

Titre: Optimisation de l'indice du coût pour la minimisation du coût total
Title: d'un vol commercial

Auteur: Mootez Ben Nasr
Author:

Date: 2015

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Ben Nasr, M. (2015). Optimisation de l'indice du coût pour la minimisation du coût total d'un vol commercial [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/2015/>
Citation:

Document en libre accès dans PolyPublie Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/2015/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Antoine Saucier, & François Soumis
Advisors:

Programme: Maîtrise en mathématiques appliquées
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

OPTIMISATION DE L'INDICE DU COÛT POUR LA MINIMISATION DU COÛT
TOTAL D'UN VOL COMMERCIAL

MOOTEZ BEN NASR
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)
DÉCEMBRE 2015

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

OPTIMISATION DE L'INDICE DU COÛT POUR LA MINIMISATION DU COÛT
TOTAL D'UN VOL COMMERCIAL

présenté par : BEN NASR Mootez
en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. DUFOUR Steven, Ph. D., président

M. SAUCIER Antoine, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. SOUMIS François, Ph. D., membre et codirecteur de recherche

M. AUDET Charles, Ph. D., membre

DÉDICACE

*À mes parents,
à Ons et Asma,
je vous aime ...*

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de recherche M. Antoine Saucier qui m'a accompagné tout au long de mon projet. Depuis le début de ma maîtrise, j'ai pu compter sur son support et sa disponibilité. Sa pédagogie et ses précieux conseils m'ont été très utiles.

Je remercie également mon co-directeur M. François Soumis qui dirige avec prévoyance et créativité ce projet multidisciplinaire colossal et qui a assuré mon soutien financier depuis le début de ma maîtrise. Par son expertise et les idées qu'il a proposées dès le début du projet, je me suis senti bien guidé tout au long du chemin parcouru par après.

Mes remerciements les plus vifs vont bien évidemment à mes parents, Fethi et Mounira. Je ne serai jamais capable d'exprimer dans les mots qui conviennent ma reconnaissance et mon respect envers eux. Ils m'ont acheminé la confiance dont j'avais besoin. Je vous dédie ce mémoire fruit de votre soutien.

Une pensée particulière va à une personne qui occupe une très grande importance dans ma vie, qui m'a accompagné durant chaque jour et qui n'a jamais cessé de croire en moi depuis le tout début. Il s'agit de ma femme Asma. Elle a pu par sa tendresse et son amour me motiver et me soutenir tout au long du parcours malgré la distance qui nous sépare.

Mes remerciements seraient incomplets si j'oubliais ma chère petite sœur qui réussit toujours à me faire sourire même aux moments les plus difficiles. On, je te passe le flambeau pour que tu continues par tes réussites à faire plaisir à Fethi et Mounira.

Je remercie également M. Steven Dufour et M. Charles Audet qui m'ont honoré en faisant partie du jury qui a dirigé ma soutenance.

Finalement, je remercie ma grande famille, mes amis et toutes les personnes qui ont contribué à ma réussite et à la réalisation de ce projet.

RÉSUMÉ

On se propose dans ce projet de maîtrise de résoudre le problème de la détermination de l'indice du coût optimal afin de minimiser le coût total d'un vol commercial. On commence par définir les modèles utilisés afin de représenter le coût total d'un vol, ensuite on étudie les composantes du coût total afin de développer une méthode qui permet de déterminer l'indice du coût optimal.

Le coût total d'un vol commercial est composé des coûts reliés à la consommation de carburant et d'autres coûts qui sont essentiellement reliés à la durée du vol. On étudie au chapitre 3, la fonction qui représente les coûts autres que le coût du carburant et on représente cette fonction pour l'exemple d'un vol Montréal-Paris opéré avec un Boeing 777-300-ER (B77W). On utilise ensuite le code de la méthode OTA (pour Optimisation des Trajectoires Aériennes) afin d'étudier l'effet de l'indice du coût sur la masse de carburant consommé et sur la durée de vol pour le même trajet.

Ensuite, on présente au chapitre 4 le problème d'optimisation traité et les particularités du modèle proposé. On propose de traiter une version simplifiée du problème en utilisant une fonction $M(T)$ parabolique. On s'attaque ensuite, à une version plus réaliste qui englobe les discontinuités qu'on a relevées lors des simulations effectuées avec le code OTA.

L'objectif du projet est de définir une méthode qui permet de trouver l'indice du coût optimal. On développe au chapitre 5, la méthode qui permet de limiter les intervalles de recherche pertinents pour la durée de vol optimale ainsi que la méthode utilisée pour déterminer l'indice du coût optimal pour le cas où $M(T)$ est continue et dans les cas où elle est continue par morceaux. On étudie également dans le même chapitre l'effet du retard sur la solution optimale.

Mots clés : indice du coût, plan de vol, trajectoire aérienne, coût d'un vol, durée de vol, masse de carburant consommé, retard avant le décollage.

ABSTRACT

The purpose of this master project is to solve the problem of finding the optimal cost-index in order to minimize the total cost of a commercial flight. We define the models used to represent the total cost of the flight, then we study the components of the total cost in order to build a method to find the optimal cost-index.

The total cost of a commercial flight is composed of burned fuel related costs and other costs which are mainly related to flight time. First in the third chapter, we study the function representing all the costs that are not related to burned fuel and we give an example of this function for a Montréal-Paris flight operated with a Boeing 777-300-ER (B77W). We then use the OTA method code (*«Optimisation des Trajectoires Aériennes»* in french) in order to study the effect of cost-index variations on burned fuel. The simulations with the OTA method code are done for a Montréal-Paris flight using a B77W as well.

Next in the fourth chapter, we present our optimization problem with its particularities. We propose to study a simplified version of the problem using a continuous and parabolic function $M(T)$. This study allow us to have a better understanding of the real problem and more indications on the optimal way to solve it. We then replace $M(T)$ by a piecewise parabolic function containing the discontinuities that we discovered during the simulations. We use the conclusions that we found after studying the simplified problem to develop the method that we will use to determine the optimal cost-index.

The main objective in this project is to define an efficient method to find the optimal cost-index. We show in the last chapter the rules allowing to reduce the search intervals of the optimal cost-index as well as the method used to find α^* in the cases where $M(T)$ is continuous and where it is piecewise parabolic. We study in the same chapter the effect of a pre-departure delay on optimal arrival time and optimal flight time.

Key words: cost-index, flight plan, flight path, flight cost, flight time, mass of consumed fuel, pre-departure delay.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vi
TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES TABLEAUX	x
LISTE DES FIGURES	xi
LISTE DES ANNEXES	xiii
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xiv
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Le projet d'optimisation des trajectoires aériennes	2
1.2 Coût total minimal d'un vol	2
1.3 Objectif général	3
1.4 Objectifs spécifiques	3
1.5 Structure du mémoire	4
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE	5
2.1 Introduction du concept de l'indice du coût dans l'industrie du transport aérien	5
2.2 Utilisation de l'indice du coût chez les constructeurs de systèmes de gestion de vol et les constructeurs aéronautiques	7
2.3 Importance du calcul d'un indice du coût pour chaque vol	10
2.4 Actualisation de l'indice du coût au cours du vol	11
CHAPITRE 3 LES FONCTIONS $A(T)$ ET $M(T)$ QUI COMPOSENT LE COÛT TO- TAL	13
3.1 La fonction $A(T)$ représentant les coûts autres que la consommation de carburant	13
3.1.1 Exemple d'une fonction $A(T)$	17

3.2 La fonction $M(T)$ représentant la masse de carburant consommé en fonction de la durée de vol	20
3.2.1 Définitions de la distance spécifique, de l'indice du coût et de la vitesse optimale	20
3.2.2 Phase de croisière avec un indice du coût nul	21
3.2.3 Phase de croisière avec un indice du coût positif	22
3.2.4 Effet d'un indice du coût positif sur les phases de montée et de descente	23
3.2.5 Fonction $M(T)$ utilisée dans l'industrie du transport aérien	24
3.2.6 Résultats des simulations avec le code de la méthode OTA	25
3.2.7 La fonction $M(T)$ obtenue à partir des simulations effectuées avec le code de la méthode OTA	29
CHAPITRE 4 DÉTERMINATION DE L'INDICE DU COÛT OPTIMAL	33
4.1 Conditions d'optimalité	33
4.1.1 Modèle direct du coût total du vol	33
4.1.2 Modèle IC du coût total du vol	34
4.1.3 Lien entre le modèle direct et le modèle IC du coût total du vol . . .	34
4.1.4 Intervalle maximal pour la durée de vol optimale T^*	36
4.1.5 Les domaines de définitions de $A(T)$ et $M(T)$ et l'intervalle maximal pour la durée de vol optimale T^*	37
4.1.6 Effet d'un retard sur le problème d'optimisation	37
4.2 Cas où la fonction $M(T)$ est continue	39
4.2.1 Modèle parabolique pour $M(T)$	39
4.2.2 La fonction $T(\alpha)$	40
4.2.3 Cas d'un vol qui décolle sans retard	41
4.2.4 Cas d'un retard au décollage	42
4.3 Cas où la fonction $M(T)$ est continue par morceaux	45
4.3.1 Comportement de $M(T)$ autour d'un point de bifurcation	45
4.3.2 La fonction $T(\alpha)$	48
4.3.3 La fonction $f(\alpha)$	50
CHAPITRE 5 MÉTHODE DE RECHERCHE DE L'INDICE DU COÛT OPTIMAL	53
5.1 Cas où $M(T)$ est continue et parabolique	53
5.1.1 Choix de l'indice du coût de départ	55
5.1.2 Détermination des intervalles de recherche pertinents	55
5.1.3 Application de la méthode de réduction des intervalles de recherche à d'autres exemples de vol	56

5.2 Cas où $M(T)$ est continue par morceaux	57
5.2.1 Méthode de recherche de l'indice du coût optimal	58
5.2.2 Effet d'un retard avant le vol sur le problème d'optimisation	61
CHAPITRE 6 CONCLUSION	64
6.1 Synthèse des travaux	64
6.2 Améliorations futures	65
RÉFÉRENCES	66
ANNEXES	69

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	- Données relatives au calcul de l'exemple de la fonction $A(T)$ étudié dans ce mémoire	20
Tableau 3.2	- Données relatives au calcul de la masse à l'arrivée pour l'exemple considéré dans les simulations avec le code de la méthode OTA.	26
Tableau 3.3	- Paramètres utilisés dans le modèle de $M(T)$	31
Tableau 5.1	- Résumé des règles permettant de réduire l'intervalle de recherche de α^*	56
Tableau A.2	Table des symboles.	70

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	- Les coûts d'opération en fonction de la vitesse et de l'indice du coût (figure tirée de DeJonge et Syblon (1984))	6
Figure 2.2	- Effet du vent sur la masse de carburant consommée et la durée de vol (figure tirée de Liden (1985))	8
Figure 2.3	- Durée de vol et masse de carburant en fonction de l'indice du coût (figure tirée de Liden (1992))	9
Figure 2.4	- Masse de carburant consommée en fonction de la durée de vol (figure tirée de Marla et al. (2011))	11
Figure 3.1	- Exemple d'une fonction $A(T)$ avec plusieurs réalisations possibles.	14
Figure 3.2	- L'exemple de la fonction $A(T)$ associée au vol étudié.	15
Figure 3.3	- La fonction $A'(T)$ pour l'exemple de la figure 3.2.	16
Figure 3.4	- Disposition des sièges dans un Boeing B77W (tirée de www.seatguru.com (2014)).	19
Figure 3.5	- Distance spécifique SR en fonction de la vitesse de l'avion pour une altitude et une masse fixes avec $\alpha = 0$ (figure tirée de Airbus (2002)).	21
Figure 3.6	- Distance spécifique SR en fonction de la vitesse de l'avion et de l'altitude de vol pour $\alpha = 0$ (figure tirée de Delgado et Prats (2009)).	22
Figure 3.7	- Effet de l'indice du coût sur la phase de montée (figure tirée de Roberson (2007)).	23
Figure 3.8	- Effet de l'indice du coût sur la phase de descente (figure tirée de Roberson (2007)).	24
Figure 3.9	- Modèle de la fonction $M(T)$ en fonction de la durée de vol utilisé actuellement dans l'industrie du transport aérien (figure tirée de Barnhart et Smith (2012)).	25
Figure 3.10	Effet d'une légère augmentation de l'IC sur le profil d'altitude.	27
Figure 3.11	Changement des altitudes de croisière pour un petit changement de α	28
Figure 3.12	Effet d'une grande augmentation de l'IC sur le profil d'altitude.	28
Figure 3.13	- Altitudes parcourues dans la trajectoire optimale pour chaque indice du coût.	29
Figure 3.14	- La fonction $M(T)$ continue par morceaux en fonction de la durée de vol.	32
Figure 4.1	- Exemple des domaines de définition de $A(T)$, de $M(T)$ et de l'intervalle maximal pour T^*	37

Figure 4.2	- Effet d'un retard sur la fonction $A(T)$.	38
Figure 4.3	- La fonction $M(T)$ continue en fonction de la durée de vol.	39
Figure 4.4	- La fonction $T(\alpha)$ dans le cas où $M(T)$ est continue.	41
Figure 4.5	- La fonction $A''(T)$ pour le vol étudié.	41
Figure 4.6	- La fonction $f(\alpha)$ dans le cas où $M(T)$ est continue et parabolique.	43
Figure 4.7	- La fonction $\mathcal{A}''(T)$ pour le cas d'un retard de 15 minutes au décollage.	43
Figure 4.8	- La fonction $F(\alpha)$ ayant plusieurs racines.	44
Figure 4.9	- Le coût total $C(T)$ pour l'exemple d'un retard au décollage.	45
Figure 4.10	- $\hat{C}(T)$ pour $\alpha = \alpha_i$.	47
Figure 4.11	- Cas où $M(T_i - \Delta T_i) - M(T_i) < 0$ et $\Delta T_i < 0$.	48
Figure 4.12	- La fonction $T(\alpha)$ pour le cas où $M(T)$ est continue par morceaux.	49
Figure 4.13	- La fonction $f(\alpha)$ pour le cas où $M(T)$ est continue par morceaux.	52
Figure 5.1	- Détermination des intervalles de I_T en s'appuyant sur la forme de $A'(T)$ et $A''(T)$.	54
Figure 5.2	- Choix de T_{cherche} .	59
Figure 5.3	- Les durées de vol T_{cherche} et T_{connue} sont sur le même morceau de $T(\alpha)$.	60
Figure 5.4	- Les durées de vol T_{cherche} et T_{connue} sont sur deux morceaux successifs de $T(\alpha)$.	60
Figure 5.5	- La durée de vol T_{cherche} se situe dans une discontinuité de $T(\alpha)$.	61
Figure 5.6	- Heure d'arrivée optimale en fonction de la durée du retard.	62
Figure 5.7	- Durée de vol optimale en fonction de la durée du retard.	63

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE A	DESCRIPTION DE PROJET POUR UNE MAÎTRISE-RECHERCHE	69
ANNEXE B	PREUVES PERMETTANT DE RÉDUIRE LES INTERVALLES DE RECHERCHE PERTINENTS	77

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

α	Indice du coût.
a_i	Courbure du $i^{\text{ème}}$ morceau de $M(T)$.
$A(T)$	Coûts autres que le coûts du carburant.
$B(T)$	Coûts autres que le coût du temps en s'appuyant sur l'indice du coût afin de tenir compte des coûts associées à la durée de vol.
$C(T)$	Le coût total minimal d'un vol de durée T .
C_i	Pénalisation importante associée à la $i^{\text{ème}}$ montée dans $A(T)$ où $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.
$\hat{C}(T)$	Coût total minimal d'un vol de durée T calculée en utilisant l'indice du coût afin de tenir compte des coûts associés à la durée de vol.
ΔT_i	$i^{\text{ème}}$ discontinuité dans $M(T)$.
D	Union des intervalles sur lesquels T est discontinue.
D_A	Domaine de définition de la fonction $A(T)$.
D_M	Domaine de définition de la fonction $M(T)$.
D_T	Domaine de définition de la fonction $T(\alpha)$.
M_i	Minimum du $i^{\text{ème}}$ morceau de $M(T)$.
$M(T)$	Masse minimale de carburant consommée pour un vol de durée T .
S	Pente des plateaux linéaires dans la fonction $A(T)$. Elle est égale aux dépenses qui augmentent linéairement en fonction de la durée de vol.
SR	Distance spécifique qui représente la distance parcourue pour une unité de carburant consommée.
θ_i	Durée de vol correspondant à la $i^{\text{ème}}$ montée abrupte dans $A(T)$ où $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.
T	Durée totale du vol.
T^*	Durée de vol optimale qui minimise le coût total du vol $C(T)$.
$T(\alpha)$	Durée de vol qui minimise le coût total du vol $\hat{C}(T)$.
T_i	Durée de vol associée à la $i^{\text{ème}}$ bifurcation dans la trajectoire.
$T_{\min}^{(A)}$	Duré de vol minimale considérée dans ce projet.
$T_{\min}^{(M)}$	Duré de vol minimale que l'avion peut accomplir entre l'aéroport de départ et d'arrivée.
$T_{\max}^{(A)}$	Duré de vol maximale considérée dan ce projet.
$T_{\max}^{(M)}$	Duré de vol maximale que l'avion peut accomplir entre l'aéroport de départ et d'arrivée.

T_{nom}	Durée de vol nominale planifiée par la compagnie aérienne.
T_{M_i}	durée de vol correspondant au minimum du $i^{\text{ème}}$ morceau de $M(T)$.
V_α	Vitesse optimale de l'avion pour un indice du coût α .
V_0	Vitesse optimale de l'avion pour $\alpha = 0$.

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Depuis plusieurs années, les compagnies aériennes et les constructeurs aéronautiques se sont lancés dans l'implantation de mesures d'efficacité et de réduction des coûts d'opération des vols à cause de l'augmentation continue de toutes les charges encourues par les compagnies aériennes en plus de la rude concurrence qui est présente dans le secteur aéronautique. En effet, le saut qu'a connu le prix du baril de carburant qui a grimpé de 34,7 US\$ en 2003 pour atteindre 126,7 US\$ en 2008 a eu pour effet que les dépenses reliées au carburant se sont emparées de la plus grande part des coûts encourus par les compagnies aériennes avec une moyenne de 34,2 % du total des dépenses pour les compagnies situées en Amérique du Nord (IATA Economics (2010)). La chute du coût du baril de pétrole ces deux dernières années a eu pour effet que les autres dépenses qui ne sont pas reliées à la consommation de carburant ont pris plus d'importance aux yeux des compagnies aériennes. En particulier, les dépenses causées par les retards des vols ne cessent d'augmenter et ont atteint 8,3 milliards de dollars en 2007 aux États-Unis seulement (Ball et al. (2010)). Cette augmentation continue des dépenses reliées aux retards est due au fait que les passagers sont de plus en plus informés de nos jours de leurs droits à des indemnisations à cause du partage facile de l'information. De plus, les organismes gouvernementaux imposent aux compagnies aériennes des règlements de plus en plus stricts par rapport aux retards. D'autre part, parallèlement à ces charges qui augmentent, la rude compétition imposée par les compagnies à bas prix et les autres moyens de transport comme les trains à très grande vitesse, conduit à une réduction des prix des billets d'avions. Toutes ces contraintes ont obligé les constructeurs et les compagnies aériennes à chercher des moyens permettant d'opérer leurs appareils plus efficacement pour assurer leur survie. En effet, depuis les années 1970, les principaux constructeurs aéronautiques ont commencé à introduire des ordinateurs de bord et des systèmes de gestion de vol de plus en plus sophistiqués permettant de contrôler la trajectoire de l'avion ainsi que ses performances. Parmi les outils mis à la disposition des compagnies aériennes par les constructeurs, on retrouve l'indice du coût qui est un paramètre à déterminer dans le système de gestion de vol et qui permet aux compagnies aériennes de déterminer la vitesse optimale de vol en tenant compte des deux composantes principales du coût total du vol et qui sont le carburant consommé et les dépenses reliées à la durée de vol.

Malgré l'existence du concept d'indice du coût depuis plusieurs dizaines d'années et l'important potentiel de ce paramètre dans la réduction du coût total du vol, son utilisation par les compagnies aériennes est loin d'être optimale. Ainsi, on présente dans ce projet de maîtrise une méthode qui permet de déterminer l'indice du coût optimal pour chaque vol afin de

minimiser le coût total du vol.

1.1 Le projet d'optimisation des trajectoires aériennes

Le projet de maîtrise dont il est question dans ce mémoire fait partie d'un grand travail de recherche intitulé projet d'Optimisation des Trajectoires Aériennes (OTA). Le projet OTA fait intervenir plusieurs professeurs, étudiants et chercheurs de l'École Polytechnique de Montréal, de l'Université de Montréal et d'HEC Montréal ainsi que des entreprises de l'industrie aéronautique canadienne telles que Thales Canada, RAAS et Air Canada.

La recherche de l'indice du coût optimal s'appuie sur un code informatique élaboré par l'équipe de chercheurs du projet OTA (code de la méthode OTA). Elle vise aussi à compléter le système de gestion de vol réalisé dans le projet OTA en déterminant l'indice du coût optimal associé au vol étudié. Le code de la méthode OTA utilise une méthode de plus court chemin en considérant toutes les trajectoires possibles sur un graphe 3D (longitude, latitude et altitude) et en choisissant celle qui minimise le coût total du vol comme expliqué dans la thèse de Maazoun (2015). Pour atteindre cet objectif, cette méthode associe une vitesse optimale à chaque arc de la trajectoire choisie pour le vol en s'appuyant sur l'indice du coût α et en s'assurant que le parcours choisi est réalisable du point de vue du pilotage. Le code OTA s'appuie sur la modélisation aérodynamique proposée par Eurocontrol. La version du code utilisée pour les simulations décrites dans la suite du document, a été élaborée en utilisant les tables BADA 3 (pour «*Base of Aircraft Data*»)

1.2 Coût total minimal d'un vol

Comme présenté à l'annexe A, le coût total minimal d'un vol commercial peut être écrit comme suit :

$$C(T) = M(T) + A(T), \quad (1.1)$$

où $M(T)$ est la masse minimale de carburant consommé pour un vol de durée T et $A(T)$ est la fonction qui représente tous les coûts autres que le coût du carburant. Toutes ces quantités sont calculées en kilogrammes. Dans la suite du présent document, on nomme ce modèle de calcul du coût total minimal le *modèle direct*. En plus, d'après Saucier et Soumis (2015) présenté à l'annexe A, l'utilisation d'une pénalité sur le coût du temps par une fonction affine de la forme

$$B(t) = \alpha t + B(0), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2)$$

est équivalente à l'utilisation d'une contrainte sur le temps d'arrivée si la valeur du réel α est choisie convenablement. On explique à l'annexe A, que α est un multiplicateur de Lagrange du problème de minimisation du coût total. Le paramètre α est un réel, il est appelé indice du coût et il est mesuré en kilogrammes par minutes. Il en résulte qu'on obtient un deuxième modèle du coût total minimal pour un vol de durée T qui se présente comme suit

$$\hat{C}(T) = M(T) + \alpha T + B(0), \quad (1.3)$$

où $M(T)$ est la masse minimale de carburant consommée et $B(T) := \alpha T + B(0)$ représente tous les coûts autres que le coût du carburant. Dans ce qui suit, le modèle (1.3) sera le modèle IC (pour indice du coût). La valeur du paramètre α dans le modèle IC est celle pour laquelle les modèles direct et IC conduisent à la même trajectoire optimale.

Par ailleurs, le modèle IC est le modèle utilisé dans l'industrie du transport aérien, c'est-à-dire que les ordinateurs de bord des avions calculent le coût total du vol en se basant sur ce modèle qui fait intervenir l'indice du coût α afin de tenir compte des coûts reliés à la durée du vol. De plus, le code de la méthode OTA se base sur le modèle IC afin de calculer le coût total minimal d'une trajectoire. Pour chaque indice du coût, le code calcule la durée de vol $T(\alpha)$ qui minimise la fonction de coût \hat{C} . L'indice du coût contrôle l'importance des coûts associés à la durée du vol par rapport à la consommation de carburant. En effet, si l'indice du coût est nul, alors la minimisation du coût total $\hat{C}(T)$ est équivalente à la minimisation de la consommation de carburant. Dans le cas contraire, si l'indice du coût est très grand, alors la minimisation du coût total conduit à une minimisation de la durée de vol.

1.3 Objectif général

Ce mémoire a pour objectif général de définir une méthode qui permet de déterminer l'indice du coût optimal qui minimise le coût total du vol en contrôlant le nombre d'appels au code de la méthode OTA.

1.4 Objectifs spécifiques

Les objectifs spécifiques sont les suivants :

- Présenter et analyser les fonctions qui composent le coût total du vol ;
- Analyser l'effet de l'indice du coût sur le profil de vol, sur la masse de carburant consommée et sur la durée de vol optimale ;
- Développer une méthode de recherche de l'indice du coût optimal tout en contrôlant le nombre d'appels au code de la méthode OTA ;

- Démontrer l'effet d'un retard avant le décollage sur le problème d'optimisation, sur la durée de vol optimale et sur l'indice du coût optimal.

1.5 Structure du mémoire

À la suite de ce chapitre d'introduction, une revue des différents travaux sur l'optimisation des trajectoires aériennes en général et le concept d'indice du coût en particulier sera présentée. Ensuite, on retrouve dans le troisième chapitre une présentation des fonctions qui composent le coût total. On y donne la fonction $A(T)$ qui représente les coûts autres que le coût du carburant, on explique ses composantes et on donne un exemple de cette fonction pour un vol reliant Montréal à Paris. Le troisième chapitre contient également une présentation des concepts reliés à la fonction masse minimale de carburant consommée en fonction de la durée de vol $M(T)$. On présente dans le même chapitre une fonction $M(T)$ utilisée dans l'industrie du transport aérien ainsi que la forme de cette fonction telle qu'estimée à partir de simulations avec le code de la méthode OTA.

Dans le quatrième chapitre, on expose le problème d'optimisation et les conditions d'optimalité en considérant deux cas pour la fonction $M(T)$. Dans le premier cas, on traite le problème en utilisant une version simplifiée de la fonction $M(T)$. Dans le deuxième, on utilise la version de $M(T)$ qui représente au mieux les résultats qu'on a obtenus à partir des simulations avec le code OTA. Le quatrième chapitre traite également le cas du retard avant le décollage et de son effet sur le problème d'optimisation.

Ensuite, on explique dans le cinquième chapitre la méthode utilisée pour rechercher l'indice du coût optimal et les règles utilisées afin de réduire l'intervalle de recherche. Une fois qu'on a défini la méthode de recherche, on présente à la fin du cinquième chapitre l'effet du retard sur la durée de vol optimale et sur l'heure d'arrivée optimale.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

L'optimisation des opérations aériennes a commencé depuis plusieurs dizaines d'années et a couvert plusieurs volets. Toutefois, puisqu'on s'intéresse à l'indice du coût qui est un outil mis à la disposition des compagnies aériennes pour minimiser le coût total d'un vol commercial, on se concentre dans le présent chapitre sur les travaux qui ont été menés afin d'introduire et d'expliquer l'indice du coût ainsi que des articles qui ont traité des différentes composantes du coût total du vol et des travaux sur les méthodes mises en place afin de déterminer et d'utiliser efficacement l'indice du coût. Les travaux de recherche présentés dans cette revue de littérature sont pertinents car ils décrivent bien les composantes du coût total d'un vol commercial typique, ils expliquent l'importance de l'utilisation de l'indice du coût et les gains que les compagnies peuvent faire en utilisant efficacement ce concept. De plus, on retrouve des indications sur les méthodes employées présentement par les compagnies aériennes afin d'utiliser l'indice du coût.

Malgré l'utilisation non optimale de l'indice du coût, son usage par toutes les compagnies aériennes et son instauration dans la quasi totalité des appareils montre la conscience de tous les acteurs du secteur aéronautique de l'importance de cet outil. Dans cette revue de littérature, on présente des travaux de recherche de chercheurs universitaires ou de chercheurs travaillant au sein de constructeurs aéronautiques ou au sein de constructeurs de systèmes de gestion de vol. Cependant, pour ce qui est des compagnies aériennes, elles sont très discrètes quant aux méthodes employées pour déterminer leurs indices du coût ainsi que toutes les procédures d'optimisation des opérations qu'elles emploient étant donné le contexte de compétition dans lequel ces compagnies opèrent.

2.1 Introduction du concept de l'indice du coût dans l'industrie du transport aérien

Depuis les années quatre-vingt, la plupart des acteurs dans le domaine aéronautique sont devenus conscients qu'il n'y avait pas que les coûts reliés à la consommation de carburant dont il fallait tenir compte lors de l'élaboration d'un plan de vol. DeJonge et Syblon (1984) expliquent que les dépenses reliées à la durée de vol occupent une grande part du coût total d'opération d'un vol commercial. Ils introduisent la notion d'indice du coût en expliquant les facteurs dont ce paramètre dépend et ce qu'il représente. Ils définissent l'indice du coût

comme étant un réel à déterminer dans l'ordinateur de bord afin de déterminer l'importance des dépenses reliées au temps par rapport aux dépenses reliées au carburant.

Ces auteurs évoquent également une autre caractéristique du système des opérations aériennes modernes qui augmente considérablement les coûts dus aux retards. De nos jours, de plus en plus de compagnies aériennes opèrent leurs vols selon un réseau en étoile qui se base sur un ou plusieurs points de connexion centraux qui sont reliés aux destinations périphériques. Dans ce système d'opération, un vol donné se dirige vers le point de connexion central en transportant à bord plusieurs groupes de passagers qui vont prendre d'autres vols au départ de ce point de connexion central afin d'atteindre leurs destinations finales. Par conséquent, un retard dans le premier vol retarderait des passagers appartenant à plusieurs autres vols et rendrait leur accommodement plus compliqué et plus coûteux.

En revanche, comme le montre la figure 2.1 tirée de DeJonge et Syblon (1984), bien que les chercheurs étaient conscients du fait qu'il faut tenir compte des coûts reliés à la durée de vol ainsi que des coûts reliés à la consommation de carburant lors de la détermination de l'indice du coût, ils représentaient ces coûts d'une façon grossière qui cache les difficultés résidant dans la détermination de l'indice du coût optimal et qui ne montre pas la vraie nature des fonctions qui composent le coût total du vol. On montrera que les fonctions qui sont lisses dans la figure 2.1 peuvent contenir des discontinuités et des montées abruptes ce qui rend la recherche du minimum du coût total beaucoup plus compliquée. On retrouve cette même représentation des fonctions du coût total du vol et du problème de minimisation de ce coût dans des travaux de recherche récents comme ceux Delgado (2013).

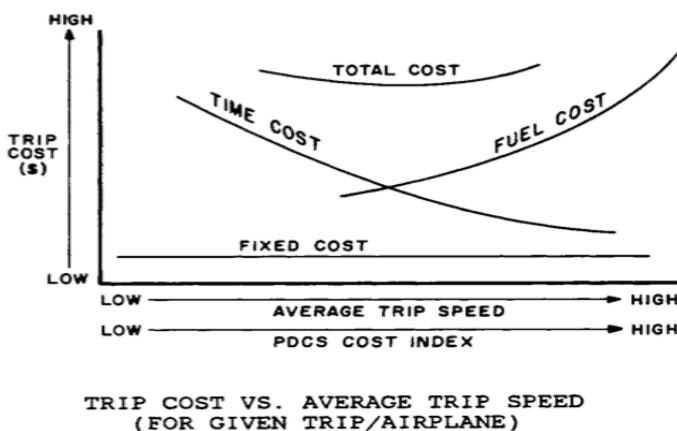


Figure 2.1 - Les coûts d'opération en fonction de la vitesse et de l'indice du coût (figure tirée de DeJonge et Syblon (1984)).

2.2 Utilisation de l'indice du coût chez les constructeurs de systèmes de gestion de vol et les constructeurs aéronautiques

Du côté des constructeurs de systèmes de gestion de vol, Liden (1985), qui est un chercheur chez Honeywell, décrit la méthode d'optimisation des trajectoires utilisée dans les systèmes de gestion de vol de sa compagnie. Cette méthode divise le problème en deux grandes étapes : il y a d'abord le choix d'une trajectoire 2D minimisant la distance franchie ; puis on procède à la sélection optimale des altitudes de vol, de la vitesse de vol et où se font les changements d'altitude en phase de croisière (les «*step-climb*»). L'auteur explique que les unités de l'indice du coût diffèrent entre les systèmes de gestion de vol où les unités impériales de l'indice du coût sont en 100 lb/hr et les systèmes de gestion de vol avec unités métriques où l'indice du coût est en kg/min.

Il montre l'effet du vent pour le même vol, le même appareil et le même indice du coût. La figure 2.2 montre qu'en changeant les conditions météo et en gardant le même indice du coût, la durée de vol et la consommation de carburant changent. Dans la figure 2.2, HW, NW et TW réfèrent à un vol avec vent de face, sans vent et avec vent de dos respectivement. Par conséquent, ceci montre l'importance du calcul d'un indice du coût pour chaque vol avec les dernières conditions météo. L'auteur explique également dans cet article que les frais de retards en fonction de la durée de vol se divisent en une composante linéaire et en des montées abruptes dues à des vols de correspondances ratées.

Dans un autre article plus récent, Liden (1992) est le seul à décrire les fonctions de durée de vol et de masse de carburant consommée en fonction de l'indice du coût comme des fonctions continues par morceaux qui contiennent des discontinuités pour des valeurs d'indice du coût données. L'auteur décrit la méthode d'utilisation de l'indice du coût dans la minimisation du coût total d'un vol. Celle-ci commence par la détermination d'une durée de vol optimale puis effectue une recherche de l'indice du coût qui lui est associé. Il trouve en effectuant des simulations pour un vol reliant Los Angeles à Sydney qu'il y a des durées de vol qui ne peuvent pas être obtenues en changeant l'indice du coût car elles correspondent à des discontinuités dans la fonction de durée de vol en fonction de l'indice du coût, comme le montre la figure 2.3 tirée de cet article. Cette figure représente les résultats obtenus pour la durée de vol et la masse de carburant consommée en fonction de l'indice du coût pour des simulations d'un vol entre Los Angeles et Sydney. La ligne pointillée représente le résultat des simulations de vols sans tenir compte de l'effet du vent et la ligne continue correspond aux résultats obtenus pour des simulations de vols en tenant compte de l'effet du vent. L'auteur relie le changement des emplacements et du nombre de changements d'altitudes en croisière au changement de

l'indice du coût. Il explique également que les discontinuités dans la fonction de durée de vol en fonction de l'indice du coût et la fonction de masse de carburant consommée en fonction de l'indice du coût, comme le montre la figure 2.3, sont dues aux changements dans les profils de vol.

Il explique aussi que ces discontinuités causent un problème de convergence lorsqu'on applique l'algorithme qui permet de retrouver l'indice du coût à entrer à partir d'une durée de vol optimale donnée. Par ailleurs, l'auteur explique que la trajectoire 2D passe par des «*waypoints*» pour lesquels une heure de passage est donnée et l'avion est guidé de cette façon de l'origine à la destination. Une fois les «*waypoints*» fixés et l'heure d'arrivée optimale calculée, on détermine l'indice du coût qui correspond à cette durée de vol.

