

Titre: Modélisation agrégée de chauffe-eau électriques commandés par champ moyen pour la gestion des charges dans un réseau
Title: Modélisation agrégée de chauffe-eau électriques commandés par champ moyen pour la gestion des charges dans un réseau

Auteur: Romain Losseau
Author:

Date: 2016

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Losseau, R. (2016). Modélisation agrégée de chauffe-eau électriques commandés par champ moyen pour la gestion des charges dans un réseau [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.
Citation: <https://publications.polymtl.ca/2175/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/2175/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Michel Gendreau, & Roland P. Malhamé
Advisors:

Programme: génie énergétique
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÉLISATION AGRÉGÉE DE CHAUFFE-EAU ÉLECTRIQUES COMMANDÉS PAR
CHAMP MOYEN POUR LA GESTION DES CHARGES DANS UN RÉSEAU

ROMAIN LOSSEAU

DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ES SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)

JUIN 2016

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

MODÉLISATION AGRÉGÉE DE CHAUFFE-EAU ÉLECTRIQUES COMMANDÉS PAR
CHAMP MOYEN POUR LA GESTION DES CHARGES DANS UN RÉSEAU

présenté par : LOSSEAU Romain

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dument accepté par le jury d'examen constitué de :

M. ZHU Guchuan, Doctorat, président

M. MALHAMÉ Roland P., Ph. D, membre et directeur de recherche

M. GENDREAU Michel, Ph. D, membre et codirecteur de recherche

M. ANJOS Miguel F., Ph. D, membre

REMERCIEMENTS

Je remercie sincèrement mon directeur Roland Malhamé pour ses conseils et sa patience, ainsi que mon co-directeur Michel Gendreau. Merci également à Arman Kizilkale pour sa disponibilité, ainsi qu'à tous ceux qui ont auront participé au projet.

RÉSUMÉ

La transition énergétique qui a débuté récemment appelle de grands changements dans les modes de consommation et de gestion de l'énergie. Dans cet optique les « smart grids » sont amenés à jouer un rôle prépondérant via notamment des techniques de stockage intelligent. Le projet SmartDesc initié en 2014 s'inscrit dans cette démarche en proposant une gestion innovante de la charge en stockant de l'énergie sous forme thermique dans les chauffe-eau existants dans les foyers résidentiels.

L'algorithme réalisé dans ce cadre s'appuie sur la théorie des jeux à champ moyens, qui permet l'implémentation décentralisée d'une trajectoire optimale des températures des chauffe-eau afin de lisser la demande électrique à l'échelle d'un quartier. Pour l'instant cette théorie ne tient pas compte des contraintes en puissance et en température inhérents à l'élément chauffant du réservoir et nécessaires à la sécurité de l'utilisateur. Une trajectoire qui violerait ces contraintes ne serait alors pas réalisable et n'induirait pas le lissage de la charge escompté.

Ce mémoire présente une méthode de détection de la non-réalisabilité d'une trajectoire fondée sur l'analyse numérique des équations de Kolmogorov associées au système de chauffe-eau commandés, et propose une façon de la corriger de manière à la rendre faisable sous contraintes.

Ainsi, dans un premier temps, un modèle par équations aux dérivées partielles des chauffe-eau sous contraintes est exposé. Un schéma numérique est alors mis en place pour sa simulation, validé puis appliqué à la commande à champ moyen. Sont comparés alors le contrôle à champ moyen avec et sans contraintes, et mis en évidence les non-respects de la trajectoire en cas de violation des contraintes. Une dernière partie traite d'une méthode d'accélération de la commande à champ moyen et d'une méthode de correction de la trajectoire de consigne dans le but d'élargir le plus possible l'ensemble des trajectoires réalisable.

ABSTRACT

The ongoing energy transition is about to entail important changes in the way we use and manage energy. In this view, smart grids are expected to play a significant part through the use of intelligent storage techniques. Initiated in 2014, the SmartDesc project follows this trend to create an innovative load management program by exploiting the thermal storage associated with electric water heaters existing in residential households.

The device control algorithms rely on the recent theory of mean field games to achieve a decentralized control of the water heaters temperatures producing an aggregate optimal trajectory, designed to smooth the electric demand of a neighborhood. Currently, this theory does not include power and temperature constraints due to the tank heating system or necessary for the user's safety and comfort. Therefore, a trajectory violating these constraints would not be feasible and would not induce the forecast load smoothing.

This master's thesis presents a method to detect the non-feasability, of a target trajectory based on the Kolmogorov equations associated with the controlled electric water heaters and suggests a way to correct it so as to make it achievable under constraints.

First, a partial differential equations based model of the water heaters under temperature constraints is presented. Subsequently, a numerical scheme is developed to simulate it, and applied to the mean field control. The results of the mean field control with and without constraints are compared, and non-feasabilities of the target trajectory are highlighted upon violations. The last part of the thesis is dedicated to developing an accelerated version of the mean field and a method of correcting the target trajectory so as to enlarge as much as possible the set of achievable profiles.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	III
RÉSUMÉ.....	IV
ABSTRACT	V
TABLE DES MATIÈRES	V
LISTE DES TABLEAUX.....	VIII
LISTE DES FIGURES	IX
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	XII
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
CHAPITRE 2 MODÉLISATION DU COMPORTEMENT DES CHAUFFE-EAU	8
2.1 Dynamique sans contraintes et évolution probabiliste	8
2.1.1 Dynamique sans contraintes.....	8
2.1.2 Evolution des distributions en température	10
2.2 Ajout d'hypothèses et de contraintes sur l'espace d'état et la commande	11
2.3 Propagation de la distribution en température des chauffe-eau	12
2.3.1 Première analyse et définitions	13
2.3.2 Equations aux dérivées partielles	16
2.3.3 Diverses remarques	19
CHAPITRE 3 RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE PROPAGATION	21
3.1 Méthode de résolution numérique.....	21
3.1.1 Classification des équations	21
3.1.2 Schéma upwind-downwind	23
3.1.3 Schéma de Lax-Wendroff	24
3.1.4 Méthode retenue.....	25

3.1.5	Fusions et créations de masses de probabilité	26
3.2	Validation des schémas	27
3.2.1	Simulation des distributions par méthode de Monte-Carlo.....	28
3.2.2	Résultats	29
CHAPITRE 4 APPLICATION À LA SIMULATION DE LA COMMANDE À CHAMP MOYEN SOUS CONTRAINTES		38
4.1	La commande à champ moyen	38
4.2	Méthode pour la propagation des distributions	41
4.3	Exemple.....	43
4.4	Le mode accéléré.....	46
4.5	Gestion des divergences	51
CHAPITRE 5 CONVERGENCE VERS UN PROFIL DE CONSIGNES RÉALISABLE.....		52
5.1	Génération de températures de consigne par optimisation du lissage de la charge électrique	52
5.2	Production d'un profil réalisable.....	55
5.2.1	Première version.....	55
5.2.2	Version corrigée	60
5.2.3	Version accélérée	67
CHAPITRE 6 CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS.....		71
BIBLIOGRAPHIE		73

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1: Comparaison des schémas Upwind-Downwind et Lax-Wendroff.....25

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1: Variabilité de la demande électrique au cours d'une journée de mi-décembre sur le réseau belge (www.auto-consommation.be)	2
Figure 1.2: Architecture du projet SmartDesc	5
Figure 2.1: Densités et masses de probabilités sur les domaines a et b	13
Figure 2.2: accumulation en x_{min} des trajectoires de chauffe-eau soumis à $u = 0$	15
Figure 3.1: Comparaison du schéma (étoiles rouge) et de Monte-Carlo (colonnes) à $t=0$	30
Figure 3.2: Comparaison du schéma et de Monte-Carlo à $t=0.024$	30
Figure 3.3: Comparaison du schéma et de Monte-Carlo à $t=0.04$	31
Figure 3.4: Comparaison du schéma et de Monte-Carlo à $t=0.11$	31
Figure 3.5: Comparaison des $P_{x_{min}}$ des deux simulations au cours du temps.....	32
Figure 3.6: Comparaison du schéma et de Monte-Carlo à $t=0$	34
Figure 3.7: Comparaison du schéma et de Monte-Carlo à $t=0.019$	34
Figure 3.8: Comparaison du schéma et de Monte-Carlo à $t=0.037$	35
Figure 3.9: Comparaison du schéma et de Monte-Carlo à $t=0.06$	35
Figure 3.10: Comparaison du schéma et de Monte-Carlo à $t=0.075$	36
Figure 3.11: Comparaison des masses des deux simulations au cours du temps.....	37
Figure 4.1: Comparaison du champ moyen avec (orange) et sans contraintes (bleu) (t en minutes)	44
Figure 4.2: Comparaison des distributions des chauffe-eau en température, sans puis avec contraintes	45
Figure 4.3: Trajectoires sous contraintes de chaque composante conditionnelle	46
Figure 4.4: Exemple de trajectoire lente du champ moyen avec et sans contraintes	47
Figure 4.5: Allure de u_{ff} lorsque $steadyState(x_0) > x_0$	49

Figure 4.6: Comparaison du champ moyen sans contrainte (bleu) au champ moyen en mode accéléré (orange)	50
Figure 5.1: Comparaison du champ moyen avec et sans contraintes pour une consigne sur 24 heures (96 segments de 15 minutes) produite pour 200 chauffe-eau	53
Figure 5.2 : Lissage de la demande électrique par 200 chauffe-eau	55
Figure 5.3 : Trajectoire réalisable obtenue après 7 itérations	57
Figure 5.4 : Trajectoires de consigne données par l'optimisateur à chaque itération	58
Figure 5.5 : Lissages de la demande prévus par l'optimisateur obtenus à chaque itération	59
Figure 5.6 : Réduction de la variation d'amplitude de la demande électrique à chaque itération ..	59
Figure 5.7 : Comparaison de la réponse du champ moyen contraint à la 1ere trajectoire de l'optimisateur et de la réponse à la trajectoire corrigée correspondante (pour 200 chauffe-eau)	61
Figure 5.8 : Comparaison du champ moyen contraint et de sa correction à la seconde itération ..	62
Figure 5.9 : Trajectoires de consigne données par l'optimisateur à chaque itération	62
Figure 5.10 : Lissages de la demande obtenus à chaque itération	63
Figure 5.11 : Réduction de la variation d'amplitude de la demande électrique à chaque itération	63
Figure 5.12 : Champ moyen contraint et sa correction à la première itération	64
Figure 5.13 : Champ moyen contraint et sa correction à la dixième et dernière itération	65
Figure 5.14 : Trajectoires de consigne données par l'optimisateur à chaque itération	65
Figure 5.15 : Lissages de la demande obtenus à chaque itération	66
Figure 5.16 : Réduction de l'amplitude de la demande électrique à chaque itération	66
Figure 5.17 : Champ moyen contraint accéléré et sa correction à la première itération	67
Figure 5.18 : Puissance normalisée développée par le champ moyen sans contraintes et le champ moyen accéléré sous contraintes	67
Figure 5.19 : Trajectoires de consigne données par l'optimisateur à chaque itération	68

Figure 5.20 : Lissages de la demande obtenus à chaque itération.....68

Figure 5.21 : Réduction de la variation d'amplitude de la demande électrique à chaque itération69

Figure 5.22 : Comparaison du lissage prévu par l'optimisateur au lissage réel par champ moyen accéléré de la demande à la dernière itération.....69

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

CFL Courant-Friedrichs-Lowy

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Depuis plusieurs années, la prise de conscience progressive du changement climatique et de l'augmentation des besoins énergétiques dans les pays émergents, via notamment les rapports du GIEC (Groupe Intergouvernemental sur l'Evolution du Climat), a accéléré la mise en place au niveau mondial d'une politique de transition énergétique décidée notamment lors des dernières COPs (Conference of the Parties). Cette transition se traduit entre autres par une augmentation de l'efficacité énergétique, l'intégration d'une fraction de plus en plus importante de sources d'énergie renouvelables au réseau et une réduction des émissions carbone; des objectifs chiffrés sont fixés régulièrement dans ces domaines (pour le Québec, voir le dossier Politique énergétique 2030 sur politiqueenergetique.gouv.qc.ca).

Dans ce cadre, le développement des « smart grids » est en plein essor. Terme à la signification très large, il regroupe les technologies informatiques agissant sur le réseau de manière à optimiser la production, distribution et consommation d'énergie en vue d'améliorer l'efficacité énergétique de l'ensemble. En particulier, un des points essentiels est le contrôle de la charge électrique sur le réseau. Différentes techniques comme l'effacement ou le stockage intelligent d'énergie rendent possible un certain contrôle de la demande nette en électricité ce qui permet d'éviter des pics de consommation, de tirer un meilleur parti des énergies intermittentes en présence (typiquement les énergies renouvelables comme le solaire ou l'éolien) et réduire le risque de coupures de courant dues à des saturations du réseau.

Une approche particulière consiste à munir le réseau de batteries qui stockent l'énergie en situation de faible demande puis la redistribue lorsque désiré, c'est-à-dire en cas de forte consommation ou lorsque le prix de revente de l'énergie dépasse le seuil de rentabilité. En général, on cherche à lisser la courbe de charge sur le réseau, un profil de demande plus uniforme présentant de nombreux avantages en termes d'efficacité de génération et de stabilité du réseau. En effet, Il faut rappeler que le réseau n'est stable que si la production électrique est égale à la consommation à chaque instant. On voit donc aisément que la puissance installée doit pouvoir répondre à la consommation maximale que l'on atteindra sur le réseau. Ainsi, à consommation énergétique totale égale, plus on aplatis la demande en électricité, plus on réduit la consommation maximale, ce qui limite les investissements dans des centrales supplémentaires

qui ne serviraient qu'en cas de pics de demande. De plus, des augmentations rapides de puissance nécessitent la mise en marche de centrales capables de démarrer rapidement et de s'adapter aux variations. Pour cela ces centrales fonctionnent souvent aux hydrocarbures, ce que l'on cherche à éviter pour des raisons écologiques. A contrario, un creux dans la consommation a pour effet d'écartier certaines centrales de leur point de fonctionnement optimal, occasionnant baisse du rendement et hausse des coûts de production. Enfin, cette technique permet d'utiliser au maximum les énergies renouvelables. En effet, ces dernières, souvent intermittentes et aléatoires, forcent en temps normal le réseau à s'adapter en permanence. En présence de batteries, cette énergie est stockée et consommée plus tard. Pour résumer, plus la courbe de charge est lisse, plus l'énergie est propre et bon marché.

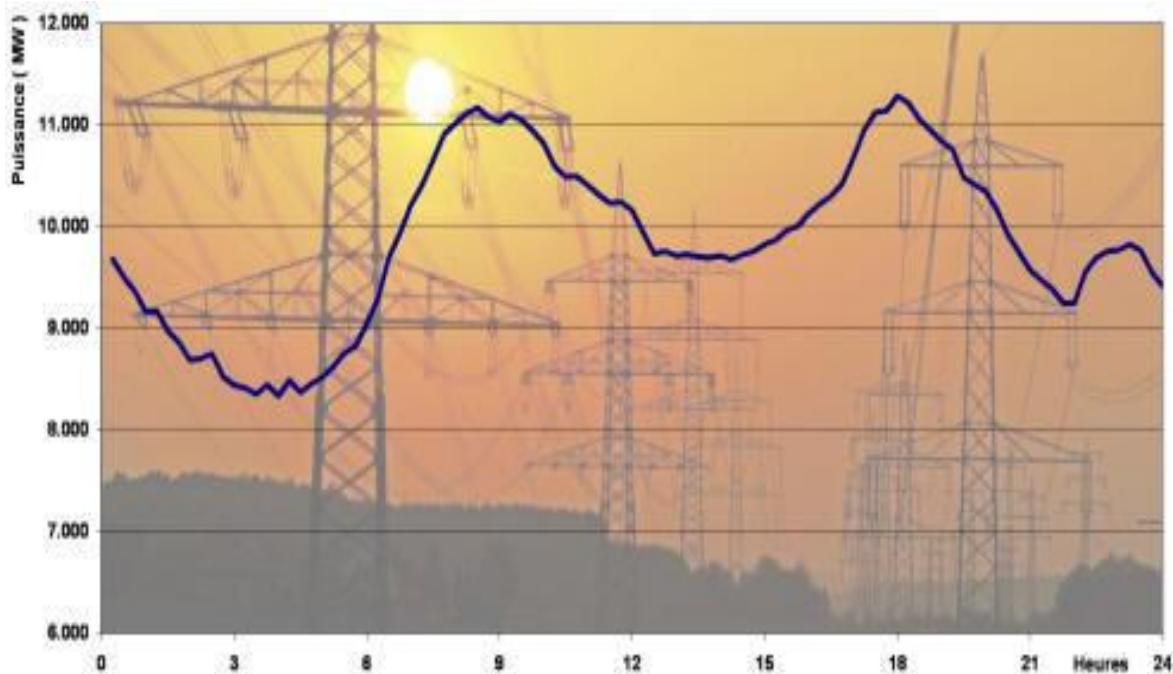


Figure 1.1: Variabilité de la demande électrique au cours d'une journée de mi-décembre sur le réseau belge (www.auto-consommation.be)

Cependant les batteries ont un coût, perdent en efficacité avec le temps et les métaux rares comme le lithium nécessaires à leur fabrication risquent fort de manquer éventuellement. Une façon de palier ces problèmes est d'utiliser des moyens de stockage déjà existants sur le réseau :

les chauffe-eau présents dans les foyers résidentiels et les maisons elles-mêmes. En effet, tout comme une batterie convertit l'électricité en énergie chimique, on stockerait ici l'énergie sous forme thermique dans les pièces de la maison ou dans l'eau du chauffe-eau. De plus leur capacité est comparable aux batteries classiques. Par exemple, l'énergie que peut stocker un chauffe-eau de 200L en élevant sa température de 10°C s'élève à environ 2,2 kWh. Une différence notable cependant est que les chauffe-eau et maisons sont soumis aux interactions avec l'habitant et ne peuvent être contrôlés à volonté pour des conditions de sécurité et de confort de l'utilisateur.

Afin d'exploiter cette idée, le potentiel de stockage énergétique des foyers résidentiels fait l'objet de recherches depuis plusieurs années et des modèles sont développés pour simuler leur contrôle. En 1985, Chong et Malhamé proposent un modèle agrégé de chauffe-espaces et de la propagation de leur distribution en température par des équations de Fokker-Planck pour l'étude de ses propriétés dynamiques, en particulier lors d'une reprise après une coupure de courant. Un article de Laurent et Malhamé (1995) traite de manière similaire d'un modèle agrégé de chauffe-eau à contrôle thermostatique, la différence essentielle avec les chauffe-espaces étant rattachée à la modélisation des aspects stochastique de telles charges; en effet, les processus aléatoires de gain et de pertes de chaleur dus à l'activité des habitants dans une résidence sont modélisés par un mouvement brownien (modèle de diffusion), alors que les processus d'extraction d'eau chaude par les clients sont modélisés par des chaînes de Markov. Ces études et d'autres (voir Alvarez et al. 1992) soulignent toutes l'intérêt de mettre à contribution ces réservoirs d'énergie thermique dans des programmes de gestion de la charge.

Dans la continuité de ce premier travail d'analyse, des méthodes de réduction des pics de puissance sont abordées. D'abord est utilisé le modèle thermostatique (commande 0 ou 1) pour une gestion optimale de la charge à l'aide d'une méthode de génération de colonnes (voir Laurent et al. 1995). Puis, plus récemment les problématiques de commande optimale ont été envisagées, notamment via la théorie des jeux à champs moyens (Lasry et Lions, 2007), (Huang et al. 2006). Le principe ici est alors de contrôler l'évolution de la température moyenne d'une large population de chauffe-eau via une commande personnalisée pour chaque individu, le but étant de faire participer chaque chauffe-eau de manière équitable à l'effort global, mais également en tenant compte de son état d'énergie et du niveau de sollicitation au moment où la commande est

appliquée. Cette application champ moyen à une population de chauffe-eau est réalisée en 2013 (voir Malhamé et Kizilkale, 2013), ses avantages sont alors mis en lumière, nous y reviendrons.

C'est pour mettre en œuvre cette méthode que s'est créé en 2014 à l'Ecole Polytechnique de Montréal et au GERAD (Groupe d'Etudes et de Recherche en Analyse des Décisions) le projet SmartDesc dans lequel s'inscrit ce mémoire. Le but recherché est de produire un algorithme optimisant le lissage d'une courbe de demande nette au niveau d'un poste de distribution en contrôlant par champ moyen la température des chauffe-eau des foyers. Pour cela, l'algorithme s'organise autour de l'architecture suivante. Un niveau supérieur dispose d'un modèle agrégé hautement simplifié des chauffe-eau qu'il considère comme une grosse batterie et fournit, par optimisation mathématique, et à la lumière de prédictions de l'évolution des charges non contrôlées et des contributions renouvelables, des consignes de températures à atteindre en moyenne par l'ensemble des chauffe-eau. L'acheminement de ces consignes se fait à travers le réseau de communication considéré comme un réseau de type RF-mesh. Pour terminer, chaque chauffe-eau interprète localement sa commande en fonction de son état d'énergie, de demande d'eau, et compte tenu de la consigne du niveau supérieur.

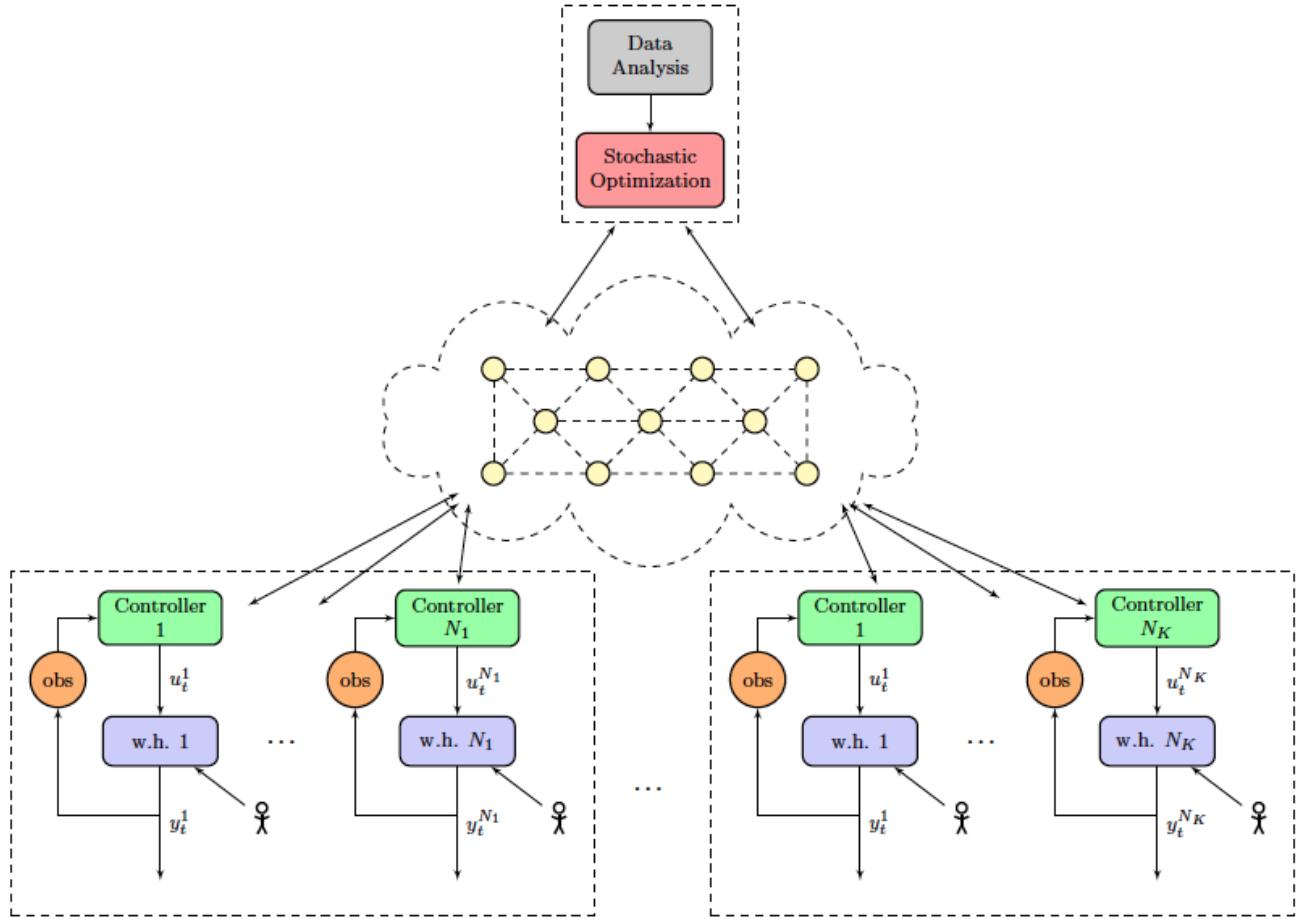


Figure 1.2: Architecture du projet SmartDesc

Les atouts d'une telle commande sont multiples :

- Tout d'abord, l'implémentation des contrôles se fait au niveau local. Ainsi, contrairement à un contrôle centralisé, on n'a plus besoin que d'une puissance de calcul et d'une bande passante réduites.
- Les échanges d'information avec le niveau supérieur dictant les consignes sont largement diminués. En effet, la théorie des jeux à champ moyen tire parti de la loi des grands nombres qui, dans le cas d'une large population de chauffe-eau, rend prévisible les comportements moyens, ce qui en principe nous dispense d'effectuer des observations très fréquentes sur le système.

- Les perturbations de consigne que doit subir l'utilisateur sont minimisées. Sans aller trop loin dans la manière dont ceci est réalisé, car cela nous écarterait de notre objectif principal, il suffira de souligner que les chauffe-eau minimisent une fonction coût qui pénalise simultanément l'écart entre la température de l'individu et leur température initiale d'une part, et d'autre part, l'écart entre la température moyenne de ces chauffe-eau avec la température de consigne. Ce dernier étant là sous la forme d'un coût intégral, la pression sur la température moyenne augmente jusqu'à ce que cette dernière atteigne la consigne. Un autre terme concurrent permet que l'évolution de la température moyenne vers la consigne mette à contribution les chauffe-eau sans toutefois trop les écarter de leur température initiale. La commande à champ moyen est donc un compromis optimal entre la poursuite de la température de consigne et le niveau de perturbation imposé à chaque individu.

