

**Titre:** Calcul des forces et moments sur des corps immergés par la méthode des éléments spectraux  
Title: method of spectral elements

**Auteur:** Martin Wasselet  
Author:

**Date:** 2016

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Wasselet, M. (2016). Calcul des forces et moments sur des corps immergés par la méthode des éléments spectraux [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/2097/>  
Citation:

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/2097/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** André Garon, Stéphane Étienne, & Dominique Pelletier  
Advisors:

**Programme:** Génie mécanique  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CALCUL DES FORCES ET MOMENTS SUR DES CORPS IMMÉRGÉS PAR LA  
MÉTHODE DES ÉLÉMENTS SPECTRAUX

MARTIN WASSELET  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
AVRIL 2016

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

CALCUL DES FORCES ET MOMENTS SUR DES CORPS IMMÉRGÉS PAR LA  
MÉTHODE DES ÉLÉMENTS SPECTRAUX

présenté par : WASSELET Martin

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées  
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. VÉTEL Jérôme, Doctorat, président

M. GARON André, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. ÉTIENNE Stéphane, Doctorat, membre et codirecteur de recherche

M. PELLETIER Dominique, Ph. D., membre et codirecteur de recherche

M. CAMARERO Ricardo, Ph. D., membre

## DÉDICACE

*À ma famille . . .*

## REMERCIEMENTS

J'aimerai tout d'abord remercier mes directeurs de recherche, André Garon, Stéphane Etienne et Dominique Pelletier. Merci particulièrement à André pour son soutien indéfectible, sa patience, pour tout le savoir qu'il m'a transmis et pour sa bonne humeur. Merci aussi pour ces parties de squash endiablées et ces innombrables cafés, carburant nécessaire à la réalisation de ce mémoire.

J'aimerai également remercier Ricardo Camarero et Jérôme Vetel d'avoir accepté d'être respectivement membre et président du jury. Merci à Jérôme pour ces boutades bien senties, ses références arthuriennes et sa joie de vivre.

Un grand merci à mon collègue et ami, Adrien Moulin alias "DuMoulin", alias "Moulino, alias "Admoub", avec qui il nous aura fallu traverser un océan avant de se parler pour la première fois. Merci pour ces deux ans d'entraide et d'avoir égayé notre bureau sans fenêtre. Merci de m'avoir supporté dans les moments difficiles mais aussi de m'avoir supporté quand je suis de bonne humeur. Merci pour les soirées qui font mal à la tête, pour les concerts qui font mal aux oreilles et pour les parties d'ultimate qui font mal aux jambes. Ça a été un réel plaisir de faire ta connaissance et de travailler avec toi.

Merci aussi à Julien Kuzdzal alias "Mr Kuz" d'avoir souffert avec nous dans la dernière ligne droite et d'avoir co-inventé le jeu du "fumigène".

Remerciements à tout le personnel de Polytechnique Montréal.

Merci également à tous mes amis en France, à Montréal, où ailleurs sur le globe pour leurs encouragements.

Finalement, merci à ma famille pour leur soutien, autant financier que moral, au cours de toutes mes années d'études, merci de croire en moi.

## RÉSUMÉ

Ce projet a pour objectifs l'amélioration, la vérification et la validation d'un code numérique utilisant la méthode des éléments spectraux ainsi que l'implémentation de la méthode des réactions afin de réaliser le calcul des efforts induits sur des corps immergés par des écoulements incompressibles.

L'originalité de ce projet réside dans l'utilisation des éléments spectraux et d'une méthode innovante de calcul des moments basée sur la méthode des réactions. Par ailleurs, il n'existe que peu de données sur les moments dans la littérature, on déterminera donc les courbes de moment moyen en fonction de l'angle d'attaque pour différentes géométries en deux dimensions.

La méthode des éléments spectraux est basée sur une répartition des noeuds de calcul élémentaires non-uniforme, contrairement aux éléments finis. Nous utiliserons dans ce projet des bases nodales régies par la quadrature de Gauss-Legendre-Lobatto. Ce choix de noeuds de calcul permet d'utiliser efficacement la convergence en ordre ( $p$ -convergence), on obtient alors de meilleur taux de convergence que pour la méthode des éléments finis. C'est là tout l'intérêt de la méthode, pour un même nombre de degrés de liberté, on pourra obtenir une solution plus précise en utilisant les éléments spectraux qu'en utilisant les éléments finis.

Afin de calculer les efforts, le code initial sera tout d'abord vérifié et validé pour s'assurer du bon fonctionnement de la méthode des éléments spectraux. Pour la vérification, les taux de convergence de la méthode ont été calculés par la méthode des solutions manufacturées sur des exemples de diffusion thermique ainsi que sur des exemples en Navier-Stokes incompressible. Pour la validation, l'écoulement autour d'un cylindre circulaire a été étudié, notamment le phénomène de relâcher tourbillonnaire connu sous le nom d'allée de Von Karman. La même démarche de validation et de vérification a également été appliquée au calcul des efforts après l'implémentation de la méthode des réactions. Enfin, la méthode a été appliquée à différentes géométries en deux dimensions afin d'établir des courbes de référence pour les valeurs moyennes de moment, de force de portance et de force de traînée pour des écoulements instationnaires à bas nombre de Reynolds ( $R_e \leq 500$ ).

Les résultats produits permettent, outre l'obtention des valeurs moyennes permettant le dimensionnement de structures, de réaliser différentes analyses. Nous avons notamment appliqué les critères de Den Hartog et de Blevins, deux approches quasi-statiques permettant de prédire respectivement l'apparition d'instabilité de galop en translation et en rotation.

## ABSTRACT

The aims of this project are to improve, verify and validate a spectral element method and to implement the reaction method in order to compute the forces and moments that apply on bluff bodies in incompressible flow.

The use of the spectral element method and a new approach for computing the moment by using the reaction method define the originality of this project. Furthermore, since there are few data available for the moment in the present literature, the time average values of the forces and moments as a function of the incidence angle will be given for several bluff bodies in two dimensions.

The spectral element method relies on non-equidistributed degrees of freedom on the element. In this project we use the Gauss-Legendre-Lobatto point sets in order to achieve p-convergence, thus obtaining better convergence rate than the standard finite element method.

Before computing the force and moment, the code will be verified and validated to ensure the spectral element method accuracy. Verification will be based on the method of manufactured solutions and the convergence rate of the spectral and finite element method will be studied. The flow around a circular cylinder and the vortex shedding phenomenon known as the Von Karman street will be studied for validation phase. Verification and validation process will also be applied to the reaction method. Finally, the method has been applied to several bodies in two-dimensions in order to compute the forces and moments, thus we provide data for the mean drag, lift and moment for unsteady flows at low Reynolds numbers ( $R_e \leq 500$ ).

We show that the results obtained can be used for different analyses. In particular, we have applied the Den Hartog and Blevins criteria for predicting transverse and rotational galloping, respectivly.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vi
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	vii
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	x
LISTE DES FIGURES . . . . .	xi
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . .	xiv
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xvii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE . . . . .	2
2.1 Méthode des éléments spectraux . . . . .	2
2.1.1 Historique . . . . .	2
2.1.2 Applications récentes . . . . .	3
2.2 Calcul d'efforts . . . . .	3
2.2.1 Cylindre circulaire et allée de Von Karman . . . . .	3
2.2.2 Géométries 2D et calcul d'efforts . . . . .	4
2.2.3 Applications . . . . .	6
CHAPITRE 3 MÉTHODE DES ÉLÉMENTS SPECTRAUX . . . . .	8
3.1 Physique - forme forte . . . . .	8
3.1.1 Diffusion thermique . . . . .	8
3.1.2 Navier-Stokes incompressible . . . . .	8
3.1.3 Adimensionnalisation . . . . .	9
3.2 Formulation faible . . . . .	10
3.2.1 Espace solution - Normes . . . . .	10

3.2.2	Forme faible - Diffusion thermique . . . . .	11
3.2.3	Forme faible - Navier-Stokes . . . . .	11
3.3	Méthode de Ritz-Galerkin . . . . .	12
3.4	Méthode des éléments finis . . . . .	13
3.4.1	Formulation variationnelle élémentaire . . . . .	14
3.4.2	Passage à l'élément de référence . . . . .	15
3.4.3	Fonctions d'interpolation . . . . .	18
3.4.4	Intégration numérique . . . . .	19
3.4.5	Éléments spectraux . . . . .	22
3.4.6	Assemblage matriciel et conditions limites . . . . .	24
3.4.7	Navier-Stokes . . . . .	25
3.4.8	Traitement de la non-linéarité . . . . .	28
3.4.9	Traitement de la partie temporelle . . . . .	29
3.5	Code EF6 . . . . .	30
 CHAPITRE 4 VÉRIFICATION ET VALIDATION . . . . .		33
4.1	Vérification . . . . .	33
4.1.1	Diffusion thermique . . . . .	33
4.1.2	Poiseuille . . . . .	37
4.2	Validation . . . . .	38
4.2.1	Écoulement laminaire autour d'un cylindre . . . . .	39
 CHAPITRE 5 MÉTHODE DES RÉACTIONS . . . . .		46
5.1	Théorie . . . . .	46
5.1.1	Diffusion 1D . . . . .	46
5.1.2	Diffusion 2D . . . . .	49
5.1.3	Navier-Stokes incompressible . . . . .	53
5.1.4	Imposition faible des conditions de Dirichlet . . . . .	55
5.2	Programmation . . . . .	57
5.2.1	Méthode des réactions . . . . .	57
5.2.2	Calcul du moment 2D . . . . .	59
5.3	Vérification . . . . .	61
5.3.1	Diffusion . . . . .	61
5.3.2	Écoulement de Couette . . . . .	63
5.4	Validation . . . . .	65
5.4.1	Écoulement laminaire autour d'un cylindre circulaire . . . . .	65

CHAPITRE 6 APPLICATION AU CALCUL DES EFFORTS SUR DES CORPS IMMÉRGÉS . . . . .	69
6.1 Ellipse . . . . .	69
6.1.1 Géométrie et conditions limites . . . . .	69
6.1.2 Génération de maillage . . . . .	70
6.1.3 Traitement de données . . . . .	73
6.1.4 Convergence . . . . .	73
6.1.5 Résultats . . . . .	76
CHAPITRE 7 CONCLUSION . . . . .	83
7.1 Synthèse . . . . .	83
7.2 Recommandation . . . . .	83
RÉFÉRENCES . . . . .	85
ANNEXES . . . . .	92

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1	Définition des problèmes de diffusion thermique pour la vérification. . . . .	34
Tableau 5.1	Taux de convergence pour la solution en norme $H^1$ et $L^2$ et erreur sur la réaction. . . . .	62
Tableau 5.2	Taux de h-convergence pour le calcul de la réaction sur une courbe ouverte. . . . .	63
Tableau 5.3	Valeur RMS du coefficient de portance à $R_e = 300$ . . . . .	66
Tableau 5.4	Nombres de Strouhal calculés à partir des FFT des différentes variables.	68
Tableau 6.1	Convergence en ordre sur le maillage de la figure 6.2 à $\theta = 90^\circ$ . . . . .	75
Tableau 6.2	Convergence pour l'ellipse pour les interpolants Q4Q3. . . . .	75
Tableau 6.3	Etude de l'influence de la tolérance BDF sur les valeurs moyennes. . . .	76
Tableau 6.4	Valeurs du coefficient de traînée et du Strouhal pour $\theta = 90^\circ$ . . . . .	78
Tableau A.1	Convergence en ordre sur le maillage de la figure A.2 à $\theta = 90^\circ$ . . . . .	93
Tableau A.2	Convergence pour la plaque plane pour les interpolants Q4Q3. . . . .	94
Tableau A.3	Convergence en ordre sur le maillage de la figure A.5 à $\theta = 90^\circ$ . . . . .	95
Tableau A.4	Convergence pour les cinq cylindres pour les interpolants Q3Q2. . . . .	96
Tableau A.5	Convergence en ordre sur le maillage de la figure A.8 à $\theta = 90^\circ$ . . . . .	98
Tableau A.6	Convergence pour le caisson de flottaison (géométrie approximée) pour les interpolants Q3Q2. . . . .	100
Tableau A.7	Convergence en ordre sur le maillage de la figure A.12 à $\theta = 90^\circ$ . . . . .	100
Tableau A.8	Convergence pour le flatpack pour les interpolants Q4Q3. . . . .	101
Tableau A.9	Convergence en ordre sur le maillage de la figure A.15 à $\theta = 90^\circ$ . . . . .	103
Tableau A.10	Convergence pour la section de riser pour les interpolants Q3Q2 . . . . .	104

## LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Différents régimes d'écoulement autour d'un cylindre circulaire (Lienhard, 1966). . . . .	5
Figure 2.2	Critères nécessaires d'instabilité quasi-statique pour le galop transverse et le galop en rotation. . . . .	6
Figure 2.3	Effondrement du pont de Tacoma. . . . .	7
Figure 3.1	Passage à l'élément de référence pour les quadrangles Q9. . . . .	16
Figure 3.2	Interpolation linéaire et quadratique sur l'élément de référence $\hat{K}$ en 1D.	20
Figure 3.3	Fonction d'interpolation à 9 points pour la base nodale équirépartie (a) et GLL (b) - Interpolation de la fonction de Runge (en noir) en base nodale équirépartie (c) et GLL (d). . . . .	23
Figure 3.4	Élément de référence Q6Q5 en base GLL, noeuds de vitesse en rouge et noeuds de pression en noir. . . . .	26
Figure 3.5	Algorithme de résolution pour la méthode de Newton. . . . .	28
Figure 3.6	Procédure de calcul et fonctionnement d'EF6. . . . .	32
Figure 4.1	Conditionnement et erreur sur la solution en norme $H^1$ en fonction du degré des interpolants pour des points équidistants (FEM) et GLL (SEM). De haut en bas, pour le problème 1D, 2D et 3D. . . . .	35
Figure 4.2	Solution manufacturée 2D - $T = (x^2 + y^2) + 0.5 \cos(15x)$ . . . . .	36
Figure 4.3	Taux de convergence pour la solution manufacturée 2D. . . . .	36
Figure 4.4	Vitesse (a) et pression (b) pour l'écoulement de Poiseuille. . . . .	38
Figure 4.5	Domaine de calcul et conditions limites pour le cylindre circulaire. . .	39
Figure 4.6	Transition L1-L2 - Lignes de courant à Reynolds 1 (a), 6 (b), 7 (c) et 40 (d). . . . .	40
Figure 4.7	Longueur de la zone de recirculation (à gauche) et valeur absolue de la vitesse minimale au sein de la zone de recirculation (à droite). . . . .	41
Figure 4.8	Transition L2-L3 - Lignes de courant et vorticité $\omega_z$ entre -0.5 et 0.5 à Reynolds 45 (a et b), 46 (c et d), 47 (e et f) et 48 (g et h). . . . .	42
Figure 4.9	Sillage en régime L3 - Vorticité entre -0.5 et 0.5 à Reynolds 50, 100, 150, 200, 250 et 300 pour respectivement a, b, c, d, e et f. . . . .	43
Figure 4.10	Évolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds. . . . .	44
Figure 4.11	Sillage en régime L3 pour un grand domaine- Vorticité entre -0.1 et 0.1 à Reynolds 100, 200 et 300 pour respectivement a, b et c. . . . .	44

Figure 4.12	Évolution de l'angle de décollement $\theta_D$ en fonction du nombre de Reynolds. . . . .	45
Figure 5.1	Équivalence entre fonctions d'interpolation de Lagrange et fonctions de Ritz. . . . .	47
Figure 5.2	Domaine $\Omega$ pour l'exemple de diffusion 1D. . . . .	47
Figure 5.3	Domaine $\Omega$ pour l'exemple de diffusion 2D. . . . .	49
Figure 5.4	Réaction sur une frontière fermée et sur une frontière ouverte. . . . .	52
Figure 5.5	Fonction d'interpolation sur un élément triangulaire. . . . .	52
Figure 5.6	Solution manufacturée $T = \cos(3x + 1) + \sin(5y - 1)$ . . . . .	61
Figure 5.7	Erreur sur la solution en norme $H^1$ et $L^2$ et erreur sur la réaction. . . . .	62
Figure 5.8	p-convergence et h-convergence pour la réaction sur une courbe ouverte avec, conditions de Dirichlet (en haut) et conditions de Neumann (en bas). . . . .	64
Figure 5.9	p-convergence et h-convergence sur le moment pour l'écoulement de Couette. . . . .	64
Figure 5.10	Comparaison entre COMSOL et la méthode de calcul par réaction. . . . .	65
Figure 5.11	Coefficient de portance et FFT pour $R_e = 45$ (a et b), 46 (c et d) et 47 (e et f). . . . .	67
Figure 5.12	Coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds. . . . .	68
Figure 6.1	Géométrie et conditions limites du problème - Ellipse. . . . .	70
Figure 6.2	Maillage utilisé pour l'ellipse à $\theta = 0^\circ$ . . . . .	71
Figure 6.3	Exemple d'utilisation du modèle de sillage de l'équation (6.6). $x_d = 0$ et $x_f = 30$ , à gauche $l_d = 4$ et $l_f = 2$ , à droite $l_d = 3$ et $l_f = 1$ . . . . .	73
Figure 6.4	$M$ , $F_D$ et $F_L$ en fonction de $t$ à $\theta = 30^\circ$ . . . . .	74
Figure 6.5	Courbes de stabilités pour $\theta = 30^\circ$ et $t$ variant de 200 à 500. . . . .	74
Figure 6.6	Transformation de Fourier rapide des signaux (à gauche), signaux et moyennes temporelles en pointillé rouge (à droite) pour $\theta = 30^\circ$ . . . . .	75
Figure 6.7	Vorticité pour la tolérance BDF à $10^{-01}$ (en haut à gauche) et $10^{-06}$ (en bas à gauche). Évolution temporelle du pas de temps pour différentes tolérance BDF (à droite). . . . .	76
Figure 6.8	Valeurs moyennes du moment, des forces de traînée et de portance en fonction de l'angle $\theta$ pour $R_e = [100, 200, 300, 500]$ pour l'ellipse. . . . .	77
Figure 6.9	Vorticité entre -0.5 et 0.5 à $t = 500$ , positive en rouge, négative en bleu, pour des nombres de Reynolds de 100 (en haut), 200 (au milieu) et 300 (en bas). . . . .	78
Figure 6.10	Ellipse avec un degré de liberté - Galop transversal. . . . .	79

Figure 6.11	Critère de Den Hartog $H$ , portance $F_L$ et traînée $F_D$ pour l'ellipse à $R_e = 100$ . . . . .	81
Figure A.1	Géométrie et conditions limites du problème - Plaque plane. . . . .	92
Figure A.2	Maillage utilisé pour la plaque plane à $\theta = 0^\circ$ . . . . .	93
Figure A.3	Valeurs moyennes des efforts en fonction de l'angle $\theta$ pour $R_e = [100, 200]$ - Plaque plane. . . . .	94
Figure A.4	Géométrie et conditions limites du problème - Cinq cylindres. . . . .	95
Figure A.5	Maillage utilisé pour les cinq cylindres à $\theta = 0^\circ$ . . . . .	96
Figure A.6	Valeurs moyennes du moment, des forces de traînée et de portance en fonction de l'angle $\theta$ pour $R_e = [100, 300, 500]$ - Cinq cylindres. . . . .	97
Figure A.7	Géométrie et conditions limites du problème (en haut), comparaison entre la géométrie approximée et la géométrie réelle (en bas) - Caisson de flottaison. . . . .	98
Figure A.8	Maillage utilisé pour la géométrie approximée à $\theta = 0^\circ$ . . . . .	99
Figure A.9	Maillage utilisé pour la géométrie réelle à $\theta = 0^\circ$ . . . . .	99
Figure A.10	Valeurs moyennes des efforts en fonction de l'angle $\theta$ à $R_e = 200$ pour les géométries réelle et approximée - Caisson de flottaison. . . . .	101
Figure A.11	Géométrie et conditions limites du problème - Flatpack. . . . .	102
Figure A.12	Maillage utilisé pour le flatpack à $\theta = 0^\circ$ . . . . .	102
Figure A.13	Valeurs moyennes des efforts en fonction de l'angle $\theta$ à $R_e = 200$ - Flatpack. . . . .	104
Figure A.14	Géométrie et conditions limites du problème - Section de riser. . . . .	105
Figure A.15	Maillage utilisé pour l'ellipse à $\theta = 0^\circ$ . . . . .	105
Figure A.16	Maillage utilisé pour l'ellipse à $\theta = 90^\circ$ . . . . .	106
Figure A.17	Valeurs moyennes des efforts en fonction de l'angle $\theta$ à $R_e = 200$ - Section de riser. . . . .	107
Figure B.1	Évolution du nombre de Strouhal en fonction de l'angle d'attaque - Ellipse (en haut, à gauche), Plaque plane (en haut, à droite), Cinq cylindres (au milieu, à gauche), Caisson de flottaison et cylindre circulaire à $R_e = 200$ (au milieu, à droite) et Comparaison entre le flatpack, la plaque plane et l'ellipse à $R_e = 200$ (en bas). . . . .	108

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

### Acronyme

BDF	Backward differentiation formula
FEM	Finite Element Method
FFT	Fast Fourier Transformation
GLL	Gauss-Legendre-Lobatto
RMS	Root Mean Square
SEM	Spectral Element Method
VIV	Vibrations Induites par Vortex

### Éléments spectraux - Réaction

$\Gamma_D$	Bord avec imposition de conditions de Dirichlet
$\Gamma_N$	Bord avec imposition de conditions de Neumann
$\Gamma$	Bord du domaine de calcul
$\alpha_i$	Coefficient BDF
$\boldsymbol{x}$	Coordonnées dans l'espace réel
$\boldsymbol{\xi}$	Coordonnées sur l'élément de référence
$\Omega$	Domaine de calcul
$E_Q$	Erreur d'intégration pour le degré Q
$\epsilon_{1,\Omega}$	Erreur en norme $H^1$
$\epsilon_{0,\Omega}$	Erreur en norme $L^2$
$\epsilon_{\Xi}$	Erreur sur le calcul de la réaction
$L_i$	Fonction de Lagrange
$\psi$	Fonction d'interpolation
$\phi$	Fonction test
$J_K$	Jacobien
$\Delta$	Laplacien
$\mathbf{A}^K$	Matrice élémentaire
$\mathbf{A}$	Matrice globale
$\mathbf{D}_K$	Matrice jacobienne
$\lambda$	Multiplicateur de Lagrange
$N_{DDL}$	Nombre de degrés de liberté
$n_{el}$	Nombre d'éléments

$n_d^K$	Nombre de noeuds de calcul par élément
$n_g^K$	Nombre de noeuds géométriques par élément
$N_{it}$	Nombre maximal d'itérations pour la méthode de Newton
<b>n</b>	Normale à la paroi ou à la surface
$\nabla$	Opérateur nabla
$w_i$	Poids d'intégration
$G_Q$	Polynôme de Legendre de degré Q
$\epsilon_i^{PQ}$	Racine d'un polynôme P d'ordre Q
$\Xi$	Réaction
$R$	Résidu
$R_c$	Résidu pour l'équation de continuité
$R_m$	Résidu pour l'équation de quantité de mouvement
$h$	Taille des éléments
$a_{ij}$	Terme matriciel élémentaire
$s_i^K$	Terme source dû aux frontières élémentaires
$f_i^K$	Terme source interne élémentaire
<b>B</b>	Termes sources
$\epsilon_{\delta u}$	Tolérance correction
$\epsilon_{tol}$	Tolérance de factorisation
$\epsilon_R$	Tolérance résidu
$T^K$	Transformation géométrique

## Navier-Stokes

$\theta$	Angle d'attaque
$\theta_D$	Angle de décollement
<b>u</b>	Champ de vitesse
<b>u<sub>0</sub></b>	Champ de vitesse initial
$C_L$	Coefficient de portance
$C_D$	Coefficient de traînée
$H$	Critère de Den Hartog
$Q$	Espace de définition de la pression
$V$	Espace de définition de la vitesse
$F_L$	Force de portance
$F_y$	Force de portance dans le repère relatif
$F_D$	Force de traînée
$F_x$	Force de traînée dans le repère relatif

$f$	Fréquence de relâcher tourbillonnaire
$L_0$	Longueur de référence
$m$	Masse
$\rho$	Masse volumique
$M$	Moment
$R_e$	Nombre de Reynolds
$S_t$	Nombre de Strouhal
$p$	Pression
$p_0$	Pression de référence
$k$	Raideur structurelle
$\lambda$	Ratio de blocage
$\vec{e}_x$	Repère absolu
$\vec{e}_X$	Repère relatif
$h_{sill}$	Taille des éléments dans le sillage
$h_{lim}$	Taille des éléments pour la couche limite
$\sigma$	Tenseur des contraintes fluides
$\mathbf{t}$	Traction
$C_{l_{rms}}$	Valeur RMS du coefficient de portance
$\partial p$	Variation sur le champ de pression
$\partial \mathbf{u}$	Variation sur le champ de vitesse
$\mu$	Viscosité dynamique
$U_0$	Vitesse de référence

## Thermique

$k$	Coefficient de conduction thermique
$W$	Espace de définition de la température
$f$	Production de chaleur
$T$	Température
$T_0$	Température initiale
$\delta T$	Variation sur la température

**LISTE DES ANNEXES**

Annexe A	GÉOMÉTRIES TRAITÉES . . . . .	92
Annexe B	NOMBRES DE STROUHAL . . . . .	108

## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Du fait de ses nombreuses applications aussi bien en sciences que dans l'industrie, la mécanique des fluides numérique est un domaine de recherche en perpétuelle évolution. C'est pourquoi ce projet traite de la théorie et de l'utilisation d'une méthode récente de calcul numérique en mécanique des fluides, la méthode des éléments spectraux.

Les objectifs de ce projet sont d'améliorer, vérifier et valider un code numérique utilisant la méthode des éléments spectraux et d'implanter la méthode des réactions au sein de ce même code afin de calculer efficacement les efforts fluides en écoulement de Navier-Stokes incompressible, et finalement d'appliquer ces différentes méthodes à des cas concrets en deux dimensions pour de faibles nombres de Reynolds  $R_e < 500$ .

Ce mémoire est divisé en 5 chapitres distincts. Tout d'abord, on effectuera une brève revue de littérature portant sur l'histoire et les applications de la méthode des éléments spectraux ainsi que sur le calcul d'efforts en écoulement incompressible.

Le chapitre 2 consiste en une explication théorique de la méthode des éléments spectraux et de l'approche Galerkin-continu en éléments finis, on y expliquera également les principales différences entre la méthode des éléments spectraux et la méthode des éléments finis.

Le chapitre 3 sera consacré à la vérification et validation du code de calcul utilisé pour ce projet. Phases essentielles dans le développement de tout code de calcul, elles permettent de s'assurer de la véracité des résultats. La vérification sera effectuée par la méthode des solutions manufaturées et la validation se fera sur l'écoulement laminaire autour d'un cylindre circulaire.

Le chapitre 4 traitera de la théorie de la méthode des réactions et de son implantation dans le code, cette dernière permettra le calcul d'efforts sur des objets immersés, on proposera notamment une méthode innovante de calcul des moments basée sur la méthode des réactions.

Enfin, au chapitre 5, la méthode des éléments spectraux et la méthode des réactions, ayant été vérifiées et validées, seront appliquées au calcul d'efforts sur différentes géométries 2D au sein d'écoulements laminaires à bas nombres de Reynolds ( $R_e < 500$ ). Le but de ces simulations étant d'obtenir les courbes d'efforts moyens en fonction de l'angle d'attaque. On présentera alors les démarches de calcul, les résultats et les différentes analyses réalisables à partir de ces simulations.

## CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

### 2.1 Méthode des éléments spectraux

#### 2.1.1 Historique

La méthode des éléments spectraux est une adaptation de la célèbre méthode des éléments finis. Cette dernière permet la résolution d'équations aux dérivées partielles sur des domaines finis en discrétilisant l'espace en sous domaines de calcul et est donc utilisée dans de nombreuses branches de la physique et de l'ingénierie.

La méthode des éléments finis a été développée dans les années 1950 dans le cadre des problèmes d'analyse de contraintes en élasticité linéaire (Turner *et al.*, 1956). La méthode a rapidement évolué vers l'utilisation de formulations variationnelles basées sur des considérations énergétiques, permettant son utilisation dans de nombreux domaines. Elle a également été théorisée mathématiquement vers la fin des années 1960, début des années 1970 (Greene *et al.*, 1969; Babuska et Aziz, 1972; Whiteman, 1973). Les premières applications de la méthode à la mécanique des fluides sont apparues au début des années 1970 (Finlayson, 1974; Martin, 1968; Oden, 1970) et ont conduit à l'émergence de différents types d'éléments dont les célèbres Taylor-Hood (Taylor et Hood, 1973) et Crouzeix-Raviart (Crouzeix et Raviart, 1973).

Les méthodes spectrales ont été décrites pour la première fois en 1977 par Gottlieb *et al.* (1977), elles étaient alors considérées comme alternatives à la méthode des éléments finis. Les différentes bases polynomiales utilisées par les méthodes et la théorie liée à ces dernières sont décrites par Canuto *et al.* (2012); Boyd (2001), les méthodes étant à cette époque restreintes à des géométries simples en une dimension (Pena, 2009). La phase de développement suivante (Patera, 1984; Bernardi *et al.*, 1990) a donné naissance à la méthode des éléments spectraux en combinant l'application des méthodes spectrales à la théorie des éléments finis.

De nombreux ouvrages sont maintenant disponibles décrivant la théorie et les différentes alternatives de programmation des méthodes utilisant les éléments finis (Reddy, 1993; Dhatt et Touzot, 1981) et les éléments spectraux (Karniadakis et Sherwin, 2005; Pozrikidis, 2005). Cependant, ce domaine est constamment en évolution comme en atteste les récents travaux de Pacciarini *et al.* (2016) visant à réduire les coûts de calculs, de Abdi (2015) qui cherche à minimiser les problèmes de portabilité du code liés à l'utilisation en parallèle de plusieurs CPU (multi-threading) ou encore de Sébastien (2015) qui démontre la nécessité d'adapter les codes de calcul à des problèmes physiques spécifiques, dans ce cas à un couplage fort entre

ondes sismiques et hydro-acoustiques.

### 2.1.2 Applications récentes

L'efficacité de la méthode spectrale a conduit à son utilisation intensive dans de nombreux domaines scientifiques et ne se limite pas seulement à la mécanique des fluides. Les applications les plus récentes de la méthode des éléments spectraux sont éclectiques, on se propose de donner un bref aperçu de ces dernières pour illustrer la diversité des domaines d'application concernés.

En mécanique des solides Hong et Lee (2015) proposent l'étude du comportement dynamique et de la propagation des ondes aux sein de barres axiales aux propriétés mécaniques non-uniformes, Park *et al.* (2015) l'étude des vibrations transverses au sein des plaques minces et Zhao *et al.* (2015) la réponse viscoélastique de l'asphalte à un chargement. La méthode spectrale est également très utilisée en sismologie pour l'étude de la propagation des ondes sismiques (Peter *et al.*, 2015). En électromagnétique Mahariq *et al.* (2015b) comparent la précision de la méthode avec celles des éléments finis et des différences finies et l'emploient afin de calculer le champ électrique généré par un cylindre conducteur parfait (Mahariq *et al.*, 2015a).

La méthode des éléments spectraux est donc également largement utilisée en mécanique des fluides afin de simuler divers comportements rencontrés dans de nombreuses branches de l'industrie, on se propose de donner quelques exemples des travaux les plus récents dans le domaine utilisant la méthode spectrale. Thompson *et al.* (2014) étudient le comportement des sillages de cylindres elliptiques à bas nombre de Reynolds  $R_e < 400$  en deux et trois dimensions, Peppa et Triantafyllou (2016) et Peppa *et al.* (2016) simulent l'écoulement autour d'un cylindre forcé d'osciller dans la direction de l'écoulement et transversalement, Appelquist *et al.* (2016) réalisent l'étude numérique d'un disque en rotation au sein d'un fluide et finalement Ng *et al.* (2016) proposent une étude en DNS d'un écoulement turbulent pleinement développé dans un canal, en s'intéressant à l'influence de la forme des nervures présentes sur ce dernier.

## 2.2 Calcul d'efforts

### 2.2.1 Cylindre circulaire et allée de Von Karman

Le cylindre circulaire est de loin la forme la plus étudiée lorsque l'on s'intéresse au calcul d'efforts sur des objets immergés, cela s'explique par les nombreuses applications directes

dans les différents domaines de l'industrie, le cylindre circulaire étant extrêmement répandu (cheminée, risers pétroliers, mât de bateau), et par sa géométrie simple donc facile à étudier numériquement, comme expérimentalement. Du fait de la grande quantité de données disponibles, nous avons choisi d'effectuer la phase de validation du code sur cet exemple pour de bas nombres de Reynolds ( $R_e < 400$ ). Il existe énormément d'études pour cette gamme de nombres de Reynolds, Zdravkovich (1997) a recensé tous les travaux publiés avant 1938, on pourra citer également en expérimental Coutanceau et Bouard (1977); Taneda (1956); Norberg (1994); Wen et Lin (2001); Cimbala *et al.* (1988) et en numérique Rajani *et al.* (2009); Kalro et Tezduyar (1997); Thompson *et al.* (2014); Behara et Mittal (2010); Johnson *et al.* (2001); Karniadakis et Sherwin (2005), en gardant en tête que ce ne sont que quelques exemples parmi tant d'autres, regrouper toute la littérature sur ce sujet représenterait un travail titanique.

Les différents types d'écoulements en régime laminaire sont représentés à la figure 2.1. On a, pour un nombre de Reynolds supérieur à environ 40, apparition d'une instabilité, c'est la fameuse allée tourbillonnaire de Von Karman, étudiée depuis plus d'un siècle à partir des travaux précurseurs des célèbres Strouhal (1878); Von Karman (1911); Bénard (1908). Le caractère instationnaire de l'écoulement nécessite de moyenner les valeurs des efforts sur un certain nombre de périodes lorsque l'écoulement a atteint son état périodique, à l'inverse des deux premiers régimes stationnaires, (voir figure 2.1), pour lesquels les valeurs sont fixes. On note que la valeur du nombre de Reynolds de transition pour l'apparition du relâcher tourbillonnaire est encore aujourd'hui étudiée (Rajani *et al.*, 2009; Thompson *et al.*, 2014; Johnson *et al.*, 2001; Henderson, 1995). De plus, en numérique comme en expérimental, de nombreux paramètres peuvent influer sur les valeurs des efforts et le déclenchement de l'instabilité, comme le ratio de blocage (Kumar et Mittal, 2006a) ou le choix des conditions initiales (Laroussi *et al.*, 2014). Enfin, on fera remarquer qu'à partir d'un certain nombre de Reynolds, (voir figure 2.1), on a l'émergence de modes 3D, ces derniers ne seront pas étudiés dans ce document, on donne néanmoins quelques exemples d'études sur ce sujet (Karniadakis et Sherwin, 2005; Thompson *et al.*, 2014; Kalro et Tezduyar, 1997; Rajani *et al.*, 2009). Ces études montrent que le fait de ne pas considérer les modes 3D a tendance à surévaluer les efforts sur le cylindre du fait de la découllement axiale de l'écoulement.

### 2.2.2 Géométries 2D et calcul d'efforts

Un des principaux objectifs de ce projet est d'obtenir les courbes d'efforts moyens, portance, traînée et moment, en fonction de l'angle d'attaque pour différentes géométries. Le cylindre circulaire étant symétrique, ces courbes n'ont pas de sens puisqu'on ne peut pas définir d'angle

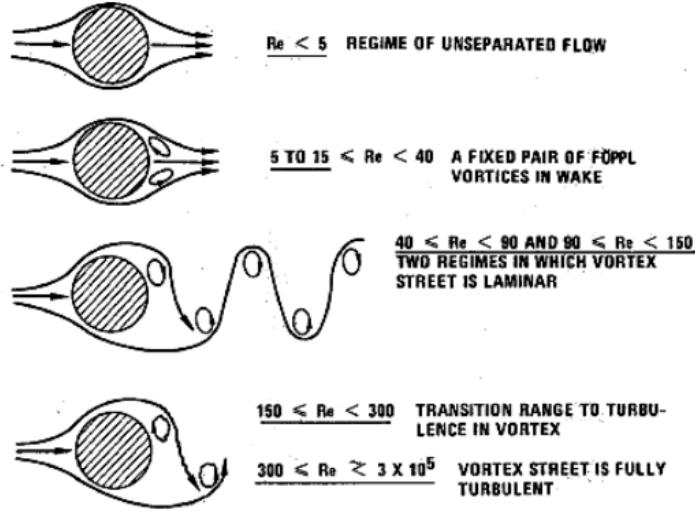


Figure 2.1 Différents régimes d'écoulement autour d'un cylindre circulaire (Lienhard, 1966).

d'attaque. Les deux premiers cas que nous traiterons sont des géométries assez courantes pour que l'on trouve des valeurs déjà existantes dans la littérature, à savoir une ellipse de ratio 2 : 1 et une plaque plane.

Ainsi pour l'ellipse Alonso *et al.* (2010) donnent les valeurs des coefficients de portance et de traînée pour des angles d'attaque variant de 0 à 90 degrés mais pour une plage de nombres de Reynolds bien supérieure à celle que nous étudions ( $R_e > 2.10^5$ ), les valeurs provenant d'essais en soufflerie. Thompson *et al.* (2014) et Johnson *et al.* (2001) donnent des valeurs pour la portance et la traînée dans la gamme de nombres de Reynolds étudiée, mais uniquement lorsque le grand axe de l'ellipse est perpendiculaire au sens de l'écoulement. Des valeurs de moment sont données par Ota *et al.* (1987), mais encore une fois pour des nombres de Reynolds trop élevés pour notre étude.

Pour la plaque plane, on fait la même constatation que sur l'ellipse pour les résultats de Thompson *et al.* (2014) et Johnson *et al.* (2001). On en conclue qu'il est difficile d'obtenir des valeurs d'efforts moyens en fonction de l'angle d'attaque dans notre gamme de nombres de Reynolds même pour des géométries relativement simples et que les valeurs de moment sont beaucoup moins répandues que celles de portance et de traînée.

On notera également que si les forces de portance et de traînée peuvent bien souvent être obtenues par la méthode des réactions dans les codes commerciaux, les moments appliqués aux objets immergés sont eux obtenus par intégration du cisaillement et de la pression sur les parois, entraînant une erreur supplémentaire lors de l'évaluation du gradient du champ

de vitesse. La méthode de calcul proposée dans ce mémoire permet de pallier ce problème et donc d'obtenir, à nombre de degrés de liberté égal, une meilleure précision sur le calcul des moments.

### 2.2.3 Applications

La détermination des efforts moyens permet, entre autres, d'obtenir des valeurs cruciales pour le dimensionnement de structures, et, surtout, il est possible à partir des courbes de réaliser des analyses quasi-statiques afin de déterminer les zones d'instabilité de galop en translation, pour les courbes de traînée et de portance, et de galop en rotation pour la courbe de moment.

$$\frac{\partial F_D}{\partial \theta} + F_L < 0$$

**Den Hartog**

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} < 0$$

**Blevins**

Figure 2.2 Critères nécessaires d'instabilité quasi-statique pour le galop transverse et le galop en rotation.

La détermination du critère d'instabilité quasi-statique pour le galop transverse,(voir figure 2.2), a été réalisée par Den Hartog (1985). Depuis, de nombreuses études ont été menées sur diverses géométries vérifiant ainsi la validité du critère (Robertson *et al.*, 2003a; Barrero-Gil *et al.*, 2009; Joly *et al.*, 2012; Ibarra *et al.*, 2014; Alonso *et al.*, 2010).

Le critère d'instabilité pour le galop en rotation,(voir figure 2.2), a été développé par Blevins (1990) et découle directement des travaux de Den Hartog (1985). Cette instabilité a été beaucoup moins étudiée que la précédente. Les études trouvées se limitent à quelques formes, la géométrie la plus traitée étant le cylindre carré. On cite certaines études récentes validant ce critère (Robertson *et al.*, 2003a,b; Shiraz, 2014).