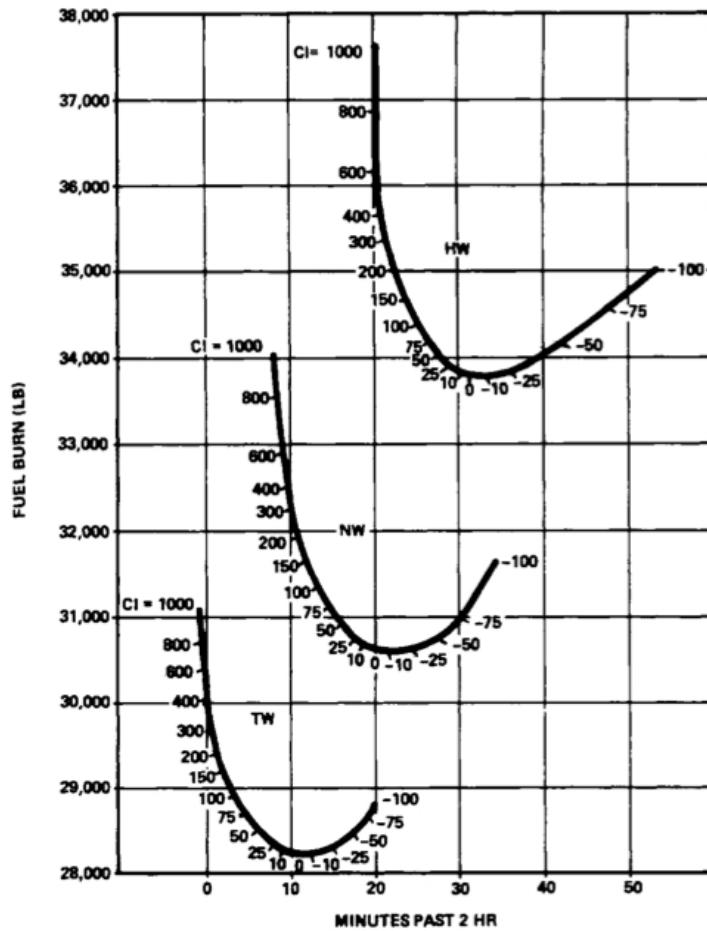


Figure 2.2 - Effet du vent sur la masse de carburant consommée et la durée de vol (figure tirée de Liden (1985)).

Il propose ensuite une méthode permettant de supprimer les discontinuités en utilisant des approximations des vraies fonctions de masse de carburant consommée et de durée de vol

en fonction de l'indice du coût afin d'éviter les problèmes de convergence rencontrés par son algorithme de détermination de l'indice du coût optimal. Finalement, on retient particulièrement de cet article que parmi tous les travaux de recherche qu'on a consultés, c'est le seul qui évoque le problème des discontinuités dans les fonctions masse de carburant consommé en fonction de l'indice du coût et de durée de vol en fonction de l'indice du coût.

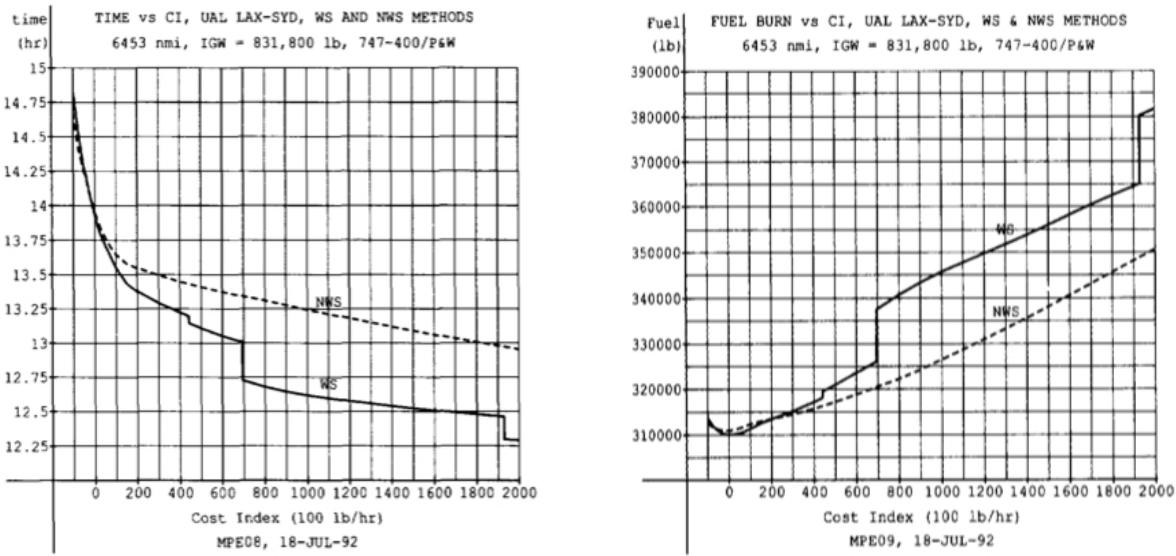


Figure 2.3 - Durée de vol et masse de carburant en fonction de l'indice du coût (figure tirée de Liden (1992)).

En outre, pour ce qui est des constructeurs aéronautiques, Boeing a publié une série d'articles (Roberson (2007) et Roberson et al. (2007)) sous le nom de «*Fuel Conservation Strategies*» introduisant l'indice du coût et mettant l'accent sur l'importance de ce concept et les bénéfices que les compagnies aériennes peuvent en tirer. Dans un premier article, Roberson (2007) fait une répartition détaillée des dépenses qui composent le coût total du vol. L'auteur divise les dépenses en deux grandes catégories : les coûts directs reliés à la durée du vol et le coût du carburant consommé. Dans la catégorie des coûts directs reliés à la durée du vol, on retrouve le salaire de l'équipage, qui est payé à un taux horaire en Amérique du Nord contrairement à l'Europe où le salaire de l'équipage est fixe. De plus, une grande partie des coûts directs reliés à la durée de vol est occupée par les dépenses reliées au dédommagement des passagers qui ont raté des vols de correspondances à cause des retards. L'auteur évoque également les frais de location des avions pour certaines compagnies et les frais de maintenance qui peuvent dépendre de la durée de vol ou du nombre de cycles de décollage-atterrissage ou encore qui peuvent être fixés selon un calendrier. Il présente un exemple d'une étude effectuée sur les vols

opérés par une compagnie aérienne moyenne. Cette étude montre que la compagnie pourrait sauver entre 4 et 5 millions de dollars annuellement si elle utilise des indices du coût optimaux pour tous ses vols au lieu des indices du coût qu'elle utilise actuellement.

Dans un deuxième article de Boeing, les auteurs expliquent les trois vitesses préprogrammées dans les systèmes de gestion de vol des avions de Boeing. Ces vitesses sont la MRC «*Maximum Range Cruise*», la LRC «*Long Range Cruise*» et la vitesse ECON «*Economy*». Premièrement, la MRC correspond à la vitesse de vol qui permet de parcourir une distance maximale pour une quantité de carburant donnée. Cette vitesse correspond à un indice du coût nul. Ensuite, la LRC est la vitesse qui est supérieure à la MRC et qui diminue la distance parcourue par unité de carburant consommée de 1 %. La distance perdue par unité de carburant consommée est échangée par 3 à 5 % de gain sur la durée de vol puisque la LRC va diminuer la durée de vol et donc réduire les dépenses reliées à celle-ci. Finalement, la vitesse ECON est la vitesse calculée par le système de gestion de vol en s'appuyant sur l'indice du coût entré par le pilote. C'est la vitesse que les auteurs recommandent d'utiliser lorsque l'indice du coût est correctement calculé par les opérateurs avant le vol. La présence et l'utilisation de ces trois vitesses est une autre preuve que les compagnies aériennes et les constructeurs sont conscients de l'importance des dépenses qui ne sont pas reliées au carburant.

2.3 Importance du calcul d'un indice du coût pour chaque vol

Marla et al. (2011) présentent dans leur article une approche de gestion de vol visant à équilibrer les frais reliés aux retards et à la consommation de carburant. Les auteurs commencent par définir la planification de vol afin de montrer les frontières de leur recherche qui s'arrête à la planification avant le décollage, comme c'est le cas pour le présent projet de maîtrise. De plus, ils réfèrent au travail de Altus (2007) qui explique en détail les composantes d'un plan de vol et en donne un exemple concret. On retrouve aussi dans l'article de Marla et al. (2011) une présentation de la fonction $M(T)$, la masse de carburant consommée en fonction de la durée de vol T , qui a une allure parabolique comme le montre la figure 2.4 tirée de cet article. Les auteurs avancent que chaque point de cette fonction est le résultat d'une simulation d'un vol complet en utilisant un indice du coût différent.

Pour ce qui est des méthodes employées par les compagnies aériennes pour déterminer les indices du coût à utiliser, les auteurs expliquent que plusieurs compagnies aériennes utilisent des données historiques des coûts du carburant et du coût du temps pour une route donnée afin de calculer l'indice du coût à utiliser dans cette route pour les vols futurs. À ce sujet, la plupart des chercheurs s'accordent pour dire que l'utilisation d'un indice du coût fixe pour un ensemble de routes ou pour une flotte entière est très désavantageux économiquement pour la

compagnie aérienne. En effet, dans un autre travail, Altus (2010) recommande le calcul d'un indice du coût optimal pour chaque vol avec les dernières données sur la météo, la charge transportée et l'heure prévue pour le décollage. De plus, de son côté, Burrows et al. (2001) expliquent bien les inconvénients liés à l'utilisation d'un indice du coût mal calculé ou fixe comme le font plusieurs compagnies aériennes. Ils stipulent que l'indice du coût doit être calculé en fonction de l'appareil, de la route, de la compagnie aérienne et de la direction du vol. Les auteurs critiquent également la pratique courante de l'utilisation d'un indice du coût moyen pour plusieurs routes distinctes. Ils s'appuient sur une étude réalisée dans Airbus (1998), qui explique que pour douze compagnies aériennes anonymes étudiées, seulement trois entre elles calculaient des indices du coût différents selon les différentes routes.

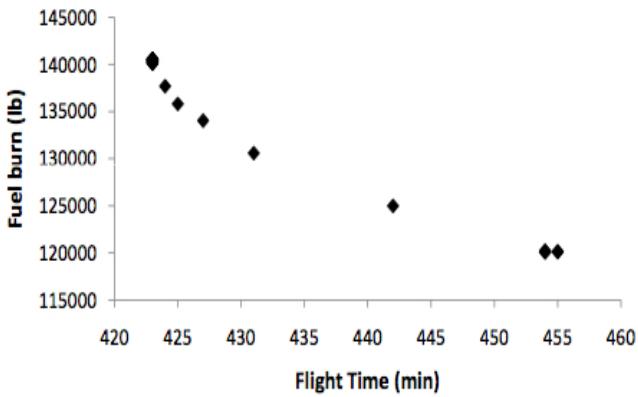


Figure 2.4 - Masse de carburant consommée en fonction de la durée de vol (figure tirée de Marla et al. (2011)).

2.4 Actualisation de l'indice du coût au cours du vol

Bien que le travail de recherche présenté dans ce mémoire se situe dans l'étape de planification du vol, on ne peut pas évoquer les travaux de recherche effectués au sujet de l'indice du coût sans parler des travaux sur l'actualisation de ce paramètre en cours de vol. En effet, l'actualisation de l'indice du coût constitue un sujet de recherche important étant donné que les pilotes peuvent être confrontés à des contraintes qui les obligent à abandonner le plan de vol initial. Par exemple, un changement important dans la météo, plus probable pour les vols long courrier, est assez fréquent et les indications directes des tours de contrôle doivent être suivies même si elles ne coïncident pas forcément avec le plan de vol. Cook et al. (2009) présentent l'importance de l'actualisation de l'indice du coût au cours du vol et les gains qui

peuvent être obtenus en l'ajustant. De plus, les auteurs présentent une procédure permettant de calculer dynamiquement l'indice du coût au cours du vol. Ces derniers appuient leur recherche par un exemple montrant le gain dans les durées de vol et les quantités de carburant consommées pour 23 vols en utilisant leur méthode en comparaison à la non-actualisation de l'indice du coût après le décollage.

La plupart des travaux de recherche consultés présentent l'indice du coût comme un paramètre très important dans la détermination du coût total minimal sans présenter une méthode qui permet de déterminer sa valeur optimale comme c'est le cas dans Dancila et al. (2011), Félix Patrón et Botez (2013) et Murrieta-Mendoza et al. (2015). De plus, d'autres travaux présentent l'indice du coût comme un simple ratio entre le coût du temps et le coût du carburant comme dans Edwards et al. (2015) et Wang et Wang (2011).

On n'a pas trouvé également de travaux donnant accès à des données réelles offertes par des compagnies aériennes. Par conséquent, dans la plupart des travaux de recherche consultés, les fonctions reliées à la détermination de l'indice du coût optimal sont représentées d'une manière qui cache leur vraie nature. On conclut que le sujet de l'optimisation de l'indice du coût et de l'étude des fonctions qui interviennent dans la détermination de la valeur optimale pour ce paramètre est un domaine où il y a beaucoup de contributions à apporter.

CHAPITRE 3 LES FONCTIONS $A(T)$ ET $M(T)$ QUI COMPOSENT LE COÛT TOTAL

Le coût total du vol tel que présenté par le modèle direct est composé des fonctions $A(T)$ et $M(T)$ qui seront présentées dans ce chapitre, où nous décrivons les composantes dont ces fonctions dépendent. De plus, on présentera pour chaque fonction un exemple concret afin de bien comprendre le comportement et les particularités de chaque fonction.

3.1 La fonction $A(T)$ représentant les coûts autres que la consommation de carburant

La fonction $A(T)$ utilisée dans ce projet est constituée des coûts fixes, des coûts associés au salaire de l'équipage de l'avion et du dédommagement des passagers si ces derniers ratent leur correspondance à cause d'un retard à l'arrivée. En effet, comme le montre la figure 3.2 représentant un exemple de la fonction $A(T)$ en fonction de la durée de vol T , cette fonction comporte des plateaux qui ont une même pente positive traduisant les coûts qui augmentent linéairement en fonction de la durée du vol. Ces coûts sont associés au salaire de l'équipage qui est payé à un taux horaire qu'on suppose fixe quelle que soit la durée du vol. Les plateaux à pentes positives dans $A(T)$ sont séparées par des montées abruptes qui représentent les coûts qu'encourent les compagnies aériennes à des instants précis de retard. Les montées abruptes sont reliées au dédommagement des passagers qui ratent leur correspondance.

Par ailleurs, l'avion transporte plusieurs groupes de passagers qui ont des correspondances distinctes une fois arrivés à l'aéroport de destination. De plus, le temps de transit de chacun des passagers est différent (il y a des passagers qui sont lents, d'autres qui connaissent bien l'aéroport et qui n'ont pas beaucoup de bagages, etc) ce qui fait que pour chaque réalisation d'un vol donné, ces composantes aléatoires auront un résultat différent. Les montées abruptes dans la fonction $A(T)$ vont être lissées afin de tenir compte du fait qu'une montée dans $A(T)$ est la moyenne de plusieurs montées obtenues pour toutes les réalisations possibles.

Par conséquent, la fonction $A(T)$ utilisée dans ce mémoire est une version lissée de la courbe en escalier initiale présentée dans la figure 3.1. Nous considérons l'exemple d'une fonction $A(T)$ qui contient deux montées abruptes qui surviennent à deux durées de vol qu'on désigne par θ_1 et θ_2 comme le montre la figure 3.2.

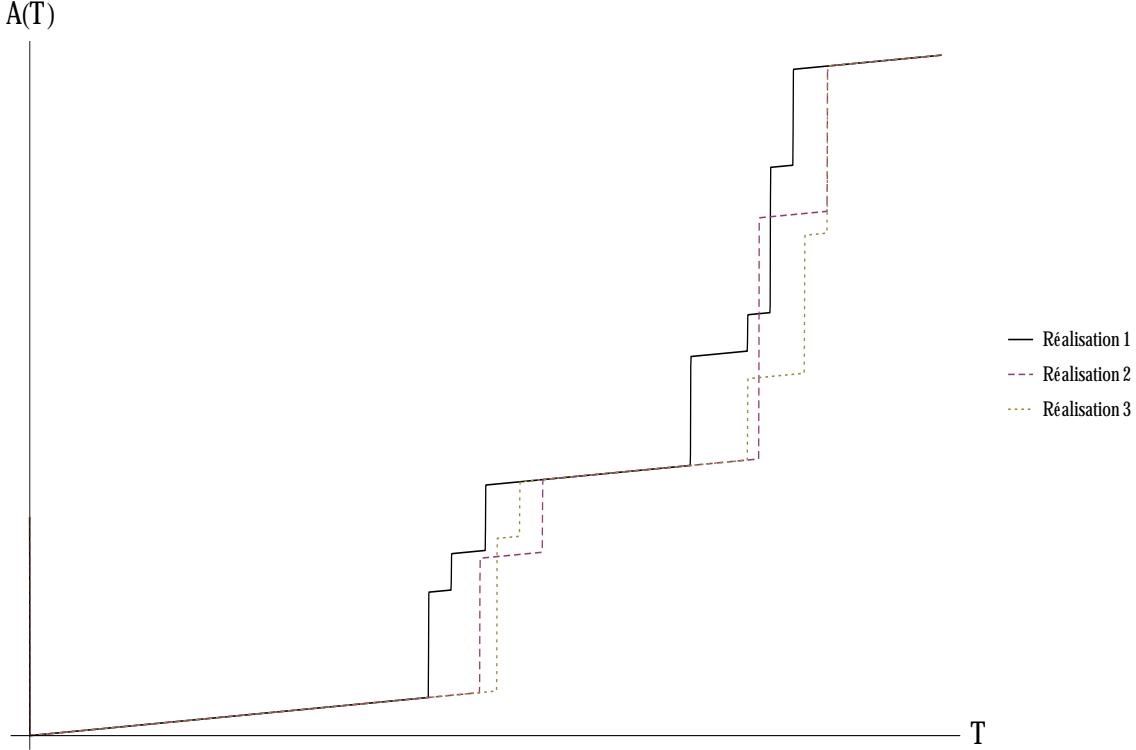


Figure 3.1 - Exemple d'une fonction $A(T)$ avec plusieurs réalisations possibles.

Dans le cas où l'avion arrive très tôt à l'aéroport de destination, il est probable que l'aéroport d'arrivée impose une pénalité même s'il y a une piste libre, et plus l'avion arrive tôt, plus cette pénalité augmente. Nous associons une montée dans la fonction $A(T)$ à une arrivée qui survient lorsqu'on diminue la durée de vol au-delà d'une certaine durée de vol qu'on désigne par $T_{\min}^{(A)}$ et on considère que l'effet de cette montée s'annule si la durée de vol dépasse $T_{\min}^{(A)}$. Puisqu'il est très rare que l'avion arrive très tôt à l'aéroport de destination, alors on ne va pas étudier le cas d'une arrivée avant $T_{\min}^{(A)}$ dans la suite de ce document. Par ailleurs, si l'avion arrive très tard après la deuxième montée dans $A(T)$, alors tous les passagers vont rater leurs correspondances et la compagnie aérienne aura à accommoder la totalité des passagers à bord. De même que pour une arrivée avant $T_{\min}^{(A)}$, on considère le cas d'une arrivée beaucoup plus tard que la deuxième montée dans $A(T)$ comme un scénario catastrophique qui n'arrive que très rarement et on ne le traitera pas dans ce projet.

On désigne par $T_{\max}^{(A)}$ la durée de vol maximale considérée pour les vols étudiés et on suppose que $T_{\max}^{(A)}$ appartient au plateau linéaire qui suit directement la deuxième montée dans $A(T)$. On désigne par $\mathcal{D}_A = [T_{\min}^{(A)}, T_{\max}^{(A)}]$ le domaine de définition de la fonction $A(T)$. Comme le montre la figure 3.3 représentant la fonction $A'(T)$ en fonction de T , cette fonction comporte des morceaux constants associés aux plateaux à pente positive dans $A(T)$. Ces morceaux

sont séparés par deux cloches en forme de gaussienne représentant les montées abruptes dans $A(T)$. De plus, la fonction $A'(T)$ contient également une demi-cloche qui représente la pénalité associée à une arrivée avant $T_{\min}^{(A)}$. Nous proposons de modéliser chaque cloche par une fonction gaussienne

$$\frac{C_i}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{T-\theta_i}{\sigma_i})^2},$$

où $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, C_i est une constante, σ_i est l'écart type, „ $\theta_0 \approx T_{\min}^{(A)} - 2\sigma_0$ ” est le centre de la demi-cloche correspondant à une pénalité pour une arrivée avant $T_{\min}^{(A)}$, θ_1 et θ_2 sont les durées de vols associées à la première et la deuxième montée respectivement dans $A(T)$ et θ_3 correspond à la dernière montée associée au dédommagement de la totalité des passagers à bord.

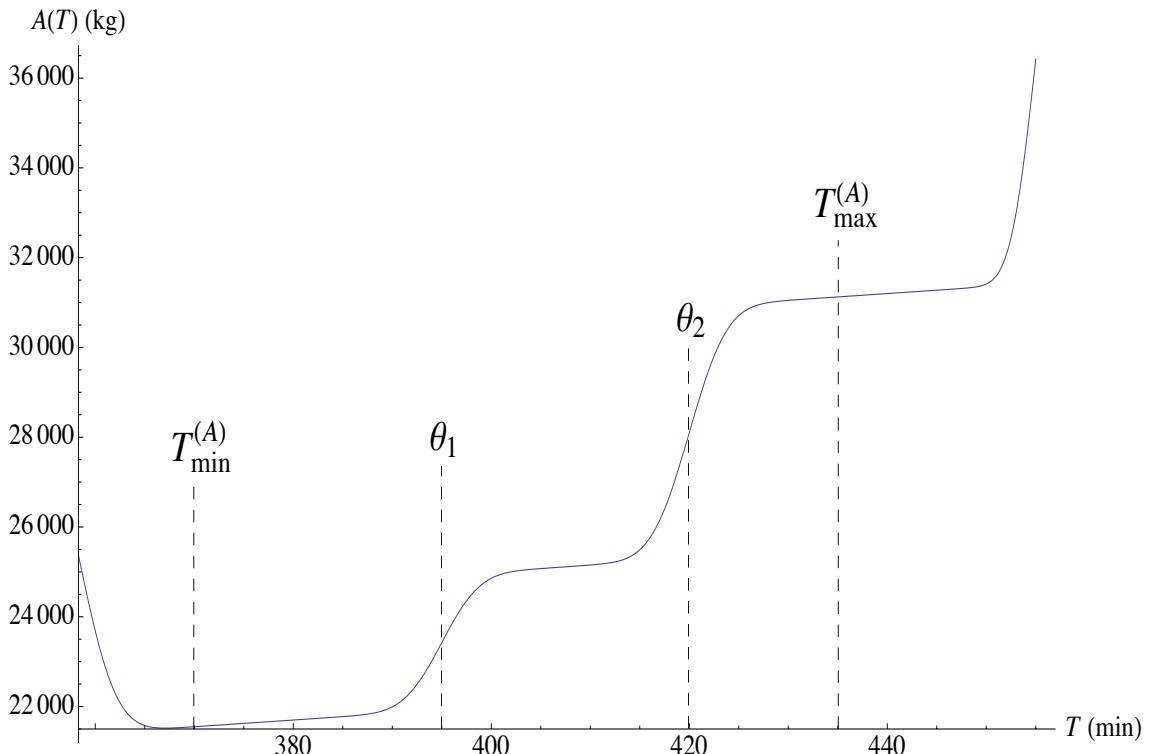


Figure 3.2 - L'exemple de la fonction $A(T)$ associée au vol étudié.

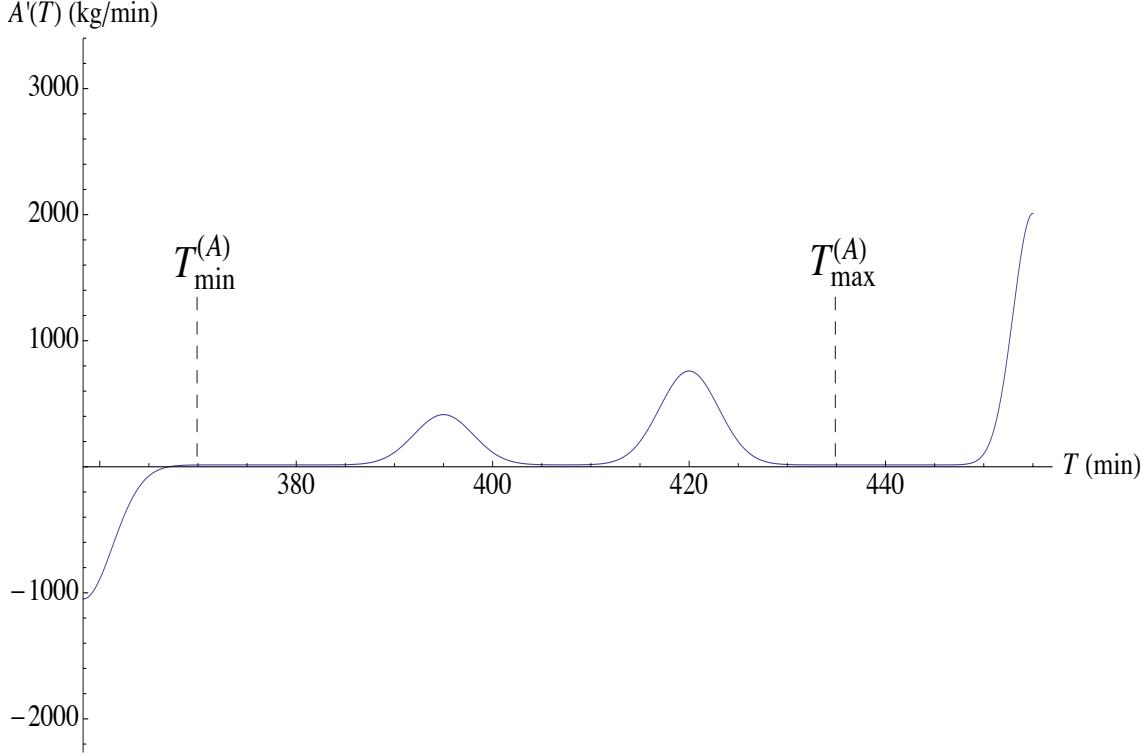


Figure 3.3 - La fonction $A'(T)$ pour l'exemple de la figure 3.2.

Nous proposons de modéliser $A'(T)$ avec la fonction

$$A'(T) = S - C_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_0} e^{-\frac{1}{2}(\frac{T-\theta_0}{\sigma_0})^2} + \sum_{i=1}^3 C_i \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_i} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{T-\theta_i}{\sigma_i}\right)^2}, \quad (3.1)$$

où S représente les coûts horaires fixes, $C_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_0} e^{-\frac{1}{2}(\frac{T-\theta_0}{\sigma_0})^2}$ représente la demi-cloche associée à la pénalité pour une arrivée avant $T_{\min}^{(A)}$ et $C_i \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_i} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{T-\theta_i}{\sigma_i}\right)^2}$ où $i \in \{1, 2, 3\}$ sont les trois cloches associées aux montées abruptes représentant le dédommagement des passagers qui ont raté leur correspondance.

En intégrant l'équation (3.1) par rapport à T dans l'intervalle $[\theta_0, T]$, on obtient

$$\begin{aligned} A(T) = & A(T_0) + S(T - \theta_0) - C_0 \left[\Phi\left(\frac{T - \theta_0}{\sigma_0}\right) - \frac{1}{2} \right] \\ & + \sum_{i=1}^3 C_i \left[\Phi\left(\frac{T - \theta_i}{\sigma_i}\right) - \Phi\left(\frac{\theta_0 - \theta_i}{\sigma_i}\right) \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

où nous avons utilisé

$$\int_{\frac{\theta_0 - \theta_k}{\sigma_k}}^{\frac{T - \theta_k}{\sigma_k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \Phi\left(\frac{T - \theta_k}{\sigma_k}\right) - \Phi\left(\frac{\theta_0 - \theta_k}{\sigma_k}\right), \quad (3.3)$$

où $\Phi(u) := \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

L'utilisation de la fonction $\Phi(u)$, qui est une fonction préprogrammée dans le logiciel de calcul Mathematica utilisé dans ce projet, rend l'intégration numérique de $A'(T)$ beaucoup plus rapide que si on intègre directement l'expression (3.1).

3.1.1 Exemple d'une fonction $A(T)$

On représente la fonction $A(T)$ en prenant pour exemple un vol Montréal-Paris opéré par Air Canada en utilisant un appareil B777-300-ER (B77W). Dans ce qui suit, on étudie un exemple pour ce vol et on explique tous les choix qu'on a faits pour chaque paramètre de la fonction $A(T)$ qui lui est associée. L'exemple étudié est un cas réaliste qui résume les phénomènes qu'on aimerait étudier comme l'arrivée en retard et les montées abruptes associées dans $A(T)$ et contient les composantes essentielles de cette fonction. D'ailleurs, le choix des paramètres et de la forme de $A(T)$ a été fait afin d'étudier un exemple qui a les caractéristiques d'un cas général. On traitera ainsi cet exemple comme problème modèle dans la suite de ce mémoire.

Détermination des durées de vols importantes dans $A(T)$: En parcourant l'historique de ce vol sur le site internet www.flightradar24.com (2014), on constate que la durée de vol est toujours supérieure à 6h. On pose donc $T_{\min}^{(A)} = 360$ minutes. D'autre part, selon Roberson et al. (2007), la durée de vol planifiée par la compagnie aérienne est toujours inférieure à la durée de vol qui minimise la consommation de carburant et qui correspond à un indice du coût nul. On définit $T_{M_0} = 390$ comme étant la durée de vol qui minimise la consommation de carburant et $T_{\text{nom}} = 370$ minutes pour la durée de vol nominale planifiée par la compagnie aérienne. Par ailleurs, la fonction $A(T)$ englobe deux montées abruptes qui se passent aux durées de vol θ_1 et θ_2 à partir desquelles un premier, puis un second groupe de passagers vont rater leur correspondance. On estime que la durée de vol θ_1 dépasse la durée de vol planifiée d'au moins 25 minutes afin de permettre aux passagers d'attraper leur vol de correspondance. On pose donc $\theta_1 = T_{\text{nom}} + 25 = 395$ minutes. La durée de vol θ_2 désigne la durée de vol à partir de laquelle le second groupe de passagers va rater sa correspondance. On pose $\theta_2 = \theta_1 + 25 = 420$ minutes, $T_{\max}^{(A)} = \theta_2 + 15 = 435$ minutes et $\theta_3 = 450$ minutes.

Détermination des frais associés au dédommagement des passagers : Le B77W comporte 349 sièges et selon le site internet www.aircanada.com (2013), le facteur de remplissage moyen pour l'année 2012 chez Air Canada était de 0,827. Dans ce qui suit, on choisit un facteur de remplissage de l'avion pour le vol étudié de 0,8. Dans ce cas, le nombre de passagers à bord du vol étudié est de 280. Compte tenu du nombre de passagers à bord de l'appareil, on peut estimer les dépenses associées aux passagers qui ratent leur correspondance. On commence par déterminer le nombre de passagers de chaque groupe et la compensation offerte à chaque passager. Selon Aéroports de Paris (2013), le taux moyen de correspondance pour l'année 2012 était de 24,1%. On supposera que le pourcentage des passagers qui ont des correspondances à attraper est de 25%. On supposera également que le premier groupe de passagers ayant une correspondance à prendre consiste en 10% du nombre total des passagers. Ce groupe est donc formé de 28 personnes et on supposera que le deuxième groupe de passagers ayant une correspondance à prendre comporte 15% du nombre total des passagers. Ce groupe comporte donc 42 personnes. De plus, d'après Air Canada (2013), une compensation de 200\$CA est accordée pour chaque passager qui rate son prochain vol. Par ailleurs, les dépenses associées à l'accès à l'accès des passagers ayant raté leur vol de correspondance dépassent la somme offerte à chacun des passagers puisqu'il faut placer ces passagers dans d'autres vols. De plus, ces vols retardés peuvent avoir des effets de cascade qui peuvent affecter les opérations des vols futurs sur plusieurs semaines. Pour des raisons de simplification, on ne considère que la somme offerte à chaque passager comme frais encourus par la compagnie aérienne pour le dédommagement des passagers.

Détermination des coûts horaires fixes : On considère que le B77W a un équipage de cabine formé de douze agents et de trois pilotes. Si on suppose que l'équipage de cabine est payé 40\$CA par heure et que les pilotes sont payés 120\$CA par heure, le salaire de l'équipage sera de 840\$CA par heure de vol. La figure 3.4 tirée de www.seatguru.com (2014) montre la disposition et le nombre de sièges dans cet appareil ainsi que le nombre de sièges destinés à l'équipage de cabine. On ne tient compte d'aucun frais de location dans notre exemple.

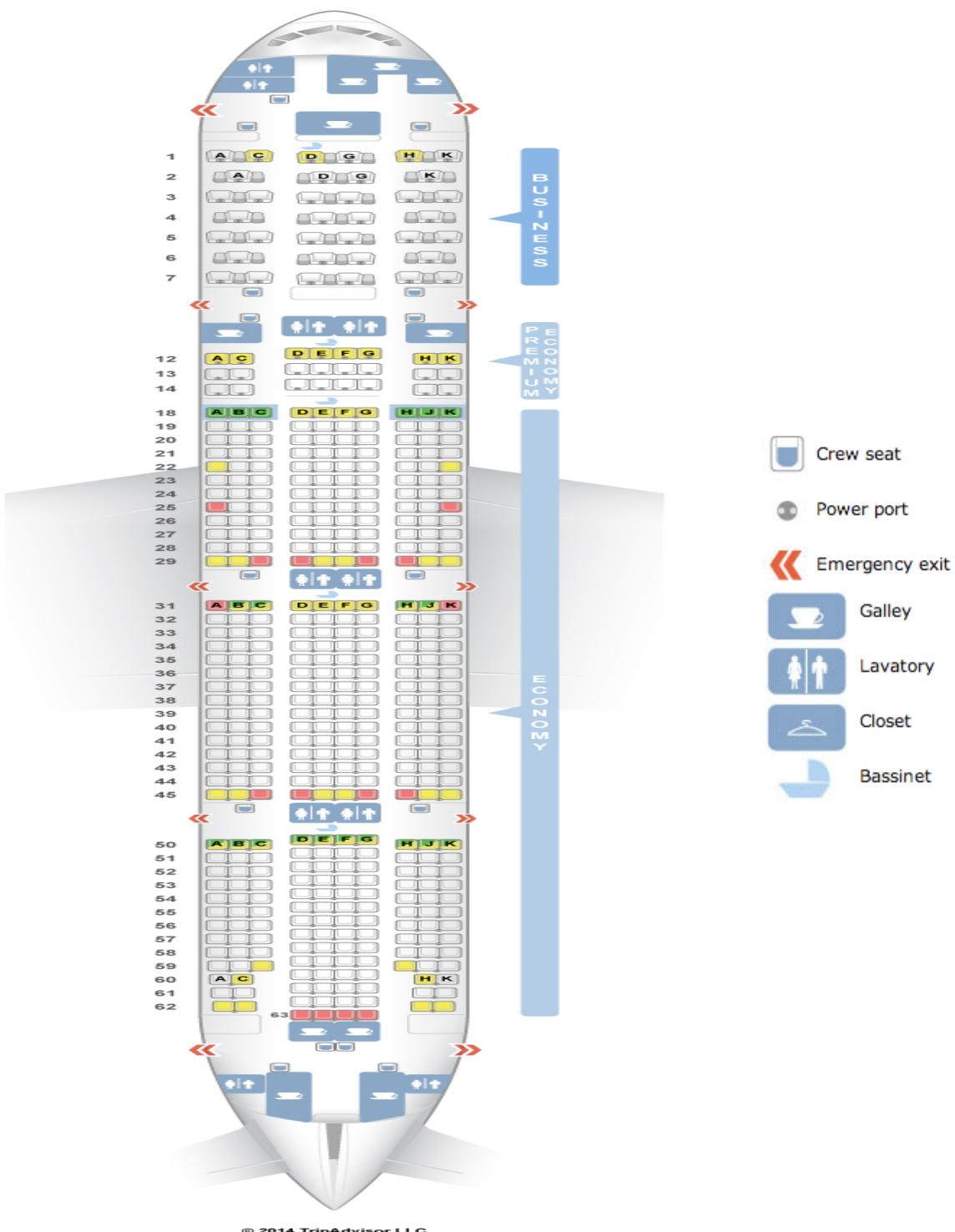


Figure 3.4 - Disposition des sièges dans un Boeing B77W (tirée de www.seatguru.com (2014)).