Le projet s'est clôturé en 2016 sur de bons résultats (voir Kizilkale et al. 2015) qui illustrent les avantages de la commande à champ moyen évoqués plus haut. Néanmoins, un problème subsiste : le contrôleur à champ moyen ne tient pas compte des contraintes en température et en puissance que se doit de respecter chaque chauffe-eau. En effet, d'une part la résistance électrique ne peut fournir qu'une puissance limitée à l'eau du réservoir et ne peut évidemment pas la refroidir, d'autre part il faut toujours maintenir la température de l'eau en dessous de 60°C pour éviter les risques de brûlure et au dessus de 50°C pour empêcher la prolifération de bactéries. Ces contraintes sont prises en compte au niveau macroscopique lorsque le niveau supérieur effectue l'optimisation du lissage de la demande; elles sont alors appliquées au macro-chauffe-eau considéré par l'optimisateur, qui soulignons-le également, est considéré soumis au processus agrégé d'extraction d'eau de l'ensemble des chauffe-eau. Cependant, ce macro chauffe-eau ne représente que la *température moyenne* de l'ensemble des chauffe-eau, et considère a priori qu'il est toujours possible de chauffer au maximum de puissance agrégée, ou encore de refroidir fournissant une puissance nulle. Or certains chauffe-eau situés aux frontières de température permises pourraient ne pas pouvoir participer à l'effort global. Ainsi, il est toujours possible (et on l'observe) que lors de l'implémentation de la commande à champ moyen, certains chauffe-eau aient pour ordre de violer les contraintes en se rendant à des températures supérieures à 60°C par exemple, bien que le mouvement global (température moyenne) reste dans le cadre des contraintes. Ils seraient alors « bloqués » à 60°C et la température moyenne resterait

inférieure à la température de consigne, rendant le lissage prévu par l'optimisateur irréalisable. De plus cet écart fausserait les calculs d'optimisation suivants. Le travail que nous présentons dans ce mémoire est alors double :

- Rendre compte de la trajectoire du champ moyen sous contraintes pour détecter les consignes irréalisables.
- Proposer en conséquence une correction du profil de consignes émises par le niveau supérieur pour obtenir des consignes réalisables sous contraintes.

Il s'agira donc en premier lieu de construire un modèle agrégé de chauffe-eau sous contraintes et de la propagation de leur distribution en température. On se basera en autres sur les travaux effectués précédemment (Laurent et Malhamé, 1994) (Malhamé et Boukas, 1992) pour la modélisation de masses de probabilité aux températures limites.

On présentera ensuite une méthode numérique pour la simulation de trajectoires sous contraintes qui sera appliquée à l'implémentation des consignes de l'optimisateur, ce qui permettra d'observer les éventuelles non-réalisations des consignes.

Enfin, nous exposerons plusieurs techniques de correction des consignes ou encore d'accélération de la commande à champ moyen. En particulier une méthode consistera à utiliser la simulation pour fournir à l'optimisateur des contraintes plus fortes lorsque les consignes ne sont pas atteintes, l'obligeant ainsi à revoir ses objectifs. L'idée étant qu'après plusieurs itérations de ce processus, il converge vers un profil réalisable.

CHAPITRE 2 MODÉLISATION DU COMPORTEMENT DES CHAUFFE-EAU

On se propose dans ce chapitre de fournir un modèle pour la prédiction de la distribution de la température des chauffe-eau soumis à une commande quelconque tout en prenant en compte les contraintes évoquées en introduction. Pour cela nous modéliserons d'abord leur dynamique puis en déduirons les équations régissant leur répartition.

2.1 Dynamique sans contraintes et évolution probabiliste

Un modèle simple sans contrainte est d'abord présenté avant d'introduire celui incluant les contraintes.

2.1.1 Dynamique sans contraintes

Malhamé (1990) a présenté un modèle stochastique pour la dynamique de la charge d'un chauffe-eau. Celui-ci définit l'état du chauffe-eau comme étant $[x(t), q(t)]$ où $x(t)$ est sa température au temps t (variable continue) et $q(t)$ le taux normalisé (0 ou 1) d'extraction d'eau exercée sur le chauffe-eau (variable discrète).

Établie à partir d'un bilan énergétique sur le réservoir (représenté sur la Figure 2.1), la dynamique de la température $x(t)$ s'écrit comme suit :

$$C \frac{dx}{dt} = -a'(x(t) - x_a(t)) - C_e Q q(t) (x(t) - x_e) + u(x, q, t) \quad (2.1)$$

où les paramètres et variables sont définies comme suit :

C : capacité thermique du réservoir

$x(t)$: température de l'eau dans le réservoir au temps t

a' : résistance thermique des parois du réservoir

$x_a(t)$: température ambiante au temps t

C_e : capacité thermique volumique de l'eau

Q : débit lors d'une extraction d'eau

$q(t)$: le taux normalisé (0 ou 1) d'extraction d'eau exercé

x_e : température de l'eau réinjectée dans le réservoir après extraction

$u(x, q, t)$: puissance du chauffage (pouvant dépendre de x, q et t)

Dynamique que l'on peut alors réécrire de la façon suivante :

$$\frac{dx}{dt} = a_0 x(t) + b_0 u_0(x, t) + c_0(t) \quad \text{si } q(t) = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x(t) + b_1 u_1(x, t) + c_1(t) \quad \text{si } q(t) = 1 \quad (2.3)$$

Le processus de demande d'eau $q(t)$ est régi par le comportement des utilisateurs et n'est pas stationnaire. Malhamé (1990) propose une modélisation sous forme de chaîne de Markov à 2 états (1 en cas de demande, 0 sinon), induisant donc un taux d'extraction constant par morceaux aux occurrences et durées de tirage d'eau aléatoires. On définit alors les probabilités de transitions de l'état $q(t)$ par :

$$Pr(q(t + h) = 1 | q(t) = 0) = \alpha_0(t) h + o(h) \quad (2.4)$$

$$Pr(q(t + h) = 0 | q(t) = 1) = \alpha_1(t) h + o(h) \quad (2.5)$$

où

$\alpha_0(t)$: fonction positive représentant le taux de transition de l'état « tirage d'eau » à l'état « non tirage »

$\alpha_1(t)$: fonction positive représentant le taux de transition de l'état « non tirage » à l'état « tirage »

et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$ h étant un accroissement positif du temps

2.1.2 Évolution des distributions en température

On présente ici les équations aux dérivées partielles mises en place par Malhamé (1990) qui régissent le comportement des distributions en température des chauffe-eau lorsqu'ils sont soumis à la dynamique évoquée plus haut.

En considérant le processus $[x(t), q(t)]$, commençons par définir sur l'espace des réels :

$F_0(\lambda, t) = \Pr(x(t) < \lambda, q(t) = 0)$ fonction de distribution en température des chauffe-eau dans l'état $q = 0$.

$F_1(\lambda, t) = \Pr(x(t) < \lambda, q(t) = 1)$ fonction de distribution en température des chauffe-eau dans l'état $q = 1$.

$f_0(\lambda, t), f_1(\lambda, t)$ les fonctions de densité correspondantes.

Alors Malhamé (1990) montre que ces distributions suivent les équations de Kolmogorov suivantes :

$$\frac{\partial F_{0a}}{\partial t} = r_{0a}(x, t) \frac{\partial F_{0a}}{\partial x} - \alpha_0(t)F_{0a}(x, t) + \alpha_1(t)F_{1a}(x, t) + c_{0a}(x, t)$$

$$\frac{\partial F_{1a}}{\partial t} = r_{1a}(x, t) \frac{\partial F_{1a}}{\partial x} - \alpha_1(t)F_{1a}(x, t) + \alpha_0(t)F_{0a}(x, t) + c_{1a}(x, t)$$

où

$$r_{0a}(x, t) = -(a_0 x + b_0 u_{max} + c_0(t))$$

$$r_{1a}(x, t) = -(a_1 x + b_1 u_{max} + c_1(t))$$

Avec les conditions aux frontières du domaine d'étude:

$$\forall t \quad F_0(-\infty, t) = F_1(-\infty, t) = 0$$

$$\forall t \quad F_0(+\infty, t) = F_1(+\infty, t) = 1$$

2.2 Ajout d'hypothèses et de contraintes sur l'espace d'état et la commande

Pour mieux rendre compte de ce qu'il se passe en réalité, le modèle final inclut des contraintes sur la température $x(t)$ et le chauffage $u(x, q, t)$.

Le taux de chauffage est en effet limité physiquement en puissance par les caractéristiques de l'élément chauffant, et il est de plus impossible de refroidir le chauffe-eau. Une première contrainte sera donc d'imposer *des bornes* sur la commande.

On définit alors pour toute commande u la commande \hat{u} telle que :

$$\begin{aligned}\hat{u}(x, t) &= u(x, t) && \text{si } 0 < u(x, t) < u_{max} \\ &= u_{max} && \text{si } u(x, t) > u_{max} \\ &= 0 && \text{si } u(x, t) < 0\end{aligned}$$

En outre, pour des raisons de confort et de sécurité de l'utilisateur, nous définissons une « zone de confort » par l'intervalle $[x_{min}, x_{max}]$. Il est nécessaire de conserver la température dans cette zone autant que faire se peut malgré les tirages d'eau imprévisibles. Lorsque la commande pousse un chauffe-eau à en sortir, l'idée est de forcer la commande à maintenir la température aux bornes de la zone de confort quand cela est possible. De plus, on fait l'hypothèse que notre chauffage n'est pas assez puissant pour contrebalancer la perte énergétique par extraction d'eau lorsque le processus de demande d'eau est actif. Parmi les chauffe-eau tentant de quitter la zone, il ne sera donc possible de maintenir que ceux dans l'état $q = 0$. Enfin, les chauffe-eau dont la température se trouve inférieure à x_{min} ont pour consigne de remonter le plus rapidement possible en chauffant à puissance maximale u_{max} . On remarquera que les températures ne peuvent en aucun cas être supérieures à x_{max} dans cette modélisation.

Plus formellement, on définit pour toute commande u la commande u' telle que :

$$u'(x, t) = u(x, t) \quad \text{si } x_{min} < x < x_{max}$$

$$\begin{aligned}
&= \max \left(-\frac{(a_0 x + c_0(t))}{b_0}, u(x, t) \right) \quad \text{si } x = x_{min} \text{ et } q(t) = 0 \\
&= \min \left(-\frac{(a_0 x + c_0(t))}{b_0}, u(x, t) \right) \quad \text{si } x = x_{max} \text{ et } q(t) = 0 \\
&= u_{max} \quad \text{si } x < x_{min}
\end{aligned}$$

La nouvelle dynamique contrainte s'écrit alors simplement :

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= a_0 x(t) + b_0 \widehat{u_0}'(x, t) + c_0(t) \quad \text{si } q(t) = 0 \\
\frac{dx}{dt} &= a_1 x(t) + b_1 \widehat{u_1}'(x, t) + c_1(t) \quad \text{si } q(t) = 1
\end{aligned}$$

Dernière hypothèse, on considérera $x_a(t)$ comme constante dans le temps. Par conséquent $c_0(t)$ et $c_1(t)$ le sont aussi.

Enfin, dans ce modèle, la puissance est fixée à u_{max} lorsque la température est inférieure à x_{min} . Etant données les dynamiques en mode 0 et 1, il existe alors une température $x_{sing} = \min(-\frac{(b_1 u_{max} + c_1)}{a_1}, -\frac{(b_0 u_{max} + c_0)}{a_0})$ en dessous de laquelle la variation de température d'un chauffe-eau ne peut être que positive. La température est ainsi toujours supérieure à la température x_{sing} . Finalement, tout chauffe-eau voit sa température comprise entre x_{sing} et x_{max} , et non plus sur l'espace des réels comme précédemment.

2.3 Propagation de la distribution en température des chauffe-eau

Cette section met en place les équations aux dérivées partielles auxquelles sont soumises les distributions en température des chauffe-eau sous contraintes. Une première analyse est nécessaire à leur modélisation.

2.3.1 Première analyse et définitions

Dans un premier temps, construisons l'espace des températures sur lequel seront définies les distributions. En suivant la remarque formulée plus haut, il est clair que l'on peut limiter le domaine de définition à l'intervalle $[x_{sing}, x_{max}]$. De plus, la discontinuité de la commande en x_{min} rend nécessaire la division de ce domaine en deux espaces (a et b) comme sur la figure 2.1.

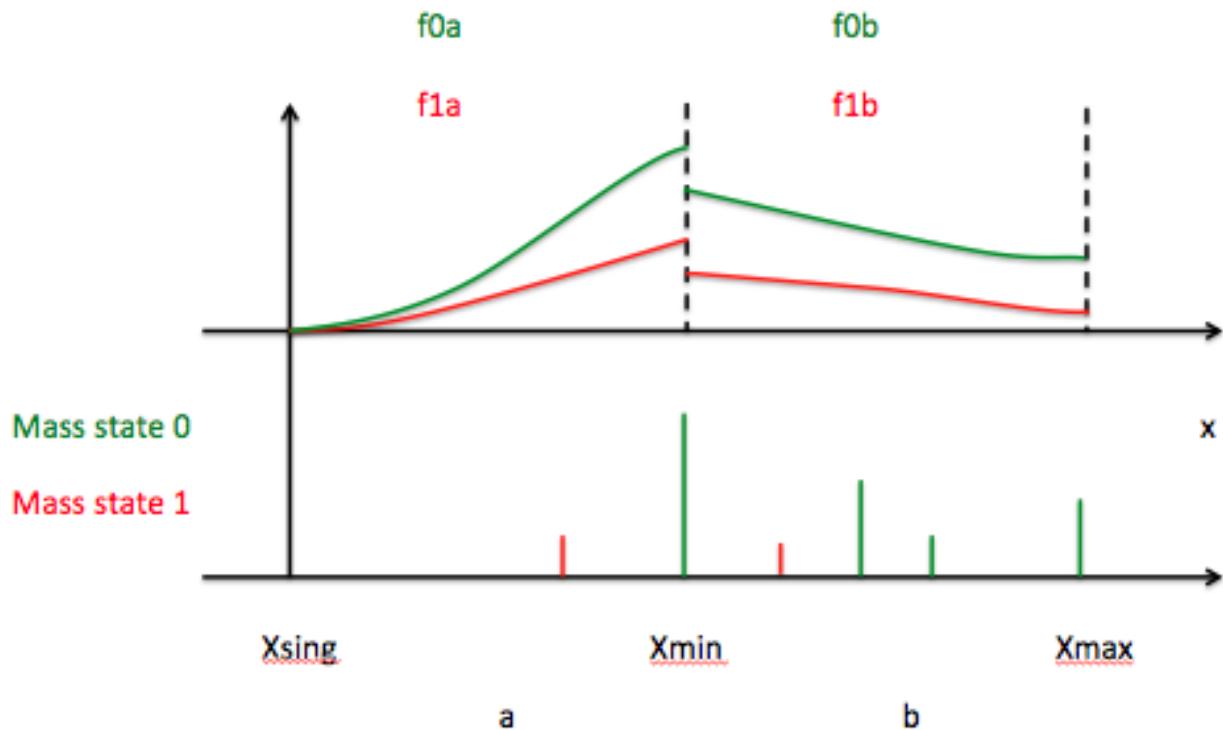


Figure 2.1: Densités et masses de probabilités sur les domaines a et b

Compte tenu de cet espace de définition, et en considérant le processus $[x(t), q(t)]$, appelons comme dans l'article de Malhamé (1990) les fonctions de distributions hybrides suivantes :

$F_0(\lambda, t) = \Pr(x(t) < \lambda, q(t) = 0)$ fonction de distribution en température des chauffe-eau dans l'état $q = 0$. On notera respectivement $F_{0a}(\lambda, t)$ et $F_{0b}(\lambda, t)$ cette distribution selon que $\lambda \leq x_{min}$ et $\lambda \geq x_{min}$.

$F_1(\lambda, t) = \Pr(x(t) < \lambda, q(t) = 1)$ fonction de distribution en température des chauffe-eau dans l'état $q = 1$. On notera respectivement $F_{1a}(\lambda, t)$ et $F_{1b}(\lambda, t)$ cette distribution selon que $\lambda \leq x_{min}$ et $\lambda \geq x_{min}$.

$f_{0a}(\lambda, t), f_{1a}(\lambda, t), f_{0b}(\lambda, t)$ et $f_{1b}(\lambda, t)$ les fonctions de densité correspondantes.

Dans notre modèle contraint en température, elles ne sont malheureusement pas suffisantes à la description complète de la répartition des chauffe-eau. En effet, dans le cadre de la dynamique contrainte établie ci-dessus, considérons par exemple un groupe de chauffe-eau aux températures initiales quelconque dans l'état 0 soumis à la même commande de consigne $u = 0$. La dynamique et les contraintes en températures et en puissance prévoient alors une accumulation progressive de tout ces chauffe-eau à la température x_{min} , si bien que ce qui pouvait être décrit comme une distribution en température à l'état initial devient la somme d'une distribution et d'une masse de probabilité croissant jusqu'à 1 avec le temps. Et le même raisonnement vaut pour x_{max} . Il faut donc se résoudre à considérer, en s'inspirant de Malhamé et Bourkas (1992), les masses de probabilité suivantes :

$P_{x_{min}}$: valeur de la masse de probabilité située en x_{min}

$P_{x_{max}}$: valeur de la masse de probabilité située en x_{max}

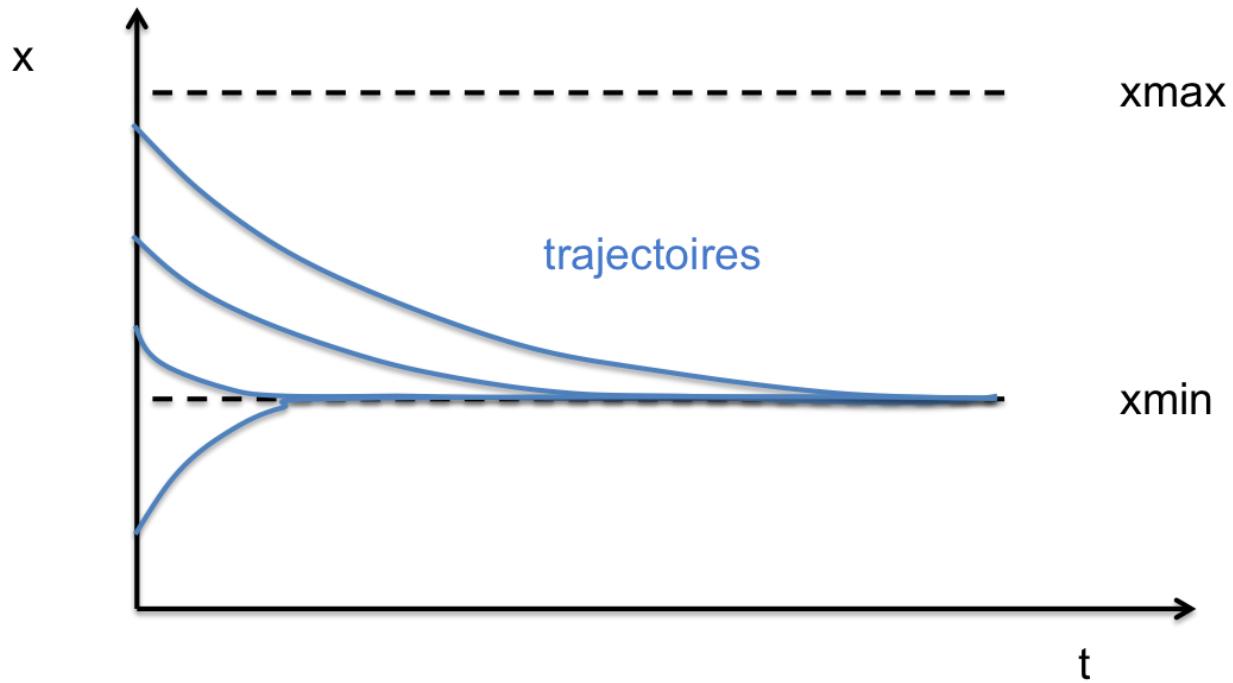


Figure 2.2: accumulation en x_{min} des trajectoires de chauffe-eau soumis à $u = 0$

Ce n'est pas encore suffisant. Considérons maintenant une masse de probabilité initialement située en x_{min} et supposons une commande de consigne $u = u_{max}$. Alors tous les chauffe-eau associés à cette masse vont voir leur température augmenter au même rythme, et la masse de probabilité va se déplacer vers les températures supérieures tout en perdant des chauffe-eau par transition d'état. En imaginant une configuration avec des taux de transition non nuls et une commande bien choisie, on peut envisager des cas où cohabitent une masse constituée de chauffe-eau à l'état 0 en x_{min} ou en x_{max} ainsi que plusieurs masses « mouvantes » situées entre x_{sing} et x_{max} , à l'état $q = 0$ ou 1. Il convient donc de définir :

$P_{i,0}$: valeur de la ième masse de probabilité mouvante à l'état $q = 0$ située en x_{p0i} , $1 < i < N_0$

$P_{i,1}$: valeur de la ième masse de probabilité mouvante à l'état $q = 1$ située en x_{p1i} , $1 < i < N_1$

On remarquera que si de telles masses mouvantes à l'état 0 peuvent se créer à partir d'une mise en mouvement de $P_{x_{min}}$ ou de $P_{x_{max}}$, elles peuvent aussi fusionner avec ces masses fixes lorsqu'elles atteignent les températures limites (voir sous-section suivante).

Enfin, l'existence d'une discontinuité dans la dynamique de part et d'autre de la paroi $x = x_{min}$ vont nécessiter des conditions aux bornes plus complexes que celles vues dans le premier modèle, comme la continuité des distributions en x_{min} . Des conditions analogues seront également nécessaires en x_{max} . Nous serons alors attentifs à ce que ces dernières reflètent bien la conservation des courants de probabilité traversant les frontières.

2.3.2 Équations aux dérivées partielles

En nous appuyant sur le travail de Malhamé (1990) et Huang, Caines et Malhamé (2007), et avec les notations précédentes, on peut montrer les distributions et masses de probabilités évoquées sont régies par les équations aux dérivées partielles couplées suivantes :

Évolution des distributions sur le domaine a :

$$\frac{\partial F_{0a}}{\partial t} = r_{0a}(x, t) \frac{\partial F_{0a}}{\partial x} - \alpha_0(t) F_{0a}(x, t) + \alpha_1(t) F_{1a}(x, t) + c_{0a}(x, t)$$

$$\frac{\partial F_{1a}}{\partial t} = r_{1a}(x, t) \frac{\partial F_{1a}}{\partial x} - \alpha_1(t) F_{1a}(x, t) + \alpha_0(t) F_{0a}(x, t) + c_{1a}(x, t)$$

où

$$r_{0a}(x, t) = -(A_0 x + B_0 u_{max} + C_0(t))$$

$$r_{1a}(x, t) = -(A_1 x + B_1 u_{max} + C_1(t))$$

$$c_{0a}(x, t) = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_1 P_{i,1} \mathbf{1}_{x > x_{p1i}}$$

$$c_{1a}(x, t) = \sum_{i=1}^{N_0} \alpha_0 P_{i,0} 1_{x>x_{p0i}}$$

Évolution des distributions sur le domaine b :

$$\frac{\partial F_{0b}}{\partial t} = r_{0b}(x, t) \frac{\partial F_{0b}}{\partial x} - \alpha_0(t) F_{0b}(x, t) + \alpha_1(t) F_{1b}(x, t) + c_{0b}(x, t)$$

$$\frac{\partial F_{1b}}{\partial t} = r_{1b}(x, t) \frac{\partial F_{1b}}{\partial x} - \alpha_1(t) F_{1b}(x, t) + \alpha_0(t) F_{0b}(x, t) + c_{1b}(x, t)$$

où

$$r_{0b}(x, t) = -(A_0 x + B_0 \widehat{u_0'}(x, t) + C_0(t))$$

$$r_{1b}(x, t) = -(A_1 x + B_1 \widehat{u_1'}(x, t) + C_1(t))$$

$$c_{0b}(x, t) = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_1 P_{i,1} 1_{x>x_{p1i}} + (r_{0a}(x_{min}) \frac{\partial F_{0a}}{\partial x}(x_-) - r_{0b}(x_-) \frac{\partial F_{0b}}{\partial x}(x_{min}))$$

$$c_{1b}(x, t) = \sum_{i=1}^{N_0} \alpha_0 P_{i,0} 1_{x>x_{p0i}} + \alpha_0 P_{x_{min}}$$

$$1_{x>x_{p1i}} = 1 \quad \text{si } x > x_{p1i} \quad 0 \text{ sinon}$$

Évolution des masses de probabilité :

$$\frac{dP_{i,0}}{dt} = -\alpha_0(t) P_{i,0} \quad \text{pour } 1 < i < N_0$$

$$\frac{dP_{i,1}}{dt} = -\alpha_1(t) P_{i,1} \quad \text{pour } 1 < i < N_1$$

$$\frac{dx_{p0i}}{dt} = -r_{0a}(x_{p0i}, t) \quad \text{si } x_{p0i} < x_{min}$$

$$\frac{dx_{p0i}}{dt} = -r_{0b}(x_{p0i}, t) \quad \text{si } x_{p0i} > x_{min}$$

$$\frac{dx_{p1i}}{\partial t} = -r_{1a}(x_{p1i}, t) \quad \text{si } x_{p1i} < x_{min}$$

$$\frac{dx_{p1i}}{\partial t} = -r_{1b}(x_{p1i}, t) \quad \text{si } x_{p1i} > x_{min}$$

$$\frac{dP_{x_{min}}}{dt} = -\alpha_0(t)P_{x_{min}} + r_{0b}(x_{min}, t)\frac{\partial F_{0b}}{\partial x}(x_{min}, t) - r_{0a}(x_{min}, t)\frac{\partial F_{0a}}{\partial x}(x_{min}, t)$$

$$\frac{dP_{x_{max}}}{dt} = -\alpha_0(t)P_{x_{max}} - r_{0b}(x_{max}, t)\frac{\partial F_{0b}}{\partial x}(x_{min}, t)$$

Avec comme conditions aux frontières:

$$\forall t \quad F_{0a}(x_{sing}, t) = F_{1a}(x_{sing}, t) = 0$$

$$\forall t \quad F_{0a}(x_{min}, t) = F_{0b}(x_{min}, t) \quad \text{et} \quad F_{1a}(x_{min}, t) = F_{1b}(x_{min}, t)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{0b}}{\partial t}(x_{max}, t) &= -\alpha_0(t)F_{0b}(x_{max}, t) + \alpha_1(t)F_{1b}(x_{max}, t) \\ &\quad + r_{0a}(x_{max}, t)\frac{\partial F_{0a}}{\partial x}(x_{max}, t) + c_{0b}(x_{max}, t) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_{1b}}{\partial t}(x_{max}, t) = -\alpha_1(t)F_{1b}(x_{max}, t) + \alpha_0(t)F_{0b}(x_{max}, t) + c_{1a}(x_{max}, t) + \alpha_0(t)P_{x_{max}}$$

Enfin, les fusions et créations de masses sont prises en compte en réalisant pour tout t et i les opérations suivantes :

- Si $x_{p0i}(t) = x_{min}$ alors $P_{i,0}$ est supprimée de la liste des $[P_{i,0}]_{1 < i < N_0}$, N_0 devient $(N_0 - 1)$ et on ajoute $P_{i,0}$ à $P_{x_{min}}$.
- De même, si $x_{p0i}(t) = x_{max}$ alors $P_{i,0}$ est supprimée de la liste des $[P_{i,0}]_{1 < i < N_0}$, N_0 devient $(N_0 - 1)$ et on ajoute $P_{i,0}$ à $P_{x_{max}}$.