Ces instabilités doivent être prises en compte dans de nombreux domaines de l'ingénierie, car les oscillations engendrées peuvent avoir des effets désastreux. En effet, le phénomène de galop est une des causes majeures de l'effondrement du célèbre pont de Tacoma, le "Tacoma Narrows Bridge" (Scanlan, 1979) surnommé ironiquement après l'incident le "Galloping Gertrie". On voit clairement sur l'image de gauche de la figure 2.3 l'amplitude impressionnante du mouvement en torsion du pont, lié aux instabilités en rotation, qui va mener à la destruction de la structure à droite.

Les domaines d'application du phénomène de galop sont variés, allant de la dynamique des câbles soumis à la pluie et au vent (Burton *et al.*, 2005), aux mouvements des panneaux de

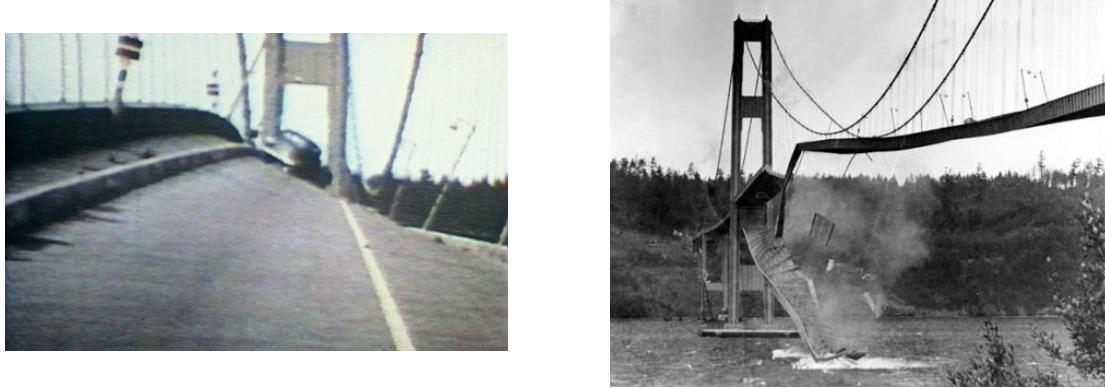


Figure 2.3 Effondrement du pont de Tacoma.

signalisation (Pulipaka *et al.*, 1998). Une application originale est proposée par Barrero-Gil *et al.* (2010) qui décrivent un dispositif permettant d'extraire de l'énergie du mouvement de galop transverse, dans la continuité des travaux de Bernitsas *et al.* (2008) qui proposent d'extraire l'énergie des vibrations induites par vortex (VIV).

On notera tout de même que les théories utilisées sont quasi-statiques et ne peuvent donc pas capturer tous les effets dynamiques du fluide. Pour le mouvement d'une ellipse au sein d'un fluide Weymouth (2014) a montré que pour des nombres de Reynolds aussi faibles que  $R_e = 200$ , la dynamique peut être chaotique, même en présence d'amortissement structurel.

Pour conclure, on dira que le calcul d'effort en écoulement peut donner lieu à d'innombrables applications dans de nombreux domaines de l'ingénierie comme, l'aéronautique (Wang, 2014), l'éolien (Mao et Hogg, 2014), l'off-shore pétrolier (Serson *et al.*, 2015) et bien d'autres.

## CHAPITRE 3 MÉTHODE DES ÉLÉMENTS SPECTRAUX

Nous allons dans ce chapitre détailler les équations liées aux différentes physiques des problèmes traités ainsi que la théorie de la méthode des éléments spectraux et a fortiori celui de la méthode des éléments finis. On parlera également du code de calcul utilisé pour ce projet.

### 3.1 Physique - forme forte

#### 3.1.1 Diffusion thermique

Différents tests de vérification présentés dans la suite de ce document ont été réalisés sur des exemples de diffusion thermique stationnaire et ce en une, deux et trois dimensions. De plus, pour plus de clarté, certains points théoriques sur la méthode des éléments spectraux et sur la méthode des réactions seront expliqués grâce aux équations de diffusion.

On se propose donc de rappeler ici la forme générale de l'équation de diffusion thermique stationnaire :

$$-\nabla \cdot (k \nabla T) = f \quad (3.1)$$

Où  $k$  est la conductivité thermique en ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ) et  $f$  est un éventuel terme de production de chaleur en ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$ ).

#### 3.1.2 Navier-Stokes incompressible

Les résultats que l'on cherche à obtenir concernent les efforts appliqués à des corps immergés, les écoulements considérés sont définis physiquement par les équations de Navier-Stokes avec l'hypothèse de fluide newtonien visqueux incompressible. On a, en l'absence de forces volumiques :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{Continuité}) \quad (3.2)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{Quantité de mouvement}) \quad (3.3)$$

Avec  $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u})$  le tenseur des contraintes en (Pa),  $\rho$  la masse volumique en

(kg.m<sup>-3</sup>) et  $\mu$  la viscosité dynamique en (Pa.s<sup>-1</sup>).

### 3.1.3 Adimensionnalisation

Le processus d'adimensionnalisation d'une équation permet de classer facilement les différents problèmes traités en fonction de paramètres adimensionnels, dans notre cas le nombre de Reynolds. On fera également remarquer que l'adimensionnalisation joue un rôle direct sur le conditionnement du système matriciel à résoudre. C'est pourquoi dans la suite de ce mémoire nous n'utiliserons que la forme adimensionnelle des équations données ci-dessous :

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \quad (\text{Continuité}) \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* = -\nabla^* p^* + \nabla \cdot \left( \frac{1}{R_e} (\nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^{*T} \mathbf{u}^*) \right) \quad (\text{Quantité de mouvement}) \quad (3.5)$$

Cette forme adimensionnelle est basée sur une vitesse de référence  $U_0$  et une longueur de référence  $L_0$ , on a alors :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* U_0, \quad t = t^* \frac{L_0}{U_0}, \quad p = p^* p_0, \quad \nabla = \frac{1}{L_0} \nabla^* \quad (3.6)$$

On peut alors définir des variables adimensionnelles, le nombre de Reynolds ( $R_e$ ) et le nombre de Strouhal ( $S_t$ ) :

$$R_e = \frac{\rho U_0 L_0}{\mu}, \quad S_t = \frac{f L_0}{U_0} \quad (3.7)$$

où  $f$  est la fréquence des relâchers tourbillonnaires.

On se propose également de définir les efforts adimensionnels et leurs coefficients respectifs pour des simulations en 2D. On donne, dans l'ordre, les forces de traînée, de portance et le

moment :

$$F_D^* = \frac{F_D}{\rho L_0 U_0^2}, \quad F_L^* = \frac{F_L}{\rho L_0 U_0^2}, \quad M^* = \frac{M}{\rho L_0^2 U_0^2} \quad (3.8)$$

$$C_D = 2F_D^* \quad C_L = 2F_L^* \quad C_M = 2M^* \quad (3.9)$$

On remarquera, en comparant les formes des équations (3.3) et (3.5), que pour travailler en forme adimensionnelle avec un algorithme utilisant la forme dimensionnelle des équations de Navier-Stokes comme le code utilisé pour ce projet, il suffit de poser  $\rho = 1$  et  $\mu = 1/R_e$ .

Pour conclure, le reste de ce mémoire n'utilisant que la forme adimensionnelle, on se passera de la notation en  $\cdot^*$  et on supposera, sauf indication contraire, que tous les résultats présentés sont adimensionnels.

## 3.2 Formulation faible

La méthode des éléments finis est basée sur la formulation variationnelle des équations à résoudre. Cette forme faible des équations est obtenue en multipliant les équations par des fonctions test et en les intégrant sur l'ensemble de leurs domaines de définition. Elles sont à la base de différentes méthodes de résolution numérique d'équations aux dérivées partielles. Nous détaillerons dans cette section les formulations variationnelles des équations vues précédemment, on rappellera également la définition des espaces solutions de nos équations ainsi que le calcul de norme dans ces derniers.

### 3.2.1 Espace solution - Normes

On va définir ici certains espaces utiles à notre étude, on donne ainsi la définition de deux espaces de Sobolev :

$$L^2(\Omega) = \left\{ u(x, y, z) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} u^2 dV < \infty \right\} \quad (3.10)$$

$$H^1(\Omega) = \left\{ u(x, y, z) \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dV < \infty \right\} \quad (3.11)$$

On peut alors définir le calcul d'erreur dans les deux normes, où  $u_v$  est la solution exacte :

$$\epsilon_{0,\Omega} = \|u - u_v\|_{0,\Omega} = \left( \int_{\Omega} (u - u_v)^2 dV \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.12)$$

$$\epsilon_{1,\Omega} = \|u - u_v\|_{0,\Omega} = \left( \int_{\Omega} (u - u_v)^2 dV + \int_{\Omega} (\nabla u - \nabla u_v)^2 dV \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

### 3.2.2 Forme faible - Diffusion thermique

Considérons l'équation (3.1) sur un espace  $\Omega$  avec la frontière  $\Gamma$ , cette dernière est multipliée par une fonction test  $\phi \in W$  et intégrée sur  $\Omega$  :

$$-\int_{\Omega} \phi \nabla \cdot (k \nabla T) dV = \int_{\Omega} \phi f dV \quad (3.14)$$

En utilisant le théorème de la divergence, on obtient la formulation faible pour la diffusion thermique :

$$\int_{\Omega} \nabla \phi \cdot k \nabla T dV = \int_{\Omega} \phi f dV + \int_{\Gamma} \phi k \nabla T \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.15)$$

L'inconnue du problème  $T$  est la variable primaire et les termes apparaissant au bord du domaine les variables secondaires, dans ce cas le flux thermique  $(-k \nabla T \cdot \mathbf{n})$ .

De plus on a  $(\phi, T) \in W = H^1(\Omega)$ .

### 3.2.3 Forme faible - Navier-Stokes

Comme pour la diffusion thermique, on considère les équations (3.2) et (3.5), l'équation de continuité est multipliée par une fonction test  $q \in Q$  et les équations de conservation du mouvement par  $\phi \in V$ , en intégrant sur  $\Omega$  on a :

$$\int_{\Omega} q (\nabla \mathbf{u}) d\Omega = 0 \quad (3.16)$$

$$\int_{\Omega} \phi \cdot \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] d\Omega = \int_{\Omega} \phi \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (3.17)$$

En utilisant le théorème de la divergence, on obtient la formulation faible des équations de Navier-Stokes :

$$\int_{\Omega} q (\nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega = 0 \quad (3.18)$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\phi} \cdot \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{\phi} d\Omega = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\phi} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (3.19)$$

avec  $\boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{\phi} = -p \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} + \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) : \nabla \boldsymbol{\phi}$ .

Les variables primaires correspondent aux vitesses  $\mathbf{u}$  et les variables secondaires correspondent aux tractions  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  où  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure à la frontière considérée et  $\boldsymbol{\sigma}$  correspond aux contraintes globales incluant la pression et les efforts visqueux.

De plus, on notera que  $(p, q) \in Q = L^2(\Omega)$  et  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) \in V = [H^1(\Omega)]^n$  où  $n$  varie de un à trois suivant la dimension du problème.

### 3.3 Méthode de Ritz-Galerkin

On se propose dans cette section de détailler la méthode de Ritz (1908), méthode précurseur des éléments finis. En effet, la méthode de Ritz utilise des fonctions d'interpolation globales, définies sur tout le domaine de calcul, là où la méthode des éléments finis va utiliser des fonctions d'interpolation définies localement, sur une version discrétisée de l'espace de calcul. La description de la méthode de Ritz sera réalisée sur l'exemple de diffusion pour plus de clarté. Elle consiste à approximer la solution par des fonctions d'interpolation  $\psi$  :

$$T \approx T^N(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N T_j \psi_j \quad (3.20)$$

Ces fonctions doivent respecter les conditions aux limites homogènes sur les variables primaires (les conditions de Dirichlet). On notera que si les conditions sont non-homogènes, il est nécessaire d'imposer un relèvement. On suppose des conditions de Dirichlet nulles imposées sur la frontière  $\Gamma_D$  et des conditions de Neumann sur la frontière  $\Gamma_N$  ( $\Gamma_N \cup \Gamma_D = \Gamma$ ). On peut alors en utilisant (3.15) écrire :

$$\sum_{j=1}^N T_j \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot k \nabla \psi_j dV = \int_{\Omega} \phi f dV + \int_{\Gamma_N} \phi k \nabla T \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Gamma_D} \phi k \nabla T \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.21)$$

L'approche de Galerkin consiste à prendre les fonctions test égales aux fonctions d'interpo-

lation  $\phi = \psi_i$  avec  $i = 1 \dots N$ . Cela a pour effet de faire disparaître l'intégrale de bord là où les conditions de Dirichlet sont imposées, on respecte ainsi le principe physique selon lequel on ne peut imposer simultanément une variable primaire et une variable secondaire en un même endroit. On a alors pour  $i$  allant de 1 à  $n$  :

$$\sum_{j=1}^N T_j \int_{\Omega} \nabla \psi_i \cdot k \nabla \psi_j dV = \int_{\Omega} \psi_i f dV + \int_{\Gamma_N} \phi k \nabla T dS \quad (3.22)$$

$$\sum_{j=1}^N a(\psi_i, \psi_j) T_j = l(\psi_i) \quad 1 \leq i \leq N \quad (3.23)$$

Les fonctions  $\psi_j$  sont définies sur l'espace  $\Omega$ , elles doivent respecter les conditions limites et être linéairement indépendantes.

On a donc à résoudre le système matriciel :

$$\begin{bmatrix} a(\psi_1, \psi_1) & \cdots & a(\psi_1, \psi_N) \\ \vdots & & \vdots \\ a(\psi_N, \psi_1) & \cdots & a(\psi_N, \psi_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l(\psi_1) \\ \vdots \\ l(\psi_N) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Cette méthode trouve ses limites pour des domaines de géométrie complexe, du fait de la définition globale des fonctions d'interpolation et de la construction de la fonction de relèvement devant respecter les conditions limites. La méthode des éléments finis permet, en discréétisant l'espace, de pallier cette difficulté.

On notera également qu'on préfère bien souvent travailler en correction, notamment pour la résolution de problèmes non linéaires, on a alors pour une inconnue quelconque  $u$ ,  $u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + \delta u(\mathbf{x})$  où  $u_0$  est une solution initiale. Le système devient pour la diffusion :

$$\mathbf{A}\delta\mathbf{T} = \mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{T}_0 \quad (3.25)$$

### 3.4 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis consiste à subdiviser l'espace en un nombre  $n_{el}$  de sous-intervalles appelés éléments, cette démarche permet de traiter relativement facilement des problèmes sur des géométries complexes et ce en une, deux ou trois dimensions.

Les éléments sont constitués d'un certain nombre de noeuds géométriques permettant de définir la géométrie de ces derniers, ils seront utilisés pour réaliser la transformation vers l'élément de référence. Ces noeuds géométriques permettent également de définir la géométrie

du domaine global de calcul.

Sur chaque élément  $K$  sont également définis des noeuds d'interpolation, à chacun de ces noeuds on associe une (ou plusieurs, si le problème comporte plusieurs variables primaires) inconnue appelée degré de liberté du système. Ces inconnues ont une signification physique puisqu'elles correspondent à la valeur des variables primaires aux noeuds de calcul considérés. On doit alors résoudre un problème discret avec  $n_{DDL}$  inconnues. En réalité, certains degrés de liberté sont imposés par les conditions de Dirichlet, on a alors pour un problème ayant une variable primaire  $u$  :

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n_{DDL}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^{INC} \\ \hline u^{DIR} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \delta u = \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \vdots \\ \delta u_{n_{DDL}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta u^{INC} \\ \hline 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

où la partie inférieure des vecteurs inconnus correspond aux DDL concernés par les conditions de Dirichlet dont les valeurs sont connues et la partie supérieure correspond aux DDL inconnus.

### 3.4.1 Formulation variationnelle élémentaire

On considère alors la formulation variationnelle des équations sur chaque élément  $K$ , pour la diffusion thermique en travaillant en correction, on obtient :

$$\int_K \nabla \phi \cdot k \nabla \delta T \, dV = \int_K \phi f \, dV + \int_{\partial K} \phi k \nabla T \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_K \nabla \phi \cdot k \nabla T_0 \, dV \quad (3.27)$$

ou  $\partial K$  représente le bord de l'élément.

Le traitement des conditions limites sera détaillé plus tard, ce dernier ne concernant que les éléments situés au bord du domaine.

On peut alors appliquer la méthode de Ritz sur l'élément, on associe à chaque noeud de calcul une fonction d'interpolation  $\psi_j(\mathbf{x})$ . Le nombre de noeuds de calcul  $n_d^K$  dépend du choix fait sur les éléments (linéaire, quadratique, etc). On a alors sur chaque élément :

$$T(\mathbf{x}) \simeq T_0^K(\mathbf{x}) + \delta T^K(\mathbf{x}) \quad (3.28)$$

$$\delta T^K(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_d^K} \delta T_j^K \psi_j^K(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad T_0^K(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_d^K} T_{0j}^K \psi_j^K(\mathbf{x}) \quad (3.29)$$

Les inconnues du système sont donc les  $\delta T_j^K$ , dont les valeurs ne sont pas connues s'il n'y a pas de conditions de Dirichlet imposées sur ces noeuds. Les fonctions d'interpolation ne sont plus définies globalement mais localement sur chaque élément. On prend alors  $\phi(\mathbf{x}) = \psi_i^K(\mathbf{x})$  (Ritz-Galerkin), pour  $i$  variant de 1 à  $n_d^K$  et on obtient un système élémentaire de taille  $n_d^K$  par  $n_d^K$

$$\sum_{j=1}^{n_d^K} \underbrace{\left[ \int_K (\nabla \psi_i^K \cdot k \nabla \psi_j^K) dV \right]}_{a_{ij}^K} \delta T_j^K = \underbrace{\left[ \int_K \psi_i^K f dV - \int_K \nabla \psi_i^K \cdot k \sum_{j=1}^{n_d^K} (T_0^K \nabla \psi_j^K) dV \right]}_{f_i^K} + \underbrace{\left[ \int_{\partial K} \psi_i^K k \nabla T \cdot \mathbf{n} dS \right]}_{s_i^K} \quad (3.30)$$

La formulation donnée ci-dessus requiert la construction des fonctions d'interpolation  $\psi_j^K$  sur chaque élément, une procédure coûteuse et non-triviale. Afin d'effectuer un minimum d'opérations, tous les éléments du maillage sont rapportés à un élément de référence.

### 3.4.2 Passage à l'élément de référence

Le passage à l'élément de référence permet d'effectuer un choix unique de fonction d'interpolation pour tous les éléments du maillage. On réalise ainsi une transformation géométrique pour chaque élément, on cherche à faire correspondre chaque noeud géométrique  $\mathbf{x}_i^K$  de l'élément  $K$  dans l'espace réel à un noeud  $\xi_i^K$  de l'élément  $\hat{K}$  de l'espace de référence :

Élément physique		Élément de référence
$(T^K)^{-1}$	(3.31)	
$\mathbf{x} = [x, y, z]$	$\rightleftharpoons$	$\xi = [\xi, \eta, \zeta]$
	$(T^K)$	

La transformation géométrique  $T^K$  doit être inversible, on cherche à construire une base

polynomiale de dimension égale au nombre de noeuds géométriques des éléments considérés  $n_g^K$ . La transformation géométrique est la suivante :

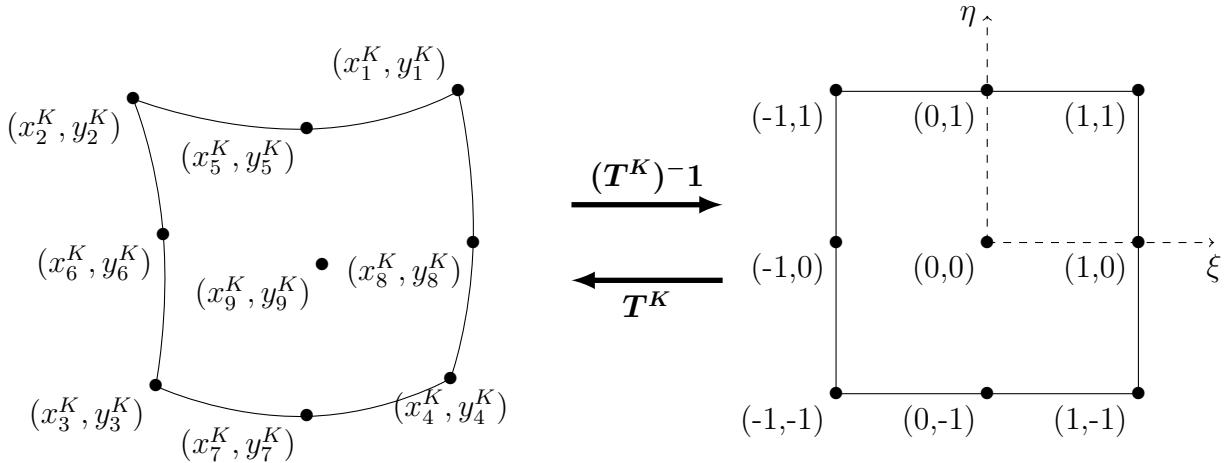
$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n_g^K} \mathbf{x}_i^K L_i(\xi) \quad (3.31)$$

$$L_i(\xi_j) = \delta_{ij} \quad (3.32)$$

L'interpolation lagrangienne permet de respecter la propriété (3.32), les fonctions  $L_i(\xi)$  sont donc les fonctions d'interpolation de Lagrange. La construction de ces dernières ne sera pas détaillée ici, pour plus de détails on invite le lecteur à consulter Fortin et Garon (2009). On donne néanmoins la forme des fonctions en une dimension pour  $m$  points :

$$L_i(\xi) = \prod_{j=0, j \neq i}^m \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \quad (3.33)$$

Dans la suite de ce mémoire, les éléments utilisés approximeront toujours la géométrie de manière quadratique, en deux dimensions on utilisera des quadrangles  $Q9$ , l'élément de référence est donné à la figure 3.1.



Élément physique  $K$

Élément de référence  $\hat{K}$

Figure 3.1 Passage à l'élément de référence pour les quadrangles Q9.

Muni de la transformation géométrique, il reste désormais à transformer la forme faible élémentaire sur l'élément de référence, les fonctions d'interpolation deviennent alors  $\psi_i^K(\mathbf{x}) =$

$\hat{\psi}_i(\xi)$  pour tous les noeuds d'interpolation de coordonnées  $\mathbf{x} = T^K(\xi)$ . On notera l'abandon de l'indice  $K$  sur l'élément de référence. En effet, puisque tous les éléments sont rapportés à ce dernier, les fonctions d'interpolation sont maintenant définies pour tous les éléments. Pour réaliser la transformation de la forme élémentaire, il est nécessaire de définir certaines matrices afin de transformer les dérivées partielles. On introduit la matrice jacobienne de la transformation  $\mathbf{D}^K$  :

$$\mathbf{D}^K = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Les coefficients de cette matrice sont calculés à partir de l'interpolation géométrique 3.31. Le déterminant de la matrice s'appelle le jacobien  $J^K$ , il doit être non-nul pour que la transformation  $T^K$  soit inversible. On peut alors obtenir les dérivées grâce à la règle de dérivation des fonctions composées, on obtient les relations utiles à la transformation :

$$\psi^K(x, y, z) = \hat{\psi}(\xi, \eta, \zeta) \quad (3.35)$$

$$[\nabla_{\mathbf{x}} \psi^K(x, y, z)] = (\mathbf{W}^K) [\nabla_{\xi} \hat{\psi}(\xi, \eta, \zeta)] \quad (3.36)$$

$$dV = J^K d\hat{V} \quad (3.37)$$

où  $\mathbf{W}^K = (\mathbf{D}^K)^{-T}$ .

On se propose de réécrire à titre d'exemple le terme  $a_{ij}^K$  après passage à l'élément de référence :

$$a_{ij}^K = \int_{-1}^1 \left( k [\nabla_{\xi} \hat{\psi}_i(\xi)]^T (\mathbf{W}^K)^T (\mathbf{W}^K) [\nabla_{\xi} \hat{\psi}_j(\xi)] \right) J^K d\hat{V} \quad (3.38)$$

Les fonctions d'interpolation  $\hat{\psi}(\xi)$  étant les mêmes pour tous les éléments, le calcul des termes élémentaires diffère uniquement par les coordonnées des noeuds géométriques de chaque élément. En effet, il faut pour chaque élément calculer la matrice  $\mathbf{W}^K$  et le jacobien  $J^K$ . Cependant, les fonctions  $\hat{\psi}(\xi)$  et leurs dérivées sont toujours les mêmes et ne sont calculées qu'une seule fois. Cette démarche est beaucoup plus efficace numériquement que de devoir définir des fonctions d'interpolation sur chaque élément, les coordonnées des noeuds géométriques

étant toujours accessibles via le maillage du domaine. On notera que les fonctions  $\psi(\mathbf{x})$  ne sont jamais calculées explicitement.

On rappelle que, pour notre exemple, nous avons le système élémentaire :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n_d^K} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n_d^K 1} & \cdots & a_{n_d^K n_d^K} \end{bmatrix}}_{A^K} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta T_1^K \\ \vdots \\ \delta T_{n_d^K}^K \end{bmatrix}}_{\delta T^K} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1^K \\ \vdots \\ f_{n_D^K}^K \end{bmatrix}}_{f^K} + \underbrace{\begin{bmatrix} s_1^K \\ \vdots \\ s_{n_D^K}^K \end{bmatrix}}_{s^K} \quad (3.39)$$

Pour calculer les coefficients du système élémentaire il reste alors à choisir les fonctions d'interpolation  $\hat{\psi}(\xi)$  et à définir la position des noeuds d'interpolation sur l'élément de référence  $(\xi_1, \dots, \xi_{n_d})$  ainsi que la règle d'intégration numérique. C'est sur ces deux derniers points que la méthode spectrale diffère de la méthode des éléments finis.

### 3.4.3 Fonctions d'interpolation

Le choix des fonctions d'interpolation  $\hat{\psi}_i(\xi)$  dépend de l'espace solution des équations à résoudre, dans notre cas  $H^1$ . Il est alors nécessaire de s'assurer de la continuité de l'approximation aux frontières des éléments. On cherche également à donner un sens physique aux degrés de liberté, en obtenant une approximation de la variation de la variable primaire, dans notre cas  $\delta T$ , à chaque noeud d'interpolation. La relation suivante doit alors être vérifiée :

$$\delta T^K(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^{n_d^K} \delta T_j^K \psi_j^K(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^{n_d^K} \delta T_j^K \psi_j^K(\xi_i) = \delta T_i^K \quad (3.40)$$

ce qui impose la condition suivante sur les fonctions  $\hat{\psi}_i(\xi)$  :

$$\hat{\psi}_j(\xi_i) = \delta_{ij} \quad (3.41)$$

On retrouve la même condition qu'en (3.32), il est donc logique d'utiliser une fois de plus les polynômes de Lagrange comme fonctions d'interpolation. La base polynomiale lagrangienne est définie par le nombre de points d'interpolation choisi sur les éléments ce qui déterminera la dimension  $n_d^K$  du système élémentaire. Le choix du degré des polynômes a une influence directe sur la précision de la solution. On donne, à titre d'exemple, les fonctions d'interpolation

et leur représentation sur des éléments en une dimension pour les approximations linéaire et quadratique à la figure 3.2.

On notera également que pour n'importe quel choix de degré de polynôme, on a toujours :

$$\sum_{i=1}^{n_d^K} \psi_i(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_d^K} \hat{\psi}_i(\boldsymbol{\xi}) = 1 \quad (3.42)$$

Cette relation est importante pour la méthode des réactions détaillée au chapitre 5.

On remarque que, bien que nous ayons choisi la base lagrangienne pour notre interpolation, cette dernière n'est pas la seule option possible. Les bases hiérarchiques sont, par exemple, une des alternatives possibles.

### 3.4.4 Intégration numérique

Les différentes contributions élémentaires sont maintenant tous explicités, il ne reste plus qu'à réaliser le calcul des intégrales. Le calcul analytique de ces dernières n'est pas toujours possible, c'est pourquoi on utilise des méthodes d'intégration numérique. Ces dernières permettent d'approximer ou de calculer exactement des intégrales en utilisant diverses règles de quadrature. Les méthodes d'intégration numérique consistent à discréteriser les intégrales en calculant les valeurs de leurs intégrandes en un nombre  $Q$  de points d'intégration, pondérés par des poids  $w$  calculés en ces mêmes points. En notant  $E_Q$  l'erreur d'intégration, on a alors :

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^Q w_i f(\xi_i) + E_Q(f) \quad (3.43)$$

La position des points d'intégration  $\xi_i$ , ainsi que les valeurs des poids  $w_i$ , dépendent de la quadrature utilisée, on introduit la notation  $\xi_i^{P_Q}$  comme les  $Q$  racines d'un polynôme  $P$  de degré  $Q$  et on définit les polynômes de Legendre :

$$G_Q(\xi) = \frac{1}{2^Q Q! d\xi^Q} \frac{d^Q}{d\xi^Q} [(\xi^2 - 1)^Q] \quad (3.44)$$

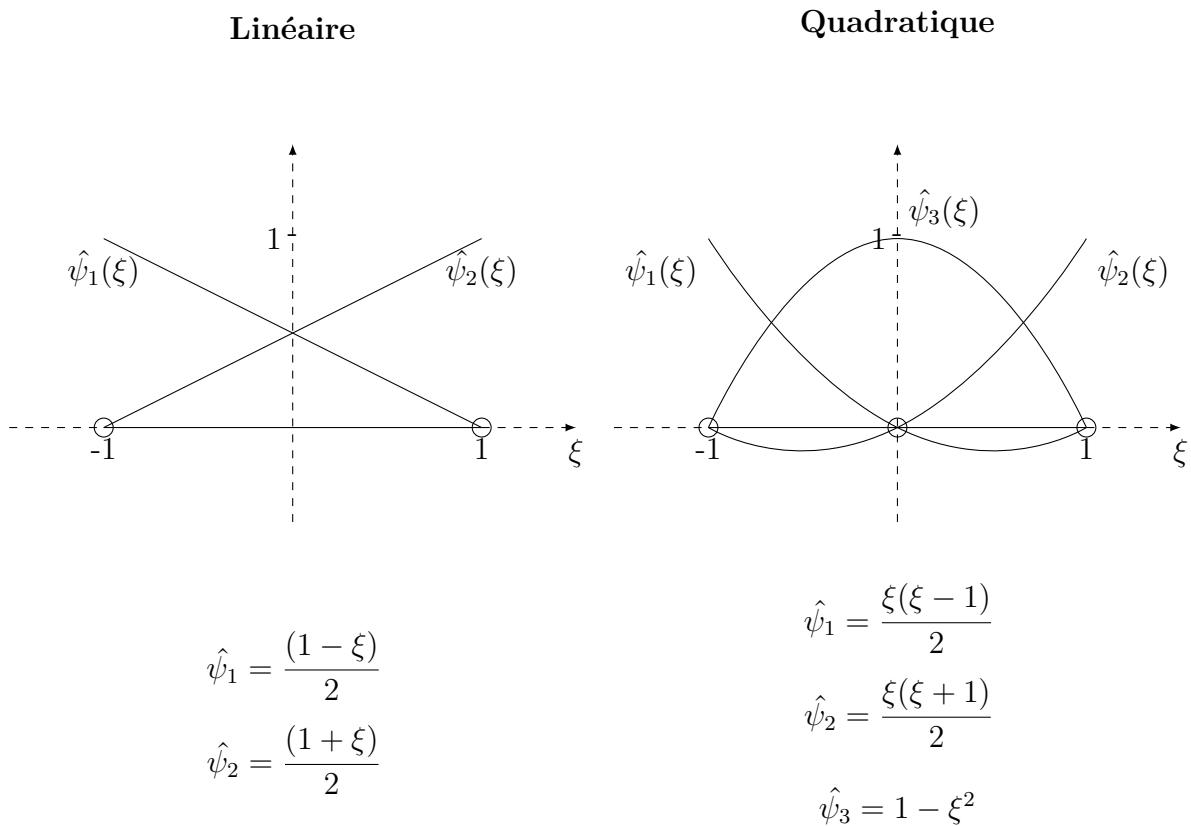


Figure 3.2 Interpolation linéaire et quadratique sur l'élément de référence  $\hat{K}$  en 1D.

### Quadrature de Gauss-Legendre

Cette quadrature utilise des points d'intégration compris dans l'intervalle  $\xi_i \in [-1, 1]$  avec  $i = 0, \dots, Q$ , c'est la quadrature la plus couramment utilisée. Elle est définie pour une règle à  $Q$  points d'intégration par :

$$\xi_i = \xi_i^{P_Q}, \quad i = 1, \dots, Q \quad (3.45)$$

$$w_i = \frac{2}{(1-x^2)[G'_Q(\xi_i)]} \quad i = 1, \dots, Q \quad (3.46)$$

$$E_Q(f) = 0 \text{ si } f(\xi) \in P_{2Q-1}([-1, 1]) \quad (3.47)$$

Cette quadrature permet donc d'intégrer exactement un polynôme de degré  $2Q-1$  ou inférieur avec  $Q$  points d'intégration.

### Quadrature de Gauss-Lobatto-Legendre

Cette quadrature utilise les points limites de l'intervalle comme points d'intégration, pour une quadrature à  $Q$  points, il faut donc fixer les  $Q-2$  points restants, on a alors :

$$\xi_i = \begin{cases} -1, & i = 1 \\ \xi_{i-1}^{P'_{Q-1}} & i = 2, \dots, Q-1 \\ 1, & i = Q \end{cases} \quad (3.48)$$

$$w_i = \begin{cases} \frac{2}{Q(Q-1)}, & i = 1, Q \\ \frac{2}{Q(Q-1)[G_{Q-1}(\xi_i)]^2} & i = 2, \dots, Q \end{cases} \quad (3.49)$$

$$E_Q(f) = 0 \text{ si } f(\xi) \in P_{2Q-3}([-1, 1]) \quad (3.50)$$

Cette quadrature est moins efficace que celle de Gauss-Legendre puisque pour  $Q$  points d'intégration, elle intègre exactement un polynôme de degré  $2Q-3$  ou moins, mais elle possède de nombreux avantages pour la méthode spectrale, on va notamment utiliser la même base nodale pour définir les points d'interpolation.

### 3.4.5 Éléments spectraux

Tous les concepts nécessaires à la détermination du système élémentaire ont été explicités, on se propose alors de décrire maintenant les principales différences entre éléments finis et éléments spectraux.

La méthode des éléments spectraux est basée sur la convergence hp, en élément finis, on utilise des interpolants d'ordre faible, on améliore alors la précision de la solution numérique en raffinant le maillage. On augmente le nombre d'éléments afin d'obtenir la convergence des résultats, c'est la h-convergence, (où  $h$  représente la taille des éléments). La p-convergence, qui est à la base des méthodes spectrales, consiste à garder un maillage fixe et à augmenter le degré des interpolants. La méthode des éléments spectraux est une combinaison de ces deux moyens de raffinement de la solution et elle est donc également appelée méthode des éléments "hp". On notera que lorsque l'on raffine le maillage, le taux de convergence de la solution se comporte comme une puissance de  $h$  alors que lorsque l'on augmente l'ordre on obtient une convergence spectrale, c'est à dire que l'erreur sur la solution décroît plus rapidement que toute puissance de  $1/p$  où  $p$  est l'ordre des interpolants (Pozrikidis, 2005).

La différence fondamentale au niveau théorique entre les éléments finis et les éléments spectraux réside dans le choix de la base nodale d'interpolation. En éléments finis les points d'interpolation sont équidistants sur l'élément de référence, ce choix de base nodale produit rapidement un problème lorsque l'on augmente le degré des interpolants. C'est le phénomène de Runge. On a apparition d'oscillations parasites aux bords des éléments qui ne permettent pas de capter précisément la solution, la p-convergence est alors limitée. La méthode des éléments spectraux consiste alors à changer de base nodale pour contrer ce phénomène. Il existe différentes bases nодales acceptables, on a fait le choix d'utiliser les points de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) définis à l'équation (3.50). Ces derniers présentent de bonnes propriétés de convergence et sont souvent utilisés (Pozrikidis, 2005; Pena, 2009; Karniadakis et Sherwin, 2005). Le fait de changer de base nodale reméde au phénomène de Runge comme le montre la figure 3.3. On voit clairement le problème engendré par le choix de base nodale équirépartie aux extrémités du domaine et comment le passage à la base GLL permet de réduire les amplitudes des oscillations pour un même nombre de points. L'utilisation des points de Gauss-Lobatto-Legendre permet également de diminuer drastiquement l'augmentation du conditionnement de la matrice globale avec l'augmentation du nombre de DDL lorsque l'on augmente l'ordre des interpolants (voir Chapitre 4) et l'on peut ainsi utiliser efficacement la p-convergence.

Il est courant dans la méthode des éléments spectraux de choisir les points d'intégration comme étant les mêmes que les noeuds d'interpolation afin de réduire le nombre de coefficients

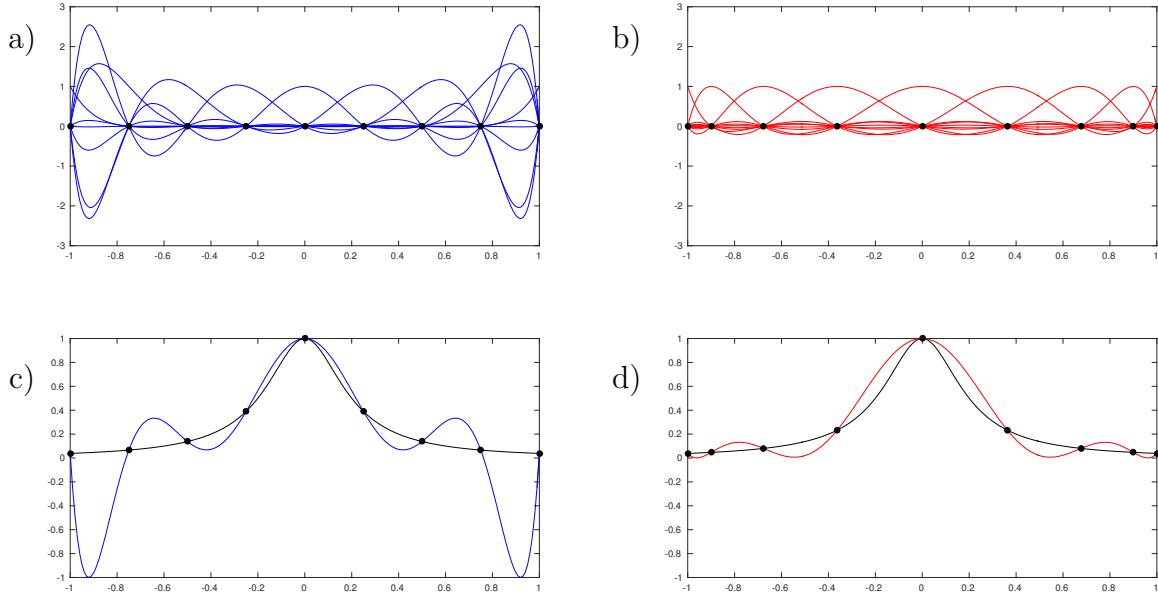


Figure 3.3 Fonction d’interpolation à 9 points pour la base nodale équirépartie (a) et GLL (b) - Interpolation de la fonction de Runge (en noir) en base nodale équirépartie (c) et GLL (d).

non-nuls dans les matrices élémentaires. Supposons un élément à  $N$  noeuds d’interpolation en base nodale GLL, les fonctions d’interpolation seront alors de degré  $N - 1$ , on choisit donc une quadrature GLL à  $N$  points. Comme les points d’intégration et les noeuds de calcul sont aux mêmes positions, on a orthogonalité discrète des polynômes de Lagrange et pour toutes formes dépendant des fonctions d’interpolation  $M_{ij}(\psi_i, \psi_j)$  :

$$M_{ij} \simeq \sum_{k=1}^N w_i \psi_i(\xi_k) \psi_j(\xi_k) = \sum_{k=1}^N w_i \delta_{ik} \delta_{jk} = w_i \delta_{ij} \quad (3.51)$$

On notera que ce choix entraîne une intégration numérique suboptimale puisque les polynômes intégrés sont de degré  $2N - 2$  et qu’une quadrature GLL à  $N$  points permet d’intégrer exactement un polynôme d’ordre  $2N - 3$ . Cette méthode est tout de même largement utilisée, l’erreur étant négligeable, elle permet notamment de diagonaliser la matrice masse en Navier-Stokes incompressible. On précise que ce choix de points d’intégration n’est nullement obligatoire.