La fonction $A(T)$ est exprimée en kilogrammes de carburant. Il faut donc convertir tous les coûts qui composent $A(T)$ en kilogramme de carburant. D'après IATA (2014), une litre de kérosène a coûté en moyenne 0.85 \$CA pour l'année 2014 et la masse volumique du kérosène est de 0,8 kg/l. Il s'en suit qu'un kilogramme de carburant coûte 1,0625 \$CA.

Le tableau 3.1 résume ces données.

Tableau 3.1 - Données relatives au calcul de l'exemple de la fonction $A(T)$ étudié dans ce mémoire

Durée de vol minimale $T_{\min}^{(A)}$	360 min
Durée de vol maximale $T_{\max}^{(A)}$	435 min
Durée de vol θ_0	355 min
Durée de vol planifiée T_{nom}	370 min
Durée de vol qui minimise la consommation totale de carburant T_{M_0}	390 min
Durée de vol θ_1 à partir de laquelle les passagers du premier groupe vont rater leur correspondance	395 min
Nombre de passagers pour la première correspondance	15
Durée de vol θ_2 à partir de laquelle les passagers du deuxième groupe vont rater leur correspondance	420 min
Durée de vol θ_3 à partir de laquelle tous les passagers à bord de l'avion vont rater leur correspondance	450 min
Nombre de passagers pour la deuxième correspondance	28
Dédommagement par passager (en kg de carburant)	189 kg
Salaire de l'équipage S (en kg de carburant/heure)	790 kg/h
Pénalité pour un atterrissage avant $T_{\min}^{(A)}$ (en kg de carburant)	4000

3.2 La fonction $M(T)$ représentant la masse de carburant consommé en fonction de la durée de vol

3.2.1 Définitions de la distance spécifique, de l'indice du coût et de la vitesse optimale

Afin de minimiser la masse de carburant consommé, pour chaque arc de la trajectoire, le code de la méthode OTA maximise la distance spécifique qu'on notera SR pour «*Specific Range*» (La distance spécifique est la distance parcourue pour un kg de carburant consommé et elle s'exprime en km/kg). Elle est définie par

$$SR = \frac{V}{F(V) + \alpha} , \quad (3.4)$$

où V est la vitesse de l'avion, $F(V)$ est la consommation de carburant par unité de temps à vitesse V et α est l'indice du coût. On désigne par V_α la vitesse qui maximise SR pour un indice du coût α .

3.2.2 Phase de croisière avec un indice du coût nul

Si l'indice du coût est nul alors la minimisation du coût total du vol conduit à la minimisation de la consommation de carburant sans se soucier des coûts associés à la durée de vol. Dans ce cas, la distance spécifique prend la forme

$$SR = \frac{V}{F(V)}.$$

Comme le montre la figure 3.5 tirée de Airbus (2002), si on fixe la masse de l'avion et l'altitude de vol, la distance spécifique augmente en fonction de la vitesse de l'avion jusqu'à une valeur maximale puis diminue lorsqu'on augmente encore la vitesse de l'avion. On désignera par V_0 la vitesse qui maximise la distance spécifique pour un indice du coût nul.

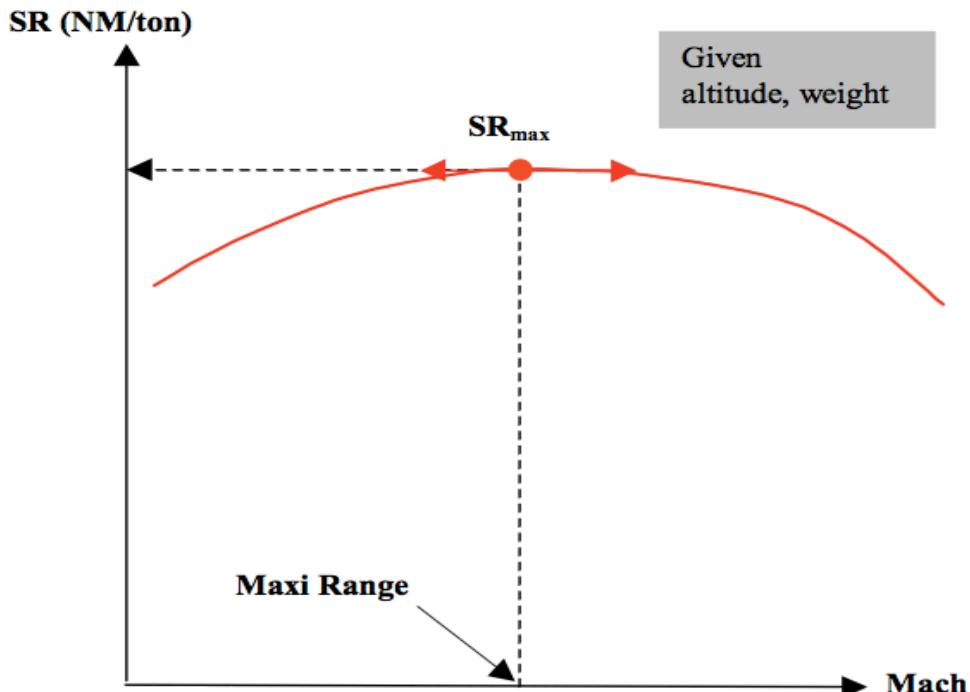


Figure 3.5 - Distance spécifique SR en fonction de la vitesse de l'avion pour une altitude et une masse fixes avec $\alpha = 0$ (figure tirée de Airbus (2002)).

La figure 3.6, tirée de Delgado et Prats (2009), montre les distances spécifiques pour plusieurs altitudes de vol en fonction de la vitesse de l'avion pour un avion de transport typique. Les altitudes de vol sont indiquées en centaines de pieds par rapport à la surface de la mer. Par exemple, FL 310 correspond à une altitude de 31 000 pieds. On voit que V_0 augmente avec l'altitude du vol jusqu'à l'atteinte de l'altitude dite optimale. Si on augmente l'altitude au-delà de l'altitude optimale, la vitesse V_0 diminue.

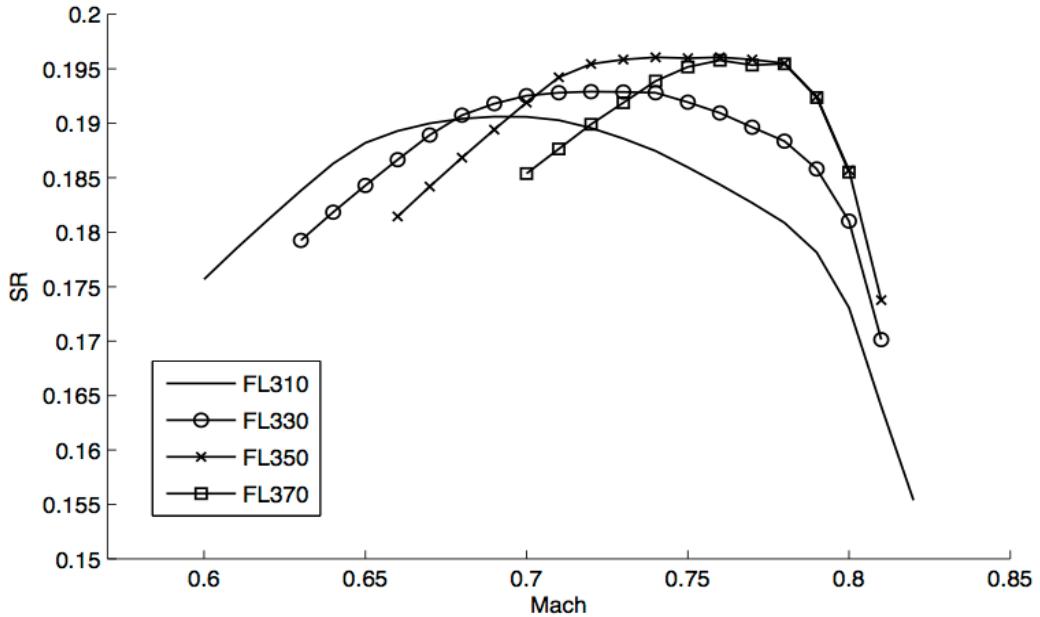


Figure 3.6 - Distance spécifique SR en fonction de la vitesse de l'avion et de l'altitude de vol pour $\alpha = 0$ (figure tirée de Delgado et Prats (2009)).

3.2.3 Phase de croisière avec un indice du coût positif

Un indice du coût positif ajoute à la consommation réelle de carburant $F(V)$, une consommation fictive positive associée au coût du temps. Lorsqu'on augmente l'indice du coût α , la vitesse optimale de l'avion V_α augmente par rapport à V_0 pour une altitude et une masse de l'avion fixes. De plus, la vitesse maximale que l'avion peut atteindre diminue lorsqu'on augmente l'altitude de vol.

Si on augmente l'indice du coût à partir de 0, la vitesse optimale augmente jusqu'à atteindre la vitesse maximale permise pour l'altitude de vol actuelle. Lorsqu'on augmente encore l'indice du coût, l'avion doit diminuer son altitude afin d'atteindre la nouvelle vitesse optimale

V_α . D'autre part, l'avion n'est pas contraint à passer tout le vol à une seule altitude. Il en résulte que le code de la méthode OTA produit des trajectoires optimales pour lesquelles l'avion parcourt plusieurs altitudes différentes durant la phase de croisière. En effet, le changement d'altitude en phase de croisière s'explique par le fait que la masse de l'avion est un paramètre qui affecte l'altitude optimale de vol et d'après Airbus (1998), l'altitude optimale augmente lorsque la masse de l'avion diminue. Comme la masse de l'avion diminue en fonction du temps à partir du décollage, il s'en suit que l'avion volera à l'altitude la plus basse au début puis effectuera un ou plusieurs changements d'altitude afin de monter vers des altitudes plus élevées.

3.2.4 Effet d'un indice du coût positif sur les phases de montée et de descente

Le changement de l'indice du coût affecte non seulement la phase de croisière mais aussi les phases de montée et de descente.

Phase de montée

La figure 3.7, tirée de Roberson (2007), montre l'effet de l'indice du coût sur la phase de montée. La vitesse ascensionnelle correspond à la variation d'altitude pendant une unité de temps. L'indice du coût nul a la plus grande vitesse ascensionnelle puisque l'avion a pour but d'atteindre l'altitude de croisière le plus rapidement possible pour consommer moins de carburant. Lorsqu'on augmente l'indice du coût, la vitesse ascensionnelle diminue afin de permettre à l'avion de gagner plus de distance horizontale et de diminuer la durée de vol.

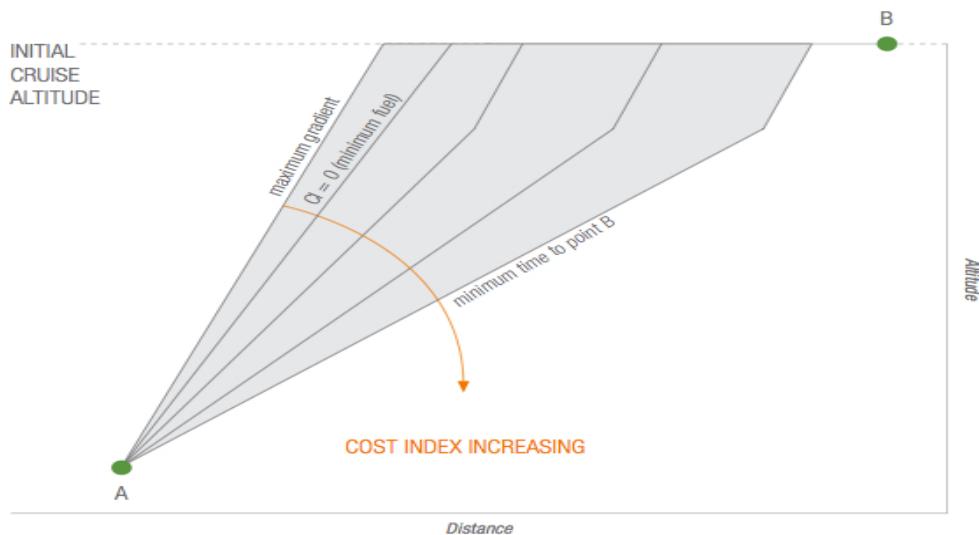


Figure 3.7 - Effet de l'indice du coût sur la phase de montée (figure tirée de Roberson (2007)).

Phase de descente

La figure 3.8, tirée de Roberson (2007), montre l'effet de l'indice du coût sur la phase de descente. Pour les faibles indices du coût, la priorité est donnée à la minimisation de la consommation de carburant. L'avion descend donc en utilisant le moins possible la poussée des moteurs. Il s'en suit que pour les faibles indices du coût, l'avion entame sa descente plus tôt. Par contre, pour les valeurs élevées de l'indice du coût, la priorité est donnée à la minimisation de la durée de vol. L'avion garde son altitude de croisière le plus longtemps possible afin de garder sa vitesse optimale puis effectue une descente rapide.



Figure 3.8 - Effet de l'indice du coût sur la phase de descente (figure tirée de Roberson (2007)).

3.2.5 Fonction $M(T)$ utilisée dans l'industrie du transport aérien

Le modèle représentant la fonction $M(T)$ utilisé généralement dans l'industrie du transport aérien suppose que cette fonction a une allure parabolique comme représenté à la figure 3.9 qui est tirée de Barnhart et Smith (2012). On retrouve cette allure également dans Marla et al. (2011) et DeJonge et al. (1992) mais ces auteurs n'indiquent pas avec quel moyen ils ont obtenu ces résultats. Pour un indice du coût nul, la consommation de carburant est minimale

et la durée de vol est maximale. Lorsqu'on augmente l'indice du coût, la durée du vol diminue et la consommation de carburant augmente jusqu'à l'atteinte de l'indice du coût maximal. En étudiant de plus près cette fonction, on a constaté que le comportement de cette fonction est plus compliqué que ce qui est actuellement énoncé. On montrera à la section 3.2.7, la fonction $M(T)$ obtenue à partir des simulations effectuées en utilisant le code de la méthode OTA.

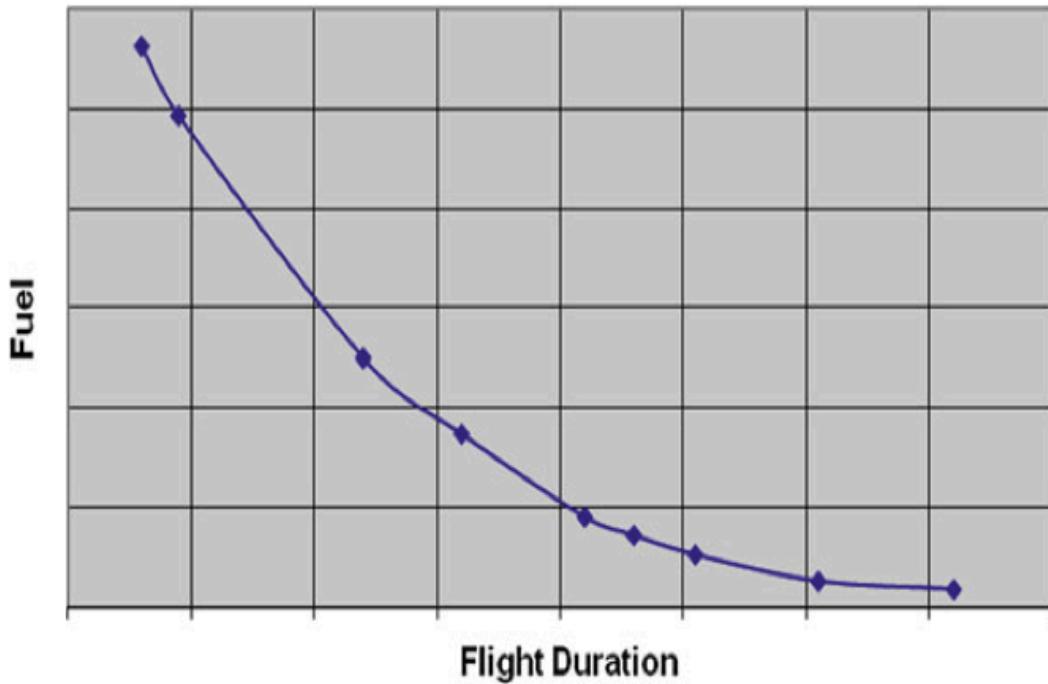


Figure 3.9 - Modèle de la fonction $M(T)$ en fonction de la durée de vol utilisé actuellement dans l'industrie du transport aérien (figure tirée de Barnhart et Smith (2012)).

3.2.6 Résultats des simulations avec le code de la méthode OTA

Les simulations effectuées avec le code de la méthode OTA ont été appliquées au vol étudié décrit à la section 3.1.1. Afin de calculer une trajectoire optimale, le code de la méthode OTA prend pour entrée l'indice du coût et la masse de l'avion à l'arrivée qui est composée de la masse de l'avion à vide, la masse des passagers ainsi que celle de leurs bagages et la masse de carburant de réserve. La masse de l'avion au départ est le résultat du calcul effectué par le code puisqu'elle est égale à la masse de l'avion à l'arrivée plus la masse de carburant correspondant à la trajectoire optimale. Il s'en suit qu'il faut déterminer la masse

de l'avion à l'arrivée afin de lancer les simulations. Le Boeing B77W comporte 349 sièges et en considérant un facteur de remplissage de 0,8 le nombre de passagers serait de 280. De plus, selon Transports Canada (2014), le poids moyen d'un passager est de 92 kg et le poids moyen d'une passagère est de 76 kg. On considère dans cet exemple que le poids moyen des passagers incluant 6 kg de bagage de cabine est de 85 kg et on rajoute au poids de chacun des passagers 20 kg pour le bagage transporté. D'autre part, afin de tenir compte du poids de l'équipage de l'avion on suppose que celui-ci est composé de 12 personnels de cabine et de 3 pilotes. Pour ce qui est de la masse de l'avion, en se basant sur les informations tirées de Boeing (1998), la masse du B77W à vide est de 167 829 kg. Par ailleurs, d'après FAA (1993), le carburant de réserve devrait être égal à la quantité de carburant requise pour voler pour une période supplémentaire égale à 10% de la durée de vol qui minimise la consommation de carburant. Pour un indice du coût nul, la masse de carburant consommée est de 45 000 kg. On pose donc une masse associée à la réserve de carburant égale à 4 500 kg. En conclusion, la somme de toutes ces composantes donne une masse à l'arrivée de 203 420 kg. Ces données sont résumées dans le tableau 3.2.

Tableau 3.2 - Données relatives au calcul de la masse à l'arrivée pour l'exemple considéré dans les simulations avec le code de la méthode OTA.

Nombre de sièges dans le Boeing B77W	349
Facteur de remplissage de l'avion	0,8
Masse d'un passager incluant son bagage	105 kg
Nombre des membres de l'équipage à bord	15
Masse à vide du B77W	167 829 kg
Masse de la réserve de carburant	4 500 kg
Masse de l'avion à l'arrivée	203 420 kg

Le code de la méthode OTA suppose qu'en phase de croisière, l'avion vole dans des couloirs d'altitude espacés de 2 000 pieds. On montre dans les trois prochaines figures l'effet du changement de l'indice du coût sur le profil de vol de l'avion. La figure 3.10, montrant le profil de vol de l'avion pour les indices du coût $\alpha = 8$ et $\alpha = 14$, a pour but de montrer l'effet d'une légère augmentation de l'indice du coût sur les différentes phases du vol. Cette figure montre que la distance franchie par l'avion à l'altitude 36 000 pieds est plus longue pour $\alpha = 14$ que pour $\alpha = 8$. En effet, lorsque l'indice du coût augmente il est profitable de diminuer la durée de vol en augmentant la vitesse de vol. La vitesse maximale que l'avion peut atteindre à 36 000 pieds est supérieure à la vitesse maximale à 38 000 pieds. Lorsqu'on augmente l'indice du coût de 8 à 14, l'avion passe plus de temps à une vitesse supérieure à la vitesse maximale à 38 000 pieds afin de diminuer la durée de vol, ce qui explique le

déplacement vers la droite de la montée vers l'altitude 38000 pieds. Pour la phase de montée, pour $\alpha = 8$, l'avion est monté plus rapidement que pour $\alpha = 15$ vers l'altitude de croisière 36 000 pieds. Finalement, pour la phase de descente pour $\alpha = 8$, l'avion a entamé sa descente plutôt que pour $\alpha = 14$ pour lequel l'avion effectue une descente rapide.

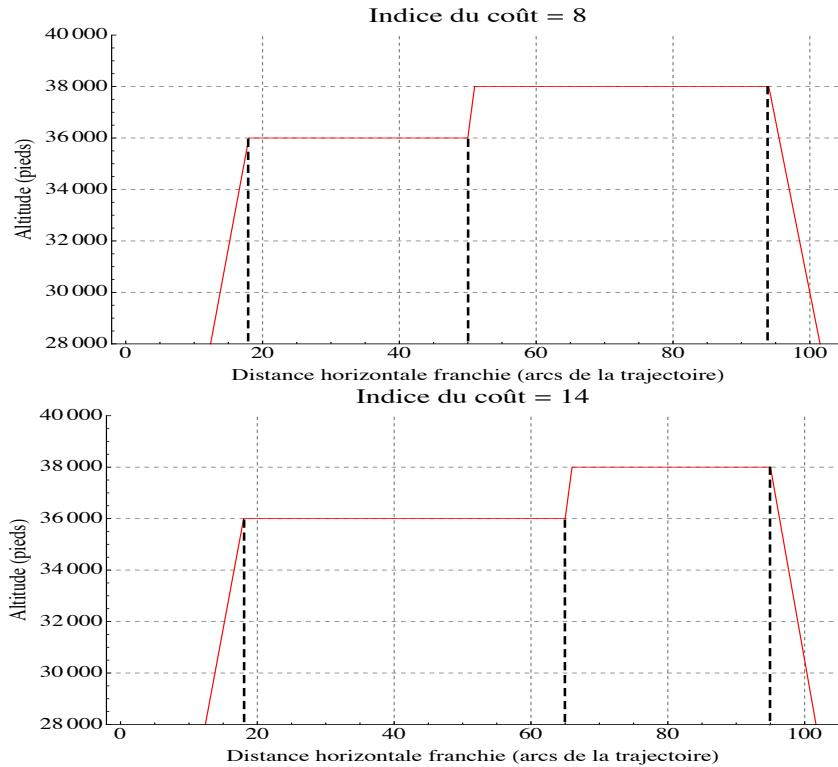


Figure 3.10 Effet d'une légère augmentation de l'IC sur le profil d'altitude.

La figure 3.11 montre les profils de vol pour $\alpha = 15$ et $\alpha = 16$. L'augmentation de α d'une unité a pour effet d'ajouter un nouveau plateau de vol de croisière à l'altitude de 34 000 pieds. Lorsqu'on atteint un indice du coût pour lequel la vitesse optimale V_α dépasse la vitesse maximale à 36 000 pieds, il devient profitable de voler à une altitude encore plus basse. On expliquera dans la prochaine section l'effet de ce changement brusque dans les altitudes de vols en croisière sur la masse de carburant consommée et sur la durée de vol.

D'autre part, la figure 3.12 montre l'effet d'une grande augmentation de l'indice du coût sur le profil de vol. Pour l'indice du coût 8, l'avion effectue le vol aux altitudes 36 000 pieds et 38 000 pieds tandis que pour l'indice du coût 48, l'avion effectue le vol aux altitudes 32 000 et 34 000 pieds. En effet, pour $\alpha = 48$, la vitesse optimale V_α est supérieure à la vitesse maximale permise aux altitudes 36 000 pieds et 38 000 pieds et donc il est profitable de voler à 34 000 pieds où on peut voler à la vitesse optimale V_α .

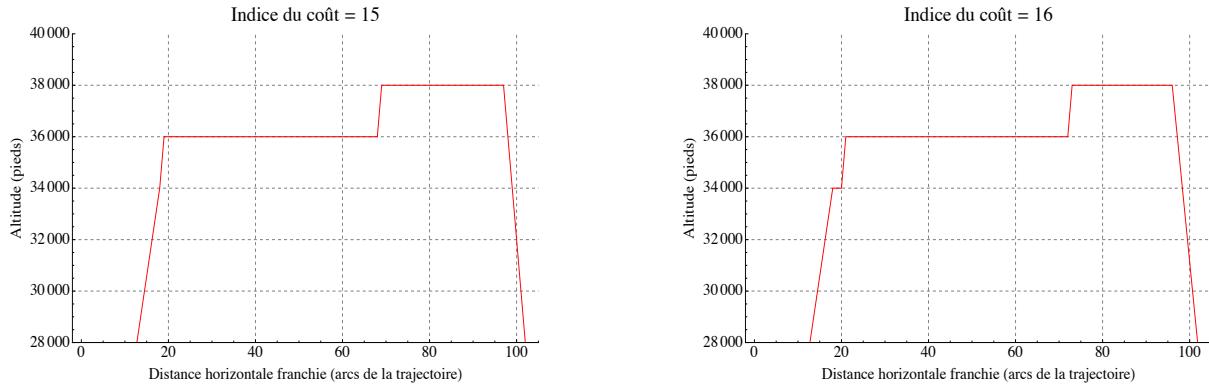


Figure 3.11 Changement des altitudes de croisière pour un petit changement de α .

La figure 3.13 montre le résultatat des simulations effectuées pour des indices du coût entre 1 et 65. On peut y voir, pour chaque valeur d'indice du coût, les altitudes parcourues par la trajectoire optimale associée et à quelle distance horizontale franchie le changement d'altitude s'effectue. Par exemple pour l'indice du coût 30, la trajectoire optimale passe par les altitudes 34 000 pieds et 36 000 pieds. L'avion atteint l'altitude 34 000 pieds au segment 19 de la grille ensuite il effectue un changement d'altitude au segment La figure montre le déplacement du «*step-climb*» en fonction de l'indice du coût. On constate que les «*step-climb*» se déplacent linéairement vers la gauche lorsqu'on augmente l'indice du coût. De plus, cette figure montre que pour certaines valeurs de l'indice du coût, l'augmentation de ce dernier d'une unité entraîne l'ajout d'un nouveau plateau de vol dans la trajectoire optimale (par exemple en augmentant α de 35 à 36, on voit l'apparition du plateau d'altitude 32 000 pieds) tandis que pour d'autres valeurs, l'ajout d'une unité dans l'indice du coût entraîne la suppression d'un plateau de vol dans la trajectoire optimale (par exemple en augmentant α de 7 à 8, l'avion ne monte plus à 40 000 pieds).

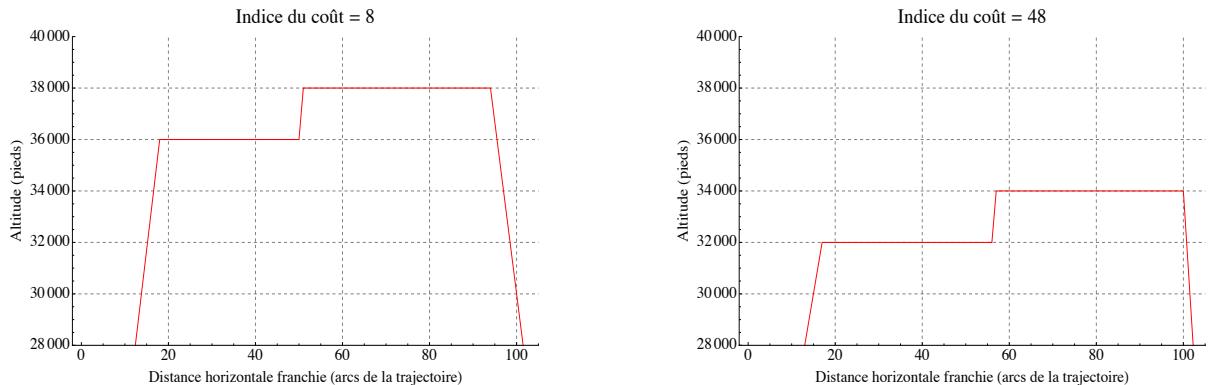


Figure 3.12 Effet d'une grande augmentation de l'IC sur le profil d'altitude.

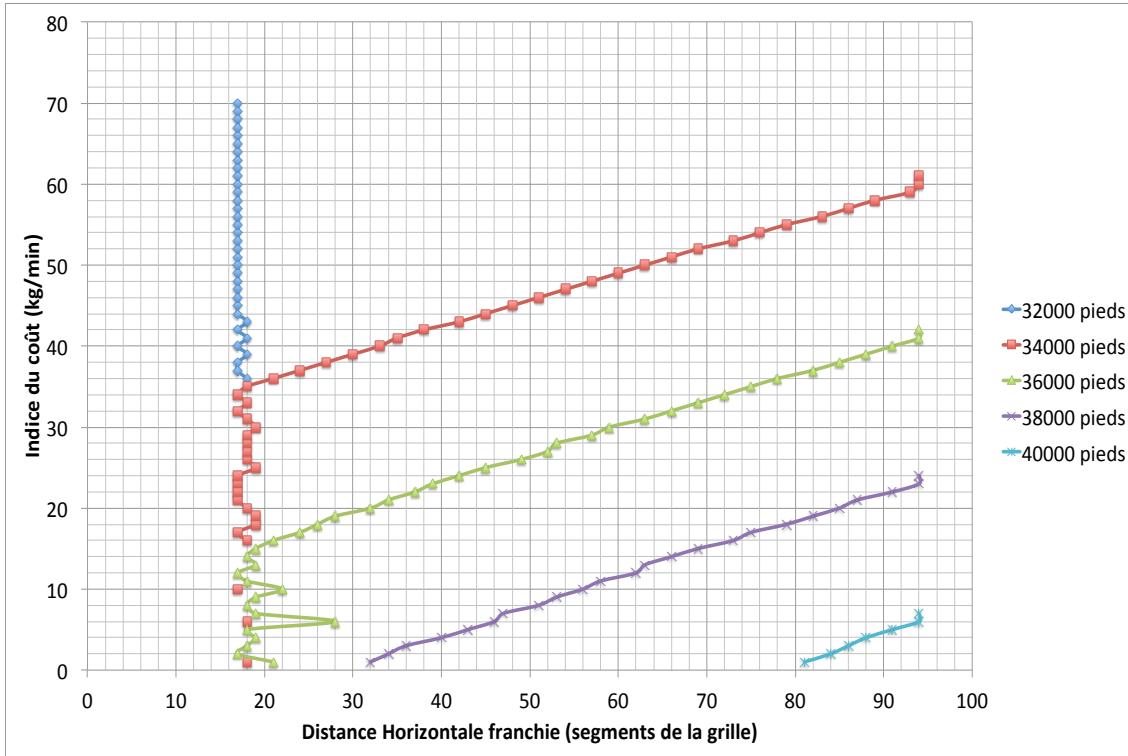


Figure 3.13 - Altitudes parcourues dans la trajectoire optimale pour chaque indice du coût.

3.2.7 La fonction $M(T)$ obtenue à partir des simulations effectuées avec le code de la méthode OTA

Pour comprendre l'effet du changement de l'indice du coût sur la durée de vol et la masse de carburant consommé, on a fixé la masse de l'avion à l'arrivée et on a augmenté l'indice du coût à partir de 0. Pour $\alpha = 0$, la masse de carburant consommé est minimale et la durée de vol est maximale. Lorsqu'on augmente α , la masse de carburant consommé augmente et la durée de vol diminue comme on l'expliquera à la section 4.1.1. Pour certaines valeurs de l'indice du coût, une légère augmentation de α cause un changement abrupt des profils de vol, c'est-à-dire l'ajout ou la suppression d'une altitude de vol durant la phase de croisière, ce qui cause une augmentation abrupte de la masse de carburant consommé et une diminution abrupte dans la durée de vol. Ces valeurs particulières de α seront appelées des points de bifurcation dans la suite de ce document.

Comme le code de la méthode OTA n'est pas finalisé, des valeurs de masse de carburant consommé et de durées de vol erronées ont été trouvées pour de faibles indices du coût. Pour l'exemple utilisé dans les simulations, on traite un cas sans tenir compte de la météo et des zones tarifées alors normalement, seules les vitesses et les altitudes de vol devraient changer

lorsqu'on change l'indice du coût. Cependant, pour de petites valeurs de α , on a constaté que même la trajectoire horizontale change lorsqu'on change la valeur de α . Pour ces valeurs de l'indice du coût, lorsqu'on augmente α , parfois la durée de vol augmente et parfois elle diminue et on observe également la même chose pour la masse de carburant consommé. Ces résultats ne sont pas compatibles avec le résultat qu'on expliquera à la section 4.1.2. De plus, la figure 3.13 montre que pour ces valeurs de α parfois, en augmentant l'indice du coût, on a un changement abrupt dans la trajectoire optimale qui, en augmentant encore α , est supprimé et on retrouve la trajectoire initiale. On a donc conclu que ces valeurs étaient erronées. Suite à ces constatations, on a décidé de retenir, pour les faibles α , les bifurcations qui causent des changements qui persistent dans la trajectoire optimale. Par ailleurs, les résultats des simulations effectuées pour $\alpha \in [38, 70]$ ne contiennent pas les problèmes cités précédemment. Pour ces résultats, on constate que la fonction $M(T)$ peut être approximée par des morceaux de paraboles décroissants. On suppose également qu'on peut approximer les valeurs de $M(T)$ obtenues pour les faibles valeurs de α par des morceaux de paraboles décroissants.

On retient les cinq changements abrupts suivants dans la trajectoire optimale : la suppression du plateau d'altitude 40 000 pieds pour $\alpha = 8$, l'ajout du plateau d'altitude 34 000 pieds pour $\alpha = 16$, la suppression du plateau d'altitude 38 000 pieds pour $\alpha = 25$, l'ajout du plateau d'altitude 32 000 pieds pour $\alpha = 36$ et finalement la suppression du plateau d'altitude 36 000 pieds pour $\alpha = 43$. On a donc cinq discontinuités dans $M(T)$ et dans $T(\alpha)$. De plus, on a constaté lors des simulations que les discontinuités dans $M(T)$ ne dépassent pas trois cents kilogrammes et celles dans $T(\alpha)$ ne dépassent pas deux minutes et que les morceaux de paraboles formant $M(T)$ sont convexes. À partir de ces résultats et de ces hypothèses, on construit une fonction $M(T)$ parabolique par morceaux présentée à la figure 3.14. Le modèle utilisé pour décrire $M(T)$ est

$$\begin{aligned} M(T) = & \sum_{i=0}^4 \left(M_i + \frac{1}{2} a_i (T - T_{M_i})^2 \right) (H(T - T_{i+1}) - H(T - T_i - \Delta T_i)) \\ & + \left(M_5 + \frac{1}{2} a_5 (T - T_{M_5})^2 \right) (H(T - T_{\min}^{(M)}) - H(T - (T_5 - \Delta T_5))) , \end{aligned} \quad (3.5)$$

où $T_{M_i} \geq T_i - \Delta T_i$, $a_i > 0$ est une constante, M_i est le minimum du $i^{\text{ème}}$ morceau de parabole qui est atteint à $T = T_{M_i}$, $i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et

$$H(X) := \begin{cases} 1 & \text{si } X \geq 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le $i^{\text{ème}}$ morceau de parabole est délimité par T_{i+1} à gauche et $T_i - \Delta T_i$ à droite, où ΔT_i est la largeur de la discontinuité immédiatement à gauche de T_i , avec $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $\Delta T_0 = 0$. La fonction $M(T)$ a cinq discontinuités associées à cinq bifurcations aux durées de vol T_1, T_2, T_3, T_4 et T_5 . Pour ces points de bifurcation, lorsque la durée de vol diminue pour atteindre $T = T_i - \Delta T_i$, où $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et où $\Delta T_i \leq 2$ min, la masse de carburant consommé augmente abruptement pour atteindre $M(T_i) + \Delta M_i$ où $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $\Delta M_i \leq 300$ kg. On désigne par $T_{\min}^{(M)}$ la durée de vol minimale que l'avion peut accomplir pour relier l'aéroport de départ à l'aéroport d'arrivée et on suppose que cette durée de vol est atteinte en utilisant un indice du coût maximal. On pose $T_0 = T_{\max}^{(M)}$, la durée de vol maximale atteinte en utilisant un indice du coût nul et on désigne par $\mathcal{D}_M = [T_{\min}^{(M)}, T_{\max}^{(M)}]$ le domaine de définition de la fonction $M(T)$. Pour cet exemple, $T_{\min}^{(M)} = 370$ minutes et $T_{\max}^{(M)} = 390$ minutes. Les paramètres utilisés pour obtenir la fonction $M(T)$ illustrée à la figure 3.14 sont présentés dans le tableau 3.3. On constate que la différence entre la durée de vol maximale et la durée de vol minimale est de 20 minutes. Cette différence peut paraître petite pour un vol de plus que 6 heures mais puisque pour chaque indice du coût, le code OTA calcule une trajectoire optimale, on peut comprendre que la différence en durée de vol pour toutes les trajectoires optimales ne peut pas être très grande.