- Si $P_{x_{min}} > 0$ et $r_{0b}(x_{min}, t) < 0$ alors $P_{x_{min}}$ est remise à 0 et se crée une masse mouvante supplémentaire indicée par i telle que $P_{i,0} = P_{x_{min}}$ et $x_{p0i} = x_{min}$, N_0 devient $(N_0 + 1)$.
- De même, si $P_{x_{max}} > 0$ et $r_{0b}(x_{max}, t) > 0$ alors $P_{x_{max}}$ est remise à 0 et se crée une masse mouvante supplémentaire indicée par i telle que $P_{i,0} = P_{x_{max}}$ et $x_{p0i} = x_{max}$, N_0 devient $(N_0 + 1)$.

Cette modélisation étant essentiellement algorithmique, elle prendra davantage de sens quand on l'évoquera de nouveau dans la partie traitant de la résolution numérique.

2.3.3 Diverses remarques

- Aucune masse à l'état 1 ne peut être créée ou supprimée par fusion avec $P_{x_{max}}$ ou $P_{x_{min}}$, N_1 reste donc constant. Les masses à l'état 1 se dirigent vers les températures inférieures en perdant continuellement de leur masse.
- À terme, aucune masse à l'état 0 ne peut se trouver en deçà de x_{min} , les masses s'y trouvant initialement finissant par remonter jusqu'à x_{min} au moins
- Les $r_{j\gamma}(x, t)$ ($j = 0, 1$ $\gamma = a, b$) s'interprètent comme les taux de refroidissement au temps pour les chauffe-eau à l'état j et à température x .
- Les $r_{j\gamma}(x, t) \frac{\partial F_{j\gamma}}{\partial x} = r_{j\gamma}(x, t) f_{j\gamma}(\lambda, t)$ sont les courants de probabilité de chauffe-eau à l'état j traversant la température x au temps t . Le signe de $r_{j\gamma}(x, t)$ donne alors le sens de propagation des distributions.
- Les $\alpha_j(t) P_{i,j}$ sont les flux perdus au temps par les masses et qui rejoignent les distributions.
- On peut noter que la quantité totale des chauffe-eau se conserve bien au cours du temps car

$$\frac{d}{dt} \left[F_{0b}(x_{max}, t) + F_{1b}(x_{max}, t) + P_{x_{max}} + P_{x_{min}} + \sum_{i=1}^{N_0} P_{i0} + \sum_{i=1}^{N_1} P_{i1} \right] = 0$$

- La conservation des flux de probabilité en x_{min} et x_{max} se retrouve dans les équations :

$$\frac{dP_{x_{min}}}{dt} = -\alpha_0(t)P_{x_{min}} + r_{0b}(x_{min}, t) \frac{\partial F_{0b}}{\partial x}(x_{min}, t) - r_{0a}(x_{min}, t) \frac{\partial F_{0a}}{\partial x}(x_{min}, t)$$

$$\frac{dP_{x_{max}}}{dt} = -\alpha_0(t)P_{x_{max}} - r_{0b}(x_{max}, t) \frac{\partial F_{0b}}{\partial x}(x_{min}, t)$$

car ce ne sont ni plus ni moins que des bilans de masse sur $P_{x_{min}}$ et $P_{x_{max}}$

On peut en outre montrer en les injectant dans les équations de Kolmogorov que les conditions sur les distributions aux frontières en x_{min} et x_{max} sont équivalentes à ces bilans.

CHAPITRE 3 RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE PROPAGATION

Ici nous exposons puis validons une méthode de résolution numérique des équations construites dans la partie précédente.

3.1 Méthode de résolution numérique

Dans ce qui suit, nous identifierons l'ensemble de méthodes le plus approprié pour la résolution numérique de nos équations aux dérivées partielles à partir d'une analyse de la catégorie à laquelle elles appartiennent.

3.1.1 Classification des équations

Afin de choisir au mieux le schéma numérique qui approximera l'évolution des fonctions de distributions que nous avons définie au Chapitre 2, il est nécessaire d'identifier à quelle catégorie d'équations appartiennent ces dernières. Il faut en particulier déterminer si elles sont de type parabolique, hyperbolique ou elliptique.

Soit le système du premier ordre suivant :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A(x, t) \frac{\partial V}{\partial x} + B(x, t)V + C(x, t) \quad (3.1)$$

où V et C sont des vecteurs de taille p , $A(x, t)$ et $B(x, t)$ des matrices de taille $p \times p$.

Ce système est dit hyperbolique (Sod,1985) s'il existe une constante K , une matrice inversible $T(x, t)$ et une matrice diagonale $D(x, t)$ telle que :

$$T(x, t)A(x, t)T^{-1}(x, t) = D(x, t)$$

et $\forall x, t \quad \max(|T(x, t)|, |T^{-1}(x, t)|) \leq K$

où $D(x, t)$ est diagonale d'éléments diagonaux $(\mu_1(x), \dots, \mu_p(x))$ réels.

Les équations aux dérivées partielles que nous avons mises en place au chapitre précédent peuvent s'écrire sous la forme de l'équation (3.1) sur les domaines a et b de la figure 2.1 (chapitre 2) avec :

$$V(x, t) = [F_0(x, t), F_1(x, t), P_{1,0}, \dots, P_{N_0,0}, P_{1,1}, \dots, P_{N_1,1}, P_{x_{min}}, P_{x_{max}}]$$

$$A(x, t) = \begin{bmatrix} r_{0a}(x, t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_{1a}(x, t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{pour } x < x_{min}$$

$$A(x, t) = \begin{bmatrix} r_{0b}(x, t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_{1b}(x, t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{pour } x > x_{min}$$

$$B(x, t) = \begin{bmatrix} -\alpha_0 & \alpha_1 & 0 & \cdots & \alpha_1 & 1_{x > x_{p11}} & \alpha_1 & 1_{x > x_{p1i}} & 0 & 0 \\ \alpha_0 & -\alpha_1 & \alpha_0 & 1_{x > x_{p01}} & \alpha_0 & 1_{x > x_{p0i}} & 0 & \cdots & \alpha_0 & 1_{x > x_{min}} \\ 0 & 0 & -\alpha_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_0 \end{bmatrix}$$

$$C(x, t) = [0 \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ 0]^T \quad \text{pour } x < x_{min}$$

$$C(x, t) = \left[(r_{0a}(x_{min}) \frac{\partial F_{0a}}{\partial x}(x_{min}) - r_{0b}(x_{min}) \frac{\partial F_{0b}}{\partial x}(x_{min}) \ 0 \ 0 \ \cdots \ \cdots \ 0 \right]^T \quad \text{pour } x > x_{min}$$

$A(x, t)$ est diagonale et donc ce système est hyperbolique. Deux schémas sont alors classiquement utilisés pour sa résolution numérique : le schéma upwind-downwind et le schéma de Lax-Wendroff. Il convient de choisir la méthode la plus adaptée, stable et précise sans être

trop gourmande en temps de calcul. Par conséquent nous serons attentifs à l'ordre de précision, aux conditions de stabilité et à la complexité de chaque schéma.

Dans les deux cas, et à cause de la discontinuité en x_{min} , la résolution sera effectuée sur les espaces de température $[x_{sing}, x_{min}]$ et $[x_{min}, x_{max}]$, en appliquant les conditions aux limites vues précédemment.

3.1.2 Schéma upwind-downwind

Reconsidérons l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A(x, t) \frac{\partial V}{\partial x} + B(x, t)V + C(x, t) \quad (3.1)$$

Le schéma upwind-downwind la simulant s'écrit :

$$\begin{aligned} U_i^{n+1} &= U_i^n + kA_i^n D_+ U_i^n + kB_i^n U_i^n + kC_i^n & \text{si } A_i^n > 0 \\ &= U_i^n + kA_i^n D_- U_i^n + kB_i^n U_i^n + kC_i^n & \text{si } A_i^n < 0 \end{aligned}$$

avec

$$D_+ U_i^n = \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{h}$$

$$D_- U_i^n = \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{h}$$

où h et k sont respectivement les pas d'intégration selon le temps et la température.

U_i^n est la valeur de la solution discrète au point $(x, t) = (ik, nh)$

On notera $U_i^n = [\bar{F}_{0_i}^n, \bar{F}_{1_i}^n, \bar{P}_{1,0}^n, \dots, \bar{P}_{N_0,0}^n, \bar{P}_{1,1}^n, \dots, \bar{P}_{N_1,1}^n, \bar{P}_{xmin}^n, \bar{P}_{xmax}^n]$

$A_i^n = A(ik, nh)$, $B_i^n = B(ik, nh)$ et $C_i^n = C(ik, nh)$

Ce schéma est explicite, ce qui est avantageux en termes de temps de calcul par rapport aux méthodes implicites qui nécessitent d'inverser des matrices à chaque pas d'intégration. On

remarque qu'elle ne requiert la connaissance que de 2 valeurs de U (U_i^n et U_{i+1}^n ou U_{i-1}^n) au temps n pour son calcul au temps $n+1$. Enfin, le schéma est précis au 1^{er} ordre et stable à la condition suivante, dite condition de Courant-Friedrichs-Lowy (CFL) :

$$\forall x, t \quad \max_j(\mu_j(x, t)) \frac{k}{h} < 1$$

où, on le rappelle, les $\mu_j(x, t)$ sont les valeurs propres de $A(x, t)$

ce qui revient dans notre cas à :

$$\forall x < x_{min} \quad \max(r_{0a}(x, t), r_{1a}(x, t)) \frac{k}{h} < 1$$

$$\forall x > x_{min} \quad \max(r_{0b}(x, t), r_{1b}(x, t)) \frac{k}{h} < 1$$

La méthode upwind-downwind est donc une bonne candidate à la résolution des équations du chapitre 2 même si elle n'est pas aussi précise que celle de Lax-Wendroff.

3.1.3 Schéma de Lax-Wendroff

En considérant toujours l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A(x, t) \frac{\partial V}{\partial x} + B(x, t)V + C(x, t) \quad (3.1)$$

Le schéma de Lax-Wendroff s'écrit avec les notations de la partie précédente:

$$U_i^{n+1} = U_i^n + k A_i^n D_0 U_i^n + \frac{k^2}{2} A_i^n D_+ \left(A_{i-\frac{1}{2}}^n D_- U_i^n \right) + k B_i^n U_i^n + k C_i^n$$

$$\text{où } A_{i-\frac{1}{2}}^n = A \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) k, nh \right) \text{ et } D_0 U_i^n = \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h}$$

Cette fois, le schéma est précis à l'ordre 2 et la condition de stabilité reste la même que pour la méthode upwind-downwind (condition CFL ()). Il est toujours explicite mais requiert cependant davantage de temps de calcul que le schéma upwind-downwind, ainsi que 3 valeurs de U (U_i^n U_{i+1}^n et U_{i-1}^n) au temps n pour son calcul au temps $n+1$. Si cela ne pose pas de problème dans

le cas général, c'en est un pour le calcul des distributions aux bornes des domaines car on ne dispose alors que de 2 valeurs. Le schéma précédent sera donc la seule option dans ces configurations particulières.

3.1.4 Méthode retenue

Tableau 3.1: Comparaison des schémas Upwind-Downwind et Lax-Wendroff

Schéma	Upwind-Downwind	Lax-Wendroff
Précision	Ordre 1	Ordre 2
Stabilité	Conditions CFL	Conditions CFL
Complexité	2 valeurs de U nécessaires	3 valeurs de U nécessaires Davantage de temps de calcul

Malgré un temps de calcul plus important, on utilisera lorsque cela est possible (c'est à dire en dehors du calcul des distributions aux bornes des domaines) le schéma de Lax-Wendroff car c'est le plus précis. En revanche, les valeurs des distributions situées aux bornes nécessiteront soit le schéma upwind-downwind soit les conditions aux limites suivant le sens de propagation (donné par le signe de $r(x, t)$).

Plus précisément, on calculera les valeurs aux bornes de la façon suivante :

$$\bar{F}_0^n(x_{sing}) = \bar{F}_1^n(x_{sing}) = 0$$

$\bar{F}_0^n(x_{min})$ et $\bar{F}_1^n(x_{min})$ calculées par le schéma Upwind-Downwind car $r_{0a}(x_{min}, t) < 0$ et $r_{1b}(x_{min}, t) < 0$

Puis, en suivant le sens de propagation, $\bar{F}_0^n(x_{min}) = \bar{F}_0^n(x_{min})$ et $\bar{F}_1^n(x_{min}) = \bar{F}_1^n(x_{min})$

$\bar{F}_0^n(x_{max})$ est calculée par le schéma Upwind-Downwind.

$$\bar{F}_1^{n+1}(x_{max}) = \bar{F}_1^n(x_{max}) + h (-\alpha_1(nh)\bar{F}_1^n(x_{max}) + \alpha_0(nh)\bar{F}_0^n(x_{max}) + c_{1b}(x_{max}, nh))$$

Enfin, l'évolution des \bar{x}_{p0i}^n et \bar{x}_{p1i}^n se simule simplement par :

$$\begin{aligned}\bar{x}_{p0i}^{n+1} &= \bar{x}_{p0i}^n - h r_{0a}(\bar{x}_{p0i}^n, nh) && \text{si } \bar{x}_{p0i}^n < x_{min} \\ \bar{x}_{p0i}^{n+1} &= \bar{x}_{p0i}^n - h r_{0b}(\bar{x}_{p0i}^n, nh) && \text{si } \bar{x}_{p0i}^n > x_{min} \\ \bar{x}_{p1i}^{n+1} &= \bar{x}_{p1i}^n - h r_{1a}(\bar{x}_{p1i}^n, nh) && \text{si } \bar{x}_{p1i}^n < x_{min} \\ \bar{x}_{p1i}^{n+1} &= \bar{x}_{p1i}^n - h r_{1b}(\bar{x}_{p1i}^n, nh) && \text{si } \bar{x}_{p1i}^n > x_{min}\end{aligned}$$

On note que la masse totale des chauffe-eau reste strictement conservée car :

$$\begin{aligned}\bar{F}_0^{n+1}(x_{max}) + \bar{F}_1^{n+1}(x_{max}) + \bar{P}_{x_{min}}^{n+1} + \bar{P}_{x_{max}}^{n+1} + \sum_{i=1}^{N_0} \bar{P}_{i,0}^{n+1} + \sum_{i=1}^{N_1} \bar{P}_{i,1}^{n+1} \\ = \bar{F}_0^n(x_{max}) + \bar{F}_1^n(x_{max}) + \bar{P}_{x_{min}}^n + \bar{P}_{x_{max}}^n + \sum_{i=1}^{N_0} \bar{P}_{i,0}^n + \sum_{i=1}^{N_1} \bar{P}_{i,1}^n\end{aligned}$$

3.1.5 Fusions et créations de masses de probabilité

La détection et la mise en œuvre des éventuelles fusions et créations de masses devient elles aussi discrète. Elle s'implémente à chaque pas de temps après la propagation du schéma selon l'algorithme suivant :

$\forall i < N_0$

si $(\bar{x}_{p0i}^{n+1} - x_{min})(\bar{x}_{p0i}^n - x_{min}) < 0$

alors $\bar{P}_{i,0}^n$ est supprimée de la liste des $[\bar{P}_{i,0}^n]_{1 < i < N_0}$, $N_0 = (N_0 - 1)$ et $\bar{P}_{x_{min}}^{n+1} = \bar{P}_{x_{min}}^n + \bar{P}_{i,0}^n$

si $(\bar{x}_{p0i}^{n+1} - x_{max})(\bar{x}_{p0i}^n - x_{max}) < 0$

alors $\bar{P}_{i,0}^n$ est supprimée de la liste des $[\bar{P}_{i,0}^n]_{1 < i < N_0}$, $N_0 = (N_0 - 1)$ et $\bar{P}_{x_{max}}^{n+1} = \bar{P}_{x_{max}}^n + \bar{P}_{i,0}^n$

Puis

si $\bar{P}_{x_{min}}^n > 0$ et $r_{0b}(x_{min}, nh) < 0$

alors $\bar{P}_{x_{min}}^{n+1} = 0$, et on ajoute $\bar{P}_{x_{min}}^n$ à $[\bar{P}_{i,0}^n]_{1 < i < N_0}$, x_{min} à $[\bar{x}_{p0i}^n]_{1 < i < N_0}$ et $N_0 = (N_0 + 1)$

si $\bar{P}_{x_{max}}^n > 0$ et $r_{0b}(x_{max}, nh) > 0$

alors $\bar{P}_{x_{max}}^{n+1} = 0$, et on ajoute $\bar{P}_{x_{max}}^n$ à $[\bar{P}_{i,0}^n]_{1 < i < N_0}$, x_{max} à $[\bar{x}_{p0i}^n]_{1 < i < N_0}$ et $N_0 = (N_0 + 1)$

3.2 Validation des schémas

Avant d'aller plus loin, il nous faut en premier lieu contrôler que le schéma ainsi construit fournit une simulation correcte de la répartition des chauffe-eau. Pour cela, il est comparé à une simulation de Monte-Carlo pour différentes commandes.

3.2.1 Simulation des distributions par méthode de Monte-Carlo

L'objectif ici est de simuler l'évolution des densités à l'aide d'un grand nombre N de chauffe-eau en exploitant la loi des grands nombres :

$$f_j(\lambda, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{cardinal} [x^i(t) \text{ tels que } \lambda < x^i(t) < \lambda + d\lambda \text{ et } q^i(t) = j] \quad j = 0, 1$$

$$P_{k,j}(\lambda, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{cardinal} [x^i(t) \text{ tels que } x^i(t) = x_{pj_k} \text{ et } q^i(t) = j] \quad j = 0, 1$$

où les $[x^i(t), q^i(t)] \quad i < N$ sont N variables aléatoires indépendantes soumises à la dynamique contrainte.

On simulera l'évolution de chaque $x^i(t)$ par une simple discrétisation au pas de temps h des équations régissant sa dynamique (vues au Chapitre 1) selon son état $q^i(t)$ tandis que la chaîne de Markov aléatoire $q^i(t)$ sera modélisée par :

$$Pr(q(n(h+1)) = 1 | q(nh) = 0) = \alpha_0(nh) h$$

$$Pr(q(n(h+1)) = 0 | q(nh) = 1) = \alpha_1(nh) h$$

Puis la simulation de densité qui sera comparée à celle du schéma $\bar{f}_{j_i}^n$ s'écrira :

$$f_j^{MC}(ik, nh) = \frac{1}{N} \text{cardinal} [x^i(nh) | ik < x^i(t) < i(k+1) \text{ et } q^i(nh) = j]$$

On gardera à l'esprit que N n'étant en pratique pas infini et l'évolution des $[x^i(t), q^i(t)]$ étant discrète, la simulation de Monte-Carlo n'est qu'une approximation de la densité réelle.

Dans la suite on comparera à chaque fois les deux simulations à plusieurs instants ainsi que l'évolution des masses au cours du temps. Les distributions et masses calculées numériquement sont représentées par les étoiles rouges. Celles simulées par Monte-Carlo sont bleues mises à part les masses mouvantes à l'état 0 vertes, et les masses mouvantes à l'état 1 rouges.

Paramètres :

Le nombre de chauffe-eau $N = 50000$

$x_{min} = 50$, $x_{max} = 60$

$u_{min} = 0$, $u_{max} = 200$

Pas de temps $h = 0.0002$

Pas d'espace $k = 0.3$ avant $x_{min} - 1$ puis 0.08

Capacité thermique du réservoir $C = 1$

Résistance thermique des parois du réservoir $a' = 1$

Température ambiante au temps t $x_a(t) = 0$

Capacité thermique volumique de l'eau $C_e = 1$

Débit lors d'une extraction d'eau $Q = 40$

3.2.2 Résultats

3.2.2.1 Masse à l'état 0 soumise à u=0

Pour commencer on regarde ce que donnent les simulations lorsqu'on laisse dériver à puissance nulle une masse initialement dans l'état 0, c'est-à-dire en choisissant les commandes et les conditions initiales:

$$\forall x, t \quad u_0(x, t) = u_1(x, t) = 0$$

$$\forall x \quad F_0(x, 0) = F_1(x, 0) = 0, \quad P_{x_{min}}(0) = P_{x_{max}}(0) = 0, \quad P_{10}(0) = 1 \text{ et } x_{p01} = 51,5$$

On s'attend donc à ce que cette masse se dirige vers les températures inférieures tout en perdant au fur et à mesure des chauffe-eau par transition d'état qui se distribueront en dessous d'elle, jusqu'à ce qu'elle rejoigne x_{min} et s'y maintienne.