Pour résumer, la méthode des éléments spectraux, bien que plus difficile à mettre en oeuvre

que la méthode des éléments finis, permet d'utiliser, en changeant de base nodale, des interpolants de haut degré sans phénomène de Runge. On utilise ainsi une méthode basée sur la convergence hp donnant un meilleur conditionnement de matrice et des solutions plus précises, à même nombre de DDL, que la méthode des éléments finis. Elle permet également de réduire les temps de calcul et de minimiser l'espace mémoire utilisé.

### 3.4.6 Assemblage matriciel et conditions limites

Les différents termes élémentaires sont maintenant évaluables, il ne reste qu'à former le système global en prenant en compte les contributions de tous les éléments. On ne s'attardera pas sur les détails des algorithmes d'assemblage, ces derniers étant relativement aisés à comprendre. En bref, tous les degrés de liberté du système sont numérotés de 1 à  $n_{DDL}$  et on crée un vecteur d'adressage de longueur  $n_{el}$  permettant d'associer la numérotation locale de chaque noeud de calcul élémentaire avec la numérotation globale du système. En bouclant sur les éléments et en utilisant le vecteur d'adressage, on construit le système global à partir de contributions élémentaires.

$$\mathbf{A}\delta T = \mathbf{f} + \mathbf{s} \quad (3.52)$$

Supposons maintenant que les noeuds de calcul associés à des conditions de Dirichlet soient numérotés en dernier, on obtient alors en reprenant l'exemple de diffusion thermique le système global suivant :

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \delta \mathbf{T}^I \\ 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2^I \end{array} \right] \quad (3.53)$$

La partie basse du système correspond aux lignes concernées par les conditions de Dirichlet, on ne connaît alors pas le vecteur  $\mathbf{s}_2^I$  puisqu'on ne peut imposer à la fois les variables primaires et secondaires. On rappelle que le vecteur  $\mathbf{s}$  correspond aux variables secondaires sur le bord des éléments (voir équation (3.30)), après assemblage du système global, on a donc logiquement les termes provenant des éléments au bord du domaine, ce sont les conditions de Neumann mais on peut également imposer des termes correspondant à des sauts des variables secondaires à la frontière d'éléments adjacents. Dans notre exemple, une production thermique ponctuelle ou surfacique peut ainsi être imposée à l'intérieur du domaine, sinon

ces termes sont nuls et le vecteur  $\mathbf{s}$  est uniquement constitué des conditions de Neumann sur le bord du domaine.

Le système global se réduit au final à :

$$A_{11}\boldsymbol{\delta T}^I = \mathbf{f}_1 + \mathbf{s}_1 \quad (3.54)$$

Les autres coefficients de la matrice ne sont pas nécessaires et par conséquent ne sont pas calculés, on notera néanmoins que la matrice  $A_{21}$  est utilisée pour la méthode des réactions (voir chapitre 4).

La résolution du système global est très simple pour la diffusion thermique, l'équation étant linéaire, une simple décomposition LU permet d'obtenir la solution. Pour Navier-Stokes, on va avoir besoin d'algorithmes de résolution pour traiter la partie non linéaire des équations et pour la discrétisation temporelle.

Pour finir, on notera qu'en réalité, la numérotation des degrés de liberté est générée par le mailleur utilisé et elle ne suit pas de règles particulières. Cette numérotation joue un rôle majeur sur la structure de la matrice. Les éléments n'ayant que peu de voisins, la plupart des coefficients matriciels du système global seront nuls ; on obtient alors des matrices creuses constituées principalement de zéros. Or, il est intéressant d'un point de vue numérique de regrouper les termes non-nuls de la matrice près de la diagonale, la position des termes étant déterminée par la numérotation des degrés de liberté, on fait souvent appel à des algorithmes d'optimisation et de renumérotation. Ces derniers vont alors tenter de réduire la largeur de bande maximale de la matrice ou la somme des largeurs de bande de la matrice en rénumérotant les degrés de liberté. On obtient ainsi des matrices bandes permettant des économies d'espaces mémoire et des gains de performances.

### 3.4.7 Navier-Stokes

On se propose maintenant de reprendre les équations de Navier-Stokes sous forme faible :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\phi} \cdot \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] d\Omega + \int_{\Omega} \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) : \nabla \boldsymbol{\phi} d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} d\Omega = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\phi} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (3.55)$$

$$\int_{\Omega} q(\nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega = 0 \quad (3.56)$$

On peut les réécrire sous forme discrète grâce aux approximations de  $(\mathbf{u}, p)$ ,  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h$  où  $V_h$  et  $Q_h$  sont des sous-espaces de  $V$  et  $Q$  :

$$a(\mathbf{u}_h, \phi_h) + b(\phi_h, p_h) = (\phi_h, \sigma) \quad (3.57)$$

$$b(q_h, \phi_h) = 0 \quad (3.58)$$

Le choix des interpolants en vitesse et pression pour les équations de Navier-Stokes est soumis à la règle de stabilité de Brezzi-Babuska, également appelée condition "inf-sup" (Brezzi, 1974; Babuska et Aziz, 1972), cette dernière stipule :

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\phi_h \in V_h} \frac{b(\phi_h, q_h)}{\|q_h\|_{0,\Omega} \|\phi_h\|_{1,\Omega}} \geq \beta \quad (3.59)$$

ou  $\beta$  est une constante strictement positive.

Il existe bon nombre d'éléments qui respectent cette condition, dans notre cas nous utiliserons des quadrangles à pression continue de type Taylor-Hood (Taylor et Hood, 1973), pour des interpolants de degré  $N$  en vitesse, on aura des interpolants de degré  $N - 1$  en pression. On donne à titre d'exemple la répartition des points d'interpolation sur l'élément de référence pour un Q6Q5 en base GLL à la figure 3.4.

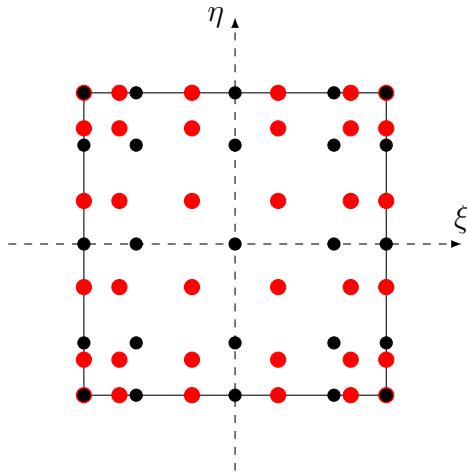


Figure 3.4 Élément de référence Q6Q5 en base GLL, noeuds de vitesse en rouge et noeuds de pression en noir.

La discréétisation temporelle sera explicitée plus tard, on notera ici qu'on utilise des schémas implicites BDF (Backward Differentiation Formula), le terme temporel dépend alors des

valeurs de  $\mathbf{u}$  aux itérations précédentes, ce qu'on traduit pour un BDF d'ordre 2 par :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \alpha_n \mathbf{u} + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \alpha_{n-2} \mathbf{u}_{n-2} \quad (3.60)$$

L'intérêt de travailler en correction est ici démontré puisqu'il va permettre de linéariser le terme de convection, non-linéaire, de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. On pose alors :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\delta u} \quad (3.61)$$

$$p = p_0 + \delta p \quad (3.62)$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \alpha_n \boldsymbol{\delta u} + \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 + (\boldsymbol{\delta u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\delta u} + (\boldsymbol{\delta u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\delta u} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Pour linéariser, on néglige les termes d'ordre  $(\delta u)^2$  et on a donc :

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 + (\boldsymbol{\delta u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\delta u} \quad (3.64)$$

Les équations de Navier-Stokes incompressibles se réécrivent alors pour la forme en correction :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \phi \cdot \rho [\alpha_n \boldsymbol{\delta u} + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\delta u} + (\boldsymbol{\delta u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0] d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \mu (\nabla \boldsymbol{\delta u} + \nabla \boldsymbol{\delta u}^T) : \nabla \phi d\Omega - \int_{\Omega} \delta p \nabla \cdot \boldsymbol{\delta u} d\Omega = R_m(\mathbf{u}_0, p_0) \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\int_{\Omega} q (\nabla \boldsymbol{\delta u}) d\Omega = R_c(\mathbf{u}_0) \quad (3.66)$$

avec :

$$R_m(\mathbf{u}_0, p_0) = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi} \cdot \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 \right] d\Omega \quad (3.67)$$

$$- \int_{\Omega} \mu (\nabla \mathbf{u}_0 + \nabla \mathbf{u}_0^T) : \nabla \boldsymbol{\phi} d\Omega + \int_{\Omega} p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} d\Omega$$

$$R_c(\mathbf{u}_0) = - \int_{\Omega} q (\nabla \cdot \mathbf{u}_0) d\Omega \quad (3.68)$$

### 3.4.8 Traitement de la non-linéarité

Le terme de convection étant linéarisé, on peut maintenant calculer les différents termes élémentaires, considérons le système (3.66) sous forme matricielle :

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}_0) \boldsymbol{\delta} \mathbf{U} = \mathbf{R}(\mathbf{U}_0) \quad (3.69)$$

La résolution du système est basée sur la méthode de Newton, on fixe plusieurs critères d'arrêt,  $\epsilon_{\delta u}$ , la tolérance sur la correction,  $\epsilon_R$ , la tolérance sur le résidu,  $N_{it}$ , le nombre maximal d'itérations et une tolérance de factorisation  $\epsilon_{tol}$ . L'algorithme de résolution basé sur la méthode de Newton est détaillé à la figure 3.5.

```

• Choix de  $\epsilon_{\delta u}$ ,  $\epsilon_R$ ,  $\epsilon_{tol}$  et  $N_{it}$ 
• Choix de  $\mathbf{U}_0$ 
while (( $\|\boldsymbol{\delta} \mathbf{U}\| > \epsilon_{\delta X}$  or  $\|\mathbf{R}\| > \epsilon_R$ ) and  $N < N_{it}$ )
    • Calcul de  $\mathbf{R}(\mathbf{U}_0)$ 
    • Calcul de  $\mathbf{A}(\mathbf{U}_0)$ 
    • Résolution de  $\mathbf{A}(\mathbf{U}_0) \boldsymbol{\delta} \mathbf{U} = \mathbf{R}(\mathbf{U}_0)$ 
    • Mise à jour de la solution  $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_0 + \boldsymbol{\delta} \mathbf{U}$ 
end
if  $N < N_{it}$ 
    • Ecriture solution finale  $\mathbf{U}_f = \mathbf{U}_0$ 
    • Calcul du résidu final (méthode des réactions)  $\mathbf{R}_f = \mathbf{R}(\mathbf{U}_0)$ 
else
    • Divergence de la solution
end
```

Figure 3.5 Algorithme de résolution pour la méthode de Newton.

La résolution du système  $\mathbf{A}(\mathbf{U}_0) \boldsymbol{\delta} \mathbf{U} = \mathbf{R}(\mathbf{U}_0)$  est effectuée par décomposition LU, c'est l'étape la plus coûteuse de l'algorithme, il existe donc des méthodes permettant de ne pas

effectuer cette factorisation à chaque itération. La tolérance de factorisation est utilisée par un heuristique au sein du code, cet heuristique permet de décider en fonction de la norme du résidu et du résidu de l'itération précédente s'il est nécessaire de refactoriser la matrice  $A(\mathbf{U}_0)$ . Si le rapport des normes des résidus est supérieur à la tolérance de factorisation, on n'actualise pas la matrice, ce qui permet de gagner en efficacité numérique.

### 3.4.9 Traitement de la partie temporelle

Il ne nous reste plus qu'à couvrir de quelle façon la dépendance temporelle des équations de Navier-Stokes est traitée. Il existe de nombreux schémas d'intégration temporelle, aussi bien explicites, qu'implicites, chacun possédant leurs avantages et inconvénients. Dans notre cas, ce sont les méthodes BDF (Backward Differentiation Formula) qui sont utilisées. Ce sont des schémas implicites, ce qui veut dire que la dérivée de la vitesse  $\mathbf{u}'$  à un instant  $t_n$  va dépendre de la valeur de la vitesse à cet instant,  $\mathbf{u}_n$ , et des valeurs de  $\mathbf{u}$  aux instants précédents. Pour une méthode d'ordre  $P$  à l'instant  $t_{n+1}$  :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \sum_{i=0}^p \alpha_i \mathbf{u}_{n+1-i} \quad (3.70)$$

Si l'on considère les équations (3.55) et (3.56) sous forme matricielle :

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{M} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{u}} \\ p \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c|c} K & B \\ \hline B^T & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \mathbf{u} \\ p \end{array} \right] = \mathbf{f} \quad (3.71)$$

Le terme temporel va contribuer à rajouter des coefficients dans la matrice globale,  $\alpha_0 \mathbf{M}$ , et dans le membre de droite,  $\mathbf{f}_t$ , du fait de l'utilisation d'une méthode implicite. Le terme ajouté  $\mathbf{f}_t$  dépendant des champs de vitesse aux instants précédents.

$$\left[ \begin{array}{c|c} K + \alpha_0 \mathbf{M} & B \\ \hline B^T & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \mathbf{u} \\ p \end{array} \right] = \mathbf{f} + \left[ \begin{array}{c} \mathbf{f}_t \\ 0 \end{array} \right] \quad (3.72)$$

La mise en oeuvre de ces méthodes est peu coûteuse numériquement et facile à implanter. Le code utilisé est basé sur les méthodes BDF d'ordres 1 à 4 et utilise une méthode d'adaptation en ordre et en temps, appelée "adaptation hp". Les méthodes BDF d'ordres 1 et 2 sont

inconditionnellement stables et correspondent respectivement au schéma d’Euler implicite et au schéma de Gear, tandis que les méthodes d’ordres 3 à 6 sont conditionnellement stables. L’algorithme utilisé permet une adaptation à la fois du pas de temps entre chaque itération et de l’ordre de la méthode utilisée. On s’assure ainsi de la stabilité de la méthode mais également que l’erreur numérique sur la solution reste inférieure à une tolérance fixée par l’utilisateur. Pour plus d’informations, on invite le lecteur à consulter Hay *et al.* (2015) qui détaille l’ensemble de la méthode utilisée et les différentes procédures de contrôle de l’erreur et de la stabilité.

### 3.5 Code EF6

Le code utilisé pour notre étude a été développé par l’équipe du LADYF de l’École Polytechnique de Montréal sous la direction du professeur André Garon. Il est basé sur les fondements théoriques que nous avons décrits précédemment et permet de réaliser des simulations en thermique et en Navier-Stokes incompressible, stationnaire et instationnaire en multi-dimensionnel. On notera qu’il est possible de traiter d’autres problèmes, en codant les formes faibles relatives à ces derniers. En plus des vecteurs solutions, le code permet, via différentes méthodes de post-traitement, d’obtenir diverses informations comme par exemple les normes d’erreur sur la solution numérique, si la solution analytique est connue. Une partie du travail effectué a été consacrée au développement et à l’amélioration du code de calcul, on citera notamment l’ajout de la forme faible pour Navier-Stokes en trois dimensions, l’ajout de méthodes de post-traitement et la parallélisation et optimisation du code réalisée par Adrien Moulin, voir (Moulin, 2016) pour plus de détails.

Les maillages utilisés ont été générés par le logiciel open-source GMSH, l’utilisation de ces derniers a nécessité le développement d’un utilitaire en C++ permettant de transcrire les fichiers contenant les informations relatives au maillage dans un format lisible par le code EF6. Cet utilitaire permet notamment la renumérotation des noeuds géométriques par élément, la numérotation des éléments quadratiques, quadrangles en 2D et hexaèdres en 3D, n’étant pas la même entre GMSH et EF6.

Les résolutions matricielles au sein de la méthode de Newton sont réalisées via le solveur direct PARDISO d’INTEL, ce dernier permet l’organisation de la structure matricielle du problème traité et réalise les décompositions LU de la matrice globale. Différents paramètres au sein du code permettent de contrôler le comportement du solveur, nous ne discuterons pas ici les détails de ces méthodes de contrôle.

On notera également qu’une partie du code est consacrée au post-traitement de la solution

afin que celle-ci soit visualisable à l'aide du logiciel Tecplot, ce travail a été réalisé par Philippe Miron lors de son doctorat au sein du LADYF. La mise en forme des données nécessite les informations sur le maillage, les fichiers de configuration et le vecteur solution.

Les fichiers de configuration relatifs à l'utilisation d'EF6 doivent comprendre, dans la dernière version du code, différentes informations, on cite les plus importantes :

- Forme faible utilisée et conditions limites
- Degré des interpolants utilisés
- Maillage utilisé
- Solution initiale
- Tolérance sur le résidu et la solution et tolérance de factorisation
- Nombre d'itérations maximal pour la méthode de Newton
- Méthodes de post-traitement utilisées

Si la forme faible est instationnaire, il est nécessaire d'ajouter :

- Temps initial et temps final de simulation
- Tolérance d'intégration temporelle
- Temps auxquels on désire obtenir le vecteur solution
- Pas de temps minimal et maximal

Pour finir, on propose un bref résumé du fonctionnement du programme EF6 et de la procédure de calcul à la figure 3.6.

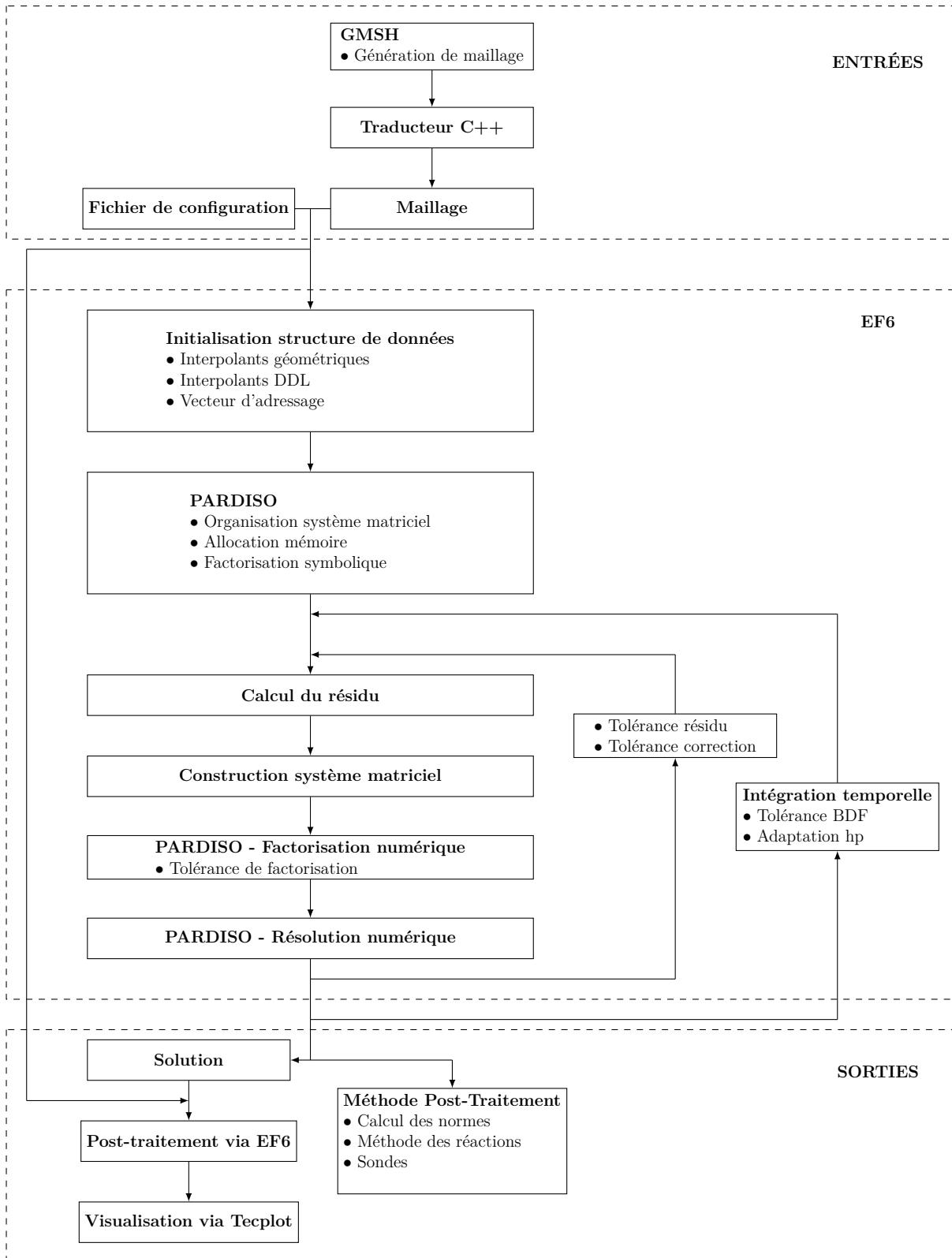


Figure 3.6 Procédure de calcul et fonctionnement d'EF6.

## CHAPITRE 4 VÉRIFICATION ET VALIDATION

Une partie importante des travaux réalisés a été consacrée à la vérification et à la validation du code EF6. Ces deux étapes sont cruciales afin de confirmer le bon fonctionnement de n'importe quel code de calcul, elles sont donc appliquées aussi bien aux codes commerciaux qu'aux codes scientifiques. On a donc besoin de s'assurer du bon fonctionnement d'EF6 et de la méthode des éléments spectraux avant de pouvoir utiliser le code sur des exemples concrets. La vérification est toujours réalisée avant la validation, elle concerne l'aspect mathématique du code, tandis que la validation porte sur la science, la physique, derrière les équations. Ces deux méthodes sont largement décrites dans Roache (1998), ce dernier distingue intelligemment les deux concepts en expliquant que la vérification consiste à "bien résoudre les équations" et la validation à "résoudre les bonnes équations".

Ce chapitre abordera en premier lieu la phase de vérification sur des exemples de diffusion et d'écoulement stationnaire puis en second la validation du code sur un exemple d'écoulement laminaire autour d'un cylindre circulaire.

### 4.1 Vérification

La vérification porte sur l'aspect mathématique des méthodes numériques, on s'intéresse ici à l'évolution des erreurs engendrées par ces dernières en fonction des paramètres d'entrée.

La phase de vérification du code est basée sur la méthode des solutions manufaturées, décrites dans Roache (1998). Elle consiste à choisir soi-même une solution à un problème donné. On peut alors introduire cette solution dans la, ou les, équations considérées et obtenir les termes sources correspondant à cette solution. Il reste alors à résoudre numériquement le problème muni de ce terme source et à calculer l'erreur commise sur la solution, ce qui est possible puisqu'on connaît la solution exacte. Il est ainsi possible de s'assurer de la convergence des méthodes numériques et de calculer les taux de convergence correspondants.

#### 4.1.1 Diffusion thermique

La première phase de vérification est réalisée sur des exemples de diffusion thermique en 1D, 2D et 3D, le coefficient de conduction est fixé à 1, on résout alors l'équation de Poisson :

$$-\Delta(T) = f \quad (4.1)$$

## Comparaison Élément finis - Éléments spectraux

La phase de vérification va permettre de comparer le comportement de l'erreur lors de l'utilisation de la méthode des éléments finis et des éléments spectraux. On utilisera pour les problèmes en 1D, 2D et 3D, un seul élément quadratique soit respectivement, une ligne, un quadrilatère et un hexaèdre. Les solutions manufacturées choisies, les termes sources résultants et les domaines de résolution sont indiqués au tableau 4.1.

Tableau 4.1 Définition des problèmes de diffusion thermique pour la vérification.

Dimension	1D	2D	3D
Domaine	$[-1 : 1]$	$[(-1 : 1) \ (-1 : 1)]$	$[(-1 : 1) \ (-1 : 1) \ (-1 : 1)]$
Solution	$\exp(x)$	$\exp(x + y)$	$\exp(x + y + z)$
Terme source	$-\exp(x)$	$-2\exp(x + y)$	$-3\exp(x + y + z)$

On résout alors les différents problèmes plusieurs fois en utilisant un degré d'élément croissant, pour des points équidistants et pour une répartition GLL, on calcule alors le conditionnement de la matrice et l'erreur de la solution en norme  $H^1$ . Les résultats sont présentés à la figure 4.1.

On constate que le même comportement est obtenu pour les trois problèmes. Les taux de p-convergence sont les mêmes pour les deux répartitions de points jusqu'à un certain degré. En effet, il est clair que l'utilisation des éléments finis pour des éléments de haut degré entraîne des conditionnements de matrice extrêmement élevés, ce qui va fatalement conduire à l'accumulation des erreurs numériques et à la diminution des performances de l'algorithme. Pour les éléments spectraux, l'augmentation du conditionnement est largement réduite ce qui prouve que cette méthode permet d'utiliser efficacement la p-convergence. Ces résultats sont en accord avec ceux détaillés dans Pena (2009).

On notera également que le phénomène de stagnation de l'erreur pour la méthode des éléments spectraux, démarrant aux alentours du degré 13, correspond à l'atteinte du zéro machine. On ne peut pas, avec notre programme et matériel, obtenir de solution plus précise.

On fera remarquer que les taux de h-convergence, bien que non détaillés ici, sont les mêmes pour les éléments finis et spectraux en utilisant le même maillage, ces derniers dépendants uniquement du degré des éléments utilisés.

## Solution manufacturée - 2D

On se propose maintenant de résoudre un cas de diffusion thermique 2D plus compliqué, la solution manufacturée est représentée sur le domaine de résolution à la figure 4.2. Les

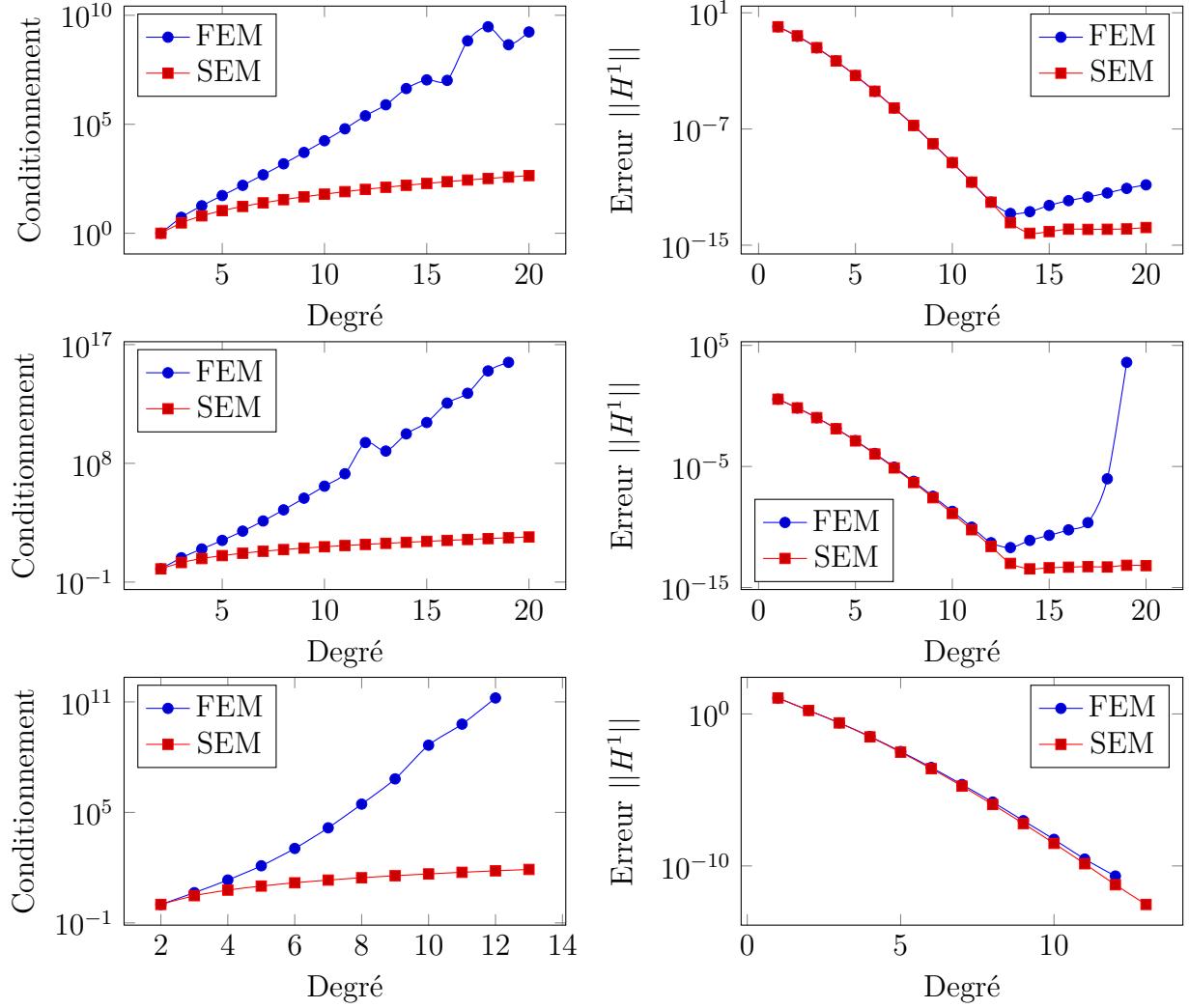


Figure 4.1 Conditionnement et erreur sur la solution en norme  $H^1$  en fonction du degré des interpolants pour des points équidistants (FEM) et GLL (SEM). De haut en bas, pour le problème 1D, 2D et 3D.

oscillations sinusoïdales de la solution en font un exemple plus difficile à capturer que les solutions exponentielles précédentes.

On traite alors le problème en partant d'un maillage d'un élément puis en le raffinant plusieurs fois, en séparant en quatre les éléments, jusqu'à un maillage comportant  $512^2$  éléments. On réalise ainsi la h-convergence pour des éléments linéaires et quadratiques typiquement utilisés en éléments finis. On réalise également l'étude en augmentant l'ordre des interpolants ( $p$ -convergence) pour des maillages de 4 et 16 éléments (4E et 16E), les erreurs en norme  $H^1$  et  $L^2$  sont alors calculées, les résultats sont présentés à la figure 4.3

On constate aisément la puissance de la méthode des éléments spectraux et de la  $p$ -convergence,

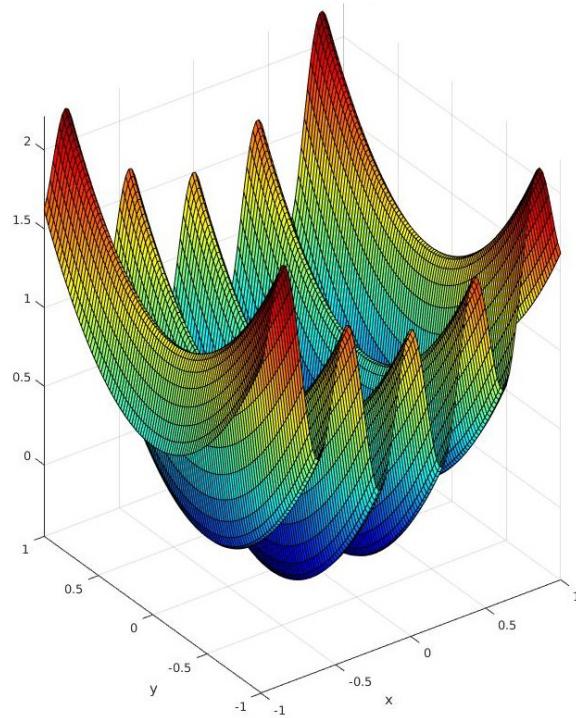


Figure 4.2 Solution manufacturée 2D -  $T = (x^2 + y^2) + 0.5 \cos(15x)$ .

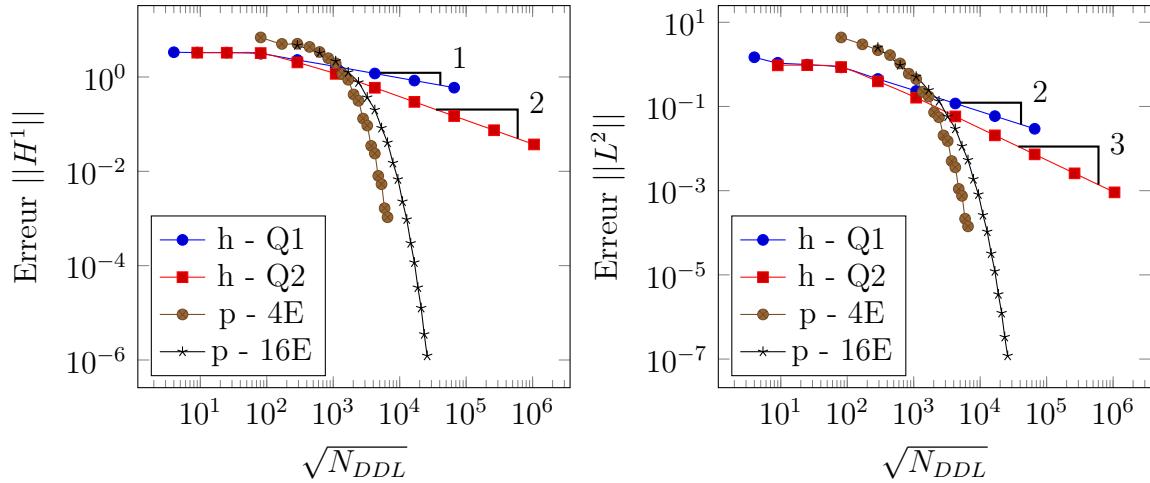


Figure 4.3 Taux de convergence pour la solution manufacturée 2D.

cette dernière permet d'obtenir, pour un même nombre de degrés de liberté, des solutions beaucoup plus précises qu'en utilisant la h-convergence, l'erreur décroît de façon exponentielle. Les taux de h-convergence ont été calculés pour le Q1 et le Q2 et sont en accord avec

la théorie ci dessous, où  $p$  est l'ordre des éléments et  $h$  est la taille des éléments :

$$\epsilon^{H^1} \simeq h^p \quad (4.2)$$

$$\epsilon^{L^2} \simeq h^{p+1} \quad (4.3)$$

On a, en théorie, les pentes suivantes pour l'erreur dans les deux normes, en notant que la taille des éléments  $h$  est inversement proportionnelle à la racine du nombre de DDL (en 2D) :

$$\log(\epsilon^{H^1}) \simeq -p \log(\sqrt{N_{DDL}}) \quad (4.4)$$

$$\log(\epsilon^{L^2}) \simeq -(p+1) \log(\sqrt{N_{DDL}}) \quad (4.5)$$

Nos résultats sont donc en parfaite adéquation avec la théorie puisque l'on obtient des taux de convergence de 1 pour le Q1 et 2 pour le Q2 en norme  $H^1$  et de 2 pour le Q1 et 3 pour le Q2 en norme  $L^2$ .

#### 4.1.2 Poiseuille

On se propose maintenant de réaliser le calcul 2D d'un écoulement de Poiseuille entre deux plaques en Navier-Stokes incompressible stationnaire sur un domaine de longueur 20 et de hauteur 1. La solution analytique de cet écoulement est connue, le profil de vitesse en U ne dépend que de la position transversale à l'écoulement, on a donc le même profil de vitesse sur toute la longueur. De plus, le gradient de pression est une constante dans la direction de l'écoulement et il est nul dans la direction transverse.

On utilise un maillage de 20 éléments et un nombre de Reynolds de 100, on impose des conditions de non-glissement sur les parois, un profil de vitesse en U parabolique en entrée (voir 4.6) ainsi qu'une vitesse V nulle en entrée et en sortie.

$$u_{entree} = 6y(1 - y) \quad (4.6)$$

On obtient bien un profil de vitesse uniforme selon l'axe de l'écoulement sur tout le domaine ; les lignes de courants sont parallèles et on obtient bien un gradient de pression cohérent avec la théorie. On notera également que la vitesse en V, non-représentée, est de l'ordre de  $10^{-15}$ , soit le zéro-machine, ce qui est conforme à la théorie.

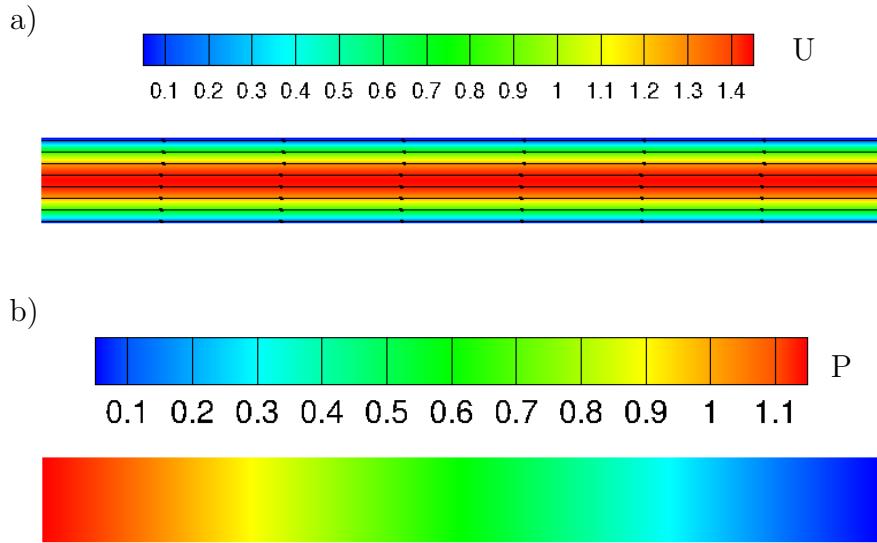


Figure 4.4 Vitesse (a) et pression (b) pour l’écoulement de Poiseuille.

Le code est alors vérifié, on obtient bien la convergence hp voulue, l’erreur sur la solution décroît lorsque l’on augmente le nombre d’éléments et lorsque l’on augmente le degré des interpolants pour la méthode spectrale, de plus les taux de h-convergence sont conformes à la théorie. Il reste maintenant à réaliser une étape de validation du code, pour s’assurer que les calculs convergent vers des solutions physiquement cohérentes.

## 4.2 Validation

La phase de validation porte sur les aspects physiques du code, on vérifie si l’on résout les bonnes équations en se basant sur des résultats expérimentaux et numériques déjà présents dans la littérature.

Dans notre cas, on base la validation des équations de Navier-Stokes sur le comportement d’un écoulement autour d’un cylindre circulaire pour de faibles nombres de Reynolds. Ce sujet a été largement traité, aussi bien en expérimental qu’en numérique (voir Chapitre 2). Il existe ainsi une myriade de données disponibles sur divers paramètres. Nous avons choisi de travailler majoritairement par rapport aux données de Thompson *et al.* (2014) et de Rajani *et al.* (2009), ces études utilisant les travaux de Zdravkovich (1997) qui recense les différentes données disponibles avant 1938.

### 4.2.1 Écoulement laminaire autour d'un cylindre

#### Domaine de calcul et conditions limites

On donne à la figure 4.5, le domaine de calcul et les conditions limites utilisées pour la validation, ce dernier est basé sur les dimensions utilisées par Kalro et Tezduyar (1997). Le maillage utilisé est constitué de 850 quadrangles et est non-structuré. Différentes formules permettent de régir la taille du maillage dans la couche limite et le sillage (voir chapitre 6). On utilise la méthode spectrale avec des interpolants Q5Q4. Enfin, pour les conditions initiales, on travaille en départ impulsif (Laroussi *et al.*, 2014) en partant d'un champ de vitesse nul et en imposant un front de vitesse  $U = 1$  en entrée .