Tableau 3.3 - Paramètres utilisés dans le modèle de $M(T)$

Paramètres	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
M_i	34 591	34 631	34 742	34 870	35 639	37 435
T_{M_i}	390	388,35	385,5	384	379,9	375,4
T_i	390	388,9	385,8	382,3	377,9	373,4
a_i	17	19,734	36,786	51,44	110,2	301,4
ΔT_i	0	1,7	1,6	0,6	0,8	0,4

Les dernières simulations obtenues avec la version la plus récente du programme OTA, basée sur BADA 4, confirment que le modèle utilisé pour $M(T)$ dans ce mémoire est plausible et que les bifurcations sont bien réelles.

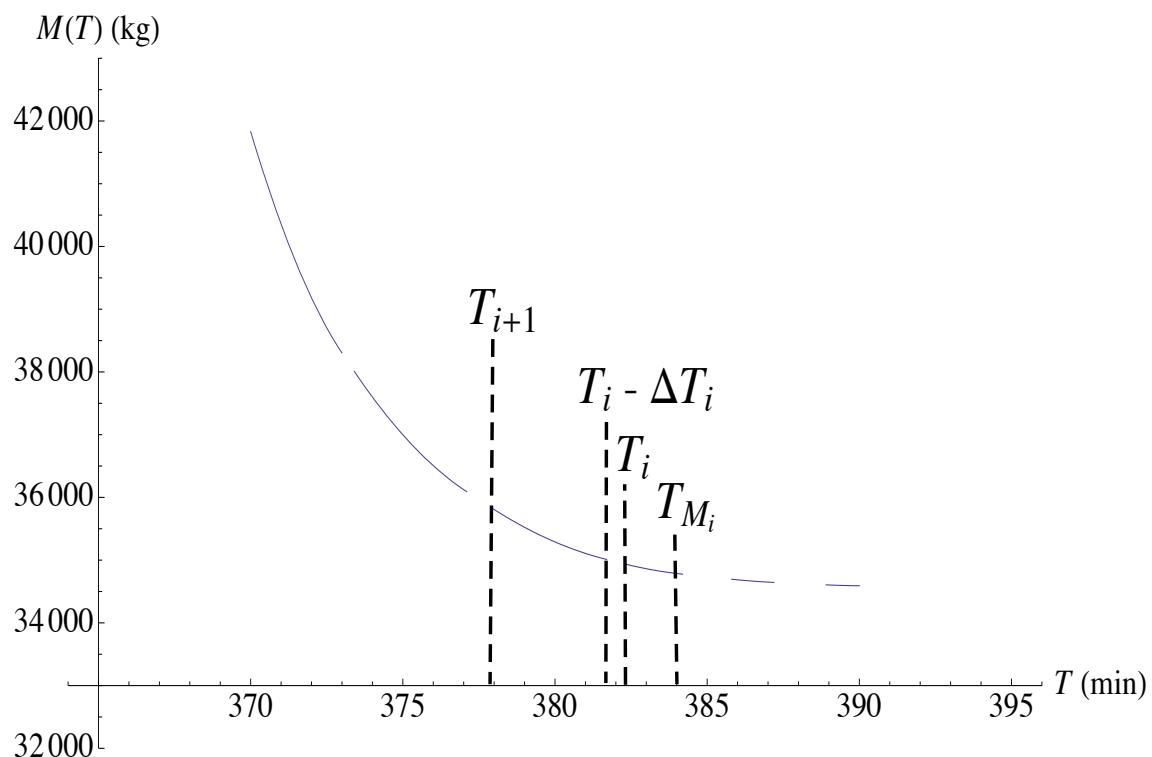


Figure 3.14 - La fonction $M(T)$ continue par morceaux en fonction de la durée de vol.

CHAPITRE 4 DÉTERMINATION DE L'INDICE DU COÛT OPTIMAL

Maintenant que les fonctions $M(T)$ et $A(T)$ qui composent le coût total du vol ont été définies, on présente dans ce chapitre le problème d'optimisation et les conditions d'optimalité puis on étudie les fonctions qui interviennent dans la définition de la méthode de recherche de l'indice du coût optimal. On considérera deux cas pour la fonction $M(T)$. Dans le premier, on propose de traiter le problème avec une version simplifiée de $M(T)$ en l'approximant par une parabole continue. Dans le deuxième cas, on tient compte des discontinuités dans $M(T)$ et dans $T(\alpha)$ observées dans les résultats des simulations avec le code OTA et on suppose que la fonction $M(T)$ contient cinq discontinuités et qu'elle est composée de six morceaux de paraboles décroissantes.

4.1 Conditions d'optimalité

4.1.1 Modèle direct du coût total du vol

Pour la trajectoire ayant la durée de vol T^* qui minimise le coût total calculé par le modèle direct du coût total du vol, on a

$$T^* \in \operatorname{argmin}_{T \in \mathcal{D}_M} C(T),$$

où $\mathcal{D}_M = [T_{\min}^{(M)}, T_{\max}^{(M)}]$ est le domaine de définition de la fonction $M(T)$. La fonction $M(T)$ est différentiable par morceaux, ainsi la fonction $C(T) = A(T) + M(T)$ est différentiable par morceaux. Il s'en suit que :

$$\begin{cases} C'(T^*) = 0; \\ C''(T^*) \geq 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

si T^* est un minimum de $C(T)$ et appartient aux intervalles dans lesquels $C(T)$ est différentiable, ce qui implique via l'équation (1.1) que :

$$\begin{cases} M'(T^*) + A'(T^*) = 0; \\ M''(T^*) + A''(T^*) \geq 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

4.1.2 Modèle IC du coût total du vol

Le code de la méthode OTA s'appuie sur le modèle IC pour le calcul du coût total d'un vol. Ainsi, pour chaque indice du coût α , le code calcule la durée de vol $T(\alpha)$ où

$$T(\alpha) \in \operatorname{argmin}_{T \in \mathcal{D}_M} \hat{C}(T) \quad (4.3)$$

avec $\mathcal{D}_M \subseteq \mathcal{D}_A$ puisqu'on ne considère pas le cas d'une arrivée avant $T_{\min}^{(A)}$ ou après $T_{\max}^{(A)}$. La fonction $M(T)$ est différentiable par morceaux, ainsi la fonction $\hat{C}(T) = M(T) + \alpha T + B(0)$ est différentiable par morceaux. Par conséquent, l'expression (4.3) implique que si $T(\alpha)$ est un minimum de $\hat{C}(T)$ qui appartient à l'un des intervalles dans lesquels $\hat{C}(T)$ est différentiable, alors :

$$\begin{cases} \hat{C}'(T(\alpha)) = 0; \\ \hat{C}''(T(\alpha)) \geq 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

et par la suite, via l'équation (1.3),

$$\begin{cases} -M'(T(\alpha)) = \alpha; \\ M''(T(\alpha)) \geq 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

On désigne par $\mathcal{D}_T = [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ le domaine de définition de $T(\alpha)$. On montrera dans les sections 4.2.1 et 4.3 que $\alpha_{\min} = 0$ et $\alpha_{\max} = -M'(T_{\min})$. Si $M'(T)$ est différentiable en $T = T(\alpha)$ et que $T(\alpha)$ est différentiable en α , alors on peut dériver la première équation de (4.5) par rapport à α pour obtenir

$$M''(T(\alpha)) T'(\alpha) = -1. \quad (4.6)$$

En utilisant la seconde équation de (4.5), l'équation (4.6) implique que

$$T'(\alpha) \leq 0. \quad (4.7)$$

La fonction $T(\alpha)$ est donc décroissante pour les $\alpha \geq 0$ tels que $T'(\alpha)$ et $M'(T(\alpha))$ existent.

4.1.3 Lien entre le modèle direct et le modèle IC du coût total du vol

Pour que les deux modèles donnant le coût total minimal du vol donnent la même trajectoire, il faut que l'indice du coût soit égal à une valeur optimale α^* telle que $T(\alpha^*) = T^*$. À partir de

la première équation de (4.5) et de la première équation de (4.2), on peut écrire pour T^* que

$$A'(T(\alpha^*)) = \alpha^*, \quad (4.8)$$

ce qui nous amène à définir la fonction $f(\alpha)$ comme

$$f(\alpha) := \alpha - A'(T(\alpha)). \quad (4.9)$$

La fonction $f(\alpha)$ s'annule pour $\alpha = \alpha^*$. En dérivant l'expression (4.9) par rapport à α , on obtient

$$f'(\alpha) := 1 - A''(T(\alpha)) T'(\alpha). \quad (4.10)$$

Comme $T'(\alpha) = -1/M''(T(\alpha))$ d'après l'équation (4.6), alors $f'(\alpha)$ donnée par l'équation (4.10) prend la forme

$$f'(\alpha) := 1 + \frac{A''(T(\alpha))}{M''(T(\alpha))}. \quad (4.11)$$

Si on pose $\alpha = \alpha^*$ dans la deuxième équation de (4.5) et $T^* = T(\alpha^*)$ dans la deuxième équation de (4.2), alors on obtient :

$$\begin{cases} M''(T(\alpha^*)) \geq 0; \\ A''(T(\alpha^*)) \geq -M''(T(\alpha^*)). \end{cases} \quad (4.12)$$

Si $M''(T(\alpha^*)) > 0$, alors on peut diviser la deuxième équation de (4.12), en tenant compte de la première équation de (4.12). On obtient alors $1 + \frac{A''(T(\alpha^*))}{M''(T(\alpha^*))} \geq 0$, ce qui implique avec l'équation (4.11) que

$$f'(\alpha^*) \geq 0. \quad (4.13)$$

Ce résultat peut être utilisé pour éliminer les zéros α_k de $f(\alpha)$ pour lesquels $f'(\alpha_k) < 0$.

La fonction $M(T)$ est différentiable partout sauf sur les bords des cinq discontinuités qu'elle contient. Lors des simulations qu'on a effectuées, la seule particularité qu'on a relevée pour ces points qui se situent sur le bord des discontinuités est que la fonction $\hat{C}(T)$ est égale des deux côtés de chaque discontinuité comme le mentionnera en 4.3.1. De plus, la durée de vol optimale pour les simulations était toujours dans les intervalles dans lesquels $M(T)$ est différentiable. On n'étudie pas dans ce qui suit le cas où le minimum de ces fonctions tombe exactement sur le bord de ces discontinuités et on suppose que T^* appartient aux intervalles dans lesquels $M(T)$ est différentiable.

4.1.4 Intervalle maximal pour la durée de vol optimale T^*

L'indice du coût optimal α^* satisfait $f(\alpha^*) = 0$, donc

$$\alpha^* = A'(T^*). \quad (4.14)$$

La fonction $A(T)$ définie à la section 3.1 satisfait

$$\alpha_{\min} \leq A'(T) \leq \alpha_{\max}, \quad T \in \mathcal{D}_A, \quad (4.15)$$

où $\mathcal{D}_A = [T_{\min}^{(A)}, T_{\max}^{(A)}]$ et α_{\min} et α_{\max} sont définis par :

$$\begin{aligned} \alpha_{\min} &:= \min_{T \in \mathcal{D}_A} A'(T); \\ \alpha_{\max} &:= \max_{T \in \mathcal{D}_A} A'(T). \end{aligned} \quad (4.16)$$

En particulier, pour $T = T^*$, l'équation (4.15) donne

$$\alpha_{\min} \leq A'(T^*) \leq \alpha_{\max}, \quad (4.17)$$

et en utilisant l'équation (A.17)), l'inéquation (4.17) conduit à

$$\alpha_{\min} \leq \alpha^* \leq \alpha_{\max}. \quad (4.18)$$

D'après l'inéquation (4.7), T décroît strictement si α augmente pour les α où T est dérivable. On expliquera dans les sections 4.2.2 et 4.3.2 que la fonction $T(\alpha)$ décroît strictement si α augmente, même en présence de discontinuités. Il s'en suit que (4.18) implique que

$$T(\alpha_{\max}) \leq T(\alpha^*) \leq T(\alpha_{\min}). \quad (4.19)$$

Avec $T^* = T(\alpha^*)$ et les définitions :

$$\begin{aligned} T_{\min} &:= T(\alpha_{\max}); \\ T_{\max} &:= T(\alpha_{\min}), \end{aligned} \quad (4.20)$$

l'inéquation (4.19) conduit à

$$T_{\min} \leq T^* \leq T_{\max}. \quad (4.21)$$

4.1.5 Les domaines de définitions de $A(T)$ et $M(T)$ et l'intervalle maximal pour la durée de vol optimale T^*

On a défini, à la section 3.1, le domaine de définition de $A(T)$ tel que

$$\mathcal{D}_A = [T_{\min}^{(A)}, T_{\max}^{(A)}].$$

De même, on a défini à la section 3.2.7 le domaine de définition de la fonction $M(T)$ tel que

$$\mathcal{D}_M = [T_{\min}^{(M)}, T_{\max}^{(M)}].$$

Comme on ne considère pas le cas d'une arrivée avant $T_{\min}^{(A)}$ ou après $T_{\max}^{(A)}$, comme on l'a expliqué à la section 3.1, il s'en suit que

$$\mathcal{D}_M \subseteq \mathcal{D}_A.$$

De plus, on a $T_{\min} = T(\alpha_{\max})$ et $T_{\max} = T(\alpha_{\min})$, donc $[T_{\min}, T_{\max}] \subseteq \mathcal{D}_M$. Ensuite, on peut conclure que

$$[T_{\min}, T_{\max}] \subseteq \mathcal{D}_M \subseteq \mathcal{D}_A,$$

comme le montre la figure 4.1 qui présente un exemple des domaines de définition de $A(T)$, de $M(T)$ et de l'intervalle maximal pour T^* .

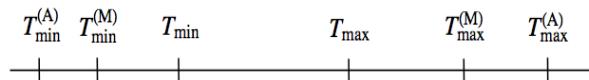


Figure 4.1 - Exemple des domaines de définition de $A(T)$, de $M(T)$ et de l'intervalle maximal pour T^* .

4.1.6 Effet d'un retard sur le problème d'optimisation

Dans le cas d'un retard au décollage, la durée du retard est additionnée à la durée du vol. On obtient ainsi la durée totale T entre l'heure planifiée pour le décollage et l'heure de l'arrivée. La fonction $A(T)$ est calculée en fonction de l'heure planifiée pour le décollage. Afin de tenir compte de la durée du retard qui a été ajoutée à la durée du vol, la fonction $A(T)$ est translatée vers la gauche comme le montre la figure 4.2. La nouvelle fonction $A(T)$, dénotée

par $\mathcal{A}(T)$, est donnée par

$$\mathcal{A}(T) = A(T + x),$$

où $x \geq 0$ est la durée du retard. La fonction $\mathcal{A}(T)$ est définie pour $T \in [T_{\min}^{(\mathcal{A})}, T_{\max}^{(\mathcal{A})}]$, où $T_{\min}^{(\mathcal{A})} = T_{\min}^{(A)} - x$ et $T_{\max}^{(\mathcal{A})} = T_{\max}^{(A)} - x$. De plus, puisqu'on ne considère pas le cas d'une arrivée après $T_{\max}^{(A)}$, la durée du retard satisfait

$$T_{\max} + x \leq T_{\max}^{(A)}, \quad x \geq 0$$

et par conséquent

$$0 \leq x \leq T_{\max}^{(A)} - T_{\max}.$$

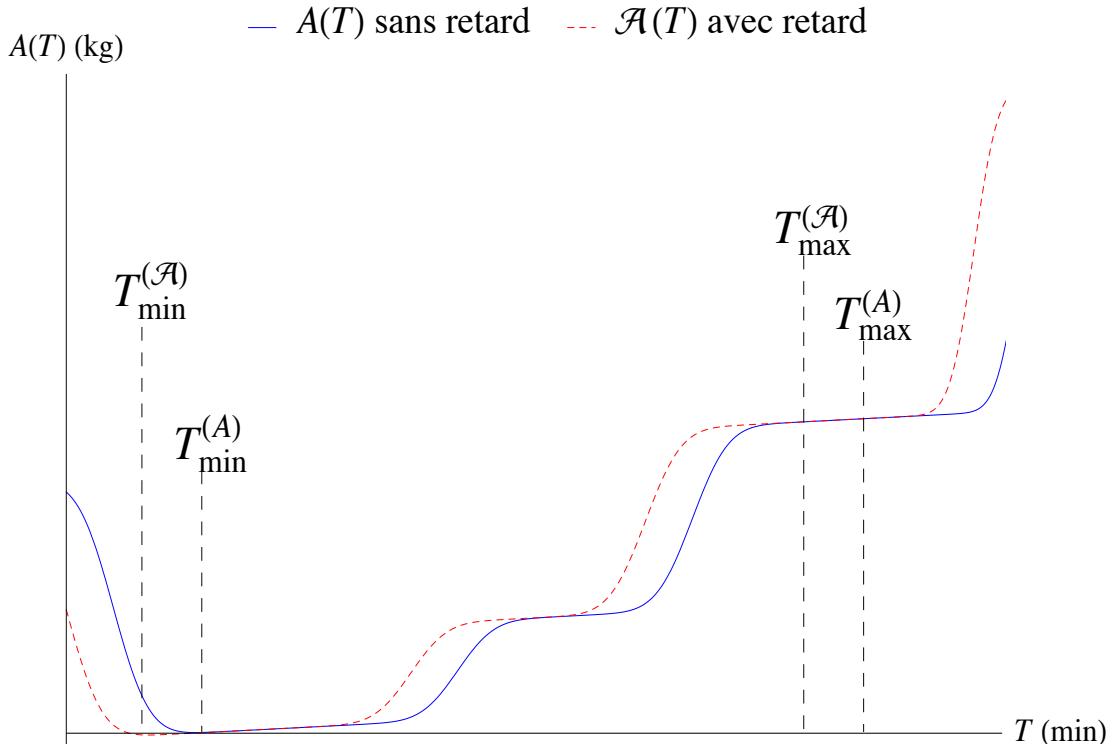


Figure 4.2 - Effet d'un retard sur la fonction $A(T)$.

4.2 Cas où la fonction $M(T)$ est continue

4.2.1 Modèle parabolique pour $M(T)$

On suppose que la fonction $M(T)$ est une parabole convexe donnée par

$$M(T) = M_0 + \frac{1}{2} a (T - T_{M_0})^2, \quad (4.22)$$

où $a \geq 0$. Dans l'équation (4.22), M_0 est le minimum de la parabole $M(T)$ qui est atteint pour $T = T_{M_0}$. Il s'en suit que

$$M'(T) = a (T - T_{M_0}). \quad (4.23)$$

La fonction $M(T)$ est définie pour $T \in \mathcal{D}_M$, où $\mathcal{D}_M = [T_{\min}^{(M)}, T_{\max}^{(M)}]$. De plus, avec $\alpha = 0$ et $T = T_{\max}^{(M)}$, la première équation de (4.5) donne $-M'(T_{\max}^{(M)}) = 0$, ce qui conduit avec l'équation (4.23) à

$$T_{\max}^{(M)} = T_{M_0}.$$

La figure 4.3 montre la fonction $M(T)$ utilisée dans ce cas. Lorsque la durée de vol est minimale la masse de carburant consommé est maximale et $M(T)$ diminue si T augmente. Pour l'exemple illustré à la figure 4.3, $M_0 = 34\,093$ kg, $T_{M_0} = T_{\max}^{(M)} = 390$ min, $T_{\min}^{(M)} = 370$ min et $a = 31,312$. Ces paramètres ont été obtenus en utilisant la méthode des moindres carrés afin d'avoir une approximation proche de la fonction $M(T)$ continue par morceaux illustrée à la figure 3.14. La figure 4.3 illustre la superposition de $M(T)$ continue à la fonction $M(T)$ continue par morceaux obtenue à la section 3.2.7.

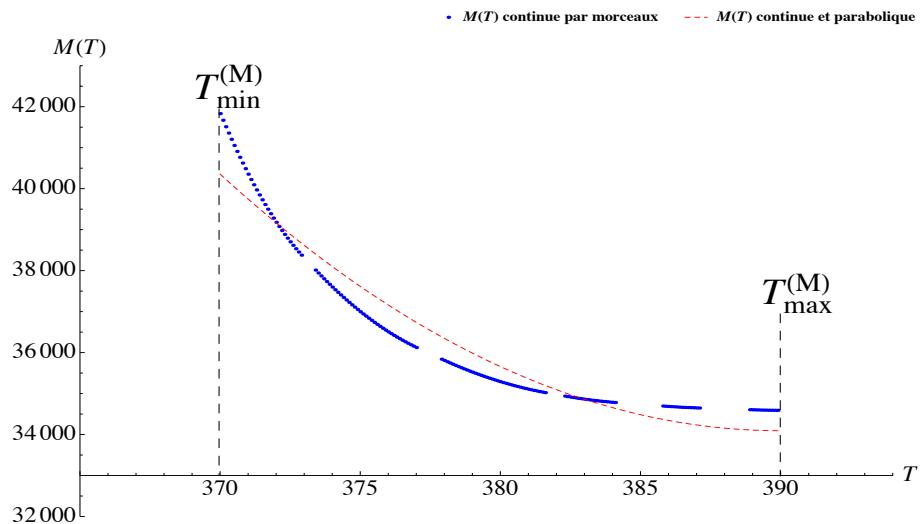


Figure 4.3 - La fonction $M(T)$ continue en fonction de la durée de vol.

4.2.2 La fonction $T(\alpha)$

En combinant la première équation du système (4.5) et l'équation (4.23), on obtient

$$T(\alpha) = T_{M_0} - \frac{\alpha}{a}. \quad (4.24)$$

De plus, d'après la deuxième équation de (4.5), $-M'(T)$ est strictement décroissante. On peut alors conclure à partir de la première équation de (4.5) que α varie entre $\alpha = -M'(T_{\max}^{(M)}) = 0$ et $\alpha_{\max} = -M'(T_{\min}^{(M)})$. Il s'en suit que

$$\mathcal{D}_T = [0, -M'(T_{\min}^{(M)})].$$

On peut tirer à partir de l'équation (4.24) que

$$T'(\alpha) = -\frac{1}{a}. \quad (4.25)$$

Comme $a > 0$, la fonction $T(\alpha)$ est linéaire et décroissante, elle est maximale et égale à $T_{\max}^{(M)}$ pour $\alpha = 0$ et elle atteint son minimum $T_{\min}^{(M)}$ pour $\alpha = \alpha_{\max}$ comme illustré à la figure 4.4. De plus, l'équation (4.9) qui définit la fonction $f(\alpha)$ donne

$$f(\alpha) = \alpha - A' \left(T_{M_0} - \frac{\alpha}{a} \right), \quad (4.26)$$

avec $\alpha \in [0, \alpha_{\max}]$, d'où on tire

$$f'(\alpha) = 1 + \frac{1}{a} A'' \left(T_{M_0} - \frac{\alpha}{a} \right). \quad (4.27)$$

On déduit à partir de l'équation (4.27) que $f'(\alpha) > 0$ sauf dans les intervalles de $T(\alpha)$ où

$$A''(T(\alpha)) \leq -a.$$

On ne peut donc pas exclure a priori le cas où $f(\alpha)$ a plusieurs racines. Comme $f'(\alpha^*) > 0$, d'après l'équation (4.13), on peut éliminer les racines de $f(\alpha)$ pour lesquelles $f'(\alpha) < 0$.

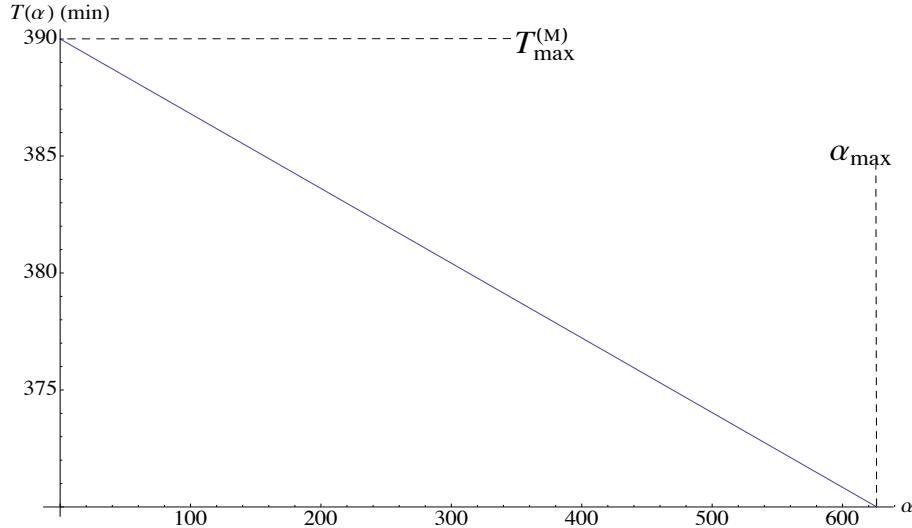


Figure 4.4 - La fonction $T(\alpha)$ dans le cas où $M(T)$ est continue.

4.2.3 Cas d'un vol qui décolle sans retard

Si on utilise la fonction $A(T)$ illustrée à la figure 3.2, alors on obtient la fonction $f(\alpha)$ illustrée à la figure 4.6. On constate ici que $f(\alpha)$ est strictement croissante et qu'elle n'admet qu'une seule racine. Dans la figure 4.5, on voit que $A''(T) > 0$ pour tout $T \in [T_{\min}^{(M)}, T_{\max}^{(M)}]$ et donc $A''(T) > -a$ puisque $a > 0$. Il s'en suit que $f'(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in [0, \alpha_{\max}]$. La fonction $f(\alpha)$ a alors une seule racine.

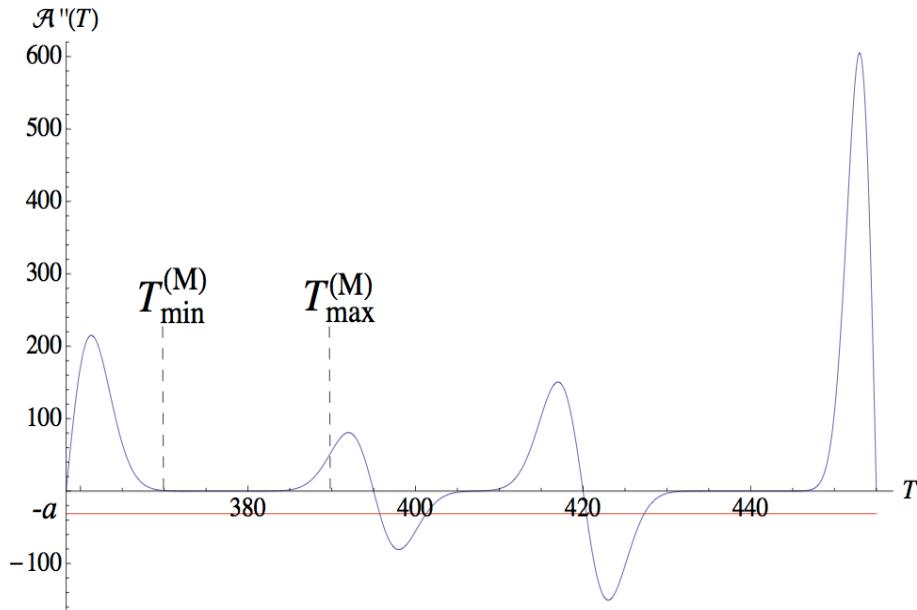


Figure 4.5 - La fonction $A''(T)$ pour le vol étudié.

On justifiera à la section 5.1.1 le choix de α_{\min} comme valeur de départ pour la recherche de l'indice du coût optimal. On effectue deux appels au code OTA en utilisant $\alpha = \alpha_{\min}$ et une deuxième valeur $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, ce qui nous permet, via l'équation (4.24), de déterminer T_{M_0} et a et donc de connaître la fonction $T(\alpha)$. D'après l'équation (4.18) on a

$$\alpha_{\min} \leq \alpha^* \leq \alpha_{\max}.$$

On discutera, à la section, 5.1.2 de la possibilité de réduire l'intervalle de recherche de α^* en fonction de la valeur de $T_{\max} = T(\alpha_{\min})$. Une fois l'intervalle de recherche de α^* réduit, on peut appliquer la méthode de Newton afin de calculer la racine de $f(\alpha)$. La formule de récurrence de la méthode de Newton appliquée à la fonction $f(\alpha)$ s'écrit :

$$\begin{cases} \alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} - \frac{f(\alpha^{(k)})}{f'(\alpha^{(k)})}, & k = 0, 1, 2, \dots; \\ \alpha^{(0)} = \alpha_{\min}, \end{cases} \quad (4.28)$$

où $\alpha^{(k)}$ est l'indice du coût à l'itération k ,

$$f(\alpha^{(k)}) = \alpha^{(k)} - A' \left(T_{M_0} - \frac{\alpha^{(k)}}{a} \right) \quad (4.29)$$

et

$$f'(\alpha^{(k)}) = 1 + \frac{1}{a} A'' \left(T_{M_0} - \frac{\alpha^{(k)}}{a} \right). \quad (4.30)$$

En substituant les inéquations (4.29) et (4.30) dans l'équation (4.28), on obtient

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} - \frac{\alpha^{(k)} - A' \left(T_{M_0} - \frac{\alpha^{(k)}}{a} \right)}{1 + \frac{1}{a} A'' \left(T_{M_0} - \frac{\alpha^{(k)}}{a} \right)}. \quad (4.31)$$

4.2.4 Cas d'un retard au décollage

Dans le cas d'un retard au décollage, la fonction $A(T)$ est translatée de la durée du retard et devient

$$\mathcal{A}(T) = A(T + x),$$

où $x \geq 0$ est la durée du retard comme on l'a expliqué à la section 4.1.6. Si on considère un retard de 15 minutes, les deux montées dans $\mathcal{A}(T)$ se passent à $\theta'_1 = \theta_1 - 15 = 380$ minutes et $\theta'_2 = \theta_2 - 15 = 405$ minutes.

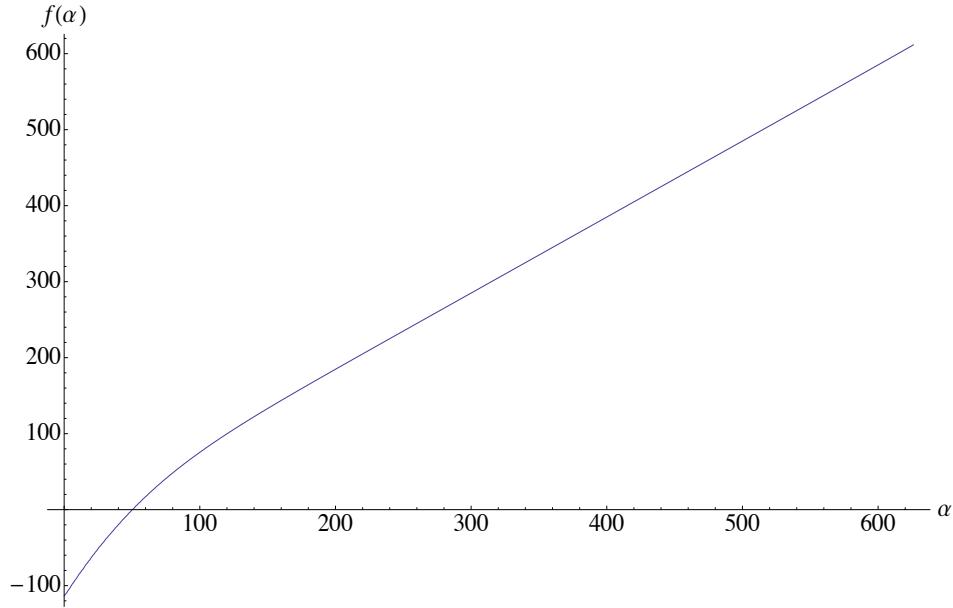


Figure 4.6 - La fonction $f(\alpha)$ dans le cas où $M(T)$ est continue et parabolique.

On dénote par $F(\alpha)$ la fonction $f(\alpha)$ obtenue dans le cas d'un retard au décollage. La fonction $F(\alpha)$ pour ce cas est illustrée à la figure 4.8. On constate ici que $F(\alpha)$ admet trois racines dont deux vérifiant $F'(\alpha) > 0$. La figure 4.7 montre qu'il y a des durées de vols $T \in [T_{\min}^{(M)}, T_{\max}^{(M)}]$ qui vérifient $\mathcal{A}''(T) \leq -a$ et donc $F(\alpha)$ est décroissante dans les intervalles de α qui vérifient $\mathcal{A}''(T(\alpha)) \leq -a$.

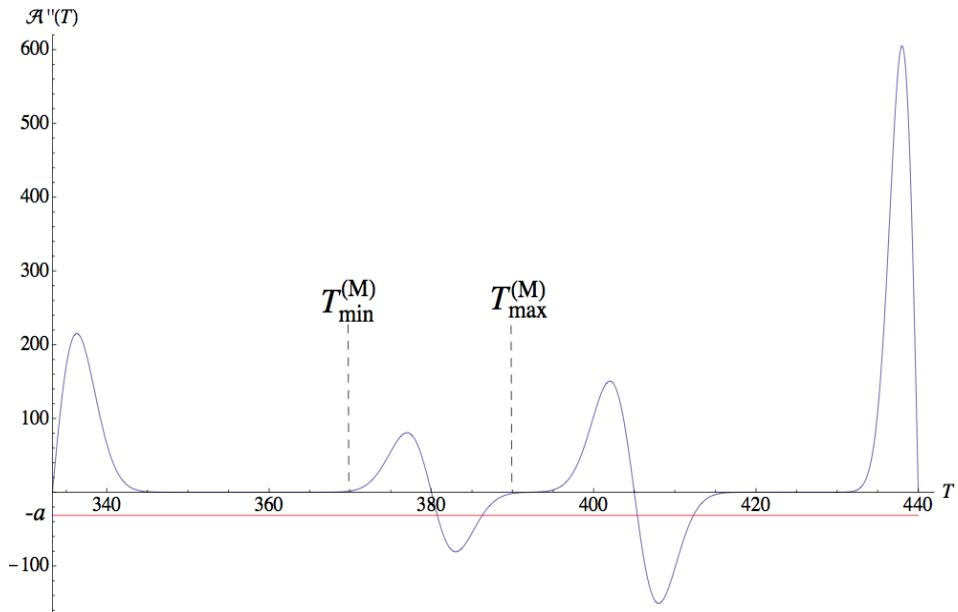


Figure 4.7 - La fonction $\mathcal{A}''(T)$ pour le cas d'un retard de 15 minutes au décollage.

