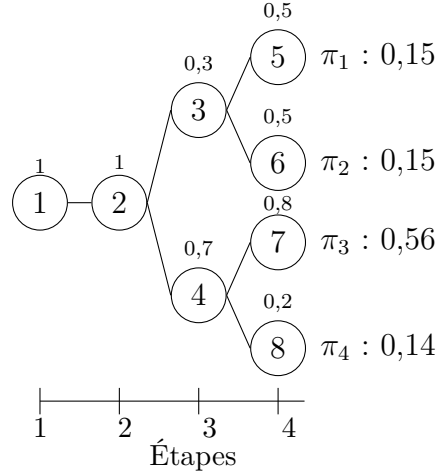


Figure 2.1 Arbre de scénarios avec 4 scénarios et 4 étapes.

Cet arbre est ensuite utilisé comme paramètre d'entrée dans le problème d'optimisation stochastique multi-étape suivant, comportant une seule centrale hydroélectrique :

$$\max_{q,v} \chi(v_1, q_1, \delta_1) + \sum_{j \in K} \pi_j \left( \sum_{i \in N_j} \chi(v_i, q_i, \delta_i) \right) + \sum_{t \in K} \pi_t \left( \sum_{p \in E_t} \Phi_p(v_p) \right) \quad (2.3)$$

$$\text{sujet à : } \delta_i = v_{i+1} - v_i + q_i \quad , \quad \forall i \in N_j, \forall j \in K, \quad (2.4)$$

$$v_{min} \leq v_i \leq v_{max} \quad , \quad \forall i \in N, \quad (2.5)$$

$$q_{min} \leq q_i \leq q_{max} \quad , \quad \forall i \in N, \quad (2.6)$$

$$v_i, q_i \geq 0 \quad , \quad \forall i \in N, \quad (2.7)$$

où  $K$  est l'ensemble des scénarios,  $N$  est l'ensemble des noeuds,  $E$  est l'ensemble des noeuds feuilles,  $N_j$  est le sous-ensemble des noeuds du scénario  $j$ ,  $E_t$  est le sous-ensemble du noeud feuille pour le scénario  $t$ ,  $v_i$  est le volume,  $q_i$  est le débit turbiné,  $\delta_i$  est l'apport pour le noeud  $i$  du scénario  $N_j$ ,  $\chi(v_1, q_1, \delta_1)$  est une fonction retournant l'énergie produite au premier noeud,  $\Phi_p(v_p)$  est la fonction valeur de l'eau pour le noeud  $p \in E_t$  et  $\pi_j$  est la probabilité du scénario  $j$ . Noter que l'indice  $i + 1$  de la variable  $v_{i+1}$  prend la valeur du noeud dans l'ensemble  $N_j$ . Par exemple, si  $N_j = \{1, 3, 5, 7\}$  et que  $i = 1$ ,  $i + 1 = 3$ , car l'indice prend la valeur du noeud à la position  $i = 2$  de l'ensemble  $N_j$ .

Le débit et le volume doivent être optimisés sans connaître le scénario d'apport qui se réalisera. La fonction objectif (2.3) consiste à maximiser l'énergie produite à la première étape et

l'espérance de la production d'énergie future, qui consiste en la somme de production d'énergie de tous les scénarios, multiplié par leur probabilité de réalisation. Aussi, le terme de droite permet de valoriser l'eau restante dans les réservoirs à la fin de l'horizon de planification. Les contraintes (2.4) sont celles de la conservation de l'eau et les volumes/débits minimums et maximums sont représentés par les contraintes (2.5) et (2.6). Finalement, la non-négativité est assurée par les contraintes (2.7).

Les programmes stochastiques sont non anticipatifs, ce qui signifie que les décisions prises à une certaine étape ne doivent pas être influencées par le futur, mais plutôt par les réalisations passées. La méthode de résolution habituelle est la création d'arbres de scénarios [35] afin d'approximer les apports suivant une distribution continue en les discrétisant.

Un des rares articles trouvé sur l'optimisation à court terme stochastique [45] considère les coûts de l'énergie et les apports naturels comme des variables incertaines. Une méthode basée sur celle-ci pourrait être envisagée, mais des modifications au modèle devraient être réalisées puisque le problème est situé dans un contexte de marché de l'énergie. L'incertitude est approximée par un arbre de scénarios de sept étapes et chaque étape est une journée divisée en 24 heures. L'objectif permet de trouver un équilibre entre le plan de production d'une journée et les profits futurs espérés. Dans [104], dix scénarios sont construits pour simuler l'incertitude sur les prix du marché et dix autres pour les apports naturels des réservoirs. Les données historiques et un modèle auto-régressif ARIMA (Auto-Regressive Integrated Moving Average) sont utilisés pour construire les prévisions. Dans le cadre de notre projet, les prévisions d'ensemble des apports naturels sont disponibles. L'étude montre que le modèle stochastique permet au producteur d'augmenter ses profits et que l'incertitude sur les prix permet un plus grand profit que l'incertitude sur les apports naturels. Tel qu'expliqué dans [27], les modèles peuvent être résolus de façon déterministe afin de diminuer l'effort de calcul, mais ils dépendent beaucoup du scénario. Ainsi, une solution optimale pour un scénario ne le sera pas nécessairement pour un autre. Un arbre de scénarios est alors utilisé afin de représenter l'incertitude et une probabilité de réalisation identique est donnée à chaque scénario. Une relaxation lagrangienne est effectuée sur les contraintes de non-anticipativité et sont pénalisées par la fonction objectif lorsqu'elles sont violées. La méthode donne de bons résultats, mais le choix du paramètre de pénalité est très important puisqu'il modifie la qualité de la solution, en plus du nombre d'itérations de l'algorithme. Les auteurs de [83] considèrent que la demande est incertaine et utilisent des arbres de scénarios pour considérer différents scénarios de demande. L'effet de la hauteur de chute est négligé, ce qui peut poser problème pour des systèmes qui comportent plusieurs réservoirs de faible capacité, même avec de courtes périodes.

## Génération d'arbres de scénarios

La génération des arbres de scénarios utilisés comme paramètres d'entrée au modèle d'optimisation stochastique est primordiale afin d'obtenir une bonne solution. En pratique, les données disponibles pour les apports sont souvent énormes et il est nécessaire de générer un arbre de scénarios basé sur ces données afin d'obtenir une représentation correcte de la distribution des apports et de pouvoir l'utiliser dans un modèle d'optimisation.

Plusieurs méthodes existent pour obtenir un arbre de scénarios à partir de données d'apports. Une revue des méthodes permettant de générer des scénarios est présentée dans l'article [61]. Les auteurs de [34] utilisent un modèle auto-régressif pour s'ajuster sur les données historiques des prix de l'énergie afin de générer des prix pour le modèle stochastique. L'arbre de scénarios est construit en échantillonnant la distribution du modèle ajusté. Une des difficultés d'utilisation de ce modèle auto-régressif est le choix des paramètres, car ils ont une grande influence sur les prix générés subséquemment. De plus, ils sont sensibles aux valeurs aberrantes, donc il est important de traiter les données d'entrée avant de bâtir le modèle.

D'autres méthodes créent une représentation discrète de la distribution des apports afin qu'elle corresponde à des propriétés statistiques pré-définies. Dans l'article [56], les quatre premiers moments, qui sont la moyenne, la variance, l'asymétrie et l'aplatissement de la représentation discrète correspondent aux quatre moments des scénarios d'apports initiaux de la distribution continue. Toutefois, cette méthode n'a pas de preuve de convergence et le nombre de scénarios nécessaires pour atteindre cette correspondance n'a pas de valeur fixe, ce qui fait en sorte qu'il est difficile d'évaluer le nombre de scénarios nécessaires, même si les quatre premiers moments sont identiques. Une autre méthode [82] minimise la distance imbriquée, qui est une généralisation de la distance de Wasserstein. Cette méthode itère deux phases jusqu'à ce que la convergence de la distance soit atteinte. La première phase échantillonne à partir de tous les scénarios d'apports initiaux et la deuxième phase utilise la méthode du gradient stochastique afin d'améliorer les valeurs d'apports de certains noeuds de l'arbre de scénarios. Cette méthode offre l'avantage d'utiliser tous les scénarios d'apports initiaux afin d'améliorer les valeurs dans l'arbre de scénarios et les quatre premiers moments correspondent toujours à la distribution continue des apports initiaux.

Une autre revue [35] présente plusieurs approches pour générer un arbre de scénarios incluant la recombinaison de données, les méthodes de contamination et aussi l'ajustement à des propriétés statistiques. Récemment, la méthode des copulas [60] a été utilisée pour générer des arbres de scénarios pour des arbres à deux étapes. Cette méthode offre l'avantage de traiter les dépendances mieux qu'en considérant seulement leur corrélation.

La méthode de réduction de scénarios [38, 52] est largement utilisée. Un arbre de scénarios initial est requis et une sélection directe, ou une réduction inverse est appliquée afin de réduire le nombre de scénarios et ainsi diminuer le temps de résolution du modèle d'optimisation stochastique. L'effet de la réduction sur la qualité de la solution, appliqué à un système de réservoirs hydroélectriques en cascade est disponible en [108].

### **Autres approches**

D'autres approches pour résoudre le modèle d'optimisation à court terme stochastique sont disponibles. L'optimisation robuste [13] et la programmation par contraintes probabilistes [103], par exemple. L'optimisation robuste résout des modèles stochastiques qui ont des paramètres incertains dans des ensembles incertains définis. Ainsi, l'optimisation cherche à trouver une solution qui est réalisable peu importe la réalisation du paramètre incertain. Dans [6] un horizon roulant est utilisé et l'optimisation robuste est appliquée aux décisions de la première journée alors que le reste de l'horizon est considéré déterministe. Cette méthode est intéressante puisque l'incertitude est appliquée aux décisions importantes. Un des problèmes de l'optimisation robuste est de définir l'incertitude. Dans les données historiques accessibles aux producteurs, certains scénarios d'apports peuvent être très faibles et d'autres très élevés. Ainsi, il est difficile de déterminer quelles sont les meilleures bornes pour les ensembles d'incertitude, en plus de capturer les non-linéarités présentes. Dans la programmation par contraintes probabilistes, les contraintes doivent être respectées selon une certaine probabilité. Un exemple appliqué à un réseau hydroélectrique en cascades se trouve dans [103]. Comme pour l'optimisation robuste, cette méthode exige des paramètres et probabilités en entrée, ce qui est difficile à faire en pratique.

### **Horizon roulant**

Dans un contexte opérationnel, les opérateurs des centrales hydroélectriques reçoivent des prévisions d'apports quotidiennement. Dès qu'elles sont disponibles, ils doivent lancer un modèle d'optimisation court terme afin de prendre une décision opérationnelle. Advenant qu'ils utilisent un modèle stochastique avec un arbre de scénarios pour représenter l'incertitude, seule la décision du premier noeud dans l'arbre de scénarios est utilisée. Des bancs d'essai en horizon roulant [74] sont utilisés pour imiter cette façon de faire pour valider les solutions des modèles d'optimisation stochastiques.

La méthodologie est la suivante. Puisque les prévisions d'apports sont mises à jour quotidiennement, un arbre de scénarios est généré, puis les modèles d'optimisation sont résolus et seule la solution du premier noeud de l'arbre de scénarios est implémentée. Lorsque la

vraie réalisation de l'apport est révélée, à la fin de la journée, les volumes des réservoirs sont mis à jour avec cette réalisation et la génération d'arbre de scénarios, ainsi que l'optimisation sont répétées pour la journée suivante, avec les apports mis à jour. Dans certains cas [17], la fenêtre de l'horizon de planification diminue lorsque les apports sont révélés et dans d'autres la fenêtre de l'horizon se déplace dans le temps [110]. Les auteurs de [33] utilisent un horizon roulant pour comparer quatre méthodes d'optimisation stochastiques. Les scénarios d'apports sont mis à jour à chaque fois qu'une décision est prise. La même méthodologie est retenue dans cette thèse.

### 2.3 Optimisation boîte noire

Le troisième objectif de recherche consiste à étudier la sensibilité de la structure des arbres de scénarios sur la gestion des centrales hydroélectriques dans un banc d'essai en horizon roulant. L'optimisation boîte noire est utilisée pour identifier les valeurs des paramètres de la méthode de génération d'arbres de scénarios qui permet d'obtenir une structure d'arbre qui maximise l'énergie produite dans l'horizon roulant. L'optimisation boîte noire permet de traiter des problèmes pour lesquels la fonction objectif ou les contraintes peuvent seulement être calculés par un code informatique. Les problèmes de boîtes noires sont souvent non lisses, non convexes et discontinus.

Le problème non contraint le plus simple est donné par :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \quad (2.8)$$

où  $f$  est une boîte noire.

L'algorithme MADS [10] (Mesh Adaptive Direct Search) a été développé pour traiter des problèmes de boîtes noires. Deux principales classes d'algorithmes existent pour traiter ces problèmes : les méthodes de recherche directe, telle MADS, et les méthodes basées sur les modèles [84]. Dans cette thèse, nous présentons seulement les méthodes de recherche directe puisque ce sont celles qui seront utilisées. Pour les besoins de cette thèse, l'algorithme de recherche par coordonnées (CS), l'algorithme PS (Pattern Search) et MADS sont présentés.

#### 2.3.1 Algorithme de recherche par coordonnées (CS)

L'ancêtre des méthodes de recherche directe, datant de 1952, est l'algorithme de recherche par coordonnées [39]. La figure 2.2 illustre la méthode. L'espace d'états est discrétisé en un treillis. La fonction objectif est évaluée pour un point initial, tel qu'illustré à la figure 2.2a. Ensuite,

les points de coordonnées nord, sud, est et ouest à ce point initial sont évalués, comme dans la figure 2.2b. Si un point permet d'abaisser la valeur de la fonction objectif, il est conservé et défini comme meilleure solution, tel que montré à la figure 2.2c. Advenant le cas où aucun point de coordonnée ne permet de diminuer la valeur de la fonction objectif, le treillis est réduit et la méthode est relancée, tel qu'illustré à la figure 2.2d. Lorsqu'une itération est un succès, c'est-à-dire qu'un nouveau point diminue la valeur de la fonction objectif, la taille du treillis est augmentée. L'algorithme s'arrête selon un critère d'arrêt pré-défini.

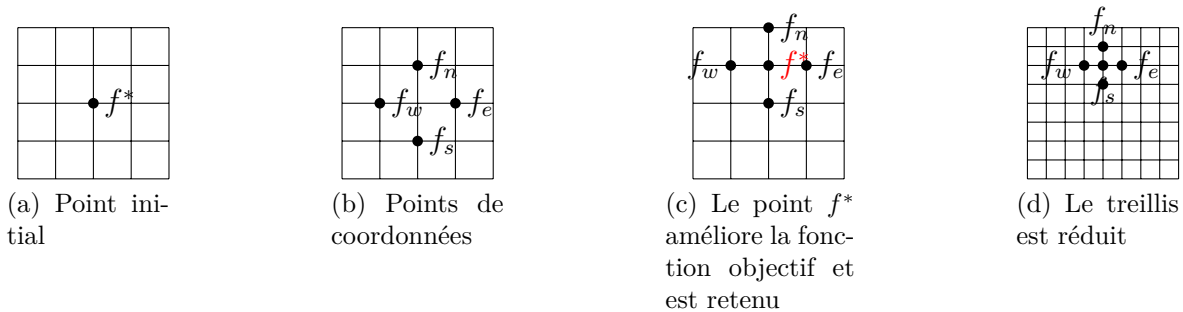


Figure 2.2 Algorithme de recherche par coordonnées

### 2.3.2 Algorithme de recherche par motifs (PS)

L'algorithme PS [55] utilise deux types de déplacements. Le premier se nomme *exploratoire*. À partir du point initial, une coordonnée à la fois est modifiée et si la valeur de la fonction objectif est améliorée, la modification est conservée. Le deuxième type de déplacement est le *motif*. Comme son nom l'indique, les déplacements conservés dans la phase *exploratoire* sont appliqués à la solution courante, et le motif est appliqué de nouveau à la nouvelle solution. Si la valeur de la fonction objectif est améliorée avec cette nouvelle solution, alors le motif est répété sur cette solution. Sinon, l'algorithme retourne à la phase *exploratoire* pour trouver un nouveau motif de déplacement. Une extension de cet algorithme, nommée GPS (Generalized Pattern Search) [102] propose des modifications à la phase *exploratoire*.

### 2.3.3 Algorithme de recherche sur treillis adaptatifs (MADS)

L'algorithme MADS [10] est un algorithme qui permet de traiter des problèmes d'optimisation boîte noire. MADS est une extension des méthodes de recherche directes présentées ci-haut. Le domaine réalisable est discrétisé en un treillis dont la taille est ajustée à la fin de chaque itération. L'algorithme consiste en deux étapes qui sont répétées jusqu'à un critère d'arrêt pré-défini. La première étape, soit la phase de *recherche*, évalue différents points situés

sur le treillis afin de trouver une solution meilleure que la solution courante. Cette étape est flexible et peut être ajustée selon les spécificités du problème. La deuxième phase, soit l'étape de *sonde*, est obligatoire puisque les propriétés de convergence de MADS en découlent. Un ensemble générateur positif de directions est déterminé et si une solution meilleure que la solution courante est trouvée, elle est définie comme solution courante. À la fin de chaque itération de l'algorithme, le treillis est réduit lorsque la solution n'est pas améliorée et augmenté lorsqu'une nouvelle solution est trouvée. Cet algorithme est implémenté dans le logiciel NOMAD [63]. La différence majeure entre MADS et l'algorithme GPS est que MADS a deux paramètres pour le treillis, un pour la taille du treillis et un pour la taille de la sonde, comparativement à un seul pour GPS. Cette différence assure de meilleurs résultats de convergence théorique, ainsi qu'une meilleure performance en pratique.

La figure 2.3 illustre le fonctionnement simplifié d'un problème d'optimisation boîte noire. Des points d'essai  $x \in \mathbb{R}^n$  sont fournis à la boîte noire par un logiciel d'optimisation. La boîte noire est évaluée et la valeur de la fonction objectif  $f(x)$  est retournée au solveur, qui propose de nouvelles valeurs pour  $x$ .

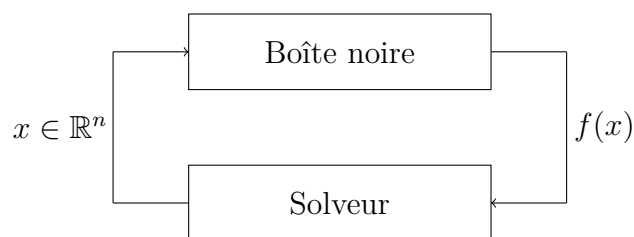


Figure 2.3 Optimisation d'une boîte noire

Souvent, les fonctions objectif des problèmes à optimiser sont très coûteuses à évaluer. Une fonction substitut simulant le même comportement que la vraie fonction est alors créée car elle est moins coûteuse à évaluer et devient la fonction à optimiser. Par exemple, cette façon de faire a été appliquée dans [4], afin de déterminer la localisation de capteurs de neige pour minimiser l'erreur d'interpolation de krigeage. Une bonne approximation des réserves de neige, surtout lors de la crue du printemps, est essentielle en production hydroélectrique afin d'éviter les déversements. La vraie fonction objectif de ce problème n'était pas disponible à l'utilisateur et c'est ce qui a motivé le choix d'une fonction substitut.

### Traitement des contraintes

Une façon de traiter les contraintes dans un problème d'optimisation boîte noire est la méthode de la barrière extrême. Pour un problème de minimisation, avec  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et



l'ensemble réalisable  $\Omega$ , les contraintes sont traitées ainsi :

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.9)$$

Cette façon de traiter les contraintes implique de ne pas évaluer la boîte noire lorsqu'une des contraintes du problème est violée. D'autres méthodes existent, telles la méthode de la barrière progressive [11] ou du filtre [9], mais ne sont pas exposées dans ce document puisque la méthode de la barrière extrême est suffisante pour l'utilisation de l'optimisation boîte noire dans cette thèse.

### 2.3.4 Applications des méthodes d'optimisation boîte noire

Les méthodes d'optimisation boîte noire ont été appliquées à de nombreux problèmes d'ingénierie avec succès. Dans le domaine de l'hydrologie, l'optimisation boîte noire est utilisée par les auteurs de [4] afin de trouver la localisation optimale pour des GMON, un équipement utilisé pour mesurer l'équivalent en eau de la couverture de neige situé dans des endroits éloignés des bassins hydrographiques. Une autre étude [73] utilise l'optimisation boîte noire pour calibrer les 23 paramètres du modèle hydrologique HSAMI. Ce modèle est utilisé quotidiennement pour générer les prévisions d'apports pour les réservoirs. Plus spécifiquement appliqué aux turbines d'un système de production hydroélectrique, les auteurs de [5] utilisent l'optimisation boîte noire pour déterminer le nombre de turbines ainsi que les périodes exactes durant lesquelles elles peuvent être arrêtées afin d'être entretenues. Le troisième objectif de cette thèse consiste à optimiser les paramètres de la méthode de génération d'arbres de scénarios. Dans le même ordre d'idées, ces auteurs [12] utilisent l'optimisation boîte noire pour ajuster les valeurs des paramètres d'un algorithme.

De multiples applications existent dans d'autres domaines. Par exemple, les auteurs de [36] se servent de l'optimisation boîte noire pour déterminer des positions de semi-conducteurs sur un micro-processeur. Des fonctions de puissance différentes sont considérées et l'optimisation permet de minimiser la variation de température des semi-conducteurs selon les fonctions de puissance. Un problème non linéaire mixte en nombres entiers est résolu avec NOMAD [67]. Un design de moteur synchrone à aimants permanents doit minimiser le poids du moteur tout en maximisant le couple pour les vitesses de base et maximale. Plusieurs contraintes non linéaires sont considérées et les variables sont continues, comme le diamètre du stator ou entières, comme la grosseur du fil utilisé. D'autres applications en génie mécanique utilisent l'optimisation boîte noire pour optimiser la forme des pales d'une turbine [14] ou d'un hélicoptère [21]. Un compte-rendu [8] détaille l'optimisation boîte noire et de nombreux exemples

d'application sont présentés. Tous les exemples d'applications démontrent que l'optimisation boîte noire permet de traiter des problèmes d'ingénierie complexes pour lesquels il serait impossible, avec des méthodes d'optimisation classiques telles l'optimisation linéaire ou l'optimisation en nombres entiers, de trouver une solution puisqu'ils n'ont pas de représentation analytique des fonctions objectif ou des contraintes.

### CHAPITRE 3 ORGANISATION DE LA THÈSE

Le but de cette thèse est de développer un modèle d'optimisation stochastique à court terme pour le réseau hydroélectrique du Saguenay Lac-St-Jean. Dans le chapitre précédent, les méthodes d'optimisation existantes ont été présentées. Souvent, dans la littérature, des modèles déterministes sont utilisés, car les prévisions d'apports sont mises à jour régulièrement. Or, dans ce contexte, Rio Tinto souhaite utiliser un modèle stochastique, car des situations de prévisions qui ne se produisent finalement pas peuvent faire en sorte que les turbines soient forcées dans des conditions non efficaces, en plus de diminuer les niveaux de réservoirs inutilement. Dans un contexte opérationnel, le temps de calcul est primordial, alors la complexité des arbres de scénarios, qui servent à représenter l'incertitude dans le modèle d'optimisation à court terme, est étudiée.

En premier lieu, un modèle d'optimisation à court terme déterministe est développé. Les apports naturels des réservoirs sont supposés parfaitement connus. Pour ce faire, un algorithme de programmation dynamique est utilisé, avant toute optimisation, afin de créer des surfaces de puissance maximale pour chaque nombre de turbines en marche et chaque centrale. Ces surfaces sont ensuite approximées afin d'être utilisées comme fonction objectif du modèle d'optimisation. Un processus d'optimisation en deux phases est créé. La première phase résout le problème de chargement à l'aide d'un modèle non linéaire mixte en nombres entiers. La solution obtenue, soit le volume des réservoirs, le débit turbiné et le nombre de turbines en marche pour chaque centrale sont utilisés comme paramètres d'entrée de la deuxième phase. C'est un modèle linéaire en nombres entiers qui permet de déterminer la combinaison exacte de turbines en marche pour chaque centrale. Les résultats sont comparés aux décisions opérationnelles historiques, ainsi qu'aux solutions produites par un modèle mathématique en une phase, englobant le problème de chargement et de répartition. Ces travaux ont été publiés dans la revue *IEEE Transactions on Power Systems* [91] et se trouvent au chapitre 4.

En second lieu, le modèle d'optimisation déterministe est adapté afin de considérer l'incertitude liée aux apports naturels des réservoirs. Un modèle à court terme stochastique est développé. Une méthode de génération d'arbres de scénarios est retenue afin de représenter l'incertitude dans le modèle d'optimisation à court terme. Afin de valider les résultats, un banc d'essai est développé. Les prévisions d'apports sont mise à jour quotidiennement et un arbre de scénarios est généré. Le modèle d'optimisation stochastique est résolu, et seulement la solution du premier noeud dans l'arbre de scénarios est implémentée. Lorsque la vraie réalisation de l'apport est connue, les volumes des réservoirs sont mis à jour et le processus

est répété pour le nombre de jours désirés dans l'horizon de planification. Afin de valider l'utilisation d'un modèle stochastique, les résultats sont comparés à l'utilisation du scénario médian des apports seulement dans le banc d'essai. Des essais avec plusieurs nombres d'étapes dans l'arbre de scénarios ainsi que différents nombres de scénarios sont réalisés. Les résultats sont présentés dans un article soumis à *European Journal of Operational Research* [88] et se trouvent au chapitre 5.

En troisième lieu, la complexité des arbres de scénarios est étudiée. Le temps de calcul est un facteur important dans un contexte opérationnel comme celui-ci, et il est important d'obtenir une solution au modèle d'optimisation à court terme dans un délai raisonnable. Puisque seulement la solution du premier noeud de l'arbre est conservée, une comparaison entre l'utilisation d'un arbre de scénarios comme représentation de scénarios d'apports versus l'utilisation d'un peigne de scénarios est effectuée. Le même banc d'essai que pour le deuxième objectif est utilisé, et l'optimisation boîte noire est utilisée pour optimiser les paramètres de la méthode de génération d'arbres de scénarios afin de maximiser l'énergie produite. Une comparaison est aussi effectuée entre l'utilisation d'arbres de scénarios et l'utilisation du scénario médian dans le modèle d'optimisation à court terme. Les travaux sont publiés comme rapport technique dans la série des Cahiers du GERAD [90] ainsi qu'à un journal avec comité d'arbitrage et sont au chapitre 6.

Finalement, la synthèse des trois articles est présentée au chapitre 7 et la conclusion au chapitre 8.

## CHAPITRE 4 ARTICLE 1 : SELF-SCHEDULING SHORT-TERM UNIT COMMITMENT AND LOADING PROBLEM

Cet article est publié :

S. Séguin, P. Côté et C. Audet, Self-scheduling short-term unit commitment and loading problem, *IEEE Transactions on Power systems*, 31 :1, 133-142, 2016.

**Abstract** - This paper presents a new method for solving the short-term unit commitment and loading problem for a specific hydropower system. Dynamic programming is used to compute maximum power output generated by a power plant. This information is then used as input of a two-phase optimization process. The first phase solves the relaxation of a nonlinear mixed-integer program in order to obtain the water discharge, reservoir volume and number of units working at each period in the planning horizon. The second stage solves a linear integer problem to determine which combination of turbines to use at each period. The goal is to maximize total energy produced over all periods of the planning horizon which consists of a week divided in hourly periods. Start-up of turbines are penalized. Numerical experiments are conducted on thirty different test cases for two Rio Tinto Alcan power plants with five turbines each.

**Index terms** - Hydro unit commitment and loading problem, optimization, non-linear programming, linear integer programming.

### 4.1 Introduction

The planning of hydroelectric systems is complex and requires different optimization processes. A good planning allows to produce more energy with the same quantity of water, generating substantial savings for the producer, even with a slight computational improvement [64]. Long-term, medium-term and short-term optimization models are used in order to manage the resources. Long-term optimization usually follows a few years of planning horizon [27],[71] and establishes future production potential under highly uncertain inflows in the basins. Medium-term optimization [47] is used to plan the reservoir volumes by estimating the quantity of water available for hydroelectric production on a weekly basis. Short-term optimization [40] is mandatory to determine how to split the available water volume in an optimal way between the turbines of a plant. Each turbine has a different efficiency curve

which means that for the same water discharge the power will differ. The planning horizon is a week divided in hourly periods and the problem consists of finding the water discharge as well as the volume of the reservoir for each plant in order to maximize energy production and penalize start-ups of turbines. The present work focuses on short-term optimization.