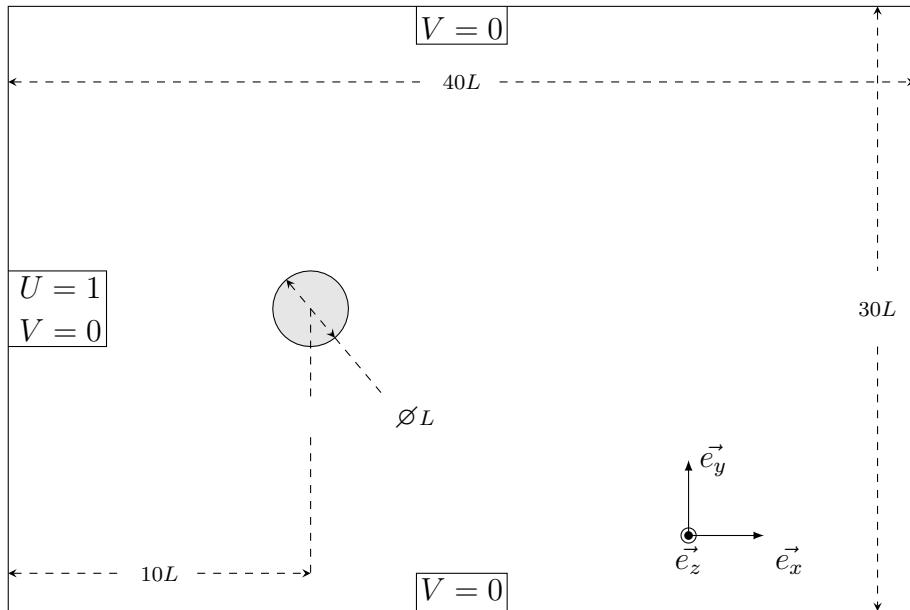


Figure 4.5 Domaine de calcul et conditions limites pour le cylindre circulaire.

#### Transition L1-L2

On s'intéresse en premier lieu à la transition du régime laminaire (L1) pour lequel l'écoulement ne décolle pas du cylindre au régime (L2) pour lequel on a apparition de deux cellules de recirculation, tournant en sens contraires, en aval de ce dernier. Les lignes de courant pour différents nombres de Reynolds sont représentées à la figure 4.6. On constate l'apparition des zones de recirculation pour un nombre de Reynolds de 7, la transition du régime L1 à L2 s'effectue donc entre  $R_e = 6$  et  $R_e = 7$ , ce qui est en accord avec les résultats obtenus par Rajani *et al.* (2009) qui situent la transition à  $R_e = 6.1$ . Ce dernier note aussi que la zone

de transition peut varier, en fonction du ratio de blocage  $\lambda$ , entre  $R_e = 5$  et  $R_e = 7$ , ce qui reste conforme avec nos résultats, obtenus pour  $\lambda = 0.07$ .

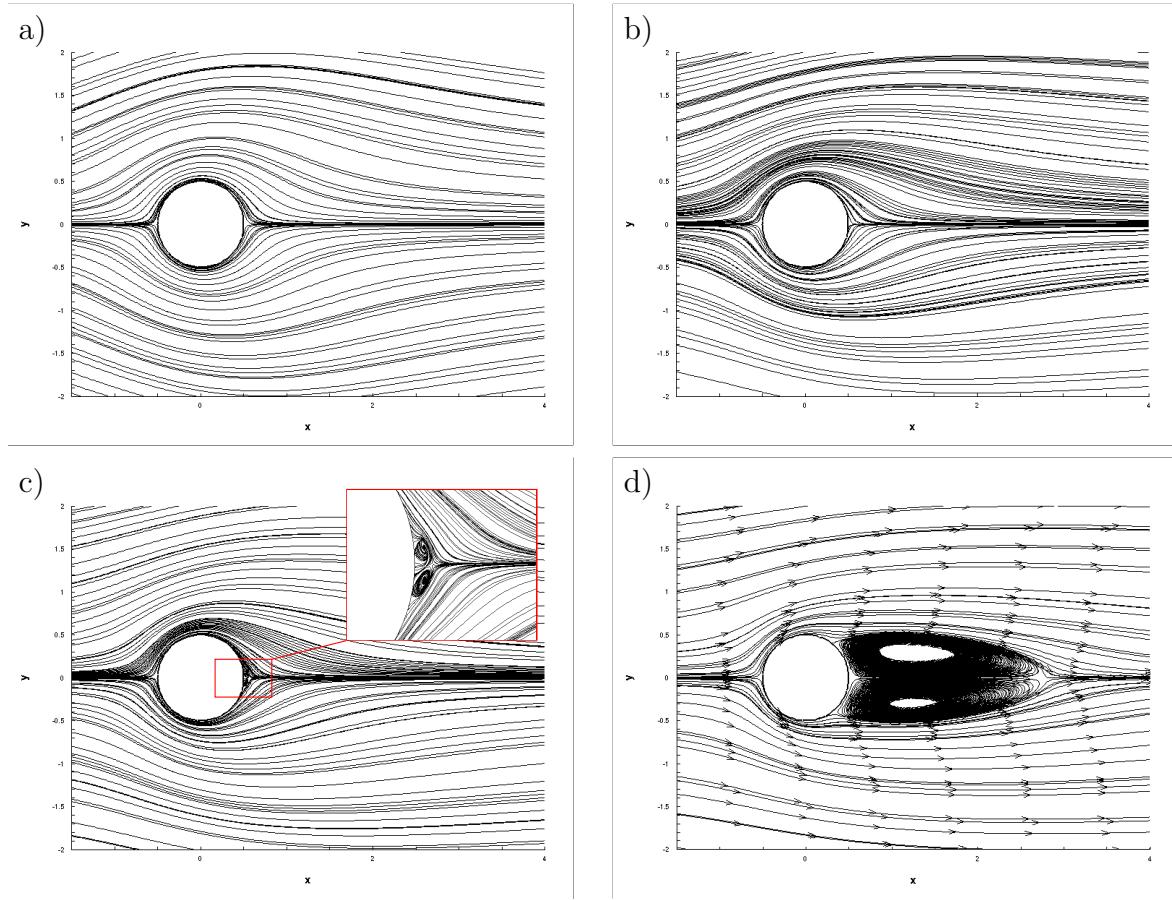


Figure 4.6 Transition L1-L2 - Lignes de courant à Reynolds 1 (a), 6 (b), 7 (c) et 40 (d).

## Régime L2

Comme on le voit à la figure 4.6, lorsque le régime L2 est atteint la zone de recirculation va grandir avec le nombre de Reynolds, la longueur de la zone de recirculation ainsi que la vitesse minimale au sein de cette dernière ont été mesurées pour plusieurs nombres de Reynolds, les résultats sont présentés à la figure 4.7. Nos résultats semblent en accord avec ceux de Rajani *et al.* (2009) et Coutanceau et Bouard (1977), on notera que la longueur de la zone de recirculation semble varier linéairement en fonction du nombre de Reynolds.

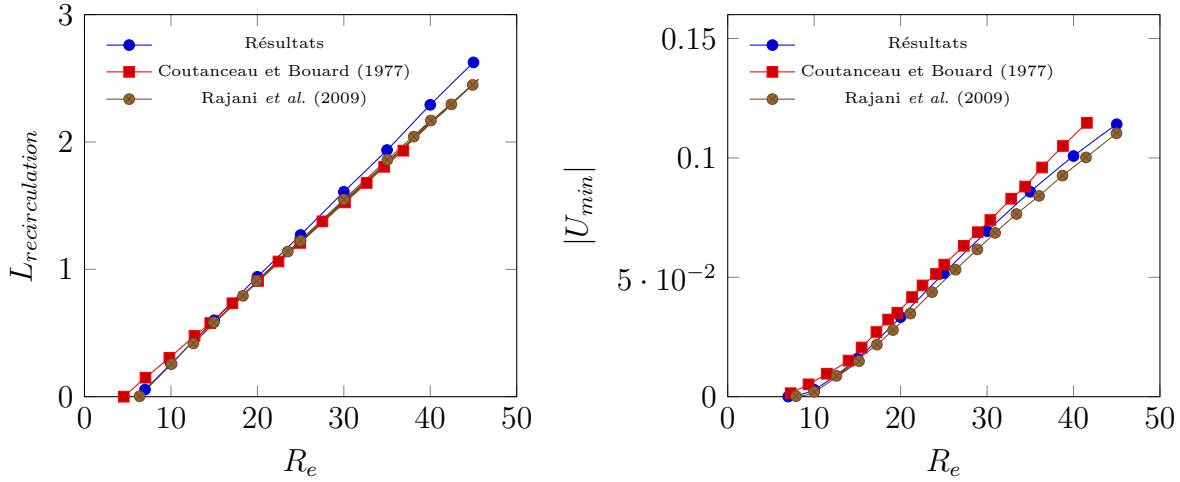


Figure 4.7 Longueur de la zone de recirculation (à gauche) et valeur absolue de la vitesse minimale au sein de la zone de recirculation (à droite).

### Transition L2-L3

En augmentant encore le nombre de Reynolds, le mode laminaire L2 va se déstabiliser et va finir par déclencher un relâcher tourbillonnaire périodique, c'est le mode laminaire L3, plus connu sous le nom d'allée tourbillonnaire de Von Karman (Von Kármán, 1931). On cherche à déterminer pour quel nombre de Reynolds s'effectue la transition entre les deux modes, des simulations ont été effectuées pour des nombres de Reynolds compris entre 45 et 50 sur 1000 unités de temps adimensionnel, les résultats sont indiqués à la figure 4.8. On constate que le sillage semble se déstabiliser vers  $R_e = 47$ , à  $R_e = 48$  le relâcher tourbillonnaire est complètement déclenché. On peut donc situer la transition entre des nombres de Reynolds de 46 et 47. Rajani *et al.* (2009) situent la transition près de  $R_e = 48$ , Kumar et Mittal (2006b) vers  $R_e = 47$ , il existe de nombreuses valeurs pour le nombre de Reynolds de transition, ce dernier pouvant dépendre de nombreux facteurs, notamment du ratio de blocage. On notera également que la discréétisation géométrique du cylindre peut jouer un rôle sur le déclenchement de l'instabilité. On peut donc conclure que le nombre de Reynolds de transition déterminé par nos simulations est en accord avec ceux trouvés dans la littérature. On notera que la détermination de ce nombre de Reynolds sera approfondie dans la phase de validation de la méthode des réactions par l'étude de la variation de la force de portance.

### Régime L3 - Allée de Von Karman

On se propose maintenant d'étudier l'évolution de l'allée de Von Karman lorsque l'on augmente le nombre de Reynolds. Les sillages des différents cas traités sont représentés à la

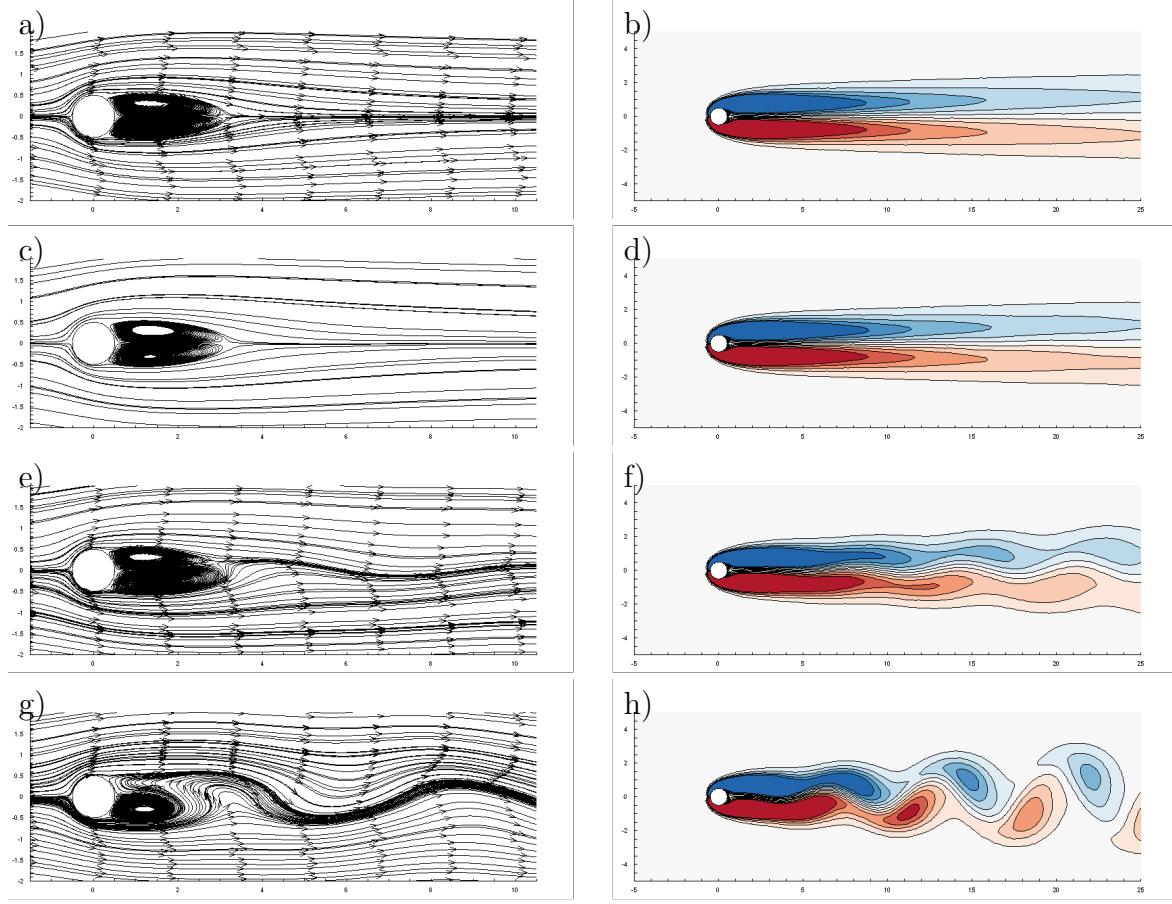


Figure 4.8 Transition L2-L3 - Lignes de courant et vorticité  $\omega_z$  entre -0.5 et 0.5 à Reynolds 45 (a et b), 46 (c et d), 47 (e et f) et 48 (g et h).

figure 4.9. On constate qu'avec l'augmentation du nombre de Reynolds, les tourbillons ont tendance à être relâchés de plus en plus rapidement, on compte 5 vortex à  $R_e = 50$  contre 12 à  $R_e = 300$ . On se propose alors d'étudier la variation de la fréquence de relâcher tourbillonnaire qui correspond dans notre cas adimensionnel au nombre de Strouhal ( $S_t = fD/U$ ). Pour obtenir ce nombre, on mesure l'évolution de la vitesse U dans le temps pour deux points situés en aval du cylindre (à 1 diamètre et 20 diamètres), puis on réalise une transformation de Fourier rapide (FFT) sur la partie périodique des signaux. La position du pic dans le domaine fréquentiel est alors égale à deux fois la valeur du Strouhal, les résultats sont les mêmes pour les deux points, confirmant ainsi le calcul. On note que l'on vérifiera également le calcul du Strouhal en se basant sur l'évolution temporelle du moment et des forces de traînée et de portance dans la partie validation de la méthode des réactions (voir chapitre 5).

On constate tout d'abord que l'évolution du Strouhal présentée à la figure 4.10 correspond bien à la tendance observée sur les sillages présentés à la figure 4.9. On a bien une augmenta-

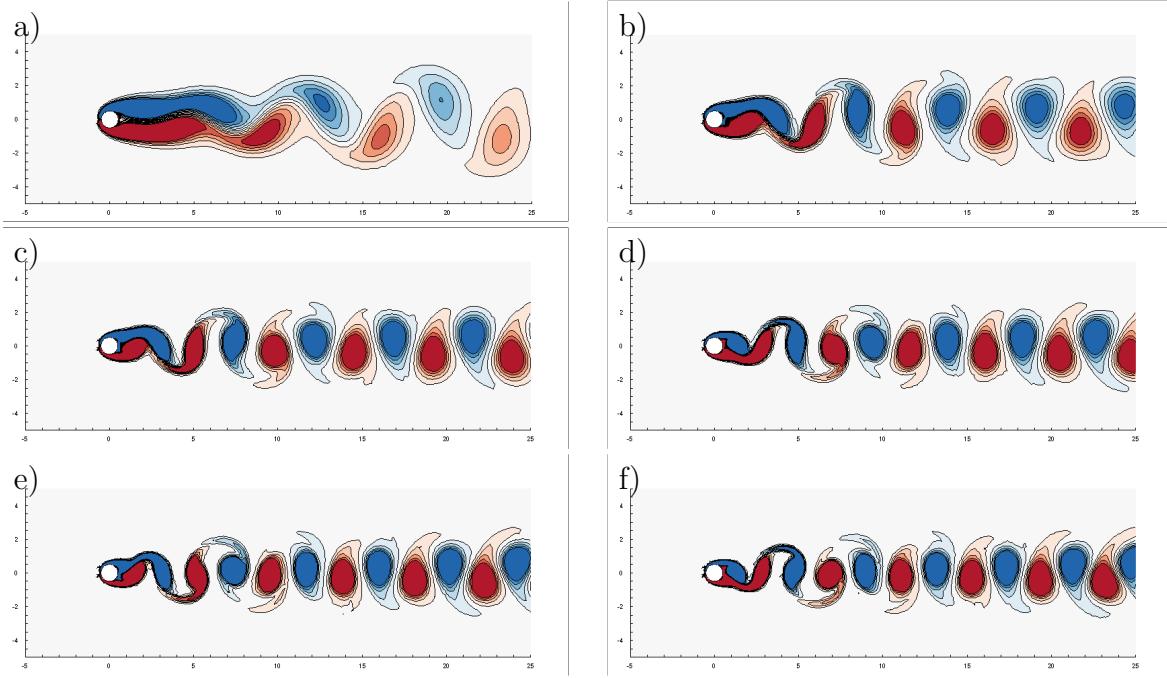


Figure 4.9 Sillage en régime L3 - Vorticité entre -0.5 et 0.5 à Reynolds 50, 100, 150, 200, 250 et 300 pour respectivement a, b, c, d, e et f.

tion de la fréquence de relâcher avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Deuxièmement, on peut voir que nos données sont en très bon accord avec celles de Thompson *et al.* (2014) et Rajani *et al.* (2009).

Les vortex représentés à la figure 4.9 semblent s'étirer dans le sillage, ce phénomène s'accentuant avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Des simulations sur un domaine plus grand (200 diamètres en aval) ont alors été réalisées afin d'observer l'évolution du sillage loin du cylindre, les résultats sont présentés à la figure 4.11.

On peut distinguer l'apparition de plusieurs zones dans le sillage du cylindre, la zone de relâcher tourbillonnaire primaire, puis les vortex se regroupent formant deux lignes de vorticité, positive et négative. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, on a apparition d'un second relâcher tourbillonnaire puis enfin d'une zone non-périodique, les tourbillons se réarrangeant aléatoirement. Ces comportements sont en accord avec Trebotich (2014), Johnson *et al.* (2001) et Thompson *et al.* (2014) qui observent également le phénomène de second relâcher tourbillonnaire. Le nombre de Reynolds pour lequel on a apparition de ce second relâcher est sujet à débat, nos résultats indiquent qu'il est présent à  $R_e = 200$ , ce qui est en contradiction avec Thompson *et al.* (2014) et Johnson *et al.* (2001). Cependant Kumar et Mittal (2012) obtiennent cette instabilité pour  $R_e = 150$ . Beaucoup de paramètres peuvent

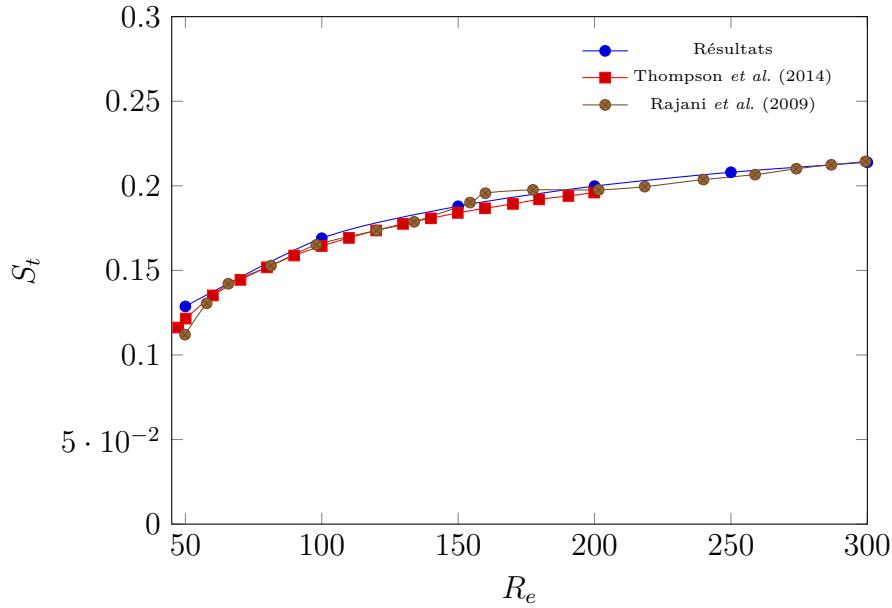


Figure 4.10 Évolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds.

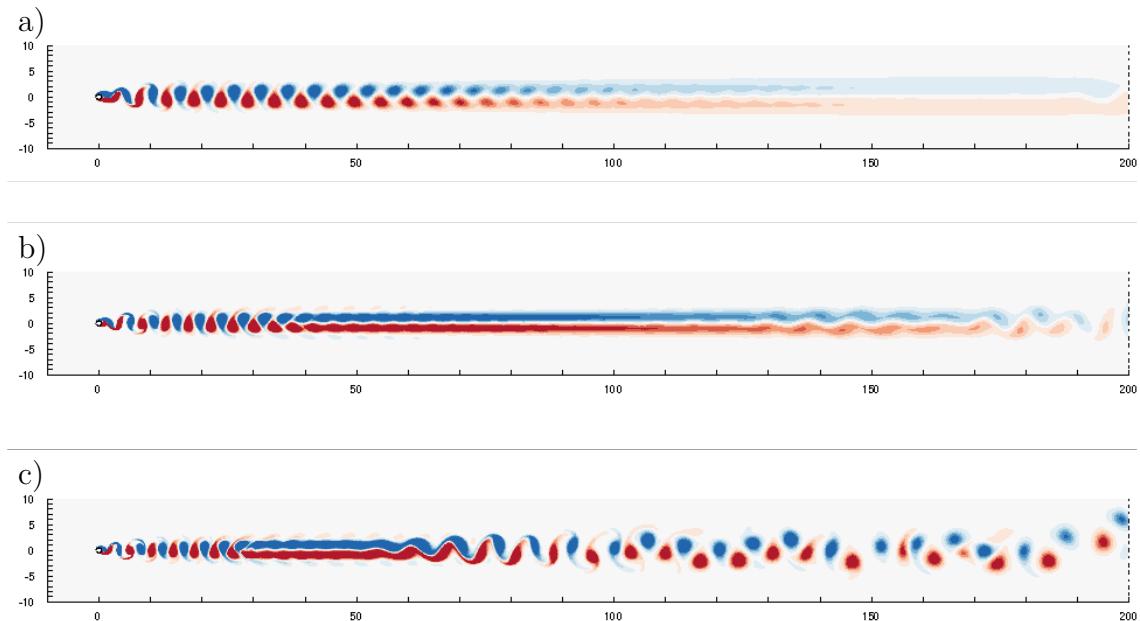


Figure 4.11 Sillage en régime L3 pour un grand domaine- Vorticité entre -0.1 et 0.1 à Reynolds 100, 200 et 300 pour respectivement a, b et c.

jouer sur l'apparition de cette transition comme la précision des méthodes de calcul ou le ratio de blocage. On peut tout de même conclure que l'on obtient qualitativement les mêmes comportements de sillage que ceux trouvés dans la littérature.

Pour terminer la validation, l'étude de l'évolution du point de décollement avec l'augmentation du nombre de Reynolds a été réalisée. Les résultats sont présentés à la figure 4.12. On constate que nos résultats sont en très bon accord avec ceux de Coutanceau et Bouard (1977) pour le régime laminaire L2. Les résultats pour le régime L3 sont dans notre cas mal évalués, ils correspondent à l'angle médian de décollement entre sa valeur maximale et minimale sur un cycle, pour obtenir des valeurs plus précises, il serait nécessaire de réaliser la moyenne temporelle de l'angle de décollement sur plusieurs périodes.

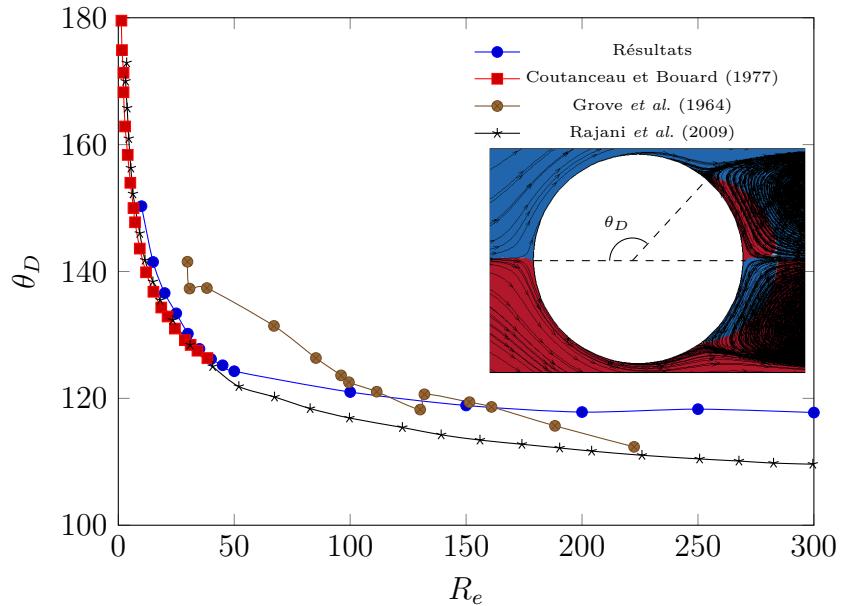


Figure 4.12 Évolution de l'angle de décollement  $\theta_D$  en fonction du nombre de Reynolds.

On finira par indiquer que l'on ne s'est pas intéressé à l'influence des modes 3D. L'apparition de ces derniers survient vers environ  $Re = 180$  (Rajani *et al.*, 2009), des structures tourbillonnaires normales aux tourbillons principaux apparaissent, modifiant ainsi l'écoulement en aval du cylindre et les valeurs le caractérisant, comme le Strouhal ou les coefficients de forces. Pour plus de détails sur l'émergence des modes 3D et leurs effets, on invite le lecteur à consulter Rajani *et al.* (2009) et Kalro et Tezduyar (1997).

On a alors validé le code pour les équations de Navier-Stokes incompressibles en comparant un bon nombre de paramètres et d'aspects de l'écoulement avec la littérature. On notera que l'exemple vu dans cette partie sera réutilisé pour la validation de la méthode des réactions permettant le calcul des forces et moments sur le cylindre.

## CHAPITRE 5 MÉTHODE DES RÉACTIONS

Ce chapitre est consacré à l'explication de la méthode des réactions et à son application à différents cas, notamment au calcul des forces et moments exercés sur des corps au sein d'écoulements fluides. La démarche de programmation de la méthode au sein du code EF6 sera également abordée. On décrira aussi la méthode de calcul des efforts par imposition faible des conditions de Dirichlet grâce à l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange.

La méthode des réactions permet de récupérer la valeur des variables secondaires (que l'on nomme alors réactions) là où l'on impose des conditions de Dirichlet. Elle permet ainsi d'obtenir le flux thermique où l'on impose une température pour un problème de conduction thermique ou encore d'obtenir les forces sur une courbe où une surface, sur lesquelles les vitesses sont imposées, lors de la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles. Cette méthode est déjà largement utilisée dans les codes d'éléments finis disponibles dans le commerce, on se propose donc de l'adapter à la méthode des éléments spectraux et d'ajouter une méthode inédite de calcul des moments.

### 5.1 Théorie

Afin de décrire la méthode des réactions, on se propose, pour plus de lisibilité, de faire un parallèle entre les fonctions d'interpolation de Lagrange  $\psi$  locales définies sur les éléments et les fonctions de Ritz  $\phi$  globales définies sur tout le domaine de calcul. Pour un problème comportant  $n_{DDL}$  inconnues discrètes, on aura alors  $n_{DDL}$  fonctions de Ritz, on donne un exemple en une dimension à la figure 5.1 pour des interpolants linéaires et 3 éléments. Cette considération est purement théorique et va nous permettre de simplifier les explications sur la méthode des réactions, on gardera en tête que la méthode de calcul utilisée est toujours celle décrite au chapitre 3.

#### 5.1.1 Diffusion 1D

Le problème de diffusion à une dimension permet d'illustrer la méthode des réactions de manière simple, le domaine  $\Omega = [A, B]$  considéré est représenté à la figure 5.2, une condition de Dirichlet est imposée en B soit au noeud  $n_k$  et une condition de Neumann est imposée en A.

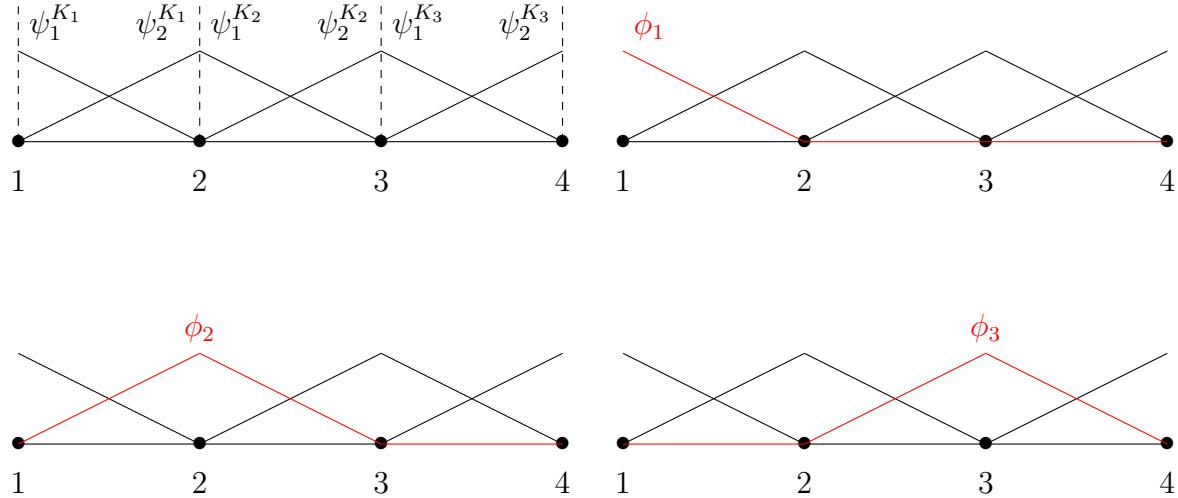


Figure 5.1 Équivalence entre fonctions d'interpolation de Lagrange et fonctions de Ritz.

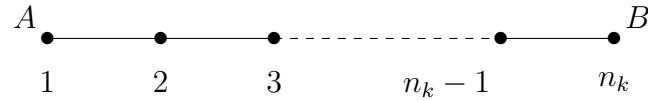


Figure 5.2 Domaine  $\Omega$  pour l'exemple de diffusion 1D.

Le problème est défini par l'équation et les conditions limites suivantes :

$$-\nabla \cdot (k \nabla T) = 0 \quad (5.1)$$

$$T_B = T_{Dir} \quad (5.2)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_A = 0 \quad (5.3)$$

$$(5.4)$$

En passant à la formulation faible et avec l'hypothèse de Ritz-Galerkin, les équations pour  $i = 1$  à  $n_k$  sont :

$$\sum_{j=1}^{n_k} \left( \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot k \nabla \psi_j \, d\Omega \right) T_j = \left( \phi_i \cdot k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right) \Big|_B \quad (5.5)$$

$$(5.6)$$

soit sous forme matricielle et en remarquant que seule  $\phi_{n_k}$  est non-nulle en  $B$  :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ \hline a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} T_1 \\ \vdots \\ \frac{T_{n_k-1}}{T_{n_k}} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \phi_{n_k}(B) \cdot k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_B \end{array} \right] \quad (5.7)$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} T_{inc} \\ T_{Dir} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \Xi_{n_k} \end{array} \right] \quad (5.8)$$

Puisque  $T_{n_k}$  est connu, le système peut se réécrire de la façon suivante :

$$A_{11} \cdot T_{inc} = -A_{12} \cdot T_{Dir} \quad (5.9)$$

$$\Xi_{n_k} = A_{21} \cdot T_{inc} + A_{22} \cdot T_{Dir} \quad (5.10)$$

Après résolution du système (5.9), le vecteur  $T_{inc}$  est connu et l'accès à la réaction  $\Xi_{n_k}$  est immédiat. De plus,  $\phi_n(B) = 1$  par construction des fonctions d'interpolation, la réaction est donc égale au flux de chaleur en B, là où la condition de Dirichlet est imposée.

On se propose maintenant de détailler le calcul des réactions lorsqu'on travaille en correction  $T = T_0 + \delta T$  puisque c'est la méthode utilisée par EF6.

$$A \cdot \mathbf{T}_0 + A \cdot \delta \mathbf{T} = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \phi_{n_k}(B) \cdot k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_B \end{array} \right] \quad (5.11)$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \delta T \\ 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \Xi_{n_k} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} A_{11}T_1^0 + \cdots + A_{1n}T_n^0 \\ \vdots \\ A_{n-11}T_1^0 + \cdots + A_{n-1n}T_n^0 \\ \hline A_{n1}T_1^0 + \cdots + A_{nn}T_n^0 \end{array} \right] \quad (5.12)$$

Le système résolu numériquement est le même que précédemment :

$$A_{11} \delta \mathbf{T} = \mathbf{R} \quad (5.13)$$

Les contributions de  $A_{21}$  et  $A_{22}$  sont utilisées pour calculer les réactions, lorsque les critères

de convergence sont atteints, la norme de  $\delta T$  est inférieure à la tolérance fixée et on a donc :

$$\Xi = (A_{21}T_f + A_{22}T_{Dir}) \quad (5.14)$$

avec  $T_f$  les valeurs finales des inconnues en température et  $T_{Dir}$  les températures imposées par les conditions de Dirichlet.

Les réactions sont comprises dans le vecteur résidu mais elles ne sont pas prises en compte lors de la résolution matricielle au sein de la méthode de Newton, elles sont par contre actualisées après chaque itération.

### 5.1.2 Diffusion 2D

On se propose maintenant d'illustrer le calcul des réactions sur une surface pour un exemple en deux dimensions.

Le problème considéré est défini par l'équation et les conditions limites suivantes, le domaine de calcul est représenté à la figure 5.3 :

$$-\nabla \cdot (k\nabla T) = 0 \text{ sur } \Omega \quad (5.15)$$

$$T(x, y) = 0 \text{ sur } \Gamma_D \quad (5.16)$$

$$k\nabla T \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_N \quad (5.17)$$

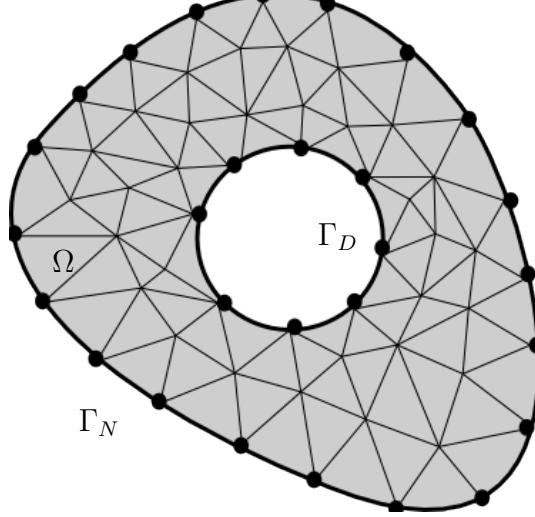


Figure 5.3 Domaine  $\Omega$  pour l'exemple de diffusion 2D.

En travaillant en correction  $T = T_0 + \delta T$ , avec  $T_0$  une solution initiale, l'équation (5.15) devient sous forme faible, avec  $\psi_i$  les fonctions tests correspondant aux  $n$  noeuds du domaine discréteisé :

$$\int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot k \nabla \delta T d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot k \nabla T_0 d\Omega + \int_{\Gamma_N} \phi_i \cdot k \nabla T \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_D} \phi_i \cdot k \nabla T \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (5.18)$$

Soit l'approximation nodale utilisant les fonctions de Ritz  $\phi$  suivantes :

$$T(x, y) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x, y) T_{0j} + \sum_{j=1}^n \phi_j(x, y) \delta T_j \quad (5.19)$$

Le système matriciel suivant est alors obtenu en considérant que sa partie inférieure (de  $m$  à  $n$ ) correspond aux noeuds de la frontière  $\Gamma_D$  sur lesquels des conditions de Dirichlet sont imposées :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta T} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \int_{\Gamma_D} \phi_m \cdot k \nabla T \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ \vdots \\ \int_{\Gamma_D} \phi_n \cdot k \nabla T \cdot \mathbf{n} d\Gamma \end{bmatrix} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_0 \quad (5.20)$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta T} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Xi_m \\ \vdots \\ \Xi_n \end{bmatrix} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_0 \quad (5.21)$$

(5.22)

On a, pour le membre de droite du système après convergence :

$$-\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_f \\ \mathbf{T}_{Dir} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ -\boldsymbol{\Xi} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Les termes du bas sont les réactions élémentaires sur la frontière  $\Gamma_D$  dues à l'imposition des conditions de Dirichlet.

Comme en 1D on résout alors numériquement le système :

$$A_{11} \boldsymbol{\delta T} = \mathbf{R} \quad (5.24)$$

et on actualise les réactions après chaque itération de la méthode de Newton :

$$\boldsymbol{\Xi} = (A_{21}\mathbf{T}_f + A_{22}\mathbf{T}_{Dir}) \quad (5.25)$$

Après détermination des températures nodales  $T_j$ , les réactions nodales sont donc obtenues pour les lignes correspondant à l'endroit de l'imposition des conditions de Dirichlet :

$$\Xi_i = \sum_{j=1}^n \tilde{A}_{ij} T_j = \int_{\Gamma_D} \phi_i \cdot k \nabla T \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (5.26)$$

En supposant, pour plus de clarté, que les degrés de liberté où sont imposées les conditions de Dirichlet sont indexés de  $i = m$  à  $n$ , la réaction totale sur la frontière  $\Gamma_D$  est :

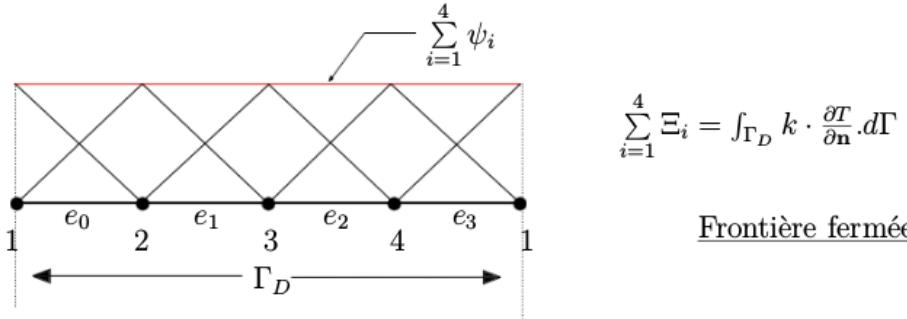
$$\sum_{i=m}^n \Xi_i = \int_{\Gamma_D} \left( \sum_{i=m}^n \psi_i \right) \cdot k \nabla T \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (5.27)$$

Or, sur une frontière fermée, la somme des fonctions de Ritz est égale à 1 et ce, quelque soit le degré des fonctions d'interpolation utilisées. Cela n'est pas valable pour un domaine ouvert, la contribution des éléments voisins s'ajoutant au résultat, voir figure 5.4. On donnera également un exemple de fonction d'interpolation linéaire en deux dimensions  $\psi(x, y)$  sur un élément triangulaire à la figure 5.5. On peut voir que la somme des fonctions d'interpolation vaut 1 sur l'élément et 1 sur toute la frontière. Ce constat se généralise lorsque l'on considère des fonctions de Ritz globales sur tout le domaine constitué de plusieurs éléments.