D'après l'équation (4.13), on a $F'(\alpha^*) > 0$ ce qui permet d'éliminer la racine pour laquelle $F(\alpha)$ est décroissante. On expliquera à la section 5.1.2 que pour ce cas, on a deux intervalles de recherche pertinents pour α^* qui contiennent chacun une racine pour laquelle $F'(\alpha) > 0$. On effectue deux appels au code OTA en utilisant d'abord $\alpha = \alpha_{\min}$ puis une deuxième valeur $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, ce qui nous permet via l'équation (4.24) de déterminer T_{M_0} et a et donc de connaître la fonction $T(\alpha)$. La méthode de réduction des intervalles de recherche expliquée à la section 5.1.2 nous permet de connaître les intervalles de recherche pertinents pour la durée de vol optimale. On utilise l'équation de $T(\alpha)$ afin de déterminer les deux intervalles de α correspondant aux deux intervalles de durée de vol pertinents. Une fois les bornes des deux intervalles de recherche de α^* connues, on effectue un pas afin de se situer au milieu du premier intervalle. On utilise l'indice du coût trouvé comme valeur initiale dans la méthode de Newton expliquée à la section 4.2.3 qu'on applique dans cet intervalle de recherche afin de trouver la première racine de $F(\alpha)$, α_1 . Ensuite, on détermine l'indice du coût correspondant au milieu du deuxième intervalle et on l'utilise comme valeur initiale dans la méthode de Newton qu'on applique dans le deuxième intervalle de recherche afin de trouver la deuxième racine de $F(\alpha)$, α_2 . On compare ensuite les coûts totaux

$$C(T(\alpha_i)) = M(T(\alpha_i)) + A(T(\alpha_i)), \quad i = 1, 2,$$

et on choisit la racine qui minimise le coût total.

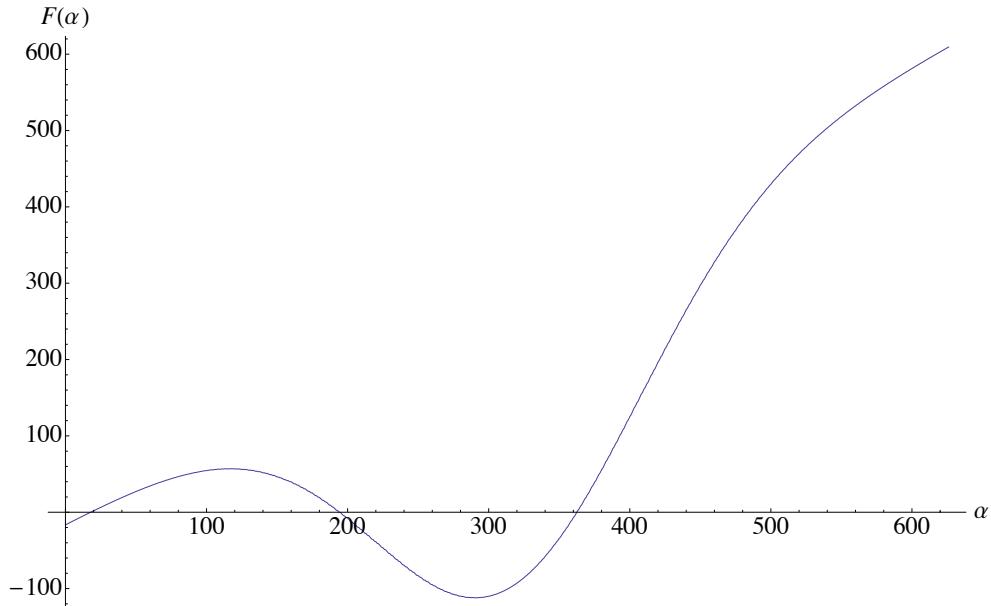


Figure 4.8 - La fonction $F(\alpha)$ ayant plusieurs racines.

Dans ce cas, on a deux racines de $F(\alpha)$ qui sont des candidates pour l'indice du coût optimal. Ces deux racines sont $\alpha_{\min} = 15$ et $\alpha = 365$. La racine qui minimise le coût total $C(T)$ dans ce cas est $\alpha = 365$. C'est donc l'indice du coût optimal.

On voit parallèlement à la figure 4.9 que le coût total a trois extrema dont deux sont des minimums. On voit également que la durée de vol qui minimise le coût total est la durée de vol la plus petite entre les deux durées de vol qui constituent des minimums locaux. Ceci confirme que l'indice du coût qui minimise le coût total est le plus grand des deux candidats qu'on a trouvé à partir de la recherche des racines de $F(\alpha)$.

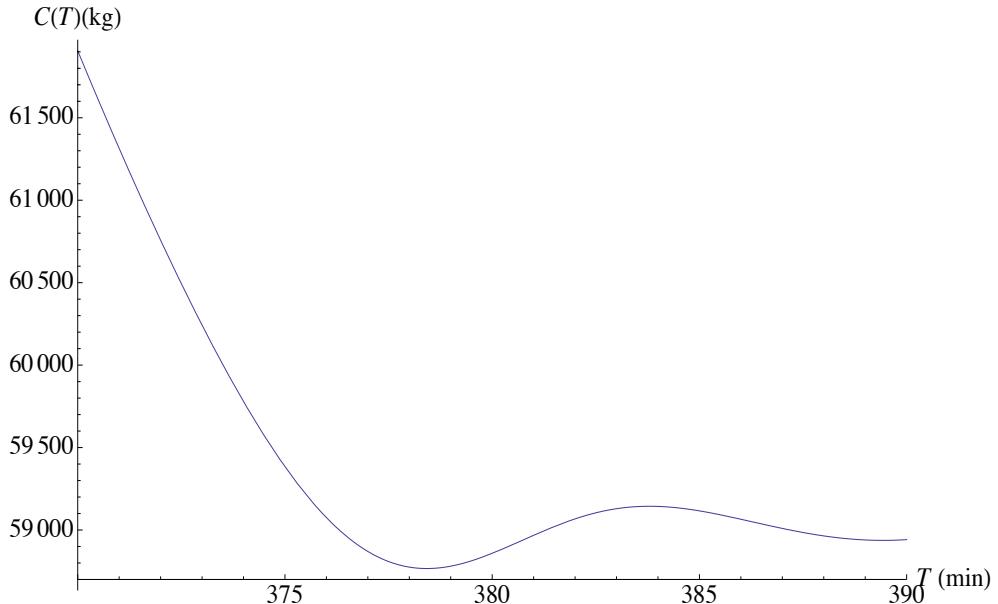


Figure 4.9 - Le coût total $C(T)$ pour l'exemple d'un retard au décollage.

4.3 Cas où la fonction $M(T)$ est continue par morceaux

4.3.1 Comportement de $M(T)$ autour d'un point de bifurcation

On utilise maintenant des fonctions $T(\alpha)$ et $M(T)$ qui reproduisent aussi fidèlement que possible les résultats qu'on a obtenus dans les simulations avec le code OTA. Le modèle utilisé pour décrire la fonction $M(T)$ est celui présenté par l'équation (3.5) et illustré à la figure 3.14. La fonction $M(T)$ est définie pour

$$T \in \mathcal{D}_M \setminus D,$$

où $\mathcal{D}_M = [T_{\min}^{(M)}, T_{\max}^{(M)}]$, $T_{\min}^{(M)}$ est la durée de vol minimale, $T_{\max}^{(M)}$ est la durée de vol obtenue pour $\alpha = 0$ et

$$D := \bigcup_{i=0}^5 [T_i - \Delta T_i, T_i].$$

La fonction $\hat{C}(T)$ représentant le modèle IC et définie par l'équation (1.3) est également formée de six morceaux de paraboles et a le même domaine de définition que $M(T)$. Pour les morceaux différentiables de $\hat{C}(T)$, on a $\hat{C}'(T) = M'(T) + \alpha$. Avec l'équation (3.5), il s'en suit que pour le $i^{\text{ème}}$ morceau continu de $\hat{C}(T)$, on a

$$\hat{C}'(T) = a_i (T - T_{M_i}) + \alpha, \quad \text{pour } T_{i+1} < T < T_i - \Delta T_i. \quad (4.32)$$

On désigne par α_i l'indice du coût qui produit la $i^{\text{ème}}$ bifurcation dans la trajectoire. Cette bifurcation se produit lorsque le coût total minimal est égal à gauche et à droite de la discontinuité dans $\hat{C}(T)$, comme le montre la figure 4.10. Pour un indice du coût un peu inférieur à α_i , on est dans le $i^{\text{ème}}$ morceau continu de $\hat{C}(T)$ et dès qu'on augmente l'indice du coût au-delà de α_i , on est dans le morceau $i+1$ de $\hat{C}(T)$. Il s'en suit que pour $\alpha = \alpha_i$, on a deux trajectoires qui minimisent le coût total et qui donnent

$$M(T_i) + \alpha_i T_i = M(T_i - \Delta T_i) + \alpha_i (T_i - \Delta T_i)$$

et par conséquent

$$\alpha_i = \frac{M(T_i - \Delta T_i) - M(T_i)}{\Delta T_i}.$$

Puisque $\alpha_i > 0$, on a deux cas :

$$M(T_i - \Delta T_i) - M(T_i) < 0 \quad \text{et} \quad \Delta T_i < 0$$

ou

$$M(T_i - \Delta T_i) - M(T_i) > 0 \quad \text{et} \quad \Delta T_i > 0.$$

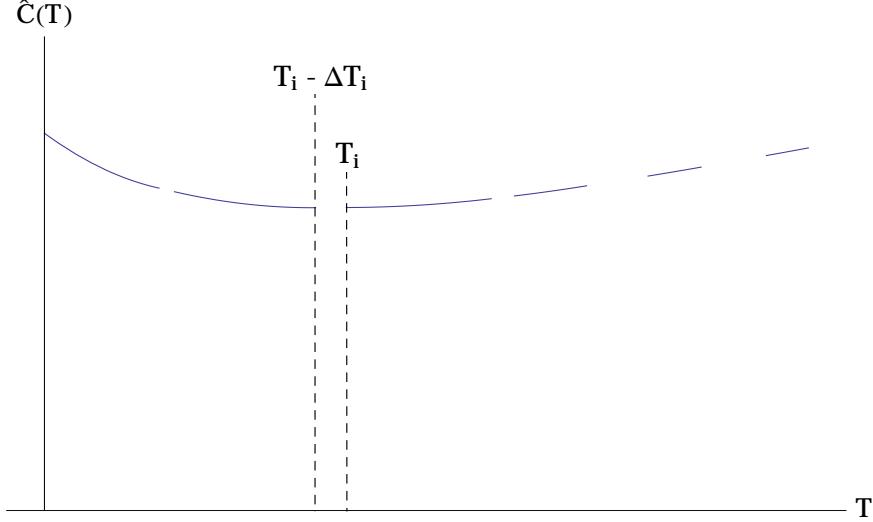


Figure 4.10 - $\hat{C}(T)$ pour $\alpha = \alpha_i$.

Supposons que $M(T_i - \Delta T_i) - M(T_i) < 0$ et $\Delta T_i < 0$. Puisque $\alpha_i > 0$, on a deux cas :

$$M(T_i - \Delta T_i) - M(T_i) < 0 \text{ et } \Delta T_i < 0$$

ou

$$M(T_i - \Delta T_i) - M(T_i) > 0 \text{ et } \Delta T_i > 0.$$

Supposons que $M(T_i - \Delta T_i) - M(T_i) < 0$ et $\Delta T_i < 0$. Ce cas est illustré à la figure 4.11. Lorsqu'on augmente l'indice du coût au-delà de α_i , la durée de vol augmente et la masse de carburant consommée diminue. Chaque point de la fonction $M(T)$ correspond à une trajectoire optimale calculée par le code OTA. Si on suppose que la fonction $M(T)$ a l'allure illustrée à la figure 4.11, alors il existe deux trajectoires optimales qui produisent deux consommations de carburant différentes pour une même durée de vol. Un tel cas ne peut pas exister puisque la trajectoire qui cause la consommation la plus grande n'est pas optimale, car il y a une autre trajectoire qui produit une consommation plus petite pour la même durée de vol. On conclut alors que ce cas est impossible et que lorsqu'on augmente l'indice du coût au-delà de α_i , la durée de vol diminue et la masse de carburant consommé augmente. À la bifurcation, on a donc

$$M(T_i - \Delta T_i) - M(T_i) > 0 \text{ et } \Delta T_i > 0. \quad (4.33)$$

On conclut alors que $M(T)$ est strictement décroissante.

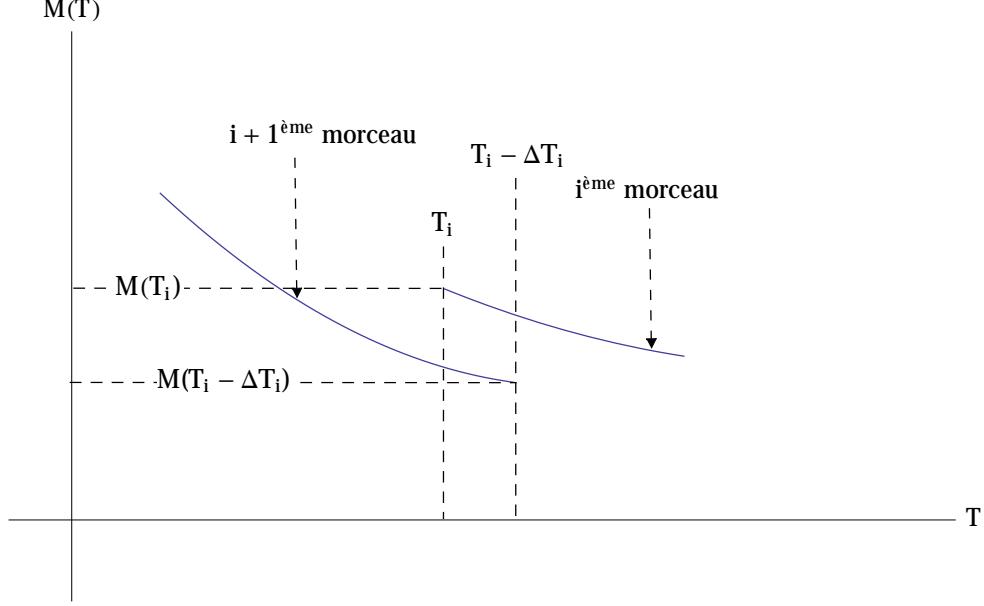


Figure 4.11 - Cas où $M(T_i - \Delta T_i) - M(T_i) < 0$ et $\Delta T_i < 0$.

4.3.2 La fonction $T(\alpha)$

On a

$$T(\alpha) \in \underset{T \in \mathcal{D}_M}{\operatorname{argmin}} \hat{C}(T)$$

avec $\mathcal{D}_M = [T_{\min}^{(M)}, T_{\max}^{(M)}]$. Dans le cas où $T(\alpha)$ est un extremum de $\hat{C}(T)$, on a $\hat{C}'(T(\alpha)) = 0$ et l'équation (4.32) donne pour le i ème morceau de $\hat{C}(T)$:

$$a_i(T(\alpha) - T_{M_i}) + \alpha = 0, \quad \text{pour } T_{i+1} \leq T(\alpha) \leq T_i - \Delta T_i, \quad (4.34)$$

d'où

$$T(\alpha) = T_{M_i} - \frac{\alpha}{a_i}, \quad \text{pour } -M'(T_i - \Delta T_i) \leq \alpha \leq -M'(T_{i+1}), \quad (4.35)$$

et

$$T'(\alpha) = -\frac{1}{a_i}, \quad (4.36)$$

avec $a_i > 0$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Il s'en suit que $T(\alpha)$ est composée de six morceaux linéairement décroissants. De plus, on a montré à l'équation (4.33) qu'aux discontinuités, la durée de vol diminue abruptement lorsque α augmente. On conclut alors que la fonction $T(\alpha)$ est strictement décroissante. D'après la deuxième équation de (4.5), $-M'(T)$ est strictement décroissante dans les intervalles où $M(T)$ est continue. De plus, à la i ème bifurcation, on a à partir de la première équation de (4.5) que $M'(T_i - \Delta T_i) = M'(T_i) = -\alpha_i$. On peut conclure

à partir de la première équation de (4.5) que α varie entre 0 et $\alpha_{\max} = -M'(T_{\min}^{(M)})$. Il s'en suit que

$$\mathcal{D}_T = \left[0, -M'(T_{\min}^{(M)}) \right].$$

La figure 4.12 montre $T(\alpha)$ obtenue en échantillonnant numériquement la fonction $\hat{C}(T(\alpha))$ en variant α entre 0 et $\alpha_{\max} = -M'(T_{\min}^{(M)})$ et en utilisant un pas $d\alpha = 1$ afin de trouver pour chaque α , la durée de vol $T(\alpha)$ qui minimise $\hat{C}(T)$.

On constate qu'au $i^{\text{ème}}$ point de bifurcation, pour l'indice du coût α_i , on a deux durées de vols T_i et $T_i - \Delta T_i$ comme on le voit à la figure 4.12. On constate que $T(\alpha)$ est strictement décroissante. Par ailleurs, en $T = T(\alpha)$, l'équation (4.32) donne

$$\hat{C}'(T(\alpha)) = a_i (T(\alpha) - T_{M_i}) + \alpha = 0, \text{ pour } T_{i+1} \leq T(\alpha) \leq T_i - \Delta T_i. \quad (4.37)$$

Puisque $\hat{C}'(T(\alpha)) = M'(T(\alpha)) + \alpha$ et que $M'(T) = -\alpha_i$ à gauche et à droite de la bifurcation alors $\hat{C}'(T(\alpha))$ est égale à gauche et à droite de la bifurcation. On en déduit qu'à la $i^{\text{ème}}$ bifurcation, l'équation (4.37) conduit à

$$a_i (T_i - T_{M_i}) + \alpha_i = a_{i-1} (T_i - \Delta T_i - T_{M_{i+1}}) + \alpha_i$$

et par conséquent on obtient la relation suivante entre les courbures des morceaux de paraboles de $M(T)$:

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{(T_i - \Delta T_i - T_{M_{i+1}})}{(T_i - T_{M_i})}. \quad (4.38)$$

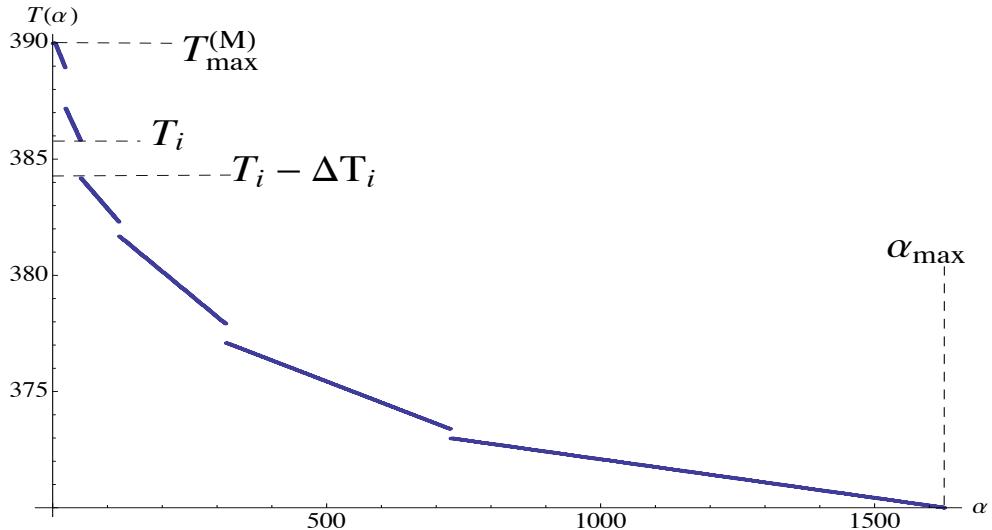


Figure 4.12 - La fonction $T(\alpha)$ pour le cas où $M(T)$ est continue par morceaux.

De plus, en utilisant le modèle de $M(T)$ décrit à la section 3.2.7, l'égalité de $\hat{C}(T)$ à gauche et à droite de la bifurcation conduit à

$$\begin{aligned}\hat{C}(T_i) = \hat{C}(T_i - \Delta T_i) &\Rightarrow M(T_i) + \alpha_i T_i = M(T_i - \Delta T_i) + \alpha_i(T_i - \Delta T_i) \\ &\Rightarrow M(T_i) + \alpha_i T_i = M_{i+1} + \frac{1}{2}a_{i+1}(T_i - \Delta T_i - T_{M_{i+1}})^2 + \alpha_i(T_i - \Delta T_i),\end{aligned}$$

d'où on tire

$$M_{i+1} = M(T_i) - \frac{1}{2}a_{i+1}(T_i - \Delta T_i - T_{M_{i+1}})^2 + \alpha_i \Delta T_i. \quad (4.39)$$

Les équations (4.38) et (4.39) sont des contraintes qui sont satisfaites par chaque bifurcation. Il s'en suit que si on connaît les paramètres a_i , M_i et T_{M_i} pour le $i^{\text{ème}}$ morceau de parabole de $M(T)$ et qu'on connaît ΔT_i , il reste à poser $T_{M_{i+1}}$ afin de déterminer a_{i+1} et M_{i+1} à partir des équations (4.38) et (4.39) pour le morceau $i+1$. On rappelle aussi que $\Delta T_i \leq 2$ min, $\Delta M_i \leq 300$ kg et $T_{M_i} \geq T_i - \Delta T_i$. Afin de construire la fonction $M(T)$ présentée à la figure 3.14, on a utilisé les contraintes qu'on vient de citer.

4.3.3 La fonction $f(\alpha)$

La fonction $f(\alpha)$ est définie pour $\alpha \in [0, \alpha_{\max}]$. On constate à la figure 4.13 obtenue en utilisant la fonction $T(\alpha)$ représentée à la figure 4.12 et la fonction $A(T)$ décrite à la section 3.1 que $f(\alpha)$ est croissante et qu'elle contient une discontinuité. Le $(i+1)^{\text{ième}}$ morceau continu de la fonction $f(\alpha)$ a pour équation

$$f(\alpha) = \alpha - A' \left(T_{M_i} - \frac{\alpha}{a_i} \right), \quad \text{pour } -M'(T_i - \Delta T_i) \leq \alpha \leq -M'(T_{i+1}), \quad (4.40)$$

d'où on tire

$$f'(\alpha) = 1 + \frac{1}{a_i} A'' \left(T_{M_i} - \frac{\alpha}{a_i} \right), \quad \text{pour } -M'(T_i - \Delta T_i) \leq \alpha \leq -M'(T_{i+1}). \quad (4.41)$$

La fonction $A'(T)$ est composée de plateaux constants et de deux cloches en forme de gaussiennes comme à la figure 5.1. Si $T(\alpha)$ se situe dans les intervalles où $A'(T)$ est constante, alors $f(\alpha) = \alpha - S$, car $A'(T) = S$ sur les plateaux constants. Il s'en suit que $f(\alpha)$ est linéaire et strictement croissante pour ces valeurs de α . En s'appuyant sur l'équation (4.41), la fonction $f(\alpha)$ est croissante sur les morceaux où elle est continue sauf dans les intervalles de $T(\alpha)$ où $A''(T(\alpha)) < -a_i$. On ne peut donc pas exclure a priori le cas où $f(\alpha)$ a plusieurs racines. Par ailleurs, on a $f'(\alpha^*) > 0$ d'après l'inéquation (4.13), ce qui permet d'éliminer les racines qui appartiennent aux parties décroissantes de $f(\alpha)$.

Proposition 4.3.1 Pour les α de bifurcation, il y a une discontinuité dans $f(\alpha)$ si et seulement si la durée de vol $T(\alpha)$ se trouvant avant ou après la bifurcation dans la trajectoire appartient à l'intervalle où $A'(T)$ est non constante.

Preuve On rappelle que α_i désigne l'indice du coût à la $i^{\text{ème}}$ bifurcation dans la trajectoire et qu'il donne deux trajectoires optimales qui minimisent le coût total $\hat{C}(T)$ et par conséquent deux durées de vols distinctes T_i et $T_i - \Delta T_i$. Si T_i et $T_i - \Delta T_i$ appartiennent aux intervalles où $A'(T) = S$, alors on a d'une part avant la $i^{\text{ème}}$ bifurcation

$$\begin{aligned} f(\alpha_i^-) &= \alpha_i - A'(T_i) \\ &= \alpha_i - S \end{aligned}$$

où $f(\alpha_i^-) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(\alpha - \epsilon)$. D'autre part, après la $i^{\text{ème}}$ bifurcation, on a

$$\begin{aligned} f(\alpha_i^+) &:= \alpha_i - A'(T_i - \Delta T_i) \\ &= \alpha_i - S \end{aligned}$$

où $f(\alpha_i^+) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(\alpha + \epsilon)$. On a alors à la $i^{\text{ème}}$ bifurcation dans la trajectoire,

$$f(\alpha_i^+) = f(\alpha_i^-).$$

On conclue alors que si T_i et $T_i - \Delta T_i$ appartiennent aux intervalles où $A'(T)$ est constante alors $f(\alpha)$ est continue. Dans le cas où T_i ou $T_i - \Delta T_i$ appartiennent aux intervalles où $A'(T)$ est non constante, alors

$$f(\alpha_i^+) - f(\alpha_i^-) = \alpha_i - \alpha_i - (A'(T_i - \Delta T_i) - A'(T_i)) \neq 0,$$

et il s'en suit que $f(\alpha)$ est discontinue en $\alpha = \alpha_i$.

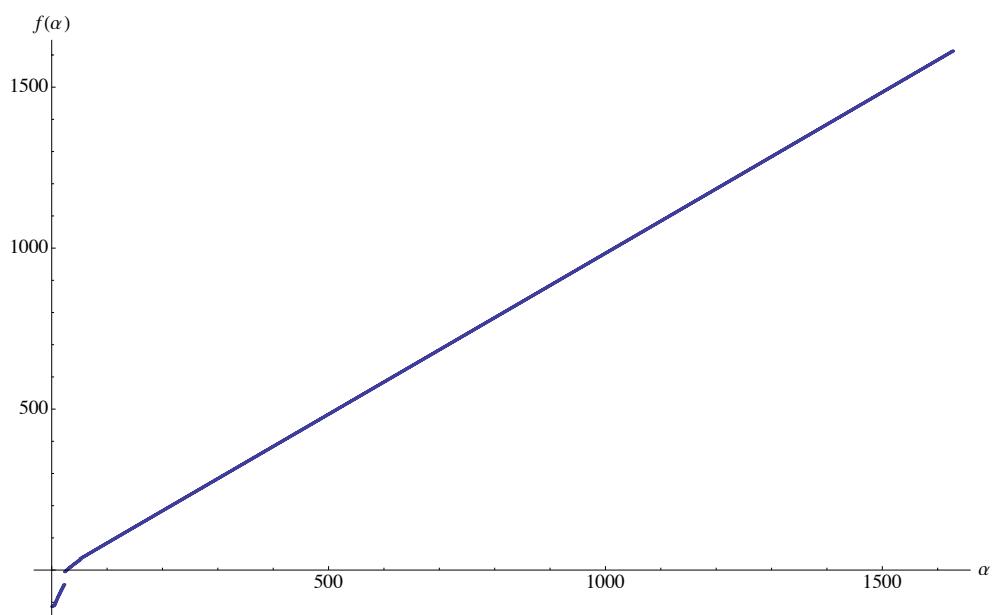


Figure 4.13 - La fonction $f(\alpha)$ pour le cas où $M(T)$ est continue par morceaux.

CHAPITRE 5 MÉTHODE DE RECHERCHE DE L'INDICE DU COÛT OPTIMAL

Dans le cadre de ce projet, on suppose qu'on connaît la fonction $A(T)$. De plus, on dispose du code OTA qui pour chaque indice du coût α , nous donne la trajectoire optimale de l'avion comme expliqué par Maazoun (2015). L'objectif de ce chapitre est de proposer une méthode de recherche de l'indice du coût optimal qui exploite la structure du problème afin de contrôler le nombre d'appels au code OTA car chaque appel est coûteux en temps de calcul. Lorsqu'on a commencé à travailler sur ce projet de maîtrise une simulation avec le code prenait environ 3 minutes de calcul avec un ordinateur ayant un processeur de 2 GHz et une mémoire vive de 4 Go. Il faut aussi garder en tête que si on rajoute les conditions météorologiques et les zones tarifées, le temps de calcul va encore augmenter. On explique dans ce qui suit le choix de la valeur de départ de α et la méthode de recherche de α^* pour le cas où $M(T)$ est continue puis pour le cas où $M(T)$ est continue par morceaux.

5.1 Cas où $M(T)$ est continue et parabolique

La fonction $M(T)$ est représentée par le modèle parabolique (4.22) et $T(\alpha)$ par le modèle affine (4.24). Il s'en suit que deux évaluations du code en utilisant deux indices du coût différents permettent de déterminer les deux paramètres T_{M_0} et a et donc de connaître la fonction $T(\alpha)$. Par ailleurs, la durée de vol T^* qui minimise le coût total du vol $C(T)$ vérifie $C''(T^*) > 0$. D'après la deuxième équation de (4.2),

$$M''(T^*) + A''(T^*) > 0 \Rightarrow A''(T^*) > -a.$$

De plus, on a $\alpha^* = A'(T(\alpha^*))$. On sait que pour certains intervalles de durée de vol, $A'(T)$ est constante donc ces intervalles jouent un rôle particulier comme on le montrera à la section 5.1.2. Comme le montre la figure 5.1, on définit les intervalles comme

$$I_T^{(i)} = [T_{\min}^{(i)}, T_{\max}^{(i)}], \quad i = 1, 2, \dots, 9.$$

On définit également neuf intervalles de la forme

$$I_\alpha^{(i)} = [\alpha_{\min}^{(i)}, \alpha_{\max}^{(i)}], \quad i = 1, 2, \dots, 9,$$

où

$$\alpha_{\min}^{(i)} := -M'(T_{\max}^{(i)}), \quad i = 1, 2, \dots, 9,$$

et

$$\alpha_{\max}^{(i)} := -M'(T_{\min}^{(i)}), \quad i = 1, 2, \dots, 9.$$

Les intervalles $I_T^{(1)}, I_T^{(5)}$ et $I_T^{(9)}$ sont des plateaux de $A'(T)$ qui satisfont $A'(T) = \alpha_{\min}$.

Les intervalles $I_T^{(i)}$ avec $i \in \{2, 4, 6, 8\}$ sont inclus à l'intérieur du support d'une des cloches de $A'(T)$ et satisfont $M''(T) + A''(T) \geq 0$. Ils satisfont $A''(T) \geq -a$ et $A'(T) > \alpha_{\min}$. On a montré à la section 4.1.3 que pour les intervalles de $T(\alpha)$ qui satisfont $M''(T(\alpha)) + A''(T(\alpha)) \geq 0$, on a $f'(\alpha) \geq 0$.

Les intervalles $I_T^{(3)}$ et $I_T^{(7)}$ sont inclus à l'intérieur du support d'une des cloches de $A'(T)$ et satisfont $M''(T) + A''(T) < 0$. Ils satisfont $A''(T) < -a$ et $A'(T) > \alpha_{\min}$. Par le même raisonnement utilisé à la section 4.1.3 et en s'appuyant sur le fait que $M''(T(\alpha)) + A''(T(\alpha)) < 0$, on peut conclure que $f'(\alpha) < 0$ dans $I_{\alpha}^{(3)}$ et $I_{\alpha}^{(7)}$.

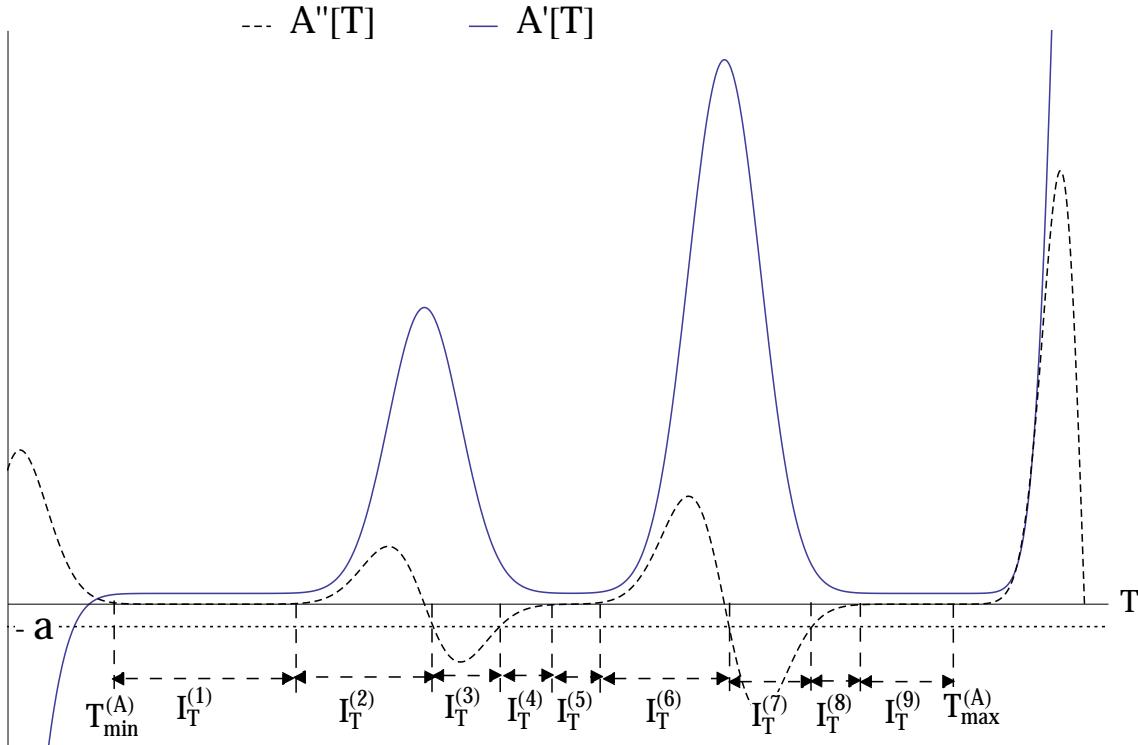


Figure 5.1 - Détermination des intervalles de I_T en s'appuyant sur la forme de $A'(T)$ et $A''(T)$.

5.1.1 Choix de l'indice du coût de départ

Il est normal que les compagnies aériennes désirent que leurs vols atteignent la destination sans que les passagers ratent leurs correspondances. Il s'en suit que la durée de vol visée se trouve avant le début de la première montée dans $A(T)$ illustrée à la figure 3.2, c'est-à-dire dans $I_T^{(1)}$. Dans le cas où $T^* = T(\alpha^*)$ est dans $I_T^{(1)}$, le coût total du vol sera minimal et aucun passager ne va perdre sa correspondance. Puisqu'on a $A'(T) = \alpha_{\min}$ pour tout $T \in I_T^{(1)}$, alors

$$T^* \in I_T^{(1)} \Rightarrow A'(T^*) = \alpha^* = \alpha_{\min}.$$

Il s'en suit que si $\alpha^* = \alpha_{\min}$, alors la durée de vol qui minimise le coût total du vol permet d'arriver à destination sans qu'aucun passager ne rate sa correspondance. De plus, on prouve à l'annexe B que si $T(\alpha_{\min})$ est dans $I_T^{(1)}$, alors $\alpha^* = \alpha_{\min}$. Il s'en suit que si on choisit α_{\min} comme valeur de départ pour α et que $T(\alpha_{\min})$ est dans $I_T^{(1)}$, alors on trouve α^* dès le premier appel au code OTA. Par ailleurs, dans le cas d'un retard au décollage, on montre à l'annexe B que dans certains cas, en utilisant α_{\min} comme valeur de départ, on peut trouver une des racines de $f(\alpha)$ dès la première itération. Pour ces raisons, on utilisera α_{\min} comme valeur de départ.