These optimization problems are difficult to solve since the hydroelectric production functions are nonconvex. They are also highly nonlinear and depend on turbine efficiency, net water head that is a nonlinear function of the water discharge and reservoir elevation and finally, water discharge of each unit. Furthermore, turbines have forbidden operating zones, which complicates the problem.

Short-term unit commitment and loading problem have been studied in the past and many researches are still undergoing. Many methods have been proposed to solve this problem, including dynamic programming. In [7], a power generation loss function is used to take into account the hydro power efficiency in the dispatch of the plants, but considers the forebay elevation insignificant and neglects the water balance equations. Another approach [109] maximizes basinwide operating efficiency and changes the scheduling of the units only when the energy generation or the water discharges exceed a deadband. These assumptions will cause the optimization solution to differ from the real ones. Formulations of interest must consider tailrace elevations, penstock losses as well as efficiency of the turbines, which are often set aside to simplify the problem. A different manner [23] approximates the influence of the head effect to linearize the power production function, while Ohishi [77] assumes that all units of a hydropower plant are similar and does not consider different power outputs being produced by the units. Another widely used method is the lagrangian relaxation to separate the linking constraints and solve subproblems that are easier to compute [42]. However, this method usually causes solutions to be slightly infeasible since the linking constraints are rarely satisfied with the first solutions. Heuristics are then used to obtain a feasible solution. Not only are the methods different, but the choice of the objective function can vary from one method to the other. Another formulation of the problem [59] is to minimize the sum of power losses and solve a relaxed mixed-integer nonlinear problem. Then, a simulation phase is processed to obtain a feasible solution for the relaxed constraints. Once again, a two-phase approach is necessary to obtain a feasible solution. In [97], the plant efficiency is maximized since it is known that water is not used in an efficient way to meet the demand in energy. Nonlinear approaches [28] have been considered, by linearizing the hydro power efficiency of the plants and the water level functions, but do not consider the unit commitment of the plants. Other techniques have been proposed, including genetic algorithms [79], ant algorithms [70] and network flows [78], but they require parameter tuning before obtaining solutions, which is not an issue when using mixed-integer formulations, nonlinear problems

or lagrangian relaxations, just to name a few. However these methods offer the advantage of treating efficiently nonconvex, nonsmooth and discontinuous problems.

This paper presents a new approach for modeling the short-term unit commitment and loading problem that requires a two-phase approach and allows to find a feasible solution at the end of the first stage. The first optimization dispatches generation among plants and seeks to maximize total energy production. The second stage uses this solution to select the unit commitment that maximizes total energy production but also penalizes unit start-ups. The models are then tested on two hydroelectric plants in series.

The paper is organized as follows. Section 4.1.1 presents the hydroelectric system studied in this paper and section 4.1.2 presents notation used throughout the paper. Section 4.2 gives an overview of the problem characteristics. Sections 4.3 presents the mathematical models developed which are a nonlinear model and a linear integer program. They respectively aim to solve the loading problem as well as the unit commitment problem. Extensive numerical experiments are reported in Section 4.4 on thirty test cases for two power plants with five turbines each, and concluding remarks are drawn in Section 4.5.

#### **4.1.1 Saguenay-Lac-St-Jean hydroelectric system**

The models presented in this paper are tested on the Saguenay-Lac-St-Jean hydroelectric system. It is privately owned by Rio Tinto Alcan in the province of Quebec. In this province, Hydro-Quebec is a government-owned corporation that generates, transmits and distributes electricity. Producers are reglemented and need to transit through Hydro-Quebec, which means that Rio Tinto Alcan cannot bid on the spot market. They sign contracts with the corporation that are limited in power and in energy and the same fares apply for their duration. This company operates aluminum plants in that region and can produce 90% of the energy they need to operate them. The installed capacity is of 3100 *MW* and is composed of 42 turbines divided in five hydroelectric plants situated on the Péribonka and Saguenay rivers. Five reservoirs are available and three of them have a stocking capacity of over 2000 *hm*<sup>3</sup>. The hydrographic basins cover an area of about 75 000 *km*<sup>2</sup>. For the remaining 10% of energy needs, energy is bought at a known fare from Hydro-Quebec. Historically, energy limits stated in the contracts are practically never reached and this is why the main purpose of the optimization is to produce the most energy possible with the available water. For the purpose of this paper, the models are tested on Chute-du-Diable and Chute-Savane plants that are both composed of five turbines. Specific constraints related to the system need to be taken into account when developing the model.

### 4.1.2 Notation

The following notation is used throughout the paper :

$k \in \{1, 2, \dots, K\}$	index of periods
$c \in \{1, 2, \dots, C\}$	index of hydroelectric plants
$r \in \{1, 2, \dots, u^c\}$	index of hydroelectric plants upstream of plant $c$
$s \in \{1, 2, \dots, n_k^c\}$	index of surfaces corresponding to number of active turbines associated to hydroelectric plant $c$ and period $k$
$l \in \{1, 2, \dots, n_k^c\}$	index of combinations associated to hydroelectric plant $c$ and period $k$
$t \in \{1, 2, \dots, T^c\}$	index of turbines of hydroelectric plant $c$
$v_k^c$	volume of plant reservoir $c$ at period $k$ ( $hm^3$ )
$q_k^c$	water discharge at plant $c$ and period $k$ ( $m^3/s$ )
$g_k^c$	water spillage at plant $c$ and period $k$ ( $m^3/s$ )
$\theta$	start-up penalty for any turbine ( $MW$ )
$\beta_{lk}^c$	power generated by combination $l \in n_k^c$ at plant $c$ and period $k$
$y_{sk}^c =$	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ if surface } s \text{ is chosen at period } k \\ \text{for plant } c \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right.$
$f_{lkt}^c =$	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ if turbine } t \text{ of combination } l \\ \text{for plant } c \text{ is working at period } k \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right.$
$x_{lk}^c =$	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ if combination } l \text{ of plant } c \\ \text{is chosen at period } k \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right.$
$d_{tk}^c =$	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ if turbine } t \text{ of plant } c \text{ is started} \\ \text{at period } k \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right.$
$\chi_{sk}^c(v_k^c, q_k^c)$	power output function for surface $s$ at period $k$ and plant $c$ ( $MW$ )



$\delta_k^c$	inflow of plant $c$ at period $k$ ( $m^3/s$ )
$w_k$	duration of period $k$ ( $h$ )
$\gamma$	conversion factor from water discharge ( $m^3/s$ ) to ( $hm^3/h$ )
$\zeta_k$	conversion factor to energy units ( $GWh$ )
$v_{min}^c$	minimal volume of plant $c$ reservoir ( $hm^3$ )
$v_{max}^c$	maximum volume of plant $c$ reservoir ( $hm^3$ )
$q_{min}^c$	minimum water discharge at plant $c$ ( $m^3/s$ )
$q_{max}^c$	maximum water discharge at plant $c$ ( $m^3/s$ ).

## 4.2 Short-term unit commitment and loading problem

The short-term unit commitment and loading problems must determine a production plan to maximize energy production and penalize unit start-ups. This section describes the characteristics of the problem and presents an optimization model that requires a short computational time to solve.

### 4.2.1 Problem description

Power produced by a single hydroelectric generator [106] is given by the equation :

$$P = n(Q) \times g \times Q \times h_n \quad (4.1)$$

where  $P$  is the power output in  $kW$ ,  $n(Q)$  is the turbine-generator overall efficiency,  $g$  is the gravitational acceleration in  $m/s^2$ ,  $Q$  is the turbine water discharge in  $m^3/s$  and  $h_n$  the net water head in  $m$ .

For a given turbine, power is a function of the water discharge, the net water head and the efficiency. Gross head is the difference between forebay and tailrace elevation. When water runs in the penstock, friction causes heat dissipation, thus diminishing energy. This phenomena causes a loss that needs to be considered in the power output calculation. Net water head is obtained from the gross head from which the losses are taken into account. Net water head is computed by :

$$h_n(v, Q) = h_f(v) - h_t(Q) - \psi(Q) \quad (4.2)$$

where  $v$  is the volume of the reservoir in  $hm^3$ ,  $Q$  is the total water discharge in  $m^3/s$ ,  $h_f$  is a nonlinear function returning forebay elevation in  $m$ ,  $h_t$  is a nonlinear function returning

tailrace elevation in  $m$  and  $\psi$  is a nonlinear function returning friction losses in  $m$ .

The focus of this paper are Chute-du-Diable and Chute-Savane plants in the Saguenay-Lac-St-Jean hydroelectric system. A particularity of the system is that there is no analytical representation of the tailrace elevation for some plants. The value can only be calculated by a computer simulation. Since power depends on net water head and water discharge, there is no analytical representation of the power output functions. This particularity also deprives us of their derivatives.

Each turbine possesses its own efficiency curve, causing them to produce different power outputs for the same water discharge and net water head. Also, efficiency depends on water discharge of the turbine. Fig.4.1 illustrates the efficiency of a turbine as a function of water discharge for a given net water head at the Chute-du-Diable plant.

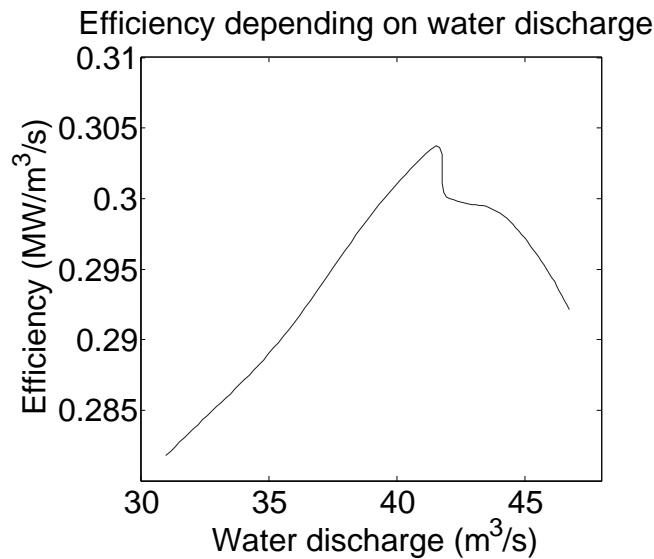


Figure 4.1 Turbine efficiency as a function of water discharge.

In Fig.4.1, the water discharge of  $48 \text{ m}^3/\text{s}$  generates the greatest power and is called maximum flow rate. This limit is fixed by the turbine manufacturer. When it is reached, water needs to be spilled, causing power and efficiency to decrease. Turbines should always be used within their efficiency zones for these reasons.

Another particularity that complicates the problem is the forbidden zones of operations of the turbines [50]. Under certain operating conditions, a vortex may occur in the turbine and create pressure variations that can damage components. These zones are forbidden and turbine are not operated when these conditions are met.

Also, unit restarts should be limited since they shorten equipment life [15]. There is also a cost associated to a unit start-up. It takes into account the history of expenses in maintenance and repairs in relation with the number of start-ups. This value is laboriously calculated by Rio Tinto Alcan and becomes a parameter in the optimization models.

One could formulate the energy production optimization problem as a linear integer program by discretizing unit water discharge, volumes and total water discharge for each turbine, power plant and period in order to maximize total energy production. However, the number of optimization variables would be extremely large. For instance, if total water discharge is discretized from 0 to  $900 \text{ m}^3/\text{s}$ , unit water discharge from 0 to  $150 \text{ m}^3/\text{s}$  both with steps of  $5 \text{ m}^3/\text{s}$ , with 168 hourly periods for a week and volumes from 46 to  $394 \text{ hm}^3$  discretized in 100 slices, then the number of binary variables would be of the order of  $10^8$ . Water discharges are discretized every  $5 \text{ m}^3/\text{s}$  since it is operationally impossible to obtain a finer precision, and volumes in 100 slices give a good final precision for the hydroelectric system. This suggests that the number of variables required is unrealistic for a real-time application.

#### 4.2.2 Problem modeling

Power output of a single turbine is a function of two variables of the water discharge and the volume. However, there is a relation between the net water head and the volume of the reservoir. For the remainder of the paper, volume will be used to simplify notation. Total power output of a plant depends on total water discharge, number of working units and active turbines. Efficiency curves are specific for each turbine, hence unit power output is different for the same water discharge. Depending on the number of units working, but also on which units are employed, total power output is different. Instead of working directly with turbines in the model, fewer variables are needed if active turbines are grouped in combinations. For example, for the Chute-du-Diable plant, five turbines are available, but operational restrictions require a minimum of three active turbines. Table 4.2 lists the sixteen possible combinations. In each column, the numbers represent the actual active turbines.

Table 4.2 Turbine combinations at Chute-du-Diable

3 active turbines		4 active turbines	5 active turbines
123	145	1234	12345
124	234	1235	
125	235	1245	
134	245	1345	
135	345	2345	

A model using combinations of active turbines needs to determine which one to use at each

period as well as the volume and the total water discharge. For a given volume and turbine, the power output depends on the water discharge. The same applies to combinations : if turbines in the combination differ, then the total power output will be different.

A dynamic programming algorithm is used to compute the combination power outputs. For every discretization of the water discharge, volume and combinations, the algorithm calculates power outputs. For a given power plant, volume and turbine, the states are  $s^j = \{1, 2, \dots, r\}$  remaining water to dispatch for turbine  $j$  and the variables are  $q^j = \{1, 2, \dots, \min\{\bar{q}^j, Q\}\}$ , unit water discharge for turbine  $j$ , where  $Q$  is total water discharge and  $\bar{q}^j$  is maximum unit water discharge. The objective is to maximize total power output. The solution is found recursively by solving a sub-problem for each turbine. For  $j = n$ , where  $n$  is total number of turbines, optimal power output  $f^{*j}(s^j) = P(s^j, v)$ , where  $v$  is the volume and  $P$  is power output. The optimal unit water discharge is  $q^{*j} = s^j$ . For the other subproblems, that is for  $j = n - 1, n - 2, \dots, 1$ , optimal power output  $f^{*j}(s^j) = \max_{q^j} P(s^j, v) + f^{*j+1}(s^j - q^j)$  and optimal unit water discharge is  $q^{*j} = s^j$  that maximizes  $f^{*j}(s^j)$ .

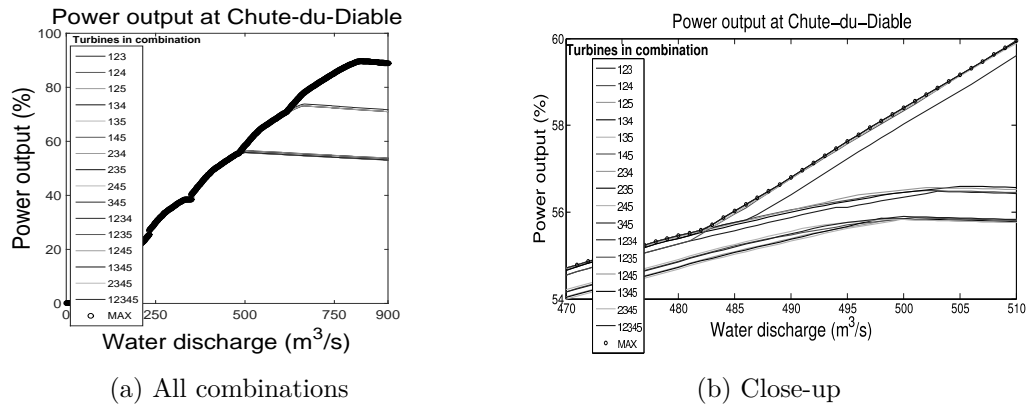


Figure 4.2 Power output at Chute-du-Diable.

Fig.4.2a shows curves of the power output depending on the water discharge for all possible combinations at Chute-du-Diable power plant, for a volume of  $376 \text{ hm}^3$  and Fig.4.2b is a close-up.

Observe that the power output decreases when the maximum efficiency of the turbine combination has been reached. These curves could be used to model the problem. The objective of the problem is to maximize total energy generation and a new function corresponding to the maximum of all combinations can be created. This new function returns the maximum power that can be generated for a given water discharge, a reservoir volume and a given number of units. It is represented by the bold curve on Fig.4.2a. This can be generalized for

the discretization of volumes. One hundred discretizations are done, between the minimum and maximum reservoir volume and are shown in Fig.4.3a. The interest for this function is that it gives us an upper bound on the optimal value of the problem for a volume and a given water discharge. The changes in the number of active turbines in the combination cause

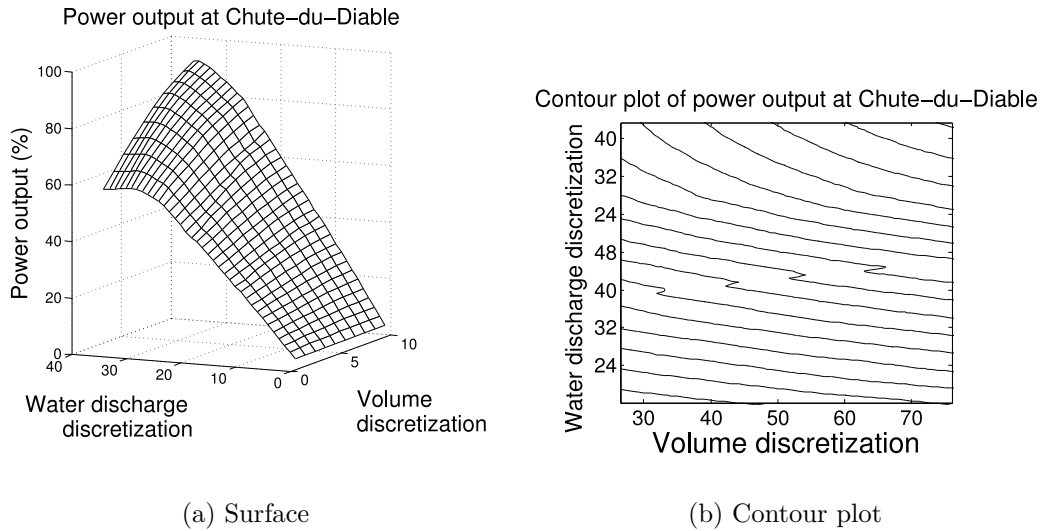


Figure 4.3 Power output at Chute-du-Diable.

a problem for modeling this surface since they correspond to nondifferentiable zones. The contour plot shown in Fig.4.3b illustrates this property. A way to overcome these difficulties is to create a surface for each number of active turbines in the combination. In this case, surfaces with three turbines working, four turbines and five turbines are created, as shown in Fig.4.4. Notice that in Fig.4.2a, the curves between 0% and 55% correspond to combinations with three active turbines, from 0% to 75% with four active turbines and five active turbines from 75% to 90 %. As mentioned previously, a dynamic programming algorithm was used to compute power outputs for each water discharge, combination and volume discretization. Then, the maximum power output for every water discharge, volume and for each number of active turbines was retained to create the maximum power output surfaces for each number of active turbines. Smoothing splines were used to fit the power output data on the discretization points. The mathematical model must determine one surface per period, giving us at the same time the number of active turbines. Hence, if a turbine is unavailable for a given period, surfaces need to be recalculated without considering the unavailable turbine. Thus, for each plant and each period, the number of surfaces may vary, as well as the surfaces themselves. The dynamic programming algorithm is computed for every number of active turbines in the combination as well as for every combination of unavailable turbines and

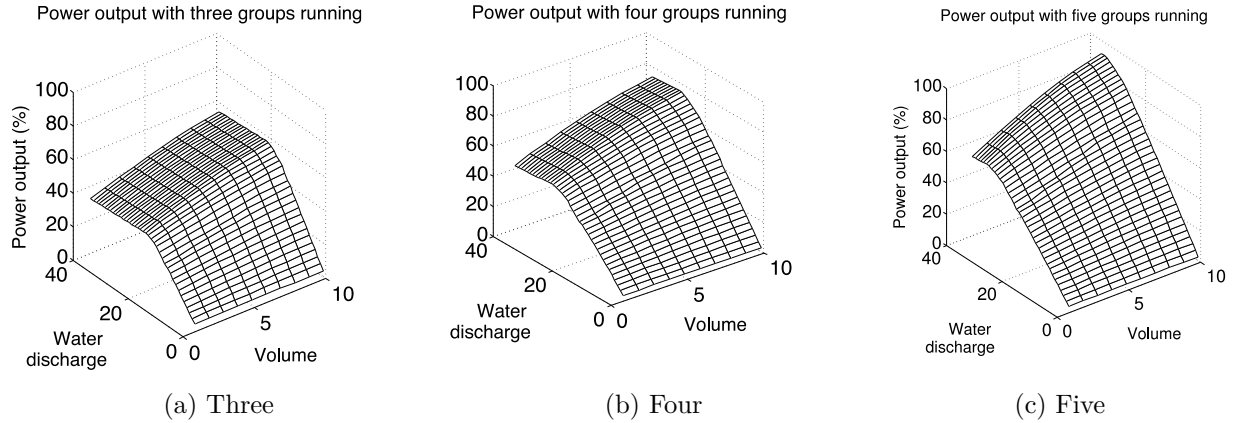


Figure 4.4 Power output with different number of active turbines.

power outputs are stored in a database. Models then consult the database, depending on possible number of active turbines and available turbines. The volume of available water for production is obtained from the medium-term optimization and is an input to the loading problem, as well as the initial combination of working turbines. It is denoted  $\hat{y}_{sk}^c$  and is a parameter for the short-term unit commitment and loading optimization models. The use of these surfaces does not allow us to penalize the start-up of turbines, hence the optimization needs to use a two-stage approach. The first stage is a nonlinear mixed-integer model and returns the water discharge, reservoir volume as well as the number of active turbines. The second stage is a linear integer model that determines exactly the combination of turbines to use at each period in order to minimize the start-up of turbine so that energy is maximized. A relevant contribution in this method is the pre-processing of the power output surfaces before any optimization is conducted. This allows to decrease drastically the number of optimization variables. Also, the creation of the power output surfaces results in smooth surfaces that can be used in an optimization model. Therefore, derivatives are available and these surfaces give us an analytical representation of the hydropower functions.

### 4.3 Mathematical models

This section presents the mathematical models used to solve the short-term unit commitment and loading problem. The first one distributes generation among plants and the second determines the active turbines.

### 4.3.1 Loading problem

The first optimization consists of a nonlinear mixed-integer program that determines the water discharge, reservoir volume and number of active turbines at each period for each power plant. The functions  $\chi_{sk}^c(v_k^c, q_k^c)$  correspond to maximum power output of a given number of active turbines, for a given water discharge, volume, plant and period. These functions are smoothing splines that fit the data obtained from the dynamic programming algorithm. There is one function for each number of active turbines and period since turbines are not necessarily available all the time. The initial number of active turbines  $\hat{y}_{s1}^c$  is known. Refer to Section 4.2.2 for more information on the calculation of maximum power output. The number of surfaces per plant and period is given by  $n_k^c$ . Maximize total energy production :

$$\max \sum_{c \in C} \sum_{k \in K} \sum_{s=1}^{n_k^c} \chi_{sk}^c(v_k^c, q_k^c) y_{sk}^c \zeta_k \quad (4.3)$$

subject to :

$$\delta_k^c = v_{k+1}^c - v_k^c + \gamma w_k(q_k^c + g_k^c) - \sum_{r=1}^{u^c} \gamma w_k(q_k^r + g_k^r) \quad , \quad \forall c \in C, \forall k \in K \setminus \{1\} \quad (4.4)$$

$$\sum_{s=1}^{n_k^c} y_{sk}^c = 1 \quad , \quad \forall c \in C, \forall k \in K \setminus \{1\} \quad (4.5)$$

$$y_{s1}^c = \hat{y}_{s1}^c \quad , \quad \forall c \in C, \forall s = 1, 2, \dots, n_k^c \quad (4.6)$$

$$v_{min}^c \leq v_k^c \leq v_{max}^c \quad , \quad \forall c \in C, \forall k \in K \quad (4.7)$$

$$q_{min}^c \leq q_k^c \leq q_{max}^c \quad , \quad \forall c \in C, \forall k \in K \quad (4.8)$$

$$q_k^c \geq 0 \quad , \quad \forall c \in C, \forall k \in K \quad (4.9)$$

$$v_k^c \geq 0 \quad , \quad \forall c \in C, \forall k \in K \quad (4.10)$$

$$g_k^c \geq 0 \quad , \quad \forall c \in C, \forall k \in K \quad (4.11)$$

$$y_{sk}^c \in B \quad , \quad \forall c \in C, \forall k \in K, \quad \forall s = 1, 2, \dots, n_k^c \quad (4.12)$$

$$q_k^c, v_k^c, g_k^c \in R \quad , \quad \forall c \in C, \forall k \in K. \quad (4.13)$$

Constraints (4.4) assure that water balance of the plants are met. The values of  $v_1^c$  and  $v_{k+1}^c$  are known and obtained from the medium-term optimization model. Constraints (4.5) force the model to choose only one surface at each period for each plant and constraints (4.6) feed the model with the turbines already working at the beginning of the planning horizon.

Constraints (4.7) and (4.8) represent the physical limits for volume of the reservoirs as well as the water discharge operational limits. Non-negativity of the variables are taken into account by constraints (4.9), (4.10) and (4.11). Finally, (4.12) impose binary variables and (4.13) real variables.

In practice, nonlinear mixed-integer programs require a large amount of computing time when solving since some variables, in this case those associated to the surfaces, are integer variables. Luckily, we can prove that solving the continuous relaxation of the surface variables  $y_{sk}^c$  of this problem is sufficient to obtain an integer solution on these variables. Solving the relaxed nonlinear problem will return a solution with integer variables, even though imposing integer variables has been omitted.

**Proposition 4.3.1.** *Solving the relaxation of integer program (4.3)-(4.13) leads to an integer solution for variables  $y_{sk}^c$ .*

*Proof.* The proof of the result is done by showing that the matrix of constraints for variables  $y_{sk}^c$  is totally unimodular. Problem (4.3)-(4.13) can be re-written as follows :

$$\max \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{c \in C} \sum_{k \in K} \sum_{s=1}^{n_k^c} \eta_{\omega k} y_{sk}^c \zeta_k \quad (4.14)$$

subject to :

$$\sum_{s=1}^{n_k^c} y_{sk}^c = 1 \quad , \quad \forall c \in C, \forall k \in K \setminus \{1\} \quad (4.15)$$

$$y_{s1}^c = \hat{y}_{s1}^c \quad , \quad \forall c \in C, \forall s = 1, 2, \dots, n_k^c \quad (4.16)$$

$$y_{sk}^c \in B \quad , \quad \forall c \in C, \forall k \in K, \forall s = 1, 2, \dots, n_k^c. \quad (4.17)$$

where  $\eta_{\omega k}$  is the power for  $\omega$  the feasible set with respect to constraints (4.4) and  $\hat{y}_{sk}^c$  is the initial combination of turbines working from the medium-term optimization. Since the variables  $y_{sk}^c$  do not appear in the water balance constraints, the model is written with the feasible set satisfying constraints (4.4). Thus,  $\eta_{\omega k}$  is equivalent to  $\chi_{sk}^c(v_k^c, q_k^c)$ , but for simplification,  $v_k^c$  and  $q_k^c$  do not appear in the model to make it clear that variables  $y_k^c$  only influence the choice of the surface constraints.

Denote the matrix of coefficients of the constraints for problem (4.14)-(4.17) by  $A$ . Wolsey [107] shows  $A$  is totally unimodular if and only if the following three conditions are satisfied :

1.  $a_{ij} \in \{+1, -1, 0\} \forall i, j$ .
2. Each column of  $A$  contains at most two nonzero coefficients ( $\sum_{i=1}^m |a_{ij}| \leq 2$ ).



3. There exists a partition  $(M_1, M_2)$  of the set  $M$  of rows of  $A$  such that each column  $j$  containing two nonzero coefficients satisfies  $\sum_{i \in M_1} a_{ij} - \sum_{i \in M_2} a_{ij} = 0$ .

Condition 1. is satisfied by Equations (4.15-4.16). Each column of the matrix  $A$  has a single element, which imply that Conditions 2. and 3. are satisfied.

Therefore,  $A$  is totally unimodular and there is an integer optimal solution of the continuous relaxation.  $\square$

The following nonlinear relaxed program can be solved, where  $Y_{sk}^c$  are continuous variable associated to the surfaces. Maximize total energy produced at each period :

$$\max \sum_{c \in C} \sum_{k \in K} \sum_{s=1}^{n_k^c} \chi_{sk}^c(v_k^c, q_k^c) Y_{sk}^c \zeta_k \quad (4.18)$$

subject to :

$$(4.4) \quad (4.19)$$

$$\sum_{s=1}^{n_k^c} Y_{sk}^c \leq 1 \quad , \quad \forall c \in C, \forall k \in K \quad (4.20)$$

$$(4.6) - (4.10) \quad (4.21)$$

$$Y_{sk}^c \geq 0 \quad , \quad \forall c \in C, \forall k \in K, \forall s = 1, 2, \dots, n_k^c \quad (4.22)$$

$$Y_{sk}^c \in R \quad , \quad \forall c \in C, \forall k \in K, \forall s = 1, 2, \dots, n_k^c. \quad (4.23)$$

Constraints remain the same, except for (4.20) that becomes an inequality and (4.22) and (4.23) that are the non-negativity constraints for continuous variables associated to the choice of the surface.