De ce fait, la méthode des réactions permet de fournir le flux thermique total à travers une courbe fermée, pour une courbe ouverte, une erreur est commise sur le calcul du flux du fait de la contribution des éléments voisins, on verra plus loin que cette erreur est généralement négligeable. Le flux thermique à travers la surface fermée  $\Gamma_D$  peut donc être obtenu en sommant les réactions nodales :

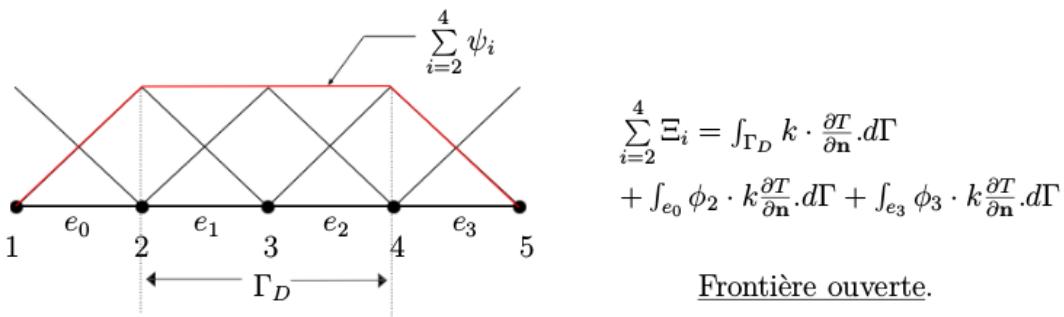
$$\int_{\Gamma_D} k \nabla T \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \sum_{i=m}^n \Xi_i \quad (5.28)$$

À ce point, il est bon de noter que ces résultats s'étendent à des problèmes à trois dimensions, la méthode des réactions permet de calculer directement le flux thermique total passant au travers d'une surface fermée. De plus, on rappelle que l'ensemble des calculs réalisés utilisent des fonctions de Ritz globales sur l'ensemble du domaine pour alléger les démonstrations,



$$\sum_{i=1}^4 \Xi_i = \int_{\Gamma_D} k \cdot \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma$$

Frontière fermée.



$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^4 \Xi_i &= \int_{\Gamma_D} k \cdot \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma \\ &+ \int_{e_0} \phi_2 \cdot k \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma + \int_{e_3} \phi_3 \cdot k \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma \end{aligned}$$

Frontière ouverte.

Figure 5.4 Réaction sur une frontière fermée et sur une frontière ouverte.

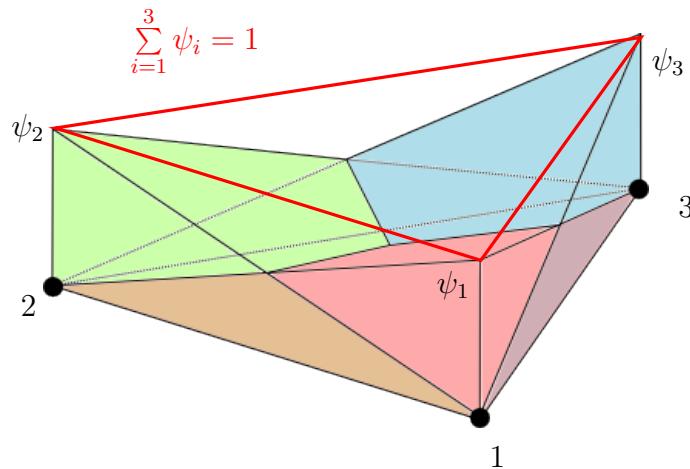


Figure 5.5 Fonction d'interpolation sur un élément triangulaire.

mais restent, bien entendu, valides après discrétisation élémentaire. On fera aussi remarquer que dans l'exemple présenté, les conditions de Dirichlet ne concernent qu'une frontière et que les degrés de liberté correspondant sont indexés de  $i = m$  à  $n$  par choix. Ce ne sera pas le cas lors de vraies simulations et une des difficultés de l'implémentation de la méthode sera

de déterminer l'index des degrés de liberté concernés par le calcul des réactions.

### 5.1.3 Navier-Stokes incompressible

L'application de la méthode des réactions aux équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible à pour but le calcul des forces et des moments engendrés par le fluide sur des structures au sein d'écoulements fluides. En se basant sur les explications données pour le problème de diffusion à la section précédente, nous allons voir comment utiliser la méthode des réactions afin d'obtenir les efforts exercés par le fluide sur une frontière fermée (courbe ou surface).

#### Forces

On rappelle les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (5.29)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5.30)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur des contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \cdot \mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (5.31)$$

La formulation faible de l'équation de conservation de la quantité de mouvement est la suivante :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\phi} \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} \right) . d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{\phi} . d\Omega = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\phi} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) . d\Gamma \quad (5.32)$$

En considérant la théorie expliquée au chapitre 3 et en effectuant le même raisonnement que pour les exemples de diffusion, on voit que la méthode des réactions nous permet d'écrire pour une courbe (ou une surface) fermée  $\partial\Omega$  et en supposant que les noeuds concernés par les conditions de Dirichlet sur cette frontière sont indexés de  $n$  à  $m$  dans le système global :

$$\sum_{i=n}^m \Xi_i = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad (5.33)$$

On a donc, en sommant les réactions élémentaires, l'intégrale des tractions  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  sur la frontière, ce qui correspond bien à la force exercée par le fluide sur cette dernière. La méthode des réactions permet donc d'obtenir la traction totale sur la frontière fermée dans la direction de l'imposition de la condition de Dirichlet. Si la composante  $u$  de la vitesse est imposée sur le bord correspondant aux DDL indexés de  $n$  à  $m$ , la force  $F_x$  agissant sur l'ensemble de la frontière pourra être obtenue directement :

$$\sum_{i=n}^m \Xi_i = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{t}_x) d\Gamma = -\mathbf{F}_x \quad (5.34)$$

Il est bon de noter que la force obtenue est la force agissant sur le fluide et non sur l'objet, du fait de la définition du signe du vecteur résidu. Il est donc nécessaire de prendre l'opposé de la somme des réactions élémentaires pour obtenir la force exercée par le fluide sur la frontière. La méthode des réactions permet donc d'obtenir les trois composantes de la force exercée par le fluide pour une surface fermée avec condition de non-glissement  $\mathbf{u} = 0$ . On peut alors obtenir les forces de trainée et de portance sur un objet immergé au sein d'un écoulement.

## Moment

On va maintenant détailler la méthode de calcul du moment sur une courbe fermée par l'utilisation de la méthode des réactions. Considérons le moment par rapport au point de coordonnées  $(0, 0)$  engendré par le fluide sur un objet de frontière  $\Gamma$  :

$$M = \int_{\Gamma} (x \cdot t_y) d\Gamma - \int_{\Gamma} (y \cdot t_x) d\Gamma \quad (5.35)$$

Or, on peut approximer les coordonnées  $x$  et  $y$  à l'aide des fonctions d'interpolation utilisées **sur les composantes de la vitesse**, on a donc en considérant les DDL concernés par les conditions de Dirichlet indexés de  $n$  à  $m$  :

$$x = \sum_{i=n}^m \phi_i^u x_i \quad (5.36)$$

$$y = \sum_{i=n}^m \phi_i^v y_i \quad (5.37)$$

où les  $x_i$  et  $y_i$  sont les coordonnées nodales aux DDL. Les fonctions d'interpolation utilisées pour les composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse étant les mêmes, on a  $\phi_i^u = \phi_i^v = \phi_i$  et on peut alors réécrire l'équation (5.35) :

$$M = \sum_{i=n}^m x_i \int_{\Gamma} (\phi_i \cdot t_y) d\Gamma - \sum_{i=n}^m y_i \int_{\Gamma} (\phi_i \cdot t_x) d\Gamma \quad (5.38)$$

On peut donc faire apparaître les réactions élémentaires dans le calcul du moment :

$$M = - \sum_{i=n}^m (x_i \cdot \Xi_i^v - y_i \cdot \Xi_i^u) \quad (5.39)$$

On peut donc calculer le moment en utilisant les réactions correspondant à l'imposition des conditions de Dirichlet en  $u$  et  $v$  et en récupérant les coordonnées nodales des degrés de liberté concernés. Ce résultat s'étend en trois dimensions, on notera qu'en deux dimensions le moment est orienté selon l'axe  $\vec{e}_z$ , le passage en trois dimensions donne trois composantes de moment définies par  $\mathbf{M} = -(\mathbf{x}_i \wedge \Xi_i)$ .

On peut donc, à l'instar des forces, calculer le moment sur une courbe (ou une surface) sur laquelle on impose une condition de non-glissement par la méthode des réactions.

On note qu'en réalité l'indexation des DDL en  $u$  et  $v$  n'est pas la même, mais on a bien le même nombre de DDL concernés par le calcul, on fait alors correspondre les index des deux variables pour pouvoir sommer les réactions, plus de détails sont donnés dans la section consacrée à l'implémentation des méthodes.

#### 5.1.4 Imposition faible des conditions de Dirichlet

Cette section a pour but d'expliquer une méthode alternative de calcul des efforts, cette dernière repose sur l'imposition faible des conditions de Dirichlet par multiplicateur de Lagrange et sur la minimisation de fonctionnelle.

Considérons l'exemple de diffusion 2D utilisé pour la méthode des réactions avec un terme source  $f$ , le problème peut s'écrire sous forme de fonctionnelle :

$$L(T, \lambda) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} k \nabla T \cdot \nabla T d\Omega - \int_{\Gamma_D} \lambda(T - f) d\Gamma \quad (5.40)$$

On cherche alors à minimiser la fonctionnelle :

$$\delta L(T, \lambda) = \int_{\Omega} k \nabla T \cdot \nabla \delta T d\Omega - \int_{\Gamma_D} \lambda \delta T d\Gamma - \int_{\Gamma_D} \delta \lambda(T - f) d\Gamma = 0 \quad (5.41)$$

On a alors les équations suivantes à résoudre :

$$\int_{\Omega} k \nabla T \cdot \nabla \delta T d\Omega - \int_{\Gamma_D} \lambda \delta T d\Gamma = 0 \quad (5.42)$$

$$\int_{\Gamma_D} \delta \lambda(T - f) d\Gamma = 0 \quad (5.43)$$

Comparons l'équation 5.42 et la forme faible de l'équation de diffusion :

$$\int_{\Omega} k \nabla T \cdot \nabla \delta T d\Omega - \int_{\Gamma_D} [\lambda] \delta T d\Gamma = 0 \quad (5.44)$$

$$\int_{\Omega} k \nabla T \cdot \nabla \phi d\Omega = \int_{\Gamma_D} \phi \cdot \boxed{k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}} d\Gamma \quad (5.45)$$

Les variations correspondent aux fonctions test de Ritz et le multiplicateur de Lagrange utilisé pour imposer les conditions de Dirichlet correspond au flux thermique. Pour calculer le flux thermique engendré par la condition de Dirichlet, on a donc besoin de récupérer la valeur du multiplicateur de Lagrange. Ce dernier est alors également discrétisé et on doit résoudre un système de la forme suivante :

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^T & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} T \\ \lambda \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ g \end{array} \right] \quad (5.46)$$

Ce système est également résolu par la méthode de Newton, en correction-résidu, l'imposition des conditions de Dirichlet est réalisée via le système matriciel et n'est donc pas exacte d'où l'appellation d'imposition faible. Cette méthode permet de calculer les réactions directement au sein du vecteur solution ce qui est utile, notamment, pour réaliser des études en interactions

fluide-structure où l'on a besoin des valeurs des efforts à chaque itération pour les méthodes couplées (Moulin, 2016). Le principal désavantage de cette méthode est l'augmentation de la taille du système matriciel.

## 5.2 Programmation

Cette section a pour but de détailler la programmation de la méthode des réactions et du calcul de moment en deux dimensions dans le programme EF6.

### 5.2.1 Méthode des réactions

On se propose tout d'abord de résumer les différentes variables utilisées pour l'explication de l'algorithme :

- Nbelm : nombre d'éléments de bord sur la frontière
- Dimego : dimension géométrique du problème
- Nbnoeuds : nombre de noeuds sur les éléments de bord
- NbDDL : nombre de DDL dans le problème
- Intvar : pointeur sur les variables du problème permettant d'accéder aux différentes méthodes
- MasqueDDL : tableau de dimension NbDDL x 1 contenant des booléens, vrai correspondant à un DDL de la frontière.
- ListeDDL : tableau dont la dimension dépend du nombre de DDL sur la frontière, contient l'index de ces derniers.
- Vadressage : tableau de dimension Nbnoeuds x 1, contient les index des noeuds de l'élément considéré.
- Résidu : Vecteur résidu, de dimension NbDDL x 1, il contient les réactions nodales aux index des noeuds de la frontière

On notera qu'on connaît les éléments constituant la frontière sur laquelle on applique la méthode. On dispose également de méthodes permettant d'obtenir le vecteur d'adressage des éléments (GETADDR) et d'obtenir les coordonnées des noeuds d'un élément (GETCoord). Ces méthodes sont accessibles grâce à des pointeurs liés à la, ou les, variables concernées par le calcul des réactions ou du moment.

---

Algorithm 1 Réaction - première phase.

```

for i=1 to NbDDL do
    MasqueDDL(i)=FAUX
end for
for i=1 to Nbelm do
    Vadressage=GETADDR
    for k=1 to Nbnoeuds do
        MasqueDDL(Vadress(k))=VRAI
    end for
end for

```

---

La première phase, décrite à l'algorithme 1, consiste à initialiser MasqueDDL, puis on boucle sur les éléments constituant la frontière concernée par le calcul des réactions. On récupère le vecteur d'adressage des éléments et pour chaque index des noeuds de l'élément, le booléen de MasqueDDL à cet index passe à VRAI. Après cette phase tous les degrés de liberté concernés par le calcul des réactions sont donc identifiés.

---

Algorithm 2 Réaction - seconde phase.

```

compteur=0
for i=1 to NbDDL do
    if MasqueDDL(i)=VRAI then
        compteur++
    end if
end for
Allocation mémoire de ListeDDL de dimension compteur x 1
compteur=1
for i=1 to NbDDL do
    if MasqueDDL then
        for k=1 to Nbnoeuds do
            ListeDDL(compteur)=i
            MasqueDDL(i)=compteur
            compteur++
        end for
    end if
end for

```

---

La seconde phase, décrite par l'algorithme 2, permet de compter le nombre de noeuds sur la frontière, de créer le vecteur ListeDDL et d'y regrouper tous les index des noeuds sur

lesquels les réactions nodales doivent être sommées. La modification du vecteur MasqueDDL sera utile pour le calcul des moments. Comme nous le verrons plus tard, elle permet de garder les index de remplissage du vecteur ListeDDL dans le vecteur MasqueDDL, ce qui sera utile pour récupérer les coordonnées des noeuds.

---

#### Algorithm 3 Réaction - Phase finale.

```

À chaque instant t
Reaction=0
for i=1 to compteur do
    Reaction+=Residu[ListeDDL(i)]
end for
return Reaction

```

---

Pour finir, la dernière phase, voir algorithme 3, permet de sommer les réactions nodales contenues dans le vecteur résidu grâce aux index des noeuds concernés, contenus dans le vecteur ListeDDL. On obtient ainsi la réaction totale sur la frontière.

### 5.2.2 Calcul du moment 2D

Le calcul du moment fonctionne en grande partie avec l'algorithme du calcul des réactions. La principale différence provient de la nécessité de récupérer les coordonnées des DDL. En deux dimensions, on aura besoin pour le calcul du moment de récupérer les réactions nodales concernant les conditions de Dirichlet en  $u$  et en  $v$ , ainsi que les coordonnées  $x$  et  $y$ .

On utilise alors la méthode vue précédemment sur  $u$  et  $v$ , on a donc deux pointeurs Intvar, deux vecteurs MasqueDDL et deux ListeDDL et pour récupérer les coordonnées, on utilise deux matrices : CoordLocal de dimension Nbnoeuds par Dimgeo et CoordGlobal de dimension compteur par Dimgeo (où compteur est le nombre de DDL concernés par le calcul). On ajoute alors une phase de calcul, décrite à l'algorithme 4, entre la phase 2 et la phase finale.

---

Algorithm 4 Réaction - Troisième phase.

```

for i=1 to Nbelm do
    Vadressage=GETADDR
    CoorLocal=GETCoord
    for k=1 to Nbnoeuds do
        j=MASQUEDDL(Vadressage(k))
        for c=1 to Dimgeo do
            oordGlobal(j,c)=CoordLocal(k,c)
        end for
    end for
end for
return Reaction

```

---

Cet algorithme permet de récupérer, dans CoordLocal, les coordonnées de chaque noeud des éléments de bord, on passe ensuite ces coordonnées d'une indexation locale sur l'élément à l'indexation globale de LISTEDDL grâce au vecteur MASQUEDDL, d'où la modification de ce dernier dans l'algorithme 2. On obtient ainsi deux vecteurs contenant les indices des DDL concernés par le calcul du moment ainsi que les coordonnées des noeuds associés aux DDL avec une indexation cohérente entre les trois structures. La i-ème ligne de chaque structure correspond au même noeud.

On modifie alors finalement la phase finale de calcul pour correspondre au calcul de moment, voir algorithme 5.

---

Algorithm 5 Réaction - Phase finale pour le moment 2D.

```

À chaque instant t
M=0
for i=1 to compteur do
    M+=CoordGlobal(i,1)*Residu[ListeDDLy(i)]-CoordGlobal(i,2)*Residu[ListeDDLx(i)]
end for
return M

```

---

Les méthodes de calcul ayant été expliquées et intégrées au programme, il reste maintenant à réaliser une phase de vérification et de validation de ces dernières.

### 5.3 Vérification

La phase de vérification pour la méthode des réactions se déroule de la même manière que précédemment, par l'utilisation des solutions manufacturées.

#### 5.3.1 Diffusion

Le domaine de calcul est compris entre  $-1 < x < 1$  et  $-1 < y < 1$ , on utilise la solution manufacturée  $T = \cos(3x + 1) + \sin(5y - 1)$  représentée à la figure 5.6. On impose en premier lieu des conditions de Dirichlet sur tous les bords du domaine. Les calculs sont menés sur des maillages allant de 4 par 4 éléments à 32 par 32 éléments pour des interpolants spectraux allant de l'ordre 1 à 4.

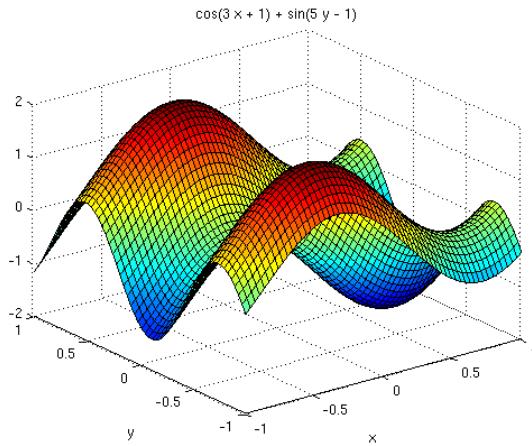


Figure 5.6 Solution manufacturée  $T = \cos(3x + 1) + \sin(5y - 1)$ .

La réaction, soit le flux thermique total, est calculée sur toute la frontière du domaine, la valeur analytique du flux thermique est obtenue en intégrant le terme  $-\left(k \frac{\partial T}{\partial n}\right)$  sur les bords. On a l'erreur sur le calcul du flux thermique.

$$\epsilon_{\Xi} = |q_{th} - q_{\Xi}| \quad (5.47)$$

Où  $q = -\left(k \frac{\partial T}{\partial n}\right)$ ,  $q_{th}$  est le flux théorique et  $q_{\Xi}$  le flux calculé.

Les résultats sont présentés à la figure 5.7 et les taux de convergence à la table 5.1.

On constate que les taux de convergence pour les normes de la solution sont bien conformes à la théorie, ce qui a déjà été montré au chapitre 4. Les taux de convergence sur le calcul de la réaction sont supérieurs aux taux théoriques, pour s'assurer que ce phénomène de "super-

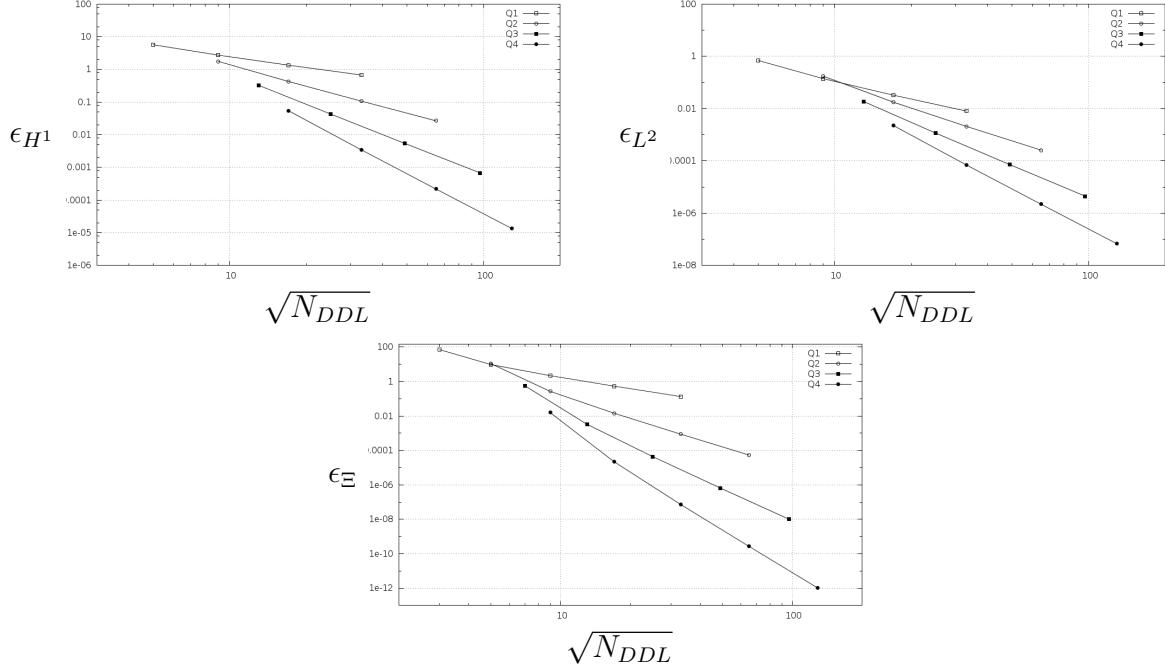


Figure 5.7 Erreur sur la solution en norme  $H^1$  et  $L^2$  et erreur sur la réaction.

Tableau 5.1 Taux de convergence pour la solution en norme  $H^1$  et  $L^2$  et erreur sur la réaction.

	Q1	Q2	Q3	Q4
Taux de convergence $\epsilon_{H^1}$	1.006	2.002	2.997	3.998
Taux de convergence $\epsilon_{L^2}$	2.028	3.021	4.003	4.999
Taux de convergence $\epsilon_{\Xi}$	2.007	4.012	6.014	8.048

convergence" n'est pas dû au choix de maillage, les calculs ont été relancés sur un maillage non-structuré. Les taux de convergence obtenu lors de cet essai sont sensiblement les mêmes que ceux présentés au tableau 5.1.

### Courbe ouverte

On s'est également intéressé au calcul de la réaction pour une courbe ouverte, en effet comme nous l'avons vu précédemment, sur une courbe ouverte la réaction n'est pas exactement égale au flux thermique sur la courbe. On se propose donc de réaliser la même étude que précédemment mais en ne récupérant la réaction que sur la frontière basse du domaine ( $y = -1$  et  $-1 < x < 1$ ). Des conditions de Dirichlet sont toujours imposées sur tous les bords du domaine. On se propose également de réaliser la même étude en calculant la réaction sur la frontière basse mais cette fois des conditions de Neumann sont imposées à gauche et à droite.

Les résultats des deux études sont présentés à la figure 5.8 et au tableau 5.2.

Tableau 5.2 Taux de h-convergence pour le calcul de la réaction sur une courbe ouverte.

	Q1	Q2	Q3	Q4
Taux de h-convergence - Dirichlet	1.100	1.001	1.000	1.000
Taux de h-convergence - Neumann	2.011	4.016	6.017	8.037

On constate que pour une courbe ouverte avec des conditions de Neumann à ses extrémités, les taux de h-convergence sont sensiblement les mêmes que pour une courbe fermée et la p-convergence spectrale est bien respectée. Cependant pour une courbe ouverte entourée de conditions de Dirichlet, on ne semble pas pouvoir obtenir de taux de h-convergence supérieurs à 1 et ce pour n'importe quel degré d'éléments, de plus la p-convergence offre un comportement différent des courbes de convergence spectrale, on obtient comme pour la h-convergence des droites, le taux de convergence est cependant doublé.

Les différents calculs ont également été menés avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange avec imposition faible des conditions de Dirichlet, les taux de convergence et comportements observés n'ont pas différé de ceux obtenus par la méthode des réactions.

La méthode est ainsi vérifiée, il reste à valider le calcul d'efforts pour les équations de Navier-Stokes incompressibles.

### 5.3.2 Écoulement de Couette

On se propose de vérifier la méthode de calcul des moments sur un exemple utilisant les équations de Navier-Stokes. On se base sur un écoulement de Couette en deux dimensions (White, 2011). On considère deux cylindres concentriques, le cylindre externe de rayon 1 tourne à une vitesse de rotation égale à 1, le cylindre interne de rayon 0.5 est lui, fixe. La solution analytique de ce problème est connue, le champs de vitesse étant  $v_\theta = 4r/3 - 1/3r$  avec  $r$  le rayon. On peut donc obtenir la valeur analytique des moments sur les deux cylindres en intégrant le cisaillement multiplié par le bras de levier sur la paroi des cylindres. On réalise alors des simulations pour différents degrés d'interpolants et différents maillages, les résultats pour le calcul du moment sur le cylindre interne sont présentés à la figure 5.9.

On constate l'apparition de paliers sur les courbes de p-convergence, ces derniers sont dus à l'erreur de discréétisation géométrique liée aux maillages utilisés. Pour chaque cas, on atteint la précision maximale permise par le maillage à partir des éléments Q3Q2, on ne peut donc pas vraiment étudier la p-convergence, cette dernière étant trop rapide. Ce phénomène donne des courbes de h-convergence parallèles, la diminution de l'erreur étant uniquement due au

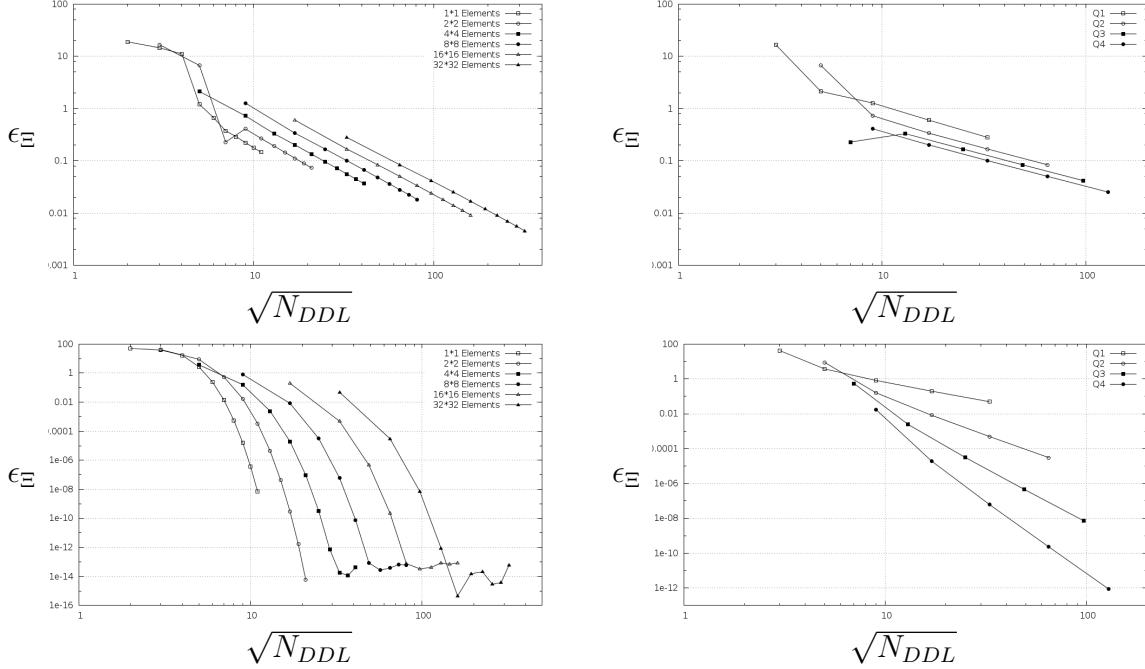


Figure 5.8 p-convergence et h-convergence pour la réaction sur une courbe ouverte avec, conditions de Dirichlet (en haut) et conditions de Neumann (en bas).

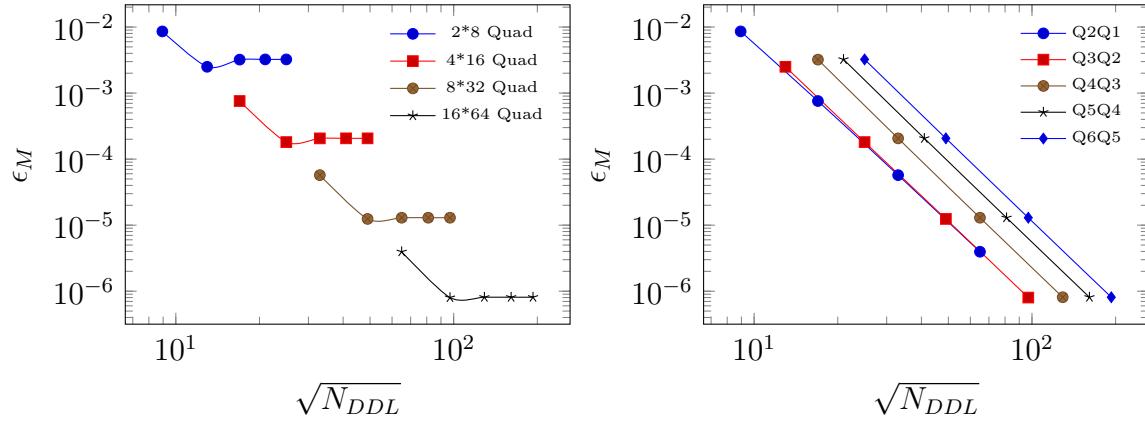


Figure 5.9 p-convergence et h-convergence sur le moment pour l'écoulement de Couette.

raffinement géométrique, les taux de h-convergence pour cet exemple ne varie pas en fonction du degré des interpolants. On considérera néanmoins que la méthode de calcul des moments est vérifiée, cette dernière convergeant vers les meilleures solutions atteignables.

Pour finir, on se propose de comparer la méthode de calcul des moments grâce aux réactions avec celle employée par le logiciel COMSOL. On notera que les valeurs absolues des moments sur les cylindres interne et externe sont théoriquement égales, le moment interne étant positif

et le moment externe négatif. Les résultats sur l'erreur de calcul pour les deux moments sont présentés à la figure 5.10.

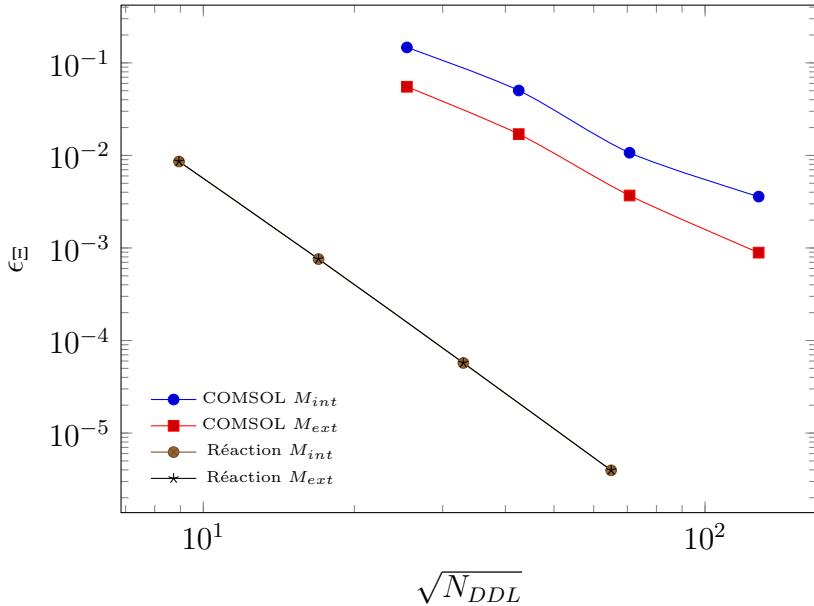


Figure 5.10 Comparaison entre COMSOL et la méthode de calcul par réaction.

On voit clairement que notre méthode de calcul offre deux avantages par rapport au logiciel Comsol. Tout d'abord, pour un même nombre de degrés de liberté, nous obtenons des résultats beaucoup plus précis (diminution de l'erreur d'environ trois ordres de grandeur) et deuxièmement, à l'inverse de Comsol, les moments interne et externe sont calculés avec la même précision, respectant ainsi la théorie qui stipule que ces deux derniers sont égaux en valeurs absolues.

## 5.4 Validation

La phase de validation pour la méthode des réactions est basée sur le même exemple que précédemment (voir Chapitre 4), on s'intéresse aux forces et moments exercés sur un cylindre circulaire dans un écoulement laminaire.

### 5.4.1 Écoulement laminaire autour d'un cylindre circulaire

On s'intéresse en premier lieu à la transition des régimes L2 à L3, on avait préalablement déterminé que cette dernière s'effectue entre  $R_e = 46$  et  $R_e = 47$ , en se basant sur la vorticité et les lignes de courant de l'écoulement. On se propose maintenant d'étudier la variation de la force de portance au cours du temps, ce type d'étude ayant déjà été réalisée par Rajani *et al.*

(2009) et Kumar et Mittal (2006b). Les résultats sont présentés à la figure 5.11. On constate qu'à  $R_e = 45$ , la force de portance oscille avec une faible amplitude et semble se stabiliser, à  $R_e = 46$ , la force semble grandir assez rapidement, pour un même temps de simulation, l'amplitude est environ 10 fois plus grande. On peut conclure que, pour notre étude, la zone de transition se situerait entre  $R_e = 45$  et  $R_e = 46$ . La valeur la plus proche trouvée pour le nombre de Reynolds de transition dans la littérature est celle de Jackson (1987) qui trouve  $R_e = 45.4$  avec la méthode des éléments finis.

On se propose maintenant de calculer le coefficient de trainée moyen qui est, en 2D et en adimensionnel, le double de la force de portance, en régime L2 et L3. Les données sont présentées à la figure 5.12, elles sont en très bon accord avec celles de la littérature, notamment avec les études les plus récentes de Rajani *et al.* (2009) et Thompson *et al.* (2014). On notera que pour le régime L3, le coefficient de portance est moyenné dans le temps sur un grand nombre de périodes, lorsque le régime périodique est atteint.

Le calcul du coefficient de portance moyen n'est pas très intéressant puisque ce dernier est théoriquement nul (ce que l'on retrouve numériquement pour tous les nombres de Reynolds traités avec une précision de  $10^{-4}$ ). On préfère alors calculer la valeur RMS de ce dernier, les résultats à  $Re = 300$  sont comparés à la table 5.3. On constate une fois de plus que nous sommes en accord avec la littérature, on notera également que les amplitudes de la force de portance obtenue (entre  $\pm 0.948$ ) sont en accord avec les résultats obtenus par Kalro et Tezduyar (1997).

Tableau 5.3 Valeur RMS du coefficient de portance à  $R_e = 300$ .

Source	$C_{l_{rms}}$
Résultats	0.670
Rajani <i>et al.</i> (2009)	0.602
Mittal et Balachandar (1997)	0.650

Enfin, on se propose de valider le calcul du nombre de Strouhal, ce dernier a précédemment été calculé à l'aide des champs de vitesse en deux points, les valeurs obtenues étaient en accord avec la littérature. On va alors calculer le Strouhal en réalisant les FFT des signaux en régime périodique pour le moment et les forces de portance et de traînée. Les résultats sont présentés à la table 5.4, on constate qu'ils sont similaires peu importe la variable utilisée pour le calcul.

La validation pour le calcul des moments est compliquée sur cet exemple puisqu'il existe peu de littérature sur ce dernier, on notera juste que pour chaque nombre de Reynolds traité le moment moyen est nul (avec une précision de  $10^{-4}$ ) ce qui est conforme à la théorie.

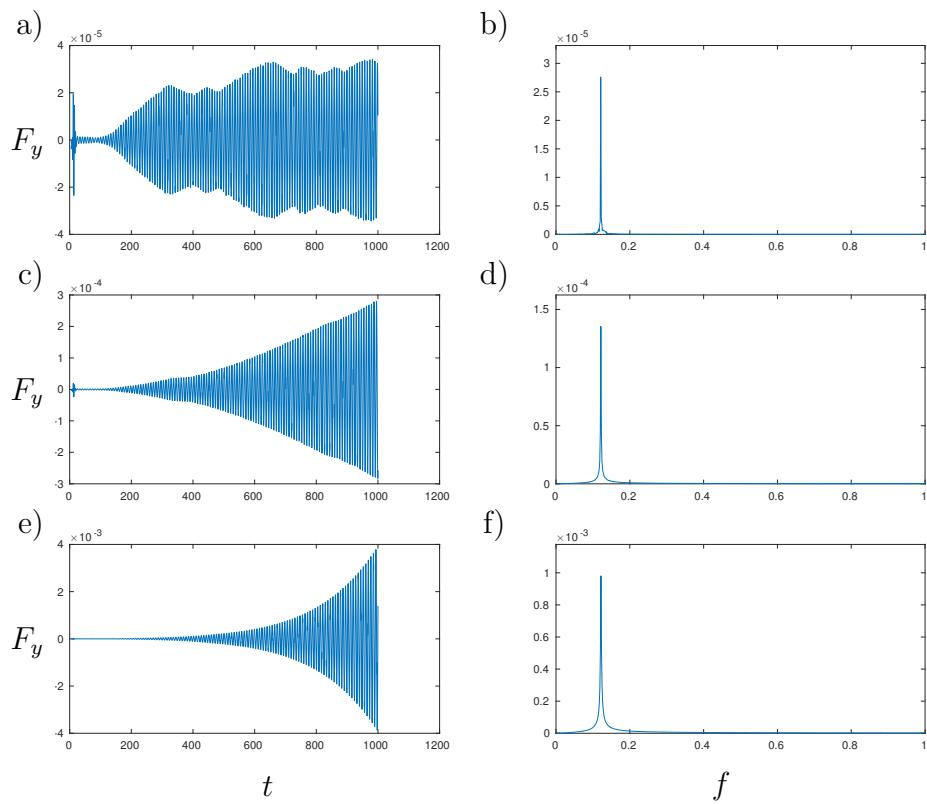


Figure 5.11 Coefficient de portance et FFT pour  $R_e = 45$  (a et b), 46 (c et d) et 47 (e et f).

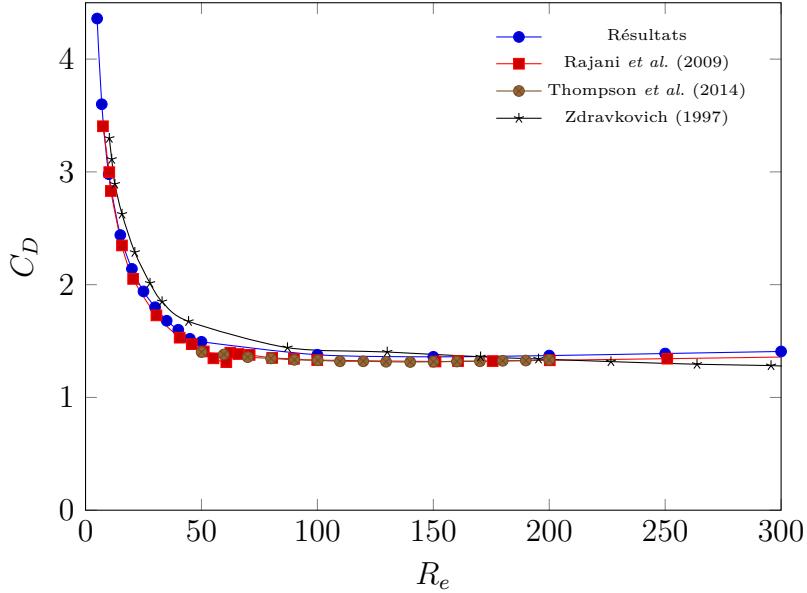


Figure 5.12 Coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds.

Tableau 5.4 Nombres de Strouhal calculés à partir des FFT des différentes variables.

Variable	$U_{1D}$	$U_{20D}$	M	$F_x$	$F_y$
St	0.2139510	0.2139510	0.2139495	0.2139510	0.2139495

Le calcul des forces et moments est alors validé, aussi bien en termes d'amplitudes que de fréquences. On répète, une fois de plus, que l'influence des modes 3D n'est pas étudiée. On peut désormais appliquer la méthode à des cas concrets.