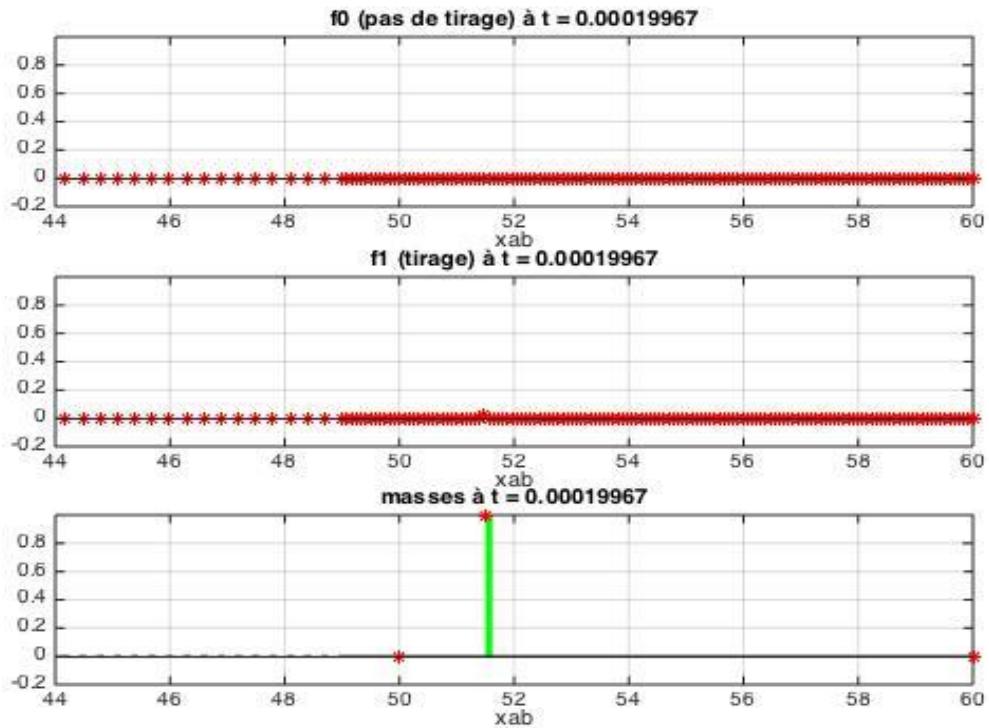


Figure 3.1: Comparaison du schéma (étoiles rouge) et de Monte-Carlo (colonnes) à $t=0$

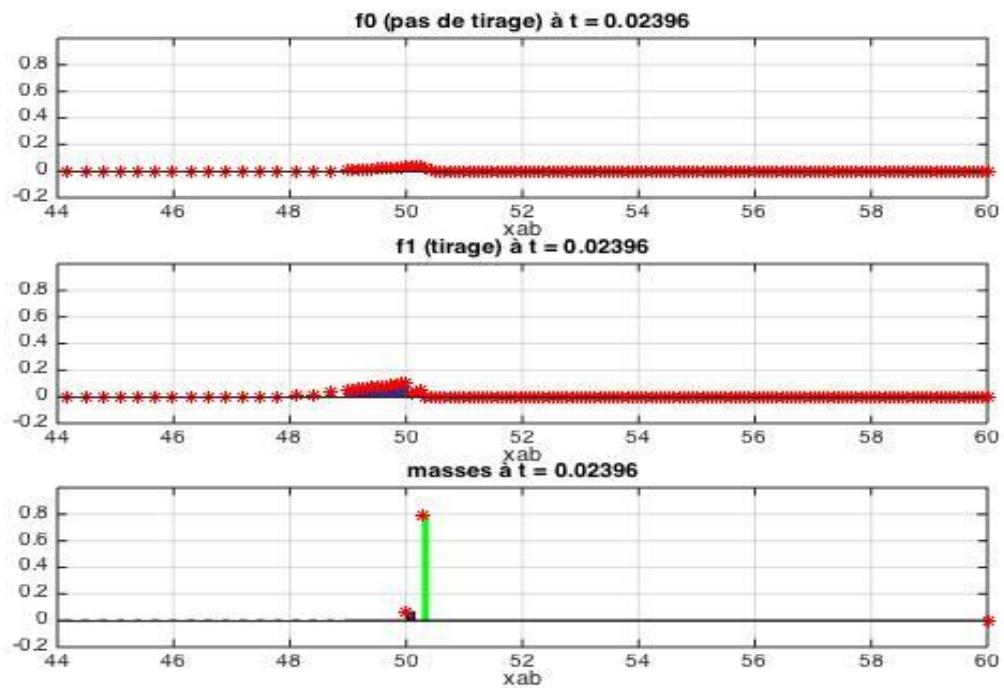


Figure 3.2: Comparaison du schéma et de Monte-Carlo à $t=0.024$

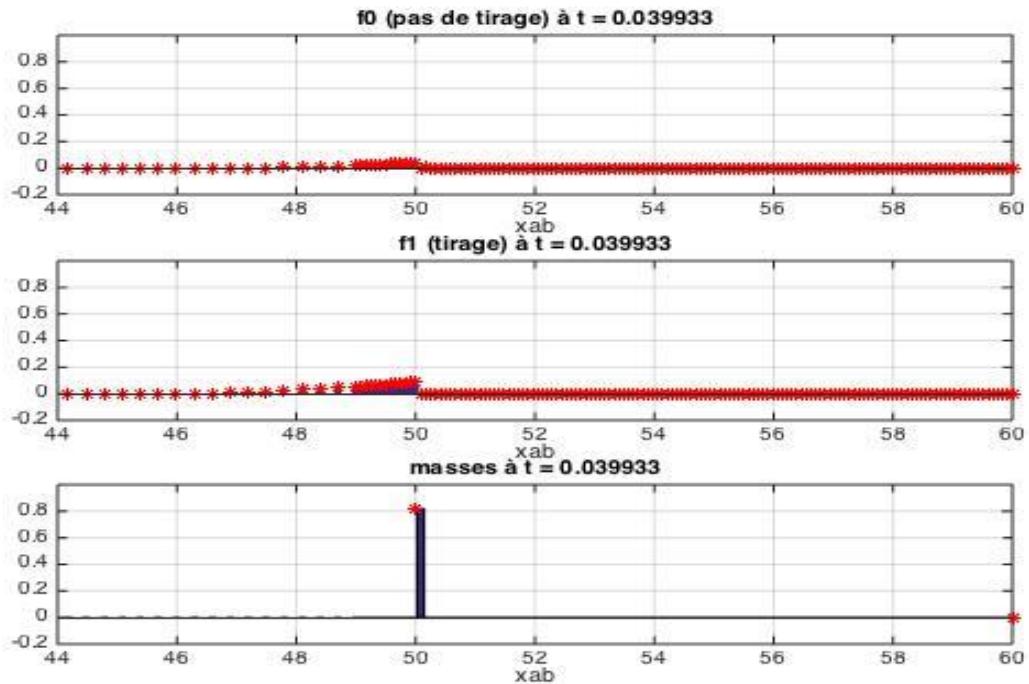


Figure 3.3: Comparaison du schéma et de Monte-Carlo à $t=0.04$

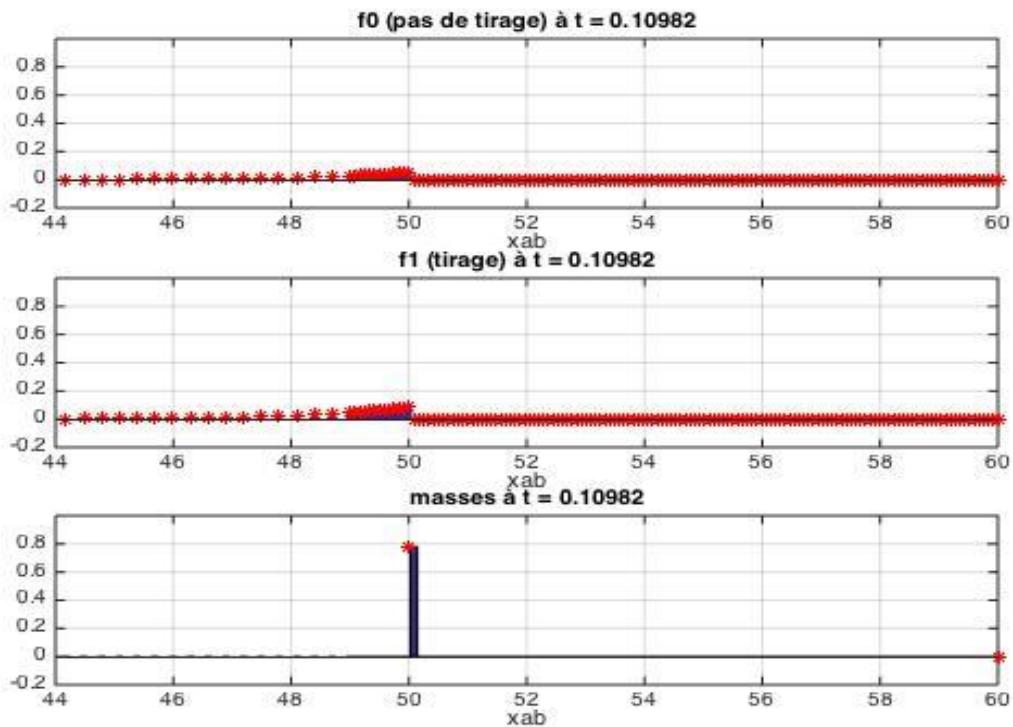


Figure 3.4: Comparaison du schéma et de Monte-Carlo à $t=0.11$

C'est effectivement ce qui se produit en pratique. Pendant que la masse mouvante à l'état 0 (en vert) s'approche de x_{min} elle perd des chauffe-eau qui rejoignent la distribution f_1 . A cause du tirage d'eau, la masse se propage rapidement vers les températures inférieures et alimente f_0 via les transitions d'état. Les chauffe-eau de f_0 dont la température est supérieure à x_{min} continuent de descendre et sont absorbés par $P_{x_{min}}$, ceux situés en dessous n'étant pas soumis à l'extraction d'eau, remontent donc vers x_{min} où ils s'arrêtent; d'où la création d'une masse $P_{x_{min}}$ (en bleu) dans la figure 3.2. Puis la masse mouvante atteint x_{min} où elle fusionne avec $P_{x_{min}}$. Le système évolue ensuite lentement vers son régime permanent quand les pertes de $P_{x_{min}}$ et les remontées de f_0 en x_{min} s'équilibrivent.

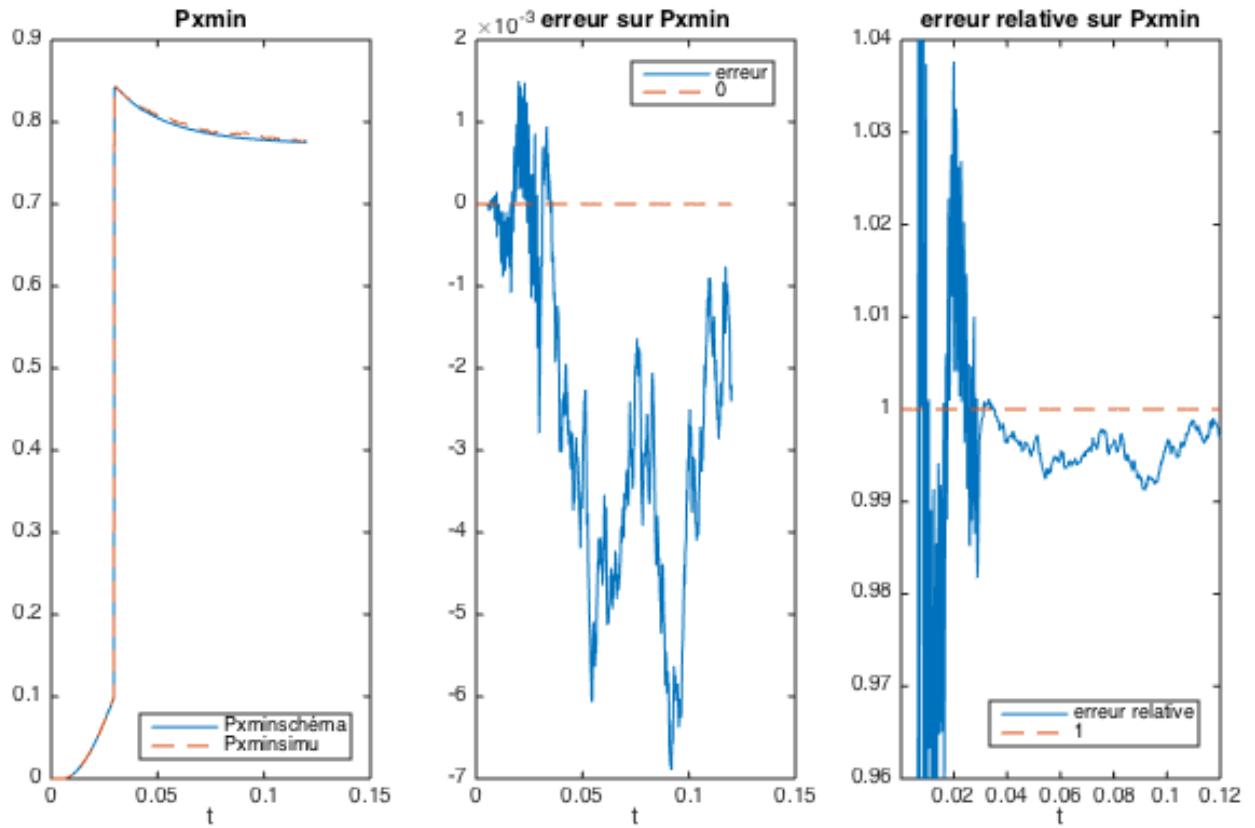


Figure 3.5: Comparaison des $P_{x_{min}}$ des deux simulations au cours du temps

On peut juger plus qualitativement de la fidélité du schéma en comparant l'évolution de $P_{x_{min}}$ au cours du temps. On distingue successivement dans la figure 3.5 la formation de la masse, l'absorption de la masse mouvante puis la décroissance jusqu'au régime permanent.

Un léger biais persiste à la fin, qui peut s'expliquer par le caractère discret du schéma numérique. En effet, la masse $P_{x_{min}}$ étant alimentée par les flux $r_{0b}(x_{min}, t)f_{0b}(x_{min}, t)$ et $r_{0a}(x_{min}, t)f_{0a}(x_{min}, t)$, la discréétisation de ces derniers entraîne une légère erreur dans l'évolution de la masse.

3.2.2.2 Création de masses

Ici on montre un exemple permettant d'observer la création de plusieurs masses à partir de $P_{x_{min}}$ en choisissant les commandes et conditions initiales suivantes :

$$\forall x, t \quad u_0(x, t) = u_1(x, t) = -x + 90 - 120\sin(50\pi t)$$

$$\forall x \quad F_0(x, 0) = F_1(x, 0) = 0, \quad P_{x_{min}}(0) = P_{x_{max}}(0) = 0, \quad P_{11}(0) = 1 \text{ et } x_{p11} = 49$$

L'idée est de construire une commande oscillante qui formera une masse en x_{min} quand elle dirigera les chauffe-eau à l'état 0 d'abord vers les températures inférieures; elle contribuera ensuite à la création d'une masse mouvante à partir de $P_{x_{min}}$ lorsqu'ils repartiront vers les températures supérieures.

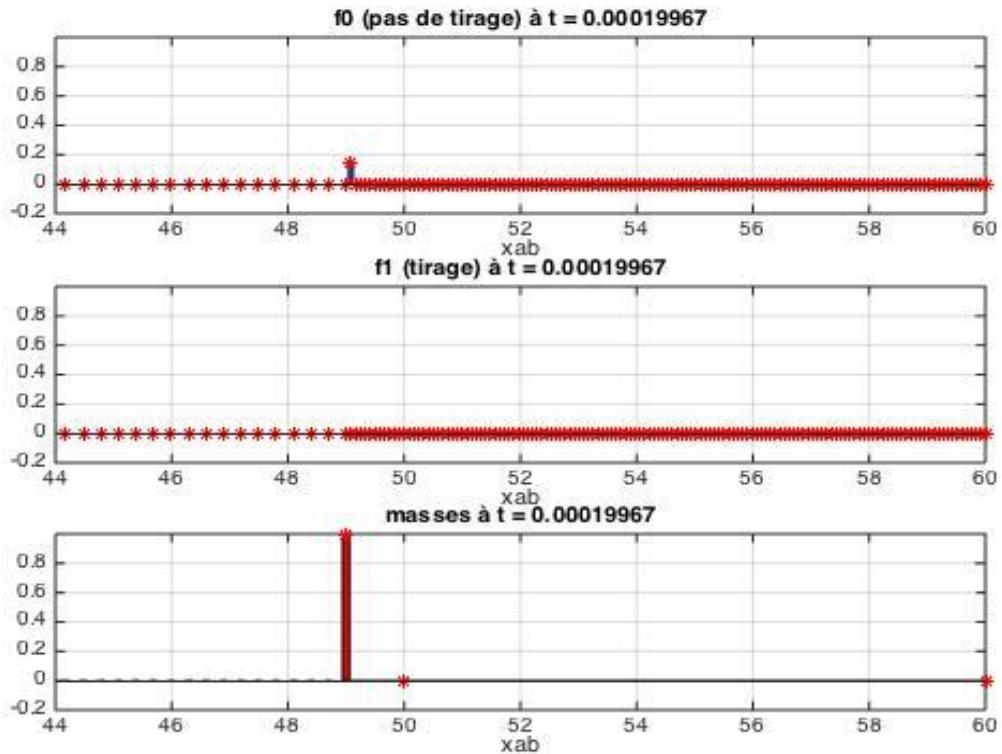


Figure 3.6: Comparaison du schéma et de Monte-Carlo à t=0

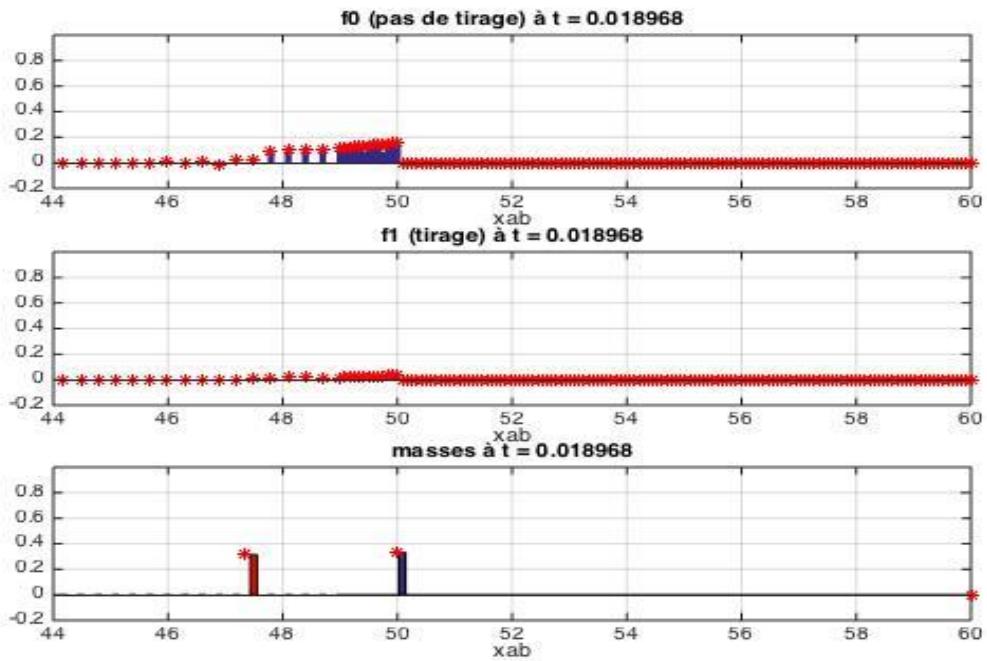


Figure 3.7: Comparaison du schéma et de Monte-Carlo à t=0.019

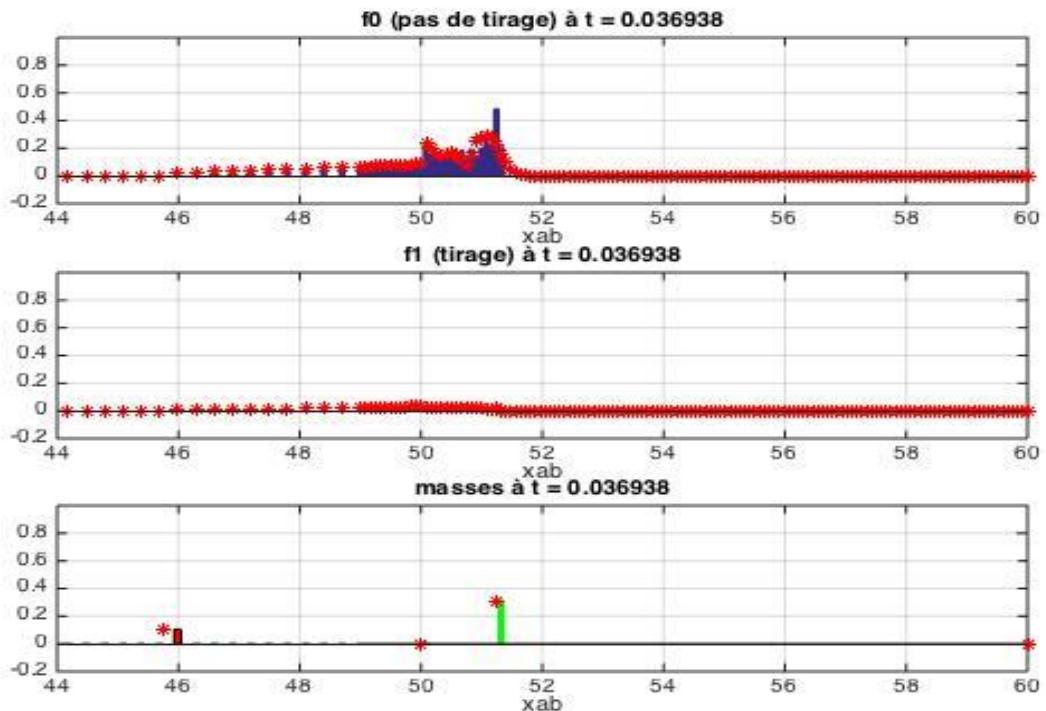


Figure 3.8: Comparaison du schéma et de Monte-Carlo à $t=0.037$

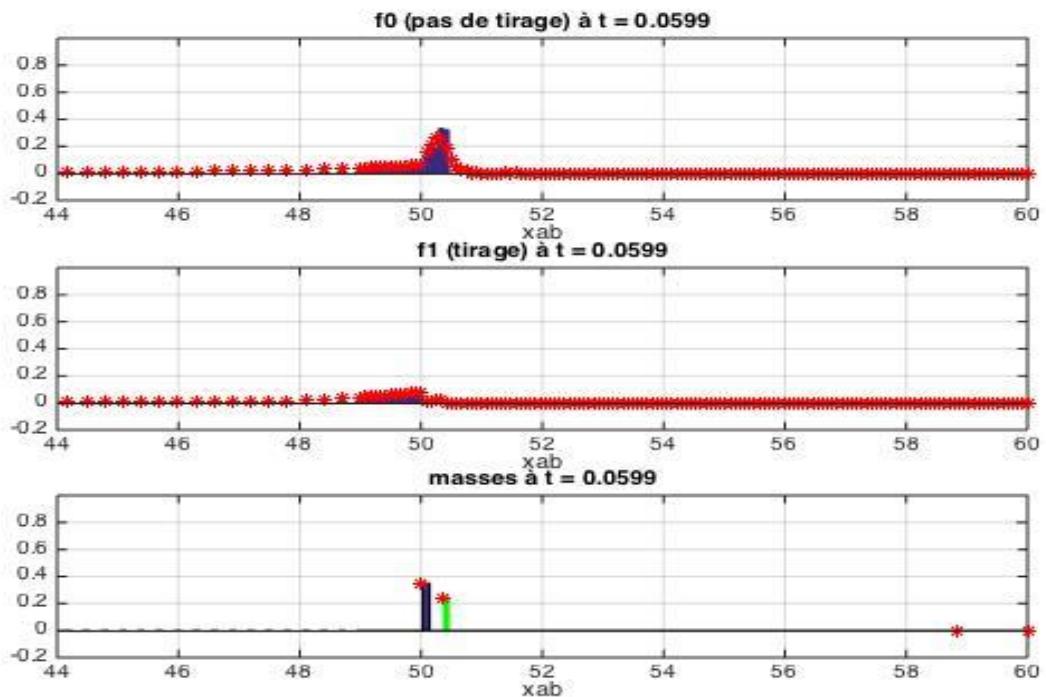


Figure 3.9: Comparaison du schéma et de Monte-Carlo à $t=0.06$

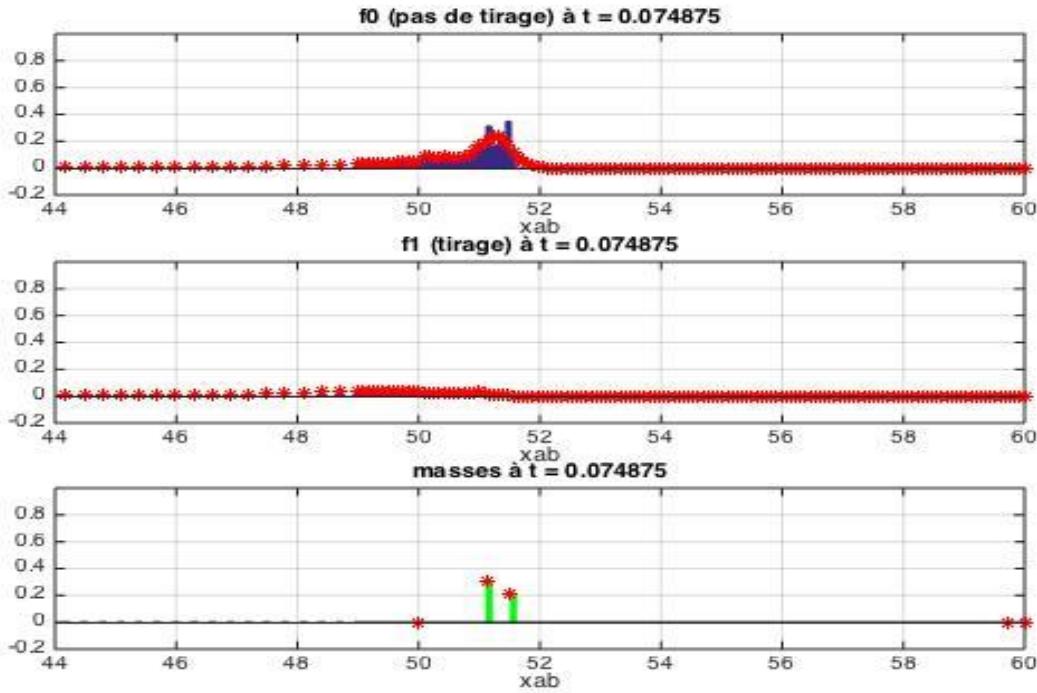


Figure 3.10: Comparaison du schéma et de Monte-Carlo à $t=0.075$

La masse initiale à l'état 1 (en rouge) transmet rapidement ses chauffe-eau à f_0 au fur et à mesure qu'elle descend vers les températures inférieures. Parallèlement, se forme une masse $P_{x_{min}}$ (en bleu) par propagation vers x_{min} de f_0 comme le montre la figure 3.7. Puis, $r_{0b}(x_{min}, t)$ devient négatif, ce qui provoque le mouvement de $P_{x_{min}}$ vers les x supérieurs sous la forme d'une masse mouvante à l'état 0 (en vert).

Dans les figures 3.9 et 3.10, la logique est la même. La commande fait d'abord revenir la masse à l'état 0 et les chauffe-eau de f_0 vers x_{min} ce qui crée par accumulation une nouvelle masse $P_{x_{min}}$. Par la suite r_{0b} redevient négatif, la masse verte repart alors dans l'autre sens avant d'avoir pu fusionner avec $P_{x_{min}}$ qui elle se transforme à nouveau en masse mouvante à l'état 0.