### 4.3.2 Unit commitment

The solution produced by the nonlinear relaxed program is an input to the unit commitment problem. The unit commitment model is a linear integer program and it determines the exact combination of turbines to use in order to maximize total energy production at each period and penalize start-up of turbines. The initial combination of working turbines  $\hat{x}_{lk}^c$  is known. From the loading problem, water discharge, volume and number of active turbines are obtained for each period and plant. Power output is then computed with a dynamic programming algorithm for every combination corresponding to the number of active turbines, for given values of volume and water discharge calculated from the loading problem. These power output values are stored in  $\beta_{lk}^c$ , which are parameters in the unit commitment model.

The number of combinations for a given period and power plant is given by  $n_k^c$  and number of turbines of a hydroelectric plan by  $T^c$ .

The optimization problem maximizes energy produced and penalizes turbine start-ups :

$$\max \sum_{c \in C} \sum_{k \in K} \sum_{l=1}^{n_k^c} \beta_{lk}^c x_{lk}^c \zeta_k - \sum_{c \in C} \sum_{k \in K} \sum_{t=1}^{T^c} d_{tk}^c \theta \zeta_k \quad (4.24)$$

subject to :

$$\sum_{l=1}^{n_k^c} x_{lk}^c = 1 \quad , \quad \forall c \in C, \forall k \in K \setminus \{1\} \quad (4.25)$$

$$x_{lk}^c f_{lkt}^c - x_{lk-1}^c f_{lk-1t}^c \leq d_{tk}^c \quad , \quad \forall c \in C, \forall k \in K, \forall l = 1, 2, \dots, n_k^c \\ , \quad \forall t = 1, 2, \dots, T^c \quad (4.26)$$

$$x_{l1}^c = \hat{x}_{l1}^c \quad , \quad \forall c \in C, \forall l = 1, 2, \dots, n_k^c \quad (4.27)$$

$$x_{lk}^c \in B \quad , \quad \forall c \in C, \forall k \in K, \\ , \quad \forall l = 1, 2, \dots, n_k^c \quad (4.28)$$

$$d_{kt}^c \in B \quad , \quad \forall c \in C, \forall k \in K, \\ , \quad \forall l = 1, 2, \dots, n_k^c \\ , \quad \forall t = 1, 2, \dots, T^c. \quad (4.29)$$

The constraints (4.25) ensure that only one combination is chosen at each period. Constraints (4.26) are the linking constraints between start-up variables and combination choice. Constraints (4.27) force the initial combination of turbines working. Finally, constraints (4.28) and (4.29) are the declaration of binary variables.

One of the advantages of solving separately the unit commitment problem is that there is no approximation of the data, since  $\beta_{lk}^c$  is calculated with a dynamic programming algorithm. Also, the advantage of a two-phase optimization approach is that it is much easier to solve a continuous nonlinear model followed with a linear integer model than a single nonlinear mixed integer problem.

#### 4.4 Computational results

The mathematical models of Sections 4.3.1 and 4.3.2 are tested on two of the five hydroelectric plants that compose the Saguenay-Lac-St-Jean hydroelectric system. These two plants, Chute-du-Diable and Chute-Savane, are in series and both have five turbines. They were chosen since they are the smallest sub-system with two plants in series and the motivation is to validate the optimization developed before expanding to the whole hydroelectric system.

Also, the models developed are deterministic and the aim of subsequent studies will be to consider uncertainty in the weather forecasts.

The current procedure used at Rio Tinto Alcan to schedule hydro power production is a gradient-based method with linear constraints. A short-term optimization software computes total water discharge at each plant and period. For the unit commitment, a dynamic programming algorithm combined with the engineer's experience are used to make the final decision. The purpose of this paper is to develop a fully automatic procedure that gives better, or at least as good results as currently. The planning horizon of the models is partitioned into 168 hourly periods for one week. Thirty weekly scenarios are tested, all provided from the historical database. Since data is available every two minutes, a mean per hour of the water discharge and the volume of the reservoirs is calculated in order to compare results. Initial volume, final volume and initial combination of working turbines are provided to the model to make the best possible comparison. The same starting point, in the middle of volume and water discharge discretizations is given to the model as an initial solution. Inflows of the basins are assumed known and the computed model is deterministic.

The Ipopt [105] nonlinear solver is used for the first nonlinear program and Xpress-MP [2] for the second linear program. Numerical experiments are conducted with an Intel Xeon Processor E5-2650, with 8 cores at 2 *GHz* and 61 *Go* of RAM memory. The nonlinear program has a total of 1680 real variables and 674 constraints. For the second linear integer program, 7056 binary variables and 26918 constraints are necessary. The number of variables and constraints for the second model will be less if some turbines are unavailable due to maintenance or repair at certain periods. Numerical comparisons of our approach versus the real values show an improvement on 27 out of the 30 test cases, ranging from 0.002 *GWh* to 2.145 *GWh*. The average improvement over all cases is of 0.4 *GWh*. In the province of Quebec, a 1 *MWh* earning represents roughly 40\$ in savings for the producer. In this particular case, an improvement of 0.4 *GWh* translates into 832 000\$ savings for a year.

Our approach is slightly sensitive to the starting point value. We observed that for the three cases in which our approach did not improve the solution, a better solution was found by changing the starting point. The computational time to solve the unit commitment model is very low. The loading problem takes an average of 1.41 seconds and the longest time is 7.71 seconds. Results obtained with the same initial solution are shown in Table 4.3. For each hydroelectric plant, total energy, with penalties due to start-ups, both for solution obtained with the optimizer and the historical database are listed. Also, the difference between optimized solutions and the historical database are computed. A positive value indicates that the optimizer produces a better solution than reality and a negative value indicates the opposite. Also, the total difference of start-ups of turbines is listed. A positive difference

indicates optimized solution has more starts than real case and a negative difference indicates real case has more starts.

Table 4.3 Total energy production with same initial solution

#	Chute-du-Diable		Chute-Savane		Total		Diff.	
	Optimized <i>GWh</i>	Real <i>GWh</i>	Optimized <i>GWh</i>	Real <i>GWh</i>	Optimized <i>GWh</i>	Real <i>GWh</i>	<i>GWh</i>	# start
1	27,12	26,82	38,09	37,93	65,21	64,75	0,46	0
2	31,96	31,97	35,41	35,25	67,37	67,21	0,16	1
3	33,42	33,21	36,55	36,21	69,97	69,42	0,55	-1
4	22,52	22,07	24,73	23,80	47,25	45,87	1,38	0
5	25,01	25,05	28,31	28,12	53,32	53,17	0,15	-3
6	29,36	29,07	31,68	30,98	61,03	60,05	0,98	2
7	22,74	22,87	30,00	29,96	52,74	52,82	-0,08	5
8	32,26	31,56	30,18	29,67	62,44	61,23	1,21	3
9	27,29	26,78	38,38	38,42	65,67	65,20	0,47	1
10	32,06	31,91	36,10	35,52	68,16	67,42	0,74	0
11	36,67	36,68	38,41	38,39	75,07	75,07	0,00	0
12	28,68	28,30	36,59	36,14	65,27	64,44	0,83	0
13	33,94	33,93	38,80	38,72	72,73	72,65	0,08	0
14	26,52	26,15	36,76	36,59	63,28	62,74	0,54	1
15	24,04	23,54	35,29	35,35	59,33	58,88	0,45	1
16	33,80	33,53	37,85	37,63	71,66	71,16	0,50	0
17	31,13	31,13	36,54	36,43	67,67	67,56	0,11	0
18	30,18	29,89	31,84	31,94	62,01	61,83	0,18	2
19	29,10	28,70	31,26	31,37	60,36	60,06	0,29	4
20	28,57	28,26	31,33	31,32	59,90	59,58	0,32	3
21	27,04	26,96	29,80	29,71	56,84	56,67	0,17	1
22	28,17	27,83	30,68	30,27	58,84	58,10	0,75	-4
23	25,05	25,11	27,77	27,57	52,82	52,68	0,14	0
24	33,64	32,67	36,97	35,80	70,61	68,47	2,15	-1
25	20,54	20,64	22,90	22,78	43,44	43,42	0,02	2
26	31,91	31,87	35,14	35,14	67,06	67,01	0,05	-2
27	20,34	20,48	23,41	23,25	43,74	43,73	0,02	3
28	29,48	29,62	32,83	32,79	62,31	62,41	-0,11	-2
29	33,34	33,34	36,68	36,56	70,02	69,90	0,12	1
30	29,08	29,27	31,83	31,85	60,91	61,12	-0,21	3

Fig.4.5 is a histogram comparing energy gain between optimized solution and real test cases. In twelve out of the thirty test cases, the optimized solution improved the quantity of energy produced between 0 and 0.2 *GWh*. For ten other cases, the improvement is between 0.2 and 1.0 *GWh*. Three cases exceed 1.0 *GWh* and the largest gain is close to 2.2 *GWh*. In 27 of these cases the improvement is positive, and in the other 3 the improvement is slightly

negative.

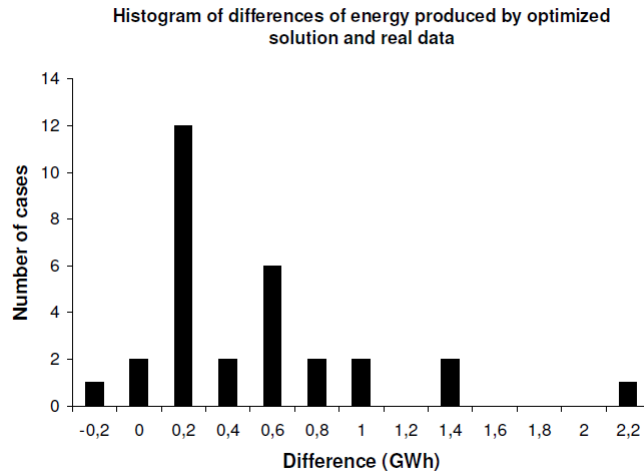


Figure 4.5 Histogram of differences of energy.

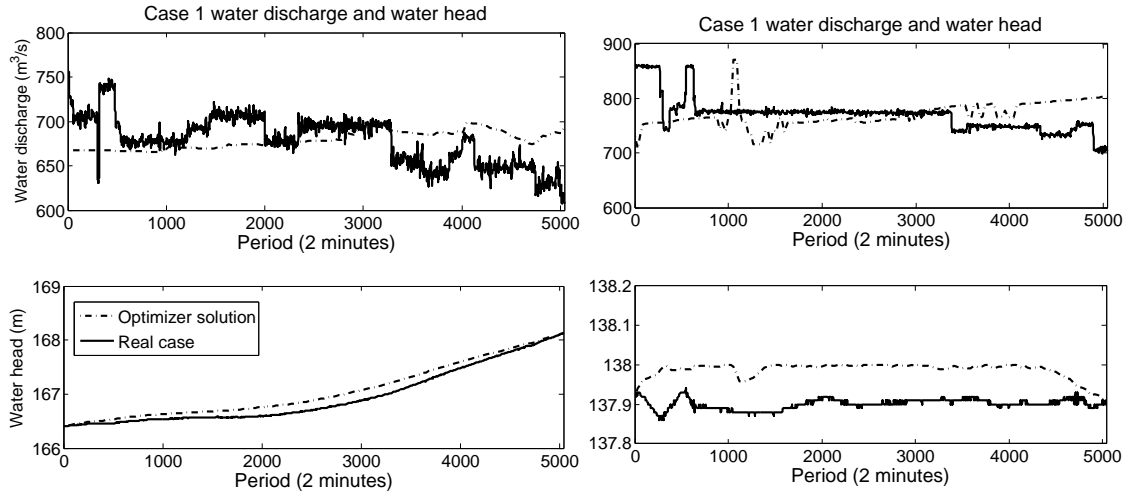
#### 4.4.1 Interpretation of the results

We illustrate the differences between the real and the optimized solutions by analyzing two of the test cases. These cases were selected since one of them proposes a very different production plan than the decisions actually taken at the moment. Case 1 fills the reservoir during the week and case 6 has similar volumes at the beginning and the end of the week.

Since power is a two variable function of the net water head and water discharge, both graphs are presented. For Chute-du-Diable and Chute-Savane, a graph of the water discharge comparing optimized solution and reality as well as a graph comparing water heads are displayed for both cases.

Let us analyze case 1 in details. Fig.4.6a shows the results for Chute-du-Diable power plant. The graphic on top shows the total water discharge of the plant in  $m^3/s$  and the graphic below shows the net water head in  $m$ . The period for both graphs is 2 minutes, as in the historic database. The optimized result over the entire week in hourly periods are transposed every 2 minutes to allow a visual comparison between historic and optimized results. Even though a mean per hour of the 2 minute inflows has been computed for the optimization, the total volume is equivalent for 2 minutes real results and 1 hour optimized solutions. For each graph, the optimized solution is presented with a dashed line and the real cases with a filled line. Fig.4.6b shows the results for Chute-Savane. The top graphic of Fig.4.6a shows the optimized solution in which the total water discharge at the plant is  $670 m^3/s$  during

the whole planning horizon. Graphic on the bottom, on Fig.4.6a, illustrates the water head is similar throughout all the week for database and optimizer solution. Fig.4.6b on top shows database solution give a constant water discharge of about  $780 \text{ m}^3/\text{s}$  with a higher discharge at the beginning of the week, and that optimized solution has also a constant solution with a peak of the water discharge around period 1000. As for the graphic on the bottom, the optimized water head is higher than database results throughout the week. The solution provided by the optimizer produces an improvement of  $0.462 \text{ GWh}$ .



(a) Chute-du-Diable

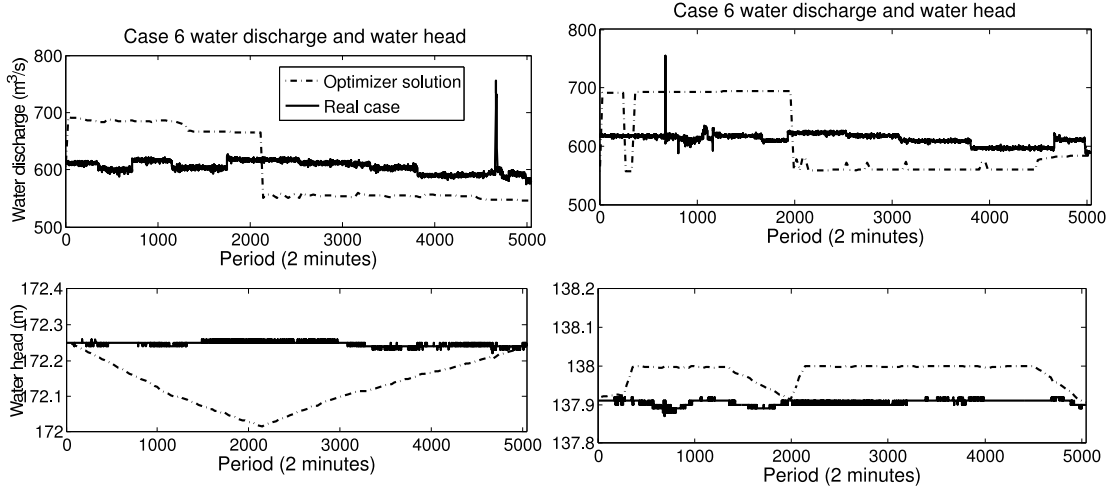
(b) Chute-Savane

Figure 4.6 Case 1 water discharge and water head.

For case 6, the solutions for both power plants have strategies different than decisions made at that moment. Chute-du-Diable's reservoir is lowered then filled and Chute-Savane is filled, then lowered and filled once again. Results are presented on Fig.4.7.

These two cases were selected to illustrate important differences. Case 1 fills the reservoir throughout the week and case 6 keeps reservoir at the same level. These graphs show that the optimized strategy differ from what was done in reality, and improve the production. Case 1 produces  $0.462 \text{ GWh}$  more and case 6,  $0.982 \text{ GWh}$  more. Our models allow us to produce a solution within a very satisfying computational time of a few seconds. Also, it demonstrates that the proposed optimization lead to a fully automatic procedure that allows to obtain results at least as good as the current procedure.

We solved the short-term unit commitment and loading problem with a deterministic model, which means that no uncertainties are taken into account on the inflows of the basin. It gives more liberty to the optimization to vary the reservoir volumes knowing exactly water inflows



(a) Chute-du-Diable

(b) Chute-Savane

Figure 4.7 Case 6 water discharge and water head.

that will occur at the next period. Computational results show that the model proposed could be modified and extended to take into account the uncertainties related to the weather forecasts.

#### 4.4.2 Benchmarking of the proposed solution

The current procedure at Rio Tinto Alcan combines a gradient-based method with the engineer's experience. Thus, to validate the proposed optimization method, it is necessary to compare with a mathematical algorithm that does not apply a post-processing of the results. In a perfect situation, the output of the gradient-based method could have been used, but the model does not perform well. Hence, the results obtained with our two-phase optimization model would not have been a fair comparison since it always performs much better.

We propose the following benchmark : the two-phase models are combined into a single a nonlinear mixed integer model and solved with the Bonmin [20] software package. The same dynamic programming algorithm as in Section 4.3.1 is used but instead of computing surfaces for every number of active turbines in the combination, they are computed for every combination of turbines since the optimization must be carried out in a single phase. The continuous variables are : water discharge, water spilled and volume at each period for each plant. The binary variables are : combination used and startup of turbines at each period, for each plant. The constraints are the same as for the two-phase models combined. The objective function is to maximize total energy production and to penalize startup of turbines.

The benchmark test cases are the ones from Section 4.4 in which all ten turbines are available at each period of the planning horizon. There are ten such test cases. Table 4.4 summarizes the results.

Table 4.4 Benchmarking on instances with 10 turbines

Case	Benchmark		two-phase	
	<i>GWh</i>	Time m :s	<i>GWh</i>	Time m :s
1	-	> 12m	65.21	0 : 01
7	52.67	0 : 07	52.74	0 : 02
9	-	> 12m	65.67	0 : 01
11	75.29	0 : 09	75.07	0 : 01
13	72.73	0 : 11	72.73	0 : 01
14	63.09	2 : 53	63.28	0 : 02
15	59.05	2 : 33	59.33	< 1s
17	67.38	0 : 09	67.67	< 1s
22	58.58	0 : 09	58.84	0 : 01
28	61.88	0 : 25	62.31	0 : 06

Out of the ten cases, two cannot be solved by Bonmin with the default parameters. After 12 minutes, the solver aborted with an infeasible solution, while the two-phase optimization process solves these both cases in one second. For two other cases, the benchmark required more than 2 minutes and again, the proposed two-phase model solves these two cases in less than 2 seconds. Finally, the proposed method in this paper solves the remaining cases in less than 6 seconds, which is inferior to the fastest time for Bonmin.

For the test cases solved by both the benchmark and two-phase methods, the final objective function values are comparable, as seen in Table 4.4.

One may notice the higher values of the objective function for the two-phase optimization process than for the benchmark. As said previously, the surfaces were computed for every combination of turbines in the benchmark model. Since all the optimization, which are the loading and the unit commitment model, needs to be carried out in a single phase, polynomial equations were used to fit the data. In the two-phase process, the first phase power surfaces were fitted with splines, but in the second phase, the value of power for a given water discharge and volume were computed using a dynamic programming algorithm, which means that there was no approximation on the data. Therefore, there is no way of overcoming this difficulty when solving the models in a single phase, so that explains the differences in the objective value. The polynomial equations used to fit the data in the benchmark will inevitably have over or under estimations, which is not the case with the two-phase optimization. Fig.4.8 illustrates the water heads for both plants and both algorithmic approaches. The results are



very similar.

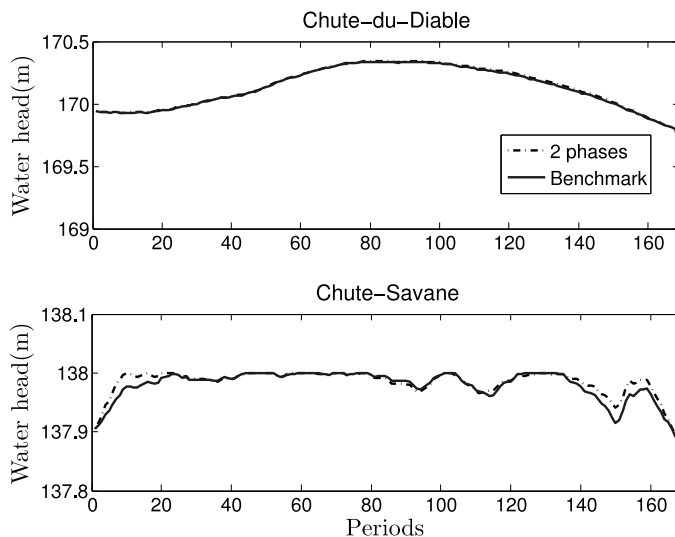


Figure 4.8 Case 9 benchmark and two-phase approach water head.

The comparison between the output of a nonlinear mixed integer model and the two-phase optimization method developed in this paper shows that our method solves all the proposed test cases in a computational time that is much faster than in a one phase optimization process. The computational times increase with the number of turbines. In our test cases, problems have 10 turbines, but we must keep in mind that some hydroelectric plants have up to 18 turbines, and the single phase approach with the Bonmin solver cannot solve all problems.

## 4.5 Conclusion

Short-term unit commitment and loading problems for the Saguenay-Lac-St-Jean system are complex to solve since the hydroelectric production functions are nonconvex and nonlinear and we do not have analytical representations of them. We have proposed a model with a reasonable number of variables, embedded into a two-stage optimization approach. The first stage solves the relaxation of a nonlinear mixed-integer program in order to find volume, water discharge and number of active turbines at each period. The second stage solves a linear integer model to find the exact combination of turbines that maximizes total energy but also penalizes start-up of turbines. Dynamic programming is used to calculate total power output that can be generated by a certain combination of active turbines. This data is then used as parameters for both models. The pre-processing of the power output surfaces is a

main contribution to this paper since it decreases the number of optimization variables. Also, even though tailrace elevations have no analytical representation, the power output surfaces allows us to use solvers that require derivatives, since they are smooth surfaces and they give a good representation of the hydropower production functions. The approach proposed in this paper allows us to find a solution in a computational time that is more than satisfying for needs of operation and was compared to a large mixed integer nonlinear problem formulation. Multistarts or variable neighborhood searches [53] will be the subject of future research. Also, other developments based on this method will involve using uncertainty related to inflows in order to create a stochastic programming model.

### **Acknowledgment**

The authors would like to thank Marco Latraverse from Rio Tinto Alcan for his implication and advice throughout this project. Also, the comments of the referees were very helpful and improved the quality of the paper.

## CHAPITRE 5    ARTICLE 2 : STOCHASTIC SHORT-TERM HYDROPOWER PLANNING WITH INFLOW SCENARIO TREES

Cet article a été soumis à la revue *European Journal of Operational Research* le 29 septembre 2015. Une révision de l'article a été soumise le 19 avril 2016 et est toujours en processus de révision.

Le rapport technique suivant est publié :

S. Séguin, S.-E. Fleten, A. Pichler, P. Côté et C. Audet, Stochastic short-term hydropower planning with inflow scenario trees, *Cahiers du GERAD*, (G-2015-97), 2016, Révisé avril 2016.

**Abstract :** This paper presents an optimization approach to solve the short-term hydropower unit commitment and loading problem with uncertain inflows. A scenario tree is built based on a forecasted fan of inflows, which is developed using the weather forecast and the historical weather realizations. The tree-building approach seeks to minimize the nested distance between the stochastic process of historical inflow data and the multistage stochastic process represented in the scenario tree. A two-phase multistage stochastic model is used to solve the problem. The proposed approach is tested on a 31 day rolling-horizon with daily forecasted inflows for three power plants situated in the province of Quebec, Canada, that belong to the company Rio Tinto.

**Key Words :** Large scale optimization, nonlinear programming, OR in energy, scenarios, stochastic programming.

**Acknowledgments :** The authors would like to thank Marco Latraverse, and Rio Tinto, for providing data necessary to this study. This work was supported by NSERC, FRQNT and Rio Tinto. Also, a grant for international mobility, awarded by FRQNT through GERAD allowed the research to be conducted at the Norwegian University of Science and Technology. Stein-Erik Fleten acknowledges financial support from the Research Council of Norway through project 243964/E20. Alois Pichler gratefully acknowledges support of the Research Council of Norway through grant 207690/E20. The authors are thankful to two anonymous referees, for providing constructive comments that greatly improved the paper.

## 5.1 Introduction

Hydroelectric producers invest time and resources in developing optimization tools to gain efficiency in the use of water, since even small improvements lead to significant savings. Short-term optimization is used at the power plant level to dispatch available water for production between the turbines. Each turbine has a different efficiency. The amount of water available for production, or reservoir trajectories, is determined from the medium-term optimization and considers demand, uncertainty in the inflows, and travel time of the water between the plants. Short-term optimization is often considered to be deterministic [99] by making the assumption that the inflows are known [41] or by neglecting water balance constraints [7] at such a short time scale, but does not allow planning under different forecasts. Also, [86] have shown that considering uncertainty in short-term decision models may lead to improvements.

The focus of this paper is stochastic optimization applied to the short-term hydropower optimization problem. By considering uncertain inflows, turbines will be used in a more efficient manner since the stochastic model results in a compromise between high and low forecasted inflows. For example, in situations where reservoirs are nearly full, considering uncertain inflows when high inflows are expected prevents lowering the reservoir and force turbines into inefficient zones, which results in energy production loss in the future if these high inflows do not occur.

Few papers have looked specifically into short-term hydropower models with uncertain inflows. In [91], a short-term hydropower optimization model treats deterministic inflows. Water head variations are considered and nonlinearities and nonconvexities of the hydropower production function are accounted for. In [45], uncertainty of prices and inflows is considered. The authors use time series analysis to model the water inflows, which is represented by a scenario tree in the stochastic programming model. Start-up costs are considered and a multistage stochastic model is approximated by a two-stage model. A mixed-integer linear program is used. The net water head is assumed to vary with the water discharge only, so hydropower production functions depend only on the water discharge.

In [83], the only uncertainty considered is demand. The deterministic model is a linear integer model, which is an approximation of a nonlinear mixed integer model. Once again, the hydropower production function depends only on water discharge. For some hydropower systems, neglecting the water head is not a possible avenue since many of the reservoirs have small capacities. Consequently, the water head effect is important in a short-term optimization, even with short time steps.

Many assumptions are made when solving the short-term unit commitment model, since they

are complex to solve. They have a large amount of variables, power production functions are nonlinear and efficiency is different for every turbine. The most common assumption is to neglect water head variations leading to linear power production functions.

When uncertainty arises and one wants to solve the optimization models, two main streams of ideas have been applied in the optimization community. Stochastic dynamic programming has been used extensively to solve hydropower optimization models [95, 100], as well as variants such as sampling stochastic dynamic programming [32] or stochastic dual dynamic programming [92]. These models are well suited for long or medium-term horizons but for short-term models, the state space is huge and it is very difficult, if not impossible, to solve them. In order to prevent the optimization process to empty out the reservoirs in the short-term model, values are assigned to the remaining water at the end of the planning horizon, which are obtained with stochastic dynamic programming or stochastic dual dynamic programming for example. In [69], a new method to generate inflows, based on periodic autoregressive models, is used as input to a stochastic dual dynamic programming algorithm that allows to schedule a hydro-thermal system located in Brazil.

The other stream is stochastic programming. A two-stage stochastic model [19] consists of two stages of decisions. The first-stage decisions need to be taken without knowing the realization of the uncertainty in the future, while the second stage decisions are taken when the uncertainty is revealed.

Usually, uncertainty is represented by scenarios. Each scenario is a possible realization of the uncertainty. Multiple scenario generation methods have been used in the past to approximate the distributions of the stochastic parameters. An overview of these methods, as well as evaluating the quality of a scenario tree is found in [61]. In [34], a periodic autoregressive process is used to fit historical data of the prices and to generate prices for the stochastic model. The scenario tree is built by sampling the distribution fitted with the model for the different nodes. Another method creates a discrete distribution of the uncertain parameter by matching some specific statistical properties. In [56], the first four moments, mean, variance, skewness and kurtosis are matched. Multiple pitfalls arise from this method and one must ensure the scenario tree represents possible outcomes of the uncertainty. A survey of techniques for generating scenario trees appears in [35] and includes recombining of data paths, contamination method and matching. Also, copulas have been used to generate scenarios for two-stage stochastic problems [61]. This method offers the advantage of treating dependencies better than with correlation alone. Other methods are scenario reduction [38, 52]. An initial scenario tree is required and forward selection, or backward reduction is applied in order to reduce it and minimize the computational time required to solve the stochastic optimization

model. The effect of the reduction on the solution accuracy, applied to a cascaded system of hydropower reservoirs is found in [108].