## CHAPITRE 6 APPLICATION AU CALCUL DES EFFORTS SUR DES CORPS IMMERGÉS

Ce chapitre est consacrée à l'application de la méthode des réactions au calcul des forces de traînée et de portance ainsi que les moments engendrés par des écoulements incompressibles sur des géométries en deux dimensions pour différents angles d'attaque. Les différents exemples seront traités pour de faibles nombres de Reynolds ( $Re \leq 500$ ) donc pour des écoulements non turbulents. On supposera également que l'influence des modes 3D est négligeable. Les valeurs ainsi obtenues permettront d'établir des courbes de référence pour les coefficients de traînée, de portance et, surtout, de moment moyen pour les différentes géométries à différents nombres de Reynolds. Ces courbes sont utiles dans de nombreux domaines de l'ingénierie, notamment pour l'industrie pétrolière off-shore, les efforts calculés pouvant servir au dimensionnement de risers et autres structures. Les résultats permettent également de prévenir différents types d'instabilités liées aux phénomènes d'interaction fluide-structure. Notamment le galop transverse lié aux courbes de portance et de traînée par le critère de Den Hartog (1985) et le galop en rotation lié à la courbe de moment par le critère de Blevins (1990). Les résultats permettent donc de développer des analyses quasi-statiques permettant de prédire certains comportements dynamiques des structures.

### 6.1 Ellipse

La première géométrie considérée est une ellipse de ratio 2 : 1. Étant le premier cas traité, la démarche utilisée sera détaillée ainsi que la méthode et les paramètres de calculs. Ces derniers points seront, sauf indication contraire, valables pour toutes les autres géométries.

#### 6.1.1 Géométrie et conditions limites

L'ellipse étant symétrique par rapport à ses deux axes, l'étude sera limitée à des angles d'attaque compris entre 0 et 90 degrés et les valeurs entre 90 et 360 degrés seront déduites des valeurs calculées.

La figure 6.1 définit les dimensions du problème, l'angle  $\theta$  ainsi que le repère relatif à l'ellipse ( $\vec{e_X}, \vec{e_Y}, \vec{e_Z}$ ) et le repère absolu ( $\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$ ). On notera que le centre de l'ellipse est situé en (0,0). Les force de traînée  $F_D$  et de portance  $F_L$  ainsi que le moment  $M$  seront obtenus pour des angles  $\theta$  variant par pas de 15° entre 0° à 90° pour les nombres de Reynolds suivants :  $R_e = [100; 200; 300; 500]$ . La longueur de référence  $L$  sur laquelle est basé le nombre de

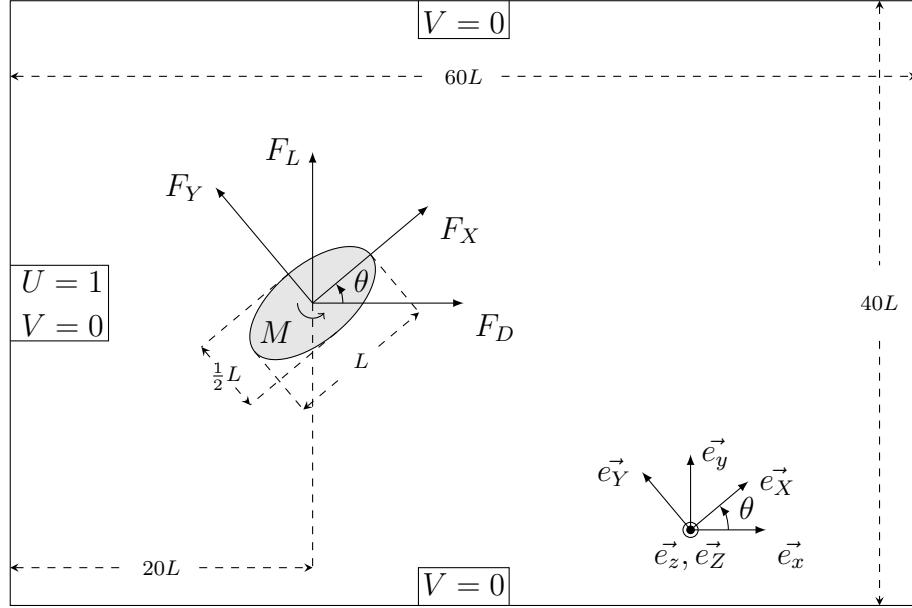


Figure 6.1 Géométrie et conditions limites du problème - Ellipse.

Reynolds est la longueur du grand axe de l'ellipse.

Les dimensions du domaine de calcul ont été choisies arbitrairement, une rapide étude a été menée pour s'assurer que ces dernières étaient suffisamment grandes pour ne pas engendrer de phénomène de blocage et ainsi altérer la solution. Les résultats ont montré qu'un ajout de  $5L$  sur les bords du domaine entraîne des variations inférieures à 0.5% sur les valeurs de  $F_D$ ,  $F_L$  et  $M$ , validant ainsi les dimensions présentées à la figure 6.1.

Les conditions limites du problème sont indiquées sur la figure 6.1, une vitesse d'entrée uniforme, une vitesse transversale nulle sur les bords, une condition de non-glissement sur l'ellipse et une condition de traction nulle à la sortie ( $\vec{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{0}$ ), ces conditions limites ont déjà été largement utilisées, voir Laroussi *et al.* (2014) et Kalro et Tezduyar (1997). Pour l'évolution temporelle, la solution initiale est un champ de vitesse et une pression nuls. L'écoulement est impulsif, (Etienne, 1999). Ces conditions limites et initiales seront appliquées pour toutes les géométries et ne seront, par conséquent, pas répétées.

### 6.1.2 Génération de maillage

Différents maillages ont été réalisés à l'aide du logiciel GMSH, ces derniers sont constitués de quadrilatères quadratiques à 9 noeuds, l'interpolation géométrique est réalisée grâce aux fonctions d'interpolation de Lagrange propres à chacun des noeuds, (Reddy, 1993). Le maillage retenu est présenté à la figure 6.2, le choix de ce maillage a été basé sur des critères de rapi-

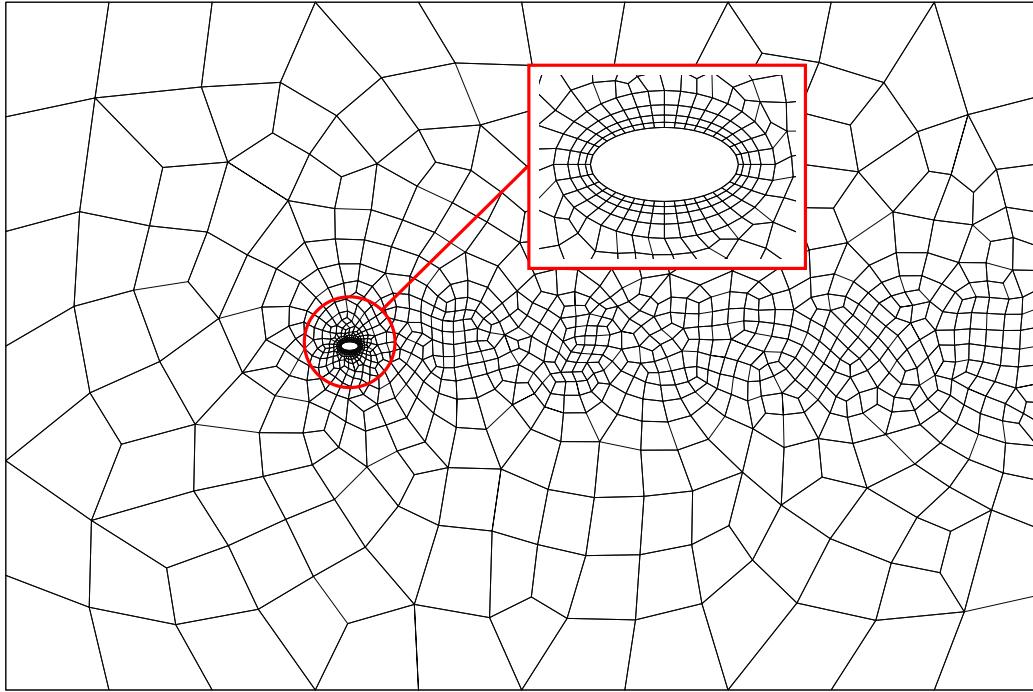


Figure 6.2 Maillage utilisé pour l'ellipse à  $\theta = 0^\circ$ .

dité de calcul et de précision. La convergence des résultats pour ce maillage sera présentée à la section 6.1.4. Il est constitué d'environ 1000 quadrangles, le nombre d'éléments fluctuant légèrement en fonction de l'angle d'attaque  $\theta$ . Pour la partie non-structurée du maillage, la taille des éléments est régie par deux fonctions, une répartition exponentielle autour de l'ellipse pour obtenir la taille d'élément voulue sur la frontière  $h_{lim}$ , et une distribution en tangente hyperbolique pour le sillage. Entre ces deux répartitions, c'est la taille minimale d'élément prescrite qui est utilisée.

La forme générale de la répartition exponentielle est la suivante :

$$h = a \exp(b(x^2 + y^2)) + c \quad (6.1)$$

où  $h$  est la taille des éléments et  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des constantes à déterminer.

On définit alors  $r_{lim}$  et  $r_{sill}$ , respectivement, les distances pour lesquelles les tailles de maillage  $h_{lim}$  et  $h_{sill}$  sont atteintes. La constante  $b$  est arbitraire, elle sera déterminée par l'utilisateur

pour obtenir l'évolution souhaitée entre les valeurs  $h_{lim}$  et  $h_{sill}$ .

Pour déterminer les constantes  $a$  et  $c$ , les conditions suivantes sont utilisées :

$$h(r_{lim}) = a \exp(b(r_{lim}^2)) + c = h_{lim} \quad (6.2)$$

$$h(r_{sill}) = a \exp(b(r_{sill}^2)) + c = h_{sill} \quad (6.3)$$

ce qui donne :

$$a = \frac{h_{sill} - h_{lim}}{\exp(br_{sill}^2) - \exp(br_{lim}^2)} \quad (6.4)$$

$$c = h_{lim} - a \exp(br_{lim}^2) \quad (6.5)$$

Les distances  $r_{lim}$ ,  $r_{sill}$ , les tailles d'éléments  $h_{lim}$  et  $h_{sill}$  ainsi que la constante b sont à définir par l'utilisateur, cette méthode offre une grande flexibilité et permet de créer aisément des maillages pour capturer la couche limite.

Le sillage est lui régi par l'équation suivante :

$$h = (-10 \tanh(10 - (d x + e)) * |y|) + 10 + h_{sill} * \exp(-(x + 1) + 1) + f x \quad (6.6)$$

$$d = \frac{l_d - l_f}{x_d - x_f} \quad (6.7)$$

$$e = \frac{l_d + l_f - d * (x_d + x_f)}{2} \quad (6.8)$$

$$f = \frac{h_{plus}}{x_f} \quad (6.9)$$

Cette répartition est composée d'une tangente hyperbolique, inspirée des profils de vitesse de jet plan, permettant de prescrire la taille  $h_{sill}$  des éléments dans le sillage, l'exponentielle permet de limiter l'usage de la tangente pour des abscisses positives en prescrivant une taille importante d'élément en amont de l'ellipse, enfin une fonction affine permet d'augmenter linéairement la taille des éléments dans le sillage. Les paramètres  $x_d$  et  $x_f$  correspondent aux abscisses de début et de fin du sillage.  $l_d$  et  $l_f$  permettent de faire varier la largeur du sillage respectivement en amont et en aval, leur influence est illustrée à la figure 6.3. Enfin, la valeur  $h_{plus}$  correspond à la taille que l'on veut ajouter aux éléments à la fin du sillage, la taille des éléments varie ainsi linéairement dans le sillage entre  $h_{sill}$  et  $h_{sill} + h_{plus}$  ce qu'on peut voir à droite sur la figure 6.3.

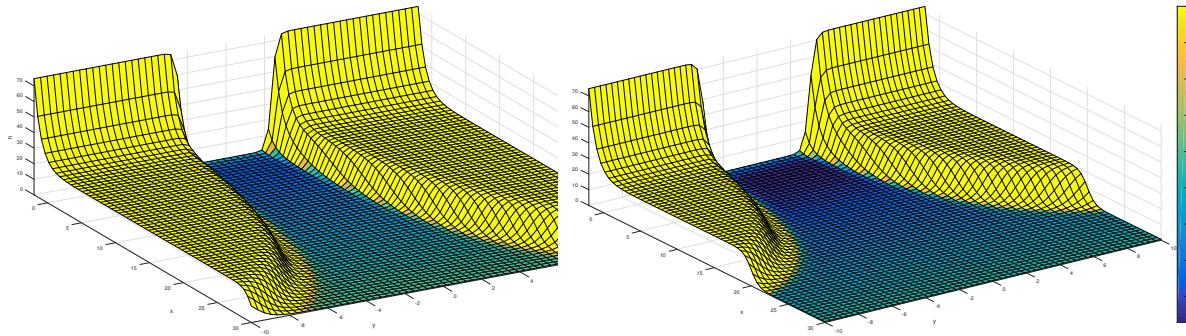


Figure 6.3 Exemple d'utilisation du modèle de sillage de l'équation (6.6).  $x_d = 0$  et  $x_f = 30$ , à gauche  $l_d = 4$  et  $l_f = 2$ , à droite  $l_d = 3$  et  $l_f = 1$ .

### 6.1.3 Traitement de données

Les résultats pour chaque calcul sont constitués des champs de vitesse et de pression à la dernière étape temporelle et des valeurs des forces de portance, de traînée, du moment et du temps pour chaque étape temporelle. Après le traitement de ces données sous Matlab, nous obtenons les courbes de la figure 6.4.

L'algorithme de traitement de données permet de récupérer une partie du signal, sur un certain nombre de périodes, en spécifiant un temps de départ. Le temps de départ est choisi lorsque le régime périodique est atteint, ce qui est laissé à l'appréciation de l'utilisateur. On s'assurera tout de même que ce régime est bien atteint grâce aux courbes présentées à la figure 6.5. Une transformation de Fourier rapide (FFT) est alors effectuée pour obtenir le contenu fréquentiel des signaux ainsi que leurs valeurs moyennes, voir figure 6.6.

Cette approche permet un traitement rapide des données pour chaque angle étudié tant que le régime périodique, s'il existe, est atteint. Cette méthode sera utilisée pour traiter toutes les géométries. La convergence sur les valeurs moyennes peut maintenant être étudiée.

Les champs de vitesse et de pression sont également obtenus pour la dernière étape temporelle, la visualisation de ces derniers est effectuée à l'aide du logiciel "Tecplot2014". Ce dernier permettra également de visualiser les contours de vorticité.

### 6.1.4 Convergence

L'étude de convergence va permettre de faire un choix sur le degré des interpolants utilisés. Le tableau 6.1 recense les résultats obtenus sur les valeurs moyennes pour différents interpolants en vitesse et pression. L'étude est réalisée pour la configuration où le nombre de Reynolds

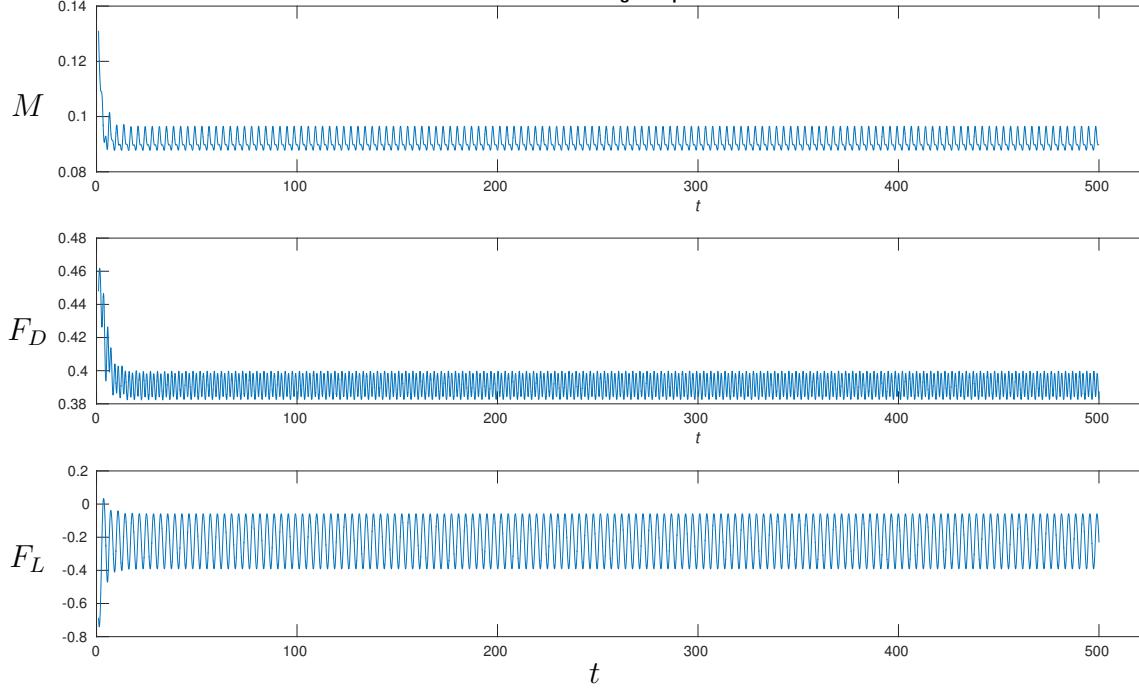


Figure 6.4  $M$ ,  $F_D$  et  $F_L$  en fonction de  $t$  à  $\theta = 30^\circ$ .

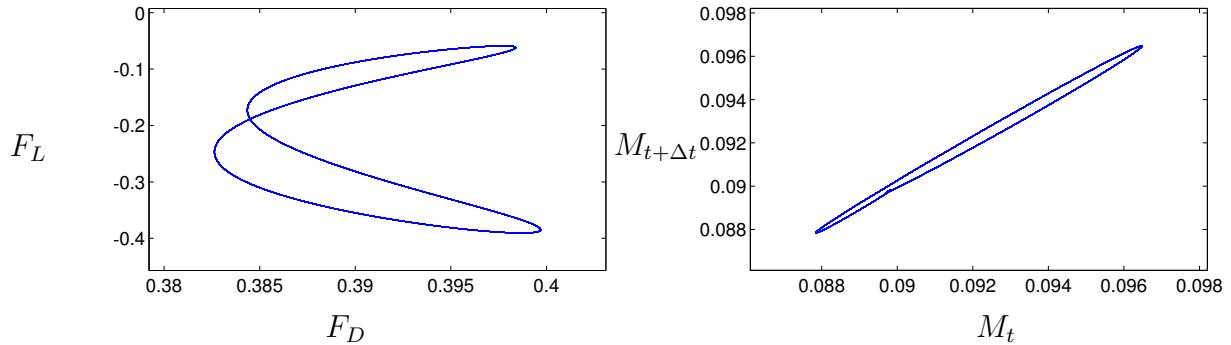


Figure 6.5 Courbes de stabilités pour  $\theta = 30^\circ$  et  $t$  variant de 200 à 500.

efficace est maximal, soit pour  $\theta = 90^\circ$ . L'écart absolu moyen  $\epsilon_{moyen}$  est calculé par rapport aux valeurs obtenues pour les interpolants les plus élevés soit Q6Q5. Les tolérances pour l'étude sont fixées à  $10^{-6}$  pour la tolérance temporelle, la tolérance sur le résidu et sur la correction. La tolérance pour la refactorisation de la matrice est elle fixée à  $10^{-1}$  (voir chapitre 3).

Les interpolants Q4Q3 sont retenus puisqu'ils présentent une erreur sur les valeurs moyennes inférieure à 0,01 pourcent de la solution obtenue avec les Q6Q5 et que le calcul diverge pour Q3Q2.

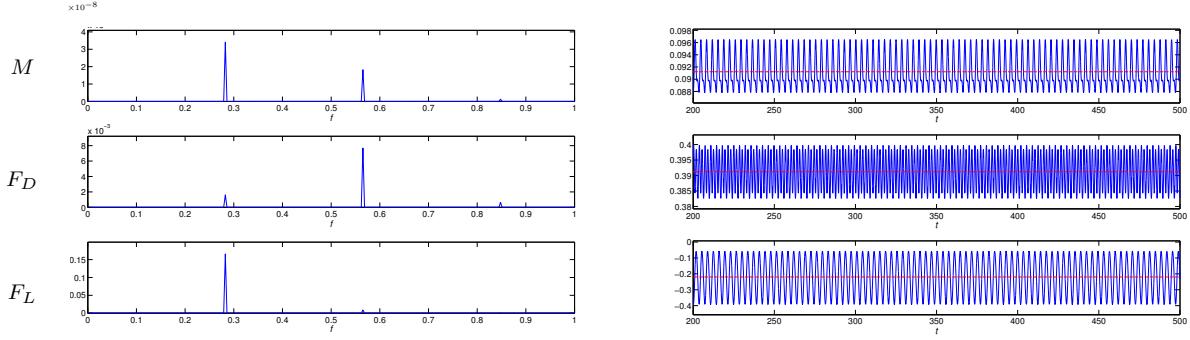


Figure 6.6 Transformation de Fourier rapide des signaux (à gauche), signaux et moyennes temporelles en pointillé rouge (à droite) pour  $\theta = 30^\circ$ .

Tableau 6.1 Convergence en ordre sur le maillage de la figure 6.2 à  $\theta = 90^\circ$ .

Degré des interpolants	$\langle M \rangle$	$\langle F_D \rangle$	$\langle F_L \rangle$	$\epsilon_{moyen}$
Q4Q3	-0,000014	0,991963	0,000122	0,000097
Q5Q4	-0,000007	0,992453	-0,000102	0,000150
Q6Q5	0,000064	0,992116	0,000237	-

La convergence pour les interpolants Q4Q3 est alors étudiée en raffinant le maillage, toujours pour  $\theta = 90^\circ$ . La taille d'élément  $h$  correspond au maillage présenté à la figure 6.2, les éléments sont alors divisés en 4 pour obtenir le maillage " $h/2$ ". Les résultats de cette étude sont présentés au tableau 6.2. Cette étude confirme que le maillage initial peut-être utilisé pour notre étude, ce dernier présentant une erreur sur les valeurs moyennes inférieure à 0,1 pourcent par rapport aux valeurs données par le maillage deux fois raffiné.

Tableau 6.2 Convergence pour l'ellipse pour les interpolants Q4Q3.

Taille des éléments	$\langle M \rangle$	$\langle F_D \rangle$	$\langle F_L \rangle$	$\epsilon_{moyen}$
$Q4Q3 - h$	-0,000014	0,991963	0,000122	0,000270
$Q4Q3 - h/2$	0,000018	0,992798	0,000193	0,000126
$Q4Q3 - h/4$	-0,000004	0,992631	-0,000132	-

Enfin l'influence de la tolérance sur l'intégration temporelle de la méthode BDF a été étudiée, les résultats sont présentés au tableau 6.3.

Les résultats indiquent qu'une tolérance temporelle trop élevée a pour effet de dégrader la solution, l'évolution du pas de temps au cours du temps a été tracée pour chacun des exemples, ainsi que la vorticité pour les tolérances de  $10^{-1}$  et  $10^{-6}$ , (voir figure 6.7). Le fait d'augmenter la tolérance d'intégration temporelle agit comme un filtre passe-haut. Les pas de temps pour les simulations réalisées avec de grandes tolérances BDF se stabilisent à des valeurs trop

Tableau 6.3 Etude de l'influence de la tolérance BDF sur les valeurs moyennes.

Tolérance BDF	$\langle M \rangle$	$\langle F_D \rangle$	$\langle F_L \rangle$	$\epsilon_{moyen}$
$10^{-01}$	0,000008	0,773920	0,000107	0,073219
$10^{-02}$	0,000022	1,123495	-0,000172	0,044394
$10^{-04}$	-0,000013	0,991622	0,000270	0,000094
$10^{-06}$	-0,000014	0,991963	0,000122	-

hautes ne permettant pas de capturer l'intégralité des phénomènes instationnaires comme le confirme les contours de vorticité. Par conséquent la tolérance BDF sera fixée à  $10^{-6}$  pour cette géométrie et toutes les suivantes.

La validité des résultats étant maintenant assurée, l'étude de l'évolution des valeurs moyennes des forces de portance, de traînée et du moment en fonction de l'angle d'attaque peut être réalisée.

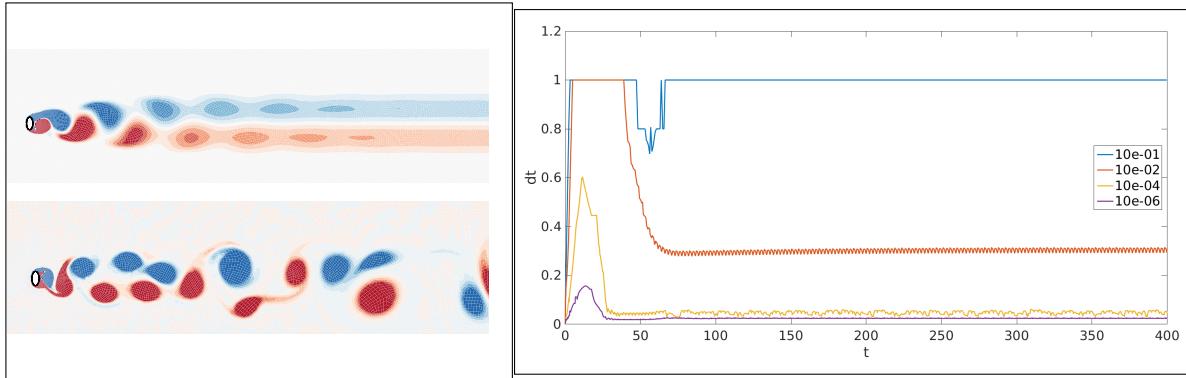


Figure 6.7 Vorticité pour la tolérance BDF à  $10^{-01}$  (en haut à gauche) et  $10^{-06}$  (en bas à gauche). Évolution temporelle du pas de temps pour différentes tolérance BDF (à droite).

### 6.1.5 Résultats

#### Valeurs moyennes

Le nombre de Reynolds a peu d'influence sur les valeurs moyennes de moment et de portance, comme le montre la figure 6.8. La force de traînée montre cependant un comportement intéressant. En effet, lorsque le nombre de Reynolds augmente la force de traînée, due aux effets visqueux diminue, alors que celle due aux forces de pression augmente, on constate donc que les efforts visqueux dominent pour de faibles angles ( $\theta < 35^\circ$ ), puis les forces de pression prennent le pas lorsque l'angle augmente ( $\theta \in [35^\circ; 90^\circ]$ ). On notera que les résultats obtenus pour  $R_e = 500$  ont été réalisés avec un maillage plus dense et que des données

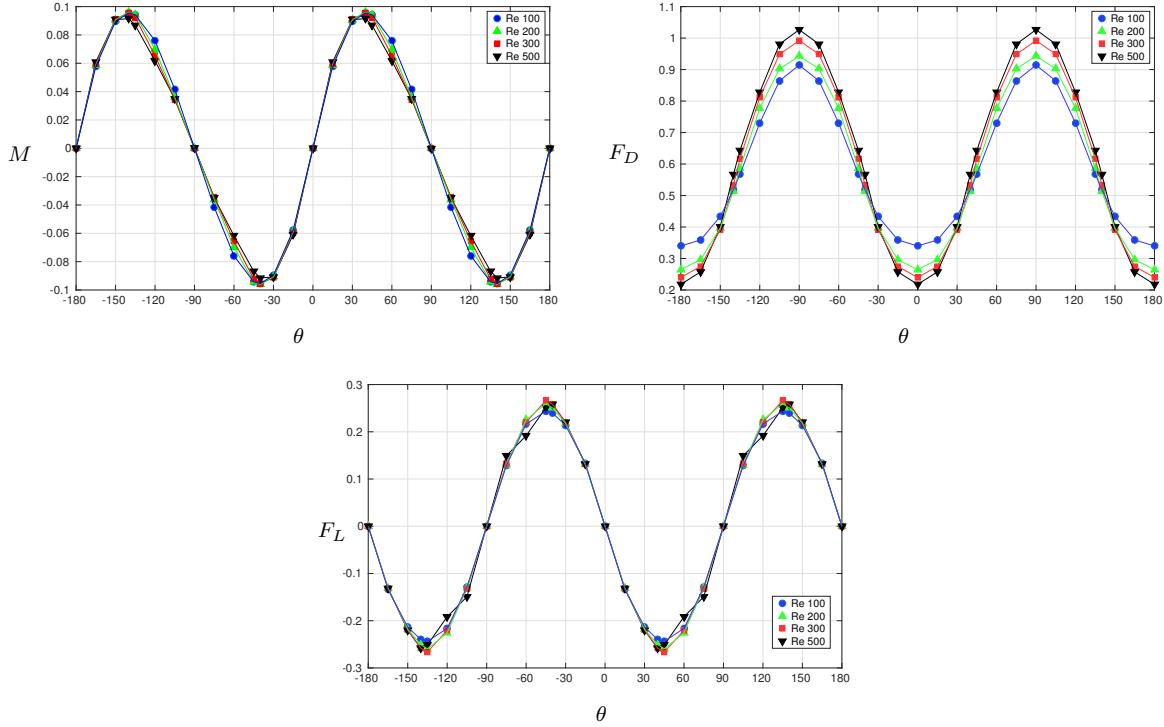


Figure 6.8 Valeurs moyennes du moment, des forces de traînée et de portance en fonction de l’angle  $\theta$  pour  $R_e = [100, 200, 300, 500]$  pour l’ellipse.

supplémentaires sont présentées en Annexe B.

On se propose de valider les résultats obtenus en les confrontant avec ceux trouvés dans la littérature. Les contours de vorticité présentés à la figure 6.9 montrent trois comportements différents dans le sillage de l’ellipse ; à  $R_e = 100$ , on observe un relâcher tourbillonnaire qui se réorganise en un sillage symétrique ; à  $R_e = 200$ , un second relâcher tourbillonnaire périodique est observé dans le sillage ; enfin à  $R_e = 300$ , le second relâcher tourbillonnaire est toujours présent mais n’est plus périodique, les tourbillons étant lâchés aléatoirement. Ces observations sont en accord avec les résultats obtenus par (Johnson *et al.*, 2001) et (Thompson *et al.*, 2014).

Les valeurs des coefficients de traînée (on rappelle qu’en 2D,  $C_D = 2F_D$ ) et de Strouhal (voir Annexe B) présentés au tableau 6.4 sont également en accord avec les résultats de Johnson *et al.* (2001).

Plusieurs analyses peuvent être menées à partir des courbes présentées à la figure 6.8, ces dernières seront détaillées dans cette partie, mais ne seront pas répétées dans les suivantes.

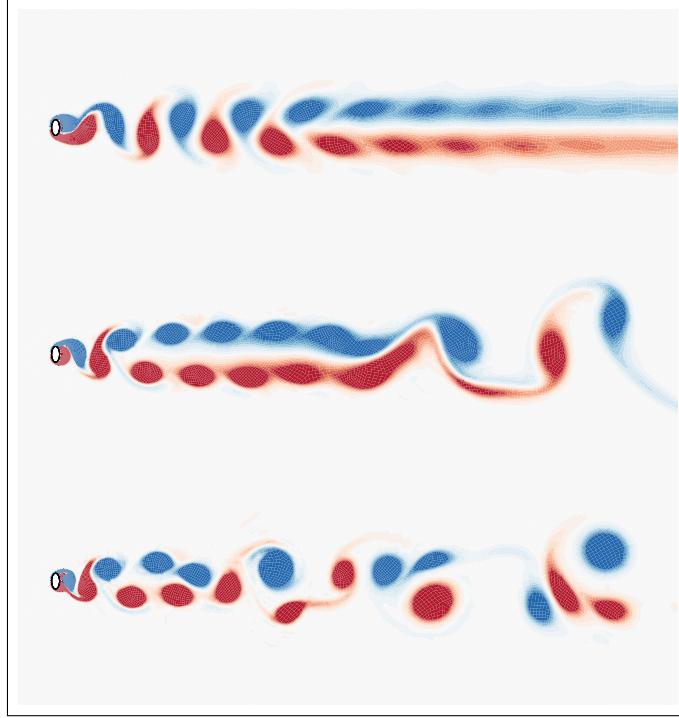


Figure 6.9 Vorticité entre -0.5 et 0.5 à  $t = 500$ , positive en rouge, négative en bleu, pour des nombres de Reynolds de 100 (en haut), 200 (au milieu) et 300 (en bas).

Tableau 6.4 Valeurs du coefficient de traînée et du Strouhal pour  $\theta = 90^\circ$ .

$R_e$	$C_D$	$S_t$
100	0.182	0.185
200	0.188	0.193

### Galop transversal

Les courbes de portance et de traînée peuvent être utilisées afin de prédire l'apparition d'instabilité de galop en translation. En effet, le critère de Den Hartog (1985) a été largement utilisé pour prédire ce type d'instabilité sur diverses géométries. Le carré est probablement le cas le plus étudié (Barrero-Gil *et al.*, 2009). Des études ont également été menées sur des formes plus originales, comme des sections triangulaires (Alonso *et al.*, 2005) ou encore des rhomboïdes (Ibarra *et al.*, 2014). On se propose de démontrer succinctement le critère de Den Hartog.

Considérons l'ellipse ayant un degré de liberté en translation dans la direction  $\vec{e}_y$ . On définit l'angle  $\alpha$  comme l'angle relatif de l'écoulement par rapport au mouvement de l'ellipse, voir figure 6.10.

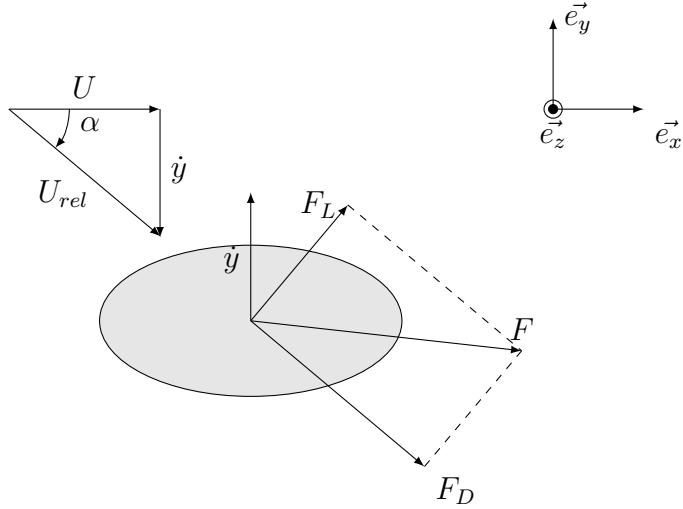


Figure 6.10 Ellipse avec un degré de liberté - Galop transversal.

On a alors les relations suivantes :

$$\alpha = \tan\left(\frac{\dot{y}}{U}\right) \quad (6.10)$$

$$F_y = F_L \cos \alpha - F_D \sin \alpha \quad (6.11)$$

Considérons l'équation du mouvement de l'ellipse sans amortissement structurel :

$$m\ddot{y} + ky = F_y \quad (6.12)$$

ou  $m$  est la masse de l'ellipse et  $k$  la raideur transverse.

On effectue un développement en série de Taylor de  $F_y$ , pour des petits angles  $\alpha$ , donc de faibles vitesses  $\dot{y}$  :

$$F_y \simeq F_y|_0 + \frac{\partial F_y}{\partial \alpha}|_0 \alpha \quad (6.13)$$

En utilisant l'équation (6.10) et l'approximation pour de petits angles, et en injectant (6.13) dans (6.12) (la force transversale en  $\alpha = 0$  étant négligée) :

$$m\ddot{y} + \frac{1}{U} \left( -\frac{\partial F_y}{\partial \alpha} \right) \dot{y} + ky = 0 \quad (6.14)$$

On a donc une instabilité en galop (causée par l'amortissement négatif) si :

$$\frac{\partial F_y}{\partial \alpha} > 0 \quad (6.15)$$

En utilisant l'équation 6.11 et l'approximation des petits angles, on obtient le critère de Den Hartog. Il y a instabilité si :

$$\left( -\frac{\partial F_L}{\partial \alpha} + F_D \right) < 0 \quad (6.16)$$

On notera que la différence de signe devant la dérivée par rapport à la forme classique du critère de Den Hartog est uniquement due au choix de la position et de l'orientation de  $\theta$ .

Ce critère se comprend physiquement. En effet, si la vitesse  $\dot{y}$  augmente (donc si l'angle  $\alpha$  augmente), et si la force transversale diminue ( $\partial F_y / \partial \alpha < 0$ ), alors le système sera stable. La diminution de la force lorsque la vitesse augmente va tendre à réduire les oscillations. Par contre, si la force transversale augmente ( $\partial F_y / \partial \alpha > 0$ ), alors le système sera instable.

On se propose alors de tracer la fonction  $H = \left( -\frac{\partial F_L}{\partial \theta} + F_D \right)$  pour l'ellipse, les résultats sont présentés à la figure 6.11.

On constate que l'ellipse est stable pour tout angle d'attaque à  $Re = 100$ , la fonction  $H$  n'étant jamais inférieure à zéro. Il en est de même pour les autres nombres de Reynolds étudiés, les valeurs des forces de portance variant peu entre  $Re = 100$  et  $Re = 500$ . On fera remarquer que pour des nombres de Reynolds plus importants ( $R_e \approx 10^5$ ), on a apparition de l'instabilité en galop transversal pour certains angles (Alonso *et al.*, 2010).

Pour plus d'informations sur ce critère, notamment les plages de validité du modèle, le lecteur est invité à consulter les ouvrages suivants : Shiraz (2014), Den Hartog (1985) et Blevins (1990). On fera seulement remarquer que ces instabilités se produisent pour de grandes vitesses réduites et que le cadre de cette théorie est limité. En effet, l'approche quasi-statique utilisée ne permet pas d'appréhender les phénomènes non linéaires dus aux relâchers tour-

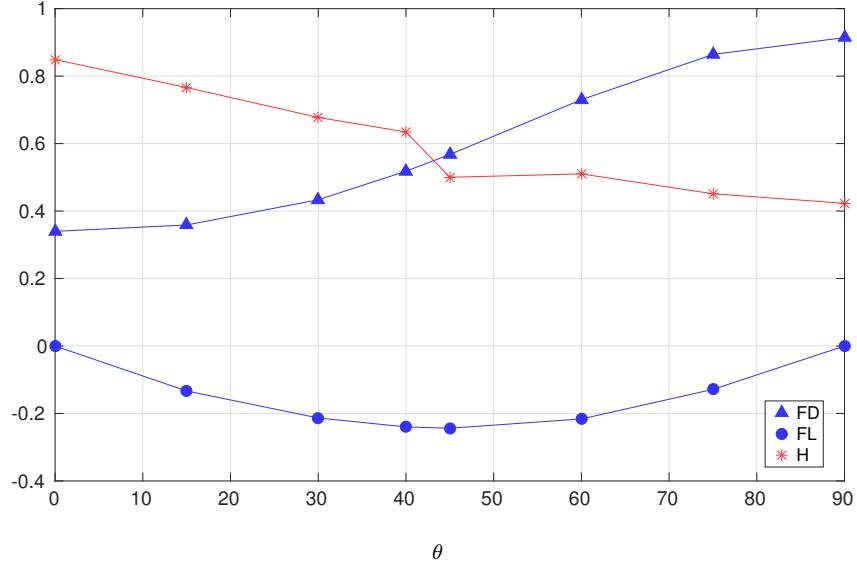


Figure 6.11 Critère de Den Hartog  $H$ , portance  $F_L$  et traînée  $F_D$  pour l'ellipse à  $R_e = 100$ .

billonnaires.

### Galop en rotation

Le galop en rotation peut également être prédit à l'aide, cette fois, des courbes de moment moyen. Ce phénomène peut engendrer des oscillations de grandes amplitudes en rotation autour de l'axe des structures. Ces oscillations peuvent conduire à des accidents catastrophiques, ce phénomène étant, par exemple, une des causes majeures du tristement célèbre effondrement du pont de Tacoma en 1940 (Jung et Lee, 2011).