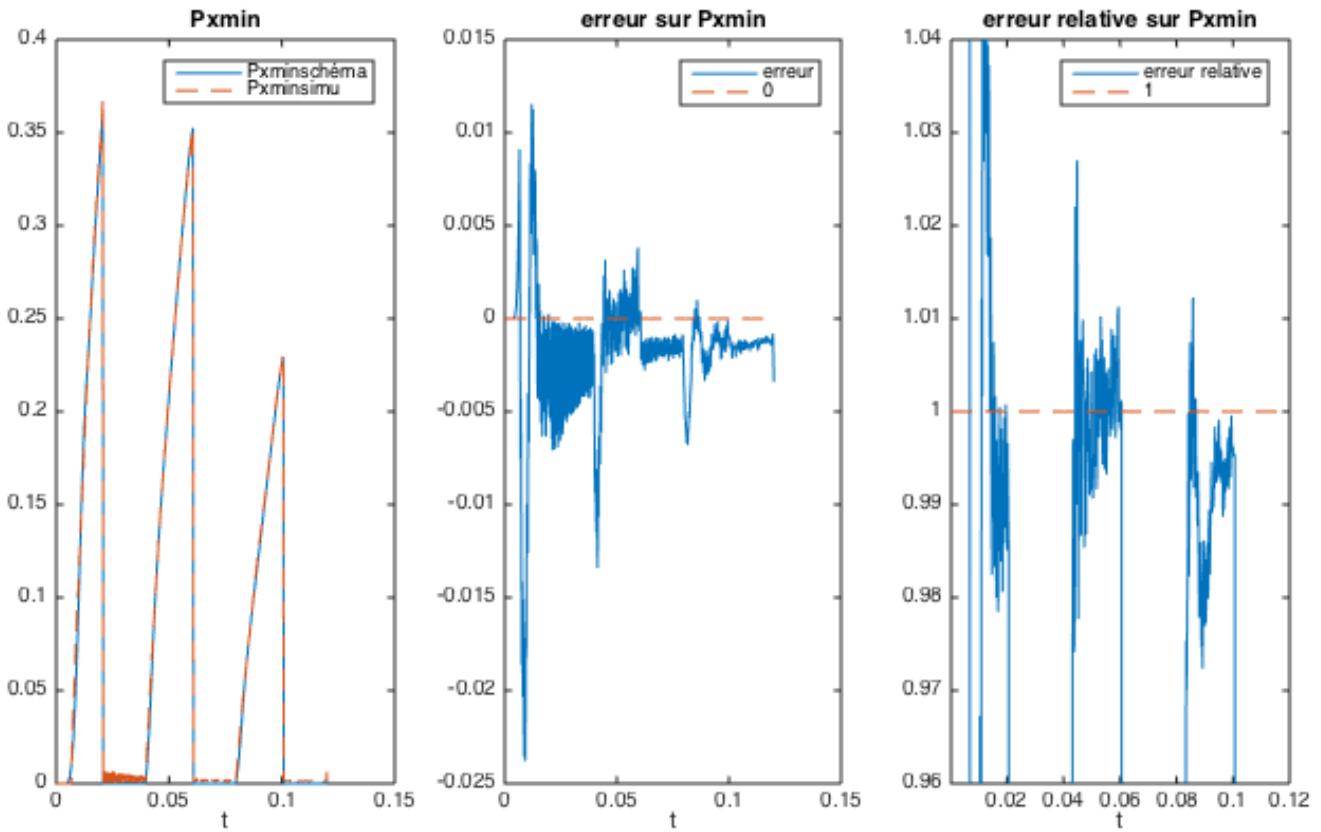


Figure 3.11: Comparaison des masses des deux simulations au cours du temps

Sur l'évolution de $P_{x_{min}}$ on repère les 3 phases de croissance rapide par accumulation suivies des remises à zéro traduisant la mise en mouvement de la masse. Là encore on observe un léger biais pour les mêmes raisons que précédemment.

Enfin on peut noter que la même expérience aurait pu être réalisée pour $P_{x_{max}}$, les deux masses ayant un comportement analogue.

CHAPITRE 4 APPLICATION À LA SIMULATION DE LA COMMANDE À CHAMP MOYEN SOUS CONTRAINTES

Cette partie est consacrée à la présentation de la commande à champ moyen et à sa simulation sous contraintes grâce à la méthode de résolution numérique exposée plus haut.

4.1 La commande à champ moyen

Tel qu'évoqué en introduction, c'est sur la base de la théorie des *jeux à champ moyen*, développée indépendamment par Lasry et Lions (2007), et Huang, Caines et Malhamé (2007), qu'est élaborée la commande destinée à réaliser le suivi des consignes dictées par le niveau supérieur. Rappelons ses avantages :

- L'implémentation des contrôles se fait au niveau local. Ainsi, contrairement à un contrôle centralisé, on n'a plus besoin que d'une puissance de calcul et d'une bande passante de communication réduites. En outre, il est possible de maintenir les conditions de confort et de sécurité, même en cas de perte de contact avec le niveau supérieur, puisque le niveau local, informé des conditions locales qu'il observe, peut intervenir directement en cas de violation de ces conditions.
- Les échanges d'information avec le niveau supérieur sont largement diminués. En effet, la théorie des jeux à champ moyen tire parti de la loi des grands nombres qui, dans le cas d'une large population de chauffe-eau, rend prévisible les comportements moyens. Ces derniers sont les seuls nécessaires pour synthétiser une loi de commande locale qui puisse permettre au groupe de chauffe-eau d'atteindre les cibles fixées par le niveau supérieur.
- Grâce à une fonction coût que nous détaillerons plus bas, et adéquatement conçue pour les objectifs visés, la perturbation de température du chauffe-eau d'un utilisateur quelconque reste limitée, tout en forçant la moyenne des températures dans le groupe contrôlé à éventuellement suivre la consigne dictée par le niveau supérieur. L'idée de base est de créer par le biais de la fonction coût une pression forçant le déplacement des températures vers la température sécuritaire supérieure, si le groupe doit augmenter sa température

moyenne, et inversement vers la température de confort limite inférieure, si le groupe doit abaisser sa température moyenne. Ces températures limites sont désignées par z . De plus, la pression pour le mouvement dans le sens cité est proportionnelle, à tout instant, à l'intégrale de l'erreur de poursuite entre la température moyenne et la cible. C'est par le biais de cette pression que le « champ moyen », ici représenté par la trajectoire de la moyenne des températures des chauffe-eau dans le groupe, exercera son influence sur les individus. Si un régime permanent s'installe, il ne peut alors se faire que si l'erreur entre la moyenne actuelle, et celle visée tend vers zéro. Enfin, des termes additionnels dans la fonction coût pénalisant l'effort de commande au delà de la satisfaction de la demande d'eau chaude, ainsi que les déviations par rapport à la température initiale propre à un chauffe-eau au début de l'horizon de commande, font en sorte que l'évolution de la température moyenne vers la consigne se fait sans trop écarter les chauffe-eau de leur température initiale. Ainsi, la commande à champ moyen définie à partir de notre fonction coût individuel mène à un compromis entre l'objectif de poursuite de la température moyenne de consigne, et l'amplitude des perturbations de température que subissent les chauffe-eau individuels.

Plus précisément, elle se définit comme la commande $u^{MF}(x, t)$ minimisant $J_i^N(u^{MF^i}, u^{MF^{-i}})$ de la forme :

$$J_i^N(u^{MF^i}, u^{MF^{-i}}) = \mathbb{E} \int_0^T e^{-\delta t} \left[(x_t^i - z)^2 q^y_t + (x_t^i - x_0^i)^2 q^{x_0} + (u^{MF^i})^2 r \right] dt$$

$$q^y_t = \lambda \left| \int_0^t (\bar{x}_t^N - y) dt \right|$$

où z est la température vers laquelle on dirige x_t^i avec un coefficient de pression q_t^y qui dépend de l'intégrale de l'erreur de poursuite entre la consigne y et la température moyenne \bar{x}_t^N du

groupe (prévisible par la loi des grands nombres lorsque $N \rightarrow \infty$). T est l'horizon temporel, alors que x_0^i est la température initiale dans le chauffe-eau.

avec la dynamique vue auparavant:

$$\frac{\partial x^i}{\partial t} = A_0 x^i(t) + B u^i(x, x(0), t) + C_0(t) \quad \text{si } q(t) = 0$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial t} = A_1 x^i(t) + B u^i(x, x(0), t) + C_1(t) \quad \text{si } q(t) = 1$$

et :

$$u^i(x, x(0), t) = u^{MF^i}(x, t) + u^{free^i}(x(0), t)$$

$u^{free^i}(x(0), x, t)$ étant la puissance permettant à l'individu i de se maintenir en moyenne à sa température initiale $x(0)$. Cette puissance est donc donnée « gratuitement » dans la fonction coût $J_i^N(u^{MF^i}, u^{MF^{-i}})$.

Malhamé et Kizilkale (2013) ont montré qu'une telle puissance minimisante est l'unique solution d'un système faisant intervenir les équations de Riccati associées à la fonction coût, et s'écrivant de la manière suivante:

$$u^{MF}(x, t) = u^{MF}_0(x, t) = -\frac{B}{r}(\pi_0(t)x + s_0(t)) \quad \text{si } q(t) = 0$$

$$u^{MF}(x, t) = u^{MF}_1(x, t) = -\frac{B}{r}(\pi_1(t)x + s_1(t)) \quad \text{si } q(t) = 1$$

avec

$$-\frac{d\pi_j}{dt} = 2A_j\pi_j - \frac{B^2}{r}\pi_j + \sum_{k=0}^1 \lambda_{jk}\pi_k + (q^y_t + q^{x_0}) \quad \pi_j(T) = (q^y_T + q^{x_0}) \quad \text{pour } j = 0, 1$$

$$-\frac{ds_j}{dt} = \left(A_j - \frac{B^2}{r}\pi_j\right)s_j - q^y_t z - q^{x_0}\bar{x}_0 + C_j\pi_j + \sum_{k=0}^1 \lambda_{jk}s_k$$

$$s_j(T) = -(q^y_T z + q^{x_0} \bar{x}_0) \quad \text{pour } j = 0, 1$$

$$\frac{d\bar{x}_j}{dt} = \left(A_j - \frac{B^2}{r} \pi_j \right) \bar{x}_j + \sum_{k=0}^1 \lambda_{jk} \bar{x}_k + \xi_j C_j - \frac{B^2 \xi_j}{r} s_j \quad \text{pour } j = 0, 1$$

$$\bar{x} = \sum_{k=0}^1 \bar{x}_k$$

$$q^y_t = \lambda \left| \int_0^t (\bar{x} - y) dt \right|$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi \Lambda^T$$

où

$$\bar{x}_j = E(x \mathbf{1}_{q=j})$$

$\Lambda = \{\lambda_{jk} \text{ tels que } j, k = 0, 1\}$ la génératrice de la chaîne de Markov

$\xi = [\xi_0, \xi_1]$ probabilités des composantes d'états de la chaîne de Markov

La solution de ces équations s'obtient par une méthode de point fixe. Nous utiliserons dans nos simulations l'algorithme développé par Arman Kizilkale qui approche cette solution par itérations successives de la fonction qu'elle stabilise, les problèmes de convergence étant réglés à partir d'une diminution graduelle du paramètre λ .

4.2 Méthode pour la propagation des distributions

On voit que la prise en compte du dérangement de l'individu dans la fonction coût fait intervenir la température initiale de ce dernier via les termes $(x_t^i - x_0^i)^2 q^{x_0}$ et $u^{free^i}(x(0), t)$. La commande à champ moyen est donc dépendante de la condition initiale de l'individu par définition.

Cela nous empêche d'utiliser directement la résolution présenté dans le chapitre III car u ne dépend pas uniquement de la température x et du temps t . En un point donné (ik, nh) il ne serait pas possible de définir la puissance car des individus de températures initiales différentes pourraient y cohabiter.

Pour simuler l'évolution de la répartition des chauffe-eau il est alors nécessaire de considérer les distributions en température *conditionnellement* à leur valeur initiale (c'est à dire deux masses au point x_0 : une à l'état 0 et l'autre à l'état 1), de propager ces dernières suivant les équations du chapitre II, puis de reconstruire la distribution totale.

En considérant que la distribution initiale ne comporte pas de masse mouvante cela donne :

$$\begin{aligned}
 F_j(x, t) = & \int_{x_{sing}}^{x_{max}} (F_j(x, t|x_0) + \sum_{i=1}^{(N_j|x_0)} (P_{ij}(x_{pij}(t))|x_0) 1_{x>x_{pij}}) (f_0(x_0, 0) + f_1(x_0, 0)) dx_0 \\
 & + (F_j(x, t|x_{min}) + \sum_{i=1}^{(N_j|x_0)} (P_{ij}(x_{pij}(t))|x_{min}) 1_{x>x_{pij}}) P_{x_{min}}(0) \\
 & + (F_j(x, t|x_{max}) + \sum_{i=1}^{N_j} (P_{ij}(x_{pij}(t))|x_{max}) 1_{x>x_{pij}}) P_{x_{max}}(0) \quad j = 0, 1 \\
 P_{x_{min}}(t) = & \int_{x_{sing}}^{x_{max}} (P_{x_{min}}(t)|x_0) (f_0(x_0, 0) + f_1(x_0, 0)) dx_0 \\
 & + (P_{x_{min}}(t)|x_{min}) P_{x_{min}}(0) \\
 & + (P_{x_{min}}(t)|x_{max}) P_{x_{max}}(0) \\
 P_{x_{max}}(t) = & \int_{x_{sing}}^{x_{max}} (P_{x_{max}}(t)|x_0) (f_0(x_0, 0) + f_1(x_0, 0)) dx_0 \\
 & + (P_{x_{max}}(t)|x_{min}) P_{x_{min}}(0) \\
 & + (P_{x_{max}}(t)|x_{max}) P_{x_{max}}(0)
 \end{aligned}$$

où $F_j(x, t|x_0)$ ($P_{ij}|x_0$) ($P_{x_{max}}(t)|x_0$) et ($P_{x_{min}}(t)|x_0$) sont les distributions et les masses conditionnelles calculables.

Avec : $F_j(x, 0|x_0) = 0$ pour tout x $(N_j(0)|x_0) = 1$, $(P_{1j}(x_{j1})|x_0) = \frac{f_j(x_0, 0)}{f_0(x_0, 0) + f_1(x_0, 0)}$

$$(P_{x_{min}}(0)|x_0) = (P_{x_{max}}(0)|x_0) = 0$$

$$F_j(x, 0|x_{min}) = 0 \text{ pour tout } x \quad (N_j(0)|x_0) = 1 \quad (P_{x_{min}}(0)|x_{min}) = 1 \quad (P_{x_{max}}(0)|x_{min}) = 0$$

$$F_j(x, 0|x_{max}) = 0 \text{ pour tout } x \quad N_j(0) = 1 \quad (P_{x_{min}}(0)|x_{max}) = 1 \quad (P_{x_{max}}(0)|x_{max}) = 0$$

Numériquement, il s'agira donc de discréteriser la densité initiale en un certain nombre de masses initiales réparties sur l'espace des températures, propager ces dernières séparément comme dans les exemples du chapitre III et utiliser la version discrète des équations précédentes pour calculer la distribution totale.

4.3 Exemple

A titre d'exemple, on compare l'évolution sur 1 heure du champ moyen avec contraintes (en orange) et sans contraintes (en bleu). On prend $x_{max} = 60^\circ C$, $x_{min} = 50^\circ C$, $u_{min} = 0W$, $u_{max} = 4500W$, $y = 59^\circ C$, $z = 62^\circ C$ en montée et $48^\circ C$ en descente, et une distribution initiale des chauffe-eau normale de variance 1 centrée en $58^\circ C$ dans les états 0 et 1.

La température de consigne étant volontairement placée proche de la limite $x_{max} = 60^\circ C$, on observe une saturation dans le cas avec contraintes, car les chauffe-eau pour lesquels l'objectif est de se rendre à une température supérieure à $x_{max} = 60^\circ C$ sont bloqués à cette limite. D'où l'augmentation progressive de $P_{x_{max}}$. La puissance injectée dans les chauffe-eau (Pmean) est alors moindre que sans contraintes.

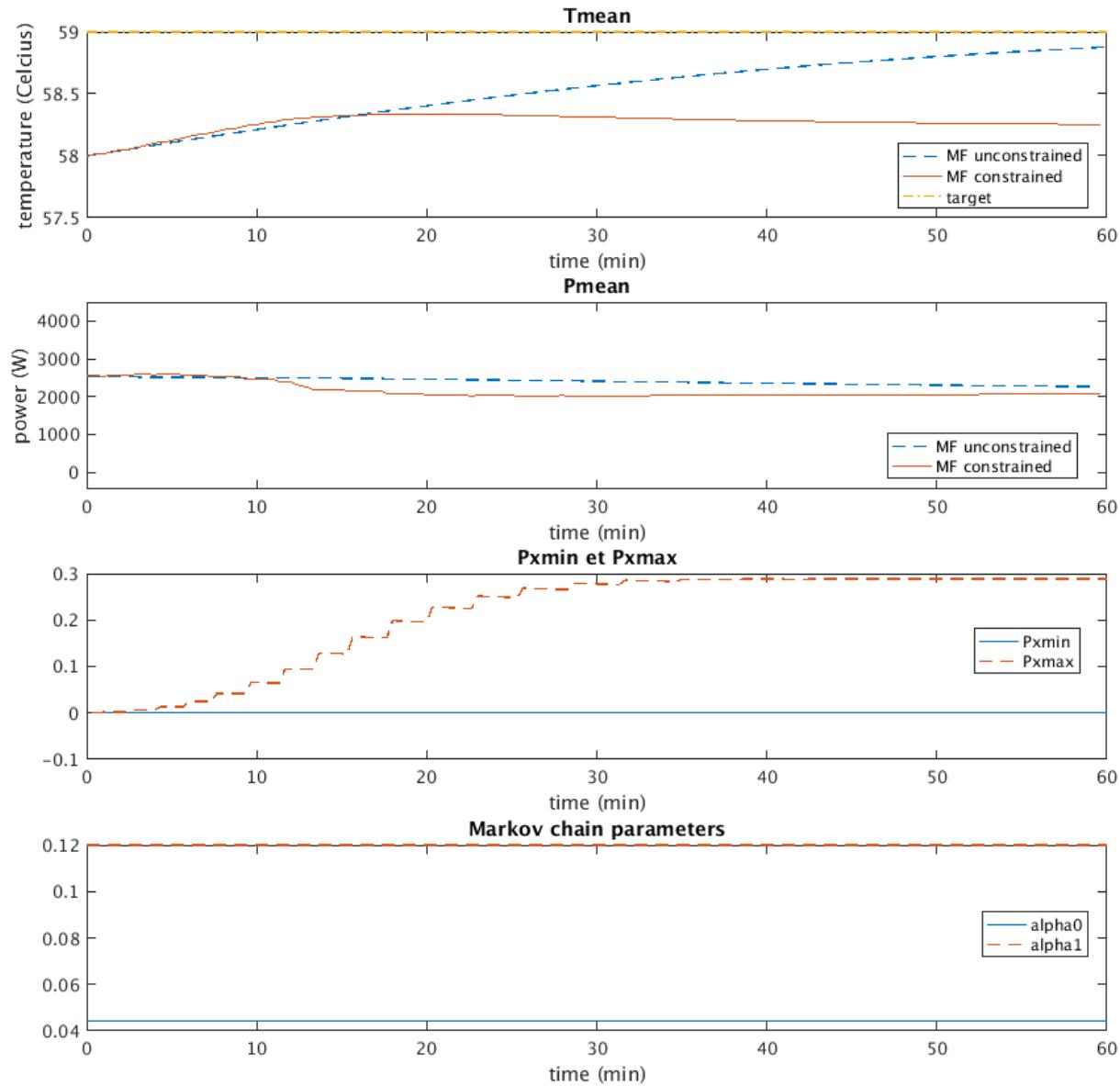


Figure 4.1: Comparaison du champ moyen avec (orange) et sans contraintes (bleu) (t en minutes)

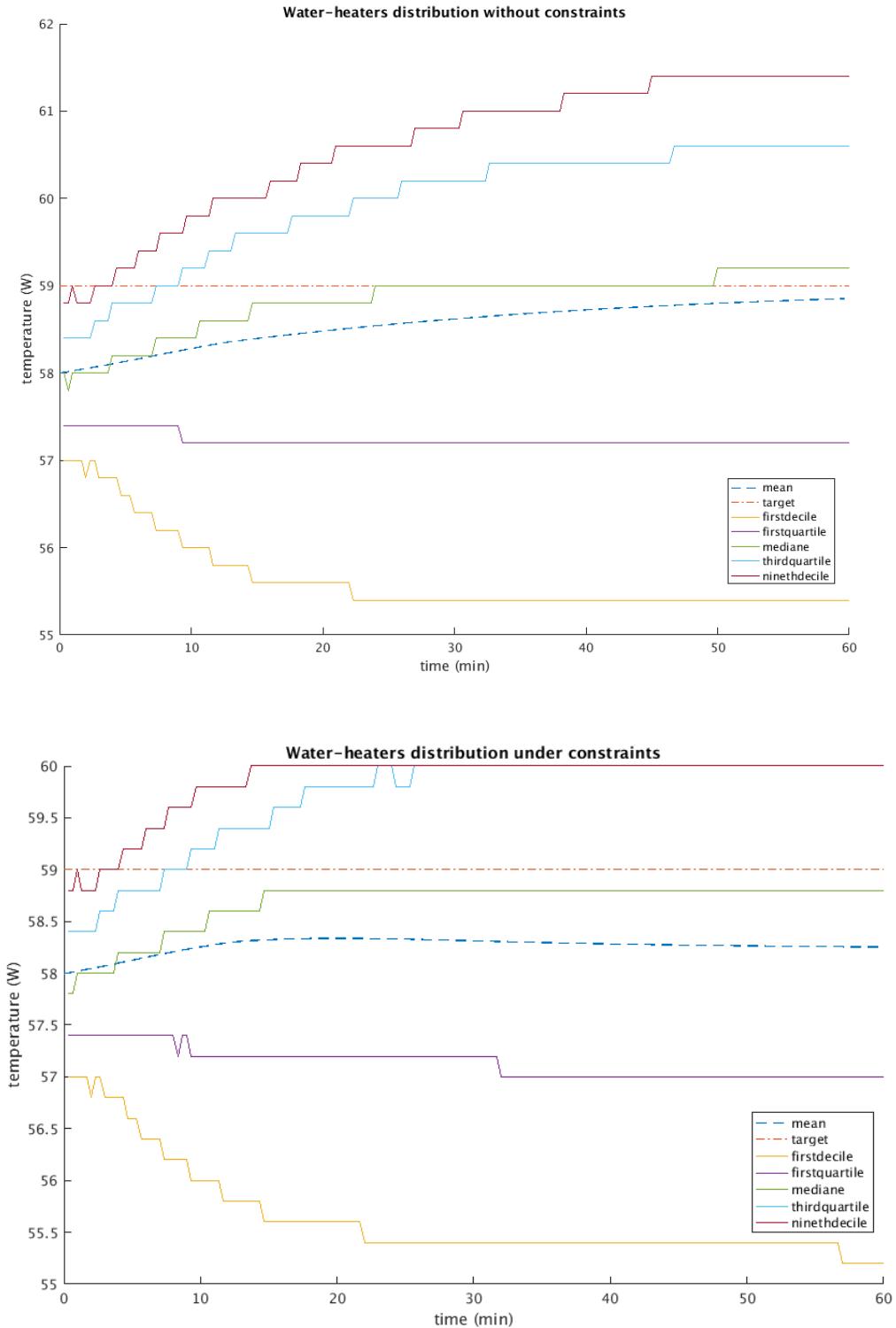


Figure 4.2: Comparaison des distributions des chauffe-eau en température, sans puis avec contraintes

On se rend mieux compte de l'effet de blocage en x_{max} à travers le comportement des distributions en température des chauffe-eau. Alors que le champ moyen sans contraintes a toute latitude d'envoyer les chauffe-eau à température initiale haute au dessus de 60°C, ces derniers sont maintenus à la température limite lorsqu'on intègre les contraintes.

La dernière courbe montre l'évolution de chaque élément discret de la distribution initiale.

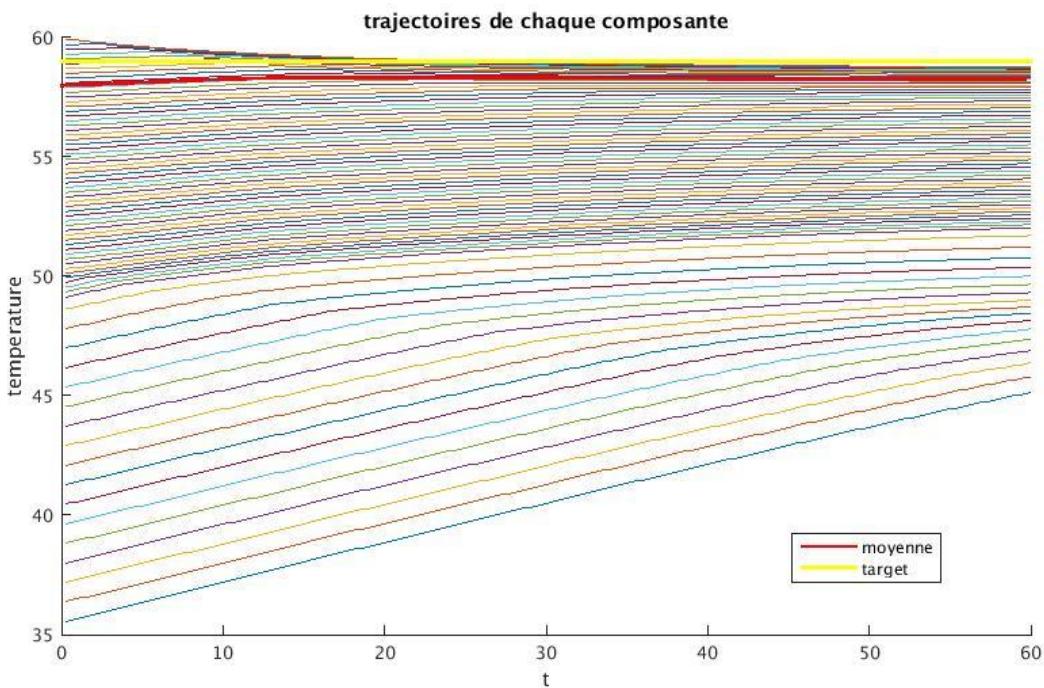


Figure 4.3: Trajectoires sous contraintes de chaque composante conditionnelle

4.4 Le mode accéléré

On expose ici une variante du champ moyen qui sera utile plus loin.

Le champ moyen est parfois lent à atteindre la consigne qu'on lui donne et peut éventuellement la rater si la pression vers z exercée par le coefficient q_t^y n'est pas assez importante. La figure 4.4 en est un exemple. Ici l'évolution de la température se déroule loin des températures critiques x_{min} et x_{max} , ce qui explique la faible influence des contraintes et donc que les 2 courbes soient confondues. L'horizon est de 15 min (pas de temps que l'optimisateur central utilisera par la

suite). On note que la trajectoire semble bien converger vers la consigne (57 degrés) mais qu'elle ne dispose pas assez de temps pour l'atteindre, l'écart à la fin du segment reste significatif.

On pourrait pour palier ce problème jouer sur les paramètres z et λ mais on se heurte parfois à des problèmes de convergence de l'algorithme de point fixe calculant la commande.