Other methods to deal with uncertainty on the inflows include robust optimization techniques [13] and probabilistic constrained programming [103]. Robust optimization solves models that have uncertain parameters over uncertainty sets. Therefore, the optimization seeks to find a solution that is feasible regardless of the outcome of the uncertainty. In [6], a rolling-horizon scheme is used and robust optimization is applied to the decision of day 1 while the rest of the horizon is considered deterministic. This is interesting as the uncertainty is applied to the important decisions. A drawback of robust optimization is the formulation of the uncertainty. In the historical records, some values of inflows may be very low and others very high. Therefore, it is difficult to define what are the best bounds for the uncertainty set, as well as capturing any nonlinear dynamics present. In probabilistic constrained programming, constraints are to be respected given a certain probability. A cascaded hydropower system is optimized with probabilistic constrained programming in [103]. As with robust optimization, parameters on security-level and probability measures are to be given to the model, which is a difficult task in practice.

We contribute to the existing literature by considering inflow uncertainty in the short-term hydropower model. Few papers have looked specifically in stochastic short-term models and we extend the modeling proposed in [91] to consider uncertain inflows. For the producer, it is interesting to consider a stochastic model since it gives a production plan for the whole planning horizon. Applying the theory outlined in [82], we also detail/provide a nonparametric scenario generation approach that relies on the information in the history of inflows. We expand [91] by introducing stochasticity to both the loading and unit commitment problems.

**The paper is organized as follows** Section 5.2 presents data available for inflows. Section 5.3 describes the method to generate scenario trees. Section 5.4 gives an overview of the short-term hydropower problem and details the optimization models. Numerical results are presented in Section 5.5 and final remarks are presented in Section 5.6.

## 5.2 Scenario fan of inflows

This section presents the data available for the inflows. In the province of Quebec in Canada, consumers and producers of hydroelectric energy, except Hydro-Quebec, are not allowed to bid on the spot markets [22]. The province-owned integrated utility performs all power market activities. Hence, only uncertainty related to inflows in the reservoirs is considered in this paper.

Before presenting the method for generating the scenario trees used in the optimization models, we describe the available data sets. Precipitation forecasts are obtained from Environment Canada [1]. A 7 day deterministic precipitation forecast is issued. The 7 day forecast is split in two groups : the first 3 and the last 4 days. We make the assumption that the error for both groups is independent from a meteorological point of view, as the correlation in precipitations between days is negligible. This assumption is motivated by the high variability of the weather conditions on our watershed from one day to the next. For example, we could have a few days of snow, followed by no precipitations then a few days of rain. The last 15 years of historical data of precipitation forecasts is searched for a given number ( $a$ ) of precipitation forecasts that are the closest, in precipitation forecast ( $mm$ ) to the first 3 days, and they are retained. The same is conducted for the second group. Since the error is assumed independent, the scenarios found for the first and second group are mixed and matched to create  $a^2$  precipitation scenarios for the first 7 days. Note that the actual realizations of precipitation on these days are used as scenarios. Then, considering that the forecast has no value after 7 days, the 62 years of available history of realizations is appended to all of the scenarios for the first 7 days with  $a = 7$ , yielding a total of  $a^2 \times 62 = 3038$  scenarios of precipitation for 30 days of prevision. Then, these precipitation scenarios are given as input to the CEQUEAU hydrological model [25] which outputs inflow previsions for the reservoirs. Figure 5.1 illustrates this process. The goal of the scenario tree generation method, in Section 5.3, is to create a scenario tree from the scenario fan of inflows.

### 5.3 Scenario tree generation

The method chosen to construct a scenario tree suitable for the stochastic optimization is taken from [82, 81]. The method is applied to real hydropower data. First, the structure of the scenario tree is fixed, then stochastic approximation is used to improve the values of inflow of the nodes, considering all the data available for every approximation. Improvement goes on until a convergence criterion, based on the nested distance and explained in Section 5.3.4, is reached.

#### 5.3.1 Fixing the initial scenario tree structure : k-means clustering

The number of stages and the number of nodes per stage of the tree are fixed initially. Aggregation is necessary since the scenario tree structure can be different from the data available. The aggregation is straightforward : values of inflows for each day are summed up. K-means clustering [68] is used to partition the data paths into clusters in order to assign

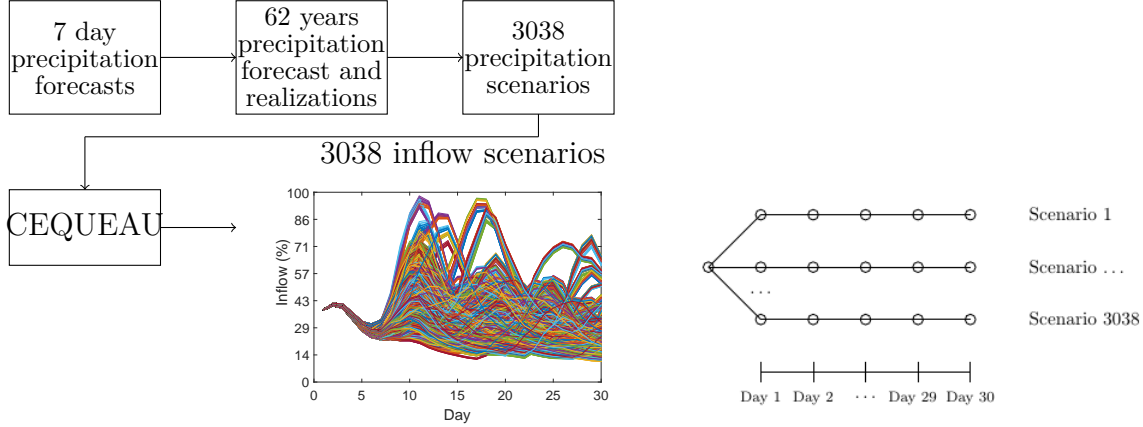


Figure 5.1 Building inflow scenarios from a 7 day deterministic precipitation forecast.

initial values to the scenario tree nodes. Note that initially no probabilities are allocated to the nodes : simply values for the nodes. This clustering method minimizes the distance from every data point to the mean of the cluster to which it belongs. As an example, the k-means algorithm is applied to the 3038 inflow scenarios to form a scenario tree which has a structure as shown in Figure 5.3b.

### 5.3.2 Improvement of the clusters

The method to improve the scenario tree nodes consists of two steps. First, from the initial data paths, a random data path, that is not in the paths available, is generated using density estimation. Next, the distance between this random path and the closest state of the scenario tree nodes is minimized in a stochastic approximation step in order to improve the tree. This method is repeated for a given number of iterations and is explained in what follows.

#### Step I : density estimation

In order to generate a new random path, kernel density estimation is used. We generate a random path that is close to the distribution of the data paths and conditional on previous stages. To do so, the conditional probability density function is estimated. For each stage of the desired scenario tree structure, a value of inflow is generated that is close in distribution to all of the data paths and incidental to the past.

A random path  $\xi_k^d = (\xi_1^d, \dots, \xi_K^d)^T$  is to be generated using available data paths  $X_{ik}^d = (X_{i1}^d, \dots, X_{iK}^d)^T$  where  $i$  is the index of available data paths,  $d$  is the dimension and  $K$  is the



number of stages. The conditional density estimator [81] is :

$$\hat{f}(\xi_k | \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\kappa\left(\frac{\xi_j - X_{ij}}{h_j}\right)}{\sum_{m=1}^n \kappa\left(\frac{\xi_j - X_{mj}}{h_j}\right)} \times \kappa\left(\frac{\xi_k - X_{ik}}{h_k}\right) \times \frac{1}{h_k}, \quad (5.1)$$

where the dimension  $d$  is dropped for clarity,  $n$  is the number of available data paths,  $\kappa$  is the kernel and  $h_j$  and  $h_k$  are the bandwidths.

The analytical representation of the actual distribution is not computed, as only samples from Equation (5.1) are necessary which can be generated quickly. In practice, this is achieved by assigning weights to every data path available. The closer the observation is to the path, the higher is the weight. For every stage from  $1, \dots, k-1$ , the weights of the data path at each stage are multiplied. With these weights calculated, a value of inflow is to be generated at stage  $k$ .

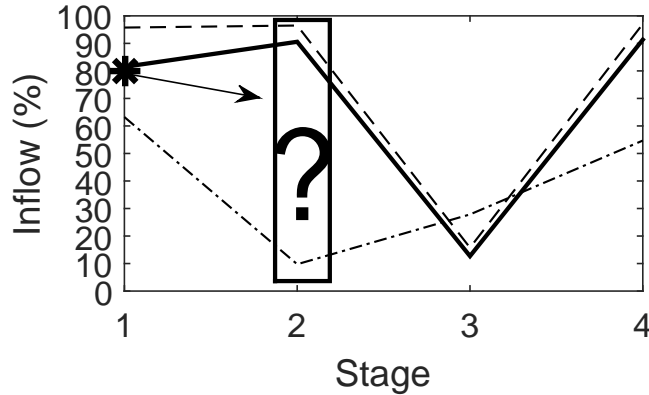


Figure 5.2 Generation of a random path based on three available data paths of inflows. The generated value of inflow for stage 1 is shown with a star marker.

To illustrate refer to Figure 5.2. There are three data paths of inflow. The random value of inflow has been generated for stage 1 and is located with a star marker. From there, a value of inflow is to be generated for subsequent stages, always conditional on the past. As per the figure, it is necessary to find a value of inflow at stage 2 that is consistent with the conditional distribution. Therefore, weights are calculated as follows, in this case for stage  $k$  :

$$w_i(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) = \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\kappa\left(\frac{\xi_j - X_{ij}}{h_j}\right)}{\sum_{m=1}^n \kappa\left(\frac{\xi_j - X_{mj}}{h_j}\right)}, \quad (5.2)$$

where  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  and  $w \geq 0$ .

The value of inflow  $\xi_k$  at stage  $k$  is generated as follows. A data path with index  $i^*$  is chosen randomly among the available data paths at stage  $k - 1$  to satisfy

$$\sum_{i=1}^{i^*-1} w_i(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \leq \text{rand}_u \leq \sum_{i=1}^{i^*} w_i(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}), \quad (5.3)$$

where  $\text{rand}_u$  is chosen from the uniform random distribution on the interval  $[0, 1]$ . The cumulative sum of the weights leads to a high probability of picking a data path near an observation.

The value of inflow  $\xi_k$  is obtained by setting the value at stage  $k$

$$\xi_k = X_{i^*k} + \text{rand}_{\kappa_{h_k}}, \quad (5.4)$$

where  $\text{rand}_{\kappa_{h_k}}$  is a random value sampled from the kernel estimator using the composition method [82].

This newly generated inflow value is according to the distribution of density of the current stage and dependent on the history of all the data paths.

Referring again to Figure 5.2, weights are calculated for the 3 data paths as per Equation (5.2). Then, a data path is chosen randomly at stage 1 and the solid line has a high probability of being picked. Consider it is the case. To generate the value of inflow at stage 2, the value of the solid line at stage 2 is perturbed randomly. This method is then repeated at each stage in order to generate a random data path and is represented on Figure 5.3a with a thick dashed line.

It is shown that the choice of the kernel does not have an important effect on the density estimation [58]. Hence, in this paper, the logistic kernel is used :

$$\kappa(\xi) = \frac{1}{e^\xi + 2 + e^{-\xi}}. \quad (5.5)$$

The bandwidth is the smoothing factor applied to the estimation of the density. Silverman's rule of thumb [94] is employed to determine the optimal bandwidth :

$$h_k = \sigma(X_{ik})n^{-\frac{1}{d+4}} = \sigma(X_{ik})n^{-\frac{1}{7}}, \quad (5.6)$$

where  $n$  is the number of data paths,  $d$  is the dimension and  $\sigma$  is the standard deviation. In this paper,  $d = 3$  because there are three values of inflows per scenario tree node, representing

three different reservoirs.

## Step II : stochastic approximation

Once the new random path of inflows is generated, a stochastic approximation step is conducted. This step allows to update the value of some scenario tree states. During this step, a scenario from the scenario tree, more precisely a path of nodes in the scenario tree is identified. This path of nodes in the scenario tree minimizes the Wasserstein distance  $W$  between the randomly generated path during Step I of the algorithm, found in Section 5.3.2, and current scenario tree nodes values.

The Wasserstein distance is minimized as follows :

$$W^2 = \min_{\omega \in \Omega} \sum_{k=1}^K \|\Gamma(\omega) - \xi_k\|^2, \quad (5.7)$$

where  $\Omega$  are the scenario tree paths,  $\Gamma(\omega)$  are the states corresponding to the nodes in the path  $\omega$  in the scenario tree, from the set of all possible scenarios  $\Omega$ , and  $\xi_k$  is the value of inflow generated randomly at stage  $k$ . Referring to Figure 5.3b,

$\Omega = \{(1, 2, 3, 5), (1, 2, 3, 6), (1, 2, 4, 7), (1, 2, 4, 8)\}$ . Equation (5.7) allows to find this path of nodes and is identified as nodes (1, 2, 4, 8) on Figure 5.3b.

To achieve this, a stochastic gradient descent method that minimizes the nested distance is used. Starting from the root of the scenario tree,  $W$  is computed for the children node. The children node with the smallest value of  $W$  becomes the parent node.  $W$  is then computed for the children node of the new parent node and so on until a leaf node has been reached.

The identified path of scenario tree nodes values  $\Gamma(\omega)$  that minimizes the Wasserstein distance for the current stochastic approximation iteration  $p = 1, 2, \dots$  is updated in the following manner :

$$\Gamma(\omega)_{p+1} = \Gamma(\omega)_p - \alpha_p \nabla W_p, \quad (5.8)$$

where  $\Gamma(w)$  are the values of the scenario tree nodes to improve,  $\alpha_p$  is the step-size and  $\nabla W_p$  the gradient of the distance.

The step-size  $\alpha_p = \frac{1}{(p+30)^{3/4}}$ , where  $p$  is the stochastic approximation iteration, is chosen since it is shown that the method will converge [81] given  $\alpha_p > 0$ ,  $\sum_p \alpha_p = \infty$  and  $\sum_p (\alpha_p)^2 < \infty$ .

As an illustration, consider one iteration of the algorithm and refer to Figure 5.3. First, a random data path of inflows is generated using kernel density estimation. This can be seen on Figure 5.3a : it is the thick dashed line. The Wasserstein distance between this new generated path of inflows and the current values of the scenario tree nodes is minimized and

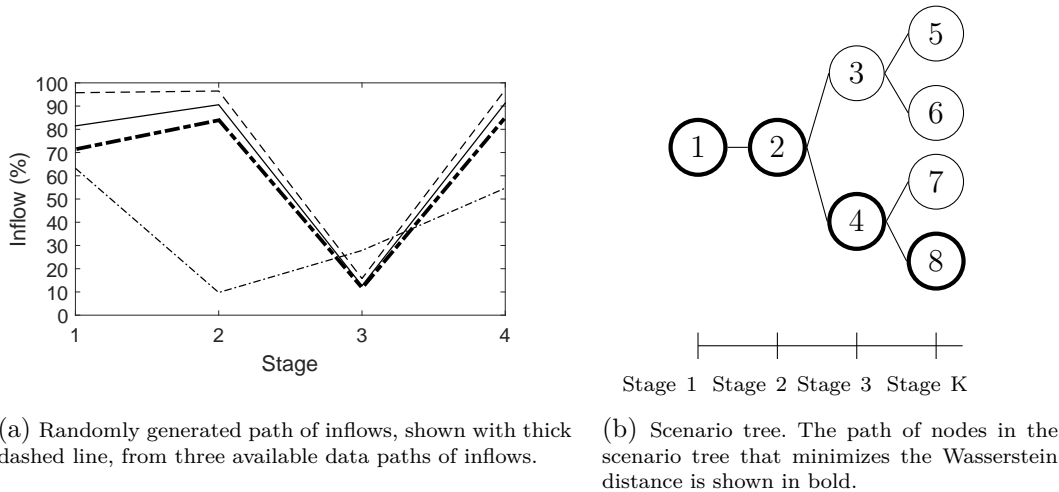


Figure 5.3 Illustration of the 2 steps of the algorithm. Generation of a random path of inflows from available data paths of inflows and stochastic approximation to improve the value of some scenario tree nodes.

a path of nodes in the scenario tree is retrieved for potential improvement. The path of nodes minimizing this distance is shown on Figure 5.3b. Hence, the value of the inflows for the thick nodes, which are 1, 2, 4 and 8 will be improved using Equation (5.8).

### 5.3.3 Probabilities

During the first stochastic approximation iteration, assigned probabilities of the nodes are 0 since, as explained in Section 5.3.1, the scenario tree is initialized with values for the nodes only.

Node probabilities are updated at every stochastic approximation iteration. A counter is assigned to each node and initialized at 0. Every time a path of nodes minimizing the Wasserstein distance is retrieved, the corresponding counters of the nodes in this path are incremented by 1.

Once the stochastic approximation iterations are completed, probabilities are computed by dividing the counter value by the number of stochastic approximation iterations, which yields sums of child nodes probabilities equal to 1, as in Figure 5.4.

In a multistage stochastic program, each path from the root to a leaf node represents a scenario. The unconditional probabilities of a scenario is obtained by multiplying the unconditional probabilities of all the nodes in the scenario, yielding probabilities  $\pi_j$ , where  $j$  is the scenario in Figure 5.4.

An interesting feature of the scenario tree generation method is that the extreme (low and

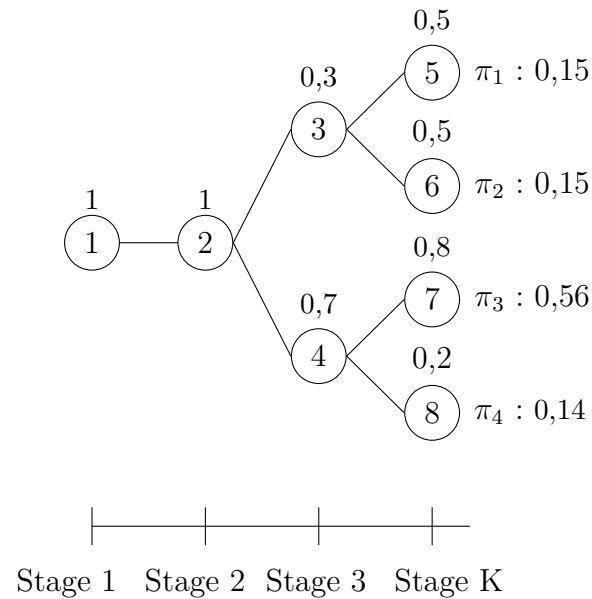


Figure 5.4 A scenario tree with node probabilities (over the node) and scenario  $i$  probabilities (indicated with  $\pi_i$ )

high) scenarios are accounted for, according to their occurrence in the historical data set. The law of large numbers insures that the probabilities are asymptotically consistent.

### 5.3.4 Termination criterion

The scenario tree generation algorithm terminates when the nested distance has converged to a certain  $\epsilon$  for the 10 last iterations. Thus, Step I and Step II of the algorithm are repeated until convergence is obtained. Depending on the inflow forecasts, the number of iterations to converge varies. As an example, for a given test case, it took an average of 1038 iterations for the method to converge and generate one scenario tree.

The main advantage of the scenario tree generation method presented in this section is that all of the data paths are used at every iteration to improve the value of the scenario tree nodes. By doing so, the underlying discrete distribution of the available data paths, approximated by a scenario tree, is improved consistently with the data. The scenario trees are prepared before the optimization is conducted.

## 5.4 Stochastic short-term hydropower model

The two-phase deterministic optimization models taken from [91] are updated to consider stochastic inflows. This section presents the modeling of the short-term problem as well as the mathematical formulations.

### 5.4.1 Modeling of the short-term problem

The modeling of the problem considers head-dependency, as well as efficiencies of each turbine. Power  $P(kW)$  produced by a single turbine is defined as

$$P(h_n, Q) = \eta(Q) \times G \times Q \times h_n(Q_{tot}, v), \quad (5.9)$$

where  $G$  is the gravitational acceleration ( $m/s^2$ ),  $Q$  is the unit water flow and  $Q_{tot}$  is the total water flow ( $m^3/s$ ),  $\eta(Q)$  is the efficiency of the turbine and  $h_n$  is the net water-head ( $m$ ). The net water-head is a function of the forebay elevation  $h_f$  ( $m$ ), the tailrace elevation  $h_t$  ( $m$ ) and losses in the penstock  $\varphi$  ( $m$ ) that is given by :

$$h_n(Q_{tot}, v) = h_f(v) - h_t(Q_{tot}) - \varphi(Q_{tot}), \quad (5.10)$$

where  $v$  is the volume of the reservoir ( $hm^3$ ). For notational purposes and since there is a relation between net water head and volume, we consider that power is a function of the volume and water flow. We propose a modeling with combinations of units instead of single units. To achieve this, a dynamic programming algorithm, where each sub-problem is a turbine, is used to calculate the power produced by a combination of units. As an example, if a power plant has a total of 5 turbines and requires three active turbines, there is a total of 10 combinations of 3 turbines, 5 combinations of 4 turbines and 1 combination of 5 turbines. Water flows are discretized and the dynamic programming algorithm is executed for each possible combinations, 16 in this case, for each power plant and discretizations of reservoir volumes and water flows.

### Dynamic programming algorithm

The objective of the problem is to maximize the power output and it is found recursively. Given state  $s^j$ , the dynamic programming algorithm seeks to choose decision variables  $q^j$  that solves :

$$f^{*j}(s^j) = \max_{q^j} P(s^j, v) + f^{*j+1}(s^j - q^j), \quad (5.11)$$

where  $j = n - 1, n - 2, \dots, 1$ ,  $n$  is the number of turbines at the power plant,  $s^j \in \{1, 2, \dots, r\}$  is the remaining water to dispatch given the number of discretizations  $r$  and  $q^j \in \{1, 2, \dots, \min\{\bar{q}^j, Q\}\}$  the water flow with  $\bar{q}^j$  maximum water flow. The optimal water flow is  $q^{*j} = s^j$  that maximizes  $f^{*j}(s^j)$ . For  $j = n$ , the optimal power output is given by  $f^{*j}(s^j) = P(s^j)$ .

### Maximum power output surfaces

We then build a set of surfaces of the maximum power output for each power plant. For a plant with 5 turbines requiring at least 3 working, three surfaces are built, more precisely one for 3 turbines working, one for 4 turbines working and one for 5 turbines working. The maximum power output for every possible combination of number of working turbines is retained for every discretization of volume and water flow. Such surfaces can be viewed in Figure 5.5. To

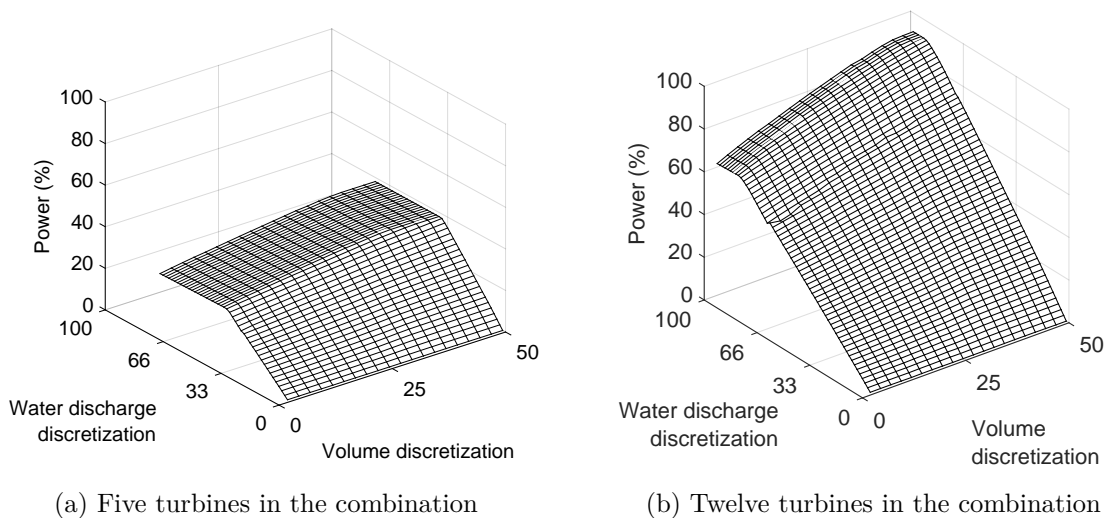


Figure 5.5 Maximum output surfaces

obtain them, the dynamic programming algorithm is executed for every number of turbines in the combination, every discretization of the reservoir volume, every discretization of the water flow and every power plant. The surfaces of maximum power outputs are then modeled using polynomial equations in the objective-function of the optimization problem. Modeling of the hydropower production functions is done by constraining these functions with two surfaces.

One constrains the water discharge without spill and the other constrains the water discharge with spill. Therefore, in the optimization problem, we have only one variable of the water discharge, which combines processed and spilled. But since we are constraining with the two

different surfaces and that we are maximizing, the model will try and avoid spill since it reduces power production. When redistributing the total water discharge to the plant, we can then see if there is some spill or not. There is an upper bound on the water discharge, which is the maximum including spill.

A two-phase optimization strategy is used to penalize the startup of turbines. The first phase, namely the loading problem, optimizes values of water discharges, volumes and number of turbines in the combination for every plant and node. The second phase, namely the unit commitment problem, uses the solution of the first optimization model to determine the exact combination of turbines working at each plant and node in the scenario tree. Startups of turbines are penalized with a fixed cost. Multistage stochastic models are developed for both optimization phases, in order to consider uncertainty in the inflows of the reservoirs.

#### 5.4.2 Phase I : loading problem

Optimization variables of this nonlinear stochastic multistage mixed integer problem are water flows, volumes and number of working turbines, for each node and plant in the scenario tree. There is only one variable for the water flow, but it includes processed and spilled water. We have shown [91] that relaxing the variables that determine the number of working turbines leads to an integer solution. Therefore, we solve a nonlinear stochastic multistage continuous problem, as the coefficients of the matrix of constraints are also totally unimodular given the stochastic version of the model.

The objective is to maximize total energy production in stage 0, expected energy production in future stages and expected value of the water remaining in the reservoir at the end of the planning horizon :

$$\max_{y,q,v} \sum_{c \in C} \sum_{s=1}^{n_0^c} \chi_{s0}^c y_{s0}^c \zeta_0 + \sum_{c \in C} \sum_{j \in K} \pi_j^c \left( \sum_{i \in N_j} \sum_{s=1}^{n_i^c} \chi_{si}^c y_{si}^c \zeta_i + \sum_{p \in E_j} \Phi_p^c(v_p^c) \right) \quad (5.12)$$

$$\text{subject to : } \chi_{si}^c \leq \Psi_s^{Ac}(q_i^c, v_i^c), \quad \forall c \in C, \forall i \in N, \\ \forall s \in \{1, 2, \dots, n_i^c\}, \quad (5.13)$$

$$\chi_{si}^c \leq \Psi_s^{Bc}(q_i^c, v_i^c), \quad \forall c \in C, \forall i \in N, \\ \forall s \in \{1, 2, \dots, n_i^c\}, \quad (5.14)$$

$$\delta_i^c = v_{i+1}^c - v_i^c + \gamma w_i q_i^c \\ - \sum_{m=1}^{u^c} \gamma w_m q_i^m, \quad \forall i \in N_j, \forall j \in K, \forall c \in C, \quad (5.15)$$



$$\sum_{s=1}^{n_i^c} y_{si}^c \leq 1, \quad \forall i \in N, \forall c \in C, \quad (5.16)$$

$$y_{s0}^c = \hat{y}_{s0}^c, \quad \forall s \in \{1, 2, \dots, n_i^c\}, \forall c \in C, \forall i \in N, \quad (5.17)$$

$$v_{min}^c \leq v_i^c \leq v_{max}^c, \quad \forall i \in N, \forall c \in C, \quad (5.18)$$

$$q_{min}^c \leq q_i^c \leq q_{max}^c, \quad \forall i \in N, \forall c \in C, \quad (5.19)$$

$$q_i^c \geq 0, \quad \forall i \in N, \forall c \in C, \quad (5.20)$$

$$v_i^c \geq 0, \quad \forall i \in N, \forall c \in C, \quad (5.21)$$

$$y_{si}^c \geq 0, \quad \forall s \in \{1, 2, \dots, n_i^c\}, \forall i \in N, \forall c \in C. \quad (5.22)$$

Hydropower production surfaces are constrained by (5.13)-(5.14). Water balance constraints are represented by (5.15) and the choice of a single number of active turbines is shown in (5.16). Constraints (5.17) are the initial number of active turbines while constraints (5.18)-(5.19) are the bounds on reservoir volumes and water discharges. Finally, constraints (5.20)-(5.22) impose nonnegativity. Index  $i + 1$  of variables  $v_{i+1}^c$  takes the value of the node in the set  $N_j$ . For example, if  $N_j = \{1, 3, 5, 7\}$  and  $i = 1$ ,  $i + 1 = 3$  since the index takes the value of the node at position  $i = 2$  in the set  $N_j$ .