Le critère d'instabilité nécessaire pour le galop en rotation est basé sur la dérivée du moment par rapport à l'angle d'attaque, il est donné à la formule (6.17). Pour plus de détails sur la théorie, on invite le lecteur à consulter Blevins (1990) et Robertson *et al.* (2003a).

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\alpha} < 0 \quad \text{Critère nécessaire d'instabilité} \quad (6.17)$$

Ce critère est valable pour de petites variations autour de l'angle d'attaque étudié. Dans le cas de l'ellipse, on constate qu'on a une zone potentielle d'instabilité pour des angles compris environ entre 60 et 120 degrés.

On notera que les critères de Den Hartog et Blevins reposent sur des approches quasi-statiques et négligent ainsi les effets dynamiques liés à la viscosité et aux lâchers tourbillonnaires. De plus, nous avons mené les différentes analyses sur des cas fictifs. Pour de vraies structures, les zones d'instabilité vont dépendre de l'amortissement structurel en translation et en rotation des cas considérés. On précise également qu'une autre instabilité en rotation peut apparaître, appelée la divergence (Blevins, 1990), liée à la raideur des structures. Enfin, l'influence des modes 3D, présents sur la gamme de nombres de Reynolds étudiée, n'est pas prise en compte, en effet, en 3 dimensions, la décorrélation de l'écoulement le long de l'axe des structures à tendance à faire chuter la valeur des efforts moyens, en plus de changer la structure de l'écoulement en aval des objets.

Pour toutes ces raisons, les critères d'instabilité ne sont que des indicateurs et n'entraînent pas obligatoirement les phénomènes de galop, il est alors nécessaire d'effectuer des simulations en interaction fluide-structure afin de déterminer plus précisément le comportement dynamique des structures, on référera par exemple pour l'ellipse à Weymouth (2014).

Les autres géométries traitées utilisent la même méthodologie que celle appliquée à l'ellipse. Elles seront donc détaillées sous forme de fiches techniques en Annexe A, les différences majeures entre les différents cas traités y seront également détaillées, de plus des données supplémentaires sont données pour l'ellipse et les différentes géométries en Annexe B ; notamment, l'évolution du nombre de Strouhal en fonction de l'angle d'attaque.

Pour conclure cette partie, la méthode des éléments spectraux, couplée à l'utilisation de la méthode des réactions, permet d'effectuer avec précision des simulations d'écoulement autour de diverses sections de corps. Les valeurs obtenues lors de ces simulations permettent d'effectuer des analyses quasi-statiques. Les résultats de ces analyses et les valeurs moyennes des efforts sont utiles pour le dimensionnement de structures, elles sont notamment utiles pour l'industrie off-shore, certaines des géométries étudiées ayant été choisies par des industriels voulant connaître les efforts et les zones d'instabilité de différents objets.

## CHAPITRE 7 CONCLUSION

### 7.1 Synthèse

La phase de vérification du code a démontré l'efficacité de la méthode des éléments spectraux et de la p-convergence par rapport à la méthode classique des éléments finis et de la h-convergence. Nous avons obtenu des solutions plus précises à même nombre de degrés de liberté. Le code EF6 a également été validé avec succès sur l'écoulement laminaire autour d'un cylindre circulaire, l'utilisation de la méthode hp ayant fourni des résultats en accord avec ceux trouvés dans la littérature.

L'efficacité de la méthode des réactions a été démontrée, notamment sur le calcul des moments. La méthode proposée donnant des erreurs sur le calcul des moments  $10^3$  fois plus faibles que celles obtenues avec le logiciel Comsol.

Les simulations réalisées ont permis de développer différentes techniques de création de maillages non-structurés, via l'utilisation de fonctions mathématiques régissant la taille des éléments. Tous les résultats produits sont accompagnés d'une étude de convergence permettant de s'assurer de leur validité. Des courbes de références pour les valeurs des efforts moyens, à savoir la portance, la traînée et le moment, ont été déterminées pour six géométries différentes, dont trois commanditées par des industriels, pour des nombres de Reynolds variant de  $R_e = 100$  à  $R_e = 500$ . L'évolution du nombre de Strouhal en fonction de l'angle d'attaque a également été déterminée à partir de FFT, lorsque cela était possible. Enfin, nous avons explicité les différents types d'analyses quasi-statiques que l'on peut mener à partir des résultats produits, permettant d'obtenir les zones d'instabilités potentielles des géométries en galop transverse et en galop en rotation.

### 7.2 Recommandation

Il serait intéressant d'étudier l'influence des modes 3D sur chaque géométrie, ces derniers ayant normalement un impact non-négligeable sur les valeurs moyennes des efforts pour les nombres de Reynolds considérés.

Le développement d'un algorithme permettant de moyenner les différents fichiers de données dans le temps, donnant ainsi des champs de vitesse et de vorticité moyens, permettrait le calcul du point de décollement moyen lorsque l'on est en régime périodique (allée de Von Karman). Un utilitaire de post-traitement intégré dans EF6 serait probablement une bonne

idée.

Il serait également judicieux d'effectuer des simulations en interaction fluide structure sous Fluent dans les zones d'instabilité potentielle déterminées par les critères quasi-statiques, afin de confirmer ou d'infirmer ces derniers.

Pour finir, l'étude plus précise du comportement tourbillonnaire sur la dernière géométrie présentée permettrait peut être d'expliquer plus en détails le comportement particulier des courbes de portance et de moment entre -30 et 30 degrés.

Une méthode de détection automatique de la périodicité lors des relâchers tourbillonnaires serait également un outil intéressant à développer.

## RÉFÉRENCES

- Abdi, Daniel (2015). Gpu accelerated spectral element methods : 3d euler equations. *2015 AGU Fall Meeting*. Agu.
- Alonso, G and Meseguer, J and Pérez-Grande, I (2005). Galloping instabilities of two-dimensional triangular cross-section bodies. *Experiments in Fluids*, 38(6), 789–795.
- Alonso, G and Meseguer, J and Sanz-Andrés, A and Valero, E (2010). On the galloping instability of two-dimensional bodies having elliptical cross-sections. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 98(8), 438–448.
- Appelquist, Ellinor and Imayama, Shintaro and Alfredsson, P Henrik and Schlatter, Philipp and Lingwood, RJ (2016). Linear disturbances in the rotating-disk flow : A comparison between results from simulations, experiments and theory. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 55, 170–181.
- Babuska, Ivo and Aziz, Abdul K (1972). Lectures on mathematical foundations of the finite element method. Rapport technique, Maryland univ., College Park. Inst. for fluid dynamics and applied mathematics.
- Barrero-Gil, Antonio and Alonso, G and Sanz-Andres, A (2010). Energy harvesting from transverse galloping. *Journal of Sound and Vibration*, 329(14), 2873–2883.
- Barrero-Gil, A and Sanz-Andres, A and Roura, M (2009). Transverse galloping at low reynolds numbers. *Journal of Fluids and Structures*, 25(7), 1236–1242.
- Behara, Suresh and Mittal, Sanjay (2010). Wake transition in flow past a circular cylinder. *Physics of Fluids (1994-present)*, 22(11), 114104.
- Bénard, H (1908). Formation de centres de girationa l'arriere d'un obstacle en mouvement. *CR Acad. Sci. Paris*, 147, 839–842.
- Bernardi, Christine and Debit, Naïma and Maday, Yvon (1990). Coupling finite element and spectral methods : First results. *Mathematics of Computation*, 54(189), 21–39.
- Bernitsas, Michael M and Raghavan, Kamaldev and Ben-Simon, Y and Garcia, EM (2008). Vivace (vortex induced vibration aquatic clean energy) : A new concept in generation of clean and renewable energy from fluid flow. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 130(4), 041101.
- Robert D. Blevins (1990). *Flow-Induced Vibration (2nd edition)*. Krieger publishing company, Malabar,Florida.
- Boyd, John P (2001). *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Courier Corporation.

- Brezzi, Franco (1974). On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique*, 8(2), 129–151.
- Burton, D and Cao, DQ and Tucker, Robin W and Wang, C (2005). On the stability of stay cables under light wind and rain conditions. *Journal of sound and vibration*, 279(1), 89–117.
- Canuto, Claudio and Hussaini, M Yousuff and Quarteroni, Alfio Maria and Thomas Jr, A and others (2012). *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer Science & Business Media.
- Cimbala, John M and Nagib, Hassan M and Roshko, Anatol (1988). Large structure in the far wakes of two-dimensional bluff bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, 190, 265–298.
- Coutanceau, Madeleine and Bouard, Roger (1977). Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. part 1. steady flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 79(02), 231–256.
- Crouzeix, Michel and Raviart, P-A (1973). Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary stokes equations i. *Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Mathématique*, 7(3), 33–75.
- Den Hartog, Jacob Pieter (1985). *Mechanical vibrations*. Courier Corporation.
- Gouri Dhatt and Gilbert Touzot (1981). *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Éditeur Paris et Les Presses de l’Université Laval Québec 1981, France.
- Stéphane Etienne (1999). *Contribution à la modélisation de l’écoulement de fluide visqueux autour de faisceaux de cylindres circulaires*. Thèse de doctorat, Université de la méditerranée Aix-Marseille II, France.
- Finlayson, Bruce A (1974). Weighted residual methods and their relation to finite element methods in flow problems. *Finite element methods in flow problems*, 13–19.
- André Fortin and André Garon (2009). *Les éléments finis, de la théorie à la pratique*. GIREF Laval.
- Gottlieb, David and Orszag, Steven A and MA, Cambridge hydrodynamics INC (1977). *Numerical analysis of spectral methods*, vol. 2. SIAM.
- Greene, BE and Jones, RE and McLay, RW and Strome, DR (1969). Generalized variational principles in the finite-element method. *AIAA Journal*, 7(7), 1254–1260.
- Grove, A Shair and Shair, FH and Petersen, EE (1964). An experimental investigation of the steady separated flow past a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 19(01), 60–80.

- Hay, Alexander and Etienne, Stéphane and Pelletier, Dominique and Garon, André (2015). hp-adaptive time integration based on the bdf for viscous flows. *Journal of Computational Physics*, 291, 151–176.
- Henderson, Ronald D (1995). Details of the drag curve near the onset of vortex shedding. *Physics of Fluids (1994-present)*, 7(9), 2102–2104.
- Hong, Minwoo and Lee, Usik (2015). Dynamics of a functionally graded material axial bar : spectral element modeling and analysis. *Composites Part B : Engineering*, 69, 427–434.
- Ibarra, D and Sorribes, F and Alonso, G and Meseguer, J (2014). Transverse galloping of two-dimensional bodies having a rhombic cross-section. *Journal of Sound and Vibration*, 333(13), 2855–2865.
- Jackson, CP (1987). A finite-element study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, 182, 23–45.
- Johnson, SA and Thompson, MC and Hourigan, K (2001). Flow past elliptical cylinders at low reynolds numbers. *Proc. 14th Australasian Fluid Mechanics Conference, Adelaide University, South Australia, Dec*, 9–14.
- Joly, A and Etienne, S and Pelletier, D (2012). Galloping of square cylinders in cross-flow at low reynolds numbers. *Journal of Fluids and Structures*, 28, 232–243.
- Jung, Hyung-Jo and Lee, Seung-Woo (2011). The experimental validation of a new energy harvesting system based on the wake galloping phenomenon. *Smart Materials and Structures*, 20(5), 055022.
- Kalro, Vinay and Tezduyar, Tayfun (1997). Parallel 3d computation of unsteady flows around circular cylinders. *Parallel computing*, 23(9), 1235–1248.
- George EM Karniadakis and Spencer Sherwin (2005). *Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics (2nd edition)*. Oxford science publications, USA.
- Kumar, Bhaskar and Mittal, Sanjay (2006a). Effect of blockage on critical parameters for flow past a circular cylinder. *International journal for numerical methods in fluids*, 50(8), 987–1001.
- Kumar, Bhaskar and Mittal, Sanjay (2006b). Prediction of the critical reynolds number for flow past a circular cylinder. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(44), 6046–6058.
- Kumar, Bhaskar and Mittal, Sanjay (2012). On the origin of the secondary vortex street. *Journal of Fluid Mechanics*, 711, 641–666.
- Laroussi, Mouna and Djebbi, Mohamed and Moussa, Mahmoud (2014). Triggering vortex shedding for flow past circular cylinder by acting on initial conditions : A numerical study. *Computers & Fluids*, 101, 194–207.

- Lienhard, John H (1966). *Synopsis of lift, drag, and vortex frequency data for rigid circular cylinders*. Technical Extension Service, Washington State University.
- Mahariq, Ibrahim and Arpacı, Ibrahim and Kuzuoglu, Mustafa (2015a). Analysis of scattering from perfect electric conducting cylinders by spectral element method. *Computational Electromagnetics International Workshop (CEM), 2015*. IEEE, 1–2.
- Mahariq, I and Kurt, H and Kuzuoglu, M (2015b). Questioning degree of accuracy offered by the spectral element method in computational electromagnetics. *Applied Computational Electromagnetics Society Journal, 30*(7).
- Mao, Xuerui and Hogg, Simon (2014). Calculation of optimal surface roughness with respect to lift/drag forces acting on wind turbine blade. *ASME Turbo Expo 2014 : Turbine Technical Conference and Exposition*. American Society of Mechanical Engineers, V03BT46A006–V03BT46A006.
- Martin, Harold C (1968). Finite element analysis of fluid flows. Rapport technique, DTIC Document.
- Mittal, R and Balachandar, S (1997). On the inclusion of three-dimensional effects in simulations of two-dimensional bluff-body wake flows. *Symposium on separated and complex flows, ASME FED meeting, Vancouver*.
- Moulin, Adrien (2016). *Simulation numérique par la méthode des éléments spectraux des vibrations induites par relâcher tourbillonnaire*. Mémoire de maîtrise, École polytechnique de Montréal, Canada.
- Ng, JH and Jaiman, RK and Lim, TT (2016). Direct numerical simulations of riblets in a fully-developed turbulent channel flow : Effects of geometry. *Advances in Computation, Modeling and Control of Transitional and Turbulent Flows*. 155–165.
- Norberg, C (1994). An experimental investigation of the flow around a circular cylinder : influence of aspect ratio. *Journal of Fluid Mechanics, 258*, 287–316.
- Oden, J Tinsley (1970). Finite-element analogue of navier-stokes equation. *Journal of the Engineering Mechanics Division, 96*(4), 529–534.
- Ota, T and Nishiyama, H and Taoka, Y (1987). Flow around an elliptic cylinder in the critical reynolds number regime. *Journal of Fluids Engineering, 109*(2), 149–155.
- Pacciarini, Paolo and Gervasio, Paola and Quarteroni, Alfio (2016). Spectral based discontinuous galerkin reduced basis element method for parametrized stokes problems. *Computers & Mathematics with Applications*.
- Park, Ilwook and Lee, Usik and Park, Donghyun (2015). Transverse vibration of the thin plates : Frequency-domain spectral element modeling and analysis. *Mathematical Problems in Engineering, 2015*.

- Patera, Anthony T (1984). A spectral element method for fluid dynamics : laminar flow in a channel expansion. *Journal of computational Physics*, 54(3), 468–488.
- Gonçalo Pena (2009). *Spectral Element Approximation of the Incompressible Navier-Stokes Equations in a Moving Domain and Applications*. Mémoire de maîtrise, École polytechnique de Lausanne, Suisse.
- Peppa, Sofia and Kaiktsis, Lambros and Triantafyllou, George S (2016). Hydrodynamic forces and flow structures in flow past a cylinder forced to vibrate transversely and inline to a steady flow. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 138(1), 011803.
- Peppa, Sofia and Triantafyllou, George S (2016). Sensitivity of two-dimensional flow past transversely oscillating cylinder to streamwise cylinder oscillations. *Physics of Fluids (1994-present)*, 28(3), 037102.
- Peter, D. and Videau, B. and Pouget, K. and Komatitsch, D. (2015). Forward and adjoint spectral-element simulations of seismic wave propagation using hardware accelerators. *EGU General Assembly Conference Abstracts*. vol. 17 de *EGU General Assembly Conference Abstracts*, 13875.
- C. Pozrikidis (2005). *Introduction to Finite and Spectral Element Methods using Matlab*. Chapman & Hall CRC, USA.
- Pulipaka, Narendra and Sarkar, Partha P and McDonald, James R (1998). On galloping vibration of traffic signal structures. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 77, 327–336.
- Rajani, BN and Kandasamy, A and Majumdar, Sekhar (2009). Numerical simulation of laminar flow past a circular cylinder. *Applied Mathematical Modelling*, 33(3), 1228–1247.
- Reddy, Junuthula Narasimha (1993). *An introduction to the finite element method*, vol. 2. McGraw-Hill New York.
- Ritz, W (1908). Ueber eine neue methode zur loesung gewisser variationsprobleme der mathematischen pliysik. *Jour. Reine Angew. Math.*, -135.
- Patrick J. Roache (1998). *Verification and validation in computational science and engineering*. Hermosa publishers, USA.
- Robertson, I and Li, L and Sherwin, SJ and Bearman, PW (2003a). A numerical study of rotational and transverse galloping rectangular bodies. *Journal of Fluids and Structures*, 17(5), 681–699.
- Robertson, I and Sherwin, SJ and Bearman, PW (2003b). Prediction of rotational instabilities of rectangular and semi-circular leading edge sections. *Flow, turbulence and combustion*, 71(1-4), 93–103.

- Scanlan, RH (1979). On the state of stability considerations for suspended-span bridges under wind. *Proceedings IUTAM-IAHR Symposium*, 595.
- Sébastien, Terrana (2015). New high-order, semi-implicit hybridized discontinuous galerkin-spectral element method (hdg-sem) for simulation of complex wave propagation involving coupling between seismic, hydro-acoustic and infrasonic waves : numerical analysis and case studies. *2015 AGU Fall Meeting*. Agu.
- Serson, D and Meneghini, JR and Carmo, BS and Volpe, EV and Assi, GRS (2015). Numerical study of the flow around a circular cylinder with dual parallel splitter plates. *Instability and Control of Massively Separated Flows*, Springer. 169–174.
- Maryam Zabarjad Shiraz (2014). *Determination of galloping for non circular cross-section cylinders*. Mémoire de maîtrise, École polytechnique de Montréal, Canada.
- Strouhal, Vincenz (1878). Über eine besondere art der tonerregung. *Annalen der Physik*, 241(10), 216–251.
- Taneda, Sadatoshi (1956). Experimental investigation of the wakes behind cylinders and plates at low reynolds numbers. *Journal of the Physical Society of Japan*, 11(3), 302–307.
- Taylor, Cedric and Hood, P (1973). A numerical solution of the navier-stokes equations using the finite element technique. *Computers & Fluids*, 1(1), 73–100.
- Thompson, Mark C and Radi, Alexander and Rao, Anirudh and Sheridan, John and Houigan, Kerry (2014). Low-reynolds-number wakes of elliptical cylinders : from the circular cylinder to the normal flat plate. *Journal of Fluid Mechanics*, 751, 570–600.
- David Trebotich (2014). High resolution simulation of karman vortex street in 2d flow past a cylinder. 67th Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics (November 23, 2014 — November 25, 2014).
- Turner, MJ and Clough, RW and Martin, HC and Topp, LJ (1956). Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of Aeronautical Sciences*, 23(9), 805–823.
- Von Karman, Th (1911). Über den mechanismus des widerstandes, den ein bewegter körper in einer flüssigkeit erfährt. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1911, 509–517.
- Von Kármán, TH (1931). Mechanical similitude and turbulence. Rapport technique, National Advisory Committee on Aeronautics.
- Wang, ZJ (2014). High-order computational fluid dynamics tools for aircraft design. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 372(2022), 20130318.

- Wen, C-Y and Lin, C-Y (2001). Two-dimensional vortex shedding of a circular cylinder. *Physics of Fluids (1994-present)*, 13(3), 557–560.
- Weymouth, GD (2014). Chaotic rotation of a towed elliptical cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 743, 385–398.
- Frank M. White (2011). *Fluid mechanics (7th edition)*. McGrawHill.
- Whiteman, John Robert (1973). *The mathematics of finite elements and applications*. IMA.
- Zdravkovich, MM (1997). Flow around circular cylinders ; vol. i fundamentals. *Journal of Fluid Mechanics*, 350(1), 377–378.
- Zhao, Yanqing and Cao, Dandan and Chen, Peisong (2015). Dynamic backcalculation of asphalt pavement layer properties using spectral element method. *Road Materials and Pavement Design*, 16(4), 870–888.

## ANNEXE A GÉOMÉTRIES TRAITÉES

Cette annexe regroupe les fiches techniques sur les différentes géométries traitées, on donne les domaines et maillages utilisés lors des simulations, les études de convergence sur les maillages et les interpolants choisis, ainsi que les résultats pour les valeurs des efforts moyens. Les analyses de stabilité ne seront pas détaillées, on réfère au Chapitre 6 pour plus de détails sur la démarche de calcul et pour l'analyse des données.

### A.1 Plaque plane

#### A.1.1 Géométrie et maillage

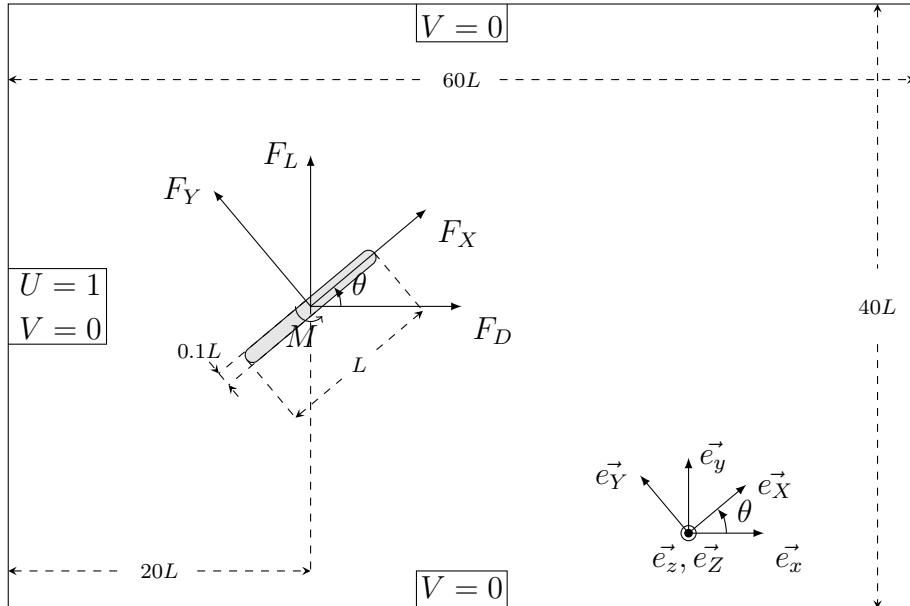


Figure A.1 Géométrie et conditions limites du problème - Plaque plane.

La deuxième géométrie traitée est une plaque plane d'épaisseur égale à 0.1 fois sa longueur, la longueur de référence  $L$  correspond à la longueur de la plaque. Les extrémités de la plaque sont constituées de demi-cercles, l'influence de ce choix au lieu de bords à angle droit ne sera pas étudiée, mais il est possible que les résultats diffèrent entre les deux cas, voir Robertson *et al.* (2003b). La géométrie du problème est présentée à la figure A.1, les conditions limites sont les mêmes que celles utilisées précédemment.

Le maillage utilisé est présenté à la figure A.2, les fonctions utilisées sont les mêmes que celles

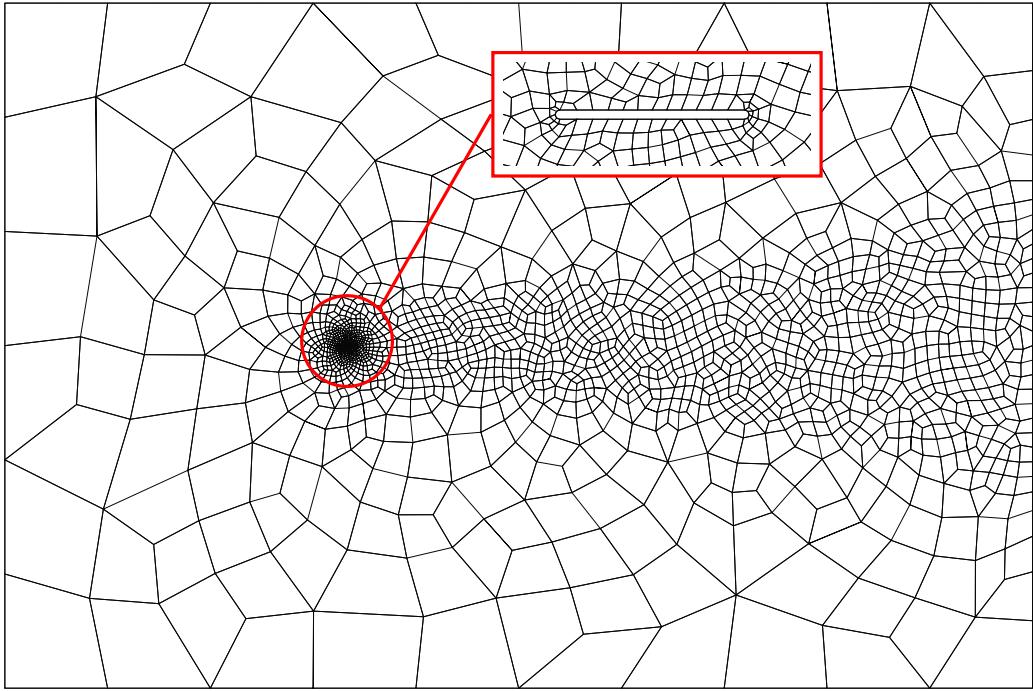


Figure A.2 Maillage utilisé pour la plaque plane à  $\theta = 0^\circ$ .

présentées pour l'ellipse. Ce maillage est constitué d'environ 1700 quadrangles.

### A.1.2 Convergence

Les différentes études de convergence sont réalisées au nombre de Reynolds maximum étudié pour la plaque plane soit  $R_e = 200$  .

Tableau A.1 Convergence en ordre sur le maillage de la figure A.2 à  $\theta = 90^\circ$ .

Degré des interpolants	$\langle M \rangle$	$\langle F_D \rangle$	$\langle F_L \rangle$	$\epsilon_{moyen}$
Q3Q2	0,000052	1,344330	0,000094	0,001244
Q4Q3	-0,000013	1,346030	-0,000015	0,000784
Q5Q4	-0,000009	1,349167	0,000006	-

La convergence en ordre des interpolants est étudiée et présentée au tableau A.1. Les Q4Q3 seront utilisés pour la suite des calculs, ces derniers présentant une erreur moyenne inférieure à 0.1 pourcent avec la solution la plus précise.

La convergence pour ces interpolants est alors étudiée en raffinant le maillage, les résultats

sont présentés au tableau A.2.

Tableau A.2 Convergence pour la plaque plane pour les interpolants Q4Q3.

Taille des éléments	$\langle M \rangle$	$\langle F_D \rangle$	$\langle F_L \rangle$	$\epsilon_{moyen}$
$Q4Q3 - h$	-0,000013	1,346030	-0,000015	0,000198
$Q4Q3 - h/2$	0,000043	1,346207	0,000010	0,000162
$Q4Q3 - h/4$	0,000013	1,346792	0,000012	-

Le maillage initial présente une erreur moyenne inférieure à 0.05 pourcent par rapport au maillage raffiné deux fois, il sera donc utilisé pour le reste de l'étude.

### A.1.3 Résultats

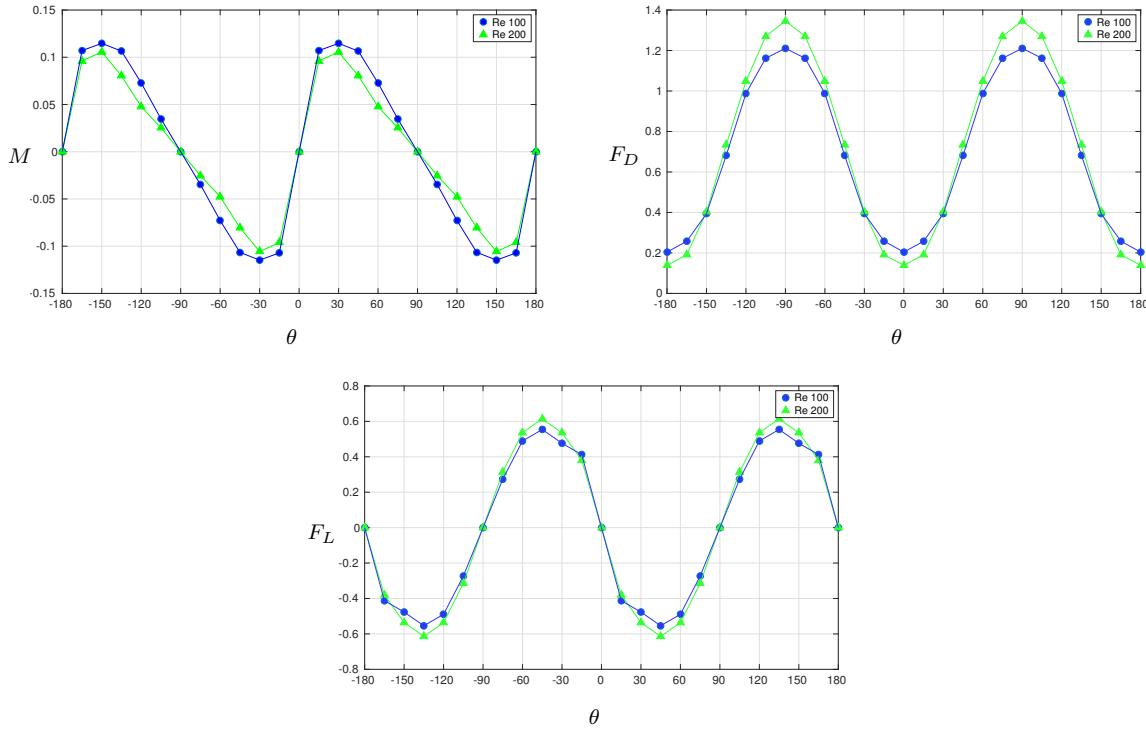


Figure A.3 Valeurs moyennes des efforts en fonction de l'angle  $\theta$  pour  $R_e = [100, 200]$  - Plaque plane.

L'évolution des efforts en fonction de l'angle semble suivre la même tendance que celle de l'ellipse, ce qui semble logique du fait de la similarité entre les deux géométries .

## A.2 Cinq cylindres

Cette géométrie représente une section d'un faisceau de cinq cylindres, souvent utilisé comme riser dans l'off-shore pétrolier. La géométrie du problème ainsi que les conditions limites sont présentées à la figure A.4. Le maillage utilise cinq répartitions exponentielles pour capturer les couches limites des cylindres (voir chapitre 6), il est présenté à la figure A.5.

### A.2.1 Géométrie et maillage

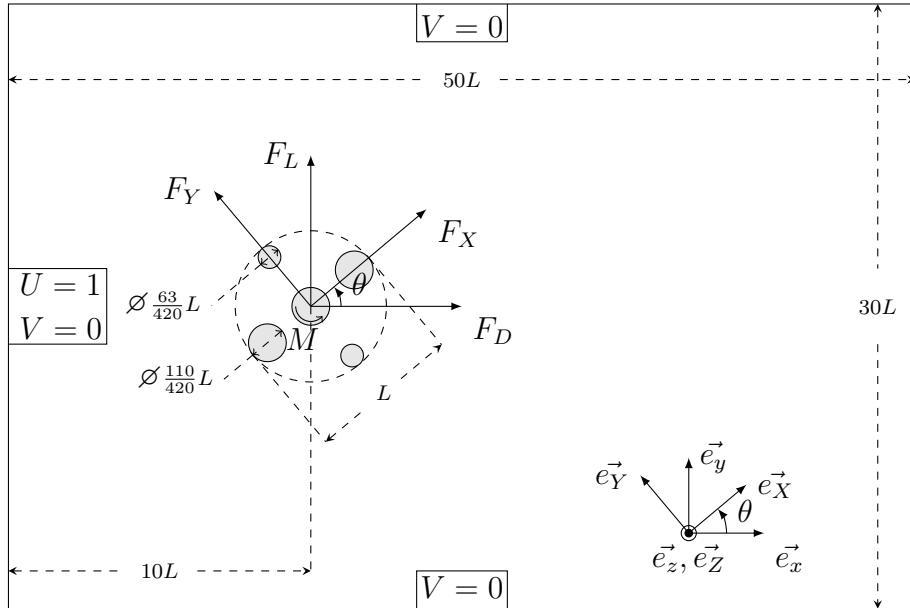


Figure A.4 Géométrie et conditions limites du problème - Cinq cylindres.

### A.2.2 Convergence

Tableau A.3 Convergence en ordre sur le maillage de la figure A.5 à  $\theta = 90^\circ$ .

Degré des interpolants	$\langle M \rangle$	$\langle F_D \rangle$	$\langle F_L \rangle$	$\epsilon_{moyen}$
Q2Q1	0,000070	0,633338	0,000109	0,000403
Q3Q2	0,000012	0,632788	0,000013	0,000061
Q4Q3	-0,000001	0,632687	-0,000001	-

La convergence en ordre des interpolants est étudiée et présentée au tableau A.3. Les Q3Q2 seront utilisés pour la suite des calculs, ces derniers présentant une erreur moyenne inférieure à 0.1 pourcent avec la solution la plus précise.

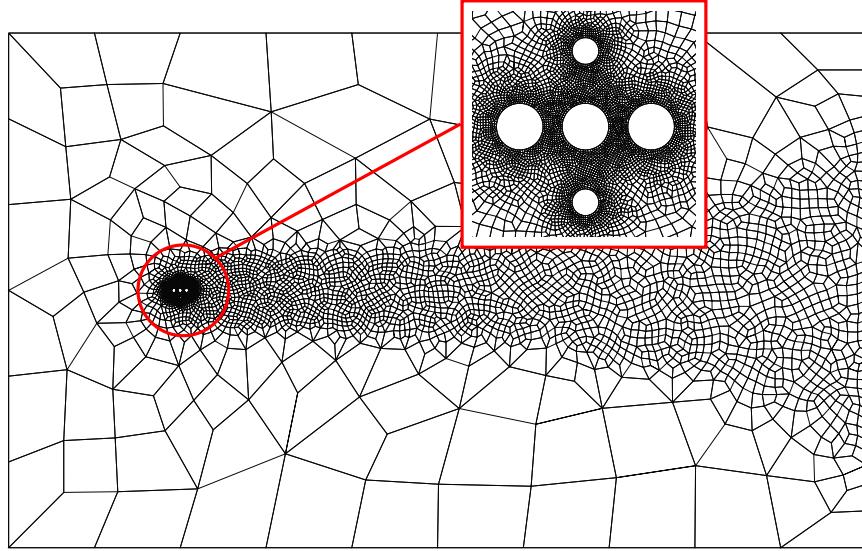


Figure A.5 Maillage utilisé pour les cinq cylindres à  $\theta = 0^\circ$ .

La convergence pour ces interpolants est alors étudiée en raffinant le maillage. Les résultats sont présentés au tableau A.4.

Tableau A.4 Convergence pour les cinq cylindres pour les interpolants Q3Q2.

Taille des éléments	$< M >$	$< F_D >$	$< F_L >$	$\epsilon_{moyen}$
$Q3Q2 - h$	0,000012	0,632788	0,000013	0,000054
$Q3Q2 - h/2$	0,000002	0,632703	0,000002	0,000002
$Q3Q2 - h/4$	0,000000	0,632701	0,000000	-

Le maillage initial est retenu, ce dernier présentant une erreur moyenne sur les valeurs moyennes des efforts inférieure à 0.01 pourcent avec la solution obtenue pour un maillage deux fois raffiné.

### A.2.3 Résultats

#### Valeurs moyennes

On constate une influence importante du nombre de Reynolds sur les valeurs moyennes des efforts pour cette géométrie. En effet, l'augmentation du nombre de Reynolds semble faire décroître les valeurs moyennes absolues des efforts, les écarts les plus importants se situant aux alentours des 90 degrés pour la traînée, et de 45 degrés pour la portance et le moment. On remarque également que l'augmentation du Reynolds a tendance à faire chuter le moment

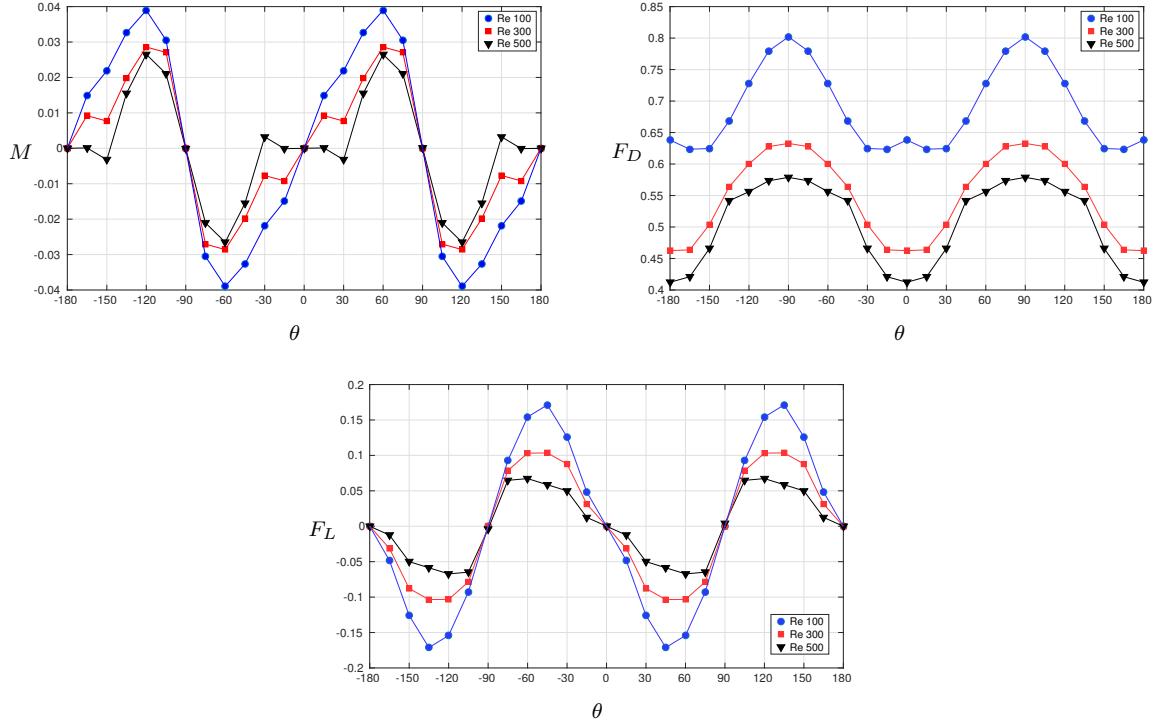


Figure A.6 Valeurs moyennes du moment, des forces de traînée et de portance en fonction de l’angle  $\theta$  pour  $R_e = [100, 300, 500]$  - Cinq cylindres.

moyen entre 0 et 30 degrés, allant jusqu’à créer une pente négative à  $R_e = 500$  (synonyme de possibilité de galop en rotation).

### A.3 Caisson de flottaison

Cette géométrie représente une section de caisson de flottaison permettant la mise en tension des risers, elle a été commanditée par un industriel. Ce dernier a proposé de travailler sur une géométrie simplifiée de la section ; nous avons effectué les simulations sur les deux cas, la géométrie réelle et la géométrie simplifiée, afin d’étudier l’influence de l’approximation. Les deux géométries sont représentées à la figure A.7 et les maillages aux figures A.8 et A.9.

#### A.3.1 Géométrie et maillage

#### A.3.2 Convergence

La convergence en ordre des interpolants est étudiée et présentée au tableau A.5. Les Q3Q2 seront utilisés pour la suite des calculs, ces derniers présentant une erreur moyenne inférieure à 0.6 pourcent avec la solution la plus précise.