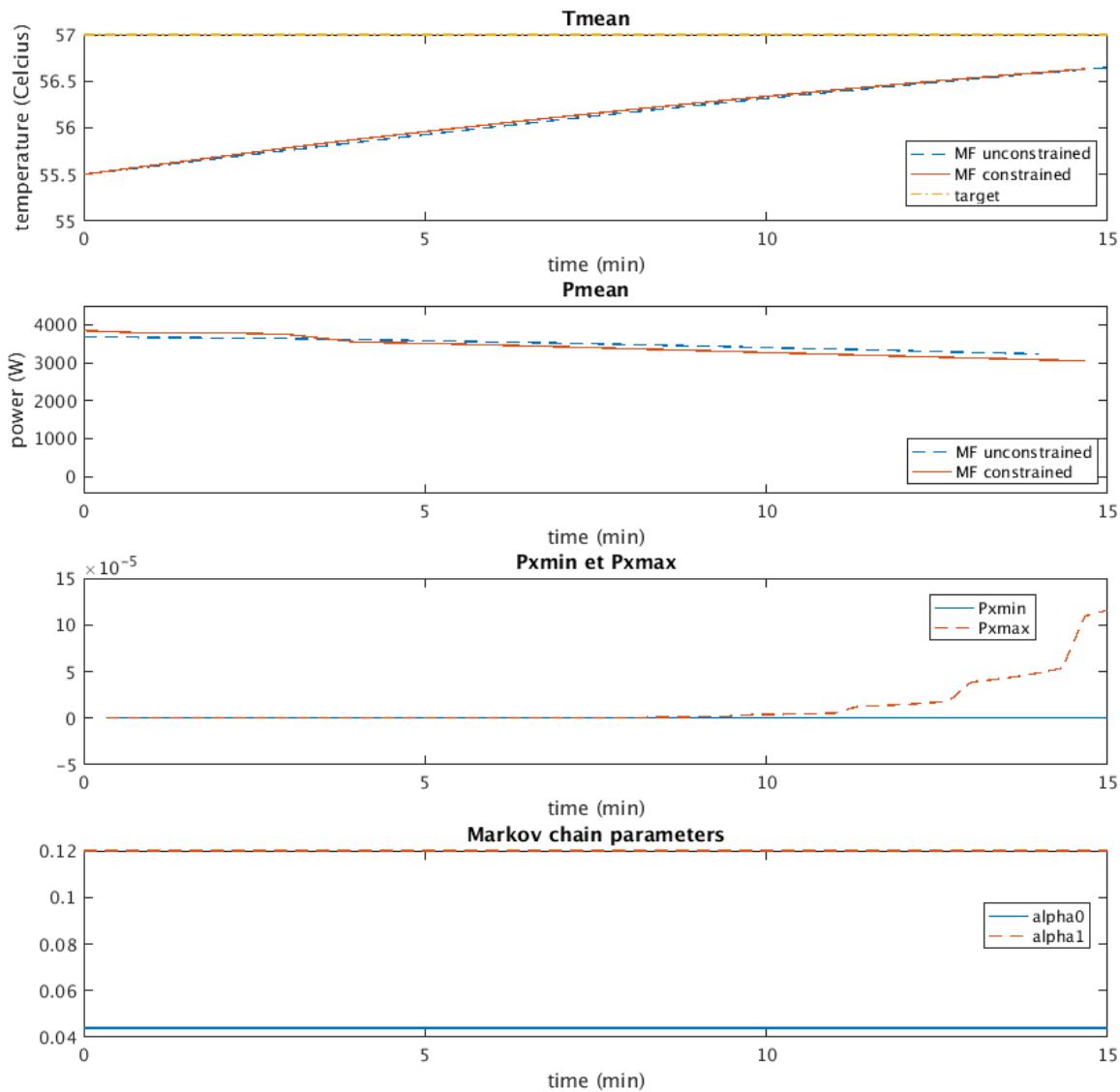


Figure 4.4: Exemple de trajectoire lente du champ moyen avec et sans contraintes

Nous avons alors mis en place la variante suivante que nous appellerons *mode accéléré*. Au lieu de calculer le champ moyen sur un horizon de 15 minutes comme précédemment, on le laisse réagir sur une période plus longue où les statistiques de demande d'eau en fin des 15 minutes sont prolongées indéfiniment, jusqu'à ce que la consigne de température moyenne, si faisable, soit atteinte. Le cas échéant, un individu de température initiale x_0 atteindrait en régime permanent une température de moyenne $steadyState(x_0)$ sur 15 minutes et appliquerait alors une loi de commande stationnaire:

$$u^{MFsstate}(x, t) = u^{MF}_0(x, t) = -\frac{B}{r}(\pi_0(t)x + s_0(t)) \quad \text{si } q(t) = 0$$

$$u^{MFsstate}(x, t) = u^{MF}_1(x, t) = -\frac{B}{r}(\pi_1(t)x + s_1(t)) \quad \text{si } q(t) = 1$$

avec $\pi_0(t) = \pi_0^{sstate}(x_0)$ $\pi_1(t) = \pi_1^{sstate}(x_0)$ $s_0(t) = s_0^{sstate}(x_0)$ et $s_1(t) = s_1^{sstate}(x_0)$ constantes.

L'idée alors est, en cas de besoin, de court-circuiter l'évolution normale, lente, du champ moyen classique en forçant les individus de même condition initiale à rejoindre en un temps choisi leur température $steadyState(x_0)$ par une commande provisoire $u^{FF}(x_0, t)$ avant d'appliquer la commande à champ moyen en régime permanent. Le prix à payer pour ce déplacement plus rapide vers la consigne est donc une distorsion du comportement du champ moyen qui aura besoin d'un peu de temps en fin de segment pour rééquilibrer ses populations de chauffe-eau. Néanmoins, l'objectif final étant l'aplanissement de la courbe de demande électrique on souhaite éviter au maximum les pics de puissance qu'occasionnerait un mouvement trop brusque vers les températures $steadyState(x_0)$. De plus on voudrait qu'un individu entravé dans son évolution vers $steadyState(x_0)$ par une contrainte en température supérieure (resp. inférieure) puisse augmenter (resp. diminuer) progressivement $u^{FF}(x_0, t)$ pour tenter d'y arriver.

La commande en mode accéléré $u^{acc}(x, t)$ s'écrit donc :

Tant que $x \neq \text{steadystate}(x_0)$

$$u^{acc}(x, t) = u^{FF}(x_0, t) = u^{inter}(x_0, t) + (u_{extreme} - u^{inter}(x_0, t)) \frac{t}{T_b}$$

où $u^{inter}(x_0, t) = u^{free}(x_0, t) + \frac{1}{B} \frac{(steadystate(x_0) - x_0)}{T_a}$

et $u_{extreme} = u_{max}$ si $steadystate(x_0) > x_0$ $u_{extreme} = u_{min}$ si $steadystate(x_0) < x_0$

Quand $x = \text{steadystate}(x_0)$

$$u^{acc}(x, t) = u^{MFSstate}(x, t) \text{ pour le reste du temps}$$

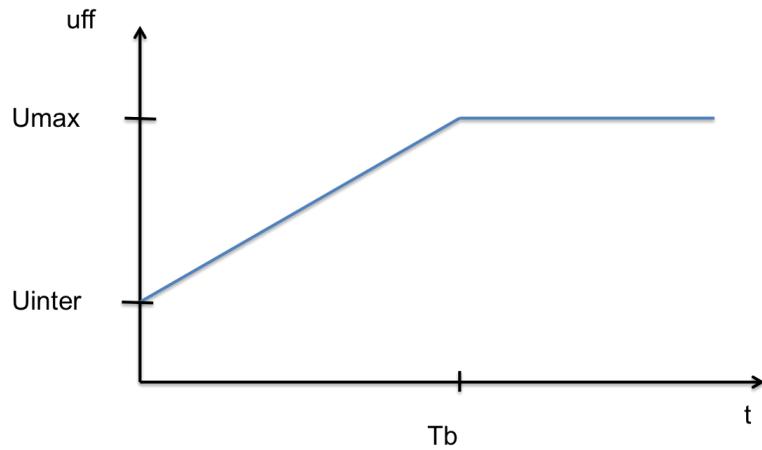


Figure 4.5: Allure de uff lorsque $steadystate(x_0) > x_0$

Ainsi la progression vers $steadystate(x_0)$ commence à vitesse $u^{inter}(x_0, t)$ qui est censée garantir une arrivée au temps T_a sans prendre en compte les contraintes, puis augmente jusqu'à atteindre les limites de puissance autorisées au temps T_b . En augmentant ainsi graduellement la

pression vers $steadystate(x_0)$ on s'assure que les individus bloqués dans leur progression par les contraintes donneront leur maximum pour tenter de l'atteindre.

La figure 4.5 reprend le même exemple que précédemment (même consigne et même condition initiale) mais en comparant cette fois-ci le mode accéléré au champ moyen classique.

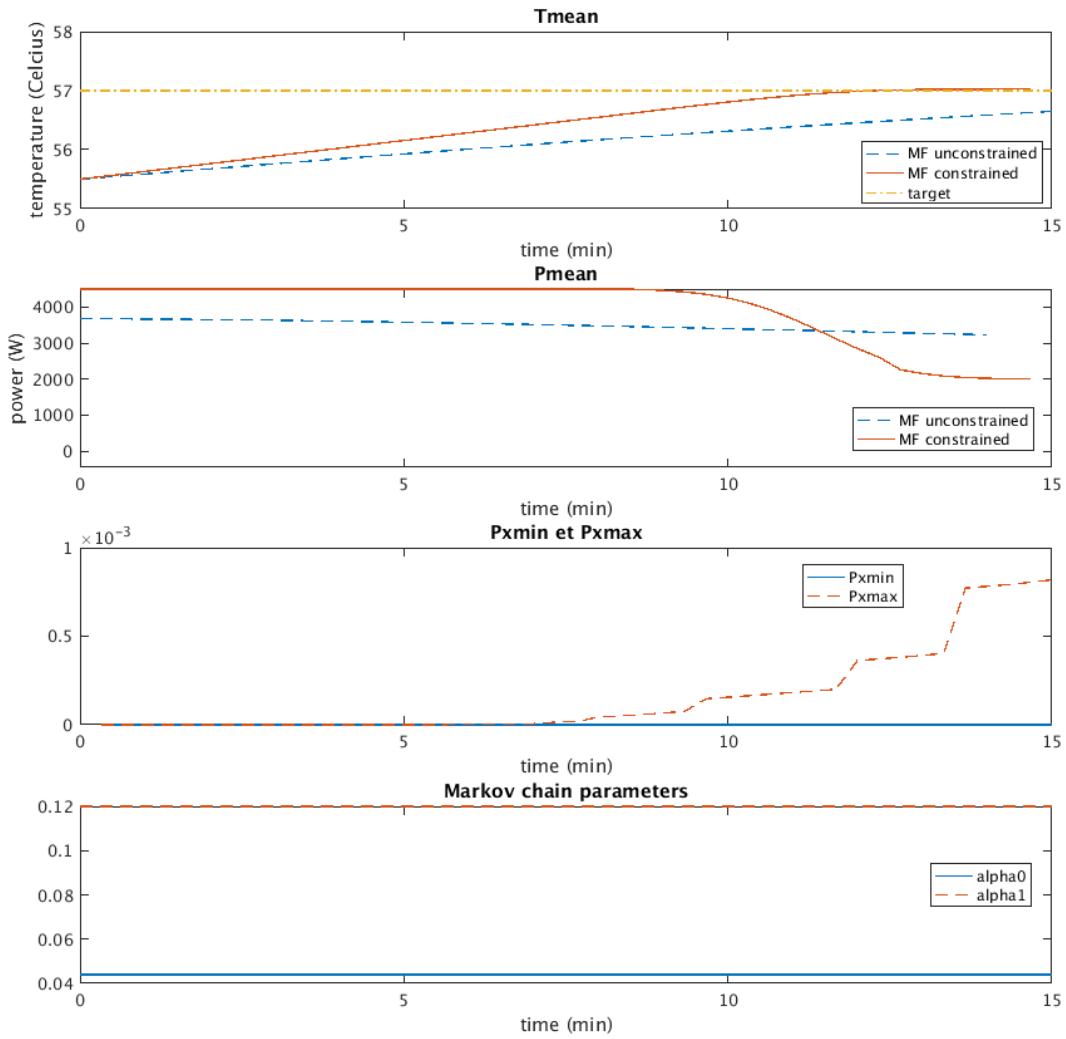


Figure 4.6: Comparaison du champ moyen sans contrainte (bleu) au champ moyen en mode accéléré (orange)

On remarque effectivement une variation abrupte de puissance (de 4500W à 2000W) quand on passe de la commande accélérée à celle en régime permanent par cette méthode. Pour les réduire, il faut retarder au maximum le moment où l'on atteint les $steadystate(x_0)$ en jouant sur les constantes de temps T_a et T_b , tout en gardant du temps pour que la commande à champ moyen $u^{MFSstate}(x, t)$ puisse répartir de nouveau les chauffe-eau de manière équitable une fois les $steadystate(x_0)$ atteints. Dans la suite on prendra systématiquement T_a de moitié la longueur du segment, et $T_b = 1.5 T_a$.

4.5 Gestion des divergences

Dans quelques rares cas, l'algorithme de point fixe calculant la commande à champ moyen ne parvient pas à converger, ou converge vers une solution absurde qui s'écrase vers z. Il faut dans ces situations substituer à la commande à champ moyen une commande de secours qui devrait conserver la cible de la température moyenne mais aussi dans l'idéal les propriétés de répartition équitable des chauffe-eau. Pour cela, une solution est de décaler les $steadystate(x_0)$ et les contrôles en régime permanents de chaque composante (calculées au segment précédemment) de telle sorte que la cible résultante soit celle prévue pour ce segment.

Les nouveaux $steadystate(x_0)$, dénotés $steadystate'(x_0)$, et les contrôles s'écrivent alors au segment i:

$$steadystate'(x_0, i) = steadystate(x_0, i - 1) + (y(i) - y(i - 1))$$

$$\pi_j^{sstate}(x_0, i) = \pi_j^{sstate}(x_0, i - 1)$$

$$s_j^{sstate}(x_0, i) = s_j^{sstate}(x_0, i - 1) - \left(\frac{y(i) - y(i - 1)}{\pi_j^{sstate}(x_0, i - 1)} \right)$$

On remarquera que cette méthode impose l'utilisation du mode accéléré, et n'est applicable que lorsque le segment précédent utilise le mode accéléré.

CHAPITRE 5 CONVERGENCE VERS UN PROFIL DE CONSIGNES RÉALISABLE

À présent armés de l'outil de simulation de la commande à champ moyen sous contrainte au Chapitre 4, et au besoin de techniques d'accélération de cette commande, nous pouvons observer la réponse du système à un jeu de consignes sur une journée par exemple. Dans cette partie, on observe la réponse aux consignes édictées par un niveau supérieur optimisant le lissage de la charge électrique. Suite au constat que les contraintes empêchent parfois la réalisation de ces consignes, on proposera une méthode pour obtenir un profil réalisable. Dans toute la suite on utilisera les données de demande électrique d'une journée de décembre de 2013 fournie par les compteurs SCADA de la Coopérative régionale d'électricité de St-Jean-Baptiste-de-Rouville. Les paramètres de Markov non stationnaires de la demande d'eau chaude seront ceux déterminés par Shu Fan à partir de données de consommation d'eau, dans le cadre de sa maîtrise à Polytechnique Montréal. Nous considérerons à chaque fois une population de chauffe-eau initialement centrée autour de 53°C.

5.1 Génération de températures de consigne par optimisation du lissage de la charge électrique

Dans le cadre du projet SmartDesc, Adham Ismaïl a réalisé à l'intérieur de sa thèse de doctorat un algorithme d'optimisation du lissage sur une journée de la charge sur le réseau dont l'objectif est de pouvoir alléger le parc des centrales installées, et limiter les variations de leurs points de fonctionnement. Pour cela il prend en compte des grandeurs non-contrôlables comme la demande des utilisateurs, la production journalière d'énergie renouvelable, le nombre de chauffe-eau contrôlables, et tente de lisser la courbe de charge totale en considérant les chauffe-eau à disposition sous un modèle agrégé représentant leur comportement moyen sans tenir compte des contraintes. Ces derniers jouent alors un rôle de batterie pourvue d'une dynamique contrôlable contrainte en puissance et en température, et pouvant combler les pics et les creux de la charge électrique. L'algorithme situé au niveau supérieur dans l'architecture globale produit alors chaque jour une consigne constante par morceaux de 96 températures à atteindre toutes les 15

min et la transmet aux contrôleurs des chauffe-eau via le réseau de télécommunication, comme on l'a évoqué en introduction.

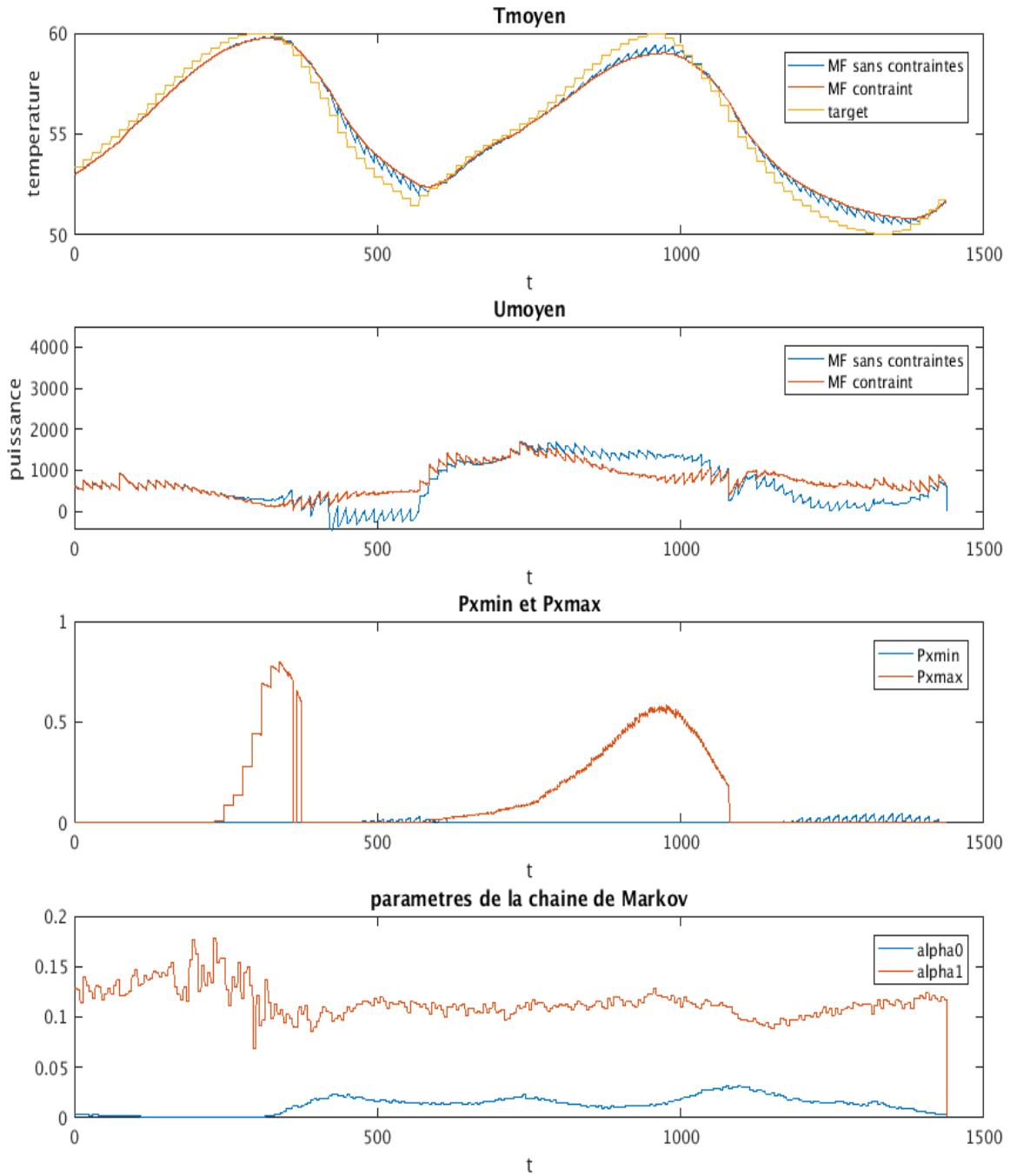


Figure 5.1: Comparaison du champ moyen avec et sans contraintes pour une consigne sur 24 heures (96 segments de 15 minutes) produite pour 200 chauffe-eau

L'exemple en figure 5.1 est la simulation de la réponse du champ moyen sous contraintes aux consignes édictées par le niveau supérieur pour une population de 200 chauffe-eau contrôlables. Pour chaque segment de 15 minutes, une trajectoire du champ moyen est calculée en prenant comme conditions initiales les distributions obtenues à la fin du segment précédent. En bleu figure pour chaque segment le comportement correspondant du champ moyen sans contraintes.

On rappelle que cette simulation a pour but d'observer si la population des chauffe-eau contrôlés par champ moyen sous contraintes est capable ou non de suivre des consignes du niveau supérieur. Comme on le voit dans la figure, les contraintes empêchent parfois la réalisation des consignes, en particulier lorsque l'on s'approche des températures extrêmes 50°C et 60°C vers $t = 1000 \text{ min}$ ou $t = 1300 \text{ min}$.

On peut remarquer que les non-réalisations vers 60°C coïncident bien avec des accumulations de masse en $P_{x_{max}}$ et qu'alors la cible est d'autant moins atteinte que la probabilité de passage à l'état de tirage (α_0) est forte. En effet pour compenser ce tirage d'eau important, le champ moyen vise plus haut et se retrouve bloqué en x_{max} . Les non-réalisations vers 50°C sont elles dues à des accumulations en $P_{x_{min}}$ mais ici surtout au forçage du chauffage maximal lorsque les chauffe-eau se trouvent en dessous de x_{min} . La température de consigne étant proche de 50°C , un nombre non-négligeable de chauffe-eau se trouvent régulièrement dans cette situation à la faveur de tirages d'eau des utilisateurs et, le cas échéant, ont pour consigne de remonter à vitesse maximale vers x_{min} . Enfin, des retards dans les phases de chute de température (vers $t = 400 \text{ min}$ par exemple) s'expliquent par l'existence de la borne inférieure sur la puissance $u_{min} = 0\text{W}$.

Tous ces phénomènes faussent de fait la trajectoire prévue par le niveau supérieur et le lissage réel ne correspond plus à celui escompté. En particulier dans la figure 5.2, des variations apparaissent lorsque des violations ont lieu, vers $t = 1000 \text{ min}$ ou $t = 1300 \text{ min}$ notamment. Notons également que les erreurs de poursuite peuvent devenir cumulatives lorsque la cible se déplace dans le même sens d'un intervalle de 15 minutes au suivant. Il faut en conséquence produire un nouveau profil de consignes moins exigeant compte tenu des performances du système sous contraintes.

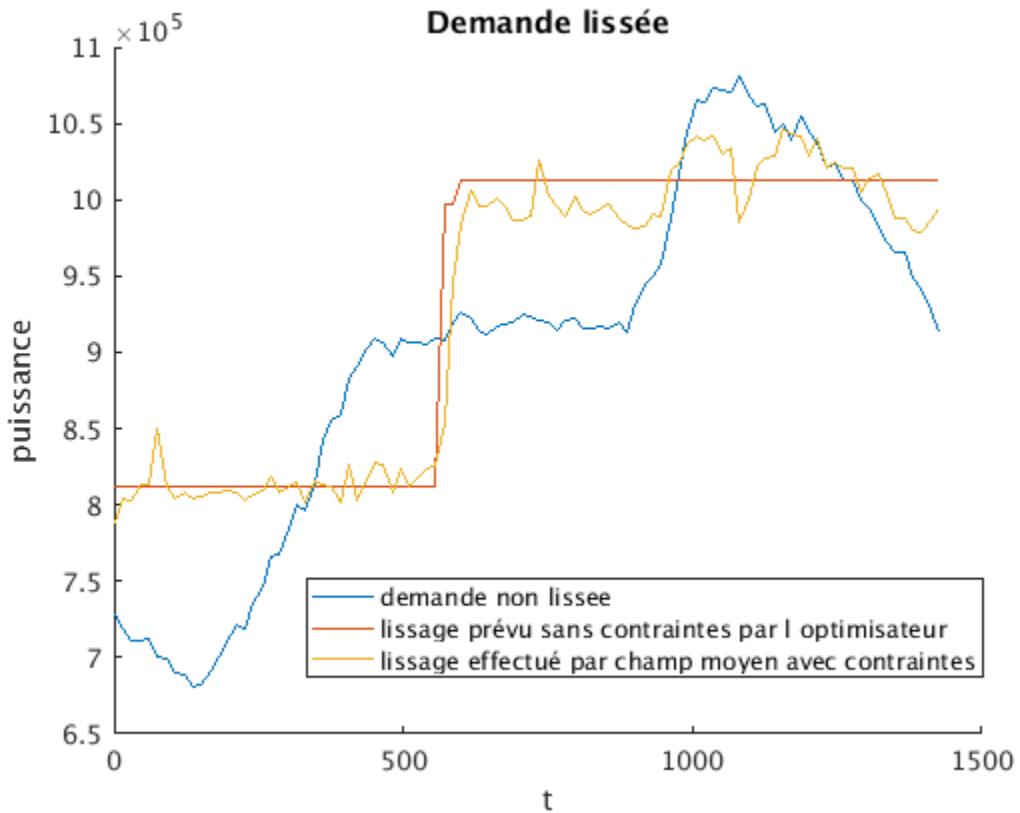


Figure 5.2 : Lissage de la demande électrique par 200 chauffe-eau

5.2 Production d'un profil réalisable

5.2.1 Première version

5.2.1.1 Principe

La raison pour laquelle certaines consignes sont inatteignables est que l'algorithme d'optimisation surestime la capacité du modèle agrégé de chauffe-eau à se rendre à la température prévue, c'est-à-dire les bornes de puissance qu'il est en mesure de mettre en place dans sa situation. Notre stratégie de réactualisation des consignes consiste alors à fournir à l'algorithme d'optimisation de nouvelles contraintes sur les puissances minimales et maximales

que peut recevoir le système lorsqu'il est incapable de rejoindre les cibles dictées par le niveau supérieur. Dans un premier temps, on prendra cette borne de puissance comme étant celle consommée par le système lorsqu'il a tenté d'atteindre la consigne et a échoué. L'optimisateur devrait en conséquence produire un nouveau profil moins agressif dont on vérifiera à son tour la réalisabilité, et ainsi de suite jusqu'à ce que les températures soient réalisables sur les 96 segments de la journée. Pour résumer, les bornes de puissance inférieures et supérieures *tauxmin* et *tauxmax* sont créées de la façon suivante :

Sur le segment i

$$\begin{aligned} \text{tauxmin}(i) &= u_{min} \text{ si } |\text{valeurfinale}(i) - y| < \varepsilon \\ \text{tauxmin}(i) &= U_{moyen}(i) \text{ si } \text{valeurfinale}(i) - y > \varepsilon \\ \text{tauxmax}(i) &= u_{max} \text{ si } |\text{valeurfinale}(i) - y| < \varepsilon \\ \text{tauxmax}(i) &= U_{moyen}(i) \text{ si } -(\text{valeurfinale}(i) - y) > \varepsilon \end{aligned}$$

où :

$U_{moyen}(i)$ est la puissance moyenne développée normalisée sous contraintes sur le segment i.