The above short-term loading problem is described in more details in [91]. We now show how to integrate a water-value function for the remaining water at the end of the planning horizon.

**Water-value function** The water-value function is the expected energy production in the future at the end of the planning horizon. In a deterministic framework, inflows are known with certainty, thus volume in the reservoir at the end of the horizon is easier to determine. In a stochastic framework, it is not possible to give a goal for the volume at the end of the horizon since it may not be feasible for every scenario. On the other hand, neglecting this feature will cause the optimization to empty the reservoir at the end of the horizon, since the objective is to maximize energy. Hence, maximizing the expected value of future energy production, or water-value function, will prevent the optimization of doing this. The water-value functions are computed with a stochastic dynamic algorithm [33] at Rio Tinto. A planning horizon of one year, with weekly time steps is used.

### 5.4.3 Phase II : unit commitment

This linear stochastic multistage integer model is solved using solution found in Phase I. The purpose of this model is to determine the on-off schedule of the turbine combinations (found in Phase I). Given water flows and reservoir volumes found in the loading problem, the dynamic programming algorithm is used to calculate power outputs for every possible

combination of turbines, given the number of working turbines found in Phase I, and are stored in parameter  $\beta_{li}^c$ . The model maximizes the energy production and penalizes turbine startups. Initial combination of turbines working at stage 0 is given in  $\hat{x}_{i0}^c$ .

The objective is to maximize energy production at stage 0 and future energy production and penalize startup of turbines at stage 0 as well as future expected startups :

$$\max_{x,d} \sum_{c \in C} \zeta_0 \left( \sum_{l=1}^{n_0^c} \beta_{l0}^c x_{l0}^c - \sum_{t=1}^{T^c} d_{t0}^c \theta \right) + \sum_{j \in K} \sum_{c \in C} \left( \pi_j^c \left( \sum_{i \in N_j} \zeta_i \left( \sum_{l=1}^{n_i^c} \beta_{li}^c x_{li}^c - \sum_{t=1}^{T^c} d_{ti}^c \theta \right) \right) \right) \quad (5.23)$$

$$\text{subject to : } \sum_{l=1}^{n_i^c} x_{li}^c = 1, \quad \forall i \in N, \forall c \in C, \quad (5.24)$$

$$x_{li}^c f_{lit}^c - x_{li-1}^c f_{li-1t}^c \leq d_{ti}^c, \quad \forall l \in \{1, 2, \dots, n_i^c\}, \forall i \in N_j, \forall j \in K, \forall c \in C, \\ \forall t \in \{1, 2, \dots, T^c\}, \quad (5.25)$$

$$x_{i0}^c = \hat{x}_{i0}^c, \quad \forall l \in \{1, 2, \dots, n_i^c\}, \forall i \in N, \forall c \in C, \quad (5.26)$$

$$x_{li}^c, d_{it}^c \in \mathbb{B}, \quad \forall l \in \{1, 2, \dots, n_i^c\}, \forall i \in N, \forall t \in \{1, 2, \dots, T^c\}, \forall c \in C. \quad (5.27)$$

The choice of a single turbine combination is given by (5.24). Constraints that allow to penalize a startup by flagging them is shown in constraints (5.25). The initial combinations are given in (5.26) and imposition of binary variables are constraints (5.27). Index  $i - 1$  of parameters  $f_{li-1t}^c$  takes the value of the node in the set  $N_j$ . For example, if  $N_j = \{1, 3, 5, 7\}$  and  $i = 4$ ,  $i - 1 = 5$  since the index takes the value of the node at position  $i = 3$  in the set  $N_j$ .

This two-phase optimization process allows to find a solution efficiently. Also, even though an approximation of the energy produced is conducted in the first phase, the actual energy production is retrieved in the second phase, seeing that the actual hydropower production functions are used to compute the actual energy production given a water discharge and volume, which are solutions of the first phase.

## 5.5 Results

This section details the system on which the stochastic hydropower models are tested and results are presented.

### 5.5.1 Hydroelectric system studied

The hydroelectric system studied is situated in the Saguenay Lac-St-Jean region in the province of Quebec, Canada and is owned by Rio Tinto. For the purpose of this paper, three

hydroelectric plants, which are Chute-du-Diable, Chute-Savane and Isle-Maligne are considered. The two first plants have 5 turbines each and the latter has 12. Figure 5.6 represents the system studied. Triangles represent reservoirs and squares power plants.

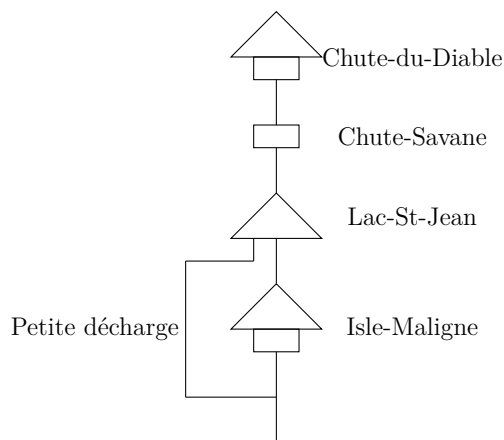


Figure 5.6 Hydroelectric system studied.

Chute-du-Diable, Chute-Savane and Isle-Maligne plant reservoirs are quite small, respectively  $452 \text{ hm}^3$ ,  $119 \text{ hm}^3$  and  $171 \text{ hm}^3$ . In the optimization model, there is no water value function associated to these plants since they have small reservoirs. Instead, a full reservoir constraint at the last period is imposed as a goal in the model. The only water-value function used is for the Lac-St-Jean reservoir, therefore volume of this reservoir at the last period is an optimization variable. The capacity of this reservoir is of  $5596 \text{ hm}^3$ . Water flow in *Petite décharge* is limited by a function dependent on the volume of Lac-St-Jean.

### 5.5.2 Rolling-horizon procedure

A rolling-horizon methodology is retained to validate the optimization models developed in this paper. The planning horizon of the rolling-horizon is of 31 days. For every day of the rolling-horizon, the forecast is for 30 days. For day 1 of the rolling-horizon, previsions are from days 2 to 31, for day 2 of the rolling-horizon, previsions are from days 3 to 32, and so on. The stochastic optimization models presented in section 5.4 are solved every day, but only the solution for the first-stage is retained. Forecasts are updated daily. Once the forecast is updated, the scenario tree is generated for the corresponding day. The two-phase optimization process is launched and the first-stage solution is retained, that is : volume, water discharge and turbine combination. Then, considering the actual realization of the inflow, the water balance constraints are used to determine the actual volume of the reservoirs at the end of the period. More precisely, the water discharge from the optimization is combined with the

actual realization of the inflow in order to calculate the reservoir volumes. The same process is repeated for the 31 days. In the end, a production plan for 31 days is available, which consists of the reservoir volumes, total water discharges at the plants and turbine combinations in use. See [3] for a different approach to rolling-horizon evaluation of short-term hydropower operation.

The solution obtained from the scenario tree generation is compared to the solution obtained from the median scenario of the inflows. Therefore, we compare our method to a rolling median. Every day, the median scenario is found throughout all available scenarios and a scenario tree of 1 node per stage is solved in a deterministic fashion.

### 5.5.3 Numerical results

The scenario tree generation method is coded in Matlab [72]. The optimization models are coded using AMPL [48]. The optimization software for the loading problem, which is the relaxation of a nonlinear mixed-integer problem, is IPOPT [105] and the unit commitment model, a linear integer problem, is solved with XPRESS [2].

Six test cases, which consist of monthly periods are available. The biggest problems to solve have 7 stages with 48 scenarios, 1123 nonlinear variables, 33 linear variables and 1237 constraints for the loading problem and 3475 binary variables and 825 constraints for the unit commitment problem.

Different stages, more precisely 5, 6 or 7, as well as different number of scenarios, namely 16, 32 or 48 are tested.

### Computational time

The average time to construct the scenario tree and to optimize is shown on Figure 5.7. The average time is in seconds, for a single day in the rolling-horizon procedure, more precisely for one problem including construction of the scenario tree and optimization of the two-phase process. It takes less than 5 seconds to build the scenario trees for all test cases, while the optimization requires more time given higher numbers of scenarios. Less than 42 seconds, for a single day in the rolling-horizon are necessary to construct the scenario tree and optimize the two-phase process, which is acceptable in the real operating environment.

The current implementation of the scenario tree generation method and optimization is tested on three cascaded hydropower plants. For this specific producer, the whole hydropower systems consists of five hydropower plants, therefore calculation time would be acceptable for the whole system. Considering another system of, for example, 50 hydropower plants,

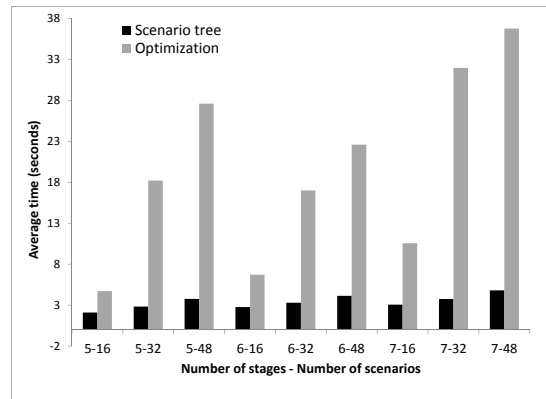


Figure 5.7 Average computational time of scenario tree generation and optimization for one day in the rolling-horizon.

the actual method would take approximately 350 minutes. The proposed method in this paper is applicable to a larger system, probably by decomposing the system in smaller sub-systems. To do so, the system is to be studied and depending on its configuration, distances between plants and others, modeled in an acceptable manner. Depending on the scope of the application, the calculation time may or may not be satisfactory. If a producer does not mind solving a 7 hour model every day, then the computational time is satisfactory. In order to diminish computing time, an avenue is to solve the model for a given number of days then weeks. In this way, the number of variables is greatly reduced and so is the computing time. This model is applicable to a larger hydropower system, but it would be necessary to decompose the system in sub-systems and review the modeling to diminish the number of optimization variables, given a producer requiring fast computational time.

## Results

Table 5.1 illustrates the difference in energy, in  $TWh$ , produced throughout the 31 days rolling-horizon combined with the value of water remaining in the reservoir at the end of the planning horizon. This implies that the difference in energy can be compared to annual production but absolute numbers are unfortunately not thus interpretable. A positive value indicates the scenario tree method produces more than the median scenario and a negative value indicates the contrary. For 4 of the test cases, the stochastic solution produces more energy. For 1 test case, the median scenario solution produces more energy. Finally, for the August case, the stochastic solution produces more energy with a 5 stage or 6 stage scenario

Table 5.1 Results for 6 test cases (5 are data sets from the year 2011 and 1 from 2010). Energy produced by the stochastic solution and the median scenario rolling-horizon is given. Also, the difference in energy between both solutions is shown.

	June 2011			July 2011			August 2011		
Nb. Sc.	Stoch. (TWh)	Median (TWh)	Diff. (TWh)	Stoch. (TWh)	Median (TWh)	Diff. (TWh)	Stoch. (TWh)	Median (TWh)	Diff. (TWh)
	<b>5 stages</b>								
16	804.5143	804.0265	0.4878	740.2678	740.0631	0.2047	710.1115	710.0795	0.0320
32	804.7050	804.0251	0.6799	740.2783	740.0631	0.2152	710.1108	710.0794	0.0314
48	804.6894	804.0249	0.6645	740.2496	740.0631	0.1865	710.0988	710.0794	0.0194
	<b>6 stages</b>								
16	804.5059	804.1495	0.3564	740.2698	740.0665	0.2033	710.0783	710.0733	0.0050
32	804.6796	804.1479	0.5317	740.2652	740.0665	0.1987	710.1139	710.0733	0.0406
48	804.6715	804.1481	0.5234	740.2608	740.0665	0.1943	709.9826	710.0732	<b>-0.0906</b>
	<b>7 stages</b>								
16	804.5171	804.0881	0.4290	740.2676	740.0578	0.2098	710.0693	710.0867	<b>-0.0174</b>
32	804.7166	804.0881	0.6285	740.2566	740.0578	0.1988	710.0732	710.0867	<b>-0.0135</b>
48	804.7063	804.0879	0.6184	740.2686	740.0578	0.2108	710.0806	710.0867	<b>-0.0061</b>
	<b>September 2010</b>			<b>September 2011</b>			<b>October 2011</b>		
Nb. Sc.	Stoch. (TWh)	Median (TWh)	Diff. (TWh)	Stoch. (TWh)	Median (TWh)	Diff. (TWh)	Stoch. (TWh)	Median (TWh)	Diff. (TWh)
	<b>5 stages</b>								
16	729.5792	729.3811	0.1981	733.0375	731.6799	1.3576	704.7842	704.8494	<b>-0.0652</b>
32	729.5841	729.3821	0.2020	733.0530	731.6799	1.3731	704.7847	704.8494	<b>-0.0647</b>
48	729.5810	729.3804	0.2006	733.0818	731.6799	1.4019	704.7877	704.8496	<b>-0.0619</b>
	<b>6 stages</b>								
16	729.5856	729.3917	0.1939	732.9971	731.7773	1.2198	704.7690	704.8636	<b>-0.0946</b>
32	729.5779	729.3929	0.1850	733.0188	731.7773	1.2415	704.7928	704.8636	<b>-0.0708</b>
48	729.5800	729.3924	0.1876	733.0937	731.7774	1.3163	704.7326	704.8634	<b>-0.1308</b>
	<b>7 stages</b>								
16	729.5854	729.4151	0.1703	732.9428	731.9647	0.9781	704.7608	704.8566	<b>-0.0958</b>
32	729.5775	729.4156	0.1619	732.9599	731.9647	0.9952	704.7879	704.8566	<b>-0.0687</b>
48	729.5834	729.4139	0.1695	732.9702	731.9648	1.0054	704.7873	704.8567	<b>-0.0694</b>

tree, and the median scenario with a 7 stage. For the 4 test cases for which the scenario tree produces more energy than the median scenario, average improvements are 0.0679812% for June, 0.0273551% for July, 0.1620522% for September 2011 and 0.0251653% for September 2010. Despite the low percentages, this represents significant savings for the producer. As an example, the current value of a 1 GWh improvement, in the province of Quebec, is around 20,000\$. Therefore, for June, the 0.0679812% higher production translates into 10,932,489\$.

### In-sample stability test

An in-sample stability test allows to verify if the scenario tree generation method is consistent. It is taken from [62]. Since the scenario tree is generated from random samples, one wants to verify if the solution given by the optimization, with a different scenario tree each time, give more or less the same solution. If so, then the scenario tree method is consistent.

As an example, July 2011 and June 2011 data sets were chosen for this verification. For both data sets, 6 scenario trees were generated with the same number of stages and scenarios. Then, the optimization was conducted on all of these scenario trees to verify the effect on the objective function value. Table 5.2 gives, for these two data sets and 6 instances each, the values of the objective function, for the scenario tree and median scenario methods.

Table 5.2 Objective function values for 6 random scenario trees with the same number of stages and scenarios, on two data sets.

Data	Inst.	Stoch. ( <i>TWh</i> )	Median ( <i>TWh</i> )	Diff. ( <i>TWh</i> )
July	1	740.2652	740.0665	0.1987
	2	740.2759	740.0665	0.2094
	3	740.2725	740.0665	0.2060
	4	740.2581	740.0665	0.1916
	5	740.2799	740.0665	0.2134
	6	740.2878	740.0665	0.2213
June	1	804.6715	804.1481	0.5234
	2	804.6707	804.1484	0.5223
	3	804.6709	804.1474	0.5235
	4	804.6824	804.1489	0.5335
	5	804.6769	804.1486	0.5283
	6	804.6571	804.1472	0.5099

Results show that the scenario tree generation method is consistent, as the difference between the objective functions of the stochastic and median scenario methods present slight variations. For the July test case, the median is 0.2077 *TWh*, the mean 0.2067 *TWh* and the variance 0.9308 *TWh* and for the June test case, the median and the mean are 0.5235 *TWh* and the variance 0.0516 *TWh*.

### Interpretation of the results

The following figures illustrate the 31 day rolling-horizon backtesting solution more precisely : water discharge and reservoir levels for the power plants and reservoirs studied in this paper.

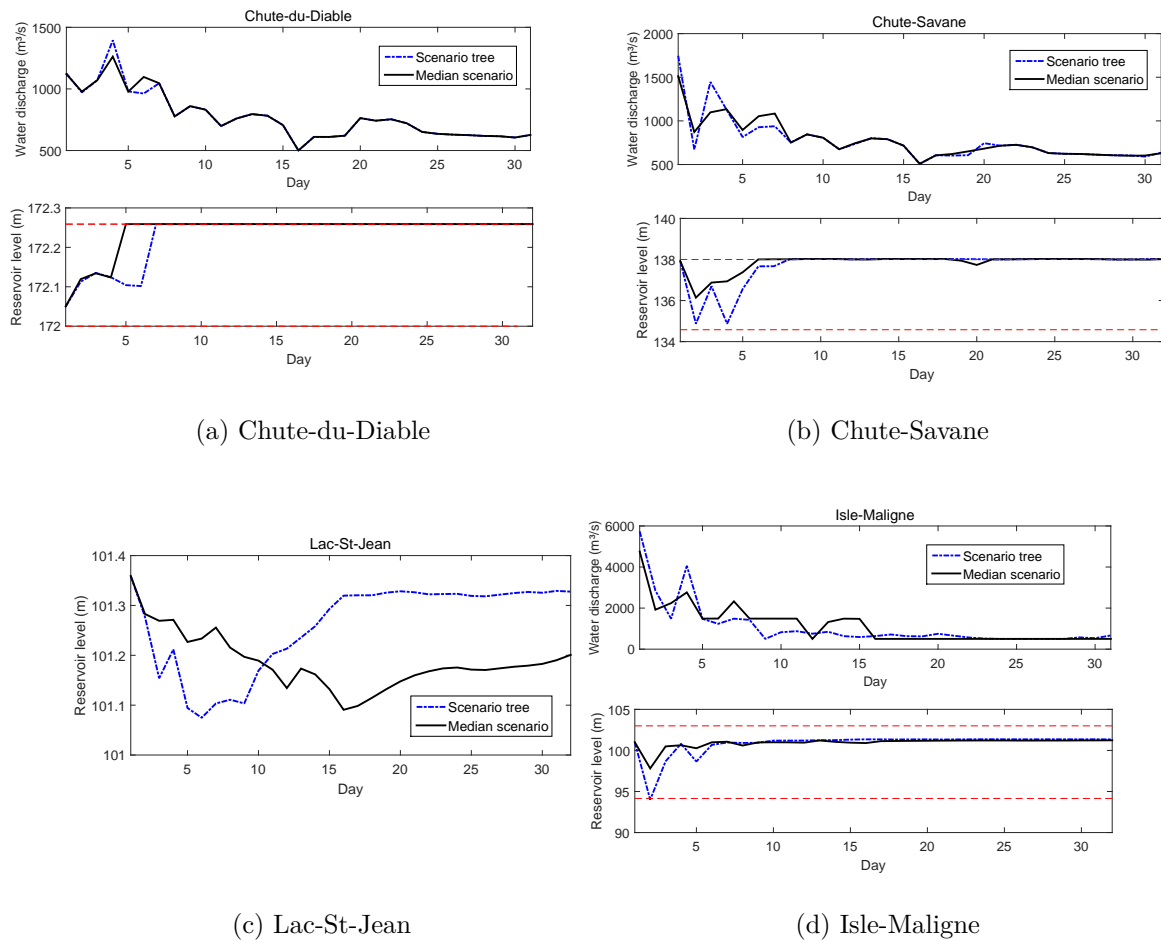


Figure 5.8 Water discharges and reservoir levels for the case June 2011, 5 stages, 16 scenarios.

Figure 5.8 pictures June 2011 data set with 5 stages and 16 scenarios. Solutions obtained from the scenario tree method and the median scenario are quite similar. Also note that when a method turbines more water, it is penalized accordingly so it is not advantaged. The absolute difference between the volume, at the end of the 31 day horizon, between the solution obtained with the stochastic model and the solution obtained with the deterministic model is calculated. This volume is then transformed into energy, then added to the method which has a higher end volume, since it is disadvantaged, given the other method processed more water throughout the 31 day planning horizon.

Figure 5.9 also illustrates the June 2011 data set with 7 stages and 16 scenarios. Again, results are very similar.

Without any surprise, the numerical experiments reveal that the solutions to the cases with more stages are closer to the operational ones because the hydropower system operation is



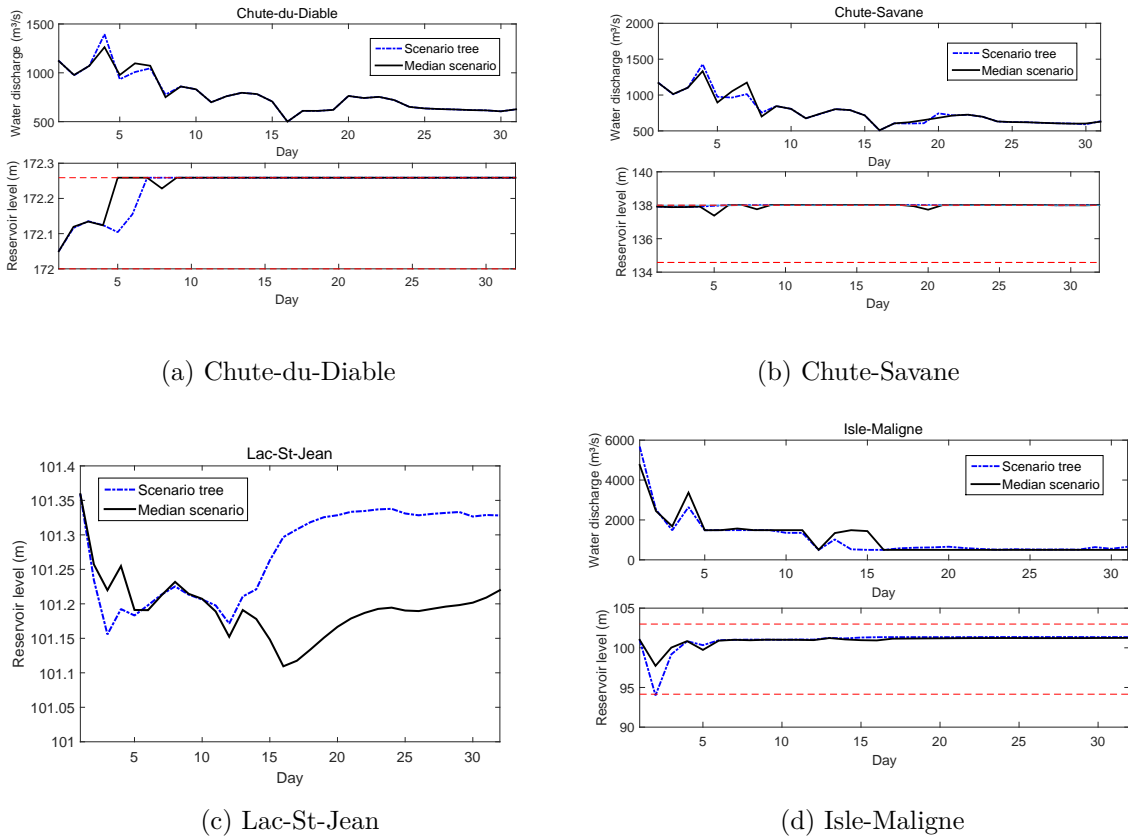
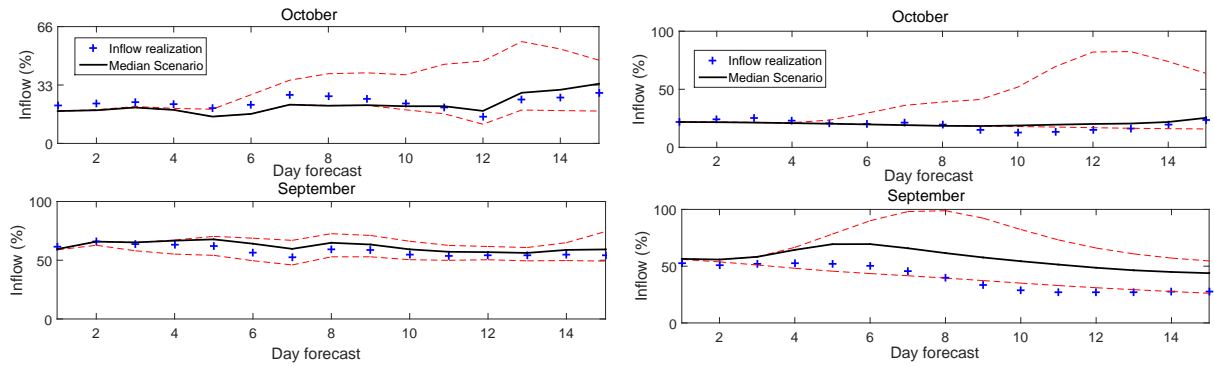


Figure 5.9 Water discharges and reservoir levels for the case June 2011, 7 stages, 16 scenarios.

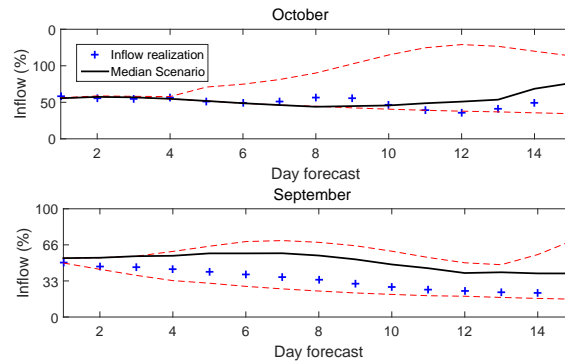
more realistic. For example, Figures 5.8 and 5.9 show that the solutions with 5 and 7 stages lead to a similar improvement, but the implementation with 7 stages is preferable. Figures 5.9a, 5.9b and 5.9d present reservoir volumes that are more stable than Figures 5.8a, 5.8b and 5.8d.

The October data set is the only one for which the median scenario produces more energy for all number of stages. The interest of a stochastic method is to account for uncertainty in the future. As we compare our method with the median scenario, if the actual realization of the inflows is close to the median scenario, the stochastic solution will not produce more energy, as the median scenario depicts correctly the future. In practice, this may happen during the fall period, for example when low variability exists in the weather and storms have less chances of developing. This can be seen on Figure 5.10. Each subfigure corresponds to a reservoir. Figure 5.10a is Chute-du-Diable. The top figure is the day 1 October forecast and the bottom figure is the day 1 September forecast. For the first 15 days, the October forecast median scenario is very close to the inflow realization and therefore, as we keep the day 1 decision only, the median scenario produces more energy. The other subfigures



(a) Chute-du-Diable

(b) Chute-Savane



(c) Lac-St-Jean

Figure 5.10 Comparison of September (lower figures in each subfigure) and October (upper figures in each subfigure) day 1 data sets. The dashed lines are the minimum and maximum scenarios. The median scenario is the solid line. The actual realization of the inflows is the plus sign line.

are represented in the same fashion. Again, Figures 5.10b and 5.10c show that for Chute-Savane and Lac-St-Jean, the actual inflows in October are very close to the median scenario, therefore there is no gain in using a stochastic optimization model, as the deterministic median scenario allows to obtain a good solution. For this unusual October case, solving the short-term unit commitment and loading problem with a median scenario is acceptable. This affirmation is to be used with caution as situations like these have a low probability of occurring. These results show that there is certainly a gain in using a stochastic model for the short-term hydropower optimization model, as relying on the median scenario offers a less robust solution than multiple scenarios.