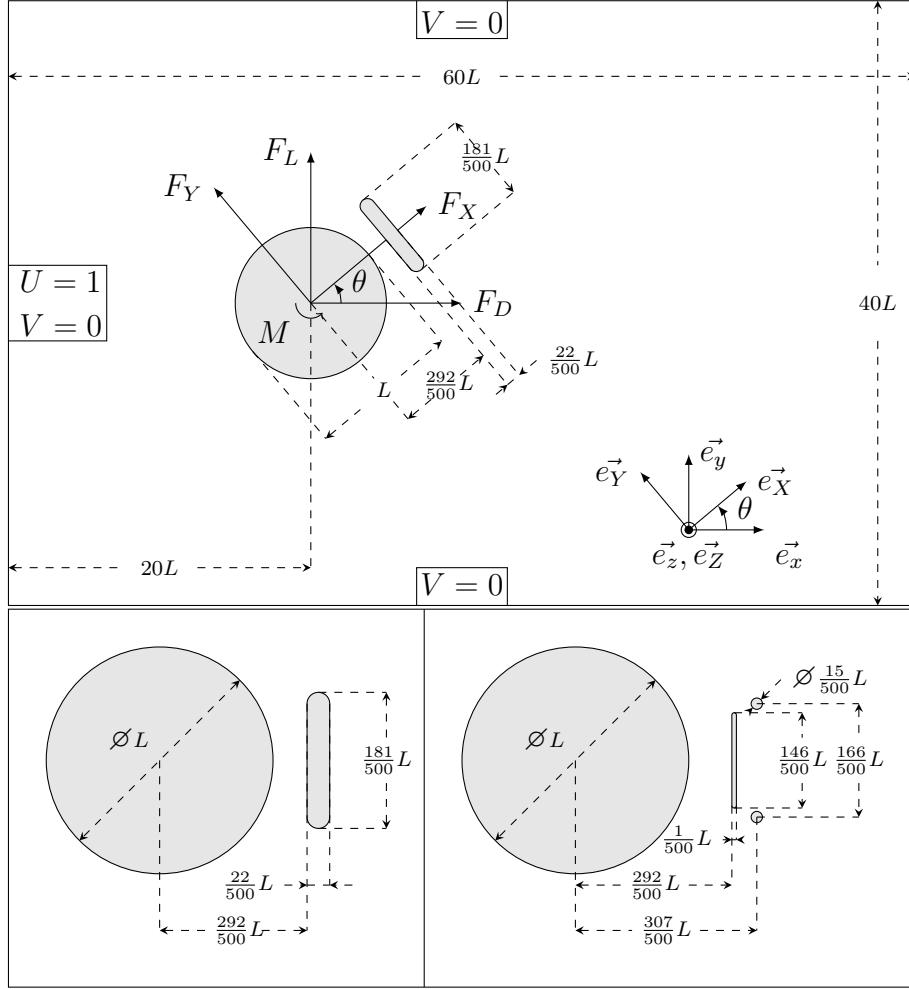


Figure A.7 Géométrie et conditions limites du problème (en haut), comparaison entre la géométrie approximée et la géométrie réelle (en bas) - Caisson de flottaison.

Tableau A.5 Convergence en ordre sur le maillage de la figure A.8 à  $\theta = 90^\circ$ .

Degré des interpolants	$\langle M \rangle$	$\langle F_D \rangle$	$\langle F_L \rangle$	$\epsilon_{moyen}$
Q2Q1	-0,039793	0,894649	-0,145796	0,005788
Q3Q2	-0,040131	0,899650	-0,144533	0,001781
Q4Q3	-0,040068	0,899144	-0,145011	0,000307
Q5Q4	-0,040059	0,898978	-0,144939	-

La convergence pour ces interpolants est alors étudiée en raffinant le maillage, les résultats sont présentés au tableau A.6. On commet une erreur inférieure à 0.2 pourcent avec le maillage initial.

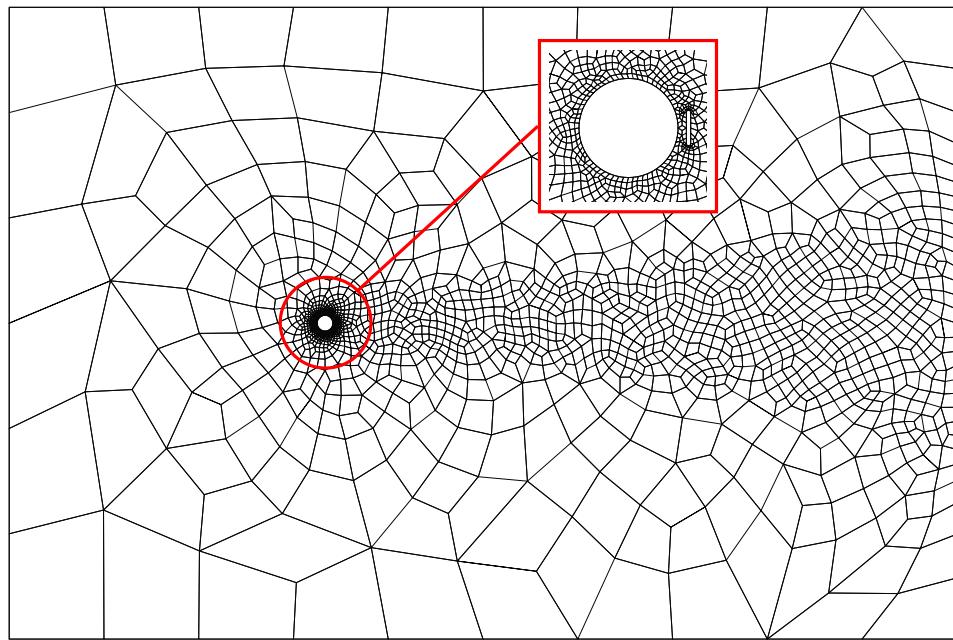


Figure A.8 Maillage utilisé pour la géométrie approximée à  $\theta = 0^\circ$

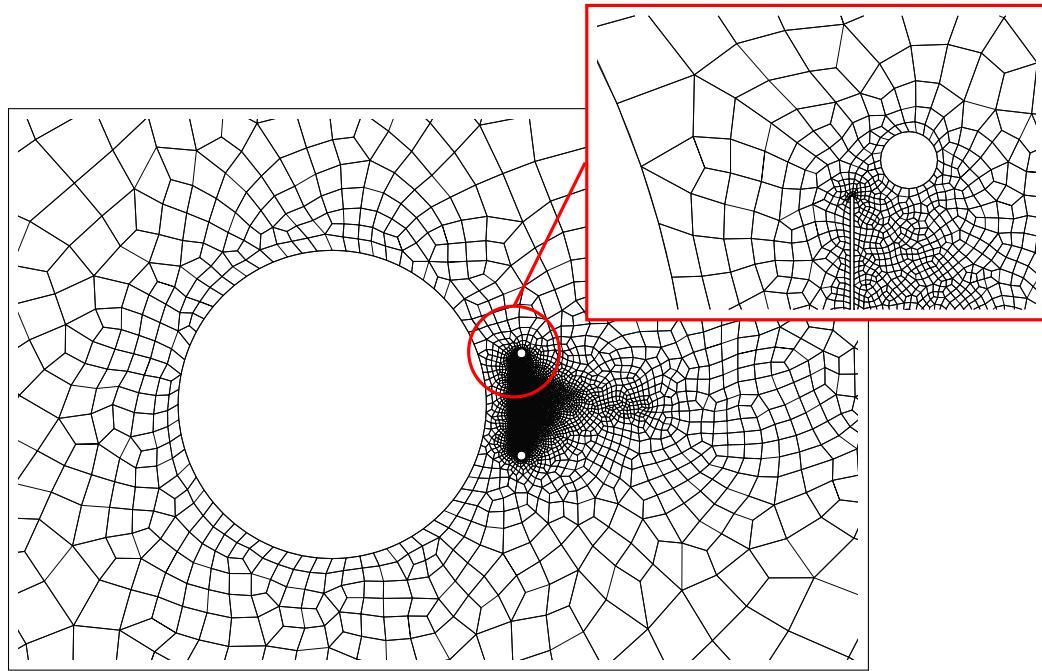


Figure A.9 Maillage utilisé pour la géométrie réelle à  $\theta = 0^\circ$ .

Tableau A.6 Convergence pour le caisson de flottaison (géométrie approximée) pour les interpolants Q3Q2.

Taille des éléments	$\langle M \rangle$	$\langle F_D \rangle$	$\langle F_L \rangle$	$\epsilon_{moyen}$
$Q3Q2 - h$	-0,040131	0,899650	-0,144533	0,001786
$Q3Q2 - h/2$	-0,040064	0,898997	-0,145133	0,000447
$Q3Q2 - h/4$	-0,040061	0,898978	-0,144950	-

### A.3.3 Résultats

Pour cette géométrie, on s'intéresse aux écarts de valeurs entre les géométries réelle et approximée à Reynolds 200 tel que requis par l'industriel.

#### Valeurs moyennes

On constate que l'approximation de la géométrie engendre un écart non négligeable sur les valeurs des efforts avec la géométrie réelle, surtout entre 60 et 155 degrés, là où la zone approximée est le plus exposée à l'écoulement. L'erreur relative commise peut monter jusqu'à 50 pourcent pour la portance. On donne également les courbes des efforts dans le repère relatif à la géométrie, ces dernières ayant été demandées par l'industriel.

## A.4 Flatpack

### A.4.1 Géométrie et maillage

Cette géométrie a elle aussi été commanditée par un industriel. Elle est représentée à la figure A.11, le maillage utilisé est représenté à la figure A.12.

### A.4.2 Convergence

Tableau A.7 Convergence en ordre sur le maillage de la figure A.12 à  $\theta = 90^\circ$ .

Degré des interpolants	$\langle M \rangle$	$\langle F_D \rangle$	$\langle F_L \rangle$	$\epsilon_{moyen}$
Q3Q2	0,000275	0,986787	0,000866	0,001466
Q4Q3	-0,000083	0,989065	0,000100	0,000379
Q5Q4	-0,000025	0,990011	-0,000453	-

La convergence en ordre des interpolants est présentée au tableau A.7. Les Q4Q3 seront utilisés pour la suite des calculs, ces derniers présentant une erreur moyenne inférieure à 0.2 pourcent avec la solution la plus précise.

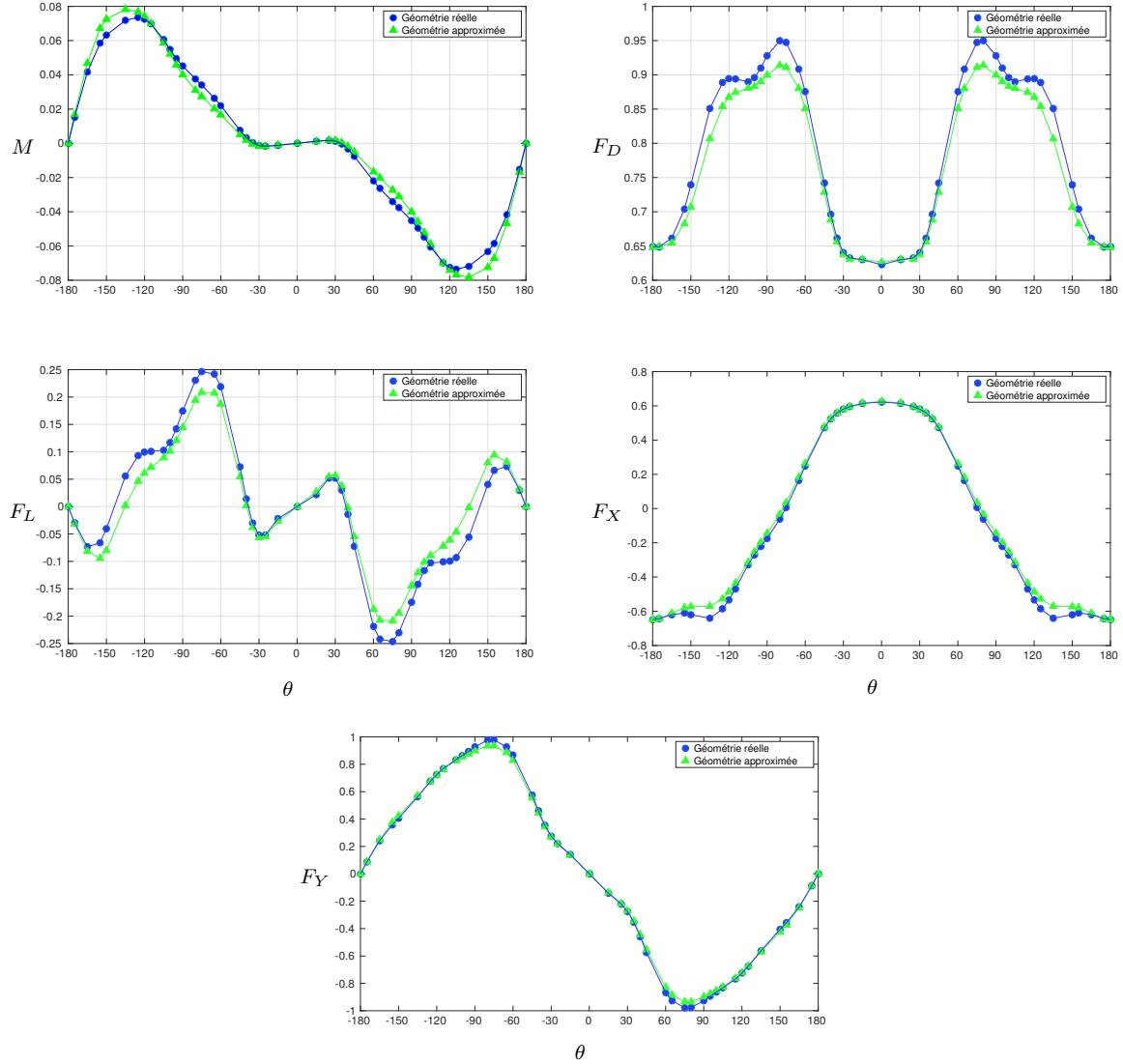


Figure A.10 Valeurs moyennes des efforts en fonction de l'angle  $\theta$  à  $R_e = 200$  pour les géométries réelle et approximée - Caisson de flottaison.

La convergence pour ces interpolants est alors étudiée en raffinant le maillage, les résultats sont présentés au tableau A.8, le maillage initial présentant une erreur inférieure à 0.2 pourcent sur les efforts moyens.

Tableau A.8 Convergence pour le flatpack pour les interpolants Q4Q3.

Taille des éléments	$\langle M \rangle$	$\langle F_D \rangle$	$\langle F_L \rangle$	$\epsilon_{moyen}$
$Q4Q3 - h$	0,000275	0,986787	0,000866	0,001356
$Q4Q3 - h/2$	-0,000194	0,988521	0,000038	0,000469
$Q4Q3 - h/4$	0,000234	0,989683	-0,000092	-

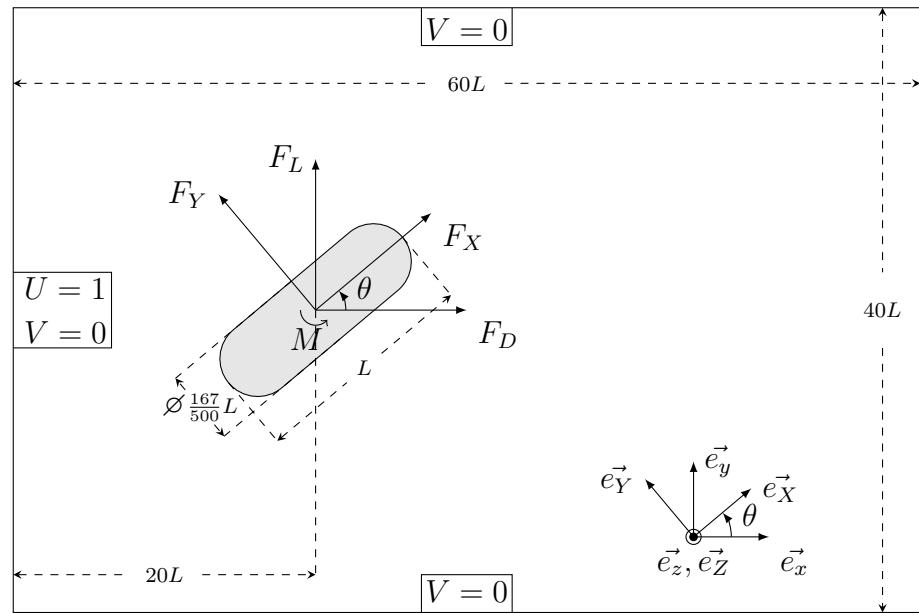


Figure A.11 Géométrie et conditions limites du problème - Flatpack.

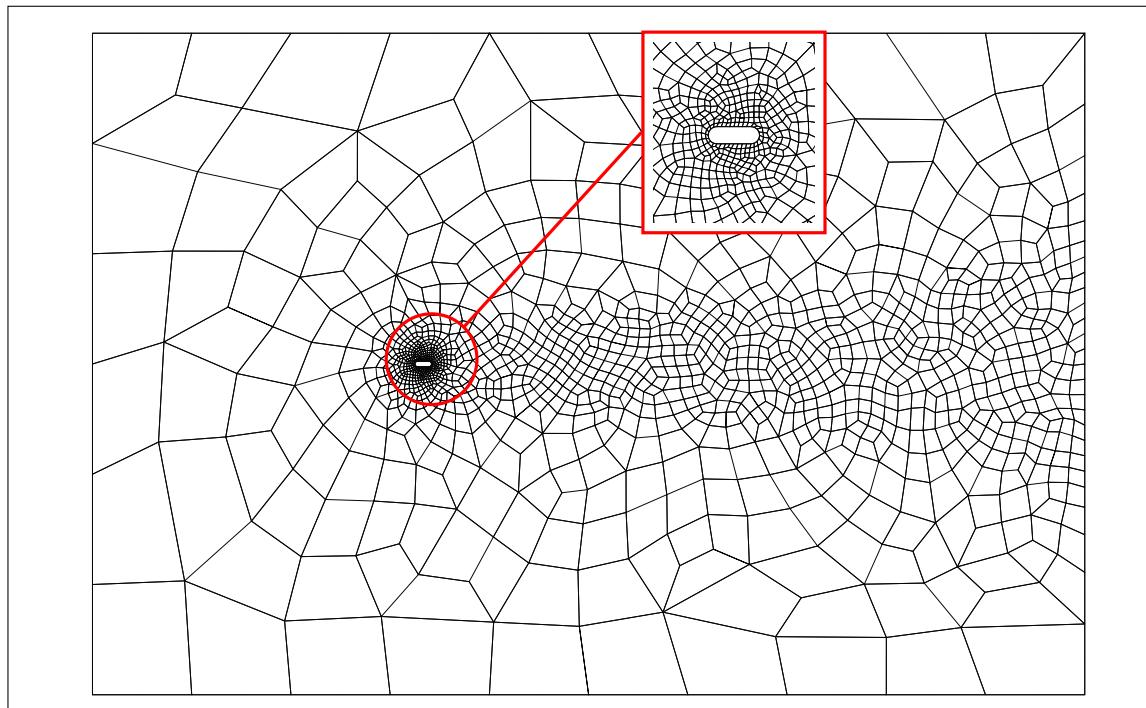


Figure A.12 Maillage utilisé pour le flatpack à  $\theta = 0^\circ$ .

### A.4.3 Résultats

On a ici aussi réalisé l'étude à  $R_e = 200$ , à la demande de l'industriel. Les efforts moyens sont présentés à la figure A.13. On obtient un comportement assez similaire à celui de la plaque plane, ce qui semble logique. On notera néanmoins qu'à nombre de Reynolds égaux, les valeurs maximales et minimales de portance et de moment sont moins élevées pour le flatpack. Une courbe supplémentaire est également fournie, donnant l'évolution du moment en fonction de la position du point de pivot. La distance entre le point de pivot et le centre de la géométrie (point de pivot en amont) est notée  $r$ . On constate qu'en décalant le point de pivot, la pente du moment devient entièrement négative de -120 à 120 degrés. On peut donc avoir apparition de galop en rotation sur toute cette plage d'angle. On note également que l'amplitude du moment augmente lorsque le point de pivot s'éloigne du centre, ce qui est logique puisque le bras de levier augmente. Enfin, on fera remarquer que le moment maximal se situe environ à 115 degrés à  $r = 0.5$ , ce qui est intéressant puisque le point de pivot étant au bord de la géométrie on pourrait imaginer que le moment maximal serait obtenu lorsque la section apparente est la plus importante, soit à 90 degrés.

## A.5 Section de riser

### A.5.1 Géométrie et maillage

La dernière géométrie traitée représente une section de riser utilisée dans l'industrie off-shore, elle est représentée à la figure A.14. La géométrie étant très élancée, le maillage utilisé permet d'adapter la largeur du sillage en fonction de l'angle étudié. On donne les deux cas extrêmes à 0 et 90 degrés aux figures A.15 et A.16.

### A.5.2 Convergence

Tableau A.9 Convergence en ordre sur le maillage de la figure A.15 à  $\theta = 90^\circ$ .

Degré des interpolants	$\langle M \rangle$	$\langle F_D \rangle$	$\langle F_L \rangle$	$\epsilon_{moyen}$
Q3Q2	0,152626	1,409910	-0,001488	0,002033
Q4Q3	0,152745	1,404355	-0,001715	0,000707
Q5Q4	0,152767	1,404723	0,002251	-

La convergence en ordre des interpolants est présentée au tableau A.9. Les Q3Q2 seront utilisés pour la suite des calculs, ces derniers présentant une erreur moyenne inférieure à 0.3 pourcent avec la solution la plus précise.

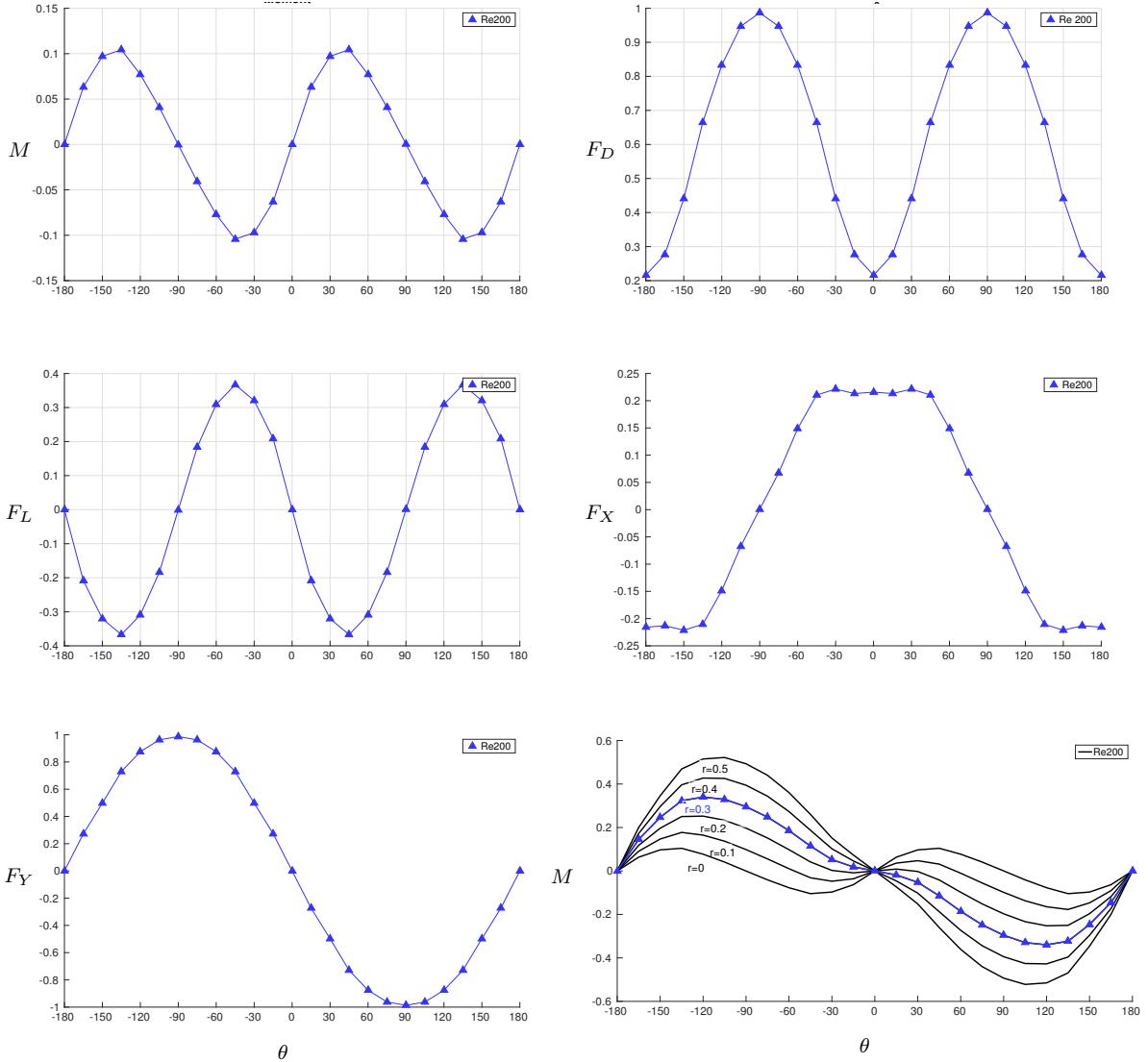


Figure A.13 Valeurs moyennes des efforts en fonction de l'angle  $\theta$  à  $R_e = 200$  - Flatpack.

La convergence pour ces interpolants est alors étudiée en raffinant le maillage, les résultats sont présentés au tableau A.10. On obtient une erreur sur les efforts moyens inférieure à 0.2 pourcent avec le maillage initial.

Tableau A.10 Convergence pour la section de riser pour les interpolants Q3Q2

Taille des éléments	$\langle M \rangle$	$\langle F_D \rangle$	$\langle F_L \rangle$	$\epsilon_{moyen}$
$Q3Q2 - h$	0,152626	1,409910	-0,001488	0,001882
$Q3Q2 - h/2$	0,152705	1,404579	0,000820	0,000324
$Q3Q2 - h/4$	0,152689	1,404651	0,000833	-

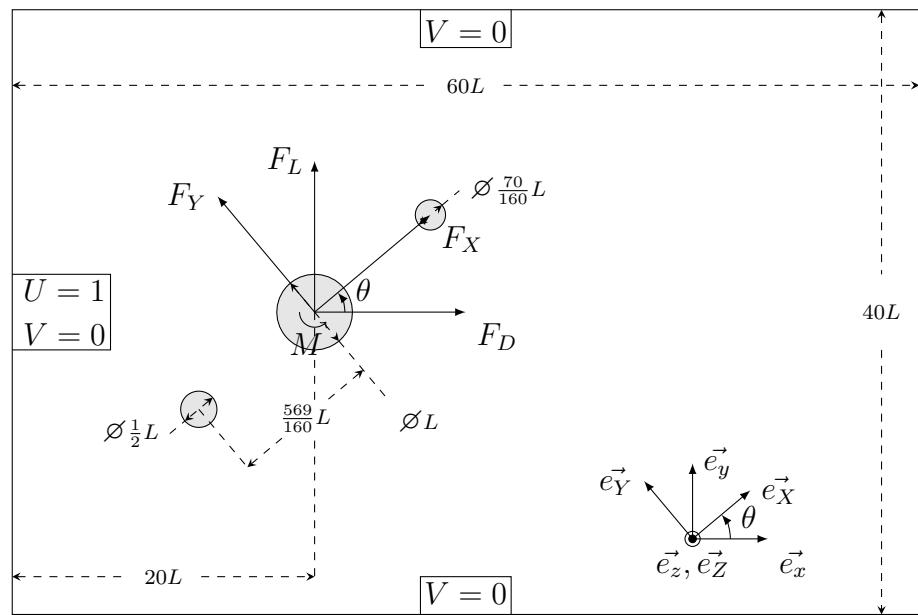


Figure A.14 Géométrie et conditions limites du problème - Section de riser.

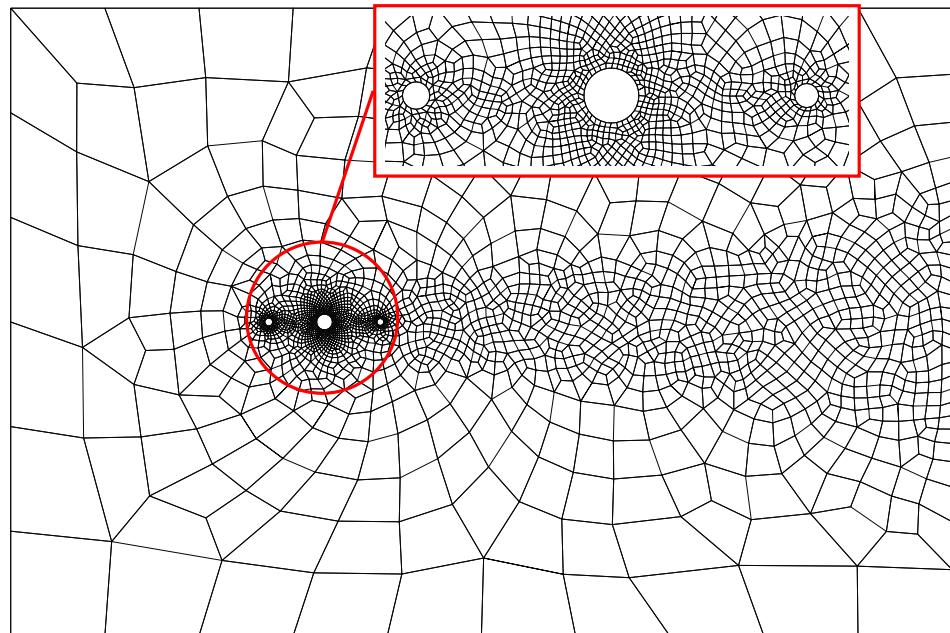


Figure A.15 Maillage utilisé pour l'ellipse à  $\theta = 0^\circ$ .

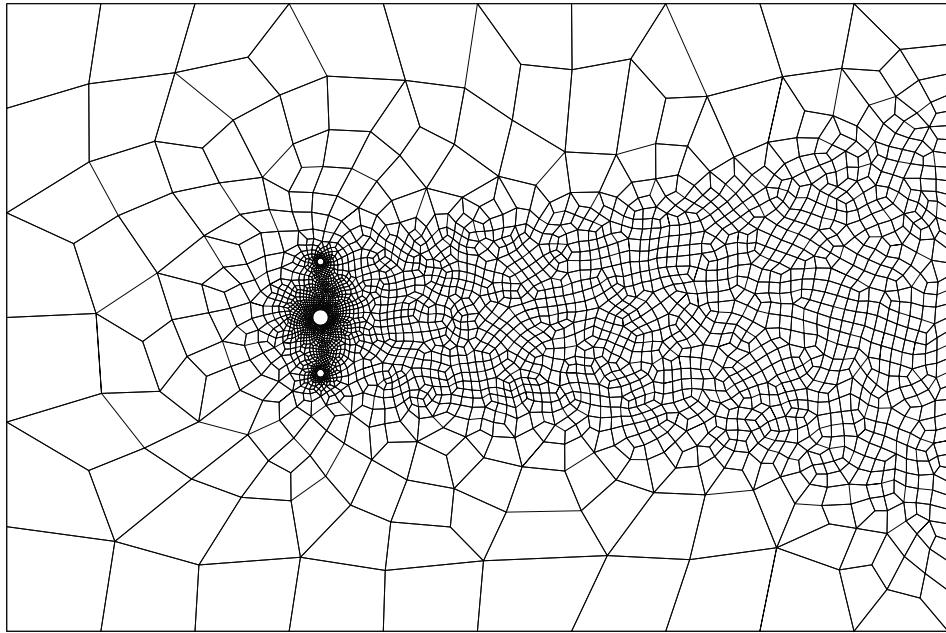


Figure A.16 Maillage utilisé pour l'ellipse à  $\theta = 90^\circ$ .

### A.5.3 Résultats

Les efforts moyens à  $R_e = 200$  sont présentés à la figure A.17. Cette géométrie a été étudiée pour de nombreuses valeurs d'angle du fait du comportement singulier de la solution aux alentours de 0 degré. En effet, on constate que la portance et le moment présentent des oscillations importantes aux alentours de cette zone, ce phénomène est probablement dû aux interactions entre les différents lâchers tourbillonnaires et les cylindres, puisqu'il disparaît lorsque l'angle est assez important pour que les cylindres n'interagissent plus entre eux (vers 30 degrés). Il apparaît clairement qu'il serait ici nécessaire d'effectuer des simulations en interaction fluide-structure, pour avoir une idée plus précise du comportement dynamique de la section de riser.

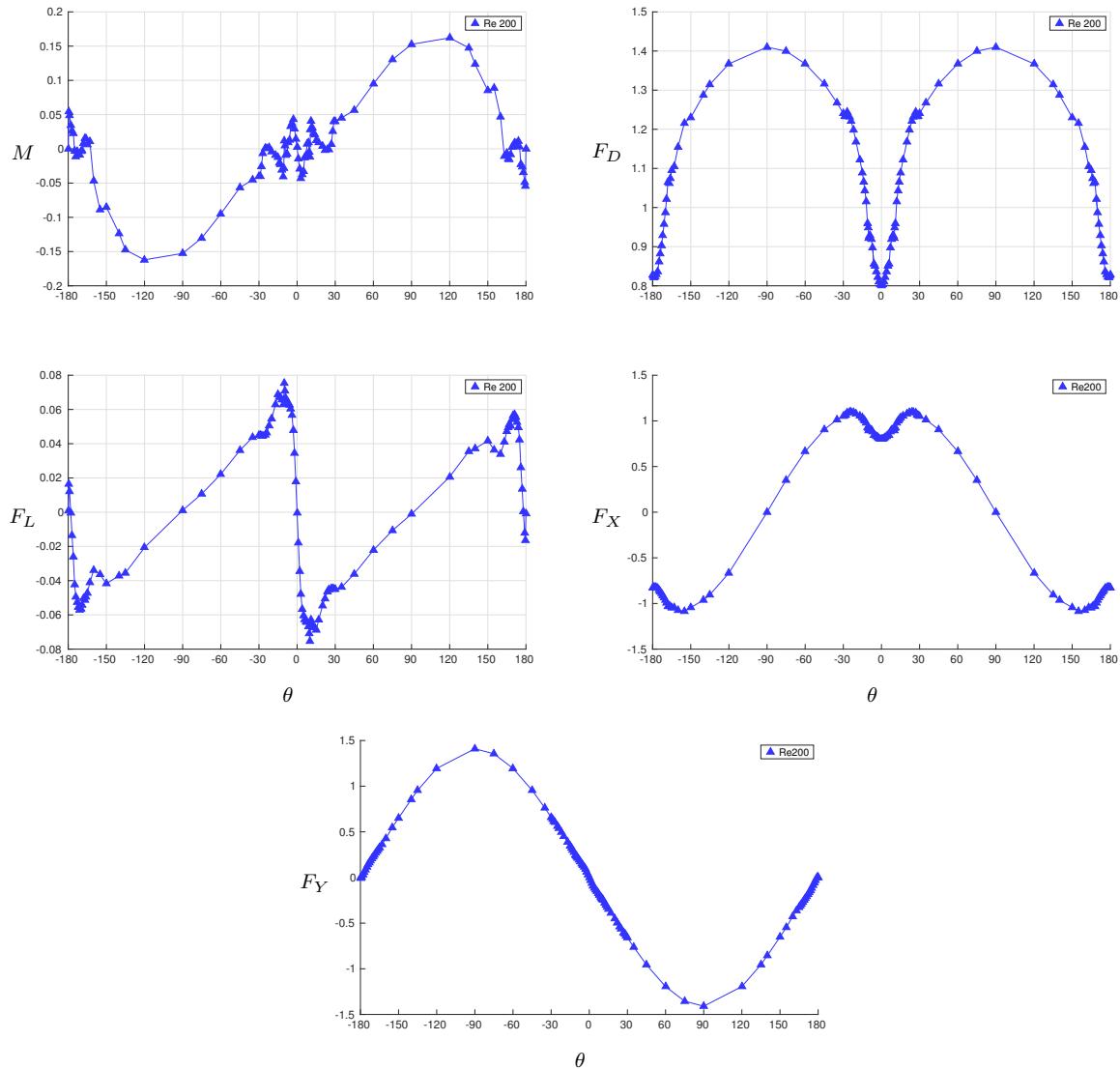


Figure A.17 Valeurs moyennes des efforts en fonction de l'angle  $\theta$  à  $R_e = 200$  - Section de riser.

## ANNEXE B NOMBRES DE STROUHAL

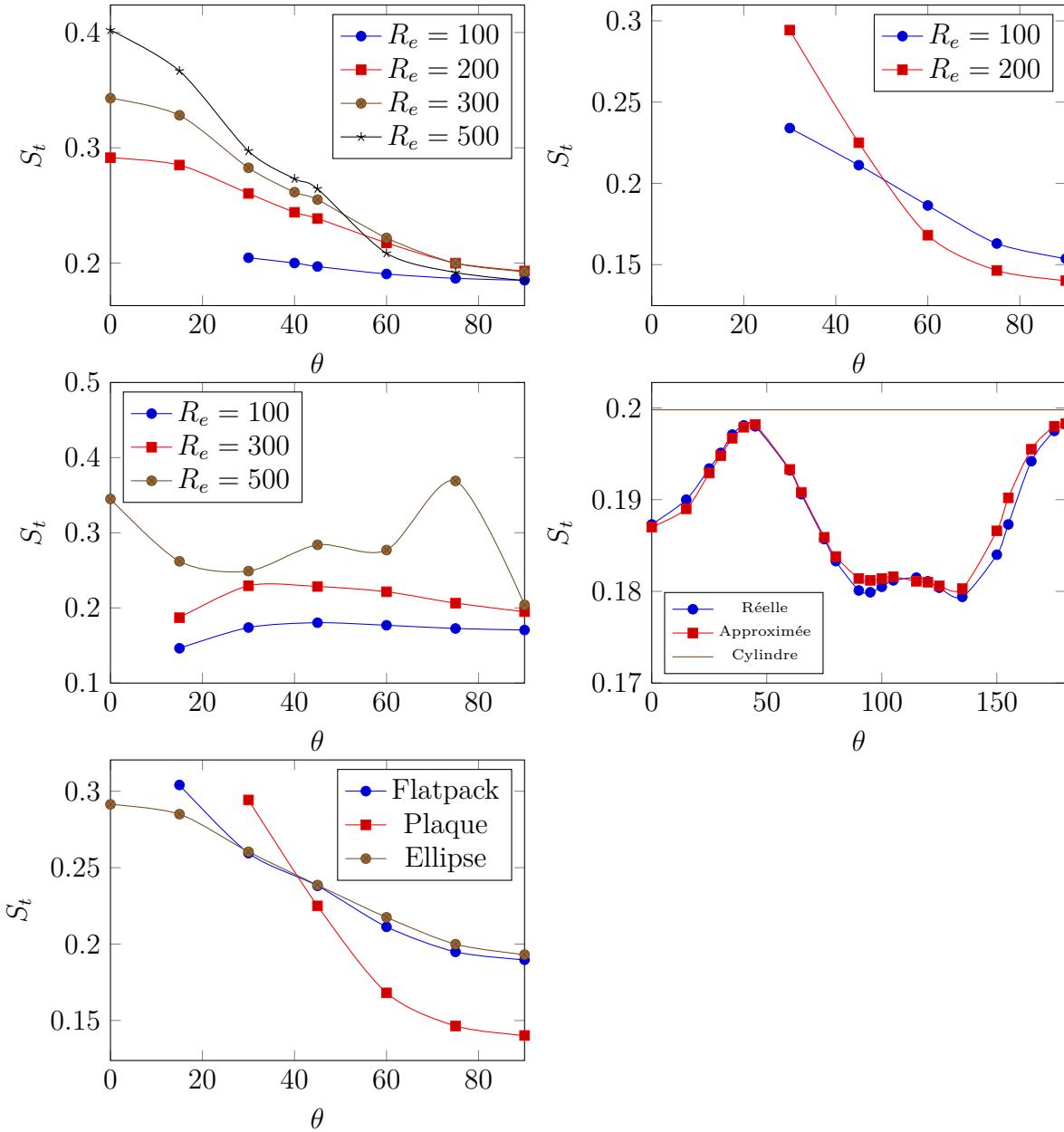


Figure B.1 Évolution du nombre de Strouhal en fonction de l'angle d'attaque - Ellipse (en haut, à gauche), Plaque plane (en haut, à droite), Cinq cylindres (au milieu, à gauche), Caisson de flottaison et cylindre circulaire à  $R_e = 200$  (au milieu, à droite) et Comparaison entre le flatpack, la plaque plane et l'ellipse à  $R_e = 200$  (en bas).