$\text{valeurfinale}(i)$ est la température moyenne à la fin du segment i.

En définissant :

$\psi_{min} : y \rightarrow \text{tauxmin}$ la fonction qui renvoie le vecteur de dimension 96 de bornes inf en puissance étant donné une certaine consigne

$\psi_{max} : y \rightarrow \text{tauxmax}$ la fonction qui renvoie le vecteur de dimension 96 de bornes sup en puissance étant donné une certaine consigne

$\varphi : (\text{tauxmin}, \text{tauxmax}) \rightarrow y$ la fonction qui crée le vecteur de dimension 96 de consignes optimisant le lissage de la charge compte tenu des vecteurs de contraintes (*tauxmin*, *tauxmax*)

L'algorithme de convergence vers un profil réalisable se présente sous la forme :

Tant que $\|valeurfinale - y\|_\infty > \varepsilon$

iteration = iteration + 1;

y = $\varphi(tauxmin(iteration), tauxmax(iteration))$;

tauxmin(iteration) = max(tauxmin(iteration - 1), $\psi_{min}(y)$) ; (1)

tauxmax(iteration) = min(tauxmax(iteration - 1), $\psi_{max}(y)$) ; (2)

fin

Les étapes (1) et (2) de l'algorithme sont là pour conserver les bornes les plus contraignantes sur chaque segment à chaque nouvelle itération. Ainsi on évite des phénomènes d'oscillations de l'algorithme, qui pourrait proposer des consignes déjà évaluées précédemment si l'on ne garde pas les bornes en mémoire. On prendra dans toute la suite $\varepsilon = 0.4 \text{ } ^\circ\text{C}$.

5.2.1.2 Résultats

En fonctionnant toujours pour 200 chauffe-eau contrôlables, l'algorithme converge après 7 itérations vers une trajectoire réalisable à ε près tracée en Figure 5.3.

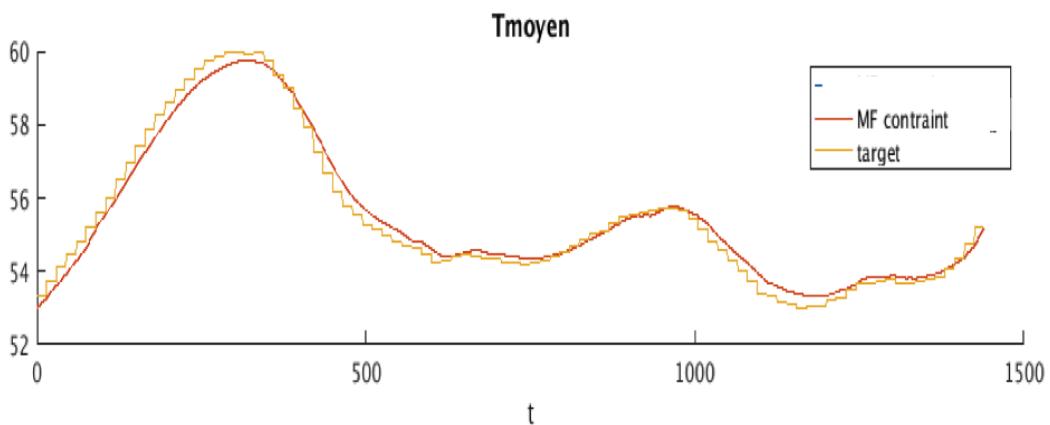


Figure 5.3 : Trajectoire réalisable obtenue après 7 itérations

Cette dernière ainsi que les trajectoires intermédiaires représentées en Figure 5.4 sont assez différentes les unes des autres. Cela s'explique par la non-continuité de l'algorithme d'optimisation basé sur la programmation linéaire et qui à partir des contraintes tauxmin et tauxmax fournit les consignes minimisant la somme en valeur absolue des variations de la demande électrique totale. Comme le montre la Figure 5.5, le lissage prévu par l'optimisateur change beaucoup et se dégrade avec les itérations car les contraintes s'accumulent.

On peut donner un indicateur de la performance du lissage en comparant la variation de l'amplitude de la demande lissée à celle de la demande non lissée. On définit alors :

$$\text{réduction de la variation d'amplitude} = 1 - \frac{\text{variation d'amplitude lissée}}{\text{variation d'amplitude non lissée}}$$

La décroissance de ce paramètre avec les itérations (Figure 5.6) illustre bien la dégradation du lissage au fur et à mesure qu'on ajoute des contraintes.

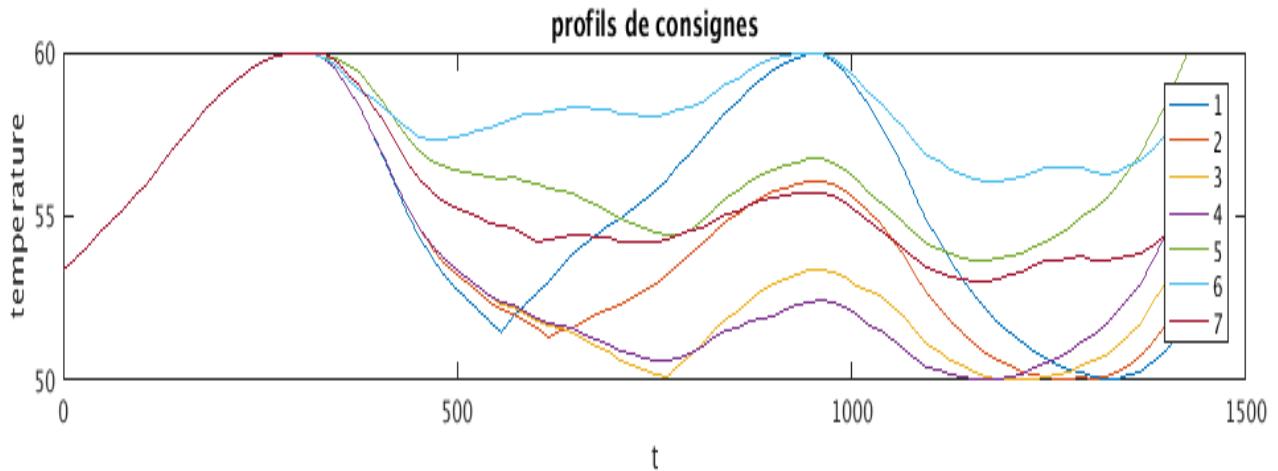


Figure 5.4 : Trajectoires de consigne données par l'optimisateur à chaque itération

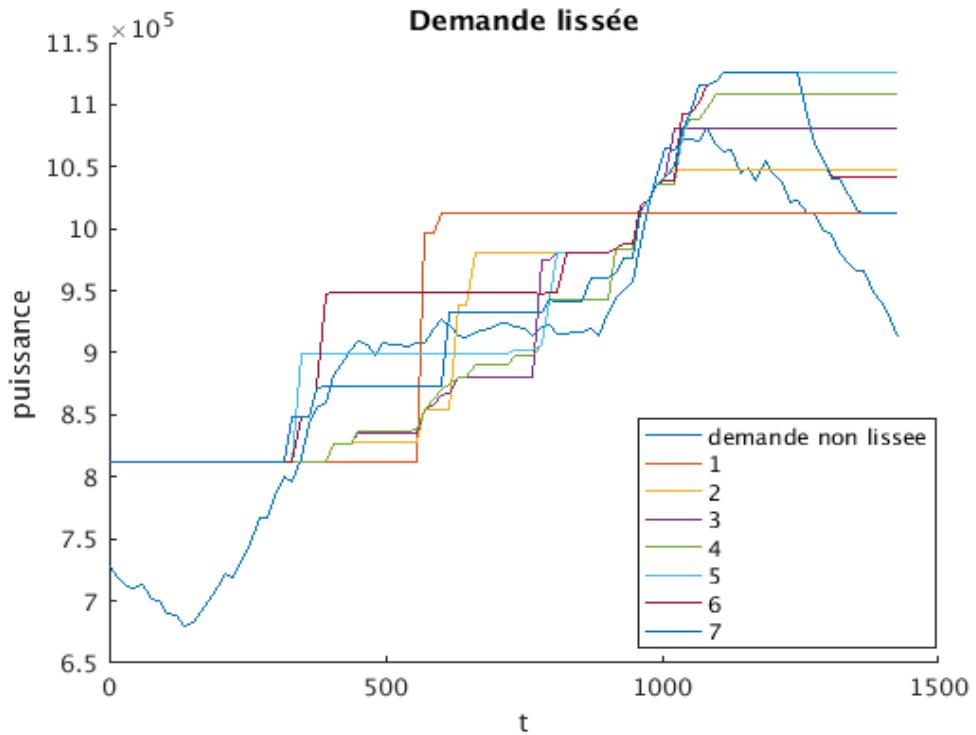


Figure 5.5 : Lissages de la demande prévus par l'optimisateur obtenus à chaque itération

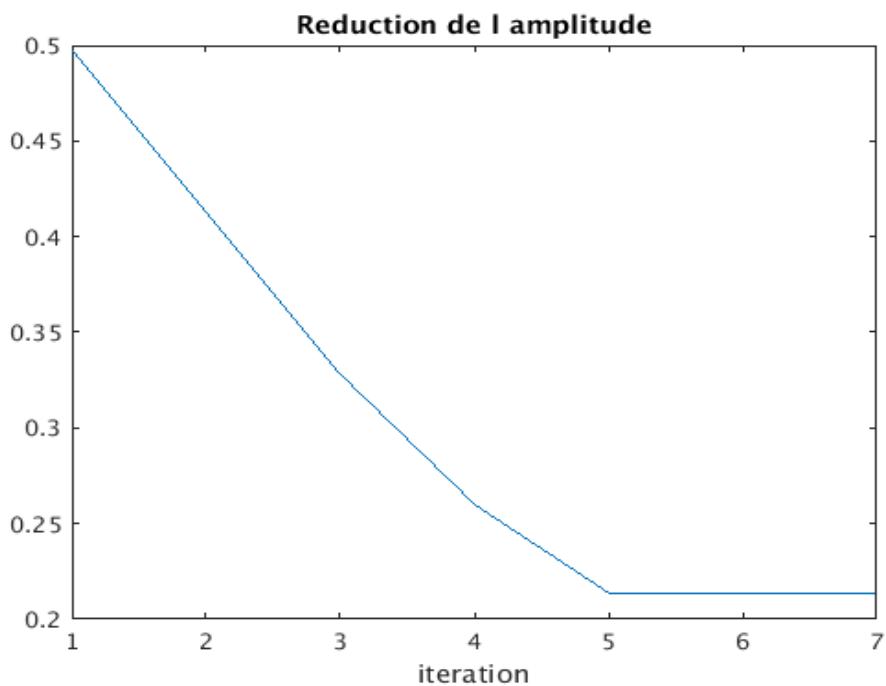


Figure 5.6 : Réduction de la variation d'amplitude de la demande électrique à chaque itération

On voit que le dernier lissage est bien moins réussi que celui prévu au départ qui ne comportait qu'un pallier dans la demande. Il est possible que le fait d'accumuler les tauxmin et tauxmax à chaque itération finisse par créer des contraintes non pertinentes en certains points. En effet ces contraintes dépendent grandement des conditions initiales au début de chaque segment, or on a vu que les trajectoires variaient beaucoup d'une itération à l'autre. De plus, on peut penser que si une température de consigne n'est pas atteinte à cause des contraintes, elle pourrait l'être en forçant le champ moyen à viser plus haut (overshooting) ou plus bas (undershooting) en fonction de la situation. Avec cette version corrigée, on étendrait le champ des trajectoires réalisables, réduirait le nombre d'itérations et avec lui l'ajout de contraintes possiblement non pertinentes.

5.2.2 Version corrigée

On développe ici plus formellement l'idée de correction entrevue au paragraphe précédent.

5.2.2.1 Principe

On procède de la manière suivante. On tente d'abord de réaliser la trajectoire proposée par le l'optimisateur. Si certaines températures ne sont pas atteintes, on réessaie en remplaçant dans le vecteur de consigne initial les cibles non atteintes par un barycentre entre la consigne et 61°C si la cible était trop haute (overshooting) et par un barycentre entre la consigne et 49°C si la cible était trop basse (undershooting). Si cela ne suffit pas, on essaye encore en remplaçant cette fois ci par 61°C et 49°C respectivement. Si malgré ces transformations on ne parvient toujours pas à réaliser le jeu de consigne initial, alors comme précédemment on transmet les contraintes correspondantes à l'optimisateur qui produit un nouveau profil à l'itération suivante.

Ainsi en appelant $\theta : y \rightarrow y'$ la fonction créant le jeu de consignes (vecteur) corrigé à partir du profil initial, l'algorithme de convergence s'écrit maintenant :

Tant que $\|valeurfinale - y\|_\infty > \varepsilon$

iteration = iteration + 1;

y = $\varphi(tauxmin(iteration), tauxmax(iteration))$;

y' = $\theta(y)$;

tauxmin(iteration) = max(tauxmin(iteration - 1), $\psi_{min}(y')$) ; (1)

tauxmax(iteration) = min(tauxmax(iteration - 1), $\psi_{max}(y')$) ; (2)

fin

5.2.2.2 Résultats pour 200 chauffe-eau

La Figure 5.6 permet d'observer l'amélioration occasionnée par la correction du profil initial à la première itération. Cependant certaines zones sont encore hors de portée, d'autres itérations sont donc nécessaires.

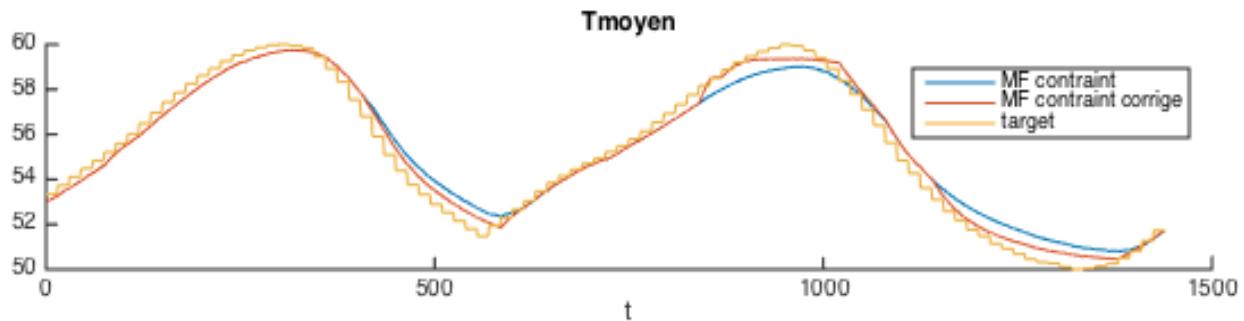


Figure 5.7 : Comparaison de la réponse du champ moyen contraint à la 1ere trajectoire de l'optimiseur et de la réponse à la trajectoire corrigée correspondante (pour 200 chauffe-eau)

L'algorithme converge cette fois-ci en seulement 2 itérations et la trajectoire finale réalisable diffère assez peu de la première. Le lissage final est alors proche de celui prévu initialement.

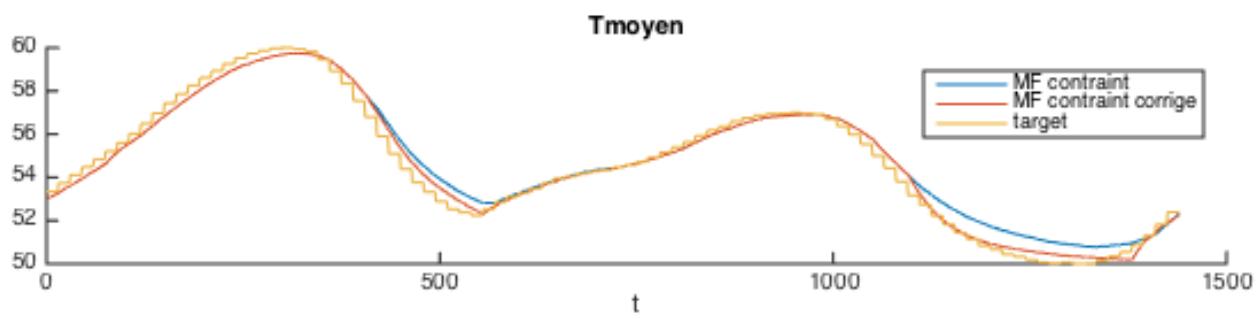


Figure 5.8 : Comparaison du champ moyen contraint et de sa correction à la seconde itération

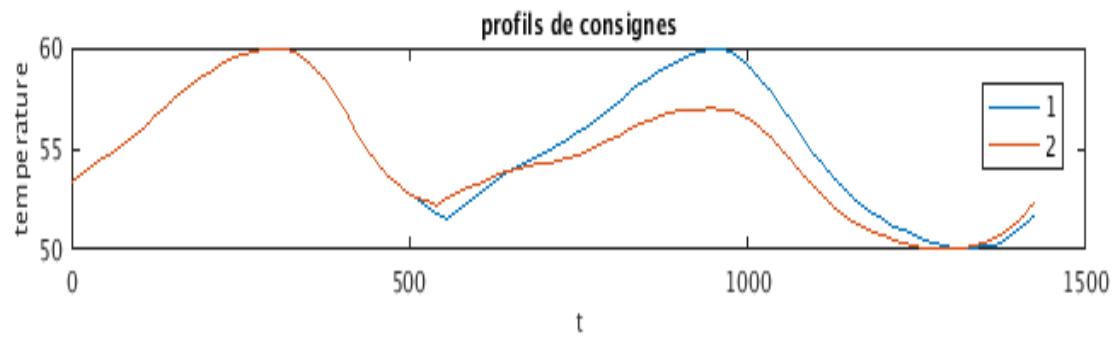


Figure 5.9 : Trajectoires de consigne données par l'optimisateur à chaque itération

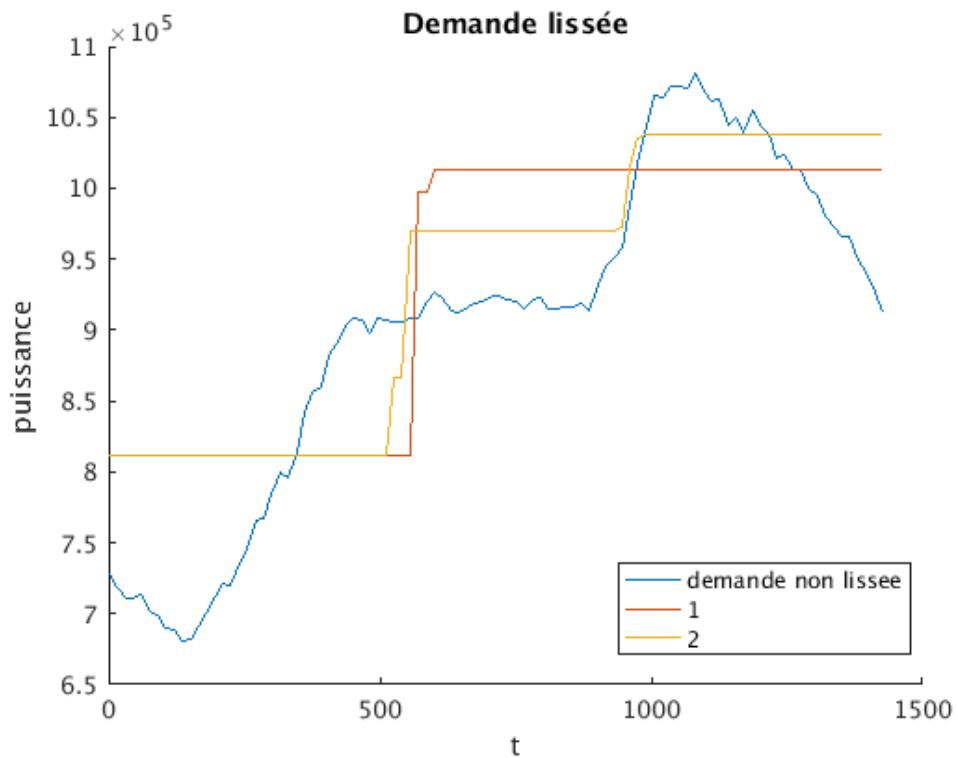


Figure 5.10 : Lissages de la demande obtenus à chaque itération

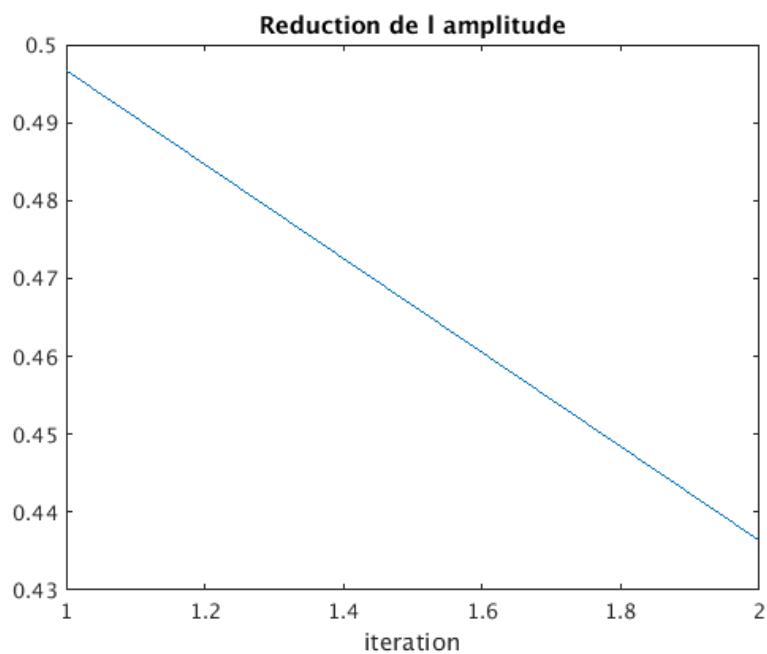


Figure 5.11 : Réduction de la variation d'amplitude de la demande électrique à chaque itération

Cette version corrigée apparaît donc comme une bonne méthode et permet de tirer le maximum dont est capable le système, même si elle ne permet pas un contrôle précis de la température moyenne. Ici le ε est assez large pour se limiter à deux tentatives de modification de la consigne, mais s'il était plus petit d'autres étapes seraient probablement nécessaires.

Jusqu'à présent on a considéré une population de 200 chauffe-eau, ce qui était assez grand pour que la contribution de chaque individu au lissage soit raisonnable. Il est intéressant d'observer comment réagira l'algorithme pour seulement 30 chauffe-eau, et donc une mise à contribution plus exigeante et des consignes plus agressives.

5.2.2.3 Résultats pour 30 chauffe-eau

Comme prévu, à la première itération, les variations des consignes sont plus abruptes que pour 200 chauffe-eau et le champ moyen contraint ne parvient pas à suivre. A cause du petit nombre de chauffe-eau, c'est-à-dire de la capacité de stockage disponible, le lissage est difficile dès la première itération. L'algorithme met ensuite 10 itérations pour converger.