## 5.6 Conclusion

This paper presents a stochastic short-term hydropower optimization method which emphasizes inflow scenario trees. Few papers looked specifically into stochastic short-term models and we extend the modeling presented in [91] to consider uncertain inflows. The optimization method considers inflow uncertainty, head variations and nonlinear and nonconvex relationship between discharge and power output. The scenario tree generation method first uses kernel density estimation to generate random values of inflows. Then, the path of nodes, from root to leaf, that minimizes the Wasserstein distance is found in the scenario tree and the corresponding nodes are updated using stochastic approximation. The process is repeated until the termination criterion, which is the convergence of the tree in Wasserstein distance, has been reached. A stability test has shown that the scenario tree generation method is consistent. A highlight of this method is that it uses all data available at each iteration to improve the values of the scenario tree nodes. The scenario trees are inputs to a two-phase optimization process. The first phase, loading problem, allows to find water discharge, volume and number of turbines working in each plant. The second phase, unit commitment, chooses the exact combination of turbines to use, to maximize energy production and penalize unit startups. A major feature of this modeling of the problem is that the water head is not neglected. For this paper, the models are tested on three hydropower plants. A rolling-horizon procedure is retained on a 31 day planning horizon. The stochastic solution is compared to the median scenario. Furthermore, fast computation time allows this method to be scaled in order to be applied in full to the Saguenay-Lac-St-Jean hydroelectric system. Future work based on this paper consists on investigating the complexity required in the scenario tree structure. Since a rolling-horizon framework is retained and that only the solution of the first-stage is kept, tests with scenario fans instead of scenario trees will be conducted.

## Notation

The following notation is used throughout the paper :

$N$	set of nodes
$E$	set of leaf nodes
$K$	set of scenarios
$C$	set of hydroelectric plants
$u^c$	number of hydroelectric plants upstream of plant $c \in C$
$s \in \{1, 2, \dots, n_i^c\}$	index of surfaces corresponding to number of active turbines with hydroelectric plant $c$ and node $i$

$l \in \{1, 2, \dots, n_i^c\}$	index of combinations with hydroelectric plant $c$ and node $i$
$t \in \{1, 2, \dots, T^c\}$	index of turbines of hydroelectric plant $c$
$\pi_j^c$	probability of scenario $j$ for plant $c$
$v_i^c$	volume of plant reservoir $c$ at node $i$ ( $hm^3$ )
$q_i^c$	water discharge at plant $c$ and node $i$ ( $m^3/s$ )
$\theta$	start-up penalty for any turbine ( $MW$ )
$\beta_{li}^c$	power generated by combination $l \in n_i^c$ at plant $c$ and node $i$
$y_{si}^c =$	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ if surface } s \text{ is chosen at node } i \\ \text{for plant } c \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right.$
$f_{lit}^c =$	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ if turbine } t \text{ of combination } l \\ \text{for plant } c \text{ is active at node } i \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right.$
$x_{li}^c =$	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ if combination } l \text{ of plant } c \\ \text{is chosen at node } i \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right.$
$d_{ti}^c =$	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ if turbine } t \text{ of plant } c \text{ is started} \\ \text{at node } i \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right.$
$\chi_{si}^c$	power for surface $s$ at node $i$ and plant $c$ ( $MW$ )
$\Psi_s^{Ac}(q_i^c, v_i^c)$	power production function without spillage for surface $s$ and plant $c$
$\Psi_s^{Bc}(q_i^c, v_i^c)$	power production function with spillage for surface $s$ and plant $c$
$\delta_i^c$	inflow of plant $c$ at node $i$ ( $m^3/s$ )
$w_i$	duration of node $i$ ( $h$ )
$\gamma$	conversion factor from water discharge ( $m^3/s$ ) to ( $hm^3/h$ )
$\Phi_j^c(v_j^c)$	water-value function for plant $c$ and scenario $j$
$\zeta_i$	conversion factor to energy units ( $GWh$ )
$v_{min}^c$	minimal volume of plant $c$ reservoir ( $hm^3$ )
$v_{max}^c$	maximum volume of plant $c$ reservoir ( $hm^3$ )
$q_{min}^c$	minimum water discharge at plant $c$ ( $m^3/s$ )
$q_{max}^c$	maximum water discharge at plant $c$ ( $m^3/s$ ).

## CHAPITRE 6 ARTICLE 3 : SCENARIO TREE MODELING FOR STOCHASTIC SHORT-TERM HYDROPOWER OPERATIONS PLANNING

Cet article a été soumis à une revue avec comité d'arbitrage le 8 juillet 2016.

Le rapport technique suivant est publié :

S. Séguin, C. Audet et P. Côté. Scenario tree modeling for stochastic short-term hydropower operations planning. *Cahiers du GERAD*, (G-2016-54), 2016.

**Abstract :** The authors investigate the complexity needed in the structure of the scenario trees to maximize energy production in a rolling-horizon framework. Three comparisons, applied to the stochastic short-term unit commitment and loading problem are conducted. The first one involves generating a set of scenario trees built from inflow forecast data over a rolling-horizon. The second replaces the entire set of scenario trees by the median scenario. The third replaces the set of trees by scenario fans. The method used to build scenario trees, based on minimization of the nested distance, requires three parameters : number of stages, number of child nodes at each stage, and aggregation of the period covered by each stage. The authors formulate the question of finding the best values of these parameters as a Blackbox optimization problem that maximizes the energy production over the rolling-horizon. Numerical experiments on three hydropower plants in series suggest that using a set of scenario trees is preferable to using the median scenario, but using a fan of scenarios yields a comparable solution with less computational effort.

**Acknowledgments :** The authors would like to thank Marco Latraverse at Rio Tinto for providing data. Also, Alois Pichler for the scenario tree generation method and Stein-Erik Fleten for collaborating on the stochastic version of the model. Sara Séguin would like to thank the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC), Fonds de recherche du Québec - Nature et Technologies (FRQNT) and Rio Tinto for their financial support.

### 6.1 Introduction

Short-term hydropower models are used on an operational basis to determine the production plan of an hydroelectric system. From these models, the reservoir volumes, water flows and the unit commitment of the turbines in operation are determined. Deterministic models [85]

in which there are no uncertainties, as well as stochastic short-term hydropower models [16] have recently been proposed. In this paper, uncertain inflows are considered, based on the authors previous work [89].

The province of Quebec, located in Canada, is a territory rich in lakes and rivers and 99 % of its energy production comes from hydropower. Multiple aluminium producers operate plants in this province since the electrolysis process used to extract aluminium from the bauxite requires immense amounts of electricity. Rio Tinto is a mining company that operates aluminium smelters in the Saguenay Lac-St-Jean region, located in the north of the province. They are also owners of a hydroelectric system that allows them to produce 90 % of the energy required for the operations of the aluminium plants. Therefore, it is in their interest to manage the hydroelectric system in an efficient manner, since they need to buy, from Hydro-Quebec at fixed priced contracts, the energy shortage to fully operate the smelters. In an operational context for Rio Tinto, the implementation of the decisions obtained from the short-term hydropower optimization models are to be taken without exact knowledge of daily inflows. Inflow scenarios are built based on a 7 day deterministic forecast of precipitations prepared by Environment Canada. The CEQUEAU [75] hydrological model is used to create inflow scenarios based on the hydraulics of the watershed and on the precipitation forecast. Multiple inflow scenarios are available and one way to treat uncertainty in an optimization model involves scenario trees and multistage stochastic programs. Many methods have been developed to generate scenario trees. Some of the most popular methods are moment-matching [57], scenario reduction [54], copulas [60], or minimization of the nested distance [82], for example. In this paper, the authors specifically use the minimization of the nested distance to build the inflow scenario trees. As there is no reduction in the number of scenarios at each iteration, all of the inflow scenarios are used to update the value of the scenario tree nodes. Also, the minimization of the nested distance implies that the first four moments, which are mean, variance, skewness and kurtosis are matched.

This method consists of two steps that are repeated until convergence of the nested distance is achieved. The first step uses kernel density estimation [87] to generate a new inflow scenario that is close to the distribution of the available inflow scenarios. The second step uses this newly generated scenario to update the values of the scenario tree nodes based on the stochastic gradient descent method. This scenario tree generation method requires input parameters : the number of stages, the number of nodes per stage and the aggregation of each stage.

In a decision-making operational context, rolling-horizon schemes [74] are used by the hydropower producers to implement the solutions of the stochastic short-term hydropower op-

timization models. As the inflow previsions are updated daily, a scenario tree is generated, then the optimization models are solved and the solutions of the first-day are implemented. Once the actual realizations of the inflows for the reservoirs are known at the end of the day, reservoir levels are updated with the realization of the inflows and the scenario tree generation process and optimization is repeated for the next day, with the new forecast. In some cases [17] the time window is decreased as information becomes available, and in other cases the time window moves forward in the horizon [110]. In [33], a test bed is used to compare four optimization algorithms. The forecasts are updated each time a decision is taken and the same methodology has been retained in this research.

As the scenario tree generation method [89] used in this paper requires input parameters, this work studies if there is an energy production gain when the scenario tree parameters are optimized in an objective of maximizing the energy production throughout the rolling-horizon. The rolling-horizon scheme, consisting of scenario tree generation and short-term hydropower optimization is embedded within a Blackbox optimization model. Blackbox optimization is used when the objective functions or the constraints of a problem can only be calculated through a computer code, as it is the case in this problem. Blackbox optimization methods have been applied successfully to many engineering problems [8]. In the field of hydrology, Blackbox optimization has been used to find the optimal locations for GMONs [4], which are devices used to measure snow water equivalent in remote areas of watersheds. Another study [73] proposes to calibrate the 23 parameters of the hydrological model HSAMI. It is used in the daily forecast of reservoir inflows and parameters relating to evapotranspiration, snowmelt, infiltration and percolation and finally the routing of surface runoff. An interesting study in reservoir management [46] compares the solution of the reservoir optimization problem with many reduced scenario trees to determine the effect of this reduction on the optimization solution. In the same sense, a thorough research [108] aims at finding the optimal level of scenario tree reduction to obtain the best performance for a hydropower reservoir management problem.

The paper compares three scenario trees approaches to solve the stochastic short-term unit commitment and loading problem (SSTUL). The first one uses a Blackbox optimization solver to identify the set of scenario trees that maximizes energy production over the rolling-horizon, using a methodology similar to that proposed in [12] in which Blackbox optimization is used to tune algorithmic parameter values. The second one is much simpler, both conceptually and in terms of computational effort, as it only uses the median scenario. The third one contains a fan of a limited number of representative scenario trees. Numerical experiments in an operational context with real data suggest that the computational effort invested in finding the best set of scenario trees outperforms the median scenario approach, but scenario

fans produce comparable results in less time.

The paper is organized as follows. Section 6.2 presents the methodology, more precisely the stochastic short-term unit commitment and loading problems and the rolling-horizon scheme used to validate the optimization models. Section 6.3 introduces the concept of Blackbox optimization and exposes the formulation of the rolling-horizon scheme as a blackbox. A case study is presented in Section 6.4 and numerical experiments are shown in Section 6.5. Final remarks are given in Section 6.6.

## 6.2 Methodology

The present section gives a high-level description of the main building blocks necessary for this work. Each section describes the input and output of each of them, and the authors voluntarily avoid presenting the technical specificities of each block, but provide references for detailed descriptions.

### 6.2.1 Stochastic Short-Term Unit Commitment And Loading Problem

This research targets the stochastic short-term unit commitment and loading problem. In hydropower operations planning, this model is used on an operational basis to dispatch water available for production between the turbines and power plants that compose the system. The model considers head-dependency in the power production functions, efficiencies of each turbines and turbine startups are penalized. Without presenting the mathematical modeling of the problem, as it is not the scope of the present research, the contents of this model is explained for the reader to understand its outcome. In a recent work, the authors have also considered stochastic inflows in the reservoirs [89]. A scenario tree is used to represent the uncertain inflows and therefore, the SSTUL model is solved for each scenario tree node. Refer to paper [91] for more details on the formulation. The SSTUL optimization model consists of two optimization phases. The first phase, namely the loading problem, maximizes the expected energy production and reservoir volumes, water flows and total number of turbines working are determined. The second phase, namely the unit commitment determines the exact combination of turbines working to maximize energy production and penalize unit startups.

### 6.2.2 Rolling-Horizon Scheme

In the context of real operations of a hydropower system, forecasts of the inflows are updated daily and are denoted  $\phi_h$ , where  $h$  is the day in the rolling-horizon. Therefore, it is necessary to



take an immediate decision, without exact knowledge of future inflows. By the end of the day, the actual inflows that occurred throughout the day are known and the reservoir volumes are updated. This rolling-horizon scheme is then repeated for each day of the planning horizon. The entire process is composed of five main components and can be viewed on Fig 6.1. The first one is called the *scenario tree generator* (STG) and it takes as input the scenario tree parameters  $\alpha$  and  $\kappa$ , which are respectively the number of child nodes per stage and the aggregation of each stage, as well as the fixed parameter  $D$  representing the number of stages of the scenario tree and finally, the daily inflow forecasts denoted  $\phi_h$ . As its name indicates, it produces a scenario tree that becomes the input of the second component namely the *stochastic short-term unit commitment and loading problem* (SSTUL), which consists of two elements. The *loading problem* (LP) is a nonlinear mixed-integer program that determines the water discharge, reservoir volume and number of active turbines at each node for each power plant. This information is fed to the *unit commitment problem* (UC), a linear integer program and it determines the exact combination of turbines to use in order to maximize the total energy production at each node and penalize turbines start-up. The output of the SSTUL is the solution to the SSTUL optimization problem and is used to compute the energy generation for the first node in the scenario tree, denoted  $E(h)$ , in which turbine startups are penalized. From here, the reservoir levels are updated with the actual realization of the inflows in the component named *reservoir level update*. These 5 components are iteratively solved for each time period but only the solution for the first node of the scenario tree is retained every day, allowing to build a release policy for the whole rolling-horizon. The output of the rolling-horizon, namely  $RH(\alpha, \kappa, D)$  is the summation of the energy generation  $E(h)$  for each day  $h$  of the rolling-horizon, more precisely the first node energy generation every day with startups penalized and the value of the remaining water in the reservoirs at the end of the rolling-horizon.

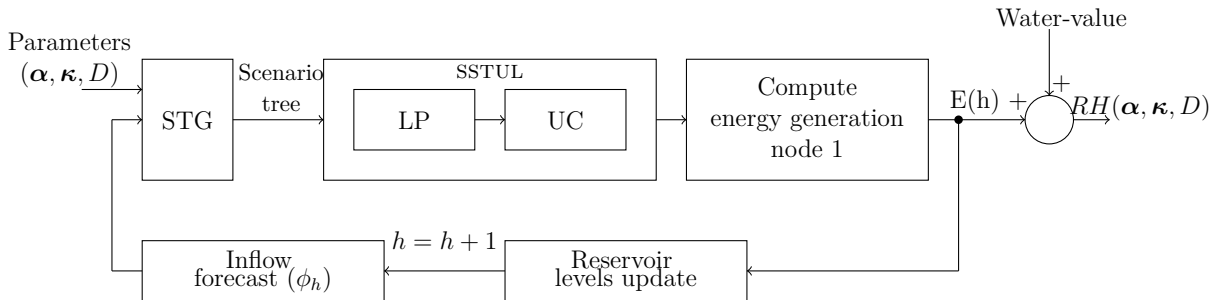


Figure 6.1 Rolling-horizon scheme. These steps are repeated for each day  $h$  of the rolling-horizon.

The objective is to maximize the total energy production over the whole rolling-horizon, by

evaluating the energy production for the first stage solution of each day in the rolling-horizon, penalizing turbine startups and considering the value of the remaining water in the reservoirs, using water-value functions.

### 6.2.3 Parameters Of The Scenario Tree

The overall energy estimated over the rolling-horizon depends on the way that the scenario trees are generated. Generation of these trees depend on a set of three parameters. The main objective of the present work is to tune the values of these parameters so that the overall energy is maximized. The authors formulate this question as a Blackbox optimization problem : find the scenario tree parameter values that maximize the energy production. This section describes in more details the scenario tree parameters.

The scenario tree generating method requires input parameters : number of stages, number of child nodes per stage as well as aggregation of each stage. In addition, it requires as input the inflow scenarios denoted by  $\phi$ . As the effect of the number of stages is investigated, it is kept as a varying parameter. As for the number of nodes per stage and aggregation, they are treated as Blackbox optimization variables. For a given stage, all nodes must have the same number of child nodes. Since the inflow forecast is for 30 days, it is necessary to aggregate the days into stages in the scenario tree in order to reduce the number of optimization variables. The first stage is not aggregated and hence is not an optimization variable.

Let  $D$  be the number of stages,  $\alpha_q$  the number of child nodes, for each stage  $q \in \{1, 2, \dots, D-1\}$  and  $\kappa_r$  is the number of days aggregated in stage  $r \in \{2, 3, \dots, D\}$ . Fig. 6.2 illustrates a scenario tree with 4 stages, with  $\alpha = (1, 2, 2)$  and  $\kappa = (2, 12, 15)$ . With an inflow forecast of 30 days, the following is to be satisfied :  $\sum_{r=2}^4 \kappa_r = 29$ , as it is the case on Fig. 6.2.

The function that characterizes the scenario tree generation is compactly denoted by :

$$STG(\alpha, \kappa, \phi), \quad (6.1)$$

where  $\alpha \in \mathbb{N}^{D-1}$  is the number of child node per stage,  $\kappa \in \mathbb{N}^{D-1}$  is the aggregation of each stage and  $\phi$  is the collection of inflow scenarios. The scenario tree generation returns a scenario tree determined by the parameters  $\alpha$  and  $\kappa$ , the collection of inflow scenarios  $\phi$  and a value of inflow for each reservoir and scenario tree node is returned.

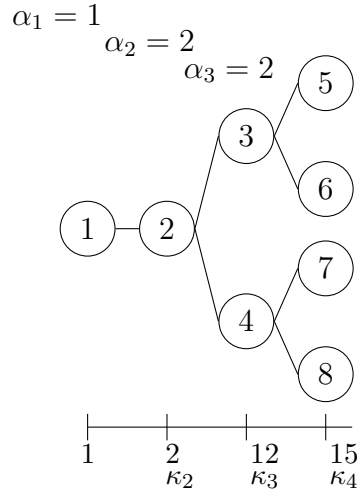


Figure 6.2 A scenario tree with  $D = 4$  stages

#### 6.2.4 Loading And Unit Commitment Problems

The loading problem takes as input a scenario tree determined by the parameters  $\alpha$ ,  $\kappa$  and  $\phi$  obtained with  $STG(\alpha, \kappa, \phi)$ . The loading problem returns the water flows, reservoir volumes and number of turbines working, for every plant and scenario tree node. The loading problem maximizes the energy production in the first stage and expected energy production in the future, subject to water balance constraints and hydropower production functions selection. The entire model is presented in Section 4.2 of [89].

The function that characterizes the loading problem is compactly denoted by :

$$LP(STG(\alpha, \kappa, \phi)). \quad (6.2)$$

The loading problem is a nonlinear mixed-integer problem, but the relaxation of binary variables is sufficient [91] to obtain an integer solution over certain conditions. In this specific case, the energy demand is not considered.

The unit commitment problem takes as input the output of the loading problem, more precisely the water flows, reservoir volumes and number of turbines working, for every plant and scenario tree node. It also requires the scenario tree structure as input, determined with  $STG(\alpha, \kappa, \phi)$ . The unit commitment problem consists of maximizing the energy production in the first stage and expected energy production in the future and penalizes startups of turbines, subject to turbine selection and turbine startups constraints. The unit commitment problem returns the turbines working for every plant and scenario tree node. The entire

model is presented in Section 4.3 of [89].

The function that characterizes the unit commitment problem is compactly denoted by :

$$UC(LP(STG(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\phi}))). \quad (6.3)$$

The unit commitment problem is a linear integer program.

### 6.3 Blackbox optimization

This section introduces the concept of Blackbox optimization. Then, the formulation of the rolling-horizon scheme as a Blackbox optimization problem is exposed. Finally, the validation of the formulation of the problem as a blackbox is presented.

#### 6.3.1 Blackbox Optimization Concept

Blackbox optimization targets problems in which the objective function and/or constraints can only be computed through a computer simulation. Blackbox optimization problems are often nonsmooth, nonconvex and discontinuous. The mesh adaptive direct search method (MADS) [10] is designed for Blackbox optimization and has been successfully applied to many engineering problems.

MADS discretizes the state space by defining a mesh whose coarseness is adjusted at the end of each iteration. The algorithm consists of two steps that are repeated until a predefined stopping criterion is reached. The first step, namely the *search* step evaluates different points that lie on this mesh with the aim of finding a better solution than the current best. This step is flexible and may be tailored to specificities of the problem. The second step, namely the *poll* step is mandatory as the convergence properties of MADS relies on it. A positive spanning set of directions is determined and if a better solution than current best is found, it is set as best solution. During the different iterations, the mesh size is reduced when the algorithm fails to improve the solution and increased when a new best solution is found. The NOMAD software [63], which is the implementation of the MADS method is used to solve the Blackbox optimization model.

#### 6.3.2 Blackbox Formulation Of The Rolling-Horizon Scheme

The scenario tree parameters  $\boldsymbol{\alpha}$  and  $\boldsymbol{\kappa}$  that maximize the energy production throughout the rolling-horizon are to be identified. A blackbox that takes a tree structure as input, and

solves the whole rolling-horizon scheme, which contains the scenario tree generation and the SSTUL optimization problem is defined. It returns the total energy produced throughout the rolling-horizon.

### Mathematical formulation

The scenario tree parameters  $\alpha$  and  $\kappa$  are the optimization variables provided as input to the blackbox. The output of the blackbox is the total energy produced, considering startup penalties and value of remaining water in the reservoirs in the rolling-horizon scheme. The SSTUL optimization variables, which are water discharges, reservoir volumes and turbines working are internal to the blackbox and are transparent to the Blackbox optimization problem.

Therefore, the Blackbox optimization problem is to maximize total energy produced throughout the rolling-horizon scheme, with startups penalized and value of the water remaining in the reservoirs. The output of the blackbox is compactly denoted by :

$$RH(\alpha, \kappa, D), \quad (6.4)$$

where  $D$  is fixed and is the number of stages in the scenario tree.

The objective function given by Eq.(6.5) is to maximize energy production throughout the rolling-horizon, considering startup penalties and value of remaining water in the reservoirs. It relates to the unit commitment problem and since this solution relies on the output of the loading problem, problems UC and LP are to be solved in order to obtain the value of  $RH(\alpha, \kappa, D)$ . In other words, it is necessary to solve the SSTUL problem when solving the Blackbox optimization problem.

**Problem BB :**

$$\max_{\alpha, \kappa \in \mathbb{N}^{D-1}} RH(\alpha, \kappa, D) \quad (6.5)$$

$$\text{subject to : } \sum_{r=2}^D \kappa_r = 29, \quad (6.6)$$

$$2 \leq \prod_{q=1}^{D-1} \alpha_q \leq 50, \quad (6.7)$$

$$\alpha_q, \kappa_r > 1, \quad \forall q \in \{1, 2, \dots, D-1\}, \forall r \in \{2, 3, \dots, D\}. \quad (6.8)$$

The main difficulty of the problem above resides in evaluating  $RH(\alpha, \kappa, D)$ . The computational time required to evaluate the blackbox increases with the complexity of the scenario trees, rather than with the number of optimization variables. For example, for a 5-stage sce-

nario tree and  $\alpha = (1, 4, 3, 3)$ , a total of 52 nodes, a single evaluation of  $RH(\alpha, \kappa, D)$  takes 32 minutes, on a given data set, while a 6-stage scenario tree and  $\alpha = (2, 5, 5, 1, 1)$ , a total of 162 nodes, takes 1 hour. Moreover, there is only a difference of 2 optimization variables between these scenario tree structures.

Constraints (6.6) are to ensure the aggregation of the scenario tree stages are equivalent to the inflow forecast, which is 30 days in this paper. Since the first stage is not aggregated then it is forced to 1. The upper and lower bounds on the number of scenarios are given by (6.7). Nonnegativity is enforced with constraints (6.8). The number of stages  $D$  is kept as a varying parameter in the numerical experiments in order to evaluate its effect on the results. Hence, it is fixed for every experiment.

Fig. 6.3 illustrates this process. A scenario tree structure with parameters  $\alpha$  and  $\kappa$  is given to the blackbox. The rolling-horizon scheme is then launched. For every day of the rolling-horizon, scenario trees are built based on the forecast  $\phi_h$ , then the SSTUL is solved, the first-day solution is kept, reservoir levels are updated with the realization of inflows and the process is repeated for the whole rolling-horizon. Then, the actual energy production and expected future production of the remaining water in the reservoirs for the whole rolling-horizon is calculated, with startups of turbines penalized and is denoted  $RH(\alpha, \kappa, D)$ . The optimization solver calls the blackbox simulation with various values of the parameters  $\alpha$  and  $\kappa$ . Each time the solver collects the output  $RH(\alpha, \kappa, D)$  and from it, it produces new inputs to the blackbox. The solver terminates when it can no longer improve the solution.

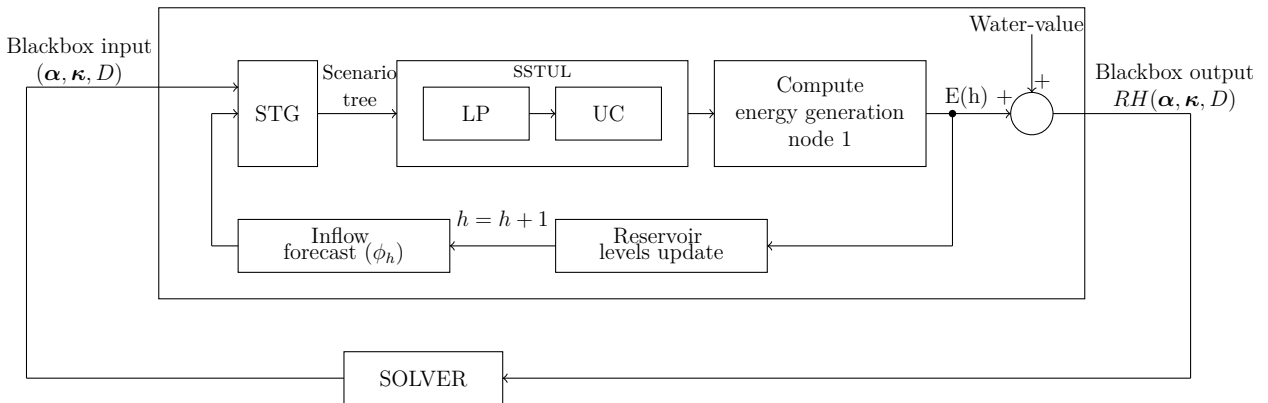


Figure 6.3 The Blackbox optimization solution approach. Index  $h$  is the day in the rolling-horizon framework.

### 6.3.3 Blackbox Validation

The scenario tree generation method applied in this paper is stochastic, which means that for the same set of scenario tree parameters, the inflow values on the nodes of the scenario tree differ from one evaluation to the other. Therefore, the objective function value  $RH(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}, D)$  of the blackbox differs for the same structure of scenario trees. The blackbox is validated to ensure that trying to optimize the scenario tree parameters is relevant. Since the scenario tree generation method is stochastic, the state space changes dynamically while the solver is searching for scenario tree parameters values. Therefore, it is important to assess that the variation of the state space is negligible compared to converging towards a solution. A fixed scenario tree structure is used and the blackbox is evaluated 100 times with the same set of scenario tree parameters, on a given data set.

Results of this validation are shown on Fig. 6.4. The number of evaluations of the blackbox corresponding to a given range of objective function values are represented on a histogram. The following values were used for the parameters :  $D = 5$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, 2, 1)$  and  $\boldsymbol{\kappa} = (3, 6, 8, 12)$ . One can see that energy production is very similar at every evaluation of the blackbox, the standard deviation is  $7.4622 \text{ GWh}$ , compared to a  $7.0478 \times 10^5 \text{ GWh}$  mean. The values near the mean confirm that the scenario tree generation method is valid, as evaluations of the blackbox with the same scenario tree parameters lead to similar values every time.

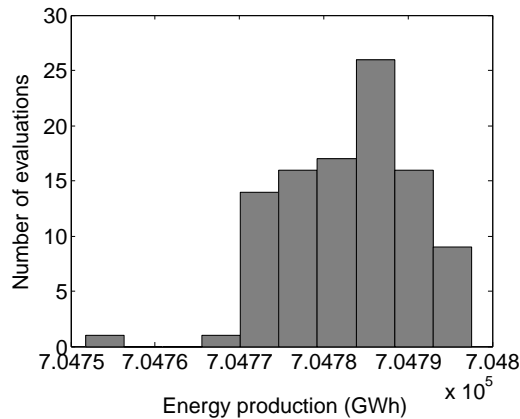


Figure 6.4 Validation of the blackbox. For the same scenario tree structure, histogram of the energy production in  $GWh$ .