5.1.2 Détermination des intervalles de recherche pertinents

D'après la deuxième équation de (4.12), on déduit que

$$T^* \notin I_T^{(3)} \cup I_T^{(7)}. \quad (5.1)$$

Il s'en suit que

$$\alpha^* \notin I_\alpha^{(3)} \cup I_\alpha^{(7)}. \quad (5.2)$$

On effectue un premier appel au code en utilisant $\alpha = \alpha_{\min}$ et on obtient $T(\alpha_{\min}) = T_{\max}$. Ensuite, on effectue un deuxième appel au code OTA en utilisant α_{\max} afin de déterminer les paramètres a et T_{M_0} de $T(\alpha)$. On verra dans la suite de cette section que le choix de α_{\max} comme deuxième valeur permet d'améliorer la méthode de recherche en éliminant des intervalles de durées de vol non pertinents. Avec ces deux appels on obtient également l'intervalle maximal de T^* puisque $T_{\min} \leq T^* \leq T_{\max}$. On déterminera dans ce qui suit les intervalles de recherche pertinents pour T^* et α^* . On présente ci-dessous un tableau récapitulatif du résultat obtenu à partir des preuves le justifiant présentées à l'annexes B.

Ces règles ont été testées à l'aide du logiciel de calcul Mathematica. On a utilisé les fonctions $A(T)$ et $M(T)$ associées au vol étudié. On a retrouvé ensuite $T(\alpha)$ en échantillonnant numé-

riquement la fonction $\hat{C}(T(\alpha))$ et on a représenté la fonction $f(\alpha)$. En changeant la durée du retard, on a pu tester $T(\alpha_{\min})$ dans les neufs intervalles $I_T^{(i)}$ où $i \in \{1 \dots 9\}$ afin d'apprécier le déplacement de la racine de $f(\alpha)$ et de valider ces résultats.

Tableau 5.1 - Résumé des règles permettant de réduire l'intervalle de recherche de α^* .

Emplacement de T_{\max}	Intervalle pertinent de recherche de α^*
$I_T^{(1)}$	$\alpha^* = \alpha_{\min}$
$I_T^{(2)}$	$\alpha^* \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(2)}[$
$I_T^{(3)}$	$\alpha^* \in [\alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)}[$
$I_T^{(4)}$	$\alpha^* \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(4)}[\cup [\alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)}[$
$I_T^{(5)}$	$\alpha^* \in \{\alpha_{\min}\} \cup [\alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)}[$
$I_T^{(6)}$	$\alpha^* \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(6)}[\cup [\alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)}[$
$I_T^{(7)}$	$\alpha^* \in [\alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)}[\cup [\alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)}[$
$I_T^{(8)}$	$\alpha^* \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(8)}[\cup [\alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)}[\cup [\alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)}[$
$I_T^{(9)}$	$\alpha^* \in \{\alpha_{\min}\} \cup [\alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)}[\cup [\alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)}[$

5.1.3 Application de la méthode de réduction des intervalles de recherche à d'autres exemples de vol

Il est vrai que la méthode de réduction des intervalles de recherche pertinents développée dans ce mémoire, a été élaborée en lien direct avec l'exemple étudié. Cependant, en partant du fait que l'exemple de la fonction $A(T)$ est un exemple réaliste qui traduit toutes les particularités de cette fonction de même que pour la fonction $M(T)$, on peut alors utiliser la logique présentée pour la méthode de réduction des intervalles de recherche pour d'autres exemples de vol. Pour ce qui est de la fonction $A(T)$, la pente et le nombre des plateaux linéairement croissants peuvent varier ainsi que le nombre et l'amplitude des montées abruptes. De même, la fonction $M(T)$ peut contenir un nombre différent de morceaux de paraboles avec des courbures différentes. Ces changements vont affecter le nombre des intervalles pertinents de recherche mais on pourra toujours utiliser la même logique présentée pour notre exemple afin de réduire le nombre d'intervalles de recherche pertinents. On peut éliminer les intervalles pour lesquels la condition $A''(T) + M''(T) \geq 0$ n'est pas satisfaite. On peut également

appliquer directement la même méthode déjà proposée pour les deux premières montées de $A(T)$. De plus si $A(T)$ contient plus de plateaux linéairement croissants, on peut utiliser la même logique démontrée pour les propositions B.1.2 et B.1.7 à l'annexe B afin d'éliminer ces intervalles lorsque T_{\max} n'appartient pas à ces plateaux.

Le choix d'identifier neuf intervalles particuliers est en lien direct avec la forme de la fonction $A(T)$ qui correspond à l'exemple étudié. En changeant cette fonction on pourrait avoir un nombre différent d'intervalles pertinents mais, comme on l'a expliqué précédemment, on pourrait toujours appliquer la même logique utilisée dans les preuves présentées à l'annexe B afin de réduire le nombre d'intervalles de recherche pertinents.

5.2 Cas où $M(T)$ est continue par morceaux

La fonction $M(T)$ est représentée par le modèle (3.5) et le $i^{\text{ème}}$ morceau différentiable de $T(\alpha)$ par l'équation (4.35). L'objectif de cette section est d'expliquer la méthode de recherche de l'indice du coût optimal qui revient à trouver les zéros de $f(\alpha)$ et de déterminer lequel correspond à l'indice du coût optimal. On rappelle que la fonction $f(\alpha)$ s'écrit comme suit

$$f(\alpha) = \alpha - A'(T(\alpha)).$$

On a déjà présenté la fonction $A'(T)$ à la section 5.1. Elle est illustrée à la figure 5.1. De plus, la fonction $T(\alpha)$ est linéaire par morceau et elle a l'allure présentée à la figure 4.12. Il s'en suit que pour le $i^{\text{ème}}$ morceau continu de $T(\alpha)$, deux évaluations en utilisant deux indices du coût différents et ayant des durées de vol résultantes appartenant à ce morceau permettent d'obtenir les paramètres T_{M_i} et a_i correspondants. De plus, comme on l'a expliqué à la section 3.2.7, une discontinuité dans $T(\alpha)$ apparaît lorsqu'il y a une bifurcation dans la trajectoire optimale, donc en comparant deux profils de vols correspondant à deux indices du coût différents, on peut déterminer s'il y a une discontinuité entre ces deux valeurs de α ou non.

Pour ce qui est des preuves présentées à l'annexe B permettant de réduire la taille des intervalles de recherche, elles restent valables aussi pour le cas où $M(T)$ est continue par morceaux. Les deux premiers ingrédients utilisés dans ces preuves sont le sens de variation de $T(\alpha)$, qui est strictement décroissante, et la forme particulière de $A'(T)$ qui est composée de plateaux constants séparés par des cloches en forme de gaussienne. Ces deux ingrédients ne changent pas pour le cas où $M(T)$ est continue par morceaux. Le troisième ingrédient utilisé dans les preuves et qui se base sur le fait que $C''(T) \geq 0$, présente une petite différence dans

le cas où $M(T)$ est continue par morceaux. Dans ce cas

$$C''(T^*) \geq 0 \Rightarrow A''(T^*) \geq -a^*,$$

où a^* est la courbure du morceau de $M(T)$ qui contient T^* mais puisqu'on ne connaît pas T^* , on ne peut pas déterminer a^* avant de commencer la recherche de α^* . On a vu à la section 3.2.7 que pour le cas où $M(T)$ est continue par morceaux, chaque morceau de $M(T)$ a une courbure différente. D'après les simulations effectuées avec le code OTA, plus la durée de vol diminue, plus la courbure de $M(T)$ est grande. Il s'en suit que le morceau de $M(T)$ qui contient $T(\alpha_{\max})$ a la courbure la plus grande. Si on pose a_{\max} comme étant la courbure du morceau de $M(T)$ portant $T(\alpha_{\max})$, on a que $a^* \leq a_{\max} \Rightarrow -a^* \geq -a_{\max}$. Il s'en suit que

$$A''(T^*) \geq -a^* \Rightarrow A''(T^*) \geq -a_{\max}.$$

Ainsi si on connaît a_{\max} , on peut appliquer les règles présentées au tableau 5.1.

5.2.1 Méthode de recherche de l'indice du coût optimal

Le code OTA prend en entrée un indice du coût α et donne en sortie la durée de vol optimale $T(\alpha)$ qui lui est associée. En effectuant les deux premiers appels au code en utilisant α_{\min} et α_{\max} , on détermine l'intervalle maximal pour T^* . Premièrement, on définit la fonction qui, pour un indice du coût α_i , détermine l'équation du morceau de $T(\alpha)$ qui contient la durée de vol $T(\alpha_i)$. Puisque $T(\alpha)$ est linéaire par morceaux, alors un morceau de $T(\alpha)$ a une équation de la forme $a_i \times \alpha + b_i$ et deux valeurs de T sur un même morceau permettent de déterminer a_i et b_i . On appelle cette fonction *Paramètres*. La fonction *Paramètres* prend en entrée un indice du coût et la durée de vol qui lui associée et donne en sortie les paramètres a_i et b_i correspondant au morceau qui contient la durée de vol donnée en entrée. Afin de trouver a_i et b_i , la fonction *Paramètres* calcule la durée de vol associée à un deuxième indice du coût proche et supérieur à l'indice du coût pris en entrée. Ensuite, elle vérifie que la durée de vol à l'entrée et la durée de vol calculée sont sur le même morceau de $T(\alpha)$ en s'appuyant sur le profil de trajectoire. Si ces deux durées de vols sont sur le même morceau de droite de $T(\alpha)$, la fonction *Paramètres* calcule les paramètres associés à ce morceau sinon elle choisit un indice du coût plus proche de l'indice du coût pris en entrée.

On détermine a_{\max} , la courbure du morceau de $M(T)$ contenant $T(\alpha_{\max})$, en roulant le code en utilisant α_{\max} puis en déterminant les paramètres a_{\max} et b_{\max} associés au morceau de $T(\alpha)$ qui contient $T(\alpha_{\max})$. On peut par la suite utiliser les règles établies dans le tableau 5.1. On détermine ainsi le ou les intervalles de durées de vol pertinents qui sont susceptibles de

contenir T^* . Ensuite, on doit déterminer les équations des morceaux de $T(\alpha)$ qui sont inclus dans les intervalles de recherche pertinents afin de pouvoir y appliquer la méthode de Newton pour trouver la racine de $f(\alpha)$. Puisqu'on doit stocker les équations des morceaux de $T(\alpha)$ pour pouvoir les utiliser lors de la recherche de la racine de $f(\alpha)$, on définit une deuxième fonction qui permet de stocker les paramètres a_i et b_i trouvés si ces derniers n'ont pas déjà été stockés. On appelle cette deuxième fonction *Stockage*.

On désigne par T_{connue} la durée de vol pour laquelle on connaît l'indice du coût correspondant et on désigne par T_{cherche} la durée de vol pour laquelle on cherche l'indice du coût correspondant. On commence par poser $T_{\text{connue}} = T(\alpha_{\min})$ et T_{cherche} est la borne de l'intervalle de recherche pertinent la plus proche de $T(\alpha_{\min})$ comme le montre l'exemple présenté à la figure 5.2.

*** Intervalle de recherche pertinent

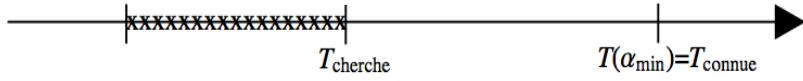


Figure 5.2 - Choix de T_{cherche} .

On sait que $T(\alpha)$ est linéaire par morceaux et que ses discontinuités ne dépassent pas deux minutes. Ensuite, afin de s'assurer qu'il n'y a pas plus qu'une discontinuité entre T_{connue} et T_{cherche} , on vérifie à chaque fois si la distance séparant T_{connue} et T_{cherche} dépasse deux minutes. On pose alors $T_{\text{cherche}} = T_{\text{connue}} - 2$. On commence par déterminer l'équation du morceau de $T(\alpha)$ qui contient T_{connue} . Ensuite, on utilise l'équation trouvée. On a alors trois cas :

Premier cas : La durée de vol T_{cherche} appartient au même morceau de $T(\alpha)$ que T_{connue} , comme le montre la figure 5.3. En exécutant le code OTA avec l'indice du coût trouvé, on obtient T_{cherche} , ce qui confirme que T_{cherche} est dans le même morceau que T_{connue} .

Deuxième cas : La durée de vol T_{cherche} est dans le morceau de $T(\alpha)$ qui suit celui qui contient T_{connue} comme le montre la figure 5.4.

En exécutant le code avec l'indice du coût trouvé, on obtient une durée de vol différente de T_{cherche} . On détermine l'équation du nouveau morceau de $T(\alpha)$ qui contient la durée de vol

qu'on vient de trouver. Ensuite, on utilise la nouvelle équation afin de déterminer l'indice du coût correspondant à T_{cherche} . On exécute ensuite le code avec l'indice du coût trouvé et on obtient T_{cherche} .

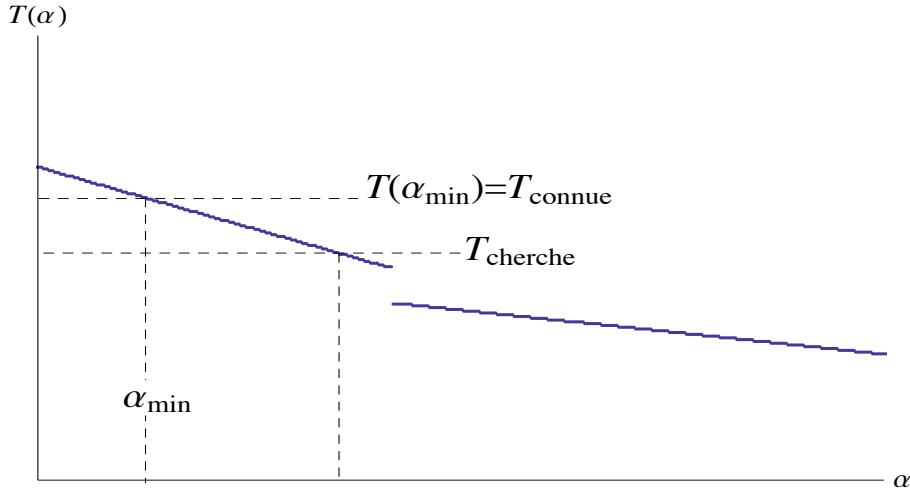


Figure 5.3 - Les durées de vol T_{cherche} et T_{connue} sont sur le même morceau de $T(\alpha)$.

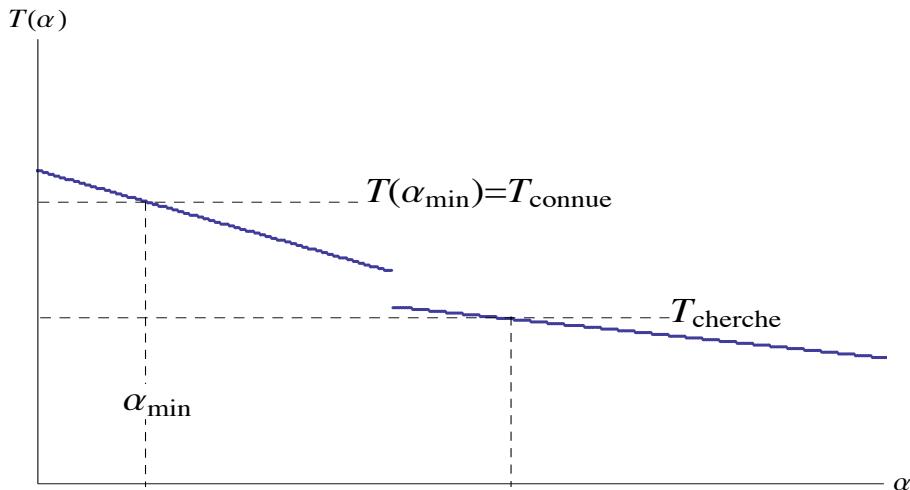


Figure 5.4 - Les durées de vol T_{cherche} et T_{connue} sont sur deux morceaux successifs de $T(\alpha)$.

Troisième cas : La durée de vol T_{cherche} se situe dans une discontinuité et il n'y a aucune valeur de α qui permet de l'obtenir comme le montre la figure 5.5. En exécutant le code avec l'indice du coût trouvé, on obtient une durée de vol différente de T_{cherche} . On détermine l'équation du nouveau morceau de $T(\alpha)$ qui contient la durée de vol qu'on vient de trouver. On utilise la nouvelle équation afin de trouver l'indice du coût correspondant à T_{cherche} en

supposant que T_{cherche} se situe sur ce morceau de $T(\alpha)$. On exécute ensuite le code avec l'indice du coût trouvé et on n'obtient pas T_{cherche} . On conclut donc que T_{cherche} est dans la discontinuité entre le morceau portant T_{connue} et le morceau de $T(\alpha)$ qui le suit. On arrête alors la recherche. Si T_{cherche} correspond à la borne d'un intervalle de recherche pertinent alors on conclut que le morceau portant T_{connue} est le dernier morceau inclus dans l'intervalle de recherche pertinent. Si T_{cherche} est une valeur intermédiaire qui est égale à $T_{\text{connue}} - 2$, alors on passe directement au morceau de $T(\alpha)$ qui suit le morceau portant T_{connue} . On a déjà déterminé l'équation de ce morceau et on connaît déjà une valeur de T appartenant à ce morceau qu'on pose comme nouveau T_{connue} . Si $T_{\text{connue}} > T_{\text{cherche}}$ alors on continue notre recherche sinon on arrête notre recherche et on conclut que T_{cherche} se situe sur le même morceau portant T_{connue} .

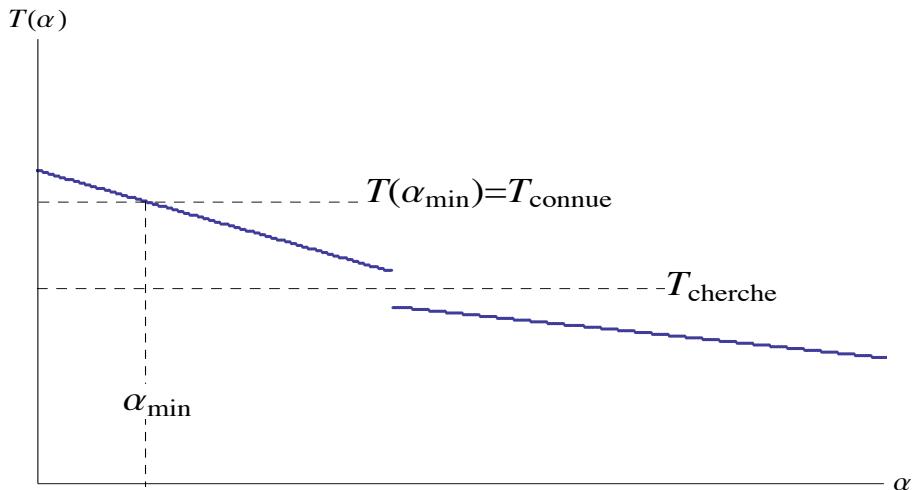


Figure 5.5 - La durée de vol T_{cherche} se situe dans une discontinuité de $T(\alpha)$.

On continue ainsi en utilisant la même méthode pour déterminer les équations des morceaux de $T(\alpha)$ appartenant aux intervalles de recherche pertinents. Une fois toutes les équations enregistrées, on utilise les mêmes méthodes de recherche des racines de $f(\alpha)$ expliquées dans l'annexe B selon le cas dans lequel on se situe. Dans le cas où on a plus qu'un morceau de $T(\alpha)$ dans un intervalle de recherche pertinent, on applique la méthode de Newton dans cet intervalle en utilisant les équations de chaque morceau de $T(\alpha)$. On choisit ensuite la racine qui minimise le coût total $C(T)$.

5.2.2 Effet d'un retard avant le vol sur le problème d'optimisation

Maintenant qu'on a défini une méthode permettant de calculer l'indice du coût optimal, on étudie dans cette section l'effet d'un retard avant le vol sur le problème d'optimisation. On

varie ainsi la durée du retard et on calcule l'indice du coût optimal, la durée de vol optimale et le coût total minimal correspondant. La figure 5.6 montre l'effet du changement de la durée d'un retard avant le décollage sur l'heure d'arrivée optimale. On montre sur la même figure les heures d'arrivées qui correspondent aux deux heures critiques dans la fonction $A(T)$ présentée à la section 3.1. On montre ainsi, en fonction de la durée du retard, l'emplacement de l'heure d'arrivée optimale par rapport aux montées abruptes dans $A(T)$. On constate que la durée de vol augmente presque linéairement en fonction du retard jusqu'à l'atteinte d'une durée de retard particulière, pour laquelle il devient optimal d'arriver après la première montée dans $A(T)$. De plus, on voit que pour cette durée de retard, l'heure d'arrivée optimale a un saut important sans tout de même dépasser la deuxième montée dans $A(T)$, et ce afin de gagner sur les dépenses reliées à la consommation de carburant. On retrouve ensuite le même comportement pour l'heure d'arrivée optimale. En augmentant la durée du retard, l'heure d'arrivée optimale augmente linéairement jusqu'à l'atteinte de la deuxième heure d'arrivée critique dans $A(T)$ et elle connaît un saut important lorsqu'elle la dépasse.

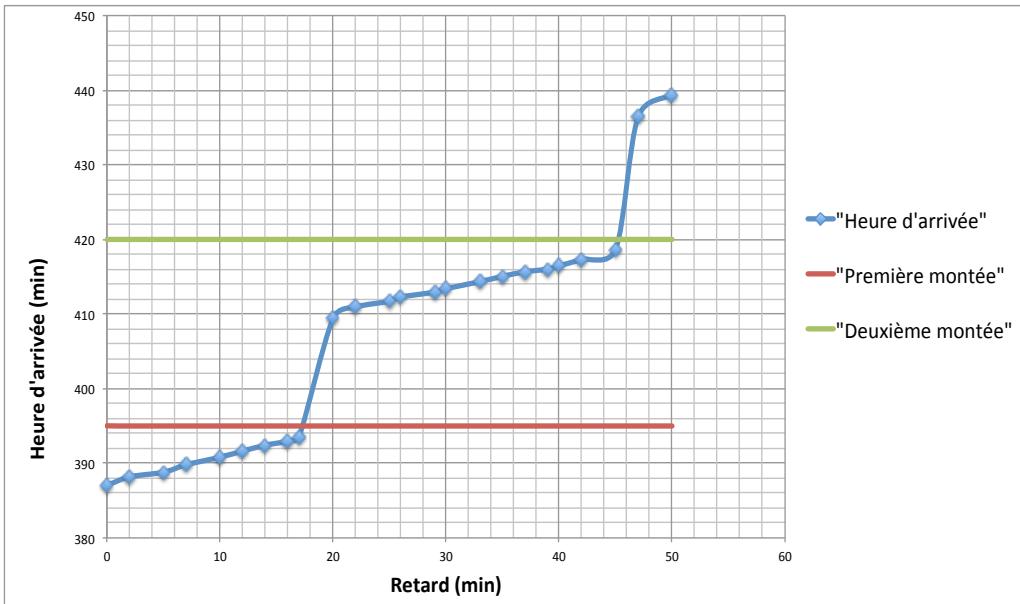


Figure 5.6 - Heure d'arrivée optimale en fonction de la durée du retard.

Parallèlement, la figure 5.7 montre l'effet d'un retard avant le vol sur la durée de vol optimale. On voit que la durée de vol optimale diminue linéairement en fonction de la durée du retard. Pour une certaine valeur de retard, il devient optimal d'arriver après la première montée dans $A(T)$. Pour cette durée de retard particulière, on observe un saut dans la durée de vol optimale afin de diminuer les dépenses associées à la consommation de carburant. Lorsqu'on augmente encore la durée du retard, la durée de vol optimale diminue linéairement jusqu'à

l'atteinte d'une durée de retard particulière pour laquelle il devient optimal d'arriver après la deuxième heure d'arrivée critique. On voit ainsi un deuxième saut dans la durée de vol optimale pour cette durée de retard afin de diminuer les dépenses associées à la consommation de carburant.

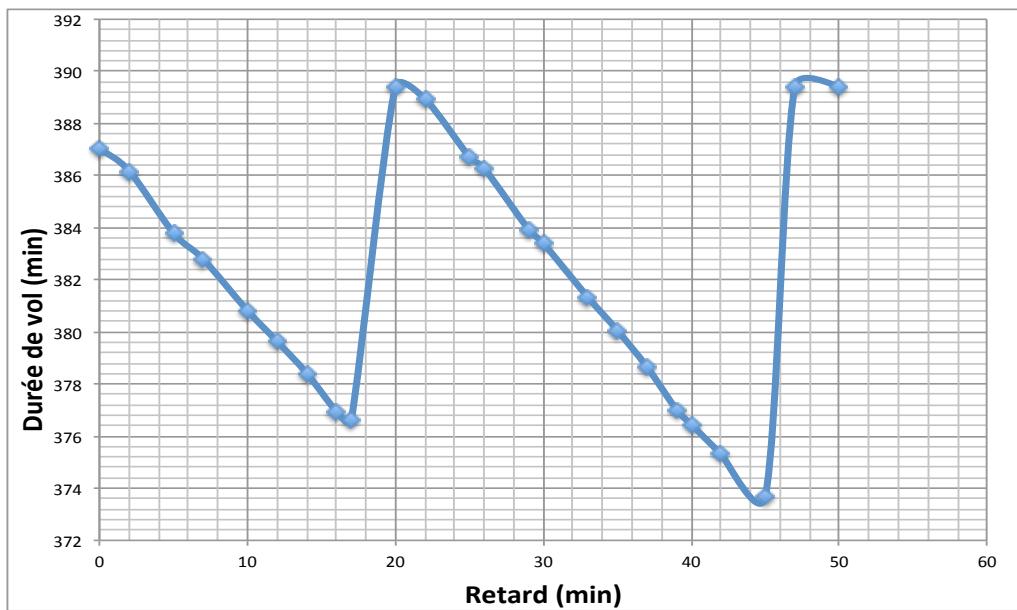


Figure 5.7 - Durée de vol optimale en fonction de la durée du retard.

CHAPITRE 6 CONCLUSION

L'indice du coût est un paramètre très important dans la détermination de la durée de vol optimale et de la trajectoire optimale. L'objectif de ce mémoire était de développer une méthode permettant de calculer l'indice du coût optimal permettant de minimiser le coût total d'un vol commercial. On a commencé ainsi par définir un modèle de calcul du coût total basé sur l'indice du coût. On a étudié ensuite les fonctions qui composent le coût total du vol pour définir une méthode permettant de trouver l'indice du coût optimal qui se base sur la structure du problème d'optimisation afin de limiter le nombre d'appels au code OTA.

6.1 Synthèse des travaux

On a introduit dans ce projet un modèle de calcul du coût total qui utilise l'indice du coût afin de tenir compte des dépenses qui ne sont pas reliées à la consommation de carburant. Ce modèle permet de calculer la trajectoire optimale et la durée de vol optimale pour la valeur optimale de l'indice du coût. Afin de déterminer cette valeur particulière, on a étudié les fonctions qui composent le coût total du vol. Pour chacune de ces fonctions, on a expliqué les phénomènes qui définissent les particularités qui leur sont associées et on les a modélisées pour un exemple d'un vol de Montréal à Paris à bord d'un Boeing 777-300ER. On a ensuite étudié tous les détails entourant le problème d'optimisation afin de montrer ses particularités. Par ailleurs, vu la complexité du problème, on a proposé de le traiter d'abord en utilisant une version simplifiée de la fonction $M(T)$, soit parabolique et continue. On a ensuite utilisé la fonction $M(T)$ qui approxime au mieux les résultats obtenus à partir des simulations effectuées avec le code OTA.

L'étude des fonctions qui composent le coût total du vol et les contraintes reliées au problème d'optimisation ont permis de limiter les intervalles de recherche pertinents pour l'indice du coût optimal et ainsi de définir une méthode permettant de calculer α^* en contrôlant le nombre d'appels au code OTA. L'exposition des particularités de ces fonctions ont été une des contributions les plus originales apportées par ce projet puisqu'on n'a pas trouvé dans la littérature une étude bien détaillée du comportement de ces fonctions. De plus, la méthode de recherche de l'indice du coût optimal proposée est une importante contribution apportée par ce travail de recherche puisqu'elle se base sur une étude bien détaillée des composantes du coût total du vol. On a étudié également dans ce projet l'effet d'un retard avant le décollage sur le problème d'optimisation et sur le calcul de la valeur optimale de l'indice du coût et de

la durée de vol optimale.

6.2 Améliorations futures

Bien qu'on puisse trouver facilement des travaux de recherche citant l'indice du coût et son utilisation dans la détermination du coût total minimal, ces ouvrages présentent souvent des analyses qui ne montrent pas la vraie nature des fonctions qui composent le coût total du vol et ne présentent pas de méthodes qui permettent de déterminer la valeur optimale de l'indice du coût. De plus, le manque de données réelles dans les travaux consultés au sujet de l'indice du coût a rendu l'étude du comportement des fonctions intervenant dans la détermination de l'indice du coût optimal encore plus difficile.

La fonction $A(T)$ représentant les coûts autres que le coût du carburant dépend du régime d'indemnisation des passagers, de la durée et de la fréquence des retards, de la durée qui sépare les vols de correspondance, de la vitesse de chacun des passagers à franchir la distance séparant la porte d'arrivée du vol étudié et la porte de départ pour son vol de correspondance et plusieurs autres contraintes. Une étude plus approfondie de cette fonction basée sur des données historiques réelles fournies par les compagnies aériennes permettrait d'avoir une approximation plus précise de la fonction $A(T)$. Vu l'importance de cette fonction dans la méthode de recherche proposée dans ce projet, une amélioration de la précision de cette fonction conduirait sans doute à l'amélioration de la précision du calcul de la valeur optimale de l'indice du coût. De plus, l'ajout de contraintes comme les zones tarifées, l'effet de la météo sur la trajectoire optimale sont des facteurs qui pourraient ajouter plus de complexité au problème traité actuellement. Par exemple, le contournement d'une zone tarifée pourrait donner lieu à de nouveaux types de points de bifurcations. Par ailleurs, la mise à jour de l'indice du coût au cours du vol en cas d'imprévu pourrait constituer aussi une suite pour ce projet de maîtrise.

La détermination de l'indice du coût optimal et l'étude des fonctions qui interviennent dans la recherche de cette valeur optimale est un domaine où il y a beaucoup de contributions à apporter.

RÉFÉRENCES

Aéroports de Paris. (2013, Janvier) Année record avec 88,8 millions de passagers accueillis en 2012. En ligne : http://www.aeroportsdeparis.fr/ADP/Resources/06c3db89-8af8-401e-9882-64775db4fd66-ADP_TraficDecembre2012.pdf

Airbus, "Getting to grips with the cost index", Rapp. tech. STL 945.2369/98. 2, p. 46, 1998.

Airbus, "Getting to grips with aircraft performance", Rapp. tech. SITA TLSBI7X, p. 128, 2002.

Air Canada, "Refunds and reroutings", Air Canada, Rapp. tech. 3118C-3119C, 2013. En ligne : https://www.aircanada.com/en/travelinfo/before/documents/ca_section6.pdf?r=Friday,%202022-May-15%2011:59:32

S. Altus. (2007, May) Flight planning : The forgotten field in airline operations. En ligne : <http://www.agifors.org/studygrp/opsctl/2007/>

S. Altus. (2010, May) Dynamic cost index management in flight planning and replanning. En ligne : <http://www.agifors.org/studygrp/opsctl/2010/>

M. Ball, C. Barnhart, M. Dresner, M. Hansen, K. Neels, A. Odoni, E. Peterson, L. Sherry, A. Trani, et B. Zou, "Total delay impact study, a comprehensive assessment of the costs and impacts of flight delays in the United States", NEXTOR, Rapp. tech., October 2010. En ligne : http://its.berkeley.edu/sites/default/files/NEXTOR_TDI_Report_Final_October_2010.pdf

C. Barnhart et B. C. Smith, *Quantitative Problem Solving Methods in the Airline Industry A Modeling Methodology Handbook*, série International Series in Operations Research and Management Science. Springer, 2012, vol. 169.

Boeing, "777-200/300 airplane characteristics for airport planning", Boeing, Rapp. tech. D6-58329 , July 1998.

G. Burrows, C. A. Brown, T. W. Thom, J. M. King, et J. Frearson, "Real-time cost management of aircraft operations", *Management Accounting Research*, vol. 12, no. 3, pp. 281–298, 2001. DOI : <http://dx.doi.org/10.1006/mare.2001.0162>. En ligne : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1044500501901623>

A. Cook, G. Tanner, V. Williams, et G. Meise, "Dynamic cost indexing–managing airline delay costs", *Journal of air transport management*, vol. 15, no. 1, pp. 26–35, 2009.

B.D. Dancila, R.M. Botez et D. Labour, "Altitude optimization algorithm for cruise, constant speed, level flight segments", Canadian Aeronautics and Space Institute CASI AÉRO 11, 58th Aeronautics Conference and AGM, 2011, Canada

M. K. DeJonge et W. H. Syblon, "Application of cost index to fleet hub operation", dans *American Control Conference, 1984*, June 1984, pp. 179–183.

M. K. DeJonge, Kentwood, et Mich, "Required time of arrival control system", *United States Patent (Number 5121325)*, p. 5, 1992.

L. Delgado et X. Prats, "Fuel consumption assessment for speed variation concepts during the cruise phase", dans *Proceedings of the Conference on Air Traffic Management (ATM) Economics*, 2009.

L. M. Delgado, "Cruise speed reduction for air traffic flow management", Thèse de doctorat, Technical University of Catalonia – BarcelonaTech, February 2013.

H.A. Edwards, D. Dixon-Hardy et Z. Wadud, "Aircraft cost index and the future of carbon emissions from air travel", *Applied Energy*, vol. 164, pp. 553–562, 2015.
DOI : 10.1016/j.apenergy.2015.11.058

FAA, "Fuel planning and management", Rapp. tech. Vol. 56. No. 156, Octobre 1991.

R. S. Félix Patrón et R. M. Botez, "New altitude optimisation algorithm for the flight management system CMA-9000 improvement on the A310 and L-1011 aircraft", *Aeronautical Journal*, vol. 117, no. 1194, pp. 777–805, 2013.

IATA. (2014, Mai) Fuel price analysis. En ligne : <http://www.iata.org/publications/economics/fuel-monitor/Pages/price-analysis.aspx>

IATA Economics, "IATA Economic briefing, airline fuel and labour cost share", IATA, Rapp. tech., February 2010. En ligne : https://www.iata.org/whatwedo/Documents/economics/Airline_Labour_Cost_Share_Feb2010.pdf

S. Liden, "Optimum 4D guidance for long flights", dans *Digital Avionics Systems Conference, 1992. Proceedings., IEEE/AIAA 11th*, Oct 1992, pp. 262–267. DOI : 10.1109/DASC.1992.282146

S. Liden, "Practical considerations in optimal flight management computations", dans *American Control Conference, 1985*, June 1985, pp. 675–681.

W. Maazoun, "Conception et analyse d'un système d'optimisation de plans de vol pour les avions", Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Avril 2015.

L. Marla, B. Vaaben, et C. Barnhart, "Integrated disruption management and flight planning to trade off delays and fuel burn", DTU Management Engineering, Technical University of Denmark, Rapp. tech., Decemeber 2011.