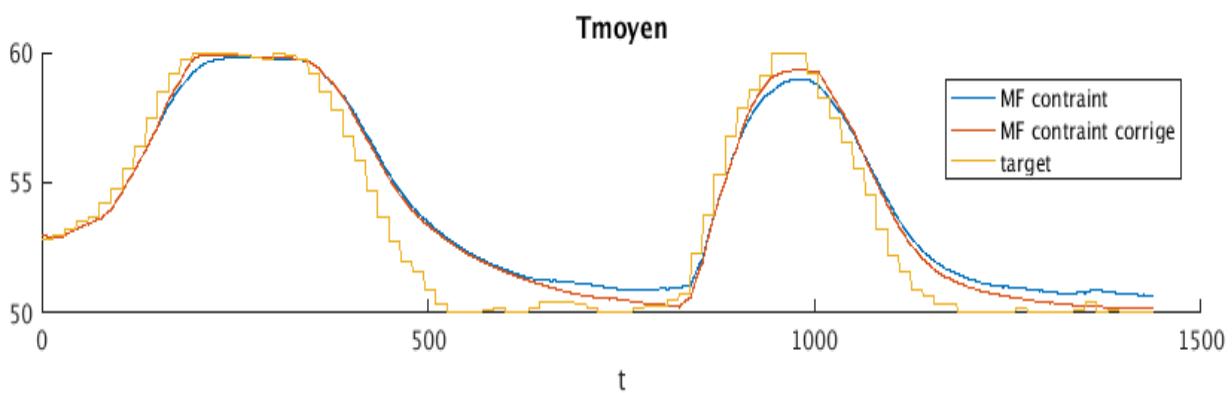


Figure 5.12 : Champ moyen contraint et sa correction à la première itération

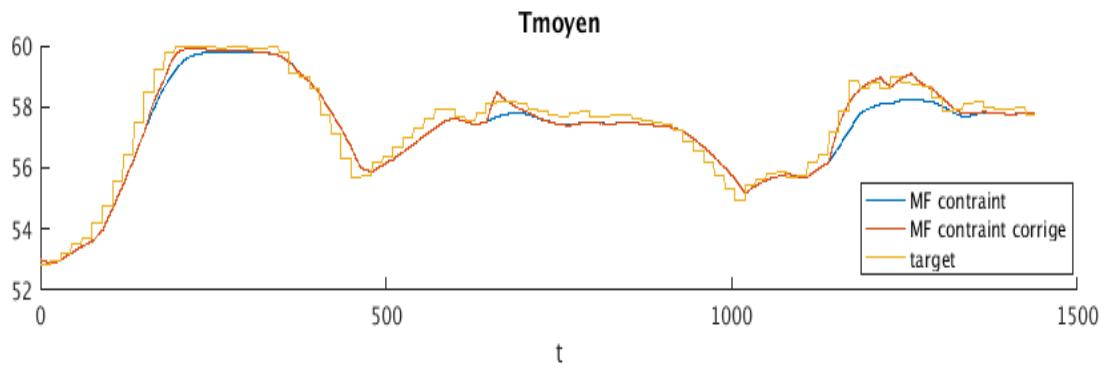


Figure 5.13 : Champ moyen contraint et sa correction à la dixième et dernière itération

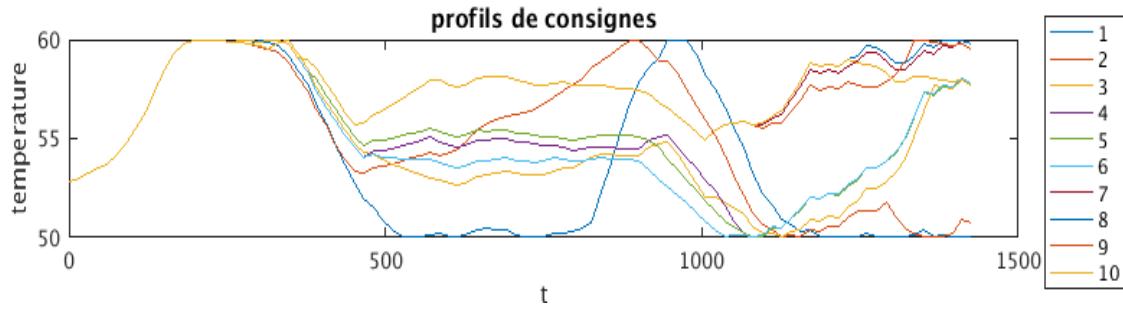


Figure 5.14 : Trajectoires de consigne données par l'optimisateur à chaque itération

On remarque aussi dans la Figure 5.12 que vers $t = 200 \text{ min}$ par exemple, des consignes sont ratées à cause de la lenteur du champ moyen (cf chapitre 4) car on voit que les mêmes températures sont atteintes peu après. Dans la prochaine partie, on mettra donc en œuvre le mode accéléré vu dans le chapitre précédent pour éviter des corrections de trajectoire inutiles et peu précises.

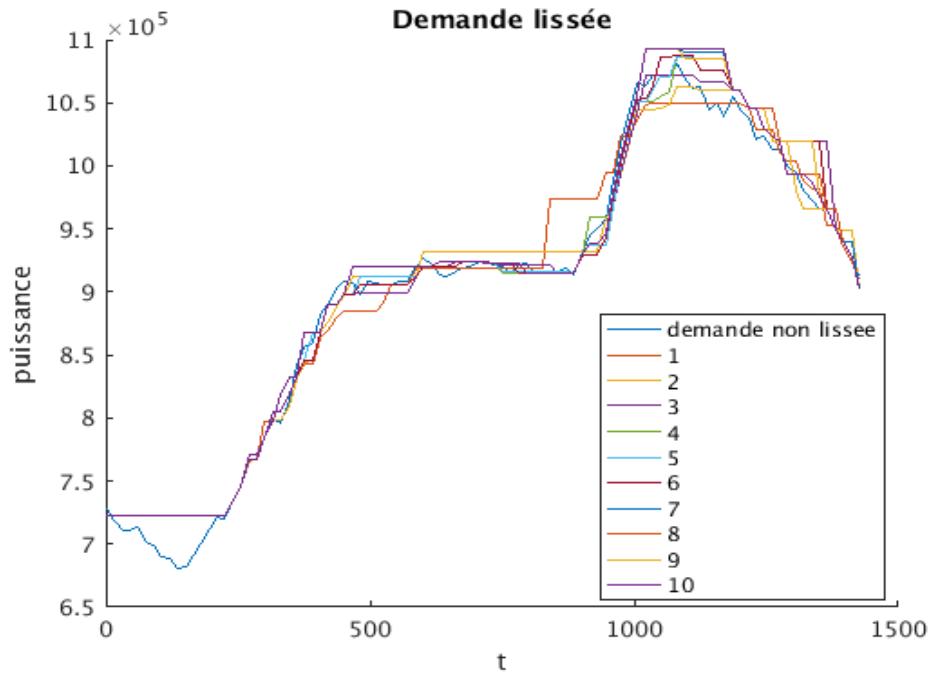


Figure 5.15 : Lissages de la demande obtenus à chaque itération

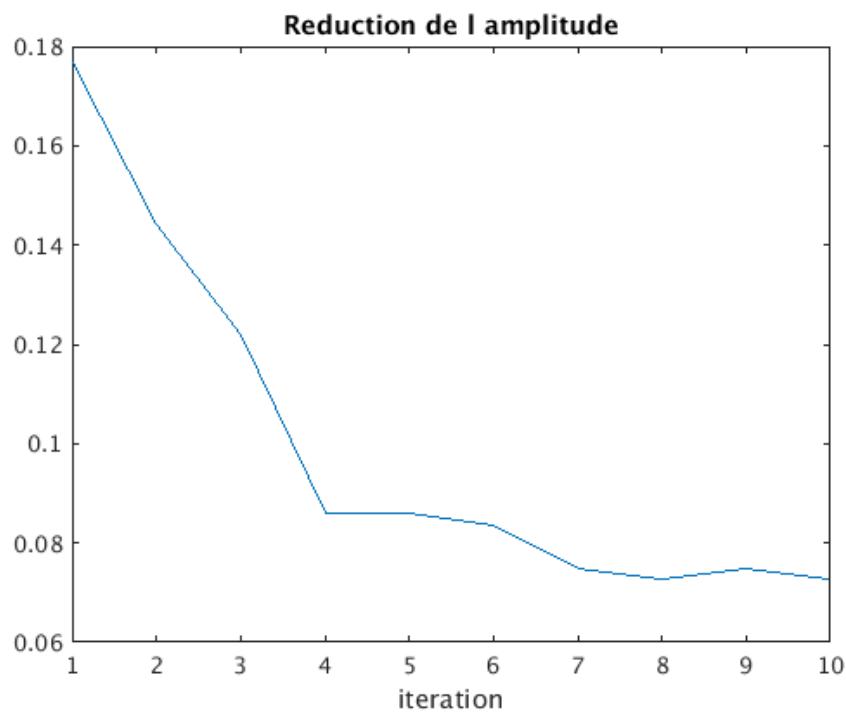


Figure 5.16 : Réduction de l'amplitude de la demande électrique à chaque itération

5.2.3 Version accélérée

Dans cette nouvelle version, les températures qui posaient problème dans la première montée sont désormais atteintes précisément et ne nécessitent plus de correction. Cependant, comme on l'a vu au chapitre 4, cela se fait au prix de pics de puissance pour rejoindre rapidement le régime permanent. Ces pics sont problématiques car on les retrouve dans la courbe de demande finale, ce qui est contreproductif par rapport à l'objectif de lissage.

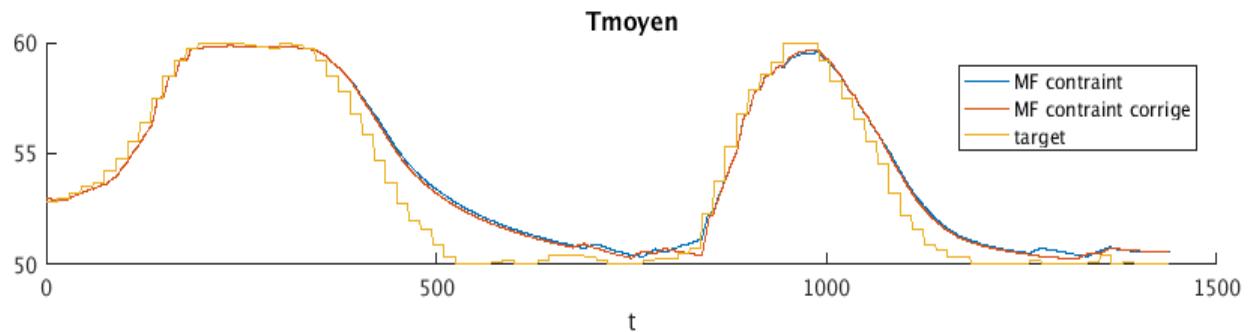


Figure 5.17 : Champ moyen contraint accéléré et sa correction à la première itération

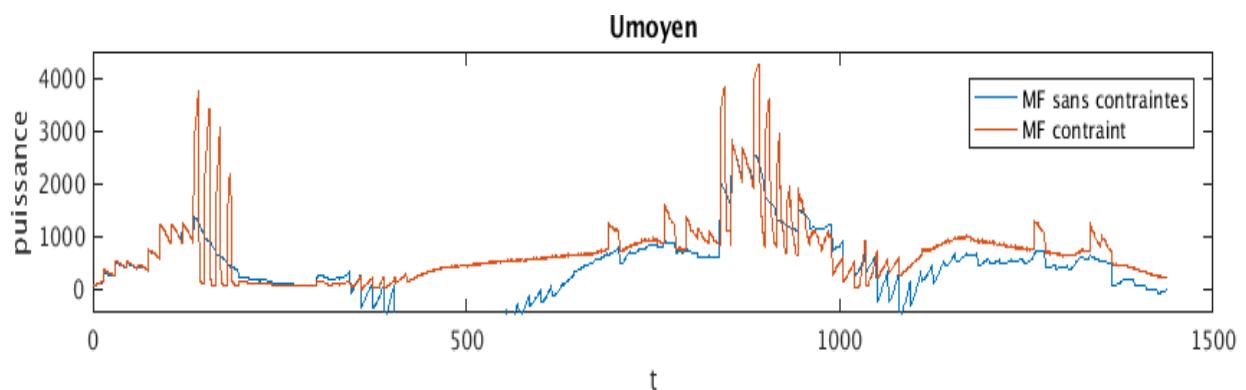


Figure 5.18 : Puissance normalisée développée par le champ moyen sans contraintes et le champ moyen accéléré sous contraintes

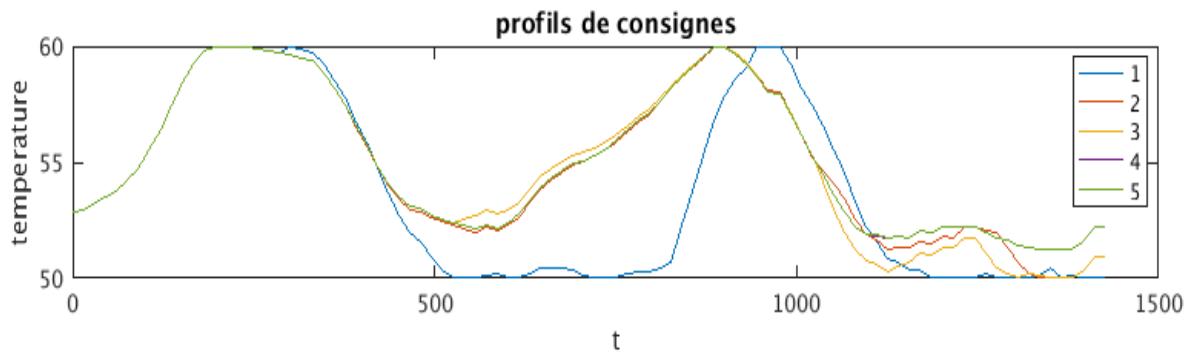


Figure 5.19 : Trajectoires de consigne données par l'optimisateur à chaque itération

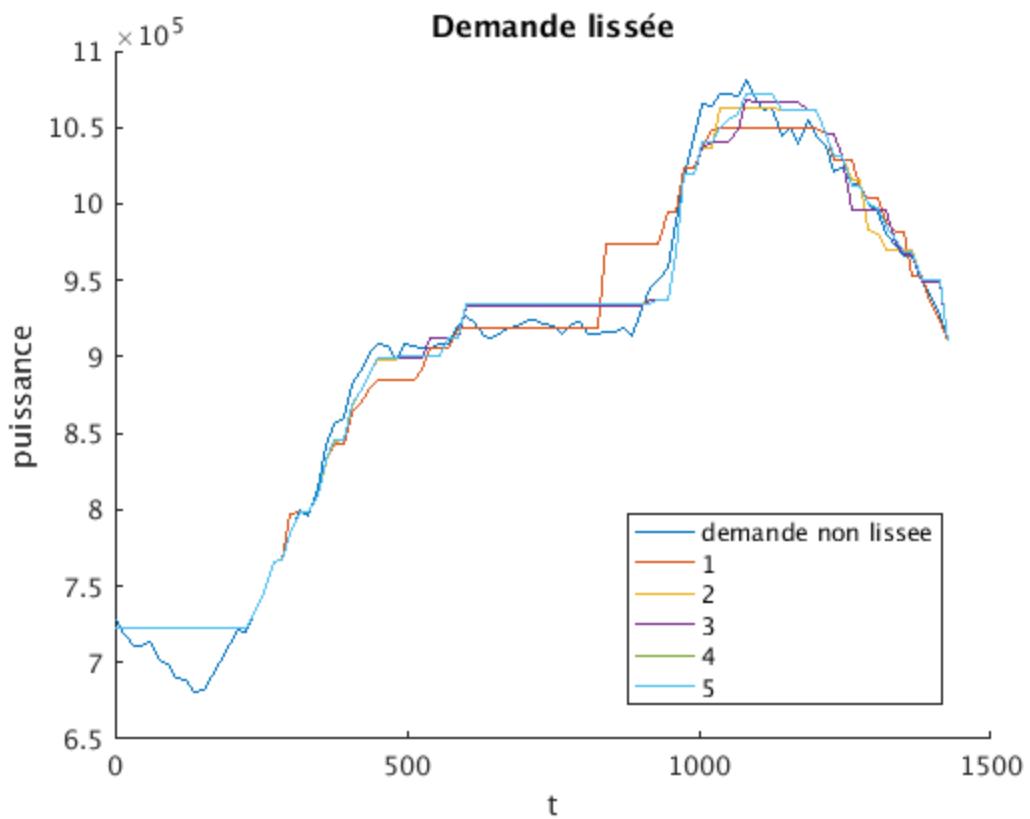


Figure 5.20 : Lissages de la demande obtenus à chaque itération

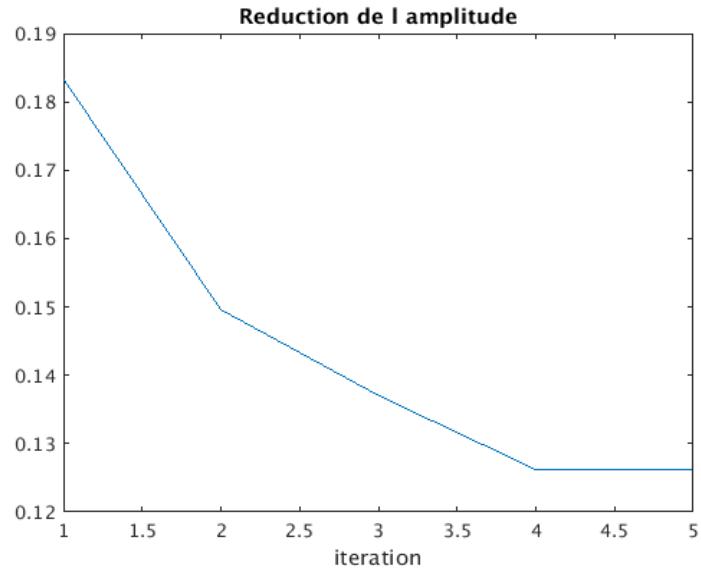


Figure 5.21 : Réduction de la variation d'amplitude de la demande électrique à chaque itération

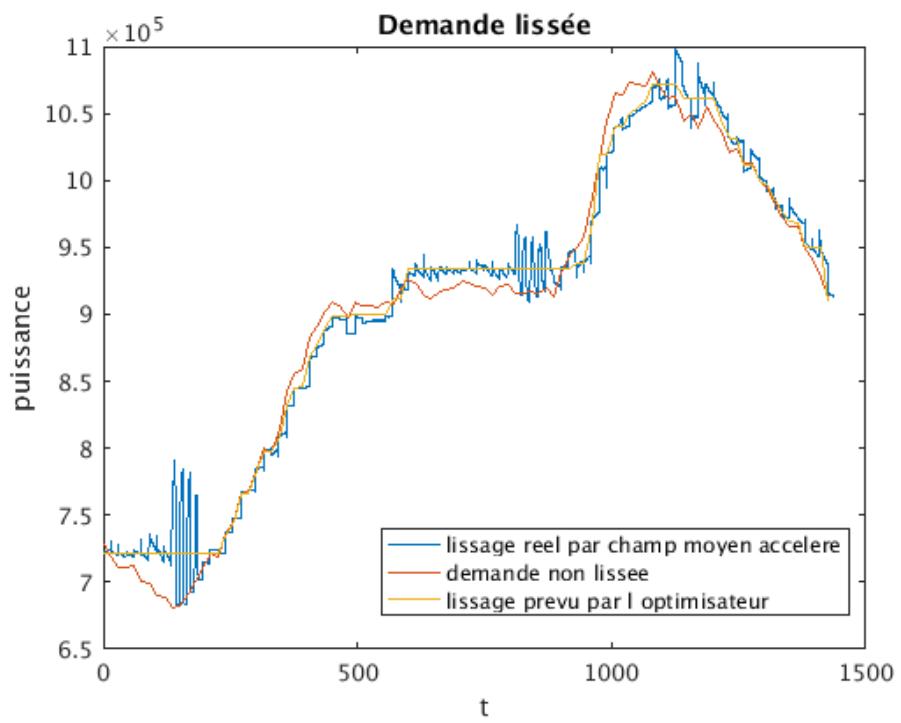


Figure 5.22 : Comparaison du lissage prévu par l'optimiseur au lissage réel par champ moyen accéléré de la demande à la dernière itération

La figure 5.19 illustre clairement ce dernier point. Vers $t = 200 \text{ min}$ et $t = 850 \text{ min}$ de fortes variations de demande s'observent dans l'implémentation du lissage par le champ moyen accéléré alors que le lissage prévu à pas de temps plus large par l'optimisateur est plat. En effet, sur un segment de 15 minutes l'optimisateur ne considère que la puissance moyenne injectée dans les chauffe-eau alors qu'en réalité celle-ci se décompose en une partie accélérée à forte puissance pour rejoindre le régime permanent pour lequel une puissance beaucoup moindre est ensuite suffisante pour se maintenir. D'où des oscillations importantes quand le mode accéléré est utilisé.

Ce phénomène nous incite plutôt à nous rabattre vers la méthode d'overshooting simple quitte à adopter des lissages légèrement moins performants aux yeux de l'optimisateur central.

CHAPITRE 6 CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

Plusieurs points ont été développés dans ce mémoire. Un modèle de chauffe-eau agrégé sous contrainte a été créé en adaptant un modèle déjà existant, et applicable au delà de l'étude du contrôle à champ moyen. Deux types de schéma numérique (Upwind-Downwind et Lax-Wendroff) ont été proposés pour la simulation du modèle, et vérifiés via différents exemples. Ces schémas ont ensuite été utilisés pour l'observation de l'effet des contraintes sur l'implémentation du contrôle à champ moyen, permettant de détecter des non-réalisabilités dans des jeux de consignes produits par l'optimisateur du lissage de la charge. Des méthodes basées sur des ajouts de contraintes sur l'optimisateur, une correction des trajectoires et une accélération du champ moyen ont été proposées pour obtenir un profil de températures réalisable par le champ moyen sous contraintes. La méthode d'ajout simple de contraintes par itération aboutit à un écrasement de la trajectoire vraisemblablement par restriction excessive des marges de manœuvre dont dispose l'optimisateur. Des techniques d'overshooting peuvent alors permettre d'atténuer ce phénomène en réduisant le nombre d'itérations nécessaires à la convergence grâce à un élargissement du champ des trajectoires réalisables. Les résultats du lissage final sont alors bien meilleurs même si l'overshooting ne garantit pas une grande précision. Enfin une version dite « accélérée » du champ moyen a été testée pour contrebalancer sa lenteur sans faire appel à l'overshooting. Cette technique a pour défaut de générer des pics locaux de puissance importants qui interfèrent avec l'objectif initial de lissage de la demande électrique. La méthode avec correction sans accélération paraît alors la meilleure manière d'adapter l'optimisateur aux contraintes des chauffe-eau.

Pour chaque méthode, une réserve pourrait être apportée sur l'approche consistant à ne jamais relaxer les contraintes en puissance d'une itération à l'autre. Mise en place pour éviter que l'optimisateur ne propose plusieurs fois la même trajectoire et ne conduise potentiellement à des oscillations pouvant entraver la convergence de l'algorithme de calcul des contraintes du modèle de chauffe-eau agrégé, cette approche conserve parfois des contraintes qui n'ont plus lieu d'être à l'itération suivante car les contraintes sur un segment dépendent fortement des conditions initiales et de la température de consigne. Bien que la méthode actuelle permette de converger

vers un profil acceptable, une réflexion plus poussée pourrait être menée pour éviter les contraintes inutiles dans le but de mieux tirer parti des capacités des chauffe-eau.

Une autre piste d'amélioration explorée en ce moment par l'étudiant Feng Li dans le cadre de sa maîtrise à l'École Polytechnique de Montréal est l'intégration des contraintes locales directement lors du calcul du champ moyen. Ceci permettrait d'éviter d'avoir à artificiellement imposer ces contraintes à la commande en champ moyen qui aurait été construite sans a priori en tenir compte, et anticiperait un comportement global plus proche de la réalité. Cependant, l'optimisateur global travaille toujours avec un modèle agrégé obtenu par combinaison des chauffe-eau en un « macro chauffe-eau » et la génération des contraintes sur les taux d'accroissement ou de décroissance de température de ce modèle agrégé devra tout de même se faire de manière itérative tel que détaillé dans notre mémoire.

Pour finir, notons que les chauffe-eau ne représentent qu'un exemple possible de charges électriques associées à un stockage d'énergie et pouvant servir au lissage des pointes de demande, mais plus encore pour le lissage des inadéquations génération/demande dans des réseaux électriques avec pénétration élevées d'énergies renouvelables de type intermittent. En effet, on pourrait développer des modèles analogues pour l'exploitation des chauffe-espaces ou bien des voitures électriques, qui présentent eux aussi un fort potentiel de stockage énergétique.

BIBLIOGRAPHIE

A. C. Kizilkale, F. Sirois, D. Beauvais, B. Bourdel, J. Coulombe, S. Fan, F. Li, R. Losseau, F. Malandra, K. Ratelle, M. Sauvé, J. Solis, A. I. Tammam, M. Anjos, M. Bernier, M. Gendreau, B. Sando, et R. P. Malhamé, “smartdesc : Smart distributed energy 76 storage controller”, to be submitted to IEEE Power and Energy Magazine, Jan. 2016,

A. C. Kizilkale et R. P. Malhamé, “Mean field based control of power system dispersed energy storage devices for peak load relief”, *Proceedings of 52nd IEEE Conference on Decision and Control*, Déc. 2013, pp. 4971–4976, invited paper.

—, “Collective target tracking mean field control for Markovian jump-driven models of electric water heating loads”, *Proceedings of World Congress of the International Federation of Automatic Control*, Août 2014, pp. 1867–1872.

—, “Collective target tracking mean field control for electric space heaters”, *Proceedings of 22nd Mediterranean Conference on Control and Automation*, Juin 2014, pp. 829–834, invited paper.

—, “Load shaping via grid wide coordination of heating-cooling electric loads : A mean field games based approach”, Groupe d’Études et de Recherche en Analyse des Décisions (GERAD), Canada, G-2015-68, Juil. 2015.

C. Alvarez, R.P. Malhamé et A. Gabaldon, “A class of models for load management and evaluation revisited”, *IEEE Transactions on Power systems*, vol.7, n°4, pp.?, 1992.

G.A. Sod, *Numerical Methods in Fluid dynamics*, Cambridge University Press, 1985.

J.C. Laurent et R.P. Malhamé, “A physically based computer model of aggregate water-heater heating loads”, *IEEE Transactions on Power systems*, vol.9, n°3, pp.?, 1994.

J.-C. Laurent, G. Desaulniers, R. P. Malhamé, et F. Soumis, “A column generation method for optimal load management via control of electric water heaters”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 10, no. 3, pp. 1389–1400, 1995.

J.M. Lasry, P.L. Lions, “Mean field games”, *Japanese Journal of Mathematics*, vol. 2, no. 1, pp. 229–260, 2007.

M. Huang, R. P. Malhamé, et P. E. Caines, “Large population stochastic dynamic games : closed-loop Mckean-Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle”, *Communications in Information & Systems*, vol. 6, no. 3, pp. 221–252, 2006.

M. Lefebvre, “Processus stochastiques appliqués”, 2005.

Politique énergétique 2030, “L’énergie des québécois, source de croissance”, 2016, [Online] ;

accessed 18-April-2016]. En ligne: politiqueenergetique.gouv.qc.ca

R.J. Leveque, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Lectures in Mathematics ETH Zurich, Birkhäuser Basel, 1992.

R.P. Malhamé et C.Y. Chong, “Electric load model synthesis by diffusion approximation of a high-order hybrid-state stochastic system”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.30, n°9, pp.?, 1985.

R.P. Malhamé et E.K. Boukas, “A renewal theoretic analysis of a class of manufacturing systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.36, n°5, pp?., 1991.