## Exhaustive enumeration versus Blackbox optimization

To assess the pertinence of using a Blackbox optimization problem to find the scenario tree structure that maximizes the energy production on the rolling-horizon, a comparison between the solution found with the Blackbox optimization and the global optimal solution is performed.

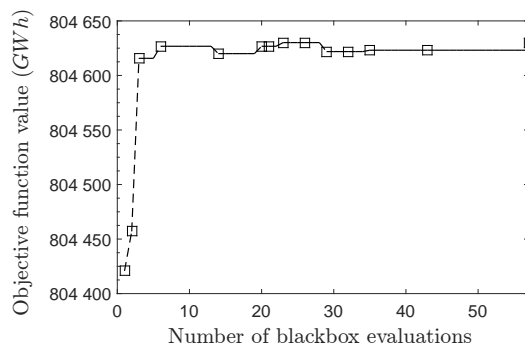


Figure 6.5 Convergence of Blackbox optimization for a 5-stage scenario tree

A 5-stage scenario tree with fixed aggregation of stages  $\kappa = (3, 6, 8, 12)$  is chosen since the state space is relatively small. The problem contains only integer optimization variables, therefore it is possible to do an exhaustive enumeration of the domain. Considering constraints on minimal and maximal number of scenarios, there is a total of 331 points in the state space. Total computational time to run the evaluations cumulates to 27 hours. The best solution found is a tree with a structure  $\alpha = (5, 1, 2, 3)$  and the value of the objective function is 804.63 *TWh*. Since the objective function is evaluated at every possible combination of  $\alpha$  in the domain, this is the global optimal solution.

The Blackbox optimization solver NOMAD is used to find the scenario tree that maximizes the energy production throughout the rolling-horizon. The convergence is shown in Fig. 6.5. The optimization requires 57 evaluations, but the best solution is found after 23 evaluations. The time to conduct the optimization is 7 hours. The solution found by NOMAD is a tree with structure  $\alpha = (4, 5, 1, 2)$  and the objective is 804.63 *TWh*, which is identical up to the second decimal to that found by the exhaustive enumeration procedure. The figures shows clearly that in less than 10 evaluations the objective function is substantially increased.

For this 5-stage scenario tree case, the computational time required by NOMAD is approximately one fourth of that of the enumeration strategy. The difference between the objective values obtained with the optimization and enumerating all the state space is negligible. The-



refore, optimizing the tree structure with NOMAD allows to find an acceptable solution. Since the scenario tree generation method is stochastic, the objective function value varies for the same scenario tree structure, so it is difficult to assess if NOMAD found the global solution or not, but there is an increase in the objective function when the structure of the tree is optimized, as shown in Fig. 6.5.

The starting point led to an objective function of  $804.46 \text{ TWh}$  while the best solution found is  $804.63 \text{ TWh}$ . The difference between these two values is  $0.17 \text{ TWh}$ , which is much greater than the standard deviation of  $7.4 \text{ GWh}$  and confirms that the maximum found by NOMAD truly is a maximum and not induced by noise.

## 6.4 Case study

This sections presents the case study used to validate the optimization models presented in this research.

### 6.4.1 Hydropower System

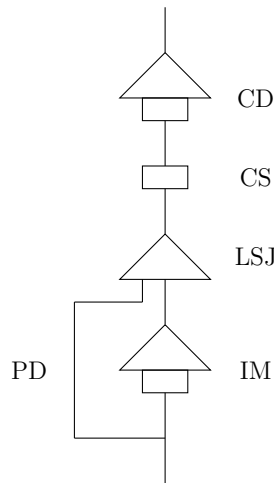


Figure 6.6 Hydroelectric system studied. Squares represent power plants and triangles reservoirs.

The optimization method presented in this paper is tested on a portion of a hydroelectric system that belongs to Rio Tinto and is shown on Fig. 6.6. It is located in Saguenay in the province of Québec, Canada. The sub-system consists of 4 reservoirs and 3 power plants in series, namely Chute-du-Diable (CD), Chute-Savane (CS), Lac-St-Jean (LSJ) and Isle-Maligne (IM). Travel time of the water between plants is neglected. The installed capacity for these

3 power plants is about 950 MW. The power plants and reservoirs characteristics are shown in Table 6.1.

Table 6.1 Reservoir and power plants characteristics

Reservoir and/or power plant	Nb. turbines	Reservoir capacity ( $hm^3$ )
CD	5	452
CS	5	119
LSJ	-	5596
IM	12	171

#### 6.4.2 Structure Of The Data

Six data series are available for numerical experiments. There are 31 days in the rolling-horizon scheme and every day has a 30-day inflow forecast. Fig. 6.7 shows an example of scenario trees for the first-day of the rolling-horizon. The scenario trees, in black, are built from the inflow scenarios, which are shown in grey. Every day, inflow scenarios are received for the three reservoirs, then a scenario tree generation method, based on the minimization of the nested distance [81] is used to generate scenario trees approximating the multi-variate distribution of the inflow forecasts.

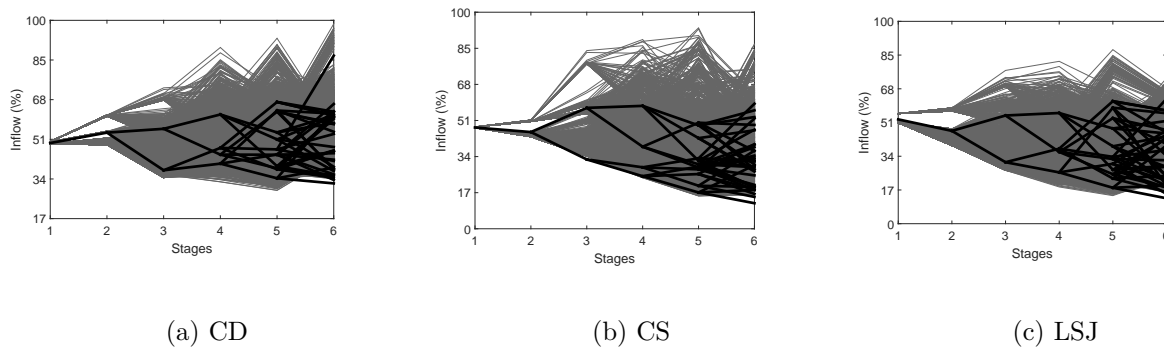


Figure 6.7 Scenario trees built from inflow forecast scenarios

#### 6.5 Computational experiments

Two types of tests for the optimization of the scenario trees are conducted on the data series available. First, the aggregation of the stages is fixed arbitrarily and only the structure of the

scenario tree is optimized, for different values of stages. Therefore, the Blackbox optimization variables  $\kappa$  are fixed in the mathematical model **BB**. For a 5-stage scenario tree, there are 4 Blackbox optimization variables  $\alpha$ , which are the structure of stages 2, 3, 4 and 5. For a 9-stage scenario tree, there are 8 Blackbox optimization variables. Second, the structure and the aggregation of the stages is optimized, for different values of stages. For a 9-stage scenario tree, there are 16 Blackbox optimization variables, more precisely  $\alpha$  are the structure and  $\kappa$  the aggregation of each stage.

The solver IPOPT [105] is used for the loading problem, XPRESS [2] for the unit commitment problem and NOMAD [63] for the Blackbox optimization problem.

### 6.5.1 Deterministic Optimization With The Median Scenario

In this section, results of the SSTUL with optimized scenario tree parameters are compared to a deterministic optimization where only the median scenario in the forecast is used. First, results with optimization of the structure only and a fixed aggregation and second, results with optimization of the structure and aggregation. Optimizing the SSTUL with a median scenario comes down to solving a deterministic model. For the producer, comparing the solution obtained from the stochastic model gives a value on the interest of investing time to solve a stochastic model.

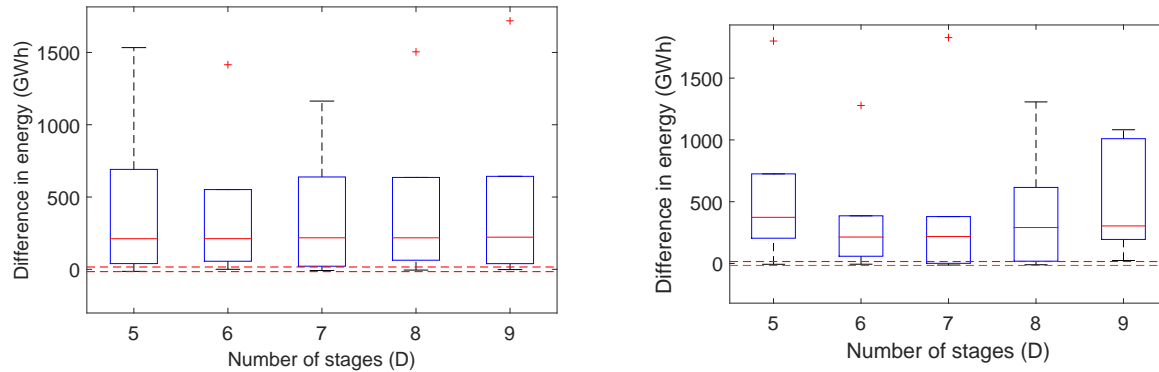
Basically, the same rolling-horizon scheme for the stochastic method and the deterministic optimization is used. For the stochastic method, a scenario trees based on the inflow forecast is generated and the SSTUL model is solved. For the median scenario method, the median scenario out of all of the inflow scenarios is chosen and a deterministic model is solved.

#### Optimization of the structure only

The solution obtained with the SSTUL model and optimization of the structure of the scenario tree is compared to the solution obtained when solving the SSTUL with the median scenario.

Results are presented with a boxplot for every number of stages and all 6 test cases, as seen on Fig. 6.8a. As an example, take the boxplot for 5-stages. The lower box represents the first quartile and the top of the box represents the third quartile. The band in the middle of the box represents the median. The bottom of the line linking the whisker to the box is the minimum of the data and the top of the line linking the box to the whisker is the maximum of the data.

For stages ranging from 5 to 9, the boxplot of the difference in energy between the stochastic solution, for which the scenario trees structure is determined with Blackbox optimization, and



(a) Optimization of the structure of the scenario tree only (b) Optimization of the structure and aggregation of the scenario tree

Figure 6.8 Boxplots of the difference in energy production between stochastic and deterministic optimization

the median scenario is shown. A positive value indicates the stochastic method produces more energy. As explained previously, since the scenario tree generation method is stochastic, two standard deviations are required for the difference in energy to be valid and not blackbox noise, more precisely  $\pm 16$  *GWh*, and are shown on Fig. 6.8a with the pair of horizontal dotted-lines.

Fig. 6.8a illustrates that, with an arbitrarily aggregation of the stages, optimizing the structure of the scenario tree leads to similar results for every given number of stages. Therefore, the number of stages does not have an important influence on the energy production in the SSTUL problem.

### Optimization of the structure and the aggregation

The solution obtained with the SSTUL model and optimization of the structure and the aggregation of the scenario tree is compared to the solution obtained when solving the SSTUL with the median scenario.

Fig. 6.8b illustrates the results for the 6 test cases. For a number of stages varying from 5 to 9, the difference in energy production between the solution obtained using scenario trees and the solution obtained using the median scenario, a boxplot is displayed.

Fig. 6.8b reveals that optimizing the scenario tree structure and aggregation increases the difference between the stochastic solution and median scenario given a higher number of stages. Therefore, the aggregation of the stages is an important parameter in the scenario

tree generation method, as the difference in energy increases when the number of stages increases. The best median is obtained with a 5-stage scenario tree, but the 9-stage scenario tree produces a bigger difference in energy production when using scenario trees instead of using the median scenario when solving the SSTUL. Therefore, it is an important parameter since it is difficult to conclude on the best number of stages to use.

### 6.5.2 Scenario Fans

Relying on the median scenario to implement a decision is highly risky. Often, in hydro-power optimization, scenario fans are used in the optimization models since they present a compromise between investing a lot of time and effort in generating the trees and solving a stochastic multi-stage model and solving a deterministic model. This section presents, for different number of stages, comparisons with different numbers of scenarios in a scenario fan fashion, as shown in Fig. 6.9. The same scenario tree generation method that was used previously is used to generate the trees, given different values of stages and number of scenarios. For the aggregation, the value obtained during the Blackbox optimization of the scenario tree structure and aggregation was used, as it is the one that maximizes energy production. For example, a structure  $\alpha = (1, 25, 1, 1)$  is given as input to the STG to obtain a scenario fan of 25 scenarios and 5 stages.

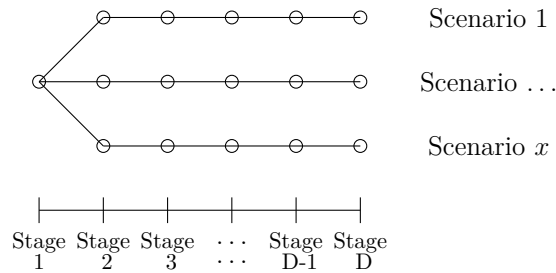


Figure 6.9 Scenario fan with  $x$  scenarios and  $D$  stages

Multiple tests were conducted on the different test cases. For 5, 6, 7, 8 and 9 stages, scenarios fans of 3, 6, 9, 15 and 25 scenarios were used as input to the SSTUL model. As explained previously, since the scenario tree generation method is stochastic, two standard deviations are required for the difference in energy to be valid and not blackbox noise, more precisely  $\pm 16$  GWh, and are shown on Fig. 6.10 with the pair of horizontal dotted-lines. Results are presented in Fig. 6.10. The difference in energy between the energy produced with the solution obtained using scenario trees and the solution obtained using scenario fans decreases when the number of scenarios increase. Therefore, solving the SSTUL with a scenario fan containing

more than 15 scenarios results in the same objective function and does not justify the use of a complex scenario tree structure. Standard deviation for 15 scenarios is 30.6973 *GWh* and for 25 scenarios is 26.4338 *GWh*. Moreover, a Student's t-test performed on the distributions of 15 and 25 scenarios reject the null hypothesis, therefore demonstrating that the difference in energy is significant and not caused by blackbox noise.

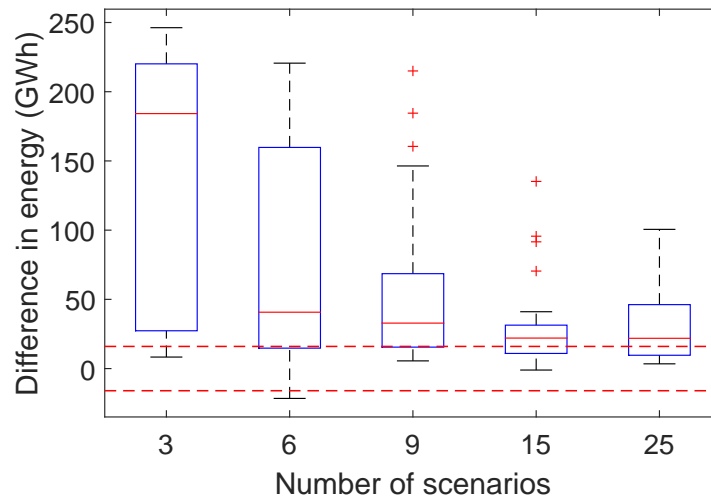


Figure 6.10 Boxplots of the difference in energy production between stochastic optimization of the structure and the aggregation of the scenario tree compared to scenario fans

These results demonstrate that using scenario fans instead of complex scenario tree structures leads to good results and allows to find the solution in a satisfying computational time effort. Also, the scenario fan results show that the distribution of the total volume of inflows is preserved if the scenario tree generation method does not alter the scenarios, therefore by using, in this case, more than 15 scenarios. Moreover, in a rolling-horizon, the decision that is taken at the first node every day is mostly influenced by the total volume of inflows, rather than by the structure of the scenario trees that model the distribution of the inflows.

It is important to note that when using scenario fans, only the first node solution is relevant since the rest of the stages is biased, induced by the deterministic fashion of the scenario fan. When using scenario trees, non-anticipative constraints appear at each stage, therefore all of the inflow values contained in the scenario tree are relevant and could be useful in another context.

## 6.6 Conclusion

In this paper, the authors have presented an innovative method to determine if complex scenario tree structures are required when solving the short-term unit commitment and loading problem (SSTUL) with uncertain inflows used in a real-time decision making context. Multistage stochastic programs are used to solve the SSTUL problem and the modeling of the problem allows to account for head-dependency as well as limited turbine restarts. In an operational context, a rolling-horizon scheme is used to implement the solutions. Every day, forecasts of inflows are available. From these, a scenario tree is constructed to represent the distribution of the inflows, then the optimization models are solved. The solution is implemented and the reservoir volumes are updated once the real realization of the inflows are known. Only the solution for the first node every day is retained, as new forecasts become available and that the process is repeated. The scenario tree generation method that is used requires input parameters, which are the number of stages, child node per stage as well as the aggregation of each stage.

To measure the benefits of using complex scenario tree structures, the whole rolling-horizon was modeled as a Blackbox optimization model, to find the scenario tree parameters that maximize the energy production throughout the rolling-horizon, for different values of the number of stages. Results are compared with scenario fans and they show that the decision taken at the first node every day is mostly influenced by the volume of inflows, rather than the structure of the scenario trees, which means that using scenario fans leads to good results and requires less computational time.

## 6.7 Notation

The following symbols are used in this paper :

$D$	=	number of stages ;
$E(h)$	=	energy produced per day $h$ with startups penalized ;
$h$	=	index of the rolling-horizon $h = (1, 2, \dots, 31)$ (days) ;
$LP(STG(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\phi}))$	=	loading problem function ;
$q$	=	index of the number of child nodes per stage $r = (1, 2, \dots, D - 1)$ ;
$r$	=	index of the aggregation per stage $r = (2, 3, \dots, D)$ ;
$RH(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}, D)$	=	blackbox function ;
$STG(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\phi})$	=	scenario tree generation function ;
$UC(LP(STG(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\phi})))$	=	unit commitment function.
$\alpha_q$	=	number of child nodes per stage $q$ ;
$\kappa_r$	=	aggregation of each stage $r$ (days) ; and
$\phi_h$	=	inflow scenarios for every day $h$ in the rolling-horizon.



## CHAPITRE 7 DISCUSSION GÉNÉRALE

Ce chapitre expose les travaux, soit les trois objectifs ayant mené à cette thèse.

Le premier objectif est de modéliser le problème de chargement et de répartition optimal, aussi dit à court terme, puis de le résoudre en ne considérant aucune incertitude dans le modèle d'optimisation, plus spécifiquement en développant un modèle déterministe. Le modèle à court terme est complexe car plusieurs inter-dépendances existent entre les variables du problème. La puissance produite par une turbine est une fonction non linéaire du débit turbiné et de la hauteur de chute nette. Or, la hauteur de chute nette est aussi une fonction non linéaire qui dépend, entre autres, du débit total. Chaque turbine a une efficacité différente et de plus, il est important de limiter les démarrages des turbines, car ils causent une usure prématurée de l'équipement. Ce premier modèle déterministe a mené à une modélisation du problème qui considère toutes les caractéristiques énumérées précédemment. Pour ce faire, une modélisation par combinaisons de turbines est proposée, et un algorithme de programmation dynamique permet de construire des surfaces de puissance maximale pour chaque centrale avant toute optimisation. Une méthode d'optimisation en deux phases permet de résoudre le modèle à court terme. La première phase, soit le problème de chargement, est un modèle non linéaire mixte en nombres entiers, et la deuxième phase, soit le problème de répartition, est un modèle linéaire en nombres entiers. Les résultats numériques démontrent que, comparativement à des décisions opérationnelles historiques, le modèle performe bien. De plus, une comparaison avec un modèle non linéaire mixte en nombres entiers en une phase est effectuée et le modèle en deux phases proposé permet d'obtenir des solutions réalisables en un temps de calcul très court, ce qui n'est pas le cas avec le modèle en une phase.

Le second objectif reprend la modélisation déterministe proposée, mais est étendue afin de considérer des apports incertains dans les réservoirs. Une méthode de génération d'arbres de scénarios, qui sont une représentation discrète des scénarios d'apports, est retenue afin de modéliser différents scénarios d'apports dans le modèle d'optimisation stochastique. La méthode consiste à minimiser la distance imbriquée à l'aide d'une méthode en deux étapes. La première étape génère un nouveau scénario d'apports en échantillonnant la distribution des scénarios d'apports et la deuxième étape modifie les valeurs d'apports dans les noeuds de l'arbre de scénarios en utilisant une méthode de descente de gradient stochastique. Ces étapes sont répétées jusqu'à ce que la convergence de la distance soit atteinte. L'équivalent déterministe d'un modèle stochastique, c'est-à-dire qu'un modèle déterministe est résolu à chaque noeud de l'arbre de scénarios, est utilisé pour la résolution. Un horizon roulant permet

de valider la méthode d'optimisation. Puisque les prévisions d'apports sont mises à jour quotidiennement, un arbre de scénarios est généré, le modèle d'optimisation est résolu, la solution du premier noeud seulement est implémentée, les volumes des réservoirs sont mis à jour avec la vraie réalisation des apports, puis le tout est relancé lorsque les prévisions sont mises à jour. Les résultats numériques démontrent que le modèle stochastique permet d'augmenter la production d'énergie, comparativement à l'utilisation du scénario médian des apports.

Le troisième objectif étudie la complexité nécessaire des arbres de scénarios utilisés dans le modèle d'optimisation stochastique. La méthode de génération d'arbres de scénarios nécessite des valeurs de paramètres d'entrée, plus précisément, le nombre d'étapes, le nombre de noeuds fils par étape ainsi que l'aggrégation de chaque étape. Puisqu'un horizon roulant est utilisé et que seule la solution du premier noeud est implémentée, nous proposons une méthode pour déterminer si un arbre de scénarios complexe est nécessaire ou si l'utilisation d'un peigne de scénarios est suffisant pour obtenir une bonne solution dans le modèle d'optimisation à court terme stochastique. Pour ce faire, un modèle d'optimisation boîte noire est proposé pour trouver les valeurs des paramètres d'entrée de la méthode de génération des arbres de scénarios qui permet de maximiser l'énergie produite de l'horizon roulant au complet. Les résultats numériques démontrent que, dans ce cas précis, des peignes de scénarios sont suffisants pour résoudre le modèle d'optimisation dans un temps de calcul court.

## CHAPITRE 8 CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

Ce chapitre conclut les travaux ayant mené à cette thèse. Les limitations des solutions proposées sont exposées, ainsi que des améliorations futures à ces travaux de recherche.

Les modèles d'optimisation et les modélisations proposées dans ces travaux se basent sur certaines hypothèses. D'abord, la modélisation déterministe qui est proposée est une méthode d'optimisation en deux phases. La première phase résout un modèle non linéaire mixte en nombres entiers. Or, nous avons démontré que la matrice des coefficients des contraintes est totalement unimodulaire, ce qui implique que la résolution de la relaxation linéaire des variables binaires permet d'obtenir une solution entière. Cette propriété fait en sorte qu'il est possible de résoudre un modèle non linéaire continu afin d'obtenir une solution entière, au lieu d'un modèle non linéaire mixte en nombres entiers. En pratique, cela signifie que les temps de calculs sont grandement réduits. Seules les contraintes hydriques sont considérées dans cette modélisation, alors qu'en pratique, il est important d'inclure les contraintes de demande en énergie, surtout dans le contexte des alumineries. Les salles de cuves nécessitent énormément d'énergie pour fonctionner et lorsqu'un problème survient et qu'une salle de cuve est brusquement arrêtée, la gestion du réseau hydroélectrique est à revoir dans l'immédiat. De plus, des contrats avec Hydro-Québec obligent Rio Tinto à fournir une demande en énergie de leur part dans un délai très court. L'inclusion de ces contraintes dans la modélisation proposée ne respecte plus l'hypothèse que la matrice des coefficients des contraintes est totalement unimodulaire et un modèle continu ne peut plus être utilisé pour résoudre la première phase de la méthode d'optimisation. Or, dans un contexte opérationnel, elles sont essentielles. La perte de l'hypothèse que la matrice des coefficients des contraintes est totalement unimodulaire implique la résolution d'un problème difficile à résoudre s'il n'est pas relaxé. La solution simple à ce problème est de résoudre un problème non linéaire mixte en nombres entiers, mais la taille du problème fait en sorte qu'il est très difficile à résoudre et que le temps de résolution est trop élevé. La modélisation proposée dans cette thèse devra être revue ou, du moins, la méthode de résolution.

Les fonctions de valeur de l'eau, qui valorisent l'eau restant à la fin de l'horizon de planification dans les réservoirs, sont très importantes en optimisation court terme puisqu'elles empêchent l'optimisation de vider le réservoir. Pour cette thèse, seule une fonction de valeur de l'eau pour le réservoir du Lac-St-Jean, qui est le plus gros en terme de volume, est utilisée. Deux constatations découlent de cette approche :

1. Les fonctions valeur de l'eau utilisées pour le réservoir du Lac-St-Jean sont obtenues par

un algorithme de programmation dynamique stochastique qui résout un modèle d'optimisation moyen terme. Les fonctions obtenues dépendent du volume du réservoir du Lac-St-Jean et dans le modèle à moyen terme, sept discrétisations des apports naturels sont effectuées. Les fonctions sont utilisées dans la thèse, mais il n'y a aucune validation des fonctions. L'impact de la sensibilité de ces fonctions, c'est-à-dire le nombre de discrétisations des apports, les dépendances entre réservoirs et autres, sur la solution de l'optimisation court terme n'est pas étudié.

2. Pour les réservoirs Chute-du-Diable et Chute-Savane, une contrainte de réservoir plein à la fin de l'horizon de planification est imposée pour empêcher de vider les réservoirs. En pratique, ces réservoirs nécessitent aussi des fonctions valeur de l'eau, mais pour les besoins de la thèse cette hypothèse permet d'obtenir des résultats réalistes.

Ainsi, la complexité nécessaire dans le modèle d'optimisation à moyen terme pour obtenir une bonne solution au modèle d'optimisation à court terme doit être étudiée. Par exemple, plusieurs variables hydrologiques peuvent être utilisées dans les modèles à moyen terme et la façon dont elles affectent la solution du modèle à court terme n'est pas claire.

Les prévisions d'apports qui sont utilisées dans cette thèse sont basées sur les prévisions de précipitations déterministes d'Environnement Canada. L'historique des prévisions est ensuite utilisé pour construire des scénarios de précipitations, basé sur les vraies réalisations de précipitations selon les prévisions. Un modèle hydrologique permet finalement d'obtenir des scénarios d'apports de réservoirs. Les prévisions sont très importantes afin d'obtenir de bons résultats dans les modèles d'optimisation à court terme. Seule cette méthode de génération d'apports est utilisée dans cette thèse et il serait intéressant de valider d'autres méthodes pour générer ces apports afin de quantifier leur impact sur la solution du modèle à court terme.

Dans le même ordre d'idées, une seule méthode de génération d'arbres de scénarios est utilisée dans cette thèse. Plusieurs méthodes de génération d'arbres de scénarios existent et il s'agit d'un domaine de recherche en soi. Puisque le sujet de cette thèse n'est pas d'étudier les méthodes de génération d'arbres de scénarios mais d'utiliser une méthode flexible permettant de générer des structures d'arbres différentes, nous avons utilisé une seule méthode. Il serait intéressant de comparer les résultats obtenus dans cette thèse avec la génération d'arbres par minimisation de la distance imbriquée avec, par exemple, SCENRED, une méthode de réduction pour la génération d'arbres de scénarios.

Concernant l'optimisation des paramètres des arbres de scénarios, des comparaisons avec d'autres solveurs d'optimisation boîte noire permettraient de valider la performance de NOMAD. Dans la thèse, nous avons montré que l'utilisation de peignes de scénarios est suffisante

pour obtenir de bons résultats et que le temps de calcul est grandement diminué. Par contre, si un autre solveur permet d'obtenir des résultats dans un temps beaucoup plus court, d'autres tests pourraient être effectués. Dans la méthodologie proposée, l'algorithme d'optimisation boîte noire génère une nouvelle structure d'arbre de scénarios optimisée pour chaque série de données. Par contre, en pratique, les réalisations d'apports ne sont pas connues à l'avance et le choix de la structure d'arbres de scénarios est complexe, puisqu'elle doit être choisie avant de connaître les réalisations d'apports. Une piste de solution pourrait être de minimiser la variance de la fonction objectif de plusieurs structure d'arbres, par exemple.