A. Murrieta-Mendoza, S. Demange, F. George et R.M. Botez, "Performance Database Creation using a Level D Simulator for Cessna Citation X Aircraft in Cruise Regime", The 34th IASTED International Conference on Modelling, Identification and Control, 2015, Innsbruck, Autriche,

B. Roberson, "Fuel conservation strategies : cost index explained", *Boeing Aero Quarterly*, 2(2007), pp 22-27.

W. Roberson, R. Root, et D. Adams, "Fuel conservation strategies : cruise flight", *Boeing Aero Quarterly*, 4(2007), pp 26-28..

A. Saucier et F. Soumis, "Description de projet pour une maitrise-recherche : Estimation de l'indice du coût pour l'optimisation des trajectoires aériennes", École Polytechnique de Montréal, Rapp. tech., 2015.

Transports Canada, "Manuel d'information aéronautique", Rapp. tech. D6-58329, 2014.

C. Wang et L. Wang, "Economic analysis of instrument flight procedures operations based on flight cost index", International Conference on Transportation, Mechanical, and Electrical Engineering (TMEE) December 16-18, 2011, Changchun, Chine

www.aircanada.com. (2013, 09) Overview – September 2013.

En ligne : <http://www.aircanada.com/en/about/acfamily/>

www.flightradar24.com, "Flight history for Air Canada flight AC870", 05 2014. En ligne : <http://www.flightradar24.com/data/flights/ac870/>

www.seatguru.com. (2014, Mai) Air Canada seat maps boeing 777-300ER (77W) three class. En ligne : http://www.seatguru.com/airlines/Air_Canada/Air_Canada_Boeing_777-300ER_77W_new.php

ANNEXE A DESCRIPTION DE PROJET POUR UNE MAÎTRISE-RECHERCHE

Estimation de l'indice-du-coût pour l'optimisation des trajectoires aériennes

Antoine Saucier François Soumis

A.1 Introduction

La détermination d'une trajectoire aérienne optimale est faite en choisissant, parmi toutes les trajectoires possibles, une trajectoire qui minimise le coût total. Dans le projet d'Optimisation des Trajectoires Aériennes (OTA), cette trajectoire optimale est obtenue avec une méthode de plus court chemin sur un graphe direct acyclique. Cette méthode fait intervenir un paramètre α appelé indice du coût et exploite, entre autres, le concept de vitesse optimale.

Dans cette description de projet, nous justifions l'utilisation du concept d'indice du coût.

A.2 Modélisation du coût d'un vol

Le départ d'un vol a lieu au temps $t = 0$. Pour un vol dont la durée totale est T , la trajectoire I d'un avion est une courbe de l'espace-temps définie par une paramétrisation de la forme

$$I = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t), t \in [0, T]\}, \quad (A.1)$$

où x et y sont les coordonnées horizontales, z est la coordonnée verticale et f_1, f_2, f_3 sont des fonctions. L'ensemble de toutes les trajectoires possibles reliant un point de départ et un point d'arrivée, e.g. Montréal et Paris, sera désigné par \mathcal{T} .

Le *coût total* d'un vol pour une trajectoire $I \in \mathcal{T}$ est une fonctionnelle $C : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$C[I] := m_0 - m[I] + A(T), \quad (A.2)$$

où $m : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonctionnelle donnant la masse de l'avion à la fin du vol sur la trajectoire I, dénotée par $m[I]$, m_0 est la masse de l'avion au départ du vol (ou masse initiale) et la fonction $A(T)$ représente tous les coûts autres que le carburant pour tout le vol en fonction de la durée du vol T . Dans la suite, $A(T)$ sera appelé le *coût du temps*. Soulignons que tous les coûts, i.e. le coût du carburant et le coût du temps, sont calculés en unités de masse de

Tableau A.2 Table des symboles.

Symbol	Définition
$A(T)$	Coût total du temps pour un vol de durée totale T . $A : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction.
$B(t)$	Coût du temps fictif attribué à l'intervalle de temps $[0, t]$. $B : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction de pénalisation.
$C[I]$	Coût total du vol pour une trajectoire I , en unités de kg . $C : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonctionnelle.
I	Trajectoire espace-temps quelconque entre les points de départ et d'arrivée.
I_S	Chemin spatial quelconque reliant les points de départ et d'arrivée.
I^*	La trajectoire espace-temps optimale (de coût minimal) entre les points de départ et d'arrivée.
m_0	Masse initiale de l'avion.
$m(t)$	Masse de l'avion au temps $t \in [0, T]$. $m : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction.
m_k	Masse de l'avion au début de la $k^{\text{ième}}$ arête sur le chemin I_S .
M_k	Masse de carburant consommé sur la $k^{\text{ième}}$ arête du chemin I_S .
$m[I]$	Masse de l'avion à la fin du vol pour une trajectoire I . $M : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonctionnelle.
$M(T)$	Masse minimale de carburant consommé pour une trajectoire de durée totale T .
M_k	Masse minimale de carburant consommé sur l'arête k de la trajectoire I_S .
$T \geq 0$	Durée totale du vol.
T^*	Durée de vol optimale qui minimise le coût total.
\mathcal{T}	Ensemble de toutes les trajectoires possibles reliant les points de départ et d'arrivée.
$\mathcal{T}_T \subset \mathcal{T}$	Ensemble de toutes les trajectoires $I \in \mathcal{T}$ parcourue en un temps T .
$\tau[I]$	Temps de parcours sur une trajectoire I . $\tau : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonctionnelle.

carburant (kilogrammes ou tonnes).

L'objectif du projet OTA est d'estimer la trajectoire I qui minimise le coût $C[I]$.

A.3 Minimisation du coût total de la trajectoire

Les positions spatiales des points de départ et d'arrivée sont fixes pour chaque trajectoire $I \in \mathcal{T}$ et le temps de départ est fixé à $t = 0$, mais le temps d'arrivée $\tau[I]$, ou durée de vol, n'est pas fixe. Le problème consiste à trouver la trajectoire optimale I^* qui est la solution du problème d'optimisation suivant :

$$\min_{I \in \mathcal{T}} C[I]. \quad (\text{A.3})$$

Comme l'inconnue I est une trajectoire, (A.3) peut être considéré comme un problème de calcul des variations impliquant des contraintes multiples : les points de départ et d'arrivée, des bornes supérieures sur les vitesses et accélérations, des régions interdites de survol etc...

La durée de vol T doit être choisie pour minimiser le coût total. Soit $\mathcal{T}(T) \subset \mathcal{T}$ l'ensemble de toutes les trajectoires de \mathcal{T} pour lesquelles la durée totale de vol est égale à T , i.e.

$$\mathcal{T}(T) := \{I \in \mathcal{T} : \tau[I] = T\}.$$

Le problème de minimisation (A.3) peut alors s'écrire sous la forme équivalente suivante :

$$\min_{T \geq 0} \min_{I \in \mathcal{T}(T)} C[I]. \quad (\text{A.4})$$

Le coût minimal $C(T)$ d'une trajectoire de durée totale T est une fonction définie par

$$C(T) := \min_{I \in \mathcal{T}(T)} C[I]. \quad (\text{A.5})$$

La relation (A.2) implique alors que

$$C(T) = m_0 - m(T) + A(T), \quad (\text{A.6})$$

où la fonction $m(T)$ est la masse maximale de l'avion à la fin d'une trajectoire de durée totale T , i.e.

$$m(T) := \max_{I \in \mathcal{T}(T)} m[I]. \quad (\text{A.7})$$

Si on définit

$$M(T) := m_0 - m(T), \quad (\text{A.8})$$

qui est la masse minimale de carburant consommé pour un vol de durée T , alors le coût minimal (A.6) prend la forme simplifiée

$$C(T) = M(T) + A(T), \quad (\text{A.9})$$

qui dans la suite sera appelé le *modèle direct* du coût. La durée de vol T^* qui minimise le coût total satisfait donc

$$T^* \in \operatorname{argmin}_{T \geq 0} C(T). \quad (\text{A.10})$$

Si le minimum de C est un point critique, alors on a $C'(T^*) = 0$, ce qui implique avec (A.9) que

$$M'(T^*) + A'(T^*) = 0. \quad (\text{A.11})$$

A.4 Propriétés de la trajectoire optimale

A.4.1 Conditions d'extrémalité pour une version discrète du problème

Soit $\mathcal{T}_S \subset \mathcal{T}$ l'ensemble de toutes les trajectoires pour lesquelles le chemin spatial est fixé arbitrairement à un chemin dénoté par I_S . En d'autre mots, \mathcal{T}_S contient toutes les trajectoires $I \in \mathcal{T}$ qui passent exactement sur le chemin spatial I_S mais qui parcourent ce chemin avec des vitesses différentes.

Faisons l'hypothèse que la trajectoire spatiale I_S est composées de n arêtes rectilignes (n entier). Si n est suffisamment grand et que toutes les arêtes sont courtes, cette hypothèse est approximativement vraie si la trajectoire optimale est lisse. On peut associer à chaque point $P \in I_S$ une abscisse curviligne s qui représente la longueur de la partie de trajectoire $I_P \subset I_S$ se situant entre le point de départ et le point P . On divise la trajectoire en n segments ayant la même longueur ϵ . La longueur totale de la trajectoire I_S est donc $\ell := n\epsilon$. La $k^{\text{ième}}$ arête est un segment rectiligne reliant les points d'abscisses curvilignes $k\epsilon$ et $(k+1)\epsilon$ sur la trajectoire I_S , où $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Soient $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^3$ et $m(t) > 0$ la position, la vitesse et la masse de l'avion au temps $t \in \mathbb{R}$ sur le chemin I_S . En général, le débit de carburant est une fonction F de $m(t)$, $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ et t , i.e.

$$-\frac{dm}{dt} = F(m(t), \mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t). \quad (\text{A.12})$$

Considérons la valeur prise par (A.12) sur la $k^{\text{ième}}$ arête de I_S . Soient m_k , $\mathbf{r}_k \in \mathbb{R}^3$ et $t_k \in \mathbb{R}$ la masse, le vecteur position et le temps au début de la $k^{\text{ième}}$ arête, respectivement. On dénote aussi par $\boldsymbol{\ell}_k \in \mathbb{R}^3$ le vecteur de déplacement spatial associé à la $k^{\text{ième}}$ arête. La vitesse moyenne de l'avion sur la $k^{\text{ième}}$ arête est donnée par $\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\ell}_k/T_k$, où T_k désigne la durée de parcours de la $k^{\text{ième}}$ arête. Si la longueur de l'arête est suffisamment petite, alors le débit de carburant sur la $k^{\text{ième}}$ arête satisfait approximativement l'équation

$$-\left. \frac{dm}{dt} \right|_{k^{\text{ième}} \text{ arête}} = F(m_k, \mathbf{r}_k, \boldsymbol{\ell}_k/T_k, t_k)$$

et donc la consommation totale de carburant sur la $k^{\text{ième}}$ arête, dénotée par M_k , est approximativement donnée par

$$M_k = -T_k \left. \frac{dm}{dt} \right|_{k^{\text{ième}} \text{ arête}} = T_k F(m_k, \mathbf{r}_k, \boldsymbol{\ell}_k/T_k, t_k).$$

Soulignons que m_k , qui est la masse de l'avion au début de la $k^{\text{ième}}$ arête, est liée aux M_k

par la relation

$$m_k := m_0 - \sum_{i=0}^{k-1} M_i. \quad (\text{A.13})$$

On a donc

$$M_k = T_k F \left(m_0 - \sum_{i=0}^{k-1} M_i, \mathbf{r}_k, \boldsymbol{\ell}_k / T_k, t_k \right) \quad (\text{A.14})$$

pour $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. On supposera que les variables géométriques \mathbf{r}_k et $\boldsymbol{\ell}_k$ sont fixes (i.e. la trajectoire spatiale I_S est fixée) et nous les ignorerons dans la suite pour simplifier l'écriture. Ainsi on écrira (A.14) sous la forme allégée suivante :

$$M_k = F_k \left(m_0 - \sum_{i=0}^{k-1} M_i, T_k \right), \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}. \quad (\text{A.15})$$

L'équation (A.15) prend la forme explicite

$$\begin{aligned} M_0 &= F_0(m_0, T_0), \\ M_1 &= F_1(m_0 - M_0, T_1), \\ M_2 &= F_2(m_0 - M_0 - M_1, T_2), \\ &\dots \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

qui reflète le fait que la consommation de carburant sur un segment dépend de la masse de l'avion sur ce segment, qui dépend de la consommation de carburant sur les segments précédents. En substituant la seconde équation de (A.16) dans la première, on obtient

$$M_1 = F_1(m_0 - F_0(m_0, T_0), T_1) =: f_1(T_0, T_1), \quad (\text{A.17})$$

où nous avons omis d'indiquer explicitement la dépendance en m_0 , qui sera supposé constant. De même, en substituant la première équation de (A.16) et l'équation (A.17) dans la troisième équation de (A.16), on obtient

$$M_2 = F_2(m_0 - F_0(m_0, T_0) - f_1(m_0, T_0, T_1), T_2) =: f_2(T_0, T_1, T_2).$$

En général, on a donc

$$M_k = f_k(T_0, \dots, T_k), \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad (\text{A.18})$$

où $f_0 := F_0$. Avec la notation $\mathbf{T} = (T_0, T_1, \dots, T_{n-1})$, on écrira (A.18) sous la forme compacte

$$M_k = f_k(\mathbf{T}), \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Le coût total $c(\mathbf{T})$ d'une trajectoire quelconque $\mathbf{I} \in \mathcal{T}_s$ peut alors s'écrire sous la forme

$$c(\mathbf{T}) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(\mathbf{T}) + A(T_0 + T_1 + \dots + T_{n-1}). \quad (\text{A.19})$$

La variable de décision pour la minimisation du coût total donné par (A.19) est la variable vectorielle \mathbf{T} , et on doit tenir compte de la contrainte sur la durée totale de vol

$$T_0 + T_1 + \dots + T_{n-1} = T. \quad (\text{A.20})$$

Le problème d'optimisation s'écrit donc

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{T} \geq 0} & \sum_{k=0}^{n-1} f_k(\mathbf{T}) + A(T_0 + T_1 + \dots + T_{n-1}), \\ \text{tel que } & T_0 + T_1 + \dots + T_{n-1} - T = 0. \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

Le Lagrangien du problème (A.21) est

$$L(\mathbf{T}) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(\mathbf{T}) + \alpha (T_0 + T_1 + \dots + T_{n-1} - T), \quad (\text{A.22})$$

où α est un multiplicateur de Lagrange. Les conditions d'optimalité $\frac{\partial L}{\partial T_j} = 0$ prennent la forme

$$\sum_{k=j}^{n-1} \frac{\partial f_k}{\partial T_j}(\mathbf{T}) + \alpha = 0, \quad j \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad (\text{A.23})$$

Remarquons que la sommation dans (A.23) commence à $k = j$ car d'après (A.18) on a $\frac{\partial f_k}{\partial T_j} = 0$ pour $j > k$, et donc $\frac{\partial f_k}{\partial T_j} \neq 0$ pour $k \geq j$. Pour connaître la valeur de α , il faudrait en principe résoudre le système de $n+1$ équations définies par (A.20) et (A.23).

A.4.2 Pénalisation sur le temps et concept d'indice du coût

La durée du vol résulte d'un compromis entre le coût du carburant et le coût du temps (équation (A.10)). La trajectoire optimale minimise la consommation de carburant compte tenu de cette contrainte sur la durée du vol. Dans cette section, on se demande s'il est possible de représenter cette contrainte par un coût du temps instantané *fictif* qui résulterait en une trajectoire identique à la trajectoire optimale.

Dans cette optique, considérons une version modifiée du problème de minimisation du coût total sur le chemin I_S : on ne met plus de contrainte sur le temps d'arrivée mais on attribue un

coût fictif $B(t)$ à l'intervalle de temps $[0, t]$, $t \geq 0$. Le problème modifié est donc un problème de minimisation avec une fonction de *pénalisation*. Peut-on choisir la fonction B pour que la trajectoire optimale du problème avec pénalisation soit la même que la trajectoire optimale ? En utilisant les mêmes notations qu'à la section précédente, le problème de minimisation avec pénalisation prend la forme suivante :

$$\min_{\mathbf{T} \geq 0} \sum_{k=0}^{n-1} f_k(\mathbf{T}) + B \left(\sum_{k=0}^{n-1} T_k \right). \quad (\text{A.24})$$

Les conditions d'optimalité du problème (A.24) sont

$$\sum_{k=j}^{n-1} \frac{\partial f_k}{\partial T_j}(\mathbf{T}) + B' \left(\sum_{k=0}^{n-1} T_k \right) = 0, \quad j \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \quad (\text{A.25})$$

Les temps optimaux \mathbf{T}^* pour le problème avec pénalisation (A.24) seront exactement les mêmes que pour le problème initial (A.21) à condition que les conditions d'optimalité (A.25) et (A.23) soient identiques, ce qui arrivera si

$$B'(t) = \alpha \text{ pour } t \geq 0, \quad (\text{A.26})$$

ce qui est équivalent à

$$B(t) = \alpha t + B(0), \quad t \geq 0. \quad (\text{A.27})$$

L'utilisation d'une pénalisation du coût du temps par une fonction affine de la forme (A.27) est donc équivalente à l'utilisation d'une contrainte sur le temps d'arrivée si la valeur de α peut être choisie convenablement. Le multiplicateur de Lagrange α est appelé *l'indice du coût*.

Ce résultat implique qu'on peut calculer le coût d'une trajectoire quelconque en remplaçant la fonction de coût $A(T)$ par la fonction $B(T) := \alpha t + B(0)$. La fonctionnelle $C[I]$, où $I \in \mathcal{T}(T)$, peut donc être remplacée par la fonctionnelle alternative \hat{C} définie par

$$\hat{C}[I] := m_0 - m[I] + \alpha T + B(0) \quad (\text{A.28})$$

à condition de choisir la valeur de α convenablement, i.e. celle qui conduit à une durée de vol T . Comme dans la section A.3, on peut définir

$$\hat{C}(T) := \min_{I \in \mathcal{T}(T)} \hat{C}[I], \quad (\text{A.29})$$

qui est le coût minimal d'une trajectoire $I \in \mathcal{T}(T)$ associé à la fonctionnelle \hat{C} . En utilisant

(A.28), (A.29) et (A.8), $\hat{C}(T)$ prend la forme

$$\hat{C}(T) := M(T) + \alpha T + B(0), \quad (\text{A.30})$$

qui dans la suite sera appelé le *modèle IC* du coût.

A.4.3 Estimation de l'indice du coût

Dans cette section, nous montrons que la cohérence des deux modèles du coût, soient le modèle direct et le modèle IC, conduit à un estimateur de l'indice du coût.

En première analyse, nous supposerons ici que tous les minima sont des points critiques. Pour un indice du coût α donné, le temps $T(\alpha)$ qui minimise \hat{C} satisfait $\hat{C}'(T(\alpha)) = 0$, ce qui implique avec (A.30) que

$$M'(T(\alpha)) + \alpha = 0. \quad (\text{A.31})$$

L'équation (A.31) définit implicitement une fonction $T(\alpha)$ qui donne le temps de vol en fonction de l'indice du coût.

La valeur de l'indice du coût α doit être choisie de telle sorte que le modèle direct (A.9) et le modèle IC (A.30) donnent le même temps de vol optimal T^* . La valeur optimale α^* de l'indice du coût doit donc satisfaire $T(\alpha^*) = T^*$. En substituant T^* par $T(\alpha^*)$ dans (A.11) d'une part, et α par α^* dans (A.31) d'autre part, on obtient le système

$$\begin{cases} M'(T(\alpha^*)) + \alpha^* = 0, \\ M'(T(\alpha^*)) + A'(T(\alpha^*)) = 0, \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

qui implique que l'indice du coût optimal doit satisfaire

$$\alpha^* = A'(T(\alpha^*)). \quad (\text{A.33})$$

L'indice du coût optimal est donc un des zéros de la fonction f définie par

$$f(\alpha) := \alpha - A'(T(\alpha)).$$

ANNEXE B PREUVES PERMETTANT DE RÉDUIRE LES INTERVALLES DE RECHERCHE PERTINENTS

B.1 Réduction des intervalles de recherche pertinents

Proposition B.1.1 Si $T_{\max} \in I_T^{(1)}$, alors $\alpha^* = \alpha_{\min}$.

Preuve D'après la section 4.1.4 sur les intervalles maximaux, on sait que $\alpha_{\min} \leq \alpha^* \leq \alpha_{\max}$. Examinons donc $f(\alpha) = \alpha - A'(T(\alpha))$ pour $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$. D'une part,

$$\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max} \Rightarrow T(\alpha_{\max}) \leq T(\alpha) \leq T(\alpha_{\min}), \quad (\text{B.1})$$

car T est strictement décroissante. D'autre part,

$$T(\alpha_{\max}) \leq T(\alpha) \leq T(\alpha_{\min}) \Rightarrow A'(T(\alpha)) = \alpha_{\min}, \quad (\text{B.2})$$

car $[T(\alpha_{\max}), T(\alpha_{\min})] \subseteq I_T^{(1)}$ et $A'(T) = \alpha_{\min}$ pour tout $T \in I_T^{(1)}$. On conclue que

$$f(\alpha) = \alpha - \alpha_{\min}, \text{ pour } \alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]. \quad (\text{B.3})$$

En utilisant (B.3), la condition $f(\alpha^*) = 0$ conduit à $\alpha^* = \alpha_{\min}$. ■

Méthode de recherche

En utilisant α_{\min} comme valeur de départ, on trouve α^* dès la première itération.

Proposition B.1.2 Si $T_{\max} \notin I_T^{(1)}$, alors $T^* \notin I_T^{(1)}$.

Preuve Faisons l'hypothèse que

$$T^* \in I_T^{(1)}. \quad (\text{B.4})$$

Si $T^* \in I_T^{(1)}$, alors $\alpha^* \in I_{\alpha}^{(1)}$. Soit $\alpha \in I_{\alpha}^{(1)}$. Comme $T(\alpha) \in I_T^{(1)}$ pour tout $\alpha \in I_{\alpha}^{(1)}$, alors la fonction $f(\alpha) = \alpha - A'(T(\alpha))$ prend la forme

$$f(\alpha) = \alpha - \alpha_{\min},$$

car $A'(T) = \alpha_{\min}$ pour tout $T \in I_T^{(1)}$. La valeur optimale α^* satisfait donc

$$\begin{aligned} f(\alpha^*) = 0 &\Rightarrow \alpha^* = \alpha_{\min} \\ &\Rightarrow T(\alpha^*) = T(\alpha_{\min}) \\ &\Rightarrow T^* = T_{\max} \notin I_T^{(1)}, \end{aligned}$$

ce qui contredit l'équation (B.4). On conclue donc que :

$$\text{si } T_{\max} \notin I_T^{(1)}, \text{ alors } T^* \notin I_T^{(1)}. \quad \blacksquare \quad (\text{B.5})$$

Proposition B.1.3 Si $T_{\max} \in I_T^{(2)}$, alors $\alpha^* \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(2)}]$.

Preuve L'intervalle maximal (4.21) prévoit que $T_{\min} \leq T^* \leq T_{\max}$ et $T_{\max} \in I_T^{(2)}$, donc

$$T^* \in I_T^{(1)} \cup [T_{\min}^{(2)}, T_{\max}], \quad (\text{B.6})$$

où $[T_{\min}^{(2)}, T_{\max}] \subseteq I_T^{(2)}$. D'après l'expression (B.5), $T^* \notin I_T^{(1)}$ ce qui implique avec l'expression (B.6) que

$$T^* \in [T_{\min}^{(2)}, T_{\max}] \subseteq I_T^{(2)},$$

ce qui correspond à $\alpha^* \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(2)}]$. Comme

$$f(\alpha_{\min}) = \alpha_{\min} - A'(T(\alpha_{\min})) = \alpha_{\min} - A'(T_{\max}) < 0,$$

car $T_{\max} \in I_T^{(2)}$ et $A'(T) > \alpha_{\min}$ pour tout $T \in I_T^{(2)}$, par définition de $I_T^{(2)}$, alors $f(\alpha_{\min}) \neq 0$ et $\alpha^* \neq \alpha_{\min}$. Vérifions maintenant que $f(\alpha)$ possède une racine unique dans l'intervalle $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(2)}]$. D'une part, on vient de montrer que $f(\alpha_{\min}) < 0$. D'autre part,

$$f(\alpha_{\max}^{(2)}) = \alpha_{\max}^{(2)} - A'(T(\alpha_{\max}^{(2)})) = \alpha_{\max}^{(2)} - A'(T_{\min}^{(2)}) = \alpha_{\max}^{(2)} - \alpha_{\min} > 0$$

car $\alpha_{\max}^{(2)} > \alpha_{\min}$. Comme $f(\alpha_{\min}) f(\alpha_{\max}^{(2)}) < 0$, on conclue que $f(\alpha)$ possède au moins une racine dans $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(2)}]$. Cette racine est unique car $f'(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in I_{\alpha}^{(2)}$, par définition de $I_{\alpha}^{(2)}$. \blacksquare

Méthode de recherche

On utilise l'équation de $T(\alpha)$ afin de déterminer $\alpha_{\max}^{(2)}$ à partir de $I_T^{(2)}$. Ensuite, on utilise $\alpha = \frac{\alpha_{\min} + \alpha_{\max}^{(2)}}{2}$ comme valeur initiale avec la méthode de Newton expliquée à la section 4.2.3

à l'intérieur de $\left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

Proposition B.1.4 Si $T_{\max} \in I_T^{(3)}$ alors $\alpha^* \in \left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

Preuve L'intervalle maximal (4.21) prévoit que $T_{\min} \leq T^* \leq T_{\max}$ et $T_{\max} \in I_T^{(3)}$, donc

$$T^* \in I_T^{(1)} \cup I_T^{(2)} \cup \left[T_{\min}^{(3)}, T_{\max} \right]. \quad (\text{B.7})$$

D'après l'équation (5.1), $T^* \notin I_T^{(3)}$, donc

$$T^* \notin \left[T_{\min}^{(3)}, T_{\max} \right],$$

puisque $\left[T_{\min}^{(3)}, T_{\max} \right] \subseteq I_T^{(3)}$. De plus, d'après l'équation (B.5), $T^* \notin I_T^{(1)}$ ce qui implique avec l'équation (B.7) que

$$T^* \in \left] T_{\min}^{(2)}, T_{\max}^{(2)} \right[$$

et

$$\alpha^* \in \left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[.$$

D'une part,

$$f(\alpha_{\min}) = \alpha_{\min} - A'(T(\alpha_{\min})) = \alpha_{\min} - A'(T_{\max}) < 0$$

car $T_{\max} \in I_T^{(2)}$ et $A'(T) > \alpha_{\min}$ pour tout $T \in I_T^{(2)}$, par définition de $I_T^{(2)}$. D'autre part, $f'(\alpha) < 0$ pour tout $\alpha \in I_{\alpha}^{(3)}$, donc $f(\alpha_{\max}^{(3)}) < 0$ et puisque $\alpha_{\max}^{(3)} = \alpha_{\min}^{(2)}$ par définition, alors $f(\alpha_{\min}^{(2)}) < 0$. On a par définition $A' \left(T_{\min}^{(2)} \right) = \alpha_{\min}$. Puisque $\alpha_{\max}^{(2)} > \alpha_{\min}$, alors

$$\begin{aligned} f(\alpha_{\max}^{(2)}) &= \alpha_{\max}^{(2)} - A' \left(T_{\min}^{(2)} \right) \\ &= \alpha_{\max}^{(2)} - \alpha_{\min} > 0. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Comme $f(\alpha_{\min}^{(2)}) f(\alpha_{\max}^{(2)}) < 0$, on conclue alors que $f(\alpha)$ possède au moins une racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$. Cette racine est unique car $f'(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in \left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[\subset I_{\alpha}^{(2)}$, par définition de $I_{\alpha}^{(2)}$. ■

Méthode de recherche

On utilise l'équation de $T(\alpha)$ afin de trouver $\alpha_{\min}^{(2)}$ et $\alpha_{\max}^{(2)}$ à partir de $I_T^{(2)}$. Ensuite, on utilise $\frac{\alpha_{\min}^{(2)} + \alpha_{\max}^{(2)}}{2}$ comme valeur initiale dans la méthode de Newton expliquée à la section 4.2.3

dans $\mathbb{H}_\alpha^{(2)}$ afin de trouver α^* .

Proposition B.1.5 Si $T_{\max} \in I_T^{(4)}$ alors $\alpha^* \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(4)}] \cup [\alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)}]$.

Preuve L'intervalle maximal (4.21) prévoit que $T_{\min} \leq T^* \leq T_{\max}$ et $T_{\max} \in I_T^{(4)}$, donc

$$T^* \in I_T^{(1)} \cup I_T^{(2)} \cup I_T^{(3)} \cup [T_{\min}^{(4)}, T_{\max}] . \quad (\text{B.9})$$

D'après l'équation (5.1), on a

$$T^* \notin I_T^{(3)} . \quad (\text{B.10})$$

De plus, d'après l'équation (B.5),

$$T^* \notin I_T^{(1)} . \quad (\text{B.11})$$

Comme

$$f(\alpha_{\min}) = \alpha_{\min} - A'(T(\alpha_{\min})) = \alpha_{\min} - A'(T_{\max}) < 0,$$

car $T_{\max} \in I_T^{(4)}$ et $A'(T) > \alpha_{\min}$ pour tout $T \in I_T^{(4)}$, par définition de $I_T^{(4)}$, alors $f(\alpha_{\min}) \neq 0$ et

$$\alpha^* \neq \alpha_{\min} \text{ et } T^* \neq T_{\max} . \quad (\text{B.12})$$

On conclut à partir des équations (B.9), (B.10), (B.11) et (B.12) que

$$T^* \in [T_{\min}^{(2)}, T_{\max}^{(2)}] \cup [T_{\min}^{(4)}, T_{\max}]$$

et que

$$\alpha^* \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(4)}] \cup [\alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)}] .$$

On a $f(\alpha_{\min}) < 0$ et $f'(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(4)}]$ par définition de $I_\alpha^{(4)}$, donc $f(\alpha)$ admet une racine dans $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(4)}]$ si et seulement si $f(\alpha_{\max}^{(4)}) > 0$. De plus, on a $A'(T_{\min}^{(2)}) = \alpha_{\min}$ par définition de $I_T^{(2)}$. Puisque $\alpha_{\max}^{(2)} > \alpha_{\min}$, alors

$$\begin{aligned} f(\alpha_{\max}^{(2)}) &= \alpha_{\max}^{(2)} - A'(T_{\min}^{(2)}) \\ &= \alpha_{\max}^{(2)} - \alpha_{\min} > 0. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Comme $f'(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in I_\alpha^{(2)}$, il s'en suit que la fonction $f(\alpha)$ admet une seule racine dans $[\alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)}]$ si et seulement si $f(\alpha_{\min}^{(2)}) < 0$. On a alors trois cas :

Cas 1 : Si $f(\alpha_{\max}^{(4)}) < 0$, alors $f(\alpha)$ n'admet pas de racine dans $\left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(4)} \right[$. Puisque $f'(\alpha) < 0$ pour tout $\alpha \in I_{\alpha}^{(3)}$ alors $f(\alpha_{\min}^{(2)}) = f(\alpha_{\max}^{(3)}) < 0$ et $f(\alpha)$ admet une racine dans $I_{\alpha}^{(2)}$.

Cas 2 : Si $f(\alpha_{\max}^{(4)}) > 0$, alors $f(\alpha)$ admet une racine dans $\left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(4)} \right[$. Si $f(\alpha_{\min}^{(2)}) < 0$, alors $f(\alpha)$ admet une deuxième racine dans $I_{\alpha}^{(2)}$.

Cas 3 : Si $f(\alpha_{\max}^{(4)}) > 0$, alors $f(\alpha)$ admet une racine dans $\left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(4)} \right[$. Si $f(\alpha_{\min}^{(2)}) > 0$, alors $f(\alpha)$ n'admet pas de racine dans $I_{\alpha}^{(2)}$.

On conclut que si $T_{\max} \in I_T^{(4)}$ alors $f(\alpha)$ admet au moins une racine telle que

$$\alpha^* \in \left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(4)} \right[\cup \left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[.$$

■

Méthode de recherche

On utilise l'équation de $T(\alpha)$ afin de trouver $\alpha_{\max}^{(4)}$ à partir de $I_T^{(4)}$ et $\alpha_{\min}^{(2)}$ à partir de $I_T^{(2)}$.

Si $f(\alpha_{\max}^{(4)}) > 0$ et $f(\alpha_{\min}^{(2)}) < 0$ alors $f(\alpha)$ admet deux racines :

- On utilise $\frac{\alpha_{\max}^{(4)} + \alpha_{\min}}{2}$ comme valeur initiale dans la méthode de Newton pour trouver la racine de $f(\alpha)$ dans $\left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(4)} \right[$.

- On utilise $T(\alpha)$ afin de déterminer $\alpha_{\max}^{(2)}$ à partir de $I_T^{(2)}$.

- On utilise $\frac{\alpha_{\max}^{(2)} + \alpha_{\min}^{(2)}}{2}$ comme valeur initiale dans la méthode de Newton pour trouver la racine de $f(\alpha)$ dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

Si $f(\alpha_{\max}^{(4)}) > 0$ et $f(\alpha_{\min}^{(2)}) > 0$ alors $f(\alpha)$ admet une seule racine dans $\left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(4)} \right[$:

- On utilise $\frac{\alpha_{\max}^{(4)} + \alpha_{\min}}{2}$ comme valeur initiale dans la méthode de Newton pour trouver la racine de $f(\alpha)$ dans $\left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(4)} \right[$.

Si $f(\alpha_{\max}^{(4)}) < 0$, alors $f(\alpha)$ admet une seule racine dans $I_{\alpha}^{(2)}$:

- On utilise $T(\alpha)$ afin de déterminer $\alpha_{\max}^{(2)}$ à partir de $I_T^{(2)}$.

- On utilise $\frac{\alpha_{\max}^{(2)} + \alpha_{\min}^{(2)}}{2}$ comme valeur initiale dans la méthode de Newton qu'on applique pour trouver la racine de $f(\alpha)$ dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

Dans le cas où $f(\alpha)$ admet deux racines $\alpha_1 \in \left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$ et $\alpha_2 \in \left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(4)} \right[$ alors on compare les coûts totaux

$$C(T(\alpha_i)) = M(T(\alpha_i)) + A(T(\alpha_i)), \quad i = 1, 2,$$

et on choisit la racine qui minimise le coût total.

Proposition B.1.6 Si $T_{\max} \in I_T^{(5)}$ alors $\alpha^* \in \{\alpha_{\min}\} \cup [\alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)}[$.

Preuve L'intervalle maximal (4.21) prévoit que $T_{\min} \leq T^* \leq T_{\max}$ et $T_{\max} \in I_T^{(5)}$, donc

$$T^* \in I_T^{(1)} \cup I_T^{(2)} \cup I_T^{(3)} \cup I_T^{(4)} \cup]T_{\min}^{(5)}, T_{\max}[. \quad (\text{B.14})$$

D'après l'équation (5.1), on a

$$T^* \notin I_T^{(3)}. \quad (\text{B.15})$$

De plus, d'après l'équation (B.5),

$$T^* \notin I_T^{(1)}. \quad (\text{B.16})$$

Faisons l'hypothèse que

$$T^* \in]T_{\min}^{(5)}, T_{\max}] \subseteq I_T^{(5)}. \quad (\text{B.17})$$

D'une part,

$$T_{\min}^{(5)} < T(\alpha) \leq T_{\max} \Rightarrow \alpha_{\min} \leq \alpha < \alpha_{\max}^{(5)} \quad (\text{B.18})$$

car T est strictement décroissante. D'autre part,

$$T(\alpha_{\max}^{(5)}) \leq T(\alpha) \leq T(\alpha_{\min}) \Rightarrow A'(T(\alpha)) = \alpha_{\min} \quad (\text{B.19})$$

car $]T(\alpha_{\max}^{(5)}), T(\alpha_{\min})] \subseteq I_T^{(5)}$ et $A'(T) = \alpha_{\min}$ pour tout $T \in I_T^{(5)}$. On conclue que

$$f(\alpha) = \alpha - \alpha_{\min}, \text{ pour } \alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(5)}[. \quad (\text{B.20})$$

En utilisant l'équation (B.20), la condition $f(\alpha^*) = 0$ conduit à $\alpha^* = \alpha_{\min}$. On conclue donc que

$$\text{si } T^* \in]T_{\min}^{(5)}, T_{\max}], \text{ alors } \alpha^* = \alpha_{\min} \text{ et } T^* = T_{\max}. \quad (\text{B.21})$$

Montrons que $T^* \notin I_T^{(4)}$. Comme $T_{\max} \in I_T^{(5)}$, alors $\alpha_{\min} \in I_{\alpha}^{(5)}$ et

$$f(\alpha_{\min}) = \alpha_{\min} - A'(T(\alpha_{\min})) = 0$$

car $A'(T) = \alpha_{\min}$ pour tout $T \in I_T^{(5)}$. De plus, $f'(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in I_{\alpha}^{(4)} \cup I_{\alpha}^{(5)}$, donc $f(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in]\alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(4)}] \supseteq I_{\alpha}^{(4)}$ et par suite $f(\alpha)$ n'admet pas de racine dans $I_{\alpha}^{(4)}$ et donc

$$T^* \notin I_T^{(4)}. \quad (\text{B.22})$$

On conclut à partir de (B.14), (B.15), (B.16), (B.21) et (B.22) que

$$T^* \in \left] T_{\min}^{(2)}, T_{\max}^{(2)} \right[\text{ ou } T^* = T_{\max}$$

et

$$\alpha^* \in \left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[\text{ ou } \alpha^* = \alpha_{\min}.$$

On a $A' \left(T_{\min}^{(2)} \right) = \alpha_{\min}$ par définition. Puisque

$$\alpha_{\max}^{(2)} > \alpha_{\min},$$

alors

$$\begin{aligned} f \left(\alpha_{\max}^{(2)} \right) &= \alpha_{\max}^{(2)} - A' \left(T_{\min}^{(2)} \right) \\ &= \alpha_{\max}^{(2)} - \alpha_{\min} > 0. \end{aligned} \tag{B.23}$$

Comme $f'(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in I_{\alpha}^{(2)}$, il s'en suit que la fonction $f(\alpha)$ admet une racine dans $I_{\alpha}^{(2)}$ si et seulement si $f \left(\alpha_{\min}^{(2)} \right) < 0$. On a alors deux cas :

Cas 1 : La fonction $f(\alpha)$ admet une première racine α_{\min} . Si $f \left(\alpha_{\min}^{(2)} \right) < 0$, alors $f(\alpha)$ admet une deuxième racine dans $I_{\alpha}^{(2)}$.

Cas 2 : Si $f \left(\alpha_{\min}^{(2)} \right) > 0$, alors α_{\min} est la seule racine de $f(\alpha)$ et $\alpha_{\min} = \alpha^*$.

On conclut que si $T_{\max} \in I_T^{(5)}$ alors $f(\alpha)$ admet au moins une racine telle que

$$\alpha^* \in \left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[\text{ ou } \alpha^* = \alpha_{\min}. \quad \blacksquare$$

Méthode de recherche

Le deuxième appel qu'on a effectué au code OTA en utilisant α_{\max} nous permet d'obtenir T_{\min} . Dans le cas où $T_{\min} \geq T_{\max}^{(2)}$, la fonction $f(\alpha)$ n'admet pas de racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$. Dans le cas où $T_{\min} < T_{\max}^{(2)}$:

- On utilise l'équation de $T(\alpha)$ afin de déterminer $\alpha_{\min}^{(2)}$ à partir de $I_T^{(2)}$.

Si $T_{\min} \leq T_{\min}^{(2)}$:

- On utilise l'équation de $T(\alpha)$ afin de déterminer $\alpha_{\max}^{(2)}$ à partir de $I_T^{(2)}$.

Si $T_{\min} > T_{\min}^{(2)}$:

- On pose $T_{\min}^{(2)} = T_{\min}$ et $\alpha_{\max}^{(2)} = \alpha_{\max}$.

Si $f(\alpha_{\min}^{(2)}) < 0$:

- On utilise $\frac{\alpha_{\max}^{(2)} + \alpha_{\min}^{(2)}}{2}$ comme valeur initiale dans la méthode de Newton qu'on applique

pour trouver la racine de $f(\alpha)$ dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

Si $f(\alpha)$ admet deux racines $\alpha_1 = \alpha_{\min}$ et $\alpha_2 \in \left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$ alors on compare les coûts totaux

$$C(T(\alpha_i)) = M(T(\alpha_i)) + A(T(\alpha_i)), \quad i = 1, 2$$

et on choisit la racine qui minimise le coût total.

Proposition B.1.7 Si $T_{\max} \notin I_T^{(5)}$, alors $T^* \notin I_T^{(5)}$.

Preuve Faisons l'hypothèse que

$$T^* \in I_T^{(5)}. \quad (\text{B.24})$$

Si $T^* \in I_T^{(5)}$, alors $\alpha^* \in I_{\alpha}^{(5)}$. Soit $\alpha \in I_{\alpha}^{(5)}$. Comme $T(\alpha) \in I_T^{(5)}$ pour tout $\alpha \in I_{\alpha}^{(5)}$, alors la fonction $f(\alpha) = \alpha - A'(T(\alpha))$ prend la forme

$$f(\alpha) = \alpha - \alpha_{\min}$$

car $A'(T) = \alpha_{\min}$ pour tout $T \in I_T^{(5)}$. La valeur optimale α^* satisfait donc

$$\begin{aligned} f(\alpha^*) &= 0 \Rightarrow \alpha^* = \alpha_{\min} \\ &\Rightarrow T(\alpha^*) = T(\alpha_{\min}) \\ &\Rightarrow T^* = T_{\max} \notin I_T^{(5)}, \end{aligned}$$

ce qui contredit l'hypothèse (B.24). On conclue donc que si $T_{\max} \notin I_T^{(5)}$, alors

$$T^* \notin I_T^{(5)}. \quad \blacksquare \quad (\text{B.25})$$

Proposition B.1.8 Si $T_{\max} \in I_T^{(6)}$ alors $\alpha^* \in \left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[\cup \left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

Preuve L'intervalle maximal (4.21) prévoit que $T_{\min} \leq T^* \leq T_{\max}$ et $T_{\max} \in I_T^{(6)}$, donc

$$T^* \in I_T^{(1)} \cup I_T^{(2)} \cup I_T^{(3)} \cup I_T^{(4)} \cup I_T^{(5)} \cup \left[T_{\min}^{(6)}, T_{\max} \right]. \quad (\text{B.26})$$

D'après (5.1), on a

$$T^* \notin I_T^{(3)}. \quad (\text{B.27})$$

De plus, d'après (B.5) et (B.25),

$$T^* \notin I_T^{(1)} \cup I_T^{(5)}. \quad (\text{B.28})$$

Comme

$$f(\alpha_{\min}) = \alpha_{\min} - A'(T(\alpha_{\min})) = \alpha_{\min} - A'(T_{\max}) < 0$$

car $T_{\max} \in I_T^{(6)}$ et $A'(T) > \alpha_{\min}$ pour tout $T \in I_T^{(6)}$, par définition de $I_T^{(6)}$, alors

$$f(\alpha_{\min}) \neq 0 \text{ et } \alpha^* \neq \alpha_{\min}. \quad (\text{B.29})$$

Vérifions maintenant que $f(\alpha)$ possède une racine unique dans l'intervalle $\left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[$. D'une part, on vient de montrer que $f(\alpha_{\min}) < 0$. D'autre part,

$$f(\alpha_{\max}^{(6)}) = \alpha_{\max}^{(6)} - A'(T(\alpha_{\max}^{(6)})) = \alpha_{\max}^{(6)} - A'(T_{\min}^{(6)}) = \alpha_{\max}^{(6)} - \alpha_{\min} > 0$$

car $\alpha_{\max}^{(6)} > \alpha_{\min}$. Comme $f(\alpha_{\min}) f(\alpha_{\max}^{(6)}) < 0$, on conclue que $f(\alpha)$ possède au moins une racine dans $\left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[$. Cette racine est unique car $f'(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in I_{\alpha}^{(6)}$, par définition de $I_{\alpha}^{(6)}$. Montrons que $T^* \notin I_T^{(4)}$. Comme $f'(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in I_{\alpha}^{(5)} \cup I_{\alpha}^{(4)}$ et que $f(\alpha_{\max}^{(6)}) = f(\alpha_{\min}^{(5)}) > 0$, alors $f(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in I_{\alpha}^{(5)} \cup I_{\alpha}^{(4)}$, et par suite

$$\alpha^* \notin I_{\alpha}^{(4)} \text{ et } T^* \notin I_T^{(4)}. \quad (\text{B.30})$$

Vérifions si $f(\alpha)$ possède une racine dans l'intervalle $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$. On a $A'(T_{\min}^{(2)}) = \alpha_{\min}$ par définition de $I_T^{(2)}$. On a

$$\begin{aligned} f(\alpha_{\max}^{(2)}) &= \alpha_{\max}^{(2)} - A'(T_{\min}^{(2)}) \\ &= \alpha_{\max}^{(2)} - \alpha_{\min} > 0 \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

car $\alpha_{\max}^{(2)} > \alpha_{\min}$. Comme $f'(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in \left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$, il s'en suit que la fonction $f(\alpha)$ admet une racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$ si et seulement si $f(\alpha_{\min}^{(2)}) < 0$. On a alors deux cas :

Cas 1 : La fonction $f(\alpha)$ admet une première racine $\alpha \in \left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[$. Si $f(\alpha_{\min}^{(2)}) < 0$, alors $f(\alpha)$ admet une deuxième racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

Cas 2 : Si $f(\alpha_{\min}^{(2)}) > 0$, alors $f(\alpha)$ admet une seule racine dans $\left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[$.
On conclut que si $T_{\max} \in I_T^{(6)}$ alors $f(\alpha)$ admet au moins une racine telle que

$$\alpha^* \in \left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[\cup \left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[.$$

■

Méthode de recherche

On utilise l'équation de $T(\alpha)$ afin de déterminer $\alpha_{\max}^{(6)}$ à partir de $I_T^{(6)}$.

- On utilise $\frac{\alpha_{\max}^{(6)} + \alpha_{\min}}{2}$ comme valeur initiale dans la méthode de Newton qu'on applique pour trouver la racine de $f(\alpha)$ dans $\left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[$.

Dans le cas où $T_{\min} \geq T_{\max}^{(2)}$, la fonction $f(\alpha)$ n'admet pas de racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$. Dans le cas où $T_{\min} < T_{\max}^{(2)}$:

- On utilise l'équation de $T(\alpha)$ afin de déterminer $\alpha_{\min}^{(2)}$ à partir de $I_T^{(2)}$.

Si $T_{\min} \leq T_{\max}^{(2)}$:

- On utilise l'équation de $T(\alpha)$ afin de déterminer $\alpha_{\max}^{(2)}$ à partir de $I_T^{(2)}$.

Si $T_{\min} > T_{\max}^{(2)}$:

- On pose $T_{\min}^{(2)} = T_{\min}$ et $\alpha_{\max}^{(2)} = \alpha_{\max}$.

Si $f(\alpha_{\min}^{(2)}) < 0$:

- On utilise $\frac{\alpha_{\max}^{(2)} + \alpha_{\min}^{(2)}}{2}$ comme valeur initiale dans la méthode de Newton qu'on applique pour trouver la racine de $f(\alpha)$ dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

Si $f(\alpha)$ admet deux racines $\alpha_1 \in \left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[$ et $\alpha_2 \in \left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$ alors on compare les coûts totaux

$$C(T(\alpha_i)) = M(T(\alpha_i)) + A(T(\alpha_i)), \quad i = 1, 2$$

et on choisit la racine qui minimise le coût total.

Proposition B.1.9 Si $T_{\max} \in I_T^{(7)}$ alors $\alpha^* \in \left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[\cup \left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

Preuve L'intervalle maximal (4.21) prévoit que $T_{\min} \leq T^* \leq T_{\max}$ et $T_{\max} \in I_T^{(7)}$, donc

$$T^* \in I_T^{(1)} \cup I_T^{(2)} \cup I_T^{(3)} \cup I_T^{(4)} \cup I_T^{(5)} \cup I_T^{(6)} \cup \left[T_{\min}^{(7)}, T_{\max} \right]. \quad (\text{B.32})$$

D'après (5.1), $T^* \notin I_T^{(3)} \cup I_T^{(7)}$. Comme $\left[T_{\min}^{(7)}, T_{\max} \right] \subseteq I_T^{(7)}$, alors $T^* \notin \left[T_{\min}^{(7)}, T_{\max} \right]$. De plus, d'après (B.5) et (B.25),

$$T^* \notin I_T^{(1)} \cup I_T^{(5)}. \quad (\text{B.33})$$

Vérifions si $f(\alpha)$ possède une racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[$. D'une part,

$$f(\alpha_{\min}) = \alpha_{\min} - A'(T(\alpha_{\min})) = \alpha_{\min} - A'(T_{\max}) < 0$$

car $T_{\max} \in I_T^{(7)}$ et $A'(T) > \alpha_{\min}$ pour tout $T \in I_T^{(7)}$, par définition de $I_T^{(7)}$. D'autre part, $f'(\alpha) < 0$ pour tout $\alpha \in I_{\alpha}^{(7)}$, donc $f(\alpha_{\max}^{(7)}) < 0$ et puisque $\alpha_{\max}^{(7)} = \alpha_{\min}^{(6)}$ par définition, alors

$f(\alpha_{\min}^{(6)}) < 0$. On a par définition $A'(T_{\min}^{(6)}) = \alpha_{\min}$. Puisque $\alpha_{\max}^{(6)} > \alpha_{\min}$, alors

$$\begin{aligned} f(\alpha_{\max}^{(6)}) &= \alpha_{\max}^{(6)} - A'(T_{\min}^{(6)}) \\ &= \alpha_{\max}^{(6)} - \alpha_{\min} > 0. \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Comme $f(\alpha_{\min}^{(6)}) f(\alpha_{\max}^{(6)}) < 0$, on conclue que $f(\alpha)$ possède au moins une racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[$. Cette racine est unique car $f'(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in \left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[\subseteq I_{\alpha}^{(6)}$, par définition de $I_{\alpha}^{(6)}$. Montrons que $\alpha^* \notin I_{\alpha}^{(4)}$. Comme $f'(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in I_{\alpha}^{(5)} \cup I_{\alpha}^{(4)}$ et que $f(\alpha_{\max}^{(6)}) = f(\alpha_{\min}^{(5)}) > 0$, alors $f(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in I_{\alpha}^{(5)} \cup I_{\alpha}^{(4)}$, et par suite

$$\alpha^* \notin I_{\alpha}^{(4)}.$$

Vérifions si $f(\alpha)$ possède une racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$. On a $A'(T_{\min}^{(2)}) = \alpha_{\min}$ par définition.

On a

$$\begin{aligned} f(\alpha_{\max}^{(2)}) &= \alpha_{\max}^{(2)} - A'(T_{\min}^{(2)}) \\ &= \alpha_{\max}^{(2)} - \alpha_{\min} > 0 \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

car $\alpha_{\max}^{(2)} > \alpha_{\min}$. Comme $f'(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in I_{\alpha}^{(2)}$, il s'en suit que la fonction $f(\alpha)$ admet une racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[\subseteq I_{\alpha}^{(2)}$ si et seulement si $f(\alpha_{\min}^{(2)}) < 0$. On a alors deux cas :

Cas 1 : La fonction $f(\alpha)$ admet une première racine $\alpha \in \left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[$. Si $f(\alpha_{\min}^{(2)}) < 0$, alors $f(\alpha)$ admet une deuxième racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

Cas 2 : Si $f(\alpha_{\min}^{(2)}) > 0$, alors $f(\alpha)$ admet une seule racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[$ et cette racine correspond à α^* .

On conclut que si $T_{\max} \in I_T^{(7)}$ alors $f(\alpha)$ admet au moins une racine telle que

$$\alpha^* \in \left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[\cup \left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[. \quad \blacksquare$$

Méthode de recherche

On utilise l'équation de $T(\alpha)$ afin de déterminer $\alpha_{\max}^{(6)}$ et $\alpha_{\min}^{(6)}$ à partir de $I_T^{(6)}$.

On utilise ensuite $\frac{\alpha_{\max}^{(6)} + \alpha_{\min}^{(6)}}{2}$ comme valeur initiale dans la méthode de Newton qu'on applique pour trouver la racine de $f(\alpha)$ dans $\left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[$.

Dans le cas où $T_{\min} \geq T_{\max}^{(2)}$, la fonction $f(\alpha)$ n'admet pas de racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

Dans le cas où $T_{\min} < T_{\max}^{(2)}$:

- On utilise l'équation de $T(\alpha)$ afin de déterminer $\alpha_{\min}^{(2)}$ à partir de $I_T^{(2)}$.

Si $T_{\min} \leq T_{\min}^{(2)}$:

- On utilise l'équation de $T(\alpha)$ afin de déterminer $\alpha_{\max}^{(2)}$ à partir de $I_T^{(2)}$.

Si $T_{\min} > T_{\min}^{(2)}$:

- On pose $T_{\min}^{(2)} = T_{\min}$ et $\alpha_{\max}^{(2)} = \alpha_{\max}$.

Si $f(\alpha_{\min}^{(2)}) < 0$:

- On utilise $\frac{\alpha_{\max}^{(2)} + \alpha_{\min}^{(2)}}{2}$ comme valeur initiale dans la méthode de Newton qu'on applique pour trouver la racine de $f(\alpha)$ dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

Si $f(\alpha)$ admet deux racines $\alpha_1 \in \left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[$ et $\alpha_2 \in \left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$ alors on compare les coûts totaux

$$C(T(\alpha_i)) = M(T(\alpha_i)) + A(T(\alpha_i)), \quad i = 1, 2$$

et on choisit la racine qui minimise le coût total.

Proposition B.1.10 Si $T_{\max} \in I_T^{(8)}$ alors $\alpha^* \in \left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(8)} \right[\cup \left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[\cup \left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

Preuve L'intervalle maximal (4.21) prévoit que $T_{\min} \leq T^* \leq T_{\max}$ et $T_{\max} \in I_T^{(8)}$, donc

$$T^* \in I_T^{(1)} \cup I_T^{(2)} \cup I_T^{(3)} \cup I_T^{(4)} \cup I_T^{(5)} \cup I_T^{(6)} \cup I_T^{(7)} \cup \left] T_{\min}^{(8)}, T_{\max} \right]. \quad (\text{B.36})$$

D'après (5.1), $T^* \notin I_T^{(3)} \cup I_T^{(7)}$. De plus, d'après (B.5) et (B.25),

$$T^* \notin I_T^{(1)} \cup I_T^{(5)}. \quad (\text{B.37})$$

Montrons que $\alpha^* \notin I_{\alpha}^{(4)}$. On a $A' \left(T_{\min}^{(6)} \right) = \alpha_{\min}$ par définition. Puisque

$$\alpha_{\max}^{(6)} > \alpha_{\min},$$

alors

$$\begin{aligned} f \left(\alpha_{\max}^{(6)} \right) &= \alpha_{\max}^{(6)} - A' \left(T_{\min}^{(6)} \right) \\ &= \alpha_{\max}^{(6)} - \alpha_{\min} > 0. \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

Comme $f'(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in I_{\alpha}^{(5)} \cup I_{\alpha}^{(4)}$ et que $f \left(\alpha_{\max}^{(6)} \right) = f \left(\alpha_{\min}^{(5)} \right) > 0$, alors

$$f(\alpha) > 0 \text{ pour tout } \alpha \in I_{\alpha}^{(5)} \cup I_{\alpha}^{(4)},$$

et par suite

$$\alpha^* \notin I_{\alpha}^{(4)}.$$

Vérifions si $f(\alpha)$ possède une racine dans $\left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(8)} \right[$. D'une part,

$$f(\alpha_{\min}) = \alpha_{\min} - A'(T(\alpha_{\min})) = \alpha_{\min} - A'(T_{\max}) < 0$$

car $T_{\max} \in I_T^{(8)}$ et $A'(T) > \alpha_{\min}$ pour tout $T \in I_T^{(8)}$, par définition de $I_T^{(8)}$. D'autre part, $f'(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in \left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(8)} \right[\subseteq I_\alpha^{(8)}$, alors $f(\alpha)$ admet une racine dans $\left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(8)} \right[$ si et seulement si $f(\alpha_{\max}^{(8)}) > 0$. De même, vérifions si $f(\alpha)$ possède une racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[$. D'après (B.38), on a $f(\alpha_{\max}^{(6)}) > 0$. Comme $f'(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in I_\alpha^{(6)}$, il s'en suit que la fonction $f(\alpha)$ admet une racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[\subseteq I_\alpha^{(6)}$ si et seulement si $f(\alpha_{\min}^{(6)}) < 0$. Vérifions maintenant si $f(\alpha)$ possède une racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$. On a $A'(T_{\min}^{(2)}) = \alpha_{\min}$ par définition. Puisque

$$\alpha_{\max}^{(2)} > \alpha_{\min},$$

alors

$$\begin{aligned} f(\alpha_{\max}^{(2)}) &= \alpha_{\max}^{(2)} - A'(T_{\min}^{(2)}) \\ &= \alpha_{\max}^{(2)} - \alpha_{\min} > 0. \end{aligned} \tag{B.39}$$

Comme $f'(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in I_\alpha^{(2)}$, il s'en suit que la fonction $f(\alpha)$ admet une racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[\subseteq I_\alpha^{(2)}$ si et seulement si $f(\alpha_{\min}^{(2)}) < 0$. On a alors cinq cas :

Cas 1 : Si $f(\alpha_{\max}^{(8)}) > 0$ alors $f(\alpha)$ admet une première racine α_1 dans $\left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(8)} \right[$. Si $f(\alpha_{\min}^{(6)}) < 0$, alors $f(\alpha)$ admet une deuxième racine α_2 dans $\left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[$. Si $f(\alpha_{\min}^{(2)}) < 0$, alors $f(\alpha)$ admet une troisième racine α_3 dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

Cas 2 : Si $f(\alpha_{\max}^{(8)}) > 0$ alors $f(\alpha)$ admet une première racine α_1 dans $\left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(8)} \right[$. Si $f(\alpha_{\min}^{(6)}) > 0$, alors $f(\alpha)$ n'admet pas de racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[$. Si $f(\alpha_{\min}^{(2)}) < 0$, alors $f(\alpha)$ admet une deuxième racine α_2 dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

Cas 3 : Si $f(\alpha_{\max}^{(8)}) > 0$ alors $f(\alpha)$ admet une première racine α_1 dans $\left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(8)} \right[$. Si $f(\alpha_{\min}^{(6)}) < 0$, alors $f(\alpha)$ admet une deuxième racine α_2 dans $\left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[$. Si $f(\alpha_{\min}^{(2)}) > 0$, alors $f(\alpha)$ n'admet pas de racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

Cas 4 : Si $f(\alpha_{\max}^{(8)}) < 0$ alors $f(\alpha)$ n'admet pas de racine dans $\left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(8)} \right[$. De plus $f'(\alpha) < 0$ pour tout $\alpha \in I_\alpha^{(7)}$ alors $f(\alpha_{\min}^{(6)}) = f(\alpha_{\max}^{(7)}) < 0$ et par suite $f(\alpha)$ admet une première racine α_1 dans $\left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[$. Si $f(\alpha_{\min}^{(2)}) < 0$, alors $f(\alpha)$ admet une deuxième racine α_2 dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

Cas 5 : Si $f(\alpha_{\max}^{(8)}) < 0$ alors $f(\alpha)$ n'admet pas de racine dans $\left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(8)} \right[$. On vient de montrer que dans ce cas $f(\alpha)$ admet une première racine α_1 dans $\left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[$. Si $f(\alpha_{\min}^{(2)}) > 0$, alors $f(\alpha)$ n'admet pas de racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

On conclut que si $T_{\max} \in I_T^{(8)}$ alors $f(\alpha)$ admet au moins une racine telle que

$$\alpha^* \in \left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(8)} \right[\cup \left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[\cup \left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[.$$

■

Méthode de recherche

On utilise l'équation de $T(\alpha)$ afin de déterminer $\alpha_{\max}^{(8)}$ à partir de $I_T^{(8)}$.

Si $f(\alpha_{\max}^{(8)}) > 0$:

- On utilise $\frac{\alpha_{\max}^{(8)} + \alpha_{\min}}{2}$ comme valeur initiale dans la méthode de Newton qu'on applique pour trouver la racine de $f(\alpha)$ dans $\left] \alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(8)} \right[$.

- On utilise l'équation de $T(\alpha)$ afin de déterminer $\alpha_{\max}^{(6)}$ et $\alpha_{\min}^{(6)}$ à partir de $I_T^{(6)}$.

Si $f(\alpha_{\min}^{(6)}) > 0$:

- On utilise $\frac{\alpha_{\max}^{(6)} + \alpha_{\min}^{(6)}}{2}$ comme valeur initiale dans la méthode de Newton qu'on applique pour trouver la racine de $f(\alpha)$ dans $\left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[$.

Dans le cas où $T_{\min} \geq T_{\max}^{(2)}$, la fonction $f(\alpha)$ n'admet pas de racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

Dans le cas où $T_{\min} < T_{\max}^{(2)}$:

- On utilise l'équation de $T(\alpha)$ afin de déterminer $\alpha_{\min}^{(2)}$ à partir de $I_T^{(2)}$.

Si $T_{\min} \leq T_{\max}^{(2)}$:

- On utilise l'équation de $T(\alpha)$ afin de déterminer $\alpha_{\max}^{(2)}$ à partir de $I_T^{(2)}$.

Si $T_{\min} > T_{\max}^{(2)}$, alors on pose $T_{\min}^{(2)} = T_{\min}$ et $\alpha_{\max}^{(2)} = \alpha_{\max}$. Si $f(\alpha_{\min}^{(2)}) < 0$:

- On utilise $\frac{\alpha_{\max}^{(2)} + \alpha_{\min}^{(2)}}{2}$ comme valeur initiale dans la méthode de Newton qu'on applique pour trouver la racine de $f(\alpha)$ dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

Si $f(\alpha)$ admet deux ou trois racines alors on compare les coûts totaux

$$C(T(\alpha_i)) = M(T(\alpha_i)) + A(T(\alpha_i)), \quad i = 1, 2, 3$$

et on choisit la racine qui minimise le coût total.

Proposition B.1.11 Si $T_{\max} \in I_T^{(9)}$ alors $\alpha^* \in \{\alpha_{\min}\} \cup \left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[\cup \left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

Preuve L'intervalle maximal (4.21) prévoit que $T_{\min} \leq T^* \leq T_{\max}$ et $T_{\max} \in I_T^{(9)}$, donc

$$T^* \in I_T^{(1)} \cup I_T^{(2)} \cup I_T^{(3)} \cup I_T^{(4)} \cup I_T^{(5)} \cup I_T^{(6)} \cup I_T^{(7)} \cup I_T^{(8)} \cup [T_{\min}^{(9)}, T_{\max}]. \quad (\text{B.40})$$

D'après (5.1), $T^* \notin I_T^{(3)} \cup I_T^{(7)}$. De plus, d'après (B.5) et (B.25),

$$T^* \notin I_T^{(1)} \cup I_T^{(5)}. \quad (\text{B.41})$$

Montrons que si $T^* \in [T_{\min}^{(9)}, T_{\max}]$, alors $\alpha^* = \alpha_{\min}$. Faisons l'hypothèse que

$$T^* \in [T_{\min}^{(9)}, T_{\max}] \subseteq I_T^{(9)}. \quad (\text{B.42})$$

D'une part,

$$T_{\min}^{(9)} < T(\alpha) \leq T_{\max} \Rightarrow \alpha_{\min} \leq \alpha < \alpha_{\max}^{(9)} \quad (\text{B.43})$$

car T est strictement décroissante. D'autre part,

$$T(\alpha_{\max}^{(9)}) \leq T(\alpha) \leq T(\alpha_{\min}) \Rightarrow A'(T(\alpha)) = \alpha_{\min} \quad (\text{B.44})$$

car $[T(\alpha_{\max}^{(9)}), T(\alpha_{\min})] \subseteq I_T^{(9)}$ et $A'(T) = \alpha_{\min}$ pour tout $T \in I_T^{(9)}$. On conclue que

$$f(\alpha) = \alpha - \alpha_{\min}, \quad \alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(9)}]. \quad (\text{B.45})$$

En utilisant (B.45), la condition $f(\alpha^*) = 0$ conduit à $\alpha^* = \alpha_{\min}$. Il s'en suit que

$$\text{si } T^* \in [T_{\min}^{(9)}, T_{\max}], \text{ alors } \alpha^* = \alpha_{\min}.$$

Montrons que $T^* \notin I_T^{(8)}$. Comme $T_{\max} \in I_T^{(9)}$, alors

$$f(\alpha_{\min}) = \alpha_{\min} - A'(T(\alpha_{\min})) = 0$$

car $A'(T) = \alpha_{\min}$ pour tout $T \in I_T^{(9)}$. De plus, $f'(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in I_T^{(8)} \cup I_T^{(9)}$, alors $f(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in I_T^{(8)} \subseteq [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}^{(8)}]$ et par suite $f(\alpha)$ n'admet pas de racine dans $I_T^{(8)}$

et $T^* \notin I_T^{(8)}$. Montrons maintenant que $T^* \notin I_T^{(4)}$. On a $A'(T_{\min}^{(6)}) = \alpha_{\min}$ par définition de $I_T^{(6)}$.

Puisque

$$\alpha_{\max}^{(6)} > \alpha_{\min},$$

alors

$$\begin{aligned} f(\alpha_{\max}^{(6)}) &= \alpha_{\max}^{(6)} - A'(T_{\min}^{(6)}) \\ &= \alpha_{\max}^{(6)} - \alpha_{\min} > 0. \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

Comme $f'(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in I_{\alpha}^{(5)} \cup I_{\alpha}^{(4)}$ et que $f(\alpha_{\max}^{(6)}) = f(\alpha_{\min}^{(5)}) > 0$, alors

$$f(\alpha) > 0 \text{ pour tout } \alpha \in I_{\alpha}^{(5)} \cup I_{\alpha}^{(4)},$$

et par suite

$$\alpha^* \notin I_{\alpha}^{(4)} \text{ et } T^* \notin I_T^{(4)}.$$

Vérifions si $f(\alpha)$ possède une racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[$. D'après (B.46) on a $f(\alpha_{\max}^{(6)}) > 0$. Comme $f'(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in I_{\alpha}^{(6)}$, il s'en suit que la fonction $f(\alpha)$ admet une racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[\subseteq I_{\alpha}^{(6)}$ si et seulement si $f(\alpha_{\min}^{(6)}) < 0$. De même, vérifions si $f(\alpha)$ possède une racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$. On a $A'(T_{\min}^{(2)}) = \alpha_{\min}$ par définition de $I_T^{(2)}$. Puisque

$$\alpha_{\max}^{(2)} > \alpha_{\min},$$

alors

$$\begin{aligned} f(\alpha_{\max}^{(2)}) &= \alpha_{\max}^{(2)} - A'(T_{\min}^{(2)}) \\ &= \alpha_{\max}^{(2)} - \alpha_{\min} > 0. \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

Comme $f'(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in I_{\alpha}^{(2)}$, il s'en suit que la fonction $f(\alpha)$ admet une racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[\subseteq I_{\alpha}^{(2)}$ si et seulement si $f(\alpha_{\min}^{(2)}) < 0$.

On a alors quatre cas :

Cas 1 : La fonction $f(\alpha)$ admet une première racine α_1 telle que $\alpha_1 = \alpha_{\min}$. Si $f(\alpha_{\min}^{(6)}) < 0$, alors $f(\alpha)$ admet une deuxième racine α_2 dans $\left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[$. Si $f(\alpha_{\min}^{(2)}) < 0$, alors $f(\alpha)$ admet une troisième racine α_3 dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

Cas 2 : La fonction $f(\alpha)$ admet une première racine α_1 telle que $\alpha_1 = \alpha_{\min}$. Si $f(\alpha_{\min}^{(6)}) < 0$, alors $f(\alpha)$ admet une deuxième racine α_2 dans $\left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[$. Si $f(\alpha_{\min}^{(2)}) > 0$, alors $f(\alpha)$ n'admet pas de racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

Cas 3 : La fonction $f(\alpha)$ admet une première racine α_1 telle que $\alpha_1 = \alpha_{\min}$. Si $f(\alpha_{\min}^{(6)}) > 0$, alors $f(\alpha)$ n'admet pas une racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[$. Si $f(\alpha_{\min}^{(2)}) < 0$, alors $f(\alpha)$ admet une deuxième racine α_2 dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

Cas 4 : La fonction $f(\alpha)$ admet une première racine α_1 telle que $\alpha_1 = \alpha_{\min}$. Si $f(\alpha_{\min}) > 0$, alors $f(\alpha)$ n'admet pas une racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[$. Si $f(\alpha_{\min}) < 0$, alors $f(\alpha)$ n'admet pas de racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$. On conclut que si $T_{\max} \in I_T^{(9)}$ alors $f(\alpha)$ admet au moins une racine telle que

$$\alpha^* \in \{\alpha_{\min}\} \cup \left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[\cup \left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[.$$

■

Méthode de recherche

On utilise l'équation de $T(\alpha)$ afin de déterminer $\alpha_{\max}^{(6)}$ et $\alpha_{\min}^{(6)}$ à partir de $I_T^{(6)}$.

Si $f(\alpha_{\min}) > 0$:

- On utilise $\frac{\alpha_{\max}^{(6)} + \alpha_{\min}^{(6)}}{2}$ comme valeur initiale dans la méthode de Newton qu'on applique pour trouver la racine de $f(\alpha)$ dans $\left] \alpha_{\min}^{(6)}, \alpha_{\max}^{(6)} \right[$.

Dans le cas où $T_{\min} \geq T_{\max}^{(2)}$, la fonction $f(\alpha)$ n'admet pas de racine dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

Dans le cas où $T_{\min} < T_{\max}^{(2)}$:

- On utilise l'équation de $T(\alpha)$ afin de déterminer $\alpha_{\min}^{(2)}$ à partir de $I_T^{(2)}$.

Si $T_{\min} \leq T_{\min}^{(2)}$:

- On utilise l'équation de $T(\alpha)$ afin de déterminer $\alpha_{\max}^{(2)}$ à partir de $I_T^{(2)}$.

Si $T_{\min} > T_{\min}^{(2)}$, alors on pose $T_{\min}^{(2)} = T_{\min}$ et $\alpha_{\max}^{(2)} = \alpha_{\max}$.

Si $f(\alpha_{\min}^{(2)}) < 0$:

- On utilise $\frac{\alpha_{\max}^{(2)} + \alpha_{\min}^{(2)}}{2}$ comme valeur initiale dans la méthode de Newton qu'on applique pour trouver la racine de $f(\alpha)$ dans $\left] \alpha_{\min}^{(2)}, \alpha_{\max}^{(2)} \right[$.

Si $f(\alpha)$ admet deux ou trois racines alors on compare les coûts totaux

$$C(T(\alpha_i)) = M(T(\alpha_i)) + A(T(\alpha_i)), \quad i = 1, 2, 3$$

et on choisit la racine qui minimise le coût total.