Évidemment, dans le but d'avoir un modèle stochastique à court terme opérationnel, il est nécessaire d'ajouter les centrales hydroélectriques manquantes au modèle. Cela nécessite le calcul des surfaces de puissance maximale avec un algorithme de programmation dynamique, puis d'ajuster un modèle polynomial aux surfaces créées afin de les utiliser comme fonction objectif dans le modèle d'optimisation à court terme. Aussi, dans cette thèse, le temps de déplacement de l'eau entre les centrales est négligé puisqu'elles sont situées à proximité. Cependant, avec l'ajout de toutes les centrales, le temps de déplacement doit être considéré puisque certaines centrales sont éloignées.

Finalement, pour les ingénieurs de Rio Tinto qui éventuellement utiliseraient ces modèles d'optimisation, il serait intéressant de développer un outil d'analyse post-optimale pour les mises hors tension des groupes. Cet outil pourrait assister les ingénieurs lorsque des modifications au plan de production doivent être effectuées. Le but ne serait pas de développer un plan de maintenance des turbines, mais plutôt un outil d'analyse de l'impact des changements de turbines sur la production d'énergie et l'alimentation des alumineries.

## RÉFÉRENCES

- [1] “Environment Canada prevision models”, [http://collaboration.cmc.ec.gc.ca/cmc/CMOI/product\\_guide/docs/changes\\_f.html](http://collaboration.cmc.ec.gc.ca/cmc/CMOI/product_guide/docs/changes_f.html), Accessed : 2015-08-21.
- [2] *XPRESS Optimization Suite*, Fair Isaac Corporation (FICO). [www.fico.com/en/products/fico-xpress-optimization-suite/](http://www.fico.com/en/products/fico-xpress-optimization-suite/).
- [3] E. K. Aasgård, G. S. Andersen, S.-E. Fleten, et D. Haugstvedt, “Evaluating a stochastic-programming-based bidding model for a multireservoir system”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 29, no. 4, pp. 1748–1757, July 2014. DOI : 10.1109/TPWRS.2014.2298311
- [4] S. Alarie, C. Audet, V. Garnier, S. Le Digabel, et L.-A. Leclaire, “Snow water equivalent estimation using blackbox optimization”, *Pacific Journal of Optimization*, vol. 9, no. 1, pp. 1–21, 2013.
- [5] H. Aoudjit, M.-S. Ouali, et C. Audet, “Replacement scheduling of a fleet of hydroelectric generators : A case study.” *International Journal of Performability Engineering*, vol. 10, no. 6, 2014.
- [6] R. Apparigliato, “Règles de décision pour la gestion du risque : Application à la gestion hebdomadaire de la production électrique.” Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique X, 2008.
- [7] A. Arce, T. Ohishi, et S. Soares, “Optimal dispatch of generating units of the itaipu hydroelectric plant”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 17, no. 1, pp. 154–158, 2002. DOI : 10.1109/59.982207
- [8] C. Audet, “A survey on direct search methods for blackbox optimization and their applications”, dans *Mathematics Without Boundaries : Surveys in Interdisciplinary Research*, M. P. Pardalos et M. T. Rassias, édés. New York : Springer, 2014, pp. 31–56. DOI : 10.1007/978-1-4939-1124-0\_2
- [9] C. Audet et J. E. Dennis Jr., “A pattern search filter method for nonlinear programming without derivatives”, *SIAM Journal on Optimization*, vol. 14, no. 4, pp. 980–1010, 2004. DOI : 10.1137/S105262340138983X

- [10] —, “Mesh adaptive direct search algorithms for constrained optimization”, *SIAM Journal on Optimization*, vol. 17, no. 1, pp. 188–217, Jan. 2006.
- [11] —, “A progressive barrier for derivative-free nonlinear programming”, *SIAM Journal on Optimization*, vol. 20, no. 1, pp. 445–472, 2009. DOI : 10.1137/070692662
- [12] C. Audet, K.-C. Dang, et D. Orban, “Optimization of algorithms with OPAL”, *Mathematical Programming Computation*, vol. 6, no. 3, pp. 233–254, 2014. DOI : 10.1007/s12532-014-0067-x
- [13] F. Babonneau, J.-P. Vial, et R. Apparigliato, *Uncertainty and Environmental Decision Making : A Handbook of Research and Best Practice*. Boston, MA : Springer US, 2010, ch. Robust Optimization for Environmental and Energy Planning, pp. 79–126. DOI : 10.1007/978-1-4419-1129-2\_3
- [14] S. Bahrami, C. Tribes, C. Devals, T. C. Vu, et F. Guibault, “Multi-fidelity shape optimization of hydraulic turbine runner blades using a multi-objective mesh adaptive direct search algorithm”, *Applied Mathematical Modelling*, vol. 40, no. 2, pp. 1650 – 1668, 2016. DOI : <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2015.09.008>. En ligne : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X1500493X>
- [15] B. H. Bakken et T. Bjorkvoll, “Hydropower unit start-up costs”, dans *Power Engineering Society Summer Meeting, 2002 IEEE*, vol. 3, 2002, pp. 1522–1527 vol.3. DOI : 10.1109/PESS.2002.1043646
- [16] M. M. Belsnes, O. Wolfgang, T. Follestad, et E. K. Aasgård, “Applying successive linear programming for stochastic short-term hydropower optimization”, *Electric Power Systems Research*, vol. 130, pp. 167 – 180, 2016. DOI : <http://dx.doi.org/10.1016/j.epsr.2015.08.020>
- [17] P. Beraldi, A. Violi, N. Scordino, et N. Sorrentino, “Short-term electricity procurement : A rolling horizon stochastic programming approach”, *Applied Mathematical Modelling*, vol. 35, no. 8, pp. 3980 – 3990, 2011. DOI : <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2011.02.002>
- [18] D. P. Bertsekas, *Dynamic programming and optimal control*. Athena Scientific Belmont, MA, 1995, vol. 1, no. 2.
- [19] J. R. Birge et F. Louveaux, *Introduction to stochastic programming*. Springer, 2011. DOI : 10.1007/978-1-4614-0237-4

- [20] P. Bonami, L. T. Biegler, A. R. Conn, G. Cornuéjols, I. E. Grossmann, C. D. Laird, J. Lee, A. Lodi, F. Margot, N. Sawaya, et A. Wächter, “An algorithmic framework for convex mixed integer nonlinear programs”, *Discrete Optimization*, vol. 5, no. 2, pp. 186–204, 2008.
- [21] A. J. Booker, J. E. Dennis, P. D. Frank, D. B. Serafini, et V. Torczon, *Optimization Using Surrogate Objectives on a Helicopter Test Example*. Boston, MA : Birkhäuser Boston, 1998, pp. 49–58. DOI : 10.1007/978-1-4612-1780-0\_3. En ligne : [http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-1780-0\\_3](http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-1780-0_3)
- [22] T. K. Boomsma, N. Juul, et S.-E. Fleten, “Bidding in sequential electricity markets : The nordic case”, *European Journal of Operational Research*, vol. 238, no. 3, pp. 797–809, 2014.
- [23] A. Borghetti, C. D’Ambrosio, A. Lodi, et S. Martello, “An MILP approach for short-term hydro scheduling and unit commitment with head-dependent reservoir”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 23, no. 3, pp. 1115–1124, 2008.
- [24] S. P. Bradley, A. C. Hax, et T. L. Magnanti, “Dynamic programming”, dans *Applied Mathematical Programming*. Addison-Wesley Publishing Company, 1977, ch. 11, pp. 320–362.
- [25] C. Brisson, M.-A. Boucher, et M. Latraverse, “Illustration of the added value of using a multi-site calibration and correction approach to reconstruct natural inflows and inter-catchment transfer flow : a case study”, *Canadian Journal of Civil Engineering*, vol. 42, no. 5, pp. 342–352, 2015. DOI : 10.1139/cjce-2014-0270
- [26] P. Carpentier, G. Gohen, J. C. Culioli, et A. Renaud, “Stochastic optimization of unit commitment : a new decomposition framework”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 11, no. 2, pp. 1067–1073, May 1996. DOI : 10.1109/59.496196
- [27] P.-L. Carpentier, M. Gendreau, et F. Bastin, “Long-term management of a hydroelectric multireservoir system under uncertainty using the progressive hedging algorithm”, *Water Resources Research*, vol. 49, no. 5, pp. 2812–2827, 2013. DOI : 10.1002/wrcr.20254. En ligne : <http://dx.doi.org/10.1002/wrcr.20254>
- [28] J. P. S. Catalao, S. J. P. S. Mariano, V. M. F. Mendes, et L. A. F. M. Ferreira, “Scheduling of head-sensitive cascaded hydro systems : A nonlinear approach”, *Power Systems, IEEE Transactions on*, vol. 24, no. 1, pp. 337–346, 2009. DOI : 10.1109/TPWRS.2008.2005708



- [29] J. P. S. Catalão, H. M. I. Pousinho, et V. M. F. Mendes, “Scheduling of head-dependent cascaded hydro systems : Mixed-integer quadratic programming approach”, *Energy Conversion and Management*, vol. 51, no. 3, pp. 524 – 530, 2010. DOI : <http://dx.doi.org/10.1016/j.enconman.2009.10.017>
- [30] —, “Hydro energy systems management in portugal : Profit-based evaluation of a mixed-integer nonlinear approach”, *Energy*, vol. 36, no. 1, pp. 500 – 507, 2011. DOI : <http://dx.doi.org/10.1016/j.energy.2010.10.014>
- [31] G. W. Chang, M. Aganagic, J. G. Waight, J. Medina, T. Burton, S. Reeves, et M. Christoforidis, “Experiences with mixed integer linear programming based approaches on short-term hydro scheduling”, *IEEE Transactions on power systems*, vol. 16, no. 4, pp. 743–749, 2001.
- [32] P. Côté, D. Haguma, R. Leconte, et S. Krau, “Stochastic optimisation of Hydro-Quebec hydropower installations : a statistical comparison between SDP and SSDP methods”, *Canadian Journal of Civil Engineering*, vol. 38, no. 12, pp. 1427–1434, 2011. DOI : 10.1139/111-101
- [33] P. Côté et R. Leconte, “Comparison of stochastic optimization algorithms for hydropower reservoir operation with ensemble streamflow prediction”, *Journal of Water Resources Planning and Management*, vol. 142, no. 2, 2016. DOI : 10.1061/(ASCE)WR.1943-5452.0000575
- [34] D. De Ladurantaye, M. Gendreau, et J.-Y. Potvin, “Optimizing profits from hydroelectricity production”, *Computers and Operations Research*, vol. 36, no. 2, pp. 499 – 529, 2009. DOI : 10.1016/j.cor.2007.10.012
- [35] J. Dupačová, G. Consigli, et S. W. Wallace, “Scenarios for multistage stochastic programs”, *Annals of Operations Research*, vol. 100, no. 1-4, pp. 25–53, 2000. DOI : 10.1023/A:1019206915174
- [36] P. L. Evans, A. Castellazzi, S. Bozhko, et C. M. Johnson, “Automatic design optimisation for power electronics modules based on rapid dynamic thermal analysis”, dans *Power Electronics and Applications (EPE), 2013 15th European Conference on*. IEEE, 2013, pp. 1–10.
- [37] B. A. Faber et J. R. Stedinger, “Reservoir optimization using sampling sdp with ensemble streamflow prediction (esp) forecasts”, *Journal of Hydrology*, vol. 249, no. 1, pp. 113–133, 2001.

- [38] Y. Feng et S. M. Ryan, “Scenario reduction for stochastic unit commitment with wind penetration”, dans *PES General Meeting / Conference Exposition, 2014 IEEE*, July 2014, pp. 1–5. DOI : 10.1109/PESGM.2014.6939138
- [39] E. Fermi et N. Metropolis, “Numerical solution of a minimum problem”, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, USA, Los Alamos Unclassified Report LA-1492, 1952.
- [40] E. C. Finardi et E. L. Da Silva, “Unit commitment of single hydroelectric plant”, *Electric Power Systems Research*, vol. 75, no. 2-3, pp. 116–123, 2005.
- [41] E. C. Finardi et E. L. da Silva, “Solving the hydro unit commitment problem via dual decomposition and sequential quadratic programming”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 21, no. 2, pp. 835–844, 2006. DOI : 10.1109/TPWRS.2006.873121
- [42] E. C. Finardi et M. R. Scuzziato, “Hydro unit commitment and loading problem for day-ahead operation planning problem”, *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, vol. 44, no. 1, pp. 7–16, 2013.
- [43] E. C. Finardi et M. R. Scuzziato, “A comparative analysis of different dual problems in the lagrangian relaxation context for solving the hydro unit commitment problem”, *Electric power systems researchs*, vol. 107, pp. 221–229, 2014.
- [44] E. C. Finardi, F. Y. K. Takigawa, et B. H. Brito, “Assessing solution quality and computational performance in the hydro unit commitment problem considering different mathematical programming approaches”, *Electric Power Systems Research*, vol. 136, pp. 212 – 222, 2016. DOI : <http://dx.doi.org/10.1016/j.epsr.2016.02.018>
- [45] S.-E. Fleten et T. K. Kristoffersen, “Short-term hydropower production planning by stochastic programming”, *Computers and Operations Research*, vol. 35, no. 8, pp. 2656 – 2671, 2008. DOI : 10.1016/j.cor.2006.12.022
- [46] T. Follestad, O. Wolfgang, et M. M. Belsnes, “An approach for assessing the effect of scenario tree approximations in stochastic hydropower scheduling models”, dans *Proc. of the 17th Power System Computation Conference*, 2011, pp. 271–277.
- [47] O. B. Fosso, A. Gjelsvik, A. Haugstad, B. Mo, et I. Wangensteen, “Generation scheduling in a deregulated system. the norwegian case”, *Power Systems, IEEE Transactions on*, vol. 14, no. 1, pp. 75–81, 1999. DOI : 10.1109/59.744487

- [48] R. Fourer, D. M. Gay, et B. W. Kernighan, *AMPL : A Modeling Language for Mathematical Programming*, 2e éd. Pacific Grove, California : Thomson/Brooks/Cole, 2003.
- [49] J. Garcia-Gonzalez et G. A. Castro, “Short-term hydro scheduling with cascaded and head-dependent reservoirs based on mixed-integer linear programming”, dans *Power Tech Proceedings, 2001 IEEE Porto*, vol. 3, 2001, p. 6 pp. DOI : 10.1109/PTC.2001.964906
- [50] S. Goulet, “Modélisation de la torche dans les turbines hydrauliques”, Mémoire, École polytechnique de Montréal, <http://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk2/ftp01/MQ33139.pdf>, Décembre 1997.
- [51] I. Griva, S. G. Nash, et A. Sofer, *Linear and nonlinear optimization*. Siam, 2009.
- [52] N. Grove-Kuska, H. Heitsch, et W. Römisch, “Scenario reduction and scenario tree construction for power management problems”, dans *Power Tech Conference Proceedings, 2003 IEEE Bologna*, vol. 3, June 2003, p. 7 pp. Vol.3. DOI : 10.1109/PTC.2003.1304379
- [53] P. Hansen et N. Mladenovic, “Variable neighborhood search : principles and applications”, *European Journal of Operational Research*, vol. 130, no. 3, pp. 449–467, 2001.
- [54] H. Heitsch et W. Römisch, “Scenario tree reduction for multistage stochastic programs”, *Computational Management Science*, vol. 6, no. 2, pp. 117–133, 2009. DOI : 10.1007/s10287-008-0087-y
- [55] R. Hooke et T. A. Jeeves, “Direct search solution of numerical and statistical problems”, *J. ACM*, vol. 8, no. 2, pp. 212–229, Avr. 1961. DOI : 10.1145/321062.321069
- [56] K. Høyland et S. W. Wallace, “Generating scenario trees for multistage decision problems”, *Management Science*, vol. 47, no. 2, pp. 295–307, 2001. DOI : 10.1287/mnsc.47.2.295.9834
- [57] K. Høyland, M. Kaut, et S. W. Wallace, “A heuristic for moment-matching scenario generation”, *Computational Optimization and Applications*, vol. 24, no. 2, pp. 169–185, 2003. DOI : 10.1023/A:1021853807313
- [58] M. C. Jones, “The performance of kernel density functions in kernel distribution function estimation”, *Statistics & Probability Letters*, vol. 9, no. 2, pp. 129 – 132, 1990.

DOI : [http://dx.doi.org/10.1016/0167-7152\(92\)90006-Q](http://dx.doi.org/10.1016/0167-7152(92)90006-Q)

- [59] M. Kadowaki, T. Ohishi, L. S. A. Martins, et S. Soares, “Short-term hydropower scheduling via an optimization-simulation decomposition approach”, dans *2009 IEEE Bucharest PowerTech : Innovative Ideas Toward the Electrical Grid of the Future*, 2009.
- [60] M. Kaut, “A copula-based heuristic for scenario generation”, *Computational Management Science*, vol. 11, no. 4, pp. 503–516, 2014. DOI : 10.1007/s10287-013-0184-4
- [61] M. Kaut et S. W. Wallace, “Evaluation of scenario-generation methods for stochastic programming”, série Stochastic Programming E-Print Series. Institut für Mathematik, 2003, no. 14.
- [62] A. J. King et S. W. Wallace, “Scenario-tree generation : With michal kaut”, dans *Modeling with Stochastic Programming*, série Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer New York, 2012, pp. 77–102. DOI : 10.1007/978-0-387-87817-1\_4
- [63] S. Le Digabel, “Algorithm 909 : NOMAD : Nonlinear optimization with the MADS algorithm”, *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol. 37, no. 4, pp. 44 :1–44 :15, 2011. DOI : 10.1145/1916461.1916468. En ligne : <http://dx.doi.org/10.1145/1916461.1916468>
- [64] Q. Li, T. Liu, et X. Li, “A new optimized dispatch method for power grid connected with large-scale wind farms”, *Dianwang Jishu/Power System Technology*, vol. 37, no. 3, pp. 733–739, 2013.
- [65] X. Li, T. Li, J. Wei, G. Wang, et W. W.-G. Yeh, “Hydro unit commitment via mixed integer linear programming : A case study of the three gorges project, china”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 29, no. 3, pp. 1232–1241, May 2014. DOI : 10.1109/TPWRS.2013.2288933
- [66] R. M. Lima, M. G. Marcovecchio, A. Q. Novais, et I. E. Grossmann, “On the computational studies of deterministic global optimization of head dependent short-term hydro scheduling”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 28, no. 4, pp. 4336–4347, Nov 2013.
- [67] G. Liuzzi, S. Lucidi, et F. Rinaldi, “Derivative-free methods for mixed-integer constrained optimization problems”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 164, no. 3, pp. 933–965, 2015.

- [68] S. P. Lloyd, “Least squares quantization in PCM”, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 28, p. 129–137, 1982.
- [69] T. Lohmann, A. S. Hering, et S. Rebennack, “Spatio-temporal hydro forecasting of multireservoir inflows for hydro-thermal scheduling”, *European Journal of Operational Research*, vol. 255, no. 1, pp. 243 – 258, 2016. DOI : <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2016.05.011>
- [70] C. Ma, “Short term hydropower dispatching optimization of cascaded hydropower stations based on two-stage optimization”, dans *2010 2nd International Conference on Industrial and Information Systems, IIS 2010*, vol. 1, 2010, pp. 230–233.
- [71] M. E. P. Maceira, L. A. Terry, F. S. Costa, J. M. Damázio, et A. C. G. Melo, “Chain of optimization models for setting the energy dispatch and spot price in the brazilian system”. Proceedings of the Power System Computation Conference - 14th PSCC, Sevilla, Spain, 2002.
- [72] MATLAB, *version 8.5.0.197613 (R2015a)*. Natick, Massachusetts : The MathWorks Inc., 2015.
- [73] M. Minville, D. Cartier, C. Guay, L.-A. Leclaire, C. Audet, S. Le Digabel, et J. Merleau, “Improving process representation in conceptual hydrological model calibration using climate simulations”, *Water Resources Research*, vol. 50, no. 6, pp. 5044–5073, 2014. DOI : [10.1002/2013WR013857](https://doi.org/10.1002/2013WR013857)
- [74] S. Moazeni, B. Defourny, et A. H. Hajimiragha, “Risk-sensitive stochastic optimization for storage operation management”, dans *Smart Energy Grid Engineering (SEGE), 2015 IEEE International Conference on*, Aug 2015, pp. 1–6. DOI : [10.1109/SEGE.2015.7324608](https://doi.org/10.1109/SEGE.2015.7324608)
- [75] G. Morin et P. Paquet, “Modèle hydrologique CEQUEAU”, INRS, Centre Eau, Terre et Environnement, Rapp. tech. R926, 2007.
- [76] J. Nocedal et S. Wright, *Numerical Optimization*, série Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer New York, 2006. En ligne : <https://books.google.ca/books?id=VbHYoSye1FcC>
- [77] T. Ohishi, E. Santos, A. Arce, M. Kadowaki, M. Cicogna, et S. Soares, “Comparison of two heuristic approaches to hydro unit commitment”, dans *Power Tech, 2005 IEEE Russia*, 2005, pp. 1–7. DOI : [10.1109/PTC.2005.4524670](https://doi.org/10.1109/PTC.2005.4524670)

- [78] A. R. L. Oliveira, S. Soares, et L. Nepomuceno, “Short term hydroelectric scheduling combining network flow and interior point approaches”, *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, vol. 27, no. 2, pp. 91 – 99, 2005.
- [79] S. O. Orero et M. R. Irving, “A genetic algorithm modelling framework and solution technique for short term optimal hydrothermal scheduling”, *Power Systems, IEEE Transactions on*, vol. 13, no. 2, pp. 501–518, 1998. DOI : 10.1109/59.667375
- [80] J. I. Pérez-Díaz, J. R. Wilhelmi, et L. A. Arévalo, “Optimal short-term operation schedule of a hydropower plant in a competitive electricity market”, *Energy Conversion and Management*, vol. 51, no. 12, pp. 2955 – 2966, 2010. DOI : <http://dx.doi.org/10.1016/j.enconman.2010.06.038>
- [81] G. Ch. Pflug et A. Pichler, “Convergence of the smoothed empirical process in nested distance”, série Stochastic Programming E-Print Series, J. L. Higle, W. Römisch, et S. Sen, édés. Institut für Mathematik, 2015, no. 4.
- [82] —, “Dynamic generation of scenario trees”, *Computational Optimization and Applications*, pp. 1–28, 2015. DOI : 10.1007/s10589-015-9758-0
- [83] A. B. Philpott, M. Craddock, et H. Waterer, “Hydro-electric unit commitment subject to uncertain demand”, *European Journal of Operational Research*, vol. 125, no. 2, pp. 410–424, 2000. DOI : 10.1016/S0377-2217(99)00172-1
- [84] M. J. D. Powell, *A Direct Search Optimization Method That Models the Objective and Constraint Functions by Linear Interpolation*. Dordrecht : Springer Netherlands, 1994, pp. 51–67. DOI : 10.1007/978-94-015-8330-5\_4. En ligne : [http://dx.doi.org/10.1007/978-94-015-8330-5\\_4](http://dx.doi.org/10.1007/978-94-015-8330-5_4)
- [85] T. D. Santo et A. S. Costa, “Hydroelectric unit commitment for power plants composed of distinct groups of generating units”, *Electric Power Systems Research*, vol. 137, pp. 16 – 25, 2016. DOI : <http://dx.doi.org/10.1016/j.epsr.2016.03.037>
- [86] D. Schwanenberg, F. M. Fan, S. Naumann, J. I. Kuwajima, R. A. Montero, et A. Assis dos Reis, “Short-term reservoir optimization for flood mitigation under meteorological and hydrological forecast uncertainty”, *Water Resources Management*, vol. 29, no. 5, pp. 1635–1651, 2015. DOI : 10.1007/s11269-014-0899-1
- [87] D. W. Scott, *Multivariate density estimation : theory, practice, and visualization*. John Wiley & Sons, 2015.

- [88] S. Séguin, S.-E. Fleten, A. Pichler, P. Côté, et C. Audet, “Stochastic short-term hydro-power planning with inflow scenario trees”, *European Journal of Operational Research*, 2015, submitted.
- [89] —, “Stochastic short-term hydropower planning with inflow scenario trees”, *Cahiers du GERAD*, no. G-2015-97, 2015, révisé Avril 2016.
- [90] S. Séguin, C. Audet, et P. Côté, “Scenario tree modeling for stochastic short-term hydropower operations planning”, *Cahiers du GERAD*, no. G-2016-54, 2016.
- [91] S. Séguin, P. Côté, et C. Audet, “Self-scheduling short-term unit commitment and loading problem”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 31, no. 1, pp. 133–142, Jan 2016. DOI : 10.1109/TPWRS.2014.2383911
- [92] A. Shapiro, “Analysis of stochastic dual dynamic programming method”, *European Journal of Operational Research*, vol. 209, no. 1, pp. 63 – 72, 2011. DOI : <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2010.08.007>
- [93] Z. K. Shawwash, T. K. Siu, et S. O. Russell, “The BC hydro short term scheduling optimization”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 15, no. 3, pp. 1125 – 1131, 2000.
- [94] B. W. Silverman, *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, série Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability. Taylor & Francis, 1986.
- [95] T. G. Siqueira, M. Zambelli, M. Cicogna, M. Andrade, et S. Soares, “Stochastic dynamic programming for long term hydrothermal scheduling considering different streamflow models”, dans *Probabilistic Methods Applied to Power Systems, 2006. PMAPS 2006. International Conference on*, June 2006, pp. 1–6. DOI : 10.1109/PMAPS.2006.360203
- [96] T. K. Siu, G. A. Nash, et Z. K. Shawwash, “A practical hydro, dynamic unit commitment and loading model”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 16, no. 2, pp. 301–306, May 2001. DOI : 10.1109/59.918302
- [97] T. Sousa, J. A. Jardini, et R. A. De Lima, “Hydroelectric power plant unit efficiencies evaluation and unit commitment”, dans *2007 IEEE Lausanne POWERTECH, Proceedings*, 2007, pp. 1368–1373.
- [98] S. Takriti, J. R. Birge, et E. Long, “A stochastic model for the unit commitment problem”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 11, no. 3, pp. 1497–1508, Aug 1996. DOI : 10.1109/59.535691

- [99] R. Taktak et C. D'Ambrosio, "An overview on mathematical programming approaches for the deterministic unit commitment problem in hydro valleys", *Energy Systems*, pp. 1–23, 2016. DOI : 10.1007/s12667-015-0189-x
- [100] J. A. Tejada-Guibert, S. A. Johnson, et J. R. Stedinger, "Comparison of two approaches for implementing multireservoir operating policies derived using stochastic dynamic programming", *Water Resources Research*, vol. 29, no. 12, pp. 3969–3980, 1993. DOI : 10.1029/93WR02277
- [101] Tomia, "Hydroelectric dam", [En ligne], [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hydroelectric\\_dam-letters.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hydroelectric_dam-letters.svg), 2008.
- [102] V. Torczon, "On the convergence of pattern search algorithms", *SIAM Journal on Optimization*, vol. 7, no. 1, pp. 1–25, 1997. DOI : 10.1137/S1052623493250780
- [103] W. van Ackooij, R. Henrion, A. Möller, et R. Zorgati, "Joint chance constrained programming for hydro reservoir management", *Optimization and Engineering*, vol. 15, no. 2, pp. 509–531, 2013. DOI : 10.1007/s11081-013-9236-4
- [104] Y. Vardanyan et M. Amelin, "A sensitivity analysis of short-term hydropower planning using stochastic programming", dans *2012 IEEE Power and Energy Society General Meeting*, July 2012, pp. 1–7. DOI : 10.1109/PESGM.2012.6344769
- [105] A. Wächter et L. T. Biegler, "On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming", *Mathematical Programming*, vol. 106, no. 1, pp. 25–57, 2006. DOI : 10.1007/s10107-004-0559-y
- [106] T. Wildi, *Électrotechnique troisième édition*. Les presses de l'université Laval, 2003, p.951.
- [107] L. A. Wolsey, *Integer Programming*. Wiley, 1998, p.39. DOI : 0-471-28366-5
- [108] B. Xu, P.-A. Zhong, R. C. Zambon, Y. Zhao, et W. W.-G. Yeh, "Scenario tree reduction in stochastic programming with recourse for hydropower operations", *Water Resources Research*, vol. 51, no. 8, pp. 6359–6380, 2015. DOI : 10.1002/2014WR016828
- [109] J. Yi, J. W. Labadie, et S. Stitt, "Dynamic optimal unit commitment and loading in hydropower systems", *Journal of Water Resources Planning and Management*, vol. 129, no. 5, pp. 388–398, 2003.



- [110] T. Zhao, D. Yang, X. Cai, J. Zhao, et H. Wang, “Identifying effective forecast horizon for real-time reservoir operation under a limited inflow forecast”, *Water Resources Research*, vol. 48, no. 1, 2012. DOI : [10.1029/2011WR010623](https://doi.org/10.1029/2011WR010623)